Ana Filipa Soares Loureiro

Uma Nova Caracterização dos Polinómios Ortogonais Clássicos

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 2003

2004-04-22 6 fer?

Presidente do Júri
J. [illegible]

Ana Filipa Soares Loureiro

Uma Nova Caracterização dos Polinómios Ortogonais Clássicos

Tese Submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 2003

Juri constituído por:

Presidente:

- Prof. Doutor José Basto Gonçalves, Professor Catedrático do Departamento de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Vogais:

- Prof. Doutora Maria Zélia Alves da Rocha Dioh, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (orientadora).
- Prof Doutor Pascal Maroni, Directeur de Recherche au CNRS et Membre du Laboratoire Jacques-Louis Lions de la Université Pierre et Marie Currie, Paris (co-orientador).
- Prof. Doutor José Luís dos Santos Cardoso, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.
- Prof. Doutor Semyon Yakubovich, Professor Associado do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Resumo

Este trabalho versa sobre o problema da caracterização de uma sucessão de polinómios ortogonais clássicos (Hermite, Laguerre, Bessel e Jacobi). O objectivo principal é mostrar que uma sucessão ortogonal, cuja m-ésima sucessão associada à sucessão dos derivados de ordem k seja ortogonal, é necessariamente uma sucessão clássica. Este resultado é uma generalização do teorema de Hahn, no qual se estabelece que uma sucessão ortogonal é uma sucessão clássica se a sucessão dos derivados de ordem k for ortogonal. Apresentamos igualmente uma demonstração deste teorema.

Abstract

This work is devoted to the problem of the characterization of classical orthogonal sequences (Hermite, Laguerre, Bessel and Jacobi). Our main aim is to show that an orthogonal polynomial sequence, whose m-th associated sequence of $k-th$ derivative sequence is orthogonal, is necessarily a classical one. This is a generalization of Hahn's theorem, which states that an orthogonal polynomial sequence is classic if its k-th derivative sequence is orthogonal. We present a new proof for the mentioned theorem.

Résumé

Ce travail est consacré au problème de la caractérisation des suites orthogonales classiques (Hermite, Laguerre, Bessel et Jacobi). L'objet principal du mémoire est de montrer qu'une suite orthogonale dont on suppose que la m-ième suite associée à la suite des dérivées d'ordre k soit orthogonale, est nécessairement une suite classique. Ce résultat est une extension du théorème de Hahn selon lequel toute suite orthogonale dont la suite des dérivées d'ordre k soit orthogonale est une suite classique. On indique également une démonstration de ce théorème.

Aos meus Pais...

Agradecimentos

Em primeiro lugar, pretendo tecer especiais agradecimentos aos meus orientadores, Professor Pascal Maroni e Professora Zélia Rocha, por todo o entusiasmo que incutiram, por todas as indicações que me deram do ponto de vista da iniciação de uma carreira científica, por toda a confiança que depositaram em mim, por toda a disponibilidade prestada.

Em parte, este trabalho é dedicado aos meus amigos e aplaudíveis colegas de mestrado, Fabiano, Hugo, Ricardo, Rui e Zé Miguel que proporcionaram excelentes debates, deram óptimos conselhos e com quem partilhei um enorme espírito de entre-ajuda. Um obrigado também ao Manuel pelas dicas no LaTeX.

Ao realizar o trabalho de mestrado é essencial que todos aqueles que nos rodeiam nos encorajem a avançar, nos compreendam e aceitem a nossa ausência . Nesse sentido um grande obrigado ao Miguel e também a Ana Lúcia, Ana Helena, Bernardo, Dourado, Edinho, Helena e Luisa.

Um agradecimento especial a alguns colegas e amigos que comigo trabalham no Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, em especial à Céu Marques, à Didi e a todos aqueles que me apoiaram e compreenderam, por ordem alfabética: Arménio, Artur, Carla, Céu Barbosa, Céu Amorim, Emília, João Cardoso, João Ricardo, Leonor, Luis, Pascoal, Paulo, Patrícia e Rui.

Para terminar, encorajo todos aqueles que pretendam aumentar a sua cultura matemática a se candidatarem a um mestrado em matemática. A sensação de alargar os nossos conhecimentos é muito aprazível, embora traduza ao mesmo tempo uma certa insatisfação, por sabermos tão pouco.

Prefácio

Este trabalho versa sobre o problema da caracterização dos polinómios ortogonais clássicos que são habitualmente enumerados como os polinómios de Hermite, de Laguerre, de Bessel e de Jacobi. Segundo a propriedade de Hahn, uma sucessão de polinómios ortogonais diz-se clássica se a sucessão dos polinómios derivados for ortogonal [5]. Em 1937, Hahn apresentou em [6] uma nova caracterização destes polinómios, a qual generaliza a propriedade citada: uma sucessão de polinómios ortogonais é clássica se a sucessão dos derivados de ordem $k \geqslant 1$ for ortogonal. Neste trabalho apresenta-se uma nova demonstração deste resultado, cuja ideia de base consiste em trabalhar directamente sobre as formas lineares (ou funcionais) e não sobre as representações integrais dessas formas, que aliás só são conhecidas nalgumas classes para valores particulares de certos parâmetros. Nesse sentido, utiliza-se sistematicamente a sucessão dual associada a uma sucessão de polinómios livre. Através de raciocínio análogo, com as devidas adaptações, foi possível cumprir o objectivo principal deste trabalho: fornecer uma extensão para o teorema de Hahn, na qual se estabelece que uma sucessão ortogonal, cuja m-ésima sucessão associada à sucessão dos derivados de ordem k seja ortogonal, é uma sucessão clássica [15].

Na primeira secção do capítulo 1 são dadas as definições de base e indicadas as operações, obtidas por transposição, que se efectuam naturalmente no espaço dual dos polinómios. A segunda secção é reservada à introdução dos conceitos de sucessão de polinómios e sucessão dual.

A ortogonalidade regular e respectivas noções anexas (as relações de tipo finito e a quasi-ortogonalidade) encontram-se desenvolvidas no capítulo 2. A primeira secção deste capítulo é consagrada à caracterização da ortogonalidade regular (em termos das formas regulares e das sucessões de polinómios), onde são apresentados resultados que serão usados de forma essencial na caracterização de sucessões clássicas e semi-clássicas e, principalmente, nas demonstrações dos resultados que figuram no final do trabalho: o teorema de Hahn e o teorema relativo à sua extensão. A secção seguinte refere-se às relações do tipo finito. Este é um conceito mais geral que o da ortogonalidade. Todavia, dada a sua importância, este último merece ser estudado por si mesmo. Supondo a ortogonalidade, as relações de tipo finito conduzem às sucessões semi-clássicas, como poderá ser constatado na secção 4.3. Na secção 2.3 são fornecidas as definições de quasi-ortogonalidade e de quasi-ortogonalidade estrita de ordem s.

Aplicam-se estas noções ao estudo da multiplicação à esquerda de uma forma regular por um polinómio de primeiro ou de segundo grau, construindo assim uma forma regular a partir de outra forma regular dada.

O capítulo 3 é reservado à definição e caracterização das sucessões clássicas quer em termos duma equação funcional (secção 3.2), quer em termos duma equação diferencial de segunda ordem (secção 3.3), devida a Bochner [1]. No capítulo 4 introduzimos as formas e sucessões semi-clássicas, sendo as formas clássicas um caso particular destas.

Finalmente, nos capítulos 5 e 6 encontra-se, respectivamente, a nova prova do teorema de Hahn e o enunciado (assim como a sua demonstração) da extensão deste resultado.

Alguns enunciados são apresentados sem demonstração, por forma a reduzir a amplitude do texto. O leitor interessado poderá encontrar todas as demonstrações detalhadas em [7].

Conteúdo

Capítulo 1

Preliminares

Seja $\mathcal{P}$ o espaço vectorial das funções polinomiais com coeficientes em $\mathbb{C}$, naturalmente também caracterizado como $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{P}_n$, com $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$, $n \geqslant 0$, onde $\mathcal{P}_n$ é o subespaço vectorial das funções polinomiais de grau inferior ou igual a n. Seja $\mathcal{P}'$ o espaço dual de $\mathcal{P}$, isto é, o espaço das aplicações lineares definidas em $\mathcal{P}$ e tomando valores em $\mathbb{C}$. Cada elemento u do espaço dual de $\mathcal{P}$ designa-se por forma ou funcional. Denote-se por $\langle u, f\rangle$ a acção de $u \in \mathcal{P}'$ sobre $f \in \mathcal{P}$. Naturalmente, $\langle u, f\rangle \in \mathbb{C}$. Em particular, $\langle u, x^n\rangle := (u)_n \,, n \geqslant 0$ representa o momento de ordem n de $u \in \mathcal{P}'$ (relativamente à sucessão $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$). Se $f(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$, temos que $\langle u, f\rangle = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu (u)_\nu$. Acrescente-se que uma forma $u \in \mathcal{P}'$ fica univocamente determinada pela sucessão dos seus momentos.

Antes de prosseguirmos, considere-se a forma de *Dirac* aplicada no ponto $c \in \mathbb{C}$, denotada δ_c, a qual se define do seguinte modo:

$$\langle \delta_c, p(x)\rangle := p(c)\,,\ \forall p \in \mathcal{P}.$$

Visando a simplificação de escrita, quando $c = 0$ escreveremos apenas δ em vez de δ_0. Os momentos desta forma ficam determinados por:

$$(\delta)_n = \langle \delta, x^n\rangle = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Em todo o texto o termo polinómio será considerado como sinónimo de função polinomial.

1.1 Operadores e propriedades elementares

Sejam $u \in \mathcal{P}'$ e $f, g \in \mathcal{P}$. Entenda-se por $\mathbb{I}_{\mathcal{P}}$ e $\mathbb{I}_{\mathcal{P}'}$ a identidade nos espaços $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respectivamente.

1.1.1 Operações elementares no espaço dual dos polinómios

Consideremos os seguintes operadores elementares definidos em $\mathcal{P}$:

1. Homotetia de razão $a \in \mathbb{C}$ aplicada ao polinómio f: $h_a f$ onde $h_a f(x) := f(ax)$, $a \in \mathbb{C}$.

2. Translação aplicada ao polinómio f: $\tau_{-b} f$, com $\tau_{-b} f(x) := f(x+b)$, $b \in \mathbb{C}$.

3. Diferenças divididas, $\vartheta_c f \in \mathcal{P}$, com
$$\vartheta_c f(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Por transposição definimos as operações correspondentes em $\mathcal{P}'$ [13]:

1. Homotetia aplicada a uma forma $u \in \mathcal{P}'$, $h_a u \in \mathcal{P}'$:
$$\langle h_a u, f(x) \rangle := \langle u, f(ax) \rangle, \quad a \in \mathbb{C}.$$

2. Translação de uma forma, $\tau_{-b} u \in \mathcal{P}'$:
$$\langle \tau_{-b} u, f(x) \rangle := \langle u, f(x-b) \rangle, \ b \in \mathbb{C}.$$

3. Divisão de uma forma por um polinómio [10]:
$$\left\langle (x-c)^{-1} u, f(x) \right\rangle := \langle u, \vartheta_c f(x) \rangle, \ c \in \mathbb{C}.$$

4. Multiplicação à esquerda de uma forma por um polinómio, $fu \in \mathcal{P}'$:
$$\langle fu, p \rangle := \langle u, fp \rangle, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

5. Multiplicação à direita de uma forma por um polinómio, $uf \in \mathcal{P}$:
$$(uf)(x) := \left\langle u, \frac{xf(x) - \xi f(\xi)}{x - \xi} \right\rangle, \text{ onde } u \text{ actua na variável } \xi.$$

6. Produto de duas formas $u, v \in \mathcal{P}'$, o qual fica definido por transposição do produto à direita de uma forma por um polinómio:
$$\langle uv, p \rangle := \langle u, vp \rangle, \ \forall p \in \mathcal{P}.$$

7. Derivada de uma forma, Du:
$$\langle Du, p \rangle = -\langle u, p' \rangle, \ \forall p \in \mathcal{P}.$$

1.1.2 Propriedades das operações elementares

Facilmente se demonstram as relações seguintes:

$$\begin{aligned}
&\delta f = f, \quad \forall f \in \mathcal{P};\\
&(u+v)f = uf + vf, \quad \forall u,v \in \mathcal{P}', \quad \forall f \in \mathcal{P};\\
&v(uf) = (vu)f, \quad \forall u,v \in \mathcal{P}', \quad \forall f \in \mathcal{P};\\
&(fg)u = f(gu), \quad \forall f,g \in \mathcal{P};\\
&\delta u = u, \quad \forall u \in \mathcal{P}';\\
&uv = vu, \quad \forall u,v \in \mathcal{P}';\\
&(uv)w = u(vw), \quad \forall u,v,w \in \mathcal{P}';\\
&(u+v)w = uw + vw, \quad \forall u,v,w \in \mathcal{P}'.
\end{aligned}$$

As propriedades que acabamos de apresentar garantem que $(\mathcal{P}', +, \cdot)$, onde as operações $+$ e $\cdot$ denotam, respectivamente, a soma e produto de duas formas, forme um anel comutativo com elemento unidade, δ. Todavia não constitui um anel de divisão dado a existência de elementos em $\mathcal{P}'$ que não possuem elemento inverso (basta que o momento de ordem zero seja nulo) [11].

Os operadores atrás definidos satisfazem algumas propriedades, as quais passamos a enunciar.

$$h_a \circ h_{a^{-1}} \equiv \mathbb{I}_{\mathcal{P}'}; \tag{1.1.1}$$
$$\tau_b \circ \tau_{-b} \equiv \mathbb{I}_{\mathcal{P}'}; \tag{1.1.2}$$
$$(\tau_b \circ h_a)u = (h_a \circ \tau_{a^{-1}b})u, \ \forall u \in \mathcal{P}'; \tag{1.1.3}$$
$$(h_a \circ \tau_b)u = (\tau_{ab} \circ h_a)u, \ \forall u \in \mathcal{P}'; \tag{1.1.4}$$
$$f(\tau_b u) = \tau_b((\tau_{-b} f)u), \ \forall u \in \mathcal{P}', \ \forall f \in \mathcal{P}; \tag{1.1.5}$$
$$f(h_a u) = h_a((h_a f)u), \ \forall u \in \mathcal{P}', \ \forall f \in \mathcal{P}; \tag{1.1.6}$$
$$D(\tau_b u) = \tau_b D u, \ \forall u \in \mathcal{P}'; \tag{1.1.7}$$
$$D(h_a u) = a^{-1} h_a D u, \ \forall u \in \mathcal{P}'. \tag{1.1.8}$$

Consideremos algumas propriedades, fundamentais neste trabalho.

Lema 1.1.1 *[15] Para quaisquer $f, g \in \mathcal{P}$, $u, v \in \mathcal{P}'$, $c \in \mathbb{C}$, temos que:*

a) $(ufg)(x) = ((fu)g)(x) + xg(x)(u\vartheta_0 f)(x)$ (1.1.9)

b) $f(x)(uv) = (f(x)v)u + x(v\vartheta_0 f)(x)u$ (1.1.10)

c) $(\vartheta_c D)f = (D\vartheta_c)f + \vartheta_c^2 f$ (1.1.11)

d) $(x-c)\left((x-c)^{-1}u\right) = u$ (1.1.12)

e) $(x-c)^{-1}((x-c)u) = u - (u)_0\,\delta_c$ (1.1.13)

f) $f\left((x-c)^{-1}u\right) = f(c)\left((x-c)^{-1}u\right) + (\vartheta_c f)u$ (1.1.14)

g) $(x-c)^{-1}(fu) = f(c)((x-c)^{-1}u) + (\vartheta_c f)u - \langle u, \vartheta_c f\rangle \delta_c$ (1.1.15)

h) $(uf)'(x) = (u'f)(x) + (uf')(x) + (u\vartheta_0 f)(x)$ (1.1.16)

i) $(fu)' = fu' + f'u$ (1.1.17)

j) $(fu)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} u^{(k-\nu)}, \quad k \geqslant 1$ (1.1.18)

l) $(uv)' = u'v + uv' + x^{-1}(uv)$ (1.1.19)

m) $\left((x-c)^{-1}u\right)' = (x-c)^{-1}u' - (x-c)^{-2}u$ (1.1.20)

n) $(u\vartheta_0 f)(x) = (\vartheta_0 uf)(x)$ (1.1.21)

o) $Du = Dv \Rightarrow u = v$ (1.1.22)

1.2 Sucessões de polinómios

Definição 1.2.1 *Designamos por sucessão de polinómios toda a sucessão $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que* grau$(B_n) \leqslant n$, $B_n \in \mathcal{P}$, $n \geqslant 0$.

Decorre da definição que uma sucessão de polinómios $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ é livre se e só se grau$(B_n) = n$, $\forall n \geqslant 0$ [11, 13, 7]. Neste caso podemos sempre normalizar cada polinómio da sucessão, considerando $B_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$, $n \geqslant 0$, mónico e diremos que a sucessão é livre e normalizada.

Nota: Será designada por SP toda a sucessão de polinómios nestas condições, isto é, livre e normalizada.

Naturalmente, uma sucessão de polinómios livre gera $\mathcal{P}$. Como consequência da definição apresentamos o resultado seguinte:

Proposição 1.2.1 *[17] Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ for uma SP e $u \in \mathcal{P}'$, então $u = 0$ se e só se $\langle u, P_n\rangle = 0$, $n \geqslant 0$.*

1.2.1 Sucessão dual

Dada uma SP, $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$, pretendemos definir, de um modo único, uma sucessão no dual de $\mathcal{P}$ associada a $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$.

Definição 1.2.2 *Dizemos que* $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$*, onde* $u_n \in \mathcal{P}'$*, é uma sucessão dual associada à SP* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$*, se for tal que*

$$\langle u_n, B_m\rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \geqslant 0. \tag{1.2.23}$$

A cada SP $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$, está sempre associada uma única sucessão $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ do dual verificando a propriedade (1.2.23) [11, 17]. Além disso, $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ é linearmente independente. As duas sucessões $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ dizem-se biortogonais. A u_0 daremos o nome de forma canónica associada à sucessão $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$.

Teorema 1.2.1 *[17] Seja* $u \in \mathcal{P}'$*,* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *uma SP,* $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ *a respectiva sucessão dual e consideremos*

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \langle u, B_k\rangle u_k, \ n \geqslant 0.$$

Neste caso, teremos

$$\langle S_n(u), f\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle u, f\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{P},$$

ou seja, $S_n(u)$ *converge com* n *para* u *no sentido da topologia fraca.*

Prova: Fixemos $n \geqslant 0$. Deste modo,

$$\langle S_n(u), B_m\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle u, B_k\rangle\langle u_k, B_m\rangle = \begin{cases} 0 & , \ m > n \\ \langle u, B_m\rangle & , \ 0 \leqslant m \leqslant n. \end{cases}$$

Considerando agora $n \to \infty$, da igualdade anterior decorre que

$$\langle S_n(u), B_m\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle u, B_m\rangle, \ \forall m \geqslant 0,$$

logo, dado $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ ser uma SP, concluímos o pretendido. ■

Como consequência da definição 1.2.2, temos o seguinte:

1. [17, 11] Se $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ for uma SP, tem-se necessariamente que

$$\langle u_n, Q_m\rangle = 0, \quad 0 \leqslant m < n. \tag{1.2.24}$$

2. Em particular, considerando $Q_m(x) = x^m$, $m \geqslant 0$, tem-se que:

$$(u_n)_m = 0, \quad 0 \leqslant m < n.$$

Exemplo 1.2.1 *[11] Consideremos a SP* $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$*. Designemos por* $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ *a respectiva sucessão dual. Por indução finita sobre* n*, demonstra-se que* $u_n = \frac{(-1)^n}{n!} D^n \delta$*,* $n \geqslant 0$*.*

Dada a unicidade da sucessão dual de uma SP, tem-se que a sucessão dual associada a $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$ *é dada por* $\left\{\frac{(-1)^n}{n!}D^n\delta\right\}_{n\geqslant 0}$.

Se u for um qualquer elemento de $\mathcal{P}'$*, então temos que*

$$(S_n(u))_m = \begin{cases} 0 & , \ m \geqslant n+1 \\ (u)_m & , \ 0 \leqslant m \leqslant n\,. \end{cases}$$

Do teorema anterior decorre que

$$(S_n(u))_m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (u)_m, \ m \geqslant 0.$$

Apresentamos a seguir um resultado de suma importância neste trabalho. Em muitas deduções será, sem dúvida, crucial. Aliás este é um lema fundamental na teoria dos polinómios ortogonais.

Lema 1.2.1 *[9, 11, 12, 13] Sejam* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *uma SP e seja* $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ *a respectiva sucessão dual. Sejam* $u \in \mathcal{P}'$ *e* $p \in \mathbb{N}$*. Para que u verifique*

$$\langle u, B_{p-1}\rangle \neq 0, \quad \langle u, B_n\rangle = 0, \quad n \geqslant p,$$

é necessário e suficiente que existam $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $\lambda_{p-1} \neq 0$, *tais que:*

$$u = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u_i.$$

Além disso, $\lambda_i = \langle u, B_i\rangle$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$.

1.2.2 Transformações elementares

Seja $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual. Consideremos certas transformações elementares destas sucessões.

1. Defina-se a SP $\{\widetilde{B}_n\}_{n\geqslant 0}$, obtida a partir de $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ por transformação linear de variável.

   Proposição 1.2.2 *[17, 13] Seja* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *uma SP e* $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ *a respectiva sucessão dual. Consideremos a SP* $\{\widetilde{B}_n\}_{n\geqslant 0}$ *definida da seguinte maneira:*

   $$\widetilde{B}_n(x) = a^{-n}B_n(ax+b), \ n \geqslant 0,$$

   onde $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ *e* $b \in \mathbb{C}$*. Designando por* $\{\widetilde{u}_n\}_{n\geqslant 0}$ *a sucessão dual associada a* $\{\widetilde{B}_n\}_{n\geqslant 0}$*, então*

   $$\widetilde{u}_n = a^n(h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u_n, \ n \geqslant 0.$$

2. Consideremos agora a SP $\{B_n^{[1]}\}_{n\geqslant 0}$, a sucessão dos derivados de ordem 1 de $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$.

Proposição 1.2.3 *[17, 13] Seja $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual correspondente. Consideremos a SP $\{B_n^{[1]}\}_{n\geqslant 0}$ definida da seguinte maneira:*

$$B_n^{[1]}(x) = \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}, \quad n \geqslant 0. \tag{1.2.25}$$

Se $\{u_n^{[1]}\}_{n\geqslant 0}$ for a correspondente sucessão dual, então

$$Du_n^{[1]} = -(n+1)u_{n+1}, \quad n \geqslant 0. \tag{1.2.26}$$

Mais geralmente, definimos a sucessão dos derivados (normalizada) de ordem superior a um ($\{B_n^{[k]}\}_{n\geqslant 0}$, $k > 1$), recursivamente, como poderá ser constatado na proposição que se segue.

Proposição 1.2.4 *[13] Seja $k \geqslant 1$ e sejam $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual correspondente. Consideremos a SP $\{B_n^{[k]}\}_{n\geqslant 0}$ definida da seguinte maneira:*

$$B_n^{[k]}(x) = \frac{\left(B_{n+1}^{[k-1]}(x)\right)'}{n+1}, \quad n \geqslant 0, \tag{1.2.27}$$

então tem-se que:

$$Du_n^{[k]} = -(n+1)u_{n+1}^{[k-1]}, \quad n \geqslant 0, \tag{1.2.28}$$

onde $\{u_n^{[j]}\}_{n\geqslant 0}$ é a sucessão dual associada a $\{B_n^{[j]}\}_{n\geqslant 0}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Nota: Entenda-se que $B_n^{[0]} := B_n$, $n \geqslant 0$.

Como consequência do exposto, consideremos o seguinte resultado, o qual será usado de forma essencial na nova prova do teorema de Hahn no capítulo 5.

Lema 1.2.2 *[15] Se $v_n = u_n^{[k]}$, então a derivada de ordem k de v_n é dada por*

$$(v_n)^{(k)} = (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu)\, u_{n+k}, \quad n \geqslant 0 \;\; e \;\; k \geqslant 1. \tag{1.2.29}$$

Prova: A prova será feita por indução finita sobre $k \geqslant 1$.

Para $k = 1$, $(v_n)^{(1)} = (v_n)' = -(n+1)\,u_{n+1}$, donde o resultado é verdadeiro.

Suponhamos que o resultado é válido para $k-1,\ k \geqslant 1$. Deste modo, $(v_n)^{(k)} = \left((v_n)^{(k-1)}\right)' = -(n+1)\,(v_{n+1})^{(k-1)}$ pelo que, usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}(v_n)^{(k)} &= -(n+1)\,(-1)^{k-1}\prod_{\mu=1}^{k-1}(n+1+\mu)\,u_{n+1+k-1}\\ &= (n+1)\,(-1)^k\prod_{\mu=2}^{k}(n+\mu)\,u_{n+k}\\ &= (-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(n+\mu)u_{n+k}\ ,\quad n \geqslant 0 \text{ e } k \geqslant 1,\end{aligned}$$

o que prova o pretendido. ■

3. Consideremos a SP $\{B_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$, designada por sucessão de polinómios associada (de primeira ordem) a $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ relativamente a u_0.

Proposição 1.2.5 *[11] Sejam $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual correspondente. Consideremos a SP $\left\{B_n^{(1)}\right\}_{n\geqslant 0}$ definida do seguinte modo:*

$$B_n^{(1)}(x) = \left\langle u_0, \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(\xi)}{x-\xi}\right\rangle,\ n \geqslant 0. \tag{1.2.30}$$

Representando por $\{u_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual, então

$$u_n^{(1)} = (xu_{n+1})\,(u_0)^{-1},\quad n \geqslant 0 \tag{1.2.31}$$

(De salientar que $(u_0)^{-1}$ existe se e só se $(u_0)_0 \neq 0$).

Naturalmente, podemos escrever $B_n^{(1)}(x) = (u_0\vartheta_0 B_{n+1})\,(x)\,,\ n \geqslant 0$.

Recursivamente, definimos $\{B_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ (com $k \geqslant 1$), a SP associada a $\{B_n^{(k-1)}\}_{n\geqslant 0}$ (relativamente a $u_0^{(k-1)}$).

Nota: A salientar que $B_n^{(0)} := B_n,\ n \geqslant 0$.

Proposição 1.2.6 *[11] Seja $k \geqslant 1$ e sejam $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual correspondente. Consideremos a SP $\left\{B_n^{(k)}\right\}_{n\geqslant 0}$ definida do seguinte modo:*

$$B_n^{(k)}(x) = \left(u_0^{(k-1)}\vartheta_0 B_{n+1}^{(k-1)}\right)(x)\,,\qquad n \geqslant 0,$$

e seja $\{u_n^{(k)}\}_{n\geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual, então

$$u_n^{(k+1)} = \left(xu_{n+1}^{(k)}\right)\left(u_0^{(k)}\right)^{-1},\quad n \geqslant 0.$$

Acrescente-se apenas que tais sucessões serão tratadas com maior detalhe no capítulo 6, onde será explicitada uma relação entre $\left(u_n^{[k]}\right)^{(m)}$ $(n \geqslant 0,\ k, m \geqslant 1)$ e u_n $(n \geqslant 0)$, elementos das sucessões duais associadas a $\left\{\left(B_n^{[k]}\right)^{(m)}\right\}_{n \geqslant 0}$ e $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$, respectivamente.

1.2.3 Relação de estrutura

Se $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ representar uma qualquer SP e $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual, então necessariamente deverá satisfazer a seguinte relação de recorrência [11, 12, 17]:

$$
\begin{aligned}
&B_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} \chi_{n,\nu} B_\nu(x),\ n \geqslant 0, \\
&B_0(x) = 1, \qquad\qquad B_1(x) = x - \beta_0,
\end{aligned}
\tag{1.2.32}
$$

onde

$$
\beta_n = \langle u_n, xB_n(x) \rangle, \quad n \geqslant 0, \tag{1.2.33}
$$

$$
\chi_{n,\nu} = \langle u_\nu, xB_{n+1}(x) \rangle, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n,\ n \geqslant 0. \tag{1.2.34}
$$

Como consequência do que acabamos de expor e do lema 1.2.1, apresentamos o próximo resultado que nos fornecerá uma relação de suma importância no decurso deste trabalho.

Lema 1.2.3 *[12, p.136] Sejam $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ a sucessão dual correspondente a $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ e $\nu \geqslant 0$. As condições $\chi_{n,\nu} = \langle u_\nu, xB_{n+1} \rangle = 0$, $n \geqslant \nu + 1$ são equivalentes a*

$$
\begin{aligned}
xu_\nu &= u_{\nu-1} + \beta_\nu u_\nu + \chi_{\nu,\nu} u_{\nu+1} \\
u_{-1} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.2.35}
$$

Capítulo 2

Ortogonalidade Regular e Noções Anexas

2.1 Ortogonalidade regular

Definição 2.1.1 *A forma u diz-se regular se lhe for possível associar uma sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que*

$$\begin{aligned} \langle u, P_n P_m \rangle &= r_n \delta_{n,m}, \qquad (2.1.1) \\ \textit{onde } r_n &\neq 0, \quad n, m \geqslant 0 \qquad (2.1.2) \end{aligned}$$

Neste caso, a sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ diz-se regularmente ortogonal relativamente à forma u. As condições de ortogonalidade são dadas por (2.1.1), ao passo que (2.1.2) correspondem às condições de regularidade.

Diremos que a forma u é normalizada se $(u)_0 = 1$.

Decorre desta definição que cada polinómio P_n está definido a menos de uma constante arbitrária não nula, isto é, $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão de polinómios ortogonal relativamente a u se e só se $\{c_n P_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal relativamente a u, onde $c_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \geqslant 0$.

Observação 2.1.1 *Toda a sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinómios ortogonais relativamente a $u \in \mathcal{P}'$ é livre, pelo que poderá ser normalizada.*

Exemplo 2.1.1 *A sucessão $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão livre ortogonal relativamente à forma δ, mas não regularmente ortogonal.*

A impossibilidade de determinada forma ser regular poderá ser verificada a partir da proposição seguinte.

Proposição 2.1.1 *[17] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sucessão de polinómios regularmente ortogonais relativamente a u e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual, então $(u)_0 \neq 0$.*

Exemplo 2.1.2 *Suponhamos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ (regularmente) ortogonal relativamente a u_0 e seja $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual associada. A partir da proposição anterior, podemos concluir que u_s, $s \geqslant 1$, não pode ser uma forma regular, pois $(u_s)_0 = 0$. Dito de outro modo, não existe nenhuma SP ortogonal relativamente a u_s, $s \geqslant 1$.*

Sem perda de generalidade, podemos sempre considerar que u e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ estão normalizadas, isto é, $(u)_0 = 1$ e P_n mónico, $n \geqslant 0$.

NOTA: Salvo indicação do contrário, no prosseguimento deste trabalho iremos considerar sucessões de polinómios regularmente ortogonais e não apenas ortogonais. Simbolicamente designaremos por SPO uma sucessão de polinómios regularmente ortogonais.

Proposição 2.1.2 *[17] Seja $u \in \mathcal{P}'$. A SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal com respeito a u se e só se para alguma SP $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ se verificar $\langle u, Q_m P_n\rangle = 0$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, $n \geqslant 1$ $\quad \langle u, Q_n P_n\rangle \neq 0$, $n \geqslant 0$.*

Proposição 2.1.3 *[17] Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma SPO com respeito a u e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ é a respectiva sucessão dual, então $u = (u)_0 u_0$.*

NOTA IMPORTANTE: Daqui em diante, ir-se-á sempre supôr u como forma regular e normalizada e a sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ (regularmente) ortogonal relativamente a u, será suposta normalizada. Notar que, assim sendo, $u = u_0$.

Recordando a relação expressa em (1.2.32) aplicada à sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, apresentamos o resultado seguinte:

Teorema 2.1.1 *[13][12, p.136][17] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP e $\{u_n\}_{\geqslant 0}$ a sua sucessão dual. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *A sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal relativamente a u_0;*

(b) $\chi_{n,k} = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad n \geqslant 1; \quad \chi_{n,n} \neq 0, \quad n \geqslant 0$, *onde $\chi_{n,k}$ são dados por (1.2.34);*

(c) $x u_n = u_{n-1} + \beta_n u_n + \chi_{n,n} u_{n+1}, \quad \chi_{n,n} \neq 0, \quad n \geqslant 0, \quad u_{-1} = 0;$

(d) *Existe uma sucessão de polinómios $\{\phi_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que* $\operatorname{grau}(\phi_n) = n$ *e* $u_n = \phi_n u_0$, $n \geqslant 0$;

(e) $u_n = \left(\langle u_0, P_n^2\rangle\right)^{-1} P_n u_0$, $n \geqslant 0$.

Após o teorema anterior, é possível mostrar que a SPO $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfaz uma relação de recorrência de ordem 2, bem como obter uma expressão para os coeficientes $\chi_{n,n}$ e β_n, $n \geqslant 0$, em termos da funcional u_0.

Proposição 2.1.4 *[17] Admitindo verificada uma das alíneas do teorema anterior, temos:*

$$\begin{aligned} &P_{n+2}(x) = (x-\beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), \quad n \geqslant 0, \\ &P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x - \beta_0, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\langle u_0, xP_n^2(x)\rangle}{\langle u_0, P_n^2(x)\rangle}, \quad n \geqslant 0, \\ \gamma_{n+1} &= \chi_{n,n} = \frac{\langle u_0, P_{n+1}^2(x)\rangle}{\langle u_0, P_n^2(x)\rangle} \neq 0, \quad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Como consequência da proposição precedente, obtemos o seguinte:

Corolário 2.1.5 *[17] Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma SPO, então P_n e P_{n+1}, $n \geqslant 0$ não têm raízes comuns.*

A ortogonalidade regular de uma determinada sucessão é invariante sob qualquer transformação afim [11, p.13].

Lema 2.1.1 *[11, p.13] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SPO relativamente a u_0 satisfazendo a relação de recorrência (2.1.3) da proposição 2.1.4. Então a sucessão $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ do proposição 1.2.2 satisfaz a relação de recorrência:*

$$\widetilde{P}_{n+2}(x) = \left(x - \widetilde{\beta}_{n+1}\right)\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{\gamma}_{n+1}\widetilde{P}_n(x), \quad n \geqslant 0, \tag{2.1.5}$$

$$\widetilde{P}_0(x) = 1, \qquad \widetilde{P}_1(x) = x - \widetilde{\beta}_0,$$

onde

$$\widetilde{\beta}_n = \frac{\left\langle \widetilde{u}_0, x\widetilde{P}_n^2(x)\right\rangle}{\left\langle \widetilde{u}_0, \widetilde{P}_n^2(x)\right\rangle} = \frac{\beta_n - b}{a}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \frac{\left\langle \widetilde{u}_0, \widetilde{P}_{n+1}^2(x)\right\rangle}{\left\langle \widetilde{u}_0, \widetilde{P}_n^2(x)\right\rangle} = \frac{\gamma_{n+1}}{a^2} \neq 0, \quad n \geqslant 0.$$

Na realidade, $J = s(h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})$, $s \neq 0$ é o único isomorfismo que preserva a ortogonalidade de uma sucessão [11].

Apresentamos agora uma relação conhecida: a "Identidade de Christoffel-Darboux".

Lema 2.1.2 (Identidade de Christoffel-Darboux) *[2, p.23]*

Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfizer a relação de recorrência de uma sucessão regularmente ortogonal dada por (2.1.3), então

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(x)P_\nu(c)}{\prod_{\mu=1}^{\nu+1}\gamma_\mu} = \left(\prod_{\mu=1}^{n+1}\gamma_\mu\right)^{-1} \frac{P_{n+1}(x)P_n(c) - P_n(x)P_{n+1}(c)}{x-c}. \tag{2.1.6}$$

Uma questão de particular interesse será: quando $\phi u = 0$, para $\phi \in \mathcal{P}$ e $u \in \mathcal{P}'$, que inferências podemos extrair relativamente a ϕ ou u? O lema 2.1.3 e a proposição 2.1.6 fornecem-nos a resposta.

Lema 2.1.3 *[13, 17] Seja $u \in \mathcal{P}'$ regular e seja ϕ um polinómio, tal que:*

$$\phi u = 0.$$

Então, necessariamente, $\phi = 0$.

Estamos agora interessados em saber que conclusões extrair relativamente a u se soubermos que $\phi u = 0$, para um dado polinómio ϕ. Para responder a esta questão precisamos de alguns resultados, os quais passamos a apresentar.

Lema 2.1.4 *Sejam $u, w \in \mathcal{P}'$ não necessariamente regulares e seja $c \in \mathbb{C}$ tais que $(x-c)\,u = w$. Então*

$$u = A\delta_c + (x-c)^{-1}\,w,$$

para determinado $A \in \mathbb{C}$.

Prova: Com efeito, multiplicando ambos os membros da equação $(x-c)\,u = w$ por $(x-c)^{-1}$, e usando a propriedade (1.1.13), concluímos o pretendido se considerarmos $A = (u)_0$. ∎

Observação 2.1.2 *Para outras considerações acerca da forma u patente no lema anterior, poder-se-á consultar [10].*

Lema 2.1.5 *Se $c \in \mathbb{C}$, então*

$$(x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k)} = \frac{-1}{k+1}(\delta_c)^{(k+1)}, \quad k \geqslant 0. \tag{2.1.7}$$

Prova: Seja $p \in \mathcal{P}$. Consideremos o caso $k = 0$.

$$\begin{aligned}\left\langle (x-c)^{-1}\delta_c, p\right\rangle &= \langle \delta_c, \vartheta_c p\rangle = \left\langle \delta_c, \frac{p(x)-p(c)}{x-c}\right\rangle = p'(c) \\ &= \langle \delta_c, p'(x)\rangle = -\left\langle (\delta_c)', p(x)\right\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$(x-c)^{-1}\delta_c = -(\delta_c)'. \tag{2.1.8}$$

Para $k=1$,

$$\begin{aligned}\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)', p\right\rangle &= -\langle \delta_c, D\vartheta_c p\rangle = -\langle \delta_c, (\vartheta_c D)p\rangle + \langle \delta_c, (\vartheta_c^2)p\rangle \\ &= \langle (\delta_c)', p'\rangle - \left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)', p\right\rangle \\ &= -\langle (\delta_c)'', p\rangle - \left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)', p\right\rangle\end{aligned}$$

logo,

$$\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)', p\right\rangle = -\frac{1}{2}\langle (\delta_c)'', p\rangle,$$

do que se conclui

$$(x-c)^{-1}(\delta_c)' = -\frac{1}{2}(\delta_c)^{(2)}.$$

Suponhamos que o resultado é válido para $k \geqslant 0$ e provêmo-lo para $k+1$. Assim, determinemos $\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)}, p\right\rangle$:

$$\begin{aligned}&\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)}, p\right\rangle = \left\langle \left((\delta_c)^{(k)}\right)', \vartheta_c p\right\rangle = -\left\langle (\delta_c)^{(k)}, D\vartheta_c p\right\rangle \\ &= -\left\langle (\delta_c)^{(k)}, \vartheta_c D p\right\rangle + \left\langle (\delta_c)^{(k)}, \vartheta_c^2 p\right\rangle \\ &= -\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k)}, Dp\right\rangle + \left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k)}, \vartheta_c p\right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{-1}{k+1}(\delta_c)^{(k+1)}, Dp\right\rangle + \left\langle \frac{-1}{k+1}(\delta_c)^{(k+1)}, \vartheta_c p\right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{1}{k+1}(\delta_c)^{(k+2)}, p\right\rangle + \left\langle \frac{-1}{k+1}(x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)}, p\right\rangle,\end{aligned}$$

do que se pode extrair:

$$\left\langle \frac{k+2}{k+1}(x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)}, p\right\rangle = -\left\langle \frac{1}{k+1}(\delta_c)^{(k+2)}, p\right\rangle,$$

isto é,

$$\left\langle (x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)}, p\right\rangle = -\left\langle \frac{1}{k+2}(\delta_c)^{(k+2)}, p\right\rangle,$$

pelo que

$$(x-c)^{-1}(\delta_c)^{(k+1)} = \frac{-1}{k+2}(\delta_c)^{(k+2)}.$$

■

Lema 2.1.6 *Se $c, d \in \mathbb{C}$ com $c \neq d$, então*

$$(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(k)} = \frac{-b_k}{(d-c)^{k+1}}\delta_c + \sum_{\mu=0}^{k}\frac{a_{k,\mu}}{(d-c)^{k-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu)}, \quad k \geqslant 0, \tag{2.1.9}$$

onde b_k e $a_{k,\sigma}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant k$, são constantes complexas que satisfazem a relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_{\nu+1,\nu+1} = a_{\nu,\nu}, \\ a_{\nu+1,\mu} = a_{\nu,\mu-1} + \sum_{\sigma=\mu}^{\nu} a_{\nu,\sigma} a_{\sigma,\mu}, \\ b_{\nu+1} = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu,\mu} b_\mu, \\ \\ a_{0,0} = a_{1,0} = a_{1,1} = b_0 = b_1 = 1 \\ a_{\nu,-1} = 0 \end{cases} , \quad 1 \leqslant \mu \leqslant \nu, \nu \geqslant 0. \tag{2.1.10}$$

Prova: Seja $p \in \mathcal{P}$. Façamos para $k = 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle (x-c)^{-1} \delta_d, p \right\rangle &= \langle \delta_d, \vartheta_c p \rangle = \left\langle \delta_d, \frac{p(x) - p(c)}{x - c} \right\rangle = \frac{p(d) - p(c)}{d - c} \\ &= \frac{1}{d-c} (p(d) - p(c)) = \left\langle \frac{1}{d-c} (\delta_d - \delta_c), p \right\rangle, \end{aligned}$$

donde,

$$(x-c)^{-1} \delta_d = \frac{1}{d-c} (\delta_d - \delta_c) \quad . \tag{2.1.11}$$

Para $k = 1$, segue-se

$$(x-c)^{-1} (\delta_d)' = \left((x-c)^{-1} \delta_d \right)' + (x-c)^{-2} \delta_d$$

por (1.1.20), e usando (2.1.11) e (2.1.8) tem-se que

$$\begin{aligned} (x-c)^{-1} (\delta_d)' &= \left(\frac{1}{d-c} (\delta_d - \delta_c) \right)' + (x-c)^{-2} \delta_d \\ &= \frac{1}{d-c} \left((\delta_d)' - (\delta_c)' \right) + \frac{1}{d-c} (x-c)^{-1} (\delta_d - \delta_c) \\ &= \frac{1}{d-c} \left((\delta_d)' - (\delta_c)' \right) + \frac{1}{(d-c)^2} (\delta_d - \delta_c) + \frac{1}{d-c} (\delta_c)' . \end{aligned}$$

Conclui-se pois que

$$(x-c)^{-1} (\delta_d)' = \frac{1}{d-c} (\delta_d)' + \frac{1}{(d-c)^2} (\delta_d - \delta_c) \quad . \tag{2.1.12}$$

Tomemos agora $k = 2$. Assim,

$$(x-c)^{-1} (\delta_d)'' = \left((x-c)^{-1} (\delta_d)' \right)' + (x-c)^{-2} (\delta_d)' .$$

Calculemos separadamente cada uma das parcelas:

$$\begin{aligned} \left((x-c)^{-1} (\delta_d)' \right)' &= \left(\frac{1}{d-c} (\delta_d)' + \frac{1}{(d-c)^2} (\delta_d - \delta_c) \right)' \\ &= \frac{1}{d-c} (\delta_d)'' + \frac{1}{(d-c)^2} \left((\delta_d)' - (\delta_c)' \right) . \end{aligned}$$

Usando (2.1.12) e (2.1.8), tem-se:

$$
\begin{aligned}
(x-c)^{-2}(\delta_d)' &= (x-c)^{-1}\left(\frac{1}{d-c}(\delta_d)' + \frac{1}{(d-c)^2}(\delta_d-\delta_c)\right)\\
&= \frac{1}{d-c}\left(\frac{1}{d-c}(\delta_d)' + \frac{1}{(d-c)^2}(\delta_d-\delta_c)\right)\\
&\quad + \frac{1}{(d-c)^2}\left(\frac{1}{d-c}(\delta_d-\delta_c)\right) + \frac{1}{(d-c)^2}(\delta_c)'\\
&= \frac{1}{(d-c)^2}(\delta_d)' + \frac{2}{(d-c)^3}(\delta_d-\delta_c) + \frac{1}{(d-c)^2}(\delta_c)' \quad .
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
(x-c)^{-1}(\delta_d)'' = \frac{1}{d-c}(\delta_d)'' + \frac{2}{(d-c)^2}(\delta_d)' + \frac{2}{(d-c)^3}(\delta_d-\delta_c) \quad .
$$

Por recorrência, suponhamos que

$$
(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu)} = \frac{-b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}\delta_c + \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu)}, \quad \nu \geqslant 0,
$$

cujas condições iniciais são dadas por:

$$
\begin{aligned}
a_{0,0} &= 1 \quad \text{e} \quad b_0 = 1;\\
a_{1,0} &= 1 \quad , \quad a_{1,1} = 1 \quad \text{e} \quad b_1 = 1;\\
a_{2,0} &= 2 \quad , \quad a_{2,1} = 2 \quad , \quad a_{2,2} = 1 \quad \text{e} \quad b_1 = 2.
\end{aligned}
$$

Vejamos então que o resultado é válido:

$$
(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu+1)} = \left((x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu)}\right)' + (x-c)^{-2}(\delta_d)^{(\nu)}.
$$

Para tal calculemos

$$
\begin{aligned}
\left((x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu)}\right)' &= \left(\frac{-b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}\delta_c + \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu)}\right)'\\
&= \frac{-b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}(\delta_c)' + \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu+1)}, \quad \nu \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(x-c)^{-2}(\delta_d)^{(\nu)} &= (x-c)^{-1}\left(\frac{-b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}\delta_c+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu)}\right)\\
&= -\frac{-b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}(\delta_c)'+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}\left((x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\mu)}\right)\\
&= \frac{b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}(\delta_c)'\\
&+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}\left(\frac{-b_\mu}{(d-c)^{\mu+1}}\delta_c+\sum_{\sigma=0}^{\mu}\frac{a_{\mu,\sigma}}{(d-c)^{\mu-\sigma+1}}(\delta_d)^{(\sigma)}\right)\\
&= \frac{b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}(\delta_c)'\\
&+\sum_{\mu=0}^{\nu}a_{\nu,\mu}\sum_{\sigma=0}^{\mu}\frac{a_{\mu,\sigma}}{(d-c)^{\nu-\sigma+2}}(\delta_d)^{(\sigma)}-\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}b_\mu}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c\\
&= \frac{b_\nu}{(d-c)^{\nu+1}}(\delta_c)'\\
&+\sum_{\sigma=0}^{\nu}\frac{1}{(d-c)^{\nu+2-\sigma}}\left(\sum_{\mu=\sigma}^{\nu}a_{\nu,\mu}a_{\mu,\sigma}\right)(\delta_d)^{(\sigma)}-\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}b_\mu}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c\ ,
\end{aligned}
$$

para valores de $\nu \geqslant 0$. Resulta agora que:

$$
\begin{aligned}
(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu+1)} &= \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu+1)}\\
&+\sum_{\sigma=0}^{\nu}\frac{1}{(d-c)^{\nu+2-\sigma}}\left(\sum_{\mu=\sigma}^{\nu}a_{\nu,\mu}a_{\mu,\sigma}\right)(\delta_d)^{(\sigma)}-\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}b_\mu}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c\ ,\quad \nu\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $\sigma \mapsto \mu$ e $\mu \mapsto \sigma$, nos termos envolvidos no duplo somatório, tem-se:

$$
\begin{aligned}
(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu+1)} &= \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+1}}(\delta_d)^{(\mu+1)}\\
&+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{1}{(d-c)^{\nu+2-\mu}}\sum_{\sigma=\mu}^{\nu}a_{\nu,\sigma}a_{\sigma,\mu}(\delta_d)^{(\mu)}-\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}b_\mu}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c\\
&= \sum_{\mu=1}^{\nu+1}\frac{a_{\nu,\mu-1}}{(d-c)^{\nu-\mu+2}}(\delta_d)^{(\mu)}\\
&+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{1}{(d-c)^{\nu+2-\mu}}\sum_{\sigma=\mu}^{\nu}a_{\nu,\sigma}a_{\sigma,\mu}(\delta_d)^{(\mu)}-\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_{\nu,\mu}b_\mu}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c.
\end{aligned}
$$

Deste modo, deduzimos que se tem

$$(x-c)^{-1}(\delta_d)^{(\nu+1)} = \frac{-b_{\nu+1}}{(d-c)^{\nu+2}}\delta_c + \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \frac{a_{\nu+1,\mu}}{(d-c)^{\nu-\mu+2}}(\delta_d)^{(\mu)}, \ \nu \geqslant 0,$$

quando consideramos a relação de recorrência dada por:

$$\begin{aligned} a_{\nu+1,\nu+1} &= a_{\nu,\nu}\ , \quad \nu \geqslant 0; \\ a_{\nu+1,\mu} &= a_{\nu,\mu-1} + \sum_{\sigma=\mu}^{\nu} a_{\nu,\sigma} a_{\sigma,\mu}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \nu; \\ b_{\nu+1} &= \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu,\mu} b_\mu, \quad , \ \nu \geqslant 0; \\ \text{com } a_{\nu,-1} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

cujas condições iniciais são dadas por

$$a_{0,0} = 1 \text{ e } b_0 = 1; \tag{2.1.14}$$

$$a_{1,0} = 1,\ a_{1,1} = 1 \text{ e } b_1 = 1. \tag{2.1.15}$$

■

Como consequência dos Lemas 2.1.5 e 2.1.6, tem-se o resultado que a seguir se apresenta.

Proposição 2.1.6 *Seja $u \in \mathcal{P}'$ não regular e seja ϕ um polinómio não nulo tal que*

$$\phi u = 0. \tag{2.1.16}$$

Escrevendo $\phi(x) = \prod_{\mu=1}^{t}(x-a_\mu)^{t_\mu}$, com $\sum_{\mu=0}^{t} t_\mu = T = \text{grau}(\phi) \geqslant 1$, tem-se

$$u = \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}, \tag{2.1.17}$$

onde os coeficientes $A_{\mu,\nu} \in \mathbb{C}$, com $0 \leqslant \nu \leqslant t_\mu - 1$, $1 \leqslant \mu \leqslant t$.

Prova: Seja $1 \leqslant i \leqslant t$. Comecemos por calcular

$$(x-a_i)\, u = 0,$$

cuja solução é dada considerando $w = 0$ no lema 2.1.4, ou seja,

$$u = \alpha_{i,1}\delta_{a_i}\ , \alpha_{i,1} \in \mathbb{C}.$$

Seja $\phi(x)$ o polinómio dado no enunciado. Suponhamos que a solução da equação funcional $\phi v = 0$ é dada por

$$v = \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)},$$

onde $A_{\mu,\nu} \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \nu \leqslant t_\mu - 1$, $1 \leqslant \mu \leqslant t$. Determinemos agora a solução da equação funcional dada por $(x-c)\,\phi(x)\,u = 0$, a qual é equivalente a $\phi(x)\,(x-c)\,u = 0$. Faça-se $v = (x-c)\,u$. A equação anterior passa a escrever-se:

$$\phi(x)\,v = 0.$$

Ora, por hipótese,

$$v = \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)},$$

logo, por definição da funcional v, tem-se que

$$(x-c)\,u = \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $(x-c)^{-1}$, encontra-se o seguinte:

$$u = (u)_0\,\delta_c + \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu}\,(x-c)^{-1} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}.$$

Se tomarmos $(u)_0 = C \in \mathbb{C}$, obtemos:

$$u = C\delta_c + \sum_{\mu=1}^{t} \sum_{\nu=0}^{t_\mu - 1} A_{\mu,\nu}\,(x-c)^{-1} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}. \tag{2.1.18}$$

Resta calcular $(x-c)^{-1}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}$. Surgem dois casos distintos:

1. Se $c \neq a_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant t$.
2. Se $\exists \mu, 1 \leqslant \mu \leqslant t$, tal que $c = a_\mu$.

No primeiro caso, pelo lema 2.1.6, segue que

$$(x-c)^{-1}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)} = C_\nu \delta_c + \sum_{\tau=0}^{\nu} \alpha_{\nu,\tau} \left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}, \tag{2.1.19}$$

onde os coeficientes complexos $\alpha_{\nu,\tau}$ são determinados pela relação de recorrência dada por (2.1.10), dada em lema 2.1.6, ou seja, por:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{\nu,\nu} = \alpha_{\nu-1,\nu-1}, \\ \alpha_{\nu,\tau} = \alpha_{\nu-1,\tau-1} + \sum_{\sigma=\tau}^{\nu-1} \alpha_{\nu-1,\sigma} a_{\sigma,\tau}, \\ C_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a_{\nu-1,\mu} C_\mu, \\ \\ \alpha_{0,0} = \alpha_{1,0} = \alpha_{1,1} = C_0 = C_1 = 1 \\ \alpha_{\nu,-1} = 0 \end{array}\right. , \quad 1 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1, \nu \geqslant 1. \tag{2.1.20}$$

Assim a solução da equação funcional $(x-c)\,\phi(x)\,u=0$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
u &= C\delta_c+\sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\nu=0}^{t_\mu-1}A_{\mu,\nu}\left(C_\nu\delta_c+\sum_{\tau=0}^{\nu}\alpha_{\nu,\tau}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}\right)\\
&= \sum_{\mu=1}^{t}\sum_{\nu=0}^{t_\mu-1}\left[\left(\frac{C}{\left(\sum_{\mu=1}^{t}t_\mu\right)}+A_{\mu,\nu}C_\nu\right)\delta_c+A_{\mu,\nu}\sum_{\tau=0}^{\nu}\alpha_{\nu,\tau}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}\right].
\end{aligned}
$$

No segundo caso, podemos supôr, sem perda de generalidade, que $c=a_1$. Deste modo, pelos Lemas 2.1.6 e 2.1.5, respectivamente, segue que:

$$
(x-c)^{-1}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}=\begin{cases} C_\nu\delta_{a_1}+\sum_{\tau=0}^{\nu}\alpha_{\nu,\tau}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}, & \mu\neq 1\\ \frac{-1}{\nu+1}\left(\delta_c\right)^{(\nu+1)}=\frac{-1}{\nu+1}\left(\delta_{a_1}\right)^{(\nu+1)}, & \mu=1,\end{cases} \tag{2.1.21}
$$

onde os coeficientes $\alpha_{\nu,\tau}$ e $C_\nu, 0\leqslant\tau\leqslant\nu$, $\nu\geqslant 1$ respeitam a relação de recorrência (2.1.20).

Analogamente ao caso anterior, encontramos a solução de $(x-c)\,\phi(x)\,u=0$ é se substituirmos a expressão obtida para $(x-c)^{-1}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\nu)}$ em (2.1.21) na expressão (2.1.18), ou seja,

$$
\begin{aligned}
u &= C\delta_{a_1}+\sum_{\nu=0}^{t_1-1}A_{1,\nu}\left(-\frac{1}{\nu+1}\left(\delta_{a_1}\right)^{(\nu+1)}\right)\\
&\quad+\sum_{\mu=2}^{t}\sum_{\nu=0}^{t_\mu-1}A_{\mu,\nu}\left(C_\nu\delta_{a_1}+\sum_{\tau=0}^{\nu}\alpha_{\nu,\tau}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}\right)\\
&= \left[C+\sum_{\mu=2}^{t}\sum_{\nu=0}^{t_\mu-1}A_{\mu,\nu}C_\nu\delta_{a_1}\right]\delta_{a_1}+\sum_{\nu=0}^{t_1-1}A_{1,\nu}\left(-\frac{1}{\nu+1}\left(\delta_{a_1}\right)^{(\nu+1)}\right)\\
&\quad+\sum_{\mu=2}^{t}\sum_{\nu=0}^{t_\mu-1}A_{\mu,\nu}\sum_{\tau=0}^{\nu}\alpha_{\nu,\tau}\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, concluímos que em qualquer dos dois casos a solução de $(x-c)\,\phi(x)\,u=0$ é uma combinação linear de δ_c e $\left(\delta_{a_\mu}\right)^{(\tau)}$, $0\leqslant\tau\leqslant\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant t_\mu-1$ e $1\leqslant\mu\leqslant t$. ■

A determinação explícita das constantes para as quais foi apresentada uma relação de recorrência poderá figurar num trabalho futuro. Neste trabalho, tal não se revela essencial na obtenção das conclusões que aqui nos propomos.

Reúnem-se as condições para apresentar a definição e consequente discussão das sucessões de polinómios ortogonais clássicas e, à posteriori, das sucessões ortogonais semi-clássicas, sendo as primeiras um caso particular destas últimas.

Passemos à análise de noções anexas à ortogonalidade. Relações do tipo finito é um conceito mais geral que o da ortogonalidade ou o da quasi-ortogonalidade. No entanto, dada a importância destes dois últimos conceitos, eles carecem de ser estudados por si mesmos.

2.2 Relações do tipo finito e aplicações.

Seja Φ um polinómio mónico, $t = grau(\Phi)$, $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma qualquer SP e $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ a respectiva sucessão dual. Geralmente existem valores de n tais que $\Phi u_n = 0$. De facto, tal será possível apenas para $0 \leqslant n < t$.

Com efeito, se $n \geqslant t$, tem-se que $\langle \Phi u_n, P_{n-t}\rangle = \langle u_n, \Phi P_{n-t}\rangle = \langle u_n, P_n\rangle = 1$, donde $\Phi u_n \neq 0$.

Definição 2.2.1 *Uma SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ diz-se compatível com Φ se $\Phi u_n \neq 0$, $n \geqslant 0$.*

Exemplo 2.2.1 *Qualquer SP ortogonal $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é compatível com qualquer polinómio mónico.*

Seja $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sucessão de polinómios mónicos e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP. A seguinte fórmula é sempre válida:

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+t} \lambda_{n,\nu} P_\nu(x), \quad n \geqslant 0.$$

Tal é consequência imediata de grau$(\Phi Q_n) = n + t$ e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ ser livre.

Definição 2.2.2 *Quando existe um inteiro $s \geqslant 0$ tal que*

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu} P_\nu(x), \quad n \geqslant s, \tag{2.2.22}$$

$$\exists r \geqslant s : \quad \lambda_{r,r-s} \neq 0, \tag{2.2.23}$$

dizemos que (2.2.22)-(2.2.23) é uma relação do tipo finito entre $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, relativamente a Φ.

Se, em vez de (2.2.23), considerarmos

$$\lambda_{n,n-s} \neq 0, \quad n \geqslant s, \tag{2.2.24}$$

então dizemos que (2.2.22)-(2.2.24) é uma relação estritamente do tipo finito.

Observação 2.2.1 *Uma relação do tipo finito entre $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, relativamente a Φ, é dada por:*

$$\begin{aligned} &\Phi(x)P_n(x) = \textstyle\sum_{\nu=n-s}^{n+t} \widetilde{\lambda}_{n,\nu} Q_\nu(x), \quad n \geqslant s, \\ &\exists r \geqslant s : \ \widetilde{\lambda}_{r,r-s} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Sejam $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ sucessões de polinómios mónicos e sejam $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ as respectivas sucessões duais.

Lema 2.2.1 *[14, p.298] Para toda a SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ compatível com Φ, as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *Existe um inteiro $s \geqslant 0$ tal que*

$$\Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu}P_\nu(x), \quad n \geqslant s, \tag{2.2.26}$$

$$\exists r \geqslant s: \quad \lambda_{r,r-s} \neq 0. \tag{2.2.27}$$

2. *Existe um inteiro $s \geqslant 0$ e uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$: $m \longmapsto \mu_m$ que satisfaz*

$$\max(0, m-t) \leqslant \mu_m \leqslant m+s, \quad m \geqslant 0, \tag{2.2.28}$$

$$\exists m_0 \geqslant 0: \quad \mu_{m_0} = m_0 + s, \tag{2.2.29}$$

e tal que

$$\Phi u_m = \sum_{\nu=m-t}^{\mu_m} \lambda_{\nu,m}v_\nu, \quad m \geqslant t, \tag{2.2.30}$$

$$\lambda_{\mu_m,m} \neq 0, \quad m \geqslant 0. \tag{2.2.31}$$

Observação 2.2.2 *[14] Quando a relação entre $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ é do tipo estritamente finito, $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é automaticamente compatível com Φ e, evidentemente, temos que $\mu_m = m+s$, $m \geqslant 0$.*

Proposição 2.2.1 *[14, p.300] Suponhamos que a SP $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ compatível com Φ. As sucessões $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfazem a relação do tipo finito (2.2.26)-(2.2.27) se e só se existe um inteiro $s \geqslant 0$ e uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$: $m \longmapsto \mu_m$ que satisfaz (2.2.28) e (2.2.29) e, além disso, existe $\{k_m\}_{m\geqslant 0}$, $k_m \neq 0$, $m \geqslant 0$, e uma sucessão de polinómios mónicos $\{\Lambda_{\mu_m}\}_{m\geqslant 0}$ com $grau(\Lambda_{\mu_m}) = \mu_m$, $m \geqslant 0$, tal que*

$$\Phi u_m = k_m \Lambda_{\mu_m} v_0, \quad m \geqslant 0. \tag{2.2.32}$$

À semelhança da proposição acima, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.2 *[14, p.301] Suponhamos que a SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal. As sucessões $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfazem a relação do tipo finito (2.2.26)-(2.2.27) se e só se existe um inteiro $s \geqslant 0$ e uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$: $m \longmapsto \mu_m$ que satisfaz (2.2.28) e (2.2.29) tal que*

$$\Phi P_m u_0 = \langle u_0, P_m^2 \rangle \sum_{\nu=m-t}^{\mu_m} \lambda_{\nu,m} v_\nu, \quad m \geqslant t, \tag{2.2.33}$$

$$\lambda_{\mu_m,m} \neq 0, \quad m \geqslant 0. \tag{2.2.34}$$

O resultados anteriores conduzem-nos a afirmar o seguinte:

Proposição 2.2.3 *[14, p.301-302] Para duas quaisquer sucessões ortogonais $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ e um qualquer polinómio mónico Φ de grau $t \geqslant 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a') Existe uma relação do tipo finito entre $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, relativamente a Φ, isto é, existe um inteiro $s \geqslant 0$ tal que

$$\Phi(x)Q_n(x) = \textstyle\sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu}P_\nu(x), \quad n \geqslant s,$$

$$\exists\, r \geqslant s : \ \lambda_{r,r-s} \neq 0.$$

(a) Existe uma relação estritamente do tipo finito entre $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, relativamente a Φ, isto é, existe um inteiro $s \geqslant 0$ tal que

$$\begin{cases} \Phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu}P_\nu(x), & n \geqslant s, \\ \lambda_{n,n-s} \neq 0, & n \geqslant s. \end{cases} \tag{2.2.35}$$

(b) Existe um número $k_0 \neq 0$ e um polinómio mónico Λ_s, grau$(\Lambda_s) = s$, *tal que*

$$\Phi u_0 = k_0 \Lambda_s v_0. \tag{2.2.36}$$

(c) Existe um inteiro $t \geqslant 0$ e um polinómio mónico Λ_s, grau$(\Lambda_s) = s$, *tal que*

$$\begin{cases} \Lambda_s(x)P_m(x) = \sum_{\nu=m-t}^{m+s} \widetilde{\lambda}_{m,\nu}Q_\nu(x), & m \geqslant t, \\ \widetilde{\lambda}_{m,m-t} \neq 0 & m \geqslant t. \end{cases} \tag{2.2.37}$$

Podemos ainda escrever que

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}_{m,\nu} = \frac{\langle v_0, Q_s^2\rangle}{\lambda_{s,0}} \frac{\langle u_0, P_m^2\rangle}{\langle v_0, Q_\nu^2\rangle} \lambda_{\nu,m}, & 0 \leqslant \nu \leqslant m+s, \\ \lambda_{n,\nu} = \frac{\langle u_0, P_t^2\rangle}{\widetilde{\lambda}_{t,0}} \frac{\langle v_0, Q_n^2\rangle}{\langle u_0, P_\nu^2\rangle} \widetilde{\lambda}_{\nu,n}, & 0 \leqslant \nu \leqslant n+t, \end{cases} \tag{2.2.38}$$

$$\Lambda_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\langle v_0, Q_s^2\rangle}{\lambda_{s,0}} \frac{\lambda_{\nu,0}}{\langle v_0, Q_\nu^2\rangle} Q_\nu(x), \tag{2.2.39}$$

$$k_0 = \frac{\lambda_{s,0}}{\langle v_0, Q_s^2\rangle} = \frac{\langle u_0, P_t^2\rangle}{\widetilde{\lambda}_{t,0}}. \tag{2.2.40}$$

Introduzamos as relações de recorrência satisfeitas, respectivamente, por $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x - \beta_0, \\ &P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), \; n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

$$\begin{aligned} &Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x - \zeta_0, \\ &Q_{n+2}(x) = (x - \zeta_{n+1})Q_{n+1}(x) - \alpha_{n+1}P_n(x), \; n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Sem entrar em detalhes, atendendo a (2.2.35)-(2.2.37), obtemos o seguinte:

$$\alpha_{n+1+s} = \frac{\lambda_{n+1+s,n+1}}{\lambda_{n+s,n}}\gamma_{n+1}, \qquad n \geqslant 0, \tag{2.2.43}$$

$$\zeta_s = \beta_0 + \frac{\lambda_{s,1}}{\lambda_{s,0}}\gamma_1 - \frac{\lambda_{s-1,0}}{\lambda_{s,0}}\alpha_s, \quad \lambda_{-1,0} = 0, \tag{2.2.44}$$

$$\zeta_{n+1+s} = \beta_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1+s,n+2}}{\lambda_{n+1+s,n+1}}\gamma_{n+2} - \frac{\lambda_{n+s,n+1}}{\lambda_{n+s,n}}\gamma_{n+1}, \; n \geqslant 0. \tag{2.2.45}$$

2.3 Quasi-ortogonalidade. Aplicações.

2.3.1 A quasi-ortogonalidade de ordem s

Definição 2.3.1 *Sejam $u \in \mathcal{P}'$ e $s \in \mathbb{N}$. A sucessão de polinómios $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ diz-se quasi-ortogonal de ordem s relativamente a u, se satisfizer as seguintes condições:*

$$\langle u, B_m B_n \rangle = 0, \; |n - m| \geqslant s + 1, \tag{2.3.46}$$

$$\exists r \geqslant s \text{ tal que } \langle u, B_{r-s}B_r \rangle \neq 0. \tag{2.3.47}$$

Observações 2.3.1

1. *Uma sucessão quasi-ortogonal de ordem zero é uma sucessão ortogonal num sentido mais geral do que o já visto: toda a sucessão (regularmente) ortogonal é quasi-ortogonal de ordem 0, mas o recíproco não é válido.*

2. *Seja $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP. Desde que a sucessão de polinómios $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ seja livre, as condições abaixo apresentadas são equivalentes [11]:*

   (a) $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão de polinómios quasi-ortogonais de ordem $s \geqslant 0$ relativamente a u (i.e., verifica (2.3.46)-(2.3.47)).

(b)

$$\langle u, Q_m B_n \rangle = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-s-1,\ n \geqslant s+1; \tag{2.3.48}$$

$$\exists r \geqslant s \text{ tal que } \langle u, Q_{r-s} B_r \rangle \neq 0. \tag{2.3.49}$$

3. *[11] Seja u uma forma regular e $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ a SPO correspondente. Todas as sucessões de polinómios $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ quasi-ortogonais de ordem $s \geqslant 1$ relativamente a u podem-se escrever sob a forma:*

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x),\ 0 \leqslant n \leqslant s-1$$

$$B_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x),\ n \geqslant s \tag{2.3.50}$$

$$\exists\, r \geqslant s \text{ tal que } b_{r,r-s} \neq 0.$$

2.3.2 A quasi-ortogonalidade estrita de ordem s

Definição 2.3.2 *A SP $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ diz-se estritamente quasi-ortogonal de ordem s, com $s \geqslant 0$, relativamente a u se verificar (2.3.46) e*

$$\forall\, n \geqslant s:\ \langle u, B_{n-s} B_n \rangle \neq 0. \tag{2.3.51}$$

Observações 2.3.2 *[11] Da definição anterior decorre o seguinte:*

1. *Toda a SP $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ estritamente quasi-ortogonal de ordem s, com $s \geqslant 0$, relativamente a u é livre, pelo que pode ser sempre normalizada.*

2. *Toda a sucessão estritamente quasi-ortogonal de ordem $s \geqslant 0$ relativamente a u é quasi-ortogonal de ordem $s \geqslant 0$ relativamente a u;*

3. *Uma SP $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ estritamente quasi-ortogonal de ordem 0 relativamente a u é uma SP (regularmente) ortogonal e u diz-se regular.*

4. *[9] Contrariamente, se $s \geqslant 1$, a forma u não é necessariamente regular. Suponhamos, por exemplo que a SP $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal relativamente a u_0, regular. Seja $u = u_s$, $s \geqslant 1$, o termo de ordem s da sucessão dual associada a $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$. (Lembre-se que u_s é não regular pois $(u_s)_0 = 0$ [1]).* *Nestas condições, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
\langle u, B_m B_n \rangle &= \langle r_s^{-1} B_s u_0, B_m B_n \rangle = r_s^{-1} \langle u_0, B_s B_m B_n \rangle \\
&= r_s^{-1} \sum_{\nu=0}^{m+s} \alpha_{m+s,\nu} \langle u_0, B_\nu B_n \rangle = 0,\ n \geqslant m+s+1, \\
\langle u, B_n B_{n+s} \rangle &= r_s^{-1} \langle u_0, B_s B_n B_{n+s} \rangle = r_s^{-1} \langle u_0, B_{n+s}^2 \rangle \neq 0,\ n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

[1] Veja-se exemplo 2.1.2

Do que se conclui que $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *é estritamente quasi-ortogonal de ordem* $s \geqslant 1$ *relativamente a* u_s*, não regular.*

5. $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *é uma sucessão de polinómios estritamente quasi-ortogonais de ordem* $s \geqslant 0$ *relativamente a* u *se e só se para alguma sucessão* $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ *livre se verificar*

$$\langle u, Q_m B_n\rangle = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-s-1,\ n \geqslant s+1; \tag{2.3.52}$$
$$\forall r \geqslant s,\ \langle u, Q_{r-s}B_r\rangle \neq 0. \tag{2.3.53}$$

Lema 2.3.1 *[11] Seja* u *uma forma regular. Seja* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *a SP ortogonal correspondente, então todas as sucessões de polinómios* $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ *estritamente quasi-ortogonais de ordem* $s \geqslant 1$ *relativamente a* u *podem escrever-se na forma:*

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x),\ 0 \leqslant n \leqslant s-1$$

$$B_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x),\ n \geqslant s \tag{2.3.54}$$

$$\forall r \geqslant s,\ b_{r,r-s} \neq 0.$$

Uma das utilizações da quasi-ortogonalidade faz-se nas condições seguintes: seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SPO relativamente a u, regular; existe uma forma $\widetilde{u}$ tal que a SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é quasi-ortogonal de ordem s relativamente a $\widetilde{u}$.

Podemos caracterizar uma tal situação do seguinte modo:

Proposição 2.3.1 *[8, p.170-171], [11] Para cada SP* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *normalizada e regularmente ortogonal relativamente a* u *e para cada* $\widetilde{u} \in \mathcal{P}'$*, os enunciados seguintes são equivalentes:*

1. *A SP* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *é quasi-ortogonal de ordem* s *relativamente a* $\widetilde{u}$*.*
2. $\exists\, r \geqslant s \geqslant 0$ *tal que* $\langle \widetilde{u}, P_{r-s}P_r\rangle \neq 0,\ \langle \widetilde{u}, P_n\rangle = 0,\ n \geqslant s+1.$
3. *Existe um polinómio único* Φ *de grau* s *tal que*

$$\widetilde{u} = \Phi u. \tag{2.3.55}$$

4. *A SP* $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *é estritamente quasi-ortogonal de ordem* s *relativamente a* $\widetilde{u}$*.*
5. $\exists\, s \geqslant 0$ *tal que* $\langle \widetilde{u}, P_s\rangle \neq 0,\ \langle \widetilde{u}, P_n\rangle = 0,\ n \geqslant s+1.$

Podemos aplicar este resultado na construção de sucessões ortogonais a partir de uma sucessão ortogonal dada.

2.3.3 A multiplicação (à esquerda) de uma forma por um polinómio

Este é sem dúvida um dos problemas mais antigos da teoria dos polinómios ortogonais clássicos, já tratados por Christoffel em 1858 [3].

Coloquemos o problema geral. Seja u uma forma regular e seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ a SP normalizada ortogonal correspondente. Seja, por outro lado,

$$R(x) = \prod_{\nu=1}^{p}(x - x_\nu)^{m_\nu}$$

um polinómio de grau $r \geqslant 1$ ($\sum_{\nu=1}^{p} m_\nu = r$) e com p raízes distintas $(x_1, ..., x_p)$. Faça-se $c = (x_1, ..., x_p)$.

A proposição 2.3.1 assegura-nos que a sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é estritamente quasi-ortogonal de ordem p relativamente a $\widetilde{u} = R(x)u$, não necessariamente regular. Procuramos agora saber em que condições poderemos afirmar que a forma $\widetilde{u} = R(x)u$ é regular.

Lema 2.3.2 *[11, 14] Seja $D(c; n+1)$, $n \geqslant 0$ o determinante de ordem r:*

$$D(c; n+1) = \begin{vmatrix} P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+r}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_{n+1})^{(m_1-1)}(x_1) & \cdots & (P_{n+r})^{(m_1-1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n+1}(x_p) & \cdots & P_{n+r}(x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_{n+1})^{(m_p-1)}(x_p) & \cdots & (P_{n+r})^{(m_p-1)}(x_p) \end{vmatrix} \qquad (2.3.56)$$

A forma $\widetilde{u}$ é regular se e só se $D(c; n+1) \neq 0$, $n \geqslant 0$.

NOTA: $(P_n)^{(\mu)}(x) = \frac{d^\mu}{dx^\mu} P_n(x)$.

Prova: As Proposições 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 da secção anterior não fornecem condições para as quais a sucessão $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal quando $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal.

Em todo o caso, suponhamos $s = 0$ e $t \geqslant 1$ em (2.2.22)-(2.2.23), dito de outro modo, existe uma relação do tipo finito entre $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ de ordem 0 relativamente a Φ:

$$\begin{aligned} &\Phi(x)Q_n(x) = \textstyle\sum_{\nu=n}^{n+t} \lambda_{n,\nu} P_\nu(x), \ n \geqslant 0, \\ &\exists n \geqslant 0 : \ \lambda_{n,n} \neq 0. \end{aligned} \qquad (2.3.57)$$

Sejam c_μ, $1 \leqslant \mu \leqslant q$, os zeros de Φ e m_μ a respectiva multiplicidade. A sucessão $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ fica bem determinada por (2.3.57) se e só se o sistema

$$\sum_{\nu=n}^{n+t} \lambda_{n,\nu} \left(P_\nu\right)^{(\tau)}(c_\mu) = 0,\ 1 \leqslant \mu \leqslant q,\ 0 \leqslant \tau \leqslant m_\mu - 1, \tag{2.3.58}$$

possuir uma solução única $(\lambda_{n,\nu})^T$, $n \leqslant \nu \leqslant n+t-1$, para qualquer $n \geqslant 0$.

Mais, o sistema (2.3.58) tem uma única solução para qualquer $n \geqslant 0$ se e só se o seu determinante $\Delta_n \neq 0$, $n \geqslant 0$. Além disso, temos que

$$\Delta_n \lambda_{n,n} = (-1)^t \Delta_{n+1},\ n \geqslant 0,$$

logo, quando $s = 0$, a relação (2.2.22)-(2.2.23), a existir, é necessariamente estrita, o que significa dizer que $\mu_m = m$, $m \geqslant 0$.

Supondo agora a ortogonalidade de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, tomando $m = 0$ em (2.2.33) temos que $\Phi u_0 = \lambda_{0,0} v_0$ e de (2.3.57) obtemos:

$$\lambda_{0,0}\langle v_0, P_m Q_n\rangle = \langle \Phi u_0, P_m Q_n\rangle = \sum_{\nu=n}^{n+t} \lambda_{n,\nu}\langle u_0, P_m P_\nu\rangle = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

$$\lambda_{0,0}\langle v_0, Q_n^2\rangle = \sum_{\nu=n}^{n+t} \lambda_{n,\nu}\langle u_0, P_n P_\nu\rangle = \lambda_{n,n}\langle u_0, P_n^2\rangle \neq 0,\ n \geqslant 0.$$

Consequentemente, a sucessão $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal relativamente a

$$v_0 = (\lambda_{0,0})^{-1} \Phi u_0.$$

Noutras palavras, quando a forma u_0 é regular, a forma Φu_0 é regular se e só se $\Delta_n \neq 0$, $n \geqslant 0$. ■

Depois de Christoffel [3], Dini apresentou em [4] uma (longa) demonstração para o resultado que acabamos de provar, na qual usa técnicas distintas das aqui usadas. A prova aqui apresentada é a mais curta que poderemos encontrar na literatura: este é, aliás, um exemplo da eficácia das relações do tipo finito.

Podemos construir a SP $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ ortogonal relativamente a $\widetilde{u}$ e dar os elementos $\widetilde{\beta}_n, \widetilde{\gamma}_{n+1}$, $n \geqslant 0$ em função de β_n, γ_{n+1}, $n \geqslant 0$. Neste trabalho apenas será tratado o caso em que $R(x) = (x-c)^m$ para $m = 1, 2$. (O caso em que $m = 3, 4$ encontra-se desenvolvido em [16]).

Proposição 2.3.2 *[11] Para que a forma $\widetilde{u} = (x-c)u$ seja regular, é necessário e suficiente que $P_{n+1}(c) \neq 0$, $n \geqslant 0$. Nesse caso, temos que:*

$$(x-c)\widetilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} P_n(x),\ n \geqslant 0; \tag{2.3.59}$$

$$\widetilde{\beta}_n = \beta_{n+1} + \frac{P_{n+2}(c)}{P_{n+1}(c)} - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)},\ n \geqslant 0; \tag{2.3.60}$$

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \frac{P_{n+2}(c)P_n(c)}{P^2_{n+1}(c)}\gamma_{n+1},\ n \geqslant 0. \tag{2.3.61}$$

Prova: Procuramos a sucessão $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ sob a forma:

$$(x-c)\widetilde{P}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \theta_{n,\nu}P_\nu(x), \quad n \geqslant 0,$$

com $\theta_{n,n+1} = 1,\ n \geqslant 0$. Deste modo, tem-se que

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n(x)P_m(x)\rangle \ = \ \theta_{n,m}\langle u, P^2_m(x)\rangle, \quad 0 \leqslant m \leqslant n+1.$$

Supondo a ortogonalidade de $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ relativamente a $\widetilde{u}$, resulta que $\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_nP_m\rangle = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-1,\ n \geqslant 1$ e $\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_nP_n\rangle \neq 0,\ n \geqslant 0$, o que obriga a que $\theta_{n,m} = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-1,\ n \geqslant 1$, e $\theta_{n,n} \neq 0,\ n \geqslant 0$, donde

$$(x-c)\widetilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) + \theta_{n,n}P_n(x), \quad n \geqslant 0.$$

Em particular,

$$0 = P_{n+1}(c) + \theta_{n,n}P_n(c), \quad n \geqslant 0,$$

o que implica $P_{n+1}(c) \neq 0,\ n \geqslant 0$.

Reciprocamente, se $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ é definida por (2.3.59), é evidente que é ortogonal relativamente a $\widetilde{u}$, facto que decorre imediatamente da proposição 2.1.2, pois

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_nP_k\rangle = \langle u, P_{n+1}P_k\rangle - \tfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\langle u, P_nP_k\rangle = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_nP_n\rangle = \langle u, P_{n+1}P_n\rangle - \tfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\langle u, P^2_n\rangle = -\tfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\langle u, P^2_n\rangle \neq 0,\ n \geqslant 0.$$

Do exposto, facilmente se verifica que

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}^2_n\rangle = -\frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\langle u, P^2_n\rangle,\ n \geqslant 0,$$

donde resulta o seguinte:

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \frac{\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}^2_{n+1}\rangle}{\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}^2_n\rangle} = \frac{P_{n+2}(c)P_n(c)}{P^2_{n+1}(c)}\gamma_{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

logo encontramos (2.3.61). Para demonstrar (2.3.60), partamos da igualdade seguinte:

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}^2_n\rangle\widetilde{\beta}_n = \langle \widetilde{u}, x\widetilde{P}^2_n\rangle, \quad n \geqslant 0.$$

De (2.3.59), temos que

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{u}, x\widetilde{P}_n^2(x)\rangle &= \langle u, \Big((x-c)\widetilde{P}_n(x)\Big)^2\rangle + c\langle\widetilde{u}, \widetilde{P}_n^2(x)\rangle \\
&= \langle u, \left(P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}P_n(x)\right)^2\rangle + c\langle\widetilde{u}, \widetilde{P}_n^2(x)\rangle \\
&= \langle u, P_{n+1}^2(x)\rangle + \left(c - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right)\langle\widetilde{u}, \widetilde{P}_n^2(x)\rangle, \quad n \geqslant 0;
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_n &= c - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} + \left(-\frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\langle u, P_n^2\rangle\right)^{-1}\langle u, P_{n+1}^2\rangle \\
&= c - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} - \frac{P_n(c)}{P_{n+1}(c)}\gamma_{n+1}, \quad n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Recordando o facto de

$$\gamma_n P_{n-1}(c) = P_{n+1}(c) - (c-\beta_n)P_n(c), \; n \geqslant 0, \text{ onde } P_{-1} = 0,$$

podemos também escrever

$$\widetilde{\beta}_n = \beta_n + \gamma_n\frac{P_{n-1}(c)}{P_n(c)} - \gamma_{n+1}\frac{P_n(c)}{P_{n+1}(c)}, \quad n \geqslant 0.$$

Encontramos (2.3.60) se na igualdade anterior atendermos ao facto de

$$\begin{aligned}
&-\gamma_{n+1}P_n(c) = P_{n+2}(c) - (c-\beta_{n+1})P_{n+1}(c), \\
&\gamma_n P_{n-1}(c) = -P_{n+1}(c) + (c-\beta_n)P_n(c), \qquad n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

■

Através da identidade de Christoffel-Darboux [11], temos facilmente que:

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(c) - P_{n+1}(c)P_n(x)}{x-c} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_\nu(c)P_\nu(x)}{r_\nu}, \tag{2.3.62}$$

(onde $r_n = \prod_{\nu=0}^{n}\gamma_{\nu+1}$, $n \geqslant 0$) e, a partir de (2.3.59), obtemos imediatamente

$$\widetilde{P}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{r_n}{r_\nu}\frac{P_\nu(c)}{P_n(c)}P_\nu(x), \text{ com } r_n = \prod_{\nu=0}^{n}\gamma_{\nu+1}, \; n \geqslant 0. \tag{2.3.63}$$

Desta relação surge trivialmente a seguinte:

$$\frac{P_{n+1}(c)}{r_{n+1}}\widetilde{P}_{n+1}(x) - \frac{P_n(c)}{r_n}\widetilde{P}_n(x) = \frac{P_{n+1}(c)}{r_{n+1}}P_{n+1}(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = \widetilde{P}_{n+1}(x) - \frac{P_n(c)}{P_{n+1}(c)}\gamma_{n+1}\widetilde{P}_n(x), \; n \geqslant 0. \tag{2.3.64}$$

Considerando o lema 2.3.1, a relação (2.3.64) traduz o facto da sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ ser estritamente quasi-ortogonal de ordem 1 relativamente a $\widetilde{u}$, regular.

Tratemos agora o caso $\widetilde{u} = (x-c)^2 u$.

Proposição 2.3.3 *[11] Para que a forma $\widetilde{u} = (x-c)^2 u$ seja regular é condição necessária e suficiente que:*

$$D(c;n) = P'_{n+1}(c)P_n(c) - P_{n+1}(c)P'_n(c) \neq 0,\ n \geqslant 1. \tag{2.3.65}$$

Nesse caso teremos

$$(x-c)^2\widetilde{P}_n(x) = \left\{x - c - \tfrac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)}\right\} P_{n+1}(x) + \tfrac{P^2_{n+1}(x)}{D(c;n)} P_n(x) \tag{2.3.66}$$

$$\widetilde{\beta}_n = \beta_{n+1} - \tfrac{2P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)} + \tfrac{P^2_{n+1}(c)}{D(c;n+1)}\left\{c - \beta_{n+1} + \tfrac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)}\right\} \tag{2.3.67}$$

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \tfrac{D(c;n+2)D(c;n)}{D^2(c;n+1)}\gamma_{n+1},\quad n \geqslant 0. \tag{2.3.68}$$

Prova: Podemos construir a sucessão $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ do seguinte modo:

$$(x-c)^2\widetilde{P}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+2} \theta_{n,\nu} P_\nu(x),\ n \geqslant 0, \tag{2.3.69}$$

com $\theta_{n,n+2} = 1,\ n \geqslant 0$. Atendendo à ortogonalidade de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ relativamente a u, tem-se que

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n P_m\rangle = \sum_{\nu=0}^{n+2} \theta_{n,\nu}\langle u, P_\nu(x)P_m(x)\rangle = \theta_{n,m}\langle u, P_m^2\rangle,\ 0 \leqslant m \leqslant n+2.$$

Sob a hipótese da ortogonalidade de $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ relativamente a $\widetilde{u}$, necessariamente $\theta_{n,m} = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n-1,\ n \geqslant 1$. Mais,

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n P_n\rangle = \langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n^2\rangle = \theta_{n,n}\langle u, P_n^2\rangle,\ n \geqslant 0; \tag{2.3.70}$$

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n P_{n+1}\rangle = \theta_{n,n+1}\langle u, P_{n+1}^2\rangle,\ n \geqslant 0, \tag{2.3.71}$$

pelo que a relação (2.3.69) se passa a escrever como:

$$(x-c)^2\widetilde{P}_n(x) = P_{n+2}(x) + \theta_{n,n+1}P_{n+1}(x) + \theta_{n,n}P_n(x),\ n \geqslant 0. \tag{2.3.72}$$

Por derivação da igualdade anterior, obtém-se ainda

$$(x-c)^2\widetilde{P}'_n(x) + 2(x-c)\widetilde{P}_n(x) = P'_{n+2}(x) + \theta_{n,n+1}P'_{n+1}(x) + \theta_{n,n}P'_n(x),\ n \geqslant 0.$$

Avaliando as duas relações anteriores em $x = c$, tem-se que

$$\begin{aligned} &P_{n+2}(c) + \theta_{n,n+1}P_{n+1}(c) + \theta_{n,n}P_n(c) = 0, \\ &P'_{n+2}(c) + \theta_{n,n+1}P'_{n+1}(c) + \theta_{n,n}P'_n(c) = 0,\ n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

Notando por $D(c;n) = P'_{n+1}(c)P_n(c) - P_{n+1}(c)P'_n(c),\ n \geqslant 0$, tem-se que $D(c;n+1) = P_{n+1}(c)P'_{n+2}(c) - P'_{n+1}(c)P_{n+2}(c),\ n \geqslant 0$. Recorrendo às igualdades (2.3.73), conclui-se que:

$$\begin{aligned} &D(c;n+1) = \theta_{n,n}D(c;n), \\ &\theta_{n,n+1}D(c;n) = P_{n+2}(c)P'_n(c) - P'_{n+2}(c)P_n(c) = \delta_n(c). \end{aligned} \tag{2.3.74}$$

para $n \geqslant 0$. Por (2.3.70), $\theta_{n,n} \neq 0,\ n \geqslant 0$, logo, necessariamente, $D(c;n+1) \neq 0,\ n \geqslant 0$.

Reciprocamente, se esta condição se verificar, a SP $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por (2.3.69) e (2.3.74) é ortogonal relativamente a $\widetilde{u}$.

De (2.3.62), tem-se que

$$D(c;n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{r_n}{r_\nu} P_\nu^2(c),\ n \geqslant 0, \tag{2.3.75}$$

e, à custa de (2.1.3), quando derivamos, temos facilmente

$$\delta_n(c) = -\{(c-\beta_{n+1})D(c;n) + P_n(c)P_{n+1}(c)\},\ n \geqslant 0. \tag{2.3.76}$$

Determinemos as sucessões $\{\widetilde{\beta}_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{\widetilde{\gamma}_{n+1}\}_{n\geqslant 0}$. De (2.3.70), temos que

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \frac{\theta_{n+1,n+1}}{\theta_{n,n}}\gamma_{n+1} = \frac{D(c;n+2)D(c;n)}{D(c;n+1)^2}\gamma_{n+1},\ n \geqslant 0.$$

Através de (2.3.72), tem-se que:

$$\langle \widetilde{u}, (x-c)\widetilde{P}_n^2\rangle = \theta_{n,n}\langle u, (x-c)\widetilde{P}_n(x)P_n(x)\rangle + \theta_{n,n+1}\langle u, (x-c)\widetilde{P}_n(x)P_{n+1}(x)\rangle,$$

mas, podemos sempre escrever

$$\begin{aligned} (x-c)\widetilde{P}_n(x) &= \theta_{n,n}\left(\vartheta_c P_n\right)(x) + \theta_{n,n+1}\left(\vartheta_c P_{n+1}\right)(x)\theta_{n,n}\left(\vartheta_c P_n(x)\right) \\ &+ \left(\vartheta_c P_{n+2}\right)(x), \qquad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Facilmente concluímos a seguinte igualdade:

$$\left(\vartheta_c P_{n+2}\right)(x) = P_{n+1}(x) + (c-\beta_{n+1})\left(\vartheta_c P_{n+1}\right)(x) - \gamma_{n+1}\left(\vartheta_c P_n\right)(x),$$

pelo que

$$\langle \widetilde{u}, (x-c)\widetilde{P}_n(x)P_n(x)\rangle = \theta_{n,n+1}\langle u, P_n^2\rangle + (c-\beta_{n+1})\langle u, P_n^2\rangle,$$

logo

$$\langle \widetilde{u}, (x-c)\widetilde{P}_n^2\rangle = \theta_{n,n}\left\{\theta_{n,n+1} + c - \beta_{n+1}\right\}\langle u, P_n^2\rangle + \theta_{n,n+1}\langle u, P_{n+1}^2\rangle.$$

Deste modo, segue-se que:

$$\langle \widetilde{u}, x\widetilde{P}_n^2\rangle = \theta_{n,n}\left\{\theta_{n,n+1} + 2c - \beta_{n+1}\right\}\langle u, P_n^2\rangle + \theta_{n,n+1}\langle u, P_{n+1}^2\rangle,\ n \geqslant 0.$$

Como $\widetilde{\beta}_n = \frac{\langle \widetilde{u}, x\widetilde{P}_n^2(x)\rangle}{\langle \widetilde{u}, \widetilde{P}_n^2\rangle}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_n &= \theta_{n,n+1} + 2c - \beta_{n+1} + \frac{\theta_{n,n+1}}{\theta_{n,n}}\gamma_{n+1} \\ &= \frac{\delta_n(c)}{D(c;n)} + 2c - \beta_{n+1} + \frac{\delta_n(c)}{D(c;n+1)}\gamma_{n+1},\end{aligned}$$

se recorrermos às relações patentes em (2.3.74). Através de (2.3.76), segue-se que

$$\widetilde{\beta}_n = c - \frac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)} + \frac{\delta_n(c)}{D(c;n+1)}\gamma_{n+1}. \tag{2.3.77}$$

Facilmente verificamos que

$$\frac{1}{D(c;n)} = \frac{\gamma_{n+1}}{D(c;n+1)} + \frac{P_{n+1}^2(c)}{D(c;n)D(c;n+1)},\ n \geqslant 0,$$

pelo que

$$\widetilde{\beta}_n = \beta_{n+1} - 2\frac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)} - \frac{\delta_n(c)}{D(c;n)}\frac{P_{n+1}^2(c)}{D(c;n+1)},\ n \geqslant 0.$$

Encontramos (2.3.67) se verificarmos que

$$\frac{\delta_n(c)}{D(n;c)} = -\left\{c - \beta_{n+1} + \frac{P_n(c)}{D(c;n)}\left((c-\beta_n)P_n(c) - \gamma_n P_{n-1}(c)\right)\right\},\ n \geqslant 0,$$

onde se deverá considerar $\gamma_0 = 0$ e $P_{-1} = 0$. ∎

Capítulo 3

Sucessões Ortogonais Clássicas e Formas Correspondentes

3.1 Definição

Apresentamos uma caracterização das sucessões de polinómios ortogonais clássicos devida a Hahn. O objectivo principal deste trabalho é precisamente mostrar uma generalização da definição que se segue.

Definição 3.1.1 (de Hahn) *[5] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SPO com respeito a $u \in \mathcal{P}'$. Dizemos que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais clássicos, ou simplesmente uma sucessão clássica, se $\{P_n^{[1]}\}_{n\geqslant 0}$ for uma SPO.*

Nota: Por uma questão de simplificação de notação usada, a sucessão de polinómios $\{P_n^{[1]}\}_{n\geqslant 0}$ será aqui notada por $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$. A sucessão dual correspondente a $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ será notada por $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ e, uma vez mais, a sucessão dual de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ por $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$.

Definição 3.1.2 *Uma forma regular $u \in \mathcal{P}'$ diz-se clássica se a sucessão dos polinómios ortogonais relativamente a u é clássica.*

Se uma sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é clássica, a sucessão $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ terá necessariamente de ser regularmente ortogonal (relativamente a v_0). Deste modo, podemos considerar que as referidas sucessões satisfazem, respectivamente, as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= (x-\beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), \quad n \geqslant 0, \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x - \beta_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= (x-\zeta_{n+1})Q_{n+1}(x) - \rho_{n+1}Q_n(x), \quad n \geqslant 0, \\ Q_0(x) &= 1, \quad Q_1(x) = x - \rho_0 \ , \end{aligned}$$

onde os coeficientes ζ_n e ρ_n, para $n \geqslant 1$, são dados por

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{\langle v_0, xQ_n^2(x)\rangle}{\langle v_0, Q_n^2(x)\rangle}, \quad n \geqslant 0, \\ \rho_{n+1} &= \frac{\langle v_0, Q_{n+1}^2(x)\rangle}{\langle v_0, Q_n^2(x)\rangle}, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

3.2 Caracterização pela equação funcional

Poder-se-á caracterizar uma forma clássica u, através de uma equação funcional. Uma tal caracterização, a qual será expressa no resultado que se segue, é indubitavelmente um resultado essencial na teoria dos polinómios ortogonais clássicos. A partir dela será possível obter conclusões mais gerais e de uma forma mais eficiente. A título de exemplo, a demonstração que propomos para o teorema de Hahn, bem como para a extensão deste último, faz-se no espaço das formas.

Teorema 3.2.1 *[13] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u_0. Para que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ seja uma sucessão clássica é necessário e suficiente que existam dois polinómios ϕ e ψ, sendo ϕ mónico, tais que:*

$$D(\phi u_0) + \psi u_0 = 0, \quad com \tag{3.2.1}$$

$$\text{grau}\,(\phi) \leqslant 2, \quad \text{grau}\,(\psi) = 1 \quad e \quad \psi'(0) - \frac{n}{2}\phi''(0) \neq 0, \ n \geqslant 1 \tag{3.2.2}$$

Observação 3.2.1 *Se dois polinómios ϕ e ψ estiverem nas condições do teorema anterior, então diremos que o par (ϕ, ψ) é um **par admissível**.*

3.3 Caracterização pela equação diferencial

Uma sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinómios ortogonais clássicos relativamente à forma regular u poderá também ser caracterizada através de uma equação diferencial linear de segunda ordem, a qual é devida a Bochner. Passamos a enunciar tal caracterização.

Teorema 3.3.1 *[1, 13] A sucessão ortogonal $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão clássica se e somente se existem polinómios ϕ e ψ e uma sucessão $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, $\lambda_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, tais que:*

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) - \psi(x)P'_{n+1}(x) = \lambda_n P_{n+1}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{3.3.3}$$

onde grau $(\phi) \leqslant 2$ *e* grau $(\psi) = 1$.

3.4 Invariância do carácter clássico

Lema 3.4.1 *[17, 12] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sucessão ortogonal clássica com respeito a u_0. A família $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por*

$$Q_n(x) = \frac{(P_{n+1})'(x)}{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

é uma família ortogonal clássica relativamente à forma v_0.

O resultado anterior pode generalizar-se a:

Lema 3.4.2 *[17, 13] Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão ortogonal clássica relativamente a u_0, então a família $\{P_n^{[k]}\}_{n\geqslant 0}$ (com $P_n^{[0]} \equiv P_n$) é uma família ortogonal clássica com respeito à forma $v_0^{[k]} = \varepsilon_k \phi^k u_0$, onde ε_k é um escalar, verificando*

$$D(\phi v_0^{[k]}) + (\psi - k\phi')v_0^{[k]} = 0, \ k \geqslant 0, \ v_0^{[0]} \equiv u_0$$

e o par $(\phi, \psi - k\phi')$ é admissível.

É fundamental mostrar a invariância do carácter ortogonal clássico por uma transformação afim da sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$. Como tal, consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 *[13] Se $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão ortogonal clássica relativamente a u_0, então também $\{\widetilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal clássica relativamente a $\widetilde{u}_0$ onde*

$$\begin{aligned} &\widetilde{P}_n(x) = a^{-n}P_n(ax+b), \quad n \geqslant 0, \quad \text{onde} \ \ a \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \ \ e \ \ b \in \mathbb{C}, \\ &\widetilde{u}_0 = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u_0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

3.5 Formas clássicas: quatro classes de equivalência

As formas clássicas dividem-se em quatro classes de equivalência distintas quando se considera a relação de equivalência apresentada no seguinte resultado:

Teorema 3.5.1 *[11] A seguinte relação entre formas*

$$\forall u, v \in \mathcal{P}', \quad u \sim v \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \ \exists b \in \mathbb{C} : u = (h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})v,$$

é uma relação de equivalência.

Os últimos resultados permitem, através de uma escolha conveniente dos parâmetros arbitrários a e b $(a \neq 0)$, colocar em evidência as quatro situações canónicas: caso de Hermite, Laguerre, Bessel e Jacobi.

Um estudo mais detalhado sobre esta matéria poder-se-á encontrar em [13],[12] ou em [11]. Além disso, em [13] encontrar-se-á um estudo envolvendo representações integrais.

Muito resumidamente, dizemos que uma forma clássica u, nas condições do teorema 3.2.1 é
- uma forma clássica de Hermite se grau$(\Phi) = 0$;
- uma forma clássica de Laguerre se grau$(\Phi) = 1$;
- uma forma clássica de Bessel se grau$(\Phi) = 2$ e Φ possui uma raiz dupla;
- uma forma clássica de Jacobi se grau$(\Phi) = 2$ e Φ possui duas raízes simples.

Capítulo 4

Sucessões Ortogonais Semi-clássicas

4.1 Definição

Definição 4.1.1 *Uma forma regular $u \in \mathcal{P}'$ diz-se semi-clássica se existem polinómios ϕ e ψ de grau t e p, respectivamente, tais que:*

$$D(\phi u) + \psi u = 0 \ , \tag{4.1.1}$$

onde $\operatorname{grau}(\psi) \geqslant 1$, *$\phi$ mónico. Se $p = t - 1$ e $a_p \neq 0$ for o coeficiente do termo de mais alto grau de ψ, exigir-se-á que $a_p \neq n$, $n \geqslant 0$. Nestas condições o par (ϕ, ψ) diz-se admissível.*

Uma sucessão de polinómios $\{P_n\}_{n \geqslant 0}$ (regularmente) ortogonal relativamente a uma forma semi-clássica u diz-se uma sucessão de polinómios ortogonais semi-clássica, ou simplesmente, uma sucessão semi-clássica.

4.2 Classe de uma forma semi-clássica

Uma forma semi-clássica u satisfaz uma infinidade de equações do tipo (4.1.1):

Proposição 4.2.1 *[12] Seja u uma forma semiclássica satisfazendo a equação funcional $D(\phi u) + \psi u = 0$, onde (ϕ, ψ) é um par admissível. Se $\chi \in \mathcal{P}$ é mónico, não nulo e com* $\operatorname{grau}(\chi) = q \geqslant 0$, *então u satisfaz ainda a equação*

$$D(\phi_1 u) + \psi_1 u = 0, \ \text{onde} \tag{4.2.2}$$

$\phi_1 = \chi\phi$ e $\psi_1 = \chi\psi - \chi'\phi$. Além disso, (ϕ_1, ψ_1) é par admissível.

Seja $t = \text{grau}(\phi)$ e $p = \text{grau}(\psi)$. Sob o exposto, consideremos a aplicação de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ em $\mathbb{N}$ que a cada par (ϕ, ψ) associa um número $s = \max(p-1, t-2)$, $s \geqslant 0$. Consideremos a imagem de dois elementos de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (\phi, \psi) & \mapsto & s = \max(p-1, t-2) \\ (\phi_1, \psi_1) & \mapsto & s_1 = \max(p_1 - 1, t_1 - 2) \end{array}$$

Sendo $\phi_1 = (\chi\phi)$, $\psi_1 = (\chi\psi - \chi'\phi)$, $t_1 = \text{grau}(\phi_1)$ e $p_1 = \text{grau}(\psi_1)$, onde χ é um qualquer elemento de $\mathcal{P}$ mónico e não nulo, tem-se que: $s_1 = s + q$ onde $q = \text{grau}(\chi)$.

Com efeito, como

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & \max(p+q, q+t-1) = q+s+1 \\ t_1 & = & q+t, \end{array}$$

então

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & \max(p_1 - 1, t_1 - 2) \\ & = & q+s. \end{array}$$

Na proposição precedente, vimos que se uma forma semi-clássica u satisfizer a equação funcional $D(\phi u) + \psi u = 0$, necessariamente terá de satisfazer a equação $D(\phi_1 u) + \psi_1 u = 0$. Além disso, se o par (ϕ, ψ) for admissível, também (ϕ_1, ψ_1) o será. Assim, podemos definir a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{formas semi-clássicas}\} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ u & \rightarrow & h(u) \ . \end{array}$$

Definição 4.2.1 *O elemento mínimo de $h(u)$ será designado por classe de u. Quando u é de classe s, a sucessão $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ ortogonal relativamente a u diz-se de classe s.*

Corolário 4.2.2 *As sucessões ortogonais clássicas são semi-clássicas de classe zero.*

Para mais considerações acerca da determinação da classe de uma determinada forma semi-clássica u, sugerimos ao leitor [12, p.143-145].

4.3 Consequências das relações do tipo finito

Proposição 4.3.1 *[14, p.309-311] Para qualquer polinómio mónico Φ de grau t e qualquer SP ortogonal $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Existe um inteiro $s \geqslant 0$ tal que

$$\Phi(x)P_n^{[1]}(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \lambda_{n,\nu} P_\nu(x),\ n \geqslant s, \tag{4.3.3}$$

$$\lambda_{n,n-s} \neq 0,\ n \geqslant s+1. \tag{4.3.4}$$

(b) Existe um polinómio Ψ, grau$(\Psi) = p \geqslant 1$, tal que

$$(\Phi u_0)' + \Psi u_0 = 0, \tag{4.3.5}$$

onde o par (Φ, Ψ) é admissível.

(c) Existem um inteiro $s \geqslant 0$ e um polinómio Ψ, grau$(\Psi) = p \geqslant 1$, tais que

$$\Phi(x)P_m'(x) - \Psi(x)P_m(x) = \sum_{\nu=m-t}^{m+s_m} \widetilde{\lambda}_{m,\nu} P_{\nu+1}(x),\ m \geqslant t, \tag{4.3.6}$$

$$\widetilde{\lambda}_{m,m-t} \neq 0,\ m \geqslant t, \tag{4.3.7}$$

onde $s = \max(p-1, t-2)$, o par (Φ, Ψ) é admissível e

$$s_m = \begin{cases} p-1, & m = 0, \\ s, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Podemos ainda escrever que

$$\widetilde{\lambda}_{m,\nu} = -(\nu+1)\frac{\langle u_0, P_m^2\rangle}{\langle u_0, P_{\nu+1}^2\rangle}\lambda_{\nu,m},\ 0 \leqslant \nu \leqslant m+s. \tag{4.3.9}$$

Observações 4.3.1

1. *Quando $t \geqslant s+3$ em (4.3.3), tal significa que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ não é ortogonal.*
2. *Quando $s = 0$ encontramos os polinómios ortogonais clássicos. Neste caso, temos o resultado a seguir apresentado.*

Proposição 4.3.2 *[14, p.311,312] A SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ ortogonal é clássica se e só se existir um inteiro t, $0 \leqslant t \leqslant 2$, tal que*

$$\begin{aligned} &P_m(x) = \textstyle\sum_{\nu=m-t}^{m} \zeta_{m,\nu} P_\nu^{[1]}(x),\ m \geqslant t, \\ &\zeta_{m,m-t} \neq 0,\ m \geqslant t. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Capítulo 5

Nova Prova do teorema de Hahn

5.1 Enunciado do teorema de Hahn

Teorema 5.1.1 (Hahn) *[15] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sucessão ortogonal. Se existir $k \geqslant 1$ tal que $\left\{P_n^{[k]}\right\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal, então $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão clássica.*

Antes de prosseguirmos, por uma questão de simplicidade de escrita, faça-se

$$Q_n(x) := P_n^{[k]}(x), \quad n \geqslant 0 ,$$

e seja $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ a sucessão dual associada à sucessão de polinómios $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ (com $v_n = u_n^{[k]}$). Esta notação será usada até ao final deste trabalho.

Consideremos primeiro alguns resultados.

5.2 Resultados preliminares

Antes de se dar início à prova ir-se-ão demonstrar alguns resultados que serão fundamentais para as nossas conclusões.

Lema 5.2.1 *Sejam f , $g \in \mathcal{P}$ e seja $w \in \mathcal{P}'$. Se os polinómios f e g não tiverem raízes comuns, e se $fw = 0$ e $gw = 0$, então $w = 0$.*

Prova: Consideremos as factorizações de f e g. Deste modo,

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{\nu=1}^{r} (x - b_\nu)^{r_\nu}, \text{ com grau}(f) = \sum_{\nu=1}^{r} r_\nu \geqslant 0 \quad , \\ g(x) &= \prod_{\tau=1}^{s} (x - c_\tau)^{s_\tau}, \text{ com grau}(g) = \sum_{\tau=1}^{s} s_\tau \geqslant 0 \quad , \end{aligned}$$

onde $b_\nu \neq c_\tau$, para $1 \leqslant \nu \leqslant r$ e $1 \leqslant \tau \leqslant s$.

Sob a hipótese de que $fw = 0$, deduzimos, pela proposição 2.1.6, que

$$w = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=0}^{r_\nu - 1} B_\mu^\nu \left(\delta_{b_\upsilon}\right)^{(\mu)},$$

onde os coeficientes B_μ^ν são números complexos, com $0 \leqslant \mu \leqslant r_\nu - 1$ e $t \geqslant 1$ o número de raízes distintas.

Analogamente, sob a hipótese $gw = 0$, deduzimos que

$$w = \sum_{\tau=1}^{s} \sum_{\sigma=0}^{s_\tau - 1} C_\sigma^\tau \left(\delta_{c_\tau}\right)^{(\sigma)} .$$

E, portanto,

$$\sum_{\tau=1}^{s} \sum_{\sigma=0}^{s_\tau - 1} C_\sigma^\tau \left(\delta_{c_\tau}\right)^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=0}^{r_\nu - 1} B_\mu^\nu \left(\delta_{b_\upsilon}\right)^{(\mu)} .$$

Sendo c_τ e b_υ, com $1 \leqslant \tau \leqslant s$ e $1 \leqslant \upsilon \leqslant r$, todos distintos, resulta que δ_{c_τ}, δ_{b_υ} são linearmente independentes. Além disso, $\left(\delta_{c_\tau}\right)^{(\sigma)}$, com $1 \leqslant \sigma \leqslant s_\tau - 1$, são linearmente independentes de δ_{c_τ}, para $1 \leqslant \tau \leqslant s$. De forma inteiramente análoga tem-se que $\left(\delta_{b_\upsilon}\right)^{(\mu)}$, com $1 \leqslant \mu \leqslant r_\upsilon - 1$, são linearmente independentes de δ_{b_υ}, para $1 \leqslant \upsilon \leqslant r$. Perante o exposto, necessariamente se tem que $C_\mu^\tau = B_\mu^\nu = 0$, para $1 \leqslant \tau \leqslant s$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s_\tau - 1$ e $1 \leqslant \upsilon \leqslant r$,$1 \leqslant \mu \leqslant r_\upsilon - 1$. E portanto $w = 0$. ■

Lema 5.2.2 *[12, p.144] Seja u uma forma semi-clássica, tal que:*

$$\begin{aligned} D\left(\Phi_1 u\right) + \Psi_1 u &= 0\,, && (5.2.1)\\ D\left(\Phi_2 u\right) + \Psi_2 u &= 0\,, && (5.2.2) \end{aligned}$$

$$\textit{onde } \operatorname{grau}\left(\Phi_i\right) = t_i \ \textit{ e } \operatorname{grau}\left(\Psi_i\right) = p_i \textit{ com } \ i = 1, 2.$$

Se Φ o máximo factor comum entre Φ_1 e Φ_2, então existe um polinómio Ψ, tal que:

$$D\left(\Phi u\right) + \Psi u = 0 \quad \textit{com} \quad s = \max\left(p-1, t-2\right) \qquad (5.2.3)$$

$$\textit{onde } \operatorname{grau}\left(\Phi\right) = t \ \textit{ e } \operatorname{grau}\left(\Psi\right) = p.$$

Além disso, $s = \max\left(p-1, t-2\right) = s_i - t_i + t$, onde $s_i = \max\left(p_i - 1, t_i - 2\right)$, $i = 1, 2$.

Lema 5.2.3 *[15] Seja $\{P_n\}_{n \geqslant 0}$ uma sucessão ortogonal semi-clássica com respeito a u_0. Suponha-se ainda que u_0 satisfaz as duas equações funcionais*

$$\begin{aligned} D\left(\Phi_1 u_0\right) + \Psi_1 u_0 &= 0 \quad \textit{com} \quad s_1 = \max\left(p_1 - 1, t_1 - 2\right), && (5.2.4)\\ D\left(\Phi_2 u_0\right) + \Psi_2 u_0 &= 0 \quad \textit{com} \quad s_2 = \max\left(p_2 - 1, t_2 - 2\right),\\ \textit{onde } \operatorname{grau}\left(\Phi i\right) &= t_i \quad \textit{e } \operatorname{grau}\left(\Psi_i\right) = p_i \textit{ com } \ i = 1, 2\ , \end{aligned}$$

e que existem um inteiro $m \geqslant 0$ e quatro polinómios E, F, G e H, tais que

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= E(x)P_{m+1}(x) + F(x)P_m(x) \\ \Phi_2(x) &= G(x)P_{m+1}(x) + H(x)P_m(x) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

e seja ainda $\Delta(x)$ o determinante do sistema (5.2.5) dado por

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} E(x) & F(x) \\ G(x) & H(x) \end{vmatrix}. \tag{5.2.6}$$

A forma u_0 é clássica se uma das seguintes três condições for verificada:

a) $\exists\, i = 1, 2$ *tal que* $\operatorname{grau}(\Psi_i) \leqslant \operatorname{grau}(\Phi_i) - 1$ *e* $\operatorname{grau}(\Delta) = 2$;

b) $\exists\, i = 1, 2$ *tal que* $\operatorname{grau}(\Psi_i) = \operatorname{grau}(\Phi_i)$ *e* $\operatorname{grau}(\Delta) = 1$;

c) $\exists\, i = 1, 2$ *tal que* $\operatorname{grau}(\Psi_i) = \operatorname{grau}(\Phi_i) + 1$ *e* $\operatorname{grau}(\Delta) = 0$.

Prova: Comecemos por notar que, pela regra de Crammer aplicada ao sistema

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x) & F(x) \\ G(x) & H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m+1}(x) \\ P_m(x) \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$\Delta(x) P_{m+1}(x) = \begin{vmatrix} \Phi_1(x) & F(x) \\ \Phi_2(x) & H(x) \end{vmatrix} = \Phi_1(x) H(x) - \Phi_2(x) F(x),$$

$$\Delta(x) P_m(x) = \begin{vmatrix} E(x) & \Phi_1(x) \\ G(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix} = \Phi_2(x) E(x) - \Phi_1(x) G(x), \; m \geqslant 0.$$

Lembremos que, pelo corolário 2.1.5, P_m e P_{m+1}, $m \geqslant 0$, não têm zeros comuns. Assim, qualquer factor comum de Φ_1 e Φ_2 é-o também de Δ. Em particular, se Φ for o maior factor comum entre Φ_1 e Φ_2, Φ é factor de Δ. Nesse sentido, tem-se

$$\Phi_i = \Phi \widetilde{\Phi}_i \quad \text{com } i = 1, 2$$

$$\Delta = \Phi \widetilde{\Delta}. \tag{5.2.7}$$

Pelo lema (5.2.2), existe um polinómio Ψ, tal que, $(\Phi u_0)' + \Psi u_0 = 0$. Trivialmente podemos obter as igualdades seguintes [1]:

$$\widetilde{\Phi}_i \Psi = \Psi_i + \widetilde{\Phi}_i' \Phi \quad , \quad i = 1, 2.$$

Analisando o grau de ambos os membros da equação anterior, tem-se

$$\operatorname{grau}\left(\widetilde{\Phi}_i\right) + \operatorname{grau}(\Psi) = \max\left\{\operatorname{grau}(\Psi_i), \operatorname{grau}\left(\widetilde{\Phi}_i'\right) + \operatorname{grau}(\Phi)\right\}$$

[1] O leitor interessado poderá encontrar mais detalhes em [12, p.144]

Atendendo à expressão de Φ_i, então $\text{grau}\left(\widetilde{\Phi}_i\right) = \text{grau}\,(\Phi_i) - \text{grau}\,(\Phi)$, a igualdade anterior passa a escrever-se como

$$\text{grau}\,(\Phi_i) - \text{grau}\,(\Phi) + \text{grau}\,(\Psi) = \max\left\{\text{grau}\,(\Psi_i)\,, \text{grau}\,(\Phi_i) - 1\right\}. \quad (5.2.8)$$

Recorde-se ainda que, sendo u_0 uma forma semi-clássica, necessariamente se tem $\text{grau}\,(\Psi) \geqslant 1$. Proceda-se agora a uma análise de cada uma das hipóteses: (a), (b) e (c). Ainda a referir que se $\text{grau}\,(\Delta) \leqslant 2$, então necessariamente $\text{grau}\,(\Phi) \leqslant 2$.

Em (a), supõe-se que $\exists\, i = 1, 2$ tal que $\text{grau}\,(\Psi_i) \leqslant \text{grau}\,(\Phi_i) - 1$, pelo que a equação (5.2.8) escreve-se

$$\text{grau}\,(\Phi_i) - \text{grau}\,(\Phi) + \text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi_i) - 1$$

i.e.

$$\text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi) - 1$$

e como $\text{grau}\,(\Psi) \geqslant 1$ então $\text{grau}\,(\Phi) \geqslant 2$. Por outro lado, atendendo a (5.2.7), $\text{grau}\,(\Delta) = \text{grau}\,(\Phi) + \text{grau}\left(\widetilde{\Delta}\right)$, pelo que $\text{grau}\,(\Delta) = 2$ obriga a $\text{grau}\,(\Phi) \leqslant 2$. Assim, $\text{grau}\,(\Phi) = 2$, logo $\text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi) - 1 = 1$. Resulta por isso que a forma u_0 é clássica. As condições de admissibilidade de uma forma clássica são naturalmente verificadas.

Mais, atentando no grau de Φ, concluímos que se trata de uma forma de Bessel (se Φ tiver uma raíz dupla) ou Jacobi (se Φ tiver duas raízes distintas).

Em (b), supomos que $\exists\, i = 1, 2$ tal que $\text{grau}\,(\Psi_i) = \text{grau}\,(\Phi_i)$, pelo que a equação (5.2.8) conduz-nos ao seguinte:

$$\text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi)\,,$$

logo $\text{grau}\,(\Phi) \geqslant 1$ pois $\text{grau}\,(\Psi) \geqslant 1$. Por outro lado, atendendo a (5.2.7), $\mathit{grau}\,(\Delta) = \text{grau}\,(\Phi) + \text{grau}\left(\widetilde{\Delta}\right)$, pelo que $\text{grau}\,(\Delta) = 1$ obriga a $\text{grau}\,(\Phi) \leqslant 1$. Em resultado disso, tem-se $\text{grau}\,(\Phi) = 1$, logo $\text{grau}(\Psi) = \text{grau}(\Phi) = 1$. Nestas condições, tem-se que a forma u_0 é clássica. Ainda a referir que, sendo $\text{grau}\,(\Phi) = 1$, trata-se de uma forma clássica de Laguerre.

Em (c), supõe-se $\text{grau}\,(\Psi_i) = \text{grau}\,(\Phi_i) + 1$, pelo que a equação (5.2.8) obriga a que

$$\text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi) + 1$$

Como $\text{grau}\,(\Psi) \geqslant 1$, então $\text{grau}\,(\Phi) \geqslant 0$. Por outro lado, atendendo a (5.2.7), $\text{grau}\,(\Delta) = \text{grau}\,(\Phi) + \text{grau}(\widetilde{\Delta})$, donde $\text{grau}\,(\Delta) = 0$ obriga a $\text{grau}\,(\Phi) \leqslant 0$, do que se conclui que $\text{grau}\,(\Phi) = 0$.

Logo $\text{grau}\,(\Psi) = \text{grau}\,(\Phi) + 1 = 1$. Deste modo, tem-se que a forma u_0 é clássica, mais concretamente, corresponde à forma clássica de Hermite (pois $\text{grau}\,(\Phi) = 0$). ∎

Finalmente reúnem-se as condições para dar início à construção da nova prova do teorema de Hahn, o objectivo principal deste trabalho.

5.3 Nova prova

Apresentamos, agora, a nova prova do teorema de Hahn 5.1.1, [15].

Sob a hipótese de que as sucessões $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ e $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ são ortogonais relativamente a u_0 e a v_0, respectivamente, tem-se, pela proposição (2.1.4),

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= (x-\beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), \quad n \geqslant 0, \\ P_0(x) &= 1 \;\text{ e }\; P_1(x) = x - \beta_0, \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= (x-\zeta_{n+1})Q_{n+1}(x) - \rho_{n+1}P_n(x), \quad n \geqslant 0, \\ Q_0(x) &= 1 \;\text{ e }\; Q_1(x) = x - \zeta_0, \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

onde as constantes β_n, γ_{n+1}, ζ_n e ρ_{n+1}, $n \geqslant 0$, são dadas pelas expressões contempladas na Proposição (2.1.4). Passo a citar:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\langle u_0, xP_n^2(x)\rangle}{\langle u_0, P_n^2(x)\rangle}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\langle u_0, P_{n+1}^2(x)\rangle}{\langle u_0, P_n^2(x)\rangle} \neq 0, \quad n \geqslant 0, \\ \zeta_n &= \frac{\langle v_0, xQ_n^2(x)\rangle}{\langle v_0, Q_n^2(x)\rangle}, \quad \rho_{n+1} = \frac{\langle v_0, Q_{n+1}^2(x)\rangle}{\langle v_0, Q_n^2(x)\rangle} \neq 0, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, do teorema (2.1.1), tem-se, pela alínea (c)

$$u_n = \left(\langle u_0, P_n^2\rangle\right)^{-1} P_n u_0, \quad n \geqslant 0, \tag{5.3.11}$$

e pela alínea (c) segue que

$$(x-\zeta_n)\,v_n = v_{n-1} + \rho_{n+1}v_{n+1}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.3.12}$$

Seja $k \geqslant 1$. Diferenciando k vezes ambos os membros de (5.3.12), vem que

$$((x-\zeta_n)\,v_n)^{(k)} = (v_{n-1})^{(k)} + \rho_{n+1}\,(v_{n+1})^{(k)}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.3.13}$$

Por outro lado, usando a propriedade contemplada em (1.1.18) do lema 1.1.1, tem-se que

$$\begin{aligned} ((x-\zeta_n)\,v_n)^{(k)} &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (x-\zeta_n)^{(\nu)}\,(v_n)^{(k-\nu)}, \\ &= \binom{k}{0} (x-\zeta_n)^{(0)}\,{v_n}^{(k)} + \binom{k}{1} (x-\zeta_n)^{(1)}\,(v_n)^{(k-1)}, \\ &= (x-\zeta_n)\,{v_n}^{(k)} + k\,(v_n)^{(k-1)}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Substituindo o obtido na igualdade (5.3.13), obtemos:

$$k\,(v_n)^{(k-1)} = (v_{n-1})^{(k)} + \rho_{n+1}\,(v_{n+1})^{(k)} - (x-\zeta_n)\,(v_n)^{(k)}, \; n \geqslant 0, \; k \geqslant 1. \tag{5.3.14}$$

Introduzindo no segundo membro de (5.3.14) as expressões de $(v_{n-1})^{(k)}$, $(v_n)^{(k)}$ e $(v_{n+1})^{(k)}$ pelas indicadas em (1.2.29) do lema 1.2.2, conduz-nos ao seguinte:

$$\begin{aligned}
k(v_n)^{(k-1)} &= (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} [(n-1+\mu)u_{n-1+k} + (n+1+\mu)\rho_{n+1}u_{n+1+k} - \\
&\quad - (n+\mu)(x-\zeta_n)u_{n+k}] \\
&= (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu) \left[\frac{n}{n+k}u_{n-1+k} + \frac{n+k+1}{n+1}\rho_{n+1}u_{n+1+k} - \right. \\
&\quad \left. - (x-\zeta_n)u_{n+k}\right], \quad n \geqslant 0,\ k \geqslant 1,
\end{aligned}$$

pelo que se tem:

$$\begin{aligned}
&(-1)^k\, k\,(v_n)^{(k-1)} \\
&= \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu) \left[\frac{n}{n+k}u_{n-1+k} + \frac{n+k+1}{n+1}\rho_{n+1}u_{n+1+k} - (x-\zeta_n)\,u_{n+k}\right],
\end{aligned}$$

sempre que $n \geqslant 0,\ k \geqslant 1$. Tendo em atenção (5.3.11), o lado direito da equação anterior poder-se-á escrever à custa de u_0:

$$\begin{aligned}
(-1)^k\, k\,(v_n)^{(k-1)} &= \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu) \left[\frac{n}{n+k}\frac{1}{\langle u_0, P^2_{n-1+k}\rangle}P_{n-1+k} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+k+1}{n+1}\frac{\rho_{n+1}}{\langle u_0, P^2_{n+1+k}\rangle}P_{n+1+k} - \frac{(x-\zeta_n)}{\langle u_0, P^2_{n+k}\rangle}P_{n+k}\right] u_0,
\end{aligned}$$

para $n \geqslant 0,\ k \geqslant 1$. Pretendemos agora escrever esta expressão à custa de P_{n+k} e P_{n+k+1}, evitando a dependência em P_{n-1+k}. Usando a relação de recorrência (5.3.9), o primeiro termo da expressão precedente escreve-se como

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{n+k}\frac{1}{\langle u_0, P^2_{n-1+k}\rangle}P_{n-1+k} \\
&= \frac{1}{\gamma_{n+k}}\frac{n}{n+k}\left(\langle u_0, P^2_{n-1+k}\rangle\right)^{-1}\{(x-\beta_{n+k})P_{n+k}(x) - P_{n+k+1}(x)\} \\
&= \frac{1}{\langle u_0, P^2_{n+k}\rangle}\frac{n}{n+k}\{(x-\beta_{n+k})P_{n+k}(x) - P_{n+k+1}(x)\},
\end{aligned}$$

para $n \geqslant 0,\ k \geqslant 1$ e atendendo a que $(\gamma_{n+k})^{-1} = \frac{\langle u_0, P^2_{n-1+k}\rangle}{\langle u_0, P^2_{n+k}\rangle}$. Deste modo,

$$(-1)^k\, k\,(v_n)^{(k-1)} = \frac{\prod_{\mu=1}^{k}(n+\mu)}{\langle u_0, P^2_{n+k}\rangle}\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{n+k+1}{n+1}\frac{\rho_{n+1}}{\gamma_{n+1+k}} - \frac{n}{n+k}\right]P_{n+k+1} \\ \\ -\left[\frac{k}{n+k}x + \frac{n}{n+k}\beta_{n+k} - \zeta_n\right]P_{n+k}\end{array}\right\}u_0,$$

para $n \geqslant 0,\ k \geqslant 1$. Podemos escrever de maneira mais sucinta, sob a forma

$$(v_n)^{(k-1)} = N_n^k \Phi_{n+k+1} u_0, \quad n \geqslant 0 \qquad (5.3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} N_n^k \Phi_{n+k+1}(x) &= L_n^k \left\{ \left[\frac{n+k+1}{n+1} \rho_{n+1} \gamma_{n+1+k}^{-1} - \frac{n}{n+k} \right] P_{n+k+1} - \right. \\ &- \left. \left[\frac{k}{n+k} x + \frac{n}{n+k} \beta_{n+k} - \zeta_n) \right] P_{n+k} \right\}, \end{aligned}$$

em que N_n^k representa uma constante de normalização (necessariamente diferente de zero!),

$$L_n^k = (-1)^k k^{-1} \left(\langle u_0, P_{n+k}^2 \rangle \right)^{-1} \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu), \quad n \geqslant 0, \quad k \geqslant 1,$$

e Φ_{n+k+1}é um polinómio mónico de grau $\leqslant n+k+1$. Ora de (5.3.15) segue-se que

$$(v_n)^{(k)} = N_n^k \left(\Phi_{n+k+1} u_0 \right)', \quad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1,$$

mas por outro lado, de (1.2.29) e face à ortogonalidade de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ (alínea (e) do teorema 2.1.1) concluímos que

$$(v_n)^{(k)} = (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu) \left(\langle u_0, P_{n+k}^2 \rangle \right)^{-1} P_{n+k} u_0, \quad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1.$$

Deste modo, encontramos a equação:

$$N_n^k \left(\Phi_{n+k+1} u_0 \right)' + (-1)^{k-1} \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu) \left(\langle u_0, P_{n+k}^2 \rangle \right)^{-1} P_{n+k} u_0 = 0, \ n \geqslant 0.$$

Visando a simplificação de escrita, tomemos

$$\left(\Phi_{n+k+1} u_0 \right)' + \lambda_n^k P_{n+k} u_0 = 0, \quad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1, \tag{5.3.16}$$

onde

$$\lambda_n^k = (-1)^{k-1} \left(\langle u_0, P_{n+k}^2 \rangle \right)^{-1} \left(N_n^k \right)^{-1} \prod_{\mu=1}^{k} (n+\mu), \quad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1.$$

A equação funcional (5.3.16) garante que u_0 é uma forma semi-clássica. As condições de admissibilidade são naturalmente satisfeitas. Analisando a expressão de Φ_{n+k+1}, é possível dar-lhe um novo aspecto. Nesse sentido, escreva-se

$$\Phi_{n+k+1}(x) = A_n^k P_{n+k+1}(x) - \left(B_n^k x + C_n^k \right) P_{n+k}(x), \quad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1, \tag{5.3.17}$$

onde

$$\begin{aligned} A_n^k &= \left(N_n^k \right)^{-1} L_n^k \left[\frac{n+k+1}{n+1} \rho_{n+1} \gamma_{n+1+k}^{-1} - \frac{n}{n+k} \right], \\ B_n^k &= \left(N_n^k \right)^{-1} L_n^k \left[\frac{k}{n+k} \right], \\ C_n^k &= \left(N_n^k \right)^{-1} L_n^k \left[\frac{n}{n+k} \beta_{n+k} - \zeta_n \right], \qquad n \geqslant 0 \ , \ k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Em particular para $n = 0$ e $n = 1$,

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(x) &= A_0^k P_{k+1}(x) - \left(B_0^k x + C_0^k\right) P_k(x), \; k \geqslant 1, \\ \Phi_{k+2}(x) &= A_1^k P_{k+2}(x) - \left(B_1^k x + C_1^k\right) P_{k+1}(x), \; k \geqslant 1.\end{aligned}$$

De realçar que podemos escrever Φ_{k+2} simplesmente à custa de P_{k+1} e P_k, $k \geqslant 1$, se considerarmos que

$$P_{k+2}(x) = (x - \beta_{k+1}) P_{k+1}(x) - \gamma_{k+1} P_k(x), \qquad k \geqslant 1,$$

pelo que

$$\Phi_{k+2}(x) = \left(A_1^k (x - \beta_{k+1}) - B_1^k x - C_1^k\right) P_{k+1}(x) - A_1^k \gamma_{k+1} P_k(x), \qquad k \geqslant 1,$$

ou seja,

$$\Phi_{k+1}(x) = A_0^k P_{k+1}(x) - (B_0^k x + C_0^k) P_k(x), \tag{5.3.18}$$

$$\Phi_{k+2}(x) = \left((A_1^k - B_1^k)x - (A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k)\right) P_{k+1}(x) - A_1^k \gamma_{k+1} P_k(x). \tag{5.3.19}$$

Em particular, tem-se que a forma semi-clássica u_0 satisfaz as seguintes equações funcionais

$$\begin{aligned}(\Phi_{k+1} u_0)' + (\lambda_0^k P_k) u_0 &= 0, \quad k \geqslant 1, \\ (\Phi_{k+2} u_0)' + \left(\lambda_1^k P_{k+1}\right) u_0 &= 0, \quad k \geqslant 1,\end{aligned}$$

obtidas de (5.3.16) tomando $n = 0$ e $n = 1$, respectivamente.

Considere-se, agora, o seguinte sistema que permitirá escrever Φ_{k+1} e Φ_{k+2} como o produto de uma matriz pelo vector formado por P_{k+1} e P_k, $k \geqslant 1$:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{k+1}(x) \\ \Phi_{k+2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^k & -(B_0^k x + C_0^k) \\ (A_1^k - B_1^k)x - (A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k) & -A_1^k \gamma_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k+1}(x) \\ P_k(x) \end{bmatrix},$$

Denote-se por $\Delta_k(x)$ o determinante da matriz anterior, isto é,

$$\Delta_k(x) = \begin{vmatrix} A_0^k & -\left(B_0^k x + C_0^k\right) \\ \left(A_1^k - B_1^k\right) x - \left(A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k\right) & -A_1^k \gamma_{k+1} \end{vmatrix}, \qquad k \geqslant 1.$$

Podemos sempre escrever $\Delta_k(x)$ na forma polinomial, isto é,

$$\begin{aligned}\Delta_k(x) &= B_0^k \left(A_1^k - B_1^k\right) x^2 + \left[C_0^k \left(A_1^k - B_1^k\right) - B_0^k \left(A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k\right)\right] x \\ &- \left[C_0^k \left(A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k\right) + A_0^k A_1^k \gamma_{k+1}\right],\end{aligned}$$

para cada $k \geqslant 1$.

Com base no lema 5.2.3, podemos averiguar em que casos u_0 é clássica. Para tal, convém avaliar os graus dos polinómios Φ_{k+1}, Φ_{k+2}, $\Psi_{k+1}(x) = \lambda_0^k P_k(x)$ e $\Psi_{k+2}(x) = \lambda_1^k P_{k+1}(x)$, para cada $k \geqslant 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) &\leqslant k+1, \\
\operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) &\leqslant k+2, \\
\operatorname{grau}(\Psi_{k+1}) &= \operatorname{grau}(P_k) = k \ , \\
\operatorname{grau}(\Psi_{k+2}) &= \operatorname{grau}(P_{k+1}) = k+1, \quad k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Pelo exposto e atendendo ao lema 5.2.3, temos que u_0 é uma forma clássica se uma das três condições for verificada:

$$\begin{aligned}
\text{i) } \operatorname{grau}(\Delta_k) &= 2 \, e \, \{\operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) = k+1 \, ou \, \operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) = k+2\}, \ k \geqslant 1; \\
\text{ii) } \operatorname{grau}(\Delta_k) &= 1 \, e \, \{\operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) = k \, ou \, \operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) = k+1\}, \ k \geqslant 1; \\
\text{iii) } \operatorname{grau}(\Delta_k) &= 0 \, e \, \{\operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) = k-1 \, ou \, \operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) = k\}, \ k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Analisemos detalhadamente cada um destes casos:

i) $\operatorname{grau}(\Delta_k) = 2$ e $\{\operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) = k+1$ ou $\operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) = k+2, \ k \geqslant 1\}$. Vejamos que condições a impôr sobre os coeficientes presentes em qualquer destes polinómios. Assim,

$$\operatorname{grau}(\Delta_k) = 2 \ \text{ sse } \ \left(A_1^k - B_1^k\right) \neq 0 \ \text{ e } \ B_0^k \neq 0, \quad k \geqslant 1,$$

ou seja,

$$\operatorname{grau}(\Delta_k) = 2 \ \text{ sse } \ \left(A_1^k - B_1^k\right) \neq 0, \quad k \geqslant 1, \tag{5.3.20}$$

já que $B_n^k > 0$, para $n \geqslant 0$ e $k \geqslant 1$ (basta atentar na expressão de B_n^k). Por outro lado,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{grau}(\Phi_{k+1}) = k+1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{grau}(\Phi_{k+2}) = k+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_0^k - B_0^k \neq 0 \\ \text{ou} \\ A_1^k - B_1^k \neq 0 \end{array}\right., \quad k \geqslant 1. \tag{5.3.21}$$

Do exposto, concluímos que se

$$\mathbf{A}_1^k - \mathbf{B}_1^k \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \geqslant \mathbf{1}, \tag{5.3.22}$$

então u_0 é uma forma clássica, mais precisamente, corresponderá à forma canónica de Bessel, caso $\Phi(x)$ tenha uma única raíz (dupla) e corresponderá à forma canónica de Jacobi caso tenha duas raízes complexas distintas.

Recorrendo às expressões de A_0^k, A_1^k, B_0^k e de B_1^k, podemos escrever (5.3.22) à custa dos coeficientes γ_m e ρ_m, para $m \geqslant 0$. Nesse sentido, tem-se que:

$$\left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k \left[\frac{k+2}{2}\rho_2\gamma_{k+2}^{-1} - \frac{1}{k+1}\right] \neq \left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k \left[\frac{k}{k+1}\right], \quad k \geqslant 1$$

isto é,

$$(k+2)\,\rho_2\gamma_{k+2}^{-1} \neq 2, \quad k \geqslant 1.$$

ii) $\text{grau}(\Delta_k) = 1$ e $\{\text{grau}(\Phi_{k+1}) = k$ ou $\text{grau}(\Phi_{k+2}) = k+1,\ k \geqslant 1\}$. Para que $\text{grau}(\Delta_k) = 1$, temos de exigir que

$$A_1^k - B_1^k = 0 \ \text{ e } \ \left(B_0^k \neq 0 \ \text{ ou } \ A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k\right) \neq 0, \qquad k \geqslant 1,$$

isto é,

$$A_1^k - B_1^k = 0 \ \text{ e } \ A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k \neq 0, \qquad k \geqslant 1, \tag{5.3.23}$$

pois, $B_0^k > 0$, $k \geqslant 1$, como já ficou visto. Além disso devemos ainda considerar as condições $\text{grau}(\Phi_{k+1}) = k$ ou $\text{grau}(\Phi_{k+2}) = k+1$, $k \geqslant 1$. Para tal, dever-se-á substituir na expressão de Φ_{k+1}, o polinómio P_{k+1} pela respectiva relação de recorrência dada por (5.3.9). Nesse sentido, escreva-se

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(x) &= A_0^k\left[(x-\beta_k)P_k(x) - \gamma_k P_{k-1}(x)\right] - \left(B_0^k x + C_0^k\right) P_k(x), \\ &= \left(A_0^k - B_0^k\right) x P_k(x) - \left(A_0^k \beta_k + C_0^k\right) P_k(x) - A_0^k \gamma_k P_{k-1}(x), k \geqslant 1.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{grau}(\Phi_{k+1}) = k \\ \text{ou} \\ \text{grau}(\Phi_{k+2}) = k+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_0^k - B_0^k = 0 \wedge A_0^k\beta_k + C_0^k \neq 0 \\ \text{ou} \\ A_1^k - B_1^k = 0 \wedge A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k \neq 0\end{array}\right., \ k \geqslant 1. \tag{5.3.24}$$

Intersectando as condições obtidas em (5.3.23) e em (5.3.24), concluímos que u_0 é uma forma clássica, mais concretamente, corresponderá à forma canónica de Laguerre, se

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{A_1^k - B_1^k = 0}, \\ \\ \mathbf{A_1^k}\beta_{k+1} + \mathbf{C_1^k \neq 0},\end{array}\right. \qquad \mathbf{k \geqslant 1}. \tag{5.3.25}$$

Lembrando as expressões de A_1^k, B_1^k e de C_1^k, $k \geqslant 1$, tem-se que

$$\left\{\begin{array}{l}\left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k\left[\frac{k+2}{2}\rho_2\gamma_{k+2}^{-1} - \frac{1}{k+1}\right] = \left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k\left[\frac{k}{k+1}\right] \\ \\ \left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k\left[\frac{k+2}{2}\rho_2\gamma_{k+2}^{-1} - \frac{1}{k+1}\right]\beta_{k+1} + \left(N_1^k\right)^{-1} L_1^k\left[\frac{1}{1+k}\beta_{1+k} - \zeta_1\right] \neq 0\end{array}\right.,$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{l}(k+2)\,\rho_2\gamma_{k+2}^{-1} = 2 \\ \\ (k+2)\,\rho_2\gamma_{k+2}^{-1}\beta_{k+1} \neq 2\zeta_1\end{array}\right., \quad k \geqslant 1.$$

iii) $\text{grau}(\Delta_k) = 0$ e $\{\text{grau}(\Phi_{k+1}) = k-1$ ou $\text{grau}(\Phi_{k+2}) = k\}$, $k \geqslant 1$. Exigir que $\text{grau}(\Delta_k) = 0$, $k \geqslant 1$, equivale a exigir que $\Delta_k(x) = const. \neq 0$, ou seja,

$$\left(A_1^k - B_1^k\right) = 0 \quad \text{e} \quad A_1^k\beta_{k+1} + C_1^k = 0 \quad \text{e} \quad A_0^k\left(-A_1^k\gamma_{k+1}\right) \neq 0, \quad k \geqslant 1,$$

isto é,

$$\begin{cases} A_0^k \neq 0, & \\ A_1^k = B_1^k, & k \geqslant 1, \\ A_1^k \beta_{k+1} + C_1^k = 0, & \end{cases}$$

mas como $A_0^k \neq 0$, $\forall k \geqslant 1$, impõe-se apenas que:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^k = \mathbf{B}_1^k, & \\ & \mathbf{k} \geqslant \mathbf{1}. \\ \mathbf{A}_1^k \beta_{k+1} + \mathbf{C}_1^k = \mathbf{0}, & \end{cases} \tag{5.3.26}$$

Por outro lado, devemos ainda impôr que $\text{grau}\,(\Phi_{k+1}) = k-1$ ou $\text{grau}\,(\Phi_{k+2}) = k$, $k \geqslant 1$. Para fazermos tal análise, comecemos por notar que, usando as condições (5.3.26), $\Phi_{k+1}(x)$ e $\Phi_{k+2}(x)$ (dados em (5.3.18) e em (5.3.19)) escrevem-se

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}(x) &= A_0^k P_{k+1}(x) - \left(B_0^k x + C_0^k\right) P_k(x), \\ \Phi_{k+2}(x) &= -A_1^k \gamma_{k+1} P_k(x), \quad k \geqslant 1, \end{aligned}$$

Como $A_1^k \neq 0$ e $\gamma_{k+1} \neq 0$, $k \geqslant 1$, então $\text{grau}\,(\Phi_{k+2}) = k$, $k \geqslant 1$. Assim, exigir que $\text{grau}\,(\Delta_k) = 0$ e $\{\text{grau}\,(\Phi_{k+1}) = k-1$ ou $\text{grau}\,(\Phi_{k+2}) = k\}$, $k \geqslant 1$, equivale a exigir que $\text{grau}\,(\Delta_k) = 0$. Nesse sentido, u_0 corresponderá a uma forma clássica se as condições (5.3.26) forem satisfeitas. Mais concretamente, u_0 estará na classe de equivalência das formas clássicas de Hermite.

Tais condições podem ser expressas simplesmente à custa dos coeficientes β_m, γ_m, ζ_m, ρ_m, para $m \geqslant 0$, bastando, para tal, atender, mais uma vez, às expressões de A_1^k, B_1^k e C_1^k, $k \geqslant 1$, pelo que o sistema anterior é equivalente a:

$$\begin{cases} (k+2)\,\rho_2 \gamma_{k+2}^{-1} = 2, \\ (k+2)\,\rho_2 \gamma_{k+2}^{-1} \beta_{k+1} \neq 2\zeta_1, \end{cases}, \quad k \geqslant 1.$$

Como (5.3.22), (5.3.25) e (5.3.26) são condições complementares, concluímos que u_0 satisfará obrigatoriamente um dos três casos (i), ii) ou iii)). Deste modo, u_0 é uma forma clássica, o que equivale a afirmar que a SP $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sucessão de polinómios ortogonal clássica com respeito a u_0. ∎

Observação 5.3.1 *De assinalar que, na demonstração do teorema de Hahn, foram dadas condições nos parâmetros β_n, γ_{n+1}, ζ_n e ρ_{n+1}, $n \geqslant 0$, para o caso em que u_0 se tratava de uma forma clássica de Hermite (caso iii), Laguerre (caso ii), Bessel ou Jacobi (caso i).*

Capítulo 6

Uma Extensão do teorema de Hahn

Coloquemo-nos perante o problema de determinar todas as sucessões ortogonais $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ para as quais existem dois inteiros $k, m \geqslant 1$ fixos tais que, fazendo $Q_n := P_n^{[k]}$, $n \geqslant 0$, a sucessão associada de ordem $m \geqslant 1$, $\left\{Q_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$, é também ortogonal.

Quando $m = 0$, estamos no problema de Hahn, já tratado no capítulo precedente. Para $m \geqslant 1$, a resposta é dada no teorema seguinte.

Teorema 6.0.1 (da Extensão) *[15] Seja $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP ortogonal. Seja $k \geqslant 1$ um inteiro fixo e escreva-se $Q_n := P_n^{[k]}$, $n \geqslant 0$. Se existir um inteiro $m \geqslant 1$, tal que, a sucessão associada $\left\{Q_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal, então $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma SP clássica.*

6.1 Resultados preliminares

Lema 6.1.1 *[15] Seja $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ uma SP qualquer cuja sequência dual é $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$. Então, para qualquer inteiro $m \geqslant 1$, a sucessão dual $\left\{v_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$ da sucessão associada $\left\{Q_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$ satisfaz*

$$v_n^{(m)} v_{m-1} = x v_{n+m}, \qquad n \geqslant 0. \tag{6.1.1}$$

Quando $\left\{Q_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$ é ortogonal tem-se ainda que $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfaz

$$s_n^{(m)} v_{n+m} = Q_n^{(m)} v_m - Q_{n-1}^{(m+1)} v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0, \tag{6.1.2}$$

onde

$$s_n^{(m)} = \left\langle v_0^{(m)}, \left(Q_n^{(m)}\right)^2 \right\rangle \quad , \; n \geqslant 0, \; m \geqslant 1. \tag{6.1.3}$$

Prova: Seja $m \geqslant 1$ inteiro. Comecemos por demonstrar a igualdade (6.1.1). A proposição (1.2.5) valida esta igualdade para o caso $m = 1$, já que nela se prova que

$$v_n^{(1)} v_0 = x v_{n+1}, \; n \geqslant 0,$$

fazendo $u_n \equiv v_n$.

Suponhamos que

$$v_n^{(\nu)} v_{\nu-1} = x v_{n+\nu}, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant m. \tag{6.1.4}$$

Para $\nu = m+1$, tem-se, ainda pela referida proposição, fazendo $u_n \equiv v_n^{(m)}$, que:

$$v_n^{(m+1)} v_0^{(m)} = x v_{n+1}^{(m)}, \qquad n \geqslant 0.$$

Multipliquem-se ambos os membros por v_{m-1}

$$v_n^{(m+1)} v_0^{(m)} v_{m-1} = \left(x v_{n+1}^{(m)}\right) v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Considerando $\nu = m$ e $n = 0$ na equação (6.1.4) segue-se que $v_0^{(m)} v_{m-1} = x v_m$, pelo que a expressão anterior escreve-se

$$v_n^{(m+1)} (x v_m) = \left(x v_{n+1}^{(m)}\right) v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0. \tag{6.1.5}$$

Lembrando (1.1.10) tem-se que

$$\begin{aligned}
\left(x v_{n+1}^{(m)}\right) v_{m-1} &= x \left(v_{n+1}^{(m)} v_{m-1}\right) - x \left(v_{n+1}^{(m)} \vartheta_0 \zeta\right)(x)\, v_{m-1} \\
&= x \left[v_{n+1}^{(m)} v_{m-1} - \left(v_{n+1}^{(m)} \vartheta_0 \zeta\right)(x)\, v_{m-1}\right] \\
&= x \left(v_{n+1}^{(m)} v_{m-1}\right) = x \left(x v_{n+m+1}\right) \\
&= x^2 v_{n+m+1}, \quad n \geqslant 0,
\end{aligned}$$

já que

$$\left(v_{n+1}^{(m)} \vartheta_0 \zeta\right)(x) = \left\langle v_{n+1}^{(m)}, \frac{x\vartheta_0\zeta - \zeta\vartheta_0\zeta}{x - \zeta} \right\rangle = \left\langle v_{n+1}^{(m)}, 1 \right\rangle = \left(v_{n+1}^{(m)}\right)_0 = 0, \; n \geqslant 0.$$

Equivalentemente, por (1.1.10) tem-se ainda que

$$\begin{aligned}
v_n^{(m+1)} (x v_m) &= x \left(v_n^{(m+1)} v_m\right) - x \left(v_m \vartheta_0 \zeta\right)(x)\, v_n^{(m+1)} \\
&= x \left(v_n^{(m+1)} v_m\right),
\end{aligned}$$

dado que $\left(v_m \vartheta_0 \zeta\right)(x) = \langle v_m, 1 \rangle = (v_m)_0 = 0, m \geqslant 1$. Deste modo, a equação (6.1.5) escreve-se:

$$x \left(v_n^{(m+1)} v_m\right) = x^2 v_{n+m+1}, \qquad n \geqslant 0. \tag{6.1.6}$$

Consideremos a multiplicação por x^{-1} na igualdade anterior, isto é,

$$x^{-1}\left[x\left(v_{n+1}^{(m)}v_m\right)\right] = x^{-1}\left[x^2 v_{n+m+1}\right],\ n \geqslant 0.$$

Usando (1.1.13), o primeiro membro escreve-se

$$x^{-1}\left[x\left(v_n^{(m+1)}v_{m-1}\right)\right] = \left(v_n^{(m+1)}v_m\right) - \left(v_n^{(m+1)}v_m\right)_0 \delta, \qquad n \geqslant 0.$$

No entanto,

$$\begin{aligned}\left(v_n^{(m+1)}v_m\right)_0 &= \left\langle v_n^{(m+1)}v_m, 1\right\rangle = \left\langle v_n^{(m+1)}, v_m(1)\right\rangle \\ &= \left\langle v_n^{(m+1)}, \langle v_m, 1\rangle\right\rangle = \left\langle v_n^{(m+1)}, 0\right\rangle = 0,\ n \geqslant 0,\end{aligned}$$

pois, por definição de sucessão dual,$\langle v_m, 1\rangle = 0,\ m \geqslant 1$. Por conseguinte,

$$x^{-1}\left[x\left(v_n^{(m+1)}v_m\right)\right] = v_n^{(m+1)}v_m, \qquad n \geqslant 0.$$

Recorrendo a (1.1.15),

$$\begin{aligned}x^{-1}\left[x^2 v_{n+m+1}\right] &= x v_{n+m+1} - \langle v_{n+m+1}, x\rangle\delta \\ &= x v_{n+m+1} - (v_{n+m+1})_1\,\delta \\ &= x v_{n+m+1}, \quad n \geqslant 0,\end{aligned}$$

pois $n+m+1 \geqslant 2$ obriga a que $(v_{n+m+1})_1 = 0$. Do exposto conclui-se que

$$v_n^{(m+1)}v_m = x v_{n+m+1}, \qquad n \geqslant 0,$$

o que completa a demonstração da igualdade (6.1.1).

Se supusermos $\left\{Q_n^{(m)}\right\}_{n\geqslant 0}$ ortogonal relativamente a $v_0^{(m)}$, então, pela alínea (e) do teorema 2.1.1, tem-se

$$s_n^{(m)}v_n^{(m)} = Q_n^{(m)}v_0^{(m)},\ \ n \geqslant 0,$$

onde $s_n^{(m)}$ é dado por (6.1.3). Multipliquemos ambos os membros por v_{m-1}:

$$s_n^{(m)}v_n^{(m)}v_{m-1} = \left(Q_n^{(m)}v_0^{(m)}\right)v_{m-1},\ n \geqslant 0,$$

Usando a igualdade (6.1.1) já demonstrada, tem-se que

$$\begin{aligned}s_n^{(m)}x v_{n+m} &= \left(Q_n^{(m)}v_0^{(m)}\right)v_{m-1}, \quad \text{i.e.,} \\ x s_n^{(m)}v_{n+m} &= \left(Q_n^{(m)}v_0^{(m)}\right)v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Por (1.1.10), segue que:

$$\begin{aligned}\left(Q_n^{(m)}v_0^{(m)}\right)v_{m-1} &= Q_n^{(m)}\left(v_0^{(m)}v_{m-1}\right) - x\left(v_0^{(m)}\vartheta_0 Q_n^{(m)}\right)(x)\,v_{m-1} \\ &= Q_n^{(m)}(x v_m) - x\left(Q_{n-1}^{(m+1)}\right)(x)\,v_{m-1} \\ &= x Q_n^{(m)}v_m - x Q_{n-1}^{(m+1)}v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0.\end{aligned}$$

Deste modo, (6.1.7) escreve-se

$$xs_n^{(m)}v_{n+m} = xQ_n^{(m)}v_m - xQ_{n-1}^{(m+1)}v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Multipliquem-se ambos os membros da igualdade anterior por x^{-1}. Por (1.1.15),

$$\begin{aligned} x^{-1}(xv_{n+m}) &= 0\left(x^{-1}v_{n+m}\right) + (\vartheta_0 x)\, v_{n+m} - \langle v_{n+m}, \vartheta_0 x\rangle\, \delta \\ &= (1)\, v_{n+m} - \langle v_{n+m}, 1\rangle\, \delta = v_{n+m} - (v_{n+m})_0\, \delta \\ &= v_{n+m} - 0.\delta = v_{n+m}, \quad n \geqslant 0, \end{aligned}$$

e segue-se ainda que

$$\begin{aligned} x^{-1}\left[xQ_n^{(m)}v_m\right] &= \left(\vartheta_0 xQ_n^{(m)}\right) v_m - \left\langle v_m, \vartheta_0 xQ_n^{(m)}\right\rangle \delta \\ &= Q_n^{(m)}v_m - \left\langle v_m, Q_n^{(m)}\right\rangle \delta, \quad n \geqslant 0, \end{aligned}$$

e de forma análoga obtemos:

$$\begin{aligned} x^{-1}\left[xQ_{n-1}^{(m+1)}v_m\right] &= \left(\vartheta_0 xQ_{n-1}^{(m+1)}\right) v_m - \left\langle v_m, \vartheta_0 xQ_{n-1}^{(m+1)}\right\rangle \delta \\ &= Q_{n-1}^{(m+1)}v_m - \left\langle v_m, Q_{n-1}^{(m+1)}\right\rangle \delta \\ &= Q_{n-1}^{(m+1)}v_m - \left\langle v_m v_0^{(m)}, \vartheta_0 Q_n^{(m)}\right\rangle \delta \\ &= Q_{n-1}^{(m+1)}v_m - \left\langle x^{-1}(xv_{m-1}), Q_n^{(m)}\right\rangle \delta \\ &= Q_{n-1}^{(m+1)}v_m - \left\langle (\vartheta_0 x)\, v_{m-1} - \langle v_{m-1}, \vartheta_0 x\rangle\, \delta, Q_n^{(m)}\right\rangle \delta \\ &= Q_{n-1}^{(m+1)}v_m - \left\langle v_{m-1}, Q_n^{(m)}\right\rangle \delta, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$x^{-1}\left[xQ_n^{(m)}v_m - xQ_{n-1}^{(m+1)}v_{m-1}\right] = Q_n^{(m)}v_m - Q_{n-1}^{(m+1)}v_m, \quad n \geqslant 0.$$

■

6.2 Prova do teorema da extensão

[15] Seja $m \geqslant 1$. Para simplificação de escrita, tomemos $R_n = Q_n^{(m)}$ e $S_n = Q_n^{(m+1)}$, $n \geqslant 0$. Faça-se $n \mapsto n+1$ na equação (6.1.2), pelo que se tem,

$$s_{n+1}^{(m)}v_{n+1+m} = R_{n+1}v_m - S_n v_{m-1}, \qquad n \geqslant 0.$$

Comecemos por derivar k vezes, $k \geqslant 1$, ambos os membros da equação anterior. A equação escreve-se agora

$$s_{n+1}^{(m)}\left(v_{n+1+m}\right)^{(k)} = \left(R_{n+1}v_m\right)^{(k)} - \left(S_n v_{m-1}\right)^{(k)}, \qquad n \geqslant 0,$$

logo, pela fórmula de Leibniz dada por (1.1.18),

$$s_{n+1}^{(m)}\left(v_{n+1+m}\right)^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\left(R_{n+1}\right)^{(\nu)}\left(v_m\right)^{(k-\nu)}-\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\left(S_n\right)^{(\nu)}\left(v_{m-1}\right)^{(k-\nu)},$$

para $n \geqslant 0$. Por uma questão de conveniência, escreva-se antes

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\left(R_{n+1}\right)^{(\nu)}\left(v_m\right)^{(k-\nu)}-\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\left(S_n\right)^{(\nu)}\left(v_{m-1}\right)^{(k-\nu)}\\&=s_{n+1}^{(m)}\left(v_{n+1+m}\right)^{(k)}-R_{n+1}\left(v_m\right)^{(k)}+S_n\left(v_{m-1}\right)^{(k)},\ n\geqslant 0.\end{aligned}$$

Usando (1.2.29) do lema 1.2.2, para substituir $\left(v_{n+1+m}\right)^{(k)},\left(v_m\right)^{(k)}$ e $\left(v_{m-1}\right)^{(k)}$ pelas respectivas expressões:

$$\begin{aligned}\left(v_{n+m+1}\right)^{(k)}&=(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(n+m+1+\mu)\,u_{n+m+1+k}\ ,\\ \left(v_m\right)^{(k)}&=(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)\,u_{m+k}\ ,\\ \left(v_{m-1}\right)^{(k)}&=(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(m-1+\mu)\,u_{m-1+k}\ ,\ n\geqslant 0.\end{aligned}$$

pelo que, a equação anterior escreve-se como

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\left(R_{n+1}\right)^{(\nu)}\left(v_m\right)^{(k-\nu)}-\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\left(S_n\right)^{(\nu)}\left(v_{m-1}\right)^{(k-\nu)}\\&=(-1)^k\left[s_{n+1}^{(m)}\left(\prod_{\mu=1}^{k}(n+1+m+\mu)\,u_{n+m+1+k}\right)-\right.\\&\left.-R_{n+1}\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)\,u_{m+k}+S_n\prod_{\mu=1}^{k}(m-1+\mu)\,u_{m-1+k}\right].\end{aligned}\tag{6.2.8}$$

Notando agora que, pela alínea (e) teorema 2.1.1, tem-se que cada uma das três parcelas do membro direito se escreve

$$\begin{aligned}&s_{n+1}^{(m)}\prod_{\mu=1}^{k}(n+1+m+\mu)\,u_{n+m+1+k}=s_{n+1}^{(m)}\prod_{\mu=1}^{k}\frac{n+1+m+\mu}{\left\langle u_0,P_{n+1+m+k}^2\right\rangle}P_{n+1+m+k}u_0\\&=\prod_{\mu=1}^{k}(n+1+m+\mu)\left(\left\langle u_0,P_{n+1+m+\mu}^2\right\rangle\right)^{-1}s_{n+1}^{(m)}P_{n+1+m+k}u_0\\&=\left(\left\langle u_0,P_{m-1+k}^2\right\rangle\right)^{-1}\prod_{\mu=1}^{k}(n+1+m+\mu)\,\frac{\left\langle u_0,P_{m-1+k}^2\right\rangle}{\left\langle u_0,P_{n+1+m+\mu}^2\right\rangle}s_{n+1}^{(m)}P_{n+1+m+\mu}u_0\end{aligned}$$

usando a respectiva expressão para $s_{n+1}^{(m)}$ dada em (6.1.3),

$$\begin{aligned}
&s_{n+1}^{(m)} \prod_{\mu=1}^{k} (n+1+m+\mu)\, u_{n+m+1+k} \\
&= \prod_{\mu=1}^{k} (n+1+m+\mu) \frac{\langle v_0^{(m)}, R_{n+1}^2\rangle}{\langle u_0, P_{n+1+m+k}^2\rangle} P_{n+1+m+k} u_0, \; n \geqslant 0,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
R_{n+1} \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu)\, u_{m+k} &= R_{n+1} \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu) \left(\langle u_0, P_{m+k}^2\rangle\right)^{-1} P_{m+k} u_0 \\
&= \left(\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle\right)^{-1} \frac{\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)}{\gamma_{m+k}} R_{n+1} P_{m+k} u_0, \; n \geqslant 0;
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$S_n \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, u_{m+k} = \frac{1}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle} \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, S_n P_{m-1+k} u_0, \; n \geqslant 0.$$

Assim a equação (6.2.8) poder-se-á escrever de um modo simplificado:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} (R_{n+1})^{(\nu)} (v_m)^{(k-\nu)} - \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} (S_n)^{(\nu)} (v_{m-1})^{(k-\nu)} = A_{n+1+m+k} u_0, \; n \geqslant 0, \tag{6.2.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{n+1+m+k} = {} & (-1)^k \left(\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle\right)^{-1} \Big\{ L_n^{(m)}(k)\, P_{n+1+m+k} \\
& - \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu) (\gamma_{m+k})^{-1} R_{n+1} P_{m+k} \\
& + \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, S_n P_{m-1+k} \Big\}, \quad n \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

com

$$L_n^{(m)}(k) = \prod_{\mu=1}^{k} (n+1+m+\mu) \frac{\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle}{\langle u_0, P_{n+1+m+k}^2\rangle} \left\langle v_0^{(m)}, R_{n+1}^2 \right\rangle, \tag{6.2.11}$$

para $n \geqslant 0$. Tomando $n = 0$ em (6.2.9), encontramos

$$\sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} (R_1)^{(\nu)} (v_m)^{(k-\nu)} - \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} (S_0)^{(\nu)} (v_{m-1})^{(k-\nu)} = A_{1+m+k} u_0, \; n \geqslant 0.$$

Atendendo a que grau $(S_0) = 0$ e grau $(R_1) = 1$, então $(S_0)^{(\nu)}(x) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, $(R_1)^{(1)}(x) = R_1'(x) = 1$ (por R_1 ser polinómio mónico) e $(R_1)^{(\nu)}(x) = 0$, $2 \leqslant \nu \leqslant k$. Portanto, a equação anterior simplifica-se em

$$k\,(v_m)^{(k-1)} = A_{1+m+k}u_0\ . \tag{6.2.12}$$

Substituia-se em (6.2.9) $(v_m)^{(k-1)}$ pela expressão precedente para ele encontrada

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=2}^{k}\binom{k}{\nu}(R_{n+1})^{(\nu)}(v_m)^{(k-\nu)} - \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}(S_n)^{(\nu)}(v_{m-1})^{(k-\nu)}\\ = \left\{A_{n+1+m+k} - R_{n+1}'A_{1+m+k}\right\}u_0.\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Em particular, para $n = 1$, a equação anterior surge como

$$\frac{k\,(k-1)}{2}(R_2)^{(2)}(v_m)^{(k-2)} - k\,(S_1)^{(1)}(v_{m-1})^{(k-1)} = \left\{A_{2+m+k} - R_2'A_{1+m+k}\right\}u_0,$$

isto é,

$$k\,(k-1)\,(v_m)^{(k-2)} - k\,(v_{m-1})^{(k-1)} = \left\{A_{2+m+k} - R_2'A_{1+m+k}\right\}u_0, \tag{6.2.14}$$

uma vez que, sendo grau $(R_2) = 2$ e R_2 mónico, necessariamente $(R_2)^{(2)}(x) = 2$ e $(R_2)^{(\nu)}(x) = 0$, $3 \leqslant \nu \leqslant k$, e como grau $(S_1) = 1$ e S_1 mónico, tem-se $(S_1)^{(1)}(x) = 1$ e $(S_1)^{(\nu)}(x) = 0$, $2 \leqslant \nu \leqslant k$. Derivando uma vez ambos os membros de (6.2.12) e lembrando (1.2.29), encontramos

$$k\,(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)\,u_{m+k} = (A_{1+m+k}u_0)'.$$

Usando o facto de $u_{m+k} = \left(\langle u_0, P_{m+k}^2\rangle\right)^{-1}P_{m+k}u_0$, obtemos

$$k\,(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)\left(\langle u_0, P_{m+k}^2\rangle\right)^{-1}P_{m+k}u_0 = (A_{1+m+k}u_0)'\ .$$

Escrevendo de outro modo, para simplificação de cálculos,

$$(\Phi_1 u_0)' + (\lambda_1 P_{m+k})\,u_0 = 0\ , \tag{6.2.15}$$

com

$$N_1\Phi_1(x) = A_{1+m+k}(x), \tag{6.2.16}$$
$$\lambda_1 = k\,(-1)^k\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)\left(\langle u_0, P_{m+k}^2\rangle\right)^{-1}N_1^{-1}.$$

onde N_1 é uma constante de normalização. Depois de diferenciar uma vez ambos os membros de (6.2.14), obtemos:

$$k\,(k-1)\,(v_m)^{(k-1)} - k\,(v_{m-1})^{(k)} = \left(\left(A_{2+m+k} - R_2'A_{1+m+k}\right)u_0\right)'\ . \tag{6.2.17}$$

Lembrando (6.2.12),

$$k\,(v_m)^{(k-1)} = A_{1+m+k}u_0,$$

e recorrendo a (1.2.29), tem-se ainda que:

$$\begin{aligned}(v_{m-1})^{(k)} &= (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, u_{m-1+k} \\ &= (-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\left(\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle\right)^{-1} P_{m-1+k}u_0.\end{aligned}$$

Feitas as substituições em (6.2.17) encontramos

$$\begin{aligned}&(k-1)\,A_{1+m+k}u_0 - k\,(-1)^k \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\left(\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle\right)^{-1} P_{m-1+k}u_0 \\ &= \left(\left(A_{2+m+k} - R_2' A_{1+m+k}\right) u_0\right)' \quad ,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\left(\left(A_{2+m+k} - R_2' A_{1+m+k}\right) u_0\right)' \\ &+ \left((-1)^k \frac{k\prod_{\mu=1}^{k}(m-1+\mu)}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle} P_{m-1+k} - (k-1)\,A_{1+m+k}\right) u_0 = 0 \;.\end{aligned}$$

Podemos dar um novo aspecto a esta equação funcional, visando a simplificação da análise em questão, se escrevermos

$$(\Phi_2 u_0)' + \left(\lambda_2 P_{m-1+k} - (k-1)\,N_2^{-1} A_{1+m+k}\right) u_0 = 0 \quad , \tag{6.2.18}$$

onde

$$N_2\Phi_2(x) = A_{2+m+k}(x) - R_2'(x)\,A_{1+m+k}(x)\,, \tag{6.2.19}$$

onde N_2 é constante de normalização, e

$$\lambda_2 = k\,(k-1)\,(-1)^{k-1} \prod_{\mu=1}^{k-1} (n+\mu)\left(\langle u_0, P_{n+k-1}^2\rangle\right)^{-1} N_2^{-1} \quad .$$

Observando nas expressões (6.2.16), (6.2.19) e (6.2.10) dos polinómios Φ_1, Φ_2, $A_{n+1+m+k}$ (respectivamente), concluímos que Φ_1 e Φ_2 se podem escrever consoante o a seguir indicado

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= E(x)\,P_{m+k}(x) + F(x)\,P_{m-1+k}(x) \\ \Phi_2(x) &= G(x)\,P_{m+k}(x) + H(x)\,P_{m-1+k}(x) \quad .\end{aligned}$$

Determinemos as expressões para os polinómios $E(x)$, $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$.

Lembremos que $\Phi_1 = N_1^{-1} A_{1+m+k}$. Usando a relação de recorrência (5.3.9), A_{1+m+k} escreve-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} A_{1+m+k} &= \frac{(-1)^k}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2 \rangle} \Big\{ L_0^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+k})\,P_{m+k}(x) - \gamma_{m+k} P_{m+k-1}(x) - \\ &\quad - \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu)\,(\gamma_{m+k})^{-1} R_1(x)\, P_{m+k}(x) \\ &\quad + \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, P_{m-1+k}(x) \Big\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A_{1+m+k} = \tfrac{(-1)^k}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2 \rangle} \Big\{ \Big[L_0^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+k}) - \tfrac{\prod_{\mu=1}^{k}(m+\mu)}{\gamma_{m+k}} R_1(x) \Big] P_{m+k}(x) \\ + \Big[\textstyle\prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu) - L_0^{(m)}(k)\,\gamma_{m+k} \Big] P_{m-1+k}(x) \Big\} \end{aligned}$$

do que se conclui que

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{(-1)^k N_1^{-1}}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2 \rangle} \left\{ L_0^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+k}) - \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu)\,(\gamma_{m+k})^{-1} R_1(x) \right\} \\ F(x) &= \frac{(-1)^k N_1^{-1}}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2 \rangle} \left\{ \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu) - L_0^{(m)}(k)\,\gamma_{m+k} \right\}. \end{aligned}$$

Determinemos agora as expressões de $G(x)$ e $H(x)$. Nesse sentido, recordemos que

$$\Phi_2 = N_2^{-1} \left(A_{2+m+k} - R_2' A_{1+m+k} \right).$$

Usando duas vezes (5.3.9), tem-se que

$$\begin{aligned} P_{m+k+2}(x) &= \left((x-\beta_{m+1+k})(x-\beta_{m+k}) - \gamma_{m+1+k} \right) P_{m+k}(x) \\ &\quad - (x-\beta_{m+1+k})\,\gamma_{m+k} P_{m+k-1}(x), \end{aligned}$$

pelo que podemos escrever A_{2+m+k} como

$$\begin{aligned} A_{2+m+k} = \frac{(-1)^k}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2 \rangle} \Big\{ \Big(L_1^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+1+k})\,(x-\beta_{m+k}) \\ - L_1^{(m)}(k)\,\gamma_{m+1+k} - \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu)\,(\gamma_{m+k})^{-1} R_2(x) \Big) P_{m+k}(x) \\ + \left(\prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu)\, S_1(x) - L_1^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+1+k})\,\gamma_{m+k} \right) P_{m-1+k}(x) \Big\} \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{(-1)^k N_2^{-1}}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle} \Big\{ (x-\beta_{m+k}) \left[L_1^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+1+k}) - R_2'(x)\, L_0^{(m)}(k) \right] \\ &+ \prod_{\mu=1}^{k} (m+\mu)\,(\gamma_{m+k})^{-1} \left(R_1(x)\, R_2'(x) - R_2(x) \right) - L_1^{(m)}(k)\,\gamma_{m+1+k} \Big\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{(-1)^k N_2^{-1}}{\langle u_0, P_{m-1+k}^2\rangle} \Big\{ \prod_{\mu=1}^{k} (m-1+\mu) \left[S_1(x) - R_2'(x) \right] \\ & -\gamma_{m+k} \left[R_2'(x)\, L_0^{(m)}(k) - L_1^{(m)}(k)\,(x-\beta_{m+1+k}) \right] \Big\} \quad . \end{aligned}$$

À semelhança do que foi feito na demonstração do teorema de Hahn, consideremos

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} E(x) & F(x) \\ G(x) & H(x) \end{vmatrix} = E(x)\,H(x) - F(x)\,G(x) \quad .$$

Notar que

$$\mathrm{grau}\,(E) \leqslant 1 \;;\; \mathrm{grau}\,(F) \leqslant 0 \;;\; \mathrm{grau}\,(G) \leqslant 2 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{grau}\,(H) \leqslant 1 \,,$$

pelo que

$$\mathrm{grau}\,(\Delta) \leqslant 2.$$

Além disso, tem-se ainda que

$$\mathrm{grau}\,(A_{n+1+m+k}) \leqslant n+1+m+k \;\;,\;\; n \geqslant 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{grau}\,(\Phi_1) &= \mathrm{grau}\,(A_{m+1+k}) \leqslant m+1+k\,, \\ \mathrm{grau}\,(\Phi_2) &= \mathrm{grau}\,(A_{m+2+k}) \leqslant m+2+k\,. \end{aligned}$$

Tomando

$$\Psi_1(x) = \lambda_1 P_{m+k}(x)\,, \quad \Psi_2(x) = \lambda_2 P_{m-1+k}(x) - (k-1)\, N_2^{-1} A_{1+m+k}(x)\,,$$

concluímos que

$$\mathrm{grau}\,(\Psi_1) = m+k \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{grau}\,(\Psi_1) \leqslant m+1+k \;\; .$$

Assim as equações funcionais (6.2.15) e (6.2.18) escrevem-se:

$$\begin{aligned} (\Phi_1 u_0)' + \Psi_1 u_0 &= 0 \\ (\Phi_2 u_0)' + \Psi_2 u_0 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

respectivamente. Mediante escolhas convenientes dos parâmetros em estudo, é sempre possível ocorrer uma das três situações a), b) ou c), patentes em lema 5.2.3, o qual assegura o facto de u_0 ser clássica, o que conclui a demonstração em curso. ■

Referências

[1] S. Bochner, Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme, *Math. Z. 29 (1929) 730-736.*

[2] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York,1978.

[3] E. B. Christoffel, Über die Gaussiche quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, J. Reine Angew. Math. 55 (1858), 61-82.

[4] J. Dini, Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques, Thèse de l'Univ. P. et M. Curie, Paris, 1988.

[5] W. Hahn, Über die jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen, *Math. Z. 39 (1935) 634-638.*

[6] W. Hahn, Über höhere ableitungen von orthogonal polynomen, *Ibid. 43 (1937) 101.*

[7] A. Loureiro, Caracterização dos polinómios ortogonais clássicos, versão provisória de um texto a ser editado, 2003.

[8] P. Maroni, Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques, Ann. Mat. Pura Appl. 149(4),(1987), 165-184.

[9] P. Maroni, L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieure à deux, Ann. Fac. Sci. Toulouse 10 (1), 1989, 105-139.

[10] P. Maroni, Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$, Periodica de Mathematica Hungarica, Vol. 21 (3), 1990, pp.223-248.

[11] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. application aux polynômes orthogonaux semi-classiques, em: C. Brezinski et al., Eds., *Orthogonal Polynomials and their Applications,* IMACS Ann. Comput. Appl. Math. 9 (Blatzer, Basel, 1991) 95-130.

[12] P. Maroni, Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 48 (1993) 133-155.

[13] P. Maroni, Fonctions eulériennes. Polynômes orthogonaux classiques. Techniques de l'Ingénieur, traité Généralités (Sciences Fondamentales), 1994.

[14] P. Maroni, Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences,Applied Numerical Mathematics 31 (1999),295-330.

[15] P. Maroni & Z. da Rocha, A new characterisation of classical forms, Communication in Applied Analysis, 5 (2001), 351-362.

[16] P. Maroni, I. Nicolau, On the inverse problem of the product of a form by a polynomial: The cubic case, Applied Numerical Mathematics 45 (2003) 419-451.

[17] I. Nicolau, Polinómios Ortogonais Clássicos, Tese de Mestrado, Fac. Ciências da Univ. Porto, 1997