Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática Pura

Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade:

uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador

Ana Cristina Coelho Barbosa

2002

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática Pura

Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade:

uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador

Carlos Correia de Sá
20 de Junho de 2003

Ana Cristina Coelho Barbosa

Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para a obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática, orientada pelo Professor Doutor José Manuel Matos

2002

Aos meus pais e irmão,

pelo apoio que me deram

ao longo desta caminhada

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor José Manuel Matos, pelo apoio e pela confiança que sempre depositou em mim e pela disponibilidade e boa disposição com que sempre me recebeu. Jamais irei esquecer as discussões que iluminaram o meu caminho.

À Escola EB 2, 3 Carteado Mena e, em especial, aos membros do Conselho Executivo, por terem me aberto as portas da Escola e simultaneamente proporcionado todos os recursos necessários à implementação da investigação.

À Professora e aos alunos intervenientes no estudo, pela forma como me receberam nas suas aulas e pela colaboração e disponibilidade mostradas, tornando possível a realização deste estudo.

Resumo

O presente estudo, incide na aprendizagem da Geometria, num ambiente geométrico dinâmico. Tem por principal objectivo compreender o processo de apropriação dos significados geométricos num contexto de interacção social. Com o intuito de estudar este problema, foram formuladas as seguintes questões de investigação: (a) qual a influência da linguagem como elemento mediador da aprendizagem?; (b) qual a influência do computador como elemento mediador da aprendizagem?; (c) que características terão as demonstrações elaboradas por alunos expostos a esta forma de trabalho?; (d) qual a natureza das mediações que ocorrem em cada uma das fases de aprendizagem?

Para analisar este tema e descrever o processo de ensino-aprendizagem, recorreu-se ao modelo teórico de van Hiele que caracteriza o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Como esta teoria enfatiza a utilização de linguagens específicas em cada nível, tornou-se importante aprofundar uma abordagem sociolinguística que se revelasse adequada. A selecção recaiu na abordagem sociocultural da mente, proposta por Wertsch, que conjuga as ideias de Vygotsky com os pressupostos teóricos de Bakhtin.

Tendo por base os objectivos do estudo, adoptou-se uma metodologia de investigação qualitativa, de tipo interpretativo. Os dados foram recolhidos através da observação directa das aulas, entrevistas clínicas e documentos elaborados pelos intervenientes. De forma a determinar globalmente os níveis de raciocínio geométrico dos alunos da turma observada, foi também utilizado o *Teste de Geometria de van Hiele*. Os dados foram agrupados segundo categorias de classificação, obedecendo a um determinado critério ou tema. De forma a analisar a construção dos significados geométricos num contexto de interacção social e compreender o comportamento dos intervenientes, utilizou-se como abordagem a interacção simbólica.

A recolha de dados foi efectuada no 2º Período do ano lectivo de 2001/2002 e envolveu uma turma do 9º ano de escolaridade e a respectiva professora. Durante a investigação foi abordada a unidade didáctica "Circunferências e Polígonos. Rotações", com recurso à utilização do ambiente computacional *The Geometer's Sketchpad*.

Como principais conclusões do estudo salientam-se as seguintes: (a) nas diferentes fases de ensino, as mediações possuem uma natureza diferente, directamente relacionada com os objectivos inicialmente propostos para cada uma delas; (b) o professor utiliza diferentes tipos de discurso relacionados com os objectivos de ensino que se propõe cumprir; (c) na sala de aula existem *vozes* imbuídas de um poder diferente, associado ao estatuto social que lhes é atribuído naquela comunidade; (d) o suporte proporcionado, aos alunos, por indivíduos mais capazes, como o professor e alunos com um bom desempenho em Matemática, facilita a sua aprendizagem, através da actuação na sua *zona de desenvolvimento proximal*; (e) a utilização do computador torna a aprendizagem mais fácil e intuitiva, servindo de suporte para que os alunos consigam atingir objectivos mais complexos; (f) do ponto de vista dos alunos, o computador possui uma *voz* mais poderosa do que a sua, fazendo com que aqueles nunca duvidem da validade das conjecturas elaboradas; (g) os alunos associam diversas funções à demonstração, nomeadamente, a de verificação, explicação e comunicação; (h) a qualidade das argumentações apresentadas pelos alunos relaciona-se com o seu nível de raciocínio geométrico.

Palavras-chave: Geometria, Linguagem, Computador, Mediação, *Voz*, Aprendizagem, Van Hiele, Vygotsky, Bakhtin.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1

Introdução

O capítulo que introduz este estudo tem o propósito de caracterizar a investigação que foi realizada. Inicialmente são expostas as razões que motivaram a sua execução. Em seguida, procede-se a uma breve apresentação do estudo que inclui a contextualização da sua importância, à luz das novas orientações curriculares, e a descrição dos principais objectivos e das questões que lhe estão associadas. Por fim é apresentada uma visão global da estrutura organizativa deste trabalho.

1.1 Motivos que conduziram ao estudo

No ano lectivo de 2000/2001 tive a oportunidade de, pela primeira vez, leccionar o 9º ano de escolaridade. Esta experiência permitiu-me verificar que a Geometria, representada pela unidade didáctica "Circunferência e Polígonos. Rotações", é encarada com grande dificuldade pelos alunos, ao nível da interiorização das propriedades e da justificação das relações entre os elementos de figuras geométricas. Como consequência, a motivação e o empenho revelados pelos alunos, nestas aulas, foram sendo cada vez menores. Por isso, tornou-se importante, para mim, procurar estratégias de ensino que alterassem esta atitude.

O recurso a software de geometria dinâmica permite uma abordagem mais apelativa da Geometria e, simultaneamente, com maior significado para os alunos. Este tipo de programas contribui para que a aprendizagem seja mais acessível e intuitiva e dar à sua utilização um carácter dinâmico próprio, que os torna instrumentos poderosos nas actividades de exploração, investigação e descoberta em Geometria (Veloso, 1998).

A opção de realizar este estudo baseou-se essencialmente em motivações pessoais, marcadas pela vontade de alterar a visão que os alunos têm da Geometria e que afecta o seu desempenho, tentando acompanhar e perceber essa mesma evolução.

1.2 Apresentação do estudo

Na apresentação do estudo começa-se por discutir o seu significado à luz das actuais orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática. Posteriormente são referidos os objectivos específicos subjacentes à realização deste trabalho e formuladas as questões que o orientam.

1.2.1 Pertinência do estudo

Tem havido, nos últimos anos, uma tendência de revalorização da Geometria no currículo de Matemática um pouco por todo o mundo (Abrantes, 1999; Veloso, 1998). Há um forte consenso de que esta disciplina é uma fonte por excelência de problemas não rotineiros, que podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, de capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação. A Geometria é uma componente importante do currículo de Matemática porque o conhecimento, as relações e as ideias geométricas, são úteis, por um lado, em situações do dia a dia e, por outro lado, relacionam-se com outros tópicos matemáticos e outras matérias escolares (NCTM, 1991). Reconhecendo a importância da Geometria no programa, este estudo pretende contribuir para a análise das implicações didácticas da implementação de novos métodos de ensino, uma vez que procura caracterizar os processos utilizados pelos alunos na aprendizagem da Geometria, utilizando como ferramenta software de geometria dinâmica.

Na sociedade actual há uma ênfase muito grande na utilização da tecnologia, não só como uma ferramenta, mas também como fonte de actividade de investigação e de aprendizagem. Assim, tem havido um movimento crescente procurando uma abordagem intuitiva da geometria apoiada em parte pelo desenvolvimento de software (Matos, 2000). Várias investigações têm confirmado as potencialidades dos ambientes computacionais no contexto educacional (Ponte et al., 1997), pois podem influenciar fundamentalmente o desenvolvimento das competências que se pretende que os alunos adquiram, uma vez que a sua função é diferente da habitual, representando um papel activo na aprendizagem. Nestes ambientes, o aluno torna-se um cientista que observa, manipula, conjectura, experimenta e desenvolve teorias que expliquem os fenómenos observados. A utilização de computadores, em particular os programas de geometria dinâmica, trouxe outras possibilidades ao ensino da Geometria, uma vez que facilitam a formulação e teste de conjecturas. É totalmente diferentes os alunos fazerem demonstrações por memorização de teoremas alheios, de argumentar conjecturas que formularam na sequência da experiência de uma proposta de trabalho (Coelho, 1996).

A literatura da especialidade afirma que a aprendizagem da Geometria constitui um tema rico em possibilidades de investigação. Analisando a aprendizagem de um ponto de vista construtivista, é determinante que se efectuem estudos centrados no desenvolvimento das concepções e do desempenho dos alunos, e no impacto da tecnologia no ensino-aprendizagem da Matemática (Clements e Battista, 1992; Coelho e Saraiva, 2000), havendo, assim, fundamento para a realização deste estudo.

1.2.2 Formulação do problema e questões de investigação

O estudo teve como principal objectivo interpretar e descrever o processo de apropriação dos significados geométricos, por uma turma do 9º ano de escolaridade, contextualizado por um ambiente geométrico dinâmico. Como a utilização de uma ferramenta deste tipo pressupunha um trabalho de exploração realizado em grupo, tornou-se também importante analisar a influência das interacções entre os participantes na aprendizagem dos conceitos geométricos envolvidos, valorizando especialmente o tipo de discurso utilizado. Com o objectivo de reflectir sobre o terreno a analisar, foram elaboradas as seguintes questões:

- Qual a influência da linguagem como elemento mediador da aprendizagem?
- Qual a influência do computador como elemento mediador da aprendizagem?
- Que características terão as demonstrações elaboradas por alunos expostos a esta forma de trabalho?

No decurso do estudo, constatei que existia uma semelhança entre a sequência de actividades proposta na intervenção didáctica e a sequência de fases de aprendizagem proposta por van Hiele na sua teoria. Como esta relação se mostrou relevante no contexto de aprendizagem implementado neste estudo, optei por formular uma quarta questão para investigação, que inicialmente não estava prevista:

- Qual a natureza das mediações que ocorrem em cada uma das fases de aprendizagem?

Esta questão adquiriu uma importância tão grande, ao longo da investigação, que a análise dos dados, que incorporou igualmente a resposta aos três objectivos iniciais, foi organizada em seu torno.

1.3 Estrutura do trabalho

No que respeita à organização, o presente trabalho divide-se em oito capítulos.

A revisão de literatura é apresentada nos capítulos dois, três, quatro e cinco, sendo, respectivamente, abordadas as seguintes problemáticas: a Geometria no currículo, o computador no ensino da Geometria, a demonstração e as teorias socioculturais do desenvolvimento. No segundo e terceiro capítulos, pretende-se fundamentar a revalorização da Geometria no currículo de Matemática e a sua associação à tecnologia, nomeadamente ao software de geometria dinâmica. No quarto capítulo, sublinha-se a importância da argumentação dedutiva na Matemática e, em particular, a sua ênfase na Geometria, focando ainda o impacto da tecnologia na elaboração de demonstrações. Por fim, o quinto capítulo da revisão de literatura destaca a influência da linguagem e do computador, como elementos mediadores da aprendizagem.

O sexto capítulo diz respeito às opções metodológicas adoptadas nesta investigação, incluindo a descrição do cenário e dos participantes no estudo, das técnicas de recolha de dados, e dos processos utilizados na análise dos dados.

No sétimo capítulo é descrita a análise dos dados empíricos, tendo em vista os objectivos propostos para este estudo.

Finalmente, no oitavo capítulo são apresentadas e discutidas as principais conclusões que emergiram do trabalho desenvolvido, ressaltando daí algumas recomendações didácticas e propostas para futuras investigações.

Capítulo 2

A geometria no currículo

2.1 Perspectiva histórica

O currículo da disciplina de Matemática tem sofrido alterações consideráveis ao longo dos tempos, fruto dos interesses culturais e materiais manifestados pela sociedade da época. Uma das áreas mais afectadas tem sido, sem dúvida, a geometria. Como consequência destas sucessivas mudanças, o seu peso no currículo de Matemática nem sempre tem sido o mesmo, alternando entre momentos em que assume o papel principal no programa, e outros em que é absolutamente negligenciada.

A civilização grega teve uma influência crucial no desenvolvimento da geometria como ciência. A perfeição do tratado de Euclides tornou-se um modelo para a sistematização racional de todos os campos do conhecimento. Assim, durante vários séculos, a Geometria foi considerada uma das disciplinas mais relevantes na formação cultural dos estudantes.

Antes de irromper o movimento da Matemática Moderna, o currículo de Geometria dos "liceus" portugueses tinha duas componentes principais: as construções geométricas e o estudo da geometria euclidiana, no plano e no espaço. O objectivo principal consistia numa tentativa de levar os alunos a adquirir hábitos de raciocínio rigoroso e sistemático, já que a geometria era por tradição considerada a área ideal para os alunos aprenderem a demonstrar e também a apreciar a matemática como uma construção lógica perfeita (Veloso, 1998). Noutros países, por essa época, a geometria euclidiana tinha um peso considerável no ensino, ocupando cerca de 40% do currículo da disciplina de Matemática (Laborde, 1998; Hansen, 1998). Era esperado que, através da geometria, os alunos aprendessem a raciocinar, demonstrar e deduzir seguindo a metodologia de Euclides.

Na década de 70, a generalização da Matemática Moderna a todos os alunos relegou a geometria para um lugar secundário. Conjuntos, relações binárias, estruturas matemáticas e lógicas passaram a desempenhar um importante papel nos currículos (Ponte et al., 1997). Segundo Eduardo Veloso (1998), a geometria tornou-se um "parente pobre" da álgebra linear; as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual; a "importância prática" da geometria reduziu-se ao Teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes; a intuição e a visualização passaram a desempenhar um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática; e a abordagem dedutiva da Geometria reduziu o seu papel no programa da disciplina de Matemática, pois muitos professores retinham na sua memória as experiências negativas do seu ensino. O mesmo aconteceu noutros países, e de forma progressiva, a Geometria, perdeu a posição privilegiada que ocupava no currículo. Tornou-se mais um tema entre os demais, fazendo com que muitos acreditassem estar a presenciar a "sua morte" (Neubrand, 1998).

Eduardo Veloso (1998) destaca a figura de Hans Freudenthal pela influência decisiva que exerceu no regresso da geometria, como tema fundamental da matemática escolar. Para Freudenthal (citado por Veloso, 1998, p. 25) "a Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor". Foca como objectivo principal no ensino da geometria a aprendizagem da matematização da realidade e a realização de descobertas, que, sendo feitas "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes".

A multiplicidade das abordagens propostas, mostra que podemos construir um currículo de Geometria segundo perspectivas que valorizam mais os aspectos formais, os algébricos, ou os intuitivos. No entanto, é de notar que, ao longo dos tempos, as propostas curriculares que atribuem um maior relevo a determinados aspectos da geometria, em detrimento de outros, não têm tido o sucesso esperado. Uma estratégia poderá ser encontrar pontos de equilíbrio entre os diversos aspectos (Mammana e Villani, 1998). No entanto, é pouco provável que esta solução, que incorpora estas diferentes perspectivas, seja consensual no que respeita aos tópicos a atribuir maior atenção no currículo de Geometria, mas é irrefutável que voltou a assumir um lugar privilegiado no seio da matemática escolar.

2.2 Orientações curriculares actuais

2.2.1 A Geometria nos currículos internacionais

Os anos 80 ficaram marcados pelo aparecimento de duas publicações extremamente importantes para o movimento de reforma do ensino da Matemática da época. Uma foi *An Agenda for action* (1980), do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que enfatizava a resolução de problemas como foco da matemática escolar. A outra foi o relatório *Mathematics counts*, coordenado por W. Cockcroft (1982), que procurou efectuar uma análise aprofundada do ensino da matemática na Inglaterra e no País de Gales.

No ano de 1989, com o objectivo de melhorar a qualidade da matemática escolar nos Estados Unidos da América, a direcção do NCTM editou o documento *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* que se tornou uma referência fundamental para os professores e educadores matemáticos preocupados com a educação nesta disciplina e empenhados na sua renovação (NCTM, 1991). Este documento constituiu, não só um movimento de rejeição da situação em que se encontrava o ensino da Matemática no Estados Unidos após os anos de Matemática Moderna, como também reflecte o crescendo de interesse e de experiências de ensino da geometria que caracterizou a parte final dos anos 80 (Matos, 2000). Estas *Normas* constituem um documento importante quer como referência, quer como elemento crítico na apreciação de propostas curriculares e tiveram grande influência nos Estados Unidos e no Canadá, bem como noutros países (Veloso, 1998).

De um modo geral, a geometria passou a ter um maior destaque nas orientações curriculares actuais. Este documento propõe que nos níveis de ensino intermédios (entre o 5º e o 8º anos), os tópicos que devem merecer uma maior atenção, na área da geometria, sejam (NCTM, 1991):

- desenvolvimento da compreensão dos objectos geométricos e suas relações;
- utilização da geometria na resolução de problemas.

Da mesma forma, é chamada a atenção para os tópicos que devem ser considerados de menor relevância:

- memorização do vocabulário da geometria;
- memorização de factos e relações.

Nos níveis de ensino seguintes (entre o 9º e o 12º anos), os conteúdos de geometria considerados como mais importantes são (NCTM, 1991):

- integração (da geometria) através de todos os temas, em todos os anos de escolaridade;
- abordagens por coordenadas e por transformações;
- desenvolvimento de curtas sequências de teoremas;
- argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos;
- explorações em computador de figuras bi e tridimensionais;
- geometria no espaço;
- aplicações ao mundo real e modelação.

É igualmente importante referir os temas que foram valorizados em currículos anteriores e que neste documento perdem o protagonismo:

- geometria euclidiana como sistema axiomático completo;
- demonstrações dos teoremas de incidência e de situado "entre";

- geometria de um ponto de vista sintético;
- demonstrações a "duas colunas";
- polígonos inscritos e circunscritos;
- teoremas sobre a circunferência envolvendo razões de segmentos;
- geometria analítica como um tema isolado.

Seguindo a mesma linha de orientação, a International Comission on Mathematical Instruction (ICMI), definiu como finalidades para o ensino e a aprendizagem da Geometria (referida por Junqueira, 1995):

- descrever, compreender e interpretar o mundo real e os seus fenómenos;
- proporcionar um exemplo de uma teoria axiomática;
- fornecer uma colecção rica e variada de problemas e exercícios para a actividade individual dos estudantes;
- treinar os alunos a fazer palpites, formular conjecturas, fornecer provas e descobrir exemplos e contra-exemplos;
- servir como uma ferramenta para outras áreas da Matemática;
- enriquecer a percepção pública da Matemática.

Goldenberg e outros (referidos por Matos, 2000) criticam a forma como os cursos de geometria têm sido conduzidos ao longo dos anos, afirmando que têm caído numa das seguintes categorias:

- Tentativas de réplicas fiéis de Euclides: consistem de exposições dogmáticas de matemáticas estabelecidas, usando o método axiomático.
- Euclides sem demonstrações: seguem o mesmo caminho dos cursos mais formais, mas os principais resultados de geometria são geralmente enunciados em vez de derivados e enfatizam as aplicações.
- Geometria "indutiva": referem-se à utilização do raciocínio do específico para o geral, utilizam o "método de descoberta", tirando conclusões com base na experiência.

Goldenberg e outros (referidos por Matos, 2000) propõem uma forma diferente de encarar a geometria perspectivando-a como um veículo para construir hábitos de pensamento. Este ponto de vista coloca em evidência o papel da tecnologia no desenvolvimento de actividades experimentais, envolvendo "hábitos de pensar". Esta abordagem da Geometria levou ao aparecimento do currículo Connected geometry, apoiado pela National Science Foundation, orientado para que o seu eixo central seja "hábitos de pensamento". Esta perspectiva revelou-se motivadora para os alunos, trazendo para a aula a cultura da exploração matemática.

2.2.2 A Geometria nos currículos portugueses

Os currículos portugueses têm, em geral, acompanhado as propostas adoptadas noutros países. No documento *Competências Essenciais* do Departamento da Educação Básica (DEB, 2001) que identifica as atitudes, capacidades e conhecimentos que os alunos devem adquirir nestes níveis de ensino, é privilegiado um conjunto de competências a desenvolver no domínio da geometria:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, recorrendo a materiais manipuláveis;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e outras áreas da Matemática;
- a compreensão de conceitos como os de comprimento, área, volume, amplitude e aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução de problemas;
- a aptidão para efectuar medições em situações diversas e fazer estimativas, bem como a compreensão do sistema métrico;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente, na comunicação e a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real.

Em particular, no 3º ciclo, destaca como competências a desenvolver no âmbito da geometria:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
- a tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais.

O documento correspondente, publicado pelo Departamento do Ensino Secundário (DES, 1997), determina que o programa deve dar continuidade, sem brusca mudança de nível, às aprendizagens realizadas no 3º ciclo, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos alunos, sendo aconselhável partir de problemas e situações experimentais para que, com apoio na intuição, o aluno aceda gradualmente à formalização dos conceitos. O ensino da geometria reveste-se da maior importância, devendo desenvolver no aluno:

- a intuição geométrica e o raciocínio espacial;
- as capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática;
- as capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita.

É assumida, no currículo, a atribuição de uma posição de destaque à geometria, criando oportunidades que permitam que esta seja retomada em praticamente todos os temas do programa. A geometria é tida como uma área que potencia o desenvolvimento de várias capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo. O estudante é, principalmente no ensino secundário, solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas. A presença dominante da geometria no currículo de Matemática é assim justificada pelas excelentes oportunidades que pode proporcionar aos alunos no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

2.3 A polémica sobre o ensino da Geometria em Portugal

Como já tive oportunidade de analisar, um dos temas mais polémicos entre os educadores matemáticos é a geometria e o seu peso no currículo, consequentemente é um dos tópicos mais discutidos. No último Seminário Ensino e Aprendizagem da Geometria, promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 2000, debateu-se exactamente a *Geometria no currículo de Matemática*. Relativamente ao peso a esta atribuído nos programas de Matemática, concluiu-se que se registou um grande aumento, já que essa importância tem vindo a crescer de forma significativa. Mas, se por um lado se nota uma evolução positiva no modo como se encara a geometria, por outro não existe um consenso quanto aos conteúdos a incluir nos currículos, à organização dos mesmos e à forma de os levar em prática.

Actualmente a polémica não reside apenas nos conteúdos dos programas mas também na forma como são geridos, que varia consideravelmente de professor para professor: os que adiam sempre os capítulos referentes a este tema; os que lhes dedicam mais tempo e os aprofundam mais do que o previsto; os que os reduzem a um conjunto de procedimentos-tipo que os alunos treinam e mecanizam. Frequentemente a falta de preparação na implementação da geometria na aula, resulta da formação pobre que alguns professores tiveram nesta área, tanto na escolaridade básica e secundária como na universidade.

Eduardo Veloso (1998) faz a análise de alguns tópicos, relativos aos conteúdos programáticos dos ensinos básico e secundário no nosso país, e considera que, nos níveis mais elementares de escolaridade:

- os programas revelam a falta de visão de conjunto sobre os problemas e possíveis soluções para o ensino da geometria ao longo da escolaridade;
- não existe um estímulo positivo para a utilização de computadores no ensino da Matemática;
- o número de professores que aproveitam as novas orientações para o ensino da geometria é muito reduzido.

Considera como deficiências graves no programa de geometria no ensino secundário:

- o peso da geometria analítica é muito superior ao da geometria por via intuitiva contrariando a ideia de um equilíbrio entre as duas;
- as transformações geométricas e as geometrias não-euclidianas são tópicos inexistentes no programa;
- a trigonometria ocupa parte do programa de geometria do 11º ano.

Como estímulo ao desenvolvimento de esforços e iniciativas que alterem a situação vivida actualmente no ensino e aprendizagem da geometria, Eduardo Veloso (1998) propõe:

- uma reflexão aprofundada sobre a situação actual e futura do ensino da geometria em Portugal que abranja todos os níveis de ensino;
- a elaboração de documentos que especifiquem linhas de orientação gerais para o ensino da geometria e para a formação inicial e contínua dos professores de Matemática;
- a elaboração de uma lista de recursos e instalações escolares;
- uma mudança, não apenas declarada, mas efectiva dos objectivos de ensino da Matemática.

Nos novos programas de Matemática do ensino secundário, que num futuro próximo entrarão em vigor, continua a ser atribuída à Geometria uma posição de destaque e são dadas indicações para que seja retomada em todos os temas do currículo. Nos tópicos de Geometria procura-se um equilíbrio entre a geometria por via intuitiva e a geometria analítica, de forma a desenvolver o raciocínio geométrico directo, como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica. Pretende-se que o ponto de partida sejam problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o aluno aceda gradualmente à formalização dos conceitos.

Conclusão

O papel desempenhado pela Geometria nos currículos portugueses e internacionais tem variado consideravelmente ao longo dos tempos. Como já foi analisado, actualmente é consensual que a Geometria deve assumir um peso assinalável nos programas de Matemática, no entanto, existe ainda alguma polémica no que respeita aos tópicos a abordar dentro da Geometria e às formas de o fazer.

Tendo em consideração a importância que a geometria assume actualmente no currículo, o desempenho dos alunos e os métodos de ensino utilizados nesta área não são satisfatórios. Burril (referido por Matos, 2000), fazendo referência às Normas, já que este documento constituiu um marco essencial no movimento de recuperação da geometria como tema relevante da matemática escolar, afirma que há má interpretação sobre o seu conteúdo por parte dos professores, pais e matemáticos, e, como consequência, em muitos locais, o currículo mudou mas as práticas de ensino e avaliação não, o que impede que ocorra uma evolução positiva desta situação problemática.

Segundo Geddes e Fortunato (1993), o ensino tradicional tem enfatizado demasiadamente o reconhecimento das formas e a memorização de vocabulário, sem permitir o correcto desenvolvimento de conceitos. Um professor que insista neste tipo de ensino consegue apenas que o aluno simule o conhecimento através de um verbalismo vazio, enunciando propriedades e teoremas sem qualquer significado (Vygotsky, referido por Clements e Battista, 1992). Situações como a resolução de tarefas que envolvam materiais concretos, esboços em ambientes computacionais, têm sido apontadas como propiciadoras do desenvolvimento dos conceitos geométricos, devendo por isso o ensino actual basear-se neste tipo de actividades frutuosas.

Capítulo 3

O computador no ensino da geometria

As actuais orientações curriculares, para o ensino da Matemática, quer em Portugal quer noutros países, incluem o recurso à utilização da tecnologia, nomeadamente dos computadores. Esta tendência surge na sequência da convicção de que a utilização dos computadores na aula de Matemática, poderá contribuir mais eficazmente para a concretização de alguns dos objectivos propostos no currículo.

O computador tem potenciado, de forma decisiva, o desenvolvimento do ensino da Matemática, introduzindo modificações substanciais nas práticas tradicionais. Desde que os computadores começaram a ser utilizados como recurso para o ensino da Matemática, foram desenvolvidas várias peças de software com o objectivo de melhorar o processo de aprendizagem. A Geometria é um domínio do conhecimento que está directamente envolvido na crescente utilização de software no ensino, devido ao importante papel desempenhado pelas representações externas (usualmente chamadas figuras) e as novas formas de lidar com estas (Laborde, 1993).

Os computadores podem ajudar a estabelecer ambientes fecundos para o estudo do raciocínio geométrico dos alunos. Pesquisas têm revelado que a utilização de software adequado pode envolver níveis elevados de raciocínio geométrico. Funcionam como catalisadores do desenvolvimento de culturas de aula nas quais professores e alunos expandem as suas crenças acerca do ensino e da aprendizagem da Geometria (Clements e Battista, 1992). A utilização do computador possibilita o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo, onde se leva a cabo actividade matemática rica e motivadora. Estimula nos alunos uma atitude crítica e investigativa e enriquece a sua capacidade de raciocínio e comunicação.

Prevê-se que, no século XXI, a Geometria seja fonte de situações ricas e iluminadoras, com um potencial excepcional numa melhor apreciação da matemática. O computador é agora o ingrediente principal no ensino e aprendizagem da geometria, não só pelas suas extraordinárias capacidades gráficas, mas também por permitir explorações antes demasiadamente complexas ou até impossíveis de materializar (Graf e Hodgson, 1998).

Apesar do considerável progresso alcançado nas últimas décadas, no desenvolvimento de hardware e software, e através de inúmeras investigações frutuosas, os computadores não são muito utilizados nas escolas, inclusive no ensino da geometria, contrariamente àquilo que seria de esperar. São apontadas várias razões para justificar esta situação: complexidade de utilização do software; capacidade e habilidade dos professores para lidarem com este novo ambiente pedagógico; rejeição à mudança (Graf e Hodgson, 1998).

Para que este quadro se altere é necessário que a utilidade e as potencialidades do software educativo se imponham ao nível da comunidade matemática. O aparecimento de programas cada vez mais poderosos e de utilização mais simples e intuitiva vai concerteza proporcionar um consenso no que respeita à necessidade indiscutível da presença do computador nas aulas.

Até aos dias de hoje têm sido muitos os programas de computador utilizados no ensino da Geometria, nomeadamente: *Logo, Logo Geometria, The Geometric Supposers, The Geometry Tutor, Cabri-Géomètre, The Geometer's Sketchpad* e *Tesselmania*. Segundo Veloso (1998) a Geometria iniciou o seu regresso em Portugal através dos computadores e da sua utilização no ensino. O aparecimento do programa *Logo* desencadeou um movimento de crescente interesse pelas questões e problemas da geometria. Mais recentemente, tem sido introduzido na aula de Matemática software inovador, sendo os mais utilizados o *Cabri-Géomètre* e o *The Geometer's Sketchpad*.

Actualmente nem todos os programas mencionados são utilizados no ensino da Geometria. Aqueles a que se recorre com maior frequência são os programas de geometria dinâmica, que serão descritos na secção seguinte, e o *Tesselmania*.

3.1 Ambientes geométricos dinâmicos

As ferramentas utilizadas no estudo da geometria no plano têm-se mantido inalteradas, nos últimos 2000 anos: papel, lápis, régua e compasso. As construções geométricas obtidas a partir destes materiais possuem duas características:

- São estáticas. Qualquer figura desenhada no papel, ou no quadro, permanece fixa e não pode ser alterada, a não ser que seja apagada.
- São particulares. Qualquer quadrado que se construa, representa um quadrado específico, cujo lado tem um determinado comprimento. Por definição, o lado de um quadrado pode ter qualquer comprimento, mas uma simples figura estática não transmite a generalidade desta definição.

Actualmente, desde o final do século XX, surge um novo método para construir figuras geométricas, que garante todas as possibilidades facultadas pelas ferramentas clássicas já mencionadas, mas alarga consideravelmente as hipóteses de exploração. Produziu-se um conjunto de programas conhecidos por software de geometria dinâmica, ou ambientes geométricos dinâmicos (AGD) e que se estabeleceram em escolas e nos departamentos de Matemática das universidades, como uma alternativa à régua e ao compasso (Scher, 2001). O software de geometria dinâmica é representado principalmente pelo *Cabri-géomètre* (Texas Instruments, 1994), *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press, 1995) e *Geometry Inventor* (Logal Software, 1994) e mais recentemente pelo *Cinderella* (Sun Microsystems Inc, 1997). As características deste tipo de programas contrastam com as capacidades das ferramentas clássicas utilizadas na geometria. Agora:

- é possível arrastar e alterar a forma dos objectos geométricos de um modo interactivo: clicando e arrastando com o rato, o utilizador pode animar figuras estáticas, conferindo-lhes assim uma natureza dinâmica. Os segmentos de recta podem ser "esticados" ou "encolhidos", a amplitude dos ângulos pode ser alterada, os objectos podem sofrer rotações e translações sucessivas que podem ser observadas no écran;
- uma única imagem representa uma classe de objectos geométricos. O utilizador deste tipo de software pode, por exemplo, construir um quadrado, cujo tamanho e orientação podem ser alterados através do arrastamento da figura, mas continuando a ter as características comuns a todos os quadrados – quatro lados de igual comprimento e quatro ângulos rectos. Após a construção de uma determinada figura, as suas propriedades mantêm-se invariantes ao arrastamento e à manipulação. A condição necessária para uma construção estar correcta é produzir, através da variação dos seus elementos, várias figuras que preservam as propriedades iniciais.

Segundo Veloso (1998) o software de geometria dinâmica contribui para que os alunos tenham uma aprendizagem mais fácil e intuitiva dos programas, para lhes abrir uma notável amplitude no tipo de aplicações educacionais e para dar à sua utilização um carácter dinâmico próprio, que os torna instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas actividades de exploração, investigação e descoberta em geometria e na matemática em geral.

3.2 Breve apresentação do *The Geometer's Sketchpad*

O suporte tecnológico utilizado na investigação que serviu de base à elaboração deste trabalho é o *The Geometer's Sketchpad* (*GSP*), pelo que discutirei aqui algumas das suas características. O programa de computador *GSP* destina-se ao estudo da Matemática, em particular ao estudo da geometria euclidiana e têm sido desenvolvidas diversas iniciativas em Portugal, no sentido de encorajar a utilização deste software. Nas actuais orientações curriculares é apontado como um recurso importante para o ensino e a aprendizagem da geometria.

3.2.1 Origem

Este programa foi desenvolvido pela *Key Curriculum Press*, integrado num projecto de geometria – o *Visual Geometry Project* – dirigido pelos professores Eugene Klotz e Doris Schattschneider, do Swarthmore College. A programação ficou ao cargo de um aluno que se encontrava sob a orientação de Klotz, Nicholas Jackiw. O objectivo do *Visual Geometry Project* era renovar o ensino da geometria nos ensinos básico e secundário e desenvolveu-se em grande contacto com escolas. Por conseguinte, o *GSP* está bem adaptado a estes níveis de escolaridade e aos cursos de preparação dos respectivos professores (Veloso, 1998).

O primeiro trabalho desenvolvido por Jackiw, para este projecto, teve o nome de *Cavalieri*. Permitia ao utilizador reconfigurar dinamicamente a forma de uma figura. O objectivo inicial deste projecto era produzir programas de computador, acompanhados de uma cassete de vídeo, que caracterizassem um determinado conceito geométrico tridimensional. Mas, devido ao tempo necessário para completar o *Cavalieri* e à dificuldade em programar os modelos tridimensionais, Klotz e Schattschneider decidiram alterar o seu foco e criar um único programa gráfico bidimensional.

Um dos primeiros programas a ampliar as capacidades gráficas do computador foi o *Sketchpad*, de Ivan Sutherland. O utilizador acedia a uma caneta de luz para desenhar e manipular pontos, segmentos e arcos de circunferência, num monitor de raios catódicos. Como homenagem ao trabalho de Sutherland, Klotz atribuiu ao seu programa o nome *The Geometer's Sketchpad*.

3.2.2 Menus

A metáfora de utilização do *GSP* é a do papel com o material de desenho clássico – régua, compasso, transferidor e ainda calculadora. Estes instrumentos estão dispostos numa barra de ferramentas que aparece do lado esquerdo do ambiente de trabalho, num menu vertical. Clicando e mantendo o rato sobre a ferramenta durante alguns segundos, podemos obter as variações correspondentes. Estas ferramentas permitem desenhar livremente na área de trabalho mas, normalmente, são utilizadas na definição dos elementos iniciais da construção, a partir daí, a figura é obtida utilizando o menu *construct*, de acordo com as suas propriedades geométricas. É possível, a partir deste menu, executar rotinas da geometria euclidiana como: traçado de segmentos de recta; rectas e circunferências; rectas perpendiculares e paralelas; determinação do ponto médio de segmentos; determinação de intersecções entre rectas, entre circunferências e entre rectas e circunferências; traçado de bissectrizes, entre outros.

O menu *construct*, tal como os outros, é sensível ao contexto. Só estão disponíveis as construções que puderem ser efectuadas a partir dos elementos seleccionados. Esta propriedade do *GSP* minimiza a possibilidade de obter uma construção errada e, ao mesmo tempo, permite uma aprendizagem mais eficaz. Segundo Veloso (1995) o criador do programa teceu as seguintes considerações, num grupo de discussão na Internet:

> "O objectivo não é fornecer uma máquina que ensine geometria, mas em vez disso proporcionar um ambiente em que cada um possa rapidamente explorar e, idealmente, atingir e ampliar os limites da sua própria compreensão e a apreciação da geometria (...) Este tipo de relações e harmonias não estão presentes num mundo em que todas as escolhas estão igualmente e uniformemente disponíveis." (p. 60)

Este software permite executar transformações geométricas como: translações, rotações, homotetias e simetrias, possibilitando ainda a definição de transformações compostas.

Através do menu *measure*, podemos determinar comprimentos, distâncias, amplitudes de ângulos e arcos de circunferência, raios, declives de rectas, perímetros e áreas de polígonos e circunferências. Contém também uma calculadora que, para além de oferecer as possibilidades de uma calculadora vulgar, permite operar directamente com medições efectuadas na figura que nos encontramos a construir.

Todos os objectos geométricos podem ser animados: os pontos independentes movem-se livremente no plano e todos os outros objectos movem-se arrastando os objectos de que dependem. É possível criar botões de animação, para a realização automática de certas acções, que permitem imprimir movimento a uma construção, sendo a velocidade e o sentido dessa animação controlados pelo utilizador.

Quando Jackiw determinou as características do *GSP*, tinha como objectivo reduzir os comandos de construção aos seus *átomos* e eliminar a maioria das construções automáticas que poderiam ser cumpridas por técnicas mais primitivas. Para evitar que os utilizadores reconstruíssem uma figura do nada, sempre que dela necessitassem, Jackiw idealizou o *script* como uma forma de construção gradual de uma colecção de figuras reutilizáveis, ou seja, o *GSP* permite, através do *script*, a memorização de rotinas mais complexas que passam a poder ser invocadas como rotinas de base. Assim, o trabalho com *scripts* apresenta duas vantagens: evita a repetição de construções e desenvolve a capacidade de abstracção dos alunos.

Em traços gerais, as propriedades mais marcantes que caracterizam este software são: a hierarquização entre os elementos de uma construção, que resulta do processo de construção escolhido pelo utilizador, ficando definidas certas relações constantes entre os elementos; e a modificação da construção por arrastamento de alguns dos seus elementos, por intermédio do rato.

3.3 Investigações com AGD's em Portugal

Existem alguns estudos realizados no nosso país, contextualizados pela utilização de AGD's, que revelaram resultados assinaláveis: Junqueira (1995), Coelho (1996) e Rodrigues (1997) que utilizaram o *Cabri-géomètre* como contexto de aprendizagem e Piteira (2000) cuja investigação teve por base a utilização do *The Geometer's Sketchpad*.

Na sua investigação, Junqueira (1995) analisou estratégias de: construção de conhecimentos geométricos, a partir da exploração de construções geométricas resistentes; e compreensão dos objectos e relações geométricas, formulação de conjecturas e elaboração de argumentos indutivos e dedutivos.

Coelho (1996) desenvolveu um estudo que teve como objectivos analisar: os processos evidenciados durante a resolução de problemas e a construção de conhecimentos, no domínio da Geometria; as interacções que os alunos estabeleceram, nomeadamente com o software, e o papel deste como facilitador da aprendizagem.

Utilizando o mesmo suporte tecnológico que as autoras anteriores, Rodrigues (1997) elaborou uma investigação que teve por finalidade analisar: a construção do significado matemático, pelos alunos, em interacção social, focando a utilização do computador em actividades de construção geométrica.

O estudo realizado por Piteira (2000) teve por objectivos, compreender e relacionar: o que ocorre nas interacções entre os alunos, com vista à construção, partilha e negociação de significados geométricos; as potencialidades de um ambiente de geometria dinâmica como mediador para a aprendizagem geométrica dos alunos; e a tomada de consciência geométrica na actividade dos pontos anteriores.

As investigações de Junqueira (1995), Coelho (1996) e Rodrigues (1997) realçam, igualmente, que o trabalho num ambiente geométrico dinâmico tende a criar uma atitude positiva dos alunos em relação à Matemática e a desenvolver neles uma certa autonomia. Os aspectos ligados ao movimento são especialmente sublinhados nos trabalhos de Junqueira (1995) e Coelho (1996). A visualização dos invariantes no *Cabri-Géomètre* suscitou nos alunos a elaboração de conjecturas e o convencimento da respectiva veracidade. Coelho (1996) constatou que os alunos faziam sistematicamente a verificação do resultado encontrado de forma a testarem as conjecturas formuladas.

Para Piteira (2000) o *GSP* constituiu um elemento facilitador da aprendizagem, na medida em que deu poder aos alunos no processo de transferência dos objectos. A resposta visual fornecida pelo software, ao arrastamento, permitiu a exploração das construções de uma forma rápida e dinâmica. Os próprios menus do *GSP*, obrigaram a que os alunos tivessem de pensar como construir novas figuras, avaliar o que tinham construído, observar as variações e pensar sobre as conclusões. As entrevistas realizadas pela investigadora revelaram que os AGD's são bastante vantajosos para o estudo da Geometria, tornam-se mais rápidos e rigorosos, dispensando o tempo gasto na construção de vários exemplos. Focaram ainda o facto da possibilidade de efectuar medições, desenhos rápidos, cálculos e modificações nas construções, que permitiram o estudo das propriedades geométricas e a sua verificação de uma forma mais fácil.

Os resultados positivos obtidos na realização destes trabalhos devem-se, em parte, às características dos programas utilizados. Assim, o recurso a software de geometria dinâmica, como o *Cabri-Géomètre* e o *GSP*, deve ser implementado na aula de Matemática, aproveitando as suas potencialidades dinâmicas, em trabalhos de exploração na área da geometria.

Capítulo 4

A demonstração

Neste capítulo é salientada a importância da demonstração na matemática, sendo também focada a sua relevância no ensino da Matemática.

Muitos autores têm defendido a utilização da demonstração com o único propósito de verificar a veracidade dos resultados, no entanto têm surgido alguns modelos teóricos que sublinham a existência de outros tipos de funções que a demonstração poderá assumir, especialmente no ensino.

É ainda discutida e analisada neste capítulo a teoria de van Hiele que refere a distinção de cinco níveis discretos de raciocínio geométrico dos alunos.

4.1 A demonstração em matemática

A principal característica do método demonstrativo é o recurso a resultados anteriores, processo que se inicia com axiomas e definições. Enquanto estas pretendem representar meras convenções linguísticas, os axiomas correspondem a factos fundamentais e claramente evidentes, sobre os quais assenta toda a estrutura, erguida e sustentada pelos parafusos da lógica. Devemos ainda assinalar o notável grau de abstracção com que nos deparamos na elaboração de uma demonstração. A linguagem utilizada é normalmente formal e restritiva, é uma linguagem refinada, para satisfazer as necessidades de um propósito bem definido (Davis e Hersh, 1995). Assim, os ingredientes mágicos da demonstração são: a abstracção, a formalização, a axiomatização e a dedução.

Durante grande parte do século XX, a filosofia matemática foi dominada pela visão formalista dos seus fundamentos. A escola formalista, criada por Hilbert, tinha como principal objectivo encontrar uma técnica matemática por meio da qual se pudesse demonstrar que a matemática estava livre de contradições. Neste contexto, a demonstração genuína é uma demonstração formal. Trata-se apenas de escrever símbolos, numa ordem precisa, de forma a impor uma estrutura consistente e lógica para o todo da matemática (Ponte et al., 1997). A agenda formalista da matemática do século XX foi extremamente poderosa em promover a sua sistematização numa estrutura demonstrativa estandardizada.

Segundo Hanna (1996), o formalismo surgiu com o objectivo de eliminar a necessidade de recorrer à evidência indutiva e ao julgamento humano, já que ambos eram tidos como fontes de potenciais erros graves. A verdade de uma afirmação reside apenas nos axiomas e na consistência interna do próprio sistema. No entanto, Gödel (referido por Ponte et al., 1997) mostrou que o projecto idealizado por Hilbert era irrealizável. O seu *teorema da incompletude* evidenciou que não era possível encontrar na matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que a formalização de uma teoria não garante o estabelecimento definitivo da sua consistência e que, mesmo que um sistema formal seja consistente, existem teoremas a carecer de demonstração. Esta argumentação acabou por desmoronar a crença na possibilidade da definição de todas as regras para o estabelecimento da verdade, principal ideologia da corrente formalista.

Lakatos (referido por Davis e Hersh, 1995) apresentou uma alternativa completamente diferente à da procura de bases indubitáveis para a matemática. No seu livro *Provas e refutações*, tinha por objectivo desafiar os formalistas que davam a matemática como uma ciência de autoridade, infalível e irrefutável, e defender a tese de que a matemática informal, quase-empírica, não surge de um crescimento monótono do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas através do incessante melhoramento das conjecturas, por especulação e crítica, pela lógica das demonstrações e refutações. Mais tarde, filósofos e historiadores como Davis e Hersh (1995), Tymoczko (referido por Confrey, 1994) e outros, inspirando-se nas ideias de Lakatos, propõem uma nova abordagem para a filosofia da matemática, frequentemente designada por quasi-empiricismo. O objectivo desta abordagem é descrever e caracterizar a matemática a partir da análise das práticas reais dos matemáticos.

A matemática é encarada actualmente, pela maioria dos matemáticos, como uma ciência que resulta da complementaridade entre a actividade experimental, de elaboração e teste de conjecturas, e a componente dedutiva, caracterizada pela demonstração. Esta questão é defendida por muitos autores entre eles Pólya (citado por Bastos e Loureiro, 2000, p. 4) que afirma:

> "O resultado do trabalho criativo de um matemático é um raciocínio dedutivo, uma demonstração; mas a demonstração é descoberta por raciocínio plausível, pela especulação. Se a aprendizagem da matemática reflecte, em alguma medida, a invenção matemática, tem de haver lugar para a especulação, para a inferência."

Defendendo a mesma linha de raciocínio, Clements e Battista (1992) são de opinião que na criação da matemática e na procura da verdade, colocam-se problemas, elaboram-se conjecturas, propõem-se contra-exemplos, revêem-se as conjecturas e formula-se um teorema quando este refinamento de ideias responde a uma questão significativa.

4.2 A demonstração no ensino

O currículo de geometria português refere explicitamente que o raciocínio matemático deve ser desenvolvido, nomeadamente através da elaboração e teste de conjecturas e da realização de raciocínios dedutivos. É nesta área da matemática que se atribui maior ênfase à demonstração. Importa, no entanto, questionar as formas como isto poderá ser feito.

As demonstrações da Geometria Elementar permitiam criar nos alunos hábitos e precisão de ideias e linguagem constituindo, por isso, o meio propício para aprender a raciocinar dedutivamente. Para Duval (referido por Bastos e Loureiro, 2000) o discurso dedutivo, característico da matemática, e o discurso argumentativo, utilizado na linguagem corrente, têm características cognitivas muito diferentes. Um dos problemas do ensino está em confundir estes dois tipos de discurso, que correspondem a formas de raciocínio distintas. Seguindo esta linha orientadora, este autor admite que a geometria, mais do que outras áreas da matemática, pode ser utilizada para descobrir e desenvolver diferentes formas de raciocínio.

Hanna (2000) partilha desta opinião ao afirmar que a demonstração em geometria é tida como uma preparação para o raciocínio lógico e defende que a demonstração no ensino da geometria deve ser encarada como uma actividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias, que vale a pena tornar conhecidas dos alunos para promover a compreensão da matemática.

Assumindo a ideia de que a demonstração tem um peso significativo no ensino da matemática, uma das razões que pode levar a privilegiar a geometria para ensinar a demonstração é que qualquer assunto pode ser introduzido e demonstrado de forma frutuosa, com uma quantidade mínima de estudo formal anterior (Bastos e Loureiro, 2000). Neste sentido, a geometria difere grandemente de outros temas da matemática actual.

Geralmente, os alunos revelam um desempenho negativo na área da Geometria. Vários autores apontam as metodologias utilizadas no ensino tradicional da demonstração como a razão principal deste cenário. As ideias de Barbin (1993), Villiers (1999) e Balacheff (1987) reflectem esta preocupação, prevendo o aparecimento de dificuldades nos alunos, ao nível da elaboração de demonstrações. No ensino tradicional a demonstração é claramente concebida como um produto, não há propriamente aprendizagem da demonstração. Esta consiste em ir das hipóteses às conclusões, através de raciocínios dedutivos, citando os teoremas utilizados. O processo está portanto escondido, ao ponto de muitos alunos não atribuírem qualquer sentido ao texto, de não imaginarem que, para demonstrar, é necessário pensar, experimentar, rasurar e enganar-se (Barbin, 1993). Na prática, os aspectos ligados à observação, experimentação e formulação de conjecturas são, na grande maioria dos casos, escondidos. Aos alunos compete seguir as demonstrações apresentadas pelo professor, ou incluídas no manual, e ser capazes de as reproduzir, se necessário. Neste contexto, as demonstrações constituem uma prova do saber dos alunos e não a prova da veracidade dos enunciados matemáticos com que lidam, pois esta já se encontra preestabelecida. A veracidade dos enunciados não é posta em causa e raramente os alunos sentem necessidade de demonstrar as proposições que enunciam ou vêem a demonstração como uma forma de progredir na compreensão de um problema.

Com o objectivo de criticar a ideia de demonstração característica do ensino tradicional da Geometria, Villiers (1999) compara-o a uma aula de culinária e pastelaria onde o professor apenas mostra aos alunos os bolos, sem lhes revelar os ingredientes nem como se fazem e, além disso, sem sequer poderem experimentar a sua própria maneira de cozinhar. Esta forma de encarar o ensino da demonstração resultou numa fonte de insucesso no desempenho dos alunos, uma vez que se trata de uma actividade sem grande significado para eles.

É ainda habitual associar as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da demonstração à passagem de uma matemática *prática*, caracterizada pela acção e observação, a uma matemática mais teórica, caracterizada pela introdução da demonstração. Esta passagem constitui uma ruptura do contrato didáctico que, antes da introdução da demonstração, regula a actividade matemática (Balacheff, 1987).

Têm sido levados a cabo diversos estudos acerca da demonstração no ensino, nomeadamente, quais as concepções que os alunos têm sobre a actividade matemática de demonstrar resultados. Ao analisar a literatura da especialidade, Chazan (1993) propôs dois conjuntos de crenças dos alunos sobre a argumentação empírica e dedutiva em Matemática. O primeiro conjunto, *evidência é demonstração,* inclui as conclusões que têm origem na consideração de um número reduzido de casos e que alguns alunos acreditam ser aplicáveis a um conjunto com um número infinito de elementos. O segundo conjunto de crenças, *a demonstração dedutiva é simplesmente evidência*, relaciona-se com o facto de alguns alunos considerarem as demonstrações dedutivas como referentes a um único caso, não tendo em consideração o que Balacheff designou por *aspecto generalizante* dos diagramas nas demonstrações geométricas. Na opinião de Williams (referido por Chazan, 1993) estes alunos não entendem o princípio da generalização das demonstrações dedutivas, não percebem que a validade da conclusão se pode generalizar a todas as figuras que satisfazem os dados.

Balacheff (1987) conduziu uma investigação que proporcionou um ambiente favorável ao aparecimento de conjecturas e argumentos matemáticos. Apresentou uma questão a catorze pares de alunos, entre os 13 e os 14 anos, pedindo-lhes que escrevessem as respostas sob a forma de mensagem para outros alunos da sua idade. Conseguiu, desta forma, identificar quatro tipos de demonstração:

- Empiricismo ingénuo: declaração da veracidade de um resultado após a verificação de um pequeno número de resultados. Os alunos consideram, neste caso, que a observação é suficiente para demonstrar a conjectura elaborada.
- Experiência crucial: processo de validação de uma afirmação no qual o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização. A conjectura é verificada com recurso a um caso particular, escolhido propositadamente e não ao acaso.
- Exemplo genérico: explicitação das razões da validade de um resultado, pela realização de acções ou transformações sobre um objecto, apresentado não por si próprio mas como um representante característico de uma classe de indivíduos.
- Experiência mental: invocação da acção através da sua interiorização, destacando-a da realização sobre um representante particular.

Balacheff (1987) distingue duas categorias de demonstração produzidas pelos alunos: as *demonstrações pragmáticas* e as *demonstrações intelectuais*. As *demonstrações pragmáticas* incluem os três primeiros tipos de demonstração descritos anteriormente, uma vez que recorrem essencialmente à acção. Já o último tipo de demonstração considerado, classifica-o como *demonstração intelectual* porque não envolve a acção, baseia-se na formulação das proposições em questão e das relações entre elas.

Embora actualmente ainda se encontrem alguns vestígios da utilização da demonstração nos mesmos moldes do ensino tradicional, as novas orientações curriculares apontam para caminhos diferentes. Hoje são valorizados nos currículos de Matemática actividades como explorar, generalizar, conjecturar e argumentar. Mas, o facto de haver uma ênfase do raciocínio indutivo, não significa que o raciocínio dedutivo tenha diminuído a sua importância. Hanna (1996) refere que apesar de a exploração e a demonstração serem actividades de natureza distinta, complementam-se. Ambas integram o processo de resolução de problemas e são necessárias para atingir o sucesso em matemática. Enquanto que a exploração conduz à descoberta, a demonstração é a confirmação do resultado. Na aula, os professores devem aproveitar o entusiasmo proporcionado pela exploração de uma tarefa para motivarem os alunos na apresentação de uma demonstração, ou então para procurarem compreender uma demonstração apresentada pelo professor.

4.3 Funções da demonstração

É do conhecimento geral que os alunos revelam grandes dificuldades no que respeita à demonstração de resultados. Mas o principal entrave detectado é sem dúvida a compreensão da necessidade da demonstração, por duas razões: quando o resultado é apresentado pelo professor, uma autoridade superior, é aceite como verdade incontestável; quando a veracidade do resultado é óbvia, do ponto de vista empírico, os alunos não sentem necessidade de o demonstrar (Villiers, 1999).

Segundo Afanasjewa (referido por Villiers, 1999), os problemas que os alunos enfrentam com a demonstração não estão apenas relacionados com o seu desenvolvimento cognitivo mas também com a compreensão das funções (no sentido de significado, objectivo e utilidade) da demonstração. Torna-se útil analisar as funções que a demonstração desempenha na prática da matemática e perceber de que forma as poderemos utilizar na aula, de modo a alterar as concepções que os alunos por vezes assimilam erradamente.

Para Barbin (1993) a actividade de demonstrar pode ter três significados, correspondendo cada um deles a três exigências diferentes: a de *convencer* para saber; a de *esclarecer* para saber como se sabe e a de *interessar* para saber porque se sabe. Assim, esta autora alarga a questão do sentido da actividade de demonstrar à do sentido do saber. Para abordar esta questão, Barbin (1993) analisa e compara três demonstrações relativas à soma dos ângulos internos de um triângulo: a dos *Elementos* de Euclides (séc. III a.C.); a de Arnauld, presente nos *Nouveaux Éléments de Géométrie* (1667) e a dos *Éléments de Géométrie* de Clairaut (1765).

Os *Elementos* de Euclides assentam sobre um sistema axiomático-dedutivo, e a demonstração apresentada nesta obra permite reconhecer o carácter absoluto, universal e necessário da proposição. O leitor fica convencido de que, para qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos rectos. Com efeito, a força de um raciocínio dedutivo que parte de premissas verdadeiras está no facto de tornar irrefutável a conclusão. Euclides não indica como descobriu as demonstrações e a ordem das proposições dos *Elementos* é imposta pelo processo de dedução e não pela ordem da invenção ou da necessidade de obter resultados. Quem lê esta demonstração fica a saber, mas sem saber como se sabe.

Arnauld e Nicole criticam os geómetras antigos por se preocuparem em demasia com a certeza em detrimento da evidência, por não esclarecerem, mas apenas convencerem. Na sua obra pretendem remediar estes defeitos. O capítulo sobre os ângulos não é um catálogo de proposições, mas um método de comparar ângulos e resolver problemas. Neste capítulo a ordem das proposições não é regida pela ordem dedutiva, mas pelo alcance dos conhecimentos induzidos por estas proposições, isto é, o lugar de cada proposição é determinado segundo a sua pertinência na resolução de um certo tipo de problema. O leitor poderá assim saber porque se sabe, será esclarecido.

A vontade de esclarecer o leitor também se encontra no trabalho de Clairaut, tendo inclusivamente escrito no prefácio que era o seu objectivo escrever um tratado que interessasse e esclarecesse o seu leitor. Com este objectivo, concebe uma geometria na qual os conceitos e os saberes têm sentido porque são instrumentos para resolver problemas. Desta forma, o leitor saberá, e saberá porque sabemos. Como o seu propósito não é convencer mas esclarecer, Clairaut evita dar qualquer proposição sob a forma de teoremas onde se demonstra que uma determinada verdade se verifica, sem mostrar como foi descoberta. Pelo contrário, pretende ocupar os seus leitores a resolver problemas, porque é a partir destes que podem adquirir mais facilmente o espírito inventivo. Assim, para Clairaut, demonstrar é também saber porquê e saber como se sabe.

Como afirma Bourbaki, "depois dos gregos, quem diz matemática diz demonstração" (citado por Veloso, 1998, p. 361). No entanto, isto não significa que a actividade matemática não inclua uma componente experimental e que a intuição não domine o processo inicial de descoberta em matemática. Uma demonstração deveria exigir não só a apresentação formal de argumentos, mas também a actividade realizada pelos alunos para alcançarem o convencimento. Neste sentido, deveriam fazer a verificação e a comunicação das suas convicções acerca de determinado resultado. Bell (referido por Clements e Battista, 1992) destacou três importantes funções para a demonstração: verificação, iluminação e sistematização. Outro modelo que retracta as funções da demonstração é o de Michael de Villiers (1999), que resulta da extensão da proposta de Bell, e que se passa a analisar:

- Verificação (a preocupação reside na veracidade da afirmação).
- Explicação (procura da razão da veracidade).
- Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados).
- Sistematização (organização de vários resultados num sistema de axiomas, conceitos de ordem superior e teoremas).
- Desafio intelectual (realização pessoal derivada da construção da prova).
- Comunicação (negociação do significado e transmissão do conhecimento matemático).

4.3.1 A demonstração como processo de verificação

Tradicionalmente tem-se considerado exclusivamente a demonstração em termos da sua função verificativa, isto é, como confirmação da veracidade dos resultados. A ideia que tem prevalecido é a da utilização da demonstração com o objectivo de eliminar dúvidas e tem influenciado significativamente a prática educativa, muitas discussões e pesquisas acerca do ensino da demonstração. Segundo Villiers (1999) este ponto de vista é muito limitado, na sua opinião a convicção é muitas vezes o pré-requisito necessário à construção de uma demonstração e não o contrário, pois ele fornece a motivação e a confiança que permitem encontrar a coragem para empreender a demonstração de determinado resultado. A convicção não é necessariamente encontrada pela demonstração, e é possível, através de experiências empíricas, confirmar a veracidade de uma afirmação sem o apoio de um raciocínio dedutivo, o que não significa que não seja obrigatória a sua elaboração. Do ponto de vista matemático, é exigida uma demonstração dedutiva dos resultados, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva. Pretende-se colocar a demonstração numa perspectiva mais apropriada em oposição a uma idealização distorcida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convencimento (Villiers, 1999).

4.3.2 A demonstração como processo de explicação

Os matemáticos esperam mais de uma demonstração do que uma mera justificação, eles pretendem aumentar o seu conhecimento. Neste sentido, a melhor demonstração é aquela que permite entender o significado do teorema a demonstrar, ou seja, perceber não só o que é verdadeiro mas também a razão da sua veracidade (Hanna, 2000). Uma demonstração deste tipo é mais persuasiva e, por consequência, mais facilmente aceite.

Como já foi mencionado, há resultados cuja veracidade é possível comprovar por meio de verificações empíricas que permitem atingir um nível de convicção quase absoluto, mas não proporcionam uma explicação satisfatória da razão pela qual é verdadeira. Assim, na maioria dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes, a função da demonstração, para os matemáticos, não é a de verificação mas sim a de explicação (Villiers, 1999). Uma vez ultrapassada a fase de comprovação da veracidade do resultado, resta perceber o porquê dessa mesma veracidade. Uma demonstração que prova e uma demonstração que explica, são ambas demonstrações legítimas, a diferença está em que uma demonstração que prova só mostra que um teorema é verdadeiro, enquanto que uma demonstração que explica mostra também porque um teorema é verdadeiro (Hanna, 2000).

Uma demonstração que prova pode apoiar-se só em regras de sintaxe enquanto que uma demonstração que explica deve utilizar raciocínios baseados em ideias matemáticas. Segundo Hanna (1996), os matemáticos, incluindo os que recorrem a métodos puramente sintáxicos, estão na realidade mais interessados na mensagem por detrás da demonstração do que na sua sintaxe. Mas nem todos os matemáticos partilham da mesma opinião. Wheeler (referido por Hanna, 1996) não entende a demonstração como criadora de conhecimento, defende que é nas definições que encontramos os vectores da matemática. Quando a demonstração está pronta o processo termina. No entanto, Barbeau (referido por Hanna, 1996) confronta esta opinião argumentando que Euler é um exemplo particularmente forte de alguém que dava diversas demonstrações para um mesmo resultado, procurando aquela que melhor lhe permitisse compreendê-lo.

4.3.3 A demonstração como processo de descoberta

Diz-se frequentemente que os teoremas são a maior parte das vezes descobertos por métodos quase-empíricos e por meio de intuição, antes de serem verificados através de demonstrações. Mas existem muitos resultados que não surgiram por este caminho mas através de processos puramente dedutivos. É pouco provável que alguns teoremas pudessem nascer por mera intuição e/ou métodos quase-empíricos. Portanto, para alguns matemáticos, a demonstração não tem como única utilidade a verificação de resultados já descobertos, mas também como um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (Villiers, 1999).

4.3.4 A demonstração como processo de sistematização

Segundo Villiers (1999), a demonstração é uma ferramenta indispensável para transformar num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, um conjunto de resultados conhecidos. O objectivo é organizar, num todo unificado e coerente, afirmações isoladas, que já se sabem ser verdadeiras, e não relacioná-las logicamente, como acontece no processo de verificação.

A explicação surge aqui com um papel ligeiramente diferente daquele descrito anteriormente. Neste caso, o ponto de incidência dirige-se a uma explicação global e não local.

4.3.5 A demonstração como um desafio intelectual

Para os matemáticos, a demonstração representa um desafio intelectual que, muitas vezes, se assemelha à construção de um puzzle. Fazer demonstrações pode também comparar-se com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, e a satisfação que daí resulta. Neste sentido, a demonstração cumpre uma função de realização pessoal (Davis e Hersh, 1995). Villiers (1999) parafraseia um comentário de Mallory, sobre os seus motivos para subir o Monte Evereste, que caracteriza de uma forma extraordinária o desafio intelectual que representa, para a maioria dos matemáticos:

> "Demonstramos os nossos resultados porque eles estão diante de nós. Muitas vezes não é a existência da montanha que está em dúvida (a verdade do resultado), mas se (e como) seremos capazes de conquistá-la (demonstrá-la)!" (p. 8)

Se os alunos assimilarem este papel da demonstração sentir-se-ão, seguramente, motivados para procurar alcançar a razão da veracidade dos resultados obtidos.

4.3.6 A demonstração como processo de comunicação

Tem sido salientada, no seio da comunidade matemática, a função comunicativa da demonstração, por exemplo Volmink (citado por Villiers, 1999) refere que:

> "...parece que a demonstração é uma forma de discurso, um meio de comunicação entre pessoas que fazem matemática." (p. 7)

A demonstração é entendida, nesta perspectiva, como uma forma de discurso, uma forma de falar acerca da própria matemática.

Hanna (1996) refere alguns estudos curriculares sobre demonstração, realizados na década de 80, que deram grande ênfase ao conceito de demonstração como *argumento convincente*, com o objectivo de ter em conta o papel da demonstração como meio de comunicação, e em reconhecimento dos processos sociais que têm um peso preponderante na aceitação de um novo resultado pelos matemáticos. Muitos educadores matemáticos foram mais longe, defendendo que o programa de rigor sistematizado por Euclides, não é, nem nunca foi, seguido rigidamente na produção de provas em matemática, donde a aceitação de um resultado, entre os que produzem matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir rígido das regras impostas pela proposta formal.

Neste sentido, a demonstração é enfatizada como um processo social de comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade. A filtragem social de uma demonstração, contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como, por vezes, a sua rejeição devido à descoberta de um contra-exemplo.

A demonstração cumpre simultaneamente vários objectivos. Ao ser exposta a um escrutínio e à análise crítica de uma nova plateia, passa por um processo de constante revalidação. A exposição incessante esclarece erros, ambiguidades e equívocos.

Seria de esperar que a demonstração na aula reflectisse de alguma forma todas estas funções, mas nem todas são relevantes para o ensino da Matemática em determinados níveis, logo não devem ter todas o mesmo peso (Davis e Hersh, 1995; Villiers, 1999).

4.4 A demonstração num ambiente geométrico dinâmico

Neste estudo, a utilização do computador, como recurso à aprendizagem da demonstração em Geometria, teve uma importância central. Por isso, torna-se necessário analisar de que forma o trabalho num ambiente geométrico dinâmico influencia a elaboração de demonstrações.

O computador alterou o papel da demonstração em, pelo menos, dois aspectos: pode fazer provas e, em muitos casos, fornece a evidência empírica necessária à procura da veracidade de uma determinada conjectura. Desta forma, o computador contribuiu significativamente para que a demonstração fosse encarada de um modo diferente pela comunidade matemática. Para além de provar resultados cuja demonstração há muito tempo era procurada, proporciona ambientes que favorecem a exploração matemática e a descoberta de resultados. O software para geometria dinâmica tem revelado potencialidades para revolucionar profundamente os modos de resolução de problemas e de exploração de situações, as concepções de demonstração e, em particular, a sua relevância na aprendizagem da geometria (Veloso, 1998). A disponibilidade deste tipo de software na aula trouxe um novo ânimo à exploração matemática e, consequentemente, ao complexo processo de ensino e de aprendizagem da demonstração em geometria.

Segundo Schwartz os ambientes computacionais dinâmicos têm introduzido modificações importantes na concepção de demonstração. Os utilizadores podem generalizar as descobertas e testar a respectiva validade, através de um aliciante processo de indução (referido por Coelho e Saraiva, 2000).

Chazan (1990) compara este tipo de software a um *espelho intelectual*. A analogia tem origem no modo de funcionamento destes programas: não colocam questões nem avaliam respostas, fornecem antes ferramentas para os utilizadores testarem conjecturas num determinado domínio. Com base na resposta visual recebida do computador, podem ser exploradas relações entre objectos e elaboradas generalizações resultantes daquelas. Após a construção de uma figura, trata-se de investigar as suas propriedades. Para isso, procedemos ao seu arrastamento e esta deforma-se dentro das restrições impostas pela própria construção. Ao longo da manipulação, muitas relações e medidas vão-se alterando, mas algo permanece constante. Com a observação das características que permanecem inalteráveis numa construção, formulam-se conjecturas cuja certeza é incontestável. É por esta razão que este tipo de software é particularmente apropriado para apoiar um ensino renovado da geometria.

Os programas de geometria dinâmica permitem descobrir instantaneamente se uma conjectura é verdadeira ou falsa – se for falsa, é imediatamente óbvio quando se arrasta a figura; se for verdadeira, os seus elementos permanecem em harmonia, independentemente da manipulação. O grau de certeza transmitido por este fenómeno é espantoso. Apesar de não ser uma demonstração, este contacto directo consegue ser ainda mais convincente, uma vez que tudo acontece diante dos nossos olhos, a resposta visual é imediata. Os ambientes computacionais dinâmicos permitem que os alunos se convençam, de uma forma segura, da veracidade de uma proposição, existindo, por isso, o perigo de confundirem esta evidência, que surge indutivamente, com uma demonstração (Hanna, 2000).

Villiers (1999) abordou esta questão através de um estudo rigoroso do papel da demonstração, num AGD. Como já foi analisado, Villiers estende a função da demonstração para além da simples verificação, sugerindo a existência de diversos papéis que esta pode assumir na prática matemática. Se os alunos a vêem apenas como uma forma de verificar algo, após se terem certificado, através da exploração, que um determinado resultado é verdadeiro, então não terão incentivo para criar uma demonstração lógica. A geometria dinâmica tem um impacto determinante na função verificativa assumida pela demonstração: uma proposição cuja veracidade pode não ser óbvia a partir da observação de algumas figuras estáticas, pode ser verificada pela observação de uma infinidade de casos, permitida pelo software em causa. Se continuarmos a defender que a demonstração deve ser utilizada para remover a dúvida, poderemos testemunhar a sua "morte".

Torna-se necessário proporcionar outro tipo de motivação para provar resultados, para além da sua verificação. Villiers (1999) defende que a convicção da veracidade de um resultado precede muitas vezes a demonstração formal e é provavelmente o pré-requisito mais frequente para procurar uma demonstração. Esta opinião é sustentada por vários matemáticos. Pólya (referido por Bastos e Loureiro, 2000) sugere que, ao verificar um teorema para vários casos particulares, reúne-se uma forte evidência indutiva. A fase indutiva confirma a suspeição inicial e fornece a certeza da veracidade do teorema. Sem essa confiança seria difícil encontrar coragem para empreender a procura de uma demonstração. Quando um matemático trabalha faz conjecturas vagas, visualiza generalizações grosseiras, e precipita-se para conclusões não comprovadas. Ele ordena e reordena as suas ideias e começa a convencer-se da sua veracidade muito antes de escrever uma demonstração lógica. Não é habitual atingir cedo a convicção – normalmente surge após várias tentativas, muitos fracassos, muitas frustrações, muitos princípios em falso – o trabalho experimental é necessário assim como experiências de reflexão.

A repetição de experiências bem conduzidas aumenta a nossa convicção de que uma determinada proposição é verdadeira. Embora nenhuma quantidade de verificações pudesse provar a nossa conjectura, certamente que a convicção de que a proposição é verdadeira aumenta. Quando os alunos investigam minuciosamente uma conjectura, verificando-a através da variação contínua de uma figura, com o auxílio da geometria dinâmica, não sentem necessidade de a demonstrar, uma vez que estão já certos da sua veracidade.

Mas, apesar da maior parte dos alunos, quando exploram conjecturas neste tipo de ambientes de aprendizagem, não precisar de mais nada para ter convicções não é difícil estimular a sua curiosidade perguntando-lhes porque razão pensam que um determinado resultado é verdadeiro. Desafia-os tentar explicá-lo e rapidamente admitem que a verificação indutiva/experimental apenas confirma, não esclarece nem contribui para uma compreensão satisfatória. Os alunos parecem desejar então procurar argumentos dedutivos como uma tentativa de explicação e de realização pessoal ou desafio, mais do que uma verificação (Villiers, 1999). Embora o software para geometria dinâmica não produza provas, a evidência indutiva que proporcionam produz a convicção necessária à motivação do desejo de uma demonstração.

A geometria dinâmica não "matou" a demonstração, como alguns proclamam, tornou-a mais significativa e interessante aos olhos de alunos e educadores. Se continuarmos a defender que a matemática apenas pode ser descoberta de forma dedutiva e que a experimentação é um tabu, os alunos nunca se poderão apropriar dos resultados, já que estes são impostos por autoridades externas, como o professor e o manual, que ditam a sua escolha bem como a sua validade. Os alunos não atingiriam os mesmos níveis de convicção tão rapidamente e tão facilmente num ambiente tradicional de papel e lápis (Hanna, 1996).

4.5 Teorias do desenvolvimento do raciocínio geométrico

São identificadas, pelos investigadores especializados nesta área, três perspectivas acerca do desenvolvimento do raciocínio geométrico: o modelo de Piaget, a teoria de van Hiele e os modelos de Ciência Cognitiva.

Clements e Battista (1992) procuraram em Piaget, e na sua teoria do desenvolvimento cognitivo, contribuições para compreender os processos de aprendizagem relacionados com a demonstração e, consequentemente, a altura apropriada para a explorar com os alunos. Estes autores atribuem a Piaget a ideia de que o progresso das crianças através de estádios e o aparecimento da necessidade de validação de conjecturas, devem-se ao choque resultante do confronto do nosso pensamento com o dos outros, produzindo a dúvida e o desejo de demonstrar.

Van Hiele construiu, em 1959, uma teoria, baseada nas suas experiências em sala de aula, destinada a melhorar o ensino, organizando-o e tendo em consideração o desenvolvimento mental dos alunos (Matos, 2000). Atribui o desenvolvimento às fortes características socioculturais que, de certa forma, coincidem com o plano de ensino e aprendizagem proposto por Vygotsky, e não à base de maturação biológica apresentada por Piaget (Pegg, Gutiérrez e Huerta, 1998). De modo geral, o principal foco de pesquisa, tendo como base a teoria de van Hiele, está direccionado para a noção de cinco níveis de raciocínio geométrico hierarquizados. Muitos autores têm-se baseado no modelo proposto por van Hiele para avaliar o desenvolvimento do raciocínio geométrico, ao nível da demonstração, sob a influência de um currículo escolar.

Tanto Piaget como van Hiele sugerem que os alunos devem passar pelos níveis mais elementares do pensamento geométrico, antes de atingirem os mais elevados e que esta evolução exige uma quantidade considerável de tempo. As teorias de Piaget e van Hiele têm em comum características importantes, como a ênfase no papel activo do aluno na construção do próprio conhecimento. Van Hiele (1986) considera que os alunos bem sucedidos não aprendem factos, nomes ou regras, mas sim redes de relações que ligam conceitos e processos geométricos, sendo eventualmente ligados em esquema. Piaget realça o papel do desequilíbrio e da resolução de conflitos. Van Hiele sugere aos professores que reconheçam as dificuldades dos alunos mas que não evitem as "crises de pensamento", uma vez que estas facilitam a transição para níveis mais elevados de raciocínio (Clements e Battista, 1992).

Existem também diferenças consideráveis entre estas duas perspectivas. Van Hiele realça a importante influência que o processo de ensino e aprendizagem exerce sobre o desenvolvimento do aluno, criticando a crença de Piaget na lógica como base do pensamento, argumentando que esta apenas pode desenvolver a formação dos níveis mais elementares do raciocínio. Afirma ainda que os estádios e períodos descritos por Piaget não devem estar relacionados com uma idade em particular, mas são característicos de processos de aprendizagem independentemente da idade em que acontecem.

Uma terceira perspectiva teórica, aplicada na compreensão da aprendizagem dos alunos em geometria, é a da Ciência Cognitiva. Este campo pretende integrar pesquisa e trabalho teórico da psicologia, filosofia, linguística e inteligência artificial. Os modelos de Ciência Cognitiva trazem uma precisão aos modelos de raciocínio geométrico que nem sempre está presente nas teorias de Piaget e van Hiele, identificando estruturas e processos do conhecimento detalhadamente. Mas também apresentam sérias limitações, tendem a não explicar o insucesso dos alunos nesta área, directamente relacionado com processos como conjecturar, formular problemas e mecanismos de reestruturação do conhecimento (Clements e Battista, 1992). No currículo actual, muitos alunos adquirem ideias matemáticas sem estabelecerem uma ligação entre processos e conceitos, isto é, executam sequências de processos matemáticos sem conseguirem descrever o que estão a fazer ou porquê. A maioria dos modelos de Ciência Cognitiva não se refere ao desenvolvimento dos alunos em termos de níveis qualitativos de raciocínio, sistemas de crenças e motivação, desvalorizando os papéis da actividade sensitivo-motora, da intuição e da cultura do pensamento matemático. Apesar de tudo, esta perspectiva proporciona explicações específicas e metáforas úteis que escapam às restantes teorias.

Das três perspectivas teóricas mencionadas, a de van Hiele é aquela que melhor se adequa às necessidades do currículo escolar. Desde 1980, o modelo construído por van Hiele tem sido o catalisador de grande parte das pesquisas efectuadas acerca do ensino e aprendizagem da geometria (Clements e Battista, 1992). Este trabalho não é excepção e tem por base de avaliação, da evolução do raciocínio geométrico dos alunos, a teoria de van Hiele.

4.5.1 A teoria de van Hiele

A teoria de van Hiele teve origem nas dissertações de doutoramento de Dina van Hiele–Geldof e do seu marido Pierre van Hiele na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Enquanto a dissertação de Pierre van Hiele tentou explicar porque razão os alunos demonstram dificuldades em geometria, a de Dina van Hiele era acerca de uma experiência de ensino. A característica mais óbvia desta perspectiva teórica é a distinção de cinco níveis discretos de pensamento no desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos.

Segundo a teoria de van Hiele, a principal razão do insucesso do currículo tradicional em geometria é ser apresentado num nível superior àquele em que os alunos operam; por outras palavras, os alunos não conseguem entender o professor nem o professor consegue compreender porque razão têm dificuldades (Villiers, 1999).

Esta perspectiva teórica tem como grandes linhas orientadoras as seguintes características:

- <u>A aprendizagem é um processo descontínuo.</u>

Existem "*saltos*" na curva de aprendizagem que revelam a presença de diferentes níveis de raciocínio (Clements e Battista, 1992; Fuys, Geddes e Tischler, 1988);

- <u>Os níveis são sequenciais e hierarquizados.</u>

Os cinco níveis representam diferentes graus de sofisticação no raciocínio matemático. Cada um dos níveis apoia-se no anterior, apresentando assim uma estrutura recursiva. Para que os alunos raciocinem adequadamente, num determinado nível, é necessário que tenham adquirido a capacidade de pensamento dos anteriores (Coelho, 1996; Fuys, Geddes e Tischler, 1988);

- <u>Conceitos percebidos implicitamente num determinado nível tornam-se explícitos no nível de raciocínio seguinte.</u>

As propriedades das figuras, de que os alunos não têm consciência no nível de reconhecimento, tornam-se explícitas com a passagem ao nível de raciocínio seguinte (Clements e Battista, 1992; Coelho, 1996);

- <u>Cada nível tem uma linguagem característica.</u>

Cada nível tem os seus símbolos linguísticos e o seu próprio sistema de relações. Uma relação considerada como correcta num determinado nível, pode revelar-se incorrecta noutro nível. Duas pessoas que se encontrem em níveis de raciocínio diferentes não se conseguem entender (Fuys, Geddes e Tischler, 1988).

Níveis de raciocínio geométrico de van Hiele

Os níveis de van Hiele têm sido descritos e discutidos de forma exaustiva na literatura da especialidade (Burger e Shaughnessy, 1986; Clements e Battista, 1992; Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Matos, 1984; Pastor e Rodríguez, 1990). Clements e Battista (1992) apresentam, num dos seus trabalhos, uma descrição pormenorizada de cada um dos cinco níveis propostos por van Hiele:

Nível 1: *Visual*

Inicialmente, os alunos identificam formas e outras configurações geométricas de acordo com a sua aparência. Não têm em consideração o papel das propriedades geométricas na identificação de uma figura, ou seja, neste nível não têm consciência das propriedades. O raciocínio dos alunos é dominado pela percepção. Por exemplo, podem distinguir uma figura de outra sem conseguirem indicar uma única propriedade de qualquer uma delas, ou podem também crer que duas figuras são congruentes por terem a mesma aparência.

Por exemplo, um rectângulo poderá ser identificado pela sua similaridade com a forma de uma porta.

Nível 2: *Descritivo / Analítico*

Tendo alcançado o segundo nível, os alunos reconhecem e conseguem caracterizar as formas geométricas pelas suas propriedades. Vêem as figuras como um todo, mas agora como colecções de propriedades, que são estabelecidas experimentalmente através da observação, da medição, do desenho e da modelação. Neste nível, os alunos não percebem as relações entre classes de figuras, as propriedades são vistas como independentes umas das outras.

Um objecto é um quadrado, por exemplo, porque possui quatro ângulos rectos e quatro lados de igual comprimento.

Nível 3: *Abstracto / Relacional*

Os alunos conseguem formar definições abstractas, distinguir entre conjuntos de condições necessárias e suficientes, compreender e até construir argumentos lógicos no domínio geométrico. Classificam figuras hierarquicamente (ordenando as suas propriedades) e fornecem argumentos informais para justificar as suas classificações.

À medida que descobrem as propriedades de várias formas geométricas, sentem necessidade de as organizar. A ordenação lógica das ideias é a primeira manifestação da verdadeira dedução. Mas, os alunos continuam sem perceber que a dedução lógica é um modo de estabelecer verdades geométricas.

Um quadrado, por exemplo, é um caso particular de um rectângulo.

Nível 4: *Dedução Formal*

Quando os alunos atingem este nível de raciocínio, demonstram teoremas dentro de um sistema axiomático. Reconhecem a diferença entre termos indefinidos, definições, axiomas e teoremas. São capazes de construir demonstrações, isto é, conseguem produzir uma sequência de afirmações que justifica, de forma lógica, uma determinada conclusão.

Neste nível, os alunos raciocinam formalmente, interpretando logicamente afirmações geométricas tais como axiomas, definições e teoremas. Os objectos do seu raciocínio são as relações entre as propriedades das classes de figuras.

Nível 5: Rigor / *Metamatemático*

Neste nível os alunos raciocinam formalmente sobre sistemas matemáticos. Conseguem estudar geometria na ausência de modelos de referência, e raciocinar, manipulando formalmente afirmações geométricas, tais como axiomas, definições e teoremas.

Segundo van Hiele (referido por Clements e Battista, 1992), as diferenças existentes entre os níveis de raciocínio geométrico propostos, residem nos objectos do pensamento. Tendo por base as pesquisas realizadas por Fuys, Geddes e Tischler (1988), Junqueira (1995) e Villiers (1999), tornou-se possível organizar no quadro 4.1 os objectos do raciocínio e a estrutura do raciocínio, relativos a cada um dos níveis de raciocínio geométrico.

	Nível 1	*Nível 2*	*Nível 3*	*Nível 4*	*Nível 5*
Objectos do raciocínio	Figuras individuais (experiência sensorial).	Classes de figuras.	Propriedades das classes de figuras.	Relações entre as classes de figuras.	Relações entre construtos formais.
Estrutura do raciocínio	Reconhecimento visual. Distribuição das figuras pela sua aparência.	Reconhecimento das propriedades como características das classes.	Reconhecimento e formulação de relações lógicas entre as propriedades. Explicação informal.	Relações entre relações, expressas em termos de cadeias lógicas.	Elaboração e comparação de sistemas axiomáticos da geometria.

Quadro 4.1 – Quadro resumo dos objectos e estrutura de raciocínio de cada um dos níveis de van Hiele.

Apesar de incluir no meu trabalho a descrição dos cinco níveis de van Hiele, este autor adverte os investigadores para que se concentrem nos três primeiros níveis de raciocínio, atribuindo pouca importância aos níveis superiores, uma vez que, na aprendizagem da Geometria, normalmente, os níveis atingidos pelos alunos são os três realçados por van Hiele (Matos, 1984).

Pesquisas acerca dos níveis de van Hiele

Os trabalhos mais recentes de van Hiele descrevem a existência de três níveis de raciocínio, em vez dos cinco propostos inicialmente, no entanto, a evidência empírica e a necessidade de precisão nos modelos orientados de aprendizagem exigem esboços mais refinados.

A evidência empírica sugere a existência de um nível mais elementar do que o nível 1 (Clements e Battista, 1992). Fuys e outros (1988) especificam que, para os alunos estarem em determinado nível, têm de exibir comportamentos indicativos do mesmo. Afirmam ainda que o nível visual é diferente dos restantes, neste os alunos podem não revelar comportamentos dele representativos, isto é, podem não conseguir atribuir nomes às figuras. Segundo alguns investigadores, estes alunos não deveriam ser descritos como "não estando ainda no nível 1". No entanto, a questão da necessidade de um nível adicional ou de sub-níveis do visual continua em aberto.

Contudo, a evidência resultante da pesquisa realizada por van Hiele, juntamente com a perspectiva de Piaget, indica a existência de um raciocínio mais elementar do que o que caracteriza o nível 1. Desta forma, torna-se necessário considerar um nível adicional de raciocínio (Clements e Battista, 1992):

Nível 0: *Pré-reconhecimento*

No nível de pré-reconhecimento, os alunos percebem as formas geométricas mas, talvez pela percepção deficiente, apenas têm em atenção um subconjunto de características de uma determinada figura. Não são capazes de identificar algumas das formas mais comuns. Conseguem distinguir figuras curvilíneas de figuras rectilíneas mas o mesmo não acontece com figuras da mesma classe, ou seja, conseguem diferenciar um quadrado de um círculo, mas não um quadrado de um triângulo.

Neste nível, os objectos do raciocínio são estímulos tácteis ou visuais específicos, o produto do raciocínio é um grupo de figuras reconhecidas visualmente como tendo a mesma forma.

Fases de aprendizagem

O modelo proposto pelos van Hiele não inclui apenas os níveis de raciocínio geométrico já descritos. Segundo estes autores, o progresso de um nível para o seguinte depende mais da influência do processo de ensino e aprendizagem do que da maturidade biológica ou do desenvolvimento do aluno. O professor desempenha um papel fundamental como facilitador desta evolução, proporcionando uma orientação sobre as expectativas dos alunos (Fuys et al., 1988). Sem a presença do professor a evolução do aluno não aconteceria.

A teoria de van Hiele advoga a existência de um ciclo de aprendizagem de cinco fases didácticas, que motivam o desenvolvimento do aluno de um nível para o seguinte. As fases de aprendizagem estão indissociavelmente relacionadas com os níveis de raciocínio dos alunos, e são potencialmente mais importantes para a educação. Ao longo destas fases, o professor deve procurar que os alunos construam a rede mental de relações do nível de raciocínio a que devem aceder. Clements e Battista (1992), Matos (1984), Pegg, Gutiérrez e Huerta (1998), descrevem, para cada fase, o objectivo para a aprendizagem do aluno e o respectivo papel atribuído ao professor no processo de motivação daquela:

Fase 1: *Informação.*

Durante a primeira fase, o professor deve informar o aluno acerca do conteúdo em estudo, discutir sobre os materiais que irão utilizar, disponibilizando-os aos alunos. Esta fase também é de informação para o professor pois permite que se aperceba do conhecimento prévio e do nível de raciocínio dos alunos em determinado tópico.

Em suma, a fase de informação serve para orientar a atenção dos alunos e informá-los sobre o tipo de trabalho que vão desenvolver.

Fase 2: *Orientação guiada.*

O objectivo do ensino, durante esta fase, é conseguir que os alunos se ocupem activamente da exploração de objectos (desenvolvendo actividades como a dobragem ou a medição), de modo a descobrirem redes de relações entre os objectos que estão a manipular. Os alunos não iriam conseguir sozinhos efectuar uma aprendizagem eficaz, por isso, o papel do professor é orientar a actividade dos alunos, guiando-os através de explorações que os conduzam às descobertas. Nesta fase serão construídos os elementos básicos da rede de relações do novo nível.

Fase 3: *Explicitação.*

Uma das principais finalidades desta fase é fazer com que os alunos troquem experiências, comentem as regularidades que observaram, expliquem como resolveram as actividades, tudo isto dentro de um contexto de diálogo em grupo.

Os alunos tomam consciência das relações e começam a desenvolver o seu conhecimento intuitivo, descrevendo os conceitos geométricos por palavras próprias.

Nesta fase, o professor induz os alunos a refinar a sua linguagem e a incorporar gradualmente os termos técnicos mais adequados, correspondentes ao novo nível de raciocínio que estão prestes a atingir. Para van Hiele, a verdadeira compreensão requer a conclusão bem sucedida desta fase.

Fase 4: *Orientação livre.*

Agora, os alunos devem aplicar os conhecimentos e a linguagem acabados de adquirir a investigações diferentes das anteriores. Nesta fase resolvem problemas cuja solução exige a síntese e a utilização de conceitos e relações elaborados previamente. Aprendem a orientar-se sozinhos dentro da rede de relações e a aplicá-las na resolução de problemas. O papel do professor é: seleccionar materiais e problemas geométricos adequados, encorajar os alunos a procurar diferentes soluções, apelando à sua criatividade e introduzir conceitos e processos relevantes de resolução de problemas.

Fase 5: *Integração.*

Nesta fase, o professor não apresenta nada de novo. Os alunos elaboram uma síntese do que aprenderam, integrando o seu conhecimento numa rede coerente de fácil aplicação. Devem adquirir uma visão geral dos conteúdos que têm à sua disposição. Cabe ao professor encorajá-los a reflectir e consolidar o seu conhecimento geométrico.

Terminada esta fase, os alunos têm ao seu dispor uma nova rede de relações mentais, mais ampla do que a anterior e que a substitui, tendo atingido um novo nível de raciocínio.

Pastor e Rodríguez (1990) referem que as fases 2, 3 e 4 são fundamentais para conseguir uma boa aprendizagem dos conteúdos, para além de um desenvolvimento da capacidade de raciocínio, pelo que nenhuma delas deve ser preterida nem é aconselhável desordená-las. Não obstante, a fase 3 não deve ser entendida como um período concreto de tempo entre as fases 2 e 4, dedicada exclusivamente ao diálogo, mas sim como uma atitude contínua de incitamento por parte do professor, para que os alunos dialoguem e justifiquem as suas descobertas. Assim, esta fase estender-se-á também aos resultados das actividades que se realizam nas fases 1, 2, 4 e 5.

A fase 1 tem por objectivo permitir ao professor apresentar aos seus alunos o novo tema de trabalho e averiguar os seus conhecimentos e nível de raciocínio. Por isso, em determinadas situações, quando tanto o professor como os alunos têm já a informação adequada, esta fase é desnecessária, começando o trabalho na fase 2 do nível seguinte. Como o objectivo da fase 5 é globalizar e unificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos em vários momentos, esta fase também pode ser eliminada em alguns casos. Por exemplo nos níveis de raciocínio inferiores ou quando o tema de trabalho é novo e muito desligado dos outros temas que os alunos conhecem.

Em suma, as fases 2 e 4 marcam a sequenciação das actividades para a aprendizagem de um tema e a aquisição de um nível de raciocínio. A fase 3 deve abranger toda a actividade em que os alunos intervêm. As fases 1 e 5 são também importantes e não podem ser ignoradas, mas se, em determinada situação, não forem necessárias, podem ser eliminadas.

4.6 Relação entre a elaboração de demonstrações e os níveis de van Hiele

O modelo proposto por van Hiele tem servido muitas vezes de base para a avaliação do nível de desenvolvimento geométrico dos alunos. Esta teoria pode ser também utilizada para melhor compreender os processos relacionados com a demonstração e, consequentemente, qual a altura mais apropriada para a trabalhar com os alunos.

Segundo van Hiele (1986), no nível *visual* os julgamentos dos alunos baseiam-se na observação das figuras, enquanto que os alunos que raciocinam no nível *descritivo / analítico*, apesar de também utilizarem a observação das figuras, baseiam os seus julgamentos na rede de relações nelas representadas. Van Hiele sublinha que é esta rede de relações que distingue os dois primeiros níveis de raciocínio. No nível 2, apesar dos alunos serem capazes de pensar numa classe de figuras como uma colecção de propriedades, não conseguem ainda explicar o que significa dizer que uma propriedade decorre de outra. Em contraste, no nível 3 os conteúdos de duas quaisquer propriedades não são importantes para treinar o raciocínio, mas sim as ligações entre elas. Desta forma, é construída uma nova rede de relações que servirá de base ao terceiro nível de raciocínio, desenvolvendo nos alunos a utilização de uma linguagem técnica que torna possível a comunicação com outros acerca das ideias essenciais na rede de relações, ou seja, raciocinar (Clements e Battista, 1992).

Villiers (referido por Clements e Battista, 1992) argumenta que o raciocínio dedutivo ocorre pela primeira vez no nível 3, quando a rede de relações lógicas entre propriedades de conceitos se estabelece. Na sua opinião, como os alunos dos níveis 1 e 2 não duvidam da validade das suas observações empíricas, a demonstração não tem, para eles, qualquer significado, vêem-na como uma justificação do que é óbvio. Senk (referido por Clements e Battista, 1992) partilha da mesma opinião e defende que um programa orientado para a demonstração requer, pelo menos, o nível 3 de van Hiele.

Van Dormolen (referido por Battista e Clements, 1992) descreve três níveis de desempenho na elaboração de uma demonstração, relacionando-os com os níveis propostos por van Hiele. No primeiro nível são elaboradas justificações para casos singulares, assim, as conclusões restringem-se ao exemplo específico para o qual é dada a justificação. No segundo nível as justificações e conclusões podem destinar-se a casos específicos, mas referem-se a colecções de objectos semelhantes, vários exemplos são considerados para ilustrar um padrão, com os alunos a serem capazes de gerar mais exemplos. No terceiro nível os alunos justificam afirmações, formando argumentos que se adaptam a normas aceites, isto é, são capazes de fornecer provas formais. Van Dormolen relaciona o seu primeiro nível com o nível *visual* de van Hiele, o segundo com o nível *descritivo / analítico* e o terceiro com o nível *abstracto relacional*.

Capítulo 5

Teorias socioculturais do desenvolvimento

Nos últimos anos o interesse no papel da comunicação em matemática tem crescido consideravelmente. É recomendável investigar a prática discursiva na aula que viabilize a comunicação e a produção de textos matemáticos simultaneamente ao fazer da própria Matemática.

Neste capítulo, pretende-se discutir e analisar a forma como determinados contextos socioculturais influenciam a apropriação de conceitos, através da avaliação do processo comunicativo. Para cumprir este objectivo recorre-se a algumas noções das abordagens defendidas por Vygotsky e Bakhtin, acerca do papel mediacional das ferramentas na construção do conhecimento.

5.1 Abordagem vygotskiana

Vygotsky desenvolveu a abordagem genética ao desenvolvimento de conceitos na infância e na adolescência, delineando a transição através de um conjunto de estádios do desenvolvimento humano, baseados na prática social da criança.

Entre 1924 e 1934 lançou uma série de investigações nas áreas da psicologia do desenvolvimento, pedagogia e psicopatologia em colaboração com Luria e Leont'ev.

O seu trabalho mais famoso foi *Pensamento e Linguagem*, no qual desenvolveu, pela primeira vez, uma teoria do desenvolvimento da linguagem e do pensamento lógico na criança, no decurso das suas interacções com adultos e o mundo que a rodeia.

Vygotsky foi fortemente influenciado por Pavlov e pela descoberta do reflexo condicionado, inclinando-se para o behaviourismo, enfatizando a necessidade da ciência adoptar métodos objectivos de investigação, em oposição aos introspectivos.

Recentemente, os linguistas e educadores, influenciados por Piaget, têm-se mostrado atraídos pelo trabalho de Vygotsky, entendendo que revela um entendimento superior da relação entre o educador e o educando, na qual o educador deve negociar com a criança ou aluno, que é creditado com um papel activo no processo de aprendizagem.

A teoria desenvolvida por Vygotsky e pelos seus colegas, Luria e Leont'ev, cujo objectivo era ultrapassar a interpretação prevalecente da psicologia dominada pela psicanálise e pelo behaviourismo, tem por base três grandes temas que surgem com grande frequência nos seus trabalhos:

- As funções psicológicas têm um suporte biológico, uma vez que são produtos da actividade cerebral;
- O funcionamento psicológico deriva das relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior;
- A relação homem/mundo é mediada por ferramentas. (Oliveira, 1993; Wertsch, 1991)

Vygotsky foi fortemente influenciado pelas ideias de Marx, Engels e Hegel ao formular as suas ideias sobre a análise genética. Segundo Wertsch (1991), a sua insistência em utilizar a análise genética no estudo do funcionamento mental humano significou para ele a principal via para entender a mente, especificando as origens e transferências genéticas que sofreu.

O segundo tema da abordagem vygotskiana pressupõe que o funcionamento mental superior do indivíduo tem origem na actividade social. A formulação geral deste princípio surge na sua *lei genética do desenvolvimento cultural*:

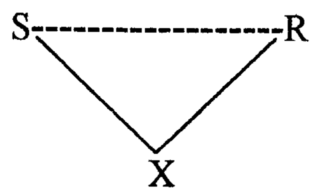
> "Qualquer função no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos. Primeiro aparece no plano social, e depois no plano psicológico. Primeiro aparece entre as pessoas, como uma categoria interpsicológica, e depois dentro da criança como uma categoria intrapsicológica. Isto é igualmente verdade no que respeita à atenção voluntária, memória lógica, à formação de conceitos, ao desenvolvimento da volição (...) A internalização transforma o próprio processo e altera a sua estrutura e função." (Vygotsky, citado por Wertsch, 1991, p. 113).

Este processo de reconstrução interna de actividades externas é apelidado por Vygotsky de *internalização* e é caracterizado por uma série de transformações, entre as quais: a reconstrução interna de uma actividade que inicialmente representa uma actividade externa; a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal.

O último tema destacado no trabalho de Vygotsky indica que o funcionamento mental superior é mediado por instrumentos e signos. O principal foco aqui é que a actividade humana só pode ser entendida se tomarmos em consideração as ferramentas que a medeiam. Vygotsky entende que fundamentalmente as diferentes formas de mediação moldam e definem a actividade, não actuando apenas como facilitadores (Wertsch, 1991).

5.1.1 Mediação

Um conceito fundamental na abordagem de Vygotsky acerca do funcionamento psicológico é o de *mediação*. Em traços gerais a mediação é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser directa e passa a ser mediada por esse elemento (Oliveira, 1993). Um indivíduo nunca reage directamente ao ambiente que o rodeia. A relação entre aquele e o objecto é mediada por elementos culturais, "o processo simples estímulo resposta é substituído por um acto complexo mediado,



S=estímulo
R=resposta
X=elemento mediador

Fig. 5.1 – Diagrama que caracteriza o processo de mediação proposto por Vygotsky.

Neste novo processo o impulso directo para reagir é inibido, e é incorporado um estímulo auxiliar que facilita a complementação da operação por meios indirectos" (Vygotsky, citado por Oliveira, 1993, pp.26-27).

Deste modo, para Vygotsky as funções psicológicas superiores assim como a actividade humana são necessariamente mediadas por ferramentas auxiliares (Oliveira, 1993; Wertsch, 1991). Quando Vygotsky formulou as suas primeiras ideias acerca da mediação da consciência, apropriou-se das ideias marxistas sobre o modo como as ferramentas ou instrumentos medeiam a actividade laboral e estendeu essas ideias discutindo de que forma as ferramentas psicológicas medeiam o pensamento. Este novo modo de pensar acerca da consciência foi denominado método instrumental e discute o facto de um estímulo poder desempenhar o papel de um objecto para o qual um acto de comportamento é direccionado. No entanto, neste acto, a ferramenta pode desempenhar também o papel do método utilizado para dirigir as operações psicológicas internas para resolver um problema. No processo estímulo-resposta a relação entre estes dois elementos é associativa directa, enquanto que no método instrumental de Vygotsky, tanto o estímulo como a ferramenta podem ser considerados como estímulo afectando a resposta final.

Ferramentas mediadoras

A mediação pode ocorrer a partir da utilização de diferentes tipos de ferramentas. Vygotsky distingue dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos (*ferramentas técnicas*) e os signos (*ferramentas psicológicas ou semióticas*). As primeiras formulações de

Vygotsky tiveram a influência das ideias de Marx e Engels, acerca da utilização de instrumentos no desempenho da actividade laboral. Mas a grande contribuição de Vygotsky foi sem dúvida a distinção entre ferramentas técnicas e psicológicas, sublinhando as suas diferenças (Oliveira, 1993; Wertsch, 1991). O instrumento é um elemento interposto entre o sujeito e o objecto da sua actividade, conseguindo, deste modo, ampliar as possibilidades de transformação da natureza (Oliveira, 1993). Por exemplo, um martelo é normalmente utilizado pelo homem para pregar um prego, porque desempenha mais facilmente esta tarefa do que a mão humana. O instrumento é procurado com um determinado objectivo, carregando consigo a função para a qual foi criado. É assim um objecto social e mediador da relação entre o indivíduo e o mundo.

Para Vygotsky, a invenção e a utilização de signos como meios auxiliares, na resolução de um determinado problema psicológico, é perfeitamente análoga à utilização de instrumentos, só que agora no campo psicológico, auxiliando o indivíduo em tarefas que exigem memória ou atenção, sendo a memória mediada por signos mais poderosa do que a memória não mediada (Oliveira, 1993).

A mediação semiótica é uma das preocupações centrais na abordagem sociocultural de Vygotsky, tendo identificado diversos tipos de ferramentas psicológicas como: a linguagem, vários sistemas de contagem, técnicas mnemónicas, a escrita, esquemas, diagramas, ou seja, todo o tipo de sistemas simbólicos.

O recurso aos signos implica a ocorrência de mudanças fundamentais no desenvolvimento de cada indivíduo. Por um lado, a utilização de marcas externas vai-se transformar em processos internos de mediação – processo designado por *internalização* – ou seja, o indivíduo já não necessita das marcas externas passando a utilizar signos internos, isto é, representações mentais que substituem os objectos do mundo real. Por outro lado, são desenvolvidos sistemas simbólicos que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas, passando a ser compartilhadas pelos membros de um grupo social, permitindo assim a comunicação e o aprofundamento da interacção social (Oliveira, 1993).

A linguagem

À luz das suas considerações, Vygotsky aponta a linguagem como sendo a *ferramenta das ferramentas* (Wells, 1999), ocupando assim o lugar central na sua obra, uma vez que representa o sistema simbólico básico de todos os grupos humanos:

"A capacidade especificamente humana da linguagem permite às crianças encontrar ferramentas auxiliares na resolução de tarefas difíceis, para ultrapassar a acção impulsiva, para planear a solução de um problema antes da sua execução, e para dominar o próprio comportamento. As crianças utilizam os signos e as palavras principalmente como meio de contactar com outras pessoas. As funções cognitivas e comunicativas da linguagem tornam-se assim a base de uma actividade nova e superior nas crianças, distinguindo-as dos animais." (Vygotsky, citado por Confrey, 1995, p. 39)

Segundo Oliveira (1993), Vygotsky destacou duas funções básicas da linguagem. Numa fase inicial, o desenvolvimento da linguagem resulta da necessidade do indivíduo comunicar com os outros. Logo, a principal função reconhecida na linguagem é a de *intercâmbio social*: é com o objectivo de se comunicar com os seus semelhantes que o homem utiliza os sistemas de linguagem. Por outro lado, para que a comunicação seja conseguida de uma forma mais sofisticada, é necessária a utilização de signos compreensíveis por todos, que traduzam, de uma forma precisa, ideias, sentimentos, vontades e pensamentos. Cada indivíduo transporta consigo a sua experiência pessoal, o que implica claramente uma subjectividade na forma de pensar, assim o mundo da experiência vivida deve ser simplificado e generalizado, para poder ser traduzido em signos transmissíveis a outros. Este fenómeno está directamente relacionado com a segunda função que Vygotsky atribui à linguagem, a de *pensamento generalizante*. A linguagem agrupa todas as ocorrências de uma classe de objectos, acontecimentos e situações sob a mesma categoria conceptual. Neste sentido, a linguagem é entendida como um instrumento do pensamento. Torna-se então necessário compreender, de uma forma mais explícita, as relações existentes entre a linguagem e o pensamento.

Relação dialéctica entre pensamento e linguagem

Vygotsky argumenta que o pensamento e a linguagem têm origens diferentes. A linguagem, sob a forma de discurso, evolui dos gestos e respostas afectivas, desenvolve-se num contexto de comunicação e interacções sociais. Para Vygotsky, o pensamento, especialmente o pensamento lógico, evolui da actividade em que a criança está envolvida (Confrey, 1995). Ao investigar a relação entre pensamento e linguagem, Vygotsky encontrou a unidade do pensamento verbal no significado da palavra. Oliveira (1993) afirma que, na análise que Vygotsky faz das relações entre pensamento e linguagem, o significado desempenha um papel fulcral. Para além de ser um componente essencial da palavra, representa um acto de pensamento. É através do significado que se fundem as funções da linguagem mencionadas anteriormente:

> "Uma palavra sem significado é um som vazio, o significado, portanto, é um critério da 'palavra', seu componente indispensável. Pareceria então, que o significado poderia ser visto como um fenómeno da fala. Mas, do ponto de vista da psicologia, o significado de cada palavra é uma generalização ou um conceito. E como as generalizações e os conceitos são inegavelmente actos de pensamento, podemos considerar o significado como um fenómeno do pensamento." (Vygotsky, citado por Oliveira, 1993, p. 48)

O significado de uma palavra representa uma unidade do pensamento generalizante, mas Vygotsky também o considera como uma unidade de troca social. Assim, para Vygotsky, o significado é uma unidade que abrange as funções intelectuais e sociais.

Na teoria vygotskiana, a linguagem desempenha um papel central no desenvolvimento do pensamento cognitivo superior. Ao investigar a mediação, Vygotsky dedicou-se ao estudo dos sistemas de signos utilizados na comunicação humana, em particular o discurso. Neste sentido, o seu objecto de análise era a actividade comunicativa, ou discurso, e não a linguagem como um sistema simbólico abstraído da sua utilização (Wertsch, 1991).

Vygotsky considera três fases particulares no desenvolvimento do discurso, são elas: o *discurso comunicativo*, o *discurso egocêntrico* e o *discurso interior*.

O *discurso interior* representa uma forma interna de linguagem, dirigida ao próprio sujeito e não a um interlocutor externo. É um discurso sem vocalização, voltado para o pensamento, cuja função é auxiliar o indivíduo nas suas funções psicológicas. Como não tem por objectivo a comunicação com os outros, é um discurso fragmentado, abreviado, contendo quase só núcleos de significado e não todas as palavras utilizadas num diálogo com outros. É, portanto, um instrumento de pensamento ao nível do plano individual.

A função do *discurso comunicativo* é manter um contacto social e tem por objectivo a comunicação com os outros, sendo o pensamento traduzido por palavras. Representa, assim, um instrumento de pensamento ao nível do plano social.

No que respeita ao desenvolvimento do pensamento e da linguagem, Vygotsky vaticina o mesmo processo considerado para outras funções psicológicas superiores, ou seja, é feito do social para o individual. Primeiro, a criança utiliza a linguagem como forma de comunicação, de contacto social e só depois passará à *internalização* do discurso. É nesta transição que Vygotsky recorre à noção de *discurso egocêntrico*. Representa o discurso do indivíduo quando pensa alto, quando dialoga alto consigo próprio, independentemente da presença de um interlocutor. O *discurso egocêntrico* evolui do *discurso comunicativo*, mantendo a forma de fala socializada, e evolui para o *discurso interior*, apresentando a mesma função e a mesma estrutura, ou seja, são discursos que o indivíduo faz para si mesmo, acabando por serem interiorizados em pensamento (Oliveira, 1993; Piteira, 2000; Rodrigues, 1997).

5.2 Contribuição de Bakhtin

Na opinião de Wertsch (1991), a abordagem de Vygotsky apresenta algumas limitações. Em particular, não considera a influência de determinados contextos culturais nas funções mentais mediadas e todas as noções que introduziu têm por base a análise das interacções adulto-criança. Desta forma, desenvolve um modelo que relaciona os processos psicológicos e o contexto cultural, mostrando como os processos mentais são mediados pela comunicação situada histórica, cultural e socialmente. As ideias de Vygotsky e do seu contemporâneo Bakhtin são bastante compatíveis, uma vez que trabalharam no mesmo contexto intelectual, por isso têm sido comparadas e contrastadas, numa tentativa de construir um modelo sociocultural, da consciência humana, mais radical. Neste sentido, Wertsch (1991) recorre às noções bakhtinianas de *elocução, voz, géneros de discurso* e *dialogicidade* para ampliar a abordagem apresentada por Vygotsky, acerca do papel mediacional das ferramentas e o carácter social da apropriação dos mesmos.

Wertsch (1991) utiliza o termo *voz* introduzido por Bakhtin (referido por Wertsch, 1991) que significa personalidade ou consciência falante. A utilização desta noção por Wertsch reflecte três ideias básicas partilhadas por Vygotsky e Bakhtin: para compreender a acção mental humana é necessário compreender as ferramentas semióticas usadas para mediar essa acção; certos aspectos do funcionamento mental humano estão fundamentalmente ligados a processos comunicativos; e é possível compreender adequadamente o funcionamento mental humano apenas através da análise genética ou desenvolvimentista.

Como já foi referido, para Vygotsky os significados das palavras estabelecem a ligação entre o pensamento e a linguagem. Acredita que o desenvolvimento do significado de uma palavra só é possível através do desenvolvimento das interacções sociais, pela partilha dos múltiplos sentidos contextualizados dessa palavra. Da mesma forma, para Bakhtin o significado é um processo activo, só existe quando duas ou mais vozes entram em contacto, o sistema de linguagem é um fenómeno puramente social. Esta insistência de Bakhtin em considerar mais do que uma *voz*, reflecte a sua preocupação com a questão do endereçamento. Uma *voz* dirige-se sempre a outra *voz* e esta, por sua vez, responde-lhe, o que implica a consideração da *voz* anterior. A questão do endereçamento e do envolvimento de pelo menos duas *vozes*, surge da base teórica da sua abordagem, a *dialogicidade*, encontrada na interacção entre elocuções.

Tulviste (referido por Wertsch, 1991) considera que, em qualquer cultura e em qualquer indivíduo, não existe apenas uma forma homogénea de pensamento, mas diferentes tipos de pensamento verbal, utilizando o termo heterogeneidade para caracterizar esta definição. A maior fonte de heterogeneidade destacada por Wertsch (1991) é a diferença entre as *vozes* do professor e dos alunos. Há uma clara diferença de poder entre estas *vozes*, já que grande parte das elocuções do professor representam directivas que os alunos devem cumprir. A função da *voz* do professor é regular e orientar os processos mentais dos alunos, tais como o pensamento e a atenção, para caminhos apropriados ao contexto sociocultural da sala de aula. O discurso do professor está organizado de forma a que os alunos se sintam encorajados a assumir cada vez mais responsabilidades.

Na perspectiva de Bakhtin (referido por Wertsch, 1991) o discurso de um indivíduo invoca sempre uma linguagem social que, por sua vez, dá forma a esse discurso. A invocação de um discurso que é relativamente estável e típico é designado por Bakhtin como *ventriloquismo*. É o processo a partir do qual uma *voz* fala através de outra *voz*, numa linguagem social. Há, assim, a interferência de uma *voz* noutra *voz*. O indivíduo só se apropria da palavra quando lhe atribui a sua própria intenção. Em certos contextos pode acontecer de uma *voz* ocupar o lugar central na actividade, podendo ser ouvida na *voz* de outra pessoa. Se pensarmos no contexto de sala de aula, é frequente a reputação do bom aluno exercer um poder de interferência e persuasão na *voz* de alunos menos bons. Com o objectivo de se tornarem melhor vistos perante o professor e os restantes colegas, proferem palavras utilizadas por ele, mesmo que não lhe atribuindo qualquer significado.

Bakhtin enfatiza o papel da construção dialógica do significado, como característica básica de toda a comunicação, comparando a comunicação monológica com a dialógica. Por sua vez, Lotman (referido por Wertsch, 1991) estende a perspectiva de Bakhtin, considerando que os textos comportam uma dualidade de funções: a função unívoca, que pressupõe a total coincidência entre a mensagem enviada e a recebida e que está ligada a um processo comunicativo modelado pela transmissão de informação; e a função dialógica, que gera constantemente novos significados, funcionando como um instrumento de pensamento. Lotman argumenta que todos os textos possuem as duas funções, mas uma ou outra é mais dominante, dependendo do contexto. A função unívoca de transmissão de informação foi alvo de muita atenção, servindo de base para um modelo universal de comunicação que enfatiza a transmissão e recepção de conhecimento, modelo de comunicação frequentemente utilizado no ensino. Os textos que têm por base a função dialógica deixam de ser um elemento passivo no processo, proporcionando a troca de informação constante entre transmissor e receptor. Para Wertsch (1991) estas ideias estão muito próximas da distinção de Baktin entre *discurso de autoridade* e *discurso persuasivo internamente*. Na perspectiva de Bakhtin o *discurso de autoridade* baseia-se numa estrutura de significado fixa e inalterável, não lhe permitindo interagir com outras *vozes*. Este discurso impõe-se aos outros pelo poder de quem o profere e não pelo seu poder persuasivo. Exemplos deste tipo de discurso são as palavras de: um pai, adultos, professores... Bakhtin contrapõe a este tipo de discurso aquele que é *persuasivo internamente*, e que pertence quer a quem o diz, quer às outras *vozes* que com ele interagem. A sua estrutura semântica é aberta, em cada novo contexto, este discurso pode revelar novos significados. Não é aconselhável considerar qualquer uma das funções inadequadas, entre elas existe uma tensão dinâmica que deve ser considerada. Para a comunicação ocorrer, é necessário ouvir o que o orador diz, mas aquilo que esta voz transmite não deve gerar uma interpretação única.

Segundo Wertsch (1991) o fenómeno da *internalização*, proposto por Vygotsky, ligado à génese das funções mentais superiores, pode ser reformulado pela noção de *dialogicidade* de Bakhtin. Wertsch (1991) argumenta que o funcionamento intrapessoal tem afinidade com a noção bakhtiniana de *diálogo escondido*, que se caracteriza por um diálogo entre duas pessoas no qual as palavras do segundo interlocutor estão omissas, de tal forma que o seu sentido não é violado. O segundo interlocutor está presente, de forma invisível, as suas palavras não estão lá, mas traços profundos deixados por estas têm uma influência determinante nas palavras audíveis do outro indivíduo. Pode-se afirmar que se trata de um diálogo, embora apenas uma pessoa fale, as suas elocuções representam respostas e reacções às palavras omissas de outra pessoa. Esta situação é ilustrada por Wertsch (1991) através de um exemplo de episódios de interacção entre mãe e filho na construção de um puzzle idêntico a um modelo dado. Inicialmente a mãe começa por fazer perguntas que indicam respostas, de forma a que o filho faça o puzzle. O filho vai incorporando a linha de questionamento da mãe e apesar desta não lhe fazer perguntas, ele age como se as palavras da mãe estivessem na acção. Wertsch interessa-se por investigar o grau de *internalização* da criança, no que respeita às directivas e questões da mãe e consequentemente no desempenho da tarefa na ausência das elocuções regulativas daquela. Nesta situação, a mudança microgenética de maior importância é o grau crescente de *dialogicidade* escondida, mergulhada no discurso da criança, ao longo da interacção com a mãe. No final do episódio, as questões directivas da mãe estavam parcialmente pressupostas no *discurso egocêntrico* da criança e, mais tarde, inteiramente pressupostas no seu *discurso interior*. A estrutura de pergunta e resposta, que caracterizou o diálogo externo entre mãe e criança, ou seja, o seu diálogo no plano intermental, passou a ser uma característica do funcionamento intramental da criança. Assim a organização dialógica do discurso no plano intermental é gerida de forma a moldar o plano intramental do funcionamento.

5.3 Comunicação

A comunicação matemática na aula tem vindo gradualmente a assumir um lugar de destaque no conjunto das actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática. A comunicação é geralmente avaliada através do discurso, que pode tomar várias formas: oral, escrita ou gestual, assumindo as duas primeiras uma maior importância. Nas aulas de Matemática, em particular, os intervenientes no discurso são o professor e os alunos. Geralmente, o discurso é controlado pelo professor, que pode atribuir aos alunos uma participação mais ou menos significativa (Ponte et al., 1997).

A comunicação oral, em particular, tem um papel fundamental na aula de Matemática. O aluno deve ser capaz de verbalizar raciocínios e discutir processos, confrontando-os com os outros (DES, 1997). É primordial que desenvolva a predisposição para discutir com os seus pares e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação em causa (DEB, 2001). O acto de formular ideias, partilhar argumentos, convencer os outros, é uma parte importante da aprendizagem. Quando são trocadas ideias e logo sujeitas a críticas cuidadas, são muitas vezes melhoradas e refinadas.

A comunicação escrita é também uma potencial fonte de oportunidades de expressão das ideias matemáticas. Na opinião de Ponte e outros (1997) a produção escrita tende a ser muito limitada, sendo geralmente reduzida à realização de cálculos necessários à resolução de exercícios e problemas. Mas a sua importância no ensino da Matemática tem vindo a ser reconhecida nas actuais orientações curriculares, sendo recomendável pedir aos alunos que elaborem relatórios ou ensaios onde expliquem e justifiquem os seus raciocínios.

A comunicação matemática coloca muitas dificuldades aos alunos, principalmente pela utilização de símbolos e pela atribuição de significados específicos a palavras correntes. As formas tradicionais de avaliação nem sempre conseguem detectar as dificuldades referidas, ignorando o contexto social da Matemática. Assim, a avaliação deve incluir diferentes formas de comunicação e valorizar, ao mesmo tempo, a comunicação entre pessoas e com várias formas de tecnologia (NCTM, 1991). Os alunos devem habituar-se a utilizar diversas ferramentas para raciocinar e comunicar, incluindo o computador. Se o trabalho com o computador for baseado em tarefas interessantes e desafiantes, pode favorecer a formulação de conjecturas por parte dos alunos, estimular uma atitude investigativa e enriquecer o tipo de raciocínios e argumentos utilizados.

5.4 Interacções sociais e aprendizagem

Nos ambientes tradicionais de ensino-aprendizagem procura-se, geralmente, avaliar o desenvolvimento do aluno, tendo por base aquilo que ele é capaz de fazer individualmente, isto é, quais as capacidades ou funções que domina totalmente e exerce de forma independente, sem a ajuda de outras pessoas. Vygotsky classifica esta capacidade como nível de desenvolvimento real. Mas, sublinha que, para compreender completamente o processo de desenvolvimento, não podemos apenas considerar o nível de desenvolvimento real do aluno, mas também o nível de desenvolvimento potencial, que representa a capacidade do indivíduo para realizar tarefas com o auxílio de adultos, ou pares mais capazes (Oliveira, 1993), ou seja, aquilo que o aluno consegue realizar sob a orientação de outros.

A partir da formulação destes dois níveis de desenvolvimento, Vygotsky introduz o conceito de *zona de desenvolvimento proximal* (*ZDP*), definindo-o como:

> "A distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar pela resolução independente de problemas e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes." (Vygotsky, citado por Wertsch, 1991, p. 28)

A *ZDP* é, portanto, a zona definida pela diferença entre o desempenho do aluno na resolução de tarefas: com ou sem assistência.

Vygotsky insurge-se contra a utilização de formas de avaliação estáticas e individuais, argumentando que, ao ter por base apenas a análise da actividade intelectual independente da criança quando resolve uma tarefa, os métodos psicológicos tradicionais de avaliação podem apenas descobrir as funções mentais já amadurecidas. As competências ou funções mentais que estão ainda em desenvolvimento não são detectadas por estas formas de avaliação. A noção de *ZDP* foi formulada com o objectivo de reflectir acerca das competências potenciais, as chamadas "sementes" do desenvolvimento. Este aspecto dinâmico e emergente do funcionamento psicológico reflecte-se, de forma específica, no desempenho da criança, orientada por alguém mais capaz (Cheyne e Tarulli, 1999).

Esta perspectiva reflecte-se, de forma determinante, ao nível das interacções sociais na sala de aula. Vygotsky sublinha que a aprendizagem colaborativa, entre alunos ou entre alunos e professor, é essencial para ajudar os alunos a avançar na sua *ZDP*. Para que o desenvolvimento mental dos alunos ocorra, o papel do professor não pode ser o de transmissor do saber e organizador de tarefas para os alunos resolverem de forma totalmente independente. Cabe-lhe colocar questões e apresentar propostas de aprendizagem que facilitem, promovam e desafiem o pensamento de cada aluno. Para isso é necessário que o professor saiba ouvir com atenção as ideias dos alunos, pedindo-lhes que as clarifiquem e justifiquem. Deve gerir a participação dos alunos no discurso e decidir como os encorajar a participar e, principalmente, assisti-los, proporcionando-lhes o apoio e os recursos necessários, de modo a que sejam capazes de aplicar um nível de conhecimento mais elevado do que lhes seria possível sem ajuda.

As situações de aprendizagem na aula devem permitir a colaboração entre pessoas em todos os níveis de desenvolvimento, de modo a que os alunos mais avançados ajudem os que têm mais dificuldades. Bellamy (referido por Piteira, 2000) refere-se a esta situação como andaime social (*social scaffold*). Os alunos que têm maior experiência dão modelos de comportamento aos que têm menor.

Rodrigues (1997) refere que alguns estudos empíricos (Rogoff, 1990; Saxe, Guberman e Gearhart, 1987) apoiam a abordagem teórica de Vygotsky ao conceito de *ZDP*. A interacção com adultos permite às crianças alcançar, de uma forma flexível, objectivos mais elaborados do que ao trabalhar individualmente. A resolução de actividades, num contexto social, sob a orientação de adultos ou pares mais capazes, desenvolve nas crianças uma crescente responsabilização até serem capazes de desempenhar as tarefas sozinhas.

No contexto escolar, o processo de ensino-aprendizagem deve ser construído, tomando como ponto de partida o desenvolvimento real da criança e como ponto de chegada os objectivos propostos no currículo. O percurso seleccionado para este processo estará balizado pelas possibilidades da criança, isto é, pelo seu nível de desenvolvimento potencial (Oliveira, 1993). Assim, o trabalho de Vygotsky pode ser adaptado a um contexto de sala de aula, mostrando que a aprendizagem dos alunos pode ser facilitada por meio de interacções sociais.

5.5 O computador como ferramenta mediadora que fomenta as interacções sociais

Os alunos desenvolvem as suas interpretações acerca do mundo que os rodeia a partir das imagens que vêem e das palavras que ouvem. Apesar dos indivíduos formarem os seus próprios significados acerca de um novo fenómeno ou situação, o processo de criação desses significados depende do contexto em que estão inseridos e é mediado por formas de interacção e pelos instrumentos que utilizam. Assim, o computador pode actuar como mediador da interacção do homem com o ambiente que o rodeia.

Ao considerarmos a utilização de um AGD, como recurso à aprendizagem de conceitos geométricos, a mediação assume características particulares. A possibilidade de manipular, de forma directa, as construções geométricas efectuadas, permite ao utilizador verificar quais as propriedades que a figura preserva, fomentando uma atitude investigativa, no sentido da elaboração de conjecturas e da procura de justificações que fundamentem os resultados (Laborde, 1998).

A utilização de um AGD, na construção de conhecimentos geométricos, pode influenciar de forma determinante o desempenho dos alunos. Jones (1998) refere um conjunto de situações, extraídas de uma investigação que desenvolveu, e que ilustram o poder de um AGD como ferramenta mediadora da actividade matemática: as experiências bem sucedidas na construção de figuras num AGD podem influenciar a estruturação de construções posteriores. Um par de alunos que utilizou com sucesso a intersecção de círculos, na construção de figuras invariantes ao arrastamento, recorreu sempre a esta abordagem mesmo havendo alternativas igualmente válidas; uma outra consequência da mediação a partir de um AGD poderá ser um efeito processual. O aluno poder-se-á centrar na sequência da construção em vez de analisar a estrutura geométrica do problema; a mediação da aprendizagem através deste tipo de software permite ainda perceber quando os alunos têm uma perspectiva própria de uma noção que parecem entender. Nesta situação, acontece, normalmente, um *ventriloquismo* dessa noção, não tendo ainda havido uma apropriação do termo utilizado. Os alunos aparentemente utilizam os termos apropriados de forma adequada mas atribuem-lhe as suas próprias ideias.

Estudos, tendo por base a geometria estática de papel e lápis, mostram que há uma tendência no que respeita à identificação de objectos geométricos. Cada conceito possui um conjunto de características relevantes e um conjunto de exemplos. Os exemplos são matematicamente equivalentes, no sentido em que satisfazem a definição do conceito e contêm todos os seus atributos, mas são diferentes uns dos outros (Hershkowitz, 1989). Por exemplo, quando se mostra aos alunos uma colecção de triângulos, desenhados em papel, eles conseguem identificar mais facilmente um triângulo isósceles quando a sua base está na horizontal (Clements e Battista, 1992; Scher, 2001). Hasegawa (referido por Scher, 2001) refere-se a estas descobertas como o *fenómeno prototípico*: a partir das suas experiências diárias na aula, os alunos desenvolvem imagens mentais prototípicas das formas geométricas. Um AGD permite aos alunos arrastar figuras para qualquer posição à sua escolha, observando a mudança que está a ocorrer de uma forma contínua e fluída. Num nível intuitivo é plausível afirmar que as capacidades de movimento do AGD libertam os alunos da generalização de casos particulares de uma imagem estática.

As figuras geométricas possuem uma natureza dupla: por um lado são entidades materiais desenhadas mas, por outro lado, também são objectos de uma teoria, resultante de uma abstracção da realidade. As figuras podem desempenhar o papel da realidade mas também podem ser entendidas como desempenhando o papel de um modelo para uma teoria geométrica. Devido à existência deste duplo papel há a necessidade de distinguir entre desenho e figura: o desenho refere-se à entidade material enquanto que a figura se refere ao objecto teórico (Laborde, 1993). Em geral, muitas das dificuldades sentidas pelos alunos em Geometria ocorrem porque normalmente trabalham com desenhos quando seria esperado que trabalhassem com figuras. Por exemplo, os alunos não consideram a tarefa de construção de uma figura como envolvendo a utilização de propriedades geométricas, mas como a tarefa de produzir desenhos visualmente. O computador permite, através da utilização de software apropriado, materializar a multiplicidade de desenhos associados à mesma figura e/ou a variedade de desenhos inerentes a uma figura. Uma característica dos ambientes geométricos dinâmicos é a utilização de uma descrição das figuras envolvidas no processo de comunicação com o computador. Um desenho produzido no ecrã é o resultado de um procedimento desempenhado pelo utilizador no qual torna explícita a definição da figura. Uma segunda característica, também importante neste tipo de software, é a possibilidade de variação dos desenhos associados à mesma figura. Uma condição necessária para que uma construção esteja correcta é produzir vários desenhos que preservam as propriedades pretendidas quando os elementos da figura são modificados. A utilização do computador pode facilmente conduzir ao triunfo da indução onde o aluno concebe naturalmente objectos teóricos ou relações através da percepção. As extraordinárias possibilidades visuais permitidas pelos computadores podem levar a que se pense que os alunos podem facilmente entender e conceptualizar objectos geométricos, em particular a noção de figura geométrica. Um processo cognitivo não emerge espontaneamente da observação de desenhos movimentando-se no ecrã do computador (Laborde, 1993). É necessário que o trabalho seja desenvolvido num ambiente organizado e orientado para a aprendizagem, implicando um redobrar da importância do papel do professor na aula como organizador do contexto educacional, uma vez que dispõe de ferramentas poderosas que poderão assistir os alunos e potenciar o seu desenvolvimento.

Hölz (referido por Scher, 2001) propõe a teoria da *descrição situada* para explicar que quando os alunos utilizam software matemático, desenvolvem uma linguagem que espelha os tipos de interacção que com ele experienciam. Estas descrições centradas nos computadores incluem frequentemente a utilização de verbos activos, especialmente os que expressam movimento, que traduzem, de forma evidente, a influência do computador no desenvolvimento dos alunos.

Uma das características mais importantes de um AGD é a resposta visual rápida que fornece em relação às conjecturas elaboradas pelo aluno quando investiga um problema, podendo assim ter pistas para pensar numa resolução para o mesmo. Deste modo, o desempenho do aluno é influenciado, quando está inserido num contexto de aprendizagem com recurso a um AGD. Ao pensarmos num AGD como uma ferramenta mediadora, podemos considerá-lo como um suporte para trabalhar a *ZDP* dos alunos, tal como na situação em que o indivíduo trabalha com um par mais capaz. Noss, Hoyles e Hoelzl (1994) referem que os computadores constituem um andaime computacional (*computacional scaffolding*) que apoia o desenvolvimento das ideias dos alunos e lhes permite construir o seu conhecimento geométrico, a partir do que para eles representa uma abordagem natural. De forma a resolver um determinado problema, os alunos ensaiam soluções no computador que se sentem capazes de realizar. Ao realizar essas tentativas heurísticas, adquirem intuições que lhes permitem descobrir soluções para o problema.

As tecnologias, principalmente os computadores, fazem parte de um contexto social que é conhecido por proporcionar essencialmente ambientes ricos de aprendizagem que motivam as interacções entre alunos e entre professor e alunos. As actividades realizadas com recurso a ambientes de geometria dinâmica não são excepção, são resolvidas habitualmente em pequenos grupos, o que permite criar contextos sociais favoráveis à aprendizagem. McCoy (referido por Junqueira, 1995) investigou esta questão e concluiu que, nestes ambientes, como os alunos têm de comunicar com os seus pares e com o professor, geram-se discussões facilitadoras da organização do seu próprio processo de raciocínio levando-os a aprender de uma forma intrínseca.

Capítulo 6

Plano metodológico

Neste capítulo será descrito o plano metodológico adoptado durante a implementação da investigação, procedendo-se, simultaneamente, à análise e justificação de todas as opções respeitantes aos métodos, à selecção do cenário e dos participantes, às técnicas de recolha de dados utilizadas e ao carácter da intervenção didáctica.

6.1 Opções metodológicas

Para seleccionar a metodologia de investigação que serviu de base a este trabalho, tornou-se necessário analisar as características e o objectivo do problema em estudo e, em particular, o tipo de questões que o orientam. Neste caso, não tinha como pretensão testar hipóteses preestabelecidas nem generalizar resultados, mas antes aprofundar e descrever detalhadamente o conhecimento de um processo, inserido num determinado contexto educativo, privilegiando essencialmente a compreensão dos comportamentos, a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. As questões que me propus analisar neste estudo foram formuladas com o objectivo de investigar determinados fenómenos educativos em toda a sua complexidade e em contexto natural, o que implicou que os dados recolhidos fossem ricos em pormenores descritivos. Assim, a opção recaiu numa abordagem de tipo qualitativo, que, segundo Bogdan e Biklen (1994), possui cinco características fundamentais:

- a fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal. Os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local do estudo;
- é uma investigação essencialmente descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação;
- os investigadores interessam-se mais pelos processos do que simplesmente pelos produtos;
- o significado é de importância vital neste tipo de abordagem. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador;

- os investigadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma indutiva. Os dados não são recolhidos com o objectivo de confirmar hipóteses previamente elaboradas, ao invés, as abstracções são construídas à medida que os dados recolhidos se vão agrupando.

Segundo Merriam (1988) um estudo de caso consiste na descrição e na análise intensivas de um fenómeno bem definido. Para esta autora, trata-se de uma investigação com um forte cunho descritivo e interpretativo, que se realiza com o objectivo de descobrir o que há de essencialmente único e característico no sujeito em estudo e não para estabelecer relações causa-efeito ou quantificar determinadas variáveis numa população. Como se pretendia que a investigação fosse orientada por um paradigma essencialmente interpretativo, baseada na observação detalhada de um contexto educativo com características próprias, optou-se por realizar um estudo de caso, tendo por objectivo a avaliação do significado das interacções estabelecidas entre os intervenientes.

6.2 O cenário e os participantes

Para participar neste estudo, foram seleccionados os alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade da Escola Básica 2,3 Carteado Mena, situada na Vila de Darque, nos arredores de Viana do Castelo. Trata-se de uma escola inserida num meio rural, de construção relativamente recente (13 anos), com cerca de 600 alunos, que frequentam o 2º e o 3º ciclos. As instalações da escola são boas e os recursos educativos que possui são razoáveis.

A escolha da escola teve por base dois critérios fundamentais: como exerci funções nesse estabelecimento de ensino, no ano lectivo anterior ao estudo, tinha já estabelecido uma relação de cumplicidade com as pessoas que lá trabalham, tornando mais acessível a colaboração dos órgãos directivos da escola e da professora participante nesta investigação; e, principalmente, porque a escola dispunha dos recursos técnicos e informáticos imprescindíveis ao sucesso da implementação da investigação, nomeadamente uma sala de aula com vários computadores.

Para seleccionar a turma que iria participar no estudo tive o precioso apoio da professora interveniente, a Cristina. Como no ano lectivo de 2001/2002 tinha a seu cargo várias turmas do 9º ano de escolaridade, cuja evolução tinha acompanhado desde o 7º ano, optamos por discutir, em algumas reuniões, quais os requisitos que a turma seleccionada teria de preencher, para cumprir as expectativas da investigação. Assim, a professora, que possuía um profundo conhecimento de cada uma das suas turmas, escolheu a turma 9º B, que julgou ser aquela que melhor se enquadrava nos objectivos do trabalho.

6.2.1 A turma

Para obter uma caracterização detalhada da turma em estudo, foi necessário recorrer às impressões da professora, uma vez que, para além de ter acompanhado estes alunos nos dois anos lectivos anteriores, exercia ainda a função de directora de turma.

A turma do 9º B era constituída por vinte e quatro alunos, dos quais treze eram do sexo masculino e onze do sexo feminino. Embora houvesse nove alunos fora da escolaridade obrigatória, um dos quais repetente, a média de idades desta turma era de catorze anos. No que respeita ao aproveitamento, era uma turma bastante heterogénea. Mais de metade dos alunos não revelava grandes dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática, apresentando um aproveitamento razoável. Mas havia cerca de dez alunos com aproveitamento negativo, revelando vários problemas de aprendizagem. Quanto a este último grupo de alunos, a professora mostrou especial preocupação com o caso da Ana que, como tinha vindo de Angola nesse ano, para além de não conseguir evoluir no que respeitava à aprendizagem, tinha sérios problemas de integração no grupo turma.

Na opinião da professora, era agradável trabalhar com os alunos desta turma, já que revelavam um grande empenho na resolução das actividades propostas, embora, por vezes, se mostrassem um pouco agitados, principalmente devido à vontade que tinham em participar nas discussões promovidas durante as aulas. A professora salientou ainda o facto de não existirem casos de competição entre os alunos desta turma, uma vez que havia a opinião generalizada de que a melhor aluna era a Margarida, implicando, portanto, que os colegas recorressem muitas vezes à sua ajuda.

6.2.2 A professora

A professora Cristina não tinha inicialmente como objectivo optar pelo ensino da Matemática tendo-se licenciado em Matemática no Ramo de Investigação Operacional, pela Universidade de Coimbra. Quando terminou o curso, trabalhou durante algum tempo numa empresa de transportes, mas o trabalho que desenvolveu não correspondeu às suas expectativas. Mais tarde, surgiu a oportunidade de trabalhar numa escola de ensino profissional, na qual permaneceu durante cinco anos. Foi neste período que surgiu o gosto pelo ensino da Matemática, que foi determinante na sua opção de se profissionalizar e efectivar numa escola estatal.

O seu interesse por todas as problemáticas que envolvem a prática lectiva e, em especial, o ensino da Matemática, levou-a a aceitar prontamente o convite para colaborar nesta investigação. O único obstáculo que colocou foi o não ter conhecimento acerca do modo de funcionamento do *GSP*, mas desde logo se mostrou disponível e motivada para explorar o programa antes do início do estudo. Depois de contactar com o *GSP* chegou à conclusão que era bastante acessível e de grande interesse didáctico, planeando desde logo a forma de o utilizar no ano lectivo seguinte.

6.3 Técnicas de recolha de dados

Bogdan e Biklen (1994) defendem que, para realizar uma investigação de carácter qualitativo, é necessário recorrer a uma variedade de técnicas de recolha de dados que assegurem a obtenção de informação válida. Como os dados empíricos recolhidos visavam a análise e caracterização dos processos em foco neste estudo e a avaliação da intervenção didáctica, os principais métodos utilizados consistiram na observação participante, na entrevista e na análise documental, tendo sido também utilizado o *Teste de Geometria de van Hiele*.

6.3.1 Observação participante

Para cumprir os objectivos propostos no início desta investigação, era necessário analisar e compreender capacidades associadas à comunicação, a comportamentos e concepções dos alunos num contexto geométrico dinâmico, o que pressupunha uma atitude essencialmente interpretativa por parte da investigadora. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a *observação participante* é a estratégia que mais se adequa às características anteriormente descritas porque permite, por um lado, reduzir a complexidade do estudo e, por outro, o acesso directo à actividade desenvolvida pelos alunos, o que certamente enriquece as conclusões que surgem no final do estudo.

6.3.2 Entrevistas

Em investigação qualitativa a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos relativos a um determinado contexto (Bogdan e Biklen, 1994). Utilizando a entrevista como instrumento de recolha de dados, surgiram grandes oportunidades de clarificação acerca das linhas orientadoras do estudo, que de outra forma não seria possível.

Com a entrevista pretendia reunir dados relacionados com as questões e objectivos propostos inicialmente. Deste modo, achei adequado fazer entrevistas clínicas aos alunos, com o propósito de tentar avaliar a profundidade dos seus conhecimentos e investigar os processos cognitivos por eles utilizados, identificando as dificuldades de aprendizagem sentidas. Tendo por base a análise das actividades realizadas e dos respectivos relatórios e a troca de impressões acerca da experiência vivida, foi realizada um entrevista a cada grupo, em regime de voluntariado, com a duração de quarenta e cinco minutos, durante a fase de investigação.

6.3.3 Documentação

Para além do recurso aos métodos já referidos, houve dados que provieram de outras fontes igualmente importantes.

Merriam (1988) refere que todos os dados que não são obtidos através da observação ou da entrevista são considerados *documentos*. Portanto, nesta categoria estão incluídos todos os trabalhos escritos e realizados pelos alunos: os relatórios de cada uma das actividades, a resolução dos exercícios propostos pela professora e as disquetes com a gravação das construções realizadas em cada actividade.

6.3.4 Teste de Geometria de van Hiele

Tornou-se pertinente, no âmbito desta investigação, determinar o nível de van Hiele de cada um dos alunos da turma observada, tendo em vista a fundamentação de raciocínios e determinado tipo de comportamentos. Para isso foi utilizado o *Teste de Geometria de van Hiele* (Usiskin, 1982). Este teste foi elaborado no âmbito do projecto CDASSG (*Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*), que envolveu 2699 alunos inscritos em cursos de Geometria no 10º ano de escolaridade, de treze escolas dos EUA, e foi utilizado com o principal objectivo de determinar o nível de raciocínio geométrico dos alunos participantes.

Matos (1984) traduziu e adaptou o teste para português, utilizando-o para caracterizar o nível de raciocínio geométrico dos alunos das Escolas Superiores de Educação de Beja e Faro. Antes de ter implementado o teste nessa investigação, testou a sua tradução numa turma de alunos do 7º ano de escolaridade. Neste estudo é utilizada a versão traduzida por este autor. Para aplicar o teste nesta investigação foi necessário enviar um pedido de autorização formal a Usiskin, que amavelmente respondeu afirmativamente e cuja resposta se encontra no anexo 4.

O teste é composto apenas por questões de escolha múltipla e foi construído com base em citações dos próprios van Hiele para descrever comportamentos dos alunos nos diferentes níveis de raciocínio (Usiskin, 1982). Possui cinco grupos de questões, cada um com cinco questões, com cinco alternativas de resposta, que correspondem a cada um dos níveis de van Hiele.

Muitos autores têm criticado o teste, elaborado no projecto CDASSG, no que respeita à sua fidelidade, propondo métodos alternativos para identificar o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Fuys, Geddes e Tischler (1988) desenvolveram um modelo de trabalho, com descritores detalhados de cada um dos níveis, dividido em três módulos de ensino que incluíam tarefas específicas. Para caracterizar o conhecimento geométrico dos alunos, conduziram entrevistas clínicas baseadas nesses módulos. Pastor e Rodríguez (1990) utilizaram dois métodos para avaliar os níveis de raciocínio. Um dos métodos consistiu nas entrevistas clínicas individuais, durante as quais propunham actividades e promoviam o diálogo com os alunos. O outro método consistia na realização de um teste escrito constituído por uma série de itens de resposta aberta. Como neste estudo, não se pretendia investigar em profundidade as alterações do nível de van Hiele dos intervenientes, mas apenas obter um indicador dos mesmos, para ter em consideração na análise empírica dos dados, optou-se por utilizar o teste do projecto CDASSG.

Os alunos realizaram o teste duas vezes, uma no início da investigação, antes da intervenção didáctica, e outra no final, após a sua conclusão. A primeira vez que o teste foi implementado decorreu nos primeiros trinta e cinco minutos de uma aula normal, no dia 26 de Fevereiro de 2002, antes de a professora iniciar a abordagem dos conceitos relativos à unidade didáctica seleccionada para esta investigação. Em geral, os alunos acharam o teste difícil e mostraram alguma preocupação com esse facto. O teste foi repetido, nos mesmos moldes, no dia 18 de Abril de 2002, depois de concluída a intervenção didáctica e com o objectivo de avaliar a evolução do raciocínio geométrico dos alunos, através da comparação com os resultados obtidos no primeiro teste.

6.4 Análise dos dados

O processo de análise dos dados é definido por Bogdan e Biklen (1994) como "o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido, e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p. 205). A análise qualitativa requer alguma criatividade por parte do investigador, uma vez que lhe coloca o desafio de dividir os dados em estado bruto por categorias lógicas, examiná-las de uma forma holística e encontrar um modo de comunicar as suas interpretações aos outros.

A análise iniciou-se com o tratamento dos dados resultantes das duas aplicações do *Teste de Geometria de van Hiele*, cujo objectivo era determinar globalmente o nível de raciocínio geométrico dos alunos da turma observada e avaliar possíveis alterações nesses níveis no final da intervenção didáctica. Os resultados obtidos pelos alunos nos dois testes aplicados foram sujeitos a um estudo estatístico que permitiu concluir se houve uma mudança significativa, do primeiro para o segundo teste, e em que sentido se processou essa mudança.

As aulas observadas e as entrevistas clínicas realizadas pela investigadora foram transcritas e, juntamente com os relatórios das actividades elaborados pelos alunos, o seu conteúdo foi analisado. A par da transcrição, a investigadora foi registando comentários, que na sua opinião, contribuíam de forma relevante para a estruturação da análise. À medida que os dados iam sendo lidos, os comentários sugeridos pela investigadora começaram a traduzir ideias que se iam repetindo. Considerando os objectivos específicos do estudo, destacou frases e tipos de comportamento protagonizados pelos intervenientes, formando *categorias de classificação* (Bogdan e Biklen, 1994), nas quais agrupava elementos que obedeciam a um determinado critério ou tema. Estas categorias representaram um meio de classificar os dados descritivos recolhidos, de modo a que o material contido num determinado tópico pudesse ser apartado dos outros dados. No quadro 6.1 apresentam-se os títulos das categorias de análise formadas, focando, simultaneamente, o objectivo do estudo a que se referem:

Objectivos do estudo	**Categorias de análise**
Linguagem	Géneros de discurso Características das *vozes*
Computador	Resposta visual Utilização de verbos que expressam movimento Utilização de cores na definição dos elementos geométricos Funcionamento dos menus
Demonstração	Funções da demonstração Tipos de demonstração
Fases de aprendizagem	Fase de informação Fase de orientação guiada Fase de explicitação Fase de orientação livre

Quadro 6.1 – Categorias de análise.

As categorias formuladas visavam caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos durante a investigação. Não se dispunha de um sistema de classificação pré-definido, os temas genéricos que formaram as categorias de análise emergiram durante a análise dos dados e foram sendo refinados ao longo desta fase.

Era essencial para a investigadora analisar a construção dos significados geométricos num contexto de interacção social. Na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), a abordagem mais adequada a este tipo de situação é a *interacção simbólica*, já que na sua base se encontra a asserção de que a experiência humana é mediada pela interpretação. Para compreender os comportamentos era necessário compreender as definições e o processo subjacente à construção destas. As pessoas não agem com base em respostas pré-determinadas a objectos predefinidos, mas sim como seres simbólicos que interpretam e definem, cujo comportamento só pode ser compreendido pelo investigador que se introduza no processo de definição através de métodos como a observação participante. A interpretação não é um acto autónomo, os significados são construídos através das interacções, por isso, a interacção simbólica assume o papel de paradigma conceptual, na tentativa de compreender e prever o comportamento dos intervenientes. Assim, neste trabalho, a investigadora procurou centrar a sua análise na identificação de interacções significativas entre os intervenientes no estudo.

Capítulo 7

Análise da intervenção didáctica

A implementação desta investigação estava revestida de alguma complexidade. A maioria das formas de trabalho utilizadas era pouco habitual para os alunos em causa: a utilização do *GSP*, o trabalho de grupo na aula de Matemática e a elaboração de relatórios das actividades propostas são alguns exemplos. Assim, todas as etapas relativas à implementação da investigação foram cuidadosamente planificadas, em colaboração com a professora, havendo então necessidade de incluir um período inicial de exploração do software, antes da implementação da intervenção didáctica. No entanto, a primeira etapa contribuiu apenas para testar cada uma das metodologias de trabalho referidas não sendo considerada na análise dos resultados.

Este capítulo está dividido em três secções que tratam, respectivamente, a descrição do período de exploração, a análise dos resultados obtidos nas duas aplicações do *Teste de Geometria de van Hiele* e a avaliação da intervenção didáctica, no que respeita à natureza das mediações observadas e às características das demonstrações apresentadas pelos alunos.

7.1 Período de exploração do software

As características e potencialidades do GSP tornam-no um programa poderoso e possivelmente um pouco complexo para quem nunca o utilizou. Como os alunos intervenientes neste estudo não tinham experiência prévia com o *GSP*, versão 3.0 (Key Curriculum Press, 1997), tornou-se necessário explorar o programa, antes de iniciar a investigação.

Para além de dar a conhecer o programa, este primeiro contacto com os alunos teve também por objectivo testar o funcionamento dos grupos formados pela professora e verificar se haveria necessidade de efectuar alguma alteração, já que seria desta forma que iriam trabalhar durante a investigação, e interessava manter a estabilidade dentro de cada grupo.

A exploração do programa decorreu durante três aulas, de noventa minutos cada, tendo sido proposta a resolução de três actividades. Apesar de o principal objectivo desta fase ser uma apresentação do *GSP*, as actividades propostas visaram a abordagem de conteúdos em que os alunos revelavam dificuldades.

Neste período, foi ainda possível minorar enviesamentos resultantes do tipo de metodologia utilizado nesta investigação. Os alunos começaram a familiarizar-se com presença da investigadora na sala de aula, entendendo o seu papel como o de uma segunda professora a que poderiam recorrer, para ultrapassar as dificuldades com que se debatiam. A adaptação à câmara de vídeo foi um pouco mais complicada. Alguns alunos ficaram constrangidos com a sua presença, outros, pelo contrário, mostraram-se bastante agitados. Mas, ao longo do tempo, este factor de perturbação foi sendo progressivamente ultrapassado.

7.1.1 Formação dos grupos de trabalho

O trabalho de grupo constituía a base da metodologia de trabalho utilizada na intervenção didáctica portanto, uma vez que a experiência dos alunos era reduzida, o período de exploração privilegiou também esta componente. A selecção dos elementos que constituía cada um dos grupos de trabalho era uma questão de grande importância para o sucesso desta investigação. Como a professora trabalhava com esta turma há já dois anos, conhecia muito bem as características de cada um dos seus alunos, por isso, pedi-lhe que formasse oito grupos heterogéneos de três elementos, nos quais houvesse uma forte possibilidade de ocorrência de interacções entre os alunos.

Para identificar mais facilmente os grupos, optou-se por atribuir uma letra a cada um deles, e a cada aluno a sua inicial, como mostra o quadro 7.1. De forma a preservar o anonimato dos intervenientes no estudo, optou-se por atribuir pseudónimos a cada um deles.

Grupos	Alunos
A	Margarida (M_1) Ana (A_1) Noémia (N)
B	Mafalda (M_2) Vânia (V_1) Vítor (V_2)
C	Manuel (M_3) Carla (C_1) Ricardo (R)
D	Daniela (D) Catarina (C_2) Lucas (L)
E	António (A_2) Eduardo (E) André (A_3)
F	Gonçalo (G) Carlos (C_3) José (J)
G	Filipe (F) Mariana (M_4) Daniel (D)
H	Alice (A_4) Paula (P) Henrique (H)

Quadro 7.1 – Identificação dos grupos de trabalho.

Durante a intervenção didáctica, não foi necessário efectuar qualquer tipo de alteração aos grupos formados na etapa de exploração mantendo, assim, a sua estabilidade.

7.1.2 Actividades de exploração

Foram elaboradas, em colaboração com a professora, três actividades no âmbito do período de exploração do software. Cada uma dessas actividades foi realizada em grupo, numa aula de noventa minutos, na sala de computadores da escola. Depois de trocar algumas impressões com a professora, acerca das dificuldades apresentadas pelos alunos ao nível dos conhecimentos geométricos, decidimos quais os conteúdos a abordar em cada uma das actividades propostas. Como indica o quadro 7.2, a selecção recaiu sobre os conceitos de: triângulo rectângulo, triângulo equilátero, propriedades do quadrado e do rectângulo e propriedades do paralelogramo, cujas actividades estão incluídas no anexo 1.

Data	Assuntos	Actividade
24 / 01 / 2002	Triângulo rectângulo Triângulo equilátero	1
31 / 01 / 2002	Rectângulo Quadrado	2
7 / 02 / 2002	Paralelogramo	3

Quadro 7.2 – Actividades propostas no período de exploração.

Em cada uma das actividades, os alunos deveriam fazer as respectivas construções e investigar possíveis relações entre os seus elementos, elaborando um relatório final onde registariam as suas conclusões.

7.2 Teste de Geometria de van Hiele

Considerou-se pertinente para a análise da intervenção didáctica avaliar o nível de raciocínio geométrico dos alunos, antes da implementação da fase exploratória e no final da investigação, de forma a estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos e a justificar determinados comportamentos revelados pelos alunos.

Para determinar o nível de van Hiele de cada um dos elementos dos grupos de trabalho, foi utilizado o critério *3 – em – 5* proposto pelo CDASSG (Usiskin, 1982). De acordo com este critério, um aluno está no nível n se tiver acertado em pelo menos três dos cinco itens dos níveis 1 a n ($n \leq 5$) e não tiver acertado em três ou mais itens de nenhum dos níveis seguintes. Se um aluno não tiver acertado em pelo menos três dos cinco itens em nenhum dos níveis é-lhe atribuído o nível 0. Quando este critério não permite determinar o nível de um aluno diz-se que o aluno não é classificável (NC). Foi seleccionado este método de avaliação dos níveis de raciocínio geométrico porque é aquele que permite classificar um maior número alunos.

No quadro 7.3 indicam-se, detalhadamente, os níveis de raciocínio geométrico de cada um dos alunos intervenientes no estudo, obtidos nas duas aplicações do *Teste de Geometria de van Hiele*.

Grupo	Aluno	Pré-teste	Pós-teste
A	M_1	2	3
	A_1	0	NC
	N	1	2
B	M_2	2	2
	V_1	2	3
	V_2	1	3
C	M_3	2	2
	C_1	2	3
	R	1	1
D	D	2	2
	C_2	1	1
	L	1	2
E	A_2	1	2
	E	1	NC
	A_3	1	1
F	G	2	1
	C_3	2	2
	J	3	3
G	F	1	1
	M_4	1	2
	D	1	2
H	A_4	1	2
	P	1	2
	H	1	1

Quadro 7.3 – Resultados do *Teste de Geometria de van Hiele.*

A análise do quadro 7.3 permite concluir que, na primeira realização do teste o nível 1 é predominante na turma, no entanto, a segunda aplicação do teste revela uma predominância do nível 2, tendo inclusivamente aumentado o número de alunos no nível 3.

Como já foi referido, o *Teste de Geometria de van Hiele* foi aplicado duas vezes neste estudo. Nestas condições o teste de Wilcoxon, para dados emparelhados, é o teste estatístico adequado para determinar a existência de diferenças significativas entre os resultados obtido nas duas aplicações (Green, referido por Junqueira, 1995). Analisando o quadro 7.4, obtidos com o programa *SPSS*, pode concluir-se que houve uma mudança no sentido de uma melhoria nos níveis de van Hiele estatisticamente significativa ($p<0.05$) do pré-teste para o pós-teste.

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Number	Mean Rank	Sum of Ranks
Pós-Pré	Negative Ranks	1[a]	6.00	6.00
	Positive Ranks	11[b]	6.55	72.00
	Ties	10[c]		
	Total	22		

a. Pós<Pré

b. Pós>Pré

c. Pós=Pré

Test Statistics [b]

	Pós-Pré
Z	-2.840[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	.005

a. Based on negative ranks

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Quadro 7.4 – Teste de Wilcoxon (dados emparelhados).

7.3 Intervenção didáctica e fases de aprendizagem

Depois de os alunos explorarem o *GSP* e se ambientarem à sua utilização, iniciou-se a intervenção didáctica. Pretendia-se, com esta fase, que os alunos interiorizassem um conjunto de propriedades e relações geométricas no âmbito da aprendizagem por descoberta, a partir de uma sequência cíclica de etapas de ensino. Este período decorreu entre 26 de Fevereiro e 16 de Abril de 2002, correspondendo a um total de dez aulas de noventa minutos. Os tempos lectivos não tiveram todos a mesma natureza, repartindo-se por aulas normais, realizadas na sala de aula habitual, e aulas com o apoio do computador, na sala de computadores.

Embora não tenha sido delineado como objectivo inicial deste estudo planear e executar uma intervenção didáctica seguindo a teoria de van Hiele, a implementação desta investigação consistiu de uma sequência de actividades muito similar à proposta no ciclo de aprendizagem defendido por esse modelo teórico. Assim, a planificação das várias etapas da intervenção didáctica acabou por se revelar coerente com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele na sua teoria.

Inicialmente, a professora definia conceitos que os alunos desconheciam, e que eram imprescindíveis para iniciar o trabalho matemático propriamente dito, à semelhança do que sucede na fase de *informação* (van Hiele, 1986). Estas aulas tiveram um cariz essencialmente expositivo cujo único objectivo era dar informações aos alunos acerca do campo em estudo.

Depois de os alunos adquirirem os conhecimentos básicos acerca do tema que iriam estudar, seguia-se um período de exploração através da realização de actividades de investigação em grupo (Anexo 2), com recurso à utilização do *GSP*. O objectivo principal desta fase era conseguir que os alunos descobrissem e explicassem as principais propriedades e relações geométricas implícitas no tema que estavam a tratar. Como era pouco provável que os alunos conseguissem sozinhos fazer uma aprendizagem eficaz, as actividades propostas nestas aulas incluíam indicações bastante claras acerca da forma como o trabalho deveria ser desenvolvido, mas, mesmo assim, a professora e a investigadora estiveram disponíveis sempre que se revelou necessário. O objectivo proposto para este período de aprendizagem era exactamente o mesmo da fase de *orientação guiada* (van Hiele, 1986). As actividades propostas nas aulas de investigação com o *GSP*, que integraram esta fase, exigiam essencialmente os níveis 2 e 3 de van Hiele. Em cada uma das tarefas os alunos deveriam, através da exploração das construções, identificar e generalizar propriedades subjacentes às figuras analisadas (nível 2) e descobrir relações e implicações entre essas propriedades (nível 3), apresentando uma justificação que apoiasse cada uma dessas conclusões.

Nas aulas posteriores a estas era utilizado um esquema de trabalho semelhante ao da fase de *explicitação* (van Hiele, 1986). Revia-se o trabalho realizado anteriormente, com base na discussão, em grande grupo, dos resultados obtidos pelos alunos. A principal finalidade destas aulas era conseguir que os alunos trocassem experiências, que comentassem as regularidades encontradas e que confrontassem as conclusões a que chegaram. Era também importante que, nesta fase, os alunos conseguissem, com o auxílio da professora, aperfeiçoar a linguagem e vocabulário geométrico utilizados.

Por fim, os alunos deveriam aplicar os conhecimentos e a linguagem adquiridos a actividades diferentes das realizadas anteriormente. Para isso, a professora, aproveitou algumas aulas para propor a realização de fichas de trabalho, em grupo, tendo em vista a colaboração entre pares, que abordavam, de uma forma diferente, os conceitos que tinham sido já discutidos. Nesta etapa, o objectivo consistia na aplicação dos conhecimentos adquiridos a tarefas de natureza diferente (Anexo 5), tal como é defendido na fase de *orientação livre* (van Hiele, 1986). Estas tarefas exigiam a aplicação das propriedades e relações deduzidas anteriormente na fase de *orientação guiada*, envolvendo raciocínios de nível 2 e nível 3 de van Hiele.

Na fase de *integração*, proposta por van Hiele, deve ser feito um resumo global do que foi aprendido pelos alunos, para que estes adquiram uma visão geral dos conteúdos e dos métodos que têm ao seu dispor. Na intervenção didáctica implementada nesta investigação, a fase 4 permitiu que os alunos se familiarizassem com os conhecimentos abordados, através da resolução de algumas actividades de índole diferente das que tinham sido propostas na fase 2, seguindo-se uma discussão acerca dos resultados obtidos. Neste caso, a fase de *orientação livre* permitiu fazer uma sumarização do que tinha sido aprendido, tendo sido, por isso, desnecessária a existência da fase de *integração* nesta investigação, tal como é defendido no estudo realizado por Pastor e Rodríguez (1990).

Para cada conceito era utilizado este conjunto de etapas de aprendizagem, apresentadas sempre pela mesma ordem e de forma cíclica. Em algumas situações, como os alunos tinham já a informação necessária acerca dos conceitos a investigar, não houve necessidade de recorrer a um período de exposição do domínio em estudo, passando de imediato à exploração das propriedades relativas a esses conceitos. O mesmo acontece com as fases de aprendizagem de van Hiele. Quando a fase de *informação* não é necessária, devido ao tema de trabalho ser do conhecimento dos alunos, começa-se na fase de *orientação guiada*, eliminando assim a primeira fase (Pastor e Rodríguez, 1990).

O quadro 7.5 resume a distribuição das fases de aprendizagem na intervenção didáctica e os respectivos assuntos tratados em cada uma das aulas.

Data	Assunto	Fases de aprendizagem
26 / 02 / 2002	Ângulo ao centro e ângulo inscrito, corda e arco correspondente.	1
28 / 02 / 2002	Relação entre ângulo ao centro e ângulo inscrito. Propriedades de ângulos inscritos.	2
5 / 03 / 2002	Relação entre ângulo ao centro e ângulo inscrito. Propriedades de ângulos inscritos.	3 4
12 / 03 / 2002	Ângulo internos de um polígono regular inscrito numa circunferência. Ângulos externos de um polígono.	1
14 / 03 / 2002	Propriedades de ângulos e circunferências.	2
19 / 03 / 2002	Propriedades de ângulos e circunferências.	3 4
21 / 03 / 2002	Circunferências: tangentes e polígonos inscritos.	2
9 / 04 / 2002	Circunferências: tangentes e polígonos inscritos. Rotações e translações.	3 4 1
11 / 04 / 2002	Isometrias.	2
16 / 04 / 2002	Revisão da matéria dada na unidade didáctica.	3 4

Quadro 7.5 – Quadro resumo das aulas da intervenção didáctica.

Cada uma das fases didácticas, descritas na teoria de aprendizagem proposta por van Hiele, surgiu, de uma forma bem vincada, ao longo desta investigação, deixando perceber a diferença de papéis e de comportamentos assumidos pelos intervenientes. Nas subsecções seguintes, serão analisadas detalhadamente todas as fases de aprendizagem. Em cada um desses períodos serão caracterizadas todas as mediações que ocorreram durante a intervenção didáctica, tendo por base o diagrama apresentado por Vygotsky para esse processo (ver fig. 5.1). Em algumas das fases de aprendizagem surgiu a oportunidade de trabalhar a demonstração com os alunos, sendo, por isso, importante analisar quais as funções da demonstração que foram privilegiadas e que tipos de demonstração foram apresentados.

7.3.1 Caracterização da fase de informação na intervenção didáctica

Antes de os alunos iniciarem o estudo das propriedades e relações geométricas, referentes à unidade temática seleccionada para esta investigação, a professora utilizou algumas aulas para definir conceitos que não eram ainda do seu conhecimento, tais como: ângulo ao centro, ângulo inscrito, polígonos convexos, polígonos côncavos, polígonos regulares, rectas tangentes, secantes e exteriores a uma circunferência, rotações e translações. Neste primeiro período de ensino, a professora deu a conhecer aos alunos o contexto que envolvia o campo em estudo. Tratou-se de uma fase expositiva, onde a professora procedeu à apresentação de conceitos desconhecidos dos alunos.

Devido às características desta fase, interessa apenas analisar, como elemento mediador, a influência do discurso da professora no processo de ensino-aprendizagem, ou seja, a influência da intervenção da linguagem na relação entre o aluno e o objectivo de aprendizagem que, neste caso, era a apropriação de novo vocabulário geométrico e da sua definição, como mostra a figura 7.1:

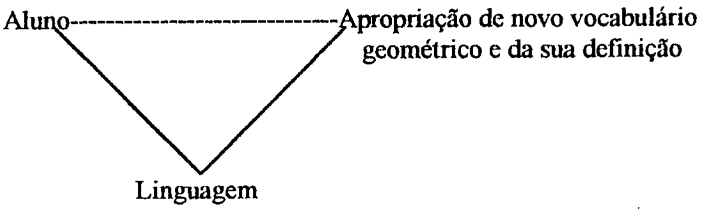


Fig. 7.1- Diagrama que caracteriza o processo de mediação registado na fase 1.

Mediação semiótica

Nesta fase, a professora não esperava que os alunos participassem activamente na aula, discutindo ou negociando significados, sendo o seu principal objectivo transmitir-lhes informação relativa a cada um dos conceitos que pretendia apresentar. Nestas aulas, a professora utilizou sempre um discurso de tipo instrucional, tendo em vista a introdução de novo vocabulário geométrico e a definição dos objectos em estudo.

Excerto da aula do dia 26 / 02 / 2002

(Nesta aula a professora introduziu os conceitos de ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência, através da sua definição e representação geométrica.)

Prof.: Antes de iniciarmos o trabalho com o computador, é necessário definirmos alguns conceitos que serão necessários para a resolução das actividades que irão ser propostas. Consideremos, então, uma circunferência e o ângulo AOB assim representados

(A professora desenha no quadro a seguinte figura (fig. 7.2).)

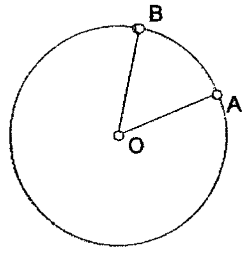


Fig. 7.2 – Representação de um ângulo ao centro.

Prof.: Ao ângulo AOB chama-se ângulo ao centro numa circunferência, porque é um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência e cada lado contém um raio.

Consideremos, agora, uma circunferência e o ângulo AVB assim representados

(A professora desenha novamente no quadro uma figura (fig. 7.3) que representa o conceito que está a introduzir.)

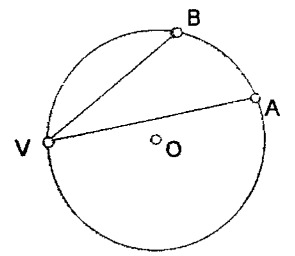


Fig. 7.3 – Representação de um ângulo inscrito numa circunferência.

Prof.: Ao ângulo AVB chama-se ângulo inscrito numa circunferência, porque é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados contêm cordas.

(Ao definir cada um dos conceitos utilizou as figuras como suporte visual, salientando os elementos geométricos que as constituíam ao apontá-los nas figuras.)

Não se registou, por parte dos alunos, qualquer observação ao que a professora dizia. Limitaram-se a ouvir o que ela tinha para lhes transmitir e transcreveram para o caderno tudo o que estava a ser escrito no quadro, sem qualquer tipo de questionamento.

Nesta fase, houve uma clara diferença de poder entre as *vozes* dos alunos e a *voz* da professora (Wertsch, 1991). Esta utilizou um género de discurso indissociável, tendo em vista uma instrução essencialmente informativa, por isso, as suas elocuções representaram directivas que os alunos deveriam seguir. A forma de comunicação que utilizou pressupunha a transmissão unívoca de uma mensagem que pretendia que os alunos incorporassem. A professora utilizou deliberadamente um *discurso de autoridade* (Wertsch, 1991) para atingir os seus objectivos, sendo a estrutura de significado transmitida fixa e inalterável quando em contacto com as *vozes* dos alunos. As palavras que proferia exigiam o seu reconhecimento e, principalmente, a sua apropriação, através da imitação, não permitindo a interacção com outras *vozes*.

As aulas que integraram esta fase de aprendizagem tiveram todas o mesmo tipo de estrutura. A professora definia conceitos desconhecidos dos alunos introduzindo, simultaneamente, novo vocabulário geométrico. Devido aos objectivos específicos desta fase, a professora dominou o discurso na sala de aula, procurando que os alunos se apropriassem, passivamente, da informação que lhes era transmitida.

7.3.2 Caracterização da fase de orientação guiada na intervenção didáctica

Os alunos tiveram a oportunidade de, nesta fase de aprendizagem, tomar contacto com as principais redes de relações que se iriam formar. Tratou-se de um período de exploração, que os conduziu às descobertas, a partir da manipulação de objectos geométricos. Nestas aulas, os alunos resolveram um conjunto de actividades de investigação, em grupo, utilizando como recurso o *GSP*. Assim, na intervenção didáctica, as aulas de investigação seguiram uma abordagem pedagógica próxima da fase de *orientação guiada* (van Hiele, 1986).

Nesta fase, os intervenientes interagem num ambiente geométrico dinâmico, e esta ferramenta medeia não só a actividade de um indivíduo com o objecto, mas também a sua actividade com outras pessoas (Leont'ev, referido por Nardi, 1996). Deste modo, não foi possível dissociar estes dois tipos de mediação já que ocorreram em simultâneo. Optou-se, então, por analisar simultaneamente a mediação semiótica e a computacional (fig. 7.4).

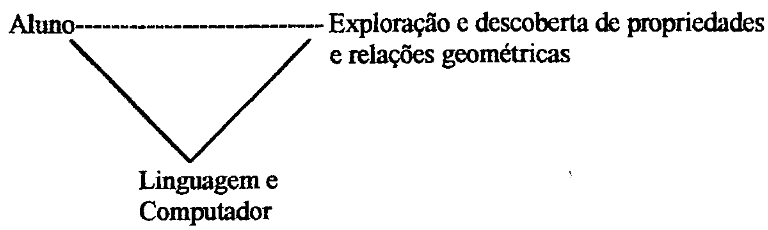


Fig. 7.4 - Diagrama que caracteriza o processo de mediação registado na fase 2.

Considera-se então que, neste contexto específico, é essencial analisar o comportamento dos alunos face à intervenção do professor e dos seus pares, através do seu discurso, e à utilização do computador como ferramenta facilitadora do processo de aprendizagem, cujo objectivo era a exploração e descoberta de propriedades e relações geométricas relativas à unidade didáctica em estudo.

Mediação semiótica e computacional

O papel desempenhado pelo computador nesta fase de aprendizagem foi fundamental, uma vez que era o recurso utilizado pelos alunos para levar a cabo as suas explorações. Todas as actividades de investigação (Anexo 2) propostas foram elaboradas com o objectivo de conduzir os alunos às propriedades e relações geométricas, previstas na unidade didáctica seleccionada, ou seja, conseguir uma passagem do nível 2 para o nível 3 de van Hiele, tendo por base a manipulação das construções obtidas com o *GSP*.

A utilização de um AGD, em particular o *GSP*, influenciou o desempenho dos alunos e a natureza das interacções sociais na sala de aula. Em seguida, são referidas algumas situações, extraídas das aulas de investigação, que ilustram o poder deste programa como ferramenta mediadora da actividade matemática.

Resposta visual

A característica fundamental deste tipo de programas é a possibilidade do utilizador poder obter uma resposta visual rápida, relativamente às conjecturas que elaborou. Esta capacidade dos AGD foi explorada em todas as actividades de investigação, nas quais os grupos de trabalho faziam as respectivas construções e, em seguida, procediam à sua manipulação para elaborar e confirmar conjecturas. Neste sentido, o computador actuou como um suporte para trabalhar a *ZDP* (Oliveira, 1993) dos alunos, apoiando o desenvolvimento das suas ideias e permitindo-lhes construir o seu conhecimento geométrico.

Excerto da aula do dia 11 / 04 / 2002

(Nesta aula foi proposta aos alunos a resolução da actividade 5. O excerto apresentado diz respeito à primeira tarefa dessa actividade, cujo objectivo era investigar as propriedades das rotações.

A observação recaiu sobre o grupo A, cujos elementos desenvolveram tarefas bem distintas. Nesta aula, a Noémia encarregou-se de ler a actividade, a Margarida ocupou o computador e a Ana ficou responsável por redigir o relatório. A Noémia começa então por ler a actividade dando directivas específicas à Margarida para que esta construa a figura pedida.)

N: "Constrói um triângulo escaleno. Os vértices são A, B e C."

M_1: E agora?

N: "Marca um ponto fora do triângulo e constrói a imagem desse triângulo, numa rotação de centro O e amplitude +45°."

M_1: Já está! E mais?

N: "O que observa ao manipular o triângulo ABC? E o ponto O?"

(A Margarida altera a forma e o tamanho do triângulo ABC através da sua manipulação.)

M_1: Os triângulos são sempre iguais, não são?

(Em dúvida, a Margarida espera uma confirmação por parte das colegas do grupo.)

N: São! E se mexeres no ponto O?

(A Noémia confirma as suspeitas da Margarida quanto à igualdade dos triângulos e sugere-lhe que avancem na investigação através da deslocação do centro da rotação.)

M_1: Mudam os dois [triângulos] de maneira igual.

N: Pois é! E tem sempre os 45°.

M_1: Agora temos que escrever! Ana, escreve aí na folha que, ao manipular um dos lados do triângulo ABC, a imagem da rotação desse mesmo triângulo mantém a relação do comprimento dos lados. Quando manipulamos o ponto O observamos que a imagem do triângulo ABC se desloca mas continua a ter os 45° da rotação.

(A Margarida era uma aluna bastante metódica, recorrendo muitas vezes à utilização de um discurso quase literário.)

M_1: Estás a ver, é sempre verdade!

(Manipula a construção no *GSP* e mostra à Ana.)

Através da interacção que estabeleceram com o computador, a Margarida e a Noémia conseguiram *internalizar* (Oliveira, 1993) facilmente as propriedades geométricas implícitas numa rotação. A resposta visual devolvida pela manipulação da figura permitiu-lhes adquirir a intuição necessária para defender a veracidade da sua conjectura. O papel desempenhado pelo *GSP* foi preponderante, contribuindo para que as alunas se apropriassem de uma *voz* adequada ao género de discurso característico do nível 2 de van Hiele. Assim, nesta situação, o computador constituiu um *andaime computacional* (Noss et al., 1994), que sustentou as ideias das alunas e lhes permitiu construir o seu conhecimento geométrico acerca do conceito de rotação.

A Ana escreveu no relatório aquilo que a Margarida lhe ditou, subordinando a sua *voz* à da colega. Com receio que a Ana não tivesse *internalizado* as propriedades que tinham sido identificadas, a Margarida utilizou o *GSP* para lhe mostrar, visualmente, a veracidade daquelas afirmações e conseguir que ela lhes atribuísse uma intenção. Esta aluna utilizou, de forma consciente, o computador como uma ferramenta facilitadora da construção do significado geométrico, desta vez da sua colega. Uma vez mais o computador foi utilizado como um suporte para trabalhar a *ZDP*, tornando a tarefa mais fácil do que seria sem a sua utilização.

A Margarida tentou liderar toda a actividade desenvolvida pelo grupo de trabalho, impondo-se como o centro das mediações, tanto computacional como semiótica. Para além de se ter ocupado do computador com o objectivo de controlar a construção e manipulação das figuras, impôs a sua *voz* às dos restantes elementos do grupo ao ditar as respostas a incluir no relatório que seria entregue à investigadora. O estatuto de melhor aluna da turma que lhe era conferido pelos colegas, implicava que a sua *voz* estivesse imbuída de um poder superior, fazendo com que a reconhecessem como uma pessoa mais capaz para desempenhar qualquer actividade. Por outro lado, para não perder o estatuto que possuía, a Margarida tentava, em qualquer tarefa proposta na aula, controlar toda a actividade.

Utilização de verbos que expressam movimento

A resolução das actividades com recurso ao *GSP* permitiu que os alunos pudessem usufruir de uma visão dinâmica da geometria, através da possibilidade de arrastamento e manipulação da forma dos objectos geométricos. Esta interacção com o computador reflectiu-se na linguagem utilizada pelos alunos nas aulas de investigação, que frequentemente incorporaram, nas suas respostas, verbos activos.

Excerto do relatório da actividade n.º 1 (Grupo F)

"Quando <u>muda</u> a amplitude do ângulo, o ângulo ao centro é sempre igual ao arco correspondente".

Excerto do relatório da actividade n.º 2 (Grupo A)

"Observamos que mesmo <u>deslocando</u> o ponto C, a amplitude do ângulo é a mesma...".

Excerto do relatório da actividade n.º 3 (Grupo C)

"Quando <u>variamos</u> a amplitude dos ângulos a soma dos ângulos opostos é sempre a mesma".

Excerto do relatório da actividade n.º 5 (Grupo C)

"Se <u>mexermos</u> o vector $\overrightarrow{DE}$ só a imagem é que se <u>desloca</u> e a distância entre o objecto e a imagem é igual ao comprimento do vector".

Excerto do relatório da actividade n.º 5 (Grupo D)

"Nós observamos que o triângulo escaleno <u>roda</u> em torno do ponto O (centro fixo) ".

O contexto de trabalho influenciou a linguagem utilizada pelos alunos na descrição das relações geométricas que observavam no ecrã do computador. As características dinâmicas do AGD em causa fomentaram o recurso a verbos que expressavam movimento, espelhando o tipo de interacções que os alunos experienciaram com o software. Por sua vez, nas aulas em que não utilizaram o computador, os alunos não recorreram a este tipo de vocabulário nas suas intervenções orais ou escritas.

Utilização de cores na diferenciação dos elementos geométricos

No *GSP*, o menu *Display* permite ao utilizador alterar as cores dos elementos de uma construção e os alunos tinham sido alertados para esta possibilidade na fase de exploração do programa. Verifiquei que, em alguns grupos de trabalho, esse menu foi utilizado frequentemente. Tive, então, oportunidade de confrontar os alunos com esta situação e questioná-los acerca da razão pela qual decidiram colorir as suas construções.

(Como neste trabalho não era possível apresentar as cores utilizadas pelos alunos, optou-se por alterar o estilo das linhas que constituem os objectos geométricos.)

Grupo A (Actividade n.º 5)

M_1: Para vermos melhor!

N: Para ser mais fácil!

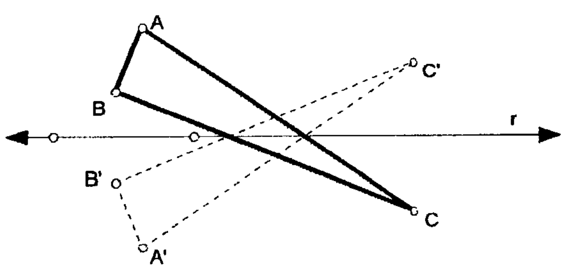


Fig. 7.5 – Reflexão do triângulo [ABC] pela recta r.

Grupo C (Actividade n.º 3)

C_1: Para conseguir distinguir!

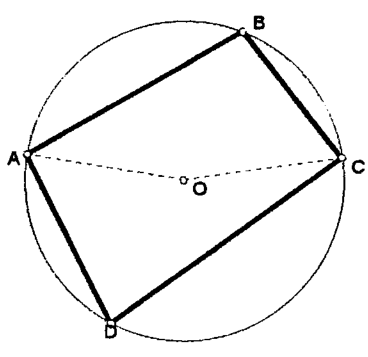


Fig. 7.6 – Quadrilátero inscrito numa circunferência.

Grupo D (Actividade n.º 3)

D: Para ver melhor!

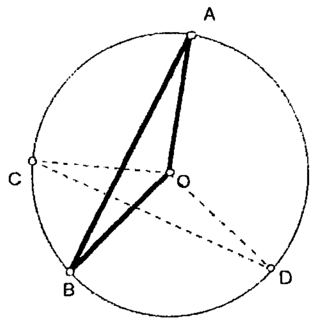


Fig. 7.7 – Ângulos ao centro com a mesma amplitude.

As respostas obtidas em cada um dos grupos de trabalho entrevistados levaram-me a concluir que a razão que os levou a colorir as suas construções foi a mesma. Como os alunos elaboravam e testavam as suas conjecturas através da manipulação das figuras construídas, tornou-se mais fácil avaliar as relações estabelecidas entre os objectos geométricos se os distinguissem com cores diferentes. Os alunos utilizaram este menu com o objectivo de conseguir uma apropriação mais eficiente e mais acessível das relações entre os elementos de cada uma das figuras. Para validar esta opinião, foram também analisadas as disquetes com as respectivas construções e concluiu-se que as cores não eram utilizadas de forma aleatória ou estética. Os alunos tentaram realçar determinados elementos da figura construída, utilizando uma cor para cada objecto geométrico, facilitando, desta forma, o reconhecimento das relações geométricas através da manipulação das construções.

Funcionamento dos menus

Todos os menus que constituem o *GSP* são sensíveis ao contexto (Veloso, 1995), isto é, só estão disponíveis as operações que puderem ser efectuadas a partir dos elementos geométricos seleccionados pelo utilizador. Esta propriedade do *GSP* foi planeada com o objectivo de reduzir a possibilidade de obter uma construção errada e, simultaneamente, contribuir para uma aprendizagem mais eficaz. Registaram-se, nas aulas de investigação, alguns casos em que os alunos não conseguiam aceder às operações pretendidas por não terem seleccionado os elementos geométricos devidos.

Excerto da aula do dia 9 / 04 / 2002 (Grupo G)

(Para resolver a tarefa 2, da actividade número 4, os alunos precisavam de construir uma recta perpendicular a um dado segmento.)

D: Selecciona a recta.

F: Não dá!

M_4: Porque será?

D: Se calhar não é assim que se faz!

M_4: Stôra!

Inv.: Sim!

F: Queremos fazer uma recta perpendicular a esta, mas não conseguimos. O computador não deixa!

Inv.: Atenção! Não é uma recta, é um segmento de recta! Então vamos lá ver... Quais são as informações que precisamos para construir essa recta?

D: É perpendicular ao segmento.

(Aponta no ecrã.)

Inv.: Então devemos seleccionar o segmento de recta dado. E não precisamos de saber mais nada?

(Silêncio)

Inv.: A recta que querem construir intersecta o segmento de recta num ponto qualquer?

M_4: Não! É no ponto M.

Inv.: Então também devem seleccionar o ponto M.

(O Filipe experimenta.)

F: Agora já dá!

Através da interacção com o computador, os alunos perceberam que o caminho que escolheram não estava correcto, uma vez que o programa não lhes permitiu seleccionar o menu pretendido. Esta resposta por parte do computador levou-os a pensar no que erraram e numa nova forma de resolver o problema. Com o apoio da investigadora, os alunos foram capazes de detectar o erro e seleccionar os elementos necessários à construção da figura pedida na actividade.

Demonstração

As actividades propostas aos alunos nas aulas de investigação tinham como pano de fundo a demonstração de resultados. Pretendia-se que deduzissem as propriedades subjacentes a cada um dos conceitos em estudo e, simultaneamente, que tentassem justificar a validade das suas afirmações. As argumentações apresentadas pelos alunos, neste período de ensino, sublinharam o papel da demonstração como um meio de verificação, de explicação e de comunicação (Villiers, 1999).

A demonstração como processo de verificação

O *GSP* exerceu uma influência determinante na resolução destas actividades, uma vez que permitiu que os alunos generalizassem descobertas e testassem a respectiva validade. A manipulação das figuras construídas tornou possível, para os alunos, a descoberta instantânea das conjecturas e o aumento significativo do grau de convencimento da sua veracidade. O ambiente de trabalho teve um impacto fundamental na função verificativa da demonstração (Villiers, 1999), já que os alunos, de cada um dos grupos de trabalho, nunca duvidaram das conclusões que a utilização do *GSP* lhes permitiu elaborar.

Excerto da aula do dia 14 / 03 / 2002 (Grupo C)

(À semelhança do que era feito em todas as actividades, os alunos começaram por construir a figura pedida na primeira tarefa da actividade número 3. Nesta aula, o Manuel optou por ficar no computador, o Ricardo encarregou-se de ler a actividade e a Carla escreveu o relatório.)

M_3: Já está [construída a figura]! O que vem a seguir?

(O Ricardo lê a questão seguinte.)

R: "Consegue encontrar uma relação entre os arcos AB e CD?"

M_3: Vou mexer na figura!

(Silêncio)

M_3: Os arcos são sempre iguais.

C_1: Pois são! É sempre a mesma medida.

M_3: Então escrevemos que amplitude dos arcos é sempre igual à amplitude dos ângulos ao centro.

(A Carla regista a resposta no relatório do grupo.)

Ao longo da intervenção didáctica, os alunos ficaram com uma ideia bem definida acerca das possibilidades garantidas pelo GSP. Para investigarem as relações existentes entre os elementos constituintes de uma determinada figura, construída naquele programa, recorriam de imediato ao seu arrastamento, explorando as características dinâmicas permitidas pelo ambiente de trabalho. As conjecturas elaboradas não sofreram contestação por parte de qualquer aluno, mostrando-se sempre convencidos da sua veracidade.

A demonstração como processo de explicação

No âmbito desta investigação era crucial que os alunos, para além de verificarem a fiabilidade dos seus resultados, se sentissem impelidos a apresentar uma explicação lógica para os mesmos (Villiers, 1999). Assim, foi-lhes pedido que, em todas as actividades, justificassem as suas respostas ou que simplesmente apresentassem uma razão que as explicasse.

Excerto da aula do dia 21 / 03 / 2002 (Grupo F)

(Nesta aula procedeu-se à resolução da actividade número 4. Como o Carlos e o José já tinham tido oportunidade de trabalhar várias vezes no computador, encorajaram o Gonçalo a ocupar esse lugar. Depois de construída a figura pedida na terceira tarefa, os alunos passaram à sua exploração.)

C_3: Mexe na figura!

(Como o Gonçalo tinha pouca experiência com o computador, limitou-se a construir a figura. O Carlos decidiu chamar-lhe a atenção para a manipulação da construção.)

J: Os arcos são iguais.

C_3: E as cordas também.

J: Porque será?

C_3: Será por as rectas serem paralelas?

(O Gonçalo olha para o ecrã e continua a arrastar a figura.)

Segundo Villiers (1999), embora se consiga atingir um nível elevado de confiança na validade de uma conjectura, através da verificação empírica, é possível suscitar a curiosidade dos alunos perguntando-lhes porque razão determinado resultado é verdadeiro. Como, nesta fase da intervenção didáctica, as actividades propostas aos alunos tinham por base a utilização do *GSP*, as conjecturas elaboradas eram, para eles, evidentes. No entanto, em cada uma das tarefas era questionada a razão dessa validade, suscitando nos alunos a vontade de procurar uma explicação.

A demonstração como processo de comunicação

Neste estudo, salientou-se também a função comunicativa da demonstração (Villiers, 1999), já que os alunos deveriam registar as suas conclusões, sob a forma de relatório escrito, comunicando, assim, os resultados obtidos. Durante a resolução das actividades propostas, e a partir da exploração das construções, os elementos de cada grupo de trabalho confrontaram opiniões, partilharam e negociaram significados e estabeleceram qual seria a resposta que iria ser transmitida socialmente, através do relatório. A demonstração pôde, portanto, ser encarada como um meio de comunicação que veiculou o saber.

Nas primeiras aulas de investigação, os alunos sentiram necessidade de confirmar a validade das suas respostas junto da professora e da investigadora. O *género de discurso* (Wertsch, 1991) privilegiado na aula de Matemática tem subjacente uma linguagem social baseada em conceitos científicos específicos. Por isso, os alunos procuraram que a professora clarificasse os critérios a que deveria obedecer a comunicação escrita já que, na perspectiva daqueles, ela representava a figura de autoridade que ditava as regras de avaliação, na aula de Matemática. Apesar de se mostrarem convencidos das conjecturas que elaboraram, sentiram necessidade de legitimar as conclusões redigidas, conferindo à professora a autoridade suficiente para o fazer. A presença da investigadora veio, de certa forma, alterar a cultura da aula de Matemática, representando, para os alunos, o papel de uma segunda professora que os poderia apoiar. Neste sentido, conferiram-lhe um estatuto similar ao da professora Cristina, mostrando o mesmo tipo de comportamento com ela.

Tipos de demonstração

Ao longo desta fase de aprendizagem, os alunos foram apresentando diversos tipos de demonstração para as suas conjecturas. As argumentações propostas envolviam diferentes níveis de raciocínio geométrico, identificados pela qualidade da linguagem utilizada.

Existe uma relação directa entre a elaboração da demonstração de um determinado resultado e o nível de van Hiele em que um indivíduo de encontra (Clements e Battista, 1992). Em cada um dos níveis de raciocínio geométrico os julgamentos que os alunos fazem das figuras que observam são qualitativamente diferentes, tendo, por isso, representações distintas do significado de demonstração.

Argumentação baseada na aparência visual das figuras

Grupo F

(Resposta dada à questão 5 da actividade 2/tarefa 1)

"Se deslocarmos os pontos A ou B a conjectura mantém-se. Porque os ângulos têm sempre a mesma medida."

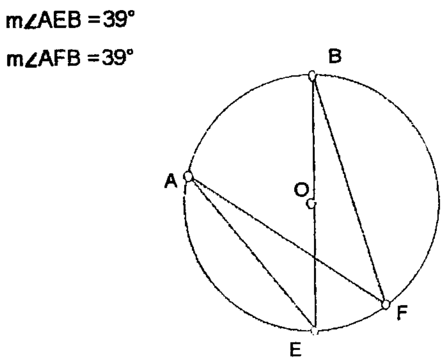


Fig. 7.8 – Ângulos inscritos que contêm o mesmo arco.

Grupo G

(Resposta dada à questão 4 da actividade 3/tarefa 2)

"A soma dos ângulos opostos é sempre igual, porque m $\angle CAB$ + m $\angle BDC$ = 180° e m $\angle ABD$ + m $\angle DCA$ = 180°."

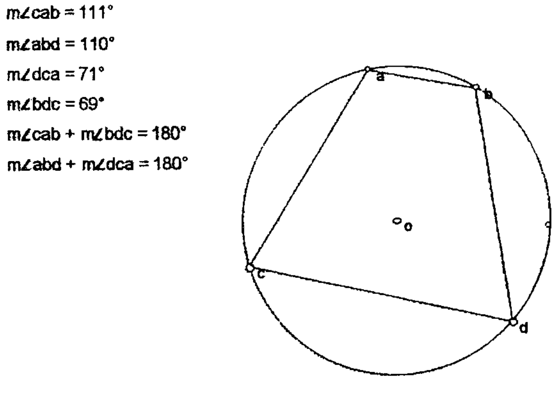


Fig. 7.9 – Quadrilátero inscrito numa circunferência

As argumentações apresentadas por estes alunos tiveram por base a exploração dinâmica das construções no *GSP*. O software facilita o processo de formulação e testagem de conjecturas através da devolução de informação visual e numérica sobre as construções geométricas (Chazan, 1990). O seu julgamento restringiu-se à observação do comportamento das figuras e das características que consideravam ser mais relevantes. As justificações dadas pelos alunos realçaram as relações que permaneciam invariantes com a manipulação das construções, e não sentiram ser necessário argumentá-las já que para eles eram óbvias e não careciam de explicação. O discurso apresentado pelos alunos, baseado nas observações empíricas do comportamento das figuras, traduz apenas informação que pode ser observada por todos, revelando, por isso, um raciocínio de nível 1.

Argumentação baseada nas propriedades das figuras

Grupo C

(Resposta dada à questão 7 da actividade 4/tarefa 3)

"A amplitude dos arcos é sempre a mesma porque as rectas *r* e *s* são paralelas."

Grupo A

(Resposta dada à questão 5 da actividade 4/tarefa 2)

"A recta perpendicular à corda [AB] passa sempre pelo centro da circunferência porque a recta perpendicular passa pelo ponto médio da corda [AB]."

Neste caso, para demonstrar as conjecturas que tinham elaborado, os alunos não limitaram o seu raciocínio à observação das estruturas invariantes das construções. Tinham a noção que o *género de discurso* associado à demonstração dos resultados não se apoia na argumentação baseada na aparência visual das figuras, indicando, por isso, um nível de raciocínio geométrico superior ao primeiro. No entanto, a justificação por eles apresentada não é representativa do nível 3, já que não estabelecem uma rede de relações lógicas entre as propriedades que caracterizam a figura. Suspeita-se que a argumentação apresentada por estes alunos tenha sido uma tentativa de *ventriloquismo* do discurso adequado a uma demonstração, pois tinham sido estabelecidos na aula os critérios associados a este tipo de raciocínio.

Demonstração baseada nas relações entre as propriedades das figuras

Grupo B

(Resposta dada à questão 7 da actividade 3/tarefa 1)

"Podemos afirmar que os arcos correspondentes são iguais. Uma razão que explique a nossa resposta é que a amplitude dos ângulos ao centro são iguais às amplitudes dos arcos."

Grupo E

(Resposta dada à questão 4 da actividade 2/tarefa 2)

"O arco mede 180º porque é metade da circunferência, o ângulo mede 90º porque é metade do arco."

De forma a justificar o seu raciocínio, alguns alunos conseguiram relacionar logicamente propriedades descobertas anteriormente. Este tipo de argumentação envolve um discurso associado ao nível 3 de raciocínio geométrico.

7.3.3 Caracterização da fase de explicitação na intervenção didáctica

Esta fase didáctica privilegiou a discussão e a apropriação das relações geométricas deduzidas na fase anterior. Após o período de investigação em pequeno grupo, caracterizado pelo trabalho de exploração, realizado com recurso ao computador, foram implementadas aulas de discussão, no grupo turma, que visavam o confronto dos resultados obtidos.

O diálogo promovido nestas aulas tinha por objectivo a troca de experiências, resultantes das actividades desenvolvidas nas aulas anteriores, envolvendo a professora e os alunos. Neste contexto, a professora pretendia que os alunos *internalizassem* determinadas relações geométricas e que, simultaneamente, utilizassem os termos técnicos adequados, aperfeiçoando o seu discurso. Assim, neste caso, a análise recai sobre o tipo de influência exercida pelos discursos da professora e dos seus alunos na *internalização* das propriedades e relações geométricas, exploradas anteriormente, e no refinamento do vocabulário geométrico utilizado. Esta mediação foi também exercida pelo discurso da investigadora uma vez que, ao longo das entrevistas efectuadas com os alunos, houve a oportunidade de avaliar se tinham interiorizado os conceitos abordados e de corrigir alguns alunos que apresentavam dificuldades ao nível do vocabulário geométrico (fig. 7.10).

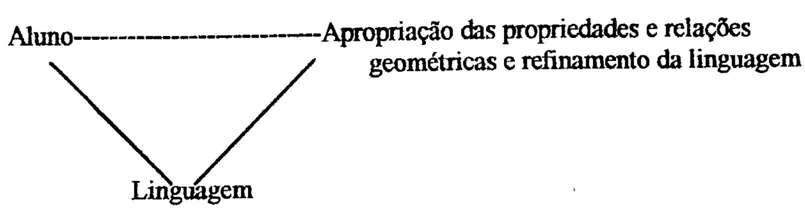


Fig. 7.10 - Diagrama que caracteriza o processo de mediação registado na fase 3.

Mediação semiótica

As aulas que integraram esta fase de aprendizagem tiveram sempre subjacente um contexto de diálogo. A professora começava por pedir que os alunos comentassem as regularidades que tinham observado na aula de investigação, fundamentassem as suas conclusões e, a partir daí, desencadeava-se a discussão em grande grupo, tendo por objectivo a construção da nova rede de relações relativa aos conceitos em estudo e a precisão do vocabulário geométrico.

Excerto da aula do dia 05 / 03 / 2002

(A professora assume o seu lugar perto do quadro e inicia a aula questionando os alunos acerca do trabalho desenvolvido na aula anterior)

Prof.: Quais as propriedades que deduziram na aula passada?

V_1: Os ângulos inscritos são metade da circunferência.

M_3: Não! São metade do arco correspondente.

Prof.: Sim! Mas, devem ter atenção à linguagem utilizada. As vossas respostas estão um pouco confusas e incompletas. Devem antes dizer que a amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco correspondente.

(A professora, apesar de aceitar as respostas dos seus alunos, previne-os para a utilização de linguagem mais cuidada. Escreve no quadro a resposta que acha adequada para que os alunos fiquem com o registo no caderno)

Prof.: Que outras propriedades foram identificadas?

A_2: O ângulo inscrito tem o vértice na circunferência.

Prof.: De certeza que essa não foi uma propriedade deduzida na aula anterior. Foi assim que eu defini ângulo inscrito, vocês já conheciam.

(A professora corrige o aluno, alertando-o para o facto de ter mencionado uma característica dos ângulos inscritos e não uma relação geométrica inerente a este conceito)

Prof.: Então?

M_1: O ângulo ao centro tem a mesma amplitude que o arco.

Prof.: Exactamente! A amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente. Não pode ser um arco qualquer!

(A professora regista no quadro a propriedade identificada)

Prof.: Lembram-se de mais alguma propriedade?

(Silêncio)

Prof.: Se calhar se eu fizer um desenho vocês são capazes de se lembrar.

(A professora desenha no quadro uma figura (fig. 7.11) que, na sua opinião, poderá levar os alunos a relembrar uma propriedade que tinham deduzido. Tentando apelar à visualização, realça os ângulos AVC e ACB e o arco AB com cores diferentes. Como já aconteceu anteriormente, as cores foram substituídas por estilos de linha diferentes.)

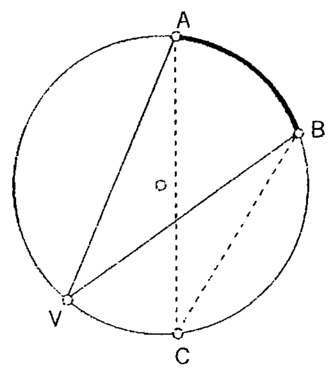


Fig. 7.11 – Ângulos inscritos que contêm o mesmo arco.

Prof.: Que tipo de ângulos são estes que eu aqui desenhei?

Coro: Inscritos!

Prof.: E o que me dizem do arco?

Coro: É o mesmo!

Prof.: E qual foi a propriedade que deduziram a partir daqui?

M_1: Que se o arco for o mesmo, a amplitude dos ângulos é igual.

Prof.: Qualquer tipo de ângulos?

M_1: Não, dois ângulos inscritos.

Prof.: Ou seja, ângulos inscritos que contêm o mesmo arco são geometricamente iguais.

(A professora volta a escrever no quadro a relação que encontraram)

Um dos principais objectivos da fase de *explicitação* (van Hiele, 1986) é promover o diálogo em grupo, fazendo com que os alunos troquem experiências e confrontem as suas descobertas e a sua linguagem com os outros. A função da professora, neste período de ensino, consistiu na correcção de concepções erradas ou incompletas que os alunos tinham desenvolvido e no aperfeiçoamento da linguagem por eles utilizada, o que evidencia a importância deste tipo de interacção.

A professora encorajou os alunos a expor as suas ideias, incitando-os a utilizar correctamente o vocabulário geométrico. A *voz* da professora constituiu, pelo estatuto social que possui, uma autoridade natural dentro da sala de aula, mas o discurso por ela proferido não foi, nesta fase, de forma alguma, de *autoridade* teve, antes, um carácter *dialógico*. Não tinha como pretensão a transmissão de conhecimentos de uma forma unívoca, mas sim regular e orientar a participação dos alunos no discurso, permitindo a partilha e a origem de novos significados, que deveriam ser *internalizados*. Apesar da natureza *dialógica* (Wertsch, 1991) da *voz* da professora, que se mostrou sempre atenta às diversas intervenções dos seus alunos, é uma *voz* com um poder de autoridade e legitimação, intrínseco ao estatuto que lhe é conferido no sistema de ensino. Conduziu os alunos à fundamentação das suas ideias e promoveu a partilha conjunta de significados, no entanto, constatou-se que as suas afirmações eram sempre aceites pelos alunos, sem questionamento, já que representaria uma contestação à autoridade da sua *voz*.

A fase de *explicitação* foi, fundamentalmente, dominada pelo espírito da aprendizagem cooperativa, que envolveu a professora e os alunos. A linha de questionamento utilizada, o recurso a desenhos, o ouvir e clarificar as ideias dos alunos foram processos que a professora utilizou como suporte ao seu desenvolvimento. O apoio prestado pela professora, nesta fase, foi, assim, essencial para a aprendizagem dos alunos, ajudando-os a avançar na sua *ZDP*, contribuindo, desta forma, para o seu desenvolvimento.

Durante as entrevistas clínicas, conduzidas pela investigadora, foram também cumpridos os objectivos propostos para esta fase de aprendizagem. Um dos procedimentos utilizados nestas sessões foi a análise das actividades de investigação realizadas pelos alunos, com o propósito de avaliar a apropriação dos conceitos nelas abordados e consequentemente corrigir possíveis concepções erradas e vocabulário. As entrevistas foram realizadas num contexto de diálogo entre a investigadora e o grupo de alunos entrevistado, para que estes expressassem a sua forma de pensar. O papel desempenhado pela investigadora assemelhou-se, assim, ao assumido pela professora nas aulas que integraram esta fase de aprendizagem.

Excerto da entrevista realizada ao grupo G

(Este excerto refere-se à análise da primeira actividade de investigação. Os alunos começaram por abrir o ficheiro onde tinham guardado a construção relativa a esta actividade (fig. 7.12). Antes de iniciar a análise das conclusões elaboradas pelo grupo de trabalho, a investigadora decidiu recapitular algumas noções que tinham sido abordadas previamente.)

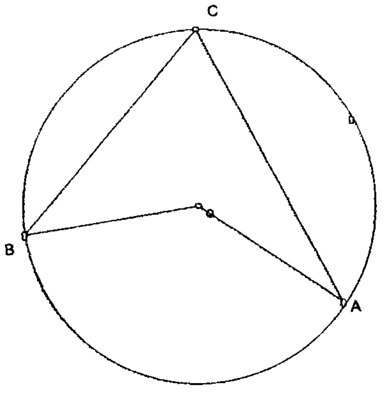


Fig. 7.12 – Ângulo ao centro e ângulo inscrito que contêm o mesmo arco.

Inv.: Na figura que construíram, qual é o ângulo ao centro?

(A reacção inicial dos alunos é apontar.)

Inv.: Vamos imaginar que estavam numa aula e a professora desenhava esta figura no quadro e perguntava qual era o ângulo ao centro. Vocês apontavam?

F: Não!

Inv.: Então? Como é que indicariam?

D: É o que está no meio.

F: É o que está entre o B e o A!

Inv.: Eu estou a perceber o vosso raciocínio mas a linguagem que estão a utilizar não está correcta. Para identificarem um ângulo é sempre necessário indicarem três letras. A do meio designa o vértice e as outras duas os extremos. Então? Qual é o ângulo ao centro representado na vossa construção?

D e M_4: É o AOB!

F: Ou o BOA!

Inv.: Exactamente! O vértice é o ponto O e os extremos são os pontos A e B.

Apesar de os alunos deste grupo de trabalho não utilizarem a linguagem adequada, revelaram ter *internalizado* o conceito de ângulo ao centro. Tornou-se, assim, necessário corrigir o discurso por eles utilizado, uma vez que já tinham incorporado o significado daquele conceito. Ao longo da entrevista, a investigadora não tentou impor a sua *voz*, tinha como objectivo, conduzir os alunos à integração de vocabulário adequado, implementando um contexto de diálogo. Recorreu, por isso, a um discurso de natureza *dialógica*, proporcionando a ocorrência de interacções entre a sua *voz* e as *vozes* dos alunos, conseguindo, desta forma, que adquirissem um discurso adequado àquela situação.

Excerto da entrevista realizada ao grupo H

(Este excerto refere-se à análise primeira tarefa da segunda actividade de investigação. A investigadora seleccionou esta actividade porque os alunos não apresentaram qualquer tipo de justificação que validasse a conjectura por eles elaborada. Os alunos começaram por abrir o ficheiro onde tinham guardado a construção relativa a esta actividade (fig. 7.13).)

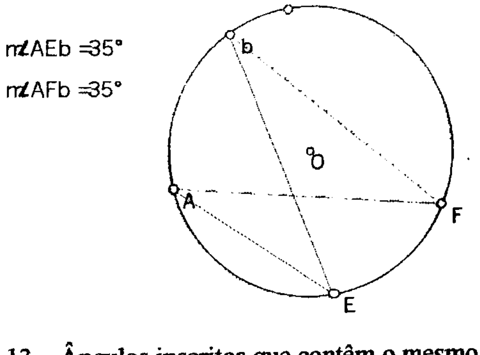


Fig. 7.13 – Ângulos inscritos que contêm o mesmo arco.

Inv.: Como é que classificamos os dois ângulos que construíram?

Coro: Inscritos!

Inv.: E o que é que estes dois ângulos têm em comum?

A_4 e P: Cruzam-se.

Inv.: Podemos dizer que essa é uma característica comum aos dois ângulos?

A_4: Não!

Inv.: Então o que observam nesses dois ângulos?

(A Paula que tinha assumido o comando do computador manipula a figura.)

A_4: Têm a mesma medida, a mesma amplitude.

Inv.: Porque será?

H.: Porque são dois ângulos inscritos.

Inv.: Mas podemos ter dois ângulos inscritos com amplitudes diferentes.

(Desenhei um exemplo (fig. 7.14) de dois ângulos inscritos com amplitudes diferentes.)

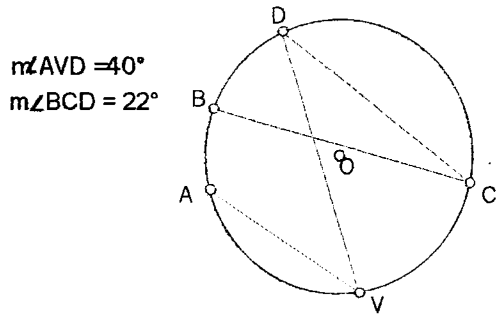


Fig. 7.14 – Ângulos inscritos que não contêm o mesmo arco.

Inv.: Qual será então a razão?

P: Têm o mesmo arco.

Inv.: Exactamente! E se agora deslocassem o vértice F ao longo da circunferência, os ângulos têm sempre a mesma amplitude?

(A Paula desloca o ponto e pára quando as amplitudes dos ângulos deixam de coincidir.)

P: Não são sempre iguais.

Inv.: Qual será a razão?

H: Porque o arco já não é o mesmo.

Os alunos tinham concluído correctamente a igualdade entre os dois ângulos inscritos através da interacção com o programa. Verificaram, a partir da manipulação da figura, que as amplitudes coincidiam, mas não foram capazes de argumentar essa observação. Utilizando o computador como recurso, a investigadora conseguiu debelar algumas concepções que os alunos tinham desenvolvido erradamente. No entanto, esse discurso não teve um carácter de *autoridade* (Wertsch, 1991), tendo privilegiado sempre um contexto de interacção com os alunos, procurando analisar a sua forma de pensar através de um questionamento constante. O apoio proporcionado pela investigadora, ao longo desta entrevista, resultou numa correcta apropriação dos conceitos por parte dos alunos. A selecção de exemplos sugestivos, tratados dinamicamente, e o clima de diálogo constante que promoveu a partilha de significados, constituíram processos que a investigadora utilizou para auxiliar os alunos na sua ZDP.

Depois de os alunos terem adquirido algum domínio acerca dos conceitos abordados ao longo da intervenção didáctica, a professora achou oportuno introduzir a linguagem simbólica como uma forma mais eficaz de expressão.

Excerto da aula do dia 19 / 03 / 2002

(A professora desenha a seguinte figura (fig. 7.15) no quadro.)

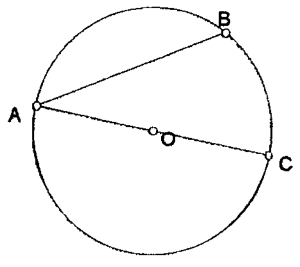


Fig. 7.15 – Ângulo inscrito numa circunferência.

Prof.: Vamos supor que, nesta figura, conhecemos o arco BC e que queríamos determinar o ângulo BAC.

(A professora realça os dois elementos na figura dada, para permitir uma melhor compreensão por parte dos alunos.)

Prof.: Que tipo de ângulo é BAC?

Coro: É um ângulo inscrito.

Prof.: Sim! E como é que o determinaríamos?

J: É metade do arco correspondente que é o BC.

Prof.: Exactamente! Mas nós podemos explicar o nosso raciocínio de uma forma mais simples, utilizando a linguagem simbólica. Podíamos então escrever o que o José disse da seguinte forma

(Escreve no quadro)

"$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$"

Prof.: O ângulo inscrito, BAC, é metade do arco correspondente, BC.

Van Hiele (1986) defende que, nesta fase de aprendizagem, o professor deverá introduzir linguagem técnica que permita aos alunos atingir uma maior eficácia e precisão na comunicação. Uma das formas de expressão mais importantes na comunicação matemática é a linguagem simbólica. Como não era muito utilizada pelos alunos, a professora achou que aquele contexto constituía o momento ideal para a introduzir. Aguardou que tivessem *internalizado* as propriedades e relações geométricas abordadas para depois fazer a respectiva tradução para linguagem simbólica. A professora pretendia, assim, introduzir um novo *género* *de discurso*, o discurso da matemática formal, com o objectivo de tornar mais eficaz a comunicação escrita.

7.3.4 Caracterização da fase de orientação livre na intervenção didáctica

Nas fases anteriores, os alunos deduziram, através da exploração de actividades no computador e das discussões promovidas nas aulas, as propriedades relativas a conceitos geométricos que integravam a unidade didáctica tratada neste estudo. Neste momento, o objectivo residia numa aplicação desses conhecimentos e da linguagem adquirida, a tarefas de carácter diferente, devendo explorar a rede de relações com o auxílio das ligações que tinham ao seu dispor. Como este trabalho foi executado em grupo, tornou-se importante analisar de que forma o discurso de cada um dos alunos influenciou o comportamento dos seus pares no que respeita à aplicação dos conhecimentos adquiridos na fase anterior. Nestas aulas, os alunos tiveram ainda, quando solicitado, o apoio da professora e da investigadora cujo discurso foi também considerado como elemento mediador do processo de ensino-aprendizagem (fig. 7.16).

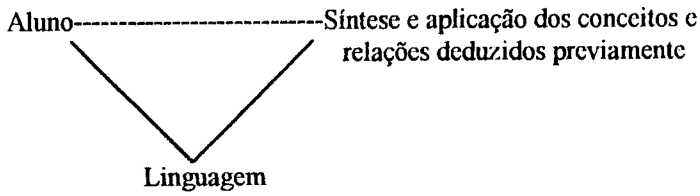


Fig. 7.16 - Diagrama que caracteriza o processo de mediação registado na fase 4.

Mediação semiótica

Existe uma componente da intervenção didáctica semelhante a este período de aprendizagem, que consistiu na realização de tarefas (Anexo 5) propostas pela professora, e que integravam o manual adoptado (Neves e Faria, 2000). Estas tarefas foram resolvidas dentro de cada grupo de trabalho, permitindo o aparecimento de situações de rica interacção social, principalmente, devido à heterogeneidade dos papéis assumidos pelos intervenientes.

O grupo A, observado durante a realização da primeira ficha de trabalho proposta pela professora, constitui um exemplo que retracta a forma como a diferença de papéis desempenhados pelos alunos poderá ser determinante no processo de aprendizagem.

Antes de se dedicarem à resolução da ficha de trabalho, a Margarida deixou claro que seria ela a escrever as respostas a entregar à professora. Esta aluna revelou, por várias vezes um espírito de liderança, reforçado pelo estatuto social que lhe era atribuído na turma. A

Margarida era considerada, pelos colegas, a melhor aluna, tendo ela própria essa noção. Por isso, compreende-se que tenha querido controlar as respostas dadas à tarefa proposta.

A discussão à volta das questões formuladas na ficha de trabalho era monopolizada pela Margarida e pela Noémia, cujas *vozes* interagiam de forma significativa. A Ana limitava-se a ouvir o que as colegas debatiam e escrevia no seu caderno as conclusões a que chegavam.

Excerto da aula do dia 05 / 03 / 2002

(Este excerto diz respeito à resolução do exercício 1.1, da página 151 do manual adoptado.

Cada um dos elementos deste grupo de trabalho tinha funções bem definidas. A Margarida encarregou-se de redigir as respostas a entregar à professora, a Noémia tinha o caderno diário aberto com as propriedades que tinham sido deduzidas anteriormente e a Ana escrevia as respostas no seu caderno, para que ficassem com um registo do trabalho.)

M_1: Os ângulos inscritos que contêm o mesmo arco são geometricamente iguais.

(A Margarida tenta aplicar uma das propriedades dadas à tarefa proposta.)

N: Mas os ângulos não contêm o mesmo arco!

M_1: Pois não...Então Ana qual será [a propriedade correcta]?

A_1: Não sei!

(Encolhe os ombros.)

M_1: Este ângulo mede 90°, porque é metade do arco. Não é?

(Na dúvida, a Margarida tenta obter uma confirmação das colegas.)

N: É isso! E agora fazemos 180° menos 30°, menos 90°, porque é um triângulo?

M_1: Pronto! Agora temos que escrever. Percebeste Ana?

(A Ana acena com a cabeça, em resposta afirmativa.)

M_1: Se não perceberes diz que eu explico-te.

É notório neste excerto que o diálogo se desenrola entre a Margarida e a Noémia cujas *vozes* estão imbuídas do mesmo poder e, por isso, nenhuma delas domina o discurso. Há uma apropriação dos significados partilhados no plano interpsicológico, através da correspondente *internalização* no nível intrapsicológico.

A Margarida tentou, por várias vezes, envolver a Ana na actividade que estavam a desenvolver. Revelou alguma preocupação com o facto da colega poder estar a escrever as conclusões no caderno sem as perceber, oferecendo-se, inclusivamente, para a esclarecer, caso fosse necessário. A intenção da Margarida em procurar a participação da Ana, prende-se com o facto de ela achar que a colega pudesse estar a fazer *ventriloquismo* (Wertsch, 1991) da sua *voz* e da *voz* da Noémia, ao escrever no caderno as suas conclusões sem que as percebesse. Por sua vez, as dificuldades que a Ana sentia nesta disciplina e o desejo de não ver beliscada a sua imagem social, podem explicar a inibição demonstrada em participar na actividade. O receio de admitir que não estaria a entender o raciocínio das colegas, por utilizarem um discurso característico de um nível de raciocínio geométrico superior ao seu levou-a a subordinar a sua *voz* às *vozes* dos restantes elementos do grupo, numa tentativa de *internalizar* a rede de relações que estava a ser discutida.

Durante a resolução desta ficha de trabalho, o grupo revelou algumas dificuldades numa das questões propostas, apelando à ajuda da professora.

Excerto da aula do dia 05 / 03 / 2002

(Este excerto diz respeito à resolução do exercício 2, da página 152 do manual adoptado.)

M_1: Então é assim...*a* é o dobro de *b*.

N: E agora?

M_1: Pois é! Nós não conhecemos as amplitudes.

N: É melhor chamar a stôra!

M_1: Está bem. Stôra!

Prof.: Digam!

M_1: Como é que vamos resolver o exercício se não sabemos as amplitudes?

Prof.: Então? Vocês têm aí uma circunferência. A que amplitude corresponde?

M_1 e N: 360º!

Prof.: E em quantas partes está dividida esta circunferência?

M_1 e N: Em 12!

M_1: Ah! 360º a dividir por 12, então o a é 30º.

Prof.: Exactamente!

O discurso proferido pela professora, nesta fase, tem características muito distintas daquele que utilizou na fase de informação. Neste momento, a *voz* da professora tem implícita uma natureza *dialógica*. O seu objectivo era estabelecer uma interacção entre a sua *voz* e as *vozes* das alunas, promovendo o processo de descoberta, em detrimento da transmissão de conhecimentos. O tipo de discurso utilizado é aquele que é *persuasivo internamente* (Wertsch, 1991), que procura gerar novos significados. As alunas deste grupo conseguiram, sob a orientação da professora, resolver a questão que lhes tinha suscitado dificuldades. Neste contexto, a professora actuou como suporte na *ZDP* das alunas, permitindo que a sua colaboração contribuísse para que este grupo alcançasse o seu objectivo de uma forma mais flexível, constituindo um caso de *andaime social* (Bellamy, referido por Piteira, 2000). Com o apoio da professora, as alunas conseguiram aplicar um nível de conhecimento mais elevado do que lhes seria permitido sem a sua ajuda.

Mas, a actuação na *ZDP* nem sempre resultou da interacção estabelecida com a professora.

Excerto da aula do dia 05 / 03 / 2002

(Continuação do excerto apresentado anteriormente.

A Margarida escreve a resposta e, simultaneamente diz em voz alta aquilo que escreve.)

M_1:...então o *a* é 30°. *a* é um ângulo ao centro e *b* é o ângulo inscrito correspondente. Um ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro correspondente...

N: Então o *b* é 15°.

M_1: Exacto! Percebeste Ana?

(A Ana acena negativamente com a cabeça.)

M_1: É assim... Temos aqui uma circunferência dividida em doze bocadinhos iguais. A circunferência mede 360°, então 360° a dividir por 12 dá 30°. Cada bocadinho mede 30°. Então a mede 30°, porque é um ângulo ao centro e os ângulos ao centro têm a mesma amplitude que os arcos correspondentes. Percebeste o *a*?

A_1: Sim!

M_1: O *b* é igual a 15° porque é um ângulo inscrito e um ângulo inscrito é sempre metade do arco correspondente. Percebeste agora?

A Margarida desenvolve, inicialmente, um discurso que acaba por ter duas funções. Quando "pensa alto", à medida que vai escrevendo a resposta, tem como intenção *internalizar*, ou seja, integrar no plano psicológico, a rede de relações que tinha sido discutida, anteriormente, com a professora, no plano social. Utiliza um discurso de tipo *egocêntrico* (Oliveira, 1993) que funciona como uma forma de transição de um discurso externo para um discurso interno, resultando na sua *internalização* em pensamento. Ao proferir este tipo de discurso, a aluna não pensou em interagir com os restantes elementos do grupo de trabalho, no entanto, esta situação acabou por suceder. Ao ouvir a *voz* da Margarida, a Noémia foi *internalizando* os significados inerentes aos conceitos abordados e conseguiu resolver com sucesso a actividade proposta. Embora não fosse intencional, a Margarida acabou por actuar na *ZDP* da Noémia, permitindo que esta atingisse, mais facilmente, os objectivos delineados.

Neste episódio, ocorreu outra situação de *andaime social* mas, desta vez, com uma clara intenção por parte da Margarida. Sabendo, previamente, que a Ana era uma aluna com muitas dificuldades, mostrou-se sempre disponível para a ajudar. Tendo-se apercebido que a Ana não tinha *internalizado* os conceitos envolvidos na resolução da questão, a Margarida ofereceu-se para lhos explicar. Em virtude da sua imagem social, como aluna com o melhor aproveitamento da turma, a *voz* da Margarida era mais poderosa do que a da Ana, de modo que esta foi gradualmente *internalizando* os significados da Margarida nos seus próprios significados.

Demonstração

Com a fase de *orientação livre* surgiu novamente a oportunidade de trabalhar a demonstração com os alunos. Depois de discutidos, na turma, os resultados obtidos pelos grupos de trabalho, nas aulas de investigação, foram propostas tarefas, que abordavam esses mesmos temas, nas quais os alunos deveriam formular argumentos válidos que justificassem as suas respostas. Nesta fase de aprendizagem apenas houve registo de dois tipos de representação da demonstração, como: processo de explicação e processo de comunicação (Villiers, 1999). Estas funções foram encaradas pelos alunos da mesma forma que o tinham sido na fase de *orientação guiada*, registando-se como única diferença a natureza das tarefas propostas nas duas fases de aprendizagem.

Tipos de demonstração

À semelhança do que sucedeu na *fase de orientação guiada*, ao longo deste período de ensino os alunos foram apresentando diferentes formas de demonstração directamente relacionadas com o seu nível de raciocínio geométrico.

Argumentação baseada na aparência visual das figuras

Grupo G

"O ângulo mede 90º, porque é um ângulo recto."

Havia muitos exemplos de argumentações baseadas na aparência visual das figuras, foi, por isso, seleccionado o mais significativo. Por exemplo, no exercício 1.1, da página 151 do manual adoptado, o grupo G, respondeu que "o ângulo mede 90º, porque é um ângulo recto". Os alunos chegaram correctamente ao valor do ângulo dado, mas a argumentação por eles apresentada não justifica o seu raciocínio. Quando questionados acerca desta situação, afirmaram que o facto de ser um ângulo recto justificava a perpendicularidade dos segmentos, baseando-se única e exclusivamente na aparência da figura: "vê-se que o ângulo tem 90º". Este grupo de alunos baseou a sua argumentação numa abordagem visual da figura dada, apresentando, por isso, um discurso associado a um raciocínio de nível 1. A propriedade geométrica relativa àquele tipo de ângulo não tinha sido ainda *internalizada*, sendo para eles evidente que aquele ângulo era recto.

Apresentação de cálculos sem justificação

Grupo C

(Resposta dada ao exercício 1.1, da página 151 do manual adoptado.)

" O ângulo x mede 60°, porque $x = 180° - (30° + 90°) = 60°$ "

Apesar de terem chegado correctamente aos valores pretendidos, os alunos deste grupo não apresentaram qualquer tipo de justificação para o seu raciocínio. No entanto, os cálculos efectuados revelaram que os alunos conheciam as relações estabelecidas entre as propriedades dos elementos que constituíam a figura dada, apresentando um raciocínio de nível 3. Os alunos foram questionados pela investigadora acerca do facto de não terem apresentado qualquer tipo de justificação na tarefa proposta, ao que a Carla respondeu: "fazemos bem as contas mas é difícil depois explicar porquê". Neste caso, houve uma *internalização* dos conceitos geométricos envolvidos nesta actividade mas não tinham ainda adquirido a voz correspondente à linguagem usual da matemática. Antes da implementação da investigação, os alunos desta turma apenas tinham incorporado a linguagem correspondente à manipulação de números, justificando os seus raciocínios desta forma. Como tinham pouca experiência com o discurso usual da matemática, não tinham ainda conseguido incorporar a *voz* adequada a esta situação que exigia a argumentação dos resultados.

Raciocínio utilizado na demonstração das respectivas propriedades

Grupo A

(Resposta dada ao exercício 1.1, da página 151 do manual adoptado.)

"O ângulo mede 90° porque sabemos que a medida do ângulo inscrito é sempre metade do arco correspondente $\left(\frac{180°}{2} = 90°\right)$."

Nas aulas de investigação, o objectivo consistia na exploração e descoberta de algumas propriedades geométricas e na correspondente demonstração. Depois de deduzirem logicamente cada uma dessas propriedades, os alunos poderiam utilizá-las na argumentação de raciocínios relativos a tarefas desta fase. Neste caso, os alunos do grupo de trabalho considerado, deduziram correctamente as propriedades subjacentes aos elementos geométricos que constituíam a figura dada, apresentando um raciocínio de nível 3. Apesar disso, a argumentação que utilizaram foi a mesma que tinham apresentado na demonstração das propriedades correspondentes na *fase de orientação guiada*, quando podiam ter recorrido directamente à propriedade que já tinham deduzido anteriormente, neste caso, que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto. Isto mostra que não tinham ainda *internalizado* a respectiva propriedade, sentindo necessidade de repetir todo o procedimento que os conduzia a esse resultado.

Demonstração baseada nas relações entre as propriedades das figuras

Grupo F

(Resposta dada ao exercício 1.3, da página 151 do manual adoptado.)

"$\hat{y} = 180° - 140° = 40°$, porque os ângulos são suplementares.

$\hat{x} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow \hat{x} = 180° - 40° = 140°$, porque num quadrilátero inscrito na circunferência a soma dos ângulos opostos é 180°."

Grupo A

(Resposta dada ao exercício 2, da página 148 do manual adoptado.)

"O ângulo inscrito x tem 43° porque é metade do ângulo ao centro correspondente $\left(\frac{86°}{2} = 43°\right)$."

Estes dois exemplos representam demonstrações que resultam da correcta dedução lógica de várias propriedades associadas a uma figura. Os alunos conseguiram atingir os objectivos propostos para esta fase, apresentando claramente um raciocínio de nível 3.

Capítulo 8

Conclusões e recomendações

Este capítulo divide-se em três secções. Na primeira procura-se fazer uma descrição resumida do trabalho desenvolvido, focando os objectivos do estudo, as questões que o orientaram e a metodologia utilizada na sua implementação. Na segunda secção apresentam-se as principais conclusões do estudo, procurando responder às questões colocadas no início da investigação. Finalmente, na terceira secção, serão comentadas algumas implicações didácticas que surgiram da síntese do trabalho.

8.1 Síntese do estudo

Este estudo tinha como principal objectivo compreender o processo de apropriação dos significados, pelos alunos, num ambiente geométrico dinâmico. Como o trabalho desenvolvido se realizou num contexto de aprendizagem colaborativa, tornou-se também importante analisar a influência das interacções sociais estabelecidas na aprendizagem dos conceitos geométricos. Para estudar este tema, e descrever o processo de ensino-aprendizagem, pareceu-me adequado recorrer ao modelo teórico de van Hiele, que caracteriza o nível de desenvolvimento geométrico dos alunos. A ênfase, colocada por essa teoria, na utilização de linguagens específicas em cada nível, motivou o aprofundamento de uma abordagem sociolinguística que achei adequada. Para enquadrar os objectivos propostos para este estudo, foram elaboradas as seguintes questões de investigação:

- Qual a influência da linguagem como elemento mediador da aprendizagem?
- Qual a influência do computador como elemento mediador da aprendizagem?
- Que características terão as demonstrações elaboradas por alunos expostos a esta forma de trabalho?
- Qual a natureza das mediações que ocorrem em cada uma das fases de aprendizagem?

De acordo com o problema em estudo, adoptou-se uma metodologia qualitativa, de tipo interpretativo, optando-se pelo estudo de caso. A intervenção didáctica foi implementada numa turma do 9º ano de escolaridade de uma escola básica dos arredores de Viana do Castelo, no ano lectivo 2001/2002. Na investigação foi abordada a unidade "Circunferência e

Polígonos. Rotações", com recurso ao software de geometria dinâmica *The Geometer's Sketchpad*, versão 3.0 (Key Curriculum Press, 1997).

Para a recolha de dados utilizaram-se essencialmente as técnicas de entrevista, observação e análise documental, tendo sido também utilizado o *Teste de Geometria de van Hiele* (Usiskin, 1982). Foi feita uma entrevista clínica com cada um dos grupos de trabalho intervenientes no estudo, com o objectivo de avaliar a profundidade dos seus conhecimentos.

Os dados recolhidos durante o estudo foram analisados com base no paradigma da interacção simbólica, tendo-se procedido à formação de *categorias de classificação* (Bogdan e Biklen, 1994), com o objectivo de incluir em temas genéricos padrões de comportamento semelhantes.

8.2 Conclusões do estudo

Nesta secção procede-se à síntese das principais conclusões extraídas do trabalho realizado, procurando responder às questões formuladas no início do estudo. Começa-se por analisar a quarta questão de investigação apresentada, já que se trata de um tópico que abrange os restantes três.

8.2.1 Fases de aprendizagem

Embora não estivesse inicialmente previsto, a planificação da intervenção didáctica, idealizada pela investigadora e pela professora interveniente no estudo, seguiu uma abordagem próxima da proposta por van Hiele (1986) para as fases de aprendizagem, cujo objectivo é promover a transição de um nível para o seguinte. Neste caso, as fases que constituíram o processo de ensino-aprendizagem não foram implementadas como van Hiele recomenda na sua teoria. Este autor advoga que, para cada nível de raciocínio, seja proposto um ciclo de cinco fases didácticas, no entanto, no estudo desenvolvido foi utilizada uma estrutura de etapas de aprendizagem, para cada conceito leccionado, apresentadas sempre pela mesma ordem e de forma cíclica. Apesar de as fases de aprendizagem não terem sido implementadas como van Hiele defende no seu modelo teórico, o *Teste de Geometria de van Hiele* (Usiskin, 1982), proposto no início e no final da investigação, parece indicar que houve uma evolução no que respeita à qualidade do raciocínio geométrico dos alunos. O pré-teste evidenciou uma predominância do nível 1 na turma investigada, enquanto que o pós-teste revelou que o nível mais frequente era o 2, tendo inclusivamente aumentado o número de alunos no nível 3.

Durante a intervenção didáctica, nem sempre houve necessidade de utilizar todas as fases de aprendizagem propostas por van Hiele, nomeadamente as fases de *informação* e de *integração*, tendo sido este resultado empírico antecipado pelos estudos de Pastor e Rodríguez (1990). O objectivo da fase 1 é permitir que o professor apresente aos alunos o novo tema de trabalho e investigar quais os conhecimentos que estes possuem no que respeita ao domínio em estudo. Como surgiram situações em que, tanto o professor como os alunos, possuíam a informação adequada, não foi necessário recorrer a uma exposição do campo de trabalho, passando de imediato à implementação da fase 2. No que respeita à fase de integração, foi eliminada da intervenção didáctica. A natureza das actividades propostas na fase 4 e a forma como foram abordadas permitiram fornecer aos alunos uma sumarização dos conhecimentos por eles adquiridos, no decurso das várias etapas de aprendizagem. Como o objectivo da fase 5 foi cumprido durante a fase de *orientação livre*, tornou-se desnecessária a sua implementação.

No que respeita às restantes fases didácticas nenhuma delas foi preterida e surgiram sempre pela mesma ordem. Estes três períodos de aprendizagem, contribuíram fundamentalmente para a apropriação dos conteúdos e para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos alunos, pois foi durante estas fases que realizaram actividades que implicaram a construção dos significados geométricos envolvidos.

O trabalho desenvolvido pelos alunos foi realizado em grupo em todas as fases que integraram a intervenção didáctica. Por isso, todos os períodos de aprendizagem tiveram subjacente um contexto de diálogo entre os intervenientes. Desta forma, a fase de *explicitação*, cujo objectivo principal é promover o confronto de experiências, surgiu ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem, estendendo-se a todas as fases didácticas envolvidas, tal como Pastor e Rodríguez (1990) defendem.

8.2.2 A linguagem como elemento mediador da aprendizagem

As fases implementadas durante a investigação envolviam objectivos de aprendizagem completamente diferentes tendo, por isso, sido utilizadas, em cada uma, diversas metodologias de trabalho. Como consequência, os papéis assumidos pela professora e pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem tiveram características distintas em cada um desses períodos.

Na fase de *informação*, a professora deu a conhecer, aos alunos, o domínio de trabalho. O seu principal objectivo, nestas aulas, era a apresentação e definição dos conceitos que iriam ser explorados e aplicados nas fases seguintes. Assim, a professora utilizou um discurso que visava uma instrução formal, transmitindo, de forma unívoca, a informação que os alunos deveriam *internalizar* (Oliveira, 1993). Nestas aulas, ela não pretendia a participação dos alunos, mas que estes recebessem, passivamente, a mensagem que lhes estava a transmitir. As suas elocuções constituíram um *discurso de autoridade* que, pelas suas características, não procurava a interacção com outras *vozes*, nomeadamente as dos alunos. Por sua vez, estes ouviam com atenção as directivas transmitidas pela professora sem colocar qualquer tipo de questão, já que seria uma contestação à figura de autoridade e legitimação que ela representava. Nesta fase, notou-se uma clara diferença de poder entre a *voz* da professora e as *vozes* dos alunos, associada ao respectivo estatuto social que lhe é atribuído pela instituição escolar e cuja autoridade é encarada de forma natural pelos alunos.

Nas restantes fases da intervenção didáctica a professora assumiu um papel diferente tendo, por isso, utilizado um discurso com características distintas daquele a que recorreu na fase de *informação*. Nos três períodos didácticos que se seguiram, pretendia-se, respectivamente, que os alunos investigassem, discutissem e interiorizassem um conjunto de propriedades e relações geométricas que integravam a unidade didáctica abordada. Sempre que a professora era solicitada pelos alunos ou fazia uma intervenção voluntária, utilizava um discurso de natureza *dialógica*, procurando promover a interacção entre a sua *voz* e as *vozes* dos alunos, com o propósito de tomar contacto com a sua forma de pensar. O seu objectivo era conseguir a partilha e a origem de novos significados, recorrendo a um discurso *persuasivo internamente*. Mas, mesmo nos momentos em que o discurso da professora teve uma natureza *dialógica*, a sua *voz* mostrou ter mais poder do que as *vozes* dos alunos, uma vez que estes nunca contestaram as afirmações por ela proferidas.

Portanto, de acordo com os objectivos propostos para cada fase de aprendizagem, a professora utilizou dois tipos de discurso ao longo do estudo. Um *discurso de autoridade*, que tinha subjacente uma função unívoca procurando a transmissão de informação, e um *discurso persuasivo internamente*, que tinha subjacente uma função *dialógica* e cujo objectivo era a formação de novos significados.

Durante as fases de *orientação guiada* e *orientação livre*, os alunos realizaram as actividades propostas em pequeno grupo. Por sugestão da investigadora, a professora formou grupos de trabalho heterogéneos proporcionando momentos de interacção significativa, devido aos diferentes níveis de desenvolvimento dos seus elementos. Em cada um dos grupos surgiram diferentes *vozes* associadas ao estatuto que lhes era atribuído na turma. A *voz* dos alunos com bom desempenho na disciplina de Matemática assumia-se como a mais poderosa, ocupando o lugar central na actividade. A reputação destes alunos exerceu um poder de interferência e persuasão na *voz* de alunos com mais dificuldades, levando-os a protagonizar casos de *ventriloquismo*. Ao reconhecerem a autoridade dos colegas mais capazes, estes alunos subordinaram a sua *voz* à *voz* daqueles, tentando integrar, nos significados já construídos, os significados desses alunos.

Mas, alguns grupos eram constituídos por alunos que, por terem um nível de desenvolvimento aproximado, assumiam uma *voz* com o mesmo poder. Utilizando um *discurso persuasivo internamente*, partilharam significados e defenderam ideias tentando chegar a uma conclusão. Quando não era possível chegar a um consenso, como se sentiam com uma autoridade equivalente, nenhum dominava a actividade, recorrendo ao apoio da professora, já que era a pessoa a quem reconheciam uma maior competência.

Ao conceber a relação entre o desenvolvimento e a aprendizagem, Vygotsky estabelece uma ligação fundamental entre o processo de desenvolvimento e o ambiente sociocultural em que o indivíduo se encontra integrado (Oliveira, 1993). Confere ao processo de ensino-aprendizagem um papel importante na promoção do desenvolvimento cognitivo da criança, associando-o ao conceito de *ZDP*, argumentando que é neste nível que a interferência de outros indivíduos é mais transformadora. O papel atribuído às interacções sociais é, por isso, fundamental neste processo. Os significados que os alunos constróem no plano interpsicológico são depois *internalizados* no plano intrapsicológico. Este estudo teve por base um contexto de interacção social entre os intervenientes, promovendo a aprendizagem colaborativa entre alunos e entre alunos e professor. Os resultados do estudo sugerem que o suporte proporcionado por alguns alunos e pela professora contribuiu para facilitar a aprendizagem. A professora e a investigadora foram as pessoas que os alunos reconheceram como mais capazes para os auxiliar nos momentos em que sentiram dificuldades. Nestas situações, tanto a professora como a investigadora apoiaram os alunos, utilizando um discurso de natureza *dialógica*, orientando a sua actividade. Procuraram promover o processo de descoberta, em detrimento da transmissão de conhecimentos, implementando uma linha de questionamento que desafiasse o pensamento dos alunos. Mas houve também a ocorrência de andaime social entre pares. Como os grupos de trabalho eram constituídos por alunos com diferentes níveis de desenvolvimento, foi comum os alunos com melhor desempenho auxiliarem os colegas com mais dificuldades, assumindo, de certa forma, o papel e a voz da professora dentro do grupo.

Parece, então, existir diferentes *vozes* (Wertsch, 1991) na sala de aula, associadas ao respectivo estatuto social que lhes é atribuído naquela comunidade. As vozes da professora, da investigadora, que assumiu um papel semelhante ao de uma segunda professora, e dos alunos com elevado aproveitamento escolar, encontram-se imbuídas de uma autoridade natural que é reconhecida na turma.

8.2.3 O computador como elemento mediador da aprendizagem

O computador influenciou de forma determinante o contexto de trabalho desta investigação. Na fase de *orientação guiada*, os alunos exploraram, em grupo, as propriedades e relações geométricas de algumas figuras, utilizando como recurso o *GSP*. Este software foi utilizado como uma ferramenta para desenhar objectos geométricos com precisão. Por outro lado, permitiu aos alunos fazer construções que mantinham as relações geométricas entre os seus elementos, mesmo com o arrastamento de certos pontos no ecrã.

A utilização do *GSP* influenciou de forma determinante o desempenho dos alunos, principalmente, ao longo desta fase de aprendizagem. Mediou significativamente a relação entre os alunos e o significado geométrico que se pretendia que adquirissem. A mediação, através do computador, assumiu características particulares. Uma das possibilidades de um AGD é o movimento e a modificação das figuras construídas que conduzem a uma visualização relativamente fácil das propriedades e relações geométricas existentes entre os objectos que as constituem (Laborde, 1993). Ao explorarem as construções obtidas com o *GSP*, os alunos elaboraram facilmente conjecturas obtendo, através da sua manipulação, uma resposta visual rápida que contribuiu para que se convencessem da sua validade. Neste estudo, o computador foi utilizado como um suporte ao desenvolvimento dos alunos, permitindo-lhes construir o seu conhecimento geométrico. Nas entrevistas, realizadas pela investigadora, a maioria dos alunos afirmou que sem o computador a sua tarefa iria ser dificultada. Realçaram a facilidade da elaboração de conjecturas e da sua verificação com o apoio do computador, sublinhando que, se não o utilizassem, seria um processo mais lento e mais complicado. Conclui-se então que, nesta situação, o AGD actuou na *ZDP* dos alunos, constituindo um andaime computacional (Noss et al., 1994), que serviu de suporte para que atingissem, de uma forma mais simples, os objectivos de aprendizagem propostos. Segundo Junqueira (1995) a utilização de um AGD facilita a passagem do nível 1 para o nível 2 de van Hiele, uma vez que com este tipo de software é possível investigar de uma forma intuitiva as propriedades de uma figura, através da sua exploração dinâmica. A análise empírica dos dados obtidos neste estudo parecem reforçar esta ideia, já que, no final da investigação o nível de raciocínio predominante na turma era o 2.

Mas será que, neste caso, o computador representou uma ferramenta técnica com as características que habitualmente lhes atribuímos? Ter-se-á tratado de um objecto utilizado apenas como facilitador da actividade? Para os alunos o computador estava imbuído de um poder verificativo indubitável. Qualquer conjectura elaborada, com base na resposta visual dada pelo computador, era generalizada. Os alunos ficavam imediatamente convencidos das relações geométricas que viam aparecer no ecrã. Na sua perspectiva, o computador representava uma figura de autoridade cuja fiabilidade não poderia ser posta em causa. Quando surgia algum problema, relacionado com a construção das figuras ou com a inacessibilidade de um menu específico, os alunos assumiam, à partida, a sua culpa. Neste caso, o computador tinha-lhes transmitido que tinham executado algum procedimento errado. Nesta cultura, o computador tem um discurso autónomo, os alunos atribuem-lhe uma *voz* que se revela mais poderosa do que a sua.

8.2.4 Características das demonstrações elaboradas pelos alunos

Nas fases de *orientação guiada* e *orientação livre* foi pedido aos alunos que apresentassem uma justificação que validasse cada uma das suas conjecturas, introduzindo, desta forma, a demonstração na sala de aula.

Ao longo do estudo, os alunos atribuíram à demonstração diferentes papéis, concebendo-a, simultaneamente, como um processo de: verificação, explicação e comunicação (Villiers, 1999).

As investigações, realizadas pelos alunos com o apoio do computador, contribuíram fundamentalmente para a dedução das propriedades e relações geométricas associadas às figuras exploradas. Os AGD's proporcionam, ao utilizador, um modelo da geometria euclidiana que oferece, através da possibilidade de arrastamento, uma resposta visual que revela se as conjecturas elaboradas se verificam (Jones, 1998). Desta forma, os alunos puderam testar a validade das suas asserções, reunindo o convencimento necessário à transição de casos particulares para a respectiva generalização, nunca tendo duvidado da fiabilidade dos seus resultados.

O ambiente de trabalho implementado durante a investigação, levou os alunos a concluir que a mera verificação empírica dos resultados não era suficiente para demonstrar a sua validade. Era necessário encontrar uma explicação que fundamentasse as conjecturas elaboradas. O computador deu um contributo fundamental na descoberta de argumentos válidos para os resultados obtidos. Os alunos procuravam a base da sua demonstração nas relações que observavam no ecrã e, através de um trabalho de natureza colaborativa, baseado na troca de ideias, foram, na maioria das situações, bem sucedidos.

Na opinião dos alunos, a tarefa mais complexa de elaborar foi a comunicação escrita dos argumentos lógicos encontrados. A turma observada não tinha experiência prévia com este método de trabalho, tendo apenas contacto com a linguagem dos números. A insegurança que possuíam relativamente ao que tinham escrito levou-os, por várias vezes, a interpelar a professora e a investigadora no sentido de ver as suas respostas validadas. Os alunos pretendiam incorporar a *voz* adequada àquele contexto, procurando clarificar quais os critérios que caracterizavam o discurso formal da matemática.

Durante as fases de *orientação guiada* e *orientação livre*, os alunos apresentaram diferentes tipos de justificações para os seus resultados que se concluiu estarem associados aos três primeiros níveis de van Hiele. No quadro 8.1 resumem-se os casos mais significativos que surgiram durante a investigação:

Tipos de demonstração	**Nível de van Hiele**
Argumentação baseada na aparência visual das figuras	1
Argumentação baseada nas propriedades das figuras	2
Apresentação de cálculos sem justificação	3
Raciocínio utilizado na demonstração das respectivas propriedades	3
Demonstração baseada nas relações entre as propriedades das figuras	3

Quadro 8.1 – Tipos de demonstração apresentados pelos alunos nas fases 2 e 4.

A literatura (Battista e Clements, 1992) indica que um programa orientado para a demonstração requer, pelo menos, o nível 3 de van Hiele. Apesar de o *Teste de Geometria de van Hiele* parecer indicar que a maioria dos alunos se encontrava no nível 1, foi possível trabalhar a demonstração com esta turma. Este facto foi associado ao contexto de trabalho implementado na sala de aula. A utilização de um AGD e o trabalho cooperativo contribuíram para que os alunos conseguissem atingir objectivos mais complexos do que aqueles que o seu nível de desenvolvimento real permitiria, ao trabalhar individualmente e num ambiente de papel e lápis.

8.2.5 Síntese das principais conclusões

Nesta subsecção apresenta-se uma síntese das principais conclusões deste estudo, abordadas pela ordem determinada pelas subsecções anteriores. Da reflexão, à luz dos princípios teóricos que fundamentam o estudo e dos resultados a que foi possível chegar, conclui-se que:

(a) Nas diferentes fases de ensino, as mediações possuem uma natureza diferente directamente relacionada com os objectivos propostos para cada uma delas.

(b) O professor utiliza diferentes tipos de discurso que estão de acordo com os objectivos de ensino que se propõe cumprir; na sala de aula existem *vozes* (Wertsch, 1991) imbuídas de um poder diferente, associado ao estatuto social que lhes é atribuído naquela comunidade; o suporte proporcionado, aos alunos, por indivíduos mais capazes, como o professor e alunos com um bom desempenho em Matemática, facilita a sua aprendizagem, através da actuação na sua *ZDP* (Oliveira, 1993).

(c) A utilização do computador, em particular um AGD, torna a aprendizagem mais fácil e intuitiva, servindo de suporte para que os alunos consigam atingir objectivos mais complexos; do ponto de vista dos alunos, o computador possui uma *voz* mais poderosa do que a sua, fazendo com que aqueles nunca duvidem da validade das conjecturas elaboradas.

(d) Neste contexto, os alunos associam diversas funções à demonstração, nomeadamente, a de verificação, explicação e comunicação; a qualidade das argumentações apresentadas pelos alunos relaciona-se com o seu nível de raciocínio geométrico, tal como garante a teoria de van Hiele (1986) que defende a existência de uma linguagem característica de cada um dos níveis.

8.3 Recomendações

Deste trabalho decorrem dois tipos de recomendações. Um primeiro relacionado com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e um segundo tipo de recomendação que se relaciona com questões para investigação futura.

8.3.1 Recomendações didácticas

Atendendo às conclusões do estudo é importante que o professor tenha em conta os casos de *ventriloquismo* protagonizados pelos alunos, é necessário que consiga distinguir as situações em que este processo lhes será prejudicial. O *ventriloquismo* assemelha-se, de certa forma, ao fenómeno de imitação que Vygotsky (referido por Oliveira, 1993) define como a reconstrução individual daquilo que o indivíduo observa nos outros. Mas, defende que só é possível a imitação de acções que estejam na *ZDP* do sujeito, caso contrário não conseguirá apropriar-se desses mesmos conceitos. Como é que o professor poderá identificar os casos de *ventriloquismo*?

É inequívoca a importância assumida actualmente, no currículo de Matemática, pela comunicação. No entanto, esta competência continua a ser pouco desenvolvida nas aulas desta disciplina, principalmente a comunicação escrita. Após tantos anos a utilizar apenas, como forma de argumentação, a linguagem dos números, é natural a dificuldade sentida pelos alunos quando têm necessidade de justificar raciocínios. É, por isso, importante que se promovam experiências de aprendizagem que desenvolvam a comunicação nos alunos, não só escrita como oral.

8.3.2 Recomendações para futura investigação

A implementação e a validade das fases de aprendizagem propostas por van Hiele exigem uma diversidade de estudos que não se relacionem apenas com a componente cognitiva mas também com os métodos de ensino. Será que num contexto educacional diferente do utilizado neste estudo as *vozes* seriam as mesmas? Que tipos de elementos mediadores poderiam surgir?

No que respeita ao nível de desenvolvimento geométrico dos alunos, a maioria das turmas são heterogéneas. Dada esta situação, de que forma poderemos implementar as fases de aprendizagem propostas por van Hiele?

Neste contexto educacional os alunos associaram à demonstração o papel de processo de verificação, explicação e comunicação. No entanto, no seu modelo teórico, Villiers (1999) refere a existência de outras funções da demonstração igualmente importantes e que devem ser promovidas na sala de aula. Que tipos de contexto poderiam potenciar a emergência das restantes funções da demonstração, como o desafio intelectual, a sistematização e a descoberta?

Neste estudo foi detectada uma possibilidade de ligação entre as propostas teóricas de Vygotsky, Bakhtin e Wertsch e a teoria de van Hiele. É um campo pouco explorado e cujo conhecimento poderá trazer implicações importantes para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, por isso é urgente que sejam desenvolvidas mais investigações nesta área.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. Em *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, pp. 147-176.

Barbin, E. (1993). Que concepções epistemológicas da demontração? Para que aprendizagens? (I). *Educação e Matemática n.º 27*, pp. 21-25.

Bastos, R. & Loureiro, C. (2000, em impressão). Demonstração - Uma questão polémica. *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Fundão: SPCE.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in Mathematics Education, 17*, pp. 31-48.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, pp. 359-387.

Chazzan, D. (1990). Students's microcomputer-aided exploration in geometry. *Mathematics Teacher, Vol.83, 8*, pp. 628-635.

Cheyne, J. A. & Tarulli, D. (1999). Dialogue, Difference and the "Third voice" in the ZDP. *Theory and Psychology, 9*, pp. 5-28.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 420-464. New York: Maxwell MacMillan.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

Coelho, M. I. P. (1996). *O cabri-géomètre na resolução de problemas: Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Coelho, M. I. P. & Saraiva, M. J. (2000, em impressão). Tecnologias no Ensino-Aprendizagem da Geometria. *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Fundão: SPCE.

Confrey, J. (1994). A Theory of Intellectual Development. Part I. *For the Learning of Mathematics 14, 3*, pp. 2-8.

Confrey, J. (1995). A Theory of Intellectual Development. Part II. *For the Learning of Mathematics 14, 3*, pp. 38-48.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: gradiva.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph nº 3*. Reston, VA: NCTM.

Garnica, A. V. (1996). Da literature sobre a prova rigorosa em educação matemática: Um levantamento. *Quadrante, Vol. 5, 1*, pp. 29-60.

Geddes, D. & Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and classroom activities. Em D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*, pp. 199-222. New York: MacMillan & NCTM.

Graf, K. D., Hodgson, B. (1998). The computer as a context for new possible geometrical activities. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp.144-158). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000, em impressão). Proof and its classroom role: A survey. *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Fundão: SPCE.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. Em L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, pp. 21-34. Valência: Universidade de Valência.

Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp. 235-242). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry- Two sides of the coin. *Focus on learning Problems in Mathematics, 11(1)*, pp. 61-76.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, pp. 11-18.

Jones, K. (1998). *Student interpretations of a dynamic geometry environment* [On-line]. Disponível: Internet, Directório: www-cabri.imag.fr/, Ficheiro: EIAH/Claborde/Documents/Jones/jones.html

Junqueira, M. M. B. B. (1995). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos. Um estudo no 9º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Laborde, C. (1993). The computer as part of learning environments: the case of geometry. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: mathematics education and technology*, pp. 48-67. Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer based environment. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp. 113-121). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C., Villani, V. (1998). Geometry and geometry-teaching through the ages. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp.1-8). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Lisboa: APM.

Matos, J. M. (1984). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal*. Lisboa: APM.

Matos, J. M. (2000, em impressão). Visualização, veículo para a educação em geometria. *IX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Fundão: SPCE.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Ministério da Educação [ME]. Departamento do Ensino Básico. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação [ME]. Departamento do Ensino Secundário. (1997). *Matemática – Programas 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Nardi, B. (1996). Activity theory and human-computer interaction. Em B. Nardi (Ed.), *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction*, pp. 7-16. Cambridge, EUA: The MIT Press.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Autor.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Neubrand, M. (1998). The geometry curriculum in Germany: past and future trends. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp.). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Neves, M. A. F.& Faria, M. L. M. (2000). *Matemática. 9º ano*. Porto: Porto Editora.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L. & Hoelz, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An exploratory study with Cabri-Géomètre. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education (III)*, pp. 360-367. Lisboa: Program comitte of the 18th PME conference.

Oliveira, M. K. (1993). *Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento – Um processo Sócio-histórico*. São Paulo: Spicione ed.

Pastor, A. J. & Rodríguez, A. G. (1990). Una propuesta de fundamentación para la ensananza de la geometría. El modelo de van Hiele. *Teoria e páctica en educación matemática* pp. 298-384. Sevilla: Ediciones Alfar.

Pegg, J., Gutiérrez, A. & Huerta, P. (1998). Assessing reasoning abilities in geometry. Em C. Mammana, e V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study, Vol. 5* (pp.275-293). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Piteira, G. S. C. (2000). *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de geometria dinâmica*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática – Ensino secundário* (2ª ed.). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador*. Lisboa: APM.

Scher, D. (2001). Lifting the curtain: The evolution of The Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Educator, Vol. 10, Number 2*, pp. 42-48.

The Geometer's Sketchpad (versão 3.0). (1997). EUA: Key Curriculum Press.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievment in secondary school geometry*. Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure an insight. A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: IIE.

Veloso, E. (1995). Software dinâmico: Uma abordagem estimulante no ensino da geometria. Em APM (Ed.). *Actas do ProfMat 95*, pp. 53-64. Lisboa: APM.

Villiers, M. D. (1999). *Rethinking proof with The Geometer's Sketchpad*. EUA: Key Curriculum Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*. New York: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A socio-cultural approach to mediated action*. EUA: Harvester Wheatsheaf.

Anexos

Anexo 1 – Actividades propostas no período de exploração

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 1

9º ano / Turma B 24/01/2002

Triângulo rectângulo

1. Construa um triângulo $[ABC]$ qualquer. Guarde este ficheiro com o nome triang.gsp.
2. Meça a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo construído.
3. Desloque um dos vértices do triângulo $[ABC]$ até obter um ângulo de 90º.
4. Que características deve ter uma figura geométrica para ser considerada um triângulo rectângulo?
5. Abra um ficheiro novo e, a partir da definição, construa um triângulo rectângulo, que não perca esta característica com a manipulação da figura. Guarde este ficheiro com o nome trect.gsp.
6. Descreva o processo de construção utilizado.

Triângulo equilátero

1. Como classifica um triângulo cujos lados têm o mesmo comprimento? Construa um triângulo $[ABC]$ com esta propriedade.
2. Meça a amplitude dos ângulos internos do triângulo construído. O que observa?
3. Ao manipular a construção a sua conjectura mantém-se?
4. Poderá existir um triângulo com os três lados iguais e os ângulos diferentes? Justifique a sua resposta.
   Sugestão: Trace o segmento que representa a altura do triângulo relativa a um dos lados.

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 2

9º ano / Turma B — 31/01/2002

Rectângulos e quadrados

1. Crie um segmento $[AB]$. Construa um rectângulo $[ABCD]$ em que esse segmento seja um dos lados. Guarde este ficheiro com o nome *rect.gsp*.

2. Ao manipular os vértices, a sua construção permanece um rectângulo?

3. Meça o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos internos do rectângulo construído.

4. Deslocando os vértices do rectângulo, o que pode afirmar acerca das medidas dos comprimentos dos lados e das amplitudes dos ângulos?

5. Suponha que teria de explicar a um colega o processo de construção do rectângulo, como o faria?

6. Será possível, recorrendo à manipulação dos vértices do rectângulo, transformá-lo num quadrado?

7. Que comentário faz à afirmação?

   Um quadrado também é um rectângulo.

   Justifique a sua resposta.

8. Que características deve ter uma figura geométrica para ser considerada um rectângulo? E um quadrado?

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 3

9º ano / Turma B 7/02/2002

Paralelogramos

1. *Um paralelogramo é um quadrilátero com os lados opostos paralelos*. A partir desta informação, construa um paralelogramo $[ABCD]$. Guarde este ficheiro com o nome *paral.gsp*.
2. Abra um novo ficheiro com o nome *los.gsp*. Crie um segmento $[EF]$. Construa um losango $[EFGH]$, em que esse segmento seja um dos lados.
   Sugestão: Construa uma circunferência cujo raio seja o segmento $[EF]$. Desenhe, nessa circunferência, um outro segmento que represente o raio.
3. Que comentário faz à seguinte afirmação?

   Um losango é um caso particular de um paralelogramo.

   Justifique a sua resposta.
4. Consegue transformar o losango num quadrado? Porquê?
5. Abra o ficheiro *paralel.gsp*. Ao manipular os vértices do paralelogramo, consegue obter um quadrado? E um rectângulo? Porquê?

Propriedades dos paralelogramos

1. Abra o ficheiro *paralel.gsp*. Meça a amplitude dos ângulos internos do paralelogramo. Ao manipular a construção, o que pode concluir acerca dos ângulos opostos do paralelogramo? Justifique a sua resposta.
   Sugestão: Trace a recta definida por dois vértices consecutivos do paralelogramo.
2. E os ângulos consecutivos, que relação verificam? Porquê?
3. Construa as diagonais do paralelogramo e o seu ponto de intersecção. Meça o comprimento dos segmentos em que as diagonais ficaram divididas. Ao manipular a construção, o que pode observar? Justifique a sua conjectura.
4. Transforme o paralelogramo num rectângulo. A propriedade anterior mantém-se? Porquê?
5. Considerando a classificação hierárquica dos paralelogramos, vista anteriormente,
6. Todas as propriedades dos paralelogramos também se verificam nos rectângulos e nos losangos. Há, no entanto propriedades que apenas se verificam em cada uma dessas figuras. Tente descobri-las.
7. As propriedades anteriores verificam-se no quadrado? Justifique a sua resposta.
   Descubra propriedades características do quadrado.

Bom trabalho!

Anexo 2 – Actividades propostas na intervenção didáctica

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 1

9º ano / Turma B 28/02/2002

Ângulo ao centro e ângulo inscrito

1. Construa uma circunferência de centro O.
2. Marque, na circunferência, três pontos quaisquer, A, B e C.
3. Construa o ângulo ao centro AOB e o ângulo ACB inscrito na circunferência
4. Meça a amplitude dos ângulos construídos e do arco AB correspondente.
5. Consegue encontrar uma relação entre:
   - As amplitudes do ângulo AOB e do arco AB?
   - As amplitudes do ângulo ACB e do arco AB?
6. Desloque os pontos A ou B sobre a circunferência. O que pode afirmar sobre:
   - Amplitude de um ângulo ao centro e do arco correspondente;
   - Amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência e do arco correspondente;

Justifique a sua resposta.

7. Atendendo às observações efectuadas nas questões anteriores, o que pode concluir acerca das amplitudes de um ângulo ao centro e do ângulo inscrito correspondente. Apresente uma razão que justifique a sua resposta.

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 2

9º ano / Turma B 28/02/2002

Propriedades de ângulos inscritos numa circunferência

Tarefa 1

1. Construa uma circunferência de centro O.

2. Marque, na circunferência, dois pontos quaisquer A e B.

3. Construa dois ângulos inscritos na circunferência que contenham o arco AB.

4. Meça a amplitude de cada um dos ângulos anteriores. Consegue encontrar uma relação entre eles?

5. Deslocando os pontos A ou B a sua conjectura mantém-se? Porquê?

Tarefa 2

1. Construa um segmento $[AB]$ e a circunferência, de centro O, que tem esse segmento por diâmetro.

2. Marque, na circunferência, um ponto qualquer C.

3. Construa o ângulo ACB inscrito na circunferência.

4. Meça o ângulo anterior. Desloque o ponto C sobre a circunferência. O que observa? Justifique a sua conjectura.

Tarefa 3

1. Abra o ficheiro *quadinsc.gsp*, correspondente a um quadrilátero inscrito numa circunferência.

2. Meça a amplitude dos ângulos internos do quadrilátero em questão.

3. Utilize a calculadora do *Geometer's Sketchpad* para somar as amplitudes de cada par de ângulos opostos.

4. Arraste um dos vértices do quadrilátero. O que pode afirmar acerca dos dois pares de ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência? Justifique a sua resposta.

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 3

9º ano / Turma B 14/03/2002

Propriedades de ângulos e circunferências

Tarefa 1

1. Crie uma circunferência de centro O e marque dois pontos, A e B, sobre ela.
2. Construa o ângulo ao centro AOB e meça a sua amplitude.
3. Marque na circunferência um ponto C e construa um ângulo ao centro COD, com a mesma amplitude de AOB.
   Sugestão: Seleccione o ângulo AOB, aceda ao menu *Transform* e clique em *Mark angle*. Seleccione o ponto O, aceda ao menu *Transform* e clique em *Mark center*. Seleccione o ponto C, aceda ao menu *Transform* e clique em *Rotate*, obtendo assim o ponto D.
4. Meça a amplitude dos arcos de circunferência AB e CD.
5. Construa as cordas $[AB]$ e $[CD]$ e meça o seu comprimento.
6. Consegue encontrar uma relação entre:
   - As amplitudes dos arcos AB e CD?
   - Os comprimentos das cordas $[AB]$ e $[CD]$?
7. Desloque os pontos A ou B sobre a circunferência. O que pode afirmar sobre:
   - Arcos correspondentes a dois ângulos ao centro iguais?
   - Cordas correspondentes a dois ângulos ao centro iguais?

Apresente uma razão que explique cada uma das respostas apresentadas.

Tarefa 2

1. Construa um quadrilátero $[ABCD]$ numa circunferência de centro O.
2. Meça a amplitude dos ângulos internos do quadrilátero $[ABCD]$.
3. Utilize a calculadora do *Geometer's Sketchpad* para somar as amplitudes de cada par de ângulos opostos.
4. Arraste um dos vértices do quadrilátero. O que pode afirmar acerca dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência? Apresente uma Justificação para a sua resposta.

Sugestão: Construa os segmentos de recta $[OC]$ e $[OA]$. Meça a amplitude do ângulo ao centro AOC. Estabeleça uma comparação entre as amplitudes dos ângulos inscritos ADC e ABC e dos ângulos ao centro correspondentes.

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 4

9º ano / Turma B — 21/03/2002

Simetrias numa circunferência

Tarefa 1

1. Crie uma circunferência de centro O e um ponto A sobre ela.
2. Construa a recta t, tangente à circunferência no ponto A.
3. Trace a recta r, definida pelos pontos A e O.
4. Que relação existe entre as rectas t e r?
5. Enuncie a propriedade sugerida pela resolução desta tarefa.

Tarefa 2

1. Crie uma circunferência de centro O e marque dois pontos, A e B, sobre ela.
2. Construa a corda $[AB]$.
3. Defina o ponto médio, M, da corda construída.
4. Construa a recta s, perpendicular a $[AB]$ e que contém o ponto M.
5. Através da manipulação da sua construção, que propriedades consegue identificar na recta s? Como a(s) explica?
   Sugestão: Compare os triângulos $[AOM]$ e $[BOM]$.

Tarefa 3

1. Crie uma circunferência de centro O e um ponto A sobre ela.
2. Construa uma recta r secante à circunferência.
3. Construa a recta s, paralela a r e que contém o ponto A.
4. Defina os pontos de intersecção da circunferência com cada uma das rectas construídas.
5. Meça a amplitude dos arcos compreendidos entre as rectas r e s.
6. Construa as cordas compreendidas entre as rectas r e s e meça o seu comprimento.
7. Manipulando a sua construção, o que pode afirmar sobre:
   - Arcos compreendidos entre duas rectas paralelas?
   - Cordas compreendidos entre duas rectas paralelas?

Apresente uma razão que explique cada uma das respostas apresentadas.
Sugestão: Observe o trapézio $[ABCD]$.

Bom trabalho!

Escola Básica 2, 3 Carteado Mena

Actividade n.º 5

9º ano / Turma B 11/04/2002

Isometrias

Tarefa 1

1. Construa um triângulo escaleno $[ABC]$.
2. Marque um ponto O, exterior ao triângulo construído.
3. Construa a imagem do triângulo $[ABC]$ numa rotação de centro O e amplitude +45°.
Nota: Para marcar o centro O clique duas vezes nesse mesmo ponto. Para obter a imagem do triângulo $[ABC]$, seleccione cada um dos vértices do triângulo, abra o menu *Transform* e escolha a opção *Rotate*.
4. O que observa ao manipular o triângulo $[ABC]$? E o ponto O (centro da rotação)?
5. Estabeleça uma comparação entre o triângulo $[ABC]$ e a sua imagem, quanto à forma e ao tamanho (amplitude dos ângulos internos e comprimento dos lados). O que conclui?

Tarefa 2

1. Utilize o triângulo construído na tarefa anterior.
2. Construa um segmento de recta $[DE]$. Marque o vector $\overrightarrow{DE}$.

   Nota: Para marcar o vector $\overrightarrow{DE}$, seleccione os pontos D e E, pela ordem pedida. Abra o menu *Transform* e escolha a opção *Mark Vector*.
3. Construa a imagem do triângulo $[ABC]$ numa translação associada ao vector $\overrightarrow{DE}$.
Nota: Para obter a imagem do triângulo $[ABC]$, seleccione cada um dos vértices do triângulo, abra o menu *Transform* e escolha a função *Translate*.
4. O que observa ao manipular o triângulo $[ABC]$? E o vector $\overrightarrow{DE}$?
5. Estabeleça uma comparação entre o triângulo $[ABC]$ e a sua imagem, quanto à forma e ao tamanho (amplitude dos ângulos internos e comprimento dos lados). O que conclui?

Tarefa 3

1. Utilize o triângulo construído na tarefa 1.
2. Construa uma recta r.
3. Construa a imagem do triângulo $[ABC]$ numa simetria axial relativa à recta r.
Nota: Marque a recta r como eixo de simetria clicando duas vezes sobre a mesma. Para obter a imagem do triângulo $[ABC]$, seleccione cada um dos vértices do triângulo, abra o menu *Transform* e escolha a função *Reflect*.
4. O que observa ao manipular os vértices do triângulo $[ABC]$? E a recta r?

5. Estabeleça uma comparação entre o triângulo $[ABC]$ e a sua imagem, quanto à forma e ao tamanho (amplitude dos ângulos internos e comprimento dos lados). O que conclui?

Bom trabalho!

Anexo 3 – Autorização para a participação dos alunos na investigação

Exmº Sr. Encarregado de Educação do aluno

____ N.º_____ do 9º Ano / Turma B

Venho por este meio solicitar que autorize o seu educando a participar de um projecto de investigação que servirá de base à realização da dissertação do Mestrado em Ensino da Matemática, que frequento, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. O estudo em causa tem como objectivo investigar a influência do software de geometria dinâmica, em particular o Geometer's Sketchpad, na aprendizagem da geometria.

A investigação realizar-se-á no corrente período lectivo, e corresponderá à unidade temática *"Circunferência e polígonos. Rotações"*. Estas aulas deverão ter lugar numa sala com computadores, durante a aula de Matemática, com o software acima referido, sendo registadas em vídeo. Serão propostas tarefas que os alunos resolverão em pequenos grupos de 2 ou 3.

Como o objectivo deste trabalho visa uma descrição detalhada de um processo inserido num determinado contexto educativo, será imprescindível uma análise aprofundada que só será conseguida se os dados recolhidos forem em quantidade e qualidade suficientes. Desta forma é necessário:

- A realização de entrevistas a cada grupo de trabalho onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos e onde terão a oportunidade de resolver actividades com o propósito de corrigir a comunicação oral e escrita. Todas as entrevistas serão gravadas em vídeo e posteriormente transcritas e analisadas;

- No final de cada tarefa, será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa a comunicação do raciocínio utilizado na resolução do trabalho proposto. Pretendo que incluam as conclusões tiradas da resolução da actividade, os procedimentos utilizados e uma apreciação crítica onde serão identificadas as dificuldades sentidas na sua resolução. Estas produções escritas serão recolhidas e analisadas.

Como os alunos nunca contactaram com o software em questão é de todo o interesse a realização de uma fase de apresentação e exploração do programa, que antecederá a investigação propriamente dita. Terá lugar durante as aulas de *estudo acompanhado* e/ou em períodos extra-lectivos, a iniciar em 24 de Janeiro (quinta-feira).

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração que permite a participação do seu educando neste trabalho de investigação.

Atenciosamente

____

(Ana Cristina Coelho Barbosa)

- -

Declaro que autorizo o meu educando _______________________________
a participar da investigação conduzida pela Drª Ana Barbosa, no âmbito da elaboração da sua dissertação de Mestrado.

_____/_____/_____

Assinatura:____

Anexo 4 – Teste de Geometria de van Hiele e respectiva autorização

UNIVERSITY OF CHICAGO
Department of Education
5835 S. Kimbark Avenue
Chicago, IL 60637

October 8, 2002

Ms. Ana Cristina Coelho Barbosa, student
Faculdade de Ciencias da Universidade do Porto
Rua D. Manuel II
P-4050-345, Porto
PORTUGAL

Dear Ms. Barbosa:

I am responding to your letter requesting permission to use the van Hiele Geometry Test developed by the CDASSG project in your research. As I think you are aware, the report including the test and explaining how it can be scored is entitled "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry". I assume Professor Matos has a copy and I also assume you are using his translation of the test.

We are happy to give permission to copy the van Hiele test developed by the CDASSG Project for use in your master's research. You need to indicate the origin of the test on each copy, as follows: "Original English language version of the van Hiele test developed by the CDASSG project, Department of Education, The University of Chicago. Reprinted by permission of the University of Chicago." And we need a copy of any write-up of your results.

Best wishes for success in your work.

Sincerely,

Zalman Usiskin
Professor of Education

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE*

Instruções

Não abra este teste até receber instruções para o fazer.

O teste contém 25 questões. Não se espera que saiba tudo neste teste.

Quando lhe disserem pode começar:

1. Leia cada questão cuidadosamente.
2. Decida qual a resposta que pensa ser correcta. Só há uma resposta correcta a cada questão. Assinale com um círculo a letra correspondente à sua resposta na folha de respostas.
3. Use o espaço na folha de respostas para desenhos ou rascunhos. Não marque nada neste teste.
4. Se quiser mudar uma resposta apague completamente a primeira resposta.
5. Tem 35 minutos para completar o teste.

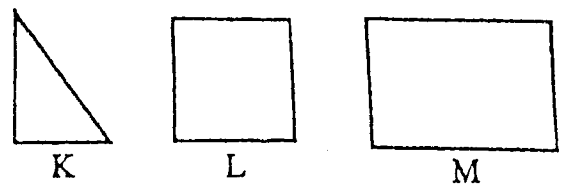
Espere até que o professor diga que pode começar.

---

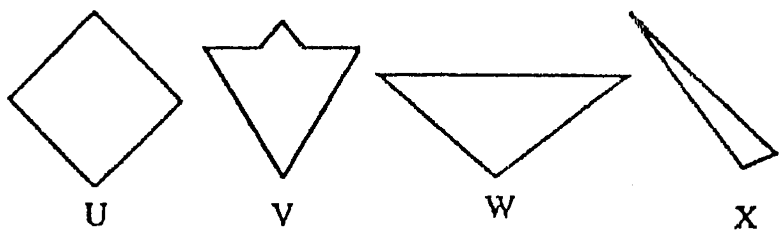
* Este teste é baseado no trabalho de P.M. van Hiele.

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE

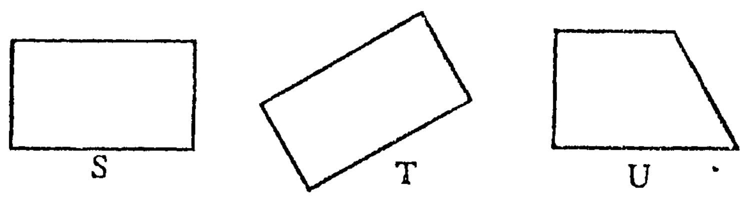
1. Quais são quadrados?
   (A) Só K.
   (B) Só L.
   (C) Só M.
   (D) Só L e M.
   (E) Todos são quadrados.



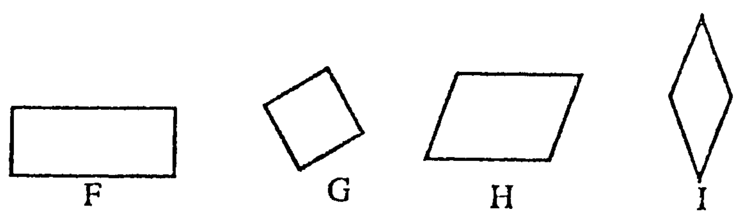
2. Quais são triângulos?
   (A) Nenhum é triângulo.
   (B) Só V.
   (C) Só W.
   (D) Só W e X.
   (E) Só V e W.



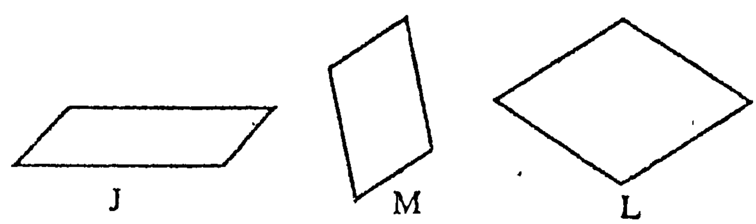
3. Quais são rectângulos?
   (A) Só S.
   (B) Só T.
   (C) Só S e T.
   (D) Só S e U.
   (E) Todos são rectângulos.



4. Quais são quadrados?
   (A) Nenhum é quadrado.
   (B) Só G.
   (C) Só F e G.
   (D) Só G e I.
   (E) Todos são quadrados.

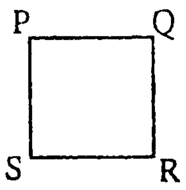


5. Quais são paralelogramos?
   (A) Só J.
   (B) Só L.
   (C) Só J e M.
   (D) Nenhum é paralelogramo.
   (E) Todos são paralelogramos.



6. [PQRS] é um quadrado.

Que relação é verdadeira para todos os quadrados?



(A) [PR] e [RS] têm o mesmo comprimento.

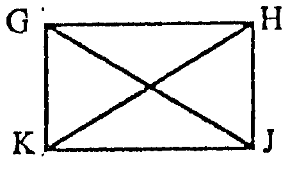
(B) [QS] e [PR] são perpendiculares.

(C) [PS] e [QR] são perpendiculares.

(D) [PS] e [QS] têm o mesmo comprimento.

(E) A amplitude do ângulo Q é maior do que a do ângulo R.

7. Num rectângulo [GHJK], [GJ] e [HK] são as **diagonais**.



Qual é das alíneas (A) a (D) que **não** é verdadeira para **todos** os rectângulos?

(A) Há quatro ângulos rectos.

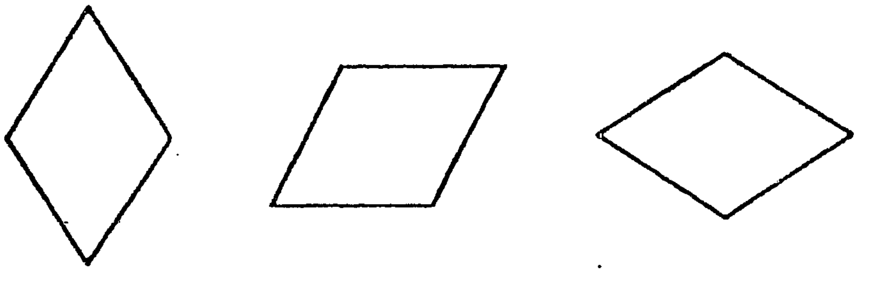
(B) Há quatro lados.

(C) As diagonais têm o mesmo comprimento.

(D) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.

(E) Todas as alíneas (A) a (D) são verdadeiras para todos os rectângulos.

8. Um **losango** é uma figura de 4 lados em que todos os lados têm o mesmo comprimento. Eis três exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que **não** é verdadeira para todos os losangos?

(A) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.

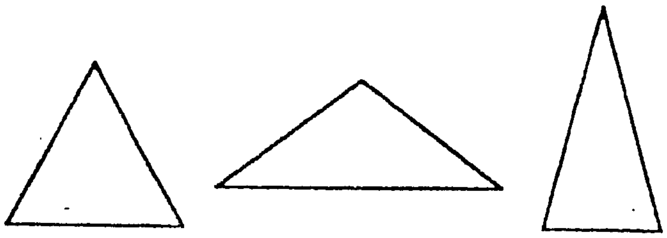
(B) Cada diagonal bissecta dois ângulos do losango.

(C) As duas diagonais são perpendiculares.

(D) Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.

(E) Todas as alíneas de (A) a (D) são verdadeiras para todos os losangos.

9. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados de igual comprimento. Eis três exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que é verdadeira para todos os triângulos isósceles?

(A) Os três lados têm de ter o mesmo comprimento.

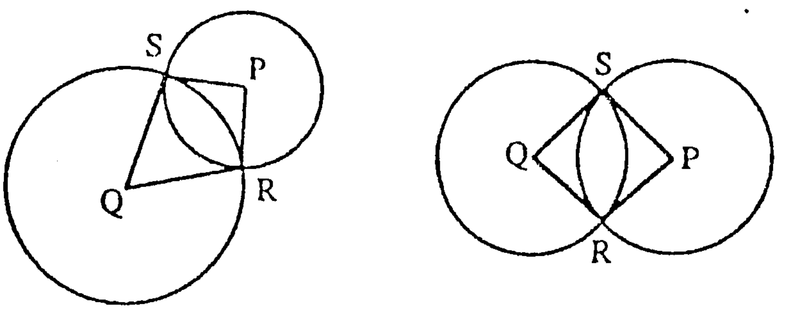
(B) Um lado tem de ter o dobro do comprimento do outro.

(C) Tem de haver pelo menos dois ângulos com a mesma amplitude.

(D) Os três ângulos têm de ter a mesma amplitude.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é verdadeira para nenhum triângulo isósceles.

10. Duas circunferências com centros P e Q intersectam-se em R e S para formar uma figura de 4 lados [PRQS]. Eis dois exemplos:



Qual é das alíneas (A) a (D) que não é sempre verdadeira?

(A) [PRQS] terá dois pares de lados de igual comprimento.

(B) [PRQS] terá pelo menos dois ângulos de amplitude igual.

(C) Os segmentos [PQ] e [RS] serão perpendiculares.

(D) Os ângulos P e Q terão a mesma amplitude.

(E) Todas as alíneas (A) a (D) são verdadeiras.

11. Eis duas afirmações:

Afirmação 1: A figura F é um rectângulo.

Afirmação 2: A figura F é um triângulo.

Qual é correcta?

(A) Se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.

(B) Se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.

(C) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.

(D) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

12. Eis duas afirmações:

Afirmação S: O Δ [ABC] tem três lados com o mesmo comprimento.

Afirmação T: No Δ [ABC], o $\angle$ B e o $\angle$ C têm a mesma amplitude.

Qual é correcta?

(A) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.

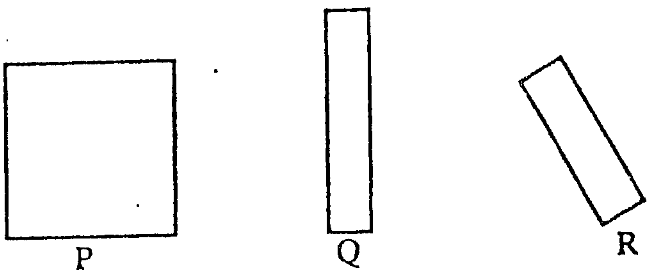
(B) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.

(C) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.

(D) Se S é falsa, então T é falsa.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

13. Quais podem ser chamadas rectângulos?



(A) Todas podem.

(B) Só Q.

(C) Só R.

(D) Só P e Q.

(E) Só Q e R.

14. Qual é verdadeira?

(A) Todas as propriedades dos rectângulos são propriedades de todos os quadrados.

(B) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os rectângulos.

(C) Todas as propriedades dos rectângulos são propriedades de todos os paralelogramos.

(D) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é verdadeira.

15. O que é que todos os rectângulos têm e que alguns paralelogramos não têm?

(A) Lados opostos iguais.

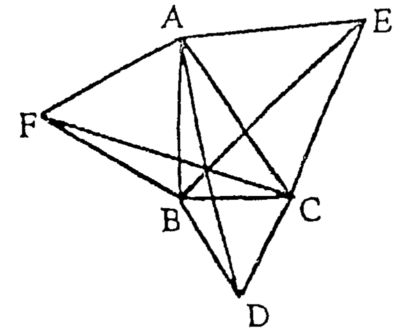
(B) Diagonais iguais.

(C) Lados opostos paralelos.

(D) Ângulos opostos iguais.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D).

16. Eis um triângulo rectângulo [ABC]. Sobre os lados de [ABC] foram construídos triângulos equiláteros: [ACE], [ABF] e [BCD].



A partir desta informação, pode provar-se que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum. O que é que esta demonstração lhe diria?

(A) Só neste triângulo desenhado podemos ter a certeza de que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(B) Em alguns mas não em todos os triângulos rectângulos, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(C) Em qualquer triângulo rectângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(D) Em qualquer triângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

(E) Em qualquer triângulo equilátero, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

17. Eis três propriedades de uma figura.

Propriedade D: Tem diagonais de igual comprimento.

Propriedade S: É um quadrado.

Propriedade R: É um rectângulo.

Qual é verdadeira?

(A) D implica S, que, por sua vez, implica R.

(B) D implica R, que, por sua vez, implica S.

(C) S implica R, que, por sua vez, implica D.

(D) R implica D, que, por sua vez, implica S.

(E) R implica S, que, por sua vez, implica D.

18. Eis duas proposições:

I. Se uma figura é um rectângulo, então as suas diagonais bissectam-se.

II. Se as diagonais de um figura se bissectam, então a figura é um rectângulo.

Qual é verdadeira?

(A) Para provar que I é verdadeira, basta provar que II é verdadeira.

(B) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.

(C) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um rectângulo cujas diagonais se bissectem.

(D) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura que não seja um rectângulo cujas diagonais se bissectem.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

19. Em Geometria:

(A) Cada termo pode ser definido e cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.

(B) Cada termo pode ser definido mas é necessário saber que certas proposições são verdadeiras.

(C) Alguns termos têm de ficar indefinidos mas cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.

(D) Alguns termos têm de ficar indefinidos. É necessário ter algumas proposições que são consideradas verdadeiras.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

20. Examine estas três proposições:

(1) Duas rectas perpendiculares à mesma recta são paralelas.

(2) Uma recta que é perpendicular a uma de duas rectas paralelas, é perpendicular à outra.

(3) Se duas rectas são equidistantes então são paralelas.

Na figura em baixo, as rectas **m** e **p** são perpendiculares e as rectas **n** e **p** são perpendiculares. Qual é das proposições abaixo que poderia ser a razão porque a recta **m** é paralela à recta **n**?

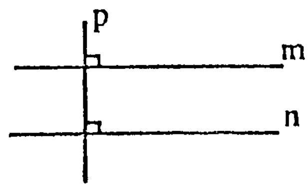
(A) Só (1).

(B) Só (2).

(C) Só (3).

(D) (1) ou (2).

(E) (2) ou (3).



21. Na Geometria F, uma que é diferente da que está habituado(a), há exactamente quatro pontos e seis rectas. Cada recta contém exactamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as rectas são {P, Q}, {P, R}, {P, S}, {Q, R}, {Q, S} e {R, S}.

Q **P**

R **S**

Eis como as palavras *intersectam* e *paralelo* são usadas na Geometria F. As rectas {P, Q} e {P, R} intersectam-se porque têm P em comum. As rectas {P, Q} e {R, S} são paralelas porque não têm pontos comuns.

Partindo desta informação qual é correcta?

(A) {P, R} e {Q, S} intersectam-se.

(B) {P, R} e {Q, S} são paralelas.

(C) {Q, R} e {R, S} são paralelas.

(D) {P, S} e {Q, R} intersectam-se.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

22. Trissectar um ângulo significa dividi-lo em três partes de amplitude igual.
Em 1847, P.L. Wantzel provou que, em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada. Desta sua demonstração, o que pode concluir?

(A) Em geral é impossível bissectar ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.

(B) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando somente um compasso e uma régua graduada.

(C) Em geral, é impossível trissectar ângulos usando quaisquer instrumentos de desenho.

(D) É ainda possível que no futuro alguém encontre uma forma de trissectar ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.

(E) Ninguém será alguma vez capaz de encontrar um método geral para trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.

23. Há uma Geometria inventada por um matemático J na qual o seguinte é verdade:

A soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo é menor do que 180^0.

Qual é correcto?

(A) J cometeu um erro ao medir os ângulos do triângulo.

(B) J cometeu um erro de raciocínio lógico.

C) J tem uma ideia errada sobre o significado de *verdade.*

(D) J começou com pressupostos diferentes dos da Geometria usual.

(E) Nenhuma das alíneas (A) a (D) é correcta.

24. Dois livros de Geometria definem a palavra rectângulo de forma diferente.
Qual é verdadeiro?

(A) Um dos livros tem um erro.

(B) Uma das definições está errada. Não pode haver duas definições diferentes de rectângulo.

(C) Os rectângulos de um dos livros devem ter propriedades diferentes dos do outro livro.

(D) Os rectângulos de um dos livros devem ter as mesmas propriedades dos do outro livro.

(E) As propriedades dos rectângulos nos dois livros podem ser diferentes.

25. Suponha que provou as proposições I e II.

I. Se p, então q.

II. Se s, então não q.

Que proposição se conclui das proposições I e II?

(A) Se p, então s.

(B) Se não p, então não q.

(C) Se p ou q, então s.

(D) Se s, então não p.

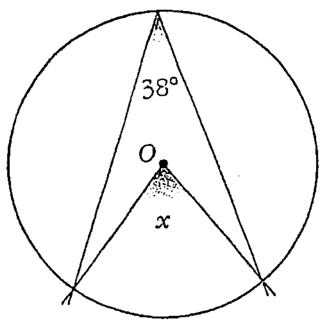
(E) Se não s, então p.

Anexo 5 – Actividades do manual adoptado utilizadas na investigação

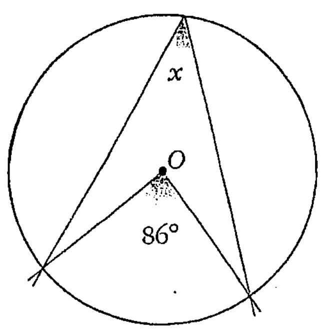
– Amplitudes de ângulos em circunferências

Em cada uma das figuras, determine x.

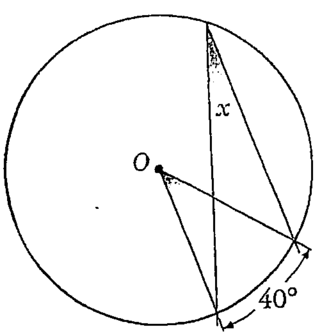
1.



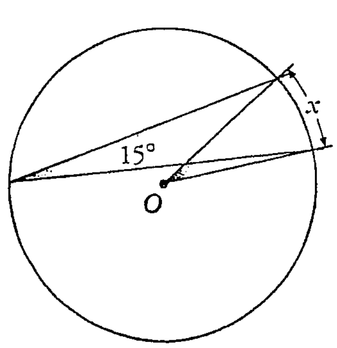
2.



3.

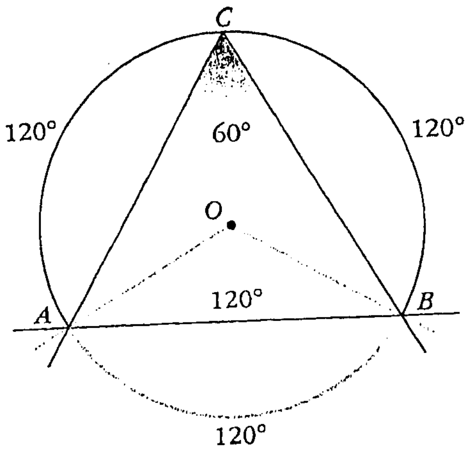


4.



1.3. Amplitude do ângulo inscrito

Na figura $[ABC]$ é um triângulo equilátero.



Logo: $A\hat{C}B = 60°$

O arco AB tem de amplitude $120°$.

Então:

$A\hat{O}B = 120°$; $A\hat{C}B = 60°$.

Logo,

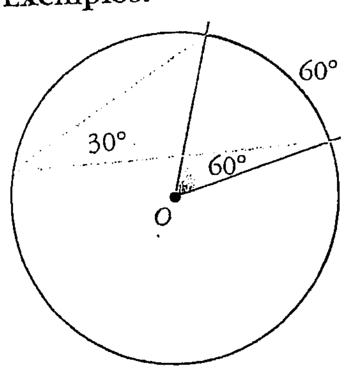
$A\hat{C}B = \frac{1}{2}\, A\hat{C}B$.

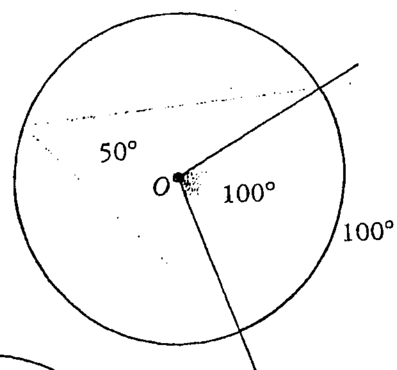
A amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.

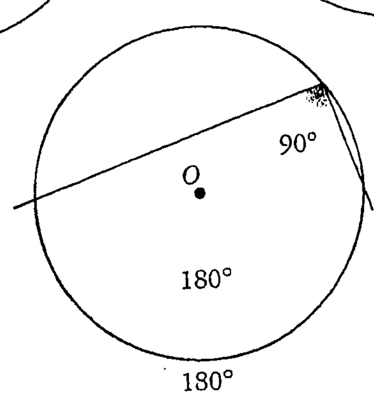
Como a amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco que lhe corresponde, também podemos dizer que:

A amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco que ele contém.

Exemplos:





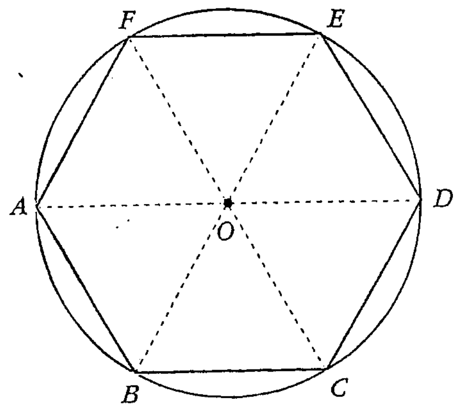


Exemplos

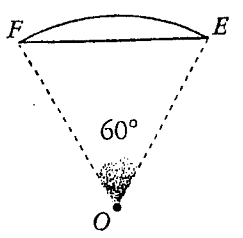
1. Mostre que o lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao raio.

Resolução

Na figura está desenhado um hexágono regular, inscrito na circunferência de centro O.



As cordas e os arcos são geometricamente iguais. Cada um dos arcos tem de amplitude $360° : 6 = 60°$.



$E\hat{O}F = 60°$ ⟶ ângulo ao centro

$\overline{OE} = \overline{OF}$ ⟶ raio de circunferência

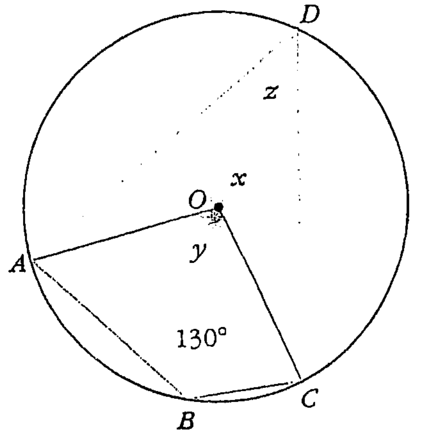
O triângulo $[FOE]$ é isósceles.

$O\hat{F}E = O\hat{E}F = (180 - 60) : 2 = 60°$

E, portanto, o lado do hexágono regular inscrito na circunferência é igual ao raio da circunferência.

2. Observe a figura e determine x, y e z.

Resolução



O arco correspondente ao ângulo inscrito de $130°$ é igual a $260°$.

Como $360° - 260° = 100°$, temos que:

$\widehat{AC}$ (arco maior) $= 260°$

$\widehat{AC}$ (arco menor) $= 100°$.

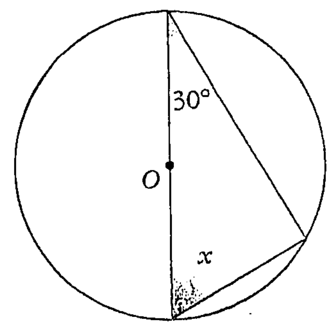
Então:

$y = 100°$; $x = 260°$ e $z = 50°$.

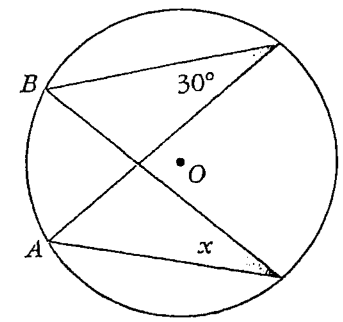
Ângulos em circunferências

1. Em cada figura determine x.

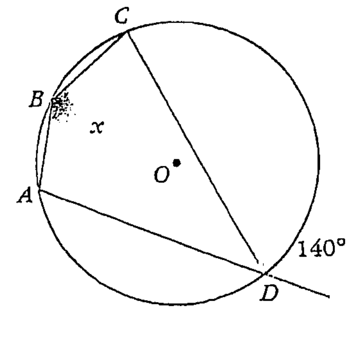
1.1



1.2



1.3



PP₁ – Ângulos e círculos

1. Utilize material de desenho para:

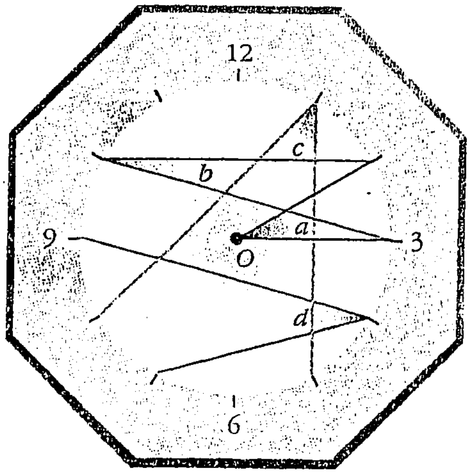
1.1 Desenhar uma circunferência de 3 cm de raio e um ângulo inscrito de 70° e o ângulo ao centro correspondente ao ângulo inscrito.
Qual é a amplitude do ângulo ao centro? (Verifique a resposta medindo.)

1.2 Desenhar uma circunferência de 3 cm de raio e um ângulo ao centro de 200° e um ângulo inscrito correspondente.
Qual é a amplitude do ângulo inscrito? (Verifique a resposta medindo.)

2. A figura representa um relógio, sendo O o centro.

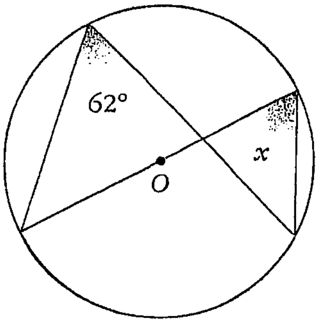
Determine a amplitude de:

a, b, c e d.

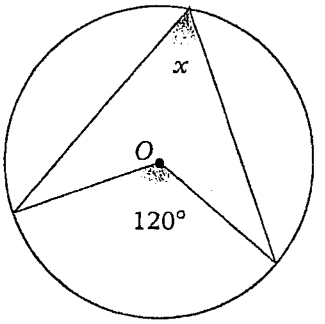


3. Determine x em cada uma das situações seguintes. Justifique a resposta.

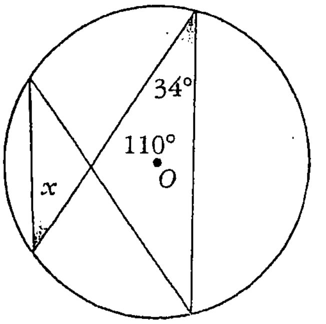
3.1



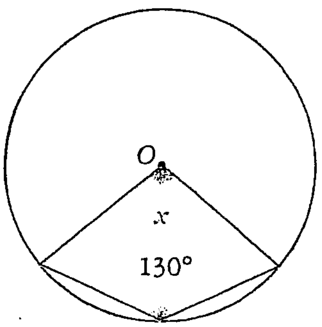
3.2



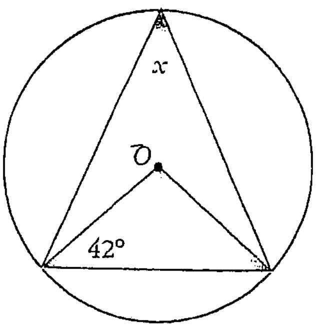
3.3



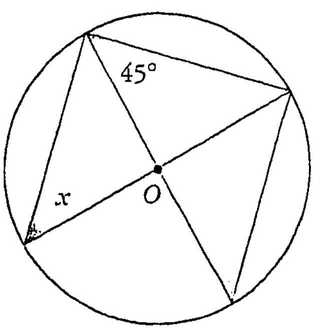
3.4



3.5



3.6



PP_3 – Rotações. Isometrias

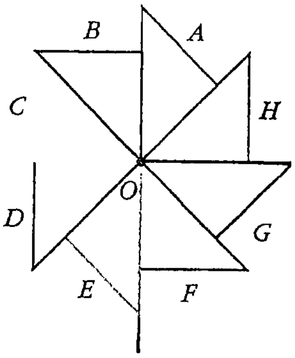
1. Observe a figura ao lado.

1.1 Indique a amplitude da rotação com centro O que leva:

- o triângulo A ao triângulo E, rodando no sentido positivo;
- o triângulo A ao triângulo G, rodando no sentido negativo.

1.2 Qual é o transformado do triângulo A, numa rotação de centro O e amplitude:

- $+45°$?
- $-135°$?



2. A roda da sorte, representada na figura, está dividida em 20 sectores.

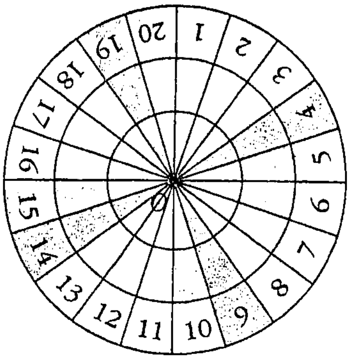
2.1 Qual é a amplitude do ângulo ao centro de cada um dos sectores?

2.2 Indique a amplitude da rotação em torno do ponto O de modo que o sector 13 venha ocupar a posição do sector:

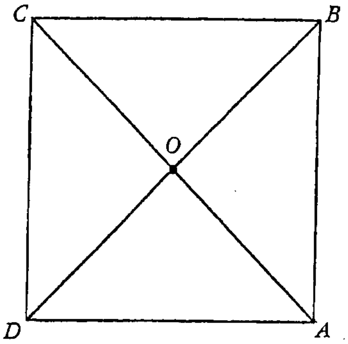
- 17 ;
- 5 .

2.3 Qual a posição que ocuparia o sector 20 se, em torno do ponto O, efectuássemos uma rotação de

- $36°$?
- $-90°$?



3. Na figura ao lado está representado o quadrado $[ABCD]$ em que O é o ponto de intersecção das diagonais.



3.1 Qual é a amplitude do ângulo AOB?

3.2 Qual é a imagem por uma rotação de centro O e amplitude $+90°$:

- dos vértices A, B, C e D?
- do quadrado $[ABCD]$?

3.3 Indique outras rotações de centro O que transformam o quadrado $[ABCD]$ nele próprio.

3.4 Indique:

- um eixo de simetria do quadrado $[ABCD]$;
- uma simetria axial que transforme $[ABCD]$ em $[ABCD]$.