



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

LAJES FUNGIFORMES. CONTRIBUIÇÕES PARA A COMPREENSÃO DO SEU COMPORTAMENTO.

Carlos Liberal Moreno Afonso

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, realizada sob a orientação da
Professora Ana Maria de Magalhães Ribeiro Sarmento Teixeira de Bastos

Porto
Fevereiro de 2010

Parcialmente financiado pelo **PRODEP - Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal** através do Projecto 05.03/N/00199.023/03



**FEUP**

Copyright © 2010

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Rua Dr. Roberto Frias, s/n

4200-465 Porto PORTUGAL

www.fe.up.pt

Correio electrónico: cmoreno@fe.up.pt

Todos os direitos reservados, incluindo os direitos de reprodução e uso sob qualquer forma ou meio, nomeadamente reprodução em cópia ou oral, sem a expressa autorização do autor, estão sujeitos ao estabelecido na Lei dos Direitos de Propriedade.

Brief quotation from this dissertation is allowable without special permission, provided that accurate acknowledgement of source is made. Requests for permission for extended quotation from or reproduction of this manuscript in whole or in part may be granted by the head of the major department or the Dean of Graduate College when his or her judgement the proposed use of the material is in interests of scholarship. In all other instances, however, permission must be obtained from the author.

E-mail: cmoreno@fe.up.pt

Prova de Doutoramento em Engenharia Civil prestada a 30 de Abril de 2010

Presidente do Júri: Doutor Joaquim Azevedo Figueiras

Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Arguentes: Doutor Válder José da Guia Lúcio

Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Doutor Joaquim António Oliveira de Barros

Professor Associado com Agregação da Universidade do Minho

Doutor Joaquim Azevedo Figueiras

Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Doutor Álvaro Alberto de Matos Ferreira da Cunha

Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Doutora Ana Maria de Magalhães Ribeiro Sarmento Teixeira de Bastos

Professora Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (Orientadora)

Doutor Luís Filipe Pereira Juvandes

Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

À Maria José.
Aos meus Pais.

*"The important thing is not to stop questioning.
Curiosity has its own reason for existing."*

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

A todos quantos me acompanharam durante esta etapa que, com a sua amizade, compreensão e disponibilidade, contribuíram para a realização deste trabalho, desejo aqui expressar o meu profundo reconhecimento. Tenho, no entanto, de agradecer de uma forma marcada:

À minha orientadora científica, Professora Doutora Ana Maria Sarmento, expresso a minha profunda gratidão pela sua inexcedível disponibilidade, pelo seu incentivo, pelo seu apoio, pelos seus ensinamentos, pela sua paciência e pela sua supervisão, imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Joaquim Figueiras, Director do Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural da FEUP, pela crítica doura e oportuna e pela disponibilidade dos recursos humanos e materiais bem como do programa de análise numérica DIANA que permitiram a elaboração deste trabalho.

Ao Professor Rui de Sousa Camposinhos, Mestre e amigo, por ter sido o responsável pelo crescente interesse que estas matérias suscitam no autor.

Não posso deixar de expressar uma nota de profundas admiração e gratidão ao Professor Joaquim Sarmento, pelo acompanhamento e pelas sábias sugestões com que gentilmente me dadivou.

Aos Professores Joost Walraven, Frieder Seible, Michael Collins, Vitor Dias da Silva e Mikael Hallgren pelas trocas de impressões e sábias sugestões.

Ao colega e amigo Mário Pimentel, pelos valiosos ensinamentos na área da simulação numérica sem os quais a tarefa de modelação teria certamente sido mais difícil.

Aos Técnicos Amândio Pinto, Paula Silva, Sr. Alberto Monteiro, Sr. Valdemar Luís, Cláudio Ferraz e Cecília Silva, do Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da FEUP, pelo empenho, primor, dedicação e incansável ajuda prestados na realização dos

trabalhos experimentais.

Quero expressar o meu agradecimento às empresas e, em especial, às pessoas com quem mais directamente contactei, pelos apoios, materiais e produtos gentilmente cedidos:

- *Farboque, e particularmente aos Sr.s Manuel Marrão, Paulo Gonçalves e Eng.º Ricardo Ferros, pelo apoio fornecido no equipamento metálico de ensaio bem como na elaboração de algumas figuras,*
- *Fepronor, na pessoa do Eng.º Luís Gonçalves, pelo fornecimento das armaduras principais,*
- *Halfen, na pessoa do Sr. Francisco Fernandes, pela provimento das armaduras transversais,*
- *Mota-Engil, na pessoa do Eng.º Aníbal Leite, pelo fornecimento gratuito dos agregados utilizados nas composições para ensaios de aderência e de corte e do betão dos provetes de laje,*
- *Pavileca, pelo fornecimento dos agregados leves de argila expandida,*
- *Secil, na pessoa da Eng.ª Raquel Figueira, pelo provimento do cimento tipo I 42,5 R.*

Aos colegas do Departamento de Mecânica Aplicada e particularmente à Direcção da Escola Superior de Tecnologia e de Gestão do Instituto Politécnico de Bragança, agradeço a compreensão, as comodidades de horário e o incentivo proporcionados. Um agradecimento especial ao colega Hernâni Lopes.

Aos Professores Ana Maria Proença, Madalena Teles, Afonso Serra Neves, Joaquim Barros e Luís Juvandes que em certo momento deram o seu precioso contributo. Ao Doutor Vladimir Červenka pela disponibilização do programa de análise numérica ATENA.

Aos amigos e colegas Américo Dimande, Bruno Costa, Carlos Rodrigues, Carlos Sousa, Diogo Ribeiro, Gil Gonçalves, Helena Figueiras, Hélder Sousa, Hélder Silva, Henrique Marú, João Manuel Silva, José Martinho, Miguel Azenha e Nuno Fernandes, pelo excelente ambiente de trabalho e de convívio que me proporcionaram, sem o qual a realização deste trabalho seria seguramente muito mais difícil.

À minha família, e em particular aos meus Pais e irmãos que, da mesma forma e desde sempre, me encorajaram e apoiaram incondicionalmente. À Maria de Fátima por todo o carinho.

À Maria José, minha esposa, desejo agradecer o incentivo e o ânimo continuamente dados, muitas vezes abdicando muito de si para me proporcionar o tempo, o espaço e o apoio imprescindíveis para esta chegada a bom porto.

Bem hajam!

RESUMO

O trabalho desenvolvido no âmbito da presente tese pretende dar um contributo no sentido do estudo do comportamento e da quantificação da capacidade resistente ao punçoamento de lajes fungiformes maciças de betão armado. Este estudo baseia-se, fundamentalmente, na análise experimental de modelos de laje à escala real, em betão armado. Para o efeito foram elaborados e ensaiados nove modelos de lajes maciças que foram submetidos a carregamento centrado e excêntrico.

São aduzidos novos elementos para a clarificação do comportamento e dos mecanismos envolvidos na rotura ao punçoamento de lajes fungiformes maciças incorporando betões “não convencionais” como sejam o betão de fibras e o betão de agregados leves.

Os efeitos na capacidade resistente ao punçoamento da presença de armadura transversal, da excentricidade do carregamento e da forma de aplicação do mesmo, são analisados separadamente.

O punçoamento, com e sem armaduras transversais, com e sem excentricidade, é simulado numericamente com recurso ao método dos elementos finitos (MEF).

RESUME

Le travail développé dans le contexte de la présente thèse a l'objectif de donner une contribution pour l'étude du comportement et de la quantification de la capacité résistante au poinçonnement des dalles en béton armé. Cette étude se base, fondamentalement, dans l'analyse expérimentale de modèles de dalle à l'échelle réelle, en béton armé. Pour cet effet neuf modèles de dalles ont été produits et soumis à chargement centré et excentré.

De nouveaux éléments sont déduits pour la clarification du comportement et des phénomènes impliqués dans la rupture au poinçonnement des dalles massives en incorporant des bétons "non classiques" comme le béton de fibres et le béton d'agréats légers.

Les effets de la présence d'armature transversale, de l'excentricité du chargement et de la forme d'application du même dans la résistance au poinçonnement, sont analysés indépendamment.

Le poinçonnement, avec et sans armatures transversales, avec et sans excentricité, est simulé avec recours à la méthode des éléments finis (MEF).

ABSTRACT

The work developed in the scope of the present thesis intends to give a contribution for the study of the behaviour and the resistant capacity to shear punching of reinforced concrete flat slabs. This study is based on the experimental analysis of full-scale reinforced concrete flat slabs. With this aim, nine flat slab models had been elaborated and tested under symmetric and eccentric loading.

New elements for the explanation of the behaviour and the mechanisms involved in the punching shear failure of "not conventional" concrete are alleged for reinforced concrete flat slabs incorporating steel fibre reinforced concrete and structural lightweight aggregates concrete.

The effects of shear reinforcement, loading eccentricity and load application on punching strength are analyzed.

Slabs punching behaviour, with and without shear reinforcement, with and without eccentricity, is simulated by the use of the finite element method (FEM).

PALAVRAS-CHAVE

Punçoamento
Excentricidade
Análise experimental
Armaduras transversais
Modelação numérica
Betão reforçado com fibras de aço

MOTS-CLES

Poinçonnement
Excentricité
Analyse expérimentale
Armature de cisaillement
Simulation numérique
Béton renforcé avec fibres d'acier

KEY WORDS

Punching
Eccentricity
Experimental analysis
Shear reinforcement
Numerical simulation
Steel fibre reinforced concrete

ÍNDICE DE TEXTO

AGRADECIMENTOS VII

RESUMO IX

RÉSUMÉ XI

ABSTRACT XIII

PALAVRAS-CHAVE XV

MOTS-CLÉS XV

KEY WORDS XV

ÍNDICE DE TEXTO XVII

ÍNDICE DE FIGURAS XXIII

ÍNDICE DE GRÁFICOS	XXIX
ÍNDICE DE QUADROS.....	XXXVII
SIMBOLOGIA / NOMENCLATURA	XLI
ABREVIATURAS	XLV
SISTEMA DE UNIDADES	XLVII
I INTRODUÇÃO.....	1
I.1 GENERALIDADES	1
I.2 MOTIVAÇÃO PARA A TESE E OBJECTIVOS PROPOSTOS	2
I.3 ESTRUTURAÇÃO DA TESE	3
II ESTADO DA ARTE.....	7
II.1 INTRODUÇÃO	7
II.2 BREVE RESENHA HISTÓRICA.....	8
II.3 MECANISMO RESISTENTE AO PUNÇOAMENTO - PARÂMETROS INFLUENTES	12
II.3.1 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO BETÃO	14
II.3.2 EFEITO DE ESCALA.....	17
II.3.3 ARMADURA LONGITUDINAL.....	20
II.3.4 ATRITO ENTRE OS AGREGADOS NAS FENDAS DE CORTE	23
II.3.5 ARMADURA ESPECÍFICA DE PUNÇOAMENTO	24
II.3.6 EXCENTRICIDADE DA CARGA	27
II.4 MODELOS DE COMPORTAMENTO AO PUNÇOAMENTO	32
II.4.1 MODELO DE KINNUNEN E NYLANDER	34
II.4.2 MODELO DE ANDERSSON.....	36
II.4.3 MODELO DE HALLGREN	37
II.4.4 CRITÉRIO DE MUTTONI	40

III	O PUNÇOAMENTO NA REGULAMENTAÇÃO INTERNACIONAL	43
III.1	INTRODUÇÃO	43
III.2	CÓDIGO MODELO CEB-FIP 1990	45
III.3	CÓDIGO EUROPEU, EN 1992-1-1	50
III.4	REGULAMENTO BRITÂNICO, BS 8110-1: 1997	54
III.5	REGULAMENTO PORTUGUÊS, REBAP	58
III.6	ANÁLISE COMPARATIVA	61
III.6.1	PERÍMETROS DE CONTROLO	61
III.6.2	RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO BETÃO	62
III.6.3	ARMADURA LONGITUDINAL	62
III.6.4	ARMADURA ESPECÍFICA DE PUNÇOAMENTO	63
III.6.5	EXCENTRICIDADE DA CARGA	64
III.7	AFERIÇÃO GLOBAL DOS CÓDIGOS ANALISADOS	66
III.8	PREVISÃO DA LOCALIZAÇÃO DA SECÇÃO DE ROTURA	69
III.9	DISCUSSÃO FINAL	71
IV	MODELAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES	75
IV.1	INTRODUÇÃO	75
IV.2	MODELAÇÃO DO BETÃO	77
IV.2.1	COMPORTAMENTO EM TRACÇÃO	77
IV.2.1.1	Generalidades	77
IV.2.1.2	Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de extensão total (ET)	79
IV.2.1.3	Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de decomposição das extensões (DE)	84
IV.2.1.4	Relações constitutivas em tracção no betão simples	88
IV.2.1.5	Retenção de tensões de tracção no betão armado	94
IV.2.2	COMPORTAMENTO EM COMPRESSÃO	95
IV.2.2.1	Formulação do comportamento em compressão no modelo ET	95
IV.2.2.2	Formulação do comportamento em compressão no modelo DE	98
IV.2.3	COMPORTAMENTO AO CORTE	101
IV.2.3.1	Generalidades	101
IV.2.3.2	Rigidez ao corte no modelo ET	103
IV.2.3.3	Rigidez ao corte no modelo DE	105
IV.3	MODELAÇÃO DAS ARMADURAS	108

IV.4	PROCEDIMENTOS ITERATIVOS NÃO-LINEARES	109
IV.5	CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA	110
V	ESTUDO EXPERIMENTAL SOBRE PUNÇOAMENTO	113
V.1	PROGRAMA DE ENSAIOS.....	113
V.2	GEOMETRIA DOS MODELOS DE LAJE.....	115
V.3	CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS	116
V.3.1	BETÕES	116
V.3.2	ARMADURA LONGITUDINAL.....	118
V.3.3	ARMADURA TRANSVERSAL.....	121
V.3.4	FIBRAS DE AÇO	124
V.4	ESQUEMA DE ENSAIO	125
V.5	DIMENSIONAMENTO DOS MODELOS.....	128
V.5.1	CONDIÇÕES DE APOIO	128
V.5.2	CAPACIDADE RESISTENTE À FLEXÃO	131
V.5.3	CAPACIDADE RESISTENTE AO PUNÇAMENTO	133
V.6	INSTRUMENTAÇÃO, MEDIÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS	133
V.6.1	EXTENSÕES DA SUPERFÍCIE DO BETÃO	134
V.6.2	EXTENSÕES DA ARMADURA LONGITUDINAL	135
V.6.3	EXTENSÕES DA ARMADURA TRANSVERSAL	136
V.6.4	DESLOCAMENTOS NORMAIS AO PLANO DA LAJE	138
V.6.5	ROTAÇÕES DO PILAR.....	138
V.6.6	FREQUÊNCIAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS.....	139
V.7	PROCEDIMENTOS DE REALIZAÇÃO DOS ENSAIOS	139
VI	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS	141
VI.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	141
VI.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	142
VI.2.1	CARGAS DE ROTURA	142
VI.2.2	DESLOCAMENTOS VERTICAIS	144
VI.2.3	EXTENSÕES DA SUPERFÍCIE DO BETÃO	151
VI.2.4	PERFIS DE EXTENSÕES DA SUPERFÍCIE DO BETÃO NA DIRECÇÃO TANGENCIAL	156
VI.2.5	EXTENSÕES DA ARMADURA LONGITUDINAL	161

VI.2.6	EXTENSÕES DA ARMADURA TRANSVERSAL	163
VI.2.7	PADRÕES DE FISSURAÇÃO E MECANISMOS DE ROTURA.....	165
VI.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS	175
VI.3.1	EFEITO DA ARMADURA TRANSVERSAL	175
VI.3.2	EFEITO DA EXCENTRICIDADE DA CARGA	176
VI.3.3	EFEITO DA PRESENÇA DAS FIBRAS DE AÇO.....	178
VI.4	COMPARAÇÃO DAS CARGAS EXPERIMENTAIS DE ROTURA COM AS PREVISÕES REGULAMENTARES	179
VI.5	CONCLUSÕES	181
VII	APLICAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS A ENSAIOS EXPERIMENTAIS SOBRE PUNÇOAMENTO	183
VII.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	183
VII.2	MODELAÇÃO NUMÉRICA DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS.....	184
VII.2.1	INTRODUÇÃO	184
VII.2.2	DESCRIÇÃO DOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS	184
VII.2.3	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS	187
VII.2.3.1	Respostas deformacionais.....	187
VII.2.3.2	Extensões da superfície do betão.....	197
VII.2.3.3	Extensões da armadura transversal	201
VII.3	CONCLUSÕES	202
VIII	CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	203
VIII.1	INTRODUÇÃO	203
VIII.2	SUMÁRIO E CONCLUSÕES.....	203
VIII.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	207
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	209
A.	ANEXOS.....	- 1 -
A.1	BASE DE DADOS DE ENSAIOS EXPERIMENTAIS	- 3 -
A.1.1	ENSAIOS EXPERIMENTAIS CENTRADOS SEM ARMADURA TRANSVERSAL	- 3 -
A.1.2	ENSAIOS EXPERIMENTAIS CENTRADOS COM ARMADURA TRANSVERSAL.....	- 6 -

A.1.3	ENSAIOS EXPERIMENTAIS EXCÊNTRICOS SEM ARMADURA TRANSVERSAL	- 9 -
A.1.4	ENSAIOS EXPERIMENTAIS EXCÊNTRICOS COM ARMADURA TRANSVERSAL.....	- 10 -
A.2	DEMONSTRAÇÃO DA EXPRESSÃO PARA O MÓDULO PLÁSTICO DO PRIMEIRO PERÍMETRO, W_1	- 13 -
A.3	DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES PARA OS MÓDULOS PLÁSTICOS DOS PERÍMETROS EXTERIORES	- 17 -
A.3.1	PERÍMETRO DE CONTROLO $W_{N,EF}$	- 17 -
A.3.2	PERÍMETRO DE CONTROLO W_N	- 24 -
A.4	COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E AS PREVISÕES REGULAMENTARES.....	- 27 -
A.4.1	CEB-FIP MC 90.....	- 27 -
A.4.2	EN 1992-1-1	- 29 -
A.4.3	BS 8110-1: 1997.....	- 31 -
A.4.4	REBAP	- 33 -
A.5	PADRÕES EXPERIMENTAIS DE FISSURAÇÃO	- 35 -
A.5.1	LAJES ACA2 E AEA2	- 35 -
A.5.2	SOBREPOSIÇÃO DAS ARMADURAS LONGITUDINAIS.....	- 37 -
A.6	EXTENSÕES MÉDIAS DE TRACÇÃO NO BETÃO - FACE SUPERIOR.....	- 45 -
A.6.1	PUNÇOAMENTO CENTRADO	- 45 -
A.6.2	PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO.....	- 47 -
ANOTAÇÕES.....		- 51 -

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo II

Figura II-1 - Representação esquemática da rotura ao punçoamento centrado numa laje fungiforme (ampliação).....	7
Figura II-2 - Colapso parcial do 4.º piso de um parque de estacionamento em Wolverhampton, Reino Unido (Wood, 2002).	8
Figura II-3 - a) Perspectiva axonométrica do sistema Hennebique de lajes vigadas em betão armado - 1892; b) Disposição das armaduras em quatro direcções, em laje fungiforme com capiteis, 1905, C. A. P. Turner.	9
Figura II-4 - a) Ensaio de laje fungiforme (armaduras em duas direcções); b) Registo de flechas para estabelecer um método empírico de dimensionamento, 1908, R. Maillart.	10
Figura II-5 - Ensaio de lajes: a) laje vigada com armaduras dispostas em duas direcções - Barr Building, St. Louis, Missouri, Dezembro 1911; b) laje fungiforme com armaduras dispostas em quatro direcções - Franks Building, Chicago, Illinois, Agosto 1911 (Talbot <i>et al.</i> , 1913).	10
Figura II-6 - Elementos simples de uma laje fungiforme - malha de $6 \times 6 \text{ m}^2$	11
Figura II-7 - Trajectórias dos momentos principais numa laje fungiforme com malha regular de pilares, uniformemente carregada (Favre <i>et al.</i> , 1989).	13
Figura II-8 - Representação esquemática da fissuração devida a: a) flexão e b) corte (Staller, 2000).	13
Figura II-9 - Geometria dos modelos de laje submetidos a punçoamento excêntrico (Marzouk <i>et al.</i> , 1996; 1998).	15
Figura II-10 - Sistema de ensaio dos modelos de laje (Ramdane, 1996).	16
Figura II-11 - Disposição das armaduras na série S de ensaios (Moe, 1961).	20

Figura II-12 - Disposição das armaduras principais (Menétrey, 1998).	21
Figura II-13 - Cones de punçoamento com diferentes inclinações: 30°, 45° e 60° (Menétrey, 1998).....	21
Figura II-14 - Geometria dos modelos de laje (mm) - planta e corte transversal e principais resultados e relações entre a carga aplicada e a flecha central (Mirzaei <i>et al.</i> , 2008).....	22
Figura II-15 - a) Vista geral do ensaio de uma laje submetida a punçoamento excêntrico; b) Pormenorização das armaduras transversais (Elgabry <i>et al.</i> , 1987).....	25
Figura II-16 - Geometria dos modelos de laje e das armaduras (Hallgren, 1996).	26
Figura II-17 - Secção transversal da laje HS22 com armadura transversal do tipo perno (Marzouk <i>et al.</i> , 1997).....	26
Figura II-18 - Roturas típicas por punçoamento (Alexander <i>et al.</i> , 1987).	27
Figura II-19 - Geometria dos modelos de laje - planta e corte transversal (Elstner <i>et al.</i> , 1956).....	28
Figura II-20 - a) Vista geral do ensaio de uma laje submetida a punçoamento excêntrico (Série de lajes <i>M</i>); b) Esforços internos induzidos por <i>M</i> e <i>P</i> (Moe, 1961).	29
Figura II-21 - Vista geral dos ensaios de lajes submetidas a punçoamento excêntrico (Hawkins <i>et al.</i> , 1989).	31
Figura II-22 - Pormenorização das lajes com armadura transversal submetidas a punçoamento excêntrico (Krüger, 1999).	32
Figura II-23 - Disposição das armaduras dos modelos testados (Kinnunen <i>et al.</i> , 1960) com diferentes disposições das armaduras: série A - armadura ortogonal; série B - armadura circunferencial apenas; série C - armadura circunferencial e radial.	35
Figura II-24 - Modelo mecânico de punçoamento: a) corte transversal da laje; b) segmento de laje e cargas actuautes; c) região de apoio (Kinnunen <i>et al.</i> , 1960).....	36
Figura II-25 - Modelo mecânico de punçoamento (Andersson, 1963).	37
Figura II-26 - Modelo mecânico de punçoamento (Hallgren, 1996).	38
Figura II-27 - Estados de tensão (Hallgren, 1996).	39

Capítulo III

Figura III-1 - Perímetros de controlo em diversas normas e códigos para pilares rectangulares interiores.	44

Figura III-2 - Perímetros críticos u_1 considerados no CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).	45
Figura III-3 - Perímetros do contorno exterior para pilares interiores em lajes munidas de armaduras transversais, segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).	47
Figura III-4 - Distribuição das tensões tangenciais devidas a um momento não equilibrado na ligação entre uma laje e um pilar interior (CEB-FIP, 1999a).	48
Figura III-5 - Primeiros perímetros de controlo u_1 considerados na EN 1992-1-1 (CEN, 2004).	51
Figura III-6 - Armaduras transversais que contribuem para a capacidade resistente ao punçoamento (CEB-FIP, 1993; CEN, 2004).	52
Figura III-7 - Disposição recomendada para as armaduras transversais (CEN, 2004).	53
Figura III-8 - Valores aproximados de β para pilares interiores, de bordo e de canto (CEN, 2004).	54
Figura III-9 - Perímetros do contorno de referência considerados na BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997).	54
Figura III-10 - Perímetro de controlo e esforços actuantes em pilares interiores (adaptado de BSI, 1997).	56
Figura III-11 - Sucessivas zonas de rotura para verificação da capacidade resistente segundo a BS 8110-1: 1997 (adaptado de BSI, 1997).	57
Figura III-12 - Perímetros do contorno crítico considerados no REBAP (REBAP, 1983).	58

Capítulo IV

Figura IV-1 - Modos de deformação para propagação das fendas e fractura (Shah <i>et al.</i> , 1995).	77
Figura IV-2 - Diferentes conceitos de modelos de fendilhação: (a) fenda discreta; (b) fenda distribuída (adaptado de Kwak <i>et al.</i> , 1990).	78
Figura IV-3 - Modelo de múltiplas fendas inclinadas. Representação bidimensional com definição do ângulo α (DIANA, 2007).	85
Figura IV-4 - Principais mecanismos de transferência de tensões em fendas de betão armado (Pruijssers, 1988b).	102
Figura IV-5 - Elemento finito de armadura distribuída, correspondente à armadura em malha, embebido no elemento finito de betão.	108
Figura IV-6 - Elemento finito de armadura discreta, correspondente à armadura em varão, embebido no elemento finito de betão.	109

Capítulo V

Figura V-1 - Geometria das lajes - planta e corte transversal.	115
Figura V-2 - Sentido de betonagem das diferentes lajes.	117
Figura V-3 - Armaduras principais dos diferentes modelos de laje - planta e corte transversal.	120
Figura V-4 - Pernos da armadura de punçoamento - <i>studs</i> - das lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.	121
Figura V-5 - Representação esquemática do posicionamento das armaduras de punçoamento (Halfen, 2007).....	121
Figura V-6 - Possível distribuição das armaduras de punçoamento em torno de uma zona carregada (Halfen, 2007).....	122
Figura V-7 - Disposição da armadura de punçoamento nas lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.	123
Figura V-8 - Vista geral da plataforma antes da betonagem da 1. ^a série de lajes.	124
Figura V-9 - Pormenor da região de ligação laje/pilar das lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.	124
Figura V-10 - Pormenores das fibras Dramix.	124
Figura V-11 - Plaquetas de fibras Dramix RC-65/60-BN.	124
Figura V-12 - Vista em planta do esquema de ensaio.....	126
Figura V-13 - Vista geral do sistema de ensaio - laje AEA1 - na modalidade excêntrico.....	126
Figura V-14 - Vistas do encaixe metálico na extremidade dos pilares para carregamento excêntrico (dimensões em mm).	126
Figura V-15 - Esquema geral de ensaio em laboratório.....	127
Figura V-16 - Lajes carregadas ao centro (adaptado de Montoya <i>et al.</i> , 1976).....	129
Figura V-17 - Mecanismos de rotura para uma laje apoiada em oito pontos do seu contorno.....	131
Figura V-18 - Posicionamento dos extensómetros colocados na face comprimida.	134
Figura V-19 - Posicionamento dos extensómetros colocados na face traccionada.	135
Figura V-20 - Posições dos extensómetros colocados por colagem nas armaduras principais da laje P.	136
Figura V-21 - a) Vista geral das armaduras longitudinais da laje P; b) Pormenor da disposição dos extensómetros instalados nas armaduras longitudinais da laje P.	136
Figura V-22 - Disposição dos extensómetros instalados nas armaduras de	

punçoamento.	137
Figura V-23 - Posicionamento dos LVDT's na face superior das lajes.	138

Capítulo VI

Figura VI-1 - Evolução da fissuração para diferentes níveis do carregamento - laje P.	166
Figura VI-2 - Vista da laje P após o ensaio: a) face inferior; b) face superior.	167
Figura VI-3 - Cortes transversais e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje P.	167
Figura VI-4 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje AC0.	168
Figura VI-5 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje FC0.	169
Figura VI-6 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje ACA1.	170
Figura VI-7 - Definição das isostáticas curvas.	171
Figura VI-8 - Diferentes roturas em função do desenvolvimento dos pernos.	171
Figura VI-9 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje AE0.	172
Figura VI-10 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje FE0.	173
Figura VI-11 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje AEA1.	174

Capítulo VII

Figura VII-1 - Elemento finito isoparamétrico de volume do tipo CHX60 (DIANA, 2008).	185
Figura VII-2 - Geometria e malha de elementos finitos com localização dos pontos de Gauss.	186
Figura VII-3 - Resultados numéricos - Laje ACA1 (análise DE_V).	193
Figura VII-4 - Resultados numéricos - Laje FC0 (análise DE_C).	194
Figura VII-5 - Resultados numéricos - Laje AEA1 (análise DE_C).	195
Figura VII-6 - Resultados numéricos - Laje AE0 (análise ETF_C).	196

Anexos

Figura A- 1 - Perímetro de controlo u_l para pilares rectangulares interiores, segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004).	13 -
Figura A- 2 - Perímetro de controlo $u_{n,ef}$ para pilares quadrados interiores segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004).	17 -
Figura A- 3 - Perímetro de controlo u_n para pilares quadrados interiores segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004).	24 -
Figura A- 4 - Fendilhação da face superior - laje ACA2.	35 -
Figura A- 5 - Fendilhação da face superior - laje AEA2.....	36 -
Figura A- 6 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AC0.	37 -
Figura A- 7 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje FC0.	38 -
Figura A- 8 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje ACA1.....	39 -
Figura A- 9 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje ACA2.....	40 -
Figura A- 10 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AE0.....	41 -
Figura A- 11 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje FE0.....	42 -
Figura A- 12 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AEA1.	43 -
Figura A- 13 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AEA2.	44 -

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Capítulo II

Gráfico II-1 - Influência da resistência à compressão do betão na capacidade resistente ao punçoamento (Dilger, 2000).	16
Gráfico II-2 - Relações carga-deslocamento para 3 lajes com diferentes espessuras submetidas a punçoamento centrado (Bažant <i>et al.</i> , 1987).	18
Gráfico II-3 - Efeito da percentagem de armadura longitudinal no comportamento de ligações laje/pilar sob punçoamento centrado (Criswell, 1974).	22
Gráfico II-4 - Influência da rugosidade na capacidade de transferência de tensões para grandes aberturas de fendas (adaptado de Hordijk, 1991).	23
Gráfico II-5 - a) Relações carga-rotação dos ensaios experimentais (Kinnunen <i>et al.</i> , 1960); b) Critério de rotura, adaptado de (Muttoni, 2008).	40

Capítulo III

Gráfico III-1 - Capacidade de carga ao punçoamento centrado para lajes sem armadura transversal em função da resistência à compressão de betão.	62
Gráfico III-2 - Capacidade de carga ao punçoamento centrado para lajes sem armadura transversal em função da percentagem de armadura longitudinal.	63
Gráfico III-3 - Efeito da excentricidade da carga. Comparação entre as previsões dos diferentes códigos e os resultados experimentais.	65
Gráfico III-4 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função da resistência média à compressão em provetes cilíndricos.....	67
Gráfico III-5 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função da	

percentagem de armadura longitudinal.....	68
Gráfico III-6 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função do factor de efeito de escala.	69
Gráfico III-7 - Previsão da localização da secção de rotura.	70
Gráfico III-8 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função da esbelteza dos modelos.	71

Capítulo IV

Gráfico IV-1 - Modelo de transferência das tensões de corte nas fissuras (adaptado de Maekawa <i>et al.</i> , 2003).	82
Gráfico IV-2 - Amolecimento da resposta em corte.	83
Gráfico IV-3 - Modelos disponíveis no espaço bidimensional das tensões principais para a definição do critério da tensão máxima (<i>tension cut-off</i>): a) tensão constante; b) tensão linearmente decrescente (DIANA, 2007).	86
Gráfico IV-4 - Associação em série das componentes das deformações no betão (ϵ) e na fenda (ϵ^f).	87
Gráfico IV-5 - Influência do valor limite do ângulo α (<i>threshold angle</i>) na capacidade resistente ao punçoamento: a) $\beta = 0,10$; b) β variável (Pruijssers com $\xi = 5$).	88
Gráfico IV-6 - Diagrama linear tensão-extensão para simulação do comportamento do betão simples submetido à tracção uniaxial.	89
Gráfico IV-7 - Energia base de fractura G_{F0} e coeficiente $1/\alpha$ em função da máxima dimensão dos agregados.	91
Gráfico IV-8 - Diferentes diagramas de amolecimento correspondentes a um betão caracterizado por: $f_{ct} = 4,1$ MPa, $G_F = 105$ Nm/m ² e $h = 46$ mm.	93
Gráfico IV-9 - Diagrama de retenção de tensões de tracção no betão (<i>tension stiffening</i>) - tracção uniaxial.	94
Gráfico IV-10 - Leis constitutivas disponíveis para o betão em compressão no modelo ET (DIANA, 2002).	95
Gráfico IV-11 - Critério de rotura de Hsieh-Ting-Chen: a) representação no espaço normalizado das tensões principais; b) representação das secções no plano octaédrico normalizado.	96
Gráfico IV-12 - a) Influência do confinamento do betão na relação tensão-extensão em compressão (DIANA, 2002); b) Modelação do comportamento em compressão com confinamento lateral (DIANA, 2002).	97
Gráfico IV-13 - Diagramas uniaxiais tensão-extensão para diferentes classes de	

betão (CEB-FIP, 1993; 1999b).....	99
Gráfico IV-14 - Obtenção da lei coesão-parâmetro de endurecimento a partir da lei constitutiva uniaxial.	100
Gráfico IV-15 - Critério de rotura de Mohr-Coulomb: a) representação no espaço normalizado das tensões principais; b) representação das secções no plano octaédrico normalizado.	101
Gráfico IV-16 - Influência do factor de retenção da rigidez de corte na capacidade resistente ao punçoamento centrado, em lajes de betão da classe C 30/37 (modelo ETF), para diferentes valores da tolerância do processo iterativo.....	104
Gráfico IV-17 - Influência do factor constante de retenção da rigidez de corte na capacidade resistente ao punçoamento centrado, em lajes de betão da classe C 30/37 (modelo DE com $\alpha = 60^\circ$ e $\xi = 10^{-4}$).....	105
Gráfico IV-18 - a) Factor de retenção da rigidez de corte para diferentes valores de $\varepsilon_{nn}^{cr}/\gamma_{nt}^{cr}$ (Pruissers, 1988a); b) Diferentes formulações para o factor de retenção da rigidez de corte.....	107
Gráfico IV-19 - Definição da norma da energia no processo iterativo e incremental (DIANA, 2008).....	110
Gráfico IV-20 - Influência da tolerância da norma da energia do critério de convergência na resposta deformacional da laje AC0 (modelo DE).....	111

Capítulo V

Gráfico V-1 - Diagramas tensão-extensão obtidos por ensaio dos varões de 16 mm: a) laje P; b) lajes ACA1, AC0, AEA1 e AE0; c) lajes FE0, AEA2, FC0 e ACA2.	121
Gráfico V-2 - Comparação entre os momentos elásticos - n pontos equidistantes de carga vs. carregamento uniformemente repartido no contorno (ver Figura V-16).	130

Capítulo VI

Gráfico VI-1 - Relações carga × flecha a meio-vão para todas as lajes do programa experimental.	143
Gráfico VI-2 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes P, AC0 e FC0.	145
Gráfico VI-3 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje P.	145
Gráfico VI-4 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AC0.	145
Gráfico VI-5 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje FC0.	146
Gráfico VI-6 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes ACA1 e ACA2.	146

Gráfico VI-7 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje ACA1.	147
Gráfico VI-8 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje ACA2.	147
Gráfico VI-9 - Velocidade de aplicação do carregamento.	148
Gráfico VI-10 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes AE0 e FE0.	148
Gráfico VI-11 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AE0.	149
Gráfico VI-12 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje FE0.	149
Gráfico VI-13 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes AEA1 e AEA2.	150
Gráfico VI-14 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AEA1.	150
Gráfico VI-15 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AEA2.	150
Gráfico VI-16 - Evolução das extensões no betão - Laje P: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	151
Gráfico VI-17 - Evolução das extensões no betão - Laje AC0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	152
Gráfico VI-18 - Evolução das extensões no betão - Laje FC0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	152
Gráfico VI-19 - Evolução das extensões no betão - Laje ACA1: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	153
Gráfico VI-20 - Evolução das extensões no betão - Laje ACA2: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	153
Gráfico VI-21 - Evolução das extensões no betão - Laje AE0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	154
Gráfico VI-22 - Evolução das extensões no betão - Laje FE0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	154
Gráfico VI-23 - Evolução das extensões no betão - Laje AEA1: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	155
Gráfico VI-24 - Evolução das extensões no betão - Laje AEA2: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).	155
Gráfico VI-25 - Evolução das extensões de compressão no betão.	156
Gráfico VI-26 - Extensões de compressão na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AC0 e b) FC0.	157
Gráfico VI-27 - Extensões de compressão na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) ACA1 e b) ACA2.	158
Gráfico VI-28 - Extensões de compressão na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AE0 e b) FE0.	159
Gráfico VI-29 - Extensões de compressão na direcção tangencial (‰) no betão para	

diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AEA1 e b) AEA2.....	160
Gráfico VI-30 - Evolução das extensões na armadura longitudinal - Laje P: a) maior altura útil; b) menor altura útil.	161
Gráfico VI-31 - Extensões na armadura longitudinal (média das leituras) - laje P.	162
Gráfico VI-32 - Evolução das extensões (%) na armadura longitudinal para diferentes níveis do carregamento - laje P: a) maior altura útil; b) menor altura útil.	162
Gráfico VI-33 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje ACA1.	164
Gráfico VI-34 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje ACA2.	164
Gráfico VI-35 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje AEA1.	165
Gráfico VI-36 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje AEA2.	165
Gráfico VI-37 - Efeito das armaduras transversais no punçoamento centrado - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	175
Gráfico VI-38 - Efeito das armaduras transversais no punçoamento excêntrico - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	176
Gráfico VI-39 - Efeito da excentricidade da carga nas lajes sem armadura transversal - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	177
Gráfico VI-40 - Efeito da excentricidade da carga nas lajes com armadura transversal - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	177
Gráfico VI-41 - Efeito das fibras metálicas no punçoamento centrado - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	178
Gráfico VI-42 - Efeito das fibras metálicas no punçoamento excêntrico - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.....	178
Gráfico VI-43 - Comparação dos resultados experimentais com as previsões regulamentares.....	180

Capítulo VII

Gráfico VII-1 - Comparação das respostas experimental e numérica - relações carga $\times$ flecha a meio-vão.	188
Gráfico VII-2 - Evolução do estado de tensão nos diferentes pontos de Gauss - Laje ACA1 (DE_V).	190

Gráfico VII-3 - Evolução do estado de tensão nos diferentes pontos de Gauss.	191
Gráfico VII-4 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje ACA1.	197
Gráfico VII-5 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje FC0.	197
Gráfico VII-6 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AEA1.	198
Gráfico VII-7 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AE0.	198
Gráfico VII-8 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje ACA1.	199
Gráfico VII-9 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje FC0.	199
Gráfico VII-10 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AEA1.	200
Gráfico VII-11 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AE0.	200
Gráfico VII-12 - Comparação da evolução das extensões (‰) nas armaduras transversais - laje ACA1.	201
Gráfico VII-13 - Comparação da evolução das extensões (‰) nas armaduras transversais - laje AEA1.	201

Anexos

Gráfico A- 1 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 27 -
Gráfico A- 2 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 28 -
Gráfico A- 3 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da EN 1992-1-1 (CEN, 2004), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 29 -
Gráfico A- 4 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da EN 1992-1-1 (CEN, 2004), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 30 -
Gráfico A- 5 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 31 -
Gráfico A- 6 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao	

articulado da BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 32 -
Gráfico A- 7 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do REBAP (REBAP, 1983), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 33 -
Gráfico A- 8 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do REBAP (REBAP, 1983), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1	- 34 -
Gráfico A- 9 - Extensões de tracção na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AC0 e b) FC0.	- 45 -
Gráfico A- 10 - Extensões de tracção na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) ACA1 e b) ACA2.	- 46 -
Gráfico A- 11 - Extensões de tracção na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AE0 e b) FE0.	- 47 -
Gráfico A- 12 - Extensões de tracção na direcção tangencial (‰) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AEA1 e b) AEA2.	- 48 -

ÍNDICE DE QUADROS

Capítulo III

Quadro III-1 - Valores de K segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).	49
Quadro III-2 - Verificações ao punçoamento a atender segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).	50
Quadro III-3 - Valores limites para o comprimento do perímetro da área carregada, u_0 , segundo o REBAP (REBAP, 1983).	58
Quadro III-4 - Inclinação da superfície teórica de rotura, coeficientes parciais de segurança e limites para a percentagem de armadura longitudinal, segundo os diversos códigos analisados.	61
Quadro III-5 - Valores mínimo, máximo e médio e desvio padrão da relação $P_{u,exp}/V_{Rm}$	72
Quadro III-6 - Valores mínimo, máximo e médio e desvio padrão de $P_{u,exp}/V_{Rm}$ - alterações propostas.	73
Quadro III-7 - Valores globais médios e desvio padrão de $P_{u,exp}/V_{Rm}$ - efeito das alterações propostas.	73

Capítulo IV

Quadro IV-1 - Coeficientes para determinação da energia de fractura (adaptado de CEB-FIP, 1993).	91
Quadro IV-2 - Valores de α e da extensão última das diferentes leis de amolecimento.	93
Quadro IV-3 - Efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade segundo o CEB- FIP (CEB-FIP, 1999b).	99

Capítulo V

Quadro V-1 - Programa de ensaios experimentais.....	114
Quadro V-2 - Principais dimensões dos modelos de laje.	116
Quadro V-3 - Composição do betão e resultados do ensaio de espalhamento - betão das 1. ^a e 2. ^a séries de lajes.	117
Quadro V-4 - Propriedades mecânicas dos betões utilizados, aos 28 dias e à data do ensaio das lajes.	118
Quadro V-5 - Características geométricas das armaduras longitudinais.	119
Quadro V-6 - Propriedades mecânicas das armaduras longitudinais.....	120
Quadro V-7 - Propriedades mecânicas das armaduras transversais.....	122
Quadro V-8 - Propriedades das fibras de aço utilizadas no betão reforçado com fibras de aço.....	125
Quadro V-9 - Cargas de rotura previstas segundo diversos códigos e regulamentos.	133
Quadro V-10 - Frequências de aquisição de dados dos diversos sensores.	139

Capítulo VI

Quadro VI-1 - Cargas de rotura experimentais, tensão de corte e resistência à flexão.	143
Quadro VI-2 - Comparação das cargas de rotura experimentais com as previstas pela regulamentação.	179

Capítulo VII

Quadro VII-1 - Cargas de rotura experimentais, energia de fractura e síntese dos resultados obtidos pelo MEF.	190

Anexos

Quadro A- 1 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura transversal sob punçoamento centrado (continuado).	- 3 -
Quadro A- 2 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes com armadura transversal sob punçoamento centrado.	- 6 -
Quadro A- 3 - Caracterização das armaduras transversais dos ensaios experimentais - lajes sob punçoamento centrado (continuado).....	- 7 -
Quadro A- 4 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura	

transversal sob punçoamento excêntrico.	- 9 -
Quadro A- 5 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes com armadura	
transversal sob punçoamento excêntrico.	- 10 -
Quadro A- 6 - Caracterização das armaduras transversais dos ensaios experimentais	
- lajes sob punçoamento excêntrico.	- 11 -

SIMBOLOGIA / NOMENCLATURA

Minúsculas romanas

a_1, a_2	- Distância entre eixos de pontos de carga do equipamento de ensaio
c	- Dimensão do lado ou do diâmetro da secção transversal do pilar quadrado ou circular, ou da área carregada
c_1, c_2	- Dimensões dos lados da secção transversal do pilar rectangular, ou da área carregada
d	- Valor médio da altura útil das armaduras longitudinais nas direcções ortogonais x e y , respectivamente
d_{max}	- Máxima dimensão dos agregados
d_x, d_y	- Altura útil das armaduras principais nas direcções x - e y -, respectivamente
e	- Excentricidade da carga transmitida à área carregada
f_{cd}	- Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão, referida a provetes cilíndricos, aos 28 dias de idade do betão
f_{ck}	- Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão, referido a provetes cilíndricos, aos 28 dias de idade do betão
$f_{ck,cub}$	- Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão, referido a provetes cúbicos, aos 28 dias de idade do betão
f_{cm}, f_c	- Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão
$f_{cm,28}$	- Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão, aos 28 dias de idade do betão
f_{ct}, f_{ctm}	- Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção
$f_{p0,2}$	- Valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade correspondente à extensão de 0,2 %
f_{su}	- Valor médio da tensão de rotura do aço da armadura principal

f_{sy}, f_{sym}	- Valor médio da tensão de cedência do aço da armadura principal
f_{syd}	- Valor de cálculo da tensão de cedência do aço da armadura principal
f_{syk}	- Valor característico da tensão de cedência do aço da armadura principal
f_{wyd}	- Valor de cálculo da tensão de cedência do aço da armadura específica de punção
f_{wyk}	- Valor característico da tensão de cedência do aço da armadura específica de punção
h	- Espessura dos modelos de laje
k_1	- Coeficiente
ℓ	- Vão, distância entre eixos de pilares
s_r	- Espaçamento radial dos perímetros de armadura transversal
s_t	- Espaçamento tangencial dos pernos de armadura transversal
u, u_1	- Comprimento do perímetro de controlo
u_0	- Comprimento do perímetro da secção transversal do pilar (ou da área carregada)
$u_n, u_{n,ef}$	- Comprimento do perímetro exterior de controlo
$u_{out}, u_{out,ef}$	- Comprimento do perímetro exterior de controlo
x	- Excentricidade da resultante das forças internas de corte; Comprimento do lado do contorno crítico

Maiúsculas romanas

A_s	- Área da secção transversal da armadura
A_{sw}	- Área da secção transversal da armadura de punção
A_{sx}, A_{sy}	- Áreas da secção transversal das armaduras longitudinais nas direcções x- e y-, respectivamente
B	- Diâmetro do círculo contendo as reacções de apoio
C	- Largura total dos modelos de laje; Diâmetro dos modelos de laje circulares
E_{cm}	- Valor médio do módulo de elasticidade longitudinal do betão
F	- Força aplicada pelo actuador
G	- Módulo de elasticidade transversal
G^{cr}	- Módulo de elasticidade transversal pós-fendilhação
G_F	- Energia de fractura
G_F^∞	- Energia de fractura para um elemento estrutural infinitamente grande
G_{F0}	- Energia base de fractura
K	- Coeficiente dependente do momento transmitido pela ligação laje/pilar

M_t	- Valor de cálculo do momento actuante, transmitido da laje para o pilar
$P_{u,exp}$	- Carga de rotura obtida no ensaio experimental
$P_{u,num}$	- Carga de rotura prevista por simulação numérica
V_c	- Valor característico do esforço resistente ao punçoamento centrado de lajes sem armadura transversal ou a contribuição do betão na resistência de lajes com armadura transversal
$V_{c,out}$	- Valor de cálculo do esforço resistente ao punçoamento de lajes, determinado na região exterior à armadura transversal
V_{cd}	- Valor de cálculo do esforço resistente ao punçoamento centrado de lajes sem armadura transversal ou a contribuição do betão na resistência de lajes com armadura transversal
V_{flex}	- Carga correspondente à formação do mecanismo associado às linhas de rotura
V_{max}	- Valor de cálculo da máxima capacidade resistente ao punçoamento centrado
V_{Rd}	- Valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento
V_{Rm}	- Valor médio da capacidade resistente ao punçoamento, previsão regulamentar
V_t	- Valor de cálculo do esforço actuante de punçoamento, transmitido da laje para o pilar
$V_{t,ef}$	- Valor de cálculo do esforço efectivo de punçoamento, incluindo o efeito de um eventual momento a transmitir da laje ao pilar
V_w	- Valor característico da contribuição das armaduras transversais na resistência ao punçoamento
V_{wd}	- Valor de cálculo da contribuição das armaduras transversais na resistência ao punçoamento
W_1	- Módulo plástico do primeiro perímetro de controlo
$W_n, W_{n,ef}$	- Módulo plástico do perímetro exterior de controlo

Minúsculas gregas

α	- Ângulo médio definido entre a superfície de rotura e o plano da laje; Constante, em função do tipo de lei de amolecimento e da máxima dimensão dos agregados; Valor do ângulo definido entre a direcção normal à fenda e a direcção da tensão principal de tracção
ξ	- Factor regulamentar para ter em conta o efeito de escala; Tolerância da norma da energia para convergência do processo iterativo; Relação entre a extensão correspondente à abertura da fenda e a distorção da mesma
θ	- Ângulo definido entre as armaduras de punçoamento e o plano da laje; Direcção principal do estado de deformação

β	- Parâmetro que contabiliza o efeito da eventual transmissão de um momento fletor da laje para o pilar; Coeficiente de retenção da rigidez de corte
λ	- Esbelteza dos modelos de laje: relação entre o vão de corte e a altura útil
ψ	- Rotação da laje; Dilatância
η	- Parâmetro que relaciona a capacidade resistente ao punçoamento, determinada na região contendo armaduras transversais e na região exterior a esta, na presença da excentricidade do carregamento; Parâmetro que indica a previsão da localização da secção de rotura ao punçoamento
ω	- Flecha do ponto central do modelo de laje; Relação entre a distorção da fenda e a extensão correspondente à abertura da mesma
ϕ	- Ângulo de atrito interno
ν	- Coeficiente de Poisson
ϕ_0	- Quociente entre a carga de rotura por punçoamento e a carga correspondente à formação do mecanismo associado às linhas de rotura; Ângulo de atrito interno inicial
γ_c	- Coeficiente parcial de segurança relativo ao betão
τ_c	- Tensão resistente ao punçoamento, também designada por tensão nominal
γ_{cm}	- Peso específico do betão
α_E	- Coeficiente para ter em conta o efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade
γ_s	- Coeficiente parcial de segurança relativo ao aço
ε_{wyk}	- Valor característico da extensão correspondente à cedência do aço da armadura específica de punçoamento
ρ_{cm}	- Massa volúmica do betão
ρ_l	- Percentagem geométrica de armadura longitudinal
ρ_{lx}, ρ_{ly}	- Percentagens geométricas de armadura longitudinal nas direcções x- e y- que definem o plano da laje, respectivamente

Maiúsculas gregas

$\varnothing_n$	- Diâmetro nominal do varão da armadura
$\varnothing$	- Diâmetro do varão da armadura

ABREVIATURAS

ACI	- American Concrete Institute
ASCE	- American Society of Civil Engineers
BAC	- Betão auto-compactável
BAL	- Betão de agregados leves
BER	- Betão de elevada resistência
BRFA	- Betão reforçado com fibras de aço
BRN	- Betão de resistência normal ou corrente
BS	- British Standard
BSI	- The British Standard Institution
CEB	- Comité Euro-International du Béton
CEB-FIP MC 90	- Código Modelo 1990 do CEB-FIP
CEN	- Comité Européen de Normalisation
CSA	- Canadian Standards Association
DE	- Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de decomposição das extensões
EPS	- Poliestireno expandido
ET	- Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de extensão total
ETF	- Modelo de fendilhação distribuída com fendas fixas baseado no conceito de extensão total
ETR	- Modelo de fendilhação distribuída com fendas rotativas baseado no conceito de extensão total

FEM	- Finite element analysis
FEUP	- Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
FIB	- Fédération Internationale du Béton
FIP	- Fédération Internationale de la Précontrainte
HR	- Humidade relativa
INE	- Instituto Nacional de Estatística
IPQ	- Instituto Português da Qualidade
ISO	- International Organization for Standardization
IST	- Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa
ITEC	- Institut de Tecnologia de la Construcció de Catalunya
LABEST	- Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural
LNEC	- Laboratório Nacional de Engenharia Civil
LVDT	- Linear Variable Differential Transducer
MEF	- Método dos elementos finitos
n. c.	- Resultado não calculado
PG	- Ponto de Gauss ou ponto de amostragem
REBAP	- Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado
RILEM	- Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions

SISTEMA DE UNIDADES

As unidades em que aqui são expressas as diversas grandezas são as do Sistema Internacional de Unidades (SI), designação adoptada pela 11.^a Conferência Geral dos Pesos e Medidas em 1960.

Foram atendidas as recomendações quanto ao uso dos múltiplos e submúltiplos decimais das unidades SI, em conformidade com a norma ISO 1000:1992 (E) (ISO, 1992).

I INTRODUÇÃO

I.1 GENERALIDADES

Os pavimentos destacam-se por serem o elemento estrutural que suporta, em primeira instância, as forças verticais aplicadas a um piso. Destes, as lajes fungiformes constituem, sem dúvida, uma solução com elevado interesse porquanto potenciam as vantagens de um processo de construção rápido e económico e as possibilidades de optimização, flexibilidade e reestruturação da utilização dos edifícios.

Desta forma, é cada vez mais frequente a adopção de soluções estruturais de pavimentos constituídos por lajes fungiformes no domínio das estruturas de edifícios destinados a escritórios, parques de estacionamento, hotéis, hospitais e espaços comerciais, entre outros. Genericamente, a repetitividade estrutural e as exigências de maiores vãos entre pilares fazem pender a escolha do projectista por esta solução.

As normas e códigos existentes em diferentes países abordam a determinação da capacidade resistente ao punçoamento de forma distinta, resultando em grande diversidade de critérios de dimensionamento, agravada pelas possibilidades que se deparam ao projectista:

- Existência ou não de capitéis;
- Aligeiramento através da incorporação de:
 - Blocos de cofragem perdidos:
 - de betão normal;
 - de agregados leves;
 - de regranulados de cortiça;
 - de EPS,
 - Blocos de cofragem recuperáveis;
 - Betão de agregados leves;
- Incorporação de betões de fibras ou de betões de elevada resistência na região dos capitéis;

- Emprego de betões com capacidade auto-compactável;
- Utilização de armadura transversal.

Quanto ao desempenho estrutural, os pavimentos devem resistir com segurança a todas as solicitações previstas durante os períodos de construção e de serviço, contribuindo, também, para a resistência conjunta da edificação e operando como elementos de contraventamento no que às acções horizontais diz respeito. Os fenómenos de rotura, deformações excessivas, fissuração e vibrações excessivas, quando presentes, determinam a não satisfação deste critério. Devido ao facto de este tipo de estrutura não possuir vigas a ligação entre a laje e os pilares é, portanto, de fundamental importância, uma vez que nessa zona surgem em geral esforços elevados.

Assim, uma das questões fundamentais desta solução estrutural é a verificação da segurança ao punçoamento. Trata-se de um problema de onerosa investigação experimental e de difícil simulação numérica, devido ao estado de tensão triaxial muito complexo existente na região da ligação entre a laje e o pilar, agravado ainda no caso de carregamento excêntrico.

O problema do punçoamento centrado é um assunto abundantemente estudado sob o ponto de vista experimental, enquanto o punçoamento excêntrico tem sido muito pouco abordado, sendo diminuto o número de estudos publicados. Este facto faz com que as disposições regulamentares tenham sido, durante muito tempo, limitadas ao punçoamento centrado em pilares interiores sendo, no entanto, também aplicadas noutros casos. A abordagem em que assentam os diversos regulamentos é, na essência, a mesma, baseada no conceito da superfície crítica de punçoamento. De facto, não sendo fácil construir modelos matemáticos, genéricos e de aplicação expedita, para a determinação da capacidade resistente ao punçoamento, as expressões regulamentares são, geralmente, empíricas.

I.2 MOTIVAÇÃO PARA A TESE E OBJECTIVOS PROPOSTOS

A presente tese ambiciona dar um contributo para a compreensão do fenómeno do punçoamento e do real comportamento das lajes fungiformes, especialmente sob carregamento excêntrico. Com este trabalho, pretendem aduzir-se novos elementos para a clarificação do comportamento e dos fenómenos envolvidos na rotura ao punçoamento de lajes fungiformes maciças e analisar o efeito da excentricidade do carregamento, da presença de armaduras transversais e da incorporação de betões “não convencionais” como sejam o betão de fibras.

Para isso, foi conduzido no Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estru-

tural um estudo experimental sobre punçoamento envolvendo modelos de laje à escala real, comparando-se os resultados obtidos com simulações numéricas elaboradas com recurso ao método dos elementos finitos (MEF).

Foram realizados nove ensaios experimentais sobre modelos de ligação laje/pilar em que as variáveis principais são excentricidade do carregamento, a inclusão de armaduras transversais e o uso de betão reforçado com fibras de aço.

Constituiu-se uma extensa base de dados, compilando os resultados (capacidade resistente) de alguns dos mais relevantes ensaios experimentais realizados por diferentes investigadores, que é comparada com as correspondentes estimativas de diversos códigos e regulamentos.

Desenvolveu-se, também, uma vasta campanha de modelação numérica com o intuito de reproduzir os resultados experimentais obtidos. Averigua-se, igualmente, sobre a possibilidade da utilização de uma ferramenta numérica com vista à previsão do comportamento de lajes fungiformes, incluindo aspectos como as suas deformabilidade e capacidade resistente.

I.3 ESTRUTURAÇÃO DA TESE

A presente tese inclui oito Capítulos, Bibliografia e seis Anexos.

Dedica-se este primeiro Capítulo à introdução e ao posicionamento do problema bem como à apresentação dos principais objectivos desta dissertação.

Consagra-se o **Capítulo II** ao estado da arte do problema do punçoamento, passando-se em revista o enquadramento histórico das lajes fungiformes e a sua evolução, a revisão dos mais significativos ensaios experimentais bem como dos mais relevantes modelos e critérios de rotura. Especial destaque é dado aos parâmetros influentes no mecanismo resistente ao punçoamento.

Apresenta-se, no **Capítulo III**, uma resenha sobre as várias abordagens feitas sobre o punçoamento. Recorre-se a regulamentos nacionais como o REBAP (REBAP, 1983) e a BS 8110 (BSI, 1997), a normas como o Eurocódigo 2 (CEN, 2001; 2004) bem como ao CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993). As previsões regulamentares são comparadas com uma extensa base de dados compilada no âmbito da presente tese. Conduz-se uma análise com vista à aferição das formulações regulamentares em relação à resistência à compressão, à taxa de armadura principal e ao factor de efeito de escala. São propostas alterações ao articulado do actual código europeu (EN 1992-1-1).

No **Capítulo IV**, descrevem-se as diferentes formulações disponíveis no código comercial de elementos finitos DIANA v. 9.3 com vista à modelação computacional do comportamento de lajes fungiformes. Apresenta-se uma análise crítica das capacidades e limitações dos modelos constitutivos para a análise numérica do fenómeno do punçoamento.

Desenvolve-se, no **Capítulo V**, o estudo experimental sobre punçoamento, conduzido em nove modelos de laje de betão corrente e de betão reforçado com fibras de aço submetidos a punçoamento centrado e excêntrico, avaliando-se a influência da presença da armadura transversal, da excentricidade do carregamento e da utilização de fibras de aço. Caracterizam-se os materiais utilizados, os procedimentos dos ensaios, as variáveis envolvidas e os instrumentos de medição utilizados.

O **Capítulo VI** engloba a apresentação e a análise dos resultados obtidos no programa experimental. É descrita a evolução dos deslocamentos normais ao plano da laje, das extensões da armadura longitudinal e transversal e das extensões no betão. São ainda comparados os resultados obtidos com as previsões dos regulamentos e códigos nacionais analisados no Capítulo III.

Apresenta-se, no **Capítulo VII**, a modelação numérica, realizada com recurso ao MEF, dos ensaios experimentais descritos no Capítulo V. Os resultados numéricos são comparados com os valores experimentais apresentando-se uma análise crítica das capacidades e limitações do programa. O objectivo desta análise é verificar a possibilidade de reproduzir realisticamente o comportamento estrutural observado experimentalmente. Na simulação foram utilizadas as propriedades dos materiais avaliadas em laboratório.

Finalmente, apresentam-se, no **Capítulo VIII**, as principais conclusões a reter do presente trabalho, bem como se sugerem possíveis linhas a seguir em futuros desenvolvimentos.

No **Anexo A.1** é descrita a base de dados, elaborada no âmbito do Capítulo III, que inclui os resultados dos ensaios experimentais sobre punçoamento recolhidos durante a presente investigação.

No **Anexo A.2** é apresentada a demonstração da expressão para a determinação do módulo plástico de flexão do primeiro perímetro de controlo, indicada pelo códigos CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1.

No **Anexo A.3** são apresentadas as deduções de duas expressões propostas para a determinação do módulo plástico do perímetro exterior, correspondentes a um pilar de secção quadrada e a diferentes disposições da armadura transversal.

No **Anexo A.4** é feita a comparação entre a base de dados de resultados experimentais e

as previsões obtidas pelos diferentes códigos analisados, incluindo as alterações propostas.

No **Anexo A.5** são apresentados os padrões de fissuração obtidos nos ensaios experimentais descritos nos Capítulos V e VI.

No **Anexo A.6** apresentam-se os perfis das extensões médias de tracção do betão na direcção tangencial para diferentes níveis do carregamento, para as lajes que constituem a 1.^a e 2.^a séries de ensaios experimentais.

II ESTADO DA ARTE

II.1 INTRODUÇÃO

As lajes fungiformes são lajes maciças ou aligeiradas directamente apoiadas em pilares, tendo o seu crescente uso assentado na exploração das suas principais vantagens, como sejam a eliminação das vigas reduzindo a altura total dos edifícios e proporcionando um paramento inferior plano e a criação de espaços amplos permitindo a reconversão do seu uso, constituindo, por isso, uma solução cada vez mais utilizada em edifícios destinados a escritórios, parques de estacionamento, hotéis, entre outros.

Um dos principais problemas deste sistema estrutural é a sua resistência ao punçoamento na ligação laje/pilar, zona sujeita a estados de tensão triaxiais muito complexos devidos à transmissão de esforços entre um elemento plano - laje - e um elemento linear - pilar - (Zhang, 2002), de difícil tradução numérica, que tem sido objecto de numerosos estudos nas últimas décadas. O fenómeno do punçoamento está geralmente associado à introdução de cargas concentradas elevadas ou à presença de apoios (pilares), como se ilustra na Figura II-1.

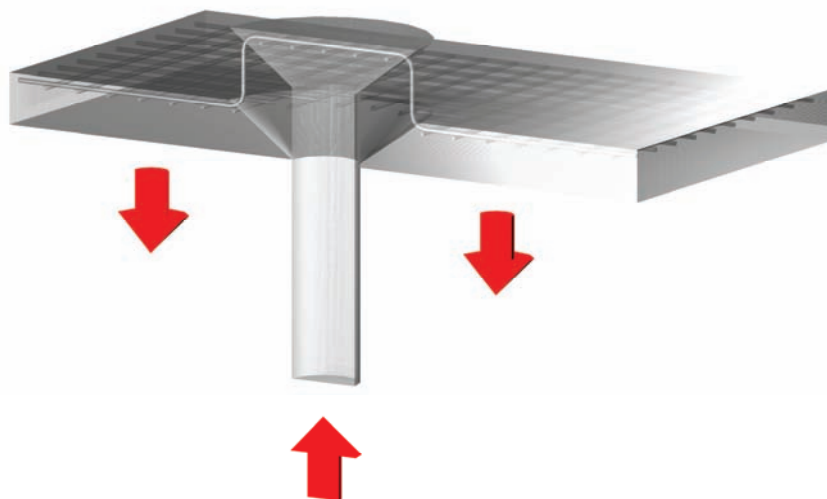


Figura II-1 - Representação esquemática da rotura ao punçoamento centrado numa laje fungiforme (ampliação).

A rotura por punçoamento é um mecanismo de colapso local que ocorre geralmente de forma brusca com penetração do pilar no corpo da laje, sob uma carga de valor em geral inferior à sua capacidade resistente por flexão. Este tipo de rotura é catastrófica por não apresentar sinais exteriores visíveis podendo ainda gerar o colapso global da estrutura pelo incremento da carga em pilares vizinhos. Citam-se a ruína de um edifício comercial de 5 pisos em 1995 em Seul, Coreia do Sul, no qual quinhentas pessoas perderam a vida (Gardner *et al.*, 2002) e a destruição parcial de um edifício destinado a estacionamento automóvel, em Março de 1997, ilustrada na Figura II-2.



Figura II-2 - Colapso parcial do 4.º piso de um parque de estacionamento em Wolverhampton, Reino Unido (Wood, 2002).

A concepção e o projecto de uma laje fungiforme devem, portanto, passar pelo conhecimento e domínio dos parâmetros que influenciam o punçoamento (Krüger, 1999) como as dimensões do pilar, a espessura da laje, a resistência do betão e a excentricidade da carga, entre outras. A introdução de armadura específica de punçoamento promove uma maior capacidade de deformação e maior ductilidade na rotura (Dilger, 2000).

Os objectivos do presente Capítulo são o de estabelecer o enquadramento histórico das lajes fungiformes e a sua evolução, a revisão dos mais significativos ensaios experimentais bem como dos mais relevantes modelos e critérios de rotura.

II.2 BREVE RESENHA HISTÓRICA

Apresenta-se a evolução histórica das lajes fungiformes e as contribuições e desenvolvimentos mais relevantes no domínio do punçoamento. Podem ser encontradas descrições mais detalhadas em (fib.CEB-FIP, 2001; Dooley, 2004).

Em 1892, o francês François Hennebique patenteou o seu sistema estrutural em betão armado, inspirado nas antigas construções em madeira e ferro (Figura II-3a). Até então o dimensionamento dos pavimentos assentava exclusivamente num conjunto hierarquizado de elementos unidireccionais (laje armada numa direcção → viga secundária → viga principal → pilar). O aparecimento das lajes fungiformes de betão armado na primeira década do século XX marca o início da utilização de um novo sistema resistente bidireccional na construção de edifícios. A criação desta solução coincide com o desenvolvimento dos fundamentos teóricos sobre o comportamento do betão armado como “material” estrutural, em particular sobre o esforço transversal (Dooley, 2004).

A invenção das lajes fungiformes é atribuída a Claude A. P. Turner nos EUA. No seu artigo, publicado no *Engineering News* em 1905, descreve o projecto de “laje-cogumelo” ilustrado na Figura II-3b (Dooley, 2004). A primeira laje fungiforme foi construída em 1906 em Minneapolis (EUA) por Turner (Park *et al.*, 1980). Devido à controvérsia e resistência geradas pela sua inovação, Turner nunca publicou os detalhes completos do seu método de cálculo, talvez para manter a vantagem competitiva (Gasparini, 2002).

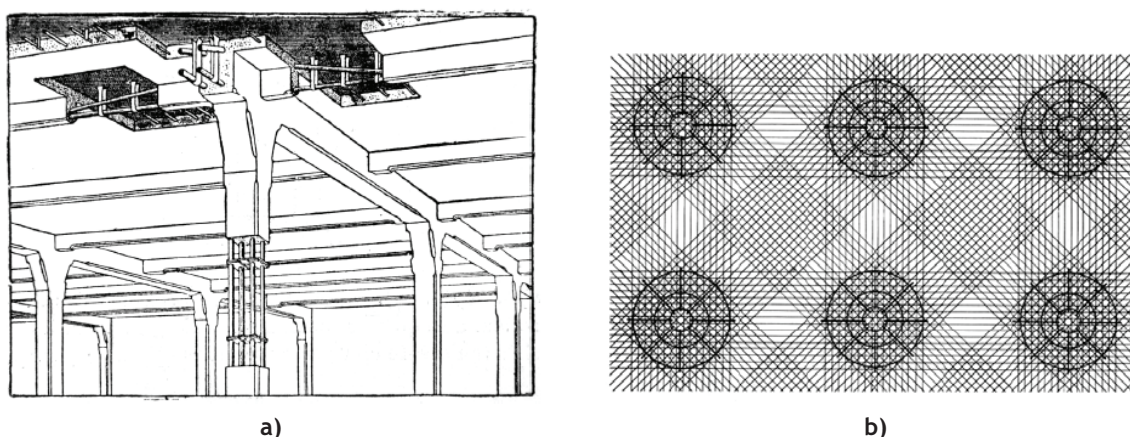


Figura II-3 - a) Perspectiva axonométrica do sistema Hennebique de lajes vigadas em betão armado - 1892; b) Disposição das armaduras em quatro direcções, em laje fungiforme com capiteis, 1905, C. A. P. Turner.

O suíço Robert Maillart (1908), simultaneamente construtor, projectista e investigador, foi um dos primeiros a reconhecer o enorme potencial das lajes fungiformes (Figura II-4), sendo também o primeiro a verificar que uma laje armada ortogonalmente pode suportar momentos flectores em todas as direcções (Guandalini, 2005). Os trabalhos pioneiros de Maillart estavam muito para além do seu tempo, tendo beneficiado da protecção da sua patente e da ausência de regulamentação em alguns países. A generalização da execução de lajes fungiformes na Europa aconteceu apenas a partir de 1920, com métodos de cálculo baseados na teoria elástica das placas (Füst *et al.*, 1997).

Os primeiros estudos experimentais no domínio do punçoamento, no início do século passado, referem-se a estruturas reais ou modelos à escala natural.

Entre os primeiros ensaios de que há registo constam os realizados em 1913 por A. N. Tal-

bot (Talbot *et al.*, 1913), em 114 elementos de fundação de muros e em 83 sapatas de pilares sujeitos a punçoamento centrado (Figura II-5). Estes estudos foram utilizados para estabelecer as normas de então em diversos países (Krüger, 1999).

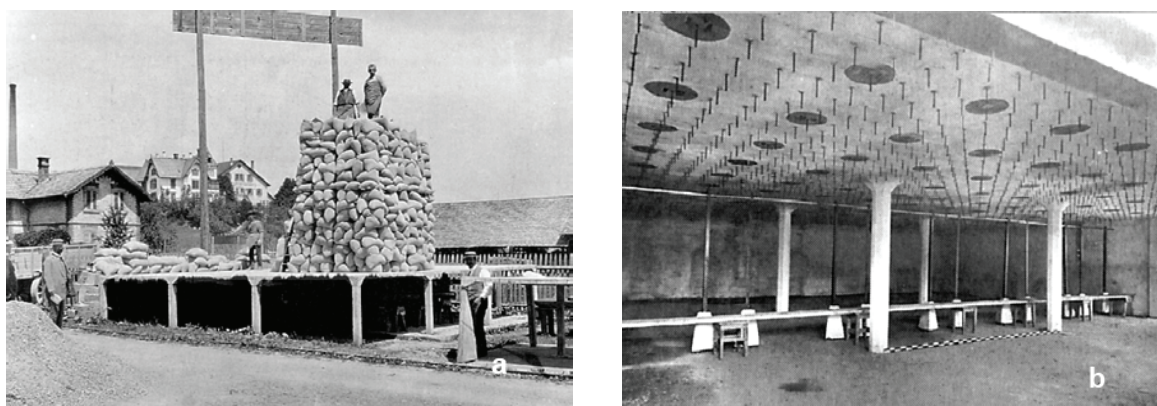


Figura II-4 - a) Ensaio de laje fungiforme (armaduras em duas direcções); b) Registo de flechas para estabelecer um método empírico de dimensionamento, 1908, R. Maillart.

Em 1948, Richart levou a cabo uma importante campanha de ensaios de sapatas submetidas a carregamento centrado em que a maioria dos modelos evidenciou uma rotura por punçoamento (Richart, 1948a; 1948b). Richart caracterizou a importante fissuração que se gera em torno do pilar e o elevado nível de tensão das armaduras de flexão.

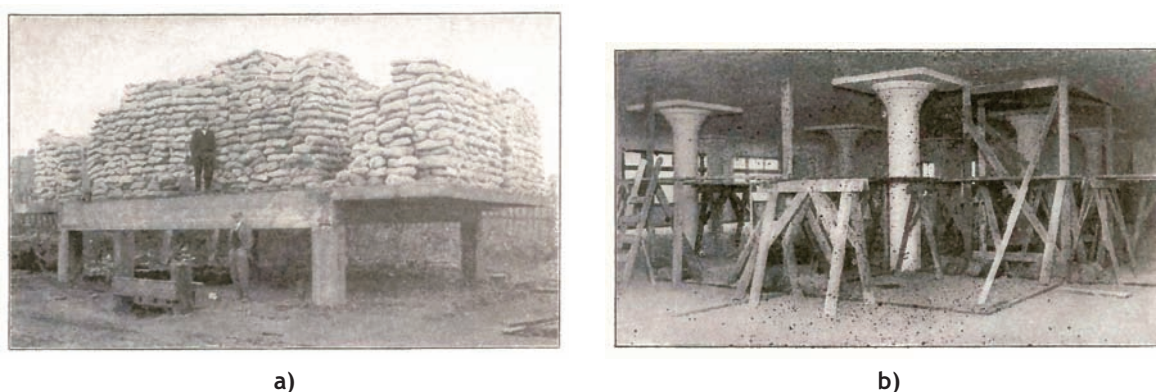


Figura II-5 - Ensaios de lajes: a) laje vigada com armaduras dispostas em duas direcções - Barr Building, St. Louis, Missouri, Dezembro 1911; b) laje fungiforme com armaduras dispostas em quatro direcções - Franks Building, Chicago, Illinois, Agosto 1911 (Talbot *et al.*, 1913).

A partir da segunda metade do século XX, diversos autores (Eltner *et al.*, 1956; Kinnunen *et al.*, 1960; Moe, 1961, entre outros) passam a utilizar modelos à escala reduzida ou zonas de estruturas reais. Tais modelos, ilustrados a rosa na Figura II-6 e aqui designados por “elementos simples”, tentam reproduzir o comportamento de zonas limitadas de lajes contínuas de vão ℓ entre pilares. Citam-se, também, os ensaios realizados por Lúcio sobre o comportamento à flexão, à torção e ao corte de um modelo de laje fungiforme nervurada constituído por nove painéis apoiados em dezasseis pilares (Lúcio, 1991). Uma disposição comum em ensaios de punçoamento consiste em modelos em geral circulares ou quadrados, carregados ao longo do seu contorno e apoiados ao centro em pilares ou em placas metálicas. O perímetro carregado pretende reflectir o contorno de inversão da curvatura,

devida aos momentos flectores na direcção radial, numa laje fungiforme real. No caso de solicitação uniformemente distribuída, o diâmetro C ($C \cong 0,44 \ell$) dos “elementos simples” corresponde, seguindo a distribuição linear e elástica, ao lugar geométrico dos momentos radiais nulos, como se ilustra na Figura II-6. Refere-se que esses “elementos simples” podem não reproduzir, de forma integral, todos os fenómenos que estão presentes quando se analisa um pavimento em laje fungiforme (Criswell, 1974). Com efeito, o contorno correspondente aos momentos radiais nulos é constante no ensaio de “elementos simples”, o que não se verifica em lajes fungiformes reais.

Também o confinamento introduzido pelos painéis adjacentes da laje (a cinzento na Figura II-6), que não pode ser reproduzido no caso de ensaios de “elementos simples”, proporciona um aumento da capacidade resistente em flexão e ao punçoamento (Guandalini, 2005). Note-se que no dimensionamento das lajes, quer pela análise elástica, quer pela análise plástica, é considerada apenas a acção dos momentos flectores e torsões, sendo desprezado o efeito dos esforços no plano da laje (Bastos, 1997). No caso das lajes de betão armado, esses esforços podem surgir não só por efeitos de segunda ordem como, também, pela heterogeneidade própria da estrutura. As deformações da face traccionada são tipicamente maiores (devido à fissuração) do que aquelas que se verificam na face comprimida, não se localizando portanto o eixo neutro no plano médio da laje, originando que o folheto médio da mesma se dilate.

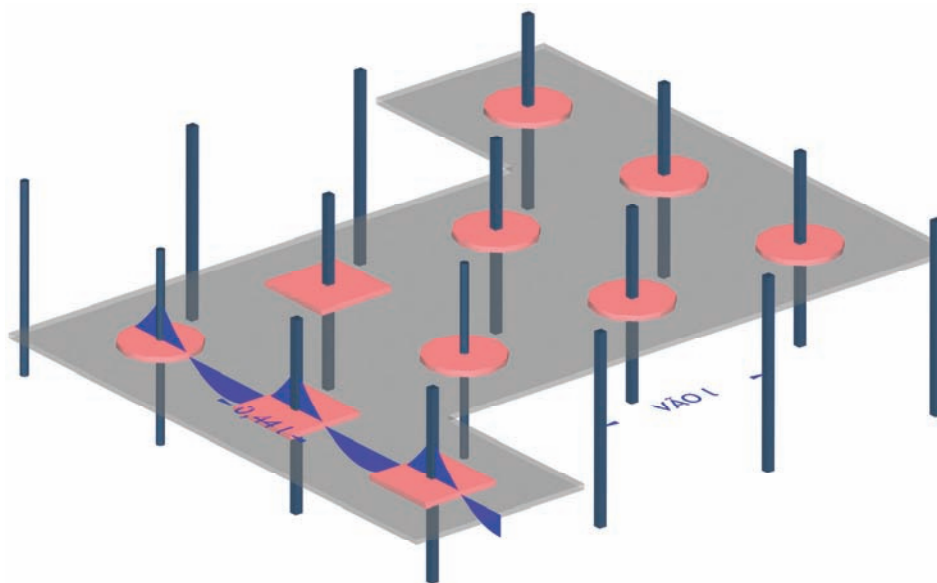


Figura II-6 - Elementos simples de uma laje fungiforme - malha de $6 \times 6 \text{ m}^2$.

Assim, quando são impedidas as deformações no plano da laje, pode desenvolver-se o chamado “efeito de membrana”, que se traduz pela formação de uma membrana que se propaga por bielas, ligando as resultantes das compressões nos banzos superior e inferior da laje, nas secções de máximos momentos de sinal oposto. Essa membrana vai suportar parte das acções aplicadas originando um acréscimo considerável da capacidade resistente da laje (Bastos, 1997). Não obstante, Gardner concluiu, pela observação do ensaio de um

piso de laje fungiforme com nove pilares (Gardner *et al.*, 1996), que o seu comportamento pode ser satisfatoriamente reproduzido através de ensaios de “elementos simples”^a.

Nos últimos 60 anos, a experimentação incidiu essencialmente sobre modelos de lajes fungiformes submetidos a punçoamento centrado (Murray *et al.*, 1999), sendo mais reduzido o número de ensaios de punçoamento excêntrico, em particular no caso de lajes munidas de armaduras de punçoamento. O estudo do punçoamento excêntrico foi inicialmente desenvolvido na América do Norte. Destacam-se os ensaios de Elstner e Hognestad (Elstner *et al.*, 1956) e J. Moe (Moe, 1961) evidenciando o efeito do momento flector na redução da capacidade última ao punçoamento.

II.3 MECANISMO RESISTENTE AO PUNÇOAMENTO - PARÂMETROS INFLUENTES

Quando uma carga concentrada actua normalmente ao plano médio de uma laje de betão armado pode verificar-se uma rotura brusca local por corte no contorno da área carregada. A fenda de rotura atravessa a espessura da laje desde a área carregada até à face oposta, originando o destacamento de um volume tronco-cónico na inserção laje/pilar. O punçoamento é um problema tridimensional associado à presença de elevadas tensões no betão constituindo, ainda, um caso particular do esforço transversal que se verifica nas zonas das lajes sujeitas a cargas concentradas importantes (caso das sapatas de fundação de pilares) ou na zona de transmissão de esforços aos pilares de apoio (caso das lajes fungiformes).

As trajectórias dos momentos principais de uma laje fungiforme uniformemente carregada apresentam forte concentração na região de apoio (ligação laje/pilar), como se ilustra na Figura II-7.

Os momentos principais são orientados segundo as direcções radial (m_r) e tangencial (m_t). O círculo de raio aproximadamente igual a $0,22 \ell$, a tracejado encarnado na Figura II-7, representa os pontos onde os momentos m_r são nulos.

Na zona de inserção do pilar na laje, a fendilhação tem início segundo um padrão radial devido às tensões tangenciais de tracção impostas pela flexão da laje dividindo a mesma em cunhas concêntricas. É acompanhada de fissuração tangencial incipiente na vizinhança do pilar (Figura II-8a). No caso de reduzidas percentagens de armadura longitudinal a rotura manifesta-se de uma forma dúctil. Para percentagens relativamente elevadas daquela armadura, a fendilhação tangencial determina a formação de um bloco tronco-cónico como se mostra na Figura II-8b, verificando-se uma rotura frágil por punçoamento caracterizada pela inclinação da fenda na ruína, que varia entre 25° a 35° relativamente ao plano médio

a - Os “elementos simples” de laje passam a designar-se por modelo de laje ou por laje

da laje.

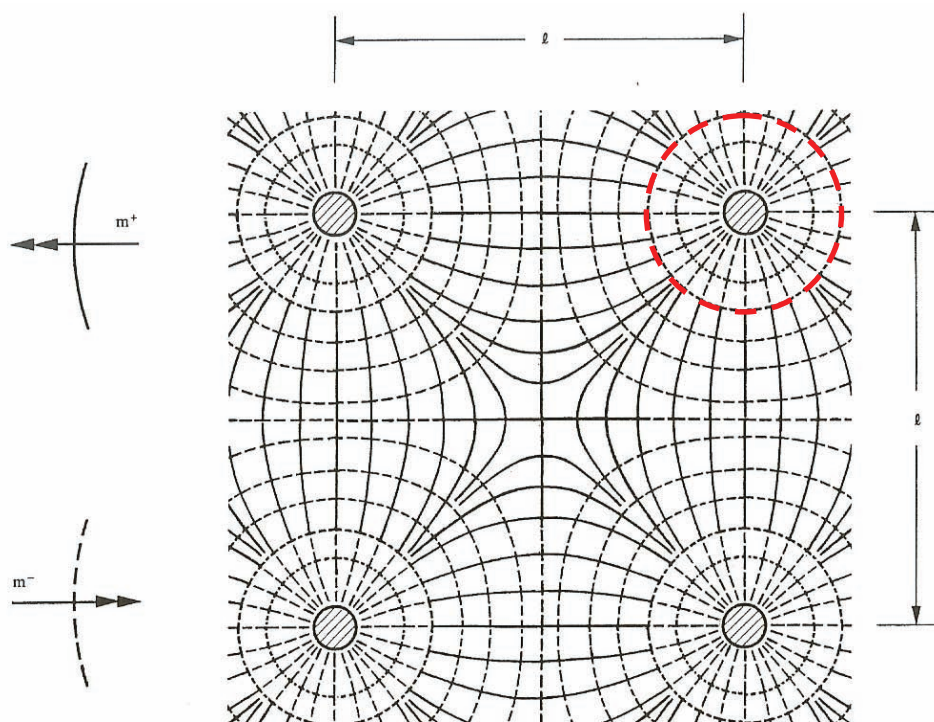


Figura II-7 - Trajectórias dos momentos principais numa laje fungiforme com malha regular de pilares, uniformemente carregada (Favre *et al.*, 1989).

A capacidade resistente ao punçoamento pode ser incrementada através do aumento da espessura da laje ou das dimensões do pilar, da utilização de uma maior percentagem de armadura longitudinal ou de um betão com maior resistência mecânica, ou ainda pela inclusão de armadura transversal. Pilares com secção transversal de grandes dimensões são, no entanto, frequentemente desaconselhados devido a condicionantes arquitectónicas enquanto que grandes espessuras de laje elevam o peso próprio e o custo da infraestrutura (pilares e fundações). Aumentar a percentagem de armadura longitudinal e a resistência do betão constituem soluções menos eficazes e, não raras vezes, impraticáveis (fib.CEB-FIP, 2001).

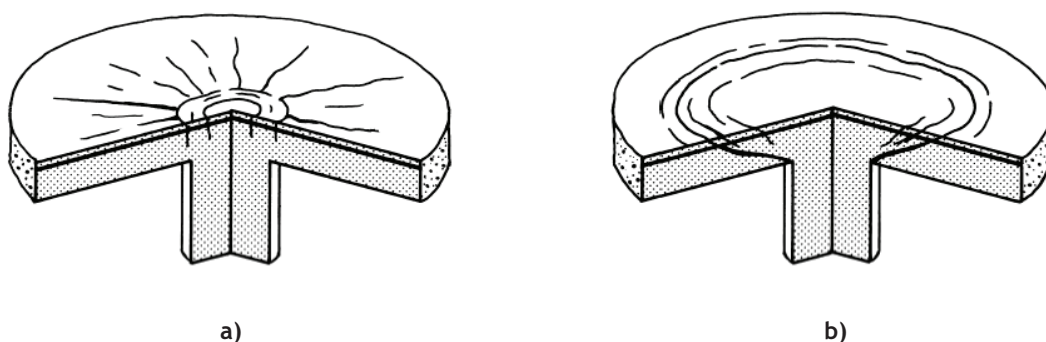


Figura II-8 - Representação esquemática da fissuração devida a: a) flexão e b) corte (Staller, 2000).

Diferentes factores influenciam a resistência ao punçoamento, como se enuncia:

- Resistência à compressão do betão;
- Efeito de escala;
- Armaduras principais de flexão (aderência, percentagem, distribuição);
- Atrito entre os agregados nas fendas de corte;
- Armaduras específicas de punçoamento;
- Excentricidade da carga.

Estes factores são seguidamente analisados e aferidos com base em estudos experimentais realizados por diferentes investigadores. A recolha destes elementos foi organizada constituindo-se uma exaustiva base de dados que, pela sua dimensão, se apresenta pormenorizadamente no Anexo A.1, e que foi utilizada para comparação com as expressões regulamentares no Capítulo III.

II.3.1 Resistência à compressão do betão

O efeito da resistência do betão no fenómeno do punçoamento foi investigado, através de ensaios experimentais, por diversos autores (Elstner *et al.*, 1956; González-Vidosa *et al.*, 1988; Marzouk *et al.*, 1991; Hallgren, 1996; Ramdane, 1996; Megally *et al.*, 2000a; Ngo, 2001) que observaram um aumento da capacidade última com a resistência de betão, embora acompanhado de uma redução da ductilidade. Esta redução é tida em conta em diversas normas, como se mostrará no Capítulo III, através da limitação da tensão resistente de punçoamento em função da resistência à compressão do betão ou da limitação da própria resistência do betão.

Marzouk *et al.* realizaram um extenso estudo (Marzouk *et al.*, 1991) baseado na utilização de betão de elevada resistência - BER (betão que apresenta valor característico da tensão resistente à compressão superior a 50 MPa (EHE, 1999; 2004)). Esse estudo envolveu o ensaio de 17 modelos de lajes quadradas com 1700 mm de lado, em que variaram a resistência à compressão do betão ($30 \text{ MPa} \leq f_{cm} \leq 80 \text{ MPa}$), a percentagem de armadura longitudinal (de 0,49 % a 2,37 %) e a espessura dos modelos (de 90 mm a 150 mm). As principais conclusões são: (1) os dois modos de rotura podem ser classificados de punçoamento/corte e flexão/punçoamento. As lajes de BER apresentam uma rotura por punçoamento/corte para uma percentagem de armadura longitudinal relativamente reduzida ($\rho_l \cong 0,64 \%$). Em geral, estas lajes exibem uma rotura mais frágil do que as de betão de resistência normal - BRN; (2) com o aumento da percentagem de armadura longitudinal e da espessura da laje verifica-se uma diminuição da ductilidade; (3) a inclinação da superfície de rotura relativamente ao plano da laje está compreendida entre 32° e 38° em lajes de BER.

Marzouk *et al.* estudaram também o efeito da resistência do betão nas ligações laje/pilar em que os pilares eram realizados em BER sendo as lajes também em BER ou em BRN

(Marzouk *et al.*, 1996; 1998). Os autores conduziram dez ensaios em modelos de laje quadrados com dimensões $1,90 \times 1,90 \times 0,15 \text{ m}^3$ carregadas por meio de um pilar com $0,25 \times 0,25 \text{ m}^2$ (Figura II-9), com diferentes percentagens de armadura longitudinal e excentricidades da carga.

O comportamento estrutural das ligações foi significativamente melhorado com o uso de pilares de BER ($f_{cm} \cong 80 \text{ MPa}$) através do aumento da deformabilidade na carga última, da ductilidade, da capacidade de rotação, da energia absorvida e das extensões da armadura longitudinal. Para o caso das lajes em BRN ($f_{cm} \cong 35 \text{ MPa}$) a capacidade resistente é incrementada de 5 % (sem excentricidade) e de 17 % (ensaios excêntricos), relativamente aos modelos com pilares de BRN com $f_{cm} \cong 35 \text{ MPa}$ (Marzouk *et al.*, 1996). Nas lajes de BER com pilares também de BER, a capacidade resistente é incrementada de 7 % (sem excentricidade) e de 15 % (ensaios excêntricos), relativamente às lajes de BRN (Marzouk *et al.*, 1998).

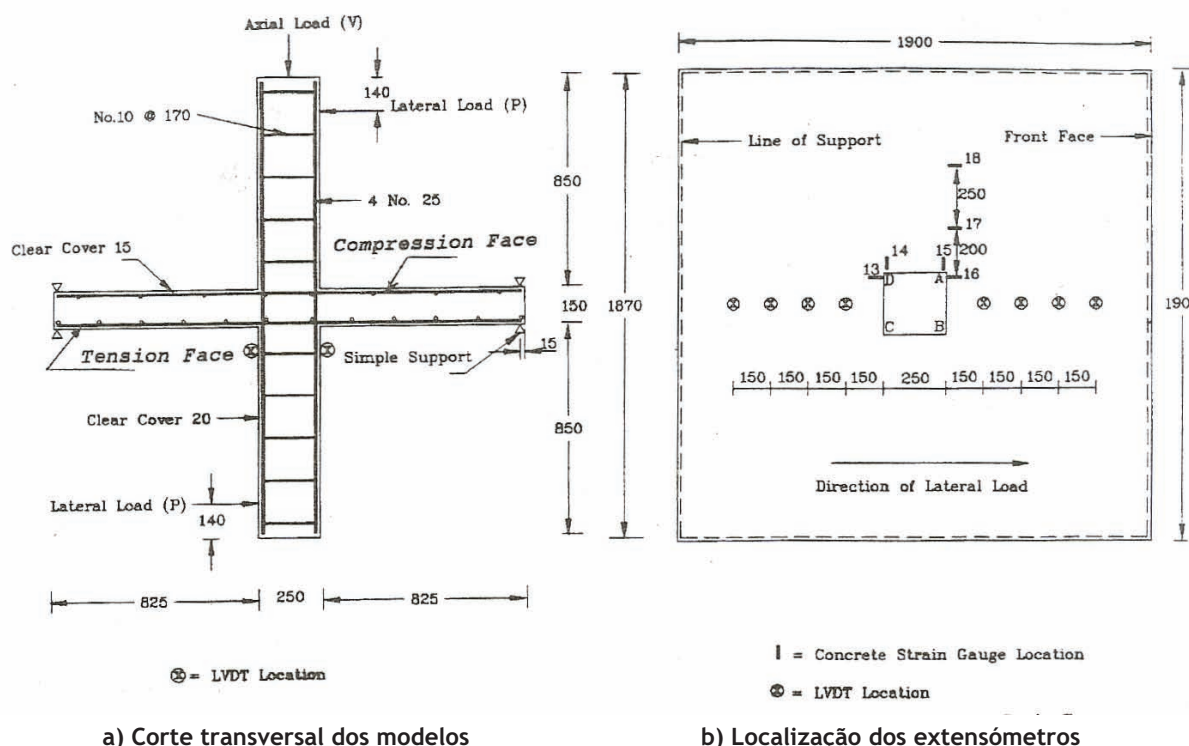


Figura II-9 - Geometria dos modelos de laje submetidos a punção excêntrica (Marzouk *et al.*, 1996; 1998).

Hallgren observa também o comportamento estrutural de lajes de BER, comparando com lajes idênticas de BRN com $f_{cm} \cong 25 \text{ MPa}$ (Hallgren, 1996). As lajes de BER com percentagem de armadura longitudinal de $\rho_l = 0,80 \%$ apresentaram capacidades resistentes cerca de 50 % a 60 % superiores em relação aos modelos de BRN. Para $\rho_l = 0,3 \%$ esse aumento é de apenas 20 %.

Ramdane realizou 3 séries de ensaios experimentais (Ramdane, 1996) compreendendo 18 modelos de lajes circulares com 1700 mm de diâmetro e 125 mm de espessura, fazendo

variar a resistência à compressão do betão de 27 MPa a 102 MPa. As lajes dispunham de igual quantidade de armadura disposta em malha ortogonal e não usavam armadura específica de punçoamento. Na Figura II-10 encontra-se o esquema do sistema de ensaio dos modelos de laje.

Neste estudo, Ramdane conclui: (1) para taxas de armadura longitudinal relativamente baixas ($\rho_l = 0,58 \%$), a capacidade resistente das lajes de BER é francamente incrementada quando comparada com a das lajes de BRN; (2) para $\rho_l = 1,28 \%$ a rotura por punçoamento das lajes é mais frágil nas lajes de BER pelo que aconselha a inclusão de armaduras transversais para o aumento de ductilidade; (3) a capacidade última é correctamente prevista com recurso a $(f_{cm})^{1/3}$, utilizada pelos códigos CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e BS 8110-1 (BSI, 1997); (4) a influência do efeito de escala e de ρ_l é adequadamente tida em conta nos referidos códigos e podem ser generalizados a lajes de BER.

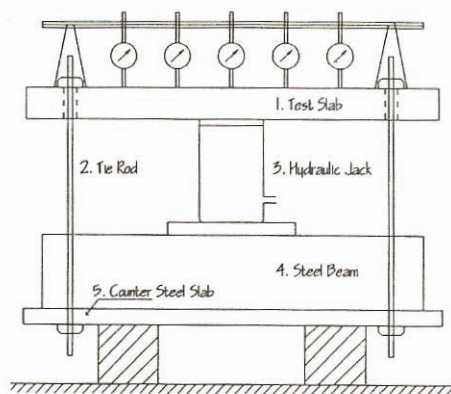


Figura II-10 - Sistema de ensaio dos modelos de laje (Ramdane, 1996).

Alguns resultados experimentais são apresentados no Gráfico II-1 onde se comparam duas curvas, expressas na forma $(f_{cm})^n$, com $n = 1/3$ e $1/2$ (Dilger, 2000). O valor $n = 1/3$ apresenta a melhor aproximação e foi proposto por diversos autores (Marzouk *et al.*, 1991; Ramdane, 1996; Zhang, 2003) e adoptado no CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

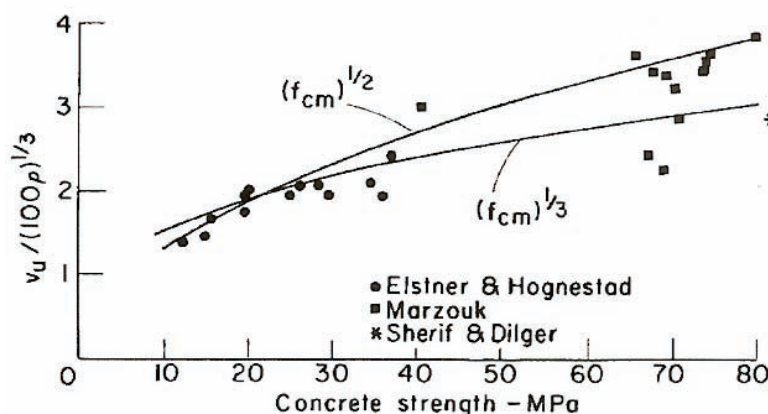


Gráfico II-1 - Influência da resistência à compressão do betão na capacidade resistente ao punçoamento (Dilger, 2000).

II.3.2 Efeito de escala

O efeito de escala é um fenómeno que traduz a dependência das propriedades características do material em relação às dimensões da peça (Bastos, 1997) e que se manifesta no betão por um aparente aumento da sua resistência à tracção quando diminuem as dimensões da mesma. No caso do punçoamento, este efeito provoca uma redução específica da capacidade resistente com o aumento da espessura da laje. Informação detalhada sobre o efeito de escala pode ser encontrada em (CEB, 1997).

O efeito de escala foi investigado por Bažant que, utilizando as leis da Mecânica da Fractura, propuseram a expressão seguinte (Bažant, 1984; Bažant *et al.*, 1986) para a determinação da tensão nominal de corte (ou de rotura), associada ao punçoamento:

$$\tau_c = C \cdot \left(1 + \frac{d}{\lambda_0 \cdot d_{\max}} \right)^{-1/2} \quad (\text{II. 1})$$

onde:

$$C = k_1 \cdot f_{ct} \cdot (1 + k_2 \cdot d/c)$$

c diâmetro da área carregada

d dimensão característica da estrutura (ex. altura útil em vigas)

k_1, k_2, λ_0 constantes empíricas

f_{ct} tensão resistente à tracção do betão

$d_{\max}$ máxima dimensão do agregado

A expressão (II. 1) foi mais tarde calibrada (Bažant *et al.*, 1987) através dos ensaios sobre nove lajes (Gráfico II-2) de microbetão ($d_{\max} = 6,35 \text{ mm}$) com três espessuras diferentes ($h = 25,4 \text{ mm}$, $50,8 \text{ mm}$ e $101,6 \text{ mm}$).

Os resultados obtidos mostram que a rotura é tanto mais frágil quanto maior é a espessura da laje (Gráfico II-2). Verifica-se ainda que a tensão tangencial no instante da rotura, τ_c , definida como o quociente da carga máxima pela área da superfície de punçoamento, não é constante, mas diminui com o aumento da espessura da laje.

A expressão então proposta é:

$$\tau_c = \frac{550 \cdot f_{cm} \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{d}{c} \right)}{\sqrt{1 + \frac{d}{25 \cdot d_{\max}}}} \quad (\text{II. 2})$$

A expressão anterior foi aplicada a um total de 159 ensaios, previamente conduzidos por outros autores. Foi obtida uma correlação relativamente baixa dada a forte dispersão na

forma de realização dos ensaios. Acresce que os nove ensaios conduzidos por (Bažant *et al.*, 1987) se referem a lajes com reduzida espessura, pelo que a expressão (II. 2) não foi validada para espessuras correntes de lajes (0,20 m a 0,35 m).

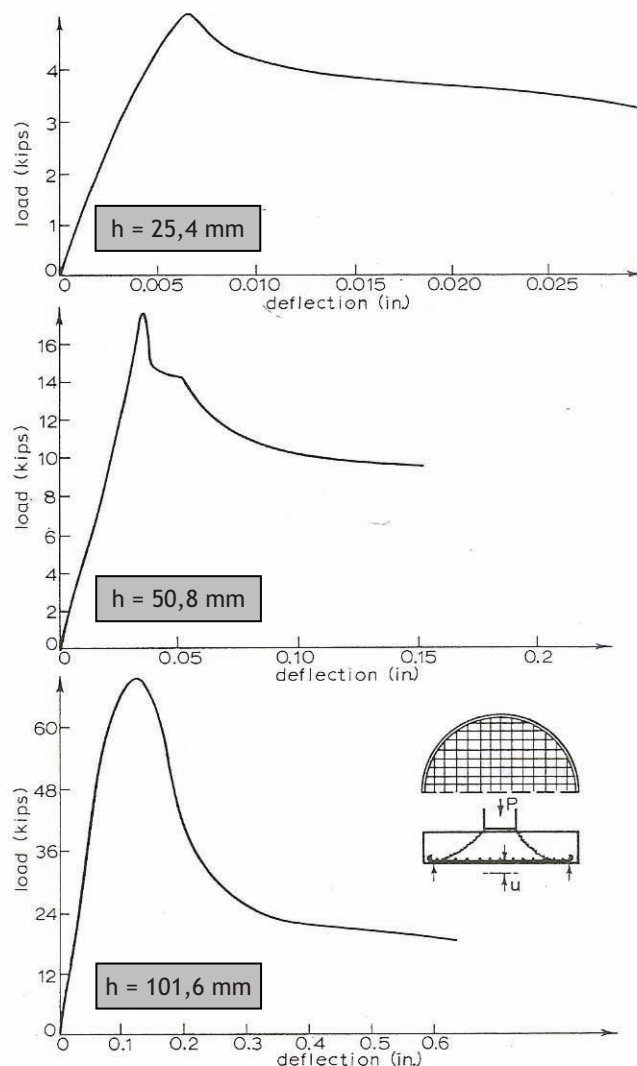


Gráfico II-2 - Relações carga-deslocamento para 3 lajes com diferentes espessuras submetidas a punção centrada (Bažant *et al.*, 1987).

Por outro lado, a esbelteza, λ , dos modelos testados é de apenas 1,5 o que limita o ângulo de rotura (α) a cerca de 35° . Aqui, λ representa a esbelteza dos modelos definida como a relação entre o vão de corte, $(B - c)/2$, e a altura útil d :

$$\lambda = \frac{B - c}{2d} \quad (\text{II. 3})$$

A expressão (II. 1) foi mais tarde ajustada por (Menétrey *et al.*, 1997) através da análise numérica de quatro lajes com diferentes espessuras ($d_{\max} = 32$ mm), tendo concluído que a tensão nominal de corte, calculada à distância $d/2$ - expressão (II. 4) - decresce, por efeito de escala, com o aumento da espessura das lajes segundo a equação (II. 5),

$$\tau_c = \frac{P_u}{\pi \cdot (c + d) \cdot d} \quad (\text{II. 4})$$

$$\tau_c = 1,80 \cdot f_{ct} \cdot (1 + d/24)^{-1/2} \quad (\text{II. 5})$$

obtendo-se, por igualdade entre as duas expressões anteriores:

$$P_u = \frac{1,80 \cdot \pi \cdot (c + d) \cdot d \cdot f_{ct}}{\sqrt{1 + \frac{d}{24}}} \quad (\text{II. 6})$$

Vários autores apresentaram diferentes factores para traduzir o efeito de escala introduzido pela espessura das lajes, em função da altura útil das mesmas, como se indica (com d expresso em mm):

$$\left(\frac{1000}{d} \right)^{1/3} \quad (\text{Regan } et al., 1985; \text{Broms, 1990}) \quad (\text{II. 7})$$

$$\left(\frac{500}{d} \right)^{1/4} \quad (\text{Shehata, 1990}) \quad (\text{II. 8})$$

$$\frac{1300}{1000 + d} \quad (\text{Sherif } et al., 1996) \quad (\text{II. 9})$$

$$\frac{1600 - d}{1000} \geq 1 \quad (\text{IPQ, 1998}) \quad (\text{II. 10})$$

A maioria dos actuais códigos e regulamentos incluem um factor (designado por factor de efeito de escala) para ter em conta a redução da tensão resistente ao corte em função do aumento da espessura da laje. Em particular, a expressão (II. 9) corresponde ao factor incluído na norma canadense A23.3-04 (CSA, 2004) enquanto a expressão (II. 10) corresponde ao articulado, já abandonado, de anteriores versões do Eurocódigo 2.

Segundo Birkle, o efeito de escala é menos pronunciado em lajes com armadura transversal (Birkle, 2004). O mesmo autor, num trabalho experimental recente (Birkle *et al.*, 2008), conclui ser inseguro o dimensionamento de lajes sem armadura transversal com espessura superior a 260 mm recorrendo à norma americana (ACI, 2005), cuja formulação não considera o efeito de escala. O autor sugere ainda a necessidade de urgente investigação sobre o efeito de escala em lajes com armadura transversal.

II.3.3 Armadura longitudinal

A localização e a percentagem da armadura longitudinal são parâmetros influentes na capacidade última e na figura de rotura por punçoamento.

O efeito da localização da armadura longitudinal foi estudado por Moe, em 1961, através de um vasto programa de ensaios sobre punçoamento. Destaca-se o estudo efectuado sobre o efeito da concentração das armaduras principais na região do pilar (Figura II-11). Ao contrário do que seria de esperar, o autor conclui que a capacidade resistente ao punçoamento não é alterada (ou apenas diminui ligeiramente) em relação à observada em lajes com a mesma quantidade de armaduras igualmente espaçadas (Moe, 1961). A justificação apontada é a de que a concentração das armaduras principais na vizinhança do pilar conduz a um aumento das tensões de compressão na secção crítica^b.

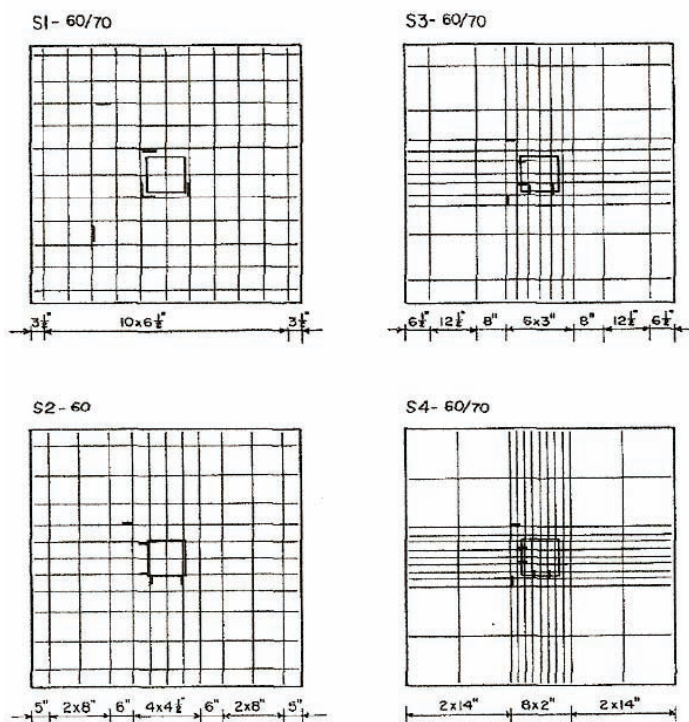


Figura II-11 - Disposição das armaduras na série S de ensaios (Moe, 1961).

A pormenorização da armadura foi também estudada por Menétrey, recorrendo à utilização de armaduras circulares ou dispostas em malha, nos modelos apoiados em todo o contorno representados na Figura II-12 (Menétrey, 1998).

b - A secção crítica é a secção que acompanha o contorno crítico e se estende ao longo da altura útil

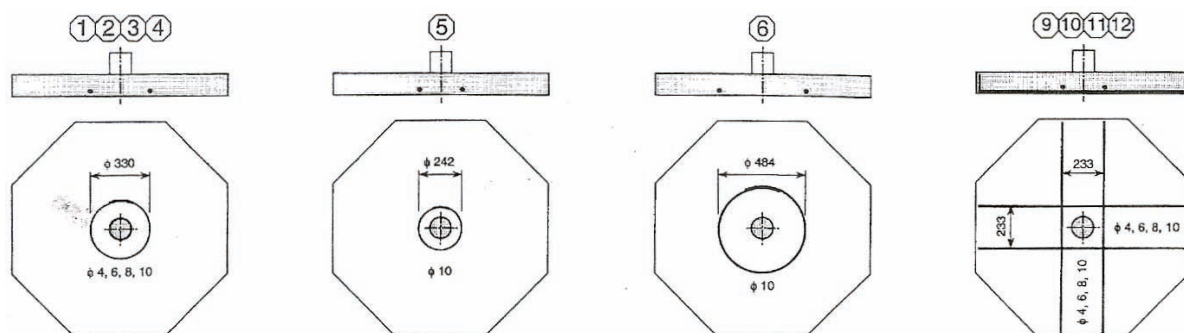


Figura II-12 - Disposição das armaduras principais (Menétrey, 1998).

A utilização de um único varão circular a diferentes distâncias do pilar determinou a formação de apenas uma fenda, com inclinação variando entre 30°, 45° e 60° relativamente ao plano médio da laje conforme se ilustra na Figura II-13. Menétrey relaciona ainda a natureza da ruína com a inclinação da superfície de rotura, associando uma rotura por flexão no caso de elevadas inclinações ou por punçoamento no caso contrário.

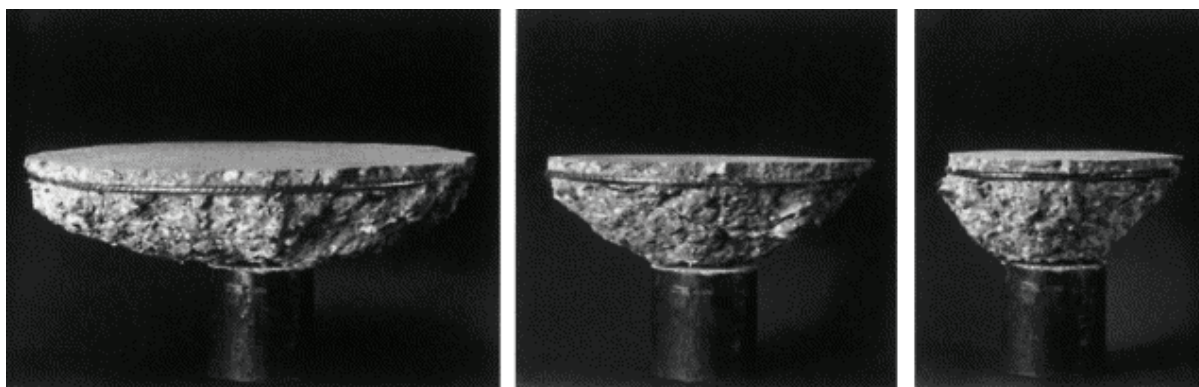


Figura II-13 - Cones de punçoamento com diferentes inclinações: 30°, 45° e 60° (Menétrey, 1998).

Marzouk reporta que a capacidade última ao punçoamento é incrementada com a percentagem de armaduras longitudinais: para lajes em BER munidas de elevadas taxas de armadura, a plastificação das armaduras, a existir, ocorre para níveis elevados do carregamento mas é concentrada na vizinhança do pilar (Marzouk *et al.*, 1991). Ao invés, para reduzidas percentagens, a plastificação das armaduras inicia-se na vizinhança do pilar atingindo gradualmente todo o comprimento da laje.

A percentagem de armadura longitudinal também determina a natureza da rotura. Genericamente, com o decréscimo da percentagem de armadura, o comportamento torna-se mais dúctil, acompanhado de redução da capacidade resistente, como se ilustra no Gráfico II-3, onde V_{flex} é a carga correspondente à formação do mecanismo associado às linhas de rotura (Criswell, 1974). A ruína é classificada de rotura em flexão se o rácio ϕ_0 (Gráfico II-3) é igual ou superior à unidade; caso contrário é qualificada de rotura por punçoamento. As análises numéricas conduzidas por Menétrey confirmaram esta tendência (Menétrey, 2002).

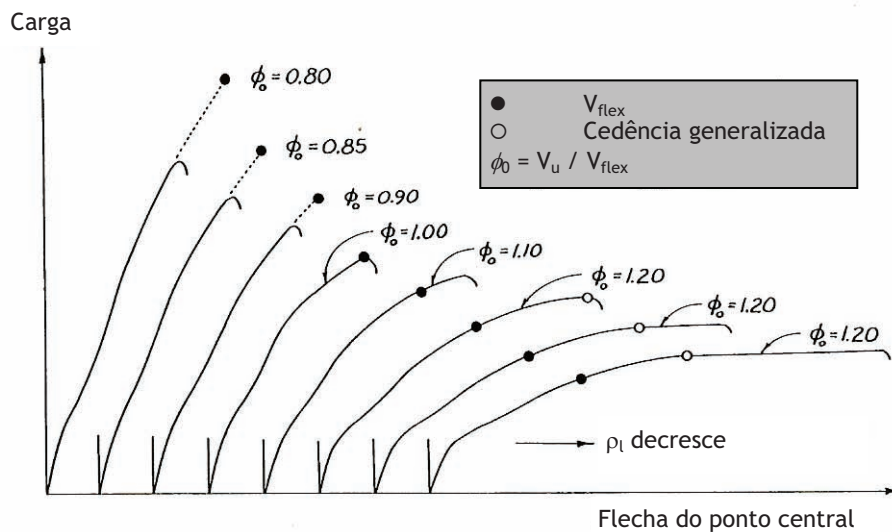


Gráfico II-3 - Efeito da percentagem de armadura longitudinal no comportamento de ligações laje/pilar sob punção centrado (Criswell, 1974).

Num vasto programa experimental sobre o comportamento pós-rotura de lajes fungiformes, conduzido na *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Mirzaei *et al.* realizaram muito recentemente uma campanha compreendendo o ensaio de 24 modelos de laje cuja geometria se ilustra na Figura II-14a (Mirzaei *et al.*, 2008). Investiga-se a influência da armadura longitudinal, da armadura comprimida e da armadura transversal na capacidade de carga pós-pico.

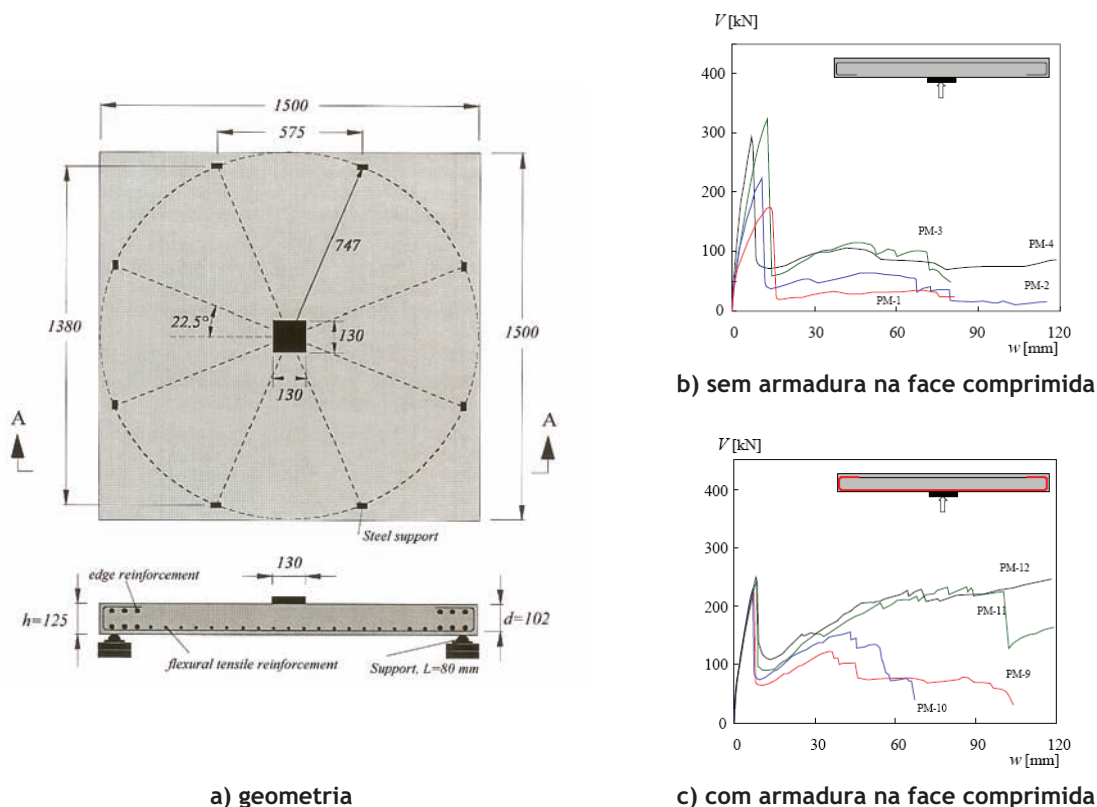


Figura II-14 - Geometria dos modelos de laje (mm) - planta e corte transversal e principais resultados e relações entre a carga aplicada e a flecha central (Mirzaei *et al.*, 2008).

Foram observadas roturas típicas por punçoamento, com perda brusca de capacidade uma vez atingida a carga de rotura. Os resultados evidenciam o importante papel desempenhado pela armadura longitudinal na fase de pós-rotura, em que parte da capacidade de carga é mantida e mesmo retomada (Figura II-14b), embora com expulsão do betão de recobrimento. O rácio entre a capacidade de carga em pós-rotura e a carga máxima cifra-se entre 0,21 ($\rho_l = 0,25\%$) e 0,37 ($\rho_l = 1,41\%$). Nos modelos que incluem armadura longitudinal na face comprimida concentrada na região do pilar (Figura II-14c), o efeito de ferrolho (ou de cavilha) assume um papel fundamental na capacidade resistente em pós-rotura, que foi claramente incrementada: o rácio anteriormente referido é de 0,55 a 0,98 ($\rho_l = 0,82\%$).

II.3.4 Atrito entre os agregados nas fendas de corte

A capacidade de transmissão de tensões de corte de uma fenda depende dos mecanismos que se opõem à separação das suas faces, que, por sua vez, resultam da composição do betão e da máxima dimensão dos agregados.

No betão de resistência normal (BRN), a superfície de fractura típica é rugosa (ocorrendo a rotura ao longo da interface agregado/matriz cimentícia) enquanto no BER as fendas apresentam uma superfície lisa (sem descontinuidade através da matriz cimentícia). O modo de fractura do BER é, por isso, frágil quando comparado com o do BRN.

O Gráfico II-4 mostra, esquematicamente, a influência da rugosidade das faces das fendas e da rectilinearidade do desenvolvimento das mesmas na capacidade de transmissão de tensões para elevadas deformações, através do ramo descendente da relação $\sigma_c - \delta$. Num betão de agregados leves (BAL), no qual as fendas se propagam através dos agregados, a superfície da fenda é pouco acidentada em comparação com o que ocorre nos betões simples (BRN). Com o visível aumento da inclinação do ramo pós-pico, a energia de fractura é incrementada o que aponta para o aumento de ductilidade do material (Hordijk, 1991).

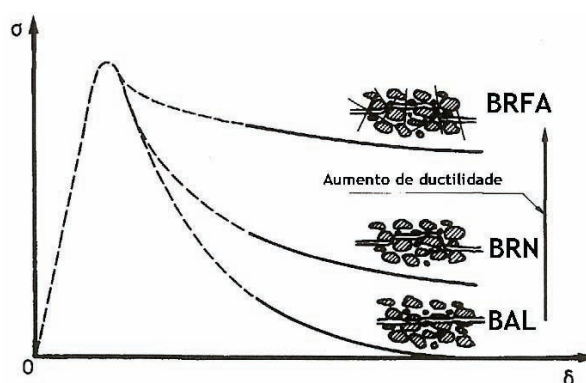


Gráfico II-4 - Influência da rugosidade na capacidade de transferência de tensões para grandes aberturas de fendas (adaptado de Hordijk, 1991).

Também a incorporação de fibras de aço, em betões de elevada resistência, pode, segundo

Cánovas, dar lugar a um incremento notável da ductilidade (Cánovas, 2005). Efectivamente, nos betões reforçados com fibras de aço (BRFA), as fibras que atravessam as fendas oferecem oposição suplementar à abertura das mesmas e ao deslizamento relativo das suas faces, contribuindo para a maior resistência ao corte dos BRFA comparativamente com a dos correspondentes betões simples (Barros, 1995).

Em 2002, Holanda conduziu ensaios de lajes quadradas submetidas a carregamento centrado com 1160 mm de lado e 100 mm de espessura, simplesmente apoiadas no seu contorno, incorporando diferentes tipos e volumes de fibras de aço e diferentes classes de resistência do betão (Holanda, 2002), tendo concluído que: (1) as deformações na rotura aumentaram com a adição de fibras; (2) as fibras actuam de forma semelhante a uma armadura de punçoamento, proporcionando aumento da rotação última das lajes; também a inclinação da fissura de punçoamento aumentou com a adição das fibras de aço; (3) as lajes com fibras apresentaram maior capacidade resistente residual após atingirem a carga máxima (pós-rotura). A resistência residual é normalmente proporcionada pelo efeito de cavilha da armadura longitudinal, podendo ser aumentada por meio da combinação da acção de cavilha com o efeito de “costura” das fendas por acção das fibras.

II.3.5 Armadura específica de punçoamento

O aumento da percentagem de armadura longitudinal incrementa, como se disse, a capacidade resistente ao punçoamento mas, conjuntamente, reduz o rácio ϕ_0 (ver Gráfico II-3, pág. 22), o que se traduz em menores rotações da laje na rotura (por via da maior rigidez). Diversos autores (Seible *et al.*, 1980; Barros, 1995; Polak, 2005; Muttoni, 2008) apontam, por isso, a inclusão de armadura transversal na região de apoio de uma laje fungiforme como a solução mais económica e adequada para incrementar a capacidade resistente ao punçoamento, aumentando, simultaneamente, a capacidade de rotação da ligação laje/pilar.

Utilizando-se betões de elevada resistência, o reforço dado pela armadura tem uma importância acrescida devido ao facto destes serem mais frágeis que os de resistência inferior (Marzouk *et al.*, 1991; Cruz, 1998). Deste modo, aspectos ligados ao aumento da ductilidade dos betões assumem importância significativa.

Vários autores (Seible *et al.*, 1980; Elgabry *et al.*, 1987; Hallgren, 1996; Marzouk *et al.*, 1997) ensaiaram modelos de laje reforçados com diferentes tipos de armaduras transversais (varões inclinados simples e duplos, perfis em T e em I, ganchos em forma de U e pernos (*double headed shear studs*), com vista à avaliação da sua contribuição e eficácia no desempenho ao punçoamento.

Em 1987, Elgabry *et al.* apresentaram os resultados do ensaio de cinco lajes (dimensões $1,90 \times 1,90 \times 0,15 \text{ m}^3$) com diferentes disposições da armadura transversal constituída por pernos (*studs*, Figura II-15a) analisando o efeito de distintas excentricidades ($e/c = 0, 1, 2$ e 4). O sistema de ensaio é o esquematizado na Figura II-15b.

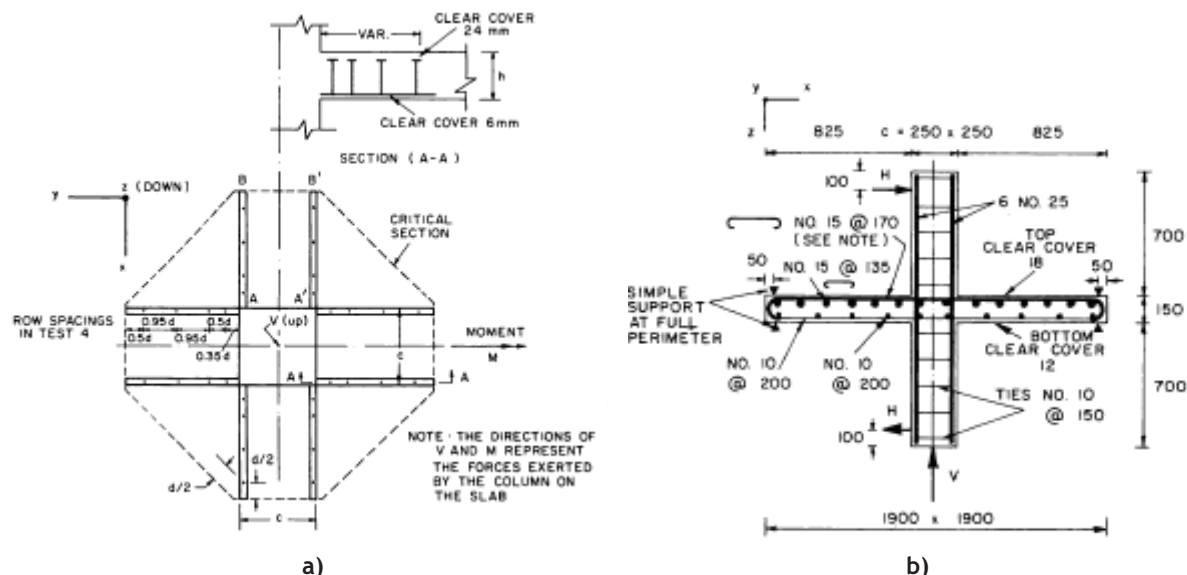


Figura II-15 - a) Vista geral do ensaio de uma laje submetida a punçoamento excêntrico; b) Pormenorização das armaduras transversais (Elgabry *et al.*, 1987).

Nesse estudo, os resultados obtidos vão no sentido de confirmar o elevado desempenho deste tipo de armadura transversal incrementando a capacidade resistente e a ductilidade da ligação laje/pilar. Também a rotação do pilar (ensaio excêntrico) é duplicada com a inclusão de armadura transversal.

Hallgren ensaiou 10 modelos de lajes circulares com 2540 mm de diâmetro, 240 mm de espessura e 200 mm de altura útil, sendo o pilar também circular com 250 mm de diâmetro, fazendo variar a resistência à compressão do BER (de 84 a 109 MPa) e a percentagem de armadura longitudinal de 0,33 % a 1,19 % (Hallgren, 1996; Hallgren *et al.*, 1996). O carregamento, uniformemente distribuído, está inscrito num círculo de diâmetro $B = 2400$ mm. Três lajes continham armaduras de punçoamento constituídas por varões inclinados a 30° . A Figura II-16 apresenta o sistema de ensaio e a geometria dos respectivos modelos de lajes.

Todas as lajes romperam por punçoamento. No caso das lajes com armadura transversal ($\rho_w = 0,20 \%$ a $0,30 \%$) o acréscimo da capacidade de carga última atingiu os 69% enquanto a capacidade de retenção da carga após rotura foi de aproximadamente 50% da carga última.

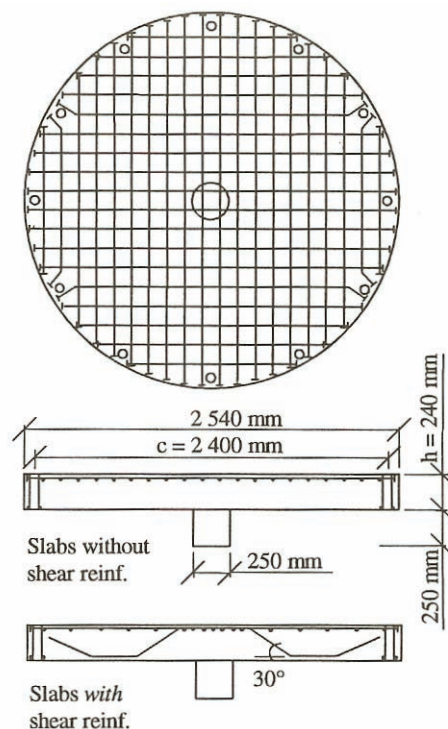


Figura II-16 - Geometria dos modelos de laje e das armaduras (Hallgren, 1996).

Marzouk demonstra que, em lajes de betão de elevada resistência, e para os casos dos varões inclinados duplos, dos pernos (Figura II-17) e dos perfis em T, a capacidade resistente ao punçoamento pode ser incrementada em pelo menos 15 % (Marzouk *et al.*, 1997). Incrementadas são também a ductilidade e a absorção de energia. Menos eficientes mostraram ser os ganchos U devido à deficiente amarração.

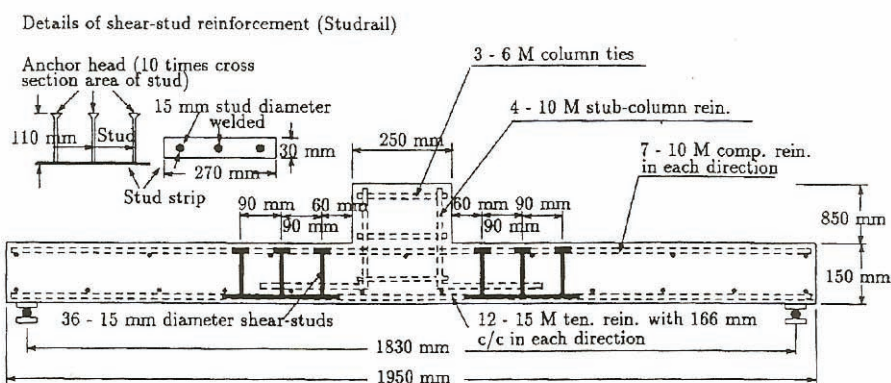


Figura II-17 - Secção transversal da laje HS22 com armadura transversal do tipo perno (Marzouk *et al.*, 1997).

Num estudo recente, Broms aponta a inclusão de armadura transversal como um sistema capaz de incrementar a capacidade resistente, de proporcionar a necessária redistribuição de momentos e de prevenir o colapso progressivo de pavimentos constituídos por lajes fun-giformes (Broms, 2007). Para o caso de lajes espessas, Muttoni confirma a armadura transversal como a única solução para alcançar adequada ductilidade da ligação laje/pilar (Muttoni, 2008).

Especial atenção deve, no entanto, ser dada à pormenorização de tal armadura pois a simplicidade da colocação e do posicionamento e a não-interferência com a armadura longitudinal constituem vantagens que não devem ser descuradas. A armadura transversal pode ser uniformemente distribuída em torno do pilar (distribuição radial) ou, com vantagem, ser colocada em faixas perpendiculares às faces do pilar (Voet *et al.*, 1982; Birkle, 2004) como se indica na Figura III-7, pág. 53.

II.3.6 Excentricidade da carga

Se a uma laje fungiforme são aplicadas cargas horizontais, ou cargas verticais não uniformes, causando a transferência de momentos entre a laje e o pilar, o fenómeno do punçoamento torna-se mais complexo envolvendo não apenas esforços de corte mas também de flexão e torção. Refira-se que, na maior parte dos casos, a carga de punçoamento está associada à presença de um momento flector, transmitido da laje ao pilar, provocado pela existência de diferentes vãos ou pela não uniformidade do carregamento.

Quando a carga é introduzida com excentricidade, a superfície de rotura perde o seu carácter axisimétrico em relação ao pilar (ou à área carregada) como se ilustra na Figura II-18 e verifica-se uma redução da capacidade última.

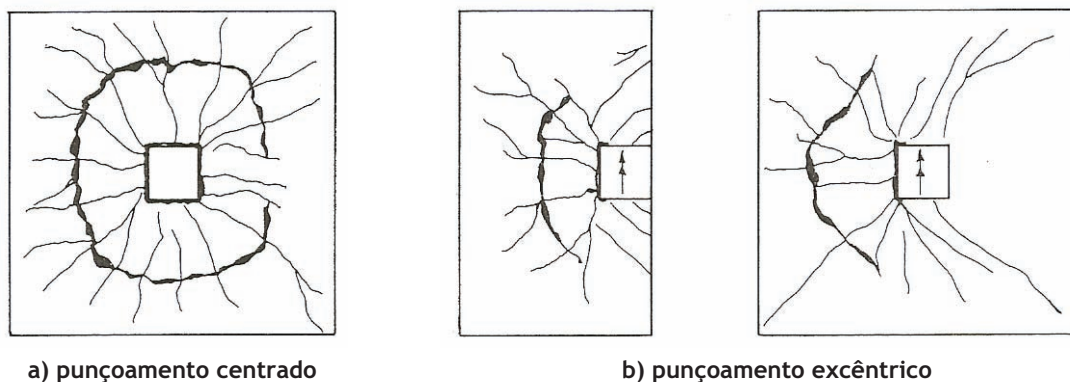


Figura II-18 - Roturas típicas por punçoamento (Alexander *et al.*, 1987).

No caso de carregamento simétrico, o padrão de fissuração e a forma da rotura assemelham-se às indicadas na Figura II-18a. Ao invés, a presença simultânea de punçoamento e flexão, que ocorre sempre que há transmissão de momento da laje ao pilar, manifesta-se como se mostra na Figura II-18b. A região do cone de punçoamento desenvolve-se principalmente do lado mais carregado da laje. A região oposta apresenta fissuração reduzida ou inexistente (Alexander *et al.*, 1987).

A complexidade do fenómeno do punçoamento excêntrico resulta, em grande medida, da dificuldade em avaliar a grandeza dos momentos flectores transmitidos da laje (elemento bidimensional) para o pilar (elemento linear).

Os primeiros ensaios a contemplar a presença de carregamento excêntrico datam de 1956, quando Elstner *et al.* testaram 39 modelos de laje quadrados com dimensões $1,80 \times 1,80 \times 0,15 \text{ m}^3$ carregadas por meio de um pilar de secção quadrada (Figura II-19).

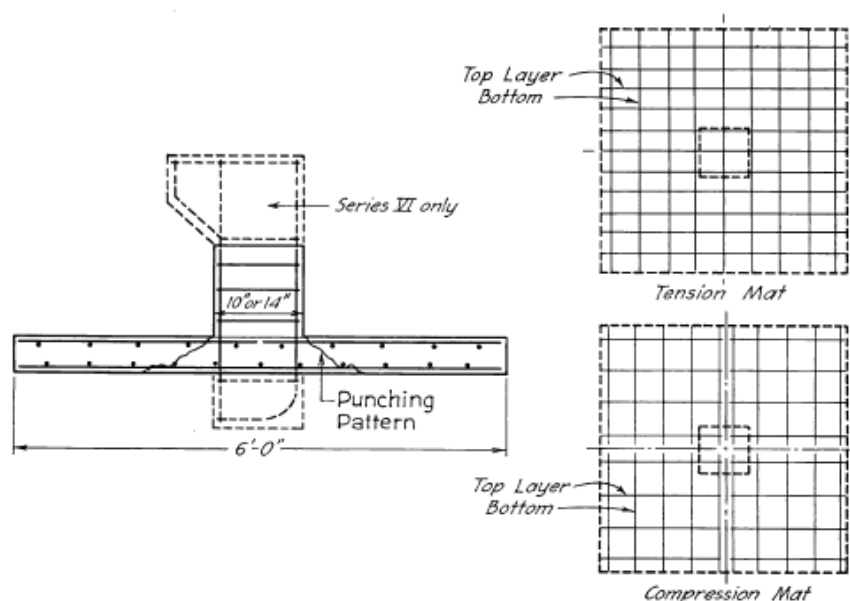


Figura II-19 - Geometria dos modelos de laje - planta e corte transversal (Elstner *et al.*, 1956).

As principais variáveis dos ensaios são a resistência à compressão do betão, a percentagem de armaduras traccionadas e comprimidas, a dimensão da secção do pilar (0,254 m e 0,356 m), a armadura de punçoamento e a excentricidade da carga. Duas das lajes foram ensaiadas com excentricidade igual a 0,178 m (0,5 da dimensão da secção transversal do pilar). Estranhamente, os autores concluem que a excentricidade da carga bem como a inclusão de armadura de compressão têm pouca ou nenhuma influência na capacidade de carga.

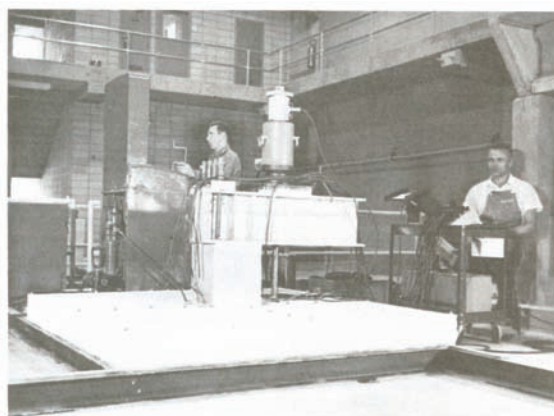
As conclusões obtidas estão, naturalmente, em desacordo com as de outros autores (Moe, 1961; Krüger, 1999) e com as do presente trabalho (ver Capítulo VI).

Em 1961, Moe ensaia experimentalmente um grande número de lajes em betão armado de dimensões $1,82 \times 1,82 \times 0,15 \text{ m}^3$ (Moe, 1961). As principais variáveis do programa de ensaios desenvolvido foram a presença de aberturas na laje, a concentração das armaduras longitudinais na vizinhança do pilar, a armadura de punçoamento e a forma e as dimensões do pilar bem como a excentricidade da carga (Figura II-20a). Dos 43 ensaios de punçoamento realizados, 12 compreendem uma excentricidade da força aplicada. As lajes submetidas a punçoamento excêntrico não dispunham de armaduras transversais.

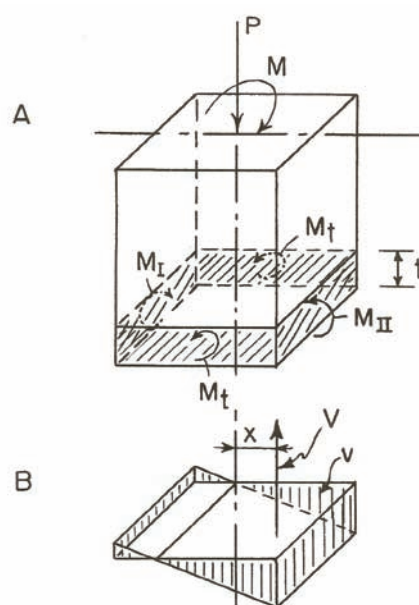
Moe aponta que, no caso do punçoamento excêntrico, o estado de tensão em torno do pilar é complexo pelo que, para se estabelecerem equações de dimensionamento, algumas simplificações devem ser consideradas.

Em primeiro lugar, admite que as tensões de corte são constantes ao longo dos troços do perímetro crítico perpendiculares ao eixo de simetria, como se mostra na Figura II-20b. No restante perímetro, tais tensões variam linearmente. A resultante das tensões de corte, V (x representa a excentricidade da resultante V), deve equilibrar a carga aplicada, P . Ainda, a soma dos momentos internos (flectores e torsões) deve estar em equilíbrio com o momento aplicado M . Para determinar o valor máximo da distribuição das tensões de corte devidas ao momento flector é necessário estabelecer uma expressão explicitando a parte do momento flector transmitido por corte (KM). Simplificadamente, Moe apresenta a expressão (II. 11).

$$V \cdot x = M - (2M_t + M_{II} - M_I) = KM \quad (\text{II. 11})$$



a)



b)

Figura II-20 - a) Vista geral do ensaio de uma laje submetida a punção excêntrica (Série de lajes M);
b) Esforços internos induzidos por M e P (Moe, 1961).

Admite-se, também, a hipótese de que as tensões de corte devidas à resultante V são uniformemente distribuídas ao longo da altura útil d da laje. Para o caso de pilares de secção transversal quadrada, Moe apresenta a seguinte expressão para a determinação do valor máximo da tensão de corte, $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{4cd} + \frac{3KM}{4c^2d} = \frac{P}{4cd} \cdot \left(1 + \frac{3Ke}{c}\right) \quad (\text{II. 12})$$

Nas expressões anteriores, os símbolos têm o seguinte significado:

K	coeficiente determinado experimentalmente que fornece a parte do momento transmitido por corte
c	dimensão do lado da secção transversal do pilar
$e = M/P$	excentricidade da carga P transmitida ao pilar

Finalmente, estabelece que a rotura por punçoamento excêntrico da laje é alcançada para um valor de $\tau_{\max}$ igual à tensão última, τ_u (II. 13), associada à carga de rotura de uma laje idêntica submetida a punçoamento centrado, para a qual apresenta a expressão:

$$\tau_u = \frac{15 \cdot \left(1 - 0,075 \cdot \frac{c}{d}\right)}{1 + 5,25 \cdot \frac{u_0 \cdot d \cdot \sqrt{f_{ck}}}{V_{flex}}} \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{II. 13})$$

Igualando as expressões (II. 12) e (II. 13), a carga de rotura sob punçoamento excêntrico, determinada com base no perímetro crítico correspondente à face do pilar, é dada por:

$$P_u = \frac{V_c}{1 + 3K \frac{e}{c}} \quad (\text{II. 14})$$

onde:

$$V_c = 4cd\tau_u \quad \text{carga última para uma laje idêntica submetida a punçoamento centrado, obtida pela expressão (II. 17), pág. 33}$$

O autor define experimentalmente o valor $K = 1/3$, para o caso de pilares de secção quadrada, o que significa que 33 % do momento flector M contribui para as tensões de corte ao nível da secção crítica.

Moe reconhece, no entanto, que algumas das hipóteses formuladas resultam numa formulação aproximada, em particular a que estabelece que uma laje atinge a carga de rotura para o valor de $\tau_{\max}$ independentemente do carregamento ser centrado ou excêntrico. Os ensaios mostram, nestes dois casos, que os estados de fissuração e as tensões nas armaduras longitudinais, ao nível do perímetro crítico, são distintos pelo que também o valor máximo da tensão de corte deveria ser distinta. Outras pesquisas foram por isso desencadeadas com o objectivo de determinar o factor K para distintas formas da secção do pilar. Finalmente, é de notar que a hipótese de Moe em relação ao perímetro crítico, u_0 , se situar na vertical da face do pilar é muito questionável.

Em 1989, Hawkins *et al.* apresentam os resultados de um vasto programa experimental que inclui o ensaio de 36 modelos de lajes, analisando o efeito de parâmetros como a percentagem de armadura longitudinal e a excentricidade do carregamento. Os modelos são agrupados em seis séries de ensaios em função de: espessura da laje, resistência à compressão do betão, utilização de betão de agregados leves, uso de armadura transversal, disposição da armadura longitudinal e dimensões da secção transversal do pilar, $c_1^c \times c_2$ (relações c_1/c_2 de 0,5, 1, 2 e 3).

$c - c_1$ é a dimensão do pilar na direcção do momento aplicado (ver Figura II-21)

As lajes, de dimensões $2,10 \times 2,10 \text{ m}^2$ em planta e espessuras de 0,114 e 0,153 m, são apoiadas em diferentes pilares cujo perímetro constante se fixou em $u_0 = 1219 \text{ mm}$ (Figura II-21). Foram utilizadas duas excentricidades correspondentes a relações $e/c \cong 0,4$ (excentricidade menor - L (*low*) = 0,130 m) e $e/c \cong 1,9$ (excentricidade maior - H (*high*) = 0,584 m).

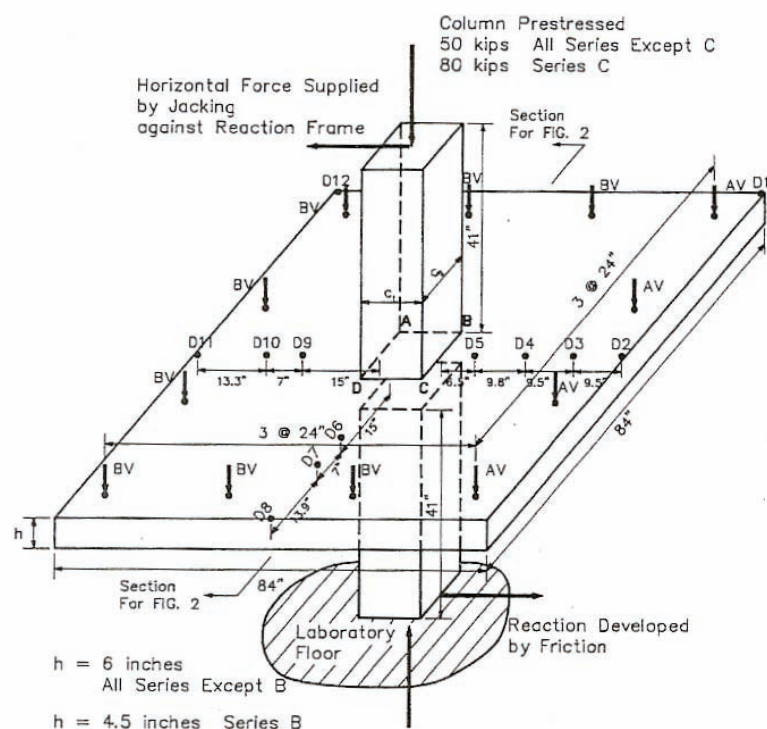


Figura II-21 - Vista geral dos ensaios de lajes submetidas a punção excêntrica (Hawkins *et al.*, 1989).

As principais conclusões apontadas são: (1) a espessura da laje não influencia a ductilidade da ligação para elevadas excentricidades (H). Para a menor excentricidade (L), a ductilidade diminui com o aumento da espessura da laje; (2) na presença de armadura transversal adequada, o comportamento global aproxima-se do comportamento em flexão; (3) a rigidez da laje aumenta quando a armadura longitudinal é concentrada na vizinhança do pilar, independentemente da excentricidade aplicada; (4) elevadas relações c_1/c_2 ($c_1/c_2 = 2$ e 3) conduzem a fortes reduções de ductilidade enquanto baixas relações (0,5 e 1) não têm influência na ductilidade da ligação.

Mais recentemente, Krüger ensaia experimentalmente sete lajes em betão armado de dimensões $3,00 \times 3,00 \times 0,15 \text{ m}^3$ apoiadas em pilares quadrados de 0,30 m de lado, como se mostra na Figura II-22 (Krüger, 1999). As principais variáveis do programa de ensaios foram a excentricidade da força de punção (0, 0,16 m e 0,32 m), a percentagem de armadura longitudinal (1,0 % e 1,3 %) e o tipo de armadura transversal (sem armadura, com estribos e com Pernos). Cinco das lajes foram ensaiadas sob carregamento excêntrico cujos resultados são comparados com duas lajes de referência.

O autor conclui que a ductilidade da ligação diminui com o aumento da percentagem de armadura longitudinal. A armadura transversal, ao invés, potencia o aumento da capacidade de carga e da ductilidade da ligação laje/pilar.

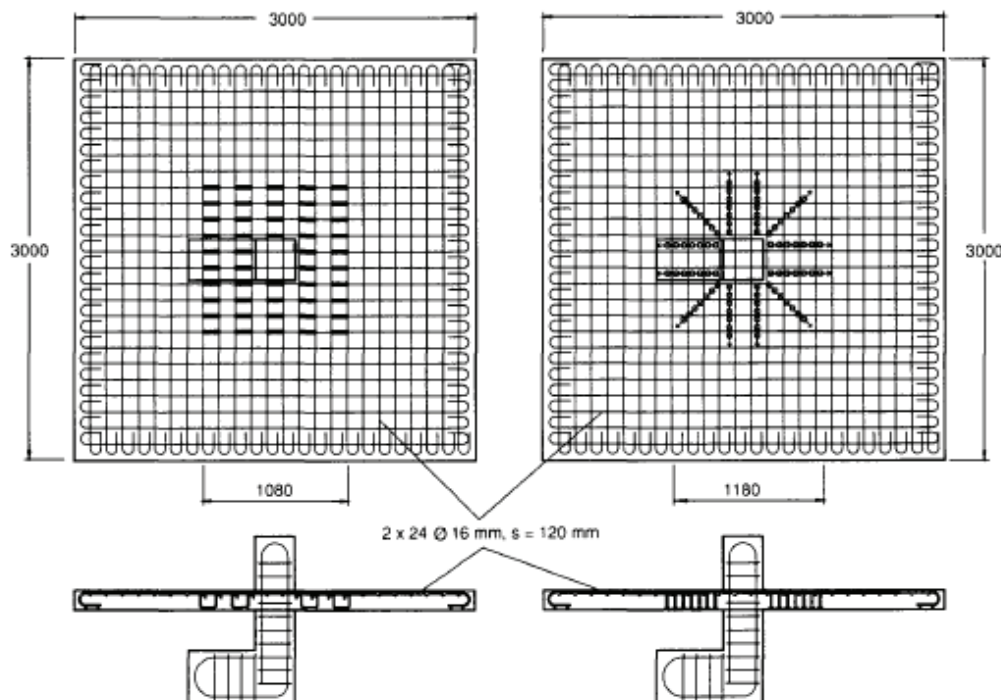


Figura II-22 - Pormenorização das lajes com armadura transversal submetidas a punção excêntrica (Krüger, 1999).

Relativamente à excentricidade do carregamento, os resultados obtidos apontam uma relação linear entre o momento flector e a carga de punção, que, segundo Krüger, é confirmada por diferentes normas, incluindo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) que fornece a melhor previsão das cargas de rotura. A inclusão de armadura transversal não influencia significativamente os efeitos da excentricidade.

II.4 MODELOS DE COMPORTAMENTO AO PUNÇÃOAMENTO

Vários autores têm definido a rotura por punção de formas diversas e nem sempre convergentes, devendo-se este facto à complexidade do problema e ao grande número de parâmetros envolvidos. Assim, não sendo fácil construir modelos matemáticos genéricos e acessíveis para a determinação da resistência ao punçãoamento, têm sido adoptados diferentes modelos empíricos ou semi-empíricos baseados em resultados experimentais (Faria *et al.*, 1997). Os modelos empíricos baseiam-se, na sua grande maioria, em ensaios efectuados em modelos sujeitos a punçãoamento centrado.

Em 1913, Talbot, com base em ensaios efectuados na Universidade de Illinois, propôs para a determinação da resistência ao punçãoamento o método assente no conceito de *control*

surface approach (Talbot *et al.*, 1913), conhecido entre nós como método da superfície de referência ou de controlo.

Alterações a este modelo, nomeadamente no que respeita à definição da superfície de controlo e à distribuição das tensões ao longo da espessura da laje, à influência da armadura longitudinal, à existência de momentos flectores, etc., foram introduzidas ao longo dos anos.

Talbot considerou que a secção de controlo se encontra distanciada de d (altura útil da laje) da área directamente carregada. O valor da tensão nominal de corte (também designada por tensão resistente), τ_c , determinada pela equação (II. 15), suposta constante ao longo da espessura da laje, vem aproximadamente igual ao valor da tensão resistente ao corte em vigas sem armaduras de esforço transversal.

$$\tau_c = \frac{P}{4 \cdot (c + 2d) \cdot z} \quad (\text{II. 15})$$

Na expressão (II. 15), os símbolos têm o seguinte significado:

c	lado do pilar quadrado actuado pela força de punçoamento, P
z	braço das forças internas

As expressões obtidas com base no método da superfície de controlo são simples e de fácil aplicação, o que levou à sua adopção pela maior parte dos códigos e demais regulamentação (Menétrey, 1994). Apresentam-se, seguidamente, duas das expressões propostas.

Na sequência de uma campanha experimental (Eltner *et al.*, 1956) propõem, com base nos resultados dos ensaios sob punçoamento centrado, a expressão (II. 16) para a determinação da capacidade resistente ao punçoamento (f_{ck} em MPa).

$$V_c = \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{0,046 \cdot f_{ck}}{\phi_0} + 2,294 \right) \cdot u_0 \cdot d \quad (\text{II. 16})$$

em que:

$\phi_0 = V_u / V_{flex}$	quociente entre a carga de rotura por punçoamento e a carga correspondente à formação do mecanismo associado às linhas de rotura
u_0	comprimento do perímetro da área carregada

Como já referido, Moe propõe a expressão seguinte para a determinação da capacidade resistente ao punçoamento centrado (Moe, 1961):

$$V_c = \tau_u \cdot u_0 \cdot d \quad (\text{II. 17})$$

A expressão (II. 17), onde τ_u é dado na equação (II. 13), continua, segundo (Muttoni, 2008),

na base do articulado da norma americana (ACI, 2005).

O primeiro modelo a constituir uma abordagem global à determinação da capacidade resistente ao punçoamento de lajes foi o modelo físico de Kinnunen e Nylander, desenvolvido na *Royal Technical University* de Estocolmo (Dinamarca) em 1960. Este modelo foi posteriormente revisto por outros investigadores: Andersson (Andersson, 1963), Shehata (Shehata, 1990), Hallgren (Hallgren, 1996) e Broms (Broms, 2005), entre outros.

Os mais relevantes modelos e critérios de rotura são sucintamente analisados no que se segue.

II.4.1 Modelo de Kinnunen e Nylander

O modelo de Kinnunen e Nylander (Kinnunen *et al.*, 1960) - Figura II-24 - continua a ser um dos modelos físicos mais úteis para compreender o comportamento das lajes fungiformes sob punçoamento (Muttoni *et al.*, ; Guandalini, 2005).

O modelo mecânico de Kinnunen e Nylander tem, no entanto, a sua aplicação restringida ao caso das lajes fungiformes sem armadura específica de punçoamento, tendo sido desenvolvido com base na observação de 61 ensaios, realizados em 1960, de lajes circulares apoiadas em pilares também circulares (Figura II-23) com armaduras dispostas em duas direcções ortogonais, em anéis concêntricos ou nas direcções radial e tangencial.

O comportamento observado nos referidos ensaios caracterizou-se pela divisão da zona da laje exterior ao cone de punçoamento em segmentos limitados por fendas radiais convergindo no pilar e por uma fenda circunferencial de flexão (Figura II-24a). Esses segmentos apoiam-se numa casca tronco-cónica de betão comprimido, situada entre a base do pilar e o início da fenda oblíqua de punçoamento, e comportam-se como corpos rígidos (Figura II-24b) no que respeita à sua deformação na direcção radial. Na referida região, solicitada radial, tangencial e verticalmente, a tensão de corte determina a inclinação da tensão radial. A rotura é originada pelas referidas fendas, que se formam em torno do pilar com inclinações compreendidas entre 30° e 35°.

O critério de rotura é definido pela limitação do valor das extensões tangenciais de compressão no betão do volume tronco-cónico.

Este modelo define com precisão o valor das tensões radiais e tangenciais na zona de rotura e ainda as deformações por rotação ao longo de todo o processo de carregamento, pelo que pode considerar-se como o modelo mais completo para a análise do punçoamento centrado (Bastos, 1997; Muttoni, 2008).

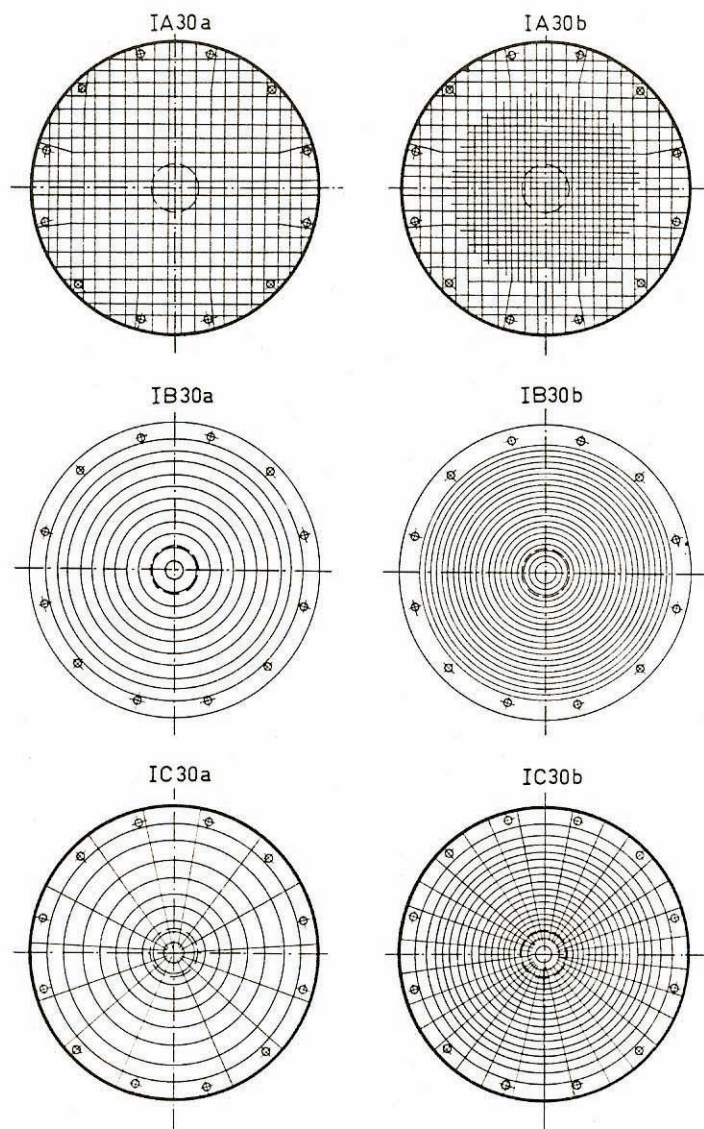


Figura II-23 - Disposição das armaduras dos modelos testados (Kinnunen *et al.*, 1960) com diferentes disposições das armaduras: série A - armadura ortogonal; série B - armadura circumferencial apenas; série C - armadura circumferencial e radial.

A teoria desenvolvida por estes autores conduz a resultados com boa contrapartida real e foi considerada, com algumas simplificações, na regulamentação sueca (Lima *et al.*, 1996).

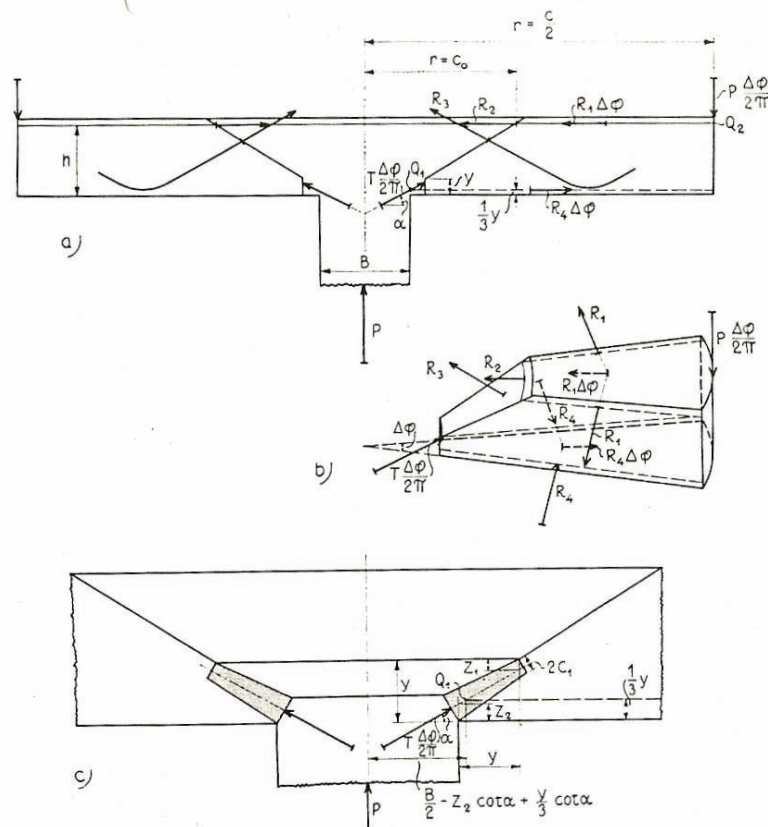


Figura II-24 - Modelo mecânico de punçoamento: a) corte transversal da laje; b) segmento de laje e cargas actuantes; c) região de apoio (Kinnunen *et al.*, 1960).

II.4.2 Modelo de Andersson

Andersson verificou que, em modelos de laje com armadura transversal, as deformações seguem uma distribuição aproximadamente linear desde o bordo da laje até ao pilar. Esta diferença de comportamento relativamente às lajes desprovidas de tal armadura está na génese do modelo de Andersson (Figura II-25), que introduz algumas modificações ao modelo de Kinnunen e Nylander de forma a tornar-se aplicável a lajes com armadura específica de punçoamento (Andersson, 1963).

Andersson adopta, como lei constitutiva do betão na direcção tangencial da laje, um diagrama bilinear elasto-plástico perfeito e considera que a rotura ocorre quando, à distância c_{pl} do centro da laje, dada nas expressões que se seguem, o valor das extensões tangenciais no betão atinge a extensão correspondente à plastificação, ε_{pl} , cujo valor é aproximadamente 0,002.

$$c_{pl} = (0,74 \cdot c/d + 1,45) \cdot d \quad \text{para } c/d \leq 2,5 \quad (\text{II. 18})$$

$$c_{pl} = (0,50 \cdot c/d + 2,05) \cdot d \quad \text{para } c/d > 2,5 \quad (\text{II. 19})$$

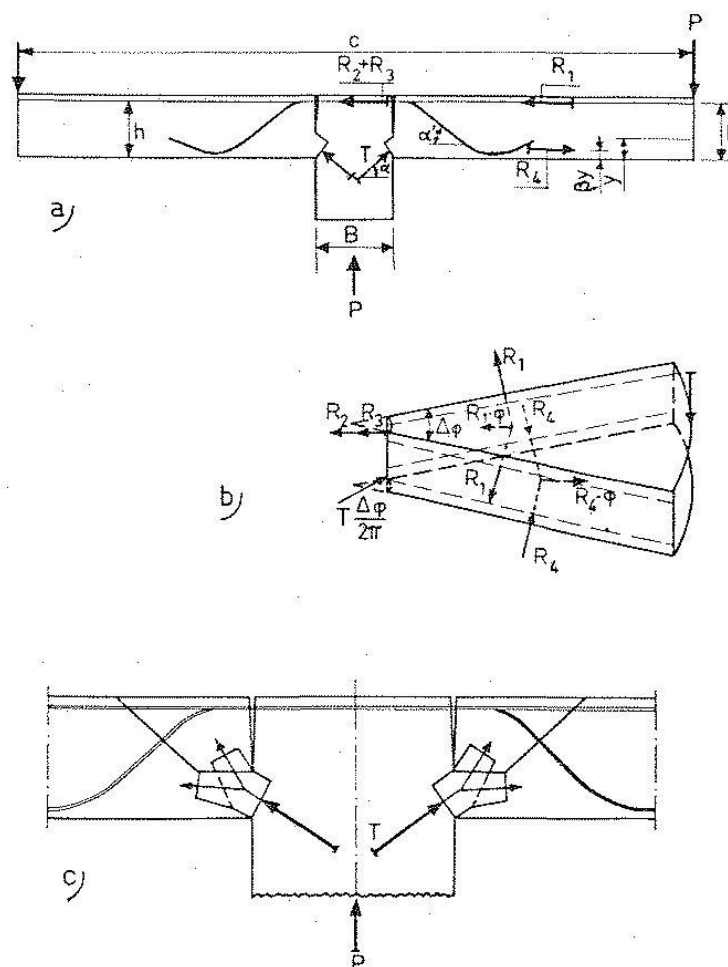


Figura II-25 - Modelo mecânico de punção (Andersson, 1963).

II.4.3 Modelo de Hallgren

Hallgren propôs um modelo físico, baseado no modelo de Kinnunen e Nylander, introduzindo o comportamento não-linear do betão e da armadura através de leis constitutivas bilineares (Hallgren, 1996). O critério energético de Hallgren baseia-se na extensão tangencial última no betão, ε_{cTu} , que é derivada de um modelo físico assente na Mecânica da Fractura não-linear. O critério de rotura reflecte o comportamento frágil do betão e o efeito de escala.

Como no modelo de Kinnunen e Nylander (ver II.4.1), o presente modelo considera lajes circulares apoiadas em pilares também circulares (Figura II-26), solicitadas por uma carga uniformemente distribuída na periferia das mesmas. A região da laje exterior ao cone de punção é dividida em segmentos, limitados pela fenda circunferencial de corte e por fendas radiais convergindo no pilar, que se comportam como corpos rígidos.

Os esforços aplicados à laje são transmitidos, da região exterior ao cone de punção

para o pilar, através de uma cunha de betão comprimido cujo comprimento, medido na direcção radial ao longo da face inferior da laje, obtido por projecção normal à resultante de compressões, T (ver Figura II-26), é dado por:

$$y = x \cdot (1 + \tan \alpha) \quad (\text{II. 20})$$

onde:

α	inclinação da resultante de compressões, T
x	altura da região comprimida na direcção tangencial

A altura da região de betão comprimido tangencialmente é determinada a partir da compatibilidade das tensões e extensões tangenciais, no betão e na armadura longitudinal, ao longo da secção que delimita dois segmentos de laje. Por outro lado, a inclinação da resultante de compressões, α , é inicialmente desconhecida sendo estabelecida como a principal variável do algoritmo iterativo conducente à determinação da carga de rotura. Em cada ciclo, é imposto o equilíbrio entre a carga aplicada, P , e a componente vertical da resultante de compressões, T , por iteração do ângulo α .

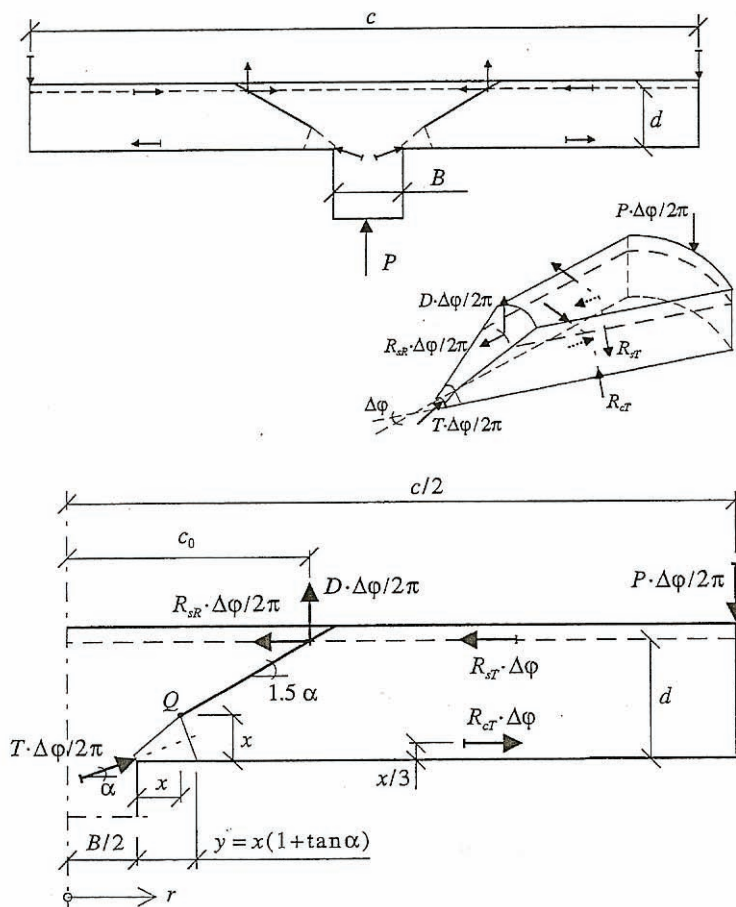


Figura II-26 - Modelo mecânico de punção (Hallgren, 1996).

Baseado em análises numéricas, Hallgren assume que o betão, situado à distância y (II. 20) da face do pilar (ver Figura II-27), está sujeito a um estado bidimensional de compressão

no plano horizontal (nas direcções radial e tangencial) e de tracção na direcção vertical.

Atingida a extensão tangencial última, ε_{cTu} , o referido betão entra em amolecimento^d. Simultaneamente, o confinamento traduzido pela tensão principal σ_{III} do estado tridimensional de compressão, instalado na zona de inserção do pilar na laje (ver Figura II-27), diminui. O referido estado de tensão torna-se “instável” (Hallgren, 1996) permitindo a progressão da fenda de corte através da zona comprimida (formação da fenda bipartida). A rotura por punçoamento ocorre então (Hallgren em EURO-C, 1998).

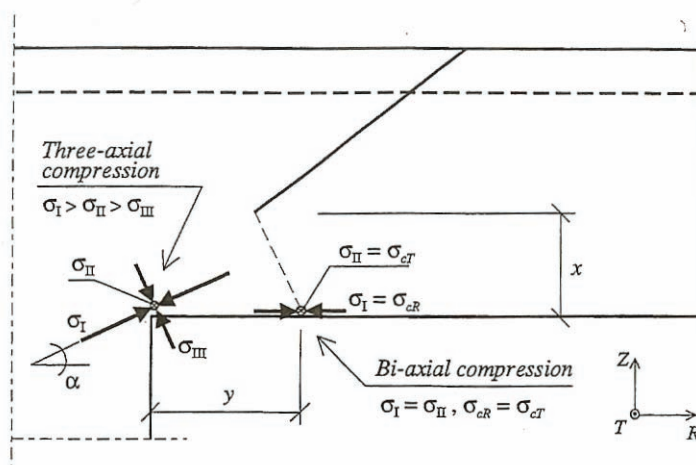


Figura II-27 - Estados de tensão (Hallgren, 1996).

A rotura é definida quando o betão da face inferior da laje, delimitado pela secção da face do pilar e pela secção distante y desta, estiver sujeito à extensão tangencial dada por:

$$\varepsilon_{cTu} = \frac{3,6 \cdot G_F^\infty}{x \cdot f_{ct}} \cdot \left(1 + \frac{13 \cdot d_{\max}}{x} \right)^{-1/2} \quad (\text{II. 21})$$

com:

$$G_F^\infty = G_F \cdot \left(1 + \frac{13 \cdot d_{\max}}{d^R} \right)^{1/2} \quad (\text{II. 22})$$

Nas expressões anteriores, os símbolos têm o seguinte significado:

G_F	energia de fractura, definida em (RILEM, 1994) - ver equação (IV. 25)
G_F^∞	energia de fractura para um elemento estrutural infinitamente grande
d^R	altura útil da viga de ensaio RILEM (RILEM, 1994), estabelecida em função da máxima dimensão dos agregados

Com base na comparação com ensaios experimentais, o autor demonstra que o modelo prevê adequadamente a capacidade resistente em lajes de BRN e BER. A aplicabilidade do

d - Amolecimento: crescimento da deformação sob carga decrescente

presente modelo está, todavia, limitada a lajes sem armadura transversal com esbelteza (II. 3) igual ou superior a 3,5.

II.4.4 Critério de Muttoni

Muito recentemente, Muttoni aponta alterações ao critério semi-empírico de rotura anteriormente proposto por ele próprio (Muttoni *et al.*, 1991), para o caso de carregamento centrado em lajes sem armaduras específicas de punçoamento.

Este critério baseia-se na rotação ψ da região da laje exterior ao cone de punçoamento (ver Gráfico II-5a). Segundo Muttoni *et al.*, o aumento da abertura da fenda de punçoamento reduz a capacidade da biela inclinada transmitir as tensões de compressão à região de inserção do pilar na laje. A abertura da fenda crítica pode ser tomada proporcional ao produto ψd (Muttoni *et al.*, 1991).

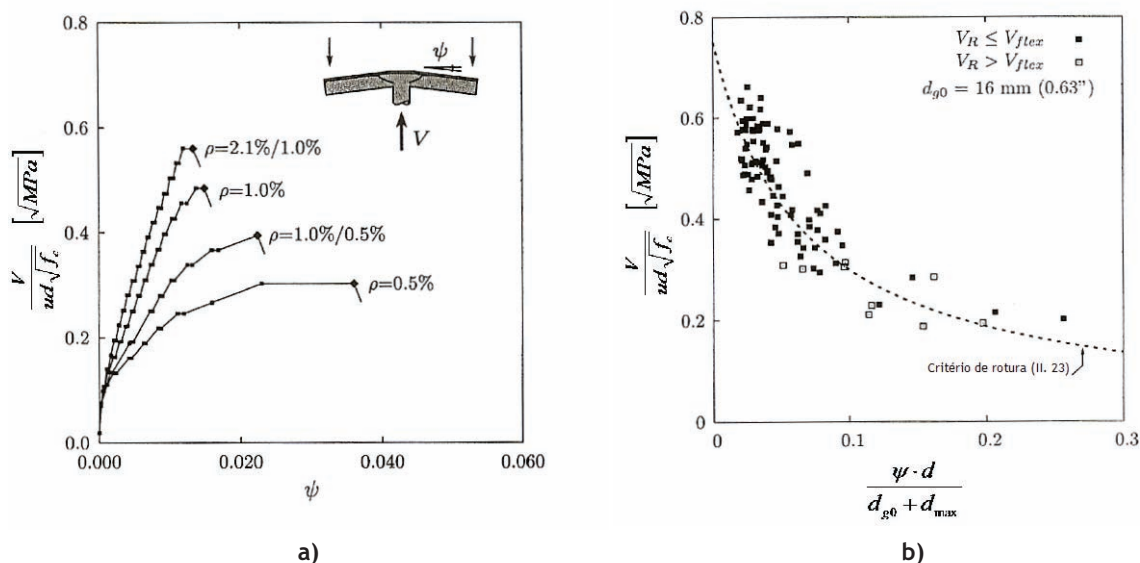


Gráfico II-5 - a) Relações carga-rotação dos ensaios experimentais (Kinnunen *et al.*, 1960); b) Critério de rotura, adaptado de (Muttoni, 2008).

Na sua forma actual (Muttoni, 2008), o critério de rotura, cuja tradução gráfica se apresenta a tracejado no Gráfico II-5b, é expresso pela equação:

$$\frac{V_R}{u \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_{max}}} \quad (\text{II. 23})$$

em que:

u perímetro da secção crítica de punçoamento^e

e - u é determinado à distância $d/2$, devendo o seu traçado corresponder a um comprimento que seja mínimo

ψ	rotação de corpo rígido da laje na região exterior ao cone de punção (ver Gráfico II-5a)
d_{g0}	dimensão de referência do agregado, geralmente tomado igual a 16 mm. Para BAL, o valor recomendado é zero

O critério requer, no entanto, o conhecimento da relação entre a carga aplicada e a rotação da laje (Gráfico II-5a). O efeito de escala é tomado em consideração no denominador da expressão (II. 23).

Por outro lado, a rotação da laje aumenta com a diminuição da percentagem de armadura longitudinal, conduzindo a uma rotura dúctil, como se ilustra no Gráfico II-5a para os ensaios realizados por Kinnunen (Kinnunen *et al.*, 1960) que serviram de referência a Muttoni para a aferição do seu modelo.

O Gráfico II-5b compara a capacidade resistente obtida com recurso à expressão (II. 23) com os resultados experimentais de 99 ensaios de punção realizados por diversos autores, em que a rotação foi medida directamente ou determinada a partir dos deslocamentos medidos. Os resultados obtidos para a referida comparação apontam para um desvio médio de 3 % (coeficiente de variação de 0,16).

O critério de Muttoni define a rotura por punção pela intersecção da curva que relaciona a carga (normalizada) e o produto ψd (considerado o efeito de escala) com a curva representativa do critério de rotura (II. 23).

Como se disse, a determinação da capacidade resistente pressupõe o prévio conhecimento da relação entre a carga aplicada e a rotação, $V = f(\psi)$, que pode ser obtida com recurso a simulação numérica não-linear do comportamento em flexão. Alternativamente, Muttoni apresenta a expressão simplificada (II. 24) para a obtenção, de forma aproximada, da referida relação.

$$\psi = 0,75 \cdot \frac{C \cdot f_y}{d \cdot E_s} \cdot \left(\frac{V}{V_{flex}} \right)^{3/2} \quad (\text{II. 24})$$

em que:

C	diâmetro dos modelos de laje circulares

Finalmente, refere-se que o presente critério de rotura pretende constituir uma alternativa aos modelos mecânicos de Kinnunen e Nylander e de Hallgren, de uso mais complexo em situação de dimensionamento.

III O PUNÇOAMENTO NA REGULAMENTAÇÃO INTERNACIONAL

III.1 INTRODUÇÃO

No presente Capítulo descrevem-se as diferentes abordagens regulamentares ao problema do punçoamento. Conduz-se uma análise com vista à aferição das formulações relativamente à resistência à compressão, à taxa de armadura principal e ao factor de efeito de escala. São, também, propostas alterações ao articulado do actual código europeu. As previsões regulamentares são comparadas com uma extensa base de dados compilada no âmbito da presente tese.

A filosofia em que assentam os diversos regulamentos é, na essência, a mesma, baseada no conceito da superfície crítica de punçoamento. As tensões tangenciais actuantes são determinadas através do quociente da carga de punçoamento pela área da superfície crítica, delimitada pelo perímetro crítico perpendicular à laje (ou perímetro de controlo) contendo a área directamente carregada. As disposições regulamentares foram também, durante muito tempo, limitadas ao punçoamento centrado em pilares interiores sendo, no entanto, também aplicadas noutros casos (Regan, 1981).

As normas regulamentares diferem entre si na definição da superfície crítica, na quantificação dos esforços actuantes e na definição dos esforços resistentes (Faria *et al.*, 1997). Os regulamentos que consideram um perímetro de controlo mais próximo do pilar (ou da área carregada) admitem uma tensão resistente ao corte, τ_c (ver equação (III. 1)), mais elevada do que aqueles que usam um perímetro crítico mais afastado e vice-versa (Ramos, 2003).

A Figura III-1 mostra a forma e a expressão para determinação do comprimento do perímetro de controlo, para o caso de um pilar interior de secção transversal rectangular de dimensões $c_1 \times c_2$, em diferentes normas e códigos (americano: ACI, 2005; canadense: CSA, 2004; português: REBAP, 1983; britânico: BSI, 1997; alemão: DIN, 2001; europeu: CEN, 2004; espanhol: EHE, 2004 e Código Modelo: CEB-FIP, 1993). É de referir que o perímetro de controlo não corresponde a qualquer realidade física.

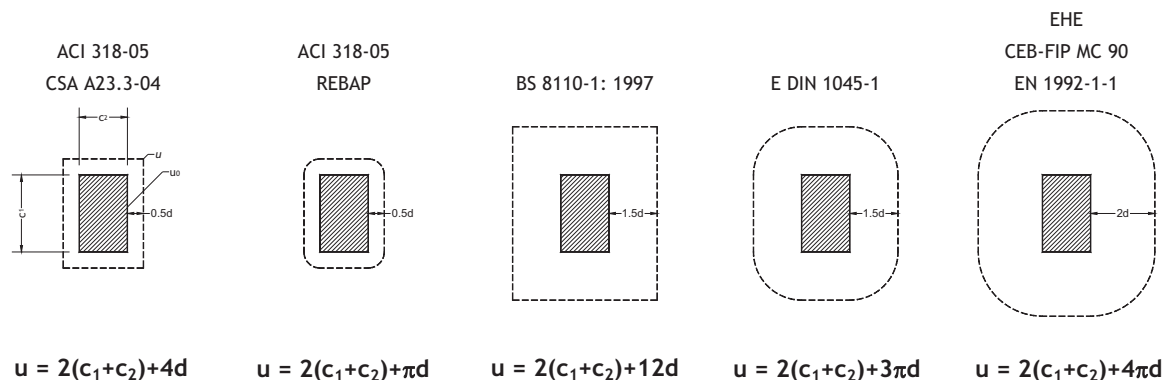


Figura III-1 - Perímetros de controlo em diversas normas e códigos para pilares rectangulares interiores.

Apresenta-se em seguida o articulado e as disposições relativas ao punçoamento em lajes fungiformes indicados nos quatro regulamentos analisados: CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), a actual versão do código europeu EN 1992-1-1 (CEN, 2004), a norma britânica BS 8110-1:1997 (BSI, 1997) e o regulamento português REBAP (REBAP, 1983). As expressões relativas à determinação da capacidade resistente ao punçoamento são empíricas, expressas genericamente na forma que se indica:

$$\frac{V_{cd}}{u \cdot d} = \tau_c \cdot \xi \cdot f(\rho_l) \quad (\text{III. 1})$$

A expressão (III. 1) inclui usualmente três variáveis calibradas experimentalmente:

- Tensão resistente ao corte, τ_c , função das propriedades mecânicas dos materiais: em geral a resistência à tracção do betão, relacionada com a resistência à compressão;
- Factor de efeito de escala, ξ , relacionado com a altura útil da laje;
- Função da percentagem geométrica de armadura longitudinal de flexão, $f(\rho_l)$.

Para melhor comparação, manipularam-se as expressões relativas à determinação da capacidade resistente ao punçoamento uniformizando a notação de algumas variáveis. De modo a tornar homogénea a análise dos diferentes códigos definem-se ainda:

$\beta = V_{t,ef} / V_t$	parâmetro que contabiliza o efeito da eventual transmissão de um momento flector da laje para o pilar
V_t	carga de punçoamento aplicada
$V_{cd} = V_c / \gamma_c$	valor de cálculo do esforço resistente ao punçoamento centrado de lajes sem armadura transversal ou a contribuição do betão na resistência ao punçoamento de lajes com armadura transversal
$V_{wd} = V_w / \gamma_s$	valor de cálculo da contribuição das armaduras transversais na resistência ao punçoamento
$V_{Rd} = V_{cd} + V_{wd}$	valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento centrado

$$\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \cdot \rho_{ly}}$$

percentagem da armadura, em que ρ_{lx} e ρ_{ly} são as percentagens geométricas das armaduras longitudinais, nas direcções ortogonais x e y, respectivamente, que definem o plano da laje

$$d = (d_x + d_y)/2$$

valor médio da altura útil das armaduras longitudinais nas direcções ortogonais x e y, respectivamente

$$\gamma_c, \gamma_s$$

coeficientes parciais de segurança relativos ao betão e às armaduras, respectivamente, quantificados no Quadro III-4 (pág. 61)

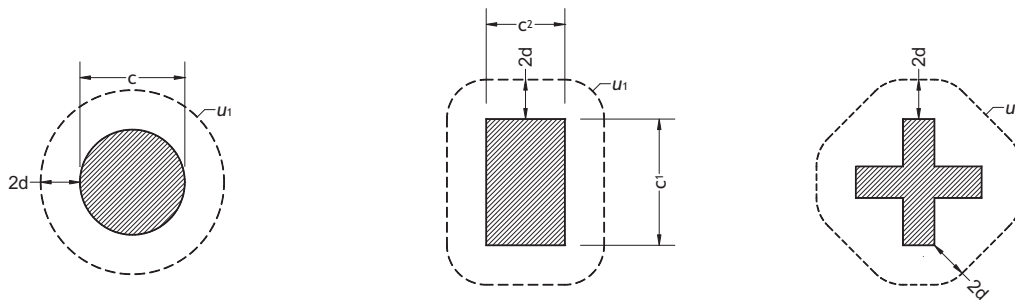
A segurança é verificada desde que:

$$V_{t,ef} = \beta \cdot V_t \leq V_{Rd} \quad (\text{III. 2})$$

Nesta expressão, a carga efectiva de punçoamento, $V_{t,ef}$, é definida como o valor da carga de punçoamento centrado que produz tensões de corte uniformes, ao longo do perímetro de controlo, iguais à máxima tensão de corte induzida pela carga excêntrica de punçoamento aplicada. Do ponto de vista do dimensionamento, o perímetro de controlo mantém-se inalterado relativamente à situação centrada, mas as tensões de corte actuantes variam ao longo do perímetro crítico.

III.2 CÓDIGO MODELO CEB-FIP 1990

Segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) pode, em geral, considerar-se que o primeiro perímetro de controlo, u_1 , se situa à distância $2d$ da área carregada, devendo o seu traçado corresponder a um comprimento que seja mínimo, como se ilustra na Figura III-2.



$$u_1 = \pi(c+4d)$$

$$u_1 = 2(c_1+c_2)+4\pi d$$

Figura III-2 - Perímetros críticos u_1 considerados no CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

O valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento para lajes sem armaduras específicas é determinado como se indica:

$$V_{cd} = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (\text{III. 3})$$

O factor 0,12 da expressão original (CEB-FIP, 1993) é, na equação (III. 3), substituído por $0,18/\gamma_c$ (com $\gamma_c = 1,5$) o que pode interpretar-se como a aplicação de um factor de segurança superior a 1,5 directamente a f_{ck} (CEB-FIP, 1999a). Embora a variação da resistência do betão, sobre a qual incide o factor de segurança 1,5, seja o factor dominante no que respeita à dispersão dos resultados em ensaios de punçoamento, a capacidade resistente ao punçoamento não é directamente proporcional àquela tensão ($f_{ck}^{1/3}$) pelo que a simples aplicação de um factor de segurança 1,5 não seria neste caso apropriado. O factor 0,12 resulta assim de um estudo estatístico aplicado às classes de betão compreendidas entre C25 e C90 (Walraven, 2002).

Para o caso em que é requerida armadura transversal, o valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento é dado por:

$$V_{Rd} = 0,75 \cdot V_{cd} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{f_{wyk}}{\gamma_s} \cdot A_{sw} \cdot \sin \theta \quad (\text{III. 4})$$

Nas expressões (III. 3) e (III. 4), os símbolos têm o seguinte significado:

$\xi = 1 + \sqrt{200/d}$	com d expresso em mm
ρ_l	determinada, em cada direcção, numa largura de laje igual à dimensão do pilar (ou da área carregada) acrescida de $3d$ para cada lado, limitada à laje (pilar de bordo ou de canto)
s_r	espaçamento radial dos perímetros de armaduras de punçoamento
A_{sw}	área total da armadura de punçoamento contida num perímetro de armadura concêntrico com o pilar (ou área carregada)
$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}^f$	
$f_{wyk} \leq 345 \text{ MPa}^g$	

Na expressão (III. 4), a componente do esforço resistido pela armadura de punçoamento deve, também, obedecer a um valor mínimo como se indica:

$$1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{f_{wyk}}{\gamma_s} \cdot A_{sw} \cdot \sin \theta \geq \frac{0,045}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (\text{III. 5})$$

No caso de se usarem armaduras transversais, a restrição (III. 5) equivale a limitar inferiormente a capacidade resistente correspondente às armaduras a 25 % daquela que seria tomada na ausência das mesmas (III. 3). A armadura requerida deve ser materializada de uma das formas indicadas na Figura III-3. O seu espaçamento deve, em qualquer direcção, cumprir a condição (III. 6).

$$s \leq 0,75 \cdot d \cdot (1 + \cot \theta) \quad (\text{III. 6})$$

^f - Segundo Regan (citado em CEB-FIP, 1999a), a resistência ao punçoamento praticamente não aumenta para $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$

^g - Limitação, por via indirecta, da extensão das armaduras transversais a aproximadamente $\varepsilon_{wyk} = 1,73 \text{ ‰}$

A distância entre o primeiro perímetro de armadura transversal e a face da área carregada não deve exceder kd com k definido na expressão (III. 7).

$$k = \frac{V_c}{V_t} \leq 0,5 \quad (\text{III. 7})$$

Se o espaçamento do perímetro exterior de armaduras transversais exceder $2d$ na direcção tangencial, o comprimento $u_{n,ef}$ resulta da soma dos comprimentos correspondentes às partes do perímetro exterior limitadas à distância d , como se indica na Figura III-3a.

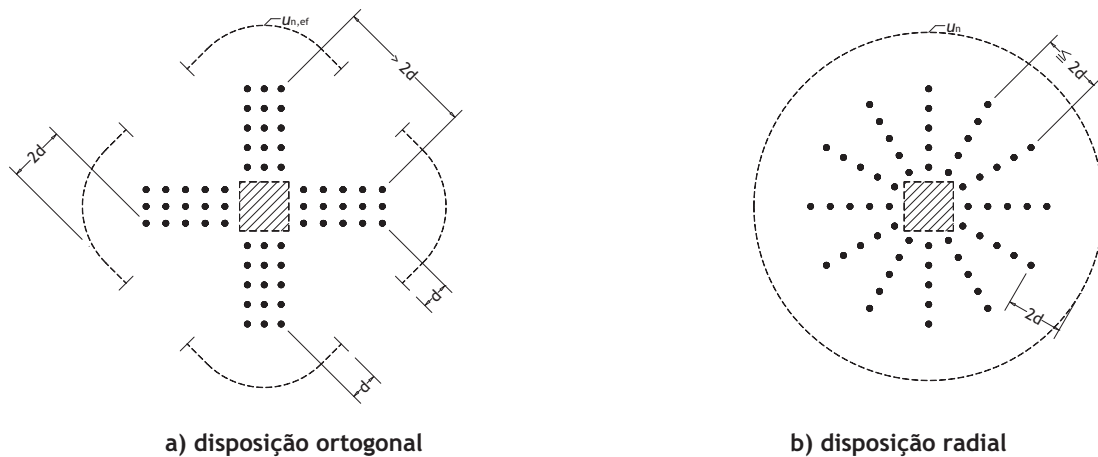


Figura III-3 - Perímetros do contorno exterior para pilares interiores em lajes munidas de armaduras transversais, segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

Fora da região com armadura transversal, a capacidade resistente é dada por:

$$V_{cd} = \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u_{n,ef} \cdot d \quad (\text{III. 8})$$

em que:

ρ_l	percentagem de armadura longitudinal delimitada pelo perímetro u_n ou $u_{n,ef}$
$u_{n,ef}$	comprimento efectivo do contorno crítico definido à distância $2d$ da armadura específica exterior, como se indica na Figura III-3

De forma a evitar o esmagamento do betão da laje na face do pilar, é ainda necessário respeitar a condição seguinte (f_{ck} em MPa):

$$V_{t,ef} \leq 0,3 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot u_0 \cdot d \quad (\text{III. 9})$$

em que:

u_0	perímetro da área carregada

No caso do punçoamento ser excêntrico, as tensões tangenciais seguem a distribuição plás-

tica na superfície de referência (ou perímetro de controlo) apresentada na Figura III-4.

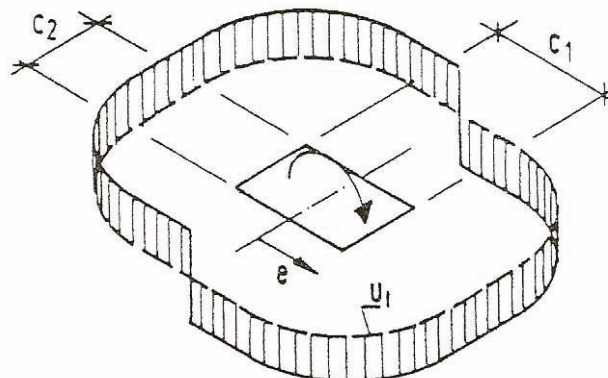


Figura III-4 - Distribuição das tensões tangenciais devidas a um momento não equilibrado na ligação entre uma laje e um pilar interior (CEB-FIP, 1999a).

A carga efectiva de punçoamento, $V_{t,ef}$, vem determinada por (III. 10):

$$V_{t,ef} = \beta \cdot V_t = \left[1 + \frac{K \cdot M_t \cdot u_i}{W_i \cdot V_t} \right] \cdot V_t \quad (\text{III. 10})$$

Sendo a excentricidade $e = M_t / V_t$, o coeficiente β (equação (III. 10)) pode ser obtido pelas expressões que se seguem:

- **Na face do pilar e na região com armadura de punçoamento ($i = 1$)**

$$\beta = \beta_1 = 1 + \frac{K \cdot u_1}{W_1} \cdot e \quad (\text{III. 11})$$

- **Na região exterior à armadura transversal ($i = n,ef$)**

$$\beta = \beta_{n,ef} = 1 + \frac{K \cdot u_{n,ef}}{W_{n,ef}} \cdot e \quad (\text{III. 12})$$

Nas expressões (III. 10) a (III. 12), os restantes símbolos têm o significado seguinte:

K	coeficiente que depende da relação c_1/c_2 (atente-se na nota do Quadro III-1 e na Figura III-4 para a definição de c_1 e c_2); o seu valor é função das proporções em que o momento não equilibrado é transmitido por corte não uniforme ou por flexão e torção
$W_1 = \int_0^{u_1} e \cdot dl$	módulo plástico do primeiro perímetro crítico, definido nas equações (III. 15) e (III. 16)
$W_{n,ef} = \int_0^{u_{n,ef}} e \cdot dl$	módulo plástico do perímetro exterior $u_{n,ef}$ ou u_n , definidos na Figura III-3, determinado de forma análoga a W_1

Os valores de K indicados no CEB-FIP MC 90 são apresentados no Quadro III-1. No mesmo

quadro incluem-se ainda os valores correspondentes obtidos pela expressão desenvolvida (III. 13) ($R^2 = 0,99$).

$$K \cong 0,5857 + 0,1885 \cdot \ln(c_1/c_2) \quad (\text{III. 13})$$

Quadro III-1 - Valores de K segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

parâmetro	c_1/c_2			
	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80
K, equação (III. 13)	0,46	0,59	0,72	0,79

c_1 e c_2 - dimensões da secção transversal do pilar respectivamente paralela e perpendicular à excentricidade da carga

O módulo plástico, W_i , correspondente à distribuição plástica de tensões tangenciais representada na Figura III-4 dos diferentes perímetros de controlo, é definido na equação seguinte:

$$W_i = \int_0^{u_i} |e| \cdot dl \quad (\text{III. 14})$$

em que:

dl	comprimento elementar do contorno em análise, u_i
e	distância de dl ao eixo em torno do qual actua M_t

Para pilares de secção quadrada ou rectangular, o módulo plástico do primeiro perímetro crítico é determinado com recurso à equação (III. 15), cuja demonstração se encontra no Anexo A.2. Para pilares de secção circular aplica-se a expressão (III. 16).

$$W_1 = c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi d c_1 + \frac{c_1^2}{2} \quad (\text{III. 15})$$

$$W_1 = (c + 4d)^2 \quad (\text{III. 16})$$

Para o módulo plástico do perímetro exterior não são dadas indicações, pelo que foram deduzidas duas expressões correspondentes a um pilar de secção quadrada:

- A equação (III. 17), cuja dedução é apresentada no Anexo A.3.1, para a disposição das armaduras transversais indicada na Figura III-3a;
- A equação (III. 18), cuja dedução é apresentada no Anexo A.3.2, para a disposição das armaduras transversais indicada na Figura III-3b.

$$W_{n,ef} = 4 \cdot (a\sqrt{2} + kd)^2 + \pi \cdot \left(\frac{c}{2} + nd - a \right) \cdot (a\sqrt{2} + kd) + 4d^2 \cdot (n + k\sqrt{2}) + d \cdot (4a + 2c) \quad (\text{III. 17})$$

$$W_n = [c + 2d \cdot (n + k)]^2 \quad (\text{III. 18})$$

Nas expressões (III. 17) e (III. 18), os símbolos têm o seguinte significado:

a	quociente da distância compreendida entre os alinhamentos de pernos das armaduras transversais e os eixos x e y (Figura A- 2) pela altura útil da laje
k	quociente da distância compreendida entre a armadura específica exterior e o perímetro exterior de controlo pela altura útil da laje
n	quociente da distância compreendida entre a face do pilar (ou da área carregada) e o perímetro exterior da armadura transversal pela altura útil da laje

Resumem-se, no Quadro III-2, as verificações regulamentares de segurança a observar.

Quadro III-2 - Verificações ao punçoamento a atender segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

Tipo de laje	Secção	Verificação
Sem armadura transversal	Face do pilar ou da área carregada	$V_{t,ef} \leq V_{max}$ com V_{max} definido na equação (III. 9)
	Perímetro crítico, u_1	$V_{t,ef} \leq V_{cd}$ com V_{cd} definido na equação (III. 3)
Com armadura transversal	Face do pilar ou da área carregada	$V_{t,ef} \leq V_{max}$ com V_{max} definido na equação (III. 9)
	Na região com armadura transversal	$V_{t,ef} \leq V_{Rd}$ com V_{Rd} definido na equação (III. 4)
	Na região exterior à armadura transversal	$V_{t,ef} \leq V_{cd}$ com V_{cd} definido na equação (III. 8)

III.3 CÓDIGO EUROPEU, EN 1992-1-1

A formulação do código europeu - EN 1992-1-1 (CEN, 2004) - é, no essencial, semelhante à apresentada para o CEB-FIP MC 90. O contorno crítico para o estudo do punçoamento é definido por uma linha fechada, envolvendo a área carregada, a uma distância desta de $2d$, cujo perímetro, u_1 , é mínimo, como indicado na Figura III-5.

Anteriores versões da EN 1992-1-1 (IPQ, 1998) consideram um perímetro de referência à distância de $1,5d$ do pilar (ou da área carregada). A adopção da distância $2d$ é justificada por Walraven por duas razões: as tensões de corte são mais uniformes para diferentes formas do pilar e ainda permite a aplicação da mesma formulação que a utilizada para o corte em elementos de viga (Walraven, 2002).

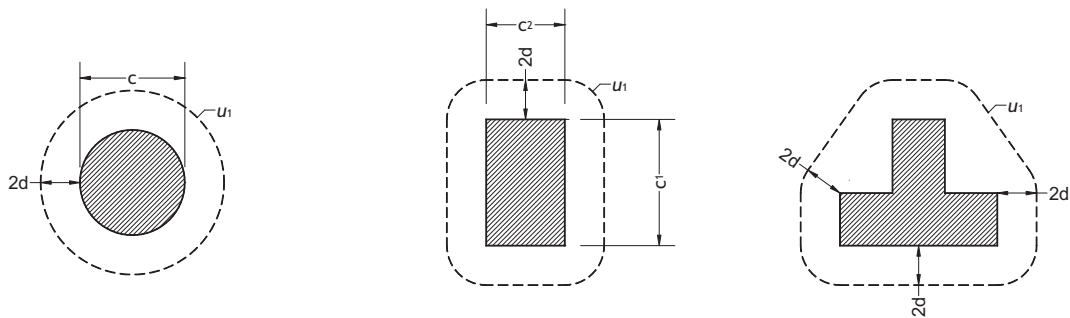
A determinação do valor de cálculo da tensão resistente ao punçoamento, expresso em MPa, em lajes sem armaduras específicas de punçoamento, pode ser feita recorrendo à expressão:

$$v_{cd} = \frac{V_{cd}}{u_1 \cdot d} = C_{Rd,c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp} \geq (v_{\min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}) \quad (\text{III. 19})$$

Na expressão (III. 19), os símbolos têm o significado seguinte:

$\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2,0$	d expresso em mm
$\rho_l \leq 0,02$	determinada, em cada direcção, numa largura de laje igual à dimensão do pilar acrescida de $3d$ para cada lado do pilar, limitada à laje
$\sigma_{cp} = (\sigma_{cx} + \sigma_{cy})/2$	em que σ_{cx} e σ_{cy} são tensões normais no betão, na secção crítica, nas direcções x e y (compressão positiva), expressas em MPa, dadas por: $\sigma_{cx} = N_{Ed,x}/A_{cx}$ e $\sigma_{cy} = N_{Ed,y}/A_{cy}$ onde $N_{Ed,x}$ e $N_{Ed,y}$ são esforços normais nas faixas de laje sobre pilares interiores e esforço normal na secção de controlo para pilares de bordo. O esforço pode ser resultante de uma acção exterior ou do pré-esforço. A_c é a área de betão associada ao esforço N_{Ed} considerado

Os valores de $C_{Rd,c}$, $v_{\min}$ e k_1 para uso em cada um dos Estados Membros podem ser encontrados nos respectivos Anexos Nacionais. Na falta destes, os valores recomendados são: $C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c$, $v_{\min} = 0,035 \cdot \xi^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2}$ e $k_1 = 0,1$.



$$u_1 = \pi(c + 4d)$$

$$u_1 = 2(c_1 + c_2) + 4\pi d$$

Figura III-5 - Primeiros perímetros de controlo u_1 considerados na EN 1992-1-1 (CEN, 2004).

Para o caso em que é requerida armadura específica de punçoamento, o valor de cálculo da tensão resistente é, segundo a EN 1992-1-1, dado por:

$$v_{Rd} = \frac{V_{Rd}}{u_1 \cdot d} = 0,75 \cdot v_{cd} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{f_{wyk,ef}}{\gamma_s} \cdot \frac{A_{sw} \cdot \sin \theta}{u_1 \cdot d} \quad (\text{III. 20})$$

em que:

d	expresso em mm
s_r	espaçamento radial dos perímetros de armaduras de punçoamento, expresso em mm
A_{sw}	área de um perímetro de armaduras de punçoamento em torno do pilar

$f_{wyk,ef}$ (ou da área carregada), expressa em mm^2

valor característico da tensão efectiva de cedência das armaduras de punçoamento, expresso em MPa, definido na expressão (III. 21) onde d é expresso em mm

$$f_{wyk,ef} = 0,2875 \cdot (1000 + d) \leq f_{wyk} \quad (\text{III. 21})$$

Note-se que, na equação (III. 20), as armaduras transversais consideradas são as compreendidas na região delimitada pela face do pilar (ou da área carregada) e pelo perímetro situado à distância $1,5d$, isto é, as que são intersectadas pela superfície definida pelo ângulo δ dado por:

$$\delta = \cot^{-1}(1,5) \quad (\text{III. 22})$$

Pretende-se, desta forma, assegurar a amarração eficaz da extremidade superior daquelas armaduras (CEB-FIP, 1999a). A interpretação física desta imposição é ilustrada na Figura III-6. A mesma metodologia é utilizada pelo CEB-FIP MC 90 - equação (III. 4).

É ainda definido um perímetro exterior de controlo, u_{out} (ou $u_{out,ef}$, ver Figura III-7)^h, a partir do qual deixa de ser necessária armadura transversal, determinado pela expressão:

$$u_{out,ef} = V_{t,ef} / (v_{cd} \cdot d) \quad (\text{III. 23})$$

A armadura transversal deve ser estendida até uma distância não superior a kd no interior desse perímetro. O valor de k a utilizar num determinado Estado Membro é dado no respectivo Anexo Nacional, sendo o valor recomendado 1,5 (CEN, 2004). Note-se que esta disposição não segue a correspondente no CEB-FIP MC 90 que indica o valor $2d$.

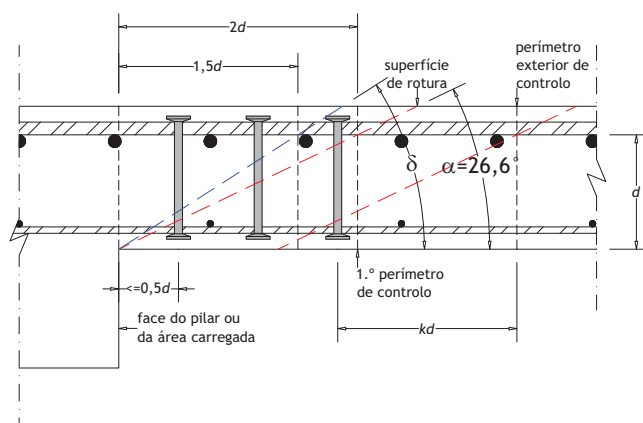


Figura III-6 - Armaduras transversais que contribuem para a capacidade resistente ao punçoamento (CEB-FIP, 1993; CEN, 2004).

É também imposto um valor mínimo para a secção de cada perno ou estribo (III. 24), cuja aplicação não é clara para as diferentes disposições da armadura (ver Figura III-7).

$$A_{sw,min} \geq 0,08 \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{wyk}} \cdot \frac{s_r \cdot s_t}{1,5 \cdot \sin \theta + \cos \theta} \quad (\text{III. 24})$$

em que:

$A_{sw,min}$	área de um ramo de estribo (ou equivalente)
s_t	espaçamento dos pernos da armadura de punçoamento na direcção tangencial

A armadura requerida deve ser materializada por pelo menos dois perímetros devendo o primeiro localizar-se a uma distância compreendida entre $0,3d$ e $0,5d$ da face do pilar ou da área carregada, já que, para distâncias menores, a ancoragem na zona comprimida da laje não será garantida se a armadura for intersectada por fendas de reduzida inclinação (Walraven, 2002). Os espaçamentos da mesma não devem exceder $0,75d$ na direcção radial e $1,5d$ ou $2d$ na direcção tangencial consoante se localizem dentro ou fora do perímetro u_1 , respectivamente.

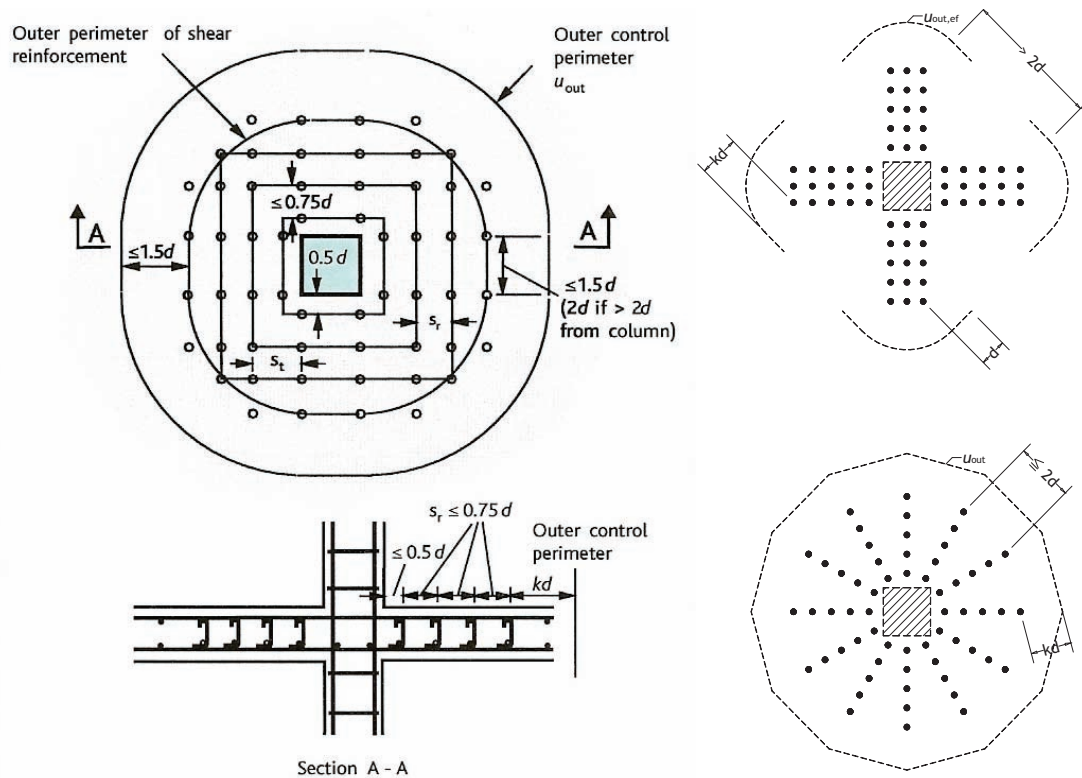


Figura III-7 - Disposição recomendada para as armaduras transversais (CEN, 2004).

O efeito do punçoamento excêntrico é quantificado de forma análoga à exposta para o CEB-FIP MC 90 (ver equação (III. 10), pág. 48). No caso, porém, de estruturas em que a estabilidade lateral não depende do funcionamento de pórticos formados por lajes e pilares e em que os vãos dos tramos adjacentes não diferem mais de 25 %, podem utilizar-se, segundo a EN 1992-1-1, os valores aproximados de β indicados na Figura III-8.

$h - u_{out}$ e $u_{out,ef}$ correspondem no CEB-FIP MC 90 a u_n e $u_{n,ef}$, respectivamente

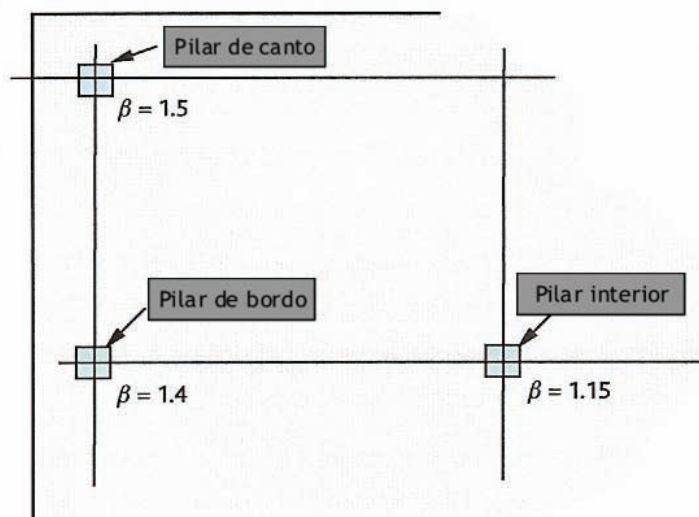
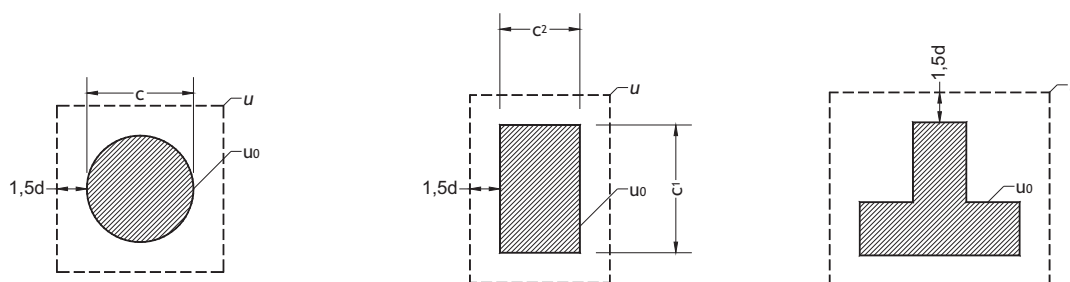


Figura III-8 - Valores aproximados de β para pilares interiores, de bordo e de canto (CEN, 2004).

De forma similar ao CEB-FIP MC 90, é imposto um valor máximo da capacidade resistente ao punçoamento (equação (III. 9), pág. 47). Também as verificações regulamentares indicadas no Quadro III-2 (pág. 50) são mantidas.

III.4 REGULAMENTO BRITÂNICO, BS 8110-1: 1997

A regulamentação britânica BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997) estabelece o perímetro do contorno de referência à distância de $1,5d$ não minimizando, no entanto, o seu comprimento (Figura III-9).



$$u = \pi(c+3d)$$

$$u = 2(c_1+c_2+6d)$$

Figura III-9 - Perímetros do contorno de referência considerados na BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997).

O valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento, para o caso das lajes sem armaduras transversais, é obtido pela expressão:

$$V_{cd} = \frac{0,27}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck,cub})^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (\text{III. 25})$$

em que:

$\rho_l \leq 0,03$	calculada na região circundante ao pilar situada até $1,5d$ de cada face (incluindo o pilar)
$\xi = (400/d)^{1/4} \geq 2/3$	com d em mm
$f_{ck,cub}$	valor característico da tensão resistente à compressão do betão, referido a provetes cúbicos, considerando $25 \leq f_{ck,cub} \leq 40$ (MPa)
u	comprimento do perímetro crítico, definido na Figura III-9

Para os casos em que é requerida armadura específica de punçoamento o valor de cálculo da capacidade resistente é dado por:

- **Caso em que** $V_t \leq 1,6 \cdot V_{cd}$

A contribuição do betão é adicionada à das armaduras transversais, como se indica:

$$V_{Rd} = \frac{0,27}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck,cub})^{1/3} \cdot u \cdot d + \frac{f_{wyk}}{\gamma_s} \cdot \sum (A_{sw} \cdot \sin \theta) \quad (\text{III. 26})$$

- **Caso em que** $1,6 \cdot V_{cd} \leq V_t \leq 2,0 \cdot V_{cd}$

A eficiência da contribuição da armadura é diminuída através do factor $1/3,5$ que origina um aumento substancial da quantidade de armadura transversal necessária. A expressão a utilizar é:

$$V_{Rd} = \frac{0,386}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck,cub})^{1/3} \cdot u \cdot d + \frac{f_{wyk}}{3,5 \cdot \gamma_s} \cdot \sum (A_{sw} \cdot \sin \theta) \quad (\text{III. 27})$$

Nas expressões (III. 26) e (III. 27) deve considerar-se (restantes parâmetros inalterados):

ξ	não deve ser tomado inferior a 1 no caso de ser atendida a condição (III. 28)
$\sum (A_{sw} \cdot \sin \theta)$	área da secção da armadura transversal que interessa à zona de rotura em análise (ver Figura III-11)
$f_{wyk} \leq 460 \text{ MPa}^i$	

A BS 8110-1: 1997 impõe ainda a quantidade mínima para a armadura transversal definida na equação (III. 28). Contudo, a utilização desta armadura só é permitida em lajes com espessura igual ou superior a 200 mm.

i - Limitação, por via indirecta, da extensão das armaduras transversais a aproximadamente $\varepsilon_{wyk} = 2,30 \%$

$$\sum (A_{sw} \cdot \sin \theta) \geq \frac{0,4 \cdot \gamma_s \cdot u \cdot d}{f_{wyk}} \quad (\text{III. 28})$$

O efeito de um momento flector transmitido pela laje ao pilar, para o caso de um pilar interior, é considerado recorrendo à expressão (III. 29), em que V_t e M_t são os esforços transmitidos ao pilar e x é o comprimento do lado do contorno de controlo em análise, paralelo ao eixo do momento flector, como se ilustra na Figura III-10.

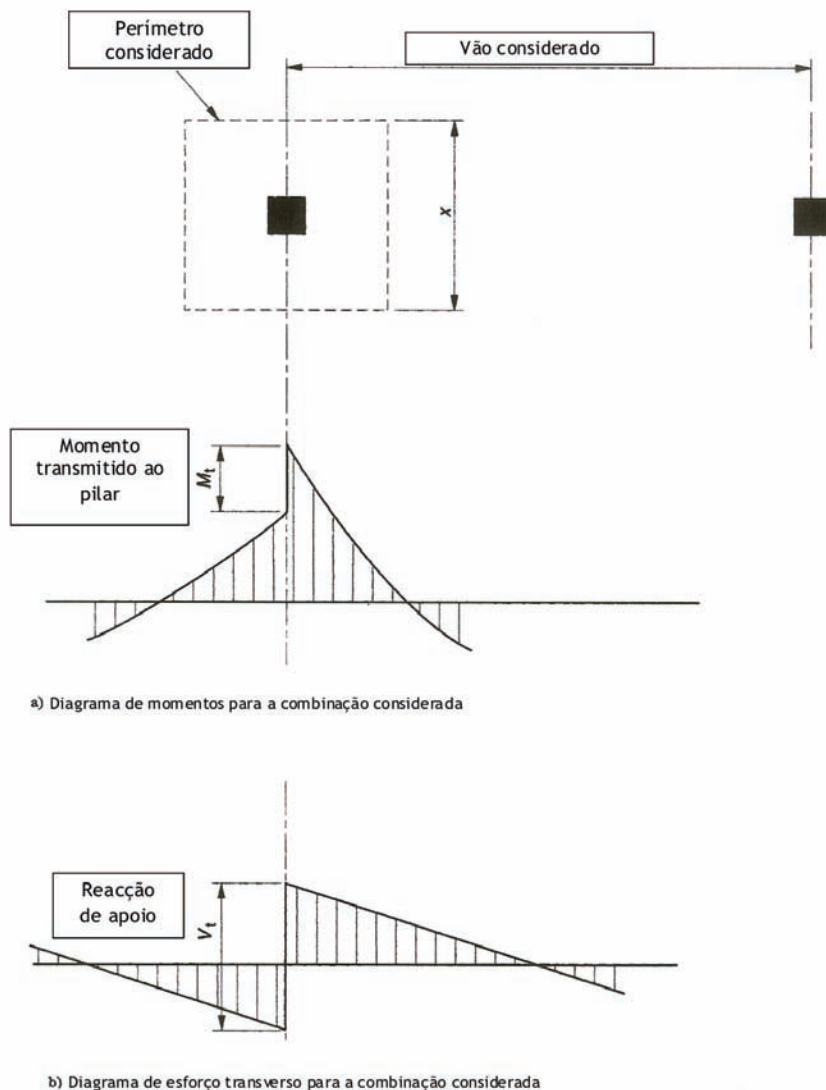


Figura III-10 - Perímetro de controlo e esforços actuantes em pilares interiores (adaptado de BSI, 1997).

A verificação da capacidade resistente é efectuada em sucessivos perímetros de controlo, espaçados de $0,75d$, até àquele para o qual não é necessária armadura de punçoamento. As armaduras a considerar em cada verificação são as que interessam à zona de rotura delimitada pelo perímetro em análise e por um perímetro, interior a este, à distância $1,5d$ (Figura III-11).

A armadura requerida deve ser repartida em pelo menos dois perímetros contidos em cada

uma das zonas de rotura indicadas na Figura III-11. O primeiro perímetro deve localizar-se a cerca de $0,5d$ da face do pilar ou da área carregada e conter pelo menos 40 % da armadura requerida. Os espaçamentos da armadura transversal não devem exceder $0,75d$ e $1,5d$ na direcção radial e tangencial, respectivamente.

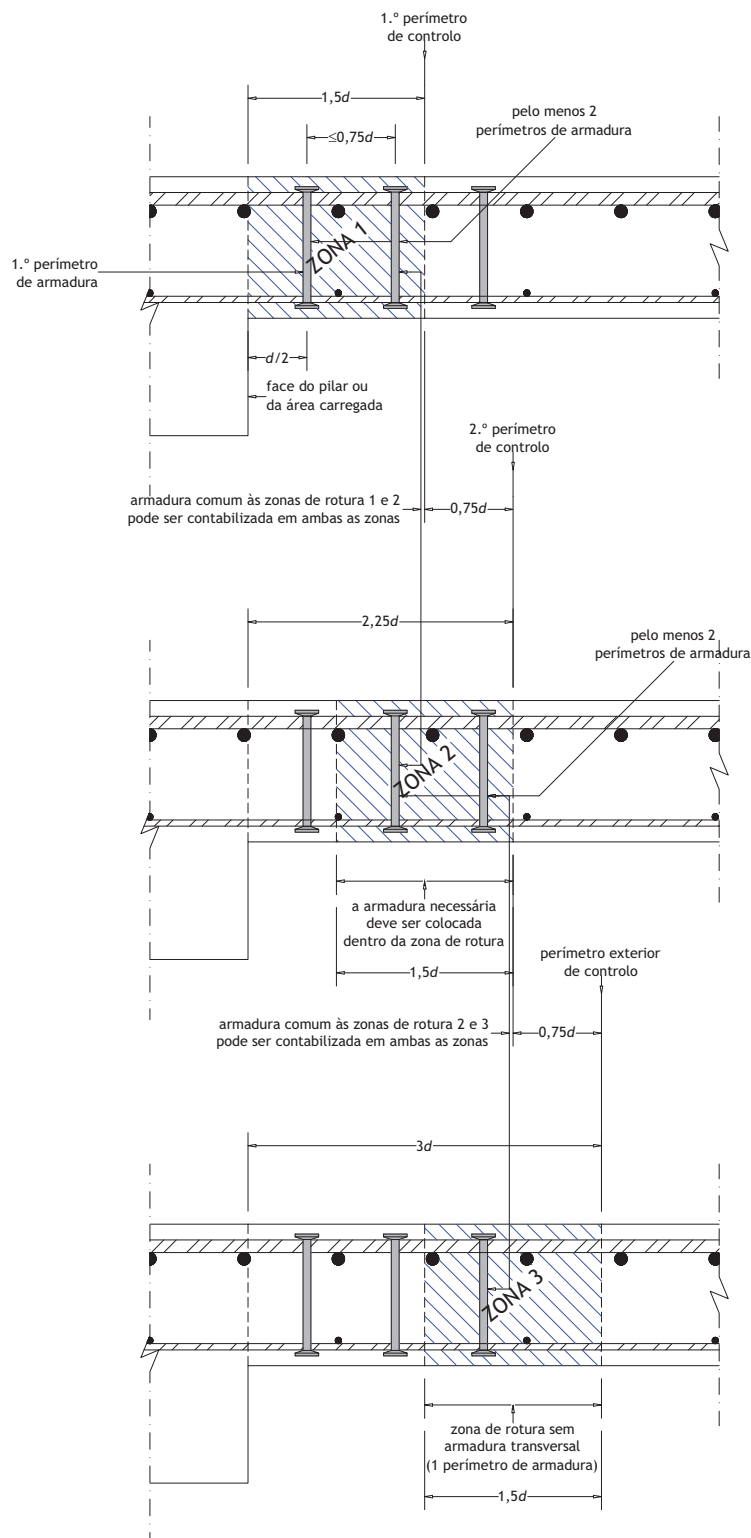


Figura III-11 - Sucessivas zonas de rotura para verificação da capacidade resistente segundo a BS 8110-1: 1997 (adaptado de BSI, 1997).

$$V_{t,ef} = \beta \cdot V_t = \left[1 + \frac{1,5 \cdot M_t}{V_t \cdot x} \right] \cdot V_t \quad (\text{III. 29})$$

A capacidade resistente, determinada na secção da face do pilar (ou da área carregada), é limitada como se indica na expressão (III. 30).

$$V_{\max} = 2,0 \cdot V_{cd} \leq \frac{u_0 \cdot d}{\gamma_c} \cdot \min \left(\frac{6,25}{\sqrt{f_{ck,cub}}} \right) \quad (\text{III. 30})$$

III.5 REGULAMENTO PORTUGUÊS, REBAP

As disposições do regulamento português em vigor (REBAP, 1983) fundamentam-se, como se sabe, nas disposições do Código Modelo 78 (CEB-FIP, 1978). O perímetro do contorno de referência, u , é definido por uma linha fechada envolvendo a área carregada a uma distância não inferior a $d/2$ e cujo perímetro é mínimo, como se ilustra na Figura III-12.

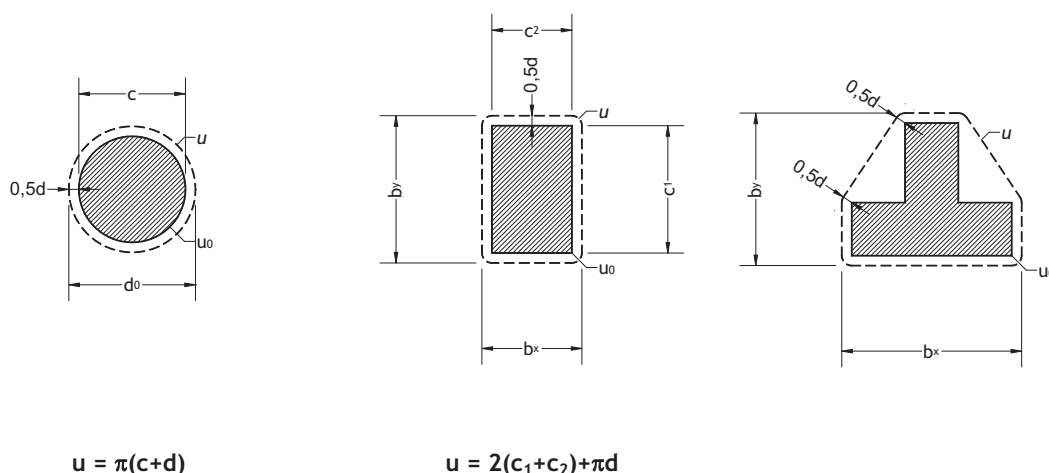


Figura III-12 - Perímetros do contorno crítico considerados no REBAP (REBAP, 1983).

É contudo de referir que o comprimento do perímetro da área carregada, u_0 , é limitado aos valores indicados no Quadro III-3. Fora dos limites indicados haverá em geral que considerar, ao longo do contorno crítico, zonas em que a verificação da segurança deve seguir as regras especificadas para o esforço transversal.

Quadro III-3 - Valores limites para o comprimento do perímetro da área carregada, u_0 , segundo o REBAP (REBAP, 1983).

Forma da área carregada	Valor máximo de u_0	Observações
Rectangular	$11d$	Nem excede 2 a relação entre o comprimento (c_1) e a largura (c_2) da área carregada
Circular	$3,5\pi d$	-
Outra	-	Se a área carregada tem outras formas, as suas dimensões não excedem limites obtidos por analogia com os casos anteriores

No caso de não haver transmissão de momentos flectores entre a laje e o pilar, a expres-

são que permite a determinação do valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento de lajes sem armaduras transversais vem:

$$V_{cd} = \tau_1 \cdot \xi \cdot u \cdot d \quad (\text{III. 31})$$

em que:

$$\begin{aligned} \xi &= (1,6 - d) \geq 1 && \text{com } d \text{ expresso em m} \\ \tau_1 &= 0,6 \cdot f_{ctd} && \text{valor regulamentar da tensão de corte} \end{aligned}$$

Substituindo, sucessivamente, as relações definidas no REBAP: $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_c$; $f_{ctk} = 0,7 \cdot f_{ctm}$ e $f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$, a expressão anterior pode ser reescrita sob a forma indicada na equação seguinte:

$$V_{cd} = \frac{0,126}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot u \cdot d \quad (\text{III. 32})$$

Na expressão (III. 32), a percentagem geométrica da armadura longitudinal é considerada constante e igual a 1 %.

Nos casos em que a verificação da segurança se reduz às condições especificadas para o esforço transversal, a tensão resistente vem igual a $0,6 \cdot \tau_1$, valor 40 % inferior ao correspondente à verificação ao punçoamento.

Para o caso em que é requerida armadura específica de punçoamento, a componente, normal ao plano da laje, da força absorvida pela armadura representa 75 % do esforço resistente, cabendo ao betão os restantes 25 %. O articulado do REBAP exprime a capacidade resistente de lajes com armadura de punçoamento apenas em função do esforço resistente associado às armaduras transversais, como se indica na expressão seguinte:

$$\left. \begin{aligned} V_{wd} &= 0,75 \cdot V_{Rd} \\ V_{cd} &= 0,25 \cdot V_{Rd} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{wd} = 3 \cdot V_{cd} \Leftrightarrow V_{Rd} = \frac{4}{3} \cdot V_{wd} \quad (\text{III. 33})$$

Assim, o valor de cálculo da capacidade resistente ao punçoamento é dado por:

$$V_{Rd} = \frac{4}{3} \cdot \frac{f_{wyk}}{\gamma_s} \cdot A_{sw} \cdot \sin \theta \quad (\text{III. 34})$$

em que:

$$A_{sw} \quad \text{área total da secção transversal das armaduras de punçoamento contidas entre o perímetro situado à distância } 1,5d \text{ da área carregada e a área carregada}$$

$$f_{wyk} \leq 402,5 \text{ MPa}^j$$

j - Limitação, por via indirecta, da extensão das armaduras transversais a aproximadamente $\varepsilon_{wyk} = 2,01 \text{ ‰}$

Em caso algum, contudo, poderá o valor do esforço resistente obtido pela expressão (III. 34) exceder 1,6 vezes o valor estabelecido pela expressão (III. 32), conduzindo a:

$$V_{\max} = 1,6 \cdot V_{cd} \quad (\text{III. 35})$$

As armaduras de punçoamento, que podem ser constituídas por estribos ou varões inclinados, devem ser distribuídas em toda a zona da laje compreendida entre o contorno da área directamente carregada e um contorno exterior a este, situado à distância de $1,5d$, e os varões que a constituem não devem ter afastamento superior a $0,75d$ em qualquer direcção. No caso de varões inclinados, a distância $1,5d$ que define aquele contorno exterior deve ser referida aos pontos em que os varões intersectam o plano médio da laje; além disso, só devem ser considerados como eficazes os varões que atravessam a zona da laje directamente carregada.

Na situação de armadura específica de punçoamento, o valor de cálculo do esforço resistente é independente da existência ou não de tensões de compressão no plano da laje originadas, nomeadamente, pelo pré-esforço (Ramos, 2003). No caso de lajes pré-esforçadas com cabos inclinados, poder-se-á ainda descontar ao esforço de punçoamento actuante a componente vertical do pré-esforço dos cabos que passam dentro do perímetro do contorno de referência.

No caso de a força actuar excentricamente, o valor de cálculo do esforço efectivo de punçoamento transmitido vem:

- **No caso da área carregada ser de contorno circular (ou assimilável):**

$$V_{t,ef} = \beta \cdot V_t = \left[1 + \frac{2 \cdot |e|}{d_0} \right] \cdot V_t \quad (\text{III. 36})$$

- **No caso da área carregada ser de contorno rectangular:**

$$V_{t,ef} = \beta \cdot V_t = \left[1 + 1,5 \cdot \frac{|e_x| + |e_y|}{\sqrt{b_x \cdot b_y}} \right] \cdot V_t \quad (\text{III. 37})$$

em que:

e	excentricidade associada a V_t (e_x e e_y são as componentes segundo as direcções x e y)
d_0	diâmetro do contorno crítico, definido na Figura III-12 (soma da altura útil com o diâmetro da área carregada)
b_x, b_y	dimensões do contorno crítico, medidas segundo as direcções x e y paralelas aos lados da área carregada (ver Figura III-12)

III.6 ANÁLISE COMPARATIVA

Como já exposto, as normas e códigos em vigor em diferentes países abordam de forma distinta a determinação da capacidade resistente ao punçoamento. Krüger afirma que estas diferenças chegam a mais de 30 % no dimensionamento de uma mesma laje fungiforme de betão armado (Krüger, 1999). Albrecht encontrou também diferenças substanciais na armadura de punçoamento requerida pelos diferentes códigos (Albrecht, 2002). Refere-se ainda que o Anexo Nacional finlandês (EN-1992-1-1, 2007b) recomenda, relativamente ao punçoamento, a utilização do articulado da norma finlandesa vigente em detrimento do estabelecido pela EN 1992-1-1, justificando, com base em ensaios, que este poderá conduzir a previsões não conservativas.

Apresenta-se, em seguida, uma análise crítica das principais dissemelhanças encontradas nas normas e códigos analisados.

III.6.1 Perímetros de controlo

Uma das diferenças, já apresentada (ver Figura III-1, pág. 44), reside no perímetro de controlo, u_l , que determina a inclinação de referência da superfície de rotura indicada no Quadro III-4. No mesmo quadro incluem-se também os valores regulamentares dos coeficientes parciais de segurança relativos aos materiais e do limite regulamentar para a percentagem de armaduras principais (ρ_l).

Quadro III-4 - Inclinação da superfície teórica de rotura, coeficientes parciais de segurança e limites para a percentagem de armadura longitudinal, segundo os diversos códigos analisados.

	CEB-FIP MC 90	EN 1992-1-1	BS 8110-1:1997	REBAP
α (°)	26,6	26,6	33,7	63,4
Betão: γ_c	1,50	1,50	1,25	1,50
Armaduras: γ_s	1,15	1,15	1,05	1,15
ρ_l (%)	-	2	3	-

Do mesmo modo, a definição do perímetro exterior de controlo na existência de armaduras de punçoamento varia consoante a norma utilizada. A distância entre este e o perímetro exterior de armadura é:

- CEB-FIP MC 90 2,00 d
- EN 1992-1-1 1,50 d
- BS 8110-1: 1997 0,75 d

III.6.2 Resistência à compressão do betão

A influência da resistência à compressão do betão na capacidade de carga ao punçoamento centrado é ilustrada no Gráfico III-1 que também inclui os ensaios realizados por Tomaszewicz, 1993 e Ramdane, 1996 (apresentados pormenorizadamente no Anexo A.1).

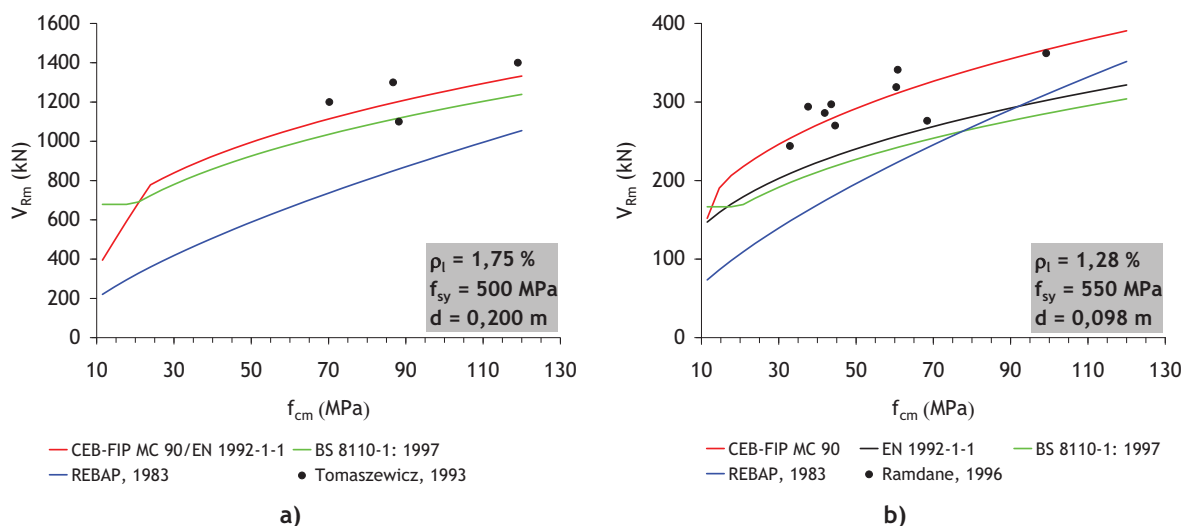


Gráfico III-1 - Capacidade de carga ao punçoamento centrado para lajes sem armadura transversal em função da resistência à compressão de betão.

Pode observar-se que a norma CEB-FIP MC 90 é a que apresenta uma melhor aproximação aos resultados experimentais, mesmo para betões de elevada resistência. Para $d \geq 200 \text{ mm}$ ($\xi \leq 2$) as previsões da norma EN 1992-1-1 e do CEB-FIP MC 90 são coincidentes (Gráfico III-1a). O REBAP estima as cargas de rotura mais conservativas, traduzindo a inadequação da potência 2/3 afectando a resistência à compressão.

III.6.3 Armadura longitudinal

A contribuição da armadura longitudinal, para os códigos analisados, é ilustrada no Gráfico III-2 através dos diagramas representativos da relação entre a capacidade de carga ao punçoamento e a percentagem de armadura longitudinal, em lajes sob carregamento centrado sem armadura transversal.

Incluem-se, no mesmo gráfico, os resultados de duas séries de ensaios realizados por (Marzouk *et al.*, 1991) cujas constantes são a espessura e a resistência à compressão. Não se consideraram as limitações regulamentares relativas às tensões resistentes à compressão.

A justificação para a não coincidência entre as curvas representativas dos códigos EN 1992-1-1 e CEB-FIP MC 90 reside na limitação do factor de efeito de escala, ξ , e de $\rho_l \leq 2 \%$ (EN

1992-1-1). De facto, para $d < 200$ mm ($\xi > 2$) a norma EN 1992-1-1 é conservativa para qualquer percentagem de armadura longitudinal. As normas CEB-FIP MC 90 e BS 8110-1: 1997 são as menos conservativas, representando o CEB-FIP MC 90 a melhor aproximação.

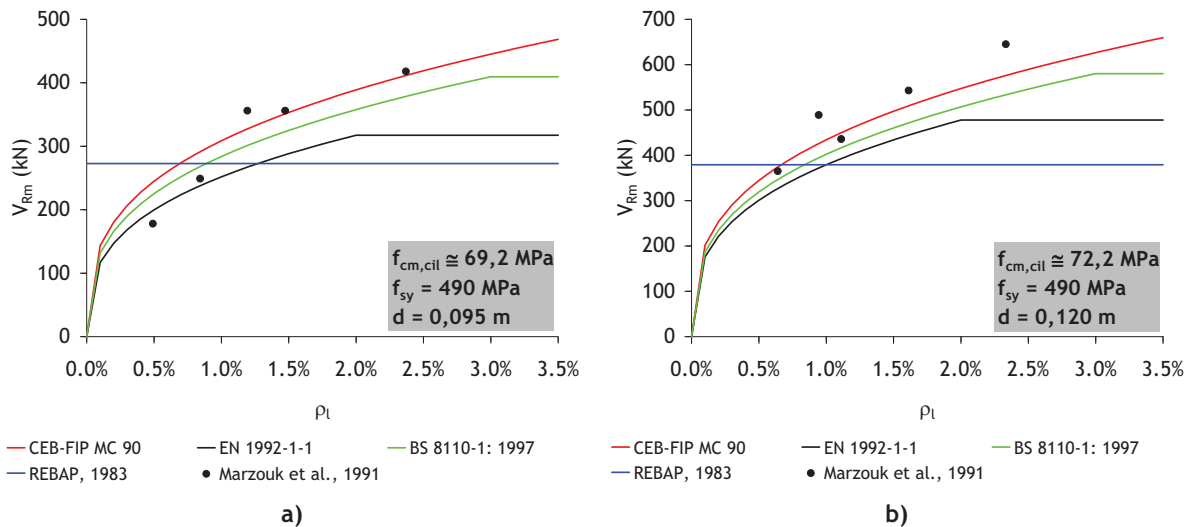


Gráfico III-2 - Capacidade de carga ao punçoamento centrado para lajes sem armadura transversal em função da percentagem de armadura longitudinal.

De notar que as análises se referem a BER, não perdendo, no entanto, aplicabilidade. O REBAP não faz intervir a percentagem de armadura o que se traduz pela pior aproximação.

III.6.4 Armadura específica de punçoamento

Como se viu, a capacidade resistente ao punçoamento advém da soma ponderada das componentes atribuídas ao betão e às armaduras transversais. Os códigos limitam, no entanto, a deformação nas armaduras de punçoamento devido ao facto de a tensão de cedência do aço poder não ser atingida em todos os seus elementos aquando da rotura da laje (Seible *et al.*, 1980). As limitações são como se indica:

- CEB-FIP MC 90 $f_{wyd} \leq 300$ MPa
- EN 1992-1-1 $f_{wyd,ef} \leq 0,25 \cdot (1000 + d) \leq f_{wyd}$ (d em mm)
- BS 8110-1: 1997 $f_{wyd} \leq 438$ MPa
- REBAP $f_{wyd} \leq 350$ MPa

As justificações para a não consideração da soma simples das contribuições acima mencionadas podem residir na diferente solicitação dos seus elementos com a distância à face do pilar bem como na dificuldade de ancorar adequadamente a armadura mobilizada pela fenda crítica, de onde se pode inferir que a armadura transversal pode não entrar em cedência para a carga máxima. Walraven aponta também que, devido ao movimento vertical do cone de punçoamento, a componente da capacidade resistente associada ao betão é

já reduzida no instante em que se atinge a cedência das armaduras transversais (Walraven, 2002).

O aumento da capacidade resistente ao punçoamento, pela contribuição da armadura transversal, relativamente à correspondente sem essa armadura, é também limitada a:

- 100 % na norma britânica BS 8110-1: 1997
- 60 % no regulamento português REBAP

Tal imposição pretende, entre as razões acima apresentadas, evitar o esmagamento local do betão junto à face do pilar. O CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004) não explicitam este limite, deixando o aumento máximo da capacidade resistente ao critério do projectista, sujeito, no entanto, ao valor máximo da capacidade resistente indicado na expressão (III. 9).

Ainda em relação às armaduras transversais, diferente é a quantificação da armadura envolvida na contribuição das mesmas para a capacidade resistente, que vai desde a consideração de armadura por perímetro (CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1), à armadura contida numa zona de rotura (BS 8110-1: 1997), até à totalidade da armadura compreendida entre o contorno da área directamente carregada e um contorno situado à distância de $1,5d$ daquela área, no caso do REBAP.

III.6.5 Excentricidade da carga

Os diferentes códigos analisados abordam, através do coeficiente β , a excentricidade do carregamento de forma distinta, com excepção do CEB-FIP MC 90 e da EN 1992-1-1 que apresentam formulações idênticas. Nestes, os parâmetros envolvidos na determinação de β tornam as formulações de difícil aplicação. A norma britânica (BSI, 1997) recorre a uma expressão mais simples, uma vez que o único parâmetro presente é x (ver expressão (III. 29), pág. 58).

O Gráfico III-3 analisa a influência da excentricidade recorrendo à comparação entre os resultados experimentais (lajes sem armadura transversal) obtidos em quatro séries de ensaios realizados por Moe, 1961; Krüger, 1999 e Marzouk *et al.*, 1996; 1998 e as previsões obtidas pelas normas estudadas.

Não se consideraram as limitações relativas à tensão resistente à compressão (CEB-FIP MC 90 e BS 8110-1: 1997). Nos gráficos seguintes, as previsões regulamentares são representadas pelas linhas finas de diferentes cores e os resultados experimentais pela linha quebrada a negrito.

A observação do Gráfico III-3 permite verificar que o efeito da excentricidade, aqui traduzido pela inclinação dos segmentos de recta (linhas a cheio), é adequadamente previsto pelos diferentes códigos com excepção do REBAP. Note-se que, relativamente aos ensaios de Marzouk (Gráfico III-3c e Gráfico III-3d), a capacidade última é semelhante, não obstante a significativa diferença na resistência à compressão do betão, o que foi atribuído (Birkle, 2004) ao efeito de membrana desenvolvido por restrição do movimento dos apoios na série BRN, indicada no Gráfico III-3c.

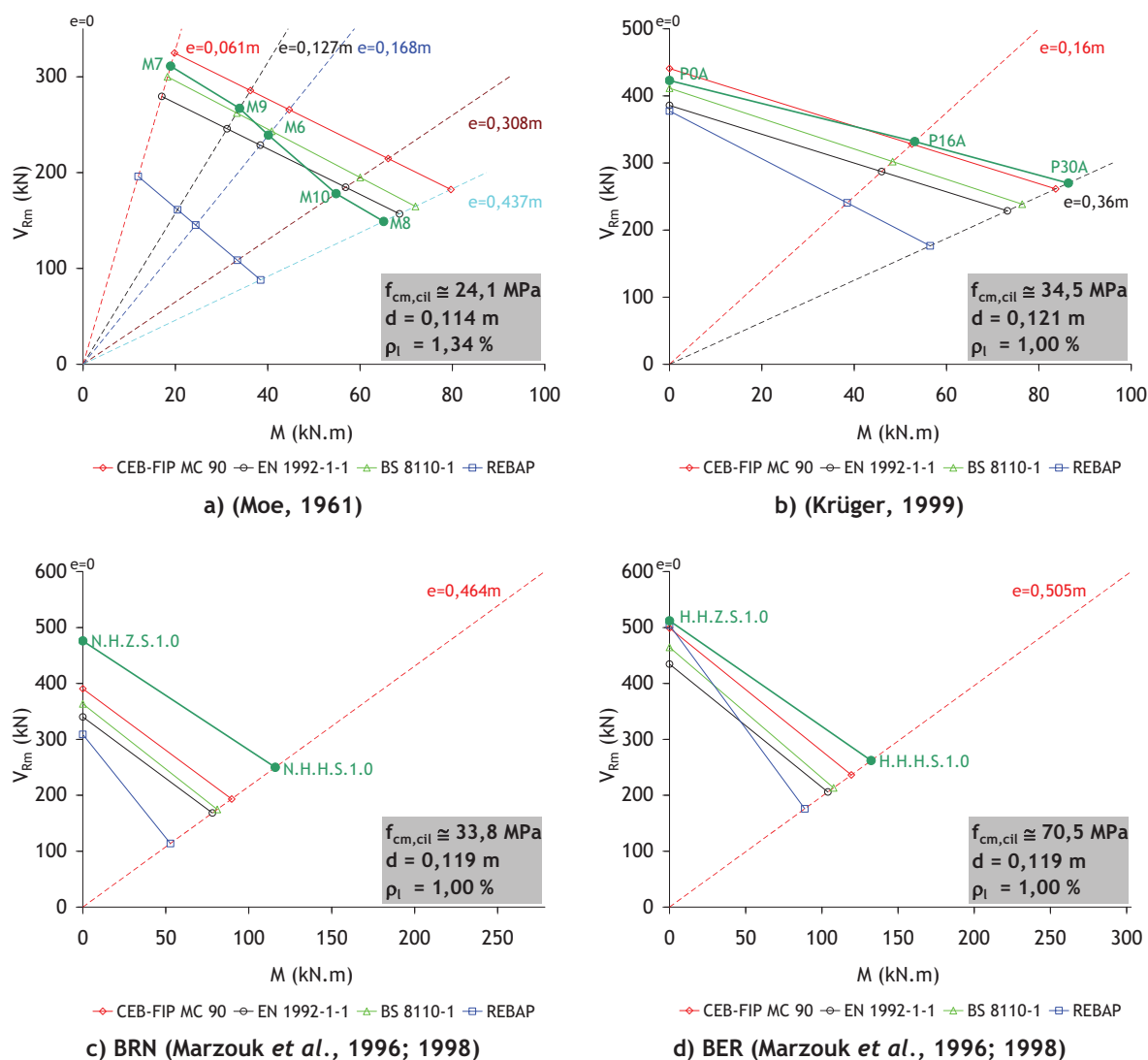


Gráfico III-3 - Efeito da excentricidade da carga. Comparação entre as previsões dos diferentes códigos e os resultados experimentais.

Refere-se que as previsões obtidas pelo CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1 só não são coincidentes para $d < 200$ mm ($\xi > 2$) e percentagens de armaduras longitudinal $\rho_l > 2$ % (EN 1992-1-1), e para $f_{cm} > 50$ MPa (CEB-FIP MC 90).

III.7 AFERIÇÃO GLOBAL DOS CÓDIGOS ANALISADOS

De modo a fazer uma aferição global dos códigos analisados, construiu-se uma base de dados constituída pelos resultados experimentais obtidos por diversos autores, que se compara com as previsões regulamentares.

Num documento da FIB (*fib.CEB-FIP*, 2001) são também comparados os valores médios da resistência ao punçoamento com ensaios sob punçoamento centrado de lajes com e sem armadura transversal. No entanto, o punçoamento excêntrico não é abordado.

Assim, procurou-se construir uma base de dados mais abrangente que é apresentada no Anexo A.1. A compilação de dados reúne 128 ensaios centrados e 41 ensaios excêntricos em lajes sem armadura transversal, bem como 38 ensaios centrados e 12 ensaios excêntricos em lajes com armadura transversal^k. A gama de valores da resistência média à compressão do betão situa-se entre 12,8 MPa e 119 MPa; a altura útil varia de 70 mm a 456 mm e a percentagem de armadura longitudinal entre 0,22 % e 3,70 %.

Com esse objectivo, foi elaborada uma folha de cálculo contendo todas as disposições regulamentares, que permitiu analisar a influência dos diversos parâmetros envolvidos de uma forma sistemática através da elaboração dos gráficos que a seguir se apresentam.

Nas comparações, o valor característico da resistência à compressão do betão, f_{ck} , das expressões regulamentares é substituído pelo correspondente valor médio, f_{cm} . Os coeficientes parciais de segurança relativos ao betão e ao aço são tomados iguais à unidade. As limitações regulamentares (f_{cm} , ρ_l e ξ) são, no entanto, consideradas, excepto quando se indica o contrário.

Para as lajes sem armaduras de punçoamento submetidas a carregamento centrado (base de dados reunida no Anexo A.1), compara-se graficamente a carga de rotura experimental, normalizada em relação às expressões regulamentares CEB-FIP MC 90 (III. 3), EN 1992-1-1 (III. 19), BS 8110-1: 1997 (III. 25) e REBAP (III. 32), com a correspondente previsão em função de três parâmetros: resistência à compressão do betão, percentagem de armadura longitudinal e factor de efeito de escala.

- **Resistência à compressão**

O Gráfico III-4 analisa a influência da resistência à compressão em provetes cilíndricos. No

k - Os resultados experimentais dos ensaios conduzidos no âmbito da presente tese, descritos no Capítulo V e cujos resultados são apresentados no Capítulo VI, integram a referida base de dados

caso da norma britânica que adota a resistência em provetes cúbicos, fez-se a conversão para provetes cilíndricos através da expressão (Reineck *et al.*, 2003):

$$f_{ck,cub} = \frac{f_{ck}}{0,79} \quad (\text{III. 38})$$

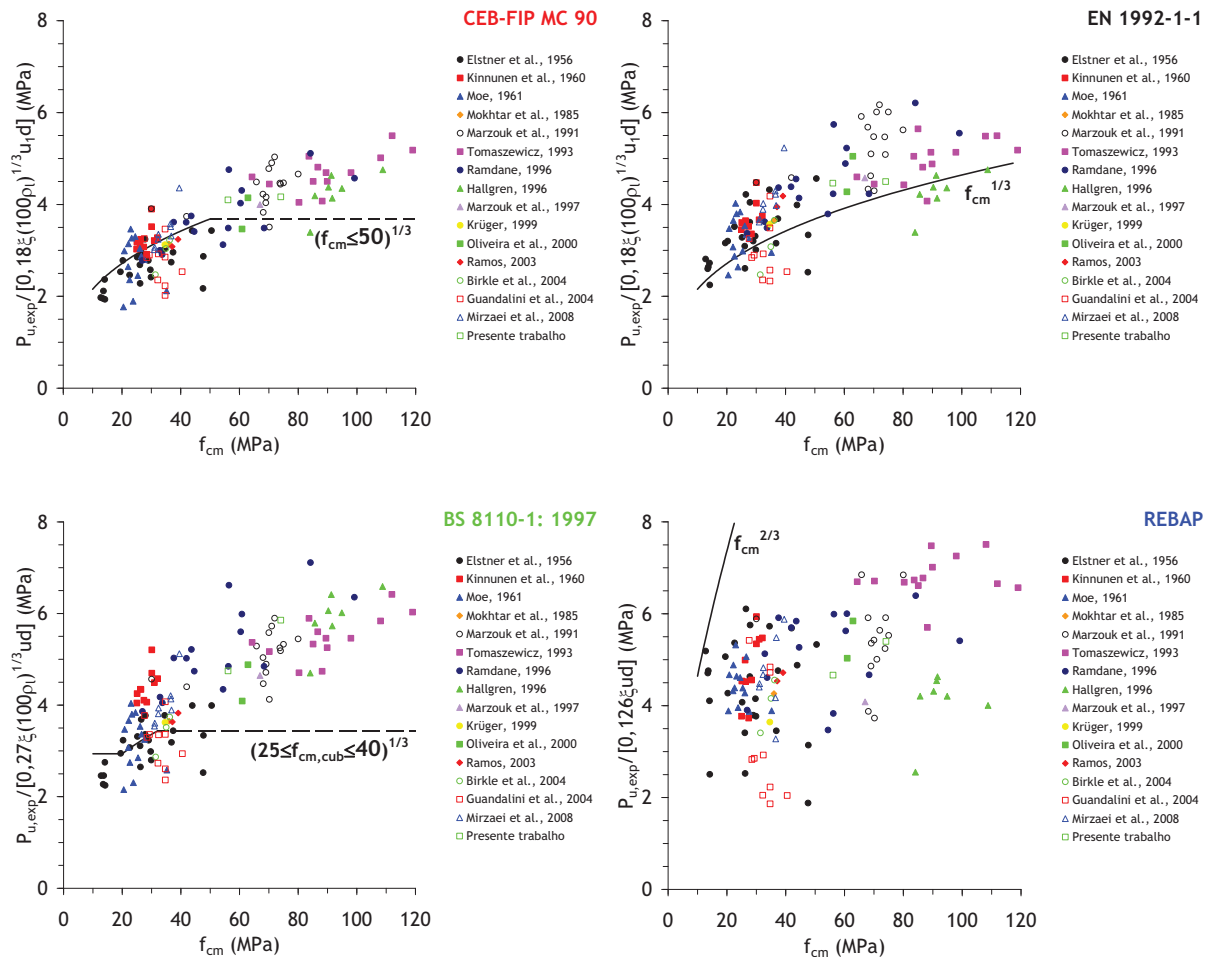


Gráfico III-4 - Carga de rotura ao punção normalizada em função da resistência média à compressão em provetes cilíndricos.

Verifica-se que, relativamente aos códigos CEB-FIP MC 90 e BS 8110-1: 1997, a limitação relativa à tensão resistente (segmento a tracejado da linha de previsão) parece não ser necessária, como indica a tendência da norma EN 1992-1-1 que não impõe aquele limite. Esta apresenta, no entanto, maior dispersão, o que pode dever-se à influência de outros parâmetros (ξ , ρ_l). A considerável dispersão evidenciada pelo REBAP indica, uma vez mais, que a consideração de $f_{cm}^{2/3}$ não parece adequada.

• Armadura longitudinal

A influência da percentagem da armadura longitudinal na capacidade resistente ao pun-

çoamento determinada segundo os diferentes códigos é analisada no Gráfico III-5.

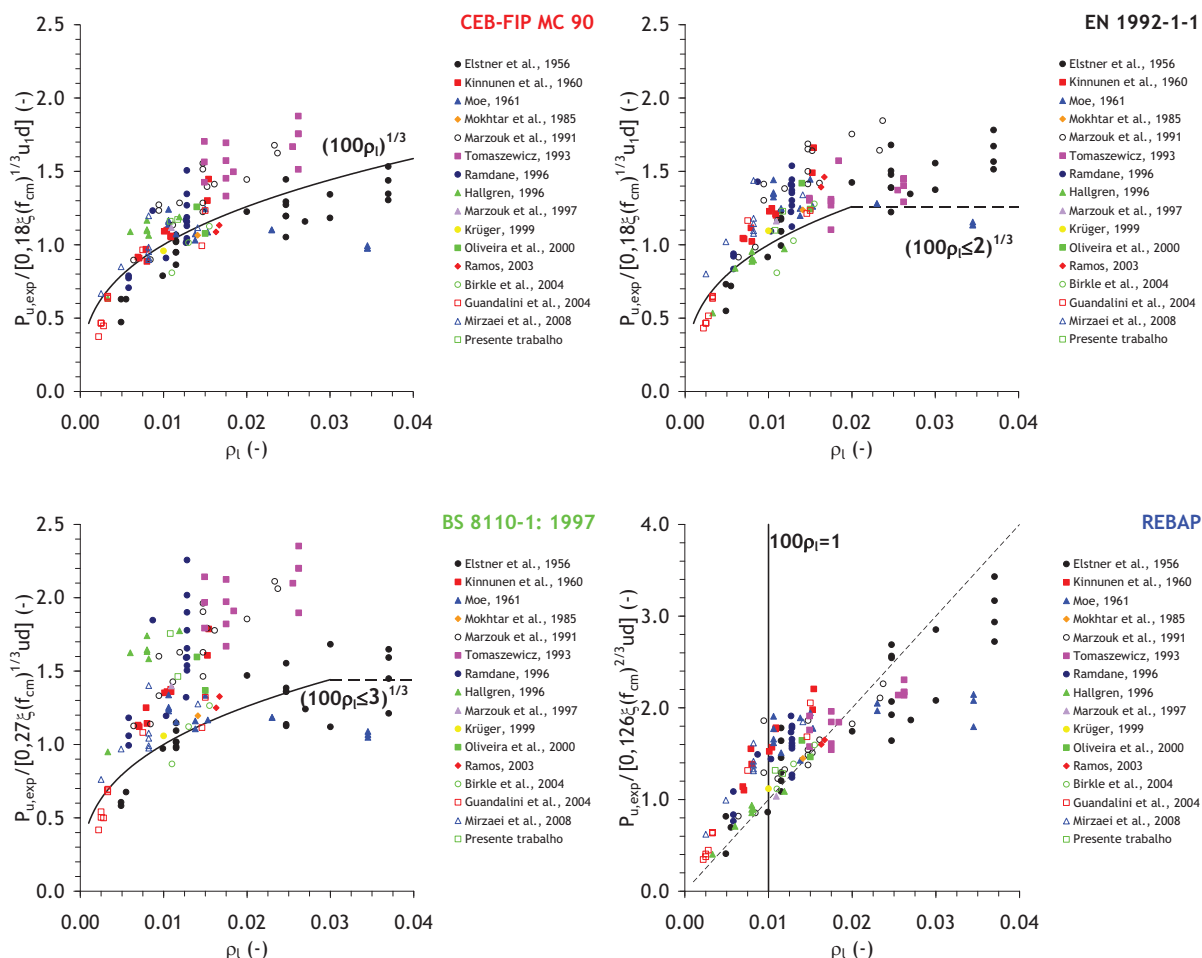


Gráfico III-5 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função da percentagem de armadura longitudinal.

A melhor aproximação é fornecida pelo CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) que não limita este parâmetro. As normas europeia e britânica parecem demasiado conservadoras ao limitar o valor de ρ_l a 2 % e 3 %, respectivamente, o que pode ser compreendido como uma preocupação em garantir um comportamento dúctil das ligações laje/pilar. Relativamente ao regulamento português, a não inclusão de ρ_l na determinação da capacidade resistente é fortemente penalizadora. A simples consideração de uma dependência linear de ρ_l (recta a tracejado) parece ajustada.

• Factor de efeito de escala

A influência do factor de efeito de escala é ilustrada no Gráfico III-6.

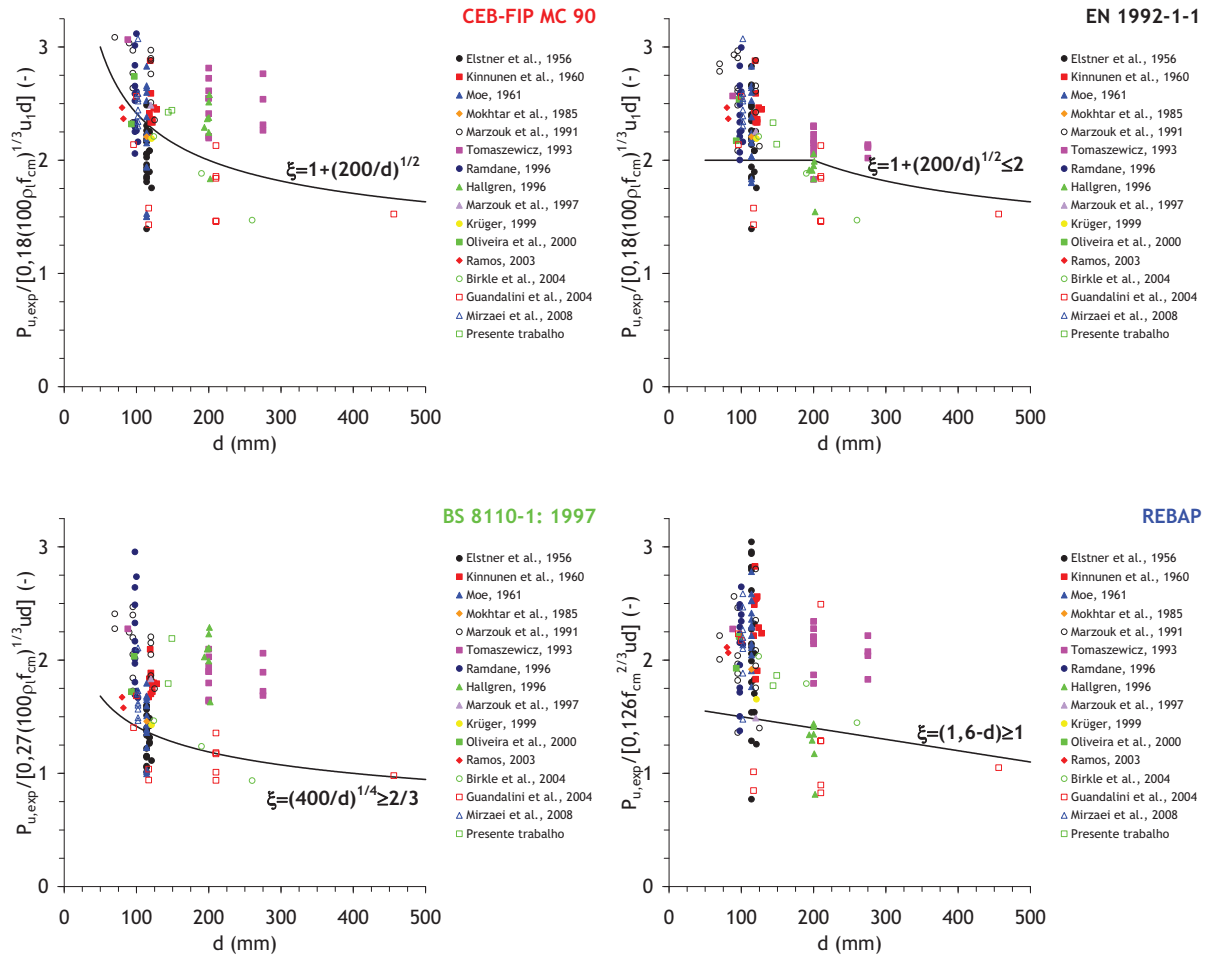


Gráfico III-6 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função do factor de efeito de escala.

A experimentação incidiu essencialmente sobre três valores diferentes para a altura útil, observando-se uma considerável dispersão em todos os códigos. Também relativamente a este factor parece não justificável a limitação $\xi \leq 2$ indicada pela norma EN 1992-1-1.

III.8 PREVISÃO DA LOCALIZAÇÃO DA SECÇÃO DE ROTURA

De forma comum aos quatro códigos analisados, a verificação da segurança é validada, como se referiu, com recurso à expressão (III. 2) onde $V_{t,ef}$ é definido como o valor da carga centrada de punçoamento actuante que inclui o efeito da excentricidade da carga aplicada. Isto é, a excentricidade do carregamento é tida em conta do lado esquerdo (acção) da referida inequação.

Contudo, a excentricidade pode, com vantagem, afectar a capacidade resistente ao punçoamento, vindo:

$$V_t \leq \frac{V_{Rd}}{\beta_i} = V_{Rd,ef} \quad (\text{III. 39})$$

Define-se, portanto, $V_{Rd,ef}$ como o valor da capacidade resistente ao punçoamento incluindo os efeitos da eventual excentricidade. A capacidade de carga determinada na região exterior às armaduras transversais é definida de forma análoga.

Na expressão (III. 39), β_i é tomado igual a β_1 - ver equação (III. 11) - ou $\beta_{n,ef}$ - ver equação (III. 12) - consoante se trate da verificação da segurança na região contendo a armadura transversal ou na região exterior à mesma, respectivamente.

No caso de lajes com armadura transversal, é possível, para os códigos CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1, determinar a localização da rotura pelo procedimento, desenvolvido no âmbito da presente tese, que a seguir se apresenta.

Comparando as capacidades resistentes efectivas, relativas à região contendo armaduras transversais ($V_{Rd,ef}$) e à região exterior às mesmas ($V_{cd,ef}$), através do parâmetro $\eta = V_{Rd,ef}/V_{cd,ef}$, define-se:

$$\eta = \frac{u_1 \cdot \beta_{n,ef} \cdot v_{Rd}}{u_{n,ef} \cdot \beta_1 \cdot v_{cd}} \quad (\text{III. 40})$$

A título exemplificativo construíram-se, a partir de uma folha de cálculo, as curvas de variação da capacidade resistente ao punçoamento, genericamente designado por $V_{Rd,ef}$, em função do correspondente momento flector ($M_{Rd,ef} = V_{Rd,ef} \cdot e$) para diferentes excentricidades (Gráfico III-7a) e deste com a excentricidade (Gráfico III-7b, onde a recta a azul representa a relação tangente na origem), para a norma EN 1992-1-1 e para os dados indicados.

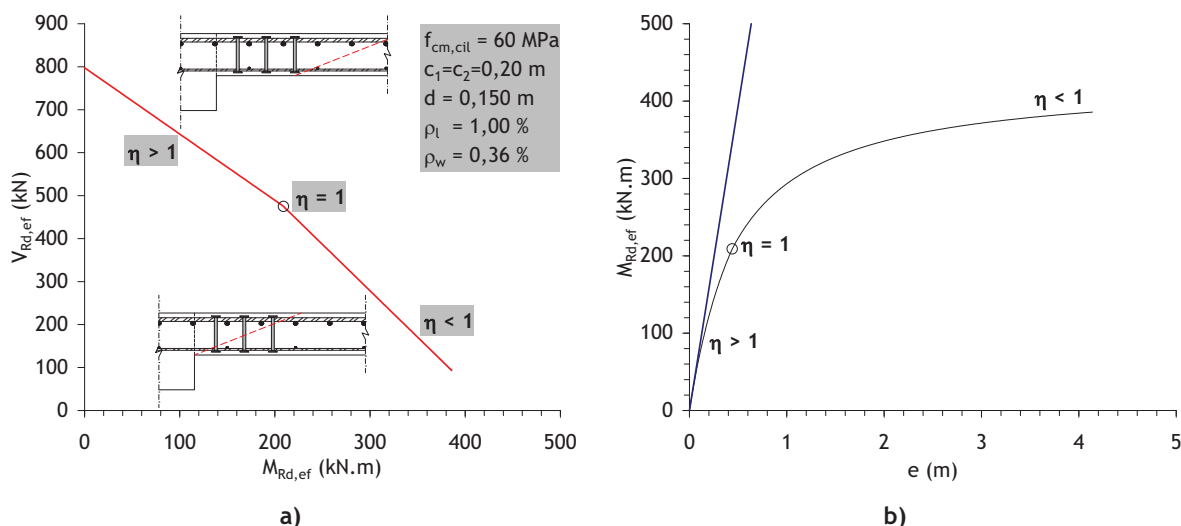


Gráfico III-7 - Previsão da localização da secção de rotura.

Para $\eta < 1$ a rotura localiza-se na região com armaduras transversais, e para $\eta > 1$ na região exterior às mesmas. O valor $\eta = 1$ configura a fronteira entre as rectas (com diferentes pendentes) de interacção das cargas resistentes, $V_{Rd,ef}$ e $V_{cd,ef}$, com o valor efectivo

do momento flector resistente, $M_{Rd,ef}$, ilustradas no Gráfico III-7a. A relação entre o valor efectivo do momento flector resistente e a excentricidade é não-linear como se mostra no Gráfico III-7b.

III.9 DISCUSSÃO FINAL

Resumem-se, no Quadro III-5, os valores mínimo, médio e máximo e o desvio padrão da relação $P_{u,exp}/V_{Rm}$ entre as cargas de rotura experimentais correspondentes à totalidade da base de dados (lajes com e sem armadura transversal sob punçoamento centrado e excêntrico) e as previsões indicadas pelos diferentes códigos. No Anexo A.4 apresenta-se graficamente aquela relação em função de f_{cm} , ρ_l , d e e/c_1 .

Da análise do Quadro III-5 pode concluir-se que o valor médio da relação $P_{u,exp}/V_{Rm}$, parâmetro indicador da segurança, é superior à unidade para todos os códigos analisados com excepção do CEB-FIP MC 90 (ensaios centrados com armadura transversal e excêntricos sem armadura transversal). Note-se, no entanto, que o desvio padrão é sempre muito elevado traduzindo, além das próprias limitações dos códigos, outros factores ligados à execução dos ensaios, de difícil identificação e quantificação, como sejam a velocidade de aplicação do carregamento ou as restrições laterais e rotacionais do sistema de ensaio. Estas últimas podem, por efeito de membrana, incrementar sensivelmente a capacidade última ao punçoamento (Moe, 1961).

De todo o modo, refere-se que a esbelteza (II. 3) dos modelos de laje que integram a base de dados se situa entre 4,2 e 12,7 com o valor médio $\lambda = 6,5$ como mostra o Gráfico III-8 (u_1 é determinado à distância $2d$ da face do pilar).

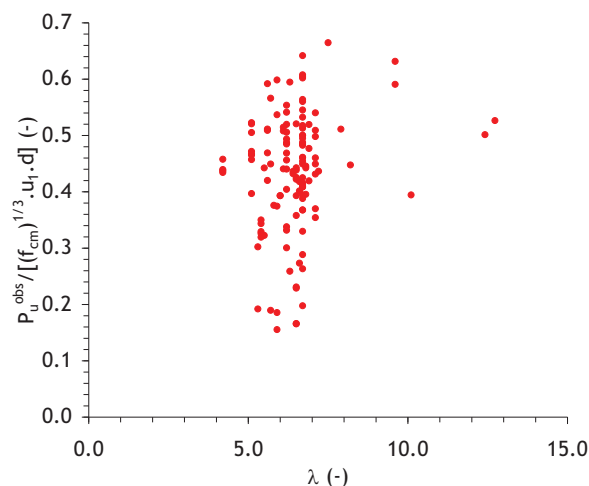


Gráfico III-8 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada em função da esbelteza dos modelos.

Para estes valores não é notória a influência deste parâmetro na capacidade última ao

punçoamento, traduzindo a contribuição desprezável do efeito de membrana (com $\lambda \geq 4,2$). O mesmo foi observado por (Duarte, 1999) para $\lambda \geq 3,5$.

São ainda de registar (Quadro III-5) as diferenças apresentadas pelos códigos CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1 que, embora baseados em formulações muito semelhantes, traduzem as restrições específicas já referidas.

Quadro III-5 - Valores mínimo, máximo e médio e desvio padrão da relação $P_{u,exp}/V_{Rm}$.

Código	$P_{u,exp}/V_{Rm}$				Ensaio
	Mínimo	Máximo	Médio	Desvio padrão	
CEB-FIP MC 90	0,60	1,49	1,03	0,18	128 ensaios centrados sem armadura transversal
EN 1992-1-1	0,70	1,54	1,14	0,17	
BS 8110-1:1997	0,69	2,08	1,23	0,32	
REBAP	0,52	2,22	1,42	0,33	
CEB-FIP MC 90	0,55	1,32	0,96	0,17	41 ensaios excêntricos sem armadura transversal
EN 1992-1-1	0,64	1,48	1,10	0,16	
BS 8110-1:1997	0,60	1,71	1,06	0,24	
REBAP	0,83	2,20	1,49	0,29	
CEB-FIP MC 90	0,50	1,46	0,98	0,22	38 ensaios centrados com armadura transversal
EN 1992-1-1	0,54	2,16	1,18	0,38	
BS 8110-1:1997	0,80	2,61	1,05	0,43	
REBAP	0,55	2,24	1,15	0,34	
CEB-FIP MC 90	0,69	1,31	1,00	0,20	12 ensaios excêntricos com armadura transversal
EN 1992-1-1	0,94	1,80	1,20	0,29	
BS 8110-1:1997	0,75	1,70	1,02	0,29	
REBAP	0,86	1,64	1,33	0,27	

Com base na análise dos gráficos e quadro comparativos, e numa tentativa de diminuir a elevada dispersão observada, desenvolveu-se uma análise de sensibilidade dos parâmetros regulamentares que se identificaram como os possíveis responsáveis pelas diferenças referidas.

Assim:

- A limitação regulamentar $f_{cm} \leq 50$ MPa, no CEB-FIP MC 90, foi suprimida;
- O limite regulamentar $f_{c,cub} \leq 40$ MPa, na BS 8110-1:1997, foi também retirado;
- A distância kd (distância entre o perímetro exterior da armadura de punçoamento e o perímetro u_{out} ou $u_{out,ef}$) foi alargada^l de $1,5d$ para $2d$ e não foi considerada a limitação $\xi \leq 2$, no EN 1992-1-1.

O alargamento de $1,5d$ para $2d$ (EN 1992-1-1) pode ainda ser justificado através dos ensaios de (Elstner *et al.*, 1956; Voet *et al.*, 1982; Mokhtar *et al.*, 1985) que observaram que as tensões de corte suportadas pelo betão decrescem com a distância à face do pilar, estabi-

^l - Igual recomendação é feita no Anexo Nacional dinamarquês (EN-1992-1-1, 2007a)

lizando para cerca de $4d$. Por outro lado, a inclinação da superfície de rotura exterior à região armada transversalmente é idêntica à das lajes sem aquela armadura (como se verá no Capítulo VI), o que justifica a manutenção do valor $2d$.

As propostas de alterações acima referidas conduziram aos valores indicados no Quadro III-6.

Quadro III-6 - Valores mínimo, máximo e médio e desvio padrão de $P_{u,exp}/V_{Rm}$ - alterações propostas.

Código	$P_{u,exp}/V_{Rm}$				Ensaio
	Mínimo	Máximo	Médio	Desvio padrão	
CEB-FIP MC 90 ^m	0,60	1,28	0,98	0,13	128 ensaios centrados sem armadura transversal
EN 1992-1-1 ⁿ	0,60	1,28	1,01	0,13	
BS 8110-1:1997 ^o	0,64	1,60	1,12	0,19	
CEB-FIP MC 90 ^m	0,55	1,29	0,95	0,15	41 ensaios excêntricos sem armadura transversal
EN 1992-1-1 ⁿ	0,55	1,29	0,95	0,15	
BS 8110-1:1997 ^o	0,60	1,43	1,03	0,17	
CEB-FIP MC 90 ^m	0,44	1,38	0,98	0,22	38 ensaios centrados com armadura transversal
EN 1992-1-1 ⁿ	0,44	1,57	0,98	0,25	
BS 8110-1:1997 ^o	0,74	1,83	1,03	0,27	
CEB-FIP MC 90 ^m	0,69	1,31	0,96	0,20	12 ensaios excêntricos com armadura transversal
EN 1992-1-1 ⁿ	0,69	1,31	0,97	0,20	
BS 8110-1:1997 ^o	0,73	1,56	0,90	0,27	

Estas alterações traduziram-se, como se pode observar, numa significativa redução do desvio padrão e do valor médio da relação $P_{u,exp}/V_{Rm}$. Conclui-se assim que a melhor aproximação entre os valores de ensaio e as previsões regulamentares é, no entanto, acompanhada de uma ligeira redução da segurança, isto é, de um menor conservadorismo dos códigos.

Os efeitos globais das propostas de alteração são visíveis no Quadro III-7. Os valores apresentados entre parêntesis referem-se aos rácios $P_{u,exp}/V_{Rm}$ sem qualquer alteração.

Quadro III-7 - Valores globais médios e desvio padrão de $P_{u,exp}/V_{Rm}$ - efeito das alterações propostas.

Parâmetro	Código			
	CEB-FIP MC 90	EN 1992-1-1	BS 8110-1:1997	REBAP
Valor médio	0,97 (0,98)	0,98 (1,13)	1,06 (1,17)	- (1,38)
Desvio padrão	0,16 (0,25)	0,17 (0,26)	0,23 (0,35)	- (0,35)

Como se pode constatar, as propostas são no sentido da diminuição do desvio padrão apresentado pela amostra, acompanhada, no caso das normas EN 1992-1-1 e BS 8110-1:1997, de uma significativa redução dos valores médios.

m - Determinação baseada na não consideração do limite regulamentar $f_{ck} \leq 50$ MPa

n - Determinação baseada na alteração de kd (distância entre o perímetro exterior da armadura de punção e o perímetro u_{out} ou $u_{out,ef}$) de $1,5d$ para $2d$, bem como na não consideração do limite $\xi \leq 2$

o - Determinação baseada na não consideração do limite regulamentar $f_{ck,cub} \leq 40$ MPa

Os desvios encontrados poderiam ainda diminuir se fosse incluído, na determinação da capacidade resistente ao punçoamento, um parâmetro que traduzisse as diferentes contribuições das armaduras transversais em função da sua forma (estribos, pernos, etc.), como acontece, por exemplo, na norma canadense (CSA, 2004).

IV MODELAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES

IV.1 INTRODUÇÃO

As simulações numéricas empregando elementos finitos converteram-se numa ferramenta de análise e previsão do comportamento da generalidade das estruturas. Com efeito, dado que a execução de ensaios laboratoriais é, muitas vezes, de custo elevado e os resultados obtidos são apenas referentes aos pontos ou secções instrumentados, as simulações numéricas são de grande interesse porquanto, se bem aferidas, possibilitam a reprodução de um ensaio experimental de forma económica e rápida, com resultados extensíveis à totalidade da estrutura analisada, esclarecendo o efeito de cada parâmetro interveniente.

As estruturas constituídas por materiais de matriz cimentícia, reforçadas ou não com armaduras ou fibras, apresentam, geralmente, comportamento não-linear. O grau de não linearidade depende, basicamente, do comportamento e interacção dos elementos constituintes do material, do estado de tensão-deformação aplicado ao material pelas solicitações actuates e da susceptibilidade dos materiais fendilharem (Barros, 1995). De entre estes factores de não-linearidade, a fendilhação é, por certo, aquele que mais influi no comportamento das lajes fungiformes, como adiante se mostra.

Uma adequada simulação numérica do comportamento das estruturas em betão passa por uma ajustada modelação dos fenómenos associados à fendilhação do betão. Por esse facto, tem-se assistido, desde o fim da década de sessenta (séc. XX), ao desenvolvimento de modelos de fendilhação para a simulação do comportamento de estruturas de materiais frágeis (Barros, 1995).

Para o fenómeno do punçoamento, em particular, a análise numérica por elementos finitos baseada em modelos precisos para o betão pode constituir uma ferramenta de grande utilidade para o desenvolvimento de modelos mecânicos ou físicos, servindo também de suporte a estudos experimentais nos quais diversas dificuldades podem surgir. Alguns des-

ses problemas são seguidamente enunciados:

- Os ensaios experimentais disponíveis apresentam, genericamente, grande dispersão quanto ao modelo de ensaio e aos próprios resultados, como se viu no Capítulo II;
- Os ensaios já realizados são em geral respeitantes a modelos reduzidos de lajes e pilares, com implicações no efeito de escala;
- A formação e propagação das fendas internas não podem ser observadas directamente durante o ensaio.

Nos últimos anos, numerosas simulações numéricas têm sido desenvolvidas para o estudo do punçoamento em lajes fungiformes utilizando modelações tridimensionais e axi-simétricas.

No tocante às primeiras, estas apresentam, genericamente, resultados suficientemente realistas devido à maior flexibilidade para reproduzir as condições da estrutura, sendo que o processamento exige muito tempo e grande esforço computacional. Não raras vezes, e sempre que as condições de simetria do problema o permitam, apenas uma parte da laje é modelada. Diversos autores (Megally, 1998; Megally *et al.*, 2000b) apontam a modelação tridimensional como a ferramenta mais conveniente para a previsão realística do comportamento da ligação laje/pilar.

Quanto às modelações axi-simétricas, e dado que o problema do punçoamento centrado é iminentemente simétrico, são praticáveis malhas de elementos finitos mais esparsas levando a custos computacionais mais reduzidos, sendo somente simulada uma fatia da laje, de largura infinitesimal, e encarregando-se o programa da geração automática dos restantes elementos.

Refere-se, ainda, que o problema do punçoamento tem sido objecto da atenção de muitos investigadores. Diversos autores (Soares, 1993; Duarte, 1999; Sato *et al.*, 2004) afirmam tratar-se de um problema de difícil simulação numérica, devido ao complexo estado de tensão na zona de ligação laje/pilar.

Seguidamente, descrevem-se e analisam-se as capacidades da análise numérica do fenómeno do punçoamento disponibilizadas pelo código comercial de elementos finitos DIANA v. 9.3 (DIANA, 2008) desenvolvido pela TNO *Building and Construction Research* desde 1972, baseado no método dos deslocamentos (DIANA, *Displacement method ANALyser*), permitindo a realização de análises lineares e não-lineares físicas e geométricas.

IV.2 MODELAÇÃO DO BETÃO

IV.2.1 Comportamento em tracção

IV.2.1.1 Generalidades

Os problemas relacionados com a formação das fendas e a rotura dos materiais frágeis conduziram, na primeira metade do século passado, ao desenvolvimento da Mecânica da Fractura linear. Segundo esta, na vizinhança da fenda, podem identificar-se três modos básicos de carregamento, identificados com os três modos de fractura ilustrados na Figura IV-1:

- O modo I, ou modo de abertura de fenda (*opening mode*), caracterizado pela formação e abertura da fenda, por tensões normais;
- O modo II, ou modo de deslizamento (*shearing mode*), determinado pelo deslizamento na direcção transversal das faces da fenda, determinada por tensões tangenciais;
- O modo III, ou modo de deslizamento lateral (*tearing mode*), representando o deslizamento na direcção longitudinal das faces da fenda, provocada por tensões tangenciais.

Os modos I (abertura relativa das faces da fenda no plano da estrutura) e II de fractura (deslizamento relativo das faces da fenda no plano da estrutura) podem ser modelados desde que se conheçam os respectivos parâmetros de fractura. Estes são a energia dissipada em cada um destes modos, a resistência à tracção e ao corte do material e as equações das curvas que descrevem o decréscimo das tensões com o aumento das deformações - leis de amolecimento (Barros, 1995).

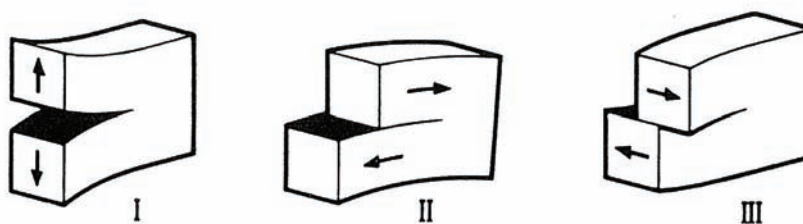


Figura IV-1 - Modos de deformação para propagação das fendas e fractura (Shah *et al.*, 1995).

Em estruturas de betão o modo I é o modo mais comum de desenvolvimento da fissuração podendo mesmo aparecer na sua forma pura, isto é, sem a presença simultânea dos restantes modos. Ao invés, os modos II e III raramente são identificados de forma isolada. Segundo Schlangen, qualquer carregamento num espaço tridimensional pode ser expresso, ao menos do ponto de vista da teoria linear, como a sobreposição dos referidos três modos (Schlangen, 1993). A combinação mais comum é, no entanto, a que resulta da interacção

dos modos I e II (Malm, 2006).

Em simulações numéricas baseadas em elementos finitos, a estrutura é dividida num grande número de elementos (elementos finitos), interligados pelos nós geralmente situados nos vértices ou a meio das arestas dos elementos. O carregamento e as condições de apoio são especificados, sendo estabelecido um conjunto de equações de equilíbrio e de compatibilidade resolvidas numericamente (Mier, 1987). Os resultados são fornecidos em pontos de amostragem (ou pontos de integração) não coincidentes com os nós dos elementos.

Para a representação da fendilhação nos modelos de elementos finitos têm sido adoptados dois conceitos distintos (Sousa, 2004), como se ilustra na Figura IV-2:

- O conceito de fenda discreta;
- O conceito de fenda distribuída, ou mais propriamente de uma banda fendilhada^p.

Nos modelos resultantes da aplicação do conceito de fenda discreta (Figura IV-2a), a fenda é modelada directamente através da duplicação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes, introduzindo-se, em consequência, uma descontinuidade na respectiva geometria. Este tipo de modelos é mais apropriado para problemas em que exista a formação de um número reduzido de fendas, podendo a sua localização ser prevista antes de ser realizada a análise, embora existam algoritmos que dispensam esse conhecimento prévio da localização das fendas (Rots, 1988). A topologia da modelação do elemento estrutural é, como se disse, alterada em função da evolução da fissuração assim como é alterado o número total de nós da malha de elementos finitos, tornando necessárias as operações de geração de nova malha e de renumeração dos nós do problema no fim de cada incremento de carga. A geração da malha e, especialmente, a renumeração dos nós conduzem a grandes tempos de computação (Wang, 1994).

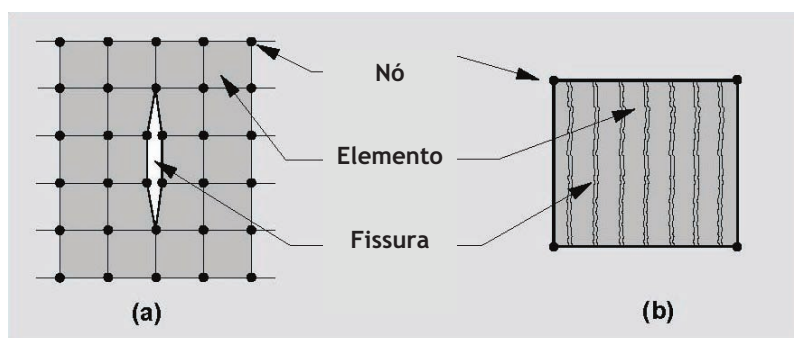


Figura IV-2 - Diferentes conceitos de modelos de fendilhação: (a) fenda discreta; (b) fenda distribuída (adaptado de Kwak *et al.*, 1990).

Nos modelos em que é adoptado o conceito de fenda distribuída, o material fendilhado é considerado como um meio contínuo, mantendo-se portanto a contiguidade da geometria e do campo de deslocamentos da malha de elementos finitos do problema (Figura IV-2b). O

efeito da fendilhação é considerado através da modificação das relações constitutivas definidas para o material (com o início da fendilhação, a relação tensão-extensão inicialmente isotrópica é substituída por uma relação tensão-extensão ortotrópica). Estes modelos são mais adequados para a análise de problemas caracterizados pela ocorrência de padrões de fendilhação difusa, podendo também ser utilizados na análise de problemas com fractura do tipo localizado (elementos de betão simples ou pouco reforçados) (Sousa, 2004). Segundo Lignola, a resposta estrutural é frequentemente demasiado rígida nos modelos de fenda distribuída. A selecção do tipo de modelação da fenda depende do objectivo pretendido para a análise. Assim, se o comportamento global é de primordial interesse (sem grande preocupação pelos padrões de fissuração e tensões locais) o conceito de fenda distribuída é provavelmente a melhor escolha; no caso contrário, como é o caso da necessidade de detalhe do comportamento local de um elemento, pode ser indispensável a adopção de um modelo de fenda discreta (Lignola, 2006).

IV.2.1.2 Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de extensão total (ET)

Na formulação dos modelos assentes no conceito de extensão total, designados na actual versão do código computacional DIANA por modelos “*Total Strain*” (ET - extensão total), recorre-se a uma única lei constitutiva não-linear para descrever o comportamento do betão nos estados são e fendilhado. A simplicidade conceptual do modelo tem sido apontada (Feenstra *et al.*, 1993) como uma clara vantagem do mesmo.

A formulação deste tipo de modelos pode ser encarada como uma extensão dos modelos baseados na teoria da elasticidade ao tratamento da fractura do betão, estando usualmente acoplados a um modelo elástico não-linear em compressão, dado que também nestes não é efectuada qualquer decomposição das extensões (Pimentel, 2004). Esta família de modelos não necessita, portanto, da definição de um modelo de plasticidade para a simulação do comportamento em compressão.

O conceito de base da família de modelos ET é o de que as tensões são avaliadas segundo as direcções determinadas pela própria orientação da fendilhação. Na actual versão do código computacional DIANA, estão disponíveis duas formulações que descrevem o comportamento do betão em compressão (com esmagamento) e em tracção (com fendilhação) com base numa relação de elasticidade não-linear e que assentam no conceito de extensão total:

- O modelo de fissuração “*Total Strain Fixed*”, designado neste trabalho por modelo ETF (extensão total com fendas fixas ortogonais), obrigando ao registo em memória do ângulo de formação da fenda, permanecendo este inalterado em todo o

p - Designação original “*crack band width*” dada por Bažant (Bažant *et al.*, 1983)

processo iterativo;

- O modelo de fissuração “*Total Strain Rotating*”, aqui designado por modelo ETR (extensão total com fendas rotativas), permitindo que a orientação da propagação da fenda seja continuamente alterada durante o processo de convergência numérica, em função da coaxialidade com as direcções principais do vector das extensões.

Disponível está também o modelo de Maekawa que combina um modelo plástico de dano multiaxial para o betão em compressão com um modelo de fendilhação baseado no conceito de extensões totais para o betão em tracção (Maekawa *et al.*, 2003), definido a partir da família de modelos ET.

O modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito da extensão total assenta, em linhas gerais, na formulação da *Modified Compression Field Theory*, originalmente proposta por (Vecchio *et al.*, 1986) como se descreve.

O vector das extensões no sistema global de coordenadas xyz é actualizado pelo incremento de extensões $\Delta\epsilon_{xyz}$ que resulta do equilíbrio atingido no incremento:

$$\epsilon_{xyz}^{t+\Delta t} = \epsilon_{xyz}^t + \Delta\epsilon_{xyz} \quad (\text{IV. 1})$$

que pode ser transformado no vector de extensões no sistema de eixos local da fenda, ϵ_{nst} , recorrendo à matriz de transformação T, como se indica:

$$\epsilon_{nst}^{t+\Delta t} = [T] \epsilon_{xyz}^{t+\Delta t} \quad (\text{IV. 2})$$

A matriz de transformação é determinada, recorrendo ao método de Jacobi, calculando os vectores próprios do tensor das extensões, dado por:

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 3})$$

Os referidos vectores próprios são armazenados na matriz de rotação R dada por:

$$R = [n \quad s \quad t] = \begin{bmatrix} c_{xn} & c_{xs} & c_{xt} \\ c_{yn} & c_{ys} & c_{yt} \\ c_{zn} & c_{zs} & c_{zt} \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 4})$$

onde:

$$c_{xn} = \cos(\phi_{ij})$$

ϕ_{ij}

ângulo definido entre os eixos i e j

Num estado tridimensional de tensão, a matriz de transformação T - equação (IV. 5) - é obtida substituindo os valores apropriados conduzindo a:

$$T = T_{i+1}^{(t+\Delta t)} \varepsilon_{xyz} \quad (IV. 5)$$

O modelo constitutivo é portanto formulado no sistema de eixos local da fenda como se indica:

$$\sigma_{nst}^{t+\Delta t} = \sigma_{i+1}^{(t+\Delta t)} \varepsilon_{nst} \quad (IV. 6)$$

O vector actualizado das tensões, no sistema global de coordenadas xyz , é finalmente dado por:

$$\sigma_{xyz}^{t+\Delta t} = T^T \sigma_{nst}^{t+\Delta t} \quad (IV. 7)$$

Refere-se que a matriz de transformação T (IV. 5) é estabelecida no início do processo de fendilhação e mantida ao longo de todo o carregamento, no caso do modelo de fendas fixas, enquanto é continuamente actualizada em cada incremento de carga no modelo de fendas rotativas.

Seguidamente, cada uma das formulações é descrita com algum detalhe.

• MODELO DE FENDAS FIXAS

O modelo ETF, assente na formulação das extensões totais para o betão, é baseado num modelo de fendas fixas ortogonais. Num estado tridimensional de tensão, o presente modelo pode considerar até três fendas ortogonais em cada ponto de integração de um dado elemento finito.

Assim, detectada a violação, num dado ponto de integração, do critério da tensão máxima de tracção, originando a formação de uma fenda, a direcção e a posição da mesma é armazenada para a análise dos subsequentes incrementos de carga, o que corresponde a manter constante a matriz de transformação T definida na equação (IV. 5). A direcção da fenda não é alterada e é, por isso, fixa, representando os eixos de ortotropia do material, nos quais passam a ser estabelecidas as leis constitutivas (Pimentel, 2004).

Se e quando a direcção principal do vector das extensões de tracção formar, num dado ponto de integração, um ângulo de pelo menos 90° relativamente à direcção acima referida, é estabelecida uma segunda fenda ortogonal à fenda ou fendas anteriores.

Este modelo apresenta a vantagem de traduzir correctamente a natureza física da formação de fendas, segundo a qual as relações constitutivas são avaliadas num sistema coorde-

nado fixo, determinado pela própria formação das fendas. Diversos autores (Rots *et al.*, 1989; Feenstra *et al.*, 1993) afirmam, no entanto, que o modelo ETF conduz à previsão de cargas de rotura superiores às obtidas com recurso ao modelo de fendas rotativas.

• MODELO DE FENDAS ROTATIVAS

O modelo de fendas rotativas disponível baseia-se numa abordagem muito comum designada por “conceito de coaxialidade”, no qual as relações constitutivas tensão-extensão são estabelecidas segundo as direcções principais do vector das extensões.

• MODELO DE MAEKAWA

O modelo de Maekawa, desenvolvido a partir da calibração de estudos experimentais realizados na Universidade de Tóquio sobre a transferência de tensões entre faces de fendas, assenta no modelo da densidade de contacto que estabelece uma relação não-linear entre a extensão de corte normalizada, ω , e a tensão de corte na fenda, τ , como se ilustra no Gráfico IV-1 (Maekawa *et al.*, 2003). O autor limita, no entanto, o uso da presente formulação a betões de agregados correntes cuja resistência à compressão esteja compreendida entre 15 e 50 MPa.

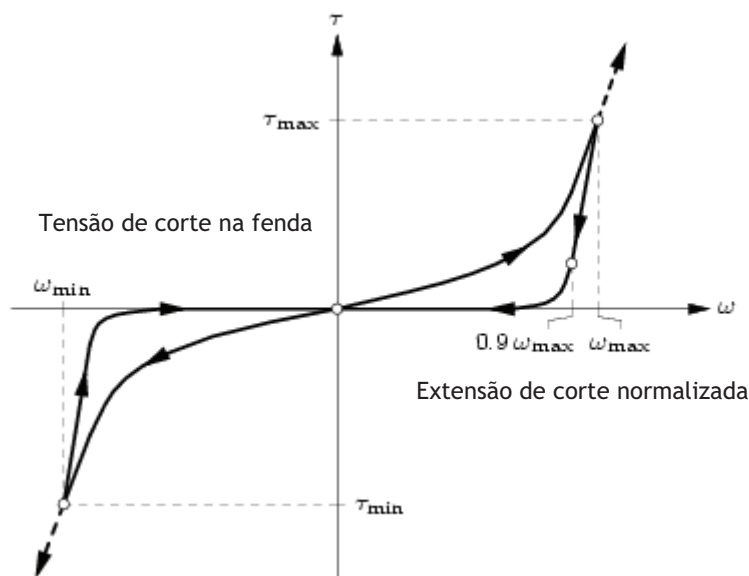


Gráfico IV-1 - Modelo de transferência das tensões de corte nas fissuras (adaptado de Maekawa *et al.*, 2003).

A extensão normalizada, ω , é função da distorção na fenda, γ_{cr} , e da extensão correspondente à abertura da fenda, ε_{nn} , como se indica:

$$\omega = \frac{\gamma_{cr}}{\varepsilon_{nn}} \quad (\text{IV. 8})$$

A referida relação é definida de forma distinta em função do carregamento, como se mostra na expressão que se segue.

$$\tau = \begin{cases} f_{st} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} & \text{se } \omega > \omega_{\max} & \text{(carga)} \\ \tau_{\max} \frac{\omega - 0,85\omega_{\max}}{0,15\omega_{\max}} & \text{se } 0,9\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max} & \text{(descarga/recarga)} \\ \frac{1}{3} \tau_{\max} \left(\frac{\omega}{0,9\omega_{\max}} \right)^9 & \text{se } \omega < 0,9\omega_{\max} & \text{(descarga/recarga)} \end{cases} \quad (\text{IV. 9})$$

Na expressão (IV. 9), a tensão f_{st} é relacionada com a resistência à compressão uniaxial, referida a provetes cilíndricos e expressa em MPa, como se mostra:

$$f_{st} = 3,83 f_c^{1/3} \quad (\text{IV. 10})$$

O valor máximo da tensão de corte na fenda é relacionável com os parâmetros definidos mediante:

$$\tau_{\max} = f_{st} \cdot \frac{\omega_{\max}^2}{1 + \omega_{\max}^2} \quad (\text{IV. 11})$$

O amolecimento da resposta (“*Decay of Shear Transfer*”) representado no Gráfico IV-2 traduz-se sob a forma:

$$\tau_{DST} = \tau \cdot \left(\frac{\gamma_{ult}}{\gamma_{cr}} \right)^c \quad \text{para } |\gamma_{cr}| > \gamma_{ult} \quad (\text{IV. 12})$$

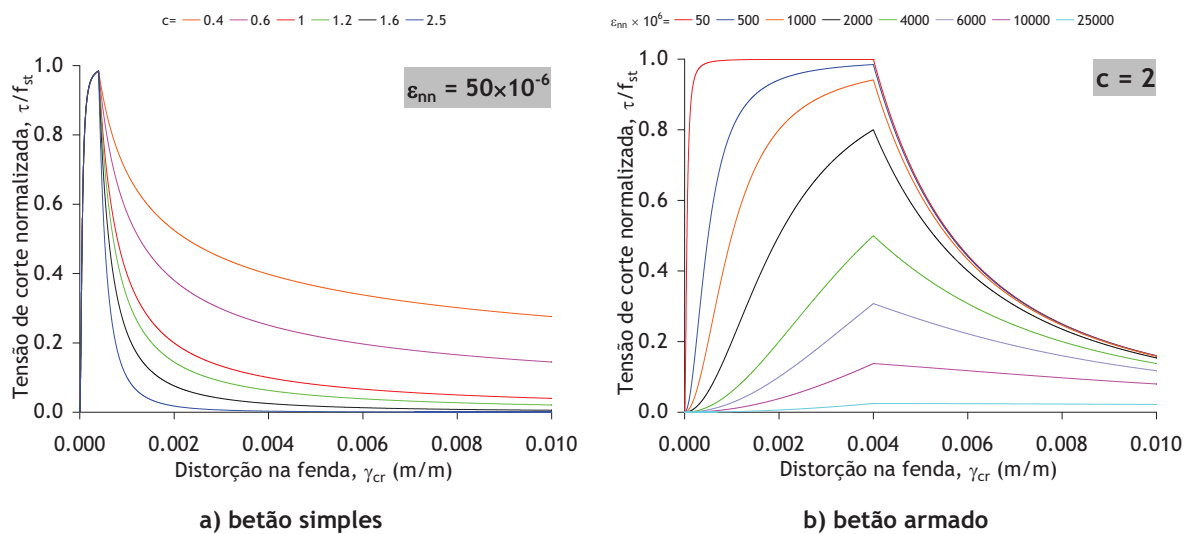


Gráfico IV-2 - Amolecimento da resposta em corte.

Na expressão anterior, os símbolos têm o seguinte significado:

τ_{DST}	tensão de corte na fenda, modificada pelo amolecimento
τ	tensão de corte na fenda, definida na expressão (IV. 9)
γ_{ult}	distorção última, especificada pelo utilizador
γ_{cr}	distorção na fenda (<i>crack shear strain</i>)
c	parâmetro de amolecimento, especificado pelo utilizador

O Gráfico IV-2 representa o modelo de transferência de tensões na fenda - equação (IV. 12) - para os casos do betão simples ($\gamma_{ult} = 400 \times 10^{-6}$) com distintos valores do parâmetro de amolecimento, e do betão armado ($\gamma_{ult} = 4000 \times 10^{-6}$) com diferentes valores da extensão normal à fenda. O amolecimento da resposta do betão armado só ocorre, porém, em casos de elevada quantidade de armadura (Maekawa *et al.*, 2003).

IV.2.1.3 Modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de decomposição das extensões (DE)

Nos modelos de fendas distribuídas, as fissuras são modeladas modificando as relações constitutivas (tensão-extensão) dos elementos finitos na vizinhança da fissura. As vantagens da abordagem do modelo de fendas distribuídas são a sua facilidade de implementação em modelos computacionais e o facto de as microfissuras serem não raras vezes não rectas nem discretas mas antes tortuosas e distribuídas.

Uma das grandes vantagens dos modelos com decomposição das extensões reside na simplicidade conceptual com que permitem lidar de forma rigorosa com situações de múltiplas fendas fixas (Pimentel, 2004). Por outro lado, a incorporação de outros fenómenos como a fluência e a retracção do betão pode ser feita de forma transparente (Feenstra *et al.*, 1993).

Porém, os resultados das análises numéricas baseadas no conceito de fendas distribuídas podem depender fortemente do tamanho dos elementos empregues na malha de elementos finitos pelo que a influência do refinamento da malha tem sido apontada (Bažant *et al.*, 1979; Borst *et al.*, 1985; Rots, 1988) como um dos principais problemas dos modelos (de fenda distribuída) com decomposição das extensões.

A actual implementação do código computacional DIANA contempla um modelo baseado no conceito de decomposição das extensões, designado por “*Smeared Cracking*” (DE - decomposição das extensões).

A formulação incremental dos modelos de fendilhação distribuída, baseados no conceito de decomposição das extensões, assenta na decomposição da deformação incremental total numa extensão incremental elástica no betão, $\Delta \varepsilon^e$, e num incremento da deformação cor-

respondente à abertura da fenda, $\Delta\varepsilon^{cr}$, como se mostra:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{cr} \quad (\text{IV. 13})$$

O procedimento descrito é, na essência, uma tentativa de aproximação ao modelo de fenda discreta que, como se disse, separa completamente o betão da fenda com recurso à duplicação dos nós que definem a malha de elementos finitos (Rots, 1988).

A decomposição do incremento da extensão correspondente à fenda permite a modelação de várias fendas ocorrendo simultaneamente num mesmo ponto de amostragem (ponto de Gauss). A modelação da interacção entre diferentes fendas é, assim, possível, embora não haja ainda enquadramento teórico para a sua formulação (Pimentel, 2004). Os incrementos de tensão $\Delta s_i^{cr} = [\Delta\sigma_{nn,i}^{cr}, \Delta\tau_{nn,i}^{cr}]^T$ e de deformação $\Delta\varepsilon_i^{cr} = [\Delta\varepsilon_{nn,i}^{cr}, \Delta\gamma_{nn,i}^{cr}]^T$ são formulados num sistema coordenado $n - t$ orientado segundo cada fenda i , como se mostra na Figura IV-3.

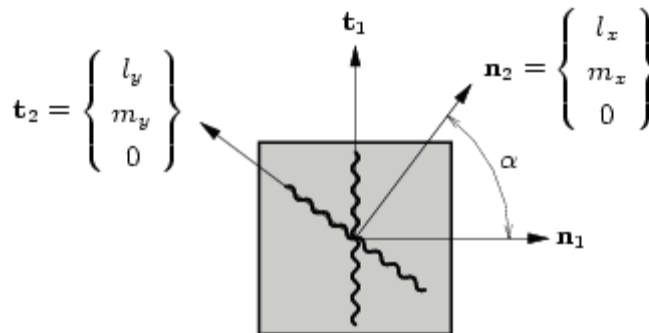


Figura IV-3 - Modelo de múltiplas fendas inclinadas. Representação bidimensional com definição do ângulo α (DIANA, 2007).

A possibilidade de formação de múltiplas fendas num dado ponto de amostragem pode, contudo, conduzir a um rápido decréscimo da rigidez de corte do sistema com consequências ao nível do condicionamento da matriz de rigidez (Borst, 1986). Assim, obriga-se o modelo constitutivo a definir o critério para a abertura de novas fendas, através da verificação simultânea de duas condições, como se indica:

- A tensão principal de tracção, σ_1 , viola o critério da tensão máxima (*tension cut-off*) ilustrado no Gráfico IV-3;
- O ângulo definido entre a direcção normal à fenda existente e a direcção da tensão principal de tracção, α , excede um valor limite fornecido (*threshold angle*) como se ilustra na Figura IV-3.

Em cada fenda, pode estabelecer-se uma relação entre Δs_i^{cr} e $\Delta\varepsilon_i^{cr}$ sob a forma:

$$\Delta s_i^{cr} = D_i^{cr} \cdot \Delta\varepsilon_i^{cr} \quad (\text{IV. 14})$$

Em geral, considera-se que a fractura tem início em modo I (ver Figura IV-1, pág. 77),

assim que se viola o critério da tensão máxima de tracção. Este critério é estabelecido no espaço das tensões principais, representando-se no Gráfico IV-3, na forma bidimensional, as duas formulações disponibilizadas pelo código computacional DIANA.

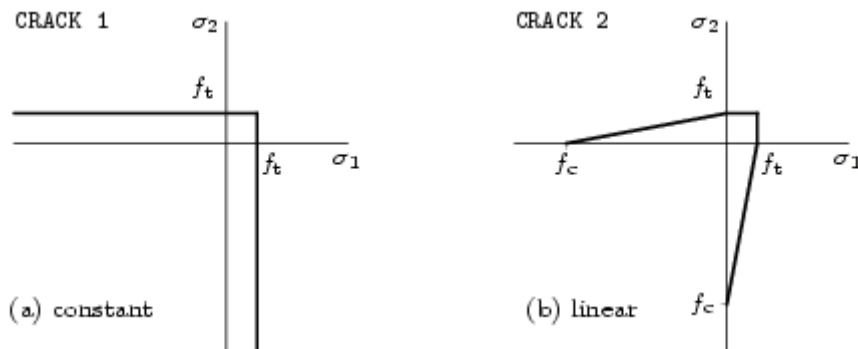


Gráfico IV-3 - Modelos disponíveis no espaço bidimensional das tensões principais para a definição do critério da tensão máxima (*tension cut-off*): a) tensão constante; b) tensão linearmente decrescente (DIANA, 2007).

O valor limite do ângulo α (*threshold angle*) acima definido é estabelecido, por defeito, em 60°. O utilizador pode, no entanto, alterar o valor deste parâmetro para 90° obtendo-se um modelo análogo ao ETF. Ao invés, a fixação do valor limite do ângulo em 0° conduz à implementação do modelo equivalente ao ETR (ver IV.2.1.2). Habitualmente, o valor limite do ângulo α é fixado em 30° (Feenstra *et al.*, 1993) o que limita o número de fendas num determinado ponto de amostragem a seis.

Desprezando, simplificadamente, os termos cruzados da matriz D_i^{cr} (IV. 14) materializados pelas relações entre a extensão normal à fenda ($\Delta \varepsilon_{nn,i}^{cr}$) e a tensão tangencial na fenda ($\Delta \tau_{nn,i}^{cr}$), e entre a distorção na fenda ($\Delta \gamma_{nn,i}^{cr}$) e a tensão normal na fenda ($\Delta \sigma_{nn,i}^{cr}$), resulta a seguinte relação para cada fenda i:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{nn}^{cr} \\ \Delta \tau_{nn}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn}^{cr} \\ \Delta \gamma_{nn}^{cr} \end{Bmatrix} \quad (IV. 15)$$

Em virtude da decomposição das extensões o betão e a fenda actuam como molas associadas em série (ver Gráfico IV-4), representando μE e βG as rigidezes associadas ao incremento total da extensão enquanto D^I e D^{II} dizem respeito apenas ao incremento da extensão ligada à fenda, como se mostra nas equações a seguir:

$$\frac{1}{\mu E} = \frac{1}{E} + \frac{1}{D^I} \rightarrow D^I = \frac{\mu}{1 - \mu} E \quad (IV. 16)$$

$$\frac{1}{\beta G} = \frac{1}{G} + \frac{1}{D^{II}} \rightarrow D^{II} = \frac{\beta}{1 - \beta} G \quad (IV. 17)$$

Nas expressões anteriores, os símbolos têm o seguinte significado:

μ	factor de redução do módulo de elasticidade longitudinal, E (amolecimento em tracção)
β	factor de redução do módulo de elasticidade transversal, G
D^I	rigidez associada ao modo de abertura da fenda
D^{II}	rigidez associada ao modo de deslizamento da fenda

Antes da formação de uma fenda assume-se um comportamento elástico e linear para o betão em tracção (Gráfico IV-4).

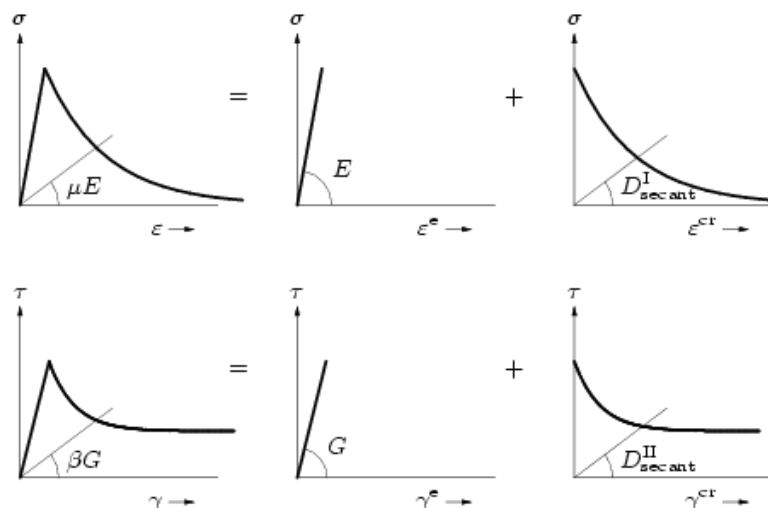


Gráfico IV-4 - Associação em série das componentes das deformações no betão (ϵ) e na fenda (ϵ^{cr}).

Para a obtenção da relação incremental entre os vectores das tensões e das deformações, pode escrever-se (Rots *et al.*, 1987):

$$\Delta\sigma = \left[D - DN \left[D_{sec}^{cr} + N^T DN \right]^{-1} N^T D \right] \cdot \Delta\epsilon \quad (IV. 18)$$

em que D é a matriz de elasticidade do betão dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (IV. 19)$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade secante e o coeficiente de Poisson e N é uma matriz de transformação.

De maneira a avaliar a influência do ângulo α na previsão da capacidade resistente de uma laje fungiforme (dimensionalmente idêntica às lajes descritas no Capítulo V - ver Figura VII-2, pág. 186) de betão da classe C 30/37^q submetida a punçoamento centrado, conduziu-

q - $E_c = 29$ GPa, $f_{cm} = 38$ MPa, $f_{ctm} = 2,9$ MPa, $G_F = 76$ Nm/m², $d_{max} = 16$ mm, $\rho_l = 1,0$ %, A500

se uma análise para diferentes ângulos. As respostas deformacionais^r (carga × flecha a meio-vão) são ilustradas no Gráfico IV-5, onde se incluem duas análises: factor constante de redução do módulo de elasticidade transversal $\beta = 0,10$ (Gráfico IV-5a) e redução variável do mesmo (Gráfico IV-5b) segundo uma lei proposta por Pruijssers (Pruijssers, 1988a) que adiante se apresenta com detalhe (ver IV.2.3.3, pág. 105).

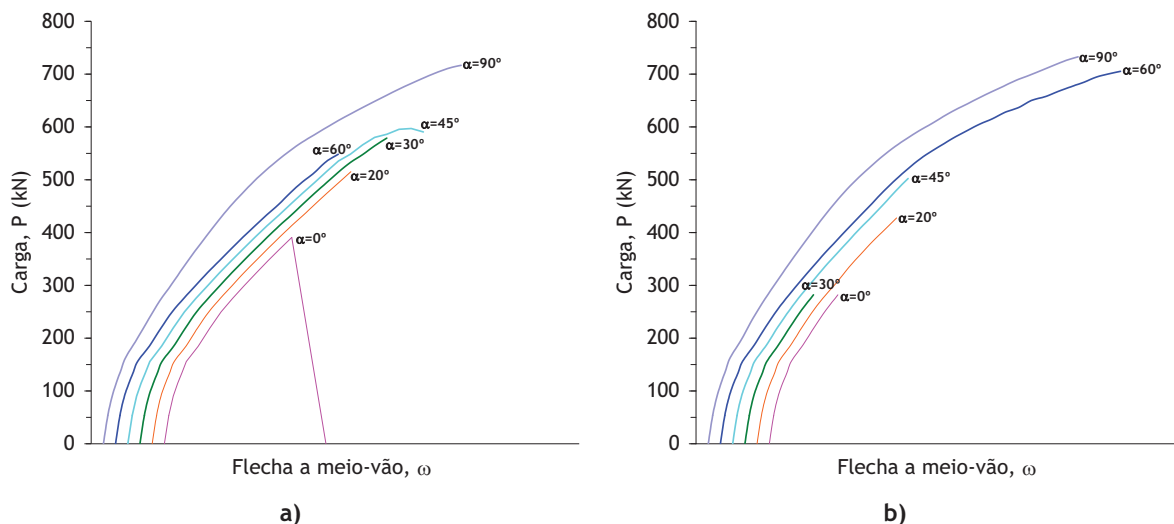


Gráfico IV-5 - Influência do valor limite do ângulo α (*threshold angle*) na capacidade resistente ao punção: a) $\beta = 0,10$; b) β variável (Pruijssers com $\xi = 5$).

A análise do Gráfico IV-5a permite afirmar que para $\beta = 0,10$ a resposta não é significativamente influenciada para ângulos definidos no intervalo $20^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. Ao invés, a retenção variável da rigidez de corte (Gráfico IV-5b) apresenta grande dispersão. Para $\alpha = 90^\circ$ (fendas ortogonais) a resposta não é influenciada pela lei adoptada para a retenção da rigidez de corte.

IV.2.1.4 Relações constitutivas em tracção no betão simples

A modelação do comportamento à tracção do betão (que se baseia na Mecânica da Fractura) pode ser realizada estabelecendo uma lei constitutiva, que relaciona a tensão normal com a extensão normal à fenda (efeito de *tension softening*), definida pela tensão correspondente ao início da fendilhação, pela área delimitada pela curva tensão-extensão e pela forma do ramo descendente da mesma, como se ilustra no Gráfico IV-6.

A área definida pela curva tensão-extensão, g_F , pode ser expressa na forma:

$$g_F = \int \sigma_{nn} \cdot d\varepsilon_{nn} \quad (\text{IV. 20})$$

A energia de fractura, G_F , é definida (IV. 21) como a quantidade de energia necessária

^r - As curvas carga × flecha foram desfasadas para melhor percepção

para propagar uma fenda de superfície unitária, sendo considerada uma propriedade do material:

$$G_F = \int \sigma_m \cdot dw \quad (IV. 21)$$

Na expressão anterior, w representa a abertura de todas as fendas contidas na zona de processamento da fractura. Admitindo as hipóteses de que a deformação é constante na referida região (banda fendilhada), cuja largura é designada por h , e que as fissuras se encontram uniformemente distribuídas ao longo da largura da banda fendilhada, pode escrever-se:

$$w = \int \varepsilon_m \cdot dh = \varepsilon_m \cdot h \quad (IV. 22)$$

Introduzindo as expressões (IV. 20) e (IV. 22) na equação (IV. 21), obtém-se a relação entre a energia de fractura e a área delimitada pelo diagrama $\sigma_{nn} - \varepsilon_{nn}$:

$$G_F = g_F \cdot h \quad (IV. 23)$$

Para que a solução resultante da modelação numérica não dependa da malha de elementos finitos adoptada, considera-se que a largura da banda fendilhada está relacionada com a configuração da malha de elementos finitos (essa banda representa no modelo a zona de processamento da fractura, onde se dá a propagação da fendilhação). A largura da banda fendilhada deve, portanto, corresponder a uma dimensão representativa dos elementos finitos. Para elementos finitos tridimensionais pode tomar-se $h = V^{1/3}$, em que V representa o volume do elemento.

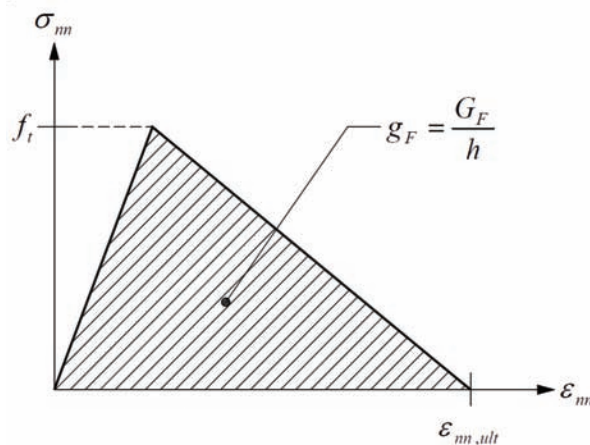


Gráfico IV-6 - Diagrama linear tensão-extensão para simulação do comportamento do betão simples submetido à tracção uniaxial.

A definição da extensão correspondente à abertura da fenda depende, também ela, da largura da banda fendilhada, h , que, segundo Mier *et al.* (Mier *et al.*, 1991) não é constante durante o processamento da fractura como mostram modelações numéricas realizadas por Nooru-Mohamed (Nooru-Mohamed, 1992).

Refira-se, ainda, que um procedimento semelhante é aplicado ao diagrama de amolecimento em compressão, assumindo que a energia de fractura em compressão uniaxial, G_C , é aproximadamente 100 vezes maior que a energia de fractura em tracção, G_F . Como consequência, a lei constitutiva é adaptada ao tamanho do elemento tanto em amolecimento em tracção quanto em compressão (*fib.CEB-FIP*, 2001).

Segundo Rots *et al.*, a resposta deformacional das estruturas de betão é bastante sensível à forma do diagrama adoptado para simular o comportamento correspondente ao modo I de fractura (Gráfico IV-6), ainda que se mantenha constante o valor da energia de fractura (Rots *et al.*, 1985). Em sentido contrário, Ruiz refere que a forma da lei de amolecimento adoptada não conduz a diferenças significativas nas análises numéricas desde que a área delimitada (g_F) seja a mesma (Ruiz, 2003). Refere-se que os resultados numéricos obtidos por Menétrey evidenciam que a energia de fractura do betão é um dos factores capitais que mais influenciam a resistência ao punçoamento (Menétrey, 1994; 2002). Segundo Zhang, a intervenção da tensão resistente à tracção e à compressão do betão é relativamente pequena (Zhang, 2002).

Devido à sua simplicidade, o diagrama linear representado no Gráfico IV-6 tem sido largamente utilizado. Contudo, um comportamento não-linear do amolecimento do betão em tracção^s pode também ser simulado por intermédio da adopção de um diagrama bilinear, tal como foi proposto por Hillerborg, ou de outras relações não-lineares. A extensão última que define os diferentes diagramas de amolecimento em tracção, $\varepsilon_{nn,ult}$, pode, genericamente, ser expressa na forma:

$$\varepsilon_{nn,ult} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{G_F^I}{h \cdot f_t} \quad (IV. 24)$$

De acordo com o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), a energia de fractura está relacionada com o valor da tensão resistente à compressão e com a máxima dimensão dos agregados:

$$G_F = G_{F0} \cdot \left(\frac{f_c}{f_{c0}} \right)^{0,7} \quad (IV. 25)$$

Nas expressões anteriores, os símbolos têm o seguinte significado:

α	constante, em função do tipo de lei de amolecimento adoptada
h	largura da banda fendilhada (<i>crack bandwidth</i>)
G_F^I	energia de fractura associada ao modo I de fractura
G_{F0}	energia base de fractura, função da máxima dimensão dos agregados (ver Quadro IV-1)
f_t	resistência à tracção do betão

s - À fase de acréscimo de deformação com decréscimo de carga atribui-se a designação de amolecimento (*tension softening*). O amolecimento é traduzido através do parâmetro μ definido na expressão (IV. 16), pág. 86

$$f_{c0} = 10 \text{ MPa}$$

Os valores de G_{F0} e de α são função da máxima dimensão dos agregados como se indica no Quadro IV-1.

Quadro IV-1 - Coeficientes para determinação da energia de fractura (adaptado de CEB-FIP, 1993).

$d_{\text{máx}}$ mm	G_{F0} J/m ²	α
8	25	0,125
16	30	1/7
32	58 ^t 38 ^u	0,200

O Gráfico IV-7 representa a interpolação polinomial dos três valores discretos apresentados no Quadro IV-1 para a energia base de fractura bem como a relação linear do coeficiente $1/\alpha$.

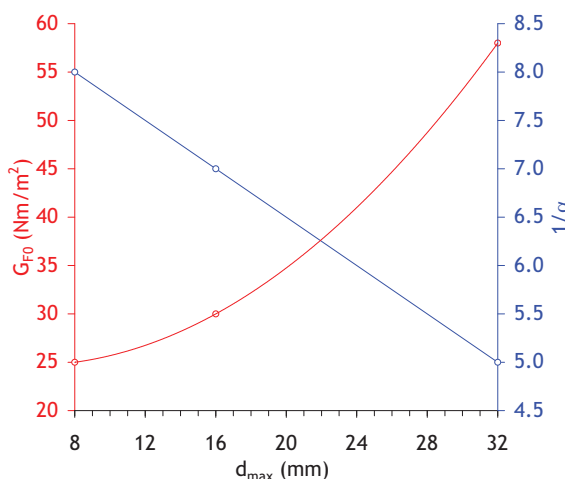


Gráfico IV-7 - Energia base de fractura G_{F0} e coeficiente $1/\alpha$ em função da máxima dimensão dos agregados.

A referida interpolação conduziu às expressões exactas indicadas nas equações (IV. 26) e (IV. 27).

$$G_{F0} = 0,046875 \cdot d_{\text{máx}}^2 - 0,5 \cdot d_{\text{máx}} + 26 \quad (\text{IV. 26})$$

$$1/\alpha = 9 - (d_{\text{máx}}/8) \quad \text{com } d_{\text{máx}} \text{ em mm} \quad (\text{IV. 27})$$

As diferentes formulações disponíveis para o amolecimento do betão em tracção são seguidamente descritas.

Bažant *et al.* apresentaram um modelo de amolecimento linear (Bažant *et al.*, 1983), traduzido na expressão (IV. 28), assente nos pressupostos seguintes:

t - Valor indicado no Quadro 2.1.3 do CEB-FIP MC 90

u - Valor a utilizar de forma a reproduzir os valores do Quadro 2.1.4 do CEB-FIP MC 90

- A largura da banda fendilhada é igual ou superior a três vezes a máxima dimensão dos agregados, consoante se trate de betões de composição normal ou reforçados com fibras, respectivamente;
- As extensões no betão são constantes ao longo da banda fendilhada, como se indica na equação (IV. 22).

$$\frac{\sigma_{nn}(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}} & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (\text{IV. 28})$$

Na sequência de um extenso estudo experimental, Hillerborg *et al.* (citado em Kwak *et al.*, 1990) propôs uma relação bilinear para o amolecimento em tracção, como se indica:

$$\frac{\sigma_{nn}(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} 1 - 3 \cdot \varepsilon_{nn} / \varepsilon_{nn,ult} & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq 2/9 \cdot \varepsilon_{nn,ult} \\ 3/7 \cdot (1 - \varepsilon_{nn} / \varepsilon_{nn,ult}) & \text{se } 2/9 \cdot \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (\text{IV. 29})$$

O modelo de amolecimento indicado pelo CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) é definido por recorrência como se indica na expressão seguinte:

$$\frac{\sigma_{nn}(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{0,85}{2 \cdot \alpha - 0,15} \cdot \varepsilon_{nn} / \varepsilon_{nn,ult} \right) & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq \frac{2 \cdot G_F^I}{h \cdot f_t} - 0,15 \cdot \varepsilon_{nn,ult} \\ \frac{0,15}{1,15 - 2 \cdot \alpha} \cdot (1 - \varepsilon_{nn} / \varepsilon_{nn,ult}) & \text{se } \frac{2 \cdot G_F^I}{h \cdot f_t} - 0,15 \cdot \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} < \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (\text{IV. 30})$$

com:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn,ult} & \text{ dado pela equação (IV. 24)} \\ \alpha & \text{ dado no Quadro IV-1 em função de } d_{m\acute{a}x} \end{aligned}$$

A expressão proposta por Reinhardt, que resulta da modificação da lei de amolecimento linear acima descrita, pode ser explicitada na forma (Reinhardt, 1984):

$$\frac{\sigma_{nn}(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}} \right)^{c_1} & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} \leq \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (\text{IV. 31})$$

com:

$$c_1 = 0,31 \text{ e } \alpha = c_1 / (1 + c_1)$$

O amolecimento do betão em tracção pode ainda ser simulado com recurso à expressão (IV. 32) desenvolvida por Hordijk *et al.* (Cornelissen *et al.*, 1986; Hordijk, 1991).

$$\frac{\sigma_{nn}(\varepsilon_{nn})}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \cdot \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}}\right)^3\right) \cdot e^{\left(-c_2 \cdot \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}}\right)} - \frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{nn,ult}} \cdot (1 + c_1^3) \cdot e^{(-c_2)} & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn} \leq \varepsilon_{nn,ult} \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn,ult} \leq \varepsilon_{nn} < \infty \end{cases} \quad (\text{IV. 32})$$

onde:

$$c_1 = 3,0 \text{ e } c_2 = 6,93$$

O Quadro IV-2 resume os valores de α e de $\varepsilon_{nn,ult}$ para as diferentes formulações acima apresentadas.

Quadro IV-2 - Valores de α e da extensão última das diferentes leis de amolecimento.

Lei constitutiva	α	$\varepsilon_{nn,ult}$ $\times (h \cdot f_t / G_F)$
Linear (Bažant <i>et al.</i> , 1983)	0,5	2
Bilinear (Hillerborg <i>et al.</i>)	5/18	3,6
Bilinear (CEB-FIP MC 90)	Ver Quadro IV-1	1/ α
Exponencial (Reinhardt, 1984)	0,236	4,226
Não-linear (Hordijk <i>et al.</i> , 1991)	0,195	5,128

No Gráfico IV-8, são comparadas as diferentes propostas disponíveis no código comercial de elementos finitos DIANA para as leis de amolecimento do betão em tracção uma vez iniciada a fendilhação. As curvas representadas reportam-se à mesma energia de fractura pelo que são directamente comparáveis.

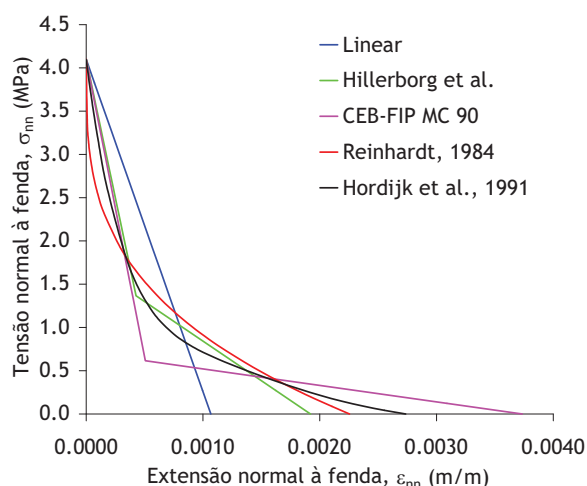


Gráfico IV-8 - Diferentes diagramas de amolecimento correspondentes a um betão caracterizado por: $f_{ct} = 4,1 \text{ MPa}$, $G_F = 105 \text{ Nm/m}^2$ e $h = 46 \text{ mm}$.

Refere-se que no Gráfico IV-8 apenas é ilustrada a parte do diagrama correspondente à extensão associada à abertura da fenda.

Relativamente ao BRFA, vários autores (Kurihara *et al.*, 2000; Barragán, 2002; Barros *et al.*, 2005; Tlemat *et al.*, 2006; Bischoff, 2007; Löfgren *et al.*, 2008) têm definindo, recorrendo a análise inversa, a lei constitutiva de amolecimento do betão em tracção. O objectivo da análise inversa, baseada em simulações numéricas, é o de obter o diagrama $\sigma_{nn} - \varepsilon_{nn}$, conhecida a relação entre a carga aplicada e o deslocamento no ensaio RILEM (RILEM, 2003) sobre um prisma de viga submetido a flexão em quatro pontos.

IV.2.1.5 Retenção de tensões de tracção no betão armado

Em elementos de betão armado as fendas são distribuídas com espaçamentos sensivelmente regulares. A aderência entre o betão e as armaduras pode ser modelada de forma indirecta através do conceito de retenção de tensões de tracção no betão (*tension stiffening*), definido como a capacidade que o betão fissurado tem de suportar, entre fendas, tensões de tracção que contribui significativamente para a rigidez da resposta estrutural global.

No caso de fissuração não localizada devida à presença de armadura aderente, vários autores (Figueiras, 1983; Loo *et al.*, 1997; Pimentel, 2004; Sousa, 2004) têm utilizado o diagrama de retenção de tensões representado no Gráfico IV-9. Neste gráfico a extensão última foi igualada à extensão de cedência das armaduras (Mier, 1987).

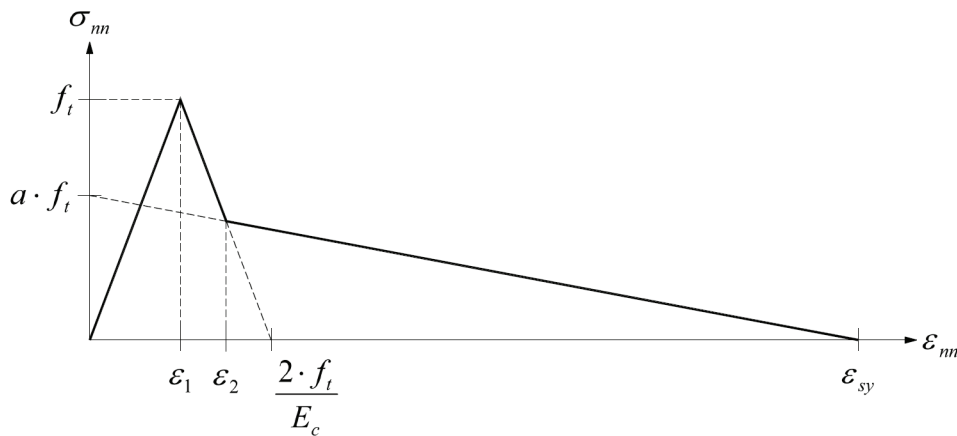


Gráfico IV-9 - Diagrama de retenção de tensões de tracção no betão (*tension stiffening*) - tracção uniaxial.

O diagrama representado no Gráfico IV-9 pode ser expresso por recorrência como se indica:

$$\sigma_{nn}(\varepsilon_m) = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon & \text{se } 0 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_1 = f_t/E_c \\ 2f_t - E_c \cdot \varepsilon & \text{se } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_2 = ((2-a) \cdot f_t)/(E_c - a \cdot f_t/\varepsilon_{sy}) \\ a \cdot f_t \cdot (1 - \varepsilon/\varepsilon_{sy}) & \text{se } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (\text{IV. 33})$$

em que:

ε_m	extensão média correspondente à soma da deformação elástica do betão com a extensão correspondente à abertura da fenda
ε_{sy}	extensão correspondente à cedência das armaduras
a	parâmetro normalmente tomado igual a 0,6

Refere-se que a presente abordagem é adequada quando a armadura é modelada através de elementos embebidos no betão, sendo a deformação da armadura igual à deformação total da fibra de betão adjacente a cada varão de aço.

O efeito de *tension stiffening* só deve, contudo, ser considerado na zona efectiva de betão que envolve a armadura traccionada (Sousa, 2004). Fora desta região, a capacidade de retenção de tensões de tracção é somente garantida pelas propriedades de fractura do betão simples, como se descreveu no subcapítulo IV.2.1.4. As armaduras são consideradas adoptando um modelo elasto-plástico.

IV.2.2 Comportamento em compressão

IV.2.2.1 Formulação do comportamento em compressão no modelo ET

O comportamento do betão em compressão é descrito, no modelo ET, em função de uma relação, em geral não-linear, entre as tensões e as extensões, numa dada direcção, função da lei constitutiva uniaxial de base adoptada. A actual versão do código computacional DIANA possibilita a modelação do comportamento em compressão segundo uma das formas estabelecidas de entre as diferentes curvas ilustradas no Gráfico IV-10, predeterminadas ou definidas pelo utilizador (Gráfico IV-10e).

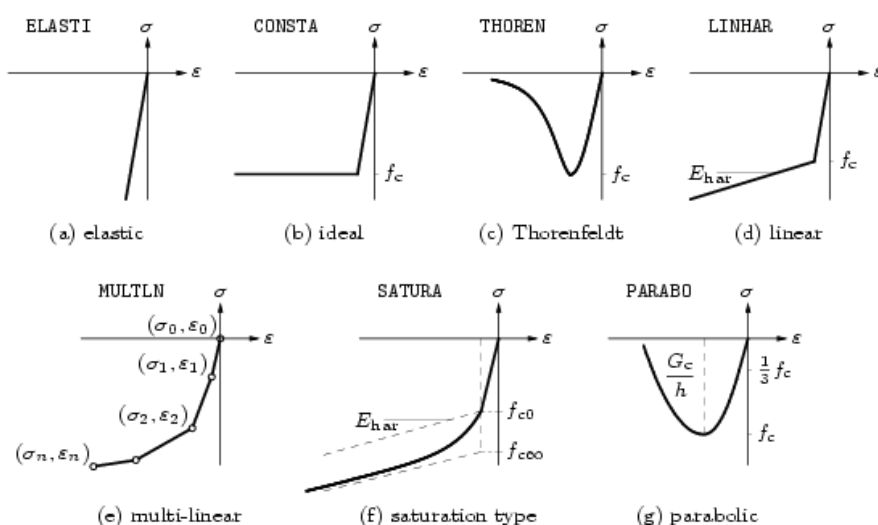


Gráfico IV-10 - Leis constitutivas disponíveis para o betão em compressão no modelo ET (DIANA, 2002).

O betão sujeito a tensões de compressão evidencia, como se sabe, um comportamento dependente do confinamento pelo que a lei constitutiva tensão-extensão é modificada de

forma a incorporar os efeitos do crescente estado de tensão isotrópico^v. Além disso, assume-se, também, que o comportamento do betão é influenciado pela fendilhação.

O acréscimo de capacidade resistente em compressão com o aumento do confinamento é modelado com recurso ao critério de rotura de Hsieh-Ting-Chen (Hsieh *et al.*, 1979; 1982), também designado por critério dos 4 parâmetros (Chen, 2007; Chen *et al.*, 2007), cuja superfície (Gráfico IV-11a) é definida por:

$$f(I_1, J_2, \sigma_{c,\max}) = A \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + B \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + C \cdot \frac{\sigma_{c,\max}}{f_c} + D \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (\text{IV. 34})$$

Na expressão anterior, os invariantes I_1 e J_2 bem como a tensão $\sigma_{c,\max}$ são definidos em termos das tensões principais no betão, σ_{ci} , de acordo com:

$$I_1 = \sigma_{c1} + \sigma_{c2} + \sigma_{c3} \quad (\text{IV. 35})$$

$$J_2 = \frac{(\sigma_{c1} - \sigma_{c2})^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{c3})^2 + (\sigma_{c3} - \sigma_{c1})^2}{6} \quad (\text{IV. 36})$$

$$\sigma_{c,\max} = \max(\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}) \quad (\text{IV. 37})$$

Segundo Chen *et al.*, o critério de rotura de Hsieh-Ting-Chen, cuja representação no plano octaédrico normalizado é feita no Gráfico IV-11b, é uma combinação linear dos critérios de von Mises, de Drucker-Prager e de Rankine (Chen *et al.*, 2007). A definição da superfície de rotura (Gráfico IV-11a) envolve a permutação cíclica das tensões no betão definidas na expressão (IV. 37).

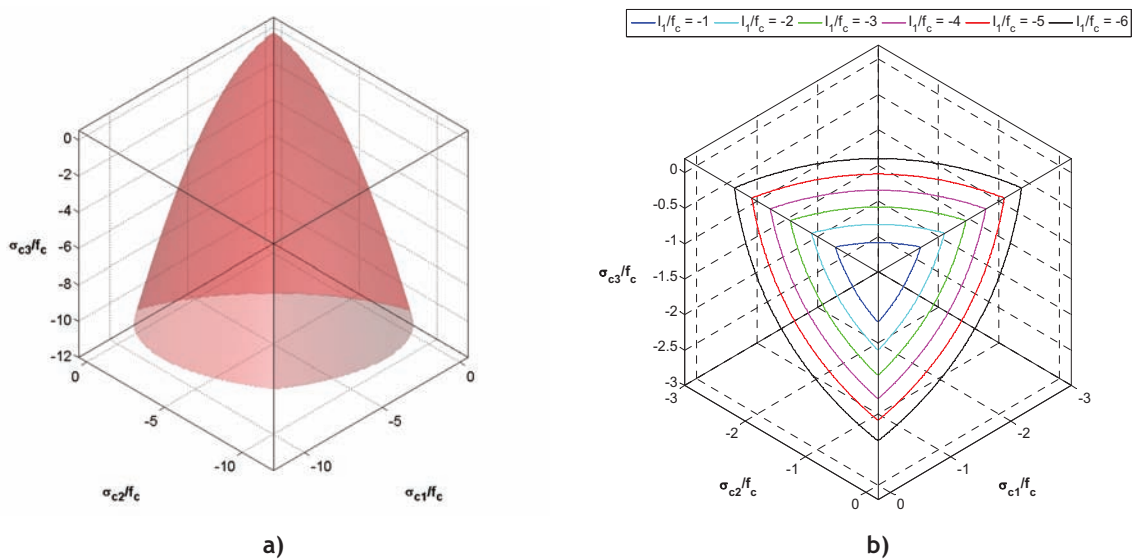


Gráfico IV-11 - Critério de rotura de Hsieh-Ting-Chen: a) representação no espaço normalizado das tensões principais; b) representação das secções no plano octaédrico normalizado.

^v - Tensões associadas à componente do tensor das tensões que provoca apenas variação de volume do material

As constantes A a D da expressão (IV. 34) foram determinadas por análise inversa com base em dados experimentais sobre a capacidade resistente em ensaios uniaxiais (em tracção e em compressão), de estados bidimensionais de tensão e de ensaios triaxiais em provetes de betão, fixando-se (Hsieh *et al.*, 1979; 1982):

$$A = 2,0108 \quad B = 0,9714 \quad C = 9,1412 \quad D = 0,2312$$

O modelo de comportamento do betão em compressão compreende, portanto, o aumento gradual da capacidade resistente em que a rigidez inicial é definida pelo módulo de elasticidade. Num estado triaxial hidrostático de tensão a superfície de rotura não pode ser atingida, estabelecendo-se uma relação linear entre as tensões e as extensões, como se mostra no Gráfico IV-12a.

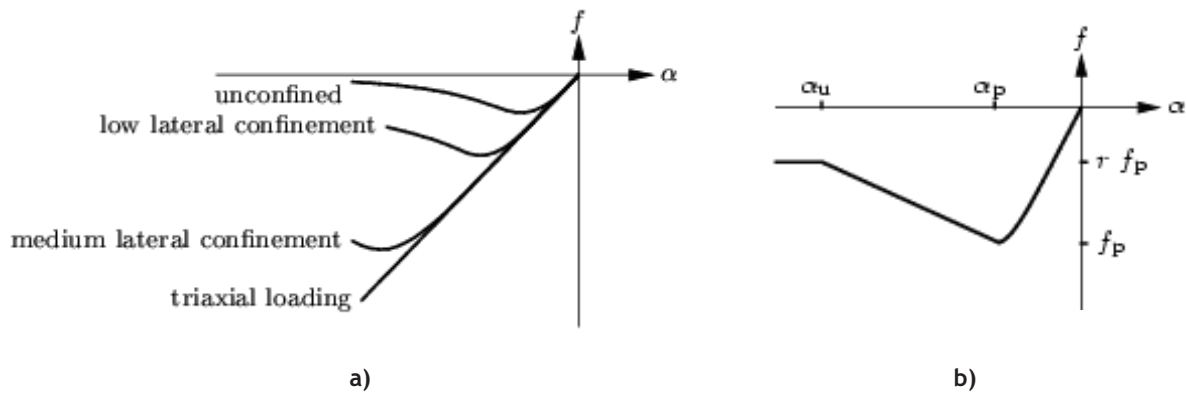


Gráfico IV-12 - a) Influência do confinamento do betão na relação tensão-extensão em compressão (DIANA, 2002); b) Modelação do comportamento em compressão com confinamento lateral (DIANA, 2002).

No presente trabalho, a simulação do comportamento do betão em compressão assenta no modelo elástico não-linear baseado na lei constitutiva uniaxial de Thorenfeldt (Gráfico IV-10c) que, devido ao efeito de confinamento lateral (Selby & Vecchio), é modificada em função do aumento da componente isotrópica do tensor das tensões, incrementando a resistência e a ductilidade. A maior ductilidade do betão confinado é modelada por um ramo de amolecimento linear (Gráfico IV-12b) que resulta da adaptação do ramo descendente da curva de Thorenfeldt com a seguinte expressão:

$$f_j = -f_p \cdot \left(1 - (1-r) \cdot \frac{\alpha_j - \alpha_p}{\alpha_u - \alpha_p} \right) \leq -r \cdot f_p \quad (\text{IV. 38})$$

onde:

$$\begin{aligned} f_p & \text{ tensão de pico definida no Gráfico IV-12b} \\ \alpha_p & \text{ extensão correspondente à tensão de pico} \\ \alpha_u & = \left(f_p / f_c \right)^\gamma \cdot \alpha_p \\ r & = 0,1 \cdot \left(f_p / f_c \right)^\gamma \\ \gamma & = 3 \end{aligned}$$

IV.2.2.2 Formulação do comportamento em compressão no modelo DE

A modelação do comportamento do betão em compressão sob estados multiaxiais de tensão é conduzida com recurso a um modelo plástico baseado na teoria da plasticidade, capaz de reproduzir o amolecimento e o esmagamento do betão, em que as relações tensão-extensão não-lineares obedecem às exigências seguintes:

- Critério de rotura, que estabelece o estado de tensão na ocorrência da rotura;
- Lei de endurecimento em função do aumento da extensão plástica;
- Lei de amolecimento que descreve o aumento da extensão plástica;
- Condições de carga/descarga.

O critério de Mohr-Coulomb baseia-se na definição de uma lei constitutiva uniaxial, $\sigma_c - \varepsilon_c$, que pode ser expressa na forma indicada na expressão (IV. 39) até à tensão de pico (Gráfico IV-13a) segundo o CEB-FIP (CEB-FIP, 1999b) e até $|\sigma_c| \geq 0,5 f_c$ (Gráfico IV-13b) segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993).

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci} \cdot \varepsilon_c}{E_{c,sec} \cdot \varepsilon_{c0}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c,sec}} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}} \cdot f_c \quad (\text{IV. 39})$$

onde:

E_{ci}	módulo de elasticidade tangente, correspondente a $\sigma_c = 0$, expresso em MPa, aos 28 dias de idade do betão
ε_{c0}	extensão de compressão correspondente à tensão de compressão de pico, f_c , definida na equação (IV. 41)
$E_{c,sec} = f_c / \varepsilon_{c0}$	módulo de elasticidade secante, expresso em MPa, definido entre a origem e a tensão de compressão de pico, f_c

O módulo de elasticidade tangente, E_{ci} , pode ser estimado com:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot E_{c0} \cdot \left(\frac{f_c}{f_{c0}} \right)^{1/3} \quad (\text{IV. 40})$$

onde:

E_{c0}	$= 2,15 \times 10^4 \text{ MPa}$
f_c	valor da resistência à compressão uniaxial do betão, expresso em MPa
f_{c0}	$= 10 \text{ MPa}$
α_E	coeficiente definido no Quadro IV-3, que tem em conta o efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade (CEB-FIP, 1993)

Quadro IV-3 - Efeito do tipo de agregados no módulo de elasticidade segundo o CEB-FIP (CEB-FIP, 1999b).

Tipo de agregados	α_E
Basalto	1.2
Quartzíticos	1.0
Calcário	0.9
Arenoso	0.7

No presente trabalho, a lei adoptada é a proposta pelo CEB-FIP (CEB-FIP, 1999b), indicada no Gráfico IV-13a.

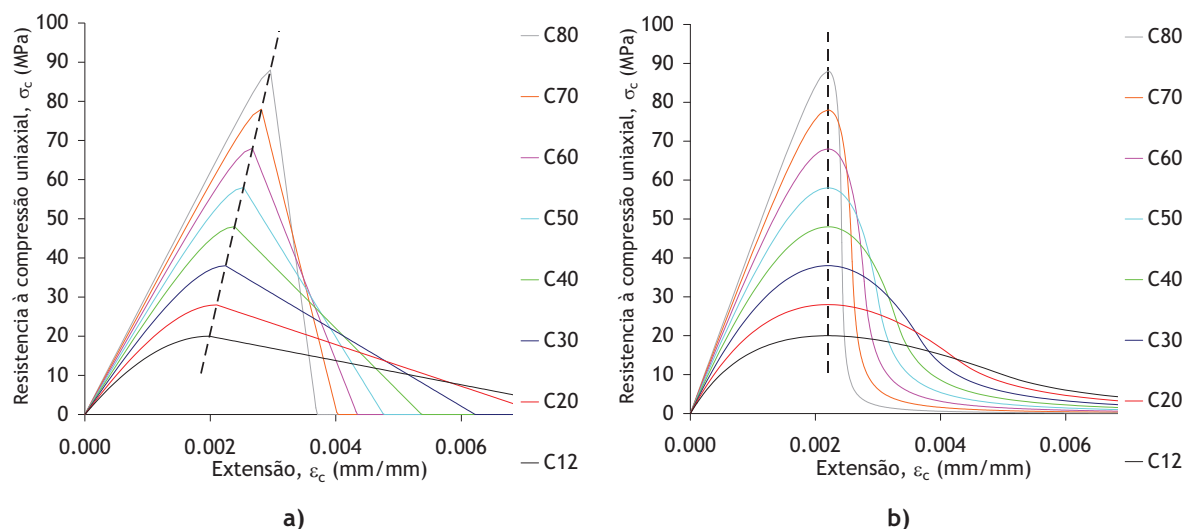


Gráfico IV-13 - Diagramas uniaxiais tensão-extensão para diferentes classes de betão (CEB-FIP, 1993; 1999b).

A particularidade da relação constitutiva $\sigma_c - \epsilon_c$ ilustrada no Gráfico IV-13a reside na definição variável da extensão de pico em função da capacidade resistente, de acordo com a expressão:

$$\epsilon_{c0} = -0,0017 - 0,0010 \cdot \left(\frac{f_c}{f_{c0}} \right) \quad (\text{IV. 41})$$

onde:

$$f_{c0} = 70 \text{ MPa}$$

Alternativamente pode ser atribuído a ϵ_{c0} o valor constante -0,0022 conduzindo às leis constitutivas representadas no Gráfico IV-13b.

Relativamente ao critério de rotura, a actual versão do código computacional DIANA possibilita a utilização dos critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager para materiais frágeis. O critério de Mohr-Coulomb, que foi utilizado no presente trabalho, é uma extensão do critério de Tresca para materiais com atrito interno e comportamento dependente do confinamento (Silva, 2004; Chen, 2007). A formulação do critério de rotura pode ser expressa no espaço das tensões principais ($\sigma_{c1} \geq \sigma_{c2} \geq \sigma_{c3}$) sob a forma:

$$f(\sigma, \kappa) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{c1} - \sigma_{c3}) + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{c1} + \sigma_{c3}) \cdot \sin \phi(\kappa) - \bar{c}(\kappa) \cdot \cos \phi_0 \quad (\text{IV. 42})$$

onde:

$\bar{c}(\kappa)$	coesão ^w , função do parâmetro de endurecimento, κ
$\phi(\kappa)$	ângulo de atrito interno ^x , função do parâmetro de endurecimento, κ
ϕ_0	ângulo de atrito interno inicial

A transposição da lei constitutiva uniaxial para a equivalente relação coesão-parâmetro de endurecimento é dependente das hipóteses adoptadas para o endurecimento. No caso de se tomar o endurecimento com atrito (ϕ) e dilatância (ψ) constantes, pode escrever-se:

$$\phi(\kappa) = \phi_0 \quad (\text{IV. 43})$$

$$\psi(\kappa) = \psi_0 \quad (\text{IV. 44})$$

A relação entre a extensão uniaxial plástica e o parâmetro de endurecimento pode ser expressa na forma:

$$\dot{\kappa} = - \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \psi_0 - \frac{2}{3} \cdot \sin \psi_0}}{1 - \sin^2 \psi_0} \cdot \dot{\epsilon}_3^p \quad (\text{IV. 45})$$

O procedimento global, no caso de amolecimento linear da resposta em compressão (Markeset, 1993; Markeset *et al.*, 1995), pode ser exemplificado como se mostra no Gráfico IV-14 construído para um betão com $f_{cm} = 50$ MPa, $\phi_0 = 35^\circ$ e $\psi_0 = 12,5^\circ$.

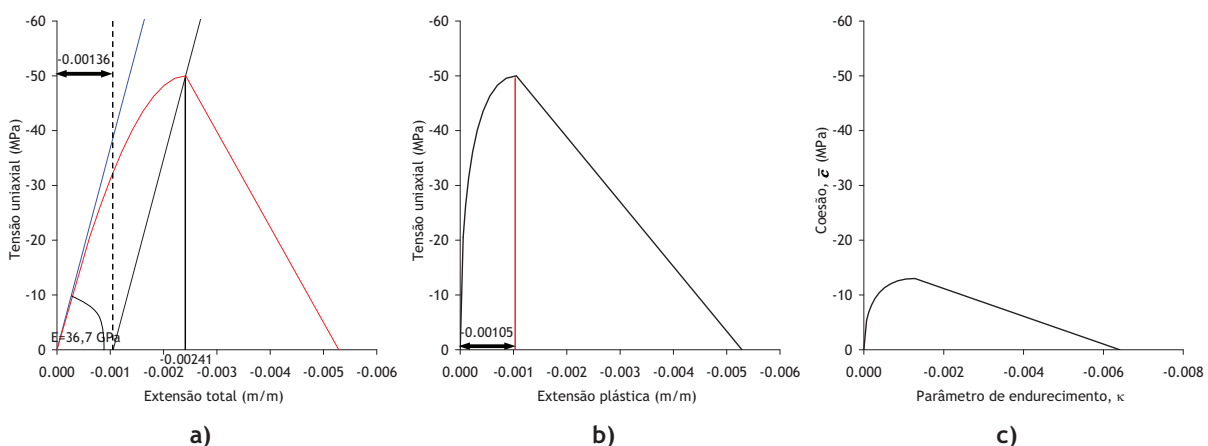


Gráfico IV-14 - Obtenção da lei coesão-parâmetro de endurecimento a partir da lei constitutiva uniaxial.

A coesão, $\bar{c}$ (Gráfico IV-14c), é função do valor da resistência à compressão uniaxial refe-

w - A coesão indica a resistência às tensões tangenciais quando a tensão normal é nula (Silva, 2004)

x - O ângulo de atrito traduz o acréscimo de resistência às tensões tangenciais quando actua na faceta em causa uma tensão normal de compressão (Silva, 2004)

rida a provetes cilíndricos, como se mostra:

$$\bar{c} = f_c \cdot \frac{1 - \sin \phi_0}{2 \cdot \cos \phi_0} \quad (\text{IV. 46})$$

No espaço das tensões principais, o critério de Mohr-Coulomb é representado por uma pirâmide de base hexagonal irregular, cujo vértice se encontra sobre a recta $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{c3}$ (eixo hidrostático). A superfície associada ao critério de rotura (Gráfico IV-15a), dada pela expressão (IV. 42), pode ser reescrita na forma:

$$f(\sigma_A, \sigma_B, \phi_0) = \sigma_A \cdot \frac{1 + \sin \phi_0}{2\bar{c} \cos \phi_0} - \sigma_B \cdot \frac{1 - \sin \phi_0}{2\bar{c} \cos \phi_0} - 1 = 0 \quad (\text{IV. 47})$$

Na expressão anterior, as tensões σ_A e σ_B são tomadas como a tensão principal máxima e mínima, respectivamente. O Gráfico IV-15b ilustra a representação de diferentes secções da superfície de rotura no plano octaédrico normalizado.

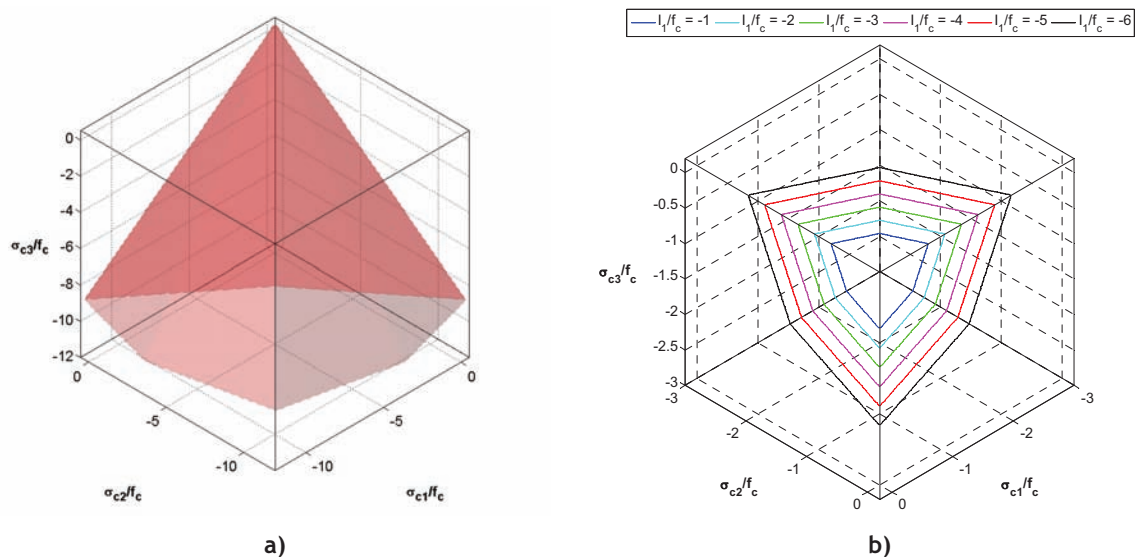


Gráfico IV-15 - Critério de rotura de Mohr-Coulomb: a) representação no espaço normalizado das tensões principais; b) representação das secções no plano octaédrico normalizado.

A determinação da superfície de rotura (Gráfico IV-15a) envolve a permutação cíclica das tensões principais no betão, σ_A e σ_B , a que se faz referência na expressão (IV. 47).

IV.2.3 Comportamento ao corte

IV.2.3.1 Generalidades

A capacidade de transmissão de tensões de tangenciais através de uma fenda depende, como se disse (ver II.3.4, pág. 23), dos mecanismos que se opõem à separação das suas

faces. A formação das fendas no betão reduz, como se sabe, a rigidez de corte pelo que uma característica importante na formulação de um modelo de fendilhação é que, enquanto a formação da fenda é baseada no modo I de fractura, o comportamento pós-fendilhação deve incluir também o modo II. A este propósito, mais informações podem ser encontradas em (Rots *et al.*, 1987).

Resultados experimentais indicam que, no betão fendilhado, uma parte considerável da força de corte pode ser transferida através das superfícies rugosas das fendas. Estes ensaios experimentais mostraram que o principal factor no mecanismo de transferência de tensões de corte é a abertura da fenda, enquanto a dimensão dos agregados, a quantidade de armadura e o diâmetro das mesmas têm menor influência (Figueiras, 1983).

Dos vários mecanismos que influem na degradação da rigidez de corte, apontam-se:

- O embricamento (*aggregate interlock*) ou atrito entre os agregados nas fendas de corte, cuja intensidade é condicionada pela dimensão dos agregados (efeito de escala) e pela abertura das fendas, devido à rugosidade das superfícies da fenda, função do tipo e do diâmetro dos agregados (Figura IV-4a);
- O efeito de cavilha (*dowel action*) ou efeito de ferrolho, isto é, forças de corte transmitidas através das armaduras solicitadas ao corte, que atravessam a fenda (Figura IV-4b), com eventual mudança de direcção (por deformação plástica da armadura) favorável à absorção de parte do esforço de corte;
- A transmissão de tensões devida à presença de armaduras que intersectam o plano da fenda (Figura IV-4c).

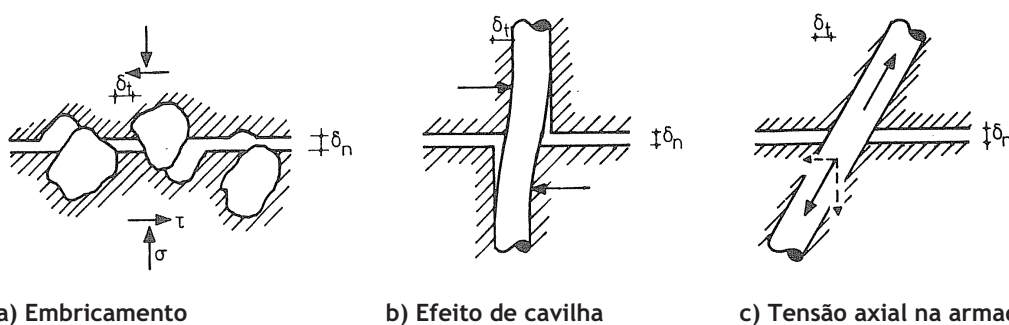


Figura IV-4 - Principais mecanismos de transferência de tensões em fendas de betão armado (Pruijssers, 1988b).

Os mecanismos de embricamento e de efeito de cavilha são fortemente influenciados pela interacção das tensões tangenciais τ com as tensões normais σ no plano da fenda. As relações constitutivas devem, por isso, reflectir a interacção entre o amolecimento em tracção e ao corte (Pruijssers, 1988b). A referida interacção nem sempre é tida em conta na maio-

y - Assume-se que uma dada tensão principal não pode, simultaneamente, ser a máxima e a mínima

ria dos códigos computacionais, como se verá ser o caso do DIANA. Dos parâmetros geralmente tidos em conta pelos vários programas, apontam-se:

- A abertura da fenda, caracterizada através da extensão correspondente à abertura de fenda ou extensão normal à fenda ϵ_{nn}^{cr} (em modo I, ver Figura IV-1);
- A distorção na fenda, γ^{cr} , associada aos modos II e III de fractura.

A grande maioria dos programas baseados no MEF oferece um modelo de retenção de tensões de corte no qual a rigidez ao corte pós-fendilhação é definida como uma função da extensão correspondente à abertura da fenda.

Nos itens subsequentes, é descrita e analisada a forma como é tida em conta a redução da rigidez de corte uma vez iniciada a fendilhação, no código comercial de elementos finitos DIANA v. 9.3 (DIANA, 2008), nos diferentes modelos disponíveis.

IV.2.3.2 Rigidez ao corte no modelo ET

No modelo de fendilhação baseado no conceito de extensão total, a modelação do comportamento ao corte só é necessária no conceito de fendas fixas. A actual versão do DIANA apenas disponibiliza um modelo com retenção constante da rigidez de corte, isto é, o módulo elástico de elasticidade transversal, G , definido na expressão (IV. 48), é reduzido, no plano da fissura e após o início da fendilhação do betão, para o valor G^{cr} dado pela expressão (IV. 49).

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{IV. 48})$$

$$G^{cr} = \beta \cdot G \quad (\text{IV. 49})$$

Assim, o módulo de elasticidade transversal pós-fendilhação, G^{cr} , é definido como uma fracção do correspondente valor elástico, G , por intermédio do factor de retenção da rigidez de corte, β , com $0 \leq \beta \leq 1$, correspondendo o limite superior à manutenção da rigidez elástica na fase fendilhada designada por retenção total da mesma.

Acresce que a maioria das simulações consultadas referem a utilização de um valor constante para o factor de retenção da rigidez de corte, o que corresponde a uma relação linear entre a tensão de corte, τ^{cr} , e a distorção da fenda, γ^{cr} .

Adicionalmente diversos autores comentam que, para problemas em que a fissuração por corte é determinante, o factor de retenção da rigidez de corte deve ser cuidadosamente

escolhido uma vez que parece influenciar decisivamente a solução obtida (Rots *et al.*, 1985; Hallgren, 1996).

Vários autores afirmam que se a influência do valor atribuído a β pode ser irrelevante nos problemas em que a rotura é dominada pelo modo I de fractura, o mesmo não acontece quando o modo II de fractura tem importância significativa no comportamento da estrutura, sendo a resposta desta, nestes casos, consideravelmente dependente da função que define a rigidez de corte do betão fendilhado (Frénaïj, 1989; Barros, 1995). Tenha-se ainda em atenção que na maior parte das estruturas a rotura se desenvolve pela actuação simultânea dos modos I e II de fractura (Rots *et al.*, 1987). A consideração do valor $\beta = 0,20$ conduz a resultados satisfatórios na modelação de estruturas tanto de betão simples como de betão armado (Mier, 1987; Puijssers, 1988b).

No sentido de aferir a influência do factor β conduziu-se um estudo paramétrico com recurso à modelação numérica de lajes de betão da classe C 30/37^z submetidas a punção centrado, dimensionalmente idênticas às descritas no Capítulo V (ver Figura VII-2, pág. 186), cujas respostas deformacionais (carga $\times$ flecha a meio-vão) se ilustram no Gráfico IV-16^{aa}.

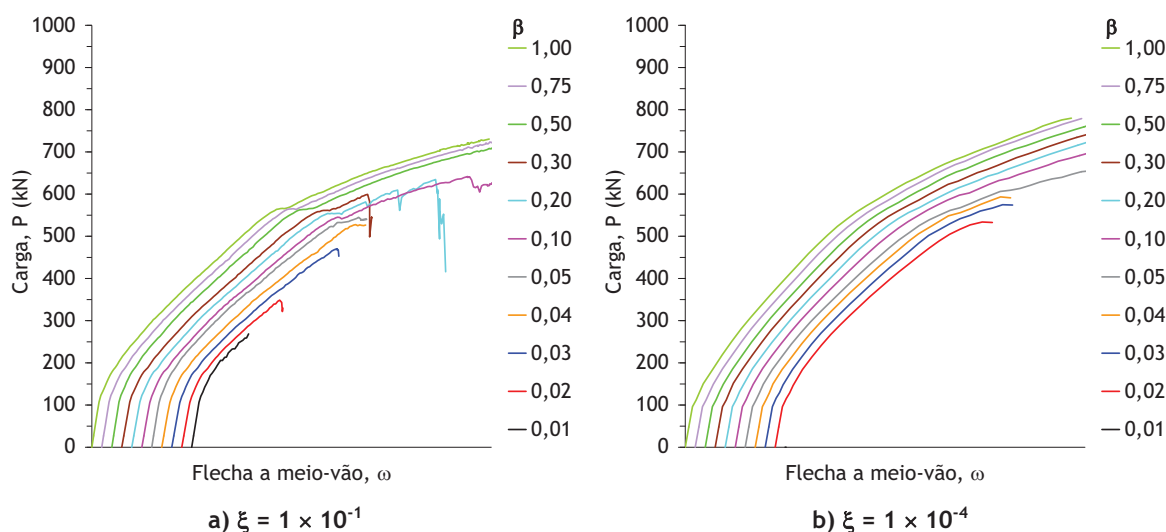


Gráfico IV-16 - Influência do factor de retenção da rigidez de corte na capacidade resistente ao punção centrado, em lajes de betão da classe C 30/37 (modelo ETF), para diferentes valores da tolerância do processo iterativo.

Da observação do Gráfico IV-16^{bb} resulta evidente que a retenção da rigidez de corte deve ser modelada com tanta precisão quanta a possível de forma a simular correctamente o comportamento frágil e a obter uma correcta previsão da carga última em punção.

z - $E_c = 29 \text{ GPa}$, $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$, $f_{ctm} = 2,9 \text{ MPa}$, $G_F = 76 \text{ Nm/m}^2$, $d_{max} = 16 \text{ mm}$, $\rho_l = 1,0 \%$, A500

aa - As respostas deformacionais foram desfasadas para melhor percepção

bb - ξ representa o valor da tolerância do critério de convergência, formulado em termos da energia, definida em IV.5

IV.2.3.3 Rigidez ao corte no modelo DE

Com o intuito de aferir a influência do factor β , conduziu-se um estudo paramétrico^{cc} semelhante ao descrito em IV.2.3.2 (ver Figura VII-2, pág. 186) utilizando a formulação constante para o referido factor. As respostas numéricas (carga $\times$ flecha a meio-vão) obtidas são ilustradas no Gráfico IV-17^{dd}.

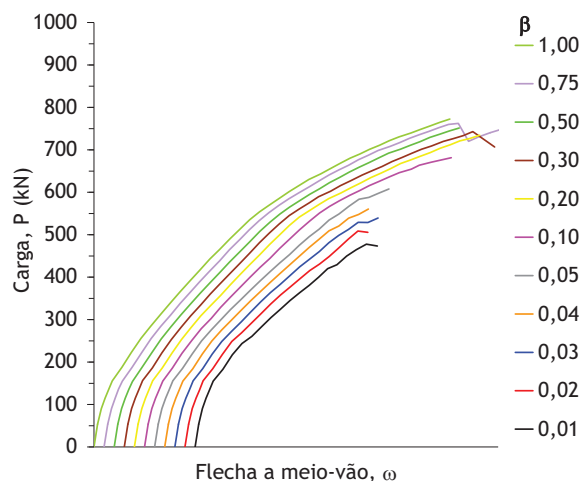


Gráfico IV-17 - Influência do factor constante de retenção da rigidez de corte na capacidade resistente ao punçoamento centrado, em lajes de betão da classe C 30/37 (modelo DE com $\alpha = 60^\circ$ e $\xi = 10^{-4}$).

À semelhança do modelo ETF, também na formulação DE (Gráfico IV-17) as respostas deformacionais são fortemente dependentes do valor adoptado para o factor de retenção da rigidez de corte. A previsão da carga última é incrementada em 60 % (de $\beta = 0,75$ relativamente ao emprego de $\beta = 0,01$).

Segundo Rots, a arbitrariedade na fixação de β pode ser obviada considerando a degradação da rigidez de corte com o aumento da fissuração através de uma função decrescente do referido factor (Rots, 1988). Zhu *et al.* também referem que a utilização de um módulo de elasticidade transversal constante para o betão fendilhado, traduzido num factor fixo de retenção da rigidez ao corte, não representa adequadamente a dependência observada entre a rigidez de corte e a extensão correspondente à abertura da fenda (Zhu *et al.*, 2001).

Assim, a maioria das formulações assenta no pressuposto de que a rigidez ao corte do betão fendilhado é função da abertura da fenda; se a abertura da fenda aumenta, a rigidez ao corte diminui porquanto diminui o efeito de embricamento. Especificamente, o módulo de elasticidade transversal é progressivamente reduzido com a abertura da fenda - ver expressões (IV. 17) e (IV. 49). Várias têm sido as propostas feitas para modelar a referida

cc - C 30/37: $E_c = 29$ GPa, $f_{cm} = 38$ MPa, $f_{ctm} = 2,9$ MPa, $G_F = 76$ Nm/m²; $d_{max} = 16$ mm, $\xi = 1 \times 10^{-4}$, $\rho_l = 1,0$ %, A500

dd - As respostas deformacionais foram desfasadas para melhor percepção

redução, das quais algumas são seguidamente expostas.

Figueiras (Figueiras, 1983) considera que a retenção da rigidez de corte é linearmente dependente da deformação na direcção perpendicular à da fenda, ε_{nn}^{cr} , apresentando a expressão (IV. 50). Assim, quanto maior for esta deformação, menor é o efeito de engrenagem entre as faces da fenda e menor é o valor de β .

$$\beta = \begin{cases} \xi \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{0,0045}\right) & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn}^{cr} \leq 0,0045 \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{nn}^{cr} > 0,0045 \end{cases} \quad (\text{IV. 50})$$

com:

$$\begin{aligned} \xi &= 0,250 && \text{no caso de fendilhação simples} \\ \xi &= 0,125 && \text{no caso de fendilhação dupla (formação de uma segunda fenda)} \end{aligned}$$

Em 1986, Kolmar (citado em Červenka *et al.*, 2002) apresenta a seguinte lei de redução da rigidez de corte, que contempla a presença de armaduras normais ao plano da fenda:

$$\beta = -c_3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1000 \cdot \varepsilon_{nn}^{cr}}{c_1}\right)}{c_2} \quad (\text{IV. 51})$$

Na expressão (IV. 51), os parâmetros têm o seguinte significado:

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq 0,02 &&& \text{taxa de armadura orientada na direcção normal ao plano da fissura} \\ c_1 = 7 + 333 \cdot (p - 0,005) &&& \text{parâmetro em função de } p \\ c_2 = 10 - 167 \cdot (p - 0,005) &&& \text{parâmetro em função de } p \\ c_3 = 1 &&& \text{factor de escala, definido pelo utilizador} \end{aligned}$$

Com base em ensaios experimentais, Rots apresenta a expressão não-linear (IV. 52) para o factor β , cuja validade é limitada a deslocamentos relativos das faces da fenda menores que 200 μm (Rots, 1988).

$$\beta = \frac{1}{1 + 4447 \cdot \varepsilon_{nn}^{cr}} \quad (\text{IV. 52})$$

Pruijssers propôs uma expressão para β (Pruijssers, 1988a) não apenas dependente da extensão correspondente à abertura da fenda mas também da distorção da mesma, γ_{nt}^{cr} , através da relação $\xi = \varepsilon_{nn}^{cr} / \gamma_{nt}^{cr}$, como se indica na expressão seguinte:

$$\beta = \frac{1}{1 + P \cdot \varepsilon_{nn}^{cr}} \quad (\text{IV. 53})$$

onde:

$$P = \frac{2500}{d_{\max}^{0,14} \cdot \left[0,76 - 0,16 \cdot \xi \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{6}{\xi}\right) \right) \right]} \quad (\text{IV. 54})$$

Para $\xi = 3$, a expressão (IV. 53), onde $d_{\max}$ é expressa em mm, coincide com a formulação apresentada por Rots (IV. 52) anteriormente descrita, como se pode verificar no Gráfico IV-18a ($d_{\max} = 16$ mm).

Em 1989, Rots *et al.* propuseram a expressão (IV. 55) onde p é um escalar positivo (Rots *et al.*, 1989).

$$\beta = \left(1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \right)^p \quad (\text{IV. 55})$$

O código comercial de elementos finitos ANACAP desenvolvido pela ANATECH (citado em Megally, 1998; Megally *et al.*, 2000a; Gayed, 2005) apresenta, também, uma formulação não-linear para a redução da rigidez de corte no plano da fissura após fendilhação do betão, como se indica na expressão seguinte:

$$\beta = \begin{cases} 1,0 & \text{se } 0 \leq \varepsilon_{nn}^{cr} \leq 200 \times 10^{-6} \\ 0,40 \cdot \frac{\varepsilon_{nn,0}^{cr}}{\varepsilon_{nn}^{cr}} & \text{se } \varepsilon_{nn}^{cr} > 200 \times 10^{-6} \end{cases} \quad (\text{IV. 56})$$

onde:

$$\varepsilon_{nn,0}^{cr} = 200 \times 10^{-6}$$

As diferentes formulações podem ser comparadas no Gráfico IV-18.

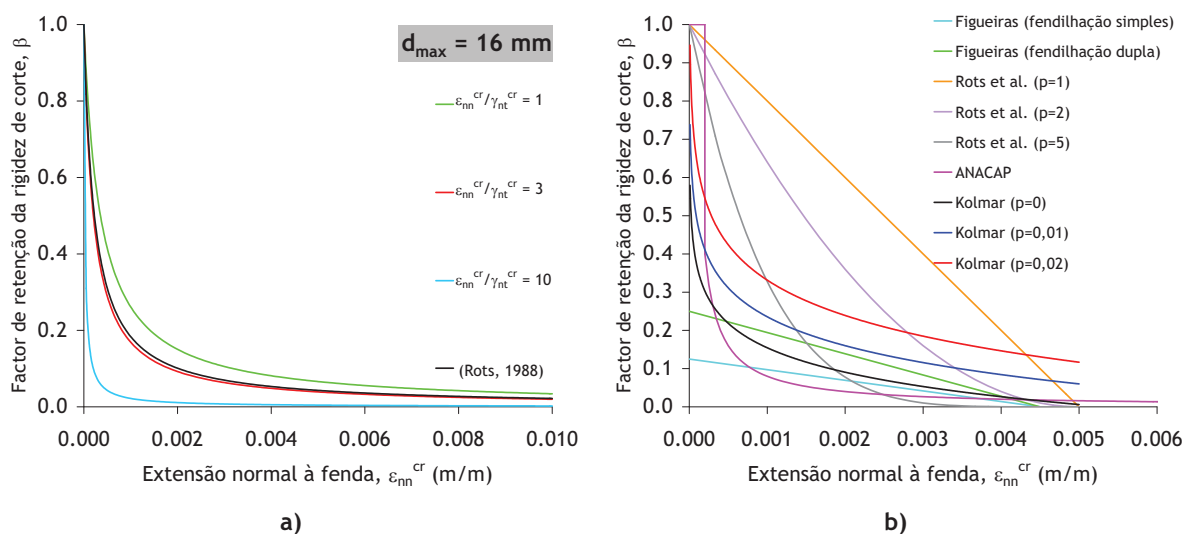


Gráfico IV-18 - a) Factor de retenção da rigidez de corte para diferentes valores de $\varepsilon_{nn}^{cr} / \gamma_{nt}^{cr}$ (Pruijssers, 1988a); b) Diferentes formulações para o factor de retenção da rigidez de corte.

Uma extensa revisão das principais formulações, incluindo modelos mais sofisticados, pode ser consultada em (Zhu *et al.*, 2001).

Nos modelos DE, a actual versão do DIANA disponibiliza três abordagens para a retenção da rigidez de corte: a retenção total, a retenção constante e a retenção variável através do uso de subrotinas em Fortran programáveis pelo utilizador.

IV.3 MODELAÇÃO DAS ARMADURAS

No desenvolvimento de modelos de elementos finitos, dois tipos distintos de representação das armaduras são habitualmente considerados (Póvoas, 1991):

- Distribuída;
- Discreta.

Na modelação da armadura considera-se que os deslocamentos dos elementos finitos de armadura são interpolados a partir dos deslocamentos dos nós dos elementos de betão em que estão embebidos. Este procedimento simplifica substancialmente a geração das malhas de elementos finitos, na medida em que os nós dos dois tipos de elementos não necessitam de ser coincidentes.

No caso de armaduras distribuídas são utilizados elementos bidimensionais apenas com rigidez axial na direcção das mesmas (Figura IV-5).

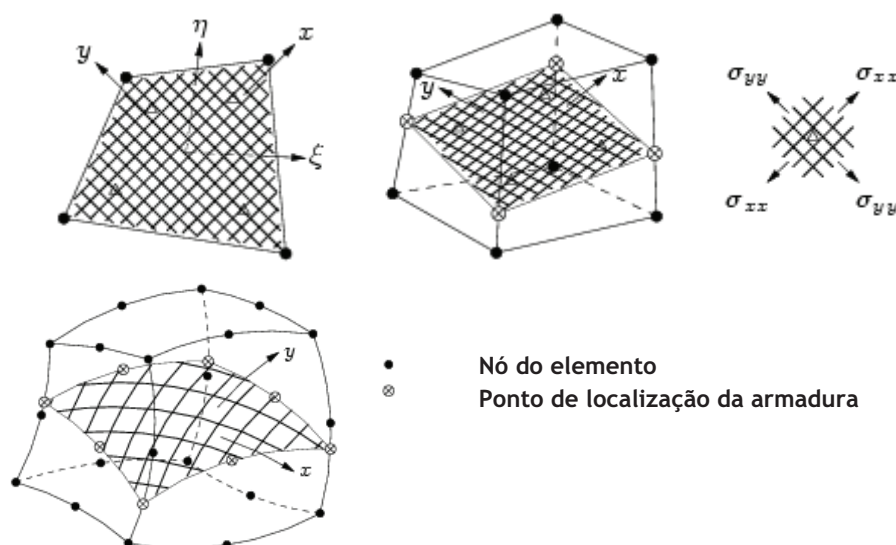


Figura IV-5 - Elemento finito de armadura distribuída, correspondente à armadura em malha, embebido no elemento finito de betão.

Os elementos embebidos de armadura têm as dimensões do elemento finito de betão e espessura t_s , determinada de acordo com:

$$t_s = \frac{A_s}{s} = \rho_l \cdot d \quad (\text{IV. 57})$$

em que:

A_s	área da secção transversal de um varão da armadura longitudinal na direcção em causa
s	espaçamento da armadura longitudinal
ρ_l	percentagem de armadura longitudinal determinada de acordo com a expressão (V. 2), pág. 119

Para a modelação de varões isolados de armadura são utilizados elementos de barra (Figura IV-6) que, opcionalmente, podem ser considerados não-aderentes.

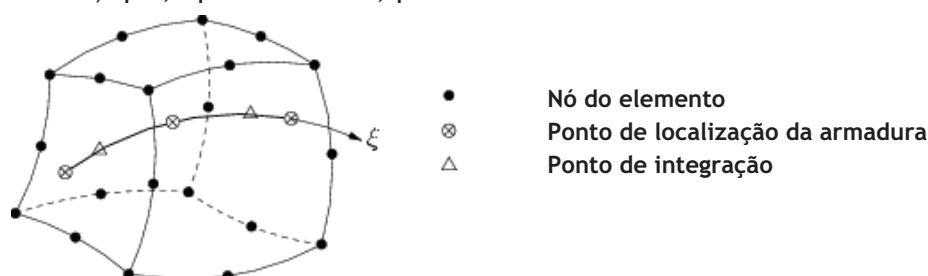


Figura IV-6 - Elemento finito de armadura discreta, correspondente à armadura em varão, embebido no elemento finito de betão.

IV.4 PROCEDIMENTOS ITERATIVOS NÃO-LINEARES

De uma maneira geral, as equações e sistemas não-lineares têm que ser resolvidos iterativamente. O *software* DIANA disponibiliza duas técnicas de solução numérica dos sistemas de equações, baseadas em métodos numéricos:

- Método de Newton-Raphson (regular ou modificado);
- Método da Secante, também designado por Substituição Sucessiva.

A convergência do método de Newton-Raphson regular é muito rápida, o que minimiza o número de iterações necessárias em cada incremento de carga (ou deslocamento) para a obtenção da precisão desejada, mas o tempo de cálculo é elevado. Por este motivo, pode utilizar-se o método de Newton-Raphson modificado, no qual a matriz de rigidez é calculada e invertida apenas na primeira iteração. Em suma o método de Newton-Raphson modificado necessita de mais iterações, mas cada iteração é mais rápida quando comparada com o método de Newton-Raphson regular (Silva, 2004; DIANA, 2008).

No método da Secante utiliza-se a rigidez secante como variável a aproximar por substituição sucessiva. Em modelos com mais de um grau de liberdade a rigidez secante não é única pelo que são aplicadas técnicas, designadas por Broyden, BFGS (Broyden, Fletcher, Gold-

farb e Shanno) e Crisfield, para a determinação da rigidez secante correcta (DIANA, 2008). Maior detalhe sobre estas técnicas pode ser encontrado em (Borst, 1986).

As sucessivas análises desenvolvidas no âmbito da presente tese permitem afirmar que o método da Secante (BFGS) é o mais ajustado para problemas formulados em termos dos modelos de fendilhação baseados no conceito de decomposição das extensões (DE), enquanto que o método de Newton-Raphson modificado (Gráfico IV-19b) reduz o tempo de cálculo dos problemas formulados em termos dos modelos assentes no conceito de extensão total (ET) a cerca de metade.

IV.5 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

Na condução de análises numéricas é necessário estabelecer critérios de convergência que permitam obter a solução com uma precisão julgada adequada ao problema proposto. O procedimento iterativo é interrompido sempre que a solução obtida cumpra com a tolerância imposta para o mesmo. O critério de convergência pode, no DIANA, ser formulado em termos dos deslocamentos, das forças ou da energia, cujos valores por defeito são 10^{-2} , 10^{-2} e 10^{-4} , respectivamente. Acresce que o critério de convergência formulado em termos energéticos é normalmente o preferido pois leva em linha de conta simultaneamente o efeito das forças e dos deslocamentos.

No presente estudo, o critério de convergência da solução correspondente a cada incremento de carga é baseado na verificação do valor da norma energética, impondo a condição:

$$\frac{\delta E_i}{\Delta E_0} = \left| \frac{\delta u_i^T (f_{\text{int},i+1} + f_{\text{int},i})}{\Delta u_0^T (f_{\text{int},1} + f_{\text{int},i})} \right| \leq \xi \quad (\text{IV. 58})$$

A definição das restantes variáveis envolvidas na expressão (IV. 58) é feita no Gráfico IV-19.

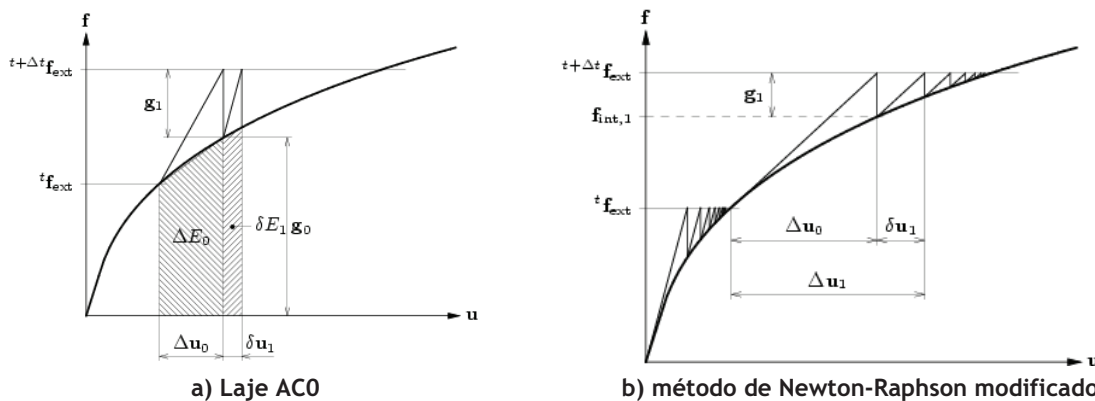


Gráfico IV-19 - Definição da norma da energia no processo iterativo e incremental (DIANA, 2008).

Usualmente, o valor da tolerância ξ da norma da energia para a qual se assume a convergência do processo iterativo é fixado em 10^{-4} . O Gráfico IV-20^{ee} apresenta os resultados obtidos por modelação numérica ($\beta = 0,055$) do modelo de laje ACO (ver Capítulos V e VI), recorrendo à formulação DE, fazendo variar a referida tolerância.

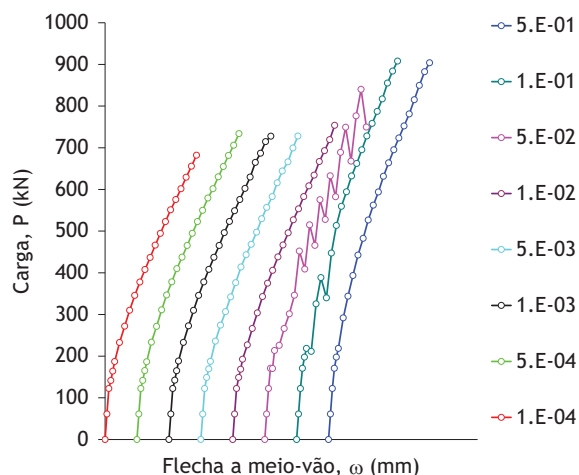


Gráfico IV-20 - Influência da tolerância da norma da energia do critério de convergência na resposta deformacional da laje ACO (modelo DE).

Da observação do Gráfico IV-20 pode afirmar-se que, de um modo geral, a fixação de um critério apertado para a convergência da iteração ($\xi \leq 10^{-3}$) não tem implicações nas respostas deformacionais, mas o tempo de cálculo é significativamente superior utilizando um critério estreito para a convergência. Salienta-se, no entanto, a semelhança da rigidez das respostas deformacionais, independentemente da tolerância adoptada.

Observa-se ainda que é necessário testar a sensibilidade da solução ao critério de convergência adoptado que se acredita não pode ser desligado do tamanho dos incrementos de carga, sendo o valor 10^{-4} apenas uma referência inicial. Adicionalmente, refere-se que, desde que o processo iterativo e o condicionamento do problema não-linear o permitam, será sempre preferível adoptar tolerâncias relativamente pequenas.

O critério adoptado para a convergência do processo iterativo mostrou ser determinante na precisão da resposta deformacional de lajes submetidas a punção, não obstante a rigidez da referida resposta não ter sido significativamente alterada. Por conseguinte a obtenção de uma rotura numérica afigura-se uma tarefa delicada.

De acordo com Rots *et al.*, em problemas de rotura por corte, utilizando DIANA ou qualquer outro programa baseado no MEF, o estabelecimento de uma carga limite é complicado e problemas de convergência são muito frequentes tendo em vista a complexidade do problema (Rots *et al.*, 1985). Os autores também apontam que a identificação da rotura com a divergência do processo iterativo é incorrecta, sobretudo no caso de roturas frágeis como é

ee - As respostas deformacionais foram desfasadas para melhor percepção

o caso do punçãoamento.

V ESTUDO EXPERIMENTAL SOBRE PUNÇOAMENTO

V.1 PROGRAMA DE ENSAIOS

Neste subcapítulo são descritos os ensaios realizados em modelos de laje de betão armado ao punçoamento, procurando-se evidenciar o efeito dos parâmetros seguintes, que foram considerados variáveis, de modo a estimar a sua real influência no comportamento observado:

- A presença de um troço de pilar, simulando a zona da ligação laje/pilar;
- A existência ou não da armadura transversal;
- A excentricidade do carregamento;
- A utilização de betão incorporando ou não fibras de aço.

O presente programa experimental é composto por um conjunto de nove modelos de laje à escala real, dimensionalmente idênticos, mantendo constante a percentagem de armadura longitudinal, concebidos para que a rotura ocorresse, em qualquer dos ensaios, por punçoamento. Estes modelos pretendem simular a região circundante ao pilar de um pavimento fungiforme com vãos de aproximadamente 5,70 m.

Três dos modelos de laje foram realizados sem armadura transversal, com betão auto-compactável (BAC) de resistência à compressão compreendida entre 50 a 65 MPa. Dois deles foram submetidos a carregamento centrado, servindo de referência aos restantes ensaios, e um foi submetido a carregamento excêntrico.

Em quatro outros modelos foram incluídas armaduras transversais, que adiante se caracterizam, de forma a incrementar a capacidade resistente e a ductilidade. Dois desses modelos foram submetidos a carregamento centrado e os outros dois a carregamento excêntrico.

Foram ainda realizados dois modelos de laje em betão reforçado com fibras de aço - BRFA

(resistência à compressão de aproximadamente 35 a 40 MPa), um para carregamento centrado e outro para carregamento excêntrico.

De forma a identificar as diferentes lajes ensaiadas, apresenta-se a seguinte nomenclatura para a sua designação **X_Y_Z-n**, em que:

- X identifica o tipo de betão que constitui o modelo de laje, como se indica: A - betão corrente ou F - betão reforçado com fibras de aço;
- Y indica a existência ou não de excentricidade: C - ensaio centrado ou E - ensaio com a excentricidade de 0,20 m;
- Z indica a presença de armaduras transversais: 0 - sem armadura transversal e A - modelo com armadura transversal;
- n simboliza o número de ordem do modelo. A ausência deste índice significa que se trata de um modelo único.

Indicam-se, no Quadro V-1, as principais características das lajes.

Quadro V-1 - Programa de ensaios experimentais.

Série	Referência	Carregamento	Tipo de betão	Armaduras transversais
-	P	Centrado	Normal (BAC)	-
1	AC0	Centrado	Normal (BAC)	-
	ACA1	Centrado	Normal (BAC)	✓
	AE0	Excêntrico (e = 0,20 m)	Normal (BAC)	-
	AEA1	Excêntrico (e = 0,20 m)	Normal (BAC)	✓
2	ACA2	Centrado	Normal (BAC)	✓
	AEA2	Excêntrico (e = 0,20 m)	Normal (BAC)	✓
	FC0	Centrado	Fibras (BRFA)	-
	FE0	Excêntrico (e = 0,20 m)	Fibras (BRFA)	-

Nos ensaios de punçoamento excêntrico o momento é introduzido por meio da excentricidade da carga aplicada, portanto directamente proporcional a esta.

O presente programa experimental foi integralmente realizado no Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Simplificadamente, os modelos de laje passam a designar-se apenas por laje.

V.2 GEOMETRIA DOS MODELOS DE LAJE

Os modelos ensaiados consistem em painéis quadrados de laje em betão armado. As dimensões em planta são $2500 \times 2500 \text{ mm}^2$ e a espessura nominal é de 180 mm. As figuras seguintes ilustram a geometria, as dimensões e a disposição de todas as armaduras dos diferentes modelos de laje executados.

A pesquisa bibliográfica realizada permite afirmar que a espessura dos presentes modelos de laje é a maior até agora utilizada em ensaios de lajes, apoiadas em pilares interiores, com excentricidade da carga. Relativamente às lajes sem armadura transversal, a maioria dos ensaios excêntricos foram realizados em modelos finos com espessuras h compreendidas entre 114 mm e 150 mm ($79,4 \text{ mm} \leq d \leq 121 \text{ mm}$). A pesquisa bibliográfica efectuada permitiu ainda apurar a realização de um número muito reduzido de ensaios excêntricos com armadura transversal ($117 \text{ mm} \leq d \leq 121 \text{ mm}$) correspondendo a lajes com 0,15 m de espessura. É, por isso, notória a necessidade da realização de ensaios sobre punçoamento excêntrico.

O primeiro modelo (laje P) constituiu o ensaio de referência para as duas séries de modelos subsequentes, tendo proporcionado diversa informação em relação ao *layout* do ensaio, manuseamento dos modelos e adequação do equipamento especialmente adquirido para este tipo de estudo.

Esta laje distingue-se das restantes pelas condições de aplicação da carga, tendo sido submetida a carregamento directamente através de uma placa de aço de dimensões $\varnothing 150 \times 25 \text{ mm}$ (espessura). De forma a reproduzir realisticamente as condições da ligação laje/pilar, as restantes lajes incorporam um troço de pilar ($250 \times 250 \times 320 \text{ mm}^3$), como se ilustra na Figura V-1, devidamente armado (ver Figura V-7).

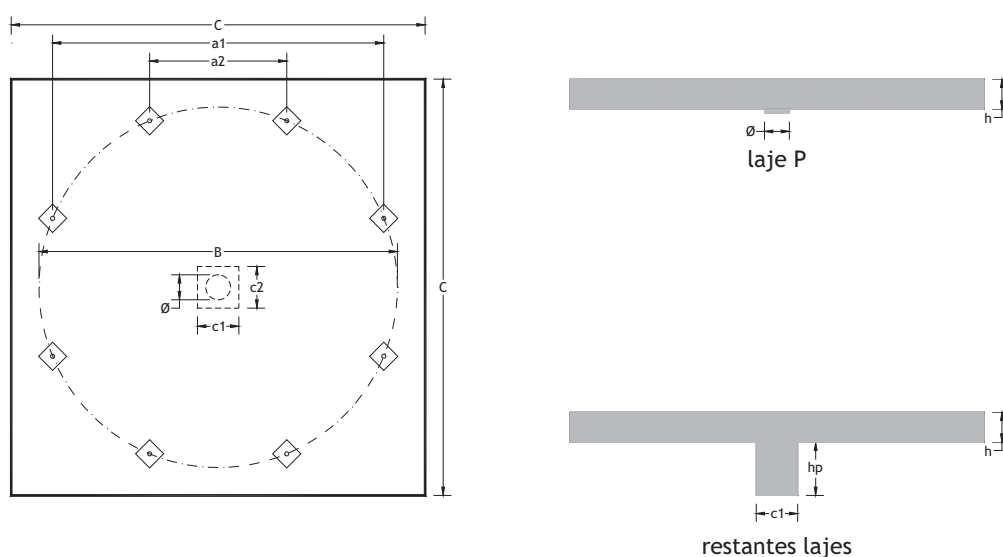


Figura V-1 - Geometria das lajes - planta e corte transversal.

O Quadro V-2 sintetiza as principais características geométricas das lajes. O recobrimento das armaduras principais, c (assinalado com $\clubsuit$), foi garantido com recurso a espaçadores de betão.

Quadro V-2 - Principais dimensões dos modelos de laje.

Laje	h (mm)	C (mm)	h_p (mm)	a_1 (mm)	a_2 (mm)	B (mm)	$c_1 = c_2$ (mm)	$\varnothing$ (mm)	c (mm)	λ (-)
P	180	2500	-	2000	828	2165	-	150	15	6,8
Restantes lajes			320				250	-	20 ($\clubsuit$)	6,6

Nota: ver Figura V-1 para identificação das variáveis

V.3 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS

V.3.1 Betões

A variabilidade das características mecânicas do betão, inerente às condições de fabricação dos modelos e à dificuldade de se utilizar o mesmo tipo de agregados ao longo de todo o tempo em que decorreram os ensaios, foi minimizada no presente estudo. Para tal, foi limitado o número de amassaduras e recorreu-se ao fornecimento de betão pronto assegurando assim a constância no abastecimento de agregados.

O betão utilizado nas lajes foi fornecido em camião autobetoneira, apresentando característica auto-compactável (sem necessidade de qualquer vibração), não tendo ocorrido segregação^{ff}.

A laje P foi betonada isoladamente. As quatro lajes seguintes foram betonadas simultaneamente e são identificadas pela 1.^a série (ver Quadro V-1). Igual procedimento foi adotado para as lajes ACA2, AEA2, FC0 e FE0, utilizando a mesma composição de betão e constituindo a 2.^a série de lajes.

O Quadro V-3 apresenta a composição dos betões utilizados nas 1.^a e 2.^a séries de lajes, incluindo a máxima dimensão dos agregados e os diâmetros médios obtidos por ensaio de espalhamento.

Na 2.^a série de modelos, após a betonagem das lajes AEA2 e ACA2, foram adicionadas as fibras de aço à amassadura prosseguindo-se para as lajes FE0 e FC0. A trabalhabilidade do betão utilizado foi mantida, após a incorporação das fibras metálicas à amassadura, à custa da adição de água elevando a razão água/cimento para 0,42 (assinalado com ($\clubsuit$) no Quadro V-3).

Quadro V-3 - Composição do betão e resultados do ensaio de espalhamento - betão das 1.^a e 2.^a séries de lajes.

Quantidades na composição (kg/m ³)	Cimento (CEM I/A 42.5R)	390
	Cinzas volantes	110
	Areia A1	351
	Areia A2	437
	Brita B	897
	Superplastificante	7,5
	Água	157
Razão água / cimento	w/c	0,40
Razão água / finos	w/p	0,31
Razão superplastificante / finos	S _p /p (%)	1,50
Máxima dimensão dos agregados	d _{max} (mm)	16,0
Diâmetro médio no ensaio de espalhamento (mm)	1. ^a série	630
	2. ^a série (antes da adição das fibras)	420
	2. ^a série (após a adição das fibras) (♣)	390

No Quadro V-4 apresentam-se os resultados da caracterização dos diferentes betões, obtidos por ensaios normalizados para a massa volúmica (NP EN 12390-7 (IPQ, 2003c)), resistência à compressão (NP EN 12390-3 (IPQ, 2003a)), resistência à tracção por compressão diametral (NP EN 12390-6 (ISO, 1980; IPQ, 2003b)) e módulo de elasticidade em compressão (LNEC, 1993), realizados aos 28 dias de idade do betão e no dia de ensaio de cada laje. A ordem de apresentação coincide com a sequência adoptada para a execução dos ensaios.

O valor da resistência à compressão do betão à idade de ensaio da laje P - assinalado com (♣) no Quadro V-4 - foi obtido pela expressão (V. 1) da evolução da resistência da EN 1992-1-1 (CEN, 2004).

$$f_{cm}(t) = e^{0,2 \cdot \left(1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{1/2}\right)} \cdot f_{cm,28} \quad (\text{V. 1})$$

A Figura V-2 mostra o sentido de betonagem das diferentes lajes.

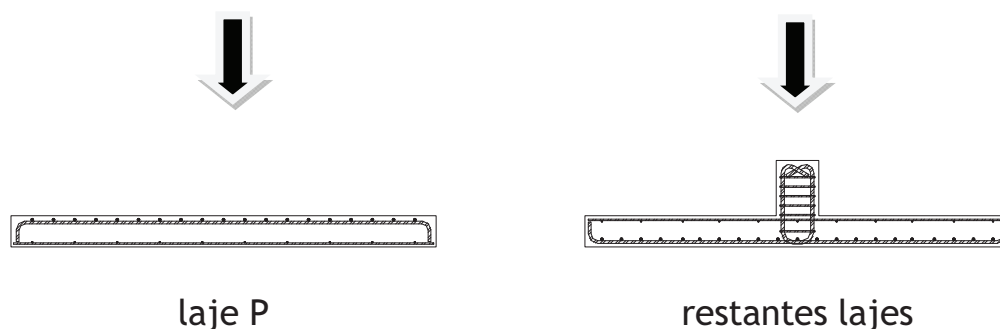


Figura V-2 - Sentido de betonagem das diferentes lajes.

Os ensaios de caracterização das propriedades mecânicas foram conduzidos em controlo de deslocamento sob a velocidade de 0,02 mm/s, em prensa servocontrolada MTS da série

ff - No betão utilizado na laje P detectou-se, no entanto, deficiente homogeneidade na distribuição dos agregados, não se dispondo de dados quanto à sua composição

315.

Os corpos de prova foram armazenados em câmara húmida (HR = 95 %, à temperatura de 20 °C). Os modelos de laje foram periodicamente regados durante a primeira semana de cura e mantidos nas condições de ambiente do laboratório.

Quadro V-4 - Propriedades mecânicas dos betões utilizados, aos 28 dias e à data do ensaio das lajes.

Série	Laje	Idade (dias)	Massa volúmica	Módulo de elasticidade	Tensão de rotura à compressão		Tensão de rotura à tracção
			ρ_{cm} (kg/m ³)	E_{cm} (GPa)	$f_{cm,cub}$ (MPa)	$f_{cm,cil}$ (MPa)	f_{ctm} (MPa)
-	amassadura	15	2321 (3)	32,6 (3)	-	47,0 (3)	-
		28	2340 (6)	35,5 (3)	-	63,9 (3)	4,65 (3)
	P	425	-	-	-	74,1 (♣)	-
1	amassadura	28	2269 (13)	28,0 (3)	44,6 (7)	45,5 (3)	3,24 (3)
	ACA1	64	2255 (7)	31,0 (1)	57,8 (4)	54,4 (1)	3,94 (2)
	ACO	71	2230 (7)	32,9 (1)	56,6 (4)	56,1 (1)	3,78 (2)
	AEA1	142	2252 (6)	29,7 (1)	62,3 (4)	66,2 (1)	4,53 (1)
	AE0	149	2285 (8)	32,6 (2)	62,3 (4)	65,6 (2)	3,74 (2)
Pilares da 1.ª série		28	2419 (8)	34,0 (2)	46,5 (4)	40,7 (2)	3,17 (2)
2	amassadura	28 (normal)	2356 (7)	32,7 (1)	42,7 (4)	41,4 (1)	3,18 (2)
		28 (fibras)	2280 (6)	29,9 (1)	33,6 (3)	33,7 (1)	2,91 (2)
	FE0	73	2289 (7)	34,1 (1)	36,1 (4)	36,9 (1)	3,50 (2)
	AEA2	77	2364 (7)	36,0 (1)	48,1 (4)	47,9 (1)	3,45 (2)
	FC0	79	2293 (7)	24,9 (1)	38,7 (4)	39,3 (1)	3,49 (2)
	ACA2	81	2363 (7)	33,1 (1)	47,1 (4)	48,5 (1)	3,31 (2)
Pilares da 2.ª série		28	2301 (8)	32,1 (2)	32,7 (4)	35,8 (2)	2,28 (2)

Notas: os pilares foram betonados 24 a 48 horas após a betonagem das lajes; os valores expressos para as propriedades mecânicas representam o valor médio resultante do número de corpos de prova indicado entre parêntesis

V.3.2 Armadura longitudinal

A disposição das armaduras longitudinais é a indicada na Figura V-3 (a maior altura útil corresponde à direcção Y, no caso da laje P, e à direcção X, nos restantes modelos): as lajes estão providas de duas malhas do tipo indicado no Quadro V-5 (geometria).

No caso da primeira laje ensaiada, laje P, a armadura longitudinal é constituída por uma malha ortogonal de varões de $\varnothing_n$ 16 mm espaçados de 12,5 cm, conduzindo à percentagem geométrica de armadura de 1,08 %. Na face comprimida a malha ortogonal é composta por varões $\varnothing_n$ 8 mm espaçados de 25 cm.

Para as restantes lajes (séries 1 e 2) decidiu proceder-se à compensação da menor altura útil da camada inferior da armadura longitudinal, de modo a assegurar a mesma capacidade resistente nas duas direcções. Assim, a armadura é constituída por dezanove varões $\varnothing_n$ 16 mm na direcção correspondente à maior altura útil (aproximadamente $\varnothing$ 16 mm @ 12,5 cm) e por vinte e um varões $\varnothing_n$ 16 mm na direcção ortogonal (aproximadamente $\varnothing$ 16 mm @ 11,5 cm), configurando a percentagem geométrica de armadura de 1,17 %. Na face comprimida, a malha ortogonal é composta por onze varões $\varnothing_n$ 8 mm em cada direcção, colocados no alinhamento vertical do correspondente varão da armadura principal.

Quadro V-5 - Características geométricas das armaduras longitudinais.

Série	Referência	d_x (mm)	d_y (mm)	d (mm)	ρ_l (%)	Classe
-	P	141	157	149	1,08	A500 NR
1	ACA1	152	136	144	1,17	A500 NR
	AC0					
	AEA1					
	AE0					
2	FE0					A500 NR SD
	AEA2					
	FC0					
	ACA2					

A percentagem geométrica da armadura longitudinal, ρ_l , indicada no Quadro V-5, é dada por:

$$\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \cdot \rho_{ly}} \quad (\text{V. 2})$$

onde:

$$\rho_{lx} = A_{sx} / (d_x \cdot B)$$

$$\rho_{ly} = A_{sy} / (d_y \cdot B)$$

A caracterização mecânica dos aços foi determinada por ensaios de tracção uniaxial. As propriedades são apresentadas no Quadro V-6. O Gráfico V-1 representa os diagramas $\sigma_s - \varepsilon_s$ obtidos no ensaio de tracção (média de dois varões).

De forma a garantir a conveniente amarração, os varões da armadura longitudinal (armadura designada por superior na Figura V-3) foram dobrados nas extremidades e prolongados a toda a espessura da laje.

Quadro V-6 - Propriedades mecânicas das armaduras longitudinais.

Série de lajes	Diâmetro nominal $\varnothing_n$ (mm)	Armaduras de flexão	Tensão de cedência f_{sy} (MPa)	Tensão de rotura f_{su} (MPa)	f_{su}/f_{sy} (-)	Extensão total sob carga máxima ϵ_{su} (%)	Módulo de elasticidade E_s (GPa)
P	16	superior (♣)	580	690	1,19	-	200
1			550	650	1,18	-	
2			605	705	1,17	-	
P, 1 e 2	8	inferior	555	647	1,17	-	203

(♣) valores médios obtidos por ensaios de tracção uniaxial de dois provetes (ver Gráfico V-1)

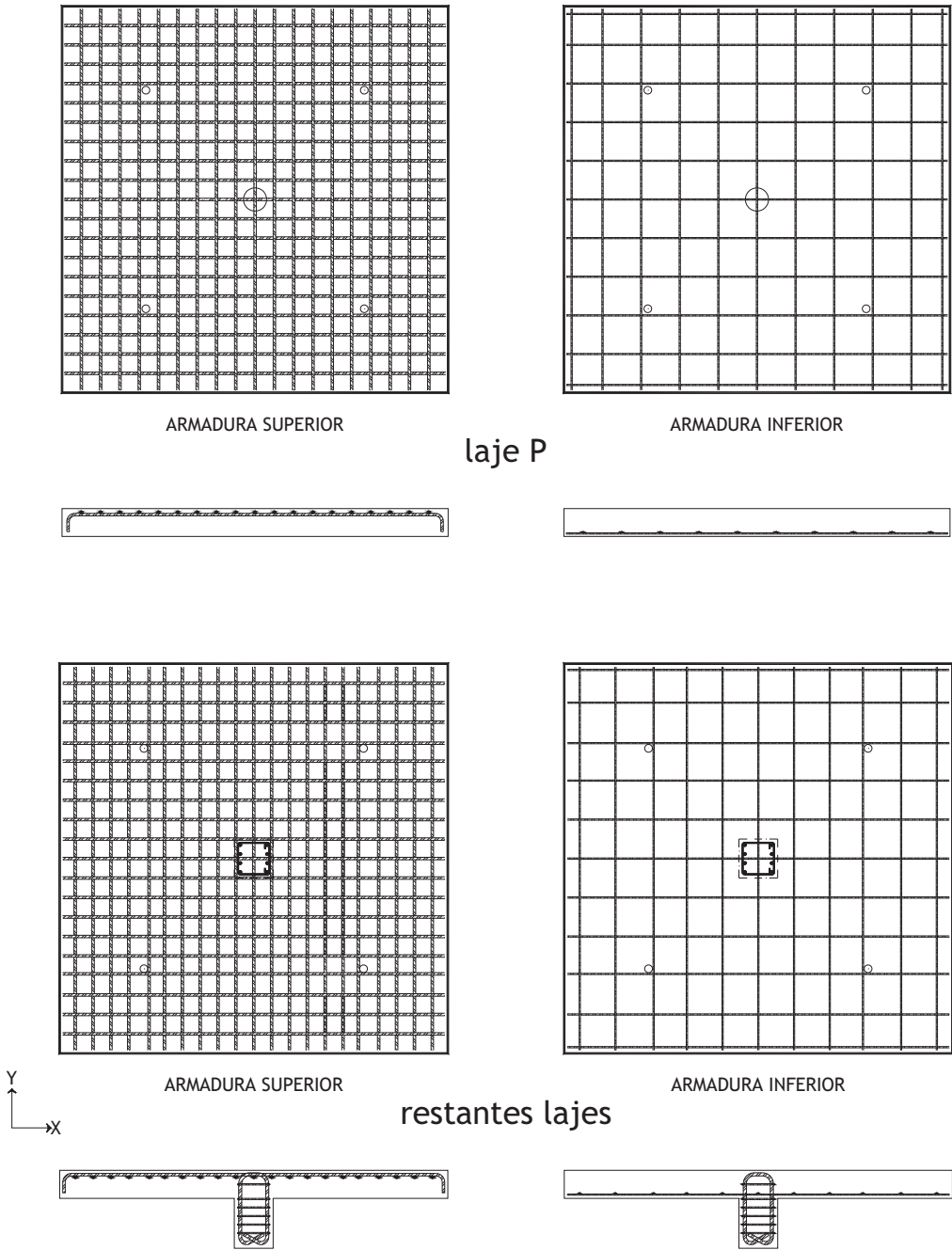


Figura V-3 - Armaduras principais dos diferentes modelos de laje - planta e corte transversal.

Na laje P e 1.^a série, o aço da armadura pertence à classe A500 NR (LNEC E450 (LNEC, 1998)). Na 2.^a série de lajes, utilizou-se, por conveniência de fornecimento, aço de alta ductilidade da classe A500 NR SD (LNEC E460 (LNEC, 2002)).

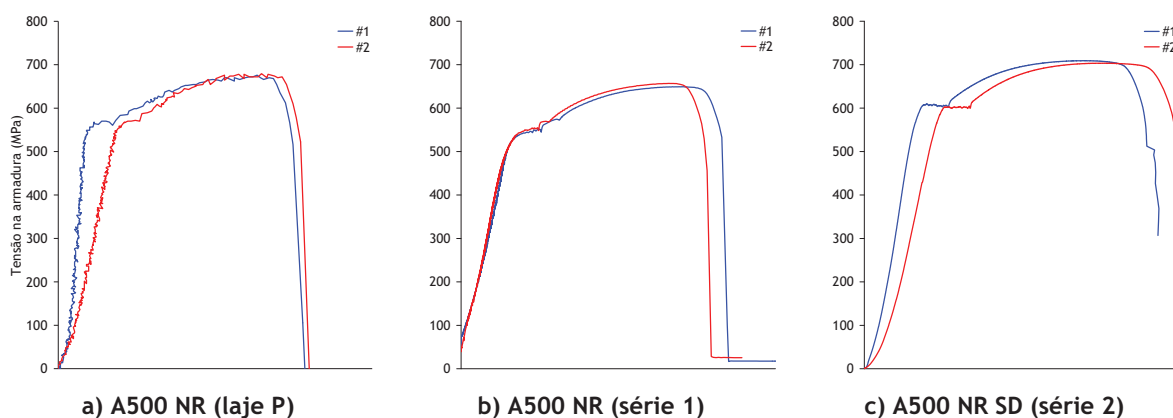


Gráfico V-1 - Diagramas tensão-extensão obtidos por ensaio dos varões de 16 mm: a) laje P; b) lajes ACA1, AC0, AEA1 e AE0; c) lajes FE0, AEA2, FC0 e ACA2.

As armaduras longitudinais foram cortadas e dobradas por procedimento automatizado, em instalações exteriores aos laboratórios, de forma a se assegurar a maior qualidade de execução possível. A montagem, soldadura e controlo do posicionamento dos varões foram executados no Laboratório de Estruturas da FEUP.

V.3.3 Armadura transversal

As lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2 estão munidas de armaduras específicas de punçoamento constituídas por pernos (*“studs”*) de aço A500 NR (LNEC, 1998; ITeC, 2006). Trata-se de armaduras pré-assembladas, semelhantes a conectores utilizados na construção metálica e mista, constituídas por troços de varão dotados de cabeças (com diâmetro igual a 3 vezes o diâmetro do varão) em ambas as extremidades (Figura V-4 e Figura V-5), solidarizados por meio de uma régua metálica.



Figura V-4 - Pernos da armadura de punçoamento - *studs* - das lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.

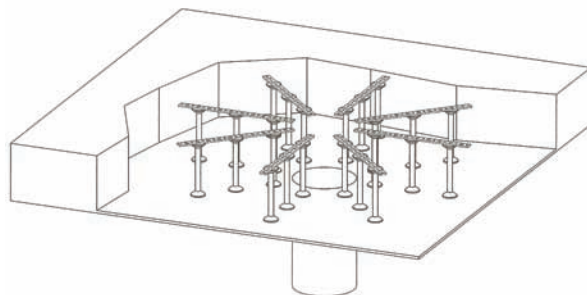


Figura V-5 - Representação esquemática do posicionamento das armaduras de punçoamento (Halfen, 2007).

A escolha por este tipo de armadura transversal fica a dever-se à facilidade de colocação e posicionamento conjunto sobre as armaduras longitudinais (Figura V-6).

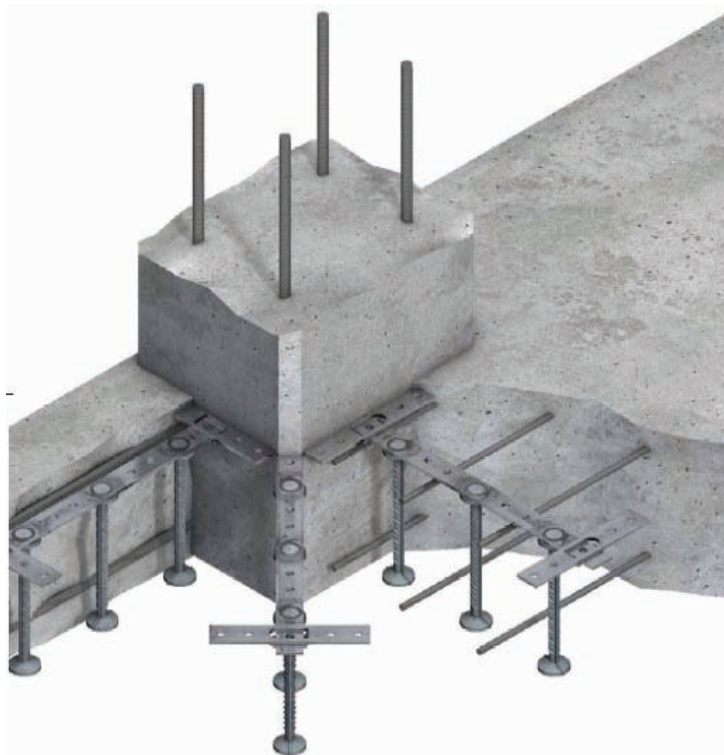


Figura V-6 - Possível distribuição das armaduras de punçoamento em torno de uma zona carregada (Halfen, 2007).

A caracterização mecânica dos aços utilizados nas armaduras transversais das lajes ensaiadas é, segundo o fabricante, a resumida no Quadro V-7.

Quadro V-7 - Propriedades mecânicas das armaduras transversais.

Série de lajes	Diâmetro nominal $\varnothing_n$ (mm)	Tensão de cedência f_{sy} (MPa)	Tensão de rotura f_{su} (MPa)	f_{su}/f_{sy} (-)	Extensão total sob carga máxima ϵ_{su} (%)	Módulo de elasticidade E_s (GPa)
1 e 2 (♣)	10	500	550	1,05	10,00	200

(♣) valores mínimos

A percentagem de armadura de punçoamento pode ser determinada pela expressão (V. 3), em que a área A_{crit} corresponde ao perímetro à distância $2d$ da área carregada. Para as lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2, a armadura de punçoamento corresponde à taxa ρ_w igual a 0,34 %.

$$\rho_w = \frac{\sum (A_{sw} \cdot \sin \theta)}{A_{crit} - A_{load}} \quad (V. 3)$$

Na expressão anterior, os símbolos têm o seguinte significado:

$\sum (A_{sw} \cdot \sin \theta)$ soma das secções transversais das armaduras de punçoamento e θ é o

A_{crit}	ângulo definido entre as armaduras transversais e o plano da laje
A_{load}	área delimitada pelo perímetro crítico
	área da secção transversal do pilar ou da área carregada

Cada conjunto de armaduras transversais dispõem de pernos em varão $\varnothing_n$ 10 mm com altura total de 155 mm e o espaçamento entre pernos é de 100 mm (Figura V-4). Cada laje contém 8 conjuntos de três “studs” dispostos perpendicularmente às faces do pilar como se ilustra na Figura V-7.

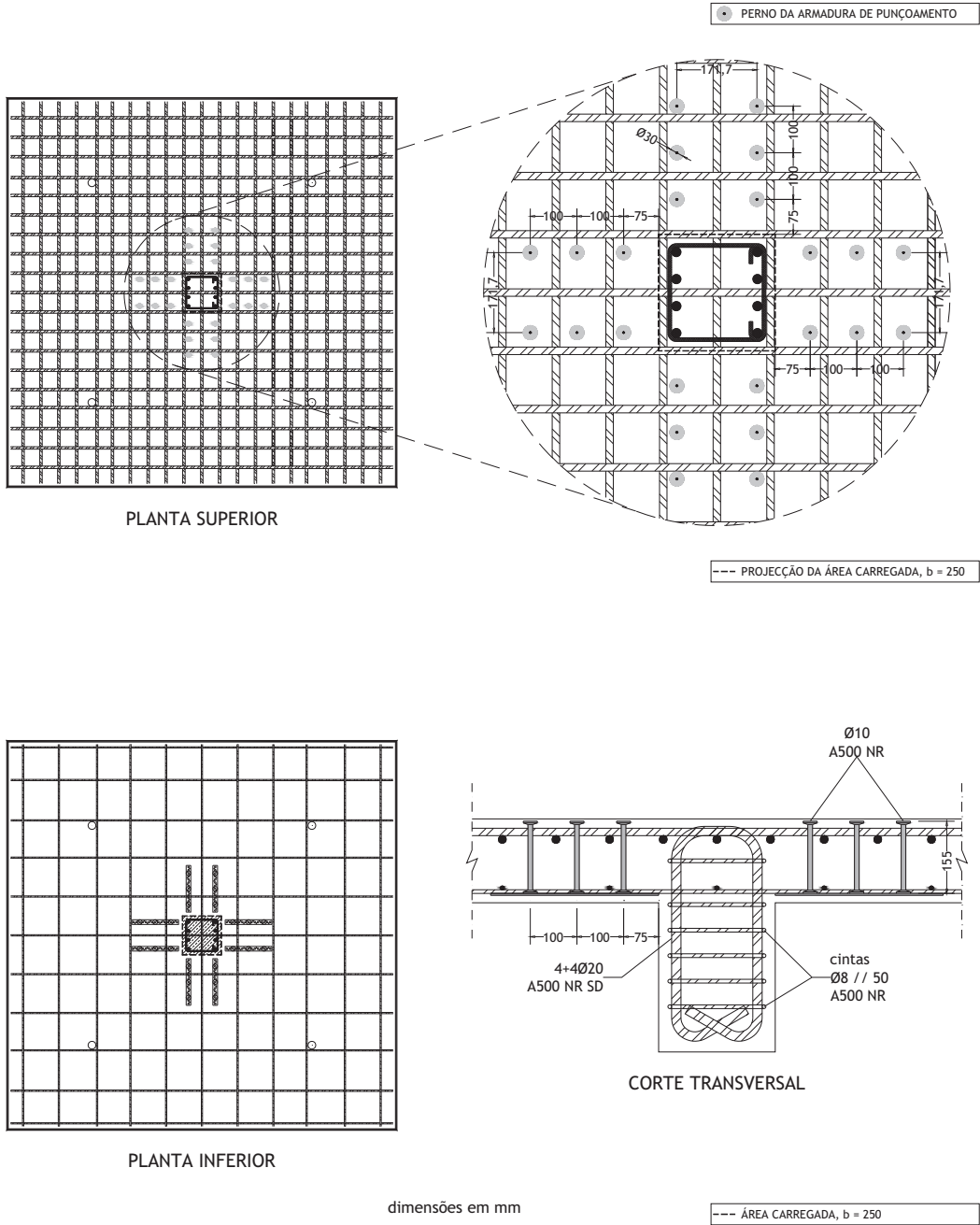


Figura V-7 - Disposição da armadura de punçoamento nas lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.

As armaduras transversais adoptadas respeitam as disposições contidas na EN 1992-1-1

(CEN, 2004) relativamente ao espaçamento dos pernos que as constituem ($\leq 0,75d$). Também a distância entre a face do pilar e o primeiro perímetro de pernos cumpre o limite de $0,5d$ (CEN, 2004). A altura dos pernos foi fixada de forma a que as cabeças de amarração envolvessem completamente a armadura longitudinal.

A Figura V-8 ilustra a plataforma que foi montada no Laboratório de Materiais de Construção da FEUP para a betonagem simultânea de quatro lajes. A Figura V-9 apresenta um pormenor da zona de ligação laje/pilar. As armaduras transversais utilizadas revelaram-se muito eficazes devido à boa amarração determinada pelas extremidades, como se comprovará na análise de resultados no Capítulo VI.



Figura V-8 - Vista geral da plataforma antes da betonagem da 1.ª série de lajes.

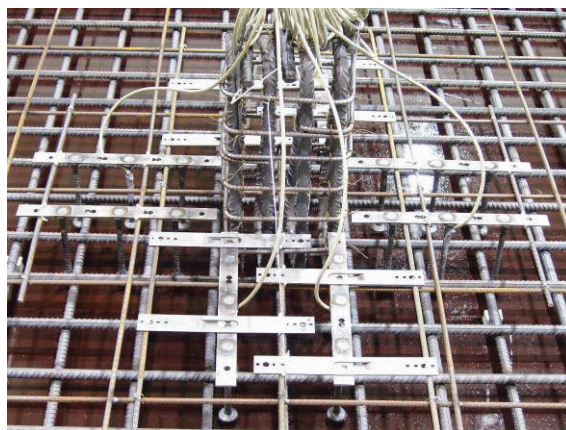


Figura V-9 - Pormenor da região de ligação laje/pilar das lajes ACA1, ACA2, AEA1 e AEA2.

V.3.4 Fibras de aço

Como se disse, o betão utilizado nas lajes FC0 e FE0 incorpora fibras de aço de extremidades dobradas, designadas comercialmente por *Dramix* RC-65/60-BN (Figura V-10 e Figura V-11).

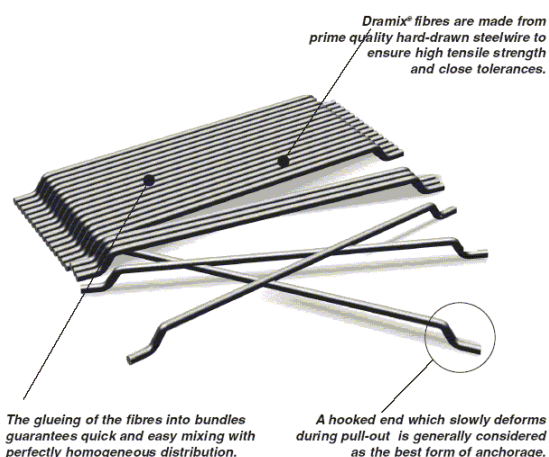


Figura V-10 - Pormenores das fibras Dramix.



Figura V-11 - Plaquetas de fibras Dramix RC-65/60-BN.

As duas primeiras letras da designação comercial indicam o tipo de extremidade (recta ou dobrada) e a forma como as fibras se apresentam (coladas ou soltas) sendo, respectivamente, R para extremidade dobrada e C (*collated*) para fornecimento em plaquetas. Os dois números representam a esbelteza ($\ell_f/\varnothing_f \cong 65$) e o comprimento ($\ell_f = 60$ mm). As extremidades dobradas garantem, segundo o fabricante, uma superior eficiência em termos de ancoragem das fibras ao betão. Finalmente, as duas letras no termo da designação representam, respectivamente, a textura da superfície da fibra (B para *bright* - brilhante) e o teor em carbono (N para baixo teor - igual ou inferior a 0,10 %).

Apresentam-se, no Quadro V-8, as características das fibras utilizadas, de acordo com a informação disponibilizada pelo fornecedor.

Quadro V-8 - Propriedades das fibras de aço utilizadas no betão reforçado com fibras de aço.

Designação comercial		Dramix RC-65/60-BN		
Geometria	Comprimento, ℓ_f	60 mm		
	Diâmetro, $\varnothing_f$	0,90 mm		
	Esbelteza, $\ell_f/\varnothing_f$	67		
Densidade		3200 fibras/kg		
Massa volúmica		7800 kg/m ³		
Módulo de elasticidade		200 GPa		
Resistência à tracção simples		1000 MPa		
Dosagem (kg/m ³)	Máxima recomendada	Máxima dimensão dos agregados, d_{max} (mm)	Betão em massa	Betão bombeado
		8	110	80
		16	70	55
		32	60	45
	Utilizada	16	39,25	

O fornecimento das fibras de aço em plaquetas evita a sua aglomeração durante a amassadura, o que melhora a trabalhabilidade e a homogeneidade da mistura. O volume de fibras adicionado foi de 0,5 % do volume de betão, o que equivale a 39,25 kg de fibras de aço por metro cúbico de betão.

V.4 ESQUEMA DE ENSAIO

O esquema adoptado para o ensaio das lajes é seguidamente descrito. A solicitação é aplicada no troço de pilar central de betão com recurso a uma chapa metálica plana ($250 \times 250 \times 40$ mm³ na base do pilar) nos ensaios das lajes ACA1 e AC0 e através de um sistema metálico de encaixe do pilar, apresentado na Figura V-14, nos restantes ensaios (ou através de uma placa circular - $\varnothing = 150$ mm - no caso da laje P) de baixo para cima, por um actuador (colocado sob a laje de reacção). A carga é suportada por 4 varões (varões *dywidag* roscados com diâmetro de 32 mm) ancorados inferiormente na laje de reacção e superiormente em 4 vigas metálicas constituídas por dois perfis UPN 200 com 1,21 m de comprimento, ligados entre si (Figura V-12). Estas vigas distribuem a carga em oito pontos

equidistantes (os apoios das vigas sobre a laje são materializados por duas chapas metálicas com dimensões $120 \times 120 \times 20 \text{ mm}^3$) inscritos numa circunferência, concêntrica com o centro geométrico da laje em planta, de diâmetro $B = 2165 \text{ mm}$ (ver Figura V-1). As lajes foram munidas de quatro furos materializados por troços de tubos em PVC com diâmetro de 50 mm , para permitir o atravessamento das mesmas pelos varões de reacção, como se ilustra na Figura V-3.

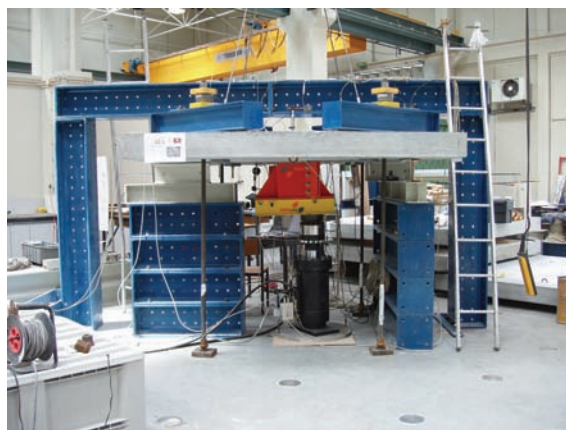
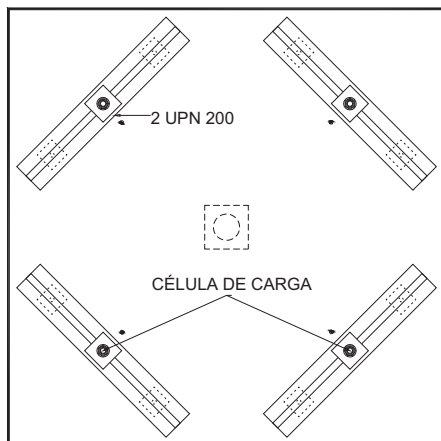


Figura V-12 - Vista em planta do esquema de ensaio. Figura V-13 - Vista geral do sistema de ensaio - laje AEA1 - na modalidade excêntrica.

Para possibilitar a aplicação da carga com excentricidade (Figura V-13), dimensionou-se e executou-se um sistema metálico de encaixe do pilar (Figura V-14).

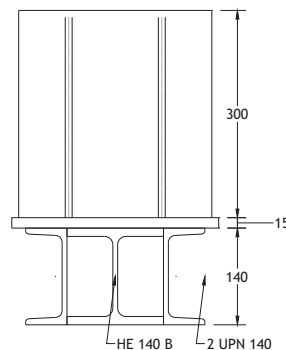
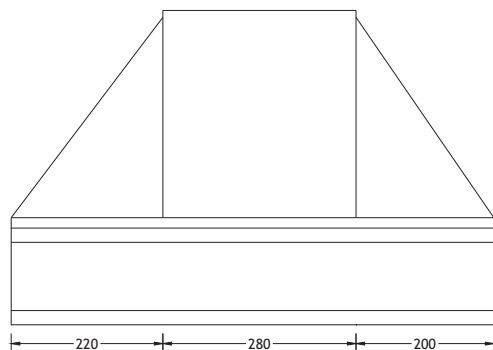
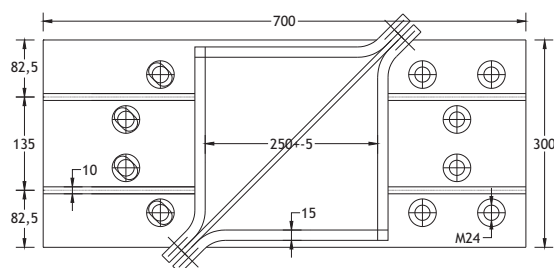


Figura V-14 - Vistas do encaixe metálico na extremidade dos pilares para carregamento excêntrico (dimensões em mm).

A excentricidade do carregamento é conseguida por deslocação do servoactuator de uma distância igual à excentricidade pretendida, mantendo inalterado o restante *layout* do

ensaio, como se ilustra na Figura V-15.

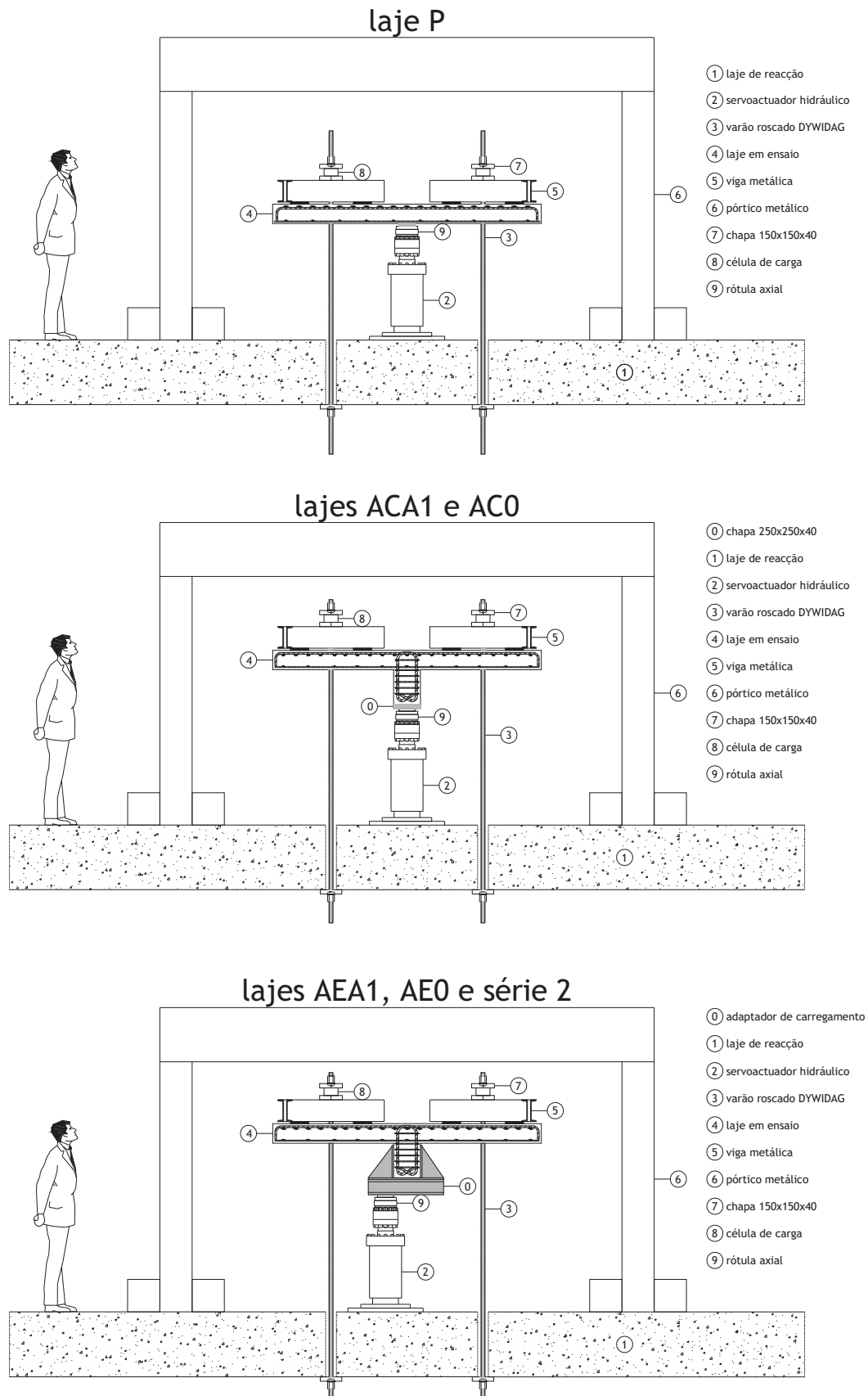


Figura V-15 - Esquema geral de ensaio em laboratório.

O sistema de aplicação da carga consiste numa plataforma constituída por dois perfis UPN 140 que ladeiam um perfil central HE 140 B (parte a amarelo na Figura V-14), longitudinalmente solidarizados por cordão contínuo de soldadura, e por uma cabeça de encaixe (parte a laranja na Figura V-14) que é ajustada por aparafusamento diagonal ao corpo do pilar.

O servoactuator hidráulico é equipado com uma rótula central que permite oscilações em torno do eixo do êmbolo de cerca de 10°.

Considera-se este conjunto suficientemente rígido, de tal forma que são desprezáveis os contributos da deformação dos referidos perfis metálicos para a deformação global do sistema.

V.5 DIMENSIONAMENTO DOS MODELOS

O ensaio de lajes apoiadas em todo o seu contorno é, por razões conhecidas, de difícil execução, preferindo a maioria dos investigadores os sistemas de ensaio com apoios locais da laje.

Neste estudo as condições de apoio das lajes foram adequadas à disponibilidade dos equipamentos de ensaio e às características da laje de reacção do laboratório. As condicionantes às dimensões dos modelos de laje foram de vária ordem, como se indica:

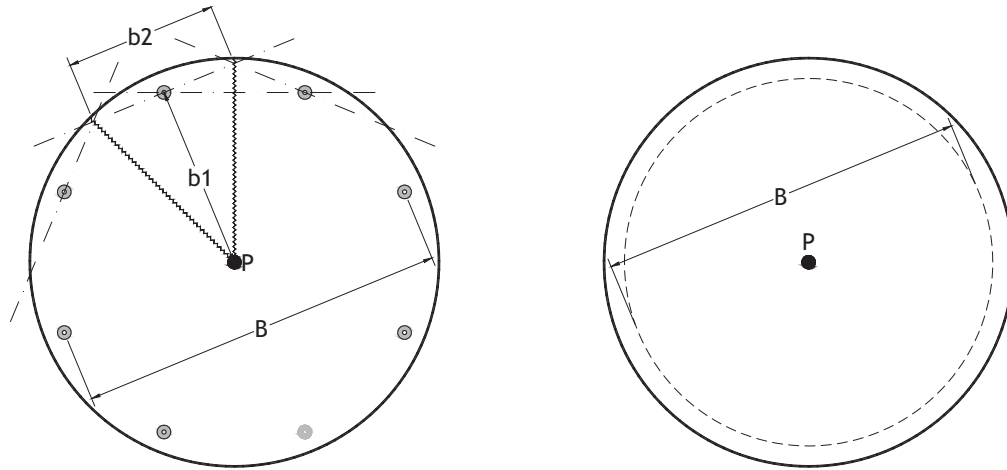
- Furação existente na laje de reacção, que determinou as dimensões em planta dos modelos de laje;
- Limitação na capacidade do actuador servocontrolado a cerca de 1000 kN;
- Percentagem de armadura longitudinal de tracção de aproximadamente 1 %, de forma a reproduzir uma densidade corrente de armadura;
- Laje isótropa: armaduras longitudinais constantes nas duas direcções e em todo o domínio das lajes.

V.5.1 Condições de apoio

A disposição adoptada para o presente programa experimental é a de uma laje apoiada em oito pontos do seu contorno, com aplicação de carga no centro.

A semelhança em termos de momentos flectores gerados por aplicação de uma carga central, P , em lajes circulares com as diferentes condições de apoio: apoiadas em n pilares ou

em toda a periferia, pode ser estabelecida através do método das linhas de rotura (Figura V-16). Este método constitui uma aplicação do teorema cinemático da análise plástica e baseia-se na igualdade entre o trabalho produzido pelas solicitações exteriores e o realizado pelos esforços internos na deformação virtual considerada fornecendo, de maneira simples e rápida a partir de um mecanismo admitido *à priori*, soluções que constituem um limite superior da carga última.

a) Simplesmente apoiada em n pontos

b) Simplesmente apoiada em todo o seu contorno

Figura V-16 - Lajes carregadas ao centro (adaptado de Montoya *et al.*, 1976).

A aplicação do método das linhas de rotura consiste na determinação do valor do momento, constante ao longo das charneiras plásticas (onde se concentram as rotações relativas entre as diferentes partes em que a laje fica dividida depois de esgotada a sua capacidade), através da igualdade entre a energia dissipada por flexão ao longo daquelas e o trabalho externo produzido pela solicitação no deslocamento virtual da laje - movimento vertical do ponto de aplicação da carga - do mecanismo considerado (Bastos, 1997). De entre todas as configurações das linhas de rotura possíveis, a correcta será a que conduz ao valor mínimo do momento de plastificação ao longo das linhas de rotura.

No caso das lajes apoiadas em n pontos (Figura V-16a), o traçado das linhas de rotura é muito característico. Os eixos de rotação são definidos por dois apoios consecutivos da laje e as charneiras plásticas passam pelo ponto de aplicação de carga e pela intersecção desses eixos. O valor do momento, m_a , ao longo das linhas de rotura é obtido pela equação do trabalho virtual em relação a uma zona delimitada por duas linhas de rotura formando um sector circular de laje, actuado pela carga P/n :

$$m_a \cdot b_2 = \frac{P}{n} \cdot b_1 \Leftrightarrow 2 \cdot m_a \cdot \frac{B}{2} \cdot \sin(\pi/n) = \frac{P}{n} \cdot \frac{B}{2} \cdot \cos(\pi/n) \quad (\text{V. 4})$$

vindo:

$$m_a = \frac{P}{2n \cdot \tan(\pi/n)} \quad (\text{V. 5})$$

em que n representa o número de lados do polígono cujos vértices materializam os apoios.

O caso da laje apoiada em todo o contorno (linha a tracejado na Figura V-16b) identifica-se com a situação anterior para $n \rightarrow \infty$. A linha de contorno pode considerar-se composta por um conjunto de segmentos rectos (eixos de rotação) definidos entre as linhas de rotura radiais. O valor do momento, m_b , ao longo das linhas de rotura pode ser estabelecido pela equação de equilíbrio energético (Kennedy *et al.*, 2004) em relação a um sector circular infinitesimal de laje, delimitado por duas linhas de rotura, como se indica na equação seguinte:

$$m_b \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{B}{2} = \frac{P}{n} \cdot \frac{B}{2} \quad (\text{V. 6})$$

obtendo-se:

$$m_b = \frac{P}{2\pi} \quad (\text{V. 7})$$

De forma a quantificar a semelhança entre os momentos radiais instalados em cada uma das situações - expressões (V. 5) e (V. 7) - para uma dada carga P , apresenta-se, no Gráfico V-2, a relação m_a/m_b em função do número de pontos de carga.

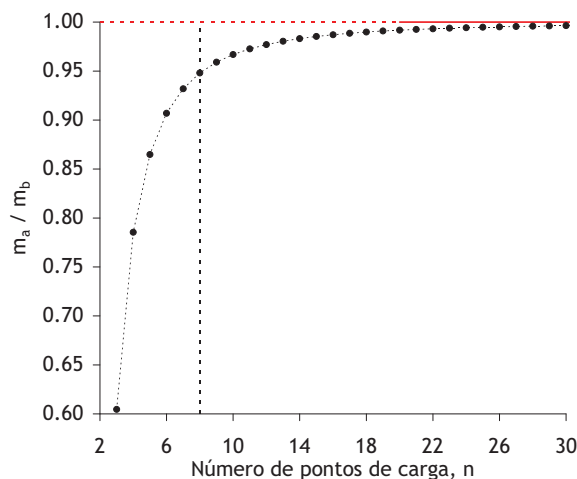


Gráfico V-2 - Comparação entre os momentos elásticos - n pontos equidistantes de carga vs. carregamento uniformemente repartido no contorno (ver Figura V-16).

Um número elevado de pontos de apoio implica dificuldades de execução dos ensaios enquanto, para um número reduzido de pontos, a semelhança relativamente a uma laje apoiada em todo o contorno é afastada. No caso de oito pontos de apoio, a referida relação vale 0,948, ou seja, existe um desvio dos momentos de 5,2 %, confirmando a razoável aproximação comparativamente à situação da laje continuamente apoiada.

Na expressão (V. 7) assumiu-se que a carga concentrada, P , está aplicada no ponto central da laje. Na realidade, a carga está distribuída num círculo ou numa região rectangular pelo que os momentos são reduzidos. Montoya *et al.* apresenta a expressão seguinte para o caso da carga aplicada numa região circular de diâmetro $\varnothing$ (Montoya *et al.*, 1976):

$$m_b = \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\varnothing}{B}\right) \quad (\text{V. 8})$$

Broms apresenta a expressão (V. 9) para o mesmo efeito (Broms, 2005).

$$m_b = \frac{P}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{\varnothing}{B}\right) \quad (\text{V. 9})$$

V.5.2 Capacidade resistente à flexão

A capacidade resistente à flexão das lajes apoiadas em oito pontos do seu contorno é determinada pela aplicação do método das linhas de rotura, através da análise de dois mecanismos possíveis (Figura V-17).

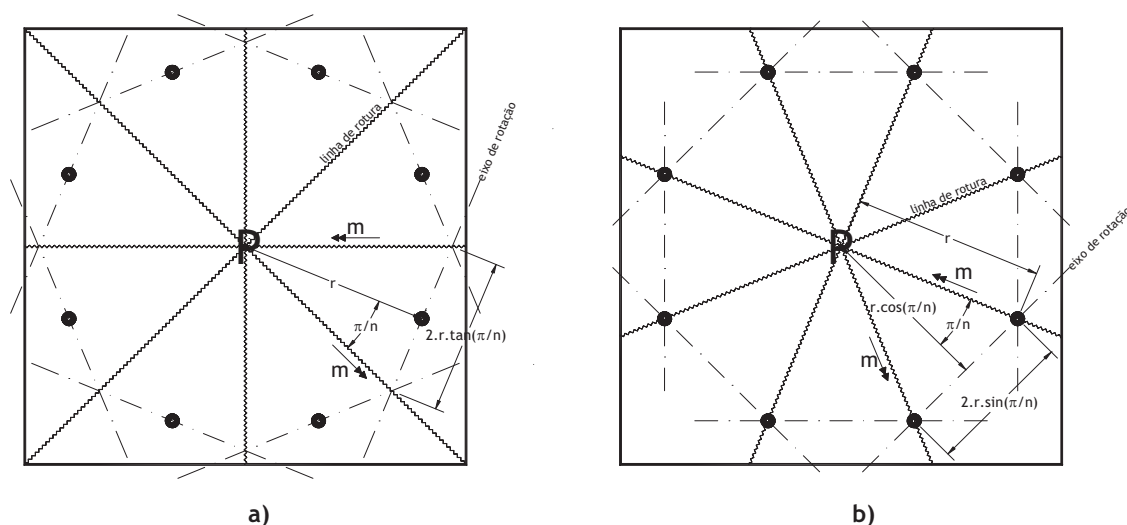


Figura V-17 - Mecanismos de rotura para uma laje apoiada em oito pontos do seu contorno.

Na primeira configuração de rotura (Figura V-17a), os eixos de rotação são normais aos raios que se dirigem para os pontos de apoio enquanto na disposição representada na Figura V-17b tais eixos são orientados de forma a unir dois apoios consecutivos passando as charneiras plásticas pelo ponto de aplicação da carga e pelos apoios.

O valor do momento, m , ao longo das linhas de rotura é obtido pela equação do trabalho virtual em relação a uma zona de laje limitada por duas linhas de rotura, valendo, em qualquer dos casos, o indicado na equação (V. 5).

De referir que a carga de rotura associada à equação (V. 7) é inferior àquela que resulta da equação (V. 5), no caso de oito pontos de apoio (Park *et al.*, 2000). Tal evidencia que a distribuição radial dos momentos flectores está normalmente associada a modos mais críticos de rotura do que a que envolve a formação de grandes segmentos triangulares discretas entre linhas de rotura, como é o caso dos representados na Figura V-17.

O momento resistente por unidade de largura de laje correspondente à cedência das armaduras, m_v , pode ser obtido por^{gg}:

$$m_y = \rho_l \cdot f_{sy} \cdot d^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_l}{2} \cdot \frac{f_{sy}}{f_c} \right) \quad (\text{V. 10})$$

pelo que a correspondente carga vem:

$$P_{\text{flux}} = 2n \cdot \tan(\pi/n) \cdot m_v \quad (\text{V. 11})$$

Invocando o termo corrector indicado na expressão (V. 9), a equação (V. 11) pode ser reescrita para atender ao efeito da aplicação da carga numa área com $\varnothing = 150$ mm no caso da laje P, como se mostra:

$$P_{flex} = \frac{2n \cdot \tan(\pi/n)}{1 - \phi/B} \cdot m_y \quad (\text{V. 12})$$

Adoptando os seguintes valores médios para $f_{sy} = 600 \text{ MPa}$, $f_c = 60 \text{ MPa}$, $B = 2165 \text{ mm}$ e $\rho_l = 1,20 \%$, considerando $P_{\max} = 1 \text{ MN}$ (valor correspondente à capacidade do actuador de ensaio) e recorrendo à equação (V. 12) de forma a limitar inferiormente a capacidade resistente à flexão, obtém-se para a altura útil das armaduras das lajes o valor de aproximadamente 145 mm. Esta estimativa serviu de referência para o subsequente dimensionamento dos modelos de laje, pretendendo-se que a rotura ocorresse previsivelmente por punçoamento.

Finalmente, refira-se que no caso da área carregada não ser circular, poderá substituir-se na expressão (V. 12) o valor de $\varnothing$ por:

$$\varnothing_e = \frac{2}{\pi} \cdot (c_1 + c_2) \quad (\text{V. 13})$$

em que:

 c_1, c_2

dimensões da secção transversal do pilar ou da área carregada

gg - A expressão (V. 10) resulta do estabelecimento dos equilíbrios internos de translação e de rotação, com recurso ao bloco rectangular simplificado de tensões no betão, assumindo a resultante de compressões aplicada na centro de gravidade da região comprimida de betão e desprezando a contribuição da armadura comprimida

V.5.3 Capacidade resistente ao punçoamento

Recorrendo às diferentes normas e códigos analisados no Capítulo III, apresentam-se no Quadro V-9^{hh} as cargas de rotura por punçoamento previstas para as nove lajes ensaiadas experimentalmente. No mesmo quadro indica-se também a capacidade resistente à flexão para comparação.

Quadro V-9 - Cargas de rotura previstas segundo diversos códigos e regulamentos.

Carga	Laje	f_{cm} (MPa)	ρ_l (%)	Modo de rotura previsto	V_{Rm} (kN)				P_{flex} (kN)
					CEB-FIP MC 90	EN 1992-1-1	BS 8110-1: 1997	REBAP	
centrada	P	74,1	1,08	P	585	585	450	451	925
	AC0	56,1		P	640	640	597	562	924
	ACA1	54,4		P	838	838	900	674	922
	ACA2	48,5		P	807	807	900	674	1000
	FC0	39,3		P	568	568	531	444	981
excêntrica	AE0	65,6		P	477	477	437	354	932
	AEA1	66,2		P	690	675	751	383	933
	AEA2	47,9		P	630	630	686	383	999
	FE0	36,9		P	394	394	361	241	975

Notações: f_{cm} : valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão, no dia do ensaio, referido a provetes cilíndricos, ver Quadro V-4; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal, ver equação (V. 2); P : rotura por punçoamento; V_{Rm} : carga de rotura prevista pelo código; P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, ver equação (V. 11)

V.6 INSTRUMENTAÇÃO, MEDIÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS

A instrumentação utilizada, condicionada pelas disponibilidades de equipamento de medição e aquisição de dados existentes no Laboratório de Estruturas da FEUP, é constituída por extensómetros eléctricos, deflectómetros indutivos (do tipo LVDT), inclinómetros eléctricos e extensómetros de superfície, de massa e Ómega (ver Figura V-18 e Figura V-19).

A força aplicada é medida directamente através de uma célula de carga incorporada no actuador hidráulico (ver Figura V-15, pág. 127) e indirectamente pela soma dos esforços nos quatro varões de reacção, determinados a partir das extensões medidas por extensómetros eléctricos diametralmente opostos e colados nos mesmos, e ainda por células anelares de carga de 500 kN de capacidade dispostas como se indica na Figura V-12 e na Figura V-13 (pág. 126). O servoactuador está equipado com uma célula de carga interna bem como de um transdutor de deslocamento que serviu de controlo no decurso de todo o ensaio.

hh - As cargas previstas pela regulamentação indicadas no Quadro V-9 foram determinadas assumindo as propostas de alteração apresentadas em III.9

V.6.1 Extensões da superfície do betão

As deformações radiais e tangenciais no betão da face inferior das lajes (comprimida) foram medidas por extensómetros de massa (elongâmetros eléctricos de resistência) com base de medida de 100 mm e campo de leitura de ± 5 mm, aparafusados na superfície da laje, em diferentes secções conforme indicado na Figura V-18.

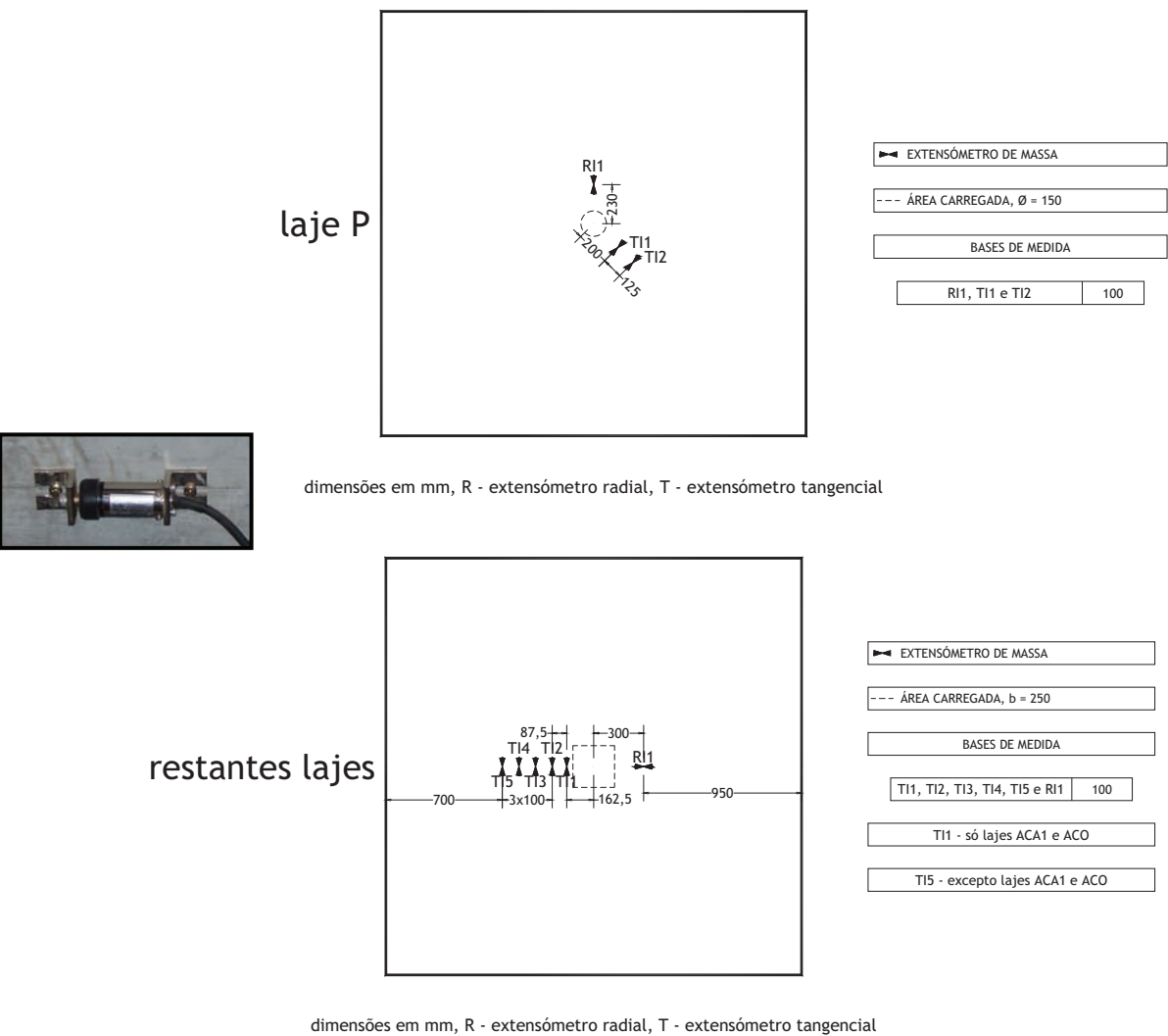


Figura V-18 - Posicionamento dos extensómetros colocados na face comprimida.

Estes extensómetros consistem em transdutores resistivos de deslocamento para medição da abertura de fendas em elementos de betão armado, traduzindo uma variação da distância entre os pontos de fixação, de forma linear, na variação do sinal eléctrico medido por intermédio de uma ponte de Wheatstone.

Na face superior, as deformações radiais e tangenciais no betão foram medidas com recurso a extensómetros Ómega (*clips*), aparafusados na superfície da laje em diferentes secções conforme se mostra na Figura V-19, com as bases de medida aí indicadas.

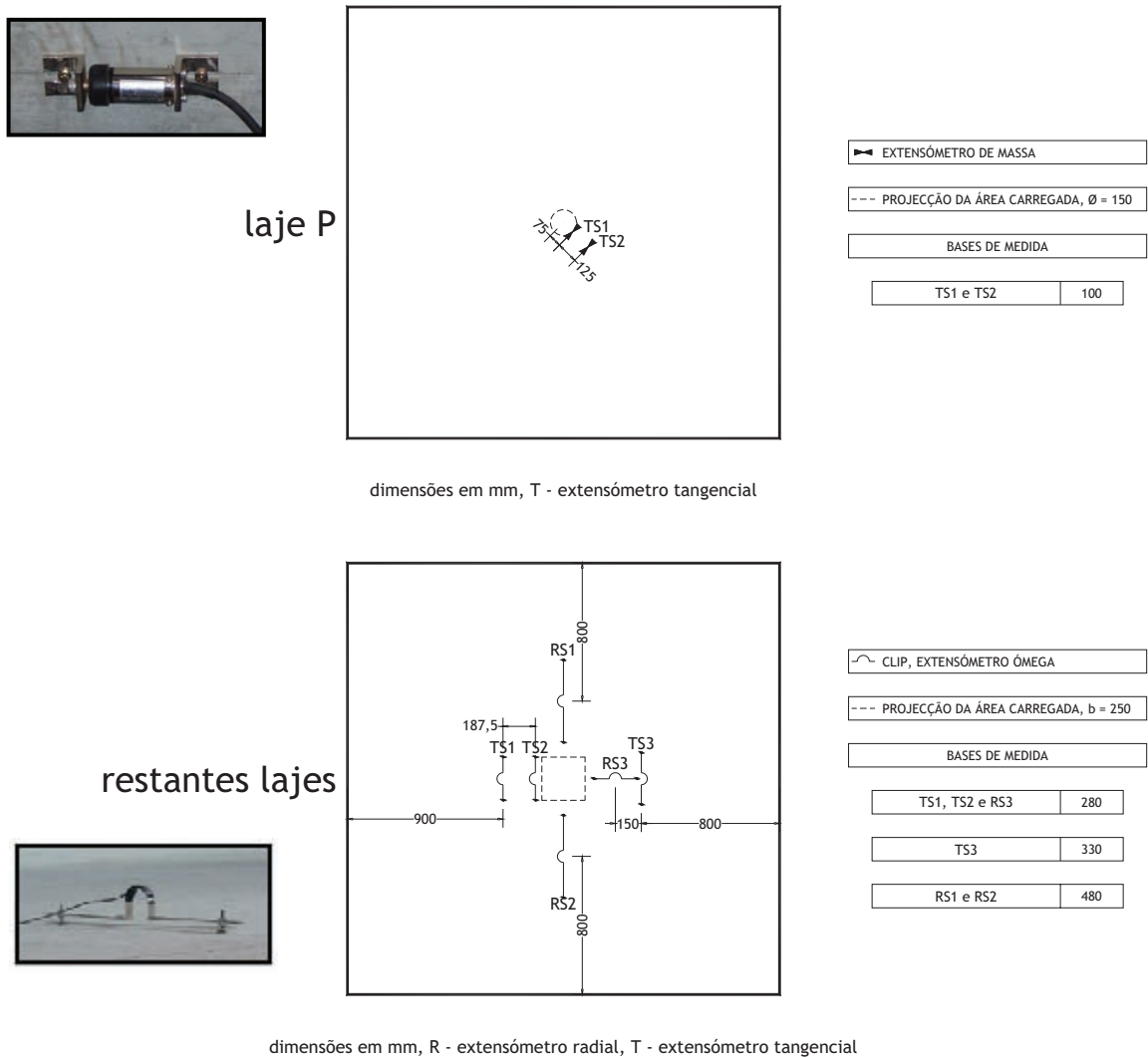


Figura V-19 - Posicionamento dos extensómetros colocados na face traccionada.

V.6.2 Extensões da armadura longitudinal

As extensões das armaduras longitudinais de flexão foram medidas, somente na laje P, por doze extensómetros eléctricos (seis em cada direcção), colados (ver Figura V-21) nas posições indicadas na Figura V-20.

A disposição dos extensómetros procurou avaliar a distribuição das extensões na região interior ao cone de punçoamento. Tais extensões serão, no Capítulo VII, comparadas com as obtidas por modelação numérica.

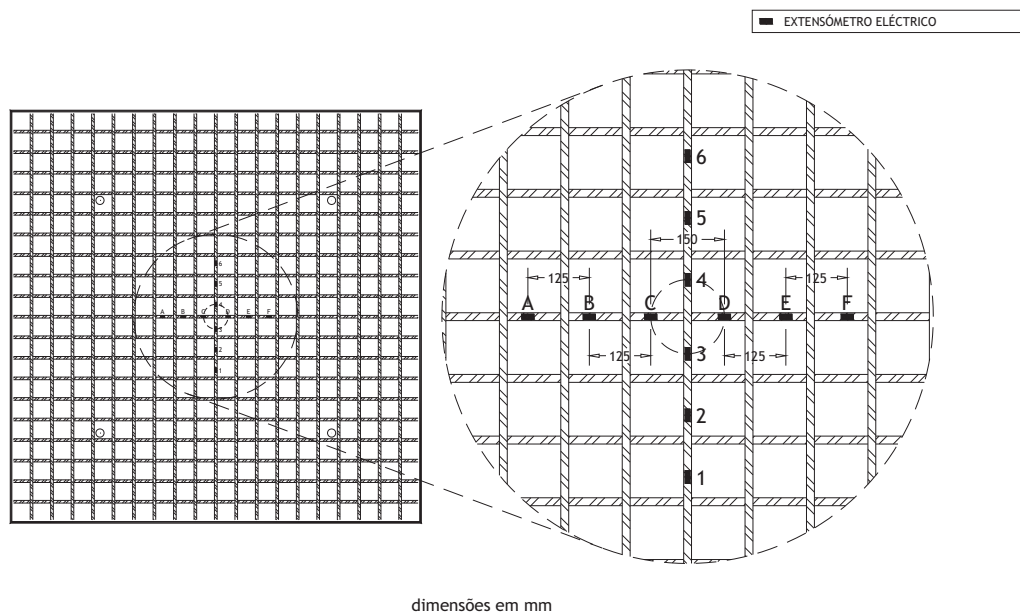


Figura V-20 - Posições dos extensómetros colocados por colagem nas armaduras principais da laje P.

Estas leituras permitiram avaliar a evolução das extensões nestes varões no decurso do ensaio. De notar que a direcção vertical na Figura V-20 contém as armaduras posicionadas com a maior altura útil da laje (extensómetros 1 a 6).



Figura V-21 - a) Vista geral das armaduras longitudinais da laje P; b) Pormenor da disposição dos extensómetros instalados nas armaduras longitudinais da laje P.

Contribuíram, também, estes resultados para confirmar o nível de mobilização da armadura longitudinal, quando comparado com as previsões obtidas com recurso ao método das linhas de rotura.

V.6.3 Extensões da armadura transversal

Ilustra-se, na Figura V-22, a localização dos extensómetros eléctricos nos pernos instrumentados de forma a avaliar o nível de mobilização das armaduras transversais. A disposi-

ção dos sensores ao longo da altura dos pernos procurou medir as extensões experimentais pelas armaduras transversais na secção que, previsivelmente, seria atravessada pela fenda inclinada de rotura.

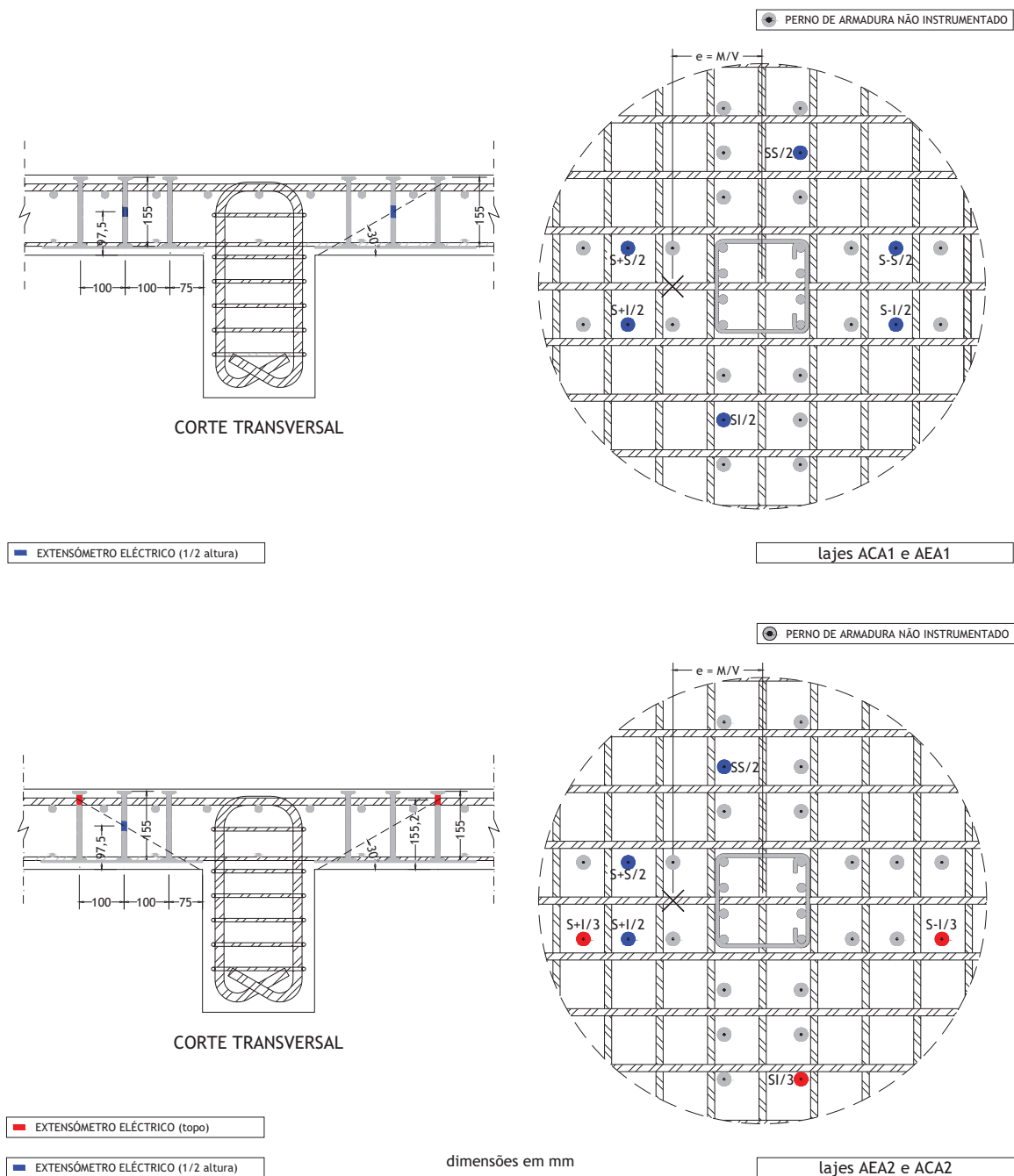


Figura V-22 - Disposição dos extensômetros instalados nas armaduras de punçoamento.

Nas duas primeiras lajes (ACA1 e AEA1) foram instrumentados duas linhas de pernos com igual distância do pilar; nas segundas (ACA2 e AEA2) instrumentaram-se os pernos do 2.º e 3.º perímetros de armaduras procurando-se avaliar a mobilização destes em função da distância ao pilar.

V.6.4 Deslocamentos normais ao plano da laje

Os deslocamentos da face superior das lajes foram medidos usando cinco transdutores indutivos de deslocamento, LVDT's, com amplitude de ± 25 mm, posicionados ao longo do diâmetro carregado B (ver Figura V-1, pág. 115), no centro (C), nas extremidades (E1 e E2) e a quartos de vão (I1 e I2) como se indica na Figura V-23.

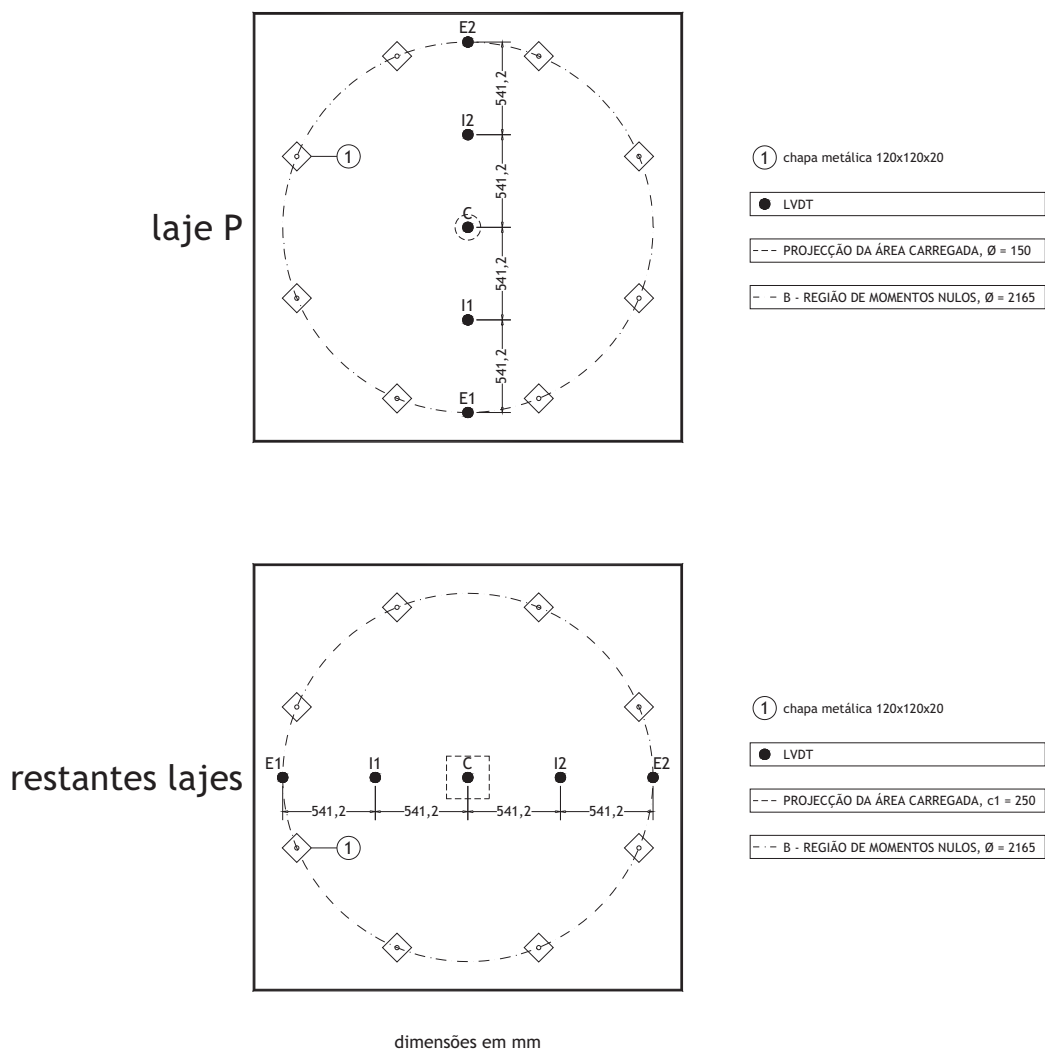


Figura V-23 - Posicionamento dos LVDT's na face superior das lajes.

Os LVDT's foram montados num pórtico independente. A resposta deformacional foi obtida pela diferença entre a média das leituras dos LVDT's extremos e a leitura do LVDT central.

V.6.5 Rotações do pilar

Nas lajes AEA1, AE0 e 2.^a série, as rotações experimentadas pelo troço de pilar foram medidas utilizando dois inclinómetros (Jewell Instruments) localizados em faces adjacentes

do pilar (ver Figura V-14), com gama de leitura de $\pm 1^\circ$ e resolução de $1 \mu\text{rad}$. Estes transdutores permitiram verificar a simetria do carregamento no caso de punçoamento centrado e medir as rotações experimentadas pelo pilar nos ensaios excêntricos.

V.6.6 Frequências de aquisição de dados

Foram utilizados três computadores para aquisição dos valores registados pelos diferentes sensores: um para aquisição das leituras obtidas pelos LVDT's e monitorização do carregamento, um segundo computador para leitura dos valores das células de carga (*datataker DT 800*) e um último para aquisição das leituras dos clips, dos extensómetros de massa, dos extensómetros internos e dos extensómetros colocados nos varões de reacção (*datataker DT 505*).

As frequências de aquisição para os diferentes dispositivos são as indicadas no Quadro V-10.

Quadro V-10 - Frequências de aquisição de dados dos diversos sensores.

Sensor	Frequência de aquisição (Hz)
Célula de carga (actuador)	1
LVDTs	1
Extensómetros Ómega (face superior da laje)	0,1
Elongâmetros eléctricos de resistência (face inferior da laje)	0,1
Inclinómetros	0,1
Células de carga (reacções)	0,1
Extensões nas armaduras principais (só laje P)	0,1

V.7 PROCEDIMENTOS DE REALIZAÇÃO DOS ENSAIOS

Todos os ensaios experimentais de punçoamento em modelos de lajes descritos foram realizados na nave de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da FEUP. A sua preparação envolveu as seguintes etapas:

- Transporte das lajes desde a nave do Laboratório de Materiais de Construção da FEUP;
- Marcação dos pontos de fixação dos extensómetros de massa na face inferior da laje;
- Colocação e aperto do adaptador que permite a aplicação do carregamento excêntrico;
- Marcação dos pontos das leituras dos deslocamentos verticais e marcação dos pontos de fixação dos clips (extensómetros Ómega) na face superior da laje;

- Limpeza a ar comprimido das faces do modelo e pintura da face superior com recurso a tinta branca;
- Marcação e colocação das chapas de contacto nos oito pontos de reacção;
- Posicionamento das quatro vigas de repartição da reacção;
- Posicionamento da laje no local de ensaio, sob os apoios provisórios;
- Montagem das células de carga;
- Colocação dos varões de reacção;
- Colocação dos extensómetros de massa na face inferior e dos extensómetros Ómega na face superior;
- Colocação do pórtico para instalação dos LVDT's;
- Fixação dos LVDT's na face superior da laje e dos inclinómetros nas faces frontal e lateral do adaptador que permite a aplicação do carregamento;
- Ligação de todos os sensores aos dispositivos de aquisição de dados;
- Suspensão do modelo da ponte rolante;
- Ajustes no posicionamento do modelo de laje para controlo da excentricidade preconizada, seguidos de nivelamento final e encosto dos varões de reacção;
- Colocação a zero das leituras de todos os sensores.

Cada ensaio é precedido da aplicação de uma pré-carga de ajuste (100 kN) inferior à carga de fissuração de qualquer dos modelos, com velocidade de aplicação da carga de 0,20 kN/segundo, para acomodação do sistema e verificação do funcionamento dos instrumentos de medida. Comprovada a horizontalidade no posicionamento da laje, a carga é retirada iniciando-se o ensaio.

O carregamento em situação de ensaio é controlado em deslocamento (de forma contínua e monotónica até à rotura) com velocidade de ensaio de 0,18 mm/min, configurando um ensaio quasi-estático. No início do ensaio a laje é suspensa de uma ponte rolante até a carga aplicada se tornar superior ao seu peso próprio e ao peso dos equipamentos de leitura e carregamento.

Durante o ensaio, a formação e evolução da fendilhação é continuamente observada e registada. Cada ensaio tem a duração aproximada de três horas.

As lajes foram posteriormente serradas em duas ou mais partes para caracterização da geometria da fenda crítica de rotura e mapeamento da superfície de rotura.

VI APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

VI.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Faz-se, neste Capítulo, a exposição e a análise dos resultados relativos ao programa experimental sobre punçoamento que compreendeu o ensaio de nove modelos de laje dimensionalmente idênticos, descrito no Capítulo V.

É analisada a influência da armadura transversal na capacidade última e no mecanismo de rotura estabelecendo-se a comparação com as lajes sem armadura específica de punçoamento.

O comportamento das lajes submetidas a carregamento excêntrico é comparado com o de lajes idênticas solicitadas por cargas centradas.

Os resultados experimentais são também analisados à luz das expressões regulamentares de diferentes normas e códigos como sejam o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), a EN 1992-1-1 (CEN, 2004), a norma britânica BS 8110-1:1997 (BSI, 1997) e o regulamento português REBAP (REBAP, 1983).

A apresentação dos resultados está organizada da seguinte forma:

- **PUNÇOAMENTO CENTRADO**
- **Lajes sem armadura transversal**

Laje P, de betão corrente, carregada mediante uma placa circular metálica de aplicação da carga, primeira a ser ensaiada;

Laje AC0, idêntica à anterior, com incorporação de um troço de pilar;

Laje FC0, idêntica à anterior, realizada em betão reforçado com fibras de aço.

- **Lajes com armadura transversal**

Lajes ACA1 e ACA2, geometricamente idênticas às anteriores, de betão corrente, com incorporação de armaduras específicas de punçoamento.

- **PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO**

- **Lajes sem armadura transversal**

Laje AE0, de betão corrente, com incorporação de um troço de pilar;

Laje FE0, idêntica mas realizada em betão com adição de fibras metálicas.

- **Lajes com armadura transversal**

Lajes AEA1 e AEA2, de betão corrente, com incorporação de armaduras específicas de punçoamento.

VI.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Todos os modelos de laje ensaiados, sob carga centrada ou excêntrica, com ou sem armaduras transversais e com ou sem a incorporação de fibras de aço, romperam por punçoamento/corte ou por flexão/punçoamento (nas lajes com armadura transversal), que se caracterizou pela penetração mais ou menos brusca do pilar (ou da placa metálica, no caso da laje P) no corpo da laje, acompanhada da formação e progressão da fenda característica da rotura diagonal por punçoamento, visível na face superior, e da queda significativa da carga aplicada. Até à rotura, a fendilhação na face superior segue os padrões indicados pela teoria das linhas de rotura.

Os resultados incluem as cargas últimas, as deformadas, as extensões no betão e nas armaduras (longitudinais e de punçoamento) e os padrões de fendilhação. Apresentam-se ainda cortes transversais das lajes que ilustram a forma e a inclinação da superfície de rotura.

VI.2.1 Cargas de rotura

O Gráfico VI-1 apresenta as relações entre a carga aplicada e o deslocamento do ponto central de todas as lajes ensaiadas. Após atingida a carga máxima observa-se uma queda brusca com acentuada perda de capacidade de carga no punçoamento centrado sem armadura transversal. É possível identificar um troço linear inicial até ao início da fissuração

visível, seguido de um segundo tramo aproximadamente rectilíneo. No caso do carregamento excêntrico, este segundo tramo é não-linear. Nas lajes com armaduras transversais, pode observar-se um terceiro tramo mais abatido que poderá corresponder ao início da plastificação das armaduras longitudinais.

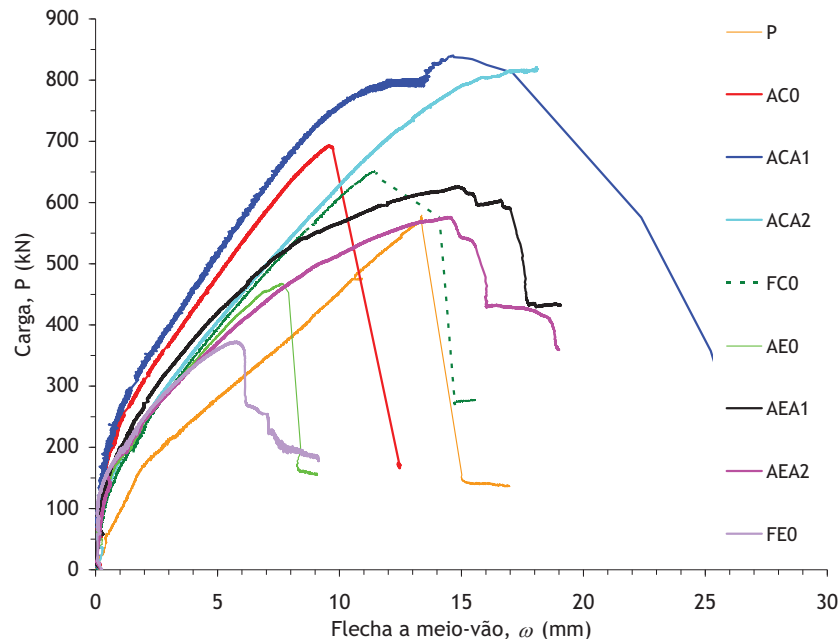


Gráfico VI-1 - Relações carga × flecha a meio-vão para todas as lajes do programa experimental.

O Quadro VI-1 sintetiza os principais resultados dos ensaios experimentais. Inclui-se ainda a capacidade resistente à flexão, P_{flex} , obtida por aplicação do método das linhas de rotura (ver V.5.2).

Quadro VI-1 - Cargas de rotura experimentais, tensão de corte e resistência à flexão.

Carga	Laje	f_{cm} (MPa)	ρ_l (%)	Modo de rotura	$P_{u,exp}$ (kN)	f_{vp} (MPa)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	B_0 (mm)
centrada	P	74,1	1,08	P	580	4,14	925	0,63	785
	AC0	56,1		P	685	3,28	924	0,74	780
	ACA1	54,4		FP	840	4,02	922	0,91	1453
	ACA2	48,5		FP	821	3,93	1000	0,82	⊕
	FC0	39,3		P	651	3,11	981	0,66	515
excêntrica	AE0	65,6	1,17	P	468	2,24	932	0,50	570
	AEA1	66,2		P	626	2,99	933	0,67	883
	AEA2	47,9		P	577	2,76	999	0,58	⊕
	FE0	36,9		P	373	1,78	975	0,38	546

Notações: $f_{cm,cil}$: valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão no dia do ensaio referido a provetes cilíndricos, ver Quadro V-4; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal, ver equação (V. 2); P : rotura por punção; FP : rotura por flexão/punção; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; f_{vp} : tensão nominal de corte, ver equação (VI. 1); P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, ver equação (V. 11); B_0 : diâmetro aproximado da região do cone de punção; ⊕ : laje não submetida a posterior corte longitudinal

No quadro anterior, o valor da tensão nominal de corte, f_{vp} (Quadro VI-1), foi determinado pela equação (VI. 1), tomando o perímetro crítico u à distância $0,5d$ e minimizando o seu comprimento.

$$f_{vp} = \frac{P_{u,exp}}{u \cdot d} \quad (VI. 1)$$

O valor médio encontrado é de 3,7 MPa no caso de carregamento centrado e de apenas 2,4 MPa para o caso de carregamento excêntrico.

VI.2.2 Deslocamentos verticais

As figuras seguintes apresentam, para cada situação:

- Num primeiro gráfico, a evolução do deslocamento a meio-vão com a carga aplicada. Refere-se que o valor da carga engloba também o peso próprio dos modelos e dos equipamentos de aplicação da carga;
- Nos gráficos seguintes, a deformada ao longo do diâmetro B (ver Figura V-1) instrumentado, para diferentes níveis do carregamento. Esta deformada foi obtida por diferença entre os deslocamentos medidos, pelos LVDTs, nos quatro pontos da face superior e o deslocamento do ponto central (ver Figura V-23). A curva inferior representa a distribuição dos deslocamentos para a carga última.

• PUNÇOAMENTO CENTRADO

• Lajes P, AC0 e FC0 sem armadura transversal

Nas lajes de betão convencional (lajes P e AC0) e de betão reforçado com fibras de aço (laje FC0), observam-se dois troços aproximadamente rectilíneos na resposta carga-flecha, conforme se mostra no Gráfico VI-2. O primeiro, de maior inclinação, até ao início da fendilhação visível para a carga de aproximadamente 170 kN e um segundo troço, com menor inclinação, até à carga máxima, seguido de queda brusca traduzindo a rotura frágil por punçoamento observada.

A perturbação que se observa no início do carregamento, para $P \cong 30$ a 40 kN (sensivelmente igual ao peso próprio das lajes e dos restantes equipamentos), deve-se à transferência na sustentação da laje da ponte rolante de suspensão para o actuador servocontrolado.

No caso da laje P, a flecha atingida para a carga máxima de 580,0 kN foi de 13,37 mm. É de referir que, lamentavelmente, um dos LVDTs extremos não funcionou correctamente pelo que se usam, na elaboração do Gráfico VI-3, para essa extremidade, as leituras obtidas com o LVDT diametralmente oposto. A sua comparação com a resposta da laje AC0

permite afirmar que é notório o aumento da rigidez global proporcionado pelo diferente modo de introdução da carga (placa circular metálica com $\varnothing = 150$ mm no caso da laje P e pelo troço de pilar de betão armado com 250×250 mm² nas restantes lajes).

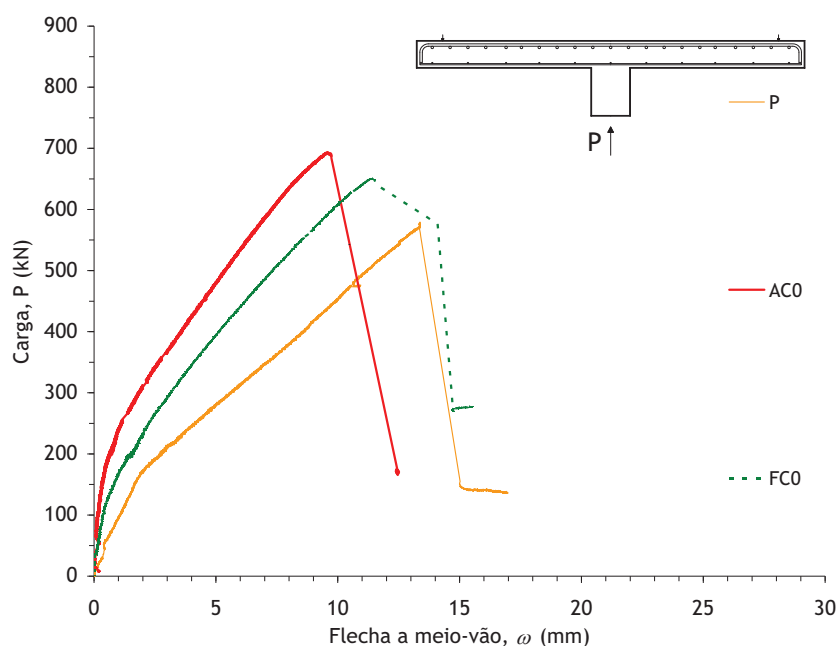


Gráfico VI-2 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes P, AC0 e FC0.

A simetria das condições de ensaio é visível no Gráfico VI-3 a Gráfico VI-5.

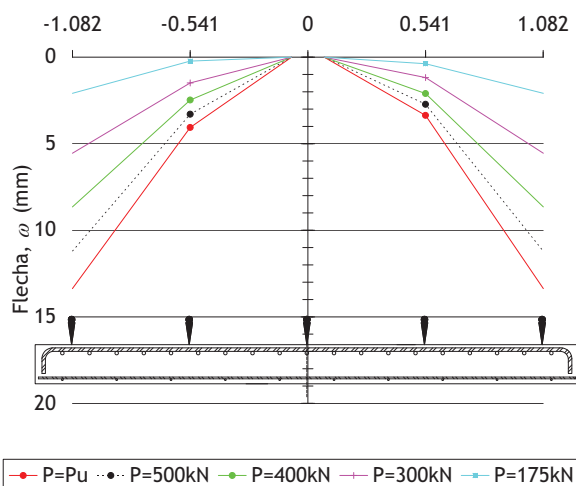


Gráfico VI-3 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje P.

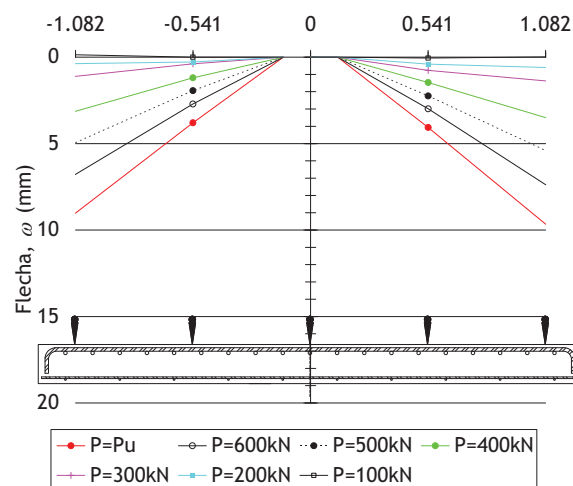


Gráfico VI-4 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AC0.

As lajes AC0 e FC0 atingiram a capacidade máxima para as cargas de 685,3 kN e 651,3 kN em correspondência com as flechas a meio-vão de 9,55 mm e 11,40 mm, respectivamente. Na laje FC0 a redução de 5,0 % de capacidade de carga em relação à laje AC0 pode ser explicada pela menor (– 30 %) resistência à compressão do betão. Também a maior deformabilidade da laje FC0 traduz o menor valor do seu módulo de elasticidade (– 24 % do que o de AC0).

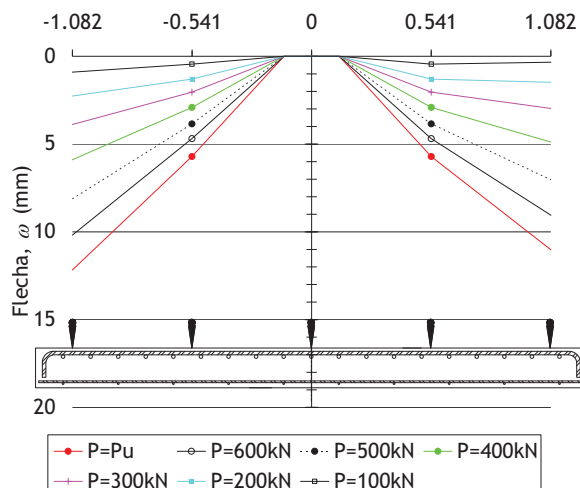


Gráfico VI-5 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje FC0.

• Lajes ACA1 e ACA2 com armadura transversal

Durante o ensaio da laje ACA1 um problema relacionado com uma limitação de pressão, imposta pela válvula de segurança do sistema hidráulico, não permitiu o crescimento da carga segundo a lei inicialmente estabelecida durante um período de aproximadamente uma hora. Durante este tempo verificou-se a permanência da carga em 800 kN, como se mostra no Gráfico VI-9. Este facto, visível através do patamar claramente identificável no Gráfico VI-6, motivou a repetição deste ensaio através da laje ACA2.

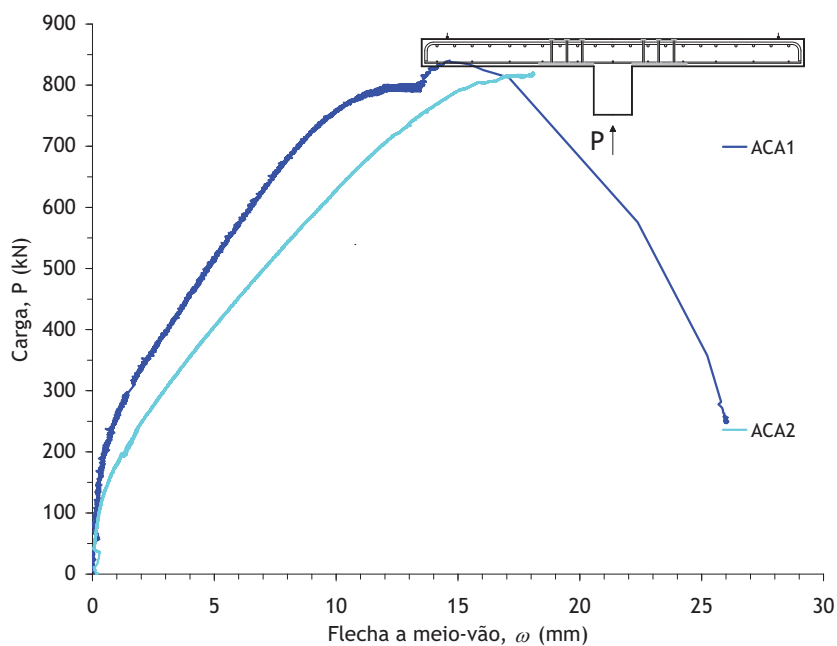


Gráfico VI-6 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes ACA1 e ACA2.

Não obstante os esforços desenvolvidos, o mesmo problema veio também a verificar-se no ensaio da laje ACA2, se bem que para uma carga muito próxima da carga de rotura.

Também nestas lajes podem observar-se na resposta carga-flecha, Gráfico VI-6, três troços aproximadamente rectilíneos. O primeiro, de maior inclinação, até ao início da fendilhação visível para a carga de aproximadamente 170 kN e 130 kN, respectivamente, para as lajes ACA1 e ACA2, um segundo troço, com menor inclinação, até à vizinhança da carga máxima, e um terceiro troço, praticamente horizontal devido à permanência da carga, seguido de um novo aumento da capacidade até à queda traduzindo a rotura por flexão/punçoamento observada.

Note-se, por comparação do Gráfico VI-7 com o Gráfico VI-8, a maior deformabilidade da laje ACA2 que pode ser justificada pela utilização de betão com características resistentes inferiores (10,8 % de redução da resistência média à compressão), sendo também evidente a razoável simetria da deformação de ambas as lajes.

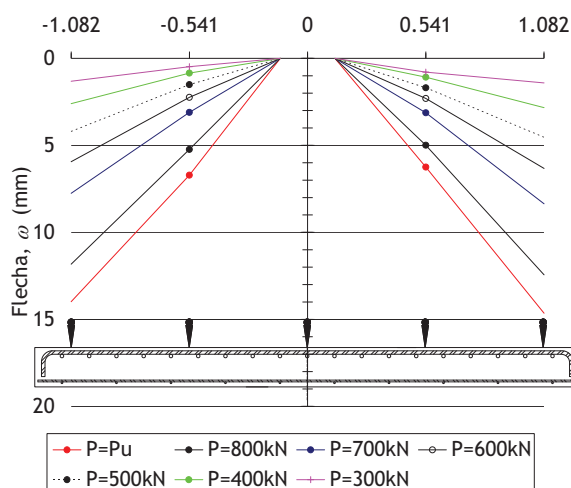


Gráfico VI-7 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje ACA1.

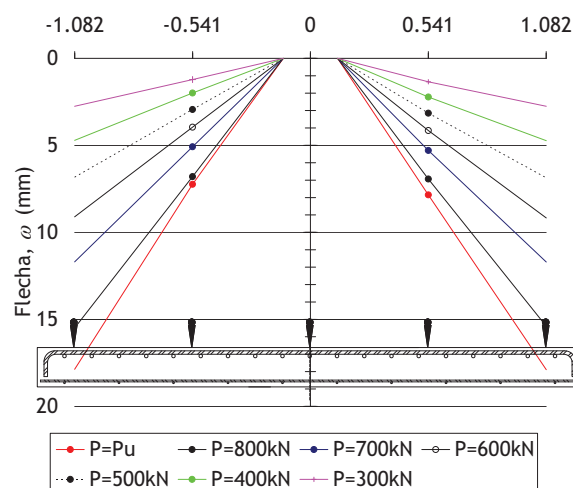


Gráfico VI-8 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje ACA2.

As lajes ACA1 e ACA2 atingiram a capacidade máxima para as cargas de 840,1 kN e 821,0 kN (– 2,3 %), associadas às flechas a meio-vão de 14,66 mm e 18,08 mm (+ 23,3 %), respectivamente.

Como já foi referido, todos os ensaios foram conduzidos em controlo de deslocamento com a taxa de crescimento de 0,18 mm/min, com excepção, na parte final do carregamento, das lajes ACA1 e ACA2 pelos motivos invocados.

O Gráfico VI-9 traduz as evoluções do deslocamento e do carregamento em função do tempo.

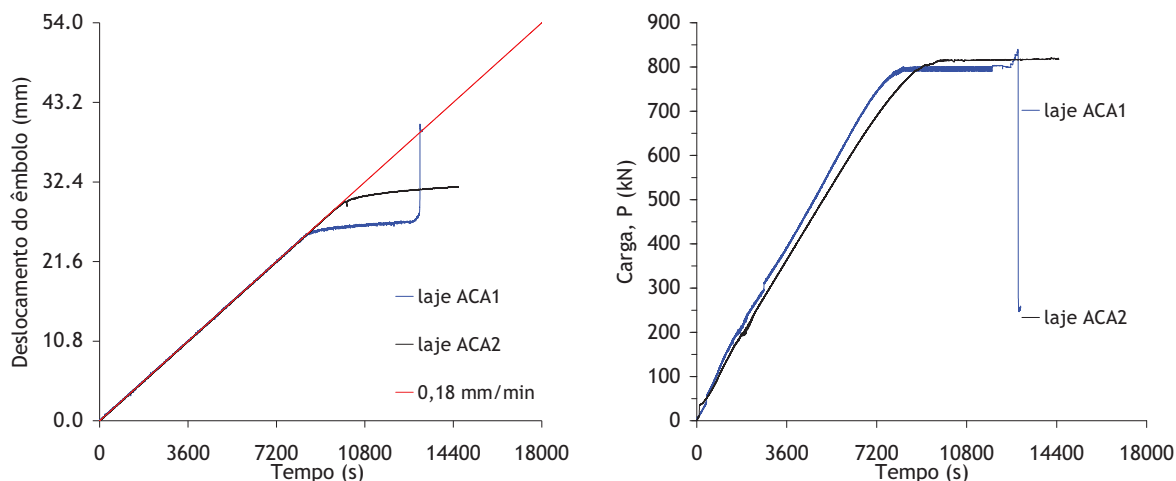


Gráfico VI-9 - Velocidade de aplicação do carregamento.

• PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO

• Lajes AE0 e FE0 sem armadura transversal

Nestas lajes a fendilhação visível teve início, mais cedo do que no caso do carregamento centrado, para a carga de cerca de 120 kN (laje AE0) e de 100 kN (laje FE0). O efeito da excentricidade, de $e = 0,20$ m (80 % da dimensão da secção transversal do pilar), traduziu-se também numa acentuada queda das cargas máximas e num padrão de fendilhação não simétrico, como era de esperar (Gráfico VI-10).

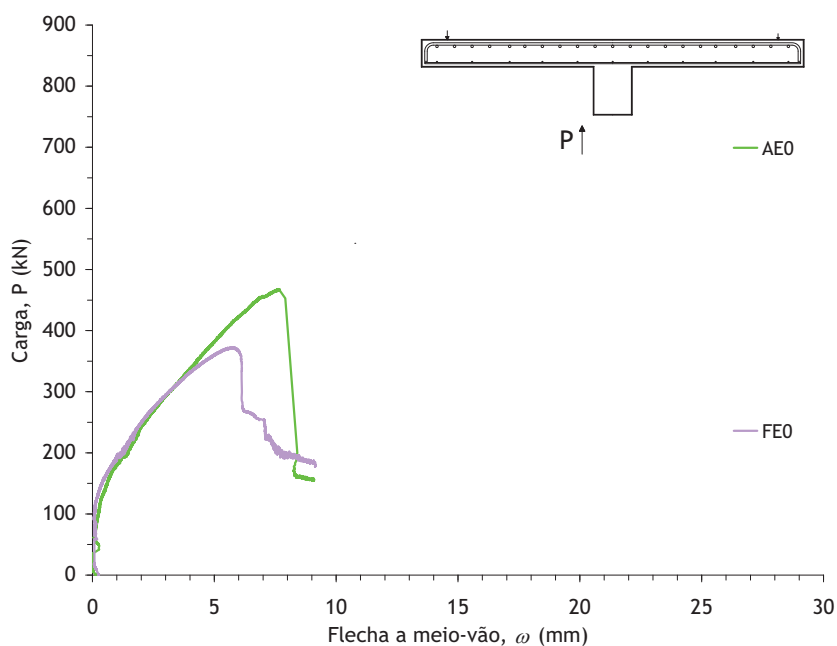


Gráfico VI-10 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes AE0 e FE0.

As cargas máximas atingidas foram de 468,3 kN na laje AE0 e de 372,9 kN (– 20,4 %) em FE0, associadas às flechas a meio-vão de 7,62 mm e 5,80 mm, respectivamente (Gráfico

VI-10). A laje FE0 mostrou, como se esperava, uma maior capacidade de retenção da carga pós-pico de aproximadamente 50 % da carga máxima, superior à observada na laje AE0 (retenção de 33 %).

A análise do Gráfico VI-11 e do Gráfico VI-12 permite comprovar o carácter não simétrico das deformadas. A sua comparação permite ainda verificar que para idênticos níveis de carga os valores das flechas são semelhantes, reflectindo a proximidade dos módulos de elasticidade embora a resistência à compressão do betão da laje FE0 seja cerca de metade da correspondente da laje AE0 (ver Quadro V-4).

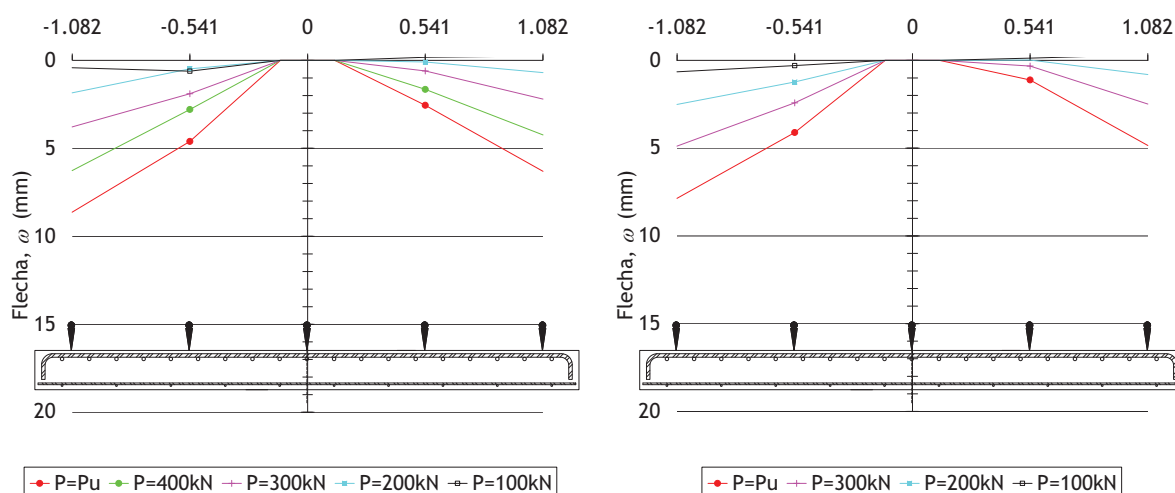


Gráfico VI-11 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AE0. Gráfico VI-12 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje FE0.

• Lajes AEA1 e AEA2 com armadura transversal

Até ao início da fendilhação, para a carga de 150 kN em ambas as lajes, a resposta estrutural é semelhante, após o que se observa uma maior deformabilidade da laje AEA2 que poderá ser justificada pela sua menor resistência à compressão (– 28 %), como se mostra no Gráfico VI-13. O comportamento após a carga máxima foi mais dúctil do que na correspondente laje sem armadura transversal (AE0) registando-se uma capacidade residual média de 70 %.

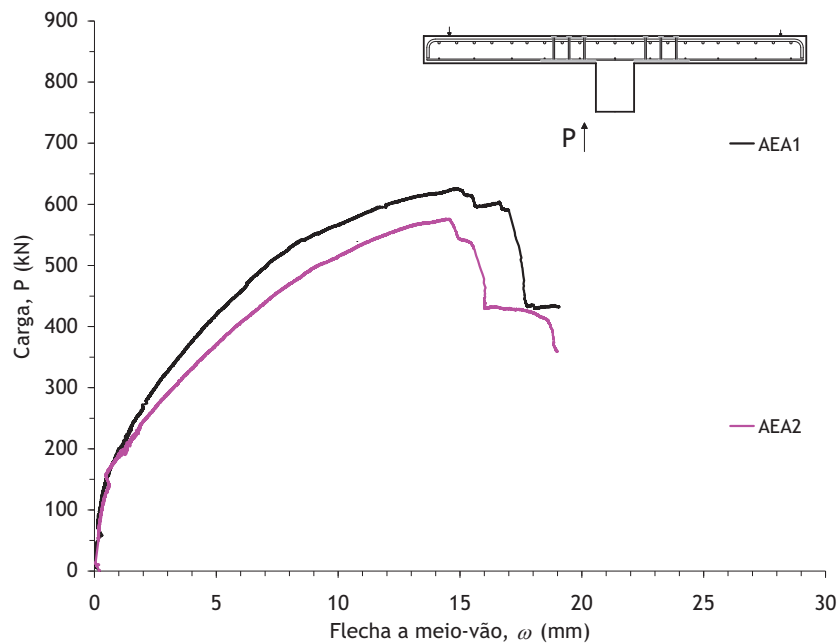


Gráfico VI-13 - Relações carga × flecha a meio-vão - lajes AEA1 e AEA2.

As cargas máximas foram de 624,4 kN na laje AEA1 e de 576,7 kN (– 7,9 %) na laje AEA2, em correspondência com a flecha a meio-vão de 14,73 mm e de 14,54 mm (– 1,3 %), respectivamente.

O Gráfico VI-14 e o Gráfico VI-15 mostram, respectivamente, as deformadas das lajes AEA1 e AEA2 para diferentes níveis do carregamento. É visível a maior capacidade de deformação em rotura destas lajes relativamente à laje AE0 (Gráfico VI-11).

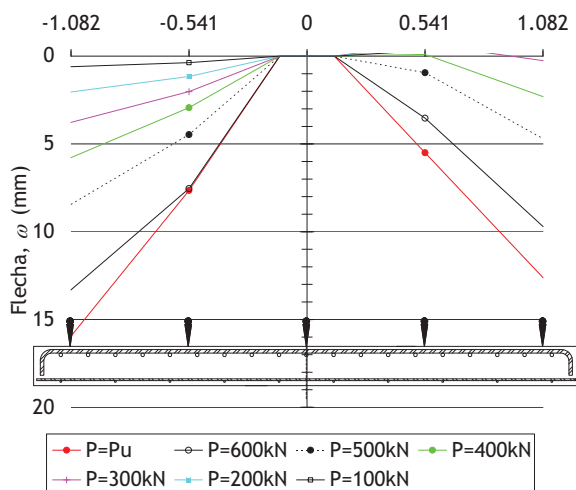


Gráfico VI-14 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AEA1.

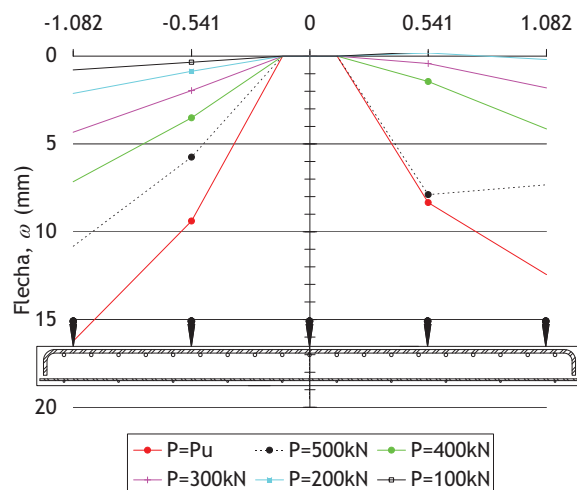


Gráfico VI-15 - Flechas para diferentes níveis do carregamento - laje AEA2.

VI.2.3 Extensões da superfície do betão

Os gráficos seguintes apresentam a evolução das extensões na superfície do betão, para as direcções tangencial e radial, nas faces superior - positivas e inferior - negativas, nas secções instrumentadas, em função da carga P aplicada.

As extensões médias de tracção referem-se à extensão do betão acrescida das deformações associadas à abertura das fendas.

- **PUNÇOAMENTO CENTRADO**
- **Lajes P, AC0 e FC0 sem armadura transversal**

As extensões de tracção na direcção tangencial são inicialmente muito reduzidas evidenciando um crescimento significativo a partir da carga que corresponde ao início da fissuração visível (Gráfico VI-16 a Gráfico VI-18).

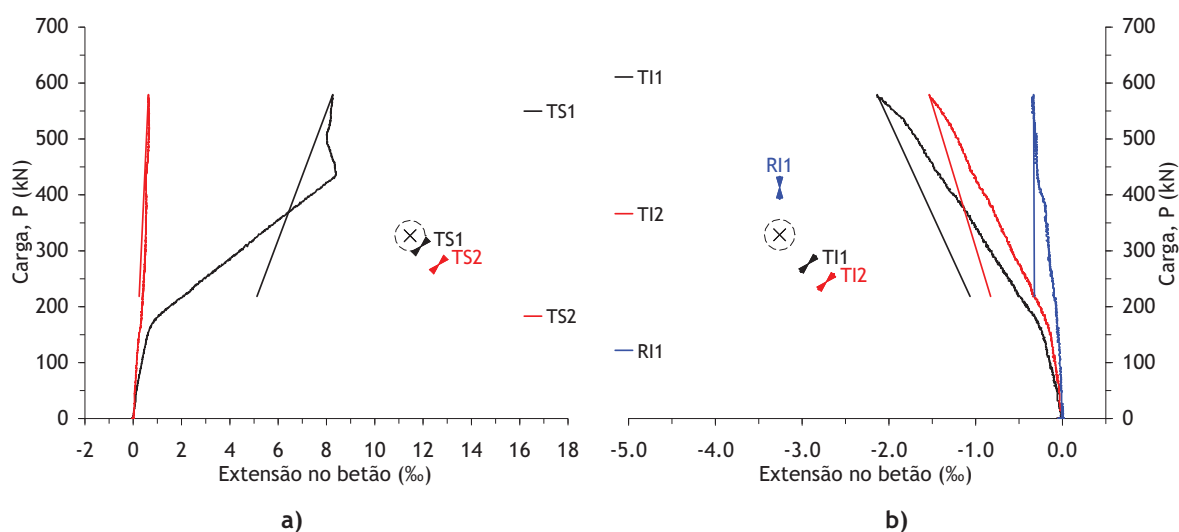


Gráfico VI-16 - Evolução das extensões no betão - Laje P: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

As extensões de compressão na direcção tangencial são nitidamente maiores do que na direcção radial e aumentam com a proximidade à face do pilar. Os valores absolutos máximos medidos foram de 2,1 ‰, 2,0 ‰ e 1,6 ‰ nas lajes P, AC0 e FC0, respectivamente.

Observa-se ainda uma diminuição do valor absoluto das extensões radiais de compressão (excepto na laje P) próximo da carga de rotura traduzindo aí uma descompressão do betão originada pela reorientação (diminuição da inclinação) das bielas comprimidas em direcção ao pilar. Efeito semelhante foi registado nos ensaios de Hallgren (Hallgren, 1996).

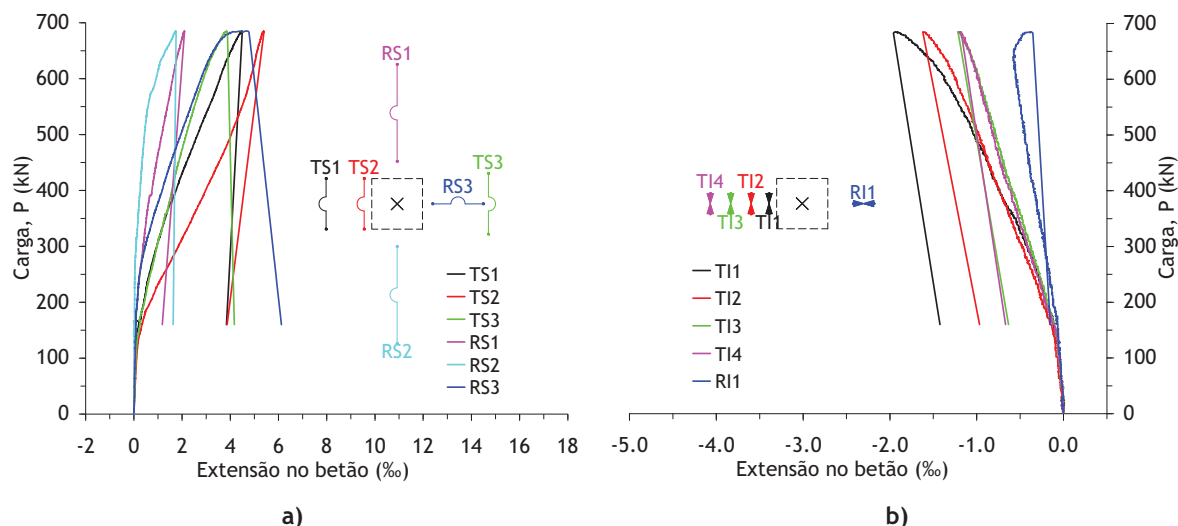


Gráfico VI-17 - Evolução das extensões no betão - Laje AC0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

O valor das extensões médias de tracção para a mesma carga em pontos correspondentes das lajes com e sem fibras (Gráfico VI-17 e Gráfico VI-18) é muito semelhante, contrariamente ao que seria de esperar. A diminuição das extensões por efeito de “costura” das fendas terá sido de certo modo compensada pela menor resistência do betão da laje FC0. Note-se, ainda, que a percentagem de fibras é relativamente reduzida (0,5 % do volume de betão)ⁱⁱ.

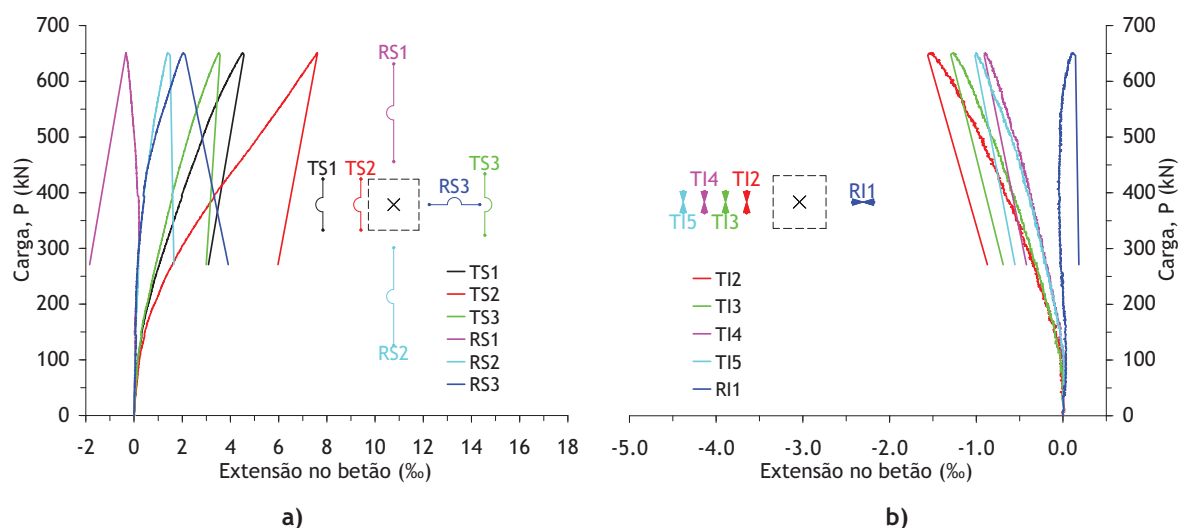


Gráfico VI-18 - Evolução das extensões no betão - Laje FC0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

• Lajes ACA1 e ACA2 com armadura transversal

A evolução das extensões no betão foi semelhante à das lajes sem armadura transversal

ii - O baixo teor de fibras de aço tem, portanto, pouca influência nas propriedades do material antes da fendação. De facto, E_c , f_c e f_{ct} são propriedades da matriz cimentícia e não são afectados pela presença das fibras de aço

registando-se, no entanto, um aumento das extensões na fase de rotura. Os valores absolutos máximos das extensões de compressão medidos na direcção tangencial foram de 5,7 ‰ e 2,5 ‰ nas lajes ACA1 (Gráfico VI-19) e ACA2 (Gráfico VI-20), respectivamente.

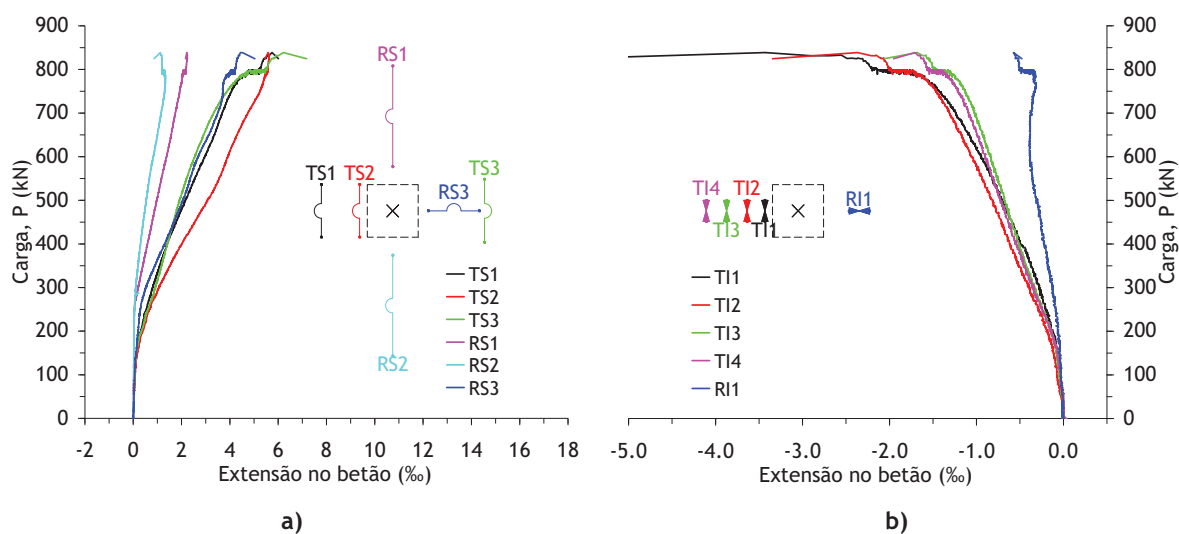


Gráfico VI-19 - Evolução das extensões no betão - Laje ACA1: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

Note-se que a carga máxima poderá não corresponder à capacidade real da laje dada a avaria registada no actuador que não permitiu um crescimento superior da carga.

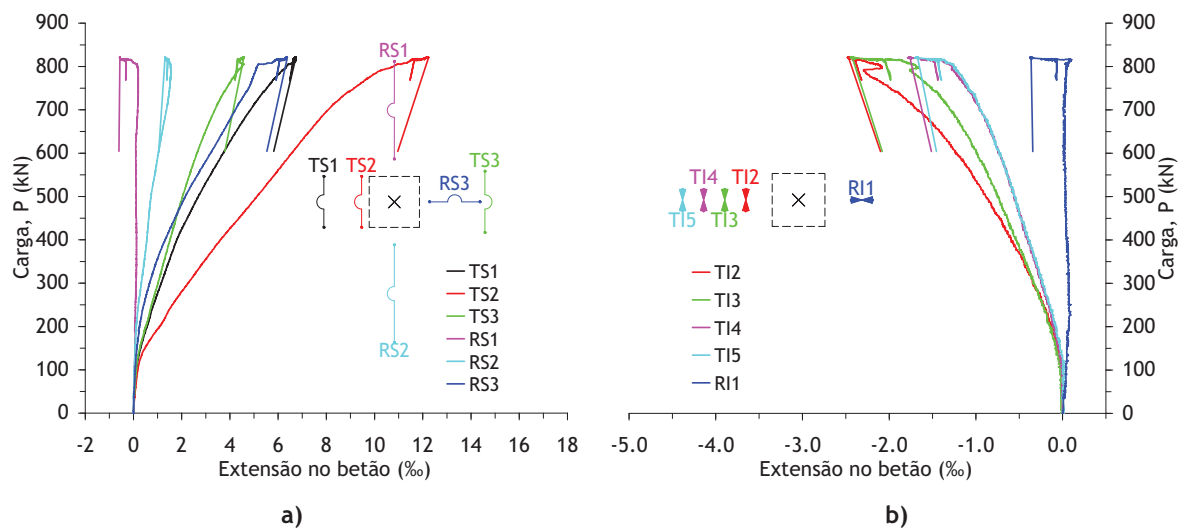


Gráfico VI-20 - Evolução das extensões no betão - Laje ACA2: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

• PUNÇAMENTO EXCÊNTRICO

• Lajes sem armadura transversal - lajes AE0 e FE0

No ensaio da laje FE0 (Gráfico VI-22) os valores absolutos máximos medidos das extensões de compressão na direcção tangencial (FE0: 2,3 ‰) são bastante superiores aos observados na laje AE0 (Gráfico VI-21) de betão normal (AE0: 1,2 ‰), seguindo uma tendência inversa à registada no caso do punçoamento centrado.

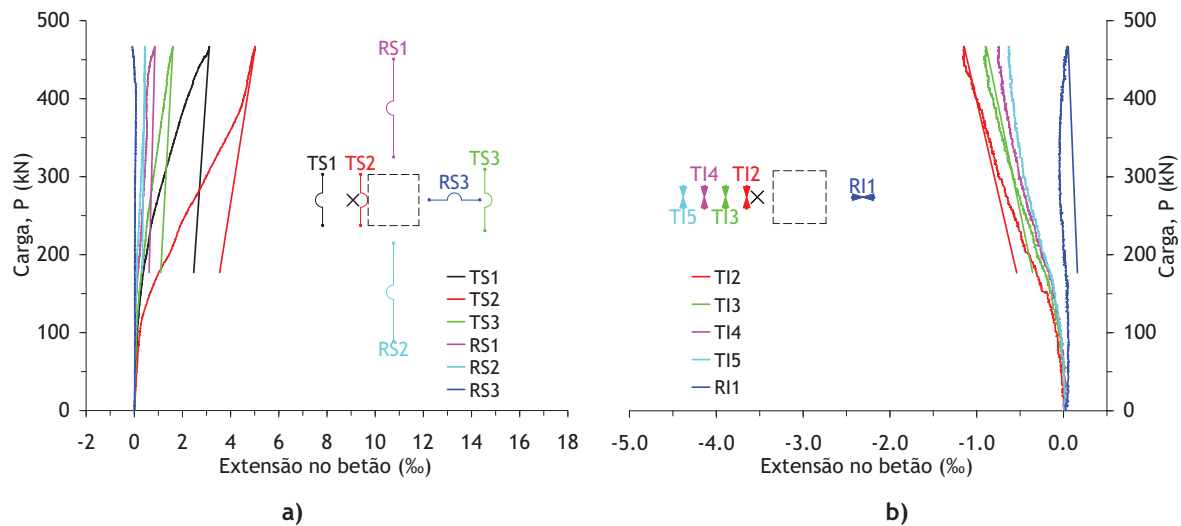


Gráfico VI-21 - Evolução das extensões no betão - Laje AE0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

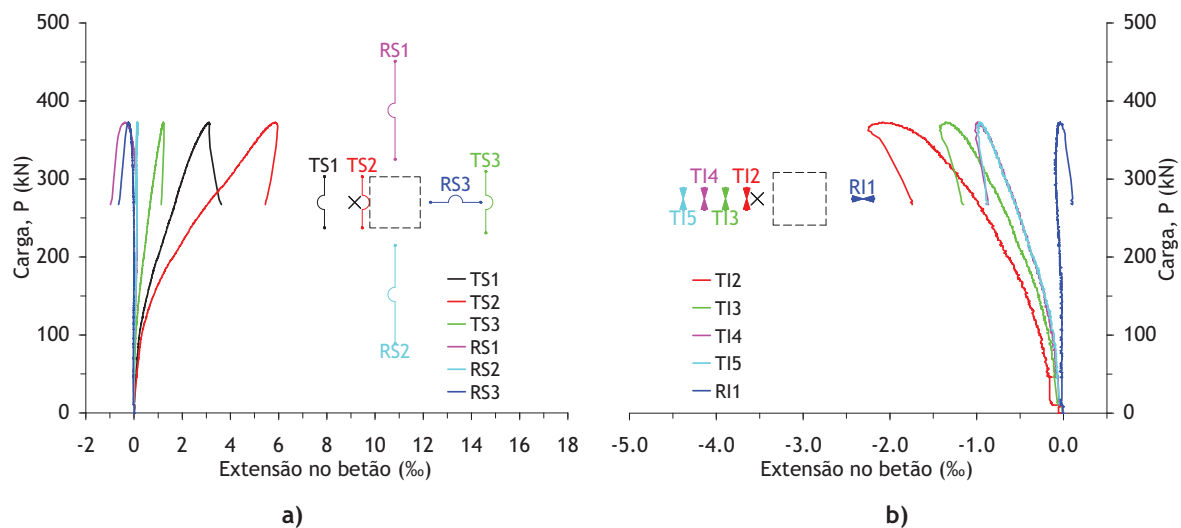


Gráfico VI-22 - Evolução das extensões no betão - Laje FE0: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

- Lajes AEA1 e AEA2 com armadura transversal**

A inclusão da armadura transversal possibilitou um aumento significativo das extensões de compressão: os valores máximos medidos na direcção tangencial foram de 2,9 ‰ e 2,6 ‰ nas lajes AEA1 (Gráfico VI-23) e AEA2 (Gráfico VI-24), respectivamente.

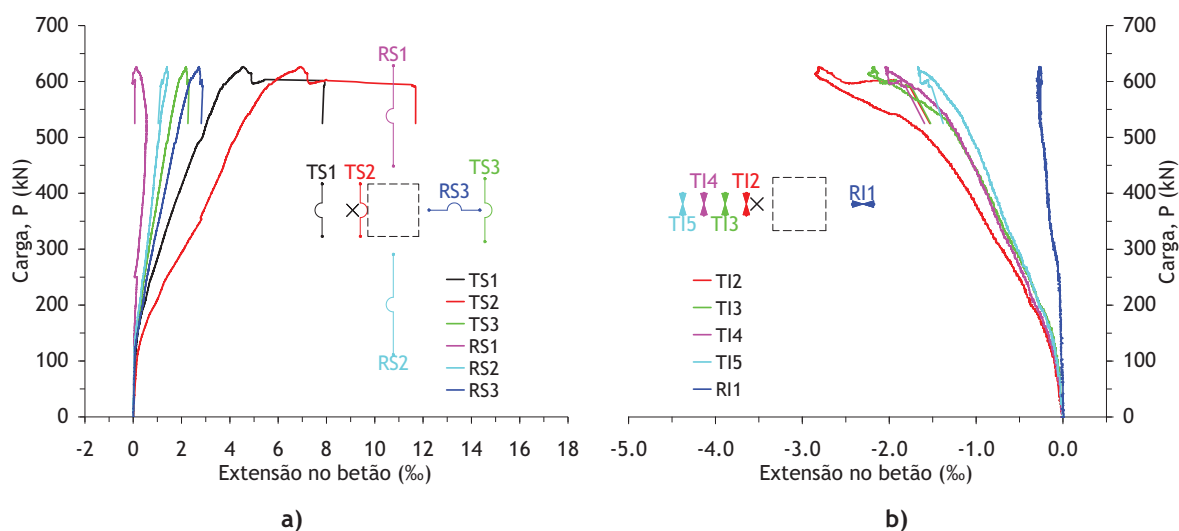


Gráfico VI-23 - Evolução das extensões no betão - Laje AEA1: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

Estes valores correspondem ao transdutor (TI2) mais próximo do pilar na zona contida entre os dois primeiros perímetros da armadura transversal.

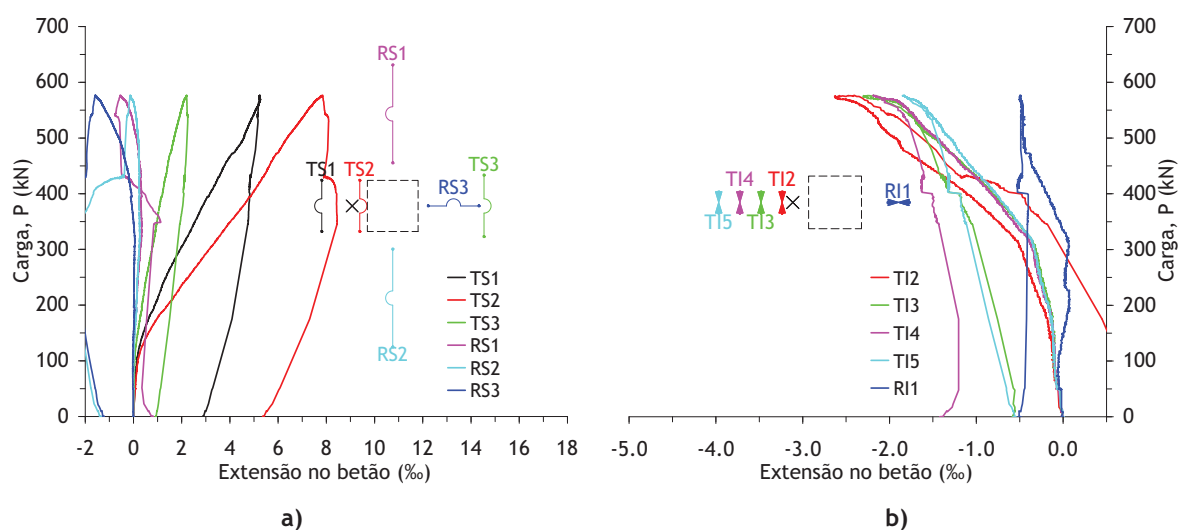


Gráfico VI-24 - Evolução das extensões no betão - Laje AEA2: a) Face superior (tracção); b) Face inferior (compressão).

• ANÁLISE COMPARATIVA

O Gráfico VI-25 apresenta as extensões de compressão tangenciais (negrito) e radiais (fino) medidas a 0,125 m e 0,175 m da face do pilar, respectivamente, para as lajes indicadas.

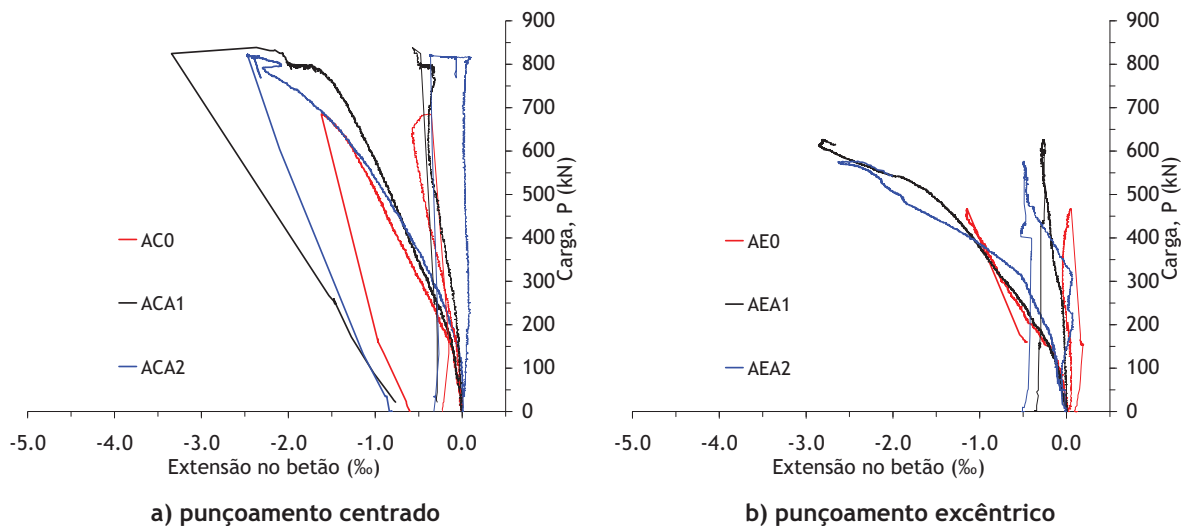


Gráfico VI-25 - Evolução das extensões de compressão no betão.

Pode verificar-se que as extensões máximas ocorrem nas lajes com armadura transversal tanto sob punçoamento centrado como sob punçoamento excêntrico (flexão/corte). A presença da armadura transversal determina um aumento das extensões tangenciais que, para a carga última, é de 80 % para punçoamento centrado e de 138 % no caso de punçoamento excêntrico. As extensões radiais, embora de valores muito reduzidos apresentam tendência semelhante.

VI.2.4 Perfis de extensões da superfície do betão na direcção tangencial

A disposição dos extensómetros de massa na face inferior TI1, TI2, TI3, TI4 e TI5 (ver Figura V-18) permite traçar perfis transversais das extensões na direcção tangencial. Assim, elaboraram-se os gráficos seguintes (com excepção da laje P), onde a curva a encarnado representa a distribuição das extensões correspondente à carga última.

- PUNÇOAMENTO CENTRADO - FACE INFERIOR
- Lajes AC0 e FC0 sem armadura transversal

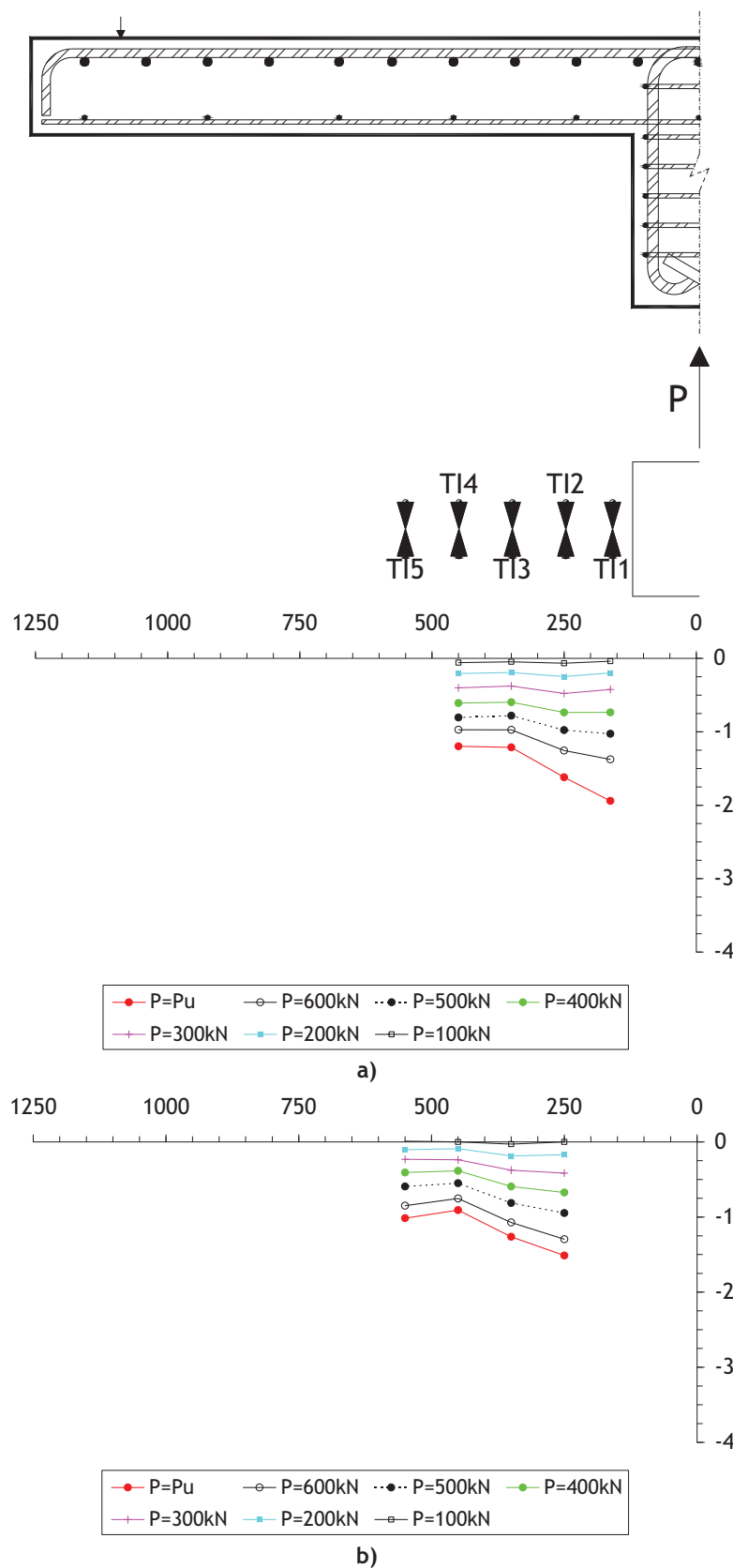


Gráfico VI-26 - Extensões de compressão na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AC0 e b) FC0.

• Lajes ACA1 e ACA2 com armadura transversal

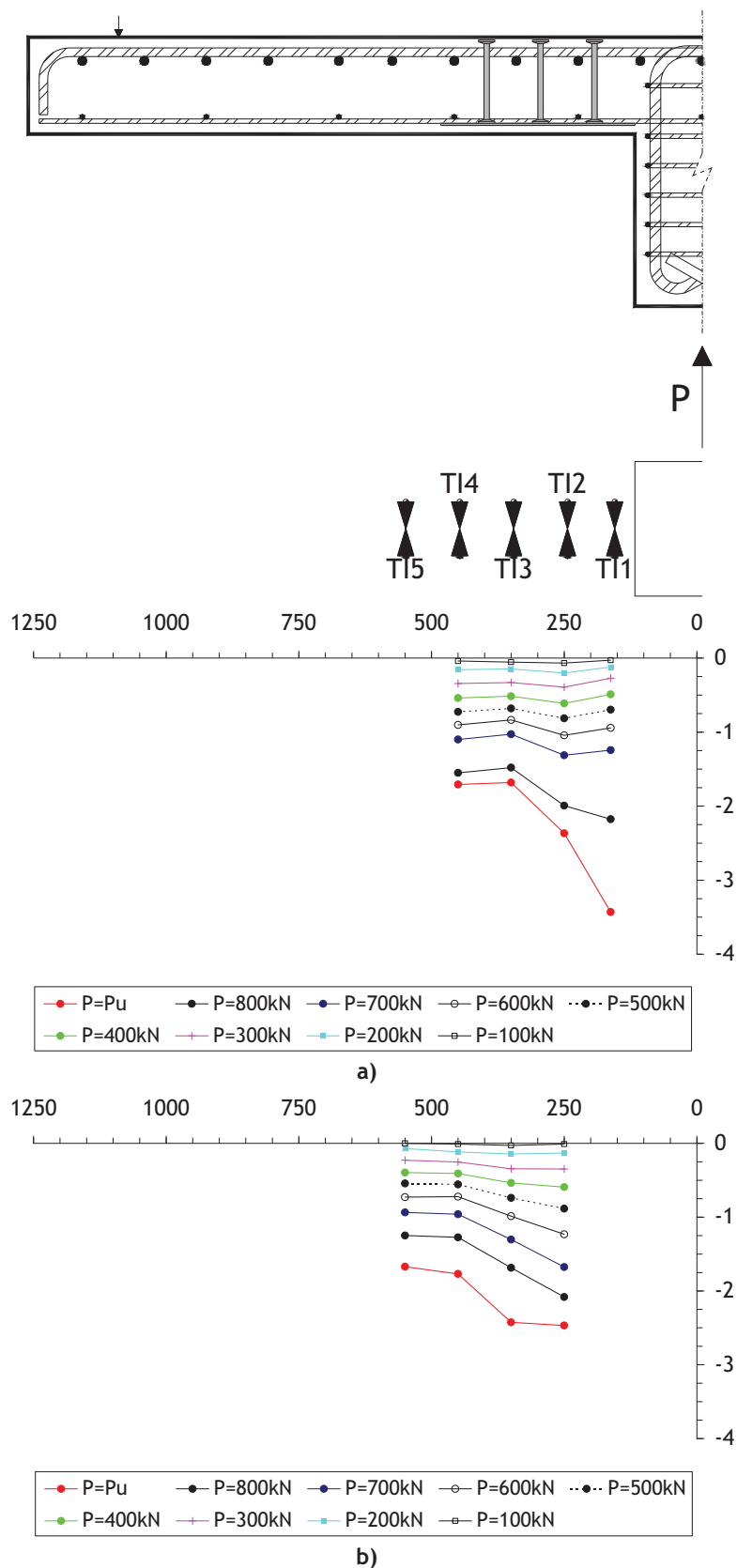


Gráfico VI-27 - Extensões de compressão na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) ACA1 e b) ACA2.

- PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO - FACE INFERIOR

- Lajes AE0 e FE0 sem armadura transversal

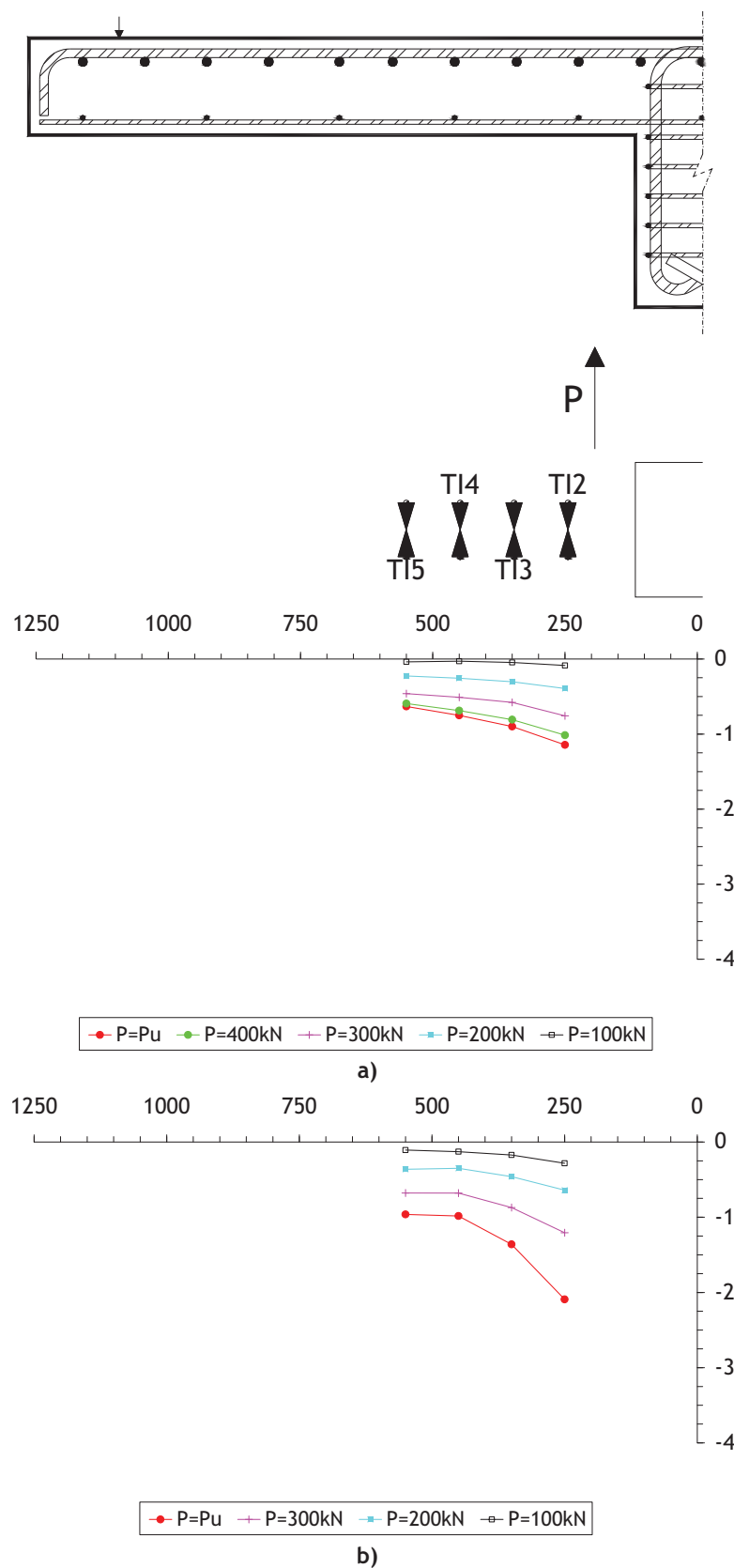


Gráfico VI-28 - Extensões de compressão na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AE0 e b) FE0.

• Lajes AEA1 e AEA2 com armadura transversal

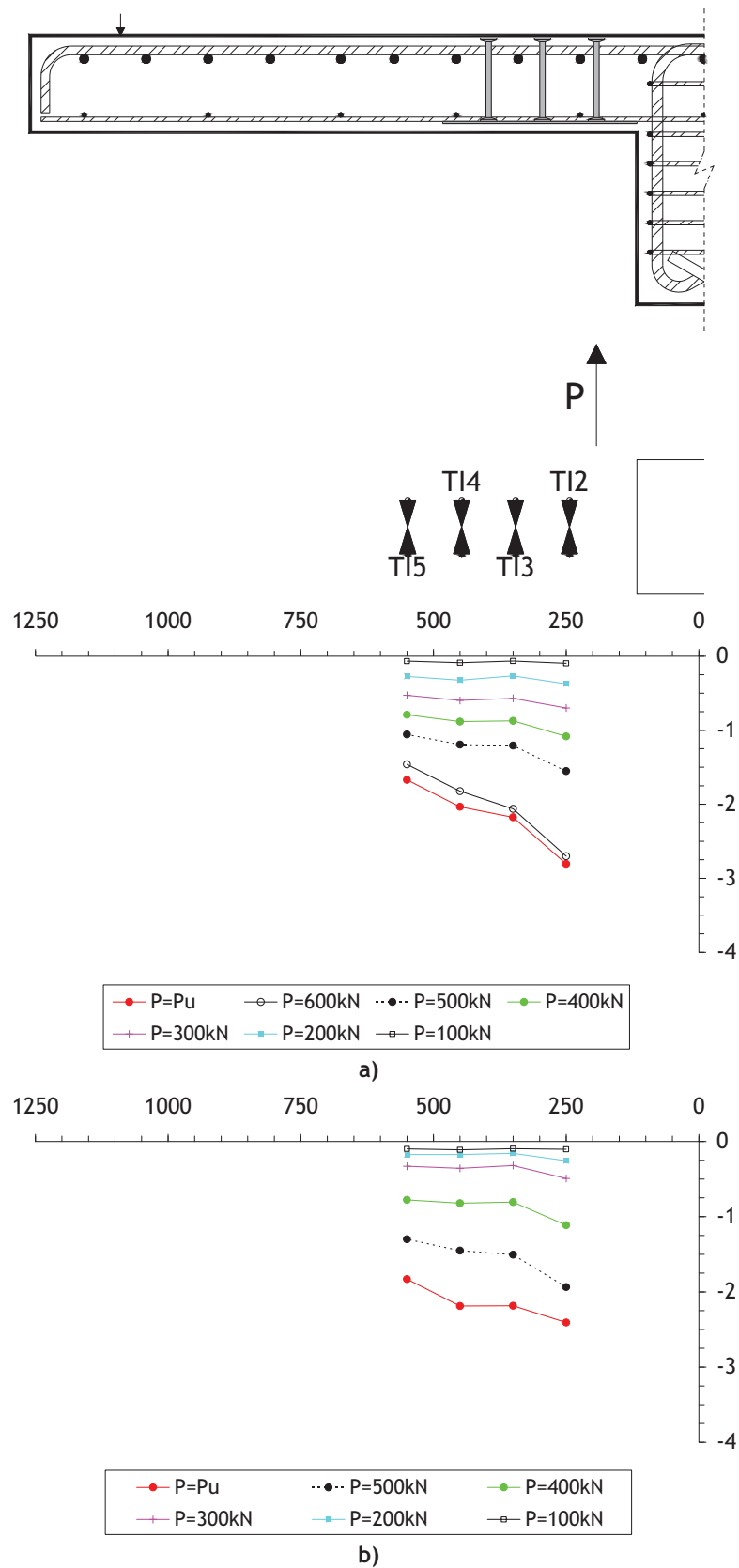


Gráfico VI-29 - Extensões de compressão na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face inferior) - lajes: a) AEA1 e b) AEA2.

Da observação dos gráficos anteriores verifica-se que as extensões tangenciais de compressão decrescem com o aumento da distância à face do pilar, estabilizando a partir do perímetro situado a aproximadamente $2,5d$ (menos visível no caso dos ensaios excêntricos com armadura transversal, AEA1 e AEA2).

No caso do punçoamento centrado, os valores das extensões estabilizadas na carga máxima são de 1,2 ‰ e 1,7 ‰ (valores médios) para as lajes sem e com armadura transversal, respectivamente.

As extensões médias de tracção no betão (face superior) são muito dependentes da localização das fendas relativamente aos transdutores pelo que os perfis transversais correspondentes são apresentados no Anexo A.6.

VI.2.5 Extensões da armadura longitudinal

As leituras dos extensómetros eléctricos colados na superfície dos varões longitudinais, apenas na laje P, permitem observar o desenvolvimento das extensões em função da carga aplicada. No Gráfico VI-30 apresenta-se a sua evolução para as armaduras com a maior e a menor altura útil.

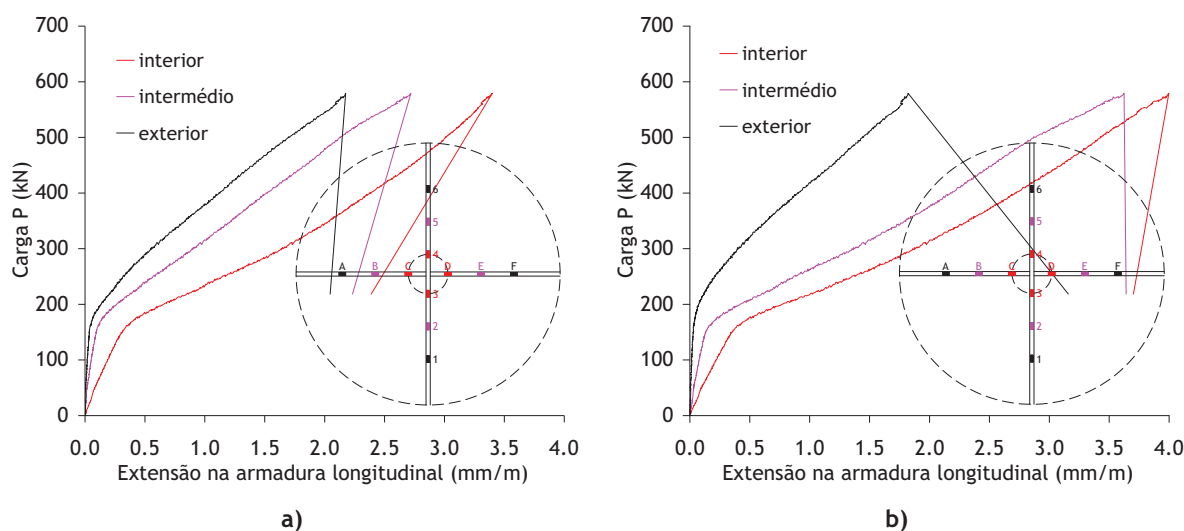


Gráfico VI-30 - Evolução das extensões na armadura longitudinal - Laje P: a) maior altura útil; b) menor altura útil.

Os valores médios dessas extensões podem ser analisados no Gráfico VI-31. As curvas designadas por interior, intermédio e exterior correspondem respectivamente, à média das leituras registadas em cada grupo de 4 extensómetros, equidistantes do centro da laje, 3,C,4 e D; 2,B,5 e E; 1,A,6 e F (ver Figura V-20, pág. 136).

A capacidade de retenção das tensões de tracção do betão entre fendas (*tension stiff-*

ning) é visível no andamento côncavo da resposta da armadura após o início da fendilhação (curvas a encarnado no Gráfico VI-30 e Gráfico VI-31), também registado por Hallgren (Hallgren, 1996).

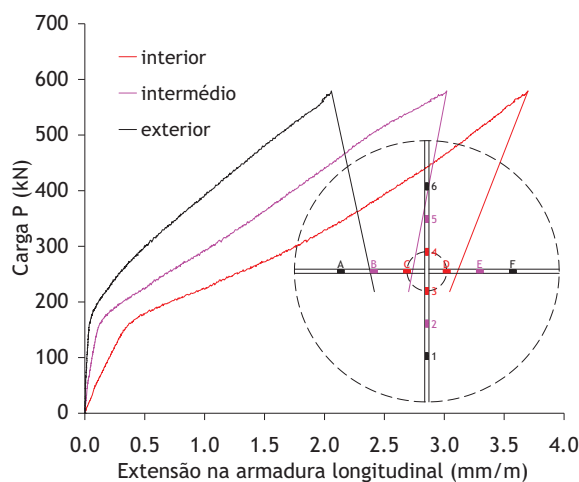


Gráfico VI-31 - Extensões na armadura longitudinal (média das leituras) - laje P.

Pode observar-se uma diminuição das extensões com o aumento da distância ao centro da laje, muito embora as extensões atingidas na rotura ultrapassem o correspondente valor de cedência do aço. Este comportamento é justificado pela deformação característica da figura de rotura, na qual os ângulos formados pelos diedros limitados pelas linhas de rotura vão aumentando progressivamente da periferia para o centro da laje.

No Gráfico VI-32 apresenta-se o perfil transversal das extensões dos dois varões centrais nas direcções de maior e menor altura útil, para diferentes níveis de carga. Como se pode observar, as extensões variam de forma aproximadamente linear em função da distância ao centro da laje. Não foi possível obter medições com o extensómetro E para cargas próximas da rotura, provavelmente devido a danos introduzidos por fendilhação local.

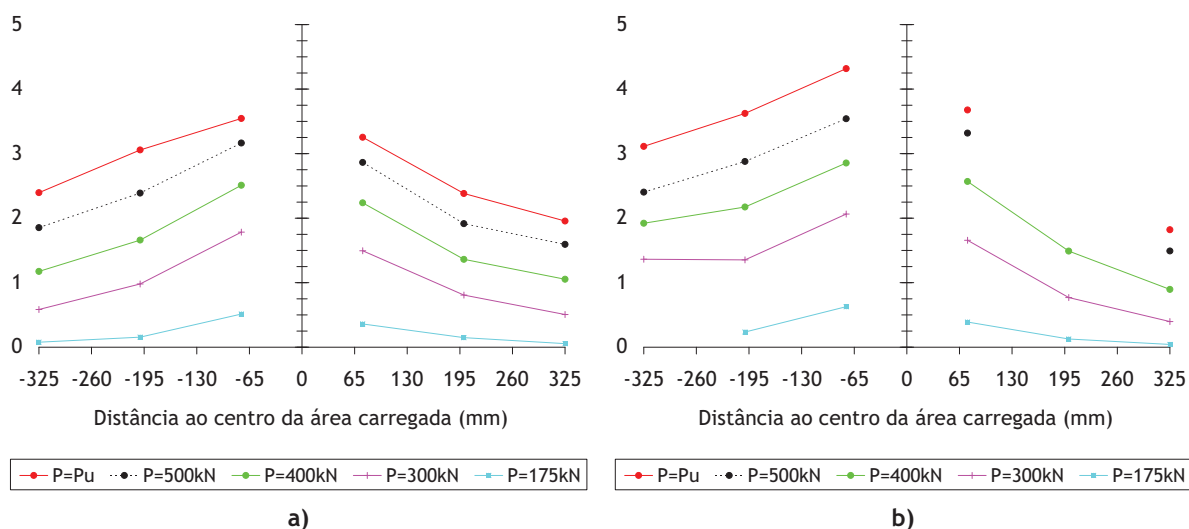


Gráfico VI-32 - Evolução das extensões (%) na armadura longitudinal para diferentes níveis do carregamento - laje P: a) maior altura útil; b) menor altura útil.

Estes gráficos permitem também confirmar a simetria da solicitação da armadura longitudinal. As maiores deformações destas armaduras estão associadas aos varões orientados segundo a menor altura útil, o que determinou a compensação da percentagem de armadura (referida em V.2), orientada nesta direcção, nos restantes modelos de laje, para que o momento resistente fosse aproximadamente igual nas duas direcções.

VI.2.6 Extensões da armadura transversal

Na resposta da armadura transversal podem identificar-se três fases distintas mais ou menos evidentes em todos os ensaios.

A primeira fase (0-500 kN nos ensaios centrados e 0-150 kN nos ensaios excêntricos) é caracterizada por deformações reduzidas na armadura transversal. Segundo Regan (CEB-FIP, 1999a), só a cerca de 2/3 da carga de punçoamento se dá um claro aumento da extensão perpendicular ao plano médio da laje, mobilizando as armaduras transversais a partir de uma secção distante aproximadamente 0,5*d* da face do pilar, indicando a formação das fendas inclinadas. Tal é comprovado especialmente nos presentes ensaios centrados.

A segunda fase desenvolve-se até cerca de $\frac{3}{4}$ da carga máxima. A fissuração interna progride diagonalmente, mobilizando a armadura transversal. Na última fase, mais pronunciada no ensaio excêntrico, a fissuração evolui atingindo a zona sem armadura transversal, com eventual plastificação desta, até à rotura da laje.

Os gráficos seguintes mostram a deformação na armadura de punçoamento medida por intermédio dos extensómetros cuja localização pode ser vista em V.6.3.

• PUNÇOAMENTO CENTRADO

O Gráfico VI-33 (laje ACA1) e o Gráfico VI-34 (laje ACA2) mostram a relação entre a carga aplicada e as extensões medidas nos pernos instrumentados. O valor máximo atingido da extensão foi de 2,5 ‰ a que corresponde, aproximadamente, a tensão de 500 MPa. Este valor é contudo superior aos correspondentes valores máximos indicados pelas normas a observar no projecto (regras de cálculo) em diversos regulamentos (CEB-FIP, 1993; CEN, 2001), pelo que se poderão considerar conservadoras nestes casos particulares (ver subcapítulo III.6.4, pág. 63).

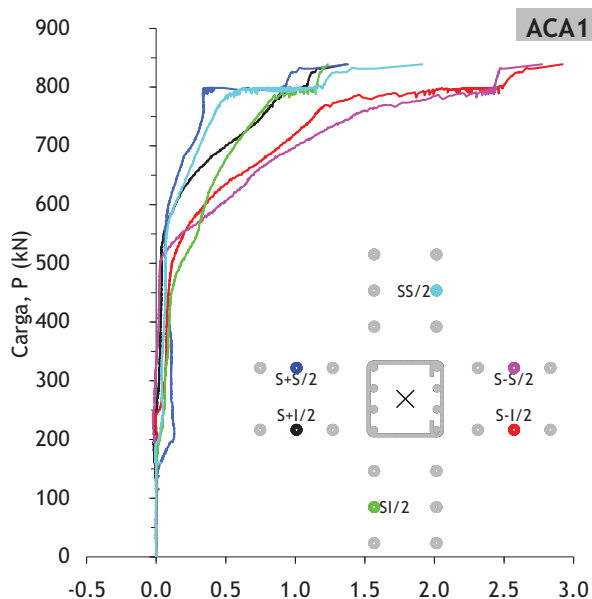


Gráfico VI-33 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje ACA1.

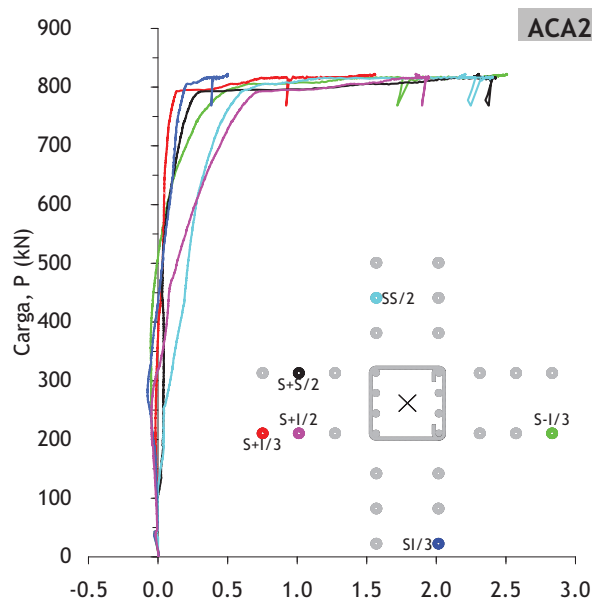


Gráfico VI-34 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje ACA2.

Nestas lajes não se verificou a cedência da armadura de punçoamento. É, também aqui, visível o já referido estacionamento da aplicação da carga a cerca de 800 kN. Os pernos só apresentam deformação mensurável para níveis de carga superiores a cerca de $\frac{3}{4}$ da carga última, o que pode indicar que só então a fissuração atingiu a secção instrumentada (ver Figura V-22). Efectivamente, o posterior corte transversal da laje (ver Figura VI-6, pág. 170) comprova a intersecção de uma fenda diagonal a meia altura do 2.º perímetro da armadura de punçoamento.

• PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO

Para as lajes submetidas a carregamento excêntrico é possível observar a resposta diferenciada dos diversos pernos da armadura transversal, consoante se encontrem na zona de aplicação da carga ou na região oposta. O Gráfico VI-35 (laje AEA1) e o Gráfico VI-36 (laje AEA2) ilustram a relação entre a carga aplicada e as extensões medidas nos pernos.

No caso da laje AEA1 (Gráfico VI-35), os extensómetros (S-I/2) e (S-S/2) colocados no lado oposto ao da carga não acusaram qualquer deformação da armadura transversal até níveis de carga muito próximos da rotura. Os sensores (S+I/2) e (S+S/2), colocados do lado da carga, apenas foram mobilizados para carga superiores a cerca de $\frac{5}{6}$ da carga última, tendo claramente atingido o patamar de cedência. Observa-se uma diminuição da extensão medida no sensor (S+I/2) perto da carga última, possivelmente originada pela abertura de uma nova fenda com consequente fechamento da anterior (ver Figura VI-11). As extensões medidas na direcção perpendicular à da excentricidade, (SS/2) e (SI/2), são reduzidas. Resultados semelhantes foram obtidos por Hallgren (Hallgren, 1996).

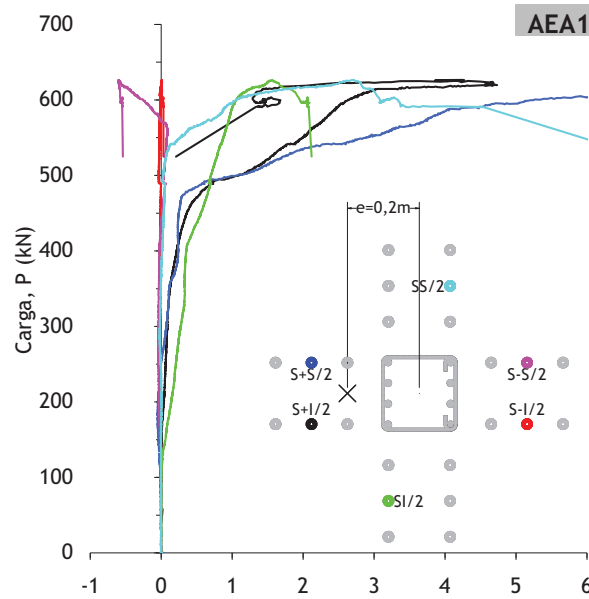


Gráfico VI-35 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje AEA1.

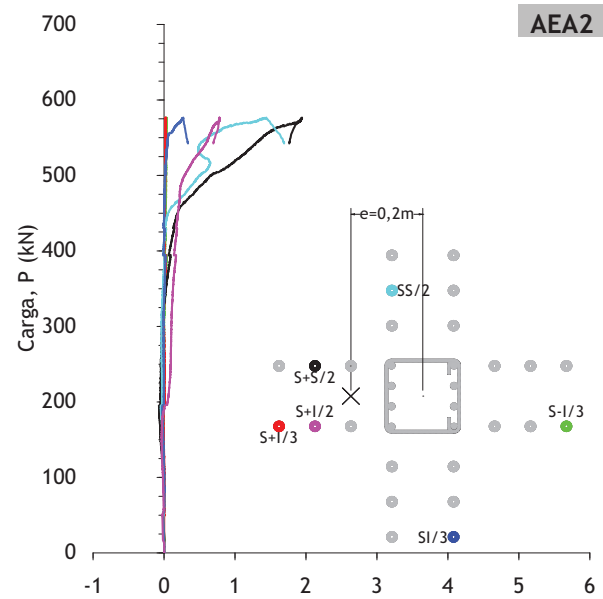


Gráfico VI-36 - Extensões (%) nas armaduras transversais - laje AEA2.

Na laje AEA2 (Gráfico VI-36), os sensores colocados do lado da excentricidade, (S+S/2) e (S-I/2), são somente solicitados para carga superiores a cerca de 2/3 da carga última. O sensor (S-I/3) terá, provavelmente, sido danificado na montagem ou durante a betonagem. As leituras dos sensores colocados na direcção paralela ao eixo do momento flector, (SI/3) e (SS/2) mostram também eles reduzida solicitação.

VI.2.7 Padrões de fissuração e mecanismos de rotura

A evolução da fissuração dos modelos segue, genericamente, a sequência que se indica:

- Fase elástica em estado não fissurado;
- Aparecimento de fendas na direcção das armaduras longitudinais, inicialmente próximo da zona carregada propagando-se depois a todo o comprimento da laje;
- Desenvolvimento das fendas diagonais, mais rarefeitas junto aos cantos, próximas das correspondentes às linhas de rotura de uma laje apoiada num contorno circular;
- A partir de uma certa carga não mais se observa a formação de novas fendas. A abertura das fendas existentes aumenta;
- Ocorrência de rotura de forma brusca, sem deformação significativa e sem pré-aviso, formando-se o cone de punçoamento.

As figuras seguintes documentam os padrões de fissuração registados nas faces superiores dos diferentes modelos, fotografados após o ensaio. Apresentam-se, também, as secções

obtidas por corte transversal de todos os modelos, com exceção das lajes ACA2 e AEA2. Para estas últimas veja-se o Anexo A.5.1.

Os padrões de fissuração evidenciam que o espaçamento e a posição das fissuras radiais foram determinados pelos correspondentes às armaduras longitudinais (ver Anexo A.5.2). Igual constatação é feita por diversos autores (Favre *et al.*, 1997; Ruiz, 2003).

- **PUNÇOAMENTO CENTRADO**

- **Laje P sem armadura transversal**

A Figura VI-1 ilustra a evolução da fissuração para diferentes níveis do carregamento na laje P.

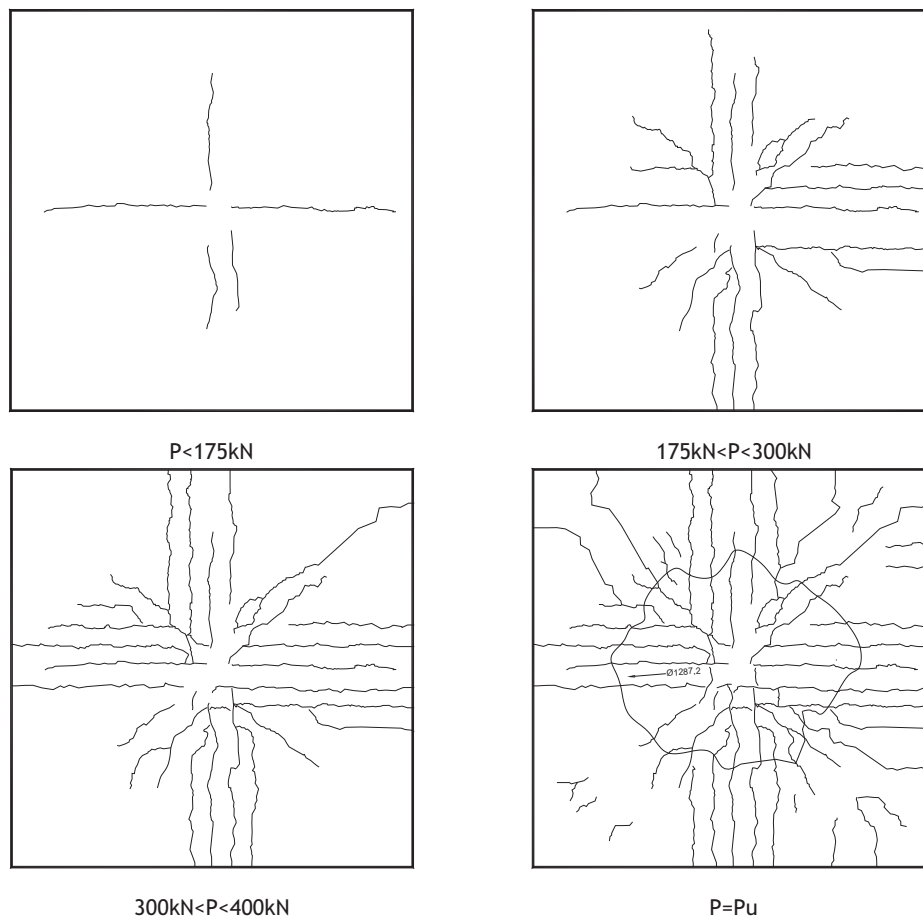


Figura VI-1 - Evolução da fissuração para diferentes níveis do carregamento - laje P.

No instante da rotura, simultaneamente com a penetração da placa de aplicação da carga no corpo da laje (Figura VI-2a), observou-se a formação brusca de uma fenda aproximadamente circular na face superior, bem como o empolamento e parcial destaque da zona de betão circunscrito (Figura VI-2b), definindo a superfície de rotura aparente a cerca de $3d$ do contorno da superfície de aplicação da carga.



Figura VI-2 - Vista da laje P após o ensaio: a) face inferior; b) face superior.

Pode reconhecer-se nos cortes transversais que a manifestação da rotura através da fissura circular (em planta) não representa necessariamente a rotura por punçoamento. De facto, a fenda caminha ao longo da armadura longitudinal e manifesta-se a uma maior distância do centro da laje, como se documenta na Figura VI-3. O mesmo se pode observar nas restantes lajes ensaiadas.

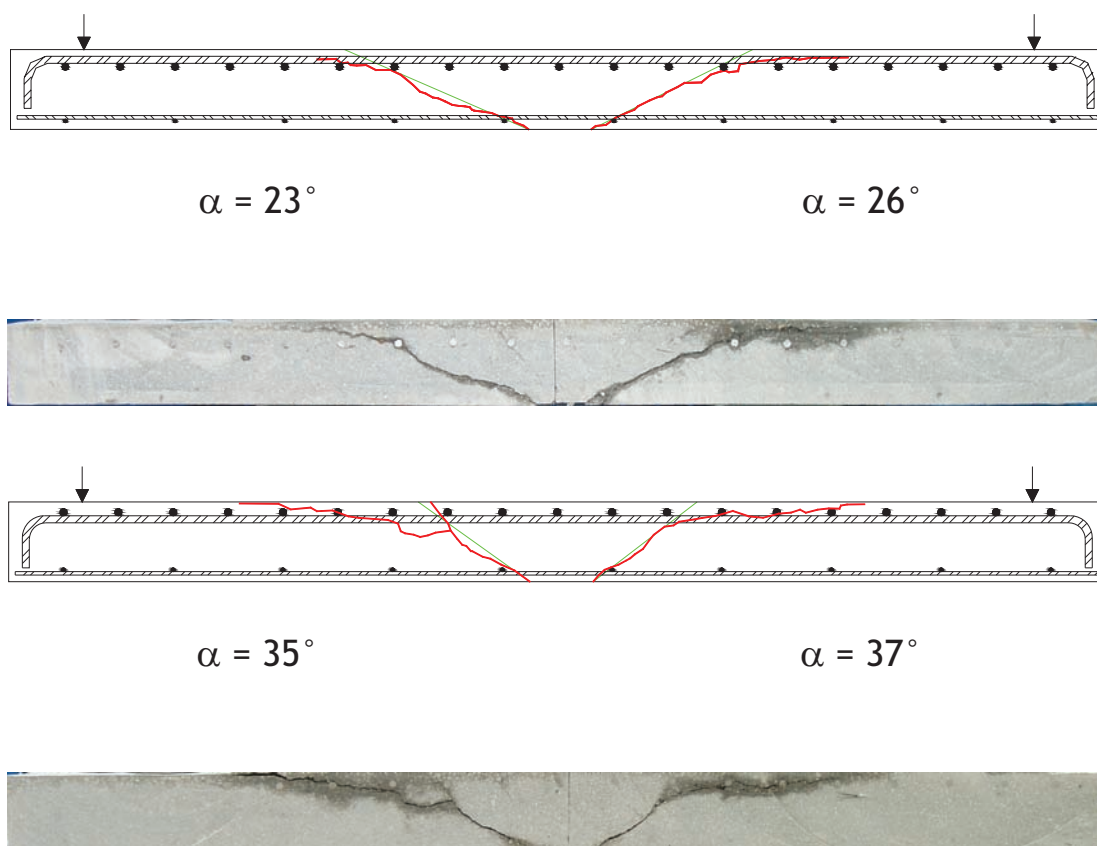


Figura VI-3 - Cortes transversais e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje P.

- Laje AC0 sem armadura transversal

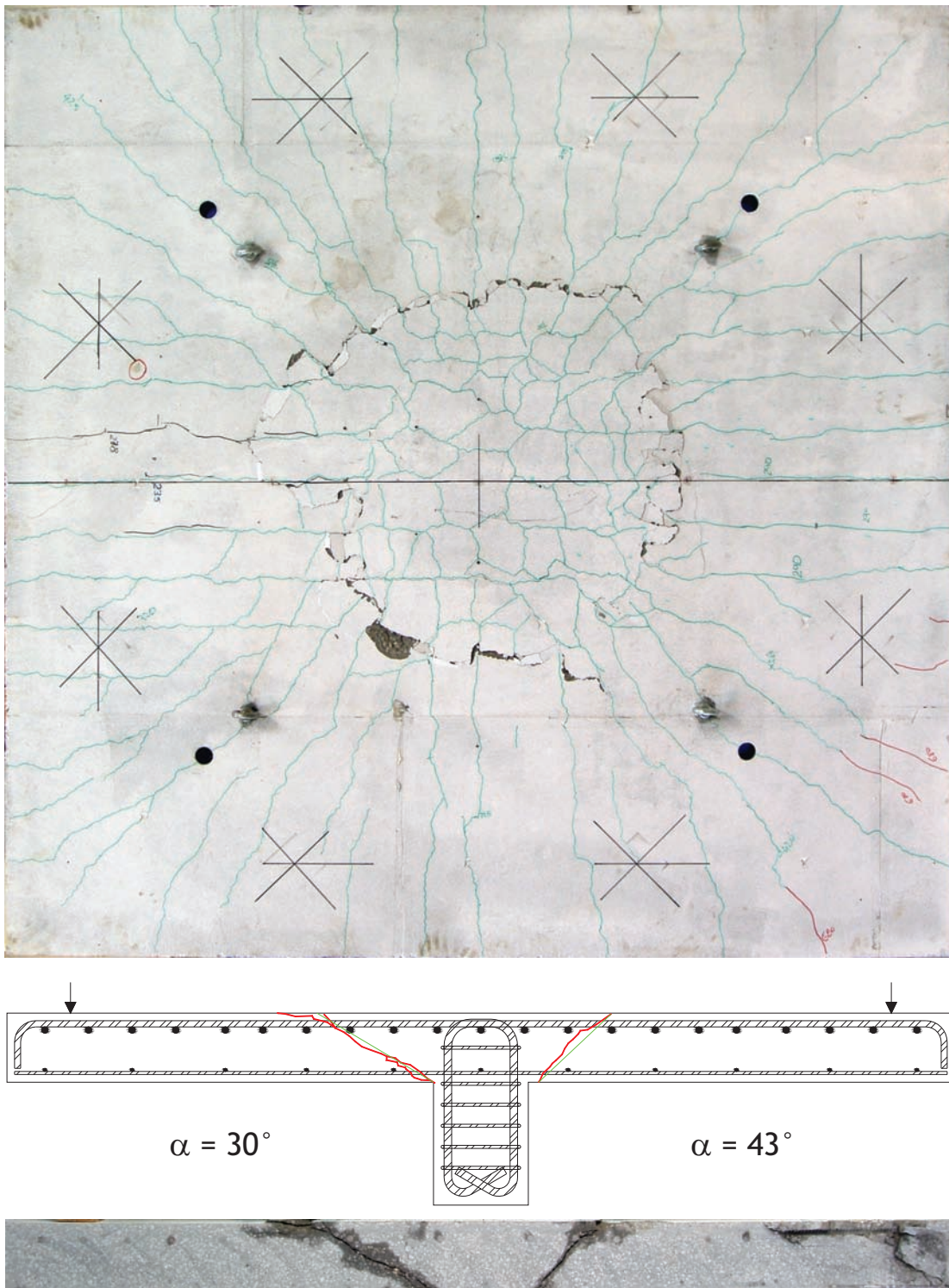


Figura VI-4 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punção - laje AC0.

É marcada a influência dos cantos da laje, traduzida por uma clara rarefacção das fendas (Figura VI-1). Efectivamente, a presença dos cantos introduz um aumento da resistência desenvolvido pelo maior comprimento das linhas de rotura diagonais em relação às medianas que não é contabilizado na análise através do mecanismo de rotura.

- Laje FC0 sem armadura transversal

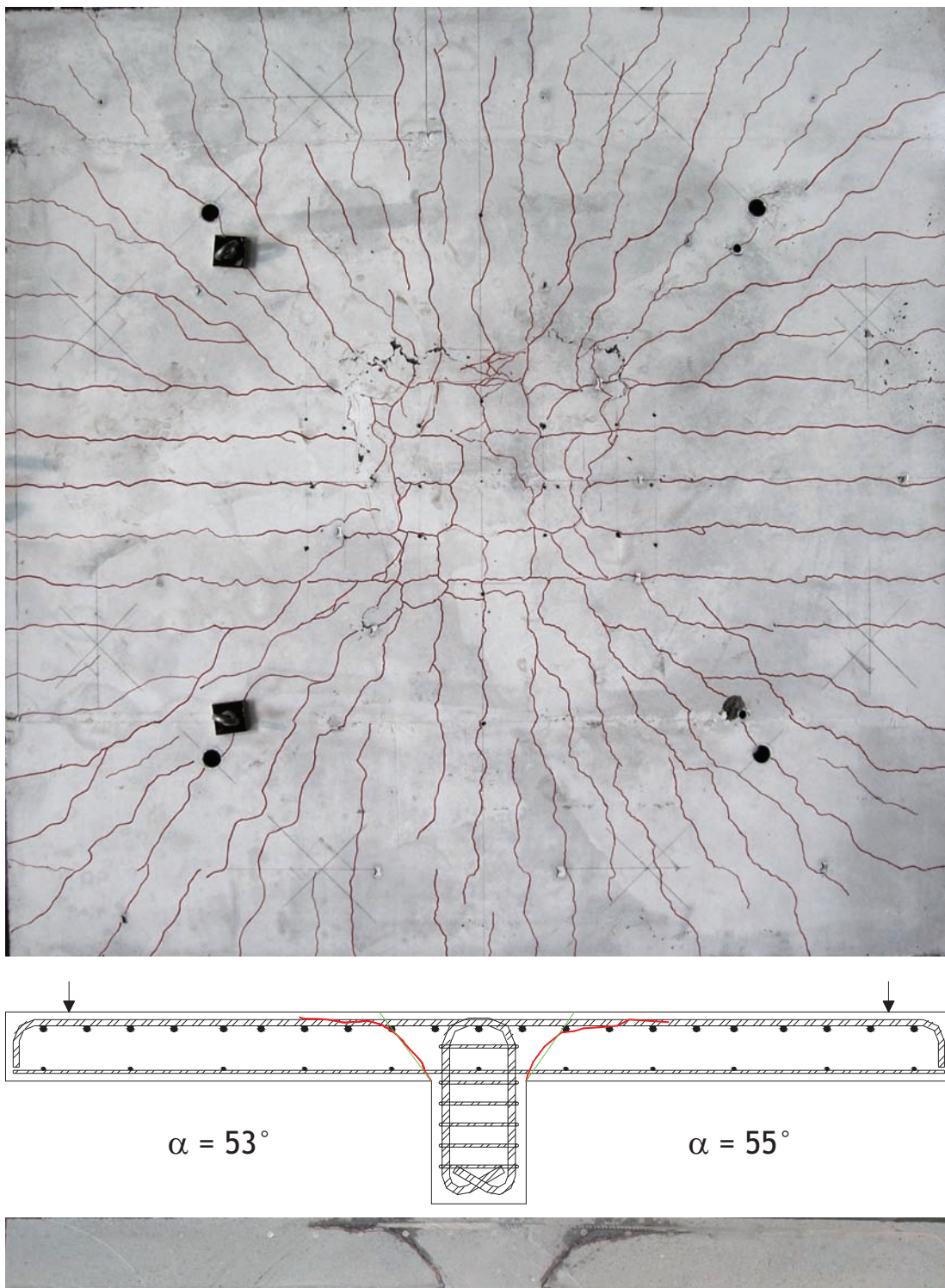


Figura VI-5 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje FC0.

Nos ensaios centrados, a inclinação da fissura crítica de punçoamento relativamente à horizontal é maior nas lajes com a adição das fibras metálicas o que contradiz alguns investigadores.

- **Laje ACA1 com armadura transversal**

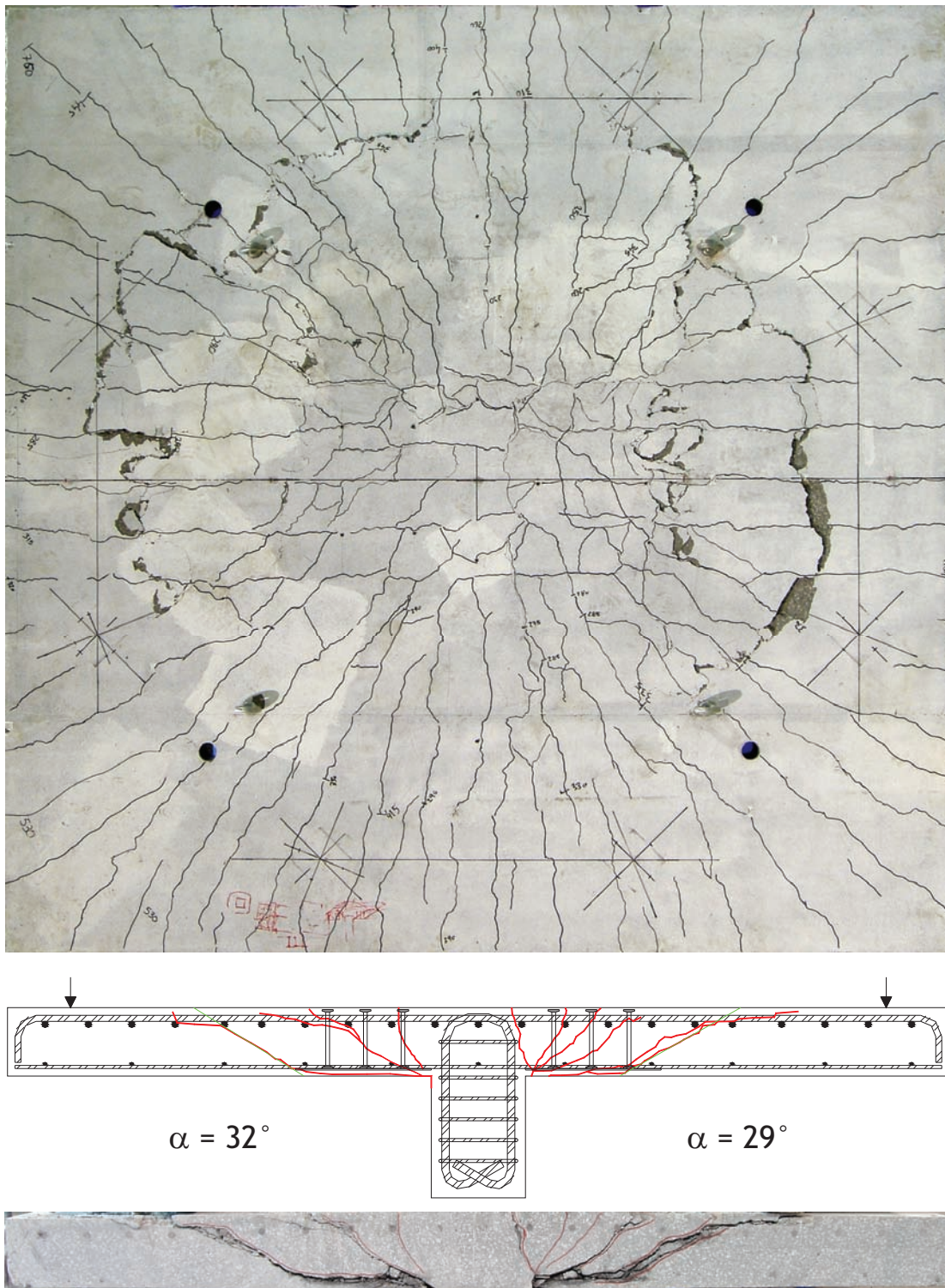


Figura VI-6 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punção - laje ACA1.

Nesta laje, ACA1 com armadura transversal, a fenda de rotura desenvolveu-se diagonalmente desde a face superior até à base do perímetro exterior dos pernos, progredindo aproximadamente na horizontal na zona das armaduras de punção até à face do pilar. A inclinação da fenda de rotura foi aproximadamente a mesma da registada na laje desprovida de tal armadura, AC0, em torno de 30° . A presença da armadura transversal

determinou que a ruptura ocorresse na zona não armada mobilizando o segundo perímetro crítico. No entanto, o posterior corte da laje representado na Figura VI-6 mostra a existência de fendas inclinadas que se formaram ao longo do carregamento, intersectando a armadura transversal, cuja abertura foi controlada pelos pernos daquela armadura.

O efeito da armadura transversal no mecanismo de ruptura por punçoamento pode ser explicado do seguinte modo:

A transmissão da carga na ligação laje/pilar é realizada através de fusos comprimidos com uma determinada curvatura aos quais estão associadas isostáticas de tracção perpendicular. Estas tracções, não encontrando por parte do betão a resistência suficiente, originam impulsos no vazio que determinam o aparecimento de fendas segundo superfícies cônicas, que se manifestam superiormente por figuras de intercepção curvilíneas (Figura VI-7).

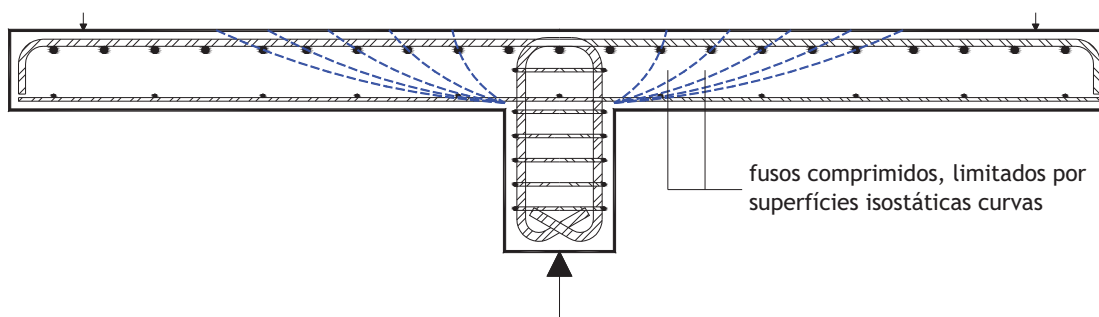


Figura VI-7 - Definição das isostáticas curvas.

Há aqui alterações relativamente à forma teórica já que as isostáticas de tracção se orientam em direcção aos varões da armadura longitudinal. Assim, se se travarem as tracções mais intensas através de, neste caso, pernos de armadura transversal, mantém-se a integridade dos fusos, possibilitando o aumento progressivo das compressões diagonais, pelo aumento gradual do carregamento.

Se se dispusesse de maior número de perímetros de armadura transversal (Figura VI-8), poderiam ser atendidas novas situações com maior severidade ao longo da laje. Este crescimento está, no entanto, limitado pela capacidade resistente à flexão.

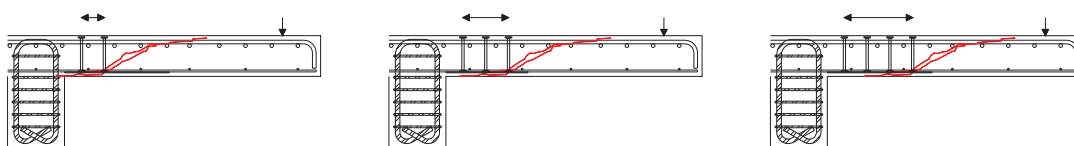


Figura VI-8 - Diferentes roturas em função do desenvolvimento dos pernos.

Seja sem armadura transversal ou com ela, a figura de ruptura é sempre determinada pelo escorregamento (com maior ou menor esmagamento) de uma das superfícies cônicas críticas, determinando na face da laje a figura de intercepção correspondente, como é evidente, com latitude cada vez maior (Figura VI-8).

- **PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO**

Nas lajes submetidas a punçoamento excêntrico a presença da excentricidade do carregamento retira o aspecto axisimétrico ao padrão de fendilhação (Figura VI-9 a Figura VI-11).

- **Laje AE0 sem armadura transversal**

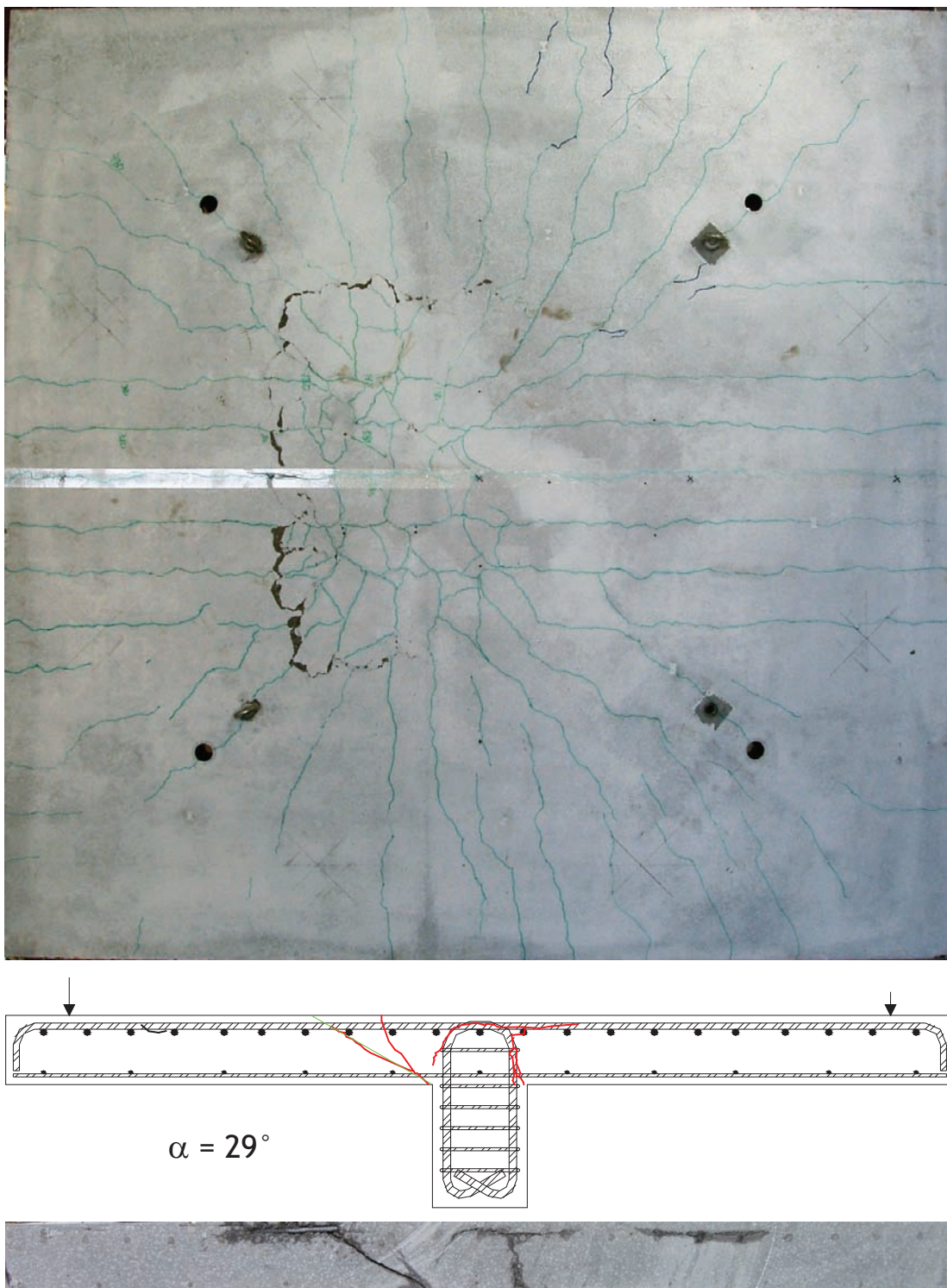


Figura VI-9 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje AE0.

- Laje FE0 sem armadura transversal

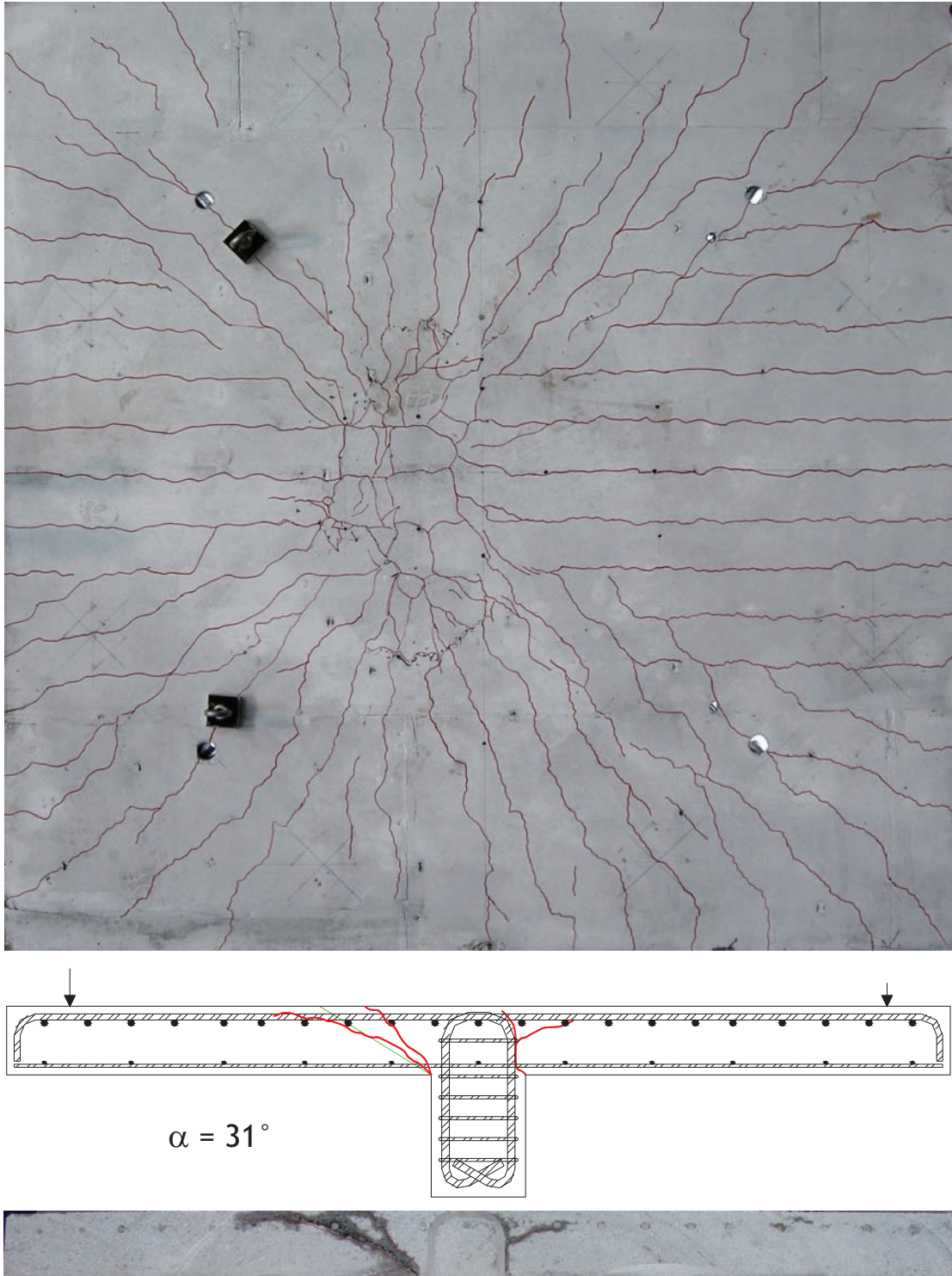


Figura VI-10 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje FE0.

- Laje AEA1 com armadura transversal

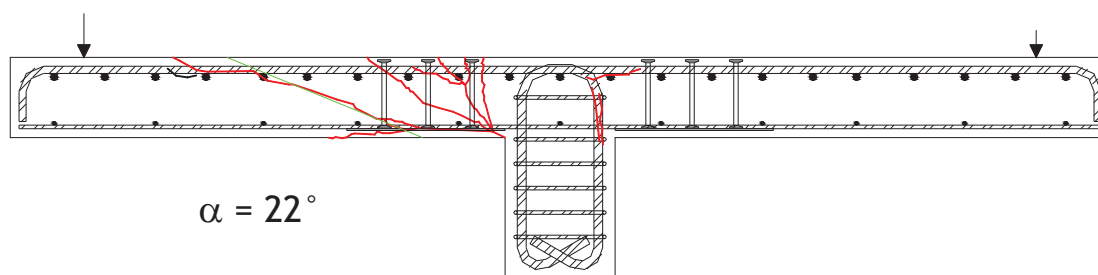
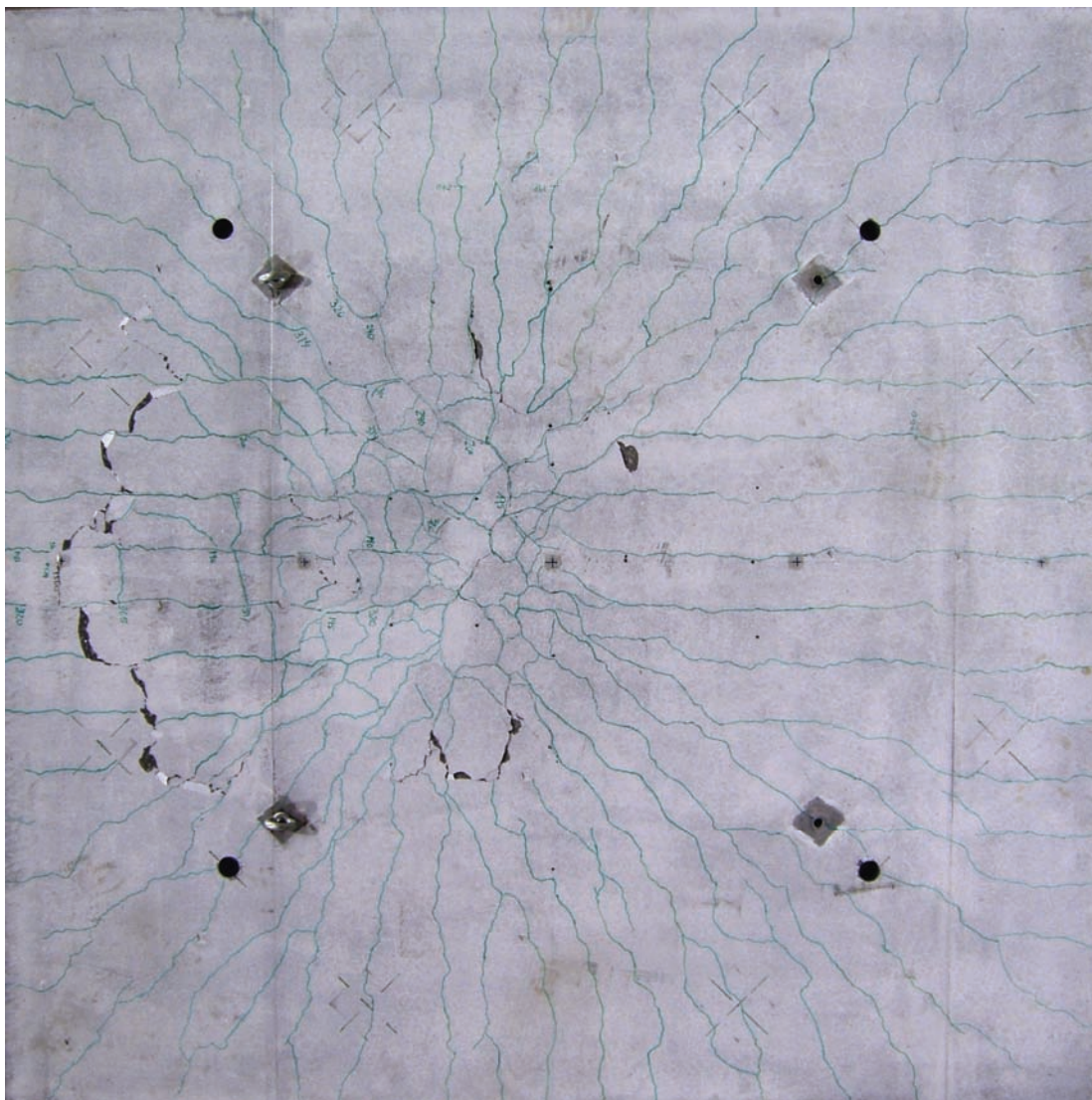


Figura VI-11 - Fendilhação da face superior, corte transversal e inclinação da fissura crítica de punçoamento - laje AEA1.

É possível identificar um padrão de fendilhação mais distribuído e intenso nos modelos com armadura de punçoamento, o que aliás já se verificou para as lajes sob carga centrada. Comparando as figuras de rotura das lajes de betão com e sem fibras metálicas, observa-se que a inclinação da fenda de rotura não parece ser substancialmente afectada pela adição das fibras, o que se pode justificar pelo baixo teor das mesmas.

VI.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Faz-se, seguidamente, a discussão dos resultados experimentais obtidos analisando separadamente o efeito da presença da armadura transversal, da excentricidade da carga e da incorporação das fibras metálicas na capacidade última e na ductilidade.

Para as análises que se seguem, a carga aplicada é normalizada em função da raiz quadrada do valor da resistência à compressão do betão à data do ensaio. Pretende-se, com este procedimento, atenuar o efeito deste parâmetro.

VI.3.1 Efeito da armadura transversal

• PUNÇOAMENTO CENTRADO

No Gráfico VI-37 é possível avaliar o efeito da presença da armadura transversal das lajes ACA1 e ACA2 por comparação com a laje AC0. Como se pode observar, a armadura transversal incrementou de forma significativa tanto a resistência última das lajes (+ 21 %) quanto a ductilidade.

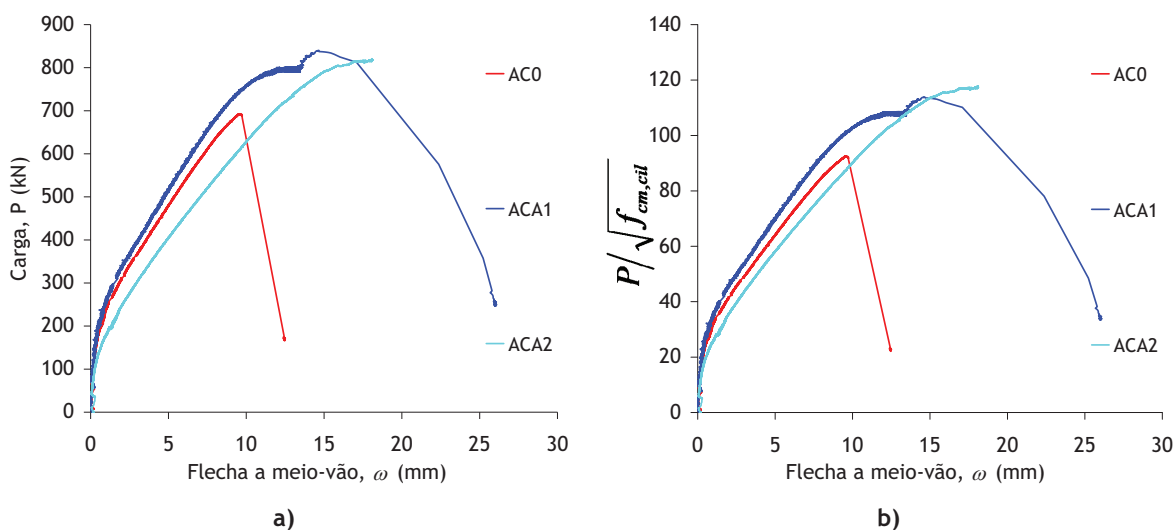


Gráfico VI-37 - Efeito das armaduras transversais no punçoamento centrado - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.

• PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO

O efeito da presença da armadura transversal no caso de punçoamento excêntrico é analisado comparando o comportamento das lajes AEA1 e AEA2 com o da laje AE0. A laje AEA2 apresenta resistência à compressão inferior à da laje AEA1 (– 28 %); não obstante a capacidade resistente ao punçoamento parece não reflectir este facto (Gráfico VI-38b).

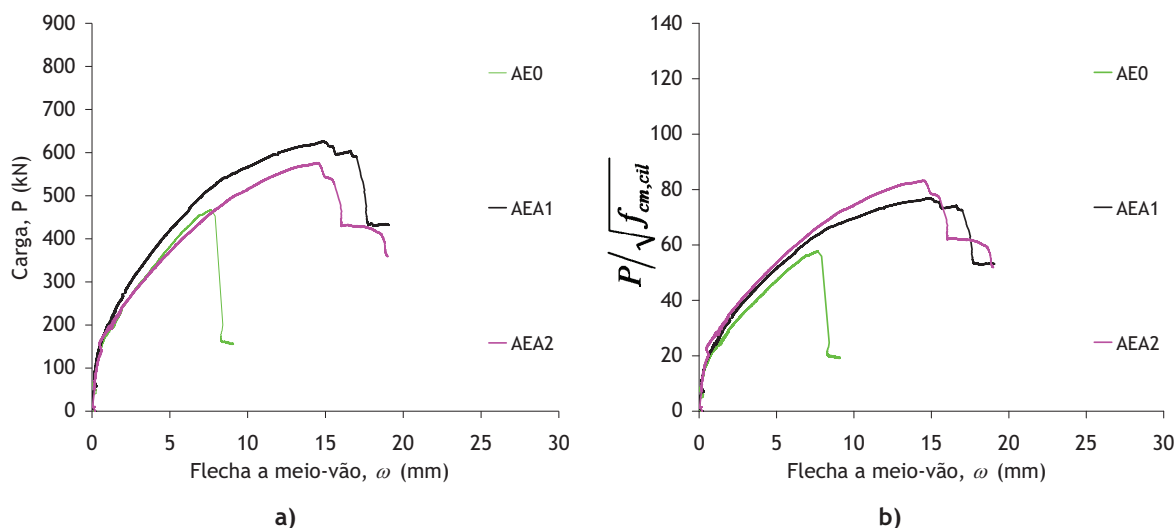


Gráfico VI-38 - Efeito das armaduras transversais no punçoamento excêntrico - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.

As armaduras transversais potenciaram aqui um maior aumento da ductilidade do que no caso do carregamento centrado, incrementando o valor médio da resistência última das lajes em 29 %.

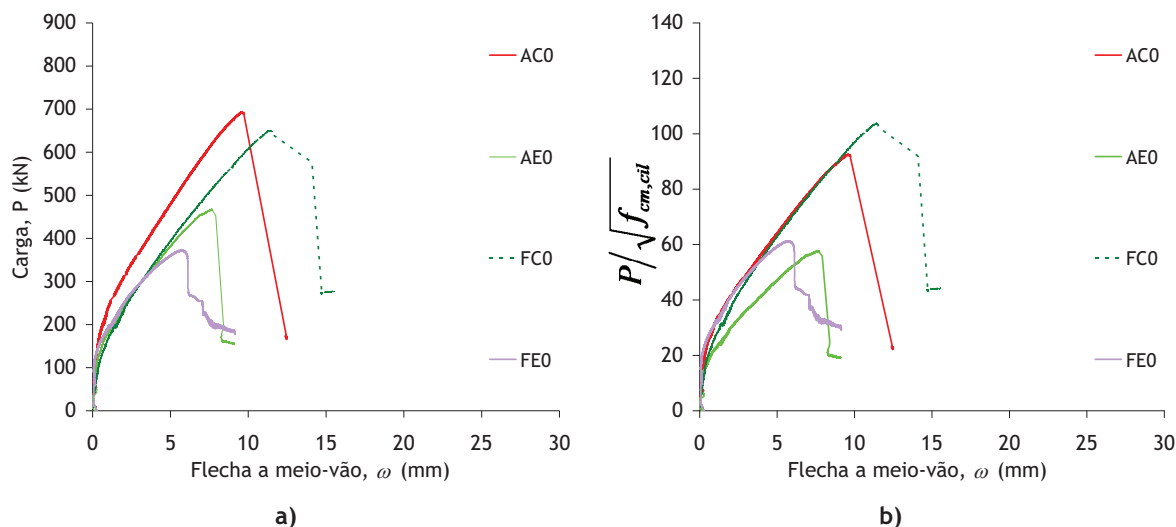
A capacidade residual (pós-rotura) é também incrementada com a armadura transversal; nos carregamentos excêntricos a retenção é de 72 % e de 36 % da carga máxima para os casos com e sem armadura transversal, respectivamente (Gráfico VI-38). Note-se que uma eventual contribuição para aquela resistência residual por efeito de cavilha da armadura longitudinal na zona comprimida não é aqui explorada dada a reduzida percentagem desta armadura.

VI.3.2 Efeito da excentricidade da carga

• LAJES SEM ARMADURA TRANSVERSAL

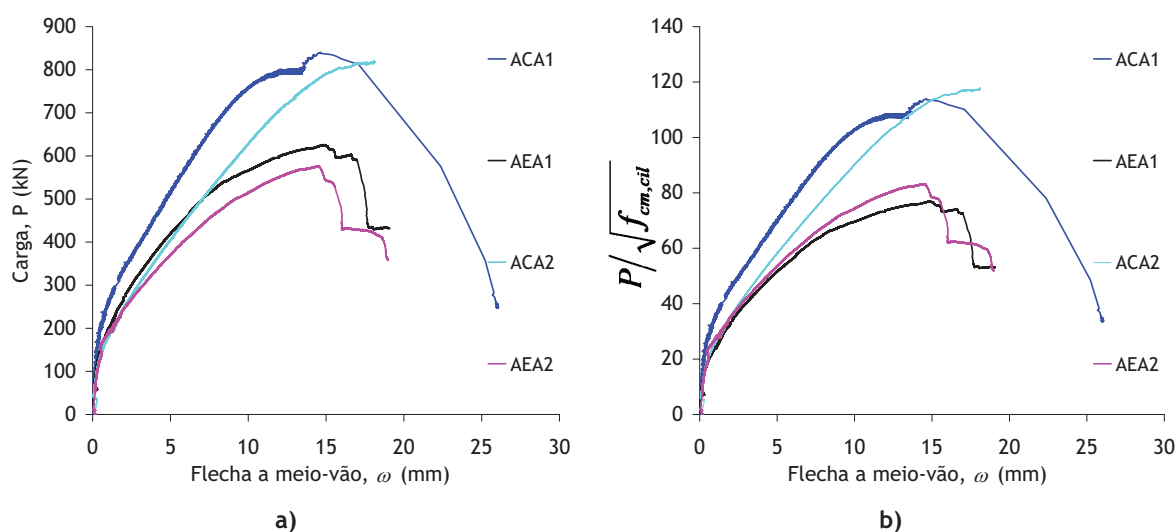
O efeito da excentricidade do carregamento (Gráfico VI-39) traduz-se essencialmente na redução da capacidade última. Comparando os resultados obtidos nas lajes AE0 e FE0 com as lajes AC0 e FC0, respectivamente, encontram-se reduções de 32 % para as lajes de betão normal e de 43 % no caso das lajes de betão incorporando fibras metálicas.

Note-se que embora a resistência do BRFA das lajes FC0 e FE0 ($f_{cm,cil} \cong 37$ MPa) seja muito inferior à do BAC utilizado nas lajes AC0 e AE0 ($f_{cm,cil} \cong 66$ MPa), quando se normaliza a carga em relação àquela resistência (Gráfico VI-39b) o efeito das fibras na capacidade última é revelado.



• LAJES COM ARMADURA TRANSVERSAL

Pode afirmar-se que a excentricidade da carga não influenciou significativamente a ductilidade da resposta mas originou uma queda acentuada da capacidade última bem como um padrão de fendilhação não simétrico, como atrás se apresentou. A redução média da capacidade resistente (Gráfico VI-40) foi de 28 % relativamente às lajes submetidas a carregamento centrado (ACA1 e ACA2), que é um pouco inferior à observada para as lajes sem armadura transversal.



VI.3.3 Efeito da presença das fibras de aço

• PUNÇOAMENTO CENTRADO

Verifica-se uma redução de 5 % da capacidade última da laje FC0 ($f_{cm,cil} = 38,7$ MPa) quando comparada com a laje AC0 ($f_{cm,cil} = 56,6$ MPa), como se mostra no Gráfico VI-41a, contrariamente ao indicado por vários autores (Barros, 1995; Holanda, 2002). No entanto, quando se normaliza a carga relativamente à resistência do betão, observa-se um incremento da resistência última desenvolvido pela presença das fibras (Gráfico VI-41b).

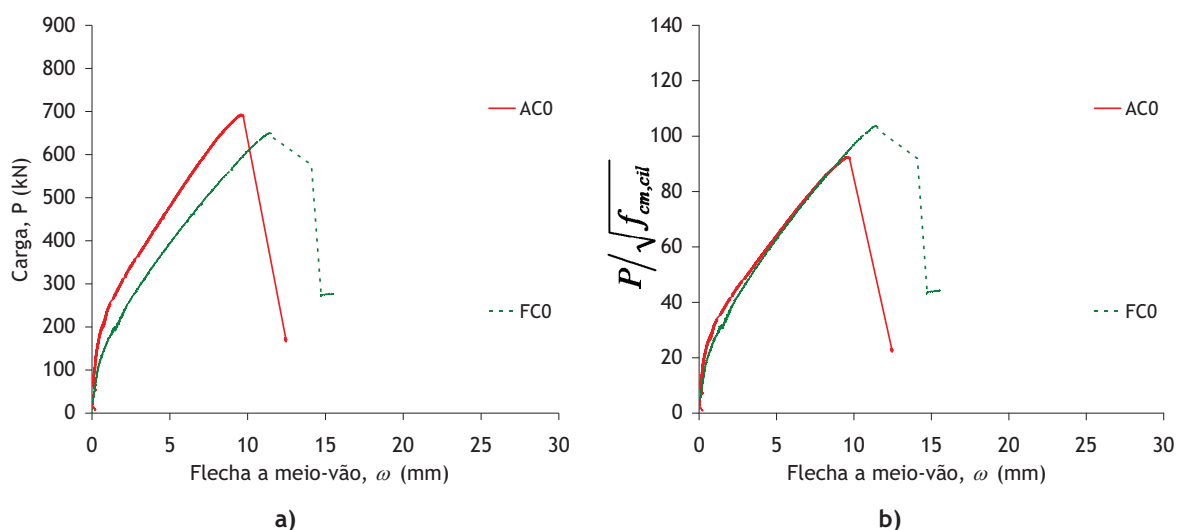


Gráfico VI-41 - Efeito das fibras metálicas no punçoamento centrado - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.

• PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO

O efeito das fibras metálicas é semelhante ao acima indicado para as lajes sem excentricidade (Gráfico VI-42).

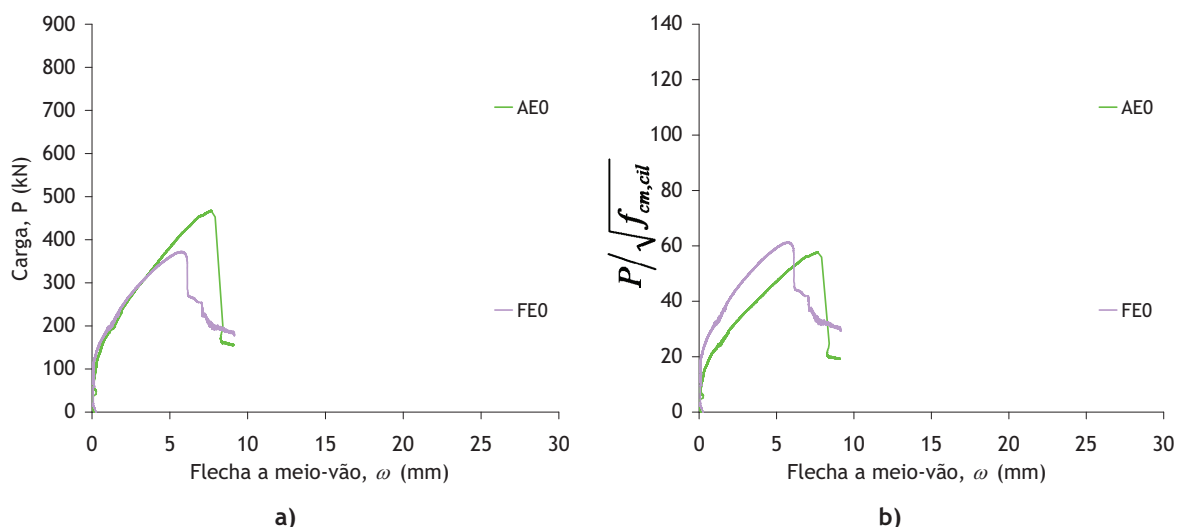


Gráfico VI-42 - Efeito das fibras metálicas no punçoamento excêntrico - Relações deslocamento do ponto central $\times$: a) carga; b) carga normalizada.

A redução da capacidade máxima da laje FE0 ($f_{cm,cil} = 36,1$ MPa) em relação à da laje AE0 ($f_{cm,cil} = 62,3$ MPa) foi, neste caso, de 20 %. Pode ainda observar-se, nas lajes com fibras metálicas, maior resistência residual após a carga máxima e menor deformação devido ao efeito de “costura” das fibras.

VI.4 COMPARAÇÃO DAS CARGAS EXPERIMENTAIS DE ROTURA COM AS PREVISÕES REGULAMENTARES

Comparam-se os resultados experimentais com os obtidos pela aplicação das expressões propostas nos códigos e regulamentos, apresentados no Capítulo III. Nas várias expressões regulamentares foram utilizados os valores médios das características resistentes dos materiais e considerados unitários os coeficientes parciais de segurança.

No Quadro VI-2 indica-se a relação entre os valores experimentais e regulamentares das cargas últimas e ainda a localização da rotura prevista pelos diferentes códigos (ver III.8). Refere-se a grande concordância^{jj} dos valores das cargas de rotura experimentais, $P_{u,exp}$, com os previstos pelos códigos (V_{Rm}) CEB-FIP MC 90 ($0,99 \pm 0,08$) e EN 1992-1-1 ($0,99 \pm 0,07$). Menor desempenho apresentam as normas BS 8110-1: 1997 ($1,29 \pm 0,16$) e REBAP ($1,32 \pm 0,16$). Razoável é também a previsão da localização da secção de rotura (CEB-FIP MC 90 e EN 1992-1-1).

Quadro VI-2 - Comparação das cargas de rotura experimentais com as previstas pela regulamentação.

Carga	Laje	$P_{u,exp}/V_{Rm}$ (-) e localização da secção de rotura							
		CEB-FIP MC 90		EN 1992-1-1		BS 8110-1: 1997		REBAP	
centrada	P (2d)	0,99	2d	0,99	2d	1,29	1,5d	1,29	0,5d
	AC0 (1,7d)	1,07	2d	1,07	2d	1,15	1,5d	1,22	0,5d
	ACA1 (Ext)	1,00	Ext	1,00	Ext	0,93	Face	1,25	Arm
	ACA2 -	1,02	Ext	1,02	Ext	0,91	Face	1,22	Arm
	FC0 (0,7d)	1,15	2d	1,15	2d	1,23	1,5d	1,47	0,5d
excêntrica	AE0 (1,8d)	0,98	2d	0,98	2d	1,07	1,5d	1,32	0,5d
	AEA1 (Ext)	0,91	Arm	0,93	Arm	0,83	Arm	1,64	Arm
	AEA2 -	0,92	Ext	0,92	Ext	0,84	Arm	1,51	Arm
	FE0 (1,7d)	0,95	2d	0,95	2d	1,03	1,5d	1,55	0,5d

Notações: Arm: rotura na zona com armadura transversal; Ext: rotura exterior à zona com armadura transversal; Face: rotura na secção da face do pilar. Os valores indicados entre parêntesis referem-se à distância da face do pilar à manifestação da fenda de rotura na face superior (ver VI.2.7).

A formulação relativa à influência da excentricidade na determinação da capacidade resistente ao punçoamento varia consoante o regulamento utilizado e pode ser analisada através dos diagramas de interacção carga - momento que se apresentam no Gráfico VI-43. No caso das lajes sem armaduras transversais, as previsões obtidas pelo REBAP são claramente

jj - As cargas previstas pela regulamentação indicadas no Quadro VI-2 foram determinadas assumindo as propostas de alteração apresentadas em III.9

influenciadas pela formulação dada à consideração da excentricidade. Os códigos BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997) e REBAP (REBAP, 1983) são conservadores na ausência de armadura transversal (Gráfico VI-43a e Gráfico VI-43b). Por outro lado, relativamente às lajes com armadura transversal, a formulação do REBAP é demasiado conservadora por considerar a capacidade resistente fortemente dependente da componente, normal ao plano da laje, da força resistente da armadura transversal (75 % da capacidade total) em detrimento da capacidade resistente do betão (25 % da capacidade total), não conseguindo aproximar-se dos valores experimentais.

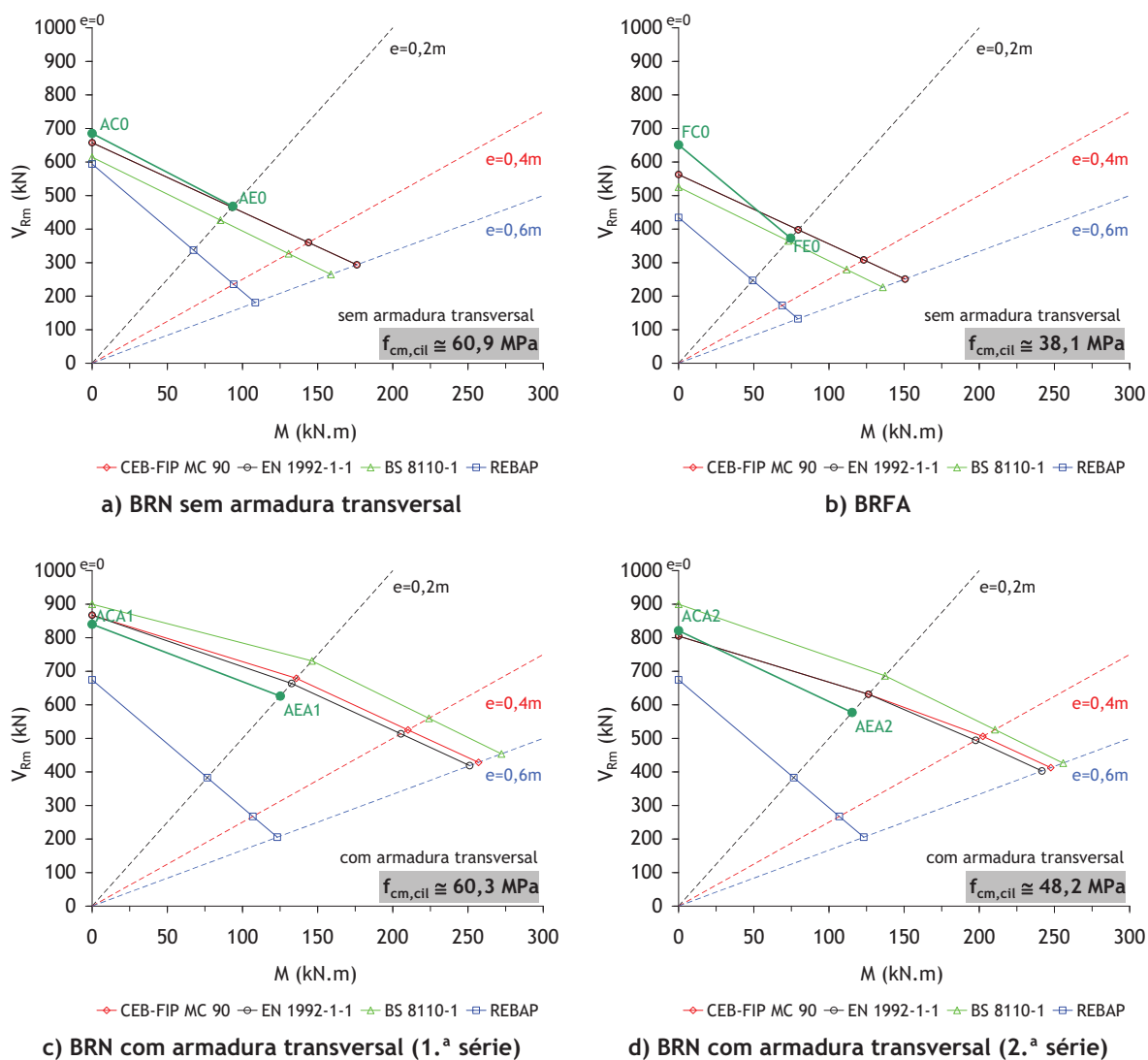


Gráfico VI-43 - Comparação dos resultados experimentais com as previsões regulamentares.

Para as lajes com armadura transversal, a influência da excentricidade, traduzida pela inclinação dos segmentos de recta, é sobrestimada pelo REBAP enquanto evidencia adequadas e semelhantes formulações nos restantes códigos analisados. As previsões obtidas segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e o EN 1992-1-1 (CEN, 2004) são, contudo, as mais próximas dos resultados experimentais.

VI.5 CONCLUSÕES

A análise e interpretação dos resultados experimentais permitem retirar as conclusões que a seguir se apresentam.

O efeito da excentricidade da carga traduz-se numa redução da carga última. Verifica-se, no entanto, que essa redução é da mesma ordem de grandeza nos casos das lajes sem armaduras transversais (– 32 %) e com armaduras transversais (– 28 %). Pode, assim, afirmar-se que a armadura transversal utilizada, correspondente à taxa $\rho_w = 0,34$ %, não influencia significativamente o efeito da excentricidade.

Relativamente às lajes de betão incorporando fibras metálicas (0,5 % em volume), a redução da capacidade resistente com a excentricidade é de 43 %. Esta diminuição nas lajes de BRFA é claramente superior ao valor que se esperaria, e mesmo superior ao correspondente valor das lajes de BRN, o que se pode justificar pela falta de homogeneidade na distribuição das fibras, como alias é típico dos betões auto-compactáveis. A deficiente dispersão das fibras metálicas na massa de betão pode ter sido também provocada pelo efeito de barreira materializado pelas armaduras do pilar. Acresce ainda a menor resistência do BRFA ($f_{cm,cil} \cong 37$ MPa) relativamente à do BRN ($f_{cm,cil} \cong 66$ MPa).

A armadura transversal incrementou de forma significativa a resistência última das lajes tanto nos ensaios centrados (+ 21 %) como nos ensaios com excentricidade (+ 29 %).

Também a ancoragem dos pernos da armadura transversal mostrou ser eficiente, permitindo que se atinjam extensões superiores aos valores elásticos limites. De facto, foram medidas deformações da ordem de 2,5 ‰ no caso do punçoamento centrado, contrariando as limitações dos códigos, já mencionadas em III.6.4, pág. 63, a observar no projecto de lajes fungiformes. No caso do punçoamento excêntrico, as extensões medidas nos pernos colocados do lado da excentricidade são ainda superiores.

Por outro lado, a amarração dos pernos da armadura transversal criou pontos de apoio das bielas comprimidas formando-se um sistema de treliça (biela-tirante) que permite a transmissão da carga de punçoamento desde o pilar até aos pontos de apoio. As armaduras transversais potenciaram, ainda, suficiente confinamento dado que a fenda de rotura se localiza na zona exterior à região armada transversalmente.

A capacidade residual (pós-rotura) é também incrementada com a armadura transversal; nos carregamentos excêntricos a retenção é de 36 % e de 72 % da carga máxima para os casos sem e com armadura transversal, respectivamente. Também a ductilidade é incrementada na presença destas armaduras. Ao invés, a rotura é muito mais localizada nas lajes desprovidas de tal armadura. Os resultados apontados vão, portanto, no sentido de

confirmar o elevado desempenho deste tipo de armadura transversal incrementando a capacidade resistente e a ductilidade da ligação laje/pilar.

As armaduras longitudinais determinaram, nos padrões de fissuração, a posição e o espaçamento das fissuras.

Relativamente às previsões regulamentares dos ensaios da presente campanha experimental, refere-se a grande concordância obtida: CEB-FIP MC 90 ($0,99 \pm 0,08$) e EN 1992-1-1 ($0,99 \pm 0,07$). Razoável é também a previsão da localização da secção de rotura pelos referidos códigos.

VII APLICAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS A ENSAIOS EXPERIMENTAIS SOBRE PUNÇOAMENTO

VII.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A avaliação do desempenho e da capacidade de um modelo numérico pode ser efectuada através da comparação com casos conhecidos que tenham sido objecto de análise experimental devidamente instrumentada. No presente Capítulo são expostas algumas aplicações de modelos de análise não-linear ao estudo do comportamento de lajes fungiformes das quais se dispõem de resultados experimentais próprios (Capítulo VI).

Observou-se, nas análises numéricas conduzidas, uma grande variedade de comportamentos, como adiante se mostra. Dado que a resposta do problema é conhecida, procedeu-se à escolha da combinação mais ajustada com os resultados experimentais, o que não é possível num problema cuja resposta é desconhecida.

Deste modo, a qualidade dos resultados obtidos utilizando a análise não-linear é fortemente condicionada pela experiência do utilizador que deve estabelecer adequadamente o processo iterativo, o critério de convergência e o modelo de fendilhação mais ajustados para o problema em causa. Acresce que os problemas relacionados com corte, de que o punçoamento é exemplo, são de natureza complexa e sensíveis ao método iterativo, ao tamanho do incremento bem como à tolerância para a convergência utilizados: o problema diverge precocemente para tolerâncias muito apertadas enquanto a fiabilidade da solução numérica é de qualidade incerta para tolerâncias largas, como se mostrou em IV.5.

As capacidades e limitações do MEF em reproduzir as roturas por punçoamento são aqui avaliadas. Utilizam-se, na modelação do comportamento não-linear do betão fissurado, as diferentes formulações expostas no Capítulo IV.

Neste Capítulo, as análises numéricas sobre o mecanismo do punçoamento são conduzidas com recurso ao código comercial de elementos finitos baseado no método dos deslocamen-

tos DIANA v. 9.3 (DIANA, 2008) desenvolvido pela TNO *Building and Construction Research* desde 1972 (DIANA, *Displacement method ANALyser*), permitindo a realização de análises lineares e não-lineares físicas e geométricas.

Todas as modelações numéricas que seguidamente se apresentam incorporam a formulação de Lagrange na consideração da não-linearidade geométrica. Esta formulação estabelece as extensões e as tensões relativamente à geometria indeformada. O número máximo de iterações em cada incremento de carga (ou de deslocamento) foi fixado em 300.

VII.2 MODELAÇÃO NUMÉRICA DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS

VII.2.1 Introdução

O programa experimental descrito no Capítulo V constitui um excelente repto às capacidades dos modelos de fendilhação e algoritmos iterativos de solução numérica na medida em que incorpora a presença de armaduras transversais e da excentricidade do carregamento.

Assim, os ensaios experimentais realizados no âmbito da presente tese (ver Capítulo V) em seis dos modelos de laje fungiforme submetidos a punçoamento centrado e excêntrico, de betão corrente e de betão reforçado com fibras de aço, foram simulados com recurso ao MEF. O objectivo desta análise é o de verificar a possibilidade de reproduzir numericamente o comportamento estrutural observado experimentalmente, recorrendo às propriedades dos materiais, avaliadas em laboratório, e à Mecânica da Fractura.

VII.2.2 Descrição dos modelos de elementos finitos

Os modelos de laje foram discretizados em 1600 elementos sólidos isoparamétricos de 20 nós (Figura VII-1), que utilizam interpolação quadrática com integração reduzida (3×3×2 pontos de Gauss), dispostos em 4 camadas de igual altura segundo a espessura das lajes, como se ilustra na Figura VII-2. A geração da malha de elementos finitos foi conduzida de forma automática partindo da geometria das lajes.

Nos elementos que constituem as três camadas inferiores de elementos finitos (ver Figura VII-2) considera-se que a largura da banda fendilhada está relacionada com a dimensão dos elementos finitos da malha adoptada, sob a forma:

$$h = \sqrt[3]{V_{el}/n} \quad (\text{VII. 1})$$

Na expressão anterior, os símbolos têm o seguinte significado:

V_{el}	volume do elemento finito
n	número de pontos de Gauss do elemento finito

A largura da banda fendilhada é, assim, tomada como a dimensão associada à aresta do cubo que define o valor médio do volume associado a cada ponto de Gauss do elemento finito.

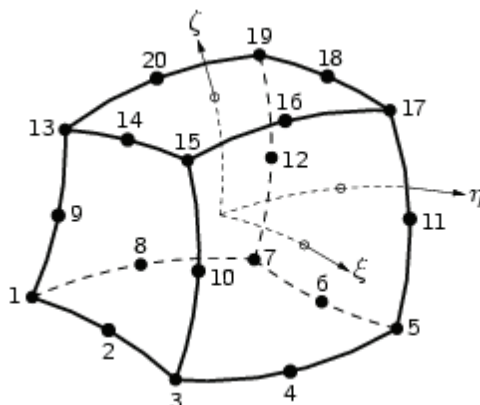


Figura VII-1 - Elemento finito isoparamétrico de volume do tipo CHX60 (DIANA, 2008).

Em todas as lajes, as armaduras longitudinais e as armaduras transversais (lajes ACA1 e AEA1) foram modeladas através de elementos distribuídos embebidos nos elementos de betão e de forma discreta (elementos de barra), respectivamente. As propriedades das armaduras foram modeladas utilizando o critério de cedência de von Mises com endurecimento e considerando $\nu = 0,30$.

As armaduras são simuladas de acordo com uma formulação que considera que os deslocamentos dos nós dos elementos finitos de armadura são interpolados a partir dos deslocamentos dos nós dos elementos de betão em contacto. A modelação do troço de pilar foi realizada com 32 elementos finitos. As reais condições de apoio são modeladas através de apoios rígidos (ver Figura VII-2). As propriedades consideradas para todos os materiais são as indicadas em V.3. (pág. 116).

Na modelação numérica das lajes submetidas a punçoamento centrado (AC0, ACA1 e FC0) a chapa metálica sob o troço de pilar, que é materializada por 16 elementos finitos, foi considerada indeformável. Nos modelos sujeitos a carregamento excêntrico, acrescem 350 elementos finitos para modelação do sistema metálico de encaixe do pilar (Figura V-14, pág. 126).

De forma a aferir o desempenho dos diferentes modelos de fendilhação foram conduzidas análises numéricas baseadas nos modelos de fendilhação DE e ETF, descritos no Capítulo IV.

Na execução das presentes análises numéricas fixou-se o critério de convergência formula-

do em termos da energia em $\xi = 1 \times 10^{-4}$, permitindo-se que as análises prossigam na ocorrência de um incremento não convergido.

Nas análises baseadas no conceito de decomposição das extensões (DE) estabeleceram-se os valores $\phi_0 = 35^\circ$, $\psi_0 = 12,5^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$ para o ângulo de atrito interno, a dilatância e o valor limite do ângulo α , respectivamente. O coeficiente de Poisson do betão foi tomado com o valor $\nu = 0,20$ e definiu-se a lei linear para a definição do critério da tensão máxima indicada no Gráfico IV-3b.

Nas análises baseadas no conceito de extensões totais com formação de fendas fixas ortogonais (ETF) considera-se $\nu = 0$. A justificação é a de que esta formulação não modela correctamente a diminuição das extensões elásticas com a diminuição das extensões transversais, já que considera o coeficiente de Poisson constante, mesmo no betão fendilhado. Maior detalhe sobre este assunto pode ser encontrado em (Pimentel, 2004).

Todos os resultados que a seguir se apresentam correspondem a incrementos convergidos, salvo quando indicado em contrário.

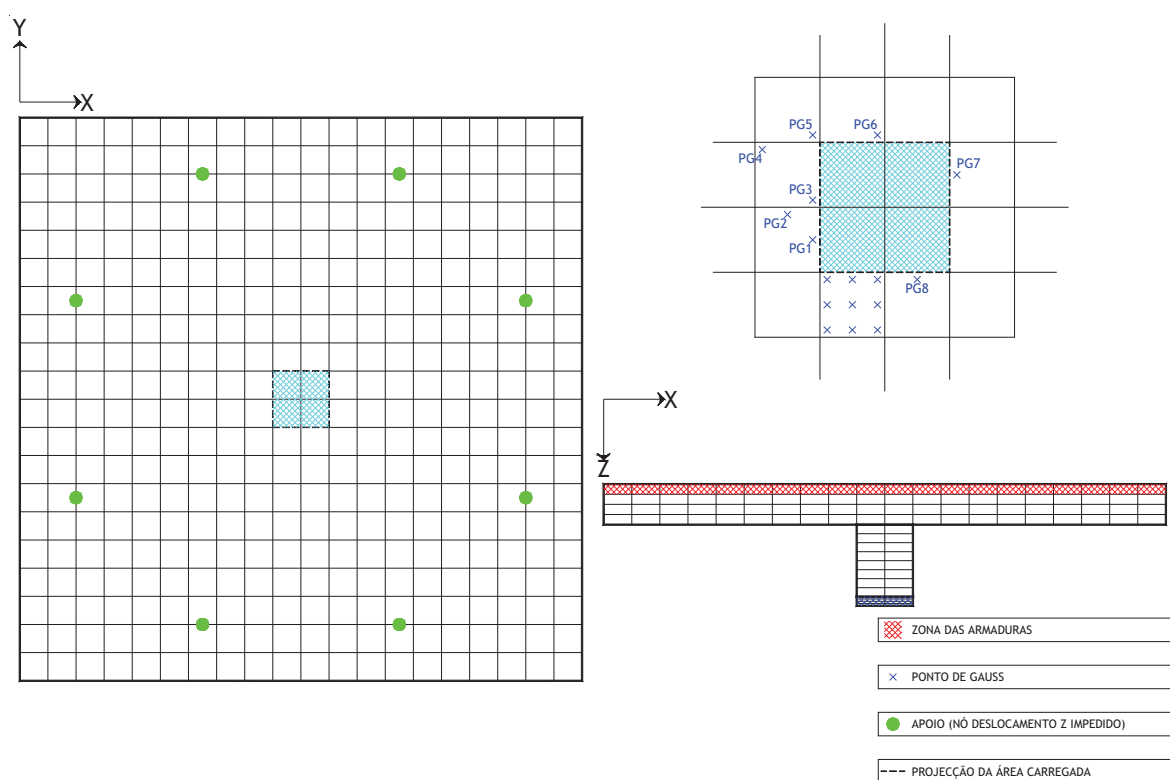


Figura VII-2 - Geometria e malha de elementos finitos com localização dos pontos de Gauss.

Relativamente às análises baseadas no conceito de decomposição das extensões (DE), o método iterativo empregue é o método da Secante (BFGS) enquanto nas análises assentes no modelo de fendilhação distribuída baseado no conceito de extensão total com fendas ortogonais fixas (ETF) o algoritmo iterativo que minimiza os tempos de cálculo é o método de Newton-Raphson modificado.

À semelhança do programa experimental, o carregamento numérico foi aplicado com controlo de deslocamentos. A comparação entre os resultados experimentais e os numéricos é feita directamente através das leituras registadas pela instrumentação dos modelos de laje (ver V.6, pág. 133). Os deslocamentos verticais da face superior das lajes foram obtidos de forma semelhante à adoptada no programa experimental. Comparam-se as deformações experimentadas pela armadura transversal e pelo betão (faces inferior e superior) com as obtidas por modelação numérica no correspondente ponto de Gauss.

VII.2.3 Comparação dos resultados experimentais e numéricos

VII.2.3.1 Respostas deformacionais

Em análises numéricas iniciais das diferentes lajes, baseadas no modelo DE, a aderência entre o betão e as armaduras longitudinais foi modelada, de forma indirecta, aplicando o conceito de retenção de tensões de tracção no betão (*tension stiffening*), apresentado em IV.2.1.5 (ver Gráfico IV-9, pág. 94), aos elementos finitos da camada que contém as armaduras traccionadas (elementos indicados a vermelho na Figura VII-2).

O amolecimento do betão em tracção (*tension softening*) é considerado nas restantes três camadas e é modelado com uma lei linear (Bažant *et al.*, 1983), impondo o valor da energia de fractura em modo I, G_F , de acordo com a formulação proposta pelo CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), como se indica no Quadro VII-1 (pág. 190). A retenção constante da rigidez de corte foi tomada $\beta_{DE} = 0,100$.

As respostas deformacionais assim obtidas (DE_C_Stiff) sobreavaliam, invariavelmente, as correspondentes respostas experimentais (ver Gráfico VII-1)^{kk}. Conduziram-se, ainda, análises análogas usando o modelo de fendilhação ETF (curvas ETF_C_Stiff no Gráfico VII-1) obtendo-se resultados semelhantes. O exposto pode ser justificado em termos do excesso de energia disponível e da sua lenta degradação pelas fissuras.

Seguidamente conduziram-se análises desprezando a contribuição do betão à tracção^{ll} entre fendas na camada que contém as armaduras principais, mantendo a lei de amolecimento acima referida para os elementos das três camadas inferiores, e impondo a retenção total da rigidez de corte ($\beta_{DE} = \beta_{ETF} = 1,0$) a todos os elementos finitos das lajes (curvas DE_Full e ETF_Full no Gráfico VII-1). A aproximação à resposta experimental é melhorada mas não foi possível detectar, em qualquer caso, evidências da rotura numérica.

kk - Atente-se nas diferentes escalas usadas

ll - Comportamento frágil obtido por eliminação do ramo de amolecimento da lei constitutiva em tracção

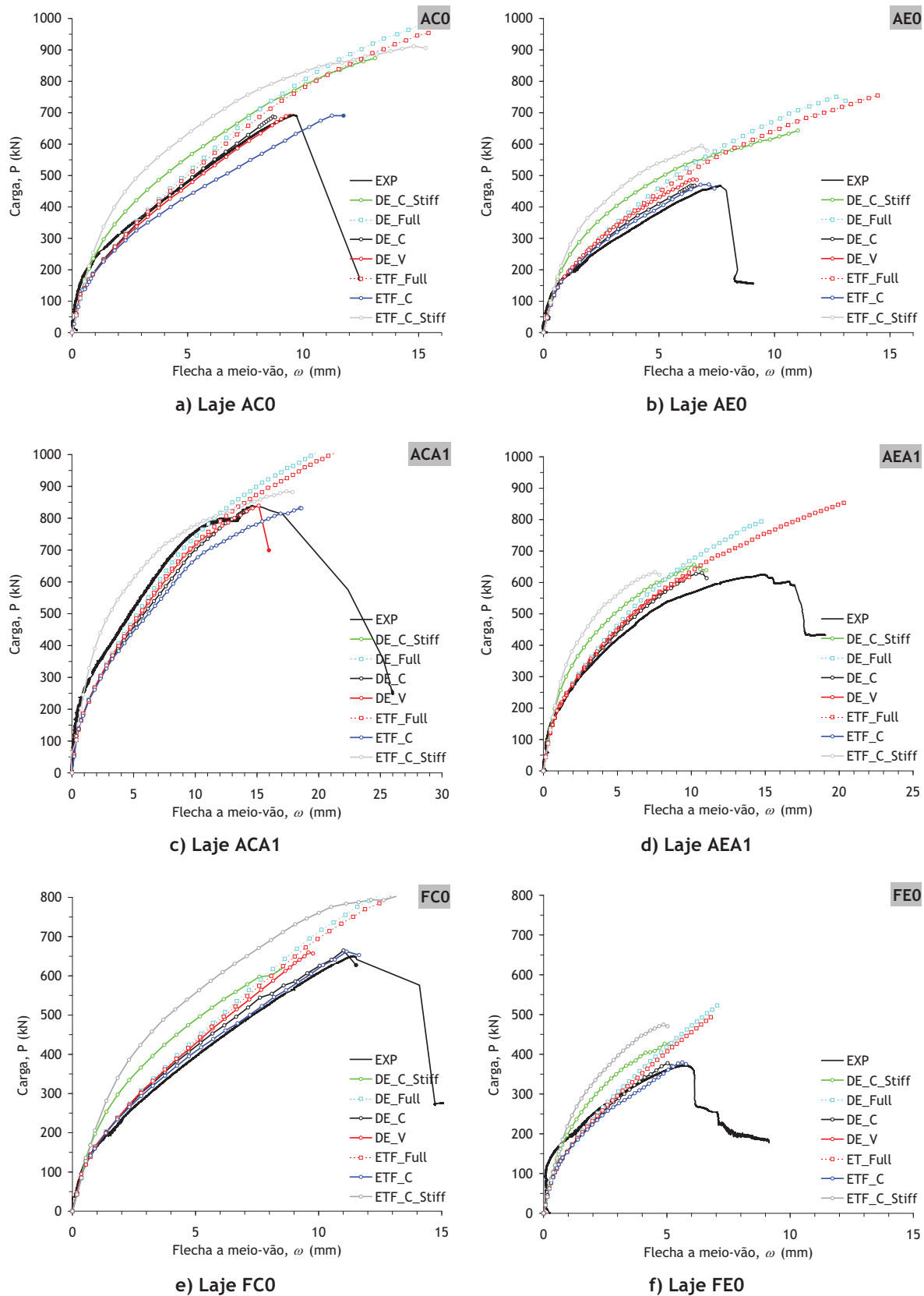


Gráfico VII-1 - Comparação das respostas experimental e numérica - relações carga × flecha a meio-vão.

Estas constatações evidenciam que as propriedades atribuídas à camada de elementos que contém as armaduras principais governam, em grande medida, a rigidez da resposta estrutural (carga × flecha a meio-vão).

Apesar de a resposta deformacional ser reproduzida com alguma precisão, as análises numéricas não conseguem revelar uma carga limite de maneira clara, uma vez que a curva carga-deslocamento não apresenta queda visível da mesma.

Como se sabe, a correcta simulação numérica de uma rotura frágil por punçoamento é extremamente difícil. Neste caso, as características de deformação na região da fenda de corte e as tensões tangenciais aí geradas devem ser definidas com precisão. A influência da modelação da retenção da rigidez de corte afigura-se, pois, de extrema importância. No entanto, relatórios com informação adequada para clarificar tais características não estão disponíveis.

A reprodução numérica da capacidade resistente veio a revelar-se ser fortemente influenciada pelo valor do factor de retenção da rigidez de corte (β), parâmetro determinante na precisão das modelações.

Nesse sentido, conduziram-se várias simulações com diferentes valores constantes de β (modelos ETF e DE) sucessivamente ajustados de modo a otimizar a concordância. Os valores de β que forneceram a melhor resposta para as diferentes simulações (β_{DE} e β_{ETF}) são indicados no Quadro VII-1. As correspondentes respostas calculadas são também apresentadas no Gráfico VII-1, com as referências DE_C e ETF_C^{mm}. Refere-se que este foi o único parâmetro objecto de sucessivos ajustes nas presentes análises numéricas. Relativamente a estas modelações, a comparação das expressões (IV. 17) e (IV. 49) justifica os diferentes valores indicados no Quadro VII-1 para β , como se indica na expressão seguinte:

$$\beta_{ETF} = \frac{\beta_{DE}}{1 - \beta_{DE}} \quad (\text{VII. 2})$$

Realizaram-se, ainda, análises baseadas no modelo de fendilhação DE fazendo variar o valor de β segundo uma das leis apresentadas no subcapítulo IV.2.3.3 (pág. 105). Pela sua robustez, foi escolhida a lei de retenção variável da rigidez de corte proposta por Pruijsers (Pruijssers, 1988a), definida na expressão (IV. 53). A referida curva foi aquela que produziu, sistematicamente, resultados mais ajustados. Como se pode comprovar no Gráfico VII-1, estas modelações (DE_V) conseguem, também elas, captar correctamente a resposta estrutural das diferentes lajes. O ajuste às respostas experimentais foi conseguido, exclusivamente, através de sucessivas variações do parâmetro ξ (ver Quadro VII-1).

Os resultados obtidos são sumariados no Quadro VII-1, onde se indicam os valores da aproximação $P_{u,num}/P_{u,exp}$. Como se vê no Gráfico VII-1, ambos os modelos de fendilhação conseguem reproduzir adequadamente as respostas estruturais, obtendo-se um satisfatório ajust-

mm - Refere-se, quanto a estas modelações, que a queda da carga (Gráfico VII-1) está sistematicamente associada a extravaso do estado de tensão relativamente à correspondente superfície de rotura, como se pode comprovar no Gráfico VII-2 e no Gráfico VII-3

te em todas as fases dos ensaios.

Na fase final do carregamento numérico, as marcas a cheio sobre as linhas de comportamento (Gráfico VII-1) indicam um incremento não convergido. De facto, nessas análises, não foi possível obter convergência para além do penúltimo incremento indicado, por mais reduzidos que fossem os incrementos de deslocamento impostos. Deve observar-se que a rotura numérica, na qual um procedimento de iteração numérica não consegue convergir, pode não ter qualquer relação com o colapso real de uma estrutura.

Quadro VII-1 - Cargas de rotura experimentais, energia de fractura e síntese dos resultados obtidos pelo MEF.

Série	Referência	G_F (Nm/m ²)	$P_{u,exp}$ (kN)	Modelo de fendilhação					
				DE - decomposição de extensões				ETF - extensão total	
				DE_C		DE_V		ETF_C	
				β_{DE} (%)	$P_{u,num}/P_{u,exp}$ (-)	Pruijssers ξ (-)	$P_{u,num}/P_{u,exp}$ (-)	β_{ETF} (%)	$P_{u,num}/P_{u,exp}$ (-)
1	AC0	100	685	5,5	1,00	8,25	1,03	1,5	1,01
	AE0	112	468	2,5	1,00	8,45	1,04	2,5	1,01
	ACA1	98	840	4,5	0,98	7,30	1,00	4,0	0,99
	AEA1	113	626	5,5	1,01	5,60	0,99	n. c.	-
2	FC0	78	651	6,5	1,02	6,25	1,01	3,4	1,02
	FE0	75	373	6,0	1,01	n. c.	-	3,5	1,02

Notações: G_F : energia de fractura estimada com recurso à expressão (IV. 25), pág. 90; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; $P_{u,num}$: capacidade de carga obtida pela modelação numérica; n. c. : análise não efectuada

Não se devendo, portanto, inferir da referida não convergência a rotura numérica do modelo de laje procede-se à sua justificação confrontando o estado de tensão dos pontos de Gauss situados na camada inferior de betão, cuja localização se indica na Figura VII-2, com a respectiva envolvente de rotura. O Gráfico VII-2 ilustra o resultado obtido para a análise DE_V da laje ACA1.

PG1 PG2 PG3 PG4 PG5 PG6 PG7 PG8

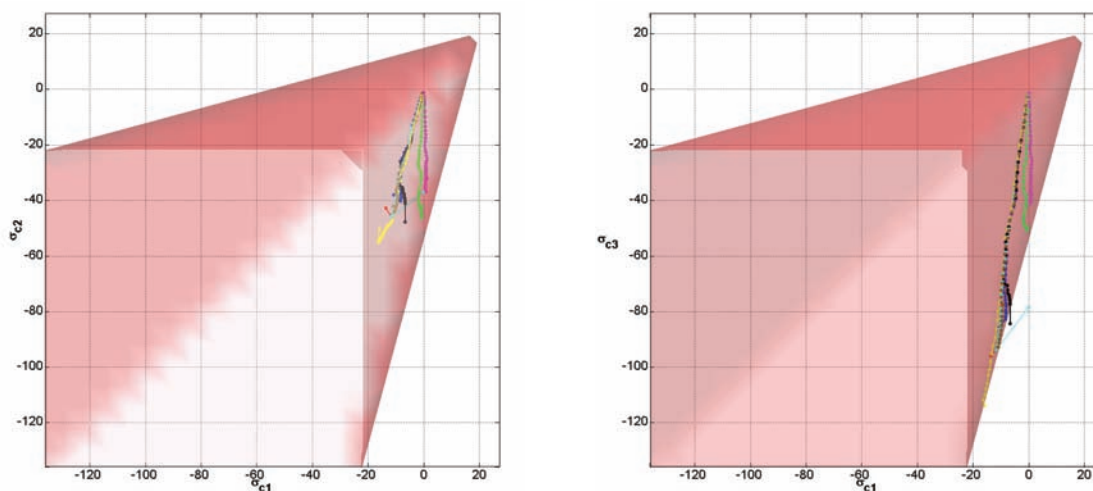
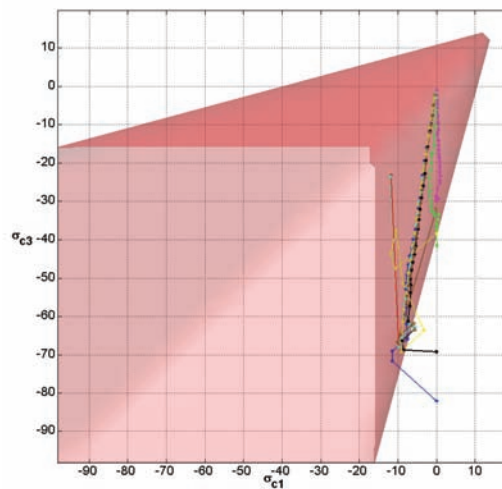
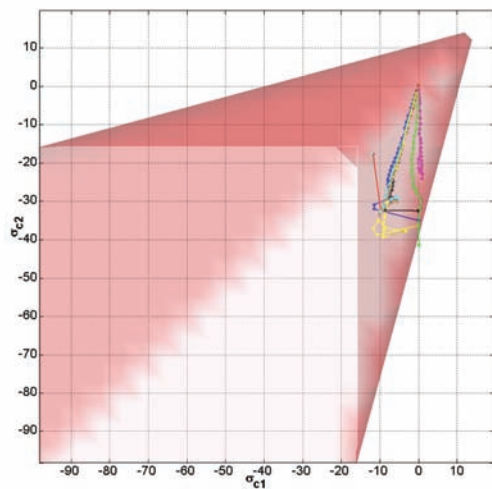


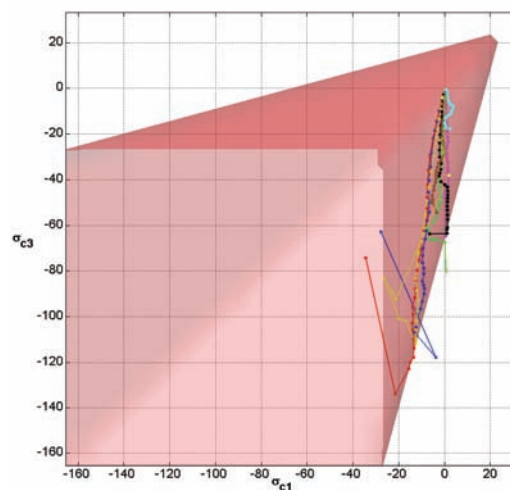
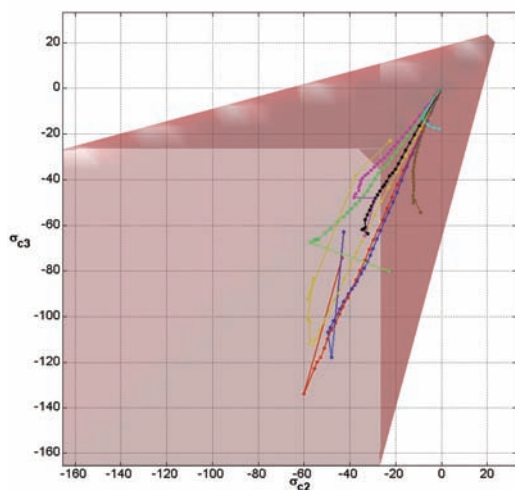
Gráfico VII-2 - Evolução do estado de tensão nos diferentes pontos de Gauss - Laje ACA1 (DE_V).

Das oito camadas de pontos de Gauss localizados ao longo da espessura da laje, analisam-se (Gráfico VII-2) os da camada inferior, mais próximos da zona de inserção do pilar na laje.

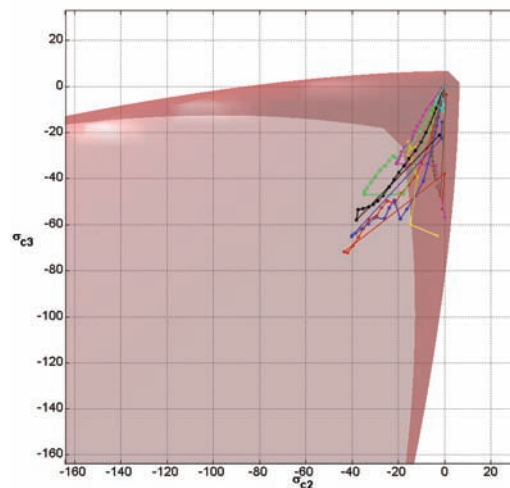
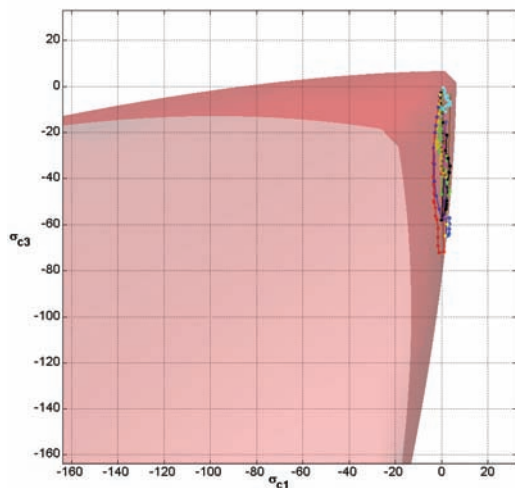
PG1 PG2 PG3 PG4 PG5 PG6 PG7 PG8



a) Laje FC0 (análise DE_C)



b) Laje AEA1 (análise DE_C)



c) Laje AE0 (análise ETF_C)

Gráfico VII-3 - Evolução do estado de tensão nos diferentes pontos de Gauss.

Como se pode verificar, no incremento de carga correspondente à rotura numérica, vários pontos de Gauss que se encontravam em avançado regime de amolecimento transpõem a superfície de rotura. O procedimento anteriormente descrito é aplicado, também, às lajes FC0, AEA1 e AE0 no Gráfico VII-3 (todos os incrementos são convergidos).

A análise do Gráfico VII-3 evidencia ser a análise numérica capaz de captar a rotura convenientemente. De facto a alteração do funcionamento estrutural (corte confinado) é manifestada através da mudança de direcção das tensões principais na carga máxima, extravasando a superfície de rotura.

Refere-se, ainda, que, em algumas das análises desenvolvidas, a modelação numérica mostrou a capacidade de estabelecer um novo estado de equilíbrio para além da queda da carga representada, que se acredita não ter significado físico.

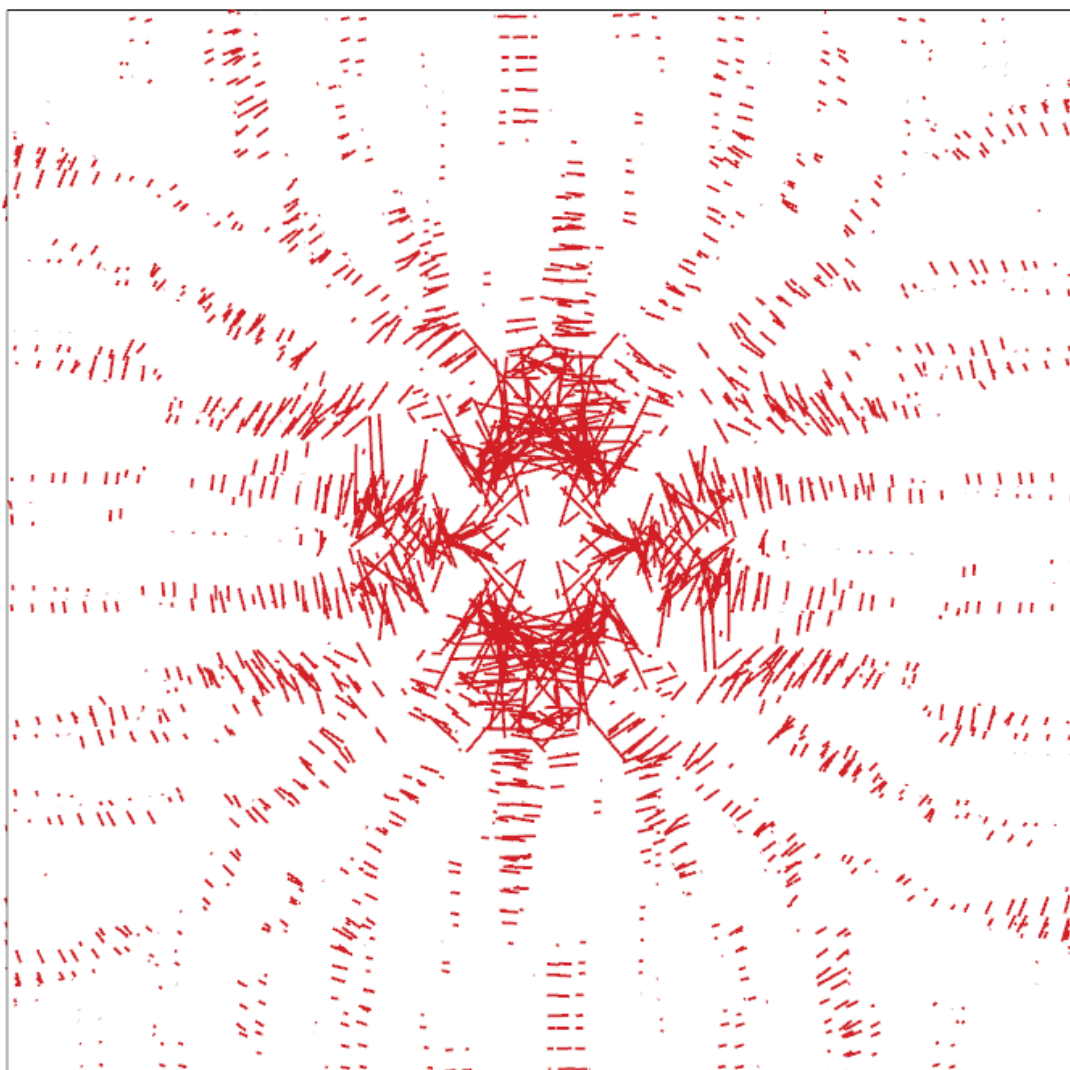
Assim, o processo de identificação das roturas numéricas por corte/compressão baseia-se na observação do padrão de fendilhação e na constatação do regime de amolecimento do betão na zona de inserção do pilar na laje.

Nas figuras seguintes são ilustrados os padrões de fendilhação, a deformada total na carga máxima e a deformada incremental correspondente ao último incremento da história de carga.

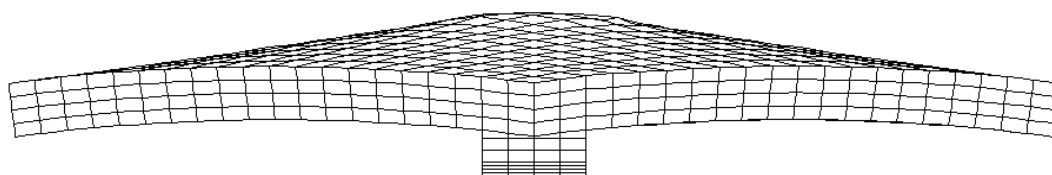
Os padrões numéricos de fendilhação apresentam uma aproximação muito satisfatória ao padrão de fendilhação real. De facto, a presença dos cantos da laje é também evidenciada. Repare-se que a orientação da fendilhação segue trajectórias muito próximas das experimentais. Além disso, o próprio espaçamento das fendas é semelhante ao registado experimentalmente.

Como se pode constatar nas figuras que se seguem, as deformadas incrementais apontam no sentido da manifesta inversão da curvatura, associada à queda da capacidade resistente.

Por outro lado, refere-se que, apesar da dupla simetria do problema no caso do punçoamento centrado e da simetria simples no caso do punçoamento excêntrico, os padrões de fendilhação calculados não são absolutamente simétricos. Este facto pode ficar a dever-se a dificuldades numéricas no algoritmo ou à diferente altura útil das armaduras longitudinais em cada direcção da laje.



a) Padrão de fendilhação com os vectores normais à abertura das fendas (50 ×)

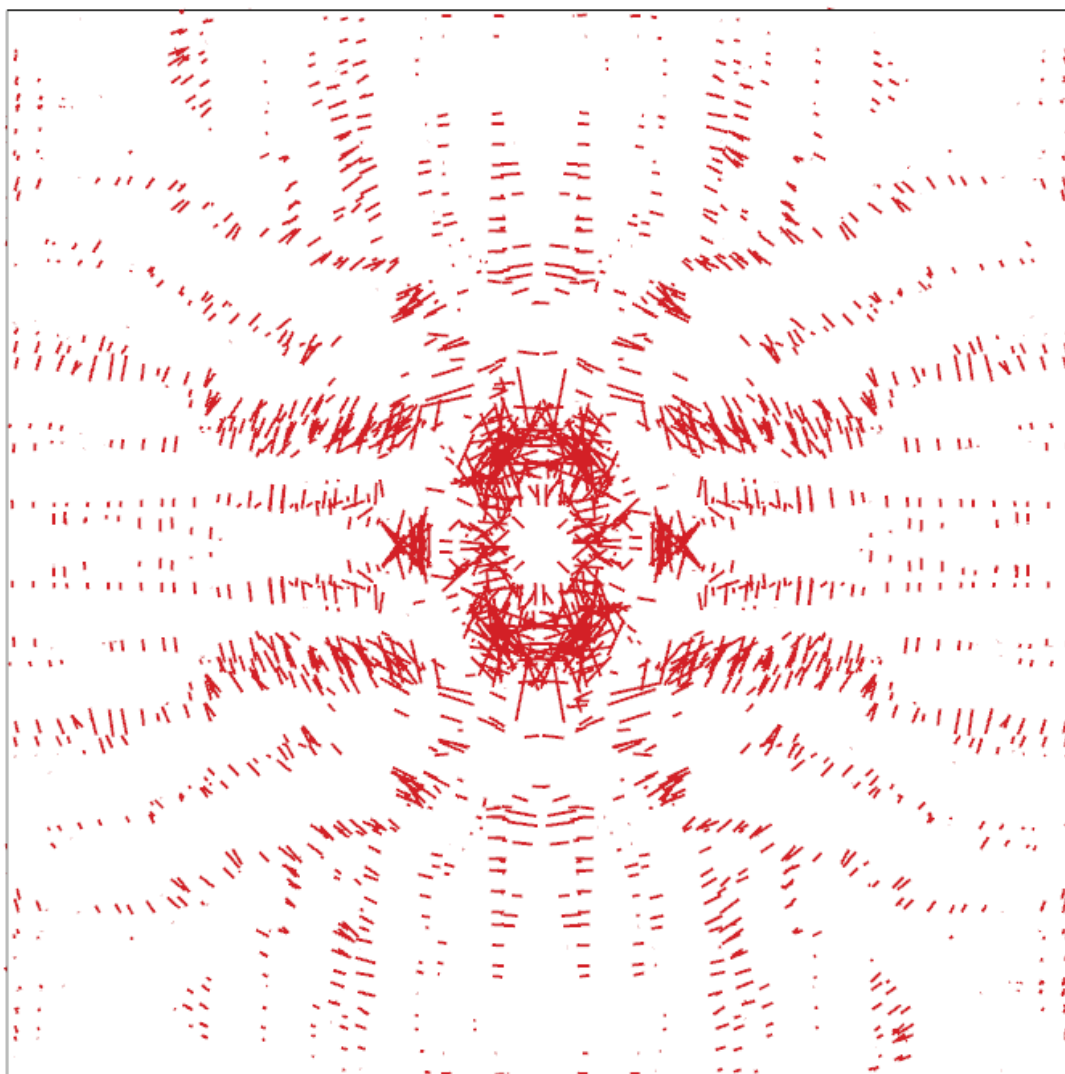


b) Laje deformada (10 ×) para a carga numérica última

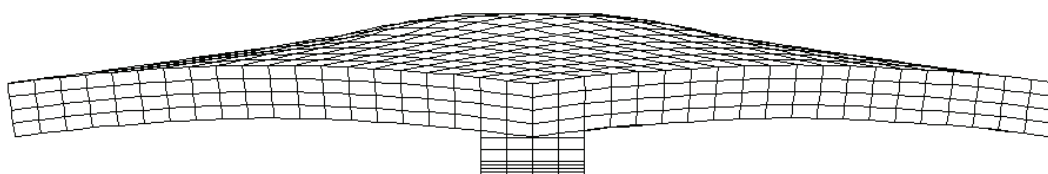


c) Deformada incremental (300 ×) para a carga numérica última

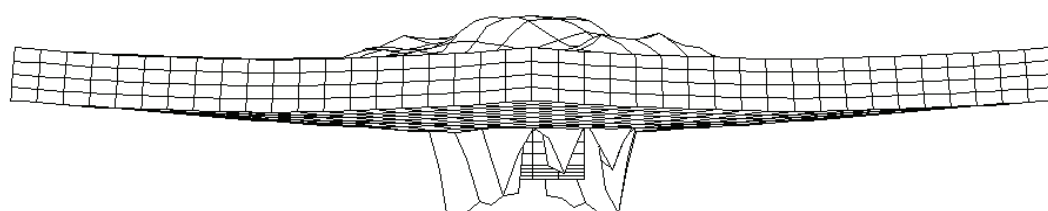
Figura VII-3 - Resultados numéricos - Laje ACA1 (análise DE_V).



a) Padrão de fendilhação com os vectores normais à abertura das fendas (75 ×)

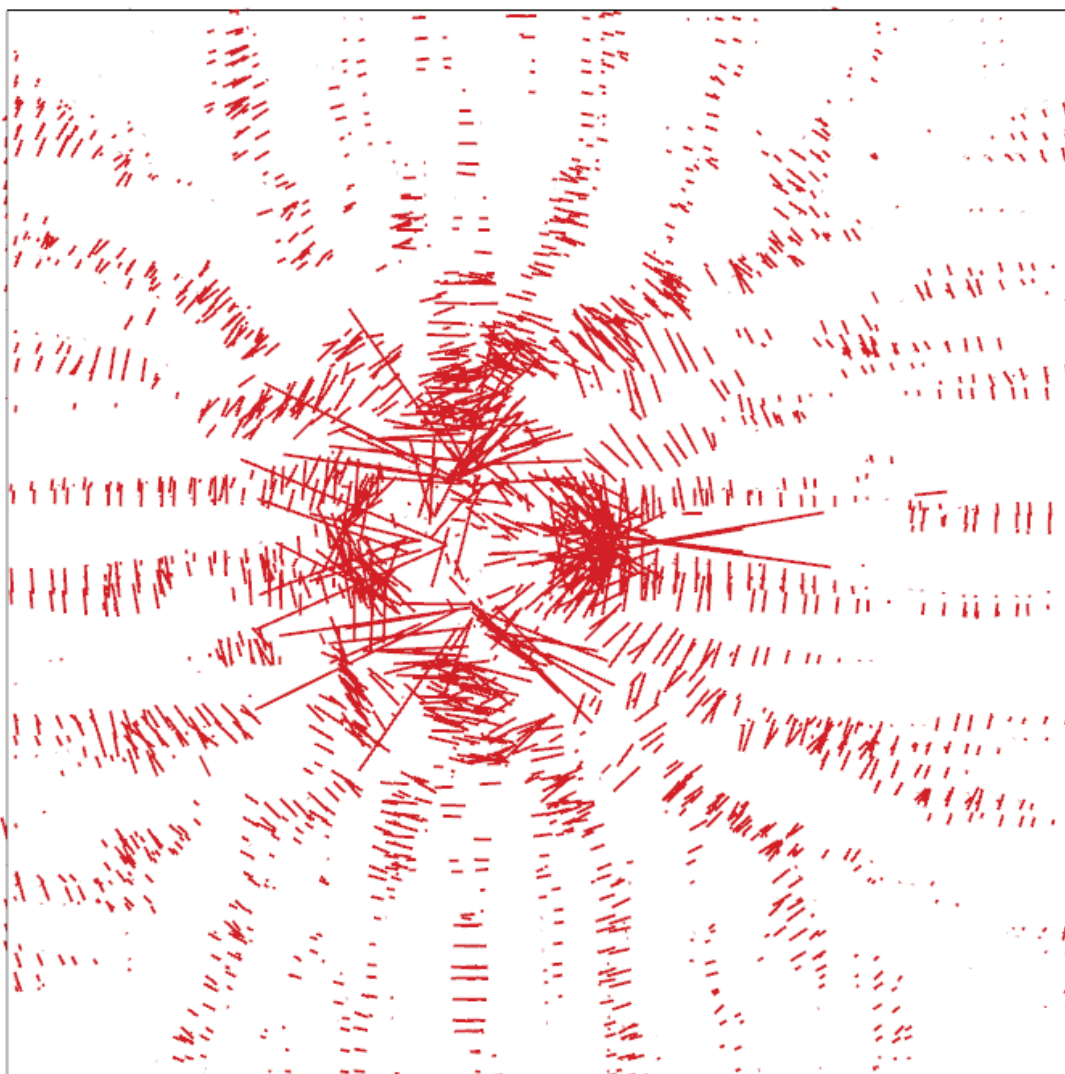


b) Laje deformada (10 ×) para a carga numérica última

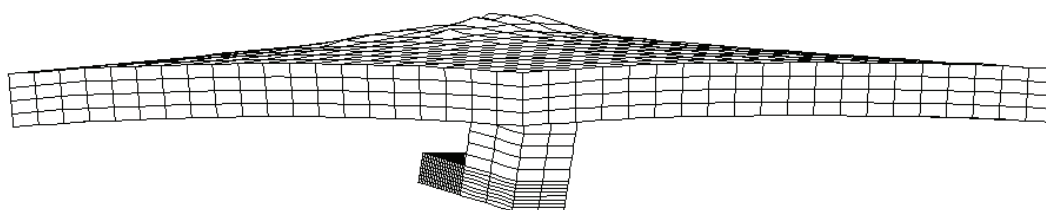


c) Deformada incremental (300 ×) para a carga numérica última

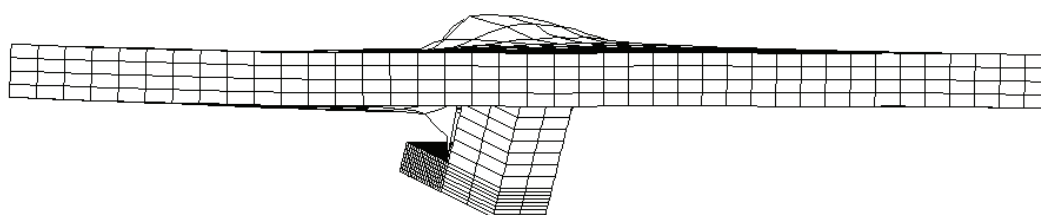
Figura VII-4 - Resultados numéricos - Laje FC0 (análise DE_C).



a) Padrão de fendilhação com os vectores normais à abertura das fendas (75 ×)

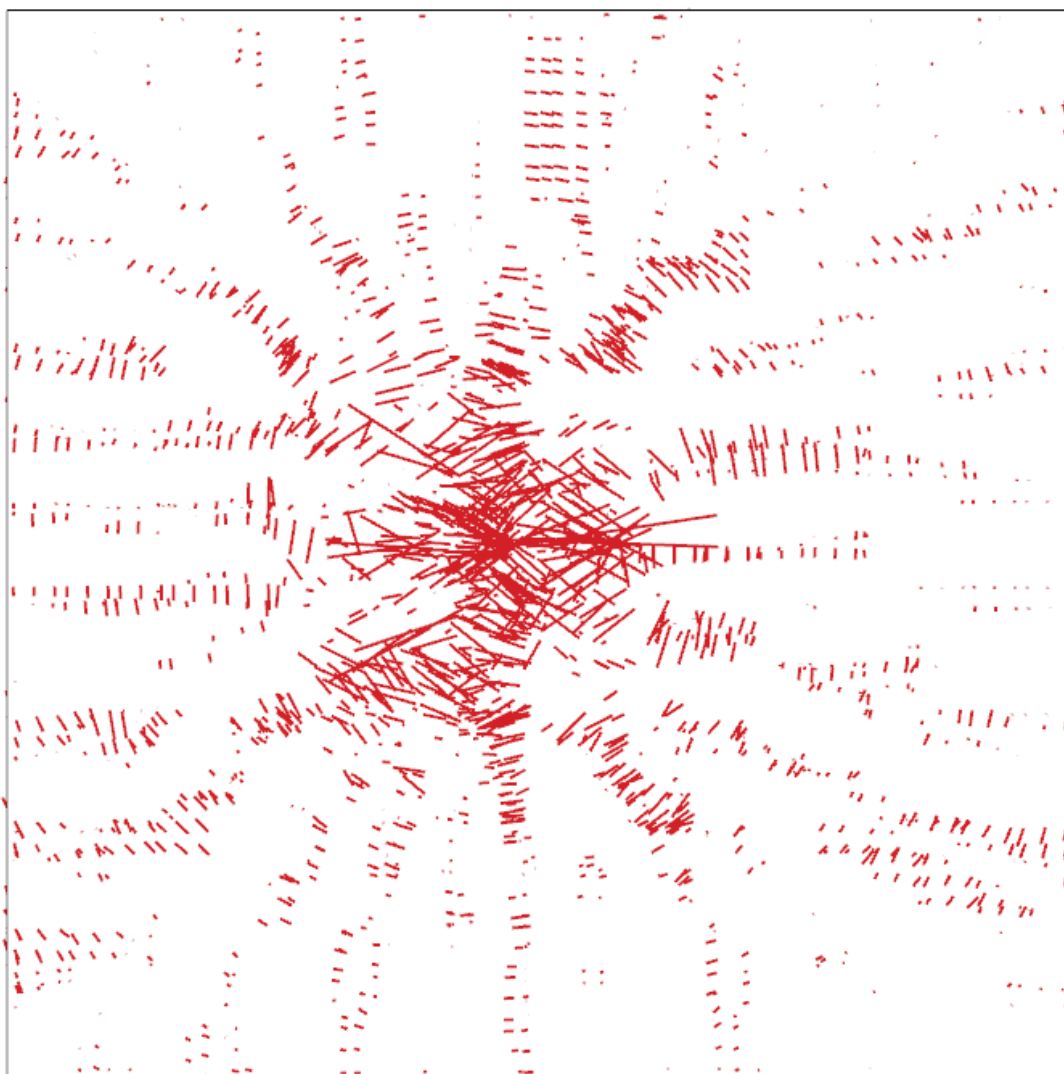


b) Laje deformada (10 ×) para a carga numérica última

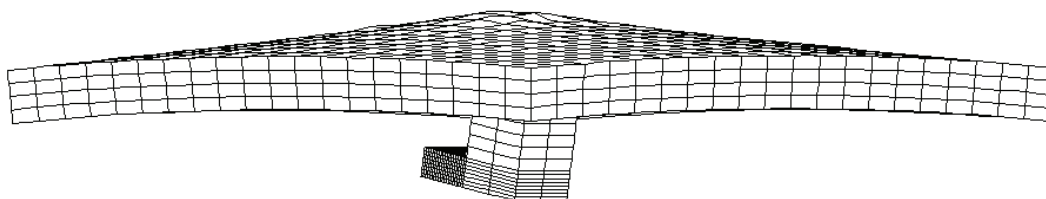


c) Deformada incremental (300 ×) para a carga numérica última

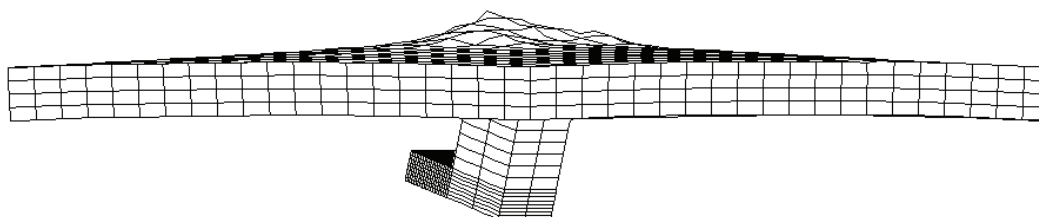
Figura VII-5 - Resultados numéricos - Laje AEA1 (análise DE_C).



a) Padrão de fendilhação com os vectores normais à abertura das fendas (100 x)



b) Laje deformada (10 x) para a carga numérica última



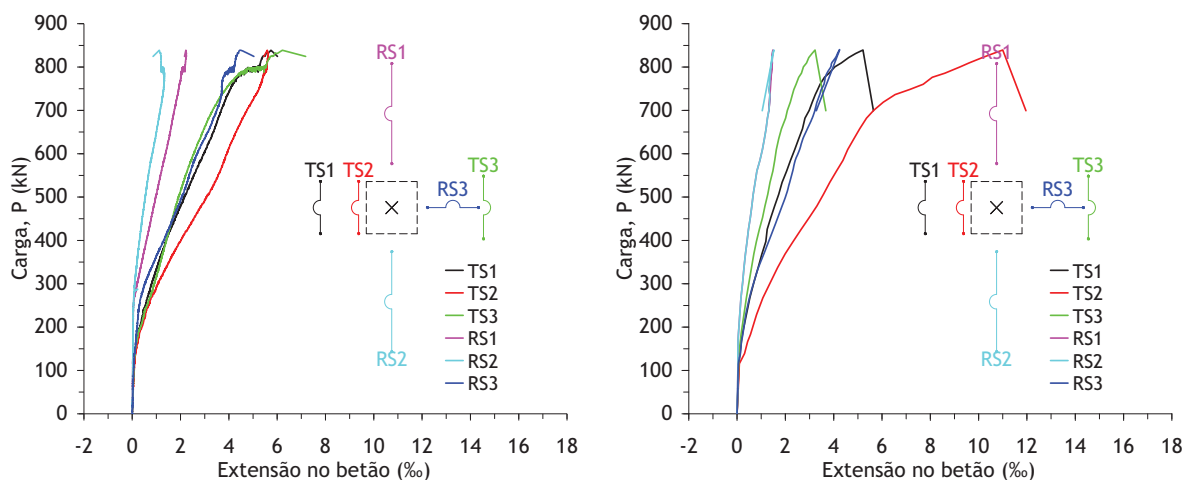
c) Deformada incremental (300 x) para a carga numérica última

Figura VII-6 - Resultados numéricos - Laje AE0 (análise ETF_C).

VII.2.3.2 Extensões da superfície do betão

Os gráficos seguintes apresentam a evolução das extensões na superfície do betão, para as direcções tangencial e radial, nas faces superior - positivas e inferior - negativas, nas secções instrumentadas, em função da carga P aplicada, comparando-se os resultados experimentais e numéricos.

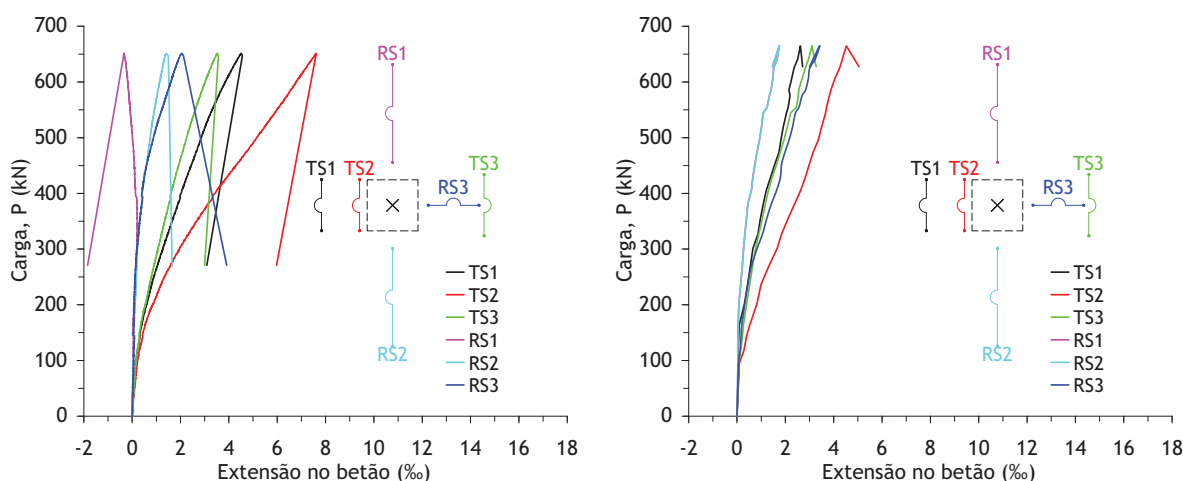
• FACE SUPERIOR



a) resultado experimental

b) modelação numérica (DE_V)

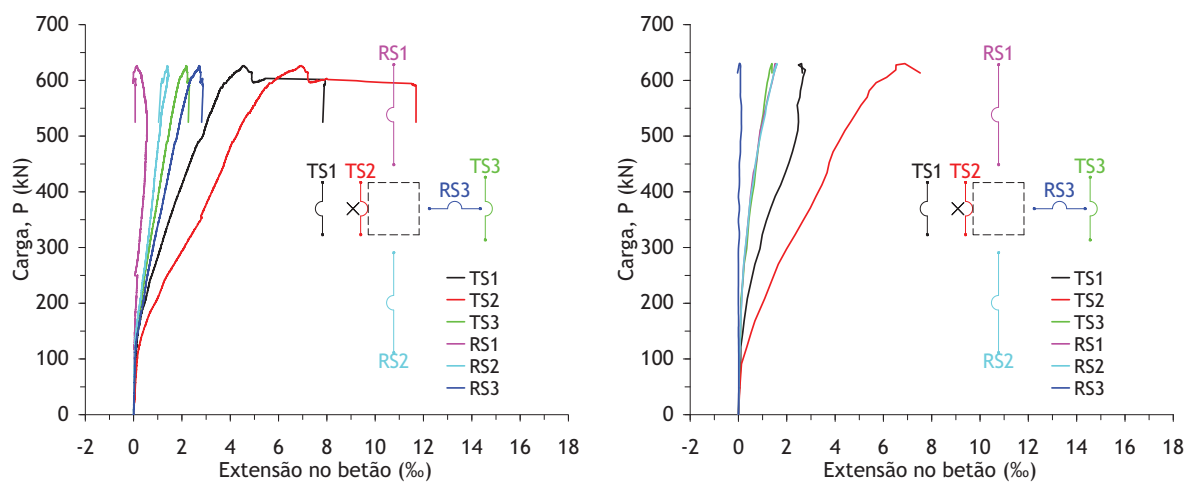
Gráfico VII-4 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje ACA1.



a) resultado experimental

b) modelação numérica (DE_C)

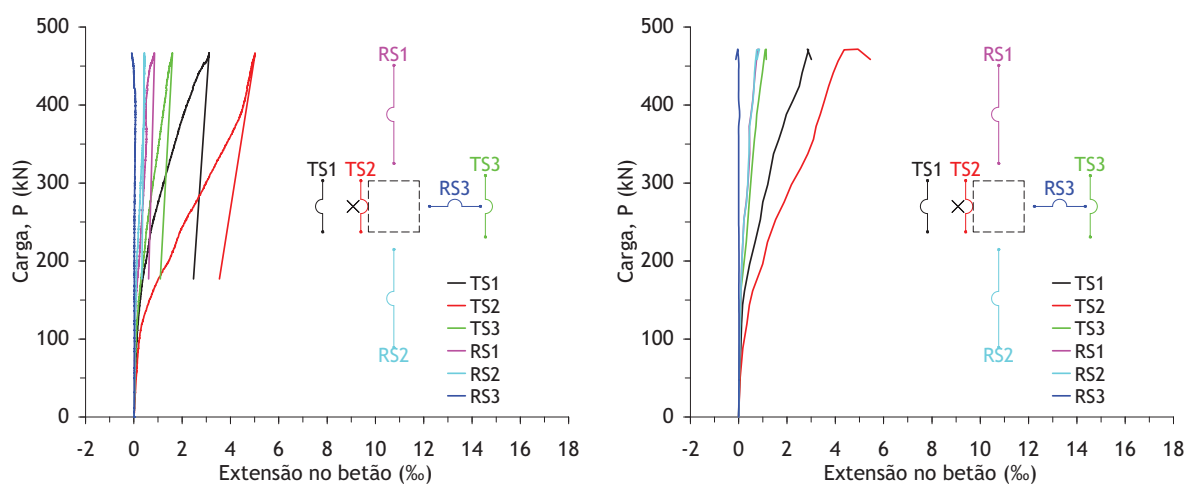
Gráfico VII-5 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje FC0.



a) resultado experimental

b) modelação numérica (DE_C)

Gráfico VII-6 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AEA1.



a) resultado experimental

b) modelação numérica (ETF_C)

Gráfico VII-7 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje AE0.

• FACE INFERIOR

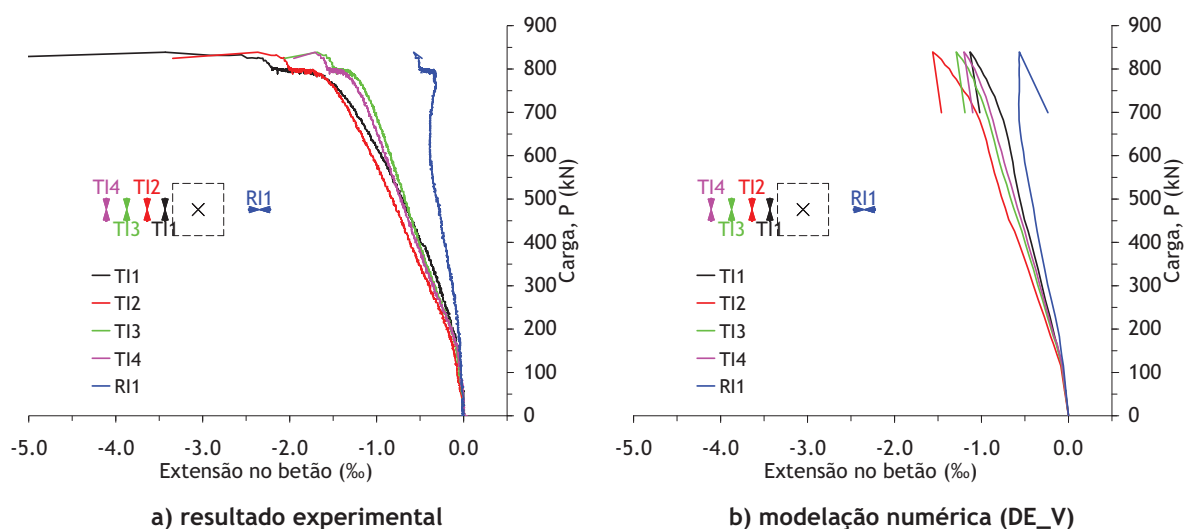


Gráfico VII-8 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje ACA1.

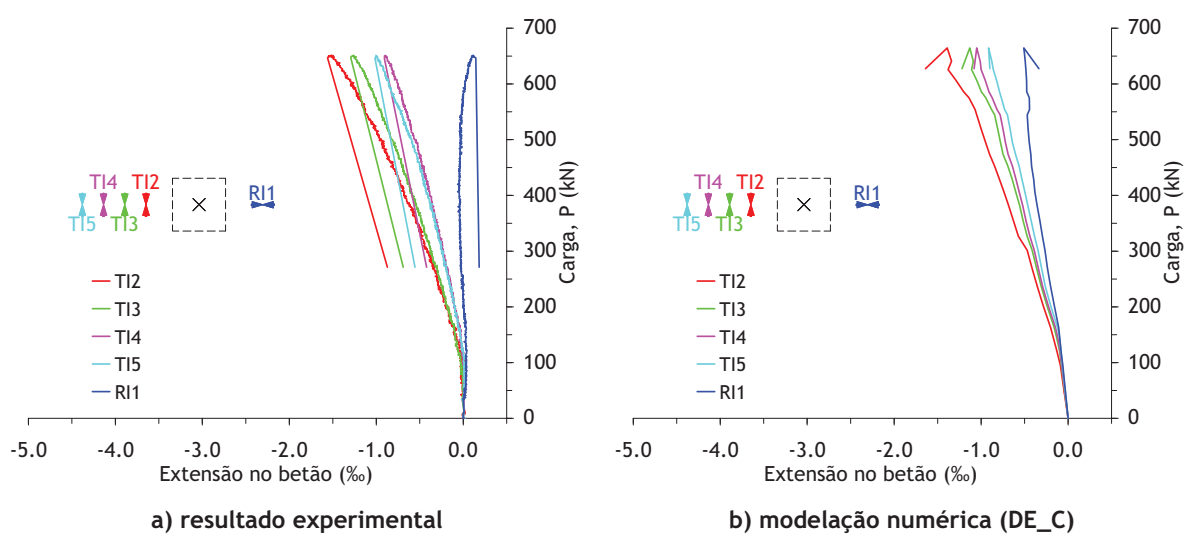
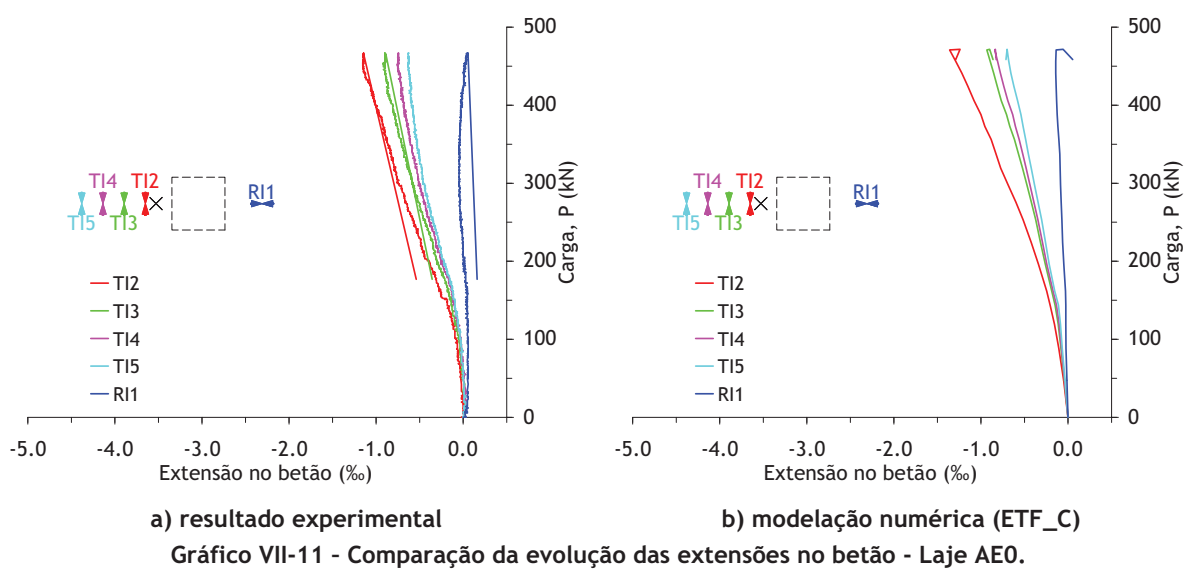
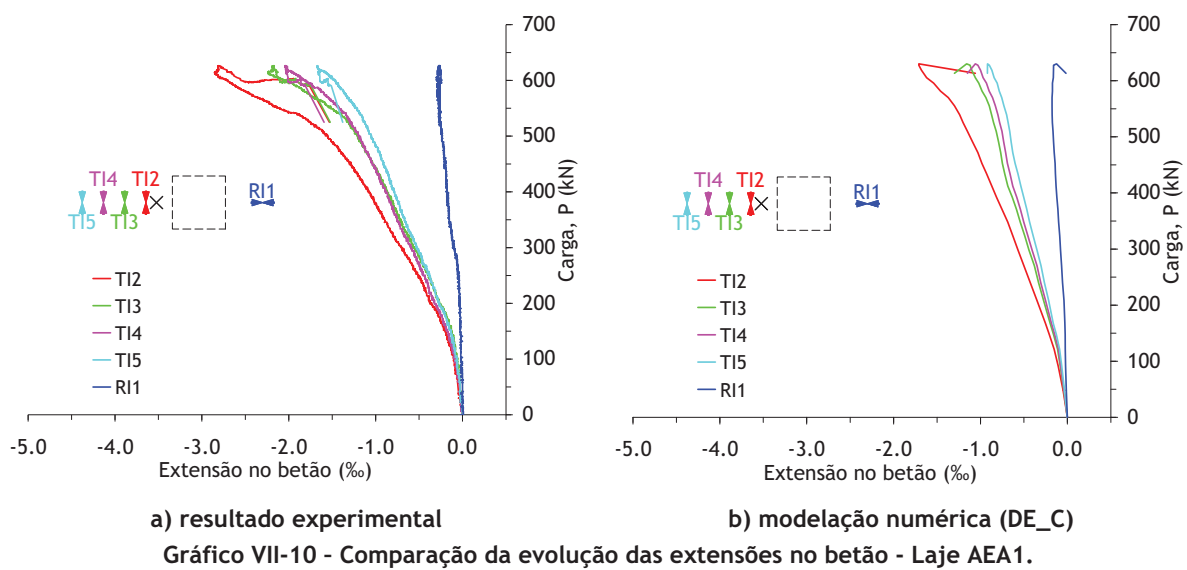


Gráfico VII-9 - Comparação da evolução das extensões no betão - Laje FC0.



VII.2.3.3 Extensões da armadura transversal

Os gráficos seguintes mostram a deformação medida na armadura de punçoamento cuja localização pode ser vista em V.3.6.3.

• PUNÇOAMENTO CENTRADO

O Gráfico VII-12 compara a deformação medida na armadura de punçoamento com a obtida pela modelação numérica.

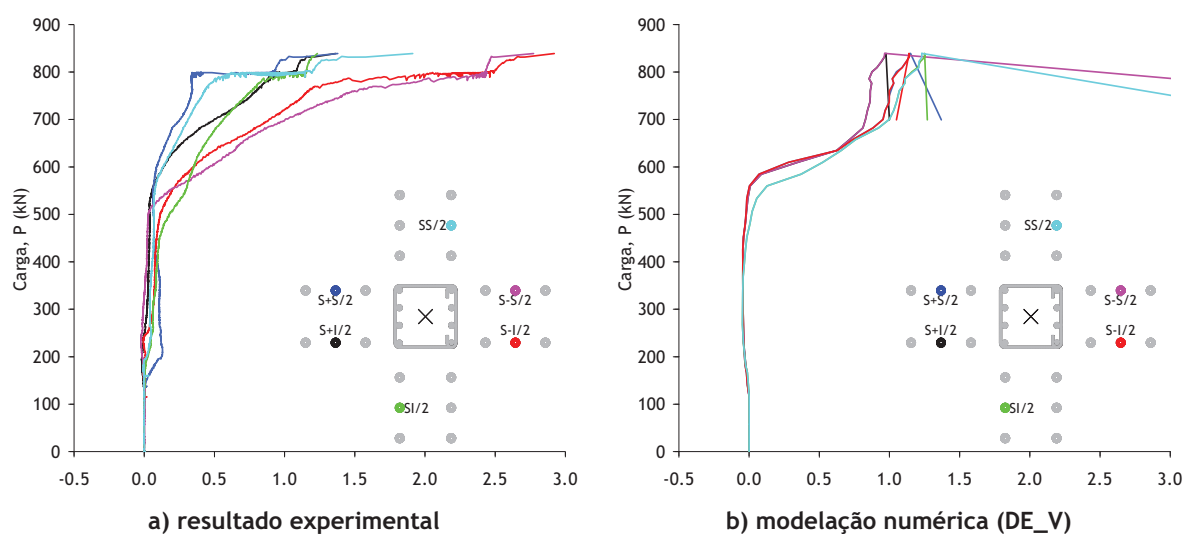


Gráfico VII-12 - Comparação da evolução das extensões (%) nas armaduras transversais - laje ACA1.

• PUNÇOAMENTO EXCÊNTRICO

O Gráfico VII-13 compara a deformação medida na armadura de punçoamento com a obtida pela modelação numérica.

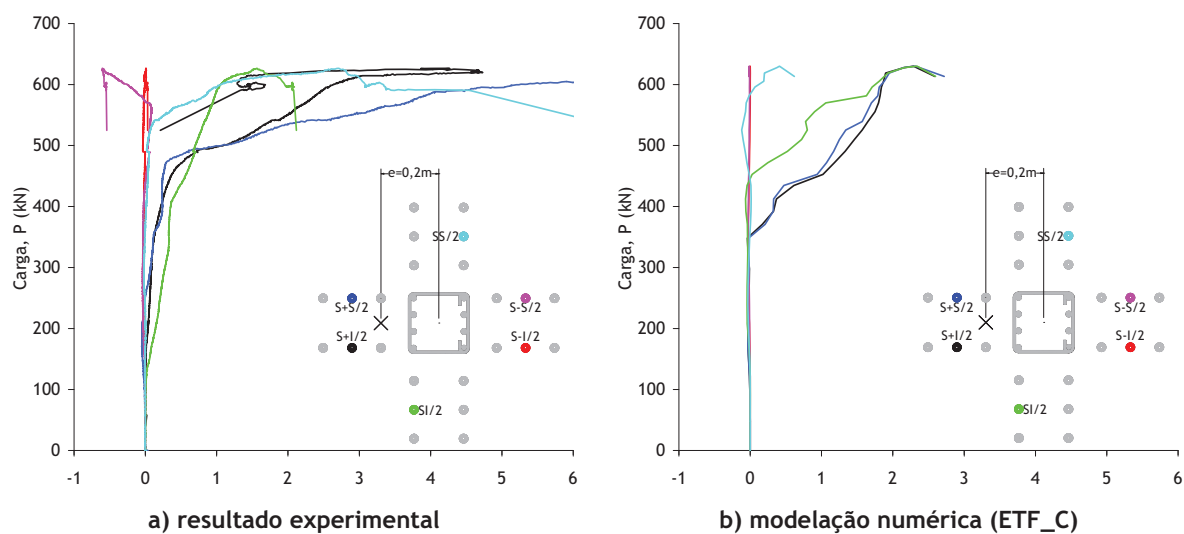


Gráfico VII-13 - Comparação da evolução das extensões (%) nas armaduras transversais - laje AEA1.

VII.3 CONCLUSÕES

As análises numéricas baseadas nos modelos DE e ETF mostram que modelação indirecta da aderência entre o betão e as armaduras longitudinais, aplicando o conceito de retenção de tensões de tracção no betão, sobreavaliam as respostas experimentais. O exposto pode ser justificado em termos do excesso de energia disponível e da sua lenta degradação pelas fissuras.

Esta constatação evidencia que as propriedades atribuídas à camada de elementos que contém as armaduras governam, em grande medida, a rigidez da resposta estrutural.

A reprodução numérica da capacidade resistente veio a revelar-se ser fortemente influenciada pelo valor do factor de retenção da rigidez de corte. De facto, só foi possível reproduzir as roturas experimentais obtidas recorrendo a sucessivos ajustes deste parâmetro.

A formulação variável para β apresentou alguma robustez, mas são ainda necessários estudos para se aferir da sua eficácia.

As respostas experimentais obtidas no âmbito desta tese foram correctamente reproduzidas nas suas diversas vertentes: deformação, capacidade de carga, fendilhação e extensões no betão e na armadura transversal. Esta conclusão é extensiva aos modelos de laje de BRFA, para os quais foi aplicada a mesma abordagem das restantes lajes de BRN.

A modelação sistemática das roturas frágeis típicas do punçoamento, aqui realizada, permite afirmar que a previsão numérica das respostas experimentais de lajes é ainda uma tarefa delicada.

VIII CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

VIII.1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste Capítulo, um resumo das principais conclusões referidas ao longo deste trabalho, assim como um sumário dos principais aspectos desenvolvidos. Referem-se, também, alguns temas que poderão ser objecto de futuros desenvolvimentos.

VIII.2 SUMÁRIO E CONCLUSÕES

- **Estado da arte**

Neste Capítulo, foi levada a cabo uma revisão do estado da arte do problema do punçoamento, passando-se em revista o enquadramento histórico das lajes fungiformes e a sua evolução, a revisão dos mais significativos ensaios experimentais bem como dos mais relevantes modelos e critérios de rotura. Especial destaque é dado aos parâmetros influentes no mecanismo resistente ao punçoamento.

- **Disposições regulamentares**

No Capítulo III, as diferentes abordagens regulamentares ao problema do punçoamento são descritas, especialmente quanto à excentricidade. A filosofia em que assentam os diversos regulamentos é, na essência, a mesma, apontando-se as diferenças práticas encontradas nas diferentes normas. São também analisadas e comparadas as principais disposições regulamentares para o caso do punçoamento centrado em pilares interiores.

É descrita uma exaustiva análise com vista à aferição das formulações regulamentares

relativas aos efeitos da resistência à compressão, da taxa de armadura principal e do factor de efeito de escala na capacidade resistente ao punçoamento.

As previsões regulamentares são comparadas com uma extensa base de dados compilada no âmbito da presente tese. A comparação levada a cabo entre os resultados de mais de duas centenas de ensaios e as respectivas previsões regulamentares permitiu detectar desvios normativos, propondo-se as seguintes alterações ao articulado dos diferentes códigos:

- Eliminação da limitação regulamentar $f_{cm} \leq 50$ MPa, no CEB-FIP MC 90;
- Eliminação do limite regulamentar $f_{c,cub} \leq 40$ MPa, na norma britânica BS 8110-1:1997;
- Alargamento da distância kd de $1,5d$ para $2d$ bem como a não limitação do coeficiente de efeito de escala ($\xi \leq 2$), no actual código europeu EN 1992-1-1.

Conclui-se que a norma que globalmente apresenta as melhores previsões da capacidade resistente, no caso de punçoamento centrado ou excêntrico, com ou sem armaduras transversais, é o CEB-FIP MC 90. Contudo, levando em consideração as alterações acima referidas, o código europeu, EN 1992-1-1, apresenta também um excelente desempenho quando confrontado com os resultados experimentais. A norma britânica BS 8110-1: 1997 apresenta a formulação mais simples e prática em termos da verificação da capacidade resistente, já que esta é conduzida em sucessivas zonas delimitadas por perímetros de controlo igualmente espaçados, não perdendo de vista a necessária precisão. Finalmente, o REBAP estima as cargas de rotura mais conservativas.

Propõem-se, ainda, duas expressões para a determinação do módulo plástico do perímetro exterior de controlo para o caso de um pilar interior de secção quadrada. Estas expressões são necessárias à aplicação do articulado das normas CEB-FIP MC 90 e Código europeu, EN 1992-1-1, nomeadamente no caso de ligações laje/pilar dotadas de armaduras transversais, submetidas a punçoamento centrado ou excêntrico.

Apresenta-se um procedimento que permite a previsão da localização da secção de rotura, baseado no conhecimento dos parâmetros regulamentares básicos ligados à determinação da capacidade resistente ao punçoamento, incluindo os efeitos da eventual excentricidade, em ligações dotadas ou não de armadura transversal. Define-se, assim, o parâmetro η . Para $\eta < 1$ a rotura localiza-se na região com armaduras transversais e para $\eta > 1$ na região exterior às mesmas.

- **Estudo experimental sobre punçoamento**

Os ensaios realizados em modelos de laje de betão armado submetidos a punçoamento

descritos no Capítulo V procuram evidenciar o efeito da armadura transversal, da excentricidade do carregamento e da utilização de betão incorporando ou não fibras de aço.

A pesquisa bibliográfica realizada permite afirmar que a espessura dos presentes modelos de laje é a maior até agora utilizada em ensaios de lajes, apoiadas em pilares interiores, com excentricidade da carga.

Todos os modelos de laje ensaiados, sob carga centrada ou excêntrica, com ou sem armaduras transversais e com ou sem a incorporação de fibras de aço, romperam por punçoamento/corte ou por flexão/punçoamento (nas lajes com armadura transversal), que se caracterizou pela penetração mais ou menos brusca do pilar no corpo da laje, acompanhada da formação e progressão da fenda característica da rotura diagonal por punçoamento. A superfície de rotura situou-se na região exterior às armaduras transversais pelo que se pode concluir ser suficiente o confinamento do betão e a amarração proporcionados pelas cabeças de ancoragem, mesmo para as presentes lajes relativamente pouco espessas.

No punçoamento centrado, as extensões de tracção na direcção tangencial são inicialmente muito reduzidas evidenciando um crescimento significativo a partir da carga que corresponde ao início da fissuração visível. Observa-se ainda uma diminuição do valor absoluto das extensões radiais de compressão próximo da carga de rotura traduzindo aí uma descompressão do betão originada pela reorientação das bielas comprimidas em direcção ao pilar. As extensões de compressão na direcção tangencial são nitidamente maiores do que na direcção radial e aumentam com a proximidade à face do pilar.

No punçoamento excêntrico, a inclusão da armadura transversal possibilitou um aumento significativo das extensões de compressão. A excentricidade da carga determinou uma redução da capacidade última de 32 % no caso das lajes sem armaduras transversais e de 28 % nas lajes com armaduras transversais. Pode, assim, afirmar-se que a armadura transversal utilizada não influencia significativamente o efeito da excentricidade.

Relativamente às lajes de betão incorporando fibras metálicas, a redução da capacidade resistente com a excentricidade é de 43 %. Esta diminuição nas lajes de BRFA é claramente superior ao valor que se esperaria, e mesmo superior ao correspondente valor das lajes de BRN, o que se pode justificar pela falta de homogeneidade na distribuição das fibras, como alias é típico dos betões auto-compactáveis.

A armadura transversal incrementou de forma significativa a resistência última das lajes tanto nos ensaios centrados como nos ensaios com excentricidade. Também a ancoragem dos pernos da armadura transversal mostrou ser eficiente, permitindo que se atinjam extensões superiores aos valores elásticos limites. A amarração dos pernos da armadura transversal criou pontos de apoio das bielas comprimidas formando-se um sistema de treli-

ça (biela-tirante) que permitiu a transmissão da carga de punçoamento desde o pilar até aos pontos de apoio.

As extensões medidas na armadura transversal atingiram valores iguais ou mesmo superiores a 2 % que correspondem, aproximadamente, à tensão de 400 MPa. Este valor é contudo superior aos correspondentes valores limites indicados em diversos regulamentos (REBAP, 1983; CEB-FIP, 1993).

A capacidade residual (pós-rotura) é incrementada com a armadura transversal. Também a ductilidade é aumentada na presença destas armaduras. Ao invés, a rotura é muito mais localizada nas lajes desprovidas de tal armadura. Os resultados apontados vão, portanto, no sentido de confirmar o elevado desempenho deste tipo de armadura transversal incrementando a capacidade resistente e a ductilidade da ligação laje/pilar. Verifica-se que as extensões máximas ocorrem nas lajes com armadura transversal tanto sob punçoamento centrado como sob punçoamento excêntrico (flexão/corte). A presença da armadura transversal determina um aumento das extensões tangenciais que é de 80 % para punçoamento centrado e de 138 % no caso de punçoamento excêntrico, para a carga última. As extensões radiais, embora de valores muito reduzidos apresentam tendência semelhante.

O programa experimental conduzido não permite tirar conclusões definitivas relativamente ao uso de BRFA porquanto os resultados experimentais obtidos respeitam apenas a lajes com baixo teor de fibrasⁿⁿ.

Também nas modelações numéricas tal se torna evidente pois a modelação da superior energia de fractura não se afigurou necessária.

- **Modelação computacional do comportamento de lajes fungiformes**

As simulações numéricas empregando elementos finitos constituem uma poderosa ferramenta de análise e previsão do comportamento da generalidade das estruturas. Com efeito, dado que a execução de ensaios laboratoriais é, muitas vezes, de custo elevado e os resultados obtidos são apenas referentes aos pontos ou secções instrumentados, as simulações numéricas são de grande interesse porquanto, se bem aferidas, possibilitam a reprodução de um ensaio experimental de forma económica e rápida, com resultados extensíveis à totalidade da estrutura analisada, esclarecendo o efeito de cada parâmetro interveniente.

Para o fenómeno do punçoamento, em particular, a análise numérica por elementos finitos baseada em modelos precisos para o betão pode ser de grande utilidade para o desenvol-

nn - Julga-se, portanto, que terá ocorrido o arrancamento da fibra em vez da cedência do aço da mesma

vimento de modelos mecânicos de punçoamento.

Descrevem-se e analisam-se as capacidades e as limitações da análise numérica no fenómeno do punçoamento disponibilizadas por um código comercial de elementos finitos. As diferentes formulações para o betão em compressão, tracção e corte bem como a modelação da aderência e das próprias armaduras são exaustivamente analisadas. Analisa-se, ainda, o papel desempenhado pela retenção da rigidez de corte no comportamento do betão fendilhado.

As análises numéricas baseadas nos modelos DE e ETF revelaram o papel determinante desempenhado pela modelação indirecta da aderência entre o betão e as armaduras longitudinais, aplicando o conceito de retenção de tensões de tracção no betão. Esta constatação evidencia que as propriedades atribuídas aos elementos adjacentes às armaduras principais governam, em grande medida, a rigidez da resposta estrutural.

A reprodução numérica da capacidade resistente veio a revelar-se ser fortemente influenciada pelo valor do factor de retenção da rigidez de corte. De facto, só foi possível reproduzir as roturas experimentais obtidas recorrendo a sucessivos ajustes deste parâmetro.

A modelação sistemática das roturas frágeis típicas do punçoamento permite afirmar que a previsão numérica das respostas experimentais de lajes é ainda uma tarefa delicada.

VIII.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A continuidade da investigação neste domínio torna-se indispensável, face às realidades presentes e aos desafios futuros.

Em termos de trabalhos experimentais, sugere-se a continuidade na condução de ensaios de punçoamento com o intuito de melhor conhecer o seu real comportamento, especialmente no tocante a:

- Excentricidade em duas direcções. No presente programa experimental foi apenas possível validar as expressões regulamentares para a influência da excentricidade numa direcção. Tem interesse averiguar se tal tendência se mantém na ausência de um plano de simetria do carregamento;
- O efeito de escala deve continuar a merecer a atenção de futuras investigações. As forças envolvidas no ensaio de lajes espessas são importantes. De qualquer modo, o ensaio experimental e a modelação numérica de lajes com, por exemplo, 30 cm de espessura aportarão, por certo, informação importante para validação

dos factores regulamentares de efeito de escala;

- O efeito do pré-esforço deve continuar a ser investigado. Especial atenção deve ser dado ao efeito da compressão no plano de lajes de espessura corrente.

Em termos de trabalhos numéricos, sugere-se a implementação de um modelo ainda mais robusto para modelar a retenção da rigidez de corte no betão fendilhado. Tal modelo deve ser capaz de considerar o efeito da eventual compressão no plano da laje, da presença de BER (cuja superfície de fractura difere da dos BRN), entre outros. O desenvolvimento deste tipo de ferramenta numérica potenciará, por certo, a condução de estudos numéricos e paramétricos exaustivos de forma rápida e económica, obviando as perturbações que sempre se verificam na instrumentação de lajes submetidas a punçoamento e alargando a informação disponível não apenas às secções instrumentadas. Simultaneamente, as modelações numéricas serão, por certo, ferramentas úteis com vista ao desenvolvimento de novos modelos de comportamento ao punçoamento bem assim como de formulações expeditas com aplicação prática ao nível do projecto de lajes fungiformes.

Considera-se, ainda, de interesse a exploração de uma solução estrutural híbrida pré-fabricada de laje fungiforme de betão de elevada resistência (com ou sem incorporação de fibras de aço) na zona dos capitéis e solidarizada em obra com betão *in-situ* incorporando agregados leves.

Esta solução integrada de pré-fabricação envolveria pilares também pré-fabricados, sendo, necessariamente, de esperar benefícios importantes ao nível da redução das acções gravíticas e, consequentemente, também das acções sísmicas bem como do “custo” estrutural global.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI (2005). ACI 318-05 - Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05). Farmington Hills, Michigan, ACI Committee 318: 430
- Albrecht, U. (2002). "Design of flat slabs for punching - European and North American practices." Cement & Concrete Composites Vol. 24: 531-538.
- Alexander, S. D. B. e S. H. Simmonds (1987). "Ultimate Strength of Slab-Column Connections." ACI Structural Journal Vol. 84, No. 3(ACI): 255-261.
- Andersson, J. L. (1963). Punching of Concrete Slabs With Shear Reinforcement. Transactions of the Royal Institute of Technology - Stockholm, Sweden, N.º 212. Göteborg: 59.
- Barragán, B. E. (2002). Failure and Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete under Tension and Shear. Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona. Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya. **Doctoral Thesis: 151.**
- Barros, J. A. O. d. (1995). Comportamento do Betão Reforçado com Fibras - Análise Experimental e Modelação Numérica. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Doutoramento.**
- Barros, J. A. O. d., V. M. C. F. Cunha, A. F. Ribeiro e J. A. B. Antunes (2005). "Post-cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete." Materials and Structures Vol. 38, No. 1(RILEM): 47-56.
- Bastos, A. M. d. M. R. S. T. d. (1997). A Experimentação como Metodologia de Interpretação do Comportamento de Estruturas de Betão. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Doutoramento 380.**
- Bažant, Z. P. (1984). "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal." Journal of Engineering Mechanics Vol. 110, No. 4(ASCE): 518-535.
- Bažant, Z. P. e Z. Cao (1987). "Size Effect in Punching Shear Failure of Slabs." Structural Journal Vol. 84, No. 1(ACI): 44-53.

- Bažant, Z. P. e L. Cedolin (1979). "Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis." Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 105, No. EM2: 297-315.
- Bažant, Z. P., J.-K. Kim e P. A. Pfeiffer (1986). "Nonlinear Fracture Properties from Size Effect Tests." Journal of Structural Engineering Vol. 112, No. 2(ASCE): 289-307.
- Bažant, Z. P. e B. H. Oh (1983). "Crack band theory for fracture of concrete." Materials and Structures Vol. 16, No. 93(RILEM): 155-176.
- Birkle, G. (2004). Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout. Department of Civil Engineering. Calgary, Alberta, The University of Calgary. **PhD Thesis**: 152.
- Birkle, G. e W. H. Dilger (2008). "Influence of Slab Thickness on Punching Shear Strength." ACI Structural Journal Vol. 105, No. 2: 180-188.
- Bischoff, P. H. (2007). Deflection and Stiffness Issues in FRC and Thin Structural Elements 2007. SP-248. P. H. Bischoff Fajardo, Puerto Rico: 103.
- Borst, R. d. (1986). Non-linear Analysis of Frictional Materials. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 140.
- Borst, R. d. e P. Nauta (1985). "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model." Eng. Comput. Vol. 2(Pineridge Press Ltd): 35-46.
- Broms, C. E. (1990). "Punching of Flat Plates - A Question of Concrete Properties in Biaxial Compression and Size Effect." ACI Structural Journal Vol. 87, No. 3: 292-304.
- Broms, C. E. (2005). Concrete flat slabs and footings - Design method for punching and detailing for ductility. Department of Civil and Architectural Engineering - Division of Structural Design and Bridges. Stockholm, Sweden, Royal Institute of Technology. **PhD Thesis**: 114.
- Broms, C. E. (2007). "Ductility of Flat Plates: Comparison of Shear Reinforcement Systems." ACI Structural Journal Vol. 104, No. 6: 703-701.
- BSI (1997). BS 8110-1:1997 - Structural use of concrete - Part 1: Code of practice for design and construction. London, British Standards Institution.
- Cánovas, M. F. (2005). Mejora de la ductilidad de los hormigones de alta resistencia mediante su refuerzo con fibras de acero. Simpósio Ibero-Americano "O Betão nas Estruturas", Coimbra, 535-543.
- CEB-FIP (1978). Model Code for Concrete Structures. Comité Euro-International du Béton. Lausanne, Thomas Telford Services Ltd.

- CEB-FIP (1993). Model Code 1990. Comité Euro-International du Béton. Lausanne, Thomas Telford Services Ltd: 437.
- CEB-FIP (1999a). Structural Concrete - Textbook on Behaviour, Design and Performance. Updated knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990. Stuttgart, International Federation for Structural Concrete (fib). **Volume 2 - Basis of design**: 305.
- CEB-FIP (1999b). Structural Concrete - Textbook on Behaviour, Design and Performance. Updated knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990. Stuttgart, International Federation for Structural Concrete (fib). **Volume 1 - Introduction - Design process - Materials**: 224.
- CEB (1997). Concrete Tension and Size Effects - Contributions from CEB Task Group 2.7 - Bulletin d'Information No. 237. Lausanne, Comité Euro-International du Béton: 253
- CEN (2001). prEN 1992-1 (Final Draft) - Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1: General rules and rules for buildings. Brussels, Central Secretariat
- CEN (2004). EN 1992-1-1 : Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels, Central Secretariat
- Červenka, V. e J. Červenka (2002). "ATENA Program Documentation." **Part 1 - Theory**: 112.
- Chen, W.-F. (2007). Plasticity in Reinforced Concrete, J. Ross Publishing: 474
- Chen, W.-F. e D.-J. Han (2007). Plasticity for Structural Engineers, J. Ross Publishing: 606
- Cornelissen, H. A. W., D. A. Hordijk e H. W. Reinhardt (1986). "Experimental determination of crack softening characteristics of normalweight and lightweight concrete." HERON Vol. 31, No. 2: 45-56.
- Criswell, M. E. (1974). "Static And Dynamic Response Of Reinforced Concrete Slab-Column Connections." ACI SP-42 Vol. 2: 721-746.
- Cruz, J. M. d. S. (1998). Comportamento Cíclico de Estruturas Porticadas de Betão Armado Reforçado com Fibras de Aço - Simulação Numérica e Análise Experimental. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Mestrado**: 251.
- CSA (2004). A23.3-04 - Design of concrete structures. Mississauga - Ontario, Canadian Standards Association
- DIANA (2002). Finite Element Analysis - Release 8. D. o. C. Research. Delft, The Netherlands, TNO Building and Construction Research.
- DIANA (2007). Finite Element Analysis - Release 9.2. D. o. C. Research. Delft, The Netherlands, TNO Diana BV.

- DIANA (2008). Finite Element Analysis - Release 9.3. D. o. C. Research. Delft, The Netherlands, TNO Diana BV.
- Dilger, W. H. (2000). "Flat slab-column connections." Prog. Struct. Engng Mater. Vol. 2: 386-399.
- DIN (2001). DIN 1045-1:2001-07 - Plain, reinforced and prestressed concrete structures - Part 1: Design and construction. Berlin, DIN Deutsches Institut für Normung e. V.
- Dooley, S. (2004). The development of material-adapted structural form. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. **PhD Thesis:** 206.
- Duarte, L. A. P. (1999). Punçoamento em Lajes Fungiformes de Betão Armado. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Coimbra, Universidade de Coimbra. **Tese de Mestrado:** 155.
- EHE (1999). Instrucción de Hormigón Estructural. Madrid, Ediciones de Autor Técnico, S. L.
- EHE (2004). Instrucción de Hormigón Estructural. Madrid
- Elgabry, A. A. e A. Ghali (1987). "Tests on Concrete Slab-Column Connections with Stud-Shear Reinforcement Subjected to Shear-Moment Transfer." ACI Structural Journal Vol. 84, No. 5(ACI): 433-442.
- Elstner, R. C. e E. Hognestad (1956). "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs." ACI Journal Vol. 53: 29-58.
- EN-1992-1-1 (2007a). EN 1992-1-1 DK NA:2007. National Annex to Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Denmark.
- EN-1992-1-1 (2007b). SFS-EN 1992-1-1. National Annex to Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Finland.
- EURO-C (1998). Computational Modelling of Concrete Structures. R. d. Borst, N. Bićanić, H. Mang e G. Meschke. Badgastein - Austria, A.A. Balkema, Rotterdam: 444. Volume 2
- Faria, R. M. e N. V. Pouca (1997). Esforço transversal. Torção. Punçoamento. Faculdade de Engenharia - Universidade do Porto. Porto.
- Favre, R., J.-P. Jaccoud, O. Burdet e H. Charif (1997). Dimensionnement des structures en béton - Aptitude au service et éléments de structures. T. d. G. Civil. Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes: 612.8
- Favre, R., J.-P. Jaccoud, M. Koprna e A. Radojicic (1989). Dimensionnement des structures en béton - Dalles, murs, colonnes et fondations. T. d. G. Civil. Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes: 449.8

- Feenstra, P. H. e R. d. Borst (1993). "Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete." HERON Vol. 38, No. 4: 76.
- fib.CEB-FIP (2001). Punching of structural concrete slabs - Bulletin 12. Lausanne, fib: 307. Technical report prepared by the CEB/fib Task Group - Utilisation of concrete tension in design
- Figueiras, J. A. (1983). Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells. Department of Civil Engineering. Swansea, University College of Swansea. **PhD Thesis**.
- Frénaij, J. W. I. J. (1989). Time-dependent Shear Transfer in Cracked Reinforced Concrete. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 183.
- Fürst, A. e P. Marti (1997). "Robert Maillart's Design Approach for Flat Slabs." Journal of Structural Engineering Vol. 123, No. 8(ASCE): 1102-1110.
- Gardner, N. J., J. Huh e L. Chung (2002). "Lessons from the Sampoong department store collapse." Cement & Concrete Composites Vol. 24: 523-529.
- Gardner, N. J. e Z.-y. Shao (1996). "Punching Shear of Continuous Flat Reinforced Concrete Slabs." ACI Structural Journal Vol. 93, No. 2(ACI): 218-228.
- Gasparini, D. A. (2002). "Contributions of C. A. P. Turner to Development of Reinforced Concrete Flat Slabs 1905-1909." Journal of Structural Engineering Vol. 128, No. 10(ASCE): 1243-1252.
- Gayed, R. B. (2005). Design for Punching Shear at Interior Columns in Prestressed Concrete Slabs: Resistance to Earthquakes. Department of Civil Engineering. Calgary, Alberta, The University of Calgary. **PhD Thesis**: 318.
- González-Vidosa, F., M. D. Kotsovos e M. N. Pavlović (1988). "Symmetrical Punching of Reinforced Concrete Slabs: An Analytical Investigation Based on Nonlinear Finite Element Modeling." Structural Journal Vol. 85, No. 3(ACI): 241-250.
- Guandalini, S. (2005). Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. **Docteur ès Sciences**: 179.
- Guandalini, S. e A. Muttoni (2004). Essais de poinçonnement symétrique des dalles en béton armé sans armature à l'effort tranchant - Punching tests on symmetrical reinforced concrete slabs without shear reinforcement. 00.03, Rapport 00.03-R1. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne: 78.
- Halfen (2007). Technical Approval Report TA7 5013. CARES. Kent: 10.
- Hallgren, M. (1996). Punching Shear Capacity of Reinforced High Strength Concrete Slabs. Department of Structural Engineering. Stockholm, Sweden, Royal Institute of Technology. **Doctoral Thesis**: 206.

- Hallgren, M. e S. Kinnunen (1996). Increase of Punching Shear Capacity by using High Strength Concrete. 4th International Symposium on Utilization of High-strength/High-performance Concrete, Paris, 1037-1046.
- Hawkins, N. M., A. Bao e J. Yamazaki (1989). "Moment Transfer from Concrete Slabs to Columns." ACI Structural Journal Vol. 88, No. 6(ACI): 705-716.
- Holanda, K. M. A. (2002). Análise dos Mecanismos Resistentes e das Similaridades de Efeitos da Adição de Fibras de Aço na Resistência e na Ductilidade à Punção de Lajes-cogumelo e ao Cisalhamento de Vigas de Concreto. São Carlos, Universidade de São Paulo. **Tese de Doutorado**: 279.
- Hordijk, D. A. (1991). Local approach to fatigue of concrete. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 210.
- Hsieh, S. S., E. C. Ting e W. F. Chen (1979). An Elastic-Fracture Model for Concrete. Proceedings of the Third Engineering Mechanics Division Special Conference, Austin, American Society of Civil Engineers, 437-440.
- Hsieh, S. S., E. C. Ting e W. F. Chen (1982). "A Plastic-Fracture Model for Concrete." International Journal of Solids Structures Vol. 18, No. 3: 181-197.
- IPQ (1998). Norma Portuguesa NP ENV 1992-1-1: Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Parte 1.1: Regras Gerais e Regras para Edifícios.
- IPQ (2003a). Norma Portuguesa Definitiva NP EN 12390-3: Ensaios do betão endurecido - Parte 3: Resistência à compressão dos provetes de ensaio.
- IPQ (2003b). Norma Portuguesa Definitiva NP EN 12390-6: Ensaios do betão endurecido - Parte 6: Resistência à tracção por compressão de provetes.
- IPQ (2003c). Norma Portuguesa Definitiva NP EN 12390-7: Ensaios do betão endurecido - Parte 7: Massa volúmica do betão endurecido.
- ISO (1980). ISO 4108-1980(E) - Concrete - Determination of tensile splitting strength of test specimens, ISO.
- ISO (1992). ISO 1000:1992(E) - SI units and recommendations for the use of their multiples and certain other units. Genève, ISO
- ITeC (2006). Documento de adecuación al uso. Barcelona, Institut de Tecnologia de la Construcció de Catalunya: 40.
- Kennedy, G. e C. H. Goodchild (2004). Practical Yield Line Design. Camberley, Surrey, Concrete Centre

- Kinnunen, S. e H. Nylander (1960). Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement. Transactions of the Royal Institute of Technology - Stockholm, Sweden, N.º 158. Göteborg: 112.
- Krüger, G. (1999). Résistance au poinçonnement excentré des planchers-dalles. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. **PhD Thesis**: 191.
- Kurihara, N., M. Kunieda, T. Kamada, Y. Uchida e K. Rokugo (2000). "Tension softening diagrams and evaluation of properties of steel fiber reinforced concrete." Engineering Fracture Mechanics Vol. 65, No. 2-3: 235-245.
- Kwak, H.-G. e F. C. Filippou (1990). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads. Structural Engineering - Mechanics and Materials. R. N. UCB/SEMM-90/14. Berkeley, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California: 120.
- Lignola, G. p. (2006). RC hollow members confined with FRP: Experimental behavior and numerical modeling. Naples, Italy, University of Napoli "Federico II". **PhD Thesis**: 328.
- Lima, J. d. A. e., V. Monteiro e M. Pipa (1996). Betão Armado - Esforços Transversos, de Torção e de Punçoamento. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil
- LNEC (1993). E 397-1993 - Especificação LNEC - BETÕES - determinação do módulo de elasticidade em compressão. Lisboa, LNEC.
- LNEC (1998). E 450-1998 - Especificação LNEC - Varões de aço A500 NR para armaduras de betão armado - características, ensaios e marcação. Lisboa, LNEC.
- LNEC (2002). E 460-2002 - Especificação LNEC - Varões de aço A500 NR de ductilidade especial para armaduras de betão armado - características, ensaios e marcação. Lisboa, LNEC.
- Löfgren, I., H. Stang e J. F. Olesen (2008). "The WST method, a fracture mechanics test method for FRC." Materials and Structures Vol. 41, No. 1(RILEM): 197-211.
- Loo, Y.-C. e H. Guan (1997). "Cracking and Punching Shear Failure Analysis of RC Flat Plates." Journal of Structural Engineering Vol. 123, No. 10(ASCE): 1321-1330.
- Lúcio, V. J. d. G. (1991). Waffle Slab Structures Under Vertical and Horizontal Loading. Instituto Superior Técnico. Lisboa, Universidade Técnica de Lisboa. **Tese de Doutoramento**.
- Maekawa, K., A. Pimanmas e H. Okamura (2003). Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete. London, Spoon Press: 721
- Malm, R. (2006). Shear cracks in concrete structures subjected to in-plane stresses. Department of Civil and Architectural Engineering. Stockholm, Sweden, Royal Institute of Technology. **PhD Thesis**.

- Markeset, G. (1993). Failure of Concrete under Compressive Strain Gradients. Department of Structural Engineering. Trondheim, Sweden, The Norwegian Institute of Technology - University of Trondheim - Norway. **Doctoral Thesis**: 168.
- Markeset, G. e A. Hillerborg (1995). "Softening of concrete in compression - localization and size effects." Cement and Concrete Research **Vol. 25, No. 4**(Pergamon): 702-708.
- Marzouk, H., M. Emam e M. S. Hilal (1996). "Effect of High-Strength Concrete Columns on the Behavior of Slab-Column Connections." ACI Structural Journal **Vol. 93, No. 5**(ACI): 545-554.
- Marzouk, H., M. Emam e M. S. Hilal (1998). "Effect of High-Strength Concrete Slab on the Behavior of Slab-Column Connections." ACI Structural Journal **Vol. 95, No. 3**(ACI): 227-237.
- Marzouk, H. e A. Hussein (1991). "Experimental Investigation on the Behaviour of High-Strength Concrete Slabs." Structural Journal **Vol. 88, No. 6**(ACI): 701-713.
- Marzouk, H. e D. Jiang (1997). "Experimental Investigation on Shear Enhancement Types for High-Strength Concrete Plates." Structural Journal **Vol. 94, No. 1**(ACI): 49-58.
- Megally, S. e A. Ghali (2000a). "Punching of Concrete Slabs due to Column Moment Transfer." Journal of Structural Engineering **Vol. 126, No. 2**(ASCE): 180-189.
- Megally, S. H. (1998). Punching Shear Resistance of Concrete Slabs to Gravity and Earthquake Forces. Department of Civil Engineering. Calgary, Alberta, The University of Calgary. **PhD Thesis**: 501.
- Megally, S. H. e A. Ghali (2000b). "Punching Shear Design of Earthquake-Resistant Slab-Column Connections." ACI Structural Journal **Vol. 97, No. 5**(ACI).
- Menétrey, P. G. (1994). Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures. Département de Génie Civil. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. **PhD Thesis**: 178.
- Menétrey, P. G. (1998). "Relationships between Flexural and Punching Failure." ACI Structural Journal **Vol. 95, No. 4**(ACI): 412-419.
- Menétrey, P. G. (2002). "Synthesis of punching failure in reinforced concrete." Cement & Concrete Composites **Vol. 24**: 497-507.
- Menétrey, P. G., R. Walther, T. Zimmermann, K. J. Willam e P. E. Regan (1997). "Simulation of Punching Failure in Reinforced-Concrete Structures." Journal of Structural Engineering **Vol. 123, No. 5**(ASCE): 652-659.
- Mier, J. G. M. v. (1987). "Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA." HERON **Vol. 32, No. 3**: 147.

- Mier, J. G. M. v., M. B. Nooru-Mohamed e G. Timmers (1991). "An experimental study of shear fracture and aggregate interlock in cementbased composites." HERON Vol. 36, No. 4: 104.
- Mirzaei, Y. e A. Muttoni (2008). Tests on the Post-Punching Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs. Institut de Structures - Laboratoire de Construction en Béton. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne: 58.
- Moe, J. (1961). "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Loads." Portland Cement Association Bulletin D47(Research and Development Laboratories): Skokie, 144.
- Mokhtar, A.-S., A. Ghali e W. Dilger (1985). "Stud Shear Reinforcement for Flat Concrete Plates." ACI Structural Journal Vol. 82, No. 5(ACI): 676-683.
- Montoya, P. J., Á. G. Meseguer e F. M. Cabré (1976). Hormigón Armado. Barcelona, Editorial Gustavo Gili, S.A.: 705.Tomo I
- Murray, K. A., D. J. Cleland e S. G. Gibert (1999). "The behaviours of edge panels in reinforced concrete flat slab structures." The Irish Scientist: 2.
- Muttoni, A. (2008). "Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement." ACI Structural Journal Vol. 105, No. 4: 440-450.
- Muttoni, A., O. Burdet e S. Guandalini Le poinçonnement des dalles précontraintes - application aux pont-dalles, EPFL.
- Muttoni, A. e J. Schwartz (1991). "Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement." IABSE Colloquium Vol. 62(Zurich, Switzerland): 703-708.
- Ngo, D. T. (2001). "Punching shear resistance of high-strength concrete slabs." Electronic Journal of Structural Engineering Vol. 1: 52-59.
- Nooru-Mohamed, M. B. (1992). Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 151.
- Park, R. e W. L. Gamble (1980). Reinforced Concrete Slabs. J. W. SONS: 618
- Park, R. e W. L. Gamble (2000). Reinforced Concrete Slabs. J. W. SONS: 716
- Pimentel, M. J. d. S. (2004). Modelação e análise de estruturas laminares de betão: Possibilidades e desafios. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Mestrado**: 234.
- Polak, M. A. (2005). Punching Shear in Reinforced Concrete Slabs. SP-232. M. A. Polak Farmington Hills, Michigan: 302.

- Póvoas, R. H. C. d. F. (1991). Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminadas de Betão Incluindo Efeitos Diferidos. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Doutoramento**.
- Pruijssers, A. F. (1988a). Aggregate interlock and dowel action under monotonic and cyclic loading. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 165.
- Pruijssers, A. F. (1988b). "Theoretical and Experimental Analysis of the Behaviour of Cracked Concrete Under Monotonic and Cyclic Shear Loading." HERON Vol. 33, No. 4: 72.
- Ramdane, K. E. (1996). Punching Shear of High Performance Concrete Slabs. 4th International Symposium on Utilization of High-strength/High-performance Concrete. Paris, Presses de L'école Nationale des Ponts et Chaussées: 1015-1026.
- Ramos, A. M. P. (2003). Punçoamento em Lajes Fungiformes Pré-esforçadas. Lisboa, Universidade Técnica de Lisboa. **Tese de Doutoramento**: 292.
- REBAP (1983). Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado. Lisboa, Imprensa Nacional, Casa da Moeda.
- Regan, P. E. (1981). Behaviour of reinforced concrete flat slabs. Report 89. CIRIA. London.
- Regan, P. E. e M. W. Braestrup (1985). Punching Shear in Reinforced Concrete: A State of Art Report. Bulletin d'Information, No. 168. Lausanne, International Federation for Structural Concrete (fib): 232.
- Reineck, K.-H., D. A. Kuchma, K. S. Kim e S. Marx (2003). "Shear Database for Reinforced Concrete Members without Shear Reinforcement." ACI Structural Journal Vol. 100, No. 2: 240-249.
- Reinhardt, H.-W. (1984). "Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete." HERON Vol. 29, No. 2: 42.
- Richart, F. E. (1948a). "Reinforced Concrete Wall and Column Footings - Part 1." Journal Proceedings Vol. 20, No. 2(ACI): 97-127.
- Richart, F. E. (1948b). "Reinforced Concrete Wall and Column Footings - Part 2." Journal Proceedings Vol. 20, No. 3(ACI): 237-260.
- RILEM (1994). RILEM TC50-FMC: Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. Technical Recommendations for the Testing and Use of Construction Materials. RILEM London, E & FN Spon: 99-101.
- RILEM (2003). "RILEM TC162-TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete"." Materials and Structures Vol. 36(October 2003): 560-567.
- Rots, J. G. (1988). Computational Modeling of Concrete Fracture. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 132.

- Rots, J. G. e J. Blaauwendraad (1989). "Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?" HERON Vol. 34, No. 1: 59.
- Rots, J. G. e R. d. Borst (1987). "Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concrete." Journal of Engineering Mechanics Vol. 113, No. 11(ASCE): 1739-1758.
- Rots, J. G., P. Nauta, G. M. A. Kusters e J. Blaauwendraad (1985). "Smeared crack approach and fracture localization in concrete." HERON Vol. 30, No. 1: 48.
- Ruiz, M. F. (2003). Evaluación no Lineal de los Efectos Estructurales Producidos por las Deformaciones Diferidas del Hormigón y el Acero. Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos (Universidad Politécnica de Madrid). **Tesis Doctoral**: 304.
- Sato, Y., T. Tadokoro e T. Ueda (2004). "Diagonal Tensile Failure Mechanism of Reinforced Concrete Beams." Journal of Advanced Concrete Technology Vol. 2, No. 3(Japan Concrete Institute): 327-341.
- Schlangen, E. (1993). Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete. Delft, The Netherlands, Delft University of Technology. **PhD Thesis**: 121.
- Seible, F., A. Ghali e W. H. Dilger (1980). "Preassembled Shear Reinforcing Units for Flat Plates." ACI Journal Vol. 77, No. 1: 28-35.
- Shah, S. P., S. E. Swartz e C. Ouyang (1995). Fracture Mechanics of Concrete - Applications of fracture mechanics to concrete, rock, and other quasi-brittle materials, John Wiley & Sons, Inc.
- Shehata, I. A. E. M. (1990). "Rational Method for Designing RC Slabs to Resist Punching." Journal of Structural Engineering Vol. 116, No. 7(ASCE): 2055-2060.
- Sherif, A. G. e W. H. Dilger (1996). "Critical review of the CSA A23.3-94 punching shear strength provisions for interior columns." Canadian Journal of Civil Engineering Vol. 23, No. 5(NRC): 998-1011.
- Silva, V. D. d. (2004). Mecânica e Resistência dos Materiais. Coimbra, ZUARI - Edição de Livros Técnicos, Lda: 476
- Soares, J. M. P. (1993). Punçãoamento Excêntrico em Lajes Fungiformes de Betão Armado. Lisboa, Universidade Técnica de Lisboa. **Tese de Mestrado**: 137.
- Sousa, C. F. F. d. (2004). Continuidade estrutural em tabuleiros de pontes construídos com vigas pré-fabricadas. Soluções com ligação em betão armado. Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. **Tese de Mestrado**: 235.

- Staller, M. A. (2000). "Analytical Studies and Numerical Analysis of Punching Shear Failure in Reinforced Concrete Slabs." International Workshop on Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs(Bulletin 57): 8.
- Talbot, A. N. e W. A. Slater (1913). "Tests of reinforced concrete buildings under load." Engineering Experiment Station Bulletin **64**.
- Tlemat, H., K. Pilakoutas e K. Neocleous (2006). "Modelling of SFRC using inverse finite element analysis." Materials and Structures **Vol. 39, No. 2**(RILEM): 221-233.
- Tomaszewicz, A. (1993). High-strength Concrete SP2 - Plates and Shells. Report 2.3, Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs. Report No. STF70 A93082. Trondheim, SINTEF: 36.
- Vecchio, F. J. e M. P. Collins (1986). "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear." ACI Journal **Vol. 83, No. 2**: 219-231.
- Voet, A. F. v. d., W. H. Dilger e A. Ghali (1982). "Concrete flat plates with well-anchored shear reinforcement elements." Canadian Journal of Civil Engineering **Vol. 9**(NRC): 107-114.
- Walraven, J. C. (2002). Background document for prENV 1992-1-1:2002, 6.4 Punching Shear. Project Team for Eurocode 2. Delft: 15.
- Wang, J. (1994). Development and application of a micromechanics-based numerical approach for the study of crack propagation in concrete. Lausanne, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. **PhD Thesis**: 117.
- Wood, J. G. M. (2002). Pipers Row Car Park, Wolverhampton - Quantitative Study of the Causes of the Partial Collapse on 20th March 1997. Surrey: 197.
- Zhang, Q. (2003). "The Punching Strength of High-Strength Flat Slabs: Experimental Study." Memorial - University of Newfoundland: 34.
- Zhang, X. (2002). Punching Shear Failure Analysis of Reinforced Concrete Flat Plates using Simplified UST Failure Criterion. School of Engineering - Faculty of Engineering and Information Technology. Gold Coast Campus, Griffith University. **Master of Philosophy**: 141.
- Zhu, R. R. H., T. T. C. Hsu e J.-Y. Lee (2001). "Rational Shear Modulus for Smeared-Crack Analysis of Reinforced Concrete." ACI Structural Journal **Vol. 98, No. 4**(ACI): 443-450.

A. ANEXOS

A.1 BASE DE DADOS DE ENSAIOS EXPERIMENTAIS

A.1.1 Ensaios experimentais centrados sem armadura transversal

Quadro A- 1 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura transversal sob punção centrado (continuado).

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2^a (mm)	B (mm)	λ (-)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Elstner <i>et al.</i> , 1956	A-1a	14,1	332	1,15	118	254	254	1780	6,5	303	606	0,50	P
	A-1b	25,2	332	1,15	118	254	254	1780	6,5	365	608	0,60	P
	A-1c	29,0	332	1,15	118	254	254	1780	6,5	356	603	0,59	P
	A-1d	36,8	332	1,15	118	254	254	1780	6,5	351	605	0,58	P
	A-1e	20,3	332	1,15	118	254	254	1780	6,5	356	603	0,59	P
	A-2a	13,7	321	2,47	114	254	254	1780	6,7	334	1152	0,29	P
	A-2b	19,5	321	2,47	114	254	254	1780	6,7	400	1143	0,35	P
	A-2c	37,4	321	2,47	114	254	254	1780	6,7	467	1139	0,41	P
	A-7b	27,9	321	2,47	114	254	254	1780	6,7	512	1138	0,45	P
	A-3a	12,8	321	3,70	114	254	254	1780	6,7	356	1695	0,21	P
	A-3b	22,6	321	3,70	114	254	254	1780	6,7	445	1712	0,26	P
	A-3c	26,5	321	3,70	114	254	254	1780	6,7	534	1669	0,32	P
	A-3d	34,5	321	3,70	114	254	254	1780	6,7	547	1709	0,32	P
	A-4	26,1	332	1,15	118	356	356	1780	6,0	400	667	0,60	P
	A-5	27,8	321	2,47	114	356	356	1780	6,2	534	1242	0,43	P
	A-9	29,9	321	2,47	114	356	356	1780	6,2	445	3179	0,14	P
	A-10	29,7	321	2,70	114	356	356	1780	6,2	489	3493	0,14	P
	A-13	26,2	294	0,55	121	254	254	1780	6,3	236	257	0,92	FP
	B-1	14,2	324	0,49	114	254	254	1780	6,7	178	231	0,77	FP
	B-2	47,6	321	0,49	114	254	254	1780	6,7	200	227	0,88	FP
	B-4	47,7	303	0,99	114	254	254	1780	6,7	334	388	0,86	FP
Kinnunen <i>et al.</i> , 1960	B-9	43,9	341	2,00	114	254	254	1780	6,7	505	971	0,52	P
	B-11	13,5	409	3,00	114	254	254	1780	6,7	329	1732	0,19	P
	B-14	50,5	325	3,00	114	254	254	1780	6,7	578	1376	0,42	P
	IA15a-5	28,4	441	0,800	117	150	-	1710	6,7	255	311	0,82	P
	IA15a-6	26,2	454	0,790	118	150	-	1710	6,6	275	327	0,84	P
	IA15c-11	32,1	439	1,085	121	150	-	1710	6,4	334	742	0,45	P
	IA15c-12	31,0	439	1,089	122	150	-	1710	6,4	332	722	0,46	P
	IA30a-24	26,4	456	1,010	128	300	-	1710	5,5	430	531	0,81	P
	IA30a-25	25,1	451	1,040	124	300	-	1710	5,7	408	544	0,75	P
	IA30c-30	30,1	436	1,527	120	300	-	1710	5,9	491	944	0,52	P
Moe, 1961	IA30c-31	30,1	448	1,541	119	300	-	1710	5,9	540	947	0,57	P
	IA30d-32	26,3	448	0,490	123	300	-	1710	5,7	258	241	1,07	F
	IA30d-33	26,6	462	0,490	125	300	-	1710	5,6	258	258	1,00	F
	IA30e-34	27,4	461	0,707	120	300	-	1710	5,9	332	474	0,70	P
	IA30e-35	25,0	459	0,693	122	300	-	1710	5,8	332	488	0,68	P
	S1-60	23,3	399	1,06	114	254	254	1780	6,7	389	627	0,62	P
	S2-60	22,1	399	1,53	114	254	254	1780	6,7	356	848	0,42	P
	S3-60	22,6	399	2,30	114	254	254	1780	6,7	364	1138	0,32	P
	S4-60	23,8	399	3,45	114	254	254	1780	6,7	334	1452	0,23	P
	S1-70	24,5	483	1,06	114	254	254	1780	6,7	393	756	0,52	P
	S3-70	25,4	483	2,30	114	254	254	1780	6,7	378	1400	0,27	P
	S4-70	35,2	483	3,45	114	254	254	1780	6,7	374	1781	0,21	P
	S4-70A	20,5	483	3,45	114	254	254	1780	6,7	312	1835	0,17	P
	S5-60	22,2	399	1,06	114	203	203	1780	6,9	343	602	0,57	P
	S5-70	23,0	483	1,06	114	203	203	1780	6,9	378	727	0,52	P
	R1	26,6	328	1,38	114	152	152	1780	7,1	312	600	0,52	P
	R2	27,6	328	1,38	114	152	457	1780	7,1	394	657	0,60	P
	H1	26,1	328	1,15	114	254	254	1780	6,7	372	517	0,72	P
	M1A	20,8	481	1,50	114	305	305	1780	6,5	433	1083	0,40	P

Quadro A- 1 (parte b) - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura transversal sob punção centrado.

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2^a (mm)	B (mm)	λ (-)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Mokhtar <i>et al.</i> , 1985	AB1	36,0	516	1,41	114	250	250	1800	6,8	408	-	-	P
Marzouk <i>et al.</i> , 1991	HS1	67,0	490	0,491	95	150	150	1500	7,1	178	195	0,96	F
	HS2	70,2	490	0,842	95	150	150	1500	7,1	249	311	0,80	P
	HS3	69,1	490	1,473	95	150	150	1500	7,1	356	531	0,67	P
	HS4	65,8	490	2,370	90	150	150	1500	7,5	418	663	0,63	P
	HS5	68,1	490	0,640	125	150	150	1500	5,4	365	415	0,88	FP
	HS6	70,0	490	0,944	120	150	150	1500	5,6	489	556	0,88	FP
	HS7	73,8	490	1,193	95	150	150	1500	7,1	356	440	0,81	P
	HS8	69,0	490	1,111	120	150	150	1500	5,6	436	589	0,74	P
	HS9	74,0	490	1,611	120	150	150	1500	5,6	543	865	0,65	P
	HS10	80,0	490	2,333	120	150	150	1500	5,6	645	1194	0,54	P
	HS11	70,0	490	0,952	70	150	150	1500	9,6	196	190	1,03	F
	HS12	75,0	490	1,524	70	150	150	1500	9,6	258	300	0,86	FP
	HS13	68,0	490	2,000	70	150	150	1500	9,6	267	381	0,70	P
	HS14	72,0	490	1,473	95	220	220	1500	6,7	498	566	0,88	FP
	HS15	71,0	490	1,473	95	300	300	1500	6,3	560	609	0,92	FP
Tomaszewicz, 1993	NS1	42,0	490	1,473	95	150	150	1500	7,1	320	508	0,63	P
	NS2	30,0	490	0,944	120	150	150	1500	5,6	400	526	0,76	P
	ND65-1-1	64,3	500	1,49	275	200	200	2500	4,2	2050	-	-	P
	ND65-2-1	70,2	500	1,75	200	150	150	2200	5,1	1200	-	-	P
	ND95-1-1	83,7	500	1,49	275	200	200	2500	4,2	2250	-	-	P
	ND95-1-3	89,9	500	2,55	275	200	200	2500	4,2	2400	-	-	P
	ND95-2-1	88,2	500	1,75	200	150	150	2200	5,1	1100	-	-	P
	ND95-2-1D	86,7	500	1,75	200	150	150	2200	5,1	1300	-	-	P
	ND95-2-3	89,5	500	2,62	200	150	150	2200	5,1	1450	-	-	P
	ND95-2-3D	80,3	500	2,62	200	150	150	2200	5,1	1250	-	-	P
	ND95-2-3D+	98,0	500	2,62	200	150	150	2200	5,1	1450	-	-	P
	ND95-3-1	85,1	500	1,84	88	100	100	1100	5,7	330	-	-	P
Ramdane, 1996 ^b	ND115-1-1	112,0	500	1,49	275	200	200	2500	4,2	2450	-	-	P
	ND115-2-1	119,0	500	1,75	200	150	150	2200	5,1	1400	-	-	P
	ND115-2-3	108,1	500	2,62	200	150	150	2200	5,1	1550	-	-	P
	1	88,2	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	224	207	1,08	F
	2	56,2	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	212	204	1,04	FP
	3	26,9	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	169	197	0,86	P
	4	58,7	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	233	204	1,14	F
	5	54,4	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	190	204	0,93	P
	6	101,6	550	0,58	98	150	-	1372	6,2	233	204	1,14	F
	12	60,4	550	1,28	98	150	-	1372	6,2	319	431	0,74	P
	13	43,6	550	1,28	98	150	-	1372	6,2	297	418	0,71	P
	14	60,8	550	1,28	98	150	-	1372	6,2	341	432	0,79	P
	15	68,4	550	1,28	98	150	-	1372	6,2	276	438	0,63	P
	16	99,2	550	1,28	98	150	-	1372	6,2	362	447	0,81	P
	21	41,9	650	1,28	98	150	-	1372	6,2	286	485	0,59	P
	22	84,2	650	1,28	98	150	-	1372	6,2	405	519	0,78	P
	23	56,4	650	0,87	100	150	-	1372	6,1	341	367	0,93	P
	24	44,6	650	1,28	98	150	-	1372	6,2	270	491	0,55	P
	25	32,9	650	1,27	100	150	-	1372	6,1	244	488	0,50	P
	26	37,6	650	1,27	100	150	-	1372	6,1	294	498	0,59	P
	27	33,7	650	1,03	102	150	-	1372	6,0	227	420	0,54	P

Quadro A- 1 (parte c) - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura transversal sob punção centrado.

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2^a (mm)	B (mm)	λ (-)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Hallgren, 1996	HSC0	90,3	643	0,80	200	250	-	2400	5,4	965	1401	0,69	P
	HSC1	91,3	627	0,80	200	250	-	2400	5,4	1021	1369	0,75	P
	HSC2	85,7	620	0,82	194	250	-	2400	5,5	889	1302	0,68	P
	HSC4	91,6	596	1,19	200	250	-	2400	5,4	1041	1913	0,54	P
	HSC6	108,8	633	0,60	201	250	-	2400	5,3	960	1064	0,90	P
	N/HSC8	94,9	631	0,80	198	250	-	2400	5,4	944	1379	0,68	P
	HSC9	84,1	634	0,33	202	250	-	2400	5,3	565	597	0,95	FP
Marzouk et al., 1997	HS17	67,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	511	623	0,82	P
Krüger, 1999	P0A	34,6	530	1,0	121	300	300	2750	10,1	423	-	-	P
Oliveira et al., 2000	1	60,9	695	1,5	93	120	120	1650	8,2	270	-	-	P
	2	62,9	695	1,4	97	120	120	1650	7,9	335	-	-	P
Ramos, 2003	AR2	39,1	523	1,67	80	200	200	2236	12,7	258	-	-	P
	AR9	37,1	481	1,63	82	200	200	2236	12,4	251	-	-	P
Birkle et al., 2004	1	36,2	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	483	735	0,66	P
	7	35,0	531	1,30	190	300	300	3000	7,1	825	1547	0,53	P
	10	31,4	524	1,10	260	350	350	3800	6,6	1046	2423	0,43	P
Guandalini et al., 2004	PG-1	27,6	573	1,50	210	260	260	3010	6,5	1024	-	-	P
	PG-2b	40,5	552	0,25	210	260	260	3010	6,5	439	-	-	P
	PG-3	32,4	520	0,33	456	520	520	5690	5,7	2153	-	-	P
	PG-4	32,2	541	0,25	210	260	260	3010	6,5	408	-	-	P
	PG-5	29,3	555	0,33	210	260	260	3010	6,5	550	-	-	P
	PG-6	34,7	526	1,46	96	130	130	1505	7,2	236	-	-	P
	PG-7	34,7	550	0,75	100	130	130	1505	6,9	243	-	-	P
	PG-8	34,7	525	0,28	117	130	130	1505	5,9	141	-	-	P
	PG-9	34,7	525	0,22	117	130	130	1505	5,9	118	-	-	P
	PG-10	28,5	577	0,33	210	260	260	3010	6,5	540	-	-	P
Mirzaei et al., 2008	PM-1	36,6	601	0,25	102	130	130	1494	6,7	176	-	-	P
	PM-2	36,5	601	0,49	102	130	130	1494	6,7	224	-	-	P
	PM-3	39,5	601	0,82	102	130	130	1494	6,7	324	-	-	P
	PM-4	36,8	601	1,41	102	130	130	1494	6,7	295	-	-	P
	PM-9	31,0	601	0,82	102	130	130	1494	6,7	224	-	-	P
	PM-10	31,1	560	0,82	102	130	130	1494	6,7	228	-	-	P
	PM-11	32,3	547	0,82	102	130	130	1494	6,7	241	-	-	P
	PM-12	32,4	526	0,82	102	130	130	1494	6,7	249	-	-	P
Presente trabalho	P	74,1	580	1,08	149	150	-	2165	6,8	580	925	0,63	P
	AC0	56,1	550	1,17	144	250	250	2165	6,6	685	924	0,74	P

Notações: f_{cm} : valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão no dia do ensaio referido a provetes cilíndricos; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal; P : rotura por punção; FP : rotura por flexão/punção; F : rotura em flexão; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, segundo o autor

A.1.2 Ensaios experimentais centrados com armadura transversal

Quadro A- 2 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes com armadura transversal sob punção centrado.

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2^a (mm)	B (mm)	λ (-)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Elstner <i>et al.</i> , 1956	B3	13,8	299	0,99	114	254	254	1780	6,7	286	-	-	P
	B5	13,8	420	2,00	114	254	254	1780	6,7	378	-	-	P
	B6	13,8	380	2,00	114	254	254	1780	6,7	468	-	-	P
	B10	44,8	335	2,00	114	254	254	1780	6,7	533	-	-	P
	B12	44,8	332	3,00	114	254	254	1780	6,7	787	-	-	P
	B13	44,8	328	3,00	114	254	254	1780	6,7	778	-	-	P
	B15	44,8	332	3,00	114	254	254	1780	6,7	689	-	-	FP
	B16	44,8	339	3,00	114	254	254	1780	6,7	747	-	-	P
	B17	13,8	308	1,50	114	254	254	1780	6,7	357	-	-	P
Seible <i>et al.</i> , 1980	SC8	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	592	-	-	P
	SC9	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	594	-	-	P
	SC10	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	537	-	-	P
	SC11	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	596	-	-	P
	SC12	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	595	-	-	P
	SC13	33,6	450	1,17	121	305	305	1700	5,8	580	-	-	P
Mokhtar <i>et al.</i> , 1985	AB6	29,0	516	1,41	114	250	250	1800	6,8	541	-	-	P
	AB7	35,0	448	1,41	114	250	250	1800	6,8	572	-	-	P
	AB8	30,0	448	1,41	114	250	250	1800	6,8	508	-	-	P
Hallgren, 1996	HSC3s	92,4	632	0,82	200	250	-	2400	5,4	1329	1413	0,94	FP
	HSC5s	91,3	604	1,18	201	250	-	2400	5,3	1631	1953	0,84	P
	HSC7s	85,0	630	0,63	200	250	-	2400	5,4	1106	1088	1,02	FP
Marzouk <i>et al.</i> , 1997	HS18	68,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	512	624	0,82	P
	HS20	74,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	482	626	0,77	P
	HS21	72,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	610	622	0,98	F
	HS22	60,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	605	624	0,97	F
	HS23	60,0	490	1,093	120	250	250	1830	6,6	590	621	0,95	F
Krüger, 1999	PP0B	37,7	530	1,3	119	300	300	2750	10,3	579	-	-	P
Birkle <i>et al.</i> , 2004	2	29,0	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	574	708	0,81	P
	3	31,6	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	572	719	0,80	P
	4	38,0	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	634	740	0,86	P
	5	36,3	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	624	735	0,85	P
	6	33,4	488	1,55	124	250	250	2000	7,1	615	726	0,85	P
	8	35,0	531	1,30	190	300	300	3000	7,1	1050	1547	0,68	P
	9	35,2	531	1,30	190	300	300	3000	7,1	1091	1548	0,70	P
	11	30,0	524	1,10	260	350	350	3800	6,6	1620	2405	0,67	P
	12	33,5	524	1,10	260	350	350	3800	6,6	1520	2438	0,62	P
Presente trabalho	ACA1	54,4	550	1,17	144	250	250	2165	6,6	840	922	0,91	FP
	ACA2	48,5	605	1,17	144	250	250	2165	6,6	821	1000	0,82	P

Notações: f_{cm} : valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão no dia do ensaio referido a provetes cilíndricos; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal; P : rotura por punção; FP : rotura por flexão/punção; F : rotura em flexão; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, segundo o autor

a - A ausência da dimensão c_2 significa tratar-se de um pilar ou área carregada de secção circular

b - Valores da resistência em provetes cilíndricos obtidos a partir dos correspondentes valores referidos a provetes cúbicos: $f_{cm} = 0,79 \cdot f_{cm,cub}$ (Reineck *et al.*, 2003)

Quadro A- 3 - Caracterização das armaduras transversais dos ensaios experimentais - lajes sob punção centrado (continuado).

Autores	Modelo	Tipo e distribuição		1.º Perímetro de armaduras transversais		2.º Perímetro de armaduras transversais		3.º Perímetro de armaduras transversais		4.º Perímetro de armaduras transversais		5.º Perímetro de armaduras transversais		6.º Perímetro de armaduras transversais		Fenda principal ^e		ϕ_c/ϕ_e					
				Distribuição ^a	Distância à face do pilar ^b	θ	Distância à face do pilar	n_{ϕ}	ϕ (mm)	θ (°)	Distância à face do pilar	n_{ϕ}	ϕ (mm)	θ (°)	Distância à face do pilar				n_{ϕ}	ϕ (mm)	θ (°)	f_{wyk}	
		(mm)	(-)													(mm)	(-)						(mm)
Elstner et al., 1956	B3	VI	PERP	57	8	9,5	45										IN	323					
	B5	VI	PERP	57	4	12,7	45										EX	330					
	B6	VI	PERP	57	8	12,7	45										EX	330					
	B10	VI	PERP	57	8	12,7	45										EX	330					
	B12	S	PERP	57	20	9,5	90	170	12	9,5	90						EX	323					
	B13	VI	PERP	170	20	15,9	20										EX	373					
	B15	VI	PERP	57	12	12,7	45										EX	330					
	B16	VI	PERP	57	16	12,7	45	170	8	12,7	45						EX	330					
B17	VI	PERP	57	8	9,5	45										EX	330						
Seible et al., 1980	SC8	E	PERP	60	36	5,66	90	181	36	5,66	90						EX/FA	0,200	490				
	SC9	E	PERP	60	20	5,66	90	121	36	5,66	90	181	16	5,66	90		EX	0,150	490				
	SC10	E	PERP	60	20	5,66	90	101	20	5,66	90	141	20	5,66	90		FA	0,200	490				
	SC11	S	PERP	60	32	6,28	90	181	32	6,28	90						EX	0,150	500				
	SC12	S	PERP	30	16	6,28	90	80	16	6,28	90	130	16	6,28	90		EX	0,150	500				
	SC13	S	PERP	30	16	6,28	90	80	16	6,28	90	130	16	6,28	90		EX	0,150	500				
Mokhtar et al., 1985	AB6	S	PERP	60	12	9,5	90	145	12	9,5	90	230	12	9,5	90	400	12	9,5	90	489	EX	0,112	3,8
	AB7	S	PERP	60	12	9,5	90	145	12	9,5	90	230	12	9,5	90	485	12	9,5	90	278	EX	0,112	3
	AB8	S	PERP	60	12	9,5	90	145	12	9,5	90	230	12	9,5	90	400	12	9,5	90	489	EX	0,112	3,8
Hallgren, 1996	HSC3s	VI	PERP	250	20	16	30										FA	0,250	503				
	HSC5s	VI	PERP	195	24	16	30										IN	0,250	501				
	HSC7s	VI	PERP	250	16	16	30										FA	0,250	501				
Marzouk et al., 1997	HS18	VI	PERP	45	20	10	45											490				0,300	
	HS20	VI	PERP	60	20	10	90	170	20	10	90							490				0,300	
	HS21	VI	PERP	45	20	10	45	135	20	10	45							490				0,300	
	HS22	S	PERP	60	12	15	90	150	12	15	90	240	12	15	90			490				0,110	
	HS23	S	PERP	60	16	10	90	150	12	10	90	240	12	10	90	330	12	10	90	490		0,112	2

Quadro A- 3 (parte b) - Caracterização das armaduras transversais dos ensaios experimentais - lajes sob punção centrado.

Autores	Modelo	Tipo e distribuição		1.º Perímetro de armaduras transversais				2.º Perímetro de armaduras transversais				3.º Perímetro de armaduras transversais				4.º Perímetro de armaduras transversais				5.º Perímetro de armaduras transversais				6.º Perímetro de armaduras transversais				Fenda principal		a	Ø _c /Ø	
				Distância a face do pilar (mm)	n _Ø (-)	Ø (mm)	θ (°)	Distância a face do pilar (mm)	n _Ø (-)	Ø (mm)	θ (°)	Distância a face do pilar (mm)	n _Ø (-)	Ø (mm)	θ (°)	Distância a face do pilar (mm)	n _Ø (-)	Ø (mm)	θ (°)	Distância a face do pilar (mm)	n _Ø (-)	Ø (mm)	θ (°)	f _{wyk} (MPa)								
		Tipo de armadura	Distribuição																													
Krüger, 1999	PP0B	E	RAD	48	24	10	90	168	24	10	90	288	24	10	90	408	24	10	90													
Birkle et al., 2004				45	8	9,5	90	135	8	9,5	90	225	8	9,5	90	315	8	9,5	90	405	8	9,5	90	495	8	9,5	90	393	IN	0,125	3,2	
				45	8	9,5	90	135	8	9,5	90	225	8	9,5	90	315	8	9,5	90	405	8	9,5	90	495	8	9,5	90	393	IN		3,2	
				30	8	9,5	90	90	8	9,5	90	150	8	9,5	90	210	8	9,5	90	270	8	9,5	90					465	EX	0,125	3,2	
				30	8	9,5	90	90	8	9,5	90	150	8	9,5	90	210	8	9,5	90	270	8	9,5	90	390	8	9,5	90	465	2d	0,125	3,2	
				30	8	9,5	90	90	8	9,5	90	150	8	9,5	90	210	8	9,5	90	270	8	9,5	90	390	8	9,5	90	465	2d		3,2	
				50	8	9,5	90	150	8	9,5	90	250	8	9,5	90	350	8	9,5	90	450	8	9,5	90					460	IN	0,150	3,2	
				75	8	9,5	90	225	8	9,5	90	375	8	9,5	90	525	8	9,5	90	675	8	9,5	90	825	8	9,5	90	460	IN	0,150	3,2	
				65	8	12,7	90	195	8	12,7	90	325	8	12,7	90	455	8	12,7	90	585	8	12,7	90					409	IN	0,175	3,2	
				95	8	12,7	90	290	8	12,7	90	485	8	12,7	90	680	8	12,7	90	875	8	12,7	90	1070	8	12,7	90	409	IN	0,175	3,2	
Presente trabalho	ACA1	S	PERP	75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90														500	EX	0,085	3
				75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90																500	EX

- c - Localização da fenda principal de rotura: FA - rotura na secção da face do pilar ou da área carregada, EX - rotura em secção exterior à região com armaduras transversais, IN - rotura em secção na região com armaduras transversais
- d - Distância entre os alinhamentos de Pernos das armaduras transversais e os eixos x e y definidos na Figura A- 2
- e - Relação entre o diâmetro da cabeça do perno (Ø_c) e o diâmetro do perno (Ø)
- f - Tipo de armadura de punção: E - estribos, S - studs, VI - varões inclinados
- g - Distribuição dos Pernos da armadura transversal: PERP - perpendicular às faces do pilar ou da área carregada (Figura A- 2), RAD - disposição radial em torno do pilar ou da área carregada (Figura A- 3)
- h - Distância entre a face do pilar e o eixo da armadura transversal. No caso de armaduras inclinadas, distância entre a face do pilar e o eixo vertical a meia altura da armadura transversal

A.1.3 Ensaios experimentais excêntricos sem armadura transversal

Quadro A- 4 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes sem armadura transversal sob punçoamento excêntrico.

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2 (mm)	B (mm)	e (mm)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Moe, 1961	M1A ⁱ	20,8	481	1,50	114	305	305	1780	0	433	641	0,68	P
	M2A	15,5	481	1,50	114	305	305	1780	185	213	597	0,36	P
	M4A	17,7	481	1,50	114	305	305	1780	434	144	618	0,23	P
	M2	25,7	481	1,50	114	305	305	1780	196	292	670	0,44	P
	M3	22,7	481	1,50	114	305	305	1780	338	207	653	0,32	P
	M4	24,7	481	1,50	114	305	305	1780	437	132	665	0,20	FP
	M5	27,0	481	1,50	114	305	305	1780	615	101	675	0,15	FP
	M6	26,5	328	1,34	114	254	254	1780	168	239	409	0,58	P
	M7	25,0	328	1,34	114	254	254	1780	61	311	406	0,77	P
	M8	24,6	328	1,34	114	254	254	1780	437	149	406	0,37	P
	M9	23,2	328	1,34	114	254	254	1780	127	267	403	0,66	P
	M10	21,1	328	1,34	114	254	254	1780	308	178	400	0,45	P
Elgabry et al., 1987	1	35,0	452	1,10	117	254	254	1800	867	150	-	-	P
Hawkins et al., 1989	6AH	31,3	472	0,60	121	305	305	1830	535	168	-	-	P
	9.6AH	30,7	415	0,96	117,5	305	305	1830	522	187	-	-	P
	14AH	30,3	420	1,40	114,4	305	305	1830	489	205	-	-	P
	6AL	22,7	472	0,60	121	305	305	1830	134	244	-	-	P
	9.6AL	28,9	415	0,96	117,5	305	305	1830	135	257	-	-	P
	14AL	27,0	420	1,40	114,4	305	305	1830	136	319	-	-	P
	7.3BH	22,2	472	0,73	82,6	305	305	1830	488	80	-	-	P
	9.5BH	19,8	472	0,95	82,6	305	305	1830	483	94	-	-	P
	14.2BH	29,5	415	1,42	79,4	305	305	1830	500	102	-	-	P
	7.3BL	18,1	472	0,73	82,6	305	305	1830	98	130	-	-	P
	9.5BL	20,0	472	0,95	82,6	305	305	1830	117	142	-	-	P
	14.2BL	20,5	415	1,42	79,4	305	305	1830	129	162	-	-	P
	6CH	52,4	472	0,60	121	305	305	1830	511	186	-	-	P
	9.6CH	57,2	415	0,96	117,5	305	305	1830	519	218	-	-	P
	14CH	54,7	420	1,40	114,4	305	305	1830	529	252	-	-	P
Marzouk et al., 1996; 1998	N.H.Z.S.1.0 ⁱ	32,2	460	1,0	119	250	250	1870	0	476	-	-	P
	H.H.Z.S.1.0 ⁱ	67,2	460	1,0	119	250	250	1870	0	512	-	-	P
	N.H.H.S.0.5	34,0	460	0,5	119	250	250	1870	595	164	-	-	FP
	H.H.H.S.0.5	74,0	460	0,5	119	250	250	1870	590	200	-	-	F
	N.H.H.S.1.0	35,3	460	1,0	119	250	250	1870	464	250	-	-	FP
	H.H.H.S.1.0	73,8	460	1,0	119	250	250	1870	505	262	-	-	FP
Krüger, 1999	POA ⁱ	34,6	530	1,0	121	300	300	2750	0	423	-	-	P
	P16A	38,6	530	1,0	121	300	300	2750	160	332	-	-	P
	P30A	30,4	530	1,0	121	300	300	2750	320	270	-	-	P
Presente trabalho	ACO ⁱ	56,1	550	1,17	144	250	250	2165	0	685	924	0,74	P
	AE0	65,6	550	1,17	144	250	250	2165	200	468	932	0,50	P

Notações: f_{cm} : valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão no dia do ensaio referido a provetes cilíndricos; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal; P : rotura por punçoamento; FP : rotura por flexão/punçoamento; F : rotura em flexão; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, segundo o autor

A.1.4 Ensaios experimentais excêntricos com armadura transversal

Quadro A- 5 - Resultados dos ensaios experimentais - lajes com armadura transversal sob punçoamento excêntrico.

Autores	Modelo	f_{cm} (MPa)	f_{sym} (MPa)	ρ_l (%)	d (mm)	c_1 (mm)	c_2 (mm)	B (mm)	e (mm)	$P_{u,exp}$ (kN)	P_{flex} (kN)	$P_{u,exp}/P_{flex}$ (-)	Modo de rotura
Elgabry <i>et al.</i> , 1987	2	33,7	452	1,10	117	254	254	1800	1073	150	-	-	P
	3	39,0	452	1,23	117	254	254	1800	477	300	-	-	P
	4	40,8	446	1,39	117	254	254	1800	504	300	-	-	P
	5	45,6	446	1,39	117	254	254	1800	233	450	-	-	P
Krüger, 1999	PP0B ^j	37,7	530	1,3	119	300	300	2750	0	579	-	-	P
	PP16A	46,1	530	1,0	121	300	300	2750	160	403	-	-	P
	PP16B	39,5	530	1,3	119	300	300	2750	160	432	-	-	P
	Anco16B	35,2	530	1,3	119	300	300	2750	160	470	-	-	P
Presente trabalho	ACA1 ^j	54,4	550	1,17	144	250	250	2165	0	840	922	0,91	FP
	ACA2 ^j	48,5	605	1,17	144	250	250	2165	0	821	1000	0,82	P
	AEA1	66,2	550	1,17	144	250	250	2165	200	626	933	0,67	P
	AEA2	47,9	605	1,17	144	250	250	2165	200	577	999	0,58	P

Notações: f_{cm} : valor médio da resistência à compressão uniaxial do betão no dia do ensaio referido a provetes cilíndricos; ρ_l : percentagem geométrica da armadura longitudinal; P : rotura por punçoamento; FP : rotura por flexão/punçoamento; F : rotura em flexão; $P_{u,exp}$: carga de rotura experimental; P_{flex} : capacidade de carga prevista à flexão, segundo o autor

i - Ensaio de referência

j - Ensaio de referência

Quadro A- 6 - Caracterização das armaduras transversais dos ensaios experimentais – lajes sob punçoamento excêntrico.

Autores	Modelo	Tipo e distribuição ^a		1.º Perímetro de armaduras transversais		2.º Perímetro de armaduras transversais		3.º Perímetro de armaduras transversais		4.º Perímetro de armaduras transversais		5.º Perímetro de armaduras transversais		6.º Perímetro de armaduras transversais		Fenda principal ^k	a ^l	Ø _c /Ø _m																	
				Distância a face do pilar ^p	n _Ø	Ø (mm)	θ (º)	Distância a face do pilar	n _Ø	Ø (mm)	θ (º)	Distância a face do pilar	n _Ø	Ø (mm)	θ (º)				Distância a face do pilar	n _Ø	Ø (mm)	θ (º)	f _{wyk} (MPa)												
		(mm)	(-)													(mm)	(º)	(mm)						(-)	(mm)	(º)	(mm)	(-)	(mm)	(º)	(mm)	(-)	(mm)	(º)	(m)
Elgabry et al., 1987	2	S	PERP	60	8	12,7	90	150	8	12,7	90	235	8	12,7	90	325	8	12,7	90													460	IN	0,105	3
	3	S	PERP	60	8	12,7	90	150	8	12,7	90	235	8	12,7	90	325	8	12,7	90	410												460	IN	0,105	3
	4	S	PERP	40	8	9,5	90	100	8	9,5	90	210	8	9,5	90	320	8	9,5	90												500	IN	0,110	2,8	
	5	S	PERP	40	8	9,5	90	100	8	9,5	90	160	8	9,5	90	270	8	9,5	90	385											500	IN	0,110	2,8	
Krüger, 1999	PP0B	E	RAD	48	24	10	90	168	24	10	90	288	24	10	90	408	24	10	90													530	EX		
	PP16A	E	RAD	48	24	10	90	168	24	10	90	288	24	10	90	408	24	10	90													530	EX		
	PP16B	E	RAD	48	24	10	90	168	24	10	90	288	24	10	90	408	24	10	90													530	EX		
	Anco16B	S	RAD	45	12	14	90	106	12	14	90	167	12	14	90	228	12	14	90	289												530	EX		
Presente trabalho	ACA1	S	PERP	75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90																	500	EX	0,085	3
	ACA2	S	PERP	75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90																	500	EX	0,085	3
	AEA1	S	PERP	75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90																	500	EX	0,085	3
	AEA2	S	PERP	75	8	10	90	175	8	10	90	275	8	10	90																	500	EX	0,085	3

k - Localização da fenda principal de rotura: EX - rotura em secção exterior à região com armaduras transversais, IN - rotura em secção na região com armaduras transversais

l - Distância entre os alinhamentos de Pernos das armaduras transversais e os eixos x e y definidos na Figura A- 2

m - Relação entre o diâmetro da cabeça do perno (ϕ_c) e o diâmetro do perno (ϕ)

n - Tipo de armadura de punçoamento: E - estribos, S - studs

o - Distribuição dos Pernos da armadura transversal: PERP - perpendicular às faces do pilar ou da área carregada (Figura A- 2), RAD - disposição radial em torno do pilar ou da área carregada (Figura A- 3)

p - Distância entre a face do pilar e o eixo da armadura transversal. No caso de armaduras inclinadas, distância entre a face do pilar e o eixo vertical a meia altura da armadura transversal

A.2 DEMONSTRAÇÃO DA EXPRESSÃO PARA O MÓDULO PLÁSTICO DO PRIMEIRO PERÍMETRO, W_1

O primeiro perímetro de controlo, u_1 , é subdividido como se indica na Figura A- 1. O eventual momento transmitido da laje ao pilar é considerado a actuar em torno do eixo x e c_1 é a dimensão da secção transversal do pilar (ou da área carregada) na direcção da excentricidade ($e = M_t/V_t$).

A determinação de W_1 é feita para cada uma das porções individuais do perímetro exterior de controlo identificadas de A a C (Figura A- 1).

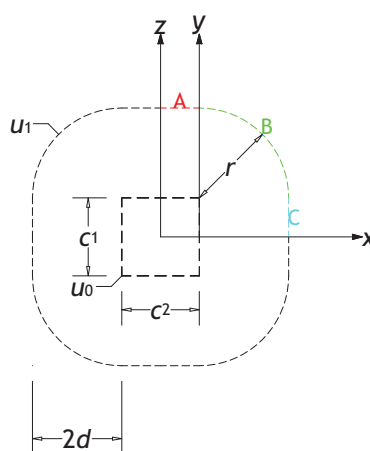


Figura A- 1 - Perímetro de controlo u_1 para pilares rectangulares interiores, segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004).

Porção A

Considerando o sistema de eixos coordenados x-z (Figura A- 1), para a porção A localizada no 1.º quadrante, pode escrever-se:

$$W_{1A} = \int_0^{c_2/2} z \cdot dx = \left(\frac{c_1}{2} + 2d \right) \cdot \int_0^{c_2/2} dx \quad (\text{A. 1})$$

pelo que:

$$W_{1A} = \frac{c_1 c_2}{4} + c_2 d \quad (\text{A. 2})$$

Porção B

Tomando a porção B (1/4 de circunferência) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 1), pode escrever-se:

$$x^2 + \left(y - \frac{c_1}{2}\right)^2 = r^2 \quad (\text{A. 3})$$

A expressão (A. 3) pode ser reescrita na forma:

$$y = \frac{c_1}{2} + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{A. 4})$$

pelo que o integral pretendido, $\int_0^{u_1} |e| \cdot dl$, vem:

$$W_{1B} = \int_0^{\pi/2} y \cdot dl \quad (\text{A. 5})$$

Tomando, sucessivamente:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A. 6})$$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (\text{A. 7})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 8})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A. 9})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 10})$$

o comprimento elementar do contorno pode, por isso, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 11):

$$dl = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 11})$$

que, levada à expressão (A. 5), permite escrever:

$$W_{1B} = \int_0^{\pi/2} y \cdot dl = \int_0^r \left[\left(\frac{c_1}{2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right] \cdot dx \quad (\text{A. 12})$$

A expressão (A. 12) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$\int_0^r \left(\frac{rc_1/2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx = \int_0^r \left(r + \frac{rc_1/2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx \quad (\text{A. 13})$$

$$\int_0^r \left(y \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx = \int_0^r r \cdot dx + \int_0^r \frac{rc_1/2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r \cdot \int_0^r dx + \frac{rc_1}{2} \cdot \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A. 14})$$

$$r \cdot x \Big|_0^r + \frac{rc_1}{2} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \Big|_0^r = r^2 + \frac{rc_1}{2} \cdot (\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0) = r^2 + \frac{rc_1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \quad (\text{A. 15})$$

vindo:

$$\int_0^r \left(y \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx = r^2 + \frac{rc_1\pi}{4} \quad (\text{A. 16})$$

Introduzindo $r = 2d$ vem:

$$W_{1B} = 4d^2 + \frac{\pi dc_1}{2} \quad (\text{A. 17})$$

Porção C

Para a porção C, pode escrever-se:

$$W_{1C} = \int_0^{c_1/2} y \cdot dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{c_1/2} = \frac{c_1^2}{8} \quad (\text{A. 18})$$

Por fim, o módulo plástico do 1.º perímetro de controlo, W_1 , vem:

$$W_1 = \int_0^{u_1} |e| \cdot dl = 4 \cdot (W_{1A} + W_{1B} + W_{1C}) = c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi dc_1 + \frac{c_1^2}{2} \quad (\text{A. 19})$$

Definem-se como variáveis primárias:

a	distância entre os alinhamentos de pernos das armaduras transversais e os eixos x e y
kd	distância entre a armadura específica exterior e o perímetro exterior de controlo, $u_{n,ef}$, considerando $k = 2$ (CEB-FIP MC 90) ou $k = 1,5$ (EN 1992-1-1)
nd	distância entre a face do pilar (ou da área carregada) e o perímetro exterior da armadura transversal

e como variáveis secundárias, definidas a partir das anteriores:

$$m = a + kd/\sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2} \cdot m \quad \text{raio das circunferências que contêm os arcos A e D}$$

$$x_C = y_C = c/2 + nd - a \quad \text{coordenadas, segundo as direcções x e y, dos centros das circunferências de que fazem parte os arcos D e A, respectivamente}$$

Porção A

Tomando a porção A (1/8 de circunferência) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 2), pode escrever-se:

$$x^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad (\text{A. 20})$$

A expressão (A. 20) pode ser reescrita na forma:

$$y = y_C + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{A. 21})$$

pelo que o integral pretendido, $\int_0^{u_{n,ef}} |e| \cdot dl$, vem:

$$W_{n,efA} = \int_0^{\pi/4} y \cdot dl \quad (\text{A. 22})$$

Tomando, sucessivamente:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A. 23})$$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (\text{A. 24})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 25})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A. 26})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 27})$$

o comprimento elementar do contorno exterior pode, por isso, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 28):

$$dl = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 28})$$

que, levada à expressão (A. 22), permite escrever:

$$W_{n,efA} = \int_0^{\pi/4} y \cdot dl = \int_0^m \left[\left(y_C + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right] \cdot dx \quad (\text{A. 29})$$

A expressão (A. 29) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$\int_0^m \left(\frac{ry_C}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx = \int_0^m \left(r + \frac{ry_C}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx = \int_0^m r \cdot dx + \int_0^m \frac{ry_C}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 30})$$

$$r \cdot \int_0^m dx + ry_C \cdot \int_0^m \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A. 31})$$

$$r \cdot x \Big|_0^m + ry_C \cdot \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) \Big|_0^m \quad (\text{A. 32})$$

$$rm + ry_C \cdot \left(\sin^{-1} \left(\frac{m}{r} \right) - \sin^{-1} 0 \right) \quad (\text{A. 33})$$

Introduzindo m , r e y_C vem:

$$W_{n,efA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a\sqrt{2} + kd)^2 + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{c}{2} + nd - a \right) \cdot (a\sqrt{2} + kd) \quad (\text{A. 34})$$

Porção B

Tomando a porção B (segmento de recta) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 2), pode escrever-se:

$$y = b - x \quad (\text{A. 35})$$

onde:

$$b = y_c + 2m \quad \text{ordenada na origem da recta que contém os segmentos B e C}$$

A expressão (A. 35) pode ser reescrita na forma:

$$y = \frac{c}{2} + nd + a + kd\sqrt{2} - x \quad (\text{A. 36})$$

pelo que o integral pretendido, $\int_0^{u_{n,ef}} |e| \cdot dl$, vem:

$$W_{n,efB} = \int_0^d y \cdot dl \quad (\text{A. 37})$$

Tomando, sucessivamente:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A. 38})$$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (\text{A. 39})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 40})$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad (\text{A. 41})$$

o comprimento elementar do contorno pode, por isso, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 42):

$$dl = \sqrt{2} \cdot dx \quad (\text{A. 42})$$

que, levada à expressão (A. 37), permite escrever:

$$W_{n,efB} = \int_0^d y \cdot dl = \sqrt{2} \cdot \int_m^{m+d/\sqrt{2}} (b-x) \cdot dx \quad (\text{A. 43})$$

A expressão (A. 43) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$b\sqrt{2} \cdot \int_m^{m+d/\sqrt{2}} dx - \sqrt{2} \cdot \int_m^{m+d/\sqrt{2}} x \cdot dx \quad (\text{A. 44})$$

$$b\sqrt{2} \cdot x \Big|_m^{m+d/\sqrt{2}} - \sqrt{2}/2 \cdot x^2 \Big|_m^{m+d/\sqrt{2}} = bd - (md + d^2 \sqrt{2}/4) \quad (\text{A. 45})$$

Substituindo m e b vem:

$$W_{n,efB} = \frac{cd}{2} + \frac{d^2}{\sqrt{2}} \cdot \left(n\sqrt{2} + k - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 46})$$

Porção C

Aplicando para a porção C (segmento de recta) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 2), uma formulação semelhante à descrita para a porção B, o integral pretendido, com y definido em (A. 35), vem:

$$\int_0^{u_{n,ef}} |e| \cdot dl = W_{n,efC} = \int_0^d y \cdot dl \quad (\text{A. 47})$$

O comprimento elementar do contorno pode, ainda, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 42), que, fornecido à expressão (A. 47), permite escrever:

$$W_{n,efC} = \int_0^d y \cdot dl = \sqrt{2} \cdot \int_{x_C+m-d/\sqrt{2}}^{x_C+m} (b-x) \cdot dx \quad (\text{A. 48})$$

A expressão (A. 48) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$b\sqrt{2} \cdot \int_{x_C+m-d/\sqrt{2}}^{x_C+m} dx - \sqrt{2} \cdot \int_{x_C+m-d/\sqrt{2}}^{x_C+m} x \cdot dx \quad (\text{A. 49})$$

$$b\sqrt{2} \cdot x \Big|_{x_C+m-d/\sqrt{2}}^{x_C+m} - \sqrt{2}/2 \cdot x^2 \Big|_{x_C+m-d/\sqrt{2}}^{x_C+m} = bd - x_C d - md + d^2 \sqrt{2}/4 \quad (\text{A. 50})$$

Substituindo m , x_C e b vem:

$$W_{n,efC} = ad + \frac{d^2}{\sqrt{2}} \cdot \left(k + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 51})$$

Porção D

Tomando a porção D (1/8 de circunferência) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 2), pode escrever-se:

$$(x - x_C)^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{A. 52})$$

A expressão (A. 52) pode ser reescrita na forma:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} \quad (\text{A. 53})$$

pelo que o integral pretendido, $\int_0^{u_{n,ef}} |e| \cdot dl$, vem:

$$W_{n,efD} = \int_0^{\pi/4} y \cdot dl \quad (\text{A. 54})$$

Tomando, sucessivamente:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A. 55})$$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (\text{A. 56})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 57})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - x_C}{\sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}} \quad (\text{A. 58})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{x - x_C}{\sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 59})$$

o comprimento elementar do contorno exterior pode, por isso, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 60):

$$dl = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 60})$$

que, levada à expressão (A. 54), permite escrever:

$$W_{n,efD} = \int_0^{\pi/4} y \cdot dl = \int_{x_C+m}^{x_C+r} \left(\sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_C)^2}} \right) \cdot dx \quad (\text{A. 61})$$

A expressão (A. 61) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$\int_{x_C+m}^{x_C+r} r \cdot dx = r \cdot \int_{x_C+m}^{x_C+r} dx = r \cdot x \Big|_{x_C+m}^{x_C+r} = r \cdot (r - m) \quad (\text{A. 62})$$

Introduzindo m e r vem:

$$W_{n,efD} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (a\sqrt{2} + kd)^2 \quad (\text{A. 63})$$

Por fim, o módulo plástico do perímetro exterior de controlo, $W_{n,ef}$, definido na Figura A-2, é:

$$W_{n,ef} = \int_0^{u_{n,ef}} |e| \cdot dl = 4 \cdot (W_{n,efA} + W_{n,efB} + W_{n,efC} + W_{n,efD}) \quad (\text{A. 64})$$

$$W_{n,ef} = 4 \cdot (a\sqrt{2} + kd)^2 + \pi \cdot \left(\frac{c}{2} + nd - a \right) \cdot (a\sqrt{2} + kd) + 4d^2 \cdot (n + k\sqrt{2}) + d \cdot (4a + 2c) \quad (\text{A. 65})$$

A.3.2 Perímetro de controlo W_n

Considerando um pilar interior de secção transversal quadrada e assumindo para as armaduras de punçoamento uma distribuição radial e uniforme em torno do eixo do pilar, o perímetro exterior de controlo, u_n , é subdividido como se indica na Figura A- 3.

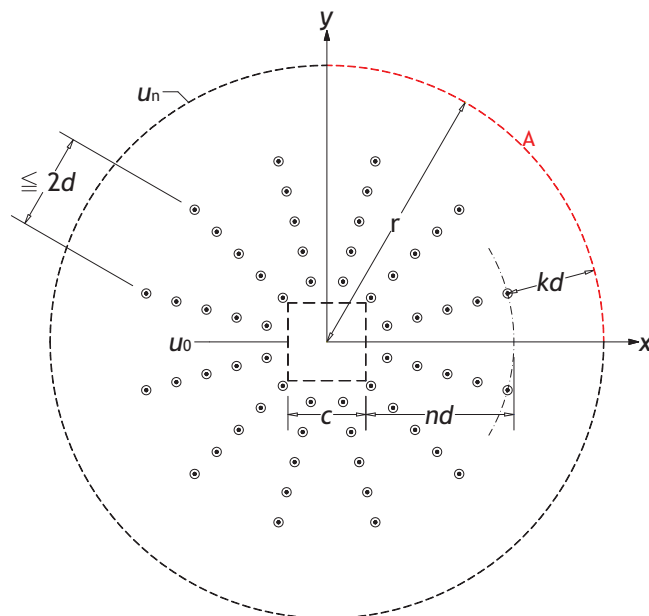


Figura A- 3 - Perímetro de controlo u_n para pilares quadrados interiores segundo o CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993) e a EN 1992-1-1 (CEN, 2004).

A determinação de W_n é feita para a porção identificada por A (Figura A- 3).

Definem-se como variáveis independentes:

kd	distância entre a armadura específica exterior e o perímetro exterior de controlo, u_n , considerando $k = 2$ (CEB-FIP MC 90) ou $k = 1,5$ (EN 1992-1-1)
nd	distância entre a face do pilar (ou da área carregada) e o perímetro exterior da armadura transversal

Porção A

Tomando a porção A (1/4 de circunferência) situada no 1.º quadrante do sistema de eixos coordenados x-y (Figura A- 3), pode escrever-se:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{A. 66})$$

A expressão (A. 66) pode ser reescrita na forma:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{A. 67})$$

pelo que o integral pretendido, $\int_0^{u_B} |e| \cdot dl$, vem:

$$W_{nA} = \int_0^{\pi/2} y \cdot dl \quad (\text{A. 68})$$

Tomando, sucessivamente:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A. 69})$$

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (\text{A. 70})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (\text{A. 71})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (\text{A. 72})$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 73})$$

o comprimento elementar do contorno exterior pode, por isso, ser escrito na forma apresentada na equação (A. 74):

$$dl = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{A. 74})$$

que, levada à expressão (A. 68), permite escrever:

$$W_{nA} = \int_0^{\pi/2} y \cdot dl = \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \cdot dx \quad (\text{A. 75})$$

A expressão (A. 75) pode ser sucessivamente simplificada como se mostra:

$$W_{nA} = \int_0^r r \cdot dx = r \cdot \int_0^r dx = r \cdot x \Big|_0^r = r^2 \quad (\text{A. 76})$$

Introduzindo $r = \frac{c}{2} + (n+k) \cdot d$ vem:

$$W_{nA} = \left(\frac{c}{2} + (n+k) \cdot d \right)^2 \quad (\text{A. 77})$$

Por fim, o módulo plástico do perímetro exterior de controlo, W_n , definido na Figura A- 3, é:

$$W_n = \int_0^{u_n} |e| \cdot dl = 4 \cdot W_{nA} = (c + 2d \cdot (n+k))^2 \quad (\text{A. 78})$$

A.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E AS PREVISÕES REGULAMENTARES

A.4.1 CEB-FIP MC 90

Lajes sem armadura transversal

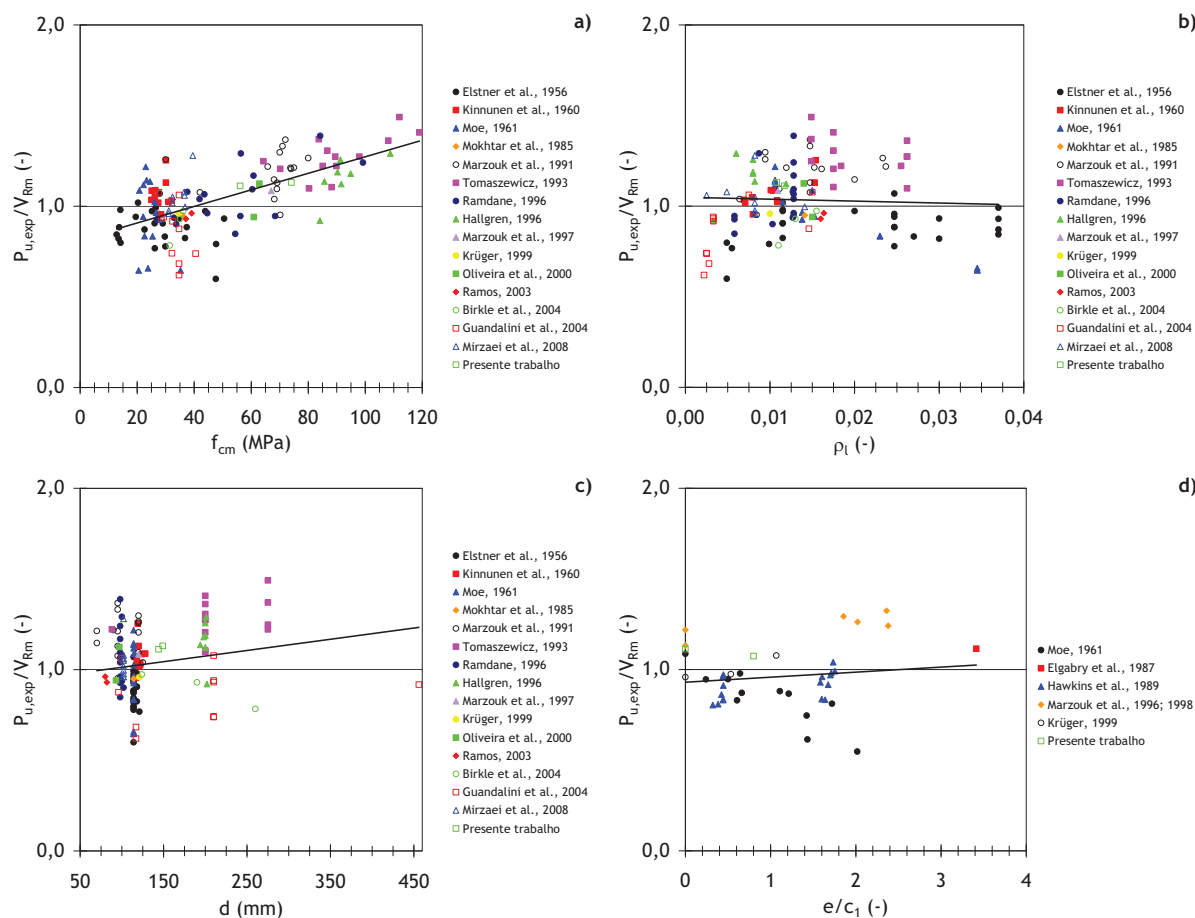


Gráfico A- 1 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

O CEB-FIP MC 90 parece sobrestimar a capacidade resistente de lajes de BRN ($f_{cm} \leq 40$ MPa) submetidas a punçoamento centrado, como se pode confirmar no Gráfico A- 1a. A não consideração da restrição regulamentar $f_{cm} \leq 50$ MPa permite que a referida sobreavaliação se verifique apenas para $f_{cm} \geq 68$ MPa (ver Quadro III-6, pág. 49). Assim, recomenda-se a sua não consideração. Relativamente à armadura longitudinal, este código apresenta uma propensão constante em torno da unidade (Gráfico A- 1b) para o rácio $P_{u,exp}/V_{Rm}$ o que indicia a correcta avaliação de ρ_l .

Lajes com armadura transversal

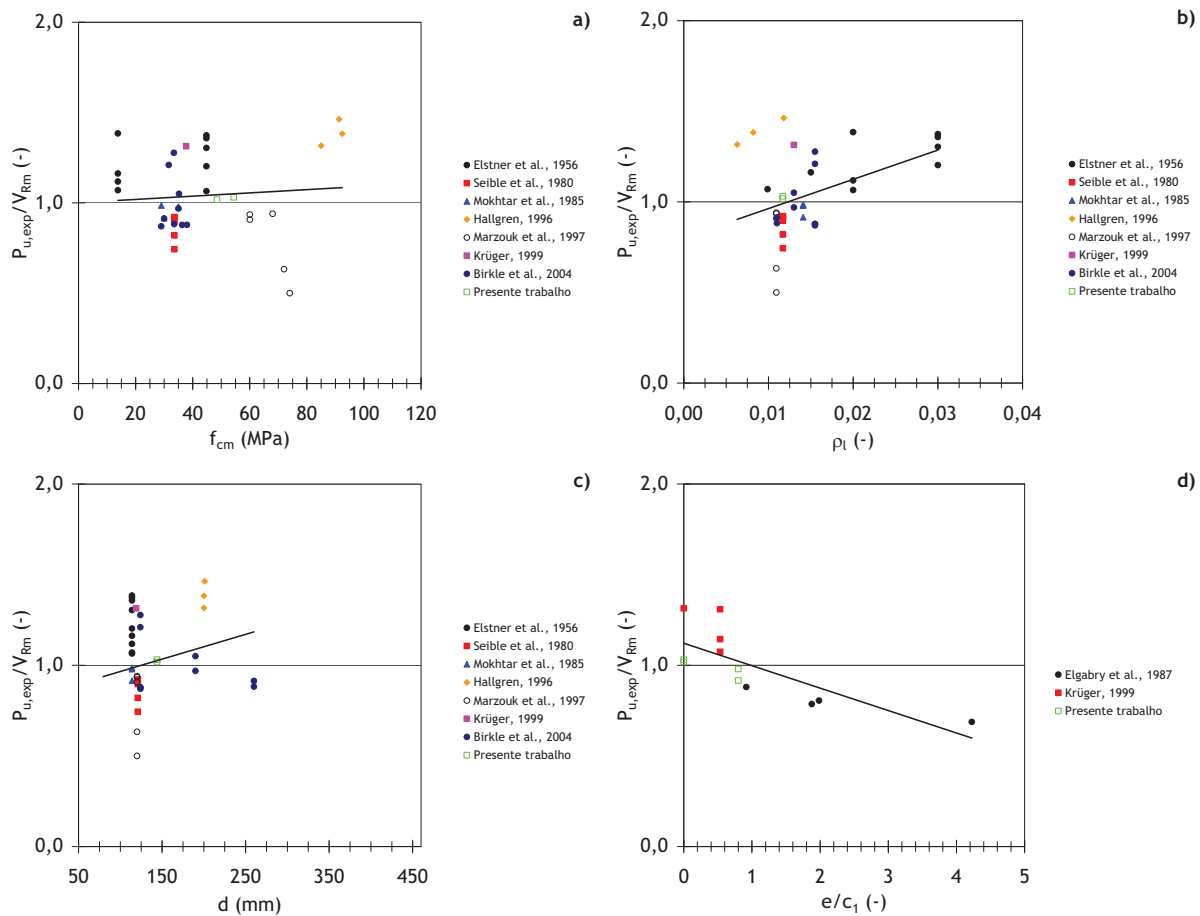


Gráfico A- 2 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do CEB-FIP MC 90 (CEB-FIP, 1993), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

A.4.2 EN 1992-1-1

Lajes sem armadura transversal

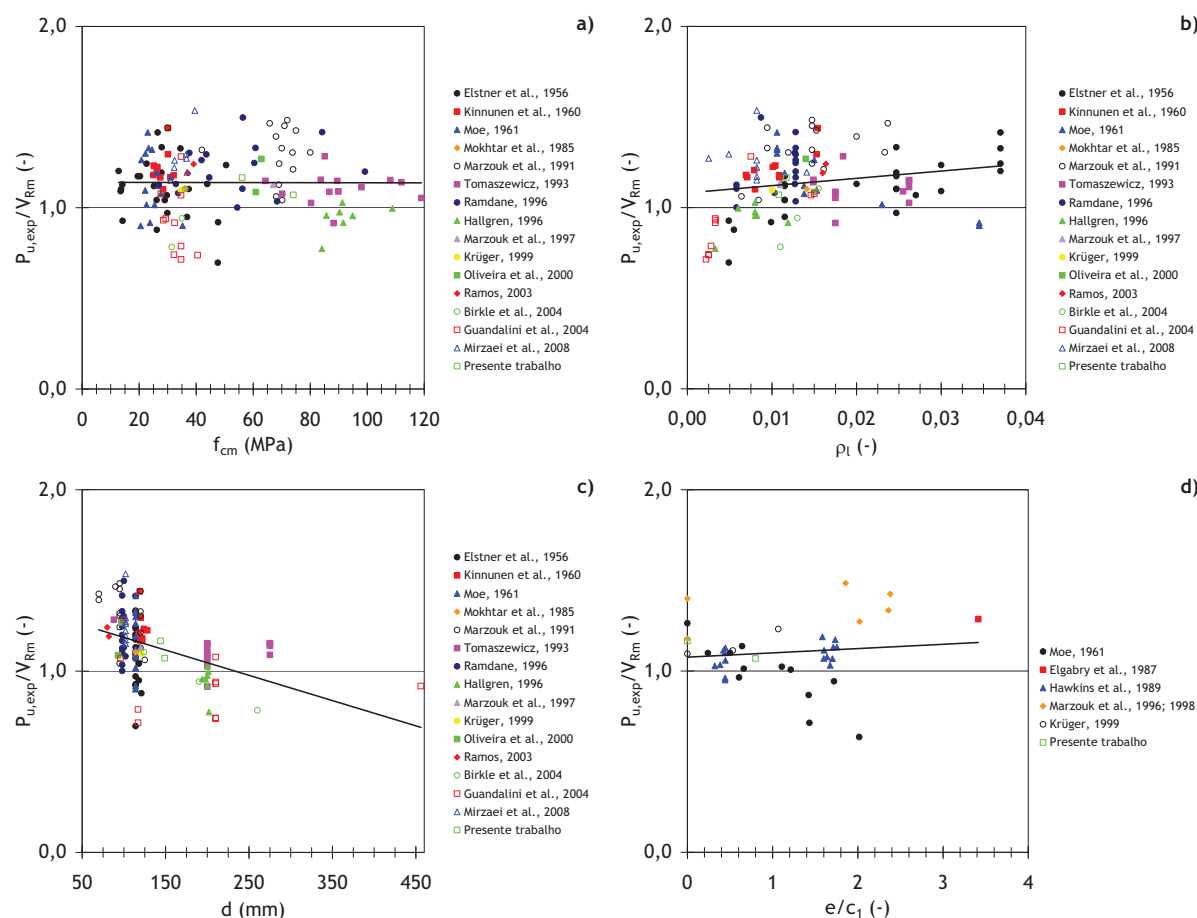
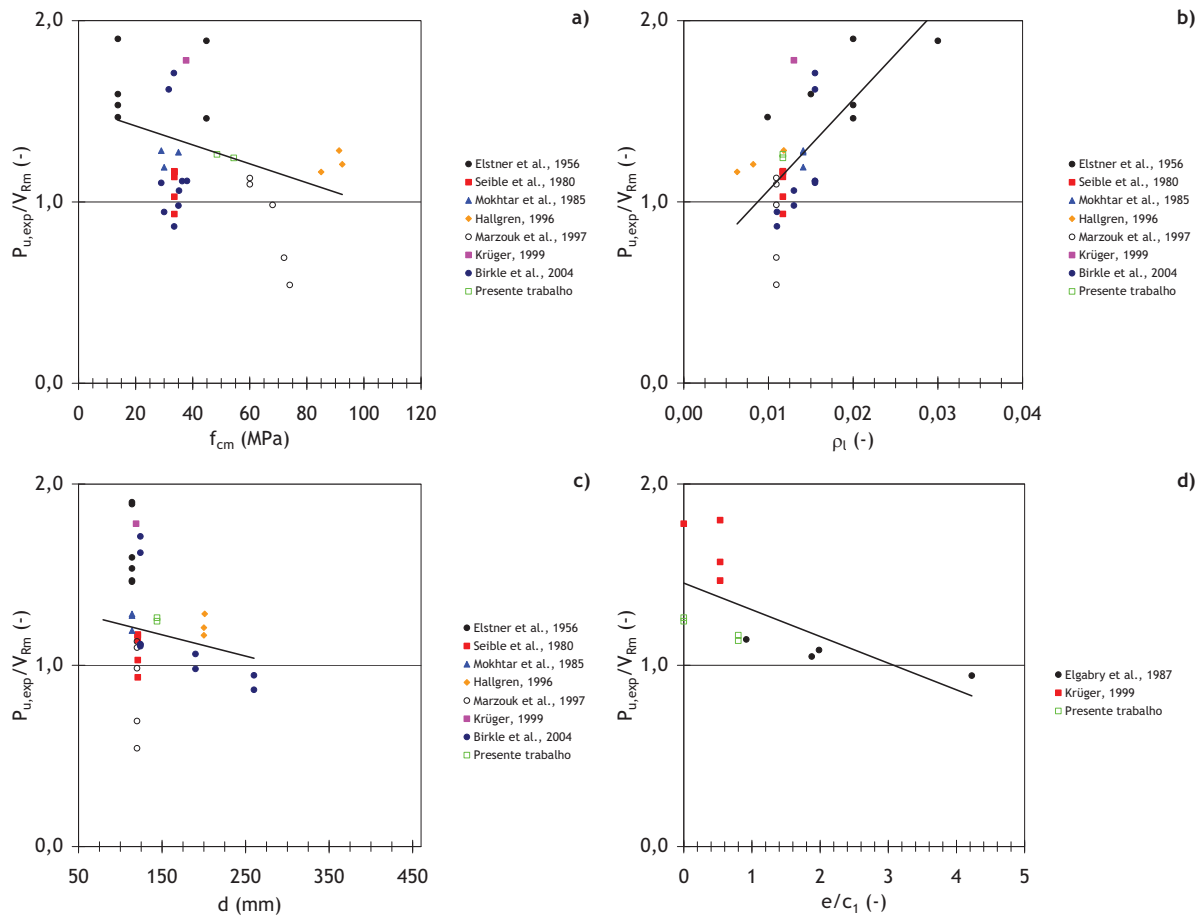


Gráfico A-3 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da EN 1992-1-1 (CEN, 2004), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

Para a norma EN 1992-1-1, o referido rácio não apresenta qualquer tendência com o aumento do valor de f_{cm} (Gráfico A- 3a) subestimando, globalmente, a capacidade resistente. Igual propensão é identificada para a percentagem de armadura longitudinal (Gráfico A- 3b). No entanto, estas tendências são compensadas pelo factor de efeito de escala para d superior a 230 mm. A EN 1992-1-1 limita, como se disse, o valor do factor de efeito de escala em lajes com altura útil menor que 200 mm a $\xi \leq 2$ (Gráfico III-6, pág. 69). A não consideração desta limitação conduz a melhores aproximações no que às lajes sem armadura transversal diz respeito. Sugere-se pois a não consideração do referido limite.

Lajes com armadura transversal



A.4.3 BS 8110-1: 1997

Lajes sem armadura transversal

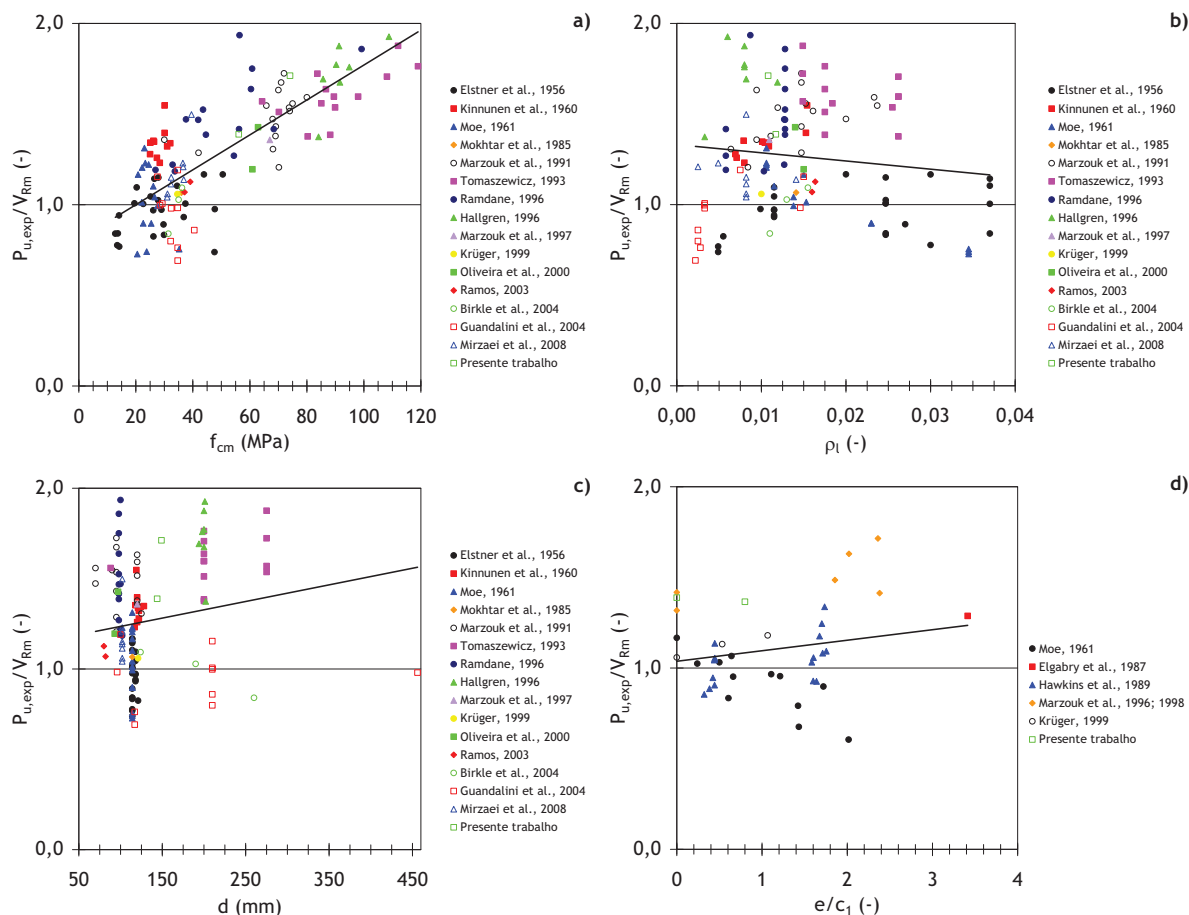


Gráfico A- 5 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

A norma britânica sobrestima a capacidade resistente de lajes submetidas a punçoamento centrado (Gráfico III-5). A não consideração da restrição regulamentar $f_{ck,cub} \leq 40$ MPa atenua a referida sobreavaliação (ver Quadro III-6).

Lajes com armadura transversal

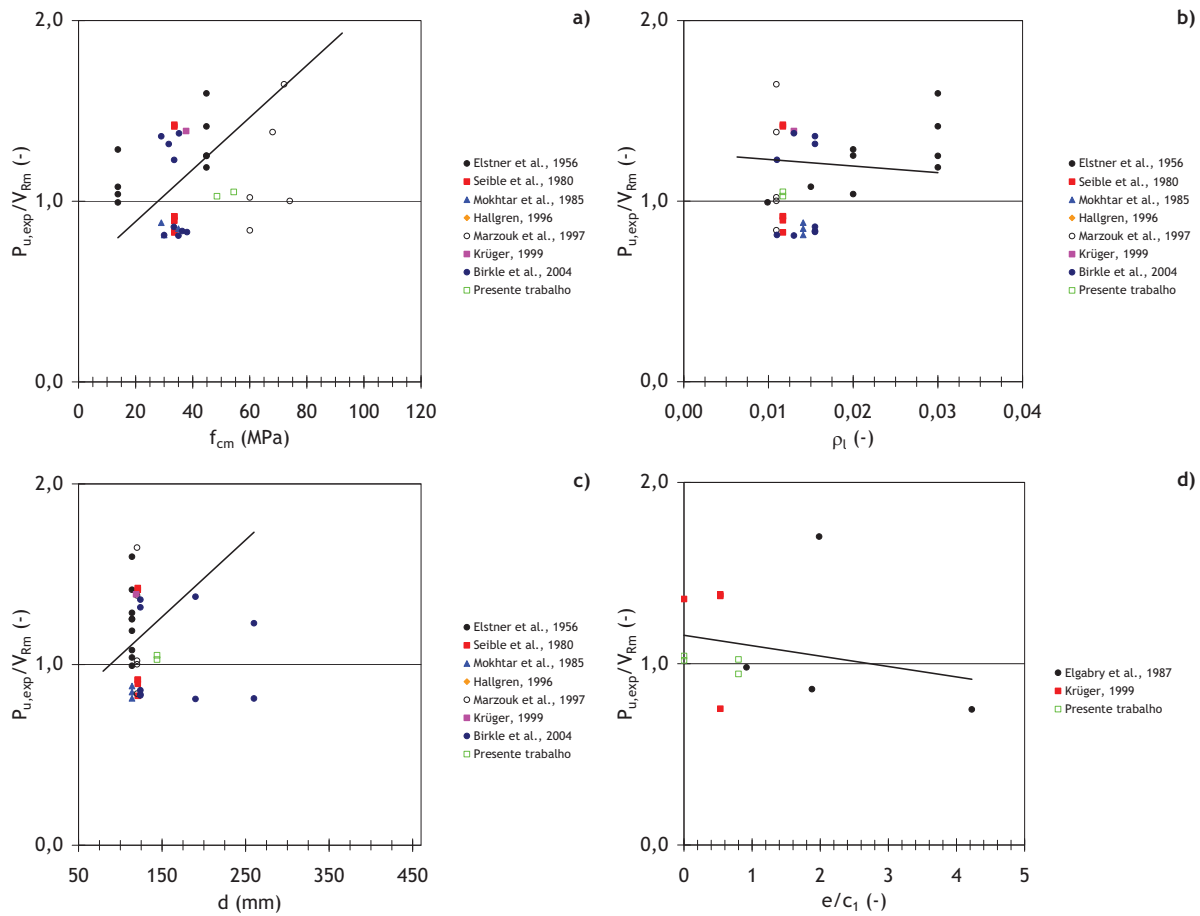


Gráfico A- 6 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado da BS 8110-1: 1997 (BSI, 1997), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

A.4.4 REBAP

Lajes sem armadura transversal

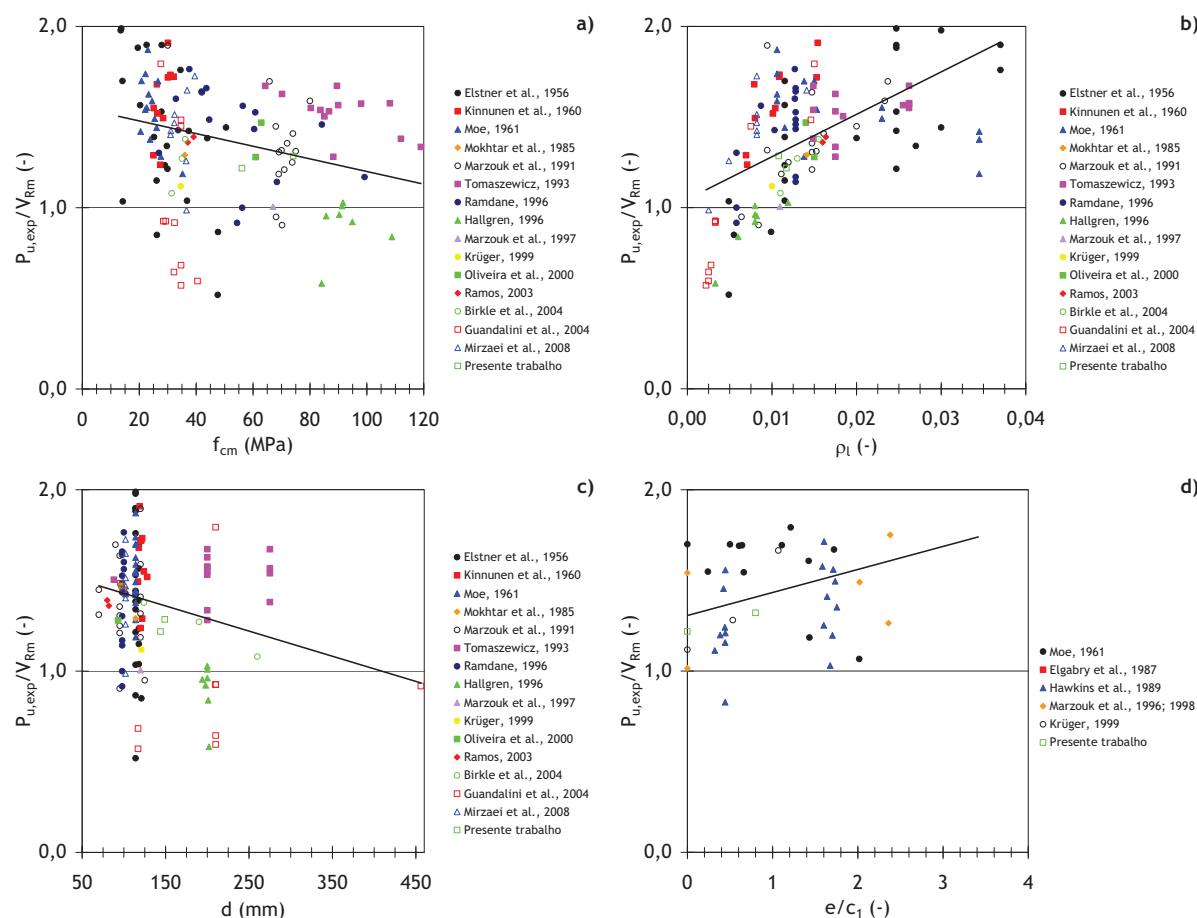


Gráfico A- 7 - Carga de rotura ao punçoamento normalizada com recurso ao articulado do REBAP (REBAP, 1983), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

O regulamento português não apresenta uma tendência clara para a variação da capacidade resistente ao punçoamento em função da resistência à compressão do betão (Gráfico A-7).

Lajes com armadura transversal

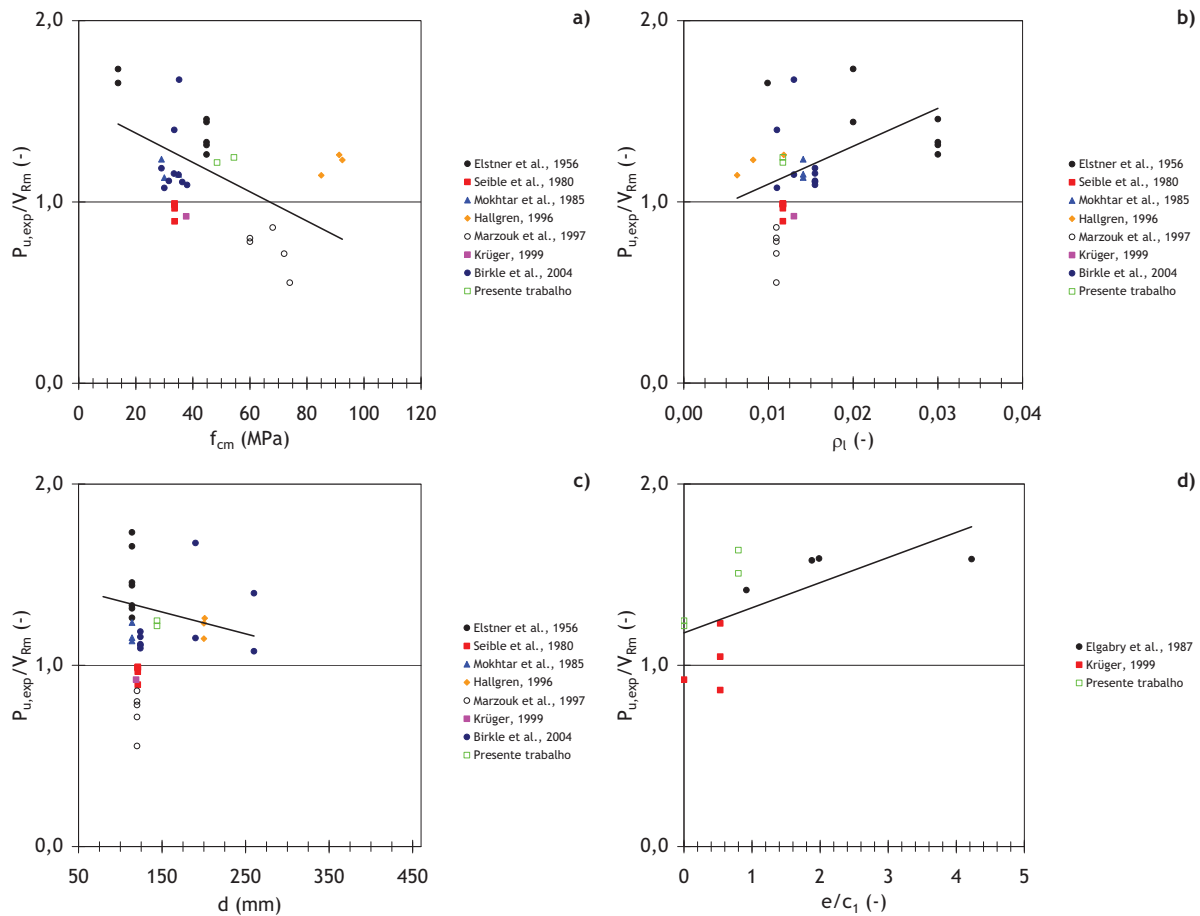


Gráfico A- 8 - Carga de rotura ao punção normalizada com recurso ao articulado do REBAP (REBAP, 1983), em função de: a) resistência média à compressão em provetes cilíndricos f_{cm} , b) percentagem de armadura longitudinal, c) altura útil da laje e d) excentricidade e/c_1 .

A.5 PADRÕES EXPERIMENTAIS DE FISSURAÇÃO

A.5.1 Lajes ACA2 e AEA2

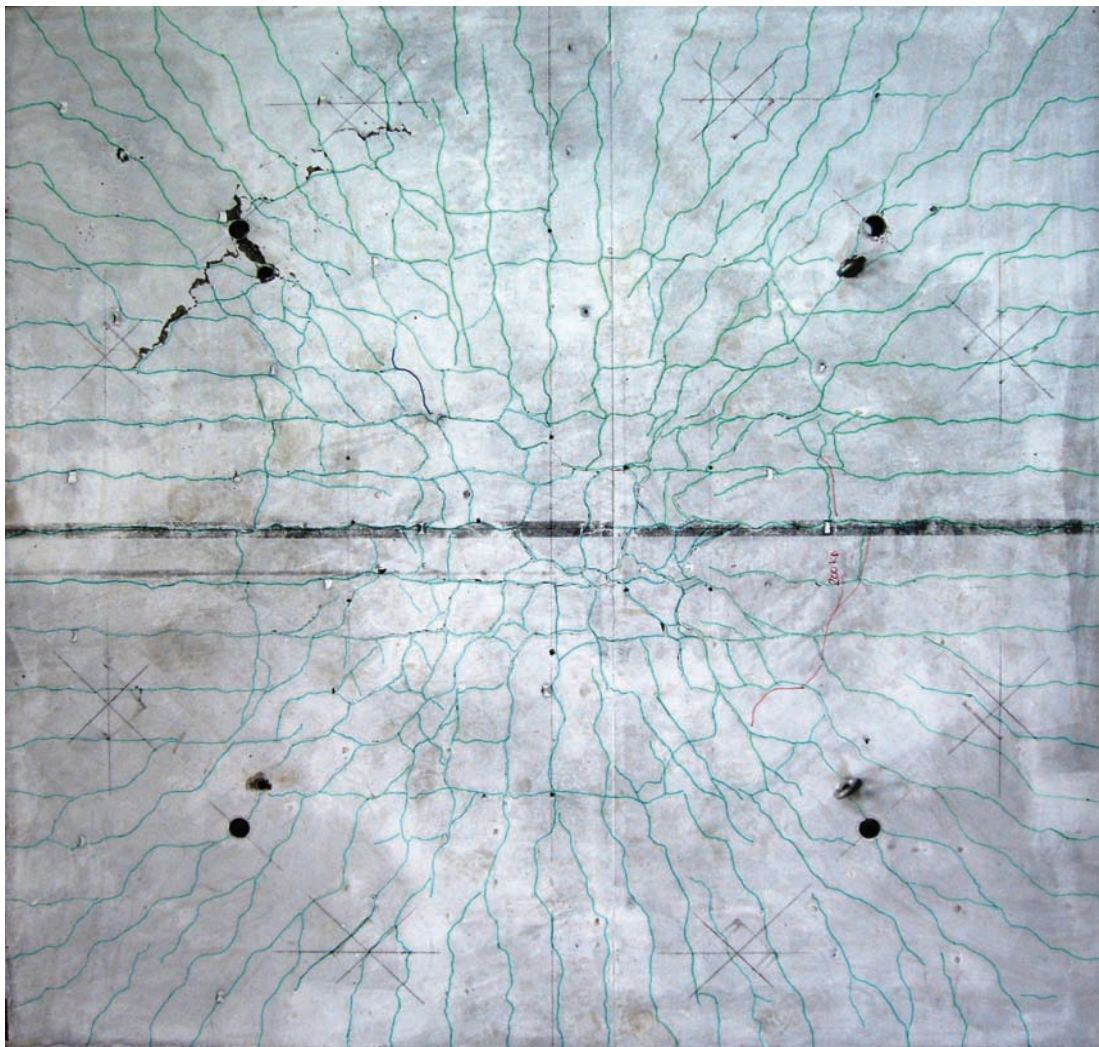


Figura A- 4 - Fendilhação da face superior - laje ACA2.

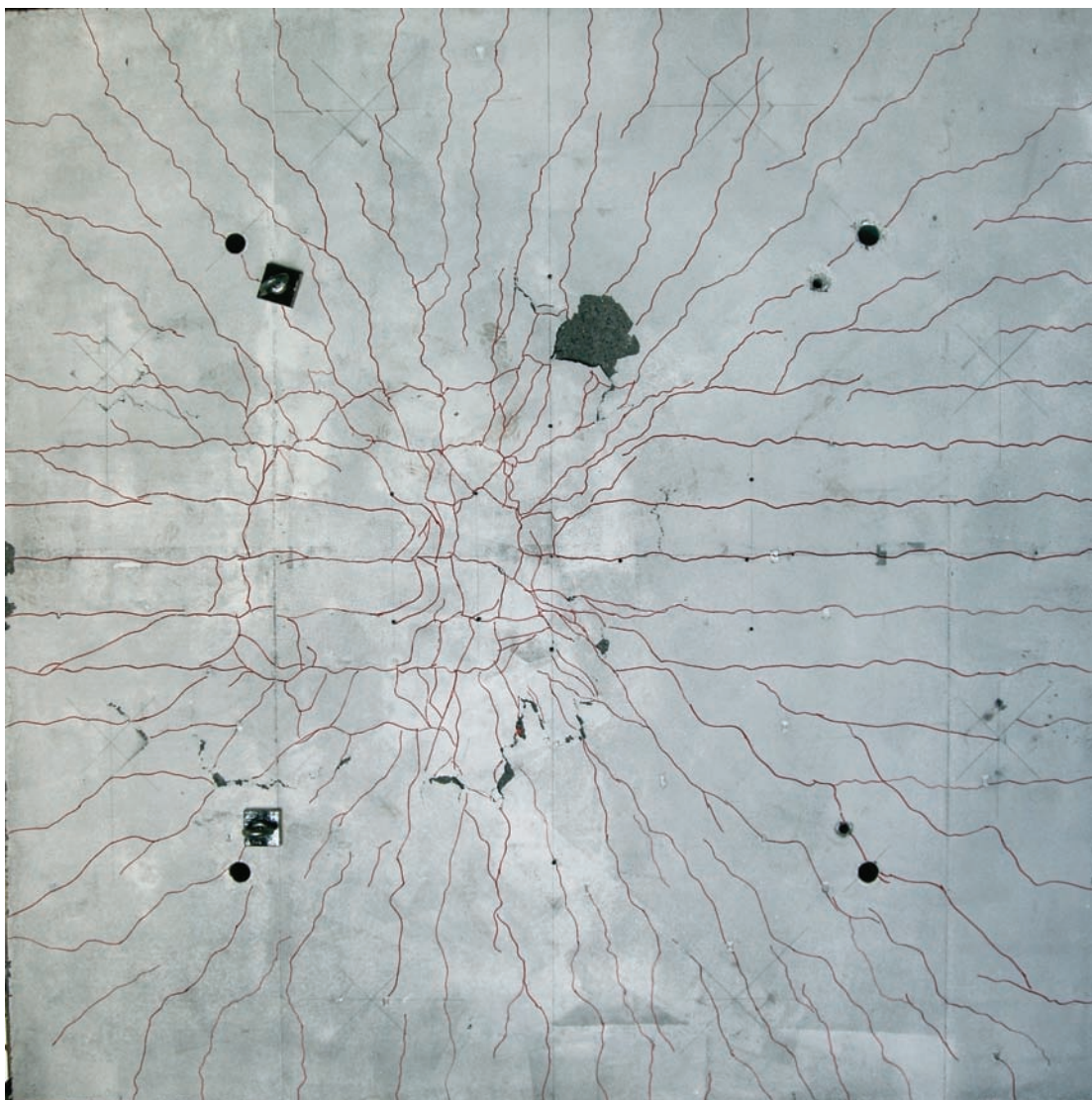


Figura A- 5 - Fendilhação da face superior - laje AEA2.

A.5.2 Sobreposição das armaduras longitudinais

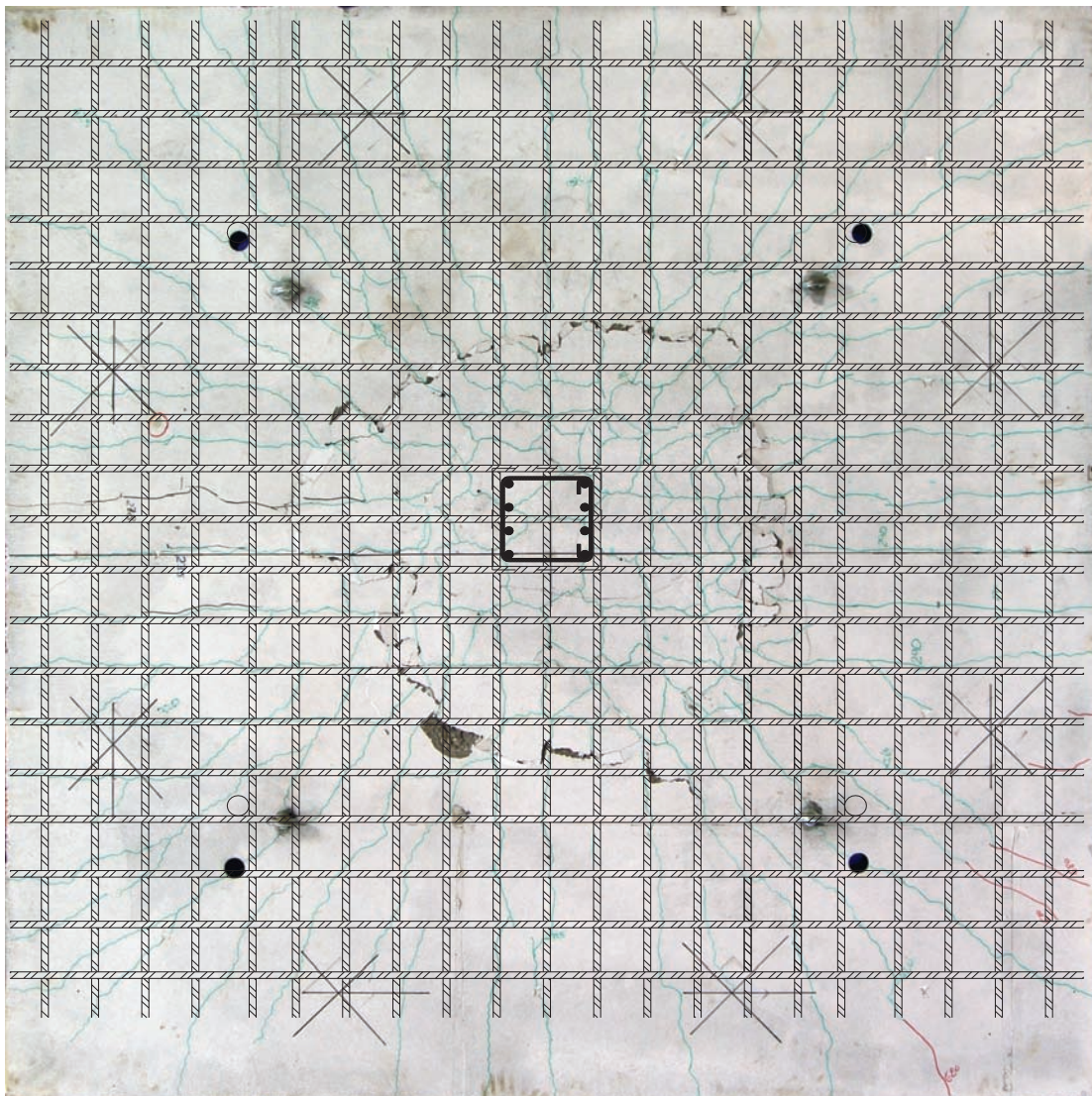


Figura A- 6 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AC0.

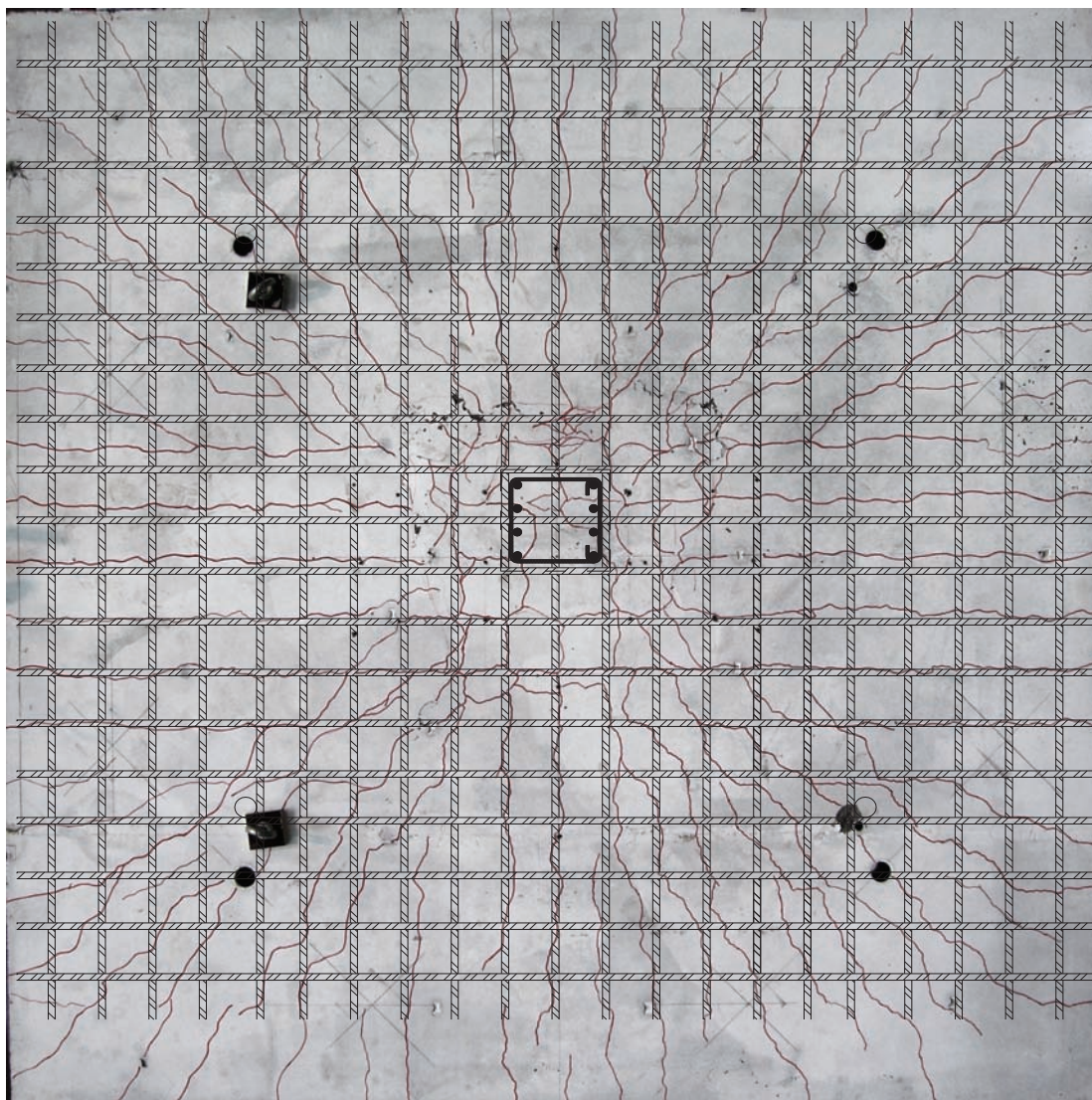


Figura A- 7 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje FC0.

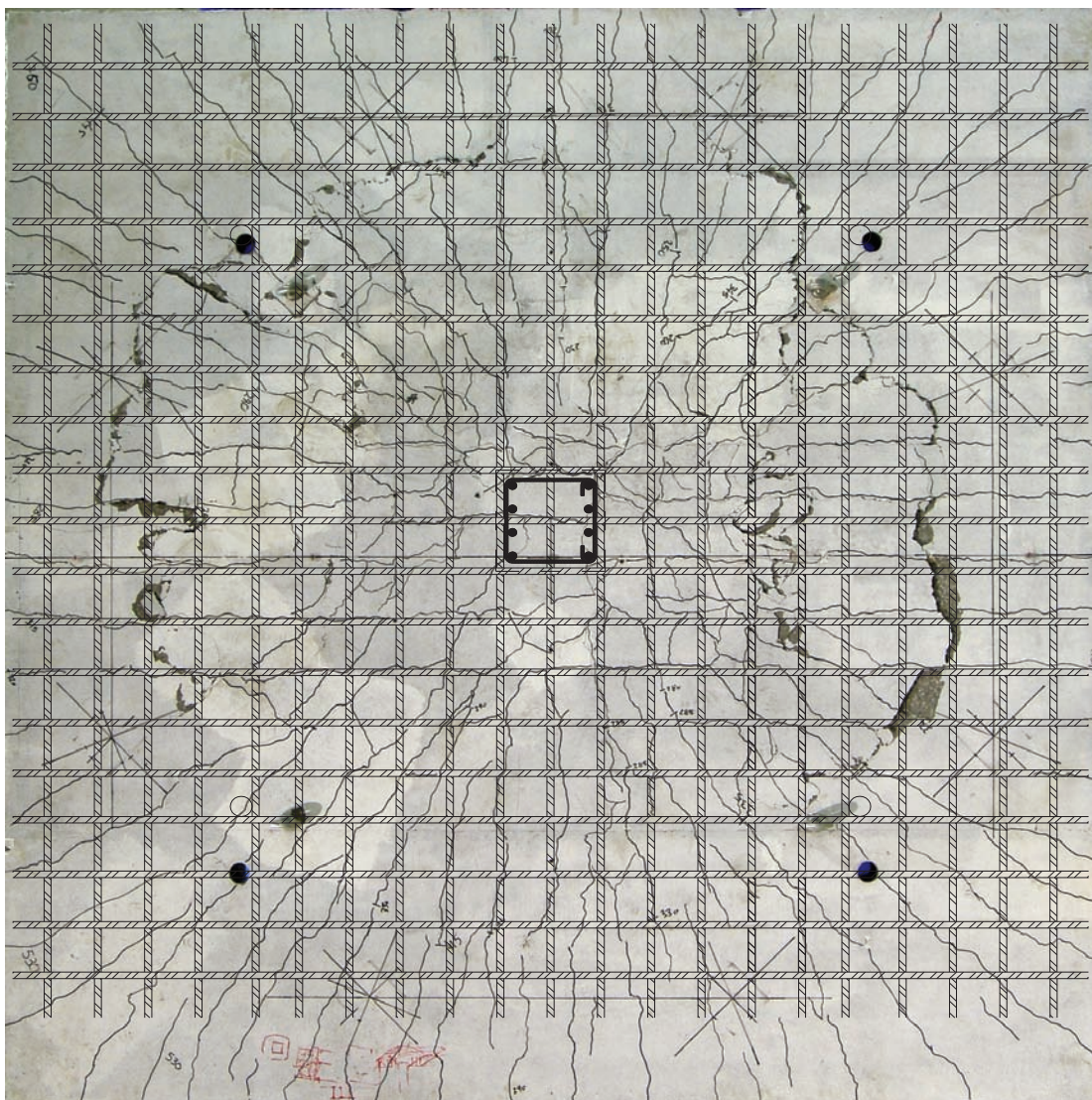


Figura A- 8 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje ACA1.

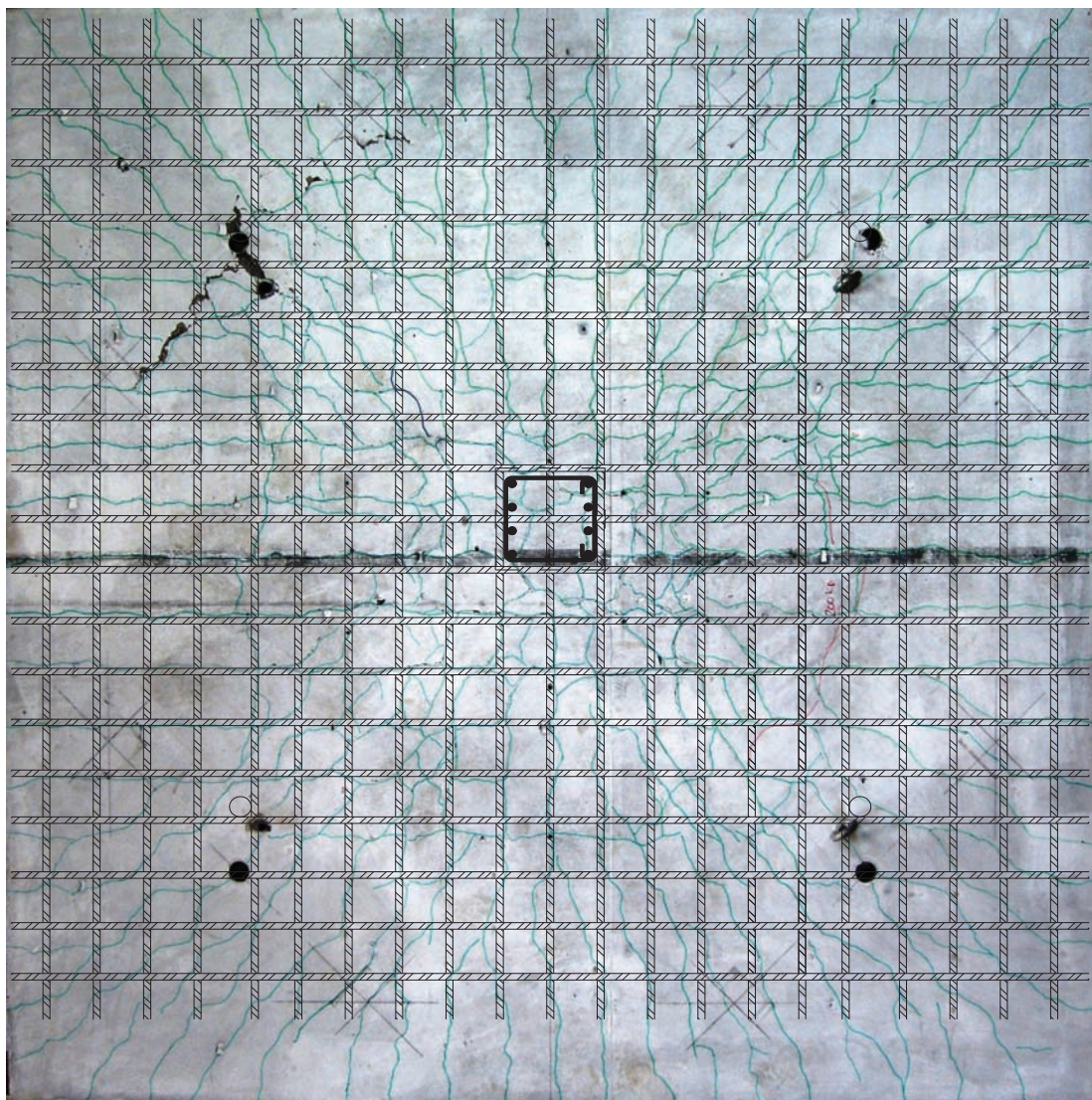


Figura A- 9 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje ACA2.

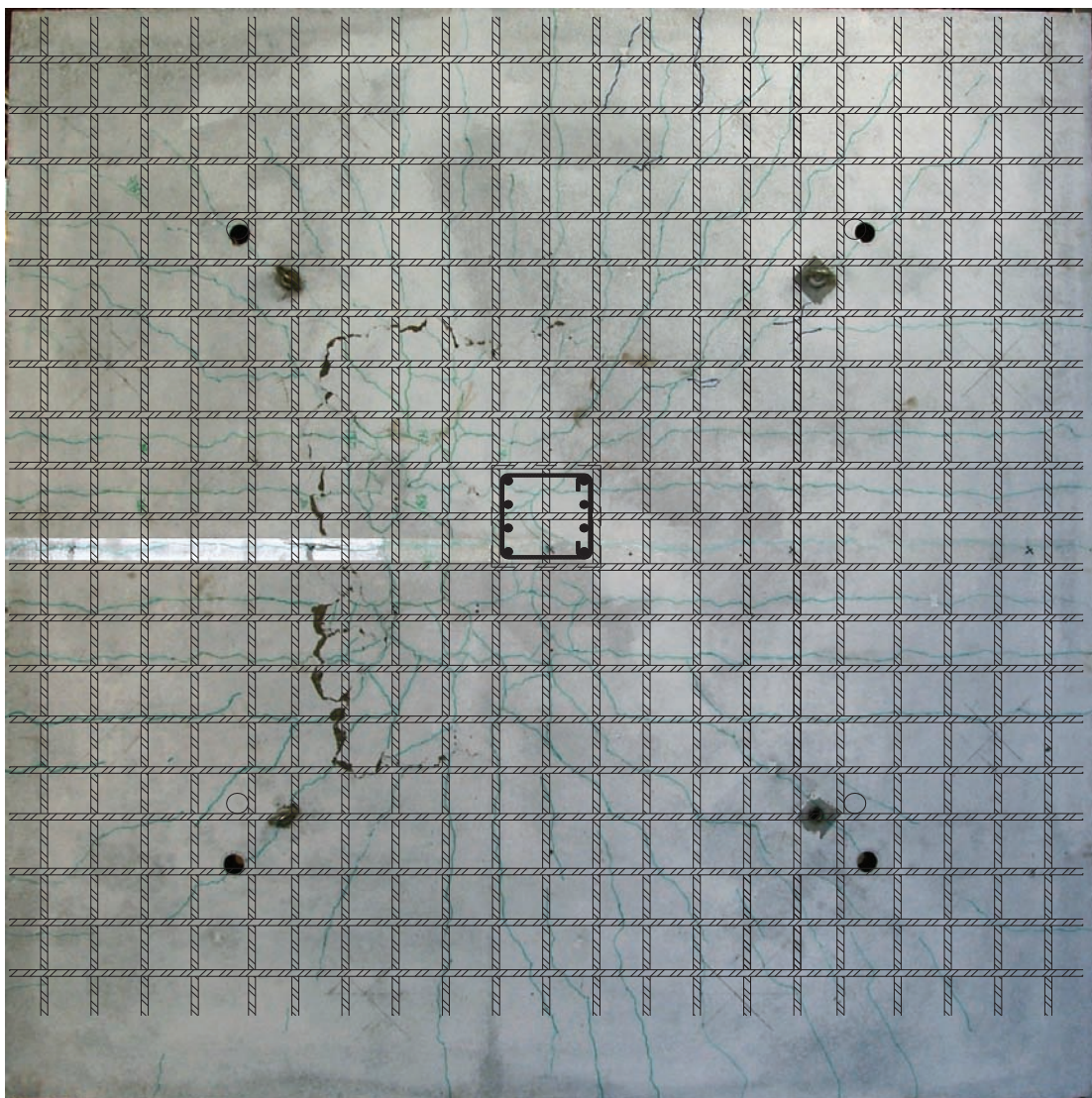


Figura A- 10 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AE0.

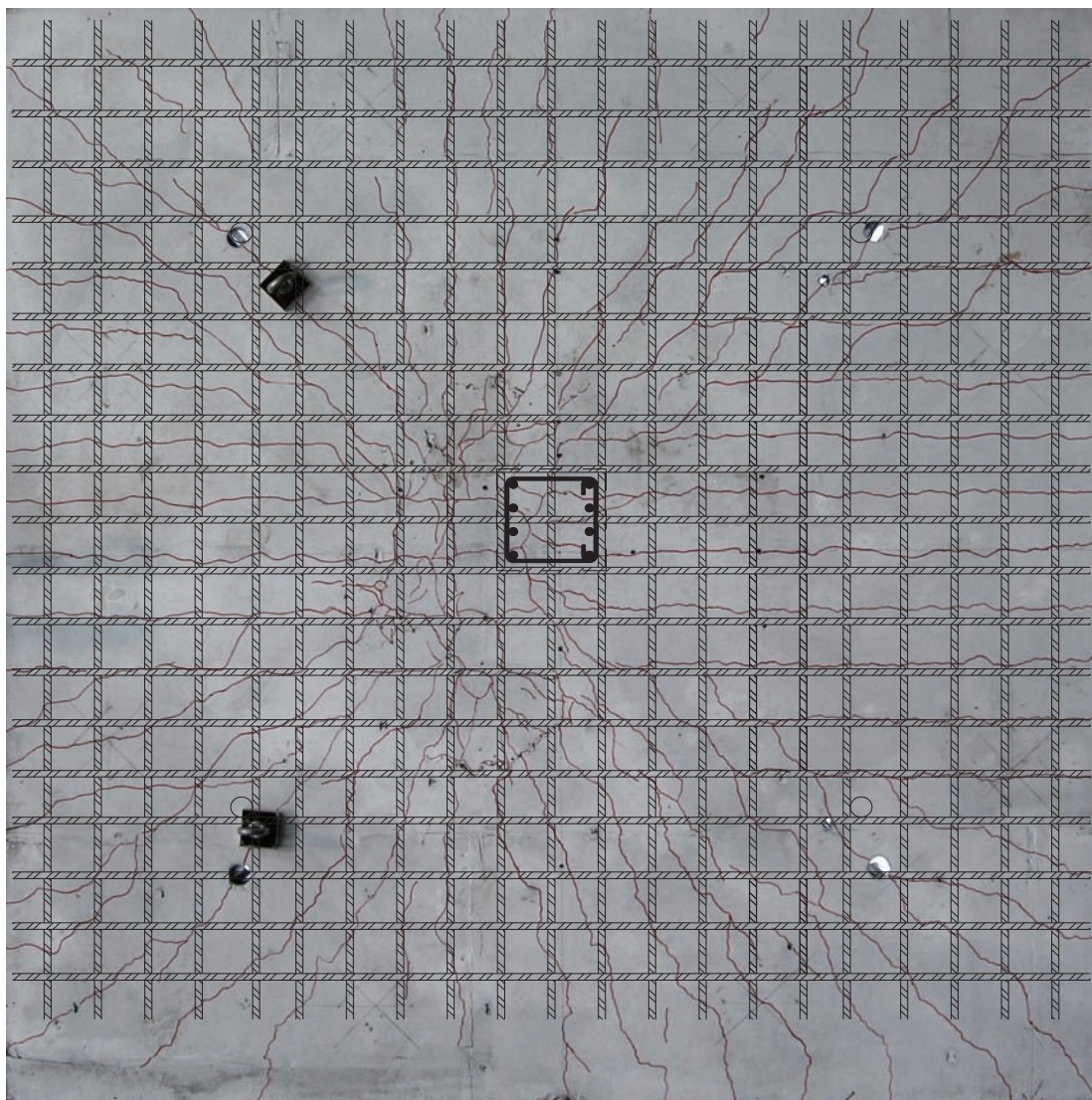


Figura A- 11 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje FE0.

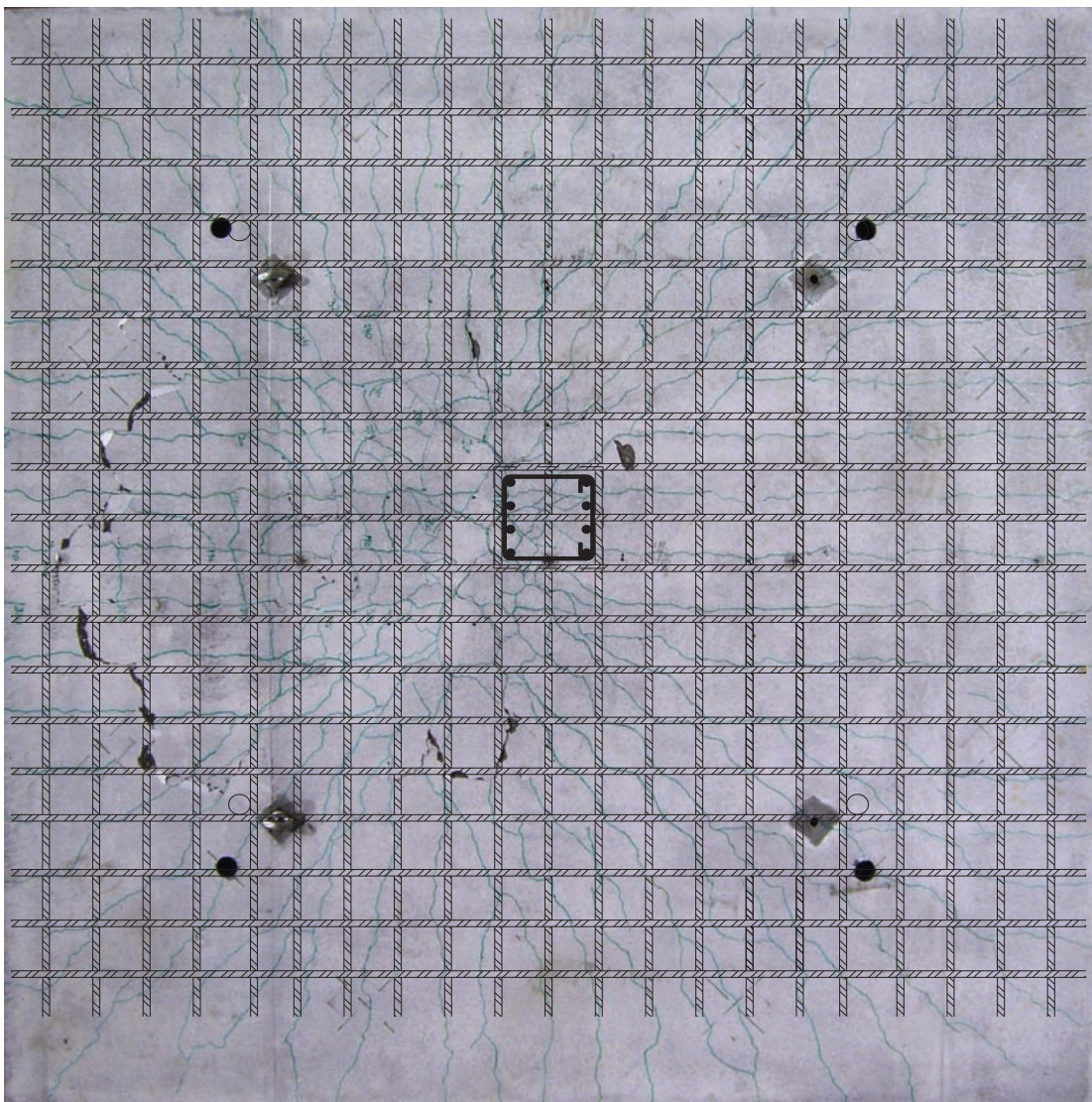


Figura A- 12 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AEA1.

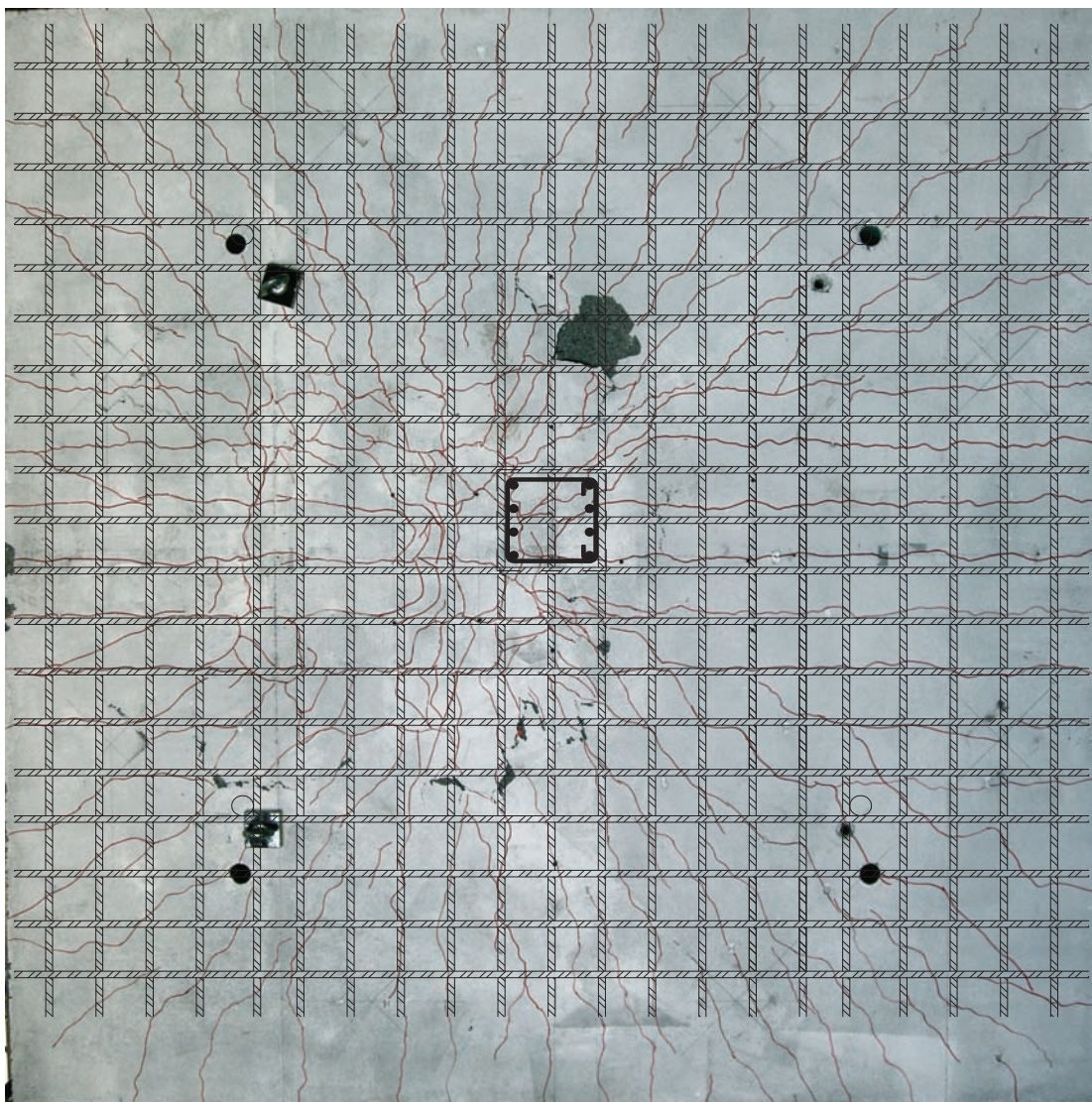


Figura A- 13 - Fendilhação da face superior (sobreposição da armadura longitudinal) - laje AEA2.

A.6 EXTENSÕES MÉDIAS DE TRACÇÃO NO BETÃO - FACE SUPERIOR

A.6.1 Punçoamento centrado

- Lajes AC0 e FC0 sem armadura transversal

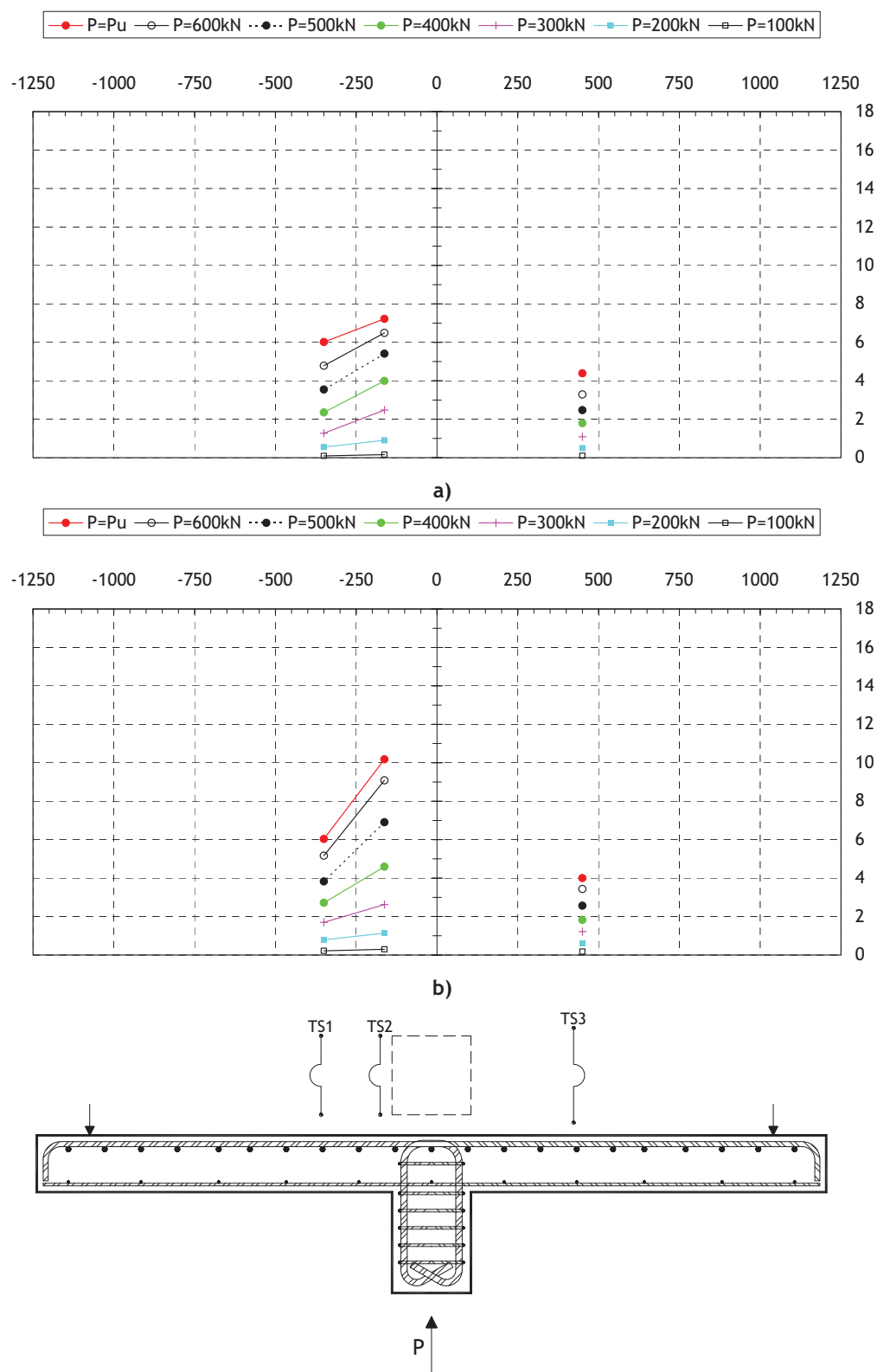
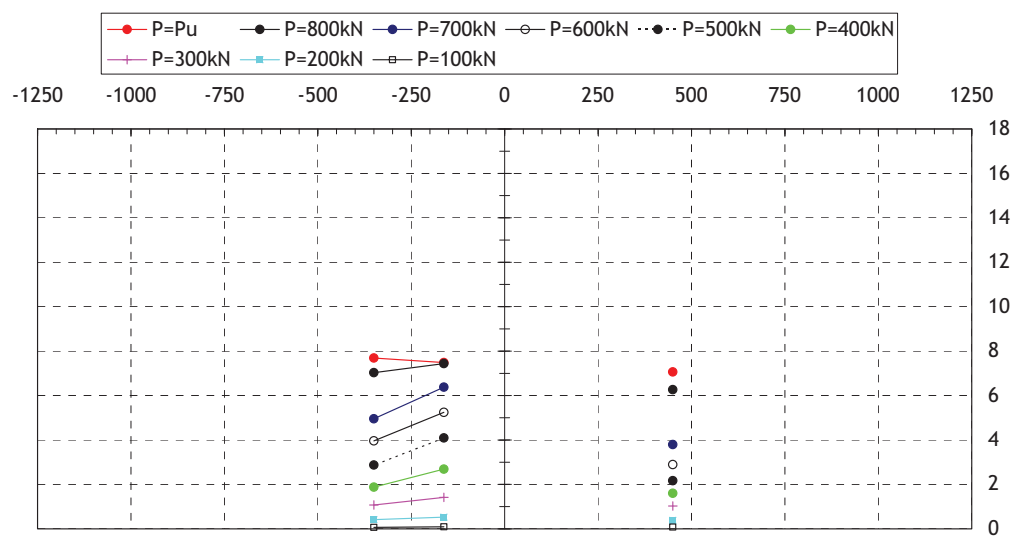
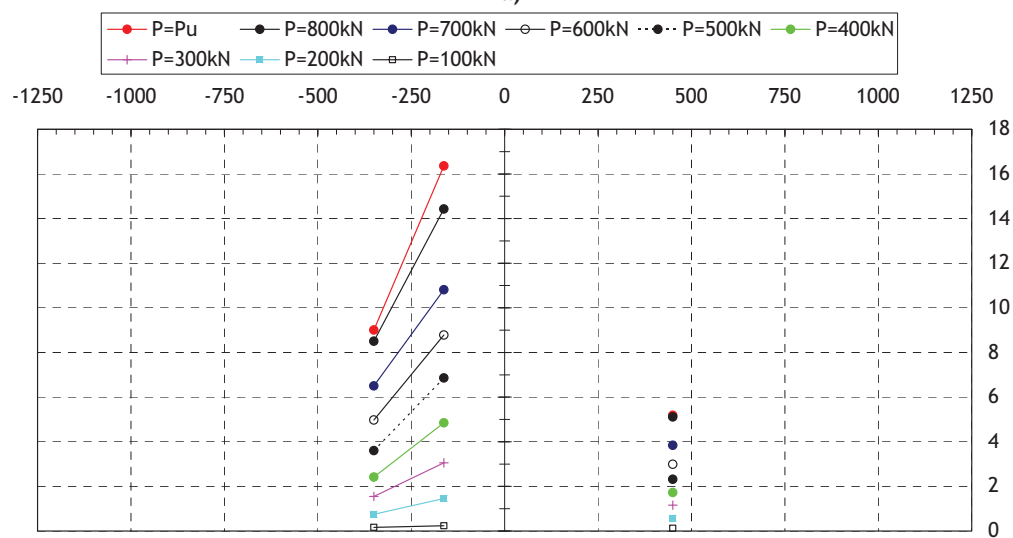


Gráfico A- 9 - Extensões de tracção na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AC0 e b) FC0.

• Lajes ACA1 e ACA2 com armadura transversal



a)



b)

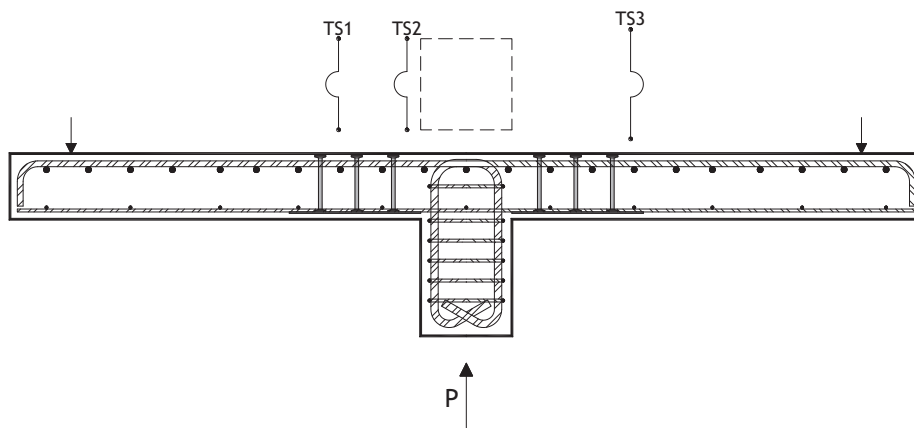
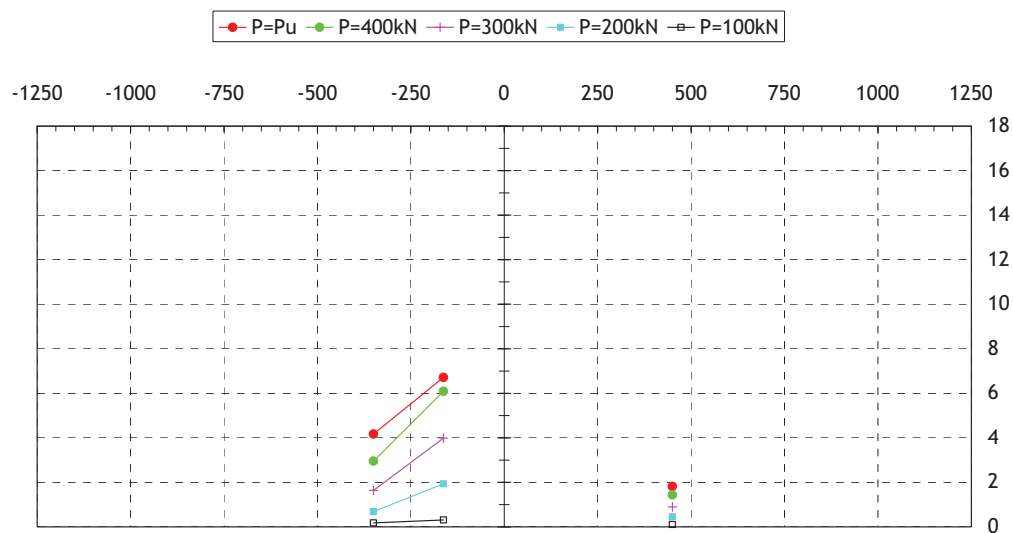


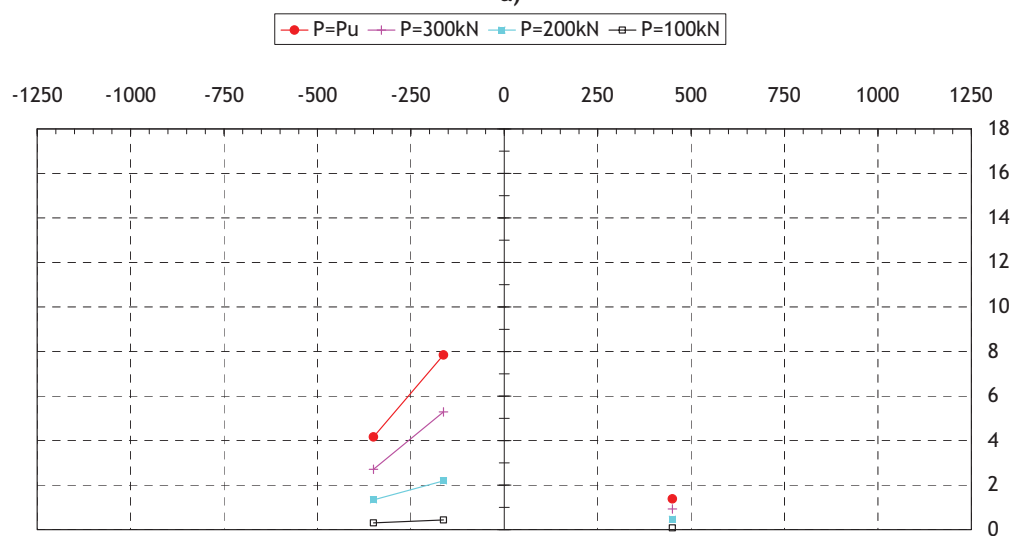
Gráfico A- 10 - Extensões de tracção na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) ACA1 e b) ACA2.

A.6.2 Punção excêntrica

- Lajes AE0 e FE0 sem armadura transversal



a)



b)

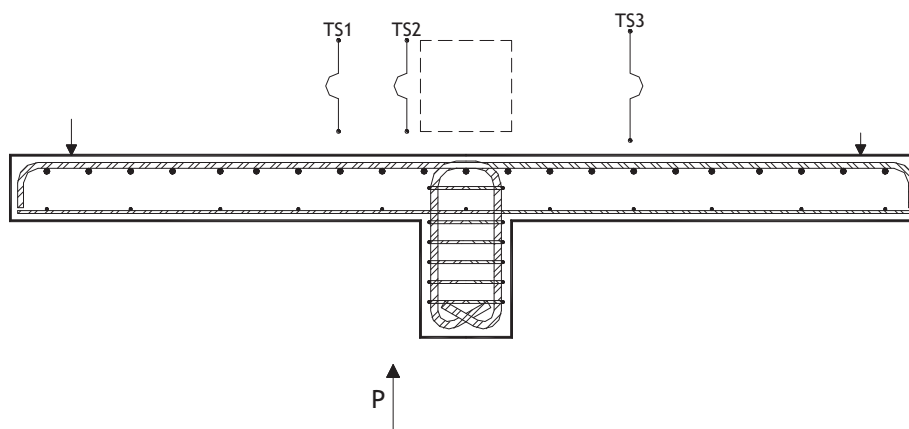
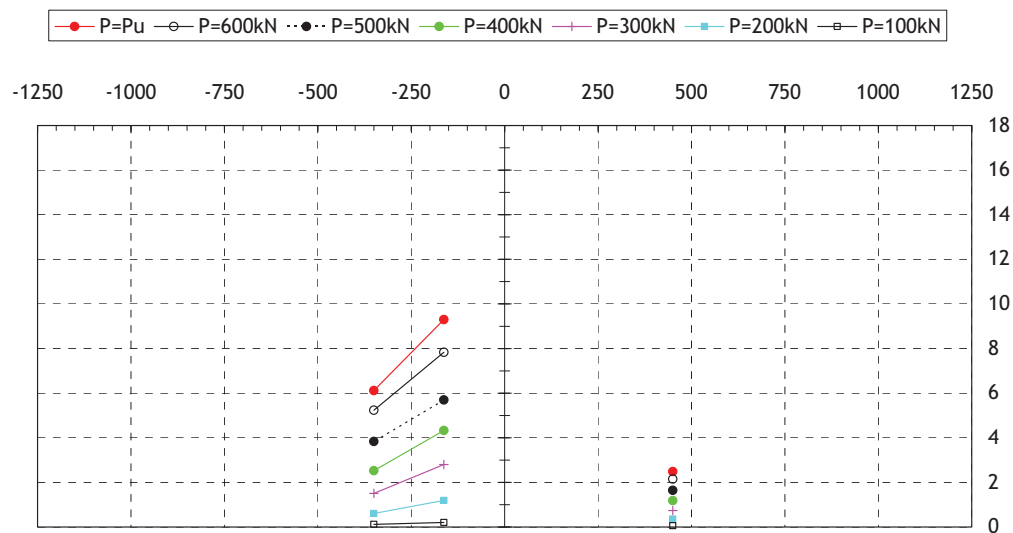
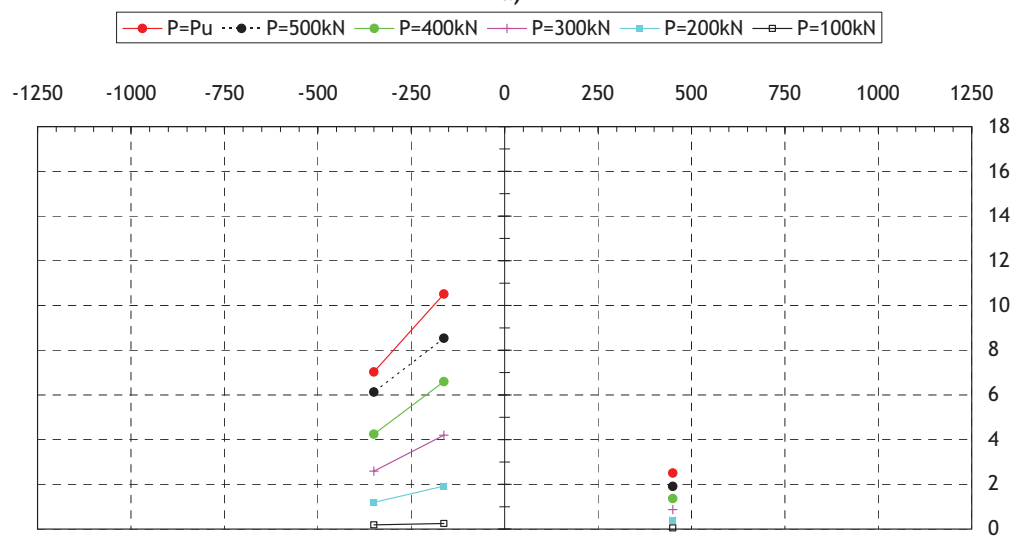


Gráfico A- 11 - Extensões de tracção na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AE0 e b) FE0.

• **Lajes AEA1 e AEA2 com armadura transversal**



a)



b)

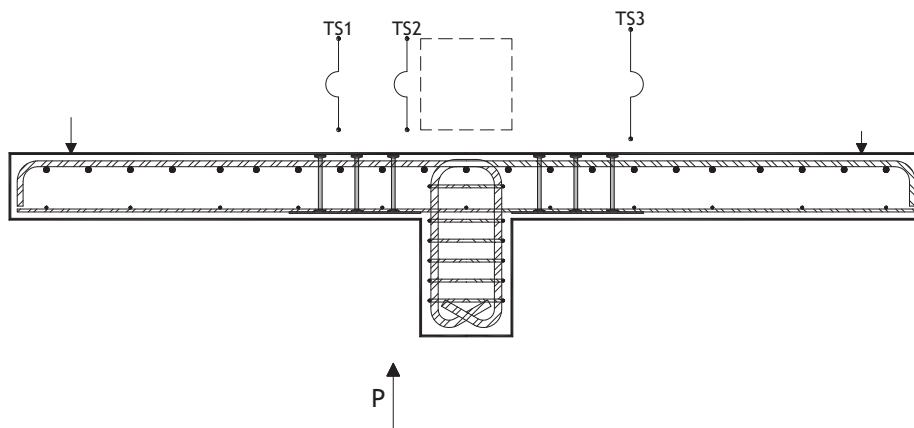


Gráfico A- 12 - Extensões de tracção na direcção tangencial (%) no betão para diferentes níveis do carregamento (face superior) - lajes: a) AEA1 e b) AEA2.

Na face superior, o gradiente das extensões tangenciais no betão em função da distância ao centro da laje aumenta com a carga aplicada. É possível verificar no Gráfico A- 11 e no Gráfico A- 12 a quase inexistência de extensões de tracção na zona de laje do lado oposto ao da aplicação da carga. Ao invés, o Gráfico A- 9 e o Gráfico A- 10 mostram claramente extensões uniformes de tracção na direcção tangencial em axi-simetria no caso do carregamento centrado (deformação de corpo rígido).

ANOTAÇÕES

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

