

U. PORTO

FEP FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

**DIFUSÃO INTERNACIONAL DO
CONHECIMENTO TECNOLÓGICO NUM
MODELO COM GOVERNO**

por

Sofia Aguiar de Moraes Vaz

Tese de Mestrado em Economia

Orientada por

Professor Doutor Paulo José Abreu Beleza de Vasconcelos

Professor Doutor Óscar João Atanazio Afonso

2011

BREVE NOTA BIOGRÁFICA

A candidata licenciou-se em Matemática – com formação *minor* em Matemática Aplicada - na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em Junho de 2009.

Em Setembro de 2009 ingressou no Mestrado em Economia – área de especialização em Modelação e Simulação Económica – na Faculdade de Economia da Universidade do Porto.

Durante o ano 2010 estagiou na empresa Mota-Engil Engenharia num projecto conjunto com o QREN fazendo investigação na área da sua formação base – Matemática – sendo o principal objecto de estudo ao longo do projecto as Redes Neurais Artificiais.

AGRADECIMENTOS

Esta tese é, sem dúvida, o resultado de um esforço conjunto e de um percurso académico iniciado há muitos anos atrás, assim não podia deixar de agradecer:

Aos meus orientadores, Prof. Doutor Óscar Afonso e Prof. Doutor Paulo Beleza de Vasconcelos, pela total disponibilidade, generosidade, palavras de incentivo quando a falta de confiança aparecia ao longo da elaboração da tese, e também por toda a orientação que sempre me deram ao longo de todo o mestrado;

Aos meus pais e irmão por todas as palavras de incentivo que me deram ao longo da elaboração da tese, e também pelo apoio incondicional das minhas escolhas ao longo de todo o meu percurso académico;

A toda a minha família, avó, tios e primos, e às minhas amigas de sempre sem os quais esta jornada seria muito mais difícil;

Por fim, a todos aqueles que foram meus professores e colegas ao longo de todos os anos de estudo e que de alguma forma contribuíram para aquilo que sou hoje.

A todos vós,

“Muito Obrigada!”

RESUMO

Num modelo de crescimento endógeno motivado pelo progresso do conhecimento tecnológico horizontal pretende-se, considerando dois países (um inovador, líder, e outro imitador, seguidor) analisar os efeitos decorrentes da consideração do investimento público no crescimento económico dos países menos desenvolvidos, não apenas no estado estacionário ou de longo prazo, mas também durante a dinâmica de transição para esse estado.

Nesse contexto, este estudo tem ainda como objectivo primordial a resolução num software adequado do modelo desenvolvido, no caso em MATLAB, permitindo desta forma a simulação e análise de diversos cenários económicos induzidos pela política governamental, possibilitando a interpretação económica das variáveis relevantes via a sua resolução numérica e a sua explicitação em representações gráficas bastante elucidativas.

PALAVRAS CHAVE

Conhecimento tecnológico, governo, crescimento, inovação, imitação

CLASSIFICAÇÃO JEL

C63, O14, O31, O33, O38, O47

ABSTRACT

In a model of endogenous growth driven by progress of technological horizontal knowledge is intended to, considering two countries (an innovative, leader, and another imitator, follower), analyze the effects that arise from the consideration of public investment on economic growth of less developed countries, not only in steady state or long-term but also during the dynamic transition to this state.

In that context, this study also has as the primary objective solve in a proper software, in the case in MATLAB, the model developed, allowing thereby the simulation and analysis of various economic scenarios, induced by government policy, enabling the economic interpretation of the relevant variables via its numerical resolution and their explicit representations graphics very enlightening.

KEYWORDS

Technological knowledge, government, growth, innovation, imitation

JEL CLASSIFICATION

C63, O14, O31, O33, O38, O47

ÍNDICE GERAL

BREVE NOTA BIOGRÁFICA	II
AGRADECIMENTOS	III
RESUMO	IV
PALAVRAS CHAVE	IV
CLASSIFICAÇÃO JEL	IV
ABSTRACT	V
KEYWORDS	V
JEL CLASSIFICATION	V
ÍNDICE GERAL	VI
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
ÍNDICE DE QUADROS	IX
CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1. INTRODUÇÃO	3
2. CONFIGURAÇÃO DO MODELO	5
3. INOVAÇÃO NO PAÍS LÍDER	8
4. IMITAÇÃO NO PAÍS SEGUIDOR	12
4.1 CONFIGURAÇÃO DO MODELO	12
4.2 CRESCIMENTO NO ESTADO ESTACIONÁRIO	14
4.3 TRAJECTÓRIA E DINÂMICA DE CONVERGÊNCIA.....	16
5. CUSTO DE IMITAÇÃO CONSTANTE (OU COM CRESCIMENTO LENTO).....	19
5.1 O ESTADO ESTACIONÁRIO.....	19
5.2 DINÂMICA DE TRANSIÇÃO.....	20
6. MODELAÇÃO, APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	22
6.1 MATLAB	22
6.1.1 O que é o MATLAB?.....	22
6.1.2 Função ODE45	22

6.2 CENÁRIOS ECONÓMICOS ESTUDADOS	23
6.2.3 <i>Valores dos Parâmetros Utilizados nos Diversos Casos</i>	23
6.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	26
7. ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DO GOVERNO.....	40
8. CONCLUSÕES.....	42
9. APÊNDICES	43
9.1 APÊNDICE 1.....	43
9.2 APÊNDICE 2.....	43
9.3 APÊNDICE 3.....	44
9.4 APÊNDICE 4.....	44
9.5 APÊNDICE 5.....	45
9.6 APÊNDICE 6.....	45
9.7 APÊNDICE 7.....	47
9.8 APÊNDICE 8.....	48
9.9 APÊNDICE 9.....	49
9.10 APÊNDICE 10.....	49
9.11 APÊNDICE 11.....	50
9.12 APÊNDICE 12.....	50
9.13 APÊNDICE 13.....	51
9.14 APÊNDICE 14.....	52
9.15 APÊNDICE 15.....	52
9.16 APÊNDICE 16.....	53
9.17 APÊNDICE 17.....	53
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	55

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso I</i>	27
Figura 2 – Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso II</i>	28
Figura 3 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso III</i>	29
Figura 4 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso IV</i>	30
Figura 5 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso V</i>	31
Figura 6 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso VI</i>	32
Figura 7 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso VII</i>	33
Figura 8 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso VIII</i>	34
Figura 9 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso IX</i>	35
Figura 10 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso X</i>	36
Figura 11 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso XI</i>	37
Figura 12 - Solução do Sistema Diferencial do <i>Caso XII</i>	39

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso I</i>	23
Quadro 2 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso II</i>	23
Quadro 3 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso III</i>	24
Quadro 4 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso IV</i>	24
Quadro 5 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso V</i>	24
Quadro 6 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso VI</i>	24
Quadro 7 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso VII</i>	25
Quadro 8 - Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso VIII</i>	25
Quadro 9 - Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso IX</i>	25
Quadro 10 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso X</i>	25
Quadro 11 – Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso XI</i>	26
Quadro 12 - Valores dos parâmetros utilizados no <i>Caso XII</i>	26
Quadro 13 – Quadro Resumo dos Casos Estudados	39

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente trabalho consiste na extensão do modelo proposto por Barro e Sala-i-Martin (1997) através da introdução do Governo. Assim, tendo por base o modelo de Barro e Sala-i-Martin (1997) sem intervenção governamental pretendeu-se analisar os efeitos decorrentes da consideração do investimento público no crescimento económico de um país líder e, em particular, na dinâmica de transição de um país seguidor para o estado estacionário imposto pelo país líder.

Este estudo tem ainda como objectivo primordial a modelação num software adequado do modelo desenvolvido, no caso em MATLAB, permitindo desta forma a simulação e análise de diversos cenários económicos, possibilitando a interpretação económica das variáveis relevantes via a sua resolução numérica e a sua explicitação em representações gráficas bastante elucidativas.

A tese tem disposição que a seguir se apresenta.

O primeiro ponto abordado na presente tese, INTRODUÇÃO, consiste numa breve apresentação do objectivo, contextualização teórica do problema em estudo e metodologia utilizada.

No segundo ponto, CONFIGURAÇÃO DO MODELO, é, como o próprio nome indica, apresentada a configuração do modelo, explicitando-se o lado da produção e do consumo. No primeiro caso, atende-se, em particular, à função produção de bens finais (output da economia), bem como as condições e hipóteses do mesmo. No segundo caso, apresenta-se a função utilidade a restrição orçamental dos consumidores e obtém-se a trajectória do consumo agregado.

No terceiro ponto, INOVAÇÃO NO LÍDER, desenvolve-se o modelo determinando as equações da função lucro do monopolista, inventor de um determinado bem intermédio, da quantidade de bens intermédios produzidos e da taxa de crescimento no país líder, bem como do preço de um bem intermédio.

No quarto ponto, IMITAÇÃO NO PAÍS SEGUIDOR, desenvolve-se o modelo para o país seguidor de forma análoga à elaborada no terceiro ponto para o país líder, e é analisado o crescimento económico no estado estacionário, bem como a trajectória e a dinâmica de convergência do país seguidor.

No quinto ponto, CUSTO DE IMITAÇÃO CONSTANTE (OU COM CRESCIMENTO LENTO), é analisado o crescimento no estado estacionário, bem como a trajectória e a dinâmica de convergência quando o custo de imitação é constante.

No sexto ponto, MODELAÇÃO, APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS, é feita uma breve apresentação do software MATLAB, focando o método numérico de resolução do sistema de equações diferenciais que governa o modelo, são apresentados os vários cenários estudados e são apresentadas e analisadas as representações gráficas das soluções do sistema de equações diferenciais para os vários casos analisados.

No sétimo ponto, ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DO GOVERNO, é analisada a taxa de crescimento, tentando compreender o comportamento desta quando se verificam variações nas despesas do governo, directamente relacionadas com os impostos cobrados.

Em todos os casos são particularmente enfatizados os mecanismos económicos que orientam os resultados.

No oitavo ponto são apresentadas as CONCLUSÕES.

No nono e último ponto, APÊNDICES, são apresentadas as demonstrações das principais equações presentes na tese.

1. INTRODUÇÃO

A teoria de crescimento neoclássica apresenta o crescimento no longo prazo como sendo exclusivamente dependente do progresso tecnológico. Assim, muitos têm argumentado que, uma vez que o progresso tecnológico é exógeno, todos os esforços para compreender e influenciar o crescimento são infrutíferos. No entanto, a teoria do crescimento endógeno, iniciada por Romer (1987, 1990) e ampliado por Grossman e Helpman (1995) e Aghion e Howitt (1992), explica o crescimento de longo prazo pela endogeneização do progresso tecnológico, determinado basicamente pela investigação e desenvolvimento (I&D).¹

A endogeneização do progresso tecnológico, que como já referido é uma variável inexplicável no modelo de crescimento neoclássico, tem produzido grandes avanços sobre a dinâmica do caminho de transição para a convergência.

Em 1997, Barro e Sala-i-Martin desenvolveram um modelo que combina elementos de crescimento endógeno com as implicações da convergência do modelo de crescimento neoclássico. Este modelo pressupõe a existência de dois países com duas economias distintas: o país 1 (economia líder), onde se verifica progresso tecnológico sob a forma de aumento na variedade de bens intermédios produzidos (ocorre inovação) e o país 2, em que o progresso tecnológico é resultado da imitação e adaptação das inovações realizadas no país 1.

O presente trabalho consiste numa extensão do modelo proposto por Barro e Sala-i-Martin (1997), através da introdução das despesas do Governo. Desenvolvido o modelo nesse contexto, é posteriormente implementado em MATLAB e resolvido numericamente.

Assim, tendo por base a análise efectuada no âmbito do modelo da teoria de crescimento endógeno por Barro e Sala-i-Martin (1997), introduzem-se as despesas do Governo como argumento positivo (*input*) da função produção, em linha com o

¹ A teoria do crescimento económico endógeno beneficiou também dos trabalhos de Lucas (1988, 1993), mas neste caso o crescimento económico é motivado pela acumulação de capital humano. Esta fonte de crescimento será, no entanto, ignorada nesta dissertação.

sugerido por Irmen e Kuehnel (2009).

Actualmente é amplamente reconhecido que a despesa pública em infra-estruturas, como estradas, portos ou sistemas de comunicação, os gastos públicos de investigação, bem como a prestação de educação e de serviços médicos aumentam o potencial de uma economia. Pelo menos desde o estudo influente de Aschauer (1989) e a discussão que se seguiu (de Haan e Romp (2007)) é argumentado que um aumento na actividade produtiva do governo aumenta o produto. Easterly e Rebelo (1993) e, mais recentemente Canning e Pedroni (2004) encontraram evidências para os efeitos de longo prazo associados ao crescimento do investimento público em infra-estruturas (veja-se, por exemplo, Irmen e Kuehnel (2009)).

Neste contexto, a consideração de Governo num modelo de difusão internacional do conhecimento tecnológico é um tema actual e de enorme relevância científica.

2. CONFIGURAÇÃO DO MODELO

O modelo que a seguir se desenvolve é uma extensão do modelo de Barro e Sala-i-Martin (1997) introduzindo-se a despesa do governo G como um bem público na função produção de cada um dos países, tal como sugerido por Barro (1990).

Assim, no presente modelo são consideradas dois tipos de economias, uma líder e outra seguidora, denominadas por $i = \mathcal{L}, \mathcal{S}$. Em cada um dos países, a função produção é do tipo de Spence (1976) / Dixit e Stiglitz (1977):

$$Y_i = A_i \cdot L_i^\alpha \cdot G_i^\beta \sum_{j=1}^{N_i} (X_{ij})^{1-\alpha-\beta} \quad (1)$$

Onde:

- α é o share do trabalho na produção, $0 < \alpha < 1$;
- β é o share da despesa do governo na produção, $0 < \beta < 1$;
- $0 < \alpha + \beta < 1$;
- Y_i é o produto;
- G_i é a despesa do governo;
- L_i é o input de trabalho;
- X_{ij} é a quantidade empregada do j – ésimo tipo de bem intermédio não durável;
- N_i é o número total de bens intermédios disponíveis na economia i .

Note-se ainda que, a tecnologia ou função produção presente na equação (1) pode ser utilizada por todos os agentes no país i ,² e a produção ocorre em condições de concorrência perfeita.

Das condições do modelo, deve ainda salientar-se que se considera que $Y_{\mathcal{L}}$ é fisicamente igual a $Y_{\mathcal{S}}$ (i.e., ambos representam o PIB, já que se normaliza o preço do produto em cada momento do tempo e se considera com valor 1 de numerário) e que a quantidade

² Distingue-se, assim, tecnologia de conhecimento tecnológico. O conhecimento tecnológico representado pelo número de bens intermédios é uma das componentes da tecnologia.

de trabalho disponível em cada um dos países, L_L e L_S , é constante e corresponde à população de cada país.

A_i , o parâmetro de produtividade, representa a qualidade das instituições de cada país; isto é, traduz as diferenças no produto que surgem para dados valores de N_i , L_i , G_i e X_{ij} . Contudo, na prática, a maior causa das diferenças nos respectivos valores de A_i é a variação nas políticas governamentais, reflectidas nos serviços, nas taxas de juro, nas políticas de patentes e períodos de direitos de propriedade, entre outros.

No presente estudo considera-se que o comércio é equilibrado entre os dois países; isto é, o output interno, Y_i , iguala as despesas internas. Estas despesas são para consumo, C_i , para a produção de bens intermédios, X_{ij} , e para I&D destinados à investigação de novas variedades de produtos.³ Considera-se também que um agente pode inovar inventando um novo tipo de bem ou imitando um produto conhecido noutra país, noutra economia.

Unidades de C_i ou X_{ij} requerem unidades de Y_i ; i.e., o consumo materializa-se em numerário e o numerário é *input* na produção de bens intermédios. A invenção de uma nova variedade de bem na economia i requer um montante fixo de η_i unidades de Y_i . A assunção de que η_i é constante significa que os retornos da descoberta de novos tipos de bens intermédios são constantes.

Para o presente estudo supõe-se, inicialmente, que o país líder é líder em conhecimento tecnológico e que o país seguidor é seguidor neste mesmo parâmetro, ou seja, $N_L(0) > N_S(0)$. Supõe-se também que, todos os tipos de bens intermédios conhecidos inicialmente no país seguidor são também conhecidos no país líder. Assume-se que todas as descobertas de novos bens intermédios ocorrem no país líder. Por seu lado, o país seguidor imita os bens intermédios conhecidos no país líder mas não inventa nenhum, porque a imitação é menos custosa e porque não há efeitos de *feedback* entre economias (note-se que não se considera comércio internacional).

³ Poderia considerar-se que Y acomoda também o G . No entanto, assumindo-se que o saldo orçamental está equilibrado em todos os momentos do tempo, os gastos públicos são iguais aos impostos cobrados.

O custo de imitação do país seguidor é denominado ϑ_S e é naturalmente mais barato que o respectivo custo de inovação.

3. INOVAÇÃO NO PAÍS LÍDER

A configuração do modelo para o país líder é similar ao descrito em Romer (1990), Rivera-Batiz e Romer (1991), Grossman e Helpman (1991, Cap. 3), Barro e Sala-i-Martin (1995, Cap. 6) e Barro e Sala-i-Martin (1997) introduzindo-se agora, como já foi referido, a despesa do governo. Assume-se, que o inventor do bem intermédio do tipo j terá monopólio perpétuo do uso deste na produção no país líder (esta hipótese é usual nos modelos de crescimento endógeno com I&D horizontal, como os referidos acima, mas não faz sentido nos modelos com inovação vertical onde a destruição criativa é determinante para o crescimento económico). Se o bem j tiver preço, no país líder, igual a P_{Lj} , então, o lucro do monopólio do inventor é,

$$\pi_{Lj} = (P_{Lj} - 1) \cdot X_{Lj} \quad (2)$$

Onde o 1 dentro dos parênteses da equação (2) representa o custo marginal da produção do bem intermédio j , porque, recorde-se, se assume que para produzir uma unidade de bem intermédio é necessária uma unidade de Y cujo preço é 1 (note-se que no mercado de bens finais vigora a concorrência perfeita e, por isso, o preço é igual ao custo marginal).

Dada a função produção, a equação (1), o produto marginal do bem intermédio j na produção do produto é,

$$\frac{\partial Y_L}{\partial X_{Lj}} = (1 - \alpha - \beta) A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha \cdot (X_{Lj})^{-(\alpha+\beta)} = 1$$

A equação deste produto marginal para P_{Lj} leva à função procura do bem intermédio j de todos os produtores de bens no país líder (ver Apêndice 1):

$$X_{Lj} = \left(\frac{(1 - \alpha - \beta) A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha}{P_{Lj}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad (3)$$

Substituindo X_{Lj} na equação (2) e maximizando π_{Lj} em ordem a P_{Lj} conduz ao preço de monopólio (ver Apêndice 2):

$$P_{Lj} = P_L = \frac{1}{1 - \alpha - \beta} > 1 \quad (4)$$

Verifica-se assim que o preço de monopólio é o mesmo em todos os momentos e para todos os tipos de bens intermédios, tornado o problema simétrico.

Do resultado da equação (4) e da equação (3), é possível concluir que a quantidade total produzida do bem j no país líder é (ver Apêndice 3),

$$X_L = (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (5)$$

Esta quantidade é a mesma para todos os tipos de bens intermédios j em todos os momentos (pois L_L e G_L são constantes). Substituindo o resultado da equação (5) na função produção da equação (1) obtém-se o produto total do país líder (ver Apêndice 4),

$$Y_L = A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot N_L \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \quad (6)$$

Assim, o produto por trabalhador, $y_L \equiv \frac{Y_L}{L_L}$, aumenta com o parâmetro da produtividade, A_L , com o número de tipo de produtos, N_L e com a despesa do governo, G_L . Recorde-se que a variável N_L representa o estado do conhecimento tecnológico no país líder. Aumentos em N_L levam a proporcionais aumentos no produto por trabalhador.

Substituindo as equações (4) e (5) em (2) obtém-se a função lucro do monopólio do proprietário da patente do bem intermédio j (ver Apêndice 5):

$$\pi_L = (\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (7)$$

Como a função lucro é constante, o valor presente dos lucros obtidos no momento t é,

$$V_L(t) = \pi_L \cdot \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_L(v) \cdot dv} \cdot ds$$

onde $r_L(v)$ é a taxa de juro real no momento v no país líder.

Se houver entrada livre no negócio de I&D (i.e., concorrência perfeita na I&D) e se a quantidade de equilíbrio de I&D é não nula em cada momento do tempo, então $V_L(t)$

deve igualar o custo de invenção constante, η_L , em cada instante do tempo. Esta condição implica que $r_L(v)$ é constante ao longo do tempo e dada por (ver Apêndice 6)

$$r_L = \frac{\pi_L}{\eta_L} \quad (8)$$

onde π_L é dado pela equação (7). A taxa de retorno, r_L , é o rácio do lucro, π_L , com o custo de montante fixo, η_L , de obter esse lucro.

Os consumidores no país líder são do tipo Ramsey com horizonte infinito. No momento 0, esses consumidores procuram maximizar a função utilidade com elasticidade de substituição intertemporal constante

$$U_L = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \cdot \left[\frac{C_L^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] \cdot dt \quad (9)$$

onde $\rho > 0$ é a taxa de preferência temporal e $\theta > 0$ é a magnitude da elasticidade da utilidade marginal de consumo. A elasticidade de substituição intemporal é $\frac{1}{\theta}$. O número de consumidores, isto é, a população, é constante ao longo do tempo.

A maximização da utilidade, sujeita à restrição orçamental, leva à usual fórmula da taxa de crescimento do consumo, (ver Apêndice 7)

$$\frac{\dot{C}_L}{C_L} = \left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot (r_L - \rho) \quad (10)$$

Uma vez que, pela equação (8), r_L é constante, a taxa de crescimento de C_L também é constante.

Se γ_L denota a taxa de crescimento comum, então, note-se que, no estado estacionário, Y_L , C_L e X_L crescem à mesma taxa:

$$\gamma_L = \left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot (r_L - \rho) = \left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \left(\frac{\pi_L}{\eta_L} - \rho \right) \quad (11)$$

onde π_L é dado na equação (7). Desta forma é possível verificar que todas as quantidades no país líder, incluindo o número de produtos conhecidos, N_L , crescem à

taxa constante $\gamma_{\mathcal{L}}$. Note-se ainda que os parâmetros são assumidos, tal que, $\gamma_{\mathcal{L}} \geq 0$ se verifica na equação (11), isto é, $\frac{\pi_{\mathcal{L}}}{\eta_{\mathcal{L}}} \geq \rho$. Se tal não se verificasse, a solução violaria a restrição de que $N_{\mathcal{L}}$ não pode decrescer, e a condição de livre entrada no I&D não se iria realizar com igualdade. Como $L_{\mathcal{L}}$ e $G_{\mathcal{L}}$ são constantes, a equação (6) mostra que o crescimento de $N_{\mathcal{L}}$ à taxa $\gamma_{\mathcal{L}}$ é consistente com o crescimento de $Y_{\mathcal{L}}$ à taxa $\gamma_{\mathcal{L}}$.

4. IMITAÇÃO NO PAÍS SEGUIDOR

4.1 CONFIGURAÇÃO DO MODELO

A função de produção, equação (1), apresenta a mesma forma em ambos os países. O país seguidor é, inicialmente, tecnologicamente atrasado uma vez que, $N_S(0) < N_L(0)$. Os parâmetros A_S , L_S e G_S e o custo de inovação η_S podem diferir dos correspondentes do país líder. A cópia e adaptação de um dos bens intermédios do país líder para ser utilizado no país seguidor exige um gasto fixo $\vartheta_S(t)$, onde $\vartheta_S(0) < \eta_S$, modelando o facto de a imitação ser mais atractiva do que a inovação para o país seguidor.

Note-se ainda que, o número de bens que pode ser copiado em cada instante está limitado ao número de bens já descobertos no país líder. Ou seja, no caso em estudo, o país seguidor pode imitar apenas bens intermédios, ainda não copiados, do conjunto de N_L tipos de bens conhecidos no país líder. Como durante a transição para o estado estacionário N_S aumenta relativamente a N_L , porque o custo de imitação do país seguidor é inferior ao custo de inovação do país líder, o custo de imitação aumentará igualmente até igualar o custo de inovação do país líder. Ou seja, esta propriedade terá efeito se, por exemplo, os bens conhecidos no país líder tiverem diferentes custos de imitação para o país seguidor. Assim, os bens mais fáceis de adaptar e com menores custos de imitação serão imitados primeiro. Esta propriedade é capturada assumindo que ϑ_S é uma função crescente de N_S/N_L :

$$\vartheta_S = \vartheta_S\left(\frac{N_S}{N_L}\right) \quad (12)$$

onde $\vartheta_S' > 0$; note-se que esta formulação assume que ϑ_S depende apenas da variável N_S/N_L .

Para $N_S/N_L < 1$, o custo de imitação ϑ_S tende a ser menor que η_S pois, copiar é geralmente mais barato que descobrir.

Suponha-se agora que um agente no país seguidor paga $\vartheta_S(t)$ para imitar a j – ésima variedade de bem intermédio do país líder. Assume-se que este agente terá direito ao

monopólio perpétuo de utilização do bem intermédio na produção no país seguidor. O preço de monopólio é então $P_{Sj} = P_S = \frac{1}{1-\alpha-\beta}$, o mesmo que o do país líder na equação (4). As fórmulas para a quantidade produzida, X_{Sj} , output total, Y_S , e lucro, π_{Sj} , são análogas às expressões para o país líder das equações (5), (6) e (7), como pode ser facilmente verificado:

$$X_{Sj} = X_S = (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (13)$$

$$Y_S = A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot N_S \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \quad (14)$$

$$\pi_{Sj} = \pi_S = (\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (15)$$

O rácio de output por trabalhador, y_i , para os dois países é:

$$\frac{y_S}{y_L} = \left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{N_S}{N_L} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \quad (16)$$

Assim, o rácio depende do valor relativo dos parâmetros de produtividade, A_S/A_L , do valor relativo do número de tipos de bens intermédios conhecidos, N_S/N_L , do valor relativo das despesas dos governos G_S/G_L bem como do rácio L_S/L_L . O rácio correspondente das funções lucro, π_S/π_L , depende de A_S/A_L , de L_S/L_L e de G_S/G_L .

O valor presente dos lucros da imitação do bem intermédio no país seguidor é

$$V_S(t) = \pi_S \cdot \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_S(v) \cdot dv} \cdot ds \quad (17)$$

onde $r_S(v)$ é a taxa de retorno no país seguidor no instante v . Note-se que é possível verificar-se $r_S(v) \neq r_L$, uma vez que a mobilidade de activos inter-países foi excluída. Se existir entrada livre no negócio de imitação no país seguidor e se, a quantidade de recursos dedicados à imitação no equilíbrio for não nula em todos os momentos, então $V_S(t)$ deverá igualar o custo de imitação, $\vartheta_S(t)$, em cada instante:

$$V_S(t) = \vartheta_S(N_S/N_L) \quad (18)$$

Substituindo a fórmula de $V_S(t)$, equação (17), na equação (18) e derivando ambos os lados em ordem a t tem-se (ver Apêndice 8):

$$r_S = \frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \frac{\dot{\vartheta}_S}{\vartheta_S} \quad (19)$$

Assim, se ϑ_S for constante, então r_S será constante e igual a π_S/ϑ_S , o rácio do lucro e do custo de montante fixo de obter esse mesmo lucro. Este resultado é análogo ao da fórmula de r_L da equação (8). Contudo, se ϑ_S variar ao longo do tempo, então r_S inclui o termo ganho de capital, $\dot{\vartheta}_S/\vartheta_S$. Com entrada livre, os direitos de monopólio sobre um bem intermédio deverão igualar o custo de obtê-los, ϑ_S . Se ϑ_S aumentar, porque N_S/N_L está a aumentar, equação (12), então o valor de expansão do direito de monopólio implica um ganho de capital na taxa $\dot{\vartheta}_S/\vartheta_S$. Este ganho aumenta a “taxa de dividendo” π_S/ϑ_S , para obter a taxa de retorno total na equação (19).

À semelhança do que acontece no país líder, assume-se que os consumidores do país seguidor maximizam a função utilidade do tipo Ramsey especificada na equação (9). Do problema do consumidor resulta então que a taxa de crescimento de C_S se relaciona com r_S da forma usual:

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \frac{1}{\theta} \cdot (r_S - \rho) \quad (20)$$

Este resultado é análogo ao do país líder, representado na equação (10). Assume-se, por simplificação, que os parâmetros de preferência, ρ e θ , são os mesmos em ambos os países.

4.2 CRESCIMENTO NO ESTADO ESTACIONÁRIO

No estado estacionário, N_S cresce à mesma taxa, γ_L , que N_L , tal que ϑ_S se mantém constante de acordo com a equação (12). No estado estacionário, o rácio N_S/N_L é então constante e é denominado $(N_S/N_L)^*$. Assume-se que os parâmetros são tais que

$0 < (N_S/N_L)^* < 1$ (ou seja, cada país permanece com o mesmo estatuto). A análise que se segue relaciona esta desigualdade aos parâmetros A_i , L_i , G_i e η_i .

No estado estacionário, as taxas de crescimento de Y_S e C_S são iguais à taxa de crescimento de N_S , isto é, γ_L . As taxas de crescimento de todas as quantidades no país seguidor no estado estacionário, denominadas por γ_S^* , são iguais a γ_L

Uma vez que C_S e C_L crescem no longo prazo à taxa γ_L e que os parâmetros, ρ e θ , são os mesmos nos dois países, das equações (8), (10) e (20) conclui-se:

$$r_S^* = r_L = \frac{\pi_L}{\eta_L} \quad (21)$$

onde π_1 é dado na equação (7). Assim, note-se que, apesar de os dois países não partilharem um mercado de capital comum, o ajuste de N_S/N_L ao valor $(N_S/N_L)^*$, (que garante $\gamma_S^* = \gamma_L$), implica $r_S^* = r_L$. Ou seja, no longo prazo, o processo de difusão de tecnologia iguala as taxas de retorno.

Como $r_S^* = r_L$, as equações (19) e (8) implicam

$$\frac{\pi_S}{\vartheta_S^*} = \frac{\pi_L}{\eta_L}$$

onde ϑ_S^* é o valor de ϑ_S no estado estacionário. As fórmulas das funções lucro, equações (15) e (7), implicam (ver Apêndice 9)

$$\vartheta_S^* = \eta_L \cdot \left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (22)$$

Na presente tese, assume-se que o país seguidor nunca escolhe inovar, sendo que este comportamento é ótimo para os agentes do país seguidor, verificando-se $\vartheta_S(t) < \eta_S$. Assim, como ϑ_S é uma função crescente de N_S/N_L , a condição necessária (se N_S/N_L começar abaixo do estado estacionário) é $\vartheta_S^* < \eta_S$, o que implica, da equação (22), (ver Apêndice 10)

$$\left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\eta_L}{\eta_S} < 1 \quad (23)$$

Ou seja, o país seguidor tem que ser estritamente inferior ao país líder em termos dos parâmetros de produtividade, A_S/A_L , força de trabalho, L_S/L_L , gastos públicos, G_S/G_L e custos de inovação η_L/η_S . E, assim, se (23) se verificar, o país seguidor nunca terá incentivo a inovar o que implicará que o país líder nunca terá incentivo a imitar uma vez que não existirão bens disponíveis para o efeito. Assim, o equilíbrio é tal que o país líder é líder perpétuo e o país seguidor é o seguidor perpétuo.

Desde que $(N_S/N_L)^* < 1$, equação (16) implica que $(y_S/y_L)^*$ é menor que 1 se $A_S \leq A_L$ (note-se que $A_S > A_L$ pode ser consistente com a inequação (23) se $L_S < L_L$ ou $\eta_S > \eta_L$).

O consumo, C_S , cresce no estado estacionário à taxa constante γ_L .

4.3 TRAJECTÓRIA E DINÂMICA DE CONVERGÊNCIA

Para o estudo do comportamento dinâmico do país seguidor podem considerar-se equações diferenciais para as variáveis C_S e N_S . Note-se que como Y_S é proporcional a N_S , pela equação (14), pelo que a dinâmica de Y_S é a mesma de N_S . Na presente análise utilizar-se-á a constante de elasticidade função dos custos de imitação da equação (12):

$$\vartheta_S = \eta_S \cdot \left(\frac{N_S}{N_L} \right)^\sigma \quad (24)$$

para $N_S/N_L \leq 1$, onde $\sigma > 0$. Note-se ainda que ϑ_S tende para η_S à medida que N_S/N_L se aproxima de 1. As equações (22) e (24) implicam que o rácio N_S/N_L no estado estacionário seja dado por (ver Apêndice 11)

$$\left(\frac{N_S}{N_L} \right)^* = \left[\frac{\eta_L}{\eta_S} \cdot \left(\frac{A_S}{A_L} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \quad (25)$$

Os parâmetros são tais que satisfazem a desigualdade (23), tal que $(N_S/N_L)^* < 1$.

Das equações (19), (20) e (24) e definindo, por conveniência, $\hat{N} \equiv N_S/N_L$, que é constante no estado estacionário, a fórmula do crescimento do consumo pode ser escrita como, (ver Apêndice 12)

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \sigma \cdot \frac{\hat{N}}{\hat{N}} - \rho\right) \quad (26)$$

A variação de N_S é determinada pela restrição orçamental. Os recursos dedicados à imitação no país seguidor são iguais ao produto, Y_S , menos o consumo, C_S , menos a quantidade de bens intermédios, $N_S X_S$. A alteração em N_S iguala $1/\vartheta_S$ vezes os recursos dedicados à imitação, e a taxa de crescimento de \hat{N} iguala a taxa de crescimento de N_S menos γ_L . Assim, a taxa de crescimento de \hat{N} é (ver Apêndice 13):

$$\frac{\hat{N}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \quad (27)$$

com $\chi_S = \frac{C_S}{N_S}$, constante no estado estacionário. Como Y_S é proporcional a N_S , χ_S é proporcional ao rácio C_S/Y_S .

Substituindo \hat{N}/\hat{N} da equação (27) na equação (26) conduz a uma expressão para \dot{C}_S/C_S na qual as únicas variáveis são \hat{N} e χ_S (ver Apêndice 14):

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S}\right) + \sigma \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \right] - \rho \right\} \quad (28)$$

As equações (27) e (28) implicam que a taxa de crescimento de $\chi_S = \frac{C_S}{N_S}$ é (ver Apêndice 15):

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\chi}_S}{\chi_S} = & \left[\left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} \right) \right. \right. \\
 & + \sigma \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \right] - \rho \left. \left. \right\} \right] \\
 & - \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \chi_S \right) \right] \tag{29}
 \end{aligned}$$

As equações (27) e (29) constituem um sistema de equações diferenciais autónomas nas variáveis \hat{N} e χ_S .

A dinâmica, considerando diversos cenários, está descrita no capítulo 6 da presente tese; para o seu estudo o problema foi modelado em MATLAB estando apresentados os resultados no referido capítulo.

5. CUSTO DE IMITAÇÃO CONSTANTE (OU COM CRESCIMENTO LENTO)

O tipo de equilíbrio discutido até ao momento depende da assumpção que o custo de imitação, ϑ_S , aumenta até um nível suficiente à medida que \hat{N} aumenta. Considere-se agora que ϑ_S é constante e “baixo”, tal que, $\vartheta_S < \vartheta_S^*$. Note-se que a análise seria similar se ϑ_S apresentasse um crescimento lento, tal que ϑ_S aproxima um valor inferior a ϑ_S^* à medida que N_S/N_L se aproxima de 1.

Intuitivamente, se o custo da imitação ϑ_S é pequeno (em particular menor que ϑ_S^*), o processo de imitação atingirá uma situação em que todos os produtos conhecidos/descobertos no país líder serão imitados em no país seguidor. Isto é, $\hat{N} = 1$, será atingido em algum momento, finito, T . Neste ponto haverá agentes a mais dispostos a pagar ϑ_S para copiar um dos bens descobertos no país líder, os quais continuam a aparecer à taxa γ_L . De alguma forma, este excesso de oferta tem que ser eliminado no equilíbrio. Além disso, para $t < T$, onde $\hat{N} < 1$, os agentes do país seguidor irão perceber que o estado de excesso de oferta surgirá mais tarde, e as suas escolhas prévias de taxas de imitação deverão ser consistentes com tais expectativas.

5.1 O ESTADO ESTACIONÁRIO

Para a presente análise é mais fácil começar pelo fim, isto é, quando $t > T$, tal que $\hat{N} = 1$ já foi atingido. Neste caso, a conjectura natural da análise prévia é que o país seguidor estaria no estado estacionário no qual N_S cresce à taxa γ_L , a taxa de crescimento de N_L , tal que $\hat{N} = 1$ verificar-se-á para sempre. Nesta situação, os bens descobertos no país líder são imediatamente copiados no país seguidor. Também C_S cresce à taxa γ_L , tal que $\chi_S \equiv C_S/N_S$ permanece constante ao longo do tempo.

Suponha-se agora, contudo, que r_S iguala π_S/ϑ_S , valor determinado pela equação (19) quando ϑ_S é constante. Neste caso, aplica-se a desigualdade $r_S > r_L$. No entanto, note-

se que, $r_S > r_L$ implica que C_S crescerá mais rápido que γ_L , que é a taxa de crescimento de C_L , assim o país seguidor não estaria em estado estacionário. Fazer cópias ao menor custo ϑ_S é bom de mais para ser consistente com o crescimento de C_S e N_S à taxa de estado estacionário, γ_L . Se se verificasse a taxa de retorno π_S/ϑ_S , os agentes no país seguidor desejariam dedicar recursos suficientes para copiar de maneira a N_S crescer a uma taxa maior que γ_L . Mas, como os novos produtos são descobertos à taxa γ_L , não há produtos suficientes para serem copiados a uma taxa superior. Assim, de alguma forma, a taxa de retorno do país seguidor deverá baixar até r_L para poder suportar as alocações que aumentam no estado estacionário.

Considere-se agora o caso em que $N_S = N_L$ e os imitadores no país seguidor gastam os recursos $\vartheta_S \gamma_L N_L$, então N_S crescerá com N_L à taxa constante γ_L . Note-se que, se cada indivíduo no país seguidor pensa que pode copiar um bem pagando apenas ϑ_S , então a quantia gasta a copiar iria exceder $\vartheta_S \gamma_L N_L$, isto é, haveria excesso de procura de bens para copiar. Suponha-se agora que nesta situação de excesso de procura, os direitos de monopólio para copiar são alocados de forma aleatória. Especificamente, assume-se que cada pessoa tem probabilidade de obter os direitos de propriedade proporcional à quantia gasta no esforço de copiar. No equilíbrio, o fluxo total de recursos gastos pelos potenciais imitadores será $\vartheta_S^* \gamma_L N_L$, onde $\vartheta_S^* > \vartheta_S$ é o custo por bem que conduz à diminuição esperada da taxa de retorno r_S para r_L . Este aumento do custo efectivo de cópia para ϑ_S^* detém a entrada de quaisquer potenciais imitadores (Barro e Sala-i-Martin (1997)).

No estado estacionário, o custo efectivo de cópia é $\vartheta_S^* > \vartheta_S$ e a taxa de retorno de imitação, expectável, é r_L . Esta taxa de retorno é consistente com o crescimento de C_S e N_S no estado estacionário à taxa de crescimento γ_L . A solução do estado estacionário é tal que $(N_S/N_L)^* = 1$ se verifica.

5.2 DINÂMICA DE TRANSIÇÃO

Considere-se agora a situação em que $t < T$, tal que $N_S < N_L$, e que os bens copiáveis estão em oferta abundante. A taxa de retorno no país seguidor deverá ser então:

$$r_S = \frac{\pi_S}{\vartheta_S} \quad (30)$$

que é constante. A taxa de crescimento de consumo é igualmente constante e dada por:

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} - \rho\right) \quad (31)$$

Este resultado corresponde à equação (26) com $\sigma = 0$.

A fórmula para $\dot{\hat{N}}/\hat{N}$ é a mesma da equação (27) e para $\dot{\chi}_S/\chi_S$ é a mesma da equação (29) com $\sigma = 0$:

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \quad (27)$$

$$\frac{\dot{\chi}_S}{\chi_S} = \left[\left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S}\right) - \rho \right\} - \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) \right] \right] \quad (32)$$

onde $\chi_S = C_S/N_S$.

As equações (27) e (32) constituem, um sistema de equações diferenciais autónomas nas variáveis \hat{N} e χ_S .

A dinâmica está descrita no capítulo 6 da presente tese, Caso XII.

6. MODELAÇÃO, APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Um dos principais objectivos da presente tese é a modelação, resolução e representação gráfica, computacional, do sistema de equações diferenciais autónomas nas variáveis \hat{N} e χ_S constituídas pelas equações (27) e (29).

Para a modelação e obtenção dos resultados que a seguir se apresentam foi utilizado o *software* MATLAB.

6.1 MATLAB

6.1.1 O QUE É O MATLAB?

MATLAB é um *software* interactivo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos (Howard (2007)).

O MATLAB é um sistema interactivo cujo elemento básico de informação é uma matriz e que incorpora um vasto leque de funções que permitem a resolução eficiente e robusta de problemas complexos. Permite a resolução de muitos problemas numéricos de forma rápida e sobretudo requerendo apenas uma fracção do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante noutras linguagens como Fortran, Basic ou C (Howard (2007)).

6.1.2 FUNÇÃO ODE45

O MATLAB tem diversas ferramentas para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias. Para a resolução numérica do sistema de equações diferenciais autónomas do problema em estudo foi utilizada a função *ode45*, que implementa o método de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem.

6.2 CENÁRIOS ECONÓMICOS ESTUDADOS

Para o estudo que a seguir se apresenta foram considerados 12 casos sendo dois deles denominados de casos padrão que servirão de base a toda a análise e cujos valores dos parâmetros utilizados são os considerados e estudados para outros modelos nas disciplinas de Economia Computacional e de Tópicos Avançados (em Crescimento Económico) do Doutoramento em Economia da Faculdade de Economia da Universidade do Porto.

Um dos casos padrão apresenta valor de α maior que o valor de β , o outro apresenta a situação inversa. Será também considerado um caso em que $\beta = 0$, caso este que coincide com o modelo de Barro e Sala-i-Martin (1997) sem intervenção do governo. Um dos outros casos analisado será o caso correspondente ao estudado no capítulo 5 da tese, isto é, custo de imitação constante ou com crescimento muito lento. Os restantes casos estudados correspondem a variações dos casos padrão, isto é, aos casos padrão sujeitos a choques nas mais diversas variáveis.

6.2.3 VALORES DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NOS DIVERSOS CASOS

Caso I – Caso Padrão 1 que servirá de base à análise ($\alpha > \beta$)

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	2	0.1

Quadro 1 - Valores dos parâmetros utilizados no *Caso I*

Caso II – $\beta = 0$, caso *equivalente* ao modelo de Barro e Sala-I-Martin (1997)

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.7	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	2	0

Quadro 2 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso II*

Caso III – Caso Padrão 1 sujeito a um choque positivo em A_S , isto é, no parâmetro de produtividade da economia do país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	3	2	0.1

Quadro 3 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso III*

Caso IV – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento do custo de imitação ϑ_S

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	200	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	2	0.1

Quadro 4 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso IV*

Caso V – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	4	0.1

Quadro 5 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso V*

Caso VI – Caso Padrão 1 sujeito a uma diminuição de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	1	0.1

Quadro 6 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso VI*

Caso VII – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento de L_S , isto é, do input do trabalho na economia do país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.6	0.04	2.5	4.5	0.02	1.5	2	2	0.1

Quadro 7 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso VII*

Caso VIII – Caso Padrão 2 que servirá de base à análise ($\alpha < \beta$)

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.1	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	2	0.6

Quadro 8 - Valores dos parâmetros utilizados no *Caso VIII*

Caso IX – Caso Padrão 2 sujeito a um aumento de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.1	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	4	0.6

Quadro 9 - Valores dos parâmetros utilizados no *Caso IX*

Caso X – Caso Padrão 2 sujeito a uma diminuição de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.1	0.04	2.5	4.5	0.02	1.05	2	1	0.6

Quadro 10 – Valores dos parâmetros utilizados no *Caso X*

Caso XI – Caso Padrão 2 sujeito a um aumento de L_S , isto é, do input do trabalho na economia do país seguidor

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	100	0.1	0.04	2.5	4.5	0.02	1.5	2	2	0.6

Quadro 11 – Valores dos parâmetros utilizados no **Caso XI**

Caso XII – Caso em que $\sigma = 0$ e $\vartheta_S < \vartheta_S^*$, ou seja, o caso em que o custo de imitação é constante ou apresenta crescimento muito lento

Parâmetros	ϑ_S	α	γ_L	θ	σ	ρ	L_S	A_S	G_S	β
Valores	50	0.2	0.04	2.5	0	0.02	1.05	2	2	0.1

Quadro 12 - Valores dos parâmetros utilizados no **Caso XII**

6.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Caso I – Caso Padrão 1 que servirá de base à análise ($\alpha > \beta$)

A Figura 1 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os valores do Caso I, isto é, do caso padrão 1. Analisando o referido gráfico é possível observar-se duas curvas. A verde, a curva representante da dinâmica da variável χ_S , que apresenta inicialmente uma trajectória ascendente atingindo um máximo num valor ligeiramente superior a 0.8 verificando-se a partir desse momento uma trajectória descendente que estabiliza no valor zero. Note-se que a variável χ_S é um quociente entre C_S e N_S assim, pode ser visto, num período inicial, como uma medida de melhoria do bem estar, podendo comparar-se os valores máximos de χ_S atingidos nos casos em estudo permitindo perceber em que casos se atingem níveis de bem-estar superiores. Ou seja, inicialmente com um N_S não muito diferente do ponto de partida, o consumo aumenta significativamente. Pode dizer-se que há uma espécie de efeito de nível sobre o consumo, induzido pela possibilidade de imitação.

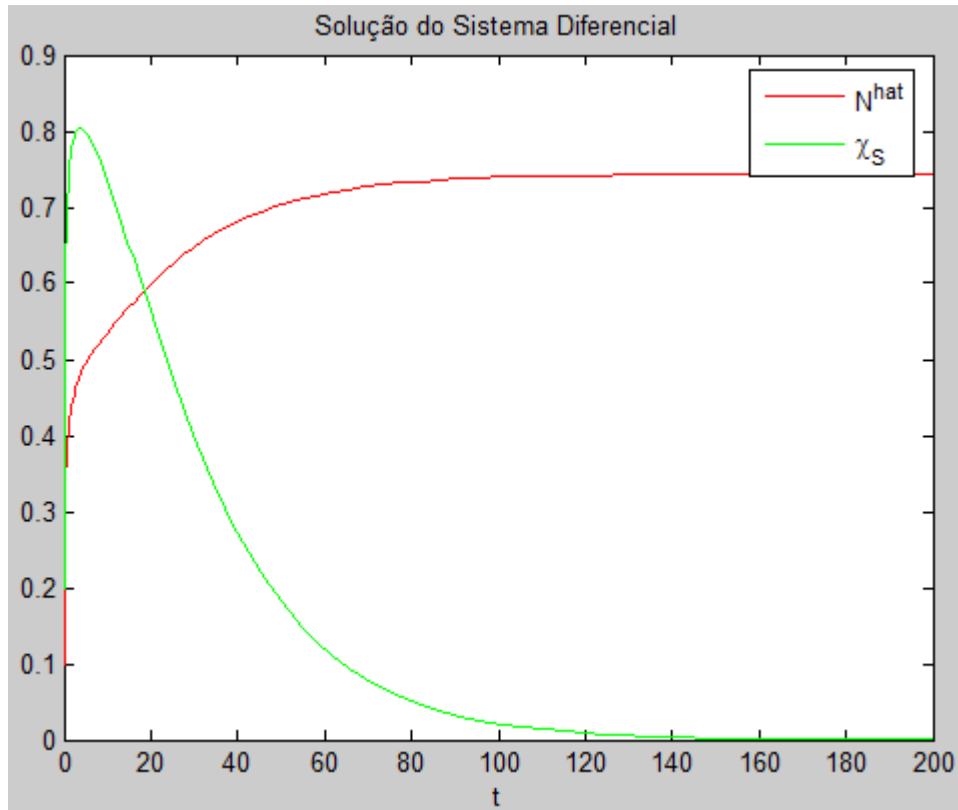


Figura 1 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso I*

A vermelha está representada a dinâmica da variável \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L . Esta curva apresenta um comportamento crescente estabilizando para um valor próximo de 0.75. Ou seja, consequência dos custos de imitação, do nível do parâmetro de produtividade entre outros factores, o número total de bens intermédios disponíveis na economia seguidora, N_S , será sempre inferior ao número total de bens intermédios disponíveis na economia líder, N_L , na razão máxima de 0.75, para os valores dos parâmetros em estudo. Durante a dinâmica de transição N_S cresce a uma taxa superior, já que a imitação é muito favorável e daí o comportamento desta variável \hat{N} . Ou seja, fruto da imitação o país seguidor melhora significativamente o seu nível de conhecimento tecnológico. Como essa melhoria é superior à alcançada pelo país líder, o seguidor melhora também a sua situação em termos relativos.

Caso II – $\beta = 0$, caso equivalente ao modelo de Barro e Sala-i-Martin (1997)

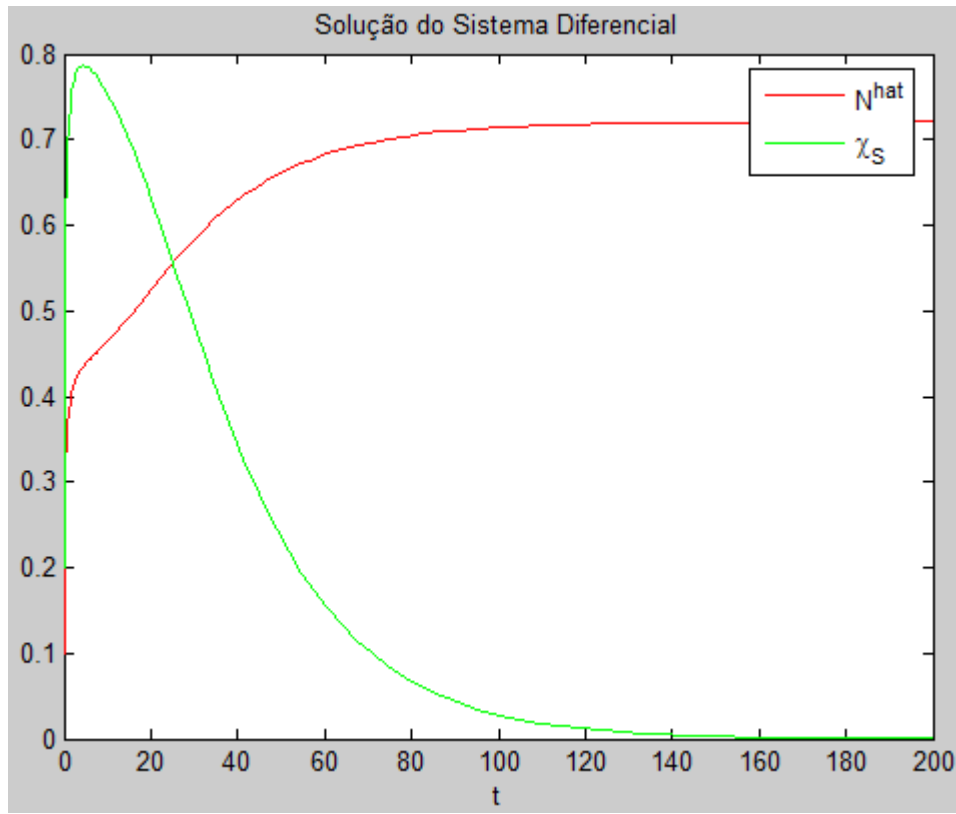


Figura 2 – Solução do Sistema Diferencial do *Caso II*

Na Figura 2 está representado o gráfico correspondente à solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso II, isto é, do caso equivalente ao modelo do Barro e Sala-i-Martin (1997), ou seja sem intervenção Governo e portanto $\beta = 0$. Neste caso toma-se $\alpha = 0.7$, de forma a garantir que o expoente de X_{ij} , isto é, $1 - \alpha - \beta$, na equação (1) é igual ao dos restantes casos em análise, ou seja, 0.3. Como é possível verificar, num momento inicial o valor de χ_S aumenta atingindo um máximo inferior a 0.8 e portanto inferior ao valor atingido no caso padrão. A partir desse momento o valor de χ_S diminui aproximando-se de zero (porque N_S aumenta muito e porque a imitação vai ficando cada vez mais difícil – i.e., cara – e, por isso, vai exigindo cada vez mais recursos, sobrando menos para consumo), ao mesmo tempo que o valor de \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_C , aumenta tendendo para um valor ligeiramente superior a 0.7, valor este, à semelhança do valor máximo de χ_S , inferior ao do caso padrão.

Caso III – Caso Padrão 1 sujeito a um choque positivo em A_S , isto é, no parâmetro de produtividade da economia do país seguidor

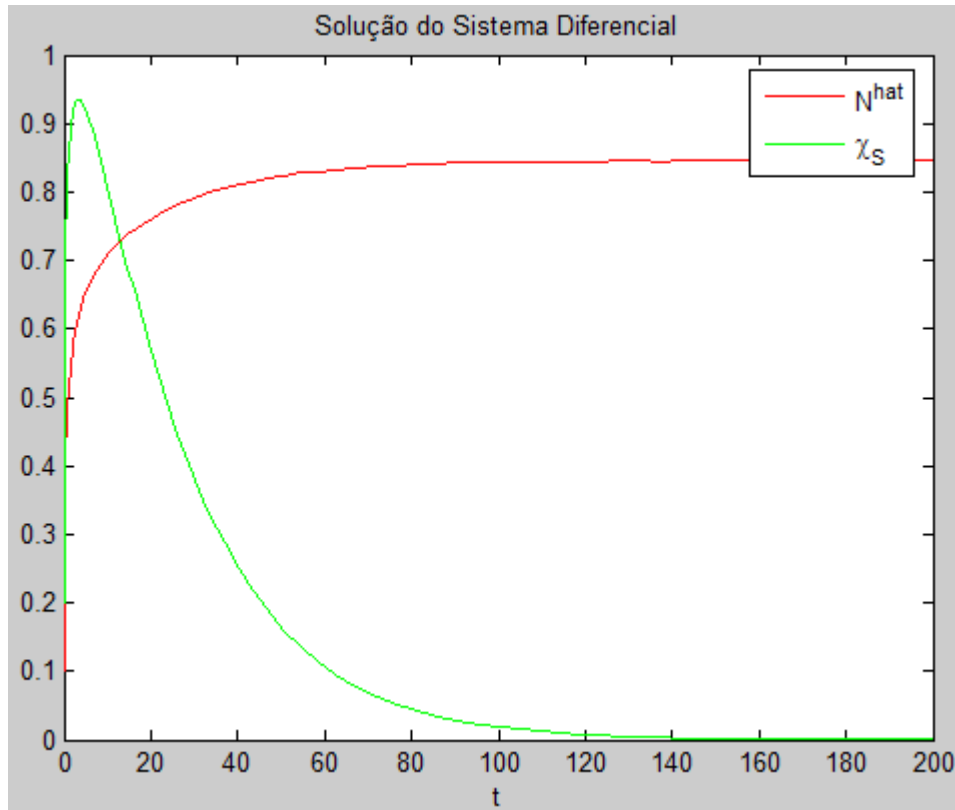


Figura 3 - Solução do Sistema Diferencial do **Caso III**

A Figura 3 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso III, caso padrão sujeito a um choque positivo em A_S , isto é, no parâmetro de produtividade exógena da economia seguidora. Como é possível observar-se, a dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é muito semelhante à dinâmica do caso padrão. No entanto, o nível das variáveis é superior ao do referido caso. A variável \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L , à semelhança do observado no caso I, apresenta uma trajetória crescente estabilizando, contudo, num valor superior, próximo de 0.85 (isto é, a razão entre o número de bens imitados pelo país seguidor e o número de bens conhecidos é superior ao verificado no caso equivalente com um valor de produtividade da economia seguidora inferior). A dinâmica da variável χ_S é análoga à verificada no caso I. No entanto, o valor máximo é superior, no caso próximo a 0.92, o que, considerando χ_S numa fase inicial uma medida de bem-estar, representa um nível superior de bem-estar. Assim, e indo de encontro ao expectável, um aumento do

parâmetro de produtividade no país seguidor, traduz-se num aumento no “nível” de bem-estar da economia do país seguidor.

Caso IV – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento do custo de imitação ϑ_S

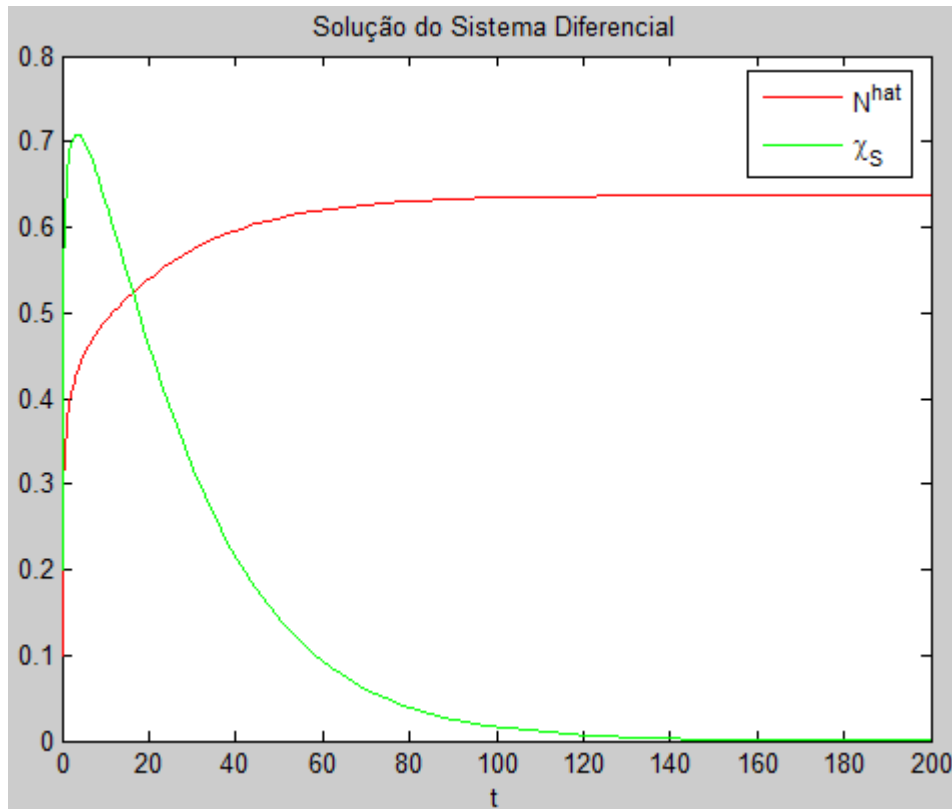


Figura 4 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso IV*

Na Figura 4 está representado o gráfico correspondente à solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso IV, isto é, do caso padrão 1 sujeito a um aumento do custo de imitação ϑ_S . Mais uma vez, e à semelhança dos casos anteriores, a dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é muito semelhante à dinâmica do caso padrão. Contudo, neste caso, o nível das variáveis é inferior ao do caso I. O valor máximo atingido pela variável χ_S é próximo de 0.7, o valor de \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L , aumenta tendendo para um valor próximo de 0.63, claramente inferior ao verificado no caso padrão. Pode assim concluir-se que o aumento do custo de imitação ϑ_S faz com que, como esperado, a capacidade de imitação do país seguidor diminua traduzindo-se dessa forma numa diminuição do valor de estabilização da variável \hat{N} , isto é de entre os bens disponíveis para imitação no país líder, o país seguidor consegue, no máximo, imitar cerca de 63% deles.

Caso V – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

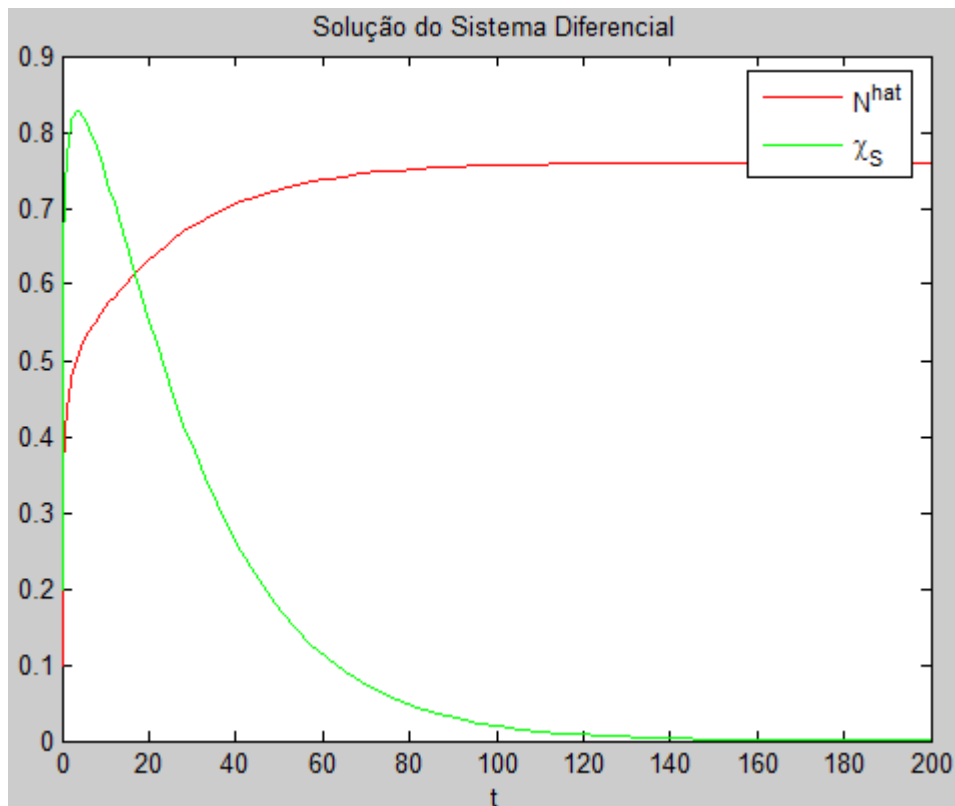


Figura 5 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso V*

A Figura 5 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso V, caso padrão 1 sujeito a um choque positivo em G_S , isto é, um aumento das despesas do governo do país seguidor. Como é possível observar-se, a dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é similar à dinâmica do caso padrão. No entanto, o nível das variáveis é ligeiramente superior ao do referido caso. A variável \hat{N} , à semelhança do observado no caso I, apresenta uma trajetória crescente estabilizando num valor ligeiramente superior, estabiliza para um valor próximo de 0.76; isto é, a razão entre o número de bens imitados pelo país seguidor e o número de bens disponíveis para imitação no país líder é ligeiramente superior ao verificado no caso equivalente com um valor de produtividade da economia seguidora inferior. A dinâmica da variável χ_S é análoga à verificada no caso I. Porém, o valor máximo é ligeiramente superior: no caso próximo de 0.82. Nesta análise é importante ressaltar, como se

verificará mais à frente, que, no caso em estudo, o valor de α é superior a β , note-se que α é o expoente de L_i e β é o expoente de G_i na equação da função produção (1).

Caso VI – Caso Padrão 1 sujeito a uma diminuição de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

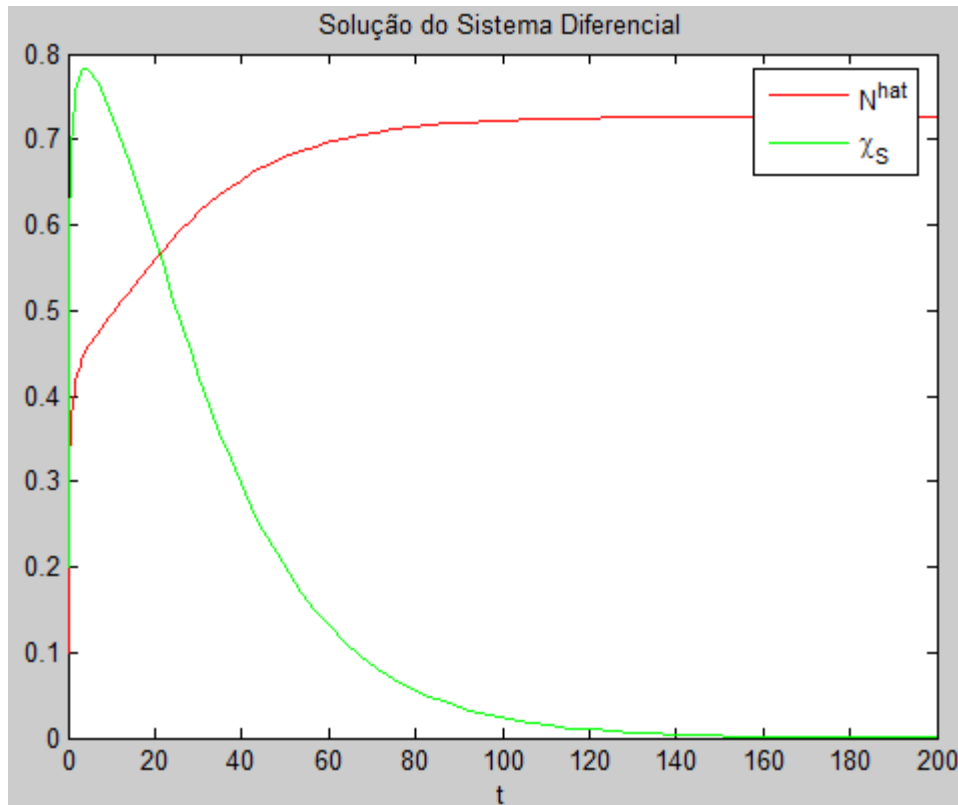


Figura 6 - Solução do Sistema Diferencial do **Caso VI**

A Figura 6 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso VI, caso padrão 1 sujeito a um choque negativo em G_S , isto é, uma diminuição das despesas do governo do país seguidor. Como seria de esperar e à semelhança do que se verificou nos casos anteriores, a dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é similar à dinâmica do caso padrão. Porém, o nível das variáveis é ligeiramente inferior ao caso I. A variável \hat{N} , do mesmo modo do observado no caso I, apresenta uma trajectória crescente estabilizando. No entanto, num valor inferior, estabiliza para um valor próximo de 0.72; isto é, a razão entre o número de bens imitados pelo país seguidor e o número de bens disponíveis para imitação no país líder é inferior ao verificado no caso equivalente com um valor de produtividade da economia seguidora

superior. A dinâmica da variável χ_S é análoga à do caso I, verificando-se, contudo, um valor máximo ligeiramente inferior, no caso um valor abaixo de 0.8. Mais uma vez, e à semelhança do caso V é importante ressaltar que, no caso em estudo, o valor de α é superior a β .

Caso VII – Caso Padrão 1 sujeito a um aumento de L_S , isto é, do input do trabalho na economia do país seguidor

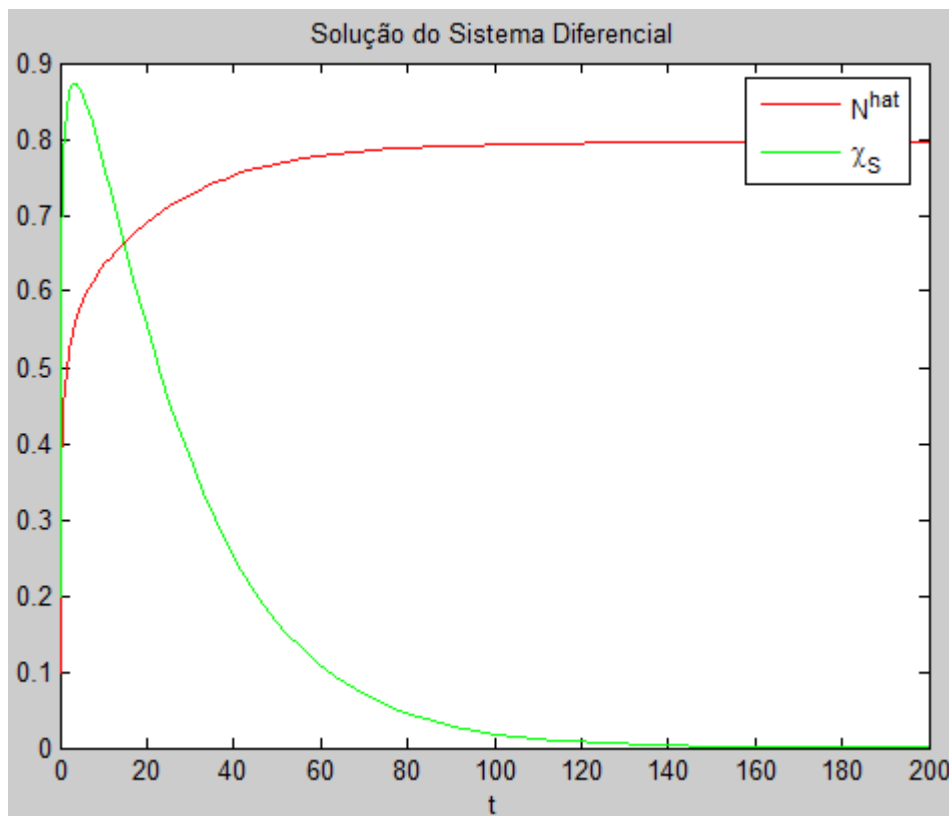


Figura 7 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso VII*

Na Figura 7 está representado o gráfico correspondente à solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso VII, isto é, do caso padrão 1 sujeito a um aumento de L_S , ou seja, um aumento do input do trabalho na economia seguidora. Mais uma vez e à semelhança dos casos anteriores, a dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é muito semelhante à dinâmica do caso padrão. No entanto, neste caso em análise o nível das variáveis é superior ao do caso I. O valor máximo atingido pela variável χ_S é próximo de 0.9, o valor de \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L , aumenta tendendo para um valor próximo de 0.8, claramente superior ao verificado no caso padrão. Pode assim

concluir-se que, um aumento do *input* trabalho na economia seguidora, L_S , num cenário económico com as características do apresentado no caso padrão 1, entre as quais a de que α é maior que β , faz com que o nível da economia suba.

Caso VIII – Caso Padrão 2 que servirá de base à análise ($\alpha < \beta$)

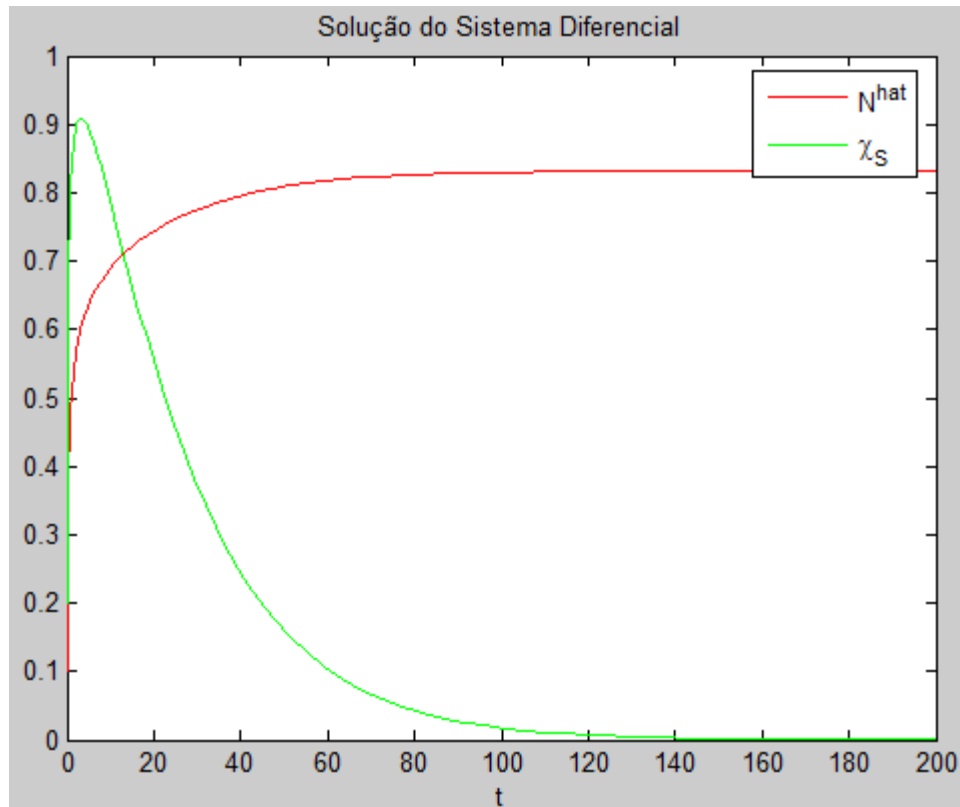


Figura 8 - Solução do Sistema Diferencial do **Caso VIII**

A Figura 8 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os valores do Caso VIII, isto é, do caso padrão 2, ou seja um cenário económico no qual α é menor que β . Analisando o referido gráfico é possível observar-se duas curvas. A verde, a curva representante da dinâmica da variável χ_S , que apresenta inicialmente uma trajectória ascendente atingindo um máximo num valor ligeiramente superior a 0.9 verificando-se, a partir desse momento, uma trajectória descendente que estabiliza em zero. A vermelho está representada a dinâmica da variável \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L . Esta curva apresenta um comportamento crescente estabilizando para um valor próximo de 0.82. Ou seja, consequência dos custos de imitação, do nível do parâmetro de produtividade entre outros factores, o número total

de bens intermédios disponíveis na economia seguidora, N_S , será sempre inferior ao número total de bens intermédios disponíveis na economia líder, N_L , na razão máxima de 0.82.

Comparando o caso padrão 2, isto é, o caso em que $\beta > \alpha$, com o caso padrão 1, ou seja, o caso em que $\alpha > \beta$ é possível verificar que o “nível” da economia seguidora para o caso em que $\beta > \alpha$ é superior, isto é, tanto o valor máximo de χ_S atingido, como o valor de para o qual a variável \hat{N} estabiliza são superiores aos do caso padrão 1.

Caso IX – Caso Padrão 2 sujeito a um aumento de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

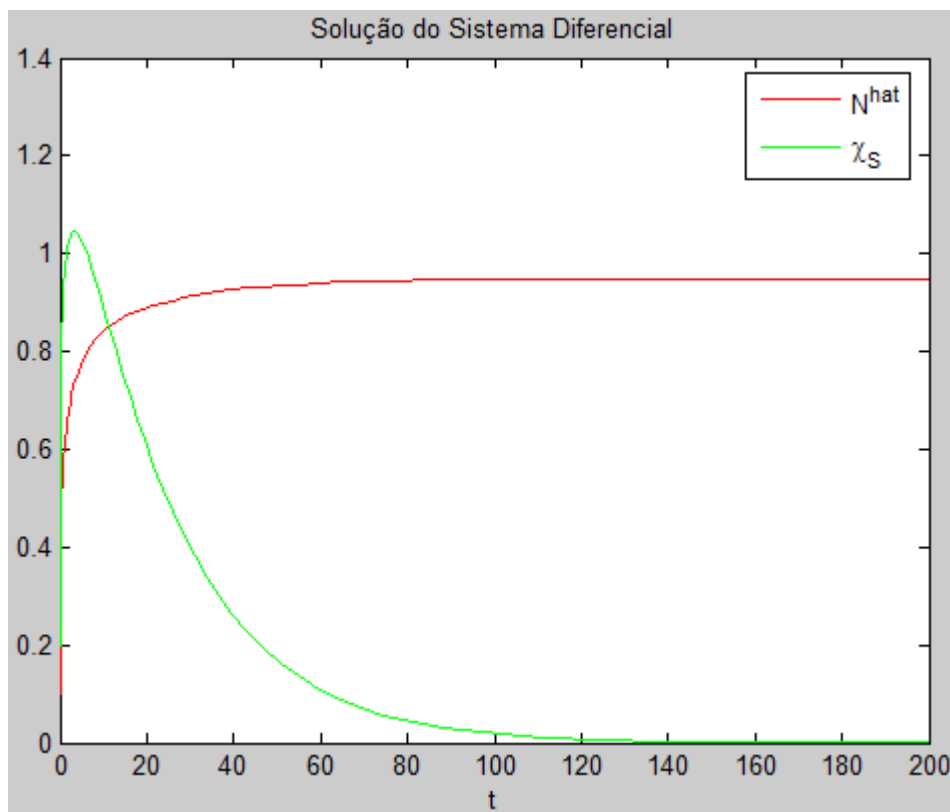


Figura 9 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso IX*

Na Figura 9 pode observar-se a representação do gráfico correspondente à solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso IX, isto é, do caso padrão 2 sujeito a um aumento de G_S , ou seja, um aumento das despesas do governo na economia seguidora. À semelhança dos casos anteriores a dinâmica é análoga à dos diversos casos estudados até ao momento. No gráfico é possível observar-se que o choque positivo em G_S fez

aumentar claramente o nível de estabilização de \hat{N} , relativamente próximo de 1. O referido choque fez também subir o valor máximo atingido por χ_S , no caso, superior a 1. Nesta análise é importante salientar que, no caso em estudo, o valor de α é inferior a β , note-se que α é o expoente de L_i e β é o expoente de G_i na equação da função produção (1).

Caso X – Caso Padrão 2 sujeito a uma diminuição de G_S , isto é, da despesa pública no país seguidor

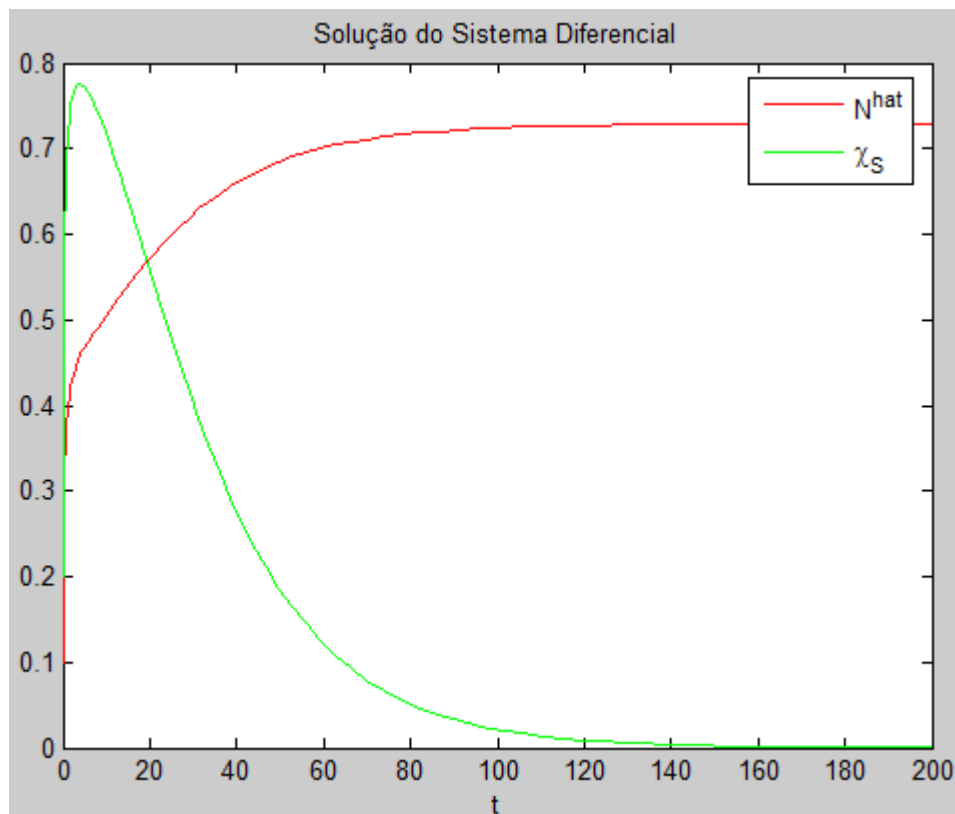


Figura 10 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso X*

A Figura 10 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial para os valores do Caso X; ou seja, o caso padrão 2 sujeito a um choque negativo na despesa pública do país seguidor. A dinâmica das curvas é análoga às anteriores havendo, no entanto, variação do nível dessas mesmas curvas. A estabilização da variável \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L , ocorre num valor próximo de 0.72, inferior ao valor de estabilização no caso padrão 2, próximo de 0.82. O valor máximo atingido por χ_S é ligeiramente inferior a 0.8, novamente, inferior ao verificado no caso padrão 2.

Comparando os efeitos do choque, positivo ou negativo, em G_S no caso padrão 1 ($\alpha > \beta$) e no caso padrão 2 ($\alpha < \beta$), é possível constatar que as consequências do referido choque, isto é, as discrepâncias entre os valores máximos de χ_S atingidos e os valores de estabilização de \hat{N} , são claramente maiores no caso padrão 2. Note-se que esta conclusão vai de encontro ao esperado, uma vez que como é possível verificar na equação (1), β é o parâmetro associado a G_i e assim, variações em G_i terão tão maiores consequências quanto maior for o peso relativo de β .

Caso XI – Caso Padrão 2 sujeito a um aumento de L_S , isto é, do input do trabalho na economia do país seguidor

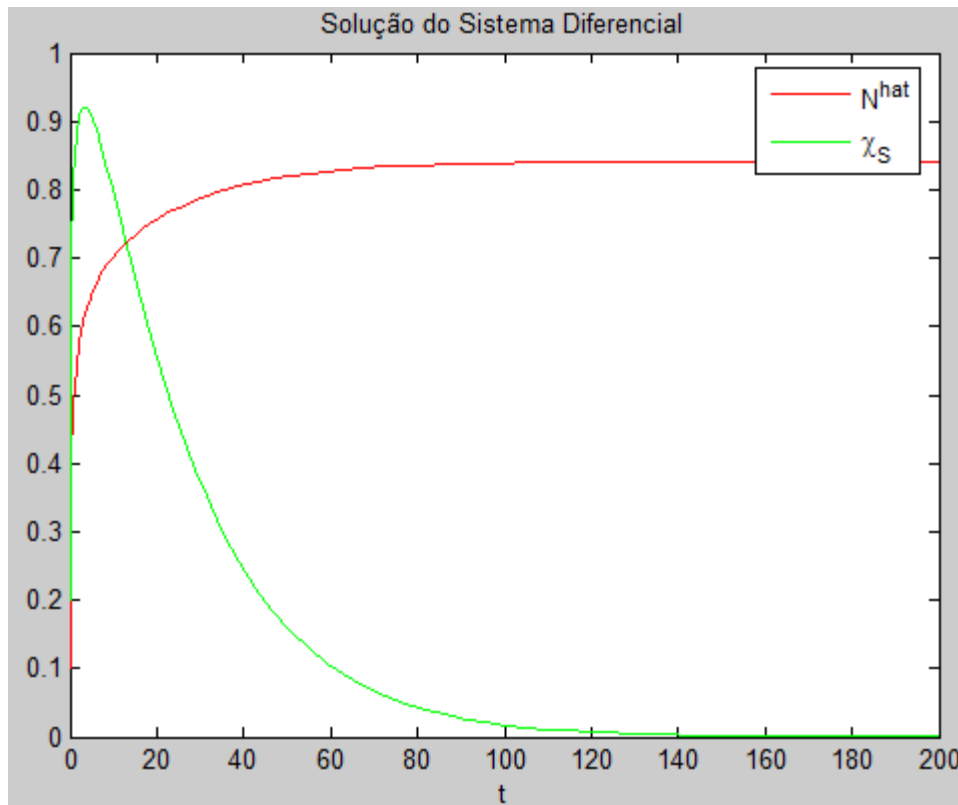


Figura 11 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso XI*

Na Figura 11 está representado o gráfico correspondente à solução do sistema diferencial para os parâmetros do Caso XI; isto é, do caso padrão 2 sujeito a um choque positivo em L_S , ou seja, um aumento do input do trabalho na economia seguidora. A dinâmica geral das variáveis χ_S e \hat{N} é muito semelhante à dinâmica do caso padrão 2. Porém, neste caso em análise o nível das variáveis é ligeiramente superior ao do caso

VIII. Neste caso em estudo, o valor máximo atingido pela variável χ_S é superior de 0.9, o valor de \hat{N} , correspondente ao quociente entre N_S e N_L , aumenta tendendo para um valor próximo de 0.83, ligeiramente superior ao verificado no caso padrão 2. Pode assim concluir-se que, um aumento do *input* trabalho na economia seguidora, L_S , num cenário económico com as características do apresentado no caso padrão 1, entre as quais a de que α é maior que β , faz com que o nível da economia suba, mas apenas de forma muito ligeira.

Comparando os efeitos do choque positivo em L_S nos casos padrão 1 ($\alpha > \beta$) e padrão 2 ($\alpha < \beta$), é possível constatar que as consequências do referido choque, isto é, as discrepâncias entre os valores máximos de χ_S atingidos e os valores de estabilização de \hat{N} , são claramente maiores no caso padrão 1. Este facto confirma o esperado pois, como é possível verificar na equação (1), α é o parâmetro associado a L_i e assim, variações em L_i terão tão maiores consequências quanto maior for o peso relativo de α .

Caso XII – Caso em que $\sigma = 0$ e $\vartheta_S < \vartheta_S^*$, ou seja, o caso em que o custo de imitação é constante ou apresenta crescimento muito lento

A figura 12 é a representação gráfica da solução do sistema diferencial do Caso XII, este caso corresponde ao caso desenvolvido e estudado no capítulo 5 da presente tese; ou seja, o caso em que o custo de imitação é constante ou apresenta crescimento muito lento. Como é referido no capítulo 5, uma das equações do sistema é a equação (27) e a outra é a equação (32) que é análoga à equação (29) tomando $\sigma = 0$. Neste cenário é preciso tomar ϑ_S suficientemente pequeno tal que $\vartheta_S^* > \vartheta_S$.

Como é possível observar, a dinâmica das variáveis \hat{N} e χ_S é diferente das dinâmicas observadas nos restantes casos. A variável χ_S apresenta desde o primeiro instante uma trajectória estritamente descendente atingindo o valor zero. A variável \hat{N} tem uma dinâmica de crescimento positiva, no entanto, consideravelmente mais lenta que nos restantes cenários não sendo atingindo uma situação de estabilização.

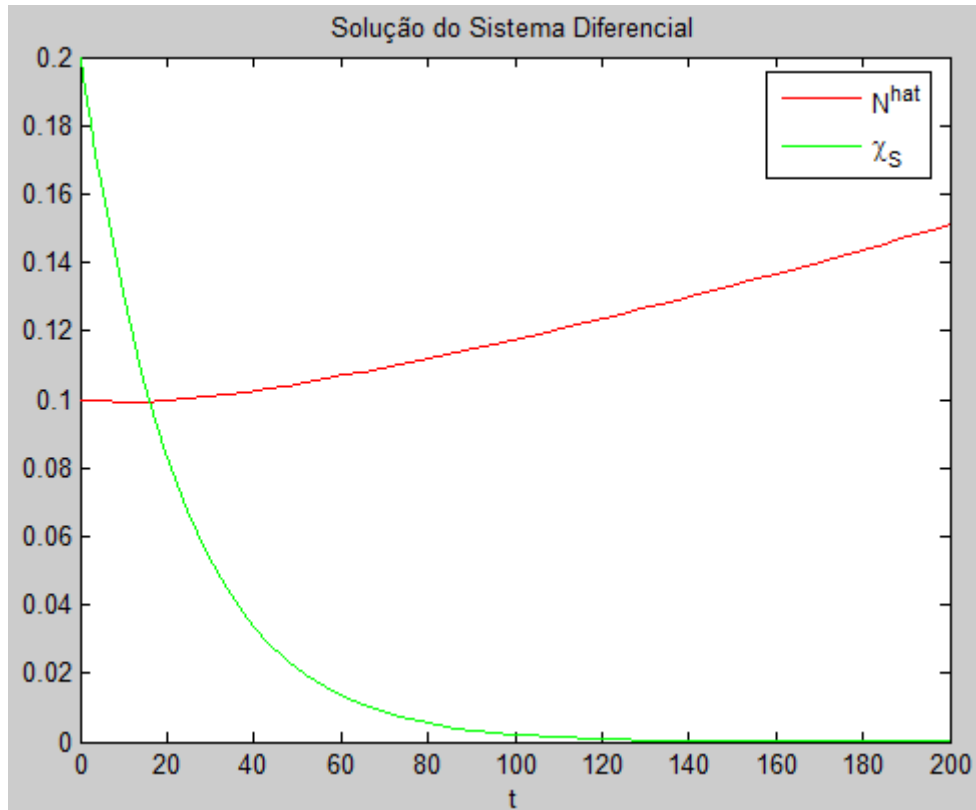


Figura 12 - Solução do Sistema Diferencial do *Caso XII*

No Quadro 13 é apresentado um resumo dos principais resultados obtidos da análise dos casos estudados.

CASOS ESTUDADOS	Valor máximo atingido pela variável χ_S (Valor aproximado)	Valore de estabilização de \hat{N} (Valor aproximado)
Caso I	0.8 ⁺	0.75
Caso II	0.8 ⁻	0.7 ⁺
Caso III	0.92	0.85 ⁺
Caso IV	0.7	0.63
Caso V	0.82	0.76
Caso VI	0.8 ⁻	0.72
Caso VII	0.9	0.8
Caso VIII	0.9 ⁺	0.82
Caso IX	1 ⁺	0.95
Caso X	0.8 ⁻	0.72
Caso XI	0.92	0.83
Caso XII	-	-

Quadro 13 – Quadro Resumo dos Casos Estudados

7. ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DO GOVERNO

A análise que a seguir se efectua é análoga para as economias dos países líder e seguidor, pelo que esta será feita sobre G e não sobre G_i .

Para o financiamento dos gastos públicos, G , o governo aplica um imposto à produção. Considera-se, por simplificação, que o imposto, τ , é proporcional e constante no tempo. Assim, a renda disponível dos indivíduos é:

$$Y^d = (1 - \tau)Y, \quad 0 < \tau < 1$$

Note-se agora que, embora no curto prazo se possam admitir situações deficitárias ou superavitárias, no longo prazo o saldo orçamental deve ser nulo e, portanto, $G = \tau Y$, ou seja, (Ver Apêndice 16)

$$G = (N\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \cdot A\bar{\alpha} \cdot L(1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha}} \quad (33)$$

Assim, por (7), (11) e (33) é possível obter a taxa de crescimento γ_1 em função de τ , (Ver Apêndice 17)

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(\alpha+\beta)-\alpha^2-2\beta^2-3\beta\alpha}{\alpha(\alpha+\beta)}} \cdot A\bar{\alpha} \cdot N\bar{\alpha} \cdot L \cdot \tau^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\eta} - \rho \right) \quad (34)$$

Analisar-se-á agora a expressão de γ , equação (34), tentando perceber o comportamento da taxa de crescimento quando se verificam variações de τ .

Assim, tomar-se-ão duas situações distintas, primeiro o caso em que $\alpha < \beta$, neste caso quando τ aumenta, isto é, quando os impostos aumentam, verifica-se um aumento de γ ; ou seja, um aumento dos impostos e conseqüente aumento dos gastos públicos G , traduz-se num aumento da taxa de crescimento da economia. O segundo caso é o caso em que $\alpha > \beta$. Nesta situação, quando τ aumenta, isto é, quando os impostos aumentam, verifica-se uma diminuição de γ ; ou seja, um aumento dos impostos e conseqüente aumento dos gastos públicos G , traduz-se numa diminuição da taxa de crescimento da economia.

Pode concluir-se desta forma que o nível de governo que otimiza a taxa de crescimento das economias está dependente dos parâmetros α e β , podendo verificar-se que quanto maior o parâmetro β , maior o peso do governo e, portanto, maior importância tem a despesa do governo G , representada pela taxa de imposto τ , na taxa de crescimento da economia, o que vai de encontro ao que sugere a equação (1). Por outro lado, no caso em que o parâmetro α assume um maior peso, a importância do gasto público diminui assumindo uma maior importância o *input* de trabalho L na taxa de crescimento da economia, mais uma vez consistente com o observável na função produção, equação (1), na qual α é o expoente de L .

8. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi desenvolvido, implementado em computador e resolvido um modelo de crescimento endógeno motivado pelo progresso do conhecimento tecnológico horizontal. O modelo é uma extensão do modelo de Barro e Sala-i-Martin (1997), reduzindo-se a este quando não é considerada intervenção governamental no processo produtivo.

Os resultados numéricos obtidos apresentam aderência à realidade económica. Para além disso, a capacidade de se simular a economia, através de choques no modelo, representa uma mais-valia na medida em que pode ajudar o decisor político na tomada de decisões suportadas.

Com este trabalho foi possível concluir que a imitação, porque mais barata, é vantajosa para os países menos desenvolvidos. Esta actividade permite melhorar o seu nível de conhecimento tecnológico e aproximar economias (*catching up*). Por outro lado, a intervenção do governo, isto é, a existência de investimento público, é vantajosa para o crescimento económico de ambas as economias, estando o seu maior ou menor impacto dependente dos valores do share do trabalho na produção e do share das despesas do governo na produção associados ao *input trabalho* e às despesas do governo, respectivamente. Sendo que, quanto maior o share das despesas do governo na produção, maior o peso do governo e, portanto, maior importância tem a despesa do governo na taxa de crescimento da economia. Por outro lado, no caso em que o share do trabalho na produção assume um maior peso, a importância do gasto público diminui assumindo uma maior importância o *input trabalho* na taxa de crescimento da economia.

9. APÊNDICES

9.1 APÊNDICE 1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y_L}{\partial X_{Lj}} = P_{Lj} &\Leftrightarrow (1 - \alpha - \beta)A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha \cdot (X_{Lj})^{-(\alpha+\beta)} = P_{Lj} \Leftrightarrow (X_{Lj})^{-(\alpha+\beta)} \\
 &= \frac{P_{Lj}}{(1 - \alpha - \beta)A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha} \Leftrightarrow (X_{Lj})^{(\alpha+\beta)} = \frac{(1 - \alpha - \beta)A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha}{P_{Lj}} \\
 \Leftrightarrow X_{Lj} &= \left(\frac{(1 - \alpha - \beta)A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha}{P_{Lj}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{3}
 \end{aligned}$$

9.2 APÊNDICE 2

$$\begin{aligned}
 \pi_{Lj} &= (P_{Lj} - 1) \cdot X_{Lj} = (P_{Lj} - 1) \cdot \left(\frac{(1 - \alpha - \beta)A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha}{P_{Lj}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
 &= (P_{Lj} - 1) \cdot (A_L(1 - \alpha - \beta))^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot P_{Lj}^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
 \frac{\partial \pi_{Lj}}{\partial P_{Lj}} &= 0 \Leftrightarrow (A_L(1 - \alpha - \beta))^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot P_{Lj}^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
 &\quad + (P_{Lj} - 1) \cdot (A_L(1 - \alpha - \beta))^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{1}{-\alpha - \beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} \\
 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow &\left[(A_L(1 - \alpha - \beta))^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \left[P_{Lj}^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \right. \\
 &\quad \left. + (P_{Lj} - 1) \left(\frac{-1}{\alpha + \beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow P_{Lj}^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} &= \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)+1} - \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow P_{Lj}^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\alpha+\beta} \cdot P_{Lj}^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} - \frac{1}{\alpha+\beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\alpha+\beta}\right) P_{Lj}^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} = -\frac{1}{\alpha+\beta} \cdot P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{\alpha+\beta}}{-\frac{1}{\alpha+\beta}} = P_{Lj}^{-\left(\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right) + \frac{1}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1 - \alpha - \beta = P_{Lj}^{-1} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow P_{Lj} = P_L = \frac{1}{1 - \alpha - \beta} > 1 \tag{4}
 \end{aligned}$$

9.3 APÊNDICE 3

$$\begin{aligned}
 X_{Lj} = X_L &= \left(\frac{(1 - \alpha - \beta) A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha}{\frac{1}{1 - \alpha - \beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow X_L = \left((1 - \alpha - \beta)^2 A_L \cdot G_L^\beta \cdot L_L^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow X_L = (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tag{5}
 \end{aligned}$$

9.4 APÊNDICE 4

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow Y_L = A_L \cdot L_L^\alpha \cdot G_L^\beta \sum_{j=1}^{N_L} (X_{Lj})^{1-\alpha-\beta} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_L = A_L \cdot L_L^\alpha \cdot G_L^\beta \cdot N_L \cdot \left((1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right)^{1-\alpha-\beta} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow Y_L = A_L \cdot L_L^\alpha \cdot G_L^\beta \cdot N_L \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_L = N_L \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} A_L^{1+\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\beta+\frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\alpha+\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Y_L = A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot N_L \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \tag{6}
 \end{aligned}$$

9.5 APÊNDICE 5

$$\begin{aligned}
 \pi_{Lj} = \pi_L = (P_L - 1) \cdot X_L &= \left(\frac{1}{1 - \alpha - \beta} - 1 \right) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \pi_L &= \left(\frac{1 - 1 + \alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \right) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \pi_L &= (\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}-1} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \pi_L &= (\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tag{7}
 \end{aligned}$$

9.6 APÊNDICE 6

Seja,

$$f(t, s) = e^{-\int_t^s r_L(v) dv}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_t^\infty f(t, s) ds &= 0 - 1 \cdot f(t, t) + \int_t^\infty \frac{d}{dt} f(t, s) ds = -e^0 + \int_t^\infty \frac{d}{dt} f(t, s) ds \\
 &= -1 + \int_t^\infty \left(e^{-\int_t^s r_L(v) dv} \cdot \frac{d}{dt} \left(-\int_t^s r_L(v) dv \right) \right) ds \\
 &= -1 + \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_L(v) dv} \cdot r_L(t) ds = -1 + r_L(t) \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_L(v) dv} \cdot ds \\
 &= -1 + r_L(t) \cdot I
 \end{aligned}$$

Assim, sendo $I = \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_L(v) dv} \cdot ds$ tem-se

$$\frac{dI}{dt} = -1 + r_L(t) \cdot I$$

Se houver entrada livre no negócio de I&D e se a quantidade de equilíbrio de I&D é não nula em cada momento do tempo, então $V_L(t)$ deve igualar o custo constante de invenção, η_L , em cada ponto do tempo, ou seja:

$$\frac{dV_L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0$$

Assim,

$$-1 + r_L(t) \cdot I = 0 \Leftrightarrow I = 1/r_L(t)$$

Como:

$$V_L(t) = \pi_L \cdot \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_L(v) dv} \cdot ds \Leftrightarrow V_L(t) = \pi_L \cdot I = \pi_L \cdot 1/r_L(t), e V_L(t) = \eta_L$$

Tem-se:

$$\pi_L \cdot 1/r_L = \eta_L \Leftrightarrow r_L = \pi_L/\eta_L$$

$$r_L = \frac{\pi_L}{\eta_L} \tag{8}$$

9.7 APÊNDICE 7

$$\max_c Ham = \frac{C_L(a, t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} + \mu(a, t)[r_L(t) \cdot k(a, t) + W_m(t) \cdot m(a) - C_L(a, t) - T(a, t)]$$

FOC:

$$\frac{\partial Ham}{\partial C_L(a, t)} = 0 \Leftrightarrow C_L(a, t)^{-\theta} \cdot e^{-\rho t} - \mu(a, t) = 0$$

$$\frac{\partial Ham}{\partial k(a, t)} = -\dot{\mu}(a, t) \Leftrightarrow \mu(a, t) \cdot r_L(t) = -\dot{\mu}(a, t)$$

Donde,

$$\mu(a, t) = C_L(a, t)^{-\theta} \cdot e^{-\rho t}$$

$$\dot{\mu}(a, t) = -\theta \cdot C_L(a, t)^{-\theta-1} \cdot \dot{C}_L(a, t) \cdot e^{-\rho t} - \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot C_L(a, t)^{-\theta}$$

$$-\mu(a, t) \cdot r_L(t) = -\theta \cdot C_L(a, t)^{-\theta} \cdot C_L(a, t)^{-1} \cdot \dot{C}_L(a, t) \cdot e^{-\rho t} - \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot C_L(a, t)^{-\theta}$$

$$-\mu(a, t) \cdot r_L(t) = -\theta \cdot \mu(a, t) \cdot C_L(a, t)^{-1} \cdot \dot{C}_L(a, t) - \rho \cdot \mu(a, t)$$

$$\theta \cdot \frac{\dot{C}_L(a, t)}{C_L(a, t)} = r_L(t) - \rho$$

$$\frac{\dot{C}_L(a, t)}{C_L(a, t)} = \frac{1}{\theta} (r_L(t) - \rho) \equiv \dot{C}_L / C_L = \frac{\dot{C}_L}{C_L}$$

$$\frac{\dot{C}_L}{C_L} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot (r_L - \rho) \tag{10}$$

9.8 APÊNDICE 8

Seja,

$$f(t, s) = e^{-\int_t^s r_S(v)dv}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_t^\infty f(t, s) ds &= 0 - 1 \cdot f(t, t) + \int_t^\infty \frac{d}{dt} f(t, s) ds = -e^0 + \int_t^\infty \frac{d}{dt} f(t, s) ds \\ &= -1 + \int_t^\infty \left(e^{-\int_t^s r_S(v)dv} \cdot \frac{d}{dt} \left(-\int_t^s r_S(v)dv \right) \right) ds \\ &= -1 + \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_S(v)dv} \cdot r_S(t) ds = -1 + r_S(t) \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_S(v)dv} \cdot ds \\ &= -1 + r_S(t) \cdot I \end{aligned}$$

Assim, $I = \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_S(v)dv} \cdot ds$

$$\frac{dI}{dt} = -1 + r_S(t) \cdot I$$

Como,

$$V_S(t) = \vartheta_S \Rightarrow \frac{dV_S(t)}{dt} = \dot{\vartheta}_S$$

e,

$$V_S(t) = \pi_S \cdot I \Rightarrow \frac{dV_S(t)}{dt} = \pi_S \cdot \frac{dI}{dt}$$

Então,

$$\begin{aligned} \pi_S \cdot \frac{dI}{dt} = \dot{\vartheta}_S &\Leftrightarrow \pi_S \cdot (-1 + r_S(t) \cdot I) = \dot{\vartheta}_S \Leftrightarrow -1 + r_S(t) \cdot I = \dot{\vartheta}_S / \pi_S \Leftrightarrow r_S(t) \cdot I \\ &= \dot{\vartheta}_S / \pi_S + 1 \Leftrightarrow I = \frac{\dot{\vartheta}_S}{r_S(t) \cdot \pi_S} + \frac{1}{r_S(t)} \end{aligned}$$

Como,

$$V_S(t) = \pi_S \cdot I, V_S(t) = \vartheta_S$$

Então,

$$\vartheta_S = \pi_S \cdot I \Leftrightarrow \vartheta_S = \pi_S \cdot \left(\frac{\dot{\vartheta}_S}{r_S(t) \cdot \pi_S} + \frac{1}{r_S(t)} \right) \Leftrightarrow \vartheta_S = \frac{\dot{\vartheta}_S}{r_S(t)} + \frac{\pi_S}{r_S(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vartheta_S \cdot r_S(t) = \dot{\vartheta}_S + \pi_S \Leftrightarrow r_S(t) = \frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \frac{\dot{\vartheta}_S}{\vartheta_S} \Leftrightarrow$$

$$r_S = \frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \frac{\dot{\vartheta}_S}{\vartheta_S} \tag{19}$$

9.9 APÊNDICE 9

$$\vartheta_S^* = \eta_L \cdot \left(\frac{\pi_S}{\pi_L} \right) = \eta_L \cdot \frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{(\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A_L^{\frac{1}{\alpha+\beta}} G_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} L_L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vartheta_S^* = \eta_L \cdot \left(\frac{A_S}{A_L} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tag{22}$$

9.10 APÊNDICE 10

$$\eta_L \cdot \left(\frac{A_S}{A_L} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} < \eta_S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{A_S}{A_L} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\eta_L}{\eta_S} < 1 \tag{23}$$

9.11 APÊNDICE 11

$$\begin{aligned}
 \vartheta_S &= \eta_S \cdot \left(\frac{N_S}{N_L}\right)^\sigma \Leftrightarrow \eta_S \left[\left(\frac{N_S}{N_L}\right)^*\right]^\sigma = \eta_L \cdot \left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{N_S}{N_L}\right)^*\right]^\sigma &= \frac{\eta_L}{\eta_S} \cdot \left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{N_S}{N_L}\right)^* &= \left[\frac{\eta_L}{\eta_S} \cdot \left(\frac{A_S}{A_L}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{G_S}{G_L}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{L_S}{L_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \quad (25)
 \end{aligned}$$

9.12 APÊNDICE 12

$$\vartheta_S = \eta_S \cdot \left(\frac{N_S}{N_L}\right)^\sigma \Rightarrow \vartheta_S = \eta_S \cdot (\hat{N})^\sigma$$

$$\dot{\vartheta}_S = \eta_S \cdot \sigma \hat{N}^{\sigma-1} \dot{\hat{N}}$$

$$\frac{\dot{\vartheta}_S}{\vartheta_S} = \frac{\eta_S \cdot \sigma \hat{N}^{\sigma-1} \dot{\hat{N}}}{\eta_S \cdot \hat{N}^\sigma} = \frac{\sigma \dot{\hat{N}}}{\hat{N}}$$

Substituindo (19) na (20)

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \frac{\dot{\vartheta}_S}{\vartheta_S} - \rho\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{C}_S}{C_S} = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} + \sigma \cdot \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} - \rho\right) \quad (26)$$

9.13 APÊNDICE 13

Recursos dedicados à imitação = $Y_S - C_S - N_S X_S$

$$\dot{N}_S = \frac{1}{\vartheta_S} (Y_S - C_S - N_S X_S)$$

Como,

$$\hat{N} = \frac{N_S}{N_L}$$

Então,

$$\ln \hat{N} = \ln N_S - \ln N_L \Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_S}{N_S} - \frac{\dot{N}_L}{N_L} \Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_S}{N_S} - \gamma_L$$

Assim,

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(\frac{Y_S - C_S - N_S X_S}{N_S} \right) - \gamma_L \Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(\frac{Y_S}{N_S} - \frac{C_S}{N_S} - X_S \right) - \gamma_L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(\frac{Y_S}{N_S} - \chi_S - X_S \right) - \gamma_L \quad , \chi_S = \frac{C_S}{N_S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(\frac{A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot N_S \cdot (1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}}}{N_S} - \chi_S \right. \\ \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) - \gamma_L$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot (1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - \chi_S \right. \\ \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) - \gamma_L$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \quad (27)$$

9.14 APÊNDICE 14

Substituindo (26) em (27)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{C}_S}{C_S} = & \left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} \right) \right. \\ & + \sigma \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \right] - \rho \left. \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

9.15 APÊNDICE 15

$$\hat{N} = \frac{N_S}{N_L} \Leftrightarrow \ln \hat{N} = \ln N_S - \ln N_L \Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_S}{N_S} - \frac{\dot{N}_L}{N_L} \Leftrightarrow \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_S}{N_S} - \gamma_L \Leftrightarrow \frac{\dot{N}_S}{N_S} = \frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} + \gamma_L$$

$$\chi_S = \frac{C_S}{N_S} \Rightarrow \frac{\dot{\chi}_S}{\chi_S} = \frac{\dot{C}_S}{C_S} - \frac{\dot{N}_S}{N_S} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\dot{\chi}_S}{\chi_S} = & \left[\left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} \right) \right. \right. \\ & + \sigma \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \right] - \rho \left. \right\} \\ & - \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \chi_S \right) - \gamma_L + \gamma_L \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\dot{\chi}_S}{\chi_S} = & \left[\left(\frac{1}{\theta} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{\pi_S}{\vartheta_S} \right) \right. \right. \\
 & + \sigma \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] - \chi_S \right) - \gamma_L \right] - \rho \left. \right\} \left. \right] \\
 & - \left[\frac{1}{\vartheta_S} \left(A_S^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G_S^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L_S^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} - (1-\alpha-\beta)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \chi_S \right) \right] \quad (29)
 \end{aligned}$$

9.16 APÊNDICE 16

$$\begin{aligned}
 G = \tau Y & \Leftrightarrow G = \tau \left(A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot N \cdot (1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}} \right) \\
 \Leftrightarrow G \cdot G^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} & = \tau \left(A \cdot L^\alpha \cdot N^{\alpha+\beta} \cdot (1-\alpha-\beta)^{2(1-\alpha-\beta)} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
 \Leftrightarrow G^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} & = \left(\tau^{\alpha+\beta} A \cdot L^\alpha \cdot N^{\alpha+\beta} \cdot (1-\alpha-\beta)^{2(1-\alpha-\beta)} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
 \Leftrightarrow G & = \left(\tau^{\alpha+\beta} A \cdot L^\alpha \cdot N^{\alpha+\beta} \cdot (1-\alpha-\beta)^{2(1-\alpha-\beta)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
 \Leftrightarrow G & = (N\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot L \cdot (1-\alpha-\beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

9.17 APÊNDICE 17

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\pi}{\eta} - \rho \right) = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{(\alpha+\beta) \cdot (1-\alpha-\beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot G^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\eta} - \rho \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left[(N\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot L(1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(1-\alpha-\beta)}{\alpha}} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot L^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\eta} \right. \\
 &\left. - \rho \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 - \alpha - \beta)^{\frac{2(\alpha+\beta)-\alpha^2-2\beta^2-3\beta\alpha}{\alpha(\alpha+\beta)}} A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot N^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot L \cdot \tau^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\eta} - \rho \right) \quad (34)
 \end{aligned}$$

Os programas em MATLAB utilizados na obtenção dos resultados apresentados na presente tese poderão ser obtidos contactando a autora.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, O. A. (2009), “Crescimento Económico”, Apontamentos da disciplina *Ciclos e Crescimento Económico* – Mestrado em Economia, Faculdade de Economia da Universidade do Porto.
- Afonso, O. A., Vasconcelos, P. B. (2009), Apontamentos das disciplinas *Economia Computacional e Tópicos Avançados (em Crescimento Económico)* - Doutoramento em Economia da Faculdade de Economia da Universidade do Porto.
- Aghion, P. e P. Howitt (1992), “A Model of Growth through Creative Destruction”, *Econometrica*, Vol. 60, pp.323-351.
- Aschauer, D. A. (1989), “Is public expenditure productive?”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 23, pp. 177-200.
- Barro, R. J. (1990), “Government spending in a simple model of endogenous growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. 103-125.
- Barro, R. J. e X. Sala-i-Martin (1995), *Economic Growth*, New York: McGraw Hill.
- Barro, R. J. e X. Sala-i-Martin (1997), “Technological Diffusion, Convergence, and Growth”, *Journal of Economic Growth*, Vol. 2, pp. 1-27.
- Canning, D. e P. Pedroni (2004) *The effect of infrastructure on long-run economic growth*, Mimeo: Harvard University.
- de Haan, J. e W. Romp (2007) “Public capital and economic growth: a critical survey”, *Perspektiven der Wirtschaftspolitik*, Vol. 8(Special Issue), pp. 6-52.
- Dixit, A. K., e J. E. Stiglitz (1977), “Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity”, *American Economic Review*, Vol. 67, pp. 297-308.
- Easterly, W. e S. Rebelo (1993) “Fiscal policy and economic growth”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 32, pp. 417-458.

Grossman, G. M. e E. Helpman (1991), *Innovation and Growth in the Global Economy*, Cambridge MA: MIT Press.

Howard (2007), “Solving ODE in MATLAB”

www.math.tamu.edu/REU/comp/matode.pdf, acessado em 1 Julho 2011.

Irmen, A. e J. Kuehnel (2009), “Productive government expenditure and economic growth”, *Journal of Economic Surveys*, Vol. 23, pp. 692-733.

Lucas, R. (1993). “Making a Miracle”, *Econometrica*, Vol. 61, issue 2, pp. 251-272.

Lucas, R. (1988), “On the mechanics of economic development”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, issue 1, pp. 3-42.

Ramsey, F. (1928), “A Mathematical Theory of Saving”, *Economic Journal*, Vol. 38, pp. 543-559.

Rivera-Batiz, L. A., e P. M. Romer (1991), “Economic Integration and Endogenous Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, pp. 531-555.

Romer, P. M. (1987), “Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization”, *American Economic Review*, Vol. 77, pp.56-62.

Romer, P. M. (1990), “Endogenous Technological Change”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp.71-102.

Spence, M. (1976), “Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition,” *Review of Economic Studies*, Vol. 43, pp. 217-235.