

PARECER

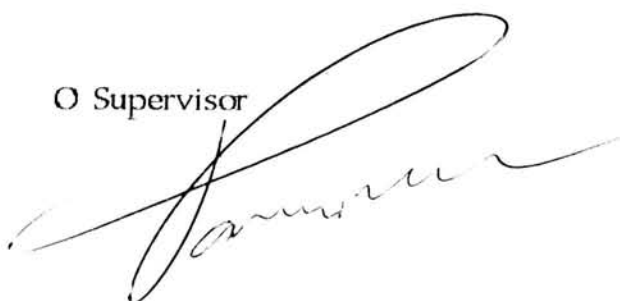
O aluno finalista do Curso de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial **JORGE MANUEL MENDES MARTINS**, realizou no INEGI, no âmbito do programa PRODEP, medida 4.3/7/7/92/93, um estágio cujo trabalho se encontra descrito no relatório apresentado com o título **"Estudo de máquina de ensaio de fadiga"**

Durante a execução do conjunto de tarefas que lhe foram atribuídas, o referido estagiário atingiu os objectivos que lhe foram propostos, mostrando ter conhecimentos adequados e empenho..

Face à qualidade do trabalho produzido cumpre-me informar que o estágio realizado se revestiu de grande interesse para a formação do aluno, como futuro engenheiro.

Porto, 27 de Dezembro de 1993

O Supervisor



Faculdade de Engenharia

Rua dos Bragas • 4099 PORTO CODEX • PORTUGAL
Telef. (02) 311254 • Telex 27323 FEUP P • Fax 319125

Instalações Laboratoriais e Administrativas

R. do Barroco, 174/214 • 4465 S. Mamede de Infesta • PORTUGAL
Telef. (02) 9537348 (4 Linhas) • Fax (02) 9537352

PARECER

O aluno finalista do Curso de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial **JORGE MANUEL MENDES MARTINS**, realizou no INEGI, no âmbito do programa PRODEP, medida 4.3/7/7/92/93, um estágio cujo trabalho se encontra descrito no relatório apresentado com o título "**Estudo de máquina de ensaio de fadiga**".

Durante a execução do conjunto de tarefas que lhe foram atribuídas, o referido estagiário atingiu os objectivos que lhe foram propostos, mostrando ter conhecimentos adequados.

Face à qualidade do trabalho produzido cumpre-me informar que o estágio realizado se revestiu de grande interesse para esta instituição.

Porto, 27 de Dezembro de 1993

O Supervisor



FACULDADE DE ENGENHARIA
Departamento de Engenharia Mecânica e
Gestão Industrial

PROGRAMA PRODEP
Medida 4.3
Acção de Formação nº4

RELATÓRIO FINAL

"Estudo de Máquina de Ensaio de Fadiga"

por

Jorge Manuel Mendes Martins

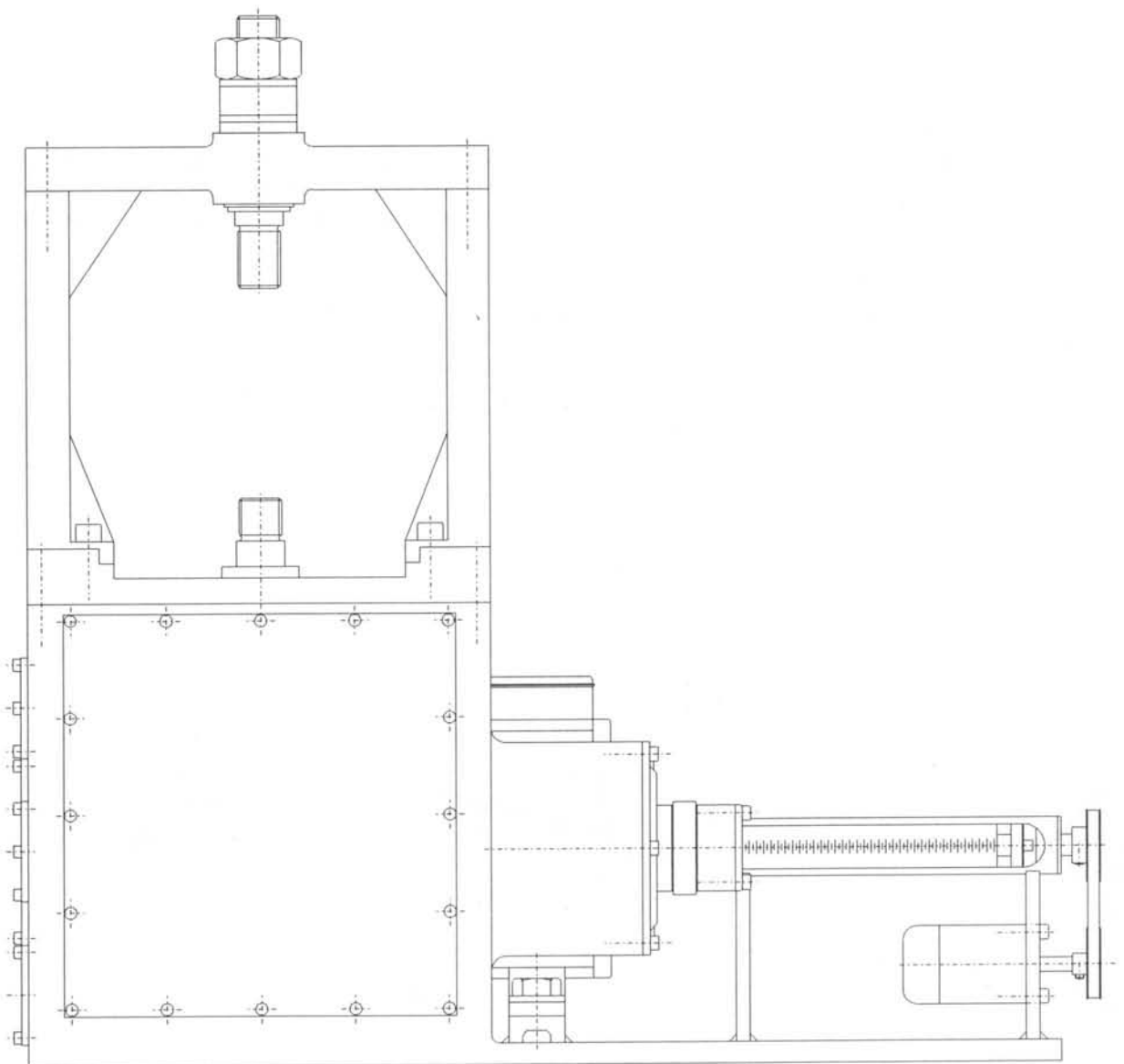
Porto e FEUP, 15 de Outubro de 1993

Universidade de São Paulo
Faculdade de Engenharia
biblioteca 4

139

CDU 621/047.3/LEM 1992/HAR;

Data 13/10/2009

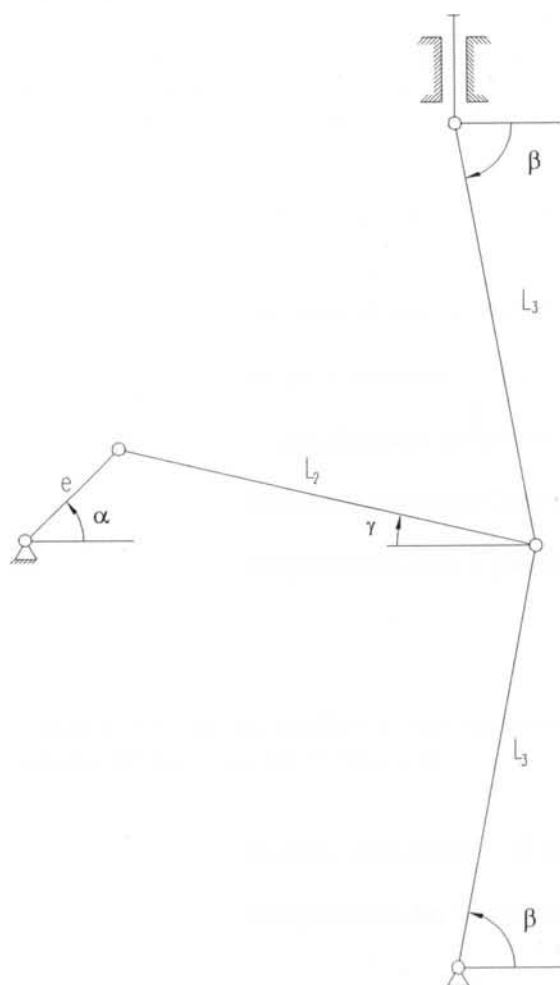


OBJECTIVO:

Este trabalho têm como objectivo a concepção de uma máquina para ensaios de fadiga, com a possibilidade de ensaiar provetes de geometria CT e 3PB (ou 4PB), no mínimo, sendo para isso proposto um sistema mecânico e não do tipo servo-hidráulico, comumente utilizado para este tipo de máquina.

Assim para sistema mecânico optou-se por uma solução de "joelheira" como a figura abaixo pode indicar. A esse sistema é adicionado um variador de excentricidade.

Com esse componente poderemos numa fase futura, e que não pertence a este projecto, ter a possibilidade de programar os ensaios a realizar, que idealmente deveriam ser controláveis em termos de força imposta ao provete ou deslocamento imposto. Assim poderemos controlar com relativa facilidade o valor da excentricidade a impor no referido sistema, conseguindo desse modo a variação do deslocamento no actuador, e podendo também ter um valor de carga variável a impor no provete a ensaiar.



ESTRUTURA DO TRABALHO:

Começaremos por realizar um estudo com relativa profundidade no âmbito da Mecânica Teórica em que faremos uma análise do ponto de vista cinemático, dinâmico e estático do sistema, passando de seguida ao dimensionamento.

Apesar dos três capítulos iniciais tomarem grande parte deste relatório achou-se por bem que tais fizessem parte do mesmo, pois trata-se de dar uma ideia mais precisa e fundamentada de todas as soluções que aqui serão apresentadas.

Assim este trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos principais:

- Dependência Angular do Sistema;
- Análise Cinemática do Sistema;
- Análise Dinâmica do Sistema.
- Dimensionamento dos Componentes
- Considerações sobre o Projecto

NOTA: Os valores numéricos aqui apresentados foram calculados com base em parâmetros previamente definidos que são os seguintes:

- Excentricidade (Máx) = 30 mm
- Comprimentos das "joelheiras" = 100 mm

*DEPENDÊNCIA
ANGULAR
DO
SISTEMA*

DEPENDÊNCIA ANGULAR

Este capítulo tratará do estudo das relações angulares existentes no sistema, assim far-se-à alusão tanto ao raciocínio envolvido em tal estudo, bem como aos métodos utilizados numericamente para obtenção de tais resultados.

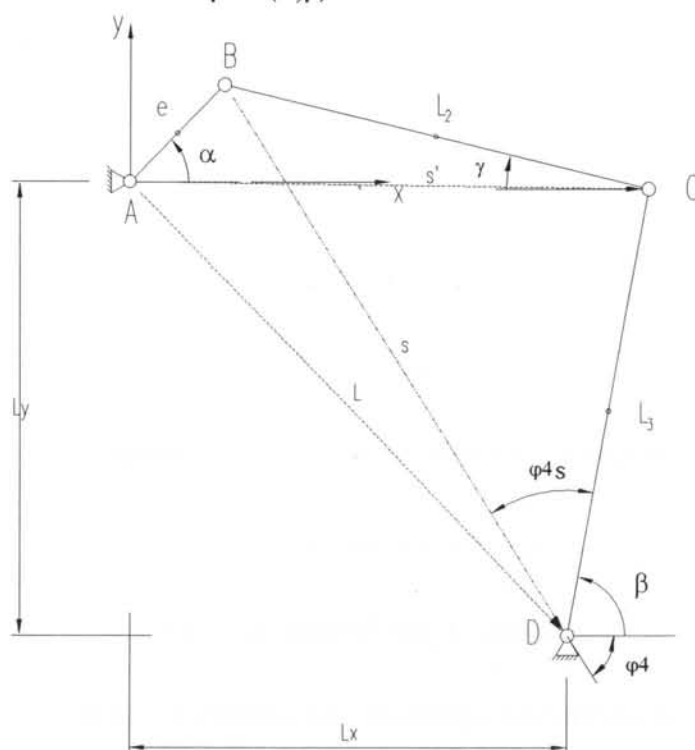
Para o desenvolvimento deste estudo dividiu-se o sistema em três triângulos, como se ilustra na fig., recorrendo ainda tanto a ângulos auxiliares, como a vectores auxiliares.

Como ângulos principais do sistema temos:

- α (conhecido em qualquer instante)

- $\beta = f(\alpha, \gamma)$

- $\gamma = f(\alpha, \beta)$



Assim como divisão para o estudo do mecanismo temos:

ABD
BCD
ABC

Os quais correspondem em termos vectoriais as seguintes relações:

$$\text{ABD: } L = e + s \Rightarrow e + s - L = 0$$

$$\text{BCD: } L_2 - L_3 - s = 0$$

$$\text{ABC: } e + L_2 = s' \Rightarrow e + L_2 - s' = 0$$

Apresentaremos então o raciocínio para o estudo dos triângulos envolvidos , ou seja, será aqui demonstrado o caminho utilizado para a obtenção dos futuros parâmetros cinemáticos do conjunto.

Começando então pelo triângulo **ABD** temos;

Projectando ABD no respectivo sistema de eixos

$$\begin{cases} \text{ecos}\alpha + \text{scos}\varphi_s - L_x = 0 \\ \text{esen}\alpha - \text{ssen}\varphi_s + L_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{scos}\varphi_s = L_x - \text{ecos}\alpha \\ -\text{ssen}\varphi_s = -L_y - \text{esen}\alpha \end{cases}$$

Fazendo:

$$\tan\varphi_s = \frac{\text{ssen}\varphi_s}{\text{scos}\varphi_s} = \frac{(L_y + \text{esen}\alpha)}{(L_x - \text{ecos}\alpha)} \Rightarrow \varphi_s = \arctan\left(\frac{L_y + \text{esen}\alpha}{L_x - \text{ecos}\alpha}\right)$$

Temos ainda:

$$\text{ecos}\alpha + \text{scos}\varphi_s - L_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{scos}\varphi_s = L_x - \text{ecos}\alpha$$

$$\Rightarrow s = \frac{L_x - \text{ecos}\alpha}{\cos\varphi_s}$$

Trabalhando agora o triângulo **BCD** temos as seguintes relações;

$$L_2 - L_3 - s = 0 \Rightarrow L_2 = L_3 + s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2^2 = (L_3 \sin\varphi_{4s})^2 + (s - L_3 \cos\varphi_{4s})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2^2 = L_3^2 \sin^2\varphi_{4s} + s^2 - 2L_3 s \cos\varphi_{4s} + L_3^2 \cos^2\varphi_{4s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2^2 = L_3^2 (\sin^2\varphi_{4s} + \cos^2\varphi_{4s}) + s^2 - 2L_3 s \cos\varphi_{4s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2^2 = L_3^2 + s^2 - 2L_3 s \cos\varphi_{4s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2L_3 s \cos\varphi_{4s} = L_3^2 + s^2 - L_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi_{4s} = \frac{L_3^2 + s^2 - L_2^2}{2L_3 s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{4s} = \arccos\left(\frac{L_3^2 + s^2 - L_2^2}{2L_3 s}\right)$$

Projectando agora o triângulo **ABC** no sistema de eixos;

NOTA: O vector s conhecido em qualquer instante, será sempre definido pelos seus parâmetros definidos no respectivo sistema de eixos.

Assim:

$$\begin{cases} e \cos \alpha + L_2 \cos \gamma = L_x + L_3 \cos \beta \\ L_y + e \sin \alpha = L_2 \sin \gamma + L_3 \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_2 \cos \gamma = L_x + L_3 \cos \beta - e \cos \alpha \\ L_2 \sin \gamma = L_y - L_3 \sin \beta + e \sin \alpha \end{cases}$$

Fazendo o mesmo com o ângulo φ_s temos:

$$\tan \gamma = \frac{L_2 \sin \gamma}{L_2 \cos \gamma} = \left(\frac{L_y - L_3 \sin \beta + e \sin \alpha}{L_x + L_3 \cos \beta - e \cos \alpha} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan \left(\frac{L_y - L_3 \sin \beta + e \sin \alpha}{L_x + L_3 \cos \beta - e \cos \alpha} \right)$$

Como relações angulares finais, temos então as seguintes:

$$\beta = 180 - \varphi_{4s} - \varphi_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\beta = 180 - (\varphi_{4s} + \varphi_s)] \text{ (em Graus)}$$

Substituindo:

$$\left[\beta = 180 - \arccos \left(\frac{s^2 + L_3^2 - L_2^2}{2L_3s} \right) - \arctan \left(\frac{L_y + e \sin \alpha}{L_x - e \cos \alpha} \right) \right]$$

$$\text{Com } s = \frac{(L_x - e \cos \alpha)}{\cos \varphi_s}$$

$$\left[\gamma = \arctan \left(\frac{L_y - L_3 \sin \beta + e \sin \alpha}{L_x + L_3 \cos \beta - e \cos \alpha} \right) \right]$$

OBSERVAÇÕES

Quando da realização do cálculo numérico dos parâmetros envolvidos nesta análise, utilizar-se-à uma folha de cálculo. Assim todos os parâmetros serão calculados numericamente em separado, sendo reagrupados quando da realização do cálculo dos parâmetros principais, ou seja, utilizaremos as respectivas células com os respectivos valores numéricos.

Assim conseguiremos expressões menos extensas e mais simples, a inserir na respectiva folha de cálculo. Minimiza-se desta tanto a caracterização global, como também se obtém uma maior facilidade de detecção de possíveis erros na introdução dos dados. Facilitam-se consideravelmente mudanças de dados ou mesmo futuras modificações.

Os cálculos até aqui realizados tiveram como unidade o grau ($^{\circ}$). Assim para qualquer modificação bastará modificar a respectiva folha de cálculo para a unidade angular pretendida.

FOLHA DE CÁLCULO

CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

NOTA: A folha de cálculo utilizada (Excel 4.0a) encontrava-se definida para operações trigonométricas em radianos. Assim, por questões de apresentação, foram realizadas as transformações:

[Graus→Radianos→Graus]

Foi utilizada a linha 1 para a nomenclatura das variáveis, e a sua caracterização foi iniciada na linha 2. Assim temos o quadro abaixo que indica a definição de todas as variáveis envolvidas. A seguir a esta caracterização realizou-se um *copy* até a linha 182 calculando todos os parâmetros de 2 em 2°;

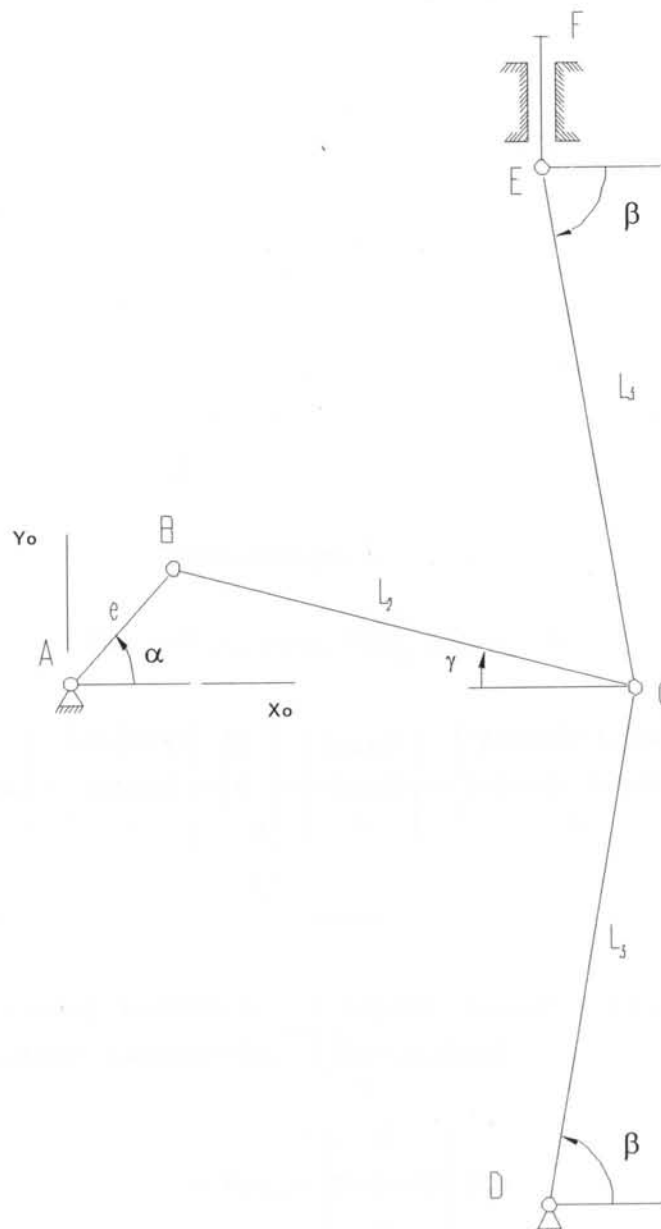
A2=α(Graus)
B2=α(Rad)=2*(2*PI())/360
C2=e (m)
D2=L2 (m)
E2=L3 (m)
F2=L _x (m)
G2=L _y (m)
H2=cosα=COS(B2)
I2=senα=SIN(B2)
J2=φ _s (Rad)=ATAN((G2+(C2*I2))/(F2-(C2*H2)))
K2=φ _s (Graus)=(J2*360)/(2*PI())
L2=s (m)=(F2-(C2*H2))/COS(J2)
M2=φ _{4s} (Rad)=ACOS(((L2*L2)+(E2*E2)-(D2*D2))/(2*E2*L2))
N2=φ _{4s} (Graus)=(M2*360)/(2*PI())
O2=β (Rad)=PI()-(M2+J2)
P2=β (Graus)=(O2*360)/(2*PI())
Q2=cosβ=COS(O2)
R2=senβ=SIN(O2)
S2=γ (Rad)=ATAN((G2-(E2*R2)+(C2*I2))/(F2+(E2*Q2)-(C2*H2)))
T2=γ (Graus)=(S2*360)/(2*PI())
U2=cosγ=COS(S2)
V2=senγ=SIN(S2)

NOTA: Será apresentada em anexo a referida folha de cálculo com todos os parâmetros, bem como os seus valores numéricos. Tal folha será apresentada com um intervalo angular de 15 em 15°.

*ANÁLISE
CINEMÁTICA
DO
SISTEMA*

ANÁLISE CINEMÁTICA

A análise cinemática consistirá na determinação das velocidades e das acelerações dos pontos de ligação entre os vários componentes do sistema. Tal análise será efectuada com base no referencial global do sistema, designado por S_0 .



VELOCIDADES:

$$\vec{V}_{B10}|_{S_0} = \vec{V}_{A10}|_{S_0} + \vec{w}_{10}|_{S_0} * \vec{AB}|_{S_0} \text{ e } \vec{V}_{A10}|_{S_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{B10}|_{S_0} = \vec{w}_{10}|_{S_0} * \vec{AB}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} e \cos \alpha \\ e \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha} \sin \alpha \\ e\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_{C20}|_{S_0} = \vec{V}_{B10}|_{S_0} + \vec{w}_{20}|_{S_0} * \vec{BC}|_{S_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{C20}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha} \sin \alpha \\ e\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} -L_2 \cos \gamma \\ L_2 \sin \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{C20}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha} \sin \alpha + L_2 \dot{\gamma} \sin \gamma \\ e\dot{\alpha} \cos \alpha + L_2 \dot{\gamma} \cos \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_{C30}|_{S_0} = \vec{V}_{D30}|_{S_0} + \vec{w}_{30}|_{S_0} * \vec{DC}|_{S_0} \text{ e } \vec{V}_{D30}|_{S_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{C30}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} L_3 \cos \beta \\ L_3 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{C30}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -L_3 \dot{\beta} \sin \beta \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

$$\text{Temos ainda que: } \vec{V}_{C20}|_{S_0} = \vec{V}_{C30}|_{S_0}$$

$$\vec{V}_{E40}|_{S_0} = \vec{V}_{C30}|_{S_0} + \vec{w}_{40}|_{S_0} * \vec{CE}|_{S_0} \text{ e } \vec{V}_{E40}|_{S_0} = \vec{V}_{F50}|_{S_0}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{V}_{E40} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_3 \dot{\beta} \sin \beta \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} L_4 \cos \beta \\ -L_4 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_3 \dot{\beta} \sin \beta - L_4 \dot{\beta} \sin \beta \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta - L_4 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Assim:

$$\begin{cases} -L_3 \dot{\beta} \sin \beta - L_4 \dot{\beta} \sin \beta = 0 \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta - L_4 \dot{\beta} \cos \beta = \vec{V}_{E40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -L_3 \dot{\beta} \sin \beta = L_4 \dot{\beta} \sin \beta \Rightarrow -L_3 = L_4 \Rightarrow \\ \vec{V}_{E40} = 2L_3 \dot{\beta} \cos \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{E40}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2L_3 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

DETERMINAÇÃO DE $\dot{\beta}$ E $\dot{\gamma}$

Como a velocidade do Ponto C20 e C30 é igual, então através dessa relação podemos determinar $\dot{\gamma}$ e $\dot{\beta}$ uma vez que temos um sistema de duas equações a duas incógnitas, e a relação entre estes dois parâmetro é a seguinte:

$$\dot{\gamma} = f(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$$

$$\dot{\beta} = f(\dot{\alpha}, \dot{\gamma})$$

Assim iremos desenvolver tal sistema de equações, o mesmo será de tal forma que irá ser desenvolvido apenas um dos parâmetros, sendo o outro calculado numericamente com o valor do parâmetro anterior;

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha}\sin\alpha + L_2\dot{\gamma}\sin\gamma \\ e\dot{\alpha}\cos\alpha + L_2\dot{\gamma}\cos\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -L_3\dot{\beta}\sin\beta \\ L_3\dot{\beta}\cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} L_3\dot{\beta}\sin\beta = e\dot{\alpha}\sin\alpha - L_2\dot{\gamma}\sin\gamma \\ L_2\dot{\gamma}\cos\gamma = -e\dot{\alpha}\cos\alpha + L_3\dot{\beta}\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha - L_2\dot{\gamma}\sin\gamma}{L_3\sin\beta} \\ \dot{\gamma} = \frac{-e\dot{\alpha}\cos\alpha + L_3\dot{\beta}\cos\beta}{L_2\cos\gamma} \end{cases} \end{aligned}$$

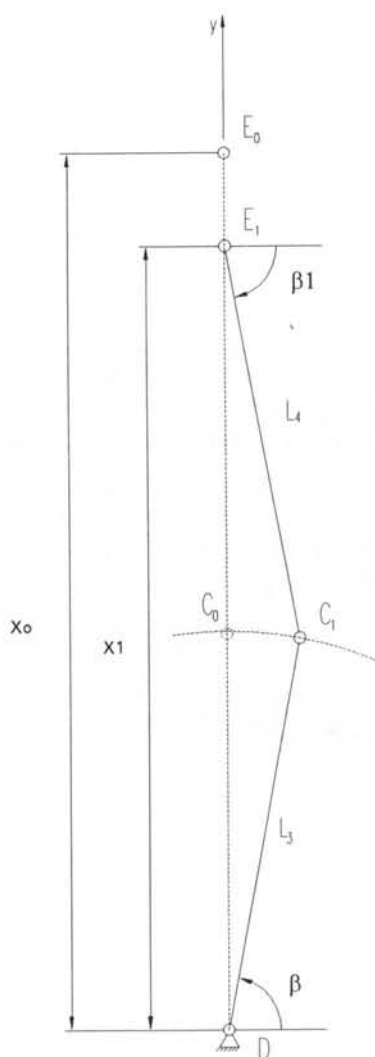
Substituindo então $\dot{\gamma}$ em $\dot{\beta}$ e desenvolvendo o referido termo, obteremos a relação pretendida que nos permitirá calcular numericamente tanto o valor de $\dot{\beta}$, bem como o valor de $\dot{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha - L_2\dot{\gamma}\sin\gamma}{L_3\sin\beta} = \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha}{L_3\sin\beta} - \dot{\gamma} \frac{L_2\sin\gamma}{L_3\sin\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta} &= \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha}{L_3\sin\beta} - \left(\frac{-e\dot{\alpha}\cos\alpha + L_3\dot{\beta}\cos\beta}{L_2\cos\gamma} \right) * \frac{L_2\sin\gamma}{L_3\sin\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta} &= \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha \cdot \cos\gamma \cdot L_3\sin\beta + e\dot{\alpha}\cos\alpha \cdot \sin\gamma \cdot L_3\sin\beta - L_3^2\dot{\beta}\cos^2\beta \cdot \sin\gamma}{L_3^2\sin^2\beta \cdot \cos\gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta} &= \frac{e\dot{\alpha}\sin\alpha \cdot \cos\gamma + e\dot{\alpha}\cos\alpha \cdot \sin\gamma - L_3\dot{\beta}\cos\beta \cdot \sin\gamma}{L_3\sin\beta \cdot \cos\gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta} \cdot L_3\sin\beta \cdot \cos\gamma &= e\dot{\alpha}\sin\alpha \cdot \cos\gamma + e\dot{\alpha}\cos\alpha \cdot \sin\gamma - L_3\dot{\beta}\cos\beta \cdot \sin\gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta}(L_3\sin\beta \cdot \cos\gamma + L_3\cos\beta \cdot \sin\gamma) &= e\dot{\alpha}(\sin\alpha \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\gamma) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\beta} &= \left[\frac{e\dot{\alpha}(\sin\alpha \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\gamma)}{L_3(\sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \sin\gamma)} \right] \end{aligned}$$

Assim como referido anteriormente, substituindo o valor numérico de $\dot{\beta}$ em $\dot{\gamma}$ obtemos directamente o referido valor em cada instante, por isso temos:

$$\left[\dot{\gamma} = \frac{-e\dot{\alpha} \cos \alpha + L_3 \dot{\beta} \cos \beta}{L_2 \cos \gamma} \right]$$

DESLOCAMENTO DO ACTUADOR (Ponto F)



$$\begin{aligned} \Delta E &= \overline{DE_0} - \overline{DE_1} = X_0 - X_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta E = 2L - 2L \sin \beta \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\Delta E = 2L(1 - \sin \beta)] \end{aligned}$$

FOLHA DE CÁLCULO

CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

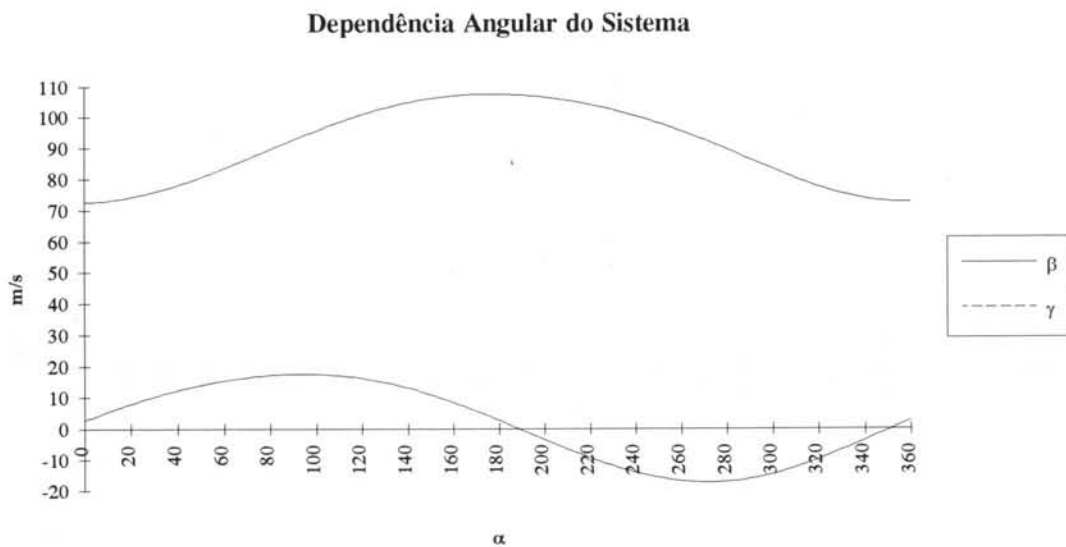
Transportando todos os parâmetros calculados até aqui, temos o seguinte quadro que ilustra a caracterização das variáveis envolvidas no raciocínio até aqui ilustrado.

$W2 = \dot{\alpha}$ (Rad/s) = $(2 \cdot \text{PI}() \cdot 1500) / 60$
$X2 = \dot{\beta}$ (Rad/s) = $((C2 \cdot W2) \cdot ((I2 \cdot U2) + (H2 \cdot V2))) / (E2 \cdot ((R2 \cdot U2) + (Q2 \cdot V2)))$
$Y2 = \dot{\gamma}$ (Rad/s) = $((- (C2 \cdot W2 \cdot H2) + (E2 \cdot X2 \cdot Q2)) / (D2 \cdot U2))$
$Z2 = Vb10(x) = - (C2 \cdot W2 \cdot I2)$
$AA2 = Vb10(y) = (C2 \cdot W2 \cdot H2)$
$AB2 = Vc20(x) = - (C2 \cdot W2 \cdot I2) + (D2 \cdot Y2 \cdot V2)$
$AC2 = Vc20(y) = (C2 \cdot W2 \cdot H2) + (D2 \cdot Y2 \cdot U2)$
$AD2 = Vc30(x) = - (E2 \cdot X2 \cdot R2)$
$AE2 = Vc30(y) = (E2 \cdot X2 \cdot Q2)$
$AF2 = Ve40(y) = (2 \cdot E2 \cdot X2 \cdot Q2)$
$AG2 = \text{Desl F (mm)} = 2 \cdot E2 \cdot (1 - R2) \cdot 1000$

GRÁFICOS

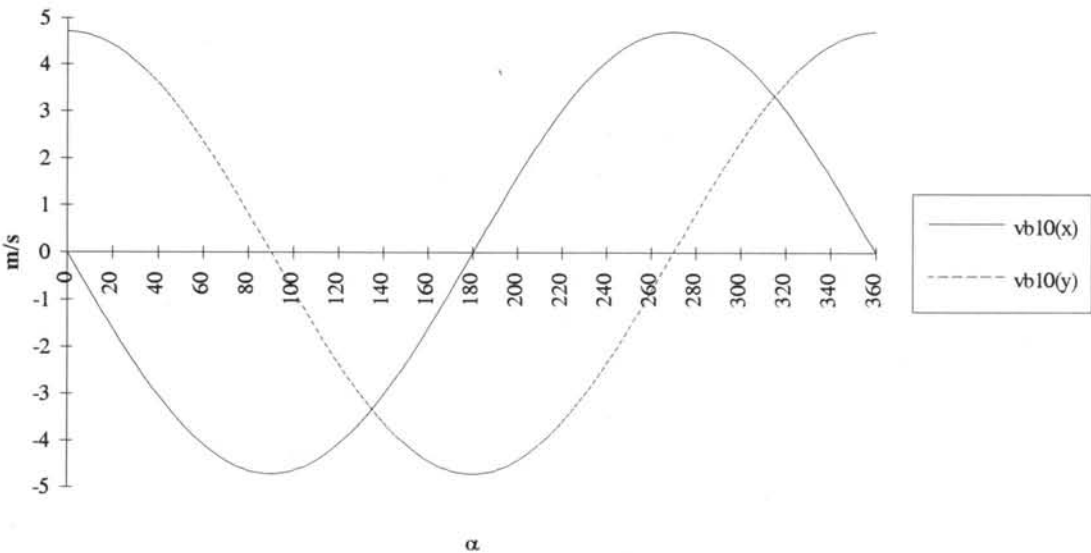
Serão apresentados de seguida os gráficos correspondentes às velocidades aqui apresentadas, bem como o gráfico da dependência angular do sistema.

Apresenta-se de seguida o gráfico correspondente à dependência angular, por se achar melhor a sua colocação nesta fase deste trabalho.

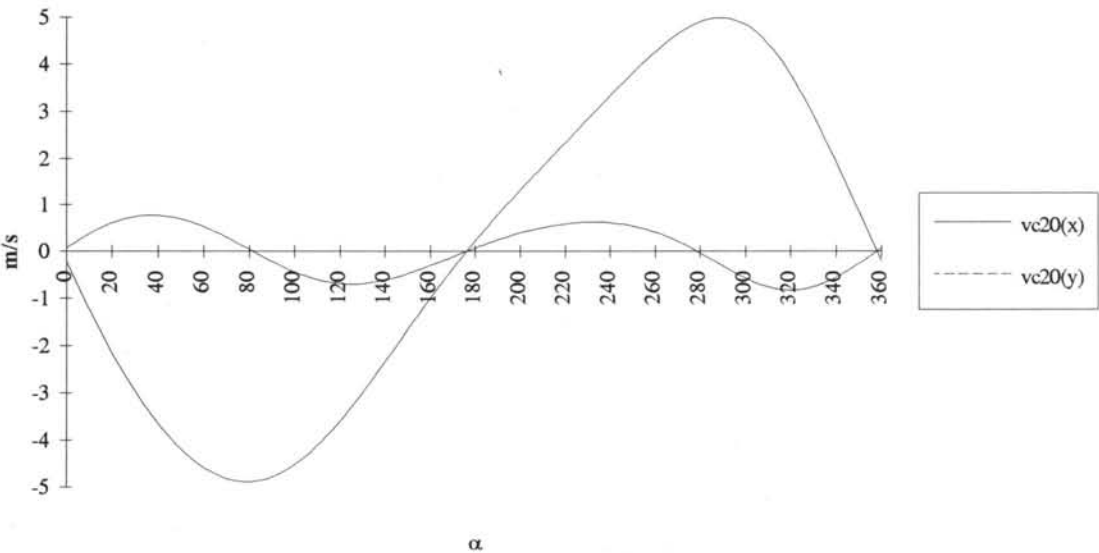


NOTA: Este gráfico tem como função a determinação em cada instante dos valores de β e γ em relação ao ângulo conhecido α . Assim sabemos as suas posições no espaço em função de α .

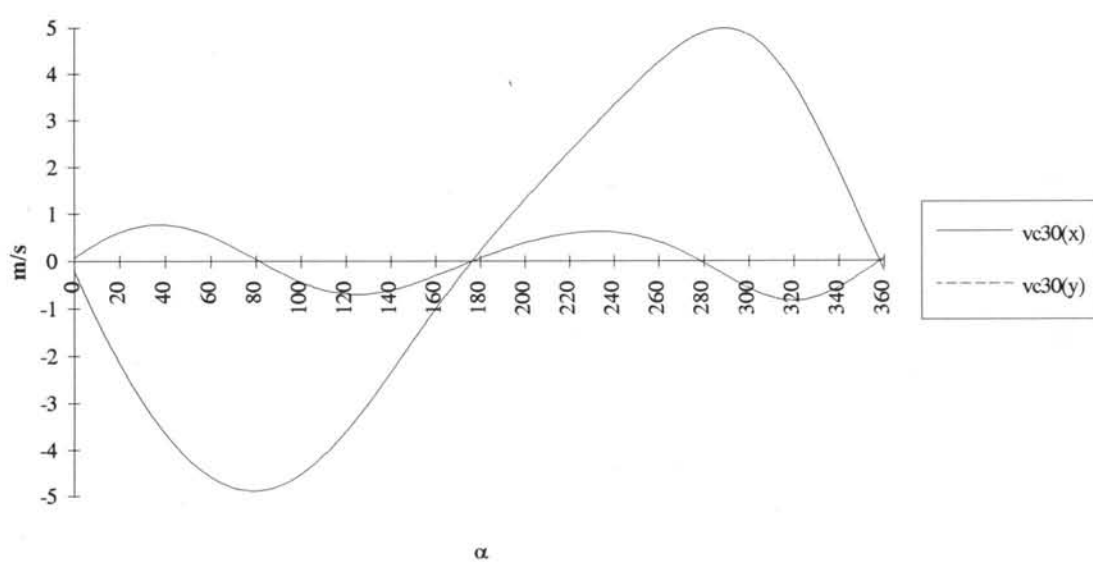
Velocidade do Ponto B



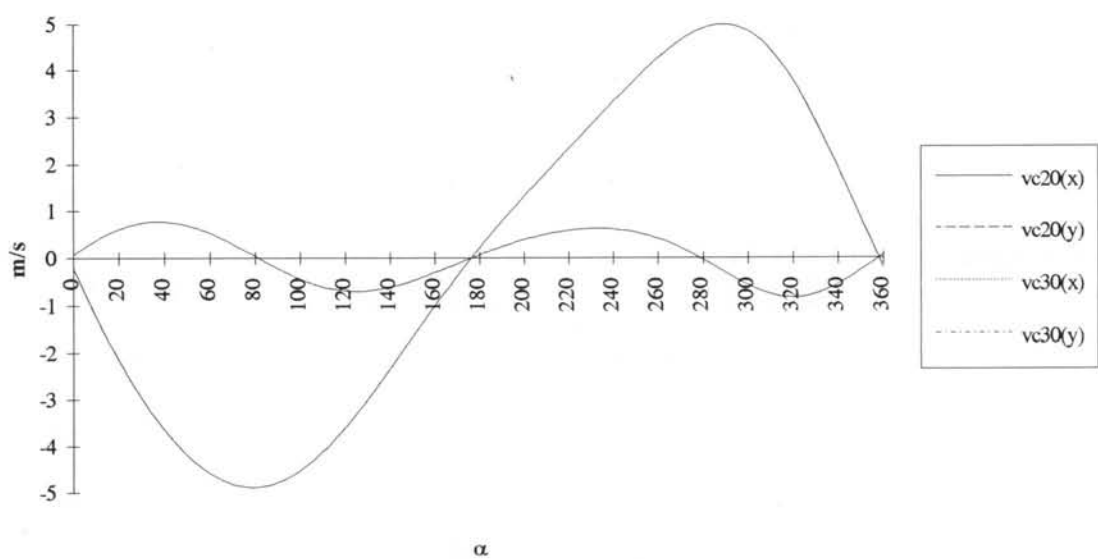
Velocidade do Ponto C em S20



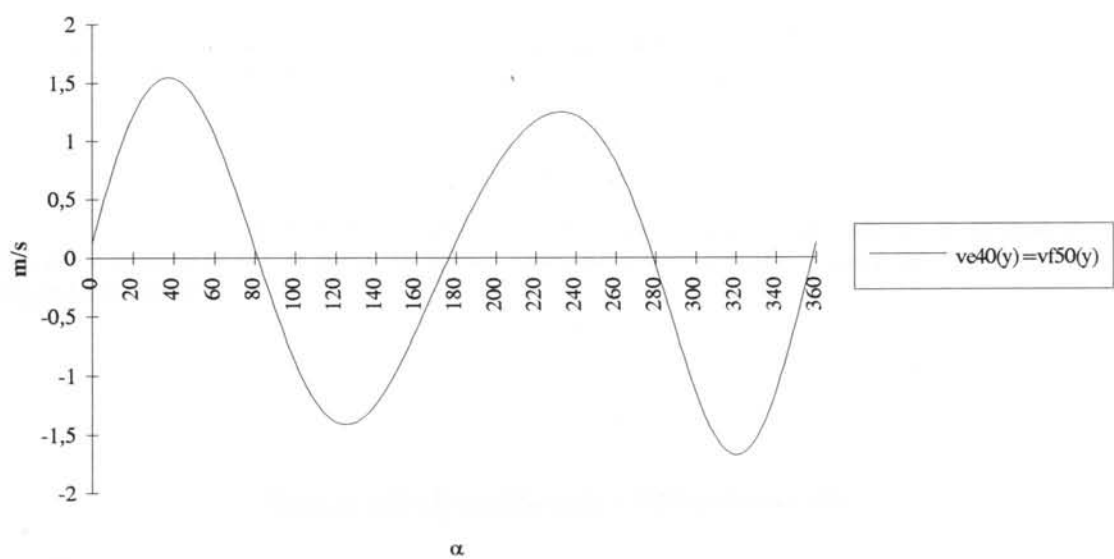
Velocidade do Ponto C em S30



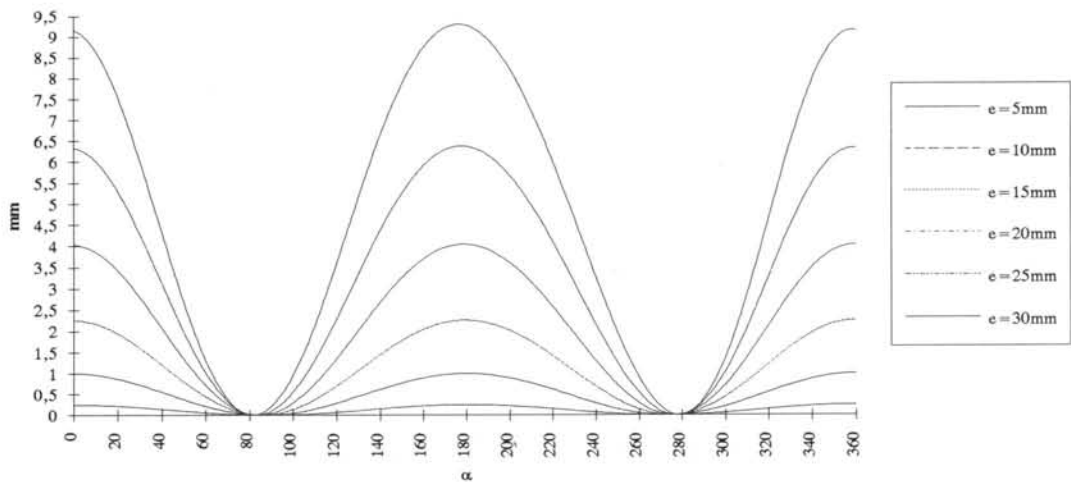
Velocidade do Ponto C em S20 e S30



Velocidade do Ponto E

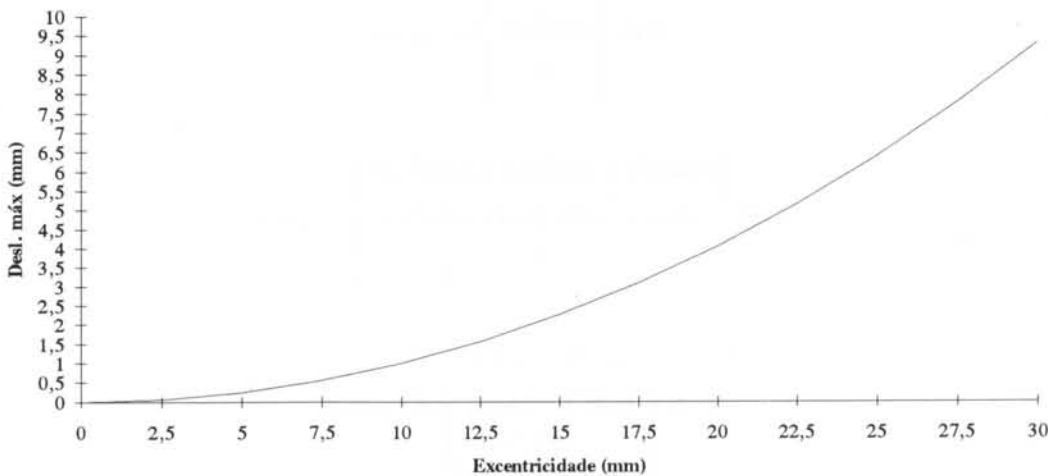


Valor do Deslocamento pela Variação da Excentricidade



NOTA: Este gráfico foi conseguido realizando uma variação do excêntrico, neste caso o parâmetro "e" da folha de cálculo. Assim podemos visualizar a gama de deslocamentos conseguidas no actuador.

Relação entre Excentricidade e Deslocamento Máx



NOTA: Este gráfico foi obtido com os valores máximos dos respectivos deslocamentos, assim através deste gráfico podemos estimar o valor do deslocamento com o da excentricidade de uma forma expedita.

ACELERAÇÕES:

$$\vec{a}_{B10}|_{S_0} = \dot{\vec{V}}_{B10}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\ddot{\alpha}\text{sen}\alpha - e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha \\ e\ddot{\alpha} \cos\alpha - e\dot{\alpha}^2 \text{sen}\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{C20}|_{S_0} = \dot{\vec{V}}_{C20}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\ddot{\alpha}\text{sen}\alpha - e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha + L_2\ddot{\gamma}\text{sen}\gamma + L_2\dot{\gamma}^2 \cos\gamma \\ e\ddot{\alpha} \cos\alpha - e\dot{\alpha}^2 \text{sen}\alpha + L_2\ddot{\gamma} \cos\gamma - L_2\dot{\gamma}^2 \text{sen}\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{C30}|_{S_0} = \dot{\vec{V}}_{C30}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -L_3\ddot{\beta}\text{sen}\beta - L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta \\ L_3\ddot{\beta} \cos\beta - L_3\dot{\beta}^2 \text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{E40}|_{S_0} = \dot{\vec{V}}_{E40}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2L_3\ddot{\beta} \cos\beta - 2L_3\dot{\beta}^2 \text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

Como simplificação temos desde já ;

$$\dot{\alpha} = \text{Constante} \Rightarrow \ddot{\alpha} = 0$$

e devido à forma construtiva do sistema temos ainda que:

$$\vec{a}_{C20}|_{S_0} = \vec{a}_{C30}|_{S_0}$$

Assim:

$$\vec{a}_{B10}|_{S_0} = e \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \cos\alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \text{sen}\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{C20}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha + L_2(\ddot{\gamma}\text{sen}\gamma + \dot{\gamma}^2 \cos\gamma) \\ -e\dot{\alpha}^2 \text{sen}\alpha + L_2(\ddot{\gamma} \cos\gamma - \dot{\gamma}^2 \text{sen}\gamma) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{C30}|_{S_0} = L_3 \begin{Bmatrix} -\ddot{\beta}\text{sen}\beta - \dot{\beta}^2 \cos\beta \\ \ddot{\beta} \cos\beta - \dot{\beta}^2 \text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

$$\vec{a}_{E40}|_{S_0} = 2L_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\beta} \cos\beta - \dot{\beta}^2 \text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

DETERMINAÇÃO DE $\ddot{\beta}$ E $\ddot{\gamma}$

Como a velocidade dos Pontos C20 e C30 é igual, então o mesmo se aplica quanto às acelerações do referido ponto. Assim temos um sistema de duas equações a duas incógnitas, sendo as incógnitas $\ddot{\beta}$ e $\ddot{\gamma}$.

$$\ddot{a}_{C20}|_{S_0} = \ddot{a}_{C30}|_{S_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + L_2 \ddot{\gamma} \sin \gamma + L_2 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma \\ -e\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + L_2 \ddot{\gamma} \cos \gamma - L_2 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_3 \ddot{\beta} \sin \beta - L_3 \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ L_3 \ddot{\beta} \cos \beta - L_3 \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + L_2 \ddot{\gamma} \sin \gamma + L_2 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma = -L_3 \ddot{\beta} \sin \beta - L_3 \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -e\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + L_2 \ddot{\gamma} \cos \gamma - L_2 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma = L_3 \ddot{\beta} \cos \beta - L_3 \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_2 \ddot{\gamma} \sin \gamma + L_3 \ddot{\beta} \sin \beta = -L_3 \dot{\beta}^2 \cos \beta - L_2 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ L_2 \ddot{\gamma} \cos \gamma - L_3 \ddot{\beta} \cos \beta = -L_3 \dot{\beta}^2 \sin \beta + L_2 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_3 \ddot{\beta} \sin \beta = -L_3 \dot{\beta}^2 \cos \beta - L_2 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - L_2 \ddot{\gamma} \sin \gamma \\ L_2 \ddot{\gamma} \cos \gamma = -L_3 \dot{\beta}^2 \sin \beta + L_2 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + L_3 \ddot{\beta} \cos \beta \end{cases} \Rightarrow$$

Temos então:

$$\ddot{\beta} = \frac{-L_3 \dot{\beta}^2 \cos \beta - L_2 \dot{\gamma}^2 \cos \gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - L_2 \ddot{\gamma} \sin \gamma}{L_3 \sin \beta}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{-L_3 \dot{\beta}^2 \sin \beta + L_2 \dot{\gamma}^2 \sin \gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + L_3 \ddot{\beta} \cos \beta}{L_2 \cos \gamma}$$

Tomando então $\ddot{\beta}$ para resolução ficamos com:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\beta} &= \frac{-L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta - L_2\dot{\gamma}^2 \cos\gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha - L_2\ddot{\gamma}\sin\gamma}{L_3\sin\beta} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} &= -\frac{L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta}{L_3\sin\beta} - \frac{L_2\dot{\gamma}^2 \cos\gamma}{L_3\sin\beta} + \frac{e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha}{L_3\sin\beta} - \ddot{\gamma} \frac{L_2\sin\gamma}{L_3\sin\beta} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} &= \frac{-L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta - L_2\dot{\gamma}^2 \cos\gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha}{L_3\sin\beta} - \left(\frac{-L_3\dot{\beta}^2 \sin\beta + L_2\dot{\gamma}^2 \sin\gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin\alpha + L_3\ddot{\beta} \cos\beta}{L_2 \cos\gamma} \right) \frac{L_2 \sin\gamma}{L_3 \sin\beta} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} &= \frac{-L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta - L_2\dot{\gamma}^2 \cos\gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha}{L_3\sin\beta} - \left(\frac{-L_3\dot{\beta}^2 \sin\beta \sin\gamma + L_2\dot{\gamma}^2 \sin^2\gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin\alpha \sin\gamma + L_3\ddot{\beta} \cos\beta \sin\gamma}{L_3 \sin\beta \cos\gamma} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} &= \frac{-L_3\dot{\beta}^2 \cos\beta \cos\gamma - L_2\dot{\gamma}^2 \cos^2\gamma + e\dot{\alpha}^2 \cos\alpha \cos\gamma + L_3\dot{\beta}^2 \sin\beta \sin\gamma - L_2\dot{\gamma}^2 \sin^2\gamma - e\dot{\alpha}^2 \sin\alpha \sin\gamma - L_3\ddot{\beta} \cos\beta \sin\gamma}{L_3 \sin\beta \cos\gamma} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} L_3 \sin\beta \cos\gamma &= -L_3\dot{\beta}^2 (\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma) - L_2\dot{\gamma}^2 (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + e\dot{\alpha}^2 (\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma) - L_3\ddot{\beta} \cos\beta \sin\gamma \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} L_3 (\sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma) &= -L_3\dot{\beta}^2 (\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma) - L_2\dot{\gamma}^2 + e\dot{\alpha}^2 (\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ddot{\beta} &= \left[\frac{-L_3\dot{\beta}^2 (\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma) - L_2\dot{\gamma}^2 + e\dot{\alpha}^2 (\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma)}{L_3 (\sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma)} \right]
 \end{aligned}$$

Assim substituindo o valor numérico de $\ddot{\beta}$ na expressão de $\ddot{\gamma}$ temos o seu valor numérico directamente:

$$\left[\ddot{\gamma} = \frac{-L_3\dot{\beta}^2 \sin\beta + L_2\dot{\gamma}^2 \sin\gamma + e\dot{\alpha}^2 \sin\alpha + L_3\ddot{\beta} \cos\beta}{L_2 \cos\gamma} \right]$$

FOLHA DE CÁLCULO

CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

Transportando todos os parâmetros calculados até aqui temos o seguinte quadro que ilustra a caracterização das variáveis envolvidas no raciocínio para o cálculo das acelerações.

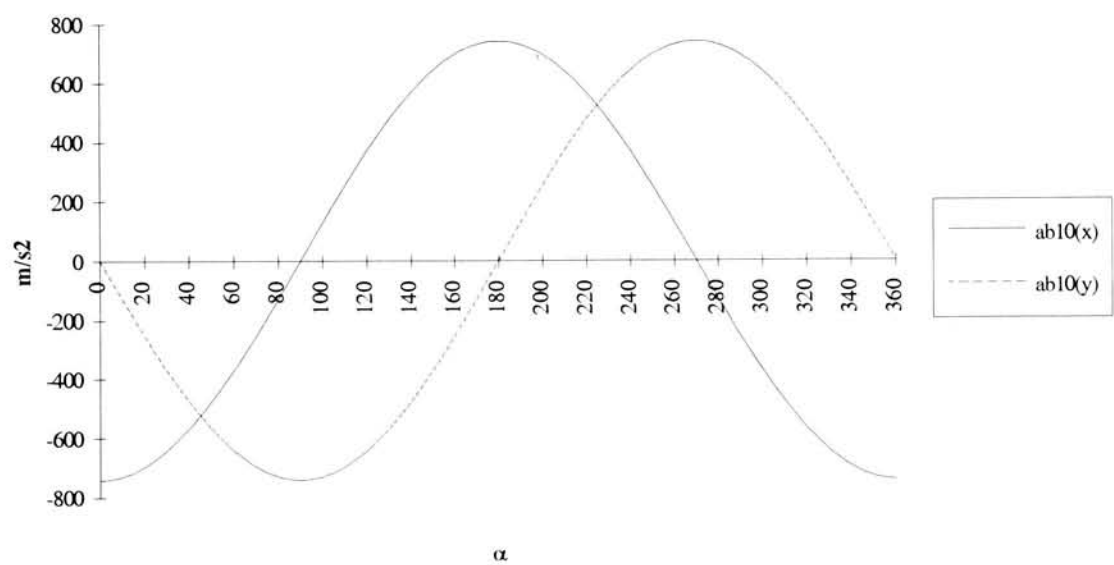
$AH2 = \ddot{\beta} \text{ (Rad/s}^2\text{)} = ((-E2*(X2*X2)*(-R2*V2) + (Q2*U2)) - (D2*Y2*Y2) + ((C2*(W2*W2))*((H2*U2) - (I2*V2)))) / (E2*((R2*U2) + (Q2*V2)))$
$AI2 = \ddot{\gamma} \text{ (Rad/s}^2\text{)} = ((-E2*(X2*X2)*R2) + (D2*(Y2*Y2)*V2) + (C2*(W2*W2)*I2) + (E2*AH2*Q2)) / (D2*U2)$
$AJ2 = ab10(x) = (C2*(W2*W2)*H2)$
$AK2 = ab10(y) = -(C2*(W2*W2)*I2)$
$AL2 = ac20(x) = -(C2*(W2*W2)*H2) + (D2*AI2*V2) + (D2*(Y2*Y2)*U2)$
$AM2 = ac20(y) = -(C2*(W2*W2)*I2) + (D2*AI2*U2) - (D2*(Y2*Y2)*V2)$
$AN2 = ac30(x) = -(E2*AH2*R2) - (E2*(X2*X2)*Q2)$
$AO2 = ac30(y) = (E2*AH2*Q2) - (E2*(X2*X2)*R2)$
$AP2 = ae40(y) = 2*E2*((AH2*Q2) - ((X2*X2)*R2))$

De seguida serão apresentados os gráficos respeitantes às acelerações calculadas até aqui.

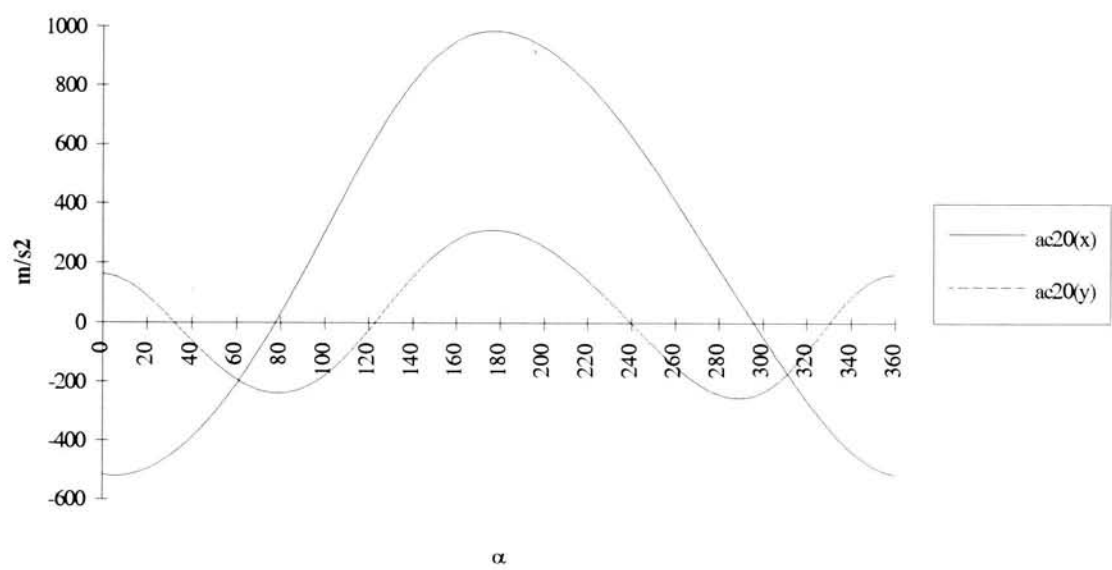
GRÁFICOS

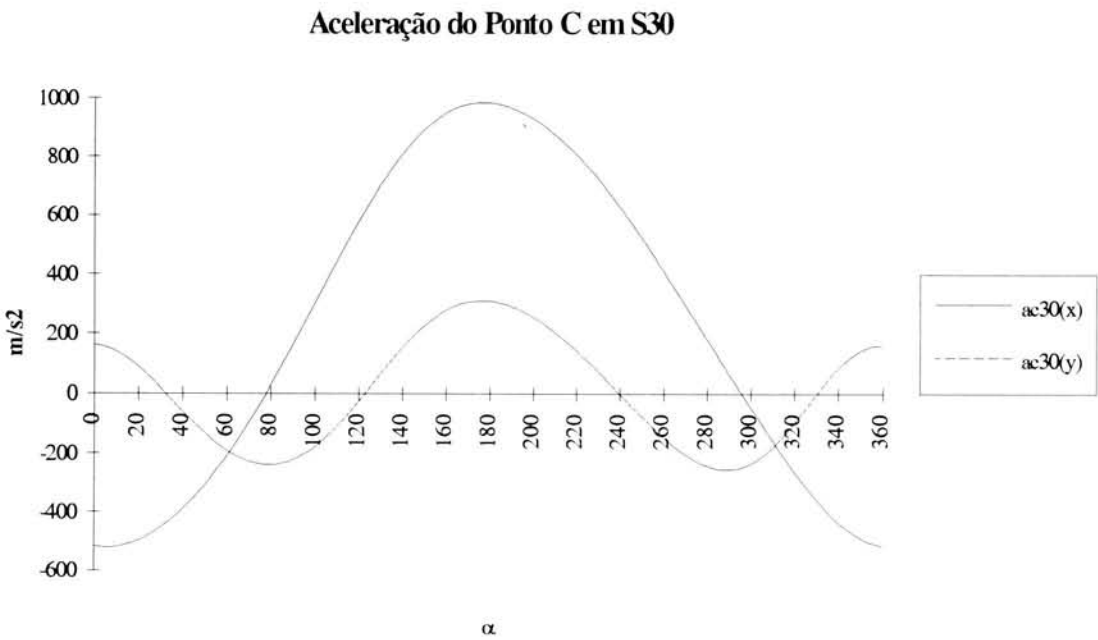
Serão apresentados de seguida os gráficos correspondentes às acelerações aqui calculadas.

Aceleração do Ponto B

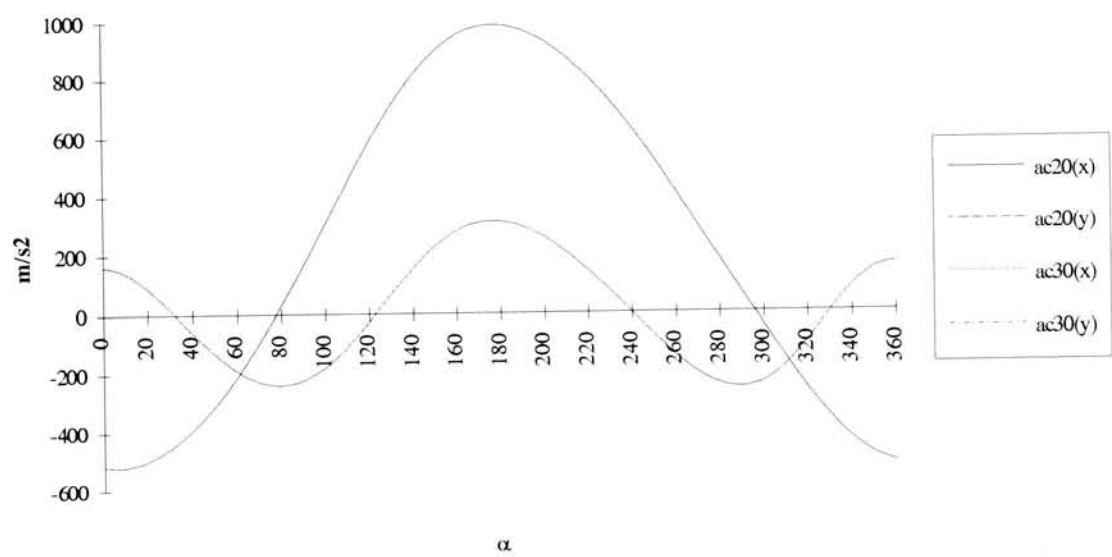


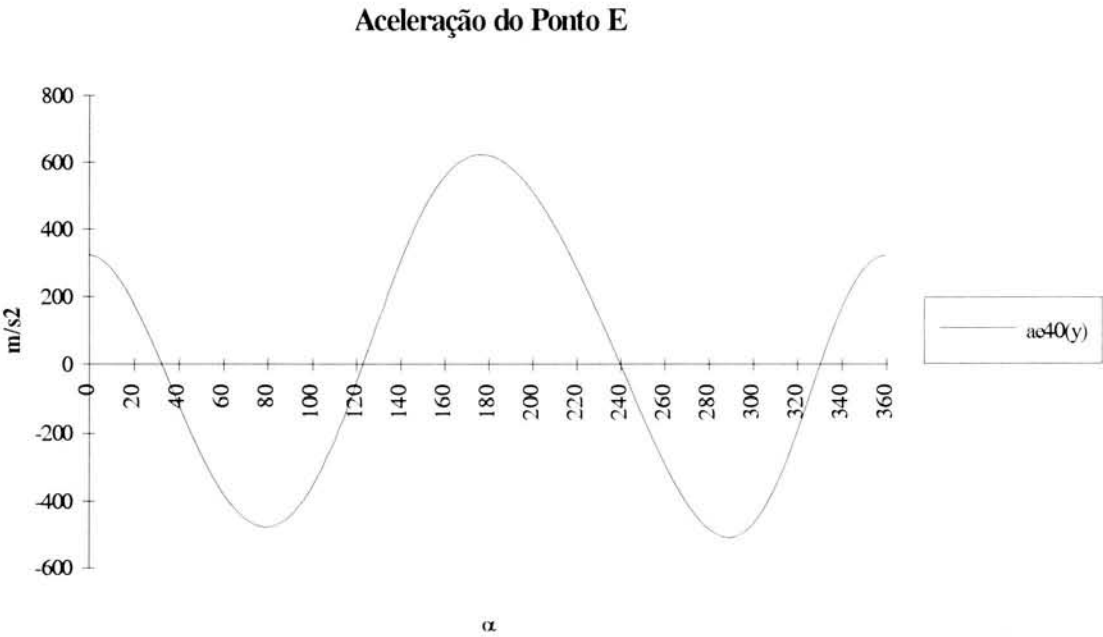
Aceleração do Ponto C em S20





Aceleração do Ponto C em S20 e S30



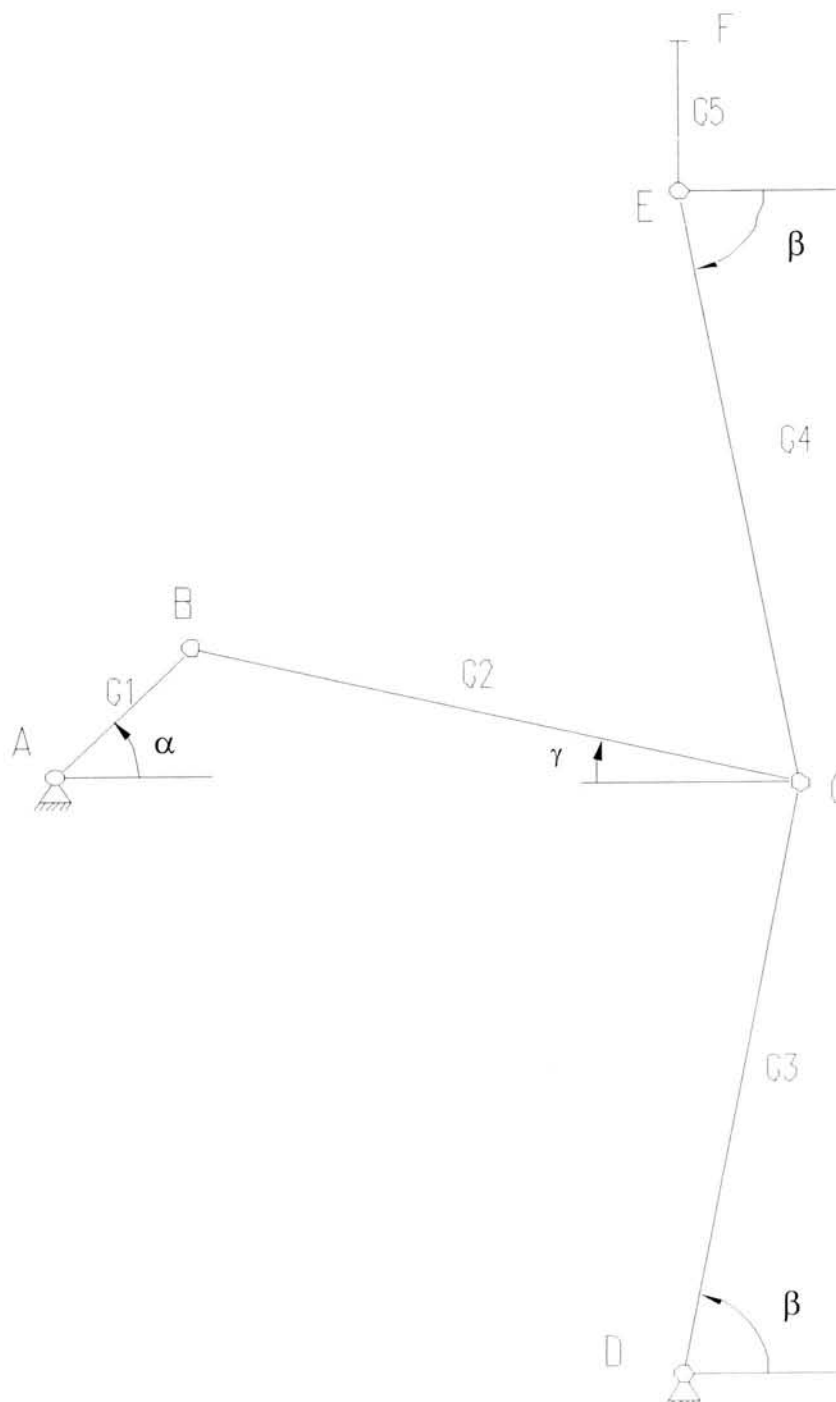


*ANÁLISE
DINÂMICA
DO
SISTEMA*

ANÁLISE DINÂMICA

Este capítulo tem como finalidade a determinação das acções de origem dinâmica do sistema.

Assim começaremos pela determinação das velocidades dos centros de massa, e das respectivas acelerações. Dividiremos então o sistema nos corpos que o constituem, indicando em cada corpo as acções nele exercidas.



VELOCIDADES:

Corpo 1:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{01}|_{S_0} &= \tilde{V}_{A10}|_{S_0} + w_{10}|_{S_0} * A\tilde{G}_1|_{S_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow A\tilde{G}_1 &= w_{10}|_{S_0} * A\tilde{G}_1|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} -\frac{e}{2} \cos \alpha \\ \frac{e}{2} \operatorname{sen} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{e}{2} \dot{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{e}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Corpo 2:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{02}|_{S_0} &= \tilde{V}_{B10}|_{S_0} + w_{20}|_{S_0} * B\tilde{G}_2|_{S_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{V}_{02}|_{S_0} &= \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \\ e\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} -\frac{L_2}{2} \cos \gamma \\ \frac{L_2}{2} \operatorname{sen} \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{V}_{02}|_{S_0} &= \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha} \operatorname{sen} \alpha + \frac{L_2}{2} \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma \\ e\dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{L_2}{2} \dot{\gamma} \cos \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Corpo 3:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{03}|_{S_0} &= \tilde{V}_{D10}|_{S_0} + w_{30}|_{S_0} * D\tilde{G}_3|_{S_0} \quad e \quad \tilde{V}_{D10}|_{S_0} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{V}_{03}|_{S_0} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \frac{L_3}{2} \cos \beta \\ \frac{L_3}{2} \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \tilde{V}_{03}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{L_3}{2} \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ \frac{L_3}{2} \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Corpo 4:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{04}|_{S_0} &= \tilde{V}_{C10}|_{S_0} + w_{40}|_{S_0} * C\tilde{G}_4|_{S_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{V}_{04}|_{S_0} &= \begin{Bmatrix} -L_3 \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \frac{L_4}{2} \cos \beta \\ -\frac{L_4}{2} \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_3 \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta - \frac{L_4}{2} \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ L_3 \dot{\beta} \cos \beta - \frac{L_4}{2} \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow\end{aligned}$$

Sendo $L_3 = L_4$ temos:

$$\Rightarrow \tilde{V}_{04}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2} L_3 \dot{\beta} \operatorname{sen} \beta \\ \frac{L_3}{2} \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

Corpo 5:

$$\tilde{V}_{05}|_{S_0} = \tilde{V}_{E40}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2L_3 \dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

FOLHA DE CÁLCULO

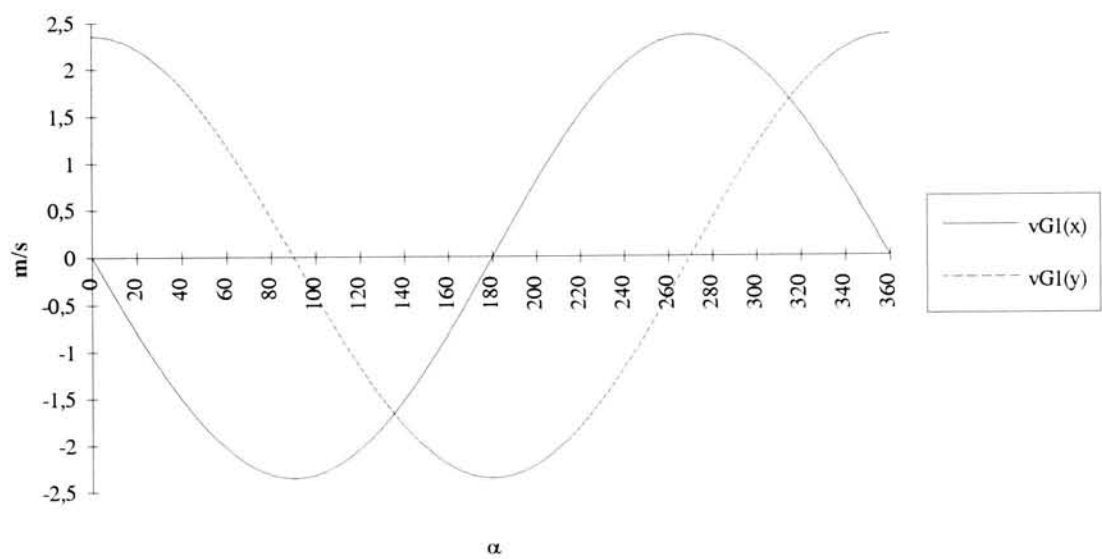
CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

Nesta fase criou-se uma folha de cálculo designada como Dinâmica, que utiliza como suporte a folha anterior. Sendo apenas modificado os parâmetros das velocidades, assim utilizamos todos os parâmetros anteriormente calculados.

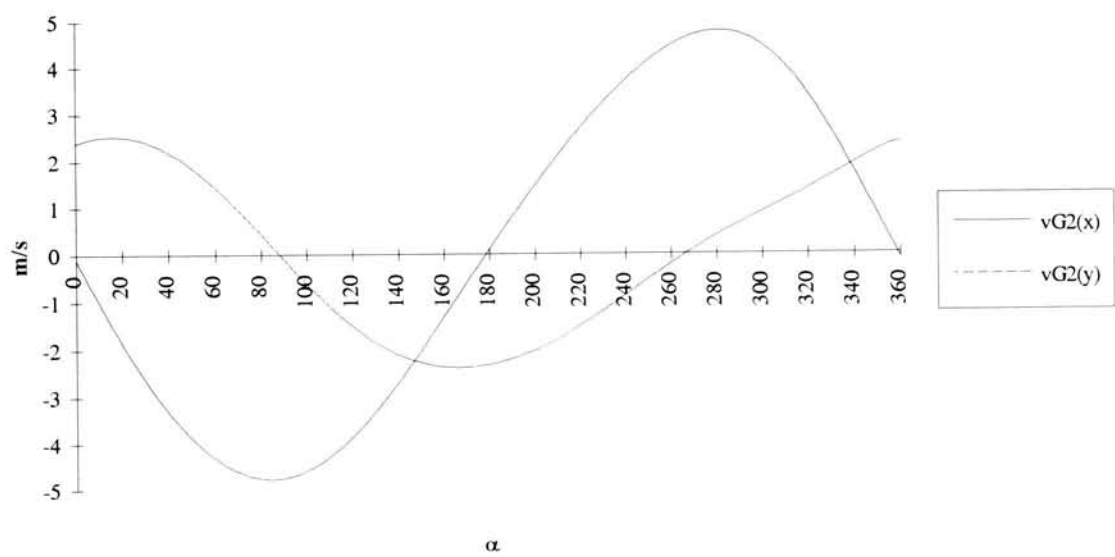
$Z2 = VG1(x) = -((C2/2)*W2*I2)$
$AA2 = VG1(y) = ((C2/2)*W2*H2)$
$AB2 = VG2(x) = -(C2*W2*I2) + ((D2/2)*Y2*V2)$
$AC2 = VG2(y) = (C2*W2*H2) + ((D2/2)*Y2*U2)$
$AD2 = VG3(x) = -((E2/2)*X2*R2)$
$AE2 = VG3(y) = ((E2/2)*X2*Q2)$
$AF2 = VG40(x) = -((3/2)*E2*X2*S2)$
$AG2 = VG40(y) = ((E2/2)*X2*Q2)$
$AH2 = VG50(y) = -2*(E2*X2*Q2)$

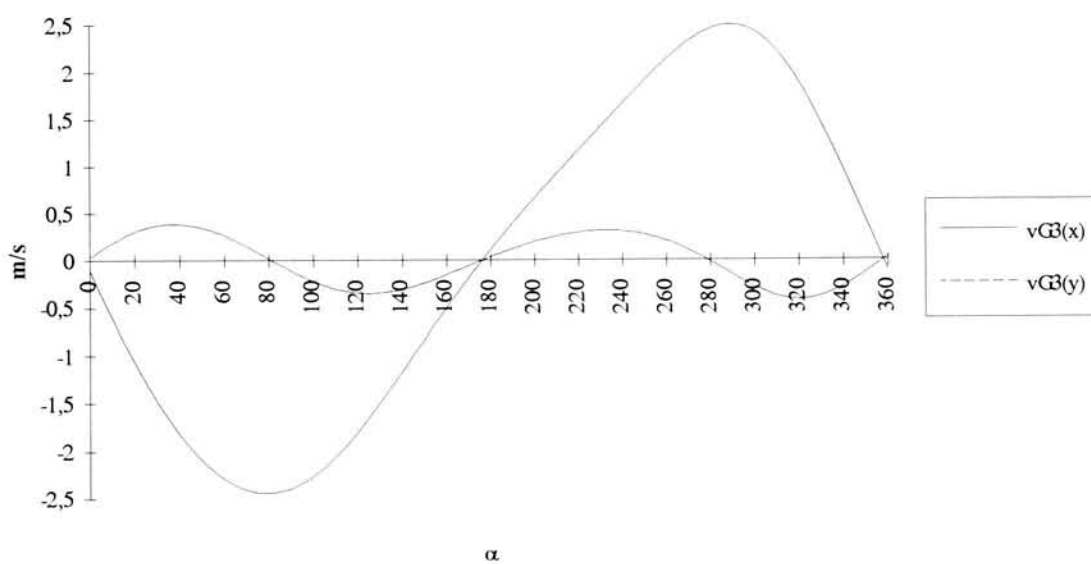
GRÁFICOS

Velocidade do Centro de Gravidade do Corpo 1

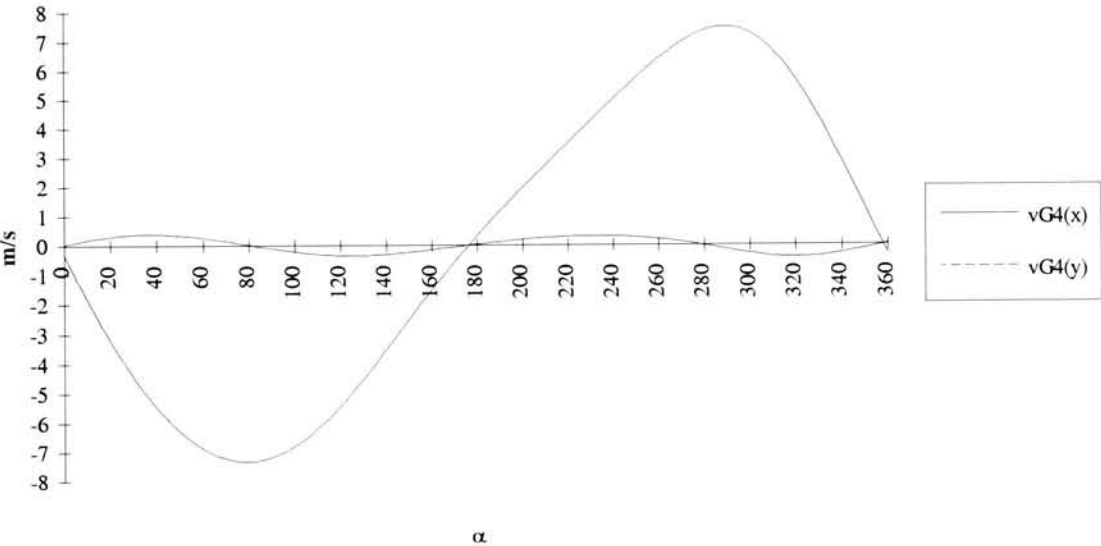


Velocidade do Centro de Gravidade do Corpo 2

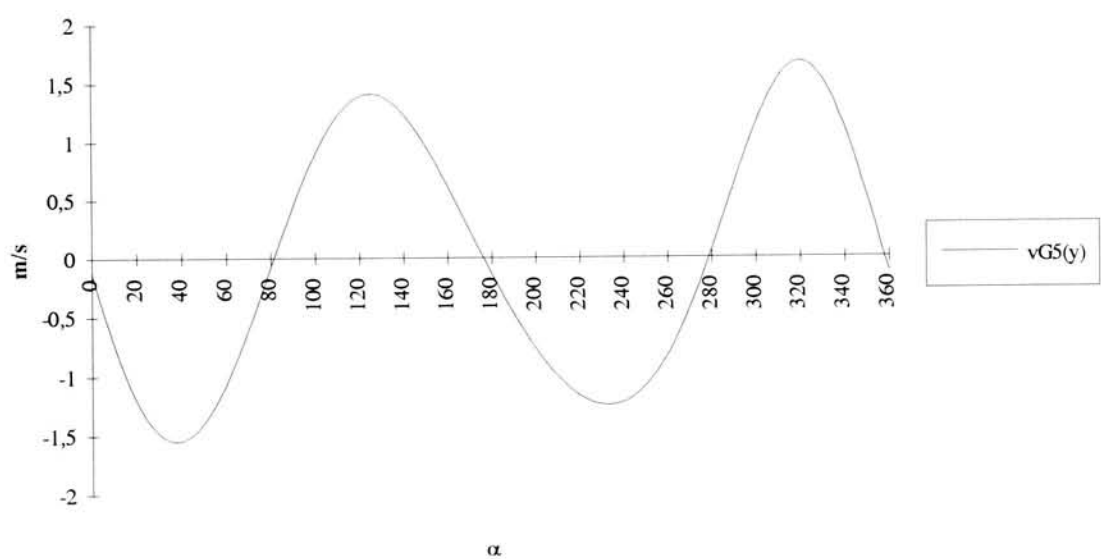


Velocidade do Centro de Gravidade do Corpo 3

Velocidade do Centro de Gravidade do Corpo 4



Velocidade do Centro de Gravidade do Corpo 5



ACELERAÇÕES:

Corpo 1:

$$\vec{a}_{G1|S_0} = \dot{\vec{V}}_{A10|S_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{e}{2}\ddot{\alpha}\text{sen}\alpha - \frac{e}{2}\dot{\alpha}^2\cos\alpha \\ \frac{e}{2}\ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{e}{2}\dot{\alpha}^2\text{sen}\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \text{ e } \ddot{\alpha} = 0$$

Corpo 2:

$$\vec{a}_{G2|S_0} = \dot{\vec{V}}_{G2|S_0} = \begin{Bmatrix} -e\ddot{\alpha}\text{sen}\alpha - e\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \frac{L_2}{2}\ddot{\gamma}\text{sen}\gamma + \frac{L_2}{2}\dot{\gamma}^2\cos\gamma \\ e\ddot{\alpha}\cos\alpha - e\dot{\alpha}^2\text{sen}\alpha + \frac{L_2}{2}\ddot{\gamma}\cos\gamma - \frac{L_2}{2}\dot{\gamma}^2\text{sen}\gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \text{ e } \ddot{\alpha} = 0$$

Corpo 3:

$$\vec{a}_{G3|S_0} = \dot{\vec{V}}_{G3|S_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{L_3}{2}\ddot{\beta}\text{sen}\beta - \frac{L_3}{2}\dot{\beta}^2\cos\beta \\ \frac{L_3}{2}\ddot{\beta}\cos\beta - \frac{L_3}{2}\dot{\beta}^2\text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Corpo 4:

$$\vec{a}_{G4|S_0} = \dot{\vec{V}}_{G4|S_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}L_3\ddot{\beta}\text{sen}\beta - \frac{3}{2}L_3\dot{\beta}^2\cos\beta \\ \frac{L_3}{2}\ddot{\beta}\cos\beta - \frac{L_3}{2}\dot{\beta}^2\text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Corpo 5:

$$\vec{a}_{G5|S_0} = \dot{\vec{V}}_{G5|S_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2L_3\ddot{\beta}\cos\beta + 2L_3\dot{\beta}^2\text{sen}\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Simplificando as expressões temos:

Corpo 1:

$$\vec{a}_{G1}|_{S_0} = \frac{e}{2} \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

Corpo 2:

$$\vec{a}_{G2}|_{S_0} = \begin{Bmatrix} -e\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \frac{L^2}{2} (\ddot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma) \\ -e\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{L^2}{2} (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen} \gamma) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

Corpo 3:

$$\vec{a}_{G3}|_{S_0} = \frac{L^3}{2} \begin{Bmatrix} -\ddot{\beta} \operatorname{sen} \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

Corpo 4:

$$\vec{a}_{G4}|_{S_0} = \frac{L^3}{2} \begin{Bmatrix} 3(-\ddot{\beta} \operatorname{sen} \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta) \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

Corpo 5:

$$\vec{a}_{G5}|_{S_0} = 2L^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta}^2 \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m / s}^2$$

FOLHA DE CÁLCULO

CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

Nesta fase completamos a folha de calculo designada por Dinâmica, com as respectivas acelerações dos centros de gravidade dos diversos componentes do sistema.

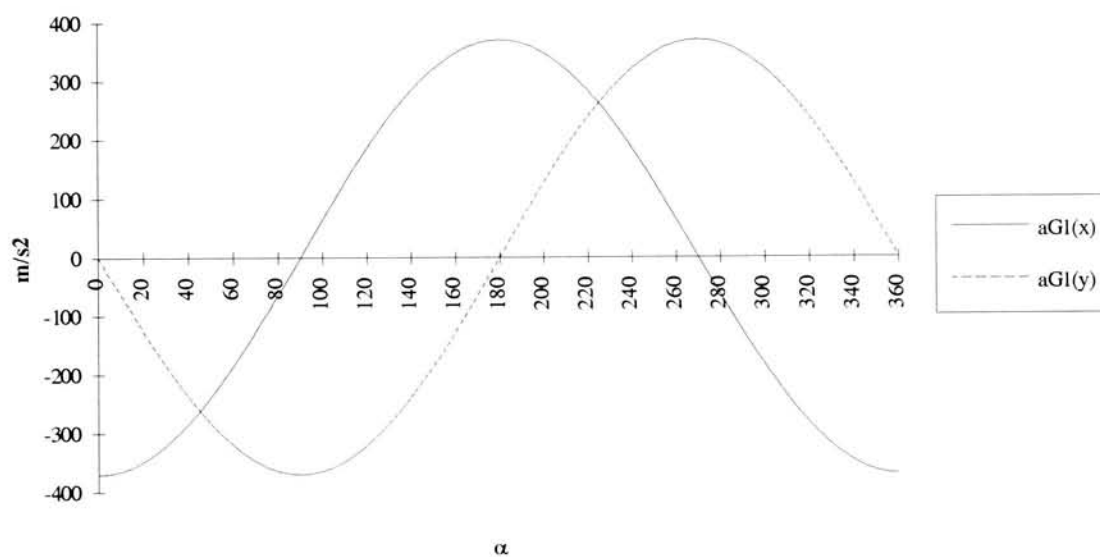
$AI2 = aG1(x) = -((C2/2)*W2*H2)$
$AJ2 = aG1(y) = -((C2/2)*W2*I2)$
$AK2 = aG2(x) = AI2 + ((D2/2)*((AJ2*V2) + (Y2*U2)))$
$AL2 = aG2(y) = AJ2 + ((D2/2)*((AJ2*U2) - (Y2*V2)))$
$AM2 = aG3(x) = -((E2/2)*((AI2*R2) - (X2*Q2)))$
$AN2 = aG3(y) = ((E2/2)*((AI2*Q2) - (X2*R2)))$
$AO2 = aG40(x) = -((3/2)*E2*((AI2*R2) + (X2*Q2)))$
$AP2 = aG40(y) = ((E2/2)*((AI2*Q2) - (X2*R2)))$
$AQ2 = aG50(y) = -2*E2*((-AI2*Q2) + (X2*Q2))$

NOTA: Os parâmetros auxiliares já constavam desta folha de cálculo, não os explicitando, uma vez que tal já foi feito anteriormente.

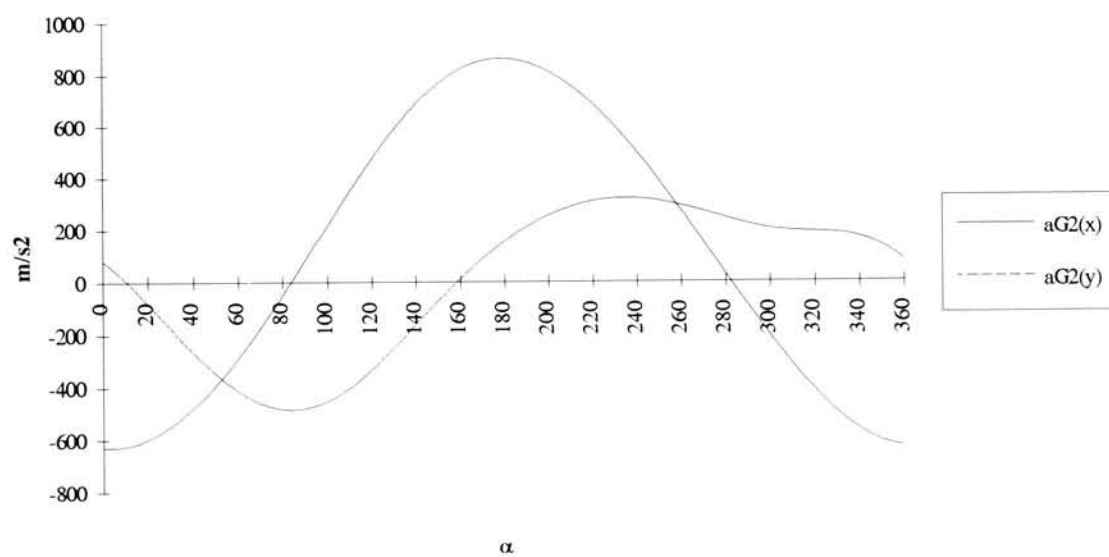
GRÁFICOS

Serão apresentados de seguida os gráficos correspondentes às acelerações aqui calculadas.

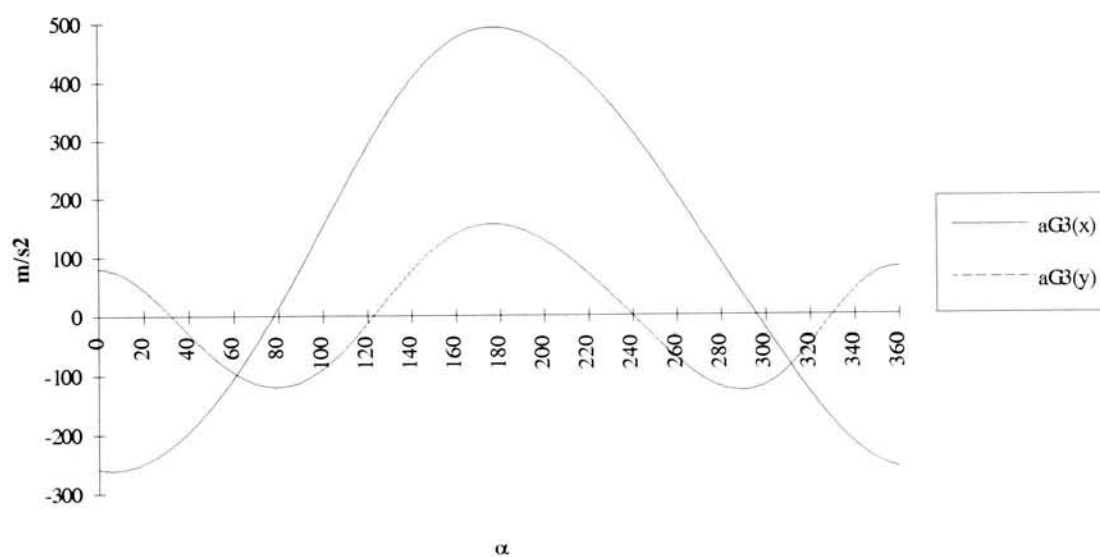
Aceleração do Centro de Gravidade do Corpo 1



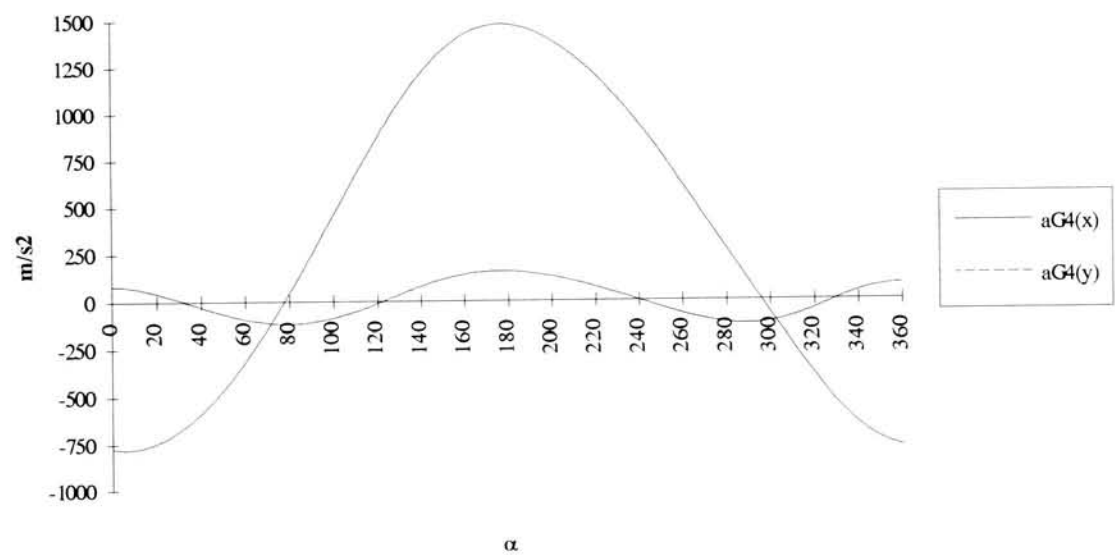
Aceleração do Centro de Gravidade do Corpo 2



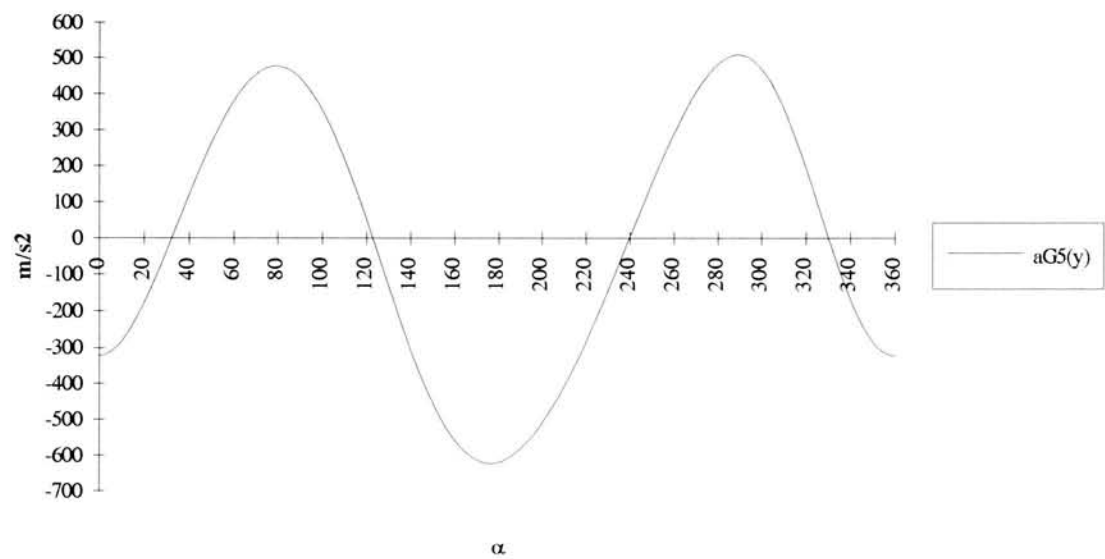
Aceleração do Centro de Gravidade do Corpo 3



Aceleração do Centro de Gravidade do Corpo 4



Aceleração do Centro de Gravidade do Corpo 5



As relações utilizadas em qualquer estudo dinâmico são:

$$\left. \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \dot{\vec{Q}} \\ \text{c} \\ \sum \vec{M}_{\text{o ext}} = \vec{K}_o \Leftrightarrow \sum \vec{M}_{G \text{ ext}} = \vec{K}_G \end{array} \right\} \text{Equilíbrio Dinâmico}$$

Sendo:

$$\dot{\vec{Q}} = M * \vec{a}_G \rightarrow \text{Quantidade de Movimento}$$

$$\vec{K}_o = \vec{K}_G + O\vec{G} * M = \vec{K}_G + O\vec{G} * \dot{\vec{Q}} \rightarrow \text{Momento Dinâmico no C.G.}$$

com:

$$\vec{K}_G = [I_G] \{ \dot{w} \} + \{ w \} * ([I_G] * \{ w \}) = [I_G] \{ \dot{w} \} + \{ w \} * \vec{H}_G$$

$$\text{c } \vec{H}_G = [I_G] * \{ w \} \rightarrow \text{Momento Cinético no C.G.}$$

Como o sistema em estudo tem movimento plano, e todas as peças apresentam simetria em relação ao plano dos zz , podemos realizar as simplificações abaixo indicadas. Assim apresentaremos de seguida tais simplificações:

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix}$$

Como se referiu anteriormente temos apenas movimentos planos. Então o vector acima definido como $\vec{w}$ tem apenas componente em z , sendo as restantes zero. Assim temos:

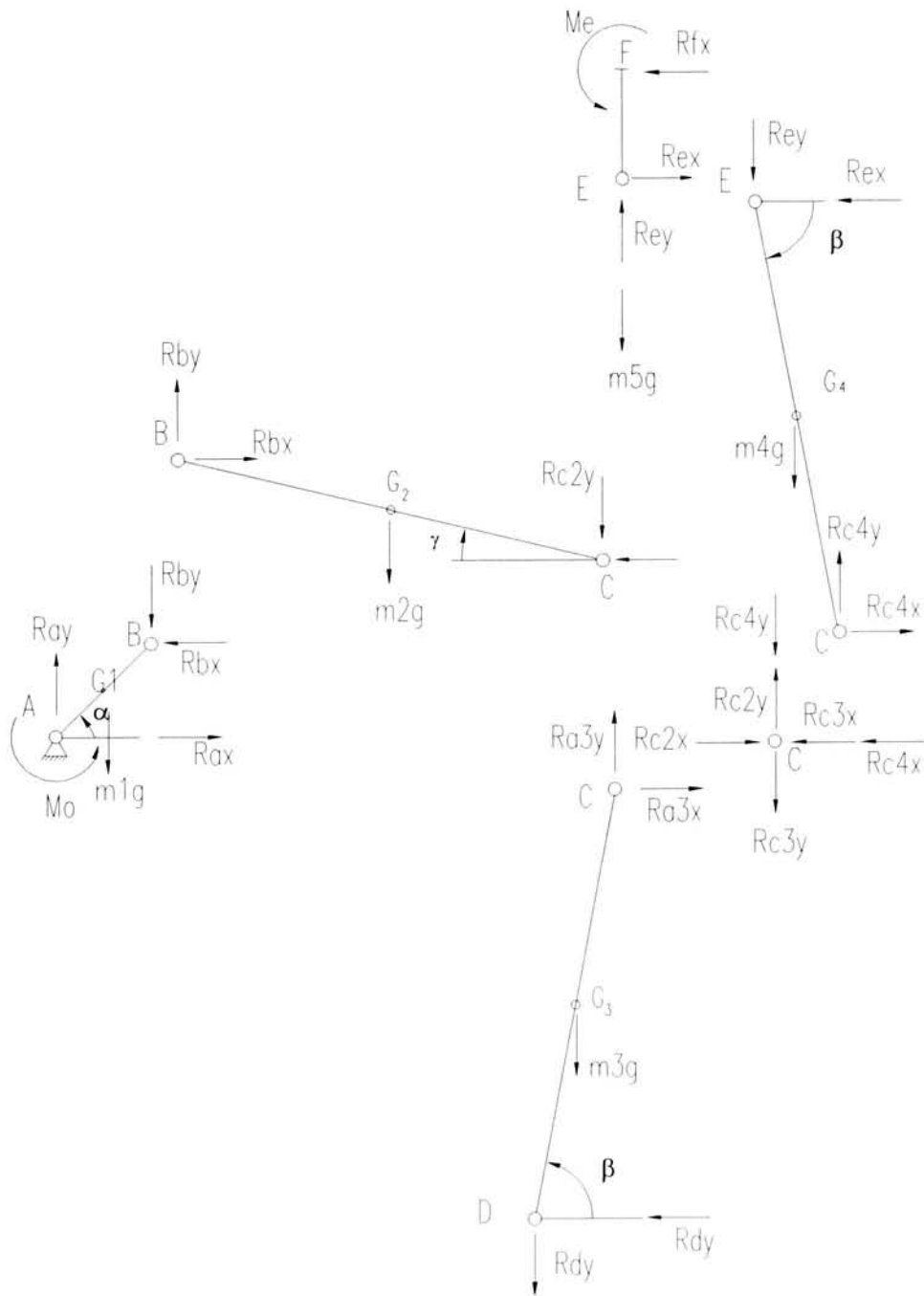
$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz} \dot{w}_z \end{Bmatrix}$$

Calculando agora o momento de inércia relativamente ao centro de gravidade de cada corpo, podemos designar tal parâmetro como:

[I_G]

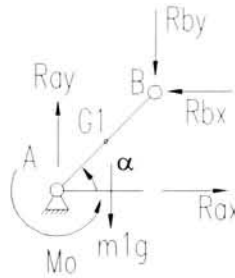
Sendo a partir deste momento a designação para o momento de inércia no centro de gravidade do referido corpo em estudo segundo z. Assim conseguimos simplificar as expressões até aqui trabalhadas. Tal simplificação deveu-se a todos os movimentos envolvidos neste sistema serem planos.

Separando então o sistema nos respectivos componentes, temos:



Realizando então a análise corpo a corpo, ou seja, componente a componente temos:

Corpo 1:



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_1 \vec{a}_{G1|so} = \dot{\vec{Q}}_1 \text{ e } [\ddot{\alpha} = \text{Const} \Rightarrow \ddot{\alpha} = 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_A^x - R_B^x \\ R_A^y - R_B^y - m_1 g \\ 0 \end{Bmatrix} = m_1 \frac{e}{2} \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_{\text{extA}} = \vec{K}_A \text{ com:}$$

$$\vec{K}_A = \vec{K}_G + A \vec{G}_1 * \dot{\vec{Q}}_1 \Rightarrow \vec{K}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G1} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \frac{e}{2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} * \dot{\vec{Q}}_1 \Rightarrow$$

e $\ddot{\alpha} = 0$ assim:

$$\Rightarrow \vec{K}_A = \frac{e}{2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} * m_1 \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K}_A = \frac{e}{2} m_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assim:

$$\sum \vec{M}_{\text{extA}} = \vec{K}_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_B^x e \sin \alpha - R_B^y e \cos \alpha - m_1 g \frac{e}{2} \cos \alpha + M_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

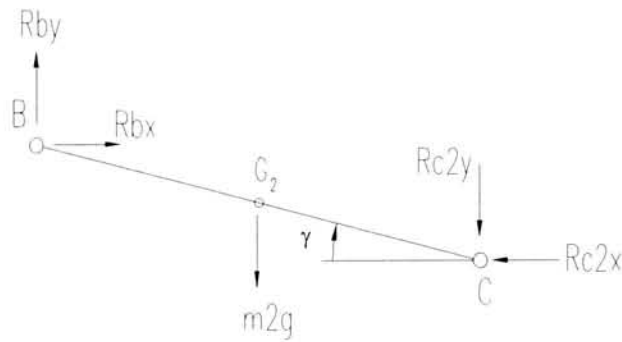
Para o Corpo 1 temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} R_A^x - R_B^x \\ R_A^y - R_B^y - m_1 g \\ c(R_B^x \sin \alpha - R_B^y \cos \alpha) - m_1 g \frac{c}{2} \cos \alpha + M_o \end{array} \right\} = m_1 \frac{c}{2} \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ 0 \end{array} \right\}$$

Simplificamos temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} R_A^x - R_B^x \\ R_A^y - R_B^y \\ c(R_B^x \sin \alpha - R_B^y \cos \alpha) + M_o \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 \frac{c}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -m_1 \frac{c}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + m_1 g \\ m_1 g \frac{c}{2} \cos \alpha \end{array} \right\}$$

Corpo 2:



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_2 \vec{a}_{G2|s_0} = \dot{\vec{Q}}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_B^x - R_{C2}^x \\ R_B^y - R_{C2}^y - m_2 g \\ 0 \end{Bmatrix} = m_2 \begin{Bmatrix} -c\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma) \\ -c\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_{\text{ext}G2} = \vec{K}_{G2} \Rightarrow$$

$$\vec{K}_{G2} = [I_{G2}] * \{\dot{w}_{20}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{G2} \ddot{\gamma} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_B^x \frac{L_2}{2} \sin \gamma - R_B^y \frac{L_2}{2} \cos \gamma - R_{C2}^x \frac{L_2}{2} \sin \gamma - R_{C2}^y \frac{L_2}{2} \cos \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{G2} \ddot{\gamma} \end{Bmatrix}$$

Para o Corpo 2 temos:

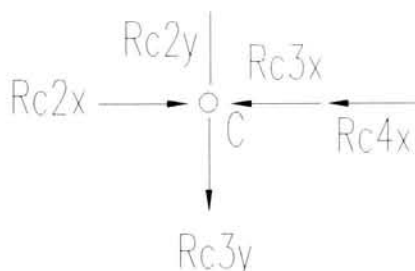
$$\begin{Bmatrix} R_B^x - R_{C2}^x \\ R_B^y - R_{C2}^y - m_2 g \\ \frac{L_2}{2} \sin \gamma (R_B^x + R_{C2}^x) + \frac{L_2}{2} \cos \gamma (R_B^y + R_{C2}^y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_2 \left[-c\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma) \right] \\ m_2 \left[-c\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \right] \\ I_{G2} \ddot{\gamma} \end{Bmatrix}$$

Simplificando temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_B^x - R_{C_2}^x \\ R_B^y - R_{C_2}^y \\ \text{sen}\gamma (R_B^x - R_{C_2}^x) + \cos\gamma (R_B^y - R_{C_2}^y) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \left[-c\dot{\alpha}^2 \cos\alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \text{sen}\gamma + \dot{\gamma}^2 \cos\gamma) \right] \\ m_2 \left[-c\dot{\alpha}^2 \text{sen}\alpha + \frac{L_2}{2} (\ddot{\gamma} \cos\gamma - \dot{\gamma}^2 \text{sen}\gamma) \right] + m_2 g \\ I_{G_2} \ddot{\gamma} \frac{2}{L_2} \end{array} \right\}$$

Corpo 2.1:

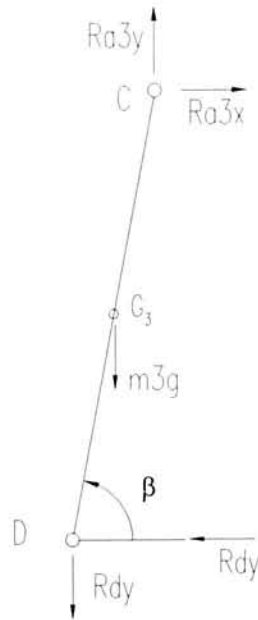
NOTA: Como só tem equilíbrio estático devido à sua massa ser desprezável, tem como função a separação das forças dos três elementos intervenientes nesse ponto. Considera-se como um nó.



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \text{ porque } m_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{C2x} - R_{C3x} - R_{C4x} \\ R_{C2y} - R_{C3y} - R_{C4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Corpo 3:



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_3 \vec{a}_{G3}|_{s_0} = \dot{\vec{Q}}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{C3}^x - R_D^x \\ R_{C3}^y - R_D^y - m_3 g \\ 0 \end{Bmatrix} = m_3 \frac{L_3}{2} \begin{Bmatrix} -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_{\text{extD}} = \vec{K}_D \Rightarrow$$

$$\vec{K}_D = \vec{K}_{G3} + D\vec{G}_3 * \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{L_3}{2} \cos \beta \\ \frac{L_3}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} * m_3 \frac{L_3}{2} \begin{Bmatrix} -\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K}_D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{G3} \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \cos^2 \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta + \ddot{\beta} \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[I_{G3} + \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 m_3 \right] \ddot{\beta} \end{Bmatrix}$$

Assim:

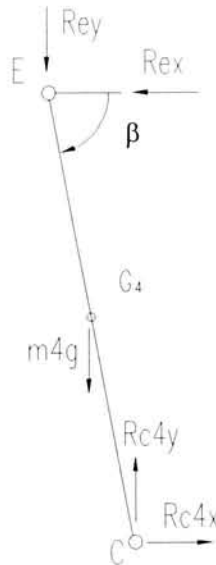
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{C_3}^x L_3 \sin \beta + R_{C_3}^y L_3 \cos \beta - \frac{L_3}{2} m_3 g \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[I_{G_3} + \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 m_3 \right] \ddot{\beta} \end{Bmatrix}$$

Para o Corpo 3 temos:

$$\begin{Bmatrix} R_{C_3}^x - R_D^x \\ R_{C_3}^y - R_D^y - m_3 g \\ L_3 \left(-R_{C_3}^x \sin \beta - R_{C_3}^y \cos \beta - \frac{m_3}{2} g \cos \beta \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_3 \frac{L_3}{2} \left(-\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta \right) \\ m_3 \frac{L_3}{2} \left(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \right) \\ \left[I_{G_3} + \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 m_3 \right] \ddot{\beta} \end{Bmatrix}$$

Simplificamos temos:

$$\begin{Bmatrix} R_{C_3}^x - R_D^x \\ R_{C_3}^y - R_D^y \\ R_{C_3}^y \cos \beta - R_{C_3}^x \sin \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_3 \frac{L_3}{2} \left(-\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta \right) \\ m_3 \frac{L_3}{2} \left(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \right) + m_3 g \\ \left(I_{G_3} + \frac{L_3}{4} m_3 \right) \frac{\ddot{\beta}}{L_3} + \frac{m_3 g}{2} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Corpo 4:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_4 \vec{a}_{G4|S_0} = \dot{\vec{Q}}_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{C4}^x - R_E^x \\ R_{C4}^y - R_E^y - m_4 g \\ 0 \end{Bmatrix} = m_4 \frac{L_4}{2} \begin{Bmatrix} -3\ddot{\beta} \sin \beta - 3\dot{\beta}^2 \cos \beta \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_c = \vec{K}_c \Rightarrow$$

$$\vec{K}_c = \vec{K}_{G4} + C\vec{G}_4 * \dot{\vec{Q}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{G4} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_4}{2} \cos \beta \\ -\frac{L_4}{2} \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} * m_4 \frac{L_4}{2} \begin{Bmatrix} -(3\ddot{\beta} \sin \beta + 3\dot{\beta}^2 \cos \beta) \\ \ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow e [L_4 = L_3]$$

$$\Rightarrow \vec{K}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{G4} \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{L_3}{2} \right)^2 m_4 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta} \cos^2 \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta + 3\ddot{\beta} \sin^2 \beta + 3\dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{G4} \ddot{\beta} + m_4 \frac{L_3}{4} \left[(3\ddot{\beta} \sin^2 \beta + \ddot{\beta} \cos^2 \beta) + 2\dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta \right] \end{Bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_E^x L_3 \sin \beta - R_E^y L_3 \cos \beta + \frac{L_3}{2} m_4 g \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{G4} \ddot{\beta} + m_4 \frac{L_3^2}{4} \left[(3\ddot{\beta} \sin^2 \beta + \ddot{\beta} \cos^2 \beta) + 2\dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta \right] \end{Bmatrix}$$

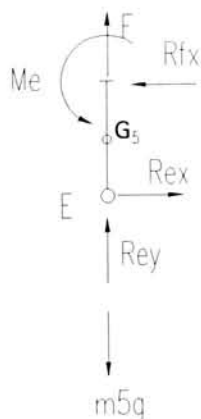
Para o Corpo 4 temos:

$$\begin{Bmatrix} R_{C4}^x - R_E^x \\ R_{C4}^y - R_E^y - m_4 g \\ R_E^x L_3 \sin \beta + R_E^y L_3 \cos \beta + \frac{L_3}{2} m_4 g \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3m_4 \frac{L_3}{2} (\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) \\ m_4 \frac{L_3}{2} (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) \\ -I_{G4} \ddot{\beta} - m_4 \frac{L_3}{4} \left[(3\ddot{\beta} \sin^2 \beta + \ddot{\beta} \cos^2 \beta) - 2\dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta \right] \end{Bmatrix}$$

Simplificamos temos:

$$\begin{Bmatrix} R_{C4}^x - R_E^x \\ R_{C4}^y - R_E^y \\ R_E^x \sin \beta + R_E^y \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3m_4 \frac{L_3}{2} (\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) \\ m_4 \frac{L_3}{2} (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + m_4 g \\ \frac{-I_{G4} \ddot{\beta}}{L_3} - m_4 \frac{L_3}{4} \left[(3\ddot{\beta} \sin^2 \beta + \ddot{\beta} \cos^2 \beta) - 2\dot{\beta}^2 \sin \beta \cos \beta \right] - \frac{m_4}{2} g \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Corpo 5:



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_s \vec{a}_{G5|s_0} = \dot{\vec{Q}}_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_E^x - R_F^x \\ R_E^y + F - m_s g \\ 0 \end{Bmatrix} = 2L_3 m_s \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_{\text{ext}F} = \vec{K}_F \Rightarrow$$

$$\vec{K}_F = \vec{K}_{G5} + F \vec{G}_5 * \dot{\vec{Q}}_5 \Rightarrow \vec{K}_F = 0 \text{ porque } \vec{\omega}_{s_0} = 0 \text{ e } F \vec{G}_5 * \dot{\vec{Q}}_5 = \vec{0}$$

Assim:

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_E + R_E^x d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Com: } d = \frac{L_5}{2} + 2L_3(1 - \cos \beta)$$

Para o Corpo 5 temos:

$$\begin{Bmatrix} R_E^x - R_F^x \\ R_E^y + F - m_s g \\ M_E + R_E^x \left[\frac{L_5}{2} + 2L_3(1 - \cos \beta) \right] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2L_3 m_s (-\ddot{\beta} \cos \beta + \dot{\beta}^2 \sin \beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificamos temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} R_E^x - R_F^x \\ R_E^y \\ M_E + R_E^x \left[\frac{L_3}{2} + 2L_3(1 - \cos\beta) \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ m_s \left[2L_3(-\ddot{\beta} \cos\beta + \dot{\beta}^2 \sin\beta) + g \right] - F \\ 0 \end{array} \right\}$$

[illegible]

$$ed = \frac{L^5}{2} + L^3(1 - \cos \beta)$$

CÁLCULO DAS MASSAS DOS COMPONENTES

Apresentaremos aqui os referidos cálculos das massas, fazendo ainda referência ao raciocínio, bem como simplificações utilizadas.

Do corpo 1 para o corpo 2, o referido movimento será transmitido por meio de um rolamento, o qual ditou a espessura do corpo. Assim a massa do referido rolamento será dividida por esses dois componentes. Esse facto tem como objectivo a distribuição da referida massa pelos componentes a que ele se encontra solidário. Tal Rolamento tem como designação **FAG 6018** com uma capacidade de carga:

- din C=58,5 kN

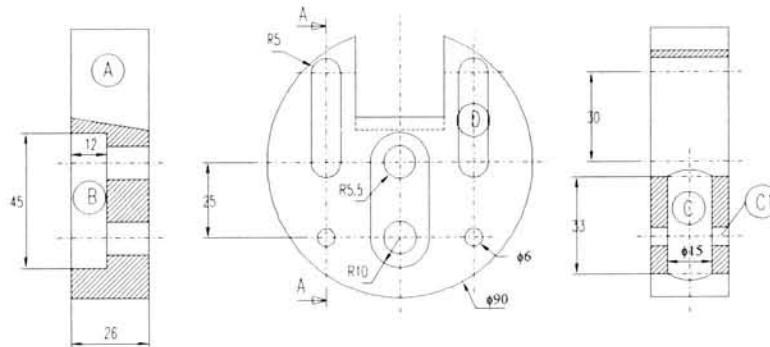
- est C=43,0 kN

- massa = 1,18 kg

Caso as solicitações calculadas por meio este raciocínio, sejam muito diferentes das acima apresentadas, seriam realizadas as devidas modificações, tanto na espessura necessária, bem como na divisão da sua massa pelos referidos componentes.

CORPO 1

O corpo 1 é constituído por um conjunto de peças, como por exemplo, molas, parafusos e veio interior. Nesta determinação das massas envolvidas no sistema iremos ter única e exclusivamente as que dizem respeito à parte móvel de tal corpo. Assim tal elemento pode ser designado por calote móvel, pois trata-se um cilindro devidamente trabalhado para que possa albergar os elementos nele intervenientes, tal como se ilustra na fig. abaixo:



NOTA: A zona A será considerada como sendo maciça. Tal facto deve-se a uma aproximação, que é realizada para simulação de outras massas existente nesse conjunto e que intervêm, mas que não irão ser calculadas, como é o caso de casquilhos, parafusos, pinos e molas designadamente.

$$A_{\text{total}} = \pi r^2 = 6,362E-3 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{total}} = A_{\text{total}} * \text{esp} = 6,362E-3 * 26E-3 = 1,654E-4 \text{ m}^3$$

Zona B:

$$\begin{aligned} V_B &= (\pi r^2 + b_B * h_B) * \text{esp} + 2\pi r_1^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_B &= \left[\pi (10E-3)^2 + (25E-3 * 20E-3) \right] * 12E-3 + \left[2(5,5E-3)^2 * (26-12)E-3 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_B = 1,243E-5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Zona C:

$$V_C = \pi r^2 h = \pi * (7,5E-3)^2 * 33E-3 = 5,832E-6 \text{ m}^3$$

Zona C1:

$$V_{C1} = \pi r^2 h = \pi(3E-3)^2 * (26-15)E-3 = 3,11E-7 \text{ m}^3$$

Zona D:

$$V_D = (\pi r^2 + bh) * esp = [\pi(5E-3)^2 + (30E-3 * 10E-3)] * 26E-3 = 9,842E-3 \text{ m}^3$$

NOTA: As zonas B,C,C1 e D são volumes "negativos", ou seja, são zonas não preenchidas por material, assim são valores a subtrair ao volume Total calculado anteriormente:

$$V_1 = V_{Total} - (V_B + V_C + V_{C1} + V_D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = 1,654E-4 - (1,243E-5 + 5,832E-6 + 3,11E-7 + 9,842E-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 \approx 1,370E-4 \text{ m}^3$$

Assim:

$$m_1 = \rho * V_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 7850 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) * 1,370E-4 = 1,075 \text{ kg}$$

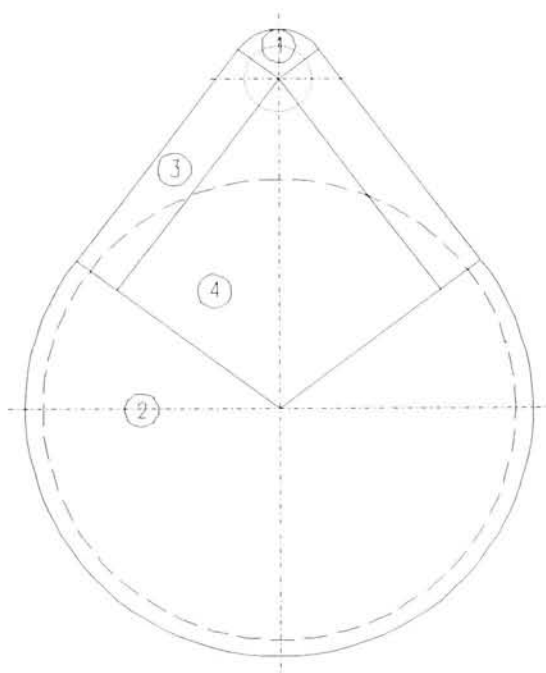
Como foi referido anteriormente a este valor vai ser adicionado metade da massa do Rolamento:

$$m_{11} = m_1 + \frac{m_{\text{Rolamento}}}{2} = 1,075 + \frac{1,18}{2} = 1,665 \text{ kg}$$

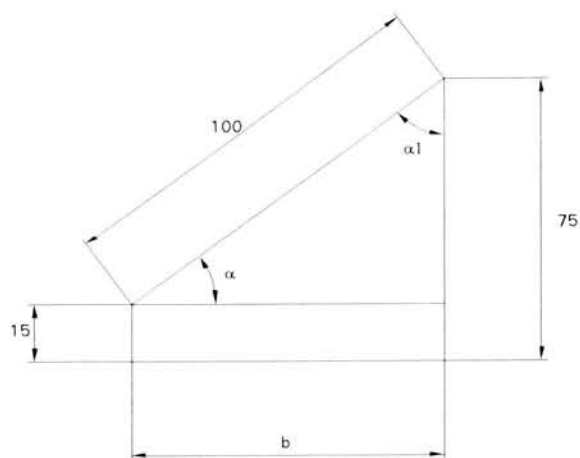
CORPO 2

Este componente do sistema será uma biela de ligação entre o corpo 1 e os restantes componentes do sistema: Este elemento do sistema será aquele que estará ligado a todos os componentes em simultâneo. O movimento do corpo 1 será transmitido ao corpo 2 por intermédio de um rolamento como já se referiu anteriormente.

Para o cálculo da massa deste corpo dividiu-se a referida peça em elementos mais simples como se mostra na figura abaixo. Considera-se como uma peça maciça e após o cálculo da massa total para este caso iremos subtrair a massa dos respectivos furos.



Determinação dos ângulos envolvidos no calculo:



$$\alpha = \arctan \frac{(75-15)}{100} = 36,869^\circ$$

$$b = 100 * \cos(36,869^\circ) \approx 80 \text{ mm}$$

Como se trata de triângulo rectângulo temos:

$$\alpha + \alpha_1 + 90 = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 180 - 90 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 53,131^\circ$$

Assim já temos definido os respectiva ângulos intervenientes, realizando calculo das respectivas massas temos:

Elemento 1:

$$m_1 = A_1 * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{53,131\pi}{180}} r_1^2 d\theta \right) * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = (15E-3)^2 * \frac{53,131\pi}{180} * 24E-3 * 7850 = 3,93E-2 \text{ kg}$$

Elemento 2:

$$m_2 = A_2 * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{36,869\pi}{180}} r_2^2 d\theta \right) * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = (75E-3)^2 * \frac{36,869\pi}{180} * 24E-3 * 7850 = 2,346 \text{ kg}$$

Elemento 3:

$$m_3 = 2 * (bh) * \text{esp} * \rho = 2 * (80E-3 * 15E-3) * 24E-3 * 7850 = 4,522E-1 \text{ kg}$$

Elemento 4:

$$m_4 = 2 * \left(\frac{bh}{2} \right) * \text{esp} * \rho = (80E-3 * 15E-3) * 24E-3 * 7850 = 9,043E-3 \text{ kg}$$

Calculando as massas dos respectivos furos, que para o cálculo a efectuar serão a subtrair temos:

Elemento 5: (furo com $\phi=20$ mm)

$$m_5 = \pi r_1^2 * \text{esp} * \rho = \pi (10E-3)^2 * \text{esp} * \rho = \pi (10E-3)^2 * 24E-3 * 7850 = 5,918E-2 \text{ kg}$$

Elemento 6: (furo com $\phi=140$ mm)

$$m_6 = \pi r_2^2 * \text{esp} * \rho = \pi (70E-3)^2 * \text{esp} * \rho = \pi (70E-3)^2 * 24E-3 * 7850 = 2,9 \text{ kg}$$

Temos então que:

$$m_2 = \sum_{i=1}^6 m_i = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - (m_5 + m_6) \Rightarrow$$

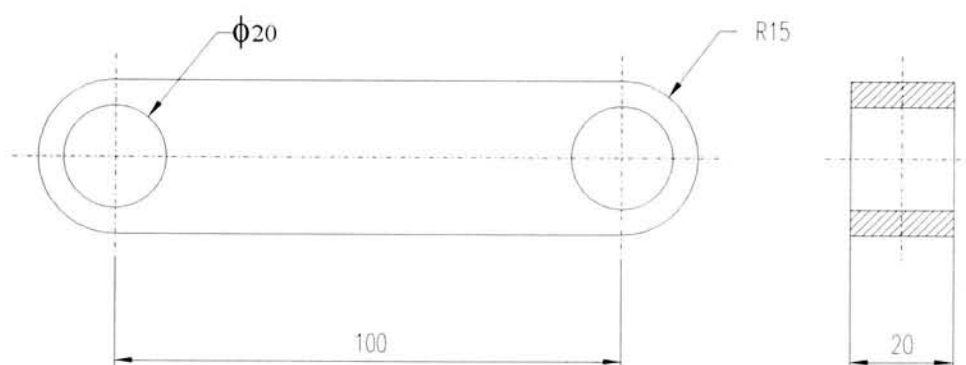
$$\Rightarrow m_2 = 3,93E-3 + 2,346E-3 + 4,522E-3 + 9,043E-1 - (5,918E-2 + 2,9) = 0,782 \text{ kg}$$

Como foi referido anteriormente a este valor vai ser adicionado metade da massa do Rolamento:

$$m_{2r} = m_2 + \frac{m_{\text{Rolamento}}}{2} = 0,782 + \frac{1,18}{2} = 1,372 \text{ kg}$$

CORPO 3 e 4:

Serão constituídos por duas peças iguais em conjunto. Indica-se a seguir tanto a sua geometria, como os seus parâmetros geométricos.



Temos então:

$$A = (b * 2r) + \pi r^2 - 2\pi r_1^2 = [(2 * 100E - 3 * 15)] + \pi(15E - 3)^2 - 2\pi(10E - 3)^2 = 3,078E - 3 \text{ m}^2$$

$$V = A * esp = 3,078E - 3 * 20E - 3 = 6,156E - 5 \text{ m}^3$$

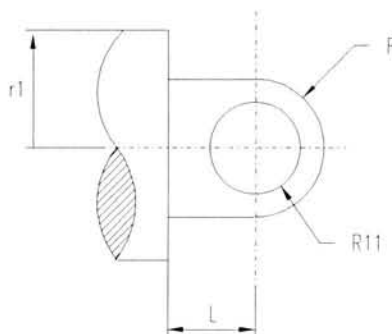
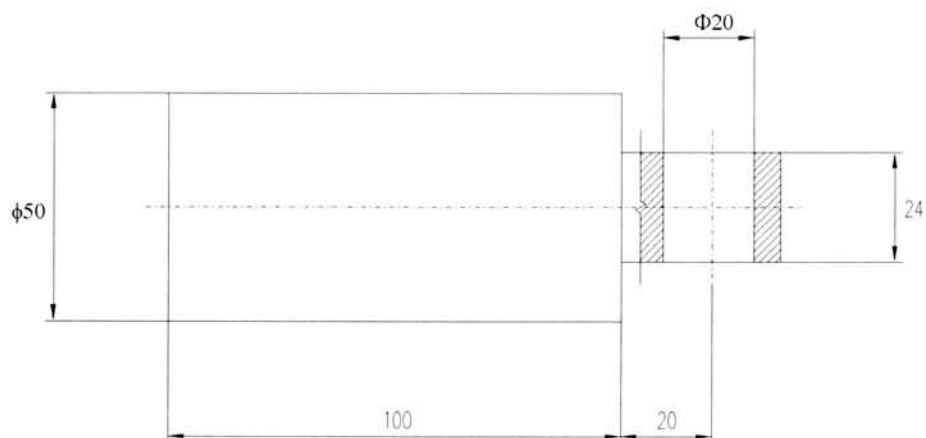
$$m = \rho * V = 6,156E - 5 * 7850 = 0,480 \text{ kg}$$

temos: Como o corpo 3 e 4 é constituído por duas peças com a massa calculada atrás

$$m_3 = m_4 = 2 * m = 2 * 0,480 = 0,960 \text{ kg}$$

CORPO 5:

Neste estudo será uma peça cilíndrica com um olhau numa das pontas para ligação entre os demais componentes.



$$V = (\pi r_1^2 * L) + \left\{ \left[\left(\frac{\pi r^2}{2} \right) + (L * 2r) \right] - \pi r_{11}^2 \right\} * esp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left[\pi (25E-3)^2 * 100E-3 \right] + \left\{ \left[\left(\frac{\pi (15E-3)^2}{2} \right) + (20E-3 * 2 * 15E-3) \right] - \pi (10E-3)^2 \right\} * 24E-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2,116E-4 \text{ m}^3$$

Como massa temos:

$$m = \rho * V = 7850 * 2,116E-4 = 1,661 \text{ kg}$$

NOTA: Casquilhos e demais peças auxiliares de ligação não serão acrescentadas neste estudo, devidos à sua influência ser relativamente baixa.

CÁLCULO DOS CENTROS DE GRAVIDADE

Este cálculo só será realizado para o corpo 2, devido a ser o único corpo com geometria não simétrica no eixo x. Quanto aos corpos 1 e 5 o mesmo não se realiza por não ser necessário ao cálculo dos esforços presentes no sistema, ou seja, conseguimos calcular o sistema de equações uma vez que tais parâmetros não intervêm no mesmo.

Para este corpo $\bar{x}$ já é conhecido devido a simetria existente no plano dos y, assim temos:

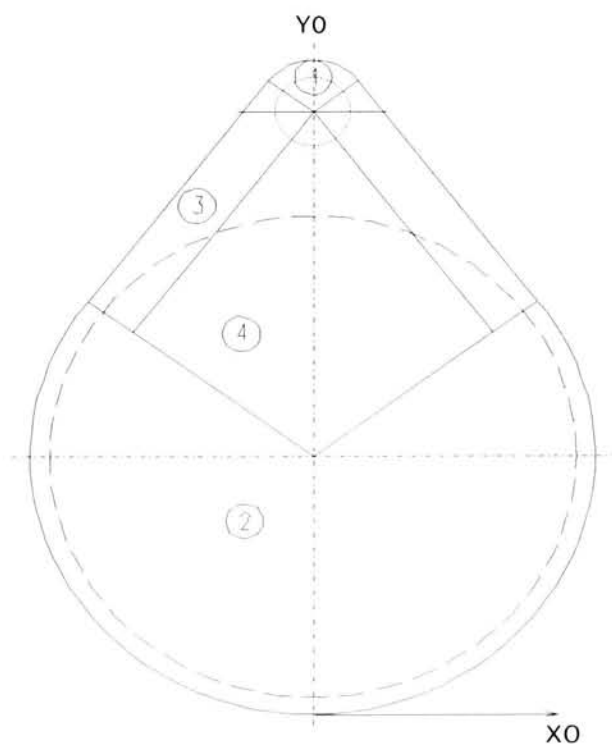
$$\bar{x} = 0$$

Considerando uma geometria idêntica a peça 2, mas compacta, como foi considerada para determinação da respectiva massa. Podemos determinar o valor do centro de gravidade em y, determinando os respectivos centros de massa das figuras que constituem a geometria tratada, após esse cálculo e determinado a respectiva distância fazemos:

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

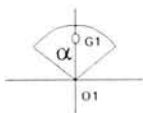
Sendo os respectivos furos considerados como "massas negativas", se assim podemos chamar elementos que neste caso particular serão furos.

CORPO 2



Assim teremos:

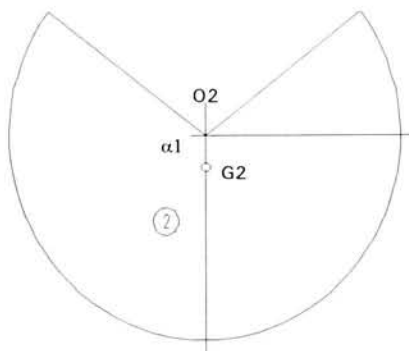
Elemento 1:



$$\bar{y}_{G1} = \frac{2}{3} r * \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} * \left[\frac{15 * \sin \left(\frac{53,131\pi}{180} \right)}{\frac{53,131\pi}{180}} \right] = 8,627 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{53,131\pi}{180}$$

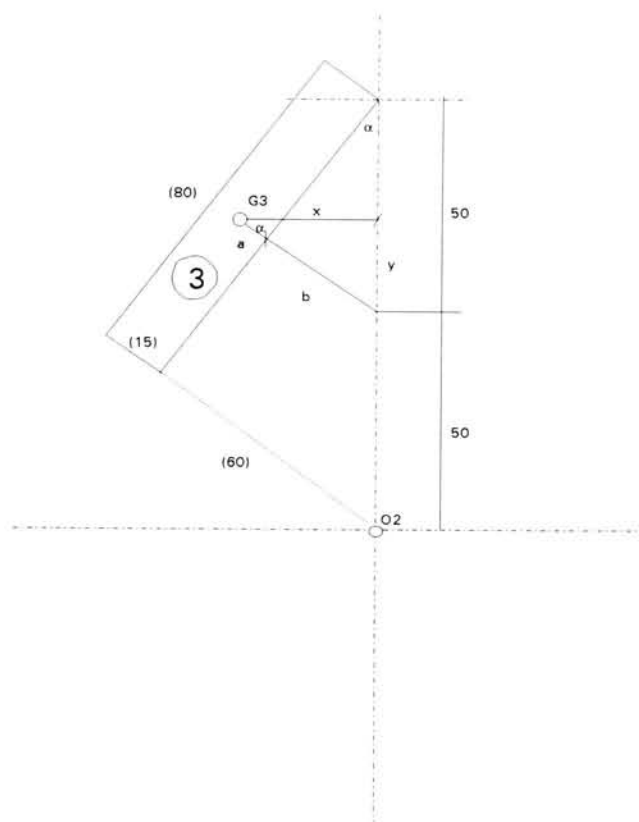
Elemento 2:



$$\bar{y}_{G2} = \frac{2}{3} r * \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} * \left[\frac{75 * \sin \left(\frac{36,869\pi}{180} + \frac{\pi}{2} \right)}{\left(\frac{36,869\pi}{180} + \frac{\pi}{2} \right)} \right] = 18,064 \text{ mm}$$

$$\alpha = \left(\frac{36,869\pi}{180} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Elemento 3:



$$a = \frac{60}{80}(80 - 40) \Rightarrow a = 30 \text{ mm}$$

$$(a + b) = 30 + \frac{15}{2} = 37,5 \text{ mm com } G_3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ mm}$$

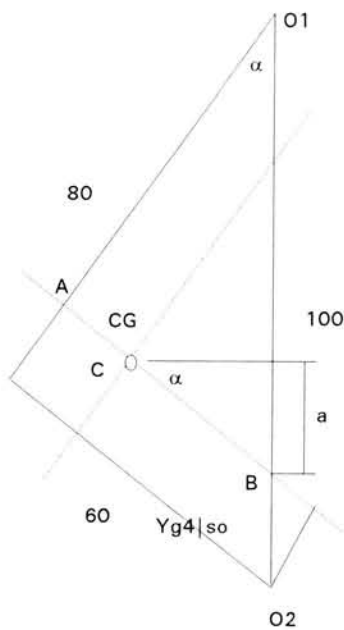
$$y_{G3} = (a + b) * \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{G3} = 37,5 * \sin(36,869^\circ) = 22,5 \text{ mm}$$

Sabemos que C.G. do rectângulo passa exactamente a meio da hipotenusa do triângulo, assim:

$$\overline{O_2 G_{t3}} = 50 + y_{G3} = 72,5 \text{ mm}$$

Elemento 4:



$$\alpha = \arccos\left(\frac{80}{100}\right) \Rightarrow \alpha = 36,869^\circ$$

$$x_{G4} = \frac{60}{3} = 20 \text{ mm}$$

$$y_{G4} = \frac{80}{3} = 26,667 \text{ mm}$$

$$y_{G4}|_{So} = \frac{y_{G4}}{\cos \alpha} = \frac{26,667}{\cos(36,869^\circ)} = 33,33 \text{ mm}$$

$$y_{Gt4} = y_{G4}|_{So} + a$$

$$\overline{AB} = \frac{60}{80}(80 - 26,667) = 40 \text{ mm}$$

$$\overline{CB} = \overline{AB} - x_{G4} = 40 - 20 = 20 \text{ mm}$$

$$a = \overline{CB} * \sin \alpha = 20 * \sin(36,869^\circ) = 11,99 \approx 12 \text{ mm}$$

Assim:

$$\overline{y_{Gt4}} = \overline{y_{G4}}|_{So} + a = 33,33 + 12 = 45,33 \text{ mm}$$

Calculando agora as distâncias no referencial em estudo (So) temos:

$$Y_1 = \overline{OG}_1 = \overline{OO}_1 + \overline{Oy}_{G1} = 175 + 8,627 = 183,627 \text{ mm} = 1,836E-1 \text{ m}$$

$$Y_2 = \overline{Oy}_{G2} = \overline{OO}_2 - \overline{Oy}_{G2} = 75 - 18,064 = 56,936 \text{ mm} = 5,694E-2 \text{ m}$$

$$Y_3 = \overline{Oy}_{G3} = \overline{OO}_2 + \overline{Oy}_{G3} = 75 + 72,5 = 147,50 \text{ mm} = 1,475E-1 \text{ m}$$

$$Y_4 = \overline{Oy}_{G4} = \overline{OO}_2 + \overline{Oy}_{G4} = 75 + 45,32 = 120,32 \text{ mm} = 1,203E-1 \text{ m}$$

Para os furos temos:

$$y_5 = \overline{OO}_1 = 175 \text{ mm} = 1,75E-1 \text{ m}$$

$$y_6 = \overline{OO}_2 = 75 \text{ mm} = 7,5E-2 \text{ m}$$

Como a massa já foi calculada anteriormente e o seu valor é de:

$$m_{2t} = \sum_{i=1}^6 m_i = 0,782$$

Temos:

$$\sum_{i=1}^6 m_i y_i = (3,93E-2 * 1,836E-1) + (2,346 * 5,694E-2) + (4,522E-1 * 1,475E-1) + (9,043E-1 * 1,203E-1) - \\ - [(5,918E-2 * 1,75E-1) + (2,9 * 7,5E-2)] \Rightarrow$$

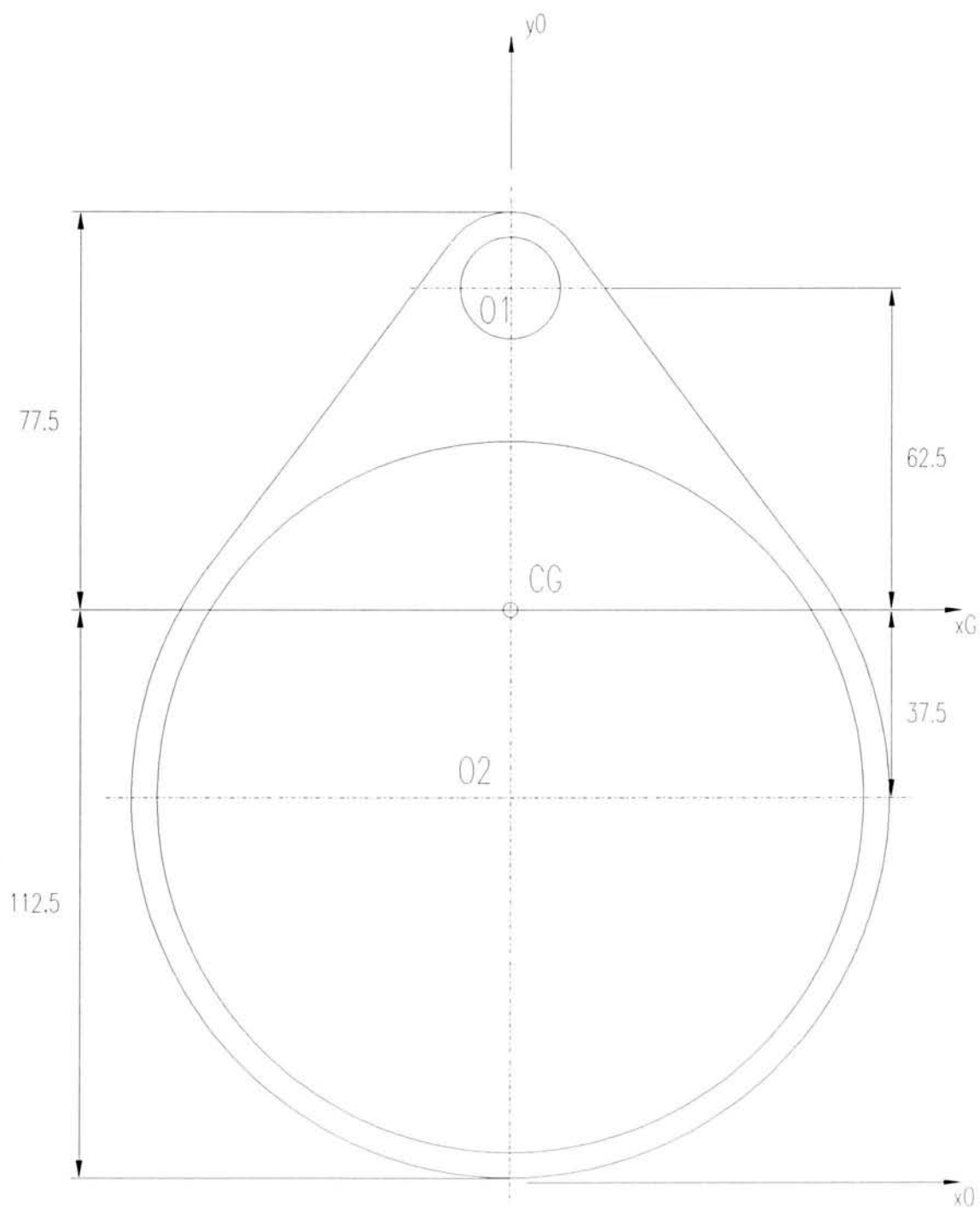
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^6 m_i y_i = 0,088 \text{ Kg} * \text{m}$$

Calculando desta forma:

$$\overline{Y}_G = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i y_i}{\sum_{i=1}^6 m_i} = \frac{0,088}{0,782} = 0,1125 \text{ m} = 112,5 \text{ mm}$$

Temos como coordenadas do centro de gravidade do corpo 2: [mm]

$\overline{X}_G$	0
$\overline{Y}_G$	112,5
$\overline{Z}_G$	0

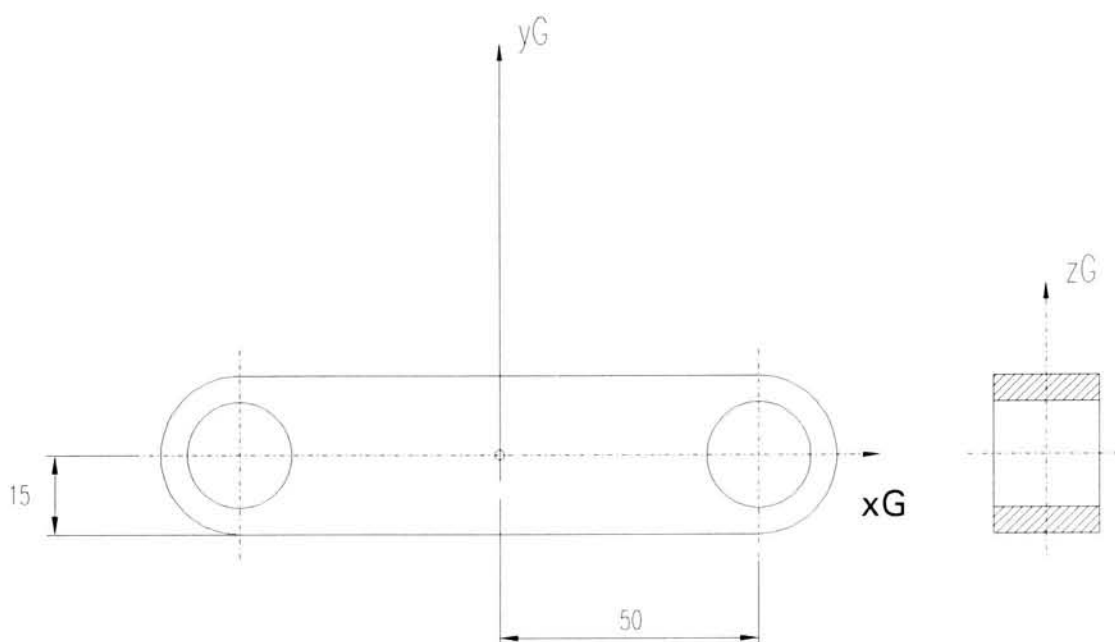


CORPO 3:

Como a própria geometria indica os valores das coordenadas do Centro de Gravidade são:

$\bar{X}_G$	50
$\bar{Y}_G$	15
$\bar{Z}_G$	0

Para um referencial de referência ligado ao furo do lado esquerdo e apoiado na base da referida peça.



CÁLCULO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA

Como já se fez referência anteriormente só iremos calcular os momentos de inércia, pois como existe simetria relativamente ao plano z os respectivos produtos de inércia são 0.

Com o decorrer de todo o raciocínio até aqui desenvolvido também chegamos a conclusão de só necessitar calcular os momentos de inércia das peças nº 2 e 3, assim devido a tal facto serão apenas para essas peças que será efectuado este calculo.

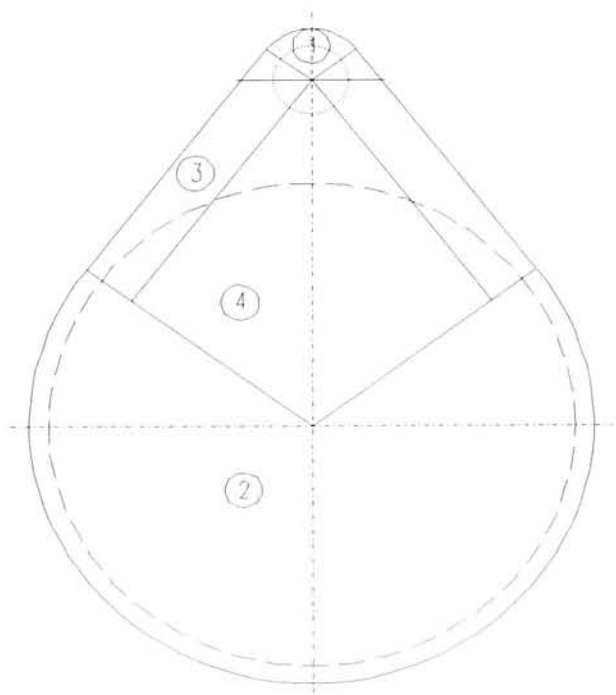
CORPO 2:

Este cálculo será realizado considerando a peça 2 maciça, seguindo-se a subtracção dos momentos de inércia dos respectivos furos. Iremos então calcular os momentos de inércia correspondentes aos vários elementos constituintes da peça 2 (no centro de gravidade dos respectivos elementos), como foi realizado para os vários cálculos até aqui apresentados, passando-se seguida ao cálculo dos mesmos no respectivo centro gravidade total da peça.

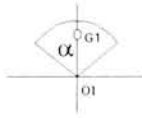
Tal será realizado com base no Teorema de Steiner que nos diz:

$$[I = I_{G|_{S_0}} + m|_{\text{Elemento}} * d^2]$$

$d \rightarrow$ Distância do C.G._{|Elemento} ao C.G._{|Elemento}



Elemento 1:



$$\alpha_1 = \frac{53,131\pi}{180}$$

$$I_{z1} = J * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z1} = \frac{1}{2} r^4 \alpha_1 * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z1} = \frac{1}{2} (15E-3)^4 * \frac{53,131}{180} \pi * 24E-3 * 7850 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z1} = 4,422E-6 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Passando para o C.G. da peça temos:

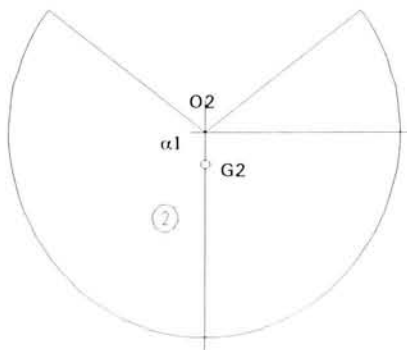
$$I_{\text{Total1}} = I_{z1} + m_1 d_1^2 \Rightarrow$$

$$d_1 = \overline{CGO_1} + \overline{O_1G_1} = 62,5 + 8,627 = 71,127 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow I_{\text{Total1}} = 4,422E-6 + \left[3,93E-2 * (71,127E-3)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[I_{\text{Total1}} = 2,032E-4 \text{ kg} * \text{m}^2 \right]$$

Elemento 2:



$$\alpha_2 = \frac{36,869\pi}{180} + \frac{\pi}{2}$$

$$I_{z2} = J * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{2} r_2^4 * \alpha_2 * \text{esp} * \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{2} (75E - 3)^4 * \left(\frac{36,869}{180} \pi + \frac{\pi}{2} \right) * 24E - 3 * 7850 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{z2} = 6,6E - 3 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Passando para o C.G. da peça temos:

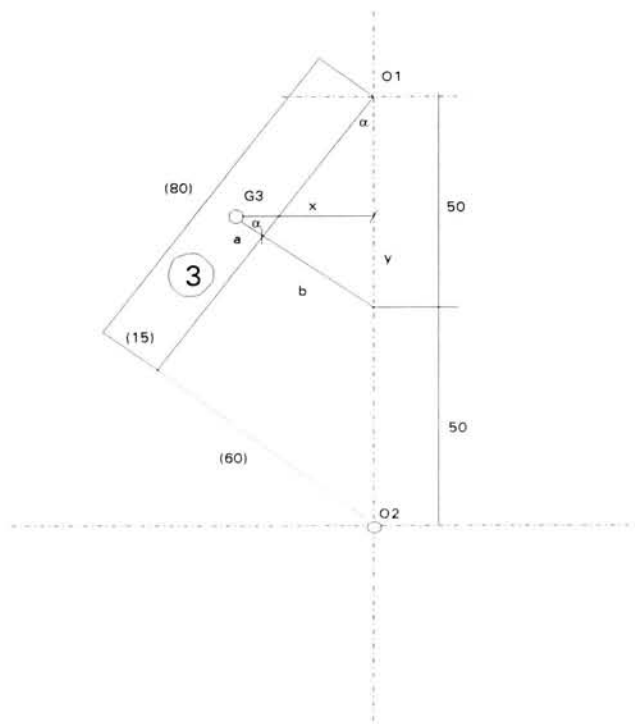
$$I_{\text{total}2} = I_{z2} + m * d^2 \Rightarrow$$

$$d_2 = \overline{\text{CGO}_2} + \overline{\text{O}_2\text{G}_2} = 37,5 + 18,064 = 55,56 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow I_{\text{Total}2} = 6,6E - 3 + \left[2,346 * (55,56E - 3)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[I_{\text{Total}2} = 1,384E - 2 \text{ kg} * \text{m}^2 \right]$$

Elemento 3:



$$\alpha = 36,869^\circ$$

$$a = \frac{60}{80}(80 - 40) \Rightarrow a = 30 \text{ mm}$$

$$\overline{G_3B} = 30 + 7,5 = 37,5 \text{ mm}$$

$$y = \overline{G_3B} * \sin \alpha = 37,5 * \sin(36,869^\circ) = 22,5 \text{ mm}$$

$$\overline{O_2B_1} = \frac{100}{2} + y = 50 + 22,5 = 72,5 \text{ mm}$$

$$\frac{100}{2} \rightarrow \text{Esta a meio da base do triângulo}$$

$$\overline{G_3B} = \overline{G_3B} * \cos \alpha = 37,5 * \cos(36,869^\circ) = 30 \text{ mm}$$

Calculando então **I_{Z3}** temos:

$$I_{Z3} = \frac{1}{12} m_3 (b^2 + L^2) = \frac{1}{12} 4,522E - 1 * [(15E - 3)^2 + (80E - 3)^2] = 2,496E - 4 \text{ kg} * m^2$$

Passando para o C.G. da peça temos:

$$I_{\text{total } 3} = I_{Z3} + m_3 d_3^2 \Rightarrow$$

$$d_3 = \left[(\overline{O_2B_1} - \overline{O_2CG})^2 + \overline{G_3B}^2 \right]^{1/2} = \left[(72,5E - 3 - 37,5E - 3)^2 + (30E - 3)^2 \right]^{1/2} = 46,1 \text{ mm} = 4,61E - 3 \text{ m}$$

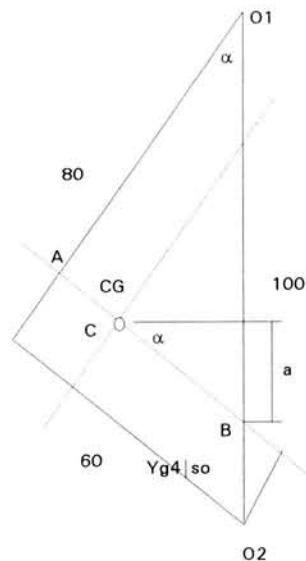
$$\Rightarrow I_{\text{Total } 2} = 2,496E - 4 + \left[4,522E - 1 * (4,61E - 3)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[I_{\text{Total } 1} = 1,21E - 3 \text{ kg} * m^2 \right]$$

Como são 2 elementos iguais a este que fazem parte do corpo temos:

$$\Rightarrow \left[I_{\text{Total } 3} = 2 * (1,21E - 3) = 2,42E - 3 \text{ Kg} * m^2 \right]$$

Elemento 4:



$$I_z = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = \frac{bh^3}{36} + \frac{b^3h}{36} = \frac{1}{36} \left[60E - 3(80E - 3)^3 + (60E - 3)^3 * 80E - 3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = 1,333E - 6 \text{ m}^4$$

$$I_{z4} = I_z * \text{esp} * m_4 = 1,333E - 6 * 24E - 3 * 9,043E - 1 = 2,893E - 8 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Passando para o C.G. da peça temos:

$$I_{\text{total}4} = I_{z4} + m_4 d_4^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AB} = \frac{60}{80} (80 - 26,667) = 40 \text{ mm}$$

$$\overline{CG_4B} = \overline{AB} - \overline{ACC_1} = 40 - 20 = 20 \text{ mm}$$

$$\overline{BC} = \overline{CG_4B} * \sin \alpha = 20 * \sin(36,869^\circ) = 12 \text{ mm}$$

$$\overline{O_2B} = \frac{26,667}{\cos(36,869^\circ)} = 33,33 \text{ mm}$$

$$\overline{CG_4C} = \overline{CG_4B} * \cos \alpha = 20 * \cos(36,869^\circ) = 16 \text{ mm}$$

$$\overline{CGC} = (\overline{O_2B} + \overline{BC}) - \overline{O_2CG} = (33,33 + 12) - 37,5 = 7,83 \text{ mm}$$

$$d_4 = \left[\overline{CGC}^2 + \overline{CG_4C}^2 \right]^{1/2} = \left[(7,83)^2 + (16)^2 \right] = 17,81 \text{ mm}$$

$$I_{\text{total}4} = 2,893E - 8 + \left[9,043E - 1 * (17,81E - 3)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\text{total}4} = 2,869E - 4 \text{ kg} * \text{m}^2$$

Como são 2 elementos iguais a este que fazem parte do corpo temos:

$$\Rightarrow [I_{\text{total } 4} = 2 * (2,869\text{E} - 4) = 5,737\text{E} - 4 \text{ kg} * \text{m}^2]$$

Calculando agora os Momentos de Inércia dos respectivos furos temos:

Elemento 5:

Furo com $\phi=20$ mm

$$I_{Z5} = \frac{1}{2} m_5 r_1^2 = \frac{1}{2} 5,918\text{E} - 2 * (10\text{E} - 3)^2 = 2,959\text{E} - 6 \text{ kg} * \text{m}^2$$

$$I_{\text{total } 5} = I_{Z5} + m_5 d_5^2$$

$$d_5 = \overline{\text{CGO}_1} = 62,5 \text{ mm}$$

$$I_{\text{total } 5} = 2,959\text{E} - 6 + [5,918\text{E} - 2 * (62,5\text{E} - 3)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [I_{\text{total } 5} = 2,341\text{E} - 4 \text{ kg} * \text{m}^2]$$

Elemento 6:

Furo com $\phi=140$ mm

$$I_{Z6} = \frac{1}{2} m_6 r_2^2 = \frac{1}{2} 2,9 * (70\text{E} - 3)^2 = 8,156\text{E} - 3 \text{ kg} * \text{m}^2$$

$$I_{\text{total } 6} = I_{Z6} + m_6 d_6^2$$

$$d_6 = \overline{\text{CGO}_2} = 35 \text{ mm}$$

$$I_{\text{total } 6} = 8,156\text{E} - 3 + [2,9 * (35\text{E} - 3)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [I_{\text{total } 6} = 1,223\text{E} - 2 \text{ kg} * \text{m}^2]$$

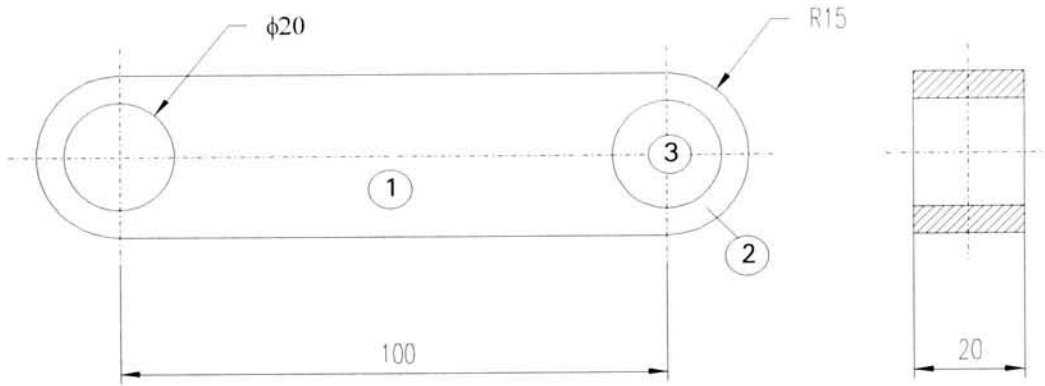
Assim como todo o calculo dos respectivos Momentos de Inércia foi realizado para o C.G. total da respectiva peça, podemos então fazer o seguinte raciocínio:

$$I_{G2} = \sum_{i=1}^6 I_{totali} = 2,032E-4 + 1,384E-2 + 2,42E-3 + 5,737E-4 - (2,341E-4 + 1,223E-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{G2} = \sum_{i=1}^6 I_{totali} = 4,572E-3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\left[I_{G2} = 4,572E-3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \right]$$

CORPO 3 e 4:



Elemento 1:

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 (b^2 + L^2) = \frac{4,71E-1}{2} [(30E-3)^2 + (100E-3)^2] = 2,566E-3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_1 = A \cdot \text{esp} \cdot \rho = 100E-3 \cdot 20E-3 \cdot 30E-3 \cdot 7850 = 4,71E-1 \text{ kg}$$

$$I_{\text{total1}} = I_{z1} = 2,566E-3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Elemento 2:

Considerando como um cilindro as duas s semicircunferências de topo temos:

$$I_{z2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = \frac{1,11E-1}{2} (15E-3)^2 = 1,248E-5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_2 = \pi r_2^2 \cdot \text{esp} \cdot \rho = \pi (15E-3)^2 \cdot 20E-3 \cdot 7850 = 1,11E-1 \text{ kg}$$

$$I_{\text{total2}} = I_{z2} + m_2 d_2^2 = 1,248E-5 + [1,11E-1 \cdot (50E-3)^2] = 2,899E-4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Calculando agora os Momentos de Inércia dos respectivos furos temos:

Elemento 3:

$$I_{z3} = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = \frac{4,932E-2}{2} (10E-3)^2 = 2,466E-6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_3 = \pi r_3^2 \cdot \text{esp} \cdot \rho = \pi (10E-3)^2 \cdot 20E-3 \cdot 7850 = 4,932E-6 \text{ kg}$$

$$I_{z3} = 2 \cdot I_{z3} = 2 \cdot (2,466E-6) = 4,932E-6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\text{total3}} = I_{z3} + m_3 d_3^2 = 4,932E-6 + [4,932E-6 \cdot (50E-3)^2] = 1,282E-4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Assim como todo o calculo dos respectivos Momentos de Inércia foi realizado para o C.G. total da respectiva peça, podemos então fazer o seguinte raciocínio:

$$I_{G3} = \sum_{i=1}^3 I_{totali} = 2,566E-3 + 2,899E-4 - 1,282E-4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_{G3} = \sum_{i=1}^3 I_{totali} \approx 2,730E-3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Resumindo assim todos os cálculos até efectuados, temos a seguinte tabela:

Corpo	$I_{Gi} \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$	$m_i \text{ [kg]}$
1	----	1,665
2	4,572E-3	1,372
3	2,73E-3	0,960
4	2,73E-3	0,960
5	----	1,661

CÁLCULO DO SISTEMA

Nesta fase põe-se o problema para uma resolução expedita do sistema de equações final. Com a resolução deste obteremos tanto as forças, bem como os momentos do sistema em análise.

Assim para a resolução desse problema vai-se apresentar uma forma expedita e simples. Essa resolução vai ser apoiada numa folha de cálculo e trata-se:

O sistema de equações pode ser escrito:

$$[C] \times \{F\} = \{a\}$$

em que:

$[C]$ – Matriz dos coeficientes do Sistema

$\{F\}$ – Vector das Forças (Incógnitas)

$\{a\}$ – Vector dos Termos Independentes

Da Álgebra temos:

$$[C] \times \{F\} = \{a\} \Leftrightarrow [C]^{-1} \times \{a\} = \{F\}$$

Realizando a operação acima indicada temos a solução pretendida do sistema. Como a mesma solução é dependente do parâmetro α :

$$\{F\} = f(\alpha)$$

Desenvolvendo uma folha de cálculo que realiza a inversão da matriz, bem como a multiplicação da inversa pelo vector de termos independentes, sendo tal solução directamente dependente do parâmetro α , realizamos um "ajuste" de tal parâmetro e conseguimos obter as diferentes soluções para valores de:

$$\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$$

como se mostra na tabela anexa.

Assim temos de seguida a folha de cálculo correspondente a solução do sistema, bem como uma tabela que ilustra os respectivos valores das forças e dos momentos para o intervalo acima descrito.

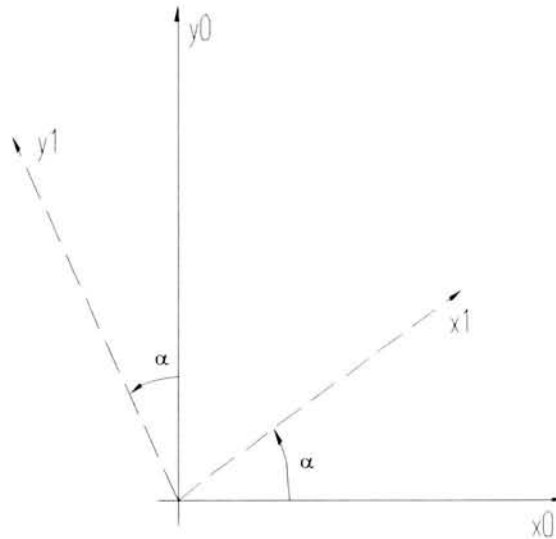
VALORES OBTIDOS PARA UMA VOLTA COMPLETA DO SISTEMA

α	Rax	Ray	Rbx	Rby	Mo	Rcx2	Rcy2	Rcx3	Rcy3	Rdx	Rdy	Rcx4	Rcy4	Rex	Rey	Rfx	Me
0	-880	226	-263	210	7	599	86	183	5423	431	5341	416	-5337	1159	-5419	1159	-160
15	-962	134	-366	277	11	474	315	171	5528	416	5467	303	-5213	1038	-5275	1038	-145
30	-985	-10	-452	282	14	299	511	142	5439	359	5426	157	-4928	810	-4941	810	-116
45	-883	-168	-448	252	15	152	664	106	5266	274	5308	46	-4601	551	-4559	551	-82
60	-605	-320	-297	197	11	100	755	85	5092	185	5179	15	-4337	315	-4250	315	-49
75	-139	-451	21	128	0	175	767	104	4974	120	5083	72	-4207	120	-4098	120	-20
90	486	-542	486	58	-15	373	705	181	4953	103	5055	191	-4249	-45	-4147	-45	8
105	1207	-566	1048	12	-31	660	590	326	5053	146	5119	334	-4463	-205	-4398	-205	37
120	1937	-503	1629	14	-43	978	458	521	5265	243	5273	457	-4808	-377	-4800	-377	70
135	2577	-349	2141	70	-47	1261	340	726	5535	361	5477	535	-5196	-558	-5254	-558	107
150	3049	-132	2515	160	-42	1463	244	895	5769	466	5655	568	-5525	-718	-5639	-718	140
165	3327	103	2731	246	-29	1577	161	1003	5882	538	5735	574	-5721	-820	-5867	-820	162
180	3427	318	2811	301	-9	1628	75	1050	5836	578	5682	577	-5760	-840	-5914	-840	166
195	3379	488	2784	312	12	1642	-22	1051	5641	595	5504	591	-5662	-777	-5799	-777	153
210	3202	600	2668	275	33	1628	-132	1017	5327	598	5225	611	-5459	-648	-5562	-648	126
225	2898	638	2463	186	48	1578	-260	954	4925	586	4869	624	-5186	-478	-5242	-478	91
240	2469	591	2161	41	55	1476	-411	861	4462	560	4459	615	-4873	-289	-4877	-289	54
255	1928	457	1769	-155	52	1316	-582	741	3979	517	4028	575	-4562	-99	-4513	-99	18
270	1320	266	1320	-366	40	1117	-748	604	3554	462	3647	513	-4302	87	-4209	87	-15
285	713	85	872	-527	21	919	-858	467	3305	408	3421	453	-4163	276	-4047	276	-45
300	166	-13	474	-563	4	760	-855	347	3358	369	3466	414	-4213	481	-4105	481	-75
315	-280	12	155	-440	-6	659	-716	253	3763	354	3826	406	-4479	708	-4416	708	-105
330	-592	124	-59	-200	-6	626	-467	198	4408	369	4404	428	-4875	943	-4879	943	-134
345	-771	222	-176	47	0	633	-179	183	5036	406	4974	451	-5215	1120	-5277	1120	-155
360	-880	226	-263	210	7	599	86	183	5423	431	5341	416	-5337	1159	-5419	1159	-160

Valores das Forças e Momentos para uma volta Completa do Sistema (So)

Apresenta-se de seguida outro problema que consiste em que todas as Forças calculadas até aqui encontram-se referenciadas no sistema de eixo global S_0 . Seria de melhor compreensão se tais resultados fossem apresentados no sistema de eixos solidários com os respectivos corpos. Assim para o ponto de vista de dimensionamento teríamos directamente os esforços a que cada componente do sistema estaria sujeito.

Para resolução de tal problema faremos uma mudança de referencial:



S_0 - Referencial Geral
 S_1 - Referencial ligado ao Componente
 α - Ângulo de rotação

Para isso basta-nos:

Temos:

$$\begin{Bmatrix} R^{x_0} \\ R^{y_0} \end{Bmatrix}$$

Queremos:

$$\begin{Bmatrix} R^{x_1} \\ R^{y_1} \end{Bmatrix}$$

Fazendo:

$$\begin{bmatrix} T_{S_0/S_1} \end{bmatrix}^T \times \{R\}_{S_0} = \{R\}_{S_1}$$

Sendo:

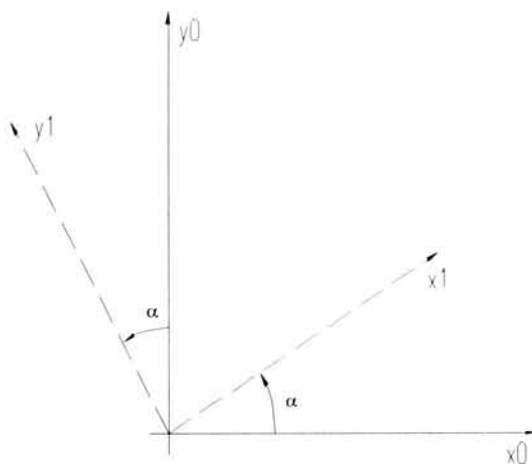
$[T]$ - Matriz de transformação de S_0/S_1

Que para o exemplo apresentado acima é:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R^{x_0} \\ R^{y_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^{x_1} \\ R^{y_1} \end{Bmatrix}$$

Realizando as respectivas mudanças de eixos nos corpos envolvidos no sistema temos:

Corpo 1:

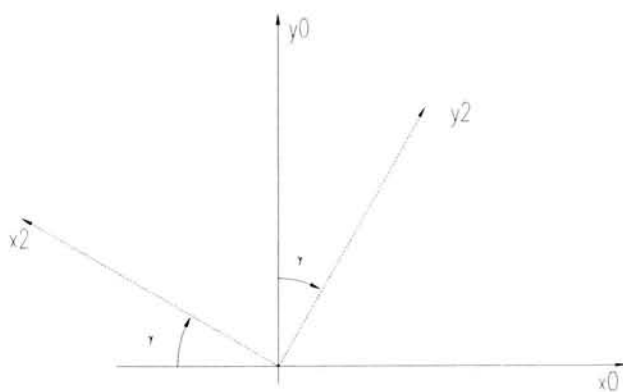


$$\begin{bmatrix} T_{S_0/S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{S_0/S_1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\{R\}_{S_1} = \{R\}_{S_0} \begin{bmatrix} T_{S_0/S_1} \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} R^{x_0} \cos \alpha + R^{y_0} \sin \alpha \\ -R^{x_0} \sin \alpha + R^{y_0} \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

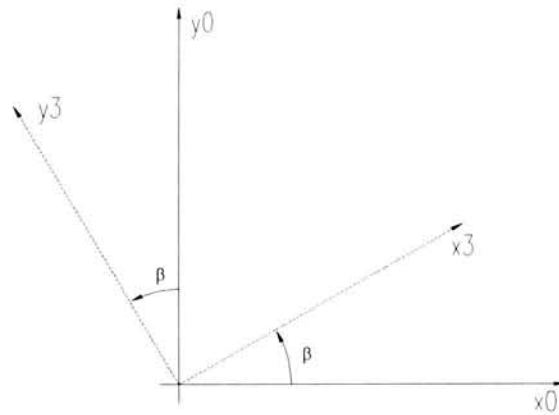
Corpo 2:



$$\begin{bmatrix} T_{S_0/S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{S_0/S_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

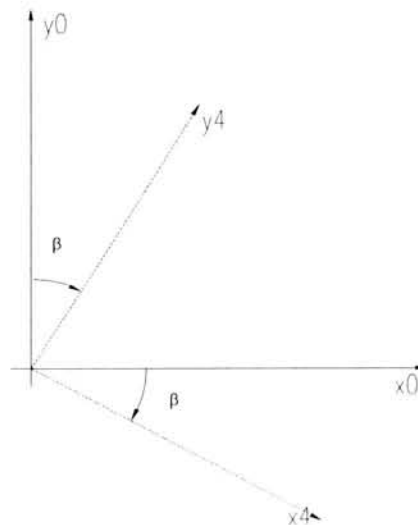
$$\{R\}_{S_2} = \{R\}_{S_0} \begin{bmatrix} T_{S_0/S_2} \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} -R^{x_0} \cos \gamma + R^{y_0} \sin \gamma \\ R^{x_0} \sin \gamma + R^{y_0} \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

Corpo 3:

$$\begin{bmatrix} T_{S0/S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{S0/S3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\{R\}_{S3} = \{R\}_{S0} \begin{bmatrix} T_{S0/S3} \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} R^{x0} \cos \beta + R^{y0} \sin \beta \\ -R^{x0} \sin \beta + R^{y0} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Corpo 4:

$$\begin{bmatrix} T_{S0/S4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{S0/S4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\{R\}_{S4} = \{R\}_{S0} \begin{bmatrix} T_{S0/S4} \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} R^{x0} \cos \beta - R^{y0} \sin \beta \\ R^{x0} \sin \beta + R^{y0} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Apresenta-se de seguida a tabela com as forças nos seus respectivos sistema de eixos. Tal tabela representa os esforços a que cada corpo (ou componente) está sujeito, o que é muito útil para o seu dimensionamento.

TABELA DOS ESFORÇOS DE CADA COMPONENTE

α	RAx	RAY	RBx	RBy	Mo	RBx	RBy	RC2x	RC2y	RC3x	RC3y	RDx	RDy	RC4x	RC4y	REx	REy	REx	REy	Me	
0	-880	226	-263	210	7	273	198	-594	113	5230	1447	5225	1186	5217	-1199	5518	-514	1159	-5419	1159	-160
15	-894	378	-282	363	11	397	232	-434	369	5351	1399	5362	1146	5086	-1183	5353	-495	1038	-5275	1038	-145
30	-858	484	-250	470	14	495	196	-202	556	5310	1187	5350	973	4818	-1047	4990	-418	810	-4941	810	-116
45	-743	506	-139	494	15	493	142	5	681	5194	872	5267	715	4530	-808	4582	-305	551	-4559	551	-82
60	-579	364	23	356	11	339	111	104	754	5068	495	5166	406	4311	-479	4259	-171	315	-4250	315	-49
75	-472	18	129	13	0	18	128	55	785	4975	68	5084	56	4207	-74	4100	-21	120	-4098	120	-20
90	-542	-486	58	-486	-15	-446	202	-144	784	4939	-411	5045	-337	4235	388	4144	147	-45	-4147	-45	8
105	-860	-1020	-259	-1015	-31	-997	323	-455	759	4975	-944	5062	-774	4388	880	4389	337	-205	-4398	-205	37
120	-1404	-1426	-802	-1418	-43	-1561	467	-812	712	5072	-1509	5131	-1237	4634	1359	4785	539	-377	-4800	-377	70
135	-2069	-1575	-1464	-1564	-47	-2060	586	-1141	634	5195	-2042	5227	-1675	4912	1776	5233	729	-558	-5254	-558	107
150	-2706	-1410	-2098	-1396	-42	-2439	633	-1390	517	5293	-2463	5303	-2019	5149	2081	5616	877	-718	-5639	-718	140
165	-3186	-961	-2574	-945	-29	-2680	580	-1545	354	5318	-2707	5316	-2219	5291	2249	5846	962	-820	-5867	-820	162
180	-3427	-318	-2811	-301	-9	-2794	432	-1623	151	5249	-2759	5244	-2262	5319	2285	5892	980	-840	-5914	-840	166
195	-3390	403	-2770	419	12	-2793	216	-1640	-78	5092	-2644	5094	-2168	5247	2209	5775	940	-777	-5799	-777	153
210	-3073	1082	-2448	1096	33	-2682	-30	-1603	-317	4864	-2399	4877	-1967	5100	2043	5534	856	-648	-5562	-648	126
225	-2501	1598	-1873	1610	48	-2454	-274	-1503	-548	4575	-2059	4604	-1688	4904	1798	5212	738	-478	-5242	-478	91
240	-1746	1843	-1116	1851	55	-2106	-487	-1332	-758	4234	-1651	4285	-1353	4683	1483	4850	594	-289	-4877	-289	54
255	-940	1744	-308	1749	52	-1653	-649	-1098	-931	3863	-1207	3939	-990	4461	1111	4493	436	-99	-4513	-99	18
270	-266	1320	366	1320	40	-1150	-744	-842	-1048	3522	-766	3622	-628	4274	709	4201	279	87	-4209	87	-15
285	102	710	734	706	21	-683	-756	-632	-1087	3319	-351	3434	-288	4176	307	4054	135	276	-4047	276	-45
300	94	138	725	130	4	-317	-664	-519	-1020	3375	50	3485	41	4232	-84	4133	-5	481	-4105	481	-75
315	-207	-190	421	-201	-6	-67	-462	-508	-830	3741	479	3822	392	4473	-468	4469	-158	708	-4416	708	-105
330	-575	-189	49	-203	-6	82	-192	-567	-537	4315	923	4354	757	4825	-818	4959	-322	943	-4879	943	-134
345	-802	15	-182	-1	0	174	53	-627	-201	4873	1281	4879	1050	5123	-1077	5375	-454	1120	-5277	1120	-155
360	-880	226	-263	210	7	273	198	-594	113	5230	1447	5225	1186	5217	-1199	5518	-514	1159	-5419	1159	-160

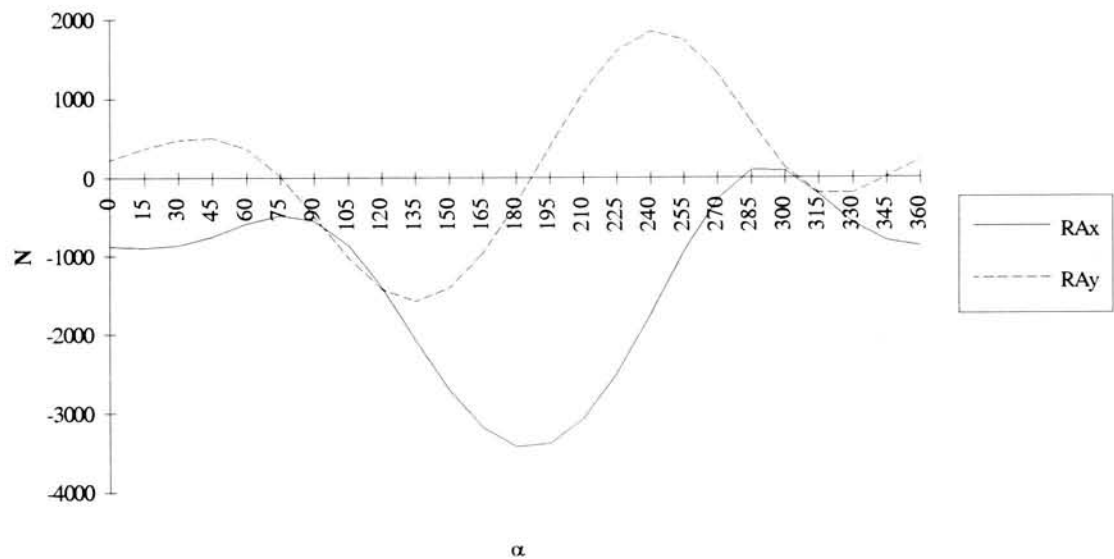
Graus	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

GRÁFICOS

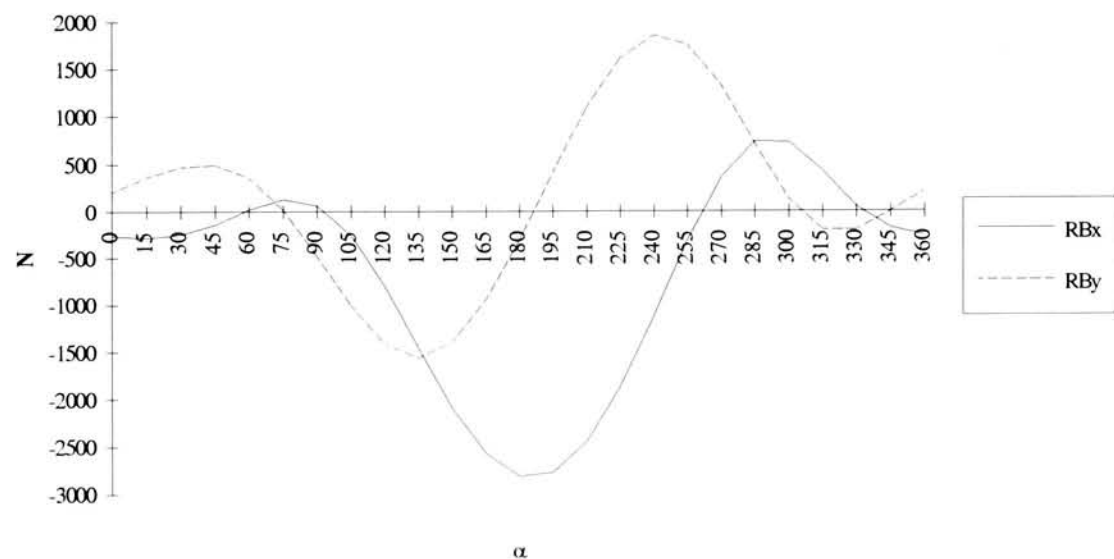
Serão apresentados de seguida os gráficos correspondentes às forças e momentos aplicados em cada elemento do sistema

CORPO 1

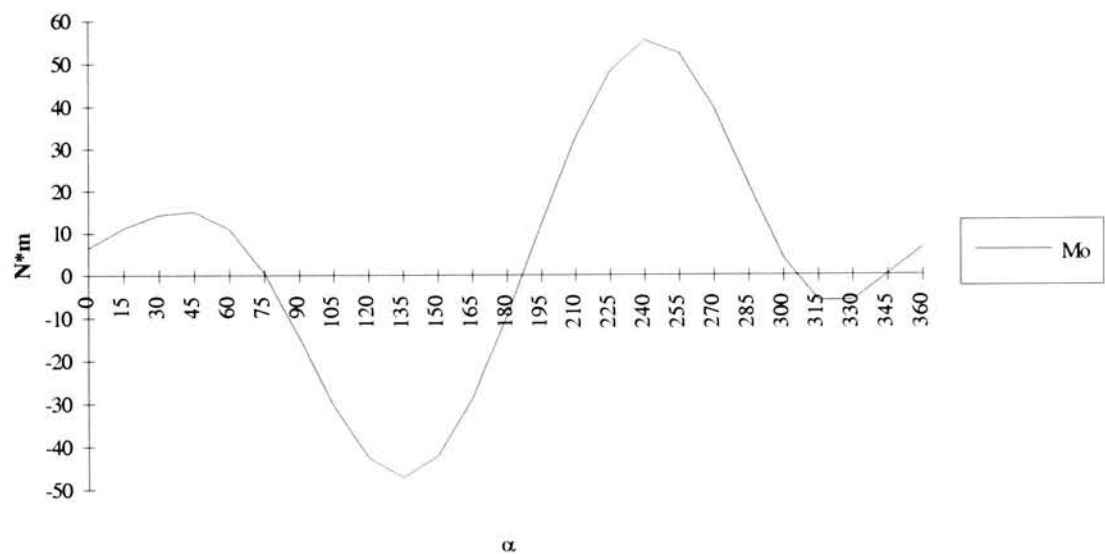
Valor de Ra no Sistema Ligado ao Corpo1



Valor de Rb no Sistema Ligado ao Corpo1

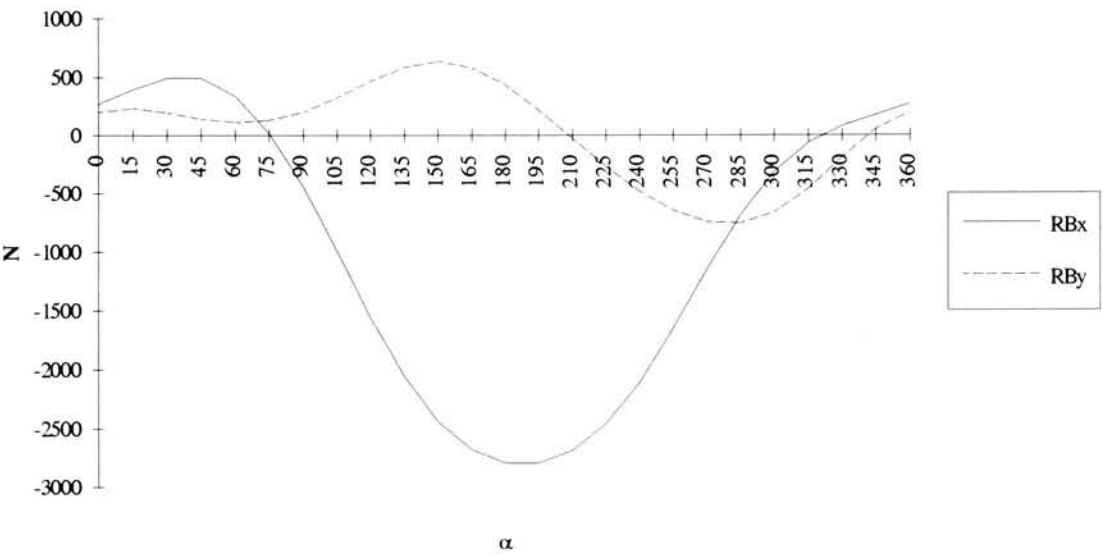


Valor do Momento a Aplicar no Sistema

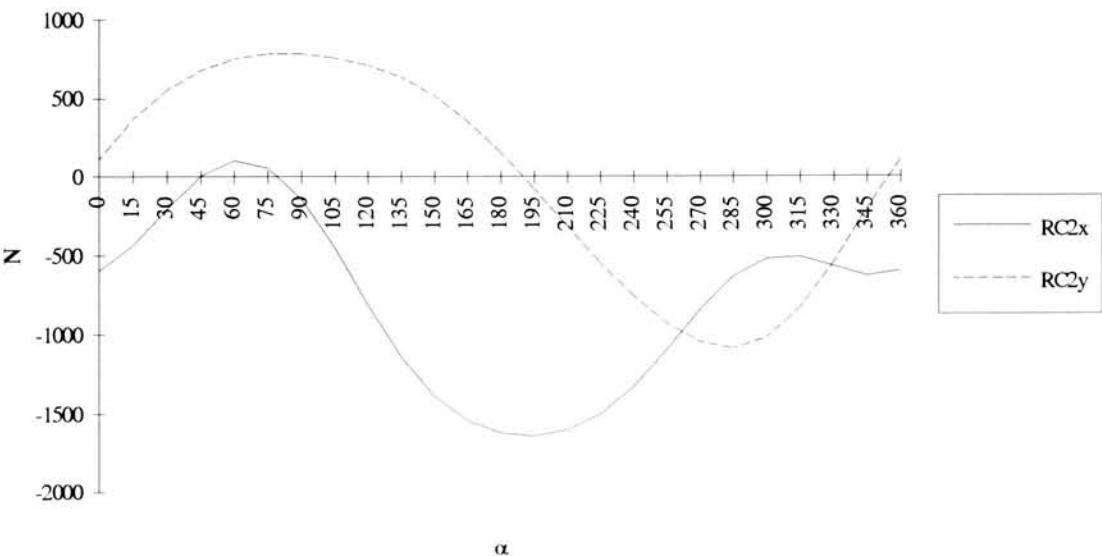


CORPO 2

Valor de Rb Ligado ao Corpo 2

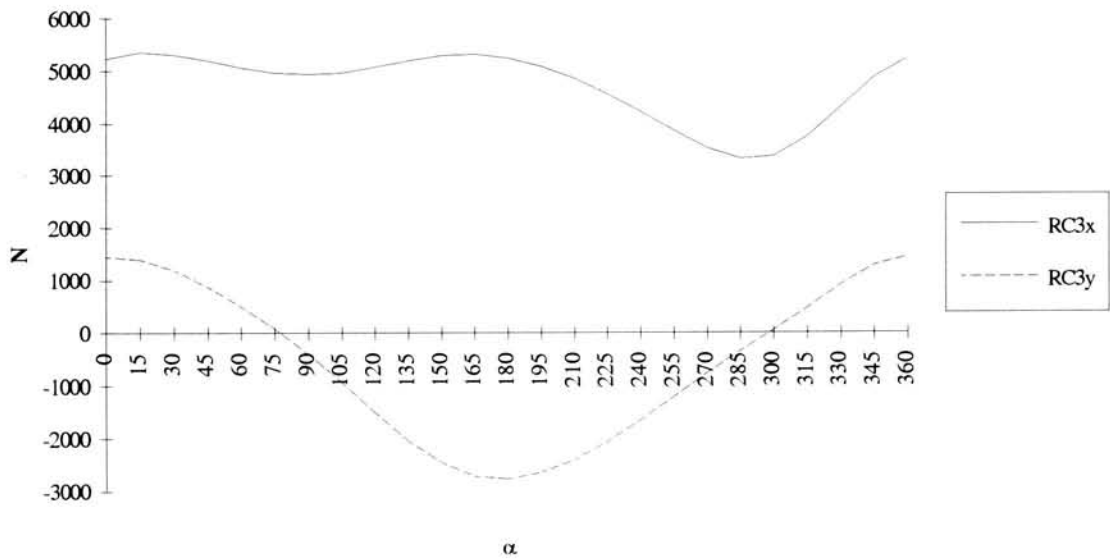


Valor de Rc Ligado ao Corpo2

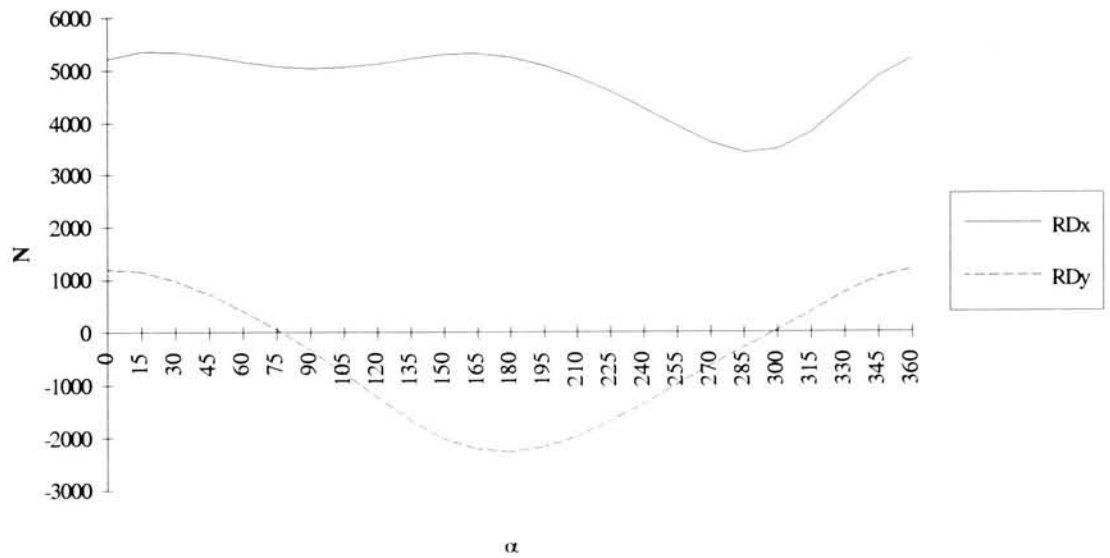


CORPO 3

Valor de Rc Ligado ao Corpo 3

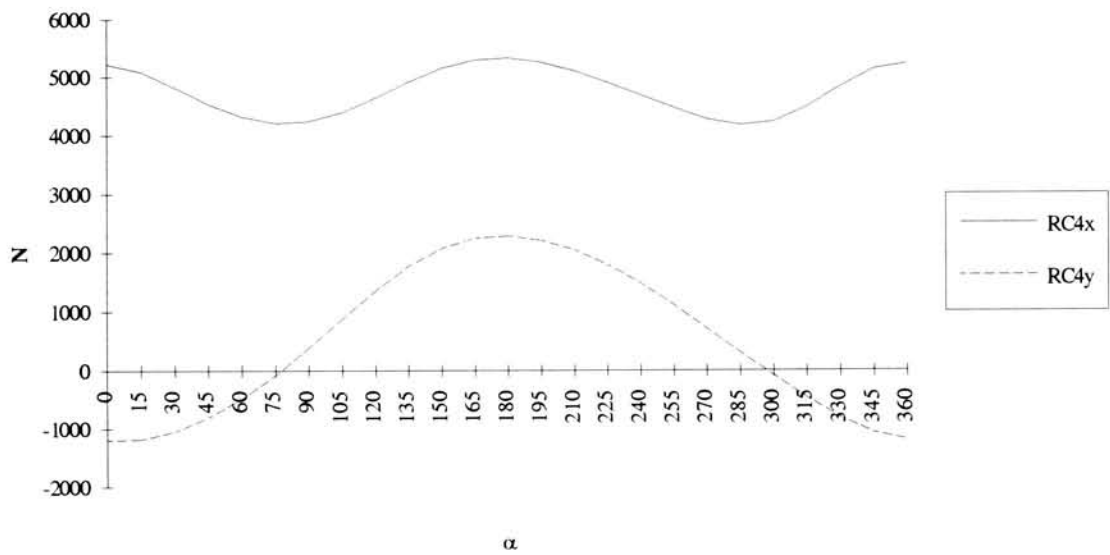


Valor de Rd Ligado Corpo 3

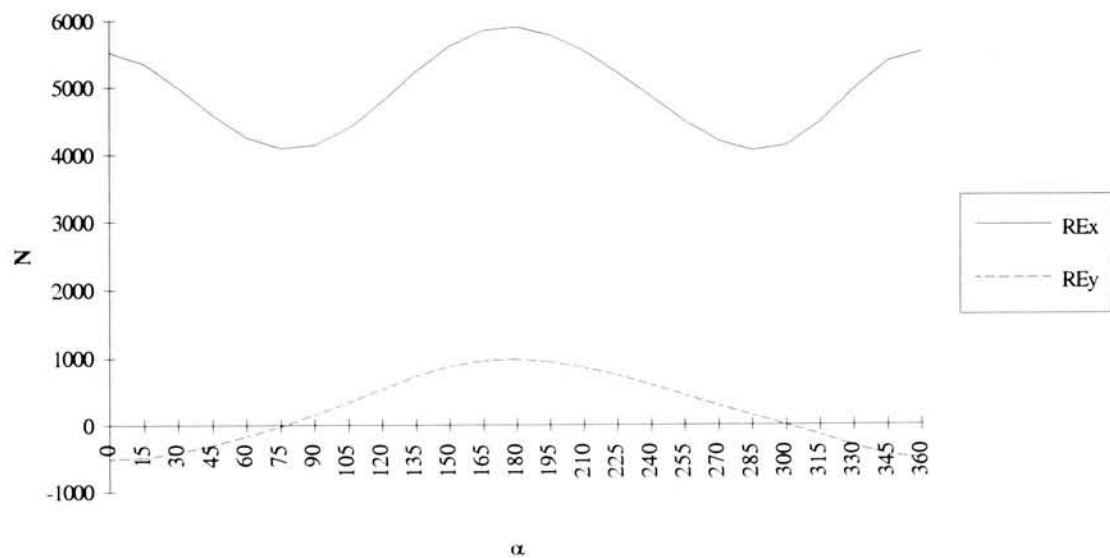


CORPO 4

Valor de Rc Ligado ao Corpo 4

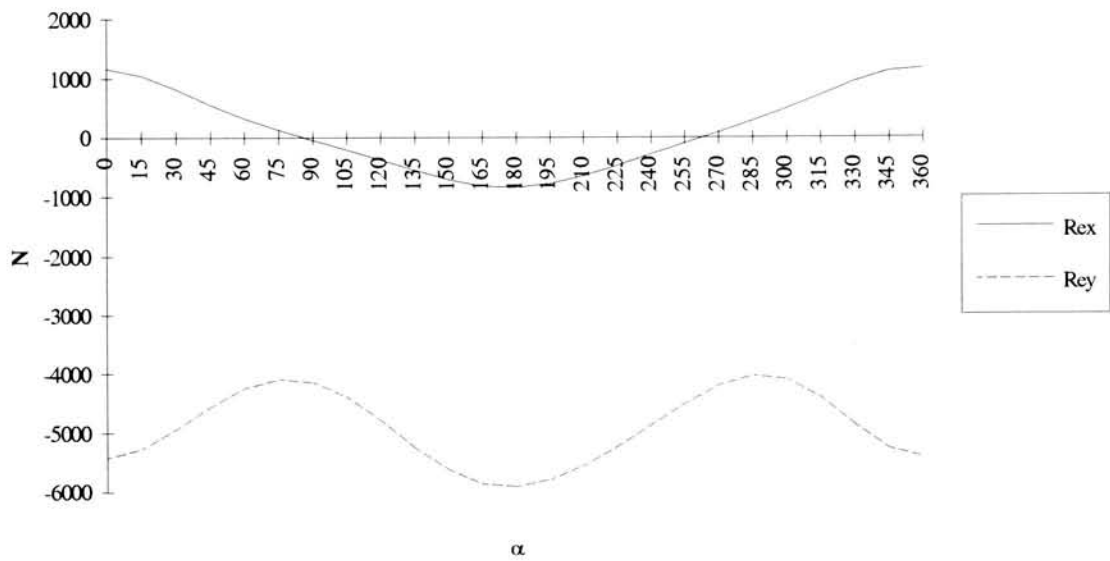


Valor de Re Ligado ao Corpo 4

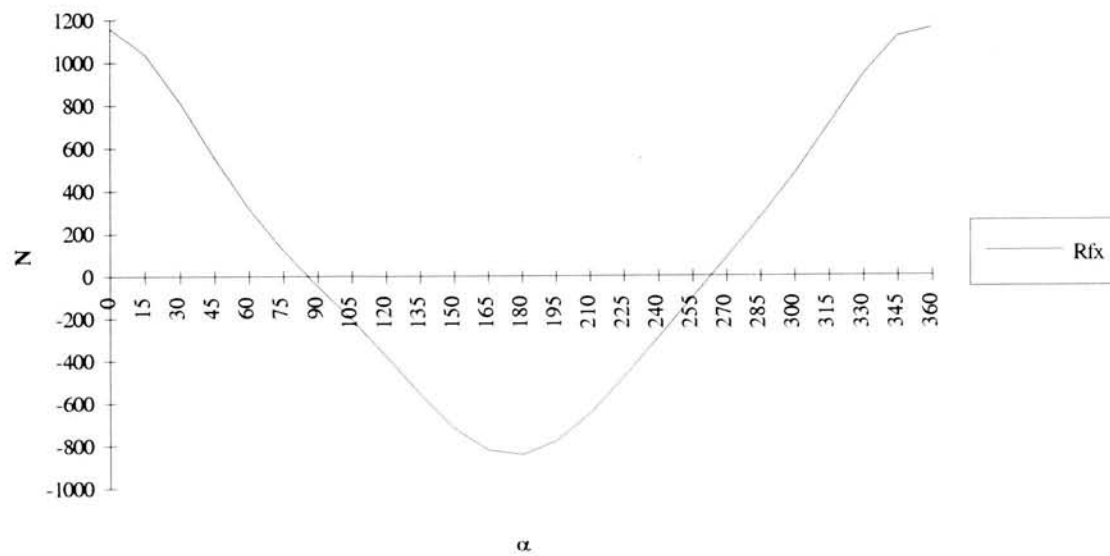


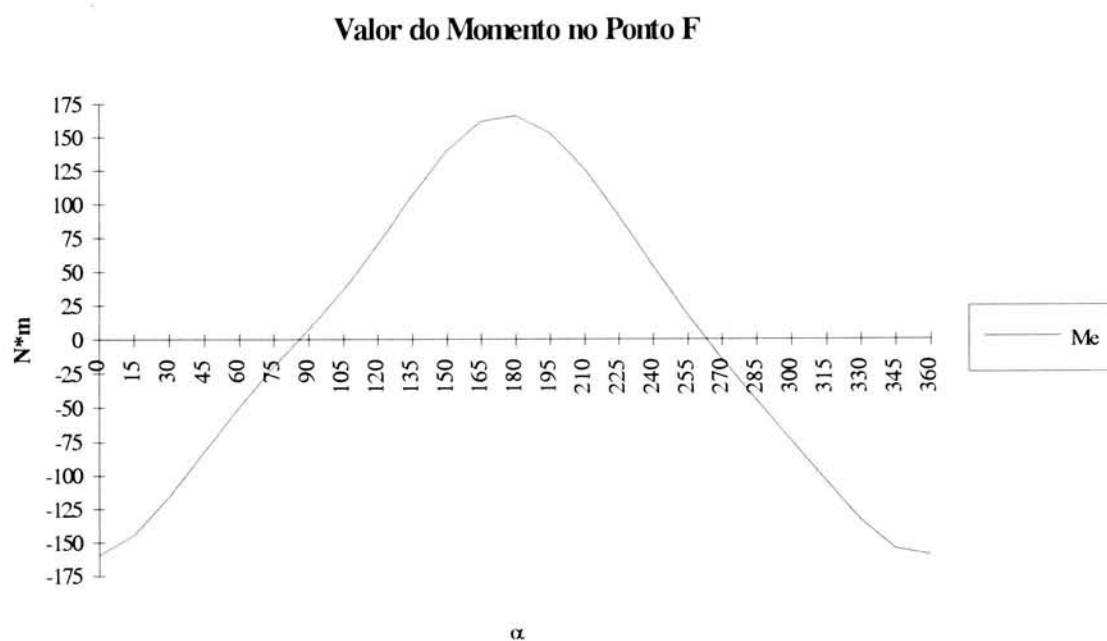
CORPO 5

Valor de Re Ligado ao Corpo 5



Valor de Rf Ligado ao Corpo 5





Assim temos os respectivos valores das forças nos respectivos corpos, realizando assim o dimensionamento dos respectivos elementos do sistema.

*DIMENSIONAMENTO
DOS
COMPONENTES*

DIMENSIONAMENTO DOS COMPONENTES

O dimensionamento dos elementos utilizados no sistema não será realizado no sentido estrito da palavra, uma vez que, para todo o raciocínio até aqui desenvolvido, foi necessário estimar valores de ordem geométrica, como dimensões e formas empregues nos respectivos componentes.

Assim este capítulo terá como função principal uma verificação no ponto de vista da Resistência de Materiais, bem como o emprego dos critérios de dimensionamento sob o ponto de vista da fadiga. Tais critérios foram desenvolvidos no âmbito da cadeira de Órgãos de Máquinas e Anteprojecto ministrada nesta licenciatura no 4º ano.

Outro aspecto que importa salientar encontra-se no facto dos elementos constituintes deste sistema estarem em equilíbrio estático. Tal facto deve-se ao movimento de cada corpo no decorrer do movimento do sistema, como era de se esperar.

Então realizou-se uma simplificação que consiste em considerar cada elemento sujeito a uma solitação cíclica, em que a tensão máxima corresponde ao máximo de uma das forças actuantes sobre o elemento e uma tensão mínima a que corresponde por sua vez a actuação da outra força sobre o respectivo elemento.

Assim tomando o corpo 2 como exemplo temos que para o ângulo $\alpha = 180^\circ$ a força máxima actuante é 2,79 kN à compressão, sendo agora para o ângulo $\alpha = 195^\circ$ a força máxima corresponde a 1,64 kN. Então consideramos para estes valores máximos correspondem as tensões máximas e mínimas.

Aplicando de seguida o Critério de Soderberg que nos diz:

$$\frac{K_t \sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ced}} = \frac{1}{N}$$

Em que:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{comp} + \sigma_{trac}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{comp} - \sigma_{trac}}{2}$$

$$\sigma_f = 0,5 \sigma_{ced} \text{ (tensão limite de fadiga)}$$

$$\sigma_{ced} = 235 \text{ MPa}$$

Resolvendo em ordem a N (coeficiente de segurança) temos:

$$N = \frac{I}{\frac{K_t \sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ced}}}$$

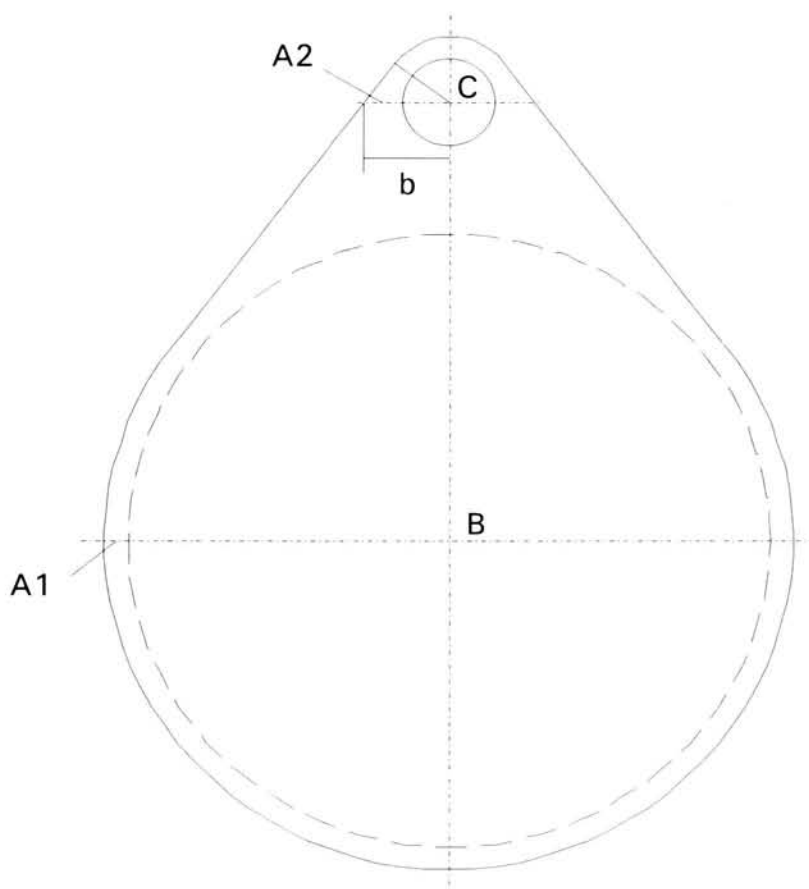
Após esta explicação do método utilizado iremos apresentar uma tabela a que corresponde aos esforços máximos encontrados em cada elemento, bem como o ângulo em que ocorre tal esforço, temos então:

Corpo	α (°)	Ponto	Tipo Solic.	kN
1	180	A	+	3,43
	15	A	-	0,89
	195	B	-	2,77
	285	B	+	0,734
2	180	B	-	2,79
	45	B	+	0,50
	195	C	+	1,64
	60	C	-	0,10
3	15	C	+	5,35
	--	C	---	---
	--	D	---	---
	30	D	-	5,35
4	180	C	+	5,32
	--	C	---	---
	--	E	---	---
	180	E	-	5,89
5	180	E	+	5,91
	--	E	---	---
	180	F	-	0,84
	--	F	---	---

CORPO 1

Devido as dimensões que este apresenta , considera-se que o mesmo absorve de forma favorável os esforços nele actuante.

Sendo apenas realizada a verificação aos parafusos nele instalados para ligação da "rampa" ao corpo. Tal se realizasse-a mais a frente deste relatório quando do calculo dos pinos de ligação dos componentes.

CORPO 2

Coma a tabela atrás referida indica para os respectivos pontos B e C temos:

B	$F_{\text{máx (comp)}} = 2,79 \text{ kN}$	$A2 = 5E-3 * 24E-3 = 1,2E-4 \text{ m}^2$
	$F_{\text{máx (tracç)}} = 0,50 \text{ kN}$	
C	$F_{\text{máx (comp)}} = 0,10 \text{ kN}$	$A3 = \frac{R}{\cos \alpha} - R_{\text{furo}} = \frac{15E-3}{\cos 36,869} - 10E-3 = 2,1E-3 \text{ m}^2$
	$F_{\text{máx (tracç)}} = 1,64 \text{ kN}$	

Assim iremos verificar para o ponto B:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-2,79\text{E}3}{2*1,2\text{e}-4} = -11,62 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0,50\text{E}3}{2*1,2\text{e}-4} = 2,08 \text{ MPa}$$

Com estes valores obtemos:

$$\sigma_m = \frac{(-11,62 + 2,08)}{2} = -4,77 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{(11,62 + 2,08)}{2} = 6,85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 117,5 \text{ MPa}$$

$$K_t = 1$$

$$N = \frac{1}{\frac{6,85}{117,5} + \frac{4,77}{235}} = 12,72$$

Assim iremos verificar para o ponto C:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1,64\text{E}3}{2*2,1\text{e}-4} = 3,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-0,10\text{E}3}{2*2,1\text{e}-4} = -0,28 \text{ MPa}$$

Com estes valores obtemos:

$$\sigma_m = \frac{(3,9 - 0,28)}{2} = 1,81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{(3,9 + 0,28)}{2} = 2,09 \text{ MPa}$$

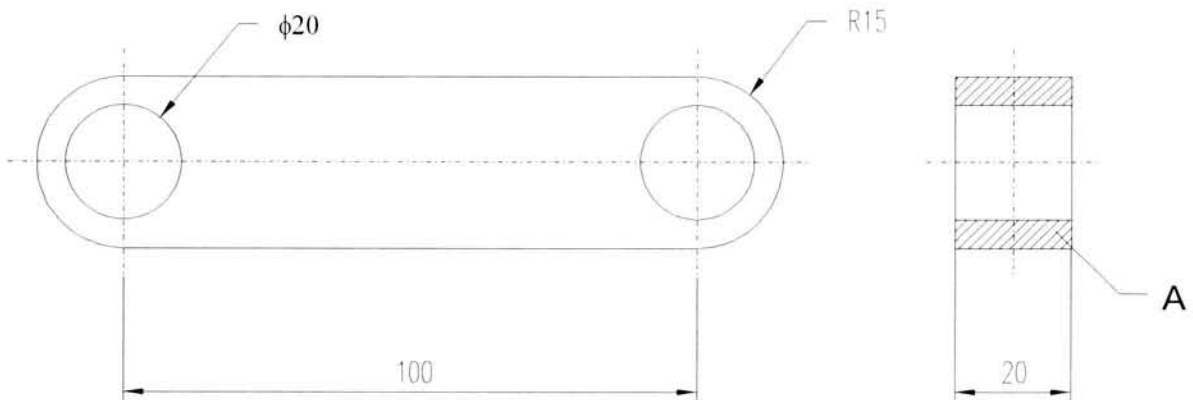
$$\sigma_a = 117,5 \text{ MPa}$$

$$K_t = 2$$

$$N = \frac{1}{\frac{2*(2,09)}{117,5} + \frac{1,81}{235}} = 23,1$$

CORPO 3 e 4

NOTA: Estas duas peças são geométrica idênticas.



$$A = (20E - 3 * 5E - 3) = 1E - 4 \text{ m}^2$$

CORPO 3

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5,35E3}{2 * 2,1E-4} = 26,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-5,35E3}{2 * 1E-4} = -26,75 \text{ MPa}$$

Com estes valores obtemos:

$$\sigma_m = 0$$

$$\sigma_a = \frac{(26,75 + 26,75)}{2} = 26,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 117,5 \text{ MPa}$$

$$K_t = 2$$

$$N = \frac{1}{\frac{2 * (26,75)}{117,5}} = 2,196$$

CORPO 4

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5,32E3}{2 * 2,1e-4} = 26,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-5,89E3}{2 * 1E-4} = -29,45 \text{ MPa}$$

Com estes valores obtemos:

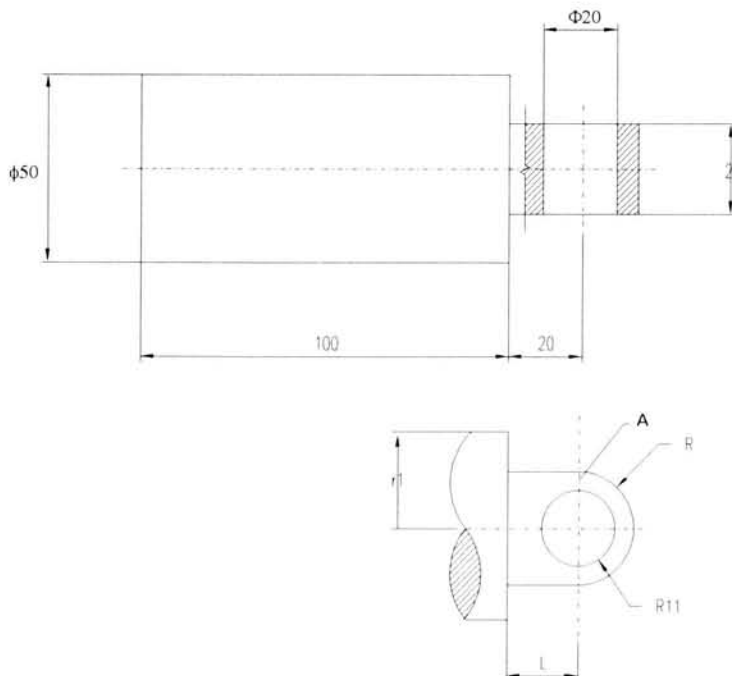
$$\sigma_m = \frac{(-29,45 + 26,6)}{2} = -1,425$$

$$\sigma_a = \frac{(29,45 + 26,6)}{2} = 28,025 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 117,5 \text{ MPa}$$

$$K_t = 2$$

$$N = \frac{1}{\frac{2 * (28,025)}{117,5} + \frac{1,425}{235}} = 2,07$$

CORPO 5

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5,91\text{E}3}{2 * 2,1\text{e}-4} = 29,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{-0,84\text{E}3}{2 * 1\text{E}-4} = -4,2 \text{ MPa}$$

Com estes valores obtemos:

$$\sigma_m = \frac{(29,55 - 4,2)}{2} = 27,45$$

$$\sigma_a = \frac{(29,45 + 26,6)}{2} = 16,875 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 117,5 \text{ MPa}$$

$$K_t = 2$$

$$N = \frac{1}{\frac{2 * (16,875)}{117,5} + \frac{27,45}{235}} = 2,47$$

Conseguimos em termos médios um bom resultado com os coeficientes de segurança, tendo o mesmo um valor médio de 7,5. Não é então necessário realizar qualquer rearranjo de ordem dimensional.

DIMENSIONAMENTO DAS PEÇAS CILINDRICAS

Nesta fase realizou-se o dimensionamento das peças cilíndricas sujeitas ao esforço de corte. Tais peças serão os pinos de ligação dos vários elementos do sistema, bem como dos parafusos utilizados para ligação da peça 1 da "rampa" de deslizamento do fuso que será o responsável pela variação da excentricidade pretendida neste mecanismo.

Assim recorremos ao seguinte raciocínio:

$$\tau = \frac{F_{\text{corte}}}{A}$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\sigma^2 + 3\tau^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_{\text{rd}}$$

Como desprezamos o esforço de tracção que neste caso será inferior ao de corte, temos então:

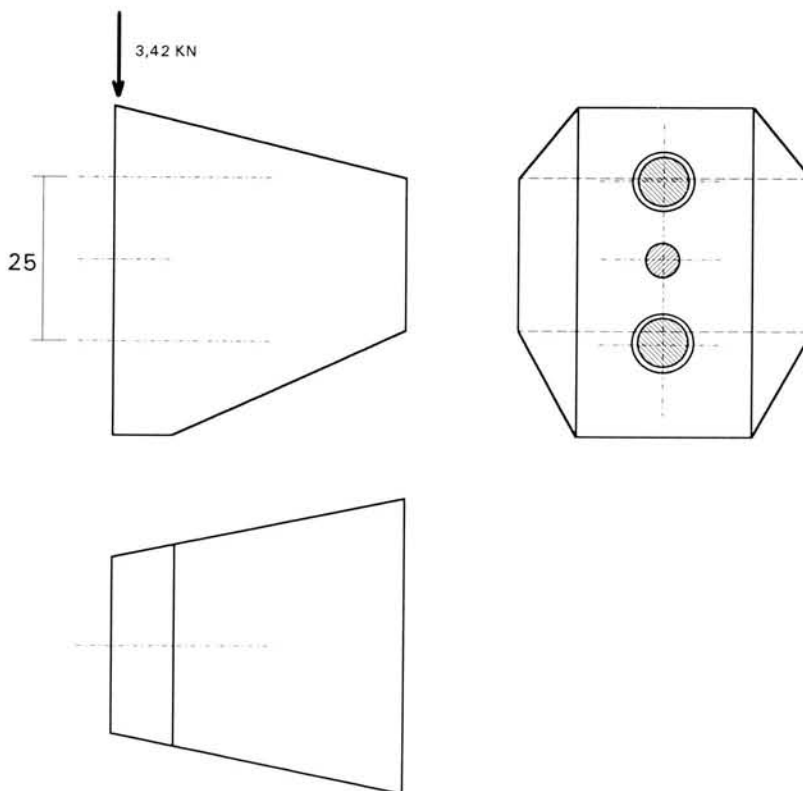
$$\sigma_{\text{eq}} = \left(3\tau^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_{\text{rd}}$$

Sendo:

$$\sigma_{\text{rd}} = 235 \text{ MPa}$$

PARAFUSOS E PINO DA PEÇA 1

Como configuração da referida peça temos:



Assim temos:

$$F_{\text{corte}} = 3,42 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F_{\text{corte}}}{\text{Area}} = \frac{3,42 \text{ E}3}{A}$$

$$\sigma_{\text{eq}} = (3\tau^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3(3,42 \text{ E}3)^2}{A} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{5924}{A}$$

$$\frac{5924}{A} \leq 235 \text{ E}6 \Rightarrow A \geq \frac{5924}{235 \text{ E}6} = 2,52 \text{ E} - 5 \text{ m}^2$$

$$A = \frac{\pi \phi^2}{4} \Rightarrow \phi = \left(\frac{4A}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \phi \geq 5,665 \text{ mm}$$

Como tínhamos admitido que esta ligação seria realizada com parafusos M10 e um pino de 6mm, podemos concluir que o pino por si só resistirá ao carregamento.

Quanto aos parafusos, estes terão como finalidade manter o conjunto solidário, bem absorver qualquer esforço de tracção, que neste raciocínio não contemplado.

PINO DE FIXAÇÃO DOS ELEMENTOS DO SISTEMA

Para este componente, vamos considerar como força aplicada a máxima força resultante de todas as forças aplicadas nas articulações do sistema.

Assim iremos utilizar o mesmo tipo de pino de ligação, bem como de dimensões idênticas para todas as ligações.

Temos então:

$$F_{\text{max}} = 5,967 \text{ kN para } \alpha = 165^\circ$$

$$\tau_{\text{ced}} = 135 \text{ MPa (aço de construção)}$$

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_{\text{ced}}}{N} = \frac{135 \text{ E}6}{4} = 33,75 \text{ MPa}$$

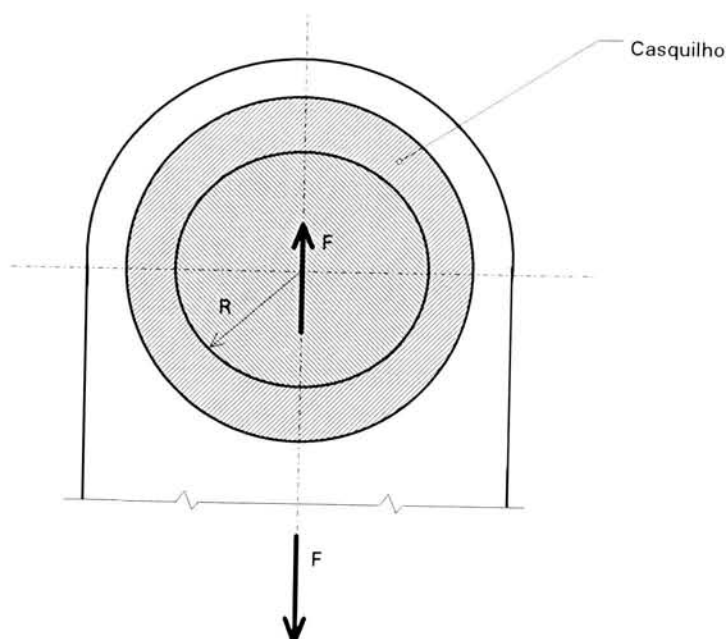
Assim realizando os cálculos temos:

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{F_{\text{max}}}{\frac{\pi \phi^2}{4}} \Rightarrow \phi = \left(\frac{4 * F_{\text{max}}}{\tau_{\text{adm}} * \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = 15 \text{ mm}$$

Devido ao movimento relativo entre os pinos de fixação e os respectivos elementos do sistema, vão ser usados casquilhos, para facilitar tal movimento, bem como para protecção dos elementos intervenientes. Esses casquilhos terão que obdecer às dimensões dos elementos, bem como às dimensões dos pinos calculados anteriormente. Serão verificados para as dimensões abaixo indicadas.

Esta verificação será uma simplificação discutida com o coordenador de projecto, Eng^o Paulo Tavares de Castro, e tem como base o seguinte raciocínio:



Admitindo: $\sigma_{adm}|_{Bronze} \geq \frac{F_{max}}{2 * R_{int} * esp}$

Teremos então:

$$\phi_{int} = 15 \text{ mm}$$

$$\phi_{ext} = 20 \text{ mm}$$

Comparando com a $\sigma_{adm}|_{Bronze}$, temos então:

$$\sigma_{adm}|_{Bronze} \geq \frac{F_{max}}{2 * R_{int}} = \frac{5,967E3}{2 * 7,5E - 3 * 20E - 3} = 19,89 \text{ MPa}$$

Que seguramente será inferior $\sigma_{adm}|_{Bronze}$.

Assim com o resultado indicado acima, podemos desde já afirmar que os referidos casquilhos terão resistência suficiente para a função a desempenhar.

É de interesse salientar que ainda surgiu a hipótese dos referidos casquilhos serem em material compósito, mas em impressões trocadas com o Eng^o Fernando Ferreira este indicou que a vida útil de tal elemento seria muito baixa, tal conclusão foi retirada quando da realização do seu Projecto de Construção Mecânica. Assim como o objectivo deste mecanismo será a realização de ensaios a fadiga optou-se por esta solução.

*CONSIDERAÇÕES
SOBRE O
PROJECTO*

NOTA: Este capítulo deve-se ao facto de nem todos os componentes a serem utilizados neste projecto se encontrarem devidamente definidos. Assim apresentamos como Considerações sobre o Projecto, considerações, sobre aqueles elementos, bem como certas curiosidades.

DETERMINAÇÃO DA POTÊNCIA DO MOTOR A UTILIZAR

A potência do motor de accionamento, que será eléctrico, foi determinada com base no gráfico abaixo. Este foi elaborado quando do desenvolvimento da Análise Dinâmica do Sistema, anteriormente descrita.

Assim determinada a área do referido gráfico, por intermédio de uma integração, que neste caso foi com base na teoria do Integral de Simpson, que nos refere que:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Em que:

h - intervalo de cada ponto considerado

Recorrendo ao cálculo automático por uma folha de cálculo temos:

α	Mo				
0	7	y_0	=	7	
15	11	$4*y_1$	=	44,473	$h = (2*\pi-0)/24 = 0,261799$
30	14	$2*y_2$	=	28,633	
45	15	$2*y_3$	=	30,004	
60	11	$2*y_4$	=	21,582	$Meq. = As = (h/3)* Soma$
75	0	$2*y_5$	=	0,9244	
90	-15	$2*y_6$	=	-29,139	
105	-31	$2*y_7$	=	-61,046	$Meq. = 19,024 \text{ N*m}$
120	-43	$2*y_8$	=	-85,331	
135	-47	$2*y_9$	=	-94,166	
150	-42	$2*y_{10}$	=	-84,179	$Pot = Meq* w = 2,9884 \text{ kW}$
165	-29	$2*y_{11}$	=	-57,171	
180	-9	$2*y_{12}$	=	-18,577	
195	12	$2*y_{13}$	=	24,662	
210	33	$2*y_{14}$	=	65,314	
225	48	$2*y_{15}$	=	96,225	
240	55	$2*y_{16}$	=	110,81	
255	52	$2*y_{17}$	=	104,79	
270	40	$2*y_{18}$	=	79,204	
285	21	$2*y_{19}$	=	42,497	
300	4	$2*y_{20}$	=	8,0185	
315	-6	$2*y_{21}$	=	-11,735	
330	-6	$2*y_{22}$	=	-11,755	
345	0	$4*y_{23}$	=	0,8838	
360	7	y_{24}	=	7	
		Soma =	218		

Obtemos assim um valor de potência a fornecer ao sistema de 3 kW. Como se pode verificar tal componente não está escolhido, tal facto explica-se por não ter sido possível a consulta de um catálogo adequado. No entanto foi tomado o cuidado de se ter escrito na Lista de Peças, que tal componente está por definir, bem como que a potência mínima requerida é de 3 kW.

VARIAÇÃO DO VALOR MÁXIMO DO ACTUADOR

Como nos podemos aperceber pela tabela apresentada, só com os valores máximos, bem como pelo gráfico, o valor máximo do deslocamento do actuador varia, não apresentando um valor máximo fixo para uma volta completa do sistema. Tal facto deve-se ao tipo de mecanismo aqui apresentado que a primeira vista seria simétrico, mas na realidade não o é. Tal deve-se ao corpo 4, que em nenhum instante tem um ponto fixo, nem fisicamente, nem materialmente, o mesmo acontecendo com o corpo 2 (Biela).

Esta situação poderá ter ocorrido devido às folhas de cálculo terem uma precisão com várias casas decimais, e terem sido introduzidos erros de aproximação, mas desde de já tal hipótese não nos parece com validade.

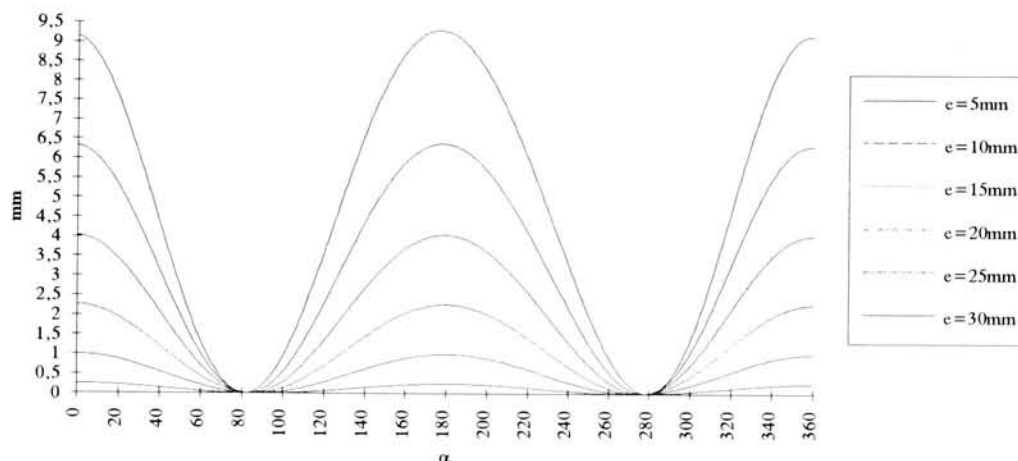
Devido a este efeito realizou-se um raciocínio de contabilizar esta variação relativa (se assim a pudermos chamar). Tal raciocínio foi de interpretarmos o valor máximo "máximo" como sendo 100%, o valor máximo "mínimo" de x , sendo uma % relativamente ao valor máximo "máximo". Nasce assim a tabela com as diferenças relativas.

Esta análise foi realizada para podermos ter uma contabilização da respectiva variação, pois se a mesma fosse de valores elevados poderia desde já comprometer a solução apresentada, uma vez que o que é desejado é a aplicação de uma carga cíclica de amplitude constante.

Temos então os valores do deslocamento do actuador para diferentes valores de excentricidade, para uma volta completa do sistema, tais valores correspondem apenas aos respectivos valores máximos.

O gráfico abaixo a variação do respectivo valor com o valor da excentricidade.

Valor do Deslocamento pela Variação da Excentricidade



Excentricidade						
α	5 mm	10 mm	15 mm	20 mm	25 mm	30 mm
0	0,250148614	1,002260197	2,260862281	4,032525835	6,325030024	9,14647824
2	0,249806724	1,000564132	2,255895408	4,020895539	6,30126254	9,10238238
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
168	0,239995245	0,965535029	2,190885153	3,939784586	6,248282593	9,16927336
170	0,243091961	0,977115517	2,214828298	3,977971944	6,299907675	9,229773773
172	0,24564054	0,986586435	2,234183772	4,008241701	6,339475685	9,273304676
174	0,247629606	0,993910475	2,248888632	4,030524271	6,366953333	9,29994401
176	0,249050324	0,999059443	2,258898412	4,044779649	6,382348515	9,309820882
178	0,249896436	1,002014314	2,264187016	4,050996788	6,385708599	9,303111942
180	0,250164278	1,002765247	2,264746569	4,049192932	6,377118703	9,280037896
182	0,2498528	1,001311574	2,260587207	4,039412898	6,356699988	9,240860185
184	0,24896356	0,997661756	2,251736837	4,021728339	6,324607983	9,185877875
186	0,24750072	0,991833311	2,238240854	3,996236977	6,281030967	9,115424772
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
350	0,242333645	0,97066072	2,190789002	3,913138909	6,15222422	8,926161977
352	0,245145245	0,982239777	2,217286974	3,960458752	6,225502325	9,0291493
354	0,247342249	0,99122968	2,237632666	3,996202276	6,27960543	9,102840623
356	0,248913304	0,997582547	2,251717699	4,020186394	6,314283006	9,146962308
358	0,249850341	1,001265376	2,259471655	4,032304415	6,329418995	9,161457066
360	0,250148614	1,002260197	2,260862281	4,032525835	6,325030024	9,14647824

máx.(max)

máx.(min)

Grau	mm	mm	mm	mm	mm	mm
------	----	----	----	----	----	----

Dif (%)	Dif (%)	Dif (%)	Dif (%)	Dif (%)	Dif (%)
0,01	0,15	0,17	0,46	0,88	1,59
var (%)	var (%)	var (%)	var (%)	var (%)	var (%)
99,99	99,85	99,83	99,54	99,12	98,41

Varição do valor máximo atingido

Verificamos que na situação mais desfavorável o deslocamento atinge um valor de 98,41% do valor máximo obtido, podendo desde já afirmar que a análise numérica até aqui realizada teríamos uma solução satisfatória para este tipo de mecanismo.

Gostaria de concluir este trabalho indicando que muitos dos componentes pertencentes a este projecto foram de certa forma atribuídos tanto pela experiência pessoal (que de certa de forma é relativamente pequena), quer por serem, do meu ponto de vista funcionais.

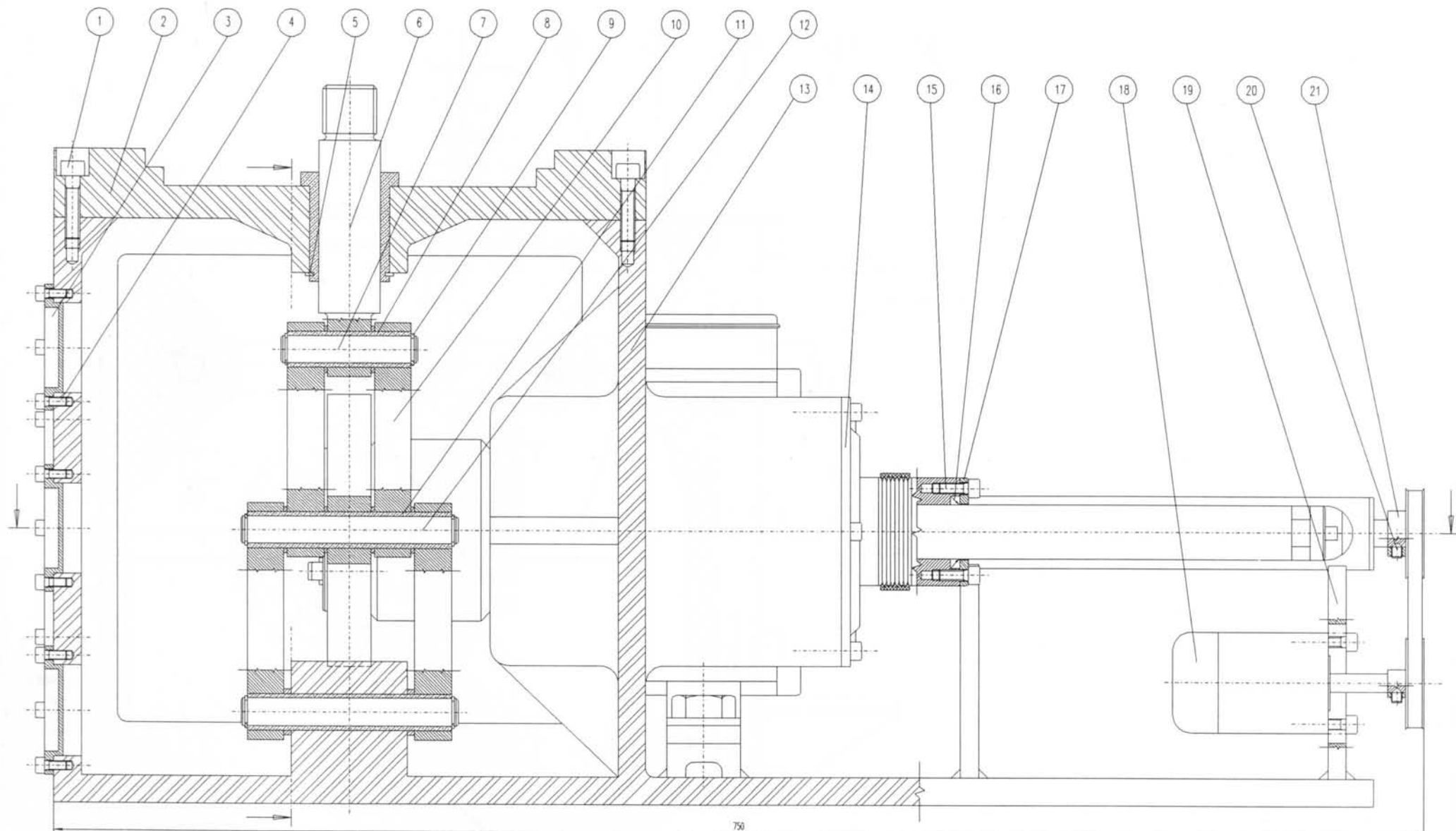
Certos elemento foram considerados como não fazendo parte principal do objectivo aqui pretendido, assim citando como exemplo o motor de actuação do fuso que se encarregaria da variação de excentricidade. Este foi apenas indicado e não definido uma vez que se poderá ainda, quando da realização final, ter um compromisso entre o custo e a finalidade.

Os aspectos aqui não focados serão levantados na respectiva discussão.

Apresento aqui os meus sinceros agradecimentos a todos que de uma forma ou de outra, ajudaram a realização deste trabalho.

Jorge M. M. Martins

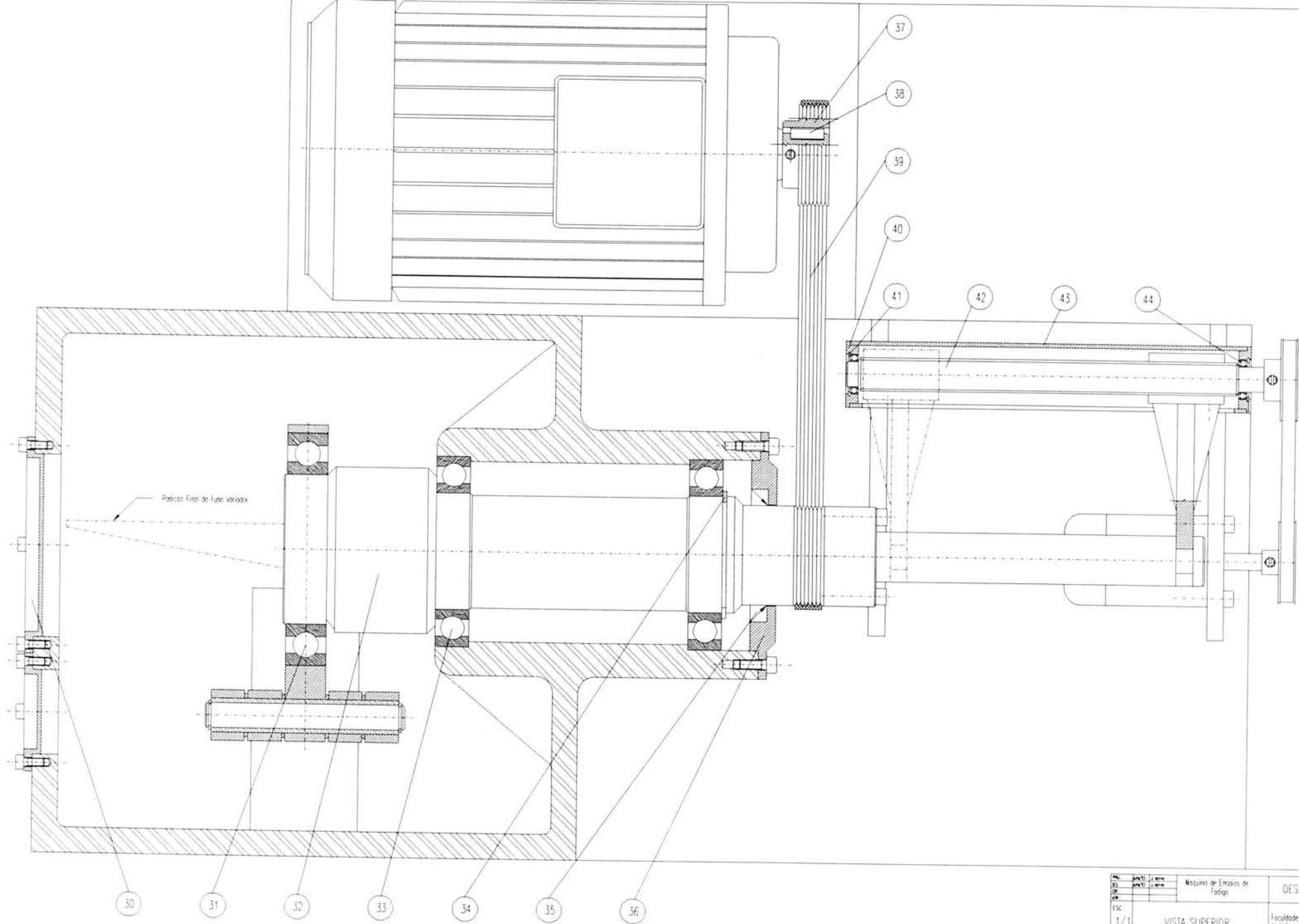
DESENHOS DE DEFINIÇÃO DA MÁQUINA



PROJ.	DESENHO	1	Máquina de Ensaio de Fadiga	DESENHO 1
REV.	DATA	1/1		FTUP
ESC.	1/1			Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
TOL.				
VISTA PRINCIPAL				

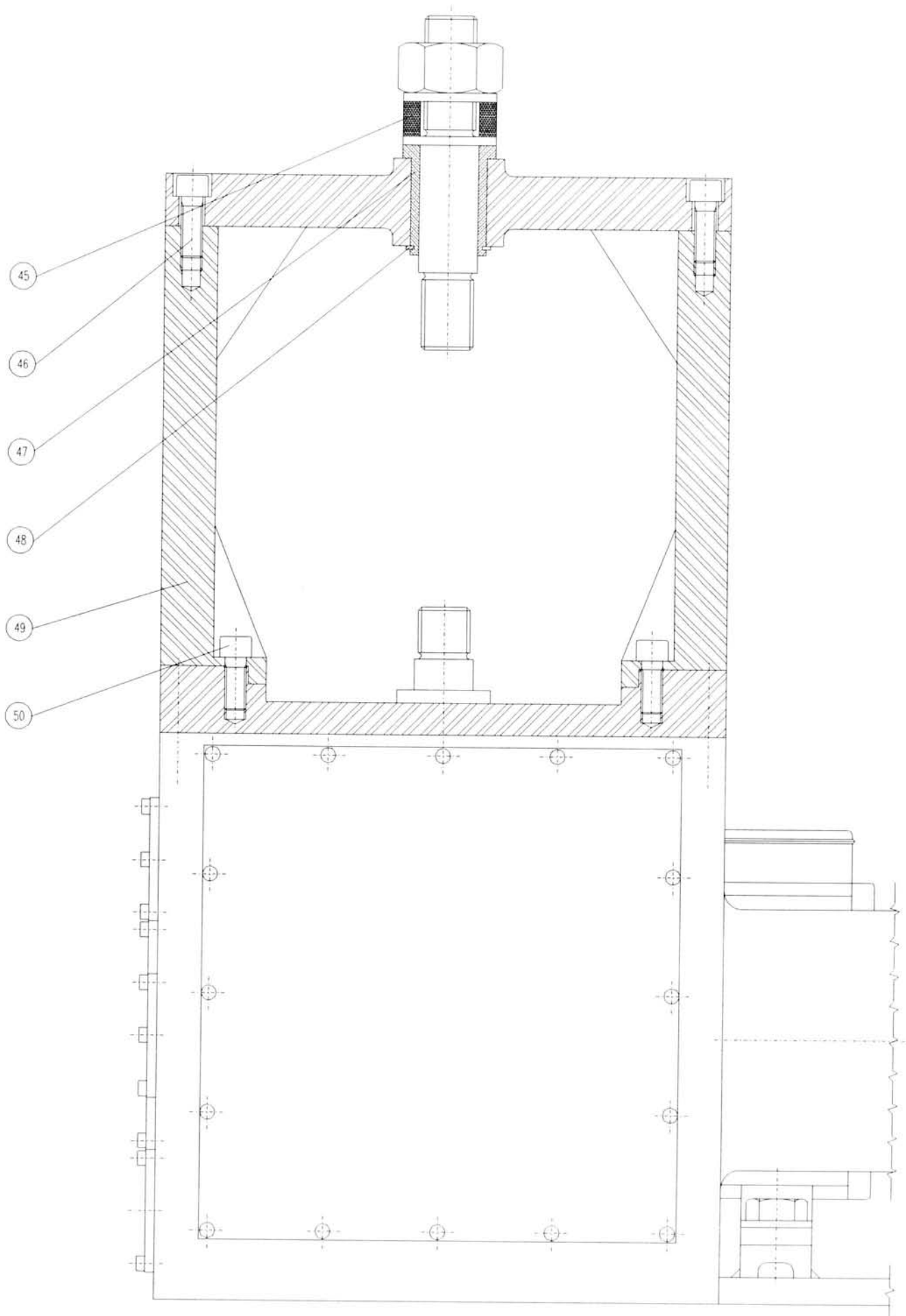


(NOME) _____ (NOME) _____ (NOME) _____ (NOME) _____ (NOME) _____	Máquina de Enxertos de Fadiga	DESENHO 2
ESC.: 1/1	FEUP Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto	
TÍTULO: VISTA LATERAL ESQUERDA		
		DATA: _____ _____

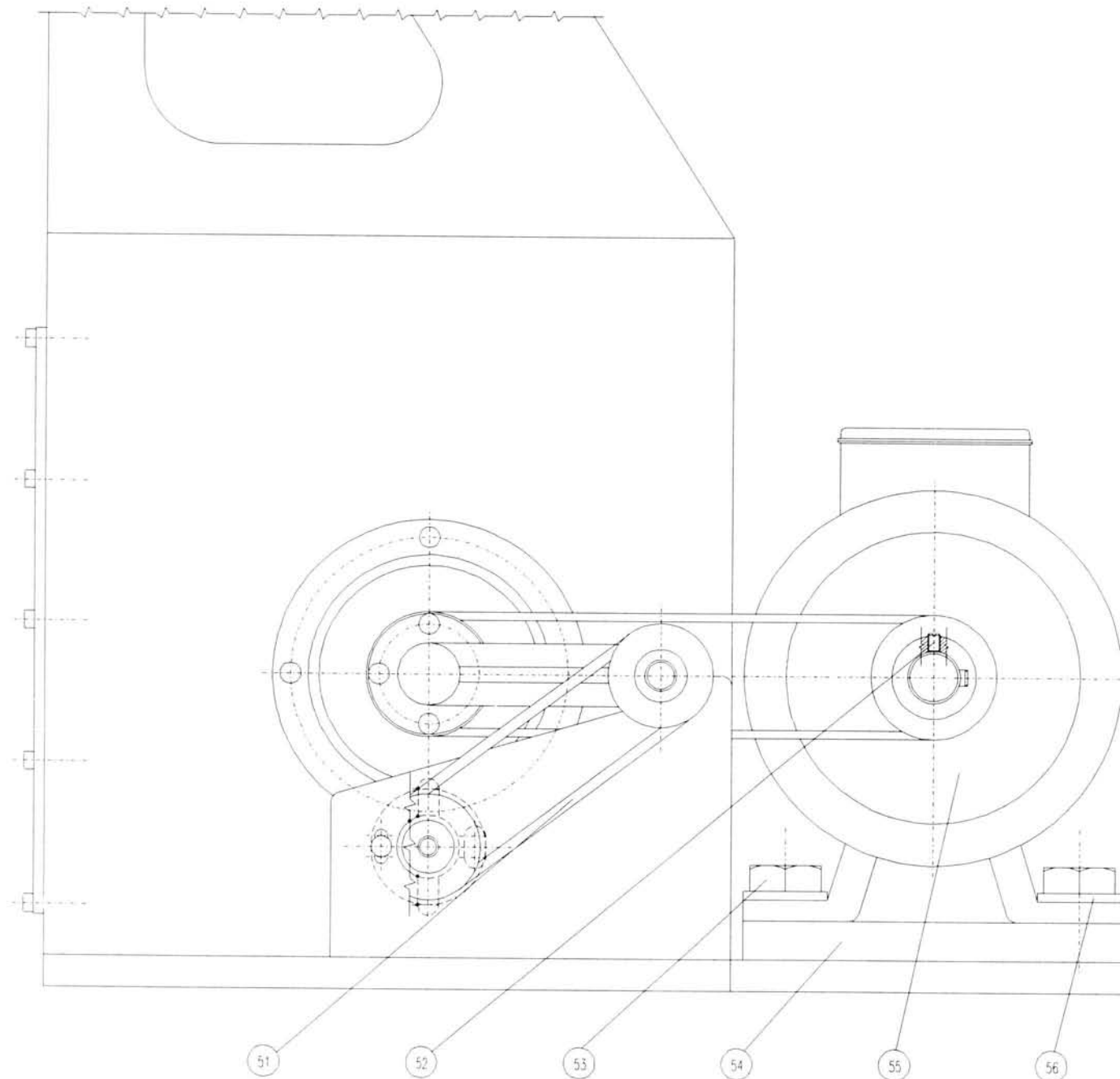


515

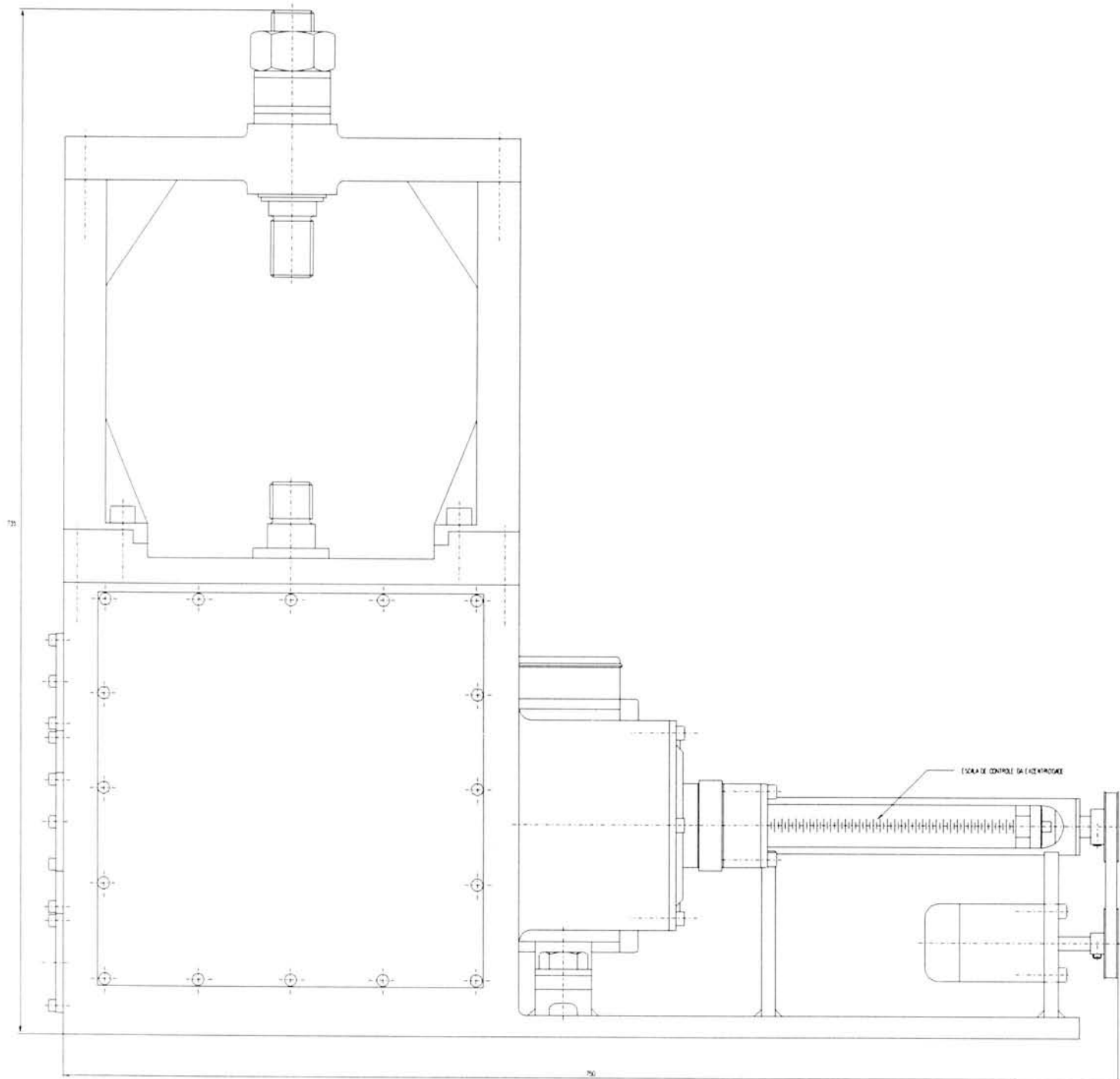
AUT.	PROJ.	REV.	Máquina de Enxárcas de Fodage	DESENHO 3
ESC.	1/1		VISTA SUPERIOR (CORTE)	FEUP Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
TOL.				



ESC: 1/1 1/1 1/1	Máquina de Enxames de Fábrego	DESENHO 4
ESC: 1/1 1/1 1/1	PORMENOR DAS LIGAÇÕES (VISTA LATERAL ESQ.)	FEUP Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
100	100	100



PROJ.	PROJ.	PROJ.	PROJ.	PROJ.	PROJ.
ESQ.	1/1	10A	10A	10A	10A
Máquina de Ensaio de Fadiga				DESENHO 5	
PORMENOR DAS TRANSMISSOES (VISTA LATERAL DIR.)				FUP	
				Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto	
				Série	
				Máquina de	



Proj.	Desen.	Rev.	Ass.	Elab.	Desenho
1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1
Máquina de Ensaio de Tração					DESENHO 7
Máquina Completa					Proj.
					Faculdade de Engenharia
					da Universidade do Porto
					Nome
					Matrícula



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000101471