

UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA

ENG. ELECTROTECNICA E DE COMPUTADORES

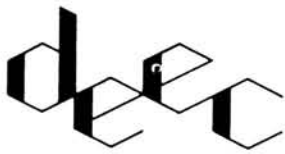
ESTUDO E CONTROLO DUM
DUPLO PÊNULO INVERTIDO

JOÃO MANUEL OLIVEIRA E SOUSA DE ALBERGARIA RESENDE
RODRIGO SARMENTO DE BEIRES DA SILVA TORRES



Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
Biblioteca 4

Nº
CDU 621.3(047.3)/LECC/1992/RESj
Data 02 / 10 / 2009



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex, PORTUGAL

Telef. 351-2-317105/107/412/457 · Telex 27323 FEUP P · Telefax 351-2-319280

REFERÊNCIA DO PROJECTO 4.3/1.87

Parecer Técnico

Acompanhei os trabalhos de estágio realizados no Pólo do Porto do Instituto de Sistemas e Robótica pelo licenciado João Manuel de Oliveira e Sousa de Albergaria Resende, bem como apreciei os trabalhos produzidos e o relatório oportunamente apresentado.

Com base no acompanhamento referido, considero que aqueles trabalhos reflectem o trabalho efectivamente realizado, revelando empenhamento do estagiário.

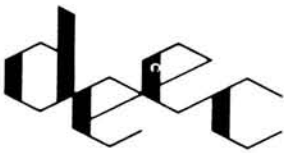
Sou portanto de parecer que foram plenamente atingidos os objectivos inicialmente propostos.

O Supervisor do Estágio no Instituto de Sistemas e Robótica

Prof. Fernando Lobo Pereira

O Supervisor do Estágio na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Jorge Leite Martins de Carvalho



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex, PORTUGAL
Telef. 351-2-317105/107/412/457 · Telex 27323 FEUP P · Telefax 351-2-319280

REFERÊNCIA DO PROJECTO 4.3/1.89

Parecer Técnico

Acompanhei os trabalhos de estágio realizados no Pólo do Porto do Instituto de Sistemas e Robótica pelo licenciado Rodrigo Sarmiento de Beires da Silva Torres, bem como apreciei os trabalhos produzidos e o relatório oportunamente apresentado.

Com base no acompanhamento referido, considero que aqueles trabalhos reflectem o trabalho efectivamente realizado, revelando empenhamento do estagiário.

Sou portanto de parecer que foram plenamente atingidos os objectivos inicialmente propostos.

O Supervisor do Estágio no Instituto de Sistemas e Robótica

Prof. Fernando Lobo Pereira

O Supervisor do Estágio na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Jorge Leite Martins de Carvalho

Projecto de 5º ano da Licenciatura em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

Estudo e controlo dum
Duplo Pêndulo Invertido

Relatório final

João Manuel Oliveira e Sousa de Albergaria Resende
Rodrigo Sarmento de Beires da Silva Torres

1. Apresentação:

O objectivo deste projecto era a construção de um pêndulo duplo invertido, montado sobre uma base móvel, que, mediante um algoritmo apropriado de controlo, permitisse o controlo da posição do duplo pêndulo.

O primeiro passo dado foi o de dividir o projecto em duas etapas principais:

- Implementação do Hardware, ie o projecto e construção da estrutura física do duplo pêndulo invertido.
- Concepção dos algoritmos de controlo, onde se engloba a análise e estudo do comportamento dinâmico do referido pêndulo.

Grande parte do tempo consumido neste projecto foi dedicado à primeira etapa, devido não só à complexidade de que se revestia a base móvel (tendo que conjugar uma grande mobilidade com um pequeno atrito, a par de uma grande resistência à aceleração e a binários laterais), mas também às dificuldades de comunicação que encontramos na transposição das nossas ideias para as especificações requeridas por um engenheiro mecânico.

A par do desenvolvimento do hardware, a análise do comportamento dinâmico orientou-se numa primeira fase, apenas no sentido de dar resposta a algumas questões fulcrais necessárias ao hardware (esforços e binários máximos esperados, comprimento necessário da base, dimensões das varetas do pêndulo, dimensionamento e acoplamento do motor, etc).

Finalmente, passou-se ao estudo mais pormenorizado do comportamento do duplo pêndulo, tendo-se obtido informações acerca dos limites esperados de controlabilidade, bem como hipóteses de controlo, (em torno do ponto de equilíbrio), utilizando a técnica de controlo linear por espaço de estados.

Neste momento, a verificação plena dos objectivos iniciais deste projecto, passa pela conclusão dos seguintes pontos:

- Montagem do motor na base e respectivo acoplamento.
- Implementação de alguns elementos necessários à efectivação do sistema de monitorização e controlo da posição do pêndulo.
- Implementação de um dos algoritmos de controlo mencionados neste relatório, por software aplicando-o por intermédio de uma placa ADDA.

Os passos já dados nestes pontos a par de algumas sugestões que pensamos ser úteis encontram-se expostos mais adiante, neste relatório.

Não podíamos terminar esta apresentação do relatório sem agradecer o apoio prestado pelo Prof. Jorge Leite Martins de Carvalho, nosso orientador no mais lato sentido do termo, bem como do Eng. António Paulo Gomes Mendes Moreira, sempre presente e imprescindível para a resolução de alguns problemas críticos com que nos fomos deparando.

Rodrigo Lourenço
Rodrigo Lourenço

2. Hardware:

A estrutura física do duplo pêndulo invertido pode ser dividida em três partes:

- Base móvel, e respectivo apoio
- Hastes do pêndulo
- Motor, driver e demais componentes de controlo.

Base móvel:

Foi desenvolvida em conjunto com o DEMEC, através do seu desenhador, Sr. Saldanha, bem como do Eng. Fernando Oliveira, responsável pelas oficinas do departamento.

Baseia-se numa base em aço¹, com cerca de 2 m de comprimento, que suporta todos os restantes elementos. Nela encontra-se instalada uma pista com 1.5 m ao longo da qual desliza a base móvel (que suporta as hastes do duplo pêndulo), controlada por uma correia inextensível reforçada com fibra de aço.

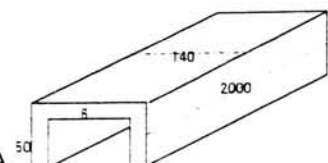
Essa correia, solidária com a base móvel e mantida sob tensão por intermédio de duas polias, nas extremidades da referida pista. Por sua vez essas duas polias permitem que dum lado se faça o acoplamento ao motor (através duma outra polia, de maneira a conseguir desmultiplicação 1:1, 1:2 e 1:7), e do outro o ataque a um potenciómetro multivolta (20 voltas, se o ataque for directo), para a monitorização da posição da base móvel.

Esta parte encontra-se completamente pronta.

Hastes do pêndulo:

Esta parte é constituída por duas hastes unidas entre si por um elemento que permite o movimento com apenas um grau de liberdade (de rotação). A haste inferior encontra-se ligada a um segundo elemento que assenta e é solidário com a base móvel, permitindo à haste inferior apenas um grau de liberdade, o de rotação sobre um eixo perpendicular à direcção sobre a qual a base móvel se desloca. Este último elemento permite também o ataque a um potenciómetro de monitorização do ângulo que a haste inferior faz com a vertical.

Esta parte encontra-se igualmente pronta.



¹Aço HR2, de dimensões $6*(140-2*50)*2000$ mm³, adquirido na TINOCO, LDA.

Motor, driver e monitorização.

O motor já foi adquirido, sendo as suas características de forma a permitirem o controlo do pêndulo, de acordo com as simulações que foram efectuadas (ver mais adiante).

Falta contudo a sua instalação sobre a base onde o espaço para a sua instalação foi já assegurado, bem como definir qual a constante de desmultiplicação óptima, o que provavelmente só será resolvido mediante experimentação com as várias alternativas. Para isso existem já a correia de acoplamento e várias polias com diferentes números de dentes, de forma a proporcionar as já referidas constantes de desmultiplicação.

Falta também instalar os potenciómetros de medida quer da posição da base móvel, quer do ângulo da haste inferior. De referir que se optou por estimar (não medindo directamente) o ângulo da haste superior, de forma a evitar os problemas que tal medida acarretaria (mais atritos e não linearidades que inevitavelmente aproximariam da incontabilidade o sistema, por dificultarem o controlo da haste superior).

A ligação entre o algoritmo de controlo e o hardware será assegurado por uma placa de aquisição de dados. No anexo 1, encontram-se os dados essenciais do controlo da placa ADDA a usar.

2. Modelização e Controlo

Descrição geral do Modelo

Na Fig. 1 encontra-se esquematizado o modelo do hardware que se vai usar na implementação do **Duplo Pêndulo Invertido**.

O **Duplo Pêndulo Invertido** é constituído por duas barras ligadas entre si por meio duma articulação que permite apenas a rotação no plano do papel. A barra inferior está ligada ao carro por uma articulação de características idênticas. O carro é actuado por meio duma correia dentada, que por sua vez é accionada por um motor D.C. através dum sistema de roldanas que introduz uma desmulti-plicação de factor $N2:N1$.

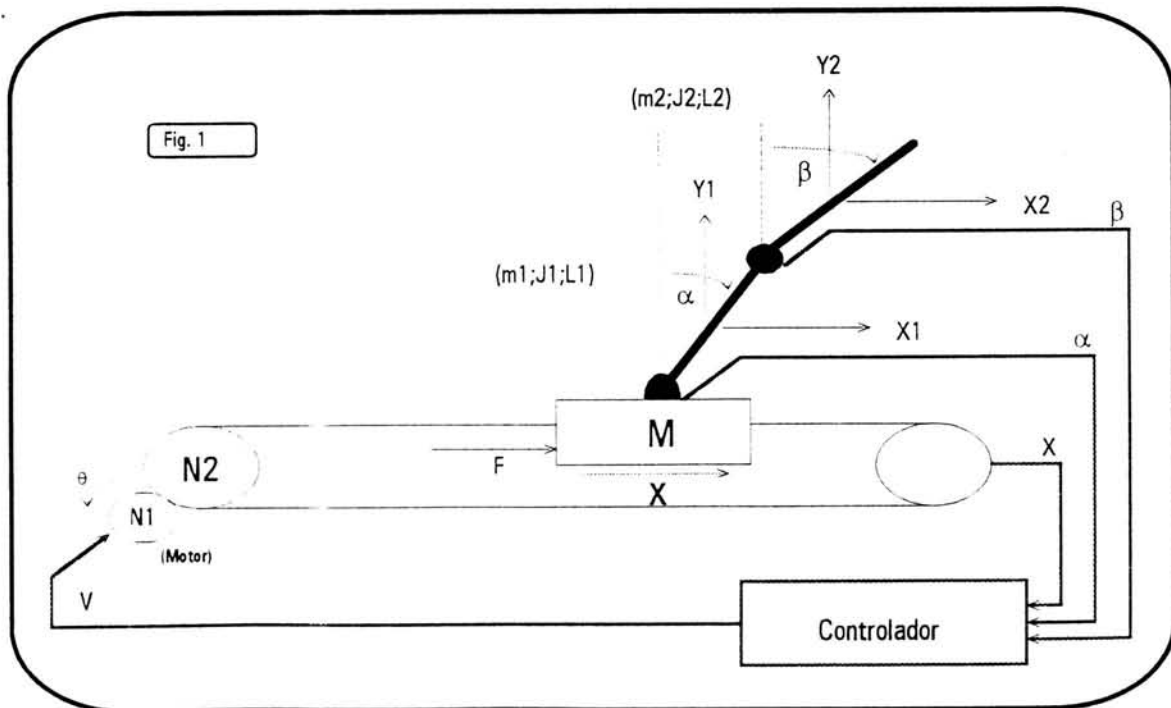
Neste sistema físico, a que nos referiremos de agora em diante, por

planta, são "observadas" três variáveis definidoras do seu estado:

- X Posição do carro.
- a Ângulo da 1ª barra com a vertical.
- b Ângulo da 2ª barra com a vertical.

Para além destas usam-se outras auxiliares cuja relação com as três primeiras (a que nos referiremos por **coordenadas generalizadas**), será deduzida posteriormente.

O controlo é implementado mediante a observação do estado das coordenadas generalizadas, a partir das quais é calculada a tensão de actuação do motor, V .



Relações que se obtêm como consequência de ligações mecânicas:

Ligação Carro - Barras

$$\begin{cases} X_1 = X + \frac{L_1}{2} \sin \alpha \\ Y_1 = \frac{L_1}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = X + L_1 \sin \alpha + \frac{L_2}{2} \sin \beta \\ Y_2 = L_1 \cos \alpha + \frac{L_2}{2} \sin \beta \end{cases}$$

Ligação Motor - Carro

$$X = r \frac{N_1}{N_2} \theta$$

(r é o raio da polia 2)

Equações das velocidades

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \dot{X} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{Y}_1 = -\frac{L_1}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = \dot{X} + L_1 \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{L_2}{2} \dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{Y}_2 = -L_1 \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{L_2}{2} \dot{\beta} \sin \beta \end{cases}$$

Equações das acelerações

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = \ddot{X} + \frac{L_1}{2} \ddot{\alpha} \cos \alpha - \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ \ddot{Y}_1 = -\frac{L_1}{2} \ddot{\alpha} \sin \alpha - \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_2 = \ddot{X} + L_1 \ddot{\alpha} \cos \alpha - L_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \frac{L_2}{2} \ddot{\beta} \cos \beta - \frac{L_2}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ \ddot{Y}_2 = -L_1 \ddot{\alpha} \sin \alpha - L_1 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - \frac{L_2}{2} \dot{\beta}^2 \cos \beta \end{cases}$$

Relações que se obtêm como consequência da Lei de Newton:

$$\sum F_i = m \cdot \ddot{X}$$

$$\begin{cases} F - F_{1X} = M \cdot \ddot{X} \\ F_{1X} - F_{2X} = m_1 \cdot \ddot{X}_1 \\ F_{1Y} - F_{2Y} - m_1 \cdot g = m_1 \cdot \ddot{Y}_1 \\ F_{2X} = m_2 \cdot \ddot{X}_2 \\ F_{2Y} - m_2 \cdot g = m_2 \cdot \ddot{Y}_2 \end{cases}$$

Relações que se obtêm a partir da conservação do momento angular:

$$\sum \tau = J \cdot \ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \frac{L_1}{2} F_{1Y} \sin \alpha - \frac{L_1}{2} F_{1X} \cos \alpha - \frac{L_1}{2} F_{2X} \cos \alpha + \frac{L_1}{2} F_{2Y} \sin \alpha = J_1 \ddot{\alpha} \\ \frac{L_2}{2} F_{2Y} \sin \beta - \frac{L_2}{2} F_{2X} \cos \beta = J_2 \ddot{\beta} \end{cases}$$

Relação que se obtêm da modelização do motor:

$$V = R \cdot I + K_E \cdot \theta$$

$$T_{Total} = K_T \cdot I$$

$$T_{Gerado} = K_T \cdot I$$

$$T_{Gerado} = J_{Motor} \cdot \ddot{\theta} + T_{Efectivo}$$

$$T_{Efectivo} = r \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot F$$

$$T_{Perdas} = (K_E - K_T) \cdot I$$

R	Resistência eléctrica do motor
J_{Motor}	Massa inercial do motor
T_{Total}	Binário equivalente gerado pelo motor (sem considerar perdas eléctricas)
T_{Gerado}	Binário efectivamente gerado (já considerando as perdas eléctricas)
T_{Perdas}	Binário perdido na transformação da energia eléctrica em energia mecânica.
$T_{Efectivo}$	Binário que o motor entrega ao restante sistema (polias+carro).
K_E, K_T	Constantes do motor cuja diferença de valores explica a existência de T_{Perdas}

Modelo (não linearizado) do sistema:

$$\begin{aligned} (m_1 + 2m_2) \frac{L_1}{2} \cos \alpha \ddot{X} + \left\langle J_1 + \frac{L_1^2}{4} (m_1 + 4m_2) \right\rangle \ddot{\alpha} + \frac{L_1 L_2}{2} m_2 \left\langle \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \right\rangle &= (m_1 + 2m_2) \frac{L_1}{2} \sin \alpha \cdot g \\ m_2 \frac{L_2}{2} \cos \beta \ddot{X} + \frac{L_1 L_2}{2} m_2 \left\langle \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) \right\rangle + (J_2 + \frac{L_2^2}{4} m_2) \ddot{\beta} &= m_2 \frac{L_2}{2} \sin \beta \cdot g \\ F &= (M + m_1 + m_2) \ddot{X} + \frac{L_1}{2} (m_1 + 2m_2) (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + m_2 \frac{L_2}{2} (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) + R_{Atrito} \ddot{X} \\ F &= \frac{1}{r} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{K_T}{R} V - \frac{K_T K_E}{Rr} \frac{N_2}{N_1} \dot{X} - \frac{J_{Motor}}{r} \frac{N_2}{N_1} \ddot{X} \right) \end{aligned}$$

Modelo linearizado do sistema:

(Premissas)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 1 \\ \cos \beta = 1 \\ \sin \alpha = \alpha \\ \sin \beta = \beta \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = 1 \\ \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) = 0 \\ \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(Resultados)

$$\begin{aligned} (m_1 + 2m_2) \frac{L_1}{2} \cdot \ddot{X} + \left\langle J_1 + \frac{L_1^2}{4} (m_1 + 4m_2) \right\rangle \cdot \ddot{\alpha} + \frac{L_1 L_2}{2} m_2 \cdot \ddot{\beta} &= (m_1 + 2m_2) \frac{L_1}{2} g \cdot \alpha \\ m_2 \frac{L_2}{2} \cdot \ddot{X} + \frac{L_1 L_2}{2} m_2 \cdot \ddot{\alpha} + (J_2 + \frac{L_2^2}{4} m_2) \cdot \ddot{\beta} &= m_2 \frac{L_2}{2} g \cdot \beta \\ F &= (M + m_1 + m_2) \cdot \ddot{X} + (m_1 + 2m_2) \frac{L_1}{2} \cdot \ddot{\alpha} + m_2 \frac{L_2}{2} \cdot \ddot{\beta} + R_{Atrito} \ddot{X} \\ F &= \frac{1}{r} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{K_T}{R} \cdot V - \frac{K_T K_E}{Rr} \frac{N_2}{N_1} \cdot \dot{X} - \frac{J_{Motor}}{r} \frac{N_2}{N_1} \cdot \ddot{X} \right) \end{aligned}$$

Este sistema pode ser colocado numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00}\alpha \\ b_{11}\beta \\ b_{220}V - b_{221}\dot{X} \end{bmatrix}$$

Cujos coeficientes são:

$$a_{00} = (m_1 + 2m_2) \frac{l_1}{2}$$

$$a_{01} = J_1 + \frac{l_1^2}{4} (m_1 + 4m_2)$$

$$a_{02} = \frac{l_1 \cdot l_2}{2} m_2$$

$$a_{10} = m_2 \frac{l_2}{2}$$

$$a_{11} = \frac{l_1 \cdot l_2}{2} m_2$$

$$a_{12} = J_2 + \frac{l_2^2}{4} m_2$$

$$a_{20} = M + m_1 + m_2 + \frac{J_{Motor}}{r^2} \left\langle \frac{N_2}{N_1} \right\rangle^2$$

$$a_{21} = (m_1 + 2m_2) \frac{l_1}{2}$$

$$a_{22} = m_2 \frac{l_2}{2}$$

$$b_{00} = (m_1 + 2m_2) \frac{l_1}{2} g$$

$$b_{11} = m_2 \frac{l_2}{2} g$$

$$b_{220} = \frac{N_2 K_T}{N_1 R r}$$

$$b_{221} = \frac{K_E \cdot K_T}{R r^2} \left\langle \frac{N_2}{N_1} \right\rangle^2 + R_{Atrito}$$

Introdução da realimentação de estado

Tipo de realimentação

Vamos agora supor que a tensão aplicada ao motor, V , é uma combinação linear das variáveis de estado, e respectivas derivadas:

$$V = k_0 X + t_0 \dot{X} + k_1 \alpha + t_1 \dot{\alpha} + k_2 \beta + t_2 \dot{\beta}$$

Desta maneira, o problema reduz-se a achar os valores apropriados para os coeficientes k_i e t_j , de maneira a que o sistema passe a ser estável, conseguindo-se atingir o equilíbrio.

Para isso, vamos passar este sistema de equações para o domínio de Laplace, de modo a torna-lo matematicamente tratável:

Passagem para o Domínio de Laplace

O sistema passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{00} \langle s^2 X(s) - sX(0) - \dot{x}(0) \rangle + a_{01} \langle s^2 \alpha(s) - s\alpha(0) - \dot{\alpha}(0) \rangle + a_{02} \langle s^2 \beta(s) - s\beta(0) - \dot{\beta}(0) \rangle = b_{00} \alpha(s) \\ a_{10} \langle s^2 X(s) - sX(0) - \dot{x}(0) \rangle + a_{11} \langle s^2 \alpha(s) - s\alpha(0) - \dot{\alpha}(0) \rangle + a_{12} \langle s^2 \beta(s) - s\beta(0) - \dot{\beta}(0) \rangle = b_{11} \beta(s) \\ a_{20} \langle s^2 X(s) - sX(0) - \dot{x}(0) \rangle + a_{21} \langle s^2 \alpha(s) - s\alpha(0) - \dot{\alpha}(0) \rangle + a_{22} \langle s^2 \beta(s) - s\beta(0) - \dot{\beta}(0) \rangle = b_{220} V(s) - b_{221} \langle sX(s) - \dot{x}(0) \rangle \\ V(s) = k_0 X(s) + t_0 \langle sX(s) - \dot{x}(0) \rangle + k_1 \alpha(s) + t_1 \langle s\alpha(s) - \dot{\alpha}(0) \rangle + k_2 \beta(s) + t_2 \langle s\beta(s) - \dot{\beta}(0) \rangle \end{cases}$$

A qual pode ainda ser reformulada para:

$$B(s) \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix} = T(s) \qquad \begin{pmatrix} X(s) \\ \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix} = B^{-1}(s)T(s)$$

Onde:

$$B(s) = \begin{pmatrix} a_{00}s^2 & a_{01}s^2 - b_{00} & a_{02}s^2 \\ a_{10}s^2 & a_{11}s^2 & a_{12}s^2 - b_{11} \\ a_{20}s^2 - b_{220}k_0 - b_{220}t_0s + b_{221}s & a_{21}s^2 - b_{220}k_1 - b_{220}t_1s & a_{22}s^2 - b_{220}k_2 - b_{220}t_2s \end{pmatrix}$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} a_{00} \langle sX(0) + \dot{x}(0) \rangle & a_{01} \langle s\alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \rangle & a_{02} \langle s\beta(0) + \dot{\beta}(0) \rangle \\ a_{10} \langle sX(0) + \dot{x}(0) \rangle & a_{11} \langle s\alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \rangle & a_{12} \langle s\beta(0) + \dot{\beta}(0) \rangle \\ a_{20} \langle sX(0) + \dot{x}(0) \rangle + (b_{221} - b_{220}t_0)\dot{x}(0) & a_{21} \langle s\alpha(0) + \dot{\alpha}(0) \rangle - b_{220}t_1\dot{\alpha}(0) & a_{22} \langle s\beta(0) + \dot{\beta}(0) \rangle - b_{220}t_2\dot{\beta}(0) \end{pmatrix}$$

Como se pode observar da equação matricial, os valores das variáveis de estado, no domínio de Laplace, vão ser fracções racionais cujo denominador é unicamente determinado por **B**, tendo aliás o valor do seu determinante. Por outro lado as condições iniciais (contidas em T(s)), influenciarão apenas os zeros (e em alguma eventual anulação de pólos).

Vamos então determinar a sua (do determinante) expressão, para podermos analisar a possibilidade de colocar todos os seus pólos no SemiPlano Esquerdo.

Cálculo do Det [B(s)]

$$|B(s)| = \sum_{i=0}^6 C_i s^i$$

onde os valores dos coeficientes são:

$$C_0 = -b_{00} b_{11} b_{220} k_0$$

$$C_1 = b_{00} b_{11} b_{221} - b_{00} b_{11} b_{220} t_0$$

$$C_2 = a_{01} b_{11} b_{220} k_0 + b_{00} a_{12} b_{220} k_0 - b_{00} a_{10} b_{220} k_2 - a_{00} b_{11} b_{220} k_1 + b_{00} b_{11} a_{20}$$

$$C_3 = a_{01} b_{11} b_{220} t_0 - a_{01} b_{11} b_{221} + b_{00} a_{12} b_{220} t_0 - b_{00} a_{12} b_{221} - b_{00} a_{10} b_{220} t_2 - a_{00} b_{11} b_{220} t_1$$

$$C_4 = -a_{00} a_{11} b_{220} k_2 - a_{01} a_{12} b_{220} k_0 - a_{01} b_{11} a_{20} - b_{00} a_{12} a_{20} - a_{02} a_{10} b_{220} k_1 + a_{02} a_{11} b_{220} k_0 + a_{01} a_{10} b_{220} k_2 + b_{00} a_{10} a_{22} + a_{00} a_{12} b_{220} k_1 + a_{00} b_{11} a_{21}$$

$$C_5 = -a_{00} a_{11} b_{220} t_2 + a_{01} a_{12} b_{221} - a_{01} a_{12} b_{220} t_0 - a_{02} a_{10} b_{220} t_1 - a_{02} a_{11} b_{221} + a_{02} a_{11} b_{220} t_0 + a_{01} a_{10} b_{220} t_2 + a_{00} a_{12} b_{220} t_1$$

$$C_6 = a_{00} a_{11} a_{22} + a_{01} a_{12} a_{20} + a_{02} a_{10} a_{21} - a_{02} a_{11} a_{20} - a_{01} a_{10} a_{22} - a_{00} a_{12} a_{21}$$

Uma vez chegados a este ponto, devemos proceder da seguinte forma:

1) Arbitrar quais os pólos que desejamos para o determinante de B, que por sua vez, ditarão qual a rapidez com que o sistema (**Linearizado**, convém insistir neste ponto), convergirá para o equilíbrio no estado desejado ($X=0$, $a=0$, $b=0$). Em seguida calculamos quais os coeficientes C_i do polinómio de 6º grau que contém esses pólos.

2) Calcular quais os valores dos k_j e t_j que satisfazem a localização desejada para os pólos. Para isso calculamos o sistema de 6 equações - 6 incógnitas que resulta das expressões acima indicadas, com os valores dos coeficientes C_i calculados na alínea anterior. Note que felizmente este sistema de equações se reduz à resolução de 2 equações independentes, (que determinam k_0 e t_0), seguida da resolução de dois sistemas independentes de 2 equações - 2 incógnitas, (que determinam k_1 e k_2 , e t_1 e t_2 , respectivamente).

Como se verá em anexo, os cálculos efectuados permitir-nos-ão a simulação linear ou não do sistema, bem como o teste de alguns algoritmos de controlo, sugeridos pela análise linear com controlo por realimentação de estado.

Chegar-se-á também à conclusão de que o sistema é altamente instável desde que se o afaste do ponto de equilíbrio mais do que alguns graus (eg, 10°). Assim os algoritmos de controlo que se apresentam, todos com base na linearização, logo válidos apenas em torno do ponto de equilíbrio, revelar-se-ão eficientes sobre o modelo real apenas nessa zona.

Anexo 1: Placa ADDA

Neste anexo apresentam-se alguns dos comandos fundamentais por software, existentes na placa utilizada.

ANEXO 1

ESTRUTURA DE CONTROLO E MONITORIZAÇÃO DO AD/DA.

		7	6	5	4	3	2	1	0
BA+0	L	3	2	1	0	3	2	1	0
+1	H	11	10	9	8	7	6	5	4

Read Only: Valor lido na entrada actual
Read: Numero do canal da entrada actual

Quando se escreve em BA+0, dá-se início a nova conversão

		7	6	5	4	3	2	1	0
+2		3	2	1	0	3	2	1	0

Read/Write: Fim do Scan - Último canal.
Read/Write: Início do Scan - 1º canal.

Quando se escreve em BA+2, 2 μ s depois, começa a conversão para o 1º canal, depois da conversão do último canal reconeça.

		7	6	5	4	3	2	1	0
+3		X	X	X	X	3	2	1	0
		0	0	0	0	3	2	1	0

Write: Escreve na porta de saída OP ϕ -3
Read: Lê o estado da porta de entrada IP ϕ -3

Ao escrever manda-se o resultado para as portas de saída, ao ler-se obtém-se o estado das portas de entrada.

+4	L	3	2	1	0	X	X	X	X
+5	H	11	10	9	8	7	6	5	4
		7	6	5	4	3	2	1	0
+6	L	3	2	1	0	X	X	X	X
+7	H	11	10	9	8	7	6	5	4

Write Only: Escreve no canal de saída em quistos

As saídas não são fisicamente actualizadas, quando o registo (high) lete é escrito, de maneira a respirar uma "bouncing"...

		7	6	5	4	3	2	1	0
+8		0	0	0	0	0	0	0	0

Read Only: Status do AD

MA ϕ -3: Numero do próximo canal a converter se EOC=0
INT: 1 => Houve interrupção
MUX: 0 => 8 canais diferenciais; 1 => 16 canais $\frac{1}{2}$
U/B: 0 => Bipolar; 1 => Unipolar.
EOC: 0 => Pronto para uma conversão

Quando se escreve na BA+8, dá-se o acknowledge da interrupção, levando INT a 0.

		7	6	5	4	3	2	1	0
+9		0	0	0	0	0	0	0	0

Read/Write: Registo de Controlo

S ϕ -1: Controla a fonte de trigger para o A/D
DMA: Selecciona o funcionamento do DMA
X: Não usado
L ϕ -2: Selecciona o nível de interrupt
INTE: 1 => Enable interrupt

Este registo de controlo é levado a 0 com o "poller up", e qq que seja o valor de S ϕ -1, a conversão A/D pode ser conseguida por uma escrita em B.A.+0.

Anexo 2: Dedução de algoritmos de controlo.

Neste anexo deduzem-se as constantes de realimentação, por espaço de estados, do sistema físico modelizado. Para tal seguem-se os resultados obtidos na secção 2, modelização e controlo, para o sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio.

Para o efeito utilizou-se a aplicação **EXCEL 4**, onde através dum workbook constituído por 5 folhas de cálculo e uma de macros, proporciona-se um meio relativamente fácil de gerir a complexidade numérica em causa a fim de se determinar realimentações plausíveis, face aos limites impostos pela linearidade.

Desta maneira, o workbook **PENDULO.XLW** gere 6 folhas, que a seguir se descrevem:

- **PARAMETR.XLS** Elemento base, onde se estabelecem os elementos principais do sistema físico, nomeadamente massas e dimensões do pêndulo, características do motor, constantes físicas, etc.
Para teste de vários motores de características distintas existem 4 tabelas onde se devem colocar as características de cada um dos motores em questão. Através do botão de 'select' respectivo selecciona-se o motor pretendido. As restantes folhas de cálculo adoptam como parâmetros do sistema que analisam, os valores presentes nesta folha.
Na primeira página deste anexo segue uma vista global desta folha de cálculo.
- **OPEN_LP.XLS** A partir dos parâmetros definidos na folha de cálculo anterior determina qual a função de transferência (em rigor apenas o denominador da FT, determinante na resposta temporal do sistema físico) do sistema linearizado. Neste anexo as páginas 2 e 3 visualizam as duas partes fundamentais desta folha de cálculo: a determinação do denominador da FT e, a partir deste, o cálculo dos seis pólos deste polinómio.
- **REALIMEN.XLS** Selecciona, de entre várias estratégias, e a partir dos pólos determinados na folha anterior de malha aberta, quais os pólos desejados para o sistema em malha fechada. Existem já introduzidas duas estratégias que visam manter pequenas as constantes de realimentação (mantendo assim o sistema dentro dos limites de validade da linearização efectuada). De qualquer maneira pode-se seleccionar quaisquer pólos em malha fechada, a partir dos quais são calculadas automaticamente as constantes de realimentação. Com algumas operações simples do EXCEL é possível calcular ou ajustar alguns pólos de maneira a, por exemplo, minimizar o máximo do módulos das constantes de realimentação, ou ainda através de qualquer outro critério. A página 4 deste anexo visualiza esta folha de cálculo.

- **CLOSE_LP.XLS** Com base nas constantes de realimentação calculadas na folha anterior, obtém o denominador da FT em malha fechada. Tal como para OPEN_LP.XLS, apresentam-se neste anexo duas páginas (5 e 6).
Note que os pólos determinados por esta folha de cálculo deverão ser os especificados na folha de cálculo anterior. Caso tal não aconteça é sinal de a realimentação que se escolheu é de alguma forma instável, ie, muito sensível a pequenos erros numéricos pelo que deve ser evitada, visto ser dificilmente implementável.
- **NOLINEAR.XLS** Descreve matricialmente o sistema não linear. Poderá servir como base no desenvolvimento de algum algoritmo de controlo distinto do anterior e entrando em conta com a não linearidade do sistema.
- **MACROS.XLM** Contém o código necessário à execução das várias macros existentes nas folhas de cálculo descrita e contidas neste workbook.

Do que se disse, resulta que este workbook pode e foi utilizado para determinar uma hipótese viável de controlo do duplo pêndulo, que aliás é utilizada para, no anexo 3, verificar por simulação quais os seus efeitos.

Parâmetros e Constantes gerais do sistema

m_0	3.25
m_1	0.4375
m_2	0.125
J_1	0.213575
J_2	0.07295
R_{at}	0.25
K_t	40.78254483
K_e	610.3457267
J_m	8.413856888
R_o	610.5957267
N_2	40.78254483
N_1	40.78254483
l_1	0.4375
l_2	0.125
g	9.8

Seleção: Motor: RE075-201

r_1	3.25
r_2	0.4375
r_3	0.125
r_4	0.213575
r_5	0.0625
r_6	0.07295
r_7	4.290409375
r_8	1.22583125
r_9	8.413856888
r_{10}	610.5957267
r_{11}	40.78254483
k_1	0.4375
k_2	0.213575
k_3	0.0625
k_4	4.290409375
k_5	0.125
k_6	0.07295
k_7	1.22583125
k_8	3.25
k_9	0.25
k_{10}	40.78254483
k_{11}	610.3457267
k_{12}	8.413856888

Auxiliares: sistema linearizado	Valor
$r_1 = m_0 + m_1 + m_2$	3.25
$r_2 = m_1 * l_1 / 2 + m_2 * l_1$	0.4375
$r_3 = m_2 * l_2 / 2$	0.125
$r_4 = J_1 + m_1 * l_1^2 / 4 + m_2 * l_1^2$	0.213575
$r_5 = m_2 * l_2 * l_1 / 2$	0.0625
$r_6 = J_2 + m_2 * l_2^2 / 4$	0.07295
$r_7 = m_1 * l_1 * G / 2 + m_2 * l_1 * G$	4.290409375
$r_8 = m_2 * l_2 * G / 2$	1.22583125
$r_9 = J_m / \text{raio}^2 * (N_2 / N_1)^2$	8.413856888
$r_{10} = K_e * K_t * R_o * (N_2 / N_1 / \text{raio})^2 + R_{at}$	610.5957267
$r_{11} = N_2 / N_1 * K_t / R / \text{raio}$	40.78254483

Auxiliares: sistema não linearizado	Valor
$k_1 = m_1 * l_1 / 2 + m_2 * l_1$	0.4375
$k_2 = J_1 + m_1 * l_1^2 / 4 + m_2 * l_1^2$	0.213575
$k_3 = m_2 * l_2 * l_1 / 2$	0.0625
$k_4 = m_1 * l_1 * G / 2 + m_2 * l_1 * G$	4.290409375
$k_5 = m_2 * l_2 / 2$	0.125
$k_6 = J_2 + m_2 * l_2^2 / 4$	0.07295
$k_7 = m_2 * l_2 * G / 2$	1.22583125
$k_8 = m_0 + m_1 + m_2$	3.25
$k_9 = R_{at}$	0.25
$k_{10} = N_2 / N_1 * K_t / R / \text{raio}$	40.78254483
$k_{11} = K_e * K_t / R * (N_2 / N_1 / \text{raio})^2$	610.3457267
$k_{12} = J_m * (N_2 / N_1 / \text{raio})^2$	8.413856888

Recebe os parâmetros de PARAMETR.XLS. Dado o sistema ser linearizado em torno de Alfa=Beta=0, pode ser tratado algébricamente, razão pela qual se apresenta uma proposta para o fazer, em ordem a determinar os seus pólos naturais, i.e., pólos de malha aberta. Reflectindo o sistema introduzido em PARAMETR.XLS, o polinómio característico é apresentado pelos seus coeficientes: C6, C5, C4, C3, C2, C1 e C0.

Para descobrir as suas raízes, o polinómio é representado graficamente, da maneira definida no quadro verde junto ao gráfico: **INICIO** é o valor mais negativo, **FIM** o mais positivo, e **TIPO** pode ser "lin" para uma escala linear, ou um número que representa o número de dezenas da escala logarítmica escolhida. O re-desenho do gráfico é feita com um CLICK por cima deste.

Observando os pontos de mudança de sinal do gráfico, poder-se-á preencher o quadro **SEEDS**, com os valores iniciais da busca numérica das raízes, operação despoletada pelo botão **OPEN LOOP ROOTS**.

$$\begin{bmatrix} 0.438 & 0.2136 & 0.0625 \\ 0.125 & 0.0625 & 0.07295 \\ 11.66 & 0.4375 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.290409375 & 0 \\ 0 & 0 & 1.22583125 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 610.595727 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40.78 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.438 & 0.213575 & 0.0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.0625 & 0.07295 \\ 0 & 0 & 0 & 11.66 & 0.4375 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \\ X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.22583125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -610.6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40.78 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{matrix} X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \\ X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.82 & 0.0063083 & -56.7073542 & 0 & 0 \\ 0 & 28.51 & 6.575827 & 117.0823223 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 22.426756 & -3.14223269 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.787563707 \\ -7.8200925 \\ 0.209874128 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = > \begin{bmatrix} 0 \\ 23250.14346 \\ 31773.92359 \\ 16031.23811 \\ 19570.7071 \\ -48072.5156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 64 \\ 729 \\ 4096 \\ 15625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} c5 \\ c4 \\ c3 \\ c2 \\ c1 \\ c0 \end{matrix}$$

C6	1
C5	56.70735418
C4	-50.9357034
C3	2792.08668
C2	488.0179749
C1	25547.44052
C0	0

=> Pcaracterístico(-56.7375532)= -0.00079018

Inicio	Fim	Tipo
-100	10	3

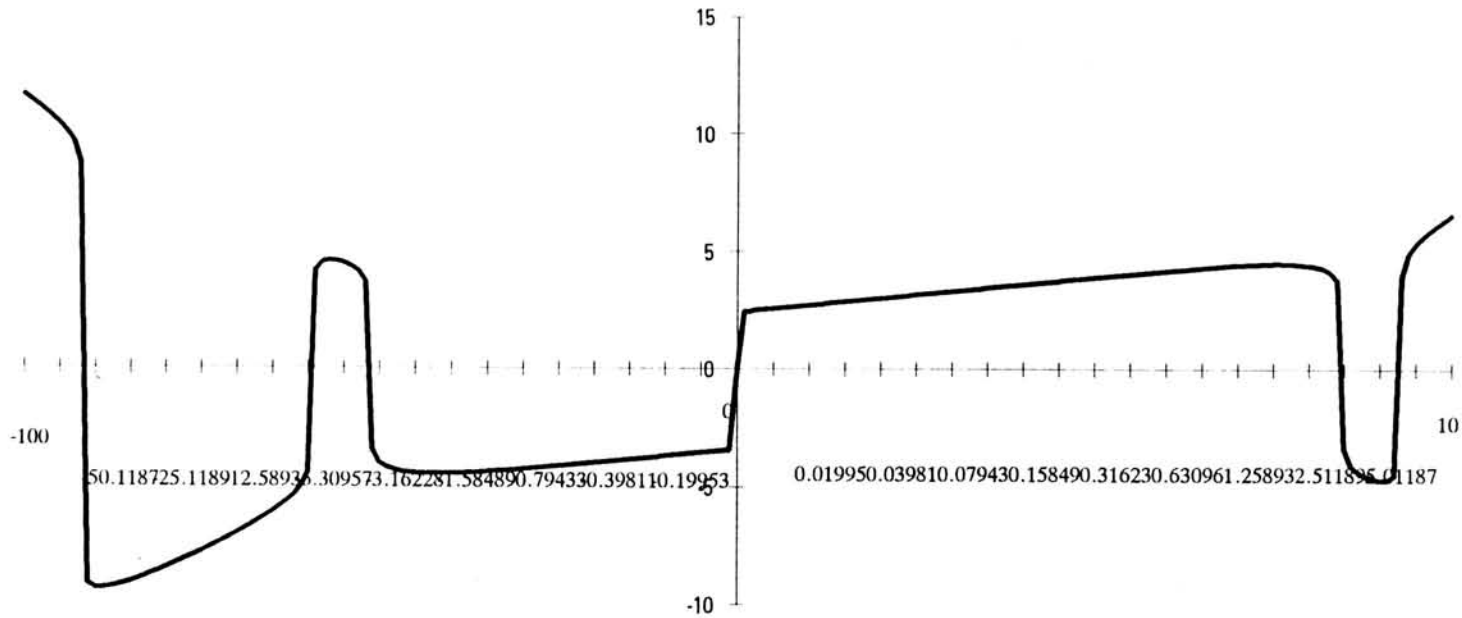
OPEN
LOOP
ROOTS

seeds
6
3.5
0
-3.5
-6
-50

--->

RAÍZES
6.098356851
3.490772554
0
-3.47880103
-6.08012933
-56.7375532

Polinómio Característico: MALHA ABERTA



Duplo Pêndulo Invertido

Os parâmetros são importados da folha PARAMETR.XLS e os **pólos de Malha Aberta** da folha OPEN_LP.XLS. Existem 5 colunas com alternativas de **pólos de Malha Fechada**. As duas primeiras calculam-nos automaticamente segundo dois critérios (o mesmo módulo, e sem qualquer alteração/realimentação).

Para escolher um dever-se-á seleccionar o nome da alternativa desejada e carregar no botão 'Calculate'

Malha Aberta	6.098357	-3.490773	0	-3.478801	-6.080129	-56.73755
Raizes	r1	r2	r3	r4	r5	r6

Definição dos pólos de Malha Fechada						
1: Mesmo módulo	-6.098357	-3.490773	-0.5	-3.478801	-6.080129	-56.73755
2: Sem Alteraçã	6.098357	3.490773	0	-3.478801	-6.080129	-56.73755
3: User 1						
4: User 2						
5: User 3						
2: Sem Alteraçã	6.098357	3.490773	0	-3.478801	-6.080129	-56.73755

Pêndulo	Valor	Unidade
m0	2	Kg
m1	0.75	Kg
m2	0.5	Kg
J1	0.0417	Kg.m ²
J2	0.0417	Kg.m ²
l1	0.5	m
l2	0.5	m
Motor	Valor	Unidade
Kt	0.122	V/(rad/s)
Ke	0.121	(N.m)/A
Jm	5.50E-04	Kg.m ²
R	3.70E-01	Ohm
Ligação	Valor	Unidade
raio	0.00808507	m
Rat	0.25	N/(rad/s)
N1	16	--
N2	16	--
Constantes	Valor	Unidade
G	9.80665	m/s ²
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Realimentação	
K0	0
T0	4.990662298
K1	1.414607597
T1	2.398764772
K2	-0.71955455
T2	-0.68559664

Coeficientes do Polinómio desejado	
C0	0
C1	25547.44052
C2	488.0179749
C3	-2792.08668
C4	-50.9357034
C5	56.70735418
C6	1

Auxiliares de cálculo	
A00	0.4375
A01	0.213575
A02	0.0625
A10	0.125
A11	0.0625
A12	0.07295
A20	11.66385689
A21	0.4375
A22	0.125
B00	4.290409375
B11	1.838746875
B220	40.78254483
B221	610.5957267

Z 0	-321.732551	Z 10	-21.87172658
Z 1	4816.975541	Z 11	-7.812148684
Z 2	-321.732551	Z 12	-0.476097315
Z 3	92.01589675	Z 13	0.982986776
Z 4	28.7006765	Z 14	-0.026381209
Z 5	-32.8075899	Z 15	7.128122753
Z 6	-21.8717266	Z 16	-0.476097315
Z 7	-430.894796	Z 17	0.982986776
Z 8	28.7006765	Z 18	-0.026381209
Z 9	-32.8075899	Z 19	0.125700147

Recebe os parâmetros de PARAMETR.XLS. Dado o sistema ser linearizado em torno de Alfa=Beta=0, pode ser tratado algebricamente, razão pela qual se apresenta uma proposta para o fazer, em ordem a determinar os seus *pólos em malha fechada*. Reflectindo o sistema introduzido em PARAMETR.XLS, o polinómio característico é apresentado pelos seus coeficientes: C6, C5, C4, C3, C2, C1 e C0.

Para descobrir as suas raízes, o polinómio é representado graficamente, da maneira definida no quadro verde junto ao gráfico: **INICIO** é o valor mais negativo, **FIM** o mais positivo, e **TIPO** pode ser "lin" para uma escala linear, ou um número que representa o número de dezenas da escala logarítmica escolhida. O redesenho do gráfico é feita com um **CLICK** por cima deste.

Observando os pontos de mudança de sinal do gráfico, poder-se-á preencher o quadro **SEEDS**, com os valores iniciais da busca numérica das raízes, operação despoletada pelo botão **CLOSE LOOP ROOTS**.

$$\begin{bmatrix} 0.438 & 0.2136 & 0.0625 \\ 0.25 & 0.0625 & 0.07295 \\ 11.66 & 0.4375 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.2904094 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2258 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -611 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40.783 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.438 & 0.213575 & 0.0625 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.0625 & 0.07295 \\ 0 & 0 & 11.66 & 0.4375 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{matrix} X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \\ X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -611 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40.782545 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{matrix} X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.82 & 0.006308 & -56.70735 & 0 & 0 \\ 0 & 28.51 & -6.57583 & 117.08232 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 22.42676 & -3.142233 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.788 \\ -7.82 \\ 0.21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.415 \\ -0.72 \\ 4.991 \\ 2.399 \\ -0.686 \end{bmatrix} T \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} X'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4.535 & -2.71905 & -37.8049 & 9.0854744 & -2.5967 \\ 0 & 17.45 & -0.94884 & 78.054842 & -18.75856 & 5.3614 \\ 0 & 22.7 & 22.27574 & -2.09482 & 0.5034387 & -0.1439 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ \text{alfa} \\ \text{beta} \\ X' \\ \text{alfa}' \\ \text{beta}' \end{matrix}$$

Realimentação		
CARRO	K0	0
	T0	4.990662298
ALFA	K1	1.414607597
	T1	2.398764772
BETA	K2	-0.719554546
	T2	-0.685596642

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 15257.21 \\ 19498.801 \\ 7383.9857 \\ -12211.59 \\ -7590.982 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 64 \\ 729 \\ 4096 \\ 15625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} c5 \\ c4 \\ c3 \\ c2 \\ c1 \\ c0 \end{matrix}$$

C6	1
C5	56.707354
C4	-39.72233
C3	-2159.481
C2	367.07929
C1	17031.627
C0	0

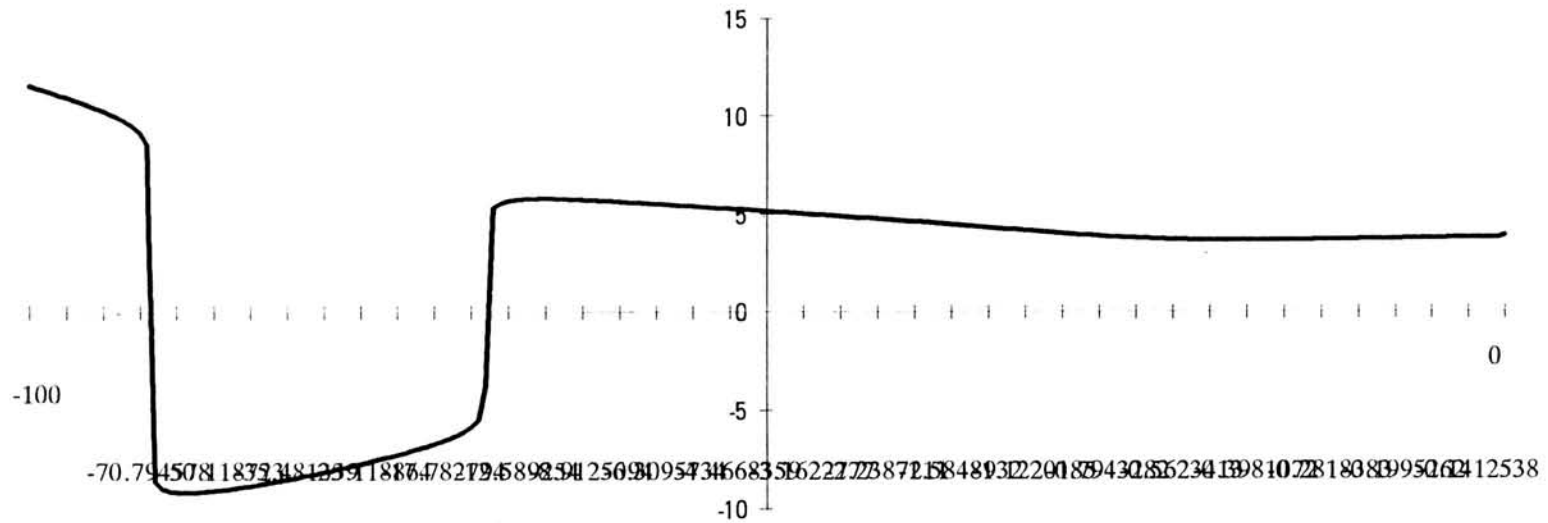
=> $P_{\text{característico}}(s) = -0.074979s^3 - 1274.047s^2 - 17031.627s - 17031.627$

Início	Fim	Tipo
-100	0	3

	seeds
CLOSE	-1
	-2
LOOP	-3
	-4
ROOTS	-5
	-6

RAÍZES
3.21176E+13
-0.159061838
-0.068172027
1.75746E+12
-0.124920241
-0.074979291

Polinómio Característico: MALHA FECHADA



Os parâmetros são importados de PARAMETR.XLS.
 Representa-se a **equação matricial** fundamental deste sistema, na sua versão **não linearizada**.

nota: A:=alfa B:=beta

$$\begin{bmatrix} k1 \cos(A) & k2 & k3 \cos(A-B) \\ k5 \cos(B) & k3 \cos(B-A) & k6 \\ k8+k12 & k1 \cos(A) & k5 \cos(B) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x'' \\ \text{alfa}'' \\ \text{beta}'' \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k3 \sin(A-B) \\ 0 & -k3 \sin(B-A) & 0 \\ -k9-k11 & k1 \sin(A) & k5 \sin(B) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x' \\ (\text{alfa}')^2 \\ (\text{beta}')^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k4 \sin(A) \\ k7 \sin(B) \\ k10 V \end{bmatrix}$$

Anexo 3: Simulação dum algoritmo de controlo

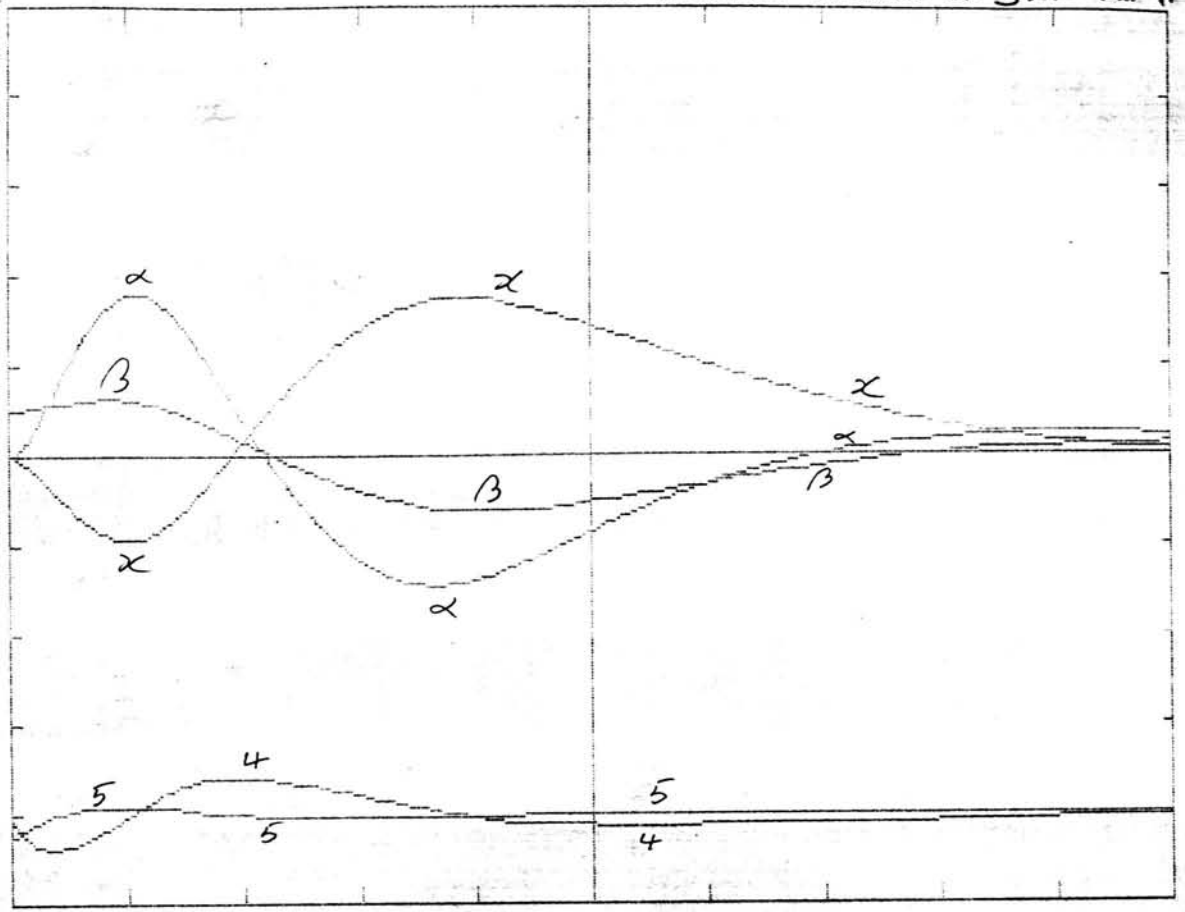
As páginas seguintes descrevem o resultado dum controlo por realimentação de estado sobre o sistema real, ie, não linearizado.

Como se observa o duplo pêndulo permanece controlável desde que o seu estado inicial não seja demasiado distante do ponto de equilíbrio (no caso optou-se por um estado inicial com velocidades todas nulas, e um desvio da haste superior de até 5.7° para garantir a controlabilidade, e consequente possibilidade de levar o pêndulo à posição de equilíbrio desejada ($\alpha=\beta=0^\circ$).

Na última página introduziu-se ruído, verificando que o sistema permanecia controlável, com um ruído de $\pm 1^\circ$ sobre a haste superior.

PLOT1: Gamma
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT2: Alfa
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT3: Beta
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT4: TENSAO
 -5.00000E+3
 4.50000E+4
 PLOT5: FORCA
 -5.00000E+2
 4.50000E+3

Map Linear: de 0.0 a 3.0 em R



0.000000

TIME

1.200000

PLOT1: Carro

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLOT2: Alfa

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLOT3: Beta

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLOT4: TENSAO

-5.00000E+3

4.50000E+4

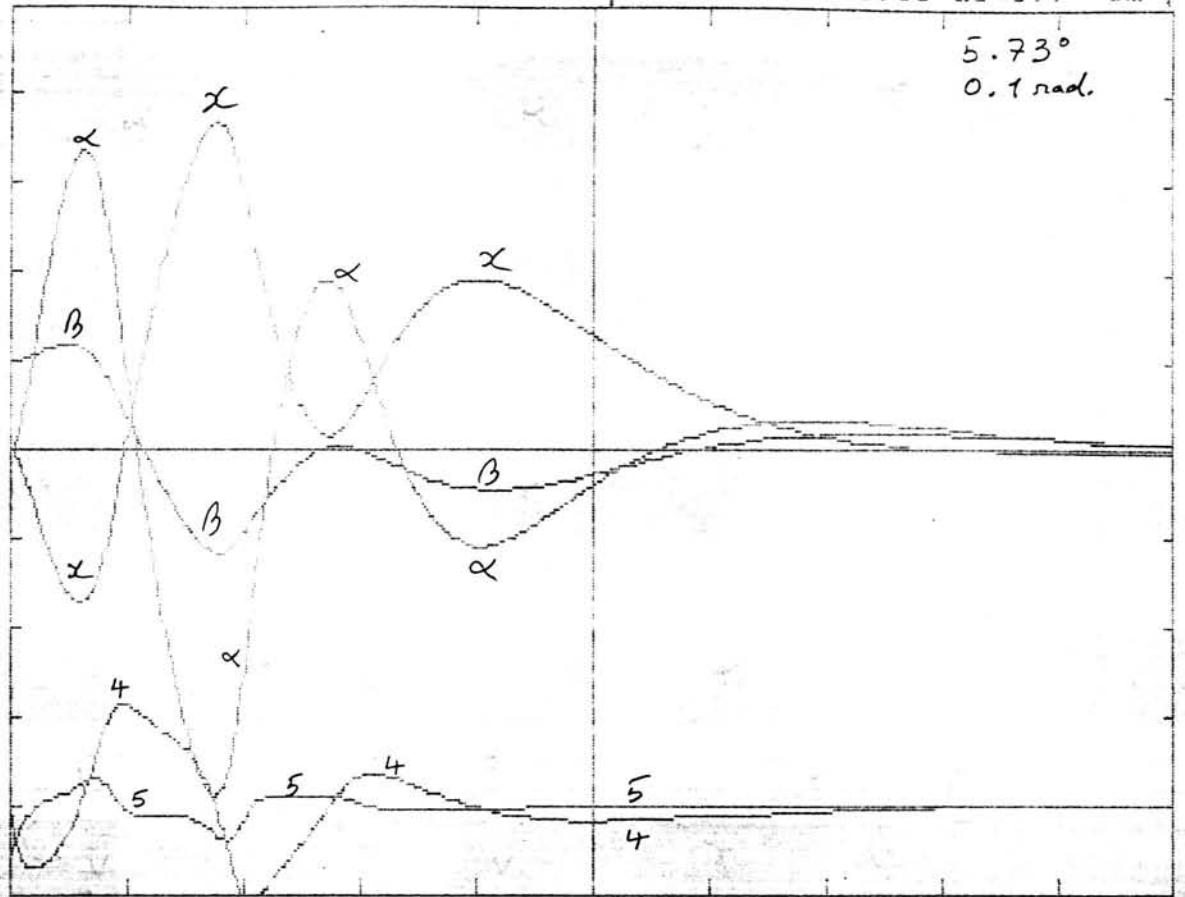
PLOT5: FORCA

-5.00000E+2

4.50000E+3

Nfo Linear: desvio de 5.7° em β

5.73°
0.1 rad.



0.000000

TIME

2.000000

PLAT1: Gamma

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLAT2: Alfa

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLAT3: Beta

-5.00000E-1

5.00000E-1

PLAT4: TENSAO

-5.00000E+3

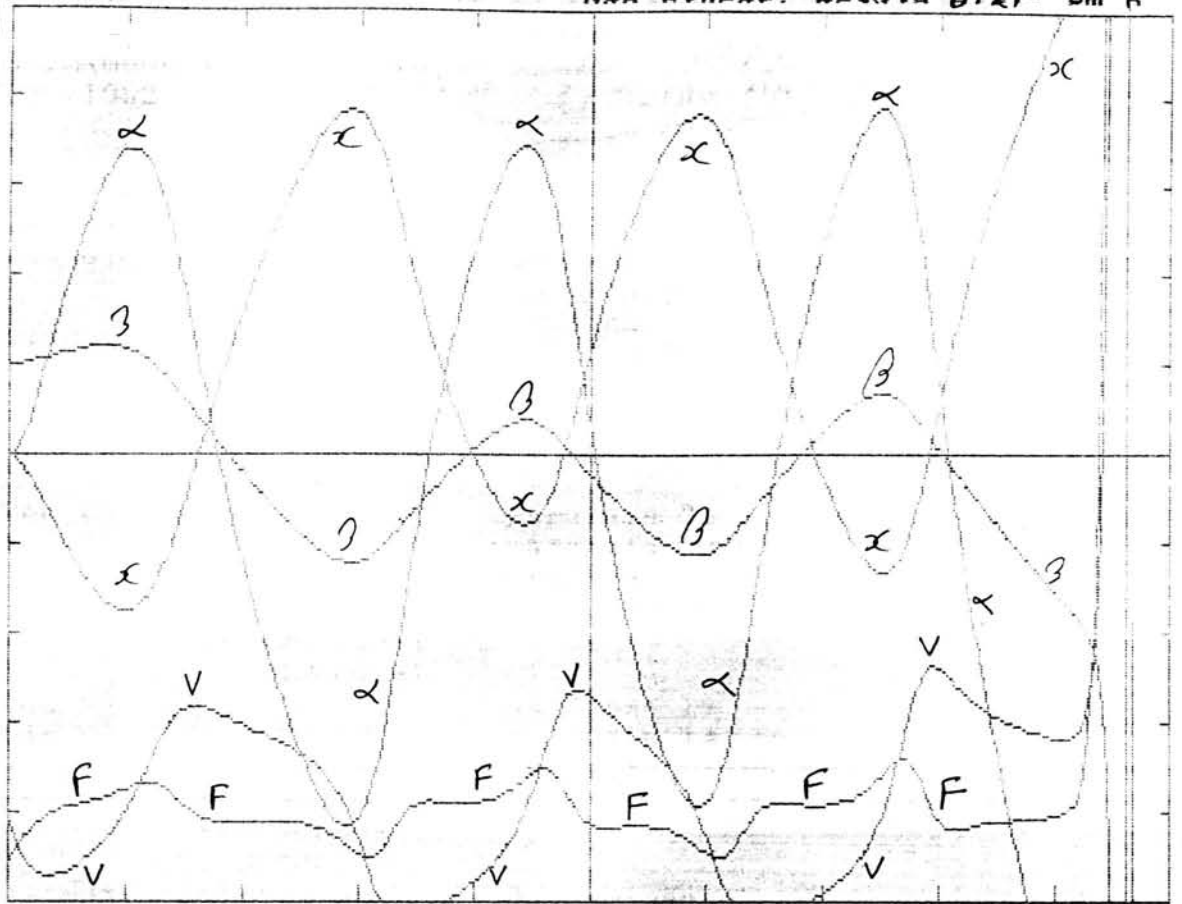
4.50000E+4

PLAT5: FORCA

-5.00000E+2

4.50000E+3

Non Linear: Decida 6.27° em R



0.000000

TIME

1.200000

***** T U T S I M V 7 M o d e l L i s t i n g *****

Model File: c:\tutsim\models\PNDL_NL2.SIM
System Date: 9 /20 /1992
System Time: 19 : 38

NÃO LINEAR
C/ RUIDO NAS HASTES (1º grau)

```
A1=VMUL[Vec_a1 , Vec_V] ;parciais 2a
A2=VMUL[Vec_a2 , Vec_C] ;parciais 2a
Aalfa=SUM[A1 , A2] ;2a equaç fo
Abeta=SUM[B1 , B2] ;3a equaç fo
Acarro=SUM[C1 , C2] ;1a equaç fo
Alfa=PLOT[Palfa] ;Gráfico
PLOT number : 2.00000
Minimum : -5.00000E-1
Maximum : 5.00000E-1
B1=VMUL[Vec_b1 , Vec_V] ;parciais 3a
B2=VMUL[Vec_b2 , Vec_C] ;parciais 3a
Beta=PLOT[Pbeta] ;Gráfico
PLOT number : 3.00000
Minimum : -5.00000E-1
Maximum : 5.00000E-1
C1=VMUL[Vec_c1 , Vec_V] ;parciais 1a
C2=VMUL[Vec_c2 , Vec_C] ;parciais 1a
Carro=PLOT[Pcarro] ;Gráfico
PLOT number : 1.00000
Minimum : -5.00000E-1
Maximum : 5.00000E-1
Det=LEQ[ (ma*me*mi)+(md*mh*mc)+(mg*mb*mf)-(mg*me*mc)-(ma*mh*mf)-(md*mb*mi) ] ;determinante
FORCA=PLOT[Forca] ;Gráfico
PLOT number : 5.00000
Minimum : -5.00000E+2
Maximum : 4.50000E+3
Forca=LEQ[ (k10*Tensao)-(k11*Vcarro)-(k12*Acarro) ] ;Força exercida pelo motor
O_CA=COS[Palfa] ;Operaç fo
O_CAB=COS[Palfa-Pbeta] ;Operaç fo
O_CB=COS[Pbeta] ;Operaç fo
O_SA=SIN[Palfa] ;Operaç fo
O_SAB=SIN[Palfa-Pbeta] ;Operaç fo
O_SB=SIN[Pbeta] ;Operaç fo
Pa_sr=INT[Valfa]
Initial value : 0.000000
Palfa=SUM[Pa_sr , ruido*1.74530E-2]
Pb_sr=INT[Vbeta]
Initial value : 1.00000E-1
Pbeta=SUM[Pb_sr , ruido*1.74500E-2]
Pcarro=INT[Vcarro] ;Integrador X' -> X
Initial value : 0.000000
R_k0=CON[ ] ;R
```

```

Constant value      :-2.18534E+2
R_k1=CON[ ]        ;R
Constant value      : 4.20551E+2
R_k2=CON[ ]        ;R
Constant value      :-1.39850E+3
R_t0=CON[ ]        ;R
Constant value      : 1.39986E+3
R_t1=CON[ ]        ;R
Constant value      :-6.18624E+1
R_t2=CON[ ]        ;R
Constant value      :-3.13214E+2
TENSAO=PLOT[Tensao] ;Gráfico
PLOT number        : 4.00000
Minimum            :-5.00000E+3
Maximum            : 4.50000E+4
Tensao=SUM[(R_k0*Pcarro)+(R_k1*Palfa)+
            (R_k2*Pbeta) , (R_t0*Vcarro)+
            (R_t1*Valfa)+(R_t2*Vbeta)] ;Realimentação
Valfa=INT[Aalfa]   ;Integrador A'' -> A'
Initial value      : 0.000000
Vbeta=INT[Abeta]   ;Integrador B'' -> B'
Initial value      : 0.000000
Vcarro=INT[Acarro] ;Integrador X'' -> X'
Initial value      : 0.000000
Vec_C=VEC3[k4*O_SA/Det , k7*O_SB/Det ,
            k10*Tensao/Det] ;Vector dos restantes
Vec_V=VEC3[Vcarro , Valfa*Valfa , Vbeta*
            Vbeta] ;Vector das velocidades
Vec_a1=VEC3[if*b3 , (ie*b2)+(if*b4) , (id*
            b1)+(if*b5)] ;V1
Vec_a2=VEC3[id , ie , if] ;V2
Vec_b1=VEC3[ii*b3 , (ih*b2)+(ii*b4) , (ig*
            b1)+(ii*b5)] ;V1
Vec_b2=VEC3[ig , ih , ii] ;V2
Vec_c1=VEC3[ic*b3 , (ib*b2)+(ic*b4) , (ia*
            b1)+(ic*b5)] ;V1
Vec_c2=VEC3[ia , ib , ic] ;V2
b1=LEQ[-k3*O_SAB/Det] ;B
b2=LEQ[k3*O_SAB/Det] ;B
b3=LEQ[-k9-k11/Det] ;B
b4=LEQ[k1*O_SA/Det] ;B
b5=LEQ[k5*O_SB/Det] ;B
ia=LEQ[(me*mi)-(mh*mf)] ;inversa
ib=LEQ[(mh*mc)-(mb*mi)] ;inversa
ic=LEQ[(mb*mf)-(me*mc)] ;inversa
id=LEQ[(mg*mi)-(md*mi)] ;inversa
ie=LEQ[(ma*mi)-(mg*mc)] ;inversa
if=LEQ[(md*mc)-(ma*mf)] ;inversa
ig=LEQ[(md*mh)-(mg*me)] ;inversa
ih=LEQ[(mg*mb)-(ma*mh)] ;inversa
ii=LEQ[(ma*me)-(md*mb)] ;inversa
k1=CON[ ]
Constant value      : 3.75000E-1
k10=CON[ ]

```

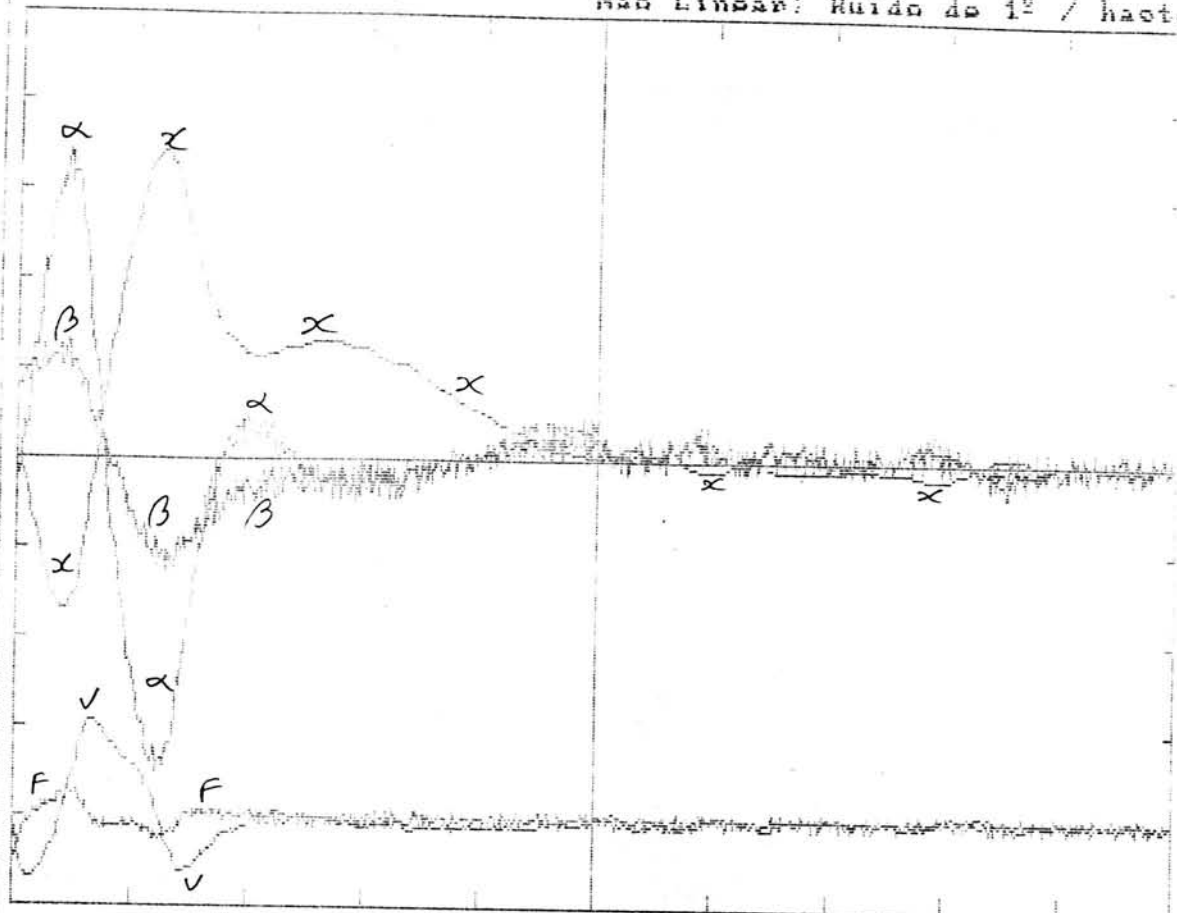
```
Constant value      : 2.43386
k11=CON[ ]         :
Constant value      : 3.89418E+3
k12=CON[ ]         :
Constant value      : 5.95556E-1
k2=CON[ ]          :
Constant value      : 1.97950E-1
k3=CON[ ]          :
Constant value      : 6.25000E-2
k4=CON[ ]          :
Constant value      : 3.67875
k5=CON[ ]          :
Constant value      : 1.25000E-1
k6=CON[ ]          :
Constant value      : 7.29500E-2
k7=CON[ ]          :
Constant value      : 1.22625
k8=CON[ ]          :
Constant value      : 3.00000
k9=CON[ ]          :
Constant value      : 1.00000E-1
ma=LEQ[k1*O_CA]    ;matriz
mb=LEQ[k2]         ;matriz
mc=LEQ[k3*O_CAB]   ;matriz
md=LEQ[k5*O_CB]    ;matriz
me=LEQ[k3*O_CAB]   ;matriz
mf=LEQ[k6]         ;matriz
mg=LEQ[k8+k12]     ;matriz
mh=LEQ[k1*O_CA]    ;matriz
mi=LEQ[k5*O_CB]    ;matriz
ruído=NOI[ ]       ;Fonte unitária de ruído
t=TIME[ ]          ;Temporização
Time step DELTA    : 5.00000E-3
End time           : 3.00000
```

^C

C:\TUTSIM>

PLOT1: α
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT2: Alfa
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT3: Beta
 -5.00000E-1
 5.00000E-1
 PLOT4: TENSÃO
 -5.00000E+3
 4.50000E+4
 PLOT5: FORÇA
 -5.00000E+2
 4.50000E+3

Não Linear! Ruído de 1º / haot.



0.000000

TIME

3.00000

Lista Bibliográfica

LIVROS:

- DYNAMICAL SYSTEMS AND AUTOMATIC CONTROL. (*)
S. L. MARTINS DE CARVALHO
- NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS
1990 STEVEN CHAPRA, RAYMOND P. CANALE
- CONTROL SYSTEM DESIGN - AN INTRODUCTION TO STATE SPACE METHODS.
B. FRIEDLED

PAPERS:

- ON THE CONTROL OF A TWO DIMENSIONAL MULTI-LINKED INVERTED PENDULUM:
CO-ORDINATE SYSTEM SUITABILITY FOR DYNAMIC FORMULATION.
30th CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, BRIGHTON, ENGLAND
DEZEMBRO-91 P. S. LARCOMBE
- OBSERVER BASED CONTROL OF A DOUBLE PENDULUM
DEPARTMENT OF AUTOMATIC CONTROL, SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SANEIRO-92 W. HALETINSKY, M.F. SENNING, F. WIEDERKEHR
- STABILIZATION OF A DOUBLE INVERTED PENDULUM BY ANALOGUE CONTROLLER
DEPARTMENT OF CONTROL AND INFORMATION ENGINEERING, UNIVERSITY XI'AN-CHINA
FENG ZU-REN, YIN ZHENG-QI, CHEN HUI-TANG
- GRÁFICOS DE LIGAÇÃO ENERGÉTICA
1989 ANTONIO PAULO GOMES MENDES MOREIRA

OUTROS:

- MANUAL DO TOTSIM - SOFTWARE DE SIMULAÇÃO
- MANUAL DO EXCEL IV - SOFTWARE DAS MACROS DA FOLHA DE CÁLCULO.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000101604