

METODOLOGIAS DE ANÁLISE DE LAJES FUNGIFORMES

Aplicação no Projecto de Edifícios

NELSON ROMANO FERREIRA CARVALHO

Relatório de Projecto submetido para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Doutor Nelson Saraiva Vila Pouca

Co-Orientador: Professor Doutor Rui Manuel C. M. de Faria

FEVEREIRO DE 2008

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2007/2008

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miiec@fe.up.pt

Autor: nln_romano@hotmail.com

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2007/2008 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2008*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

Aos meus Pais pelo incentivo e coragem transmitidos
À "gorda" com especial apreço

"O modo mais seguro de ocultar aos outros o nosso saber é não nos reservarmos"

G.H.Lichtenberg

AGRADECIMENTOS

É com elevada consideração e respeito que agradeço ao Professor Nelson S. Vila Pouca toda a disponibilidade, dedicação e estímulo na orientação deste trabalho.

Ao professor Miguel Ângelo Dias Azenha, um especial obrigado, pela sua prontidão e disponibilidade para esclarecer algumas dúvidas e transmitir alguma da sua experiência em projecto.

Agradeço ao Bruno Luís Quelhas da Silva todo o apoio dado na compreensão e utilização de algumas das funcionalidades do programa de cálculo.

Aos amigos mais chegados e sempre presentes, obrigado pelo constante incentivo, compreensão e companheirismo em horas boas e horas más.

Para os amigos e amigas que de algum modo me motivaram, me ouviram, me convenceram e me estimularam, durante a realização do trabalho, um voto de muita felicidade, saúde e concretização profissional.

Agradeço também a todas as pessoas que directamente ou indirectamente me apoiaram na condução do trabalho.

Fico grato a Carlos Ferreira e Carla Dias, pela disponibilidade em transmitir informações acerca do software que representam.

Obrigado a todos aqueles que disponibilizam os seus trabalhos já desenvolvidos, dando a oportunidade de aprender sempre mais e a possibilidade de se evoluir no conhecimento em Engenharia Civil.

Finalmente, aos meus Pais, Adélia e Raúl, por tudo o que sempre fizeram por mim, para conseguir chegar até onde cheguei.

RESUMO

Carvalho, Nelson R. F., “*Metodologias de Análise de Lajes Fungiformes – Aplicação no Projecto de Edifícios*”, Projecto, Mestrado Integrado em Engenharia Civil – Especialização em Estruturas, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Fevereiro 2008.

O projecto de lajes fungiformes é actualmente apoiado na análise através de elementos finitos. Isto deve-se, por um lado à maior facilidade da utilização de programas com estas capacidades e por outro lado ao facto de se ter confrontado situações reais de projecto com situações mais irregulares, nas quais os métodos simplificados são de difícil aplicação. No entanto, a avaliação dos momentos flectores da laje feita a partir de um modelo apoiado em elementos finitos levanta algumas dificuldades, em parte, na zona de momentos negativos sobre os pilares.

Com o presente trabalho, pretende-se dar um contributo sobre estes aspectos, apontando-se uma metodologia de análise e dimensionamento adequada à sua aplicação em projecto.

Neste trabalho são analisadas diversas estratégias de modelação de lajes fungiformes, tendo em consideração de um modo especial a modelação na zona de ligação da laje aos pilares.

De facto um dos aspectos deste estudo centrou-se na análise dos momentos flectores nesta zona de ligação, obtidos pelo método dos elementos finitos.

Avaliam-se diferentes metodologias de modelação e respectivo tratamento de resultados, propondo-se uma metodologia para modelação das lajes fungiformes, tendo em conta os aspectos particulares na zona dos pilares, e avaliação dos esforços nestas zonas para o dimensionamento das armaduras. Tratam-se os casos de geometria mais regular estendendo-se o estudo a casos mais irregulares, tendo em conta várias condicionantes.

Procede-se a um estudo com malhas de elementos finitos de diferentes dimensões de forma a estabelecerem-se dimensões adequadas à utilização em projecto, tendo em conta a qualidade dos resultados e o esforço computacional exigido.

São estudados diversos exemplos, comparando-se os resultados obtidos com diferentes estratégias de modelação. Procede-se ainda à comparação com resultados obtidos de forma analítica.

Com o objectivo de mostrar a versatilidade da metodologia adoptada desenvolvem-se ferramentas auxiliares de cálculo para o dimensionamento. Estas aplicações permitem o cálculo de armadura a partir dos momentos flectores obtidos num programa comercial de cálculo de estruturas. Com base nos critérios definidos o programa fornece as áreas de armadura necessária nas várias zonas da laje em ficheiros devidamente preparados que podem ser importados para o programa geral de cálculo e visualizar os resultados sobre a malha de elementos finitos do modelo.

É feita ainda a utilização das aplicações auxiliares de cálculo num caso concreto de uma laje de um edifício.

PALAVRAS-CHAVE: Projecto de Laje Fungiforme, Método dos Elementos finitos, Metodologias de análise.

ABSTRACT

Carvalho, Nelson R. F., “*Methodologies of Flat Slabs Analysis – Application in the design of buildings*”, Project, Master’s Thesis in Civil Engineering – Specialization in Structures, Faculty of Engineering, Porto University, Porto, February 2008.

The design of flat slabs is actually supported in analysis finite elements.

Is due to the ease of use of programs with these capabilities and the other hand it has faced situations actual project with more irregular situations. Which simplified methods are difficult to apply. However, the evaluation of bending moments made of a slab from a model supported by finite elements causes some difficulties in areas with negative moments on the column.

With this work, it’s intended to improve on these aspects, creating a methodology for analysis and dimensioning appropriate to its applications.

In this work examines various modelling strategies of slabs, considering in particular the modelling in the area of slab to columns connection.

One of the aspects of this study, focused on the analysis of this area bending moments of connection, obtained by the method of finite elements.

Up assess different methodologies for modelling and processing of their results, it’s proposing a methodology for modelling of flat slabs, taking into account the particular aspects of the area of the column and evaluation of effects in these areas to designing of reinforcement.

These are the cases of more regular geometry extending up to study the cases more irregular, taking into account various constraints.

Proceed to a study of the finite element mesh of different sizes suitable for use in design, taking into account the quality of results and the computational effort required.

Several examples are studied by comparing the results obtained with different strategies for modelling. Proceeds are still compared with the results obtained so analytical

With the aim of showing the versatility of methodology adopted develop itself auxiliary tools for calculating the flat slabs. These applications allow the calculation from bending moments obtained in a trade program for calculating of structures. Based on the criteria defined the program provides the areas of reinforcement needed in the various areas of slab in files properly prepared that can be imported into the program overall calculation and display the results on the finite element mesh of the model.

It utilizes the applications auxiliary of calculation in a case of a slab of a building.

Keywords: Flat Slabs Design, Finite Element Method, Methods of analysis.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
ÍNDICE GERAL	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ÍNDICE DE QUADROS	xiii
SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xv
 1. INTRODUÇÃO	 1
1.1. Generalidades	1
1.2. Importância de uma metodologia	3
 2. LAJES FUNGIFORMES	 5
2.1. Diferentes tipos de lajes fungiformes	5
2.1.1. Lajes fungiformes maciças de espessura constante	5
2.1.2. Lajes fungiformes maciças com capitéis	6
2.1.3. Lajes fungiformes maciças com capitéis de espessura constante	6
2.1.4. Lajes fungiformes aligeiradas com blocos de aligeiramento perdidos	7
2.1.5. Lajes fungiformes aligeiradas com moldes recuperáveis	7
2.2. Pré-dimensionamento de lajes fungiformes	8
2.2.1. Espessura mínima face ao maior vão	9
2.2.2. Espessura mínima condicionada pela deformação	9
2.2.3. Espessura mínima condicionada pelos esforços	10
2.3. Aspectos particulares no projecto de lajes fungiformes	10
2.3.1. Punçoamento	10
2.3.2. Existência de aberturas na laje	11
2.3.3. Pilares de bordo e pilares de canto	11
2.3.4. Irregularidades geométricas	13
2.3.5. Acções horizontais	14
 3. MÉTODOS DE ANÁLISE DE LAJES FUNGIFORMES	 15
3.1. Método dos pórticos equivalentes	15
3.2. Método directo de análise (ACI)	19
3.3. Método dos elementos finitos	22
3.4. Método das grelhas	23
3.5. Método das linhas de rotura	26
 4. ANÁLISE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	 29
4.1. Análise dos elementos finitos do programa SAP2000	29
4.2. Tipos de Elementos para análise de lajes fungiformes	36
4.3. Comparação de resultados obtidos com diferentes programas	37
 5. METODOLOGIA DE DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS DE LAJES FUNGIFORMES	 43
5.1. Análise de lajes fungiformes com o método dos elementos finitos	43
5.1.1. Dimensionamento a partir de tensões	43

5.1.2. Dimensionamento a partir de momentos resultantes	44
5.2. Soluções analíticas existentes para alguns casos	44
5.3. Estratégias de modelação da ligação laje-pilar	49
5.4. Análise do refinamento da malha de elementos finitos	53
5.5. Análise da variação de espessuras	59
5.6. Análise da influência das dimensões da secção do pilar.....	62
5.7. Influência do vão da laje	64
5.8. Comentários finais sobre as estratégias de modelação analisadas.....	67
5.9. Metodologia para modelação de lajes fungiformes maciças	70
5.10. Metodologia adoptada para o cálculo de armadura	74
5.10.1. Metodologia para casos de pilares alinhados.....	74
5.10.1.1. Armaduras Superiores.....	74
5.10.1.2. Armaduras inferiores.....	79
5.10.2. Metodologia para qualquer caso de laje.....	80
5.11. Definição das dimensões máximas da malha de elementos finitos	81
6. APLICAÇÕES DE CÁLCULO	83
6.1. Generalidades.....	83
6.1.1. Caso de análise.....	85
6.1.2. Tipo de caso - Combinação de acções ou envolvente.....	85
6.1.3. Método de cálculo.....	85
6.1.3.1. Apenas momentos flectores, M_{11} e M_{22}	86
6.1.3.2. Método de Wood-Armer.....	86
6.2. Aplicação de cálculo “Laje_alinh_NLN”	89
6.3. Aplicação de cálculo “Laje_geral_NLN”	90
6.4. Comparação das aplicações desenvolvidas, seus resultados e funcionalidades.....	91
6.4.1. Exemplo 1	91
6.4.1.1. Comparação dos tipos de caso	92
6.4.1.2. Comparação dos Métodos de cálculo	92
6.4.1.3 – Comparação com o método dos pórticos equivalentes.....	98
6.4.2. Exemplo 2 – Laje irregular para aplicação geral	100
7. CASO DE ESTUDO	103
8. CONCLUSÕES	113
Sugestões para desenvolvimentos futuros.....	116
Bibliografia	117
Endereços multimédia	119
Software usado na elaboração do trabalho.....	119
Anexos.....	121
Anexo 1	123
Anexo 2	135

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Laje fungiforme maciça, esquema e exemplos (Ramos [22]).	5
Figura 2.2 - Laje fungiforme maciça com capitel, esquema e exemplos (Tesoro [31]).	6
Figura 2.3 - Laje fungiforme com espessamento, esquema e exemplos (Ramos [22]).	6
Figura 2.4 - Laje fungiforme aligeirada com blocos perdidos, esquema e exemplos (Ramos [22]).	7
Figura 2.5 - Lajes fungiformes aligeiradas nervuradas, esquema e exemplos (Tesoro [31]).	7
Figura 2.6 - Representação das zonas maciças em lajes fungiformes aligeiradas (Figueiras [16]).	8
Figura 2.7 - Largura efectiva, b_e , de uma laje fungiforme (EC2 [15]).	12
Figura 2.8 - Disposição da armadura no bordo da laje (Figueiras [16]).	12
Figura 2.9 - Exemplos de lajes fungiformes de geometria irregular (Tesoro [31]).	13
Figura 3.1 - Pórticos equivalentes para cálculo de esforços actuantes em lajes fungiformes.	16
Figura 3.2 - Divisão das faixas de cada pórtico equivalente e respectiva distribuição dos momentos (valores recomendados) (Figueiras [16]).	17
Figura 3.3 - Distribuição aconselhada de armadura superior em pilares interiores (Figueiras [16]).	18
Figura 3.4 - Coeficientes de momentos totais em lajes fungiformes dados pelo Método Directo (Figueiras [16]).	19
Figura 3.5 - Comprimentos mínimos da armadura para lajes fungiformes, quando aplicado o método directo (Figueiras [16]).	21
Figura 3.6 - Representação da secção transversal a considerar para o cálculo das inércias (Silva [29]).	25
Figura 4.1 - Elemento finito quadrilátero de laje (Wilson [33]).	30
Figura 4.2 - Eliminação das rotações tangenciais nulas (Wilson [33]).	30
Figura 4.3 - Introdução de deslocamentos normais nos nós de canto (Wilson [33]).	30
Figura 4.4 - Condensação das rotações nos nós médios (Wilson [33]).	31
Figura 4.5 - Nós e respectivas funções de forma.	32
Figura 4.6 - Exemplo unidimensional de deformação de uma barra elástica, aproximação standard (Zienkiewicz [34]).	32
Figura 4.7 - Exemplo unidimensional de deformação de uma barra elástica, aproximação hierárquica (Zienkiewicz [34]).	32
Figura 4.8 - Elemento finito de 8 nós vs elemento finito de 4 nós com funções hierárquicas.	34
Figura 4.9 - Funções de forma de um nó de canto.	34
Figura 4.10 - Funções de forma de um nó intermédio.	34
Figura 4.11 - Diferença das funções de forma de um nó de canto.	35
Figura 4.12 - Graus de liberdade dos diferentes tipos de elemento (Wilson [33]).	36
Figura 4.13 - Esquema estrutural da viga em análise (Azevedo).	37
Figura 4.14 - Comparação dos valores de deslocamentos no ponto A com a solução teórica.	39
Figura 4.15 - Esquema estrutural da laje em estudo.	39
Figura 4.16 - Comparação de resultados de deslocamentos e de momentos com a solução teórica.	41
Figura 5.1 - Representação da laje fungiforme contínua e suas características.	44
Figura 5.2 - Secção circular equivalente à secção rectangular.	46
Figura 5.3 - Diagramas de momentos para a mesma carga e módulos de elasticidade diferentes.	50
Figura 5.4 - Malha 2×2 e apoio no nó central – caso A. Diagrama de momentos.	50
Figura 5.5 - Malha 2×2 com apoio no nó central e movimento corpo rígido – caso B. Diagrama de momentos.	51
Figura 5.6 - Malha 2×2 com elementos “sólidos” na área do pilar - caso C. Diagrama de momentos.	52
Figura 5.7 - Um elemento sólido na área do pilar – caso D. Diagrama de momentos.	52
Figura 5.8 - Representação da laje fungiforme infinita – Malha aconselhável.	53
Figura 5.9 - Dimensões máximas da malha de elementos finitos.	54
Figura 5.10 - Representação da localização dos pontos e sua referência.	54
Figura 5.11 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_s , com valor teórico.	56
Figura 5.12 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_l , com valor teórico.	56
Figura 5.13 - Comparação de valores do momento flector no centro do pilar Mxs.	57

Figura 5.14 - Comparação de valores dos momentos flectores M_{x1} e M_{y1}	57
Figura 5.15 - Comparação de valores dos momentos flectores.....	58
Figura 5.16 - Comparação de valores de deslocamentos δ_s , para espessuras 0.20m e 0.24m.	60
Figura 5.17 - Comparação de valores de deslocamentos δ_s , para espessuras 0.28m e 0.32m.	61
Figura 5.18 - Comparação de valores de deslocamentos δ_1 , para espessuras de laje 0.20m e 0.32m.	61
Figura 5.19 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_s e δ_1 , para várias dimensões do pilar.	63
Figura 5.20 - Comparação de valores de momentos M_{xs} e M_{x1} , para várias dimensões do pilar.	64
Figura 5.21 - Comparação de valores de momentos M_{y1} , para várias dimensões do pilar.	64
Figura 5.22 - Comparação de dois exemplos de malhas com dimensões máximas aconselháveis.	65
Figura 5.23 - Comparação de valores de deslocamentos δ_s e momentos M_{xs} e M_{ys} com a solução teórica	66
Figura 5.24 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_s e dos momentos M_{xs} e M_{ys} com a solução teórica.	67
Figura 5.25 - Diagramas de momentos (M_{11}) característicos de cada caso estudado.	68
Figura 5.26 - Cortes de diagramas de momentos flectores (M_{11} e M_{22}) e pontos de leitura de momentos flectores na face do pilar em cada direcção.....	70
Figura 5.27 - Exemplo de grelha e respectiva laje, com elementos divididos na intersecção com os alinhamentos da grelha.	71
Figura 5.28 - Definição de alinhamentos em pilares e faces curva.....	71
Figura 5.29 - Representação das faixas e dos esforços (M_{11}), segundo a direcção xx	75
Figura 5.30 - Representação dos cortes, alinhamentos e respectivas intersecções – pontos de leitura de esforços.	76
Figura 5.31 - Representação de alinhamentos e intersecções com C7.....	77
Figura 5.32 - Representação dos pontos de momentos máximos positivos.	79
Figura 6.1 - Representação dos momentos num nó de área infinitesimal.....	88
Figura 6.2 – Interface da aplicação de cálculo “Laje_alinh_NLN”.....	89
Figura 6.3 – Interface da aplicação de cálculo “Laje_geral_NLN”.....	90
Figura 6.4 - Representação do modelo da laje e respectiva deformada para alternância de sobrecarga em xadrez.	91
Figura 6.5 - Representação da envolvente de momentos, obtida em SAP2000.....	92
Figura 6.6 - Corte longitudinal (Momentos flectores segundo a direcção xx) no eixo dos pilares e a meio vão.....	92
Figura 6.7 - Representação da armadura superior por faixas na direcção xx , sem a consideração dos momentos torsores.	93
Figura 6.8 - Representação da armadura inferior por faixas na direcção xx , sem a consideração dos momentos torsores.	93
Figura 6.9 - Representação da armadura superior na direcção xx , por faixas, obtida pelo método Wood-Armer.	94
Figura 6.10 - Representação da armadura inferior na direcção xx , por faixas, obtida pelo método Wood-Armer.	94
Figura 6.11 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na combinação [kN.m/m].	95
Figura 6.12 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na envolvente [kN.m/m].	95
Figura 6.13 - Corte longitudinal a meio vão (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na combinação [kN.m/m].	96
Figura 6.14 - Corte longitudinal a meio vão (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na envolvente [kN.m/m].	96
Figura 6.15 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com o método de Wood-Armer [kN.m/m].	96
Figura 6.16 - Representação da armadura superior necessária na direcção xx , obtida pelo método Wood-Armer.	97
Figura 6.17 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) – obtido com a 2ª aplicação [kN.m/m].	97

Figura 6.18 - Representação do pórtico equivalente tipo.	98
Figura 6.19 - Representação da laje e sua deformada envolvente (exemplo 2).	100
Figura 7.1 - Planta do projecto de pavimento em estudo (pisso -1).	104
Figura 7.2 - Corte da estrutura em que se insere o piso-1 e corte da ligação laje-pilar.	105
Figura 7.3 - Modelação no programa de cálculo – planta da laje e respectiva grelha de apoio.	105
Figura 7.4 - Modelação no programa de cálculo – Vista tridimensional Inferior.	106
Figura 7.5 - Modelação no programa de cálculo – Vista tridimensional Superior.	106
Figura 7.6 - Armadura inferior, direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (caso de estudo).	108
Figura 7.7 - Armadura superior, direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (caso de estudo).	109
Figura 7.8 - Armadura inferior, direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (caso de estudo).	110
Figura 7.9 - Armadura superior, direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (caso de estudo).	111
Figura A1.1 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a combinação de acções considerando apenas M_{11} (exemplo 1).	125
Figura A1.2 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a combinação de acções considerando apenas M_{11} (exemplo 1).	126
Figura A1.3 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 1).	127
Figura A1.4 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 1).	128
Figura A1.5 - Representação tridimensional do momento resistente M_{xx} e momento actuante M_{11} (exemplo 1).	128
Figura A1.6 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 1).	129
Figura A1.7 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 1).	130
Figura A1.8 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).	131
Figura A1.9 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).	132
Figura A1.10 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).	133
Figura A1.11 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).	134
Figura A2.1 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 2).	137
Figura A2.2 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 2).	138
Figura A2.3 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 2).	139
Figura A2.4 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 2).	140
Figura A2.5 - Pormenor da malha na área de ligação laje-pilar.	140

Figura A2. 6 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 2).....	141
Figura A2. 7 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 2).	142

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 2.1 - Tipo de laje e espessura tendo em conta o maior vão (Figueiras [16]).	9
Quadro 3.1 - Distribuição simplificada dos momentos flectores no caso de uma laje fungiforme (EC2 [15]).	16
Quadro 3.2 - Valores do coeficiente β em função das dimensões da secção.	24
Quadro 4.1 - Valores de deslocamentos e tensões para malha 1×16 .	38
Quadro 4.2 - Resultados obtidos para deslocamentos no ponto A [cm].	38
Quadro 4.3 - Deslocamento vertical e momento flector principal no centro da laje (malha 6×6).	40
Quadro 4.4 - Deslocamento vertical e momentos flector principal, obtidos com diferentes malhas.	41
Quadro 5.1 - Deslocamento vertical e momentos flectores no centro do painel.	46
Quadro 5.2 - Valores de α e β , para cálculo de momentos sobre o pilar.	47
Quadro 5.3 - Momentos flectores em painéis quadrados uniformemente carregados. $\nu = 0.2$	47
Quadro 5.4 - Deslocamento vertical a meio vão entre pilares, para painéis uniformemente carregados.	48
Quadro 5.5 - Deslocamentos com diferentes malhas - Caso A e Caso B.	55
Quadro 5.6 - Momentos flectores com diferentes malhas - Caso A e caso B.	55
Quadro 5.7 - Deslocamentos com diferentes malhas - Caso C e caso D.	55
Quadro 5.8 - Momentos flectores com diferentes malhas - caso C e caso D.	56
Quadro 5.9 - Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 20cm e 22cm.	59
Quadro 5.10 - Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 24cm e 26cm.	59
Quadro 5.11 - Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 28cm e 32cm.	59
Quadro 5.12 - Deslocamentos, δ_l , para várias malhas, com espessura 20cm e 22cm.	60
Quadro 5.13 - Deslocamentos, δ_l , para várias malhas, com espessura 24cm e 26cm.	60
Quadro 5.14 - Deslocamentos, δ_l , para várias malhas, com espessura 28cm e 32cm.	60
Quadro 5.15 - Caso A e caso B - Deslocamentos para várias dimensões de pilares.	62
Quadro 5.16 - Caso C - Deslocamentos para várias dimensões de pilares.	62
Quadro 5.17 - Caso A e caso B - Momentos flectores para várias dimensões de pilares.	62
Quadro 5.18 - Caso C - Momentos flectores para várias dimensões de pilares.	63
Quadro 5.19 - Deslocamentos para vários vãos - Caso A	65
Quadro 5.20 - Deslocamentos para vários vãos (continuação) - Caso A	65
Quadro 5.21 - Momentos flectores para vários vãos - Caso A	66
Quadro 5.22 - Momentos flectores para vários vãos (continuação) - Caso A	66
Quadro 5.27 - Dimensão máxima aconselhável da malha de elementos finitos.	81
Quadro 6.1 - Quantidades de armadura superior nas diferentes faixas de laje [cm^2 / m].	99
Quadro 6.2 - Quantidades de armadura inferior nas diferentes faixas de laje [cm^2 / m].	99

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

ACI – American Concrete Institute

d - altura útil

D – Rigidez à flexão [GPa]

e – espessura da laje

E - módulo de elasticidade [GPa]

EC2 – Eurocódigo 2 [15]

h - espessura da laje

M_{11} – Momento flector segundo a direcção 1, geralmente coincidente com x

M_{12} – Momento torsor segundo a direcção 1-2

M_{22} – Momento flector segundo a direcção 1, geralmente coincidente com y

Malhas AC – malhas, cujas dimensões máximas dos elementos finitos, são as dimensões máximas aconselháveis

MEF – Método dos elementos finitos

MPE – Método dos pórticos equivalentes

A restante simbologia é explicada no desenvolvimento do texto.

1

INTRODUÇÃO

As lajes fungiformes são actualmente uma solução interessante e competitiva para a realização dos pavimentos de edifícios. As vantagens desta solução, que se prendem com a flexibilidade de organização dos espaços, com a rapidez de execução associada à tecnologia utilizada na sua construção, conduzem a que esta solução seja muito utilizada, em particular, em edifícios de média e grande dimensão.

O projecto deste tipo de lajes, apesar dos meios de cálculo actualmente disponíveis, nomeadamente programas de cálculo que permitem uma utilização versátil e amigável dos elementos finitos, encontra ainda algumas dificuldades. De facto, sente-se a necessidade de utilizar estratégias apropriadas de modelação que permitam a análise e o dimensionamento destas estruturas. Esta questão é particularmente sentida pela dificuldade de se resolver adequadamente as zonas de momentos flectores negativos sobre os apoios da laje, quando se utiliza o método dos elementos finitos.

Este trabalho procura dar um contributo relativamente a estas questões, centrando o seu objectivo principal na proposta de uma metodologia adequada de análise de lajes fungiformes visando a utilização em projecto, no seu dimensionamento.

Esta metodologia assenta na utilização de um programa de cálculo comercial, através do qual se obtém os esforços na laje resultante de uma análise linear elástica com a utilização de elementos finitos. Foi desenvolvida uma ferramenta de cálculo auxiliar que permite, a partir destes esforços, dimensionar, de uma forma automática com base em determinados critérios de distribuição, as armaduras em várias faixas da laje pré-definidas.

1.1. GENERALIDADES

Lajes fungiformes são lajes contínuas apoiadas directamente em pilares ou em paredes de betão armado, ou seja, sem vigas. Esta transferência é feita directamente no caso de lajes maciças de espessura constante ou através de capitéis ou espessamento da laje nas ligações aos pilares.

Os tipos de lajes fungiformes correntes são:

- Lajes fungiformes maciças de espessura constante;
- Lajes fungiformes maciças com capitéis;
- Lajes fungiformes maciças com espessamento (capitéis de espessura constante);
- Lajes fungiformes aligeiradas espessura constante;

- Lajes fungiformes aligeiradas com blocos de aligeiramento perdidos;
- Lajes fungiformes aligeiradas com moldes recuperáveis.

As lajes fungiformes apresentam grandes vantagens na sua utilização, mas também proporcionam o aparecimento de alguns problemas característicos do seu funcionamento estrutural (Ramos [22]).

Vantagens:

- Menor espessura $\Rightarrow$ menor altura dos edifícios;
- Tectos planos $\Rightarrow$ maior facilidade de instalação de condutas e melhores soluções arquitectónicas;
- Facilidade de colocação de divisórias;
- Simplicidade e rapidez de execução;
- Maior versatilidade tendo em conta a alteração da função dos pisos dos edifícios;

Principais problemas:

- Concentração de esforços nos apoios $\Rightarrow$ flexão e punçoamento;
- Flexibilidade às acções horizontais;
- Dificuldades quando se trata de lajes de geometria irregular;
- Existência de grandes aberturas $\Rightarrow$ condiciona o funcionamento da laje.

Este tipo de lajes admite deformações que podem ser decompostas e analisadas segundo direcções principais (direcções da armadura), formando com os apoios, um conjunto estrutural capaz de suportar muito bem as acções verticais e as acções horizontais razoavelmente bem. (Lúcio [18] e Tesoro [31]).

Para a avaliação dos esforços existem vários métodos ou metodologias de análise aplicáveis a este tipo de lajes de entre os quais se destacam:

- Método directo do ACI (análise elástica);
- Método dos pórticos equivalentes (análise elástica);
- Método das grelhas (análise elástica ou plástica);
- Método dos elementos finitos (análise elástica ou plástica).

Temos ainda outros métodos menos utilizados em projecto que são:

- Método das linhas de rotura (análise plástica);
- Método elástico (análise elástica);
- Método das diferenças finitas (análise elástica);

1.2. IMPORTÂNCIA DE UMA METODOLOGIA

O método dos elementos finitos é actualmente um método rápido e eficaz aplicável na análise de lajes fungiformes. Com o desenvolvimento dos meios computacionais e as facilidades de utilização dos elementos finitos com programas comerciais, mostra-se prático e tende a ser correntemente utilizado em projecto. O projecto de lajes fungiformes recorre cada vez mais a este método, mas encontra ainda algumas dificuldades, em particular associadas aos resultados que se obtém em alguns pontos específicos da laje. Por vezes prefere-se o uso de métodos tradicionais e de aplicação rápida, como por exemplo o método dos pórticos equivalentes ou o método directo do ACI. Mas em situações de lajes irregulares, os métodos simplificados não são aplicáveis.

Numa primeira fase deste trabalho procurou avaliar-se as capacidades de cálculo de dois programas comerciais com utilização de elementos finitos, comparando os tipos de elementos finitos e as dimensões das malhas utilizadas, no sentido de se definir uma metodologia de modelação adequada à análise de lajes fungiformes.

O principal problema na modelação de lajes fungiformes pelo método dos elementos finitos está associado aos “picos” de momentos flectores obtidos na zona de ligação laje-pilar, quando o pilar é simulado por um elemento de barra ou mais simplificado por um apoio pontual localizado no seu eixo. Estes “picos” de momentos reflectem as deficiências da modelação e resultam da própria utilização do método dos elementos finitos, mas não é conhecida uma forma adequada de saber qual a verdadeira distribuição de momentos nesta zona do pilar. Com várias análises e comparações de resultados obtidos, de estratégias de modelação e confrontando com resultados de outros autores, procurou estabelecer-se uma metodologia de modelação que permite obter soluções adequadas.

Uma das questões também bastante importante é a contabilização dos momentos torsores para o dimensionamento da armadura nas direcções principais. Grande parte dos métodos existentes, não contabiliza de forma directa e clara estes momentos, que são bastante importantes principalmente em lajes de geometria irregular. Procurou avaliar-se também esta questão de forma a permitir considerar o efeito dos momentos torsores nas metodologias que se propõem.

No desenvolvimento da metodologia proposta foi tida a preocupação da sua facilidade de aplicação a casos práticos de projecto, quer em situações de geometria e posição de pilares mais regular, quer em situações de geometria mais complexa.

Assim, foram desenvolvidas duas aplicações de cálculo em Visual Basic sobre o ambiente Excel, que servem como ferramenta auxiliar para o dimensionamento das armaduras de lajes fungiformes tendo por base determinados critérios de dimensionamento e distribuição de armaduras. Uma primeira aplicação foi definida para utilização em casos de lajes regulares com os pilares definidos sobre alinhamentos. Foram estabelecidas faixas em correspondência com os alinhamentos dos pilares para as quais são calculadas armaduras com base nos momentos flectores obtidos no cálculo linear elástico. Desta forma é possível obter áreas de armadura a colocar em cada uma destas faixas facilitando a definição da solução de armadura a adoptar no projecto.

Para a aplicação a situações mais gerais, com geometria irregular e pilares fora de alinhamentos, nas quais não é possível estabelecer o conceito de faixas, foi desenvolvida uma segunda aplicação de cálculo que permite calcular quantidades de armadura necessária em cada nó da malha de elementos finitos considerada.

Nas duas aplicações, o dimensionamento das armaduras na zona dos pilares é feito com base num critério de uniformização dos momentos flectores negativos que garanta as condições de equilíbrio e permita ultrapassar as dificuldades dos “picos” de momentos nesta zona.

A metodologia proposta e as duas ferramentas auxiliares de cálculo são aplicadas a duas situações distintas, uma regular e outra com irregularidades quer na geometria quer no posicionamento dos pilares.

Apresenta-se ainda no capítulo 7 uma aplicação a um caso concreto de projecto. Com este exemplo de estudo procura realçar-se as capacidades das ferramentas desenvolvidas para o projecto de uma laje fungiforme.

2

LAJES FUNGIFORMES**TIPOS DE LAJES FUNGIFORMES E SEU PRÉ-DIMENSIONAMENTO**

As lajes fungiformes são actualmente soluções frequentemente utilizadas em pavimentos de edifícios de habitação e serviços, particularmente em edifícios de comércio com grandes áreas de implantação. Isto decorre, por um lado dos métodos e tecnologias utilizados na sua construção que lhes proporcionam um conjunto de vantagens face a outras soluções alternativas como foi referido no capítulo anterior.

Existem várias soluções de lajes fungiformes, adequadas a diferentes situações, quer do ponto de vista dos vãos a vencer, dos níveis e tipo de cargas a suportar quer ainda exigências do ponto de vista arquitectónico. Numa perspectiva de se enquadrar numa visão geral, os tipos de lajes mais utilizados e os seus aspectos mais relevantes apresentam-se seguidamente a caracterização de cada tipo de laje, resultante de uma síntese de trabalhos de outros autores sobre este assunto (Figueiras [16], Martins [20] e Ramos [22]).

2.1. DIFERENTES TIPOS DE LAJES FUNGIFORMES**2.1.1. LAJES FUNGIFORMES MACIÇAS DE ESPESSURA CONSTANTE**

As lajes fungiformes maciças de espessura constante, ilustradas na Figura 2.1, são normalmente utilizadas para vãos da ordem dos 4.5 a 6.0 metros e para cargas de utilização de valor moderado. Estas lajes constituem a solução mais económica para vãos desta grandeza e têm a vantagem de proporcionar tectos lisos. A sua vantagem económica resulta ainda na facilidade de execução e da menor incorporação de mão-de-obra face a outras soluções.

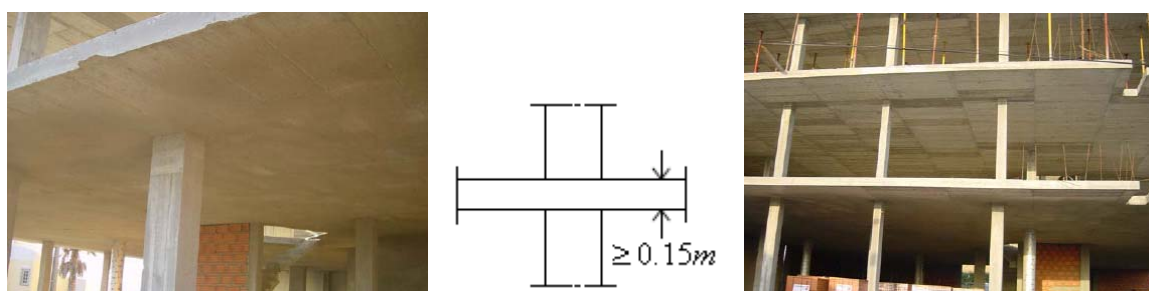


Figura 2.1 - Laje fungiforme maciça, esquema e exemplos (Ramos [22]).

2.1.2. LAJES FUNGIFORMES MACIÇAS COM CAPITÉIS

Com a necessidade de utilização deste tipo de solução estrutural (laje fungiforme), para maiores vãos ou cargas mais elevadas, necessita-se de maior espessura que a necessária para os esforços de flexão para que sejam transmitidas as cargas verticais aos pilares. Para resolver o problema da transferência da carga para o pilar, procede-se ao alargamento da secção do pilar na zona superior de ligação com a laje, como se pode verificar nos exemplos apresentados na Figura 2.2. Aliás, as primeiras lajes fungiformes que surgiram, foram construídas com este tipo de solução, com pilares circulares que se alargavam ao chegar à ligação na laje, conhecidas por lajes cogumelo devido à forma do pilar. Este tipo de solução consegue vencer vãos até cerca de 10 metros, recomendando-se o seu uso a partir dos 6m de vão.

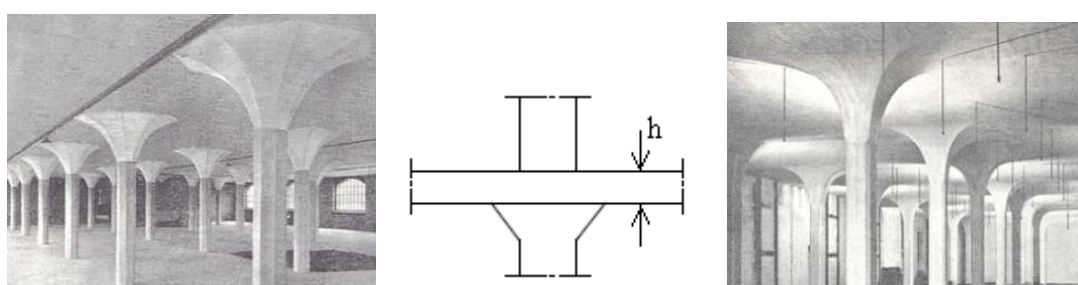


Figura 2.2 - Laje fungiforme maciça com capitel, esquema e exemplos (Tesoro [31]).

2.1.3. LAJES FUNGIFORMES MACIÇAS COM CAPITÉIS DE ESPESSURA CONSTANTE

À semelhança do que acontece com as lajes maciças com capitéis, para resolver o problema de transferência da carga vertical para o pilar, pode proceder-se ao espessamento da laje junto ao pilar. Usualmente estende-se a cerca de 1/6 do vão para cada lado do pilar, conduz a uma maior resistência aos momentos flectores e esforços de corte na região do pilar. Este tipo de solução, apresentada na Figura 2.3 é adequada para vãos de 6 a 10 metros.

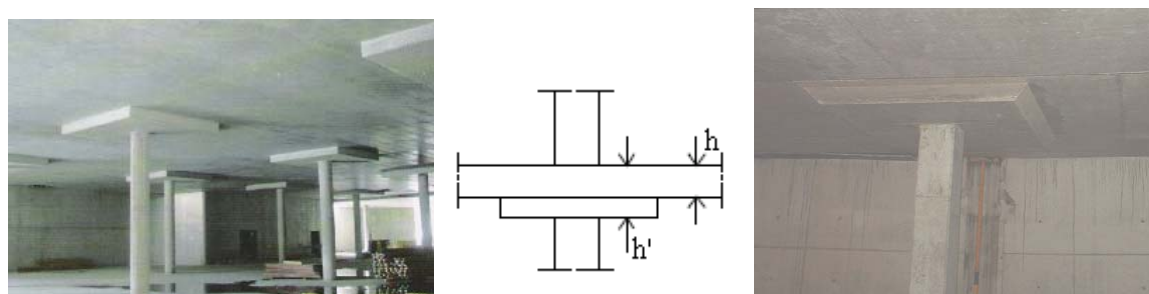


Figura 2.3 - Laje fungiforme com espessamento, esquema e exemplos (Ramos [22]).

2.1.4. LAJES FUNGIFORMES ALIGEIRADAS COM BLOCOS DE ALIGEIRAMENTO PERDIDOS

Este tipo de laje surge com o objectivo de diminuir o peso próprio, incorporando-se blocos de aligeiramento na laje, como se pode observar nos exemplos apresentados na Figura 2.4. As lajes aligeiradas de espessura constante têm pequenas nervuras nas duas direcções entre os blocos de aligeiramento, que permitem obter resistência às tracções na face inferior. Correntemente na zona do pilar define-se uma zona maciça, para aumentar a resistência às forças de corte. Este tipo de laje é adequado para vencer vãos de 6 a 10 metros, conseguindo-se uma solução de espessura constante e que permite um acabamento directo na face inferior.

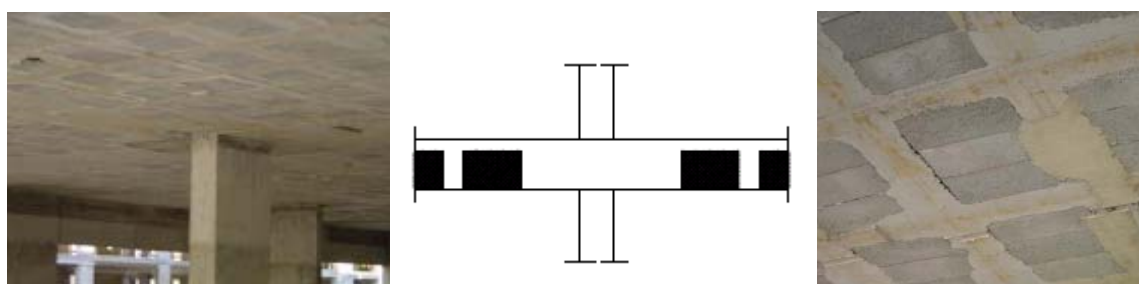


Figura 2.4 - Laje fungiforme aligeirada com blocos perdidos, esquema e exemplos (Ramos [22]).

2.1.5. LAJES FUNGIFORMES ALIGEIRADAS COM MOLDES RECUPERÁVEIS

As lajes fungiformes aligeiradas nervuradas realizadas com moldes reutilizáveis, como se pode observar nos exemplos apresentados na Figura 2.5, têm encontrado cada vez maior aceitação quer pela economia da cofragem quer por apresentar um tecto plano, isto é, sem obstruções, e com um padrão regular de blocos de aligeiramento ou espaços vazios utilizáveis para iluminação e ventilação. Têm sido utilizadas para uma gama de vãos que vão de 6 a 12 metros.

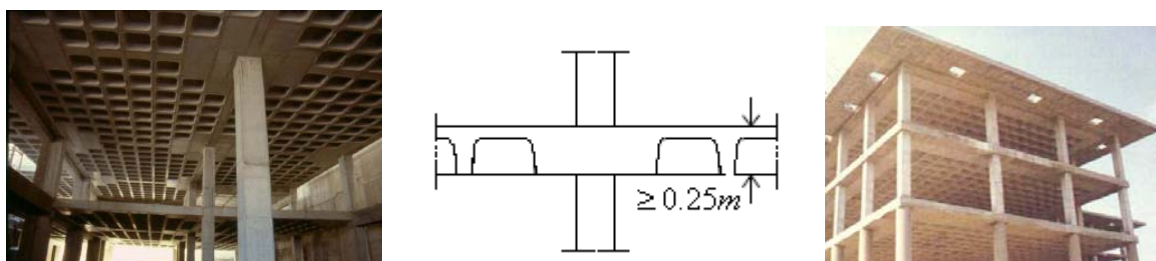


Figura 2.5 - Lajes fungiformes aligeiradas nervuradas, esquema e exemplos (Tesoro [31]).

As dimensões dos aligeiramentos resultam em geral de disposições regulamentares que indicam as condições para que as lajes aligeiradas possam ser tratadas como lajes maciças para efeito de análise. A zona do maciçamento é definida de forma a resolver-se adequadamente a zona de momentos negativos mais importantes na zona dos pilares.

2.2. PRÉ-DIMENSIONAMENTO DE LAJES FUNGIFORMES

O pré-dimensionamento das lajes fungiformes deve ter em conta os seguintes aspectos (Figueiras [16]):

- $l_x / l_y \leq 2$, sendo l_x o maior vão, para evitar o funcionamento apenas numa das direcções;
- Pré-dimensionamento da espessura face ao maior vão, face às deformações e face aos esforços, para acções verticais;
- Para resistência às acções horizontais (em Portugal, principalmente a acção sísmica), devem estar ligadas a paredes resistentes e/ou pórticos pilar-viga na periferia, e serem dotadas de bandas maciças entre pilares (nas lajes nervuradas);

No caso das lajes nervuradas deve ainda atender-se às seguintes condições:

- Zona maciça deve respeitar a condição $0.3 \leq l_p / l \leq 0.5$;
- Banda maciça deve respeitar a condição $0 \leq l_b / l \leq 0.25$;
- $d_f \geq 2.5 \times d$, para que a laje tenha um comportamento adequado em relação ao punçoamento.

As grandezas mencionadas encontram-se definidas na Figura 2.6.

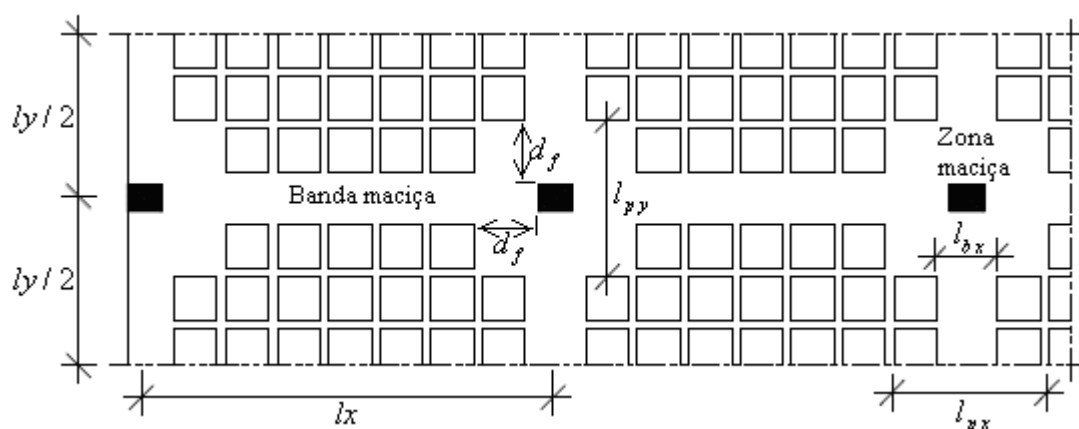


Figura 2.6 - Representação das zonas maciças em lajes fungiformes aligeiradas (Figueiras [16]).

2.2.1. ESPESSURA MÍNIMA FACE AO MAIOR VÃO

O tipo de solução de laje fungiforme a utilizar está relacionado da gama de vãos apresentados no Quadro 2.1, as espessuras mais correntes para cada tipo de laje em função da esbelteza, ou seja, a relação vão/espessura.

Quadro 2.1 - Tipo de laje e espessura h tendo em conta o maior vão l (Figueiras [16]).

	Esbelteza	l [m] - vão									
	l/h	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Laje fungiforme maciça	30	0.15	0.20								
Laje fungiforme maciça com capitel	35	0.15	0.20								
Laje fungiforme aligeirada	30			0.25	0.30	0.35	0.45				
Laje fungiforme maciça pré-esforçada	40				0.20	0.25	0.30				
Laje fungiforme aligeirada pré-esforçada	35				0.225	0.25	0.30	0.35	0.45	0.60	

Deve-se ter sempre presente que:

- $h \geq 0.15$ caso não seja necessário armadura de punçoamento;
- $h \geq 0.20$ caso seja necessário armadura transversal para resistir ao punçoamento.

2.2.2. ESPESSURA MÍNIMA CONDICIONADA PELA DEFORMAÇÃO

Para as lajes fungiformes não é fácil estabelecer regras para controlo indirecto da deformação. Há que salientar que este tipo de solução estrutural conduz em geral a uma deformabilidade superior à das lajes vigadas. Deve-se controlar directamente a deformabilidade, contudo o eurocódigo 2 estabelece os seguintes critérios para evitar cálculo explícito da flecha (EC2 [15]):

$$\frac{l}{d} \leq \left(\frac{l}{d} \right)_0 \times k_{\sigma_s} \times k_T \times k_l \quad (2.1)$$

No caso de lajes fungiformes o coeficiente K_T toma o valor de 1.

Em que:

k_{σ_s} é um coeficiente que depende do nível de tensão instalada no aço traccionado em condições de serviço dado por $k_{\sigma_s} = 310/\sigma_s$, em que σ_s é a tensão de tracção na armadura a meio vão, para as acções de cálculo no estado limite de utilização considerado;

k_l é o coeficiente de correcção a aplicar quando o maior vão, l_{ef} é superior a $7m$.

$(l/d)_0$ é a relação vão/altura útil que pode tomar os seguintes valores, de acordo com as condições:

$\left(\frac{l}{d}\right)_0 = 24$ - para betão levemente esforçado, percentagens de armadura moderadas $\rho = 0.5\%$.

$\left(\frac{l}{d}\right)_0 = 17$ - para betão fortemente solicitado, percentagens de armadura elevadas $\rho = 1.5\%$.

2.2.3. ESPESSURA MÍNIMA CONDICIONADA PELOS ESFORÇOS

Nas lajes em que não se pretenda colocar capiteis ou efectuar o espessamento junto dos pilares, os esforços na região do pilar podem condicionar a espessura mínima da laje. Especialmente a verificação da resistência ao punçoamento condiciona muitas vezes a espessura a atribuir à laje fungiforme. A resistência ao punçoamento depende essencialmente de (Figueiras [16]):

- perímetro do pilar (secção do pilar);
- altura útil da laje;
- armaduras específicas de punçoamento;
- classe de betão utilizada.

A verificação da segurança em relação ao punçoamento condiciona normalmente a espessura da laje na ligação aos pilares, conduzida nas situações de maiores vãos e cargas mais elevadas, à necessidade de se aumentar a espessura nesta zona. Este aspecto é extremamente importante e deve ser atendido na fase de concepção da própria.

2.3. ASPECTOS PARTICULARES NO PROJECTO DE LAJES FUNGIFORMES

No projecto de lajes fungiformes devem ser tidos em consideração determinados aspectos que noutros tipos de lajes não são tão relevantes. Apontam-se de seguida alguns destes aspectos, tais como o punçoamento, as aberturas, os pilares de bordo e de canto, as irregularidades geométricas da laje e as acções horizontais, fazendo-se uma breve referência à sua implicação no projecto (Figueiras [16]).

2.3.1. PUNÇOAMENTO

O facto deste tipo de laje apoiar directamente sobre pilares, fazendo a transmissão directa das cargas da laje para o pilar, cria o problema da rotura por punçoamento.

A rotura por punçoamento é possível ocorrer em pontos de carregamentos concentrados, que podem ser zonas de pilares ou zonas de cargas concentradas. Nas lajes fungiformes esta rotura pode ocorrer principalmente na zona de ligação laje-pilar.

Como foi referido anteriormente, a verificação da segurança em relação ao punçoamento assume particular importância no projecto, condicionando normalmente a solução de laje a adoptar e a respectiva espessura ou a espessura dos capitéis. Pelas condicionantes e pela importância do modo de rotura associados ao punçoamento, deve dedicar-se especial atenção a este aspecto no projecto de lajes fungiformes.

A nova regulamentação de estruturas de betão, EC2 [15], introduziu algumas alterações relativamente à regulamentação anterior, quer no dimensionamento e verificação de segurança, quer nas disposições

de armadura associadas ao punçoamento. Desta forma, as disposições mais completas deste novo regulamento, servem de uma forma útil e prática o projecto no que diz respeito a esta questão.

2.3.2. EXISTÊNCIA DE ABERTURAS NA LAJE

As aberturas em lajes fungiformes podem existir com qualquer dimensão desde que seja verificado por cálculo específico que a capacidade da laje é superior aos esforços actuantes e que sejam verificadas as condições de serviço.

O EC2 não especifica dimensões máximas das aberturas, mas se não se pretende efectuar uma análise específica nas zonas de aberturas, devem cumprir-se as seguintes recomendações (Normas canadianas CAN3-A23.3-M84) (Figueiras [16]):

- Aberturas de qualquer dimensão podem ser localizadas na área comum à intercepção de faixas centrais desde que a quantidade total de armadura necessária para o painel sem abertura seja mantida;
- na área comum à intercepção de faixas sobre os pilares, não mais de $1/8$ da largura da faixa sobre os pilares em cada direcção deve ser interrompida pela abertura. A quantidade de armadura equivalente à que se disporia na zona da abertura deve ser adicionada aos lados da abertura;
- na área comum a uma faixa central e uma faixa lateral, não mais que $1/4$ da armadura em cada faixa deve ser interrompida por aberturas. Uma quantidade de armadura equivalente à que foi interrompida pela abertura deve ser adicionada aos lados da abertura;
- as aberturas junto aos pilares, devem ser evitadas sempre que possível, devido à grande redução da capacidade de transmissão de esforços ao pilar e consequente aumento da probabilidade de rotura por punçoamento.

Os efeitos da existência de aberturas com dimensões significativas face aos vãos de laje devem ser avaliados através da sua consideração na modelação da laje em particular ao nível das deformações. Pode resultar, desta análise, a necessidade de introdução de vigas de maior rigidez nos alinhamentos dos pilares próximos da abertura para acautelar uma deformação excessiva dos painéis adjacentes à abertura.

2.3.3. PILARES DE BORDO E PILARES DE CANTO

A existência de pilares de bordo e pilares de canto são factos quase impossíveis de evitar em qualquer laje fungiforme, a não ser que os bordos sejam apoiados em paredes de betão armado.

As larguras efectivas de transmissão de momentos flectores da laje a pilares de bordo ou de canto dependem da posição e dimensões da secção do pilar. Na Figura 2.7, estão representadas as larguras efectivas da laje a considerar na transmissão de momentos para pilares de bordo e de canto de acordo com o EC2.

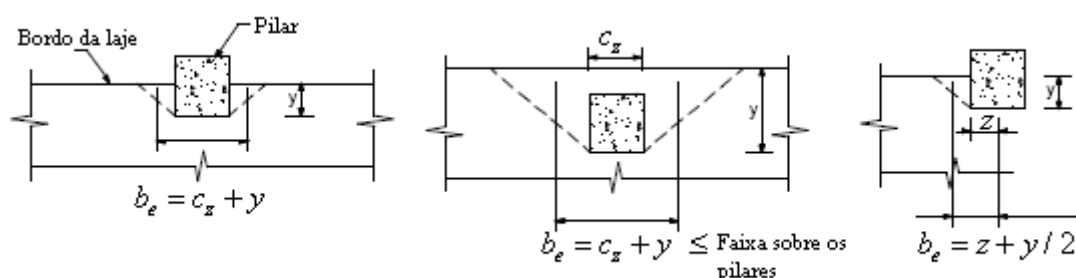


Figura 2.7 - Largura efectiva, b_e , de uma laje fungiforme (EC2 [15]).

As armaduras perpendiculares a um bordo livre, necessárias à transmissão de momentos flectores da laje para um pilar de bordo, devem ser colocadas na largura efectiva. Na restante largura de cada pórtico equivalente deve colocar-se na direcção perpendicular ao bordo uma armadura mínima num comprimento $0.20 \times l$ (ver Figura 2.8).

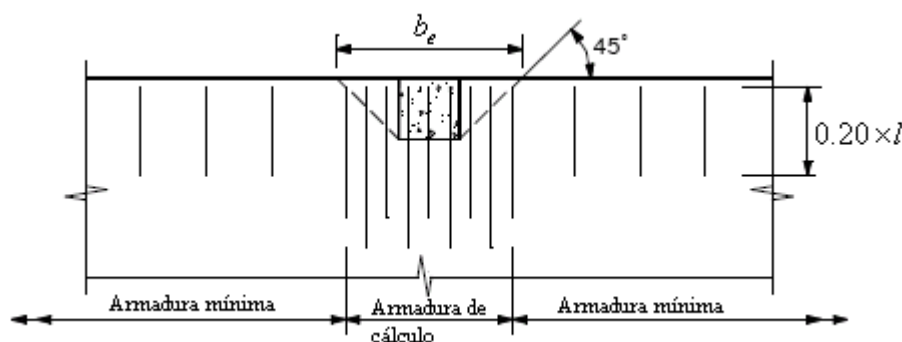


Figura 2.8 - Disposição da armadura no bordo da laje (Figueiras [16]).

Deve-se ainda ter especial atenção aos momentos transferidos para os pilares de bordo ou de canto que devem ser limitados ao momento resistente máximo de uma secção rectangular, dado por (EC2):

$$M_{Rd,max} = 0.17 \times b_e \times d^2 \times f_{ck} \quad (2.2)$$

Sendo,

f_{ck} - valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias;

d - altura útil da laje.

Quando existir necessidade de reduzir o momento actuante, para o valor de $M_{Rd,max}$, deve-se aumentar o momento positivo em conformidade, no vão do tramo de extremidade.

Se esta redução conduzir à necessidade de uma redução de mais de 50% do momento actuante quando a análise é feita por pórticos equivalentes, ou de mais de 30% quando a análise é feita com o método das grelhas ou método dos elementos finitos, deve-se proceder a uma das alterações:

- introduzir uma viga de bordo devidamente dimensionada à torção;

- mudar a posição do pilar de forma a aumentar a largura efectiva, b_e ;
- aumentar a espessura da laje;
- aumentar a classe de betão.

Refira-se que do ponto de vista de projecto, estes aspectos resultam numa necessidade de se analisar estas zonas das lajes de um modo particular, principalmente quando se utiliza o método dos elementos finitos na avaliação dos esforços.

2.3.4. IRREGULARIDADES GEOMÉTRICAS

Com a crescente diversidade de aplicação das lajes fungiformes e as crescentes exigências arquitectónicas, levam ao aparecimento de geometrias bastante irregulares, como os exemplos apresentados na Figura 2.9.



Figura 2.9 - Exemplos de lajes fungiformes de geometria irregular (Tesoro [31])

A principal dificuldade no projecto destas situações, resulta do facto de não serem em geral aplicáveis os métodos simplificados de cálculo obrigando à necessidade de se recorrer ao método dos elementos finitos. Mesmo com as facilidades actualmente disponíveis em programas comerciais de cálculo, a sua utilização para este tipo de situações particulares exige cuidados especiais, quer do ponto de vista de análise, quer no dimensionamento de armadura.

Estes casos devem ser avaliados com particular atenção, sendo recomendável a utilização de modelos mais simples destas zonas particulares, em complemento aos modelos completos de elementos finitos que permitam uma interpretação e validação de resultados.

2.3.5. ACÇÕES HORIZONTAIS

No projecto de edifícios com pavimentos constituídos por lajes fungiformes as acções horizontais devem ser consideradas e atendidas na fase de concepção. Como foi referido anteriormente, estas acções bem como os efeitos de 2ª ordem devem ser predominantemente equilibradas por elementos de grande rigidez, ou seja, núcleos ou paredes de contraventamento. Desta forma, atende-se à maior deformabilidade horizontal do sistema laje fungiforme-pilares garantindo-se rigidez suficiente com os elementos de contraventamento. Com esta atitude, reduzem-se os efeitos das acções horizontais (e efeitos de 2ª ordem) nas ligações laje-pilar.

Deste modo uma estratégia normalmente utilizada em projecto, consiste na utilização de modelos globais simplificados para a avaliação de esforços resultantes das acções horizontais, vento e sismo. Nestes modelos apoiados no método dos pórticos equivalentes que será referido no capítulo seguinte, recorre-se a elemento de barra para a modelação dos pilares e da laje. Complementarmente podem utilizar-se modelos parcelares com a utilização de elementos finitos na modelação das lajes para uma avaliação mais detalhada das deformações e esforços resultantes das cargas verticais. Normalmente estes modelos são estabelecidos separadamente para os vários pisos do edifício.

No presente trabalho, a metodologia de análise proposta, enquadra-se na perspectiva destes modelos parcelares que visam unicamente a avaliação para cargas verticais.

3

MÉTODOS DE ANÁLISE DE LAJES FUNGIFORMES

Existem vários métodos de cálculo de lajes fungiformes, que permitem obter bons resultados nas situações mais correntes sendo fácil a sua aplicação. Quando se trata de situações irregulares, cada vez mais frequentes nos projectos de edifícios, alguns dos métodos deixam de poder ser aplicáveis, outros começam a revelar-se de difícil utilização. São apresentados os métodos mais conhecidos e de fácil utilização no projecto de lajes fungiformes, nomeadamente o método directo do ACI e o método dos elementos finitos. É feito ainda uma referência breve a outros métodos, menos utilizáveis em situações correntes de projecto, mas que podem ser úteis em situações particulares como seja o método das grelhas e o método das linhas de rotura. A exposição que se apresenta consiste numa síntese da bibliografia consultada, reproduzindo-se partes do texto com a devida actualização tendo em conta a regulamentação actual.

3.1. MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES

No caso de uma modelação regular dos pilares em malha rectangular e estando a laje sujeita predominantemente a cargas distribuídas, pode considerar-se na determinação de esforços, a estrutura dividida em dois conjuntos independentes de pórticos ortogonais como se ilustra na Figura 3.1. Representa-se a tracejado, as faixas da laje, que funcionam com os pilares e que constituem exemplos de pórticos equivalentes. Os pórticos equivalentes são constituídos por pilares e por troços de laje compreendidos entre as linhas médias dos painéis adjacentes. O método dos pórticos equivalentes é um dos métodos contemplados na nova regulamentação EC2 [15], encontrando-se devidamente explicado por Figueiras [16].

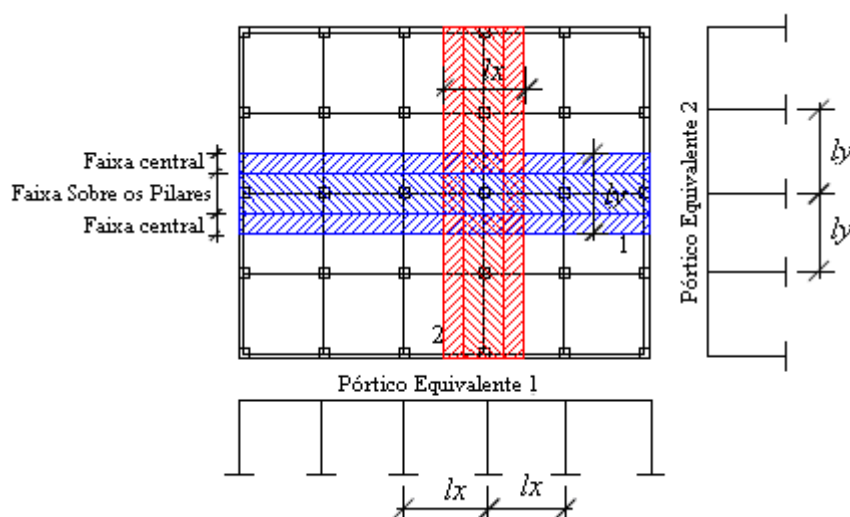


Figura 3.1 - Pórticos equivalentes para cálculo de esforços actuantes em lajes fungiformes.

A rigidez dos elementos do pórtico equivalente pode ser calculada a partir das secções transversais brutas. Para as acções verticais, a rigidez pode basear-se na largura total dos painéis.

Para cargas horizontais, deve utilizar-se 40% deste valor para traduzir a maior flexibilidade das ligações entre os pilares e as lajes das estruturas de lajes fungiformes quando comparada com a das ligações pilares-vigas.

Os esforços actuantes devidos às cargas verticais devem ser calculados em ambas as direcções para a carga total correspondente à largura l_x ou l_y e considerada na posição mais desfavorável.

Os momentos flectores totais obtidos na análise devem ser distribuídos por toda a largura da laje. Na análise elástica, os momentos negativos tendem a concentrar-se na vizinhança dos eixos dos pilares.

Para o dimensionamento e a distribuição das armaduras na laje, considera-se em cada pórtico uma faixa sobre os pilares de largura $a_1 + a_2$ e duas faixas centrais de larguras b_1 e b_2 , identificadas na Figura 3.2.

A distribuição dos momentos flectores totais do pórtico pela faixa sobre os pilares e pela faixa central é obtida a partir das percentagens indicadas no Quadro 3.1 correspondentes aos valores limite definidos no EC2 [15] e os valores recomendados no REBAP [25].

Quadro 3.1 - Distribuição simplificada dos momentos flectores no caso de uma laje fungiforme (EC2 [15]).

Distribuição	Limites	Recomendável	Limites	Recomendável
Faixa	Faixa sobre os pilares		Faixa central	
Pórtico extremo	a_2		b_2	
Pórtico intermédio	$a_1 + a_2$		$b_1 + b_2$	
Momentos positivos	50 a 70%	55%	50 a 30%	45%
Momentos negativos	60 a 80%	75%	40 a 20%	25%

A distribuição dos momentos flectores nas faixas é esquematizada na Figura 3.2, para os valores recomendados (REBAP).

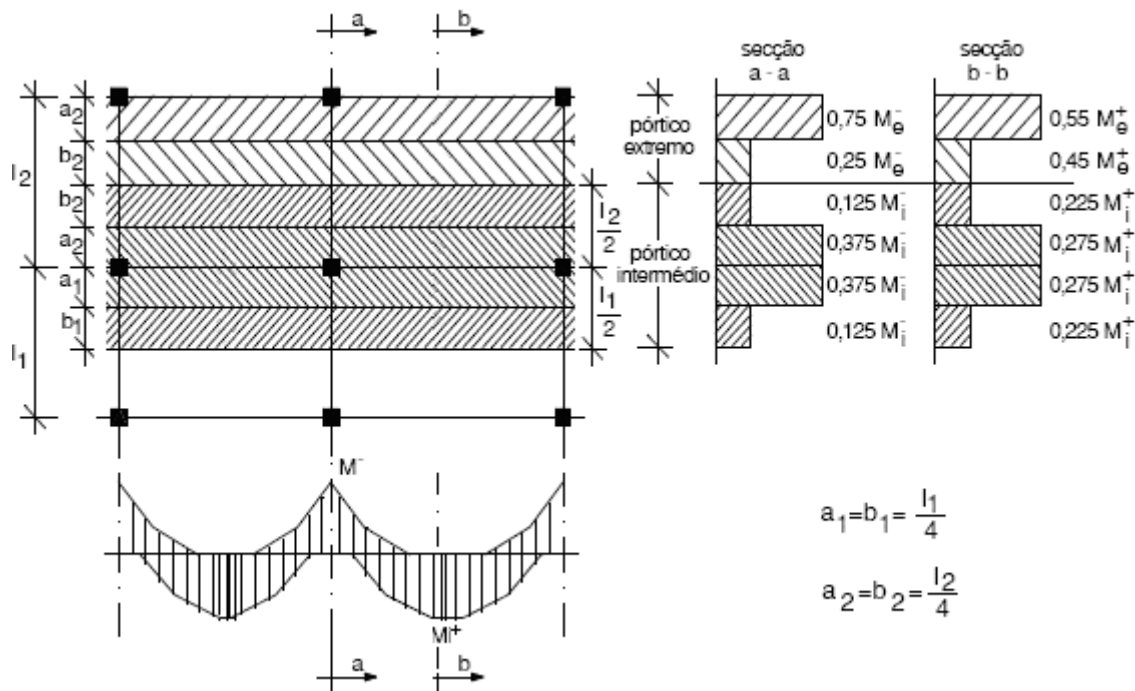


Figura 3.2 - Divisão das faixas de cada pórtico equivalente e respectiva distribuição dos momentos (valores recomendados) (Figueiras [16]).

Para contabilização de acções verticais quando se utiliza o método dos pórticos equivalentes, devem ser consideradas hipóteses mais desfavoráveis de sobrecargas alternadas nos vários tramos para obter a envolvente de esforços. No entanto, quando a sobrecarga for inferior a 3/4 da acção permanente, pode simplificar-se utilizar-se apenas um caso de carga tomando a carga total em todos os vãos. Os momentos nos apoios podem ser redistribuídos de cerca de 20% com o consequente aumento dos momentos positivos no vão, aplicando as regras gerais de redistribuição prescritas no EC2.

Se existem consolas com comprimento igual ou superior a um terço do vão adjacente da laje, deve considerar-se um caso de carga com a carga total na consola e apenas a acção permanente no tramo adjacente.

No caso de lajes aligeiradas com zonas maciças (ou lajes maciças com espessamento) a armadura necessária para resistir ao momento negativo da faixa sobre os pilares interiores deve ser distribuída da seguinte forma:

- cerca de 2/3 da armadura da faixa sobre os pilares dentro da metade central desta faixa;
- 1/3 restante nas zonas laterais dessa mesma faixa.

Este critério corresponde ainda à recomendação do EC2 para a distribuição da armadura superior na faixa sobre os pilares de forma a controlar melhor a fendilhação nas zonas sobre os pilares uma vez que esta distribuição aproxima-se melhor da distribuição de momentos obtida numa análise elástica.

Apresenta-se na Figura 3.3 o esquema desta distribuição de armaduras, expresso pela percentagem da armadura superior necessária para resistir ao momento total no apoio que deve ser colocada nas zonas da faixa sobre os pilares e faixa central.

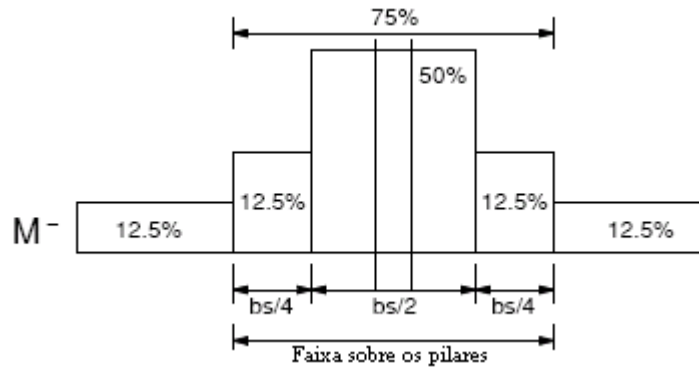


Figura 3.3 - Distribuição aconselhada de armadura superior em pilares interiores (Figueiras [16]).

Com esta disposição se reduziremos a faixa sobre os pilares à largura do maciçamento a armadura correspondente será distribuída nesta faixa. Quando existem bandas maciças na faixa sobre os pilares de lajes aligeiradas, os momentos no vão desta faixa devem ser distribuídos pela banda maciça e pelas nervuras proporcionalmente à respectiva rigidez.

3.2. MÉTODO DIRECTO DE ANÁLISE (ACI)

O método directo é um método de atribuição de coeficientes, mais simples que o método dos pórticos equivalentes, mas deve apenas ser aplicado a lajes com características geométricas regulares e tendo em conta as condições específicas (Figueiras [16]):

- Deve haver um mínimo de 3 vãos em cada direcção. Se houver só dois vãos, os momentos negativos no apoio interior dados pelo método directo são menores que os mais prováveis;
- Os painéis devem ser rectangulares com uma relação de vãos limitada por $0.5 \leq l_x / l_y \leq 2.0$;
- Vãos adjacentes em cada direcção não devem diferir mais que 1/3 do vão maior ($l_1 = 1.33 \times l_2$, sendo l_2 o menor vão). Este limite tem em vista manter válidas as regras simplificadas de dispensa de varões;
- Os pilares podem estar desviados no máximo 10% do vão em relação a qualquer dos alinhamentos;
- As acções devem ser apenas acções verticais. A estrutura da laje fungiforme deve estar contraventada;
- A sobrecarga não deve ultrapassar duas vezes as acções permanentes. Apenas é considerado um caso de carga com a carga total de estados limites últimos ($1.35 \times G + 1.5 \times Q$), em todos os vãos;
- Não deve ser aplicada redistribuição de momentos aos valores dados pelo método directo. Os coeficientes já contemplam de alguma forma as alternâncias de sobrecarga e redistribuição de esforços.

Os valores dos momentos flectores a considerar para a largura do pórtico equivalente são dados pelos coeficientes apresentados na Figura 3. 4.

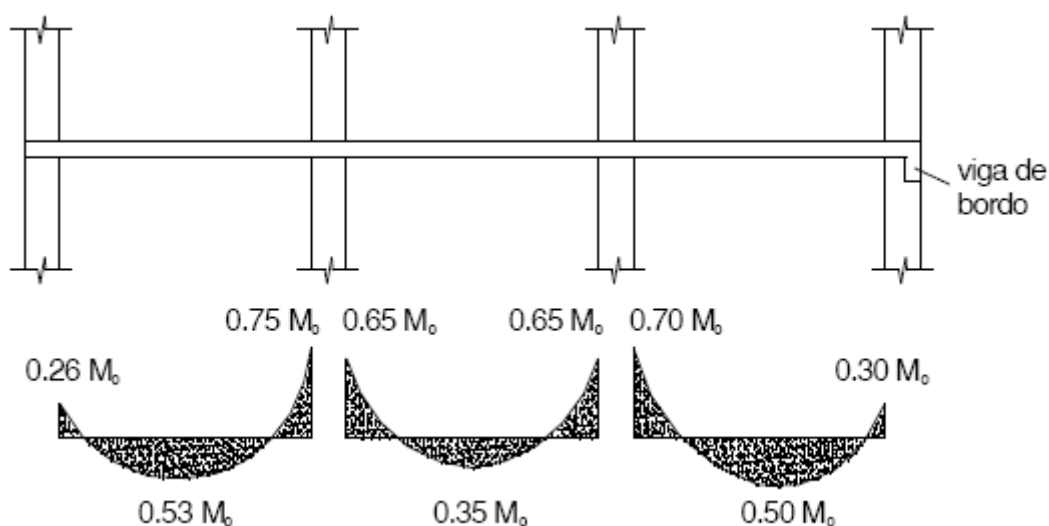


Figura 3. 4 - Coeficientes de momentos totais em lajes fungiformes dados pelo Método Directo (Figueiras [16]).

O momento M_0 , é tomado como o momento isostático de cálculo em cada um dos vãos (painéis), dado por:

$$M_0 = \frac{P_{sd} \times l_2 \times l_n^2}{8} \quad (3.1)$$

Sendo,

$$P_{sd} = 1.35 \times G + 1.5 \times Q \quad (3.2)$$

l_2 - largura do pórtico equivalente

l_n - é o vão de cálculo, tomado como o vão livre entre faces de apoios.

Sendo l_1 o vão teórico entre os apoios deve verificar-se que $l_n \geq 0.65 \times l_1$.

A distribuição dos momentos pela faixa sobre os pilares e faixa central, é feita de acordo com as recomendações do EC2, apresentadas no sub-capítulo anterior.

Os momentos dos apoios exteriores e os momentos não equilibrados nos apoios interiores, devem ser recebidos pelos pilares.

Os esforços transversos na laje e os esforços axiais nos pilares, podem ser conhecidos a partir dos momentos.

As dispensas de armadura em lajes fungiformes, em que este método é aplicável, podem ser efectuadas de acordo com o representado na Figura 3.5.

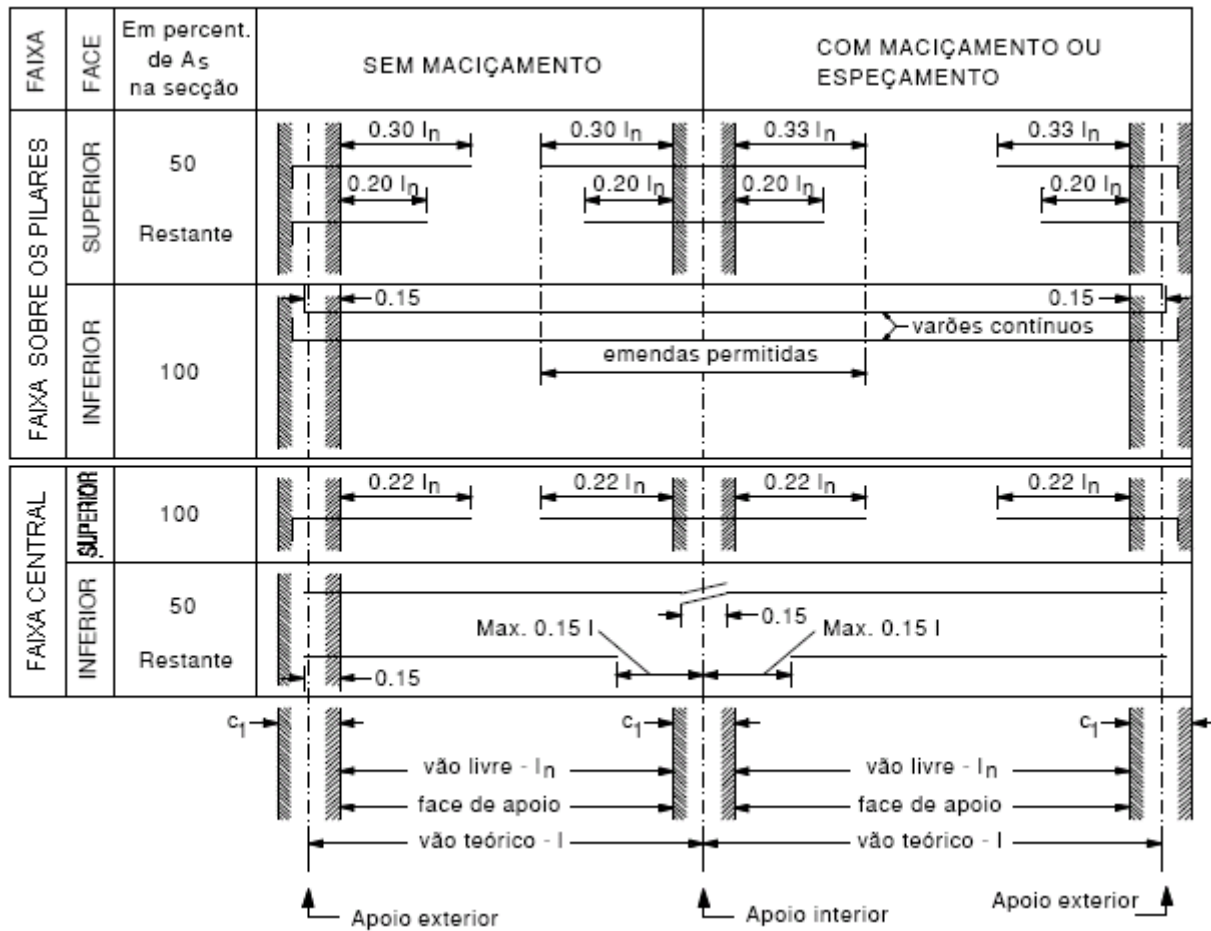


Figura 3.5 - Comprimentos mínimos da armadura para lajes fungiformes, quando aplicado o método directo (Figueiras [16]).

Chama-se a atenção que, cada vez mais se usam os computadores na análise de estruturas de lajes fungiformes e os métodos usados são cada vez mais elaborados. Neste contexto, o interesse de um método simplificado, como é o caso do método directo, é muito maior. Serve para pré-dimensionamento e para aferição dos resultados dos programas de cálculo. Este método serve também para dimensionamento definitivo para as lajes que cumpram as condições de aplicação enunciadas.

3.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos revela-se actualmente um método geral de análise estrutural que pode ser utilizado na análise de lajes, paredes ou outros tipos estruturais mais complexos. A estrutura pode ser analisada na globalidade, isto é, associando pilares, vigas, lajes e paredes, ou pode ser utilizado o MEF apenas para analisar partes da estrutura de comportamento menos simples, como são os casos das paredes e lajes.

Actualmente, os programas comerciais de cálculo utilizados correntemente em projecto, permitem a utilização prática de elementos finitos na análise estrutural. As facilidades incorporadas nestes programas ao nível do pré e pós processamento facilitam a utilização deste método em situações correntes de projecto.

Os meios de cálculo actuais permitem resolver estruturas cada vez mais complexas e de maior dimensão, com tempos de cálculo aceitáveis, mesmo tendo em consideração um conjunto vasto de acções e combinações. No entanto, o projectista confronta-se com algumas dificuldades na utilização dos elementos finitos com programas comerciais, que se prendem fundamentalmente com: *i*) dificuldade de se conhecerem os tipos de elementos finitos utilizados, nomeadamente os graus de liberdade associados e as respectivas funções de forma; *ii*) dificuldade de se identificar a matriz de rigidez considerada, nomeadamente identificar se são ou não consideradas as deformações de corte; e ainda *iii*) dificuldades na adopção de uma discretização adequada ao problema a resolver tendo em conta, o esforço de cálculo, as características do elemento e o campo de deformações que se pretende reproduzir.

Neste trabalho, procurou identificar-se alguns destes aspectos com a utilização de dois programas comerciais, Robot Millennium e SAP2000, no sentido de se estabelecerem critérios adequados à modelação das lajes fungiformes. Este estudo é apresentado nos dois capítulos seguintes.

Na análise de lajes fungiformes, muitas vezes, procede-se apenas à análise detalhada com utilização de elementos finitos de cada um dos pisos isolados, devendo nesse caso ser introduzidos nos apoios, os momentos (ou forças) devidos às acções horizontais que são determinados por uma análise global simplificada da estrutura.

Os programas de cálculo podem fornecer deslocamentos, esforços e tensões. Alguns programas permitem ainda o cálculo de forma automática das armaduras necessárias em cada região da laje, fornecendo um mapa com áreas de armadura a colocar em cada direcção. Em alguns casos é necessário ter estratégias de modelação para que se possam definir modelos, o mais próximo possível da realidade em termos de comportamento estrutural.

Também para o cálculo de lajes nervuradas armadas em duas direcções, o MEF é um dos processos que tem sido mais utilizado. A técnica corrente de modelação de lajes nervuradas é tratá-la como se fossem lajes maciças com uma rigidez à flexão equivalente. Para se considerar adequadamente a rigidez à torção, adopta-se um módulo de deformação transversal do betão armado de valor reduzido comparado com o que se obtém pela equação da teoria da elasticidade (Silva [29]).

Neste trabalho foi essencialmente utilizado o método dos elementos finitos, desenvolvendo-se no capítulo 5 uma metodologia de tratamento de resultados.

3.4. MÉTODO DAS GRELHAS

A técnica da analogia de grelha consiste na representação da laje de um edifício através de uma grelha equivalente, de modo a que as rigidezes longitudinais da laje sejam concentradas nas barras dessa direcção e as rigidezes transversais nas barras da direcção ortogonal a ela.

Na aplicação desta técnica deve-se garantir que as rigidezes das barras sejam tais que, ao submeterem-se as duas estruturas ao mesmo carregamento, elas se deformam de maneira idêntica e que os esforços solicitantes em qualquer barra da grelha sejam iguais às resultantes de tensões na secção transversal da parte da laje que a barra representa.

Para que um elemento infinitesimal de laje esteja em equilíbrio, de acordo com a teoria clássica de placas, é necessário que os momentos torsores em duas direcções ortogonais sejam iguais. Na grelha equivalente obtida no desenvolvimento desta técnica, não há princípios matemáticos ou físicos que garantam tal condição. No entanto, se a malha da grelha for suficientemente fechada, a grelha deforma-se formando uma superfície lisa e apresentará distorções aproximadamente iguais nas direcções ortogonais, bem como momentos torsores aproximadamente iguais se as rigidezes à torção forem as mesmas nas duas direcções.

Tal como se encontra discutido por Castro [9] e Duarte [13], é possível relacionar os esforços necessários para a caracterização do comportamento das lajes com os esforços que surgem em elementos de grelha dispostos em duas direcções ortogonais.

Com a definição da malha a usar, dividindo a laje num número adequado de elementos (barras da grelha equivalente), é possível obter por este processo soluções para praticamente qualquer geometria.

Transcrevem-se a seguir algumas considerações, Duarte [13], para uma correcta aplicação deste método em lajes fungiformes.

- As barras da grelha devem estar localizadas em posições pré-determinadas pelo projecto, tais como linhas de apoio ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras linhas que existam, ou linhas de pontos que contenham uma acção específica;
- Em lajes ortotrópicas, cada barra deve ter no máximo uma largura igual a $1/4$ do vão transversal ao seu eixo;
- Quanto mais densa a malha, melhores serão os resultados obtidos. No entanto, essa melhoria deixa de acontecer quando a largura das barras for menor que 2 a 3 vezes a espessura da laje;
- Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja largura das barras não seja superior a 3 a 4 vezes a espessura da laje;
- No caso de existência de consolas na laje, é necessário colocar-se pelo menos duas barras transversais ao vão em consola;
- Deve colocar-se uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura para cálculo do momento de inércia à torção deve ser diminuída de $0.3h$, por ser aí que passa a resultante das tensões de corte devido à torção;
- Não devem ser consideradas as aberturas na laje desde que a sua maior dimensão não exceda 3 vezes a espessura da laje, a não ser que sejam localizados muito próximos dos pilares. Existindo aberturas maiores, devem ser aplicados os mesmos critérios válidos para bordos livres.

Definidos os critérios para a definição da grelha, é necessário estabelecerem-se critérios para a definição da inércia à flexão e à torção de todas as barras da grelha. Com a utilização de rigidezes apropriadas, consegue-se obter valores razoáveis para os esforços solicitantes e deslocamentos transversais dos elementos que compõem a laje.

Para lajes fungiformes maciças de espessura constante h o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais da grelha são calculados considerando que cada elemento representa uma largura b de laje igual à distância entre os centros dos vãos adjacentes ao elemento. O valor do momento de inércia à flexão é dado por:

$$I_f = b \times h^3 / 12 \quad (3.3)$$

O momento de inércia à torção do elemento de barra de secção rectangular $b \times h$ pode obter-se expressão a que chega Timoshenko [32].

$$I_t = \beta \times b \times h^3 \quad (3.4)$$

Sendo,

b - o maior lado da secção, ou seja $b \geq h$ (caso contrário os termos b e h devem ser trocados na expressão 3.4;

h - o menor lado da secção;

β - coeficiente obtido através do Quadro 3.2, em função da relação b / h

Quadro 3.2 - Valores do coeficiente β em função das dimensões da secção.

b / h	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

Este método da grelha equivalente é especialmente utilizado nas lajes nervuradas de betão armado para a determinação dos esforços solicitantes e os deslocamentos transversais. É essencialmente usado em lajes com nervuras nas duas direcções mas também pode ser aplicado na análise de lajes nervuradas apenas numa direcção.

Para aplicar o processo de grelha equivalente na análise das lajes nervuradas, é necessário que as nervuras e as vigas (se existirem), sejam substituídas por elementos estruturais de barras exactamente nos seus eixos obtendo-se assim uma grelha equivalente que passa a representar a laje. As características geométricas que devem ser consideradas para os elementos que representam as nervuras são as indicadas na Figura 3.6, (Silva [29]), sendo b_f a largura definida pela distância entre os centros dos vãos adjacentes da nervura, h_f a altura da lajeta de betão, b_w a largura da nervura.

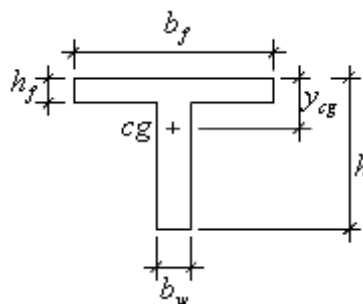


Figura 3.6 - Representação da secção transversal a considerar para o cálculo das inércias (Silva [29]).

As características geométricas dos elementos que representam as vigas, são definidas considerando unicamente a secção destas.

Relativamente às acções, considera-se que as acções actuantes distribuídas na laje se dividem entre os elementos da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada elemento. As acções podem ser consideradas distribuídas (carga triangular ou trapezoidal) ao longo dos elementos ou então concentradas nos nós. No caso de existirem acções concentradas actuantes na laje, estas devem ser aplicadas aos nós da malha. Quando a posição dessas acções não coincidir com um nó, deve-se adequar a malha ou adoptar valores equivalentes da acção nos nós mais próximos.

Para finalizar, outro aspecto importante que merece destaque na aplicação da analogia de grelha, é a consideração dos pilares na grelha equivalente, de modo a simular a influência de suas rigidezes no comportamento da laje. Esta influência é simulada através da colocação de barras, que representam os pilares adjacentes ao nível analisado (nível da laje), com metade do comprimento e inércias correspondentes à do respectivo pilar e com as extremidades articuladas.

Outro procedimento de simulação dos pilares é a colocação de um apoio no nó correspondente e a restrição do movimento transversal desse nó. O apoio colocado deve ter uma rigidez vertical igual à rigidez axial do pilar, ou seja deverá ser simulado como uma mola vertical (Castro [9]).

É importante sublinhar que esta técnica de modelação permite obter apenas resultados aproximados, mas regra geral, a utilização de modelos muito sofisticados não está necessariamente associada à obtenção de uma solução de muito melhor qualidade.

3.5. MÉTODO DAS LINHAS DE ROTURA

O método das linhas de rotura é um método de análise plástica aplicável no dimensionamento de lajes de betão armado e de elementos similares. Usa-se a teoria das linhas de rotura para investigar mecanismos de rotura em estados limites últimos. Esta teoria apresenta-se muito bem desenvolvida por Kennedy e Goodchild [17], reproduzindo-se aqui de forma sucinta os seus aspectos mais relevantes.

Assim:

- o colapso acontece quando as linhas de rotura formam um mecanismo;
- este mecanismo divide a laje em regiões rígidas;
- considerando que as deformações elásticas são negligenciadas, estas regiões rígidas permanecem como áreas planas;
- estas áreas planas rodam em torno dos eixos de rotação localizados nos seus apoios;
- toda a deformação é concentrada nas linhas de rotura, comportando-se as linhas de rotura como linhas plásticas (espécie de dobradiças).

Como qualquer método, este também é dotado de algumas regras padrão:

- Os eixos de rotação geralmente localizam-se ao longo das linhas dos apoios e passam ao lado de qualquer pilar;
- As linhas de rotura são rectas;
- Linhas de rotura entre regiões rígidas adjacentes devem passar nos pontos de intersecção dos eixos de rotação das duas regiões;
- As linhas de rotura devem terminar nos contornos da laje;
- Apoios contínuos “repelem” e apoios simples “atraem” possíveis linhas de rotura.

Para deslocamentos infinitesimais associados a um mecanismo de rotura a diminuição da energia potencial das cargas aplicadas à laje, contabilizado pelo trabalho virtual dessas cargas, é igual à energia dissipada, ou seja ao trabalho virtual associado às rotações plásticas ao longo das linhas de rotura. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Energia externa} &= \text{Energia Interna} \\ \text{Energia Consumida} &= \text{Energia Dissipada} \\ \sum (N \times \delta)_{\text{para todas as linhas de rotura}} &= \sum (M \times lr \times \theta)_{\text{para todas as linhas de rotura}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sendo:

N - carga vertical actuante;

δ - deslocamento vertical das cargas N em cada região da laje;

M - é o momento resistente da laje por unidade de comprimento, representado pela armadura na secção da linha de rotura;

lr - é o comprimento da linha de rotura ou o seu comprimento projectado sobre o eixo de rotação da região;

θ - é a rotação da região em torno do eixo de rotação.

Para um mecanismo de rotura válido, pode ser aplicada a equação 3.5 aos momentos M associados às linhas de rotura e às cargas N que actuam nas diferentes regiões da laje.

A energia externa é calculada fazendo a resultante de cada tipo de carga (uniformemente distribuída, carga sobre uma linha ou força pontual) actuante na região e multiplicando-a pelo deslocamento vertical, medido como a proporção do maior deslocamento implícito na linha de rotura do modelo. Para simplificação, o máximo valor do deslocamento é tomado como unitário, e o deslocamento vertical de cada carga é usualmente expresso como fracção da unidade. A energia total para toda a laje é a soma das energias em todas as regiões.

A energia interna dissipada calcula-se por projecção do comprimento de cada linha de rotura sobre o eixo de rotações, multiplicando-o pelo momento actuante e pelo ângulo de rotação. A energia total dissipada para toda a laje é a soma das energias dissipadas em todas as linhas de rotura.

O ângulo de rotação da região é assumido como pequeno e expresso como sendo $\delta_{máx} / l$, sendo l o comprimento medido perpendicularmente ao eixo de rotação até ao ponto de máxima deformação da região.

A aplicação deste método é especialmente recomendada para lajes fungiformes maciças, devido à possibilidade de prever as linhas de rotura e mesmo da aplicação do método.

Em lajes fungiformes regulares considera-se cada uma das duas direcções independentemente para a análise dos mecanismos de rotura. Nos casos de lajes fungiformes irregulares, deve ser verificada crítica e detalhadamente, cada uma das direcções por aplicação do método dos trabalhos virtuais em cada caso de linha de rotura.

Embora este método não seja correntemente utilizado em projecto, a norma Inglesa BS8110 [5] enquadra-o como um dos métodos de análise de lajes fungiformes.

O uso deste método conduz a um dimensionamento económico das secções e resultam lajes com distribuições de armadura muito racional e optimizada, no entanto é um método de difícil aplicação em situações de contorno e apoios mais complexas.

4

ANÁLISE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A metodologia proposta neste trabalho para a análise e dimensionamento das armaduras de flexão de lajes fungiformes apoia-se numa análise elástica da laje efectuada com uma modelação através de elementos finitos recorrendo-se para isso a um programa de cálculo comercial, tendo sido seleccionado para este efeito o programa SAP2000.

Importa assim analisar os elementos finitos disponíveis neste programa procurando identificar o tipo de elemento utilizado, nomeadamente os graus de liberdade, o número de nós e as funções de forma que são considerados. Importa ainda confrontar os resultados obtidos com este programa com os resultados obtidos por outros programas que utilizam outro tipo de elementos finitos como sejam o programa Robot Millennium e o programa FEMIX (Azevedo [2]). Neste sentido, foram analisados exemplos simples que permitiram comparar os resultados obtidos com várias discretizações e vários elementos finitos (de 4 e 8 nós), com a solução teórica, possibilitando retirar conclusões quanto à discretização adequada que permite obter bons resultados com o programa SAP2000 na análise de lajes fungiformes.

4.1. ANÁLISE DOS ELEMENTOS FINITOS DO PROGRAMA SAP2000

A utilização consciente de um programa de cálculo requer um bom conhecimento da formulação, facto mais relevante quando se trata da utilização de programa de elementos finitos. Em muitos programas, esta informação não está disponível, não se tendo acesso a muitos aspectos da formulação de base destes programas, nem tão pouco às características dos elementos finitos que utilizam. A título de exemplo, refira-se que o programa Robot Millennium disponibiliza dois tipos de elementos finitos com a formulação de elementos de casca, elementos de 4 e 8 nós. No entanto não é disponibilizada informação sobre estes elementos, embora se entenda que sejam elementos isoparamétricos pelos resultados obtidos nas análises que se apresenta na secção seguinte. O programa SAP2000 disponibiliza um único tipo de elemento finito, mas que embora seja de 4 nós não é um elemento isoparamétrico. Assim procurou esclarecer-se alguns dos aspectos relacionados com o tipo de elementos utilizados no programa SAP2000, a partir dos elementos disponíveis e de informação disponibilizada pelos representantes deste programa.

Aborda-se seguidamente a formulação associada a elementos quadriláteros, na qual assenta a formulação dos elementos finitos do programa SAP2000, tendo por base os principais aspectos referidos em Wilson [33] e Zienkiewicz [34].

Considerando um quadrilátero de geometria arbitrária no referencial local Oxy , como se mostra na Figura 4.1, corresponde a um elemento finito de 4 nós com 16 rotações, correspondente às 8 rotações dos quatro nós e canto (1,2,3, 4) e às 8 rotações dos quatro nós dos pontos médios de cada lado (5,6,7, 8).

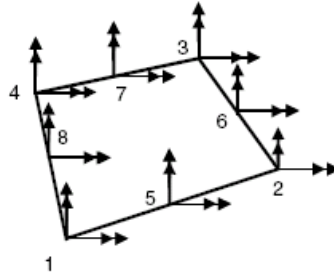


Figura 4.1 - Elemento finito quadrilátero de laje (Wilson [33]).

As rotações de cada nó intermédio podem ser decompostas na rotação normal e tangencial de cada lado do elemento. As rotações tangenciais são consideradas nulas, reduzindo o número de graus de liberdade para 12, como representado na Figura 4.2.

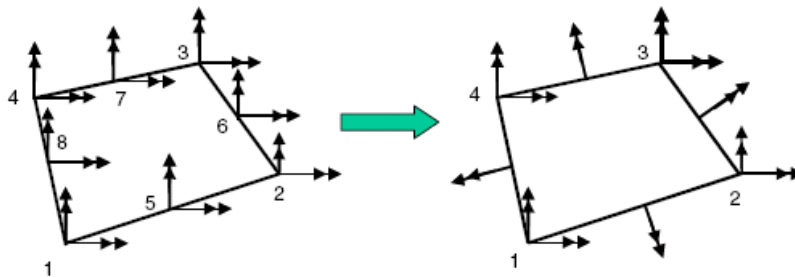


Figura 4.2 - Eliminação das rotações tangenciais nulas (Wilson [33]).

Os lados do elemento são limitados a ser uma função cúbica em u_z e quatro deslocamentos são introduzidos nos nós de canto do elemento. São introduzidos 4 graus de liberdade correspondente ao deslocamento u_z , normal ao plano dos 4 nós de canto. É imposta uma função cúbica em u_z para reproduzir os deslocamentos normais nos lados do elemento.

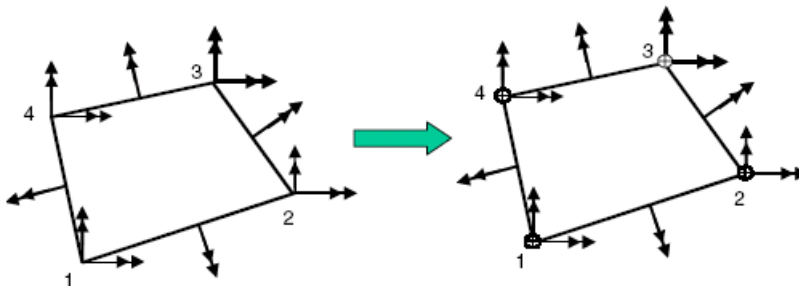


Figura 4.3 - Introdução de deslocamentos normais nos nós de canto (Wilson [33]).

Finalmente, as rotações dos nós intermédios, são eliminadas por condensação estática, resultado o elemento finito com os 12 graus de liberdade, correspondentes às duas rotações θ_x , θ_y e ao deslocamento normal u_z nos 4 nós de canto do elemento.

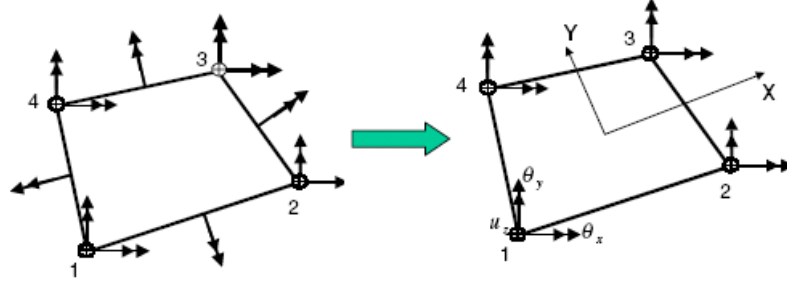


Figura 4.4 - Condensação das rotações nos nós médios (Wilson [33]).

As rotações θ_x e θ_y , de um ponto genérico de coordenadas (x, y) no referencial local normalizado (x e $y \in [-1, +1]$), podem ser obtidas a partir das rotações dos nós de canto e dos nós intermédios através das funções de forma expressas pelas equações 4.1.

$$\theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \times \theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_i(x, y) \times \Delta\theta_{xi} \quad (4.1)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \times \theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_i(x, y) \times \Delta\theta_{yi}$$

θ_i - rotação no nó de canto

$\Delta\theta_i$ - rotação no nó médio

As oito funções de forma são dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-x)(1-y)/4 & N_5 &= (1-x^2)(1-y)/2 \\ N_2 &= (1+x)(1-y)/4 & N_6 &= (1+x)(1-y^2)/2 \\ N_3 &= (1+x)(1+y)/4 & N_7 &= (1-x^2)(1+y)/2 \\ N_4 &= (1-x)(1+y)/4 & N_8 &= (1-x)(1-y^2)/2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este é o ponto importante na formulação deste elemento, notando-se que as primeiras quatro funções de forma, são as funções de forma bi-lineares standard para um quadrilátero de 4 nós, não sendo portanto nulas nos nós intermédios, 5 a 8. As últimas quatro funções de forma dos nós intermédios, são uma adição às funções de forma standard do elemento de 4 nós normalmente designadas de funções de forma hierárquicas. Está aqui presente a principal característica do elemento de 4 nós utilizado no programa SAP2000.

Procurando avaliar a eficiência da utilização das funções de forma hierárquicas passa a expor-se sucintamente o conceito destas funções, detalhadamente tratado por Zienkiewicz [34].

Zienkiewicz mostra que quanto maior é o grau das funções de forma, mais rápida é a convergência para a solução exacta. Torna-se evidente que devem adoptar funções de forma que contenham o polinómio completo de maior grau possível, para um dado número de graus de liberdade.

As funções de forma standard, como já foi referido, são as funções de forma correspondentes aos quatro nós do elemento finito que são visíveis num elemento finito quadrilátero (Figura 4.5).

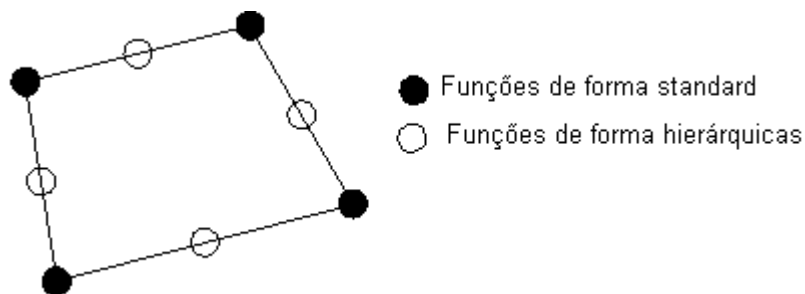


Figura 4.5 - Nós e respectivas funções de forma

As funções de forma hierárquicas referem-se a nós intermédios dos lados do elemento finito. Estes nós não se reflectem nas funções de forma standard, se isso acontecesse não se trataria de um elemento finito de quatro nós, mas sim de um elemento finito de oito nós, e consequentemente todas as oito funções seriam funções standard.

O conceito hierárquico é bem ilustrado no problema unidimensional pela análise da Figura 4.6 e Figura 4.7.

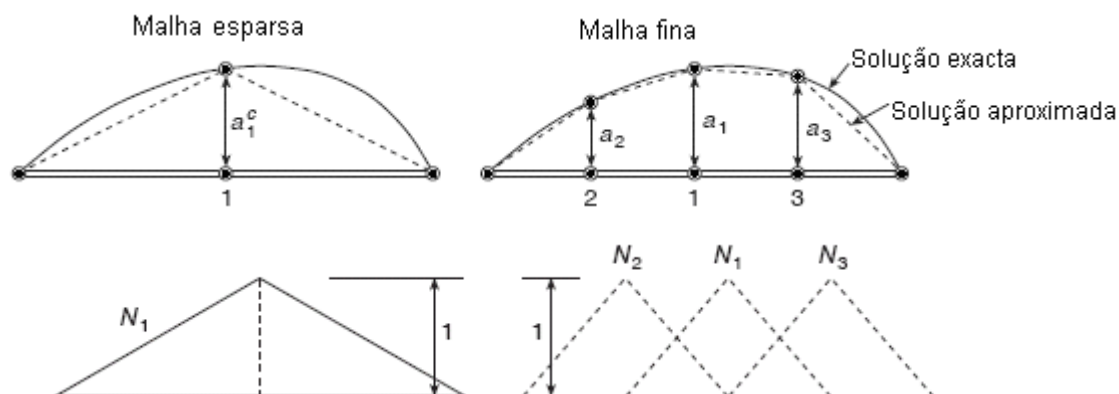


Figura 4.6 - Exemplo unidimensional de deformação de uma barra elástica, aproximação standard (Zienkiewicz [34]).

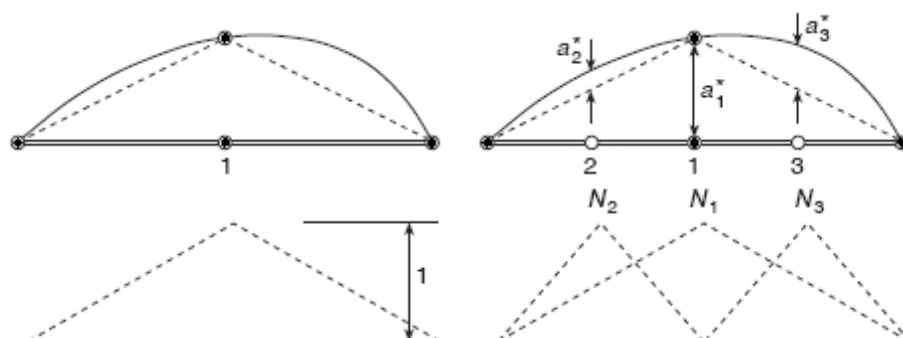


Figura 4.7 - Exemplo unidimensional de deformação de uma barra elástica, aproximação hierárquica (Zienkiewicz [34]).

Analisa-se duas malhas, uma apenas com duas barras e outra com quatro barras, obtendo-se a solução com a aproximação standard, por interpolação linear entre os nós.

Para a malha grosseira obtém-se para a forma standard e para a forma hierárquica a equação de equilíbrio:

$$K_{11}^c a_1^c = f_1 \quad (4.3)$$

Para a malha fina com dois nós adicionais em relação à malha anterior obtemos com as funções de forma standard a equação de equilíbrio expressa em função dos deslocamentos a_1 , a_2 e a_3 :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^F & K_{12}^F & 0 \\ K_{21}^F & K_{22}^F & K_{23}^F \\ 0 & K_{32}^F & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Os termos K_{ij}^F advêm da malha fina (*fine*) e os termos K_{ij}^c advêm da malha esparsa (*coarse*).

Desta forma aparecem automaticamente matrizes nulas devido à inter-conecção, entre os elementos, que aqui é óbvia. Nota-se que todos os coeficientes variam e as novas equações têm de ser resolvidas.

Depois faz-se a análise com a aproximação hierárquica, utilizando as funções de forma que se mostram na Figura 4.7, conseguindo-se uma aproximação idêntica à aproximação standard. A solução final é idêntica, mas os parâmetros a_1 e a_1^* são distintos como se representa na Figura 4.7.

De uma forma geral $K_{11}^F = K_{11}^c$, e será usada a mesma função de forma para a primeira variável. Neste caso particular os coeficientes que não os da diagonal principal são nulos e as equações a resolver para a malha fina são:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^c & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^F & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Este facto, de apenas os termos da diagonal principal não serem zero, só se apresenta para problemas unidimensionais, o que apenas é válido para este exemplo, e não para os casos bidimensionais que se tratam neste trabalho.

Não é habitual a utilização da forma hierárquica neste tipo de exemplo, porque a sua resolução com a forma standard é simples e muito vantajosa.

Analizados os conceitos de função standard e da função de forma hierárquica com base no exemplo de um elemento linear simples, passa-se a analisar detalhadamente como é conseguida esta vantagem nos elementos finitos bidimensionais.

Apresenta-se seguidamente a comparação das funções de forma de um elemento isoparamétrico de 8 nós com as funções de forma de um elemento finito de 4 nós, com 4 funções de forma standard e 4 funções de forma hierárquicas. Esquematizam-se estes dois tipos de elemento na Figura 4.8. Apresentam-se graficamente na Figura 4.9 e Figura 4.10 as funções de forma para um nó de canto (nó 2) e para um nó intermédio (nó 7) correspondente a cada um dos tipos de elementos referidos.

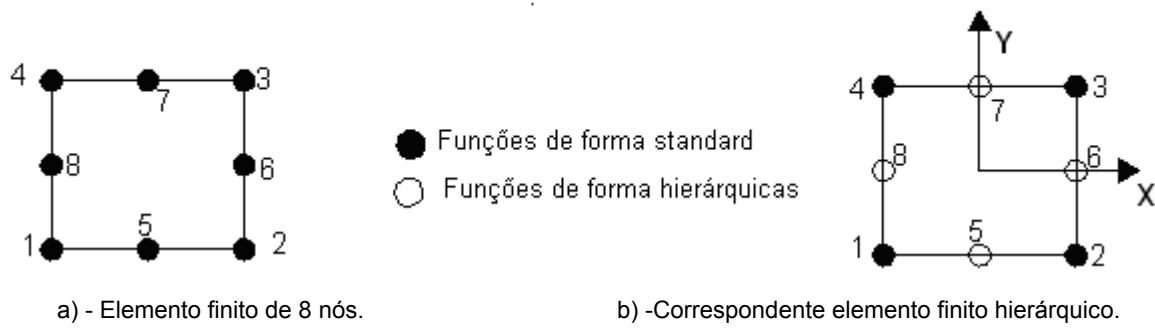


Figura 4.8 – Elemento finito de 8 nós vs elemento finito de 4 nós com funções hierárquicas.

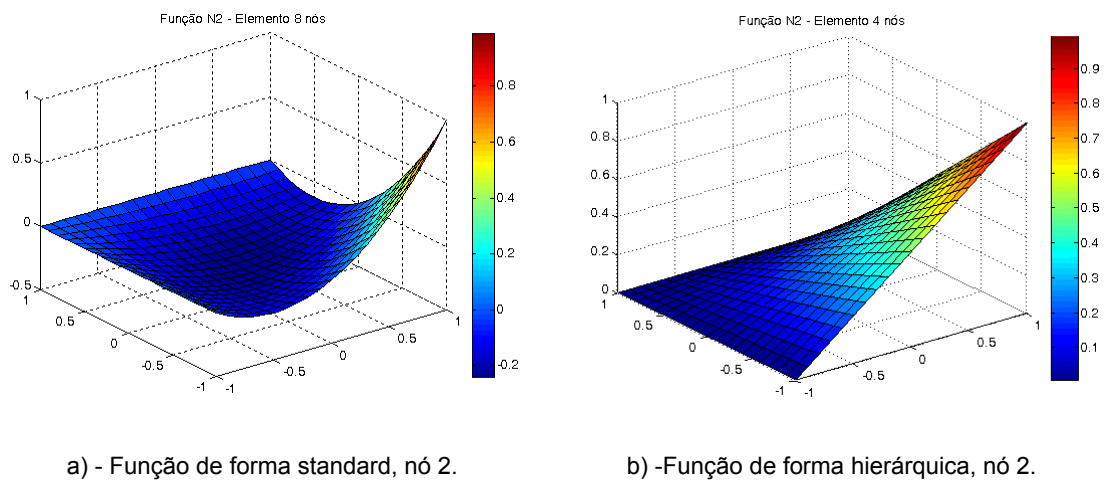


Figura 4.9 – Funções de forma de um nó de canto.

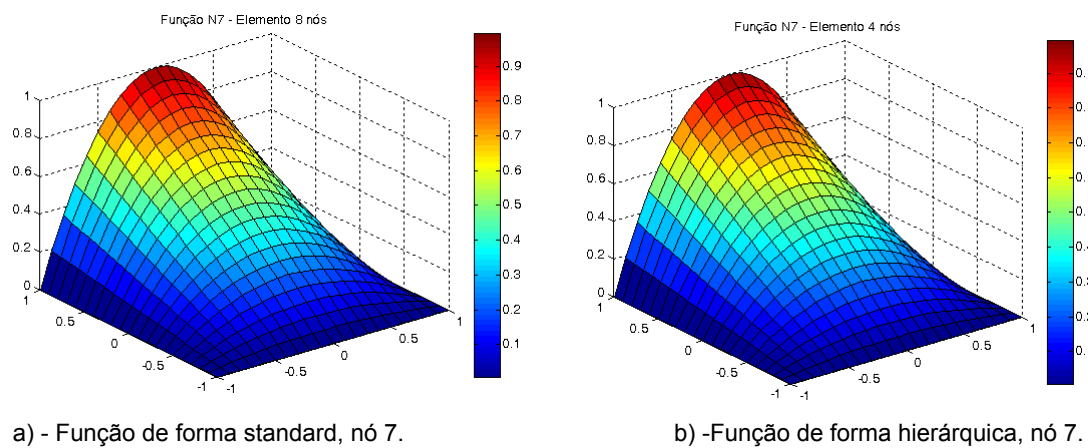


Figura 4.10 – Funções de forma de um nó intermédio.

A diferença de resultados obtidos com elementos finitos de 8 nós, com funções de forma standard e com elementos finitos de 4 nós com quatro funções de forma standard e quatro funções de forma hierárquicas, está associada às primeiras quatro funções de forma de cada elemento. Esta diferença

pode ser observada na Figura 4.11 na qual se compara as diferenças entre as funções de forma do nó 2 para os dois tipos de elementos.

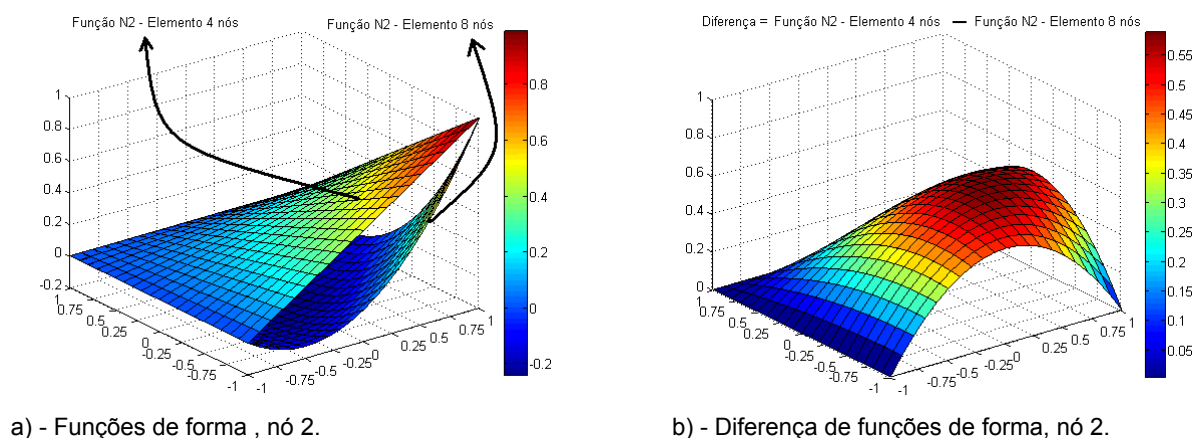


Figura 4.11 – Diferença das funções de forma de um nó de canto.

À semelhança do que se verifica no caso unidimensional com os parâmetros a_1 e a_1^* , no caso bidimensional, as diferenças nas funções de forma também existem. Como se pode verificar na Figura 4.11(a), as primeiras quatro funções de forma só têm valores iguais nos 4 nós de canto e em 2 nós médios dos lados, todos os outros têm diferenças devido às diferentes funções de forma.

As diferenças aqui observadas para a função de forma N2, verificam-se de forma análoga para as funções de forma dos restantes nós de canto 1, 3 e 4.

Estas conclusões foram obtidas com o apoio dos responsáveis da empresa do SAP2000. Mesmo assim, não se pode afirmar que seja apenas esta questão, que nos proporciona os bons resultados encontrados com este programa.

Muitos outros desenvolvimentos têm vindo a ser realizados no que diz respeito ao método dos elementos finitos, à sua formulação e ao modo de implementação nos motores de cálculo dos programas computacionais. Até os métodos de integração numérica têm sofrido bastante desenvolvimento, conseguindo obter-se formas de convergência muito mais rápida para a solução exacta [33].

Os aspectos atrás referidos conduzem à obtenção de soluções, com o elemento finito de 4 nós implementado no programa SAP2000, normalmente intermédias às obtidas com elementos finitos isoparamétricos de 4 e 8 nós. Este facto, revela-se atractivo, uma vez que é possível obter melhores soluções com este elemento de 4 nós, comparativamente com o elemento isoparamétrico, mantendo os mesmos graus de liberdade e consequentemente praticamente o mesmo esforço de cálculo.

Como foi referido anteriormente, o elemento finito de laje implementado no programa SAP2000, contempla os 12 graus de liberdade correspondentes às rotações θ_x e θ_y e ao deslocamento normal u_z dos 4 nós de canto do elemento. A matriz de rigidez deste elemento é obtida da forma habitual a partir das funções de forma destes elementos. As deformações de corte podem ser ou não consideradas na análise.

Para as deformações de corte serem incluídas na análise, na definição das secções associadas ao elemento finito escolhe-se a opção “THICK Plate”, activando-se desta forma a formulação de Mindlin/Reissner.

Se as deformações de corte são desprezáveis, a escolha da opção “THIN Plate” conduz ao uso da formulação de Kirchhoff na qual são desprezadas as deformações de corte.

É de notar que para lajes ou placas finas, a deformação por corte é pouco relevante, pelo que as duas formulações conduzem a resultados praticamente iguais.

4.2. TIPOS DE ELEMENTOS PARA ANÁLISE DE LAJES FUNGIFORMES

A análise de lajes através de elementos finitos pode ser feita com os elementos de laje referidos na secção anterior. Estes elementos reproduzem adequadamente as deformações fora do plano das lajes embora não permitam considerar as deformações no plano, ou seja, não contemplam os esforços de membrana. Quando se pretende fazer uma análise global de um edifício, incluindo as acções horizontais pode ser importante considerar estes esforços.

O programa SAP2000, [27] e [28], permite utilizar elementos finitos com os 6 graus de liberdade por nó, ou seja elementos de casca. Como se representa na Figura 4.12 estes elementos resulta da associação dos 3 graus de liberdade de um elemento de laje ou placa (θ_x , θ_y e u_z), com os 3 graus de liberdade de um elemento de membrana (u_x , u_y e θ_z).

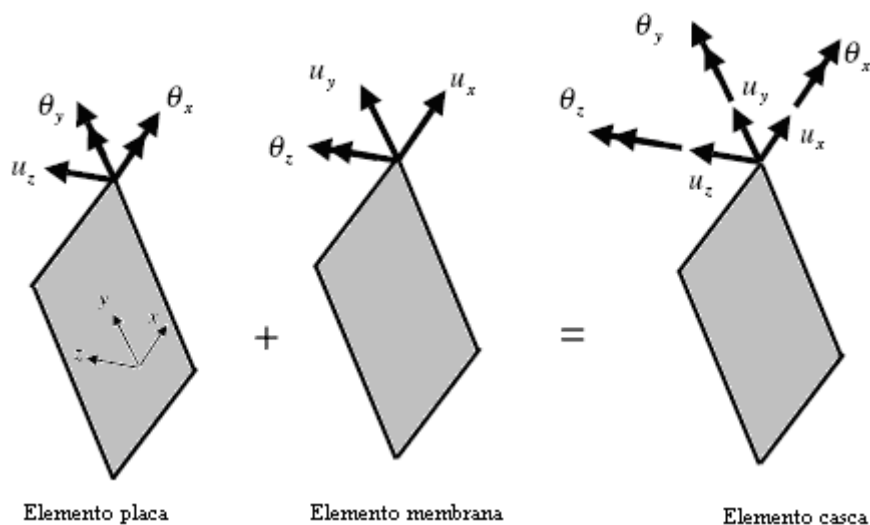


Figura 4.12 - Graus de liberdade dos diferentes tipos de elemento (Wilson [33]).

A matriz de rigidez do elemento de casca é formada de forma idêntica à discutida para o elemento de laje, ou seja, apoia-se nas funções de forma apresentadas, mas agora considerando também os termos associados aos graus de liberdade u_x , u_y e θ_z dos 4 nós de canto.

4.3. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS OBTIDOS COM DIFERENTES PROGRAMAS

Procedeu-se à análise através de elementos finitos de dois exemplos com a utilização de programas diferentes com o objectivo de se avaliarem os resultados obtidos. Neste estudo foi ainda feita uma avaliação dos resultados obtidos com diferentes malhas de elementos finitos que permitiram identificar o refinamento adequado que conduz a resultados aceitáveis.

O primeiro exemplo, corresponde à análise de uma viga da qual se conhecem resultados obtidos com o programa FEMIX com a utilização de elementos finitos de 4 e 8 nós (Azevedo [2]).

As condições do problema são apresentadas na Figura 4.13, e correspondem a uma viga simplesmente apoiada com 10.0m de vão e secção rectangular $0.30 \times 1.0 \text{ m}^2$ solicitada por uma carga uniformemente distribuída de 50 kN/m .

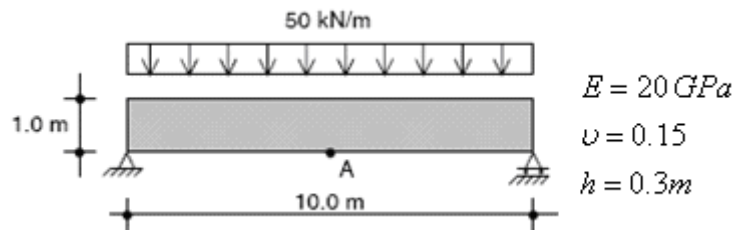


Figura 4.13 - Esquema estrutural da viga em análise (Azevedo).

O objectivo deste exemplo consistiu em comparar o deslocamento vertical do ponto A e o momento flector nesta secção, obtidos com os dois programas referidos. Procurou ainda confrontar-se os resultados obtidos com malhas de elementos finitos diferentes, tendo-se adoptado malhas com 1 elemento na altura da secção e 4, 8, 10 e 16 elementos no desenvolvimento da viga.

Os resultados obtidos foram ainda comparados com o programa FEMIX e com os resultados teóricos.

Para as condições da viga e sem a consideração das deformações de corte o deslocamento vertical no ponto A é obtido por:

$$\delta_A^z = \frac{5 \times p \times l^4}{384 \times E \times I} = \frac{5 \times 50 \times 10^4}{384 \times 20 \times 10^6 \times \frac{0.3 \times 1^3}{12}} = 0.0130208 \text{ m} \quad (4.6)$$

Assumindo-se um comportamento elástico dos materiais, o momento máximo e as correspondentes tensão máxima nas fibras extremas da secção de meio vão são obtidas por:

$$M_{\text{máximo}} = \frac{50 \times 10^2}{8} = 625 \text{ kN.m} \quad (4.7)$$

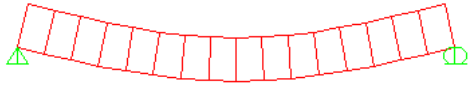
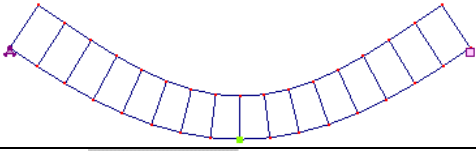
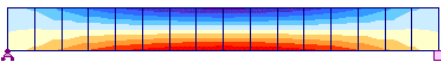
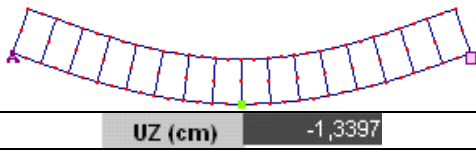
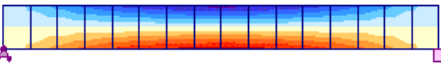
$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{625}{\frac{0.3 \times 1^3}{12}} \times (-0.5) = -12500 \text{ kPa} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{625}{\frac{0.3 \times 1^3}{12}} \times 0.5 = 12500 \text{ kPa} \quad (4.9)$$

Na modelação com o programa SAP2000 e Robot Millennium as deformações por corte não foram incluídas, tendo-se para isso no programa SAP2000 seleccionado a opção “THIN Plate”

Apresentam-se no Quadro 4.1 os resultados dos deslocamentos e tensões máximas da secção de meio vão obtidos com o programa SAP2000 com elementos de 4 nós e com o programa Robot Millennium com elementos de 4 e 8 nós, utilizando-se em ambos os programas uma discretização de 1×16 elementos. Representam-se também as deformadas (sem escala) e uma pintura da distribuição de tensões.

Quadro 4.1 - Valores de deslocamentos e tensões para malha 1×16 .

Malha 1×16	Deformações	Tensões
SAP2000 Elemento finito de 4 nós	 -0,01308 m	 MIN=-12536,41, MAX=12536,405 kPa
Robot Millennium Elemento finito de 4 nós	 UZ (cm) -1,1103	 max: 10,67 min: -10,67 (MPa)
Robot Millennium Elemento finito de 8 nós	 UZ (cm) -1,3397	 max: 12,53 min: -12,53 (MPa)

Nesta análise contempla-se malhas em que o refinamento é feito apenas numa direcção, já que a divisão da secção da viga em vários elementos finitos ao longo da sua altura não conduz a uma melhoria significativa dos resultados, facto que seria de esperar já que o elemento isoparamétrico de 4 nós reproduz bem o campo de deformações lineares.

No Quadro 4.2, confrontam-se os valores do deslocamento vertical do ponto A obtidos com o programa SAP2000 e Robot Millennium e alguns resultados obtidos com o programa FEMIX utilizando elementos isoparamétricos de 4 e 8 nós.

Quadro 4.2 - Resultados obtidos para deslocamentos no ponto A [cm].

	SAP2000	Robot Millennium		FEMIX	
Malha	4 nós	4 nós	8 nós	4 nós	8 nós
1×4	-1.194	-0.3385	-1.3286	-0.34	-1.33
1×8	-1.289	-0.7743	-1.3334	-0.77	-1.33
1×10	-1.299	-0.9066	-1.3449	-	-
1×16	-1.308	-1.1103	-1.3397	-	-

A relação entre os resultados obtidos com os programas SAP2000 e Robot Millennium e o valor teórico, que traduz a aproximação conseguida com estes programas e com diferentes discretizações, é apresentado graficamente na Figura 4.14.

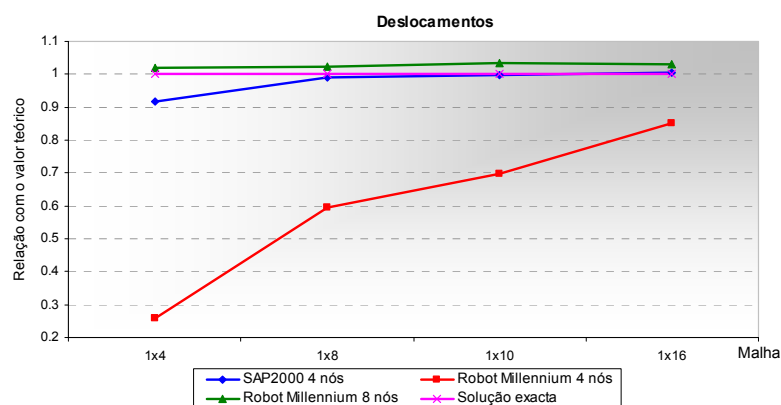


Figura 4.14 - Comparação dos valores de deslocamentos no ponto A com a solução teórica.

Destes resultados é possível verificar que a utilização do elemento finito de 4 nós do Robot Millennium e do FEMIX conduzem a resultados próximos entre si mas com erros significativos face à solução teórica (erros de cerca de 15% com a malha mais fina). A utilização do elemento de 8 nós com estes programas conduz a boas soluções mesmo com uma malha relativamente esparsa (erros inferiores a 1% com a malha 1×4). Relativamente ao elemento finito de 4 nós do programa SAP2000, que como vimos não é um elemento finito isoparamétrico, pode observar-se que os resultados convergem para a solução teórica obtendo-se já resultados muito bons com uma malha 1×8 , com erros inferiores a 1%. Este exemplo permite evidenciar a capacidade deste elemento de 4 nós comparativamente ao elemento de 4 nós do programa Robot Millennium.

Procedeu-se à mesma análise para a situação em que os esforços de flexão são predominantes tomando-se um segundo exemplo correspondente ao estudo de um painel de laje com $6 \times 15 \text{ m}^2$, com espessura constante de 0,25m que se representa na Figura 4.15.

Considerou-se a laje simplesmente apoiada nos bordos maiores com um carregamento uniformemente distribuído de $20 \text{ kN} / \text{m}^2$.

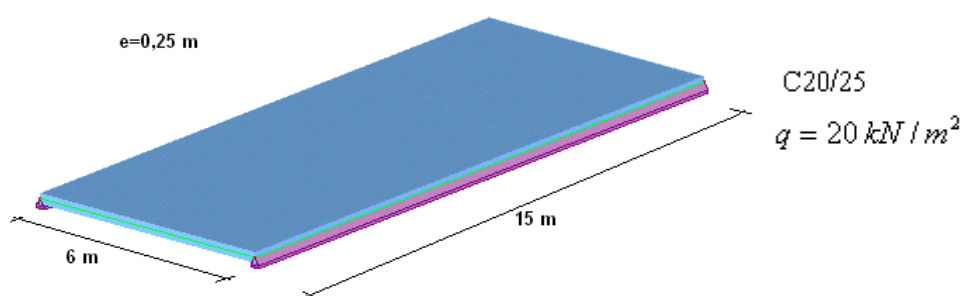


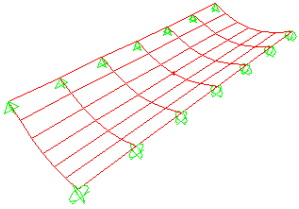
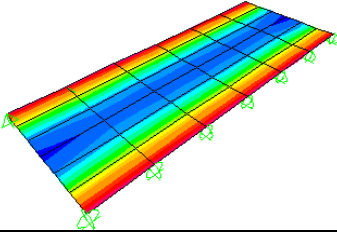
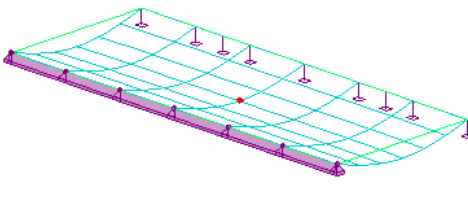
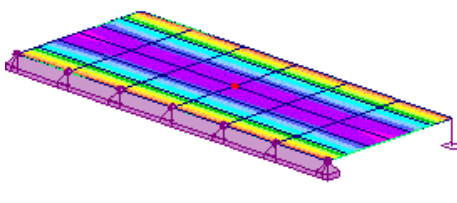
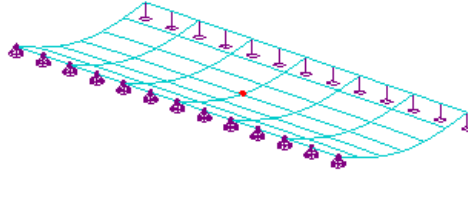
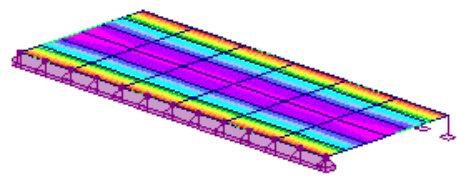
Figura 4.15 - Esquema estrutural da laje em estudo.

De forma análoga ao exemplo anterior, fez-se uma comparação dos resultados obtidos com os dois programas e a solução teórica para o deslocamento vertical a meio vão e o momento flector principal máximo.

Apresentam-se no Quadro 4.3 os resultados obtidos com uma malha de elementos finitos 6×6 através dos programas SAP2000 e Robot Millennium, tendo utilizado neste último programa elementos de 4 e

8 nós. Estes resultados referem-se ao deslocamento vertical e ao momento flector principal no centro da laje.

Quadro 4.3 – Deslocamento vertical e momento flector principal no centro da laje (malha 6×6).

Malha 6×6	Deformações	Momento flector
SAP2000 Elemento finito de 4 nós		
	-0,00811 m	89.366 kN.m/m
Robot Millennium Elemento finito de 4 nós		
	UZ (cm) -0,8083	MY (kNm/m) -89,36
Robot Millennium Elemento finito de 8 nós		
	UZ (cm) -0,8269	MY (kNm/m) -91,03

A solução teórica pode ser obtida, Timoshenko [32], por:

Deslocamento vertical no centro da laje

$$\delta_{centro} = \alpha_1 \times \frac{q \times l^2}{D} \quad (4.10)$$

A rigidez à flexão da laje é dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.11)$$

Sendo l o vão da laje, h a espessura, ν o coeficiente de Poisson e q a carga uniformemente distribuída.

Considerando o valor de $\alpha_1 = 0.01291$ definido por Timoshenko para a relação de lados da laje deste exemplo e os valores $l = 6 \text{ m}$, $\nu = 0.2$, $E = 30 \text{ GPa}$ e $q = 20 \text{ kN/m}^2$, obtemos:

$$\delta_{centro} = 0.008217 \text{ m}$$

Momento principal máximo é dado por:

$$M_{máx} = \beta \times q \times l^2 \quad (4.12)$$

Considerando o valor de $\beta = 0.1232$ correspondente à relação de lados da laje, obtemos:

$$M_{m\acute{a}x} = 88.70 \text{ kN.m / m}$$

Apresentam-se no Quadro 4.4 os resultados obtidos com malhas com diferentes refinamentos e o uso de elementos finitos de 4 nós e de elementos finitos de 8 nós.

Quadro 4.4 – Deslocamento vertical e momentos flector principal, obtidos com diferentes malhas.

Malha	Deslocamentos [cm]			Momentos flectores [kN.m/m]		
	SAP2000	Robot Millennium		SAP2000	Robot Millennium	
	4 nós	4 nós	8 nós	4 nós	4 nós	8 nós
6x6	0.811	0.8083	0.8269	89.366	89.36	91.03
6x15	0.815	0.809	0.8268	89.308	89.41	90.99
12x30	0.824	0.8227	0.8267	89.309	89.4	89.75

A comparação destes resultados com os respectivos valores teóricos é apresentado graficamente na Figura 4.16.

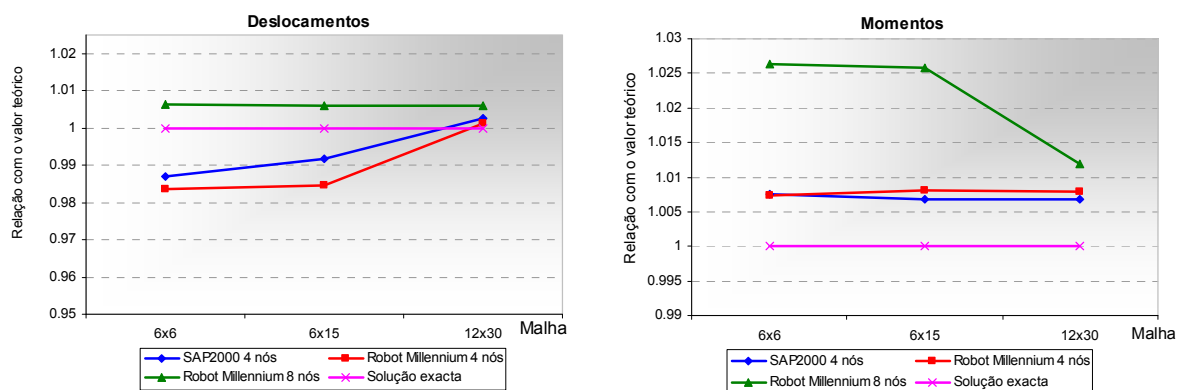


Figura 4.16 - Comparação de resultados de deslocamentos e de momentos com a solução teórica.

Pode observar-se que os resultados obtidos com o elemento de 4 nós pelos programas SAP2000 e Robot Millennium são muito próximos, em particular o momento flector, apresentando desvios da solução teórica inferiores a 1% com malha mais esparsa 6×6 . Verifica-se também através da Figura 4.16 que a convergência para a solução teórica com o refinamento da malha é mais rápida com o SAP2000. Desta figura pode ainda verificar-se que em relação ao deslocamento se obtém melhores resultados com o elemento de 8 nós com o Robot Millennium, mas o mesmo não acontece em relação ao momento flector.

5

**METODOLOGIA DE DIMENSIONAMENTO
DE ARMADURAS DE LAJES FUNGIFORMES****5.1. ANÁLISE DE LAJES FUNGIFORMES COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

O método dos elementos finitos permite uma diversidade de metodologias de análise de lajes fungiformes, com a utilização de diferentes estratégias de modelação e diferentes estratégias de dimensionamento a partir de esforços ou de tensões. Neste trabalho faz-se uma abordagem dos modos mais correntes e mais rápidos de modelação de uma laje fungiforme, quer isoladamente, quer no conjunto global da estrutura. Nesta abordagem discute-se ainda diferentes metodologias de dimensionamento a partir dos resultados obtidos por elementos finitos. É possível proceder-se ao dimensionamento das armaduras a partir das tensões ou dos momentos resultantes obtidos na análise linear elástica. Correntemente em lajes, o dimensionamento é baseado nos momentos resultantes, momentos flectores M_{xx} e M_{yy} , e momento torsor M_{xy} .

5.1.1. DIMENSIONAMENTO A PARTIR DE TENSÕES

No dimensionamento baseado em tensões, são analisadas as tensões de cada elemento finito, chegando a uma solução de armadura que absorva as tensões aí instaladas. Este procedimento, é de difícil aplicação prática, uma vez que é necessário manusear diversas componentes de tensão para se proceder ao dimensionamento das armaduras.

Deaton [10], estudou este problema e chegou à conclusão que o dimensionamento a partir de momentos resultantes é mais adequado e com certeza o mais usado. Aquando da análise dos resultados obtidos para quantidades de armadura, faz-se ainda a comparação dos resultados obtidos partindo de momentos com os que se obteriam partindo de tensões. Esta comparação é possível, usando a capacidade do SAP2000 para fazer secções de corte e apresentar o integral das tensões presentes nessa mesma secção.

5.1.2. DIMENSIONAMENTO A PARTIR DE MOMENTOS RESULTANTES

No dimensionamento de lajes fungiformes baseado em momentos resistentes deparamo-nos com algumas questões que importa discutir. Convém então saber a forma mais adequada de modelar as lajes fungiformes, para que se possam obter bons resultados, com processos de modelação rápidos e correctos, tirando proveito das capacidades dos programas de cálculo. No desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o programa SAP2000 como ferramenta de cálculo, seleccionando-se o elemento de casca de 4 nós implementado neste programa para a modelação de lajes.

Para se poder avaliar a partir de que ponto são obtidos resultados aceitáveis com a discretização e o tipo de elemento utilizado, procurou fazer-se uma comparação com soluções analíticas baseadas na teoria da elasticidade.

5.2. SOLUÇÕES ANALÍTICAS EXISTENTES PARA ALGUNS CASOS

Relativamente à obtenção de esforços e deslocamentos em lajes fungiformes, através de soluções analíticas, é possível encontrar na bibliografia diversos trabalhos sobre este assunto. Atendendo à dificuldade da resolução analítica deste tipo de lajes com condições de apoio e carregamento diversos, apenas se encontram alguns casos específicos tratados e resolvidos por esta via. Com o intuito de se proceder de alguma forma a uma validação das estratégias de modelação deste tipo de lajes foram utilizadas como referência os resultados de soluções analíticas de alguns casos particulares.

Apresentam-se algumas soluções teóricas desenvolvidas por Timoshenko [32], já utilizadas por Barés [3], para lajes fungiformes com desenvolvimento contínuo, que são úteis na validação dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e para aferição de refinamentos das malhas.

Para lajes fungiformes carregadas uniformemente com distâncias a e b , constantes entre os pilares como representado na Figura 5.1, é possível concluir que a flexão em todos os painéis pode ser assumida como idêntica a um painel de contorno fechado e estabelecer os limites do problema considerando apenas um painel.

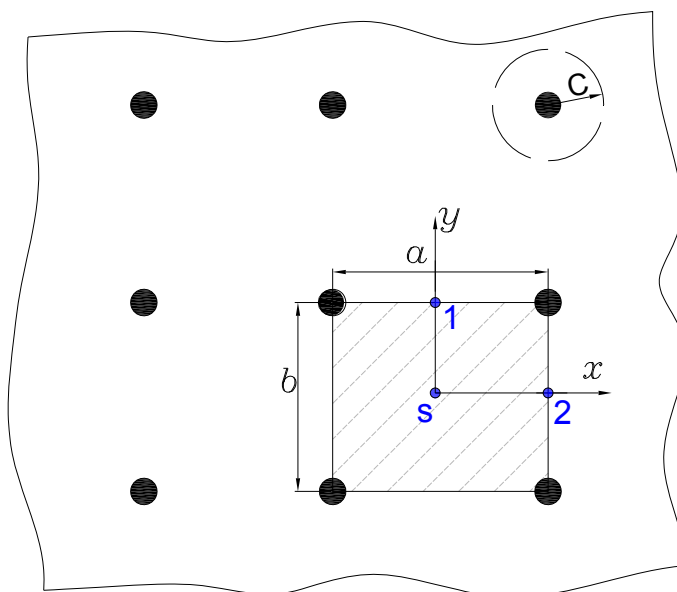


Figura 5.1 - Representação da laje fungiforme contínua e suas características.

Os pontos **s**, 1 e 2 que se apresentam na Figura 5.1 são os pontos onde se conhecem algumas soluções teóricas desenvolvidas por Timoshenko.

Tomando um sistema de eixos paralelo aos alinhamentos dos pilares e a origem no centro do painel, tem-se um painel uniformemente carregado com as dimensões a e b . Pela simetria pode concluir-se que o deslocamento vertical máximo ocorre no centro do painel e que sobre os pilares é nulo. Ainda para simplificação considera-se que a secção dos pilares é pequena e pode ser desprezada, resultando o painel de laje com apoios pontuais.

Com estas simplificações Timoshenko, parte do caso de um painel simplesmente apoiado, obtendo os valores do deslocamento pela expressão:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (5.1)$$

com,

$$\delta_1 = \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 \quad (5.2)$$

$$\delta_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (5.3)$$

q - carga uniformemente distribuída;

$$D - \text{rigidez à flexão} \quad D = \frac{Eh^3}{12 \times (1 - \nu^2)}; \quad (5.4)$$

x, y - coordenadas do ponto em causa;

E - módulo de elasticidade do material;

ν - coeficiente de Poisson do material;

A_0 - constantes determinadas pelas condições do contorno ao longo do lado;

Y_m - funções desenvolvidas por Timoshenko [32] que satisfazem as condições de contorno dos lados.

Timoshenko desenvolve as equações e chega à equação 5.5, que dá o deslocamento no centro de cada painel.

$$\delta_{x=0,y=0} = \frac{qb^4}{384D} - \frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2}}{m^3} \times \frac{\alpha_m + \tanh \alpha_m}{\sinh \alpha_m \tanh \alpha_m} - \frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \tanh \alpha_m}{\tanh^2 \alpha_m} \right) \quad (5.5)$$

sendo

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (5.6)$$

Os valores do deslocamento em causa $\delta s = \delta_{x=0,y=0}$ apresentam-se no Quadro 5.1, dependendo do coeficiente α , para algumas razões de b/a . Da mesma forma se encontra os momentos flectores no centro do painel M_{xs} e M_{ys} , dependentes dos coeficientes β e β_1 respectivamente.

Quadro 5.1 – Deslocamento vertical e momentos flectores no centro do painel.

b/a	$\delta s = \alpha \frac{qb^4}{D} \quad M_{xs} = \beta qb^2 \quad M_{ys} = \beta_1 qb^2$		
	α	β	β_1
1	0.00581	0.0331	0.0331
1.1	0.00487	0.0261	0.0352
1.2	0.00428	0.021	0.0363
1.3	0.00387	0.0175	0.0375
1.4	0.00358	0.0149	0.0384
1.5	0.00337	0.0131	0.0387
2	0.00292	0.0092	0.0411
∞	0.0026	0.0083	0.0417

Ao analisar os valores deste quadro, nota-se que para valores de $b \gg a$, o máximo momento flector no centro do painel de laje, não difere muito do momento a meio vão de uma laje carregada uniformemente e apoiada em dois lados opostos.

As reacções concentradas actuam nos pontos de apoio da laje, e os momentos apresentados atrás, admitem que as reacções actuam pontualmente. Pode-se, contudo, assumir que as forças das reacções de apoio, são forças uniformemente distribuídas sobre a área de um círculo representativo da área da secção do pilar.

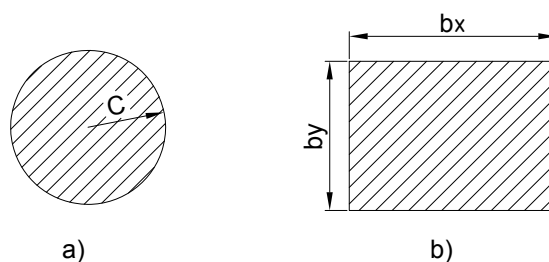


Figura 5.2 – Secção circular equivalente à secção rectangular.

Para pilares circulares o raio do pilar é o raio da secção do pilar em causa, mas para pilares rectangulares é usado o raio de um círculo equivalente, que é dado por:

$$c = \frac{t}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi-1}{4}} = 0.5705 \times t \quad (5.7)$$

$$\text{sendo, } t = \frac{b_x + b_y}{2} \quad (5.8)$$

Os momentos flectores no centro do pilar, M_{x3} e M_{y3} podem ser calculados pelas expressões 5.9 e 5.10, desenvolvidas por Timoshenko.

$$M_{x3} = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{a}{c} - (\alpha + \beta \times \nu) \right] \quad (5.9)$$

$$M_{y3} = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{a}{c} - (\beta + \alpha \times \nu) \right] \quad (5.10)$$

em que:

α e β - coeficientes definidos no Quadro 5.2, dependentes da razão b/a .

Quadro 5.2 - Valores de α e β , para cálculo de momentos sobre o pilar.

b/a	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2
α	0.811	0.822	0.829	0.833	0.835	0.836	0.838
β	0.811	0.698	0.588	0.481	0.374	0.268	-0.256

Os momentos flectores no caso de pilares de secção rectangular podem ser calculados assumindo que as reacções são uniformemente distribuídas na área da secção do pilar.

Apresentam-se no Quadro 5.3 os momentos flectores para o caso de um painel quadrado de lado a e pilares quadrados de lado b_x , para várias relações k entre os lados do pilar e do painel. São apresentados os momentos flectores em cada direcção de acordo com a Figura 5.1.

Quadro 5.3 - Momentos flectores em painéis quadrados uniformemente carregados. $\nu = 0.2$

$\frac{b_x}{a} = k$	$M_{x3} = M_{y3} = \beta q a^2$	$M_{xs} = M_{ys} = \beta_1 q a^2$	$M_{x2} = \beta_2 q a^2$	$M_{y2} = \beta_3 q a^2$
	β	β_1	β_2	β_3
0	$-\infty$	0.0331	-0.0185	0.0512
0.1	-0.196	0.0329	-0.0182	0.0508
0.2	-0.131	0.0321	-0.0178	0.0489
0.3	-0.0933	0.0308	-0.017	0.0458
0.4	-0.0678	0.0289	-0.0158	0.0415
0.5	-0.0487	0.0265	-0.014	0.0361

Pela análise dos coeficientes repara-se que os momentos no centro da secção do pilar, são muito superiores aos momentos no centro do painel e o seu valor depende bastante das dimensões da secção transversal do pilar. Os momentos no centro do painel não têm uma dependência tão forte da dimensão dos pilares face à dimensão do painel.

Os deslocamentos verticais do ponto médio dos alinhamentos entre pilares obtidos analiticamente por Barés para painéis rectangulares de dimensão $a \times b$ são apresentados no Quadro 5.4 para vários valores da relação de lados dos painéis. Os deslocamentos δ_1 e δ_2 são deslocamentos do ponto médio do maior e menor lado, respectivamente.

Quadro 5.4 – Deslocamento vertical a meio vão entre pilares, para painéis uniformemente carregados.

$\frac{b}{a}$	$\delta 1 = \lambda_1 \times \frac{q \times a^4}{E \times h^3}$	$\delta 2 = \lambda_2 \times \frac{q \times a^4}{E \times h^3}$
	λ_1	λ_2
1.0	0.0521	0.0521
1.1	0.0570	0.0707
1.2	0.0616	0.0936
1.3	0.0663	0.1258
1.4	0.0705	0.1618
1.5	0.0765	0.1979
2.0	0.1016	0.5549

As soluções teóricas obtidas por Barés, possivelmente não são totalmente exactas, uma vez que são obtidas com base nos desenvolvimentos de Timoskenko e por extrapolação para outras situações.

Nos exemplos analisados, nas secções seguintes deste trabalho, são tomados estes valores como valores de referência na comparação com os resultados obtidos através do método dos elementos finitos.

5.3. ESTRATÉGIAS DE MODELAÇÃO DA LIGAÇÃO LAJE-PILAR

Uma das dificuldades na aplicação do método dos elementos finitos para a modelação de lajes fungiformes prende-se com a modelação da zona de apoio, de modo a obtermos esforços correctos para dimensionamento numa forma simples e prática para utilizar em projecto.

Verifica-se, que se não for adoptada uma estratégia adequada, obtêm-se valores de pico de momento flector sobre o apoio, muito exagerados, em particular no nó da malha de elementos finitos ligado ao elemento de barra, ou ao apoio, que simulam o pilar. Considerar este valor no dimensionamento conduz a uma armadura excessiva e inadequada face à real distribuição de momentos flectores nesta zona da laje. Refira-se ainda que nestas condições de modelação não é atendida a influência da dimensão do pilar na distribuição de momentos, uma vez que nesta modelação o pilar é simulado unicamente no eixo.

Este problema já foi estudado por vários autores, de entre as quais Enochsson e Dufvenberg [14], que estudaram o refinamento da malha na zona do apoio, mas apenas para um caso de laje, e Deaton [10] que estudou várias formas de modelar a ligação laje-pilar. Estes autores chegaram à conclusão que o método dos elementos finitos produz melhores resultados se a ligação for distribuída por alguns nós, sendo estes correspondentes à largura do pilar. Assim é requerida uma malha de elementos finitos bastante fina, ou então uma malha mais refinada nas zonas da ligação laje-pilar. Isto requer usualmente a divisão da área do pilar em malhas 2×2 no mínimo, para que seja possível distribuir a rigidez por vários nós.

Enochsson e Dufvenberg chegam ainda à conclusão que a modelação da ligação laje-pilar produz melhores resultados e reduz os picos de momentos, se forem consideradas molas com rigidezes equivalentes. Sendo as molas do interior com maior rigidez que as molas do contorno da área de ligação laje-pilar. Este processo seria óptimo se não implicasse antecipadamente o cálculo das rigidezes equivalentes a distribuir pelos nós da área do apoio, revelando-se portanto um método pouco prático para utilização em projecto.

Procurou assim estabelecer-se, neste trabalho uma estratégia mais simples e prática para aplicação em projecto. Foram estudadas várias estratégias de modelação em que a área da ligação laje-pilar é dividida em quatro elementos finitos, já que Deaton mostra que é razoável dividir a área do pilar em malhas 2×2 . Com alguns testes em exemplos simples foi possível constatar tal afirmação.

Apenas um elemento finito na área do pilar seria de difícil modelação, com bastantes limitações, já que ao modelar um edifício completo, os elementos de barra que simulam os pilares, não poderão ser ligados ao nó central. A referida área dividida em muitos elementos finitos, seria também um exagero e poderia acarretar malhas muito densas e consequentemente um esforço de cálculo muito grande.

Uma primeira estratégia utilizada na modelação da ligação laje-pilar consiste em considerar uma rigidez muito elevada nos 4 elementos finitos definidos na área da secção transversal do pilar. Atribui-se assim um módulo de elasticidade muito elevado a estes elementos, continuando contudo a serem elementos de casca. Este processo conduziu a um aumento dos momentos flectores nesta zona, quer do momento de pico no nó de ligação ao elemento de barra, quer dos momentos registados nos nós de ligação a estes elementos mais rígidos.

Apresenta-se na Figura 5.3, os diagramas obtidos com esta estratégia.

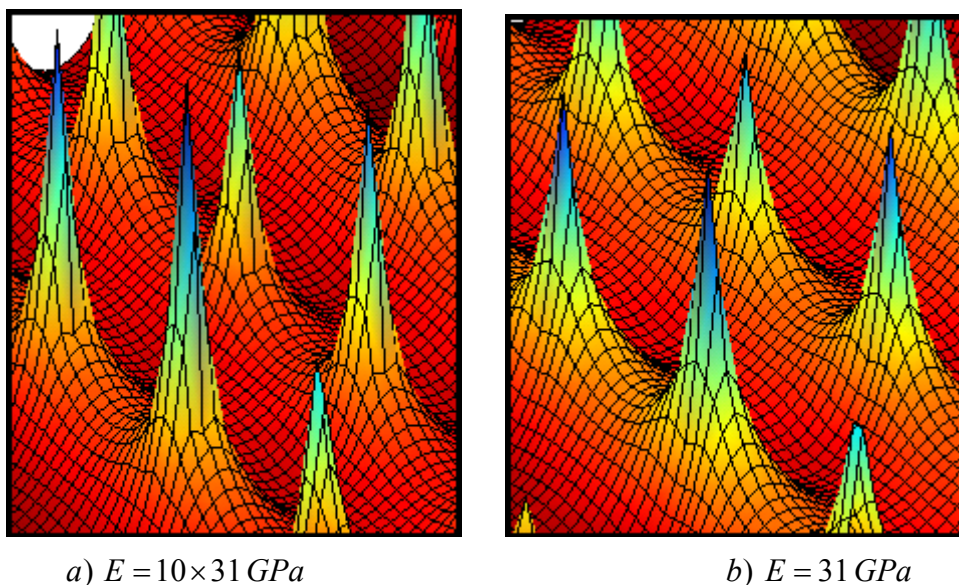


Figura 5.3 - Diagramas de momentos para a mesma carga e módulos de elasticidade diferentes.

O diagrama da Figura 5.3 *b)* resultou da análise de um exemplo em que a área de ligação laje-pilar foi modelada com as características reais ($e = 30\text{ cm}$ e $E = 31\text{ GPa}$). O diagrama representado na Figura 5.3 *a)* foi obtido com a um módulo de elasticidade dez vezes maior nos elementos finitos correspondentes à área do pilar.

Verifica-se que esta estratégia de aumentar a rigidez da área do pilar, não é uma boa opção, já que ao contrário do pretendido, aumenta os picos de momentos flectores no eixo do pilar.

Comparam-se quatro estratégias de modelação da área do pilar, que aparentam ser as que conduzem a melhores resultados de entre várias que foram analisadas previamente.

A modelação da ligação laje-pilar por meio de um ponto seria a melhor solução e a mais simples de utilizar. Colocando um apoio caso se pretenda uma análise apenas da laje sem a restante estrutura, ou ligando um elemento de barra (pilar), quando se pretende incluir o efeito da ligação laje-pilar (ver Figura 5.4). Esta estratégia é designada no seguimento do trabalho por caso A.

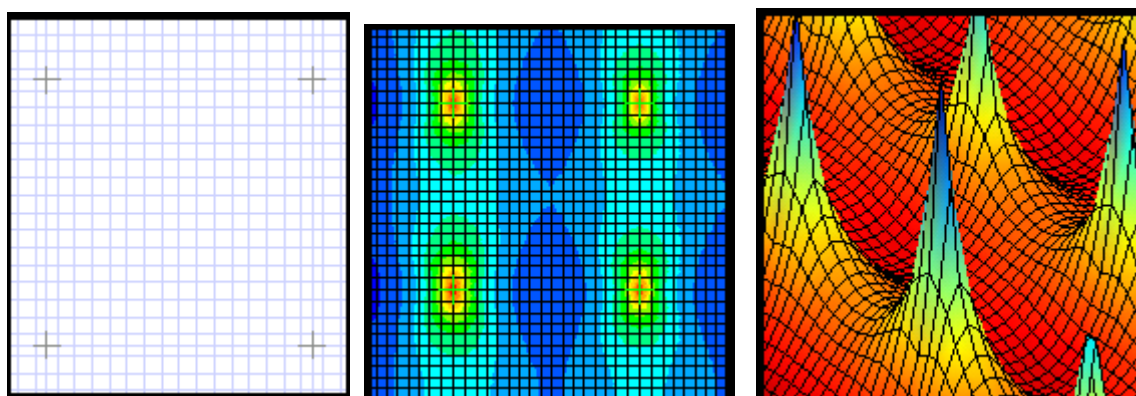


Figura 5.4 - Malha 2×2 e apoio no nó central – caso A. Diagrama de momentos.

Um outro procedimento, designado por caso B, consistiu na atribuição de movimento de corpo rígido aos nós dos elementos finitos correspondentes à área do pilar. Refira-se que vários programas comerciais, entre os quais o programa SAP2000, permitem estabelecer esta condição com relativa facilidade.

Com o movimento de corpo rígido, todos os nós dentro da área do pilar têm deslocamentos condicionados aos deslocamentos do nó central, ou seja, os nós têm os deslocamentos dependentes dos deslocamentos do nó central, onde se liga o pilar ou apoio. Como se pode ver na Figura 5.5, é conseguida a eliminação dos picos de momentos flectores. Esta diminuição não é razoável, pois os valores de momentos a considerar serão os momentos nas faces do pilar, estes valores não são adequados na maioria das situações, já que no interior da área este processo conduz a valores de momentos flectores sem significado. Justifica-se mais à frente esta afirmação, com a análise de esforços e a comparação com os valores referência.

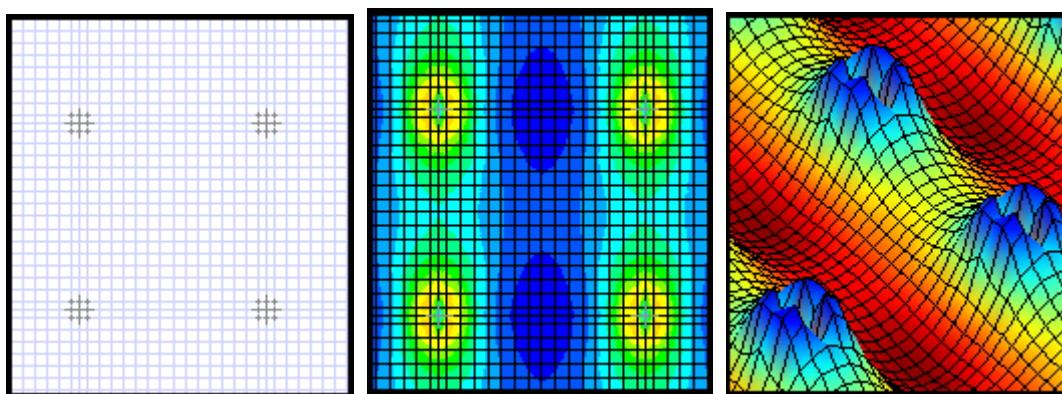


Figura 5.5 - Malha 2×2 com apoio no nó central e movimento corpo rígido – caso B. Diagrama de momentos.

Foi estudada uma outra possibilidade, caso C, na qual foram utilizados elementos sólidos (3D) na área correspondente ao pilar, conferindo de uma forma mais adequada a verdadeira rigidez da ligação laje-pilar. A zona do pilar é modelada com a adição de elementos extrudidos definidos a partir dos elementos de casca.

Estes elementos são de fácil obtenção tirando proveito das capacidades do programa SAP2000 e a ligação com os elementos finitos adjacentes da laje resulta de forma directa. Refira-se que este tipo de elemento é utilizado no programa SAFE [26] de análise de lajes associado ao SAP2000.

No caso de pilares rectangulares é suficiente estabelecer uma malha em que se faça coincidir elementos finitos com a secção do pilar. No caso de pilares circulares, é necessário adoptar uma simplificação aceitável na modelação dos pilares que se apresenta no capítulo seguinte e é utilizada na metodologia definida nas aplicações de cálculo desenvolvidas no âmbito deste trabalho.

Com o programa SAP2000 esta tarefa realiza-se modelando normalmente a laje, dividindo a área do pilar numa malha de 2×2 elementos e usando, depois, a capacidade de extrudir objectos, a partir do elemento de laje ou de casca, conseguindo-se desta forma incorporar elementos sólidos. Refira-se que estes elementos sólidos assim obtidos, compatibilizam os graus de liberdade dos elementos finitos vizinhos e vêm introduzir uma rigidez adicional distribuída nesta zona, compatível com a rigidez do pilar.

Como se pode ver na Figura 5.6, na qual se apresentam os resultados obtidos com esta estratégia verifica-se o mesmo problema que no caso em que se aplica movimento de corpo rígido aos nós da área do pilar, os momentos flectores decrescem à medida que se caminha da face do pilar para o seu interior. Importa referir que esta questão resulta do modo como o programa SAP2000 proporciona a obtenção dos referidos elementos sólidos. Os elementos sólidos obtêm-se a partir dos elementos de casca, mas os elementos de casca não são eliminados, ficando sujeitos a menores momentos. De facto, com esta estratégia o valor do momento flector do elemento de casca não traduz um valor efectivo. Foi possível constatar que os valores dos momentos obtidos nas faces dos pilares reproduzem bem a distribuição de momentos nesta zona. Este aspecto será ainda objecto de análise nas secções seguintes deste trabalho.

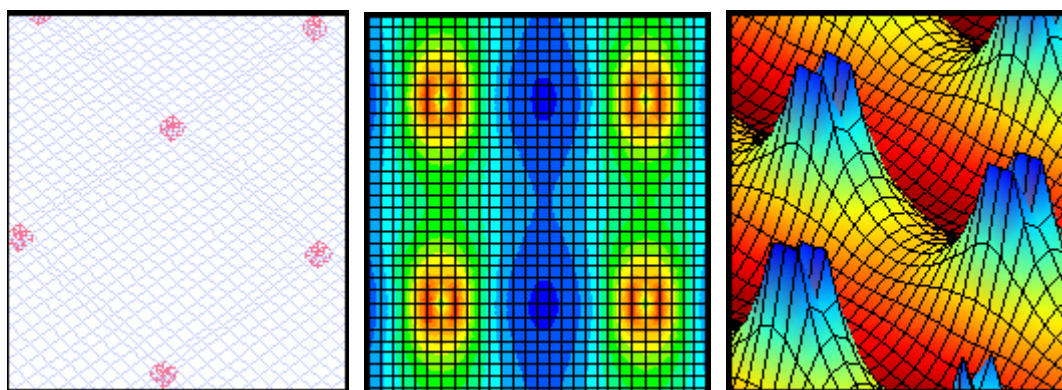


Figura 5.6 - Malha 2×2 com elementos sólidos na área do pilar - caso C. Diagrama de momentos.

Foi ainda testada uma outra alternativa, caso D, na qual se faz a modelação da área do pilar com apenas um elemento sólido, já que com este tipo de modelação deixa de ter interesse o nó central da área do pilar. Esta alternativa tem a vantagem de reduzir o esforço de cálculo pela simplicidade da malha de elementos utilizada.

Com esta estratégia pode verificar-se através dos resultado apresentado na Figura 5.7 o mesmo problema referido no caso anterior, ou seja, os valores de momento no interior do pilar não têm significado resultando da representação gráfica e do modo de modelação. Verifica-se que os valores dos momentos registados nas faces do pilar são próximos dos obtidos no caso C.

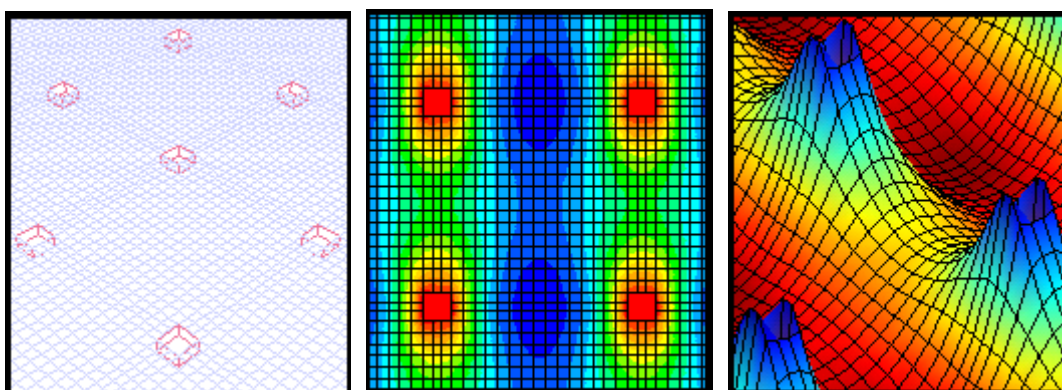


Figura 5.7 - Um elemento sólido na área do pilar – caso D. Diagrama de momentos.

Para avaliar até que ponto cada procedimento destes aqui apresentados é melhor, ou mais vantajoso em termos de resultados, é feita a análise de várias situações ao mesmo tempo onde se analisam a influência do refinamento das malhas e a influência de outros factores tais como a espessura, o vão da laje e a dimensão do pilar.

5.4. ANÁLISE DO REFINAMENTO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Com a capacidade de geração de malhas disponível nos programas de cálculo por elementos finitos, é fácil encontrar a forma mais adequada e rápida para a modelação de lajes. Relativamente ao programa SAP2000, nas versões mais recentes está implementado um motor de geração de malhas com bastantes capacidades. No desenvolvimento deste trabalho tentou tirar-se proveito destas capacidades, para se poder obter maior rapidez de modelação e de cálculo.

Procedeu-se ao estudo de alguns exemplos com o intuito de se avaliar com maior detalhe as diferentes formas de modelação da zona do apoio. Neste estudo procurou utilizar-se um exemplo no qual se dispõe de uma solução analítica que permite confrontar resultados. Assim foi definida uma situação que se aproxime do caso referido no sub-capítulo 5.2, ou seja, um painel quadrado interior de uma laje “infinita” com apoios realizados por pilares quadrados.

No exemplo fez-se a modelação de uma laje com sete vãos em cada direcção para se atenuar os efeitos das condições dos painéis extremos nos resultados.

O exemplo apresenta as seguintes características:

- 7 vãos de 7.5 m nas duas direcções;
- pilares com secção $0.60 \times 0.60 \text{ m}^2$;
- betão C25 / 30, $E = 31 \text{ GPa}$;
- espessura 0.30 m;
- carga uniformemente distribuída de $50 \text{ kN} / \text{m}^2$.

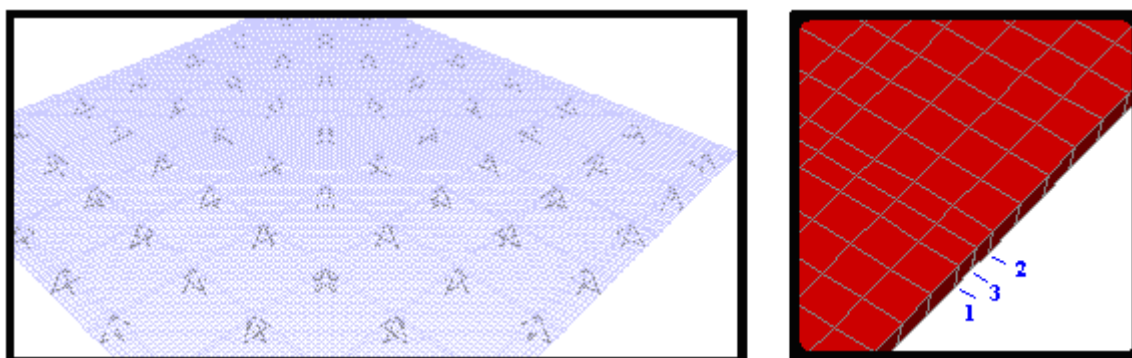


Figura 5.8 - Representação da laje fungiforme infinita – Malha aconselhável.

Na modelação de lajes com o programa SAP2000, deve definir-se uma grelha de apoio, que nos dá todos os pontos de que necessitamos para criar o modelo. Desta forma criam-se alinhamentos que passam nas faces do pilar e um terceiro alinhamento que passa no eixo do pilar. Este procedimento

facilita a geração de malhas de elementos finitos garantindo-se ao mesmo tempo a coincidência da malha com os lados da secção do pilar.

Procedeu-se a um primeiro estudo, no qual se procurou definir o refinamento da malha mais adequado à análise de lajes fungiformes. Foram analisadas as quatro situações representadas na Figura 5.9 correspondentes a malha com a dimensão máxima dos elementos de 0.5m, 1.0m, 1.5m e 2.0m.

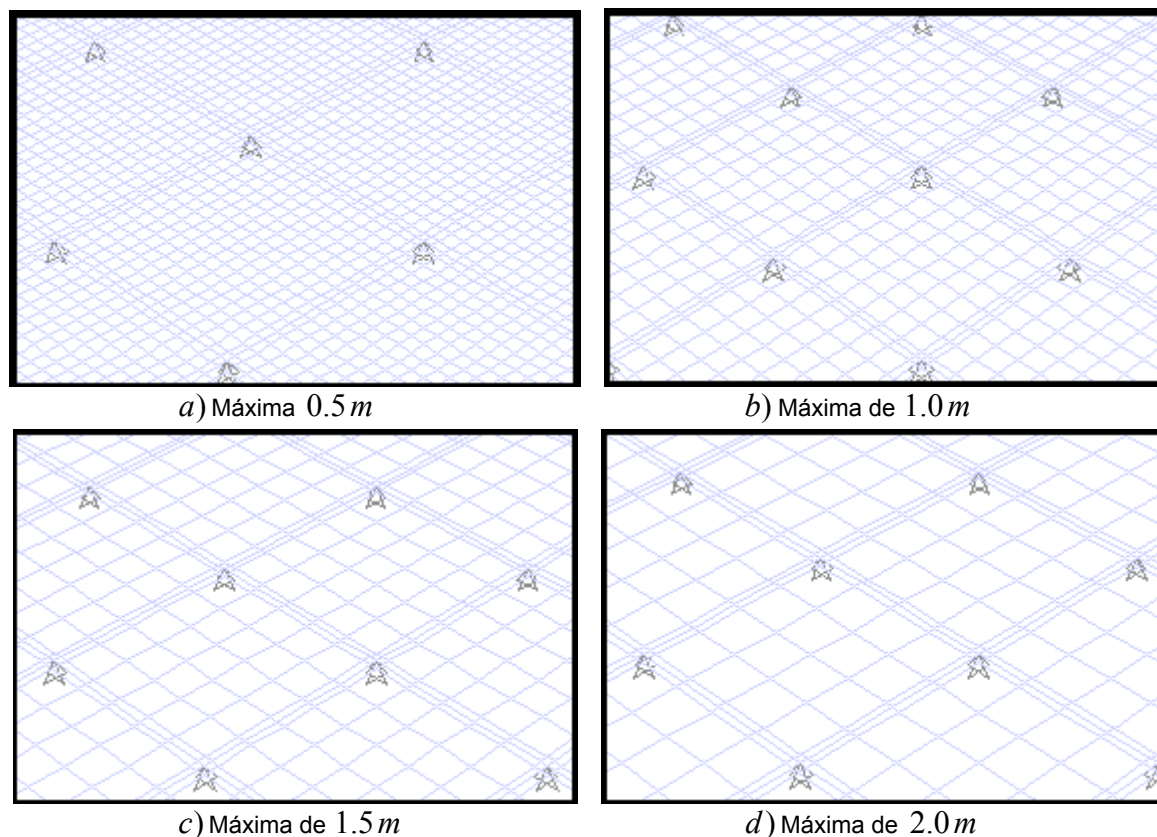


Figura 5.9 - Dimensões máximas da malha de elementos finitos.

Apresenta-se na Figura 5.10 os pontos em que são avaliados os deslocamentos e os momentos flectores, correspondendo o ponto *s* ao centro do painel, o ponto 1 e 2 aos pontos médios da faixa sobre os pilares (vão entre pilares) e o ponto 3 ao eixo do pilar.

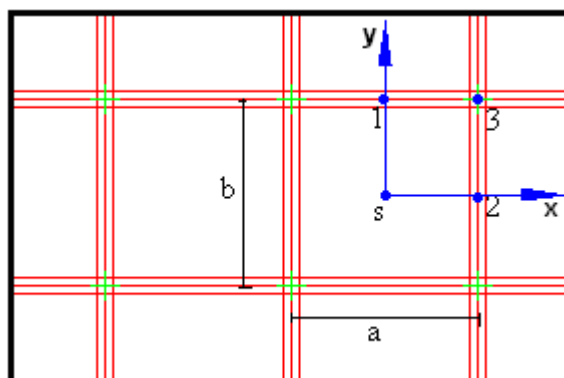


Figura 5.10 - Representação da localização dos pontos e sua referência.

Os resultados apresentados em todo o estudo seguem a seguinte nomenclatura.

δ_s , δ_1 e δ_2 - deslocamento vertical dos pontos s, 1 e 2

M_{xs} , M_{x1} , M_{x2} e M_{x3} - Momento flector correspondente à armadura na direcção x nos pontos s, 1, 2 e 3, respectivamente.

M_{ys} , M_{y1} , M_{y2} e M_{y3} - Momento flector correspondente à armadura na direcção y nos pontos s, 1, 2 e 3, respectivamente.

$M_{x,face}$ - Momento flector M_x obtido na face do pilar.

$M_{y,face}$ - Momento flector M_y obtido na face do pilar.

Procedeu-se à análise da laje com modelos correspondentes às estratégias de modelação referidas anteriormente, ou seja, correspondentes aos casos A, B, C e D. Nesta análise foram adoptadas malhas com 4 graus de refinamento fazendo-se variar a dimensão máxima dos elementos entre 0.5m e 2.0m. Os resultados obtidos, expressos pelos deslocamentos e momentos flectores nos pontos de referência, são apresentados do Quadro 5.5 ao Quadro 5.8.

Atendendo à simetria da laje são apresentados unicamente os deslocamentos no ponto central do painel (ponto s) e no ponto médio do alinhamento dos pilares na direcção x (ponto 1).

Relativamente aos momentos apresentam-se para os pontos s e 3 os momentos segundo x e para o ponto 1 os momentos segundo as duas direcções.

Quadro 5.5 – Deslocamentos com diferentes malhas – Caso A e Caso B.

	Caso A - Apoio				Caso B - Apoio e corpo rígido			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
δ_s [m]	0.01277	0.01270	0.01330	0.01340	0.00890	0.00920	0.00970	0.01003
δ_I [m]	0.01004	0.00950	0.01020	0.01040	0.00640	0.00650	0.00700	0.00750

Quadro 5.6 - Momentos flectores com diferentes malhas – Caso A e Caso B.

	Caso A - Apoio				Caso B - Apoio e corpo rígido			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
M_{xs} [kN.m/m]	82.11	80.28	84.18	89.76	74.26	77.79	80.40	87.20
M_{x1} [kN.m/m]	184.41	157.27	150.93	146.70	143.68	138.68	138.89	132.67
M_{y1} [kN.m/m]	-44.69	-49.63	-47.31	-51.88	-63.75	-44.31	-39.74	-44.62
M_{x3} [kN.m/m]	-842.70	-878.82	-914.73	-916.10	-	-	-	-
$M_{x,face}$	-344.86	-418.32	-413.65	-447.25	-154.83	-191.60	-232.07	-287.04

Quadro 5.7 – Deslocamentos com diferentes malhas – Caso C e Caso D.

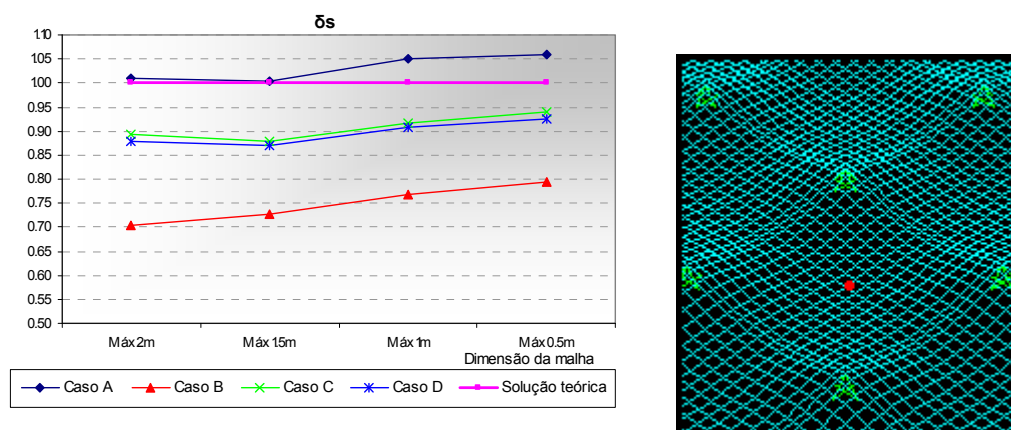
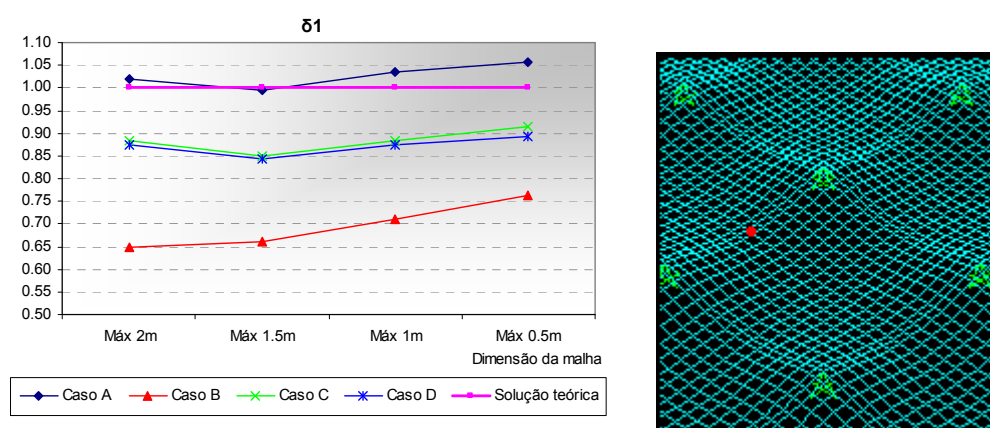
	Caso C – 4 elementos sólidos				Caso D – 1 elemento sólido			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
δ_s [m]	0.01130	0.01110	0.01160	0.01190	0.01110	0.01100	0.01150	0.01170
δ_I [m]	0.00870	0.00836	0.00870	0.00901	0.00860	0.00830	0.00860	0.00880

Quadro 5.8 – Momentos flectores com diferentes malhas – Caso C e Caso D.

	Caso C – 4 elementos sólidos				Caso D - 1 elemento sólido			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
M_{xs} [kN.m/m]	84.14	80.90	84.40	89.10	83.63	80.79	84.40	90.12
M_{xl} [kN.m/m]	183.71	156.58	142.22	144.17	172.87	147.03	144.81	138.58
M_{yl} [kN.m/m]	-39.25	-43.18	-46.61	-48.22	-42.35	-45.76	-48.31	-47.73
$M_{x,face}$	-366.81	-396.99	-435.61	-476.76	-331.30	-361.80	-401.25	-422.82

A comparação gráfica dos resultados, ajuda a compreender a influência do tipo de modelação e a influência do refinamento da malha. Chama-se a atenção, que a comparação apresentada nos gráficos seguintes reflecte a razão entre os valores obtidos numericamente com o valor de referência obtido analiticamente de acordo com o sub-capítulo 5.2.

Na Figura 5.11 e Figura 5.12, comparam-se os deslocamentos obtidos no centro do painel (ponto s) e no ponto médio do alinhamento entre pilares (ponto 1).

Figura 5.11 - Comparação de valores dos deslocamentos δs , com valor teórico.Figura 5.12 - Comparação de valores dos deslocamentos $\delta 1$, com valor teórico.

Pela análise da Figura 5.11 e Figura 5.12, observa-se que as soluções obtidas tendem em geral a convergir com o refinamento da malha para os vários casos analisados. Verifica-se que as soluções obtidas no caso B (apoio e corpo rígido) apresentam maiores erros por defeito (cerca de 25% com a malha mais fina). Obtiveram-se resultados praticamente coincidentes com os casos C e D correspondente à utilização de elementos sólidos (4 e 1 elementos respectivamente). Com a modelação correspondente ao caso A obtiveram-se, com as malhas mais finas, melhores soluções do que com os casos C e D, o que pode estar associado ao facto de estarmos a tomar o valor de referência da solução analítica obtida com a consideração de apoios pontuais, portanto em condições mais próximas às consideradas no caso A.

Passemos à análise dos momentos flectores obtidos, com o objectivo de se estabelecerem critérios para o desenvolvimento e utilização do método dos elementos finitos na modelação de lajes fungiformes. Especial atenção será dada aos momentos negativos na zona dos apoios.

Apresenta-se na Figura 5.13 a comparação dos momentos flectores M_{xs} (momento positivo no centro do painel) e na Figura 5.14 a comparação dos momentos M_{x1} e M_{y1} , momento positivo e momento negativo na zona do vão no alinhamento dos pilares, respectivamente.

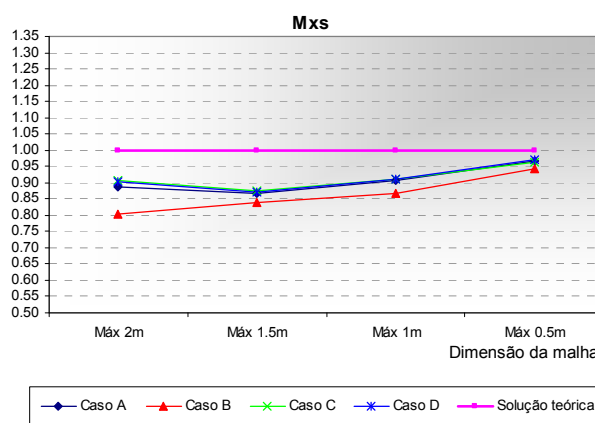


Figura 5.13 - Comparação de valores do momento flector no centro do pilar M_{xs} .

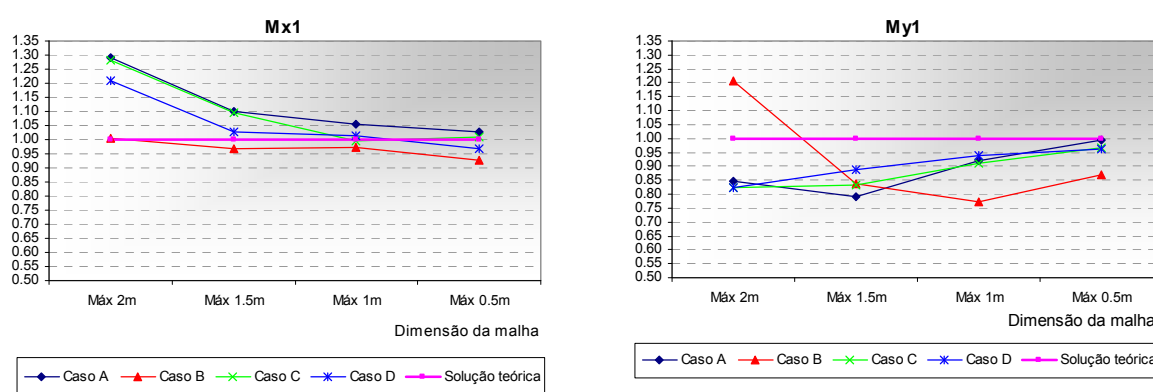


Figura 5.14 - Comparação de valores dos momentos flectores M_{x1} e M_{y1} .

Como se pode observar da Figura 5.13, obtiveram-se valores muito próximos nos quatro casos A, B, C e D analisados, do momento flector positivo no centro do painel. Verifica-se também que o

refinamento da malha conduz a melhores soluções obtendo-se com os casos A, C e D desvios inferiores a 5% relativamente à solução analítica.

Relativamente ao momento positivo no vão no alinhamento dos pilares, $Mx1$, obtiveram-se também valores próximos com os casos A, C e D para as malhas mais refinadas (desvios inferiores a 5%). No entanto, para este momento a sensibilidade à malha é maior como se constata pelo desvio de 30% obtidos nos casos C e D para a malha mais esparsa.

Relativamente aos momentos positivos, pode concluir-se que são quase insensíveis à estratégia de modelação utilizada e são pouco influenciadas se forem adoptadas malhas com dimensão máxima dos elementos finitos de 1.5m. Na Figura 5.14, pode também observar-se que o momento negativo nesta zona, $My1$, obtido com a estratégia de modelação correspondente ao caso B apresenta maiores desvios do que nos outros casos. Para os casos A, C e D nota-se uma maior influência em relação ao refinamento das malhas relativamente aos momentos positivos, observando-se no entanto que se obtém bons resultados com malha mais fina (desvios inferiores a 5%).

Passando a analisar os valores que são alvo de mais incertezas, ou seja, os momentos flectores sobre o apoio, mostra-se na Figura 5.15a) a comparação dos momentos flectores obtidos no eixo do pilar (caso A) com a solução analítica.

Comparam-se ainda na Figura 5.15b) os momentos flectores obtidos com os 4 casos na face do pilar. Estes valores são comparados com o momento flector obtido analiticamente no eixo pilar de acordo com o apresentado no sub-capítulo 5.2. Refere-se ainda que este momento, embora avaliado no eixo do pilar, foi calculado tendo em consideração as dimensões da secção transversal do pilar reflectindo de certa forma o efeito das dimensões do apoio no valor do momento.

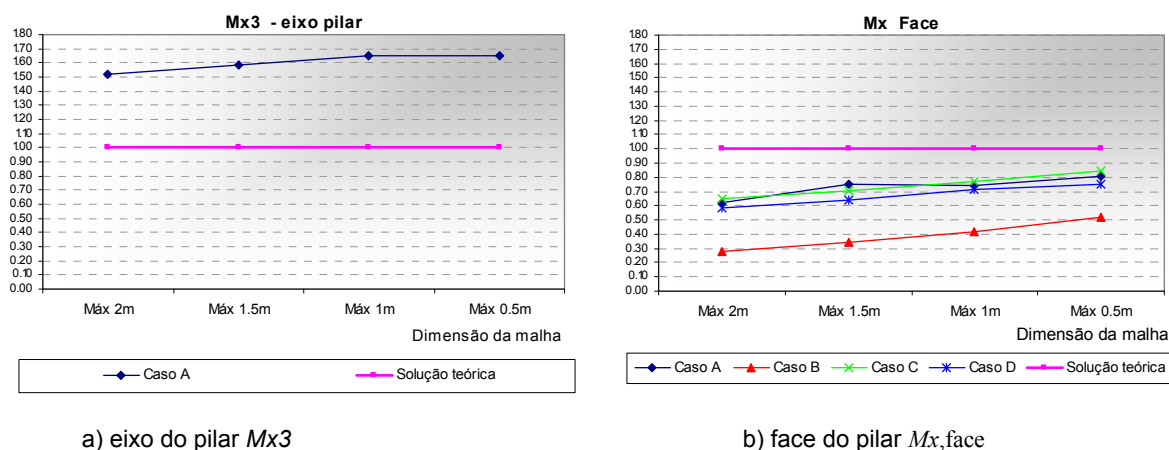


Figura 5.15 - Comparação de valores dos momentos flectores.

A modelação da área do pilar por elementos sólidos, casos C e D revela ser um procedimento adequado para a obtenção dos momentos flectores sobre o pilar, mas terão de ser usados os valores obtidos nas faces do mesmo. Aqui verifica-se que a modelação com apenas um elemento sólido conduz a valores com mais desvios do que com a modelação com 4 elementos sólidos.

Verifica-se da Figura 5.15a) que os valores obtidos no eixo do pilar para o caso A são cerca de 60% superior ao valor obtido analiticamente. Isto reflecte como foi referido anteriormente, que com esta estratégia de modelação não é adequado considerar no dimensionamento o valor obtido neste ponto.

Considerando aceitáveis para dimensionamento os valores obtidos nas faces dos pilares, podemos verificar na Figura 5.15b) que com o caso B se obtêm valores significativamente diferentes aos da solução analítica (desvios por defeito de 60%). Por outro lado obtêm-se com as estratégias correspondentes aos casos A, C e D valores muito idênticos que apresentam desvios de cerca de 20% relativamente à solução analítica. Convém referir, que este valor da solução analítica, pelas condições em que foi obtido, não traduz efectivamente um valor de referência podendo aceitar-se que constitui uma aproximação por excesso.

5.5. ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE ESPESSURAS

Na tentativa de avaliar se as conclusões de modelação da zona do pilar se mantém para a laje com diferentes rigidez, procedeu-se à comparação dos deslocamentos δ_s e δ_l obtidos com cada um dos casos analisados para várias espessuras de laje.

Nos quadros (Quadro 5.9 a Quadro 5.14) apresentam-se os valores dos deslocamentos obtidos para lajes com espessura entre os 0.20m e 0.32m.

Quadro 5.9 – Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 20cm e 22cm.

	δ_s [m]							
	e = 20cm				e = 22cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.04194	0.04171	0.04358	0.04404	0.03166	0.03149	0.03290	0.03323
Caso B	0.02948	0.03030	0.03210	0.03370	0.02220	0.02290	0.02420	0.02539
Caso C	0.03603	0.03558	0.03724	0.03864	0.02739	0.02708	0.02830	0.02930
Caso D	0.03650	0.03610	0.03790	0.03870	0.02760	0.02730	0.02860	0.02910

Quadro 5.10 – Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 24cm e 26cm.

	δ_s [m]							
	e = 24cm				e = 26cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.02451	0.02439	0.02422	0.02572	0.01938	0.01930	0.01917	0.02033
Caso B	0.01719	0.01770	0.01870	0.01961	0.01358	0.01399	0.01480	0.01548
Caso C	0.02133	0.02110	0.02204	0.02284	0.01695	0.01678	0.01751	0.01814
Caso D	0.02132	0.02100	0.02210	0.02230	0.01685	0.01670	0.01750	0.01760

Quadro 5.11 – Deslocamentos, δ_s , para várias malhas, com espessura 28cm e 32cm.

	δ_s [m]							
	e = 28cm				e = 32cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.01561	0.01554	0.01545	0.01637	0.01059	0.01055	0.01049	0.01136
Caso B	0.01092	0.01125	0.01190	0.01240	0.00739	0.00761	0.00802	0.00840
Caso C	0.01371	0.01358	0.01416	0.01466	0.00936	0.00929	0.00966	0.01000
Caso D	0.01357	0.01350	0.01410	0.01434	0.00920	0.00910	0.00950	0.00970

Quadro 5.12 – Deslocamentos, δI , para várias malhas, com espessura 20cm e 22cm.

	δI [m]							
	e = 20cm				e = 22cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.03242	0.03142	0.03303	0.03407	0.02455	0.02380	0.02408	0.02584
Caso B	0.02072	0.02110	0.02270	0.02390	0.01569	0.01596	0.01720	0.01801
Caso C	0.02715	0.02601	0.02746	0.02842	0.02076	0.01991	0.02096	0.02164
Caso D	0.02780	0.02670	0.02820	0.02890	0.02100	0.02020	0.02130	0.02170

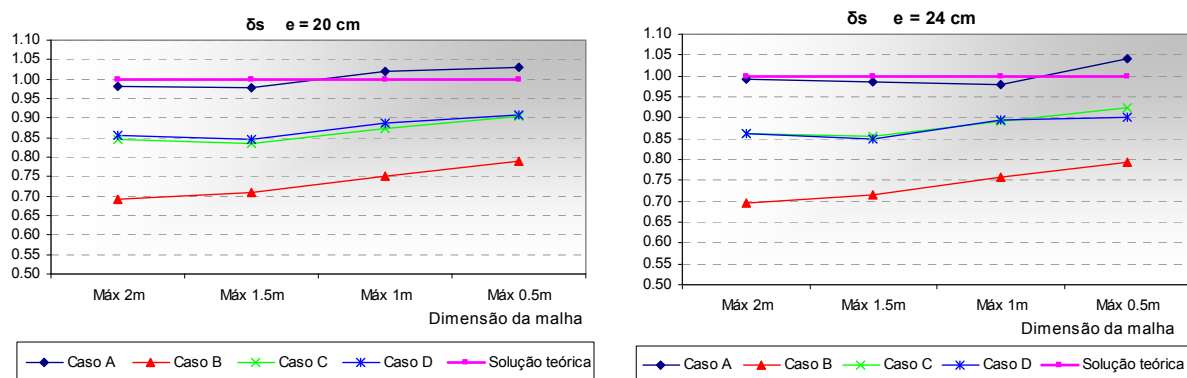
Quadro 5.13 - Deslocamentos, δI , para várias malhas, com espessura 24cm e 26cm.

	δI [m]							
	e = 24cm				e = 26cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.01907	0.01850	0.01870	0.01985	0.01513	0.01468	0.01482	0.01525
Caso B	0.01219	0.01239	0.01330	0.01393	0.00967	0.00983	0.01050	0.01100
Caso C	0.01625	0.01560	0.01638	0.01689	0.01298	0.01246	0.01306	0.01344
Caso D	0.01631	0.01561	0.01650	0.01680	0.01293	0.01240	0.01310	0.01331

Quadro 5.14 - Deslocamentos, δI , para várias malhas, com espessura 28cm e 32cm.

	δI [m]							
	e = 28cm				e = 32cm			
	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m	Máx 2m	Máx 1.5m	Máx 1m	Máx 0.5m
Caso A	0.01223	0.01186	0.01197	0.01270	0.00835	0.00810	0.00816	0.00865
Caso B	0.00781	0.00793	0.00847	0.00885	0.00533	0.00540	0.00574	0.00598
Caso C	0.01054	0.01013	0.01059	0.01089	0.00726	0.00698	0.00727	0.00746
Caso D	0.01045	0.01005	0.01060	0.01040	0.00713	0.00686	0.00718	0.00730

Apresentam-se na Figura 5.16 e Figura 5.17 a comparação dos deslocamentos δs obtidos no centro do painel com 4 casos e para as espessuras de 20, 24, 28 e 32cm.

Figura 5.16 - Comparação de valores de deslocamentos δs , para espessuras 0.20m e 0.24m.

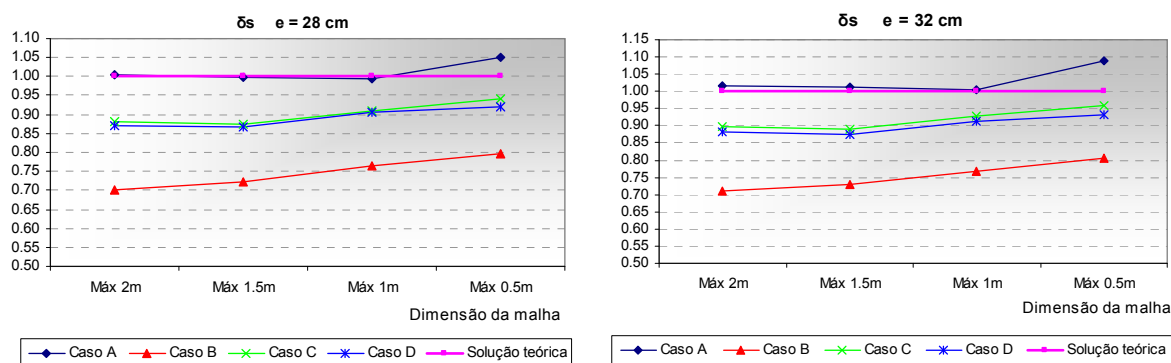


Figura 5.17 - Comparação de valores de deslocamentos δ_s , para espessuras 0.28m e 0.32m.

Pode observar-se destas figuras que aumentando a espessura da laje, há uma ligeira variação entre os valores analíticos e os valores obtidos pelo método dos elementos finitos. Confirma-se que os desvios encontrados para os diferentes casos, mantêm a mesma ordem de grandeza, sendo os resultados encontrados para o caso B, os resultados mais desfavoráveis, como se tinha verificado antes.

De forma análoga apresenta-se na Figura 5.18 a comparação do deslocamento δ_l no ponto médio entre os alinhamentos dos pilares, obtidos para as espessuras de 20 e 32cm, ou seja, para os valores extremos analisados.

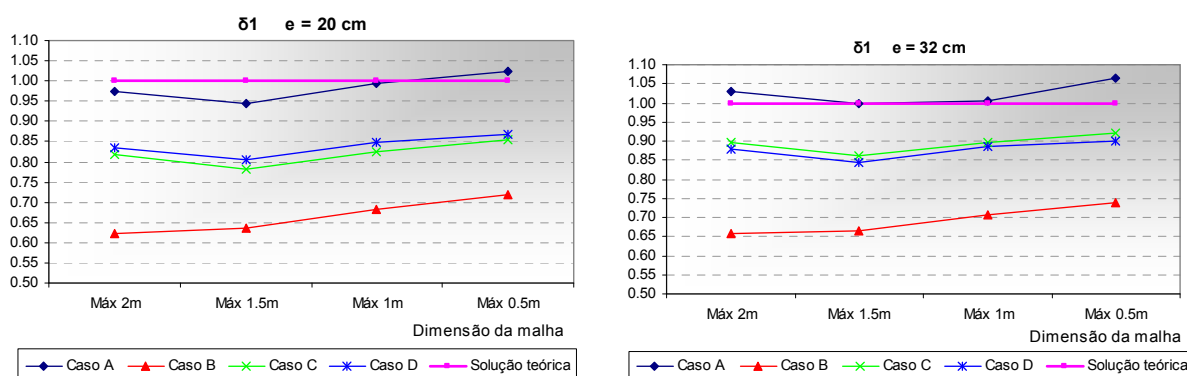


Figura 5.18 - Comparação de valores de deslocamentos δ_l , para espessuras de laje 0.20m e 0.32m.

Mais uma vez se verifica que a variação da espessura da laje tem alguma influência nos deslocamentos. Nos casos C e D em que o apoio é modelado com elementos sólidos, os valores são muito próximos entre si, sendo a modelação com apenas um elemento sólido mais adequada para espessuras pequenas e a modelação com vários elementos sólidos, para espessuras superiores.

Repara-se que para malhas mais refinadas, no caso A, aumenta a diferença entre os valores obtidos e os valores analíticos, à medida que se aumenta a espessura da laje. Para espessuras de laje superiores a 30cm a discrepância de valores passa a ser superior a 5%. Nos restantes casos este aumento não se verifica, até pelo contrário, há uma diminuição do erro, à medida que se aumenta a espessura.

A análise do conjunto de resultados obtidos permite concluir que com a modelação da área do pilar com 4 e 1 elementos sólidos, casos C e D, conduzem em geral a resultados muito próximos, pelo que

as conclusões retiradas com base nos resultados de um dos casos mantêm-se válidas no outro. Assim, nas análises seguintes, só é considerado o caso C atendendo a que, apesar das pequenas diferenças entre eles, este caso conduz ainda a melhores resultados que no caso D.

5.6. ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DAS DIMENSÕES DA SECÇÃO DO PILAR

A comparação dos valores dos momentos flectores obtidos no eixo e face do pilar têm como objectivo avaliar até que ponto é possível, usar em projecto os valores de momentos flectores registados na face do pilar. Mas é claro que este procedimento poderá não ser apropriada para todas as dimensões de pilares e por isso, faz-se também uma análise da influência da dimensão do pilar nos resultados obtidos.

Os resultados obtidos anteriormente permitem considerar que as malhas com dimensões máximas de 0.5 m são apropriadas. Assim as análises efectuadas com variação de vãos e com variação da secção do pilar, são feitas com malhas obedecendo a este critério.

Apresentam-se nos quadros que se seguem, Quadro 5.15 a Quadro 5.18, os valores obtidos dos deslocamentos e dos momentos flectores obtidos para os casos A, B e C considerando a variação da secção dos pilares.

Quadro 5.15 - Deslocamentos para várias dimensões de pilares - Caso A e caso B.

	Caso A - Apoio				Caso B - Apoio e corpo rígido			
	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²
δ_s [m]	0.01348	0.01338	0.01293	0.01298	0.01225	0.01118	0.00911	0.00806
δ_l [m]	0.01045	0.01046	0.01005	0.00998	0.00917	0.00817	0.00629	0.00536

Quadro 5.16 - Deslocamentos para várias dimensões de pilares - Caso C.

	Caso C – 4 elementos sólidos			
	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²
δ_s [m]	0.01403	0.01277	0.01102	0.01003
δ_l [m]	0.01080	0.00962	0.00821	0.00710

Quadro 5.17 - Momentos flectores para várias dimensões de pilares - Caso A e caso B.

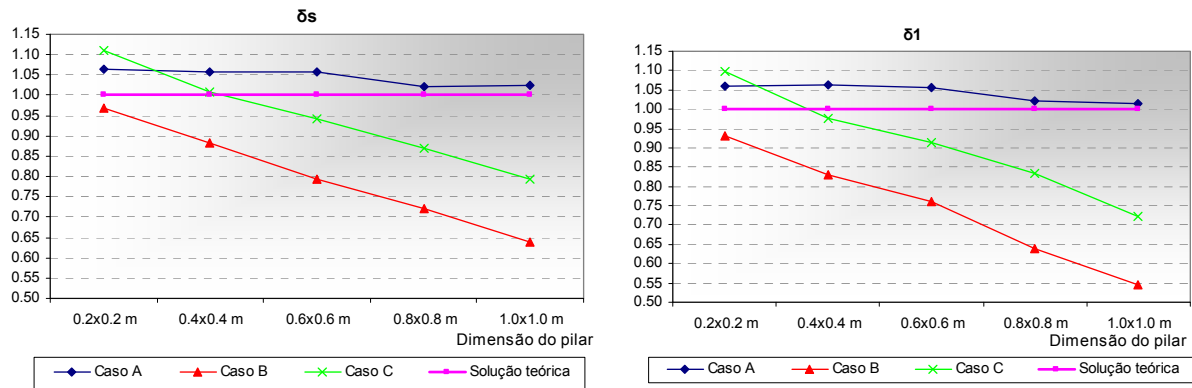
	Caso A - Apoio				Caso B - Apoio e corpo rígido			
	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²
M_{xs} [kN.m/m]	90.27	89.93	90.15	89.74	90.06	88.33	83.13	79.96
M_{xl} [kN.m/m]	144.75	145.03	146.54	145.19	143.63	138.47	126.75	118.39
M_{yl} [kN.m/m]	-51.50	-50.47	-49.68	-49.17	-47.90	-47.95	-45.44	-44.15
M_{x3} [kN.m/m]	-1151.70	-1051.34	-885.72	-820.43	-	-	-	-
$M_{x,face}$	-929.60	-780.87	-600.89	-550.92	-91.80	-63.57	-74.67	-58.99

Quadro 5.18 - Momentos flectores para várias dimensões de pilares - Caso C.

	Caso C - 4 elementos sólidos			
	0.2x0.2m ²	0.4x0.4m ²	0.8x0.8m ²	1.0x1.0m ²
M_{xs} [kN.m/m]	90.42	90.63	89.00	86.05
M_{xI} [kN.m/m]	145.40	144.63	138.86	133.35
M_{yI} [kN.m/m]	-50.48	-50.19	-47.27	-47.47
M_{x3} [kN.m/m]	-794.86	-559.46	-205.91	-38.53
$M_{x,face}$	-753.06	-553.89	-266.48	-180.74

Comparando graficamente, os resultados obtidos para a variação da secção do pilar, consegue perceber-se como variam os deslocamentos e os momentos flectores, à medida que é aumentada a área do pilar. Chama-se a atenção novamente, que nos gráficos é comparada a variação dos valores obtidos numericamente com o valor obtido analiticamente, nas condições referidas em 5.2.

Apresentam-se na Figura 5.19 as comparações dos deslocamentos δ_s e δ_I .

Figura 5.19 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_s e δ_I , para várias dimensões do pilar.

Os desvios registados para os deslocamentos não apresentam linearidade para todos os casos. Quando se modela a área do pilar com elementos sólidos, caso C, ou com movimento de corpo rígido, caso B, os valores de deslocamentos diminuem em relação à solução teórica, à medida que se aumenta a secção do pilar, apresentando desvios significativos para pilares com 0.8x0.8m² e 1.0x1.0m².

Para o caso A, em que o pilar é modelado simplesmente com a ligação de um apoio ou um elemento de barra (pilar) ao nó central da área, são obtidos melhores resultados. Os deslocamentos, δ_s e δ_I , obtidos a meio vão da laje e no vão entre os pilares aproximam-se da solução teórica à medida que a área de ligação laje-pilar aumenta. No entanto os valores destes deslocamentos não são muito influenciados pela dimensão do pilar (diferença inferior a 5%).

Os valores obtidos para o caso B, revelam mais uma vez desvios significativos fortemente influenciados pela dimensão do pilar (desvios de 35% para o pilar de 1.0x1.0m²).

A comparação dos momentos flectores positivos, M_{xs} e M_{xI} , é apresentada na Figura 5.18. Pode observar-se que os desvios são aproximadamente constantes para os casos A e C. Para o caso A, a variação entre os valores obtidos por elementos finitos e a solução teórica é sempre inferior a 5%, o que revela ser esta uma boa estratégia de modelação.

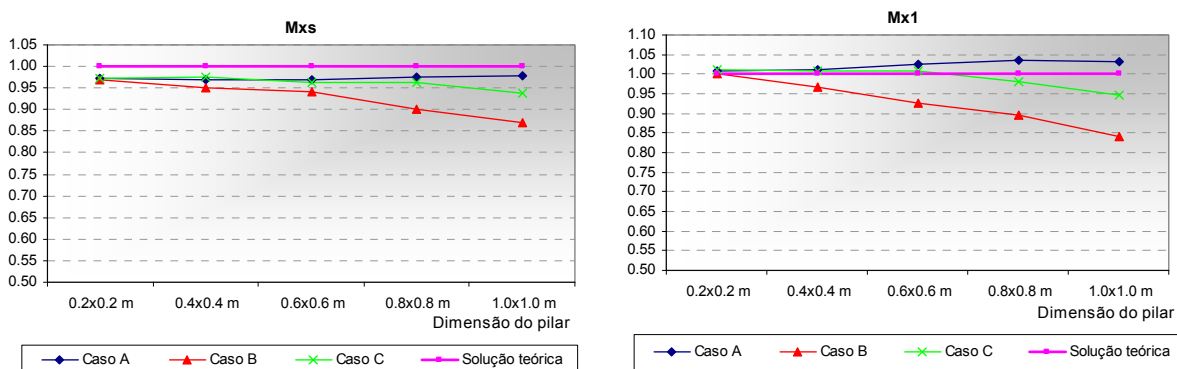


Figura 5.20 - Comparação de valores de momentos M_{xs} e M_{x1} , para várias dimensões do pilar.

Os valores obtidos para o caso B, apenas revelam boa aproximação, quando a secção do pilar é reduzida. À medida que esta secção aumenta, os desvios aumentam significativamente atingindo os 20% para o pilar de maiores dimensões.

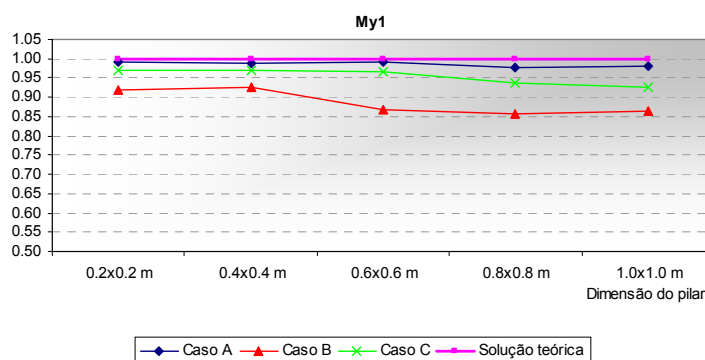


Figura 5.21 - Comparação de valores de momentos M_{y1} , para várias dimensões do pilar.

Os valores dos momentos flectores M_{x1} , momentos negativos no vão entre os pilares, comparados na Figura 5.21 revelam uma pequena influência às alterações da secção do pilar (desvios na ordem dos 3%), no caso A. Para os casos B e C os desvios aumentam com o aumento da secção do pilar sendo notório no caso B.

5.7. INFLUÊNCIA DO VÃO DA LAJE

Para a obtenção dos resultados com a variação de vãos, apenas se efectua a modelação da ligação laje-pilar, por meio de apoio ou pilar, ou seja, caso A. A razão deste procedimento deve-se ao tempo de modelação e de cálculo de cada situação consequente do uso de elementos sólidos na modelação da ligação laje-pilar, que torna os modelos pesados.

A análise da variação dos vãos foi executada, gerando malhas que respeitam as dimensões máximas de malha aconselháveis, que são apresentadas no capítulo 5.11. Apresentam-se na Figura 5.22 como exemplo, as malhas utilizadas para os casos de vãos de $4 \times 7.5 m$ e $10 \times 7.5 m$.

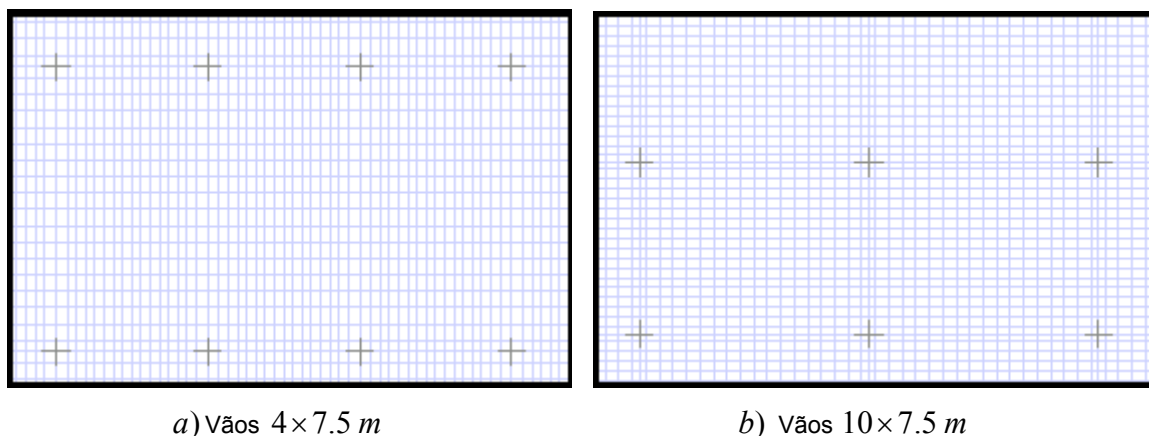


Figura 5.22 - Comparação de dois exemplos de malhas com dimensões máximas aconselháveis.

Este critério revela-se apropriado permitindo obter bons resultados, com dimensões da malha de elementos finitos equilibrada tendo em conta o esforço de cálculo. Os elementos finitos são quase quadrados, o que traz vantagens na precisão dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos, como refere Wilson [33] e Zienkiewicz [34].

Na direcção do vão de 4 m , é usada a dimensão máxima de 0.25 m , para o vão 7.5 m é usada a dimensão máxima da malha de 0.45 m e para o vão de 10 m usa-se a dimensão máxima aconselhável da malha de 0.6 m .

Apresentam-se nos quadros que se seguem (Quadro 5.19 a Quadro 5.22), os resultados obtidos para diferentes vãos, mantendo as restantes características da laje.

Quadro 5.19 - Deslocamentos para vários vãos - Caso A .

	Vãos [m]					
	4 x 7.5	6 x 7.5	8 x 7.5	10 x 7.5	4 x 4	6 x 6
δ_s [m]	0.00704	0.00961	0.01560	0.02796	0.00115	0.00566
δ_l [m]	0.00170	0.00530	0.01270	0.02633	0.00089	0.00418

Quadro 5.20 - Deslocamentos para vários vãos (continuação) - Caso A .

	Vãos [m]					
	8 x 8	10 x 10	4 x 6	6 x 8	6 x 10	8 x 10
δ_s [m]	0.01674	0.04029	0.00336	0.01088	0.02159	0.02817
δ_l [m]	0.01286	0.03027	0.00136	0.00561	0.00701	0.01593

Quadro 5.21 - Momentos flectores para vários vãos - Caso A .

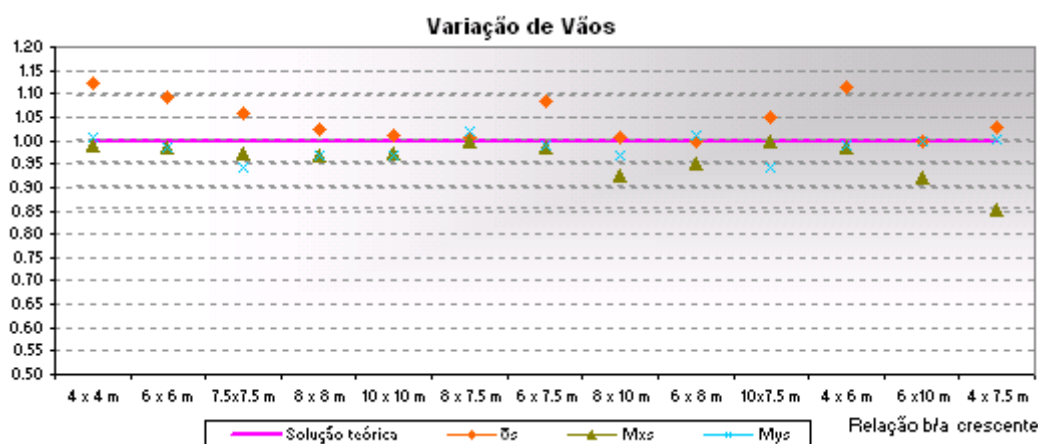
	Vãos					
	4 x 7.5 m	6 x 7.5 m	8 x 7.5 m	10 x 7.5 m	4 x 4 m	6 x 6 m
M_{xs} [kN.m/m]	26.37	53.25	106.27	181.72	26.20	58.58
M_{ys} [kN.m/m]	113.98	102.27	86.32	79.35	26.62	58.58
M_{x1} [kN.m/m]	51.80	105.11	159.14	227.18	41.12	93.54
M_{y1} [kN.m/m]	-133.34	-85.35	-39.73	1.06	-13.03	-31.92
M_{x2} [kN.m/m]	19.82	-8.66	-69.61	174.68	-13.41	-31.92
M_{y2} [kN.m/m]	116.61	129.34	150.94	169.47	41.14	93.54
M_{x3} [kN.m/m]	-446.47	-710.45	-1010.74	-1357.49	-227.83	-573.62
M_{y3} [kN.m/m]	-539.03	-744.41	-1011.41	-1259.10	-227.85	-583.26
$M_{x,face}$	-293.90	-503.76	-728.61	-1016.76	-146.13	-400.28
$M_{y,face}$	-259.28	-548.45	-729.20	-920.38	-146.42	-400.27

Quadro 5.22 - Momentos flectores para vários vãos (continuação) - Caso A .

	Vãos					
	8 x 8 m	10 x 10 m	4 x 6 m	6 x 8 m	6 x 10 m	8 x 10 m
M_{xs} [kN.m/m]	102.26	160.20	23.21	51.28	53.28	88.54
M_{ys} [kN.m/m]	102.26	159.76	70.49	117.89	196.74	178.23
M_{x1} [kN.m/m]	164.82	258.92	49.30	108.45	118.50	184.97
M_{y1} [kN.m/m]	-58.19	-90.54	-71.96	-107.79	-218.30	-154.20
M_{x2} [kN.m/m]	-58.38	-90.53	6.78	0.40	28.63	-12.49
M_{y2} [kN.m/m]	164.68	258.52	79.13	144.58	213.04	232.91
M_{x3} [kN.m/m]	-1109.98	-1836.75	-374.63	-780.68	-985.65	-1390.02
M_{y3} [kN.m/m]	-1110.21	-1836.85	-419.78	-815.75	-1102.96	-1469.30
$M_{x,face}$	-773.80	-1344.25	-221.71	-540.42	-669.69	-1001.10
$M_{y,face}$	-795.23	-1350.17	-245.24	-602.37	-836.61	-1080.66

Dos valores apresentados nos quadros anteriores, apenas é possível comparar deslocamentos e momentos flectores a meio vão da laje, com soluções analíticas que não dependem de aproximações.

Na Figura 5.23 estão apresentadas as relações dos deslocamentos δ_s e os momentos M_{xs} e M_{ys} com os respectivos valores obtidos analiticamente para várias relações b/a consideradas.

Figura 5.23 - Comparação de valores de deslocamentos δ_s e momentos M_{xs} e M_{ys} com a solução teórica .

Com a variação de vãos considerada, os valores obtidos para o meio vão da laje, têm erros máximos de 15%. Para relações de vãos superiores a dois, o comportamento da laje passa a ser principalmente numa direcção, daí não ter alargado o estudo para tais vãos.

Os valores dos deslocamentos a meio vão, apresentam desvios superiores cerca de 5% a 10%. Para maiores vãos, os deslocamentos obtidos apresentam menores erros, desde que a relação de vãos seja entre 1 a 1.3. Este facto pode-se confirmar com a análise da Figura 5.24 em que se verifica claramente uma diluição do erro, à medida que se aumenta o vão.

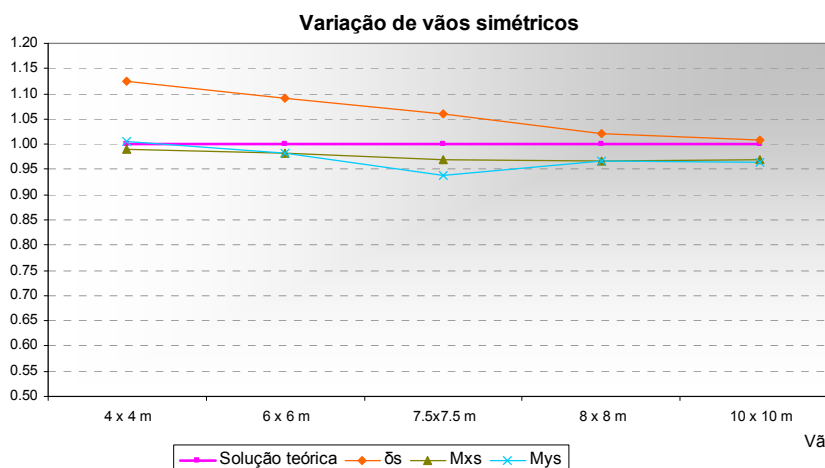


Figura 5.24 - Comparação de valores dos deslocamentos δ_s e dos momentos M_{xs} e M_{ys} com a solução teórica.

5.8. COMENTÁRIOS FINAIS SOBRE AS ESTRATÉGIAS DE MODELAÇÃO ANALISADAS

A análise efectuada permitiu conhecer melhor os resultados obtidos para cada situação estudada.

A análise elástica efectuada por elementos finitos assume o material com um comportamento linear elástico, hipótese que em lajes fungiformes muitas vezes não se verifica, especialmente nas zonas de ligação laje-pilar. Estas zonas são frequentemente susceptíveis de fendilhação levando a um comportamento não linear. Contudo, a análise efectuada teve como principal objectivo encontrar um procedimento adequado para a modelação das zonas de ligação laje-pilar.

Na Figura 5.25 apresentam-se os diagramas de momentos flectores característicos para cada um dos casos estudados.

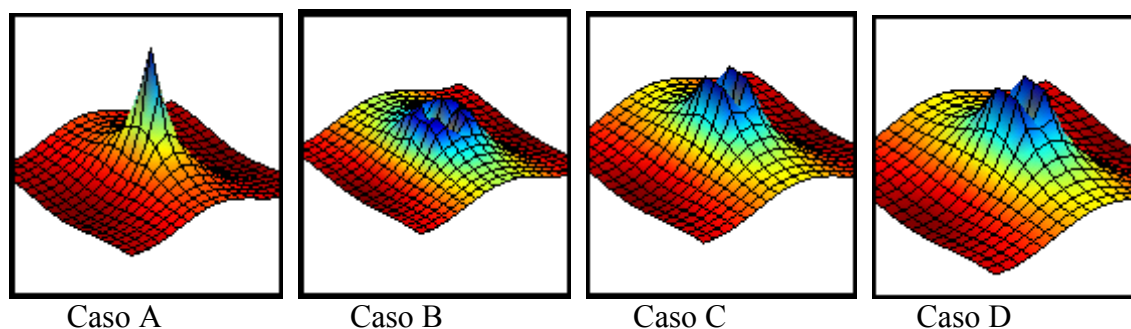


Figura 5.25 - Diagramas de momentos (M_{11}) característicos de cada caso estudado.

O especial interesse prende-se com os picos de momentos flectores, que são obtidos nas zonas de ligação laje-pilar, quando esta é modelada com apoio ou pilar ligado ao nó central da área do pilar (caso A). A modelação da ligação com esta metodologia (caso A), faz com que a conexão da laje com o pilar ocorra numa área infinitesimal, o que não é real, porque a ligação tem alguma área de contacto. Daí o método dos elementos finitos conduzir a picos de momentos flectores nestes pontos, porque todas as forças são transmitidas ao pilar através deste nó de ligação central.

Pode-se também referir, que uma ligação infinitesimal aumenta o vão útil entre os pilares adjacentes, da distância igual à largura do pilar. Isto leva-nos a pensar que os momentos da laje seriam aumentados do vão ao quadrado, principalmente quando a relação da dimensão do pilar com o vão, aumenta, ou seja, vãos pequenos e dimensões de pilares maiores. A sobrestimação dos momentos apenas se verificou para os vãos de 4 e 6m, não se podendo aferir se realmente se deve a variações dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos ou ao indesejado aumento do vão. Também se obtiveram alguns valores superiores aos valores teóricos, para os vãos de 8 e 10m.

Referindo-nos ainda ao caso A, podemos observar que os momentos obtidos na face do pilar, estão bastante próximos dos valores obtidos com a modelação do pilar por elementos sólidos, o que é bastante bom, apesar de haver uma menor rigidez nesta zona. A face do pilar, é flexível de acordo com a rigidez da laje, quando na realidade toda a área do pilar tem uma elevada rigidez comparada com a rigidez da laje.

Na tentativa de modelar a zona do pilar com a rigidez adequada, para que a referida flexibilidade desde o nó central até à face do pilar seja eliminada, estudou-se o caso B, em que na área do pilar é imposto o movimento de corpo rígido aos nós correspondentes à área do pilar. Eram de esperar melhores resultados, mas desde logo se verificou que os momentos na área do pilar não continham picos, muito pelo contrário, têm valores bem menores que os valores na face do pilar.

O movimento de corpo rígido nos nós da área do pilar altera o comportamento da laje quer em termos de esforços, quer em termos de deformação. Os valores de deslocamentos e de momentos flectores, revelam-se inadequados e irrealis, quando comparados com a solução teórica e com os das restantes metodologias de modelação.

Outro modo de simular a verdadeira rigidez da ligação laje-pilar consistiu na modelação do pilar por elementos finitos sólidos, casos C e D. Esta metodologia revelou-se bastante adequada na obtenção dos momentos reais na zona da ligação laje-pilar. A melhor aproximação possível, para a modelação da ligação laje-pilar, é o uso de elementos sólidos ligados aos elementos planos, elementos de placa ou de casca.

Alguns exemplos testados de malhas bastante refinadas, e um pilar com apenas um elemento sólido, mostram que o programa de cálculo começa a ter complicações na geração do referido elemento.

Tanto no caso C em que o pilar é modelado por 4 elementos sólidos, como no caso D em que o pilar é modelado com um elemento sólido, os resultados obtidos são bastante próximos entre si.

Os momentos flectores recolhidos na face do pilar, reproduzem adequadamente o comportamento da laje na zona de ligação com o pilar e são considerados como os momentos flectores sobre o pilar. São eliminados os picos de momentos flectores e obtidos valores com ordens de grandeza adequada, conclusão que James Deaton [10] também obteve.

Com várias análises de alguns modelos, verifica-se que não é necessária a modelação total do pilar, com elementos sólidos, caso se esteja a modelar apenas a laje, em separado da restante estrutura. Basta o uso de elementos sólidos com altura próxima de cinco vezes a espessura da laje, que o efeito da rigidez na zona de ligação laje-pilar, já é conseguido.

Esta conclusão está de acordo com o referido no manual do programa “SAFE” [26], que na modelação de lajes para o dimensionamento de armaduras recomenda o uso de elementos extrudidos com uma espessura de 5 vezes a espessura da laje. Comprova-se assim que este procedimento é adequado e até já implementado em programas comerciais de cálculo.

No entanto os elementos finitos sólidos apresentam algumas desvantagens, que tornam esta metodologia não muito utilizável em projecto. O peso computacional de cálculo é a primeira desvantagem, devido à realização de modelos que demoram no mínimo o dobro do tempo de processamento. Num modelo, este tempo dilui-se, mas como em projecto, durante a análise dos resultados e mesmo durante a modelação, efectuam-se várias vezes o cálculo, para confirmar a inexistência de erros ou até posteriormente à sua eliminação, torna-se um acumulado de tempo de cálculo, devido ao peso computacional dos elementos sólidos.

Outra dificuldade é a sua implementação no modelo, que também é mais demorada, apesar das capacidades dos programas estarem bastante desenvolvidas.

Por vezes, estas desvantagens podem ser vencidas e ultrapassadas, para que se possam obter bons resultados, ou seja, é preferível perder mais tempo a modelar e numa fase posterior ter bons resultados, do que ter modelos muito simples e com resultados de menor interesse.

Como se verificou na análise efectuada, os valores dos momentos flectores no caso A, quando lidos na face do pilar, estão muito próximos dos valores obtidos com a modelação do pilar com elementos sólidos.

Tendo em conta todos os aspectos aqui referidos, procurou-se definir uma metodologia que conduza a bons resultados o mais rapidamente possível, sem que os modelos de cálculo sejam pesados e de difícil obtenção. Considera-se os resultados obtidos para momentos flectores na face do pilar como critério de leitura de momentos flectores na zona do pilar. Isto no caso em que se simula o pilar com um elemento de barra ou simplesmente por um apoio no nó central, caso A.

A leitura dos momentos flectores na face do pilar, não é feita de qualquer forma, porque há influência da direcção do momento que se pretende e da face onde se faz a leitura do mesmo.

A Figura 5.26, mostra esquematicamente através de cortes, como deve ser feita a leitura dos momentos flectores em cada direcção, obtendo assim os momentos flectores a considerar nas faces do pilar.

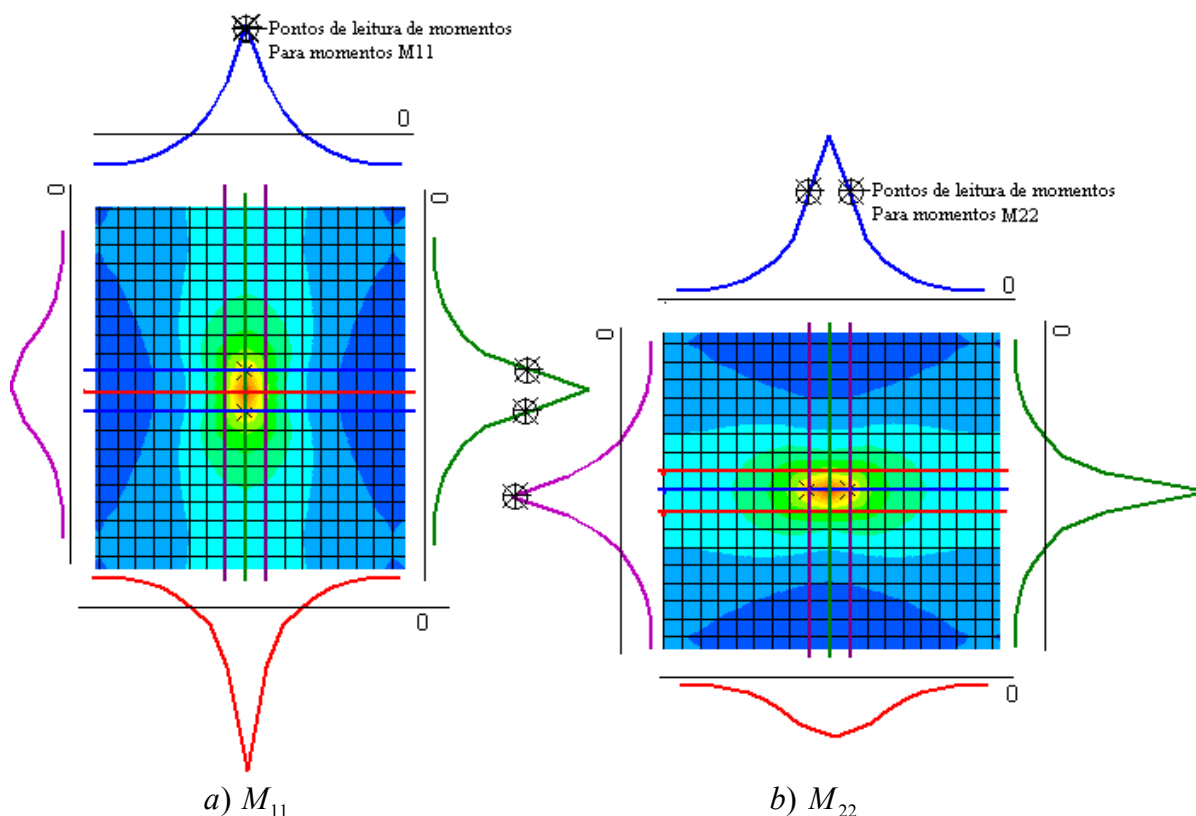


Figura 5.26 - Cortes de diagramas de momentos flectores (M_{11} e M_{22}) e pontos de leitura de momentos flectores na face do pilar em cada direcção.

Este procedimento é adoptado na metodologia de modelação e de cálculo proposta neste trabalho e facilmente aplicado a pilares circulares e pilares cujas faces não sejam paralelas aos eixos.

Para melhor compreender todo o procedimento de modelação e de leitura de esforços, expõe-se a metodologia a usar referindo os aspectos mais importantes.

5.9. METODOLOGIA PARA MODELAÇÃO DE LAJES FUNGIFORMES MACIÇAS

A metodologia adoptada é direccionada para a utilização do programa SAP2000, sendo todos os passos aqui apresentados, referenciados aos comandos deste programa. Pressupõe-se que a fase de pré-dimensionamento e de definição das características da laje já tenha sido ultrapassada.

Apenas a modelação da laje é referida, nesta metodologia, contudo, toda a restante estrutura, pode ser adicionada ao modelo normalmente, sem quaisquer implicações.

1. Análise das coordenadas dos pontos importantes da laje, dos pilares e paredes e de suas faces para a criação da grelha de apoio. A grelha de apoio terá assim alinhamentos a passar em todos os pontos necessários à modelação da laje.

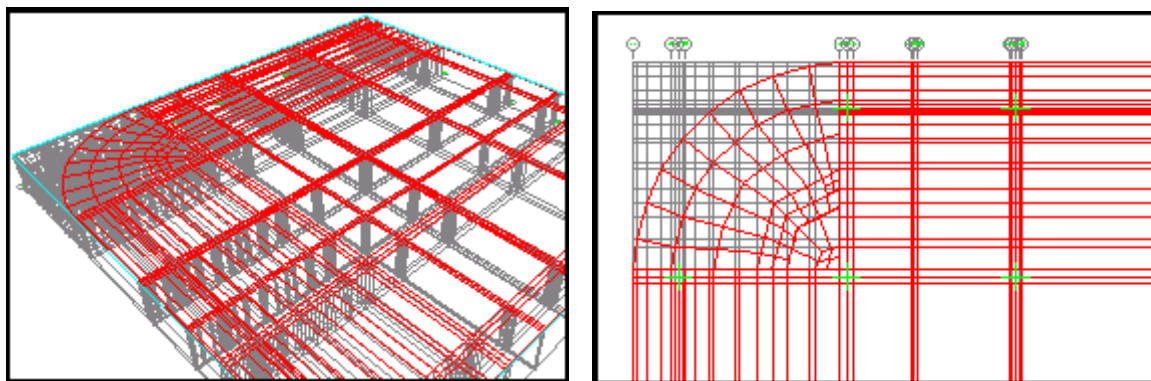


Figura 5.27 - Exemplo de grelha e respectiva laje, com elementos divididos na intersecção com os alinhamentos da grelha.

Este processo, pode ser um pouco moroso, mas deve-se ao modo de introdução dos pontos em SAP2000. Todos os cruzamentos de alinhamentos dão origem a um ponto, que pode ou não interessar para o modelo em causa, ou seja, o mesmo alinhamento cruza todos os alinhamentos perpendiculares, dando origem a pontos.

No caso de pilares circulares deverá passar um alinhamento no centro do pilar e 2 alinhamentos em cada uma das direcções perpendiculares tangentes ao círculo (Figura 5.28).

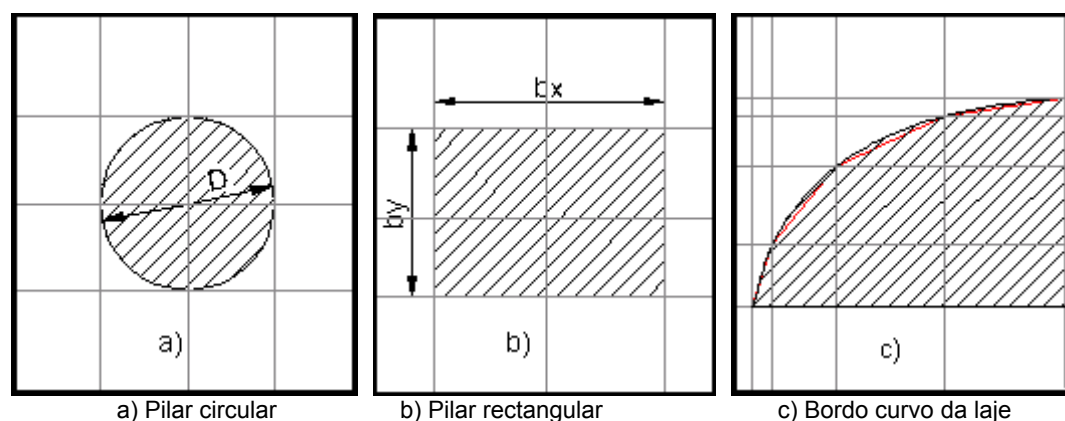


Figura 5.28 - Definição de alinhamentos em pilares e faces curva.

No caso de laje com lados curvos, ou de superfície circular, deve criar-se alinhamentos a passar em pontos estratégicos, de modo a definir a curva. Por exemplo um lado definido por 1/4 de círculo, têm de ser definidos vários pontos, para que unidos os vários pontos dêem a forma circular ao lado. Quantos mais pontos forem definidos sobre o arco, mais bem definido estará esse arco.

2. Definição das características dos materiais, das secções, das acções e correspondentes combinações.

Na definição das secções das lajes deve ter-se especial atenção ao tipo de elemento escolhido e às opções escolhidas na sua definição. Neste programa temos a opção de definir a secção com

vários tipos de elementos, com interesse para lajes fungiformes tem-se “Plate” e “Shell” (ver capítulo 4.2).

Têm-se ainda a opção “Thin” ou “Thick”, em cada tipo de secção. Estas divergem na consideração ou não das deformações por corte, de acordo com a teoria de cálculo que está por trás de cada uma destas opções. Ao escolher a opção “Thick” é usada a formulação de Mindlin/Reisner, que inclui a deformação por corte, e quando se escolhe “Thin” o programa usa a formulação de Kirchhoff, que despreza a deformação por corte. Relativamente a este aspecto, há sempre a possibilidade de considerar a deformação por corte apenas para uma parte da estrutura.

Alguns destes parâmetros, podem ser definidos ao longo de todo o processo, não sendo obrigatório a definição nesta fase inicial. Aliás, por vezes até se aconselha proceder desse modo, para que não sejam adicionados dados ao modelo, que podem posteriormente não ser necessários.

3. Definição de elementos rectangulares, tendo em conta os limites da laje. Ao contrário de outros programas em que a definição dos painéis deve ser feita por vãos entre pilares, neste programa a definição da laje pode ser feita apenas tendo em conta os limites exteriores.

No caso de lados curvos, terão de ser definidos elementos quadriláteros mais pequenos de forma induzir ao programa a malha desejada. No caso destes elementos o refinamento da malha pode ser feito no menu “Edit” em que são criados novos nós e novos pontos, ou no menu “Assign – Área – Automatic Área Mesh” em que é feito o refinamento da malha, e criados novos nós, mas não são criados novos pontos. Esta opção pode ter muito interesse em situações que tem interesse ter maior refinamento sem a criação de novos pontos que tornam o modelo mais pesado. Também tem especial vantagem quando se faz uso da aplicação desenvolvida de pós-processamento de esforços e cálculo de armadura, que é apresentada no capítulo 6.

4. Com o comando “Edit Areas” e seleccionando a opção “Divide Area Based on Points on Area Edges (Intersection of Visible Straight Grid Lines with Area Edges)” divide-se os elementos criados no ponto anterior, em divisões iguais às divisões da grelha, como se pode ver na Figura 5.27. O uso desta funcionalidade do programa evita muito tempo de criação de todos os elementos devidamente divididos na zona do pilar. Repara-se que a área de ligação laje-pilar já está dividida em 4 elementos finitos, como o pretendido.

5. Adiciona-se agora os pilares ligados aos nós centrais da área do pilar, como é desejável, fazendo a interacção com a restante estrutura. Caso existam paredes de suporte, como por exemplo, paredes de uma caixa de elevador, também podem ser modeladas e ligadas à laje, pelos respectivos nós de ligação.

Quando se pretenda usar as aplicações de cálculo desenvolvidas neste trabalho (capítulo 6), em cada nó central do pilar tem que ser alterado o nome do nó, passando a ser o nome previamente estabelecido pelo programa antecipado de “P”. Desta forma a aplicação detecta a existência do pilar, para proceder ao devido tratamento de momentos flectores na zona do pilar, de acordo com o procedimento exposto no capítulo 5.10. Por exemplo o ponto “29”, fica “P29”.

6. A laje está modelada, agora faz-se o refinamento da malha, de acordo com as dimensões máximas aconselháveis. Estas dimensões permitem obter bons resultados e o seu tratamento de modo adequado para projecto. As dimensões da malha permitem fazer uma espécie de nivelamento dos esforços na zona do pilar, tendo em conta os pontos das faces e os pontos vizinhos das faces. Chama-se a atenção que para posterior utilização da aplicação de cálculo a área do pilar tem que estar dividida em 4 elementos. A aplicação de cálculo apenas exige esta condição, para poder funcionar correctamente, toda a restante malha, pode ter as divisões e o refinamento que se achar adequado, desde que obedeça às dimensões máximas aconselháveis.
7. Com a estrutura correctamente modelada passa-se à execução do cálculo da estrutura. Deve-se fazer o cálculo com todos os casos de carga e combinações de acções regulamentares.
8. Exportar os resultados obtidos em SAP2000 para Excel, para posterior leitura de dados por parte da aplicação de cálculo. As tabelas a exportar são: “Area Section Assignments”, “Area Section Properties”, “Element Forces - Area Shells” e “Joint Coordinates”. Este ponto apenas tem interesse quando se pretende usar a aplicação de cálculo de armadura.
9. Analisar os resultados obtidos, aplicando a metodologia de forma correcta, para obter quantidades de armadura e definir as soluções de projecto. De preferência utilizar as aplicações de cálculo desenvolvidas para facilitar a tarefa e diminuir o seu tempo. Verificar se são cumpridas as disposições regulamentares aplicáveis, principalmente as percentagens de armadura mínima, tendo em conta os esforços e as deformações (ver capítulo 2.3.3).
10. Proceder às restantes verificações, nomeadamente ao punçoamento, para verificar se há necessidade de colocação de armadura adicional. Relativamente ao punçoamento, aspecto que não é abordado neste trabalho, pode-se encontrar já trabalhos desenvolvidos só sobre este assunto, devendo ser tidas em conta as disposições presentes no EC2 [15].

Com o modelo devidamente implementado, no programa de cálculo e obtidos os valores dos esforços, segue-se a fase de dimensionamento de armaduras. Correntemente nesta fase o engenheiro procede ao dimensionamento da armadura manualmente, excepto quando se utilizam programas de cálculo que procedem ao cálculo das quantidades de armadura. Alguns engenheiros recorrem aos métodos expeditos, como o método dos pórticos equivalentes, ou método directo do ACI, e outros recorrem a alguns procedimentos aproximados que são adquiridos com a experiência.

5.10. METODOLOGIA ADOPTADA PARA O CÁLCULO DE ARMADURA

O cálculo da armadura a partir dos esforços obtidos é muitas vezes um obstáculo, quando se modelam as lajes fungiformes pelo método dos elementos finitos. Com a análise efectuada e todas as conclusões tiradas, ao longo do trabalho, define-se uma metodologia para a leitura dos valores dos momentos a considerar no dimensionamento. Esta metodologia resultou de um processo iterativo e de comparação de resultados obtidos, para que o tratamento de momentos flectores na zona do pilar seja o mais apropriado possível.

5.10.1. METODOLOGIA PARA CASOS DE PILARES ALINHADOS

Existe uma infinidade de situações de lajes fungiformes, dependendo do tipo de distribuição de pilares e mesmo da geometria da laje. Apresenta-se inicialmente, como se obtém as armaduras na zona do pilar, em lajes cuja distribuição dos pilares é feita sobre alinhamentos.

Com os pilares sobre alinhamentos é mais fácil a obtenção das armaduras, baseando a distribuição de armadura sob a forma de faixas tendo em conta o desenvolvimento do diagrama de momentos flectores.

5.10.1.1. ARMADURAS SUPERIORES

Para as armadura superiores a distribuição de faixas mais apropriada e mais económica é feita com 3 faixas de armadura, isto é, tendo em conta o princípio de distribuição mais aconselhado e usado no método dos pórticos equivalentes, ver Figura 3.3. Tem-se então uma faixa centrada sobre os pilares, uma faixa intermédia e uma faixa central. A faixa central corresponde à faixa central definida no Eurocódigo 2 [15]. A faixa sobre os pilares denominada no EC2, é então dividida em duas faixas, uma faixa centrada sobre os pilares e outra faixa, aqui designada por faixa intermédia.

Uma vez que a armadura a dispor em cada faixa deve absorver a resultante de momentos aí existentes, e que na zona dos pilares o diagrama tem uma grande variação, é feito o cálculo equivalente e aproximado, para a faixa centrada sobre os pilares. Faz-se a média dos valores entre a face do pilar e o limite da faixa em causa, que se encontra afastado de 1/8 do vão, do eixo do pilar. Obtendo com este artifício o momento flector na faixa centrada sobre os pilares, $M_{x-}^{faixa\ centrada\ p.}$, para dimensionamento da armadura superior a distribuir nesta faixa.

Para as duas faixas restantes, atendendo que a variação do momento flector é mais suave, considera-se o momento máximo verificado na respectiva faixa, para o dimensionamento da armadura superior.

Faz-se a exemplificação do procedimento de uma forma genérica, sobre a malha de um exemplo concreto, ou seja, o número de alinhamentos existente em cada faixa pode ser maior ou menor dependendo do vão e da dimensão da malha. Se as dimensões da malha respeitarem as dimensões máximas aconselháveis, o número elementos finitos por faixa, não será muito diferente (ver subcapítulo 5.11).

Para proceder à apresentação, considera-se (ver Figura 5.29):

- Os cortes C1 a C6, como sendo as divisões das faixas de laje, dependentes do vão da laje;
- O corte C7, é o alinhamento sobre o qual se faz a leitura dos momentos negativos;
- Os alinhamentos de “A” a “Q” representam os alinhamentos da malha de elementos finitos.

Chama-se a atenção que os momentos referenciados por M_{x-} , resultam da intersecção do corte ou alinhamento com o corte C7. Apresentam-se na Figura 5.30 e na Figura 5.31, o corte C7 com a representação dos momentos e os pontos de leitura relevantes para o cálculo.

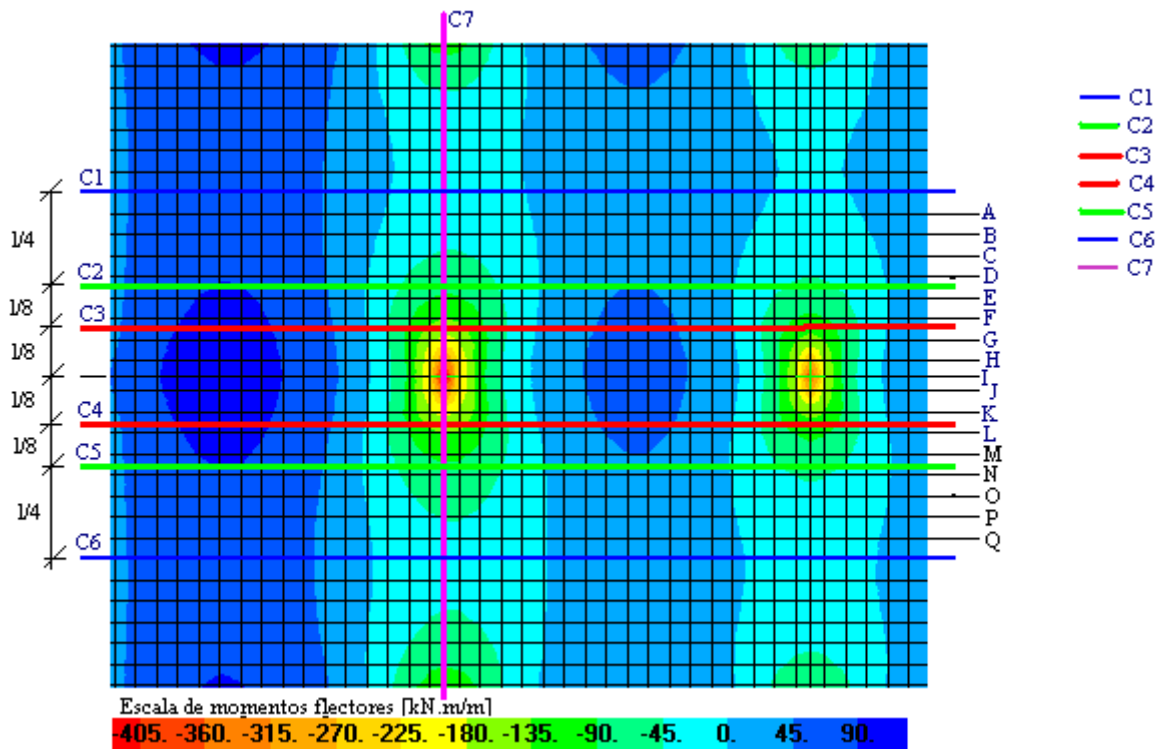


Figura 5.29 - Representação das faixas e dos esforços (M_{11}), segundo a direcção xx .

A divisão das faixas de laje consideradas é feita da seguinte forma:

- Faixa centrada sobre os pilares – faixa compreendida entre C3 e C4;
- Faixa intermédia – faixa que se localiza entre C2 e C3 ou no vão seguinte entre C4 e C5;
- Faixa central – faixa entre C1 e C2 ou entre C5 e C6.

Pretende-se também mostrar na Figura 5.29, que o ponto de leitura dos valores de momentos flectores está totalmente independente da malha, não abdicando dos alinhamentos que passam na face do pilar, para utilização das aplicações de pós-processamento desenvolvidas neste trabalho (Capítulo 6), já que servem para a aplicação detectar os pilares e suas dimensões.

Na Figura 5.30, representa-se os pontos de interesse para leitura de momentos flectores (pontos marcados).

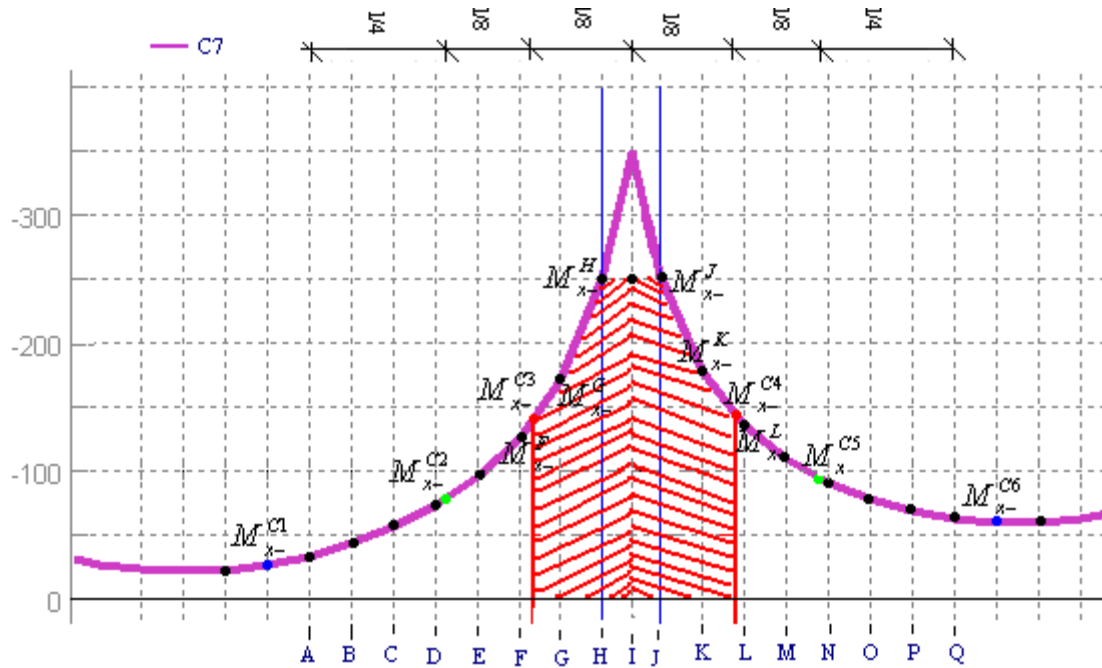


Figura 5.30 - Representação dos cortes, alinhamentos e respectivas intersecções – pontos de leitura de esforços.

Para a faixa centrada sobre os pilares (entre C3 e C4), o momento de dimensionamento obtém-se fazendo a média dos valores consecutivos dos nós da malha independentemente, desde o eixo do pilar até ao limite desta faixa, obtendo a média do momento flector entre cada dois nós da malha. Depois faz-se a média desses valores.

Tenta-se desta forma obter o valor equivalente ao integral dos momentos entre a face do pilar e o limite desta faixa (ver Figura 5.30 a tracejado). Este procedimento efectua-se para as duas faces do pilar, usando-se o máximo dos dois valores (valor do momento equivalente à esquerda do pilar ou valor do momento equivalente à direita do pilar).

Este cálculo pode ser traduzido segundo a expressão 5.11, para obter o momento flector de dimensionamento da faixa.

$$M_{x-}^{faixa\ centrada} = \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{x-}^{yi} + M_{x-}^{yi+1}}{2}}{n-1}; \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{M_{x-}^{yj} + M_{x-}^{yj+1}}{2}}{n-1} \right\} \quad (5.11)$$

Sendo o primeiro alinhamento ($i=1$) o alinhamento que passa no eixo do pilar, e o último alinhamento ($i=n$), o alinhamento segundo o corte que limita a faixa centrada sobre os pilares. Repare-se que o valor do momento flector a considerar no alinhamento que passa no eixo do pilar, é igual ao momento flector na face do pilar.

Para ser perceber melhor a expressão 5.11, aplica-se ao caso da malha presente na Figura 5.29, onde primeiro alinhamento é o alinhamento H (alinhamento que passa na face do pilar) e o último alinhamento é o alinhamento C3, isto para um dos lados do pilar. O mesmo se faz para o lado oposto em que o primeiro alinhamento é o alinhamento J e o último é o alinhamento C4. Então fica:

$$M_{x-}^{faixa\ centrada} = \max \left\{ \frac{\frac{M_{x-}^H + M_{x-}^H}{2} + \frac{M_{x-}^H + M_{x-}^G}{2} + \frac{M_{x-}^G + M_{x-}^{C3}}{2}}{3}; \frac{\frac{M_{x-}^J + M_{x-}^J}{2} + \frac{M_{x-}^J + M_{x-}^K}{2} + \frac{M_{x-}^K + M_{x-}^{C4}}{2}}{3} \right\} \quad (5.12)$$

Sendo os momentos M_{x-}^{C3} e M_{x-}^{C4} , obtidos por interpolação entre os momentos flectores dos nós anterior e seguinte, sobre o corte C7.

Deve sempre calcular-se nos dois lados do pilar, para prevenir situações onde há diferentes esforços nas faces opostas do pilar.

Desta forma obtém-se o momento flector de dimensionamento da faixa centrada sobre o pilar, e eliminando os picos de momentos de forma adequada e não colocando em causa a segurança da laje.

Apresenta-se a Figura 5.31, para ilustrar os pontos de leitura de momentos flectores para dimensionamento da faixa intermédia e da faixa central.

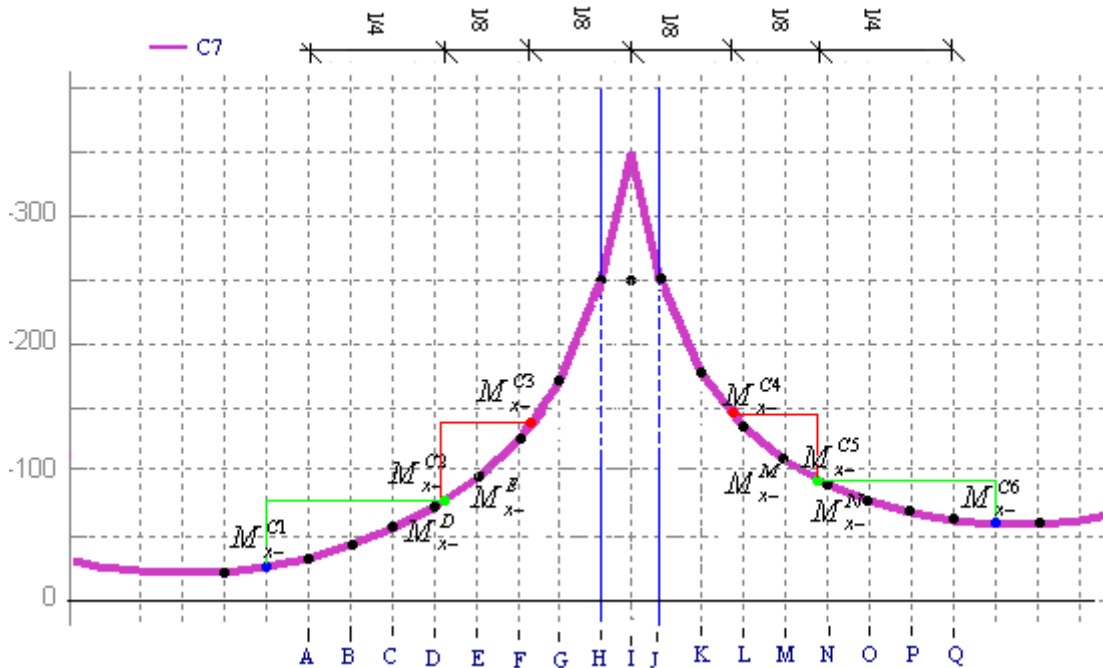


Figura 5.31 - Representação de alinhamentos e intersecções com C7.

Mais uma vez se verifica que, sempre que os pontos não são pontos da malha, há necessidade de fazer a interpolação dos momentos flectores nos nós, para obter o momento flector de dimensionamento de cada faixa.

Para a faixa intermédia o momento flector de dimensionamento é dado pela expressão 5.13:

$$M_x^{faixa\ intermédia} = M_{x-}^{C3} = M_{x-}^G - \frac{(M_{x-}^G + M_{x-}^F) \times (y_G - y_F)}{(y_G - y_{C3})} \quad (5.13)$$

Sendo:

M_{x-}^G , M_{x-}^F e M_{x-}^{C3} , os valores de momentos flectores quando o respectivo alinhamento intersecta o corte C7;

y_G , y_F e y_{C3} as ordenadas dos alinhamentos.

Para a faixa central o momento flector de dimensionamento da armadura superior é dado pela expressão 5.14:

$$M_x^{faixa\ central} = M_{x-}^{C2} = M_{x-}^E - \frac{(M_{x-}^E + M_{x-}^D) \times (y_E - y_D)}{(y_E - y_{C2})} \quad (5.14)$$

Sendo:

M_{x-}^E , M_{x-}^D e M_{x-}^{C2} , os valores de momentos flectores quando o respectivo alinhamento intersecta o corte C7;

y_D , y_E y_{C2} - ordenada do alinhamento em causa.

5.10.1.2. ARMADURAS INFERIORES

Relativamente às armaduras inferiores, é seguido um procedimento idêntico, para obtenção das áreas de armadura. São consideradas duas faixas diferentes, uma centrada no eixo do pilar até 1/4 de vão para cada um dos lados do pilar (ver Figura 5.29, entre C2 e C5), seguida da segunda faixa, desde o 1/4 de vão até 1/2 do vão (ver Figura 5.29, entre C1 e C2 e entre C5 e C6).

Estas faixas estão em coerência com as faixas definidas no EC2 para aplicação do método dos pórticos equivalentes.

Os momentos de dimensionamento, são os momentos máximos registados na respectiva faixa. Devido a diferenças de vãos e variação de outras características geométricas da laje, os momentos flectores máximos podem não ser os momentos a meio vão. Para cada vão da laje usa-se para dimensionamento o momento máximo respectivo.

Como se ilustra na Figura 5.32, o momento no primeiro vão (tramo de bordo) é diferente do momento do vão seguinte (tramo intermédio).

Por exemplo para a faixa entre o corte C2 e C5, o momento flector máximo encontra-se sobre o alinhamento que passa no eixo do pilar, neste caso alinhamento I (ver Figura 5.29).

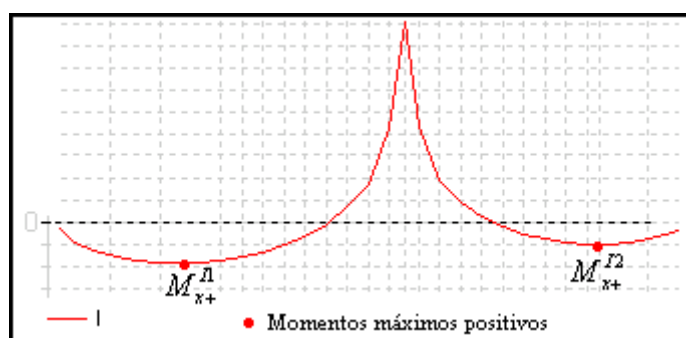


Figura 5.32 - Representação dos pontos de momentos máximos positivos.

Termina-se o dimensionamento da armadura segundo a direcção xx . Para a direcção yy , a metodologia de cálculo é a mesma, tendo em conta a devida rotação dos eixos e a utilização do diagrama de momentos flectores M_{yy} .

Esta metodologia está implementada na aplicação de cálculo “Laje_alinh_NLN”, que é apresentada no capítulo 6.

5.10.2. METODOLOGIA PARA QUALQUER CASO DE LAJE

Cada vez mais, por condicionantes arquitectónicas ou por necessidades específicas de cada caso, existem pilares desalinhados, ou paredes de suporte ou até a existência de grandes aberturas devido a caixas de escadas ou outros condicionantes. Daí a necessidade de estender a metodologia a qualquer caso, ficando independente dos alinhamentos dos pilares e dos respectivos vãos, entre eles.

Nos casos mais irregulares, pode-se até perder o conceito de faixas da laje, ou seja, as faixas de armadura têm que ser definidas pelo engenheiro de acordo com o diagrama de momentos e com o momento resistente da solução de armadura a usar.

A redução dos picos de momentos flectores efectuada para estes casos é baseada na metodologia anterior, tendo em conta que não existe um vão claramente definido.

Baseado no exemplo usado para a situação de pilares alinhados, Figura 5.29, como se desse caso se tratasse.

$$M_{x-}^{faixa\ centrada} = máx \left\{ \frac{\frac{M_{x-}^H + M_{x-}^H}{2} + \frac{M_{x-}^H + M_{x-}^G}{2}}{2}; \frac{\frac{M_{x-}^J + M_{x-}^J}{2} + \frac{M_{x-}^J + M_{x-}^K}{2}}{2} \right\} \quad (5.15)$$

O momento máximo sobre o pilar passa então a ser dado pela média dos valores da face do pilar com o valor do ponto seguinte, no mesmo alinhamento. O que resulta um momento flector máximo superior ao que se obtém pela expressão 5.11. Esta zona fica então sobredimensionada. Análises feitas comprovam que esta diferença ronda os 5% de aumento do momento flector a usar para dimensionamento, podendo ir até aos 15% em certos casos.

Nos casos em que seja necessário recorrer a este procedimento, significa que é um caso irregular, consequentemente os diagramas de esforços terão uma distribuição irregular, ou seja, o aumento de armadura que se verifica, é o adequado, para prevenir situações devidas à irregularidade da laje. As dimensões máximas da malha de elementos finitos, tem que ser realizada com base no critério de dimensão máxima da malha, à semelhança do que acontece no caso de lajes apoiadas sobre pilares alinhados.

O dimensionamento da armadura de toda a restante laje, fica dependente do modo como se orientam os vãos e como se desenrolam os esforços máximos. Muitas situações de lajes fungiformes, permitem ainda a aplicação da metodologia das faixas (capítulo 5.10.1), pelo menos em parte da laje.

Um grande problema nestas situações, que no decorrer deste capítulo, não foi dada a atenção, é a contabilização do agravamento dos momentos flectores devido ao momento torsor. No capítulo seguinte (capítulo 6), apresenta-se o método para a sua contabilização, desenvolvido por Wood e Armer. A aplicação de cálculo permite efectuar o cálculo desprezando o momento torsor ou tendo em conta o seu efeito. Este aspecto não é muito relevante nos casos de lajes regulares.

No capítulo seguinte expõe-se todas as capacidades da aplicação de cálculo desenvolvida, assim como todas as metodologias de cálculo utilizadas e exemplos em que é usada. Sendo esta metodologia implementada na aplicação “Laje_geral_NLN”.

5.11. DEFINIÇÃO DAS DIMENSÕES MÁXIMAS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

As dimensões dos elementos finitos adequadas, torna-se uma questão difícil de se resolver, devido ao compromisso que há entre a dimensão da malha e consequentes resultados e o tempo de processamento. Malhas mais refinadas implicam melhores resultados, modelos mais pesados e mais tempo de cálculo.

Com os exemplos que se estudou no decorrer deste trabalho e seus resultados, fica-se com uma ordem de grandeza da dimensão da malha ótima. Tendo também em conta o compromisso entre a metodologia adoptada e a sua aplicação, resultam as dimensões máximas aconselháveis da malha de elementos finitos (malhas AC), presentes no Quadro 5.23.

Quadro 5.23 - Dimensão máxima aconselhável da malha de elementos finitos.

L [m]	Dimensão		Dimensão máxima Aconselhável [m]
	L/8 [m]	L/16 [m]	
2	0.25	0.13	0.10
2.5	0.31	0.16	0.10
3	0.38	0.19	0.15
3.5	0.44	0.22	0.20
4	0.50	0.25	0.25
4.5	0.56	0.28	0.25
5	0.63	0.31	0.25
5.5	0.69	0.34	0.30
6	0.75	0.38	0.35
6.5	0.81	0.41	0.40
7	0.88	0.44	0.40
7.5	0.94	0.47	0.45
8	1.00	0.50	0.50
8.5	1.06	0.53	0.50
9	1.13	0.56	0.50
9.5	1.19	0.59	0.55
10	1.25	0.63	0.60
11	1.38	0.69	0.65
12	1.50	0.75	0.70
15	1.88	0.94	1.00

Para a obtenção das dimensões máximas aconselháveis teve-se em conta a aplicação de cálculo desenvolvida de pós-processamento de esforços, e posterior devolução para representação das quantidades de armadura no próprio programa. Para que ao representar as quantidades de armadura calculadas por faixa, segundo a metodologia desenvolvida, seja notável o escalonamento da armadura por faixas, é necessário que existam pelo menos dois nós em cada faixa. Como se tem faixas com 1/8 do vão, chega-se à condição que fixa a dimensão máxima dos elementos.

As dimensões máximas aconselháveis da malha são para aplicar em cada vão. Se existir vãos com dimensões diferentes, deve usar-se preferencialmente malhas de dimensões diferentes em função de cada vão e não malhas que respeitam as dimensões para o menor vão.

No caso de lajes em que a distribuição dos pilares não é feita sobre alinhamentos, não evidenciando a dimensão do vão, deve ser considerado um vão equivalente.

6

APLICAÇÕES DE CÁLCULO**DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS DE LAJES FUNGIFORMES**

Não é incomum um modelo estrutural conter milhares de elementos finitos e dezenas acções e combinações de acções. O volume de resultados do programa em cada análise é tal, que por vezes, se torna difícil para o projectista tratar os dados com interesse para projecto. É necessário, por parte do engenheiro, fazer o tratamento dos esforços obtidos, ou então basear-se nos resultados apresentados graficamente pelo programa.

A metodologia desenvolvida neste trabalho não obriga ao tratamento dos esforços fornecidos pelo programa de elementos finitos em todos os pontos, mas mesmo assim o engenheiro pode ser conduzido a erros, devidos à apresentação gráfica dos programas por escalas de cores.

Levanta-se então a necessidade de implementar este procedimento num programa de cálculo, ou o desenvolvimento de aplicações de cálculo que tornem este trabalho mais rápido, reduzindo ao mesmo tempo a possibilidade de ocorrência de erros.

6.1. GENERALIDADES

Desenvolveram-se duas aplicações auxiliares de cálculo em Excel, baseadas na programação em Visual Basic [4], para pós-processamento de resultados do programa SAP2000. Nestas aplicações faz-se a leitura dos valores calculados pelo programa SAP2000 com base nos quais se procede ao dimensionamento das armaduras. A metodologia desenvolvida, que se apresentou no sub-capítulo 5.10, foi implementada nas aplicações de cálculo, obtendo-se as áreas de armadura necessárias nas faixas pré-definidas, tendo em conta o tratamento dos momentos flectores nas zonas dos pilares.

Actualmente estas aplicações apenas suportam os resultados exportados de programa SAP2000, mas podem ser alargadas para outros programas de cálculo, já que a maioria dos programas já possibilita a exportação de resultados para Excel.

Sempre que seja necessário uma análise mais detalhada de situações mais particulares, pode-se modelar o apoio ou o pilar com elementos sólidos, utilizando-se ainda as aplicações de cálculo para o tratamento dos esforços e cálculo de quantidades de armadura. Quando não se deseja o tratamento dos esforços nas zonas do pilar, mas sim, a conversão dos esforços em quantidades de armadura contabilizando ou não os momentos torsores, basta que no modelo não sejam identificados os nós do eixo dos pilares e/ou paredes.

As quantidades de armadura são obtidas de forma aproximada pela expressão:

$$Asl = \frac{M_{sd}}{0.9 \times d \times f_{syd}} \quad (6. 1)$$

Sendo d a altura útil da laje, assumida como sendo $d = 0.9 \times h$.

Refira-se que esta aproximação é em geral conservativa no caso de lajes, uma vez que estes elementos são normalmente fracamente armados, correspondendo portanto a percentagens de armadura inferiores a 0.5%.

Feito o cálculo das quantidades de armadura e o devido tratamento, as aplicações produzem cinco ficheiros Excel, um em que se representa graficamente as quantidades de armadura com as capacidades de representação gráfica do Excel, e os quatro restantes são ficheiros devidamente preparados para importação no programa SAP2000 de forma a permitir a visualização dos resultados neste programa sobre a malha de elementos finitos utilizada no cálculo.

As aplicações de cálculo exportam os seguintes ficheiros que são guardados no directório C:\

- “gráficos”;
- “jointpattern_ASXI”;
- “jointpattern_ASXS”;
- “jointpattern_ASYI”;
- “jointpattern_ASYX”.

Os 4 últimos ficheiros referidos, contém as quantidades de armadura em cada direcção, associada aos nós da malha de elementos finitos de forma a ser possível a sua visualização gráfica no programa SAP2000. A representação das quantidades de armadura no programa de cálculo faz-se como se de um caso de carga se tratasse. O engenheiro tem assim a possibilidade de visualizar no modelo as áreas de armadura necessárias e não os esforços que eles deram origem. E ainda tem a possibilidade de clicar sobre os nós que suscitam dúvidas, para confirmar a quantidade de armadura e as coordenadas do respectivo nó.

Assim é possível analisar com precisão as zonas de dispensa de armadura de forma a avaliar se as soluções de projecto são adequadas.

Podem ser modelados vários pisos/várias lajes com diferentes cotas, e fica a cargo das aplicações de cálculo, calcular a laje com a cota indicada. Esta opção, determina que não se pode ter lajes inclinadas, porque os pontos ficam com cotas diferentes.

A leitura de dados é feita de forma automática pelas aplicações de cálculo a partir do ficheiro previamente exportado de SAP2000, que tem de ter no nome “resultado” e conter as seguintes tabelas de dados:

- Tabela "Area Section Assignments" ;
- Tabela "Area Section Properties";
- Tabela "Element Forces - Area Shells";
- Tabela "Joint Coordinates".

Se o ficheiro “resultado” contiver mais tabelas que as estritamente necessárias, não há qualquer problema para a aplicação de cálculo. Apenas são tidas em conta as tabelas que têm os dados relevantes para o cálculo. As tabelas exportadas de SAP2000 contêm a relação entre as áreas e secção, características das secções associadas aos elementos finitos, esforços e respectivos nós.

Juntamente com estas tabelas é criado no ficheiro “resultado” uma tabela onde são indicadas as características da versão do programa de cálculo SAP2000 utilizado. Esta tabela é fundamental, para que a aplicação detecte qual o formato das tabelas criadas pelo SAP2000 e também para que os ficheiros exportados pela aplicação, sejam compatíveis, para ser possível a importação das quantidades de armadura por parte do programa SAP2000.

Convém referir que as aplicações são compatíveis com todas as versões do programa SAP2000 que se seguem à versão 9.0, inclusive.

É também importante referir que as aplicações também podem ser utilizadas em lajes pré-esforçadas com pré-esforço não aderente. Neste caso é necessário definir o pré-esforço como acção, resultando assim os esforços de cálculo da laje como sendo os esforços às armaduras passivas.

6.1.1. CASO DE ANÁLISE

O programa de cálculo SAP2000, permite a exportação de resultados de várias combinações de acções. Para cada nó são obtidos 4 valores de cada esforço e de cada combinação. Podem ser exportados resultados para várias acções ou várias combinações de acções, ou até envolventes de acções. Com a envolvente de esforços, consegue-se o dimensionamento mais adequado e mais rápido, por isso, recomenda-se a criação da envolvente de esforços.

6.1.2. TIPO DE CASO - COMBINAÇÃO DE ACÇÕES OU ENVOLVENTE

Os programas de cálculo têm diferentes formas de apresentar os resultados obtidos. No programa de cálculo que se usa preferencialmente neste trabalho, quando se fazem combinações de acções, é apresentado um diagrama de esforços contínuo, ou seja, para cada nó, é considerado o valor médio dos valores associados aos vários elementos finitos ligados a este nó.

Quando se fazem envolventes de casos de carga ou de combinações de acções, são apresentados dois valores por nó, um valor mínimo e um valor máximo. Na aplicação de cálculo deve ser indicado o tipo de caso, para que a aplicação faça o devido tratamento dos esforços. As aplicações não detectam automaticamente se estamos perante uma combinação de esforços ou de uma envolvente. Apenas têm em conta a informação dada pelo utilizador. Este é um aspecto fundamental, já que daqui podem decorrer erros graves no cálculo das armaduras.

6.1.3. MÉTODO DE CÁLCULO

A modelação de lajes pelo método dos elementos finitos, por elementos de placa ou elemento de casca, proporciona resultados de esforços, dos quais, M_{11} , M_{22} e M_{12} têm interesse prático para o dimensionamento das armaduras. Os primeiros valores, M_{11} e M_{22} representam os momentos

flectores segundo os eixos 1 e 2, e o terceiro valor é o momento torsor, M_{12} . Refira-se que os eixos 1 e 2 são eixos do referencial local dos elementos finitos, devendo ter-se a preocupação de estarem orientados da mesma forma em todos os elementos. Usualmente faz-se coincidir a orientação do eixo 1 com a direcção x do referencial global, vindo assim os momentos M_{11} e M_{22} associados aos momentos flectores segundo x e segundo y , respectivamente.

Os momentos usados para projecto resultantes da aplicação do método de Wood-Armer que se refere adiante, [6],[11] e [21], são referenciados como M_{ux}^+ , M_{ux}^- momentos flectores equivalentes, e M_{uy}^+ , M_{uy}^- momentos flectores equivalentes na direcção y .

Dá-se a opção ao utilizador de escolher o método de cálculo a usar no tratamento dos esforços e obtenção de quantidades de armadura. Tem-se então, a opção de escolher umas das duas opções:

- Apenas M_{11} e M_{22} (sem a consideração dos momentos torsores);
- Método Wood-Armer (com a consideração dos momentos torsores).

6.1.3.1. APENAS MOMENTOS FLECTORES, M_{11} E M_{22}

Ao escolher esta opção, efectua-se o cálculo tendo em conta apenas os momentos flectores nas direcções 1 e 2, desprezando o efeito do momento torsor. Nos casos de lajes regulares em que os pilares estão alinhados e as características da laje são regulares, o uso desta opção é mais económico obtendo-se assim soluções de armadura um pouco menores. Não se efectuou um estudo detalhado, acerca deste assunto, mas sabe-se que para as zonas de pilares de bordo e de canto, os momentos torsores passam a ter a sua importância.

6.1.3.2. MÉTODO DE WOOD-ARMER

Para ter em conta os momentos torsores, recorre-se a métodos já desenvolvidos e correntemente aplicados em vários programas de cálculo. O método mais adequado para lajes e elementos em que predominem os esforços de flexão, é o método de Wood-Armer. Este método é correntemente aplicado, existindo vários exemplos que comprovam que este método é adequado ao cálculo de lajes [21]. No entanto também é aplicável o método das 3 camadas de laje, que é referido no modelo de código 90 [30].

Passa-se agora a uma breve exposição do método de Wood-Armer, desenvolvido por Wood e Armer, que consiste num método de momento equivalente. Basicamente este método considera o momento torsor M_{12} e define um momento flector equivalente nas direcções principais x e y . Obtêm-se os momentos flectores equivalentes M_{ux} e M_{uy} , a partir das quais são calculadas as quantidades de armadura para cada uma das direcções como se tratasse de um caso de flexão simples.

Pode-se encontrar este método devidamente tratado nos trabalhos publicados por Wood e por Armer (autores do método), e exposto por Casino [6], para os casos gerais, em que as direcções da armadura, não coincidem com as direcções dos momentos.

Como é muito frequentemente nos casos de lajes, as direcções 1 e 2 coincidem com as direcções ortogonais da armadura x e y , apresenta-se a formulação de interesse para estes casos (Deaton [11] e Casino [6]).

Os momentos flectores equivalentes M_{ux}^+ e M_{uy}^+ , para o cálculo das armaduras inferiores vêm definidos por:

$$M_{ux}^+ = M_{11} + |M_{12}| \quad (6.2)$$

$$M_{uy}^+ = M_{22} + |M_{12}| \quad (6.3)$$

$$\text{Se } M_{ux}^+ < 0 \text{ e Se } M_{uy}^+ < 0 \quad M_{ux}^+ = 0 \quad (6.4)$$

$$M_{uy}^+ = 0 \quad (6.5)$$

$$\text{Se } M_{ux}^+ < 0 \quad M_{ux}^+ = 0 \quad (6.6)$$

$$M_{uy}^+ = M_{22} + \left| \frac{M_{12}}{M_{11}} \right| \quad (6.7)$$

$$\text{Se } M_{uy}^+ < 0 \quad M_{ux}^+ = M_{11} + \left| \frac{M_{12}}{M_{22}} \right| \quad (6.8)$$

$$M_{uy}^+ = 0 \quad (6.9)$$

Os momentos flectores equivalentes M_{ux}^- e M_{uy}^- , para o cálculo das armaduras superiores vêm definidos por:

$$M_x^- = M_{11} - |M_{12}| \quad (6.10)$$

$$M_y^- = M_{22} - |M_{12}| \quad (6.11)$$

$$\text{Se } M_{ux}^- > 0 \text{ e } M_{uy}^- < 0 \quad M_{ux}^- = 0 \quad (6.12)$$

$$M_{uy}^- = 0 \quad (6.13)$$

$$\text{Se } M_{ux}^- > 0 \quad M_{ux}^- = 0 \quad (6.14)$$

$$M_{uy}^- = M_{22} - \left| \frac{M_{12}}{M_{11}} \right| \quad (6.15)$$

$$\text{Se } M_{uy}^- < 0 \quad M_{ux}^- = M_{11} - \left| \frac{M_{12}}{M_{22}} \right| \quad (6.16)$$

$$M_{uy}^- = 0 \quad (6.17)$$

O momento torsor contribui para ambos os momentos associados às direcções x e y do referencial global. Este método é aplicado na área infinitesimal, dA , de cada nó, em que são obtidos os esforços pelo método dos elementos finitos, de acordo com o ilustrado na Figura 6.1.

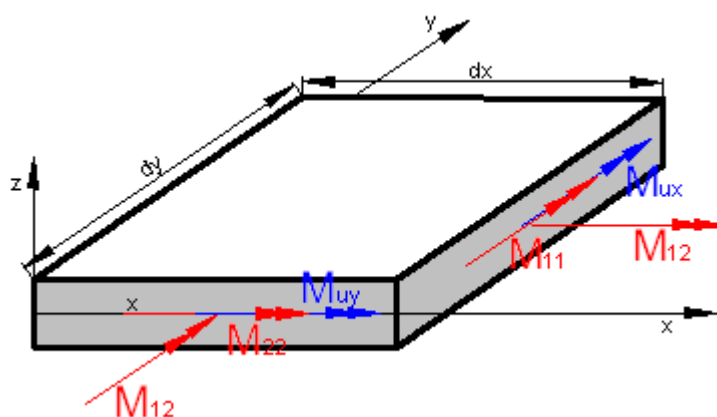


Figura 6.1 - Representação dos momentos num nó de área infinitesimal.

Tem-se então, um método bastante eficaz, para a contabilização de esforços, chegando a momentos equivalentes, que contemplam o efeito de torção da laje. Este aspecto é bastante importante, principalmente em lajes de geometria irregular, nas quais os momentos torsores assumem maior importancia.

Não aplicação de cálculo geral, recomenda-se o uso deste método de cálculo, uma vez que esta aplicação se usa preferencialmente para casos de lajes irregulares.

As aplicações são idênticas no modo como fazem o tratamento dos resultados, diferindo nos resultados produzidos e no modo como apresentam as quantidades de armadura.

6.2. APLICAÇÃO DE CÁLCULO “LAJE_ALINH_NLN”

A primeira aplicação de cálculo desenvolvida “Laje_alinh_NLN”, faz o tratamento de esforços e cálculo de armadura em lajes fungiformes regulares com pilares alinhados. Apresenta-se na Figura 6.2 uma imagem da janela inicial da janela de execução da aplicação. Esta aplicação para além de calcular as quantidades de armadura, faz a sua disposição segundo a metodologia apresentada no capítulo 5.10, ou seja, os resultados obtidos, são quantidades de armadura já dispostas pelas faixas. A aplicação também faz o escalonamento da armadura, de 50%, para armaduras inferiores e superiores, e ainda coloca a quantidade de armadura nula quando deixa de ser necessária armadura superior. Deste modo, o engenheiro fica a saber a partir de que ponto pode efectuar a dispensa de 50% ou a dispensa total da armadura, mas tendo sempre presente as disposições regulamentares de armadura mínima e sua disposição obrigatória. Apresentam-se exemplos e os respectivos resultados obtidos com a aplicação de cálculo, e pode-se assim verificar o tipo de resultados obtidos com esta ferramenta.

Figura 6.2 – Interface da aplicação de cálculo “Laje_alinh_NLN”.

A utilização desta aplicação obriga a que o modelo de cálculo da laje seja estabelecido de acordo com o procedimento apresentado no capítulo 5.9, para que possa interpretar os resultados dos esforços exportados pelo programa SAP2000.

O algoritmo de cálculo foi implementado em Visual Basic, nesta aplicação, podendo ser visualizado na própria aplicação de cálculo, que está presente no CD em complemento com o trabalho. Pode verificar-se pela sua extensão que é necessário interpretar correctamente todos os dados da laje e verificar todas as possibilidades de erro, que possam surgir.

6.3. APLICAÇÃO DE CÁLCULO “LAJE_GERAL_NLN”

A aplicação “Laje_geral_NLN”, cuja janela inicial se apresenta na Figura 6.3, usa-se para o cálculo de quantidades de armadura em lajes irregulares, podendo ter pilares desalinhados ou paredes de suporte. Esta aplicação baseia-se na metodologia exposta na secção 5.10.2 e faz o devido tratamento dos esforços na zona de ligação da laje com pilares ou paredes.

Figura 6.3 – Interface da aplicação de cálculo “Laje_geral_NLN”.

As quantidades de armadura que se calculam com esta aplicação, não são soluções de armadura por faixas, são quantidades mínimas necessárias para fazer face aos esforços obtidos em cada nó da malha de elementos finitos. O resultado que se obtém com o uso desta aplicação, representa uma ajuda para o utilizador e não uma aplicação como a anterior, que já proporciona quantidades de armadura definidas por faixas e que podem ser utilizadas directamente no projecto e na definição da solução de armadura. Cabe ao engenheiro analisar as quantidades de armadura necessárias, escolher soluções de armadura e decidir acerca das faixas de armadura e seus escalonamentos. Com base nas quantidades de armadura e nas coordenadas dos respectivos nós, o dimensionamento da armadura longitudinal da laje é muito mais fácil.

A programação desta aplicação teve como base a aplicação anterior, mas procederam-se às devidas alterações para que seja possível a sua utilização na generalidade dos casos. Na aplicação de cálculo pode-se ver e analisar o programa de cálculo correspondente, basta aceder ao interface do Visual Basic, sobre o Excel.

6.4. COMPARAÇÃO DAS APLICAÇÕES DESENVOLVIDAS, SEUS RESULTADOS E FUNCIONALIDADES

6.4.1. EXEMPLO 1

Para comparação das duas aplicações, e avaliar as suas capacidades e funcionalidades, recorre-se a um exemplo de uma laje fungiforme regular e simétrica. Foi escolhido este exemplo simétrico para se poder obter resultados pelas duas aplicações de cálculo.

O exemplo apresenta as seguintes características:

- 4 vãos simétricos de 7.5 m nas duas direcções;
- 25 pilares com secção $0.60 \times 0.60\text{ m}^2$ (3 m de altura);
- betão $C25/30$, $E = 31\text{ GPa}$;
- espessura 0.30 m ;
- acção permanente 14 kN/m^2 (valor majorado);
- sobrecarga 6 kN/m^2 (valor majorado).

Fez-se várias combinações de acções correspondentes a vários casos de carga. Uma das combinações relevantes é a combinação “COMB1”, onde é aplicada a carga total em todos os painéis da laje. Faz-se também uma envolvente de esforços, “ENVOL”, correspondente à envolvente de esforços de todas as combinações que se efectuaram considerando as alternâncias de sobrecarga.

Apresenta-se na Figura 6.4 uma imagem do modelo de cálculo utilizado e da deformada correspondente a uma combinação associada à alternância da sobrecarga.

Seguiu-se a metodologia desenvolvida neste trabalho e compara-se os resultados obtidos para cada situação. Segue-se a metodologia desenvolvida neste trabalho e comparam-se os resultados obtidos para cada situação. Para além da representação gráfica das quantidades de armadura efectuada a partir do programa SAP2000, desenvolveu-se ainda uma rotina em Matlab que permite uma representação tridimensional destas quantidades de armadura, possibilitando uma melhor interpretação destes resultados.

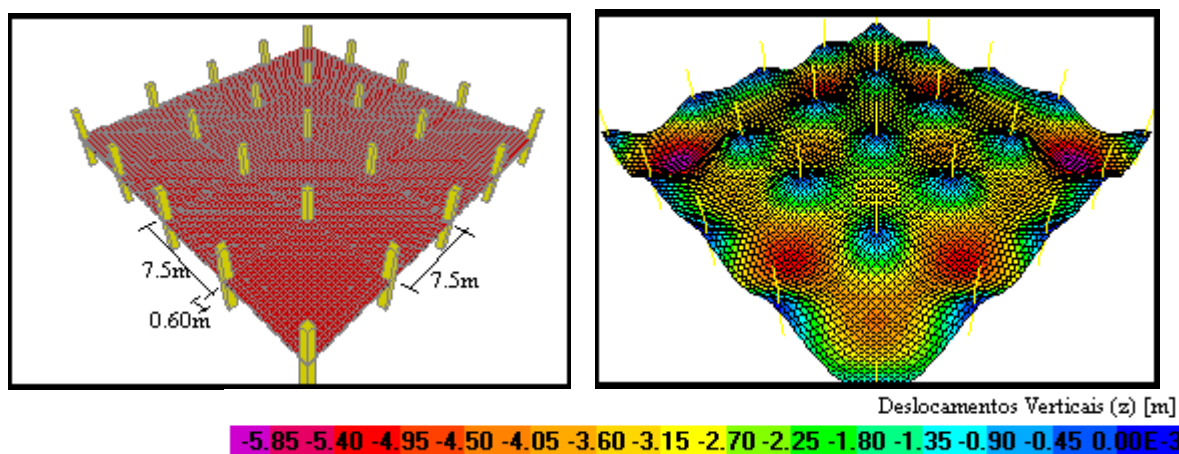


Figura 6.4 - Representação do modelo da laje e respectiva deformada para alternância de sobrecarga em xadrez.

6.4.1.1. COMPARAÇÃO DOS TIPOS DE CASO

Os resultados que se obtém pelo programa de cálculo são apresentados de forma diferente, tratando-se de uma combinação de acções ou de uma envolvente. Apresentam-se na Figura 6.5 os diagramas característicos da envolvente de esforços que se pode obter com o programa SAP2000 e na Figura 6.6 mostra-se a comparação de uma combinação de acções face à envolvente.

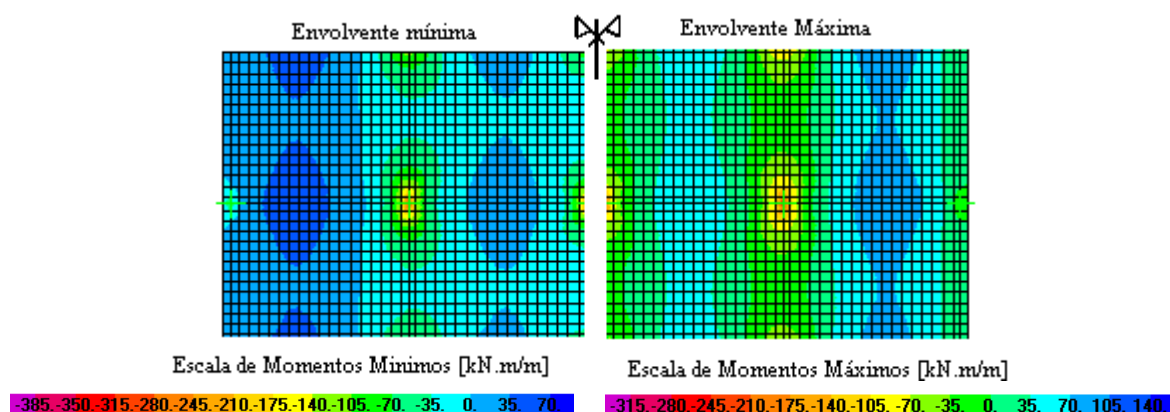


Figura 6.5 - Representação da envolvente de momentos, obtida em SAP2000.

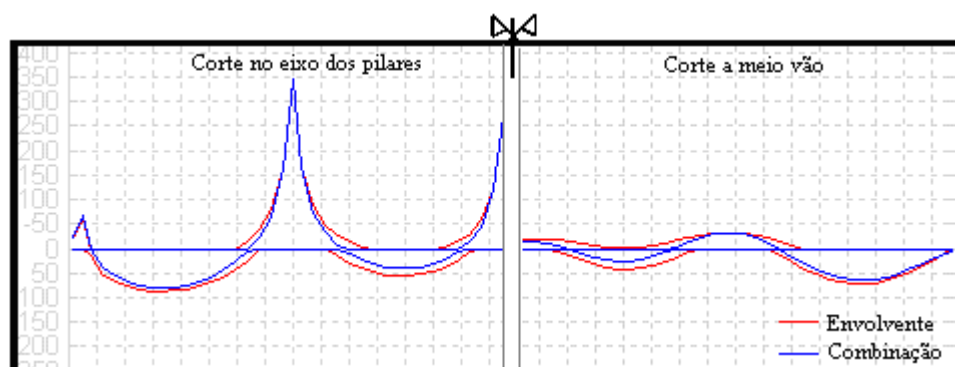


Figura 6.6 - Corte longitudinal (Momentos flectores segundo a direcção xx) no eixo dos pilares e a meio vão.

A envolvente de esforços, como o próprio nome indica contém todos os valores máximos registados, para todas as combinações de acções como se pode verificar na Figura 6.6. As aplicações de cálculo, é que fazem o tratamento dos esforços, conseguindo assim a sua representação com o apoio do Matlab.

6.4.1.2. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE CÁLCULO

O método de cálculo que se utiliza tem influência nos resultados que se obtém, sendo o método de Wood-Armer o método em que resulta maior quantidade de armadura, porque é tido em conta o efeito do momento torsor, procedimento que é mais correcto.

Faz-se a comparação de alguns resultados obtidos para este exemplo, para a combinação de acções em que todos os vãos são carregados de igual forma com a carga máxima.

Em primeiro lugar, compara-se os resultados obtidos com a aplicação desenvolvida para os casos regulares, “Laje_alinh_NLN”.

Na Figura 6.7 e na Figura 6.8 mostram-se os resultados obtidos sem a consideração dos momentos torsores relativos à representação das quantidades de armadura, visualizados no SAP2000, constatando-se que são bastante satisfatórios. Distinguem-se nitidamente as diferentes faixas de armadura e as suas quantidades podem ser vistas na escala de cores apresentado pelo programa, ou clicando sobre o ponto e visualizando o seu valor preciso. Há uma pequena transição de cores na mudança de faixas que se deve à capacidade de representação gráfica do programa, da transição de quantidades de armadura. Esta transição é inevitável, mas apenas se processa dentro do elemento finito, porque todos os nós têm uma quantidade de armadura atribuída. Verifica-se aqui, a razão que levou a fixar as dimensões máximas da malha. Malhas com maiores dimensões implicavam resultados de esforços menos precisos e na representação da armadura, apenas existiria um nó por faixa de armadura.

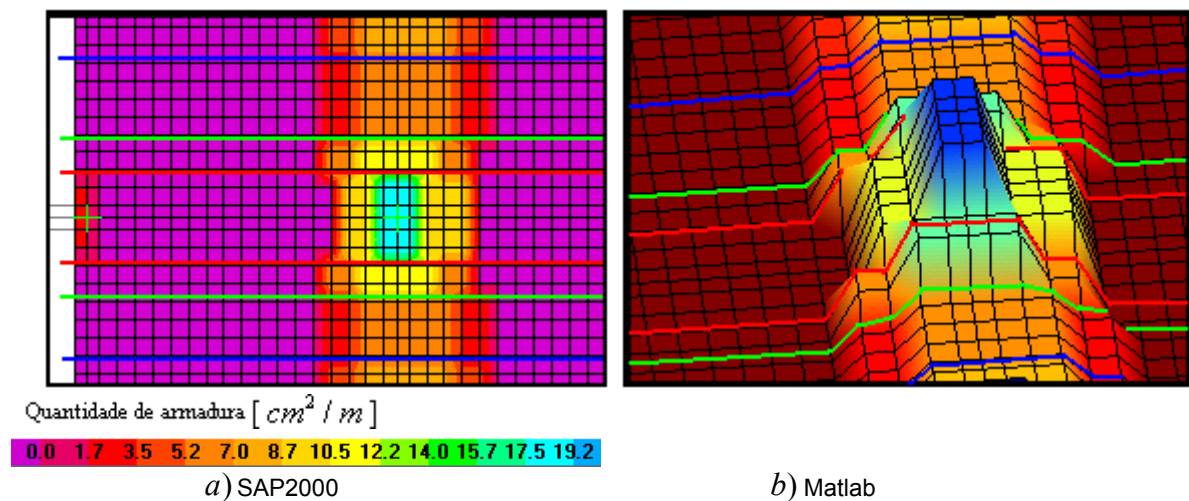


Figura 6.7 - Representação da armadura superior por faixas na direcção xx , sem a consideração dos momentos torsores.

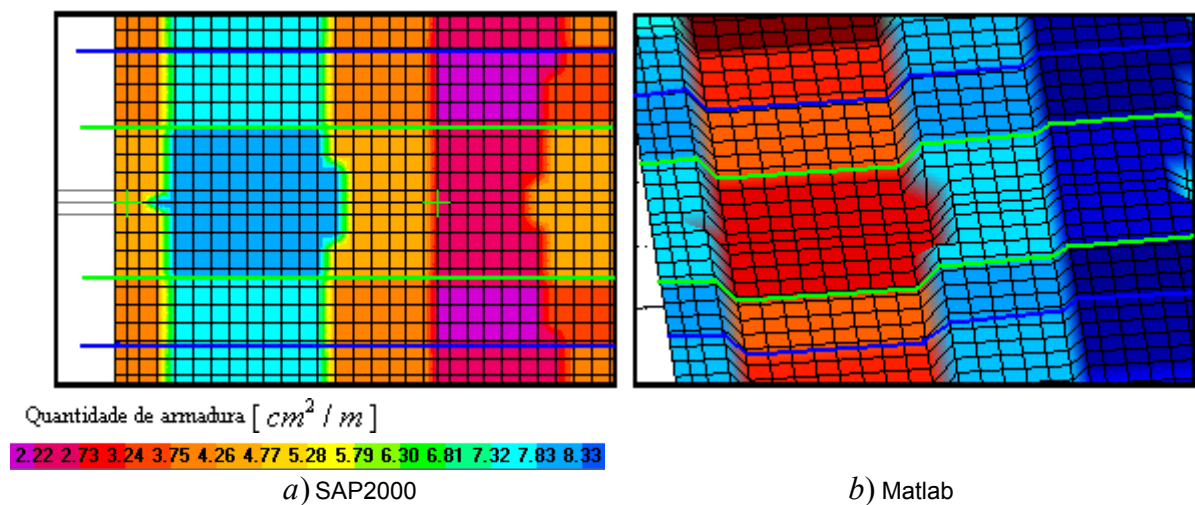


Figura 6.8 - Representação da armadura inferior por faixas na direcção xx , sem a consideração dos momentos torsores.

Apresentam-se na Figura 6.9 e na Figura 6.10, os resultados obtidos com a consideração dos momentos torsores através do método de Wood-Armer.

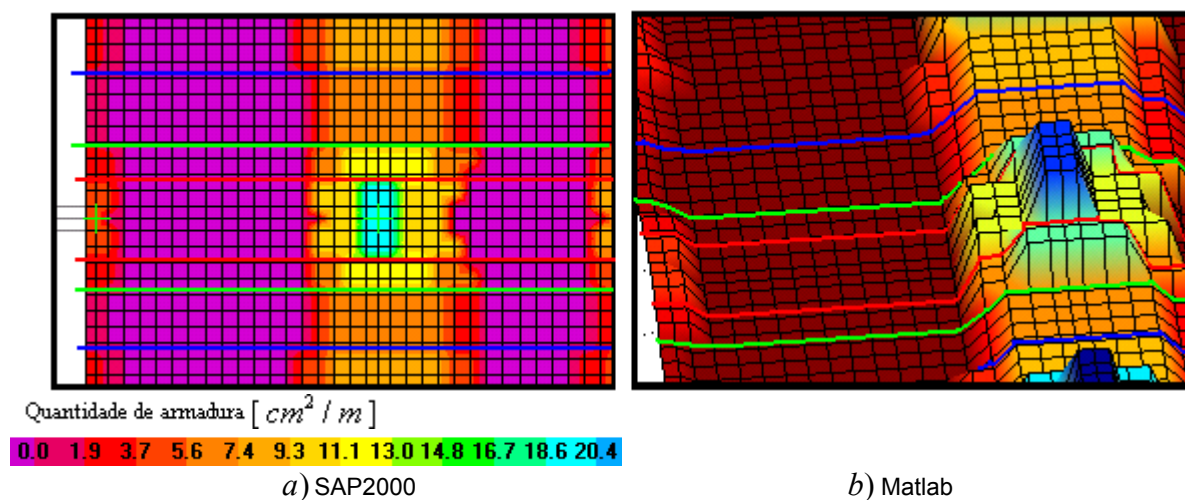


Figura 6.9 - Representação da armadura superior na direcção xx , por faixas, obtida pelo método Wood-Armer.

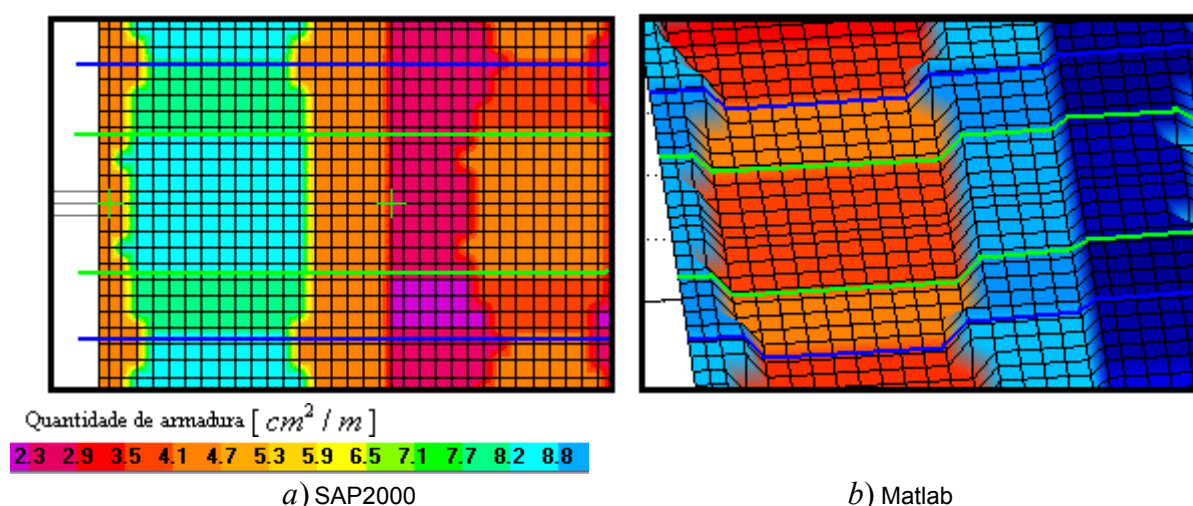


Figura 6.10 - Representação da armadura inferior na direcção xx , por faixas, obtida pelo método Wood-Armer.

Comparando com os resultados anteriores verifica-se um ligeiro prolongamento da quantidade máxima de armadura, quando se considera o efeito do momento torsor. Também se realça que devido à distribuição dos momentos torsores, e o consequente efeito favorável ou desfavorável do mesmo, a distribuição da armadura deixa de ser simétrica em torno do pilar.

Pode verificar-se que é feito o escalonamento da armadura em termos de área de aço, em cada faixa, dependendo da distribuição dos momentos actuates.

Este exemplo permite verificar a redução obtida no valor dos momentos flectores negativos na zona dos pilares (redução dos “picos” de momentos flectores), bem como, e apesar da regularidade da estrutura, a maior quantidade de armadura obtida nos pórticos vizinhos de bordo.

Apresentam-se na Figura 6.11 a comparação dos momentos resistentes obtidos pela aplicação de cálculo, face ao momento actuante de uma combinação.

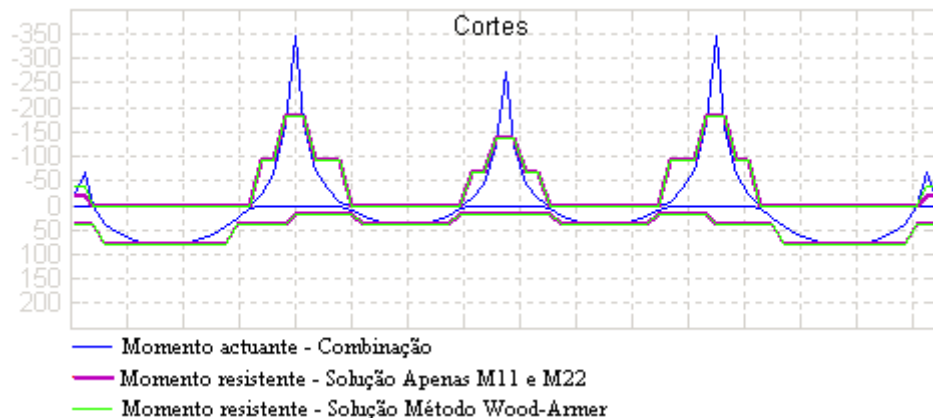


Figura 6.11 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na combinação [kN.m/m].

Na Figura 6.12 compara-se o momento actuante obtido pela envolvente de esforços comparado com os momentos resistentes, obtidos com e sem a consideração dos momentos torsores.

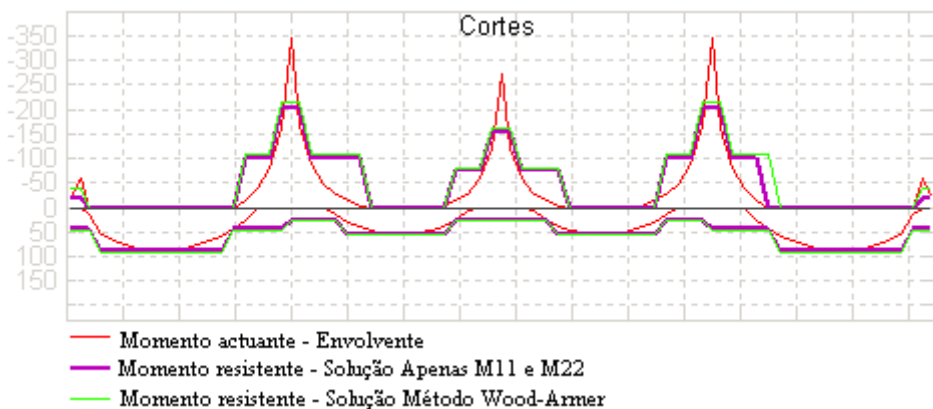


Figura 6.12 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na envolvente [kN.m/m].

O momento torsor nos alinhamentos dos pilares é reduzido ou quase nulo, como é de esperar, tendo em conta que a deformação do vão sobre o alinhamento dos pilares ocorre principalmente numa direcção.

À medida que nos aproximamos do centro dos vãos da laje, o momento torsor revela-se mais influente, provocando um agravamento considerável do momento flector nas direcções principais. As zonas mais críticas de momentos torsores, são as zonas intermédias entre os alinhamentos dos pilares e o centro dos vãos, ou seja, as zonas compreendidas entre $1/8$ e $1/4$ do vão. Este facto verifica-se neste caso, apesar de ser uma laje totalmente simétrica, como se pode constatar pela Figura 6.13 e Figura 6.14.

Mostra-se na Figura 6.13 e na Figura 6.14 os cortes do diagrama de momentos, a meio vão da laje, correspondendo a primeira à combinação de acções, e a segunda à envolvente de esforços.

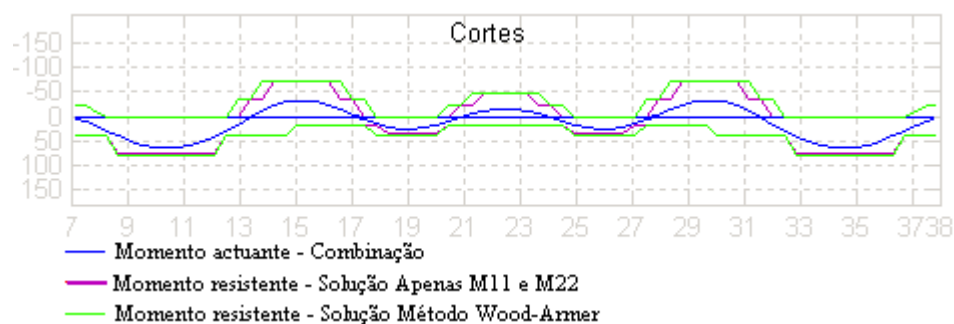


Figura 6.13 - Corte longitudinal a meio vão (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na combinação [kN.m/m].

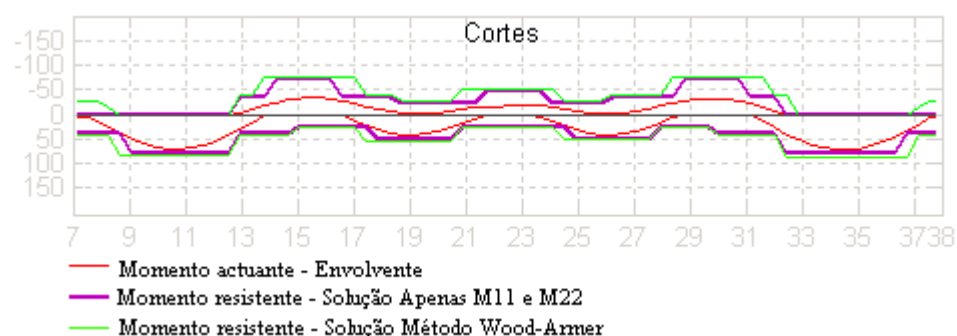


Figura 6.14 - Corte longitudinal a meio vão (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com base na envolvente [kN.m/m].

Quando se faz o cálculo de armadura baseado em envolventes de esforços verifica-se um aumento considerável dos comprimentos da armadura a dispor na face superior, tendo até zonas em que não há dispensa total da armadura superior. Comprova-se, assim, a importância da consideração de todos os casos de carga regulamentares, para efectuar o dimensionamento de lajes fungiformes.

Na Figura 6.15 comparam-se os resultados obtidos pelo método de Wood-Armer para a combinação de acções com todos os vãos carregados e para a envolvente de combinações de acções.

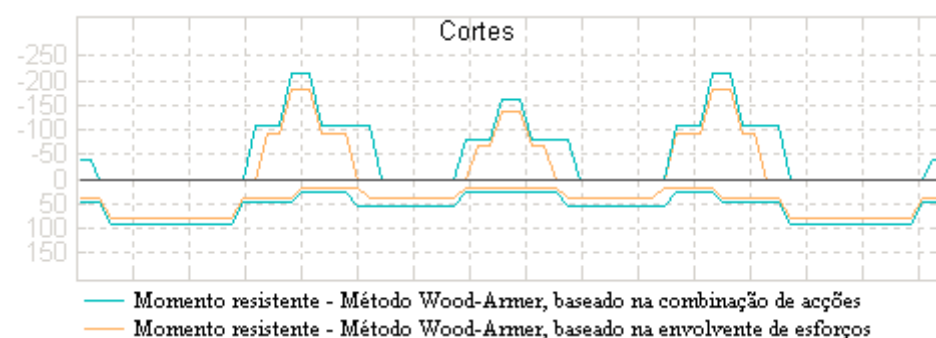


Figura 6.15 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) - Momentos resistentes calculados com o método de Wood-Armer [kN.m/m].

Como se pode verificar, projectar a partir da envolvente de esforços é o procedimento mais adequado, tirando assim proveito das capacidades dos programas de cálculo para definir a envolvente de todas as combinações. Desta forma obtém-se um aumento da quantidade de armadura, que se pode verificar pelo aumento do momento resistente (ver Figura 6.15), e uma translação considerável do diagrama de momentos, o que implica um prolongamento da armadura.

Quando se usa a aplicação “Laje_geral_NLN” as quantidades de armadura apresentadas são apenas as quantidades de armadura necessárias e não são dispostas por faixas. Para o mesmo exemplo apresenta-se alguns dos resultados obtidos. A análise dos valores obtidos usando diferentes tipos de casos ou diferente método de cálculo, é em tudo idêntica à análise dos valores obtidos pela aplicação “Laje_alinh_NLN”.

Aquando da utilização da aplicação “Laje_geral_NLN” obtêm-se diagramas de quantidades de armadura necessária em cada ponto, como se pode constatar pela análise da Figura 6.16 e da Figura 6.17.

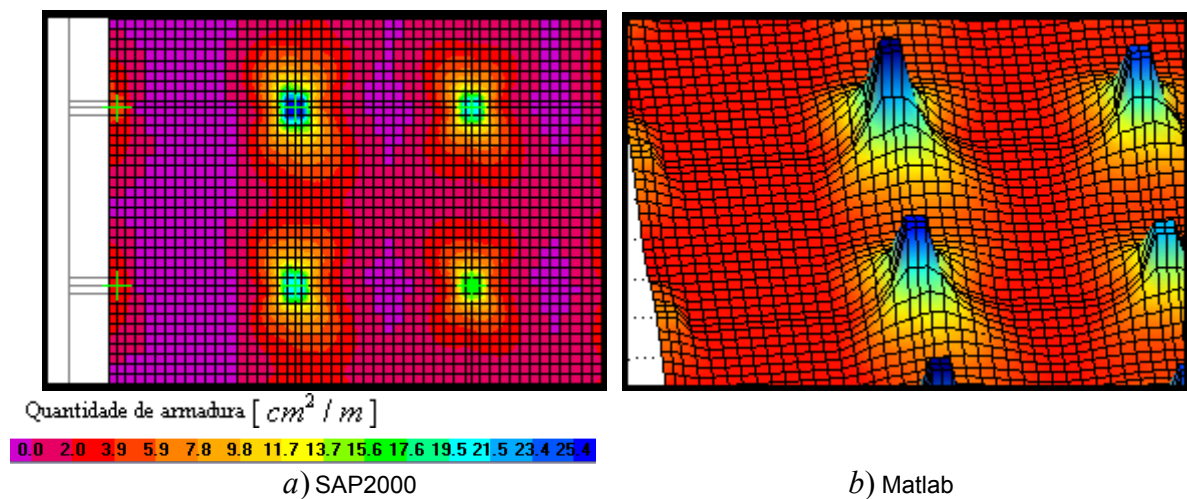


Figura 6.16 - Representação da armadura superior necessária na direcção xx , obtida pelo método Wood-Armer.



Figura 6.17 - Corte longitudinal no eixo dos pilares centrais (direcção xx) – obtido com a 2ª aplicação [kN.m/m].

As quantidades de armadura obtidas correspondem a armadura necessária para fazer face aos momentos em cada zona da laje. Esta aplicação faz o tratamento das zonas de ligação laje-pilar, aplicando a metodologia descrita no capítulo 5.10. Compete ao engenheiro, tendo em conta as

quantidades de armadura necessárias, fazer a melhor distribuição das soluções de armadura, de modo a obter soluções de projecto facilmente executadas.

Neste exemplo considera-se não se justificar a utilização da segunda aplicação de cálculo, aplicação geral, tendo em conta que ele é perfeitamente resolvido pela primeira aplicação de cálculo. A aplicação de cálculo geral foi desenvolvida para tratar casos mais irregulares, como por exemplo casos com grandes aberturas, ou com possibilidade de existência de paredes de apoio da laje.

No anexo 1, apresentam-se os mapas de armaduras completos para este exemplo e a comparação tridimensional dos diagramas resistentes com os diagramas actuantes.

6.4.1.3 – COMPARAÇÃO COM O MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES

Com o intuito de realçar a razoabilidade dos resultados obtidos com a utilização da metodologia proposta face aos resultados que se obtém com o uso do método dos pórticos equivalentes, faz-se uma pequena comparação das quantidades de armadura obtidas. Para efectuar esta comparação considera-se a combinação em que a laje é uniformemente carregada com uma carga de $20 \text{ kN} / \text{m}^2$. Também se pretende mostrar que os resultados que se obtém são adequados ao pórtico equivalente em causa, podendo ser um pórtico central, pórtico vizinho de bordo ou pórtico de bordo. Com o uso do método dos pórticos equivalentes obtemos as mesmas quantidades de armadura para o pórtico central e o pórtico vizinho de bordo. Usando a metodologia proposta obtém-se quantidades de armadura adequadas, função do nível de esforços verificados em cada pórtico e em cada uma das faixas da laje. Com este método obtemos quantidades de armadura diferentes no pórtico central e no pórtico vizinho de bordo, uma vez que os respectivos esforços são diferentes.

Na Figura 6.18a), ilustra-se o pórtico equivalente tipo, para a laje do exemplo 1 e na Figura 6.18b) a divisão das faixas considerada para a aplicação da metodologia de análise proposta (ver capítulo 5.10).

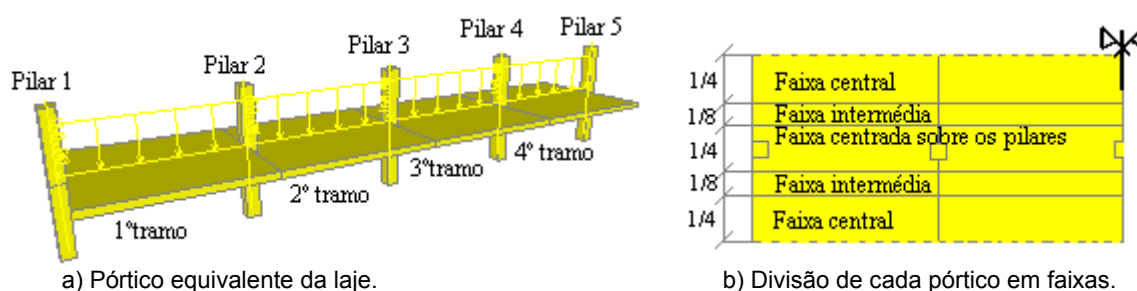


Figura 6.18 - Representação do pórtico equivalente tipo.

Como se trata de uma laje totalmente simétrica, torna-se desnecessário referir qual a direcção considerada, para a análise com método dos pórticos equivalentes (MPE). Na aplicação do método dos pórticos equivalentes adopta-se a distribuição da armadura pelas faixas de acordo com os limites estabelecidos no EC2, utilizando-se aqui os valores recomendados (ver Quadro 3.1). Para as armaduras superiores adopta-se a distribuição recomendada de acordo com o EC2 (ver Figura 3.3).

Na aplicação da metodologia proposta é desprezada a influência do momento torsor, para a obtenção dos valores presentes no Quadro 6.1 e no Quadro 6.2, ou seja, é escolhida a opção “Apenas M11 e M22”, na utilização da aplicação de cálculo desenvolvida (“Laje_alinh_NLN”).

Os resultados obtidos pela utilização da metodologia de análise proposta são apresentados no Anexo 1 (Figura A1.1 e Figura A1.2), assim como a designação dos diferentes pórticos (pórtico central, pórtico vizinho de bordo e pórtico de bordo).

No Quadro 6.1 apresenta-se as quantidades de armadura superior, obtidas pelo método dos pórticos equivalentes e com a utilização da metodologia de análise proposta. Mostra-se também os valores obtidos para os diferentes pórticos da laje (pórtico central, pórtico vizinho de bordo e pórtico de bordo), uma vez que os esforços são obtidos pelo método dos elementos finitos e consequente cálculo de armadura tendo em conta o nível de esforço que se verifica em cada faixa.

Quadro 6.1 - Quantidades de armadura superior nas diferentes faixas de laje [cm^2 / m].

		Faixa centrada sobre os pilares		Faixa intermédia		Faixa central	
		Pilar 2	Pilar 3	Pilar 2	Pilar 3	Pilar 2	Pilar 3
MPE	Pórtico Interior	18.81	17.53	9.4	8.76	4.7	4.38
Metodologia proposta	P. Central	19.34	14.68	11.1	7.95	5.58	3.48
	P. Vizinho bordo	23.07	18.27	13.02	9.87	6.13	4.5

Analisando o Quadro 6.1 verifica-se que para o pórtico central, principalmente as zonas centrais da laje (nomeadamente pilar 3 e pilar 4), usando a metodologia proposta obtêm-se quantidades de armadura em geral um pouco inferiores às que se obtêm pelo método dos pórticos equivalentes.

Nos pórticos vizinhos de bordo obtêm-se em geral quantidades de armadura um pouco superiores às quantidades de armadura obtidas pelo método dos pórticos equivalentes.

Quando se analisa os resultados obtidos para o pórtico de bordo, verifica-se grandes diferenças entre as quantidades de armadura obtidas pelo método dos pórticos equivalentes e as quantidades de armadura obtidas pela aplicação da metodologia de análise proposta, sendo estas últimas inferiores.

De forma análoga à análise feita para as armaduras superiores, faz-se a análise para as quantidades de armadura inferior procedendo ao cálculo das quantidades de armadura e apresentam-se os resultados obtidos no Quadro 6.2. Repare-se que de acordo com a metodologia de análise proposta (ver capítulo 5.10.1), para as armaduras inferiores apenas são consideradas duas faixas de armadura diferentes por cada pórtico equivalente. O mapa de quantidades de armadura inferior está presente no Anexo 1 na Figura A1.2.

Quadro 6.2 - Quantidades de armadura inferior nas diferentes faixas de laje [cm^2 / m].

		Faixa centrada sobre os pilares e Faixa intermédia		Faixa central	
		1º Tramo	2º Tramo	1º Tramo	2º Tramo
MPE	Pórtico Interior	5.97	4.76	4.88	3.89
Metodologia Proposta	P. Central	7.52	3.86	6.64	2.95
	P. Vizinho bordo	8.13	4.44	7.00	3.49

Analisando o Quadro 6.2 de armaduras inferiores, verifica-se que para os vãos extremos de cada pórtico equivalente, neste caso 1º tramo e 4º tramo, se obtêm quantidades de armadura superiores utilizando a metodologia de análise proposta em relação às quantidades de armadura obtidas pelo método dos pórticos equivalentes. Nos vãos interiores os valores obtidos pelos dois processos de cálculo estão bastante próximos, verificando-se pequenas diferenças entre os diferentes tipos de pórticos.

Desta análise conclui-se que a metodologia de análise proposta conduz a quantidades de armadura superior e inferior adequadas face aos esforços de cada faixa. As variações de quantidades de armadura que se verificam são perfeitamente aceitáveis, tendo em conta que os esforços são um pouco superiores nos pórticos vizinhos de bordo em relação aos pórticos centrais e pórticos de bordo.

6.4.2. EXEMPLO 2 – LAJE IRREGULAR PARA APLICAÇÃO GERAL

Os casos de lajes irregulares são cada vez mais correntes, à medida que crescem as exigências das obras e o caminho para novas formas e o aparecimento de condicionantes arquitectónicas, fazem com que a segunda aplicação desenvolvida, seja bastante útil para projecto.

Para realçar a sua utilidade, gerou-se um exemplo de laje irregular a partir do exemplo anterior. O exemplo que aqui se trata, pretende mostrar como a aplicação de cálculo geral, conduz a bons resultados e funciona correctamente para casos irregulares. Situações mais correntes foram previstas, como por exemplo a existência de aberturas, de paredes de apoio, de bordos em consola e de bordos curvos. O exemplo consiste então na simulação de uma abertura de caixa de escadas no meio da laje, sendo os lados da abertura suportados por uma parede de betão armado. Cria-se também um lado circular em consola como se pode ver na Figura 5.27 e Figura 6.19.

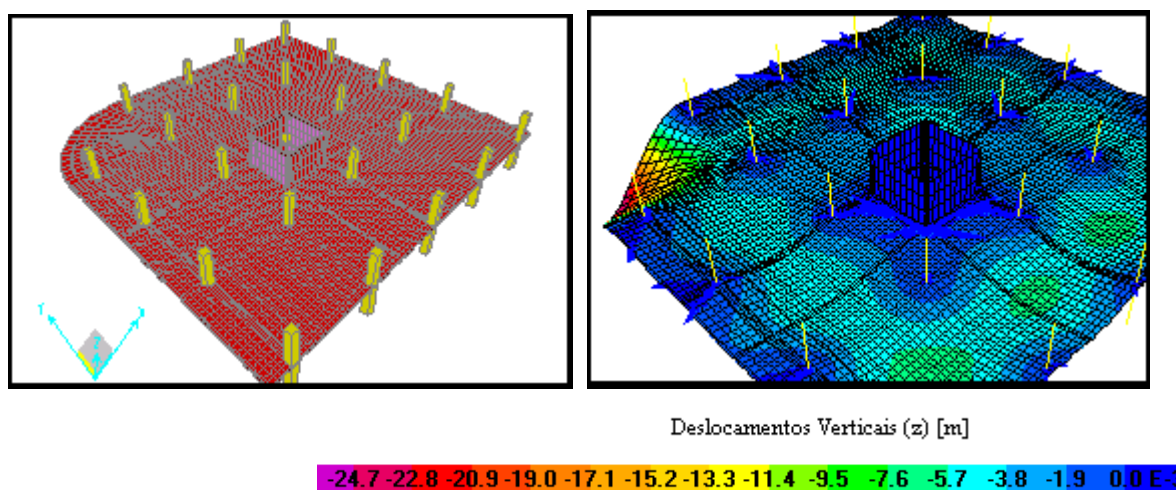


Figura 6.19 - Representação da laje e sua deformada envolvente (exemplo 2).

A modelação da zona de ligação laje-pilar é muito importante, tendo em conta a metodologia desenvolvida e o seu uso por parte da aplicação de cálculo. A área do pilar deve ser dividida em 4 elementos finitos e a malha deve ter dimensões de acordo com as dimensões máximas aconselháveis. Os resultados de quantidades de armadura apresentam-se no anexo 2.

Neste exemplo pode-se encontrar o caso de zonas de pilares com predominância dos momentos flectores negativos. Os pilares vizinhos do bordo circular apresentam um grande esforço de flexão, o que resulta em elevadas quantidades de armadura.

Estes casos devem ser analisados com mais atenção para que não sejamos conduzidos a erros ou a soluções de armadura exageradas. Possivelmente o erro poderá não se encontrar na modelação da estrutura nem na análise dos esforços e obtenção de quantidades de armadura, mas sim nas soluções estruturais adoptadas que podem conduzir a elevadas deformações, com valores até inaceitáveis.

7

CASO DE ESTUDO**APLICAÇÃO DA METODOLOGIA NO
PROJECTO DE UM PAVIMENTO**

A existência de ferramentas eficazes em projecto torna esta tarefa mais rápida e eficaz. Para grandes edifícios em que cada vez mais se adoptam geometrias irregulares, a aplicação da ferramenta desenvolvida torna-se vantajosa, necessitando-se apenas de uma análise atenta dos resultados obtidos e uma correcta interpretação. As metodologias e ferramentas desenvolvidas no âmbito deste trabalho tornam-se assim numa vantagem para o projecto de lajes fungiformes.

Para clarificar a utilização da metodologia desenvolvida e a sua aplicabilidade a qualquer caso, assim como as aplicações de cálculo desenvolvidas, utilizam-se numa situação de um projecto real de uma laje fungiforme, que reúne dificuldades de projecto.

Este projecto consiste numa laje fungiforme apoiada no seu interior em pilares e no seu contorno, em paredes de betão armado, muros de suporte, e em algumas vigas. Esta laje faz parte do projecto de um edifício com um parque de estacionamento subterrâneo. O piso em estudo é o piso -1, ou seja, a laje correspondente à cobertura da garagem, tendo um nível de cargas elevado devido ao peso de terras desta zona. A altura de solo existente sobre a laje é de cerca de 50cm, conduzindo assim a uma considerável carga na laje, que é apresentada no Quadro 7.1 como revestimentos. Para além dos revestimentos são consideradas as restantes acções, como o peso próprio e a sobrecarga de utilização.

Quadro 7.1 - Acções consideradas no cálculo da laje.

	Acções Piso -1	
	$e = 0.30cm$	$e = 0.50cm$
Peso Próprio	$7.5 \text{ kN} / \text{m}^2$	$12.5 \text{ kN} / \text{m}^2$
Revestimentos	$13 \text{ kN} / \text{m}^2$	$13 \text{ kN} / \text{m}^2$
Sobrecarga	$4 \text{ kN} / \text{m}^2$	$4 \text{ kN} / \text{m}^2$

Esta laje apresenta capitéis, quer na ligação aos pilares como em zonas de ligação a algumas paredes de betão armado. Este facto levanta dificuldades acrescidas no projecto, já que a espessura destas zonas é diferente da espessura corrente da laje, como se ilustra na Figura 7.1, na qual se apresenta a planta estrutural deste piso.

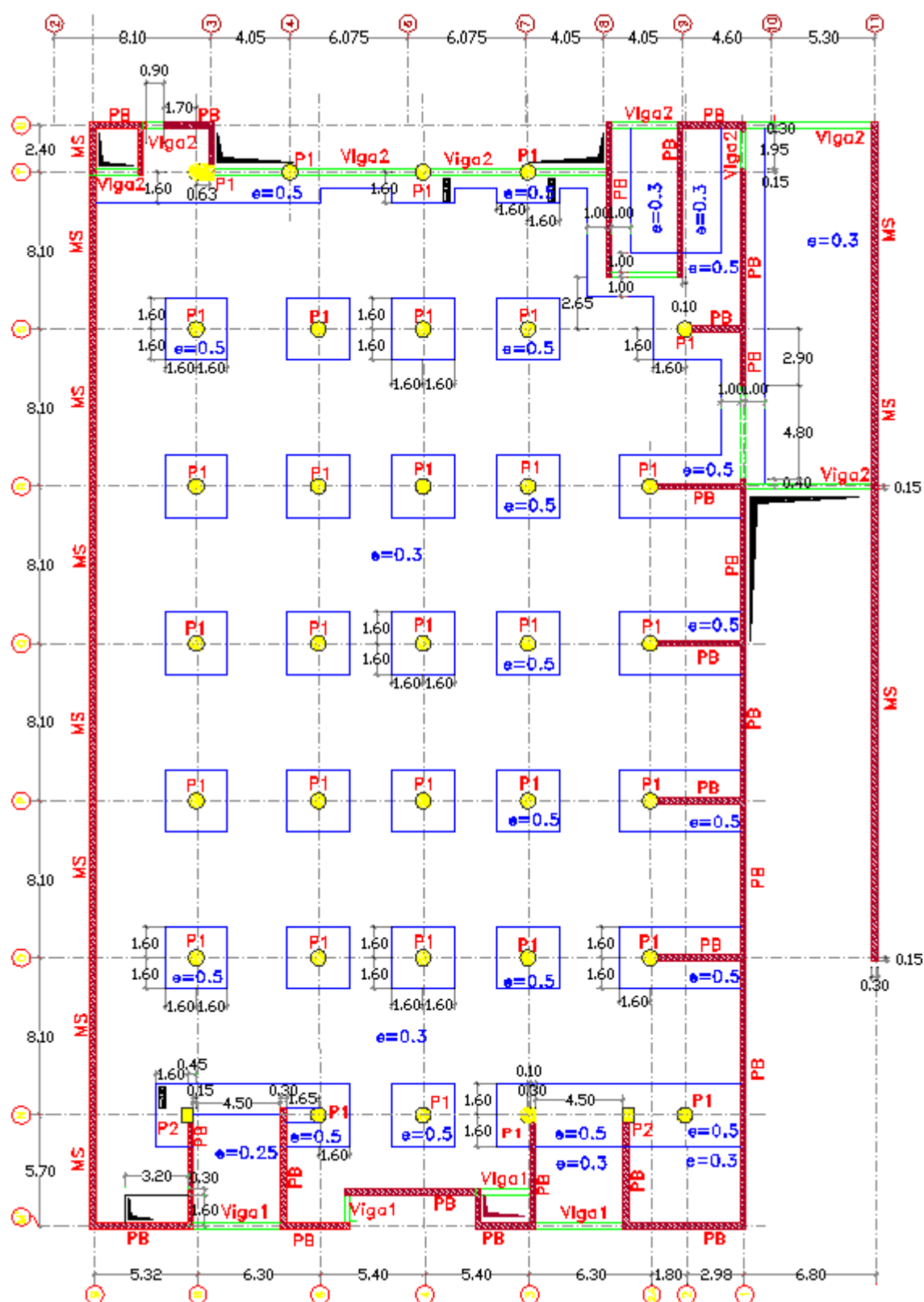


Figura 7.1 - Planta estrutural da laje do piso -1.

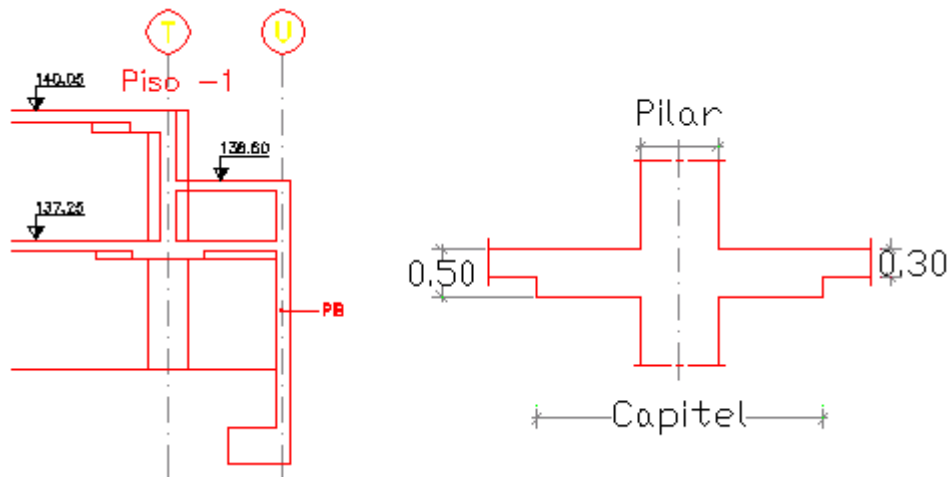


Figura 7. 2 - Corte da estrutura em que se insere o piso-1 e corte da ligação laje-pilar.

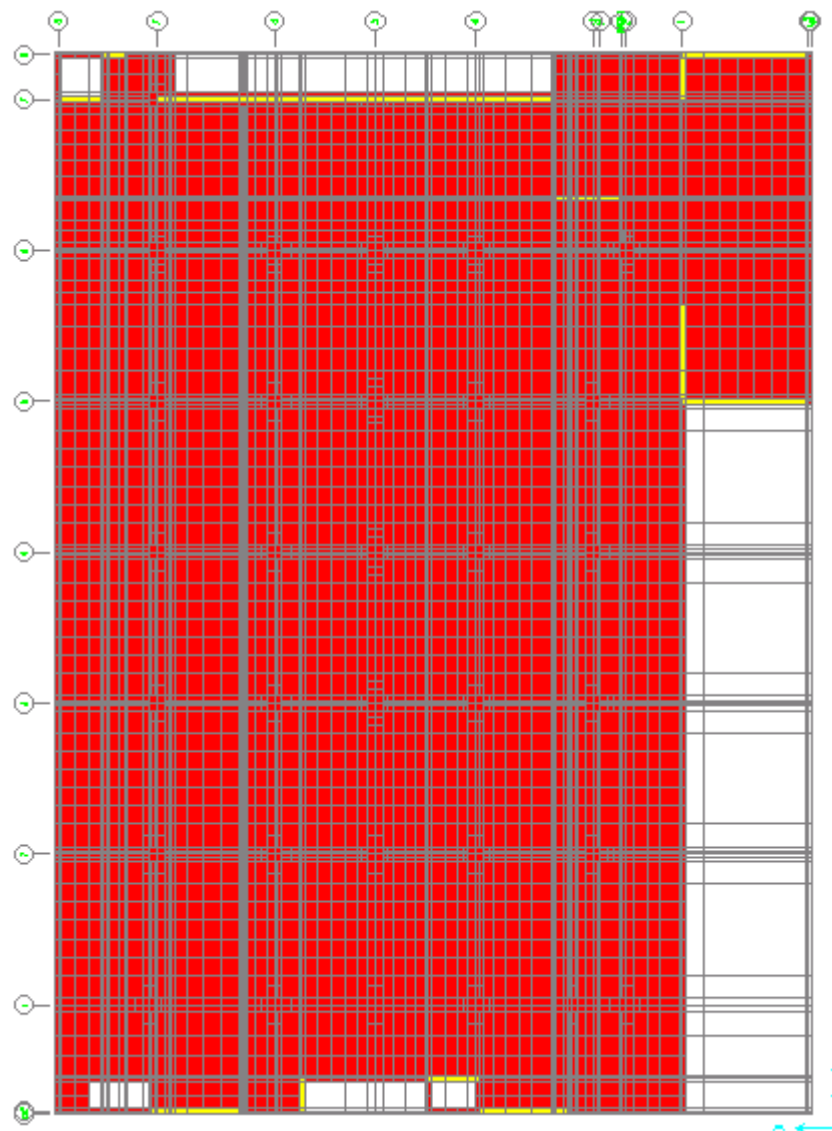


Figura 7.3 – Modelo de cálculo – malha de elementos finitos.

Como em qualquer estrutura, o modelo de cálculo deve ser o mais próximo possível da estrutura real. Como se pode verificar modela-se devidamente a laje, seguindo a metodologia apresentada no capítulo 5.10 e definindo exactamente cada pormenor da laje. Os pilares são modelados como elementos de barra ligados ao nó central da área de ligação laje-pilar. Na Figura 7.4 e na Figura 7.5 mostra-se as vistas superior e inferior do modelo, onde é possível perceber a geometria da laje e dos restantes elementos estruturais.

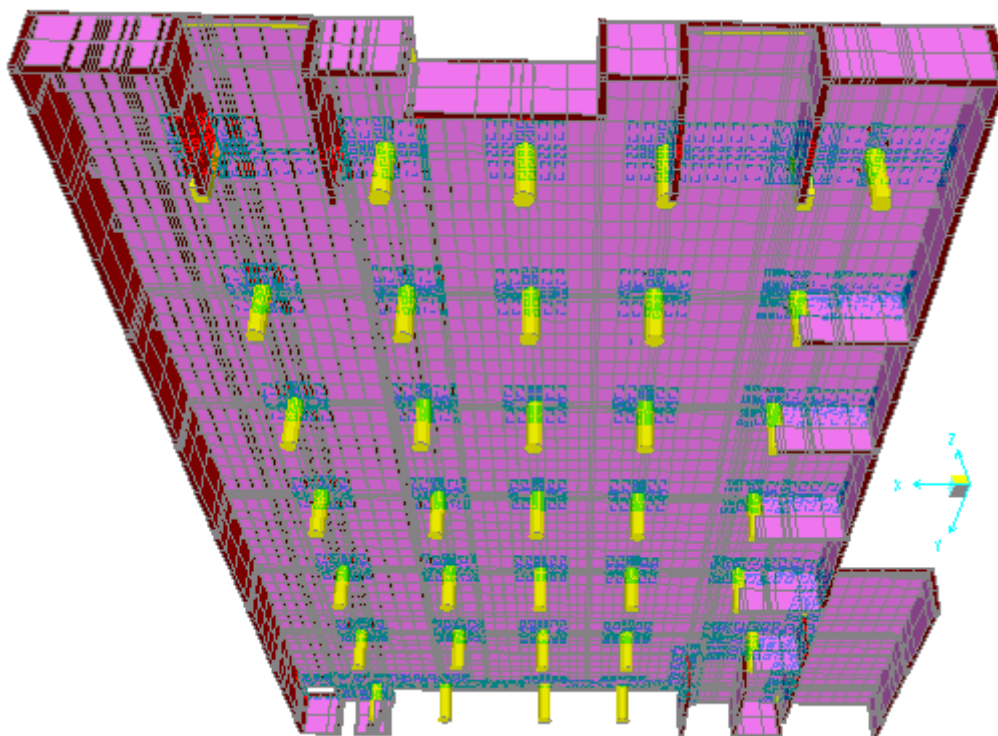


Figura 7.4 - Modelação no programa de cálculo – Vista tridimensional Inferior.

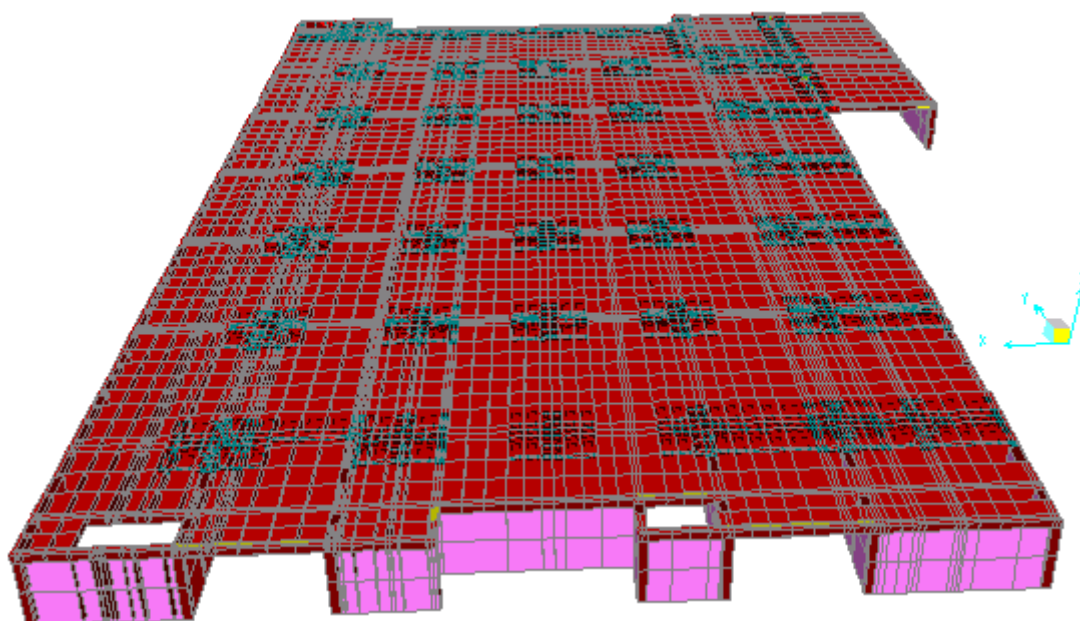


Figura 7.5 - Modelação no programa de cálculo – Vista tridimensional Superior.

As paredes de betão armado e a laje são modelados com elementos casca, para que seja possível a contabilização dos seis graus de liberdade e a respectiva interacção com a restante estrutura. As vigas são modeladas tal como os pilares com elementos de barra. Apresenta-se no Quadro 7.2 as características dos elementos estruturais considerados no modelo.

Quadro 7.2 - Resumo das características dos elementos estruturais do caso em estudo.

Elemento estrutural	Secção
Pilar (P1)	diâmetro = 0.80 m
Pilar (P2)	0.60×0.80 m
Viga 1	0.30×0.30 m
Viga 2	0.30×0.50 m
Muro de Suporte (MS)	espessura = 0.30 m
Parede de Betão Armado (PB)	espessura = 0.30 m
Laje (zona corrente)	espessura = 0.30 m

Na análise desta laje, foram consideradas as combinações de acções para dimensionamento em estados limites últimos.

$$p_{sd} = 1.35 \times (pp + rev) + 1.5 \times Q \quad (7.1)$$

Tirando proveito das capacidades do programa de cálculo, foram adoptados vários casos de carga, considerando alternância de sobrecarga, quer alternando os painéis de laje em xadrez, quer alternando os vãos definidos segundo os alinhamentos. Reduz-se assim todos os casos de carga a uma envolvente, que será considerada para o cálculo das quantidades de armadura.

No projecto desta laje, encontra-se uma limitação devida à versão do programa usada. A versão usada limita a exportação de dados de elementos de casca, ou seja, a exportação dos valores de esforços está limitada ao número de linhas existentes no Excel. Esta situação é facilmente ultrapassada nas novas versões do programa de cálculo, que acompanhando a evolução do Excel, pode perfeitamente estender esse limite muito mais que dez vezes o limite aqui encontrado. Por este facto, fez-se uma modelação da laje, em que os elementos finitos da laje não obedecem às dimensões de malhas máximas aconselháveis. A dimensão da laje é tal que implica a criação de elementos finitos com cerca de 1/8 do vão da laje. Este facto foi devidamente analisado, fazendo um modelo em que as malhas respeitam as dimensões máximas aconselháveis, e verificando que as diferenças de resultados em termos de momentos flectores não variam mais que 5%. Pode-se assim prosseguir a resolução do caso de estudo, sabendo os resultados obtidos são bastante aceitáveis.

Contudo para uma eficaz aplicação da metodologia desenvolvida, realiza-se um refinamento da malha de elementos finitos em torno da área de ligação laje-pilar, para que estes elementos obedeçam às dimensões máximas aconselháveis. Assim o modelo da estrutura conseguido permite a perfeita aplicação da metodologia desenvolvida, como também o uso da aplicação de cálculo de pós-processamento que se desenvolveu, presente no capítulo 6.

Este exemplo é muito bom, para se realçar as capacidades das aplicações de cálculo desenvolvidas, desde a espessura variável devida à presença de capitéis, aberturas, malha um pouco irregular de pilares, até à existência de vigas e paredes de apoio da laje. O uso da aplicação de cálculo “Laje_alinh_NLN” preparada para casos de pilares com alinhamentos definidos, apenas resolve a situação central da laje, já que a laje em todo o seu contorno apresenta irregularidades e diferentes situações de apoio. Tira-se então, proveito das capacidades da aplicação de cálculo geral,

“Laje_geral_NLN”, que resolve qualquer situação, fazendo o devido tratamento dos esforços nas zonas de pilares e paredes.

No capítulo 6, foram salientadas as diferenças nas opções escolhidas na aplicação de cálculo, fazendo-se então o cálculo das quantidades de armadura para esta laje, pela aplicação do método de Wood-Armer (ver Figura 7.6, Figura 7.7, Figura 7.8 e Figura 7.9).

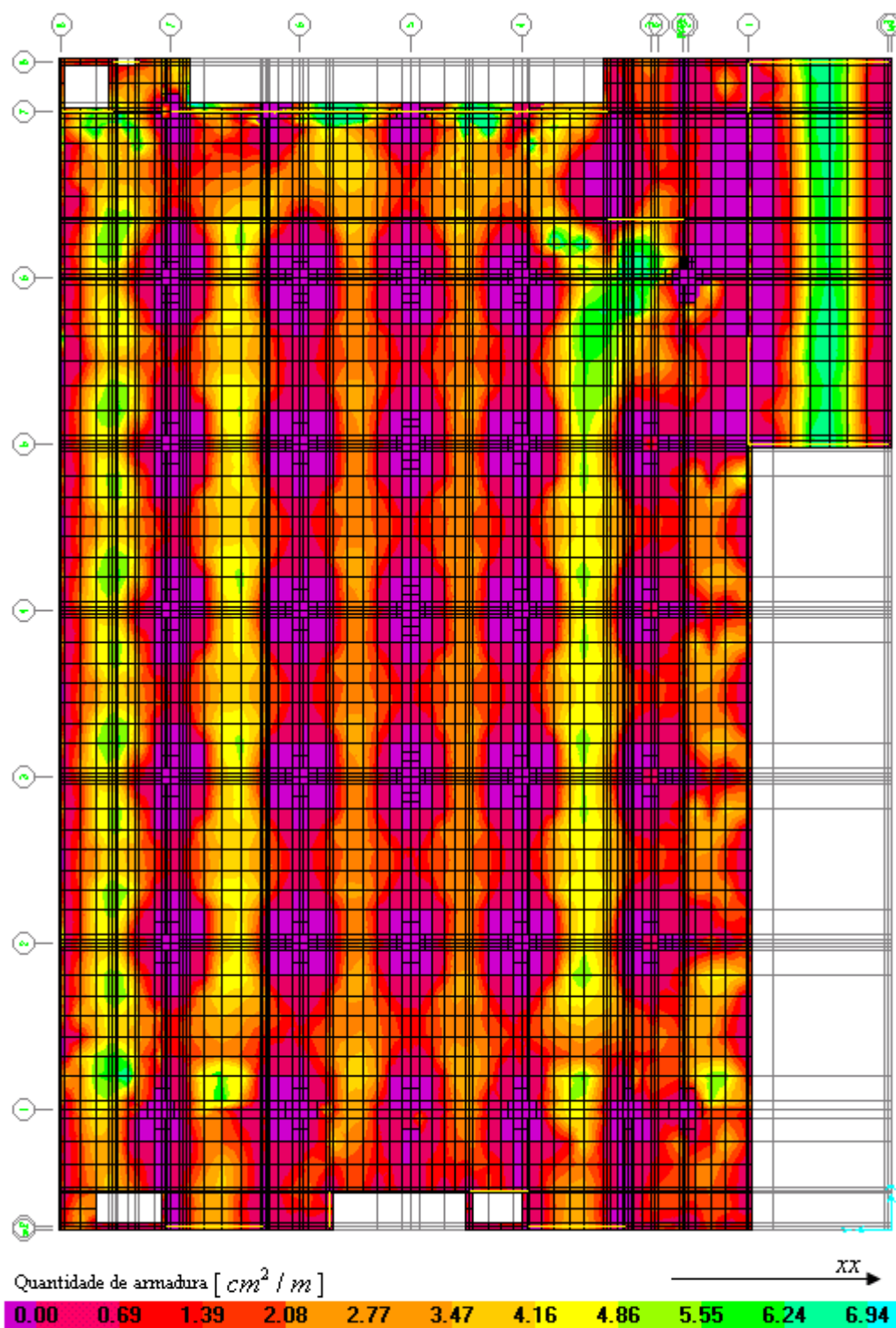


Figura 7.6 - Armadura inferior, direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer.

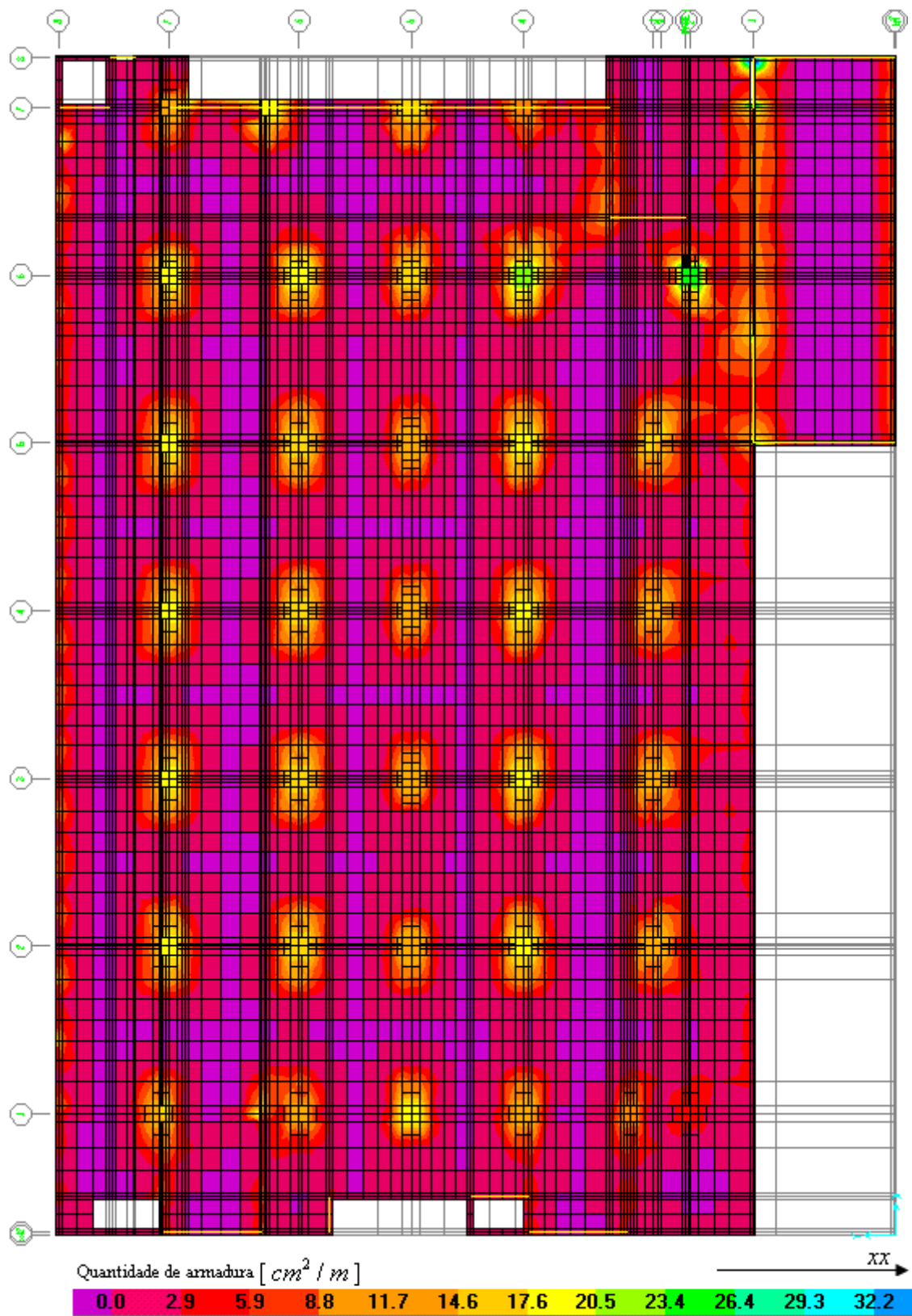


Figura 7.7 - Armadura superior, direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer.

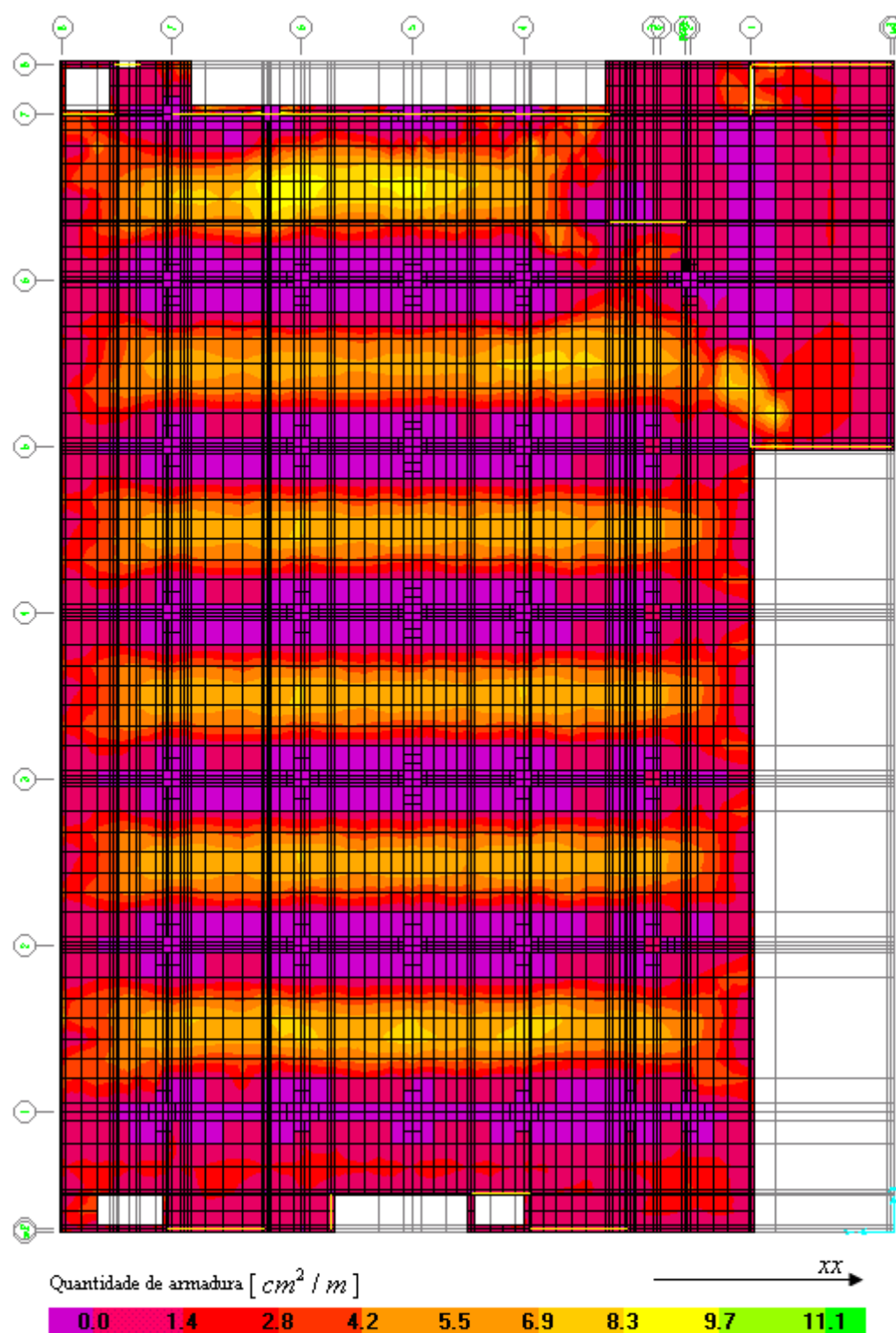


Figura 7.8 - Armadura inferior, direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer.

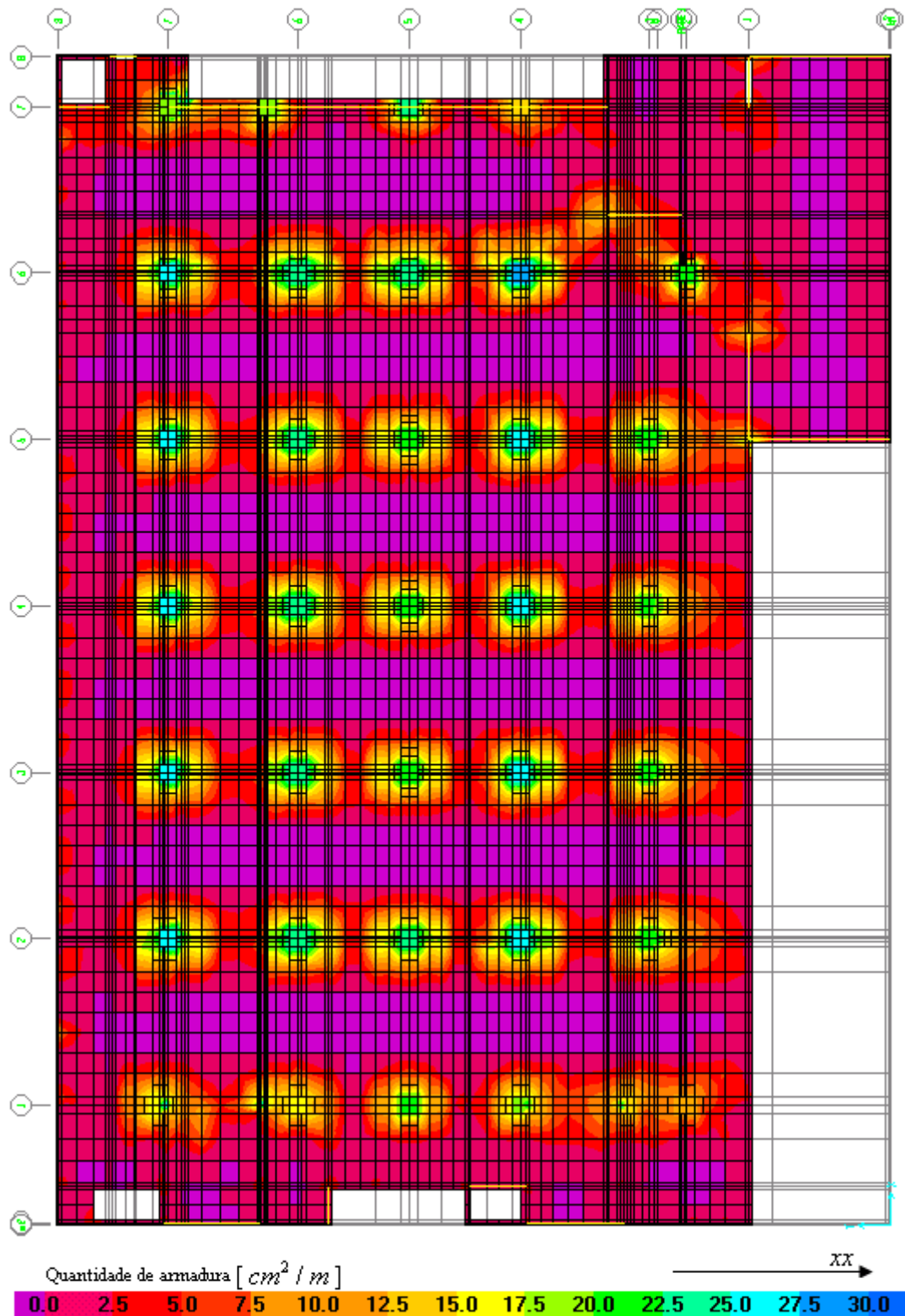


Figura 7.9 - Armadura superior, direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer.

Da Figura 7.6 à Figura 7.9, estão presentes as quantidades de armadura superior e inferior em ambas as direcções, calculadas com a ferramenta auxiliar de cálculo. Consegue-se assim rapidamente verificar qual a quantidade de armadura necessária em cada ponto e a respectiva localização.

Neste trabalho não se contempla a transformação da quantidade de armadura em soluções de varão, já que esta tarefa não é contemplada neste trabalho, mas o utilizador que desta metodologia tire proveito, sabe com certeza fazer. Neste caso, e para evidenciar os resultados, principalmente para a armadura superior nas zonas de pilar, faz-se uma pequena referência às soluções de varão mais condicionantes que se utilizariam nesta laje.

Por exemplo na zona central da laje a quantidade armadura inferior a meio vão segundo a direcção xx , ronda os $5 \text{ cm}^2 / m$, o que conduz a uma solução de $\phi 12 / 0.20$. Quanto à armadura superior sobre os pilares centrais da laje, ronda os $20 \text{ cm}^2 / m$, que conduz a $\phi 20 / 0.15$. Estas soluções de armadura são bastante adequadas, face aos esforços existentes na laje.

Repara-se também em pequenas concentrações de armadura nos pontos de ligação das vigas com os pilares ou paredes, que são perfeitamente aceitáveis, já que são zonas de esforços concentrados e de transmissão de esforços para os elementos estruturais inferiores.

Como se pode verificar, os resultados obtidos com as aplicações de cálculo são uma mais valia para a rapidez e eliminação de erros no tratamento de esforços por parte do projectista.

Finalmente, lembra-se que cabe ao projectista verificar ainda as condições do EC2 no que diz respeito a armaduras mínimas a dispor na laje, comprimentos de amarração e dispensa de armaduras, e ainda muito importante, o momento máximo negativo que é possível transmitir aos pilares tendo em conta a largura efectiva da laje (ver capítulo 2.3.3).

8

CONCLUSÕES

ANÁLISE GERAL DOS RESULTADOS OBTIDOS, DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

A análise de lajes fungiformes pelo método dos elementos finitos revela-se um método adequado ao projecto de lajes de edifícios. Com as análises que se efectuaram e com os resultados que se obtiveram, o MEF revela-se um método de cálculo poderoso e transforma-se num método facilmente aplicável a qualquer laje fungiforme maciça, sem estratégias específicas de modelação.

Há uma grande diversidade de programas que permitem o cálculo de estruturas pelo método dos elementos finitos e existem vários tipos de elementos finitos implementados nos programas de cálculo, que quando utilizados produzem resultados um pouco diferentes. No programa SAP2000 que usa elementos finitos de 4 nós, encontram-se algumas diferenças relativamente a outros programas de cálculo, associadas ao tipo de elemento implementado, e que permitem obter melhores resultados. Tem-se então uma rápida convergência para os valores teóricos com o uso de funções de forma hierárquicas. Esta técnica é pouco utilizada, talvez pela dificuldade da sua implementação nos programas, mas conduz a uma mais rápida convergência observadas nos dois exemplos simples apresentados. Chega-se a ter convergência para as soluções teóricas quase tão rápida como com o uso de elementos finitos de oito nós. Este aspecto possibilita o uso de malhas com maiores dimensões sem perda da qualidade dos resultados e até uma compatibilização de malhas vizinhas com diferentes refinamentos.

Este método (MEF) por si só, é muito forte, no que respeita à rapidez de resolução quando implementado num programa de cálculo, conduzindo a valores com um erro aceitável comparado com soluções teóricas.

É definida a forma através da qual se podem gerar elementos finitos no programa SAP2000 para a análise de lajes finas ou de lajes espessas, sendo salientados os aspectos importantes na sua utilização. Este aspecto é bastante importante para se considerar ou não as deformações por corte, que em lajes espessas têm influência na deformação final da laje. A consideração da deformação por corte é desta forma aconselhável sempre que a espessura da laje ultrapassa os limites que a permitem classificar como laje fina. Em geral, considera-se que uma laje é espessa quando a relação vão/altura é menor que 10.

As soluções teóricas para o cálculo de deslocamentos e momentos flectores em lajes fungiformes são muito escassas [3][31][32]. No entanto, com as soluções existentes, foi possível avaliar as estratégias e

processos de modelação de lajes fungiformes maciças. De entre as várias formas de modelação testadas, a modelação do pilar com elementos finitos sólidos, revela-se a metodologia mais adequada à obtenção de bons resultados na zona do pilar. Contudo, a sua aplicação nos modelos estruturais, é mais demorada, torna os modelos mais pesados e o tempo de cálculo é maior devido ao peso computacional induzido pelos elementos sólidos. A leitura de esforços nos pilares é também difícil porque os programas de cálculo apresentam diagramas de tensões nos elementos sólidos e não os correntes diagramas de momentos e esforços axiais. Este tipo de procedimento implica a criação de pelo menos 2 modelos, para obter correctamente os vários tipos de comportamento. Análise em casos extremamente exigentes poderá justificar tais modelos.

A modelação da área do pilar com um módulo de elasticidade elevado, para simular o aumento de rigidez na zona de ligação laje-pilar é um procedimento inadequado, porque ao contrário do desejado (diminuição dos picos de momentos), a zona do apoio mais rígida faz aumentar os momentos nesta zona.

Recorre-se então, à metodologia mais tradicional que consiste na modelação do pilar como elemento barra (ou com um apoio) ligada(o) ao nó central da área do pilar. Processo este, em que se obtém os picos de momentos flectores, no centro da área do pilar, mas avaliando os momentos flectores nas faces obtemos valores aceitáveis para o dimensionamento das armaduras da laje.

Pela análise efectuada, desenvolveu-se uma metodologia de cálculo e de tratamento dos esforços obtidos na zona do pilar, desprezando os picos de momentos flectores, em que são tidos em conta apenas os valores obtidos nas faces do pilar. Consta-se que pilares com secção muito pequena provocam esforços mais elevados na zona de ligação laje-pilar, ou seja, há uma maior concentração dos esforços num único ponto. A metodologia desenvolvida assenta perfeitamente sobre este pressuposto. Em pilares com larguras de 0.20m, os momentos flectores são mais elevados resultando mais armadura.

Um aspecto muito importante é a modelação dos elementos de apoio da laje com a sua verdadeira dimensão em altura, para que a rigidez axial dos pilares e paredes seja contabilizada, para a obtenção das deformações e esforços reais da laje. A modelação de pilares de diferentes alturas por meio de apoios, não é uma solução adequada. Este aspecto tem especial interesse quando existem pilares com comprimentos diferentes, nos quais a deformação axial é diferente, influenciando os deslocamentos e consequentemente os esforços obtidos.

A metodologia desenvolvida revela-se bastante útil e prática para dimensionamento das armaduras da laje. Foram definidos pontos específicos para a leitura dos esforços do programa de cálculo, permitindo a rápida selecção da informação relevante e chegar a soluções de armadura. A aplicação desta metodologia para casos correntes de lajes apoiadas sobre pilares alinhados dá-nos soluções de armadura por faixas. Consideram-se seis faixas diferentes em cada vão, de modo a optimizar o mais possível as soluções de armadura. Nos casos de pórticos centrais da laje esta divisão torna-se exagerada, mas no caso de pórticos de bordo, as soluções de armadura são mais adequadas e económicas. Compete ao engenheiro projectista definir se são necessárias tais faixas de armadura, e tendo em conta a variação da solução de armadura, reduzir ou não o número de faixas, dependendo também das suas larguras. Esta divisão por faixas é idêntica ao estabelecido no método dos pórticos equivalentes, no entanto, aqui os momentos flectores são obtidos pela análise da laje no seu todo por elementos finitos. Aliás por comparação de alguns resultados e tendo em conta os limites estabelecidos no EC2, notam-se alguns aspectos importantes.

Com a aplicação da metodologia em zonas centrais da laje, resultam quantidades de armadura, que se enquadram nos limites estabelecidos no EC2, para o método dos pórticos equivalentes. Quando se

aplica em pórticos vizinhos de pórticos de bordo, são obtidas quantidades de armadura um pouco superiores aos limites estabelecidos no EC2. Esta comparação fez-se com base em resultados de armadura obtidos pelo método dos pórticos equivalentes, calculando as quantidades de armadura máximas e mínimas de acordo com os limites percentuais máximos e mínimos de distribuição dos momentos pelas faixas.

Estes resultados dão confiança às metodologias desenvolvidas, já que estas conduzem a uma distribuição de armadura bastante otimizada.

Há sempre um compromisso entre as dimensões das malhas relacionado com o esforço computacional e a qualidade dos resultados obtidos. No que diz respeito a dimensões máximas das malhas de elementos finitos, deve-se usar as dimensões máximas aconselhadas neste trabalho que são baseadas numa divisão dos vãos em 1/16 do vão, com o devido ajuste dos valores. Estas dimensões revelam-se adequadas, quer para a obtenção de esforços e deslocamentos com aproximação e ainda, para o uso das aplicações de cálculo desenvolvidas.

Toda esta análise é desenvolvida em torno das lajes fungiformes maciças, contudo podem ser extrapoladas as metodologias, para outros tipos de lajes fungiformes, desde que devidamente modeladas, por rigidezes equivalentes.

No dimensionamento de armaduras de lajes fungiformes maciças deve ter-se em conta o efeito dos momentos torsores. Este efeito é bastante importante principalmente em torno de pilares de bordo e de canto e nos casos de lajes irregulares. Lajes irregulares são referidas como sendo lajes com disposição irregular dos pilares, contendo aberturas, apoiadas em paredes de betão armado e geometria irregular. Quando se trata de contabilizar os momentos torsores, a aplicação da metodologia fica mais morosa. Mesmo assim, como já são conhecidos todos os pontos relevantes, a aplicação do método que considera os momentos torsores, é direccionada apenas para estes pontos. O método de Wood-Armer é o método utilizado para a consideração dos momentos torsores, no caso de lajes, em que predominam os esforços de flexão. As aplicações de cálculo criadas permitem a sua aplicação de forma automática, evitando trabalho repetitivo e maçador.

As aplicações de cálculo desenvolvidas têm implementada a metodologia de análise desenvolvida neste trabalho e permitem o seu uso num vasto número de situações. Mostra-se assim que a metodologia desenvolvida é facilmente implementada num programa, com especiais vantagens quando se pretende a aplicação do método de Wood-Armer.

A fácil e rápida aplicação desta metodologia aos exemplos estudados, permitiu a análise de vários casos e a comparação dos resultados obtidos fazendo uso das suas opções de cálculo. Um ponto bastante curioso e importante, foi verificar que mesmo para lajes fungiformes regulares (exemplo 1), quando feita a devida combinação de acções e alternância de sobrecarga, como impõe a regulamentação (Eurocódigo 1), as zonas de dispensa praticadas através dos métodos tradicionais, revelam uma dispensa antecipada, para as armaduras superiores em algumas situações.

O uso das aplicações de cálculo desenvolvidas permite a obtenção de bons resultados, de maneira rápida e com menor probabilidade de ocorrência de erros de cálculo, aumentando a eficácia no projecto de lajes fungiformes maciças, como se pode constatar com a aplicação no caso de estudo.

Face ao acima exposto, pode concluir-se que foram atingidos os objectivos deste trabalho e mais importante foi o conhecimento adquirido com a sua realização. Pensa-se que este trabalho pode constituir um contributo útil para o projecto de lajes fungiformes maciças.

SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

No desenvolvimento das metodologias de análise de lajes fungiformes propostas não foram avaliados alguns aspectos que poderá interessar estudar:

- Analisar a influência da fendilhação e das deformações diferidas em lajes fungiformes, devidas principalmente a fenómenos de retracção e fluência, mas também a influência de tempos de execução muito rápidos e carregamento prematuro da estrutura;
- Avaliar a importância dos momentos torsores em lajes fungiformes, verificando se nos casos de lajes regulares pode ou não ser desprezado. Comparar resultados obtidos pelo método das 3 camadas com o método de Wood-Armer;
- Testar a eficácia da metodologia desenvolvida para as lajes nervuradas, procedendo às alterações necessárias. Focar especialmente os modos de modelação e simulação das rigidezes, para se obter o real comportamento da laje.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ashraf Habibullah, S.E.; M.Iqbal Suharwardy, S.E., Ph.D. “*Mesh Transitioning and Compatibility the Automated Line Constraint in ETABS & SAP2000*”, Computers & Structures, Inc., Berkeley, Califórnia, 2004.
- [2] Azevedo, Álvaro, F. M., “*Método dos Elementos Finitos*”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1ª Edição, Porto, Abril 2003
- [3] Barés, Richard, “*Tablas para el calculo de placas y vigas pared*” Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1981.
- [4] Battisti, J.C.F., “*Excel Avançado em 120 Lições*”, Curso de Excel Avançado em 120 Lições, (www.juliobattisti.com.br), Edição online
- [5] BS8110, “*Design of Reinforced concrete flat slabs to BS 8110*”, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA), revised edition, London, 1994.
- [6] Casino, Eduardo S., “*Interpretación de Modelos de Cálculo Estructural en Términos de Transdormaciones Geométricas: Aplicación al Diseño de Diques Hidráulicos*”, Thesis Doctoral, Madrid, Febrero 2007.
- [7] Castro, M. S. L., “*Elementos finitos para a Análise Elástica de Lajes*”, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Fevereiro 2001.
- [8] Castro, M. S. L., “*Análise de Lajes com Método das Diferenças Finitas*”, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Dezembro 2001.
- [9] Castro, M. S. L., “*Modelação de Lajes com elementos de Grelha*”, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2002.
- [10] Deaton, J. B., “*A Finite Element Approach to Reinforced Concrete Slab Design*”, A Thesis Presented to The Academic Faculty for the Degree Master of Science, Georgia Institute of Technology, August 2005.
- [11] Deaton, J. B.; Will, K.M., “*A Finite Element Approach to Reinforced Concrete Slab Design in GT STRUDL*”, GT STRUDL Users Group Meeting, Georgia Institute of Technology, June 2006.
- [12] Dieguez, A. B.; Costa, F. O., Basso, V. B. Q., “*Apostila para Utilização passo a passo do SAP2000, Versão 8.3.5, para Projectos de Edifícios de Concreto Armado*”, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, Dezembro 2004.
- [13] Duarte, H. “*Aspectos da Análise Estrutural das Lajes de Edifícios de Concreto Armado*”, Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 1998.
- [14] Enochsson, O.; Dufvenberg, P., “*Concrete Slabs Designed with Finite Element Methods – Modelling Parameters, Crack Analyses and Reinforcement Design*”, Master Thesis, Luleå University of Technology, Sweden, October 2001.
- [15] Eurocódigo 2, “*Projecto de Estruturas de Betão – Parte 1-1:Regras gerais para Edifícios*”, EN1992-1-1, Norma Europeia, Comité Europeu de Normalização, Abril, 2004.
- [16] Figueiras, J. A., “*Análise e dimensionamento de lajes fungiformes*”, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

- [17] Kennedy, G.; Goodchild, C. H., “Practical Yield Line Design : An Introduction to the practical use of Yield Line Theory in the design of economic reinforced concrete slabs, including examples of design of flat slabs, raft foundations and refurbishment”, The Concrete Centre, September 2004.
- [18] Lúcio, Válder J. G. *"Estruturas de Lajes Fungiformes Nervuradas sob acções Verticais e Horizontais"*, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil pela Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Março 1992.
- [19] Marchão, C., Appleton, J., *"Módulo 2 – Lajes de Betão Armado – Betão Armado e Pré-Esforçado II"*, Instituto Superior Técnico, 2006.
- [20] Martins, J. G., *"Betão Armado - Lajes Fungiformes"*, Série de Estruturas, Universidade Fernando Pessoa, 1ª edição, Porto, 2003.
- [21] Paultre, P.; Moisan, C., “Distribution of moments in reinforced concrete slabs with continuous drop panels (wood-Armer validation)”, Article, 2002.
- [22] Ramos, A. P., *"7 – Lajes Fungiformes – Introdução – Estruturas de Betão Armado II"*, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2006.
- [23] Ramos, A. P., *"10 – Lajes Fungiformes – Análise Estrutural – Estruturas de Betão Armado II"*, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2006.
- [24] Ramos, A. P.; Lúcio, V., *"11 – Lajes Fungiformes – Punçoamento – Estruturas de Betão Armado II"*, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2006.
- [25] REBAP, *"Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado"*, Decreto-Lei nº349-c/83, Porto Editora, Porto, 1984.
- [26] SAFE, *"Integrated Analysis and Design of Slab Systems – Design Manual"*, Version 8.0, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, August 2004.
- [27] SAP2000, *"Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures: Basic Analysis Reference"*, Version 7.0, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, November 1998.
- [28] SAP2000, *"CSI Analysis Reference Manual: For SAP2000, ETABS and SAFE"*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, October 2007.
- [29] Silva, M.A.F., *"Projeto e Construção de Lajes Nervuradas de Concreto Armado"*, Dissertação, Mestrado em Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.
- [30] Telford, T., *"Model Code 1990 – Design Code"*, Comité Euro-International du Béton, London, 1991.
- [31] Tesoro, Florentino Regalado, *"Los forjados reticulares: manual practico"*, CYPE Ingenieros, 1991.
- [32] Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S., *"Theory of plates and shell"*, McGraw- Hill Book Company, second Edition, 1959.
- [33] Wilson, Edward L., *"Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures – A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering"*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, Third Edition, January 2002.
- [34] Zienkiewicz, O. C.; Taylor R. L., *"The Finite Element Method: The Basis"*, vol.1, McGraw Hill, Fifth Edition, 2000.

ENDEREÇOS MULTIMÉDIA

www.comp-engineering.com – Adquirir documentação do programa SAP2000;
www.csiberkeley.com – Documentação e apoio utilizador de SAP2000;
www.csiberkeley.com/Support_WL_SAP.html - Vídeos formativos de SAP2000
www.structuraldesign.com.ar/S2k/sap.htm - Documentação com exemplos em SAP2000;
www.robobat.com – Tutoriais de Robot Millennium;
www.robotoffice.com/interface/44/ - Vídeos formativos online de Robot Millennium;
www.dec.fct.unl.pt/seccoes/S_Estruturas/Betao_armado_II - Documentação sobre lajes;
www.concretecentre.com – Documentação sobre lajes fungiformes e métodos de análise;
www.civil.ist.utl.pt – Documentação de lajes e métodos de análise
www.juliobattisti.com.br – Informação de programação em Visual Basic sobre o Excel
www.cxsccomputing.com/ - Apoio ao utilizador de SAP2000.

SOFTWARE USADO NA ELABORAÇÃO DO TRABALHO

- Matlab v7.4 (Disponibilizado na Faculdade) – Programação e apresentação gráfica;
- Microsoft Excel 2003 - Tratamento de dados e apresentação gráfica;
- Microsoft Word 2003 – Redacção do relatório;
- Robot Millennium v16.1 – (Disponibilizado na Faculdade) – Alguns exemplos de lajes para comparação;
- SAFE Trial version 8.0 – Alguns testes de metodologias de modelação;
- SAP2000 v10.1 (Disponibilizado na Faculdade) - Análise Elástica Linear de lajes;
- Microsoft Visual Basic v6.0 – Programação de aplicações de cálculo de armadura.

APOIO DE REPRESENTANTES DE SOFTWARE

CXScomputing – carlos.ferreira@cxsccomputing.com - Srº Carlos Ferreira e Srª Carla Dias
CSI Technical Support - support@csiberkeley.com – Srº Riaz Syed

Anexos

Anexo 1

MAPAS DE ARMADURAS, EXEMPLO 1

EXEMPLO 1

Os mapas de quantidades de armadura são o resultado mais interessante que se obtém das aplicações de cálculo. No capítulo 6 faz-se a análise dos resultados obtidos, onde se apresenta apenas parte dos mapas de armadura. Pretende-se com este anexo, mostrar o melhor possível, os mapas que se obtém e a sua visualização em SAP2000, fazendo uso das suas capacidades gráficas.

Quando se projecta, torna-se bastante cómodo a visualização destes mapas de armadura, no programa de cálculo porque o programa de cálculo facilita a visualização das quantidades de armadura por nó e respectivas coordenadas do nó, ou seja, temos a quantidade de armadura e a localização exacta do nó, ao mesmo tempo.

A combinação de acções resulta da aplicação da carga total na laje ($14 + 6 = 20 \text{ kN} / \text{m}^2$) e conduz às quantidades de armadura apresentadas nas figuras seguintes (Figura A1.1 e Figura A1.2).

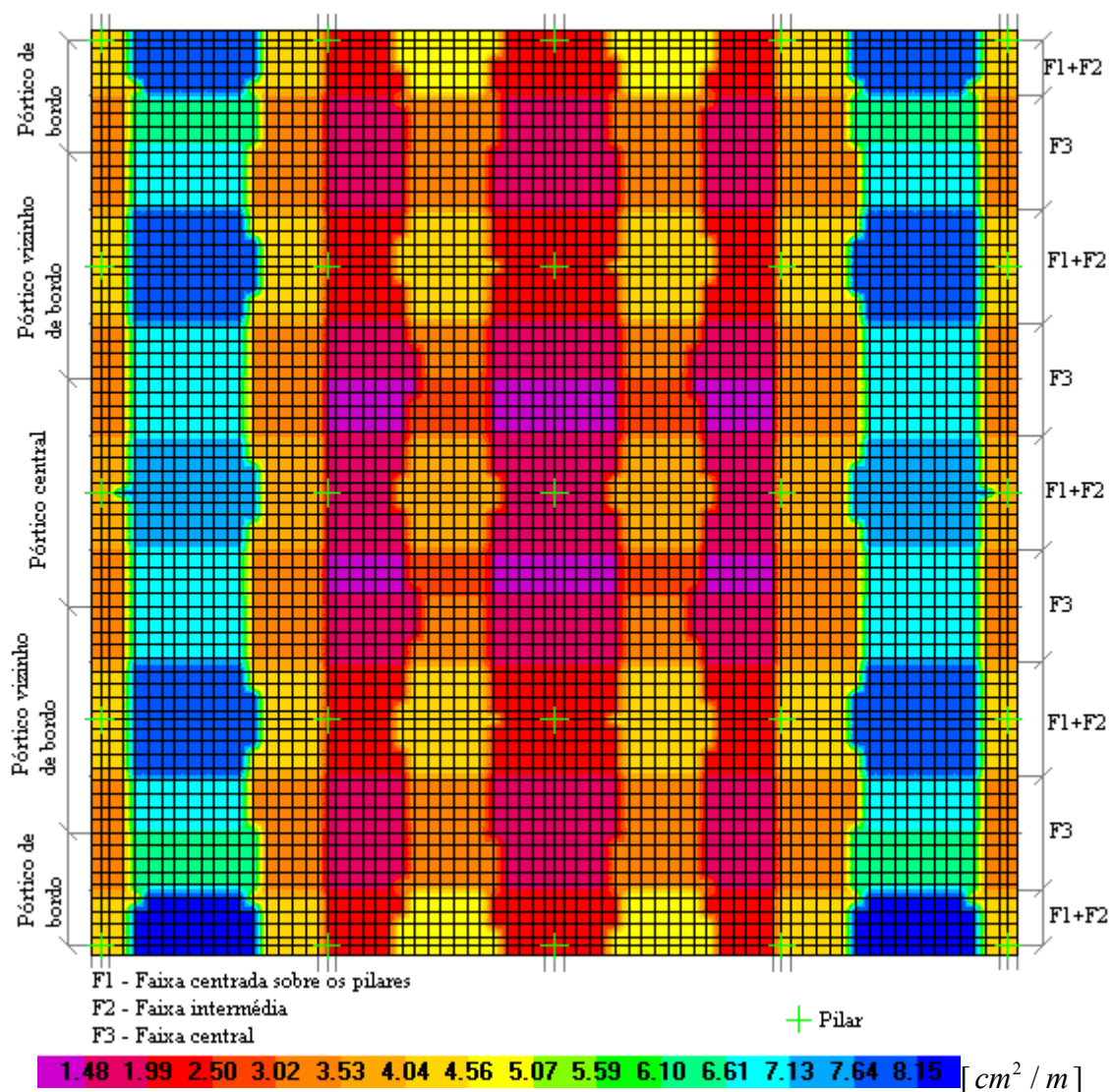


Figura A1.1 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a combinação de acções considerando apenas M_{11} (exemplo 1).

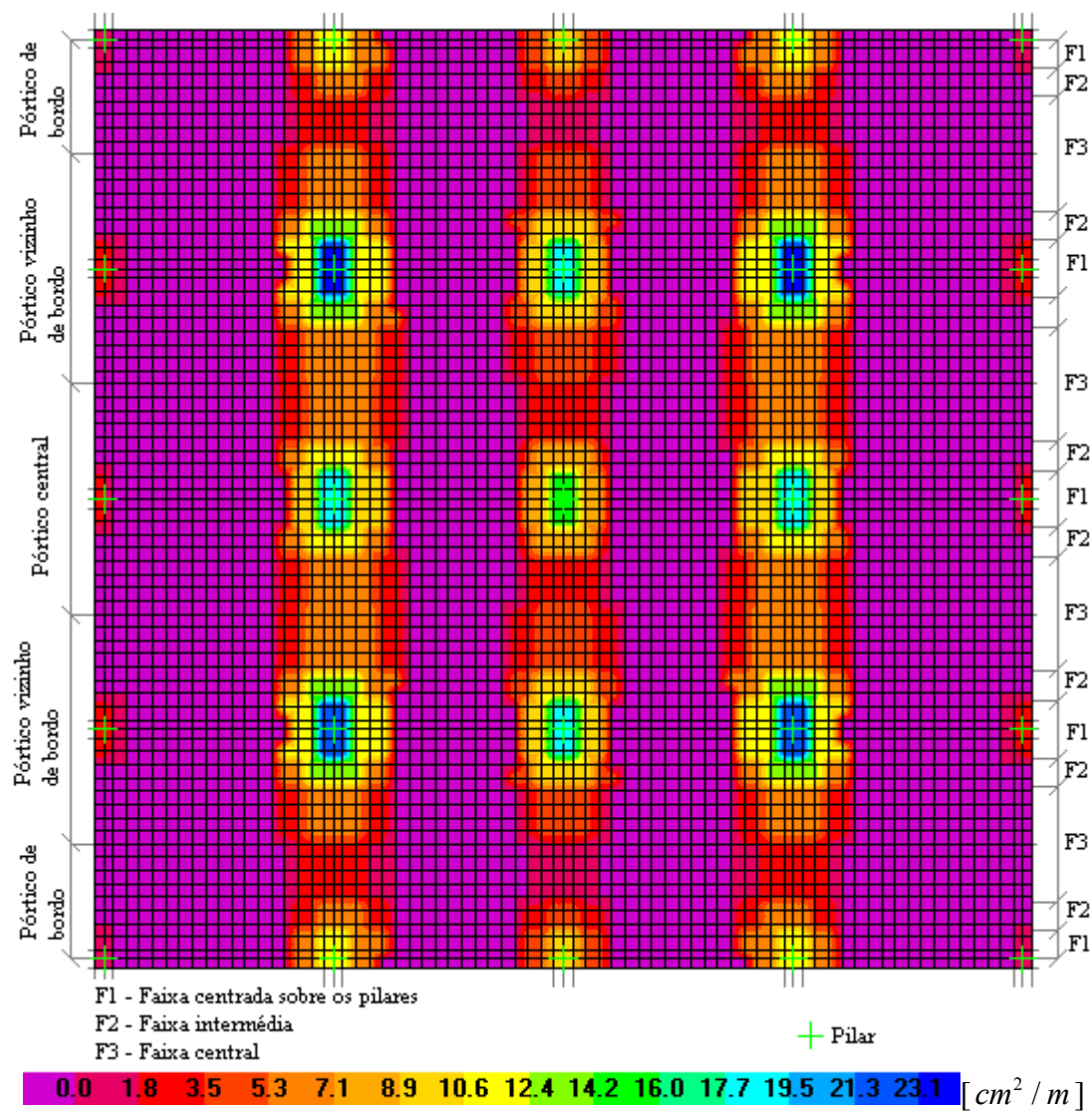


Figura A1.2 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a combinação de acções considerando apenas M_{11} (exemplo 1).

Nos mapas de quantidades de armadura que se seguem, mantém-se a mesma disposição das faixas definida nas figuras anteriores.

A envolvente de esforços resulta das várias combinações de acções com alternância de sobrecarga.

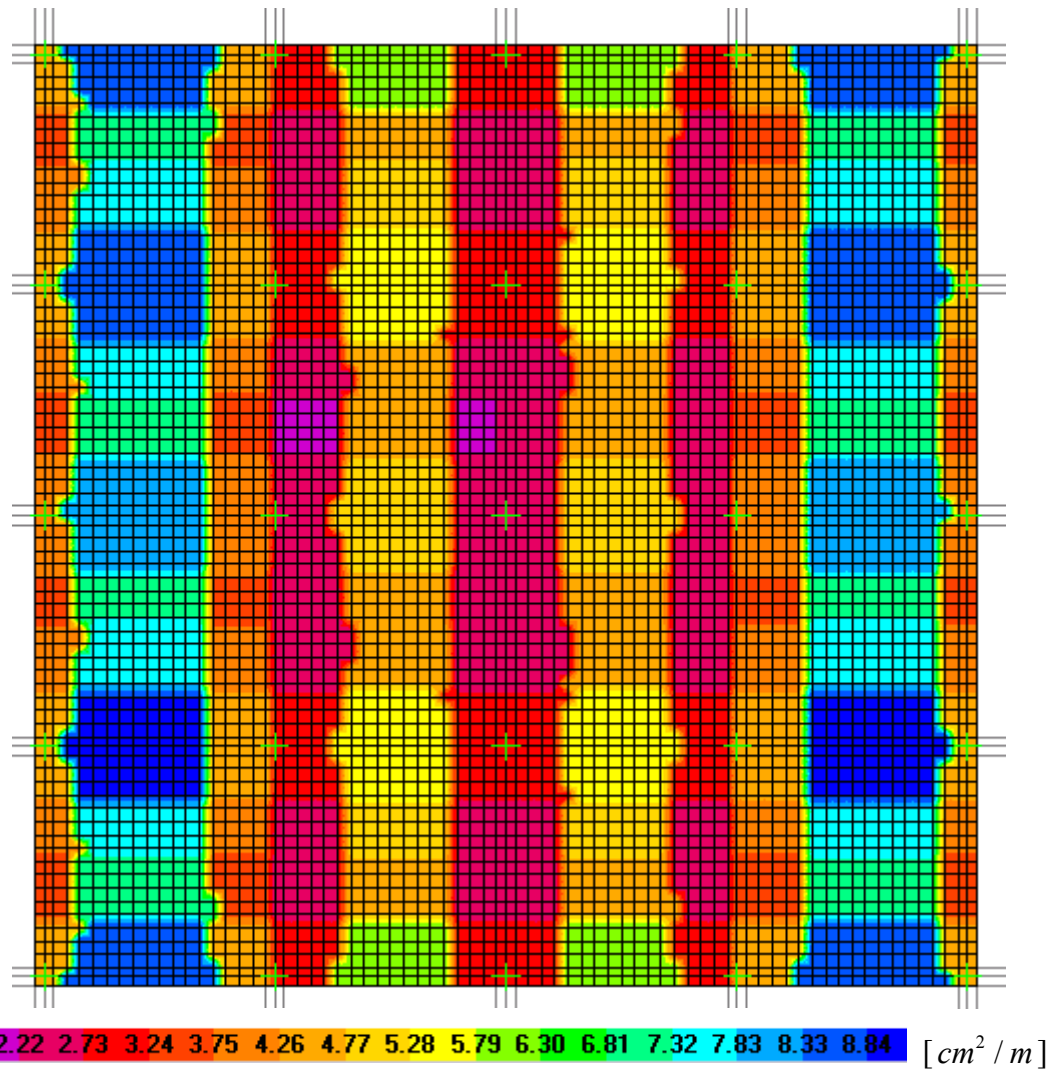


Figura A1.3 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 1).

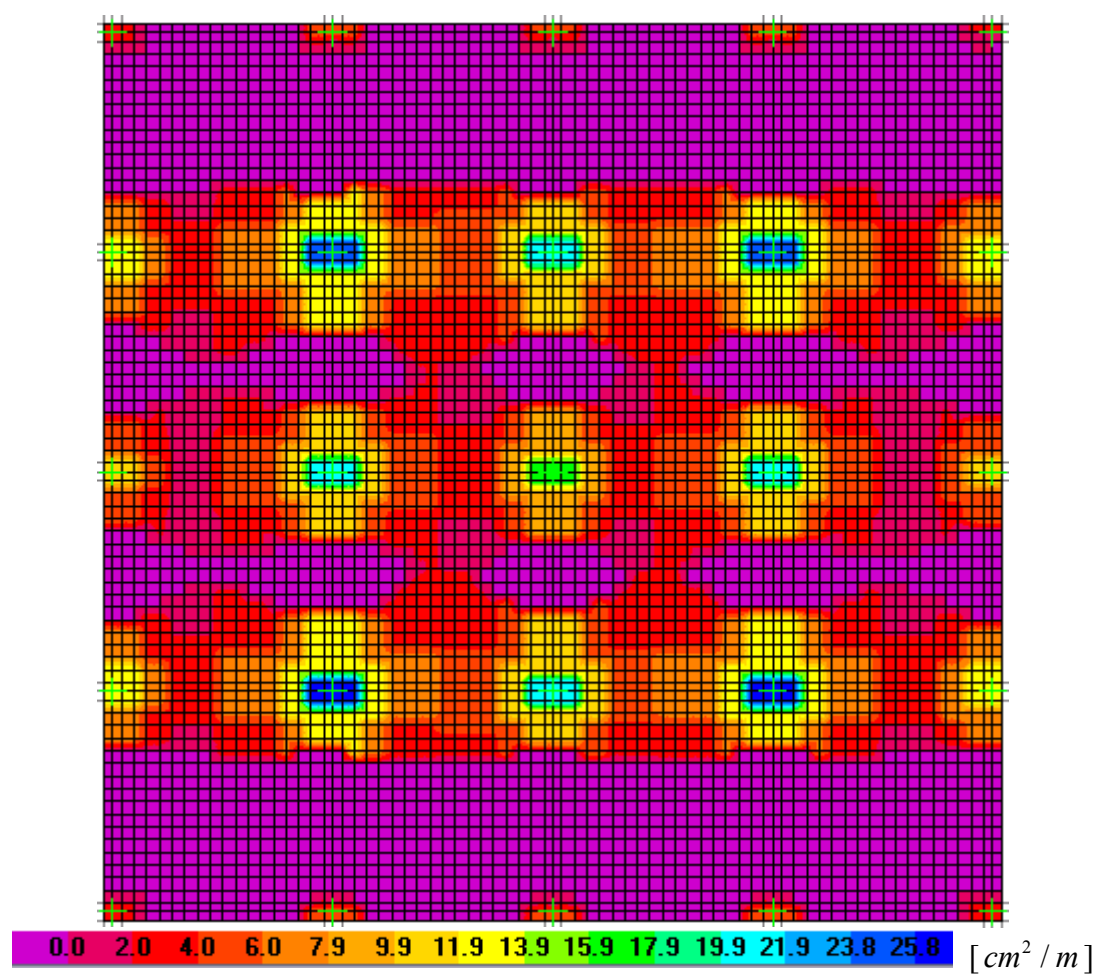


Figura A1.4 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 1).

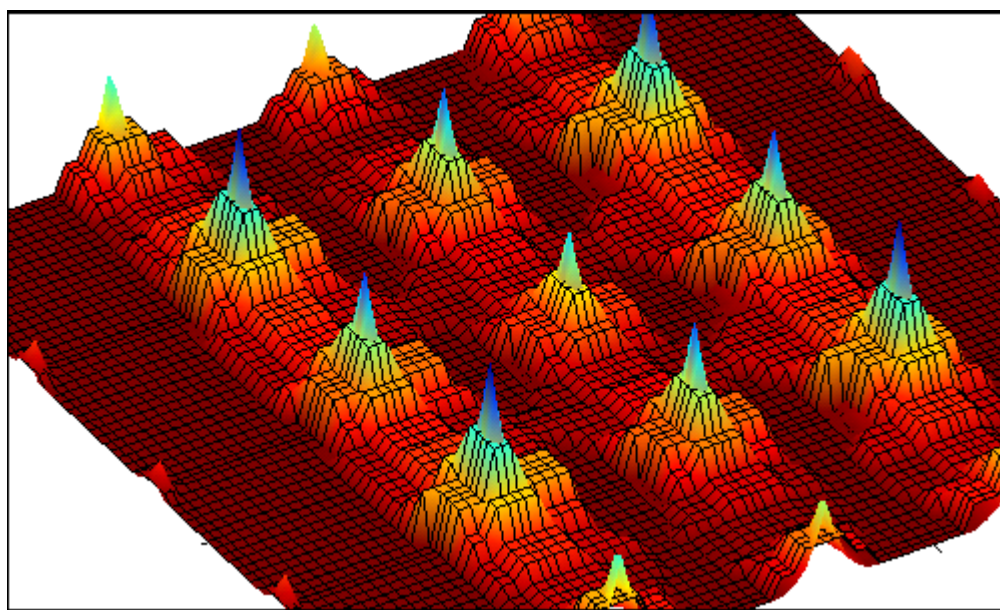


Figura A1.5 - Representação tridimensional do momento resistente M_{xx} e momento actuante M_{11} (exemplo1).

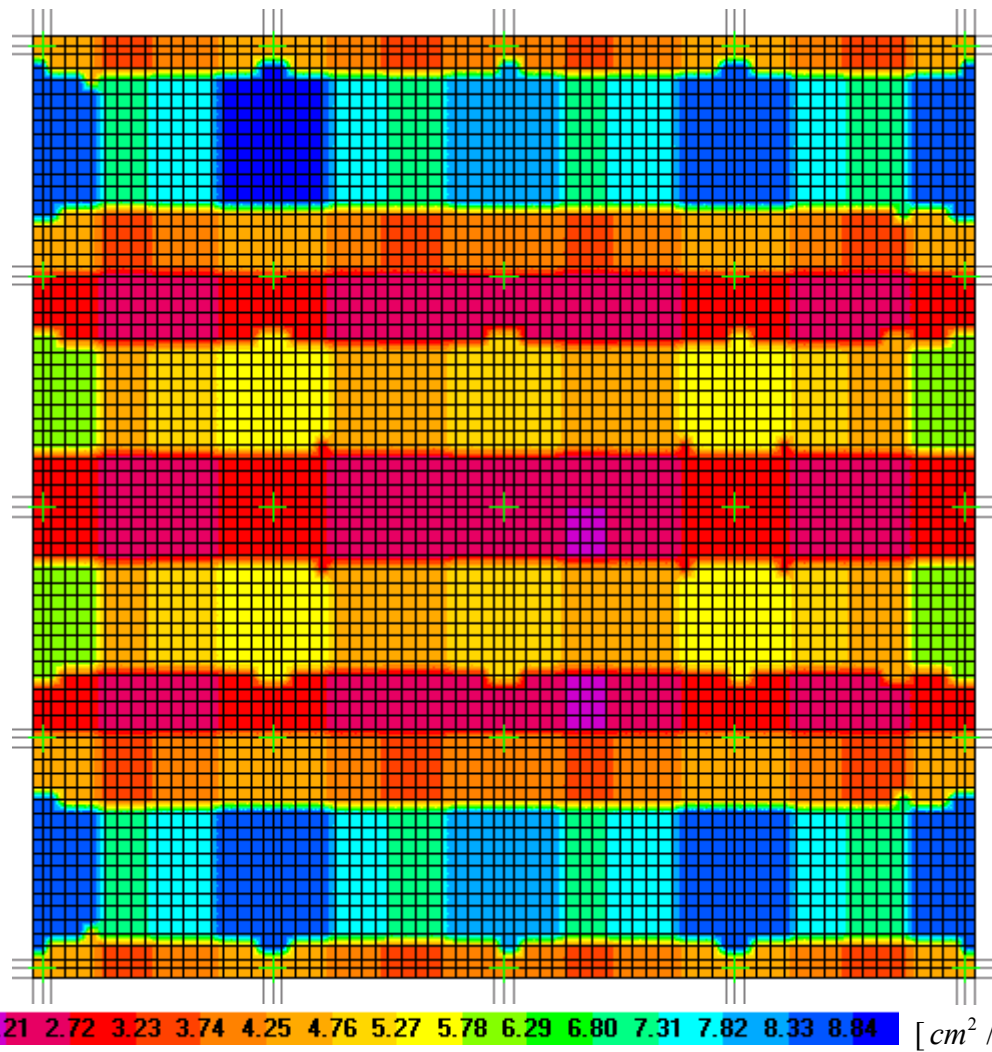


Figura A1.6 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 1).

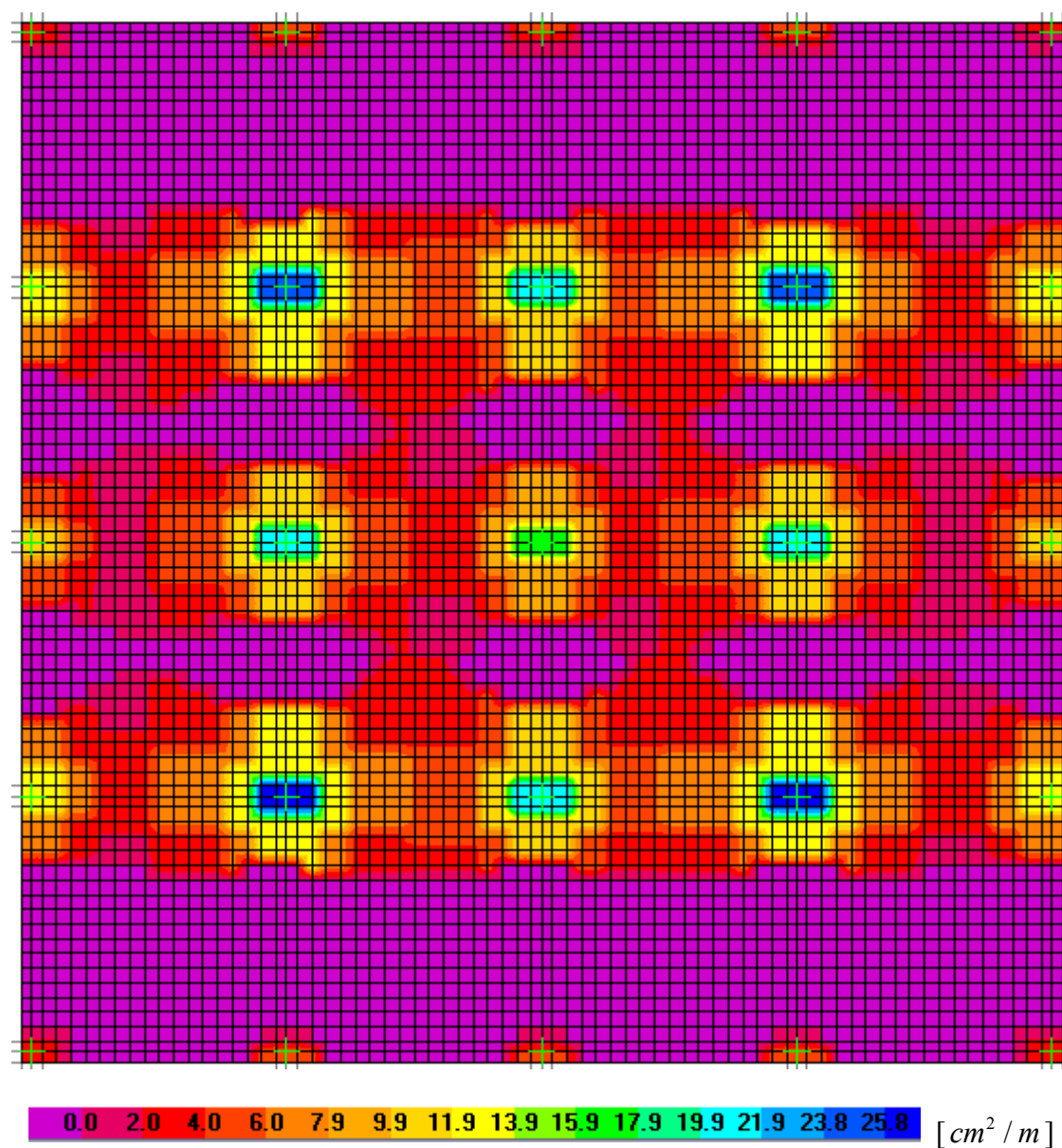


Figura A1.7 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy' para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 1).

Com aplicação do método de Wood-Armer

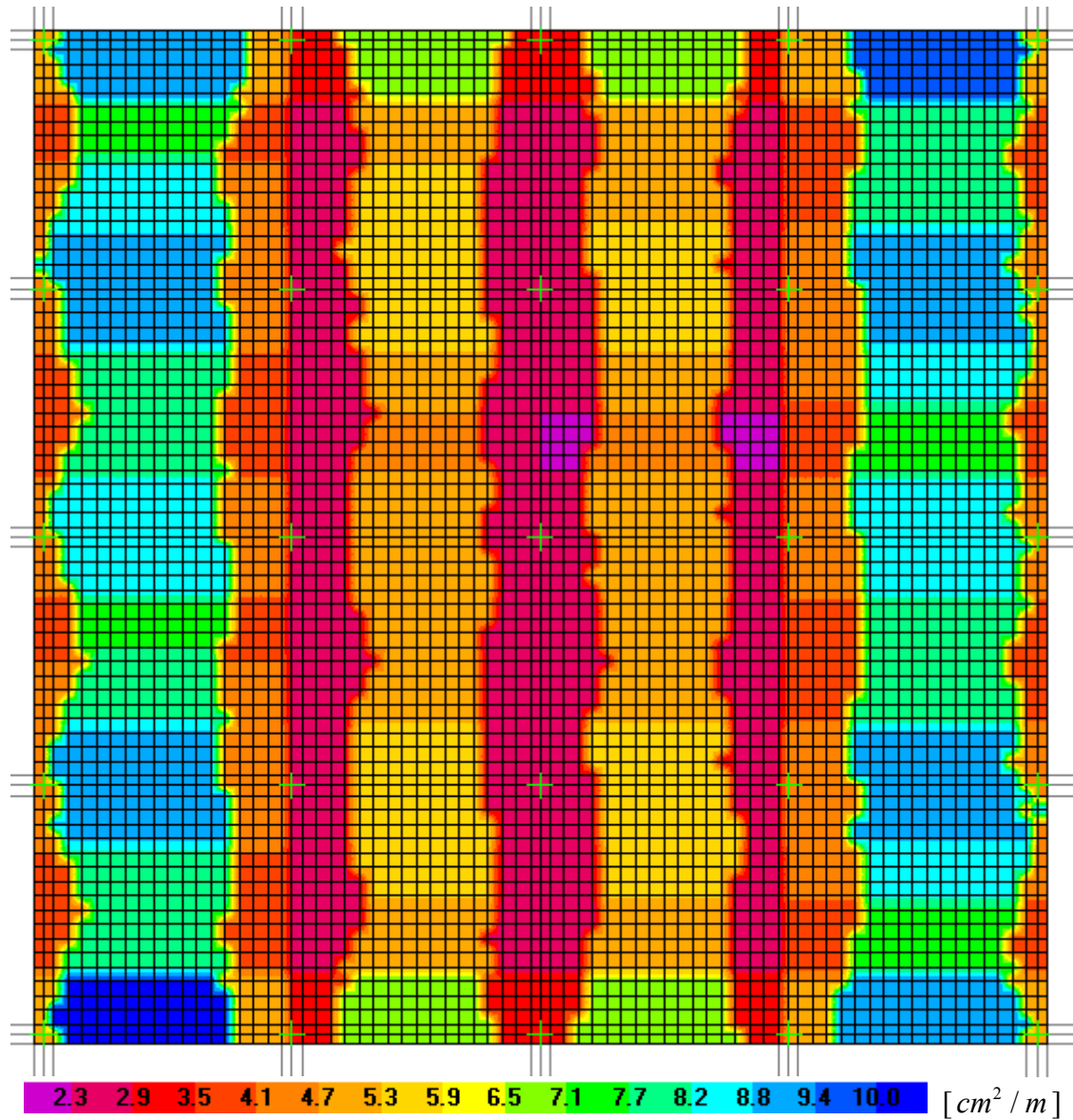


Figura A1.8 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).

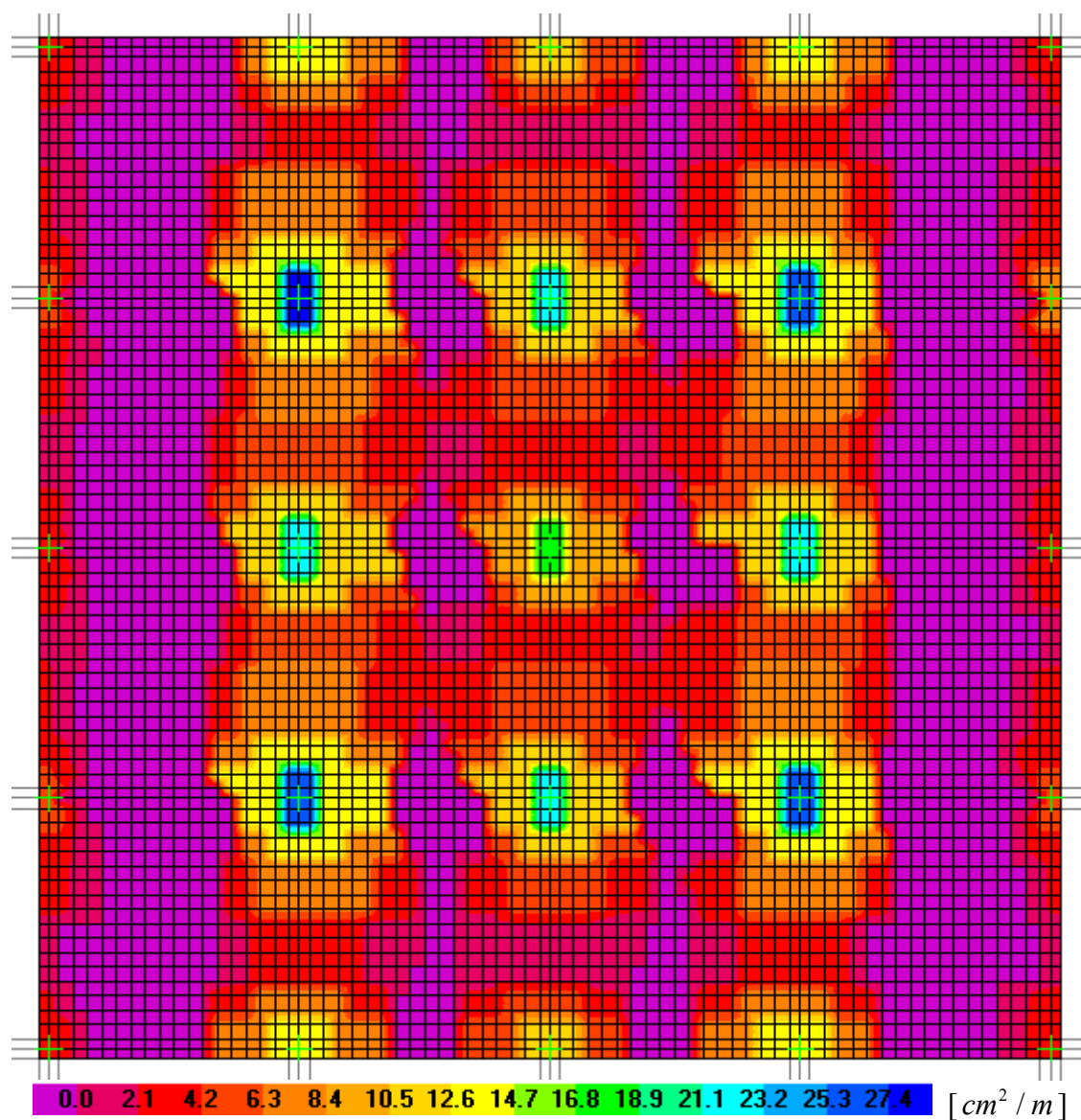


Figura A1.9 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).

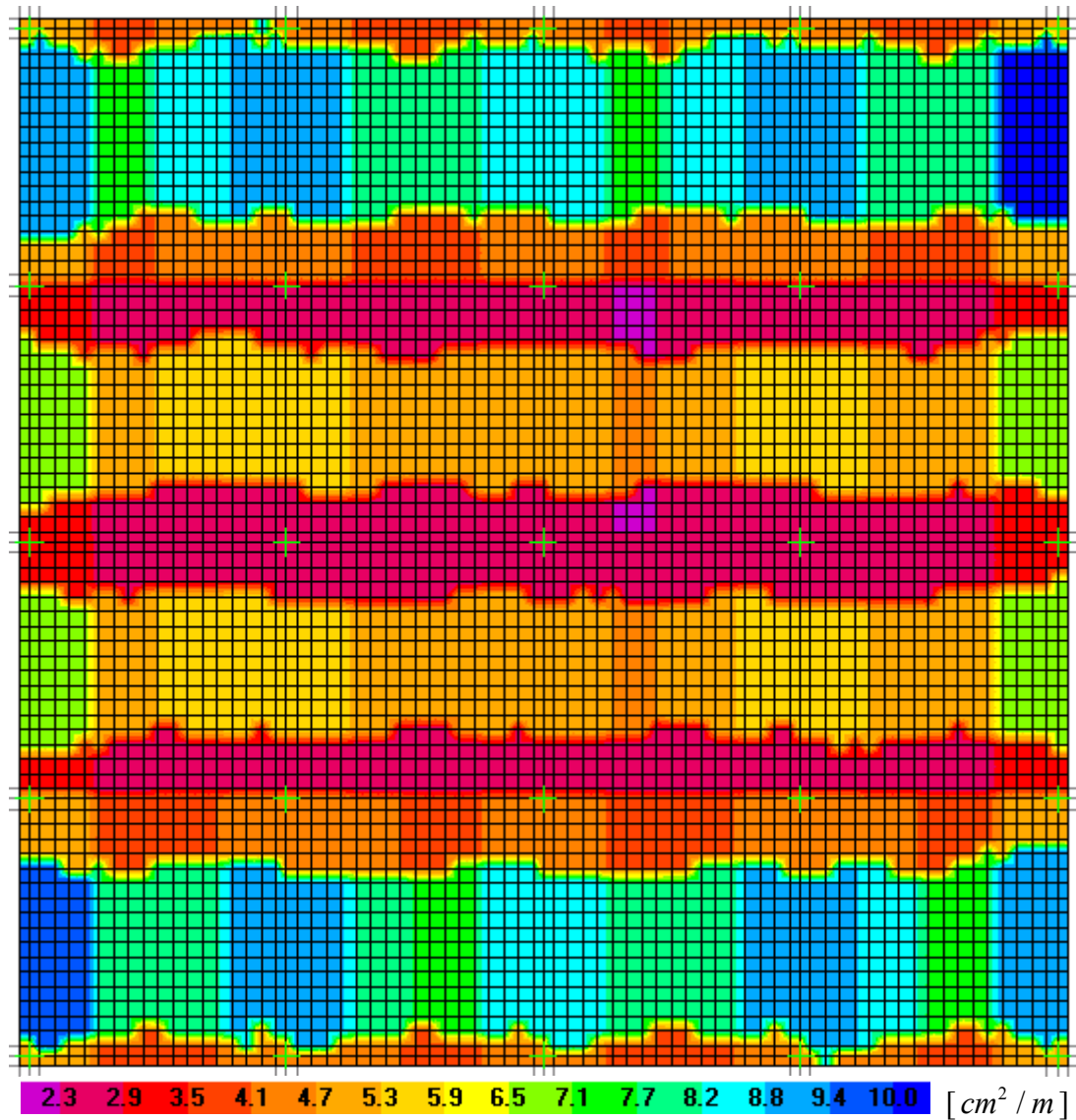


Figura A1.10 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção y para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).

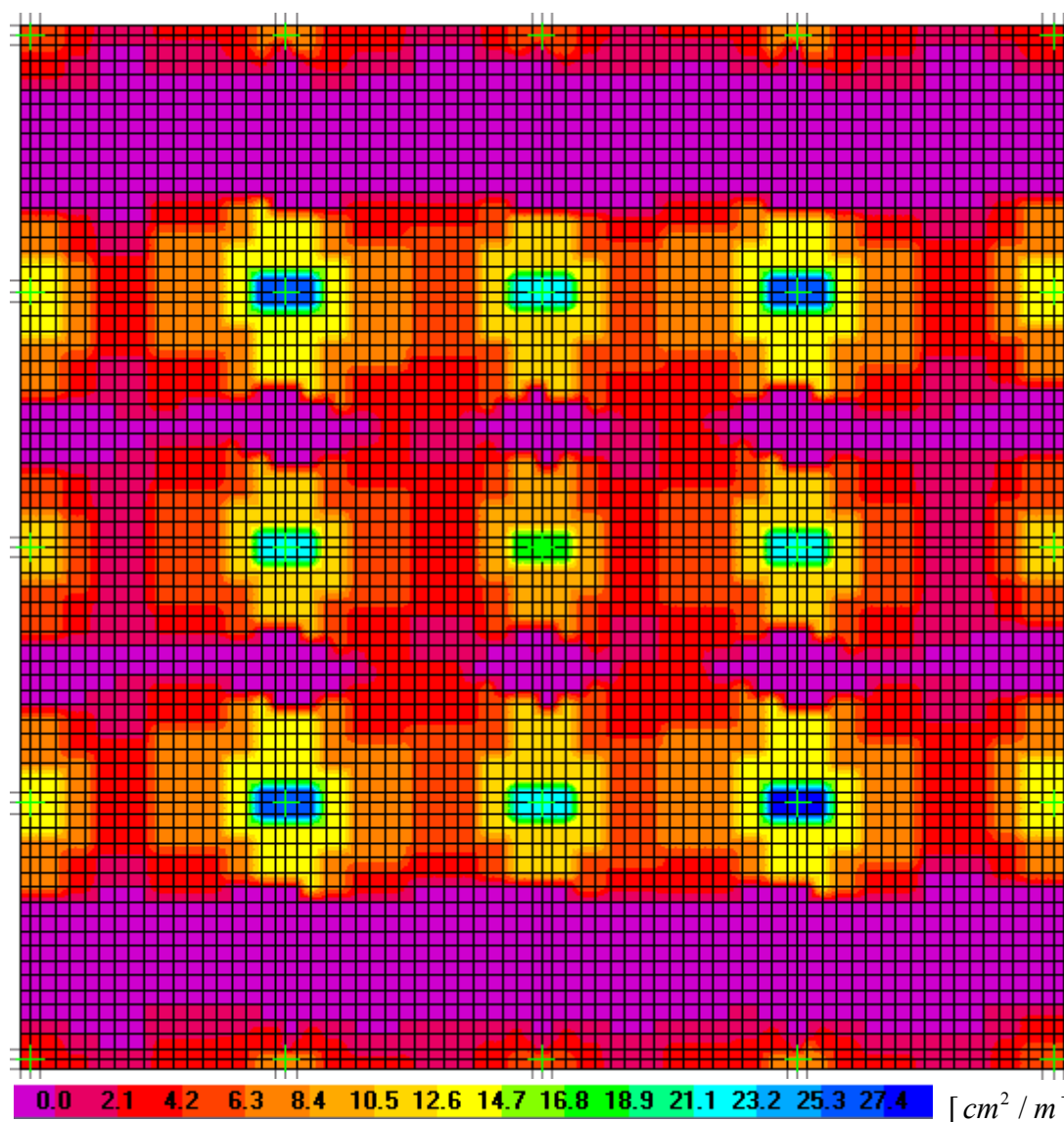


Figura A1.11 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 1).

Há um pequeno aumento da quantidade de armadura necessária na laje, comparando as soluções em que não é contabilizado o momento torsor, com as soluções obtidas pelo método de wood-Armer, que têm em conta o efeito do momento torsor. Este aumento é perfeitamente correcto e aceitável, uma vez que está em questão a segurança da laje.

Anexo 2

MAPAS DE ARMADURAS, EXEMPLO 2

EXEMPLO 2

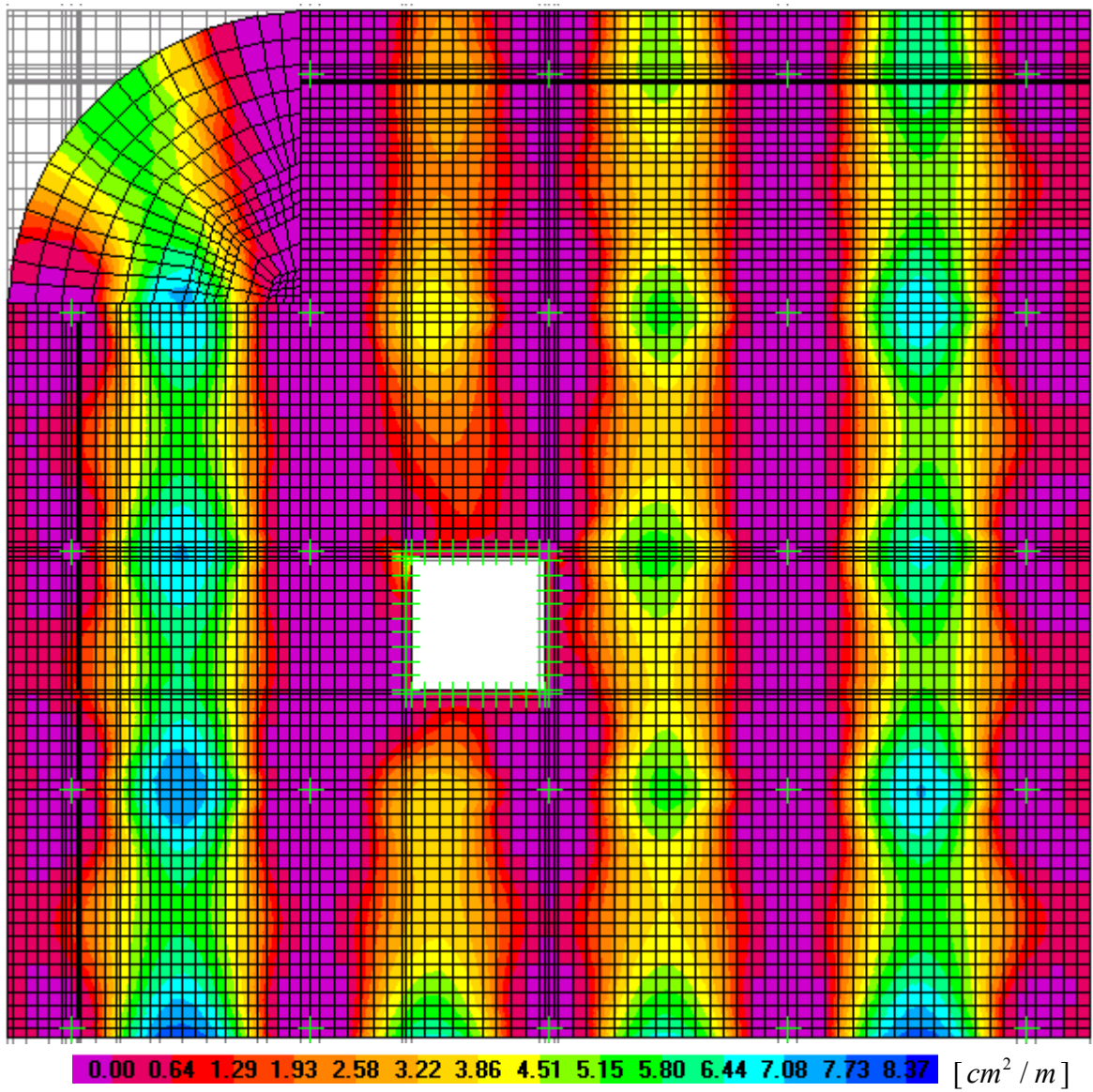


Figura A2. 1 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 2).

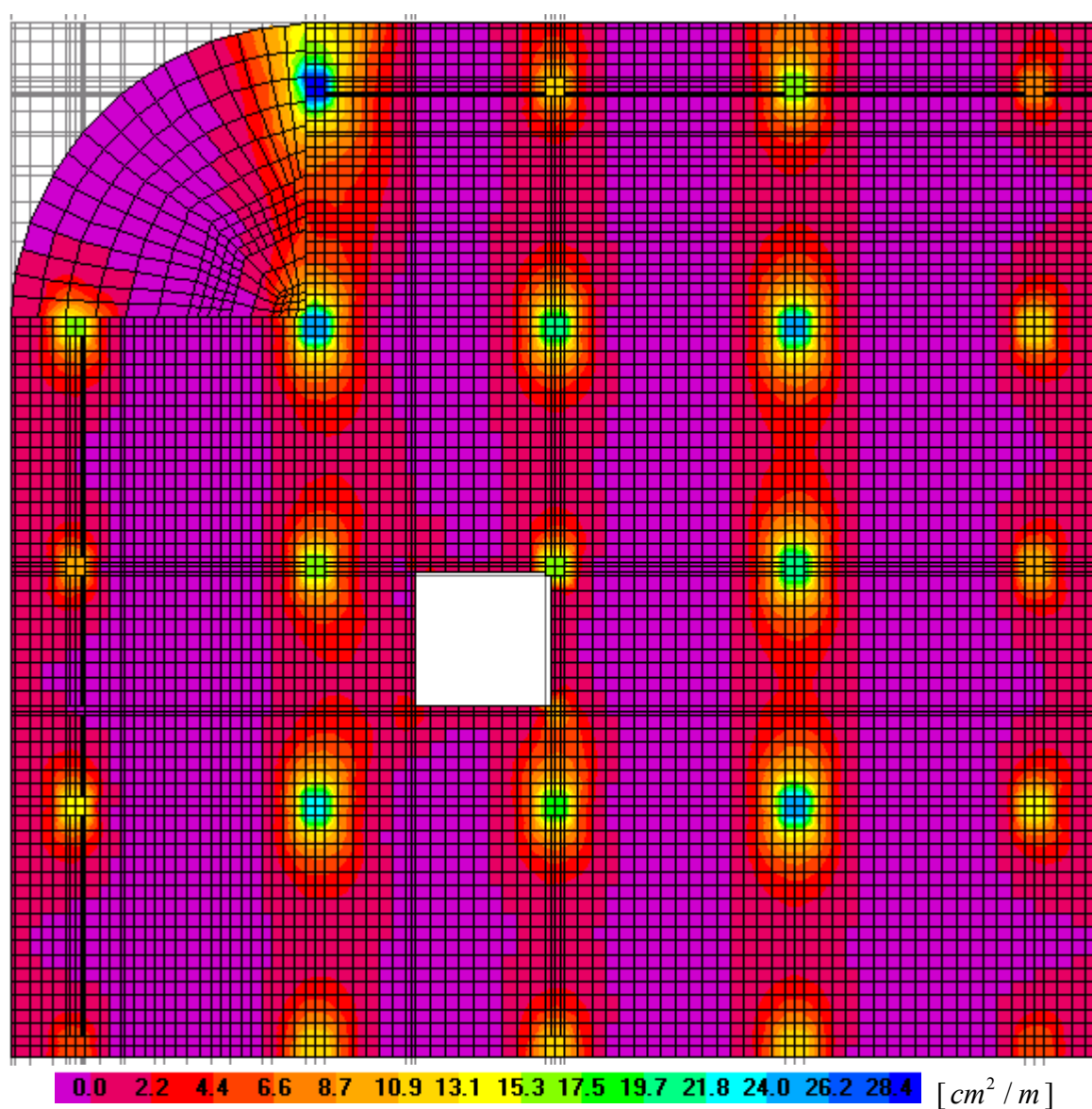


Figura A2. 2 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços considerando apenas M_{11} (exemplo 2).

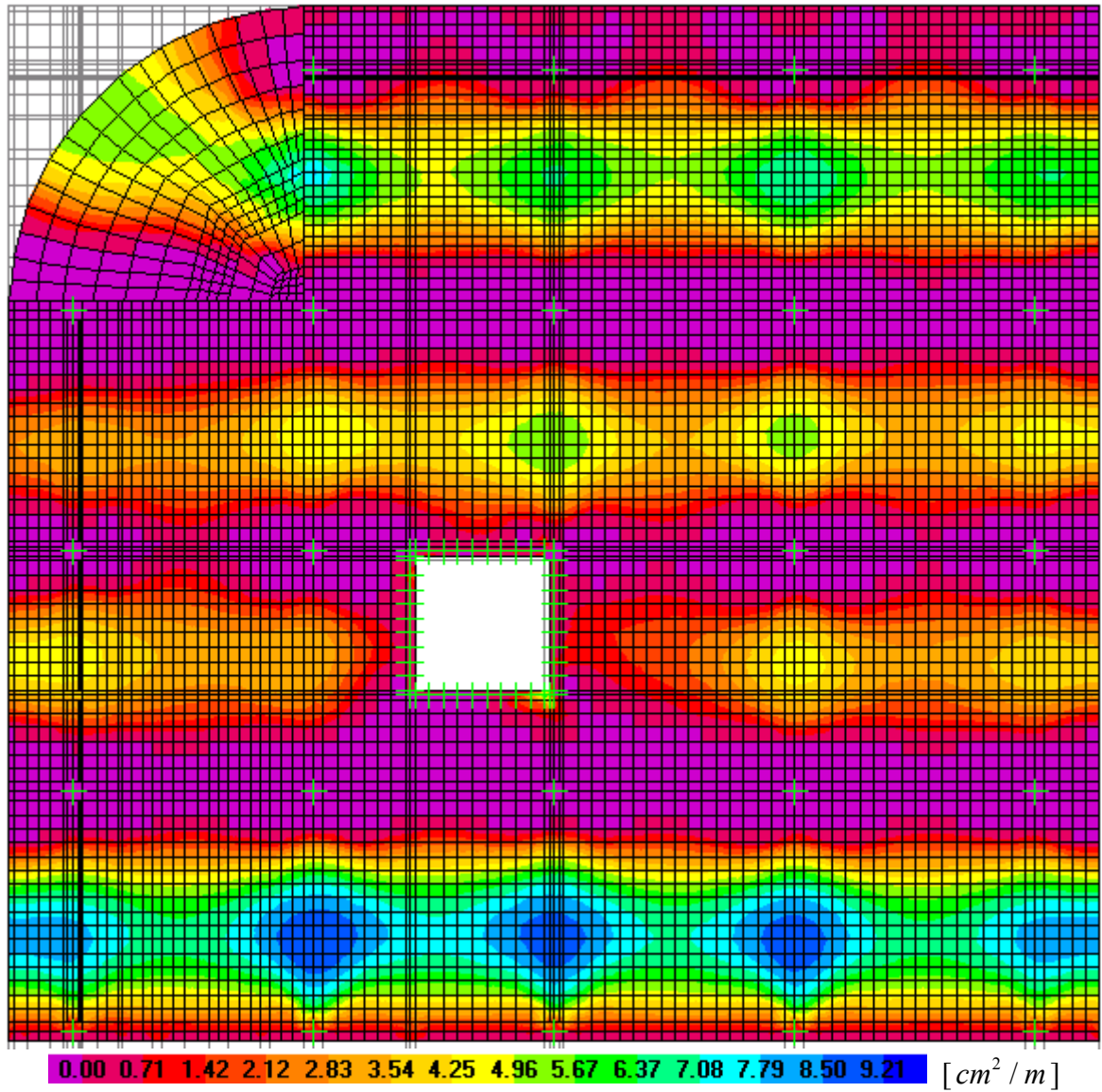


Figura A2. 3 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 2).

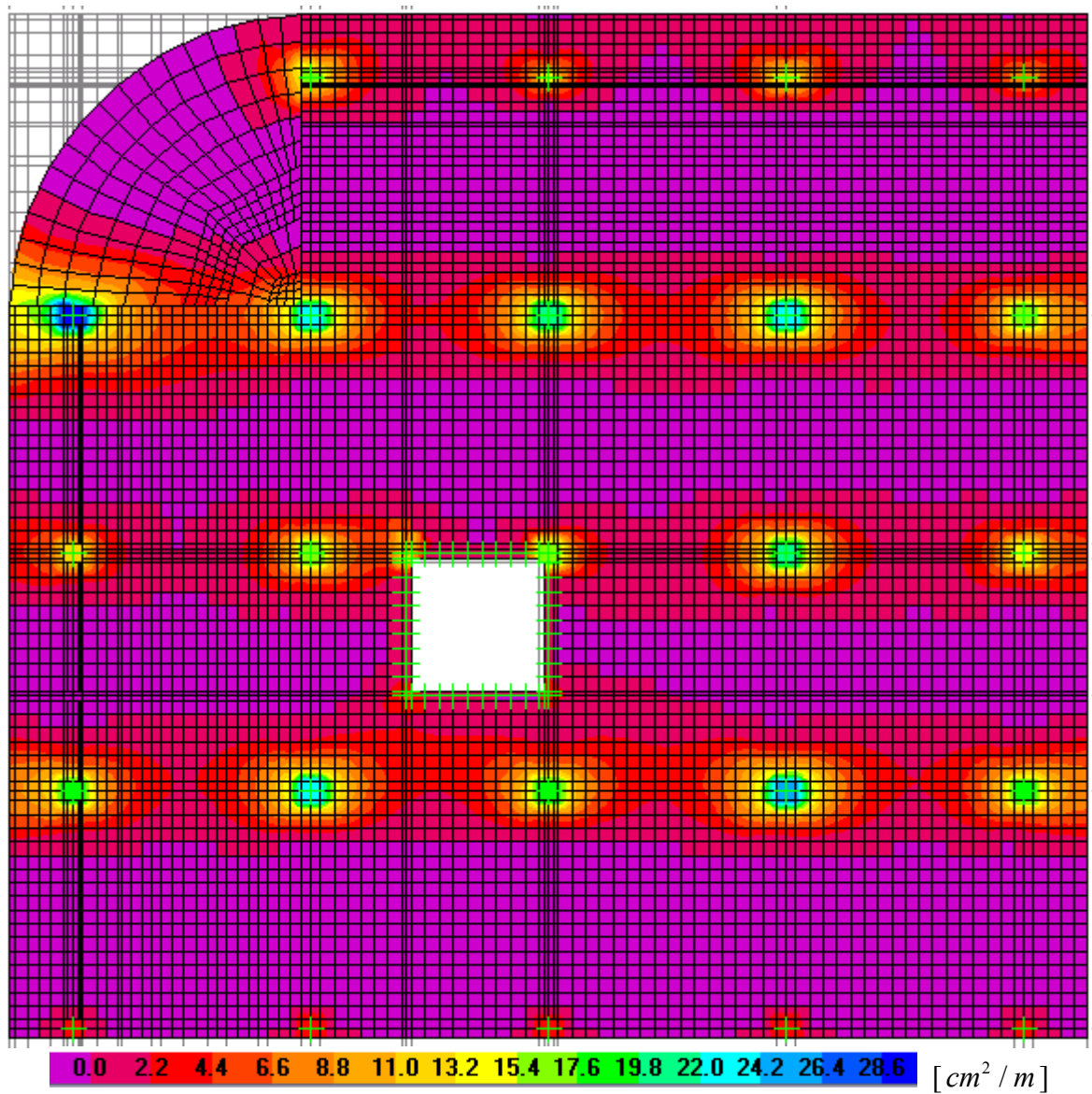
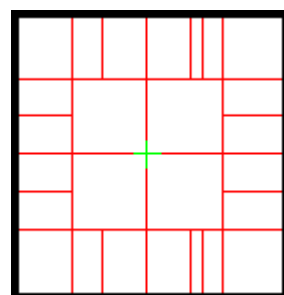
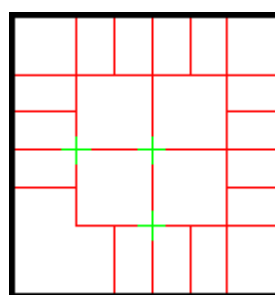


Figura A2. 4 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção yy para a envolvente de esforços considerando apenas M_{22} (exemplo 2).



a) Pilar interior



b) Pilar de canto de caixa de elevador.

Figura A2. 5 - Pormenor da malha na área de ligação laje-pilar.

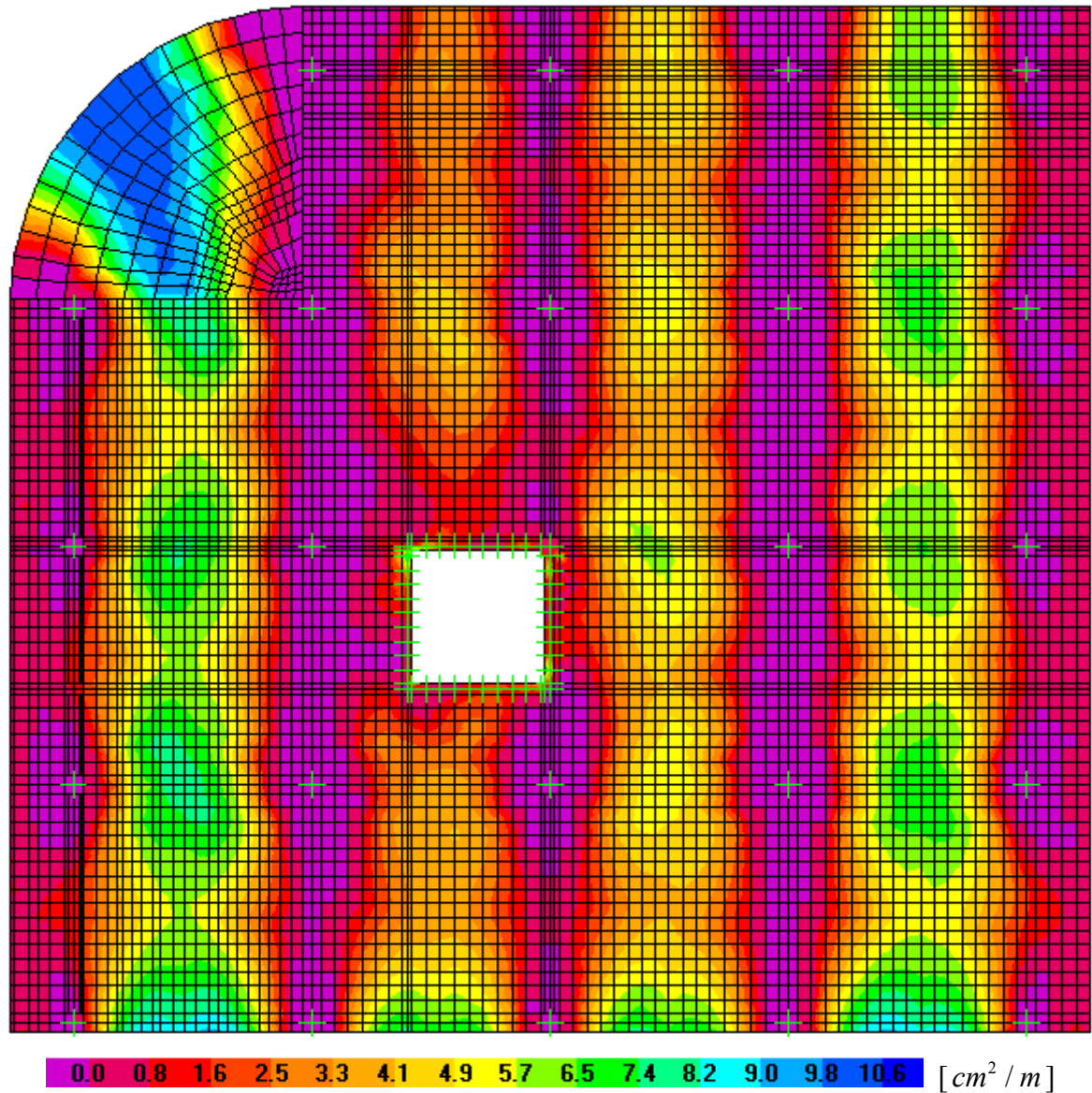


Figura A2. 6 - Quantidades de armadura inferior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 2).

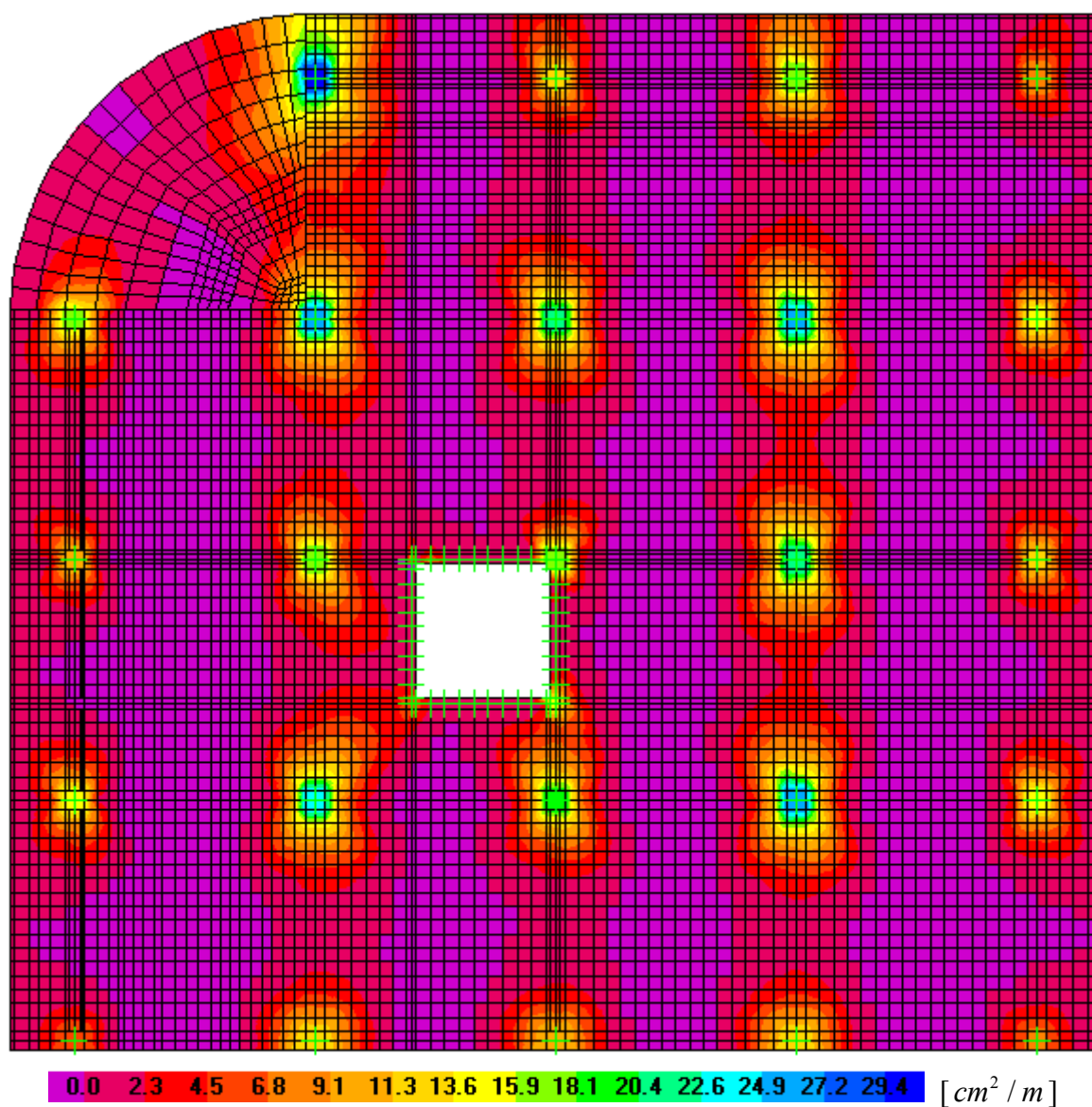


Figura A2. 7 - Quantidades de armadura superior, segundo a direcção xx para a envolvente de esforços, com uso do método Wood-Armer (exemplo 2).