

PROJECTO DE CONSTRUÇÕES MECÂNICAS

**ALTERAÇÕES AO PROGRAMA "FEMPLANO"
PARA O CÁLCULO DE VIGAS
TRANSVERSALMENTE ANISOTRÓPICAS**

José António dos Santos Drumonde

**FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO
1993**

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar aqui o meu agradecimento à Professora Doutora. Lúcia Dinis, pela atenção dispensada e acompanhamento deste trabalho.

Ao Engenheiro Rui Natal Jorge pela disponibilidade prestada no entendimento do programa " femplano" e na utilização do hardware.

Finalmente agradeço à Maria José Ribeiro e ao Serafim Oliveira pelo apoio na elaboração do relatório e na revisão ortográfica.

7

621(493) / 1000 / 1000000
13 10 09

ÍNDICE

	Pag.
1. Introdução	1.1
2. Alterações ao programa	2.1
2.1 Cálculo das matrizes	2.1
2.1.1 Matriz de transformação	
2.1.2 Matriz para o estado plano de tensão	
2.1.3 Matriz para o estado plano de deformação	
2.2 Alterações nas rotinas do programa "femplano"	2.3
3. Estudo teórico de uma viga ortotrópica	3.1
3.1 Lei de Hook	3.1
3.2 Coeficientes de transformação das deformações	3.2
4. Exemplo I Viga encastrada à flexão	4.1
4.1 Introdução	4.1
4.2 Exposição do problema	4.1
4.2.1 Solução analítica	
4.2.2 Solução numérica	
4.2.3 Propriedades do material	
4.3 Apresentação da estrutura de resultados	4.2
4.4 Tensões G_x	4.4
4.4.1 Análise da solução analítica	
4.4.2 Apresentação dos resultados	
4.4.3 Observações	
4.5 Tensões G_y	4.14
4.5.1 Análise da solução analítica	
4.5.2 Apresentação dos resultados	
4.5.3 Observações	
4.6 Tensões T_{xy}	4.19
4.6.1 Análise da solução analítica	
4.6.2 Apresentação dos resultados	
4.6.3 Observações	
4.7 Deslocamentos	4.25
4.7.1 introdução	
4.7.2 Deformada	
4.7.3 Análise dos erros	
4.7.4 Observações	
4.8 Conclusões finais do exemplo	4.27
5. Exemplo II Viga simplesmente apoiada	5.1
5.1 Introdução	5.1
5.2 Exposição do problema	5.1
5.2.1 Solução analítica	
5.2.2 Solução numérica	

5.3	Tensões Gx	5.3
5.3.1	Análise da equação analítica	
5.3.2	Apresentação dos resultados	
5.3.3	Observações	
5.4	Deslocamentos	5.11
5.4.1	introdução	
5.4.2	Deformada	
5.4.3	Análise dos erros	
5.5	Conclusões finais do exemplo	5.13
6.	Exemplo III	
	Viga encastrada à tracção	6.1
6.1	Introdução	6.1
6.2	Análise das Tensões	6.1
6.3	Análise dos Resultados	6.3
6.4	Conclusões do exemplo	6.4
7.	Conclusões finais do trabalho	7.1
8.	Bibliografia	8.1

2. ALTERAÇÕES AO PROGRAMA

2.1 CALCULO DAS MATRIZES

De acordo com Owen[1] e Lekhnitskii. [2], para o caso da anisotropia transversal a matriz de rigidez [D] é uma particularização do caso geral. Para a completa definição desta matriz é necessário conhecer quatro propriedades independentes, uma vez que as propriedades variam com a direcção no material.

No caso de um material composto, com uma mistura de resina e fibras, essa anisotropia verifica-se. A figura 2.1 ilustra essa situação, onde se mostra um referencial orientado com a direcção das fibras. É com base neste referencial que normalmente as propriedades são referidas.

Quando o material é solicitado para diferentes ângulos de orientação de fibras, reage de forma diferente. É pois necessário conhecer as propriedades em diferentes situações com base no sistema de eixos de referência. Com tal objectivo foi desenvolvido um método de transformação que a seguir se expõe.

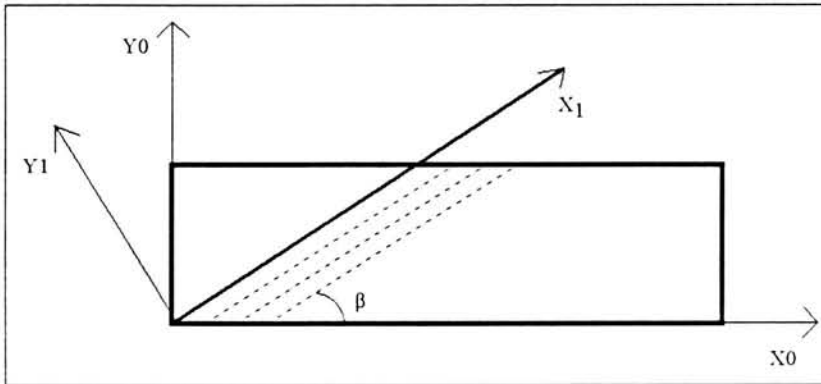


fig. 2.1

2.1.1 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Tendo-se determinado tensor (sejam as deformações) expresso em (x_0, y_0) , a obtenção do mesmo tensor em (x_1, y_1) , é obtida da seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = T^t \varepsilon_0$$

A matriz de transformação [T] com a qual se podem obter as propriedades em (x_1, y_1) a partir de (x_0, y_0) é a seguinte:

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -\sin(2\beta) \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \sin(2\beta) \\ \sin\beta \cdot \cos\beta & -\sin\beta \cdot \cos\beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Para maior comodidade de calculo e de programação efectuaem-se as seguintes atribuições:

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \beta \\ B &= \sin^2 \beta \\ C &= \sin(2\beta) \end{aligned}$$

A matriz de transformação [T] e a sua transposta [Tt], resultam as seguintes:

$$T = \begin{bmatrix} A & B & -C \\ B & A & C \\ C/2 & -C/2 & (A-B) \end{bmatrix} \quad Tt = \begin{bmatrix} A & B & C/2 \\ B & A & -C/2 \\ -C & C & (A-B) \end{bmatrix}$$

2.1.2 MATRIZ PARA UM ESTADO PLANO DE TENSÃO

Considerando $n = E_1/E_2$, de acordo com Owen [1] a matriz de rigidez para o caso do estado plano de tensão [D_1t] é definida do seguinte modo:(ref. [2])

$$D_1t = E_2/(1 - nv_2^2) \begin{bmatrix} n & nv_2 & 0 \\ nv_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - nv_2^2) \end{bmatrix}$$

Efectuando-se as substituições seguintes,

$$\begin{aligned} G_2 &= E_2/(2 - 2v_2) & m &= G_2/E_2 \\ H &= (1 - nv_2^2) & T_0 &= E_2/H \\ T_1 &= nv_2 & T_2 &= mH \end{aligned}$$

obtém-se uma matriz mais condensada e apropriada para a programação.

$$D_1t = T0 * \begin{bmatrix} n & T1 & 0 \\ T1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T2 \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez para um referencial fixo pode se obtida a partir de um referencial associado às fibras do seguinte modo:

$$D_0 = TD_1tT^t = \begin{bmatrix} A & B & C/2 \\ B & A & -C/2 \\ -C & C & (A-B) \end{bmatrix} * T0 * \begin{bmatrix} n & T1 & 0 \\ T1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & B & -C \\ B & A & C \\ C/2 & -C/2 & (A-B) \end{bmatrix}$$

$$D_0 = TD_1tT^t = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 \\ K21 & K22 & K23 \\ K31 & K32 & K33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K11 &= Z11*A + Z12*B + Z13*(C/2) \\ K12 &= Z11*B + Z12*A + Z13*(-C/2) \\ K13 &= Z11*-C + Z12*C + Z13*(A-B) \\ K21 &= Z21*A + Z2*B + Z23*(C/2) \\ K22 &= Z21*B + Z22*A + Z23*(-C/2) \\ K23 &= Z21*-C + Z22*C + Z23*(A-B) \\ K31 &= Z31*A + Z32*B + Z33*(C/2) \\ K32 &= Z31*B + Z32*A + Z33*(-C/2) \\ K33 &= Z31*-C + Z32*C + Z33*(A-B) \end{aligned}$$

2.1.3 A MATRIZ PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO :

Para o caso de estado plano de deformação, tem-se:

$$D_0 d = E_2 / \left[(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) \right] \begin{bmatrix} \nu_2(1 + \nu_1) & \nu_2(1 + \nu_1) & 0 \\ \nu_2(1 + \nu_1) & (1 - \nu_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H &= (1 - \nu_2^2) \\ D_0 &= E_2 / JL \\ D_3 &= (1 - \nu_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= (1 + \nu_1) \\ D_1 &= nH \\ D_4 &= mJL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= (1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) \\ D_2 &= \nu_2 J \end{aligned}$$

$$D_0 d = D_0^* \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 \\ D2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & D4 \end{bmatrix}$$

$$D_0 d = T D_1 d T^T = \begin{bmatrix} A & B & C/2 \\ B & A & -C/2 \\ -C & C & (A-B) \end{bmatrix} * N \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 \\ D2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & D4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & B & -C \\ B & A & C \\ C/2 & -C/2 & (A-B) \end{bmatrix}$$

$$D_0 d = T D_1 d T^T = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 \\ K21 & K22 & K23 \\ K31 & K32 & K33 \end{bmatrix}$$

Os elementos d matriz final ficarão :

$$\begin{aligned} K11 &= Z11*A + Z12*B + Z13*(C/2) \\ K12 &= Z11*B + Z12*A + Z13*(-C/2) \\ K13 &= Z11*-C + Z12*C + Z13*(A-B) \\ K21 &= Z21*A + Z22*B + Z23*(C/2) \\ K22 &= Z21*B + Z22*A + Z23*(-C/2) \\ K23 &= Z21*-C + Z22*C + Z23*(A-B) \\ K31 &= Z31*A + Z32*B + Z33*(C/2) \\ K32 &= Z31*B + Z32*A + Z33*(-C/2) \\ K33 &= Z31*-C + Z32*C + Z33*(A-B) \end{aligned}$$

2.2 ALTERAÇÕES NAS ROTINAS DO PROGRAMA "FEMPLANO"

Com vista a poder-se adicionar este novo módulo que permite o calculo de materiais com anisotropia transversal, foi necessário fazer-se algumas alterações no programa. São essas alterações que se mostram de seguida por ordem de execução do programa.

1ª ALTERAÇÃO ROTINA "PREPLAST.FOR "

1a) (linha 60)

Identificar se o problema envolve ou não anisotropia, através da leitura da variável "niso". (linha 60)

NISO = 0 não há anisotropia.

NISO = 1 há anisotropia transversal

1b) (linha 90)

2.1.3 A MATRIZ PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO :

Para o caso de estado plano de deformação, tem-se:

$$D_0 d = E_2 \sqrt{(1+v_1)(1-v_1-2v_2^2)} \begin{bmatrix} nv_2(1+v_1) & nv_2(1+v_1) & 0 \\ nv_2(1+v_1) & (1-nv_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2) \end{bmatrix}$$

$$H = (1 - nv_2^2)$$

$$D_0 = E_2 / JL$$

$$D_3 = (1 - nv_1^2)$$

$$J = (1 + nv_1)$$

$$D_1 = nH$$

$$D_4 = mJL$$

$$L = (1 - nv_1 - 2nv_2^2)$$

$$D_2 = nv_2 J$$

$$D_0 d = D_0^* \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 \\ D2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & D4 \end{bmatrix}$$

$$D_0 d = T D_1 d T' = \begin{bmatrix} A & B & C/2 \\ B & A & -C/2 \\ -C & C & (A-B) \end{bmatrix} * N \begin{bmatrix} D1 & D2 & 0 \\ D2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & D4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & B & -C \\ B & A & C \\ C/2 & -C/2 & (A-B) \end{bmatrix}$$

$$D_0 d = T D_1 d T' = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 \\ K21 & K22 & K23 \\ K31 & K32 & K33 \end{bmatrix}$$

Os elementos d matriz final ficarão :

$$K11 = Z11*A + Z12*B + Z13*(C/2)$$

$$K12 = Z11*B + Z12*A + Z13*(-C/2)$$

$$K13 = Z11*-C + Z12*C + Z13*(A-B)$$

$$K21 = Z21*A + Z22*B + Z23*(C/2)$$

$$K22 = Z21*B + Z22*A + Z23*(-C/2)$$

$$K23 = Z21*-C + Z22*C + Z23*(A-B)$$

$$K31 = Z31*A + Z32*B + Z33*(C/2)$$

$$K32 = Z31*B + Z32*A + Z33*(-C/2)$$

$$K33 = Z31*-C + Z32*C + Z33*(A-B)$$

2.2 ALTERAÇÕES NAS ROTINAS DO PROGRAMA "FEMPLANO"

Com vista a poder-se adicionar este novo módulo que permite o calculo de materiais com anisotropia transversal, foi necessário fazer-se algumas alterações no programa. São essas alterações que se mostram de seguida por ordem de execução do programa.

1ª ALTERAÇÃO ROTINA "PREPLAST.FOR "

1a) (linha 60)

Identificar se o problema envolve ou não anisotropia, através da leitura da variável "niso". (linha 60)

NISO = 0 não há anisotropia.

NISO = 1 há anisotropia transversal

1b) (linha 90)

"npro" é a variável que regista o numero de propriedades a serem futuramente lidas. Automaticamente é feita a atribuição do numero correcto consoante a situação.

NPRO = 5 se NISO = 0
 NPRO = 8 se NISO = 1

1c) (linha 125)
 Adição na instrução de escrita da variável "NISO"

1d) (linha 1050)
 Adição nos parâmetros de chamada à rotina "SUBPRE.FOR" da variável "NISO"

2ª ALTERAÇÃO SUBPRE.FOR

2a) (linha 16)
 Adição nos parâmetros do cabeçalho da rotina da variável "NISO".

2b) (linha 140)
 Se o problema a tratar for anisotropico há que ler mais três propriedades adicionais, concretamente os módulos de Young em cada uma das direcções e o modulo de resistencia ao corte.

3ª ALTERAÇÃO FEMPLANO.COM

3a) (linha 25)
 Adicao de niso como variável global.

3b) (linha 27)
 Redimensionar a matriz "NPROPS" de 5 propriedades para as 8 máximas necessárias.

4ª ALTERAÇÃO ANINPUT.FOR

4a) (linha 900)
 Adição na instrução de leitura e no respectivo formato, de "NISO".

4b) (linha 970)
 Alteração da instrução de formatação de escrita de "5E14.6" para "8E14.6".

5ª ALTERAÇÃO STIFFPS.FOR

5a) (linha 25)
 De acordo com o problema a tratar faz-se uma chamada à rotina "MODPS" ou "ANMODPS" consoante se trate de um caso isotrópico ou anisotropico respectivamente.

6ª ALTERAÇÃO ANMODPS.FOR

Esta rotina é totalmente nova. Tal como a "MODPS", tem por função o calculo da "DMATX" que é utilizada posteriormente na "STIFFPS" para o calculo da matriz de rigidez.

7ª ALTERAÇÃO CHECK1.FOR

4a) (linha 900)
 Admitir que "nprop" possa tomar o valor de 8 (oito) propriedades diferentes.

3. ESTUDO TEÓRICO DA VIGA

3.1 LEI DE HOOK

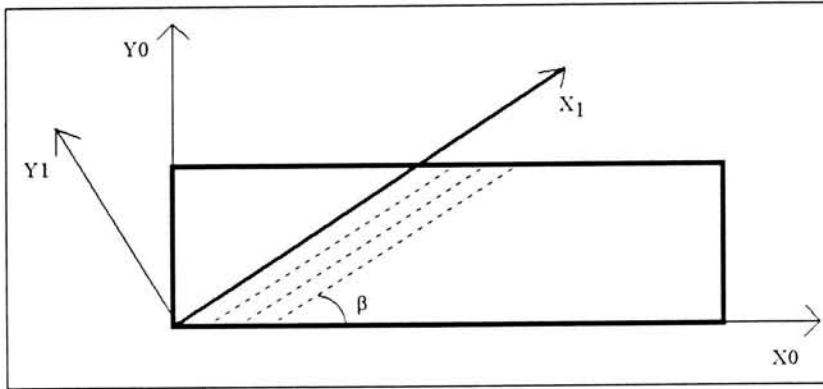


fig. 3.1

A lei de Hook generalizada para o caso de uma viga transversalmente isotópica, referente ao sistema de eixos (x_0, y_0) é:

$$\varepsilon_x = a_{12} \sigma_x - a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy} \quad [3.1]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{1}{E_2} \sigma_y \quad [3.4]$$

$$\varepsilon_y = -a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy} \quad [3.2]$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y \quad [3.5]$$

$$\gamma_{xy} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy} \quad [3.3]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad [3.6]$$

Na primeira coluna a lei apresenta-se com coeficientes generalizados. Na segunda os coeficientes são expressos em termos das constantes de engenharia, ou propriedades dos materiais, sendo:

- E1 Módulo de Young na direcção das fibras
- E2 Módulo de Young na direcção perpendicular a direcção das fibras
- ν_1 Coeficiente de Poisson na direcção das fibras
- G Módulo de Resistência ao corte transversal

As equações acima apresentadas aplicam-se quando a placa tiver a direcção das fibras coincidente com a do sistema de eixos, ou seja (x_0, y_0) coincidente com (x_1, y_1) . Para o caso em que o ângulo β seja diferente de 0 (zero) as deformações no referencial (x_0, y_0) serão obtidas da seguinte forma: (figura 3.1)

$$\varepsilon'_x = a'_{11} \sigma'_x - a'_{12} \sigma'_y + a'_{16} \tau'_{xy} \quad [3.7]$$

$$\varepsilon'_x = \frac{1}{E'_1} \sigma'_x - \frac{\nu'_2}{E'_2} \sigma'_y + \frac{\eta'_1}{E'_1} \tau'_{xy} \quad [3.10]$$

$$\varepsilon'_y = -a'_{12} \sigma'_x + a'_{22} \sigma'_y + a'_{26} \tau'_{xy} \quad [3.8]$$

$$\varepsilon'_y = -\frac{\nu'_1}{E'_1} \sigma'_x + \frac{1}{E'_2} \sigma'_y + \frac{\eta'_2}{E'_2} \tau'_{xy} \quad [3.11]$$

$$\gamma'_{xy} = -a'_{16} \sigma'_x + a'_{26} \sigma'_y + a'_{66} \tau'_{xy} \quad [3.9]$$

$$\gamma'_{xy} = -\frac{\nu'_1}{E'_1} \sigma'_x + \frac{\eta'_2}{E'_2} \sigma'_y + \frac{1}{G} \tau'_{xy} \quad [3.12]$$

3.2 COEFICIENTES DE TRANSFORMAÇÃO

A obtenção dos novos coeficientes a_{ij} é feita através das seguintes equações:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1'} = \frac{\cos^4 \beta}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right) \cdot \text{sen}^2 \beta \cdot \cos^2 \beta + \frac{\text{sen}^4 \beta}{E_2} \quad [3.13]$$

$$a_{12} = \frac{\nu_1'}{E_1'} = \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_1}{E_2} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G}\right) \text{sen}^2(2\beta) \quad [3.14]$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2'} = \frac{\text{sen}^4 \beta}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right) \cdot \text{sen}^2 \beta \cdot \cos^2 \beta + \frac{\cos^4 \beta}{E_2} \quad [3.15]$$

$$a_{16} = \frac{\eta_1'}{E_1'} = \frac{\text{sen}^2 \beta}{E_2} - \frac{\cos^2 \beta}{E_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right) \cos(2\beta) \cdot \text{sen}(2\beta) \quad [3.16]$$

$$a_{26} = \frac{\eta_2'}{E_2'} = \frac{\cos^2 \beta}{E_2} - \frac{\text{sen}^2 \beta}{E_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right) \cos(2\beta) \cdot \text{sen}(2\beta) \quad [3.17]$$

$$a_{66} = \frac{1}{G'} = \frac{1}{G} + \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G}\right) \cdot \text{sen}^2 \beta \quad [3.18]$$

$$\frac{\nu_1'}{E_1'} = \frac{\nu_2'}{E_2'} \quad [3.19]$$

Assim, conhecidas as propriedades do material para uma dada orientação das fibras, é possível determinar as deformações em qualquer sistema de eixos.

É com base nas equações apresentadas que se irão obter para cada exemplo, as propriedades para os vários ângulos β estudados

4. EXEMPLO I VIGA ENCASTRADA À FLEXÃO

4.1 INTRODUÇÃO

O capítulo subdivide-se em duas partes principais.

Na primeira parte (dois primeiros sub-capítulos) faz-se a exposição do problema a ser tratado, apresentando-se as soluções analítica e teórica. Apresenta-se também a organização dos dados a ser apresentados e as razões dessas escolhas.

Na segunda (restantes 4 sub-capítulos) expõe-se os resultados para as várias tensões e para os deslocamentos concluindo-se com as observações que resultam da análise desses mesmos resultados.

4.2 EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA

4.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

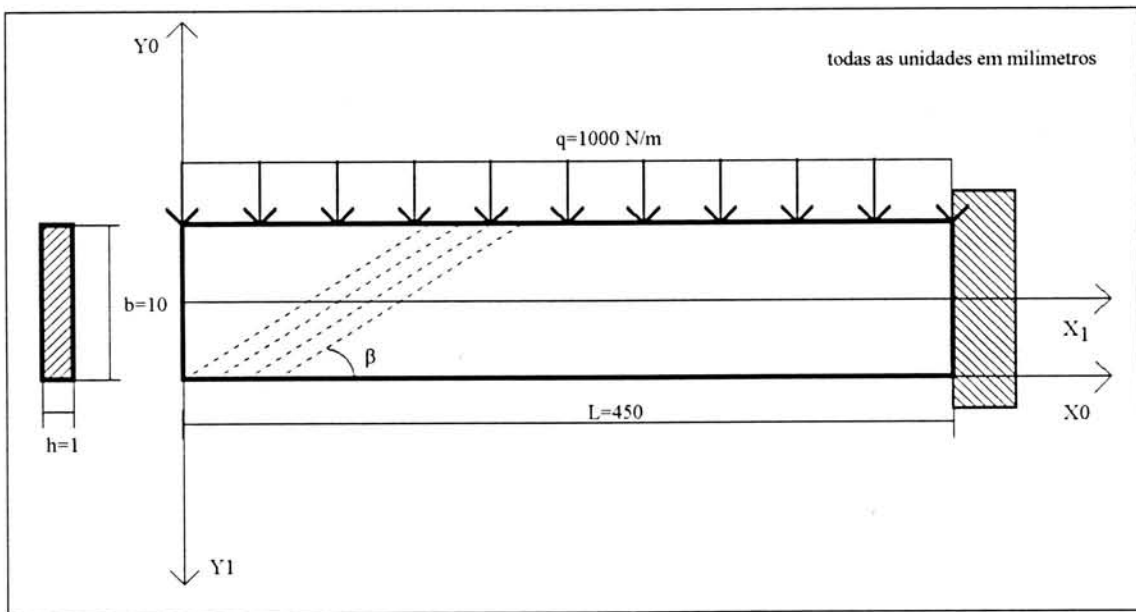


fig. 4.1

De acordo com [1], uma viga nas condições da figura 4.1, as equações analíticas que descrevem o seu comportamento, a nível de tensões e deslocamentos, são as seguintes:

$$\sigma_x = \frac{qx^3y}{2j} + \frac{q}{h} * \left| \frac{a_{16}}{a_{11}} * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right) + 2 * \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} \right) * \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b} \right) \right| \quad [4.1]$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} * \left(-1 + \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \quad [4.2]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2j} * \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \left| \frac{q}{h} * \frac{a_{16}}{a_{11}} * \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \right| \quad [4.3]$$

$$\eta = \frac{qa_{11}}{24j} * (x^4 - 4l^3x + 3l^4) - \frac{qb^2}{80j} * \left(3a_{12} + 4a_{66} - \frac{3}{8} * \frac{a_{16}^2}{a_{11}} \right) * (x-l)^2 \quad [4.4]$$

As variáveis x e y das equações, são referidas ao sistema de eixos (x_1, y_1) , sendo o referencial (x_0, y_0) usado para a solução numérica. Os factores a_{ij} são os apresentados nas equações 3.13 a 3.19.

As equações dependem apenas dos parâmetros geométricos (altura, comprimento e espessura), do valor da carga, e dos coeficientes a_{ij} . Estes por sua vez são obtidos a partir das apenas as propriedades dos materiais e o ângulo (β) da orientação das fibras.

4.2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Após as alterações efectuadas no programa de elementos finitos, descritas anteriormente no capítulo 1, fez-se a introdução dos dados obedecendo às condições geométricas, de carga e de equilíbrio da figura 4.1. A malha escolhida está representada na da figura 4.2.

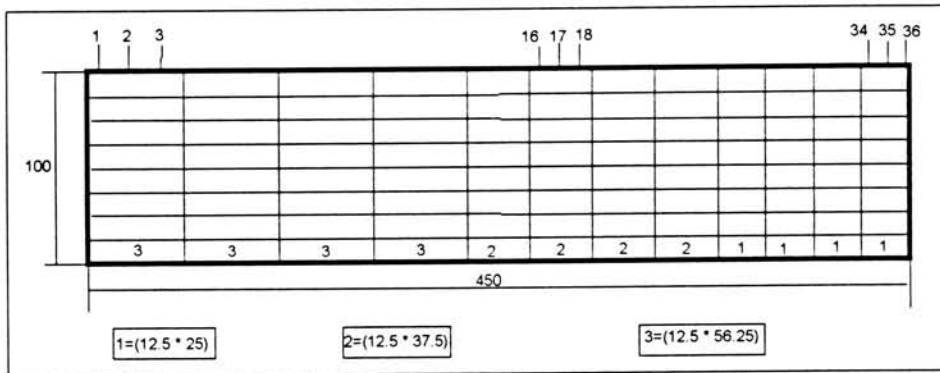


fig. 4.2

Uma vez que o referencial para a equação analítica é diferente do referencial utilizado na solução numérica houve o cuidado de fazer as alterações necessárias de forma a calcular os valores das tensões e deslocamentos para os pontos de Gauss obtidos na solução numérica. A viga foi dividida em 96 elementos, considerando-se oito ao longo da altura e 3 pontos de Gauss. No total obteve-se 36 secções e, em cada uma destas 24 pontos com o valor das tensões. Na figura 4.2, indicam-se algumas das secções, omitindo-se as restantes para não a sobrecarregar.

4.2.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

A viga em estudo apresenta, para uma orientação das fibras com o eixo "x0", as seguintes características:

$$E1 = 22.4 \text{ [Ga]}$$

$$E2 = 2.82 \text{ [GA]}$$

$$G = 1.06 \text{ [GA]}$$

$$G = 1.06 \text{ [GA]}$$

4.3 APRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA DOS RESULTADOS

Após se terem calculado as tensões em cada um dos pontos das secções para os quais foram obtidos os valores numéricos, fez-se o cálculo do erro relativo (em percentagem) da seguinte forma:

$$\text{Erro relativo} = 100 * (\text{valor analítico} - \text{valore numérico}) / \text{valor analítico} \quad [\%]$$

De forma a orientar a exposição dos resultados, foi feito um estudo prévio. O gráfico da figura 4.3 mostra os valores dos erros superiores a 10% em cada secção, para as várias secções da viga, com um ângulo de 45 graus. Como se confirma para os restantes ângulos, existem três zonas distintas ao longo da viga. Próximo do extremo livre (secção 1), zona do meio da viga (secção 18) e extremo encastrado (secção 36).

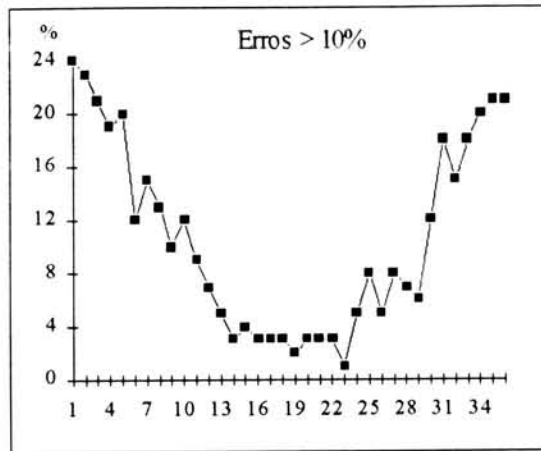


fig. 5

Assim, os resultados serão apresentados separadamente, para cada uma das tensões (G_x , G_y e T_{xy}) e para os deslocamentos.

Em cada uma das tensões faz-se a análise nos diferentes ângulos de orientação das fibras, nomeadamente 0,15,30,45,60,75 e 90 graus.

Para cada ângulo serão apresentados os seguintes gráficos:

- Dois gráficos junto à extremidade livre (secções 1 e 5)
- Dois gráficos da zona do meio da viga (secções 10 e 18)
- Dois gráficos junto à zona do encastramento (30 e 36)

Serão apresentados ainda, três gráficos com os valores dos erros relativos, tentando quantificar a aproximação entre os resultados numéricos e analíticos. Mais uma vez se mostram os erros nas secções que se julga ser as mais representativas.

No final da exposição de cada uma das tensões, apresentam-se algumas observações relevantes para as conclusões finais.

4.4 TENSÕES GX

4.4.1 ANALISE DA EQUAÇÃO ANALÍTICA

Para um melhor entendimento do andamento das tensões, ao longo da viga e com a variação do ângulo, é importante analisar as várias parcelas da equação analítica. Rescrever-se a equação 4.1 subdividida nas seguintes parcelas:

$$\sigma_x = \frac{qx^2y}{2j} + \frac{q}{h} * \left| \frac{a_{16}}{a_{11}} * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right) + 2 * \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right) * \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right) \right| \quad [4.1]$$

$$P1 = \frac{qx^2y}{2j}$$

$$P2 = \frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{x}{b} \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right)$$

$$P3 = \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right)$$

$$P4 = \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right)$$

Utilizando os dados para o caso do ângulo de 45°, os gráficos abaixo representam o andamento de cada uma das parcelas da equação, para várias secções.

As parcelas P1 e P2 variam apenas ao longo da viga e são independentes do ângulo. Há um aumento dos valores proporcional com o aumento da coordenada "x", em ambos os casos. (figuras 4.4 e 4.5)

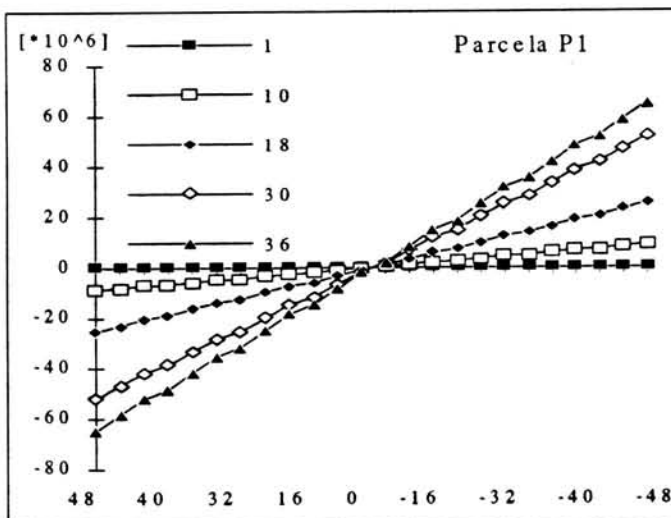


fig. 4.4

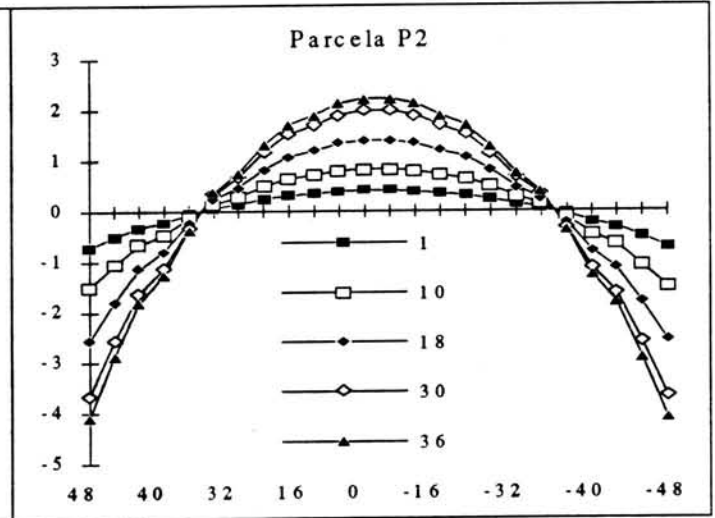


fig. 4.5

P3 é um valor constante para cada ângulo e o seu andamento é representado na figura 4.6. A parcela P4 é constante para todas as secções da viga e não varia com o ângulo. (figura 4.7)

Sendo a equação 4.1 uma composição das quatro parcelas, as variações destas vão fazer-se sentir para os vários pontos da viga e para os vários ângulos, como a seguir se apresenta.

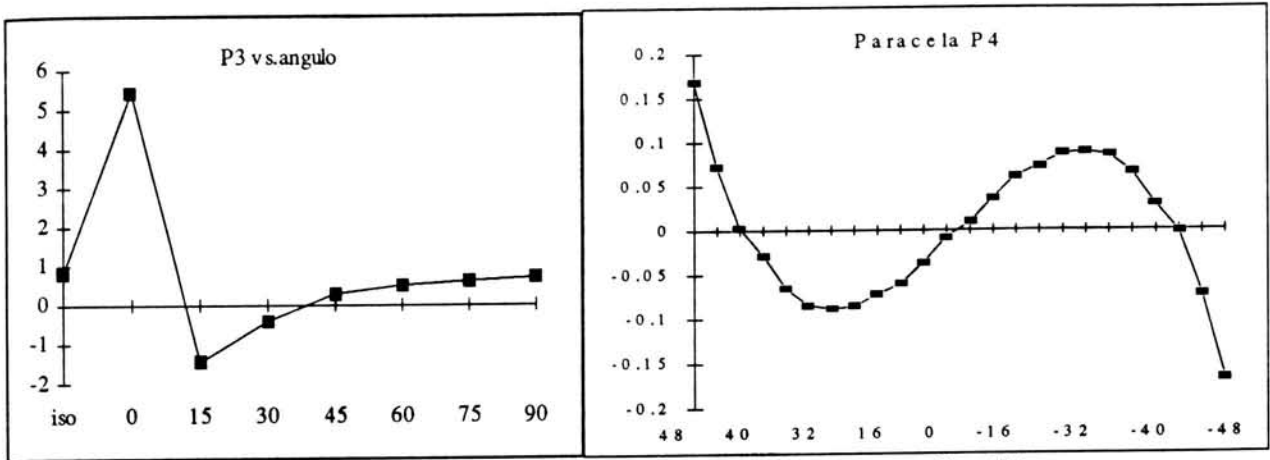


fig. 4.6

fig. 4.7

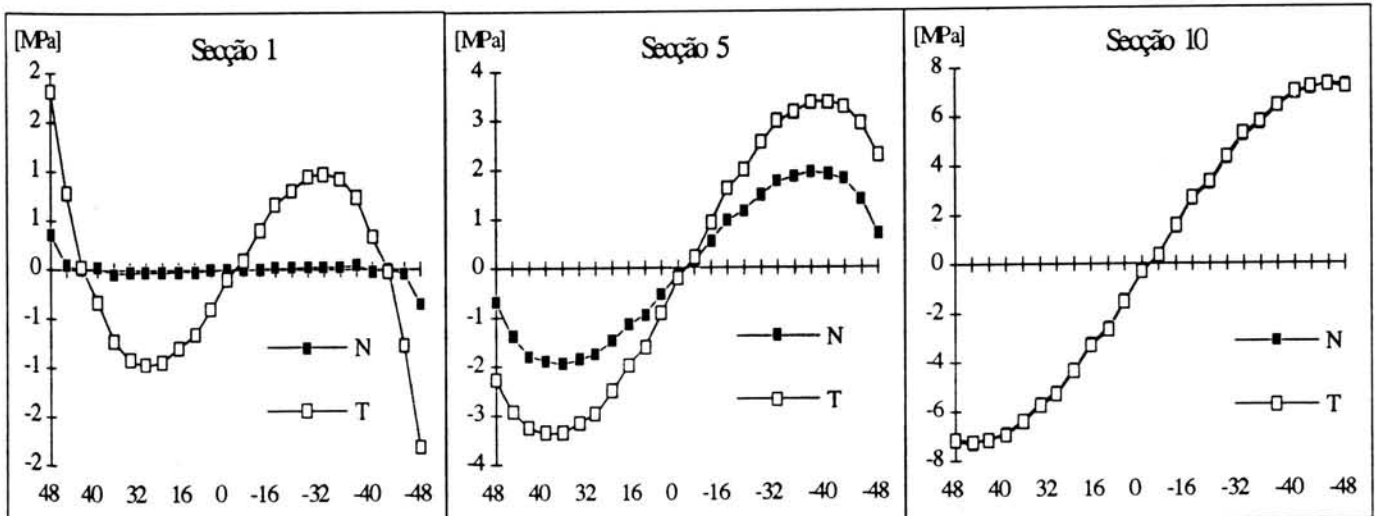
4.4.2 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

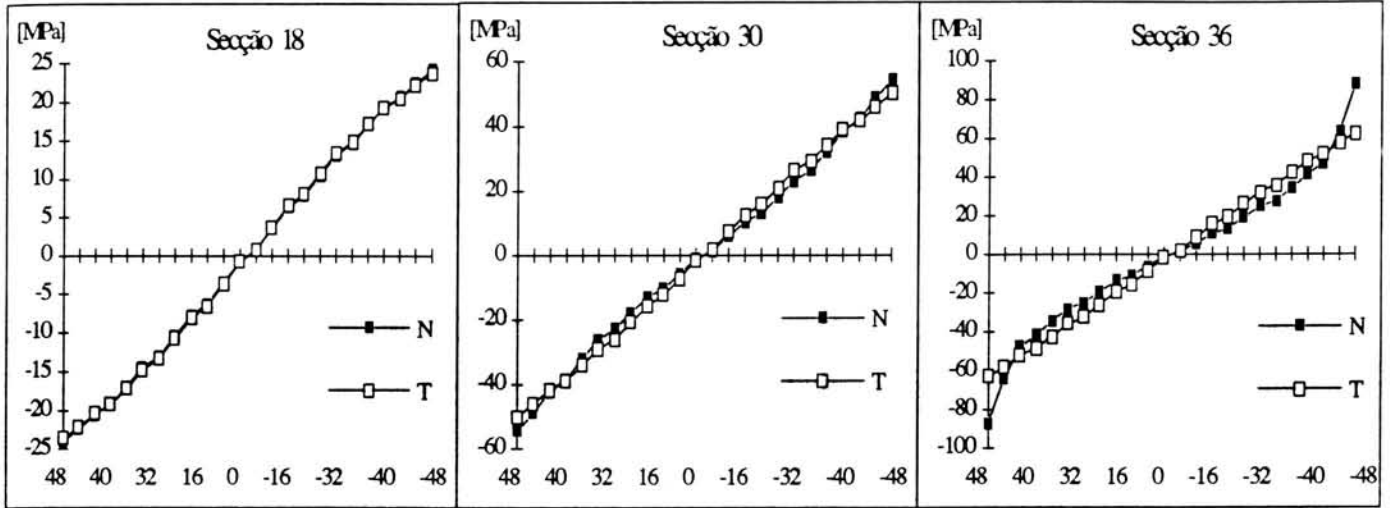
Seguem-se os resultados para os vários ângulos. Para cada valor do ângulo apresentam-se seis gráficos representando as tensões analíticas e numéricas em comparação. Apresentam-se três gráficos com os erros relativos entre as duas soluções, para algumas secções que se julgam serem as mais representativas.

$\beta = 0$ GRAUS

O andamento da tensão começa por seguir uma equação cúbica para a secção 1 linearizando-se à medida que se caminha para a secção 36.

A tensão numérica difere bastante para as secções iniciais, aproximando-se progressivamente do valor analítico, sendo contudo sempre inferior. A partir da secção 10 até à 30 os resultados são quase coincidentes, voltando novamente a divergir perto do extremo encastrado.

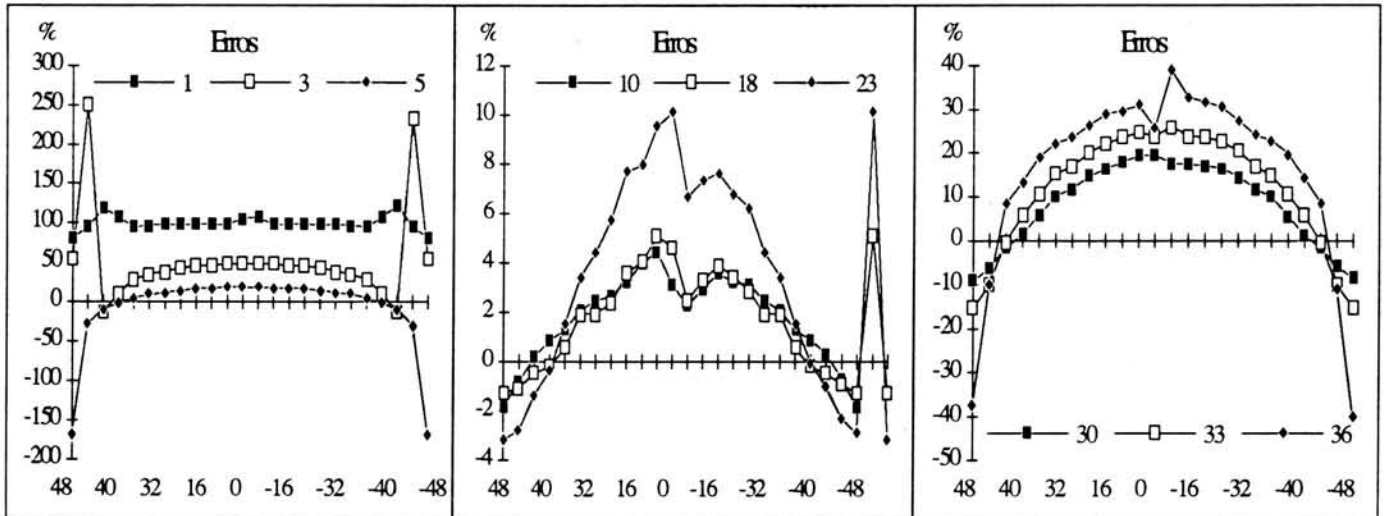




Uma forma de contabilizar essa convergência é através dos erros relativos entre as duas soluções que se apresentam nos gráficos a seguir. Inicialmente têm-se erros elevados (já esperados após a análise dos gráficos anteriores). Nas secções centrais os erros não ultrapassam os 10% .

Relativamente ao extremo livre, teoricamente para x igual a zero o valor é nulo e o resultado numérico aproxima-se mais da realidade.

Os erros na zona central da viga são mais elevados perto do eixo neutro devido ao valor da tensão nula ou próxima. Assim um pequeno erro comparado com zero (ou um valor muito próximo) é sempre elevado.

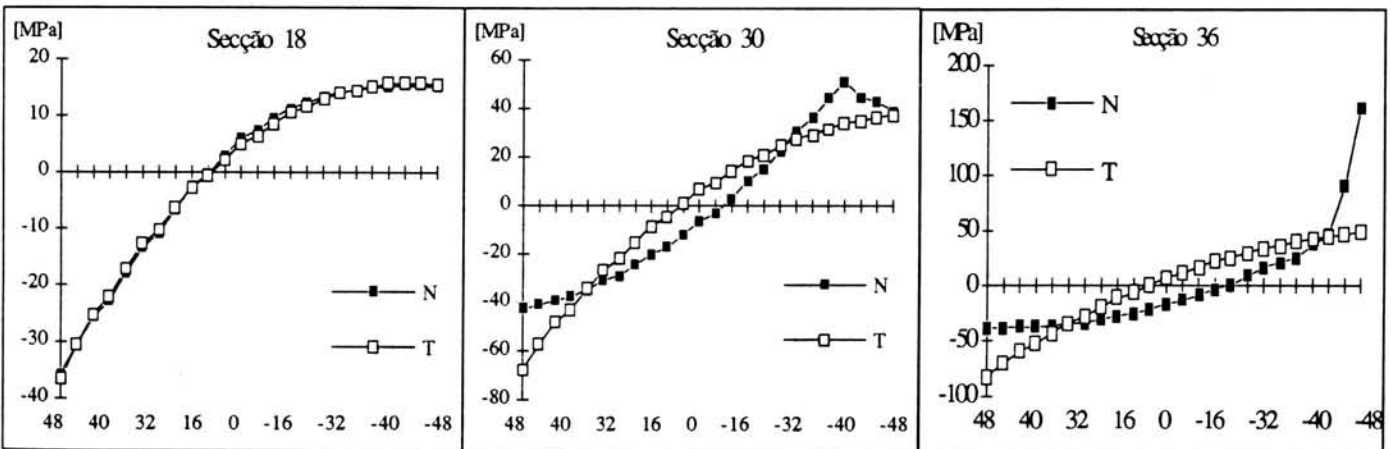
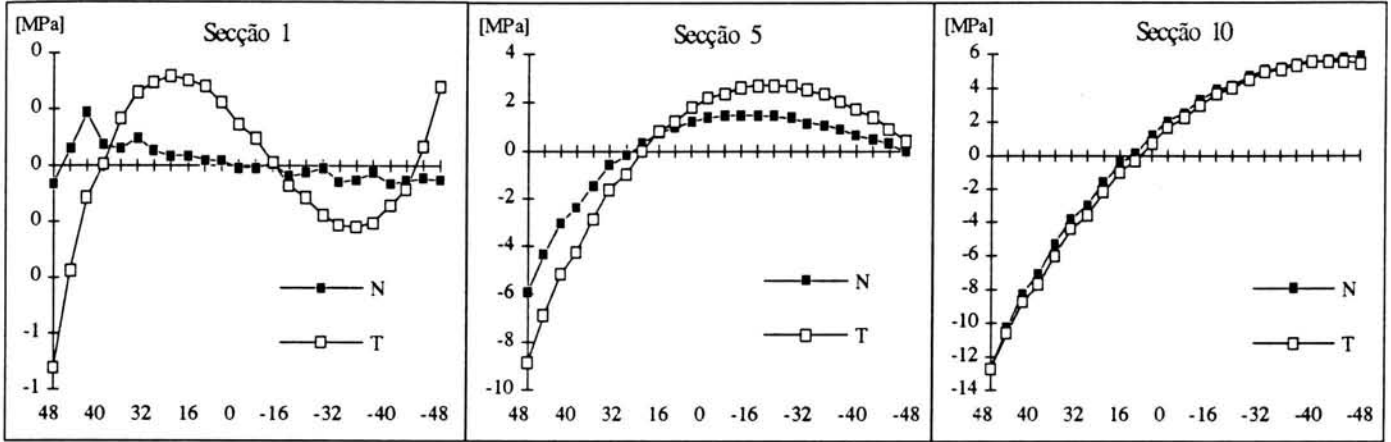


$\beta = 15$ GRAUS

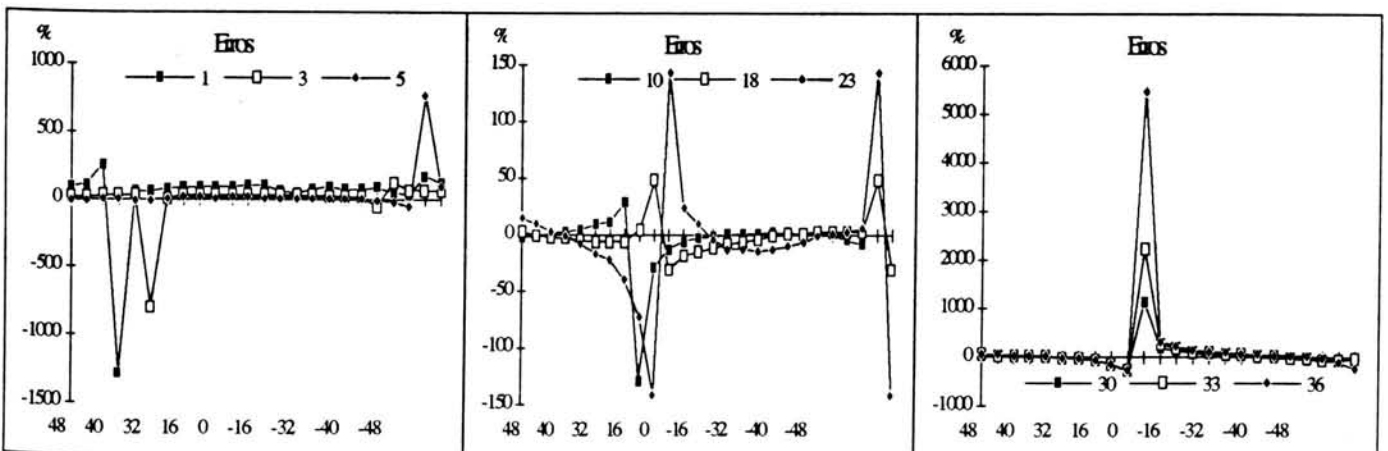
Os resultados teóricos reflectem, de forma acentuada, a contribuição da parcela P2 da equação, deixando de haver simetria relativamente ao eixo neutro da secção.

Os resultados numéricos conseguem acompanhar essa variação em termos de andamento, mas em termos de valores são bastante diferentes. Na extremidade as diferenças são mais acentuadas do que para $\beta=0^\circ$.

De salientar a inversão da curvatura da solução teórica na secção 1.

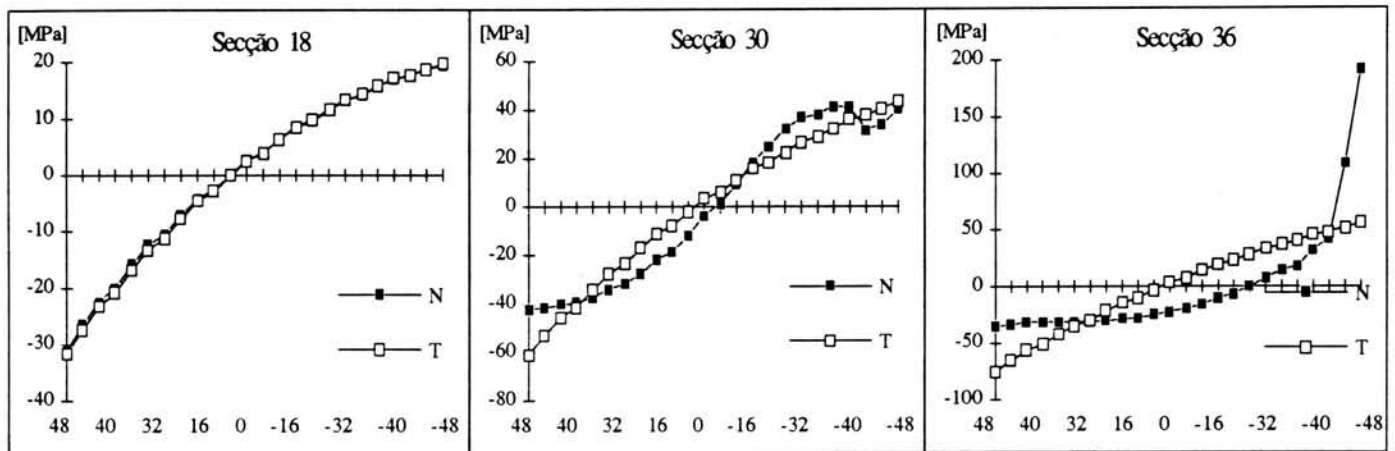
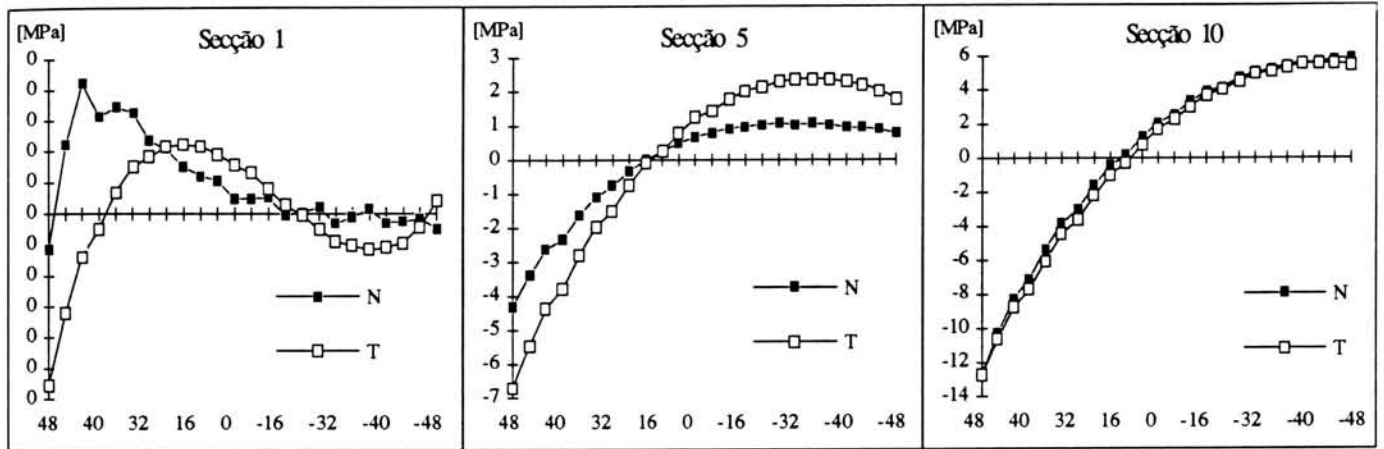


No extremo livre é onde os erros são maiores, especialmente em alguns casos pontuais da secção. Na zona central e no extremo encastrado, perto do eixo neutro da secção, verificam-se erros elevados. Para isso contribui o facto da passagem de negativa a positiva de Gx ocorrer em secções diferentes, originando erros elevados pois os valores em comparação tem sinais diferentes. Esse facto é bem notório no gráfico central (abaixo). Na secção 10 a inversão é feita antes do meio da viga. Para a 18, a inversão é mais próxima. O pico elevado do erro acompanha essa progressão. Os restantes valores sobem de valor também.

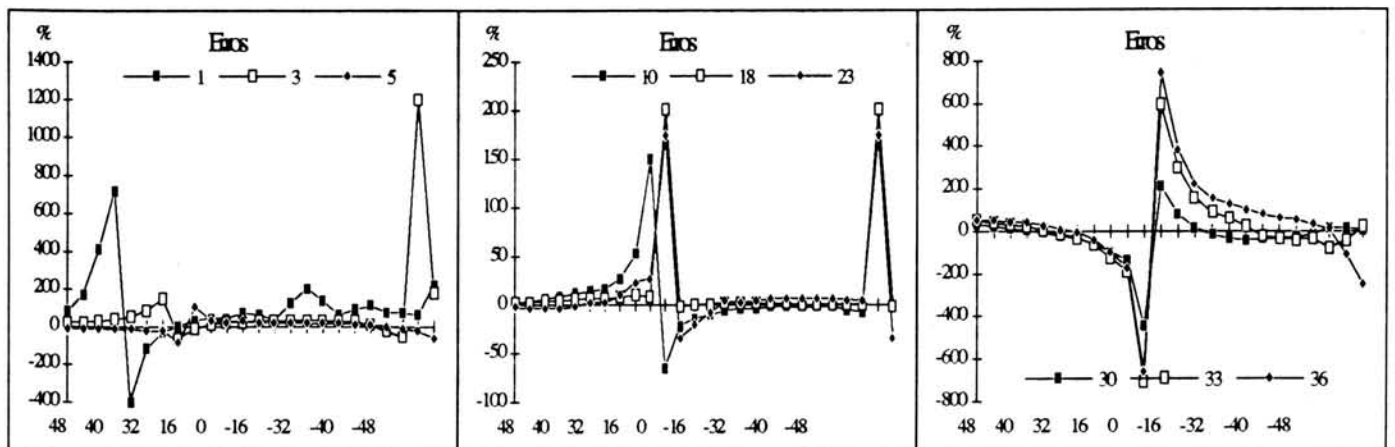


$\beta = 30$ GRAUS

Para este ângulo, o andamento é semelhante ao caso anterior de 15 graus, notando-se apenas que tendem para a linearidade



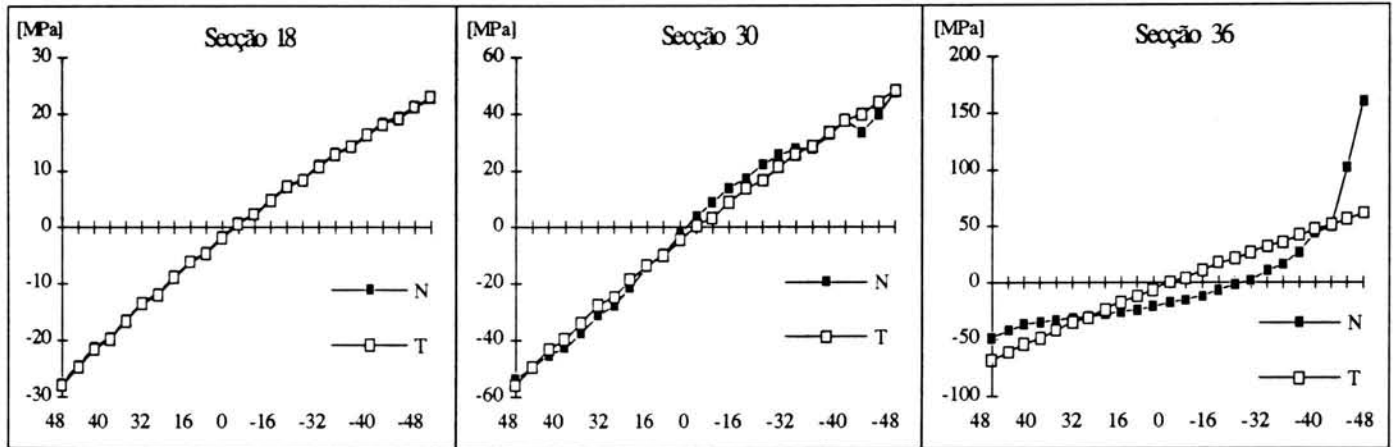
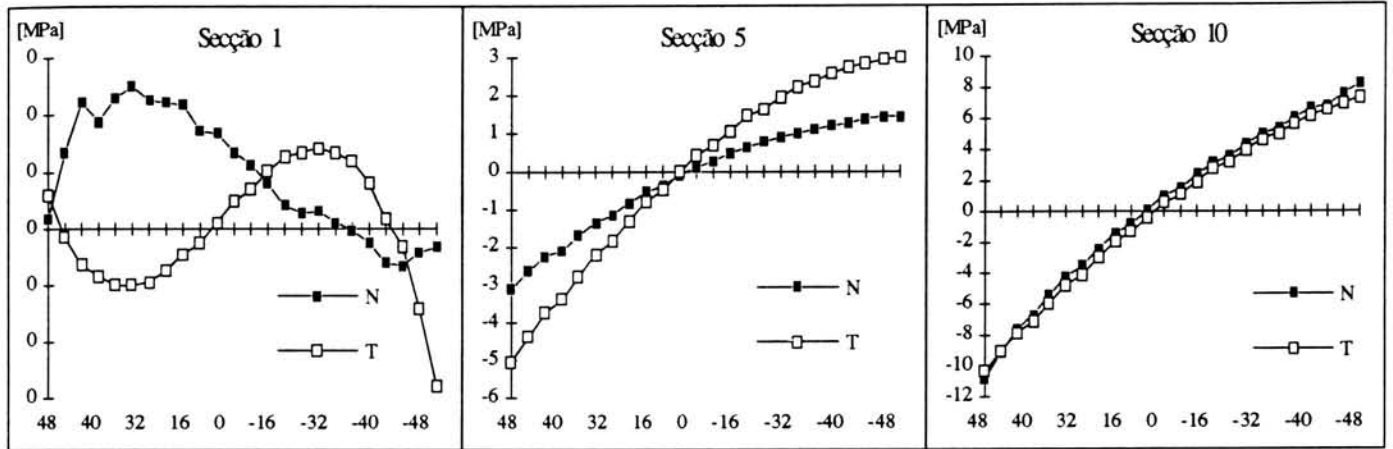
Os erros seguem, também, o mesmo andamento e explicam-se da mesma forma. Há a salientar que, apesar dos erros máximos serem mais elevados, no geral, nota-se uma diminuição do seu valor.



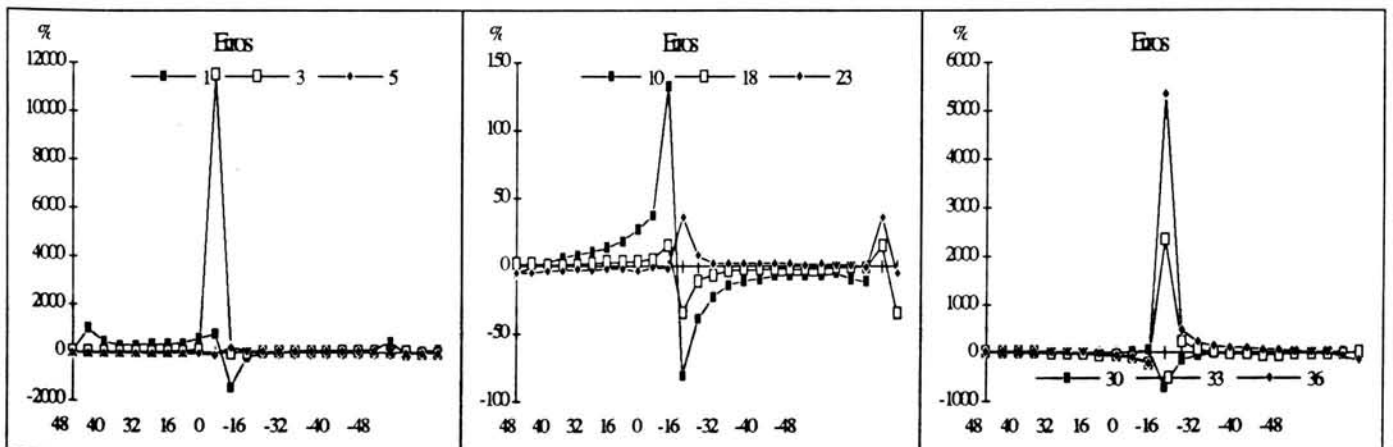
$\beta = 45$ GRAUS

Para a secção 1 existe uma inversão no andamento (volta a ser o mesmo para 0 graus) dos valores analíticos, mantendo-se a mesma variação dos valores numéricos, o que irá implicar erros elevados para esta zona.

Como se observa na secção 18, volta a existir a linearidade da tensão.

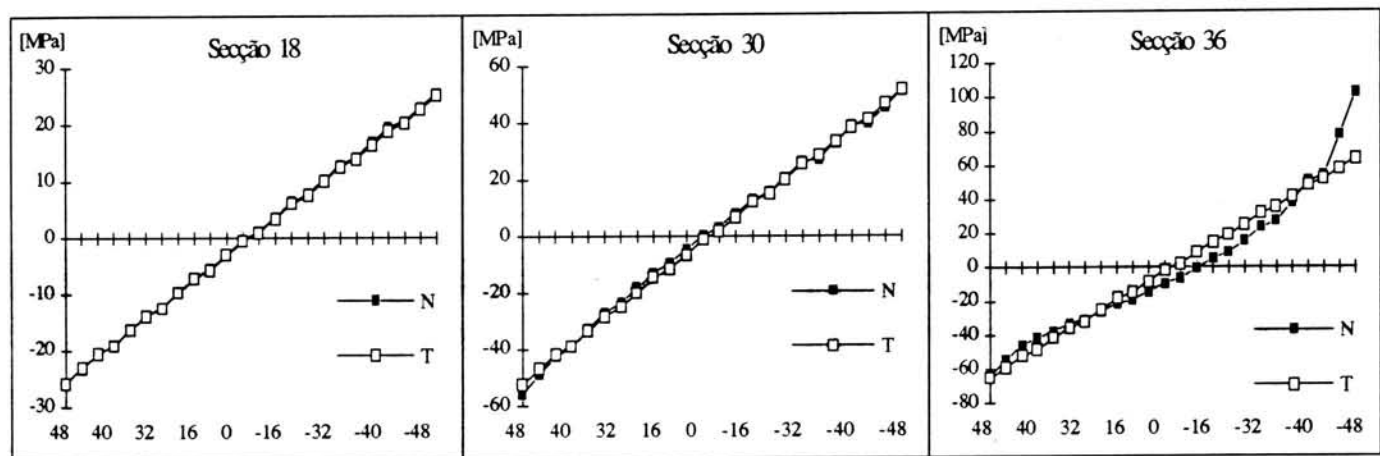
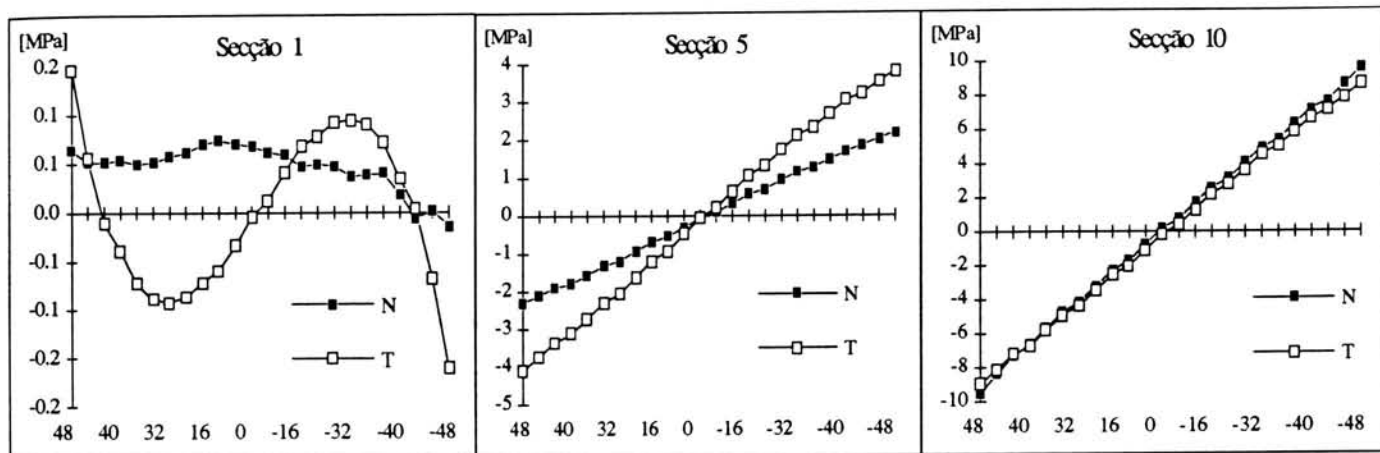


Para a extremidade livre e para a encastrada, pioram os valores dos erros, especialmente, o seu valor máximo, como se depreendia do gráficos anteriores. No entanto, para a zona central, começa a notar-se um melhoramento geral quer nos valores máximos dos erros quer no seus valores médios

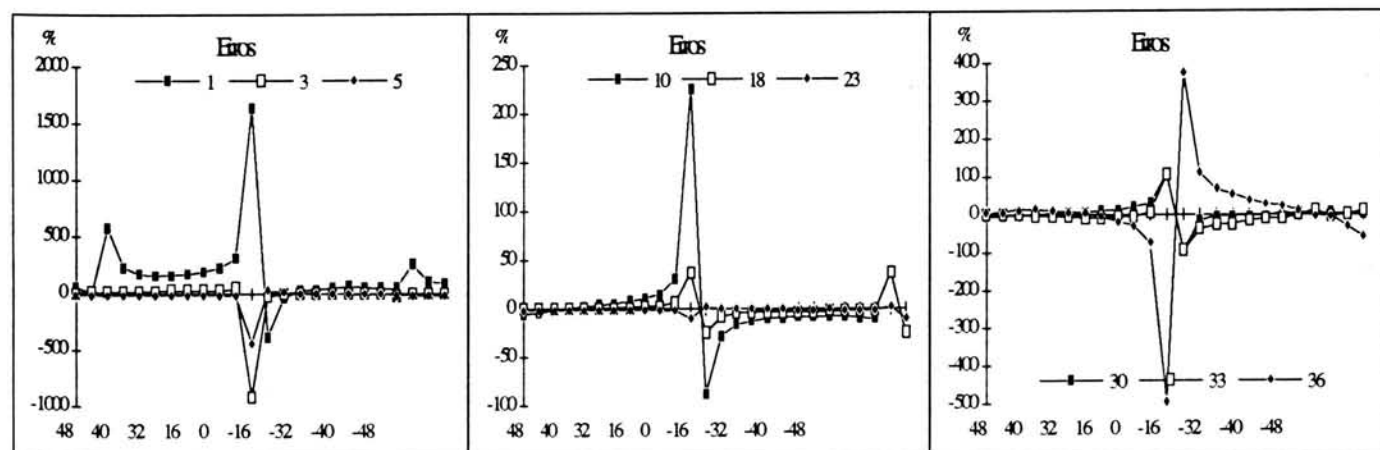


$\beta = 60$ GRAUS

Os andamentos tornam-se cada vez mais lineares com maior aproximação das duas soluções.

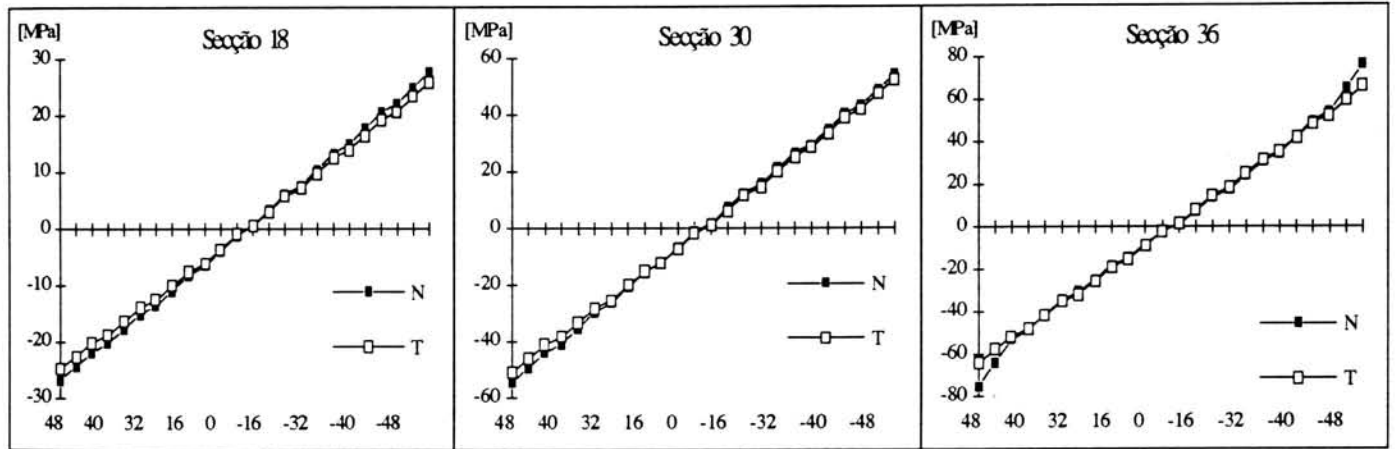
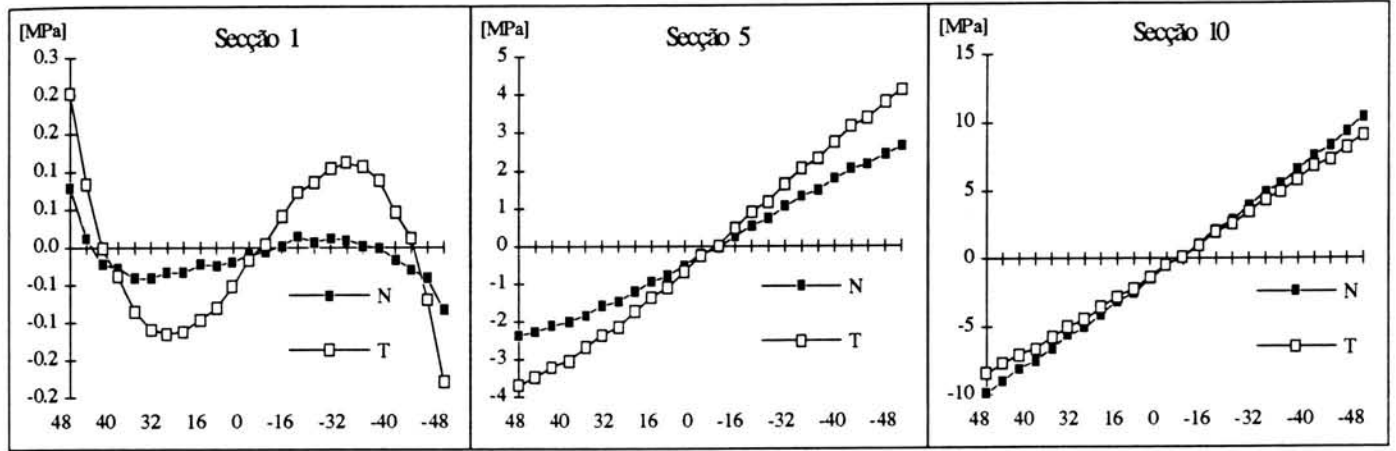


A análise dos erros demonstra a maior convergência dos resultados especialmente nas extremidades da viga.

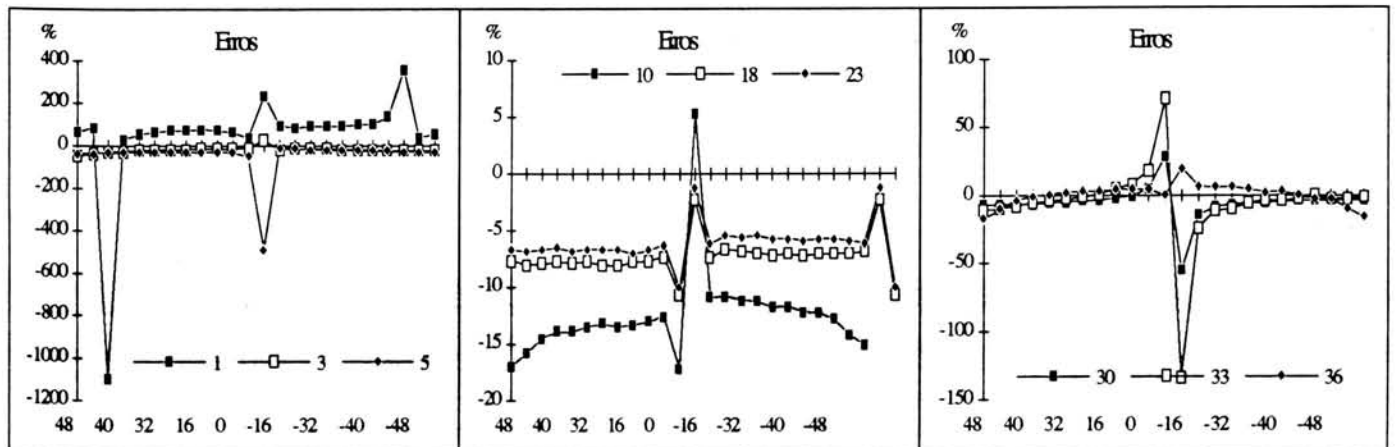


$\beta = 75$ GRAUS

Para as extremidades volta-se a acentuar uma maior aproximação das curvas, apesar dos valores não coincidirem. Consequentemente a zona do meio da viga, onde os resultados são quase coincidentes, cresce em extensão.

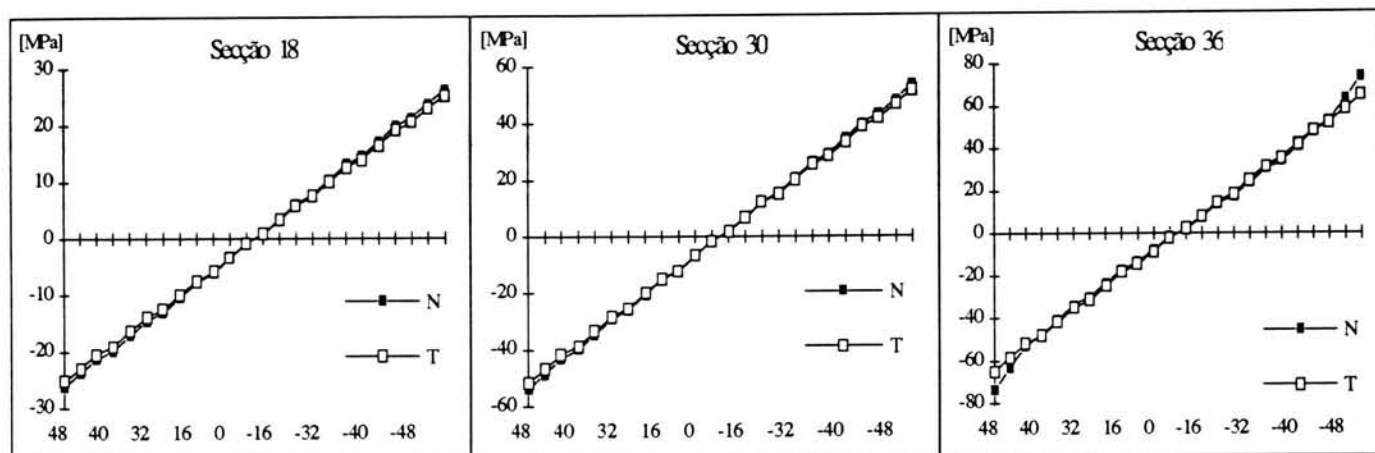
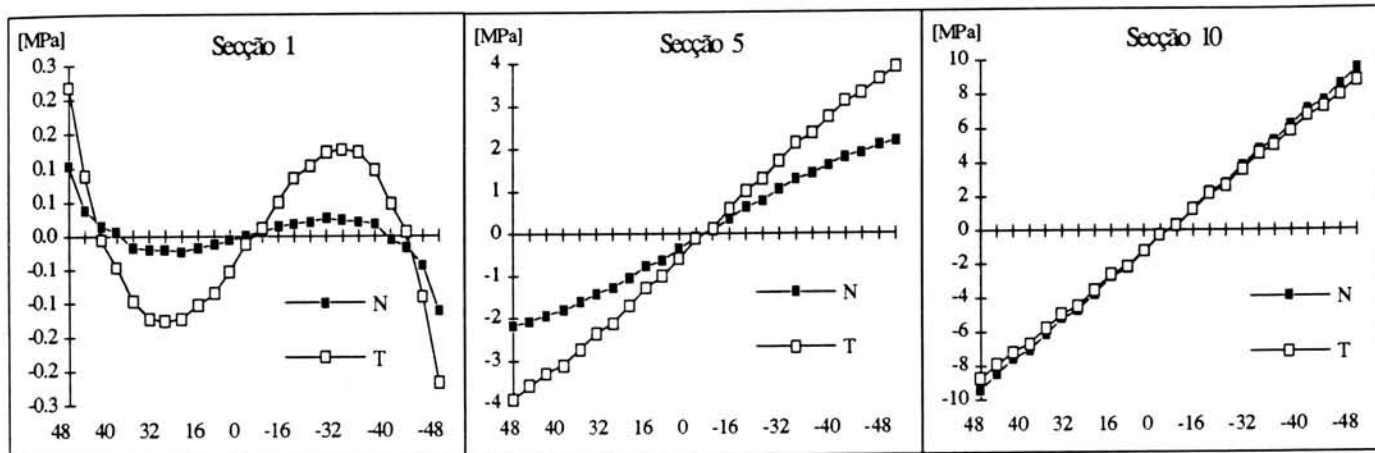


Os erros mostram exactamente essa melhoria, passando na zona central de um erro máximo de 5% para -18%.

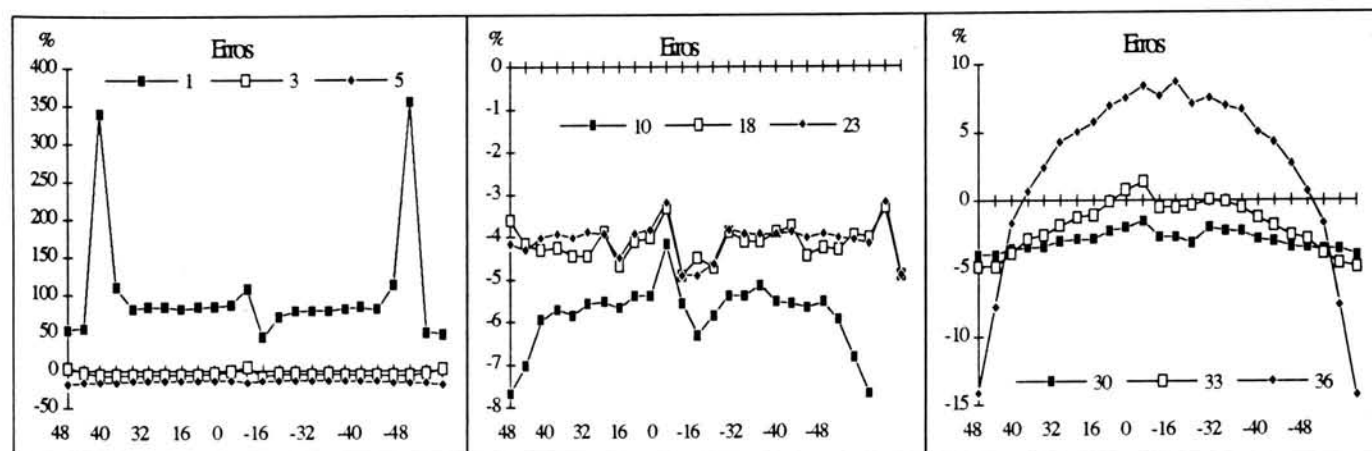


$\beta = 90$ GRAUS

Para 90° seria de esperar algo semelhante ao verificado para zero graus. Neste caso, as curvas são mais lineares.



A comparação dos erros esclarece essa melhoria, existindo uma maior regularidade nos erros.



4.4.3 OBSERVAÇÕES

Após a exposição anterior, ressaltam algumas observações relevantes:

- A evolução da solução teórica ao longo da viga, para todos os ângulos, começa por obedecer a uma equação cúbica ou quadrática, passando a tomar uma forma mais linear para a zona do meio da viga. Perto da extremidade encastrada volta a tender para um andamento parabólico. A solução analítica, embora siga os mesmos andamentos, tem valores geralmente inferiores.
- Com o incremento do ângulo, nota-se um aumento acentuado dos erros, culminando no ângulo de 15° , diminuindo a partir deste valor.

Há pois uma parte da viga onde as soluções são convergentes. Essa zona diminui ao caminhar-se para os 15° voltando a aumentar a partir daí até aos 90°

4.5 TENSÕES Gy

4.5.1 ANÁLISE DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

No caso da tensão Gy, a equação tem apenas uma parcela. Como se observa na equação 4.2, o valor de Gy é constante ao longo de toda a viga e também é independente do ângulo, variando apenas na secção. Toma valores nulos no bordo não carregado, atingindo o seu valor máximo para o bordo carregado (carga por unidade de comprimento a dividir pela espessura da viga).

$$\sigma_y = \frac{q}{2h} * \left(-1 + \frac{3*y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}\right) \quad [4.2]$$

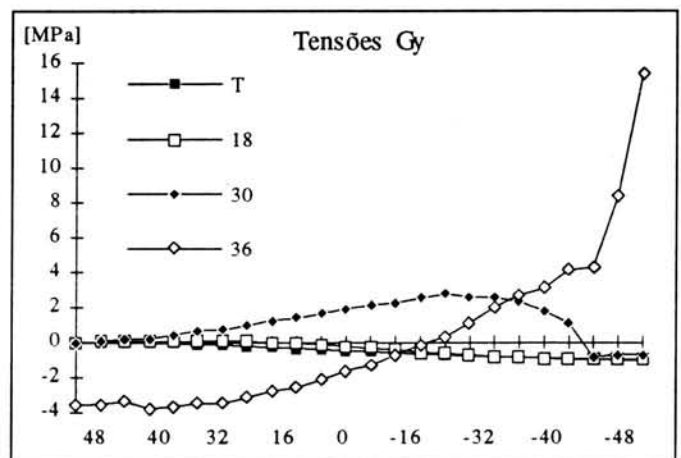
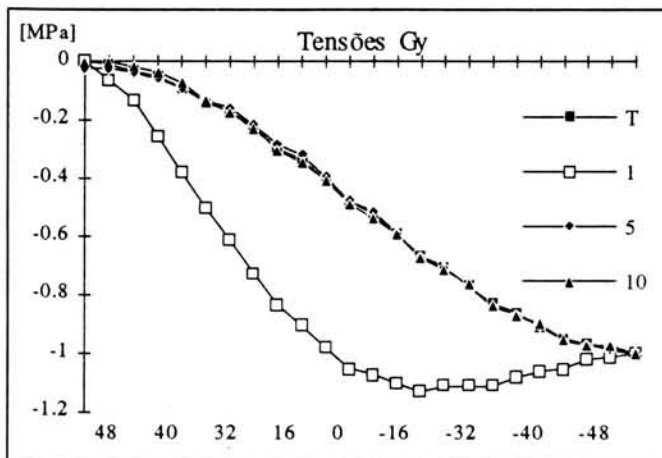
4.5.1 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Ao contrario da solução teórica, os valores numéricos diferem com o ângulo de orientação das fibras, pelo que se apresenta os andamentos e os erros para os vários ângulos.

Mostram-se as progressões da tensão, tal como anteriormente em Gx, sendo os extremos da viga e a zona central, as mais relevantes.

$\beta = 0$ GRAUS

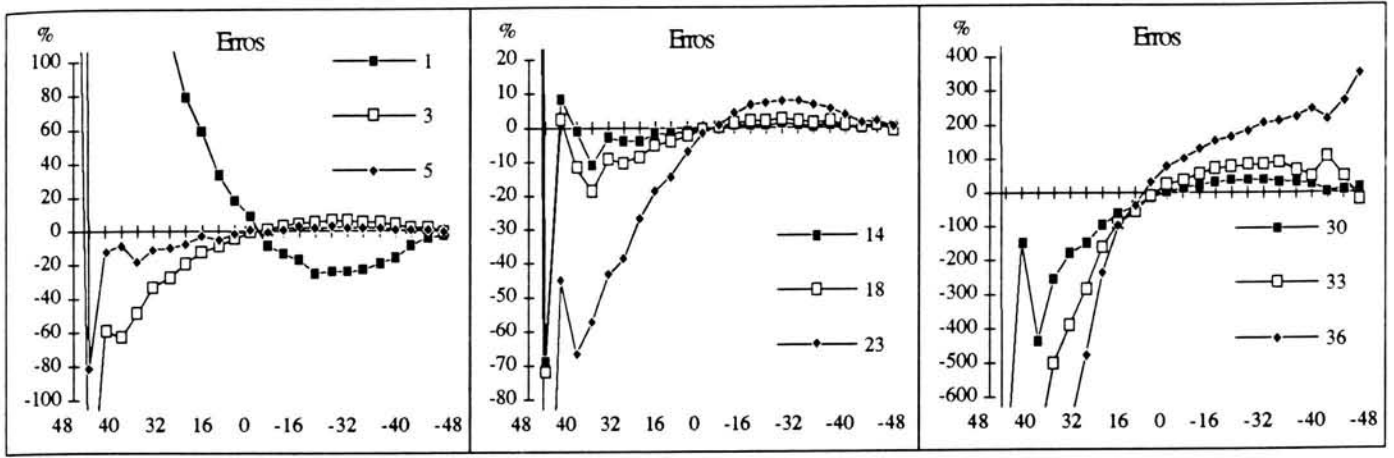
As primeiras secções do extremo livre, divergem da solução teórica. A partir da secção 5 até à secção 30 os resultados são praticamente coincidentes. Novamente, no extremo encastrado e secções próximas, os resultados numéricos não são representativos. Há um completo afastamento dos andamentos e dos valores nesta zona. Tal facto, explica-se pelas reacções obtidas numericamente, na secção de encastramento não serem correctas. Verificam-se em algumas delas valores negativos, quando deveriam ser todas positivas, uma vez que o único carregamento é no sentido descendente. Verifica-se o mesmo, ao executar-se o programa para o caso da viga isotrópica.



A análise dos erros define melhor a zona onde os desvios se verificam. Comparando os valores obtidos nas secções 1, 3 e 5 (gráfico abaixo, da esquerda) verifica-se que rapidamente convergem para a solução numérica.

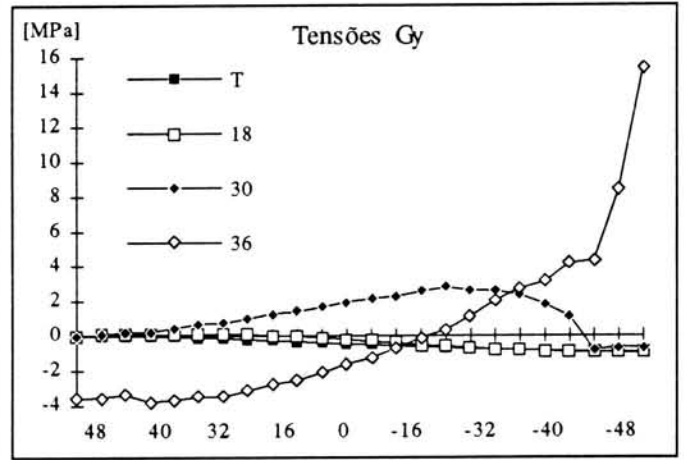
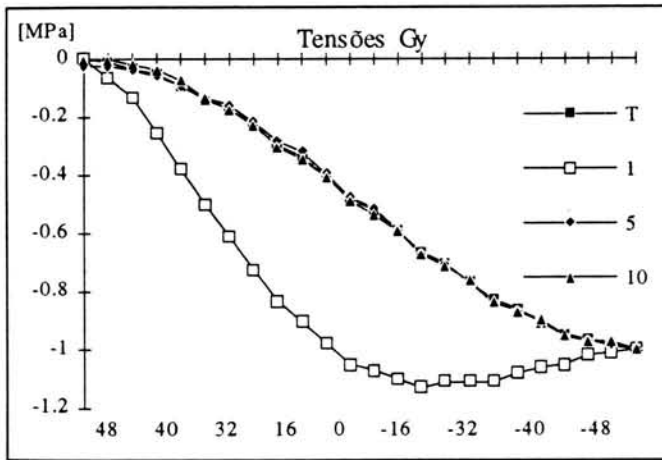
No gráfico do centro os erros são pequenos começando a crescer a partir da secção 23. No outro extremo os erros são bastante elevados praticamente em toda a secção.

É de salientar ainda que para o bordo inferior ($y = 48$ mm), os erros são altos devido ao facto dos valores teóricos serem muito próximos de zero.

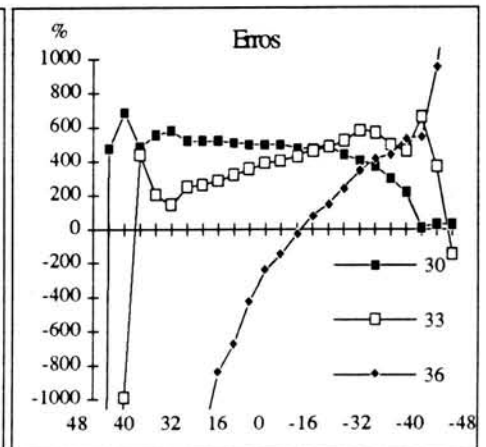
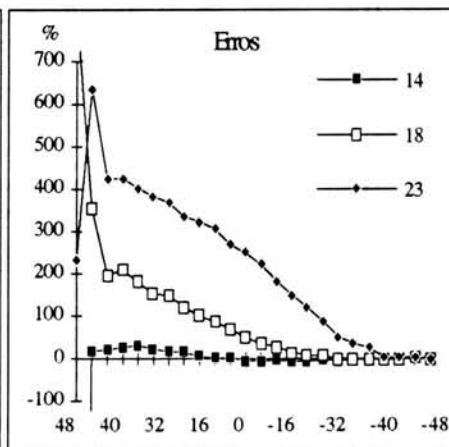
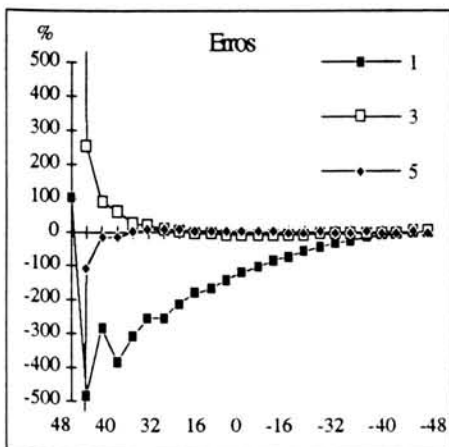


$\beta = 15$ GRAUS

Os resultados são bastante semelhantes ao caso anterior em termos gráficos, sendo as divergências maiores, especialmente, junto da secção de encastramento. A zona de erros elevados é mais extensa.

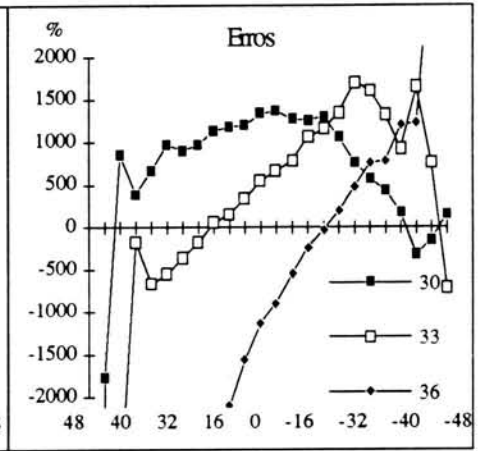
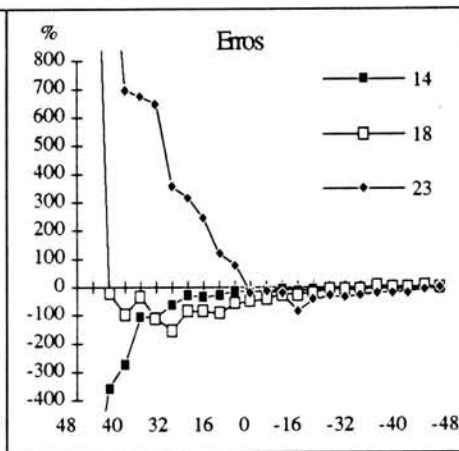
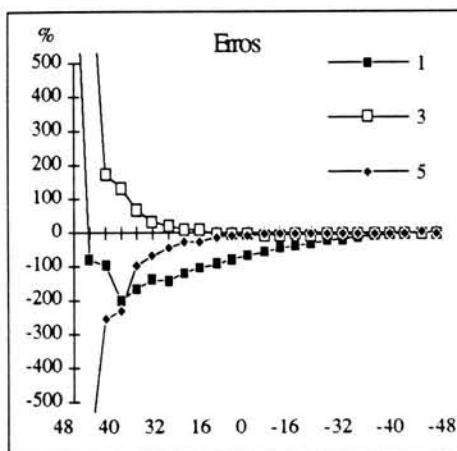
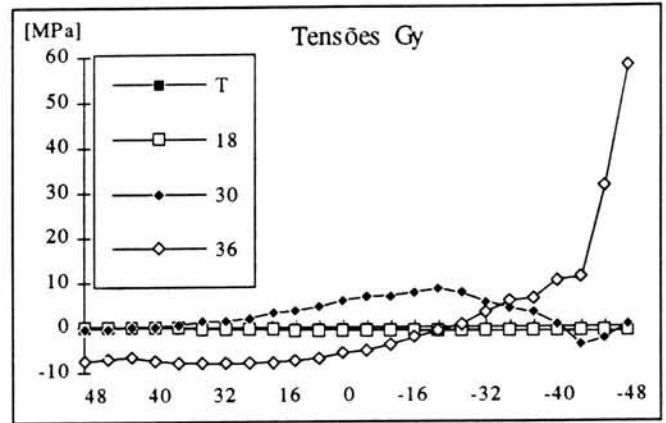
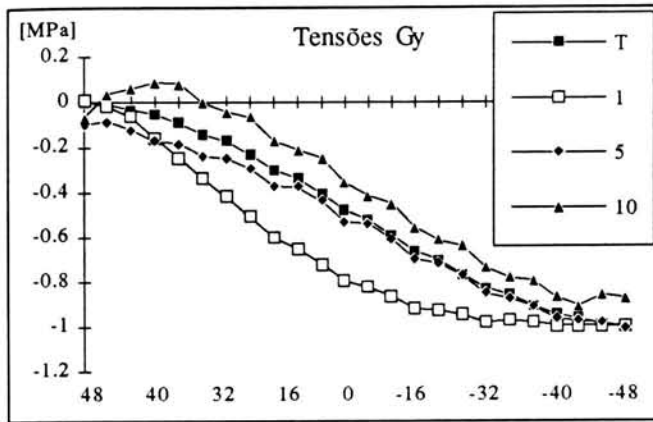


Os erros são maiores em todas as secções, notando-se bastante bem, o efeito do bordo livre acima explicado.



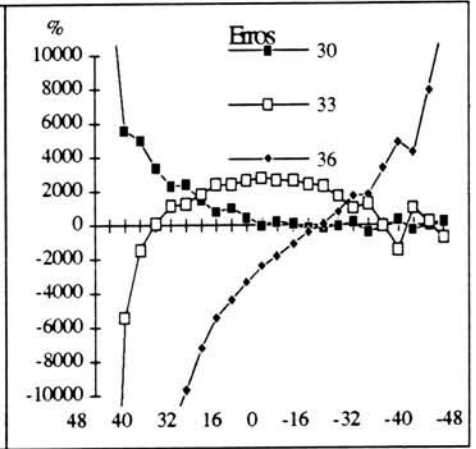
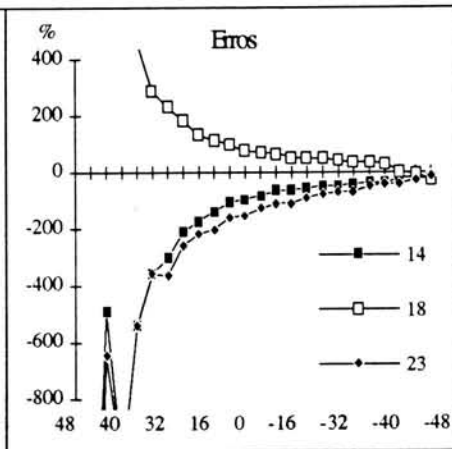
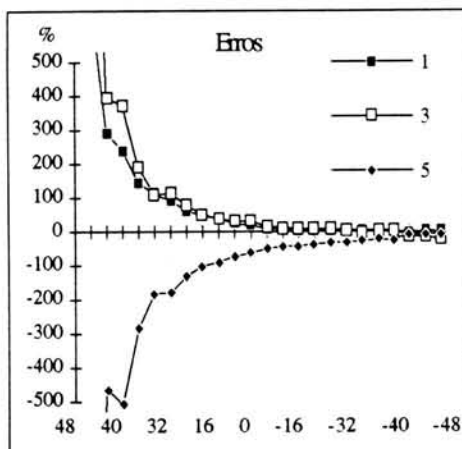
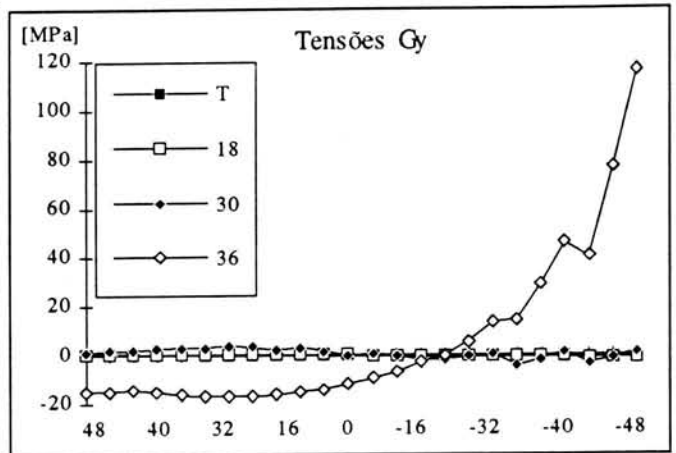
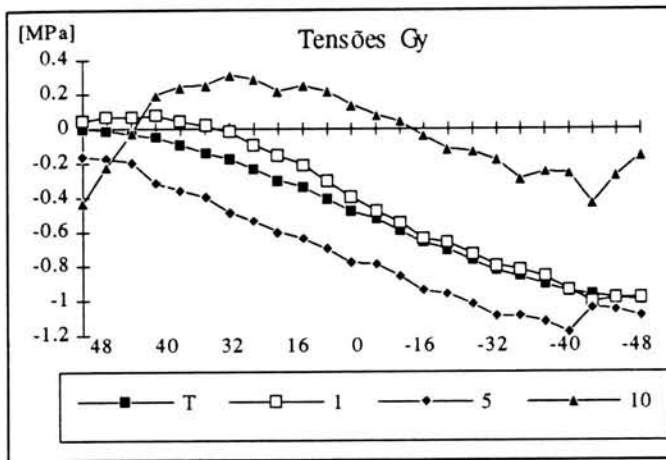
$\beta = 30$ GRAUS

Existe uma maior dispersão dos resultados ao longo de toda a viga, sendo apenas significativa a aproximação em poucas secções do meio da viga.



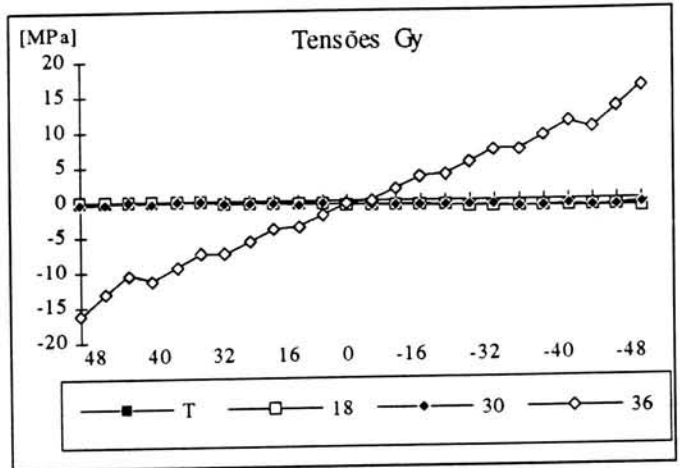
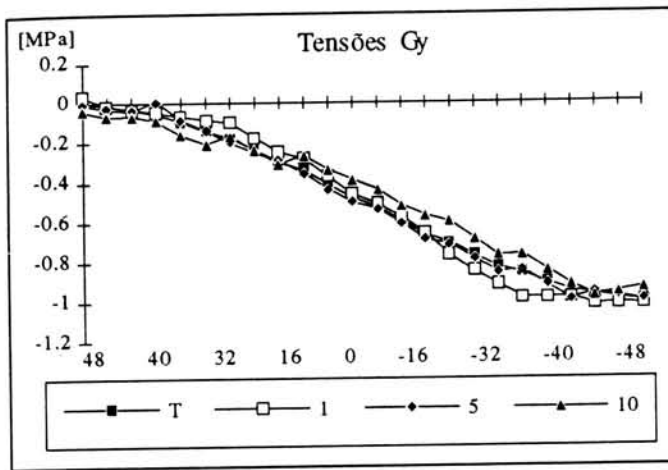
$\beta = 60$ GRAUS

Não se mostram os resultados para 45° pois continuam a divergir, como mostram os gráficos abaixo. Para um ângulo de 75 graus, a divergência ainda é maior.

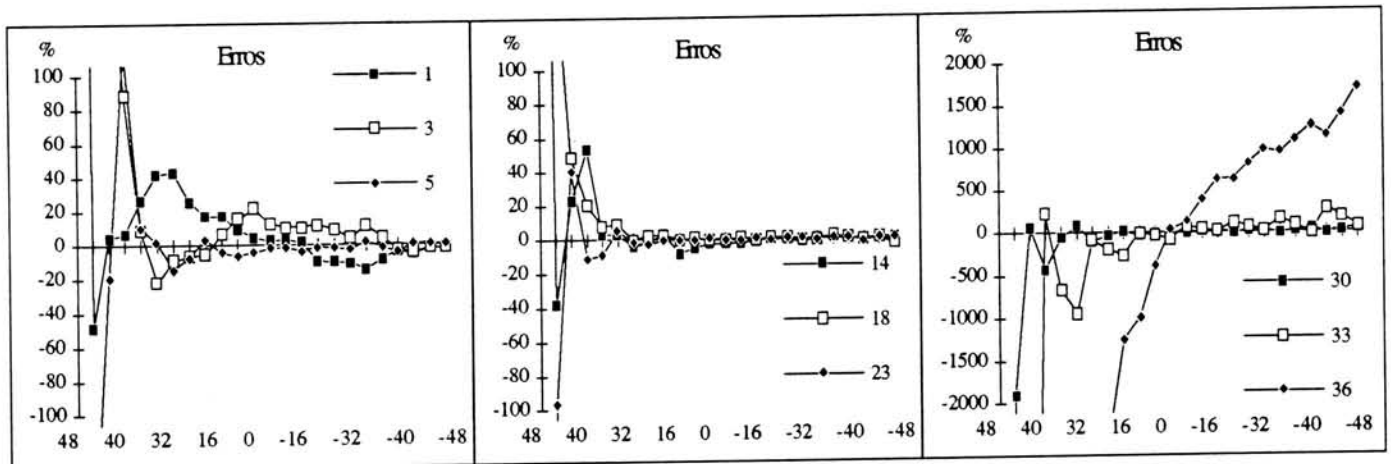


$\beta = 90$ GRAUS

Quando o ângulo se aproxima dos 90° começam a aproximar-se os resultados.



Os erros têm um andamento semelhante ao registado para 0° , mas os seus valores são superiores. A convergência dos dois resultados é já aceitável. para a zona do meio da viga.



4.5.3 OBSERVAÇÕES

- Ao contrário da solução analítica, a solução numérica difere para as várias secções da viga.
- Quanto maior for o ângulo β , maior são as diferenças entre as duas soluções.
- Os erros para o bordo inferior não carregado são sempre elevados, devido à comparação de valores muito próximos de zero.
- As duas soluções são convergentes para o bordo superior carregado, excepto na zona do encastramento.

4.6 TENSÕES TXY

4.6.1 ANÁLISE DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

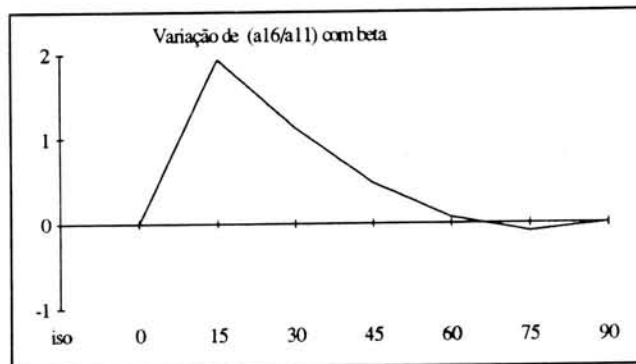
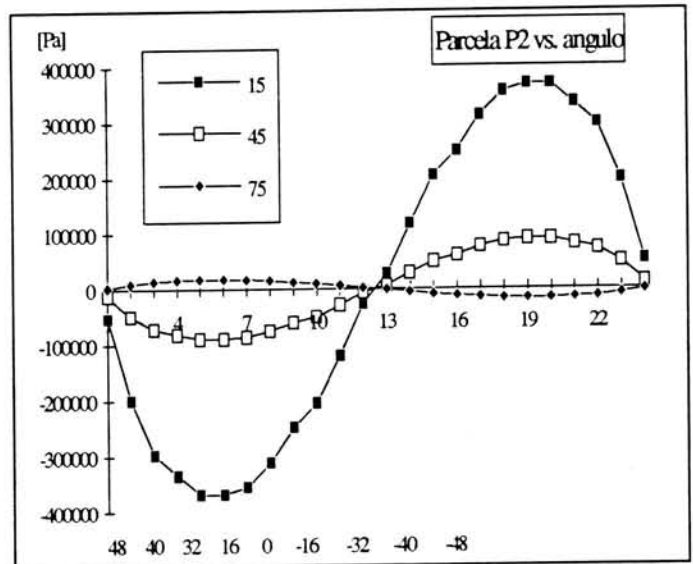
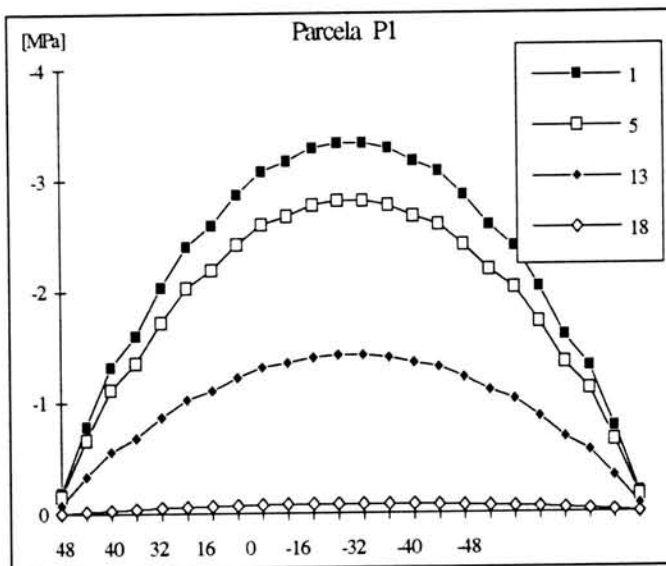
Rescrevendo a equação 4.3, considere-se as seguintes parcelas:

$$\tau_{xy} = -\frac{qx}{2j} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \left(\frac{qa_{16}}{ha_{11}} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \right) \quad [4.3]$$

$$P1 = -\frac{qx}{2j} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad P2 = -\left(\frac{qa_{16}}{ha_{11}} \left(\frac{y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} \right) \right)$$

Da parcela "P1" verifica-se que varia ao longo da secção, sendo independente do ângulo de orientação das fibras. O gráfico da esquerda mostra que o valor máximo tensão é maior no meio da viga diminuindo até aos bordos livres.

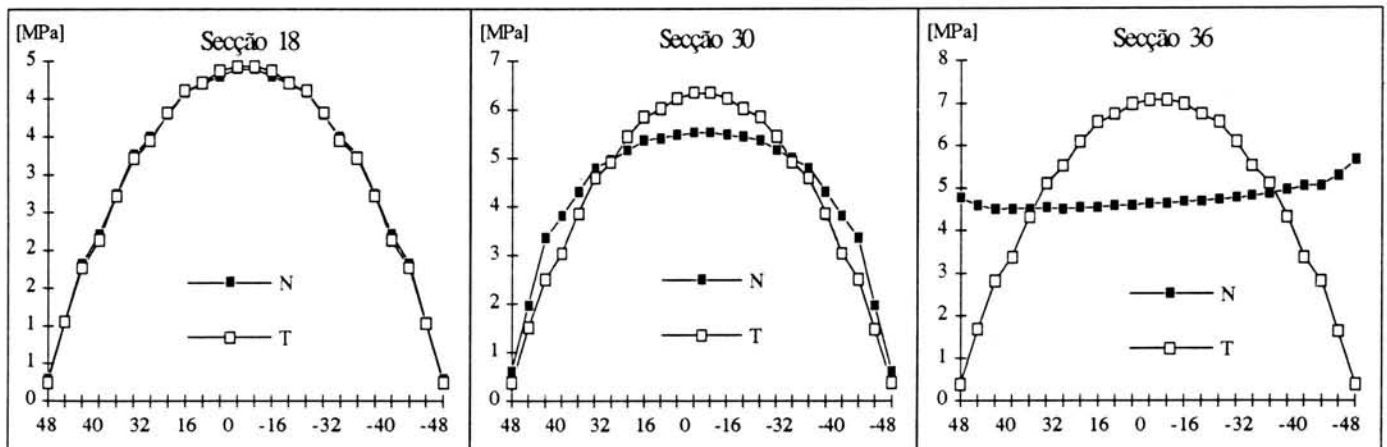
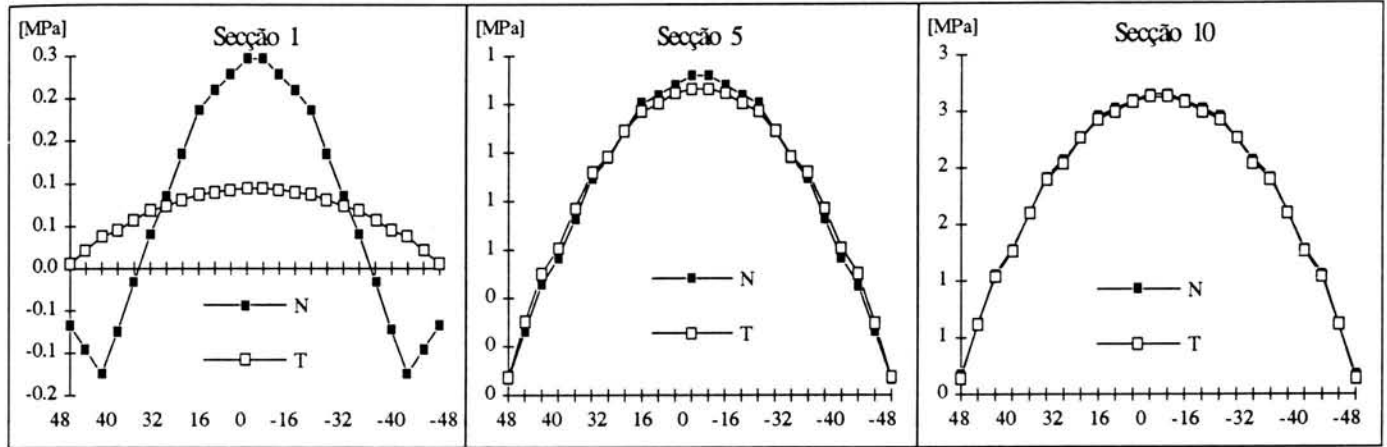
Inversamente, "P2" é constante para as várias secções, variando com o ângulo devido ao quociente "a16/a11" de acordo com o gráfico central. Com o aumento do ângulo as tensões máximas vão diminuindo. É ainda de notar que o contributo dessa parcela, para o caso isotrópico, zero e noventa graus, é nulo.



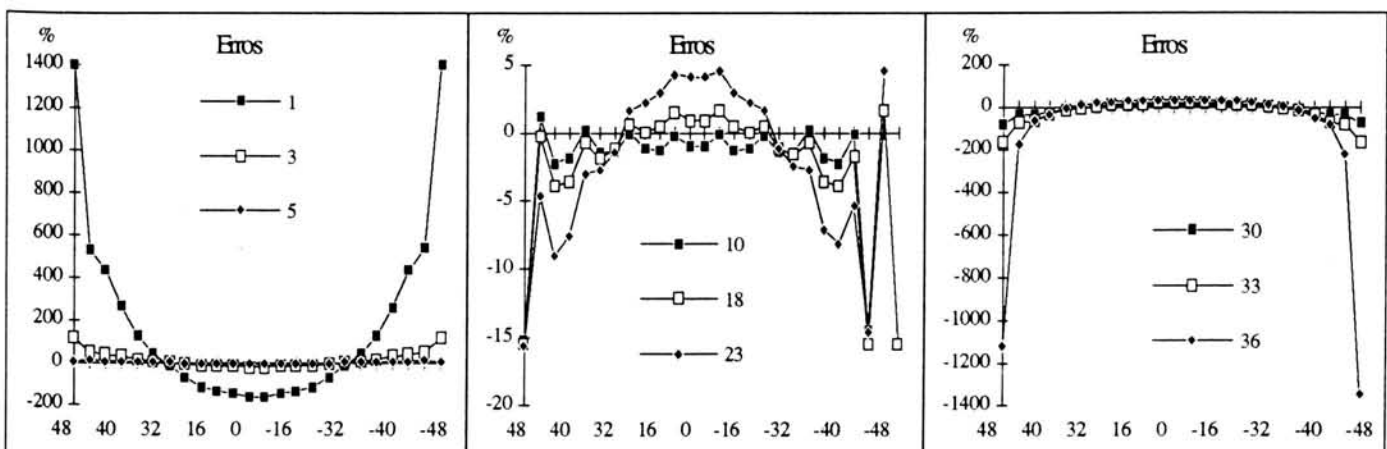
4.6.2 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

 $\beta = 0$ GRAUS

Os resultados teóricos são idênticos para o caso isotrópico, pois a segunda parcela continua a ser nula e a primeira é independente do ângulo. As soluções convergem para a zona central da viga, divergindo nos extremos (especialmente no extremo encastrado).



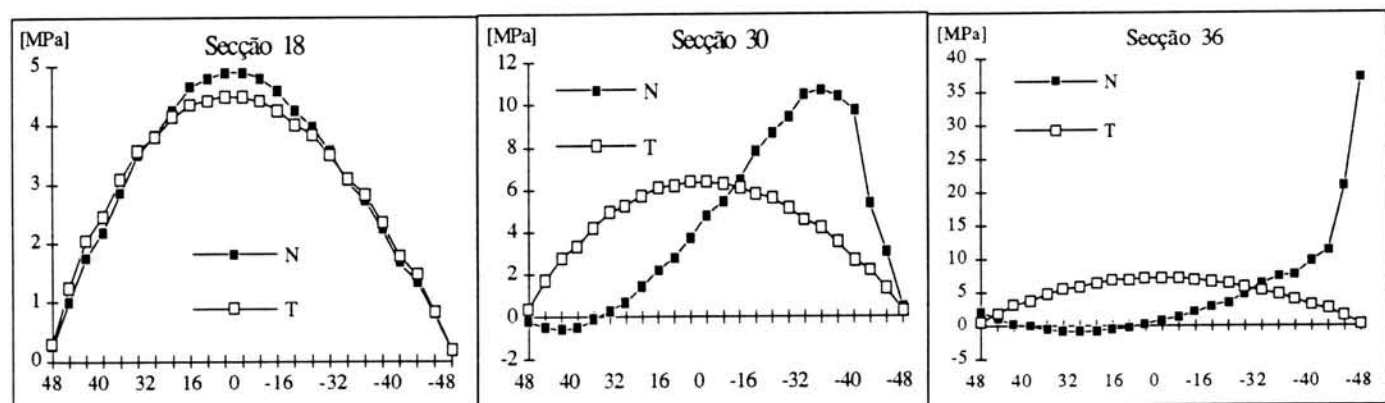
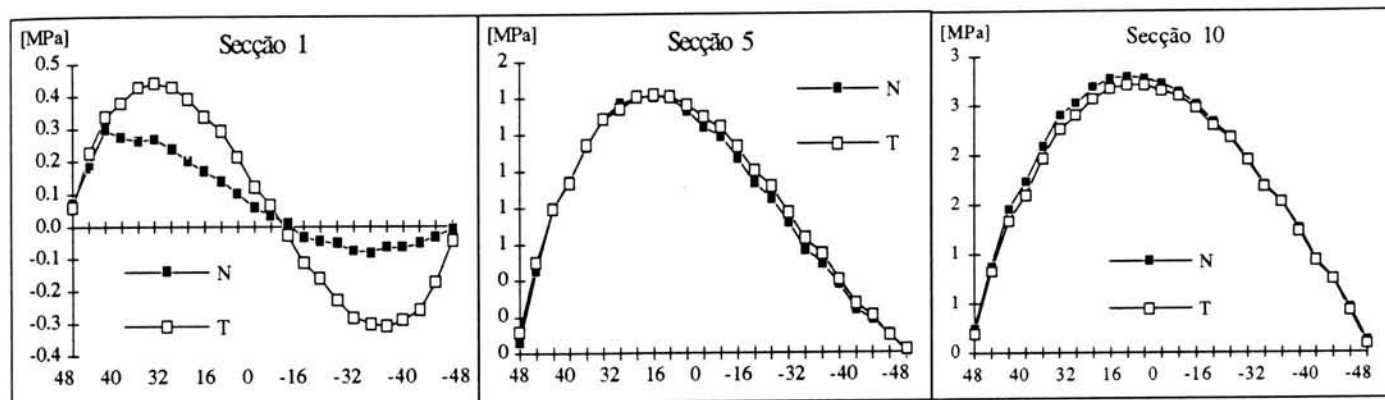
Os três gráficos seguintes mostram os erros relativos, para as respectivas secções. Para os extremos da viga os erros são elevados, especialmente nos bordos de cada secção. Na zona central da viga os erros são inferiores a 15%..



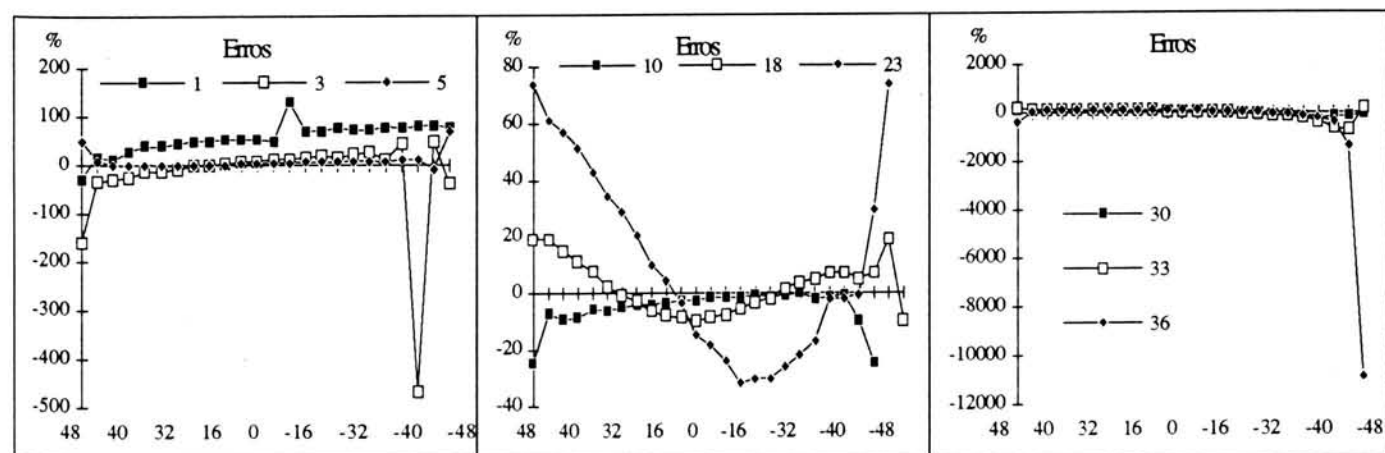
$\beta = 15$ GRAUS

Os resultados teóricos reflectem, de forma acentuada, a contribuição da segunda parcela da equação. Deixa de haver simetria relativamente ao eixo neutro para todas as secções.

Os resultados numéricos conseguem acompanhar essa variação em termos de andamento até à secção 30, a partir da qual existe uma profunda divergência das soluções.



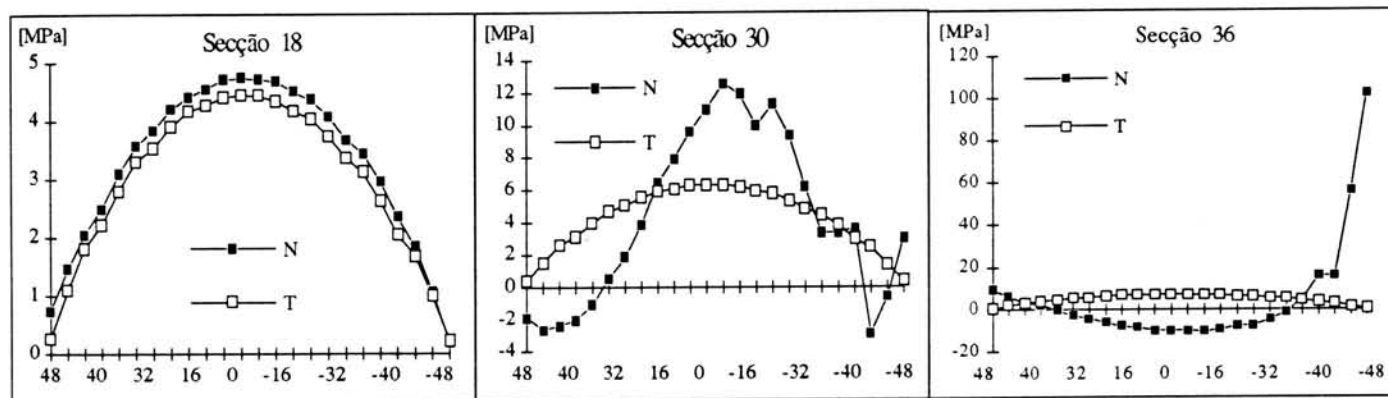
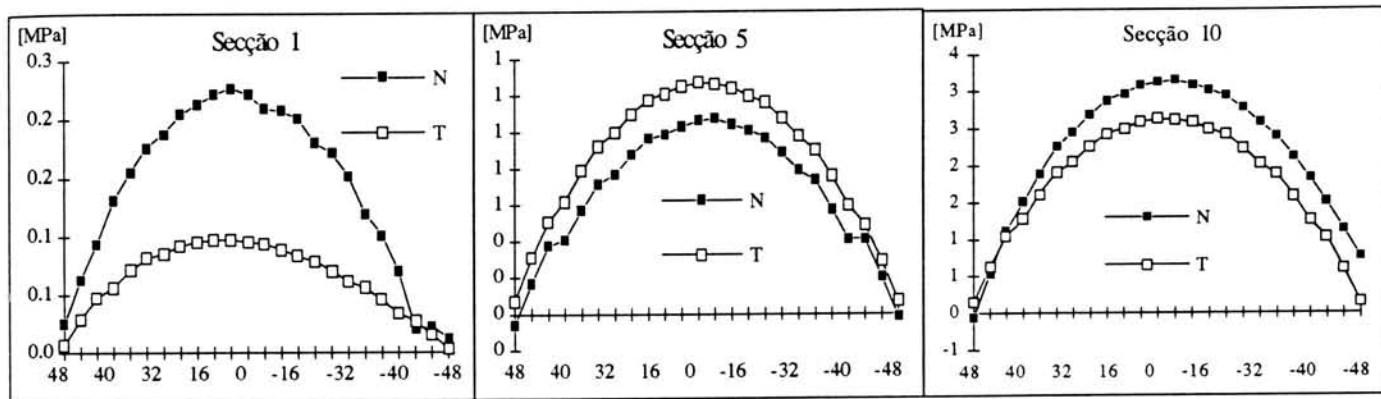
Para a zona central o valor dos erros aumenta relativamente ao caso de $\beta=0^\circ$.



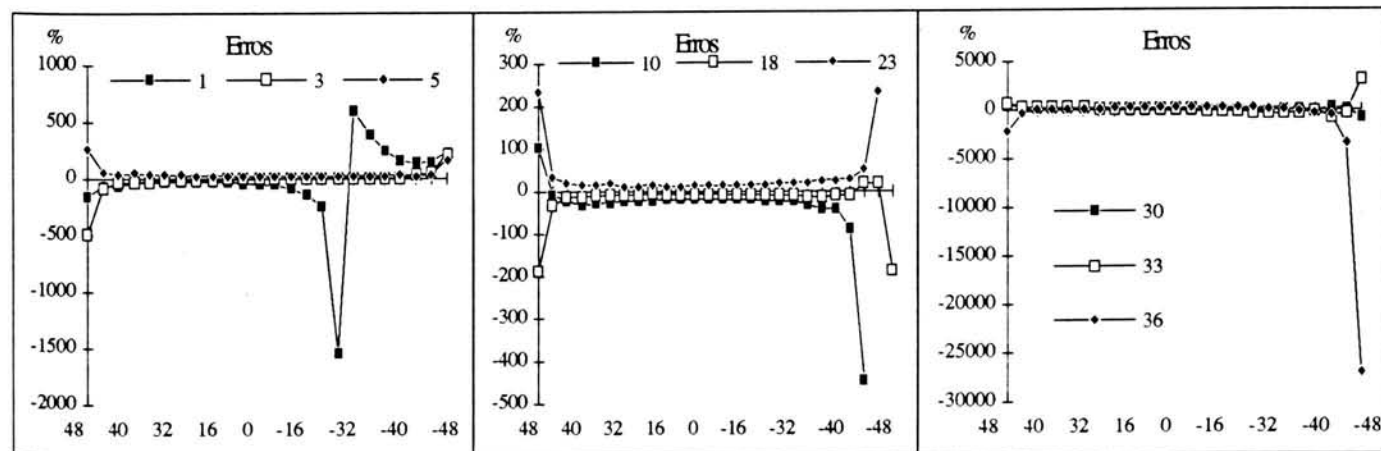
$\beta = 45$ GRAUS

À medida que o ângulo aumenta, a contribuição da segunda parcela diminui, tomando tomando o gráfico das tensões a forma de uma parábola. De salientar que a pesar dos andamentos das duas soluções serem semelhantes há um desfasamento de valores

O andamento dos resultados numéricos mantém-se, mas com uma certa irregularidade.

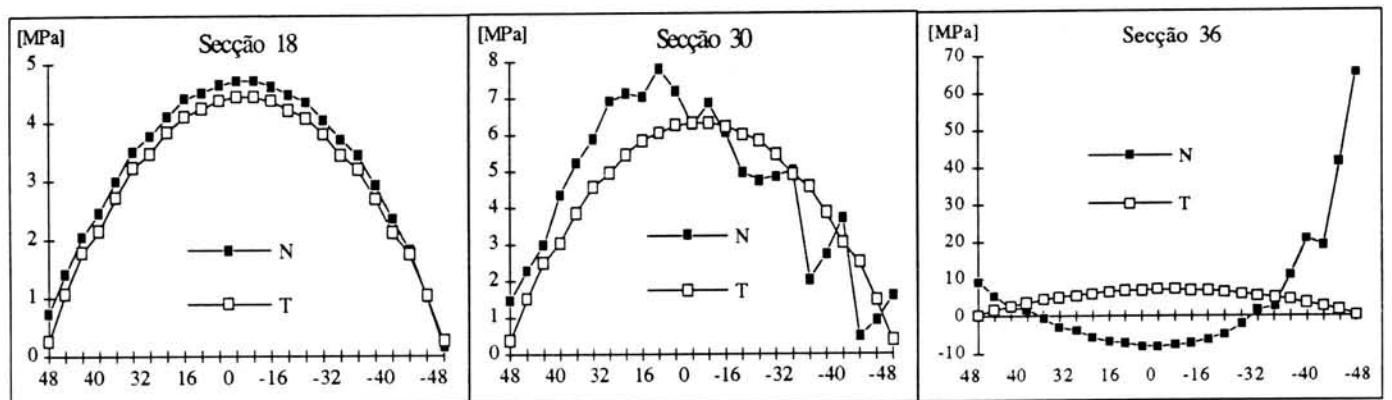
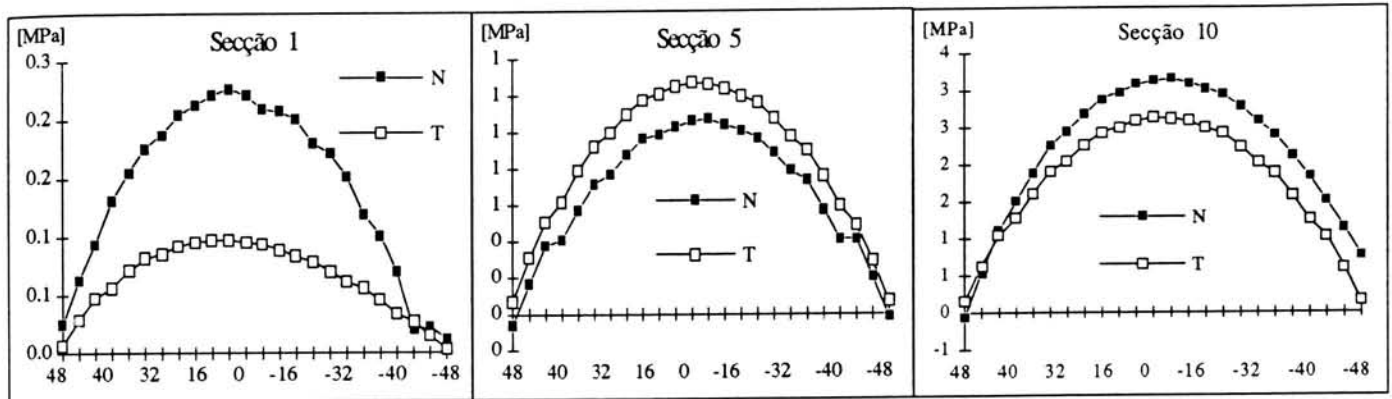


Como consequência do desfasamento os erros aumentam significativamente, mesmo para a zona central da viga. Para as secções próximas do encastramento os erros são tão elevados que não se pode considerar a solução numérica representativa da solução analítica.

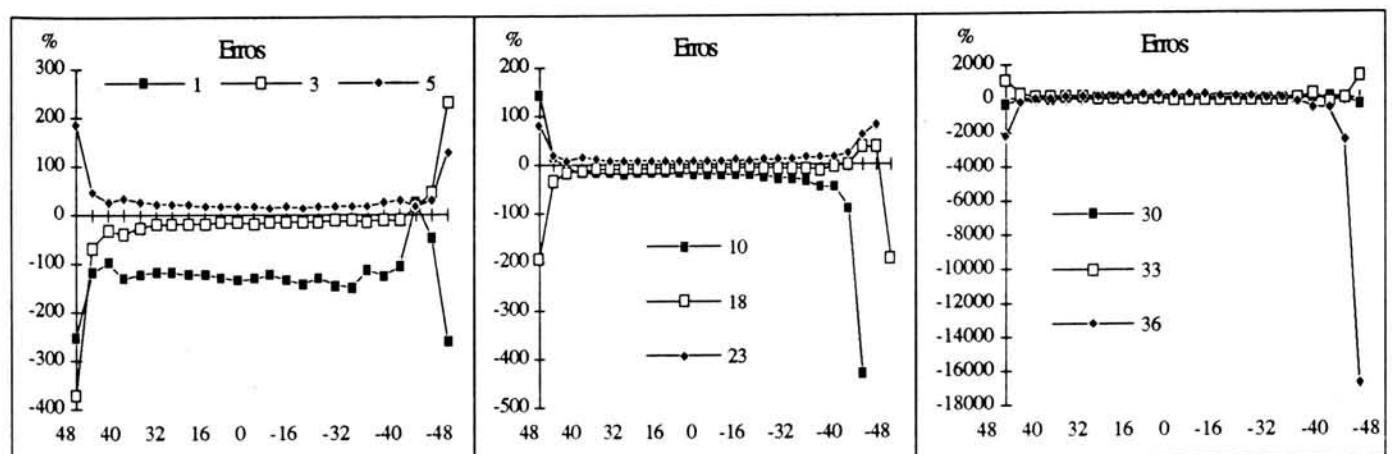


$\beta = 60$ GRAUS

Uma vez que o coeficiente a_{16}/a_{11} é praticamente nulo, todas as secções têm formas de parábolas e são simétricas relativamente ao eixo neutro da viga. As soluções para este ângulo são praticamente idênticas ao caso anterior, sendo apenas o desfaseamento menor.

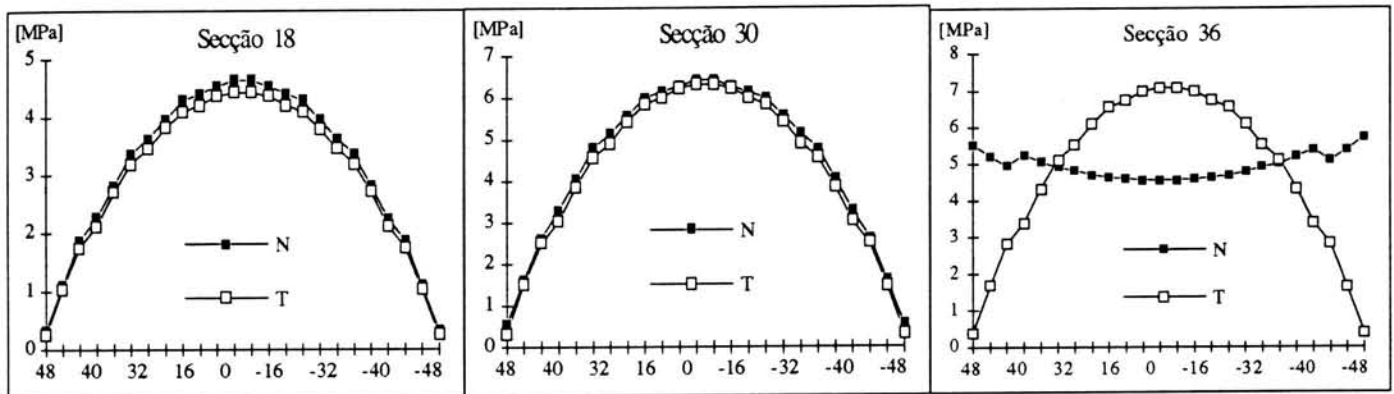
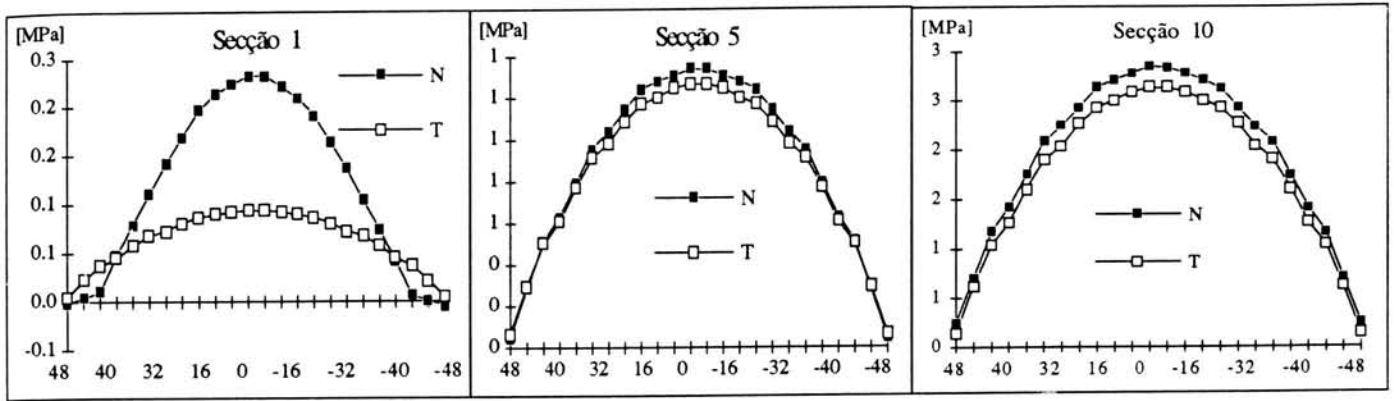


Nota-se uma melhoria relativamente ao caso de $\beta=45^\circ$.

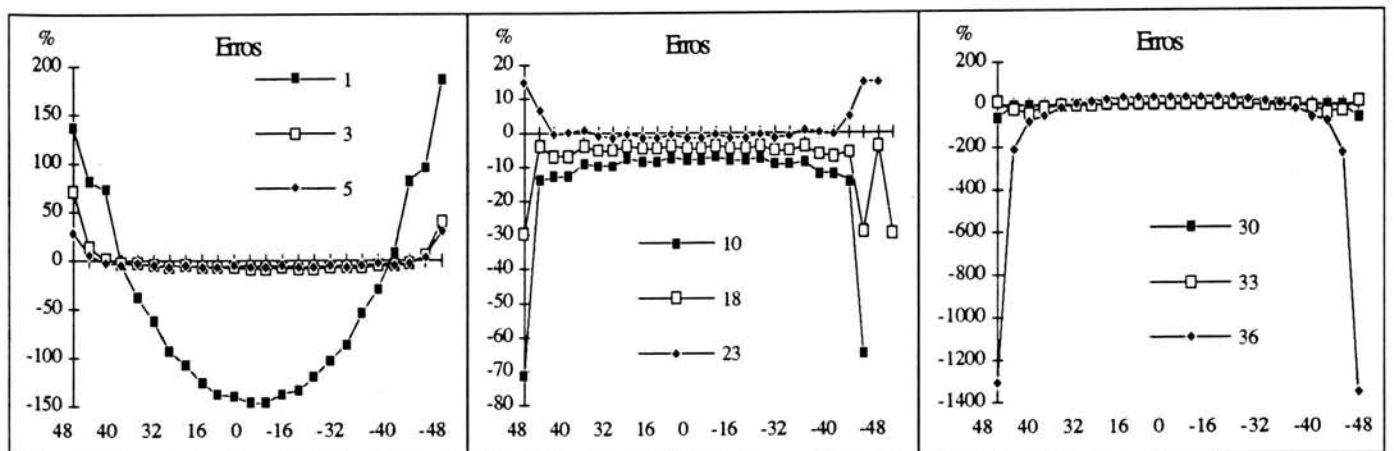


$\beta = 90$ GRAUS

A solução analítica é idêntica ao caso de $\beta=0^\circ$. Os resultados numéricos diferem ligeiramente.



Comparando com os ângulos de 45 e 60 graus há uma profunda melhoria, no entanto são ligeiramente piores do que no caso do ângulo de zero graus.



4.6.3 OBSERVAÇÕES

Dos dados anteriormente expostos, duas observações principais podem ser feitas:

- As duas soluções diferem bastante no extremo livre, aproximando-se na zona central da viga. Essa zona onde os resultados convergem ocupa quase a totalidade da viga para o ângulo de 0° diminuindo até ao 15 graus, voltando novamente a crescer até aos 90° .
- Na extremidade encastrada a divergência é total, concretamente a partir da secção 30.

4.7 DESLOCAMENTOS

4.7.1 INTRODUÇÃO

De seguida expõe-se os resultados obtidos para os deslocamentos verticais da viga. São apresentados três gráficos com para 0, 45 e 75°, exibindo cada um as duas soluções. com o objectivo de mostrar a evolução desses deslocamentos com o ângulo mostra-se um gráfico com a solução numérica para cada ângulo. O ultimo gráfico quantifica a convergência das soluções para os vários ângulos.

No final apresentam-se algumas conclusões que se consideram relevantes.

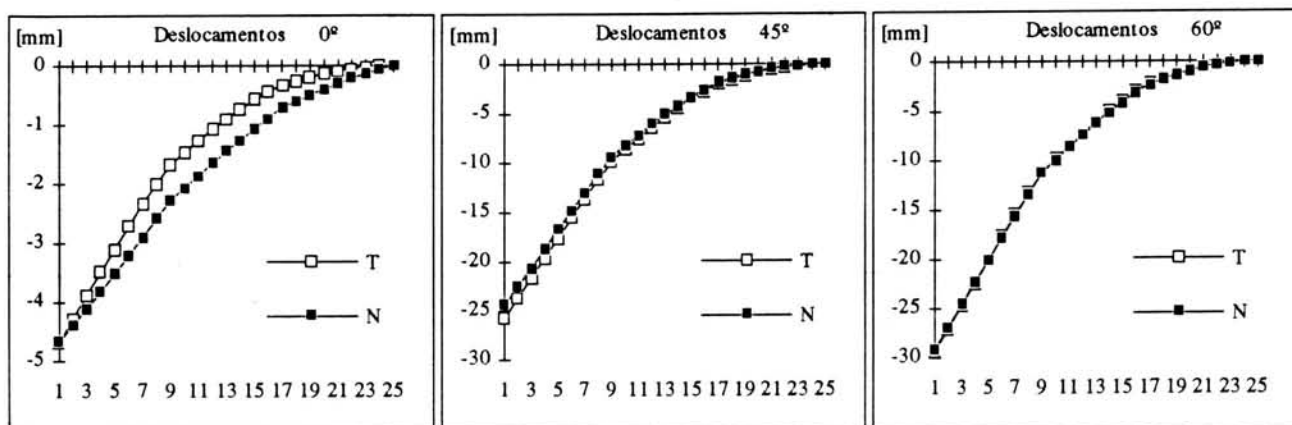
4.7.2 DEFORMADA

A solução analítica é obtida através da equação 4.4, que se reescreve abaixo. O andamento da deformada é semelhante ao caso da viga isotrópica. na secção encastrada o deslocamento é nulo aumentando progressivamente sendo máximo na extremidade livre. No caso isotrópico essa variação é linear. No caso em estudo essa variação obedece a um polinómio de quarta ordem.

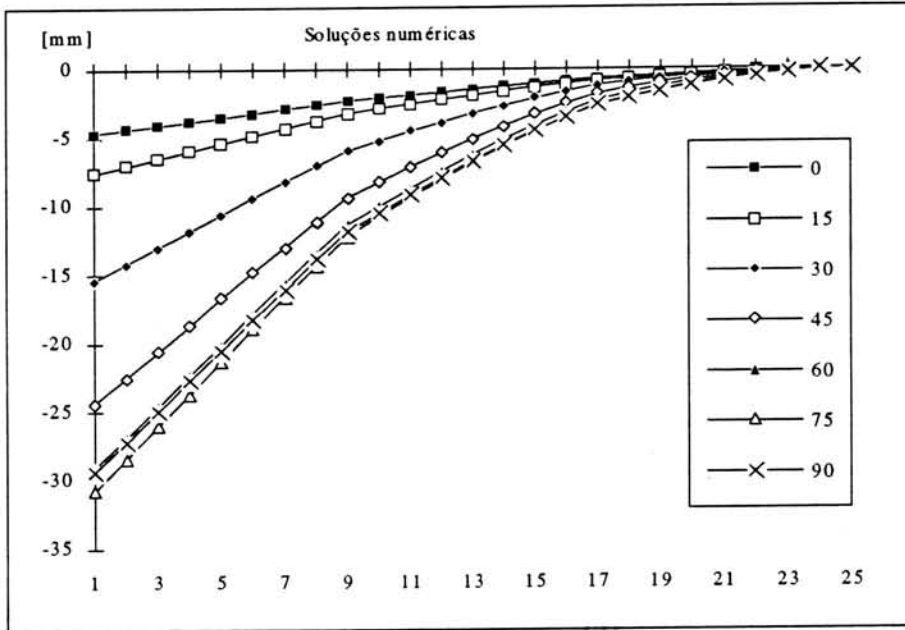
$$\eta = \frac{qa_{11}}{24j} * (x^4 - 4l^3x + 3l^4) - \frac{qb^2}{80j} * (3a_{12} + 4a_{66} - \frac{3}{8} * \frac{a_{16}^2}{a_{11}}) * (x-l)^2 \quad [4.4]$$

Os gráficos abaixo representam os vários deslocamentos (dos pontos correspondentes ao eixo da viga) nas ordenadas para os vários valores dos "xx", gerando no seu conjunto a deformada. Apresentam-se apenas para três ângulos, onde se registam a pior, típica e melhor convergência de resultados. No caso de 0° a maior divergência de resultados, especialmente para os valores do meio da viga. O gráfico correspondente aos 45° representam o caso geral. A maior convergência de resultados regista-se para o ângulo de 60°.

De salientar ainda que os valores teóricos são superiores ao numéricos para 0 e 15 graus. Para 30 e 45 graus são os teóricos superiores. para os restantes ângulos a situação volta-se a inverter, tendo os ângulos de 75 e 90 maior divergência do que 60°.



O gráfico seguinte relaciona a deformação com os vários ângulos, utilizando os valores numéricos. Quanto maior é o ângulo maior é a deformação da viga excepto para os 90 graus cuja a deformada quase coincide com os 60°, sendo inferior a 75°. Esse aumento não é proporcional ao aumento do ângulo, registando-se a maior variação entre 30 e 45 graus.



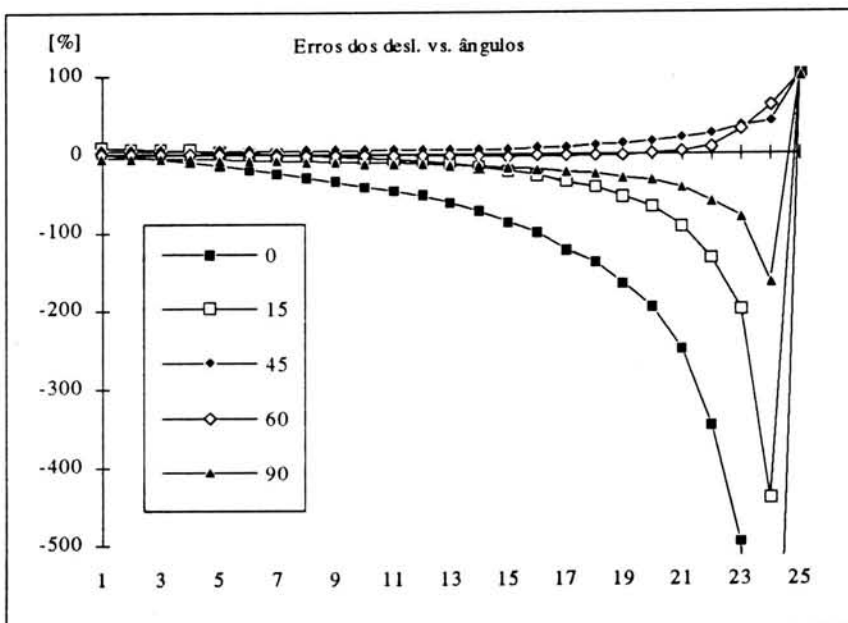
4.7.3 ANÁLISE DOS ERROS

Com o objectivo de se proporcionar uma melhor leitura do gráfico não se apresenta os erros para 30 e 75 graus, eliminando-se também o erro para o ângulo de 0° (-1060%).

Relativamente à distribuição dos erros explica-se os elevados erros na extremidade encastrada devido ao facto de os valores envolvidos serem muito pequenos. Para todos os graus verifica-se um erro de 100% na secção de encastramento devido ao valores numéricos diferirem do zero absoluto.

Todas as soluções tem erros inferiores a 10% para o extremo livre onde se verifica a máxima deformação.

De referir ainda que para 30° os valores quase coincidem com os 45° e os erros de 75° são inferiores aos de 90°.



4.7.4 OBSERVAÇÕES

A exposição acima permite concluir que as duas soluções são convergentes, com algumas reservas para um ângulo de orientação das fibras de zeros graus.

As soluções apresentadas coincidem para a flecha máxima, factor que é normalmente o mais relevante no dimensionamento.

De registar também que o ângulo de zero graus é o que permite menores deformações.

4.8 CONCLUSÕES FINAIS DO EXEMPLO

Com base nas observações feitas no final de cada sub-capítulo anterior, podem-se tirar as seguintes conclusões:

- Para os extremos da registam-se as maiores divergências das duas soluções.
- A zona central da viga onde se faz sentir a convergência, varia de extensão com o ângulo, sendo menor para 45 graus aumentando a partir daí até aos 90 graus.
- Os erros detectados são explicados em parte, nomeadamente:
 - Na solução numérica obtém-se valores das reacções nos pontos nodais negativas, quando deveriam ser todas positivas. Tal facto regista-se mesmo que se faz a análise de uma viga isotrópica.
 - Quando são comparado valores muito próximos de zero, os erros aumentam não sendo quantitativamente elevada a diferença dos resultados
 - O calculo das tensões faz-se a partir dos deslocamentos quando estes já estão afectados de erros

Finalmente conclui-se que os resultados obtidos, para este exemplo, são aceitáveis, sendo contudo necessário, o uso de um factor de segurança devido aos valores dos erros encontrados.

5. EXEMPLO II VIGA SIMPLESMENTE APOIADA

5.1 INTRODUÇÃO

A apresentação dos resultados deste exemplo seguirá o mesmo estrutura do exemplo anterior. É por isso aconselhável analisar primeiro o exemplo anterior, pois omite-se algumas explicações apresentadas antes.

Para este exemplo apresenta-se apenas as soluções para as tensões G_x e para os deslocamentos por serem as únicas soluções analíticas disponíveis.

5.2 EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA

5.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

As soluções sugeridas por Lekhnitskii. [2], estão de acordo com a figura 5.1. Optou-se por manter a geometria e o carregamento, de forma a simplificar o estudo numérico. O referencial (x_0, y_0) é utilizado para a solução numérica e o referencial (x_1, y_1) para a solução analítica.

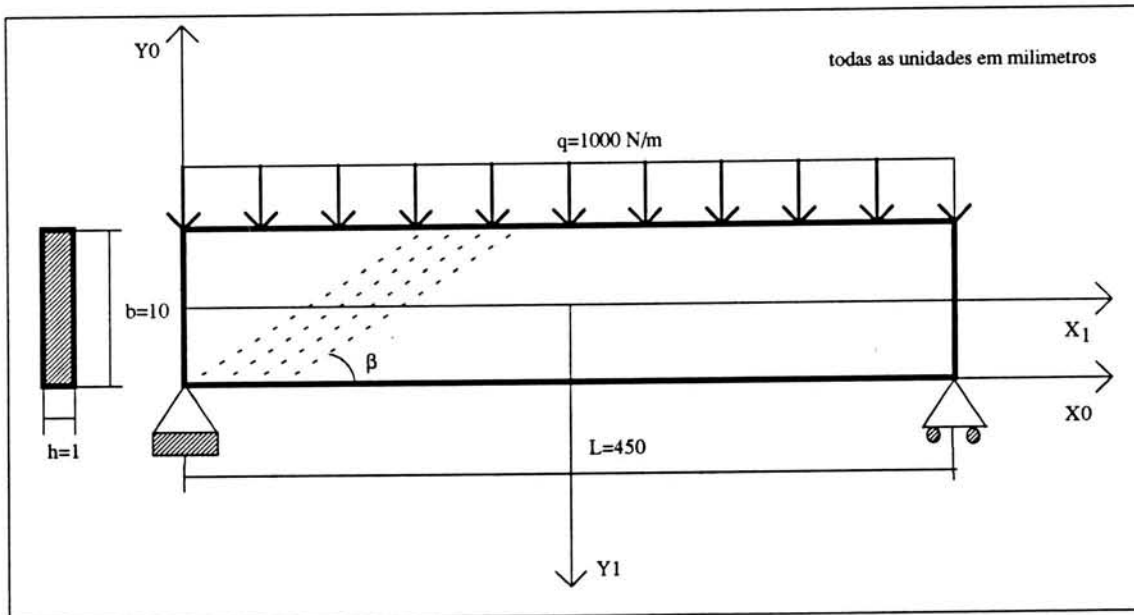


fig. 5.1

As soluções analíticas disponíveis são apresentadas abaixo e como se nota são semelhantes ao exemplo anterior. Mais uma vez os coeficientes a_{ij} são obtidos pelas equações 3.13 a 3.19 para os vários ângulos de orientação das fibras. As coordenadas x e y das equações 5.1 e 5.2 são referidas ao referencial (x_1, y_1) .

$$\sigma_x = \frac{q}{2j} * (l^2 - x^2) + \frac{q}{h} * \left[-\frac{a_{16}}{a_{11}} * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right) + 2 * \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right) * \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right) \right] \quad [5.1]$$

$$\eta = \frac{qa_{11}}{24J} * (x^4 - 6l^2x^2 + 5l^4) + \frac{qb^2}{80J} * (3a_{11} + 4a_{66} + \frac{32a_{16}^2}{3a_{11}}) * (l^2 - x^2) \quad [5.2]$$

5.2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução numérica foi obtida com o programa alterado e para as mesmas condições anteriores. A malha foi modificada com o objectivo de se obter soluções mais exactas. Como se observa na figura 5.2, a malha apresenta simetria relativamente ao meio da viga. Utilizaram-se os mesmos elementos mas agora com uma ordenação diferente. Os elementos menores colocam-se nos extremos, aumentando-se o seu tamanho ao caminhar-se para o centro da viga.

Como se manteve a mesma geometria da viga igualmente se utilizou as mesmas propriedades do material anteriormente expostas em 4.2.3.

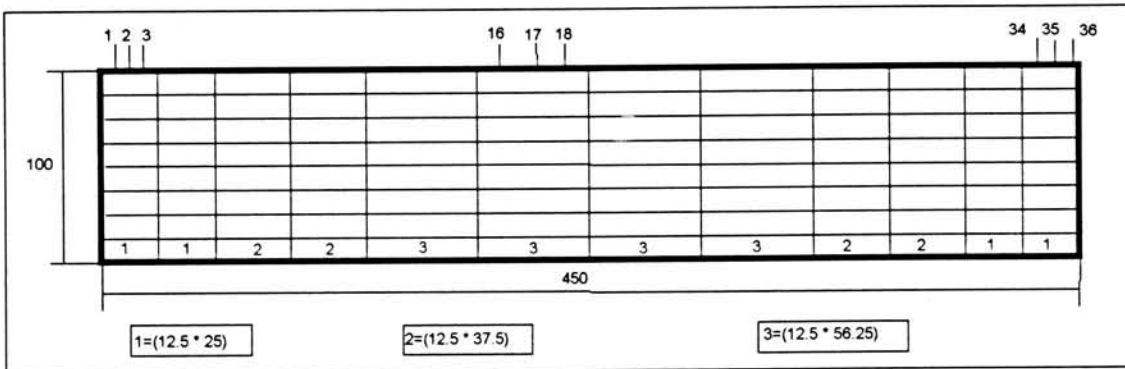


fig. 5.2

5.3 TENSÕES GX

5.3.1 ANÁLISE DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Ao começar-se a fazer a análise comparativa das duas soluções, uma análise prévia das parcelas da equação analítica, quer ao longo da viga, quer com os ângulos, ajuda a entender melhor os andamentos e (sobretudo) as variações nesses andamentos. Reescrevendo a equação 5.1 e dividindo-a nas seguintes parcelas, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{q}{2j} * (l^2 - x^2) + \frac{q}{h} * \left[-\frac{a_{16}}{a_{11}} * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right) + 2 * \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right) * \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right) \right] \quad [5.1]$$

$$p1 = \frac{q}{2j} * (l^2 - x^2)$$

$$p2 = -\frac{a_{16}}{a_{11}} * \frac{x}{b} * \left(1 - \frac{12y^2}{b^2}\right)$$

$$p3 = 2 * \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right)$$

$$p4 = \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right)$$

As figuras 5.3 e 5.4 representam as parcelas P1 e P2, utilizando os s valores apenas para as secções 1, 9 e 18, para melhor leitura dos gráficos. uma vez que há simetria relativamente ao meio da viga.

A parcela P1 representa uma recta cujo declive aumenta ao caminhar-se para o meio da viga., voltando a aumentar depois até à outra extremidade. A sua variação com o ângulo é praticamente nula, uma vez que variação a11 tem pouca influencia.

Para P2 variação com o ângulo já é acentuada devido ao quociente (a16/a11).. reflectindo-se numa maior ou menor variação da curvatura da parábola.

P4 é uma equação cúbica que não varia nem ao longo da viga nem com o ângulo .

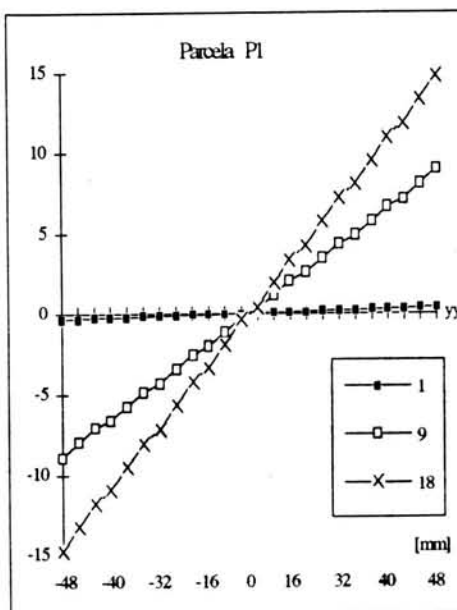


fig. 5.3

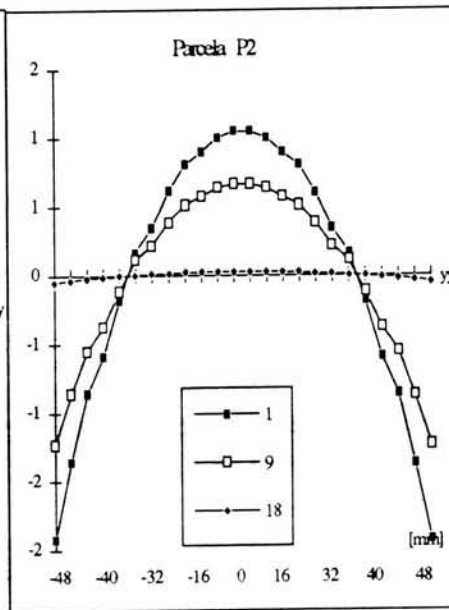


fig. 5.4

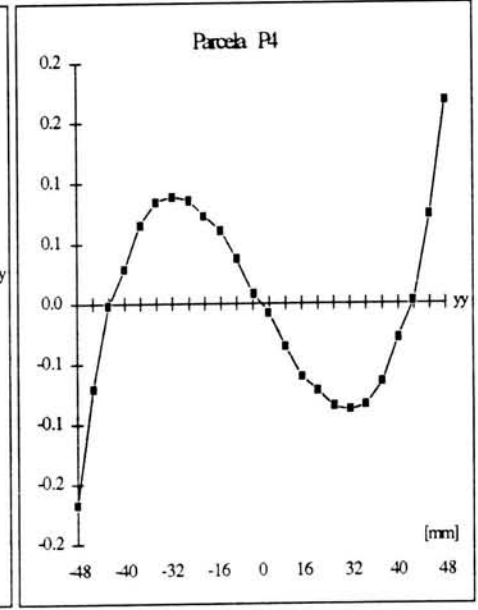


fig. 5.5

A parcela P3 é constante para cada ângulo, tendo a sua variação sido representada no gráfico 5.6. Ao observar-se p gráfico 5.7, onde se mostra os andamentos dos vários a_{ij} , notas-se que o andamento de P3 sofre maior influencia de a_{11} .

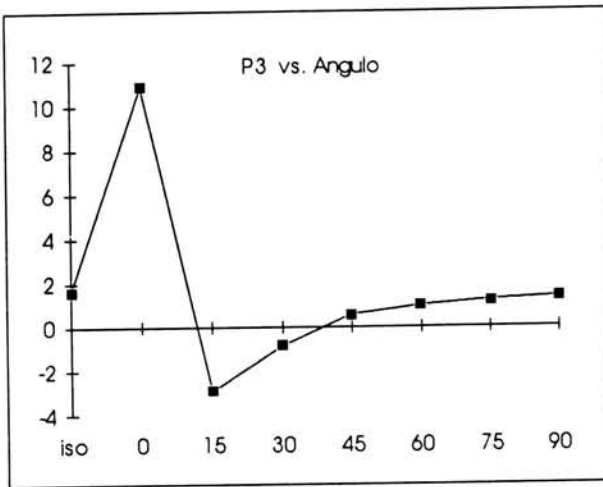


fig. 5.6

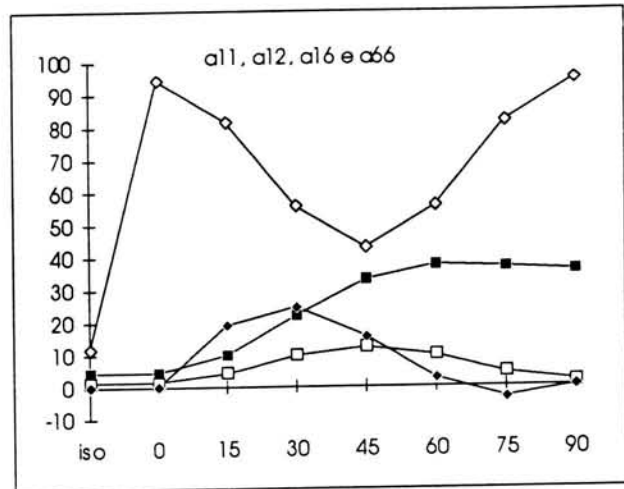


fig. 5.7

5.3.2 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Para cada valor do ângulo β apresenta-se seis gráficos com as tensões, sendo cada um referente a uma secção, e dois gráficos com os erros relativos.

Os primeiros gráficos mostram as soluções analítica e numérica com as tensões nas ordenadas (em MPa) e nas abcissas os vários pontos da secção de acordo com o sistema de eixos (x1,y1) da figura 5.1

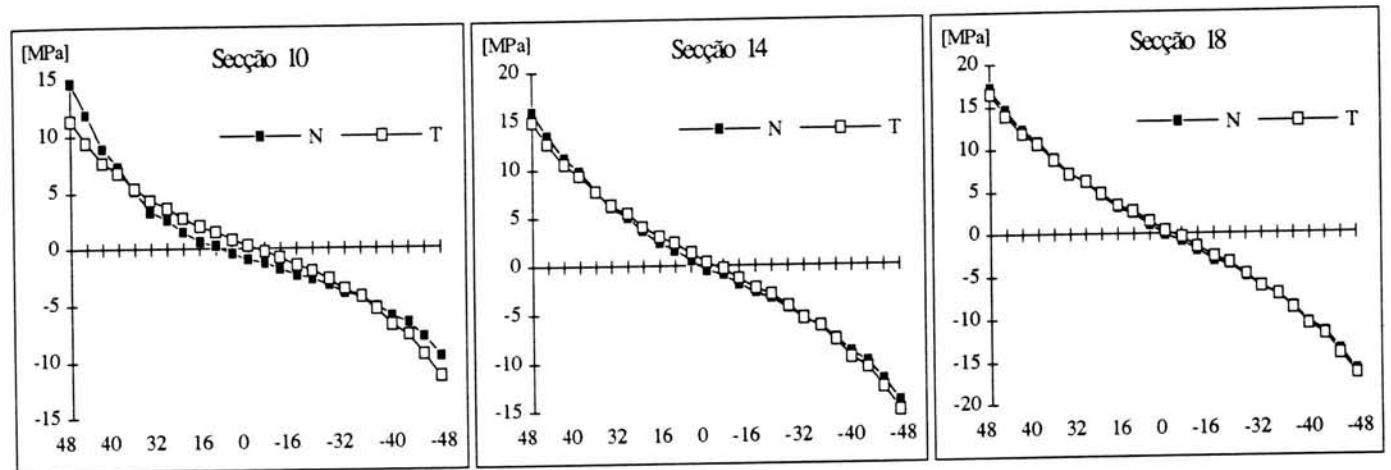
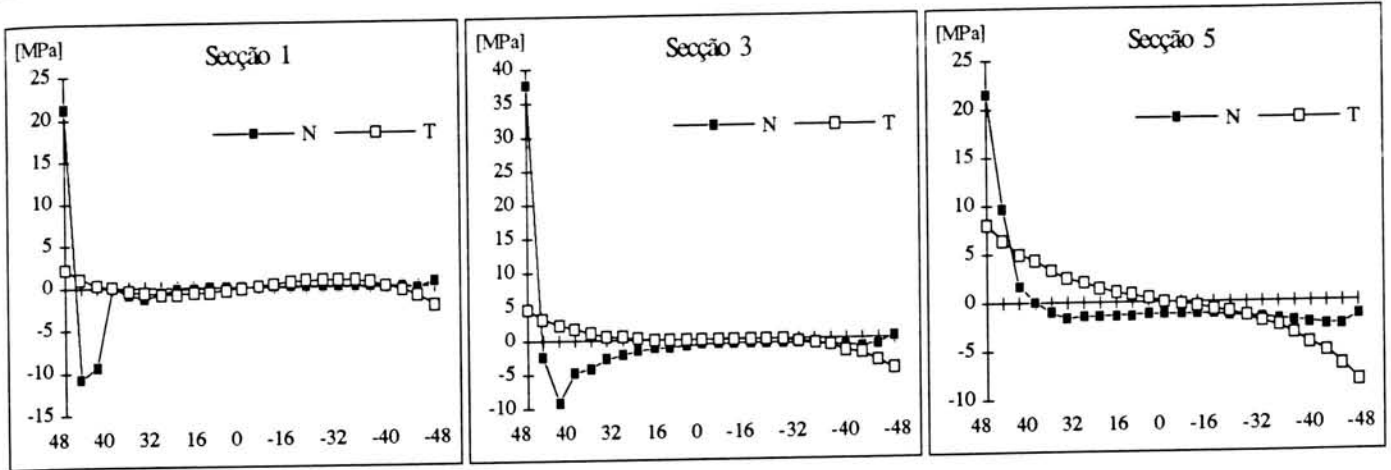
Os erros são para os vários pontos da secção (abcissas) e para três secções próximas do extremo de apoio, onde se verificam, para os vários ângulos as maiores divergências das duas soluções. O segundo gráfico mostra as secções mais próximas do meio da viga, onde a convergência é maior. Uma vez que há simetria apenas e mostra os valores correspondentes a meia viga.

$\beta=0$ GRAUS

Analisando os gráficos seguintes é imediato verificar que o valor da tensão aumenta ao caminhar-se para o meio da viga.

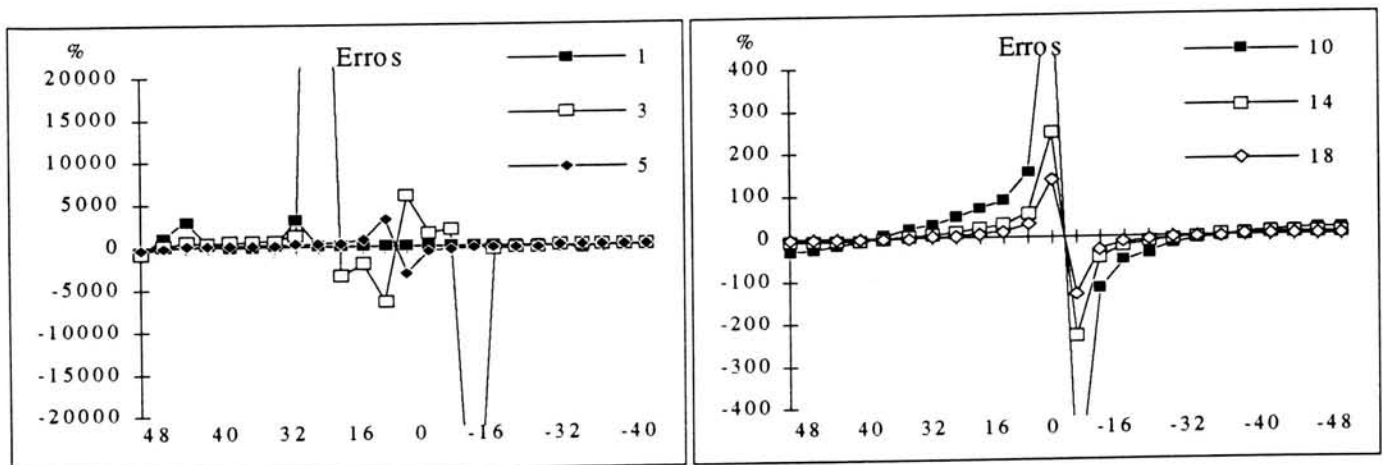
Nas primeiras secções verificam-se divergências acentuadas especialmente para a abcissa "48" que corresponde ao bordo inferior da viga não carregado. Uma vez que o apoio da viga na solução numérica é pontual é natural que haja uma elevada concentração de tensões nessa zona de apoio, explicando-se a divergência entre os dois resultados.

Nas secções mais internas o andamento da tensão caminha para o linear e as duas soluções aproxima-se.



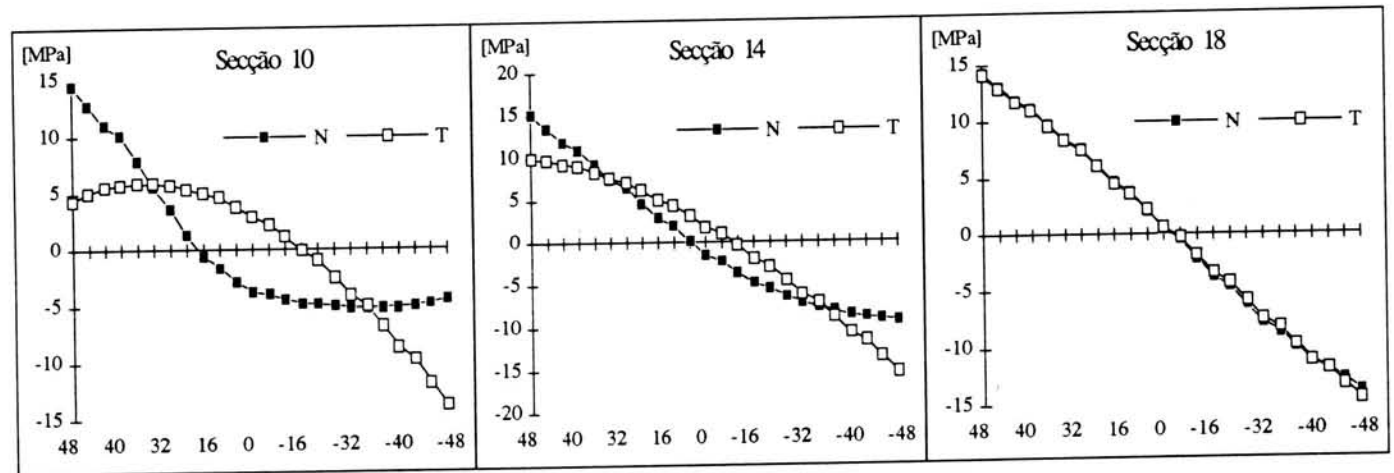
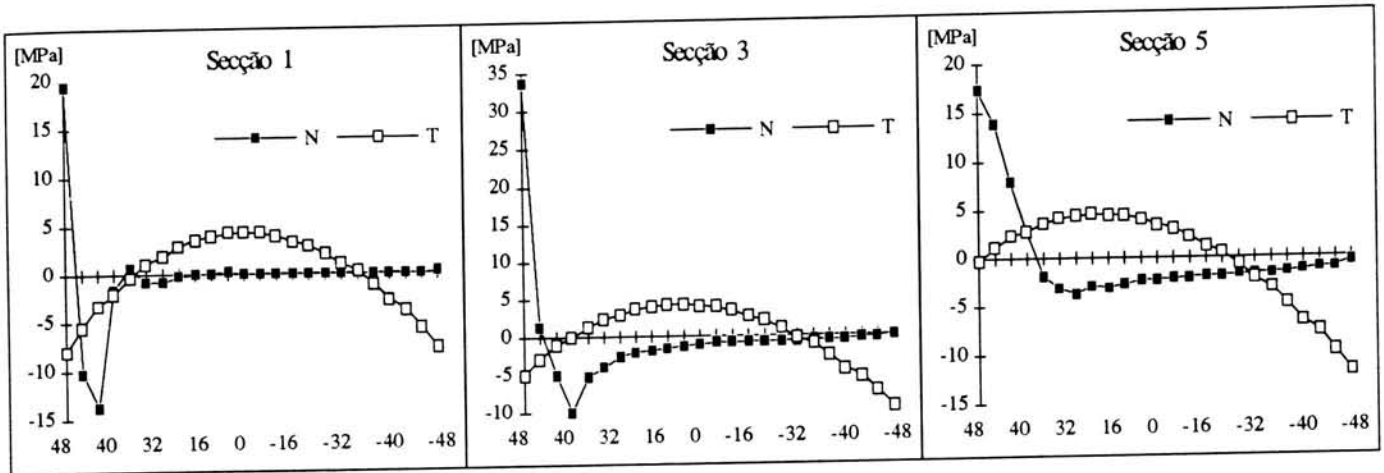
No gráfico da esquerda, os erros são bastante elevados como se pode deprender dos gráficos das tensões. Existem alguns picos especialmente para a secção 5.

No gráfico da direita o andamento dos erros é semelhante com valores baixos para os extremos da secção. Perto do eixo da viga, onde existe a mudança das tensões de positiva a negativa os erros são elevados por duas razões. Primeiro para o mesmo ponto da secção acontece a comparação de valores positivos de uma solução com valores negativos da outra solução. Por outro lado como os valores são muito próximos de zero a base do erro é muito pequena elevando o erros.

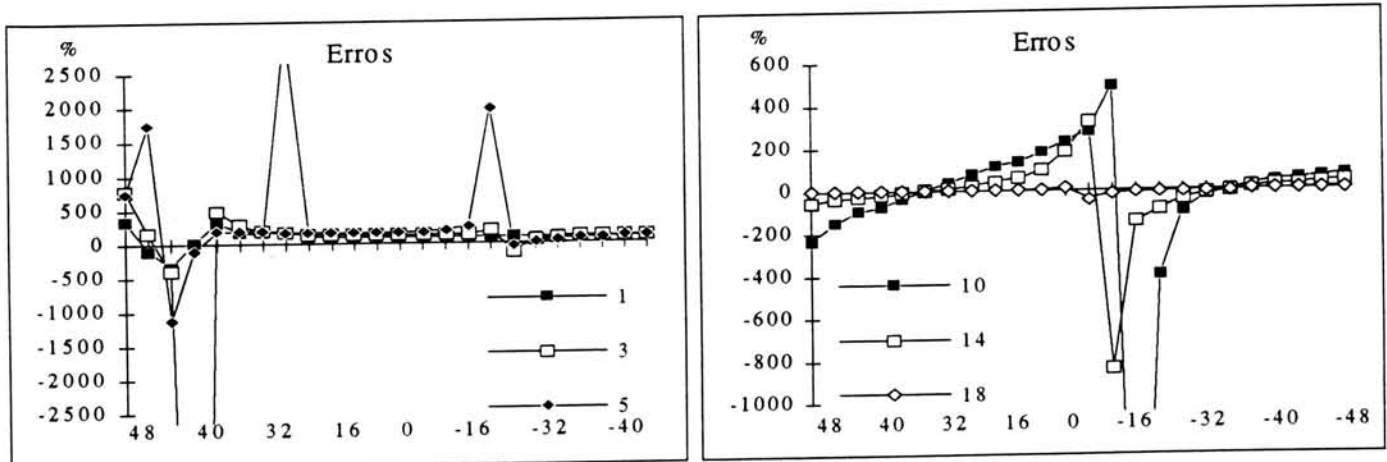


$\beta=15$ GRAUS

A influencia da parcela P2 na solução final é preponderante modificando bastante a solução teórica. Os andamentos da solução numérica praticamente mantêm-se, provocando assim uma divergência acentuada.

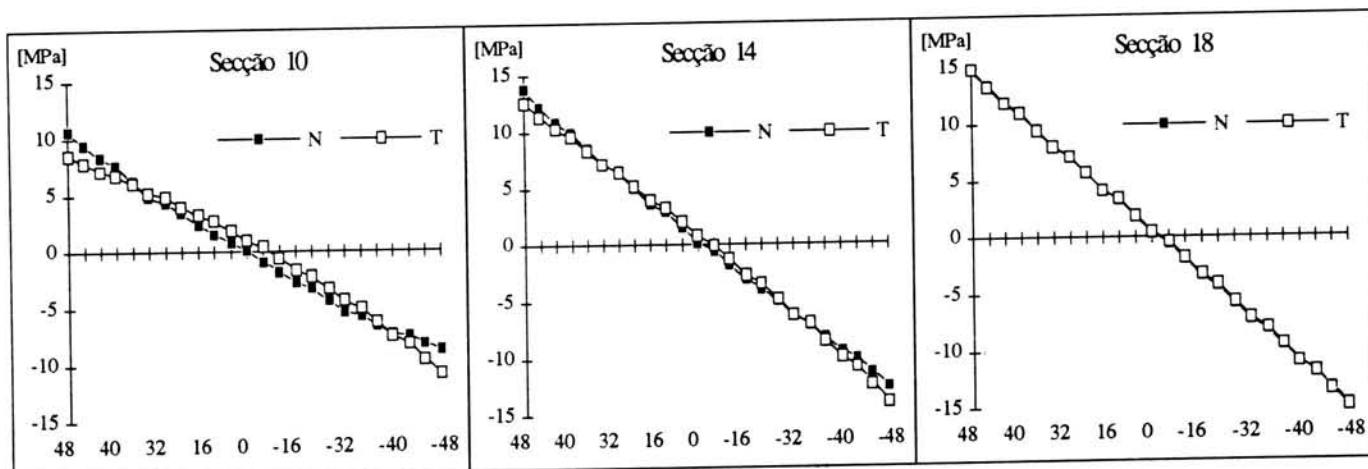
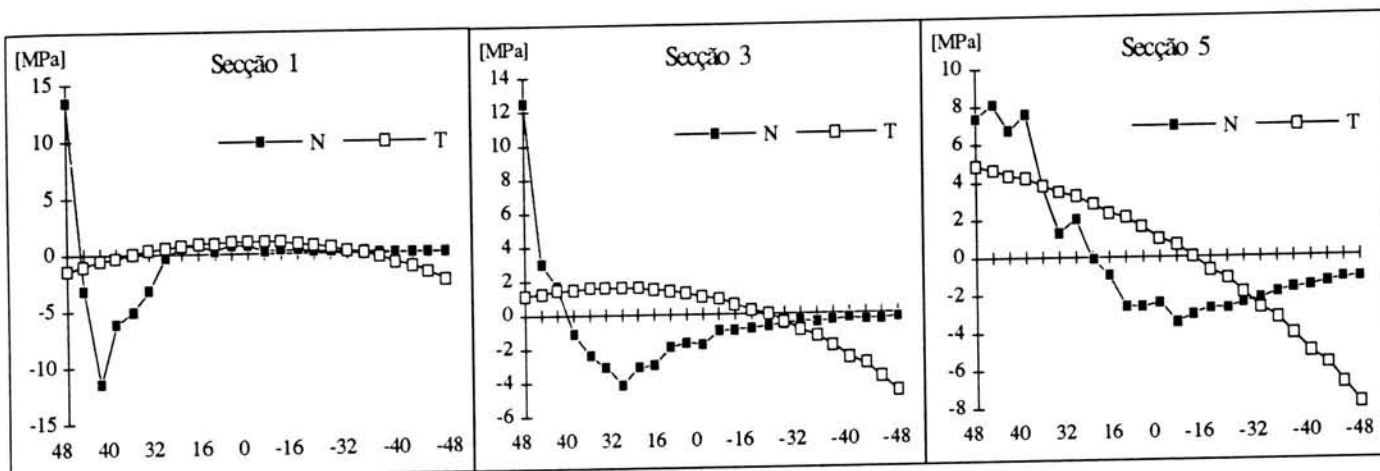


Os erros são obviamente maiores, os maiores de todos os ângulos. De salientar que quando mais próximo do meio da viga menores são os erros.

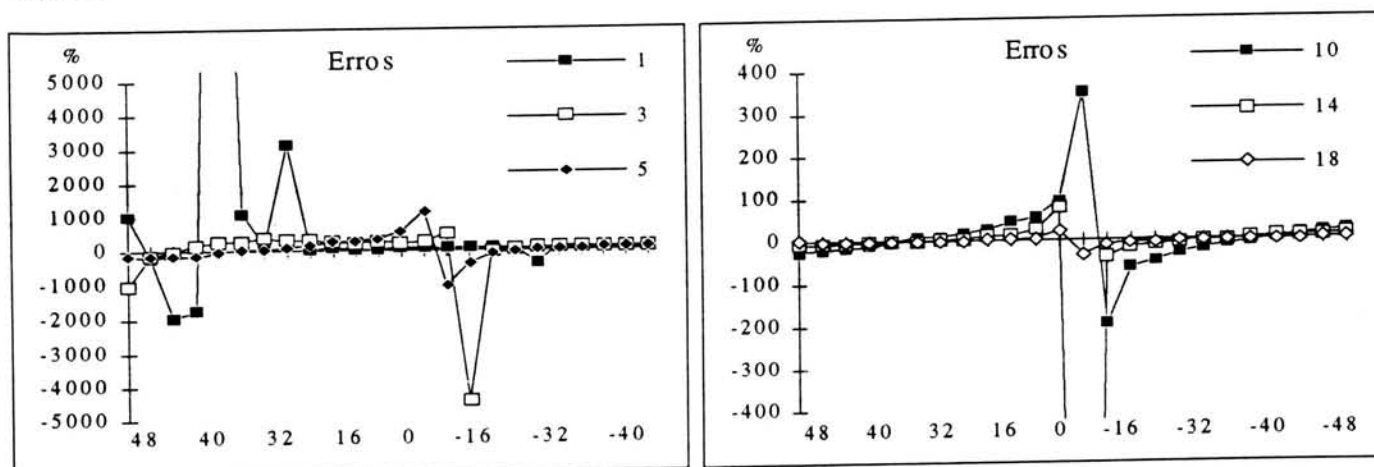


$\beta = 45$ GRAUS

Os resultados para o ângulo de 30 graus são melhores do que o caso anterior. no entanto omitem-se por serem muito semelhantes aos anteriormente apresentados. Essa melhoria nota-se neste caso onde a convergência se faz sentir a partir da secção 10.

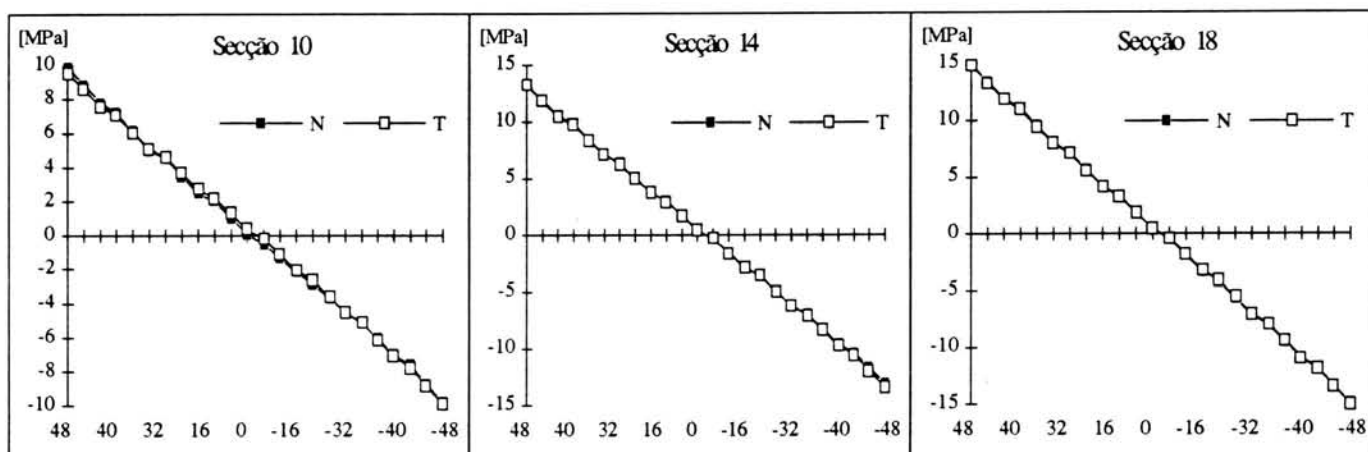
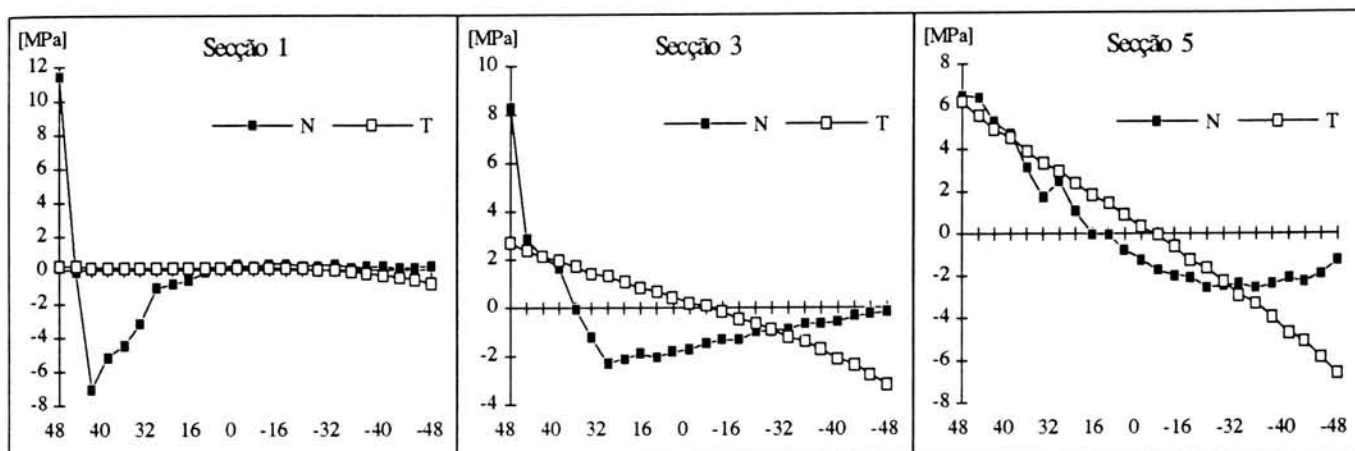


Continuando com picos bastante elevados os erros diminuem para todas as secções em especial para as secções centrais.

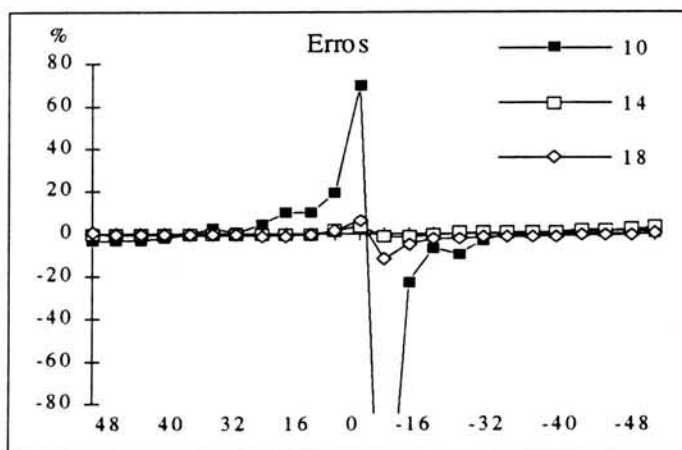
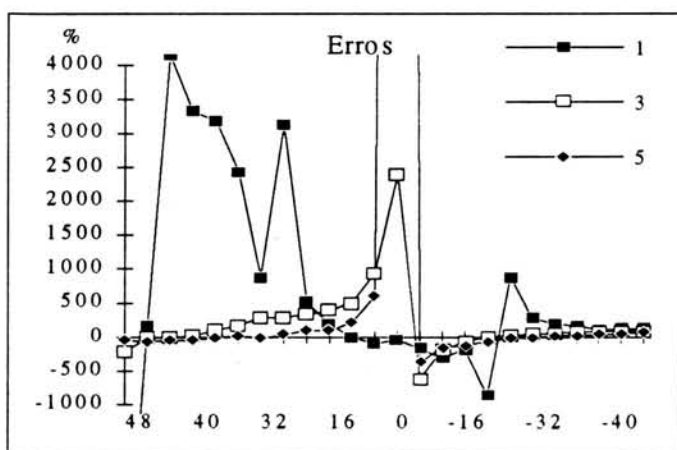


$\beta = 75$ GRAUS

Pelas apresentadas anteriormente, razões omitem-se as soluções do ângulo de 60. A convergência continua a aumentar.

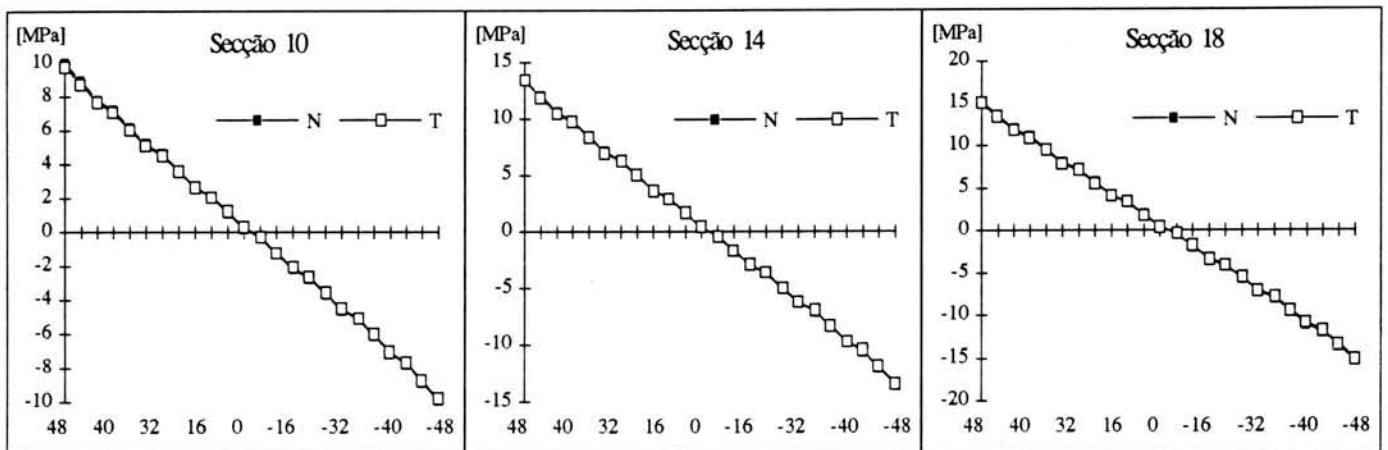
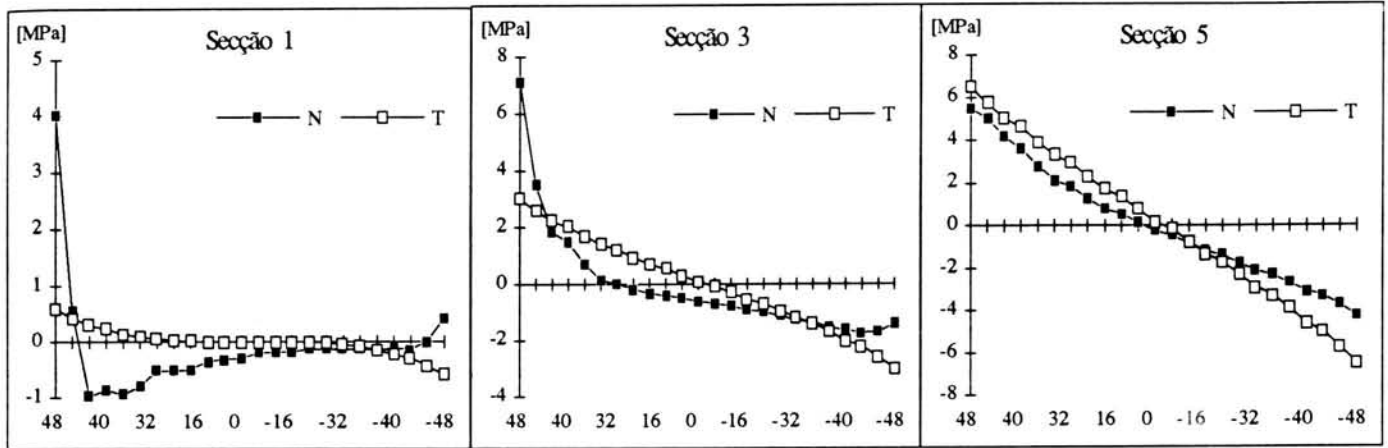


Continuando a ser elevados os erros na extremidade a sua faixa é bastante reduzida. Na gráfico da direita observa-se que quase todos os erros encontram-se numa faixa dos 15% excepto os do meio da secção que permanecem elevados.

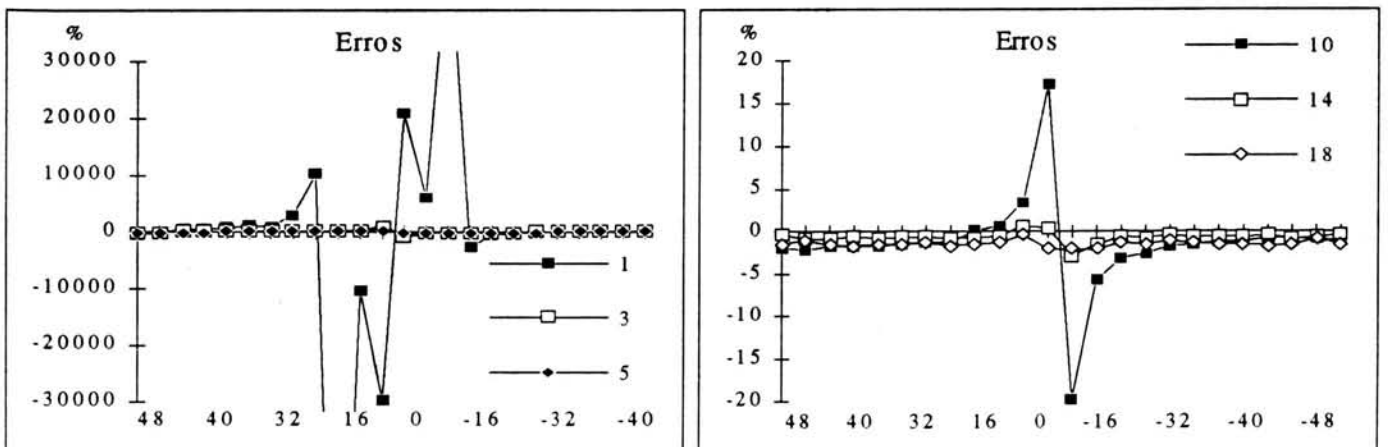


$\beta = 90$ GRAUS

É para este ângulo que a convergência das duas soluções é máxima



Os resultados da secção 1 são bastante divergente, mas logo a partir da secção 3 a coincidência é grande. Os erros na zona central estão na faixa dos 5 %.



5.3.3 OBSERVAÇÕES

Da exposição anteriormente algumas observações podem feitas. Uma relativamente ao andamento das tensões ao longo da viga e outra relativamente à variação do ângulo.

- No extremo da viga a tensão é teoricamente nula ($x_0=0$) como se depreende da equação. Nesse sentido os resultados numéricos conseguem ser mais representativos, excepto para o bordo inferior onde se faz sentir a concentração das tensões devido ao ponto de apoio.
- Ao variar o ângulo regista-se a maior divergência para um ângulo de 15° aproximando-se a partir daí até aos 90° .
- Os erros para o meio da secção nas secções centrais apesar de elevados não são de grande importância, pois são pontuais e na zona central, o que para efeito de dimensionamento geralmente não é relevante.

Após a análise das soluções obtidas, da quantificação dos erros e explicação dos mesmos, julga-se que os resultados numéricos obtidos estão correctos.

5.4 DESLOCAMENTOS

5.4.1 INTRODUÇÃO

A apresentação dos deslocamentos é semelhante ao exemplo anterior. Apresentam-se três gráficos com ambas as soluções cada um deles. Segue-se um gráfico com as soluções numéricas para os vários ângulos, de forma a mostrar o andamento com a variação do ângulo. No final faz-se a análise dos erros, registrando-se as conclusões.

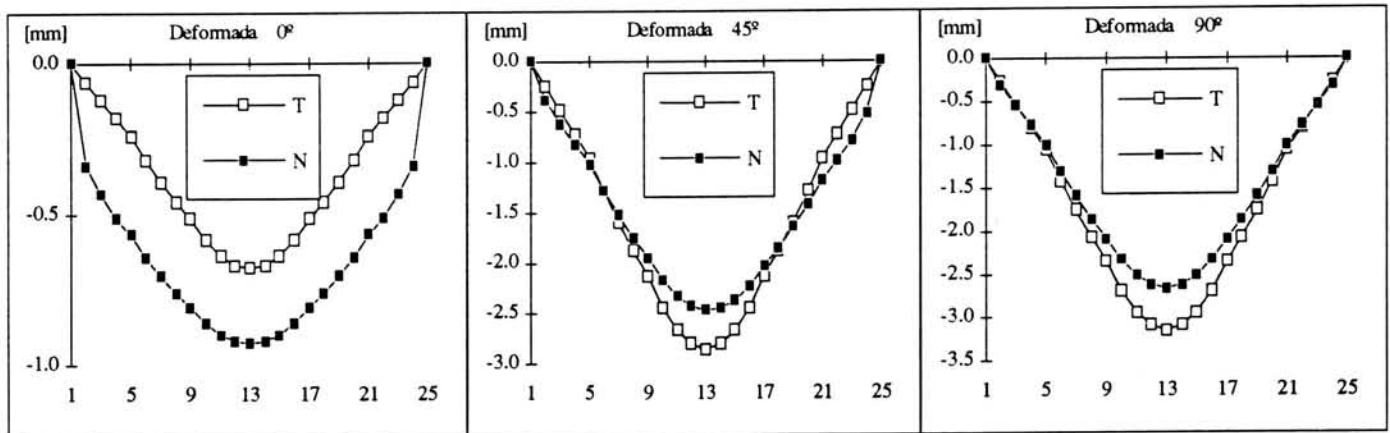
5.4.2 DEFORMADA

Os gráficos seguintes representam os deslocamentos nas ordenadas (milímetros) ao longo da viga (abscissas) para as duas soluções. Os deslocamentos numéricos são obtidos nos nós de cada elemento e por isso apenas aparecem 25 pontos de informação ao longo da viga, sendo ponto correspondente à secção 1 e o ponto 25 à secção 36.

Para o ângulo de zero graus as duas soluções tem o mesmo andamento mas aparecem com um desfaseamento. É este o caso de maior divergência de resultados.

Com o aumento do ângulo esse desfaseamento desaparece convergindo as duas soluções quer em andamento quer em valores. O gráfico central representa o que se passa para os ângulos em geral. Para 90° obtêm-se a maior aproximação entre as duas soluções.

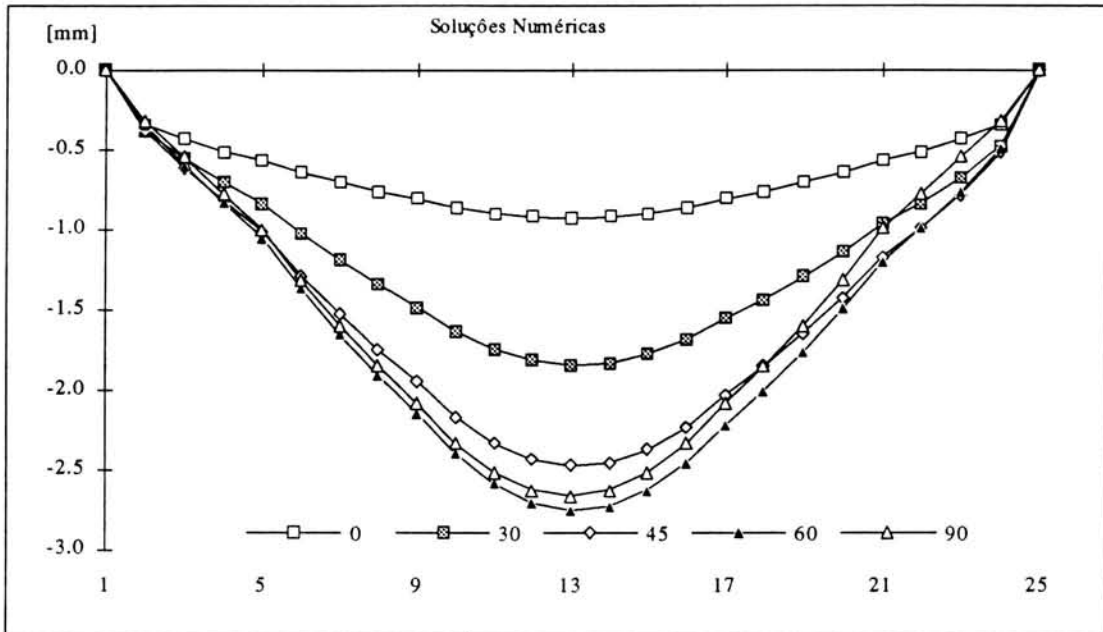
Inicialmente obtêm-se maiores deformações para os resultados numéricos invertendo-se essa situação a partir dos 30 graus.



A variação dos deslocamentos com o ângulo está representada abaixo. Omitem-se alguns ângulos de forma a permitir uma maior legibilidade.

É imediato verificar que quanto maior for o ângulo maior são as deformações. Essa variação não é proporcional com o aumento do ângulo, registrando-se a maior variação entre os 30 e 45 graus.

O andamento mantém a mesma forma para os vários ângulos com simetria relativamente ao eixo da viga.

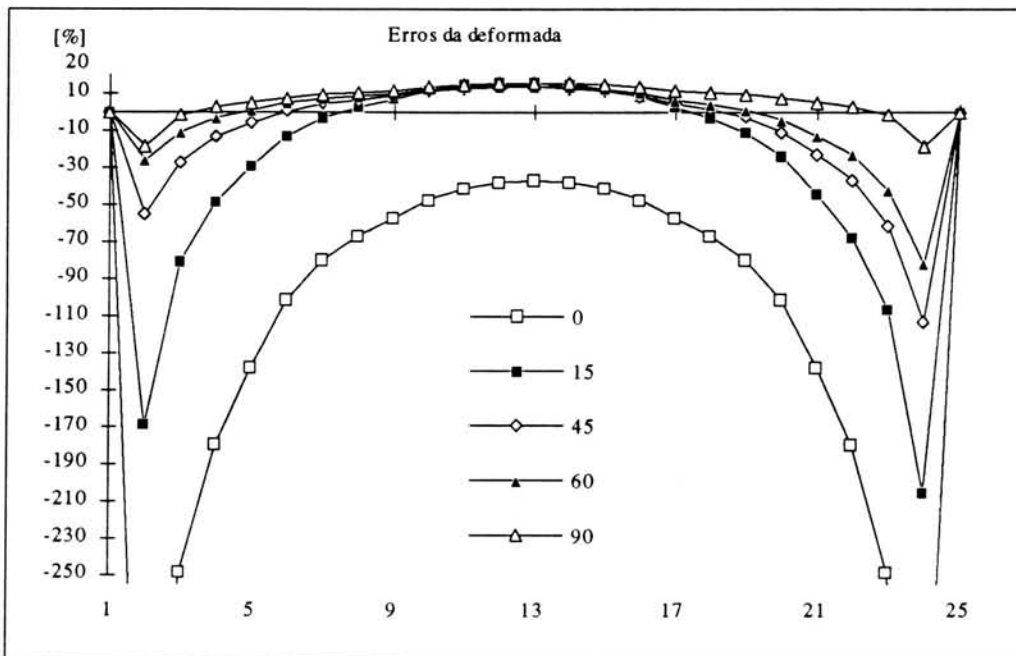


5.4.3 ANÁLISE DOS ERROS

Observando-se o gráfico seguinte confirma-se o que anteriormente se disse. Quanto maior o ângulo maior a convergência das duas soluções. Os erros são maiores para as extremidades de cada secção. Mais uma vez explicam-se por os valores em comparação serem muito próximos de zero. Sendo a base de comparação um valor muito próximo de zero, o erro é maior.

A solução para o ângulo de zero graus destaca-se com os piores resultados.

No geral as soluções são suficientemente próximas de forma a se poder considerar os resultados numéricos obtidos como correctos.



5.5 CONCLUSÕES FINAIS DO EXEMPLO

As conclusões são o resultado das observações feitas no final de cada subcapítulo.

- Para as tensões G_x , apesar dos erros serem elevados para alguns ângulos e, para cada um destes, nos extremos, os resultados numéricos seguem no geral os analíticos. Os andamentos aproxima-se bastante na zona de maior deformação. Os maiores erros encontrados conseguem ser explicados. Os erros das tensões são necessariamente maiores que no caso dos deslocamentos pois, o seu cálculo pela utiliza os deslocamentos que já estão afectados de erros.
- Os deslocamentos têm (excepto para o ângulo de zero graus) valores baixos e os andamentos das duas soluções são bastante semelhantes

Para este exemplo apesar de se dispor apenas de duas soluções analíticas para confrontação dos resultados, julga-se fiável as soluções numéricas obtidas com a alteração do programa.

6 EXEMPLO III VIGA ENCASTRADA À TRACÇÃO

6.1 INTRODUÇÃO

Neste exemplo estuda-se uma viga encastrada num dos extremos e tracionada no outro e a análise feita, é mais simples do que nos casos anteriores.

Comparam-se as soluções analíticas e numéricas das tensões e dos deslocamentos.

6.2 ANÁLISE DAS TENSÕES

As soluções analíticas são retiradas da referência [1] e são as seguintes:

$$G_x = p \quad [6.1] \qquad G_y = T_{xy} = 0 \quad [6.2]$$

$$\varepsilon_y = a_{12}p \quad [6.3] \qquad \varepsilon_x = a_{11}p \quad [6.4]$$

Com a aplicação da carga orientada com o eixo dos "xx" da viga (fig. 4.1), tem-se que a tensão segundo esse eixo é igual ao valor da carga aplicada por unidade de comprimento.(equação 6.1). As restantes tensões são nulas (equação 6.2)

Os deslocamentos obtêm-se recorrendo aos coeficientes a_{ij} apresentados nas equações 3.13 e 3.14.

Na obtenção da solução numérica usou-se as mesmas propriedades geométricas e do material dos exemplos anteriores. A malha usada é a mesma do exemplo 1 (ver figura 4.1), assim como o referencial. O encastramento é feito na secção 1 e a tracção é feita na secção 36, com o valor de 1000 (N/m).

6.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

As tensões G_x obtidas numericamente ,para os vários angulos e para as várias secções, são realmente constantes e atingindo o valor teorico previsto.

Registam-se pequenos erros, que facilmente se explicam devida à flutuação numérica.

G_y desvia-se consideravelmente de zero, o seu valor teorico previsto. A figura 6.1 apresenta os valores de G_y ao longo da viga, para os vários ângulos. Nas ordenadas estão as tensões em Pascais e nas abcissas os vários valores de "x" sendo a secção 1a encastrada (figura 4.1).

Para 0 e 90 graus os valores são quase coincidentes e muito próximos de zero.O valor da tensão aumenta de 0 até 60º diminuindo a paertir daí.

Comparando estes valores com o valor de G_x (10 mil Pascais), continuam a ser baixos.

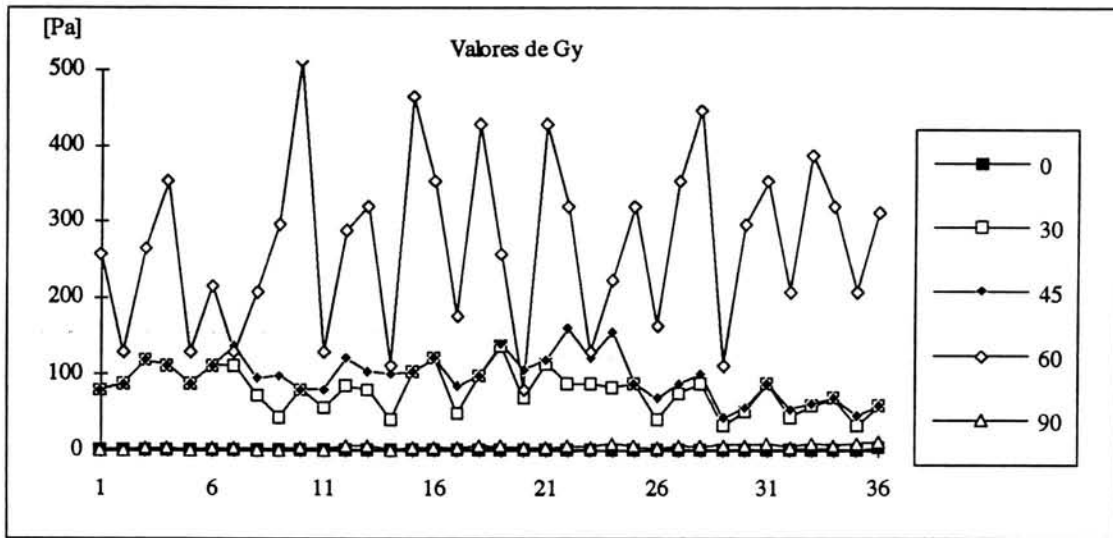


fig. 6.1

Na figura 6.2 encontram-se os valores de Txy. Os valores são superiores aos obtidos para Gy. Igualmente verifica-se uma subida acentuada no ângulo de 60 graus, para o qual se atingem os valores máximos.

O valor máximo registado, é no entanto ainda inferior a 10 % de Gx.

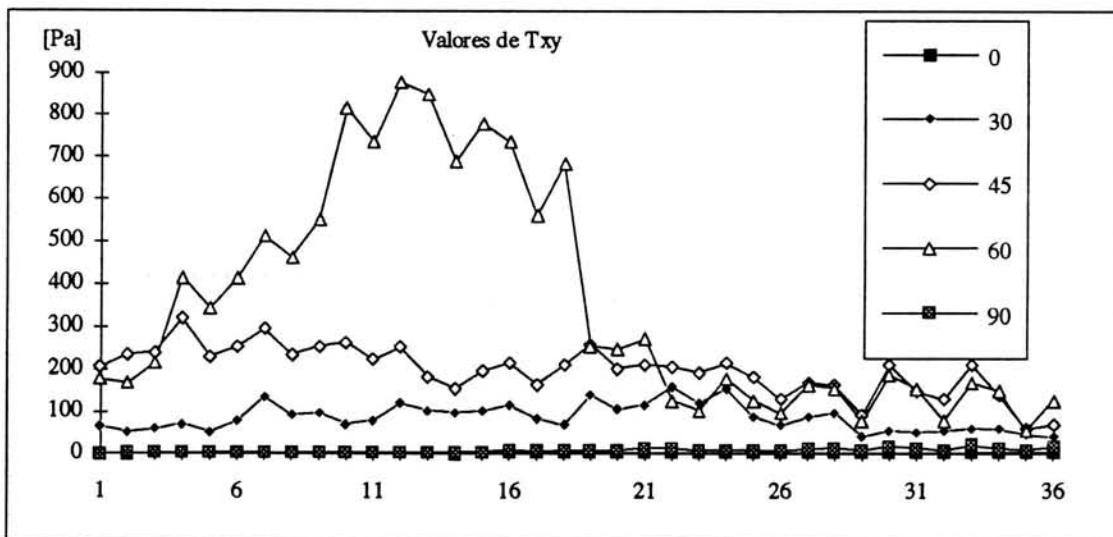


fig. 6.2

Nas figuras seguintes apresentam-se a comparação entre os valores analíticos(a11) e os valores numéricos(Ex) dos deslocamentos. Nas ordenadas Tem-se os deslocamentos em milímetros na abcisas os vários ângulos. Os dados utilizados foram os deslocamentos na secção de tracção, que são os máximos.

A figura 6.3 mostra os deslocamentos ao longo dos "xx" (Ex) e a figura 6.5 os deslocamentos Ey, ao longo do eixo dos "yy". (ver referencial da figura 4.21).

Para Ex os erros são mínimos, notando-se uma convergência das duas soluções. Para Ey as duas soluções apresentam diferenças acentuadas.

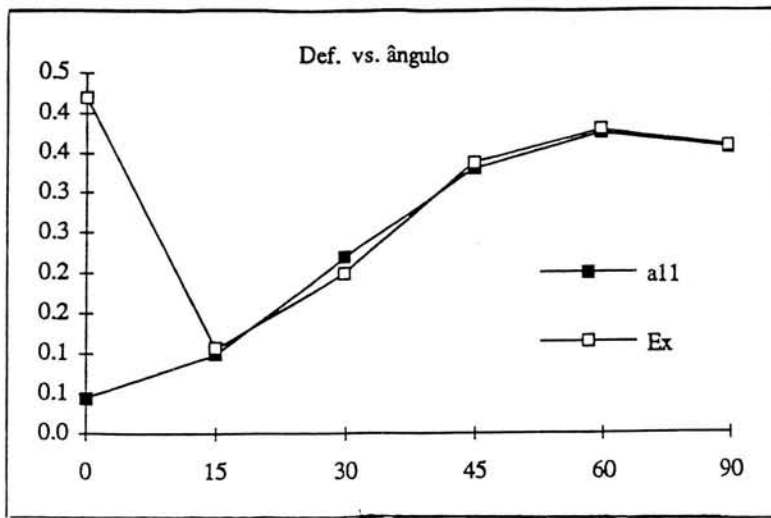


fig. 6.3

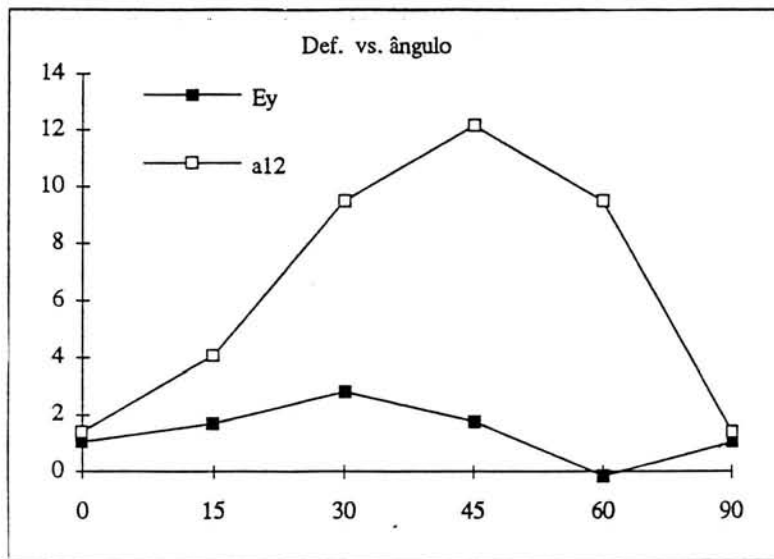


fig. 6.5

6.4 CONCLUÇÕES DO EXEMPLO

No geral as duas soluções aproximam-se, existindo algumas divergencias para T_{xy} e para os deslocamentos E_y .

7 CONCLUSÕES FINAIS DO TRABALHO

Após a exposição dos dados e observações dos três exemplos analisados, conclui-se que, apesar da divergência das duas soluções em alguns casos, os resultados obtidos numericamente são fiáveis.

Conclui-se, finalmente, que as alterações efectuadas no programa "femplano" estão correctas.

Em termos didáticos o enriquecimento teve duas vertentes principais.

Na primeira parte permitiu adquirir o conhecimento da estrutura de um programa de elementos finitos, seu funcionamento e ainda alguma experiência na elaboração de malhas.

Na segunda parte permitiu a aprendizagem da manipulação dos resultados, e a confrontação com alguns problemas subjacentes nas soluções numéricas, ganhando-se uma maior sensibilidade na procura das soluções.

Sendo este trabalho iterativo, certamente muito resta por fazer.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Hinton, E. e Owen, D. R. J. , " The Finite Element Programing", Academic Press, 1977
- [2] Lekhnitskii., S. G., " Anisotropic Plates", Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1968
- [3] Zienkiewicz, O. C., " The finit Elemente Method in Engineeering Science", Macgraw-Hill, 1971



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000101476