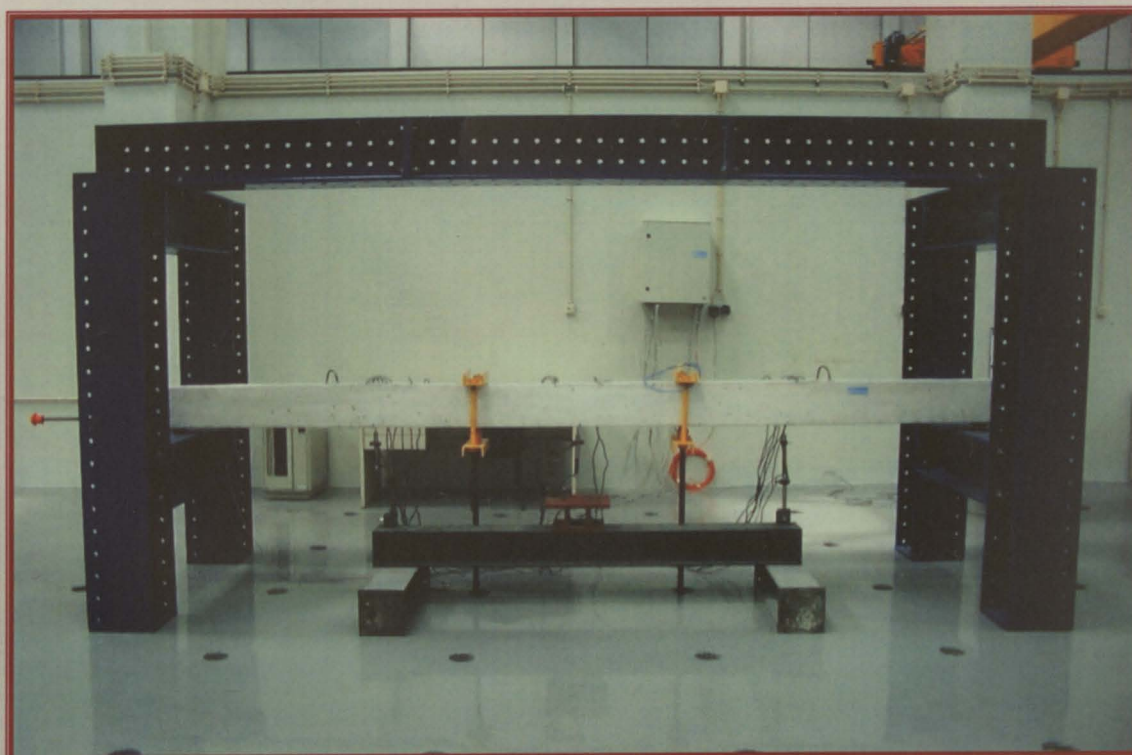




Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia  
**FEUP**

# COMPORTAMENTO DE UMA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO EM MODELO REDUZIDO



Helder Filipe Moreira de Sousa

Relatório de Estágio

01 de Julho a 31 de Dezembro de 2002

624(047.3)  
LEC 2001/SOUh



UNIÃO EUROPEIA  
Fundo Social Europeu



Mais Educação

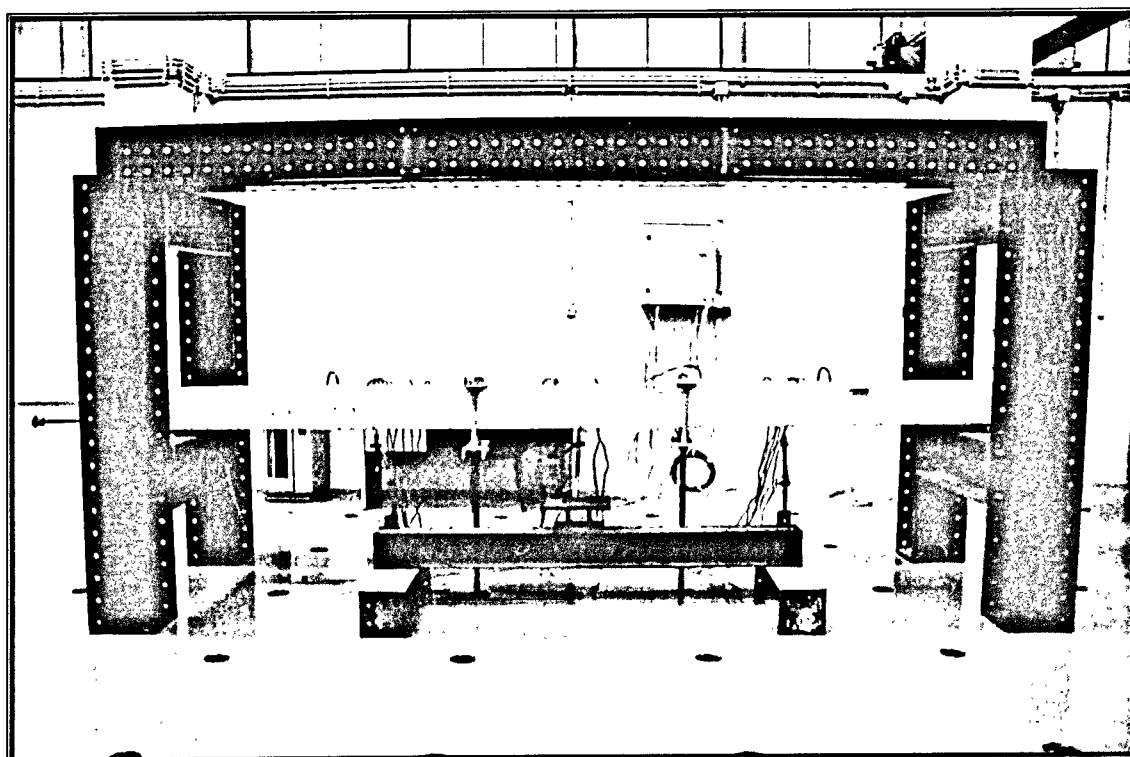
"PRODEP III" - Medida 3 / Acção 3.2  
Programa de Estágios no Ensino Superior



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

# **COMPORTAMENTO DE UMA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO EM MODELO REDUZIDO**



**Helder Filipe Moreira de Sousa**

**Relatório de Estágio**

01 de Julho a 31 de Dezembro de 2002



UNIÃO EUROPEIA  
Fundo Social Europeu

**prodep III**

*Novas Edificações*

**"PRODEP III" - Medida 3 / Acção 3.2**  
Programa de Estágios no Ensino Superior

## SUMÁRIO

A modelação do comportamento das estruturas de betão armado e pré-esforçado envolve um grande número de variáveis dependentes das características dos materiais constituintes, que por sua vez, apresentam um elevado grau de complexidade na sua compreensão e tradução do seu comportamento ao longo do tempo.

Com base nos resultados de um sistema de monitorização aplicado a uma viga de betão armado e pré-esforçado instalada no Laboratório de Estruturas da FEUP, onde se inclui a operação de pré-esforço e a condução de determinados ensaios de carga, apresenta-se o estudo do comportamento estrutural e material. Para o efeito dispõe-se da medição das extensões no aço e no betão da viga, da evolução do valor do pré-esforço, da medição das condições ambientais e da medição de deformações em provetes compensadores do efeito da retracção e da fluência.

Desenvolve-se um modelo que permita efectuar o tratamento de resultados obtidos pelo sistema de monitorização, permitindo a avaliação do comportamento estrutural em determinados instantes (operação de pré-esforço, ensaios de carga), e a decomposição das componentes das extensões por retracção e fluência do betão, ou seja, os efeitos diferidos no tempo, baseado nos modelos propostos pelo EC2 e MC-90 (nas situações em que o EC2 for omissivo).

Este trabalho insere-se numa linha de orientação em que a componente pedagógica é realçada, o que se justifica pelo interesse crescente da utilização prática do pré-esforço em estruturas de betão.

O presente trabalho organiza-se do seguinte modo:

Uma primeira parte onde se procede à descrição do material betão; o programa de cálculo utilizado; o modelo estrutural, esforços e acções consideradas; à justificação do dimensionamento adoptado; equipamento de monitorização utilizado de forma a obter os resultados experimentais; e por fim uma referência à execução do elemento estrutural.

Numa segunda parte, procede-se ao estudo do comportamento estrutural e material, com duas vertentes. Uma abordando a resposta instantânea da estrutura à aplicação do pré-esforço e determinados ensaios de carga (tanto na vertente experimental como na vertente numérica), e uma outra onde se aborda o comportamento da estrutura sob o efeito dos fenómenos diferidos do betão, designadamente, a retracção e fluência, procurando avaliar as deformações devidas a cada fenómeno a partir dos registos dos extensómetros colocados na viga, e em prismas compensadores (com cruzamento de dados experimentais com dados numéricos).

Por fim, são retiradas algumas ilações de todo este trabalho que de seguida se apresenta, bem como desenhos referentes à execução e monitorização em determinados ensaios de carga.

## **INDICE**

- I. MATERIAIS E LEIS CONSTITUTIVAS**
  - II. PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO**
  - III. MODELO ESTRUTURAL, ESFORÇOS E ACÇÕES**
  - IV. DIMENSIONAMENTO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO**
  - V. EQUIPAMENTO DE MONITORIZAÇÃO**
  - VI. EXECUÇÃO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO  
(LABEST/FEUP)**
  - VII. ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA VIGA PRÉ-ESFORÇADA**
  - VIII. ESTUDO EXPERIMENTAL DA VIGA PRÉ-ESFORÇADA**
  - IX. ESTUDO E AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DIFERIDO DO  
BETÃO**
  - X. ILAÇÕES**
  - XI. DESENHOS**
- BIBLIOGRAFIA**

## I. MATERIAIS E LEIS CONSTITUTIVAS

<b>1. BETÃO</b>	<b>I.1</b>
<b>1.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>I.1</b>
<b>1.2. CIMENTO "PORTLAND"</b>	<b>I.3</b>
<b>1.3. AGUA DE MISTURA PARA BETÃO</b>	<b>I.5</b>
<b>1.4. AGREGADOS PARA BETÃO</b>	<b>I.5</b>
<b>1.5. CLASSIFICAÇÃO</b>	<b>I.6</b>
<b>1.6. COMPORTAMENTO DO BETÃO</b>	<b>I.7</b>
<b>A. COMPRESSÃO UNIAXIAL</b>	<b>I.7</b>
<b>B. TRACÇÃO UNIAXIAL</b>	<b>I.9</b>
<b>C. ESTADO DE TENSÃO MULTI-AXIAL</b>	<b>I.11</b>
<b>1.7. EFEITO DO TEMPO NA RESISTÊNCIA E DEFORMAÇÃO DO BETÃO</b>	<b>I.12</b>
<b>A. RESISTÊNCIA DO BETÃO</b>	<b>I.12</b>
Resistência à compressão	<b>I.12</b>
Resistência à tracção	<b>I.13</b>
Módulo de elasticidade	<b>I.13</b>
Comportamento sob cargas elevadas e de longa duração	<b>I.14</b>
<b>B. DEFORMAÇÃO DO BETÃO</b>	<b>I.14</b>
Deformação por instantânea	<b>I.15</b>
Deformação por fluência	<b>I.16</b>
Deformação por retracção	<b>I.20</b>
Deformação por variação de temperatura	<b>I.24</b>
<b>1.8. CARACTERIZAÇÃO GERAL</b>	<b>I.25</b>
<b>2. ARMADURAS DE RESISTÊNCIA NORMAL</b>	<b>I.26</b>
<b>3. ARMADURAS DE ELEVADA RESISTÊNCIA</b>	<b>I.57</b>

## I. MATERIAIS E LEIS CONSTITUTIVAS

### 1. BETÃO

#### 1.1. INTRODUÇÃO

O betão é dos materiais com maior impacto no âmbito da engenharia civil. A sua **flexibilidade** permite que seja utilizado em diversos tipos de obras com as mais diversas funções.

##### Edifícios



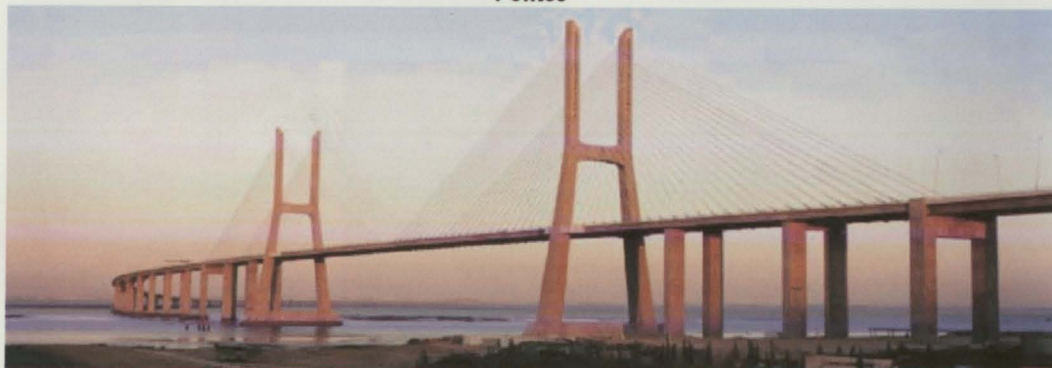
Chicago (EUA)

##### Muros de contenção



Torre das Antas (Porto - Portugal)

##### Pontes



Ponte Vasco da Gama (Lisboa - Portugal)

##### Barragens



Cahora Bassa (Moçambique)

##### Pavimentos de estrada



Além de possuir vantagens relativamente a outros materiais de construção, que fazem com que este seja de facto um material por excelência na construção.

- ✓ Flexibilidade na escolha de formas
- ✓ Possibilidade de fabrico "in-situ"
- ✓ Economia
- ✓ Durabilidade e resistência ao fogo
- ✓ Aparência estética

**Pavilhão de Portugal (Zona "EXPO")**



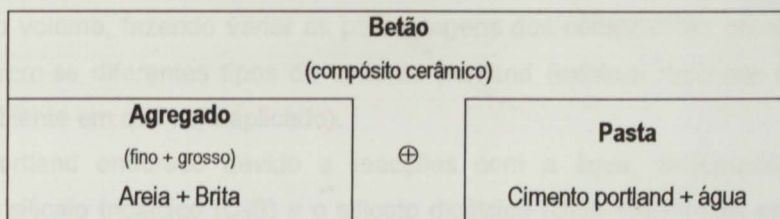
Lisboa - Portugal

**Catedral de Brasília**



Brasília - Brasil

Em termos de engenharia de materiais, o betão é um **material compósito cerâmico**, sendo resultado de uma mistura de um material granular inserido numa matriz obtida a partir de uma pasta de cimento.



Em termos simples, o ligante (cimento portland mais água) tem a função de ligar entre si as partículas do agregado (partículas finas e partículas grossas), obtendo-se no final o material compósito cerâmico.

A composição (em volume) do betão é variada, sendo dependente do fim a que destina (ambiente em que se insere a construção). No entanto, para se ter uma ideia das proporções envolvidas, normalmente a composição em volume varia entre:

Material	Volume (%)
Ar	0.5 – 8
Cimento portland	7 – 15
Água	14 – 21
Agregados finos	24 – 30
Agregados grossos	31 - 51

## 1.2. CIMENTO PORTLAND

O cimento portland é obtido a partir de matérias-primas, sendo as básicas:

Matéria-prima	Formula química
Cal	CaO
Sílica	SiO <sub>2</sub>
Alumina	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>

A mistura em proporções adequadas destas matérias-primas base, através do processo de fabrico, permite a obtenção de vários tipos de cimento portland, permitindo deste modo, uma vasta abrangência de aplicações.

De forma prática, considera-se o cimento portland como tendo quatro constituintes básicos:

Constituinte	Fórmula química	Abreviatura
Silicato tricálcico	3CaO·SiO <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> S
Silicato dicálcico	2CaO·SiO <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> S
Aluminato tricálcico	3CaO·Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	C <sub>3</sub> A
Aluminoferrite tetracálcica	4CaO·Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ·Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	C <sub>4</sub> AF

Para um dado volume, fazendo variar as percentagens dos constituintes acima enunciados é possível obterem-se diferentes tipos de cimento portland (existem definidos cinco tipos, em função do ambiente em que seja aplicado).

O cimento portland endurece devido a reacções com a água, designadas reacções de hidratação. O silicato tricálcico (C<sub>3</sub>S) e o silicato dicálcico (C<sub>2</sub>S) constituem cerca de 75% do



peso do cimento portland. Quando estes compostos reagem com a água durante o endurecimento do cimento, o principal produto da hidratação é o silicato tricálcico hidratado (surge na forma de partículas extremamente pequenas, 1µm, e constitui um gel coloidal). Na hidratação do C<sub>3</sub>S e C<sub>2</sub>S forma-se também hidróxido de cálcio (material cristalino)

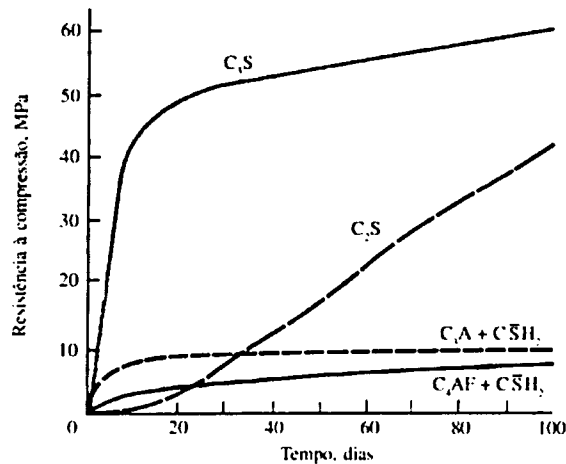


Figura 1 – Resistência à compressão de pastas dos constituintes puros do cimento em função do tempo (Retirado de “Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais”, William F. Smith)

Algumas ilações se podem retirar do gráfico apresentado na figura 1:

Constituinte	Propriedades	Observações
<b>Silicato tricálcico</b> C <sub>3</sub> S	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Endurece rapidamente</li> <li>✓ Principal responsável pelo primeiro aumento da resistência mecânica</li> <li>✓ A maior parte da hidratação ocorre nos primeiros 2 dias</li> </ul>	Os cimentos portland de endurecimento rápido (“Tipo III”) contêm sempre elevadas quantidades de C <sub>3</sub> S
<b>Silicato dicálcico</b> C <sub>2</sub> S	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Reação de hidratação lenta</li> <li>✓ Principal responsável pelo aumento de resistência mecânica após uma semana do seu fabrico</li> </ul>	
<b>Aluminato tricálcico</b> C <sub>3</sub> A	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Hidratação rápida</li> <li>✓ Grande velocidade de libertação de calor</li> <li>✓ Contribui ligeiramente para o primeiro aumento de resistência mecânica do cimento</li> </ul>	Percentagens baixas nos cimentos resistentes aos sulfatos (“Tipo V”)
<b>Aluminoferrite tetracálcica</b> C <sub>4</sub> AF	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Reduz a temperatura de formação do clínquer durante o processo de obtenção do cimento</li> </ul>	

A resistência e a durabilidade de um betão dependem do grau em que ocorrem as reacções de hidratação. Após a colocação de um betão fresco, a hidratação realiza-se de modo relativamente rápido durante os primeiros dias. É importante que a água fique retida no betão durante os primeiros tempos de endurecimento, pelo que se deve reduzir a sua evaporação no período inicial.



A resistência à compressão do betão aumenta com a sua idade. No entanto, na generalidade dos betões utilizados, a maior parte da sua resistência é atingida aos 28 dias, mas o aumento da resistência continua após esta data e pode durar anos.

### 1.3. AGUA DE MISTURA PARA O BETÃO

A generalidade das águas naturais potáveis podem ser usadas como água de mistura para fabrico de betões. No entanto, algumas águas não potáveis pode também ser utilizadas no fabrico de cimento, desde que o teor em impurezas não ultrapassem determinados limites, que ponham em causa a resistência mecânica do betão, sendo para esse efeito, realizado ensaios de controlo da qualidade dessas águas não potáveis.

### 1.4. AGREGADOS PARA BETÃO

Usualmente designados por inertes (por serem quimicamente neutros nas reacções envolvidas no fabrico do betão) constituem normalmente cerca de **60 a 80% do volume do betão**, tendo influência directa e significativa nas propriedades do betão. Classificados geralmente em partículas finas e grossas, as partículas finas consistem em grãos de areia com uma granulometria inferior a 6mm, por sua vez, as partículas grossas são as que ficam retidas num peneiro nº16 (abertura 1.18mm), constatando-se que existe uma sobreposição entre as gamas de tamanho das partículas finas e grossas.

Agregados	
Finos (fragmentos de minerais – areia)	Grossos (pedaços de rocha – pedra)

O doseamento das misturas para a obtenção de um determinado betão com determinadas características mecânicas deve ter em conta alguns factores fundamentais, tais como:

- ✓ Facilidade na utilização e aplicação do betão (fluidez adequada)
- ✓ Resistência e durabilidade (satisfazer determinadas especificações)
- ✓ Economia de fabrico (factor custo)

## 1.5 CLASSIFICAÇÃO

Nos regulamentos actualmente em vigor, o betão sob o ponto de vista de material estrutural é classificado em função da sua **resistência à compressão**. A sua determinação é função dos seguintes factores:

- ✓ Composição do betão
- ✓ Tamanho do provete de ensaio
- ✓ Idade de provete de ensaio

Estes parâmetros são devidamente controlados e especificados em normas, de forma a ter-se uma uniformidade de critério.

Sendo o betão um material proveniente de matérias-primas existentes na natureza, a determinação da sua resistência à compressão, deve ser alvo de uma **análise estatística**. Sendo por isso definidas **classes de resistência**. Através de ensaio de vários provetes representativos do betão que se quer classificar, obtém-se uma curva de frequências, da qual é possível obter o valor médio bem como valores característicos da sua resistência à compressão.

Admitindo como exemplo, que para um dado betão com 28 dias de idade, em cem provetes apenas cinco registaram um valor de resistência à compressão inferior a 22MPa ( $f_{ctk_{0,05}}$ ), este pertence então à classe C20/25 (admita-se que se está a referir a provetes cilíndricos de 30cm de altura e 15cm de diâmetro). Ou seja, a classe de resistência de um betão é definida como sendo o valor da resistência à compressão, em que apenas 5% dos provetes ensaiados registaram valor superior.

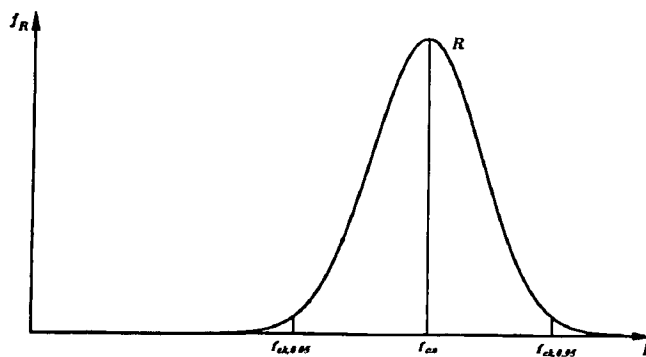


Figura 2 – Tratamento estatístico dos resultados de ensaio de provetes cilíndricos à compressão

A relação entre o valor característico inferior (5%) e o valor médio da resistência à compressão registado aos 28 dias, relaciona-se por:

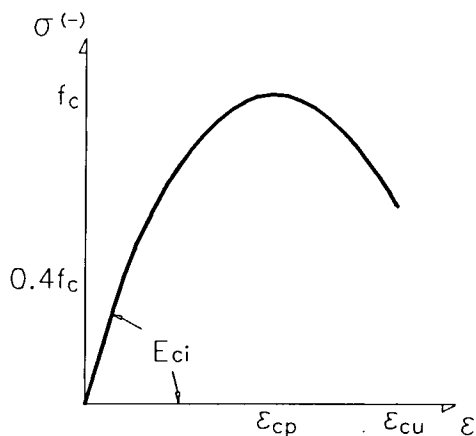
$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow f_{cm} = f_{ck} + 1.64 \cdot \sigma \quad \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad \text{(EC2)} \quad (3)$$

## 1.6. COMPORTAMENTO DO BETÃO

### A. COMPRESSÃO UNIAXIAL



Dado que o betão é um material compósito, a sua heterogeneidade não permite que se registre um estado de tensão uniforme quando sujeito a uma força de compressão uniforme. Para betões de peso normal (caso abordado no presente trabalho) as tensões de compressão na direcção da força exterior são maiores nos agregados do que na matriz de pasta de cimento. No plano perpendicular à direcção da solicitação, as tensões encontram-se em auto-equilíbrio já que não existe acções aplicadas neste plano (compressão uniaxial).

Para níveis de tensão de compressão na ordem dos 40% da tensão resistente,  $f_c$ , as **micro-fendas** já existentes devido à cura do betão (retracção impedida) na fronteira agregado-ligante, começam a crescer. Para níveis de tensão inferiores, o betão comporta-se como um material "perfeitamente" elástico.

Para níveis de tensão na ordem dos  $0.80f_c$ , as mesmas micro-fendas propagam-se no interior da matriz, predominantemente na direcção paralela à acção exterior. Este processo de desenvolvimento das micro-fendas é a grande responsável pela não linearidade do diagrama de extensões-tensões do betão.

Continuando a subir no nível de tensões, as micro-fendas continuam a crescer, chegando ao ponto de se unirem para formarem **macro-fendas**.

A tensão resistente de compressão,  $f_c$ , é atingida numa região do provete onde o comprimento de uma macro-fenda (ou um conjunto delas) torna-se crítico, de tal forma que sob tensão constante, a rotura do provete ocorre.

No caso de o carregamento ser efectuado com aumento progressivo de deformações, regista-se que após atingida a tensão de rotura, as micro-fendas existentes continuam a crescer de forma estabilizada, provocando uma diminuição da tensão instalada, explicando-se assim a fase descendente do diagrama de tensões-extensões ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) do betão sob uma acção de compressão uniaxial.

É de referir também que para classes de baixa a média resistência as micro-fendas concentram-se e desenvolvem-se na pasta de cimento, enquanto que para classes de resistência mais elevadas, devido à menor diferença de rigidez entre o agregado e o ligante, as micro-fendas desenvolvem-se também através do agregado.

O processo de rotura (desenvolvimento das micro-fendas) é concentrado numa região do provete, daí que se designe o processo de rotura à compressão, por "**fenómeno discreto**".

Factores que afectam a resistência � compressão do betão (Dependem essencialmente das propriedades da pasta de cimento hidratada)
✓ Relat�o �gua/cimento ✓ Grau de hidrata�o (idade do betão e cura) ✓ Tipo de cimento ✓ Tipo e quantidade de aditivos
Observa�o: Para classes de betão de elevada resistência, dependem também da resistência e rigidez dos agregados

Podendo-se concluir que:

- ✓ Até 40% da tensão de rotura, existe uma relat o linear entre deforma o,  $\epsilon$ , e tensão,  $\sigma$ .
- ✓ No primeiro troço do diagrama (regime linear), o módulo de elasticidade aumenta com a classe de betão (pasta de cimento progressivamente mais rígida).
- ✓ Para níveis de tensões mais elevados, a linearidade deixa de se registar e até se atingir um valor máximo para a tensão, correspondendo à tensão de rotura  $f_{cm}$ .
- ✓ A extensão máxima,  $\epsilon_0$ , que ocorre para a tensão máxima,   da ordem dos -0.002 a -0.003, e aumenta com o aumento da tensão resistente de compressão do betão.

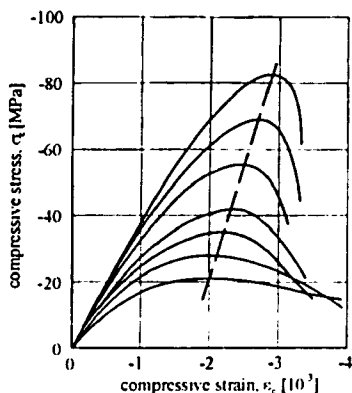


Figura 3 – Diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  para diferentes classes de resistência de betão (CEP-FIB MC-90)

O betão é um **material de comportamento frágil**, que no entanto é tanto mais frágil, quanto mais elevada for a sua resistência   compressão. O módulo de elasticidade é dependente da elasticidade dos seus componentes, ou seja, do agregado e da pasta de cimento hidratado, e pode ser estimado a partir dos módulos de elasticidade dos seus componentes, com base na teoria dos materiais compósitos.

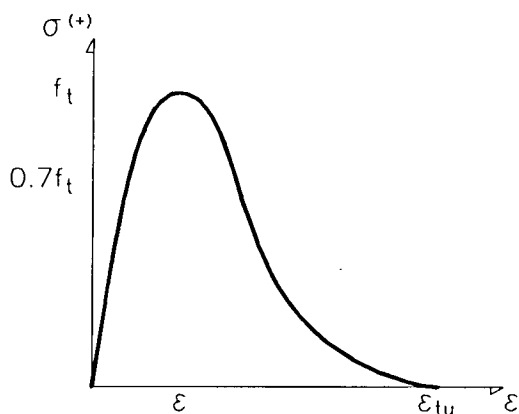
$$E_{ci} = \alpha_E \cdot E_{co} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right) \tag{4}$$

- $E_{ci}$  - Módulo de elasticidade tangente para  $\sigma_c=0$ MPa, aos 28 dias
- $\alpha_E$  - Coeficiente que traduz a influência da rigidez do inerte
- $E_{co} = 2.15 \times 10^4$ MPa
- $f_{cm}$  - Tensão de rotura média   compressão aos 28 dias
- $f_{cmo} = 10$ MPa

No entanto, este valor apenas se regista para  $\sigma_c=0\text{MPa}$ , o que sobrestima a rigidez do betão para efeitos de análise elástica linear, para ter isso em devida conta, este deve ser reduzido para:

$$E_c = 085 \cdot E_{ct} \tag{5}$$

### B. TRACÇÃO UNIAXIAL



Num elemento de betão, sujeito a um estado de tracção uniaxial progressivamente crescente desde  $\sigma_c=0\text{MPa}$  até  $\sigma_c=70\% \cdot f_{ctm}$  ( $f_{ctm}$ - tensão de rotura média do betão à tracção) as micro-fendas já existentes antes da solitação exterior (à semelhança do enunciado para a compressão uniaxial devido à retracção impedida) propagam-se. Verificando-se que nesta fase a relação entre deformações,  $\epsilon$ , e tensões,  $\sigma$ , é praticamente linear.

Para níveis de tensões superiores, as micro-fendas propagam-se inicialmente na direcção perpendicular à direcção da solitação exterior. Na vizinhança de grandes fendas, dá-se então o início ao designado “*process-zone*” (sistema de fendas aproximadamente paralelas, mas que inicialmente tratam-se de micro-fendas isoladas). Este processo evolui, sendo no entanto capaz de transmitir forças de tracção, que no entanto vai decrescendo, à medida que a macro-fenda se vai propagando, até se formar uma fenda continua, causadora da rotura – “*cohesive crack*”. O processo de rotura (desenvolvimento das micro-fendas) é concentrado numa só macro-fenda, logo, o processo de rotura do betão à tracção uniaxial, é ainda mais discreto do que em compressão uniaxial.

Quanto mais perto do tamanho crítico estiver a “*cohesive crack*”, a rotura só pode ser evitada através de uma redução da força de tracção aplicada. Desse modo, também aqui, a relação entre deformação,  $\epsilon$ , e tensão,  $\sigma$ , possui um ramo descendente.

Factores que afectam a resistência à tracção do betão (Dependem essencialmente das propriedades da pasta de cimento hidratada)	
✓	Relação água/cimento *
✓	Grau de hidratação (idade do betão e cura) *
✓	Tipo de cimento *
✓	Tipo e quantidade de aditivos *
✓	Processo de cura do betão (tensões internas devido à retracção de secagem que leva a formação de microfendas ainda antes do carregamento)
* Os mesmos factores considerados para o betão sob compressão	
Observação: Para classes de betão de elevada resistência, dependem também da resistência e rigidez dos agregados	

É de salientar que embora os factores que influenciam a resistência do betão à tracção sejam na sua maioria os mesmos que influenciam a resistência do betão à compressão, as tensões de compressão e tracção não são proporcionais, e em particular para classes de betão de maior resistência, onde um acréscimo da tensão resistente à compressão conduz apenas a um pequeno aumento da tensão resistente à tracção.

Um parâmetro que avalia o comportamento do betão à tracção, e que fornece informações úteis, é a designada **energia de fractura**. A qual é definida como sendo a energia que é necessária fornecer para separar uma unidade de área (N·mm/mm<sup>2</sup>).

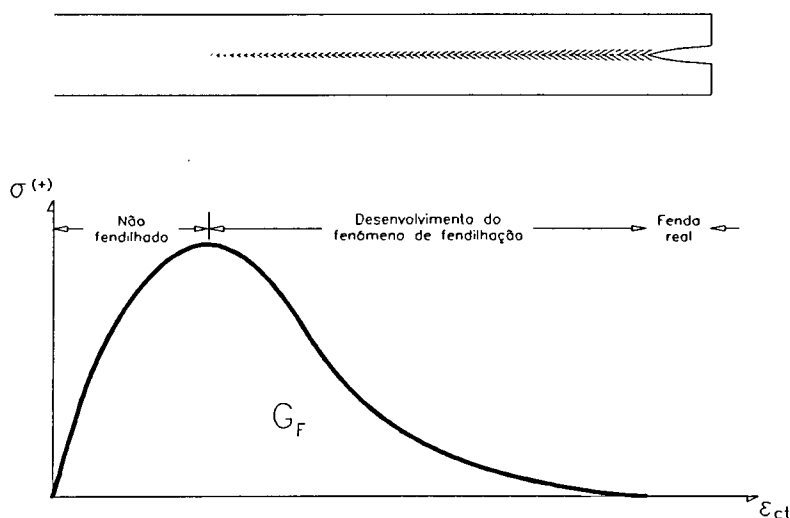


Figura 4 – Representação da energia de fractura

#### Factores que afectam a energia de fractura

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> Essencialmente <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Relação água/cimento</li> <li>✓ Dimensão máxima do agregado</li> <li>✓ Idade do betão</li> </ul> | <input type="checkbox"/> E também, <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Dimensão do elemento</li> </ul> |
|---|---|

Pode ser quantificada a partir da resistência média à compressão do betão, em que o MC-90 enuncia:

$$G_F = G_{F0} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0.7} \quad (6)$$

$G_{F0}$  - Valor base da energia de fractura  
(quanto maior a dimensão máxima do inerte, tanto maior será o valor base da energia de deformação)

$f_{cm}$  - Tensão de rotura média à compressão aos 28 dias

$f_{cm0} = 10\text{MPa}$

No entanto, para betões de elevada resistência, a dimensão máxima do inerte deixa de ser condicionante na energia de deformação, dado que o plano de fractura atravessa os próprios grãos do compósito, devido   maior rigidez da pasta de cimento hidratado, diminuindo a diferença entre as rigidezes da pasta de cimento hidratado e agregado.

  possível relacionar as resistências   tracção e compressão do betão, onde o EC2 propõe a seguinte expressão:

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot (f_{cm} + 8)^{2/3} \quad (7)$$

### C. ESTADO DE TENSÃO MULTIAXIAL

Em praticamente todas as estruturas de betão, as solicitações a que estão sujeitas, originam esforços do tipo:

- ✓ Axial (N)
- ✓ Flexão (M)
- ✓ Transverso (V)
- ✓ Torção (T)

O facto de estes esforços existirem em simultâneo, o estado de tensão instalado deixa de ser uniaxial. Este facto leva a que seja necessário considerar uma lei constitutiva para o betão, diferente do apresentado anteriormente quando se abordou o seu comportamento quando solicitado apenas numa direcção.

A resistência do betão, quando sujeito a um estado de tensão multiaxial, depende dos mesmos factores que influenciam a resistência do betão quando sujeito a um estado uniaxial de tensão. Assim sendo,   possível de forma satisfatória, expressar a resistência do betão quando sujeito a um estado de tensão multiaxial, como sendo uma "fracção" da resistência do betão quando sujeito a um estado de tensão uniaxial,  $f_{c,multiaxial} = K \cdot f_{c,uniaxial}$ .

No caso particular de estado de tensão biaxial, é importante salientar desde já, que se numa dada direcção o betão for solicitado   tracção, na direcção perpendicular, a resistência   compressão vem diminuída devido a esse facto. O mesmo raciocínio se pode ter no caso contrário, se numa dada direcção o betão for comprimido, na direcção perpendicular a resistência do betão vem aumentada. Para que se possa ter uma compreensão do comportamento das estruturas tão próximas da realidade quanto possível, leva à necessidade de se considerar o estado de tensão multiaxial.

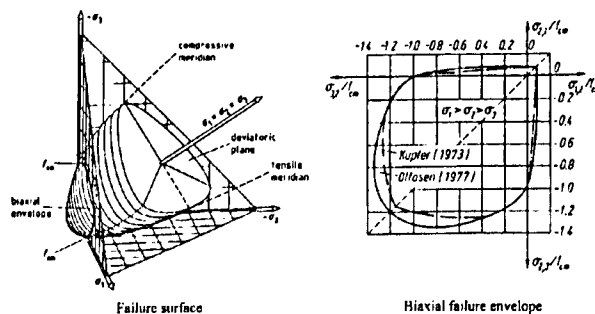


Figura 5 – Estado de tensão triaxial e biaxial do betão (CEB-FIP)



## 1.7. EFEITO DO TEMPO NA RESISTÊNCIA E DEFORMAÇÃO DO BETÃO

### A.RESISTÊNCIA DO BETÃO

#### Resistência à compressão

A velocidade com que a resistência do betão aumenta com o tempo depende de vários factores, sendo os principais:

- ✓ Tipo e classe de resistência do cimento
- ✓ Tipo e quantidade de misturas e aditivos
- ✓ Relação água-cimento
- ✓ Condições ambientais

O MC-90, sugere para a resistência média à compressão do betão, a utilização da seguinte expressão:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \tag{8}$$

$$\beta_{cc}(t) = e^{-s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0.5} \right]} \quad (\text{parâmetro temporal}) \tag{9}$$

$f_{cm}(t)$  - Tensão de rotura média à compressão à idade "t" (dias)

t - Idade do betão

$t_1$  = 1 dia

s - Coeficiente que traduz a influência do tipo de cimento

Classe do cimento	32.5	32.5R 42.5	42.5R 52.5
s	0.38	0.25	0.20

$f_{cm}$  - Tensão de rotura média à compressão aos 28 dias

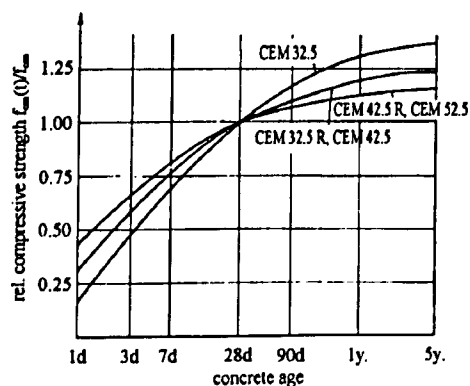


Figura 6 – Influência do tipo de cimento na resistência à compressão do betão (CEB-FIP MC-90)

Esta formulação é válida para uma temperatura de 20°C. No entanto, atendendo ao comportamento oscilatório dos valores da temperatura ao longo do tempo, existe a

necessidade de corrigir a temperatura, para que o modelo proposto possa ser utilizado. O MC-90 sugere:

$$t = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot e^{\left( \frac{13.65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)/T_0}}{1} \right)} \quad (10)$$

t	- Idade efectiva do betão
T( $\Delta t_i$ )	- Temperatura registada no intervalo de tempo $\Delta t_i$
T <sub>0</sub>	= 1°C

Observação: Válido para  $-10^\circ\text{C} < T < 60^\circ\text{C}$

### Resistência à tracção

A resistência do betão à tracção ao longo do tempo é mais difícil de prever, devido ao desenvolvimento de tensões internas (micro-fendilhação) provocadas pela retracção que se desenvolve com maior significado precisamente no período inicial de vida do elemento de betão. Ou seja, as dimensões do elemento, bem como as condições de cura a que este está sujeito, dificultam significativamente a possibilidade de prever com rigor a evolução da resistência do betão à tracção em idade jovens.

Deste modo, só para idades superiores a 28 dias, é que a resistência do betão à tracção ao longo do tempo, pode ser estimada de forma similar ao efectuado para a resistência à compressão.

$$\text{Para } t > 28 \text{ dias} \Rightarrow f_{ctm}(t) \propto f_{cm}(t)$$

### Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade do betão cresce mais rapidamente do que a resistência do betão à compressão. Esta constatação prende-se ao facto de este ser em grande parte condicionado pelo módulo de elasticidade dos agregados, o qual é independente da idade do betão. Isto é levado em conta, e expressado pelo MC-90:

$$E_{ci}(t) = \beta_E(t) \cdot E_{ci} \quad (11)$$

$$\beta_E(t) = [\beta_{cc}(t)]^{0.5} \quad (\text{parâmetro temporal}) \quad (12)$$

$E_{ci}(t)$  - Módulo de elasticidade tangente na origem à idade t

$\beta_{cc}(t)$  - Expressão "2.9"

t - Idade do betão

$E_{ci}$  - Módulo de elasticidade tangente na origem aos 28 dias

Note-se que para traduzir a maior rapidez do desenvolvimento do módulo de elasticidade relativamente à resistência à compressão do betão, o parâmetro temporal,  $\beta_E(t)$ , é definido a partir do parâmetro temporal,  $\beta_{cc}(t)$ , elevado a 0.5.

Também neste caso, se a temperatura for diferente de  $20^\circ\text{C}$ , a idade do betão deve ser corrigida pela expressão "10".

## Comportamento sob cargas elevadas de longa duração

A resistência do betão à compressão depende também da grandeza das acções aplicadas bem como do período de tempo em que estas actuam, que tanto será mais importante quanto maior o período de actuação.

Uma força de carácter permanente a actuar no betão, em níveis de tensões de serviço, pode levar a um aumento da resistência do betão. No entanto, se a força de carácter permanente provocar níveis de tensão elevados ( $>0.4f_c$ ), o processo de fendilhação continua a desenvolver-se, podendo mesmo levar à rotura. A máxima tensão que o betão aguenta sem rotura é designada em inglês por *“sustained load strength”*. Para um betão que é solicitado aos 28 dias, por uma carga elevada de longa duração, a sua resistência máxima (*“sustained load strength”*) corresponde a cerca de 80% da sua resistência à compressão definida nos regulamentos ( $f_{c,28d}$ ).

$$f_{cm,sus\ 28d} \cong 0.80f_{cm,28d}$$

A resistência do betão sob cargas elevadas de longa duração depende de:

- ✓ Idade do betão
- ✓ Idade de carregamento

Devido ao facto de se desenvolverem dois fenómenos de efeitos opostos:

- ✓ A carga elevada de longa duração provoca uma redução da resistência do betão devido à continuação do desenvolvimento da micro-fendilhação
- ✓ Hidratação da pasta de cimento (caso exista água suficiente) que conduz a um aumento contínuo de resistência.

O MC-90 sugere para tradução analítica do fenómeno a seguinte expressão:

$$f_{cm,sus}(t, t_0) = f_{cm} \cdot \beta_{cc}(t) \cdot \beta_{c,sus}(t, t_0) \quad (13)$$

$$\beta_{c,sus}(t, t_0) = 0.96 - 0.12 \cdot \left\{ \ln \left[ 72 \cdot \left( \frac{t - t_0}{t_1} \right) \right] \right\}^{1/4} \quad (14)$$

(parâmetro temporal)

$\beta_{cc}(t)$  - Expressão “9”

$t$  - Idade do betão

$t_0$  - Idade de carregamento

$t_1$  = 1 dia

Também neste caso, se a temperatura for diferente de 20°C, a idade do betão deve ser corrigida pela expressão “10”.

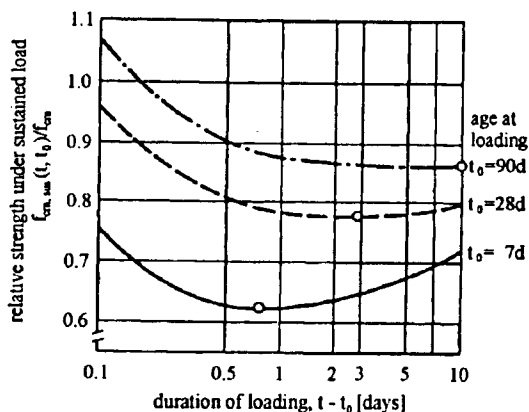


Figura 7 – Desenvolvimento da resistência do betão à compressão quando sujeito a cargas elevadas de longa duração para diferentes idades de carregamento (CEB-FIP)

Da figura 7, é possível concluir que numa **primeira fase**, logo após a aplicação da carga elevada de longa duração, a **resistência do betão à compressão decresce**, isto devido à **predominância do fenómeno de micro-fendilhação sobre a hidratação da pasta de cimento**, até que se atinge um mínimo de resistência,  $f_{cm,sus}(t, t_{crit})$ . A partir deste instante, numa **segunda fase**, a **resistência do betão à compressão aumenta**, devido à **predominância da hidratação da pasta de cimento e estabilização da micro-fendilhação**.

A resistência mínima atinge-se tanto mais cedo, quanto mais jovem for o betão à idade do carregamento, devido ao facto do gradiente de hidratação da pasta de cimento ser tanto maior quanto mais jovem o betão for.

O período que vai desde a data de aplicação da carga até à data em que se atinge o mínimo de resistência à compressão do betão, é designado como **“período crítico”**, o qual é possível ser determinado analiticamente pela expressão “13”, obtendo-se um gráfico semelhante ao apresentado na figura 7.

## B. DEFORMAÇÃO DO BETÃO

A deformação do betão ao longo do tempo pode ser vista na seguinte óptica:

- ✓ Dependentes das tensões instaladas
- ✓ Independentes das tensões instaladas

Nestes dois tipos podem-se balizar os seguintes fenómenos:

Dependente da tensão instalada ( $\sigma$ )	Independente da tensão instalada ( $\sigma$ )
DEFORMAÇÃO INSTANTÂNEA $\epsilon_{ci}(t_0)$	DEFORMAÇÃO POR RETRACÇÃO $\epsilon_{cs}(t)$
DEFORMAÇÃO POR FLUÊNCIA $\epsilon_{cc}(t)$	DEFORMAÇÃO POR VARIAÇÃO DA TEMPERATURA $\epsilon_{CT}(t)$
	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Provocado por ganho ou perda de humidade</li> <li>✓ Dependente da variação de volume</li> </ul>

Podendo-se então formular a variação de comprimento por unidade da seguinte forma:

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{ci}(t_0) + \epsilon_{cs}(t) + \epsilon_{cc}(t) + \epsilon_{cT}(t) \quad (15)$$

Usualmente define-se:

Deformações dependentes de  $\sigma$ :  $\epsilon_{c,\sigma}(t) = \epsilon_{ci}(t_0) + \epsilon_{cc}(t) \quad (16)$

Deformações independentes de  $\sigma$ :  $\epsilon_{c\eta}(t) = \epsilon_{cs}(t) + \epsilon_{cT}(t) \quad (17)$

### Deformação instantânea, $\epsilon_{ci}(t_0)$

Esta deformação é provocada pela acção de cargas aplicadas ao betão. Trata-se de uma resposta imediata do betão à solicitação. Sendo definida por:

$$\epsilon_{ci}(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} \quad (18)$$

No entanto, se estivermos em regime linear do material ( $\sigma_c < 0.4f_{ck}$ ), o módulo de elasticidade do betão é constante, resultando na lei de Hooke:

$$\epsilon_{ci}(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c,sec}} \quad (19)$$

### Deformação por fluência, $\epsilon_{cc}(t)$

A deformação por fluência depende de vários factores, considerando-se os principais:

Factores que influenciam a deformação por fluência
✓ Humidade ambiente
✓ Dimensões do elemento (espessura equivalente)
✓ Composição do betão
✓ Temperatura ambiente
✓ Carga aplicada (instante de aplicação e intensidade)
✓ Idade do betão (à data de carregamento)

A deformação por fluência varia consoante as propriedades do betão e a idade em que este sofre o carregamento. Numa primeira aproximação, a deformação por fluência é proporcional à fracção de volume de cimento contido na pasta de cimento.

<p>A deformação por fluência é tanto maior quanto</p> <p><b>MAIOR for:</b></p>	<p>A deformação por fluência é tanto maior quanto</p> <p><b>MENOR for:</b></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Porosidade do betão (capilaridade)</li> <li>✓ Relação água-cimento (excesso de água provoca a existência de vasos capilares após hidratação completa do betão)</li> <li>✓ Cimento não hidratado (à idade do carregamento)</li> <li>✓ Fracção de volume de pasta de cimento hidratado                             <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Humidade no interior do betão</li> <li>✓ Perda de água sob a acção de uma carga (perda de água forçada)</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Rigidez do agregado (ou dimensão do agregado) (normalmente não sofrem fluência e impede a fluência da pasta de cimento hidratado)</li> <li>✓ Humidade relativa do ambiente</li> <li>✓ Espessura do elemento (maior facilidade de a água sair)</li> </ul>

É de salientar que a deformação por fluência depende significativamente do **grau de humidade do betão à idade do carregamento**, e a sua **variação ao longo do período de tempo em que o processo de fluência se processa**, ou seja, da água em excesso que está presente na pasta de cimento e a velocidade com que ela sai. Igualmente se salienta o facto de a fluência do betão se dever basicamente à fluência da pasta de cimento hidratado, já que os agregados normalmente utilizados no fabrico de betão apresentam pouca ou nenhuma fluência.

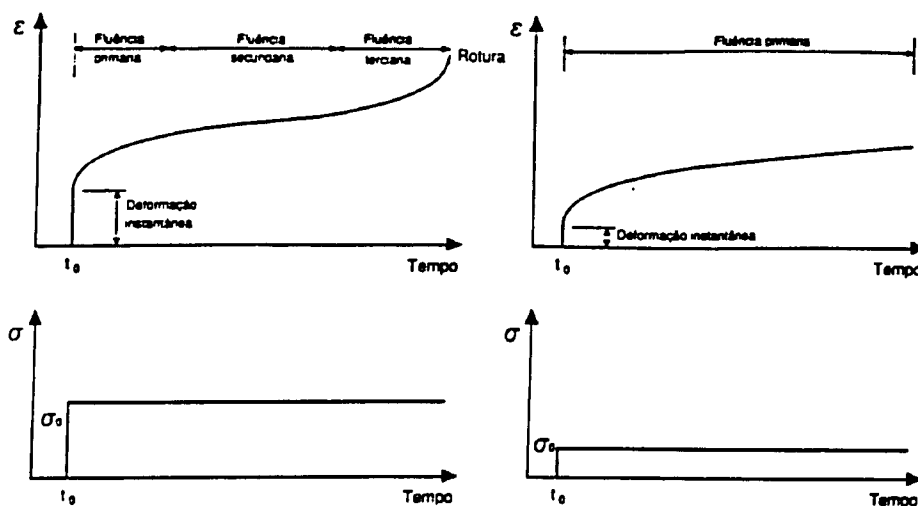


Figura 8 – Desenvolvimento da deformação por fluência para níveis elevadas de tensão (esquerda) e níveis moderados de tensão (direita)

Constata-se que a deformação por fluência, para tensões moderadas ( $<0.45f_c$ ) tende a estabilizar quando o tempo tende para infinito, sendo corrente a utilização do coeficiente de fluência,  $\Phi(t_0, \infty)$ , que representa um factor múltiplo, que multiplicado pela deformação instantânea ocorrida aquando da aplicação da carga, nos fornece a deformação por fluência.

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{ci}(t_0)} \quad (20)$$

Trabalhando a expressão "20":

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \cdot \varepsilon_{ci}(t_0) \Leftrightarrow \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{cc}(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \cdot \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} \quad , \quad E_c = E_{c,28d} \cong 1.05 \cdot E_{cm} \text{ (EC2)} \quad (22, 23)$$

Considerando também a deformação instantânea provocada pela acção da carga e somando:

$$\varepsilon_{\infty}(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\Phi(t, t_0)}{E_c} \right) \Leftrightarrow \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{\infty}(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \Leftrightarrow \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c,eff}} \quad , \quad E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \Phi(t, t_0)} = \frac{1}{J(t, t_0)} \quad (26, 27)$$

Na expressão "24",  $J(t, t_0)$  é **designada por função fluência**, e traduz a variação do módulo elasticidade com o tempo. Ou seja, representa como varia a deformação por unidade de comprimento e por unidade de tensão com o tempo. A função fluência tende a estabilizar para um dado valor (para o caso de tensões moderadas,  $<0.45f_c$ )

O coeficiente de fluência,  $\Phi(t_0, \infty)$ , varia em geral entre valores de 1 e 4. Ou seja, as deformações produzidas por fluência do betão podem ser praticamente nulas, ou serem da ordem de quatro vezes superior à deformação instantânea devido à aplicação da carga a que lhe deu origem.

### Modelo do EC2

O EC2 apresenta em anexo (1) da Parte 1 a fluência do betão para efeito do dimensionamento das estruturas, referindo que:

- ✓ Refere-se ao comportamento médio de um elemento de betão
- ✓ Não considera as propriedades reológicas locais desse elemento (função das tensões internas, das condições de humidade ou da microfendilhação localizada)

A validade do modelo verifica-se para:

- ✓ Classes de betão C12/15 a C50/60
- ✓ Tensões de compressão ou tracção inferiores a 45% da resistência média à data do carregamento
- ✓ Humidade relativa entre 40% a 100%
- ✓ Temperaturas médias entre 10°C a 20°C

Admite-se uma relação linear entre as tensões aplicadas e as extensões sofridas devido à fluência, sendo deste modo válido o princípio da sobreposição dos efeitos.

Admite também que os fenómenos de retracção e fluência são independentes entre si.

O coeficiente de fluência utilizado está associado ao módulo de elasticidade tangente na origem aos 28 dias,  $E_{c(28)}$ , em que o EC2 define um modelo multiplicativo, que se traduz pela seguinte expressão:

$$\Phi(t-t_0) = \Phi_0 \cdot \beta_c(t-t_0) \quad (28)$$

- $\Phi_0$  - Coeficiente nominal de fluência
- $\beta_c(t-t_0)$  - Coeficiente de fluência ao longo do tempo

O coeficiente nominal de fluência é obtido através de:

$$\Phi_0 = \Phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (29)$$

- $\Phi_{RH}$  - Coeficiente em função da humidade relativa e espessura equivalente da secção de betão

$$\Phi_{RH} = 1 + \left( \frac{1 - RH/100}{0.10 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \right) \quad (30)$$

- $\beta(f_{cm})$  - Coeficiente em função da resistência do betão

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (31)$$

- $\beta(t_0)$  - Coeficiente em função do tempo

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{0.20}} \quad (32)$$

$$t_0 \Rightarrow t_{0,corr} \quad t_{0,corr} = t_{0,T} \cdot \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1.2}} + 1 \right)^\alpha \quad (33)$$

- $t_{0,T}$  - Temperatura corrigida devido à variação da temperatura pela expressão "2.10"

- $\alpha$  - Coeficiente função do tipo de cimento

Tipo de cimento	S	N,R	RS
$\alpha$	-1	0	1



Por outro lado, o **coeficiente de fluência ao longo do tempo** é expresso por:

$$\beta_c(t - t_0) = \left( \frac{t - t_0}{\beta_{H,T} + t - t_0} \right) \quad (34)$$

$\beta_{H,T}$  - Coeficiente em função da humidade relativa e temperatura

$$\beta_{H,T} = \beta_H \cdot \beta_T \quad (35)$$

$\beta_H$  - Coeficiente em função da humidade relativa

$$\beta_H = 1.5 \cdot [1 + (0.012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 (\leq 1500) \quad (36)$$

$\beta_T$  - Coeficiente em função da temperatura

$$\beta_T = e^{\left( \frac{1500}{250 + T} - 5.12 \right)} \quad (37)$$

$t_0$  - Idade do betão à data do carregamento

$t$  - Idade do betão

### Deformação por retracção, $\epsilon_{cs}(t)$

A retracção do betão pode ser caracterizada por diferentes origens:

Decomposição da retracção total do betão	
	Retracção plástica - Variação de volume antes da presa, resultado do assentamento dos materiais que compõem o betão e da evaporação da água à superfície
Fundamentalmente por variação do teor em água do betão	Retracção autogénea (independente do meio ambiente) - Variação de volume por hidratação do cimento da qual resultam produtos cujo volume final é inferior à soma do volume dos componentes anidros com o da água com a qual reagem
	Retracção de secagem (dependente do meio ambiente) - Variação de volume provocado por trocas de água com o exterior que em geral se processam por evaporação, que podem também ocorrer no sentido inverso por capilaridade, permeabilidade ou por condensação capilar
	Retracção de carbonatação - Variação de volume, pela combinação de carbono da atmosfera com os componentes hidratados do cimento, a qual origina produtos sólidos com volume inferior à soma dos volumes dos reagentes

Também a deformação por retracção, à semelhança da deformação por fluência, depende de factores extrínsecos e intrínsecos, sendo os principais:

Factores que influenciam a deformação por retracção
✓ Humidade ambiente
✓ Dimensões do elemento (espessura equivalente)
✓ Composição do betão
✓ Temperatura ambiente

No entanto, a retracção plástica não é considerada, visto que é apenas após a presa que o betão adquire características para funcionar como elemento estrutural.

Por outro lado a parcela correspondente à retracção de carbonatação é pouco significativa quando comparada com a retracção autogénea e a retracção de secagem.

Assim sendo, com razoável grau de aproximação, pode-se afirmar que:

$$\text{Retracção} \cong \text{Retracção autogénea} + \text{Retracção por secagem}$$

### **Retracção autogénea**

Com a hidratação do cimento, verifica-se uma redução de volume. Isto deve-se essencialmente à maior densidade da água que se encontra "agarrada" as partículas finas de cimento (água combinada, adsorvida e zeolítica), do que a água livre. Em adição, verifica-se uma auto-secagem dentro da pasta de cimento durante a hidratação, que provocam capilaridade interna, ou poros sob sucção, que por sua vez provocam uma redução de volume.

### **Retracção por secagem**

Como a secagem do betão é um processo lento, também a retracção por secagem ao longo do tempo é um processo lento. Sendo que nas imediações dos limites do elemento de betão se atinge rapidamente um equilíbrio com o meio ambiente exterior envolvente. Esse equilíbrio tanto mais tarde é atingido quanto mais para o interior do elemento de betão se progride. Consequentemente desenvolve-se um estado de tensão interno auto-equilibrado, verificando-se tensões de tracção na zona periférica da secção de betão, e tensões de compressão no interior. Sendo frequente estas tensões de tracção conduzir a micro-fendas na superfície do betão. Ou seja, pode-se concluir que a retracção por secagem não é um fenómeno uniforme ao longo da secção do elemento de betão. Agravado ainda pelo facto de os agregados serem partículas rígidas, as quais não sofrem retracção, logo, como a pasta de cimento hidratado tende a retrair, provoca um estado de tensão interno auto-equilibrado nas fronteiras pasta-agregado.

Tipo de retracção predominante	
Betão de resistência normal ↓ Retracção de secagem	Betão de elevada resistência ↓ Retracção autogénea

Basicamente, o que mais condiciona a deformação por retracção é a perda de água do betão durante a secagem.

A deformação por retracção é tanto maior quanto <b>MAIOR</b> for:	A deformação por retracção é tanto maior quanto <b>MENOR</b> for:
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Água contida no betão</li> <li>✓ Área específica da partícula de cimento (tipo de cimento)</li> <li>✓ Quantidade de alcali (tipo de cimento)</li> <li>✓ Temperatura exterior (maior grau de evaporação)</li> <li>✓ Relação entre a superfície de exposição e o volume (influência da geometria do elemento)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Humidade relativa do ambiente</li> <li>✓ Rigidez do agregado (ou dimensão do agregado) (normalmente não sofrem fluência)</li> <li>✓ Espessura do elemento * (maior facilidade de a água sair)</li> </ul>
	<p>* No entanto a retracção final é independente da dimensão do elemento de betão</p>

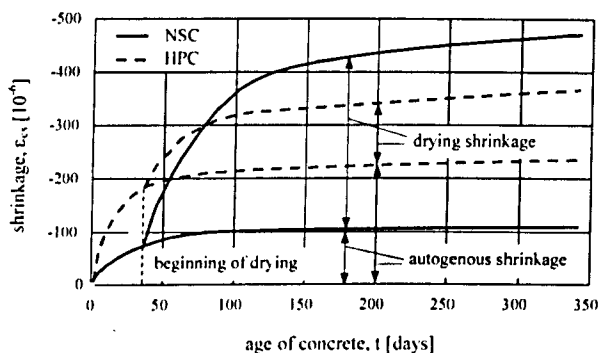


Figura 9 – Evolução da retracção autogénea e a retracção de secagem em betões de resistência normal (NSC) e betões de elevada resistência (HPC) (CEB-FIP)

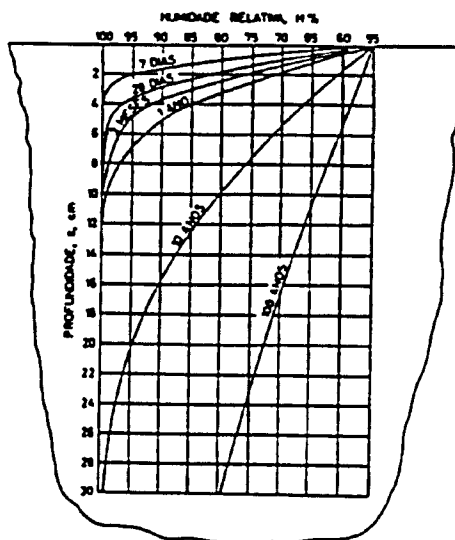


Figura 10 – Distribuição da humidade num maciço de betão semi-indefinido, secando pelo plano limite, num ambiente com HR=55% (Coutinho e Gonçalves, 1974)

Como observação, na realidade, a retracção e a fluência por si, não dependem da resistência à compressão do betão, mas sim de parâmetros relacionados com a microestrutura e composição do betão, como a relação água-cimento, grau de hidratação, propriedades dos agregados, ente outros.

### Modelo de retracção do EC2

O modelo de retracção apresentado pelo EC2, permite determinar a deformação por retracção em qualquer instante temporal,  $t$ , a partir de um dado instante em que se considera ter iniciado o fenómeno de retracção (após presa), a partir da seguinte expressão:

$$\epsilon_{cs}(t-t_s) = \epsilon_{cs0} \cdot \beta_s(t-t_s) \quad (38)$$

- $\epsilon_{cs0}$  - Coeficiente de retracção nominal, que assume o valor final da extensão de retracção
- $\beta_s(t-t_s)$  - Coeficiente que traduz a evolução no tempo da deformação por retracção
- $t$  - Instante em análise
- $t_s$  - Instante em que se inicia o fenómeno de retracção

O **coeficiente de retracção nominal**, por sua vez, é definido a partir da seguinte expressão:

$$\epsilon_{cs0} = \epsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{RH,T} \quad (39)$$

- $\epsilon_s(f_{cm})$  - Coeficiente que traduz o tipo de cimento e o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão

$$\epsilon_s(f_{cm}) = [160 + \beta_{sc} \cdot (90 - f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (40)$$

- $\beta_{sc}$  - Coeficiente dependente do tipo de cimento

Tipo de cimento	S	N,R	RS
$\beta_{sc}$	4	5	8

- $\beta_{RH,T}$  - Coeficiente que contabiliza a influência da humidade relativa e temperatura

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \cdot \beta_{sT} \quad (41)$$

- $\beta_{RH}$  - Coeficiente que dependente da humidade (RH)

$$\begin{cases} \beta_{RH} = -1.55 \cdot \beta_{sRH} & \text{para } 40\% \leq RH < 99\% \\ \beta_{RH} = 0.25 & \text{para } RH \geq 99\% \end{cases} \quad (42)$$

$$\beta_{sRH} = 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \quad (43)$$

- $\beta_{sT}$  - Coeficiente que dependente da temperatura (T) e humidade relativa (RH)

$$\beta_{sT} = 1 + \left( \frac{8}{103 - RH} \right) \cdot \left( \frac{T - 20}{40} \right) \quad (44)$$

Por outro lado, o **coeficiente de retracção ao longo do tempo** é expresso por:

$$\beta_s(t-t_s) = \left( \frac{t-t_s}{\alpha_{sT}(T) + t-t_s} \right) \quad (45)$$

$$\alpha_{sT}(T) \quad \text{- Coeficiente que traduz a influência da temperatura na retracção}$$

$$\alpha_{sT}(t-t_s) = 0.035 \cdot h_0^2 \cdot e^{[-0.06 \cdot (T-20)]} \quad (46)$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} h_0 \quad \text{- Espessura equivalente (mm)} \\ T \quad \quad \text{- Temperatura} \end{array} \right. \\ t \quad \quad \text{- Instante em análise} \\ t_s \quad \quad \text{- Instante em que se inicia o fenómeno de retracção} \end{array} \quad (47)$$

### Deformação por variação da temperatura, $\epsilon_{cT}(t)$

Verifica-se, na maioria dos materiais, que a um aumento da temperatura, o volume de betão aumenta. A variação do comprimento,  $\Delta l$ , depende de:

- ✓ Comprimento inicial do elemento,  $l$
- ✓ Variação de temperatura registada,  $\Delta T$
- ✓ Coeficiente de dilatação térmico do betão,  $\alpha_{cT}$

Correspondendo desta forma, para variação de comprimento por unidade:

$$\epsilon_{cT} = \alpha_{cT} \cdot \Delta T \quad (48)$$

O coeficiente de dilatação térmico do betão depende dos coeficientes de dilatação térmico dos seus constituintes, visto que o betão é um material compósito. Logo, depende do coeficiente de dilatação térmico dos agregados,  $\alpha_{gT}$ , e do coeficiente de dilatação térmico da pasta de cimento hidratada,  $\alpha_{hpT}$ , bem como as fracções de volume de cada um,  $v_g$  e  $v_{hp}$ , bem como a humidade contida no betão. A partir destes, o coeficiente de dilatação térmico do betão pode ser estimado por:

$$\alpha_{cT} = \alpha_{gT} \cdot v_g + \alpha_{hpT} \cdot v_{hp} \quad (49)$$

O coeficiente de dilatação térmico da pasta de cimento hidratado,  $\alpha_{hpT}$ , depende essencialmente da humidade, que sensivelmente varia entre  $10 \times 10^{-6} /K$  para HR=100% e  $20 \times 10^{-6} /K$  para HR=70%.

O coeficiente de dilatação térmico do betão varia entre  $5.5 \times 10^{-6} /^\circ C$  e  $14 \times 10^{-6} /^\circ C$ .

A relação linear entre a extensão e a temperatura expressa na equação "46", é válida para gamas de temperatura entre os 0°C e os 60°C. Para temperaturas superiores, o coeficiente de dilatação térmico tende a aumentar com o aumento da temperatura.

## 1.8. CARACTERIZAÇÃO GERAL

O betão a ser utilizado, deve ter em conta a particularidade das estruturas pré-esforçadas possuírem zonas de ancoragem, nas quais se registam normalmente tensões elevadas (zonas de descontinuidade). Sendo assim, o betão a utilizar deve ser de uma boa classe de resistência, e de acordo com os regulamentos em vigor, no mínimo deverá ser da classe C25/30 (EC2 4.2.3.5.2). Para uma fase de dimensionamento, considera-se um betão pertencente à classe **C30/37**, que no entanto, deverá ser confirmado na altura da betonagem, através de ensaios de cubos de betão para determinação da sua real resistência.

De acordo com o Eurocódigo 2 (EC2), o betão utilizado possui as seguintes características:

Propriedades	Definição
Massa volúmica (Betão de peso normal)	$2000 < \rho < 2800 \text{ kg/m}^3$
Classe de resistência (a verificar posteriormente através de ensaios de cubos de betão)	<b>C30/37</b>
Tensão de rotura à compressão (valor característico aos 28 dias)	$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$
Tensão de rotura à tracção (valor característico aos 28 dias, valor médio, valor característico inferior 5%, valor característico superior 95%)	$f_{ctm} = 0.30 \cdot f_{ck}^{2/3} = 2.9 \text{ MPa}$ $f_{ctk 0.05} = 0.7 \cdot f_{ck} = 2.0 \text{ MPa} \quad *$ $f_{ctk 0.95} = 1.3 \cdot f_{ck} = 3.8 \text{ MPa}$
Módulo de elasticidade (valor médio aos 28 dias. Depende da classe do betão, inertes, composição do betão e condições ambientais)	$E_{cm} = 9.5 \cdot (f_{ck} + 8)^{1/3} = 32 \text{ MPa} \quad *$
Coefficiente de Poisson (valor para efeitos de cálculo)	$\nu = 0.2$
Coefficiente de dilatação térmica (valor para efeitos de cálculo)	$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{C}$

\* Na ausência de dados mais precisos

De salientar, que para efeitos de dimensionamento estrutural se despreza a resistência do betão à tracção.

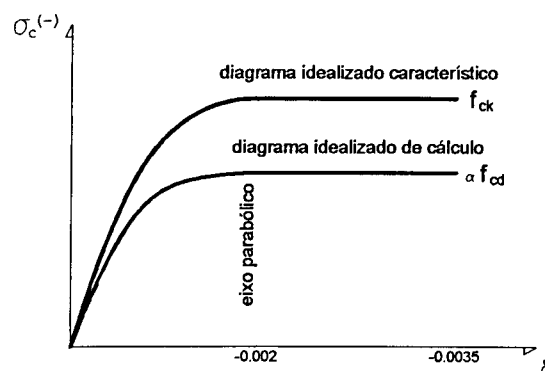


Figura 11 – Diagrama parábola-rectângulo de tensões-extensões do betão comprimido (EC2)

## 2. ARMADURAS DE RESISTÊNCIA NORMAL

As armaduras longitudinais e transversais (ordinárias) são constituídas por varões de aço de resistência normal.

As armaduras ordinárias devem ser caracterizadas segundo:

- Processo de fabrico
- Características geométricas
- Características mecânicas
- Características de aderência
- Soldabilidade (quando se preveja realização de soldaduras)

REBAP Artº 21

De acordo com a norma EN10080, as armaduras longitudinais e transversais são constituídas por varões nervurados que conferem assim alta aderência ao betão, com as seguintes características:

Propriedades	
Massa volúmica (valor médio)	$\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ *
Coefficiente de dilatação térmica (valor para efeitos de cálculo)	$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ *
Tipo (aço laminado a quente)	A500NR
Tensão de cedência (Valor característico)	$f_{yk}=500\text{MPa}$
Tensão de rotura (Valor característico)	$f_{tk}=550\text{MPa}$
Extensão após rotura (Valor característico)	$\varepsilon_{uk}=12\%$
Ductilidade	Alta ( $\varepsilon_{uk} > 5\%$ ; $(f_t/f_y)_k > 1.08$ )
Módulo de elasticidade (Valor médio)	200MPa

\* Na ausência de dados mais precisos

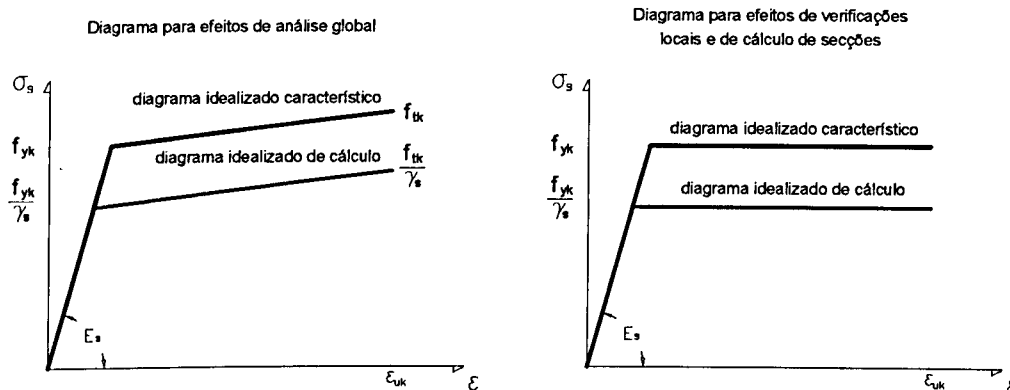


Figura 12 – Diagrama de tensões-extensões do aço para betão armado (EC2)  
(válido para temperaturas entre -20°C e +200°C)

### 3. ARMADURAS DE ALTA RESISTÊNCIA

As armaduras de pré-esforço devem ser caracterizadas segundo:

- Processo de fabrico
- Constituição (fios, cordões, varões)
- Propriedades mecânicas e de aderência

REBAP Artº 26

#### Propriedades

<b>Massa volúmica</b> (valor médio)	$\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ *
<b>Coefficiente de dilatação térmica</b> (valor para efeitos de cálculo)	$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ *
<b>Classe (<math>f_{p0.1k}</math>)</b> (endurecidos a frio)	Ap1676MPa
<b>Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1%</b> (Dado do fabricante)	$f_{p0.1k}=1676\text{MPa}$
<b>Tensão de rotura</b> (Dado do fabricante)	$f_{puk}=1862\text{MPa}$
<b>Extensão após rotura</b> (Valor característico)	$\epsilon_{uk}=3.5\%$
<b>Ductilidade</b> (armadura pós-tensionada)	Alta
<b>Módulo de elasticidade</b> (Dado do fabricante)	195MPa

\* Na ausência de dados mais precisos

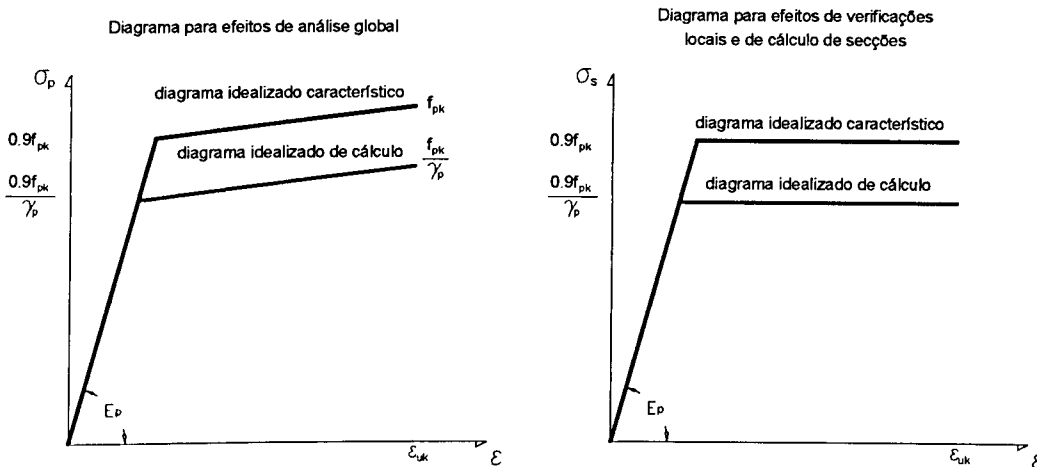


Figura 13 – Diagrama de tensões-extensões do aço de pré-esforço (EC2)  
(válido para temperaturas entre -20°C e +200°C)



Os aços de elevada resistência sofrem do fenómeno de relaxação, que se define como sendo a perda de tensão que se regista num dado elemento sob uma deformação constante. No caso dos aços utilizados em pré-esforço, essa perda de tensão,  $\Delta\sigma_p$ , é definida em percentagem da tensão inicial,  $\sigma_{p0}$ .

Factores que influenciam as perdas de tensão nos aços de elevada resistência usados em pré-esforço	
✓	Características do aço
✓	Nível de tensão inicial (quanto mais elevada, maiores são as perdas)
✓	Temperatura (quanto mais elevada, maiores são as perdas)

A caracterização da relaxação nos aços de elevada resistência é efectuado através de ensaios normalizados às 1000 horas e a uma temperatura de 20°C, para valores de tensão inicial iguais a 60%, 70%, e 80% da tensão característica de rotura,  $f_{pk}$ . Constatou-se por ensaios, que para tensões inferiores a 50% da tensão característica de rotura, a ocorrência do fenómeno de relaxação é desprezável.

Normalmente, a relaxação é definida em função do parâmetro de relaxação,  $\rho_t$ .

$$\rho_t = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t)}{\sigma_{p0}} \quad (50)$$

$\Delta\sigma_{pr}(t)$	- Perda de tensão por relaxação durante o período de tempo t
$\sigma_{p0}$	- Tensão inicial instalada

Como se referiu, assume particular interesse para um período de tempo de 100 horas. Estes valores devem ser fornecidos pelo fabricante, que no caso de omissão, podem ser utilizados valores de referência propostos para projecto por vários regulamentos (REBAP, MC-90, EC2) No caso do EC2, os aços de pré-esforço são classificados quanto à relaxação em três classes:

Tipo de aço	Classe
Fios e cordões de relaxação normal	1
Fios e cordões com características de relaxação melhorada	2
Varões	3

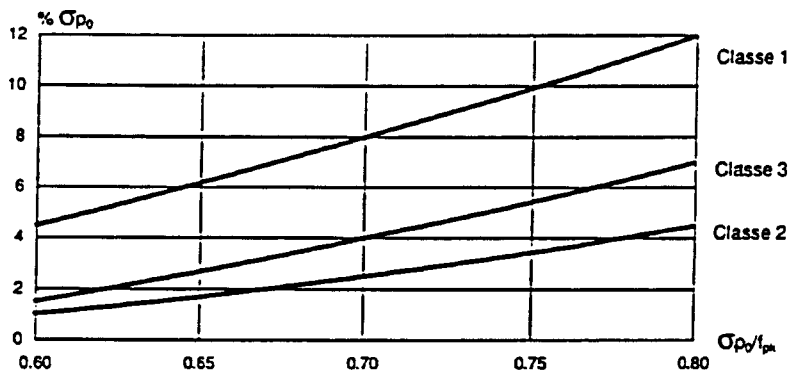


Figura 14 – Perdas de tensão devidas à relaxação às 1000 horas a 20°C (EC2)

As curvas apresentadas na figura 13 podem também ser traduzidas analiticamente pelas seguintes expressões:

$$\text{CLASSE 1:} \quad P_{1000h} = 25 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right)^2 + 2.5 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right) - 6 \quad (51)$$

$$\text{CLASSE 2} \quad P_{1000h} = 25 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right)^2 - 17.5 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right) + 2.5 \quad (52)$$

$$\text{CLASSE 3:} \quad P_{1000h} = 25 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right)^2 - 7.5 \cdot \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{pk}} \right) - 3 \quad (53)$$

A evolução das perdas de tensão devidas à relaxação entre 1 hora e as 1000 horas é definida pelo EC2 de acordo com o seguinte quadro:

Tempo (horas)	1	5	20	100	200	500	1000
$\rho/\rho_{1000}$ (%)	15	25	35	55	65	85	100

Quanto à relaxação que ocorre após as 1000 horas, o EC2 refere:

“Os valores das perdas a longo prazo podem ser consideradas como sendo três vezes as perdas por relaxação às 1000 horas”

Sendo que o MC-90 sugere que a perda de tensão por relaxação até tempo infinito pode ser extrapolada pela seguinte expressão:

$$P_t = P_{1000h} \cdot \left( \frac{t}{1000} \right)^k \quad (54)$$

k = 0.12 para aços da classe 1

k = 0.19 para aços da classe 2

Assim sendo, a evolução ao longo do tempo do valor da tensão numa armadura de pré-esforço sujeita a uma extensão constante,  $\varepsilon_{p0}$ , é traduzida por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p &= \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pr}(t) && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sigma_p(t) &= \sigma_{p0} - \rho_t \cdot \sigma_{p0} && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sigma_p(t) &= \sigma_{p0} \cdot (1 - \rho_t) && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sigma_p(t) &= \sigma_{p0} \cdot \left[ 1 - \rho_{1000h} \cdot \left( \frac{t}{1000} \right)^k \right] && (55)
 \end{aligned}$$

## II. PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

1. GENERALIDADES	II.1
2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	II.1
2.1. ELEMENTO DE BARRA ISOPARAMÉTRICO DE DOIS NÓS	II.2
2.2. ELEMENTO DE VIGA DE DOIS NÓS DE HERMITE	II.4
2.3. ELEMENTO DE BARRA ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS	II.6
2.4. ELEMENTO DE VIGA ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS DE TIMOSHENKO	II.7
2.5. CALCULO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES	II.9
3. INTRODUÇÃO DE DADOS NO PROGRAMA “FEMPOR”	II.9
4. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	II.11
5. ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL	II.11
5.1. GENERALIDADES	II.11
5.2. ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL DE PÓRTICOS PLANOS E VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO	II.12
A. COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS	II.12
B. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	II.13
C. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA SECÇÃO DE BETÃO ARMADO	II.14
D. FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES AO ESTADO DE TENSÃO	II.16
6. INTERACÇÃO SOLO-ESTRUTURA	II.16
7. CONSTRUÇÃO POR FASES	II.16

## II. PROGRAMA DE CALCULO AUTOMÁTICO

### 1. GENERALIDADES

O programa de calculo automático designado por "FEMPOR", surge devido à necessidade crescente de se aferir com rigor a segurança aos estados limites de resistência bem como aos estados limites de serviço, que podem ocorrer nas várias fases da vida de uma estrutura de betão armado, de forma a obter estruturas cada vez mais económicas e seguras, através de uma interpretação cada vez mais realista do comportamento deste tipo de estruturas.

Deste modo, o programa está preparado para análises estruturais, aos estados limites últimos de resistência e para a verificação dos estados limites de utilização, de estruturas planas de betão armado.

A optimização da geometria e utilização dos materiais constituintes da estrutura (em particular o betão e o aço) obriga a que o seu comportamento seja simulado por um modelo o mais próximo possível da realidade – análise não-linear material.

O programa "FEMPOR" (escrito em linguagem de programação "Fortran 77") baseia-se no método dos elementos finitos, utilizando elementos de dois nós de formulação Hermitiana e elementos de três nós de formulação Lagrangeana; é ainda considerada a possibilidade da existência de uma relação não linear entre deslocamentos e deformações – Análise não linear geométrica, assim como é considerada a análise não-linear material.

Genericamente o programa está estruturado para fazer a análise estrutural até à rotura de pórticos planos de betão armado, tomando em conta a não linearidade material e geométrica. Tem ainda a possibilidade de analisar a segurança quando a construção é feita por fases, e a avaliação do efeito da rigidez do solo de fundação nas estruturas.

### 2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Como referido, o programa "FEMPOR" baseia-se no Método dos Elementos Finitos, na sua formulação de deslocamentos, ou seja,

O campo de deslocamentos do elemento é aproximado por:

$$\bar{\mathbf{f}}^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}_i \quad (1)$$

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_i(x) \text{ -- funções interpoladoras (funções de forma)} \\ \mathbf{c}_i \text{ -- incógnitas (deslocamentos)} \end{array} \right.$$

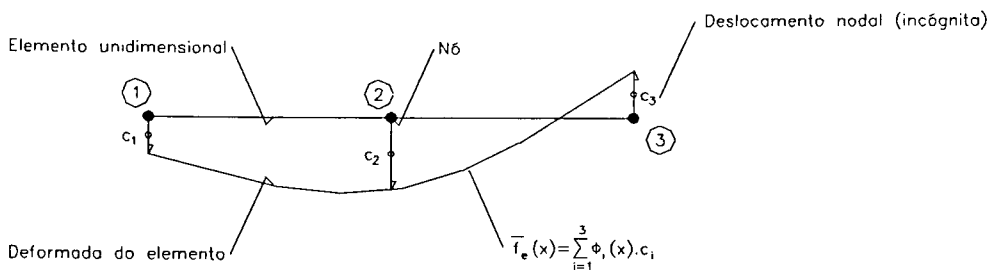


Figura 1 – Aproximação do campo de deslocamentos de um elemento finito de 3 nós

Os elementos usados no método são elementos de barra de dois nós de Hermite, e elementos de viga de três nós de Timoshenko.

Apresenta-se em seguida, uma breve referência ao método usado e sua formulação, numa óptica de introdução, sem demasiados detalhes (não é o âmbito do presente trabalho).

### 2.1. ELEMENTO DE BARRA ISOPARAMÉTRICO DE DOIS NÓS

Num elemento isoparamétrico a geometria do elemento é definida utilizando as coordenadas dos pontos nodais e funções de forma utilizadas na aproximação das incógnitas, no caso corrente o campo de deslocamentos.

De forma generalizada, a aproximação do campo de deslocamentos é:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\xi) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \\ \mathbf{z}_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Onde as funções de forma,  $N_i$ , são definidas num referencial local, em que cada coordenada varia no intervalo  $[-1, 1]$ .

Deste modo, no elemento de dois nós unidimensional, o campo de deslocamentos é aproximado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{U}(\xi) = \mathbf{N}_1(\xi) \mathbf{u}_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \mathbf{u}_2 \quad (3)$$

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{-- função de forma para deslocamento unitário no nó 1} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left| \begin{array}{l} N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad \text{-- função de forma para deslocamento unitário no nó 2} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left| \begin{array}{l} u_i \quad \text{-- deslocamento do nó } i \text{ (deslocamento nodal)} \end{array} \right.$$

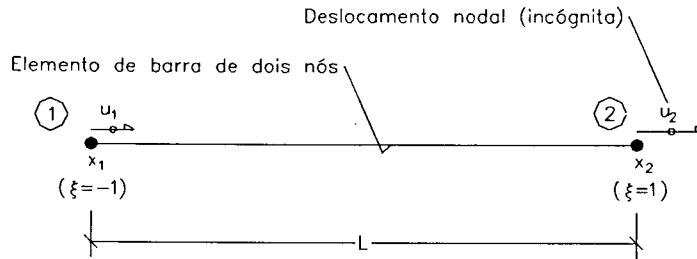


Figura 2 – Elemento de barra isoparamétrico de dois nós

A relação entre as coordenadas nos dois sistemas de eixos é estabelecida utilizando as mesmas funções interpeladoras, que relaciona as coordenadas geométricas com as coordenadas naturais dos dois nós do elemento de barra.

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{N}_1(\xi) \mathbf{x}_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \mathbf{x}_2 \quad (6)$$

A matriz de rigidez traduz a relação existente entre a solitação e os deslocamentos verificados numa dada estrutura.

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{k}] \{\mathbf{a}\} \quad (7)$$

Os elementos de matriz de rigidez são obtidos através da expressão:

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T \cdot \mathbf{EA} \cdot [\mathbf{B}] dx \quad (8)$$

Que em coordenadas naturais se traduz pela seguinte equação equivalente à anterior:

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T \cdot \mathbf{EA} \cdot [\mathbf{B}] \frac{L}{2} d\xi \quad (9)$$

Sendo  $[\mathbf{B}]$  a matriz de deformações,  $E$  o módulo de elasticidade do elemento,  $A$  a sua secção transversal e  $L$  o seu comprimento.

A matriz de deformações é expressa por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{d\xi}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (10, 11)$$

Em que  $d\xi/dx$  é a função derivada da relação entre o sistema de coordenadas cartesianas com o sistema de coordenadas naturais, anteriormente apresentada.

Resultando para um elemento de barra de dois nós, para matriz de rigidez,

$$[\mathbf{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

## 2.2. ELEMENTO DE VIGA DE DOIS NÓS DE HERMITE

Nestes elementos não são consideradas as deformações por corte. A deformação à flexão de peças lineares é determinada tendo em conta as hipóteses de Navier – Bernoulli,

- ✓ As secções normais ao eixo antes da deformação mantêm-se planas e perpendiculares ao eixo após a deformação
- ✓ As tensões normais ao eixo da viga são desprezáveis

Quanto ao campo de deslocamentos, os elementos Hermitianos impõem a continuidade entre elementos da variável principal, e das suas primeiras derivadas, assim a aplicação a elementos de viga para a formulação dos deslocamentos implica a compatibilização dos deslocamentos verticais e da rotação entre elementos.

Deste modo, ao aplicar o método dos elementos finitos, são normalmente utilizados os deslocamentos e as suas derivadas como sendo as incógnitas da função de aproximação dos deslocamentos.

Para a aproximação do campo de deslocamentos temos:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}'_i(\mathbf{x}) \cdot \left( \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{x}} \right)_i \quad (13)$$

$$\left| \begin{array}{l} N_i(x); N'_i(x) \quad - \text{funções interpoladoras} \\ w_i; \theta_i \quad - \text{deslocamento vertical e rotação do nó } i \text{ (respectivamente)} \end{array} \right.$$

As funções interpoladoras são dadas por:

$$N_1 = 1 - \frac{3}{L^2}x + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{3}{L^2}x - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (15)$$

$$N'_1 = x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (16)$$

$$N'_2 = -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (17)$$



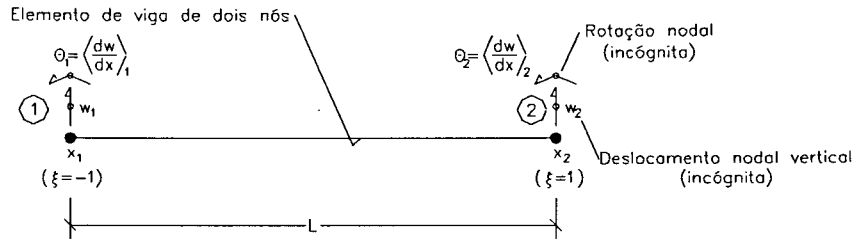


Figura 3 – Elemento de viga de dois nós de Hermite

A matriz de rigidez do elemento de viga de dois nós de Hermite é expressa por,

$$[K] = \int_0^L [B]^T \cdot (EI) \cdot [B] dx \quad (18)$$

Sendo [B] a matriz de deformações, “EI” a rigidez do elemento à flexão, e L o comprimento do elemento.

A matriz de deformações é expressa por,

$$[B] = - \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (19)$$

$$\Rightarrow [B] = - \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x & -\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2}x & \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x & -\frac{2}{L} + \frac{6}{L^2}x \end{bmatrix} \quad (20)$$

Resultando deste modo para matriz de rigidez de um elemento de viga de dois nós de Hermite,

$$[K] = EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} \\ & & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} \\ \text{sim.} & & & \frac{12}{L^3} \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 2.3. ELEMENTO DE BARRA ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS

Tendo em atenção o referido no ponto 1. para os elementos de dois nós, temos apenas que fazer pequenas modificações para adaptar a referida teoria aos elementos de três nós.

Assim estes elementos vão ficar definidos por três nós ( $\xi = -1$ ;  $\xi = 0$ ;  $\xi = +1$ ), com as respectivas funções interpoladoras.

A aproximação do campo de deslocamentos é traduzida por:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}_1(\xi) \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{N}_3(\xi) \cdot \mathbf{u}_3 \quad (22)$$

$N_i(x)$  – funções interpoladoras  
 $u_i$  – deslocamento do nó  $i$

As funções interpoladoras são dadas por:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi \cdot (\xi - 1) \quad (23)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi \cdot (\xi + 1) \quad (24)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi \cdot (\xi + 1) \quad (25)$$

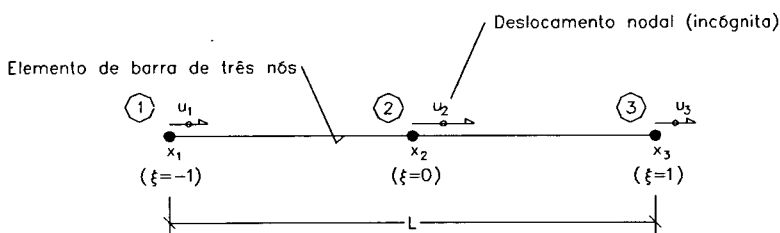


Figura 4 – Elemento de barra isoparamétrico de três nós

A matriz de rigidez é expressa por:

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T \cdot \mathbf{EA} \cdot [\mathbf{B}] \frac{L}{2} d\xi \quad (26)$$

Sendo  $[\mathbf{B}]$  a matriz de deformações,  $E$  o módulo de elasticidade do elemento, e  $L$  o seu comprimento.

A matriz de deformações é definida por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{d\xi}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{B}] = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} & -2\xi & \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (27, 28)$$

Resultando deste modo para matriz de rigidez de um elemento de barra de três nós:

$$[\mathbf{k}] = \frac{\mathbf{EA}}{6L} \begin{bmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-16} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-16} & \mathbf{32} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-16} & \mathbf{14} \end{bmatrix} \quad (29)$$

## 2.4. ELEMENTO DE VIGA ISOPARAMÉTRICO DE TRÊS NÓS DE TIMOSHENKO

Ao contrário dos elementos de Hermite em que se considerava a hipótese de a normal ao eixo da peça linear antes da deformação continuar rectilínea e perpendicular a esse eixo após a deformação, na análise de vigas espessas esta hipótese não é válida.

Tendo em conta a deformação provocada pelo esforço transversal, a teoria de Timoshenko baseia-se nas seguintes hipóteses:

- ✓ As secções normais ao eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas mas não necessariamente perpendiculares ao eixo após a deformação.
- ✓ As tensões normais ao eixo da viga são desprezáveis.

Aproximação do campo de deslocamentos:

Para estes elementos o campo de deslocamentos, considerando as rotações independentes dos deslocamentos verticais, é definido em qualquer ponto do elemento por:

$$\omega(\xi) = \mathbf{N}_1(\xi) \omega_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \omega_2 + \mathbf{N}_3(\xi) \omega_3 \quad (30)$$

$$\theta(\xi) = \mathbf{N}_1(\xi) \theta_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \theta_2 + \mathbf{N}_3(\xi) \theta_3 \quad (31)$$

$\mathbf{N}_i(\xi)$ - funções interpoladoras
$\omega(\xi)$ - deslocamento vertical em qualquer ponto $\xi$
$\theta(\xi)$ - rotação da secção em qualquer ponto $\xi$
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - deslocamentos verticais dos pontos nodais.
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ - rotações dos pontos nodais

A relação entre os sistemas de coordenadas cartesianas e natural pode ser obtida por interpolação da geometria com as mesmas funções de forma utilizadas para a aproximação do campo de deslocamentos, ou seja,

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_1(\xi) \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{N}_2(\xi) \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{N}_3(\xi) \cdot \mathbf{x}_3 \quad (32)$$

As funções de forma são,

$$\mathbf{N}_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi \cdot (\xi - 1) \quad (33)$$

$$\mathbf{N}_2(\xi) = (1 + \xi) \cdot (1 - \xi) \quad (34)$$

$$\mathbf{N}_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi \cdot (\xi + 1) \quad (35)$$

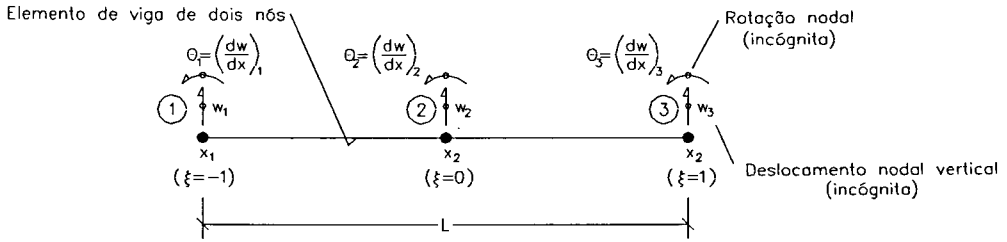


Figura 5 – Elemento de viga isoparamétrico de três nós de Timoshenko

A matriz de rigidez do elemento resulta da sobreposição de duas matrizes em que uma é a rigidez ao corte e a outra a rigidez à flexão.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_r] + [\mathbf{K}_c] \quad (36)$$

Onde,

$$[\mathbf{K}_r] = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_f]^T (\mathbf{EI}) [\mathbf{B}_f] \frac{L}{2} d\xi \quad [\mathbf{K}_c] = \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}_c]^T (\mathbf{GA}^*) [\mathbf{B}_c] \frac{L}{2} d\xi \quad (37, 38)$$

Sendo  $[\mathbf{B}_c]$  a matriz linha de deformações devido ao corte e  $[\mathbf{B}_f]$  a matriz linha de deformações devido a flexão, e "EI" a rigidez à flexão e "GA\*" a rigidez ao corte.

As matrizes de deformação são definidas por:

$$[\mathbf{B}_f] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} & 0 & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} & 0 & \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Se o nó 2 for o ponto médio do elemento resulta,

$$[\mathbf{B}_f] = \begin{bmatrix} 0 & \xi - \frac{1}{2} & 0 & -2\xi & 0 & \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$[\mathbf{B}_c] = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} & -N_1(\xi) & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} & -N_2(\xi) & \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} & -N_3(\xi) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Se o nó 2 for o ponto médio do elemento resulta,

$$[\mathbf{B}_c] = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} & \frac{L}{4}(\xi^2 - \xi) & \frac{L}{2}(1 - \xi^2) & \xi + \frac{1}{2} & \frac{L}{4}(\xi^2 + \xi) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Que vai resultar para a matriz de rigidez do elemento de vida de três nós de Timoshenko:

$$[K] = [K_f] + [K_c] = \frac{EI}{3L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 16 & 0 & -8 \\ \text{sim.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 7 \end{bmatrix} + \frac{GA^*}{9L} \cdot \begin{bmatrix} 21 & -\frac{9}{2}L & -24 & -6L & 3 & \frac{3}{2}L \\ & L^2 & 6L & L^2 & -\frac{3}{2}L & -\frac{L^2}{2} \\ & & 48 & 0 & -24 & -6L \\ & & & 4L^2 & 6L & L^2 \\ \text{sim.} & & & & 21 & \frac{9}{2}L \\ & & & & & L^2 \end{bmatrix}$$

O elemento de viga de três nós de Timoshenko tem um comportamento semelhante ao da viga teórica se utilizar uma integração reduzida - utilizando apenas dois pontos de Gauss . Por outro lado têm um comportamento demasiadamente rígido se efectuar uma integração completa utilizando três pontos de Gauss.

## 2.5. CALCULO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES

Finalmente no que respeita à determinação das deformações e tensões, estas são calculadas nos pontos de Gauss de um dado elemento, e são obtidas pelas expressões:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{T}]^T \cdot \{\mathbf{a}\} \quad (43)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \cdot ([\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{T}]^T) \cdot \{\mathbf{a}\} \quad (44)$$

Em que T é a matriz de transformação – transformação de coordenadas do sistema local, para o sistema de coordenadas global, e {a} o vector de deslocamentos nodais do elemento.

## 3. INTRODUÇÃO DE DADOS NO PROGRAMA FEMPOR

Funcionamento e entrada de dados no programa Fempor:

1. Título
2. Dados Gerais:
  - ✓ IANLG – análise não linear geométrica
  - ✓ IANLM – análise não linear material
  - ✓ IVPRO – edita um 4º gráfico
  - ✓ NFASE – análise por fases da estrutura

- ✓ ISOLO – interacção com o solo

Todos estes parâmetros tomam o valor 1 para estarem activos e o valor 0 para desactivar

- ✓ NDG2D – nº de gráficos 2d (0,1,2,3)
- ✓ NTPIX – coloração das tensões no betão
- ✓ NNODE – tipo de elemento (nº de nós por elemento)
- ✓ NALGO – tipo de algoritmo a utilizar
- ✓ NGAUS – nº de pontos de Gauss
- ✓ NREST – Restart

### 3. Dados da estrutura:

- ✓ NAPOI – nº de nós da estrutura
- ✓ NALEM – nº de elementos
- ✓ NAFIX / NRSOL – nº de apoios
- ✓ NAMAT – nº de materiais
- ✓ NCARG – nº de solicitações
- ✓ NOUTP – tipo de saída de resultados
- ✓ TOLER – tolerância para aplicação do método
- ✓ Coordenadas dos nós:  
IPOIN / COORD X / COORD Y
- ✓ Ligações ao exterior:  
NOFIX / IFFIXS / FIXEDS
- ✓ Características do aço e betão:
- ✓ Secções tipo:  
MAT / BASE / ALTURA / A1 / A2 / d1 / d2  
A<sub>i</sub> - área da armadura inferior e superior e respectivas distâncias à face inferior e superior.
- ✓ Identificação dos nós e do material dos elementos:  
IELEM / LNODS / MATERIAL
- ✓ Solicitação  
NDIST / IPRO / NNLOD / ISAIF  
IELEM / CARGA  
IPOIN / MOMENTO / FORCAY /FORCAX
- ✓ Definição dos factores de carga  
NINCS / NITER
- ✓ Numero de incrementos com este peso
- ✓ Definição das colorações e em que incrementos
- ✓ Saída de resultados para o gráfico.

## **4. ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA**

A instabilidade de uma estrutura deve-se a vários factores como por exemplo: geometria da mesma, condições de apoio, solicitação aplicada, propriedades elásticas do material. Para uma análise mais rigorosa do comportamento de uma estrutura (avaliação da deformada e da capacidade de carga) é necessário considerar as alterações da estrutura isto é dos efeitos de segunda ordem. Na análise não linear geométrica é usada uma formulação Lagrangeana total para a determinação das relações (não lineares) entre deformações e deslocamentos. De modo a aumentar a precisão do método usado para determinar a evolução do campo de tensões e deformações aplica-se a solicitação por incrementos. Estes incrementos de carga deviam ser infinitesimais, ora tal é praticamente inexecutável, daí a utilização de métodos incrementais e iterativos.

Para uma melhor compreensão de como o programa está estruturado quanto aos efeitos da não linearidade geométrica remete-se para a tese de mestrado "Análise não linear de estruturas porticadas planas de betão" seu autor, Paulo Jorge de Sousa Cruz.

## **5. ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL**

### **5.1 GENERALIDADES**

Na construção civil e em particular nas estruturas, é usado um material compósito – betão armado –, visto que o betão tem pequena resistência à tracção, bastante inferior à sua resistência à compressão, assim sendo usamos o betão para resistir aos esforços de compressão, e o aço para resistir aos esforços de tracção.

A baixa resistência à tracção do betão faz com que ele fendilhe para pequenas cargas, provocando um decréscimo da rigidez do elemento estrutural.

A fendilhação do betão quando traccionado, o facto de tanto o betão como o aço terem um comportamento elastico-plástico complexo, os efeitos diferidos no tempo (não considerados no programa), e a degradação das tensões de contacto entre o betão e a armadura (aderência), são os principais responsáveis pelo comportamento não linear material das estruturas de betão armado.

### **5.2. ANALISE NÃO – LINEAR MATERIAL DE PÓRTICOS PLANOS E VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO**

#### **A. COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS**

Para o aço é adoptado tanto em tracção como em compressão, um diagrama trilinear de tensões, como indicado na figura 6.

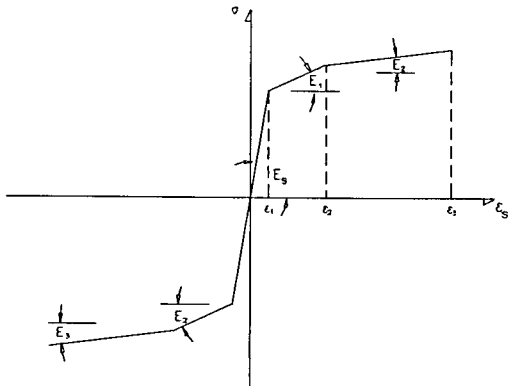


Figura 6 – Relação constitutiva do aço

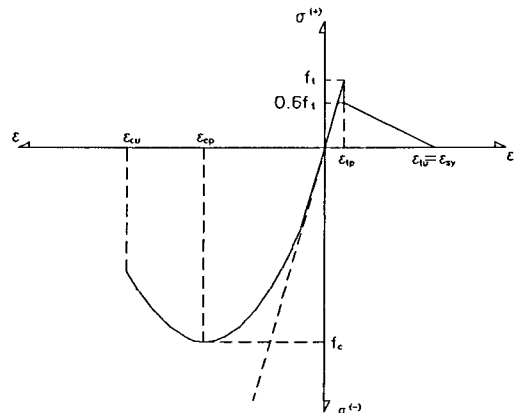


Figura 7 – Relação constitutiva do betão

O programa de calculo considera um diagrama de comportamento do betão como o apresentado na figura 7, definido por:

- ✓ Para o betão comprimido é considerada uma lei elástico – plástica
- ✓ Para o betão em tracção é adoptado um diagrama elástico até à fendilhação, e um diagrama de retenção das tensões de tracção após a fendilhação

As equações são:

$$\text{Betão comprimido: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = \frac{E_c \epsilon_c}{1 + \left( \frac{E_c \epsilon_{cp}}{f_c} - 2 \right) * \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cp}} \right) + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cp}} \right)^2} \quad \Leftarrow \quad 0 < \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\text{Betão traccionado: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = E_c \cdot \epsilon_c \quad \Leftarrow \quad \epsilon_c \leq \epsilon_{tp} \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = 0.6 \cdot f_t \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_c - \epsilon_{tp}}{\epsilon_{sy} - \epsilon_{tp}} \right) \quad \Leftarrow \quad \epsilon_{tp} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{tu} \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = 0 \quad \Leftarrow \quad \epsilon_c \geq \epsilon_{tu} \end{array} \right. \quad (48)$$

Observação: a extensão última do betão traccionado é considerada igual ao valor da extensão de cedência do aço da amadura.

## B. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O programa de cálculo automático FEMPOR recorre a uma técnica incremental e iterativa, com resolução das equações de equilíbrio e satisfação simultânea das equações de compatibilidade.



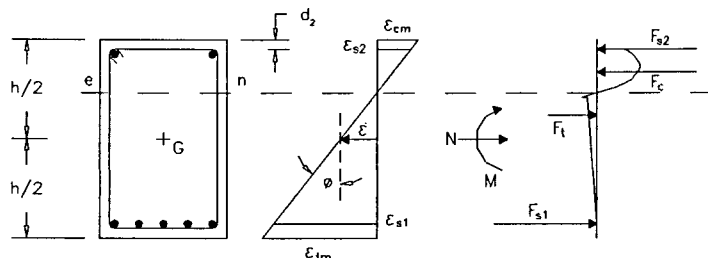


Figura 8 – Condições de equilíbrio da secção

Identificando as seguintes fases:

1. Fase I:

O momento de início de fendilhação ( $M_{cr}$  – momento crítico) é determinado impondo que a tensão instalada na secção mais traccionada seja a tensão resistente de tracção do betão  $f_{ctm}$ .

2. Fase II:

O momento de cedência ( $M_y$ ) é determinado com a hipótese de a armadura traccionada estar no início da plastificação.

3. Fase III:

O momento último ( $M_u$ ) ou máximo momento possível de aplicar à secção, é determinado impondo o equilíbrio das forças que se geram na armadura e no betão.

Assim:

$$\text{Equilíbrio de translação} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_c + F_{s1} + F_{s2} = N \quad \leftarrow \text{flexão composta} \\ F_c + F_{s1} + F_{s2} = N \quad \leftarrow \text{flexão simples} \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\text{Equilíbrio de rotação} \quad \left\{ M = F_{s1} * \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) - F_{s2} * \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + F_c * \left( \frac{h}{2} - z \right) \right. \quad (51)$$

- F<sub>s1</sub> – força na armadura inferior
- F<sub>s2</sub> – força na armadura superior
- F<sub>c</sub> – resultante dos esforços, de compressão e de tracção no betão
- b – base da secção
- h – altura da secção

Para a implementação no programa de cálculo, recorrendo a uma técnica incremental e iterativa, começa-se por impor a extensão última à armadura traccionada, de seguida calcula-se por tentativas a profundidade do eixo neutro, depois o momento último e a respectiva curvatura ( $1/M_u$ ). Por fim impõem-se uma extensão ligeiramente inferior à última e calcula-se  $M_u^2$ , efectuando um número pré-definido de iterações obtém-se  $M_u$  como sendo o maior dos  $M_u^i$ . O processo para quando se verificarem as equações de equilíbrio.

### C. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA SECÇÃO DE BETÃO ARMADO

Na análise não-linear de pórticos planos de betão armado, a rigidez à flexão e a rigidez axial de cada elemento são função do estado de deformação corrente e das cargas aplicadas.

Conhecido o vector deformação e admitindo a hipótese de distribuição linear de extensões na secção transversal, a matriz de elasticidade será obtida pelo método das diferenças finitas, para qualquer combinação de momento axial e momento flector, após a integração do diagrama de tensões correspondentes, o que permite o calculo das respectivas tensões.

Em síntese o procedimento usado no programa de cálculo Fempor, na iteração  $i$  de qualquer incremento, é:

- ✓ Cálculo do acréscimo de deformação  $\Delta\varepsilon^i$
- ✓ Cálculo do incremento elástico de tensão, sem obedecer ao critério de cedência  
 $\Delta\sigma_e^i = E \cdot \Delta\varepsilon^i$
- ✓ Cálculo da tensão total acumulada  $\sigma_e^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_e^i$
- ✓ Analisa o estado de tensão em função da relação do comportamento.
- ✓ Acumula a tensão corrente  $\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_e^i$
- ✓ Iniciada a plastificação, calcula a tensão corrente de acordo com a teoria elástico - plástico.  $\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta\sigma_{ep}^i + (1-R) \cdot \Delta\sigma_e^i$
- ✓ Se a armadura estiver em cedência calcula a deformação plástica total do elemento:

$$\varepsilon_p^i = \varepsilon_p^{i-1} + \frac{R \cdot \Delta\varepsilon^i}{1 + \frac{H'}{E}}$$

- ✓ Actualiza a tensão de cedência:  $\sigma_y = \sigma_y + H' \Delta\varepsilon_p^i$

Matriz de elasticidade tangente da secção

Para definir os termos da matriz de elasticidade ( $D_T$ ) numa iteração  $i$  e num dado ponto, é necessário calcular o vector das deformações e as tensões nesse ponto.

Vector deformação:

$$\begin{Bmatrix} \chi_i \\ \varepsilon_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_{i-1} \\ \varepsilon_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta\chi \\ \Delta\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Vector das tensões:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ N_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{i-1} \\ N_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta M \\ \Delta N \end{Bmatrix} \quad (53)$$

Podemos relacionar os dois vectores através da matriz de elasticidade:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M \\ \Delta N \end{Bmatrix} = [D_T] * \begin{Bmatrix} \Delta \chi \\ \Delta \epsilon \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Os elementos da matriz de elasticidade tangente da secção ( $D_T$ ) são avaliados numericamente pelo método das diferenças finitas. Considera-se para curvatura e extensão, variações incrementais muito pequenas ( $\Delta \epsilon = \Delta \chi \approx 10^{-10}$ ), calculando pelas equações de equilíbrio os correspondentes momentos e esforços axiais, chega-se à expressão geral para a matriz de elasticidade:

$$[D_T] = \begin{bmatrix} \frac{M_2 - M_1}{\Delta \chi} & \frac{M_4 - M_3}{\Delta \epsilon} \\ \frac{N_2 - N_1}{\Delta \chi} & \frac{N_4 - N_3}{\Delta \epsilon} \end{bmatrix} \quad (55)$$

A relação incremental entre esforços instalados e deformação da secção (matriz de elasticidade) é analisada directamente para qualquer combinação de momento flector e esforço axial.

#### D. FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES AO ESTADO DE TENSÃO

Em qualquer configuração de equilíbrio as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado são dadas por:

$$\{f_i\} = \int_{-1}^1 [B]^T \{\sigma\} \frac{L}{2} d\epsilon \quad (56)$$

$B$  – matriz deformação (já definida anteriormente)

$\sigma$  – vector das tensões em cada ponto de Gauss é calculado pelas equações de

#### 6. INTERACÇÃO SOLO – ESTRUTURA

O objectivo deste item é essencialmente de prever de uma forma simplificada (não considerando a não linearidade do comportamento do solo de fundação) a importância da contribuição da rigidez do solo de fundação na análise de uma estrutura.

Procedimento usado:

- ✓ Obtenção prévia da matriz de rigidez do solo de fundação
- ✓ Depois de condensada aos graus de liberdade que estão ligados ao pórtico, a matriz de rigidez é lida pelo programa de cálculo e assimilada à matriz global do pórtico.

- ✓ As forças de reacção do solo sobre os nós dos elementos de fundação do pórtico são obtidos multiplicando a matriz de rigidez condensada pelos deslocamentos dos respectivos nós.

## 7. CONSTRUÇÃO POR FASES

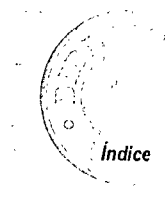
Normalmente os edifícios de vários pisos são construídos por fases, isto é andar por andar, assim sendo ao construir um piso superior, este vai aumentar os esforços, assim como vai provocar uma deformação, nos pilares do piso inferior. Em suma os pórticos de uma estrutura vão ficar sujeitos a esforços que variam ao longo da construção do edifício.

O programa de cálculo, permite analisar este fenómeno, através de uma compensação da altura dos pilares dos pisos superiores, devido ás deformações sofridas por estes de modo a obter-se novas coordenadas dos nós.

Observação: No presente trabalho, não é explorado os pontos 6 e 7.

### **III. MODELO ESTRUTURAL, ESFORÇOS E ACÇÕES**

<b>1. GENERALIDADES</b>	<b>III.1</b>
<b>2. MODELO ESTRUTURAL E ACÇÕES</b>	<b>III.1</b>
<b>3. ESFORÇOS</b>	<b>III.2</b>
<b>3.1. ACÇÃO DO PESO PRÓPRIO</b>	<b>III.2</b>
<b>3.2. ACÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO</b>	<b>III.3</b>
<b>3.3. ACÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE</b>	<b>III.4</b>



### III. MODELO ESTRUTURAL, ACÇÕES E ESFORÇOS

#### 1. GENERALIDADES

A concepção do modelo de viga foi efectuada com base nos seguintes aspectos:

- ✓ Restrições ao nível de **recursos disponíveis**
- ✓ **Sistema de cargas** aplicado
- ✓ Condicionamentos ao nível de **funcionamento estrutural** do elemento que se pretende conceber

#### 2. MODELO ESTRUTURAL E ACÇÕES

As dimensões da secção da viga é fixada tendo em conta o molde disponível na Laboratório de Estruturas da FEUP para o efeito. Esse molde possui um comprimento de 4.20m por 15cm de largura e 20cm de altura como se ilustra na figura 1.

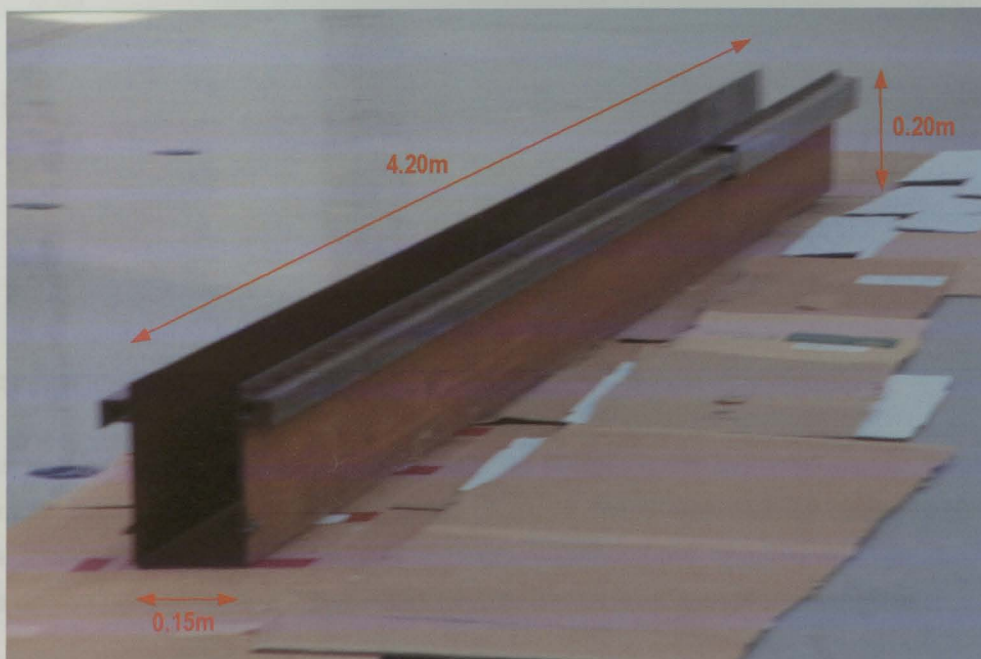


Figura 1 – Molde utilizado para a execução da viga

Características geométricas da viga	
Comprimento total	$L=4.11\text{m}$
Comprimento efectivo (entre apoios)	$L_{ef}=3.96\text{m}$
Largura	$b=0.15\text{m}$
Altura	$h=0.20\text{m}$
Peso ( $\gamma_{betão}=25\text{kN/m}^3$ )	$G_{pp}=0.75\text{kN/m}$

O modelo estrutural é traduzido por uma viga simplesmente apoiada. A viga está sujeita, além do seu peso próprio ( $G_{PP}$ ), ao pré-esforço induzido por um cabo não aderente rectilíneo com 5.7cm de excentricidade em relação ao eixo baricêntrico da secção ( $P$ ). Além disso são aplicadas duas forças concentradas, de carácter permanente, aplicadas cada uma a 1.50m dos apoios ( $G_1$ ). A Tabela 1 resume o valor das acções aplicadas à viga.

Tabela 1 – Acções

Natureza	Designação
Peso próprio	" $G_{PP}$ "
Pré-esforço	" $P$ "
Acção de carácter permanente -AP-	" $G_1$ "

Podendo ser traduzido pelo seguinte esquema ilustrativo:

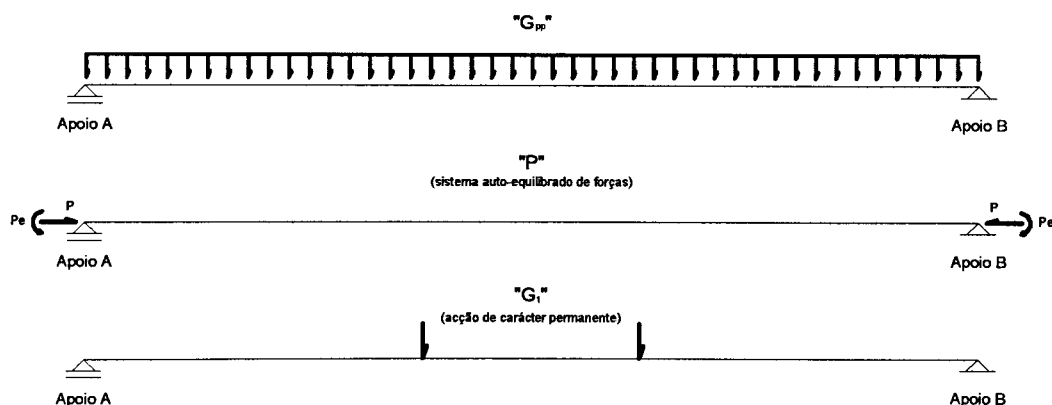


Figura 2 – Acções sobre a viga pré-esforçada

### 3. ESFORÇOS

A viga encontra-se monitorizada em três secções perfeitamente definidas (figura 3), para que se possa confrontar resultados numéricos com os resultados obtidos experimentalmente. Desse modo, é importante conhecer os esforços instalados nas secções referidas, quer sob a acção do seu peso próprio, como a acção do pré-esforço e as acções permanentes.

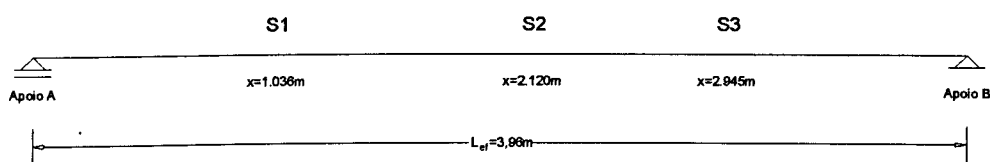


Figura 3 – Identificação das secções monitorizadas

#### 3.1 ACÇÃO DO PESO PRÓPRIO

Sob a acção do seu peso próprio (colocada em posição de ensaio), a estrutura fica desde logo sujeita a um estado de deformação e tensão, embora, como é evidente a magnitude dos

esforços induzidos pela acção do peso próprio seja bastante menor que aquelas induzidas pelo pré-esforço e a acção permanente (pontos seguintes 3.2 e 3.3)

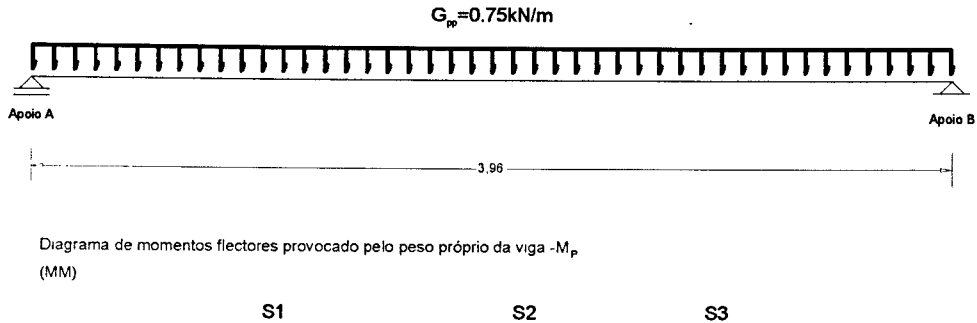


Figura 4 – Esforços de flexão induzidos pela acção permanente

Resumindo-se na tabela 2 os esforços induzidos nas secções por efeito do peso próprio.

Tabela 2 – Esforços induzidos pelo peso próprio

Secção S1 ( $x=1.036m$ )	Secção S2 ( $x=2.120m$ )	Secção S3 ( $x=2.945m$ )
$M=1.136 \text{ kN.m}$	$M=1.463 \text{ kN.m}$	$M=1.121 \text{ kN.m}$

### 3.2 ACÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO

Sob a acção do pré-esforço, é induzido à viga um estado de tensão de flexão composta. Como o valor do pré-esforço varia no tempo, devido a fenómenos diferidos (retracção e fluência do betão, bem como a relaxação da amadura de pré-esforço), os esforços por este provocado, são representados em função de um valor genérico designado por “P”. Assim sendo:

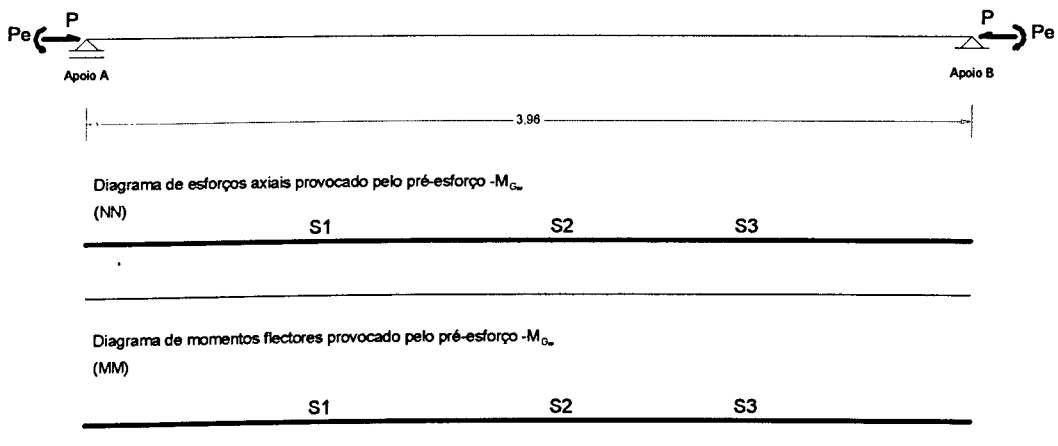


Figura 5 – Esforços de flexão induzidos pela acção permanente



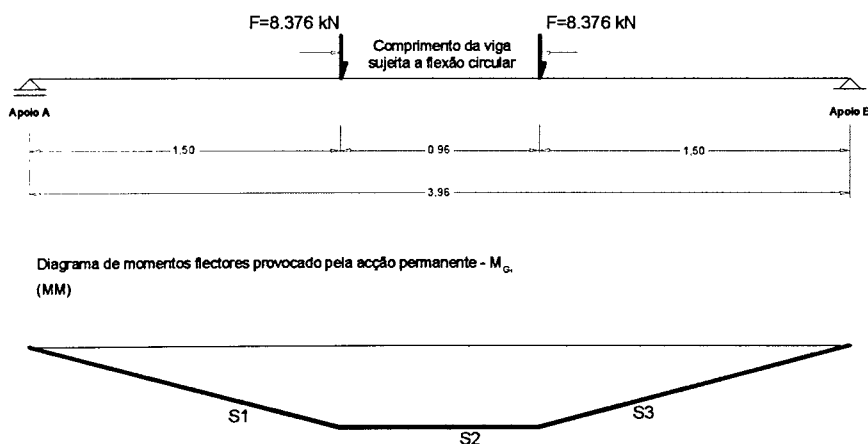
Resumindo-se na Tabela 3, os esforços induzidos nas secções monitorizadas.

**Tabela 3 – Esforços induzidos pelo pré-esforço**

Secção S1 (x=1.036m)	Secção S2 (x=2.120m)	Secção S3 (x=2.945m)
N=-P (kN)	N=-P (kN)	N=-P (kN)
M=-0.057P (kN.m)	M=-0.057P (kN.m)	M=-0.057P (kN.m)

### 3.3 ACÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE

Sob a acção de um sistema de forças concentradas, de carácter permanente, como se ilustra na figura 6, o efeito do pré-esforço será “contrariado”.



**Figura 6 – Esforços de flexão induzidos pela acção permanente**

De igual modo ao efectuado para as outras acções, resume-se na Tabela 4, os esforços induzidos nas secções monitorizadas pela acção permanente.

**Tabela 4 – Esforços induzidos pelo pré-esforço**

Secção S1 (x=1.036m)	Secção S2 (x=2.120m)	Secção S3 (x=2.945m)
M=8.678 kN.m	M=12.564 kN.m	M=8.502 kN.m

## **IV. DIMENSIONAMENTO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO**

<b>1. DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS LONGITUDINAIS</b>	<b>IV.1</b>
<b>2. PRÉ-DIMENSIONAMENTO DO PRÉ-ESFORÇO</b>	<b>IV.1</b>
<b>3. DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE PRÉ-ESFORÇO</b>	<b>IV.4</b>
<b>4. DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE REFORÇO NA ZONA DE ANCORAGEM</b>	<b>IV.5</b>
<b>5. DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS TRANSVERSAIS</b>	<b>IV.9</b>

## IV. DIMENSIONAMENTO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO

### 1. DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS LONGITUDINAIS

Tendo em conta as percentagens económicas em secções de betão armado, bem como dotar a viga de flexibilidade adequada (eixo neutro a menos de 1/3 da altura total da viga) quando sujeita a um estado limite último de resistência, adopta-se uma solução para armaduras longitudinais de  $2\phi 12\text{mm}$ , tanto superiormente como inferiormente.

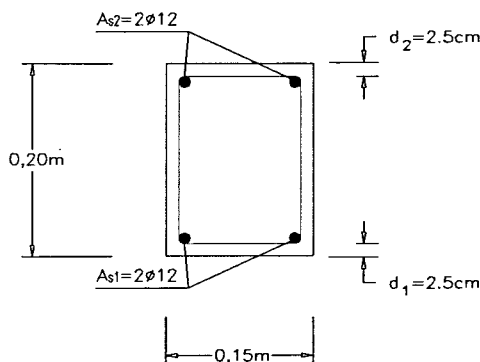


Figura 1 – Secção da viga e representação das armaduras longitudinais adoptadas

### 2. PRÉ-DIMENSIONAMENTO DO PRÉ-ESFORÇO

A viga será constituída por um cabo de pré-esforço rectilíneo excêntrico que dista da face inferior da viga 4.3cm ( $d_p$ ), com duas ancoragens nas extremidades da viga, sendo uma passiva (extremidade direita) e a outra activa (extremidade esquerda)

Pretende-se aplicar uma tensão inicial no cabo de pré-esforço, de forma a verificar o estado limite de formação de fendas na secção mais desfavorável, com o objectivo de aplicar o valor máximo de pré-esforço admissível.

Deve-se ter em atenção que a aplicação do pré-esforço é efectuado numa idade jovem do betão (menos de 28 dias), daí que o valor de  $f_{ctm,j}$  seja o correspondente a essa data e não ao valor tabelado nos regulamentos, os quais se referem para uma idade de 28 dias,  $f_{ctm,28d}$ .

No entanto, como estamos numa fase de pré-dimensionamento consideremos  $f_{ctm,j} = f_{ctm,28d}$ , devido ao facto do betão aplicado ser de qualidade superior ao estipulado no cálculo de dimensionamento (C30/37)

Desse modo, temos como secção condicionante a representada na figura 2:

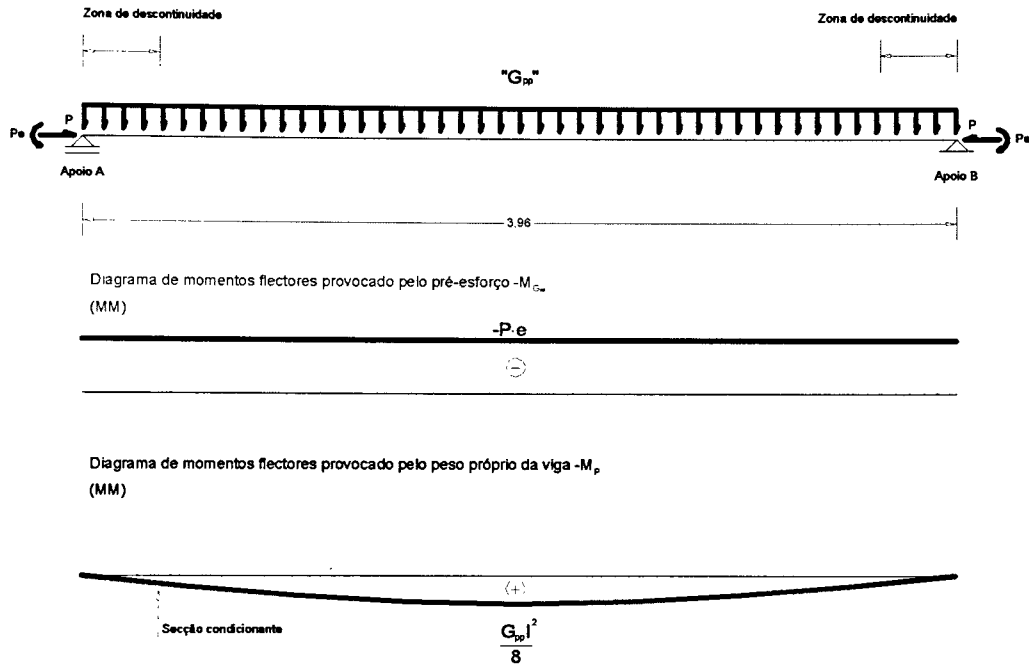


Figura 2 – Diagramas de momentos devido à acção do pré-esforço e peso próprio da viga e representação da secção crítica

Tendo em conta o facto do peso próprio da viga ser uma acção favorável à estabilidade, e que a secção condicionante é, sensivelmente, uma que dista da secção de apoio do valor da altura da viga (transição de uma carga pontual para toda a secção), onde se regista o valor mínimo para o momento nessa secção devido à acção do peso próprio, temos a seguinte configuração para a secção condicionante:

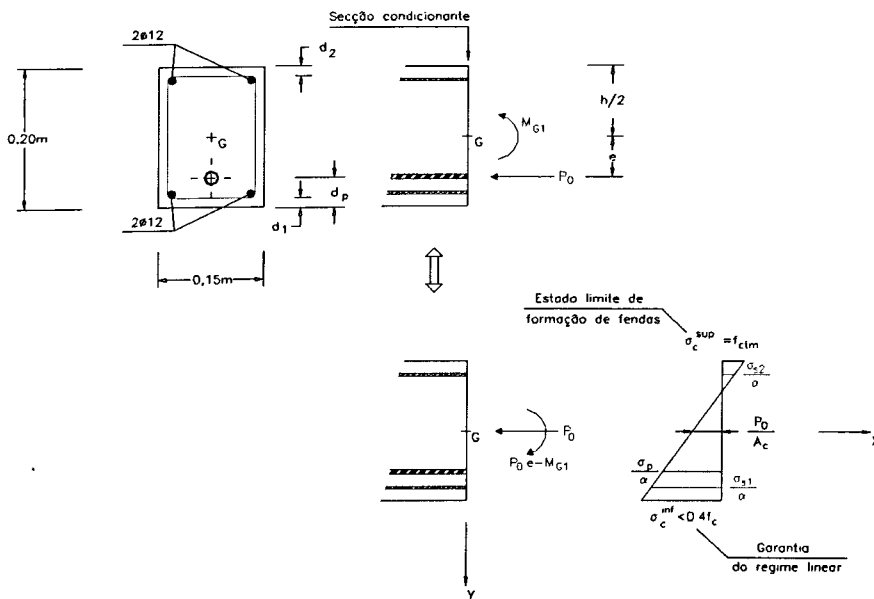


Figura 3 – Estado limite de formação de fendas para a secção condicionante e representação da secção crítica

Trata-se de um problema de flexão composta em regime linear dos materiais (tensões instaladas moderadas e correspondendo a fase elástica). Desse modo:

$$\sigma_c^{sup.} = -\frac{P_0}{A} + \frac{P_0 \cdot e - M_{GPP}}{I} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) \quad (1)$$

Com,

<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tensão na fibra superior do betão</li> <li>▪ Área de betão</li> <li>▪ Momento das acções permanentes mobilizadas com o pré-esforço (peso próprio)</li> <li>▪ Excentricidade</li> <li>▪ Momento de inércia da secção</li> <li>▪ Altura da viga</li> </ul>		$\sigma_c^{sup.} = 2.9\text{MPa (EC2)}$ $A_c = b \cdot h = 0.15 \times 0.20 = 0.03\text{m}^2$ $M_{GPP} = (\cong) 0.28\text{kN.m}$ $e = \frac{h}{2} - d_p = \frac{0.20}{2} - 0.043 = 0.057\text{m}$ $I = (\cong) \frac{b \cdot h^3}{12} = 1 \cdot 10^{-4}\text{m}^4$ $h = 0.20\text{m}$
---	--	---

Substituindo na equação 1 as variáveis pelos valores acima definidos, e resolvendo em ordem a  $P_0$ , obtemos o valor máximo para pré-esforço instalado.

$$\begin{aligned} & -\frac{P_0}{A} + \frac{P_0 \cdot e - M_G}{I} \cdot \frac{h}{2} = 2900 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{kPa}) \\ \Leftrightarrow & -\frac{P_0}{0.03} + \frac{P_0 \cdot 0.057 - 0.28}{1 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0.20}{2} = 2900 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -33.33 \cdot P_0 + (57 \cdot P_0 - 280) = 2900 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \quad \quad \quad \mathbf{P_0 = 134.3\text{ kN}} \end{aligned}$$

O valor de 134.3 kN corresponde ao instante anterior ao escorregamento dos dispositivos de ancoragem, ou seja, o valor máximo do pré-esforço. Considerando que para perdas imediatas, contribui apenas o escorregamento dos dispositivos de ancoragem e perdas por atrito (embora estas últimas reduzidas, devido ao facto de ser um cabo não aderente de traçado rectilíneo, e como o modelo foi concebido em laboratório, os desvios parasitas do traçado do cabo foram mínimos, senão desprezáveis), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P_0 = 134.3\text{kN}} \\ \mathbf{\Delta P_0 = 10\%} \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{P_{m0} = 120.9\text{kN}}$$

### 3. DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE PRÉ-ESFORÇO

De acordo com o estipulado no EC2 (ponto 4.2.3.5.4), a tensão no cabo de pré-esforço não deverá exceder dos seguintes valores:

A força máxima  $P_0$  ( $P'_0$  segundo a terminologia do REBAP), aplicada a um cabo (isto é, a força na ancoragem activa, imediatamente depois de pré-esforçar), não deverá exceder:

$$P_0 < A_p \cdot \sigma_{0,max} \quad (2)$$

$$\left| \begin{array}{l} A_p - \text{Área da secção transversal do cabo} \\ \sigma_{0,max} - \text{tensão máxima aplicada ao cabo : } \min\{0.80 \cdot f_{pk}; 0.90 \cdot f_{p0.1k}\} \end{array} \right.$$

A força de pré-esforço,  $P_{m0}$  ( $P_0$  segundo a terminologia do REBAP), aplicada ao betão imediatamente depois de esforçar, não deverá exceder:

$$P_{m0} < A_p \cdot \sigma_{pm0} \quad (3)$$

$$\left| \begin{array}{l} A_p - \text{Área da secção transversal do cabo} \\ \sigma_{pm0} - \text{tensão máxima no cabo após transferência : } \min\{0.75 \cdot f_{pk}; 0.85 \cdot f_{p0.1k}\} \end{array} \right.$$

E tendo em atenção as características do aço de pré-esforço anteriormente apresentadas, temos:

$$\begin{array}{lcl} P_0 < A_p \cdot \sigma_{0,max} & \Leftrightarrow & P_{m0} < A_p \cdot \sigma_{pm0} \\ \Leftrightarrow 134.3 < A_p \cdot 1490 \cdot 10^3 & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow 120.9 < A_p \cdot 1397 \cdot 10^3 \\ \Leftrightarrow A_p > 0.90 \text{ cm}^2 & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow A_p > 0.87 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Tem-se assim, como valor mínimo para a área da secção transversal do cabo de pré-esforço valor de  $0.90 \text{ cm}^2$ . Tendo em conta que a relaxação da armadura de pré-esforço é tanto mais significativa quanto mais elevado for o nível de tensões instalado, opta-se por um **cordão de  $1.40 \text{ cm}^2$** , o que provoca conseqüentemente, tensões bem mais baixas do que os valores impostos para tensões máximas no cabo de pré-esforço pelo EC2.

**Opção: 1 cordão de 7 fios com  $A_p=1.40 \text{ cm}^2$**

Tensão no cabo de pré-esforço, após perdas imediatas:

$$\begin{aligned} \sigma_{Pmo} &= \frac{P_{mo}}{A_p} = \frac{120.9 \cdot 10^{-3}}{1.40 \cdot 10^{-3}} = \\ &= \frac{120.9 \text{ (kN)}}{1.40 \text{ (cm}^2\text{)}} \cdot 10 = \\ &= \mathbf{863 \text{ MPa}} \end{aligned}$$

A que corresponde uma extensão inicial,  $\epsilon_0$ , de:

$$\begin{aligned} \epsilon_{Pm0} &= \frac{863}{195 \cdot 10^3} \\ &= \mathbf{4.42\%} \end{aligned}$$

Nesta fase, após concluída a operação de pré-esforço, e estando a viga sujeita apenas ao seu peso próprio e à acção do pré-esforço temos na secção mais desfavorável, o seguinte estado de deformação e tensão:

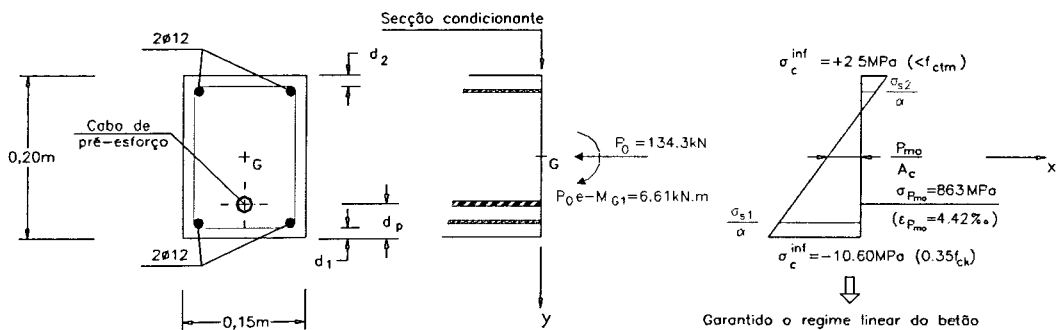


Figura 4 – Estado de deformação e tensão na secção mais desfavorável

#### 4. DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE REFORÇO NAS ZONAS DE ANCORAGEM

A zona de ancoragem é provavelmente a mais importante de todo o elemento, já que é aí que se transfere a carga pontual (aplicada ao betão através da placa de ancoragem) para toda a secção de betão, onde a hipótese de secções planas após deformação é válida. Podendo ser mesmo a zona crítica para determinação do pré-esforço, devido a tensões elevadas aí instaladas

De acordo com o MC-90, a pressão máxima admissível na placa de ancoragem no caso de um estado triaxial é de:

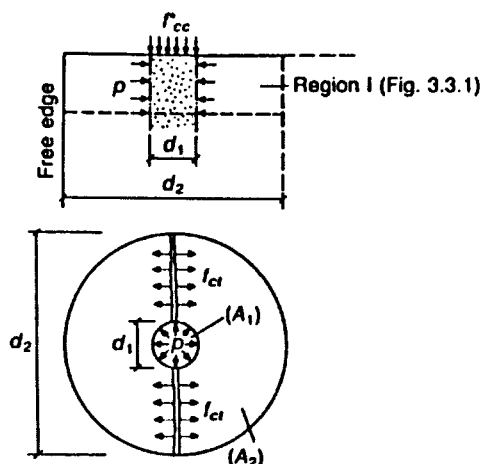


Figura 5 – Modelo simplificado para a previsão da tensão de rotura para uma carga pontual localizada numa área restrita do elemento de betão

$$f_{cc}^* = f_{cc} \cdot \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad (4)$$

$$f_{cc} = f_{cd,sus} \cong 0.80 \cdot f_{cd} = 16 \text{MPa}$$

$$A_1 = 0.08 \cdot 0.08 = 0.0064 \text{m}^2$$

$$A_2 = (0.03 + 0.08 + 0.03) \cdot 0.15 = 0.0210 \text{m}^2$$

$$f_{cc}^* = 29.0 \text{MPa}$$

Como a nossa placa de ancoragem tem 8cm x 8cm, a força máxima aplicável será de:

$$P_{\max} = f_{cc}^* \cdot A_1 \quad (5)$$

$$f_{cc}^* = 29 \text{MPa}$$

$$A_1 = 0.08 \cdot 0.08 = 0.0064 \text{m}^2$$

$$P_{\max} = 185.6 \text{kN} (\cong 1.38 \cdot P_0)$$

Verifica a segurança na zona de contacto entre a placa de ancoragem e o betão (pressão localizada).

Numa zona mais interior, desenvolvem-se forças de tracção no plano perpendicular à direcção do pré-esforço devido à passagem de carga pontual aplicada através da placa de ancoragem para toda a secção, sendo deste modo necessário dimensionar armaduras específicas sob a forma de estribos para se assegurar a estabilidade estrutural desta zona. Tratando-se de um dimensionamento, consideram-se os valores característicos dos materiais e majora-se a acção do pré-esforço em 25%.



De acordo com o MC-90:

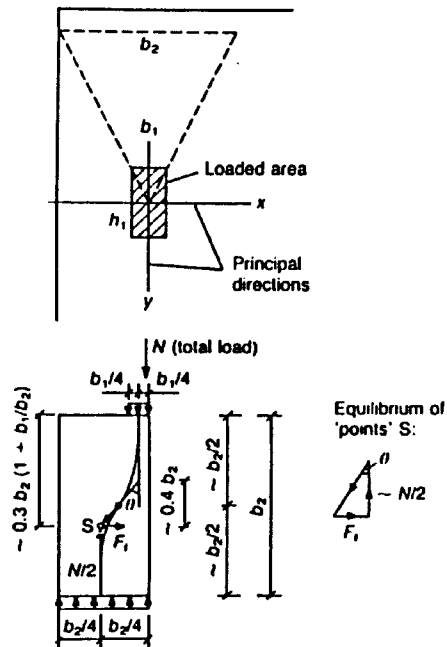


Figura 6 – Modelo simplificado para a previsão das forças de rotura em cada direcção (MC-90)

$$F_{tx} = 0.3 \cdot N \cdot \left(1 - \frac{b_1}{b_2}\right) \quad (6)$$

$$F_{ty} = 0.3 \cdot N \cdot \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \quad (7)$$

$$N = 1.25 \cdot P_0 = 1.25 \cdot 134.3 = 168 \text{ kN}$$

$$b_1 = 0.08 \text{ m}$$

$$b_2 = 0.15 \text{ m}$$

$$h_1 = 0.08 \text{ m}$$

$$h_2 = 0.086 \text{ m}$$

$$F_{tx} = 23.5 \text{ kN}$$

$$F_{ty} = 3.5 \text{ kN}$$

O betão por si só nas direcções x e y consideradas resiste até a um nível de tensões de:

Direcção y  $F_{cx} = f_{ctd} \cdot 0.6 \cdot b_2 \cdot h_1 = 13.9 \text{ kN}$  (8)

Direcção x  $F_{cy} = f_{ctd} \cdot 0.6 \cdot b_1 \cdot h_2 = 8.0 \text{ kN}$  (9)

Concluindo assim que necessito apenas de reforço com armaduras de estribo na direcção x, e considerando que essa mesma armadura absorve por completo  $F_x$  (por segurança admito que o betão não resiste à tracção).

$$F_{tRx} = A_{s,x} \cdot f_{syd} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23.0 = A_{s,x} \cdot 204 \cdot 10^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{s,x} = 1.12 \text{ cm}^2 \quad \Leftrightarrow$$

**Opção:  $\Phi 4\text{mm}(2r)/0.10$  (A235)**

Como a acção do pré-esforço é excêntrica, temos que garantir a materialização do modelo escoras e tirantes idealizado que traduz o comportamento do elemento nessa zona. Para isso, falta-nos garantir a materialização de um tirante paralelo ao plano das cargas e à face da viga. De acordo com o REBAP, artº 140.2:

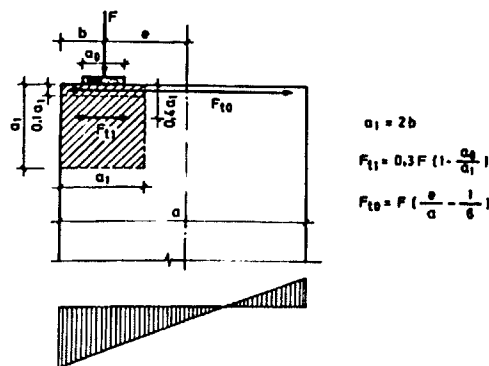


Figura 7 – Modelo simplificado para a previsão da força de tracção  $F_{t0}$  (REBAP artº 140)

$$F_{t0} = F \left( \frac{e}{a} - \frac{1}{6} \right) \quad (10)$$

$$F = 1.25 \cdot P_0 = 1.25 \cdot 134.3 = 168 \text{ kN}$$

$$e = 0.057 \text{ m}$$

$$a = 0.20 \text{ m (altura da viga)}$$

$$F_{t0} = 19.9 \text{ kN}$$

Esta força terá que ser garantida por um tirante, que será materializado pelos varões longitudinais que dobra junto à face da viga ( $2\phi 12$ ). Nesse caso, a resistência máxima por este assegurado é de:

$$F_{tRD} = 435 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 1.13 \cdot 10^{-4}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{tRD} = \mathbf{98.3 \text{ kN}}$$

Ou seja, está garantido a materialização e funcionamento adequado do modelo idealizado para esta zona.

## 5. DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS TRANSVERSAIS

O dimensionamento das armaduras de esforço transverso em projecto, é normalmente efectuado em função das acções aplicadas ( $V_{sd} < V_{wd}$ ), efectuando-se verificações da sua necessidade ( $V_{rd1}$ ), e a garantia do não esmagamento das bielas de compressão de betão do modelo idealizado para o cálculo ( $V_{rd2}$ ).

No entanto, neste caso específico, não possuímos a quantificação de todas as acções que serão aplicadas à viga. Isto devido ao facto de que neste caso procede-se de forma "inversa" ao anteriormente referido. Ou seja, todos os elementos constituintes da viga são dimensionados segundo critérios estabelecidos nos regulamentos, e à posteriori é determinada a sua resistência última, bem como o valor das acções para a qual se atinge a fendilhação.

O critério aplicado para o dimensionamento das armaduras transversais é aquele que maximiza a capacidade resistente da viga a esforços de corte, ou seja:

$$V_{sd} = V_{rd2} \quad (11)$$

O EC2 define, que para elementos que estejam sujeitos a esforços normais de compressão, o valor de cálculo do esforço transverso actuante não deve ser superior a:

$$V_{rd2,red} = 1.67 \cdot V_{rd2} \left( 1 - \frac{\sigma_{cp,eff}}{f_{cd}} \right) \quad (\leq V_{rd2}), \quad V_{rd2} = \frac{b_w \cdot z \cdot v \cdot f_{cd}}{\cotg(\theta) + \tg(\theta)} \quad (12, 13)$$

- Largura colaborante ao esforço transverso
- Braço do binário das forças internas
- Factor de eficácia ( $\geq 0.5$ )
- Valor de cálculo da tensão de rotura à compressão do betão
- Inclinação das bielas de compressão de betão

$$b_w = 0.15m$$

$$z = (\cong) 0.9^2 \cdot h = 0.9^2 \cdot 0.20 = 0.162m$$

$$v = 0.7 - \frac{f_{ck}}{200} = 0.7 - \frac{30}{200} = 0.55$$

$$f_{cd} = 20MPa$$

$$\theta = \text{arctg}(2.5) = 21.8^\circ$$

- Tensão média efectiva no betão devida ao pré-esforço

$$\sigma_{cp,eff} = \frac{N_{sd} - A_s \cdot f_{syd}}{A_c} \quad (14)$$

$$N_{sd} = P_{mo} = 120.9 \text{ kN}$$

$$f_{syd} = 435 \text{ MPa}$$

$$A_s = 2.26 \text{ cm}^2 \text{ (} 2\Phi 12 \text{ mm)}$$

$$A_c = 0.03 \text{ m}^2$$

$$V_{rd2,red} = 92 \text{ kN} \quad (=V_{rd2})$$

Com este valor procedo ao dimensionamento das armaduras transversais através da condição expressa por "11".

$$V_{sd} = V_{rd2}$$

$$V_{sd} < V_{rd3} \quad (15)$$

$$V_{rd3} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0.9 \cdot f_{ywd} \cdot \cotg(\theta) \quad (16)$$

$$V_{sd} = 92 \text{ kN}$$

$$f_{ywd} = 435 \text{ MPa}$$

$$\cotg(\theta) = 2.5$$

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq 5.2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Deve-se no entanto verificar os estribos mínimos impostos pelo regulamento EC2,

**C30/37**

$$\Rightarrow \rho_w \geq 0.0011$$

**A500**

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \text{sen}(\alpha)} \quad (17)$$

$$\therefore \frac{A_{sw}}{s} \geq 1.65 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{verifica os estribos mínimos})$$

Quantificando,

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{req} \geq 5.2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{Opção: } \Phi 6 \text{ mm} // 0.10 \text{ m} \Rightarrow \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{prov} = 5.7 \text{ cm}^2/\text{m}$$

## **V. EQUIPAMENTO DE MONITORIZAÇÃO**

<b>1. GENERALIDADES</b>	<b>V.1</b>
<b>1.1. SISTEMA DE MEDIÇÃO</b>	<b>V.1</b>
<b>1.2. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO</b>	<b>V.1</b>
<b>2. EXTENSÓMETROS DE EMBEBER NO BETÃO</b>	<b>V.2</b>
<b>3. EXTENSÓMETROS DE COLAR NO AÇO</b>	<b>V.2</b>
<b>4. CÉLULA DE CARGA</b>	<b>V.3</b>
<b>5. SENSOR DE TEMPERATURA</b>	<b>V.4</b>
<b>6. LVDT'S (Linear variable differential transformer)</b>	<b>V.4</b>
<b>7. SISTEMA DE AQUISIÇÃO</b>	<b>V.5</b>

## V. EQUIPAMENTO DE MONITORIZAÇÃO

### 1. GENERALIDADES

O desenvolvimento de modelos numéricos de análise estrutural, com parâmetros quantificados a partir dos resultados obtidos pela via experimental, tem constituído um importante complemento à observação do comportamento das estruturas. A sua aplicação tem permitido a interpretação de medições efectuadas em obra e a previsão do comportamento das estruturas aquando da ocorrência de um estado limite (Félix, 2001)

#### 1.1. SISTEMA DE MEDIÇÃO

Um instrumento de medição é um dispositivo destinado à execução de uma medição. Sendo o conjunto de instrumentos de medição e de outros dispositivos montados para efectuar uma medição específica designada por sistema de medição.

Deste modo, a medição pode ser obtida directamente a partir do instrumento de medição, ou através de um sistema de medição, que trata o sinal do instrumento de medida, apresentando como resultado final o valor da grandeza a medir.

#### 1.2. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO

Um sistema de medição programável, onde as medições são feitas automaticamente, na observância de um plano pré-definido com capacidade de guardar informação, constitui um sistema de monitorização.

Apresenta-se um esquema geral do sistema de monitorização aplicado na observação da viga pré-esforçada.



Figura 1 – Esquema geral do sistema de monitorização utilizado

No projecto de monitorização são definidas “secções críticas” (secções de estudo), para que se possa analisar o comportamento da viga no seu global a partir destas. Diz-se então que estas secções estão instrumentadas.

Desse modo, apresenta-se de seguida toda a instrumentação utilizada, encontrando-se em desenho a localização dos mesmos.

## 2. EXTENSÓMETROS DE EMBEBER NO BETÃO

A figura 1 apresenta um extensómetro de embeber no betão, da série EGP, produzido pela Measurements Group. A malha do extensómetro é constituída por uma liga de cromo e níquel com 100mm de comprimento activo. O valor da resistência pode ser de  $120\Omega$  ou de  $350\Omega \pm 0.8\%$  a  $24^\circ\text{C}$  de temperatura. O campo de medição é de  $\pm 0.5\%$ , ou seja,  $\pm 5000\mu\epsilon$ . O intervalo de temperatura em que o extensómetro pode funcionar é de  $-45^\circ\text{C}$  e  $+55^\circ\text{C}$ . Possui ainda um sistema de auto-compensação de temperatura, minimizando os seus efeitos sobre as medições, que é mais eficiente no intervalo compreendido entre  $+15^\circ\text{C}$  e  $+40^\circ\text{C}$ . O revestimento exterior, de dimensões  $130\text{mm} \times 17\text{mm} \times 10\text{mm}$ , é constituído por um polímero de superfície rugosa, com vista ao melhoramento das características de aderência. Este revestimento permite a transferência das deformações do betão para a malha do extensómetro, conferindo-lhe simultaneamente a robustez mecânica indispensável às fases de instalação, betonagem, protecção à humidade e ao ataque químico envolvente.

O extensómetro é fornecido pelo fabricante já com um cabo de 3.0m de comprimento que facilita a sua ligação. Os três fios que o constituem ajudam a minimizar os efeitos decorrentes da variação de temperatura sobre o próprio cabo. Localizam-se segundo a direcção cuja deformação se pretende medir.

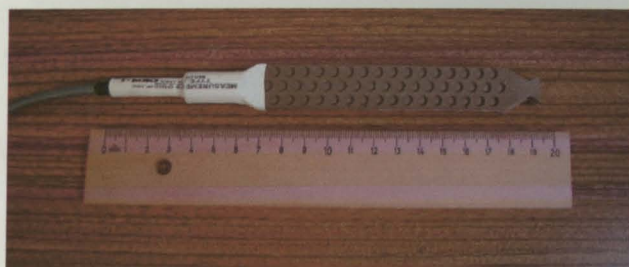


Figura 2 – Extensómetro de embeber no betão

## 3. EXTENSÓMETROS DE COLAR NO AÇO

São especialmente dedicados à aplicação em laboratório ou em obra sobre diversos materiais estruturais, como por exemplo, o aço, a madeira, os materiais compósitos e o betão (sendo que neste ultimo preferível a aplicação de extensómetros de embeber no betão, justificado pelas vantagens referidas anteriormente)

São perfeitamente colados à armadura, de modo que qualquer deformação da armadura é detectada pelos Extensómetros. Uma vez que a armadura fica dentro do betão e estes Extensómetros não podem estar sujeitos a humidade, devendo ser convenientemente protegidos, a fim de não entrarem em contacto com o betão.

Estes extensómetros são menos utilizados que os Extensómetros de embeber no betão, uma vez que a fiabilidade destes extensómetros depende da boa compatibilidade entre a armadura e o betão, sendo que a área de contacto é menor do que a conseguida pelo extensómetro de embeber no betão, o que provoca uma maior sensibilidade às características heterogéneas do betão.



Figura 3 – Extensómetro de colar no aço

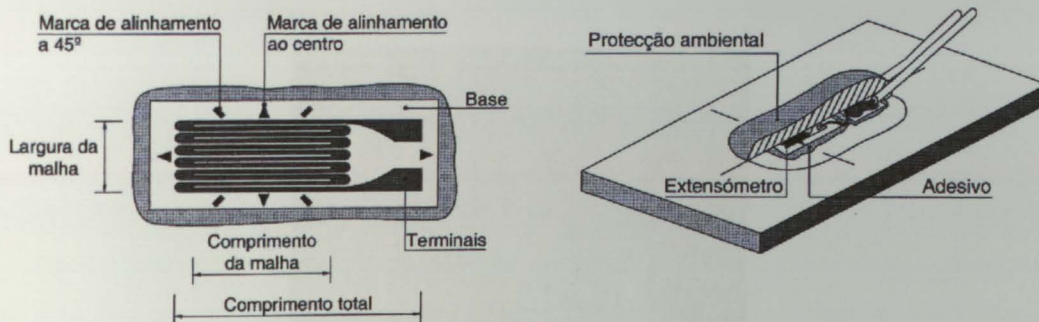


Figura 4 – Elementos constituintes (esquerda) e esquema de aplicação à superfície (direita)

#### 4. CÉLULA DE CARGA

As células de carga têm por objectivo fundamental, medir o esforço axial instalado num dado elemento. No presente trabalho, tem como função, medir o valor do pré-esforço instalado ao longo do tempo, atendendo as perdas diferidas a que o cabo de pré-esforço esta sujeito.

Trata-se de um anel de aço inox com 63mm de diâmetro exterior, espessura de 11.5mm, e 40mm de diâmetro interior. Foram colocados quatro Extensómetros colados diametralmente opostos, dispostos longitudinalmente, para medição da deformação sofrida pela célula de carga, e conseqüentemente, o valor do pré-esforço (força axial) instalado.



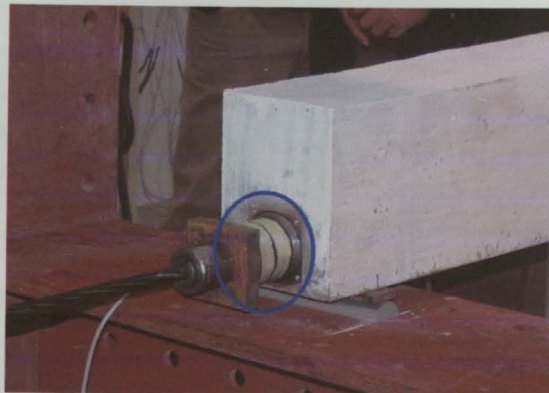


Figura 7 – Célula de carga para registo da força de pré-esforço

## 5. SENSOR DE TEMPERATURA

Para a medição da temperatura são utilizados detectores de temperatura resistivos (RTD's), com a utilização da platina como resistência sensor, correntemente designados por PT100. Apresentam um valor para coeficiente de dilatação térmico de  $0.0385 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , exteriormente são protegidos por uma ponteira de aço inox, de 100mmx6mm e são fabricados pela empresa *Gage Technique Lda*.

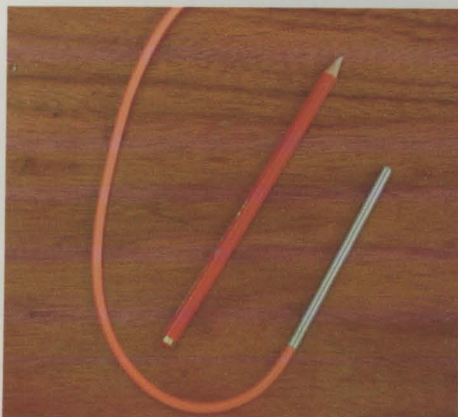


Figura 8 – Sensor de temperatura

## 6. LVDT'S (*Linear Variable Differential Transformer*)

São utilizados transdutores indutivos de deslocamento (LVDT's-linearvariable differential transformer), para a medição de deslocamentos verticais das secções da viga anteriormente referidas. Os transdutores de deslocamento utilizados têm um curso de 25mm e 50mm. O transdutor de 50mm foi utilizado a meio vão da viga, e os de 25mm de curso junto aos apoios.



Figura 9 – LVDT's (*Linear Variable Differencial Transformer*)

## 7. SISTEMA DE AQUISIÇÃO

No que respeita ao sistema informático de aquisição e armazenamento do sinal proveniente dos sensores são utilizados os equipamentos da *Data Electronics Ltd.*, constituídos fundamentalmente por *Data Taker/ Data Logger* e por cartões de memória PCMCIA de 1Mb. Atenção particular tem que ser dada à garantia de estabilidade e operacionalidade deste tipo de equipamento, a actuar automaticamente e de forma contínua por prolongados intervalos de tempo, da ordem de vários meses, e à garantia da manutenção da sua fiabilidade. Para o efeito é normalmente disposto junto a cada secção instrumentada um *data logger* com capacidade informática própria. Ligando os vários módulos de expansão entre si, e adoptando um deles como *Master*, podendo a partir deste centralizar-se todo o sistema de aquisição. A recolha de dados é efectuada por ligação de um "pc" portátil como se apresenta na figura 10.



Figura 10 – Sistema de aquisição de leituras (Esq.) e ligação do sistema de aquisição a um computador portátil para "download" de dados

## **VI. EXECUÇÃO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO (LABEST/FEUP)**

<b>1. CORTE, DOBRAGEM E MONTAGEM DAS ARMADURAS</b>	<b>VI.1</b>
<b>2. COLOCAÇÃO DOS EXTENSÓMETROS</b>	<b>VI.2</b>
<b>3. BETONAGEM</b>	<b>VI.3</b>
<b>4. COLOCAÇÃO EM POSIÇÃO DE ENSAIO</b>	<b>VI.5</b>
<b>5. COLOCAÇÃO DA CÉLULA DE CARGA</b>	<b>VI.5</b>
<b>6. LIGAÇÃO DO EQUIPAMENTO DE MEDIÇÃO A UM SISTEMA DE AQUISIÇÃO</b>	<b>VI.6</b>

## VI. EXECUÇÃO DA VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO

O modelo foi elaborado no ano lectivo 2001/02, no âmbito da disciplina de Seminário 1 (1º Semestre) da Opção de Estruturas do curso de Engenharia Civil, na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

### 1. CORTE, DOBRAGEM E MONTAGEM DAS ARMADURAS

Nesta primeira fase, foram cortados e dobrados os varões longitudinais e transversais, de forma a terem a configuração pretendida, definida no dimensionamento e apresentado no desenho de execução.



Figura 1 – Aspecto geral das armaduras

De referir que nas zonas de ancoragem foi providenciado armaduras específicas para garantir a estabilidade do elemento de viga nesta zona devido à existência de forças de tracção desenvolvidas no plano perpendicular ao eixo da viga.



Figura 2 – Pormenor das armaduras na zona de ancoragem

De salientar que o cabo de pré-esforço foi devidamente colocado e “fixado” de forma a garantir a rectidão pretendida, através de pequenos varões de 4mm de aço macio como se apresenta na figura 2.

## 2. COLOCAÇÃO DOS EXTENSÓMETROS

Foram monitorizadas quatro secções, as quais se encontram perfeitamente definidas no desenho de execução.

Apresenta-se de seguida o processo efectuado na aplicação dos extensómetros de colar no aço. Como se referiu, estes devem ser colocados de forma completamente aderente ao varão, e devidamente protegido contra a humidade.

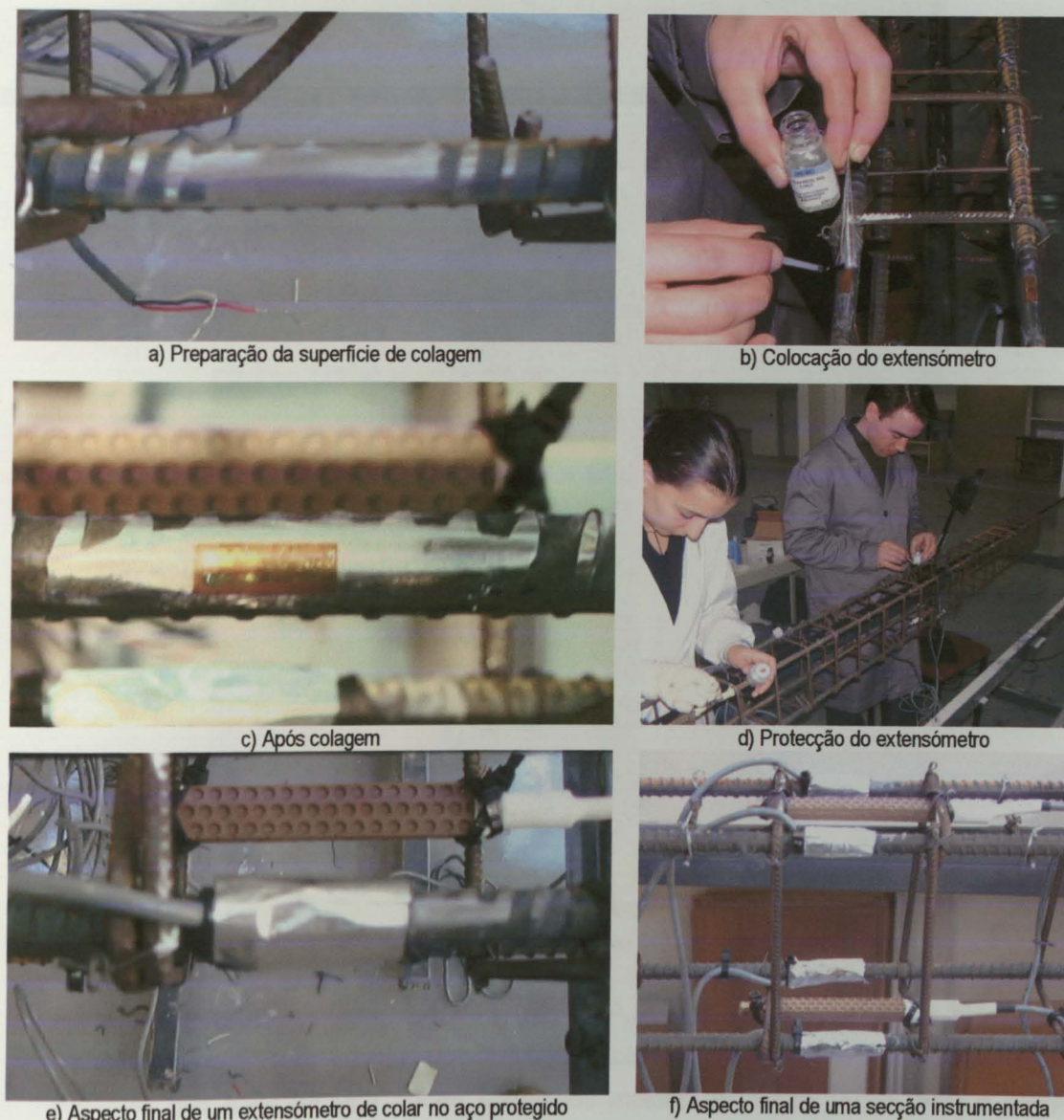


Figura 3 – Aplicação dos extensómetros de colar no aço

Refira-se que a colocação dos extensómetros de embeber no betão não possuem a complexidade que os extensómetros de colar no aço apresentam, sendo que pode-se dizer a sua aplicação é "directa".

### 3. BETONAGEM

As armaduras foram colocadas num molde de 6m de comprimento e com uma largura de 0.15m e 0.20m de altura.

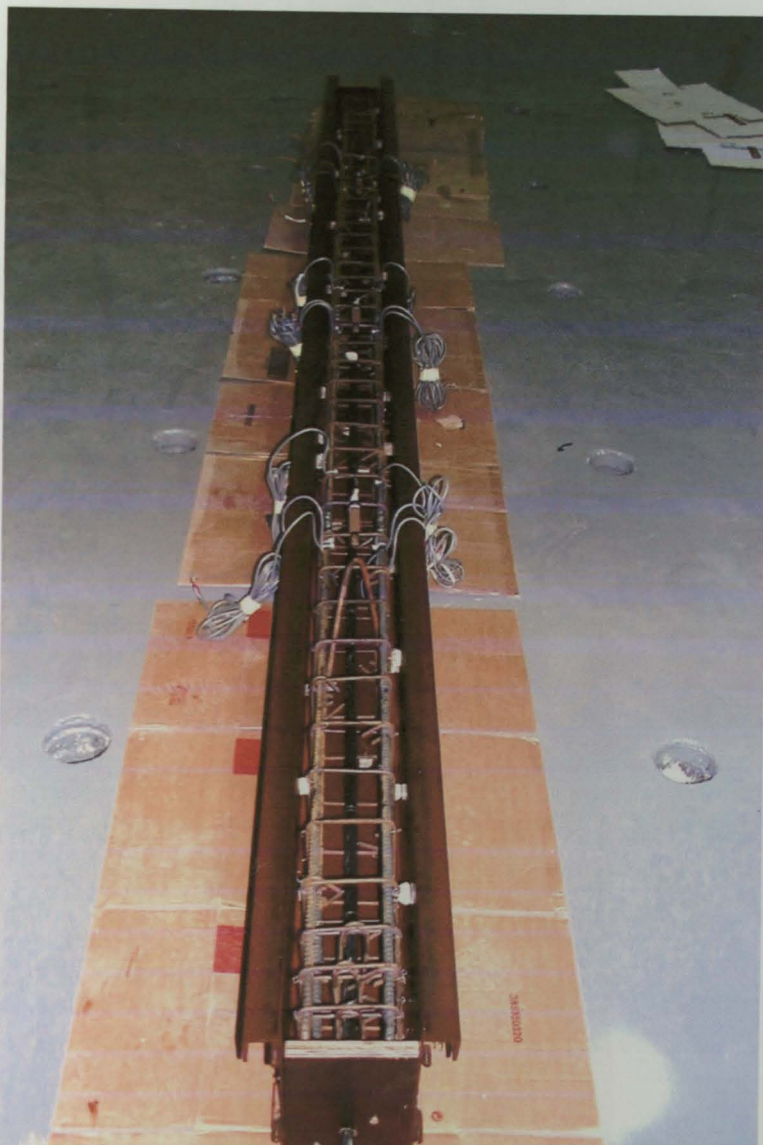


Figura 4 – Armaduras inseridas no molde

A betonagem foi realizada no laboratório da FEUP, no dia 23 de Novembro de 2001, com a colaboração da ENGIL, a qual forneceu o betão aplicado.

Refira-se que além da viga, foram betonados moldes de cubos 15cmx15cm e moldes cilíndricos com diâmetro de 15cm e 30cm de altura (figura 5) para posterior caracterização do betão quanto à sua resistência mecânica e características de deformabilidade.



Figura 5 – Moldes cúbicos e cilíndricos

Com o intuito de estudar os fenómenos de retracção e fluência foram também executados prismas de dimensões 15cmx15cmx55cm, com um extensómetro de embeber no betão disposto segundo o comprimento do prisma. Estes foram colocados posteriormente ao lado da viga para que estivessem sob as mesmas condições ambientais que a viga, para que se possa obter informação representativa.

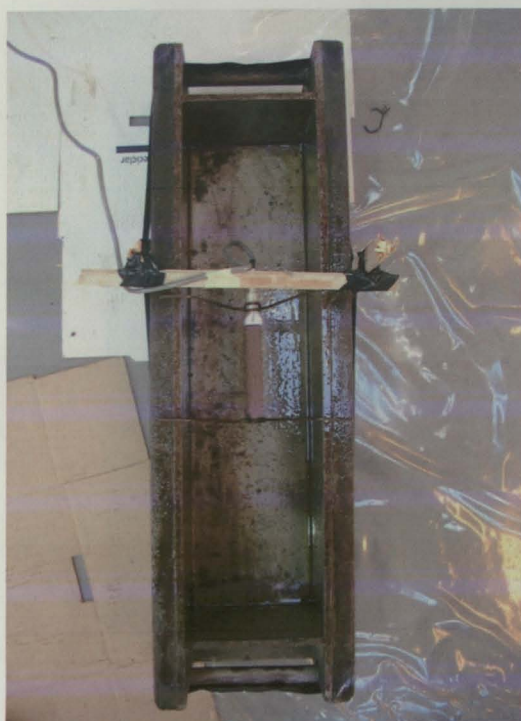


Figura 6 – Prismas para estudo da retracção e fluência do betão

Apresentam-se algumas fotografias da fase de betonagem da viga.



a) Camião que transportou o betão a aplicar na viga



b) Aplicação do betão no molde



c) Vibração do betão  
(de forma mais cuidada na zona das ancoragens)



d) Betonagem e vibração dos moldes

Figura 7 – Betonagem da viga, prismas e provetes de ensaio



#### 4. COLOCAÇÃO EM POSIÇÃO DE ENSAIO

Após betonagem, e suficiente maturação do betão, a viga foi descobrada e colocada em posição de ensaio, simplesmente apoiada, como se ilustra na figura 8.



Figura 8 – Viga em posição de ensaio

#### 5. COLOCAÇÃO DA CELULA DE CARGA

A célula de carga foi colocada após a viga se encontrar em posição de ensaio. Esta foi colocada na extremidade da viga correspondente à ancoragem activa como se apresenta na figura 9.

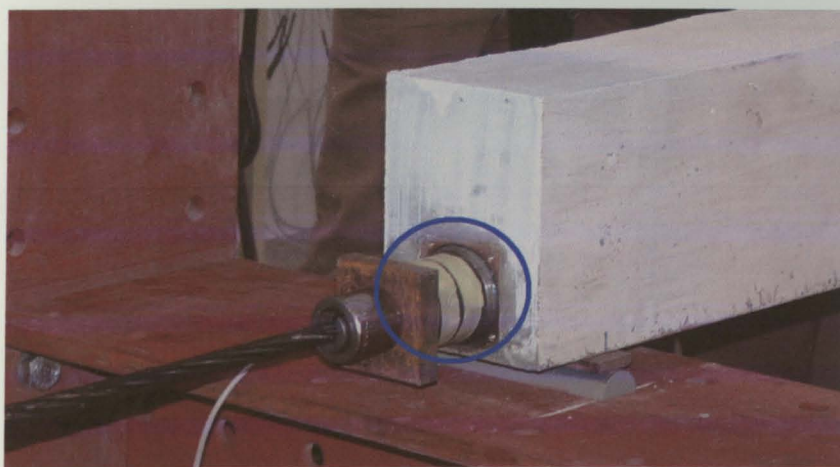


Figura 9 – Célula de carga

## 6. LIGAÇÃO DO EQUIPAMENTO DE MEDIÇÃO A UM SISTEMA DE AQUISIÇÃO

Todos os extensómetros são ligados através de fios a um equipamento de registo de dados que regista os valores lidos pelos extensómetros ao longo do tempo.

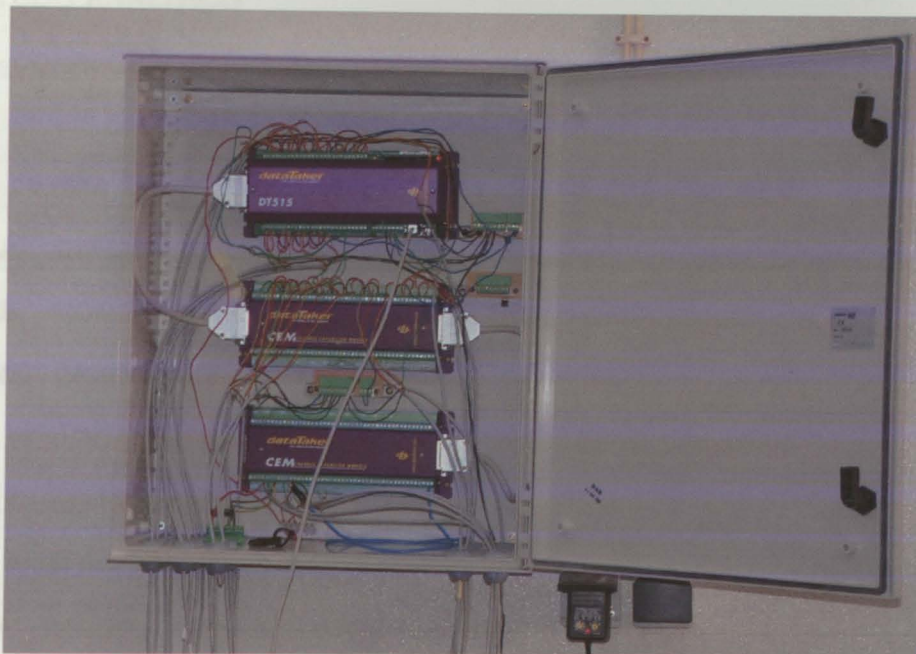


Figura 10 – Sistema de aquisição

## VII. ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA VIGA-PRÉ-ESFORÇADA

1. CARACTERIZAÇÃO DO BETÃO UTILIZADO	VII.1
2. ESTUDO ANALÍTICO	VII.4
2.1. CORRECÇÃO DO VALOR DO PRÉ-ESFORÇO	VII.4
2.2. NÍVEIS DE TENSÃO NO CABO DE PRÉ-ESFORÇO	VII.5
2.3. ESTIMATIVA DO ESTIRAMENTO DO CABO DE PRÉ-ESFORÇO	VII.5
A. DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DO BETÃO, $\Delta L_E$	VII.6
B. COMPRIMENTO DE ESCORREGAMENTO DAS CUNHAS, $\Delta L_S$	VII.7
C. DEFORMAÇÃO TOTAL, $\Delta L_T$	VII.7
2.4. VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DA ZONA DE ANCORAGEM	VII.8
3. CALCULO NUMÉRICO	VII.11
3.1. ANÁLISE INSTANTÂNEA NO TEMPO	VII.11
A. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	VII.11
B. FICHEIRO DE DADOS DO MODELO	VII.11
C. ACONTECIMENTOS DE CARGA	VII.14
Aplicação do pré-esforço (P)	VII.14
Aplicação da acção permanente ( $G_1$ )	VII.16
Ciclo descarga e carga da acção permanente	VII.17

## VII. ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DA VIGA PRÉ-ESFORÇADA

### 1. CARACTERIZAÇÃO DO BETÃO UTILIZADO

A norma "ENV206" (1993) estabelece a relação entre o valor médio da resistência do betão à compressão,  $f_{cm}$ , e o valor característico inferior,  $f_{ck,0.05}$ , (I "*Materiais e leis constitutivas*" expressão 1) que nos conduz ao seguinte valor, para a resistência característica do betão utilizado (ver ponto 2. do capítulo VIII. "*Estudo experimental da viga pré-esforçada*" para justificação de  $f_{cm}$ ):

$$f_{ck,0.05} = 52.23 \text{ MPa}$$

Tendo em conta que os provetes cúbicos sobrestimam a capacidade resistente do betão à compressão, devido ao efeito de confinamento (devido as dimensões do provete), deve-se passar deste valor para os valores representativos de provetes cilíndricos de diâmetro de 15cm e 30cm de altura (EC2). Essa relação, é aproximadamente de:

$$f_{ck,0.05(\text{cilindro})} \cong 0.8 \cdot f_{ck,0.05(\text{cubo})} \quad (1)$$

Obtendo para valor característico (quantilho 5%) da resistência do betão à compressão o seguinte valor:

$$f_{ck,0.05(\text{cilindro})} = 41.79 \text{ MPa}$$

Com este valor, é possível estimar a resistência à tracção do betão, pelas seguintes relações, que se encontram estipuladas no EC2 ponto 3.1.2.3 "Resistência à tracção":

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (2)$$

$$f_{ctk,0.05} = 0.7 \cdot f_{ck} \quad (3)$$

$$f_{ctk,0.95} = 1.3 \cdot f_{ck} \quad (4)$$

Resumindo os valores obtidos num quadro:

Designação	Valor
$f_{cm}(\text{cubo})$ (ENSAIO)	57.23 MPa
$f_{ck,0.05}(\text{cubo})$	52.23 MPa
$f_{ck,0.05}(\text{cilindro})$	41.79 MPa
$f_{ctm}(\text{cilindro})$	3.61 MPa
$f_{ctk,0.05}(\text{cilindro})$	2.53 MPa
$f_{ctk,0.95}(\text{cilindro})$	4.70 MPa

Quantificam-se também o módulo de elasticidade e a resistência do betão sob a acção de cargas elevadas de longa duração:

Resistência média à compressão do betão aos 25 dias	$f_{cm}$ (25dias)= <b>46.79MPa</b>
Resistência característica à compressão do betão aos 25 dias	$f_{ck}$ (25dias)= <b>41.79MPa</b>
Resistência média à tracção do betão aos 25 dias	$f_{ctm}$ (25dias)= <b>3.61MPa</b>
Módulo de elasticidade tangente na origem aos 25 dias	$E_{ci}$ (25dias)= <b>35.32GPa</b>
Módulo de elasticidade secante (0.4 $f_c$ ) aos 25 dias	$E_c$ (25dias)= <b>30.02GPa</b>

Resistência média à compressão do betão aos 25 dias, sob acção de cargas elevadas de longa duração (valor mínimo)	$f_{cm,sus}$ (25-25.9dias)= <b>37.21MPa</b>
Resistência característica à compressão do betão aos 25 dias, sob acção de cargas elevadas de longa duração (valor mínimo)	$f_{ck,sus}$ (25-25.9dias)= <b>32.21MPa</b>
Resistência média à tracção do betão aos 25 dias, sob acção de cargas elevadas de longa duração (valor mínimo)	$f_{ctm,sus}$ (25-25.9dias)= <b>3.04MPa</b>

Observação: As expressões utilizadas para a determinação das características do betão, acima apresentadas, encontram-se no I *"Materiais e leis constitutivas"*

As características acima apresentadas referem-se aos 25 dias de idade, data em que se realizaram ensaios para a caracterização do betão. No entanto, existe a necessidade de conhecer a evolução das características mecânicas do betão ao longo do tempo, para uma correcta avaliação do comportamento da viga, particularmente em determinados ensaios de carga.

No presente trabalho, teremos que ter em conta que para uma idade jovem do betão (inferior aos 28 dias), este quando sujeito a uma acção elevada de longa duração (pré-esforço), a sua resistência média diminui nos primeiros momentos da aplicação da carga, até a um valor mínimo que designamos por,  $f_{cm,sus}(t,t_0)$ , sendo no caso do valor mínimo,  $t_0=t_{critico}$ , na zona de transição entre a placa de ancoragem (onde é aplicado o pré-esforço) e a "primeira" secção suficientemente afastada, onde a hipótese das secções planas após deformação é válida.

O gráfico seguinte apresenta a evolução das características do betão ao longo do tempo, tais como a resistência média do betão,  $f_{cm}(t)$ , a resistência média do betão sob acção de cargas elevadas de longa duração,  $f_{cm,sus}(t,t_0)$ , e o módulo de elasticidade do betão,  $E_{cm}(t)$ , com base no MC-90.

Com esta informação, procede-se de forma mais realista, ao contrário do que é habitual em dimensionamento, que se toma os valores das características mecânicas dos materiais aos 28 dias, ou seja, não se leva em conta a influência do tempo (maturação do betão ao longo do tempo).

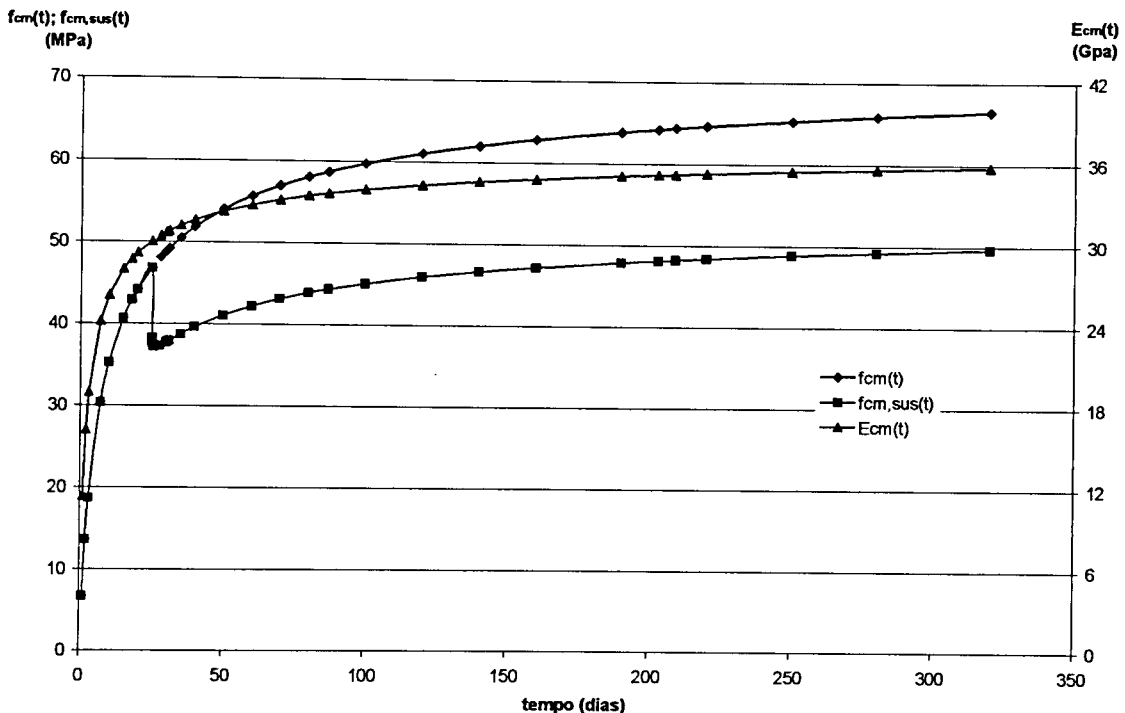


Gráfico 1 – Desenvolvimento ao longo do tempo da resistência do betão à compressão,  $f_{cm,sus}$  e  $f_{cm}$ , e o módulo de elasticidade  $E_{cm}$

Através deste gráfico é perceptível a redução da capacidade resistente do betão (na zona da aplicação do pré-esforço) sob a acção de cargas elevadas de longa duração, bem como o instante temporal onde essa redução atinge o mínimo, atingindo uma redução de cerca de 9.5MPa em valores médios. Este fenómeno não é por si limitativo, o problema pode ser eliminado se o pré-esforço for aplicado por fases, por forma a “contornar” o valor mínimo de resistência.

Destacam-se os valores estimados em instantes particulares da história da viga que correspondem a acontecimentos de carga (ver ponto 3.1.3 “Acontecimentos de carga”)

Instante	Data	$\Delta t$ (desde da data da betonagem) (dias)	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$E_{cm}$ (MPa)
Colocação no pórtico para ensaio	17-12-2001	24	46.78	3.60	30.00
Aplicação do pré-esforço	18-12-2001	25	46.79	3.61	30.02
Aplicação da acção permanente	18-02-2002	87	58.66	4.29	33.62
Descarga da acção permanente	14-06-2002	203	64.20	4.56	35.17
2ª aplicação da acção permanente	20-06-2002	209	64.36	4.57	35.21

## 2. ESTUDO ANALÍTICO

### 2.1 CORRECÇÃO DO VALOR DO PRÉ-ESFORÇO

O valor do pré-esforço determinado em fase de dimensionamento foi calculado para uma resistência do betão teórica de  $f_{ck}=30$  MPa (betão C30/37). Após os ensaios de compressão dos provetes do betão utilizado, chegou-se a um valor de  $f_{ck}=41.79$  MPa para valor característico da resistência do betão à compressão (C40/50). Consequentemente deve-se corrigir os cálculos (valor do pré-esforço a aplicar) de modo a verificar-se o estado limite de formação de fendas (para o betão "in-situ") na fibra superior sob a acção do pré-esforço e peso próprio.

Desse modo, e em tudo análogo ao efectuado anteriormente em dimensionamento tem-se:

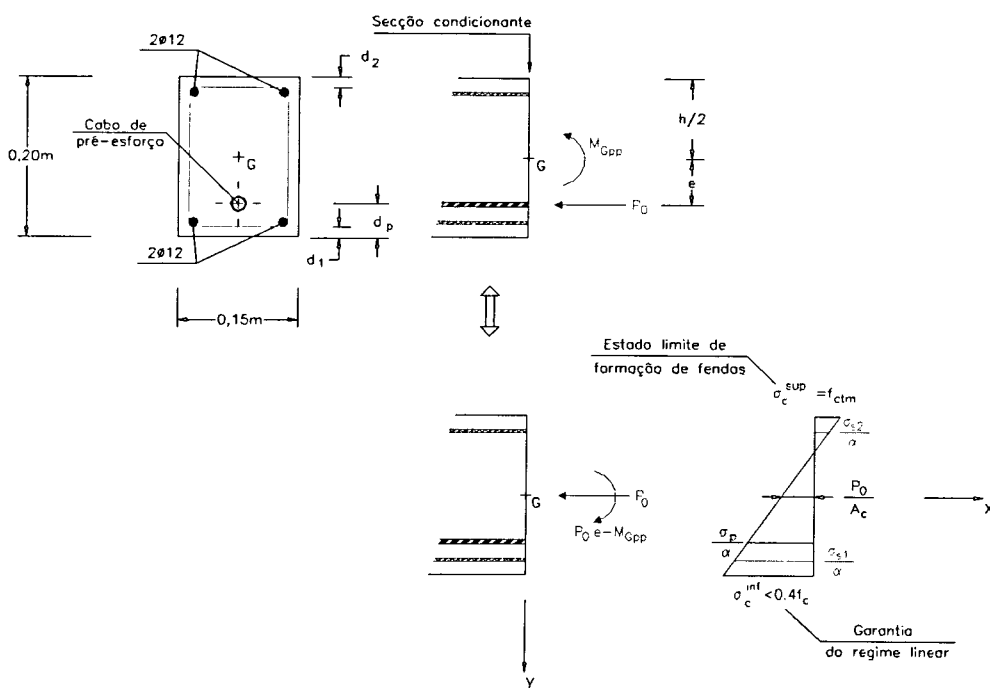


Figura 1 – Estado limite de formação de fendas para a secção condicionante e representação da secção crítica

Trata-se de um problema de flexão composta em regime linear dos materiais (tensões instaladas moderadas e correspondendo a fase elástica dos materiais). Desse modo:

$$\sigma_c^{sup} = -\frac{P_0}{A_c} + \frac{P_0 \cdot e + M_{Gpp}}{I_c} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) \quad (5)$$

Com,

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tensão na fibra superior do betão</li> <li>▪ Área de betão</li> <li>▪ Momento das acções permanentes mobilizadas</li> </ul> | $\left. \begin{aligned} \sigma_c^{sup} &= f_{ctm} = 3.61 \text{ MPa (ensaio)} \\ A_c &= b \cdot h = 0.15 \times 0.20 = 0.03 \text{ m}^2 \\ M_{Gpp} &= (\cong) 0.28 \text{ kN.m} \end{aligned} \right\}$ |
|--|---|

com o pré-esforço (peso próprio)

▪ Excentricidade

$$e = \frac{h}{2} - d_p = \frac{0.20}{2} - 0.043 = 0.057\text{m}$$

▪ Momento de inércia da secção

$$I_c = \left(\cong\right) \frac{b \cdot h^3}{12} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

▪ Altura da viga

$$h = 0.20\text{m}$$

Substituindo na equação 5 as variáveis pelos valores acima definidos, e resolvendo em ordem a  $P_0$ , obtemos o valor máximo para pré-esforço instalado após perdas instantâneas.

$$\begin{aligned} & -\frac{P_{m0}}{A_c} + \frac{P_{m0} \cdot e - M_{Gpp}}{I_c} \cdot \frac{h}{2} = 3610 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{kPa}) \\ \Leftrightarrow & -\frac{P_{m0}}{0.03} + \frac{P_{m0} \cdot 0.057 - 0.28}{1 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0.20}{2} = 3610 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -33.33 \cdot P_0 + (57 \cdot P_0 - 280) = 3610 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \quad \quad \quad \mathbf{P_{m0} = 164.3 \text{ kN}} \end{aligned}$$

## 2.2 NÍVEIS DE TENSÃO NO CABO DE PRÉ-ESFORÇO

Com estes novos valores, e considerando o mesmo cabo de 0.6" anteriormente dimensionado, verifique-se os níveis de tensão instalados e se estes são aceitáveis

$$\begin{aligned} \sigma_{P_0} &= \frac{P_{m0}}{A_p} = \frac{164.9 \cdot 10^{-3}}{1.40 \cdot 10^{-4}} = \\ &= \frac{164.9(\text{kN.m})}{1.40(\text{cm}^2)} \cdot 10 = \\ &= \mathbf{1178 \text{ MPa}} \quad \cong 0.63 \cdot f_{puk} \end{aligned}$$

Verifica os limites impostos pelo EC2

## 2.3 ESTIMATIVA DO COMPRIMENTO DE ESTIRAMENTO DO CABO DE PRÉ-ESFORÇO

Na operação de pré-esforço, o controlo da respectiva força, é efectuada por leitura do estiramento do cabo de pré-esforço, sendo convertida em força, através da lei constitutiva do material e sua secção previamente conhecida. Desse modo, e no caso em concreto, esse estiramento é obtido através da sobreposição de três efeitos:

- ✓ Estiramento por deformação elástica do cabo de pré-esforço,  $\Delta l$
- ✓ Estiramento adicional a aplicar por deformação elástica do betão,  $\Delta l_e$



- ✓ Estiramento adicional por escorregamento das cunhas,  $\Delta l_s$

É de referir que devido ao traçado rectilíneo do cabo e este ser não aderente, as perdas por atrito são praticamente nulas, comparadas com as perdas por deformação do betão e escorregamento dos dispositivos de ancoragem.

De acordo com os cálculos já efectuados, teremos um pré-esforço instalado de:

$$P_{m0} = 164.30 \text{ kN}$$

No entanto é necessário determinar qual o valor da força de pré-esforço a aplicar no cabo na ancoragem activa, tendo em conta:

- ✓ Deformação elástica do betão
- ✓ Escorregamento das cunhas

#### A. DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DO BETÃO, $\Delta l_E$

Para um pré-esforço de 164.3 kN instalados, teremos uma deformação no betão ao longo da viga ao nível da armadura de pré-esforço de:

$$\Delta l_e = \frac{\sigma_c}{E_{c,I}} \cdot l \quad (6)$$

Em que:

$$\sigma_c = -\frac{P_{m0}}{A_c} + \frac{M_G - P_{m0} \cdot e}{I_c} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) \quad (7)$$

Com,

<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Valor do pré-esforço após perdas imediatas</li> <li>▪ Área de betão</li> <li>▪ Momento das acções permanentes mobilizadas com o pré-esforço (peso próprio)</li> <li>▪ Excentricidade</li> <li>▪ Distância do eixo do cabo de pré-esforço à face inferior da viga</li> <li>▪ Momento de inércia da secção da viga</li> <li>▪ Altura da viga</li> </ul>	<p><math>P_{m0} = 164.3 \text{ kN}</math></p> <p><math>A_c = b \cdot h = 0.15 \times 0.20 = 0.03 \text{ m}^2</math></p> <p><math>M_G = (\cong) 0.28 \text{ kN.m}</math></p> <p><math>e = \frac{h}{2} - d_p = \frac{0.20}{2} - 0.043 = 0.057 \text{ m}</math></p> <p><math>d_p = 0.043 \text{ m}</math></p> <p><math>I_c = (\cong) 1 \times 10^{-4} \text{ m}^4</math></p> <p><math>h = 0.20 \text{ m}</math></p>
--	--

Obtendo-se para tensão no betão ao nível da armadura de pré-esforço, por aplicação da expressão "7"

$$\sigma_c = -10.66 \text{ Mpa}$$

Considerando o módulo de elasticidade à idade da aplicação do pré-esforço (25 dias) estimado anteriormente no ponto "1. Caracterização do betão utilizado".

$$E_{c,j} = 30.02 \text{ Gpa}$$

E tendo em conta o comprimento total da viga,  $L=4.11\text{m}$ , resulta para deformação elástica do betão, usando a expressão "6"

$$\Delta l_e = 1.46\text{mm}$$

## B. COMPRIMENTO DE ESCORREGAMENTO DAS CUNHAS, $\Delta L_s$

Além da deformação do betão, deve-se contabilizar um acréscimo da força de pré-esforço na secção de ancoragem activa por forma, a que após o escorregamento dos dispositivos de ancoragem, fiquem instalados na viga os 164.3kN pretendidos.

Um valor corrente, e que se considera para os cálculos é de:

$$\Delta l_s = 5\text{mm}$$

Em termos de força de pré-esforço tem-se:

$$P_o = P_{m0} + \left( \frac{\Delta l_s}{l} \cdot E_p \right) \cdot A_p \quad (8)$$

Com,

▪ Valor do pré-esforço após perdas imediatas	$P_{m0} = 164.3\text{kN}$
▪ Comprimento de escorregamento das cunhas	$\Delta l_s = 5\text{mm}$
▪ Modulo de elasticidade do cabo de pré-esforço	$E_p = 195\text{Gpa}$
▪ Área da secção transversal do cabo de pré-esforço	$A_p = 1.40\text{cm}^2$
▪ Comprimento total da viga	$l = 4.11\text{m}$

Substituindo na expressão "8", chega-se a um valor de pré-esforço na secção de ancoragem imediatamente antes da transferência para o betão de:

$$P_o = 197.5 \text{ kN}$$

## C. DEFORMAÇÃO TOTAL, $\Delta L_T$

Contabiliza-se também a deformação do cabo de pré-esforço, para uma força instalada de 164.3kN. O comprimento total é a informação que o operador da aplicação do pré-esforço necessita de conhecer previamente.

A deformação do cabo é expressa por:

$$\Delta l_{T, inicial} = \frac{P_0 \cdot l}{A_p \cdot E_p} + \Delta l_o + \Delta l_{s,a} + \Delta l_{s,p} \quad (9)$$

Com,

▪ Valor do pré-esforço após perdas imediatas	$P_{m0} = 164.3 \text{ kN}$
▪ Comprimento total da viga	$l = 4.11 \text{ m}$
▪ Modulo de elasticidade do cabo de pré-esforço	$E_p = 195 \text{ Gpa}$
▪ Área da secção transversal do cabo de pré-esforço	$A_p = 1.40 \text{ cm}^2$
▪ Deformação elástica do betão	$\Delta l_e = 1.46 \text{ mm}$
▪ Escorregamento das cunhas (ancoragem activa)	$\Delta l_{s,a} = 5 \text{ mm}$
▪ Escorregamento das cunhas (ancoragem passiva)	$\Delta l_{s,p} = 3 \text{ mm}$

\* Este escorregamento na ancoragem passiva verifica-se devido ao ajustamento dos dispositivos de ancoragem ao cabo enquanto a operação de pré-esforço decorre, estimando-se em 3mm o seu valor (translação do cabo na direcção da aplicação do pré-esforço)

Resultando,

$$\Delta l_{T, inicial} = 34.16 \text{ mm}$$

No entanto, após a reentrada das cunhas, a variação de comprimento do cabo é:

$$\Delta l_{T, final} = \Delta l_{T, inicial} - \Delta l_{s,a} \quad (10)$$

$$\Delta l_{T, final} = 29.16 \text{ mm}$$

## 2.4 VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DA ZONA DE ANCORAGEM

Atendendo ao facto de que se procedeu à correcção do valor do pré-esforço, tendo este aumentado, deve-se verificar a estabilidade da zona de ancoragem para este novo valor de pré-esforço, verificando se as armaduras de tracção, bem como a pressão localizada junto à placa de ancoragem, satisfazem os critérios de segurança.

De acordo com o MC-90, a pressão máxima admissível na placa de ancoragem no caso de um estado triaxial é de:

$$f_{cc}^* = f_{cc} \cdot \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad (11)$$

$$f_{cc} = f_{cd, sus} = 24.8 \text{ MPa (acção elevada de longa duração)}$$

$$A_1 = 0.08 \cdot 0.08 = 0.0064 \text{ m}^2$$

$$A_2 = (0.03 + 0.08 + 0.03) \cdot 0.15 = 0.0210 \text{ m}^2$$

$$f_{cc}^* = 45 \text{ MPa}$$

Como a placa de ancoragem tem 8cm x 8cm, a força máxima aplicável será de:

$$P_{\text{máx}} = 288 \text{ kN} (\cong 1.46 \cdot P_0)$$

Tem-se assim uma verificação da compressão localizada assegurada, já que o pré-esforço na origem será de 197.5kN como valor máximo (ocorre durante segundos)

Numa zona mais profunda, desenvolvem-se forças de tracção no plano perpendicular à direcção do pré-esforço, que se manifestam numa dada largura, devendo esta zona ser convenientemente dimensionada com armaduras sob a forma de estribos.

Tratando-se de um dimensionamento, considere-se os valores característicos dos materiais e uma majoração do valor da acção do pré-esforço em 25%.

De acordo com MC-90:

$$F_{\text{tx}} = 0.3 \cdot N \cdot \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \right) \quad (12)$$

$$F_{\text{ty}} = 0.3 \cdot N \cdot \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \quad (13)$$

$$N = 1.25 \cdot P'_0 = 1.25 \cdot 197.5 = 247 \text{ kN}$$

$$b_1 = 0.08 \text{ m}$$

$$b_2 = 0.15 \text{ m}$$

$$h_1 = 0.08 \text{ m}$$

$$h_2 = 0.086 \text{ m}$$

$$F_{\text{tx}} = 34.6 \text{ kN}$$

$$F_{\text{ty}} = 5.2 \text{ kN}$$

O betão por si só nas direcções x e y consideradas resiste até a um nível de tensões de:

$$\text{Direcção y} \quad F_{\text{cx}} = f_{\text{ctd}} \cdot 0.6 \cdot b_2 \cdot h_1 = 17.3 \text{ kN} \quad (14)$$

$$\text{Direcção x} \quad F_{\text{cy}} = f_{\text{ctd}} \cdot 0.6 \cdot b_1 \cdot h_2 = 9.9 \text{ kN} \quad (15)$$

De acordo com as armaduras colocadas aquando a sua concepção:

$$F_{\text{tRx}} = A_{\text{s,x}} \cdot f_{\text{syd}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{\text{tRx}} = 2 \cdot 0.57 \cdot 10^{-4} \cdot 204 \cdot 10^3 + 2 \cdot 0.57 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{\text{tRx}} = 72.8 \text{ kN} \quad \Leftrightarrow$$

Pode-se considerar que as tracções que se desenvolvem aquando da aplicação do pré-esforço, estão controladas.

Como a acção do pré-esforço é excêntrico, temos que garantir a materialização do modelo escoras-tirantes idealizado que traduz o comportamento do elemento nessa zona. Para isso, falta-nos garantir a materialização de um tirante paralelo ao plano das cargas e à face da viga.

De acordo com o REBAP, artº 140.2:

$$F_{to} = F \left( \frac{e}{a} - \frac{1}{6} \right) \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} F = 1.25 \cdot P'_0 = 1.25 \cdot 197.5 = 247 \text{ kN} \\ e = 0.057 \text{ m} \\ a = 0.20 \text{ m (altura da viga)} \end{array} \right\}$$

$$F_{to} = 29.2 \text{ kN}$$

Esta força terá que ser garantida por um tirante, que será materializado pelos varões longitudinais que dobram junto à face da viga ( $2\phi 12$ ). Nesse caso, a resistência máxima por este assegurado é de:

$$F_{IRD} = 435 \cdot 10^3 \cdot \left( 2 \cdot 1.13 \cdot 10^{-4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{IRD} = 98.3 \text{ kN}$$

Garante-se deste modo a materialização e funcionamento adequado do modelo idealizado para esta zona.

### 3. CÁLCULO NUMÉRICO

#### 3.1 ANÁLISE INSTANTÂNEA NO TEMPO

Com o recurso a um programa de cálculo (anexo II “Programa de cálculo automático”), baseado em métodos de análise não linear material no que respeita à previsão das suas características em função de parâmetros físicos como o tempo, temperatura e humidade relativa (MC-90), procede-se a uma análise do elemento de viga por via numérica, em determinados instantes temporais, que correspondem a “acontecimentos de carga”.

Apresenta-se de seguida, o esquema representativo do elemento de viga (constituído por elementos finitos), e resultados do programa de cálculo utilizado, para os diferentes acontecimentos de carga.

#### A. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Tendo em conta que a viga está equipada com extensómetros em secções perfeitamente definidas, os elementos são escolhidos criteriosamente, para que obtenha resultados nessas mesmas secções, para confrontação dos resultados numéricos com os resultados obtidos experimentalmente. (Anexo VIII “Estudo experimental da viga pré-esforçada”)

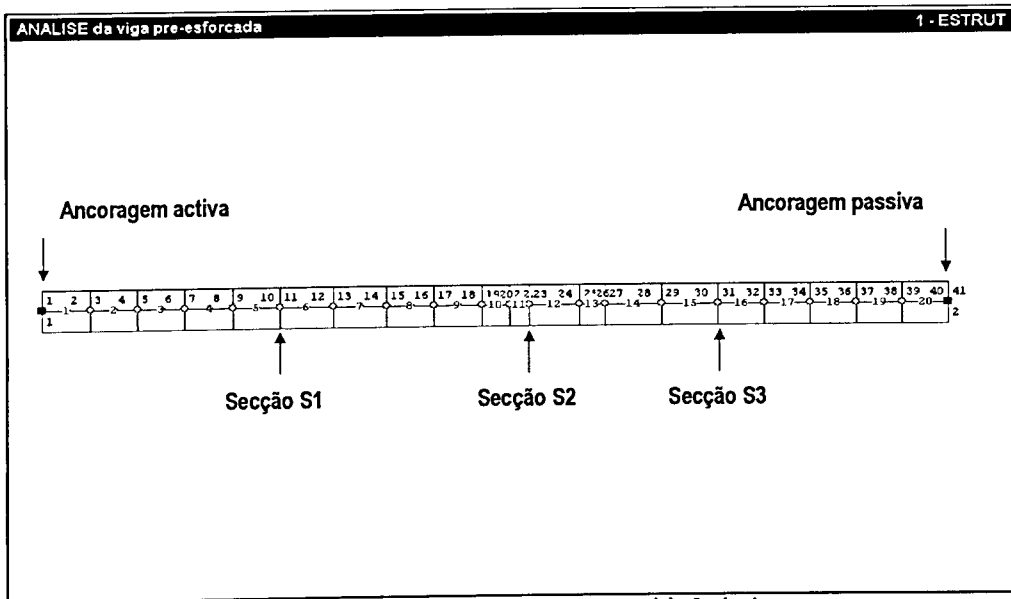


Figura 2 – Modelo de elementos finitos para modelação da viga

#### B. FICHEIRO DE DADOS DO MODELO

Através de um ficheiro de dados, procede-se à identificação e quantificação de todos os elementos de entrada necessários para o cálculo numérico.

Apresenta-se de seguida, o ficheiro de dados utilizado para o estudo da aplicação do pré-esforço, de salientar, que para os outros casos de carga, se procede à elaboração de um

ficheiro de dados semelhante, em que apenas se "actualizam" certos campos como as características do betão e casos de carga.

```

=====
TITULO =====[DADOS0]=
  Analise da viga pre-esforçada: Aplicação do pre-esforço (PE)
=====
DADOS GERAIS =====
      IANLG IANLM IVPRO NFASE ISOLO
          0   1   0   1   0
      NDG2D NTPIX NNODE NALGO NGAUS IGLOB NREST
          3   1   3   2   2   0   0
=====
FASE 1 =====[DADOS1]=
  NAPOI NALEM NAFIX/NRSOL NAMAT NCARG NAPIX NOUTP TOLER
    41   20   2         1   1   1   1   1.0D-2
-----
COORDENADAS DOS NOS -----[DADOS2]-
      IPOIN      COORDX      COORDY
  (Ancoragem activa) => 1      .000000      0.00000000
                        2      .103600      0.00000000
                        3      .207200      0.00000000
                        4      .310800      0.00000000
                        5      .414400      0.00000000
                        6      .518000      0.00000000
                        7      .621600      0.00000000
                        8      .725200      0.00000000
                        9      .828800      0.00000000
                       10     0.932400      0.00000000
  (Secção S1) => 11     1.086000      0.00000000
                        12     1.152000      0.00000000
                        13     1.268000      0.00000000
                        14     1.384000      0.00000000
                        15     1.500000      0.00000000
                        16     1.603400      0.00000000
                        17     1.706700      0.00000000
                        18     1.810000      0.00000000
                        19     1.913300      0.00000000
                        20     1.975000      0.00000000
                        21     2.036700      0.00000000
                        22     2.078350      0.00000000
  (Secção S2) => 23     2.120000      0.00000000
                        24     2.229000      0.00000000
                        25     2.338000      0.00000000
                        26     2.394000      0.00000000
                        27     2.450000      0.00000000
                        28     2.573800      0.00000000
                        29     2.697500      0.00000000
                        30     2.821300      0.00000000
  (Secção S3) => 31     2.945000      0.00000000
                        32     3.045500      0.00000000
                        33     3.146000      0.00000000
                        34     3.246500      0.00000000
                        35     3.347000      0.00000000
                        36     3.447500      0.00000000
                        37     3.548000      0.00000000
                        38     3.648500      0.00000000
                        39     3.749000      0.00000000
                        40     3.849500      0.00000000
  (Ancoragem passiva) => 41     3.950000      0.00000000
  
```

LIGACOES AO EXTERIOR						
	NOFIX	IFFIX's		FIXED's		
	1	0	1	1	.0	.0
	41	0	1	0	.0	.0
CARACTERISTICAS DO ACO E BETAO						[DADOS3]
YOUNA	EPSLY	YOUN2	EPSA2	YOUN3	EPSA3	
200.0D6	2.5D-3	22.22D6	4.000D-3	22.22D6	1.0D-1	
-----1.74D-3-----31.80D6--3.375D-3---5.58D6-20.0D-3-----						
fcm	fctm	EPSCP	EPSCU	EPSTU	Beta	Ec
-46.79D3	3.61D3	-2.0D-3	-3.5D-3	2.5D-3	0.6D0	30.02D6
-----						
SECCOES TIPO						
MAT.	BASE	ALTURA	A1	A2	d1	d2
1	.15D0	.20D0	2.26D-4	2.26D-4	0.025	0.025
IDENTIFICACAO DOS NOS E MATERIAL DOS ELEMENTOS						
	IELEM	LNODS			MATERIAL	
	1	1	2	3	1	
	2	3	4	5	1	
	3	5	6	7	1	
	4	7	8	9	1	
	5	9	10	11	1	
	6	11	12	13	1	
	7	13	14	15	1	
	8	15	16	17	1	
	9	17	18	19	1	
	10	19	20	21	1	
	11	21	22	23	1	
	12	23	24	25	1	
	13	25	26	27	1	
	14	27	28	29	1	
	15	29	30	31	1	
	16	31	32	33	1	
	17	33	34	35	1	
	18	35	36	37	1	
	19	37	38	39	1	
	20	39	40	41	1	
SOLICITACAO 1						
	NDIST	IPPRO	NNLOD	ISAIIF (0/1)		
	0	0	2	0		
	IELEM	CARGA				
	IPOIN	MOMENTO	FORCY	FORCX		
(Solicitação) ⇒	1	-0.057D0	0.0D0	1.0D0		
	41	0.057D0	0.0D0	-1.0D0		
DEFINICAO DOS FACTORES DE CARGA						
		NINCS	NITER			
		24	100			
	NUMERO DE INCREMENTOS	COM ESTE PESO				
	19	10.00D0				
	1	7.50D0				
	1	3.50D0				
	2	-10.00D0				
	1	-8.60D0				
QUANTAS COLORACOES EM QUE INCREMENTOS						
PREPARA A SAIDA DE RESULTADOS PARA O GRAFICO						
IQUAL = 1	(Diag. P-delta)	No	Desloc.	No	Forca	
IQUAL = 2	(Diag. M-curv.)	Elem.	Deform.	No	Tensao	
1		11	2	1	3	
1		23	2	1	3	
1		31	2	1	3	



### C. ACONTECIMENTOS DE CARGA

São abordados no âmbito do presente trabalho quatro acontecimentos de carga, os quais induziram à estrutura deformações instantâneas, e alterações no seu estado de tensão.

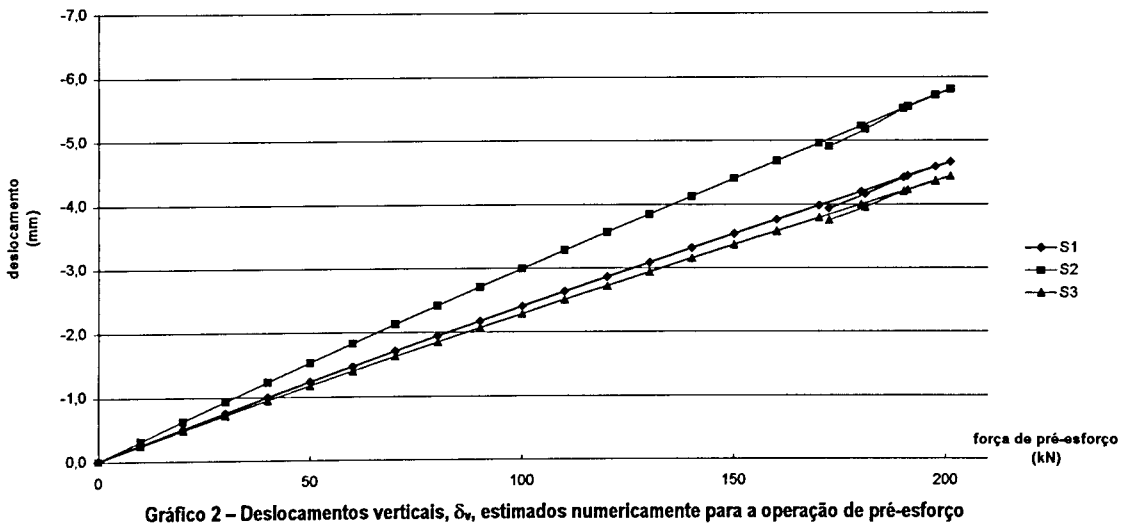
O quadro seguinte apresenta de forma organizada esses acontecimentos de carga por ordem cronológica.

Acontecimento	Data	Idade do betão
Aplicação do pré-esforço ( $t_0$ )	18 de Dezembro de 2001	25
Aplicação da acção permanente ( $t_1$ )	18 de Fevereiro de 2002	87
Descarga da acção permanente ( $t_2$ )	14 de Junho de 2002	203
Segunda aplicação da acção permanente ( $t_3$ )	20 de Junho de 2002	209

Observação: As características mecânicas e de deformabilidade do betão, encontram-se apresentadas no ponto 1. "Caracterização do betão utilizado"

#### Aplicação do pré-esforço ( $t_0=25$ dias)

Após execução do programa, com os dados anteriores definidos (ficheiro de dados), obtiveram-se os seguintes resultados:



Do gráfico apresentado, salientam-se os seguintes valores para deslocamentos verticais finais, que correspondem ao valor do pré-esforço máximo experimentado pela viga,  $P_0$ , e ao pré-esforço máximo instalado após perdas imediatas,  $P_{m0}$ .

Valor do pré-esforço na ancoragem	Deslocamentos verticais (mm) (contra-flecha)		
	$\delta_v(S1)$	$\delta_v(S2)$	$\delta_v(S3)$
$P_0=201\text{kN}$	-4.66	-5.81	-4.43
$P_{m0}=172.4\text{kN}$	-3.93	-4.91	-3.74

O programa de cálculo fornece a deformada, com a representação do modelo de elementos finitos adoptada (figura 3). É de salientar, que esta informação ajuda a verificar se o procedimento de cálculo foi correcto (malha de elementos finitos bem definida, pontos de Gauss, tipo de deformada obtida, continuidade da linha da deformada).

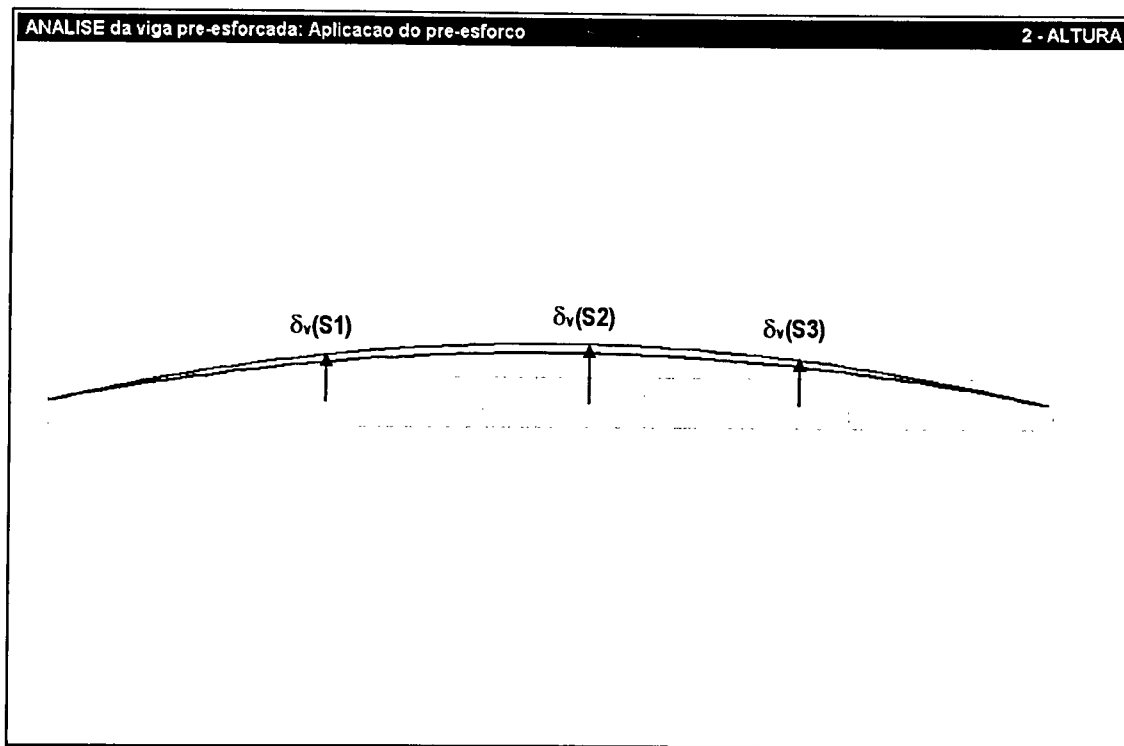


Figura 3 – Deformada prevista pelo programa de cálculo “FEMPOR”

Tendo em conta que estamos em regime elástico linear dos materiais (válido o princípio da sobreposição dos efeitos), ao nível das secções monitorizadas, as variações de extensões e tensões estimadas, devido à aplicação do pré-esforço, são as seguintes:

### SECÇÃO S1, S2 e S3

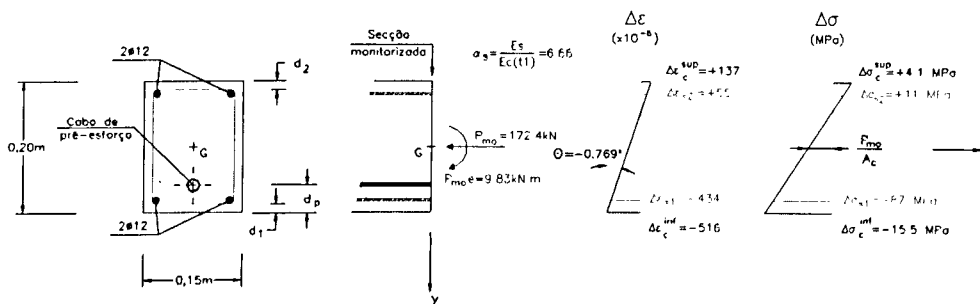


Figura 4 – Variação do estado de tensão nas secções monitorizadas devido à aplicação do pré-esforço (PE)

### Aplicação da acção permanente ( $t_1=87$ dias)

De forma análoga ao efectuado para o instante de aplicação do pré-esforço, após a introdução do ficheiro de dados com os dados referentes à acção permanente (AP) e as características do betão aquela idade obtiveram-se para variações dos deslocamentos verticais nas secções monitorizadas os seguintes valores:

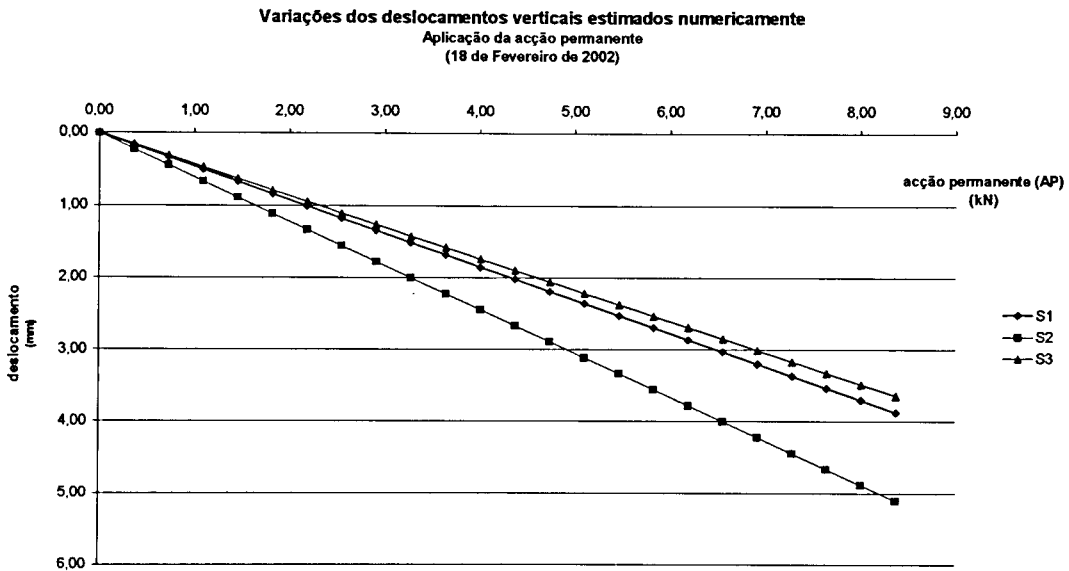


Gráfico 3 – Deslocamentos verticais,  $\delta_v$ , estimados numericamente devido à aplicação da acção permanente (AP)

Do gráfico apresentado, salientam-se os seguintes valores para variação dos deslocamentos verticais finais nas secções monitorizadas:

Variação dos deslocamentos verticais após aplicação da acção permanente (mm)		
$\delta_v(S1)$	$\delta_v(S2)$	$\delta_v(S3)$
+3.88	+5.11	+3.65

Atendendo a que o valor da acção permanente aplicada foi tal que mantém os materiais em regime elástico, as variações de tensões e extensões experimentadas pelas três secções monitorizadas foram as seguintes:

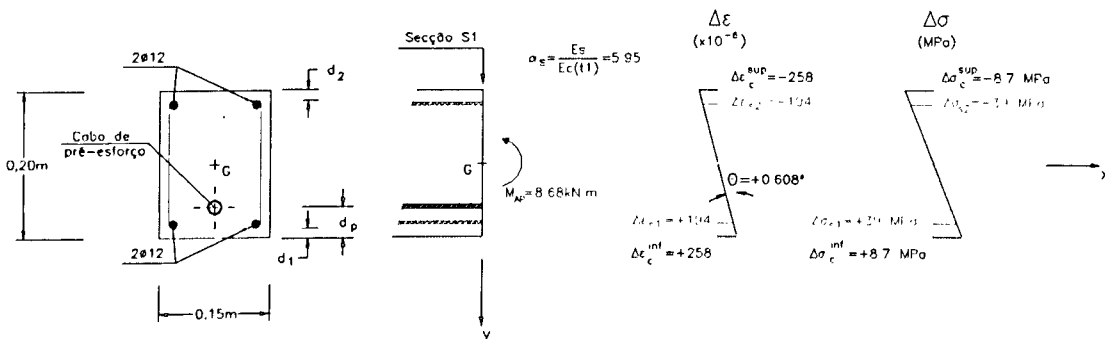


Figura 5 – Variação do estado de tensão da secção S1 devido à aplicação da acção permanente (AP)

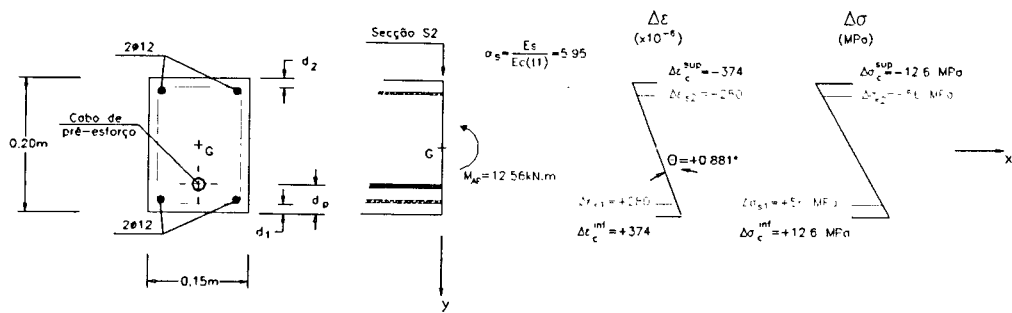


Figura 6 – Variação do estado de tensão da seção S2 devido à aplicação da ação permanente (AP)

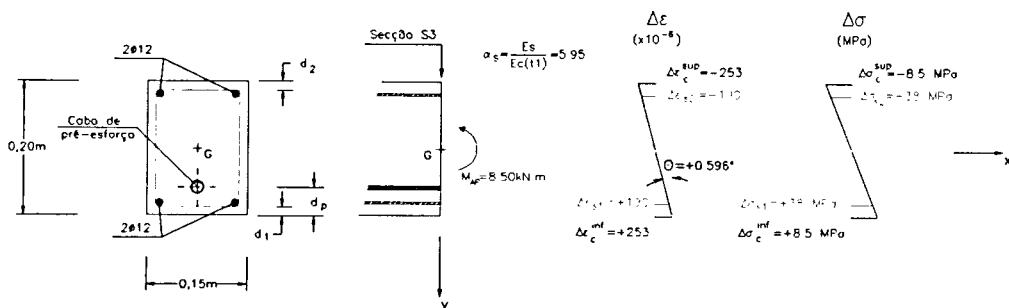


Figura 7 – Variação do estado de tensão da seção S3 devido à aplicação da ação permanente (AP)

### Ciclo Descarga e carga da ação permanente ( $t_2=203$ dias, $t_3=209$ dias)

Com esta simulação, pretende-se avaliar o comportamento da estrutura a um ciclo de carga e descarga, intervalado por um período de tempo muito curto (por forma a que os fenómenos diferidos no tempo sejam desprezáveis, logo, as características do betão não se alterem significativamente da descarga para a carga).

Através do programa de cálculo estimou-se para as flechas nas três seções consideradas:

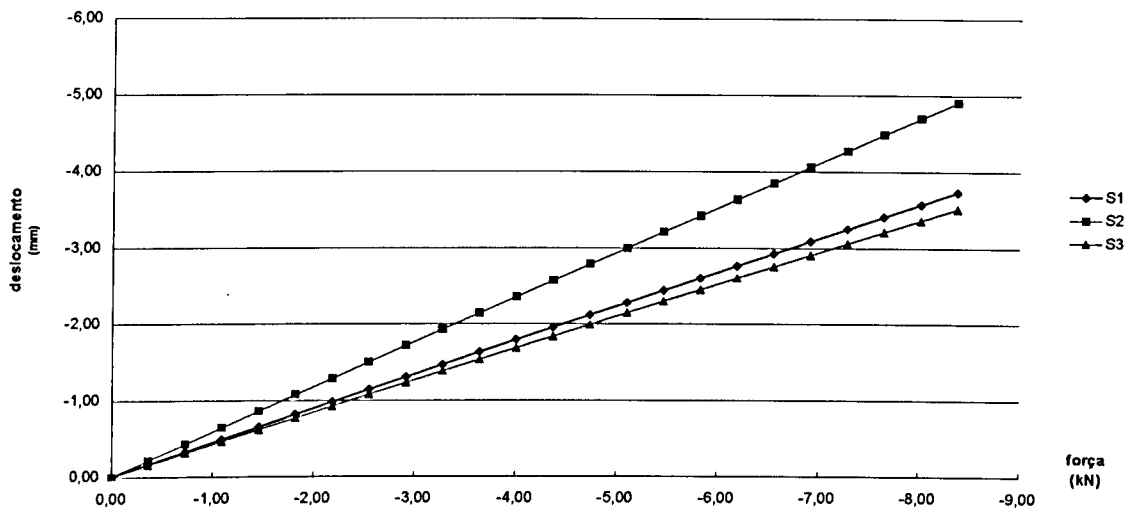


Gráfico 4 – Deslocamentos verticais,  $\delta_v$ , estimados numericamente devido à descarga da ação permanente (AP)

Do gráfico apresentado, salientam-se os seguintes valores para variação dos deslocamentos verticais finais nas secções monitorizadas:

Variação dos deslocamentos verticais após descarga da acção permanente		
$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
-3.73	-4.91	-3.51

Se para a aplicação da acção permanente, o regime linear dos materiais foi verificado, então para a descarga, também o regime linear dos materiais é válido. Registrando-se para variações de tensões e extensões nas três secções:

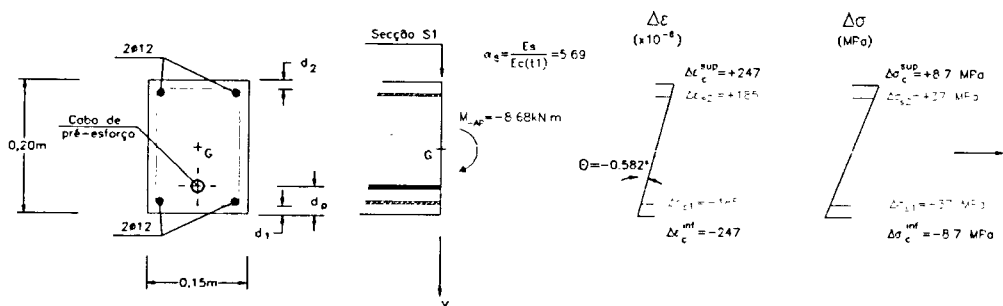


Figura 8 – Variação do estado de tensão da secção S1 devido à descarga da acção permanente (AP)

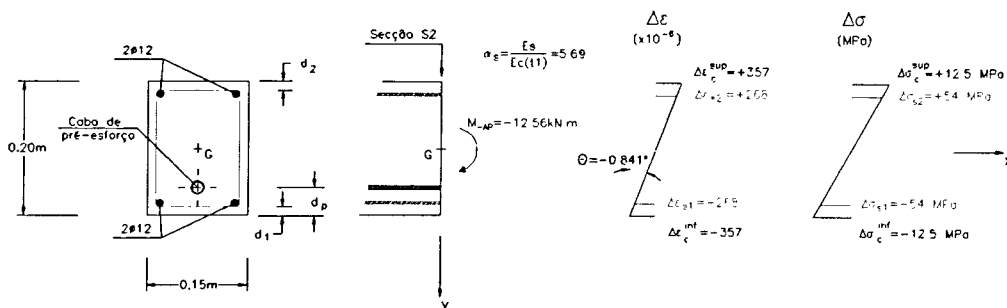


Figura 9 – Variação do estado de tensão da secção S2 devido à descarga da acção permanente (AP)

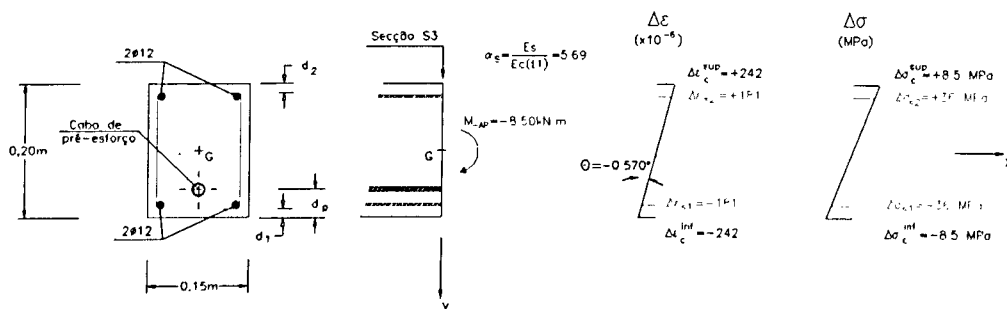


Figura 10 – Variação do estado de tensão da secção S3 devido à descarga da acção permanente (AP)

Após quatro dias, foi reposta a acção permanente. Atendendo ao período curto de intervalo entre a descarga e carga, é de esperar que os deslocamentos sejam bastante semelhantes. Isto porque as características do betão não se alteram significativamente (período de tempo curto).

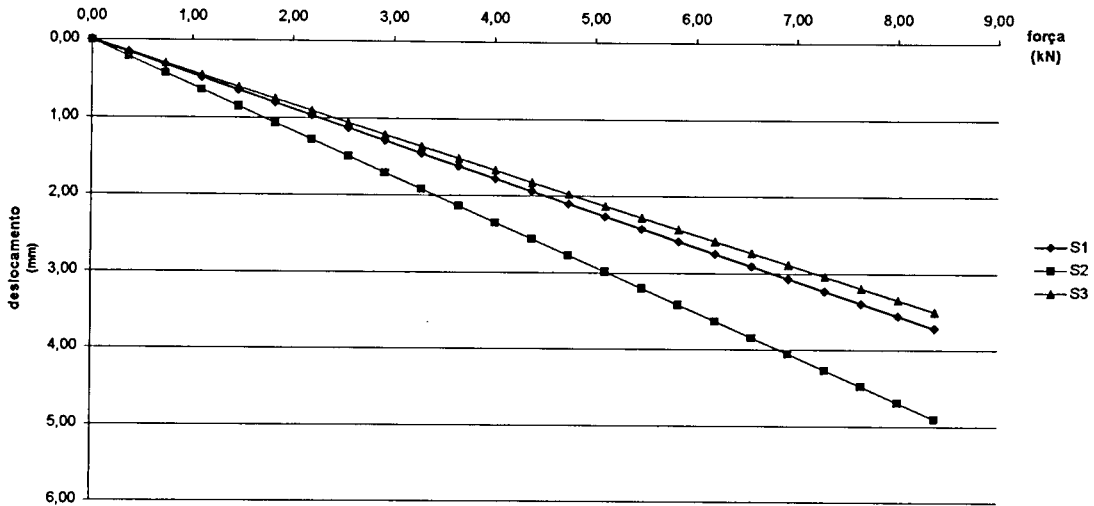


Gráfico 5 – Deslocamentos verticais,  $\delta_v$ , estimados numericamente devido à segunda aplicação da acção permanente (AP)

Do gráfico apresentado, salientam-se os seguintes valores para variação dos deslocamentos verticais finais nas secções monitorizadas:

Variação dos deslocamentos verticais após 2ª aplicação da acção permanente (mm)		
$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
+3.72	+4.90	+3.50

As variações de tensões e extensões experimentadas pelas três secções em estudo são praticamente as experimentadas na descarga da acção permanente (compare-se as figuras 11, 12, 13 com as figuras 8, 9, 10 da descarga respectivamente).

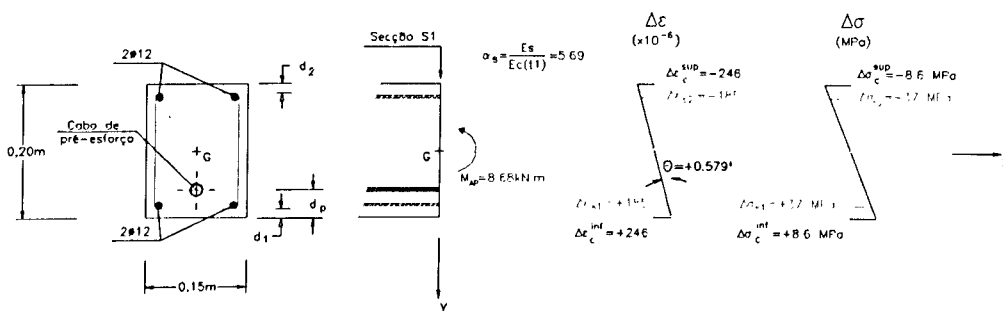


Figura 11 – Variação do estado de tensão da secção S1 devido ao 2º carregamento da acção permanente (AP)

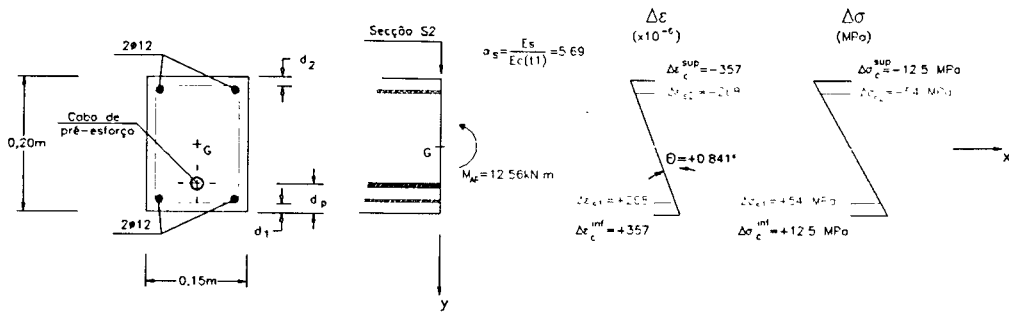


Figura 12 – Variação do estado de tensão da seção S2 devido ao 2º carregamento da ação permanente (AP)

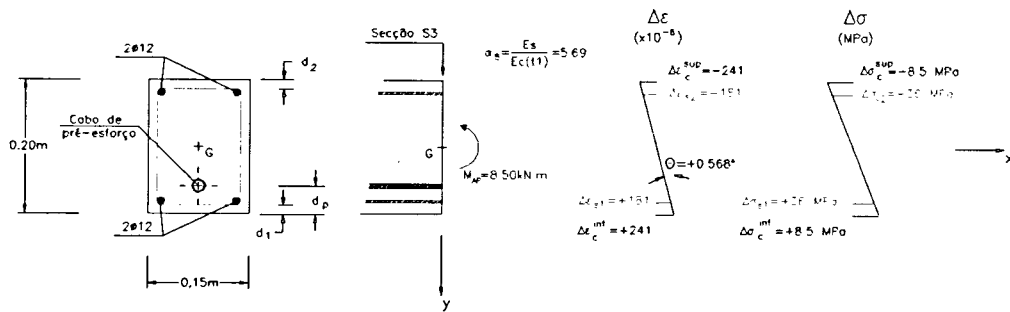


Figura 13 – Variação do estado de tensão da seção S3 devido ao 2º carregamento da ação permanente (AP)

## VIII. ESTUDO EXPERIMENTAL DA VIGA PRÉ-ESFORÇADA

1. GENERALIDADES	VIII.1
2. CARACTERIZAÇÃO DO BETÃO	VIII.1
3. FORÇA INSTALADA NO CABO DE PRÉ-ESFORÇO	VIII.3
4. ANÁLISE INSTANTÂNEA NO TEMPO	VIII.4
4.1. Aplicação do pré-esforço (P)	VIII.4
4.2. Aplicação da acção permanente ( $G_1$ )	VIII.7
4.3. Ciclo descarga e carga da acção permanente	VIII.10



## VIII. ESTUDO EXPERIMENTAL DA VIGA PRÉ-ESFORÇADA

### 1. GENERALIDADES

Uma das vertentes deste trabalho consiste na avaliação comparativa entre a abordagem numérica (com recurso a programa de calculo automático) e uma abordagem experimental. Através da comparação de resultados, avalia-se e confirmam-se leis teóricas para o comportamento estrutural. No âmbito deste trabalho, aborda-se o comportamento instantâneo e em regime linear dos materiais.

Como se referiu anteriormente, a viga encontra-se monitorizada em três secções perfeitamente definidas, com extensómetros de embeber no betão e colar no aço, bem como por LVDT's nos instantes de acontecimento de cargas, para registo de deslocamentos verticais nas referidas secções (figura 1).

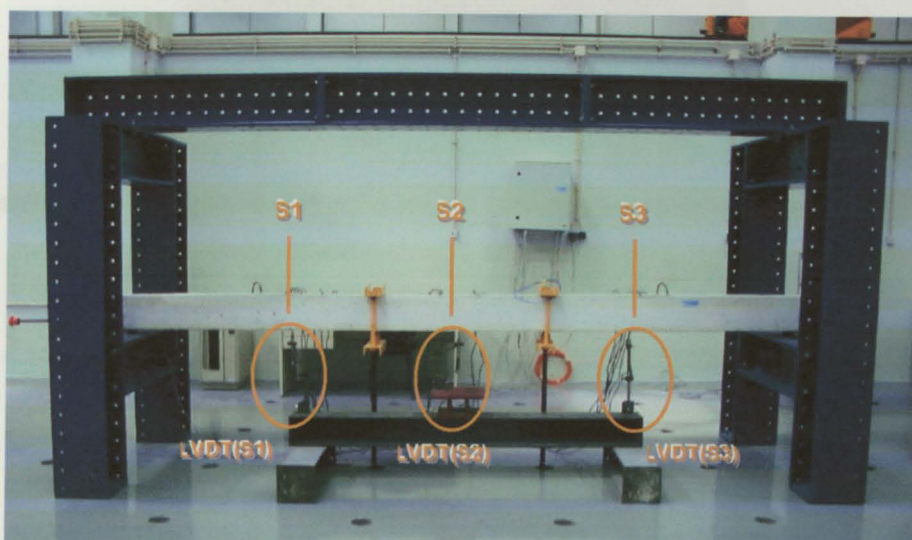


Figura 1 – Secções monitorizadas

À semelhança do estudo numérico, aborda-se o comportamento da estrutura para a operação de pré-esforço, aplicação da acção permanente, ciclo descarga-carga.

### 2. CARACTERIZAÇÃO DO BETÃO

De acordo com a norma Portuguesa “ENV 206” (1993), o critério de conformidade para a resistência à compressão do betão, procede-se à determinação da resistência à compressão do betão:

De acordo com o “Critério 2” (ponto 11.3.5.4), através dos resultados de três ensaios sobre três amostras, com as resistências:  $x_1$ ;  $x_2$ ;  $x_3$ . A resistência de uma amostra deve ser o resultado do ensaio de um provete ou a média dos resultados quando se moldam dois ou mais provetes de uma amostra. A resistência, em MPa, deve satisfazer as seguintes condições:

$$\bar{X}_3 \geq f_{ck} + 5 \quad (1)$$

$$\bar{X}_{\min} \geq f_{ck} + 1 \quad (2)$$

Foram ensaiados quatro provetes de uma amostra do betão utilizado.

As dimensões dos provetes eram 15cmx15cmx15cm, **betonados a 23 de Novembro de 2001, e ensaiados a 18 de Dezembro de 2001**, correspondendo a 25 dias de idade.



Figura 2 – Ensaio de cubos de betão à compressão

Após ensaio das amostras (levadas até à rotura), obtivemos os seguintes valores:

Provete	Massa	Resistência máxima
1	7,918 kg	54.5 MPa
2	8,079 kg	43.6 MPa
3	7.968 kg	56.2 MPa
4	8,017 Kg	61.0 MPa

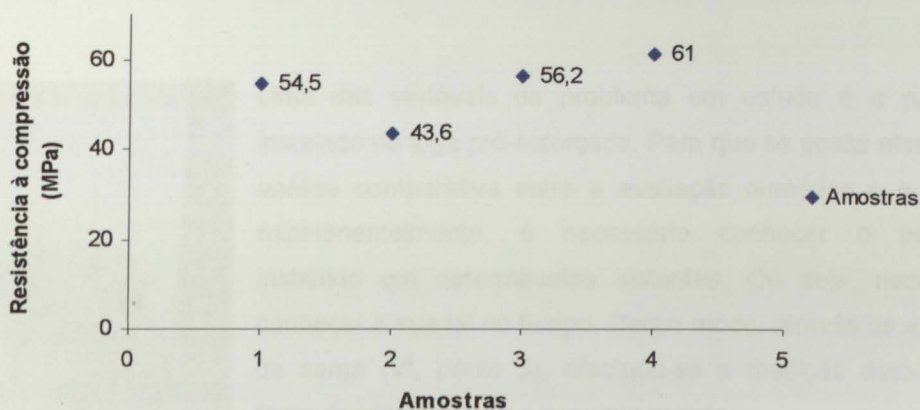


Gráfico 1 – Resultados do ensaio de provetes cúbicos à compressão



Figura 3 – Provetes após ensaio à compressão

Das amostras ensaiadas, verificou-se que a amostra nº2 representa um valor atípico, visto que sendo o provete com maior massa do conjunto (logo mais denso pois todas as amostras possuem as mesmas dimensões) seria de esperar que este tivesse um valor de resistência superior aos restantes provetes. Além de isso não se verificar, é aquele que apresenta o valor mais baixo, e com uma diferença significativa relativamente à media dos restantes três provetes (57.23MPa).

Deste modo, considerando apenas as amostras nº 1, 3, e 4, obtemos para resistência média dos cubos de betão:

$$f_{cm} = \bar{X}_3 = 57.23\text{MPa}$$

### 3. FORÇA INSTALADA NO CABO DE PRÉ-ESFORÇO



Uma das variáveis do problema em estudo é o pré-esforço instalado na viga pré-esforçada. Para que se possa efectuar uma análise comparativa entre a avaliação numérica e o registado experimentalmente, é necessário conhecer o pré-esforço instalado em determinados instantes. Ou seja, necessito de conhecer a sua lei no tempo. Desse modo, através de uma célula de carga (VI, ponto 5), efectuou-se a medição dessa mesma força, tendo-se obtido o seguinte registo:

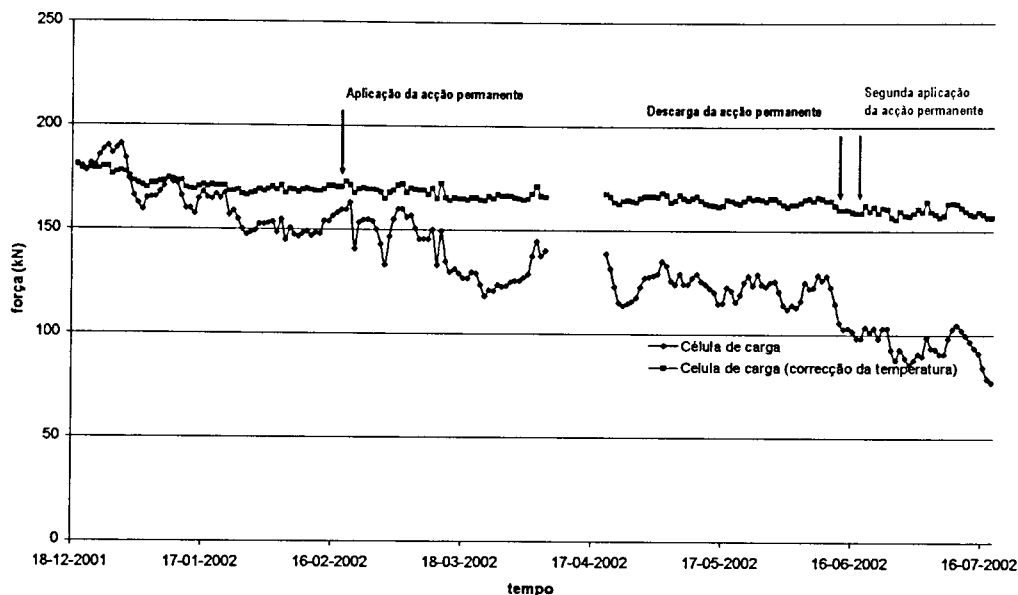


Gráfico 2 – Registo da força instalada na célula de carga (registos diários às 6h)

Destacam-se os seguintes valores, que correspondem a instantes de acontecimento de cargas. Estes valores são importantes, já que nos fornecem os esforços produzidos pelo pré-esforço, que através do conhecimento das características mecânicas do betão (resistência e deformabilidade) permite conhecer as tensões instaladas no betão devido ao pré-esforço.

Instante	Data	P (kN)
Aplicação do pré-esforço	18-12-2001	172.4
Aplicação da acção permanente	18-02-2001	170.4
Descarga da acção permanente	14-06-2002	158.7
2ª aplicação da acção permanente	20-06-2002	158.7

## 4. ANÁLISE INSTANTÂNEA NO TEMPO

### 4.1 APLICAÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO (18 de Dezembro de 2001)

A aplicação do pré-esforço foi efectuada 25 dias após a betonagem da viga. As características mecânicas e de deformabilidade foram determinadas através do ensaio de cubos de betão à mesma data (ponto 2, “Caracterização do betão”).

A operação de pré-esforço foi efectuada com a colaboração da ENGIL, a qual disponibilizou equipamento e técnicos especializados para a realização da operação.

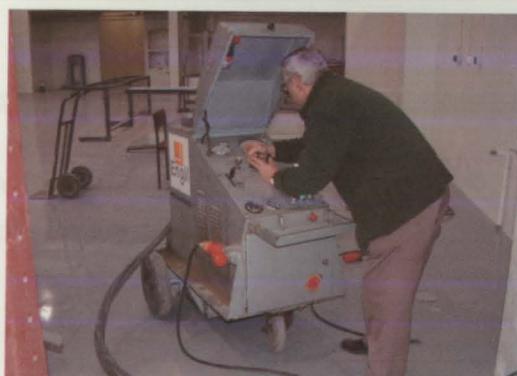
Apresentam-se de seguida algumas fotografias que descrevem sumariamente a operação de pré-esforço realizada.



a) Colocação das cunhas



b) Após colocação e ajuste para a aplicação do pré-esforço



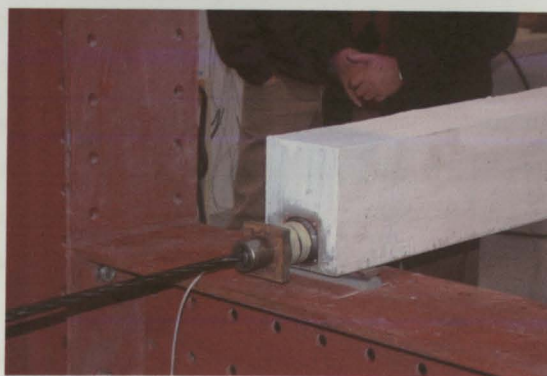
c) Máquina que aplica o pré-esforço



d) Colocação do macaco



e) Aplicação do pré-esforço



f) Após o fim da operação de pré-esforço

Durante a fase de aplicação do pré-esforço, a viga foi gradualmente submetida um estado de flexão composta, com os materiais a funcionarem no seu regime elástico linear (tensões moderadas), à excepção das zonas perto das ancoragens (cargas pontuais que conduzem a tensões elevadas).

Através da célula de carga (V - "Equipamento de monitorização; Célula de carga"), obteve-se o seguinte registo para a força de pré-esforço, durante a operação de pré-esforço.

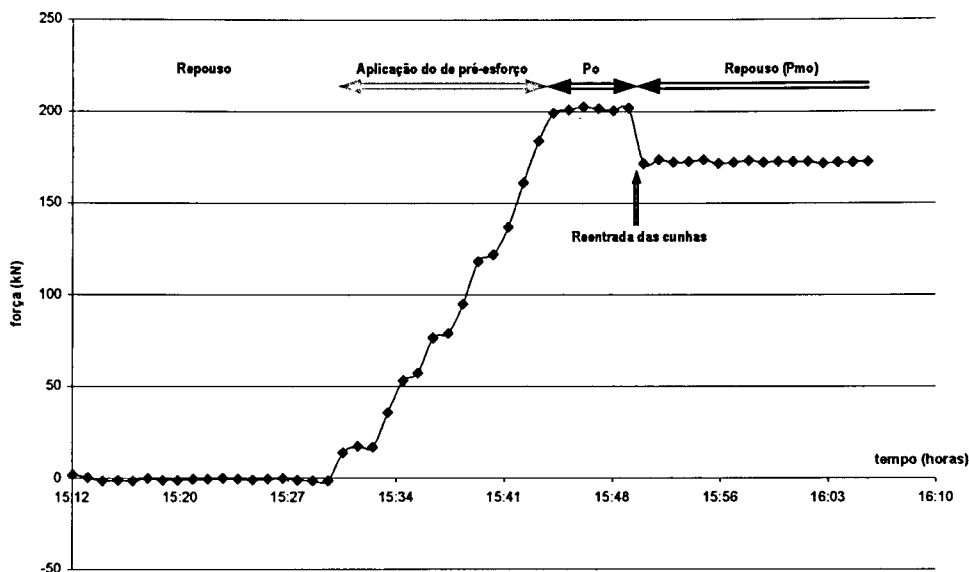


Gráfico 3 – Registo da força instalada na célula de carga durante a operação de pré-esforço

Verificando-se que os valores de pré-esforço máximo antes da reentrada das cunhas,  $P_0$ , e após perdas imediatas,  $P_{m0}$ , foi de:

Valor do pré-esforço medidos na célula de carga
$P_0=201\text{kN}$
$P_{m0}=172.4\text{kN}$

Através dos extensómetros colocados na viga, nas três secções já referidas anteriormente, foi possível obter as deformações nas fibras que distam de 1.9cm das faces superior e inferior (desenho de execução). Atendendo ao facto que o nível de tensões não ultrapassa  $0.40f_{ck}$ , o betão, bem como as armaduras, funcionam no seu regime elástico, sendo a relação entre deformações e tensões linear.

Desse modo, foram registados os seguintes valores para deformações (desenhos de monitorização):

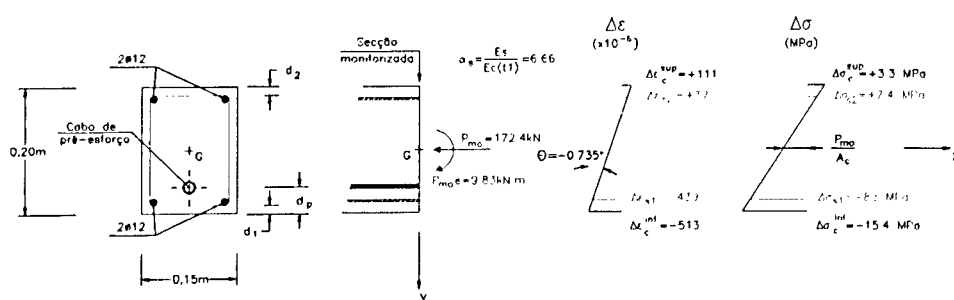


Figura 4 – Variação do estado de tensão na secção S1 devido à aplicação do pré-esforço (PE)

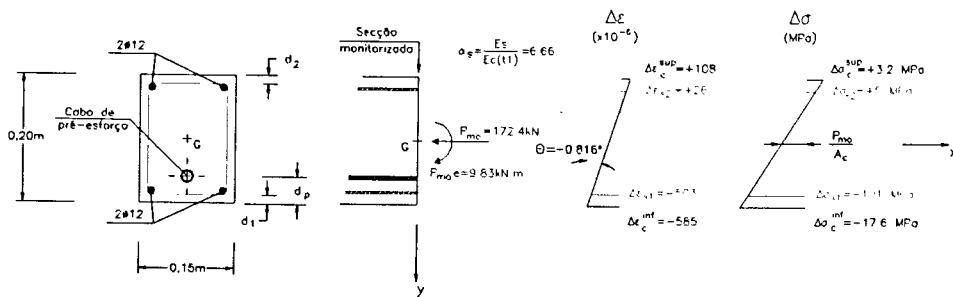


Figura 5 – Variação do estado de tensão na secção S2 devido à aplicação do pré-esforço (PE)

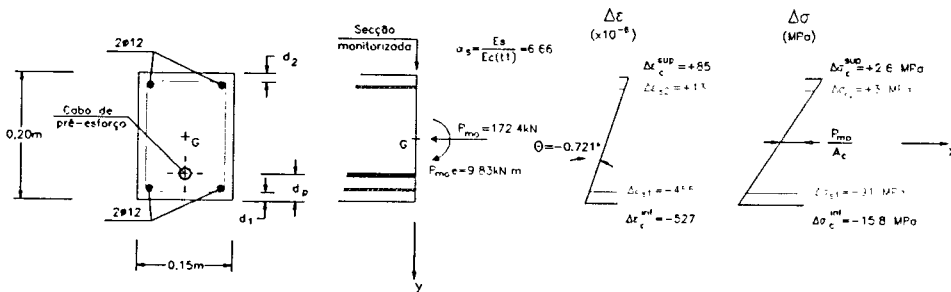


Figura 6 – Variação do estado de tensão na secção S3 devido à aplicação do pré-esforço (PE)

Como é óbvio, ao contrário do que obtivemos no cálculo numérico, as três secções monitorizadas apresentam deformações distintas umas das outras. Isto deve-se ao facto do betão ser um material compósito, em que as suas propriedades variam de ponto para ponto, ao contrário do que é considerado no cálculo numérico, onde se idealiza um material homogéneo com propriedades iguais em qualquer ponto.

Para deslocamentos verticais finais nas secções monitorizadas, obtiveram-se os seguintes valores (desenhos de monitorização):

Valor do pré-esforço na ancoragem	Deslocamentos verticais (mm) (contra-flecha)		
	$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
$P_0=201\text{kN}$	-5.4	-7.3	-5.3
$P_{m0}=172.4\text{kN}$	-4.8	-6.6	-4.7

#### 4.2 APLICAÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE (18 de Fevereiro de 2002)

A aplicação da acção permanente foi efectuada 87 dias após a betonagem da viga. No período entre a aplicação do pré-esforço e a acção permanente, a viga esteve em “repouso”, sem qualquer tipo de solicitação, apenas estando sujeita a fenómenos diferidos no tempo.

A acção permanente foi materializada por um sistema de pratos suspensos em varões, em que estes por sua vez foram “amarrados” à viga por um sistema de suporte. A acção consiste na colocação de 44 lingotes de chumbo com um peso médio de 38.8kgf, correspondendo a uma solicitação de 854.1kgf em cada prato.



Figura 7 – Acção permanente (lingotes de chumbo)

O Laboratório de Estruturas da FEUP possui uma laje maciça de 60cm de espessura com orifícios de 10cm de diâmetro, permitindo que o sistema de cargas a aplicar à viga fosse como ilustra a figura 8:



↑ Piso 0

↓ Piso -1

Figura 8 – Sistema usado para materialização da acção permanente



A acção permanente considerada, contraria o efeito do pré-esforço, melhor, o pré-esforço contraria o efeito da acção permanente, sendo que a "reserva" provocada pelo efeito do pré-esforço, permite que, para a grandeza da acção permanente considerada, os materiais respondam na sua fase linear. Algo que não seria possível se não existisse o pré-esforço, ou seja, ter-se-ia fendilhação (uma das utilidades do pré-esforço).

À semelhança do obtido para a aplicação do pré-esforço, os extensómetros registaram os seguintes valores para deformações nas três secções monitorizadas (desenhos de monitorização):

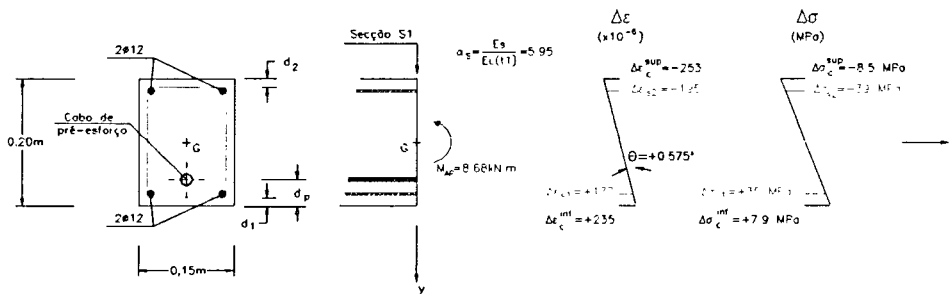


Figura 9 – Variação do estado de tensão na seção S1 devido à aplicação da acção permanente (AP)

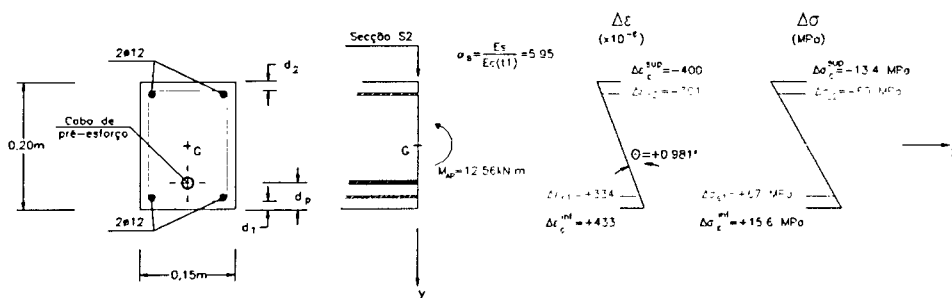


Figura 10 – Variação do estado de tensão na seção S2 devido à aplicação da acção permanente (AP)

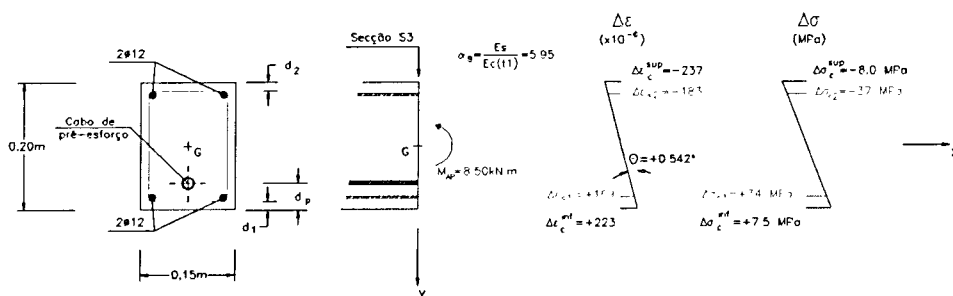


Figura 11 – Variação do estado de tensão na seção S3 devido à aplicação da acção permanente (AP)

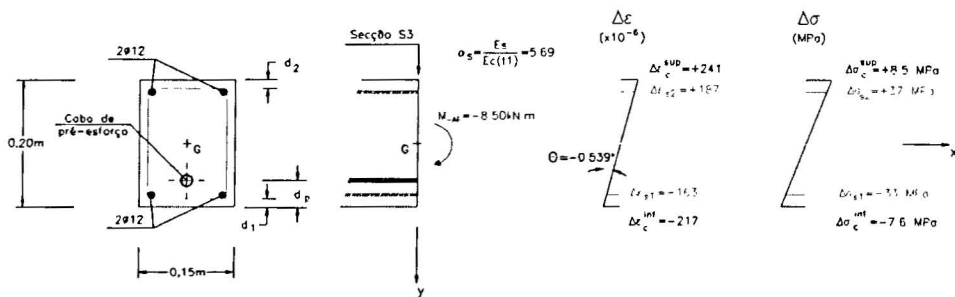
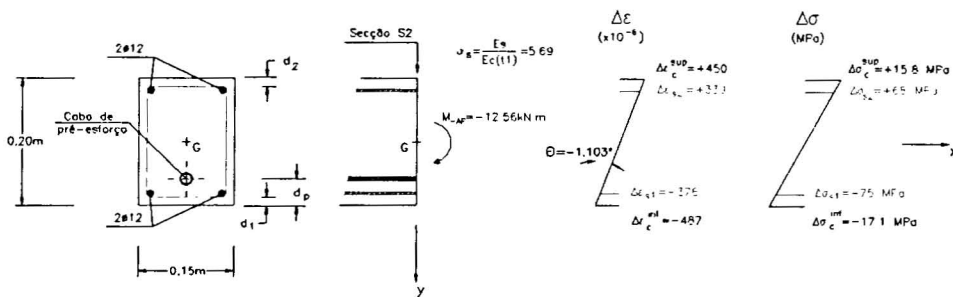
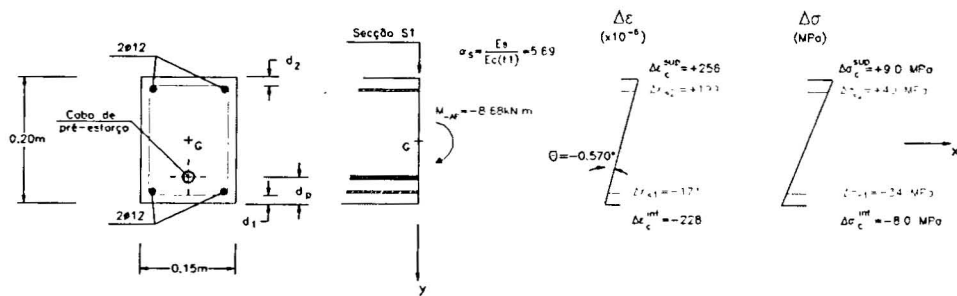
Os deslocamentos verticais finais medidos pelos LVDT's nas secções S1, S2 e S3 foram os seguintes (desenhos de monitorização):

Variação dos deslocamentos verticais após aplicação da acção permanente (mm)		
$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
+5.0	+6.9	+4.8

### 4.3 CICLO DESCARGA E CARGA DA ACÇÃO PERMANENTE (14 de Junho de 2002 e 20 de Junho de 2002)

O ensaio de descarga e carga foi efectuado sobre a viga aos 203 e 209 dias respectivamente. Pretende-se avaliar a resposta da estrutura, e verificar o comportamento linear dos materiais. Como o intervalo de tempo entre a descarga e a carga foi curto, é de afirmar que os fenómenos diferidos associados ao betão não têm expressão significativa, sendo que, em regime linear, a descarga será o “simétrico” da carga.

Em tudo semelhante ao efectuado para os anteriores acontecimentos de carga, as deformações finais registadas pelos extensómetros nas secções S1, S2 e S3 foram:



Tendo-se registado os seguintes valores para deslocamentos verticais finais, nas secções monitorizadas:

Variação dos deslocamentos verticais após descarga da acção permanente (mm)		
$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
-4.6	-6.3	-4.3

Na segunda aplicação da acção permanente, obtiveram-se os seguintes resultados para deformações nas secções monitorizadas:

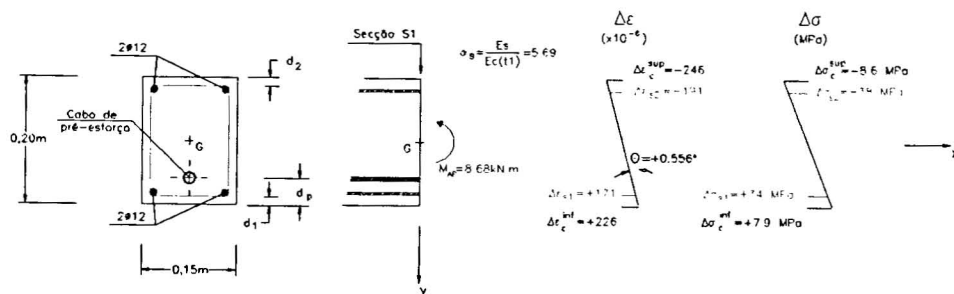


Figura 15 – Variação do estado de tensão na secção S1 devido à aplicação da acção permanente (AP)

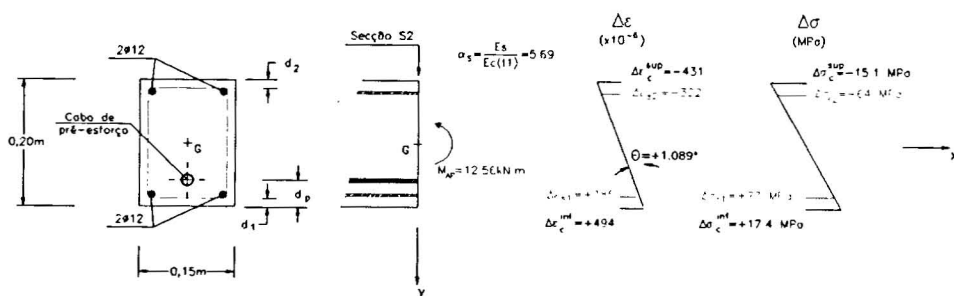


Figura 16 – Variação do estado de tensão na secção S2 devido à aplicação da acção permanente (AP)

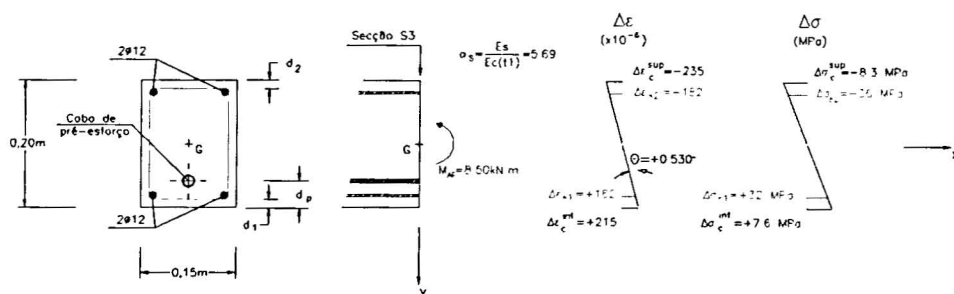


Figura 17 – Variação do estado de tensão na secção S3 devido à aplicação da acção permanente (AP)

Os deslocamentos verticais finais medidos pelos LVDT's foram os seguintes nas secções S1, S2 e S3:

Variação dos deslocamentos verticais após 2ª aplicação da acção permanente		
(mm)		
$\delta v(S1)$	$\delta v(S2)$	$\delta v(S3)$
+4,6	+6,3	+4,3

## **IX. ESTUDO E AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DIFERIDO DO BETÃO**

<b>1. GENERALIDADES</b>	<b>IX.1</b>
<b>2. MODELOS DE COMPORTAMENTOS (EC2 CORRIGIDOS)</b>	<b>IX.1</b>
<b>2.1. RETRACÇÃO</b>	<b>IX.1</b>
<b>2.2. FLUÊNCIA</b>	<b>IX.2</b>
<b>3. PRISMAS COMPENSADORES</b>	<b>IX.3</b>
<b>3.1. RETRACÇÃO</b>	<b>IX.4</b>
<b>3.2. FLUÊNCIA</b>	<b>IX.6</b>
<b>4. VIGA</b>	<b>IX.8</b>
<b>4.1. GENERALIDADES</b>	<b>IX.8</b>
<b>4.2. DEFORMAÇÕES POR RETRACÇÃO</b>	<b>IX.9</b>
<b>4.3. DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA</b>	<b>IX.11</b>
<b>4.4. DEFORMAÇÕES INSTANTÂNEAS</b>	<b>IX.13</b>
<b>4.5. DEFORMAÇÕES TOTAIS (AVALIAÇÃO COMPARATIVA)</b>	<b>IX.13</b>

## IX. ESTUDO E AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DIFERIDO DO BETÃO

### 1. GENERALIDADES

O betão é um material em constante evolução nas suas propriedades mecânicas. Se bem que grande parte da sua resistência é atingida ao fim dos 28 dias, as suas propriedades modificam-se continuamente ao longo do tempo. O seu envelhecimento implica um contínuo aumento de rigidez (modulo de elasticidade), bem como a sua capacidade resistente. Fenómenos como a retracção e fluência tornam o estudo do betão como material estrutural ainda mais complexo, com deformações contínuas ao longo do tempo, além das provocadas instantaneamente por aplicação de cargas.

A avaliação das deformações por efeitos diferidos e sua comparação com as deformações instantâneas causadas pelas solicitações a que está sujeito, é de extrema importância, dado que a experiência em obras de betão armado evidenciar que as deformações por efeitos diferidos são uma parte significativa da deformação total. Em estruturas pré-esforçadas assume ainda maior relevo, dado que estas deformações lentas no tempo induzem geralmente perdas nos cabos de pré-esforço, agravando desse modo ainda mais as deformações.

Pretende-se deste modo, através do auxílio dos prismas compensadores de retracção e fluência, avaliar as deformações sofridas pelo modelo de viga.

Com esse objectivo, é utilizado os modelos do EC2 corrigidos (devido às condições próprias deste trabalho) para a retracção e fluência, cruzando com os registos experimentais de modo a obter um resultado coerente.

### 2. MODELOS DE COMPORTAMENTO

Os modelos adoptados para tradução analítica dos fenómenos da retracção e fluência devem ter em consideração a maturidade continua do betão. O EC2 no Anexo I, propõem modelos matemáticos para a retracção e fluência, sendo que em certos pormenores onde este é omissivo se aplique o MC-90.

#### 2.1 RETRACÇÃO

Como já foi apresentado no I "*Materiais e leis constitutivas*", o EC2 no Anexo I parte 1.1, propõem um modelo multiplicativo de dois factores em que um deles traduz o valor da extensão por retracção a tempo infinito,  $\epsilon_{cs0}$ , e um outro que traduz a evolução do fenómeno ao longo do tempo,  $\beta_s(t-t_s)$ . A expressão que permite assim estimar as extensões de retracção (ou de expansão) é dada por:

$$\epsilon_{cs}(t-t_s) = \epsilon_{cs0} \cdot \beta_s(t-t_s) \quad (1)$$

$\epsilon_{cs0}$  – Extensão nominal de retracção

$\beta_s(t-t_s)$  – Coeficiente temporal

$t$  – Idade do betão no instante em estudo (dias)

$t_s$  – Idade do betão em que se inicia o fenómeno de retracção (dias)

Devido ao facto de a retracção depender de múltiplos factores, alguns deles não contemplados no EC2, o resultado das deformações por retracção obtidas por aplicação directa deste modelo matemático, pode diferir significativamente do valor real. Surge assim a necessidade de ajustar a curva proposta pelo EC2, aos valores de facto experimentados pelo elemento. Isto pode ser conseguido através da correcção do valor da retracção a tempo infinito ( $\epsilon_{cs0}$ ) e do seu desenvolvimento no tempo ( $\beta_s(t-t_s)$ ) (Santos, 2001). Nesta metodologia as expressões da extensão nominal da retracção e do coeficiente que define o desenvolvimento da retracção no tempo são dadas por:

$$\epsilon_{cs0} = \epsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \cdot C_1 \quad (2)$$

$$\beta_s(t-t_s) = \left[ \frac{(t-t_s)}{0.035 \cdot h_0^2 + t-t_s} \right]^{0.5} \cdot C_2 \quad (3)$$

Em que “ $C_1$ ” é o coeficiente de ajuste do valor da retracção a tempo infinito, e “ $C_2$ ” é o coeficiente de ajuste do desenvolvimento no tempo do fenómeno, as restantes variáveis têm o significado expresso no EC2.

Ou seja, através da minimização das diferenças entre o registo experimental e a curva teórica corrigida, posso obter os parâmetros “ $C_1$ ” e “ $C_2$ ” que satisfaçam essa minimização.

## 2.2 FLUÊNCIA

De acordo com o EC2 o coeficiente de fluência é definido como a relação entre a deformação de fluência e a deformação elástica aos 28 dias de idade, calculada com  $E_{c(28d)}$ , e em analogia com o fenómeno da retracção, a sua determinação assenta num modelo multiplicativo de dois factores, um dos quais traduz o valor que o coeficiente de fluência terá a longo prazo,  $\phi_0$ , e um outro que traduz a evolução no tempo do fenómeno,  $\beta_c(t-t_0)$ . A expressão que o EC2 propõe é a seguinte:

$$\Phi(t-t_0) = \Phi_0 \cdot \beta_c(t-t_0) \quad (4)$$

$\Phi_0$  – Coeficiente nominal de fluência

$\beta_c(t-t_0)$  – Coeficiente temporal

$t$  – Idade do betão no instante em estudo (dias)

$t_0$  – Idade do betão à data do carregamento (dias)

Também a fluência depende de vários factores como a retracção, e também alguns deles não considerados no EC2. Devido a esse facto, também para a fluência é possível efectuar uma correcção aos resultados experimentais através de dois coeficientes de ajuste (Santos, 2001). Um deles que corrige o valor do coeficiente de fluência a tempo infinito e outro que ajusta o desenvolvimento do fenómeno ao longo do tempo. Deste modo, as expressões propostas pelo EC2 para a fluência ficam:

$$\Phi_0 = \Phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \cdot C_3 \quad (5)$$

$$\beta_c(t-t_0) = \left[ \frac{(t-t_0)}{\beta_H + t-t_0} \right]^{0.3} \cdot C_4 \quad (6)$$

Em que "C<sub>3</sub>" é o coeficiente de ajuste do valor do coeficiente de fluência a tempo infinito, e "C<sub>4</sub>" é o coeficiente de ajuste do seu desenvolvimento no tempo, sendo que os restantes parâmetros têm o mesmo significado estipulado no EC2.

Ou seja, o mesmo que se disse para a retracção é possível efectuar para as deformações por fluência. Com os coeficientes de ajuste "C<sub>3</sub>" e "C<sub>4</sub>" é possível ajustar a curva teórica do EC2 aos registos experimentais. A particularidade deste procedimento, é o facto de tomar em conta factores que o modelo do EC2 não aborda, de forma indirecta através dos coeficientes de ajuste, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, e C<sub>4</sub>.

### 3. PRISMAS COMPENSADORES



Figura 1 – Prismas compensadores de retracção (esq.) e de fluência (dir.)

Com o objectivo de caracterizar os fenómenos da retracção e fluência do betão foram executados um prisma de retracção e um outro de fluência (figura 1), com dimensões 15x15x55 (cm). Equipados cada um, com um extensómetro de embeber no betão alinhados segundo a maior dimensão. Estes ligados a um sistema de aquisição, vão permitir obter um registo de deformações ao longo do tempo, devidas apenas aos fenómenos que se pretende caracterizar, ou seja, a fluência e a retracção. Sendo que o prisma de fluência também vai estar sujeito a retracção, no entanto, através do prisma de retracção é possível "retirar" a componente de deformação por retracção no prisma de fluência. Deve-se salientar, que para que estes elementos sejam representativos, é necessário garantir que estejam nas mesmas condições que a viga.

Para a aplicação dos modelos expostos no EC2, é necessário caracterizar devidamente o betão, bem como outros factores designadamente ambientais, tais como a temperatura e humidade relativa. Desse modo resume-se:

### A. DADOS GERAIS

Data de betonagem		23-11-2001
Materiais:	Betão	$E_{c,28}=30.02\text{GPa}$
	Tipo de cimento	$s=0.38$
	Aço	$E_s=200\text{GPa}$

### B. DADOS COMPLEMENTARES

#### Fluência

Data de carregamento	$t_0=25$ dias
Humidade relativa	HR=60%
Resistência média do betão (28 dias)	$f_m=48.06$
Secção do prisma	$A_c=0.0225\text{m}^2$
Perímetro	$u=0.60\text{m}$
Espessura equivalente	$h_0=75\text{mm}$

#### Retracção

Data do início da retracção	$t_s=14$ dias
-----------------------------	---------------

### 3.1. PRISMA DE RETRACÇÃO

O prisma de retracção, foi betonado à mesma data da viga, que se manteve no molde coberto por plástico (por forma a retardar o mais possível a evaporação da água para se ter um betão de melhor qualidade) até 07 de Dezembro de 2001. Deste modo, e através dos registos obtidos, a retracção teve início 14 dias após a betonagem ( $t_s$ ). Esse registo, em micro-deformações ( $\mu\text{m}$ ) foi o seguinte:

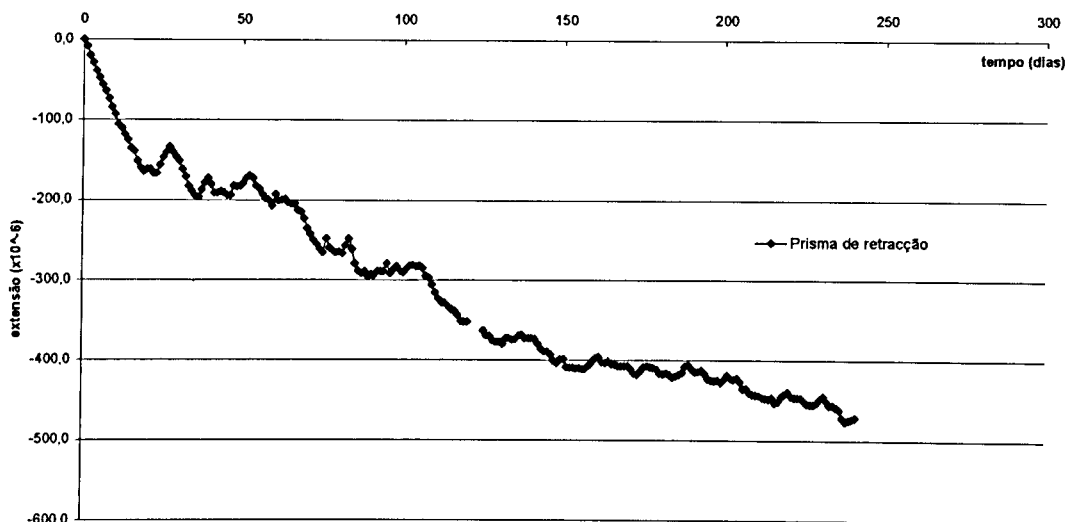


Gráfico 1 – Extensões sofridas pelo prisma de retracção ( $t_s=14$  dias)



Aplicando o modelo do EC2, sem qualquer tipo de correcção, ou seja, considerando os coeficientes de correcção,  $C_1$  e  $C_2$ , iguais a 1, obtém-se o seguinte resultado:

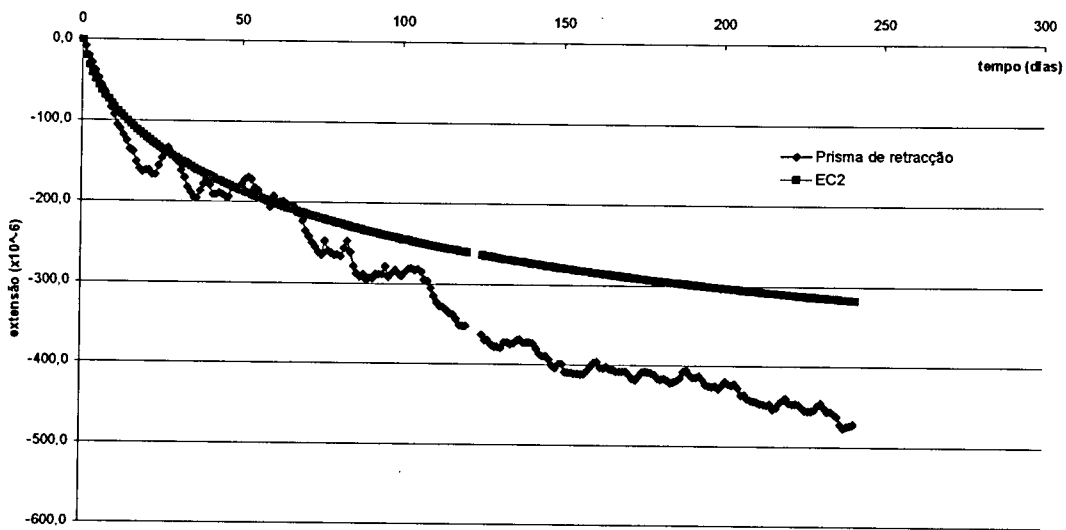


Gráfico 2 – Deformações por retracção (experimental e modelo do EC2)

Verificando-se que se comete um desvio sensivelmente de 32% menos do que realmente se regista. É perceptível no modelo do EC2 um desenvolvimento da retracção mais lento e com menor significância, do que aquela experimentada. Deste modo, justifica-se o ajuste da curva do EC2 através dos coeficientes  $C_1$  e  $C_2$ .

Procedendo à minimização das diferenças, obtém-se o seguinte resultado:

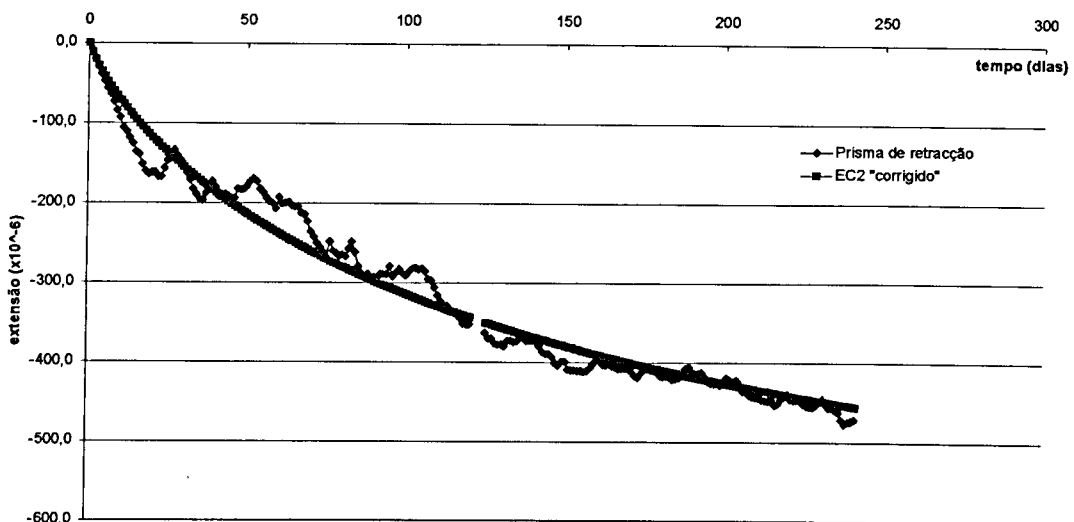


Gráfico 3 – Deformações por retracção (experimental e modelo do EC2 corrigido)

É visível o excelente resultado obtido. Com este ajuste, a curva obtida traduz com muito mais realismo a retracção desenvolvida no prisma de retracção. Tendo-se obtido para os parâmetros  $C_1$  e  $C_2$  os seguintes valores:

$$C_1=1.600$$

$$C_2=1.492$$

### 3.2. PRISMA DE FLUÊNCIA

À semelhança do prisma de retracção, betonado à mesma data, e protegido por plásticos até 07 de Dezembro de 2001 para retardar a evaporação da água contida no betão, este foi solicitado sob uma força de compressão à data da aplicação do pré-esforço, 18 de Dezembro de 2001, ou seja,  $t_0=25$  dias. O registo da deformação do prisma de fluência é o que consta no gráfico 4:

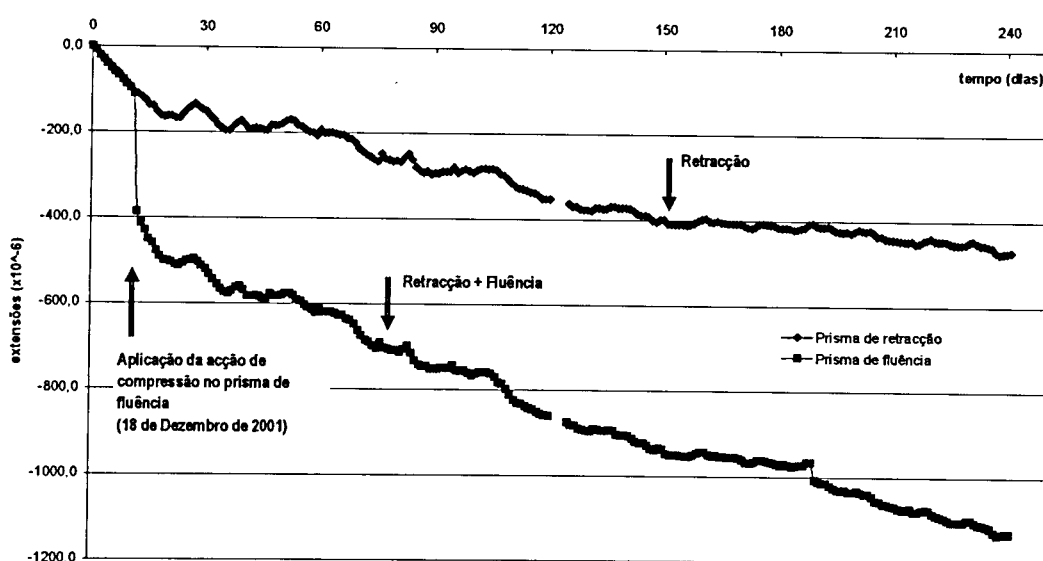


Gráfico 4 – Registos diários das deformações dos prismas de retracção e fluência

Sabendo qual a deformação instantânea,  $\epsilon_{ci}(t_0)$  provocada pela aplicação da acção de compressão, e o módulo de elasticidade no mesmo instante,  $E_c(t_0)$  é possível determinar qual a tensão instalada, e definir o coeficiente de fluência a partir dessa data em função do tempo.

Deformação instantânea	$\epsilon_{ci}=-276 \cdot 10^{-6}$
Módulo de elasticidade	$E_{c,25d}=30.02\text{GPa}$
Tensão instalada	$\sigma_{co}=-8.3\text{MPa}$

Retirando a componente de retracção as deformações registadas pelo prisma de fluência (com os registos do prisma de retracção) e passando de deformações para coeficiente de fluência, obtemos o seguinte gráfico:

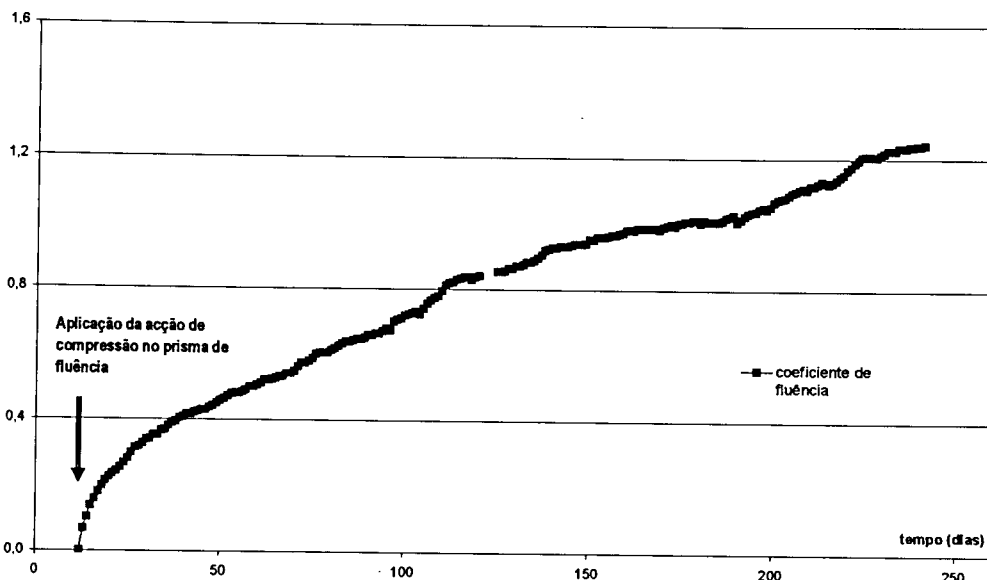


Gráfico 5 - Desenvolvimento do coeficiente de fluência do prisma de fluência (experimental)

Do mesmo modo como se procedeu para o prisma de retracção, proceda-se à comparação da curva sugerida pelo EC2 com os registos apresentados no gráfico 5:

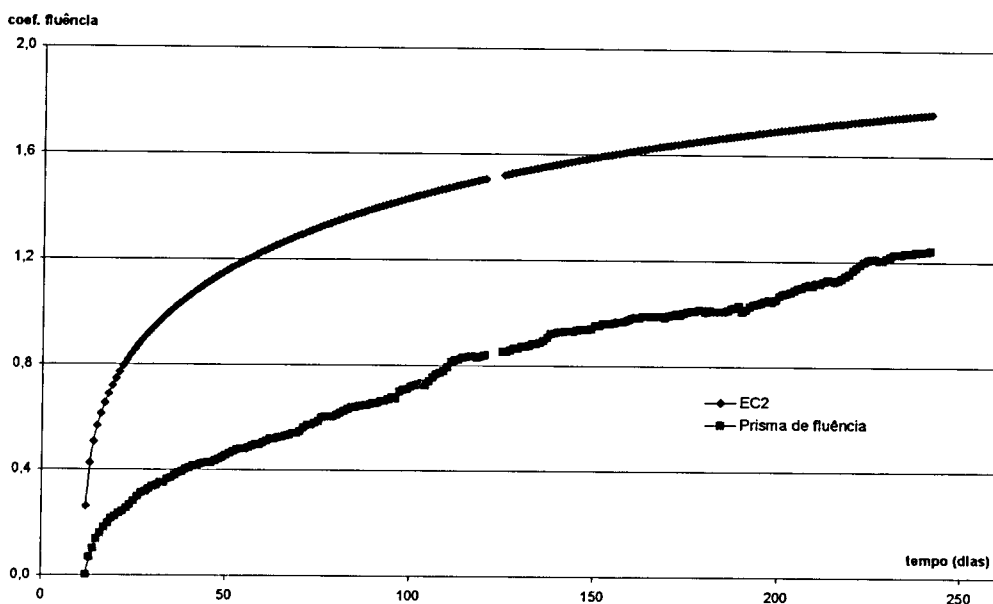


Gráfico 6 - Evolução do coeficiente de fluência (experimental e modelo do EC2)

Mais uma vez, o modelo proposto pelo EC2 demonstra que não exprime de forma representativa as deformações por fluência experimentadas pelo prisma, chegando a cometer-se um erro por excesso de 42%. Ou seja, sobrestima e por muito as deformações por fluência ao longo do tempo. À semelhança do efectuado para o prisma de retracção, através da introdução dos coeficientes de ajuste "C3" e "C4" (expressões "5" e "6"), através da minimização das diferenças dos registos à curva teórica obtém-se:

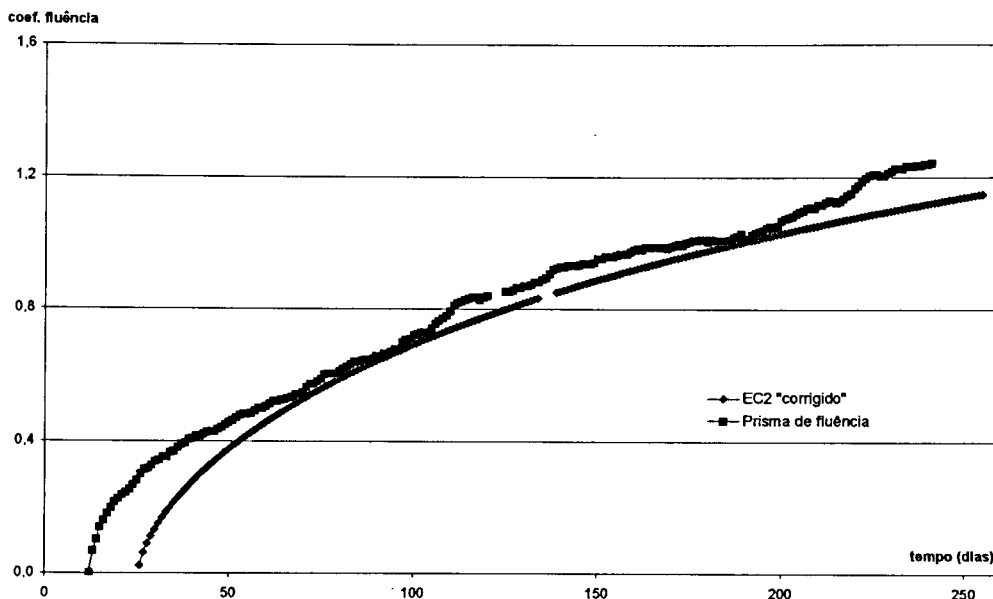


Gráfico 7 – Evolução do coeficiente de fluência (experimental e modelo do EC2 corrigido)

Mais uma vez, também à semelhança do obtido para o prisma de retracção, o ajuste resulta perfeitamente, obtendo-se uma curva que exprime de forma bastante realista a evolução real do coeficiente de fluência ao longo do tempo. Tendo-se obtido para os parâmetros  $C_3$  e  $C_4$  os seguintes valores:

$$C_3=0.880$$

$$C_4=2.050$$

Com este procedimento, obtém-se curvas que de forma bastante satisfatória exprime o desenvolvimento da retracção e fluência do betão utilizado na execução da viga. Com isto, pode-se de forma mais confiante, passar para a viga, e proceder ao estudo das deformações de diferentes origens e quantificar a sua percentagem relativamente à deformação total experimentada e registada pelos extensómetros.

## 4. VIGA

### 4.1 GENERALIDADES

À excepção dos acontecimentos de carga, ao longo do tempo, a viga deforma-se sem que seja alterado o sistema de cargas aplicado. Isto deve-se, como já referimos, a efeitos diferidos associados ao betão, como a retracção e fluência.

A questão coloca-se como avaliar os registos obtidos nas secções monitorizadas, e que parcelas correspondem às diferentes origens de deformação (deformação instantânea,  $\epsilon_{ci}$ , deformação por retracção,  $\epsilon_{cs}$ , e deformação por fluência,  $\epsilon_{cc}$ ). Embora a estrutura seja pré-esforçada, a tensão inicial de pré-esforço instalada é cerca de 60% do valor da tensão de rotura do aço, podendo com certo grau de aproximação, que as perdas por relaxação da armadura de pré-esforço são desprezáveis (mais rigorosamente, o regulamento enuncia que

para tensões inferiores a 50% da tensão de rotura, as perdas por relaxação são desprezáveis). Desse modo, analisa-se os registos obtidos para as deformações na secção S2, nas fibras inferior e superior.

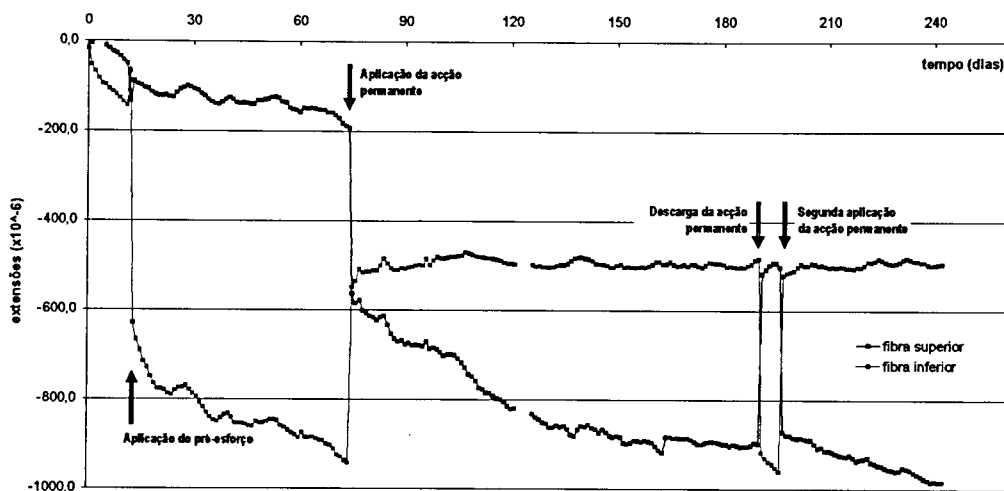


Gráfico 8 – Registo das deformações na secção S2 na fibra inferior e superior

Se o betão não sofresse de retracção e fluência (desprezando a relaxação do aço de pré-esforço), o gráfico 8 teria um aspecto mais de “bandas”, onde os troços entre acontecimentos de carga (aplicação do pré-esforço, aplicação da acção permanente, descarga da acção permanente e segunda aplicação da acção permanente) seriam patamares horizontais em vez de troços inclinados. A fluência e a retracção são os responsáveis por essas inclinações. Com a ajuda dos prismas de retracção e fluência é possível destriçar as diferentes componentes.

#### 4.2 DEFORMAÇÕES POR RETRACÇÃO

No entanto, para que se use os resultados dos prismas, deve-se ter em consideração que ao contrário da viga, estes elementos não possuem armaduras, sendo constituídos por betão simples. Este facto, sobrestima as deformações, devido ao facto de as armaduras não sofrerem de fenómenos de retracção e fluência. Desse modo, deve-se corrigir as curvas obtidas para os prismas da seguinte forma:

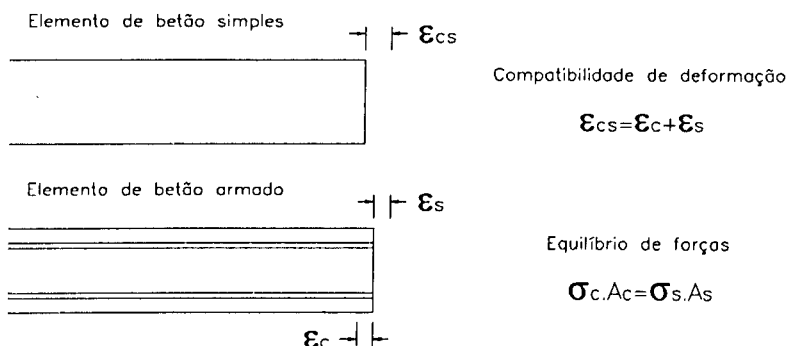


Figura 2 – Compatibilidade de deformação num elemento de betão armado devido à retracção

Resolvendo as equações apresentadas na figura 1, obtemos as deformações para o betão,  $\epsilon_c$ , e para o aço,  $\epsilon_s$ , que provocam variações de tensões:

$$\epsilon_c = \frac{\alpha \cdot \rho}{1 + \alpha \cdot \rho} \cdot \epsilon_{cs,prisma} \tag{7}$$

$$\epsilon_s = \frac{1}{1 + \alpha \cdot \rho} \cdot \epsilon_{cs,prisma} \tag{8}$$

- $\alpha$  - Coeficiente de homogeneização
- $\rho$  - Percentagem de armadura
- $\epsilon_{cs,prisma}$  - Deformação por retracção (registos)

No presente caso, onde:

- $\alpha \cong 15$  (acções de carácter permanente)
- $\rho = 1.5\%$
- $\epsilon_{cs,prisma} \cong -472 \times 10^{-6}$  (registo)

Obtém-se para deformações que provocam tensões:

$$\epsilon_c \cong -87 \times 10^{-6} \text{ (registo)}$$

$$\epsilon_s \cong -385 \times 10^{-6} \text{ (registo)}$$

Sendo que a deformação por retracção no elemento de viga é aproximadamente de:

$$\epsilon_{cs, viga} \cong -385 \times 10^{-6} (\cong 0.82 \cdot \epsilon_{cs, viga})$$

Ou seja, a retracção efectivamente produzida na viga corresponde a cerca de sensivelmente 87% da retracção registada no prisma de retracção. Desse modo temos então para a componente de retracção as seguintes deformações experimentadas pela viga:

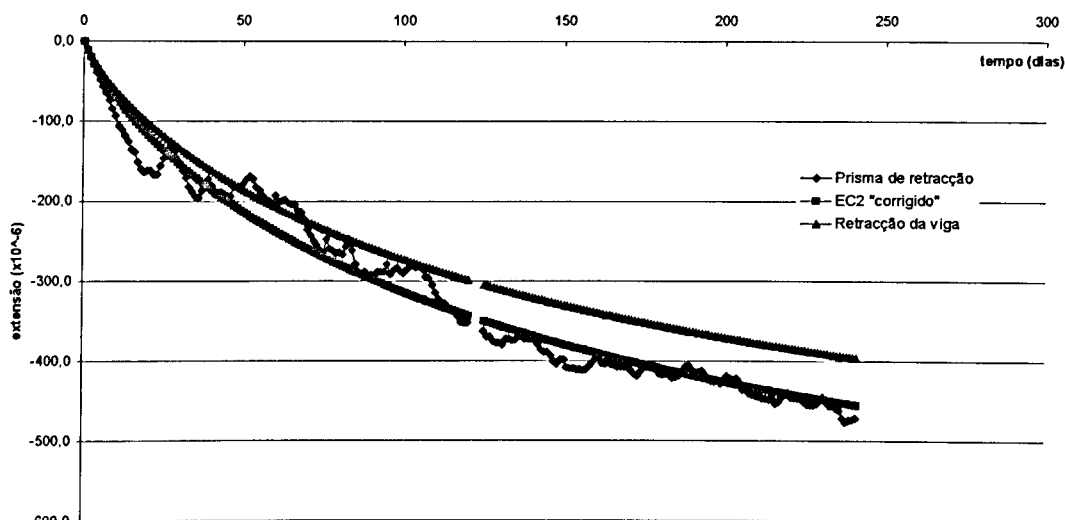


Gráfico 9 – Deformação por retracção na viga

### 4.3 DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA

As deformações por fluência são de tratamento mais laborioso e complexo, visto que dependem da história de carga a que esteve sujeito, além de ser uma análise ao nível da fibra de betão, e não ao nível de toda a secção (retracção). Desse modo procede-se ao estudo das fibras inferior e superior da secção S2. O que se enuncia aplica-se a ambas as fibras.

Para níveis de tensão moderadas ( $<0.45f_c$ ), podemos admitir que as deformações por fluência são linearmente proporcionais ao nível de tensão inicialmente aplicado, o que permite deste efectuar a sobreposição de efeitos (EC2)

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \cdot \frac{\sigma(t_0)}{E_{c, t_0}} + \sum \Phi(t, t_i) \cdot \frac{\sigma(t_i)}{E_{c, t_i}} \quad (9)$$

Ou seja, é possível a partir de diferentes curvas de coeficientes de fluência para diferentes acontecimentos de carga a que o elemento esteve sujeito, que multiplicado pela deformação instantânea respectiva, através da sobreposição de efeitos se obter a "curva" de fluência da fibra de betão em estudo.

Para o caso da **fibra inferior da secção S2**, sofreu as seguintes deformações instantâneas:

Quadro I – Deformações instantâneas registadas na fibra inferior da secção S2

Acontecimento	Deformação instantânea, $\epsilon_{ci}$ (registo)	Tensão inicial, $\sigma(t_i)$
Aplicação do pré-esforço	$-562 \cdot 10^{-6}$	-17.1MPa
Aplicação da acção permanente	$+393 \cdot 10^{-6}$	+13.2MPa
Descarga da acção permanente	$-434 \cdot 10^{-6}$	-15.3MPa
Segunda aplicação da acção permanente	$+439 \cdot 10^{-6}$	+15.4MPa

Sabendo a tensão instalada no prisma de fluência é de -8.3MPa, por proporcionalidade, obtêm-se as seguintes curvas de fluência para os quatro acontecimentos de carga.

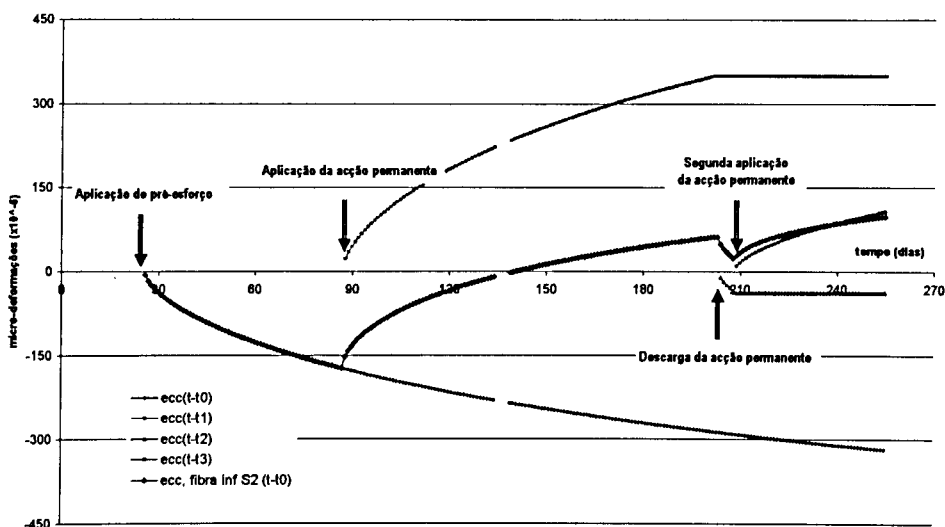


Gráfico 10 – Deformação por fluência na fibra inferior da secção S2

A curva a vermelho representa então a soma das quatro curvas de fluência associadas a cada acontecimento de carga, que somada juntamente com a curva das deformações por retracção e as deformações instantâneas, permite obter uma curva de deformações totais próxima da registada para a fibra inferior na secção S2 como se apresenta no gráfico 8 (registos).

Para o caso da fibra superior da secção S2, sofreu as seguintes deformações instantâneas:

Quadro II – Deformações instantâneas registadas na fibra inferior da secção S2

Acontecimento	Deformação instantânea, $\epsilon_{ci}$ (registo)	Tensão inicial, $\sigma(t)$ (MPa)
Aplicação do pré-esforço	$+45 \cdot 10^{-6}$	+1.4MPa
Aplicação da acção permanente	$-370 \cdot 10^{-6}$	-12.4MPa
Descarga da acção permanente	$+381 \cdot 10^{-6}$	-13.4MPa
Segunda aplicação da acção permanente	$-370 \cdot 10^{-6}$	-13.0MPa

À semelhança do efectuado para a fibra inferior, sabendo a tensão instalada no prisma de fluência, -8.3MPa, por proporcionalidade, obtém-se as seguintes curvas de fluência para os quatro acontecimentos de carga estudadas, bem como a curva resultante para as deformações por fluência:

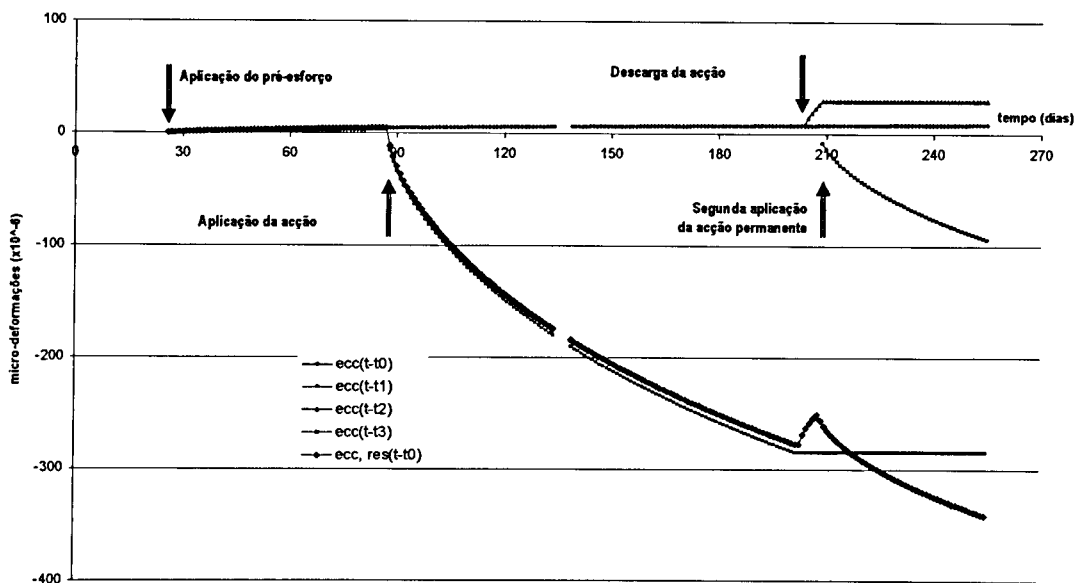


Gráfico 11 – Deformação por fluência na fibra superior da secção S2

A curva a vermelho representa então a sobreposição das quatro curvas de deformação por fluência associadas a cada acontecimento de carga, que somadas às deformações por retracção e deformações instantâneas, permite obter uma curva de deformações próxima da registada para a fibra inferior na secção S2 como se apresenta no gráfico 8 (registos).



#### 4.4. DEFORMAÇÕES INSTANTÂNEAS

De acordo com os valores apresentados nos quadros I e II, as deformações instantâneas experimentadas pelas fibras em estudo podem ser traduzidas nos seguintes gráficos:

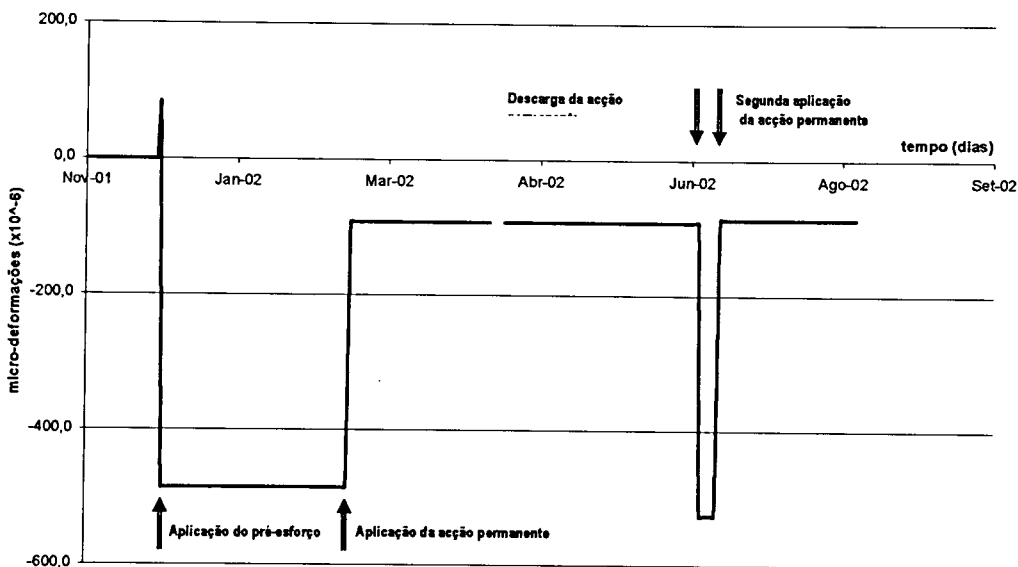


Gráfico 12 – Deformação instantânea na fibra inferior da secção S2

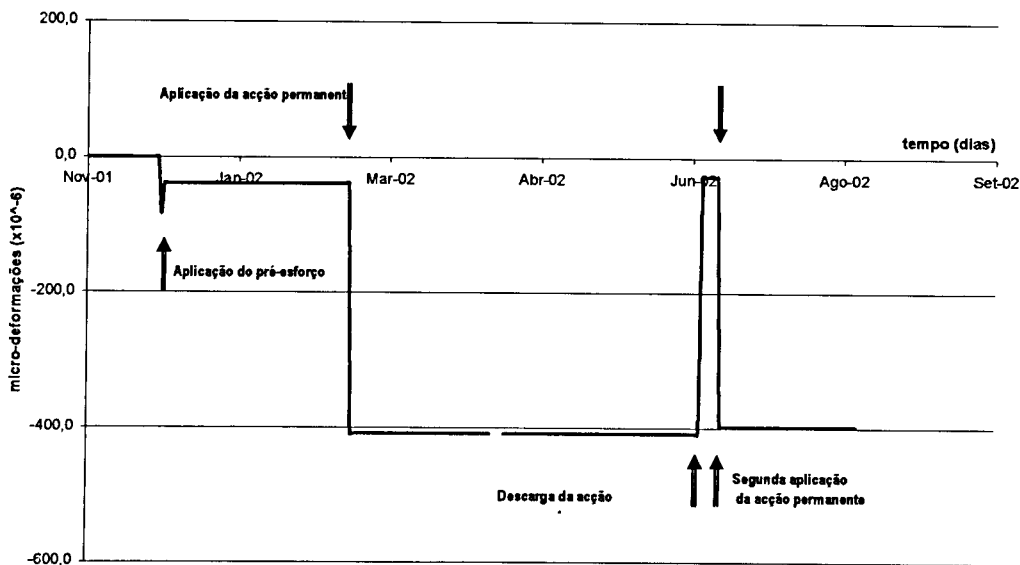


Gráfico 13 – Deformação instantânea na fibra superior da secção S2

#### 4.5. DEFORMAÇÕES TOTAIS (AVALIAÇÃO COMPARATIVA)

Nos três pontos anteriores procedeu-se à decomposição da deformação total, nas diferentes componentes, dado as origens diferentes a que cada uma delas está associada. Agora, pretende-se efectuar a sobreposição de efeitos das “curvas” obtidas anteriormente e comparar com os registos obtidos.

Desse modo:

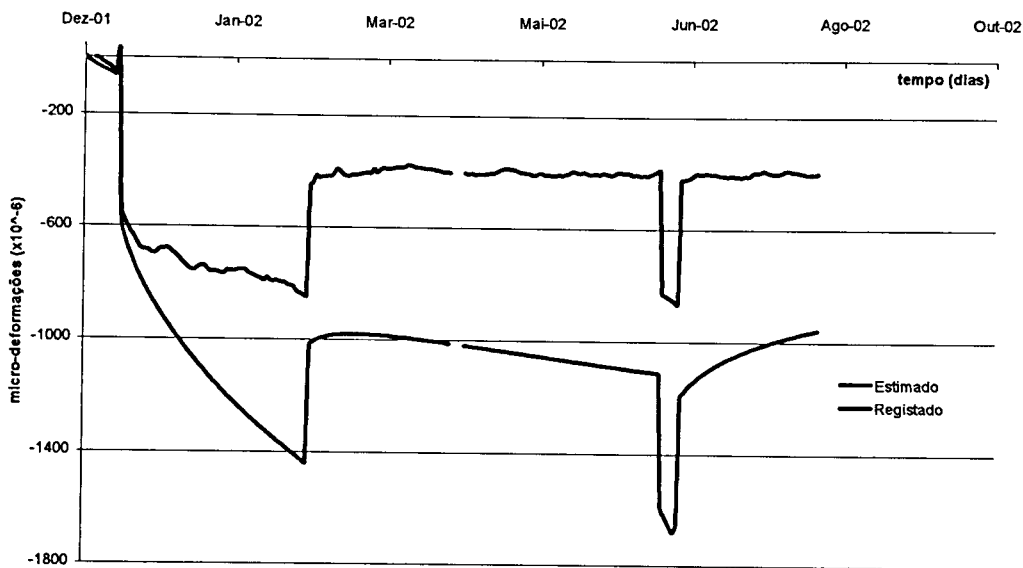


Gráfico 14 – Comparação das deformações experimentadas com as estimadas na fibra inferior na secção S2

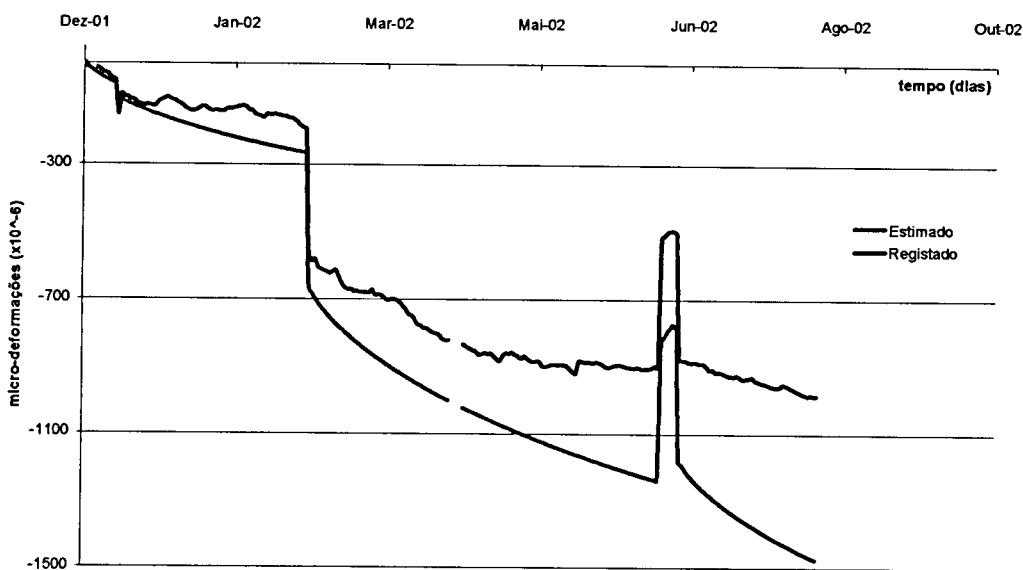


Gráfico 15 – Comparação das deformações experimentadas com as estimadas na fibra superior na secção S2

Denota-se que no período inicial, até à data de aplicação do pré-esforço, o estimado aproxima-se bastante bem do verificado, no entanto, daí para a frente, tanto na fibra superior como na fibra inferior, denota-se uma sobrestima das deformações, que em consequência do enunciado anteriormente (admitindo que o troço inicial, onde a aproximação é boa e apenas existe retracção como efeito diferido), está-se a sobrestimar as deformações por fluência. Pode-se dizer então, que a fluência nos prismas, é de certa forma superior à deformação registada na viga.

Corrigindo então a curva de deformações por fluência (sobreposição de quatro curvas de fluência), através de um coeficiente " $k_1$ ", para cada uma das curvas de fluência, obtém-se o seguinte resultado para a fibra inferior:

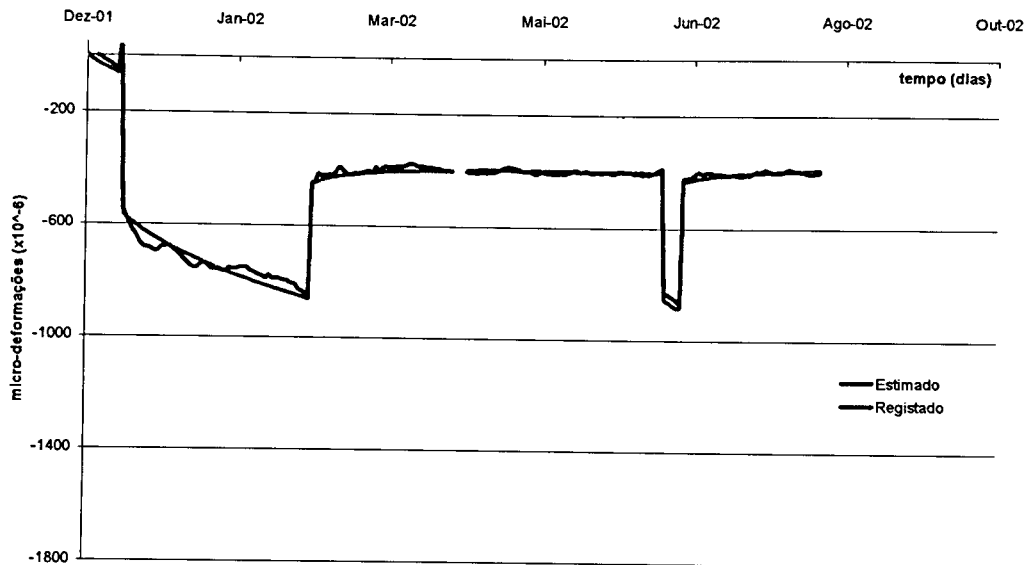


Gráfico 16 – Comparação das deformações experimentadas com as estimadas na fibra inferior na secção S2

Com,

Acontecimento	$k_1$ (Fibra inferior)
Aplicação do pré-esforço	0.20
Aplicação da acção permanente	0.54
Descarga da acção permanente	0.35
Segunda aplicação da acção permanente	0.25

Já para a fibra superior, os resultados após correcção das curvas de fluência foram os seguintes:

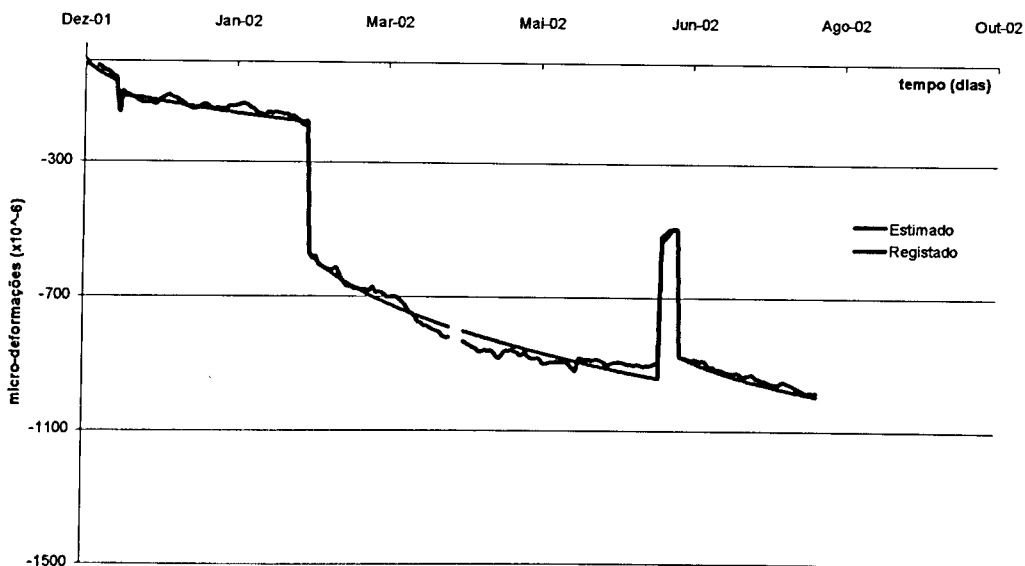


Gráfico 17 – Comparação das deformações experimentadas com as estimadas na fibra superior na secção S2

Com,

Acontecimento	k <sub>1</sub> (Fibra superior)
Aplicação do pré-esforço	20
Aplicação da acção permanente	0.68
Descarga da acção permanente	0.80
Segunda aplicação da acção permanente	0.40

Para se ter uma noção das deformações que a viga sofreu, de acordo com as diferentes origens apresenta-se os seguintes gráficos:

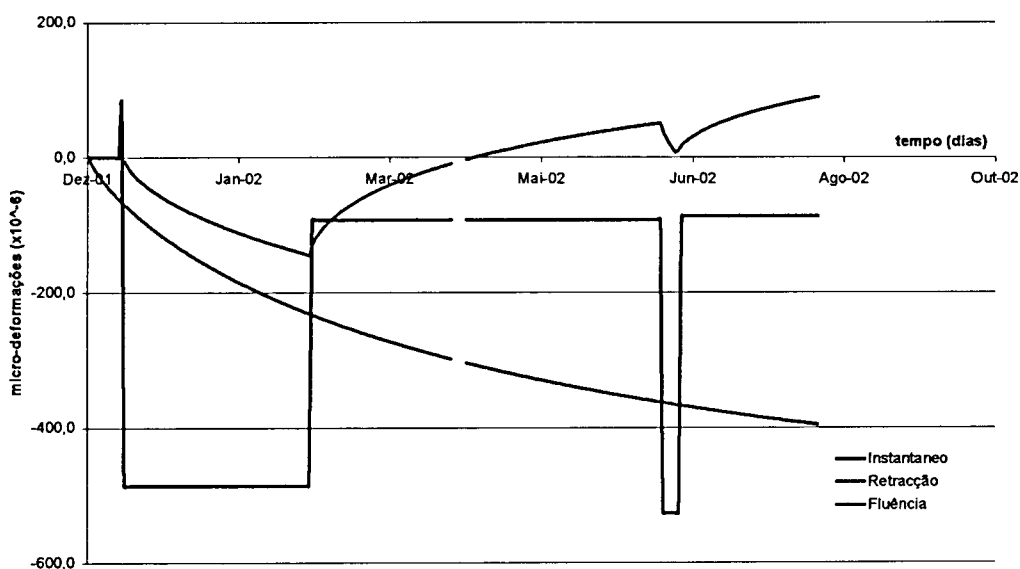


Gráfico 18 – Deformações da fibra inferior da secção S2 segundo o fenómeno que lhe dá origem

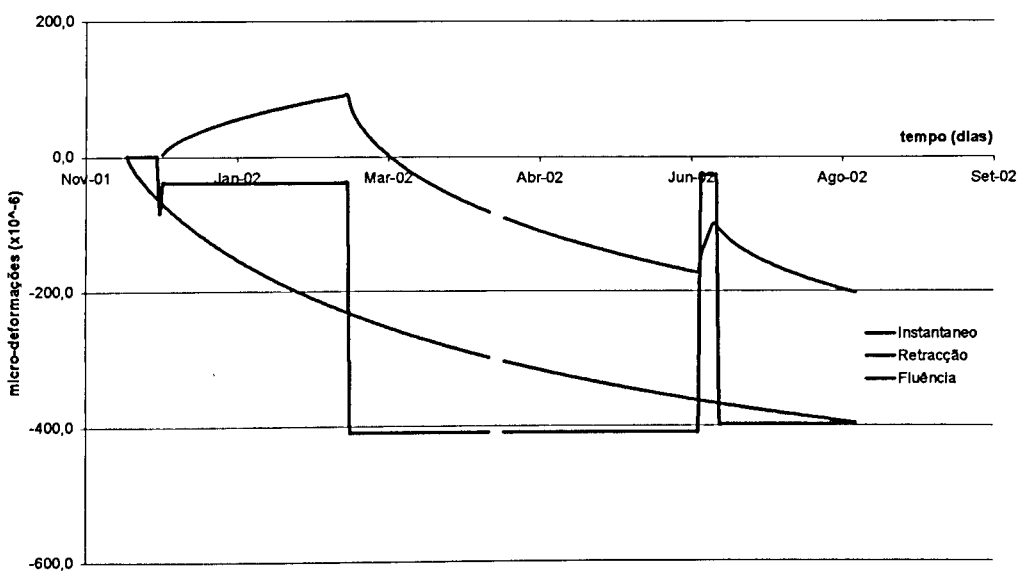


Gráfico 19 – Deformações da fibra superior da secção S2 segundo o fenómeno que lhe dá origem

## X. ILAÇÕES

## X. ILAÇÕES

O âmbito do presente trabalho possui duas perspectivas na sua abordagem e desenvolvimento. Uma primeira focando o comportamento estrutural do elemento em determinados instantes, devido a modificações das acções a que a viga se encontra sujeita. A estrutura reage a essas alterações com a deformação dos materiais que a constituem (betão e aço), que pela relação constitutiva de cada um dos materiais leva a uma modificação praticamente instantânea do estado de tensão. Devido a este facto, os materiais possuem características "bem definidas e constantes" (leis constitutivas). Numa segunda parte, estende-se o campo de estudo ao comportamento da estrutura ao longo do tempo. Sendo a estrutura de betão armado e pré-esforçado, os fenómenos diferidos associados ao betão (retracção e fluência) originam variações de deformações e deslocamentos verticais da estrutura, provocando a diminuição do valor de pré-esforço (logo de extrema importância a sua avaliação e quantificação). A sua abordagem é complexa e laboriosa, dado que os fenómenos diferidos associados ao betão dependem de múltiplos factores, alguns dos quais ainda não traduzidos nos modelos propostos pelo EC2.

No que diz respeito ao **comportamento instantâneo** da viga:

- a) Face aos diferentes ensaios de carregamento instantâneo, verifica-se que no geral, os valores calculados são próximos dos valores medidos pelos extensómetros para as secções monitorizadas. Algumas diferenças, explicam-se por erros de posição das armaduras, que podem ter mudado de posição durante a betonagem por vibração do betão. Em termos relativos, e tendo em conta que a viga possui 20cm de altura, um erro de alguns milímetros pode provocar um desvio considerável entre os valores calculados e os medidos.
- b) Em termos de deslocamentos verticais,  $\delta_v$ , nas secções S1, S2 e S3, constata-se que os valores estimados numericamente são inferiores aos verificados, diferenças justificadas pela dificuldade na avaliação do módulo de elasticidade,  $E_c$ . A caracterização foi efectuada com base nos ensaios de cubos de betão à compressão, ou seja de forma indirecta, sem a realização de um ensaio para caracterização directa. Há que referir, a dificuldade de conseguir as mesmas condições de vibração do betão da viga e dos provetes, podendo resultar diferentes módulos de elasticidade.
- c) No ensaio de descarga e carga, confirmou-se que a viga se encontra em regime elástico linear, através da "simetria" dos valores obtidos, tanto para os deslocamentos verticais como para as extensões medidas pelos extensómetros.

Do estudo efectuado para o **comportamento diferido** da viga salienta-se:

- a) Devido a alguns factores de que dependem a retracção e a fluência não serem equacionados nos modelos do EC2, verificam-se diferenças que podem ser significativas. A aplicação dos coeficientes de ajuste ( $C_1$  e  $C_2$  para a retracção, e  $C_3$  e  $C_4$  para a fluência) aos modelos do EC2 apresenta-se como um meio eficiente de ajustar estes modelos aos valores experimentais.
- b) No que respeita à retracção, uma parcela das extensões por retracção do betão na viga é impedida por aderência entre o betão e as armaduras gerando um estado de tensão interno auto-equilibrado. Sendo o prisma compensador em betão simples as extensões por retracção medidas são naturalmente superiores às ocorridas na viga. Estima-se que no presente trabalho cerca de 13% da retracção do betão tenha sido impedida.
- c) Verifica-se que a deformação por fluência obtida a partir do prisma sobrestima a deformação provocada pelo mesmo fenómeno na viga. Os valores de  $k_1$ , denotam esse facto; no caso da fibra inferior da secção S2, apresentam valores inferiores a 0.6, ou seja, 40% da deformação por fluência do betão obtida no prisma não se dá na viga. Em parte deve-se à existência de armaduras, que com o “amolecer” do betão (fluência), por aderência, leva à transferência de tensões do betão para as armaduras ( $E_{c,eff}$ ), logo uma diminuição das tensões no betão, provocando deste modo uma menor deformação por fluência comparativamente com o prisma. Por outro lado, os estados de tensão distintos a que estão sujeitos o prisma e a viga podem justificar uma parte destas diferenças. De facto na flexão composta as tensões variam de fibra para fibra, podendo se efectuar redistribuição de tensões entre estas, provocando a migração de tensões de fibras mais solicitadas para outras adjacentes menos solicitadas. Consequentemente a tensão numa dada fibra diminui ao longo do tempo, conduzindo a menores deformações por fluência.
- d) Finalmente salienta-se a comparação das deformações devido a fenómenos distintos. A importância relativa entre as deformações de diferentes origens, e as diferentes evoluções no tempo de cada uma delas, reforça a ideia de que são fenómenos distintos (embora na realidade dependam entre si), e que nenhuma das componentes é desprezável.

## **XI. DESENHOS**

**DESENHO DE EXECUÇÃO**

**MONITORIZAÇÃO - APLICAÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO**

**MONITORIZAÇÃO - APLICAÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE**

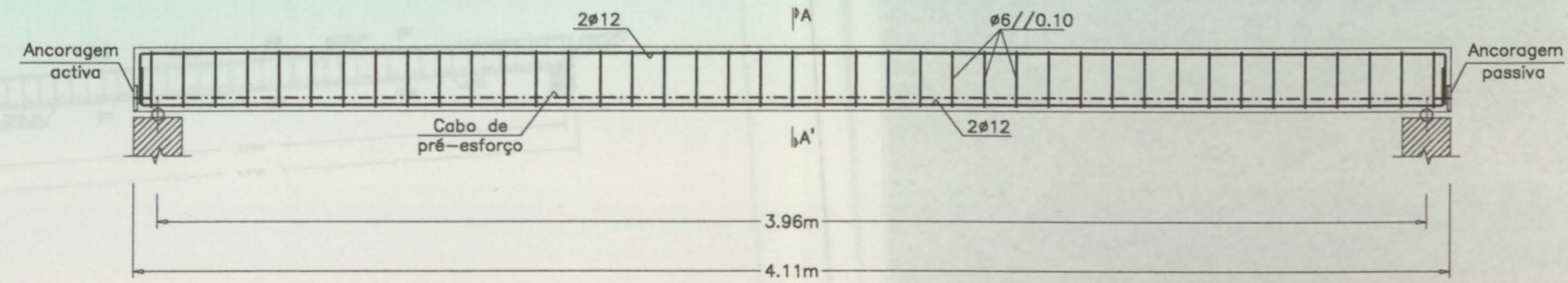
**MONITORIZAÇÃO - DESCARGA DA ACÇÃO PERMANENTE**

**MONITORIZAÇÃO - SEGUNDA APLICAÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE**

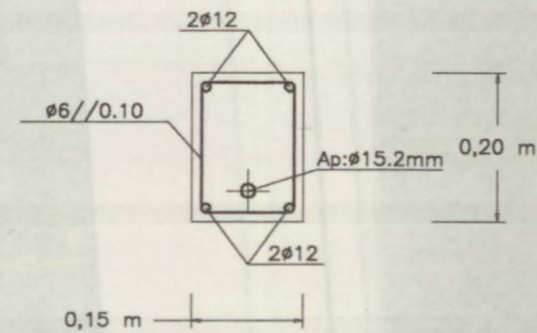


Viga pré-esforçada  
Disposição das armaduras

Esc. 1/20



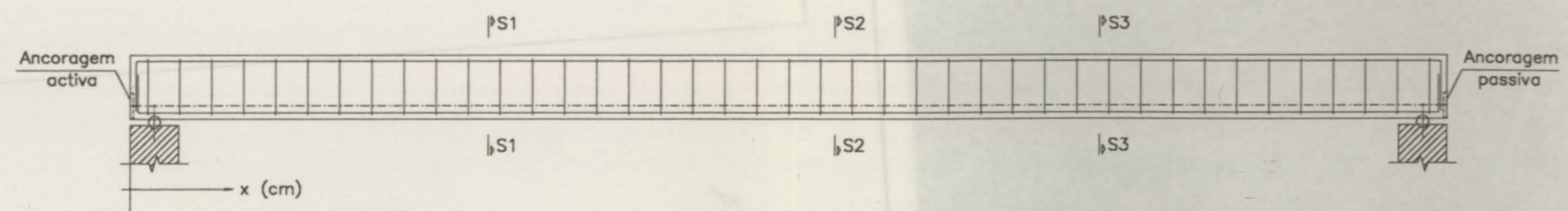
CORTE A-A'  
Esc. 1/10



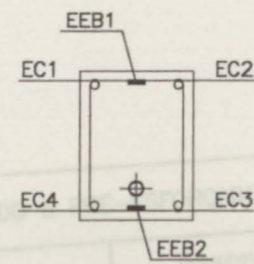
Viga pré-esforçada

Identificação das secções monitorizadas e localização dos extensómetros

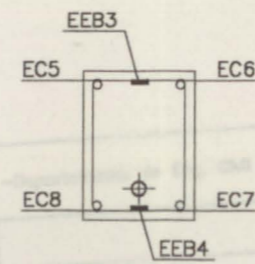
Esc. 1/20



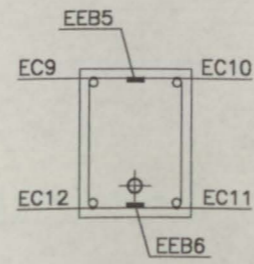
SECÇÃO S1  
(x=116.6cm)



SECÇÃO S2  
(x=220.0cm)



SECÇÃO S3  
(x=302.5cm)



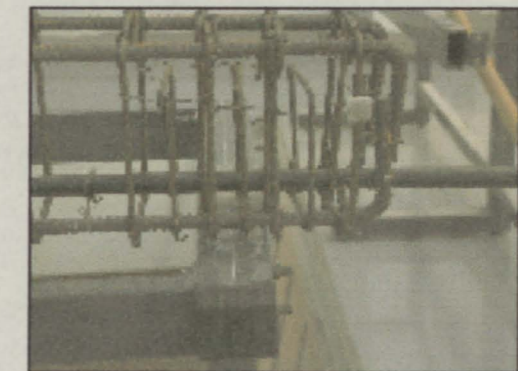
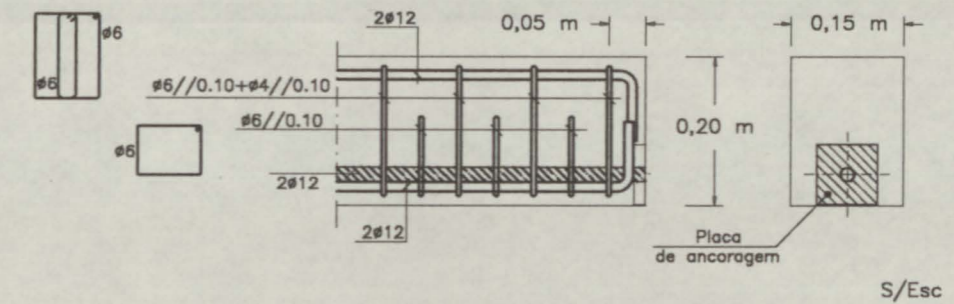
EEB: Extensómetro de embeter no betão  
EC: Extensómetro de colar no aço

Vista geral das armaduras



Disposição das armaduras na zona da ancoragem

Esc. 1/10



C40/50	$f_{ck}=40\text{MPa}$	$E_{c,m}=35\text{GPa}$
A500	$f_{yk}=500\text{MPa}$	$E_s=200\text{GPa}$
Ap1860	$f_{puk}=1860\text{MPa}$	$E_p=195\text{GPa}$
Recobrimento	$c=1.3\text{cm}$	

PROJECTO DE UM MODELO DE VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO

FEUP - Departamento de Eng. Civil



Pormenor de armaduras e secções instrumentadas

Desenhado: Helder

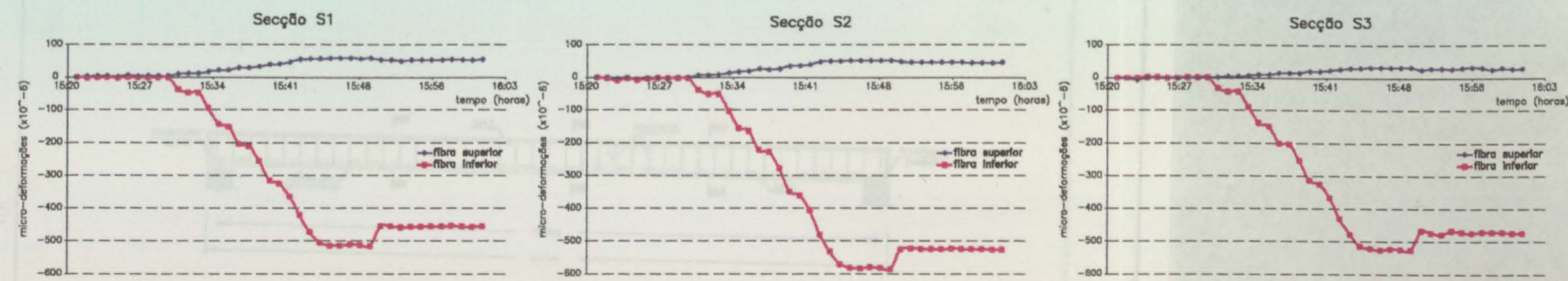
Projectou: Helder

Desenho n° 1/5

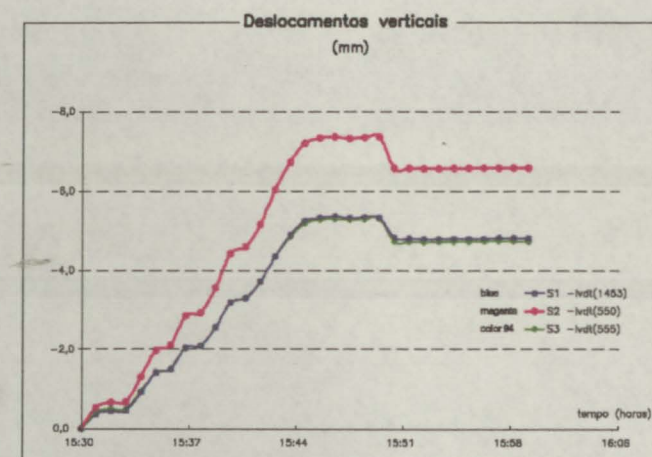
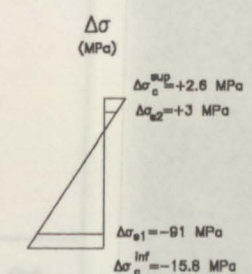
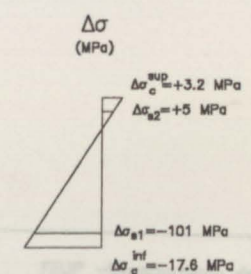
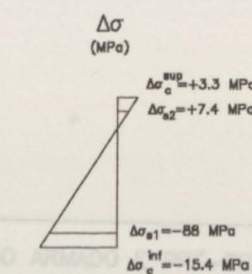
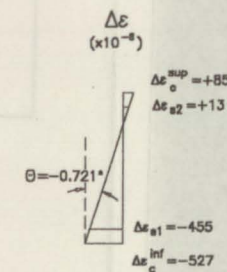
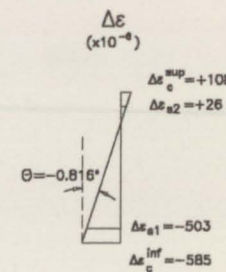
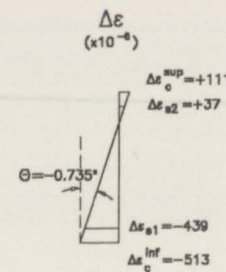
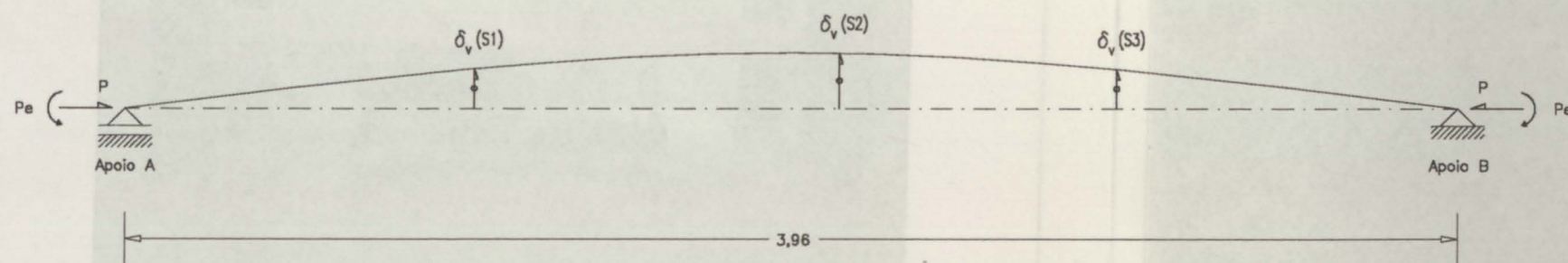
Dezembro de 2001

Escala: 1/20; 1/10

Deformações devidas à operação de pré-esforço  
- 18 de Dezembro de 2001 -

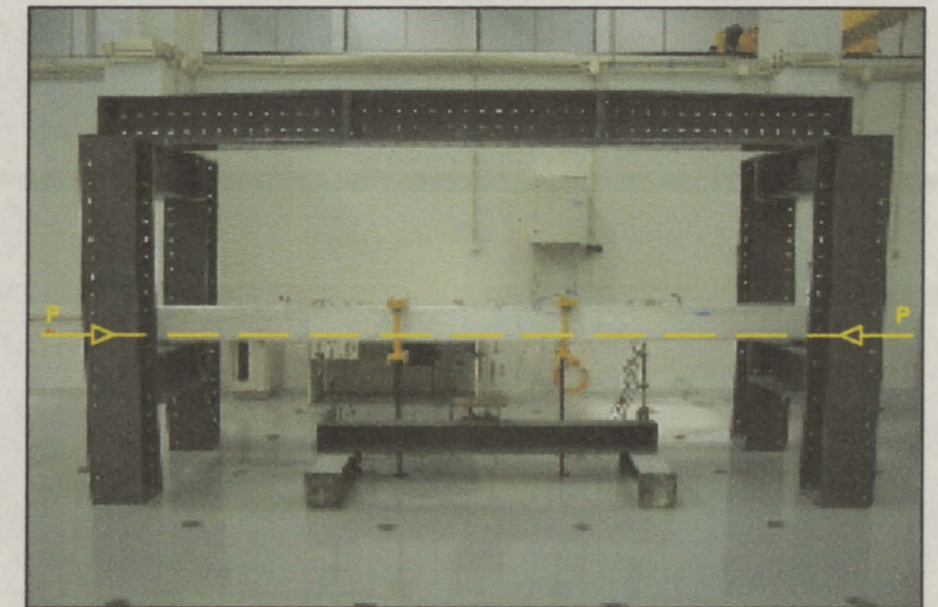
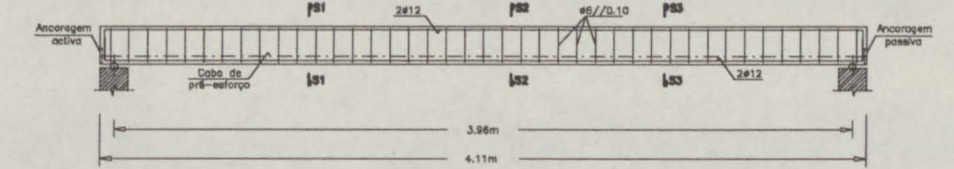


Micro-deformações nas secções monitorizadas (x10 <sup>-6</sup> )			
	Secção S1	Secção S2	Secção S3
fibra superior	+55	+46	+30
fibra inferior	-457	-523	-472



Deslocamentos verticais finais nas secções monitorizadas			
	delta_v(S1)	delta_v(S2)	delta_v(S3)
	-4.8mm	-8.6mm	-4.7mm

APLICAÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO



PROJECTO DE UM MODELO DE VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO

FEUP -Departamento de Eng. Civil



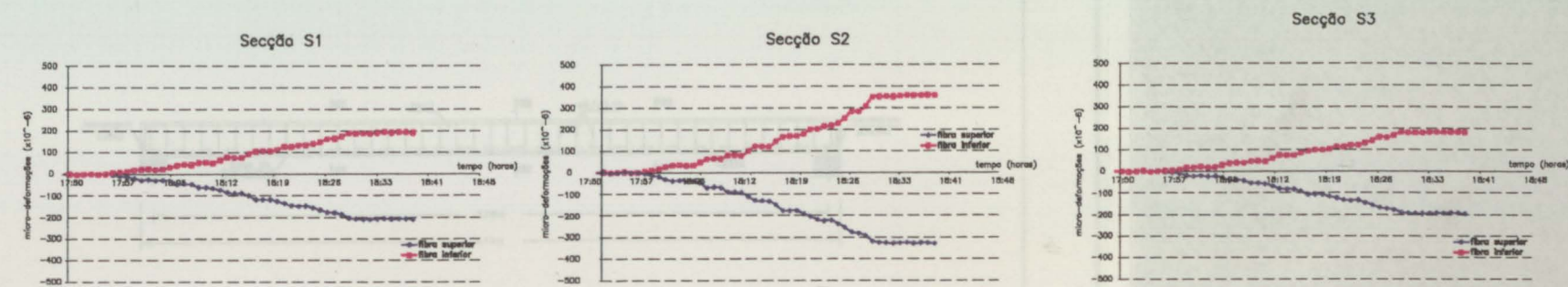
Monitorização das secções S1, S2 e S3  
Deformações e deslocamentos  
provocados pela aplicação do pré-esforço

Desenhou: Helder

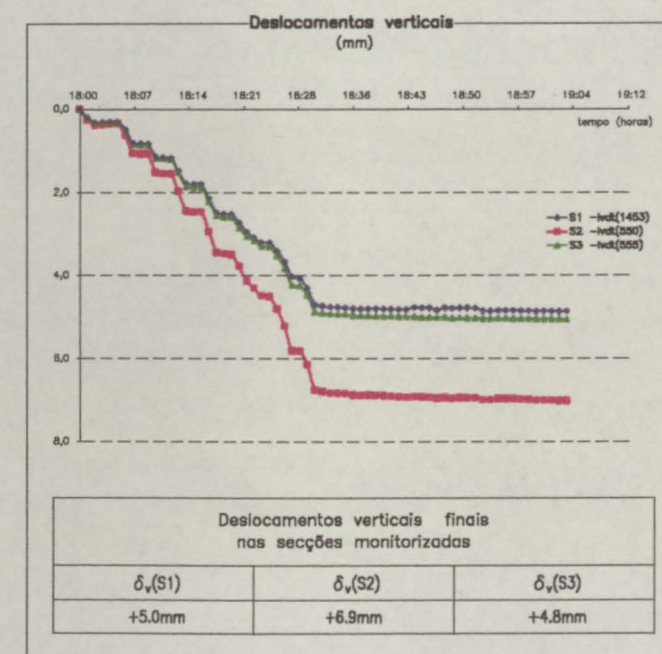
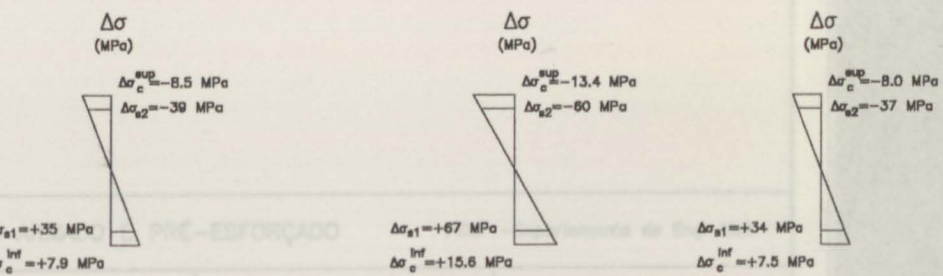
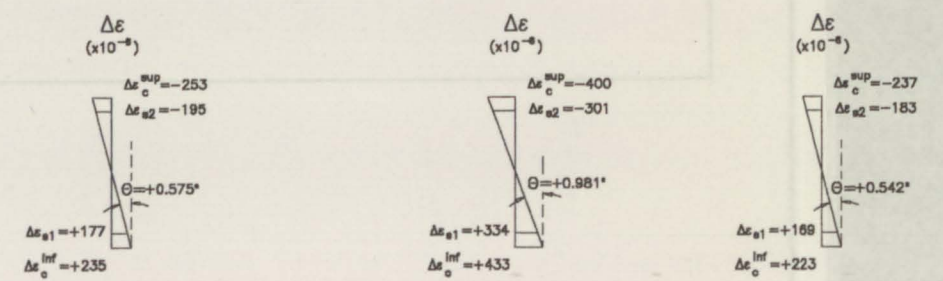
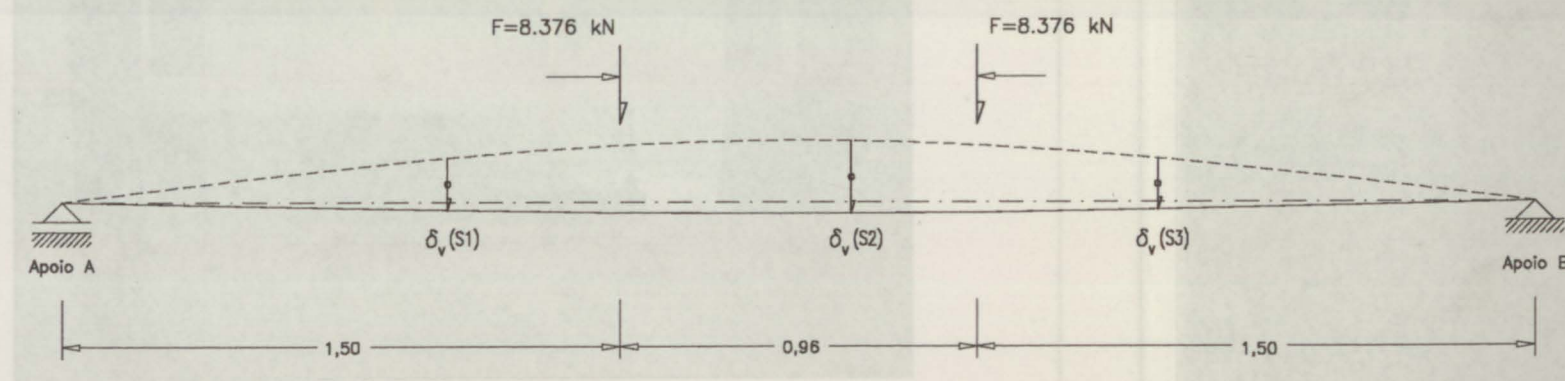
Desenho n° 2/5

Data de ensaio  
18 Dezembro 2001

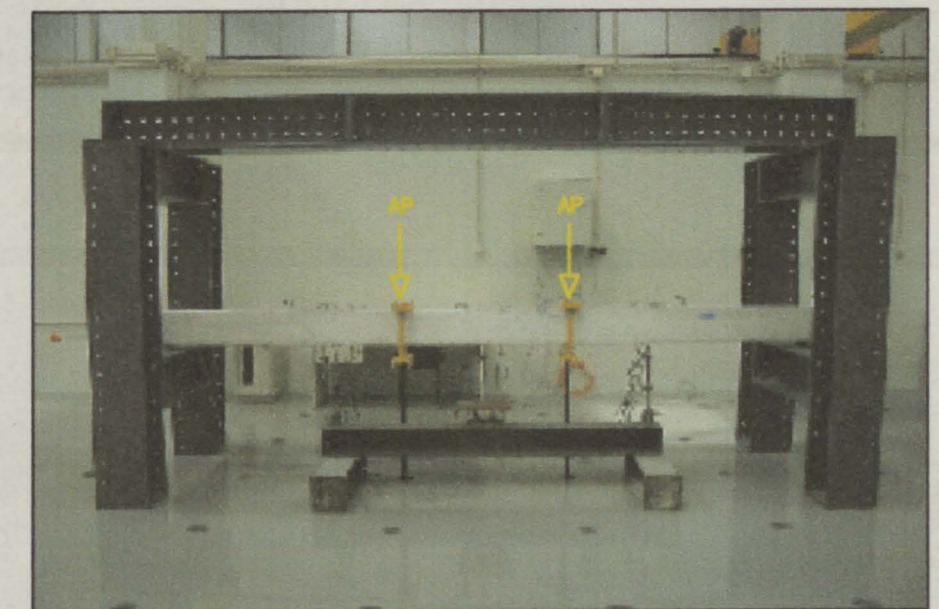
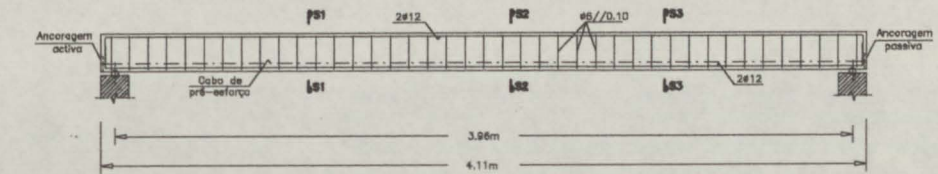
Deformações devidas à aplicação da acção permanente  
- 18 de Fevereiro de 2002 -



Micro-deformações nas secções monitorizadas ( $\mu\epsilon$ )			
	Secção S1	Secção S2	Secção S3
fibra superior	-209	-325	-196
fibra inferior	+191	+358	+182



APLICAÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE

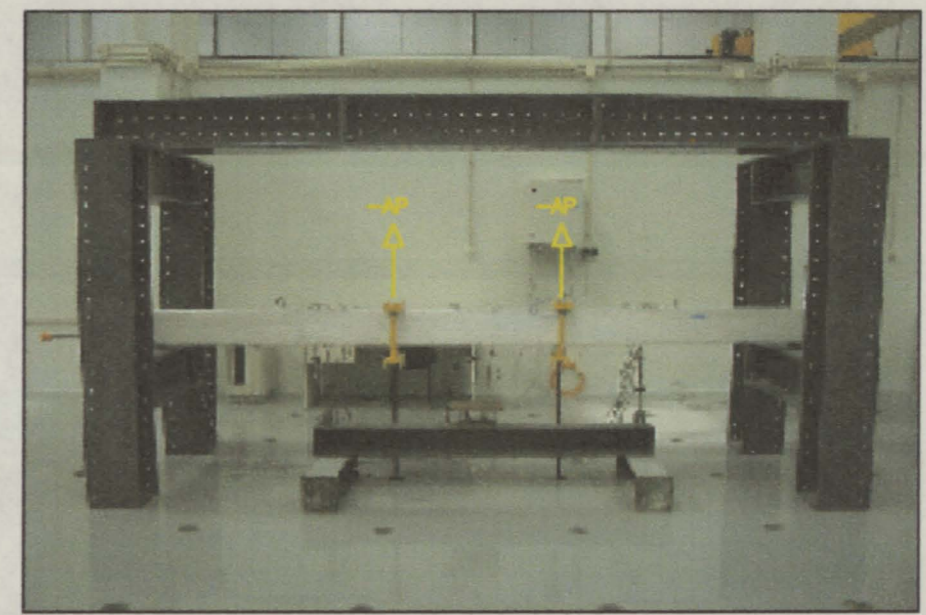
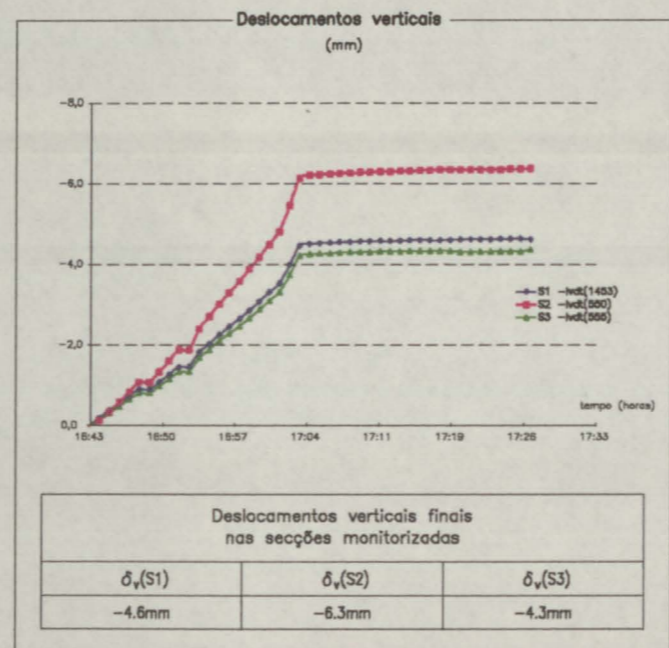
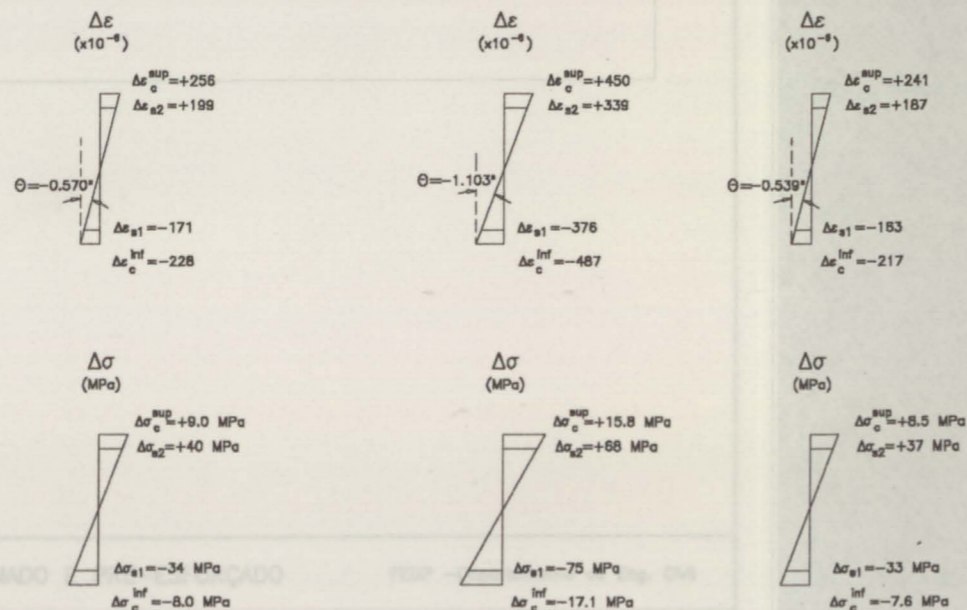
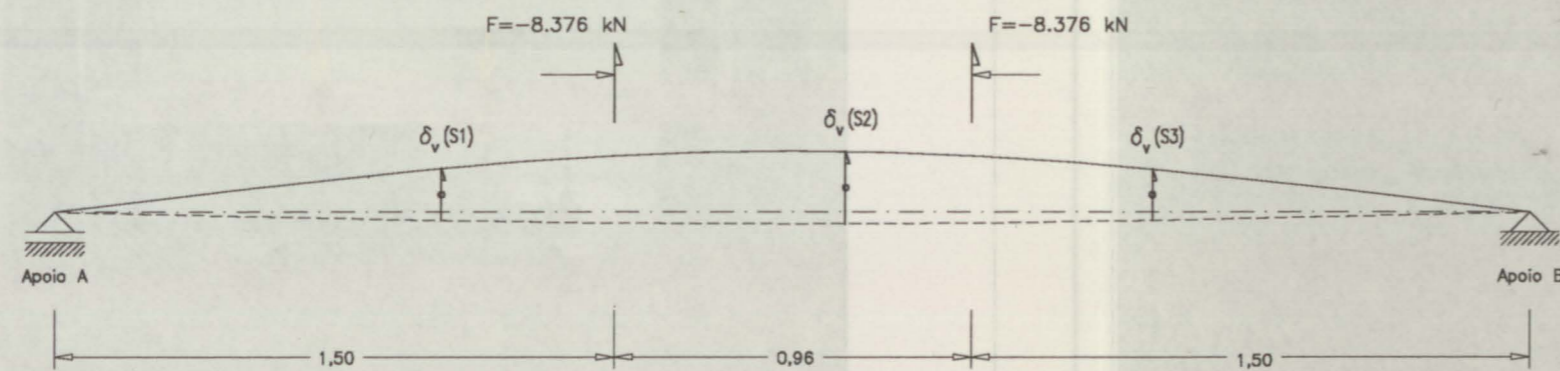


Deformações devidas à descarga da acção permanente

- 14 de Junho de 2002 -



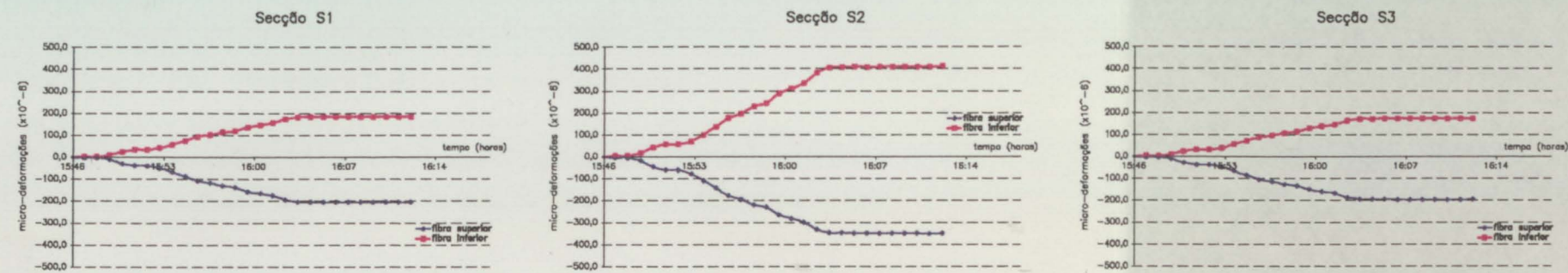
Micro-deformações nas secções monitorizadas (10 <sup>-6</sup> )			
	Secção S1	Secção S2	Secção S3
fibra superior	+213	+366	+200
fibra inferior	-185	-403	-176



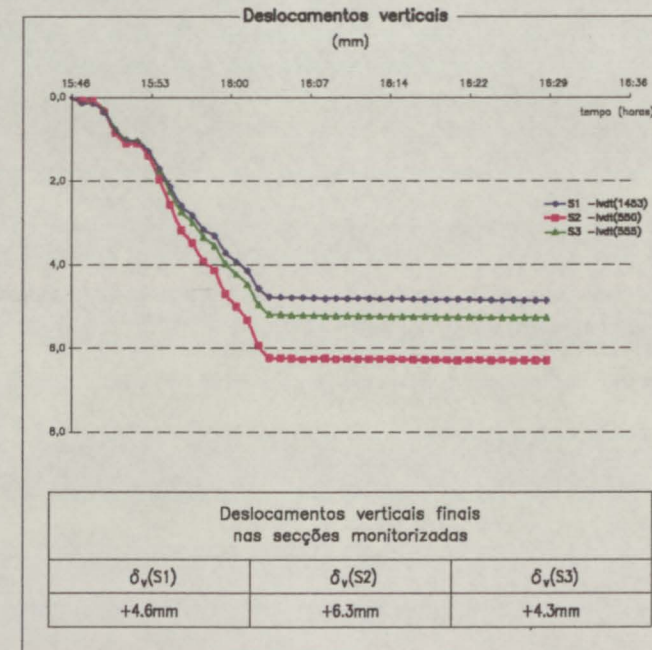
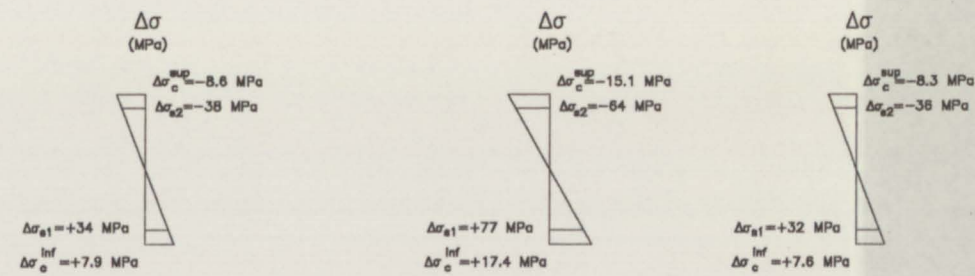
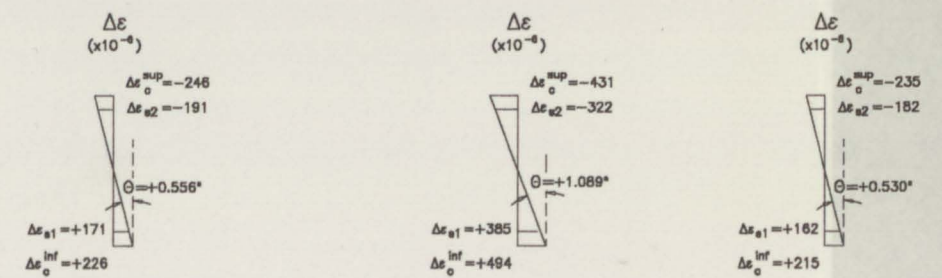
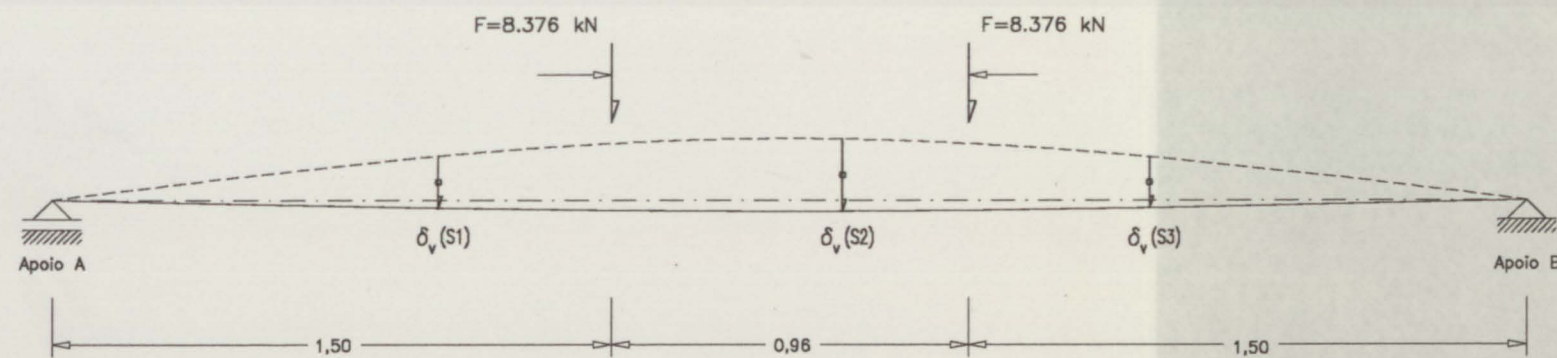
PROJECTO DE UM MODELO DE VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO FEUP -Departamento de Eng. Civil

	Monitorização das secções S1, S2 e S3 Deformações e deslocamentos provocados pela descarga da acção permanente	Desenhou: Helder	Data de ensaio 14 Junho 2002
		Desenho n° 4/5	

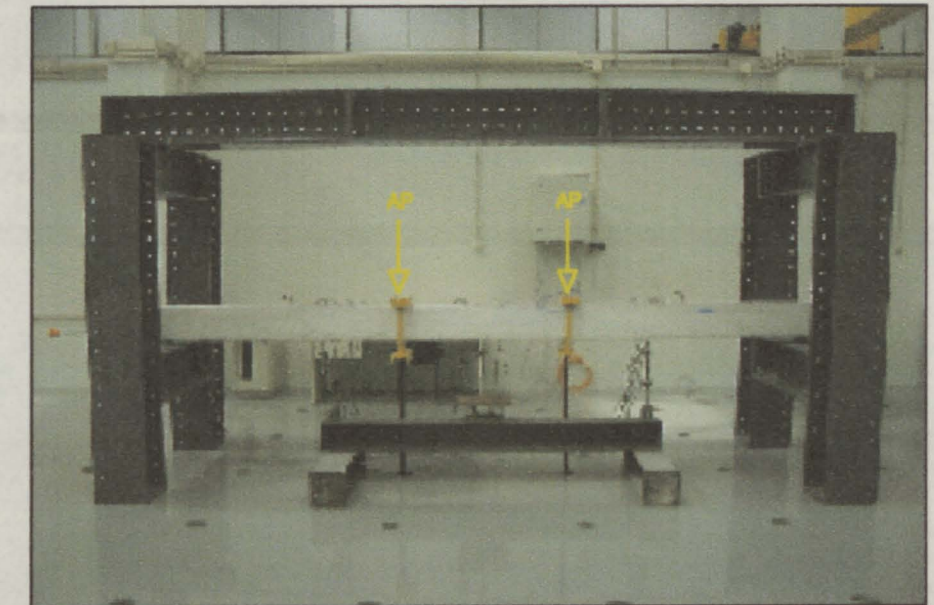
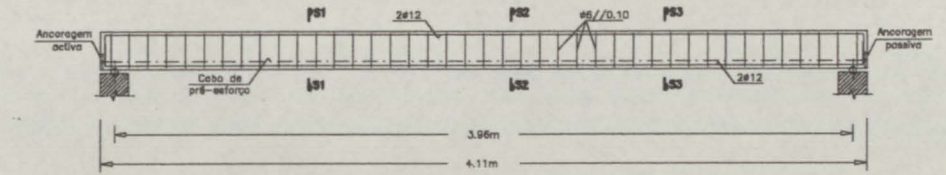
Deformações devidas à aplicação da acção permanente  
- 20 de Junho de 2002 -



Micro-deformações nas secções monitorizadas (µm)			
	Secção S1	Secção S2	Secção S3
fibra superior	-204	-348	-195
fibra inferior	+184	+411	+175



SEGUNDA APLICAÇÃO DA ACÇÃO PERMANENTE



PROJECTO DE UM MODELO DE VIGA DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO

FEUP -Departamento de Eng. Civil



Monitorização das secções S1, S2 e S3  
Deformações e deslocamentos  
provocados pela 2ª aplicação da acção permanente

Desenhou: Heider

Desenho nº 5/5

Data de ensaio  
20 Junho 2002

**BIBLIOGRAFIA:**

Smith, William F., 1996 - "Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais"

Silva, Victor Dias, - "Mecânica e Resistência dos Materiais"

Félix, Carlos Manuela da Silva, 2002 - "Monitorização do Comportamento de Estruturas de Betão

Cruz, Paulo Jorge de Sousa, 1991 - "Análise Não Linear de Estruturas Porticadas Planas de Betão Armado"

Santos, Luís Miguel Pina de Oliveira, 2001 - "Observação e análise do comportamento diferido de pontes de betão"

Eurocódigo 2 (EC2)

Model Code 90 (MC-90)

Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado (R.E.B.A.P.)

Norma Portuguesa ENV206



FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000087372



*Mais Educação*



UNIÃO EUROPEIA  
Fundo Social Europeu

**Nome:** Hélder Filipe Moreira de Sousa

**Curso:** Eng. Civil

**Datas:** 7/1/2002 a 12/31/2002

**Tema:** Comportamento de uma viga de betão armado pré-esforçado em modelo reduzido.

**Empresa:** Instituto da Construção

**Concurso:** 306/012-03 – PRODEPII – Medida 3/Ação 3.2 - Estágios