



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

**COMPORTAMENTO AERODINÂMICO DE
ESTRUTURAS ESBELTAS
ANÁLISE DE EFEITOS DE RAJADA**

Fernando Jorge Dias da Costa Bastos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção
do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, realizada sob orientação dos

Professores Álvaro Cunha e Elsa Caetano

Março de 2008

*“Naquela tarde quebrada
contra o meu ouvido atento
eu soube que a missão das folhas
é definir o vento.”*

Ruy Belo

RESUMO

O trabalho de investigação apresentado nesta dissertação teve como principais objectivos a sistematização dos principais conceitos associados à Engenharia do Vento e o estudo, a implementação e a aplicação de ferramentas destinadas à análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada em estruturas esbeltas.

Neste contexto, são apresentados os fundamentos teóricos e os passos essenciais da implementação dos vários métodos de análise dos efeitos de rajada, no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A exposição é iniciada pela sistematização dos principais conceitos da Teoria de Processos Estocásticos, bem como das formulações clássicas da Dinâmica Estrutural Estocástica linear.

De seguida, é caracterizado o vento na camada limite atmosférica, incidindo-se sobre a sua génese, e sobre a caracterização das componentes média e turbulenta que compõem esta acção. É ainda apresentada a perspectiva de diversos códigos mundiais acerca destes conceitos.

Posteriormente, centra-se a atenção na análise do comportamento aerodinâmico de estruturas esbeltas, abordando-se de forma sistemática os conceitos utilizados na criação de ferramentas de análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada, no domínio do tempo e no domínio da frequência. Complementarmente, descrevem-se algumas aplicações, que realçam o interesse e eficiência dos programas desenvolvidos, no que diz respeito à análise dos efeitos de rajada. Das aplicações, destaca-se a análise de uma antena espiada com 265 metros de altura e 7 níveis de espiaamentos, o que implica, dada a presença de cabos pouco tensos, um elevado grau de não-linearidade geométrica.

Finalmente, é efectuada uma breve resenha dos diferentes dispositivos utilizados no controlo de vibrações induzidas pelo vento, sendo dado maior realce aos dispositivos passivos de controlo de vibrações, dos quais se destacam os deflectores aerodinâmicos e os amortecedores de massas sintonizadas.

ABSTRACT

The work presented in this thesis aims a systematization of the main concepts related to Wind Engineering and also the study, implementation and application of different techniques of performing a quasi-stationary gust effect analysis of slender structures.

In this context, the theoretical background and fundamental steps for implementation of several methods for gust effect analysis, in time and frequency domain, are presented.

This dissertation is initiated by the systematization of the most important notions of Stochastic Process Theory as well as the classical formulation of linear Stochastic Structural Dynamics.

Afterwards, it is characterized the atmospheric boundary layer wind, falling upon the description of its origin, and on the description of mean and turbulent wind components that make up this action. However it's presented major prospects of several world wind codes concerning this concepts.

Subsequently, the attention will be centered in the aerodynamic behavior analysis of slender structures, approaching in a systematic way the concepts used in the software creation for quasi-stationary gust effect analysis, in the time and frequency domain. Later, several applications are presented in order to enhance the interest and the efficiency of the developed software, for the gust effect analysis. The most relevant application concerning the gust effect analysis of a 265 meter tall cable stayed mast with 7 levels of stays, obviously with a high non-linear geometric component associated.

Finally, it is made a brief review of different devices used in wind induced vibration control, giving greater emphasis to passive devices to control vibration of which stand out the aerodynamic deflectors and tuned mass dampers.

AGRADECIMENTOS

Para todos os que me acompanharam neste último ano, familiares, amigos e colegas de trabalho, e que, através da sua amizade, compreensão e disponibilidade, contribuíram para a realização do presente trabalho, aqui apresento o meu reconhecimento. Tenho, contudo, de expressar um agradecimento especial:

- ao Professor Álvaro Cunha, o meu orientador pelos ensinamentos transmitidos, pela bibliografia disponibilizada, pelos meios que colocou ao meu dispor, pelas oportunidades que me proporcionou de frequentar congressos, pela revisão cuidada da tese e pela paciência e empenhamento com que tem acompanhado o meu percurso;
- ao Professor Mota Freitas, pelos conhecimentos transmitidos durante as nossas conversas, pela imensa bibliografia disponibilizada, pelos elementos cedidos relativos aos “case studies” dos quais é o autor, pela amizade, pela sua boa disposição e finalmente pela referência que constitui na minha carreira profissional, expressando assim a minha enorme admiração, e o enorme prazer que é trabalhar com o Professor.
- à Professora Elsa Caetano pela bibliografia cedida, pelas sugestões realizadas, pela forma interessada com que ajudou nos trabalhos numéricos e pela inextinguível disponibilidade e energia com que me ajudou a ultrapassar os obstáculos no decorrer deste trabalho;
- aos colegas de trabalho do grupo de investigação ViBest, Filipe Magalhães, Fernando Marques, Leonel Ramos, Carlos Moutinho e Wei-Hua Hu pelas sugestões sempre inteligentes e pelo agradável convívio que proporcionam;
- aos colegas e amigos de outros grupos de investigação, Alexandre Costa, Bruno Quelhas, Bruno Zuada, Cristina Alves Ribeiro, Hélder Figueiredo, Inês Ferraz, Isabel Horta, João Miranda Guedes, Mário Marques, Miguel Castro, Miguel Silva, Nuno Santos, Ricardo Monteiro, Rui Calçada, Rui Ribeiro, Ricardo Pimentel, Sara Rios, Sérgio Neves, Tiago Ilharco, Valter Lopes pela disponibilidade, companheirismo e convívio diário essencial para suportar os momentos de trabalho mais intenso;
- aos amigos e colegas que, apesar de não terem contribuído de uma forma mais directa na realização deste trabalho, foram importantes na sua realização, pela ajuda e companheirismo demonstrados, sempre me apoiaram e incentivaram na realização do mesmo;

- aos amigos Paulo Machado, Miguel Pinheiro, Dulcineia Pereira e Mafalda Felgueiras pelas eloquentes sugestões realizadas e pelo empenho com que acompanharam o percurso deste trabalho;
- à Susana por todo o apoio e carinho recebido, a sua compreensão, as palavras de incentivo, a ideias sempre criativas e motivação nos momentos mais difíceis;
- aos meus Pais agradeço o seu apoio incondicional e a presença ao longo da minha vida. As suas sugestões e conselhos sábios, a sua infinita paciência durante os momentos de maior inquietação. A base deste trabalho.

Aos meus Pais.

ÍNDICE DE TEXTO

1.	Introdução	1.1
1.1.	Motivação.....	1.1
1.2.	Objectivos e plano de trabalho	1.3
1.3.	Organização da tese.....	1.4
2.	Teoria dos Processos Estocásticos.....	2.1
2.1.	Introdução.....	2.1
2.2.	Processo Estocástico.....	2.1
2.2.1.	Noção de Processo Estocástico e Campo Estocástico.....	2.1
2.2.2.	Caracterização da estrutura probabilística de um processo estocástico	2.3
2.2.3.	Principais grandezas estatísticas utilizadas na caracterização de processos estocásticos	2.4
2.2.4.	Principais leis de distribuição de probabilidade utilizadas na caracterização de processos estocásticos	2.6
2.3.	Processos estocásticos estacionários	2.8
2.3.1.	Homogeneidade e estacionaridade	2.8
2.3.2.	Função de auto-correlação	2.9
2.3.3.	Função densidade espectral de potência	2.10
2.3.4.	Relação entre função de auto-correlação e função densidade espectral de potência	2.12
2.3.5.	Ergodicidade	2.13
2.3.6.	Funções de auto-correlação e de densidade espectral de potência de processos obtidos por sobreposição	2.16
2.3.7.	Funções de auto-correlação e de densidade espectral de potência de processos obtidos por derivação.....	2.17

2.3.8.	Função de coerência.....	2.18
2.4.	Propriedades importantes dos processos estocásticos relacionados com o dimensionamento estrutural	2.19
2.4.1.	Frequência média de passagens ascendentes por um dado nível	2.20
2.4.2.	Distribuição de probabilidade de extremos relativos	2.22
2.4.3.	Distribuição de probabilidade de um extremo absoluto num intervalo de tempo de duração T	2.25
3.	Dinâmica de Osciladores Lineares.....	3.1
3.1.	Introdução.....	3.1
3.2.	Osciladores lineares de 1 grau de liberdade	3.2
3.2.1.	Relações determinísticas excitação-resposta.....	3.2
3.2.1.1.	Domínio do tempo.....	3.4
3.2.1.2.	Domínio da frequência	3.5
3.2.1.3.	Relação entre as funções de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência 3.7	
3.2.2.	Relações estocásticas excitação-resposta.....	3.8
3.2.2.1.	Domínio do tempo.....	3.8
3.2.2.2.	Domínio da frequência	3.10
3.2.3.	Avaliação do valor médio dos picos de resposta.....	3.11
3.3.	Osciladores lineares de N graus de liberdade	3.12
3.3.1.	Relações determinísticas excitação-resposta.....	3.13
3.3.1.1.	Domínio do tempo.....	3.13
3.3.1.2.	Domínio da frequência	3.13

3.3.1.3.	Relação entre as funções de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência	3.15
3.3.2.	Relações estocásticas excitação-resposta.....	3.15
3.3.2.1.	Domínio do tempo.....	3.16
3.3.2.2.	Domínio da frequência	3.18
3.3.3.	Formulação Modal	3.19
3.3.3.1.	Relações determinísticas excitação-resposta no espaço modal	3.19
3.3.3.2.	Relações estocásticas excitação-resposta no espaço modal	3.21
3.3.4.	Caracterização probabilística de variáveis de controlo relacionadas linearmente com N coordenadas generalizadas ou suas derivadas.....	3.27
4.	Caracterização do Vento Atmosférico	4.1
4.1.	Introdução.....	4.1
4.2.	Propriedades da Atmosfera	4.2
4.2.1.	Termodinâmica atmosférica.....	4.2
4.2.2.	Hidrodinâmica atmosférica.....	4.5
4.2.3.	Circulação Atmosférica Global.....	4.9
4.2.4.	Circulação Atmosférica Secundária.....	4.12
4.2.5.	Ventos Locais.....	4.12
4.3.	Componente média associada à velocidade do vento.....	4.14
4.3.1.	Perfil de variação da velocidade média longitudinal do vento em altura. Generalidades....	4.14
4.3.1.1.	Perfil logarítmico.....	4.19
4.3.1.2.	Perfil tipo potência	4.21
4.3.1.3.	Terrenos não homogéneos.....	4.22

4.3.2.	Ventos extremos.....	4.26
4.3.2.1.	Intervalo de registo	4.27
4.3.2.2.	Período de retorno	4.29
4.3.2.3.	Distribuição estatística de extremos	4.30
4.3.3.	Regulamentação	4.33
4.3.3.1.	Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes	4.33
4.3.3.2.	Eurocódigo 1 – Parte 1-4: Acção do Vento.....	4.35
4.3.3.3.	Outra regulamentação.....	4.38
4.4.	Turbulência atmosférica	4.41
4.4.1.	Intensidade da turbulência.....	4.42
4.4.2.	Escalas de turbulência.....	4.44
4.4.3.	Função densidade espectral de potência das flutuações longitudinais	4.47
4.4.3.1.	Espectro cruzado das flutuações longitudinais. Coerência espacial.....	4.53
4.4.4.	Densidades espectrais das flutuações transversais	4.55
4.4.5.	Factor de rajada (velocidade média vs velocidade de ponta).....	4.57
4.4.6.	Regulamentação	4.58
4.4.6.1.	Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes	4.59
4.4.6.2.	Eurocódigo 1 – Parte 1-4: Acção do Vento.....	4.60
4.4.6.3.	Outra regulamentação.....	4.63
5.	Comportamento Aerodinâmico de estruturas esbeltas.....	5.1
5.1.	Introdução.....	5.1
5.2.	Particularidades dos Escoamentos.....	5.2
5.2.1.	Princípios da mecânica dos fluidos	5.2

5.2.1.1.	Equações de Navier-Stokes (Equações do movimento e da continuidade).....	5.2
5.2.1.2.	Equações de Euler	5.3
5.2.1.3.	Equação de Bernoulli	5.4
5.2.1.4.	Escoamento segundo linhas de fluxo (ou linhas de corrente) curvas	5.4
5.2.1.5.	Parâmetros adimensionais importantes na caracterização de escoamentos.....	5.6
5.2.1.6.	A camada limite e a separação da camada limite	5.8
5.2.2.	Caracterização do escoamento e a libertação de vórtices	5.10
5.2.2.1.	Caracterização do escoamento	5.10
5.2.2.2.	Libertação de vórtices	5.14
5.2.3.	Coeficientes de pressão e coeficientes de força	5.15
5.2.3.1.	Influência do número de Reynolds e da turbulência	5.17
5.2.3.2.	Coerência espacial.....	5.21
5.3.	Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada	5.21
5.3.1.	Análise no domínio da frequência.....	5.22
5.3.1.1.	Estruturas pontuais	5.22
5.3.1.2.	Estruturas esbeltas (múltiplos graus de liberdade)	5.30
5.3.2.	Análise no domínio do tempo	5.51
5.3.2.1.	Geração de séries temporais de velocidade do vento	5.51
5.3.3.	Ação estática do vento segundo a EN1991-1-4.....	5.66
5.4.	Análise de vibrações laterais induzidas pela libertação de vórtices (Vortex shedding – Lock-in)	5.72
5.4.1.	O fenómeno físico.....	5.73
5.4.1.1.	Força lateral associada à libertação de vórtices.....	5.76

5.4.1.2.	Força lateral associada aos movimentos estruturais auto induzidos.....	5.78
5.4.2.	Resposta estrutural baseada num modelo espectral	5.82
5.4.3.	Resposta estrutural baseada num modelo de “vórtices ressonantes”	5.85
5.4.4.	Regulamentação - Eurocódigo EN1991-1-4	5.87
6.	Estudo do comportamento dinâmico de estruturas esbeltas sob os efeitos de rajada	6.1
6.1.	Introdução.....	6.1
6.2.	Chaminé de 60m.....	6.1
6.2.1.	Descrição da chaminé	6.1
6.2.2.	Modelo numérico	6.3
6.2.2.1.	Discretização estrutural	6.3
6.2.2.2.	Caracterização do comportamento dinâmico (frequências naturais e modos de vibração) 6.5	
6.2.3.	Definição da acção	6.8
6.2.3.1.	Velocidade média	6.8
6.2.3.2.	Turbulência atmosférica	6.10
6.2.4.	Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada	6.14
6.2.4.1.	Abordagem no domínio do tempo	6.16
6.2.4.2.	Abordagem no domínio da frequência	6.31
6.2.5.	Análise regulamentar	6.37
6.2.6.	Análise comparativa dos resultados obtidos	6.39
6.2.7.	Análise dos efeitos laterais induzidos pela libertação de vórtices.....	6.42
6.3.	Antena espiada com 265m da Rádio Renascença (Muge).....	6.45
6.3.1.	Descrição da estrutura	6.45

6.3.2.	Modelo numérico	6.47
6.3.2.1.	Discretização estrutural	6.47
6.3.2.2.	Caracterização do comportamento dinâmico da estrutura.....	6.55
6.3.3.	Definição da acção.....	6.58
6.3.3.1.	Velocidade média	6.58
6.3.3.2.	Turbulência atmosférica	6.59
6.3.4.	Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio do tempo.....	6.63
6.3.4.1.	Geração artificial de amostras séries temporais de velocidade do vento	6.65
6.3.4.2.	Séries temporais de forças aerodinâmicas.....	6.69
6.3.4.3.	Amortecimento aerodinâmico	6.71
6.3.4.4.	Simulações numéricas para avaliação dos efeitos de rajada.....	6.73
6.3.5.	Análise regulamentar	6.80
6.3.6.	Análise comparativa dos resultados obtidos	6.85
7.	Dispositivos de controlo de vibrações induzidas pelo vento	7.1
7.1.	Introdução.....	7.1
7.2.	Amortecimento de estruturas.....	7.1
7.3.	Controlo passivo de vibrações induzidas pelo vento.....	7.2
7.3.1.	Dispositivos aerodinâmicos de redução de vibrações devidas a libertação de vórtices..	7.3
7.3.2.	Dispositivos de amortecimento de vibrações induzidas pelo vento	7.6
7.3.2.1.	Dimensionamento um amortecedor de massas sintonizadas	7.10
7.4.	Controlo activo de vibrações induzidas pelo vento	7.17
7.4.1.	Bases teóricas.....	7.18
7.4.1.1.	Estratégias de controlo	7.21

7.4.2.	Sistemas de actuadores e mecanismos de controlo	7.22
7.4.2.1.	Controlo por cabos activos	7.23
7.4.2.2.	Amortecedores activos de massas	7.24
7.4.2.3.	Deflectores aerodinâmicos de controlo activo.....	7.25
8.	Considerações finais e desenvolvimentos futuros	8.1
8.1.	Considerações finais.....	8.1
8.2.	Perspectivas de desenvolvimentos futuros	8.8

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Fotos da “Tay Bridge” pouco tempo antes do colapso (a) e da “Tacoma Narrow Bridge” precisamente na altura do colapso (b).....	1.2
Figura 1.2 – Fotos da “Akashi-Kaikyo Bridge” (a) e do túnel de vento onde esta foi ensaiada (b).	1.2
Figura 2.1 – As n realizações do processo estocástico Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição.[8].....	2.2
Figura 2.2 – Funções densidade de probabilidade [1].	2.7
Figura 2.3 – Influência da irregularidade do processosobre a função de auto-correlação [8].	2.10
Figura 2.4 – Relação entre os espectros de potência e os tipos de processos estocásticos estacionários com diferentes tipos de conteúdo em frequências [8].....	2.11
Figura 2.5 – Processo estocástico ergódico [8].....	2.14
Figura 2.6 – Funções densidade espectral de potência definidas em função de [8].....	2.15
Figura 2.7 – Passagens ascendentes de pelo nível [8].	2.20
Figura 2.8 – Domínio a satisfazer para a ocorrência de uma passagem ascendente depelo nível [8].	2.20
Figura 2.9 – Extremos relativos de uma realização do processo [8].....	2.22
Figura 2.10 – Evolução de, Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição., na vizinhança de um extremo relativo[8].	2.22
Figura 2.11 – Domínio a satisfazer para a ocorrência de um extremo relativo no intervalo [8].....	2.23
Figura 2.12 – Densidade de probabilidade dos extremos relativos[12].....	2.25
Figura 2.13 – Densidade de probabilidade correspondente às variáveis, Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. e [12].....	2.26
Figura 2.14 – Variação do valor médio dos extremos com o número médio de passagens ascendentes por zero [8].	2.27
Figura 3.1 – Processo de excitação e resposta de um sistema linear de [8].....	3.2

Figura 3.2 – Modelo de oscilador linear de	3.3
Figura 3.3 – Excitação subdividida em impulsos [7].....	3.4
Figura 3.4 – Função impulso de Dirac de excitação e a correspondente função de resposta [7].....	3.4
Figura 3.5 – Processo de excitação e resposta de um sistema linear de.....	3.12
Figura 4.1 – Transporte de calor, através de radiação na atmosfera [3].	4.3
Figura 4.2 – Fenómeno de convecção atmosférica	4.4
Figura 4.3 – Movimento de uma massa de ar elementar sujeito apenas ao gradiente de pressões horizontais[3].	4.5
Figura 4.4 – Trajectória de uma massa de ar elementar, segundo a direcção de um vento geotrófico [2].	4.6
Figura 4.5 – Trajectória do um vento gradiente ciclónico (a) e anticiclónico (b) [2].	4.7
Figura 4.6 – Massa de ar elementar sujeito a sistemas de forças [2].	4.9
Figura 4.7 – Variação da velocidade do vento em função do atrito do terreno e do ângulo com a direcção do vento geotrófico [2].	4.9
Figura 4.8 – Circulação global atmosférica [31].....	4.10
Figura 4.9 –Casos típicos de instabilidades devido ao encontro de uma massa de ar quente com uma massa de ar frio [2].	4.11
Figura 4.10 – Representação esquemática da formação de ventos tipo Foehn e tipo Bora [2].....	4.13
Figura 4.11 – Fenómeno de desenvolvimento de uma tempestade [2].	4.13
Figura 4.12 – Flutuação da velocidade do vento longitudinal num determinado instante de tempo t[2]	4.15
Figura 4.13 – Elementos genéricos de rugosidade dispostos uniformemente no terreno [2].....	4.19
Figura 4.14 – Representação esquemática do plano de “deslocamento nulo”, numa zona de elevada rugosidade [2].	4.20

Figura 4.15 – Comparação entre a lei de potência e a lei logarítmica para o caso de um terreno da categoria II do Eurocódigo 1.	4.22
Figura 4.16 – Representação das regiões atmosféricas de transição decorrentes da passagem de um escoamento por uma zona de transição de rugosidade [1].....	4.23
Figura 4.17 – Modelo adoptado pelo código EN1991-1-4 [23].....	4.25
Figura 4.18 – Ilustração da variação da velocidade do vento com a orografia [23].	4.25
Figura 4.19 – Factor Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. para encostas (a) e para colinas (b) [23].	4.26
Figura 4.20 – Probabilidade de um valor médio, com um período de retorno, ser excedida, durante um período de referência.	4.30
Figura 4.21 – Perfis de velocidades médias para os dois tipos de rugosidade e zonas do território definidas no regulamento Português (RSA).	4.35
Figura 4.22 – Variação da intensidade de turbulência Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. segundo a direcção longitudinal.	4.44
Figura 4.23 – Variação dos coeficientes e Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. em função de [3]	4.46
Figura 4.24 – Espectro de Van Der Hoven, com a representação das regiões macro meteorológica, micro meteorológica e “inertial subrange” [37].....	4.48
Figura 4.25 – Comparação entre as funções densidade espectral de potência reduzida propostas por Davenport, Harris, Kaimal, Simiu e Von Kàrmàn para um ponto a uma altura de 10 metros.....	4.52
Figura 4.26 – Funções de densidade espectral de potência reduzida de Kaimal, Simiu e Von Kàrmàn, para diferentes escalas de referência e para um ponto à cota de 65 metros.	4.52
Figura 4.27 – Representação da função de coerência em função da frequência (a) e em função da distância transversal, na direcção y (b).....	4.54
Figura 4.28 – Comparação das funções densidade espectral reduzida das componente (a) aconselhadas por Simiu[3] e da componente vertical (b) para um ponto a altura de 65m.	4.57
Figura 4.29 – Função densidade espectral reduzida indicada pelo Eurocódigo 1, para uma altura de 10 metros acima do solo.	4.62

Figura 5.1 – Escoamento segundo um percurso circular [3].....	5.5
Figura 5.2 – Comportamento de um vórtice livre num fluido real. Distribuição de pressão e velocidade em função do raio do vórtice [3].....	5.6
Figura 5.3 – Influência de uma superfície plana sobre a velocidade [36].....	5.9
Figura 5.4 – Representação esquemática dos mecanismos global (a) [36] e local (b) [41] de separação da camada limite da superfície de um cilindro.	5.9
Figura 5.5 – Exemplo de um escoamento sobre um perfil de asa (a) e sobre um corpo com secção rectangular (b) [1]	5.10
Figura 5.6 – Separação da camada limite, numa superfície curva (a) e sobre uma aresta viva (b) [1]	5.11
Figura 5.7 – Separação da camada limite numa secção quadrada [36].....	5.11
Figura 5.8 – Separação da camada limite numa secção rectangular [36]	5.12
Figura 5.9 – Influência de uma secção circular no escoamento caracterizado com diferentes números de Reynolds [3].....	5.13
Figura 5.10 – Exemplo do efeito do escoamento sobre uma parede (alçado e planta) [36]	5.14
Figura 5.11 – Representação da notação dos referenciais numa secção transversal genérica [1].....	5.17
Figura 5.12 – Variação do coeficiente de arrastamento com o número de Reynolds, para uma secção cilíndrica [3].....	5.18
Figura 5.13 – Influência do número de Reynolds sobre o conjunto de pressões para uma secção circular [3].....	5.19
Figura 5.14 – Influência do rácio das dimensões de secção rectangular sobre o coeficiente de arrastamento [3].....	5.19
Figura 5.15 – Influência do número de Reynolds, do raio das arestas e da rugosidade superficial sobre o coeficiente de arrastamento de secções quadradas e circulares (r é o raio das arestas e k a rugosidade superficial) [3].....	5.20
Figura 5.16 – Evolução típica do coeficiente de arrastamento em função do números de Reynolds [3]	5.20

Figura 5.17 – Representação esquemática da estrutura com um grau de liberdade [2].....	5.22
Figura 5.18 – Função de transferência aerodinâmica associada à força de arrastamento [18].	5.26
Figura 5.19 – Parcelas de fundo e ressonante da resposta [18].....	5.27
Figura 5.20 – Secção transversal oscilante de uma estrutura esbelta genérica.	5.31
Figura 5.21 – Função de transferência aerodinâmica correspondentes às funções de influência de resposta uniforme, linear e consola (a) e, para diferentes configurações sinusoidais (b).	5.45
Figura 5.22 – Funções de transferência aerodinâmica em correspondência com as funções apresentadas no Quadro 5.3.	5.46
Figura 5.23 – Sobreposição de 4 harmónicas.	5.57
Figura 5.24 – Amostra de um campo de velocidades de vento.....	5.65
Figura 5.25 – Formas genéricas das estruturas cobertas pelo procedimento de calculo da EN1991-1-4 [23].....	5.69
Figura 5.26 – Ilustração de um modo de ovalização de uma casca de uma chaminé [36].	5.72
Figura 5.27 – Morfologia dos turbilhões alternados [1]	5.73
Figura 5.28 – Variação do número de Strouhal com o número de Reynolds, em prismas de secção transversal circular [2, 3]	5.74
Figura 5.29 – Caracterização do efeito de sincronização e comparação entre a ressonância mecânica e a ressonância por vórtices [36].	5.78
Figura 5.30 – Influência da amplitude de oscilação sobre o comprimento de correlação [2].....	5.79
Figura 5.31 – Rácio entre os amortecimentos aerodinâmicos negativos num escoamento turbulento e num escoamento laminar, em função da intensidade de turbulência em larga escala [2].....	5.81
Figura 5.32 – Intensidade de turbulência em função do número de Scruton [2].	5.81
Figura 5.33 – Factor de pico Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. em função do rácio entre amortecimento estrutural e o aerodinâmico.	5.84
Figura 5.34 – Definição do comprimento de correlação de acordo com Ruscheweyh [2, 36]	5.86

Figura 5.35 – Número de Strouhal para secções rectangulares de arestas vivas [23].....	5.90
Figura 5.36 – Valor básico do coeficiente de força lateral em função do número de Reynolds, para secções circulares [23]	5.91
Figura 5.37 – Exemplos para a determinação do Comprimento de correlação efectivo [23]	5.93
Figura 6.1 – Alçado da chaminé metálica com 60 metros de altura, com a indicação da espessura da secção a variar em altura.....	6.2
Figura 6.2 – Modelação da chaminé em elementos finitos de casca sem as tomadas de gases (a) e com as tomadas de gases (b).....	6.3
Figura 6.3 – Modelo da chaminé, construído no programa SOLVIA, em elementos finitos de viga ..	6.4
Figura 6.4 – Quatro primeiros modos de vibração longitudinais obtidos com o modelo 2 (elementos de casca com aberturas, SAP2000).....	6.6
Figura 6.5 – Quatro primeiros modos de vibração longitudinais obtidos com o modelo 3 (elementos de viga, SOLVIA).....	6.7
Figura 6.6 – Primeiro modo de vibração com ovalização da secção transversal da estrutura.	6.7
Figura 6.7 – Variação da velocidade média do vento em altura, correspondente às três situações regulamentares consideradas.	6.10
Figura 6.8 – Função densidade espectral de potência reduzida de acordo com a EN1991-1-4[23]. ..	6.12
Figura 6.9 – Funções densidade espectral de potência para os 3 pontos caracterizados no Quadro 6.6	6.12
Figura 6.10 – Funções de coerência (a) e funções densidade espectral cruzada (b) para os 3 pontos caracterizados no Quadro 6.6.....	6.14
Figura 6.11 – Representação dos nós da estrutura onde foram geradas séries temporais de velocidade de vento, nas 3 situações consideradas.	6.17
Figura 6.12 – Séries temporais de velocidade do vento geradas nos pontos às cotas (a), (b) e (c).....	6.18
Figura 6.13 – Comparação entre as funções densidade espectral de partida e as estimativas espectrais médias referentes aos 10 lotes de séries correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.6.	6.19

Figura 6.14 – Comparação entre as funções densidade espectral cruzada de partida e as estimativas espectrais médias cruzadas referentes aos 10 lotes correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.6.	6.20
Figura 6.15 – Comparação entre a função densidade espectral de potência de partida e as estimativas espectrais médias dos processos gerados para diferentes números de repetições: 1(a), 5(b), 10(c), 25(d), 50(e) e 100(f).....	6.22
Figura 6.16 – Erro quadrático médio em função do número de simulações realizadas.....	6.22
Figura 6.17 – Variação do arrastamento (produto do coeficiente de arrastamento pela área exposta) com a altura da estrutura.....	6.24
Figura 6.18 – Função de modulação temporal da acção.....	6.24
Figura 6.19 – Resposta temporal relativa às variáveis de controlo, para o primeiro lote de séries do 3º grupo (deslocamento no topo (a) e momento flector na base (b)).	6.26
Figura 6.20 – Participação de cada um dos modos na resposta estrutural, em termos das variáveis de controlo definidas.	6.29
Figura 6.21 – Representação da resposta temporal em deslocamentos (dx) e da respectiva estimativa espectral quer em termos globais (a), quer em termos de contributo dos modos 1 a 4 ((b) a (e)).	6.31
Figura 6.22 – Configurações modais e respectivas funções de transferência para os primeiros 4 modos de vibração longitudinais.....	6.33
Figura 6.23 – Funções modais de transferência aerodinâmica (a) e densidade espectral das forças modais (b).....	6.35
Figura 6.24 – Densidades espectrais das respostas modais para cada um dos primeiros 4 modos longitudinais.	6.36
Figura 6.25 – Participação de cada modo de vibração na resposta estrutural em termos das variáveis de controlo consideradas (deslocamento no topo e momento flector na base).....	6.37
Figura 6.26 – Envolvente dos valores médios da resposta estrutural (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados, em função da altura.	6.38
Figura 6.27 – Envolvente dos valores extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados, em função da altura.....	6.38

Figura 6.28 – Envolvente dos valores médios dos extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)).....	6.40
Figura 6.29 – Envolvente dos valores médios extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados no Quadro 6.15.	6.40
Figura 6.30 – Participação de cada um dos quatro modos de vibração na resposta estrutural para os casos das análises temporal e espectral (deslocamento no topo (a) e momento flector na base (b))..	6.41
Figura 6.31 – Representação das deformações (a) e dos momentos flectores (b) para o 1º e 2º modos transversais de vibração e para ambas as configurações da chaminé, em função da altura.....	6.44
Figura 6.32 – Foto da antena espiada (a) e pormenor da ligação do fuste à fundação (b).....	6.45
Figura 6.33 – Esquema estrutural com a representação do fuste e dos diversos níveis de espionamento.	6.46
Figura 6.34 – Representação do modelo 1 da antena espiada (simulação dos cabos através de 1 elemento de barra).....	6.48
Figura 6.35 – Comportamento de cabos pouco tensos de uma estrutura solicitada por um carregamento horizontal.	6.48
Figura 6.36 – Representação do modelo 2 da antena espiada (simulação dos cabos através de 20 elementos de barra).....	6.49
Figura 6.37 – Representação do modelo 3 da antena espiada (simulação dos cabos como molas com rigidez equivalente).....	6.50
Figura 6.38 – Variação do peso próprio (a) e da rigidez à flexão do fuste (b) em altura.....	6.50
Figura 6.39 – Representação genérica de um cabo isolado.	6.51
Figura 6.40 – Configurações modais correspondentes aos primeiros 4 modos de vibração longitudinais para a situação deformada devida ao carregamento horizontal do vento médio para o modelo 3 (modelo com molas).	6.57
Figura 6.41 – Configurações modais correspondentes aos primeiros 4 modos de vibração longitudinais para a situação deformada devida ao carregamento horizontal do vento médio sobre o modelo 2 (modelo com cabos discretizados em 20 elementos de barra).	6.58

Figura 6.42 – Representação dos perfis de variação da velocidade média e da intensidade de turbulência com a altura.....	6.60
Figura 6.43 – Função densidade espectral de potência reduzida, de acordo com a EN1991-1-4[23].	6.61
Figura 6.44 – Funções densidade espectral de potência relativos aos 3 pontos caracterizados no Quadro 6.26	6.62
Figura 6.45 – Funções de coerência (a) e funções densidade espectral cruzada (b) relativas aos 3 pontos caracterizados no Quadro 6.26.....	6.63
Figura 6.46 – Representação dos nós da estrutura para os quais foram geradas séries temporais de velocidade de vento.	6.65
Figura 6.47 – Séries temporais de velocidade do vento geradas nos pontos às cotas (a), (b) e (c).....	6.66
Figura 6.48 – Comparação entre as funções densidade espectral de partida e as estimativas espectrais médias referentes aos 10 lotes de séries correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.26.....	6.67
Figura 6.49 – Comparação entre as funções densidade espectral cruzada de partida e as estimativas espectrais médias cruzadas referentes aos 10 lotes correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.26. ...	6.68
Figura 6.50 – Variação do arrastamento (coeficiente de arrastamento multiplicado pela área batida) em função da altura.....	6.70
Figura 6.51 – Função de modulação temporal da acção.....	6.71
Figura 6.52 – Representação dos amortecimentos correspondentes a cada um dos modos bem como da respectiva curva de ajustamento da matriz proporcional de amortecimento de Rayleigh.	6.72
Figura 6.53 – Evolução temporal dos deslocamentos do topo do fuste (a) e dos momentos flectores no nó à cota Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição.(b) da estrutura solicitada pelo primeiro lote de séries geradas.	6.75
Figura 6.54 – Funções densidade espectral de potência da resposta referente aos deslocamentos do topo do fuste (a) e aos momentos flectores no nó à cota (b) da estrutura.....	6.76
Figura 6.55 – Evolução temporal do esforço axial nas espigas a barlavento e a sotavento do 7º nível de espigamento (a) e do deslocamento no nó à cota versus o esforço da espiga barlavento do 7º nível (b), ambos normalizados relativamente à correspondente componente estática relativa à análise inicial.	6.77

Figura 6.56 – Envolventes de deslocamentos referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).....	6.79
Figura 6.57 – Envolventes de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).	6.79
Figura 6.58 – Aplicação dos trechos de carga [66].....	6.83
Figura 6.59 – Envolvente de deslocamentos referentes a componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).....	6.85
Figura 6.60 – Envolvente de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).	6.85
Figura 6.61 – Envolvente de deslocamentos referentes a componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).....	6.86
Figura 6.62 – Envolvente de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).	6.86
Figura 7.1 – Exemplos de dispositivos aerodinâmicos utilizados em estruturas de secção transversal circular (cabos, chaminés)[36].....	7.3
Figura 7.2 – Escoamento em torno da secção do tabuleiro de uma ponte antes (a) e depois (b) da adopção de dispositivos aerodinâmicos [1].	7.4
Figura 7.3 – Esquema dos modelos ensaiados por Janeiro Borges [76].	7.4
Figura 7.4 – Representação gráfica do desvio padrão da amplitude em função da velocidade reduzida para cada um dos modelos ensaiados [76].	7.4
Figura 7.5 – Esquema de funcionamento de um amortecedor viscoso (a) e sua aplicação ao controlo de vibrações em tirantes de uma ponte (b)[64].....	7.6
Figura 7.6 – Exemplo da aplicação de um amortecedor viscoelástico (a)[36] e de um amortecedor friccional (b) [77].....	7.7
Figura 7.7 – Esquema de funcionamento de um TMD acoplado a uma estrutura.	7.8
Figura 7.8 – Exemplo de TMD pendular utilizado numa chaminé (a) [78] e de um TMD utilizado para a redução do efeito vibratório induzido pelo vento no tabuleiro de uma ponte (b) [62].....	7.8

Figura 7.9 – TMD tipo stockbridge utilizado nos cabos da cobertura de um estádio (a) e TMD utilizado para a atenuação de vibrações nas torres de uma ponte atirantada (b) [36].	7.9
Figura 7.10 – Esquema de funcionamento de um TLCD [79].	7.9
Figura 7.11 – Esquema de funcionamento de um amortecedor de massa sintonizada aplicado a uma estrutura sem amortecimento.	7.10
Figura 7.12 – Amplitude do movimento da massa em função de para (a) e (b).	7.11
Figura 7.13 – Amplitude de movimento da massa em função de.	7.14
Figura 7.14 – Esquema de funcionamento de um TMD acoplado a uma estrutura com amortecimento.	7.14
Figura 7.15 – Amplitude de movimento da massa de uma estrutura com amortecimento, em função de.	7.15
Figura 7.16 – Esquema de funcionamento de um supressor de vibrações.	7.15
Figura 7.17 – Deslocamentos no topo da chaminé, induzidos por acção harmónica de “vortex shedding”, sem a presença do TMD (a) e com o TMD em funcionamento (b).	7.16
Figura 7.18 – Esquema teórico de funcionamento de um sistema de controlo activo.	7.19
Figura 7.19 – Esquema de sistema operar em laço aberto (“open-loop”).	7.19
Figura 7.20 – Esquema de sistema a operar em laço fechado (“closed-loop”).	7.20
Figura 7.21 – Esquema de uma estrutura de um edifício com um sistema de controlo com cabos activos [77].	7.23
Figura 7.22 – Esquema de uma ponte atirantada com um sistema de controlo de vibrações através da introdução de actuadores nos cabos [77].	7.23
Figura 7.23 – Esquema de estrutura de edifício com um ATMD implementado.	7.24
Figura 7.24 – Esquema do amortecedor de massa sintonizada activa implementado no Citycorp Center Building em Nova York [74].	7.25
Figura 7.25 – Sistema de controlo activo através de deflectores aerodinâmicas para o controlo de vibrações no tabuleiro de uma ponte [1].	7.26

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 4.1 – Valores das escalas de rugosidade, coeficiente de rugosidade, rácio de velocidades e do expoentes, para cada uma das categorias de terreno preconizado pelo Eurocódigo 1[23].	4.22
Quadro 4.2 – Valores apresentados por Simiu[3], para em função do período.	4.28
Quadro 4.3 - Valores da razão para os tipos de terrenos preconizados pelo RSA.	4.28
Quadro 4.4 – Escalas de rugosidade e alturas mínimas caracterizadoras dos diferentes terrenos do Eurocódigo 1[23]	4.37
Quadro 4.5 - Caracterização da abordagem de cada um dos códigos [19-24, 28, 35].	4.39
Quadro 4.6 - Definição dos tipos de terreno segundo cada um dos códigos [19-24, 28, 35].	4.40
Quadro 4.7 - Definição da velocidade de referência, segundo cada um dos códigos [19-24, 28, 35].	4.41
Quadro 4.8 – Valores do coeficiente β em correspondência com o valor de z_0	4.43
Quadro 4.9 – Valores da velocidade média, da velocidade de rajada e do factor de rajada para 3 tipos de terreno do Eurocódigo 1 [23].	4.58
Quadro 4.10 – Funções densidade espectral de potência adoptadas por cada um dos códigos [19-23, 27, 28, 35]	4.63
Quadro 5.1 – Funções de co-influência normalizada da resposta e funções de transferência aerodinâmica, tomando e para diferentes configurações modais [2].	5.44
Quadro 5.2 – Coeficientes e correspondentes às funções do Quadro 5.1 [2].	5.45
Quadro 5.3 – Funções de transferência aerodinâmica para tabuleiros de pontes, segundo diferentes autores [1]	5.46
Quadro 5.4 – Constante em função dos modos de vibração [23].	5.71
Quadro 5.5 – Números de Strouhal para diferentes secções transversais [23]	5.89
Quadro 5.6 – Valor básico do coeficiente de força lateral para diferentes secções transversais [23].	5.92
Quadro 5.7 – Coeficiente de força lateral, em função do rácio de velocidades Erro! Não é possível criar objectos a partir de códigos de campo de edição. [23].	5.93

Quadro 5.8 – Comprimento de correlação efectivo em função da amplitude de vibração [23].....	5.94
Quadro 5.9 – Constantes para a determinação dos efeitos da libertação de vórtices [23].	5.95
Quadro 6.1 – Principais propriedades físicas e mecânicas do material utilizado na concepção da chaminé.....	6.2
Quadro 6.2 – Propriedades da secção transversal em correspondência com as espessuras da Figura 6.1	6.4
Quadro 6.3 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 19 primeiros modos de vibração.	6.5
Quadro 6.4 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades da EN1991-1-4, de acordo com o local de implantação da estrutura.....	6.8
Quadro 6.5 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades do RSA, para dois valores diferentes da probabilidade de excedência, para o local de implantação da estrutura.	6.10
Quadro 6.6 – Principais parâmetros caracterizadores da turbulência nos pontos à cota, e segundo a EN1991-1-4.	6.12
Quadro 6.7 – Valores dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries geradas para cada um dos pontos do Quadro 6.6, e respectivos valores médios e coeficientes de variação.	6.21
Quadro 6.8 – Valores dos decrementos logarítmicos e amortecimentos relativos, estruturais, aerodinâmicos e globais, para os primeiros 4 modos de vibração longitudinais.	6.25
Quadro 6.9 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do deslocamento no topo (dx), para os 10 lotes de séries de cada um dos 3 grupos. Respectivos valores médios e desvios padrão.....	6.27
Quadro 6.10 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do momento flector na base (My), para os 10 lotes de séries de cada um dos 3 grupos. Respectivos valores médios e desvios padrão.....	6.27
Quadro 6.11 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do deslocamento no topo (dx), para os 10 lotes de séries. Respectivos valores médios e coeficientes de variação.....	6.28
Quadro 6.12 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do momento flector (My) na base, para os 10 lotes de séries. Respectivos valores médios e coeficientes de variação.....	6.29
Quadro 6.13 – Valores dos desvios-padrão, dos factores de pico e dos extremos absolutos das respostas modais relativas as variáveis de controlo definidas.	6.36

Quadro 6.14 – Valores médios e extremos absolutos da componente turbulenta da resposta estrutural para cada um dos modelos e para as variáveis de controlo previamente definidas.	6.39
Quadro 6.15 – Valores médios e extremos absolutos da componente turbulenta da resposta estrutural para cada um dos modelos e para as variáveis de controlo previamente definidas.	6.39
Quadro 6.16 – Velocidades críticas referentes a cada um dos modos transversais de vibração.....	6.42
Quadro 6.17 – Valores dos números de Scruton para o 1º e 2º modos de vibração.	6.43
Quadro 6.18 – Amplitude máxima de deformação para cada um dos modos de vibração e de acordo com cada uma das configurações da chaminé.	6.43
Quadro 6.19 – Propriedades dos materiais utilizados na construção da antena espiada.....	6.46
Quadro 6.20 – Propriedades mecânicas de cada uma das secções tipo do fuste.....	6.47
Quadro 6.21 – Propriedades mecânicas de cada um dos cabos em correspondência com o nível a que está ligado.	6.47
Quadro 6.22 – Caracterização estática dos cabos correspondentes a cada nível de espionamento.	6.53
Quadro 6.23 – Caracterização dinâmica dos cabos correspondentes a cada nível de espionamento. Comparação das frequências (em Hz), entre a abordagem teórica e o modelo com discretização em 20 elementos finitos de barra.	6.54
Quadro 6.24 – Frequências naturais e respectivas configurações modais, referentes aos 19 primeiros modos de vibração.	6.56
Quadro 6.25 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades da EN1991-1-4, de acordo com o local de implantação da estrutura.....	6.59
Quadro 6.26 – Principais parâmetros caracterizadores da turbulência nos pontos à cota, e, segundo a EN1991-1-4.	6.61
Quadro 6.27 – Valores dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries geradas para cada um dos pontos do Quadro 6.26, e respectivos valores médios e coeficientes de variação.	6.69
Quadro 6.28 – Valores dos decrementos logarítmicos e dos amortecimentos estruturais, aerodinâmicos e globais, para os primeiros 8 modos longitudinais.....	6.72
Quadro 6.29 – Pontos críticos considerados ao longo do fuste.	6.74

Quadro 6.30 – Força total no fuste versus força total nos cabos.....	6.74
Quadro 6.31 – Valores dos extremos absolutos e desvios-padrão das variáveis de controlo representadas na Figura 6.53 e na Figura 6.55 para os 10 lotes de séries e respectivos valores médios e coeficientes de variação.	6.77
Quadro 6.32 – Valores da componente média e dos valores médios dos extremos absolutos e desvios-padrão da resposta em cada um dos 15 pontos críticos definidos no Quadro 6.29.....	6.78
Quadro 6.33 – Comparação entre as análises realizadas com e sem o amortecimento aerodinâmico.	6.80
Quadro 6.34 – Critérios para a aplicação da metodologia definida na norma EN1993-3-1.	6.81
Quadro 6.35 – Valores da componente média e valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão, das respostas estruturais (deslocamentos e momentos flectores) para os pontos críticos definidos no Quadro 6.29.....	6.84
Quadro 6.36 – Valores médios, extremos e desvios-padrão da tensão nas espigas do 7º nível a sotavento e a barlavento, para os diferentes procedimentos de análise.....	6.88
Quadro 7.1 – Parâmetros utilizados na definição do dispositivo de controlo de vibrações da chaminé.	7.16
Quadro 7.2 – Amplitude máxima de vibração do topo da chaminé obtida através das diversas análises, tendo em conta a aplicação de dispositivos de controlo de vibrações.	7.17

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

O desenvolvimento de novos materiais e tecnologias de construção durante as últimas décadas levou ao crescimento do número de pontes de grande vão, coberturas de estádios e outras estruturas especiais muito flexíveis, com baixos amortecimentos e por isso susceptíveis à excitação aerodinâmica.

Este facto é evidenciado em diferentes estudos relacionados com projectos ambiciosos recentemente desenvolvidos em todo o mundo, onde é revelada a necessidade de criar e aplicar ferramentas experimentais e numéricas mais refinadas, que permitam ao projectista estimar os efeitos do vento com um elevado grau de precisão, incorporando conhecimentos mais profundos relacionados com a climatologia e a “performance” aerodinâmica estrutural.

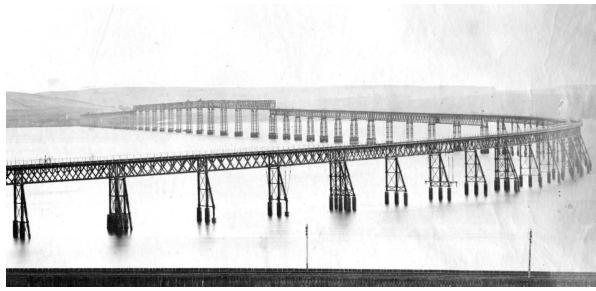
Esta tendência reflecte-se com expressão no Eurocódigo 1, onde são apresentadas diferentes regras para lidar com os diferentes fenómenos induzidos pelo vento, apesar de a sua aplicabilidade ser relativamente restrita e não compatível com a concepção e projecto de estruturas de grande vão realmente inovadoras.

Contudo, a compreensão do comportamento de estruturas sob a acção do vento não é uma preocupação recente, mas antes um esforço contínuo dos engenheiros de estruturas desde o século XIX.

A evolução registada nesta área foi claramente marcada por um significativo número de desastres [1], que constituíram um momento chave de viragem na história da Engenharia do Vento. O colapso da “Tay Bridge” (Figura 1.1a), na Escócia em 1879, revelou uma sub estima dos efeitos estáticos da acção do vento, enquanto o colapso da “Tacoma Narrow Bridge” (Figura 1.1b), nos Estados Unidos da América em 1940, demonstrou a importância da avaliação efeitos aeroelásticos associados a interacção estrutura-escoamento.

Foram também identificados num significativo número de pontes suspensas construídas na primeira metade do século vinte importantes vibrações, que conduziram à tomada de medidas correctivas, como o aumento da rigidez do tabuleiro ou a introdução de sistemas de cabos, como é exemplo a conhecida Golden Gate Bridge.

Uma importante inovação no projecto de pontes de grande vão foi introduzida pelo uso da secção de tabuleiro em caixão extremamente aerodinâmico, tal como aconteceu no caso da construção da Severn Bridge em 1966.



a)



b)

Figura 1.1 – Fotos da “Tay Bridge” pouco tempo antes do colapso (a) e da “Tacoma Narrow Bridge” precisamente na altura do colapso (b).

Estes desenvolvimentos apenas foram possíveis devido aos significativos progressos nos estudos climatológicos e essencialmente devido ao desempenho experimental dos ensaios em túnel de vento em modelos à escala reduzida [2, 3]. Com efeito, os ensaios em túnel de vento sofreram um enorme impulso após o colapso da “Tacoma Bridge”, quer com o uso de modelos globais a escala reduzida, quer com o uso de modelos seccionais do tabuleiro de pontes. O contributo pioneiro neste campo foi dado por A.G. Davenport, que especificou um conjunto de regras para a simulação da camada limite atmosférica em túnel de vento, de acordo com dados climáticos, tendo também desenvolvido uma formulação estocástica para a simulação numérica do comportamento estrutural sob a acção do vento.

Estes ensaios em túnel de vento estão na origem da obtenção de espectaculares recordes mundiais de pontes de grande vão, como é o caso da “Akashi-Kaikyo Bridge” (Figura 1.2a), no Japão, cujo estudo requereu a construção de um túnel de vento com mais de 40 metros de largura (Figura 1.2a), por forma a conseguir realizar o estudo aerodinâmico de um modelo global à escala 1:100.



a)



b)

Figura 1.2 – Fotos da “Akashi-Kaikyo Bridge” (a) e do túnel de vento onde esta foi ensaiada (b).

Este tipo de ensaios experimentais permitiu a compreensão e a avaliação de diferentes tipos de efeitos induzidos pelo vento, tais como efeitos de rajada, libertação de vórtices/lock-in, galope e flutter [3].

A compreensão destes efeitos e o desenvolvimento e implementação de metodologias que possibilitem a análise e controlo da resposta aerodinâmica de estruturas de grande vão e elevada esbelteza assume cada vez mais relevância ao nível do projecto e construção destas estruturas, justificando o elevado interesse da sua sistematização exaustiva.

1.2. Objectivos e plano de trabalho

O presente trabalho visa efectuar uma sistematização, tanto quanto possível, exaustiva de conhecimentos sobre a caracterização da acção do vento e dos diversos fenómenos de natureza aerodinâmica ou aeroelástica que esta pode suscitar em estruturas esbeltas. Complementarmente, pretende-se o desenvolvimento e implementação automática de ferramentas (nos domínios do tempo ou da frequência) para a análise quasi-estacionária de efeitos de rajada e de libertação de vórtices em estruturas lineares de grande vão, como chaminés ou torres de telecomunicações, estudando-se ainda técnicas simples de controlo passivo da resposta dinâmica dessas estruturas.

Todo o trabalho desenvolvido no decurso desta tese tem como objectivo a aquisição de conhecimentos e de experiência prática a nível numérico em aplicações da Engenharia do Vento, no âmbito das actividades de investigação em curso no Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas (ViBest – www.fe.up.pt/vibest) do Departamento de Engenharia Civil da FEUP.

De modo a atingir estes objectivos, o trabalho a desenvolver comporta as seguintes tarefas:

- Compreensão de conceitos básicos da Teoria de Campos Estocásticos;
- Compreensão de formulações clássicas da Dinâmica Estrutural Estocástica Linear;
- Estudo de caracterização da acção do vento na camada limite atmosférica;
- Investigação e sistematização de conhecimentos relativos aos diversos tipos de fenómenos aerodinâmicos ou aeroelásticos que o vento pode suscitar em estruturas esbeltas (efeitos de rajada, libertação de vórtices / “lock-in”, galope, “flutter” (drapejamento), divergência torsional);
- Implementação automática, em MATLAB, de uma metodologia para análise (no domínio da frequência) de efeitos de rajada, associada à flutuação da componente longitudinal da velocidade do

vento, considerando a estrutura idealizada como um oscilador de múltiplos graus de liberdade e utilizando uma formulação modal (“spectral analysis”);

- Investigação e implementação automática, em MATLAB, de algoritmos para geração de campos estocásticos, tendo em vista a simulação de séries temporais de velocidade do vento em diversos pontos e a análise dinâmica da estrutura através de técnicas de integração directa (“time-history analysis”);

- Aplicação das metodologias e programas de cálculo desenvolvidos ao estudo de casos concretos, nomeadamente, a uma chaminé com 60 metros de altura e a uma antena espiada com 265 metros, tendo esta última em conta o comportamento não-linear geométrico associado à presença dos cabos;

- Investigação de técnicas de controlo de vibrações induzidas pela acção do vento em estruturas esbeltas.

1.3. Organização da tese

O presente trabalho encontra-se organizado em oito capítulos.

No primeiro capítulo, é apresentado um enquadramento global relativo à temática abordada na dimensão e que justifica o interesse das matérias nela tratadas. São ainda expostos os principais objectivos do trabalho, enumeradas as tarefas a realizar para alcançar os objectivos propostos e caracterizada a organização do documento.

No segundo capítulo são apresentadas as principais bases da Teoria de Processos Estocásticos, e que servem de suporte a muitos dos conceitos introduzidos nos capítulos seguintes. É apresentada a noção de processo estocástico e campo estocástico, bem como as principais grandezas envolvidas na caracterização de processos estocásticos. Em seguida, são apresentados os conceitos de homogeneidade, estacionaridade e ergodicidade, realçando-se as grandezas que caracterizam este tipo de processos, no domínio do tempo e no domínio da frequência. Por fim, são apresentadas as propriedades mais importantes dos processos estocásticos relacionadas com o dimensionamento estrutural.

No terceiro capítulo, são apresentadas as formulações clássicas da Dinâmica Estrutural Estocástica Linear. Inicia-se a sistematização a partir do oscilador linear de um grau de liberdade (1-GL), passando-se de seguida aos osciladores de múltiplos graus de liberdade (N-GL) e finalizando com a

formulação modal. Para todas as metodologias, são descritas as relações determinísticas e estocásticas entre a excitação e a resposta, no domínio do tempo e no domínio da frequência.

No quarto capítulo, é caracterizado o vento na camada limite atmosférica. Este capítulo apresenta uma parte inicial introdutória, onde são descritas as principais propriedades da atmosfera, com especial relevo para os principais mecanismos da génese dos ventos. A segunda parte é dedicada a componente média associada à velocidade do vento, sendo descritos os vários perfis de variação da velocidade média em altura, bem como os conceitos estatísticos que lhe estão subjacentes. Por fim, efectua-se a caracterização da componente turbulenta da acção do vento. Neste capítulo, são ainda apresentadas as perspectivas da caracterização da acção do vento à luz de diversos códigos mundiais, dando-se, no entanto, maior importância às normas vigentes em Portugal.

O quinto capítulo centra a sua atenção na análise do comportamento aerodinâmico de estruturas esbeltas. Deste modo, apresenta-se uma parte inicial onde são resumidas algumas das particularidades mais importantes dos escoamentos, passando-se de seguida à abordagem sistemática dos conceitos utilizados para a construção de ferramentas para a análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada, quer no domínio da frequência, através de uma formulação modal, quer no domínio do tempo, através da geração de séries temporais de velocidades do vento e posterior integração directa. Na parte final deste capítulo, são abordados os principais conceitos de análise das vibrações laterais induzidas pela libertação de vórtices.

No sexto capítulo, são apresentados dois casos de estudo onde foram implementadas as ferramentas desenvolvidas com base nos métodos de análise dos efeitos de rajada abordados no desenrolar desta dissertação. O primeiro caso de estudo consiste numa chaminé com 60 metros de altura, para a qual são comparadas as respostas estruturais obtidas a partir da análise espectral, da análise temporal e da análise regulamentar à luz das normas vigentes em Portugal. Para este exemplo, são também analisados os efeitos laterais induzidos pela libertação de vórtices. O segundo caso de estudo consiste numa antena espiada com 265 metros de altura com 7 níveis de espiamento, o que implica um elevado grau de não-linearidade geométrica devido à presença dos cabos. Esta estrutura é estudada seguindo uma abordagem no domínio do tempo, a qual é posteriormente comparada como a metodologia proposta pela nova norma específica para a concepção deste tipo de estruturas (EN1993-3-1).

No sétimo capítulo, são abordadas as principais metodologias implementadas para o controlo passivo e activo das vibrações induzidas pelo vento. Neste capítulo, é dado maior realce aos dispositivos passivos de controlo, como é o caso dos dispositivos aerodinâmicos (deflectores ou alhetas) e a implementação de amortecedores de massas sintonizadas.

Finalmente, no oitavo capítulo, são apresentadas as principais conclusões deste trabalho e apontados os temas que merecem um maior aprofundamento em trabalhos futuros.

2. TEORIA DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2.1. Introdução

No sentido de modelar um grande número de fenómenos naturais e caracterizar, de forma rigorosa, os seus efeitos sobre o comportamento dinâmico de sistemas estruturais, o recurso a métodos probabilísticos requer a assimilação prévia de conceitos no campo da Teoria das Probabilidades e dos Processos Estocásticos.

A Teoria dos Processos Estocásticos constitui um campo da matemática relativamente recente. A sua evolução deu-se de forma sólida e consistente no decorrer do século XX, tendo sido abordada de forma sistemática por um variado número de autores tais como Kolmogorov, Doob, Papoulis, Yang, Ortiz et al., Newland e Cunha [4-9].

Neste contexto, revelou-se importante a inclusão nesta dissertação de um capítulo inicial onde os principais conceitos da Teoria dos Processos Estocásticos são desenvolvidos e sistematizados de modo a dar suporte aos capítulos subsequentes, tendo esta síntese sido baseada essencialmente na referência [8].

2.2. Processo Estocástico

2.2.1. *Noção de Processo Estocástico e Campo Estocástico*

A palavra estocástico, normalmente sinónimo de conjectural ou de natureza aleatória, provém do grego “stokhastikos” que significa habilidoso no objectivo. Posteriormente, a palavra passou a ter o significado de conjectura ou de tentativa de obtenção de um resultado, tendo sido finalmente adoptada para descrever um fenómeno aleatório [10].

O conceito matemático dos processos estocásticos tem-se revelado adequado para descrever alguns fenómenos físicos, e não só. Entre estes, podem citar-se a caracterização de ruído nas transmissões de rádio, o estudo de ondas cerebrais, as flutuações nos mercados de bolsas de valores. Em Engenharia Civil, tem sido essencialmente utilizado na hidráulica, para proceder à caracterização das acções sísmicas, do vento e dos seus efeitos sobre as construções, para estudar vibrações em estruturas e de forma indirecta, avaliar as suas características dinâmicas.

Um fenómeno físico pode ser idealizado através de um processo estocástico, se o seu valor, em qualquer momento temporal e posição espacial sendo aleatório, pode ser previsto com uma

determinada probabilidade. Um conjunto de ocorrências de um processo estocástico apenas pode ser observado como um conjunto particular de realizações desse processo, onde nenhuma se pode repetir, mesmo que as condições de ocorrência sejam exactamente as mesmas.[11].

Pode então definir-se um processo estocástico $x(t)$, como o conjunto de n ($n \rightarrow \infty$) funções aleatórias (realizações do processo) $x_i(t)$ ($i=1,2,3,\dots,n$) dependentes do parâmetro t (que nos problemas de dinâmica estrutural representa o tempo), associadas à caracterização de uma determinada grandeza física no caso de processos escalares (por exemplo, a aceleração de um grau de liberdade da estrutura) ou, de várias grandezas, no caso de processos vectoriais (por exemplo, as três componentes ortogonais da aceleração num ponto da estrutura). A Figura 2.1 representa esquematicamente um processo estocástico escalar.

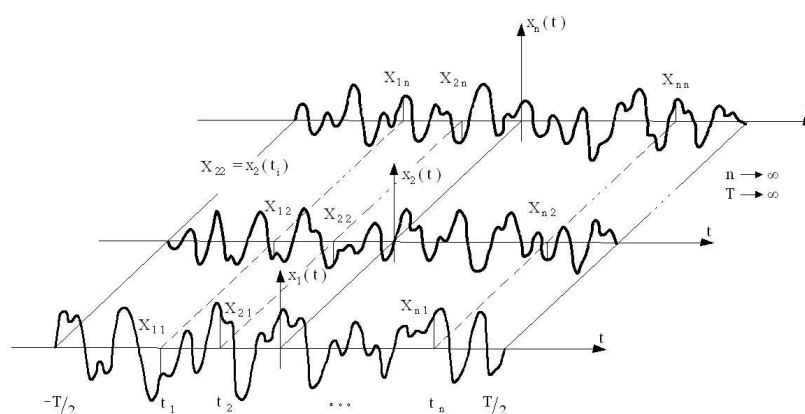


Figura 2.1 – As n realizações do processo estocástico $x(t)$ [8].

A noção de campo estocástico advém da necessidade de generalizar o conceito de processo estocástico. Pode então dizer-se que um campo estocástico de dimensão M com N variáveis, agrupa um conjunto de ocorrências, em que cada uma está associada a N famílias de realizações aleatórias função de M parâmetros independentes. Estas variáveis podem ser qualquer conjunto de N quantidades estruturais caracterizadoras da resposta de um sistema, como por exemplo, a velocidade do vento na direcção longitudinal a uma estrutura ($N=1$), ou as componentes horizontais e verticais da aceleração sísmica de base ($N=3$), enquanto que os M parâmetros independentes podem ser não só o tempo ($M=1$), mas também as coordenadas espaciais de pontos de medida ($M>1$). Como particularização do apresentado anteriormente pode apresentar-se a noção de processos estocásticos escalares e processos estocásticos vectoriais, podendo ser caracterizados como tendo ambos apenas um parâmetro independente ($M=1$), diferindo entre eles, apenas no número N de famílias de realizações aleatórias ($N=1$ ou $N>1$, respectivamente).

2.2.2. Caracterização da estrutura probabilística de um processo estocástico

Sendo $x(t)$ um processo estocástico constituído por um número infinito de sequências aleatórias tradutoras da evolução temporal de uma dada grandeza, em cada instante de tempo t_i , para uma completa caracterização da estrutura probabilística deste processo é necessário o conhecimento de todas as funções densidade de probabilidade pluridimensionais do tipo,

$$p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad n=1, 2, \dots \quad (2.1)$$

em que,

$$\begin{aligned} p(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n = \\ P(X_1 < x(t_1) < X_1 + dX_1; X_2 < x(t_2) < X_2 + dX_2; \dots; X_n < x(t_n) < X_n + dX_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Alternativamente, existem outras formas de definir a estrutura probabilística de um processo estocástico. Uma delas centra-se no conhecimento de toda a hierarquia de funções características $C_n(\underline{\theta}) = C(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, transformadas Fourier multidimensionais de $p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ com $n=1, 2, \dots$.

Outra forma, de grande interesse, que possibilita a caracterização de um processo, baseia-se no conhecimento da hierarquia de momentos $m_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = E[X_1 X_2 \dots X_n]$, os quais podem ser relacionados com as funções de densidade de probabilidade, através de

$$m_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 \dots X_n p_n(\underline{X}) dX_1 dX_2 \dots dX_n \quad (2.3)$$

podendo ser também relacionada directamente com a hierarquia de funções características $C_n(\underline{\theta})$.

Para além das diversas formas já apresentadas, poder-se-á ainda caracterizar a estrutura probabilística de um processo estocástico a partir de outro conjunto de grandezas estatísticas, as quais são designadas por cumulantes $(k_n(X_1, X_2, \dots, X_n))$, e que se podem obter também a partir da função característica $C_n(\underline{\theta})$.

Embora, como foi referido anteriormente, para uma completa caracterização probabilística de um processo estocástico seja necessário o conhecimento das funções descritas, sucede porém que, o conhecimento das grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem é da maior importância, não só pelo facto de nelas residir, em geral, a maior parte da informação relativa à caracterização de um

processo, mas também porque existem casos em que as grandezas estatísticas de ordem superior poderão ser expressas em função das de primeira e segunda ordem.

2.2.3. Principais grandezas estatísticas utilizadas na caracterização de processos estocásticos

Pelo facto de, na maior parte das vezes, a definição da estrutura probabilística de um processo estocástico, através das formas anteriormente descritas, ser de extrema complexidade, recorre-se frequentemente a um conjunto de parâmetros e funções estatísticas que pela sua maior facilidade de obtenção e utilidade, torna esta caracterização mais acessível. Pelos motivos citados julga-se de extrema importância a descrição destas grandezas.

Valor médio do processo $x(t)$ no instante t_i ,

$$m_{x_i} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_i p(X_i) dX_i \quad (2.4)$$

Valor quadrático médio no instante t_i ,

$$m_{x_i^2} = E[x^2(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_i^2 p(X_i) dX_i \quad (2.5)$$

Variância no instante t_i ,

$$\mu_{x_i^2} = E[(x(t_i) - m_{x_i})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - m_{x_i})^2 p(X_i) dX_i \quad (2.6)$$

Desvio padrão no instante t_i ,

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\mu_{x_i^2}} \quad (2.7)$$

Função de auto-correlação referida aos instantes t_i e t_j ,

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_i X_j p(X_i, X_j) dX_i dX_j \quad (2.8)$$

Função de auto-covariância referida aos instantes t_i e t_j ,

$$\mu_x(t_i, t_j) = E\left[\left(x(t_i) - m_{x_i}\right)\left(x(t_j) - m_{x_j}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j}) p(X_i, X_j) dX_i dX_j \quad (2.9)$$

Deve salientar-se o caso particular de um processo estocástico que apresenta valor médio nulo ($m_{x_i} = 0$), verificando-se consequentemente que:

$$\mu_{x_i} = m_{x_i^2} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\mu_{x_i}} = \sqrt{m_{x_i^2}} \quad (2.11)$$

$$\mu_x(t_i, t_j) = R_x(t_i, t_j) \quad (2.12)$$

Para além dos parâmetros apresentados, anteriormente, para caracterizar um processo estocástico, outros podem ser também introduzidos para a caracterização simultânea de dois ou mais processos estocásticos. Com efeito, considerem-se dois processos estocásticos $x(t)$ e $y(t)$. A sua caracterização conjunta pode basear-se nas seguintes funções (que como se verá mais tarde, facilmente generalizáveis a mais de dois processos estocásticos):

Função de inter-correlação ou de correlação cruzada referida aos instantes t_i e t_j ,

$$R_{xy}(t_i, t_j) = E\left[x(t_i)y(t_j)\right] \quad (2.13)$$

Função de inter-covariância ou de covariância cruzada referida aos instantes t_i e t_j ,

$$\mu_{xy}(t_i, t_j) = E\left[\left(x(t_i) - m_{x_i}\right)\left(y(t_j) - m_{y_j}\right)\right] \quad (2.14)$$

Coeficiente de correlação ou de covariância normalizada,

$$\rho_{xy}(t_i, t_j) = \frac{\mu_{xy}(t_i, t_j)}{\sigma_{x_i} \sigma_{y_j}} \quad (2.15)$$

Novamente, particularizando para o caso em que os processos apresentam valor médio nulo, estes parâmetros são simplificados pelas seguintes expressões:

$$\mu_{xy}(t_i, t_j) = R_{xy}(t_i, t_j) \quad (2.16)$$

$$\rho_{xy}(t_i, t_j) = \frac{R_{xy}(t_i, t_j)}{\sigma_{x_i} \sigma_{y_j}} \quad (2.17)$$

2.2.4. Principais leis de distribuição de probabilidade utilizadas na caracterização de processos estocásticos

Na caracterização de um processo estocástico, as leis de distribuição de probabilidade apresentam um papel fulcral, dando-se mais ênfase no âmbito desta dissertação (caso da “engenharia do vento”) a algumas leis.

As funções distribuição de probabilidade de maior importância, neste caso, dividem-se em dois grupos:

O primeiro grupo engloba as três leis de distribuição de valores extremos, mais utilizadas no âmbito da análise de fiabilidade [1] e que se passam a caracterizar:

Lei de distribuição de probabilidade do tipo I ou também conhecida como Lei de Gumbel,

$$P(x) = e^{-e^{-\left[\frac{x-a}{b}\right]}} \quad (2.18)$$

Lei de distribuição de probabilidade do tipo II ou também conhecida como Lei de Frechet,

$$P(x) = e^{-\left[\left(\frac{x}{b}\right)^{-c}\right]} \quad (2.19)$$

Lei de distribuição de probabilidade do tipo III ou também conhecida como Lei de Weibull

$$P(x) = e^{-\left[\left(\frac{x}{b}\right)^c\right]} \quad (2.20)$$

Lei de distribuição de probabilidade de Rayleigh que, como se pode constatar, é uma particularização da função de distribuição de probabilidade do tipo III com $c = 2$,

$$P(x) = e^{-\left[\left(\frac{x}{b}\right)^2\right]} \quad (2.21)$$

Lei de distribuição de probabilidade Exponencial que, como se pode também constatar, é uma particularização da função de distribuição do tipo III mas com $c = 1$,

$$P(x) = e^{\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]} \quad (2.22)$$

Os valores a e b presentes nas expressões anteriores representam constantes que deverão ser determinadas por ajustamento da respectiva lei a uma determinada amostra de valores.

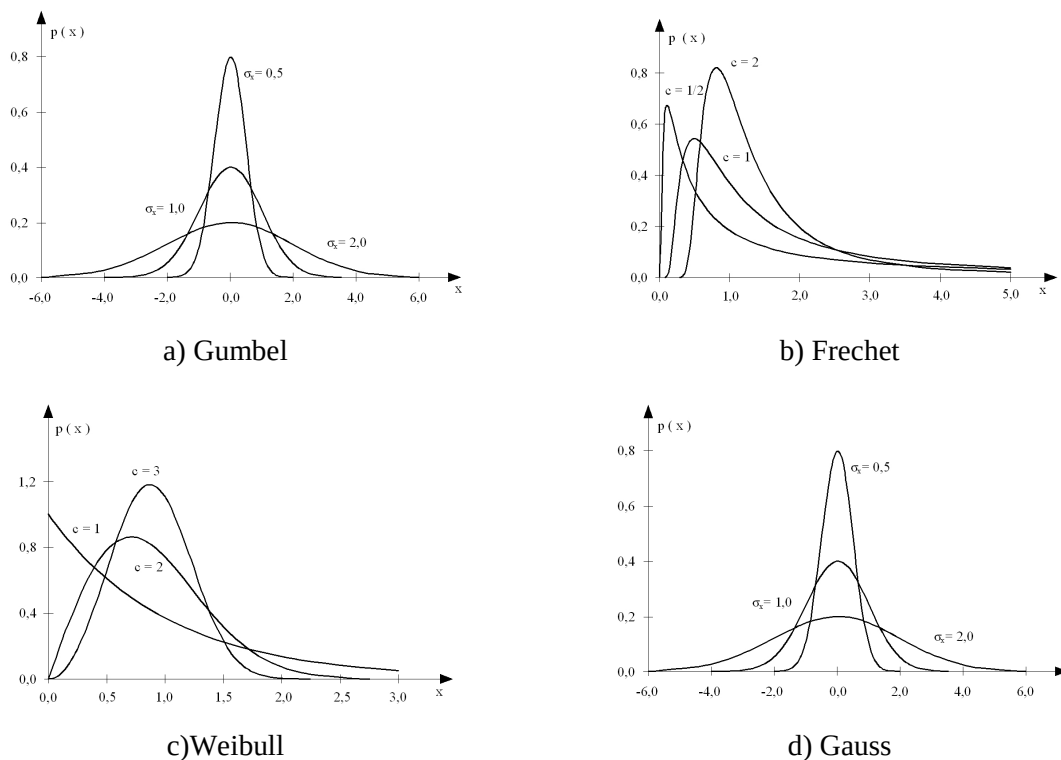


Figura 2.2 – Funções densidade de probabilidade [1].

O segundo grupo engloba a lei normal de distribuição de probabilidade [1]. Esta lei também designada por função de distribuição de probabilidade de Gauss é expressa da forma abaixo representada,

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y-m_x}{\sigma_x}\right)^2\right]} dy \quad (2.23)$$

onde σ_x e m_x representam o desvio padrão e o valor médio, respectivamente.

Na Figura 2.2, estão representadas graficamente as funções densidade de probabilidade correspondentes às leis representadas anteriormente.

2.3. Processos estocásticos estacionários

2.3.1. Homogeneidade e estacionaridade

Um determinado processo estocástico $x(t)$ diz-se inteiramente homogêneo se toda a sua estrutura probabilística for independente de uma eventual translação da origem do parâmetro t de que depende.

Se este parâmetro t for considerado como a variável tempo, então a noção de homogeneidade dá origem à noção de estacionaridade, a qual traduz a independência temporal das propriedades estatísticas capazes de influenciar a estrutura probabilística do processo estocástico $x(t)$ [7]. Assim sendo, observa-se que, para quaisquer valores de n e τ , o processo diz-se estritamente estacionário se:

$$p[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] = p[x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)] \quad (2.24)$$

Se a relação (2.24) apenas ocorrer para $n \leq 2$ o processo designa-se, por seu turno, como fracamente estacionário ou estacionário em sentido lato [7, 8], verificando-se que, as grandezas estatísticas - média m_x , média quadrática m_{x^2} , variância μ_x e desvio padrão σ_x - assumem valor constante,

$$m_x = E[x(t_i)] = E[t_j] \quad (2.25)$$

$$m_{x^2} = E[x(t_i)^2] = E[t_j^2] \quad (2.26)$$

$$\mu_x = E[(x(t_i) - m_x)^2] = E[(x(t_j) - m_x)^2] \quad (2.27)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mu_x} \quad \forall_{t_i, t_j} \quad (2.28)$$

Ao mesmo tempo, as funções de auto-correlação e auto-covariância, referentes aos instantes t_i e t_j , passam a depender apenas do desfasamento temporal $\tau = t_j - t_i$, ou seja,

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] = R_x(\tau) \quad (2.29)$$

$$\mu_x(t_i, t_j) = E[(x(t_i) - m_x)(x(t_i + \tau) - m_x)] = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] - m_x^2 = \mu_x(\tau) \quad (2.30)$$

A estacionaridade introduz simplificações bastante úteis na modelação, apesar de grande parte dos fenómenos físicos não serem idealizáveis através de processos estritamente estacionários. Na prática, a

estacionaridade está associada a fenómenos dinâmicos de carácter permanente, tais como a oscilação das ondas oceânicas ou a pressão exercida pelo vento sobre uma estrutura. Em contrapartida a não estacionaridade esta associada a fenómenos transitórios como é o caso da aceleração sísmica do solo, cujas grandezas estatísticas evoluem ao longo do tempo.

A ocorrência de estacionaridade permite decompor um processo estocástico em duas componentes, uma de natureza estática que assume valor constante e outra de natureza estocástica com valor médio nulo.

2.3.2. Função de auto-correlação

A função de correlação foi introduzida pelo físico Geoffrey Taylor (1920) para descrever a natureza estatística do escoamento turbulento de um fluido. As funções de correlação continuam a ser ferramentas fundamentais na teoria matemática da turbulência e noutros fenómenos não lineares, bem como no estudo de processos aleatórios [9].

A função de auto-correlação $R_x(\tau)$ é uma grandeza estatística de segunda ordem de maior importância para a caracterização de qualquer processo estacionário, que mede a relação entre duas variáveis aleatórias $x(t)$ e $x(t + \tau)$ com um desfasamento temporal de τ entre elas. No caso de um processo de valor médio nulo, coincide com a função de auto-covariância como apresentado na expressão (2.12).

As propriedades mais importantes associadas à função de auto-correlação são:

O valor de $R_x(\tau)$ na origem, coincide com o valor quadrático médio m_{x^2} ,

$$R_x(0) = E[x^2(t)] = m_{x^2} \quad (2.31)$$

Caso o processo tenha valor médio nulo,

$$R_x(0) = m_{x^2} = \mu_x = \sigma_x^2 \quad (2.32)$$

A função $R_x(\tau)$ é par em relação a variável τ

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (2.33)$$

A função $R_x(\tau)$ assume valor máximo na origem, verificando-se a partir daí uma redução mais ou menos gradual que no caso de um processo de valor médio nulo, tende para zero quando $\tau \rightarrow \infty$, sendo tanto mais rápida quanto maior for a irregularidade associada ao processo em questão.

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \quad (2.34)$$

Na Figura 2.3, são apresentados dois exemplos esquemáticos da influência da irregularidade do processo $x(t)$ sobre a configuração da função de auto-correlação $R_x(\tau)$.

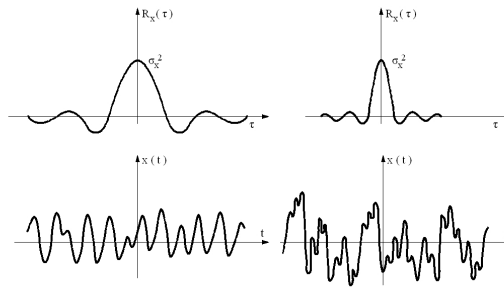


Figura 2.3 – Influência da irregularidade do processo $x(t)$ sobre a função de auto-correlação $R_x(\tau)$ [8].

2.3.3. Função densidade espectral de potência

As vibrações aleatórias estacionárias são, frequentemente, mais estudadas no domínio da frequência do que no domínio do tempo [9]. Neste contexto, a função densidade espectral de potência é uma grandeza estatística de segunda ordem, alternativa à função de auto-correlação, e de extrema relevância na caracterização de processos estocásticos estacionários.

Físicos e engenheiros têm vindo a estudar a decomposição espectral de fenómenos físicos desde que Sir Isaac Newton separou as cores da luz solar por volta de 1700. A forma mais antiga e que mais se assemelha ao formato actual da função densidade espectral que hoje se utiliza, foi desenvolvida no início do século XX por Sir Arthur Schuster e apresentada numa série de artigos que falavam acerca da presença de periodicidade em fenómenos meteorológicos, magnéticos e ópticos. O “periodograma de Schuster”, na sua forma final, era proporcional às actuais funções densidade espectral mas representada em função do período e não da frequência como é agora habitual [9].

A função densidade espectral de potência $S_x(\omega)$ pode ser definida como,

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{F_T(x(t)) F_T(x(t))^*}{2\pi T} \right] \quad (2.35)$$

sendo $F_T(x(t))$ a transformada de Fourier do processo limitado ao intervalo $[-T/2, T/2]$, representado da seguinte forma,

$$F_T(x(t)) = X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.36)$$

Dada a importância da função densidade espectral de potência no estudo de processos aleatórios estacionários, torna-se então importante descrever algumas das suas propriedades.

A função de auto-correlação $R(\tau)$ é uma função real e contínua de τ , o que implica que, a função densidade espectral de potência $S_x(\omega)$, função de ω , também o seja.

O valor das suas ordenadas não pode ser negativo ($S_x(\omega) \geq 0$), e tendo em conta a definição e o teorema de Parseval [7], a área delimitada por esta função dá origem ao valor médio quadrático do processo $x(t)$.

$$m_{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.37)$$

No caso particular de o valor médio do processo ser nulo e tendo em atenção a relação (2.32), verifica-se que,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.38)$$

A título de exemplo apresenta-se na Figura 2.4, três funções densidade espectral de potência associadas a três processos estocásticos estacionários com diferentes tipos de conteúdo em frequências.

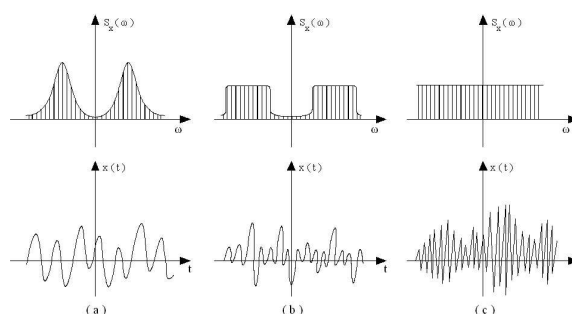


Figura 2.4 – Relação entre os espectros de potência e os tipos de processos estocásticos estacionários com diferentes tipos de conteúdo em frequências [8].

A função densidade espectral de potência é muitas vezes denominada simplesmente por espectro de potência. A razão dessa denominação resulta do facto da unidade em que se exprime a função densidade espectral ser, no caso de espectros de registo de acelerações, correspondente à unidade de potência. Por essa razão, é vulgar referir-se que a função densidade espectral de potência contém informação sobre o conteúdo energético de um sinal.

Para um dado intervalo de frequência $\Delta\omega$, a área sob a função $S_x(\omega)$ representa a potência associada à frequência central desse intervalo. Este facto permite que, a partir da função densidade espectral, seja possível “reconstituir”, do ponto de vista estatístico, um dado sinal, desde que seja possível admitir a estacionaridade do processo. Um dos métodos para a geração de acelerogramas artificiais ou séries temporais de velocidades do vento a partir de espectros de potência, recorre a este facto.

2.3.4. Relação entre função de auto-correlação e função densidade espectral de potência

Como se referiu atrás, a função densidade espectral de potência é uma alternativa à função de auto-correlação, na caracterização de um processo estocástico estacionário, sendo a relação entre estas funções fácil de estabelecer.

As expressões que relacionam estas duas grandezas estatísticas (uma no domínio do tempo e outra no domínio da frequência) foram desenvolvidas por dois matemáticos de seu nome Norbert Wiener e A. I. Khintchine que, de forma independente, alcançaram essas relações, por volta dos anos 30 do século XX [9].

Estas relações passaram a ser então conhecidas como relações de Wiener-Khintchine:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.39)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.40)$$

podendo observar-se que $S_x(\omega)$ e $R_x(\tau)/2\pi$ constituem um par de transformadas de Fourier.

A função $R_x(\tau)$ é uma função real e par, como foi referido anteriormente, e tendo presentes as propriedades das transformadas de Fourier, o mesmo acontece com a função $S_x(\omega)$.

Convém salientar no entanto, que a validade destas relações entre $S_x(\omega)$ e $R_x(\tau)/2\pi$ é condicionada pela existência da transformada de Fourier da função $R_x(\tau)/2\pi$, o que não se verifica se o processo

estocástico estacionário $x(t)$ tiver um valor médio não nulo ou se contiver alguma componente puramente periódica.

2.3.5. Ergodicidade

Para a caracterização experimental da estrutura probabilística e das propriedades estatísticas de um processo estocástico $x(t)$, é teoricamente necessária a análise de um número infinito de registos, correspondentes a cada uma das sequências ou realizações que o constituem. Desta forma, tomando o valor do processo num instante t_i como uma variável aleatória $X_i = x(t_i)$ e recorrendo ao conceito de probabilidade como limite da frequência de ocorrência de um dado acontecimento, torna-se viável quantificar a respectiva função densidade de probabilidade $p(X_i)$, por amostragem dos valores aleatórios verificados no instante t_i nas n realizações constituintes. Analogamente, seria possível obter também todas as grandezas estatísticas mais correntemente utilizadas na caracterização do processo, tal como a média, a variância e a função de auto-correlação [7].

Na prática, porém, nunca se conseguem obter registos em número infinito e por isso é apenas viável recorrer a um número finito de realizações de duração limitada registando-se, inclusivamente, casos em que a caracterização probabilística de certos processos estacionários pode ser efectuada com rigor, com base na estatística de um único registo disponível, designadamente, através dos valores temporais da média e da função de auto-correlação tal como são definidos abaixo,

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt \quad (2.41)$$

$$\hat{R}_{x_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) dt \quad (2.42)$$

Um processo $x(t)$ estacionário diz-se ergódico de primeira ordem se o valor médio temporal coincidir com o valor médio do processo, isto é

$$\langle x_i(t) \rangle = E[x(t)] \quad (2.43)$$

Caso se verifique, simultaneamente, a condição anterior e a função de auto-correlação temporal coincida com a função de auto-correlação do processo,

$$\hat{R}_{x_i}(\tau) = R_x(\tau) \quad (2.44)$$

então, o processo estacionário $x(t)$ diz-se ergódico de segunda ordem.

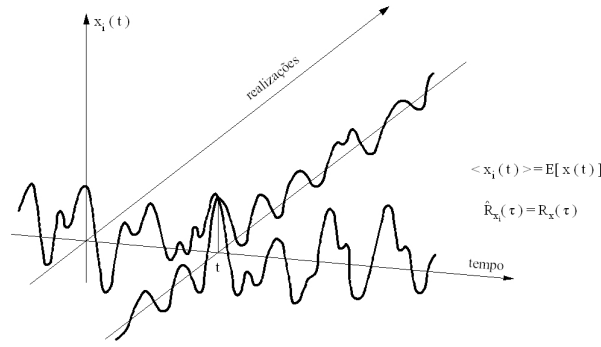


Figura 2.5 – Processo estocástico ergódico [8]

Como se pode observar, torna-se óbvio que um processo ergódico é necessariamente estacionário, não se verificando que um processo estacionário tenha que ser ergódico, visto que, as diversas ocorrências que o constituem poderão não ter as mesmas características estatísticas temporais.

Sendo o processo estocástico $x(t)$ ergódico de segunda ordem, a função de auto-correlação $R_x(\tau)$ pode, assim, ser quantificada com base numa única realização através da função de auto-correlação temporal, que apresenta propriedades similares às já referidas anteriormente para $R_x(\tau)$, nomeadamente,

$$\hat{R}_x(0) = \langle x(t)^2 \rangle \quad (2.45)$$

$$\hat{R}_x(\tau) = \hat{R}_x(-\tau) \quad (2.46)$$

Da mesma forma, é possível falar de uma função densidade espectral de potência temporal $\hat{S}_x(\omega)$ que é transformada de Fourier de $\hat{R}_x(\tau)/2\pi$,

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.47)$$

$$\hat{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.48)$$

As propriedades desta função $\hat{S}_x(\omega)$ são naturalmente análogas às enunciadas anteriormente para a função $S_x(\omega)$, nomeadamente,

$$\hat{R}_x(0) = \langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_x(\omega) d\omega \quad (2.49)$$

o que permite calcular a média quadrática temporal do processo $x(t)$.

Sob um ponto de vista mais prático, muitas vezes, a função densidade espectral de potência $\hat{S}_x(\omega)$, par e definida no intervalo $]-\infty, +\infty[$, aparece sob a forma equivalente da função $\hat{G}_x(f)$ definida apenas no intervalo $[0, +\infty[$, em que a frequência aparece expressa em Hz em vez de rad/s .

A relação entre estas duas formas equivalentes da função densidade espectral de potência é facilmente estabelecida se se tiver em conta a contribuição de ambas para a média quadrática temporal. Desta forma, e tendo presente que $f = \omega/2\pi$ e que $df = d\omega/2\pi$, então,

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_0^\infty \hat{G}_x(f) df \quad (2.50)$$

$$\langle x(t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty \hat{S}_x(\omega) d\omega = 2 \int_0^\infty \hat{S}_x(\omega) d\omega = 2 \int_0^\infty 4\pi \hat{S}_x(2\pi f) df \quad (2.51)$$

Relacionando as equações (2.50) e (2.51), obtém-se

$$\hat{G}_x(f) = 4\pi \hat{S}_x(\omega) \quad (2.52)$$

Desta forma, as relações entre a função de auto-correlação $\hat{R}_x(\tau)$ e a função densidade espectral de potência $\hat{G}_x(f)$, são:

$$\hat{G}_x(f) = 4 \int_0^\infty \hat{R}_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (2.53)$$

$$\hat{R}_x(\tau) = \int_0^\infty \hat{G}_x(f) e^{2\pi i f \tau} df \quad (2.54)$$

Na Figura 2.6, apresenta-se um exemplo esquemático da função densidade espectral de potência definida em função de f e em função de ω , respectivamente.

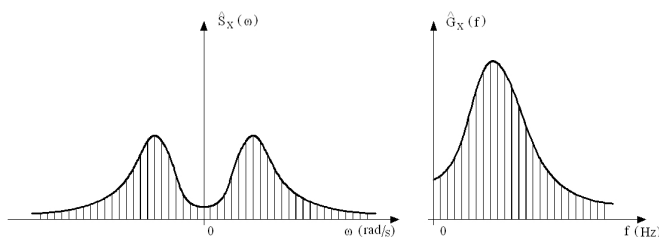


Figura 2.6 – Funções densidade espectral de potência definidas em função de ω e f [8].

2.3.6. Funções de auto-correlação e de densidade espectral de potência de processos obtidos por sobreposição

Aborda-se nesta secção o caso de processos estocásticos estacionários gerados por sobreposição de outros processos. Como exemplo, considere-se um processo estocástico estacionário $r(t)$ resultante da sobreposição de s processos estocásticos estacionários $x_i(t)$,

$$r(t) = \sum_{i=1}^s x_i(t) \quad (2.55)$$

A este processo estocástico estacionário corresponde uma função de auto-correlação

$$R_r(\tau) = E \left[\left(\sum_{i=1}^s x_i(t) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^s x_j(t+\tau) \right) \right] = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s R_{ij}^x(\tau) \quad (2.56)$$

O facto de este processo $r(t)$ ser constituído por uma sobreposição de processo $x_i(t)$ dá assim origem ao aparecimento de novos termos designados por funções de inter-correlação ou de correlação cruzada (vd. ponto 2.2.3., expressão (2.13)),

$$R_{ij}^x(\tau) = E \left[x_i(t) \cdot x_j(t+\tau) \right] \quad (2.57)$$

Esta função de correlação cruzada traduz o grau de dependência estatística existente entre $x_i(t)$ e $x_j(t+\tau)$, podendo demonstrar-se as seguintes propriedades:

$$R_{ij}^x(\tau) = R_{ji}^x(-\tau) \quad (2.58)$$

$$R_{ij}^x(0) = E \left[x_i(t) x_j(t) \right] \quad (2.59)$$

$$R_{ii}^x(0) = R_{x_i}(0) = m_{x_i^2} \quad (2.60)$$

Por outro lado, no domínio da frequência, aparece o conceito de função de densidade espectral cruzada ou conjunta $S_{ij}^x(\omega)$ correspondente aos processos $x_i(t)$ e $x_j(t)$:

$$S_r(\omega) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s S_{ij}^x(\omega) \quad (2.61)$$

As funções $S_{ij}^x(\omega)$ e $R_{ij}^x(\tau)/2\pi$, como no caso das funções de densidade espectral de potência e de auto-correlação, constituem um par de transformadas de Fourier, ou seja

$$S_{ij}^x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.62)$$

$$R_{ij}^x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}^x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.63)$$

De realçar que a função $S_{ij}^x(\omega)$ apresenta uma componente real par em ω , que se designa por co-espectro ($S_{ij}^{Cx}(\omega)$), e outra componente imaginária ímpar designada espectro de quadratura ($S_{ij}^{Qx}(\omega)$) ou fase.

$$S_{ij}^x(\omega) = S_{ij}^{Cx}(\omega) + i \cdot S_{ij}^{Qx}(\omega) \quad (2.64)$$

Tendo em conta que, $R_{ij}^x(\tau)/2\pi$ é uma função real de variável real, e atendendo à relação (2.58) e à sua transformada de Fourier, torna-se possível concluir que,

$$S_{ij}^x(\omega) = S_{ji}^x(\omega)^* \quad (2.65)$$

sendo $S_{ji}^x(\omega)^*$ o conjugado da função densidade espectral cruzada.

2.3.7. Funções de auto-correlação e de densidade espectral de potência de processos obtidos por derivação

Um processo derivado pode definir-se como um processo que pode ser descrito através de outro por derivação deste. Um exemplo de um processo derivado é um processo relativo a velocidades ou acelerações, que pode ser inferido através do correspondente processo relativo a deslocamentos. Desta forma e, uma vez conhecidas as funções de auto-correlação e densidade espectral de potência correspondentes a um processo estocástico estacionário $x(t)$, torna-se fácil obter expressões dessas funções relativas aos processo obtidos por derivação de $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$.

Derivando a equação $R_x(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$ em ordem a τ duas vezes consecutivas, obtém-se,

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} = E[x(t) \cdot \dot{x}(t + \tau)] = E[x(t - \tau) \cdot \dot{x}(t)] \quad (2.66)$$

$$\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} = -E[\dot{x}(t - \tau) \cdot \dot{x}(t)] = -E[\dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t + \tau)] \quad (2.67)$$

pelo que,

$$R_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_x(\tau) \quad (2.68)$$

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = -\frac{d^4}{d\tau^4} R_x(\tau) \quad (2.69)$$

Atendendo à relação anterior e substituindo nesta a equação (2.40), obtêm-se as seguintes relações,

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.70)$$

$$R_{\ddot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.71)$$

das quais se pode concluir que as densidades espectrais relativas aos processos derivados $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ são dadas por,

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \quad (2.72)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \quad (2.73)$$

Da mesma forma e para processos obtidos por sobreposição, pode chegar-se às expressões

$$R_{\dot{ij}}^x(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{ij}^x(\tau) \quad S_{ij}^{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{ij}^x(\omega) \quad (2.74)$$

$$R_{\ddot{ij}}^x(\tau) = -\frac{d^4}{d\tau^4} R_{ij}^x(\tau) \quad S_{ij}^{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_{ij}^x(\omega) \quad (2.75)$$

2.3.8. Função de coerência

A função de coerência $\gamma_{ij}^x(\omega)$ é definida como o rácio entre o quadrado do módulo da função densidade espectral cruzada $|S_{ij}^x(\omega)|^2$ e as funções de densidade espectral de potencia $S_{ii}^x(\omega)$ e $S_{jj}^x(\omega)$,

$$\gamma_{ij}^x(\omega) = \frac{|S_{ij}^x(\omega)|^2}{S_{ii}^x(\omega) \cdot S_{jj}^x(\omega)} \quad (2.76)$$

Esta função dá uma medida adimensional da dependência linear entre os processos estocásticos estacionários ergódicos $x_i(t)$ e $x_j(t)$ em função da frequência, similarmente ao coeficiente de correlação [9]. Pode mostrar-se que os valores da função de coerência se situam entre zero e um,

$$0 \leq \gamma_{ij}^x \leq 1 \quad (2.77)$$

Valores perto da unidade implicam uma relação linear perfeita entre os processos $x_i(t)$ e $x_j(t)$ para a frequência ω . Se $x_i(t)$ e $x_j(t)$ não estiverem relacionados, as suas funções de correlação cruzada, densidade espectrais cruzadas e função de coerência tendem para zero.

2.4. Propriedades importantes dos processos estocásticos relacionados com o dimensionamento estrutural

O problema do dimensionamento de estruturas sujeitas a excitações aleatórias pode ser encarado considerando dois critérios principais de ruína. O primeiro está relacionado com o facto da resposta dinâmica à acção idealizada através do processo estocástico $x(t)$ atingir, pela primeira vez, um determinado valor suficientemente elevado, registando-se a passagem de uma barreira correspondente ao limiar de segurança (“yield failure”). O segundo consiste na ruína por fadiga (“fatigue failure”), apesar dos valores associados ao processo se manterem relativamente baixos [8].

Os primeiros trabalhos sobre a análise da probabilidade de passagens ascendentes por um determinado nível foram desenvolvidos por Rice (1944,1945) e mais tarde por Powel (1958), dedicando-se este mais ao estudo da distribuição de probabilidade de extremos. Outros autores, como, Davenport, contribuíram de forma importante para a sistematização destas ferramentas de análise [9].

2.4.1. Frequência média de passagens ascendentes por um dado nível

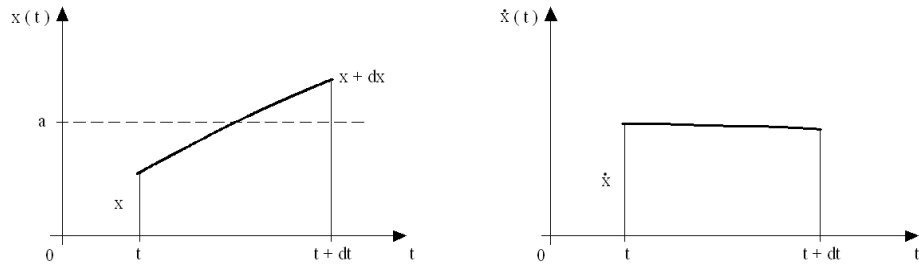


Figura 2.7 – Passagens ascendentes de $x(t)$ pelo nível a [8].

De forma a caracterizar a frequência média de passagens ascendentes por um dado nível e a correspondente probabilidade de ocorrência, é usual recorrer ao trabalho desenvolvido por Rice, considerando o processo estocástico $x(t)$ e o seu derivado $\dot{x}(t)$, limitados ao intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$, na vizinhança de um atravessamento desse tipo.

Para a ocorrência dessa passagem, é necessária a garantia da condição

$$a - \dot{x}(t) dt < x(t) < a \quad \wedge \quad \dot{x}(t) > 0 \quad (2.78)$$

a qual pode ser representada graficamente como correspondendo, no plano $(x, \dot{x})$, à zona tracejada na Figura 2.8.

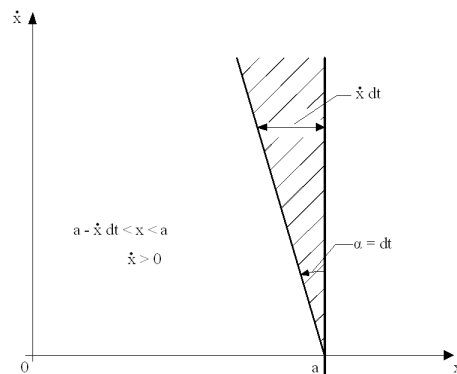


Figura 2.8 – Domínio a satisfazer para a ocorrência de uma passagem ascendente de $x(t)$ pelo nível a [8].

A probabilidade de ocorrência de uma passagem por um dado nível a no intervalo $[t, t + dt]$ é, então, dada por,

$$\int_0^\infty \int_{a-\dot{x}dt}^a p(x, \dot{x}, t) dx d\dot{x} = dt \int_0^\infty \dot{x} \cdot p(a, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad (2.79)$$

sendo a frequência média de passagens por um dado nível a e por unidade de tempo t dada por,

$$v_a^+ = \int_0^\infty \dot{x} \cdot p(a, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad (2.80)$$

Detalhando para o caso de processos estocásticos gaussianos de valor médio nulo e tendo presente que a função de densidade de probabilidade conjunta é independente de t ,

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)\right]} \quad (2.81)$$

e introduzindo o conceito de momento espectral λ de ordem k da função densidade espectral de potencia $S_x(\omega)$,

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^\infty |\omega|^k S_x(\omega) d\omega \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.82)$$

pode mostrar-se, a partir das equações (2.38) e (2.72) que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sigma_x^2 = \mu_{xx} \\ \mu_{x\dot{x}} &= \mu_{\dot{x}x} = 0 \\ \lambda_2 &= \sigma_{\dot{x}}^2 = \mu_{\dot{x}\dot{x}} = -\mu_{x\ddot{x}} = -\mu_{\ddot{x}x} \\ \mu_{\ddot{x}\dot{x}} &= \mu_{\dot{x}\ddot{x}} = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Substituindo (2.83) na equação (2.81), e a equação (2.81) em (2.80), pode obter-se a seguinte relação simplificada para a frequência média de passagens ascendentes pelo nível a :

$$v_a^+ = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x} e^{\left(\frac{-a^2}{2\sigma_x^2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} e^{\left(\frac{-a^2}{2\lambda_0}\right)} \quad (2.84)$$

No caso particular em que $a = 0$, esta equação assume simplesmente a forma

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (2.85)$$

É ainda de referir que a probabilidade de ocorrência de passagens ascendentes por um dado nível a coincide com o valor médio do número N_a de passagens ascendentes por esse mesmo nível, num determinado intervalo de tempo dt [7], ou seja,

$$E[N_a] = dt \cdot v_a^+ \quad (2.86)$$

2.4.2. Distribuição de probabilidade de extremos relativos

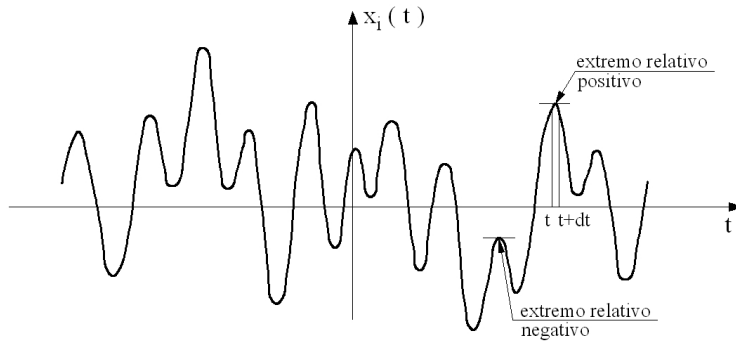


Figura 2.9 – Extremos relativos de uma realização do processo $x(t)$ [8].

A caracterização da distribuição de probabilidade dos extremos relativos de um processo estocástico pode também efectuar-se seguindo o método preconizado por Rice e mais tarde, particularizado por Powel [7, 8], considerando o processo estocástico estacionário $x(t)$ e os seus processos derivados $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$, limitados ao intervalo $[t, t + dt]$, na vizinhança de um extremo relativo.

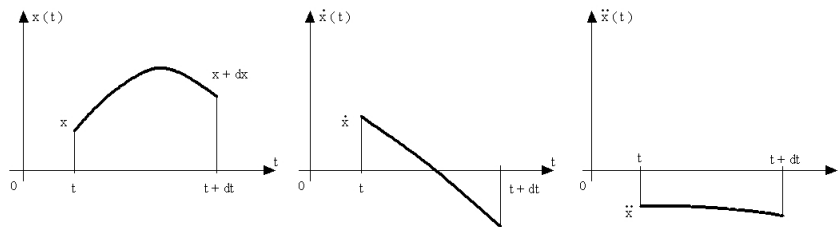


Figura 2.10 – Evolução de $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ na vizinhança de um extremo relativo[8].

Para a ocorrência de um extremo relativo nesse intervalo, é necessário respeitar a condição seguinte:

$$0 < \dot{x}(t) < -\ddot{x}(t) \cdot dt \quad \wedge \quad -\infty < \ddot{x}(t) < 0 \quad (2.87)$$

a qual pode ser representada graficamente como correspondendo, no espaço $(x, \dot{x}, \ddot{x})$, ao domínio representado a tracejado na Figura 2.11.

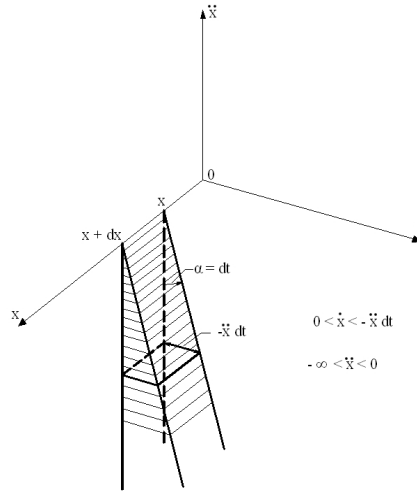


Figura 2.11 – Domínio a satisfazer para a ocorrência de um extremo relativo no intervalo $[t, t + dt]$ [8]

A probabilidade de ocorrência de extremos relativos é então definida como

$$\int_x^{x+dx} \int_0^{-\ddot{x} dt} \int_{-\infty}^0 p(x, \dot{x}, \ddot{x}) d\ddot{x} d\dot{x} dx = -dx dt \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x} \quad (2.88)$$

sendo a frequência média de ocorrência de extremos relativos v_p do processo $x(t)$, por unidade de tempo t ,

$$v_p(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x} \quad (2.89)$$

e, o valor esperado do número de extremos relativos no intervalo de amplitude dt dado por,

$$N_p = -dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x} \quad (2.90)$$

A função distribuição de probabilidade dos extremos relativos do processo $x(t)$ no instante t é dada por

$$P[\text{picos } x(t) < a] = \frac{-dt \cdot \int_{-\infty}^a dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}}{-dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}} \quad (2.91)$$

sendo a respectiva função densidade de probabilidade

$$p_p(x, t) = - \frac{\int_{-\infty}^0 \ddot{x} \cdot p(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}}{v_p(t)} \quad (2.92)$$

Particularizando, novamente para o caso de processos estocásticos estacionários gaussianos de valor médio nulo, a função de densidade de probabilidade conjunta é independente do tempo. Atendendo ao conceito definido pela equação (2.82) e pela equação (2.83), a função de densidade de probabilidade conjunta $p(x, \dot{x}, \ddot{x})$ pode assim representar-se sob a forma,

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot (\lambda_0 \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_2^3)^{\frac{1}{2}}} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{\lambda_2} + \frac{\lambda_4 x^2 + 2\lambda_2 x \ddot{x} + \lambda_0 \ddot{x}^2}{\lambda_0 \lambda_4 - \lambda_2^2} \right) \right]} \quad (2.93)$$

Substituindo a equação anterior na equação (2.89) e na equação (2.92) e, introduzindo a variável adimensional reduzida,

$$\chi = \frac{x}{\sigma_x} = \frac{x}{\sqrt{\lambda_0}} \quad (2.94)$$

obtém-se então que

$$v_p = \frac{\sigma_{\ddot{x}}}{2\pi\sigma_{\dot{x}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (2.95)$$

sendo a função densidade de probabilidade dos máximos relativos [8, 9, 12]

$$p_p(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\varepsilon \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2\varepsilon^2}} + \chi \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\chi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \quad (2.96)$$

com

$$\varepsilon^2 = \frac{\sigma_x \sigma_{\ddot{x}} - \sigma_{\dot{x}}^2}{\sigma_x \sigma_{\ddot{x}}} = \frac{\lambda_0 \lambda_4 - \lambda_2^2}{\lambda_0 \lambda_4} \quad (2.97)$$

O coeficiente ε , depende directamente da configuração do espectro de potencia $S_x(\omega)$, podendo tomar valores entre 0 e 1. Como se pode ver na Figura 2.12, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $p_p(\chi)$ tende para uma distribuição de Rayleigh (equação (2.21)) aproximando-se, por sua vez, de uma distribuição normal quando $\varepsilon \rightarrow 1$ [8, 9, 12].

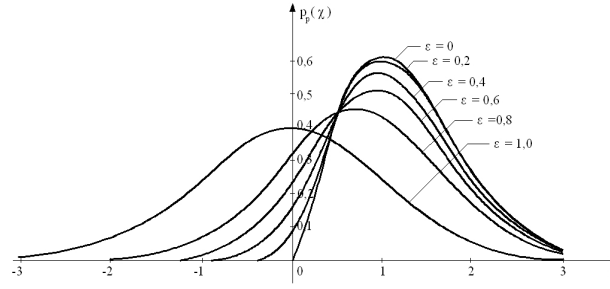


Figura 2.12 – Densidade de probabilidade dos extremos relativos[12]

2.4.3. Distribuição de probabilidade de um extremo absoluto num intervalo de tempo de duração T

A função distribuição de probabilidade de um extremo absoluto num intervalo de tempo de duração T pode ser caracterizada quantificando a probabilidade de todos os extremos relativos nesse intervalo assumirem valores inferiores a um dado valor a .

Considerando o caso particular de um processo estocástico estacionário $x(t)$, como já foi referido e apresentado na equação (2.90), o número esperado de extremos relativos no intervalo de amplitude T é dado por,

$$N_p = \nu_p \cdot T \quad (2.98)$$

Supondo que eles ocorrem de forma probabilisticamente independente, a correspondente função de distribuição de máximos absolutos será dada por [8, 12]

$$P\left[\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} \quad x(t) < a\right] = \left(\int_{-\infty}^a p_p(x) dx\right)^{N_p} \quad (2.99)$$

obtendo-se por derivação a respectiva função densidade de probabilidade

$$p_{\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix}}(a) = N_p \cdot \left(\int_{-\infty}^a p_p(x) dx\right)^{N_p-1} \cdot p_p(a) \quad (2.100)$$

Supondo o processo $x(t)$ estacionário gaussiano de valor médio nulo e, introduzindo a variável adimensional apresentada na equação (2.94), podem obter-se as seguintes relações

$$N_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} T \quad (2.101)$$

$$P\left[\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} \quad \chi(t) < \frac{a}{\sigma_x}\right] = \left(\int_{-\infty}^{\frac{a}{\sigma_x}} p_p(\chi) d\chi\right)^{N_p} \quad (2.102)$$

$$p_{\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix}}\left(\frac{a}{\sigma_x}\right) = N_p \cdot \left(\int_{-\infty}^{\frac{a}{\sigma_x}} p_p(\chi) d\chi\right)^{N_p-1} \cdot p_p\left(\frac{a}{\sigma_x}\right) \quad (2.103)$$

Com base nestas e na equação (2.96), representa-se a função distribuição de probabilidade dos extremos absolutos através de,

$$P\left[\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} \quad x(t) < a\right] = e^{-v_0^+ \cdot e^{\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}} = e^{-v_0^+ \cdot e^{\frac{a^2}{2\sigma_0^2}}} \quad (2.104)$$

Por outro lado, Davenport demonstrou ainda, partindo das relações (2.4), (2.6) e (2.7), que o valor médio e o desvio padrão dos extremos absolutos susceptíveis de ocorrerem em intervalos de tempo de duração T , podem obter-se, de forma aproximada, através das relações:

$$E\left[\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} \quad x(t)\right] = \left(\sqrt{2 \cdot \ln(v_0^+ \cdot T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \cdot \ln(v_0^+ \cdot T)}}\right) \cdot \sigma_x \quad (2.105)$$

$$\sigma_{x_{\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix}}} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \ln(v_0^+ \cdot T)}}\right) \cdot \sigma_x \quad (2.106)$$

representando γ a constante de Euler com o valor de 0,577216.

De modo a possibilitar uma mais fácil compreensão das distribuições estatísticas referidas, representam-se na Figura 2.13 as funções densidade de probabilidade correspondentes ao processo estocástico gaussiano de valor médio nulo $x(t)$, à distribuição de extremos relativos com $\varepsilon = 2/3$, e à dos extremos absolutos num intervalo de duração T para os valores de $v_0^+ \cdot T$ de 10^2 , 10^3 , 10^4 e 10^5 .

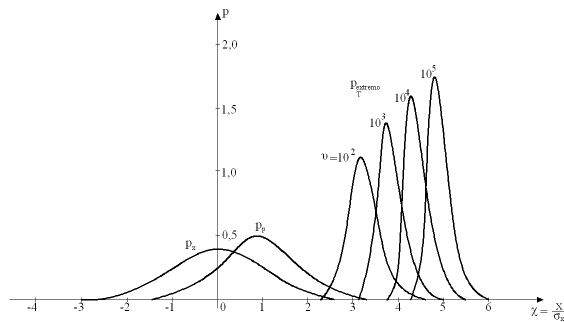


Figura 2.13 – Densidade de probabilidade correspondente às variáveis χ , $p\chi$ e $\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} \chi$ [12].

Da Figura 2.13 pode concluir-se que, à medida que se regista um incremento do número médio de passagens ascendentes por zero, a função densidade de probabilidade dos máximos absolutos torna-se cada vez mais aguçada, concentrando-se em torno de um valor sucessivamente mais elevado de χ .

Devido a este facto, os valores utilizados em projecto estrutural são frequentemente baseados nos valores médios dos extremos absolutos, tal como é expresso em (2.105) e está representado na Figura 2.14.

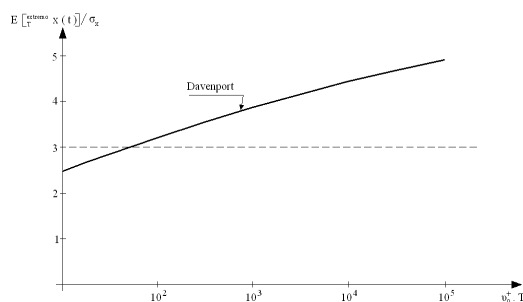


Figura 2.14 – Variação do valor médio dos extremos com o número médio de passagens ascendentes por zero [8].

3. DINÂMICA DE OSCILADORES LINEARES

3.1. Introdução

Em muitas situações no domínio da Engenharia de Estrutura torna-se necessário proceder à análise de sistemas susceptíveis de serem submetidos, durante o seu período de vida útil, a excitações dinâmicas de carácter estocástico, tais como a turbulência atmosférica associada à acção do vento, os sismos, as ondas oceânicas ou mesmo o tráfego rodoviário. Por este facto, é importante saber caracterizar, de forma adequada, sob uma óptica probabilística, quer a excitação, quer a correspondente resposta estrutural, utilizando os conceitos e relações apresentados no capítulo anterior.

A simulação do comportamento estrutural envolve a consideração de um modelo matemático de natureza contínua ou discreta, possibilitando, não só, a consideração de diferentes tipos de acções mas também a simulação do funcionamento estrutural de uma forma ajustada à realidade e suficientemente simples e eficiente em termos de utilização corrente. Neste contexto, as acções são usualmente idealizadas através de processos estocásticos vectoriais e poderão ser de natureza não-estacionária (sismos), estacionária ou mesmo ergódica, sendo os principais parâmetros estatísticos fixados e aferidos em função de dados experimentais [8].

O estabelecimento de relações determinísticas excitação-resposta resulta da aplicação directa das leis da Mecânica, conduzindo a um conjunto de equações a que mais tarde se fará referência. Estas equações poderão ser de carácter linear ou não linear. Todavia, na maior parte das situações, são utilizados modelos lineares, podendo os seus resultados ser posteriormente objecto de correcções, de modo a reflectir os efeitos do seu comportamento não linear.

O presente capítulo tem assim como objectivo apresentar alguns dos métodos utilizados na análise estocástica da resposta dinâmica de sistemas lineares a excitações aleatórias estacionárias, assumindo que as propriedades de massa, rigidez e de amortecimento são conhecidas de forma determinística e invariantes no tempo, e em correspondência com um pré determinado número de graus de liberdade.

Para tal, serão descritas as abordagens gerais mais correntemente utilizadas, baseadas nos conceitos de função de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência, iniciando-se esta sistematização pelos sistemas de um grau de liberdade ($1 - GL$) e passando-se em seguida à apresentação de algumas formulações utilizadas na análise de sistemas de múltiplos graus de liberdade ($N - GL$), tendo esta síntese sido essencialmente baseada na referência [8].

É ainda oportuno referir alguns autores cuja contribuição nesta área foi de grande significado, nomeadamente Hurty e Rubinstein (1964), Clough e Penzien (1975), Lin (1967), Yang (1986), Ortiz et al. (1994) [4, 7-9, 12].

3.2. Osciladores lineares de 1 grau de liberdade

3.2.1. Relações determinísticas excitação-resposta

A caracterização da resposta de um sistema linear de $(1-GL)$ a uma excitação qualquer de carácter dinâmico, envolve o conhecimento prévio das propriedades do sistema, as quais possibilitam, o estabelecimento de relações determinísticas entre a excitação $p(t)$ e a resposta obtida $q(t)$.

Estas relações são traduzidas por funções expressas no domínio do tempo ou no domínio da frequência, as quais são habitualmente designadas funções de transferência FT_i , tal como representado na Figura 3.1.

No campo da análise de vibrações, dado que as propriedades da excitação têm, habitualmente, carácter bastante mais aleatório que as propriedades do sistema, estas últimas podem ser encaradas de uma forma determinística [8, 12], podendo então representar-se:

$$FT = FT_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

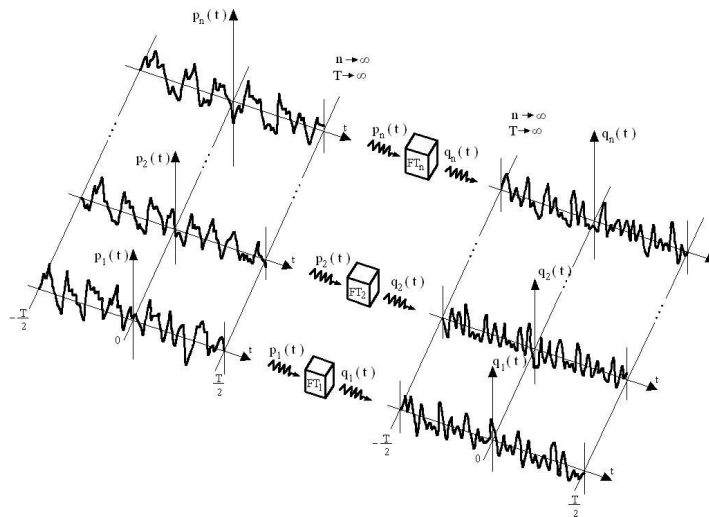


Figura 3.1 – Processo de excitação e resposta de um sistema linear de $1-GL$ [8]

Considerando o modelo de um simples oscilador de um grau de liberdade como esquematizado na Figura 3.2, inicialmente em repouso e sujeito a uma acção $p(t)$, o seu equilíbrio dinâmico pode ser traduzido através da equação do movimento:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = p(t) \quad (3.2)$$

sendo m a massa, k a constante de rigidez do sistema, c a constante de amortecimento viscoso.

Dividindo ambos os membros da equação (3.2) por m , esta toma a forma simplificada que abaixo se apresenta

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\omega_n\dot{q}(t) + \omega_n^2q(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (3.3)$$

em que ω_n representa a frequência natural do sistema e ξ o coeficiente de amortecimento, tendo a forma

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{k}{m} \\ \xi &= \frac{c}{c_c} \\ c_c &= 2km \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que c_c representa a constante de amortecimento crítico.

Em seguida, refere-se a forma de obtenção das relações genéricas determinísticas excitação-resposta, para este modelo, no domínio do tempo e no domínio da frequência.

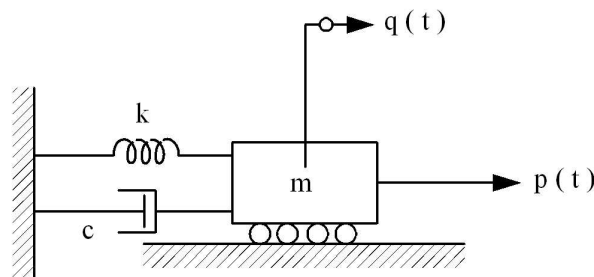


Figura 3.2 – Modelo de oscilador linear de 1-GL

3.2.1.1. Domínio do tempo

No domínio do tempo, considera-se a excitação genérica $p(t)$ como uma sucessão de impulsos $p(\tau)d\tau$, tal como representado na Figura 3.3. A resposta é obtida então a partir de um integral de convolução, o integral de Duhamel,

$$q(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} p(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (3.5)$$

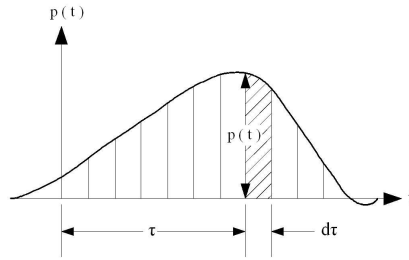


Figura 3.3 – Excitação $p(t)$ subdividida em impulsos $p(\tau)d\tau$ [7].

A função $h(t-\tau)$ representa a resposta do sistema no instante genérico τ à actuação do impulso unitário de Dirac $\delta(t-\tau)$, representado na Figura 3.4. Esta função impulso goza seguintes propriedades [7]:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\rightarrow \infty && \text{quando } t \rightarrow 0 \\ \delta(t) &\rightarrow 0 && \text{para os restantes valores de } t \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

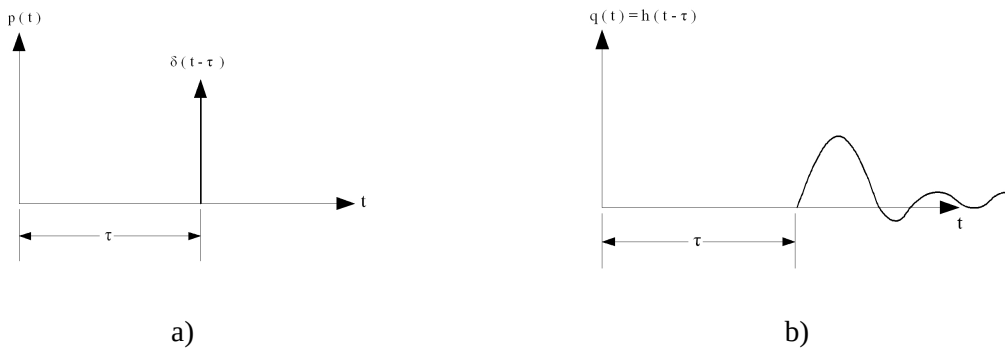


Figura 3.4 – Função impulso de Dirac $\delta(t-\tau)$ de excitação (a) e a correspondente função de resposta (b) [7].

A função $h(t-\tau)$ é dada pela expressão

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) \quad (3.7)$$

em que, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, sendo ω_n a frequência natural do sistema.

Como se pode observar, a função $h(t)$ representa uma característica essencial do sistema, possibilitando o estabelecimento de uma relação determinística excitação-resposta, sendo, por tal facto designada por função de transferência no domínio do tempo.

3.2.1.2. Domínio da frequência

Considerando o modelo solicitado por uma excitação harmónica de amplitude p_0 ,

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

a resposta do oscilador será do tipo

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

sendo q_0 a amplitude da resposta.

Substituindo a equação (3.9) na equação de equilíbrio dinâmico representada em (3.2), vem:

$$m(-\omega^2 q_0 e^{i\omega t}) + c(i\omega q_0 e^{i\omega t}) + k(q_0 e^{i\omega t}) = p_0 e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

podendo-se obter a função de transferência $H(\omega)$ no domínio da frequência, dada por

$$H(\omega) = \frac{q_0}{p_0} = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c} = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega\omega_n)} \quad (3.11)$$

Podendo a excitação actuante $p(t)$ ser decomposta num somatório de um número infinito de harmónicos de amplitude infinitesimal $|P(\omega)|d\omega/2\pi$, através da transformada inversa de Fourier,

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.12)$$

a resposta do sistema pode ser expressa, por sobreposição de efeitos, através de

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.13)$$

Desta forma, visto que a resposta $q(t)$ do sistema se pode também obter a partir da transformada inversa de Fourier

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.14)$$

conclui-se que a relação determinística excitação-resposta no domínio da frequência é traduzida pela equação,

$$Q(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega) \quad (3.15)$$

Interessa neste contexto introduzir o conceito de função de amplificação mecânica χ_m , sendo esta a razão entre a amplitude do deslocamento q_0 de um oscilador de 1-GL e o deslocamento q_{st} nele induzido pela aplicação, em condições estáticas, da amplitude de força p_0 da excitação [13],

$$\chi_m(\omega) = \frac{|q_0|}{q_{st}} = m \cdot \omega_n^2 \cdot |H(\omega)| \quad (3.16)$$

com

$$q_{st} = \frac{p_0}{k} = \frac{p_0}{m \cdot \omega_n^2} \quad (3.17)$$

Em osciladores com amortecimento nulo, verifica-se que

$$\chi_m(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.18)$$

e, em osciladores fracamente amortecidos, o valor máximo de χ_m dá-se para

$$\chi_m = \frac{1}{2 \cdot \xi} = \frac{\pi}{\delta} \quad (3.19)$$

em que ξ é o coeficiente de amortecimento viscoso e δ o decremento logarítmico, dado por

$$\delta = 2\pi \cdot \xi \quad (3.20)$$

3.2.1.3. Relação entre as funções de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência

Nas duas abordagens paralelas de análise descritas nas secções anteriores, é envolvida a sobreposição de efeitos devido a excitações unitárias. A avaliação da resposta no domínio do tempo é baseada na função de resposta ao impulso unitário de Dirac, $h(t)$, enquanto que, no domínio da frequência, é baseada na função de resposta complexa, $H(\omega)$, relativa a uma excitação harmónica unitária.

As duas funções representam as características dinâmicas do sistema estrutural e encontram-se intimamente interligadas. De facto, estas duas funções constituem um par de transformadas de Fourier, como facilmente se pode mostrar.

Com efeito, considerando o caso particular em que a excitação consiste apenas na actuação de um impulso unitário de Dirac $p(t) = \delta(t)$, esta origina uma resposta do tipo:

$$q(t) = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) P(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.21)$$

onde $P(\omega)$ é transformada de Fourier da excitação $p(t)$ que, neste caso, é igual a $\delta(t)$ e por isso,

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (3.22)$$

o que leva a concluir que

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.23)$$

ou consequentemente

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.24)$$

É ainda de salientar o facto que, quer os problemas transitórios quer os estacionários podem ser solucionados utilizando tanto a abordagem no domínio do tempo como no domínio da frequência. Observa-se no entanto que, quando a excitação é transitória é mais conveniente usar a abordagem no domínio do tempo, enquanto que no caso de problemas com a excitação de carácter estacionário, a abordagem no domínio da frequência é mais simples de aplicar [7].

3.2.2. Relações estocásticas excitação-resposta

Tal como foi referido no capítulo anterior, sendo a excitação idealizada através de um processo estocástico, a caracterização completa da sua estrutura probabilística requer o conhecimentos da hierarquia de funções densidade de probabilidade ou da hierarquia de momentos, o mesmo acontecendo com a caracterização da resposta do sistema a essa excitação.

Muitas das acções aleatórias actuantes sobre sistemas estruturais podem, no entanto, ser modeladas através de processos estocásticos gaussianos, sendo suficiente, nesse caso, o conhecimento dos momentos de primeira e segunda ordem para uma completa caracterização probabilística dos mesmos. Para além disso, operações lineares realizadas sobre processos gaussianos conduzem a processos da mesma natureza, pelo que, os processos de resposta podem também ser caracterizados através de idêntica simplificação.

Por outro lado, quando as acções têm carácter não-gaussiano e o sistema é fracamente amortecido, como é frequente acontecer em sistemas estruturais, observa-se que a resposta apresenta características estatísticas mais próximas da distribuição normal que a excitação, tendendo a aproximar-se mais quanto menor for o amortecimento do sistema [8].

Pelas razões apresentadas, é frequente a análise da resposta de um sistema linear a excitações aleatórias estacionárias basear-se apenas em parâmetros estatísticos de ordem não superior a dois sendo por isso, de grande importância, caracterizar as relações excitação-resposta conforme se irá efectuar em seguida, para o domínio do tempo e para o domínio da frequência.

3.2.2.1. Domínio do tempo

Considerando $q(t)$ e $p(t)$ dois processos estocásticos estacionários, a resposta $q(t)$ de um sistema de um grau de liberdade a uma excitação aleatória $p(t)$, pode ser obtido a partir da equação (3.5). Com efeito, aplicando o operador $E[\]$ a esta equação, facilmente se obtém o valor médio da resposta,

$$m_q(t) = \int_0^\infty m_p(t-\tau)h(\tau)d\tau = m_p \int_0^\infty h(\tau)d\tau \quad (3.25)$$

o que demonstra estacionaridade de primeira ordem do processo de resposta $q(t)$, uma vez que, sendo o valor médio da excitação $m_p = E[p(t)]$ invariante no tempo, o valor médio espectável da resposta $m_q = E[q(t)]$, também o é.

Em situações reais, em que o início da excitação não corresponde ao instante $t = -\infty$ mas sim ao instante $t = 0$ (excitação pseudo-não-estacionária), verifica-se a ocorrência de um curto período transitório de crescimento de $m_q(t)$ tendendo rápida e assintoticamente para um valor constante, igual ao definido pela equação (3.25).

Pode então concluir-se que, sendo a excitação desdobrável em duas componentes, uma de valor médio m_p e outra traduzida por um processo estocástico estacionário de valor médio nulo $p_0(t)$, o valor médio da resposta devido à excitação total $p(t)$ coincide com a resposta à acção determinística constituída pela componente constante m_p , contribuindo a componente aleatória de valor médio nulo $p_0(t)$ unicamente para a variância da resposta.

Por este facto, passa-se a quantificar a variância da resposta $q_0(t)$ a partir da função de auto-correlação do processo de excitação $p_0(t)$. Para este efeito, considerando a equação (3.5) na forma

$$q_0(t) = \int_0^\infty p_0(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (3.26)$$

a função de auto-correlação $R_{q_0}(t, t+\tau)$ do processo de resposta $q_0(t)$ pode exprimir-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} R_{q_0}(t, t+\tau) &= E[q_0(t) \cdot q_0(t+\tau)] \\ &= \int_0^\infty h(\tau_1) \int_0^\infty h(\tau_2) E[p_0(t-\tau_1)p_0(t+\tau-\tau_2)] d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tendo presente o carácter estacionário da excitação,

$$\begin{aligned} E[p_0(t-\tau_1)p_0(t+\tau-\tau_2)] &= E[p_0(t)p_0(t+\tau+\tau_1-\tau_2)] \\ &= R_{p_0}(\tau+\tau_1-\tau_2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

e, substituindo a equação (3.28) na equação (3.27), obtém-se

$$R_{q_0}(t, t+\tau) = R_{q_0}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)R_{p_0}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (3.29)$$

o que permite concluir que ambas as funções de auto-correlação, $R_{q_0}(\tau)$ e $R_{p_0}(\tau)$, apenas dependem do desfasamento τ . Assim sendo, a variância do processo de resposta é quantificada tendo em atenção a equação (2.29),

$$\mu_q = \mu_{q_0} = R_{q_0}(0) \quad (3.30)$$

3.2.2.2. Domínio da frequência

Em alternativa à abordagem no domínio do tempo, outra forma de relacionar os valores médios m_p e m_q consiste em recorrer ao valor na origem da função de transferência no domínio da frequência

$$H(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \quad (3.31)$$

e conjugando a equação (3.31) com equação (3.25), obtém-se

$$m_q = H(0) m_p = \frac{m_p}{k} \quad (3.32)$$

Pode também obter-se a variância do processo de resposta de valor médio nulo, $q_0(t)$, por via da análise no domínio da frequência, procurando obter a relação correspondente entre funções densidade espectral de potência.

Assim, partindo da equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de 1-GL (equação (3.2)), tomando a transformada de Fourier de ambos os membros e considerando os processos $p_0(t)$ e $q_0(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2, T/2]$ com $T \rightarrow \infty$, obtém-se a relação,

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)Q_{0,T}(\omega) = P_{0,T}(\omega) \quad (3.33)$$

a qual mostra que as transformadas de Fourier dos processos de excitação e de resposta restringidas àquele intervalo se relacionam através da função de transferência $H(\omega)$ (equação (3.11)), da seguinte forma

$$Q_{0,T}(\omega) = H(\omega) \cdot P_{0,T}(\omega) \quad (3.34)$$

Deste modo, tendo presente a definição da função densidade espectral de potência (expressão (2.36)), é possível determinar $S_{q_0}(\omega)$ a partir de $S_{p_0}(\omega)$ e de $H(\omega)$, bastando para isso multiplicar ambos os membros da equação (3.34) pelo respectivo complexo conjugado, dando origem à relação

$$S_{q_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{p_0}(\omega) \quad (3.35)$$

A variância da resposta, pode então ser quantificada pela relação (ver equação (2.38))

$$\mu_q = \mu_{q_0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_0}(\omega) d\omega \quad (3.36)$$

3.2.3. Avaliação do valor médio dos picos de resposta

Do ponto de vista da análise estrutural, a quantificação do valor médio dos extremos absolutos da resposta num intervalo de tempo de duração T é de grande importância. Como já foi referido no capítulo 2, esta grandeza pode ser obtida a partir do conhecimento dos momentos estatísticos que caracterizam o processo em causa.

No caso de se estar em presença de um processo estocástico estacionário, a determinação do valor médio dos picos de resposta da componente de média nula, $q_0(t)$, pode ser realizada com base nos momentos de primeira e segunda ordem, tal como apresentado nas equações (3.25), (3.32), (3.29), (3.30), (3.35), (3.36) e, tomando como referência a expressão (2.105), pela qual o valor médio é igual a

$$E\left[\begin{matrix} \text{extremo} \\ T \end{matrix} q_0(t)\right] = \bar{p}_{q_0} \cdot \sigma_{q_0} \quad (3.37)$$

em que $\bar{p}_{q_0}$ é o factor de pico dado pela expressão

$$\bar{p}_{q_0} = \sqrt{2 \cdot \ln(v_0^+ \cdot T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \cdot \ln(v_0^+ \cdot T)}} \quad (3.38)$$

sendo o parâmetro v_0^+ calculado a partir da equação (2.85), a partir do conhecimento dos momentos espectrais da resposta $\lambda_0^{q_0}$, $\lambda_1^{q_0}$ e $\lambda_2^{q_0}$ definidos por,

$$\lambda_k^{q_0} = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^k S_{q_0}(\omega) d\omega \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.39)$$

3.3. Osciladores lineares de N graus de liberdade

A análise da resposta dinâmica de sistemas lineares de N -GL sujeitos a excitações aleatórias estacionárias é analiticamente mais complexa. Apresentam-se em seguida duas das formulações susceptíveis de serem utilizadas para a caracterização probabilística do correspondente processo estocástico de resposta: formulação directa e formulação modal.

A primeira destas formulações proporciona uma solução directa e exacta para a resposta estacionária, sendo especialmente adequada ao tratamento de sistemas de pequenas dimensões (até cerca de 100 graus de liberdade) [9]. Quando os sistemas se tornam mais complexos, a formulação deixa de ser tão eficiente, envolvendo elevados tempos de cálculo.

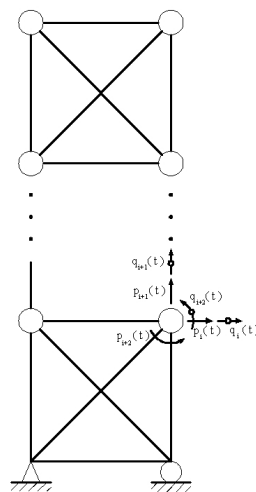


Figura 3.5 – Processo de excitação e resposta de um sistema linear de N -GL.

A formulação modal é por isso a abordagem normalmente escolhida para a análise de grandes sistemas estruturais. É uma metodologia muito poderosa, apesar das soluções serem aproximadas.

Para melhor compreensão dos conceitos a apresentar, torna-se conveniente começar por estabelecer as relações determinísticas entre a excitação actuante e a respectiva resposta estrutural, introduzido uma generalização adequada do conceito de funções de transferência, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência.

3.3.1. Relações determinísticas excitação-resposta

3.3.1.1. Domínio do tempo

Considere-se um sistema linear de N -GL, tal como representado na Figura 3.5, sujeito a uma excitação dinâmica traduzida pelo vector,

$$\underline{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T \quad (3.40)$$

a qual correspondem m respostas estruturais, segundo determinadas coordenadas generalizadas,

$$\underline{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)]^T \quad (3.41)$$

Designando por $h_{ik}(t)$ a resposta segundo a coordenada q_i originada pelo impulso unitário de Dirac

$$p_k(t) = \delta(t) \quad (3.42)$$

a resposta total $q_i(t)$ à excitação traduzida pelo vector $\underline{p}(t)$ pode ser obtida por sobreposição de efeitos, sendo dada por

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^t p_k(\tau) h_{ik}(t-\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty p_k(t-\tau) h_{ik}(\tau) d\tau \quad (3.43)$$

Esta equação possibilita a determinação da evolução temporal da resposta segundo cada coordenada q_i ($i=1, \dots, m$) uma vez conhecidas as funções $h_{ik}(t)$, que constituem manifestamente uma generalização do conceito de função de transferência no domínio do tempo.

3.3.1.2. Domínio da frequência

Tal como no caso de sistemas de 1-GL a análise pode processar-se também no domínio da frequência se para o efeito se introduzir a matriz $\underline{H}(\omega)$, constituída pelas funções de transferência $H_{ik}(\omega)$, de tal forma que, à excitação harmónica de amplitude unitária,

$$p_k(t) e^{i\omega t} \quad (3.44)$$

corresponda a resposta

$$q_i(t) = H_{ik}(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.45)$$

Podendo a excitação actuante $p_k(t)$ ser decomposta num somatório de um numero infinito de harmónicos de amplitude infinitesimal $|P_k(\omega)| d\omega/2\pi$ através da transformada inversa de Fourier

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.46)$$

a resposta do sistema pode ser novamente expressa, por sobreposição de efeitos através de

$$q_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ik}(\omega) P_k(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.47)$$

Desta forma, visto que a resposta $q_i(t)$ do sistema se poderá também obter a partir da transformada inversa de Fourier,

$$q_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.48)$$

rapidamente se conclui que, a relação determinística excitação-resposta no domínio da frequência é traduzida pela expressão

$$Q_i(\omega) = H_{ik}(\omega) \cdot P_k(\omega) \quad (3.49)$$

Supondo agora a excitação e a resposta referidas ao mesmo sistema de coordenadas generalizadas $q_i(t)$ e sendo o equilíbrio dinâmico do sistema traduzido pelo sistema de equações diferenciais,

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{p}_q(t) \quad (3.50)$$

em que $\underline{M}$ representa a matriz de massa, $\underline{C}$ a matriz de amortecimento, $\underline{K}$ a matriz de rigidez do sistema para as referidas coordenadas, a matriz das funções de transferência referida a este sistemas de coordenadas $\underline{H}_q(\omega)$ pode ser obtida da seguinte forma:

Supondo a actuação de uma excitação harmónica

$$\underline{p}_q(t) = \underline{A} e^{i\omega t} \quad (3.51)$$

similarmente ao apresentado para um sistema de 1-GL, a resposta referida as coordenadas q_i , será traduzida pela equação,

$$\underline{q}(t) = \underline{H}_q(\omega) \underline{A} e^{i\omega t} \quad (3.52)$$

que, substituindo em (3.50), conduz a,

$$\underline{H}(\omega) = \left(-\omega^2 \underline{M} + i\omega \underline{C} + \underline{K} \right)^{-1} \quad (3.53)$$

esta equação representa a matriz de funções de transferência no domínio da frequência relativas a um oscilador de $N - GL$.

3.3.1.3. Relação entre as funções de transferência no domínio do tempo e no domínio da frequência

Seguindo um percurso idêntico ao descrito em 3.2.1.3, torna-se fácil constatar que a função $h_{ik}(t)$ se relaciona com $H_{ik}(\omega)$ através da sua transformada inversa de Fourier

$$h_{ik}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ik}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.54)$$

e que,

$$H_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.55)$$

3.3.2. Relações estocásticas excitação-resposta

Tal como foi referido em 3.2.2., sendo a excitação traduzida por um processo estocástico vectorial estacionário $\underline{p}(t)$, a completa caracterização da estrutura probabilística do processo de resposta $\underline{q}(t)$ deve envolver, em princípio, o conhecimento de um conjunto de grandezas estatísticas, como a hierarquia de funções de densidade de probabilidade conjuntas. No entanto, pelas razões já referidas, no que respeita aos sistemas de $1 - GL$, a caracterização da resposta é correntemente realizada com recurso apenas a grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem. Com efeito, assumindo estar-se em presença de excitações de carácter gaussiano, o conhecimento dos valores médios espectáveis m_{q_i} , das variâncias μ_{q_i} e das variâncias cruzadas μ_{ij}^q , é suficiente para a completa definição da distribuição de probabilidade instantânea do processo estocástico vectorial $\underline{q}(t)$.

Assim sendo, descrevem-se em seguida as relações estocásticas excitação-resposta segundo uma formulação directa para sistemas de N -GL, quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência.

3.3.2.1. Domínio do tempo

Aplicando o operador $E[\]$ à equação (3.43), obtêm-se facilmente os valores médios espectáveis da resposta

$$m_{q_i}(t) = \sum_{k=1}^n m_{p_k} \int_0^\infty h_{ik}(\tau) d\tau \quad (3.56)$$

o que pode ser representado sob a forma matricial através de

$$\underline{m}_q(t) = \underline{m}_p \int_0^\infty \underline{h}(\tau) d\tau \quad (3.57)$$

sendo $\underline{m}_p$ o valor médio das componentes de excitação estacionária, $\underline{h}(\tau)$ a matriz composta pelas funções de transferência no domínio do tempo e $\underline{m}_q(t)$ o vector dos valores médios espectáveis da resposta, que a equação (3.57) mostra ser também invariante no tempo.

Visto que, em situações reais a excitação tem início quando $t = 0$ e não quando $t = -\infty$,

$$\underline{m}_q(t) = \underline{m}_p \int_0^t \underline{h}(\tau) d\tau \quad (3.58)$$

registando-se um curto período transitório de crescimento seguido de uma rápida tendência assintótica de $\underline{m}_q(t)$, para os valores definidos por (3.57).

Pode inferir-se que, sendo a excitação actuante desdobrável em duas componentes, uma constante e igual ao respectivo valor médio $\underline{m}_p$ e outra traduzida por um processo estocástico vectorial estacionário de valor médio nulo $\underline{p}_0(t)$, o valor médio da resposta devido à excitação total $\underline{p}(t)$ coincide com a resposta à acção determinística associada à componente $\underline{m}_p$, contribuindo por isso a componente aleatória de valor médio nulo $\underline{p}_0(t)$ unicamente para a formação da matriz de covariância da resposta.

A matriz de covariância da resposta $\underline{\mu}_q$ pode, então, ser quantificada seguindo uma abordagem temporal, baseada na relação existente entre as funções de correlação cruzada da componente de excitação $\underline{p}_0(t)$ e da resposta correspondente $\underline{q}_0(t)$.

Partindo da equação (3.43), agora na forma,

$$q_{0i}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty p_{0k}(t-\tau) h_{ik}(\tau) d\tau \quad (3.59)$$

a função de correlação cruzada da resposta $R_{ij}^{q_0}(t, t+\tau)$ pode exprimir-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} R_{ij}^{q_0}(t, t+\tau) &= E[q_{0i}(t) \cdot q_{0j}(t+\tau)] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty h_{ik}(\tau_1) h_{jl}(\tau_2) \cdot E[p_{0k}(t-\tau_1) p_{0l}(t+\tau-\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Tendo presente o carácter estacionário da excitação

$$\begin{aligned} E[p_{0k}(t-\tau_1) p_{0l}(t+\tau-\tau_2)] &= E[p_{0k}(t) p_{0l}(t+\tau+\tau_1-\tau_2)] \\ &= R_{kl}^{p_0}(\tau+\tau_1-\tau_2) \end{aligned} \quad (3.61)$$

e substituindo esta igualdade na equação (3.60), obtém-se

$$\begin{aligned} R_{ij}^{q_0}(t, t+\tau) &= R_{ij}^{q_0}(\tau) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_0^\infty \int_0^\infty h_{ik}(\tau_1) h_{jl}(\tau_2) \cdot R_{kl}^{p_0}(\tau+\tau_1-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

que, sob a forma matricial, aparece como

$$\underline{R}_{q_0}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}(\tau_1) \underline{R}_{p_0}(\tau+\tau_1-\tau_2) \underline{h}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.63)$$

em que, $\underline{R}_{q_0}(\tau)$ e $\underline{R}_{p_0}(\tau)$ são as matrizes quadradas que agrupam as funções de correlação cruzada $R_{ij}^{q_0}(\tau)$ e $R_{kl}^{p_0}(\tau)$, respectivamente.

A equação (3.63) mostra pois que as funções de correlação cruzada da resposta, analogamente ao que acontece com as suas homólogas referentes à excitação, são apenas dependentes do desfasamento τ , podendo a partir delas quantificar-se os elementos correspondentes da matriz de covariância da resposta

$$\mu_{ij}^q = \mu_{ij}^{q_0} = R_{ij}^{q_0}(0) \quad (3.64)$$

3.3.2.2. Domínio da frequência

Tal como se observou atrás para os sistemas de 1-GL, a via de análise no domínio da frequência torna-se menos complexa de seguir. Os vectores de valores médios $\underline{m}_p$ e $\underline{m}_q$ poderão ser relacionados recorrendo às funções de transferência no domínio da frequência $H_{ik}(\omega)$, tendo em conta que

$$H_{ik}(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(\tau) d\tau \quad (3.65)$$

Tendo presente que a função de resposta ao impulso unitário de Dirac, $h_{ik}(\tau)$, é nula para valores negativos de τ ,

$$H_{ik}(0) = \int_0^{\infty} h_{ik}(\tau) d\tau \quad (3.66)$$

e combinando esta equação com (3.56) resulta que,

$$\underline{m}_q = \underline{H}(0) \underline{m}_p \quad (3.67)$$

sendo que, no caso das coordenadas de p_i da excitação e q_i da resposta serem coincidentes, pela equação (3.53), resulta

$$\underline{H}(0) = \underline{K}^{-1} \quad (3.68)$$

Com efeito, tendo presente a relação entre as funções de correlação cruzada no domínio do tempo e as funções densidade espectral cruzada no domínio da frequência,

$$S_{ij}^{q_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}^{q_0}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.69)$$

e tendo em atenção que

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i\omega(\tau+\tau_1-\tau_2)} \cdot e^{i\omega\tau_1} \cdot e^{-i\omega\tau_2} \quad (3.70)$$

e que $h_{ik}(\tau) = 0$ para valores de τ negativos, obtém-se

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^{q_0}(\omega) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(\tau_1) h_{jl}(\tau_2) R_{kl}^{p_0}(\tau + \tau_1 - \tau_2) \cdot e^{-i\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} \cdot e^{i\omega\tau_1} \cdot e^{-i\omega\tau_2} d\tau d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n S_{kl}^{p_0}(\omega) H_{ik}(\omega)^* H_{jl}(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

ou sob a forma matricial

$$\underline{S}_{q_0}(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{S}_{p_0}(\omega) \cdot \underline{H}(\omega)^{T*} \tag{3.72}$$

Esta equação possibilita assim, a obtenção da matriz das densidades espectrais de potência cruzadas da resposta, partindo da matriz de densidades espectrais de potência cruzadas da excitação e da matriz das funções de transferência. Posteriormente, pode quantificar-se cada um dos elementos da matriz de covariância

$$\mu_{ij}^q = \mu_{ij}^{q_0} = 2 \int_0^{\infty} \text{Re} \left[S_{ij}^{q_0}(\omega) \right] d\omega \tag{3.73}$$

3.3.3. Formulação Modal

3.3.3.1. Relações determinísticas excitação-resposta no espaço modal

Em alternativa à formulação directa referida na secção anterior, descreve-se em seguida a formulação modal, para análise estocástica da resposta dinâmica de sistemas lineares de N -GL, sujeitos a excitações aleatórias estacionárias.

Para tal, considere-se um sistema de N -GL, cujo equilíbrio dinâmico, quando sujeito a uma excitação de carácter aleatório estacionário, pode ser traduzido pelo sistema de equações diferenciais

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{p}(t) \tag{3.74}$$

em que $\underline{M}$ representa a matriz de massa, $\underline{C}$ a matriz de amortecimento e $\underline{K}$ a matriz de rigidez, do sistema, referidas às N coordenadas generalizadas, sendo $\underline{q}(t)$ e $\underline{p}(t)$ dois processos estocásticos vectoriais estacionários caracterizadores da resposta e da excitação, em correspondência com as mesmas coordenadas.

Esta formulação assenta no recurso ao método clássico de análise modal que, como é sabido, se baseia numa mudança de coordenadas com vista à transformação de um sistema de N equações diferenciais,

num conjunto de M equações diferenciais independentes, bastante mais simples de resolver, desde que salvaguardadas determinadas condições.

Tendo em conta a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração (também assumida em relação à matriz de amortecimento) e introduzindo as coordenadas modais $y_i(t)$, que traduzem a contribuição de cada um dos modos considerados $\underline{\phi}_i$ para o vector da resposta, $\underline{q}(t)$, correspondente às coordenadas generalizadas

$$\underline{q}(t) = \underline{\phi} \cdot \underline{y}(t) \quad (3.75)$$

sendo $\underline{\phi}$ a matriz modal do tipo $(N \times M)$, com $M \leq N$. Nestas condições, o sistema representado pela equação (3.74) toma a forma,

$$m_i^y \ddot{y}_i(t) + c_i^y \dot{y}_i(t) + k_i^y y_i(t) = p_i^y(t) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (3.76)$$

onde

$$m_i^y = \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i \quad (3.77)$$

$$c_i^y = \underline{\phi}_i^T \underline{C} \underline{\phi}_i \quad (3.78)$$

$$k_i^y = \underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_i \quad (3.79)$$

e,

$$p_i^y(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}(t) \quad (3.80)$$

Caso o critério de normalização dos vectores próprios das matrizes de massa e rigidez corresponda às condições,

$$m_i^y = \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i = 1 \quad (3.81)$$

$$k_i^y = \underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_i = \omega_i^2 \quad (3.82)$$

a equação (3.76) toma a forma,

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = p_i^y(t) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (3.83)$$

em que, ξ_i e ω_i representam respectivamente os coeficientes de amortecimento e a frequência natural angular correspondente ao i -ésimo modo.

À imagem do que foi apresentado para os sistemas de $1-GL$, as funções de transferência excitação-resposta, ao nível das coordenadas modais, podem ser definidas pelas equações (3.11) e (3.7), sendo representadas por,

$$H_i^y(\omega) = \frac{1}{k_i^y - \omega^2 m_i^y + i\omega_i^y c_i^y} = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega \omega_i} \quad (3.84)$$

$$h_i^y(t - \tau) = \frac{1}{\omega_{d_i}} e^{-\omega_i \xi_i (t - \tau)} \text{sen } \omega_{d_i} (t - \tau) \quad (\xi_i < 1) \quad (3.85)$$

Tendo em conta a definição de função de transferência no domínio da frequência e as equações (3.75) e (3.80), constata-se que a matriz diagonal $\underline{H}_y(\omega)$, constituída pelas funções de transferência modais, está relacionada com a matriz homóloga $\underline{H}_q(\omega)$ através da expressão

$$\underline{H}_q(\omega) = \underline{\Phi} \underline{H}_y(\omega) \underline{\Phi}^T \quad (3.86)$$

ou desenvolvendo em termos dos modos de vibração

$$\underline{H}_q(\omega) = \sum_{i=1}^M \underline{\phi}_i \underline{\phi}_i^T H_i^y(\omega) = \sum_{i=1}^M \frac{\underline{\phi}_i \underline{\phi}_i^T}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega \omega_i} \quad (3.87)$$

Esta equação representa uma alternativa de grande utilidade em relação à equação (3.53) para o cálculo da matriz $\underline{H}_q(\omega)$, evitando a inversão da matriz complexa nela indicada para cada valor de ω e possibilitando a consideração de apenas o número de modos de vibração julgado suficiente.

3.3.3.2. Relações estocásticas excitação-resposta no espaço modal

A caracterização da distribuição de probabilidade da resposta referida às coordenadas q_i , que passa pela determinação do correspondente vector de valores médios espectáveis $\underline{m}_q$ e da matriz de covariância $\underline{\mu}_q$, pode, em alternativa à formulação directa, ser realizada começando por identificar as relações excitação-resposta existentes ao nível do espaço modal, e posteriormente, caracterizando a relação entre a excitação e a resposta no espaço modal com as suas homólogas, mas referidas às

coordenadas q_i . Este procedimento será descrito em seguida, no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Domínio do tempo

Tendo presente a equação (3.25) relativa a sistemas de 1-GL, a relação entre os valores médios da excitação e da resposta no espaço modal pode ser expressa através de

$$m_{y_i}(t) = m_{p_i^y} \int_0^\infty h_i^y(\tau) d\tau \quad (3.88)$$

ou sob a forma matricial,

$$\underline{m}_y(t) = \underline{m}_{p^y} \int_0^\infty \underline{h}_y(\tau) d\tau \quad (3.89)$$

onde $\underline{h}_y(\tau)$ é a matriz diagonal constituída pelas funções de transferência no domínio do tempo correspondentes a cada modo de vibração. Atendendo também a que as relações (3.75) e (3.80) levam a

$$\underline{m}_{p^y} = \underline{\Phi}^T \underline{m}_p \quad (3.90)$$

e a

$$\underline{m}_q = \underline{\Phi} \underline{m}_y \quad (3.91)$$

e conjugando estas equações com (3.89), obtém-se,

$$\underline{m}_q = \underline{m}_p \cdot \underline{\Phi} \cdot \int_0^\infty \underline{h}_y(\tau) d\tau \cdot \underline{\Phi}^T \quad (3.92)$$

o que estabelece a relação entre os vectores dos valores médios espectáveis da excitação e da resposta referidos às coordenadas q_i .

Se a excitação actuante for considerada decomposta em duas componentes, uma constante e igual ao respectivo valor médio e outra traduzida por um processo vectorial estacionário de valor médio nulo $\underline{p}_0(t)$ ou $\underline{p}_o^y(t)$, é fácil de concluir que, o valor médio da resposta devido a excitação total coincide com a resposta à acção determinística constituída pela componente constante, contribuindo a

componente aleatória de valor médio nulo, exclusivamente, para a formação da matriz de covariância da resposta.

Assim, tendo em conta que a resposta à componente aleatória da excitação de valor médio nulo é dada, em termos de coordenadas modais, pelo integral de convolução

$$y_{oi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{oi}^y(\tau) h_i^y(t - \tau) d\tau \quad (3.93)$$

a função de correlação cruzada $R_{ij}^{y_0}(\tau)$, relativa aos processos $y_{oi}(t)$ e $y_{oj}(t)$, pode ser expressa por

$$R_{ij}^{y_0}(\tau) = E[y_{oi}(t) \cdot y_{oj}(t + \tau)] = E\left[\int_{-\infty}^t p_{oi}^y(\tau_1) h_i^y(t - \tau_1) d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{t+\tau} p_{oj}^y(\tau_2) h_j^y(t + \tau - \tau_2) d\tau_2\right] \quad (3.94)$$

Efectuando a mudança de variáveis $u_1 = t - \tau_1$ e $u_2 = t + \tau - \tau_2$, obtém-se

$$R_{ij}^{y_0}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{ij}^{p_0}(\tau - u_2 + u_1) \cdot h_i^y(u_1) \cdot h_j^y(u_2) du_1 du_2 \quad (3.95)$$

Atendendo à definição de função de correlação cruzada

$$\begin{aligned} R_{ij}^{p_0}(\tau - u_2 + u_1) &= E[p_{oi}^y(t - u_1) \cdot p_{oj}^y(t + \tau - u_2)] \\ &= E[\underline{\phi}_i^T \underline{p}_0(t - u_1) \underline{\phi}_j^T \underline{p}_0(t + \tau - u_2)] \\ &= E\left[\sum_{l=1}^N \phi_{li} p_{0l}(t - u_1) \sum_{m=1}^N \phi_{mj} p_{0m}(t + \tau - u_2)\right] \\ &= E\left[\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_{li} \phi_{mj} p_{0l}(t - u_1) p_{0m}(t + \tau - u_2)\right] \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_{li} \phi_{mj} R_{lm}^{p_0}(\tau - u_2 + u_1) \end{aligned} \quad (3.96)$$

e a que

$$p_{oi}^y(t) = \underline{\phi}_i^T \underline{p}_0(t) \quad (3.97)$$

pode então relacionar-se directamente $R_{ij}^{y_0}(\tau)$ com as funções de correlação cruzada da excitação referida às coordenadas q_i , através da substituição da equação (3.96) em (3.95), obtendo-se então

$$R_{ij}^{y_0}(\tau) = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_{li} \phi_{mj} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{lm}^{p_0}(\tau - u_2 + u_1) \cdot h_i^y(u_1) \cdot h_j^y(u_2) du_1 du_2 \quad (3.98)$$

Pode então quantificar-se a matriz de covariância da resposta no espaço modal através da equação

$$\mu_{ij}^y = \mu_{ij}^{y_0} = R_{ij}^{y_0}(0) \quad (3.99)$$

e consequentemente também todos os elementos da matriz de covariância da resposta referida às coordenadas q_i , uma vez que, em resultado da relação linear verificada entre os processos de resposta $q(t)$ e $y(t)$, traduzida pela equação (3.75), as matrizes de covariância correspondentes podem ser relacionadas por

$$\underline{\mu}_q = \underline{\Phi} \underline{\mu}_y \underline{\Phi}^T \quad (3.100)$$

Domínio da frequência

A via mais simples e correntemente utilizada nos problemas de Dinâmica Estrutural, consiste porém numa abordagem baseada nas funções de transferência modais no domínio da frequência. Com efeito, tendo por base as expressões (3.31) e (3.84), pode obter-se

$$H_i^y(0) = \int_0^\infty h_i^y(\tau) d\tau = \frac{1}{k_i^y} \quad (3.101)$$

O que, substituindo nas equações (3.89) e (3.92), dá origem às equações que relacionam os vectores dos valores médios relativos à excitação e à resposta,

$$\underline{m}_y = \underline{K}_y^{-1} \underline{m}_{p^y} = \left(\underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \right)^{-1} \underline{m}_{p^y} \quad (3.102)$$

$$\underline{m}_q = \underline{\Phi} \left(\underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \right)^{-1} \underline{\Phi}^T \underline{m}_p = \underline{K}^{-1} \underline{m}_p \quad (3.103)$$

No que respeita à quantificação da matriz de covariância, esta pode ser obtida a partir da relação entre densidades espectrais cruzadas da excitação e da resposta no espaço modal, $S_{ij}^{y_0}(\omega)$ e $S_{ij}^{p_0^y}(\omega)$.

Neste sentido, sendo a relação excitação-resposta, no domínio da frequência, relativa a sistemas lineares de 1 - GL, dada pela equação (3.15), por analogia, pode escrever-se que,

$$Z_{0i,T}(\omega) = H_i^y(\omega) \cdot P_{0i,T}^y(\omega) \quad (3.104)$$

em que $Z_{0i,T}(\omega)$ e $P_{0i,T}^y(\omega)$ representam, respectivamente, as transformadas de Fourier dos processos $y_{0i}(t)$ e $p_{0i}^y(t)$ restringidos ao intervalo de tempo $[-T/2, T/2]$ com $T \rightarrow \infty$ e, $H_i^y(\omega)$ a função de transferência no domínio da frequência correspondente ao modo de vibração de ordem i .

Por conseguinte, tendo em consideração que a definição de densidade espectral cruzada é dada por (ver equação (2.35)),

$$S_{ij}^{y_0}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[Z_{0i,T}(\omega).Z_{0j,T}^*(\omega)]}{2\pi T} \quad (3.105)$$

pode concluir-se com facilidade que

$$S_{ij}^{y_0}(\omega) = H_i^y(\omega).H_j^y(\omega)^*.S_{ij}^{p_0^y}(\omega) \quad (3.106)$$

ou sob a forma matricial

$$\underline{S}_{y_0}(\omega) = \underline{H}_y(\omega).\underline{S}_{p_0^y}(\omega).\underline{H}_y(\omega)^* \quad (3.107)$$

em que $\underline{H}_y(\omega)$ e $\underline{H}_y(\omega)^*$ são as matrizes diagonais de dimensão M constituídas, respectivamente, pelas funções modais de transferência e os seus complexos conjugados, sendo as matrizes das densidades espectrais cruzadas relativas às componentes de valor médio nulo da excitação e da resposta no espaço modal representadas por $\underline{S}_{p_0^y}(\omega)$ e $\underline{S}_{y_0}(\omega)$.

A matriz das densidades espectrais cruzadas da resposta no espaço modal pode, todavia, ser obtida a partir da sua homóloga da excitação referida às coordenadas q_i . Com efeito, partido da equação (3.97) considerando os processos $p_{0i}^y(t)$ e $\underline{p}_0(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2, T/2]$ e aplicando transformadas de Fourier a ambos os termos da expressão, obtêm-se

$$P_{0i,T}^y(\omega) = \underline{\phi}_i^T \underline{P}_{0,T}(\omega) \quad (3.108)$$

Atendendo à definição de densidade espectral cruzada

$$S_{ij}^{p_0^y}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[P_{0i,T}^y(\omega).P_{0j,T}^y(\omega)^*]}{2\pi T} \quad (3.109)$$

pode concluir-se que

$$S_{ij}^{p_0^y}(\omega) = \underline{\phi}_i^T \underline{S}_{p_0}(\omega) \underline{\phi}_j = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_{ki} \phi_{lj} S_{kl}^{p_0}(\omega) \quad (3.110)$$

ou sob uma forma matricial

$$\underline{S}_{p_0^y}(\omega) = \underline{\Phi}^T \underline{S}_{p_0}(\omega) \underline{\Phi} \quad (3.111)$$

Esta equação estabelece a relação entre as matrizes das densidades espectrais cruzadas da excitação ao nível das coordenadas modais y_i e das coordenadas generalizadas q_i .

Substituindo a equação (3.110) na expressão (3.107), obtém-se

$$S_{ij}^{y_0}(\omega) = H_i^y(\omega) \cdot H_j^y(\omega)^* \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_{ki} \phi_{lj} S_{kl}^{p_0}(\omega) \quad (3.112)$$

ou sob uma forma mais condensada

$$\underline{S}_{y_0}(\omega) = \underline{H}_y(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{S}_{p_0}(\omega) \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_y(\omega)^* \quad (3.113)$$

Tornando-se então possível quantificar de uma forma eficiente todos os elementos da matriz de covariância da resposta modal, tendo em conta que

$$\mu_{ij}^y = \mu_{ij}^{y_0} = 2 \int_0^\infty \text{Re} [S_{ij}^{y_0}(\omega)] d\omega \quad (3.114)$$

Posteriormente, pode determinar-se também a matriz de covariância da resposta referida às coordenadas q_i

$$\underline{\mu}_q = \underline{\Phi} \underline{\mu}_y \underline{\Phi}^T \quad (3.115)$$

É ainda de realçar que esta abordagem baseada na formulação modal, é de facto aquela que em termos práticos se revela mais eficaz. A redução de tempo de cálculo é tanto mais significativa, quanto menor for o número de modos de vibração considerados na análise, sendo normalmente desprezáveis os que correspondem a frequências naturais fora da gama de frequências da excitação, visto ser muito reduzida a sua contribuição para a resposta do sistema.

3.3.4. *Caracterização probabilística de variáveis de controlo relacionadas linearmente com N coordenadas generalizadas ou suas derivadas*

Após a caracterização probabilística instantânea da resposta $\underline{q}(t)$, referida às N coordenadas generalizadas associadas aos N graus de liberdade do sistema, tem particular interesse prático proceder à caracterização probabilística da resposta em termos de qualquer outro conjunto de NR variáveis de controlo $\underline{r}(t)$, tais como esforços, tensões, deslocamentos, velocidades ou acelerações, susceptíveis de se relacionarem com $\underline{q}(t)$ através de uma transformação linear do tipo,

$$\underline{r}(t) = \underline{\Gamma}^\alpha \underline{q}(t) \quad (3.116)$$

em que,

$$\underline{q}^\alpha(t) = \frac{d^\alpha \underline{q}(t)}{dt^\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2) \quad (3.117)$$

representa um processo estocástico vectorial obtido por derivação de ordem α de $\underline{q}(t)$ e, $\underline{\Gamma}$ constitui uma matriz de transformação do tipo $(NR \times N)$.

Supondo-se que a excitação apresenta carácter estacionário e gaussiano, e que o correspondente vector dos valores médios espectáveis é nulo, facilmente se conclui que $\underline{m}_r = 0$, e por isso, toda a estrutura probabilística instantânea relativa ao processo estocástico vectorial estacionário $\underline{r}(t)$ é definida pela matriz de covariância

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Gamma} \cdot \underline{\mu}_{q,\alpha} \cdot \underline{\Gamma}^T \quad (3.118)$$

onde $\underline{\mu}_{q,\alpha}$ representa a matriz de covariância relativa ao processo $\underline{q}^\alpha(t)$, pelo que tendo presente as equações (3.72), (3.73) e (2.76), se pode escrever

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Gamma} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2\alpha} \text{Re} \left(\underline{H}(\omega) \cdot \underline{S}_{p_0}(\omega) \cdot \underline{H}(\omega)^{T*} \right) d\omega \right] \cdot \underline{\Gamma}^T \quad (3.119)$$

Caso se recorra à formulação modal, terá naturalmente interesse relacionar $\underline{r}(t)$ com o processo de resposta modal $\underline{y}(t)$ ou os seus derivados de ordem α , de forma análoga a (3.116), mas relativamente a um espaço modal

$$\underline{r}(t) = \underline{\Gamma}^\alpha \underline{y}(t) \quad (3.120)$$

em que, neste contexto, $\underline{\Gamma}$ representa uma matriz do tipo $(NR \times M)$ constituída por M vectores coluna associados às contribuições dos primeiros M modos de vibração.

Neste caso, a matriz de covariância cruzadas da resposta relativa às variáveis de controlo $\underline{r}(t)$ pode então ser obtida através da relação,

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Gamma} \cdot \underline{\mu}_{y,\alpha} \cdot \underline{\Gamma}^T \quad (3.121)$$

e da mesma forma, atendendo às equações (3.113), (3.114) e (2.76), pode escrever-se

$$\underline{\mu}_r = \underline{\Gamma} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2\alpha} \text{Re} \left(\underline{H}_y(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{S}_{p_0}(\omega) \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_y(\omega)^* \right) d\omega \right] \cdot \underline{\Gamma}^T \quad (3.122)$$

A matriz das funções densidades espectrais cruzadas pode também ser obtida a partir de,

$$\underline{S}_r(\omega) = \omega^{2\alpha} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{H}_y(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{S}_{p_0}(\omega) \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_y(\omega)^* \cdot \underline{\Gamma}^T \quad (3.123)$$

4. CARACTERIZAÇÃO DO VENTO ATMOSFÉRICO

4.1. Introdução

O vento pode ser considerado como o ar em movimento, resultando do deslocamento de massas de ar, devido aos efeitos das diferenças de pressão atmosférica entre duas regiões distintas, sendo influenciado por efeitos locais, como a orografia e a rugosidade do solo.

Ao longo do tempo, a sua importância tem vindo a ser bastante notória sobre o desenvolvimento de inúmeras culturas, não só pelos seus efeitos devastadores, mas também pela sua função como fonte de energia.

Já na mitologia grega o vento era visto como um fenómeno de grande importância, sendo Éolo, filho de Poseidon, que vivia na ilha flutuante de Eólia, o guardião ou deus dos ventos. Os oito ventos, cada um em correspondência com uma direcção, eram personificados por deuses, designados de “Anemoi”. Eles eram Bóreas (N), Kaikias (NE), Eurus (E), Apeliotes (SE), Nótus (S), Lips (SO), Zéfiro (O) e Siroco (NO) [14].

Os antigos gregos já observavam também a mudança sazonal dos ventos, dedicando-lhes tributos, como é evidenciado na torre dos ventos em Atenas.

Desde cedo, a humanidade tentou dominar esta força natural, bem como a “arte” de transformar o vento, não só tentando resistir-lhe, mas também tentando extrair deste fenómeno natural a energia fundamental à sua subsistência e ao bem estar.

O facto de se construir, cada vez mais, com materiais mais leves e adoptando soluções estruturais mais arrojadas, levou a que, durante o século XX e essencialmente nas últimas décadas se aprofundasse todo um campo tecnológico relacionado com o domínio do vento. Segundo C.J. Baker [15], a história da engenharia do vento pode dividir-se em 5 períodos distintos: o período tradicional (que durou até 1750), o período empírico (desde 1750 até 1900), o período de estabelecimento (desde 1900 até 1960), o período de crescimento (desde 1960 até 1980) e o período moderno (desde 1980 até aos nossos dias).

Este capítulo tem como objectivo a caracterização do vento atmosférico, com vista à posterior avaliação do desempenho estrutural. Para tal, este capítulo inicia-se com a apresentação das propriedades mais elementares da atmosfera, passando pelos aspectos básicos do seu funcionamento, bem como dos principais movimentos que lhe estão associados.

Subsequentemente, é dada ênfase à caracterização da componente média da velocidade do vento, finalizando-se com a caracterização da turbulência atmosférica.

No contexto deste capítulo, será também abordado o tratamento e a caracterização do vento atmosférico segundo diversos autores, tais como Davenport, Simiu e Scanlan., Hansen e Dyrbye, Mendes, Cook, Holmes e Cremona e Foucriat. [1-3, 13, 16-18] e à luz de diversos códigos actuais [19-28] que contribuíram de forma muito útil para a definição das suas características.

4.2. Propriedades da Atmosfera

O vento ou o movimento do ar em torno da superfície da terra é fundamentalmente causado pelas variações do aquecimento solar da atmosfera terrestre e é iniciado pelas diferenças de pressão entre pontos ao mesmo nível. Estas diferenças podem ser explicadas através de fenómenos termodinâmicos e mecânicos que ocorrem na atmosfera, de modo não uniforme no tempo e no espaço, estando directamente relacionadas com a radiação solar e os consequentes processos de aquecimento das massas de ar a partir de influências naturais, como a continentalidade, a proximidade do mar, a latitude ou a altitude.

Nesta secção, são descritos os principais mecanismos da génese dos ventos, bem como alguns dos principais ventos que ocorrem na atmosfera.

4.2.1. Termodinâmica atmosférica

A energia necessária para a ocorrência deste tipo de fenómenos é fornecida pelo Sol sob a forma de energia radiante. Sendo o Sol a fonte original de energia, a fonte que mais directamente influencia a atmosfera é a superfície terrestre, visto que a atmosfera na sua globalidade é quase transparente à radiação solar. A porção de radiação solar que não é reflectida para o espaço pode pois assumir-se como absorvida quase inteiramente pela Terra. Esta ao ser aquecida, emite energia sob a forma de radiação terrestre, cujo comprimento de onda é substancialmente maior, comparado com a radiação solar. O calor irradiado pela superfície terrestre é então em grande parte absorvido pela atmosfera, sendo a restante parte “re-irradiado” novamente, como ilustrado na Figura 4.1.

A pressão atmosférica num determinado ponto resulta do peso de todo o ar que está sobrejacente. Uma pequena massa de ar seco em movimento vertical experimenta mudanças de pressão, às quais correspondem mudanças de temperatura.

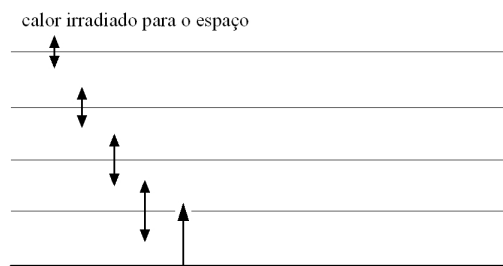


Figura 4.1 – Transporte de calor, através de radiação na atmosfera [3].

Partindo da equação de estado de um gás perfeito e da primeira lei da Termodinâmica [29],

$$\begin{aligned} p.v_e &= n.R.T \\ dq &= c_v.dT + p.dv_e \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde p é a pressão, v_e é o volume específico, R a constante universal dos gases ($R = 287,6 \text{ m}^2/\text{s}^2/\text{K}$), T a temperatura absoluta, dq a quantidade de calor transferida para a partícula e c_v o calor molar a volume constante, e tendo presente que, para que o processo seja adiabático $dq = 0$ (inexistência de transferências de calor entre os sistemas), pode então chegar-se à equação de Poisson (ou “dry adiabatic equation”), que traduz a relação directa entre a variação de pressão e a variação de temperatura,

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \quad (4.2)$$

em que c_p é o calor molar a pressão constante e $R/c_p = 0,288$.

Se na atmosfera o movimento vertical de uma parcela de ar é suficientemente rápido, a troca de calor dessa parcela com o meio envolvente pode considerar-se desprezável. Logo pode assumir-se que $dq = 0$ e por isso a equação de Poisson é aplicável.

Neste contexto, se uma massa de ar atmosférico se mover de um local para outro mais elevado sem que haja transferências de calor, a massa de ar terá de se expandir para que a sua pressão desça e consequentemente descendo também a sua temperatura.

Dado que a variação da pressão pode ser caracterizada em função da altura e as diferenças de temperatura serem pequenas comparadas com o seu valor absoluto (temperatura absoluta), a equação de Poisson pode ser linearizada através de:

$$T = T_0 - \lambda_A \cdot (z - z_0) \quad (4.3)$$

onde λ_A é designado de “adiabatic lapse rate” e toma valor próximo de $9,75K/km$. Assim a pressão da massa de ar será igual a da sua envolvente mas a diferença de temperatura origina diferenças de densidade (se a temperatura for maior tende a subir se a temperatura for menor tende a descer).

Quando o λ da atmosfera for menor que λ_A o ar em movimento tem tendência a voltar a altura original e a atmosfera é instável; quando $\lambda = \lambda_A$ a massa de ar em movimento tende a permanecer na mesma posição e a atmosfera é neutra; quando $\lambda > \lambda_A$ a atmosfera é instável e o ar movimentado tende a continuar a mover-se produzindo-se um fenómeno de convecção (Figura 4.2). Estes três estados poderão ocorrer ao mesmo tempo em diferentes alturas da atmosfera[30].

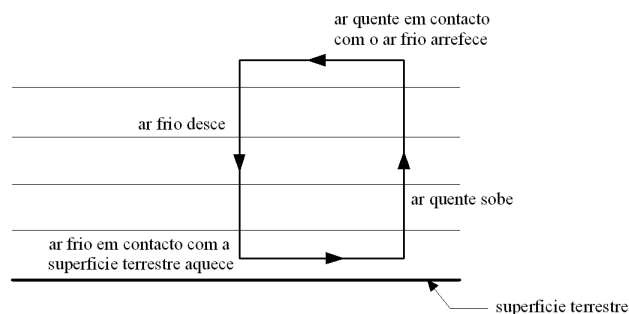


Figura 4.2 – Fenómeno de convecção atmosférica

Ao estado designado por neutro, corresponde a um decréscimo moderado da temperatura com a altura, de cerca de $1^\circ C$ por cada $100m$ [2].

Todo o processo descrito complica-se ligeiramente na presença de vapor de água (ar húmido), sendo responsável pela génese de determinados tipos de ventos

De acordo com a lei de Dalton, a pressão total do ar húmido é igual à soma das pressões parciais dos seus componentes, ou seja, das pressões parciais do ar seco e do vapor de água. Desta forma, se a pressão do vapor de água exceder um determinado valor conhecido por pressão de saturação do vapor de água, dá-se a condensação do vapor de água em excesso nessa mistura de ar húmido, havendo pois um crescimento da temperatura do ar, devido à libertação de energia de condensação sob a forma de calor. O calor de condensação contribui para o trabalho mecânico envolvido na expansão de uma massa de ar ascendente que, antes da saturação, apenas era realizada à custa da energia interna. A descida da temperatura de uma massa de ar saturado é mais ligeira que a descida de uma massa de ar seco, e por isso, facilita a convecção (Figura 4.2), isto é, a ascensão de uma massa de ar para níveis mais elevados da atmosfera [3].

4.2.2. Hidrodinâmica atmosférica

O movimento de uma massa elementar é regido pela segunda lei de Newton, traduzida por

$$\Sigma F = m.a \quad (4.4)$$

onde m é a massa, a a aceleração e ΣF o somatório das forças actuantes sobre a massa de ar elementar.

Desta forma, considerando um volume infinitesimal de ar $dx dy dz$, sujeito à actuação das pressões p e $p + (dp/dz)dz$ nas faces inferior e superior, respectivamente, e na ausência de outras forças exteriores, a força vertical actuante neste volume é dada por $-dp/dz$ por unidade de volume. Similarmente, nas direcções x e y podem representar-se as forças por unidade de volume, como $-dp/dx$ e $-dp/dy$. A resultante destas forças horizontais por unidade de volume toma a forma $-dp/dn$ e é conhecida por gradiente de pressões horizontais, sendo n a direcção normal à linha de pressões horizontais constantes (Figura 4.3). A força por unidade de massa de ar exercida pelo gradiente de pressões horizontais, $(1/\rho_{ar})(dp/dn)$, é a responsável pelo início do movimento horizontal dessa massa de ar.

O ar sujeito simplesmente à acção do gradiente de pressões horizontais, move-se das regiões de altas pressões para as regiões de baixas pressões, tal como apresentado na Figura 4.3, onde as linhas isobáricas representam os pontos do plano com igual valor de pressão.

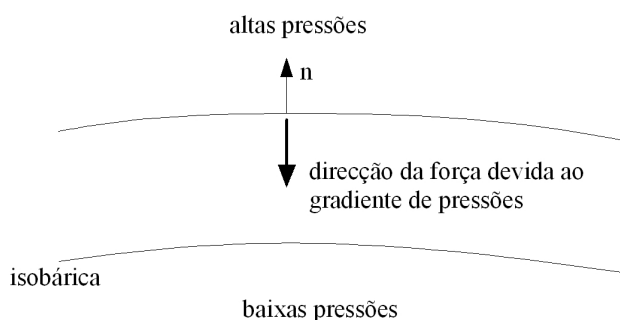


Figura 4.3 – Movimento de uma massa de ar elementar sujeito apenas ao gradiente de pressões horizontais[3].

No caso de uma partícula em movimento rectilíneo, se esta não estiver sujeita a nenhuma força externa, ela continua em movimento rectilíneo. Caso esta partícula esteja a mover-se em relação à superfície da Terra em movimento, ela sofre um desvio da sua trajectória rectilínea, tornando-se desta forma a sua trajectória curva. Este desvio é provocado por uma força aparente, conhecida por força de Coriolis, dada por

$$F_c = 2m(v \times w_r) \quad (4.5)$$

onde m é a massa da partícula, w_r é o vector velocidade angular da Terra e v a velocidade da partícula relativamente aos eixos de coordenadas de rotação da Terra.

Tomando o parâmetro de Coriolis definido como

$$f_c = 2.w_r.\sin \phi_l \quad (4.6)$$

onde ϕ_l é a latitude do ponto considerado, a força de Coriolis actuante por unidade de massa num plano paralelo a superfície terrestre, num elemento de ar em movimento, toma o valor de

$$F_c = m.f_c.v \quad (4.7)$$

A influência da superfície terrestre na “acção” do vento decresce à medida que se sobe em altura. O vento move-se quase em linha recta em alturas aproximadamente de 1km acima do solo e em áreas afastadas de altas e baixas pressões. Nestes casos, a velocidade e a direcção do vento dependem apenas do gradiente de pressões horizontais e da Força de Coriolis, tendo a designação de vento geotrófico.

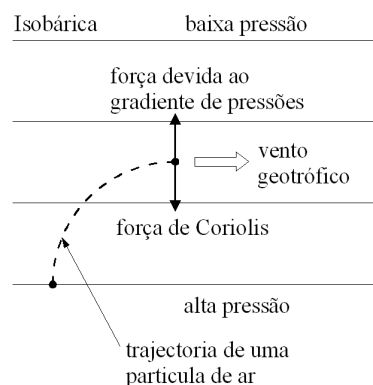


Figura 4.4 – Trajectória de uma massa de ar elementar, segundo a direcção de um vento geotrófico [2].

O gradiente de pressões relativo a uma zona de baixas pressões faz com que a massa de ar acelere, até ser atingido o ponto de equilíbrio entre a força de Coriolis e a força devida ao gradiente de pressão horizontal. Isto significa que as duas forças terão igual magnitude, mas com sentidos opostos, sendo ambas perpendiculares à direcção do vento. Tal leva a que, o vento seja paralelo às linhas isobáricas, sendo a velocidade do vento geotrófico dada por

$$U_{geo} = \frac{1}{\rho_{ar} \cdot f_c} \frac{dp}{dn} \quad (4.8)$$

O vento geotrófico ocorre nos casos em que o raio de curvatura das linhas isobáricas é suficientemente grande para que o efeito da força centrífuga não seja importante. Nos casos em que o raio de curvatura é pequeno, inferior a uns milhares de quilómetros, a força centrífuga tem de ser tida em conta, resultando daí o chamado vento gradiente.

À imagem do vento geotrófico, o vento gradiente segue um caminho paralelo às linhas isobáricas que, neste caso, são curvas, como se pode verificar na Figura 4.5.

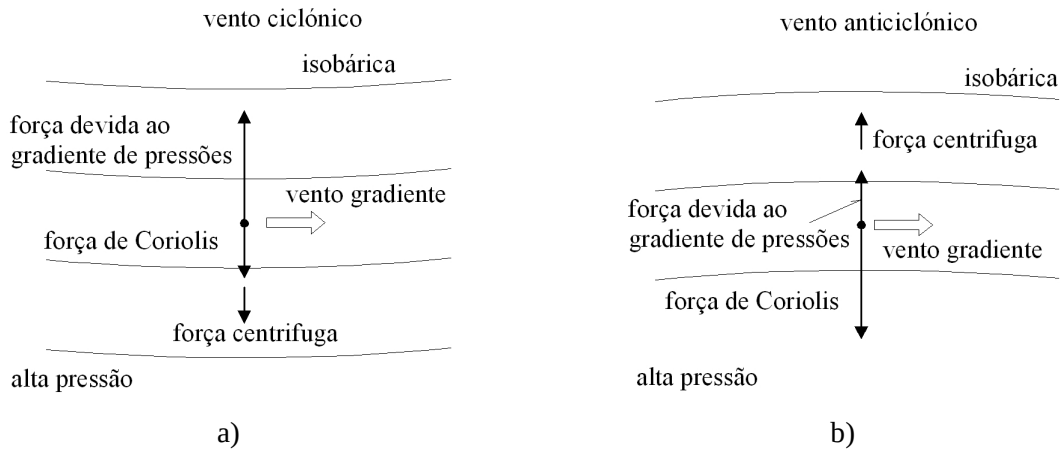


Figura 4.5 – Trajetória do um vento gradiente ciclónico (a) e anticiclónico (b) [2].

Posto isto, pode expressar-se a equação do movimento em função de coordenadas polares, através de

$$\pm \frac{U_{gr}^2}{r} + f_c U_{gr} = \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dn} \quad (4.9)$$

onde + e – corresponde, respectivamente, a ventos ciclónicos (isto é, em torno de uma zona de baixas pressões) ou anticiclónicos (isto é, em torno de uma zona de altas pressões). A intensidade da velocidade do vento gradiente é representada por U_{gr} , sendo r o raio de curvatura das linhas isobáricas e é dada pela equação

$$U_{gr} = -\frac{f_c \cdot r}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_c \cdot r}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dn}} \quad (4.10)$$

para ventos ciclónicos, e

$$U_{gr} = \frac{f_c \cdot r}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_c \cdot r}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dn}} \quad (4.11)$$

para ventos anticiclónicos.

No caso de ventos anticiclónicos, o limite superior da velocidade do vento gradiente é dada por

$$U_{gr} = \frac{f_c \cdot r}{2} \quad (4.12)$$

No caso mais comum dos ventos ciclónicos, não existe limite para o valor de U_{gr} (que tem um sentido contrário ao dos ponteiros do relógio no hemisfério Norte).

A velocidade do vento geotrófico pode ainda ser expressa em função da velocidade do vento gradiente através de

$$U_{geo} = U_{gr} \left(1 + \frac{U_{gr}}{f_c \cdot r} \right) \quad (4.13)$$

de onde se pode concluir que $U_{gr} < U_{geo}$.

Como já foi referido em 4.2.1., a pressão atmosférica decresce com a altura. A uma altura aproximada entre um e dois quilómetros, a pressão é de cerca de 850mb (850 milibares). Na meteorologia, esta pressão representa a barreira de referência a partir da qual os efeitos do atrito da crosta terrestre podem ser negligenciados, podendo os ventos ser explicados pela simples teoria, já explanada, dos ventos gradientes.

Foi provado empiricamente que, para ventos extremos, a magnitude da rajada máxima, próximo da superfície terrestre, tem a mesma ordem de grandeza das velocidades encontradas na barreira de 850mb [2].

Devido ao atrito do terreno, para além da velocidade, também a direcção desta varia em altura, tendendo este efeito a dissipar-se quando se atinge a altura do vento gradiente ou geotrófico.

De forma análoga aos casos anteriores, o equilíbrio das forças actantes sobre uma massa de ar elementar pode ser representado como na Figura 4.6, para o caso da camada limite atmosférica.

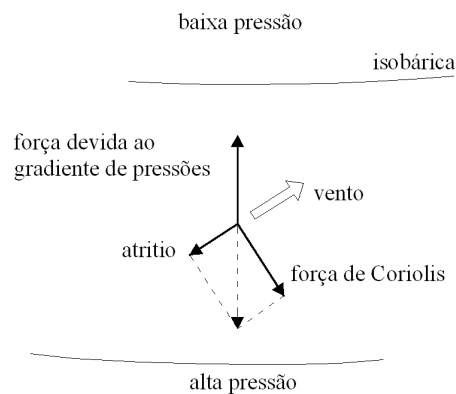


Figura 4.6 – Massa de ar elementar sujeito a sistemas de forças [2].

No equilíbrio, estão representadas as forças do gradiente de pressões, de Coriolis e a força de atrito, que varia diminuindo ao longo da altura da camada limite atmosférica até atingir o valor de 0, como se pode ver representado na Figura 4.7. O ângulo de variação da direcção do vento, entre o solo e a direcção do vento geotrófico, é em média de 20° , podendo variar entre 10° e 45° , dependendo da rugosidade do terreno e da estabilidade da atmosfera.

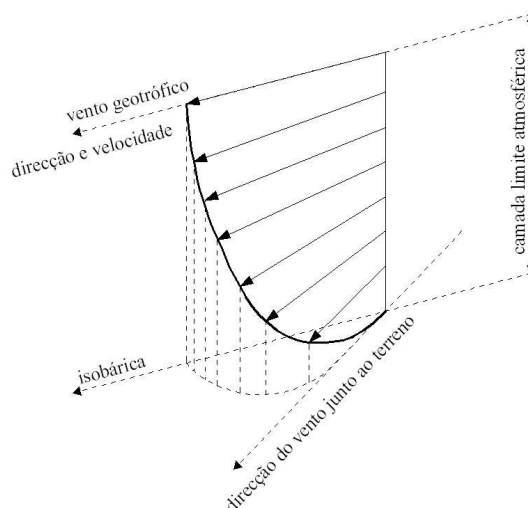


Figura 4.7 – Variação da velocidade do vento em função do atrito do terreno e do ângulo com a direcção do vento geotrófico [2].

4.2.3. Circulação Atmosférica Global

Os efeitos combinados da rotação da terra, do atrito da superfície e da circulação térmica levam a um padrão de comportamento atmosférico global constituído basicamente por três zonas de circulação. Na realidade, este modelo meridional simples de circulação, é um pouco mais complicado junto aos

tropicais, devido aos efeitos sazonais da variação da pressão, causados pela existência de estações e devido aos efeitos geográficos da distribuição variável pelo globo da água versus terreno.

No Verão, devido ao aquecimento da água do mar ser mais lento que o da superfície terrestre, o ar é mais frio sobre o mar do que sobre a terra. Por outro lado, no Inverno a fonte de energia passa a ser o oceano.

Na Figura 4.8 está representado um esquema da circulação global atmosférica, com a particularidade de representar as zonas mais importantes, bem como os ventos nelas originados.

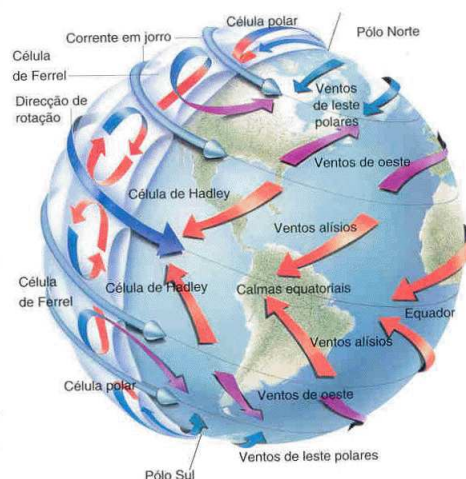


Figura 4.8 – Circulação global atmosférica [31].

Na região equatorial o ar quente ascende, afastando-se desta zona quando atinge elevadas altitudes. Devido à rotação da terra, o escoamento é desviado para Este e como o atrito do solo é desprezável a elevadas altitudes, por volta dos 30 a 40 graus de latitude, esse desvio já se completou, dando origem aos ventos de oeste. A permanência de uma zona subtropical de altas pressões nesta região, origina o início de um fluxo de ar na direcção da zona equatorial, mas ao nível do solo. Este fluxo é curvado para oeste pela força de Coriolis e dá origem aos ventos de leste mais conhecidos por Alísios.

A zona subtropical de altas pressões no hemisfério Norte encontra-se, aproximadamente, à latitude de 30° (por ex. os Açores aproximadamente aos 37°) e ocorre porque o fluxo de ar vindo do equador a elevada altitude não consegue penetrar mais para norte, devido à força de Coriolis.

Nas camadas atmosféricas inferiores, junto ao solo, a massa de ar é direccionada para norte sob a influência da zona de altas pressões subtropical, e devido à força de Coriolis, ela é direccionada para este, dando origem aos ventos de oeste das zonas temperadas.

Das zonas de altas pressões no pólo Norte, é gerada uma corrente de ar frio que se desloca para sul, e que é desviada para oeste, dando origem aos ventos polares de leste.

Os ventos de oeste das zonas temperadas e os ventos de leste polares cruzam-se, aproximadamente, entre os 50° e os 60° de latitude do hemisfério Norte, formando, nesta zona, uma frente polar.

Devido às diferenças de temperatura entre as massas de ar separadas pela frente polar, esta tende a inclinar-se para norte, significando isto que o ar quente se sobrepõe ao ar frio. O equilíbrio desta frente é muito sensível às mudanças de temperatura, velocidade e humidade de ambas as massas de ar, tanto que o arrefecimento localizado da massa de ar quente pode desenvolver alguma instabilidade.

Na Figura 4.9, estão representados dois casos típicos deste tipo de instabilidade, designados por frentes frias e frentes quentes.

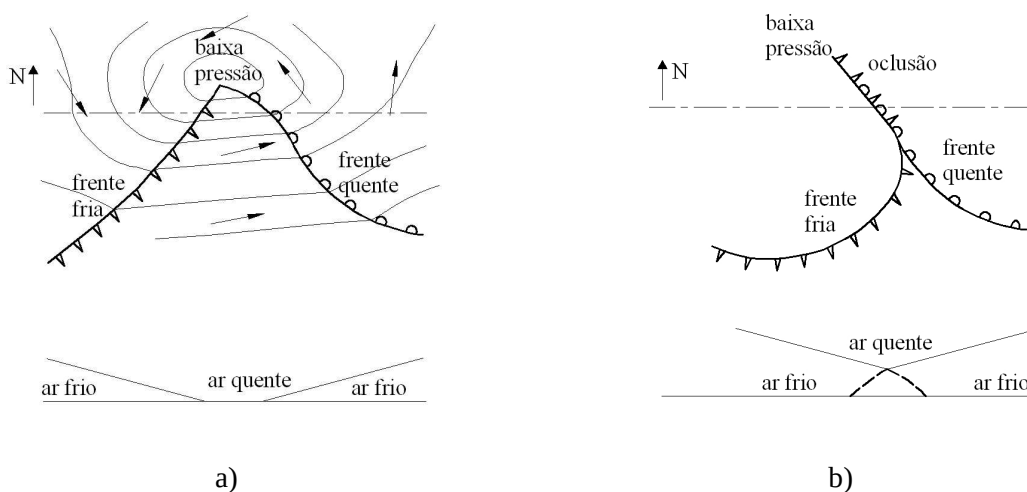


Figura 4.9 –Casos típicos de instabilidades devido ao encontro de uma massa de ar quente com uma massa de ar frio [2].

A formação destas frentes dá maior ênfase às zonas de baixas pressões, onde a frente fria se encontra com a frente quente. Consoante indicado na Figura 4.9, o ar move-se nesta zona na direcção contrária à dos ponteiros do relógio, originando um ciclone. A velocidade do vento é tanto maior quanto menor for a pressão na zona de baixas pressões. O diâmetro de um ciclone polar ronda os 500-1000 km, dependendo a sua velocidade quase só do gradiente de pressões. A título de curiosidade, no Mar do Norte, um gradiente de pressões de 5 mb por cada 100 km corresponde a uma velocidade de cerca de 20 m/s, sendo esta uma das fontes mais importantes de ventos fortes na Europa [2].

4.2.4. Circulação Atmosférica Secundária

A circulação atmosférica secundária ocorre aquando do aparecimento de centros de altas ou baixas pressões, devido ao aquecimento ou arrefecimento dos níveis mais baixos da atmosfera.

Durante o verão, o mar aquece mais lentamente que a superfície terrestre, portanto o ar sobre o mar é mais frio. À medida que o ar aquece junto ao solo, ascende deixando um vazio que será preenchido pelo movimento do ar frio que se encontra junto à costa. Durante o Inverno, acontece o oposto.

Estas condições resultam em monções e tufões, que são especialmente comuns na Ásia e sobre o oceano Índico. As monções duram frequentemente bastantes dias, mas são acompanhadas geralmente de ventos de carácter moderado.

Da mesma forma, os furacões são tempestades geradas sobre oceanos em zonas tropicais, onde a temperatura da água excede os 26°. A energia deste tipo de tempestades tropicais provém da libertação de calor aquando da condensação do vapor de água. Estes fenómenos são originários das regiões perto do equador, entre os 5° e os 20° de latitude, onde o ar quente é ocasionalmente elevado a grandes altitudes. Atendendo a determinadas características climatológicas, como o calor e humidade do ar, forma-se uma nuvem de vapor que condensa e liberta calor. Este fenómeno envolve elevadas quantidades de energia, dada a sua grandeza. Geralmente, os furacões duram vários dias, causando elevadíssimos estragos, devido às altas velocidade que atingem, frequentemente, na ordem dos 70-80 m/s [2].

4.2.5. Ventos Locais

Os sistemas meteorológicos locais têm pouca influência na circulação global atmosférica, mas podem, em alguns casos, gerar ventos significativos.

As tempestades locais formam-se, por vezes, devido a variações topográficas.

Se uma massa de ar se mover de uma região plana para uma região montanhosa, o ar arrefece à medida que esta massa de ar ascende. No início, a temperatura desce cerca de 1°C por cada 100m. No entanto, quando a temperatura dessa massa de ar atinge a temperatura de orvalho, a humidade em excesso condensa-se e transforma-se em chuva ou neve, verificando-se que a temperatura, a partir desse momento, decresce mais lentamente, cerca de 0,5°C por cada 100m. Quando o pico é ultrapassado, a massa de ar desce através da outra encosta, tendo novamente um aumento de temperatura de cerca de 1°C por cada 100m. Este vento quente e seco é chamado Foehn (Figura 4.10).

Sob determinadas condições, a massa de ar descendente não é suficientemente aquecida, produzindo um vento frio e seco designado por Bora.

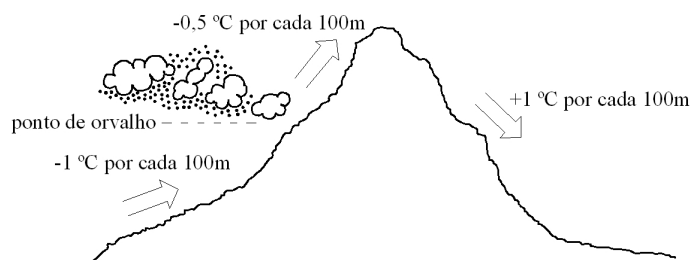


Figura 4.10 – Representação esquemática da formação de ventos tipo Foehn e tipo Bora [2].

Outro fenómeno local são as designadas trovoadas (“thunderstorms”), que se podem desenvolver quando há o movimento de ar quente e húmido, podendo ocorrer na presença de frentes.

A condensação desta massa de ar quente e húmido em movimento liberta energia e dá início a chuvas intensas, acompanhando o movimento da massa de ar para o centro, tal como indicado na Figura 4.11. A escala deste tipo de fenómenos é bastante reduzida, alcançando cerca de 10 km .

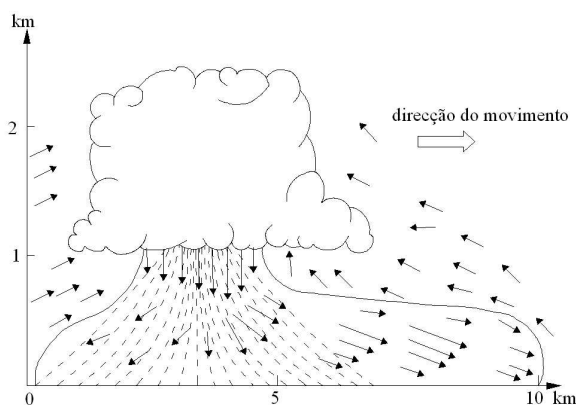


Figura 4.11 – Fenómeno de desenvolvimento de uma tempestade [2].

As tempestades muito severas podem dar origem ao aparecimento de tornados, onde as velocidades do vento são excepcionalmente elevadas.

Um tornado é um vórtice violento desenvolvido sobre um eixo vertical ou inclinado, com um diâmetro de cerca de 300 m , que se move a uma velocidade entre 10 e 30 m/s . A velocidade tangencial máxima atinge os 100 m/s . Mesmo debaixo do tornado, que parece uma nuvem com a forma de um tubo, dá-se uma súbita queda da pressão. Esta variação é a responsável por um efeito de sucção sobre as edificações capaz de provocar danos gigantescos. Os tornados são conhecidos pelos avultados danos

provocados, tendo sido com frequência observados nos Estados Unidos da América, na Austrália e na Rússia [2].

Por fim, é ainda oportuno referir que, em zonas muito secas e quentes, formam-se por vezes vórtices localizados com alguns metros de altura, onde a areia e o pó são sugados para o seu interior. Este tipo de fenómenos são designados por diabos de pó (“dust devils”) ou mais vulgarmente por “remoinhos” e em contraste com os tornados não são originados por tempestades. Os danos causados não são de grande importância.

4.3. Componente média associada à velocidade do vento

4.3.1. Perfil de variação da velocidade média longitudinal do vento em altura. Generalidades.

Consoante referido em 4.2.2, a superfície terrestre exerce uma grande influência sobre a camada de ar, retardando o seu movimento. Este efeito é notado de forma turbulenta sobre a região designada como camada limite atmosférica.

A espessura desta camada vai desde algumas centenas de metros até pouco mais de um quilómetro e depende da intensidade do vento, da rugosidade terrestre e da latitude.

Dentro da camada limite atmosférica, a velocidade do vento aumenta com a altura, sendo no seu limite igual à velocidade gradiente. Fora desta zona, denominada por camada livre, o vento apresenta, aproximadamente, a mesma direcção das linhas isobáricas e da velocidade gradiente.

Um vento varia de uma forma complexa e aleatória no espaço e no tempo. Este pode ser idealizado como um processo estocástico, sendo por isso a sua caracterização realizada através de parâmetros estatísticos. Desta forma, a velocidade instantânea do vento poderá ser descrita como a soma de uma componente média com uma componente flutuante, que representa o carácter turbulento do escoamento.

Se se definir um referencial de coordenadas cartesiano, com o eixo dos x como sendo a direcção longitudinal coincidente com a direcção da velocidade média do vento, então o eixo dos y coincide com a direcção transversal horizontal e o eixo dos z com a direcção vertical.

As velocidades num dado instante t podem então ser representadas como:

na direcção longitudinal (eixo xx) $\bar{U}(z) + u(x, y, z, t)$

na direcção transversal (eixo yy) $v(x, y, z, t)$

na direcção vertical (eixo zz) $w(x, y, z, t)$

onde $\bar{U}(z)$ é a velocidade média dependente da altura z acima do solo e, u , v , w são as componentes flutuantes do campo de velocidades do vento, que poderão ser matematicamente tratadas como processos estocásticos estacionários de valor médio nulo.

Na Figura 4.12, pode ver-se uma representação esquemática da flutuação da velocidade do vento na direcção longitudinal e num determinado instante de tempo t .

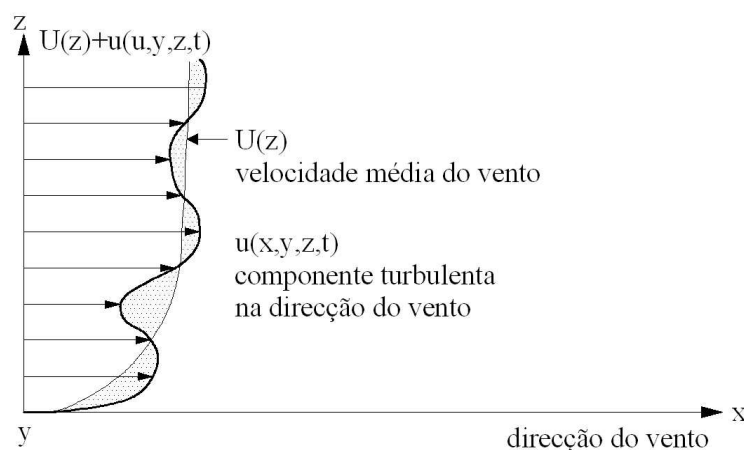


Figura 4.12 – Flutuação da velocidade do vento longitudinal num determinado instante de tempo t [2]

O movimento da atmosfera é governado pelas equações de continuidade (uma consequência do princípio da conservação da massa) e pelas equações que traduzem a segunda lei de Newton.

Nestas circunstâncias, se as equações de continuidade e de equilíbrio forem desenvolvidas em relação a um valor médio temporal, chegar-se-á às equações que descrevem o movimento médio da camada limite atmosférica, em função das componentes médias da velocidade segundo os 3 eixos cartesianos (x, y, z) , da massa volumica do ar ρ_{ar} , do parâmetro de Coriolis f_c , da pressão média p , da aceleração da gravidade g e das tensões tangenciais τ_u e τ_v , segundo as direcções x e y (sendo que a direcção x é convenientemente escolhida de forma a coincidir com a tensão devida ao atrito superficial τ_0).

$$\begin{aligned}
 U \frac{dU}{dx} + V \frac{dU}{dy} + W \frac{dU}{dz} + \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dx} - f_c V - \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{d\tau_u}{dz} &= 0 \\
 U \frac{dV}{dx} + V \frac{dV}{dy} + W \frac{dV}{dz} + \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dy} + f_c U - \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{d\tau_v}{dz} &= 0 \\
 \frac{1}{\rho_{ar}} \frac{dp}{dz} + g &= 0 \\
 \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para resolver as equações do movimento, é necessária a consideração de algumas relações fenomenológicas (também conhecidas por relações de aproximação), de forma a definir as tensões τ_u e τ_v tangenciais, que se opõem ao deslizamento horizontal relativo entre as camadas paralelas de fluido, segundo as direcções x e y que, segundo [3], podem ser representadas como

$$\begin{aligned}
 \tau_u &= \mu_{ar} \frac{dU}{dz} \\
 \tau_v &= \mu_{ar} \frac{dV}{dz}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde μ_{ar} representa o coeficiente de viscosidade absoluta, que se relaciona com o coeficiente de viscosidade cinemática, através de

$$\nu_{ar} = \frac{\mu_{ar}}{\rho_{ar}} \tag{4.16}$$

Pode assumir-se que, para tempestades em larga escala (ventos fortes), em locais planos e com rugosidade uniforme, o escoamento é horizontalmente homogéneo.

Sob condições de equilíbrio indiferente, num movimento horizontal homogéneo, partindo das equações (4.14) e relembrando a equação (4.8) decomposta segundo os eixos horizontais x e y , poder-se-á chegar a uma relação que explicita a variação em altura da velocidade média, dependendo das tensões tangenciais τ_u e τ_v ,

$$\begin{aligned}
 V_{geo} - V &= \frac{1}{\rho_{ar} f_c} \frac{d\tau_u}{dz} \\
 U_{geo} - U &= -\frac{1}{\rho_{ar} f_c} \frac{d\tau_v}{dz}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Caso se assuma a viscosidade cinemática constante, pode-se chegar à chamada espiral de Ekman, um dos primeiros modelos utilizados para descrever o perfil de velocidade médio (Figura 4.7). Este modelo foi rapidamente abandonado, dado conduzir a erros insatisfatórios.

Meteorologistas tentaram solucionar as equações (4.17), partindo do princípio que a viscosidade cinemática varia com a altura, o que é bastante mais plausível que a hipótese anterior.

Contemporaneamente, diferentes tipos de aproximações foram desenvolvidas, resultando de considerações similares às utilizadas na teoria da camada limite de escoamentos bidimensionais. Nesta aproximação, a camada limite é dividida em duas regiões, uma camada superficial e outra mais exterior.

Pode então afirmar-se que, na camada superficial, as tensões tangenciais τ_0 devem depender da velocidade do escoamento a uma altura z muito próxima da superfície do solo, da escala rugosidade do terreno z_0 e da massa volúmica do ar ρ_{ar} , podendo esta relação expressar-se através de,

$$\tau_0 = F(Ui + Vj, z, z_0, \rho_{ar}) \quad (4.18)$$

onde i e j são vectores unitários segundo as direcções x e y .

Se se escrever (4.18) sob uma forma adimensional, tem-se,

$$\frac{Ui + Vj}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.19)$$

onde f_1 é uma função do rácio z/z_0 e u_* pode ser quantificado através da relação,

$$u_* = \left(\frac{\tau_0}{\rho_{ar}}\right)^{1/2} \quad (4.20)$$

sendo conhecida como a velocidade de atrito do escoamento.

Da mesma forma, pode afirmar-se que na zona exterior, a redução da velocidade gradiente $\left[(U_g i + V_g j) - (Ui + Vj)\right]$ à altura z deve depender também da tensão tangencial superficial τ_0 , da altura em que o efeito do atrito do solo se deixa de sentir (a qual corresponde à espessura da camada limite atmosférica δ_{at}) e da massa volúmica do ar ρ_{ar} , exprimindo-se, também de forma adimensional, como,

$$\frac{Ui + Vj}{u_*} = \frac{U_g i + V_g j}{u_*} + f_2 \left(\frac{z}{\delta_{at}} \right) \quad (4.21)$$

sendo, f_2 uma função do rácio z/δ_{at} .

Se se postular que a variação da velocidade média é gradual e ocorre de condições junto ao solo para as condições na camada mais exterior, pode assumir-se que existe uma zona de sobreposição em que ambas as leis (equações (4.19) e (4.21)) se igualam.

Em casos análogos de problemas a duas dimensões, é conhecido que as funções f_1 e f_2 têm logarítmica [3], sendo que os requisitos deste problema são satisfeitos se estas forem definidas como

$$\begin{aligned} f_1(\varsigma) &= (\ln \varsigma^{\frac{1}{k_v}}) i \\ f_2(\varsigma) &= (\ln \varsigma^{\frac{1}{k_v}}) i + \frac{B}{k_v} j \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo B e k_v constantes.

Substituindo (4.22) nas equações (4.19) e (4.21) respectivamente, vem que [3]:

$$\frac{Ui + Vj}{u_*} = f_1 \left(\frac{z}{\delta} \frac{\delta}{z_0} \right) = \frac{1}{k_v} \left(\ln \frac{z}{\delta} + \ln \frac{\delta}{z_0} \right) i \quad (4.23)$$

$$\frac{Ui + Vj}{u_*} = \frac{U_{geo} i + V_{geo} j}{u_*} + \frac{1}{k_v} \left(\ln \frac{z}{\delta} \right) i + \frac{B}{k_v} j \quad (4.24)$$

Se estas duas equações forem igualadas para a zona de sobreposição, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{U_{geo}}{u_*} &= \frac{1}{k_v} \ln \frac{\delta}{z_0} \\ \frac{V_{geo}}{u_*} &= -\frac{B}{k_v} \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde U_{geo} e V_{geo} são as componentes da velocidade geotrófica segundo as direcções x e y , respectivamente.

4.3.1.1. Perfil logarítmico

Para condições de vento forte na camada limite atmosférica junto à superfície, e atendendo a que nesta zona a força de Coriolis é negligenciável, a lei de variação em altura da velocidade média do vento traduzida pela equação (4.23), para condições de terreno homogêneo, pode tomar a forma:

$$U(z) = \frac{u_*}{k_v} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (4.26)$$

onde, k_v constante de Von Kàrmàn assume experimentalmente o valor aproximado de 0,4, z é a altura acima do solo e z_0 representa uma variável com dimensão de comprimento que se designa por escala de rugosidade, traduzindo a dimensão e espaçamento médio das rugosidades do terreno.

A grandeza z_0 pode ser interpretada também como a dimensão do turbilhão característico gerado pela passagem do ar sobre a superfície rugosa. A escala de rugosidade z_0 tem sido estimada a partir de medições realizadas em diversos tipos de terrenos característicos. Para além disso, tem-se tentado estimar teoricamente estes mesmos valores a partir de elementos genéricos de rugosidade (blocos elementares) dispostos uniformemente no terreno. Businger [2] deduziu uma fórmula empírica que proporciona uma aproximação razoável em função da altura h de rugosidade, da área projectada do elemento A_r no plano normal à direcção do vento e, da área de influência do elemento de rugosidade A_t , de acordo com a equação

$$z_0 = 0,5 \cdot h \cdot \frac{A_r}{A_t} \quad (4.27)$$

tendo como exemplo ilustrativo a Figura 4.13.

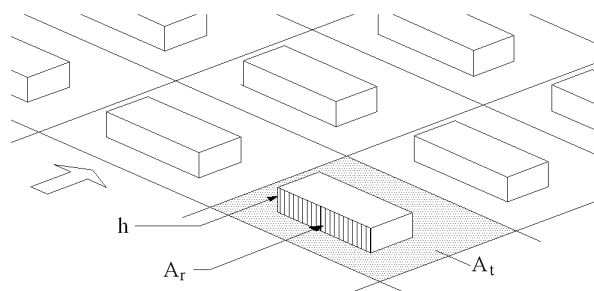


Figura 4.13 – Elementos genéricos de rugosidade dispostos uniformemente no terreno [2].

A rugosidade do terreno pode ser caracterizada ainda através do coeficiente de atrito superficial, que representa uma grandeza adimensional, e vem definida como [13]

$$\kappa = \frac{u_*^2}{U_{ref}^2} = \left(\frac{k_v}{\ln\left(\frac{z_{ref}}{z_0}\right)} \right)^2 \quad (4.28)$$

sendo U_{ref} a velocidade média a uma cota de referência z_{ref} (habitualmente assumida igual a $10m$) e u_* a velocidade de atrito, já apresentada anteriormente e expressa na forma

$$u_* = \left(\frac{\tau_0}{\rho_{ar}} \right)^{0,5} = \frac{k_v}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} U(z) \quad (4.29)$$

Partindo das equações (4.26) e (4.28), podem-se obter facilmente as seguintes igualdades, de grande utilidade

$$z_0 = \frac{z_{ref}}{e^{\frac{k_v}{\sqrt{\kappa}}}} \quad (4.30)$$

$$U(z) = U_{ref} \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{z_{ref}}{z_0}\right)} \quad (4.31)$$

Para zonas urbanas e bastante arborizadas, onde o terreno se apresenta muito rugoso, a altura z na equação (4.26) é habitualmente substituída por uma altura efectiva $(z - z_h)$, onde z_h representa o plano de “deslocamento nulo”. Então, neste caso a equação (4.26) vem,

$$U(z) = \frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z - z_h}{z_0}\right) \quad (4.32)$$

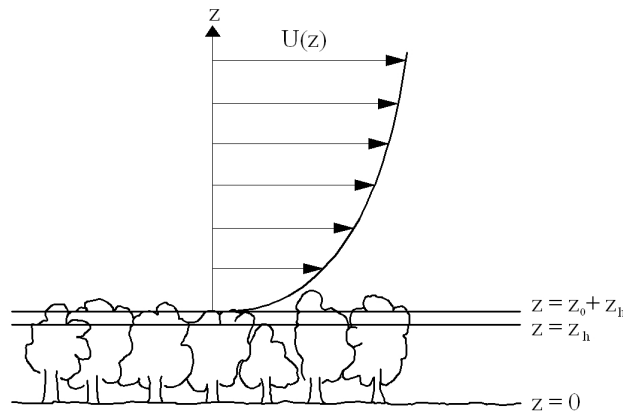


Figura 4.14 – Representação esquemática do plano de “deslocamento nulo”, numa zona de elevada rugosidade [2].

O plano de “deslocamento nulo”, para o caso de uma zona de grande densidade urbanística, pode ser considerada, cerca de $\frac{3}{4}$ da altura do um edifício médio [18].

Embora a lei logarítmica tenha uma base teórica concreta para ventos que se desenvolvem em condições de terreno homogéneo, na prática, estas condições raramente ocorrem.

4.3.1.2. Perfil tipo potência

A lei de potência não apresenta uma base teórica mas dada a sua simplicidade, foi adoptada por diversos autores para descrever a variação da velocidade média do vento em altura.

Esta lei, de cariz empírico, pode representar-se de acordo com

$$U(z) = U_{ref} \cdot \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha \quad (4.33)$$

onde como referido no ponto anterior, U_{ref} representa a velocidade média a uma altura de referência z_{ref} .

O expoente α é uma função da rugosidade do terreno e poderá ser obtido a partir da relação,

$$\alpha = \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{z_{ref}^*}{z_0} \right)} \right) \quad (4.34)$$

em que z_{ref}^* é uma altura de referência, à qual as duas leis (logarítmica e potência) são igualadas.

Na Figura 4.15 pode ver-se ilustrada a comparação entre a lei de potência e a lei logarítmica, tendo-se escolhido como altura de referência de comparação z_{ref}^* a correspondente ao caso de um terreno categoria II do Eurocódigo 1 (EN1991-1-4)[23].

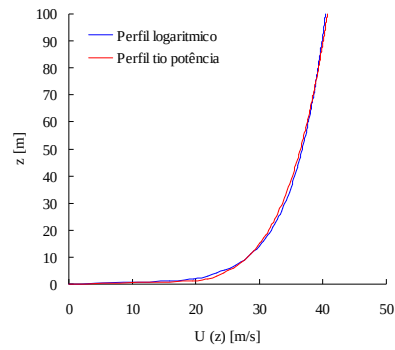


Figura 4.15 – Comparação entre a lei de potência e a lei logarítmica para o caso de um terreno da categoria II do Eurocódigo 1.

No Quadro 4.1. estão representados, para os diferentes tipos de terrenos apresentados no Eurocódigo 1, os valores das escalas de rugosidade z_0 , dos coeficientes de rugosidade κ , dos rácios $U(10)/U_{ref}$, e dos expoentes α da lei de potência, em correspondência com os tipos de terreno apresentados.

Quadro 4.1 – Valores das escalas de rugosidade z_0 , coeficiente de rugosidade κ , rácio de velocidades $U(10)/U_{ref}$ e do expoentes α , para cada uma das categorias de terreno preconizado pelo Eurocódigo 1[23].

Categoria de terreno	z_0 [m]	κ	$U(10)/U_{ref}$	α
0	0,003	0,0024	1,26	0,11
I	0,01	0,0034	1,17	0,12
II	0,05	0,0057	1,00	0,16
III	0,3	0,0130	0,75	0,22
IV	1,0	0,0302	0,54	0,30

4.3.1.3. Terrenos não homogéneos

a) Mudança de rugosidade

Os perfis de velocidades médias atrás descritos são validos para as condições quase ideais de escoamento, nos quais a rugosidade se supõem estender-se por uma distância grande em superfície de forma a tornar-se quase homogénea.

No caso de ventos fortes desenvolvidos na camada limite atmosférica que encontrem uma alteração brusca de rugosidade da superfície terrestre, como por exemplo ventos provenientes de uma região de

“campo aberto” que se escoem numa zona junto aos subúrbios de uma zona urbana, dá-se um processo de ajustamento das propriedades da camada limite atmosférica. Este ajustamento inicia-se ao nível do solo, na zona onde se dá uma mudança abrupta da rugosidade e prolonga-se em altura, dando origem à formação de uma zona de transição designada por camada limite interna, onde a velocidade do vento é influenciada por ambas as rugosidades.

Da mesma forma, surge também uma camada de equilíbrio onde a velocidade depende apenas da nova rugosidade superficial do terreno, tal como se pode observar no esquema da Figura 4.16.

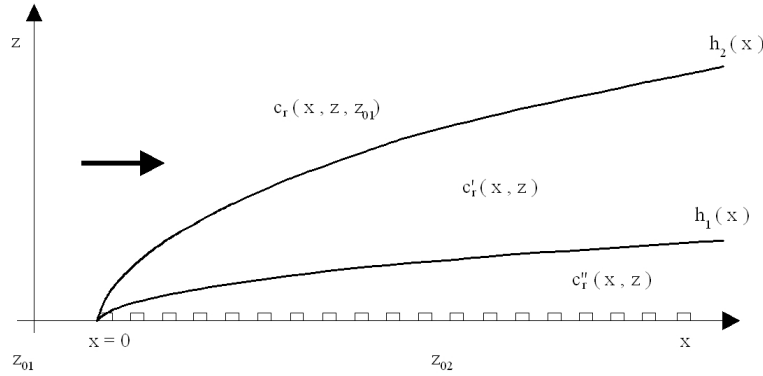


Figura 4.16 – Representação das regiões atmosféricas de transição decorrentes da passagem de um escoamento por uma zona de transição de rugosidade [1].

De forma a descrever este fenómeno, diversos autores (W. Elliot, Plate, Deaves, Sacré) elaboraram vários estudos, descrevendo-se resumidamente em seguida, o modelo proposto por Sacré [1], baseado em ensaios em túnel de vento.

Neste modelo, Sacré mostrou que a camada limite interna se desenvolve sensivelmente sob uma região delimitada por uma altura h_2 , dada pela expressão

$$h_2(x) = 0,38 \cdot z_{0\max} \cdot \left(\frac{x}{z_{0\max}} \right)^{0,83} \quad (4.35)$$

sendo $z_{0\max}$ o maior dos dois valores da escala de rugosidade z_{01} e z_{02} .

A velocidade média poderá ser obtida a partir do produto da velocidade “básica” de referência, pré-definida por um coeficiente de rugosidade $c_r(x, z)$, que relaciona a influência das rugosidades do terreno (z_{01} e z_{02}) em altura, bem como na direcção da actuação do vento,

$$U(x, z) = U_{ref} \cdot c_r(x, z) \quad (4.36)$$

Assim sendo, tendo presente a equação (4.26), pode representar-se $c_r(x, z)$ para a zona exterior à camada limite interna, influenciada apenas pela rugosidade inicial

$$c_r(x, z) = \frac{u_*}{k.U_{ref}} \ln \left(\frac{z}{z_{01}} \right) \quad (4.37)$$

Para a camada limite interna, o perfil de velocidade média do vento pode ser representada por um modelo de duas camadas.

Uma camada inferior de espessura $h_1 = c'.h_2$, também designada por camada de equilíbrio [18], que indica que, para z menor que h_1 , o coeficiente $c_r(x, z)$ toma o valor

$$c_r''(x, z) = \frac{u_*}{k.U_{ref}} \ln \left(\frac{z}{z_{02}} \right) \left[\frac{\ln \left(\frac{c.h_2(x)}{z_{01}} \right)}{\ln \left(\frac{c.h_2(x)}{z_{02}} \right)} \right] \quad (4.38)$$

Para a outra camada superior da camada limite interna ($h_2(x) > z > h_1(x)$), é proposta uma interpolação logarítmica linear, tomando o coeficiente $c_r(x, z)$ o valor

$$c_r'(x, z) = c_r''(x, h_1(x)) + [c_r(x, h_2(x)) - c_r''(x, h_1(x))] \left(\frac{\ln \left(\frac{z}{h_1(x)} \right)}{\ln \left(\frac{1}{c'} \right)} \right) \quad (4.39)$$

As constantes c e c' foram ajustadas a partir de resultados experimentais em túnel de vento, tendo-se chegado aos valores [1]:

$$\begin{aligned} c &= 10 \\ c' &= 0,2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

O facto deste fenómeno ser tão complexo levou a que vários autores, tivessem aconselhado regras elementares simplificativas adoptadas principalmente pelos códigos.

O Eurocódigo 1, por exemplo, sugere (de acordo com o ilustrado na Figura 4.17) que a classe de rugosidade a utilizar para a definição da acção do vento deverá ser a mais desfavorável do terreno, no raio de 1 km da construção para as categorias de terreno tipo II e III e, 2 km para ventos de mar (terreno tipo I), prevendo também que, em caso de dúvida, se utilize o pior dos casos.

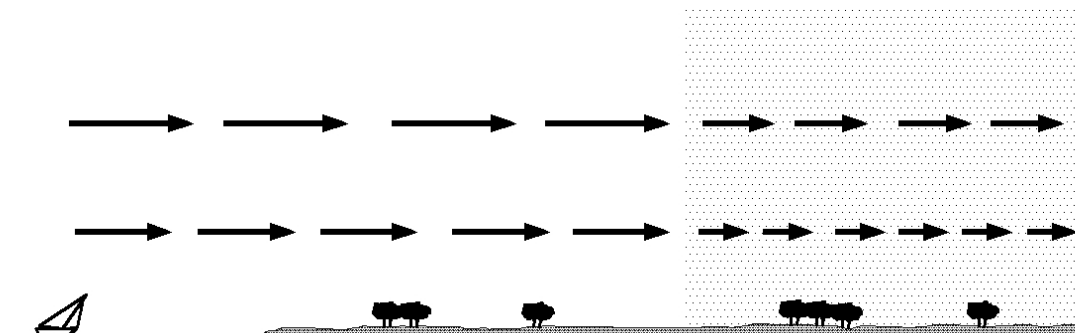


Figura 4.17 – Modelo adoptado pelo código EN1991-1-4 [23]

b) Diferenças topográficas

A velocidade média pode ser consideravelmente alterada pela topografia local. O aparecimento de obstáculos naturais ou de natureza humana, tais como escarpas, colinas, penhascos ou aterros, podem provocar um aumento da velocidade média do vento.

Estes efeitos foram objecto de variados estudos durante os anos 70 e 80, com o proposito de explorar a energia eólica. Estes trabalhos vieram introduzir aspectos inovadores, no que diz respeito à previsão de ventos médios sobre zonas de grande alteração topográfica.

Lemelin [1, 2] deduziu algumas expressões para “escarpas” (encostas) e colinas, que vieram a ser adoptadas por diversos códigos [22, 23]. Estas expressões, denominadas por coeficientes topográficos [1, 18], relacionam a velocidade numa determinada altura z acima do relevo topográfico com a velocidade nessa mesma altura z , mas num terreno plano.

$$\text{Coeficiente topográfico} = \frac{\text{Vel.média à altura } z \text{ acima do relevo}}{\text{Vel.média à altura } z \text{ num terreno plano}} \quad (4.41)$$

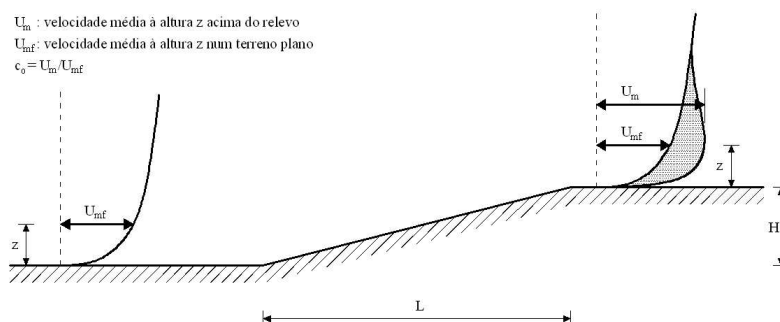


Figura 4.18 – Ilustração da variação da velocidade do vento com a orografia [23].

Por exemplo, o Eurocódigo 1 [23] introduz um coeficiente designado por factor orográfico, c_o , baseado numa forma idealizada da encosta ou colina, com uma configuração angular, fazendo depender esta do declive ϕ_d da encosta, do seu comprimento L medido na direcção do vento, da posição x medida a partir do topo e da altura z acima do solo,

$$c_t = \begin{cases} 1 & \phi_d < 0,05 \\ 1 + 2.s.\phi_d & 0,05 < \phi_d < 0,3 \\ 1 + 0,6.s & \phi_d > 0,3 \end{cases} \quad (4.42)$$

O factor s é dado pelos diagramas da Figura 4.19, que relacionam a distância x do topo da encosta com o respectivo comprimento (L, L_u ou L_d) e a altura z do ponto à superfície do terreno com os já referidos comprimentos da encosta.

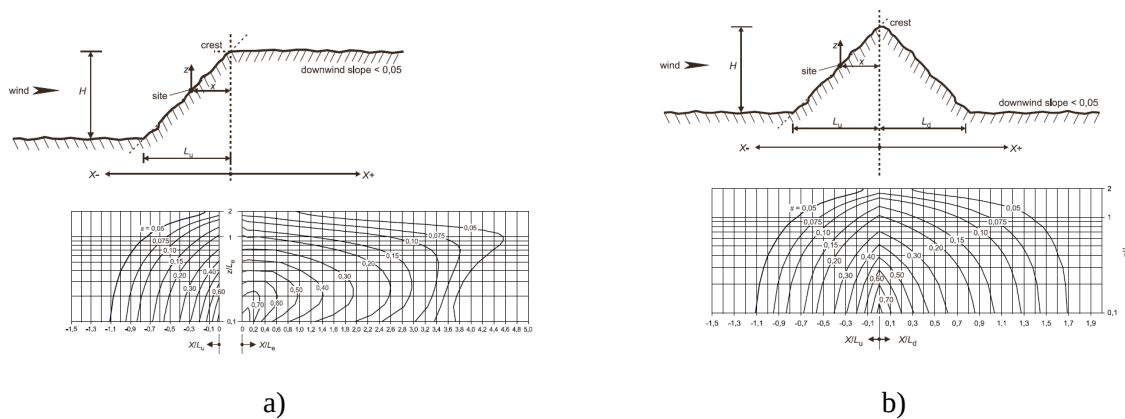


Figura 4.19 – Factor s para encostas (a) e para colinas (b) [23].

É ainda oportuno salientar que autores como Cremona e Foucriat [1] apresentam uma formulação próxima da acima referida, baseada em campanhas de ensaios realizados em França.

4.3.2. Ventos extremos

O estabelecimento de uma velocidade do vento apropriada para o projecto é um passo de grande importância ao nível do dimensionamento estrutural. Esta fase é habitualmente a que maior incerteza traz no procedimento de cálculo de estruturas sob a acção do vento e, por isso, requer uma cuidada análise estatística de dados “históricos” relativos a velocidade do vento.

Durante os anos 30, foi proposto um modelo para a representação estatística de valores extremos da velocidade do vento assente numa lei de distribuição gaussiana, que não teve grande sucesso.

A identificação de três tipos de funções de distribuição assintótica de valores extremos, por Fisher e Tippett (1928), teve um significado fundamental para o desenvolvimento de formulações probabilísticas no domínio da engenharia em geral, tendo vindo a tornar-se mais relevante com Gumbel(1954), inicialmente devido a um trabalho no âmbito da previsão de cheias e, mais tarde, promovendo o uso da função de distribuição de extremos tipo I na análise da distribuição de extremos da velocidade média do vento [18]. Por este facto, vários estudos adoptaram, durante os anos 60, a distribuição de extremos tipo I (também conhecida pela distribuição de Gumbel), para a análise da distribuição de extremos da velocidade do vento, tendo também sido introduzido nessa altura o conceito de período de retorno.

O recurso à estatística e à teoria das probabilidades, como base para as mais modernas formulações utilizadas na engenharia do vento, resulta em larga escala do trabalho intensivo de Davenport no decorrer dos anos 60 [17, 18, 32, 33].

Durante os anos 70 e 80, dada a frequente ocorrência de tempestades tropicais periódicas, cujas velocidades registadas excediam consideravelmente os valores preconizados pela distribuição de Gumbel, Gomes e Vickery reconheceram a necessidade de, para climas fora das zonas temperadas (“well behaved climates”), separar os dados dos diferentes tipos de tempestades em registos isolados e assim os tratar estatisticamente [18].

4.3.2.1. *Intervalo de registo*

Para a definição do valor da velocidade média do vento, é necessária a consideração de um intervalo de tempo, cuja duração seja suficiente para o estudo do comportamento estrutural sob o seu efeito. Este intervalo de tempo é designado por intervalo de registo, e trata-se de um período de tempo onde devem ser asseguradas as condições de estacionaridade da acção, tanto no que se refere à intensidade, como à permanência do rumo de actuação.

O intervalo de registo deve ser também um intervalo suficientemente curto, para ser representativo de ventos intensos com curta duração, bem como suficientemente longo, para que seja possível o recurso a fontes de registo meteorológicas e também a observação clara do comportamento estrutural sob esta acção.

A duração do intervalo de registo aconselhada por J. D. Holmes[25] é de 2 a 3 segundos para velocidades de rajada e de 10 minutos ou 1 hora para a velocidade média. Davenport aconselha um valor de 5 a 30 minutos, indicando como valor para o intervalo de registo óptimo 15 minutos para a velocidade média [13].

O intervalo de registo adoptado pela regulamentação Portuguesa RSA [26] foi de 10 minutos, o que, não é um valor correntemente utilizado pela meteorologia Portuguesa, podendo todavia a correspondente velocidade média ser facilmente obtida a partir de velocidades médias horárias [34].

A relação entre a velocidade média horária U_{3600} a uma altura z e a velocidade média U_T , correspondente a um período de T segundos à mesma altura z acima do solo, segundo Simiu et al. [3], pode ser expressa através de

$$U_T(z) = U_{3600}(z) + c(T) \cdot \sigma_u(z) \quad (4.43)$$

onde $\sigma_u(z)$ representa o desvio padrão das flutuações longitudinais da velocidade e $c(T)$ é um coeficiente dependente do período T e das flutuações turbulentas longitudinais, podendo assumir os valores constantes do Quadro 4.2, válidos para $z_0 < 2,50m$ [3].

Quadro 4.2 – Valores apresentados por Simiu[3], para $c(T)$ em função do período T .

T [s]	1	10	20	30	50	100	200	300	600	1000	3600
c(T)	3,00	2,32	2,00	1,73	1,35	1,02	0,70	0,54	0,36	0,16	0,00

Recordando a equação (4.26) e adoptando a relação linear entre o desvio padrão das flutuações e a velocidade de atrito expressa através da equação $\sigma_u(z) = \beta^{0,5} \cdot u_*$ (ver secção 4.4.1), pode escrever-se a equação (4.43) sob a forma

$$U_T(z) = U_{3600}(z) \left[1 + \frac{k_v \cdot \beta^{0,5} \cdot c(T)}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \right] \quad \text{com } k_v = 0,4 \quad (4.44)$$

Atendendo à relação anterior verifica-se que para o caso da regulamentação Portuguesa RSA, as velocidades médias referidas a períodos de 10 minutos são cerca de 10% superiores às velocidades médias horárias, para uma altura acima do terreno de $10m$.

No Quadro 4.3, são apresentados os valores da razão U_{600}/U_{3600} para as rugosidades correspondentes aos terrenos indicados no RSA.

Quadro 4.3 - Valores da razão U_{600}/U_{3600} para os tipos de terrenos preconizados pelo RSA.

T [s]	c(T)	Rugosidade tipo I $\kappa = 0,015; z_0 = 0,324$	Rugosidade tipo II $\kappa = 0,0075; z_0 = 0,078$
600	0,36	1,10	1,08

4.3.2.2. Período de retorno

O período de retorno R correspondente a um valor genérico U de uma variável aleatória é definido como o número médio de amostras que é necessário considerar para que se registre um valor superior a U . Desta forma, o período de retorno pode relacionar-se com o valor $F(U)$ da função distribuição de probabilidade da variável U , através de

$$\text{Período de retorno } R(U) = \frac{1}{\text{Probabilidade de excedência de } U} = \frac{1}{1 - F(U)} \quad (4.45)$$

No caso das amostras referidas serem valores extremos anuais da velocidade média do vento, então o período de retorno é quantificado em anos. Por isso, um período de retorno de 50 anos equivale a uma probabilidade de excedência desta velocidade de 2% ($0,02 = \frac{1}{50}$).

Se as amostras referidas a valores extremos de velocidade média do vento se admitirem independentes entre si, a probabilidade p_L de todos os extremos anuais da velocidade média do vento, durante L anos, não excederem o valor U , com um período de retorno igual a $R(U)$, pode ser obtido a partir de

$$p_L(U) = \left(1 - \frac{1}{R(U)}\right)^L \quad (4.46)$$

Assim sendo, a probabilidade P de um valor da velocidade média do vento U , correspondente a um período de retorno R , ser ultrapassada durante um intervalo de tempo de L anos, vale

$$P(U) = 1 - p_L(U) = 1 - \left(1 - \frac{1}{R(U)}\right)^L \quad (4.47)$$

ou, de forma equivalente

$$R(U) = \frac{1}{1 - (1 - P(U))^{\frac{1}{L}}} \quad (4.48)$$

o que permite quantificar o período de retorno associado à velocidade média do vento com uma probabilidade $P(U)$ de ser excedida durante o período de L anos.

Para valores reduzidos da probabilidade $P(U)$, a equação (4.48) pode ser aproximada através de

$$R(U) = \frac{L}{P(U)} \quad (4.49)$$

Na Figura 4.20 pode ver-se representada, para diferentes períodos de referência, a variação expressa pela relação (4.48) da probabilidade de um valor U da velocidade média ser ultrapassada em função do período de retorno.

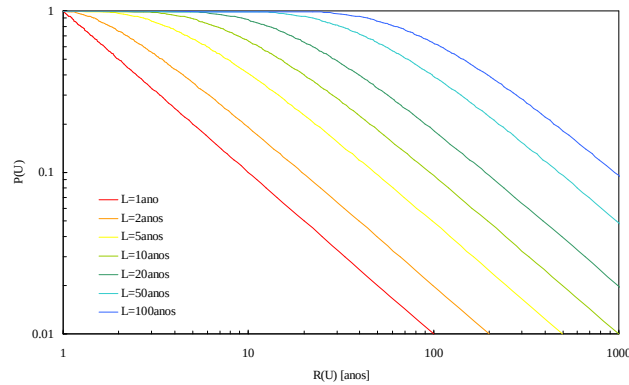


Figura 4.20 – Probabilidade de um valor médio, com um período de retorno R , ser excedida, durante um período de referência L .

4.3.2.3. Distribuição estatística de extremos

A análise de valores extremos da velocidade média do vento ou de outras variáveis geofísicas, tais como a altura das cheias ou mesmo as acelerações sísmicas, baseia-se na aplicação de pelo menos uma das três leis de distribuição de extremos identificadas por Fisher e Tippet [18].

A distribuição generalizada de valores extremos foi introduzida por Jenkinson em 1955 e combina as três leis de distribuição de valores extremos em apenas uma fórmula matemática [18]

$$P_u(U) = \exp \left\{ - \left[1 - k_s \left(\frac{U - u}{a} \right) \right]^{1/k_s} \right\} \quad (4.50)$$

onde P_u representa a função distribuição de probabilidade, com k_s como factor de forma e a como factor de escala.

Quando k_s assume valores negativos, esta função generalizada toma a forma da função distribuição tipo II (ou de Frechet). Quando k_s assume valores positivos, então a função toma a forma da distribuição tipo III, também conhecida por função distribuição de Weibull. Por fim, quando k_s tende para zero, aquela função toma a forma da função distribuição de valores extremos tipo I ou distribuição de Gumbel.

Gumbel (1954) desenvolveu exaustivamente a teoria dos valores extremos, tendo chegado a metodologias facilmente utilizáveis para o ajustamento de registos de valores extremos anuais a uma distribuição de valores extremos tipo I, com a forma

$$P_u(U) = \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{U-u}{a} \right) \right] \right\} \quad (4.51)$$

onde u é a moda da distribuição e a o factor de escala.

Tendo presente que o período de retorno se relaciona directamente com a função distribuição através da equação (4.45), e substituindo esta na igualdade (4.51), pode obter-se

$$U_e = u + \frac{1}{a} \left[-\ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right) \right] \quad (4.52)$$

que para valores muito elevados do período de retorno, pode ser escrita sob a forma

$$U_e \approx u + \frac{1}{a} \ln(R) \quad (4.53)$$

obtendo-se assim o valor extremo da velocidade média do vento U_e , correspondente ao período de retorno R .

O ajustamento desta lei de distribuição (ou seja, a estimativa dos parâmetros u e a) a uma amostra de N valores máximos anuais de velocidade média do vento x_i (com $i \in [1, N]$) observados, pode ser realizada de diferentes formas.

Um dos métodos utilizados para estimar os parâmetros u e a parte do valor médio $\bar{X}_e$ e do desvio padrão σ_e da amostra, os quais introduzidos nas expressões do valor médio (4.54) e do desvio- padrão (4.55) correspondentes à distribuição de Gumbel, conduzem às estimativas desejadas.

$$\bar{X}_e = u + 0,577.a \quad (4.54)$$

$$\sigma_e = \frac{\pi}{\sqrt{6}} a \quad (4.55)$$

Este método é conhecido pelo método dos momentos [1].

Outro método de ajustamento e de maior eficácia consiste em construir uma representação gráfica da amostra.

Após ordenados os N valores da amostra por ordem crescente de grandeza

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_N \quad (4.56)$$

faz-se corresponder a cada novo valor x_i a probabilidade de não excedência

$$P_i = \frac{i}{N+1} \quad (4.57)$$

e respectivamente, a variável reduzida

$$y_i = -\ln(-\ln(P_i)) \quad (4.58)$$

Se se proceder à substituição da variável reduzida y na expressão que define a lei de Gumbel (equação (4.51)), obtém-se a relação

$$y = \frac{x-u}{a} \quad (4.59)$$

que, por sua vez, representa a equação de uma recta num sistema de eixos (x, y) .

Fazendo representar, neste sistema de coordenadas, os N pontos da amostra, eles estarão sensivelmente alinhados se a amostra utilizada seguir uma lei de Gumbel. Desta forma, o ajustamento de uma recta a estes N pontos, pelo método dos mínimos quadrados, fornecerá os parâmetros u e a procurados. Este método, baseado em representação gráfica, em relação ao método dos momentos, de permitir assegurar que a amostragem é efectivamente bem representada por uma lei de Gumbel [1].

4.3.3. Regulamentação

Nesta secção é apresentada uma abordagem detalhada da caracterização da componente média do vento à luz de diferentes códigos actuais nacionais e internacionais.

4.3.3.1. Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes

O Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA [26]), foi publicado através do decreto-lei 235 de 31 de Maio 1983.

Para efeito da determinação da acção do vento em estruturas, o RSA divide o território Português em duas zonas distintas:

- A “zona A”, que compreende todo o território Português com a excepção das zonas pertencentes à zona B;
- A “zona B”, que é constituída pelo arquipélagos dos Açores e Madeira e pelas regiões do continente situadas numa faixa costeira de 5km de largura ou a altitude superior a 600m.

O RSA define ainda dois tipos de rugosidade aerodinâmica do terreno:

- A rugosidade aerodinâmica “tipo I”, que caracteriza o interior de zonas urbanas em que predominam edifícios médios e de grande porte;
- A rugosidade “tipo II”, que caracteriza os restantes locais, nomeadamente zonas rurais e a periferia de zonas urbanas.

Os perfis de velocidades médias preconizados pelo RSA são do tipo potência, sendo estes correspondentes a valores característicos da distribuição de extremos tipo I (distribuição de Gumbel) das velocidades médias, obtidas em intervalos de registo iguais a 10 minutos, segundo um rumo e para um período de referência de 50 anos. O período de retorno associado a estes valores é igual a 1000 anos, ao qual, corresponde uma probabilidade de excedência $P(U)$ (equação (4.47)) de 0,05.

Para a “zona A”, são indicadas as seguintes expressões de perfis de velocidade médias:

$$\begin{array}{ll}
 \text{rugosidade "tipo I"} & U(z) = 18. \left(\frac{z}{10} \right)^{0,28} \\
 \text{rugosidade "tipo II"} & U(z) = 25. \left(\frac{z}{10} \right)^{0,20}
 \end{array} \tag{4.60}$$

As velocidades médias na “zona B” são cerca de 10% superiores às da “zona A”, pelo que podem ser obtidas multiplicando as velocidades da “zona A” por $\sqrt{1,2}$.

Os perfis logarítmicos equivalentes a estes perfis de velocidades médias correspondem a substituir na equação (4.31) os valores das escalas de rugosidade $z_0 \approx 0,324m$ (com $\kappa = 0,015$) e $z_0 \approx 0,078m$ (com $\kappa = 0,0075$), para as rugosidades “tipo I” e “tipo II”, respectivamente [13].

Para a análise de estruturas identicamente solicitadas pelo vento, em qualquer direcção, o RSA prescreve que os valores atrás indicados para as velocidades médias sejam multiplicados por $\sqrt{1,3}$ (estruturas com simetria de revolução).

É ainda de referir, a título de curiosidade que, de acordo com Castanheta et al. [34], aos perfis de velocidades médias indicados pelo RSA corresponde um valor aproximadamente igual a 33m/s para a média dos máximos anuais, segundo todos os rumos das velocidades médias horárias à altura gradiente, para a “zona A”. Segundo esta mesma referência, para rugosidades “tipo I” e “tipo II” correspondem os valores das alturas gradientes, $h_g \approx 400m$ e $h_g \approx 340m$, respectivamente, pelo que se torna possível calcular os valores para a velocidade média horária, a uma altura de referência de 10m, através de

$$\begin{aligned} \text{rugosidade "tipo I"} \quad U(z=10)_{m,1,TR} &= 33 \cdot \left(\frac{10}{400} \right)^{0,28} = 11,7 \text{ m/s} \\ \text{rugosidade "tipo II"} \quad U(z=10)_{m,1,TR} &= 33 \cdot \left(\frac{10}{340} \right)^{0,20} = 16,3 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Os valores indicados pelo RSA para a velocidade de referência para a “zona A” e para uma altura do terreno igual a 10m podem obter-se a partir das igualdades apresentadas em (4.61), e tendo em conta a relação apresentada por Mendes [13],

$$U_{k,50,1R} = 1,43 U_{m,1,TR} \quad (4.62)$$

de modo a passar de valores médios anuais referentes a todos os rumos para valores característicos segundo um só rumo, associados ao período de referência igual a 50 anos. Para além disso, recorre-se ainda à majoração destes valores pelos factores apresentados no Quadro 4.3, de modo a ter em conta um intervalo de registo igual a 10 minutos e não a 1 hora. Assim, obtêm-se os seguintes valores

$$\begin{aligned} \text{rugosidade "tipo I"} \quad U(z=10)_{k,50,1R} &= 1,43 \times 1,10 \times 11,7 = 18 \text{ m/s} \\ \text{rugosidade "tipo II"} \quad U(z=10)_{k,50,1R} &= 1,43 \times 1,08 \times 16,3 = 25 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Na Figura 4.21, são apresentados os perfis de velocidades médias para os dois tipos de rugosidade, para a “zona A” e para a “zona B”.

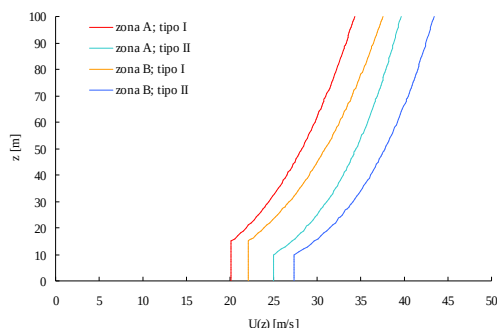


Figura 4.21 – Perfis de velocidades médias para os dois tipos de rugosidade e zonas do território definidas no regulamento Português (RSA).

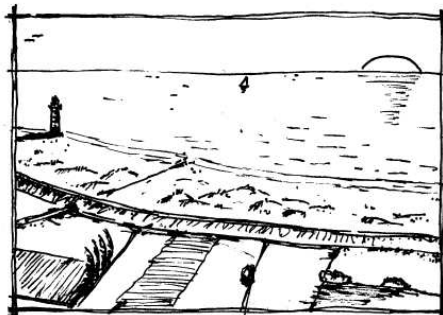
4.3.3.2. Eurocódigo 1 – Parte 1-4: Acção do Vento

Este documento foi elaborado pelo Comité Europeu de Normalização – CEN [23], com o intuito de standardizar os procedimentos de cálculo ao nível das acções do vento, para todo o território da União Europeia. Este documento para além de apresentar um procedimento base de cálculo, é complementado por directivas regionais, denominadas por documento nacional de aplicação (DNA), o qual adequa todo o procedimento global da norma em termos da aplicação ao nível de cada membro da comunidade europeia.

Assim, é proposta a adopção de perfis logarítmicos para a velocidade média do vento, para os quais se consideram 5 tipos diferentes de rugosidade aerodinâmica do terreno:

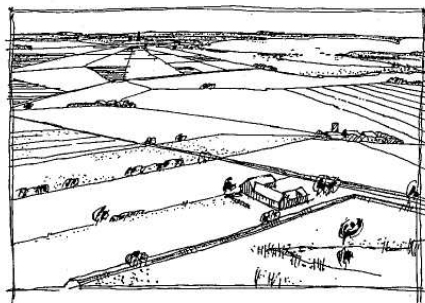
Terreno categoria 0

Mar e área costeira exposta a mar aberto.



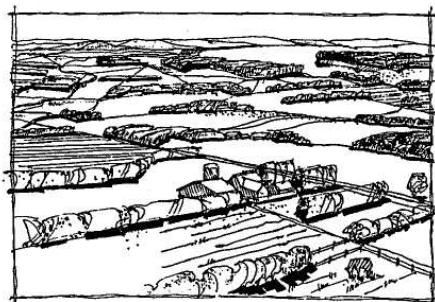
Terreno categoria I

Lagos ou áreas com vegetação negligenciável e sem obstáculos.



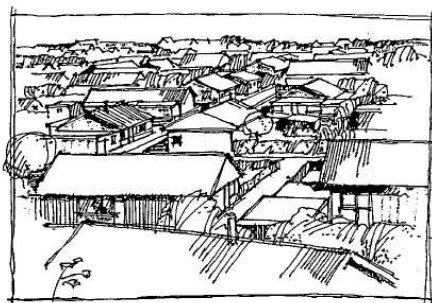
Terreno categoria II

Área com vegetação rasteira, tal como erva, e obstáculos isolados (árvores, edifícios) separados entre eles de pelo menos 20 vezes a altura do obstáculo.



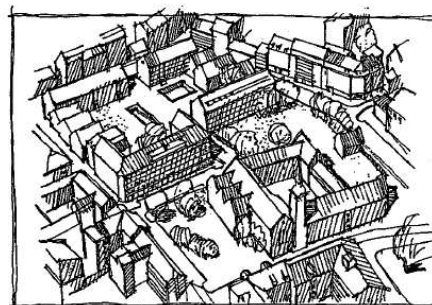
Terreno categoria III

Área com uma cobertura regular de vegetação ou de edifícios, ou com obstáculos isolados separados no máximo de 20 vezes a altura do obstáculo (tais como povoações, terrenos suburbanos ou floresta permanente).



Terreno categoria IV

Área em que pelo menos 15 % da superfície está coberta por edifícios em que a sua altura média excede os 15 m.



No Quadro 4.4, apresentam-se, para cada uma das categorias de terreno, as respectivas escalas de rugosidade e as alturas mínimas.

Quadro 4.4 – Escalas de rugosidade e alturas mínimas caracterizadoras dos diferentes terrenos do Eurocódigo 1[23]

Categoria do terreno	z_0 [m]	$Z_{\min}$ [m]
Categoria 0	0,003	1
Categoria I	0,01	1
Categoria II	0,05	2
Categoria III	0,3	5
Categoria IV	1,0	10

O tipo de rugosidade a considerar é o que se apresente mais desfavorável (isto é, o de menor algarismo romano), de entre os tipos contidos num sector angular definido em torno da construção, por uma abertura igual a $\pm 45^\circ$ relativamente à direcção do vento. As zonas que não cubram mais de 10% de superfície do sector em causa deverão ser ignoradas, não contribuindo para a atribuição de rugosidade do terreno.

Na definição do vento médio, é utilizado o conceito de velocidade básica v_b , sendo esta dada por um valor característico da velocidade média do vento, registado em períodos de 10 minutos a uma cota de 10m acima do solo e num terreno com rugosidade “tipo II”, tendo a probabilidade anual de ser excedida de 0,02, à qual corresponde um período de retorno de 50 anos.

A velocidade básica definida para uma determinada direcção do vento é então obtida a partir da expressão

$$v_b = c_{dir} \cdot c_{season} \cdot c_{prob} \cdot v_{b,0} \quad (4.64)$$

onde $v_{b,0}$ representa a velocidade fundamental dada pelo anexo nacional (DNA) e que, para o caso Português, para “zona A” toma o valor $v_{b,0} = 28 \text{ m/s}$ e, para a “zona B” o valor de $v_{b,0} = 31 \text{ m/s}$. O coeficiente c_{dir} representa o factor direcciona que, no caso de se revelar necessario considerar o vento a actuar nas várias direcções, deverá tomar o valor $\sqrt{1,3}$. O coeficiente c_{season} representa o factor sazonal e é utilizado para ter em conta possíveis acontecimentos atmosféricos temporários. Por fim, o coeficiente c_{prob} representa o factor de probabilidade, sendo este utilizado em situações em que a

probabilidade anual de excedência seja diferente da utilizada por defeito, como o caso da consideração da acção do vento sobre estruturas na fase construtiva. Este coeficiente é dado pela expressão,

$$c_{prob} = \left(\frac{1 - K \cdot \ln(-\ln(1-p))}{1 - K \cdot \ln(-\ln(0,98))} \right)^{n_K} \quad (4.65)$$

onde K representa um parâmetro dependente da distribuição de extremos ($K = 0,2$) e n_K o expoente ($n_K = 0,5$).

A velocidade média do vento $U(z)$ a uma altura z depende então da rugosidade, da orografia do terreno e da velocidade básica, como expresso através da relação

$$U(z) = c_r(z) \cdot c_o(z) \cdot v_b \quad (4.66)$$

O coeficiente $c_o(z)$ representa o factor orográfico e deve ser tido em conta sempre que as condições do relevo o imponham. Caso contrário, deve ser tomado igual à unidade.

O coeficiente $c_r(z)$ representa o factor de rugosidade do terreno, sendo este o factor que introduz uma caracterização do perfil de velocidade como logarítmico. Este factor é dado por

$$\begin{aligned} c_r(z) &= k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{para } z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \\ c_r(z) &= c_r(z_{\min}) & \text{para } z \leq z_{\min} \end{aligned} \quad (4.67)$$

com

$$k_r = 0,19 \cdot \left(\frac{z_0}{z_{0,II}} \right)^{0,07} \quad (4.68)$$

onde z_0 representa a escala de rugosidade, $z_{0,II}$ toma o valor 0,05, $z_{\min}$ é a altura mínima conforme definido no Quadro 4.4 e $z_{\max}$ deve ser tomado como 200m .

4.3.3.3. Outra regulamentação

Neste secção, é feita uma análise sumária comparativa de 7 normas de referência mundial, nomeadamente:

Norma australiana e Neozelandeza – AS/NZS 1170.2:2002 [20];

Norma Americana – ASCE-7-05 [21];

Norma Europeia – EN 1991-1-4:2005 [23];

Norma Canadiana – NBCC (1995) [24];

Norma Japonesa – AIJ-RLB-2004 (2004, commentary) [24, 28];

Norma ISO – ISO4354:1997 [19, 24];

Recomendações para o cálculo de efeitos do vento sobre construções – ECCS TC 12 [22];

Esta comparação é realizada através da apresentação de um conjunto de quadros, onde se indicam as principais características das principais metodologias utilizadas nestes códigos, por forma a permitir apreender as principais diferenças entre eles.

No Quadro 4.5 caracteriza-se a abordagem realizada por cada um dos códigos, designadamente em termos do tipo de lei de variação da velocidade média em altura, do número de tipos rugosidade aerodinâmica utilizados e da existência ou não de ferramentas de tratamento de situações de mudança de rugosidade do terreno.

Quadro 4.5 - Caracterização da abordagem de cada um dos códigos [19-24, 28, 35].

Código	Perfil de velocidade	Velocidade junto ao solo	Número de tipos de terrenos	Tratamento de mudança de terreno
AS/NZS1170.2:2002	Logarítmica (corrigida)	Constante até à altura mínima	4	Sim
ASCE-7-05	Potência	Constante até à altura mínima	3	Não
EN 1991-1-4:2005	Logarítmica	Constante até à altura mínima	5	Não
NBCC(1995)	Potência	Constante até à altura mínima	3	Não
AIJ(2004)	Potência	Constante até à altura mínima	5	Não
ISO 4354:1997	Logarítmica/Potência	Constante até à altura mínima	4	Não
ECCS TC12:1986	Logarítmica	Constante até à altura mínima	5	Não

No Quadro 4.6, são apresentados os factores caracterizadores de cada um dos tipos de rugosidade, bem como outros parâmetros definidores dos perfis de velocidades.

Quadro 4.6 - Definição dos tipos de terreno segundo cada um dos códigos [19-24, 28, 35].

Código	Espaço aberto			Suburbano			Urbano		
	Desig.	α	z_0 [m]	Desig.	α	z_0 [m]	Desig.	α	z_0 [m]
AS/NZS1170.2:2002	1	-	0,002	3	-	0,2	4	-	2,0
	2		0,02						
ASCE-7-05	D	1/9	-	B	1/4	-	-	-	-
	C	1/6,5							
EN 1991-1-4:2005	0		0,003	III	-	0,3	IV	-	1,0
	I	-	0,01						
	II		0,05						
NBCC(1995)	A	0,14	-	B	0,25	-	C	0,36	-
AIJ(2004)	I	0,10	-	III	0,20	-	IV	0,27	-
	II	0,15					V	0,35	
ISO 4354:1997	-	0,11 0,14	0,003 0,03	-	0,22	0,3	-	0,31	3,0
ECCS TC12:1986	I	-	0,005	III	-	0,3	IV		1,0
	II		0,07				V		2,5

No Quadro 4.7, por seu turno, são apresentados os parâmetros que caracterizam as velocidades de referência utilizadas por cada um dos códigos, bem como a gama de velocidades de referência que estes consideram.

Quadro 4.7 - Definição da velocidade de referência, segundo cada um dos códigos [19-24, 28, 35].

Código	Tipo de velocidade de referência	Período de registo	Período de Retorno [anos]	Altura de referência [m]	Intervalo U_{ref} [m/s]
AS/NZS1170.2:2002	Rajada	3segundos	500	10	[43;48](Nova Zelândia) [45;57](Austrália)
ASCE-7-05	Rajada	3segundos	50	10	[38;40](costa oeste) [45;67](costa leste)
EN 1991-1-4:2005	Média (tipoII)	10minutos	50	10	[28;31](Portugal)
NBCC(1995)	Média	1hora	30	10	[24;28](Great Lakes) [30;35](Hudsons Bay)
AIJ(2004)	Média	10minutos	100	10	[26;44] 50(Okinawa)
ISO 4354:1997	Média	10minutos	50	10	Dependente do mapa de ventos
ECCS TC12:1986	Média (tipoII)	10minutos	10	10	Dependente do mapa de ventos

4.4. Turbulência atmosférica

O vento na camada atmosférica, apresenta sempre características turbulentas. Isto significa que o escoamento é caótico, com períodos aleatórios variando entre fracções de segundos até vários minutos. Uma descrição conveniente de um escoamento turbulento exige naturalmente o recurso a métodos probabilísticos, como os descritos no Capítulo 2.

Com efeito, a velocidade do vento $U(z,t)$ pode ser decomposta numa componente média $U(z)$ e nas componentes turbulentas $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$, à imagem do referido na secção 4.3.1.

Estas três componentes turbulentas podem ser descritas como processos estocásticos, sendo por isso caracterizadas através de parâmetros estatísticos.

O estudo de diversos registos da velocidade do vento mostra que estes processos estocásticos podem ser considerados estacionários.

4.4.1. Intensidade da turbulência

Um dos parâmetros estatísticos mais utilizados na caracterização das componentes turbulentas do vento é o desvio padrão, que para o caso da componente longitudinal $u(t)$ pode ser expresso da seguinte forma

$$\sigma_u = \left[\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \right]^{0,5} \quad (4.69)$$

onde T é a duração da amostra $u(t)$ (10 minutos ou 1 hora, coincidindo geralmente com o intervalo de registo).

Assumindo um terreno homogéneo, o escoamento sobre este será horizontalmente homogéneo, significando isto que as suas propriedades estatísticas não mudam num plano horizontal. Estudos levados a cabo durante os anos 70 por Davenport, Harris e Armit [2] mostraram que os desvios padrão das três componentes de flutuação decrescem muito lentamente à medida que se sobe em altura, sendo por isso considerados quase constantes nas camadas inferiores da atmosfera (segundo Hansen et al. [2], entre os 100 e 200 metros acima do terreno).

Assim sendo, o desvio padrão varia proporcionalmente com a velocidade média do vento a uma cota de referência z_{ref} e com a rugosidade do solo através da expressão [13]

$$\sigma_u = \sqrt{\beta} \cdot u_* = \sqrt{\beta \cdot \kappa} \cdot U_{ref} \quad (4.70)$$

No Quadro 4.8, são apresentados, para diferentes tipos de rugosidades, os valores de β indicados por Simiu et al.[3].

Quadro 4.8 – Valores do coeficiente β em correspondência com o valor de z_0 .

z_0 [m]	0,005	0,07	0,30	1,00	2,50
β	6,0	6,0	5,25	4,85	4,00
$\beta^{0,5}$	2,45	2,45	2,29	2,20	2,00

Cremona et al. [1] sugere as seguintes relações entre o desvio padrão da componente longitudinal $u(t)$ e das componentes lateral $v(t)$ e vertical $w(t)$ das flutuações

$$\sigma_v \approx 0,75 \text{ a } 0,85 \sigma_u \quad (4.71)$$

$$\sigma_w \approx 0,5 \text{ a } 0,6 \sigma_u \quad (4.72)$$

valores estes que enquadram os valores sugeridos por outros autores, como Davenport, Hansen, Simiu e Mendes [2, 3, 13].

Do rácio entre o desvio padrão de cada componente turbulenta e a velocidade média a uma determinada cota z , pode obter-se a intensidade de turbulência de cada uma das componentes.

$$I_i(z) = \frac{\sigma_i}{U(z)} \quad i = u, v, w \quad (4.73)$$

Para terrenos relativamente planos, a relação (4.70) toma aproximadamente a forma $\sigma_u \approx 2,45 \cdot u_*$ [13]. Relembrando a equação (4.26) para a velocidade média e substituindo-se esta na equação (4.73), pode obter-se uma expressão simples e aproximada da intensidade de turbulência segundo a direcção longitudinal da velocidade do vento

$$I_u(z) \approx \frac{2,45 \cdot u_*}{\left(\frac{u_*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)} \approx \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad (4.74)$$

Recorrendo às relações (4.70), (4.71), (4.72), (4.74), e substituindo-as na expressão (4.73), podem obter-se as seguintes igualdades, que relacionam a intensidade de turbulência segundo a componente longitudinal com as referentes às outras duas componentes, lateral e vertical,

$$I_v(z) \approx 0,75 \text{ a } 0,85 I_u(z) \quad (4.75)$$

$$I_w(z) \approx 0,5 \text{ a } 0,6 I_u(z) \quad (4.76)$$

Constata-se ainda o facto de haver alguma semelhança entre a relação anterior e a equação (4.34), podendo concluir-se que a intensidade de turbulência segundo a direcção longitudinal da velocidade do vento I_u é da ordem de grandeza do expoente α do perfil em causa.

Na Figura 4.22, pode ver-se representada a intensidade de turbulência segundo a direcção longitudinal da velocidade do vento, para uma escala de rugosidade z_0 igual a 0,05.

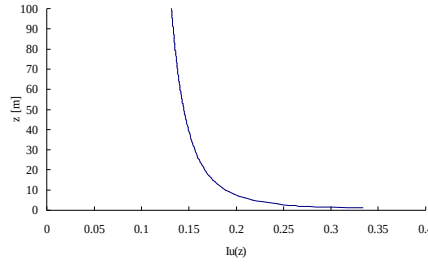


Figura 4.22 – Variação da intensidade de turbulência I_u segundo a direcção longitudinal.

4.4.2. Escalas de turbulência

Em dois pontos do espaço as flutuações da velocidade instantânea do vento não são iguais, nem sincronizadas e muito menos estatisticamente independentes. A turbulência pode ser interpretada como que uma sobreposição de turbilhões de tamanhos diferentes, desenvolvidos no seio de um escoamento, deslocando-se a uma velocidade média $\bar{U}(z)$ [1].

Para caracterizar a estrutura espaço-temporal da turbulência recorre-se frequentemente a uma grandeza estatística de segunda ordem, designada por função de correlação cruzada (já definida no capítulo 2). Esta função caracteriza a relação entre uma determinada componente turbulenta i da turbulência (com $i = u, v, w$) num determinado ponto $P_1(x, y, z)$, no instante de tempo t , e a mesma componente i num ponto $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ e no instante $t + \Delta t$, dependendo para um terreno homogéneo, da distância espacial entre os pontos P_1 e P_2 e do desfasamento temporal Δt .

$$R_i(P_1, P_2, \Delta t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(P_1, t) \cdot i(P_2, t + \Delta t) d\Delta t \quad \text{com } i = u, v, w \quad (4.77)$$

A esta grandeza estatística de segunda ordem, está associado o coeficiente de correlação cruzado dado por

$$\rho_i(P_1, P_2, \Delta t) = \frac{R_i(P_1, P_2, \Delta t)}{\sigma_i(P_1) \cdot \sigma_i(P_2)} \quad \text{com } i = u, v, w \quad (4.78)$$

o qual varia entre 0 e 1, consoante os pontos estão mais ou menos espaçados no espaço ou no tempo.

Se se considerar o coeficiente de autocorrelação para cada uma das componentes u , v e w da flutuação da velocidade (isto é, o coeficiente de correlação cruzada particularizado para o ponto P_1 ou P_2 , e não referido a dois pontos distânciados) este dependerá apenas do intervalo de tempo Δt . Pode assim dizer-se que cada uma das componentes tem um período característico de flutuação associado, designado por escala de tempo T_i ($i = u, v, w$), com a forma [1]

$$T_i = \int_0^\infty \rho_i(P_1, P_1, \Delta t) d\Delta t \quad \text{com } i = u, v, w \quad (4.79)$$

O coeficiente de autocorrelação “temporal” $\rho_i(P_1, P_1, \Delta t)$ pode ser aproximado através de uma função exponencial do tipo

$$\rho_i(P_1, P_1, \Delta t) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{T_i}\right) \quad (4.80)$$

No caso em que a função de correlação cruzada apenas depende da distância espacial entre os pontos (com $\Delta t = 0$), pode introduzir-se a noção de escalas integrais de turbulência, as quais traduzem a dimensão média dos turbilhões em que o escoamento global é decomposto [13]. Assim por exemplo, a escala integral de turbulência L_u^x , relativa à componente turbulenta u medida na direcção longitudinal do escoamento, é definida similarmente à escala temporal, através da expressão,

$$L_u^x = \int_0^\infty \rho_u(P_1(x, y, z), P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z), \Delta t = 0) d\Delta x \quad (4.81)$$

onde $\rho_u(P_1, P_2, \Delta t = 0)$ é o coeficiente de correlação integral das flutuações longitudinais de velocidade na direcção longitudinal do escoamento. Este coeficiente refere-se a dois pontos P_1 e P_2 , que distam entre eles de Δx na direcção longitudinal x , sendo os valores da flutuação de velocidade medidos simultaneamente ($\Delta t = 0$).

À semelhança da equação (4.80), também é possível adoptar, para o coeficiente integral de correlação, uma função exponencial com a forma

$$\rho_u^x(\Delta x, \Delta y = 0, \Delta z = 0, \Delta t = 0) = \exp\left(-\frac{\Delta x}{L_u^x}\right) \quad (4.82)$$

As escalas integrais de turbulência são definidas para cada uma das três dimensões espaciais e para cada uma das três componentes da flutuação de velocidade, o que conduz a um total de 9 escalas possíveis:

Componente longitudinal da turbulência u : L_u^x L_u^y L_u^z

Componente lateral da turbulência v : L_v^x L_v^y L_v^z

Componente vertical da turbulência w : L_w^x L_w^y L_w^z

De acordo com a hipótese de Taylor, a descrição estatística das variáveis temporais da turbulência pode ser baseada nas características espaciais do campo de velocidades do vento (isto é, as variações temporais podem ser obtidas através da translação das características turbulentas “congeladas” proporcionalmente à velocidade média do vento [2]). Deste modo, a autocorrelação das velocidades registadas num ponto fixo, para um intervalo de tempo Δt , é igual à correlação entre as velocidades registadas simultaneamente em pontos distanciados no sentido do escoamento ($\Delta x = U \cdot \Delta t$) [13]. Esta propriedade permite calcular a escala integral de turbulência L_x^u a partir da velocidade média num único ponto, ou seja, a relação entre as escalas integrais e as temporais

$$L_i^x = U \cdot T_i \quad (\text{com } i = u, v, w) \quad (4.83)$$

As escalas integrais de turbulência aumentam com a altura h , mas diminuem com a escala de rugosidade z_0 do terreno [1].

Alguns modelos empíricos foram propostos para descrever as escalas integrais de turbulência, a partir de medições, dos quais se destaca o modelo desenvolvido por Counihan (1975), que permite calcular a escala integral de turbulência longitudinal segundo a direcção longitudinal, e que é válido num intervalo de alturas entre os 10 e os 240 metros [1],

$$L_u^x = c \cdot z^m \quad (4.84)$$

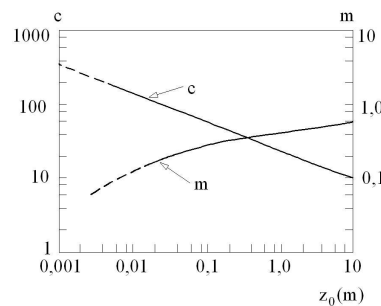


Figura 4.23 – Variação dos coeficientes c e m em função de z_0 [3]

c e m dependem da escala de rugosidade z_0 , como se pode ver na Figura 4.23.

A ordem de grandeza da escala integral longitudinal L_u^x para uma altura de 10 metros acima do terreno ronda os 100 metros, sendo propostos por diversos autores [2, 3], os seguintes valores para as componentes lateral e vertical da componente longitudinal da escala de turbulência,

$$L_u^y \approx 0,3.L_u^x \quad (4.85)$$

$$L_u^z \approx 0,2.L_u^x \quad (4.86)$$

4.4.3. Função densidade espectral de potência das flutuações longitudinais

Como já mencionado anteriormente, a flutuação da velocidade do vento pode ser considerada como um resultado da sobreposição de turbilhões elementares. A cada componente harmónica das flutuações, com uma frequência n , está associado um turbilhão elementar com comprimento de onda $\lambda = U/n$ e, por isso, a grandes turbilhões correspondem baixas turbulências e a pequenos turbilhões correspondem elevadas frequências [3, 13].

A turbulência atmosférica desenvolve-se inicialmente com turbilhões muito extensos, isto é com dimensões da ordem de grandeza da camada limite atmosférica, que extraem a sua energia de transporte do escoamento devido às instabilidades geradas pela superfície do terreno. A ruptura destes turbilhões em turbilhões mais pequenos observa-se devido às forças de inércia. Esta região é chamada de “inertial subrange”, sendo uma região onde a energia turbulenta produzida é balanceada pela energia turbulenta dissipada e, por isso, a energia do movimento turbulento apenas depende dos parâmetros intrínsecos ao escoamento [2], correspondendo a um processo de transferência de energia das baixas para as altas frequências. Quando os turbilhões são suficientemente pequenos, a energia cinética do escoamento é dissipada em energia térmica, devido às forças viscosas [13].

A contribuição de cada turbilhão elementar com frequência n ($n = U/\lambda$) para a energia cinética total do escoamento é traduzida pela função densidade espectral de potência $S_i(n)$ (onde i representa a correspondente componente do escoamento u , v ou w).

Tal como foi referido no capítulo 2, a função densidade espectral de potência $S_i(n)$ da componente turbulenta da velocidade do vento i é a transformada de Fourier da função de auto-correlação $R_i(\Delta t)/2\pi$ dessa mesma componente. Daí que, de acordo com a equação (2.39), se possa escrever que:

$$\sigma_i^2 = \int_0^\infty S_i(n) dn \quad (4.87)$$

sendo σ_i o desvio padrão relativo à componente da flutuação da velocidade do vento i (com $i = u, v, w$).

O primeiro espectro de potência da velocidade do vento junto ao solo foi obtido por Van der Hoven, a partir de dados registados em Brookhaven, nos Estados Unidos da América. Este espectro, representado na Figura 4.24, revela uma zona de frequências com uma baixa flutuação da velocidade associada entre dois picos maiores. Estes picos estão relacionados com o período de transição dos típicos sistemas de pressões de tempestades em larga escala, em regiões temperadas (região macro meteorológica) para a turbulência atmosférica junto ao solo (região micro meteorológica) [2, 18, 36].

A razão pela qual os valores médios das velocidades do vento, com finalidade de projecto, estão associados a intervalos de 10 minutos ou 1 hora, deve-se ao facto de a este intervalo estar associado um baixo conteúdo espectral e consequentemente flutuações muito baixas da velocidade do vento[36].

Por outro lado, dado que apenas a magnitude de turbulência com frequência igual ou perto da frequência natural das estruturas pode afectar a resposta estrutural significativamente, no domínio da engenharia do vento com fins estruturais, somente interessa o conteúdo espectral com período inferior a 1 minuto, daí que este intervalo seja designado por “inertial subrange”.

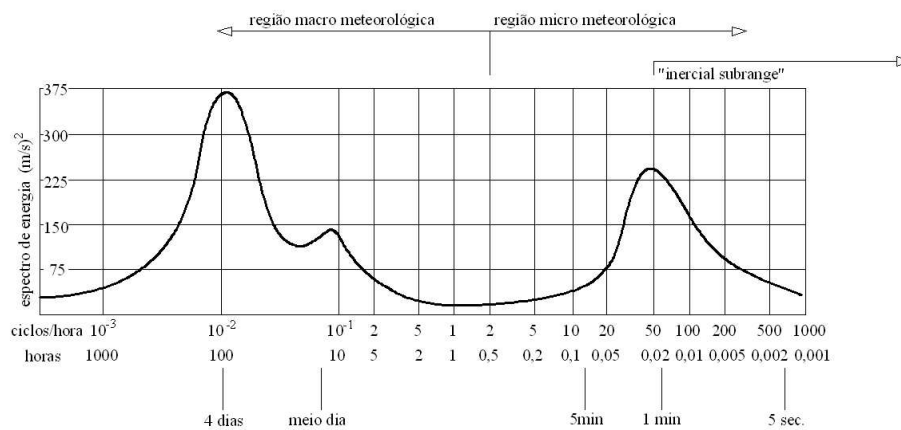


Figura 4.24 – Espectro de Van Der Hoven, com a representação das regiões macro meteorológica, micro meteorológica e “inertial subrange” [37].

Teoricamente, em condições de equilíbrio indiferente da atmosfera e para a gama de frequências referidas, a função densidade espectral de potência da componente longitudinal das flutuações da velocidade do vento pode ser expressa, aproximadamente, através da relação adimensional [3],

$$\frac{n.S_u(n, z)}{u_*^2} = 0,26.f_z^{-2/3} \quad (4.88)$$

onde $n.S_u(n, z)/u_*^2$ é denominada por densidade espectral reduzida e f_z como frequência reduzida (ou como “coordenada de Monin”), definida como

$$f_z = \frac{n.z}{U(z)} \quad (4.89)$$

Se na equação (4.88) se substituir $\sigma_u = 2,45.u_*$, pode obter-se a seguinte relação adimensional, com recurso à variância das flutuações longitudinais

$$\frac{n.S_u(n, z)}{\sigma_u^2} \approx 0,045.f_z^{-2/3} \quad (4.90)$$

Segundo Simiu et al. [3], estas expressões concordam satisfatoriamente com a média dos resultados experimentais para um valor de frequência reduzida superior a 0,2 ($f_z > 0,2$), condição que, no caso de elevadas velocidades do vento, como as assumidas em fase de projecto estrutural, é geralmente satisfeita.

Com base em dados experimentais, Davenport propôs a seguinte função densidade espectral reduzida das flutuações longitudinais da velocidade dos vento [3]

$$\frac{n.S_u(n)}{u_*^2} = 4,0 \frac{X^2}{(1 + X^2)^{4/3}} \quad (4.91)$$

sendo X uma variável adimensional definida em função da frequência n e da velocidade média à cota $z = 10m$.

$$X = \frac{1200.n}{U(10)} \quad (4.92)$$

Como se pode observar, a expressão proposta por Davenport é independente da altura, apesar deste, aquando dos ensaios experimentais realizados, ter registado uma ligeira diminuição de energia espectral, tendo considerado estas variações como sendo inconclusivas, dada a ordem de grandeza registada ser a mesma dos erros envolvidos na experimentação [13].

Contudo, a consideração da hipótese de Taylor, já referida anteriormente, leva à obtenção da relação de proporcionalidade entre as funções densidade espectral de potência, a correspondente função de correlação e a escala integral correspondente às flutuações da turbulência longitudinais.

$$S_u(n=0) \propto \int_0^\infty R_u(\tau) d\tau \propto L_u^x \quad (4.93)$$

Assim sendo, pode concluir-se, relativamente à expressão de Davenport, que uma das lacunas reside no facto de $S_u(n=0)=0$, que por sua vez contraria a relação (4.93), pois a escala integral de turbulência longitudinal não é nula. Este valor pode ser obtido a partir da seguinte equação [3],

$$L_u^x = \frac{U(z)}{4} \frac{S_u(0)}{\sigma_u^2} \quad (4.94)$$

Assim o deficiente comportamento do espectro de Davenport na zona de baixas frequências, e a omissão da variação deste em altura, levou diversos autores a proporem novas formulações para a função densidade espectral de potência das flutuações longitudinais da velocidade do vento.

Kaimal propôs uma expressão que apresenta uma concordância satisfatória com a igualdade (4.88), com a forma [1, 13]

$$\frac{n.S_u(n,z)}{u_*^2} = \frac{105.f_z}{(1+33.f_z)^{5/3}} \quad (4.95)$$

Contudo, Simiu et al [3] faz referência à mesma expressão, mas com a adopção de $\sigma_u = 2,45.u_*$, o que leva ao aparecimento de uma configuração generalizada,

$$\frac{n.S_u(n,z)}{u_*^2} = \frac{200.f_z}{(1+50.f_z)^{5/3}} \quad (4.96)$$

que, relativamente à anterior, apesar de muito próxima, pode levar para o caso de terrenos com uma escala de rugosidade z_0 superior a 0,30m, a uma sobre estima da resposta estrutural em cerca de 5%.

Entretanto, Von Kàrmàn propôs igualmente uma formulação para a função densidade espectral de potência reduzida, neste caso, em função de uma frequência reduzida dependente da escala integral de turbulência longitudinal, como representado na equação (4.97) [1, 2],

$$\frac{n.S_u(n,z)}{\sigma_u^2} = \frac{4.f_L}{(1+70,8.f_L^2)^{5/6}} \quad (4.97)$$

com

$$f_L = \frac{n.L_u^x(z)}{U(z)} \quad (4.98)$$

Apesar desta formulação não apresentar uma concordância tão perfeita com a função densidade espectral de potência reduzida da expressão (4.88), como a da expressão de Kaimal na zona de altas frequências (ou “inertial subrange”), para a zona das baixas frequências apresenta uma aproximação bastante mais satisfatória, sendo então esta aconselhável para o estudo de aplicações em que o contributo das frequências mais baixas seja mais importante (caso de estruturas off-shore) [3].

A formulação de Kaimal foi proposta com base em medições da turbulência atmosférica a baixa altura e sobre um terreno pouco rugoso. A formulação de Von Kàrmàn, em contrapartida, comporta um parâmetro a mais que a formulação de Kaimal, a escala integral de turbulência L_u^x . Este “grau de liberdade” suplementar permite um ajustamento da formulação de Von Kàrmàn a medições que possam ser desenvolvidas no local em estudo.

É ainda oportuno referir a expressão proposta por Harris [3],

$$\frac{n.S_u(n,z)}{u_*^2} = 4,0 \frac{X}{(2 + X^2)^{\frac{5}{6}}} \quad (4.99)$$

com

$$X = \frac{1800.n}{U(10)} \quad (4.100)$$

que, tal como a expressão de Davenport, não reflecte a variação do espectro de potência em altura mas, em contrapartida, apresenta a escala integral de turbulência L_u^x diferente de zero.

Na Figura 4.25, podem observar-se os espectros de potência reduzidos propostos por Davenport, Kaimal, Simiu, Von Kàrmàn e Harris, para um ponto a uma altura de 10 metros acima do solo. Para a elaboração desta figura, foi adoptado um perfil de velocidades médias logarítmico, correspondente a um terreno da categoria II do EC1, para uma zona A do território Português.

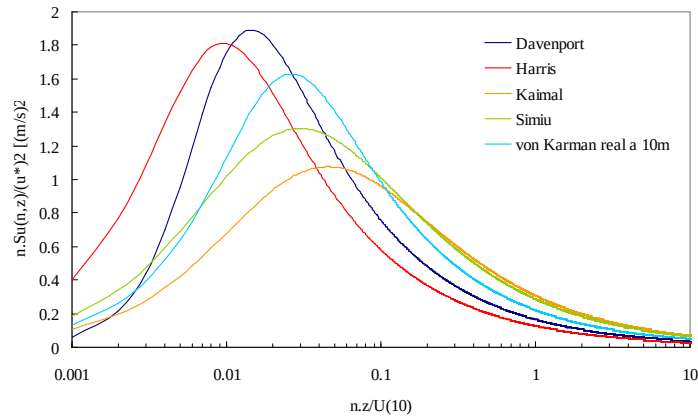


Figura 4.25 – Comparação entre as funções densidade espectral de potência reduzida propostas por Davenport, Harris, Kaimal, Simiu e Von Kàrmàn para um ponto a uma altura de 10 metros.

De forma análoga, pode observar-se na Figura 4.26, uma análise comparativa, para um ponto à cota de 65 metros, considerando as funções de densidade espectral de potência reduzida (S_u) de Kaimal, Simiu e Von Kàrmàn, sendo esta última representada para diferentes escalas integrais de turbulência longitudinal.

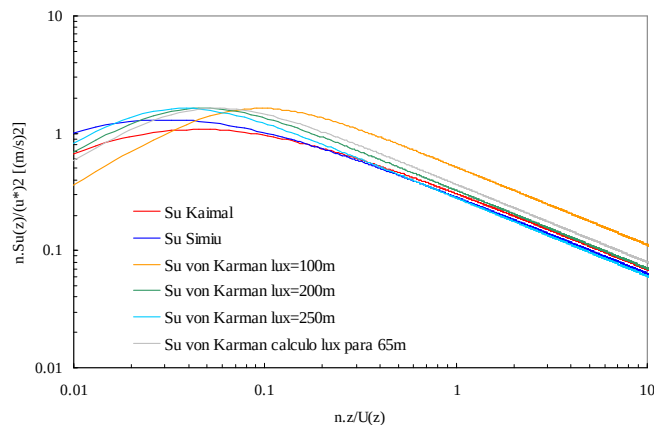


Figura 4.26 – Funções de densidade espectral de potência reduzida de Kaimal, Simiu e Von Kàrmàn, para diferentes escalas de referência e para um ponto à cota de 65 metros.

4.4.3.1. Espectro cruzado das flutuações longitudinais. Coerência espacial.

A função densidade espectral cruzada das flutuações de velocidade do vento $S_{u_1 u_2}(\Delta r, n)$ relativa a registos contínuos em dois pontos $P_1(x, y, z)$ e $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, distanciados de $\Delta r(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, é uma medida do respectivo grau de correlação. Esta função é uma grandeza complexa podendo ser expressa na forma (vd. equação (2.65)),

$$S_{u_1 u_2}(\Delta r, n) = S_{u_1 u_2}^c(\Delta r, n) + i.S_{u_1 u_2}^q(\Delta r, n) \quad (4.101)$$

onde $S_{u_1 u_2}^c(\Delta r, n)$ é a parte real, denominada também por co-espectro, e $S_{u_1 u_2}^q(\Delta r, n)$ a parte imaginária, designada por espectro de quadratura.

Em situações de ventos fortes, os valores do espectro de quadratura tornam-se irrelevantes, podendo mesmo ser considerados nulos para condições de turbulência homogénea [13]. Desta forma, a função densidade espectral cruzada pode ser expressa na forma,

$$S_{u_1 u_2}(\Delta r, n) = \sqrt{S_u(P_1, n).S_u(P_2, n)}.coh(\Delta r, n) \quad (4.102)$$

Na equação anterior, $S_u(P_1, n)$ e $S_u(P_2, n)$ representam os autoespectros das flutuações de velocidade do vento nos pontos P_1 e P_2 , e $coh(\Delta r, n)$ representa a função de coerência (também conhecida por coeficiente harmónico cruzado), a qual traduz a dependência estatística das componentes turbulentas em dois pontos (P_1 e P_2) a uma dada frequência, associada à dimensão espacial dos turbilhões existentes no escoamento.

Davenport propôs uma expressão para a função de coerência, baseada num decaimento exponencial, com a seguinte forma [36],

$$coh(\Delta r, n) = e^{-\hat{f}} \quad (4.103)$$

onde

$$\hat{f} = \frac{n \cdot \sqrt{C_{ex}^2 \cdot \Delta x^2 + C_{ey}^2 \cdot \Delta y^2 + C_{ez}^2 \cdot \Delta z^2}}{\frac{1}{2}(U(P_1) + U(P_2))} \quad (4.104)$$

Os coeficientes C_{ex} , C_{ey} e C_{ez} , designados coeficientes de atenuação ou coeficientes de decaimento exponencial, são obtidos experimentalmente, sendo fornecidas na literatura da especialidade. Estes

coeficientes dependem significativamente da rugosidade do terreno, da altura acima do solo e da velocidade do vento[3].

Como indicação da ordem de grandeza dos coeficientes de decaimento exponencial, pode referir-se que, no caso do coeficiente associado à direcção transversal C_{ey} , os seus valores situam-se no intervalo entre 7 e 20 [36], sendo que Davenport [13] aconselha o valor de $C_{ey} = 7$, Simiu et al. [3] o valor de $C_{ey} = 16$ e Hansen et al. [2] o valor de $C_{ey} = 10$ (tendo estes últimos observado uma elevada dependência do coeficiente C_{ey} relativamente à relação $\Delta y/z$ [2, 3]).

No caso do coeficiente de atenuação associado a direcção vertical C_{ez} , os valores aconselhados encontram-se no intervalo entre 6 e 10 [36]. Autores como Simiu et al. [3] e Hansen et al. [2] sugerem o valor $C_{ez} = 10$.

Relativamente ao coeficiente de decaimento exponencial segundo a direcção longitudinal C_{ex} , os valores sugeridos por Simiu et al. [3] são, para a região sobre a água, $C_{ex} = 3$, e sobre terra $C_{ex} = 6$.

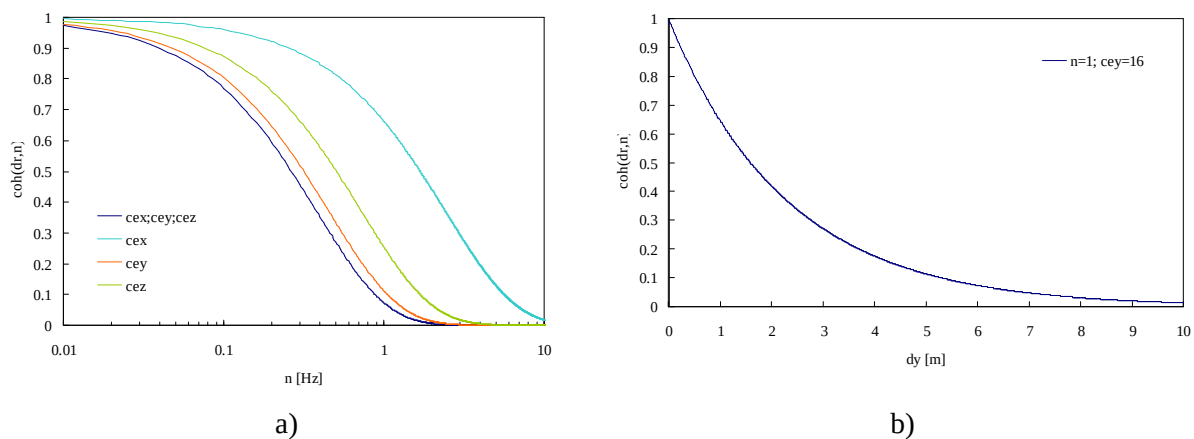


Figura 4.27 – Representação da função de coerência em função da frequência (a) e em função da distância transversal, na direcção y (b).

O formato utilizado para a função de coerência na expressão (4.103) tem como principal vantagem a sua simplicidade mas, apresenta duas inconsistências.

Em primeiro lugar, a função de coerência é positiva para quaisquer distâncias, levando a um valor positivo do integral do co-espectro de potência no plano perpendicular à direcção da velocidade média do vento, o que entra em conflito com a definição da componente longitudinal de turbulência com média zero.

Além disso, a função de coerência aproxima-se da unidade para frequências muito baixas, o que não é verdade para distâncias Δr da mesma ordem de grandeza ou mesmo superiores ao tamanho dos turbilhões médios, onde a estrutura do vento é caracterizada por uma falta de correlação mesmo nas frequências mais baixas. Este aspecto pode ser de grande importância para um vasto número de estruturas, tais como pontes em consola durante a fase construtiva.

Durante os anos 90, Krenk desenvolveu um modelo que assenta num formato exponencial modificado, que superou estas duas inconsistências [2].

4.4.4. Densidades espectrais das flutuações transversais

Interessa também caracterizar a função densidade espectral de potência das componentes de flutuação laterais $S_v(n)$ e verticais $S_w(n)$, da velocidade do vento.

Segundo Simiu et al. [3], o rácio entre os espectros de potência das flutuações lateral e vertical e o espectro de potência das flutuações longitudinais, para a zona de altas frequências, conduz a um valor aproximadamente de $\frac{4}{3}$, podendo por isso escrever-se

$$\frac{n.S_v(n, z)}{u_*^2} \approx \frac{n.S_w(n, z)}{u_*^2} \approx \frac{4}{3} \frac{n.S_u(n, z)}{u_*^2} \approx 0,37 \cdot f_z^{-\frac{2}{3}} \quad (4.105)$$

com

$$f_z = \frac{n.z}{U(z)} \quad (4.106)$$

Tal como sucede em relação à função densidade espectral das flutuações longitudinais, diversas formas de caracterizar foram propostas por diversos autores. As mais utilizadas, e que se passam a descrever, são as formulações de Lumley e Panofsky, Kaimal e Von Karman.

Lumley e Panofsky [3] propuseram a seguinte expressão para a função densidade espectral de potência das flutuações verticais, válida para alturas inferiores a 50 metros,

$$\frac{n.S_w(n, z)}{u_*^2} = \frac{3,36 \cdot f_z}{1 + 10,0 \cdot f_z^{\frac{5}{3}}} \quad \text{com } f_z = \frac{n.z}{U(z)} \quad (4.107)$$

De acordo com medições referenciadas por Simiu et al. [3], o espectro cruzado das flutuações verticais em dois pontos P_1 e P_2 , distanciados de Δy e situados à mesma cota z , pode ser expressa por

$$S_{w1w2}(n, \Delta y) = S_w(n, z) \cdot \exp \left[-\frac{8 \cdot n \cdot \Delta y}{U(z)} \right] \quad (4.108)$$

Kaimal propôs duas expressões para a função densidade espectral de potência, uma para caracterizar a componente lateral da turbulência e outra para caracterizar a componente vertical [1],

$$\frac{n \cdot S_v(n, z)}{u_*^2} = \frac{15 \cdot f_z}{(1 + 9 \cdot 5 \cdot f_z)^{5/3}} \quad \text{com } f_z = \frac{n \cdot z}{U(z)} \quad (4.109)$$

$$\frac{n \cdot S_w(n, z)}{u_*^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot f_z}{1 + 5 \cdot 3 \cdot f_z^{5/3}} \quad \text{com } f_z = \frac{n \cdot z}{U(z)} \quad (4.110)$$

Von Karman propôs igualmente uma expressão alternativa para os espectros lateral e vertical das flutuações [1],

$$\frac{n \cdot S_i(n, f_i)}{\sigma_i^2} = 4 \cdot f_i \frac{1 + 188 \cdot 4 \cdot (2 \cdot f_i)^2}{(1 + 70 \cdot 8 \cdot (2 \cdot f_i)^2)^{1/6}} \quad (4.111)$$

com

$$f_i = \frac{n \cdot l_i^x}{U(z)} \quad (4.112)$$

sendo o índice i representativo da componente turbulenta em questão ($i = v, w$).

Para situações em que o terreno apresenta baixa rugosidade, verifica-se que [1]

$$l_v^x \approx 0,3 \cdot L_v^x \quad (4.113)$$

$$l_w^x \approx 0,4 \cdot L_w^x \quad (4.114)$$

Na Figura 4.28 a) encontram-se representadas graficamente as equações (4.96), (4.107) e (4.109), bem como (4.110), sendo estas as expressões aconselhadas por Simiu et al. [3]. Na Figura 4.28 b) aparem ilustradas, para um ponto à altura de 65m, as equações (4.110) e (4.111), correspondentes à componente vertical w da flutuação da velocidade do vento, tendo a última expressão sido representada para dois valores da escala de turbulência l_w^x .

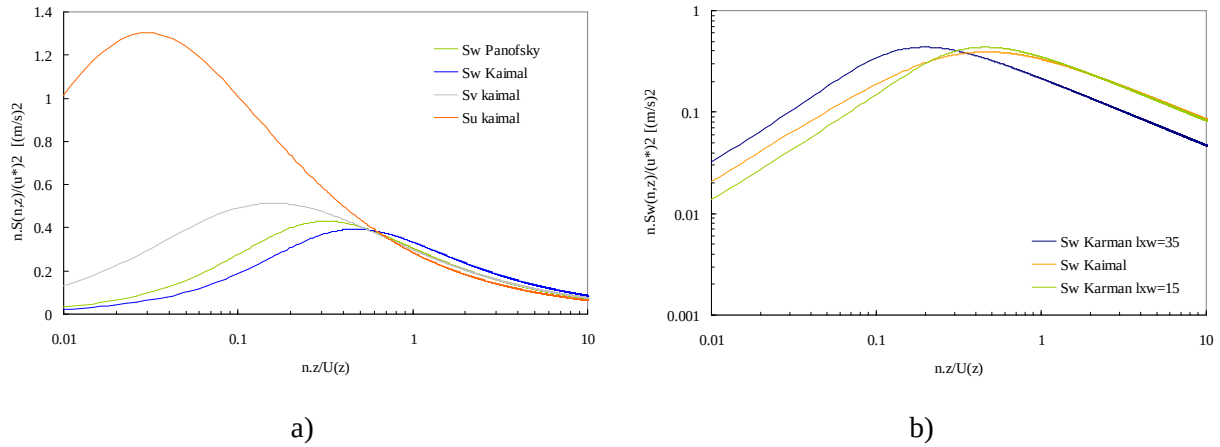


Figura 4.28 – Comparação das funções densidade espectral reduzida das componente u, v, w (a) aconselhadas por Simiu[3] e da componente vertical w (b) para um ponto a altura de 65m.

4.4.5. Factor de rajada (velocidade média vs velocidade de ponta)

Tendo em vista o projecto de estruturas sob a acção do vento, diversos códigos apresentam valores para a velocidade média e para a velocidade de ponta (também designada por velocidade de rajada), os quais resultam de valores registados em estações meteorológicas.

A velocidade de ponta corresponde ao valor máximo observado no decurso de um determinado período de tempo, sendo este de 10 minutos ou 1 hora. Esta velocidade de ponta depende, evidentemente da velocidade média, mas tal como a natureza do vento, tem um carácter aleatório.

Assumindo que a velocidade longitudinal do vento segue uma lei de distribuição de probabilidade gaussiana, pode mostrar-se que o valor espectável da velocidade de ponta $\hat{U}$ pode ser dado aproximadamente pela expressão

$$\hat{U} = \bar{U} + k_p \cdot \sigma_u \quad (4.115)$$

onde $\bar{U}$ representa a velocidade média e k_p o factor de pico, que ronda o valor aproximado de 3,5.

Cremona et al. [1] propõem uma expressão em função da intensidade de turbulência à altura z do local a considerar,

$$\hat{U}(z) = \bar{U}(z) \cdot (1 + 2,8 \cdot I_u(z)) \quad (4.116)$$

Assim, a partir destas expressões, pode obter-se um perfil de velocidade de ponta, perfil este que representa uma envolvente de velocidades de rajada em altura, já que a ocorrência dos picos de velocidade, ou seja, a ocorrência das rajadas, não se dá, simultaneamente, em todas as alturas.

Os equipamentos meteorológicos utilizados na aquisição de registos das velocidades do vento a longo termo não apresentam o grau de precisão ideal para o registo de velocidades de ponta. Deste modo é habitual obter-se os valores da velocidade de ponta através da média dos valores referentes a períodos de registo muito curtos que no caso dos instrumentos de aquisição mais comuns, é de 2 a 3 segundos [18].

O factor de rajada, $\hat{G}(z)$, é dado pelo rácio entre a velocidade de rajada e a velocidade média,

$$\hat{G}(z) = \frac{\hat{U}(z)}{\bar{U}(z)} \quad (4.117)$$

Podendo concluir-se pelas relações anteriores, existir uma elevada dependência deste factor relativamente à altura z e à rugosidade do terreno (diminuindo em altura e aumentando com a rugosidade).

No Quadro 4.9 apresenta-se, a título ilustrativo, a velocidade média e a velocidade de ponta, bem como o factor de rajada, para uma altura acima do solo de 10m, em função dos tipos de rugosidade indicados pelo Eurocódigo 1 [23].

Quadro 4.9 – Valores da velocidade média, da velocidade de rajada e do factor de rajada para 3 tipos de terreno do Eurocódigo 1 [23].

	0 (mar)	II (campo aberto)	IV (urbano)
$\hat{U}(10)$ [km/h]	165	155	110
$U(10)$ [km/h]	122	100	60
$G(10)$	1,35	1,55	1,83

4.4.6. Regulamentação

Nesta secção procura sistematizar-se a informação constante de diversos códigos, relacionada com o tratamento da turbulência atmosférica. À semelhança do efectuado em 4.3.4 relativamente à

velocidade média, começa por se descrever a abordagem seguida pelo RSA [26] e pelo Eurocódigo 1 [23], referindo-se posteriormente informação relativa a vários códigos internacionais.

4.4.6.1. Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes

O RSA, no que se refere à flutuação da velocidade do vento remete a sua consideração para espectros e correlações espaciais, as quais devem ser obtidas por consulta bibliográfica adequada, revelando-se assim omissos no que se refere a este ponto.

Contudo, aquando da definição da pressão dinâmica, a aplicar de forma estática para a análise dos efeitos da acção do vento sobre estruturas correntes, o RSA introduz o conceito de velocidade de rajada.

Na definição das velocidades de rajada foi adoptado um período de registo de 5 segundos, que se julgou o adequado às dimensões das construções correntes Portuguesas. Na quantificação, destes valores a partir de registos, surgiram alguns problemas relacionados com o grau de incerteza dos registos e dos instrumentos de aquisição, pelo que se procedeu à quantificação da velocidade de rajada de uma forma indirecta, partindo de registos de velocidades médias.

Assim sendo, a referida velocidade de rajada foi obtida adicionando-se à velocidade média um acréscimo de velocidade Δu , correspondente ao valor médio da distribuição de extremos, em 10 minutos, de um processo estocástico estacionário, cujo espectro se obteve das componentes longitudinais da velocidade do vento, filtrando-o por um filtro ideal passo baixo com ganho constante e frequência de corte puro de $0,2\text{Hz}$ [34]. Assim partindo do espectro proposto por Davenport para a componente longitudinal da velocidade do vento, obteve-se o valor médio dos máximos das flutuações da velocidade Δu , o qual pode exprimir-se através de,

$$\Delta u \approx 2,6 \cdot \sigma_u \quad (4.118)$$

sendo este o acréscimo de velocidade que se deve adicionar ao valor médio da velocidade do vento.

Para ventos de elevada intensidade, a turbulência depende predominantemente da maior ou menor rugosidade do solo, pelo que, se se adoptar a função densidade espectral de Davenport, pode obter-se, por integração [34],

$$\sigma_u \approx \sqrt{6 \cdot \kappa} \cdot U(10) \quad (4.119)$$

Deste modo, tendo presente a equação (4.118) e atendendo a que a variação da intensidade de turbulência em altura é muito ténua, pode obter-se a seguinte expressão independente da altura

$$\Delta u \approx 2,6\sqrt{6\kappa}U(10) \quad (4.120)$$

onde κ representa o coeficiente de rugosidade, que toma os valores de 0,015 e 0,0075, para os tipos de rugosidade I e II do RSA, respectivamente.

Tendo presente que as velocidades de referência adoptados pelo RSA são de $18m/s$ e $25m/s$, respectivamente, para os terrenos de rugosidade “tipo I” e “tipo II”, pode concluir-se que, o acréscimo de velocidade Δu , adoptado para quantificar a velocidade de rajada a utilizar na verificação de estruturas correntes com frequências superiores a $0,5Hz$, pode ser considerado como tendo o valor constante de $14m/s$ [34].

Para estruturas com um grau de complexidade superior ou que apresentem frequências próprias inferiores a $0,5Hz$, este método simplificado pode conduzir a resultados insatisfatórios, devendo proceder-se a uma análise cuidada dos efeitos de rajada.

4.4.6.2. Eurocódigo 1 – Parte 1-4: Acção do Vento

O Eurocódigo 1, no que se refere à caracterização da componente de flutuação longitudinal da velocidade do vento e tratamento de acções decorrentes, apresenta uma metodologia bastante detalhada que se passa a descrever.

Neste código para a caracterização da turbulência atmosférica, é proposta a seguinte expressão para a intensidade de turbulência (ver secção 4.4.1),

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u}{U(z)} = \frac{k_t}{c_o(z) \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad \text{para } z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \quad (4.121)$$
$$I_u(z) = I_u(z_{\min}) \quad \text{para } z \leq z_{\min}$$

a qual, como se pode observar, depende essencialmente da rugosidade do terreno, da altura z e do factor de turbulência k_t , cujo valor recomendado é 1. Além disso, o Eurocódigo 1 apresenta ainda a seguinte expressão para o desvio padrão da turbulência, função do factor de terreno k_r e da velocidade básica v_b (definidos no ponto 4.3.3.2), e ainda do factor de turbulência k_t

$$\sigma_u = k_r \cdot v_b \cdot k_l \quad (4.122)$$

Com vista à quantificação das acções devidas à componente longitudinal das flutuações da velocidade do vento, o Eurocódigo 1 define uma pressão à velocidade de ponta q_p , composta pela soma de uma parcela devida à velocidade média com outra parcela relativa à componente turbulenta da velocidade do vento,

$$q_p(z) = \left[1 + 2 \cdot k_p \cdot I_u(z) \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2(z) = c_e(z) \cdot q_b \quad (4.123)$$

onde $c_e(z)$ representa factor de exposição dado por

$$c_e(z) = \frac{q_p(z)}{q_b} \quad (4.124)$$

sendo q_b a pressão para a velocidade básica, representada por

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 \quad (4.125)$$

e k_p o factor de pico, tomado, aproximadamente igual a 3,5 em consistência com a equação,

$$k_p = \sqrt{2 \cdot \ln(v \cdot T)} + \frac{0,6}{\sqrt{6 \cdot \ln(v \cdot T)}} \quad k_p \geq 3 \quad (4.126)$$

Esta expressão é similar à apresentada no capítulo 2, representando v a frequência média de passagens ascendentes por zero e T o período de registo considerado, neste caso $T = 600$ segundos.

Porém, este código define outras grandezas caracterizadoras da componente turbulenta da velocidade do vento, tais como a função de densidade espectral de potência, a escala de turbulência e a função de coerência.

O Eurocódigo 1 adopta como espectro de potência (reduzido) a função de Kaimal, mas sob um formato modificado, em que os parâmetros a_1 e a_2 são, respectivamente, 6,8 e 10,2.

$$S_L(n, z) = \frac{n \cdot S_u(n, z)}{\sigma_u^2} = \frac{a_1 \cdot f_L(n, z)}{(1 + a_2 \cdot f_L(n, z))^{\frac{5}{3}}} \quad \text{com} \quad f_L(n, z) = \frac{n \cdot L(z)}{U(z)} \quad (4.127)$$

onde $f_L(n, z)$ representa a frequência reduzida e $L(z)$ a escala de turbulência definidora da dimensão do turbilhão médio do vento natural [23].

Para uma altura z inferior a $200m$, a escala de turbulência pode ser calculada a partir de

$$L(z) = L_t \cdot \left(\frac{z}{z_t} \right)^{\alpha_L} \quad \text{para } z \geq z_{\min} \quad (4.128)$$

$$L(z) = L(z_{\min}) \quad \text{para } z < z_{\min}$$

Como altura de referência z_t deve tomar-se o valor de $200m$ e como escala de referência L_t o valor de $300m$. O expoente α_L deve respeitar a escala de rugosidade para o terreno em questão, de acordo com a equação

$$\alpha_L = 0,67 + 0,05 \cdot \ln(z_0) \quad (4.129)$$

A expressão proposta por este código para a função de coerência é similar a expressão de Davenport (ver equação (4.103)),

$$coh(y, y + \Delta y, z, z + \Delta z, n) = \exp \left(- \frac{2 \cdot n \cdot \sqrt{C_{ey}^2 \cdot \Delta y + C_{ez}^2 \cdot \Delta z}}{U(z) + U(z + \Delta)} \right) \quad (4.130)$$

mas, neste caso, os coeficientes de decaimento exponencial propostos são de $11,5$ tanto para a componente vertical como para a lateral.

Na Figura 4.29, é ilustrada a função densidade espectral reduzida proposta pelo Eurocódigo 1, para um ponto à altura de 10 metros.

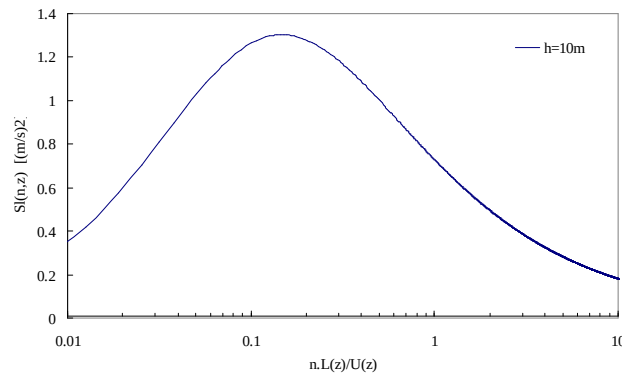


Figura 4.29 – Função densidade espectral reduzida indicada pelo Eurocódigo 1, para uma altura de 10 metros acima do solo.

4.4.6.3. Outra regulamentação

Neste secção, sistematiza-se de forma sumária a informação relativa à caracterização da turbulência contida nos 7 códigos referidos em 4.3.3.3. Para tal, apresenta-se sob a forma de um quadro o tipo de função densidade espectral de potência da componente longitudinal da turbulência adoptada por cada um destes códigos [19-23, 27, 28, 35]

Quadro 4.10 – Funções densidade espectral de potência adoptadas por cada um dos códigos [19-23, 27, 28, 35]

Código	Forma da função densidade espectral de potência das flutuações longitudinais
AS/NZS1170.2:2002	Von Kàrmàn
ASCE-7-05	Kaimal (modificada)
EN 1991-1-4:2005	Kaimal (modificada)
NBCC(1995)	Davenport
AIJ(2004)	Von Kàrmàn
ISO 4354:1997	-
ECCS TC12:1986	Kaimal (modificada)

As diferenças básicas entre as diversas abordagens adoptadas por estes códigos para as funções densidade espectral de potência consistem, antes de mais, nos expoentes utilizados no denominador e na definição da coordenada adimensional (frequência reduzida) adoptada para cada uma das expressões.

O formato do espectro de Kaimal (modificado), utilizado por alguns dos códigos referidos no Quadro 4.10, difere apenas no valor adoptado para as constantes a_1 e a_2 (ver formato da expressão (4.127)) de forma a respeitarem a condição inicial expressa por (4.88). No caso do Eurocódigo 1 estas constantes apresentam o valor $a_1 = 6,8$ e $a_2 = 10,2$, no caso da ASCE-7-05 [21] tomam o valor $a_1 = 33,3$ e $a_2 = 50$ e no caso da ECCS [22] tomam o valor de $a_1 = 49,8$ e $a_2 = 66$.

5. COMPORTAMENTO AERODINÂMICO DE ESTRUTURAS ESBELTAS

5.1. Introdução

Uma estrutura imersa num escoamento está sujeita a pressões superficiais induzidas por este (pressões aerodinâmicas). Se o escoamento incidente for turbulento, surgem flutuações temporais das pressões superficiais que se registam na estrutura, podendo estas resultar também de flutuações do escoamento induzidas pela própria estrutura.

Com efeito, se a estrutura se move e se deforma consideravelmente sob acção das forças superficiais induzidas, estas deflexões, afectam as forças induzidas pelo escoamento na medida em que alteram as respectivas condições de fronteira, o que leva a nova alteração das deflexões da estrutura [3].

A aerodinâmica é a área de estudo do movimento dos fluidos gasosos e das forças (forças aerodinâmicas) que estes exercem sobre os corpos sólidos neles imersos [38]. Já a aeroelasticidade é a disciplina relacionada com o estudo de fenómenos em que as forças aerodinâmicas e o movimento estrutural interagem significativamente [3].

Uma instabilidade aerodinâmica pode ser um fenómeno que ocorre inteiramente dentro de um escoamento, tal como quando um rasto de vórtices é libertado na esteira de um corpo sólido. Mas, se o corpo imerso no escoamento se deforma sob o efeito de alguma força e as deflexões derem origem a um crescimento das deformações com carácter oscilatório e/ou divergente, então está-se na presença de um fenómeno de instabilidade aeroelástico. Um fenómeno de instabilidade puramente aerodinâmico, tal como a libertação de vórtices, pode ocasionar deflexões estruturais, bem como o início de um fenómeno com carácter aeroelástico. Todas as instabilidades aeroelásticas envolvem forças aerodinâmicas que actuam sobre o corpo em consequência do seu movimento. Estas forças são designadas de forças auto-induzidas.

Apesar de alguns destes fenómenos estarem ainda não perfeitamente compreendidos, este capítulo dedica-se à apresentação de algumas das abordagens teóricas da modelação dos efeitos aerodinâmicos sobre estruturas oscilantes.

Na segunda secção (5.2) deste capítulo, são apresentadas algumas particularidades dos escoamentos, com o objectivo de introduzir o conhecimento das principais propriedades mecânicas dos fluidos, tendo como finalidade a caracterização das forças aerodinâmicas.

Seguidamente, na secção 5.3, a atenção centra-se na análise dos efeitos de rajada segundo uma abordagem quasi-estacionária no domínio do tempo e no domínio da frequência. Por fim, na última

secção (5.4), é realçada a análise de vibrações laterais induzidas pela libertação de vórtices em estruturas esbeltas bastante simples.

Torna-se ainda oportuno referir alguns autores cuja contribuição para a compreensão dos temas abordados neste capítulo foi de grande relevância, podendo salientar-se: Davenport, Simiu e Scanlan [3], Holmes [18], Dyrbye e Hansen [2], Cook [16, 30, 39], Cremona e Faucriat [1], Vickery [2, 3], Scruton [40], Miyata [41], Shinozuka [42-45], Deodatis [44, 46] e Mendes [13].

5.2. Particularidades dos Escoamentos

5.2.1. Princípios da mecânica dos fluidos

5.2.1.1. Equações de Navier-Stokes (Equações do movimento e da continuidade)

A mecânica dos fluidos é regida, num plano macroscópico, pelas equações de Navier-Stokes, deduzidas dos habituais princípios da mecânica: conservação da massa, da energia e do movimento. No contexto do vento a baixa altitude, estas equações podem ser simplificadas de maneira importante, tendo em conta alguns pressupostos que se passam a descrever.

Na camada limite atmosférica, as velocidades encontradas são largamente inferiores à velocidade do som e a massa volúmica do ar é suposta constante (sendo esta a hipótese da incompressibilidade).

A temperatura do ar é aparentemente constante (tornando-se a equação da conservação da energia pouco útil).

O ar é um gás leve, sendo que o seu peso próprio é desprezável relativamente às outras forças presentes.

Estas equações são completadas por uma lei de estado e por uma lei de comportamento do fluído.

O ar é normalmente considerado como um gás perfeito e como um fluído newtoniano. Esta última hipótese pressupõe uma relação de linearidade entre as tensões de corte τ , entre as camadas de ar, e o gradiente de velocidade

$$\tau = \mu_{ar} \frac{dU}{dn} \quad (5.1)$$

onde a viscosidade μ_{ar} funciona como um factor de proporcionalidade, que traduz os efeitos internos de fricção do fluído. Estas relações permitem então passar das equações gerais da mecânica dos

fluidos para as equações da aerodinâmica a baixa velocidade, que se aplicam ao ar sob condições isotérmicas e incompressíveis.

As equações de Navier-Stokes são então reduzidas ao sistema de equações diferenciais não-lineares (5.2) e (5.3) cuja resolução, apesar das simplificações, apresenta um grau de dificuldade bastante elevado.

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (5.2)$$

$$\rho_{ar} \cdot \frac{du}{dt} + \rho_{ar} \cdot u \wedge \overline{\operatorname{rot}} u = -\overline{\operatorname{grad}} p + \mu_{ar} \cdot \overline{\operatorname{rot}} (\overline{\operatorname{rot}} u) + \rho \cdot a \quad (5.3)$$

A equação (5.2) é designada por equação de continuidade e a equação (5.3) como equação da quantidade de movimento. O vector u representa o vector velocidade, p a pressão, ρ_{ar} a massa volúmica do ar, a o vector aceleração devido às forças de volume e superfície e t a variável tempo. Para a resolução deste sistema de equações é naturalmente necessária a adopção de condições de fronteira.

Nas equações da quantidade de movimento, o primeiro membro é constituído pela derivada da velocidade em relação ao tempo, representando esta a aceleração de uma partícula de fluído que se move. O segundo membro traduz o efeito das tensões internas e pode decompor-se num termo da pressão hidrostática, num termo da viscosidade devido ao atrito interno e num termo de acelerações devido as forças de volume e de superfície. O termo da viscosidade constitui um elemento importante na aerodinâmica, que não pode ser negligenciado num escoamento junto a uma parede sólida, devido à camada limite que se desenvolve.

5.2.1.2. Equações de Euler

As equações de Euler são uma simplificação das equações de Navier-Stokes, nas quais se despreza o termo devido à viscosidade. Estas equações são utilizadas, na prática, para calcular escoamentos longe de paredes sólidas e, no campo da aeronáutica, para escoamentos compressíveis a alta velocidade, sendo utilizados modelos empíricos de parede, a fim de poder ter em conta os efeitos da camada limite [1]. Pelas características apresentadas, o interesse das equações de Euler é limitado, no que toca aos efeitos do vento.

5.2.1.3. Equação de Bernoulli

Da integração das equações de Euler, pode obter-se a equação de Bernoulli que, por sua vez, é de grande utilidade no estudo dos efeitos aerodinâmicos. Naturalmente que a equação de Bernoulli contém as mesmas hipóteses das equações de Euler, acrescidas de que o escoamento é considerado irrotacional, ou seja $\nabla \times u = 0$. Contudo, em casos particulares, a sua resolução analítica torna-se possível sendo, por isso, bastante utilizada. A equação de Bernoulli pode ser então escrita

$$\rho_{ar} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot |\overline{grad} \psi|^2 + p = Constante \quad (5.4)$$

onde o potencial de velocidade ψ é definido por $u = \overline{grad} \psi$.

Apesar desta equação se apresentar como uma equação de energia, na realidade ela resulta da integração da equação do movimento em relação a uma variável pré-definida. A sua utilidade é bastante importante no caso de escoamentos estacionários, visto que permite relacionar directamente a pressão estática p com a pressão total p_0 , através de [1, 3],

$$\frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot u^2 + p = p_0 \quad (5.5)$$

Esta relação é bastante utilizada nos ensaios em túnel de vento para calcular a velocidade média do escoamento a partir da medição das pressões estáticas e totais (pressão à velocidade nula [1]), usando um tubo de Prandtl.

A parcela $\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot u^2$ é conhecida, neste contexto, por pressão dinâmica.

5.2.1.4. Escoamento segundo linhas de fluxo (ou linhas de corrente) curvas

Considera-se agora um escoamento bidimensional entre duas linhas de fluxo concêntricas, a uma distância dr , com um raio de curvatura r . Em ordem a manter a curvatura das linhas de fluxo, este escoamento deve experimentar uma aceleração na direcção do centro da curvatura de valor u^2/r , onde u é designada por velocidade tangencial do escoamento.

Sendo a pressão actuante no elemento de fluido em estudo representada por p , esta aceleração é balanceada por um diferencial de pressão dp entre as duas linhas de fluxo, segundo a direcção radial, tal como representado na Figura 5.1.

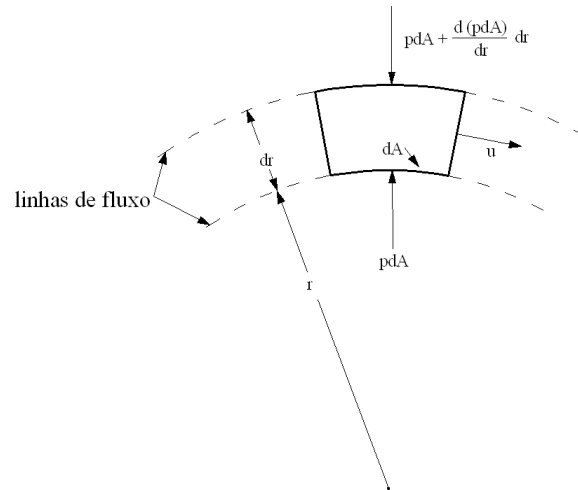


Figura 5.1 – Escoamento segundo um percurso circular [3]

Desta forma, a equação do movimento para um elemento de fluido, pode ser traduzida por

$$dp.dA = \rho_{ar}.dr.dA \frac{u^2}{r} \quad (5.6)$$

sendo ρ_{ar} a massa volúmica do ar e dA a área do elemento num plano normal ao plano da figura. Esta relação mostra que a variação da pressão normal às linhas de fluxo, na ausência de outras forças, é dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho_{ar} \frac{u^2}{r} \quad (5.7)$$

A equação de Bernoulli (5.5) permite então o cálculo da pressão ao longo de uma linha de fluxo.

Salienta-se o caso particular em que o escoamento é completamente circular apresentando o valor constante p_0 em todas as linhas de fluxo. Este é o caso do escoamento num turbilhão pontual [47], também conhecido por vórtice livre. Desta forma, se se derivar a equação (5.5) em função do raio, pode obter-se a relação

$$\rho_{ar}.u \frac{du}{dr} + \frac{dp}{dr} = 0 \quad (5.8)$$

que combinada com a equação (5.7), leva a

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r} \quad (5.9)$$

Da integração da equação anterior, pode obter-se uma simples lei que estabelece, para um fluido incompressível não viscoso, a relação teórica entre o raio posicional r e a velocidade tangencial u num vórtice livre

$$u.r = C_{vor} = Constante \quad (5.10)$$

Contudo, para um fluido real, os efeitos da viscosidade estão presentes, e por isso perto do centro do vórtice, uma determinada porção de fluido sofre um efeito de bloqueio fazendo com que rode como um corpo rígido e não como o fluido perfeito descrito acima. Desta forma, à medida que o raio r tende para zero, a velocidade também tende para zero [3].

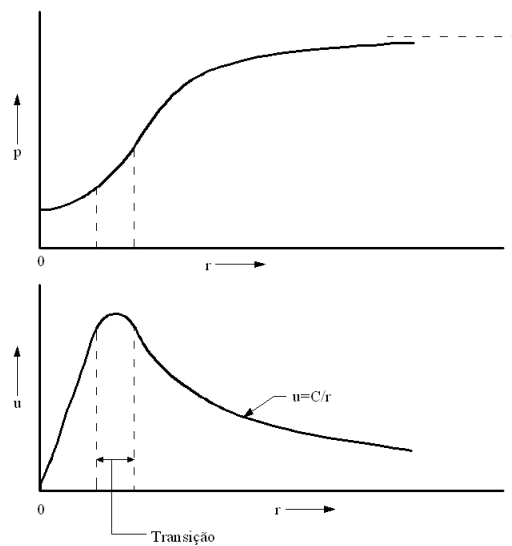


Figura 5.2 – Comportamento de um vórtice livre num fluido real. Distribuição de pressão e velocidade em função do raio do vórtice [3].

5.2.1.5. Parâmetros adimensionais importantes na caracterização de escoamentos

Foi mencionada anteriormente a dificuldade na resolução das equações de Navier-Stokes, no caso da aerodinâmica. Desta forma, os ensaios em túnel de vento representam um meio de obter informações fiáveis acerca dos escoamentos e dos seus efeitos sobre estruturas. Contudo, é compreensível que tenham de ser respeitadas determinadas regras de semelhança, com a finalidade de o problema simulado em túnel de vento sobre um modelo físico à escala reduzida ter um comportamento extremamente próximo do caso real.

Por isso, a transformação da equação da quantidade de movimento numa equação dependente de grandezas sem dimensão permite colocar em evidência determinados parâmetros adimensionais que

regem, simultaneamente, o comportamento do modelo físico e do protótipo. Pode definir-se, assim, uma lista de grandezas físicas de referência, com a finalidade de adimensionalizar as variáveis intervenientes na equação, tais como, B uma largura de referência, g a aceleração da gravidade, U a velocidade média do escoamento e T o período de referência, que mais tarde será detalhado.

A equação da quantidade de movimento na forma adimensionalizada pode ser representada através de

$$St \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (\tilde{u} \wedge \overline{\text{rot}} \tilde{u}) - \overline{\text{grad}} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \tilde{u}) = \frac{1}{Fr^2} \tilde{a} \quad (5.11)$$

onde, o $\tilde{x} = x/B$, $\tilde{u} = u/\bar{U}$, $\tilde{p} = p/\rho_{ar} \bar{U}^2$, $\tilde{a} = a/g$ e $\tilde{t} = t/T$ são grandezas sem dimensão.

Passa-se então a descrever os parâmetros adimensionais que regem as relações de semelhança entre os escoamentos.

O número de Strouhal St é um parâmetro fundamental que representa a relação da largura de referência B com a distância percorrida por uma partícula de fluido $\bar{U}.T$, a uma velocidade de referência e durante um período de tempo de referência T do escoamento, através de

$$St = \frac{B}{\bar{U}.T} \quad (5.12)$$

Outro significado físico desta grandeza adimensional, relacionado com a libertação de vórtices, será descrito posteriormente.

O número de Reynolds Re constitui um parâmetro determinante para os efeitos de escala. Este representa fisicamente a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas exercidas sobre uma partícula de fluido, sendo definido por

$$Re = \frac{\rho_{ar}.U.D}{\mu_{ar}} = \frac{U.D}{\nu_{ar}} \quad (5.13)$$

A avaliação de um esforço numa estrutura, ao respeitar a analogia de Reynolds, implica respeitar também a proporção existente entre as forças de atrito associadas à viscosidade do fluido e as forças de pressão resultantes da velocidade do fluido. De facto, a analogia de Reynolds introduz a semelhança entre as camadas limites mais complexas dos descolamentos (camada de separação), permitindo, a qualquer momento, garantir que os esforços medidos sobre um modelo à escala reduzida se possam extrapolar para uma estrutura real.

O número de Froude Fr representa a razão entre as forças de inércia e as forças de gravidade. A semelhança que ele estabelece é contudo negligenciada, salvo em pontes suspensas, onde as forças de gravidade têm um papel importante.

$$Fr = \frac{\bar{U}}{\sqrt{B \cdot g}} \quad (5.14)$$

Naturalmente, outros parâmetros de semelhança têm grande importância para os ensaios em túnel de vento, como é o caso particular dos parâmetros ligados à definição da camada limite atmosférica, em que a turbulência deve ser correctamente reproduzida.

Pode ainda fazer-se referência, a título de curiosidade (dada a pouca relevância no domínio da engenharia do vento), a um parâmetro adimensional designado por número de Mach Ma . Este parâmetro é representado pela razão entre a velocidade do vento e a velocidade do som nas mesmas condições e traduz os efeitos da compressibilidade do ar. A título indicativo, é corrente ter em conta a compressibilidade para o número de Mach superior a 0,3, ao qual corresponde uma velocidade de referência superior a 360 km/h, tornando-se por isso legítimo desprezar o efeito da compressibilidade visto as velocidades em causa serem bastante mais baixas.

5.2.1.6. A camada limite e a separação da camada limite

A gama dos valores da viscosidade encontrados em diferentes fluidos é bastante grande. A viscosidade do ar em condições meteorológicas de pressão e de temperatura habituais apresenta um valor relativamente baixo, apesar de, em determinadas situações, esta pequena viscosidade ter um papel relativamente preponderante. Uma importante manifestação desses efeitos viscosos ocorre no processo de formação das camadas limite.

Considerando um fluxo de ar sobre uma superfície pouco rugosa (“smooth stationary surface”), verifica-se experimentalmente que o ar adere à superfície, o que causa um retardamento do movimento deste na camada mais próxima da superfície, designada de camada limite. Nesta camada, a velocidade do ar cresce de zero (junto a superfície) até ao seu valor total (no seu limite superior), a exemplo do que foi referido no capítulo anterior, para a acção do vento atmosférico.

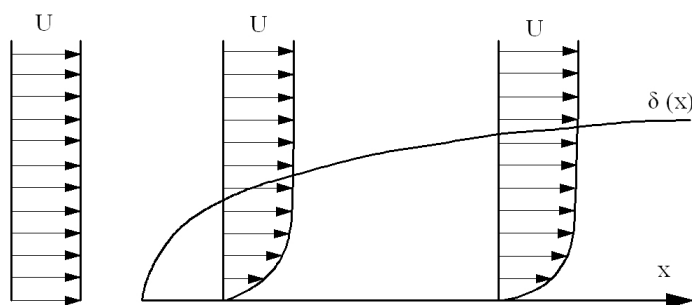


Figura 5.3 – Influência de uma superfície plana sobre a velocidade [36]

O facto do ar ter massa evidencia, de acordo com a segunda lei de Newton (e mais especificamente as equações de Navier-Stokes), a presença de efeitos de inércia, sendo estes, a par dos efeitos devidos à viscosidade, os efeitos que mais influenciam o escoamento. A relação entre estes dois efeitos torna-se então um indicador do tipo de características e comportamento do escoamento. Este indicador é representado pela razão entre as forças de inércia e as forças viscosas, tomando a forma do parâmetro adimensional de semelhança atrás descrito, designado por número de Reynolds Re (representado pela expressão (5.13)).

Assim pode concluir-se que quando Re é elevado predominam os efeitos de inércia, e que quando é pequeno, os efeitos da viscosidade são mais fortes.

A separação da camada limite da superfície ocorre se as partículas na camada limite em questão forem suficientemente desaceleradas pelas forças de inércia ao ponto do escoamento, junto à superfície, ser invertido. Através de processos ainda não muito bem explicados, na zona de descolamento podem gerar-se vórtices discretos, que são libertados para a esteira do corpo imerso no escoamento. Junto destes pontos de separação, podem ocorrer fortes fenómenos de sucção.

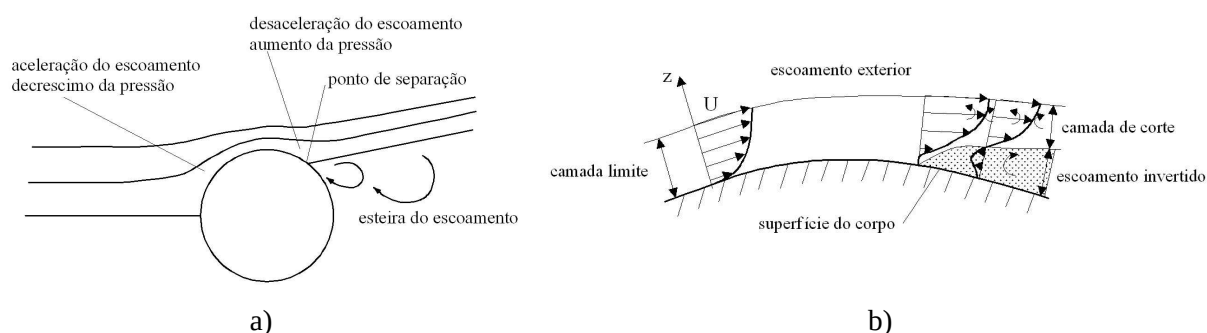


Figura 5.4 – Representação esquemática dos mecanismos global (a) [36] e local (b) [41] de separação da camada limite da superfície de um cilindro.

Os escoamentos de interesse prático apresentam números de Reynolds num intervalo entre zero e 10^5 ou 10^9 . O aumento progressivo do número de Reynolds de um escoamento sobre um corpo imerso

produz um vasta gama de fenómenos, a que será feita referência em pormenor na secção 5.2.2. Por outro lado, dependendo da magnitude do número de Reynolds, o escoamento pode ser mais ou menos turbulento.

5.2.2. Caracterização do escoamento e a libertação de vórtices

5.2.2.1. Caracterização do escoamento

Cremona et al. [1] classificaram as estruturas imersas num escoamento em duas categorias: os perfis alares e os corpos não perfilados.

Os perfis alares são caracterizados pela sua forma arredondada, sem arestas vivas e com uma dimensão longitudinal bastante superior à dimensão transversal (Figura 5.5). O escoamento em torno e na sua esteira é perturbado pela presença deste tipo de estruturas.

No entanto, nas estruturas submetidas à acção do vento, este tipo de perfis, não é habitualmente utilizado. A maior parte das geometrias adoptadas afastam-se bastante do perfil de asa ideal, apresentam arestas vivas e são designadas por corpos não perfilados. O escoamento na sua presença, principalmente devido a existência de arestas vivas, dá origem à ocorrência de fenómenos de separação do escoamento das paredes do corpo.

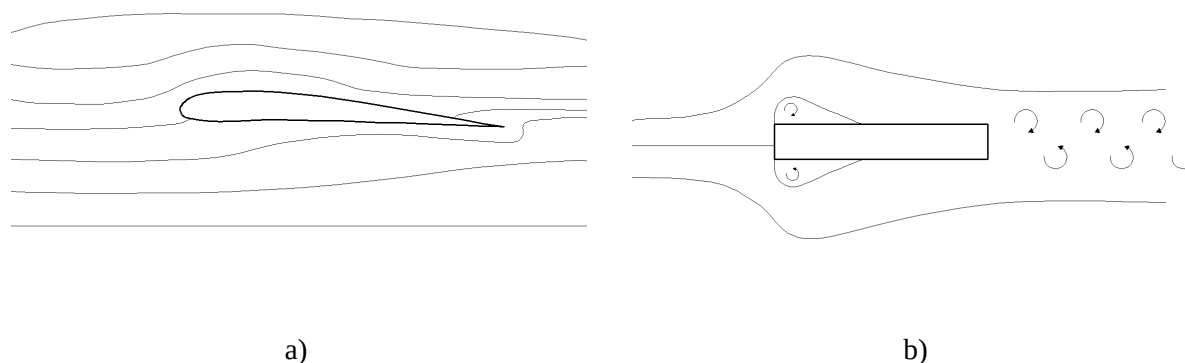


Figura 5.5 – Exemplo de um escoamento sobre um perfil de asa (a) e sobre um corpo com secção rectangular (b) [1]

A noção de separação do escoamento das paredes do corpo é fundamental para a compreensão de determinados fenómenos, tais como a libertação de vórtices.

De mais a mais, a separação da camada limite produz esforços sobre a estrutura imersa no escoamento bastante mais importantes que os de um escoamento que permanece em aderência.

Segundo Cremona et al. [1], a separação da camada limite do escoamento pode dar-se de duas formas distintas num corpo com superfícies curvas ou num corpo com arestas vivas.

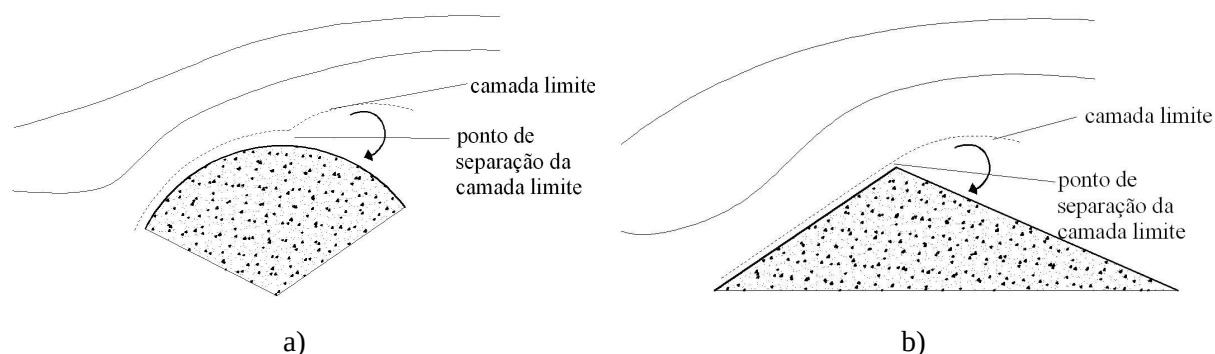


Figura 5.6 – Separação da camada limite, numa superfície curva (a) e sobre uma aresta viva (b) [1]

Se se olhar, inicialmente por simplicidade, para o escoamento de um fluido em torno de um corpo a duas dimensões, assumindo-se que o escoamento é independente do sistema de coordenadas normais ao plano de visão, podem detectar-se alguns fenómenos típicos de separação da camada limite das paredes do corpo. Se o corpo imerso no escoamento for um prisma quadrado com um lado normal ao fluxo do escoamento, este separa-se nas arestas frontais (ver Figura 5.7)

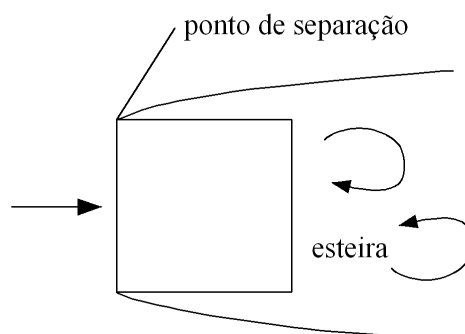


Figura 5.7 – Separação da camada limite numa secção quadrada [36]

Por outro lado, se este prisma tiver uma forma mais alongada na direcção do escoamento (como representado na Figura 5.8), ocorre igualmente uma separação do escoamento nas arestas frontais que, caso o corpo seja suficientemente alongado, poderá dar origem a uma nova aderência do escoamento às paredes do corpo imerso, voltando a registar-se uma separação junto às arestas posteriores do prisma. Caso ocorra ou não a nova junção do escoamento a montante das arestas frontais, esta dependerá principalmente de dois factores: o rácio das dimensões do corpo imerso e da turbulência do escoamento.

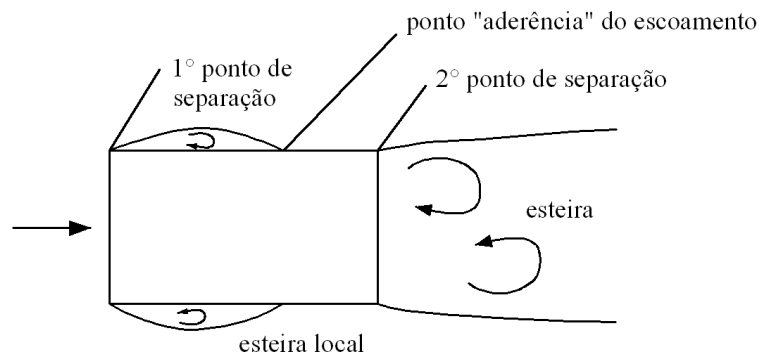


Figura 5.8 – Separação da camada limite numa secção rectangular [36]

Para uma secção de arestas vivas, as arestas são normalmente os pontos de separação do escoamento e por isso o padrão do escoamento não é muito sensível a mudanças do número de Reynolds. Para as secções com forma curva, como é o caso de cilindros, a posição do ponto de separação depende fortemente do número de Reynolds, sendo além disso bastante instável.

Um vasto número de situações podem ser criadas considerando o crescimento gradual da velocidade do escoamento em torno de um cilindro, sendo em cada situação identificada uma gama específica de números de Reynolds. Para valores muito baixos do número de Reynolds ($Re \cong 1$), o escoamento (assumido laminar na sua aproximação ao corpo) permanece a envolver o cilindro em toda a sua periferia (tal como se pode ver na Figura 5.9a). Para um número de Reynolds $Re \cong 20$, o escoamento permanece simétrico, mas a separação deste das paredes do corpo ocorre formando-se largos turbilhões junto da parede jusante do cilindro (Figura 5.9b). Para o intervalo $30 \leq Re \leq 5000$, regista-se a libertação de turbilhões (vórtices) alternados formando claramente um rasto turbilhonar a jusante do cilindro (ver Figura 5.9c). Este fenómeno tem uma particular importância, pelo que será descrito com maior pormenor, na secção 5.4.1.

À medida que o número de Reynolds cresce até ao intervalo $5000 \leq Re \leq 200000$, o escoamento a montante do ponto de separação continua laminar. No entanto, na zona de separação podem observar-se padrões tridimensionais de transição para um escoamento turbulento, registando-se o seu prolongamento para jusante do corpo. Acima de $Re \cong 200000$, o rasto turbulento registado, devido à separação da camada limite das paredes do corpo com forma circular, torna-se mais estreito (ver Figura 5.9e).

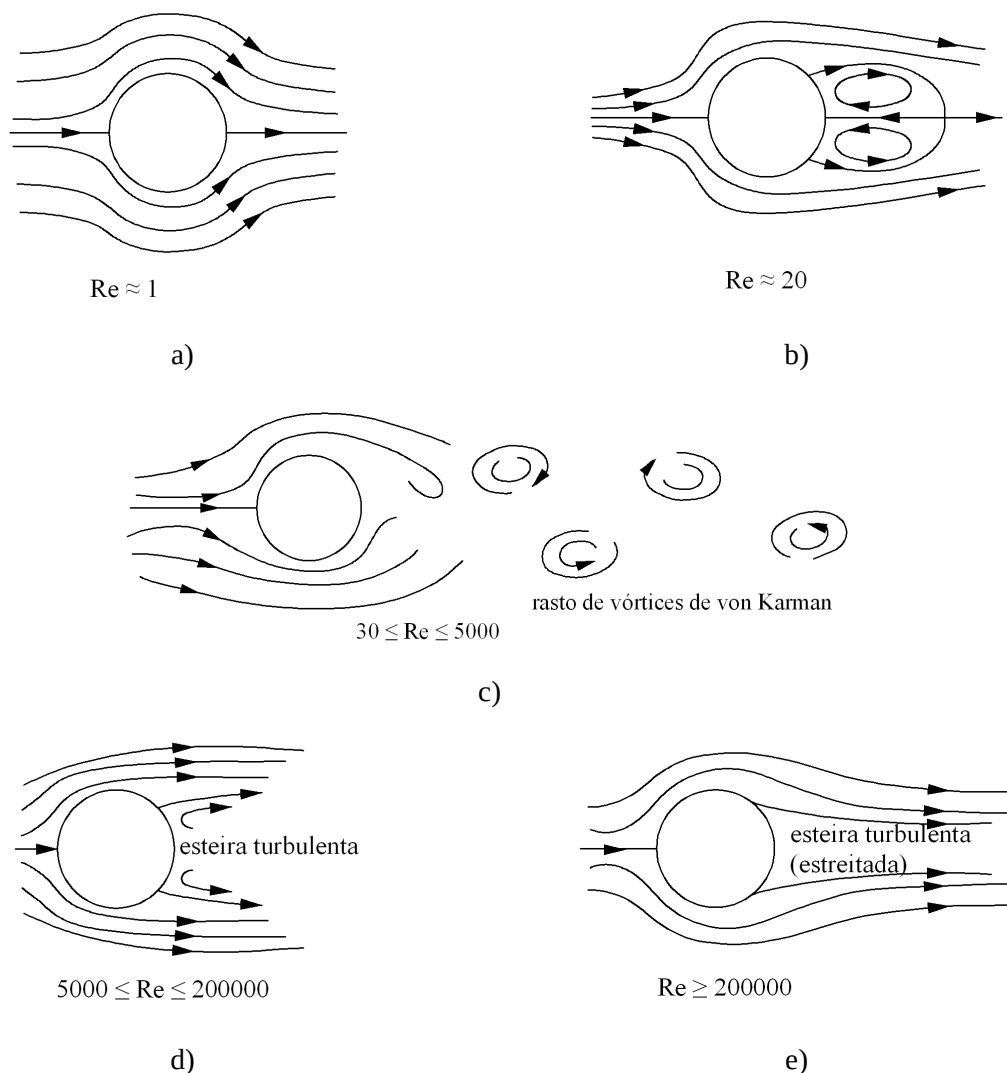


Figura 5.9 – Influência de uma secção circular no escoamento caracterizado com diferentes números de Reynolds [3].

O campo de escoamento tridimensional apresenta um carácter bastante mais complexo. A geometria estrutural e as características do terreno (os obstáculos a montante do corpo), enfatizam a necessidade de se proceder a estudos experimentais detalhados do escoamento, recorrendo a simulações em túnel de vento. Dado o grau de complexidade dos fenómenos gerados no escoamento tridimensional, muito poucos destes casos são passíveis de uma avaliação puramente analítica, apesar de, devido aos avanços em termos de processamento computacional, um novo caminho tem sido explorado com o recurso à Dinâmica Computacional de Fluidos [1], permitindo a previsão de fenómenos e, nomeadamente, o estudo da interacção do próprio escoamento com os corpos nele imerso [48].

Na Figura 5.10 é apresentado esquematicamente um exemplo de um fenómeno passível de ocorrer numa estrutura ordinária (o escoamento sobre uma parede).

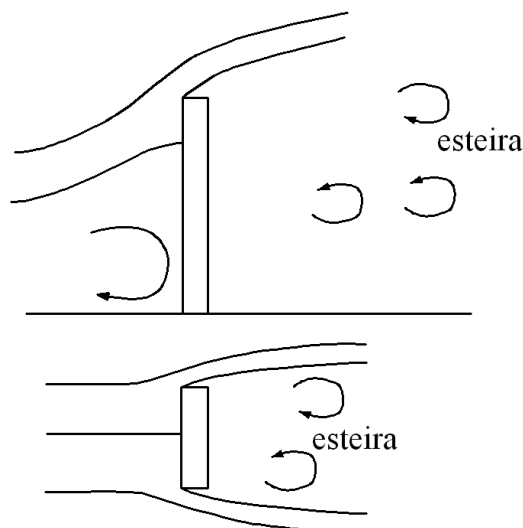


Figura 5.10 – Exemplo do efeito do escoamento sobre uma parede (alçado e planta) [36]

5.2.2.2. Liberação de vórtices

A liberação de vórtices na retaguarda de um obstáculo imerso num escoamento é um fenómeno relativamente conhecido. Em termos históricos, este fenómeno foi estudado experimentalmente no início do século XX por Henri Bernard em França e do ponto de vista mais teórico, por Theodor von Karman na Alemanha. Desta forma, o nome de turbilhões de Bernard-Karman passou a ser largamente utilizado. Apesar de, inicialmente, o obstáculo estudado ter sido uma placa plana colocada perpendicularmente ao escoamento, os turbilhões foram extensivamente estudados no rasto de um cilindro bastante esbelto, já que as características se aproximam das características de um escoamento bidimensional [1].

Na prática, os turbilhões libertam-se alternadamente, de cada um dos lados do obstáculo, para formar um rasto de turbilhões alternados. Este fenómeno depende, como já foi referido, do número de Reynolds do escoamento, visto que aqueles nascem no seio da camada limite ou na camada de corte no caso de obstáculos com arestas vivas.

De uma forma geral, os corpos que apresentem relações de simetria na sua geometria, mais ou menos fortes, estão sujeitos à liberação de vórtices. No caso de se estar a falar de superfícies curvas, como o caso de um cilindro, o mecanismo de geração, do ponto de vista da separação da camada limite de uma face e de outra do cilindro, é um mecanismo espaço-temporal. Apesar de parecer um fenómeno aparentemente bidimensional a larga escala, estudos pormenorizados mostraram que estes fenómenos nascem na zona de contacto do fluido com a parede sólida do obstáculo, dentro dessa camada viscosa

e à custa de minúsculos turbilhões tridimensionais instáveis, sendo estes os desencadeadores da separação da camada limite.

Quando as formas são angulosas, o ponto de separação da camada limite é posicionado sobre a aresta e o processo gerador é ligeiramente diferente. A alternância entre os turbilhões formados é induzida por um fenómeno de sincronização das instabilidades geradas nas duas linhas de separação.

Na presença deste fenómeno, o parâmetro que mais condiciona o comportamento estrutural é a frequência com que os turbilhões se libertam, visto que as forças geradas têm um carácter quasi-sinusoidal.

A libertação de vórtices pode ser relacionada com outros parâmetros, tais como o número Strouhal ou mesmo a turbulência local, pelo que se abordará detalhadamente este fenómeno, bem como formas de tratamento numérico, na secção 5.4.

5.2.3. Coeficientes de pressão e coeficientes de força

Imagine-se uma secção de uma estrutura fixa, imersa num escoamento com velocidade média $\bar{U}$. Este escoamento desenvolve pressões locais sobre as paredes do corpo, de acordo com a equação de Bernoulli, que pode ser representada por

$$\frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 + p = constante \quad (5.15)$$

onde a constante não varia ao longo da linha de fluxo e $\bar{U}$ representa a velocidade do escoamento na linha de fluxo na vizinhança do corpo (ou seja, imediatamente fora da camada limite que se forma na superfície do corpo). A integração das pressões sobre a superfície do corpo dá origem a um conjunto de forças. No caso de se estar na presença de um escoamento bidimensional, estas pressões podem representar-se por uma força na direcção do escoamento, conhecida por força de arrastamento, e por outra na perpendicular à direcção do escoamento, designada de força de sustentação. Caso o centro de pressões da secção não coincida com o centro de rotação, surge, também um momento torsor. Estas forças de arrastamento, sustentação e momento são obviamente bastante afectadas pela forma do corpo imerso e pelo número de Reynolds.

A configuração da secção do corpo imerso pode ser, expressamente concebida de modo a minimizar a força de arrastamento e maximizar a força de sustentação, obtendo-se assim um perfil aerodinâmico de asa.

Em muitas aplicações de engenharia civil, porém, a configuração do corpo pode não ser susceptível de tomar as formas aerodinamicamente desejadas dado que as configurações adoptadas são definidas de acordo com outros requisitos de projecto que nada têm a ver com os requisitos de aerodinâmica. De qualquer modo, as forças desenvolvidas pelo escoamento em torno das estruturas têm uma grande influência, constituindo uma das acções para a qual a estrutura deve ser projectada.

É usual referir todas as pressões medidas na superfície de uma estrutura em relação a uma pressão dinâmica média $\frac{1}{2}\rho_{ar}\bar{U}^2$, num ponto de referência, a uma distância tal da estrutura que não sofra, da parte desta, qualquer influência, bem como da camada limite que se gera nas suas paredes. Deste modo, pode definir-se um coeficiente adimensional C_p , designado por coeficiente de pressão dado por

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho_{ar}\bar{U}^2} \quad (5.16)$$

onde $\bar{U}$ é o valor médio da velocidade do vento de referência e, $p - p_0$ representa a diferença de pressões entre a pressão num ponto da superfície da estrutura e a pressão medida num ponto de referência, exterior à estrutura, nas mesmas condições anteriormente referidas. A consideração deste formato adimensional permite a passagem de um modelo experimental à escala reduzida para os resultados à escala real, bem como a catalogação das propriedades aerodinâmicas de determinadas formas geométricas, bastante comuns no âmbito da engenharia civil.

Analogamente, as forças devidas à pressão do vento F_D e F_L , nas direcções paralela (arrastamento) e normal (sustentação) ao escoamento, respectivamente, podem ser expressas adimensionalmente através dos coeficientes de arrastamento C_D e sustentação C_L [1, 13],

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_{ar}\bar{U}^2.B_{ref}} \quad (5.17)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho_{ar}\bar{U}^2.B_{ref}} \quad (5.18)$$

sendo B_{ref} uma dimensão típica de referência da estrutura que geralmente é considerada uma dimensão no plano normal à direcção do escoamento, embora no caso particular de tabuleiros de pontes se costume considerar como dimensão de referência a largura do tabuleiro.

Para o momento M induzido pelo escoamento o coeficiente correspondente vem dado por

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot U^2 \cdot B_{ref}^2} \quad (5.19)$$

Na Figura 5.11 encontram-se esquematicamente representadas as forças actuantes na secção devidas à acção do vento, no referencial associado ao vento (triedro de Eiffel), na sua forma bidimensional, estando também representadas as direcções principais de referência do referencial associado aos eixos da estrutura (triedro de Lilienhal) e onde α representa o ângulo de incidência do escoamento, relativamente ao referencial da estrutura.

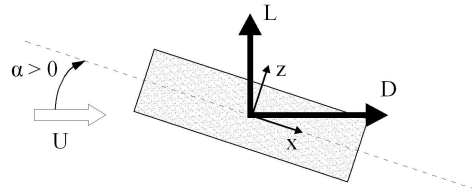


Figura 5.11 – Representação da notação dos referenciais numa secção transversal genérica [1]

Pelo facto de ser bastante mais cómodo trabalhar com os coeficientes de força no referencial da estrutura, podem-se representar os coeficientes de força segundo os eixos (x, z) da secção, em função dos coeficientes de arrastamento, sustentação e do ângulo de incidência, do seguinte modo:

$$C_{F_x} = C_D \cdot \cos(\alpha_i) - C_L \cdot \sin(\alpha_i) \quad (5.20)$$

$$C_{F_z} = C_D \cdot \sin(\alpha_i) + C_L \cdot \cos(\alpha_i) \quad (5.21)$$

5.2.3.1. Influência do número de Reynolds e da turbulência

A influência do número de Reynolds e da turbulência do escoamento a montante é de grande importância em termos da distribuição de pressões na superfície das estruturas e por consequência nos esforços internos gerados. De facto, estes dois parâmetros, o número de Reynolds e a turbulência, não são independentes e provocam, em geral, efeitos similares.

Na prática, a origem de todos estes fenómenos encontra-se no seio da camada limite, junto às paredes da estrutura. Se o número de Reynolds for suficientemente baixo e a turbulência a montante fraca, a camada limite mantém-se laminar. Se, pelo contrario, o número de Reynolds ou a turbulência a montante forem elevados, a camada limite torna-se turbulenta.

Quando o escoamento apresenta flutuações como uma consequência da turbulência da envolvente ou da turbulência induzida pelo próprio corpo imerso, os coeficientes acima apresentados tornam-se dependentes do tempo. Nestes casos, quando as forças e os momentos variam com o tempo, para obter uma descrição completa destes, é necessário quantificar os coeficientes médios das forças, bem como as suas funções de densidade espectral de potência.

Retornando ao caso do cilindro, já atrás referido, apresenta-se a Figura 5.12, onde se pode verificar o elevado grau de dependência do respectivo coeficiente de arrastamento C_D em relação ao número de Reynolds.

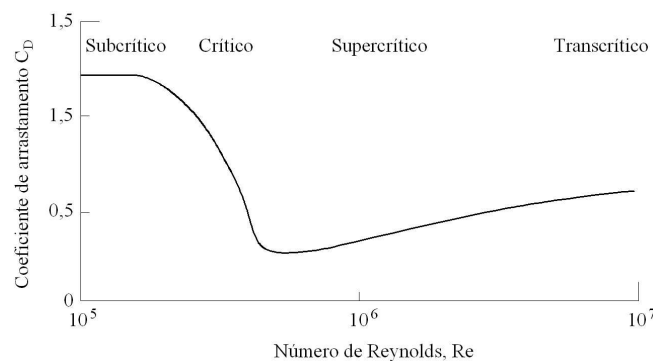


Figura 5.12 – Variação do coeficiente de arrastamento com o número de Reynolds, para uma secção cilíndrica [3]

É de salientar a forma como o coeficiente de arrastamento C_D decresce bruscamente no intervalo $2 \times 10^5 \leq Re \leq 5 \times 10^5$. Esta região é denominada região crítica e corresponde às condições em que ocorre a transição de um escoamento em regime laminar para regime turbulento, na camada limite que se forma à superfície do cilindro, fazendo com que, a partir deste ponto a separação da camada limite ocorra um pouco mais tarde, tornando a esteira gerada a jusante do corpo consequentemente mais estreita e levando a um valor mínimo de C_D (cerca de $\frac{1}{3}$ do valor inicial). À medida que o valor do número de Reynolds cresce até ao regime supercrítico e posteriormente transcrito ($Re \geq 4 \times 10^6$), o valor de C_D cresce novamente, mas mantém-se bastante mais abaixo do que o valor registado no regime subcrítico.

Na Figura 5.13 é evidenciada a variação do coeficiente de pressões médias, em função da posição angular, com o número de Reynolds.

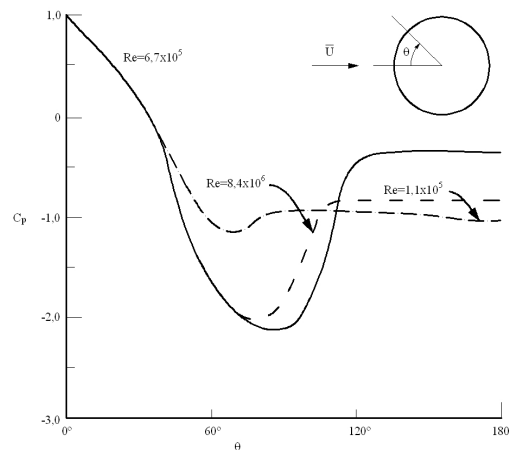


Figura 5.13 – Influência do número de Reynolds sobre o conjunto de pressões para uma seção circular [3]

Considerando agora o caso de um corpo com uma seção rectangular alongada num escoamento laminar, o correspondente coeficiente de arrastamento depende de quão estreito for o rasto formado a partir dos pontos de separação da camada limite que, neste caso, são as arestas, sendo que no mínimo este rasto tem uma largura próxima da largura do corpo.

A largura deste rasto para um valor baixo do número de Reynolds, é bastante mais elevada que a largura do corpo, sendo este fenómeno acompanhado pelo crescimento do coeficiente C_D . À medida que a relação b/h cresce, dá-se o “recolamento” do escoamento às paredes do corpo e, conseqüentemente, uma queda brusca do coeficiente de arrastamento médio C_D . O escoamento nesta altura crítica é acompanhado por alguma turbulência, cujo efeito é representado a sombreado na Figura 5.14.

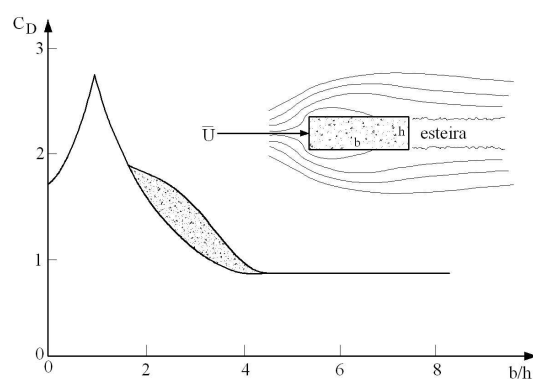


Figura 5.14 – Influência do rácio das dimensões de seção rectangular sobre o coeficiente de arrastamento [3].

Na Figura 5.15 pode observar-se a influência do número de Reynolds sobre o coeficiente de arrastamento para prismas de secção quadrada de arestas vivas e arestas arredondadas, bem como para cilindros, em função da variação da rugosidade da superfície destes.

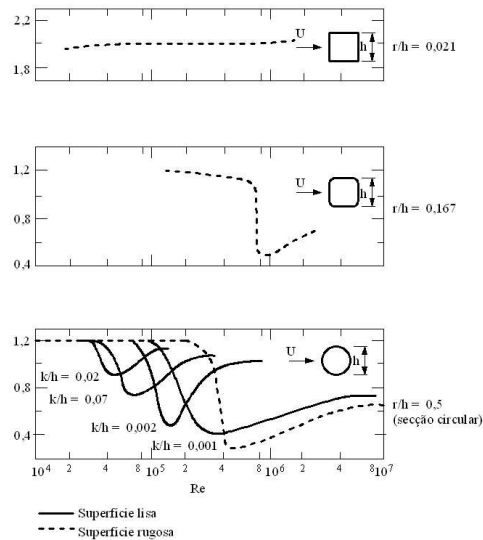


Figura 5.15 – Influência do número de Reynolds, do raio das arestas e da rugosidade superficial sobre o coeficiente de arrastamento de secções quadradas e circulares (r é o raio das arestas e k a rugosidade superficial) [3]

Da observação da figura anterior, pode-se concluir que a secção de arestas vivas apresenta insensibilidade à variação do número de Reynolds, fenómeno que pode ser explicado pelo facto dos pontos de separação do escoamento serem bastante bem definidos. No entanto, tanto a secção quadrada com arestas arredondadas, como a secção circular, em que é variada a rugosidade superficial, apresentam uma elevada sensibilidade à variação do número de Reynolds.

Além disso, para números de Reynolds muito baixos, o coeficiente de arrastamento aumenta consideravelmente, como resultado dos efeitos viscosos do escoamento, como se ilustra na Figura 5.16, para placas planas quadradas e circulares.

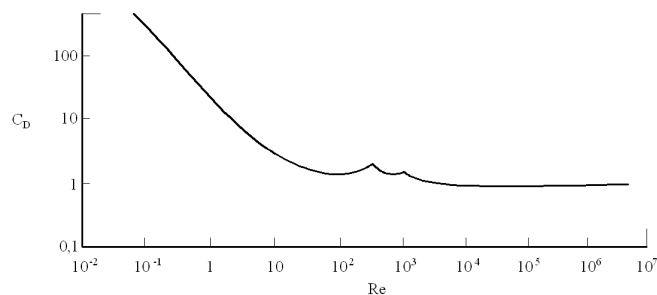


Figura 5.16 – Evolução típica do coeficiente de arrastamento em função do números de Reynolds [3]

É oportuno referir que, como as diferenças de pressão em torno da secção (quadrada) variam com o tempo, o coeficiente de sustentação também varia, $C_L = C_L(t)$, podendo ser representado através da sua função densidade espectral de potência, à imagem do ilustrado por Simu et al. [3]. Esta representação tem grande interesse na consideração dos efeitos provocados pela libertação de vórtices e é detalhadamente abordada na secção 5.4.

5.2.3.2. Coerência espacial

As pressões instantâneas e a sua distribuição ao longo das superfícies onde actuam, desempenham um papel fundamental em termos da excitação dinâmica de uma estrutura, sendo muito importante o conhecimento do grau de correlação da pressão entre dois pontos de uma superfície. Assim, se considerarmos um prisma rectangular onde a direcção do vento médio é normal a uma das faces desse prisma, tem interesse avaliar as correlações das pressões em pontos quer da face exposta, quer do lado protegido do vento. Esta correlação é maior para turbilhões com elevado comprimento de onda (baixa frequência) e decai à medida que o comprimento de onda se reduz. Assim, tal como se referiu para as flutuações da velocidade do vento, há a necessidade de introduzir a função de coerência, para ter em conta estes efeitos nos coeficientes de pressão.

$$coh_{p_1 p_2}(\Delta r, f) = \frac{S_{p_1 p_2}^c(\Delta r, f)}{\left[S_{p_1 p_1}^c(f) \cdot S_{p_2 p_2}^c(f) \right]^{0,5}} \quad (5.22)$$

5.3. Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada

A análise dinâmica da resposta estrutural aos efeitos de rajada é um problema fundamental no domínio da engenharia do vento, sendo também um dos mais clássicos e de tratamento mais consolidado [2, 36].

Uma formulação estocástica foi inicialmente desenvolvida por Davenport em 1961, limitada a um oscilador de um grau de liberdade e mais tarde generalizada pelo mesmo autor a estruturas esbeltas, pontes e construções com áreas de exposição bastante grandes, tendo atingido a sua maturidade teórica e aplicativa em 1967, quando Davenport formulou a primeira expressão para o factor de rajada, a qual associou à definição da carga estática de rajada [36]. O princípio de cálculo subjacente à metodologia proposta por Davenport foi orientado para estruturas flexíveis de secção rectangular e é baseado no pressuposto de que a resposta estrutural depende apenas do primeiro modo de vibração, tendo contudo

sido desenvolvida respeitando leis pré-estabelecidas de velocidades médias do vento, espectros de potência da turbulência e funções de coerência. Este método foi dos primeiros entre os métodos teóricos a ser adoptado pela maior parte das normas e códigos, tendo sido o precursor de uma longa série de métodos que têm vindo a ser aperfeiçoados [2, 3, 36]. Paralelamente a esta linha de investigação, que é a abordagem clássica do problema, existem outras formulações alternativas, das quais se destaca a geração de séries artificiais de velocidades do vento, tendo contribuído para a solução de problemas relacionados com determinado tipo de não-linearidades.

Nos pontos subsequentes, são abordadas as metodologia no domínio da frequência, particularizando-se para estruturas pontuais (estruturas com um grau de liberdade) e para estruturas esbeltas (estruturas com múltiplos graus de liberdade), e no domínio do tempo, fazendo-se referência aos vários métodos de geração de amostras de séries temporais de velocidade do vento.

5.3.1. Análise no domínio da frequência

5.3.1.1. Estruturas pontuais

Uma estrutura pode ser considerada pontual quando o seu tamanho característico é significativamente inferior aos comprimentos de onda dos turbilhões elementares do vento natural.

A equação do movimento deste sistema, sob o efeito da força global aerodinâmica de arrastamento $F(t)$, é dada por

$$m.\ddot{q} + c_s.\dot{q} + k.q = F(t) \quad (5.23)$$

em que m , c e k representam, respectivamente, a massa, o amortecimento e a rigidez associadas a esta estrutura pontual, modelada através de um oscilador de um grau de liberdade, ilustrado na Figura 5.17.

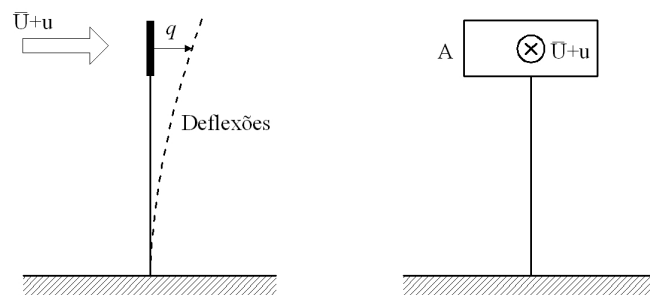


Figura 5.17 – Representação esquemática da estrutura com um grau de liberdade [2]

Assumindo as condições aerodinâmicas de quasi-estacionaridade, a força aerodinâmica de arrastamento $F(t)$, exercida sobre uma estrutura pontual imersa num escoamento, pode ser representada através de

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D \cdot A \cdot U^2(t) \quad (5.24)$$

em que A representa uma área de referência associada à estrutura pontual, C_D o coeficiente de arrastamento e $U(t)$ a velocidade instantânea relativa.

Considere-se a velocidade $U(t)$ decomposta numa componente média $\bar{U}$ e nas componentes flutuantes $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$. Normalmente, a componente média $\bar{U}$ é bastante maior que o valor absoluto de qualquer uma das componentes turbulentas ($u(t)/\bar{U}$ raramente excede 0,20 [3]), tal como acontece com a componente relativa à velocidade de resposta da estrutura $\dot{q}(t)$, o que leva a que a simplificação apresentada na equação (5.25) seja por isso uma aproximação adequada.

$$\begin{aligned} U^2(t) &= [\bar{U} + u(t) - \dot{q}(t)]^2 = \bar{U}^2 + 2\bar{U} \cdot u(t) - 2\bar{U} \cdot \dot{q} - 2u(t) \cdot \dot{q}(t) + u^2(t) + \dot{q}^2(t) \approx \\ &\approx \bar{U}^2 + 2\bar{U} \cdot u(t) - 2\bar{U} \cdot \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Desta forma, se se substituir a equação (5.25) em (5.24), pode obter-se

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(0) \cdot A \bar{U}^2 + \rho_{ar} \cdot C_D(f_B) \cdot A \bar{U} \cdot u(t) - \rho_{ar} \cdot C_D(f_B) \cdot A \bar{U} \cdot \dot{q}(t) = \\ &= \bar{F} \left[1 + \frac{2u(t)}{\bar{U}} \frac{C_D(f_B)}{C_D(0)} - \frac{2\dot{q}(t)}{\bar{U}} \frac{C_D(f_B)}{C_D(0)} \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $\bar{F}$ é a força de arrastamento associada à velocidade média, representada por

$$\bar{F} = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(0) \cdot A \bar{U}^2 \quad (5.27)$$

F_t é a força de arrastamento associada à componente flutuante da velocidade,

$$F_t = \rho_{ar} \cdot C_D(f_B) \cdot A u^2(t) \quad (5.28)$$

e F_a é a força de amortecimento aerodinâmico,

$$F_a = \rho_{ar} \cdot C_D(f_B) \cdot A \dot{q}(t) = c_a \cdot \dot{q}(t) \quad (5.29)$$

que, por sua vez, passa para o primeiro membro da equação do movimento, juntando-se ao termo do amortecimento estrutural c_s , originando o amortecimento total do sistema

$$c = c_a + c_s \quad (5.30)$$

Desta forma, a força de amortecimento aerodinâmico deixa de constar do segundo membro da equação do movimento, simplificando-se um pouco o procedimento de análise.

O valor da força de arrastamento médio não corresponde exactamente ao valor médio da força actuante, pois em rigor este deveria ser relacionado com o valor médio dos quadrados das velocidades instantâneas e não apenas com o quadrado da velocidade média do vento. Todavia, como a variância das flutuações da velocidade é igual à média dos seus quadrados (por estas constituírem um processo com média nula), verifica-se a seguinte igualdade

$$E[U^2(t)] = U^2 + \sigma_u^2 \quad (5.31)$$

daí que se a variância das flutuações for reduzida em relação ao quadrado da velocidade média, a força $\bar{F}$ pode ser identificada como o valor médio da força de arrastamento. Esta relação é habitualmente satisfeita para escoamentos atmosféricos [13].

O valor médio da força de arrastamento, nestas condições, é igual à força exercida por um escoamento uniforme de velocidade $\bar{U}$, a que corresponde um coeficiente de arrastamento $C_D(0)$, designado por coeficiente de arrastamento quasi-estacionário.

Contudo, o coeficiente de arrastamento que relaciona a amplitude da parcela variável da força actuante com a amplitude das flutuações de velocidade do escoamento não é constante, pois depende da frequência reduzida f_B . Este parâmetro é definido em função do comprimento de onda das flutuações $\lambda = \bar{U}/n$ e de uma dimensão B típica do corpo imerso, através de

$$f_B = \frac{B}{\lambda} = \frac{n \cdot B}{\bar{U}} \quad (5.32)$$

Da observação de diversos resultados experimentais, Davenport [13] sugere que o escoamento em torno de secções transversais de estruturas esbeltas possa ser considerado como praticamente quasi-estacionário para turbilhões com um comprimento de onda superior a cerca de dez vezes a dimensão típica da secção, referindo também que os efeitos não estacionários só poderão ter algum efeito relevante para o caso em que os turbilhões não sejam suficientemente extensos para envolver a secção, indicando como ordem de grandeza o valor da frequência reduzida f_B superior 0,1.

Desta forma, pode voltar a reescrever-se a equação (5.26), sob a seguinte forma

$$F(t) = \bar{F} \left[1 + \frac{2u(t)}{\bar{U}} \cdot \chi_a(f_B) \right] \quad (5.33)$$

na qual se introduz o novo parâmetro $\chi_a(f_B)$, designando de função de transferência (de amplificação ou de admitância) aerodinâmica [2, 3, 13, 18],

$$\chi_a(f_B) = \frac{C_D(f_B)}{C_D(0)} \quad (5.34)$$

Assim, pode obter-se o deslocamento $q(t)$ induzido pela força $F(t)$ através da relação

$$q(t) = \bar{q} \left[1 + \chi_a \cdot \chi_m \cdot \frac{2u(t)}{\bar{U}} \right] \quad (5.35)$$

sendo o deslocamento médio do oscilador $\bar{q}$ representado por

$$\bar{q} = \frac{\bar{F}}{k} \quad (5.36)$$

e χ_m a função de amplificação mecânica apresentada em 3.2.1.1.

Considere-se agora um escoamento cujas flutuações de velocidade dependam do espaço e se identifiquem os registos de velocidades com amostras de processos estacionários. As flutuações longitudinais da velocidade podem ser encaradas como a sobreposição de sinusóides elementares com amplitudes que se supõem suficientemente reduzidas em relação à velocidade média, para que se possa admitir uma relação linear entre os seus valores e as forças por si induzidas. Desta forma, e tendo presente as relações estocásticas apresentadas no capítulo 2, as equações (5.33) e (5.35) podem conduzir ao estabelecimento das seguintes relações entres as funções densidade espectral de potência das flutuações da velocidade, da flutuação da força de arrastamento e do deslocamento induzido à estrutura:

$$S_F(n) = \frac{4\bar{F}^2}{\bar{U}^2} |\chi_a(n)|^2 \cdot S_u(n) \quad (5.37)$$

$$S_q(n) = \frac{4\bar{q}^2}{\bar{U}^2} |\chi_m(n)|^2 \cdot |\chi_a(n)|^2 \cdot S_u(n) \quad (5.38)$$

Quando as dimensões do corpo imerso no escoamento forem irrelevantes em comparação com o comprimento de onda de um turbilhão elementar (ou seja, $B \ll \lambda \Leftrightarrow f_B \ll 1$), o turbilhão envolve o corpo e a correlação espacial da distribuição das velocidades na zona que o envolve é praticamente unitária, resultando destas condições que o coeficiente $\chi_a(f_B)$ representa apenas a influência da formação de vórtices na esteira do corpo que, por sua vez, é um fenómeno apenas governado pela frequência reduzida f_B . No entanto, se as dimensões do corpo não forem irrelevantes em relação ao comprimento de onda das flutuações, o coeficiente $\chi_a(f_B)$ deve também traduzir a diferença espacial de fase das flutuações na zona que envolve o corpo.

Partindo de dados experimentais obtidos em ensaios em túnel de vento de placas rectangulares planas, Vickery e Davenport [18] propuseram, para a função de transferência aerodinâmica associada à força de arrastamento, a expressão (5.39), que aparece ilustrada na Figura 5.18.

$$\chi_a(n) = \frac{1}{1 + \left[\frac{2n\sqrt{A}}{\bar{U}_{ref}} \right]^{4/3}} \quad (5.39)$$

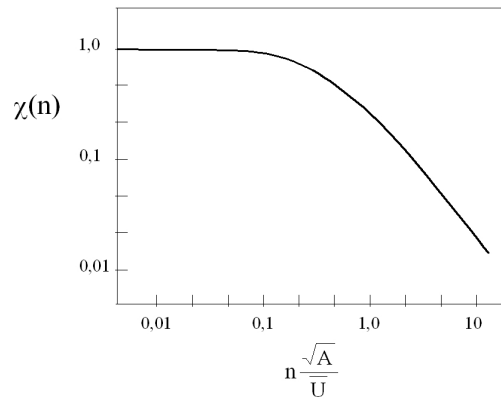


Figura 5.18 – Função de transferência aerodinâmica associada à força de arrastamento [18].

Na equação (5.39), A corresponde à área da projecção da estrutura no plano normal à direcção do vento, com velocidade média num ponto de referência $\bar{U}_{ref}$ [2, 3, 13, 18].

Para obter a variância dos deslocamentos induzidos sobre a estrutura, a função de densidade espectral de resposta dada pela expressão (5.38), deverá ser integrada em todo o seu domínio, isto é,

$$\sigma_q^2 = \int_0^\infty S_q(n) dn = \int_0^\infty \frac{4\bar{q}^2}{\bar{U}^2} |\chi_m(n)|^2 \cdot |\chi_a(n)|^2 \cdot S_u(n) dn \quad (5.40)$$

A área correspondente ao integral da função densidade espectral da resposta pode ser obtida de forma aproximada através de duas componentes, designadas pelos índices R e B , representando cada uma delas, respectivamente, as componentes ressonante e de fundo da resposta, tal como ilustrado na Figura 5.19.

Deste modo, pode exprimir-se a relação (5.40) através de

$$\sigma_q^2 = \frac{4 \cdot \bar{q}^2 \cdot \sigma_u^2}{\bar{U}^2} \int_0^\infty |\chi_m(n)|^2 \cdot |\chi_a(n)|^2 \cdot \frac{S_u(n)}{\sigma_u^2} dn \approx \frac{4 \cdot \bar{q}^2 \cdot \sigma_u^2}{\bar{U}^2} \left[[I]_B + [I]_R \right] \quad (5.41)$$

onde

$$[I]_B = \int_0^\infty |\chi_a(n)|^2 \cdot \frac{S_u(n)}{\sigma_u^2} dn \quad (5.42)$$

$$[I]_R = |\chi_a(n_1)|^2 \cdot \frac{S_u(n_1)}{\sigma_u^2} \int_0^\infty |\chi_m(n)|^2 dn \quad (5.43)$$

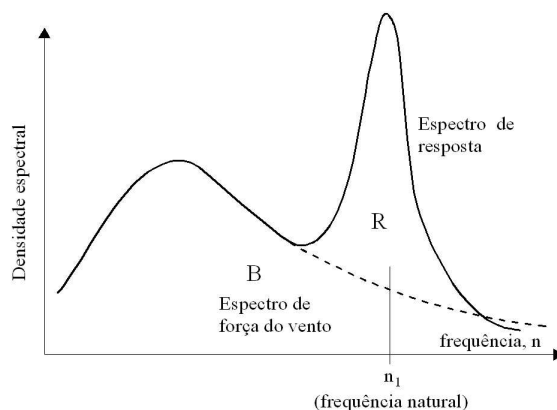


Figura 5.19 – Parcelas de fundo e ressonante da resposta [18]

A aproximação dada pela equação (5.41) é baseada na assunção de que, em todo o comprimento do pico correspondente a frequência natural do espectro representado na Figura 5.19, as funções $|\chi_a(n)|^2$ e $S_u(n)$ são constantes nos valores $|\chi_a(n_1)|^2$ e $S_u(n_1)$, sendo esta aproximação excelente para os casos em que o pico ressonante é muito acentuado, caso este que ocorre quando o amortecimento é muito baixo.

O integral da função de amplificação mecânica para o intervalo entre 0 e ∞ pode ser avaliado pelo método desenvolvido por Crandall e Mark [18], durante os anos 60's, através de

$$\int_0^{\infty} |\chi_m(n)|^2 dn = \frac{\pi \cdot n_1}{4 \cdot \xi} \quad (5.44)$$

sendo ξ o amortecimento relativo dado por

$$\xi = \xi_s + \xi_a = \frac{c_s}{2\sqrt{m \cdot k}} + \frac{c_a}{2\sqrt{m \cdot k}} \quad (5.45)$$

A aproximação utilizada na equação (5.41) é correntemente adoptada por vários códigos, como método de avaliação da resposta estrutural à componente longitudinal do vento.

A parcela de fundo representa a resposta quasi-estática causada pelas rajadas, com conteúdo espectral abaixo da frequência natural da estrutura.

Para muitas estruturas sob a acção do vento, a parcela de fundo $[I]_B$ é consideravelmente maior que a parcela ressonante $[I]_R$, isto é a resposta de fundo é dominante em comparação com a resposta ressonante [18].

Factor de rajada da resposta

O termo factor de rajada da resposta é frequentemente utilizado por autores como Holmes [18] e Hansen et al.[2], apesar de Davenport (1976) ter utilizado a designação de factor de rajada da carga e Vickery (1966) a designação de factor de rajada. Estes termos têm essencialmente o mesmo significado, diferindo apenas consoante a sua forma de aplicação é directamente à acção sobre a estrutura ou à resposta da estrutura. Deste modo, a designação de factor de rajada enquadra-se melhor quando aplicado à velocidade do vento em si, tal como foi apresentado no capítulo anterior mais precisamente, no ponto 4.4.5.

O factor de rajada da resposta $\hat{G}$ pode então ser definido como a razão entre o máximo espectável da resposta da estrutura num período de tempo definido (de 10 minutos ou 1 hora) e a média temporal da resposta no mesmo período de tempo. Este conceito, como é óbvio, só tem validade para ventos com carácter estacionário, tais como os gerados por zonas meteorologicamente temperadas (ver capítulo 4).

A resposta máxima de um sistema simples, tal como foi descrito no ponto anterior pode representar-se como:

$$\hat{q} = \bar{q} + k_p \cdot \sigma_q \quad (5.46)$$

onde $\hat{q}$ representa a resposta máxima e k_p o factor de pico, que depende do intervalo de tempo para o qual o valor máximo da resposta é calculado e do intervalo de frequências da resposta.

Desta forma, o factor de rajada da resposta vem dado por,

$$\hat{G} = \frac{\hat{q}}{\bar{q}} = 1 + k_p \cdot \frac{\sigma_q}{\bar{q}} = 1 + 2 \cdot k_p \cdot \frac{\sigma_u}{\bar{U}} \sqrt{[I]_B + [I]_R} \quad (5.47)$$

A equação anterior, ou suas variantes, são usadas em diversos códigos e normas para estimar, de uma forma simples, a acção dinâmica do vento longitudinal em estruturas. A aproximação mais frequentemente utilizada consiste em calcular $\hat{G}$ para a coordenada modal correspondente ao primeiro modo de vibração e depois aplicá-lo ao valor médio das cargas distribuídas pela estrutura, para as quais a resposta (momentos, deslocamentos...) será calculada. Este procedimento aproximado que funciona razoavelmente bem para algumas estruturas e efeitos de cargas (tais como os momentos na base de edifícios altos), conduz noutros casos a erros significativos, devendo por isso ser usado com bastante precaução.

A resposta de estruturas ao vento longitudinal apresenta uma probabilidade de distribuição que se aproxima da gaussiana. Para este casos, Davenport propôs a seguinte expressão para o factor de pico k_p

$$k_p = \sqrt{2 \ln(v_0 \cdot T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(v_0 \cdot T)}} \quad (5.48)$$

onde v_0 é a taxa de ciclos ou a frequência efectiva da resposta (também designado de frequência de passagens ascendentes por zero), que sob um ponto de vista conservativo, pode ser tomada como a frequência natural da estrutura [18]. T é o intervalo de tempo no qual se quer obter o valor da resposta máxima.

5.3.1.1.1 Factor de resposta dinâmica

Em ventos transitórios ou não estacionários, como tempestades localizadas, por exemplo, o uso do factor de rajada ou do factor de rajada da resposta não tem qualquer significado. O factor de rajada da resposta é também irrelevante no caso em que a resposta média é muito baixa ou mesmo zero (tal como a resposta média à acção transversal do vento), pelo que se torna nestes casos mais apropriado o

uso do “factor de resposta dinâmica” c_d . Esta formulação tem sido adoptada recentemente em alguns códigos, sendo que pode ser definido como

$$\text{factor de resposta dinâmica} = \frac{\text{resposta máxima incluindo os efeitos ressonantes e de correlação}}{\text{resposta máxima ignorando ambos os efeitos ressonantes e de correlação}}$$

O denominador é de facto a resposta calculada usando métodos estáticos. O factor de resposta dinâmica, definido acima, toma frequentemente um valor aproximado de 1, sendo que um valor superior a 1 pode ser originado por uma significativa resposta ressonante.

5.3.1.2. Estruturas esbeltas (múltiplos graus de liberdade)

O aparecimento de novos materiais mais leves e resistentes, e a evolução dos meios de cálculo, tem levado à construção de estruturas de grande vão, muito flexíveis e por conseguinte muito sensíveis à acção aerodinâmica do vento.

A designação de estruturas esbeltas é utilizada nesta dissertação para denominar estruturas que apresentam uma dimensão longitudinal muito superior às dimensões transversais, bem como frequências de oscilação suficientemente baixas para que a acção dinâmica do vento tenha um papel de relevo no seu comportamento.

Neste tipo de estruturas, a extensão total longitudinal designa-se por vão, indicando-se pela letra L , e as dimensões características da secção transversal por B e D (onde B representa a dimensão na direcção do vento e D a dimensão transversal à direcção normal), sendo que, no caso particular de tabuleiros de pontes, B representa a largura e D a espessura deste.

Ao contrário do que acontece com as estruturas pontuais (estruturas com um grau de liberdade), o vão das estruturas esbeltas não é irrelevante relativamente aos comprimentos de onda dos turbilhões elementares com conteúdo espectral significativo, o que significa que, para o caso de estruturas esbeltas a correlação espacial da distribuição de velocidades apresenta uma variação bastante grande.

Na tentativa de generalizar o tratamento dos efeitos de rajada em estruturas esbeltas, considere-se uma secção transversal oscilante com características semelhantes a um tabuleiro de uma ponte, imerso num escoamento turbulento, com componentes flutuantes de velocidade $u(t)$ e $w(t)$. Esta representação, apesar de mais complexa que as relativas às aplicações a ser apresentadas, pode ser de grande utilidade

em desenvolvimentos futuros, principalmente ligados à modelação de outros tipos de estruturas sob esta acção.

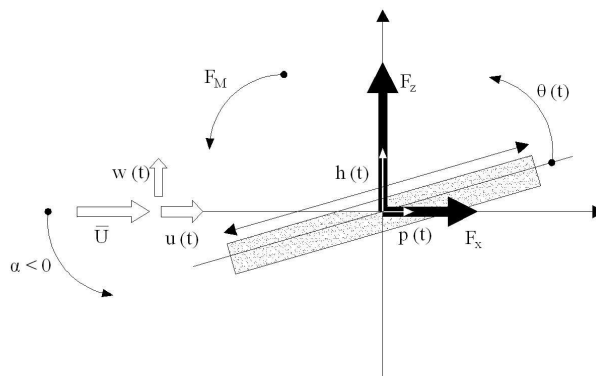


Figura 5.20 – Secção transversal oscilante de uma estrutura esbelta genérica.

Conforme é pratica corrente, admite-se que a direcção do vento é horizontal, actuando na situação mais desfavorável correspondente à direcção normal à do eixo da estrutura [13]. Como tem sido hábito, ao longo deste trabalho, a direcção coordenada associada ao vento longitudinal é a representada num referencial cartesiano pelo eixo do x e a direcção normal à anterior e ao eixo da estrutura representada por z , sendo a direcção do eixo dos y identificadora da direcção do eixo da estrutura (direcção do vão). Na Figura 5.20 encontra-se ilustrada, esquematicamente, a secção transversal oscilante de uma estrutura esbelta genérica, onde se podem também observar, as diferentes componentes da acção aplicada.

O escoamento, com velocidade média $\bar{U}$ segundo o eixo do x , apresenta um ângulo de ataque formado entre esta direcção e a direcção efectiva do vento, representado por α . A velocidade efectiva do vento depende, obviamente, das oscilações da secção e das flutuações verticais da velocidade do vento. As oscilações transversais da secção segundo os eixos x e z , e as rotações em torno de y , são designadas por p , h e θ , respectivamente.

Como foi abordado no ponto 5.3.1.1, no caso da frequência reduzida ser baixa, o comportamento assemelha-se à ausência de movimento do obstáculo. Neste caso, tudo seria idêntico ao caso em que o escoamento permanece, em cada instante, estacionário. Daí se poder-se supor que as forças instantâneas originadas pelo vento turbulento sobre um obstáculo são iguais àquelas que se produziram sobre o mesmo obstáculo se este estivesse imerso num escoamento estacionário com a mesma velocidade e o mesmo ângulo de incidência. Esta hipótese é designada por hipótese de quasi-estacionaridade.

5.3.1.2.1. Forças aerodinâmicas

A velocidade do vento turbulento é classicamente modelada como a soma de uma componente média e das suas componentes flutuantes. Considerando, no caso em apreciação, que a velocidade média do vento apresenta um ângulo de incidência nulo e desprezando o contributo da componente turbulenta $v(t)$ paralela à direcção do eixo da estrutura, tem-se que

$$U(t) = \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

Entrando em conta com o facto da estrutura estar em oscilação e tomando o referencial ligado ao obstáculo, pode exprimir-se a velocidade relativa, também designada de velocidade aparente [1], através de:

$$U_{ap}(t) = \begin{Bmatrix} (\bar{U} + u(t)) - \dot{p}(t) \\ w(t) - \dot{h}(t) + r.B.\dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

onde $\dot{p}(t)$, $\dot{h}(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ são, respectivamente, as velocidades de oscilação segundo os eixos x e z e de rotação da secção transversal em relação ao seu centro de rotação no instante t . A parcela $\dot{h}(t) + r.B.\dot{\theta}(t)$ é a velocidade aparente do centro de gravidade da secção e traduz-se num ângulo de incidência aparente (que desprezando os termos de ordem superior à segunda) pode representar-se por,

$$\alpha_{ap} \approx \frac{w(t)}{\bar{U}} - \left(\frac{\dot{h}(t)}{\bar{U}} + \theta + r.B.\frac{\dot{\theta}}{\bar{U}} \right) \quad (5.51)$$

O parâmetro r representa a relação entre a posição do centro de gravidade e do centro de pressões da estrutura e vale aproximadamente 0,25 para perfiz alares e placas delgadas, podendo ser estimado para secções atípicas, através da relação

$$r = \frac{\frac{dC_{FM}}{d\alpha}}{\frac{dC_{Fz}}{d\alpha}} \quad (5.52)$$

Admitindo que as secções da estrutura são suficientemente esbeltas para que se possam desprezar as eventuais redistribuições de pressão ao longo do eixo associadas a escoamentos secundários na direcção do vão, ou seja admitindo que a pressão induzida em cada secção depende apenas do vento nela actuante (hipótese das fatias) [13] e, atendendo a que similarmente ao representado na expressão

(5.25), o valor absoluto do quadrado da velocidade aparente pode ser representado através da seguinte expressão

$$|U_{ap}(t)|^2 \approx \bar{U}^2 + 2\bar{U}u(t) - 2\bar{U}\dot{p}(t) \quad (5.53)$$

pode então chegar-se a uma relação geral para as forças aerodinâmicas incidentes num troço da estrutura com uma área S , em que os coeficientes aerodinâmicos aparecem linearizados para um ângulo de incidência nulo, da seguinte forma

$$\frac{F_j}{\bar{F}} = C_{F_j}(0) \left(1 + \frac{2u}{\bar{U}} \right) - C_{F_j}(0) \frac{2\dot{p}}{\bar{U}} + \frac{dC_{F_j}}{d\alpha}(0) \frac{w}{\bar{U}} - \frac{dC_{F_j}}{d\alpha}(0) \left[\frac{\dot{h}}{\bar{U}} + \theta + r.B \frac{\dot{\theta}}{\bar{U}} \right] \quad (5.54)$$

Os termos $C_{F_j}(0)$ e $\frac{dC_{F_j}}{d\alpha}(0)$ com $j = x, z, M$ correspondem aos coeficientes aerodinâmicos e suas derivadas em relação ao ângulo de incidência no referencial da estrutura e $\bar{F}$ é igual a

$$\bar{F} = \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 . B \quad (5.55)$$

Na expressão anterior pressupõem-se que os coeficientes de força C_{F_j} são apenas dependentes do ângulo de incidência α . No entanto estes coeficientes podem também depender da velocidade do escoamento (isto é, do número de Reynolds) e de eventuais variações da geometria da secção transversal.

Designando-se genericamente I_j , C_j e K_j como os termos escalados de massa, de amortecimento e de rigidez correspondentes ao movimento segundo cada um dos eixos ($j = x, z, M$) e atendendo a relações representadas em (5.54), as equações do movimento da secção transversal tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_x \ddot{p} + C_x \dot{p} + K_x p &= F_x \Rightarrow \\ I_x \ddot{p} + \left(C_x + \rho_{ar} \bar{U} . B . C_{F_x}(0) \right) \dot{p} + K_x p + \\ + \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 . B \frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \frac{\dot{h}}{\bar{U}} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 . B \frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \theta + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} . B \frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) . r . B . \dot{\theta} \right\} &= \\ = \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 . B . C_{F_x}(0) + \rho_{ar} \bar{U} . B . C_{F_x}(0) u + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} . B . \frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) . w \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
I_z \ddot{h} + \left(C_z + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \right) \dot{h} + K_z \cdot h + \\
+ \left\{ \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_z}(0) \cdot \dot{p} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 \cdot B \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \theta + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot r \cdot B \cdot \dot{\theta} \right\} = \\
= \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 \cdot B \cdot C_{F_z}(0) + \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_z}(0) \cdot u + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot w
\end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}
I_M \ddot{\theta} + \left(C_M + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot r \cdot B \right) \dot{\theta} + \left[K_M + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 \cdot B \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \right] \theta + \\
+ \left\{ \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_M}(0) \cdot \dot{p} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \dot{h} \right\} = \\
= \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U}^2 \cdot B \cdot C_{F_M}(0) + \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_M}(0) \cdot u + \frac{1}{2} \rho_{ar} \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot w
\end{aligned} \quad (5.58)$$

As equações (5.54), (5.56), (5.57) e (5.58) evidenciam uma dependência linear dos esforços aerodinâmicos relativamente às componentes turbulentas do vento, bem como relativamente às oscilações da estrutura. Estas expressões são raramente aplicadas na prática.

Os termos agrupados no segundo membro de cada uma das equações do movimento representam as forças induzidas pela componente média e por cada uma das componentes turbulentas do vento.

Nas equações (5.56), (5.57) e (5.58), os termos entre parêntesis curvos (), correspondentes às parcelas associadas à velocidade de oscilação da estrutura, traduzem a soma do amortecimento estrutural com o amortecimento aerodinâmico, do qual se falará com maior detalhe no ponto 5.3.1.2.2. Neste contexto, é ainda oportuno referir que o coeficiente C_{F_x} é sempre positivo, não podendo ocorrer instabilidades aerodinâmicas para a direcção destas oscilações. Já no caso das derivadas dos coeficientes C_{F_z} e C_{F_M} em relação ao ângulo de ataque α , o mesmo não acontece, podendo estes termos ser negativos e, por isso, originar fenómenos de instabilidade aeroelástica designados por galope [1, 13].

Dentro dos parêntesis rectos [] da equação (5.58) pode encontrar-se a soma do termo da rigidez torcional da estrutura com o termo ao qual se dá a designação de rigidez aerodinâmica. A rigidez de torção pode ser afectada pelo termo aerodinâmico, podendo por isso anular-se a rigidez efectiva da estrutura, caso a derivada do coeficiente C_{F_M} em ordem ao ângulo de ataque seja negativa (isto é, se às rotações do tabuleiro corresponderem variações no mesmo sentido dos momentos torsores aerodinâmicos). Este fenómeno aeroestático é designado por divergência torcional [1, 13].

Pode também observar-se nas das equações (5.56), (5.57) e (5.58), que os termos envolvidos por chavetas { } participam nas três componentes da oscilação da secção transversal de uma estrutura esbelta, estando estes associados às forças aerodinâmicas de acoplamento [1, 13].

Os efeitos de acoplamento (particularmente entre modos de torção e flexão) são, na maior parte das vezes, eliminados se a relação entre as frequências próximas for suficientemente elevada, isto é, estes fenómenos de acoplamento só tem algum relevo no caso das frequências de vibração serem muito próximas. É corrente admitir que o risco de acoplamento de modos de vibração se evita se o rácio entre a frequência de torção e de flexão se localizar entre $\sqrt{2}$ e 2 [1]. Daí que a consideração dos termos aerodinâmicos relativos ao acoplamento seja geralmente dispensada, dando origem à simplificação da equação (5.54), resultando

$$F_x = \bar{F} \left[C_x(0) \cdot \left(1 + \frac{2u}{U} \right) + \frac{dC_x}{d\alpha}(0) \cdot \frac{w}{U} - C_x(0) \frac{2\dot{p}}{U} \right] \quad (5.59)$$

$$F_z = \bar{F} \left[C_z(0) \cdot \left(1 + \frac{2u}{U} \right) + \frac{dC_z}{d\alpha}(0) \cdot \frac{w}{U} - \frac{dC_z}{d\alpha}(0) \cdot \frac{\dot{h}}{U} \right] \quad (5.60)$$

$$F_M = \bar{F} \cdot B \cdot \left[C_M(0) \cdot \left(1 + \frac{2u}{U} \right) + \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{w}{U} - r \cdot B \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{\dot{\alpha}}{U} \right] \quad (5.61)$$

A formulação quasi-estacionária, definida pelas equações (5.59), (5.60) e (5.61), pressupõem a adaptação do fluido ao movimento do obstáculo. Esta hipótese é apenas válida para frequências reduzidas baixas. Estas expressões colocam claramente em evidência a ausência de determinados termos de deslocamentos e velocidades, não tendo em conta igualmente, o facto de as flutuações turbulentas serem caracterizadas por comprimentos de onda que atravessam transversalmente o obstáculo. De modo a cobrir estas lacunas deveria então passar-se de uma formulação em termos de forças aerodinâmicas para uma formulação aeroelástica, em que as forças aerodinâmicas e as oscilações da estrutura flexível interagem mutuamente, fazendo com que a estrutura em oscilação perturbe o escoamento do vento e por consequência, perturbe também as forças geradas sobre ela mesma [1].

É ainda oportuno referir que no caso da análise dos efeitos rajada em tabuleiros de pontes, a componente das flutuações verticais da velocidade do vento não deve ser negligenciada, em virtude da eventual flexibilidade do tabuleiro para as oscilações no plano vertical.

Tal como referido na secção 5.3.1.1, considere-se um escoamento livre uniformemente turbulento, caracterizado por flutuações da velocidade nas direcções longitudinal e vertical. Se estas flutuações da

velocidade do escoamento forem encaradas como um processo estocástico estacionário, pode obter-se a partir das parcelas correspondentes à turbulência das relações (5.59), (5.60) e (5.61), as seguintes expressões para a densidade espectral de potência das forças aerodinâmicas actuantes em pontos distanciados de Δr [1, 36]

$$\begin{aligned}
 S_{F_x}(y_1, y_2, n) = & \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_x}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_x}(0) \right)_{y_2} \cdot S_u(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_x}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_x}(0) \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_w(n, \Delta r)
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
 S_{F_z}(n, y_1, y_2) = & \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_z}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_z}(0) \right)_{y_2} \cdot S_u(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_z}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_z}(0) \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_w(n, \Delta r)
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
 S_{F_M}(y_1, y_2, n) = & \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_M}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_M}(0) \right)_{y_2} \cdot S_u(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_M}(0) \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{2}{\bar{U}} \cdot C_{F_M}(0) \right)_{y_2} \cdot S_{uw}(n, \Delta r) + \\
 & + \bar{F}_{y_1} \cdot \bar{F}_{y_2} \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \frac{1}{\bar{U}} \right)_{y_2} \cdot S_w(n, \Delta r)
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

De acordo com Davenport, os termos cruzados da densidade espectral $S_{uw}(n)$ são habitualmente desprezáveis e podem ser omitidos na análise dos efeitos de rajada [13].

5.3.1.2.2. Amortecimento aerodinâmico

Analise-se agora a parcela da força aerodinâmica contida nas equações (5.59), (5.60) e (5.61), induzida pelas velocidades de oscilação da secção segundo cada uma das três componentes do movimento da secção, representadas por

$$F_{a,x} = -\rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_x}(0) \cdot \dot{p} \quad (5.65)$$

$$F_{a,z} = -\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_z}{d\alpha_i}(0) \cdot \dot{h} \quad (5.66)$$

$$F_{a,F_\theta} = -\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot r \cdot B^3 \cdot \frac{dC_{F_\theta}}{d\alpha_i}(0) \cdot \dot{\alpha} \quad (5.67)$$

Pode concluir-se que estas forças aerodinâmicas apresentam uma relação linear de proporcionalidade relativamente às velocidades de oscilação da secção, segundo cada uma das componentes do movimento desta. Por esta razão, estas forças são designadas como forças aerodinâmicas de amortecimento, sendo que, à semelhança do que sucede com as forças de amortecimento estrutural, podem ser definidos coeficientes de proporcionalidade $c_{a,x}$, $c_{a,z}$ e $c_{a,M}$, designados por coeficientes de amortecimento aerodinâmico, de tal modo que

$$c_x = c_{sx} + c_{ax} = c_{sx} + \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot B \cdot C_{F_x}(0) \quad (5.68)$$

$$c_z = c_{sz} + c_{az} = c_{sz} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_z}{d\alpha_i}(0) \quad (5.69)$$

$$c_{F_\theta} = c_{sF_\theta} + c_{aF_\theta} = c_{sF_\theta} + \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot r \cdot B^3 \cdot \frac{dC_{F_\theta}}{d\alpha_i}(0) \quad (5.70)$$

O amortecimento aerodinâmico $c_{a,x}$ para oscilações na direcção do vento nunca é negativo, pelo que nunca se apresenta como uma parcela desfavorável no contexto desta acção. Já o mesmo não se pode dizer da componente do amortecimento aerodinâmico nas direcções transversal e torsional, bastando que, para isso, as componentes das equações (5.69) e (5.70), relativas à variação dos coeficientes aerodinâmicos com os respectivos ângulos de ataque, apresentem valores negativos. Nestes casos, a estas variações podem corresponder variações das forças aerodinâmicas lateral e de rotação no sentido instabilizante, o que pode levar a um decréscimo substancial dos respectivos coeficientes de amortecimento, conduzindo a um fenómeno de instabilidade que caso se verifique na direcção

transversal, se designa por galope de flexão e caso ocorra segundo a componente de rotação se, designe por galope de torção.

Generalizando os conceitos apresentados nesta secção a uma estrutura esbelta, caracterizada num espaço modal por N modos de vibração (ϕ_i) em correspondência com N frequências de vibração (n_i), e considerando o i -ésimo modo de vibração, pode então definir-se um coeficiente modal relativo de amortecimento aerodinâmico $\xi_{a,i}$ como a razão entre o coeficiente generalizado de amortecimento aerodinâmico e o coeficiente de amortecimento critico $c_{c,i}$, isto é [49]

$$\begin{aligned} \xi_{a,i} &= \frac{c_a}{c_{c,i}} = \frac{\int_0^L [c_{ax}(y) \cdot \phi_{x,i}^2(y) + c_{az}(y) \cdot \phi_{z,i}^2(y) + c_{aM}(y) \cdot \phi_{M,i}^2(y)] dy}{4 \cdot \pi \cdot n_i \int_0^L m(y) \cdot \phi_i^2(y) dy} = \\ &= \frac{\int_0^L [\rho_{ar} \cdot \bar{U}(y) \cdot B(y) \cdot C_{F_x}(0) \cdot \phi_{x,i}^2(y)] dy}{4 \cdot \pi \cdot n_i \int_0^L m(y) \cdot \phi_i^2(y) dy} + \frac{\int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U}(y) \cdot B(y) \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \phi_{z,i}^2(y) \right] dy}{4 \cdot \pi \cdot n_i \int_0^L m(y) \cdot \phi_i^2(y) dy} + \\ &+ \frac{\int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U}(y) \cdot r \cdot B^2(y) \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \phi_{M,i}^2(y) \right] dy}{4 \cdot \pi \cdot n_i \int_0^L m(y) \cdot \phi_i^2(y) dy} \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde $m(y)$ corresponde à massa da estrutura por unidade de comprimento.

A particularização da equação (5.71) para uma estrutura esbelta horizontal, com geometria e massa m constantes ao longo do seu vão, como é o caso habitualmente do tabuleiro de uma ponte, conduz à seguinte expressão simplificada para o coeficiente modal relativo de amortecimento aerodinâmico associado às vibrações horizontais desta, em regime quasi-estacionário [1, 13]

$$\xi_{ax,i} = \frac{\rho_{ar} \cdot B \cdot \bar{U} \cdot C_{F_x}(0)}{4 \cdot \pi \cdot n_i \cdot m} \quad (5.72)$$

De forma análoga ao procedimento anterior, podem obter-se os coeficientes modais relativos de amortecimento aerodinâmico relativos a modos de vibração em que as oscilações se dão predominantemente segundo as componentes vertical e torsional da secção. Desta forma pode escrever-se:

$$\xi_{az,i} = \frac{\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \frac{dC_{F_z}}{d\alpha_i}(0)}{4 \cdot \pi \cdot n_i \cdot m} \quad (5.73)$$

$$\xi_{a\theta,i} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot \bar{U} \cdot r \cdot B^3 \cdot \frac{dC_{F_M}}{d\alpha_i}(0)}{4 \cdot \pi \cdot n_i \cdot I_m} \quad (5.74)$$

em que I_m representa a inércia mássica de torção.

Das equações anteriores, pode constatar-se que o amortecimento aerodinâmico é inversamente proporcional à frequência do modo de vibração em causa, ou seja para os modos superiores, apresenta um amortecimento aerodinâmico menor.

Como já foi referido, a instabilidade transversal por galope ocorre se o amortecimento global das oscilações for negativo, o que corresponde à soma do amortecimento estrutural com o amortecimento aerodinâmico ser $c_z = c_{sz} + c_{az} < 0$.

Desta forma, pode escrever-se a condição para a ocorrência de instabilidade por galope segundo um modelo de comportamento quasi-estacionário, sob a seguinte forma,

$$\xi_{az,i} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{dC_L}{d\alpha}(0) + C_D(0) \right) < 0 \quad (5.75)$$

Esta condição é designada por “Critério de Glauert-den-Hartog” e evidencia a conveniência de evitar secções transversais com declive fortemente negativo do coeficiente aerodinâmico C_L .

Refira-se que a possibilidade de avaliação da sensibilidade das estruturas em relação ao galope, com recurso aos coeficientes aerodinâmicos, resulta do facto deste tipo de instabilidade aerodinâmica ser caracterizada por oscilações transversais com valores baixos da frequência reduzida, pelo que as variações da distribuição de pressões no contorno da estrutura ocorrem praticamente em simultâneo com as suas oscilações.

Conforme referido por Davenport [13], a formulação quasi-estacionária não pode ser aplicada a situações de interacção significativa entre as oscilações do corpo e o desprendimento de vórtices na sua esteira, sendo por isso que a equação (5.71) só fornece resultados razoáveis se a frequência reduzida das oscilações for inferior ao número de Strouhal St da secção transversal. No entanto, a estimativa do amortecimento aerodinâmico na direcção do vento não é praticamente afectada por esta limitação, conduzindo a valores satisfatórios mesmo para valores da frequência reduzida, francamente superiores ao número de Strouhal da secção [13].

É ainda oportuno referir que, para estruturas esbeltas com valores muito reduzidos de massa linear e de frequências próprias, são possíveis valores muito elevados para os valores do amortecimento

aerodinâmico. A ocorrência deste tipo de fenómenos é habitual em tabuleiros de pontes suspensas[13] e chaminés metálicas [2].

5.3.1.2.3. Função modal de transferência aerodinâmica

O actual ponto centra a sua atenção na caracterização das forças aerodinâmicas devidas à turbulência, segundo uma abordagem modal quasi-estacionária no domínio da frequência.

A determinação da função densidade espectral de potência da excitação modal envolve a consideração simultânea da estrutura da turbulência do vento bem como dos diversos modos de vibração da estrutura. Partindo das equações (5.59), (5.60) e (5.61), a força generalizada correspondente ao i-ésimo modo de vibração toma a seguinte forma

$$f_i(t) = \int_0^L [\phi_{x,i}(y).F_x(y,t) + \phi_{z,i}(y).F_z(y,t) + \phi_{M,i}(y).F_M(y,t)] dy \quad (5.76)$$

onde L representa a extensão total da estrutura.

Assim a função densidade espectral de potência da i-ésima componente de excitação modal, relativa à distribuição das forças aerodinâmicas ao longo do vão, tendo em conta a configuração do i-ésimo modo de vibração, pode obter-se por meio de

$$\begin{aligned} S_{f,i}(n) = & \int_0^L \int_0^L S_{F_x}(y_1, y_2, n) \cdot \phi_{x,i}(y_1) \cdot \phi_{x,i}(y_2) dy_1 dy_2 + \\ & + \int_0^L \int_0^L S_{F_z}(y_1, y_2, n) \cdot \phi_{z,i}(y_1) \cdot \phi_{z,i}(y_2) dy_1 dy_2 + \int_0^L \int_0^L S_{F_M}(y_1, y_2, n) \cdot \phi_{M,i}(y_1) \cdot \phi_{M,i}(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (5.77)$$

onde as funções densidade espectral cruzadas das forças aerodinâmicas são dadas pelas expressões (5.62), (5.63) e (5.64).

Relembrando a equação (4.101), com a forma genérica,

$$\begin{aligned} S_{kk}(y_1, y_2, n) = & \sqrt{S_k(y_1, n) \cdot S_k(y_2, n)} \cdot coh(\Delta y, n) = \\ = & \sqrt{S_k(y_1, n) \cdot S_k(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,k}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] \end{aligned} \quad (5.78)$$

em que k toma os valores u, v ou w , conforme a componente da flutuação da velocidade do vento a ser caracterizada, e $C_{ey,k}$ é o coeficiente de decaimento exponencial, dependente da direcção do

componente flutuante k do vento e das características descritas no capítulo 4 para a direcção y do vão da estrutura.

Substituindo a equação (5.78) nas relações (5.62), (5.63) e (5.64) e desprezando o termo cruzado da densidade espectral $S_{uw}(y_1, y_2, n)$, obtém-se:

$$S_{F_x}(y_1, y_2, n) = \rho_{ar}^2 \cdot (C_{F_x}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_1} (C_{F_x}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_2} \cdot \sqrt{S_u(y_1, n) \cdot S_u(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \rho_{ar} \right)^2 \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_x}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_2} \cdot \sqrt{S_w(y_1, n) \cdot S_w(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] \quad (5.79)$$

$$S_{F_z}(y_1, y_2, n) = \rho_{ar}^2 \cdot (C_{F_z}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_1} (C_{F_z}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_2} \cdot \sqrt{S_u(y_1, n) \cdot S_u(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \rho_{ar} \right)^2 \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_z}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_2} \cdot \sqrt{S_w(y_1, n) \cdot S_w(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] \quad (5.80)$$

$$S_{F_M}(y_1, y_2, n) = \rho_{ar}^2 \cdot (C_{F_M}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_1} (C_{F_M}(0) \cdot \bar{U} \cdot B)_{y_2} \cdot \sqrt{S_u(y_1, n) \cdot S_u(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \rho_{ar} \right)^2 \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_1} \cdot \left(\frac{dC_{F_M}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \right)_{y_2} \cdot \sqrt{S_w(y_1, n) \cdot S_w(y_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] \quad (5.81)$$

Considerando para uma determinada secção transversal de referência, a função densidade espectral de potência das forças aerodinâmicas caracterizada por

$$S_{F_j}^u(y_{ref}, n) = \left[\rho_{ar} \cdot C_{F_j}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_u(n)} \right]_{y_{ref}}^2 \quad (com \ j = x, y, M)$$

$$S_{F_j}^w(y_{ref}, n) = \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_{F_j}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_u(n)} \right]_{y_{ref}}^2 \quad (com \ j = x, y, M) \quad (5.82)$$

então podem definir-se os coeficientes adimensionais, designados de funções de influência da resposta $g_{F_j}^u(y, n)$ e $g_{F_j}^w(y, n)$, em função da posição da secção ao longo do vão da estrutura e da frequência, representados por

$$\begin{aligned}
g_{F_j}^u(y, n) &= \frac{\left[\rho_{ar} \cdot C_{F_j}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_u(n)} \right]_y}{\left[\rho_{ar} \cdot C_{F_j}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_u(n)} \right]_{y_{ref}}} & (com \ j = x, y, M) \\
g_{F_j}^w(y, n) &= \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot \frac{dC_{F_j}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_w(n)} \right]_y}{\left[\frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot \frac{dC_{F_j}}{d\alpha}(0) \cdot \bar{U} \cdot B \cdot \sqrt{S_w(n)} \right]_{y_{ref}}} & (com \ j = x, y, M)
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Tomando então as equações (5.79), (5.80), (5.81) e (5.83) e substituindo na relação (5.77) referente à função densidade espectral de potência da i -ésima excitação modal, obtém-se

$$\begin{aligned}
S_{f,i}(n) &= S_{F_x}^u(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{x,i}(y_1) \cdot \phi_{x,i}(y_2) \cdot g_{F_x}^u(y_1, n) \cdot g_{F_x}^u(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 + \\
&+ S_{F_x}^w(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{x,i}(y_1) \cdot \phi_{x,i}(y_2) \cdot g_{F_x}^w(y_1, n) \cdot g_{F_x}^w(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 + \\
&+ S_{F_z}^u(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{z,i}(y_1) \cdot \phi_{z,i}(y_2) \cdot g_{F_z}^u(y_1, n) \cdot g_{F_z}^u(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 + \\
&+ S_{F_z}^w(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{z,i}(y_1) \cdot \phi_{z,i}(y_2) \cdot g_{F_z}^w(y_1, n) \cdot g_{F_z}^w(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 + \\
&+ S_{F_M}^u(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{M,i}(y_1) \cdot \phi_{M,i}(y_2) \cdot g_{F_M}^u(y_1, n) \cdot g_{F_M}^u(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,u}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 + \\
&+ S_{F_M}^w(y_{ref}, n) \cdot \int_0^L \int_0^L \phi_{M,i}(y_1) \cdot \phi_{M,i}(y_2) \cdot g_{F_M}^w(y_1, n) \cdot g_{F_M}^w(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,w}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 \tag{5.84}
\end{aligned}$$

podendo definir-se uma nova função, designada função modal de transferência aerodinâmica normalizada $|J_{k,i}^j|^2$ (“Joint acceptance function”), associada a um modo particular de vibração i ,

$$|J_{j,i}^k(n)|^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi_{j,i}(y_1) \cdot \phi_{j,i}(y_2) \cdot g_{F_j}^k(y_1, n) \cdot g_{F_j}^k(y_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,k}^2 \cdot \Delta y^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{y_1} + \bar{U}_{y_2})} \right] dy_1 dy_2 \tag{5.85}$$

em que k representa a componente da turbulência u e w , e j as componentes do movimento da secção transversal x, y e M .

Esta função tem um papel essencial na avaliação dos efeitos aerodinâmicos, dado que ela caracteriza as flutuações dos coeficientes aerodinâmicos, ou seja, esta função traduz a eficácia com que o i -ésimo modo de vibração é mobilizado pelas forças aerodinâmicas que, por sua vez, são um reflexo da influência da turbulência sobre a estrutura.

Visto que a função de transferência aerodinâmica depende apenas da distância entre os pontos $|\Delta y| = |y_1 - y_2|$, Hansen et al.[2] propõem o seguinte procedimento simplificado para o cálculo desta função:

$$\begin{aligned} |J_{j,i}^k(n)|^2 &= \frac{1}{L} \int_0^L G_{F_j}^k(\Delta y, n) \cdot coh^k(\Delta y, n, \bar{U}_{\Delta y}) d\Delta y = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L G_{F_j}^k(\Delta y, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,k}^2 \cdot \Delta y^2}}{\bar{U}_{\Delta y}} \right] d\Delta y \end{aligned} \quad (com \ j = x, z, M \ e \ k = u, w) \quad (5.86)$$

onde a função de co-influência normalizada da resposta $G_{F_j}^k(\Delta y, n)$ é dada por:

$$G_{F_j}^k(\Delta y, n) = \frac{2}{L} \int_0^{L-\Delta y} \phi_{j,i}(y_2 + \Delta y) \cdot \phi_{j,i}(y_2) \cdot g_{F_j}^k(y_2 + \Delta y, n) \cdot g_{F_j}^k(y_2, n) dy_2 \quad (5.87)$$

que caso se opte por normalizar a coordenada y em relação a extensão da estrutura L esta função virá,

$$\begin{aligned} |J_{j,i}^k(n)|^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \phi_{j,i}(y_{N,1}) \cdot \phi_{j,i}(y_{N,2}) \cdot g_{F_j}^k(y_{N,1}, n) \cdot g_{F_j}^k(y_{N,2}, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,k}^2 \cdot \Delta y_N^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}(y_{N,1}) + \bar{U}(y_{N,2}))} \right] dy_{N,1} dy_{N,2} \\ &= \int_0^1 G_{F_j}^k(\Delta y_N, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ey,k}^2 \cdot \Delta y_N^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}(y_{N,1}) + \bar{U}(y_{N,2}))} \right] d\Delta y_N \end{aligned} \quad (5.88)$$

com

$$G_{F_j}^k(\Delta y_N, n) = 2 \int_0^{1-\Delta y_N} \phi_{j,i}(y_{N,2} + \Delta y_N) \cdot \phi_{j,i}(y_{N,2}) \cdot g_{F_j}^k(y_{N,2} + \Delta y_N, n) \cdot g_{F_j}^k(y_{N,2}, n) dy_{N,2} \quad (5.89)$$

No Quadro 5.1 pode observar-se, para a função de influência de resposta $g_{F_j}^k(y, n) = 1$ e para diversas configurações modais, as funções de co-influência normalizada da resposta $G_{F_j}^k(\Delta y, n)$ e as funções de transferência aerodinâmica $|J_{j,i}^k|^2$, em função da variável adimensional μ_y^k e da coordenada adimensional y_N

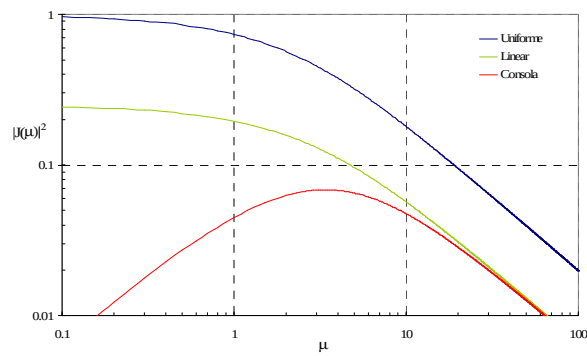
$$\mu_y^k = \frac{C_{ey}^k \cdot L \cdot n}{\bar{U}} \quad y_N = \frac{y}{L} \quad \Delta y_N = \frac{\Delta y}{L} \quad (5.90)$$

Quadro 5.1 – Funções de co-influência normalizada da resposta $G_{F_j}^k(\Delta y, n)$ e funções de transferência aerodinâmica $|J_{j,i}^k|^2$, tomando $g_{F_j}^k(y, n) = 1$ e para diferentes configurações modais $\phi\left(\frac{y}{L}\right)$ [2].

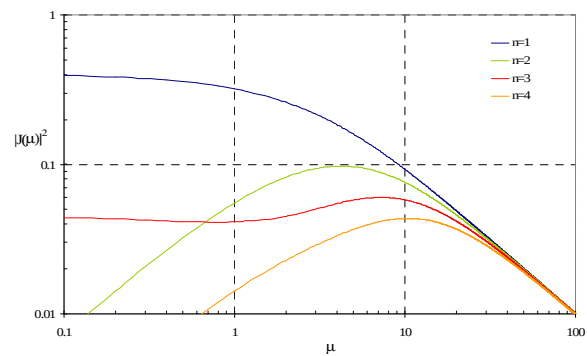
Configuração modal	Função de co-influência normalizada da resposta	Função de transferência aerodinâmica
Uniforme $\phi(y_N) = 1$	$2 \cdot (1 - \Delta y_N)$	$\frac{2}{(\mu_y^k)^2} \cdot (\mu_y^k - 1 + e^{-\mu_y^k})$
Linear $\phi(y_N) = (y_N)$	$\frac{1}{3} \left(2 - 3 \cdot \frac{\Delta y}{L} - \left(\frac{\Delta y}{L} \right)^3 \right)$	$\frac{2}{3 \cdot \mu_y^k} - \frac{1}{(\mu_y^k)^2} + \frac{2}{(\mu_y^k)^4} - e^{-\mu_y^k} \left(\frac{2}{(\mu_y^k)^3} + \frac{2}{(\mu_y^k)^4} \right)$
Potência $\phi(y_N) = (y_N)^l$	$\frac{1}{A_l} (1 - \Delta y_N)^{l+1} \cdot \sum_{p=0}^l B_p \cdot (\Delta y_N)^p$	-
Consola $\phi(y_N) = 2 \cdot (y_N) - 1$	$\frac{2}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \Delta y_N + 2 \cdot (\Delta y_N)^3 \right)$	$\frac{2}{3 \cdot \mu_y^k} - \frac{2}{(\mu_y^k)^2} + \frac{8}{(\mu_y^k)^4} - e^{-\mu_y^k} \left(\frac{2}{(\mu_y^k)^2} + \frac{8}{(\mu_y^k)^3} + \frac{8}{(\mu_y^k)^4} \right)$
Sinusoidal $\phi(y_N) = \sin(n \cdot \pi \cdot (y_N))$	$(1 - \Delta y_N) \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot \Delta y_N) + \frac{1}{n \cdot \pi} \sin(n \cdot \pi \cdot \Delta y_N)$	$\frac{\mu_y^k}{(\mu_y^k)^2 + (n \cdot \pi)^2} + \left(\frac{n \cdot \pi}{(\mu_y^k)^2 + (n \cdot \pi)^2} \right) \cdot (1 + \cos^2(n \cdot \pi) - 2 \cdot \cos(n \cdot \pi) \cdot \exp(-\mu_y^k))$

Quadro 5.2 – Coeficientes A_l e B_{lp} correspondentes às funções do Quadro 5.1 [2].

l	A_l	B_{l0}	B_{l1}	B_{l2}	B_{l3}	B_{l4}
0	1	2				
1	3	2	1			
2	15	6	3	1		
3	70	20	10	4	1	
4	315	70	35	15	5	1



a)



b)

Figura 5.21 – Função de transferência aerodinâmica correspondentes às funções de influência de resposta uniforme, linear e consola (a) e, para diferentes configurações sinusoidais (b).

Para além da metodologia acima exposta, outros autores propuseram diferentes expressões empíricas para a caracterização da função de transferência aerodinâmica no caso de tabuleiros de pontes. Assim apresentam-se, a título exemplificativo, algumas destas expressões

Quadro 5.3 – Funções de transferência aerodinâmica para tabuleiros de pontes, segundo diferentes autores [1]

Referência	Expressão
Davenport	$ J(\omega) ^2 = \frac{2 \cdot \left[\frac{7 \cdot \omega \cdot B}{2\pi \bar{U}} - 1 + \exp\left(-\frac{7 \cdot \omega \cdot B}{2\pi \bar{U}}\right) \right]}{\left(\frac{7 \cdot \omega \cdot B}{2\pi \bar{U}} \right)^2}$
Liepmann	$ J(\omega) ^2 = \frac{1}{1 + 2\pi \cdot \left(\frac{\omega \cdot B}{2\bar{U}} \right)}$
Irwin	$ J(\omega) ^2 = \frac{4}{\eta_1 \cdot \eta_2} (\eta_1 - 1 + e^{-\eta_1}) (\eta_2 - 1 + e^{-\eta_2})$ $\eta_1 = 0,95 \cdot \frac{B}{L_u^x} \sqrt{1 + 70,78 \cdot \left(\frac{\omega \cdot L_u^x}{2\pi \bar{U}} \right)^2}$ $\eta_2 = 0,475 \cdot \frac{H}{L_u^x} \sqrt{1 + 70,78 \cdot \left(\frac{\omega \cdot L_u^z}{\pi \bar{U}} \right)^2}$
Vickery	$ J(\omega) ^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \cdot \omega \cdot B}{\pi \bar{U}} \right)}$

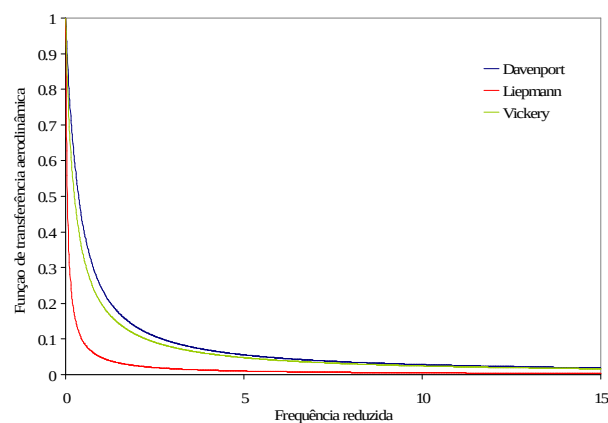


Figura 5.22 – Funções de transferência aerodinâmica em correspondência com as funções apresentadas no Quadro 5.3.

Estas expressões não são válidas, à priori, para a componente vertical do vento, apesar de ser corrente supor-se que elas tem, aproximadamente, a mesma forma da componente longitudinal.

Por fim, a função densidade espectral de potência da i -ésima componente de excitação modal pode ser relacionada directamente com a função densidade espectral de potência das forças aerodinâmicas numa secção transversal de referência através de

$$\begin{aligned}
 S_{f,i}(n) = & S_{F_x}^u(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{x,i}^u(n)|^2 + \\
 & + S_{F_x}^w(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{x,i}^w(n)|^2 + \\
 & + S_{F_z}^u(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{z,i}^u(n)|^2 + \\
 & + S_{F_z}^w(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{z,i}^w(n)|^2 + \\
 & + S_{F_M}^u(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{M,i}^u(n)|^2 + \\
 & + S_{F_M}^w(y_{ref}, n).L^2 \cdot |J_{M,i}^w(n)|^2
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

5.3.1.2.4. Valores extremos da resposta estrutural

O valor extremo da resposta estrutural, que ocorre durante um período de ventos fortes, constitui uma amostra de uma lei de distribuição estatística de extremos com um valor médio, normalmente considerado como o valor de projecto da resposta. Este valor, em correspondência com a l -ésima componente da resposta da estrutura $R_{\max,l}$, é expressa pela resposta estrutural média $\bar{R}_l$, somada ao valor médio da lei de distribuição de extremos, em correspondência com um processo estocástico de média nula da resposta, caracterizado através de um factor de pico $k_{p,l}$ multiplicado pelo desvio padrão $\sigma_{R,l}$ da resposta estrutural,

$$R_{\max,l} = \bar{R}_l + k_{p,l} \cdot \sigma_{R,l} \tag{5.92}$$

A resposta estrutural média $\bar{R}_l$ é originada pela parcela estática da acção do vento e é calculada através dos procedimentos habituais de análise estática de estruturas, tal como se exemplifica nas expressões seguintes, à imagem do que foi descrito na secção 3.3.4.

$$\bar{R}_l = \int_0^L \Gamma_l^F(y) \cdot F_j(y) dy \quad (j = x, y, M) \tag{5.93}$$

ou

$$\bar{R}_l = \sum_i \Gamma_{li} \frac{\bar{f}_i}{M_i \omega_i^2} \quad \text{com} \quad \bar{f}_i = \int_0^L \phi_i(z) \cdot F_j(z) dz \quad (j = x, y, M) \quad (5.94)$$

O desvio padrão da l -ésima componente da resposta estrutural, $\sigma_{R,l}$, pode ser calculado de forma análoga ao procedimento utilizado para uma estrutura pontual, mas desta feita considerando o contributo dos vários modos de vibração da estrutura, ou seja a partir do somatório do contributo de cada uma das componentes da resposta modal,

$$\sigma_{R,l}^2 = \sum_i \Gamma_{li}^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2 \quad (5.95)$$

ou então, de forma alternativa, directamente através da função densidade espectral da l -ésima componente da resposta da estrutura $S_{R,l}(\omega)$, obtida como se poderá ver a partir das funções densidade espectral de potência da resposta $S_{\varepsilon,i}(\omega)$ de cada uma das componentes modais associadas,

$$\sigma_{R,l}^2 = \int_0^\infty S_{R,l}(n) dn \quad (5.96)$$

com

$$S_{R,l}(n) = \sum_i \Gamma_{li}^2 S_{\varepsilon,i}(n) \quad (5.97)$$

A função densidade espectral de potência da i -ésima componente da resposta modal pode ser obtida, tal como descrito no capítulo 3 (expressão 3.107), através de

$$S_{\varepsilon,i}(n) = |H_i(n)|^2 \cdot S_{f,i}(n) = \frac{1}{M_i^2 \cdot (2\pi n_i)^4} |\chi_{m,i}(n)|^2 \cdot S_{f,i}(n) \quad (5.98)$$

sendo $\chi_{m,i}(\omega)$ a função de amplificação mecânica associada ao i -ésimo modo de vibração, representada por

$$|\chi_{m,i}(n)|^2 = \frac{1}{\left[1 + (4\xi_i^2 - 2) \left(\frac{n}{n_i} \right)^2 + \left(\frac{n}{n_i} \right)^4 \right]} \quad (5.99)$$

onde o coeficiente de amortecimento modal relativo ξ_i é obtido a partir da soma dos coeficientes de amortecimento estrutural $\xi_{s,i}$ e aerodinâmico $\xi_{a,i}$.

Deste modo, a variância da i -ésima componente da resposta modal pode obter-se, de forma análoga ao apresentado na equação (5.96)

$$\sigma_{\varepsilon,i}^2 = \int_0^{\infty} S_{\varepsilon,i}(n) dn \quad (5.100)$$

O factor de pico $k_{p,l}$ associado à l -ésima componente da resposta é calculado por meio de

$$k_{p,l} = \sqrt{2 \ln(v_{0,l} T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(v_{0,l} T)}} \quad (5.101)$$

em que T representa a duração das amostras e $v_{0,l}$ a frequência de passagens ascendentes pelo nível zero do processo estocástico utilizado na idealização das flutuações de cada componente da resposta, e que pode ser obtida através de (equação 2.86)

$$v_{0,l} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2l}}{\lambda_{0l}}} \quad (5.102)$$

com

$$\begin{aligned} \lambda_{0l} &= \sigma_{R,l}^2 = \int_0^{\infty} S_{R,l}(n) dn \\ \lambda_{2l} &= \int_0^{\infty} (2\pi n)^2 S_{R,l}(n) dn \end{aligned} \quad (5.103)$$

As variáveis λ_{0l} e λ_{2l} presentes em (5.102), são designadas momentos espectrais de ordem 0 e 2, respectivamente, da l -ésima componente da resposta da estrutura.

Tal como referido na secção 5.3.1.1.1., também se pode definir para cada uma das componentes l da resposta estrutural, o factor de rajada da resposta representado da seguinte forma

$$\hat{G}_l = \frac{R_{\max,l}}{\bar{R}_l} = 1 + k_{p,l} \frac{\sigma_{R,l}}{\bar{R}_l} \quad (5.104)$$

Tal como para o caso das estruturas pontuais (estruturas com um grau de liberdade), pode definir-se uma metodologia alternativa para a obtenção da variância da resposta modal em correspondência com o i -ésimo modo de vibração da estrutura. Deste modo, pode decompor-se esta grandeza em duas componentes: uma designada por parcela de fundo, representada pelo índice B , e a outra designada por parcela ressonante, à qual corresponde o índice R , como se passa a apresentar:

$$\sigma_{\varepsilon,i}^2 = [\sigma_{\varepsilon,i}^2]_B + [\sigma_{\varepsilon,i}^2]_R \quad (5.105)$$

A parcela ressonante está associada à componente da resposta correspondente à vizinhança das frequências próprias da estrutura, enquanto que a parcela de fundo está associada à restante gama de frequências, pelo que a consideração das expressões (5.98) e (5.100) conduz às seguintes equações para cada uma destas parcelas, nas quais se indica por n_i a frequência própria correspondente ao modo de vibração em análise, e por Δn a gama das frequências próximas da frequência natural, para as quais os efeitos de amplificação dinâmica são relevantes

$$[\sigma_{\varepsilon,i}^2]_B = \int_0^{n_i - \Delta n/2} |H_i(n)|^2 \cdot S_{f,i}(n) dn + \int_{n_i + \Delta n/2}^{\infty} |H_i(n)|^2 \cdot S_{f,i}(n) dn \quad (5.106)$$

$$[\sigma_{\varepsilon,i}^2]_R = \int_{n_i - \Delta n/2}^{n_i + \Delta n/2} |H_i(n)|^2 \cdot S_{f,i}(n) dn \quad (5.107)$$

Em consequência de a função de transferência modal apresentar uma baixa dispersão na vizinhança da frequência natural desse modo, para valores moderados de amortecimento global, verifica-se que $\Delta n/n_i \ll 1$.

Dado que a função densidade espectral das flutuações do vento (associada às forças aerodinâmicas) apresenta um decréscimo rápido com a frequência e como para baixas frequências se verifica que a seguinte relação,

$$|\chi_{m,i}(n < n_i - \Delta n/2)|^2 \approx 1 \quad \Rightarrow \quad |H_i(n < n_i - \Delta n/2)|^2 \approx \frac{1}{K_i^2} \quad (5.108)$$

é habitual admitir, como já foi referido em 5.3.1.1.1, que a parcela de fundo representa a resposta quasi-estática causada pelas rajadas com conteúdo espectral abaixo da frequência do modo de vibração em questão, pelo que se pode representar, aproximadamente, a variância correspondente a esta parcela através de

$$[\sigma_{\varepsilon,i}^2]_B \approx \frac{1}{K_i^2} \int_0^{\infty} S_{f,i}(n) dn = \frac{\sigma_{f,i}^2}{K_i^2} \quad (5.109)$$

Relativamente à parcela de ressonância, a consideração das equações (5.44) e (5.107), aliado ao facto de a função de transferência apresentar uma baixa dispersão neste intervalo de integração, permite a sua avaliação aproximada a partir da seguinte expressão

$$\left[\sigma_{\varepsilon,i}^2 \right]_R \approx S_{f,i}(n_i) \cdot \int_{n_i - \Delta n/2}^{n_i + \Delta n/2} |H_i(n)|^2 dn \approx \frac{\pi \cdot n_i \cdot S_{f,i}(n_i)}{4 \cdot \xi_i \cdot K_i^2} \quad (5.110)$$

5.3.2. Análise no domínio do tempo

5.3.2.1. Geração de séries temporais de velocidade do vento

Em alternativa à análise no domínio da frequência, passa-se a apresentar um procedimento no domínio do tempo, que assenta na geração de amostras de processos estocásticos gaussianos através da sobreposição de harmónicas. Este procedimento apresenta uma vasta aplicação no domínio da análise dinâmica de estruturas sujeitas a excitações aleatórias.

Por exemplo, na determinação dos efeitos da acção sísmica numa estrutura, se a excitação for definida através de um conjunto de acelerogramas artificiais representativo das acelerações previstas no solo, é possível calcular a resposta da estrutura por integração no tempo das equações de equilíbrio dinâmico e identificar um determinado efeito da acção sísmica (momento flector, deslocamento, etc) com a média dos valores extremos registados para esse efeito na resposta a cada um dos acelerogramas [50]. Posto isto, a análise dos efeitos de rajada da acção do vento numa estrutura pode ser efectuada do mesmo modo, uma vez gerado um conjunto de registos artificiais representativos da velocidade do vento.

Genericamente, existem dois grandes tipos de técnicas na geração de amostras de processos estocásticos consistindo, genericamente, o primeiro na identificação da amostra com o sinal de saída de filtros especiais sujeitos a um ruído branco como sinal de entrada. Este método, designado por ARMA (Auto Regressive Moving Average), tem sido utilizado por diversos autores como Gersch e Yonemoto, Samaras, Spanos e Mignolet, Ianuzzi e Spinelli, Naguna, Reed e Scanlan, Kareem e Li, em formatos e campos de aplicação distintos [46, 51].

O outro tipo de técnica, que será desenvolvida pormenorizadamente neste trabalho, consiste na sobreposição de harmónicas com amplitudes do espectro de potência do processo. Este método é designado WAWS (Weighted Amplitude Wave Superposition) e tem sido utilizado por autores de referência como Shinozuka, Jan, Ianuzzi e Spinelli, Wittig and Sinha, Kovac, Yang e, mais recentemente Deodatis [42-46, 51, 52].

Esta via foi inicialmente apresentada por Rice(1954) e mais tarde desenvolvida e estendida a processos vectoriais multi-variados, essencialmente por Shinozuka [42-46]. Nos últimos anos, os algoritmos de geração de amostras foram sofrendo algumas alterações com vista à optimização do tempo de geração.

O uso de técnicas baseadas na aplicação de transformadas rápidas de Fourier (“FFT techniques”) levou a um dramático melhoramento da eficiência computacional do algoritmo de representação espectral.

Neste trabalho, são apresentados alguns algoritmos de geração de amostras de processos estocásticos gaussianos estacionários pelo método de representação espectral (WAWS), baseados na metodologia apresentada por Shinozuka [42-45], dando-se maior ênfase ao algoritmo proposto por Deodatis em 1996 [46]. Esta última formulação distingue-se das anteriores devido à introdução da dupla indexação das frequências, bem como à garantia de geração de amostras de processos estocásticos ergódicos, facto que, até então, não tinha sido alcançado com tanta precisão, apesar das tentativas de Shinozuka durante os anos 70 e 80 [46]. Em suma, o algoritmo proposto por Deodatis apresenta uma elevada simplicidade, permitindo gerar amostras de processos vectoriais de acordo com uma matriz de funções densidade espectral cruzada prescritas, sendo ainda bastante eficiente do ponto de vista computacional, visto que se apoia no conceito de transformada rápida de Fourier [46].

Posto isto, partindo de uma formulação quasi-estacionária, as forças aerodinâmicas induzidas numa secção genérica de uma estrutura esbelta podem ser representadas segundo as três componentes do movimento oscilatório da secção transversal, de forma análoga ao apresentado nas relações (5.59), (5.60) e (5.61), onde $u(t)$ e $w(t)$ representam as séries de velocidades de vento segundo a direcção longitudinal e transversal, a gerar a partir das metodologias aqui apresentadas.

Na geração destas amostras de processos gaussianos estacionários, admite-se um espaçamento constante entre as frequências das harmónicas e considera-se que os processos apresentam valor médio nulo. Os processos estocásticos em causa são considerados unidimensionais, isto é, as amostras geradas apenas dependem da uma variável que, neste caso, é o tempo. Admite-se ainda, na geração deste processo, que a função densidade espectral potência de partida é limitada, ou seja, apresenta valor nulo para frequências superiores a um determinado limite, notando-se que apenas para estas condições é possível garantir a continuidade, a diferenciabilidade, a integrabilidade e a ergodicidade dos processos gerados.

Na geração de séries temporais de velocidade do vento atmosférico, assume-se que as condições de geração correspondem às de um equilíbrio neutro, bem como à homogeneidade e isotropia da turbulência atmosférica que, por sua vez, são as condições que, como já foi referido anteriormente, são admitidas em situações de ventos intensos de climas temperados.

É ainda oportuno referir que este método de análise da resposta a acções dinâmicas devidas aos efeitos de rajada é particularmente importante para o caso de estruturas com um comportamento não linear bastante acentuado [46, 51].

5.3.2.1.1. Processos escalares

5.3.2.1.1.1. Método de Shinozuka

Apesar das primeiras abordagens neste contexto, com recurso a simulações de Monte Carlo, terem sido realizadas por Rice em 1954, só com Shinozuka, durante os anos 70, se deu o seu desenvolvimento e aplicação à simulação de amostras de processos estocásticos gaussianos [46]. Desta forma, e seguindo a metodologia apresentada por Shinozuka em 1972 [42, 43, 45], passa a descrever-se o procedimento de geração de uma amostra $u(t)$ de um processo estocástico gaussiano escalar, através da sobreposição de harmónicas com amplitudes ponderadas (ou também conhecido por método da representação espectral).

A amostra de um processo estocástico gaussiano escalar pode apresentar-se sob a forma

$$u(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \cos(2\pi \cdot n_k \cdot t + \varphi_k) \quad (5.111)$$

onde N representa o número total de harmónicas consideradas na geração, n_k a frequência, A_k a amplitude da k -ésima harmónica e φ_k as diferenças de fase aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $[0; 2\pi]$.

A amplitude A_k de cada uma das harmónicas relaciona-se com a função densidade espectral de potência do processo, através de

$$A_k = \sqrt{2 \cdot S_u(n_k) \cdot \Delta n} \quad (5.112)$$

O intervalo de frequência Δn , utilizado entre as harmónicas consideradas, é assumido constante ao longo do presente texto. Esta hipótese é considerada não só por conduzir a maior simplicidade de exposição do assunto, mas também para possibilitar o recurso ao algoritmo FFT (“Fast Fourier Transform”).

As séries temporais geradas por este método são periódicas se todas as frequências n_k forem múltiplas da frequência mais baixa de entre as N frequências n_k . Ou seja, por exemplo, se $n_k = k \cdot \Delta n$ com $k = 1, 2, \dots, N$, o período da série é igual a $1/\Delta n = 1/n_1$, ou então, caso se defina $n_k = (k - 1/2) \cdot \Delta n$ o período é igual a $2/\Delta n = 1/n_1$.

Pode demonstrar-se que as amostras de processos estocásticos gaussianos gerados possuem as propriedades desejadas. Para tal, a função de autocorrelação $R_{uu}(\tau)$ de cada amostra deve

corresponder à função de autocorrelação $R_u(\tau)$ desejada para o processo estocástico, e que se relaciona com a função densidade espectral de potência através de (equação 2.41)

$$R_{ua}(\tau) = \int_0^{\infty} S_u(n) \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot \tau) dn \quad (5.113)$$

A função de autocorrelação $R_{ua}(\tau)$ de cada amostra gerada é definida em função de um intervalo genérico de tempo τ , através da seguinte expressão

$$R_{ua}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot u(t + \tau) dt \right\} \quad (5.114)$$

onde T representa a duração total da amostra. Substituindo na relação anterior a equação (5.111) pode obter-se

$$R_{ua}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_k A_j \int_0^T F_{kj}(t, \tau) dt \right\} \quad (5.115)$$

com

$$F_{kj}(t, \tau) = \cos(2\pi \cdot n_k \cdot t + \varphi_k) \cdot \cos(2\pi \cdot n_j \cdot (t + \tau) + \varphi_j) \quad (5.116)$$

Convém salientar que a definição da função de autocorrelação de um processo estocástico faz intervir um valor médio espectável calculado com base nos valores registados por todas as amostras que constituem o processo. No presente caso, esta média deve coincidir com a média temporal calculada em cada amostra, para que se verifique a ergodicidade admitida para os processos em causa.

Tendo presente que a frequência angular se relaciona com a frequência através de $\omega_k = 2\pi \cdot n_k$, que o período de cada harmónica é dado por $T_k = 1/n_k$ e considerando as seguintes igualdades trigonométricas

$$\cos(\omega_k \cdot t + \varphi_k) = \cos(\omega_k \cdot t) \cos(\varphi_k) - \sin(\omega_k \cdot t) \sin(\varphi_k) \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_k \cdot (t + \tau) + \varphi_k) &= \cos(\omega_k \cdot t) \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_k) - \sin(\omega_k \cdot t) \cdot \sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_k) - \\ &\quad - \sin(\omega_k \cdot t) \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_k) - \cos(\omega_k \cdot t) \cdot \sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_k) \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(t) \cdot \sin(t) dt = 0 \quad (5.119)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k.t) \cdot \cos(j.t) dt = \begin{cases} \pi & \text{se } k = j \neq 0 \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad (5.120)$$

A análise destas relações e o facto de a duração de T ser suficientemente longa face aos períodos das harmónicas elementares, permite ignorar os termos cruzados F_{kj} (com $k \neq j$) na equação (5.116), tendo-se que apenas os produtos de harmónicas com a mesma frequência contribuem para a autocorrelação da amostra, o que conduz ao seguinte resultado para a expressão (5.115)

$$R_{ua}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=1}^N A_k^2 \int_0^T F_k(t, \tau) dt \right] \quad (5.121)$$

com

$$F_k(t, \tau) = \left[\cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos^2(\varphi_k) - \sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_k) \cos(\varphi_k) \right] \cdot \cos^2(\omega_k \cdot t) + \left[\sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_k) \cdot \cos(\varphi_k) + \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin^2(\varphi_k) \right] \cdot \sin^2(\omega_k \cdot t) \quad (5.122)$$

Tendo agora em conta as igualdades seguintes, que resultam da relação (5.120), formuladas através da variável genérica t' ,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t') dt' = \int_0^{2\pi} \sin^2(t') dt' = \pi \quad (5.123)$$

Considerando $t' = \omega_k \cdot t$ e $T_k = 2\pi/\omega_k$, pode obter-se da expressão anterior,

$$\frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \cos^2(\omega_k \cdot t) dt = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \sin^2(\omega_k \cdot t) dt = \frac{1}{2} \quad (5.124)$$

Assim sendo, para amostras com duração T suficientemente longa, o resultado da integração indicada na equação (5.122) pode ser aproximado, para cada uma das N harmónicas, por

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T F_k(t, \tau) dt \right] = \frac{1}{2} \cos(\omega_k \tau) \left[\cos^2(\varphi_k) + \sin^2(\varphi_k) \right] = \frac{1}{2} \cos(\omega_k \tau) \quad (5.125)$$

pelo que

$$R_{ua}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \quad (5.126)$$

e atendendo à relação (5.112), obtém-se a seguinte expressão

$$R_{ua}(\tau) = \sum_{k=1}^N S_u(n_k) \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \Delta n \quad (5.127)$$

a qual, quando $N \rightarrow \infty$, conduz ao resultado pretendido

$$R_{ua}(\tau) \approx \int_0^{\infty} S_u(n_k) \cdot \cos(2\pi \cdot n \cdot \tau) dn = R_u(\tau) \quad (5.128)$$

A expressão (5.128) evidencia a ergodicidade do processo estocástico constituído pelas amostras geradas, uma vez que todas apresentam a mesma função de autocorrelação (para além de igual valor médio, que neste caso é nulo).

Shinozuka e Jan [45] apresentaram este método, mas com a introdução de mais uma parcela de frequências δn_k , a qual é uma variável aleatória uniformemente distribuída na gama $[-\Delta n'/2, \Delta n'/2]$, em que $\Delta n' \ll \Delta n$. A expressão proposta por estes autores toma então a seguinte forma

$$u(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2 \cdot S_u(n_k) \cdot \Delta n} \cdot \cos(2\pi \cdot (n_k + \delta n_k) \cdot t + \varphi_k) \quad (5.129)$$

A introdução destas frequências δn_k destina-se a retirar a periodicidade às amostras, como ocorreria se as frequências componentes fossem definidas por $n_k = k \cdot \Delta n$.

A consideração destas frequências adicionais δn_k não afecta as conclusões da demonstração anterior, no pressuposto de que o intervalo $\Delta n'$ seja reduzido, sendo que o valor indicado pelos autores é de $\Delta n' = \Delta n/20$.

Na Figura 5.23, ilustra-se um exemplo de uma amostra de um processo escalar gerado com recurso à expressão (5.111) através da sobreposição de 4 harmónicas ($k=1,2,3,4$) e considerando que $n_k = k$, $A_k = 2+k$ e $\varphi_k = (k-1) \cdot \pi/2$.

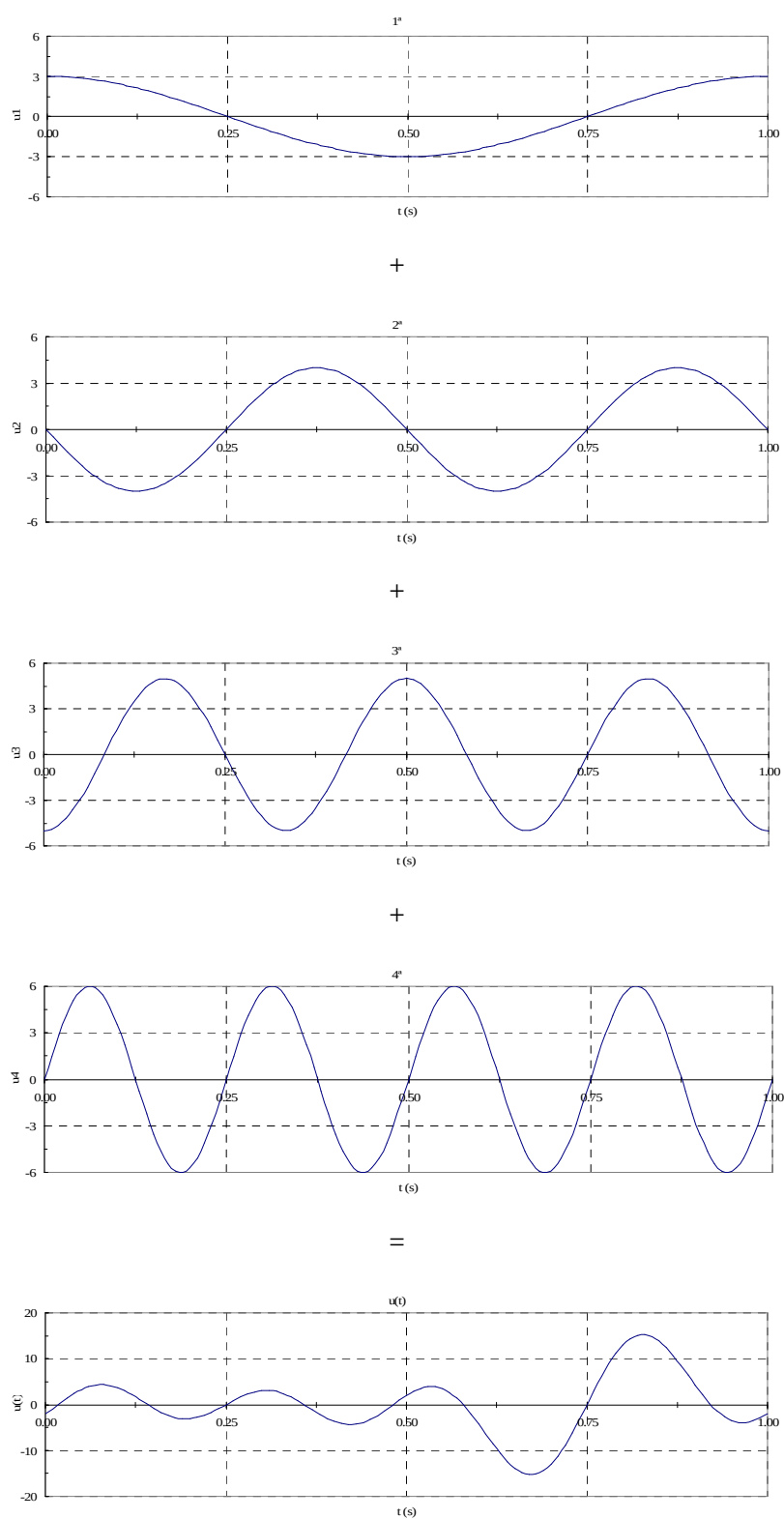


Figura 5.23 – Sobreposição de 4 harmónicas.

5.3.2.1.1.1. Aplicação do algoritmo FFT

Neste ponto, apresenta-se a aplicação do algoritmo FFT à geração de amostras de processos estocásticos gaussianos. Para este efeito, considere-se uma série $p_k = p(\omega)$ correspondente à amostragem de uma função $p(\omega)$, real ou complexa, em N pontos igualmente espaçados entre si ($\omega_k = k \cdot \Delta\omega$, com $k = 0, 1, \dots, N-1$), admitindo também, sem perda de generalidade, que N é par [51].

A transformada discreta de Fourier da série p_k é definida por um conjunto de coeficientes P_j , associados a $t_j = 2\pi \cdot j / (N \cdot \Delta\omega)$ com $j = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2$, através da seguinte relação

$$P_j = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \cdot \exp(i \cdot \omega_k \cdot t_j) \quad \text{com } i = \sqrt{-1} \quad (5.130)$$

Em termos computacionais, é vantajoso recorrer a um algoritmo FFT para calcular a transformada discreta de uma série.

Com efeito, a expressão (5.130) traduz que o vector P é igual ao produto do vector p por uma matriz quadrada complexa, de ordem N , cujo termo genérico (k, j) é igual a $\exp(i \cdot \omega_k \cdot t_j)$. Caso este produto matricial seja calculado directamente, tal envolve N^2 multiplicações, enquanto que o algoritmo FFT envolve apenas um número de operações da ordem de $N \cdot \log_2 N$. Concretizando num exemplo, para $N = 2^{16} = 65536$ operações, a redução seria de 2^{32} para 2^{20} , o que representa em termos computacionais, uma grande melhoria no tempo de computação.

Relembrando a equação (5.111) para a geração de uma amostra de um processo estocástico gaussiano escalar, com N instantes de tempo igualmente espaçados, tal que $t_j = j \cdot \Delta t$ com $j = 0, 1, \dots, N-1$, e considerando a sobreposição de N harmónicas, igualmente espaçadas de $\Delta n = 1/(N \cdot \Delta n)$, de tal forma que

$$u_j = u(t_j) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t_j + \varphi_k) \quad (5.131)$$

Introduzindo então a relação (5.130) em (5.131), pode obter-se a seguinte igualdade

$$u_j = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot \exp[i(\omega_k \cdot t_j + \varphi_k)] \right\} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [A_k \cdot \exp(i \cdot \varphi_k)] \cdot \exp(i \cdot \omega_k \cdot t_j) \right\} \quad (5.132)$$

que representa a parte real da transformada discreta de Fourier da série complexa,

$$p_k = A_k \cdot \exp(i \cdot \varphi_k) = \sqrt{2 \cdot S_u(n_k) \cdot \Delta n} \cdot \exp(i \cdot \varphi_k) \quad (5.133)$$

O procedimento descrito foi implementado por Yang e permite o recurso a um algoritmo FFT para o cálculo da série u_j , possibilitando uma redução considerável de tempo de cálculo relativamente ao necessário para a aplicação da equação (5.111).

5.3.2.1.2.. Processos vectoriais

5.3.2.1.2.1. Método de Shinozuka e Jan

Considere-se agora um processo estocástico gaussiano unidimensional vectorial constituído por M processos escalares, sendo $S_u(n)$ a correspondente matriz densidade espectral de potência, definida apenas para frequências positivas e, no caso geral, complexa [45, 51].

A metodologia a utilizar na geração das amostras representativas de processos estocásticos gaussianos vectoriais $\bar{u}(t)$ consiste numa extensão da abordagem de Shinozuka e Jan [45], atrás descrita para processos estocásticos gaussianos escalares.

Desta forma, cada componente do processo vectorial pode ser gerada através de

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^N u_i(n_k, t) \quad (5.134)$$

em que o índice i representa a componente do processo vectorial, correspondendo o índice k a cada uma das harmónicas constituintes da amostra, sendo calculada através de

$$u_i(n_k, t) = \sum_{j=1}^i |H_{ij}(n_k)| \cdot \cos(2\pi \cdot (n_k + \delta n_{kj}) \cdot t + \varphi_{kj} + \theta_{ij}(n_k)) \quad (5.135)$$

Para além das variáveis φ_{kj} e δn_{kj} , já apresentadas na exposição do ponto anterior (ver equação (5.135)), são apresentadas novas variáveis, tais como a diferença de fase entre as componentes do processo $\theta_{ij}(n_k)$ e uma matriz complexa triangular inferior indicada por $H(n_k)$. As duas novas variáveis intervenientes na igualdade (5.135), são definidas por meio de

$$H(n_k) \cdot [H^*(n_k)]^T = 2 \cdot S_u(n_k) \cdot \Delta n \quad (5.136)$$

$$\theta_{ij}(n_k) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(H_{ij}(n_k))}{\text{Re}(H_{ij}(n_k))} \quad (5.137)$$

representando-se por $H^*(n_k)$ a matriz conjugada de $H(n_k)$ e por $\text{Im}(\)$ e $\text{Re}(\)$ as partes real e imaginária da variável complexa em causa.

A determinação da matriz $H(n_k)$ pode ser realizada através de uma factorização de Cholesky da matriz $2.S_u(n_k).\Delta n$ (e cujo algoritmo é apresentado no Anexo B).

Tal como concretizado para o caso de amostras de processos unidimensionais gaussianos escalares, também para o caso das amostras de processos vectoriais se pode demonstrar que, as amostras de processos estocásticos gerados por este método são ergódicos.

A matriz de correlação $R_{ua}(\tau)$ de uma amostra genérica do processo vectorial em causa, suposta com uma duração longa face aos períodos das harmónicas constituintes, é definida por

$$R_{ua}^{ij}(\tau) = \sum_{k=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u_i(n_k, t) \cdot u_j(n_k, t + \tau) dt \right] \quad (5.138)$$

Este método de geração de amostras de processos vectoriais simplifica-se se a matriz $S_u(n)$ for real, como ocorre sempre que a função de correlação cruzada entre quaisquer componentes do processo é uma função simétrica ($R_u^{ij}(\tau) = R_u^{ji}(-\tau)$). Nestas condições, a matriz $H(n)$ é uma matriz real, e consequentemente, todas as diferenças de fase $\theta_{ij}(n)$ são nulas. Esta condição é válida na geração de amostras de séries temporais de velocidades de vento, devido ao facto de ser verificada para as flutuações da velocidade em condições de turbulência atmosférica homogénea [3].

Admitindo nulas as variáveis δn_{kj} (que tal como nos processos escalares, não afectam o resultado desta demonstração) e definindo $\omega_k = 2\pi.n_k$, pode obter-se as seguintes relações, através da substituição das equações (5.117) e (5.118) na igualdade (5.135)

$$u_i(n_k, t) = \sum_{m=1}^i .H_{im}(n_k) [\cos(\omega_k.t) \cos(\varphi_{km}) - \sin(\omega_k.t) \sin(\varphi_{km})] \quad (5.139)$$

$$u_j(n_k, t) = \sum_{n=1}^j .H_{jn}(n_k) [\cos(\omega_k.t) \cdot \cos(\omega_k.\tau) \cdot \cos(\varphi_{kn}) - \sin(\omega_k.t) \cdot \sin(\omega_k.\tau) \cdot \cos(\varphi_{kn}) - \sin(\omega_k.t) \cdot \cos(\omega_k.\tau) \cdot \sin(\varphi_{kn}) - \cos(\omega_k.t) \cdot \sin(\omega_k.\tau) \cdot \sin(\varphi_{kn})] \quad (5.140)$$

Assim sendo, a função de correlação pode ser expressa por

$$R_{ua}^{ij}(\tau) = \sum_{k=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j H_{im}(n_k) \cdot H_{jn}(n_k) \int_0^T F_{kmn}(t, \tau) dt \right] \quad (5.141)$$

com

$$F_{kmn}(t, \tau) = [\cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_{km}) \cdot \cos(\varphi_{kn}) - \sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_{km}) \cdot \sin(\varphi_{kn})] \cdot \cos^2(\omega_k \cdot t) + \\ + [\sin(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_{km}) \cdot \cos(\varphi_{kn}) + \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_{km}) \cdot \sin(\varphi_{kn})] \cdot \sin^2(\omega_k \cdot t) \quad (5.142)$$

Tendo novamente presente a igualdade (5.124), pode rescrever-se a expressão (5.141) na seguinte forma

$$R_{ua}^{ij}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j H_{im}(n_k) \cdot H_{jn}(n_k) \cdot [\cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \cos(\varphi_{km} - \varphi_{kn}) + \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \sin(\varphi_{km} - \varphi_{kn})] \quad (5.143)$$

Dado que as diferenças de fase φ_{kj} que intervêm na equação (5.135) são variáveis para cada componente do processo vectorial, é possível reter da expressão anterior apenas os termos correspondentes a $m = n$, admitindo que, em média, a contribuição dos restantes termos é nula. Além disso, se forem consideradas as pequenas frequências aleatórias δn_{kj} , as quais também são variáveis de componente para componente, a validade desta hipótese é reforçada, resultando daqui que os termos $m \neq n$ de $F_{kmn}(t, \tau)$ com a integração no tempo percam significado.

Deste modo, para $j \geq i$ pode obter-se

$$R_{ua}^{ij}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^i H_{im}(n_k) \cdot H_{jm}(n_k) \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \quad (5.144)$$

Atendendo à equação (5.136), esta pode representar-se do seguinte modo

$$\sum_{m=1}^i H_{im}(n_k) \cdot H_{jm}(n_k) = 2 \cdot S_{ua}^{ij}(n_k) \cdot \Delta n \quad (5.145)$$

pelo que, se se substituir (5.145) em (5.144), pode obter-se

$$R_{ua}^{ij}(\tau) = \sum_{k=1}^N S_{ua}^{ij}(n_k) \cdot \cos(\omega_k \cdot \tau) \cdot \Delta n \quad (5.146)$$

A matriz das funções de correlação $R_u^{ij}(\tau)$ pode relacionar-se com a matriz das funções densidade espectral de potência através de igualdade

$$R_u^{ij}(\tau) = \int_0^{\infty} S_u^{ij}(n) e^{-2\pi \cdot i \cdot n \cdot \tau} dn \quad (5.147)$$

Como a matriz $S_u^{ij}(n)$ é, por hipótese, uma matriz real, então

$$R_u^{ij}(\tau) = \int_0^{\infty} S_u^{ij}(n) \cos(2\pi \cdot n \cdot \tau) dn \quad (5.148)$$

do que se pode concluir que por comparação com a expressão (5.146), a matriz das funções de correlação $R_{ua}^{ij}(\tau)$ associadas às M séries geradas por este método corresponde, efectivamente, à matriz das funções de correlação $R_u^{ij}(\tau)$ objectivo.

5.3.2.1.2.2. Método de Deodatis

O algoritmo de geração de amostras de processos estocásticos estacionários unidimensionais e multivariados, de acordo com uma matriz de funções densidade espectral de potência previamente definidas, e que se passa a descrever, foi proposto por Deodatis [46] com base nos trabalhos realizados por Shinozuka [44]. Este procedimento de geração assenta nas formulações já descritas para a geração de processos estocásticos gaussianos unidimensionais, constituindo como que uma generalização das abordagens descritas nos pontos anteriores, mas com a vantagem de possuir uma maior eficiência computacional, dada a possibilidade de tirar partido da implementação de um algoritmo FFT (“Fast Fourier Transform”).

Se as componentes do processo vectorial corresponderem a diferentes localizações espaciais, este processo não é homogéneo no espaço. A matriz de correlações cruzadas do conjunto de amostras geradas é idêntica à correspondente matriz alvo. Neste procedimento são geradas amostras de processos estocásticos ergódicos, no sentido em que a matriz de correlações cruzadas temporais de cada amostra são idênticas à correspondente matriz alvo.

O algoritmo que será descrito é baseado numa extensão do método de representação espectral, pelo que as amostras geradas têm carácter gaussiano, no limite em que o número de termos da frequência de discretização da matriz funções de densidade espectral de potência tende para infinito.

Tal como na secção 5.3.2.1.2.1., considerando a matriz de densidade espectral de potência de partida $S_u^{ij}(n)$, o processo estocástico estacionário unidimensional $u_i(t)$ pode ser gerado através da seguinte expressão

$$u_j(t) = 2\sqrt{\omega} \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_{ml})| \cos(\omega_{ml}t - \theta_{jm}(\omega_{ml}) + \varphi_{ml}) \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, N_p \quad (5.149)$$

onde φ_{ml} representa o ângulo de fase aleatório uniformemente distribuído no intervalo $[0, 2\pi]$ e N representa um número suficientemente grande, tal que o incremento de frequência seja dado por,

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{cut}}{N} \quad (5.150)$$

sendo ω_{cut} denominada por frequência de corte (ou também por frequência de Nyquist). A equação (5.149) foi proposta após revisão por Shinozuka e Deodatis do seu artigo [44], estando as principais diferenças relacionadas com o abandono das frequências aleatórias δn e com a adopção do novo conceito de frequências duplamente indexadas ω_{ml} , tal que

$$\omega_{ml} = (l-1)\Delta\omega + \frac{m}{N_p}\Delta\omega \quad \text{com } l = 1, 2, \dots, N \text{ e } m = 1, 2, \dots, N_p \quad (5.151)$$

$H_{jm}(\omega_{ml})$ é um elemento típico da matriz triangular inferior $H(\omega)$, que é definida através da factorização de Cholesky (ver Anexo B) da matriz das funções densidade espectral de potência cruzadas $S_u^{ij}(n)$, tal que

$$S_u^{ij}(n) = H(\omega).H^{T*}(\omega) \quad (5.152)$$

Os elementos da matriz dos ângulos de fase complexos $\theta(\omega)$ pode ser obtida a partir de

$$\theta_{jm}(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(H_{jm}(\omega_{ml}))}{\text{Re}(H_{jm}(\omega_{ml}))} \quad (5.153)$$

As funções de correlação cruzadas, tanto relativas ao conjunto como de natureza temporal, das amostras geradas através da equação (5.149), tal como foi demonstrado na secção 5.3.2.1.2.1, aproximar-se-ão da função tomada de partida, na medida em que $\Delta\omega$ tender para zero e N tender para infinito.

Deve salientar-se ainda que, de modo a evitar erros de aliasing no processo de geração do sinal, o intervalo de tempo Δt das séries geradas deverá obedecer à condição

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{2\omega_{cut}} \quad (5.154)$$

O período máximo de geração da amostra é dado por,

$$T_0 = \frac{2\pi \cdot N_p}{\Delta\omega} = \frac{2\pi \cdot N_p \cdot N}{\omega_{cut}} \quad (5.155)$$

Da revisão do artigo de Shinozuka e Deodatis [44], Deodatis [46] propõe um algoritmo, implementado com bastante sucesso, em que recorre ao uso de técnicas de transformadas rápidas de Fourier (“FFT technique”). Tal como no método de Shinozuka e Jan [45], caso a matriz das funções densidade espectral de potência cruzadas de partida $S_u^{ij}(n)$ seja real, então a matriz $H(\omega)$ desta resultante também o é, desaparecendo conseqüentemente a matriz dos ângulos de fase $\theta(\omega)$. Deste modo, a equação (5.149) é reescrita explicitamente da seguinte forma

$$u_j(p, \Delta t) = \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^j C_{jm}(q, \Delta t) \exp \left[i \left(\frac{m \cdot \Delta\omega}{N_p} \right) \cdot (p, \Delta t) \right] \right\} \quad (5.156)$$

$$p = 1, 2, \dots, M \cdot (N_p - 1); \quad j = 1, 2, \dots, N_p; \quad q = 0, 1, \dots, M - 1$$

Visto que Δt e $\Delta\omega$ se relacionam da seguinte forma

$$N_p \cdot M \cdot \Delta t = T_0 = \frac{2\pi \cdot N_p}{\Delta\omega} = \frac{2\pi \cdot N_p \cdot N}{\omega_{cut}} \quad (5.157)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{M \cdot \Delta\omega} \Leftrightarrow \Delta t \cdot \Delta\omega = \frac{2\pi}{M} \quad (5.158)$$

então, da combinação das igualdades (5.150), (5.158) e (5.154), pode estabelecer-se a seguinte condição entre N e M ,

$$M \geq 2 \cdot N \quad (5.159)$$

Torna-se óbvio que as equações (5.154) e (5.159) são equivalentes, pelo que, se o intervalo de tempo Δt for calculado segundo a equação (5.158), ir-se-á satisfazer automaticamente a condição (5.154).

O termo $C_{jm}(q, \Delta t)$ da equação (5.156) pode ser obtido a partir de

$$C_{jm}(q, \Delta t) = \sum_{l=0}^{M-1} B_{jm}(l, \Delta\omega) \cdot \exp \left(i \cdot l \cdot q \cdot \frac{2\pi}{M} \right) \quad (5.160)$$

onde $B_{jm}(l, \Delta\omega)$ é expressa à custa da seguinte igualdade

$$B_{jm}(l, \Delta\omega) = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{\Delta\omega} \cdot H_{jm} \left(l \cdot \Delta\omega + \frac{m \cdot \Delta\omega}{N_p} \right) \cdot \exp(i \cdot \varphi_{ml}) & 0 \leq l < N \\ 0 & N \leq l < M \end{cases} \quad (5.161)$$

Posto isto, torna-se claro que se podem gerar com eficiência amostras de processos estocásticos gaussianos estacionários unidimensionais vectoriais e multivariados a partir da equação (5.156), desde que se tenha definida a matriz das funções de densidade espectral de potência $S_u^{ij}(n)$ e os valores dos parâmetros N (o valor habitualmente escolhido para esta variável costuma ser uma potência inteira de base 2, dada a exigência do algoritmo FFT), ω_{cut} e $\Delta\omega$, como se poderá comprovar no capítulo 6, através dos exemplos de aplicação desta metodologia.

Na Figura 5.24, representa-se um campo de velocidades de vento, gerado com recurso ao método aperfeiçoado por Deodatis. Na geração foram considerados 15 pontos num plano horizontal à cota 50m e que distam entre eles de 0,5m. Para a caracterização das propriedades do vento foi utilizado um perfil de velocidades médias de potência, com uma velocidade média à altura de referência de 38.5m/s e um expoente $\alpha=0,12$, sendo a função densidade caracterizadora da componente turbulenta a preconizada pela norma [22]. Como parâmetros de geração, foi considerada uma frequência de corte de 5Hz e um número de 4096 pontos (2^{12} pontos).

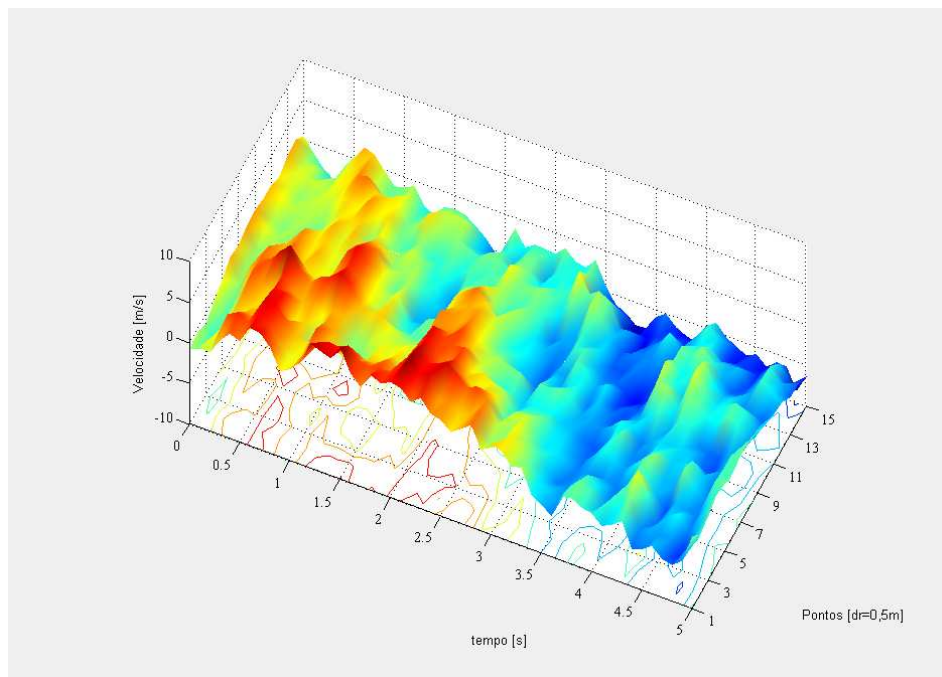


Figura 5.24 – Amostra de um campo de velocidades de vento.

5.3.2.1.3. Métodos alternativos de geração de amostras de processos estocásticos baseados na representação espectral

Para além dos métodos apresentados anteriormente de geração de amostras de processos estocásticos, baseados na representação espectral, existem procedimentos alternativos, não tão precisos, mas que permitem a geração de um maior número de séries num menor tempo computacional.

Estes procedimentos têm como base a metodologia desenvolvida por Shinozuka [42-46], mas apresentando a aplicação de técnicas de transformadas rápidas de Fourier, conjugadas com a introdução de técnicas de decomposição ortogonal da matriz densidade espectral de potência que, quando usados na sua capacidade global (cálculo de todos os modos e vectores espectrais) não apresentam grande benefício relativamente à factorização de Cholesky. Contudo, dado o facto de que só serão utilizados os modos espectrais que exibam conteúdo mais relevante, o procedimento de cálculo torna-se mais ligeiro, conseguindo-se uma redução de tempo de processamento que compensa substancialmente a perda de precisão deste método.

Este método é mais usado em estruturas de muito elevadas dimensões, como pontes suspensas ou pontes atirantadas com vãos muito extensos.

De entre os autores que desenvolveram trabalhos nesta área, destacam-se Hérmon e Santi [53] (“Biorthogonal decomposition”), Tubino e Solari [54] (“Double modal transformation”), e Di Paola [55] (“Spectral decomposition”).

5.3.3. Acção estática do vento segundo a EN1991-1-4

No que diz respeito à determinação dos efeitos de rajada sobre estruturas esbeltas, a EN1991-1-4 (Eurocódigo 1) [23] propõe expressões, cuja validade é restrita a estruturas simples, como edifícios com menos de 200 metros de altura e pontes com vão até 200 metros. Esta norma exclui oscilações torsionais de edifícios, vibrações de pontes devido aos efeitos da turbulência na direcção transversal ao da direcção do vento, pontes atirantadas e a contribuição para as oscilações de modos que não o modo fundamental.

A EN1991-1-4 usa modelos matemáticos para representar os efeitos estáticos, dinâmicos e aeroelásticos.

A modelação dos efeitos do vento em estruturas é realizada em função das suas dimensões, forma e propriedades dinâmicas. Apesar de utilizar uma abordagem dinâmica, a EN1991-1-4 introduz uma metodologia simplificada com o uso de pressões e forças quasi-estacionárias, através do uso do factor

dinâmico c_d , permitindo desta forma um cálculo estático equivalente nos casos apropriados. Esta norma também entra em linha de conta com a resposta aeroelástica, nos casos em que o movimento da estrutura modifica as forças aerodinâmicas [16]. Exemplos de estruturas susceptíveis deste tipo de problemas são: cabos, mastros, chaminés e pontes.

O modelo utilizado por esta norma europeia é a base de cálculo de muitos códigos de diversos países, e o seu desenvolvimento e promoção é atribuída a Davenport. Devido à relação linear entre o quadrado da velocidade e a pressão do vento, pode aferir-se a expressão quadrática correspondente à força máxima do vento em função da velocidade máxima da velocidade do vento,

$$\hat{F}_w = \bar{F}_w \cdot [1 + k_p \cdot I_v(z)]^2 = \bar{F}_w \cdot [1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v(z) + k_p^2 \cdot I_v^2(z)] \quad (5.162)$$

sendo k_p o factor de pico, $\bar{F}_w$ a força média devida a acção do vento e $I_v(z)$ a intensidade de turbulência.

Sendo esta equação não-linear e de utilização inconveniente para o cálculo da resposta dinâmica, é habitualmente linearizada através da forma,

$$\hat{F}_w \approx \bar{F}_w \cdot [1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v(z)] \quad (5.163)$$

aproximação razoável na situação em que a intensidade de turbulência apresenta um valor relativamente baixo, $I_v(z) \approx 0,1$.

Ao contrário da filosofia utilizada por códigos mais antigos, a EN1991-1-4 não calcula uma velocidade de rajada para depois converter numa pressão dinâmica que seria usada no cálculo estático, mas direcciona-se para o cálculo da pressão dinâmica de rajada. A EN1991-1-4 denomina esta variável como pressão da velocidade de ponta $q_p(z)$, para evitar qualquer confusão devido ao uso do termo “dinâmico”, que nesta norma está reservado à descrição da resposta dinâmica da estrutura. A pressão da velocidade de ponta é representada pela expressão

$$q_p(z) = [1 + 7 \cdot I_v(z)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot v_m^2(z) = c_e(z) \cdot q_b \quad (5.164)$$

com q_b como a pressão à velocidade básica

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho_{ar} \cdot v_b^2 \quad (5.165)$$

As forças actuantes numa estrutura esbelta podem então ser representadas através das relações

$$F_w = c_s c_d \cdot c_f \cdot q_p(z_e) \cdot A_{ref} \quad (5.166)$$

ou

$$F_w = c_s c_d \cdot \sum_{\text{elementos}} c_f \cdot q_p(z_e) \cdot A_{ref} \quad (5.167)$$

onde c_f representa o coeficiente de força para a estrutura ou para o elemento estrutural, coeficiente fornecido para diversas secções transversais genéricas, nos pontos 7 e 8 deste código. A variável A_{ref} representa a área de referência da estrutura ou elemento estrutural, definida nos pontos 7 e 8, para cada um dos tipos de estrutura. $q_p(z_e)$ representa a pressão à velocidade de ponta, a uma altura de referência z_e (igualmente definida nos pontos 7 e 8).

As variáveis v_b , $v_m(z)$ e $I_v(z)$ devem ser determinadas de acordo com o prescrito nas secções 4.3.3.2. e 4.4.6.2. do capítulo 4 desta dissertação.

Nas expressões (5.166) e (5.167), a variável $c_s c_d$ representa o factor estrutural, que tem em conta a não simultaneidade de ocorrência de picos de pressão da acção do vento numa superfície (c_s) e o efeito vibratório da estrutura esbelta induzido pela turbulência (c_d). O Eurocódigo 1 define um número limitado de casos para os quais é dispensado o cálculo deste coeficiente, podendo ser tomado como igual à unidade. Estes casos contemplam estruturas de edifícios com menos de 15 metros de altura ou frequência natural superior a 5Hz, edifícios com paredes estruturais com altura menor de 100 metros e em que a altura seja menor que 4 vezes o comprimento na direcção do vento, e ainda chaminés circulares com altura inferior a 60 metros e rácio altura diâmetro menor que 6,5. Nos restantes casos, esta norma define procedimentos detalhados para a determinação do factor $c_s c_d$ de tal forma que:

$$c_s c_d = \frac{1 + 2 \cdot k_p \cdot I_v(z_s) \cdot \sqrt{B^2 + R^2}}{1 + 7 \cdot I_v(z_s)} \quad (5.168)$$

Este coeficiente pode ser separado num factor de forma c_s e num factor dinâmico c_d , podendo estes ser calculados independentemente

$$c_s = \frac{1 + 7 \cdot I_v(z_s) \cdot \sqrt{B^2}}{1 + 7 \cdot I_v(z_s)} \quad (5.169)$$

$$c_d = \frac{1 + 2.k_p.I_v(z_s).\sqrt{B^2 + R^2}}{1 + 7.I_v(z_s).\sqrt{B^2}} \quad (5.170)$$

Nas expressões anteriores, I_v representa a intensidade de turbulência, k_p o factor de pico, tal como se definirá mais à frente neste ponto, z_s uma altura de referência de acordo com a Figura 5.25 e B^2 e R^2 um factor de fundo e um factor de ressonância da resposta, respectivamente.

A aplicabilidade das expressões (5.168) e (5.169) deverá respeitar os seguintes condicionamentos:

- a estrutura em análise deve corresponder a uma das formas generalistas apresentadas na Figura 5.25
- apenas se aplicam a oscilações devidas aos efeitos de rajada, em que o modo fundamental seja o preponderante, sendo que este modo de vibração terá de apresentar sinais constantes.

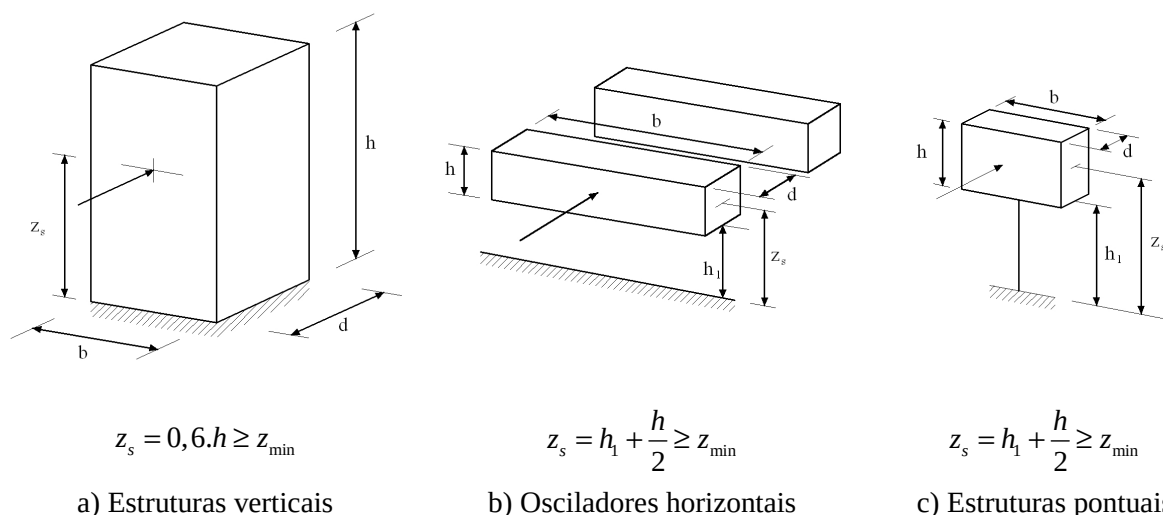


Figura 5.25 – Formas genéricas das estruturas cobertas pelo procedimento de calculo da EN1991-1-4 [23].

Posto isto, a norma EN1991-1-4 tem duas abordagens de cálculo dos coeficientes B e R , pelo que se passa a descrever cada uma delas, à imagem do que é apresentado neste código.

Desta forma, e conforme apresentado no Anexo B da EN1991-1-4, este procedimento segue a metodologia clássica de Davenport, que é referida em quase toda a literatura relacionada com a engenharia do vento. De acordo com esta abordagem, o factor B pode ser calculado através da expressão

$$B^2 = \frac{1}{1 + 0,9 \cdot \left(\frac{b+h}{L(z_s)} \right)^{0,63}} \quad (5.171)$$

em que b e h são as dimensões da estrutura, tal como representado na Figura 5.25, e $L(z_s)$ a escala de turbulência, de acordo com o preconizado na secção 4.4.6.2.

O valor do factor de pico k_p , definido como o rácio entre o valor máximo da componente flutuante da resposta e o seu desvio padrão, deve ser obtido através da consideração da igualdade

$$k_p = \sqrt{2 \cdot \ln(v_a \cdot T)} + \frac{0,6}{\sqrt{2 \cdot \ln(v_a \cdot T)}} \quad k_p \leq 3 \quad (5.172)$$

onde T representa o período de registo para a velocidade média do vento ($T = 600s$), e v_a é a frequência de passagens ascendentes dada por zero

$$v_a = n_{1,x} \sqrt{\frac{R^2}{B^2 + R^2}} \quad (5.173)$$

sendo $n_{1,x}$ a frequência natural da estrutura. No limite inferior, $v_a = 0,08Hz$, correspondendo deste modo a um factor de pico de 3,0.

O factor R deve ser calculado tendo em conta a expressão proposta pela EN1991-1-4

$$R^2 = \frac{\pi^2}{2 \cdot \delta} \cdot S_L(z_s, n_{1,x}) \cdot R_h(\eta_h) \cdot R_b(\eta_b) \quad (5.174)$$

em que $S_L(z_s, n_{1,x})$ é o espectro de potência adimensional da velocidade do vento, dado no ponto 4.4.6.2., δ é o decremento logarítmico total (soma do estrutural, aerodinâmico e de possíveis dispositivos de atenuação de vibrações) e $R_h(\eta_h)$ e $R_b(\eta_b)$ as funções de transferência aerodinâmica para o modo fundamental de vibração, obtidas de forma aproximada através de

$$R_h(\eta_h) = \frac{1}{\eta_h} - \frac{1}{2\eta_h^2} (1 - e^{-2\eta_h}) \quad R_h = 1 \text{ para } \eta_h = 0 \quad (5.175)$$

$$R_b(\eta_b) = \frac{1}{\eta_b} - \frac{1}{2\eta_b^2} (1 - e^{-2\eta_b}) \quad R_b = 1 \text{ para } \eta_b = 0 \quad (5.176)$$

com $\eta_h = \frac{4,6 \cdot h}{L(z_s)} \cdot f_L(z_s, n_{1,x})$ e $\eta_b = \frac{4,6 \cdot b}{L(z_s)} \cdot f_L(z_s, n_{1,x})$.

O outro procedimento alternativo de cálculo apresentado no Anexo C da EN1991-1-4 é baseado na metodologia desenvolvida por Hansen et al. [2], e apresenta as seguintes expressões para o cálculo dos factores B e R

$$B^2 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{L(z_s)}\right)^2 + \left(\frac{h}{L(z_s)}\right)^2 + \left(\frac{b}{L(z_s)} \cdot \frac{h}{L(z_s)}\right)^2}} \quad (5.177)$$

$$R^2 = \frac{\pi^2}{2 \cdot \delta} \cdot S_L(z_s, n_{1,x}) \cdot K_s(n_{1,x}) \quad (5.178)$$

com K_s como sendo uma função de redução de escala

$$K_s(n) = \frac{1}{1 + \sqrt{\left(G_y \cdot \phi_y\right)^2 + \left(G_z \cdot \phi_z\right)^2 + \left(\frac{2}{\pi} G_y \cdot \phi_y \cdot G_z \cdot \phi_z\right)^2}} \quad (5.179)$$

$$\phi_y = \frac{c_y \cdot b \cdot n}{v_m(z_s)} \quad \phi_z = \frac{c_z \cdot b \cdot n}{v_m(z_s)}$$

onde as constantes G_y e G_z dependem da variação dos modos de vibração ao longo do eixo horizontal y (no caso do referencial adoptado pela norma [23]) e do eixo vertical z , podendo ser avaliadas através do Quadro 5.4. As constantes de decaimento c_y e c_z são ambas tomadas com valor igual a 11,5.

Quadro 5.4 – Constante G em função dos modos de vibração [23].

Config. Modal	Uniforme	Linear	Parabólica	Sinusoidal
G	$1/2$	$3/8$	$5/18$	$4/\pi^2$

Estes dois procedimentos para o cálculo do factor estrutural $c_s c_d$ conduzem a valores que não diferem habitualmente mais do que 5%.

5.4. Análise de vibrações laterais induzidas pela libertação de vórtices (Vortex shedding – Lock-in)

As vibrações geradas pela libertação de vórtices podem ocorrer em estruturas esbeltas, tal como cabos, chaminés, torres ou tabuleiros de pontes.

Em casos raros, a libertação de vórtices pode induzir vibrações por ovalização da secção de chaminés de aço, ou seja, vibrações nas quais a forma da secção transversal varia no tempo (ver Figura 5.26).

O risco de vibrações induzidas por vórtices pode também aumentar se as estruturas esbeltas estiverem alinhadas, separadas por uma distância menor que aproximadamente 10-15 vezes a largura destas estruturas, ou se estas estruturas forem afectadas pelos vórtices libertados por um obstáculo adjacente de grandes dimensões [2].

Estes fenómenos requerem, habitualmente, o recurso à análise de modelos à escala reduzida em túnel de vento.

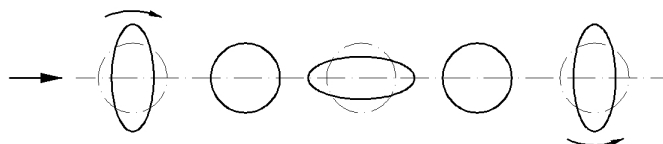


Figura 5.26 – Ilustração de um modo de ovalização de uma casca de uma chaminé [36].

Apesar do grande esforço realizado durante as últimas décadas nas tentativas de melhoramento dos modelos analíticos de previsão das vibrações devidas à libertação de vórtices, os modelos disponíveis são ainda relativamente rudimentares. O mecanismo de geração da acção lateral devido à libertação de vórtices provou ser de extrema complexidade, pelo que não existe nenhum método analítico geral e completamente fiável para a obtenção da resposta estrutural.

Os principais parâmetros físicos envolvidos no mecanismo de geração destes fenómenos foram identificados, contudo prevalece alguma falta de consenso, por parte dos investigadores, relativamente aos métodos a utilizar na previsão dos efeitos induzidos por este tipo de fenómenos.

Alguns dos maiores contributos na identificação dos diferentes aspectos relacionados com as vibrações induzidas por vórtices, durante os últimos 30 anos, vieram da Univeridade Western Ontário no Canadá e da Universidade Técnica de Aachen na Alemanha cujas abordagens, apesar de terem em consideração em ambos os casos os efeitos aeroelásticos, diferiram bastante em termos de resultados[2, 36].

O modelo espectral proposto pelo grupo de investigação canadiano fornece resultados precisos para estruturas relativamente rígidas, tal como chaminés de betão, nas quais os efeitos aeroelásticos são relativamente pequenos ou moderados. Este modelo foi adoptado pelo código Canadiano.

Para estruturas flexíveis, tal como chaminés de aço que necessitam da consideração cuidadosa da modelação dos efeitos aeroelásticos, o modelo de vórtices ressonantes proposto pelo grupo de investigação Alemão foca atenção naquele tipo de efeitos, tendo sido utilizado na abordagem utilizada pelo Eurocódigo.

5.4.1. O fenómeno físico

As vibrações induzidas por vórtices ocorrem quando estes são libertados alternadamente de lados opostos da estrutura, dando origem ao aumento da carga flutuante perpendicular à direcção do vento, tal como se pode ver na Figura 5.27.

Quando um vórtice é formado num dos lados da estrutura, a velocidade do vento aumenta do outro lado e de acordo com a teoria de Bernoulli (ver equação (5.4)), tal origina uma redução da pressão. À medida que os vórtices se vão libertando alternadamente, primeiro de um lado e de seguida do outro, forma-se uma carga harmónica lateral com a mesma frequência com que se libertam os vórtices.

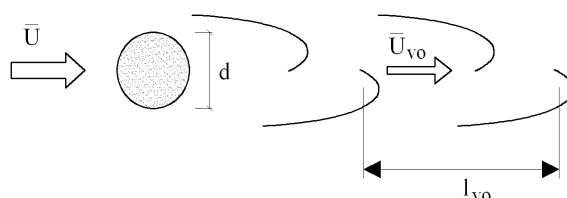


Figura 5.27 – Morfologia dos turbilhões alternados [1]

Forma-se assim um rasto de vórtices na esteira da estrutura, em que a velocidade $\bar{U}_{vo}$ com que estes se deslocam é aproximadamente 85% da velocidade $\bar{U}$ do campo de velocidades não perturbado. Este rasto de vórtices é designado por esteira de vórtices de von Karman (ou, como já referido, de Bernard-Karman).

Para uma estrutura não vibrante, a distância l_{vo} entre vórtices a rodar no mesmo sentido é proporcional à dimensão d da estrutura perpendicular à direcção do vento (ver Figura 5.27). Desta forma, pode afirmar-se que a frequência da acção lateral n_s , causada pela libertação de vórtices, pode obter-se através de

$$n_s = \frac{\bar{U}_{vo}}{l_{vo}} \quad (5.180)$$

sendo esta proporcional a $\bar{U}/d$, através de um factor de proporcionalidade designado por número de Strouhal St , tal que

$$n_s = St \frac{\bar{U}}{d} \quad (5.181)$$

O número de Strouhal depende da forma da secção transversal, da rugosidade da superfície e da turbulência associada ao vento.

Na Figura 5.28, representa-se a variação do número de Strouhal com o número de Reynolds, colhida de um trabalho realizado por Scruton et al. [2, 40], para um cilindro com pouca rugosidade e para um modelo aeroelástico da chaminé. Da análise da figura, pode concluir-se que o número de Strouhal depende das oscilações da estrutura (aeroelasticidade).

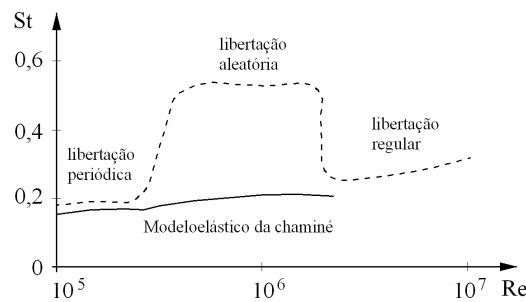


Figura 5.28 – Variação do número de Strouhal com o número de Reynolds, em prismas de secção transversal circular [2, 3]

Para secções rectangulares com arestas vivas, o número de Strouhal depende do rácio entre o comprimento e a largura da secção, não apresentando dependência do número de Reynolds.

No campo das estruturas de engenharia civil, as vibrações devidas a este fenómeno, podem ocorrer caso a frequência n_s , que domina o fenómeno de libertação de vórtices, seja aproximadamente igual à frequência n_e do modo de vibração perpendicular à direcção do vento. Desta forma, pode definir-se uma velocidade crítica $\bar{U}_{cr}$, para a qual o fenómeno pode torna-se significativo

$$\bar{U}_{cr} = \frac{n_e \cdot d}{St} \quad (5.182)$$

Para muitas estruturas, a velocidade crítica do vento é da ordem dos 10 m/s , o que significa que este fenómeno pode ocorrer para velocidades do vento frequentes, o que pode ter consequências significativas em termos do aumento do risco de fadiga estrutural.

O fenómeno de libertação de vórtices gera também cargas harmónicas longitudinais para frequências de $2n_s$. Todavia, a contribuição destas cargas são insignificantes para a maioria das estruturas.

Para estruturas com uma secção transversal circular, a força lateral devida à acção do vento é fortemente dependente no número de Reynolds. Para chaminés altas, com secção transversal circular, as gamas velocidades do vento de interesse correspondem ao número de Reynolds, habitualmente, nos intervalos designados de supercríticos ou transcríticos. (Os intervalos subcrítico e transcrítico assemelham-se, apresentando ambos uma libertação de vórtices muito regular muito.)

Posto isto, pode exprimir-se genericamente a força F_{cw} geradora das oscilações laterais devidas à acção do vento como a soma de três componentes, representada através da seguinte expressão

$$F_{cw} = F_t + F_{vo} + F_m \quad (5.183)$$

em que F_t é a força devida aos efeitos da turbulência, associada à componente lateral da flutuação da velocidade do vento, F_{vo} é a força causada pela libertação de vórtices e F_m a força devida aos movimentos auto-induzidos.

O aumento do risco de vibrações induzidas pela violenta libertação de vórtices pode dever-se a duas condições distintas de turbulência atmosférica. A primeira situação pode ocorrer para um escoamento laminar, no instante em que as condições atmosféricas se encontram estáveis. Este caso ocorre para estruturas localizadas em locais expostos, com pouca rugosidade. A outra situação pode dar-se devido ao aumento da turbulência de pequena escala que, por sua vez, ocorre em estruturas posicionadas na esteira de outras estruturas esbeltas.

A influência destas duas condições no mecanismo de formação da libertação de vórtices será descrita nas secções seguintes.

5.4.1.1. Força lateral associada à liberação de vórtices

A força associada à liberação de vórtices pode ser caracterizada por quatro parâmetros: o coeficiente de sustentação, o número de Strouhal, o comprimento de banda espectral da força e a correlação espacial da força ao longo do vão. Cada um destes parâmetros depende da forma da secção transversal, do número de Reynolds, da escala e da intensidade de turbulência e do rácio das dimensões da secção transversal.

A força associada à liberação de vórtices por unidade de comprimento pode ser escrita através de

$$F_{vo} = q(z).d(z).C_L(z,t) \quad (5.184)$$

onde $q(z) = \frac{1}{2}\rho_{ar}.\bar{U}^2(z)$ representa a pressão à velocidade $\bar{U}$, $d(z)$ uma dimensão de referência da secção transversal e $C_L(z,t)$ o coeficiente de sustentação, sendo este representado como um processo estocástico com média nula.

Assumindo-se u' como a componente turbulenta caracterizada apenas por turbilhões suficientemente grandes em comparação com as dimensões da estrutura, esta pode ser considerada como a contribuição para a variação moderada da velocidade média, tomando o valor $\bar{U} + u'$. Se se substituir esta velocidade do vento na equação (5.181) para a frequência de liberação de vórtices vem dado por

$$n_s + n'_s = St \frac{\bar{U} + u'}{d} \quad (5.185)$$

o que indica que o fenómeno da liberação de vórtices esta dentro de um intervalo de frequências e não apenas limitado a uma só frequência n_s .

A componente u' pode também ser definida como a parte da turbulência com períodos superiores aos períodos de vibração natural da estrutura.

Na camada limite atmosférica é uma boa aproximação considerar que a velocidade associada à turbulência u' segue uma distribuição normal. Por isso segundo Vickery [2], torna-se lógico exprimir a função densidade espectral do coeficiente de sustentação $S_{C_L}(z,n)$, através de

$$\frac{n.S_{C_L}(z,n)}{\sigma_{C_L}^2(z)} = \frac{n}{\sqrt{n}.B(z).n_s(z)} \exp \left[- \left[\frac{1 - \frac{n}{n_s(z)}}{B_s(z)} \right]^2 \right] \quad (5.186)$$

onde $B_s(z)$ representa a largura de banda espectral, sendo esta a medida da banda de frequências na qual os vórtices são libertados. Se não houver turbulência, o autoespectro do coeficiente de sustentação contém apenas as frequências próximas da frequência de libertação de vórtices n_s .

Ensaio de medição, à escala real, da força do vento em secções transversais circulares, situadas na camada limite atmosférica, realizados por Vickery, sugerem que a largura de banda espectral pode ser aproximada por

$$B_s(z) = 0,1 + 0,2.I_u(z) \quad (5.187)$$

sendo $I_u(z)$ a intensidade de turbulência.

Turbulência de pequena escala gerada na proximidade da estrutura não tem efeitos pronunciados na largura de banda espectral da força do vento.

A turbulência em larga escala, com frequências características de aproximadamente $0,1Hz$, pode ser interpretada como um vento médio com variações relativamente pequenas, daí que o coeficiente de sustentação não dependa da turbulência em larga escala, pois a libertação de vórtices ocorre naturalmente para frequências de ordem superior, por volta de $1Hz$. No entanto, para condições de turbulência com uma escala da mesma ordem de grandeza do comprimento da estrutura, esta tem uma maior influência no coeficiente de sustentação.

De acordo com Hansen et al. [2], e conforme evidenciado pelos resultados de uma campanha de medições levadas a cabo na Dinamarca para chaminés bastante elevadas, pode aproximar-se a função de coerência e o espectro de fase do coeficiente de sustentação para uma secção transversal do tipo analisado através de

$$\sqrt{coh(C_L)} = \exp(-a.s^2) \quad (5.188)$$

$$\Theta(C_L) = b.s \quad (5.189)$$

com a e b como constantes que tomam o valor $a \sim 0,1$ e $b \sim [0,1]$, para secções transversais circulares. A variável s representa uma distância adimensional, dada por

$$s = \frac{2.(z_1 + z_2)}{d(z_1) + d(z_2)} \quad (5.190)$$

Pode também definir-se um comprimento de correlação adimensional, definido através de

$$\lambda_{C_L} = \int_0^{\infty} \sqrt{\text{coh}(C_L)} \cdot \cos(\Theta(C_L)) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad (5.191)$$

O comprimento de correlação λ_{C_L} costuma tomar valores próximos da unidade ou mesmo um pouco superiores.

5.4.1.2. Força lateral associada aos movimentos estruturais auto induzidos

O movimento estrutural interage com o escoamento gerando novas forças laterais por parte deste último sobre a estrutura. Para estruturas flexíveis, tais como chaminés metálicas, estas forças do vento associadas ao movimento estrutural são significativas.

Quando em oscilação, a estrutura interage com o escoamento, de tal forma que a frequência dominante de libertação de vórtices n_s se pode sincronizar com a frequência natural da estrutura n_e . Este fenómeno é designado de “Lock-in”, e o seu efeito encontra-se representado na Figura 5.29.

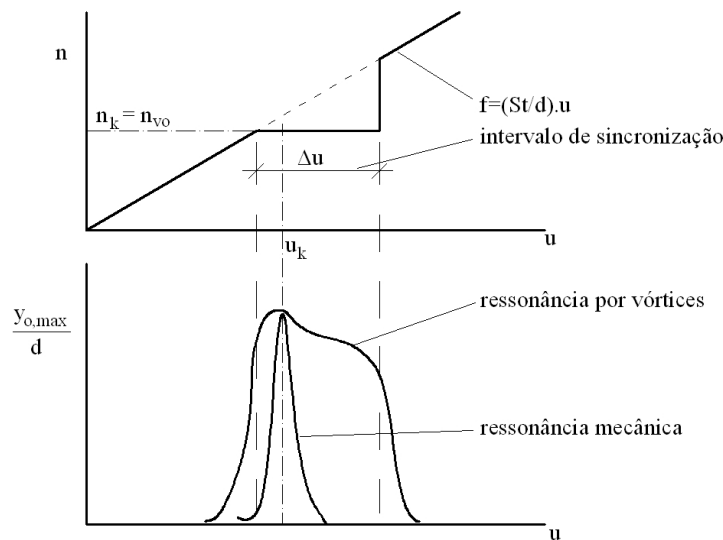


Figura 5.29 – Caracterização do efeito de sincronização e comparação entre a ressonância mecânica e a ressonância por vórtices [36].

Durante os últimos anos, com o intuito de determinar a influência do movimento estrutural na correlação entre as forças laterais devidas ao vento, foram efectuados numerosos ensaios, tendo-se concluído que o aumento da amplitude de vibração causa o aumento na escala de correlação entre estas forças, tal como se pode aferir da Figura 5.30, onde se representa um ensaio realizado por Scruton durante os anos 1970 [2].

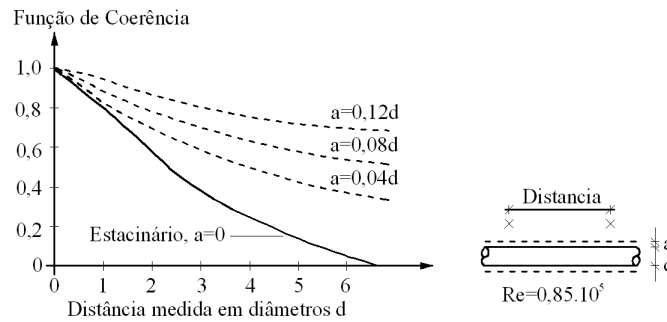


Figura 5.30 – Influência da amplitude de oscilação sobre o comprimento de correlação [2]

As propriedades da sincronização (Lock-in) estão intimamente relacionadas com as forças aerodinâmicas laterais causadas pelas vibrações estruturais. Na sua forma mais simples, as forças devidas aos movimentos auto-induzidos podem traduzir-se numa força inercial proporcional às acelerações da estrutura e de um amortecimento aerodinâmico proporcional à velocidade da estrutura

$$F_m = -m_{ar} \cdot \ddot{q} - c_a \cdot \dot{q} \quad (5.192)$$

onde q , $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ são, respectivamente, o deslocamento, a velocidade e a aceleração lateral da estrutura. Para a maioria das estruturas de engenharia civil, a massa de ar associada m_{ar} é baixa relativamente à massa estrutural, pelo que costuma ser desprezada. Contudo, a força associada ao amortecimento aerodinâmico $c_a \cdot \dot{q}$, caso se apresente negativa, tem um contributo redutor do amortecimento efectivo da estrutura. Este último fenómeno ocorre para velocidades próximas das velocidades críticas de libertação de vórtices e, por isso, constitui um aspecto essencial no cálculo da resposta estrutural.

A dependência linear entre a força e a velocidade indicada na equação (5.192) é suficientemente, precisa para pequenas amplitudes de vibrações, isto é, até 10–20% da sua dimensão transversal. Quando a amplitude de vibrações é superior ao intervalo referido, os termos não lineares do amortecimento tendem a tornar-se importantes [2].

O amortecimento aerodinâmico assume importância significativa tendo em conta o possível risco de vibrações violentas devido à libertação de vórtices. Depende do rácio entre a velocidade média do vento e a velocidade crítica da libertação de vórtices, bem como do número de Reynolds, da escala e da intensidade de turbulência, podendo ser caracterizado através do parâmetro Sa adimensional

$$Sa = \frac{c_a}{\rho_{ar} \cdot d^2 \cdot n_e} \quad (5.193)$$

Alternativamente, Sa pode ser expresso em função do decremento logarítmico do amortecimento δ_a , ou mesmo do coeficiente de amortecimento aerodinâmico relativo ξ_a ,

$$Sa = \frac{2 \cdot \delta_a \cdot m_e}{\rho_{ar} \cdot d^2} = \frac{4\pi \cdot \xi_a \cdot m_e}{\rho_{ar} \cdot d^2} \quad (5.194)$$

em que m_e representa a massa equivalente por unidade de comprimento em correspondência com o modo de vibração considerado

$$m_e = \frac{\int_0^L m(z) \cdot \phi^2(z) dz}{\int_0^L \phi^2(z) dz} \quad (5.195)$$

O parâmetro aerodinâmico Sa é negativo para amortecimentos aerodinâmicos negativos, sendo esta a situação que leva a oscilações significativas, induzidas pela libertação de vórtices.

O número de Scruton Sc é definido de forma similar ao parâmetro aerodinâmico Sa através de

$$Sc = \frac{4\pi \cdot \xi_s \cdot m_e}{\rho_{ar} \cdot d^2} \quad (5.196)$$

onde ξ_s é o coeficiente de amortecimento estrutural relativo. Assim sendo o amortecimento efectivo é proporcional à soma entre o número de Scruton e o parâmetro Sa .

Normalmente, o amortecimento estrutural aumenta com a amplitude das vibrações. Este comportamento estrutural não é tido em conta nesta formulação, que usa um simples número de Scruton caracterizando a tendência para obter elevadas vibrações induzidas pela libertação de vórtices. Pode tornar-se necessário especificar o amortecimento estrutural em função da amplitude de vibração, de forma a estabelecer um modelo mais preciso para a descrição das vibrações induzidas pela libertação de vórtices.

Segundo Hansen et al. [2], a modelação da influência da turbulência em larga escala pode ser tida em conta substituindo o amortecimento aerodinâmico provocado por um escoamento laminar pela sua média num escoamento turbulento, usando uma distribuição de probabilidade gaussiana da flutuação da velocidade do vento.

Na Figura 5.31 pode observar-se o rácio entre os amortecimentos aerodinâmicos negativos num escoamento turbulento δ_a^T e num escoamento laminar δ_a^L em função da intensidade de turbulência em

larga escala, podendo concluir-se que o aumento da turbulência reduz o valor do amortecimento aerodinâmico negativo de uma estrutura na eminência de um fenómeno violento de libertação de vórtices.

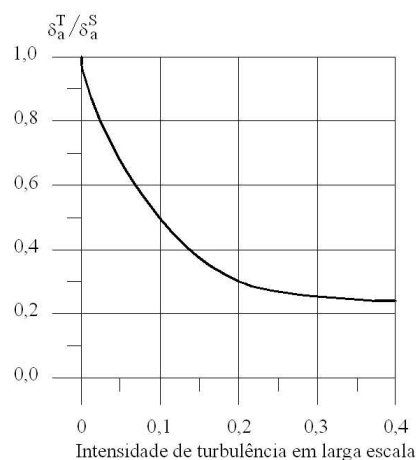


Figura 5.31 – Rácio entre os amortecimentos aerodinâmicos negativos num escoamento turbulento e num escoamento laminar, em função da intensidade de turbulência em larga escala [2]

O risco de oscilações violentas induzidas por vórtices depende da combinação do número de Scruton e da intensidade de turbulência em larga escala do escoamento em torno da estrutura. Elevada intensidade de turbulência em larga escala, e/ou um elevado número de Scruton, reduz o risco de vibrações violentas devido à libertação de vórtices. Na Figura 5.32, pode observar-se o resultado de um ensaio realizado por Hansen et al.[2], do qual se pode concluir que para valores do número de Scruton superiores a 20 não existe risco de haver “Lock-in”, e que por outro lado, para Sc inferiores a 10 esse risco torna-se bastante pronunciado.

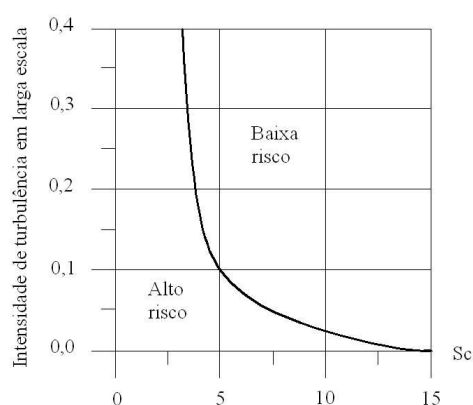


Figura 5.32 – Intensidade de turbulência em função do número de Scruton [2].

As oscilações excessivas induzidas pela libertação de vórtices são inaceitáveis, não apenas porque causam algum desconforto visual mas também devido ao aparecimento de fendas localizadas, devido a fenómenos de fadiga [56].

É ainda oportuno referir que o risco de vibrações excessivas devido à libertação de vórtices é mais pronunciado para estruturas cujas secções transversais apresentam arestas.

5.4.2. Resposta estrutural baseada num modelo espectral

O modelo espectral, como foi já referido, permite prever (com alguma precisão) o comportamento de estruturas não muito flexíveis tais como chaminés de betão.

O procedimento utilizado para calcular a resposta de uma estrutura sujeita ao fenómeno de libertação de vórtices, segundo um modelo espectral, é baseado numa análise modal. Habitualmente, as frequências naturais, segundo a direcção transversal do vento, estão bem separadas, pelo que se pode observar com clareza qual o modo para o qual a velocidade do vento iguala a velocidade crítica, originando-se oscilações devidas à libertação de vórtices. A força generalizada do modo considerado pode representar-se por

$$Q(t) = \int_0^L F_v(z,t) \cdot \phi(z) dz \quad (5.197)$$

onde $F_v(z,t)$ é a força induzida pela libertação de vórtices por unidade de comprimento L da estrutura e $\phi(z)$ é o modo de vibração ao qual corresponde uma frequência natural de vibração n_e .

A deformação da chaminé pode ser descrita através de $h(t) \cdot \phi(z)$, onde o deslocamento modal $h(t)$ é um processo estocástico caracterizado pela função densidade espectral de potência seguidamente representada (o índice *ref* indica, como já foi visto em casos anteriores, que as propriedades assim indicadas se referem a uma secção tomada como de referência)

$$S_{hh}(n) = |H(n)|^2 \frac{L^2 \cdot (q \cdot d \cdot \sigma_{C_t} \cdot \phi)_{ref}^2}{\sqrt{\pi} \cdot B \cdot n_e} |J(n)|^2 \quad (5.198)$$

onde $|H(n)|^2$ é a função modal de transferência da estrutura e $|J(n)|^2$ a função modal de transferência aerodinâmica, dada por

$$|J(n)|^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L g(z_1, n) \cdot g(z_2, n) \cdot coh(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (5.199)$$

em que $coh(z_1, z_2)$ representa a função de coerência e $g(z, n)$ é definida através da seguinte equação

$$g(z, n) = \frac{q(z).d(z).\sigma_{C_L}(z).\phi(z)}{(q.d.\sigma_{C_L}.\phi)_{ref}} \sqrt{\frac{B_{ref}}{B(z)}} \sqrt{\frac{n}{n_s(z)}} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{n}{n_s(z)}}{B(z)} \right)^2 \right] \quad (5.200)$$

Na maior parte dos casos, é suficiente assumir que a coerência depende apenas da distância entre os dois pontos considerados e não de cada uma das coordenadas. Desta forma, o integral (5.199) pode ser expresso através de dois integrais, tal como foi apresentado na secção 5.3.1.2.

$$|J(n)|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L G(\Delta r, n) \cdot coh(\Delta r) d\Delta r \quad (5.201)$$

$$G(r, n) = \frac{2}{L} \int_0^{L-r} g(z, n) \cdot g(z + \Delta r, n) dz \quad (5.202)$$

onde Δr é a distância entre os dois pontos considerados.

Partindo do pressuposto que o comprimento de correlação associado à força de libertação de vórtices é relativamente pequeno (cerca de um diâmetro), a função modal de transferência aerodinâmica pode ser aproximadamente obtida por

$$|J(n)|^2 = \lambda_L \cdot \frac{d_{ref}}{L} \cdot G(0, n_e) = 2 \cdot \lambda_L \cdot \frac{d_{ref}}{L} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (g(z, n))^2 dz \quad (5.203)$$

onde $\lambda_L \cdot d_{ref}$ é o comprimento de correlação.

Atendendo às igualdades (5.198) e (5.203), o desvio padrão dos deslocamentos na direcção y (transversal ao escoamento) representar-se-á através de

$$\begin{aligned} \sigma_y(z) &= \phi(z) \cdot \sqrt{\int_0^\infty S_{hh}(n) dn} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\phi(z)}{m_{ref} \cdot \phi_{ref}} \frac{\sigma_{C_L, ref} \sqrt{\lambda_L}}{\sqrt{B_{ref}}} \frac{\sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (g(z, n_e))^2 dz}}{(2\pi \cdot n_e)^2 \cdot \gamma_v} \sqrt{\frac{d_{ref}}{L}} \frac{q_{ref} \cdot d_{ref}}{\sqrt{\delta/(2\pi)}} \end{aligned} \quad (5.204)$$

sendo γ_v um factor adimensional que entra em conta com a actual distribuição da massa e com os modos de vibração ao longo da estrutura

$$\gamma_v = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{m(z) \cdot \phi^2(z)}{m_{ref} \cdot \phi_{ref}^2} dz \quad (5.205)$$

sendo $m(z)$ a massa por unidade de comprimento da estrutura. O decremento logarítmico δ , representado na expressão (5.204), tem em conta ambas as parcelas do amortecimento estrutural δ_s e aerodinâmico δ_a , de tal modo que

$$\delta = \delta_s + \delta_a \quad (5.206)$$

$$\delta_a = -2\pi K_a \frac{\rho_{ar} \cdot d_{ref}^2}{m_e} \quad (5.207)$$

O parâmetro aerodinâmico $K_a = -Sa/4\pi$, em que Sa é dado pela equação (5.194), é positivo para o amortecimento aerodinâmico negativo.

O momento flector máximo actuante é originado pela força de inércia com uma amplitude $F_I(z)$, dada pela multiplicação de um factor de pico k_p pelo desvio padrão da força de inércia, através de

$$F_I(z) = k_p \cdot m(z) \cdot (2\pi \cdot n_e)^2 \cdot \sigma_y(z) \quad (5.208)$$

Substituindo a equação (5.204) em (5.208), obtém-se

$$F_I(z) = k_p \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{m(z) \cdot \phi(z)}{m_{ref} \cdot \phi_{ref}} \frac{1}{\gamma_v} \frac{\sigma_{C_{L,ref}} \sqrt{\lambda_L}}{\sqrt{B_{ref}}} \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (g(z, n_e))^2 dz} \sqrt{\frac{d_{ref}}{L} \frac{q_{ref} \cdot d_{ref}}{\sqrt{\delta/(2\pi)}}} \quad (5.209)$$

O factor de pico k_p depende do tipo de vibração. Para respostas do tipo estocásticas, este factor pode atingir aproximadamente o valor de 4,0, enquanto que, para respostas harmónicas com amplitudes constantes, este factor é igual a $\sqrt{2}$. Para a situação em questão, o valor deste factor encontra-se algures entre estes dois extremos. Na Figura 5.33, apresenta-se representado o factor de pico k_p adoptado pelo código CICIND Model Code [57], que pode ser também obtido a partir da seguinte expressão

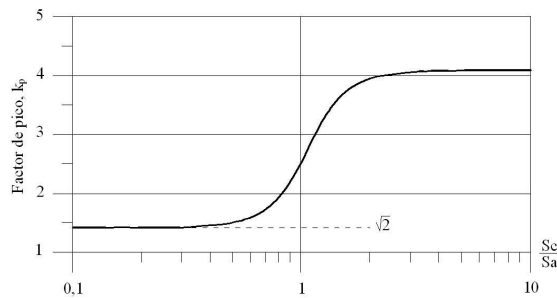


Figura 5.33 – Factor de pico k_p em função do rácio entre amortecimento estrutural e o aerodinâmico.

$$k_p = \sqrt{2} \left[1 + 1,2 \cdot \arctan \left(0,75 \cdot (Sc/Sa)^4 \right) \right] \quad (5.210)$$

5.4.3. Resposta estrutural baseada num modelo de “vórtices ressonantes”

O modelo de vórtices ressonantes prevê a consideração dos importantes efeitos aeroelásticos que ocorrem em estruturas flexíveis, como em muitas das chaminés metálicas (ou mesmo tabuleiros de pontes), através da consideração de uma força harmónica.

A força modal $Q(t)$, em correspondência com o modo considerado, obtém-se de

$$Q(t) = \int_0^L F(z,t) \cdot \phi(z) dz \quad (5.211)$$

em que a força transversal devida à libertação de vórtices por unidade de comprimento $F(z,t)$ vem,

$$F(z,t) = q(z) \cdot d(z) \cdot C_F(z) \cdot \sin(2\pi \cdot n_s \cdot t + \gamma(z) \cdot \pi) \quad (5.212)$$

O coeficiente $C_F(z)$ é um factor de forma adimensional, que depende da amplitude de vibração, da turbulência do ar, do número de Reynolds, do número de Strouhal, das dimensões e relações entre as dimensões da secção. O factor $\gamma(z)$ toma o valor de 0 ou 1, facilitando que a força tenha o mesmo sinal que o modo de vibração, em todos os pontos ao longo da estrutura, isto é, para modos de sinal constante $\gamma(z) = 0$ [2, 36].

A amplitude máxima de deformação $y_{\max}$ é calculada através de

$$y_{\max} = \frac{F_e}{(2\pi \cdot n_e)^2 \cdot m_e} \frac{\pi}{\delta_s} \quad (5.213)$$

sendo a massa modal equivalente m_e obtida a partir da igualdade (5.195), em que a força modal equivalente F_e é dada pela seguinte expressão

$$F_e = \frac{\phi_{\max} \cdot \int_0^L q(z) \cdot d(z) \cdot C_F(z) \cdot \phi(z) dz}{\int_0^L \phi^2(z) dz} \quad (5.214)$$

com $\phi_{\max}$ como a amplitude máxima do modo de vibração.

A amplitude máxima de deformação é obtida quando a frequência da solicitação n_s coincide com a frequência natural da estrutura n_e , pelo que

$$\frac{y_{\max}}{d_{\text{ref}}} = \phi_{\max} \frac{\int_0^L \frac{q(z)}{q_{\text{ref}}} \frac{d(z)}{d_{\text{ref}}} C_F(z) \cdot \phi(z) dz}{4\pi \cdot \int_0^L \phi^2(z) dz} \frac{1}{Sc} \frac{1}{St^2} \quad (5.215)$$

Os números de Scruton e Strouhal são calculados tal como apresentado nas equações (5.196) e (5.181) mas substituindo d por d_{ref} e $\bar{U}$ por $\bar{U}_{\text{ref}}$.

Tendo em conta que a amplitude da força varia com o tempo e que a correlação existente entre as forças descritas pelo comprimento de correlação é limitada, pode concluir-se que a carga máxima não ocorre simultaneamente ao longo de toda a estrutura. Assim, Ruscheweyh [2, 36] propôs uma abordagem que tem em consideração os efeitos da correlação limitada, integrando a amplitude máxima da carga sobre um comprimento L' , em que $L'/2$ é o comprimento de correlação igual ao integral da função de coerência de zero até infinito, como se pode observar pela Figura 5.34. As amplitudes máximas da força são observadas próximo dos pontos onde se encontram as deflexões máximas do modo de vibração. Este facto deve-se à presença dos efeitos aeroelásticos e à necessidade de obter a acção do vento que origina maior resposta estrutural.

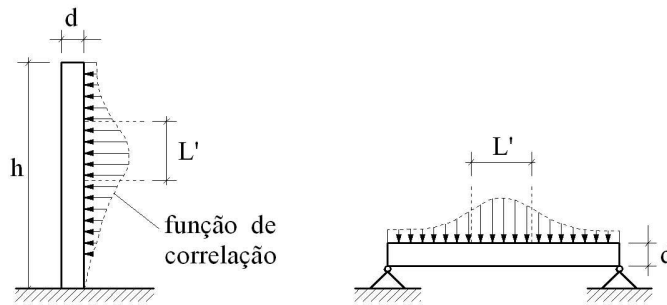


Figura 5.34 – Definição do comprimento de correlação de acordo com Ruscheweyh [2, 36]

Considerando que a pressão associada à velocidade média e que as dimensões estruturais apresentam ao longo do comprimento de correlação uma variação muito ligeira do seu valor, e assumindo que o modo tem sinal constante na sua extensão, o integral no numerador da equação (5.215) pode ser aproximado através de

$$\int_0^L C_F(z) \cdot \phi(z) dz = C_{lat} \cdot k_p \int_0^{L'} \phi(z) dz \quad (5.216)$$

onde k_p é o factor de pico e C_{lat} o coeficiente de sustentação.

Ruscheweyh toma o factor de pico em conta, integrando o modo de vibração num intervalo denominado de comprimento efectivo de correlação L_e , definido por

$$\int_0^{L_e} \phi(z) dz = k_p \int_0^{L'} \phi(z) dz \quad (5.217)$$

Portanto, o comprimento efectivo de correlação incorpora a influência da correlação entre forças, bem como o factor de pico.

Substituindo as equações (5.216) e (5.217) na equação (5.215), pode mostrar-se que a amplitude máxima de deflexão pode ser obtida através de

$$\frac{y_{\max}}{d_{ref}} = K_\phi \cdot K_w \cdot C_{lat} \frac{1}{Sc} \frac{1}{St^2} \quad (5.218)$$

onde as constantes K_ϕ e K_w são definidas por meio de

$$K_\phi = \phi_{\max} \frac{\int_0^L \phi(z) dz}{4\pi \cdot \int_0^L \phi^2(z) dz} \quad (5.219)$$

$$K_w = \frac{\int_0^{L_e} \phi(z) dz}{\int_0^L \phi(z) dz} \quad (5.220)$$

Para modos em que os sinais não são constantes, assume-se que a força actua na mesma direcção da deformada da configuração modal, pelo que este efeito será tido em conta através da modificação da definição das equações (5.219) e (5.220).

5.4.4. Regulamentação - Eurocódigo EN1991-1-4

Neste ponto, é abordada a metodologia utilizadas pela EN1991-1-4 [23] no tratamento dos efeitos da libertação de vórtices sobre estruturas esbeltas. Esta norma dedica o Anexo E ao tratamento dos fenómenos relacionados com a libertação de vórtices e as instabilidades aeroelásticas, iniciando a sua

abordagem pela definição dos critérios de ocorrência e aplicação dos conceitos nela apresentados ao tratamento deste tipo de fenómenos.

O efeito da libertação de vórtices, deve ser tido em conta no caso de estruturas esbeltas, nas situações em que o rácio entre o comprimento e a sua dimensão na direcção transversal ao vento for superior a 6, e em que a porosidade da estrutura não ultrapasse os 8% (atendendo ao facto de que o escoamento paralelo à estrutura interfere com a formação das camadas de separação).

A velocidade crítica para a ocorrência da libertação de vórtices é definida com recurso às seguintes expressões

$$v_{crit,i} = \frac{b.n_{i,y}}{St} \quad (5.221)$$

$$v_{crit,i} = \frac{b.n_{i,o}}{2.St} \quad (5.222)$$

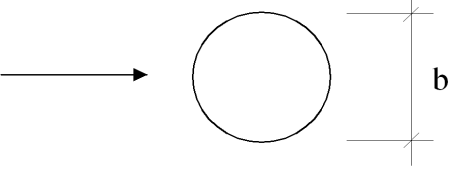
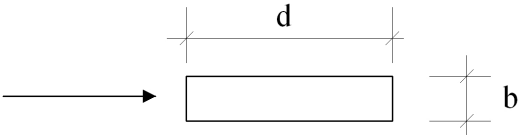
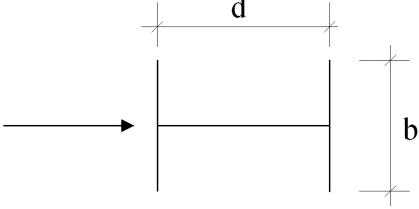
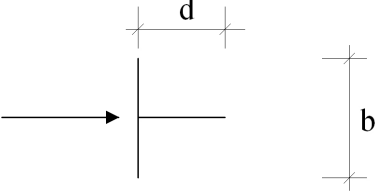
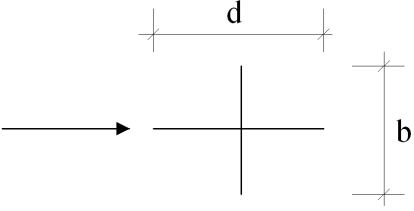
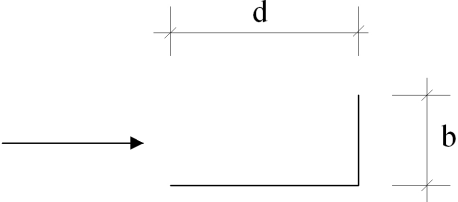
em função do número de Strouhal St , de uma dimensão b de referência da secção transversal da estrutura e da frequência fundamental $n_{i,y}$ ou $n_{i,o}$, dependendo de se tratar de um modo de flexão transversal ou de um modo de ovalização de uma casca cilíndrica, respectivamente.

Para estes casos, a velocidade crítica, v_{crit} deve situar-se num intervalo esperado de velocidades médias do vento. Como a libertação de vórtices ocorre para rajadas em grande escala, implica que a velocidade crítica seja maior que a velocidade média de projecto v_m , pelo que esta norma recomenda que a libertação de vórtices seja investigada quando

$$v_{crit} > 1,25.v_m \quad (5.223)$$

Os valores dos números de Strouhal podem ser obtidos para algumas secções genéricas constantes do Quadro 5.5.

Quadro 5.5 – Números de Strouhal para diferentes secções transversais [23]

Secção transversal		St
	Para todos os números de Reynolds	0,18
	$0,5 \leq d/b \leq 1,0$	Ver Figura 5.35
	$d/b = 1,0$	0,11
	$d/b = 1,5$	0,10
	$d/b = 2,0$	0,14
	$d/b = 1,0$	0,13
	$d/b = 2,0$	0,08
	$d/b = 1,0$	0,16
	$d/b = 2,0$	0,12
	$d/b = 1,3$	0,11
	$d/b = 2,0$	0,07

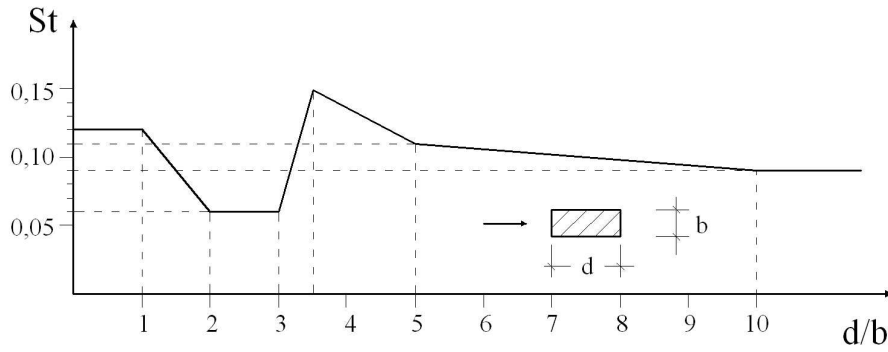


Figura 5.35 – Número de Strouhal para secções rectangulares de arestas vivas [23]

A capacidade da estrutura absorver e dissipar a energia acumulada do fenómeno de libertação de vórtices depende do amortecimento estrutural e é expressa através do número de Scruton Sc que, por sua vez, depende do decremento logarítmico estrutural δ_s e da massa equivalente por unidade de comprimento $m_{i,e}$, da densidade ρ_{ar} do ar e da dimensão b da secção onde ocorre o fenómeno de ressonância devido a libertação de vórtices

$$Sc = \frac{2 \cdot \delta_s \cdot m_{i,e}}{\rho_{ar} \cdot b^2} \quad (5.224)$$

O efeito das oscilações induzidas pela libertação de vórtices deve ser calculado a partir do efeito das forças de inércia por unidade de comprimento $F_w(s)$, actuantes segundo a direcção perpendicular à direcção do vento por unidade de comprimento s e de acordo com a expressão sugerida pelo Eurocódigo 1

$$F_w(s) = m(s) \cdot (2\pi n_{i,y})^2 \cdot \phi_{i,y}(s) \cdot y_{F,max} \quad (5.225)$$

sendo $m(s)$ a massa vibrante por unidade de comprimento, $n_{i,y}$ a frequência natural relativa ao modo i da estrutura e $\phi_{i,y}$ a respectiva configuração modal da estrutura normalizada para o valor unitário no ponto de máximo deslocamento. A variável $y_{F,max}$ representa o deslocamento máximo no tempo, no ponto onde a configuração modal $\phi_{i,y}$ apresenta o valor 1. Para o cálculo das amplitudes transversais devido à acção do vento, a EN1991-1-4 propõem duas formas possíveis de abordagem, que se passam a descrever.

A primeira abordagem é baseada na escola Alemã, podendo ser utilizada para diferentes tipos de estruturas e modos de vibração, incluindo os efeitos da turbulência e da rugosidade e deve ser utilizada para condições climáticas consideradas normais.

O deslocamento máximo $y_{F,\max}$ pode então ser calculado a partir de

$$\frac{y_{F,\max}}{b} = \frac{1}{St^2} \cdot \frac{1}{Sc} \cdot K \cdot K_w \cdot c_{lat} \quad (5.226)$$

onde St é o número de Strouhal dado na Quadro 5.5, Sc o número de Scruton dado pela equação (5.224), K_w o comprimento de correlação efectivo, K o factor de configuração modal e c_{lat} o coeficiente de força lateral.

O coeficiente de força lateral é dado em função de um coeficiente de força lateral básico $c_{lat,0}$, o qual pode ser obtido a partir da Quadro 5.6.

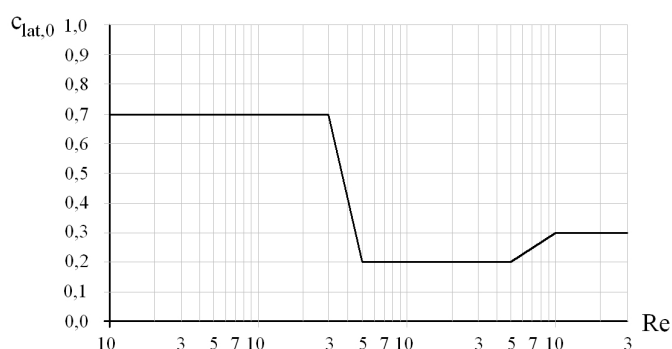
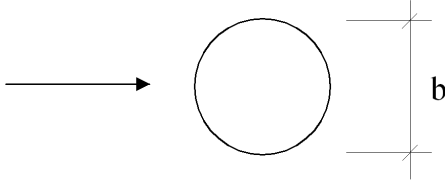
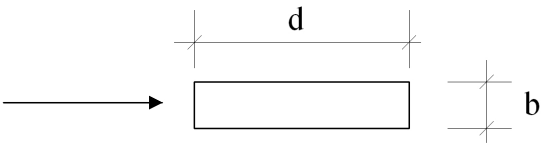
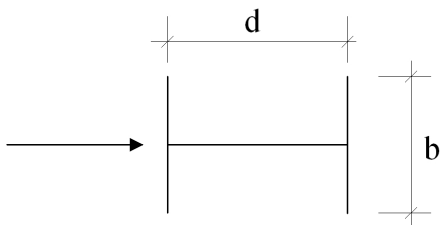
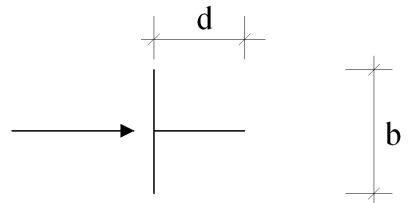
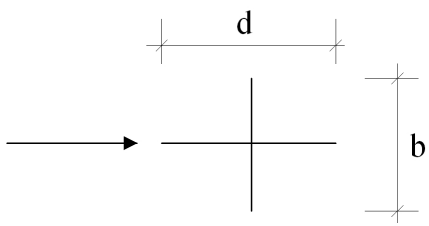
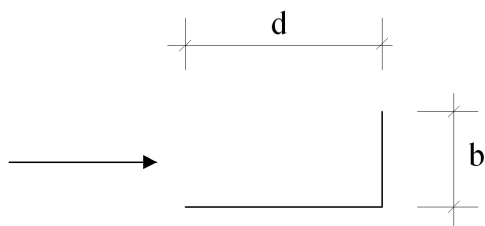


Figura 5.36 – Valor básico do coeficiente de força lateral $c_{lat,0}$ em função do número de Reynolds, para secções circulares [23]

Quadro 5.6 – Valor básico do coeficiente de força lateral $c_{lat,0}$ para diferentes secções transversais [23]

Secção transversal	$c_{lat,0}$	
	Para todos os números de Reynolds	Ver Figura 5.36
	$0,5 \leq d/b \leq 1,0$	1,1
	$d/b = 1,0$	0,8
	$d/b = 1,5$	1,2
	$d/b = 2,0$	0,3
	$d/b = 1,0$	1,6
	$d/b = 2,0$	2,3
	$d/b = 1,0$	1,4
	$d/b = 2,0$	1,1
	$d/b = 1,3$	0,8
	$d/b = 2,0$	1,0

Sendo que, c_{lat} poderá ser obtido a partir das relações descritas no Quadro 5.7, em função do rácio entre velocidade crítica $v_{crit,i}$ e a velocidade média v_{m,L_j} , no centro do comprimento de correlação efectivo L_j (ver Figura 5.37).

Quadro 5.7 – Coeficiente de força lateral c_{lat} , em função do rácio de velocidades $v_{crit,i}/v_{m,L_j}$ [23].

Rácio da velocidade critica do vento	c_{lat}
$\frac{v_{crit,i}}{v_{m,L_j}} \leq 0,83$	$c_{lat} = c_{lat,0}$
$0,83 \leq \frac{v_{crit,i}}{v_{m,L_j}} < 1,25$	$c_{lat} = \left(3 - 2,4 \cdot \frac{v_{crit,i}}{v_{m,L_j}} \right) \cdot c_{lat,0}$
$1,25 \leq \frac{v_{crit,i}}{v_{m,L_j}}$	$c_{lat} = 0$

O comprimento de correlação L_j deve ser posicionado no intervalo dos anti-nós, como se pode ver a partir dos exemplos ilustrados na Figura 5.37.

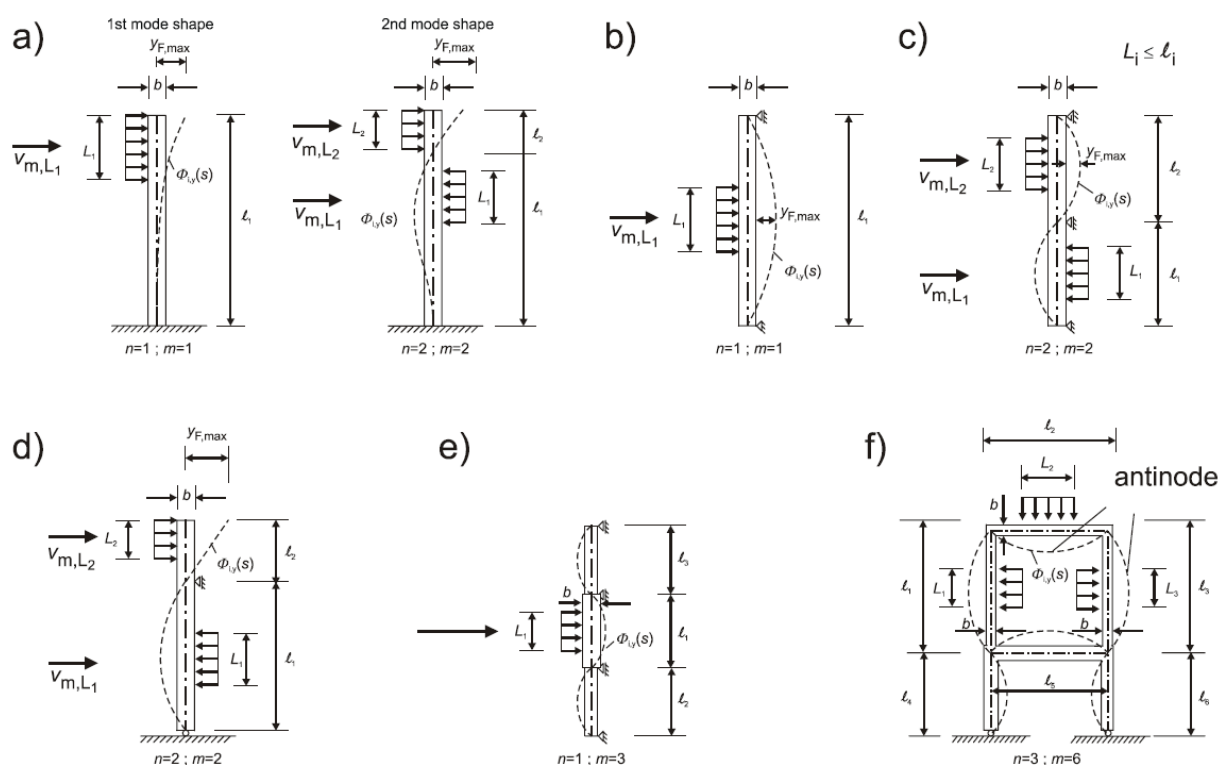


Figura 5.37 – Exemplos para a determinação do Comprimento de correlação efectivo L_j [23]

Estes comprimentos de correlação efectivos podem ser obtidos em função da amplitude de oscilação $y_F(s_j)$, de acordo com o Quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Comprimento de correlação efectivo L_j em função da amplitude de vibração $y_F(s_j)$ [23]

$y_F(s_j)/b$	L_j/b
$< 0,1$	6
$0,1 \text{ a } 0,6$	$4,8 + 12 \cdot \frac{y_F(s_j)}{b}$
$> 0,6$	12

O factor de comprimento de correlação efectivo K_w e o factor de configuração modal K podem ser obtidos através das equações

$$K_w = \frac{\sum_{j=1}^n \int_{L_j} |\phi_{i,y}(s)| ds}{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} |\phi_{i,y}(s)| ds} \leq 0,6 \quad (5.227)$$

$$K = \frac{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} |\phi_{i,y}(s)| ds}{4\pi \cdot \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \phi_{i,y}^2(s) ds} \quad (5.228)$$

em que n representa o número de regiões onde a excitação por libertação de vórtices ocorre ao mesmo tempo e m o número de anti-nós da estrutura oscilante no modo de vibração correspondente $\phi_{i,y}$. A variável l_j representa o comprimento da estrutura entre dois nós, que para estruturas em consola, é igual à altura da estrutura.

Por outro lado, a EN1991-1-4 apresenta uma abordagem alternativa do cálculo das amplitudes de vibração devido à libertação de vórtices, mas bastante mais limitada que a já apresentada. Esta abordagem deve apenas ser utilizada para o cálculo da resposta de estruturas em consola, em que o primeiro modo é preponderante e com uma distribuição regular das dimensões transversais da estrutura ao longo do seu eixo, dos quais são casos típicos as chaminés e os mastros. Esta abordagem permite, ainda, a consideração de diferentes intensidades de turbulência, que podem diferir quanto às condições atmosféricas.

Assim sendo, esta norma propõe a seguinte expressão para a obtenção do maior deslocamento característico

$$y_{\max} = \sigma_y \cdot k_p \quad (5.229)$$

sendo k_p o factor de pico dado pela expressão

$$k_p = \sqrt{2} \cdot \left(1 + 1,2 \cdot \arctan \left(0,75 \cdot \frac{Sc}{(4\pi \cdot K_a)} \right) \right) \quad (5.230)$$

e σ_y o desvio padrão do deslocamento no ponto de maior deflexão

$$\frac{\sigma_y}{b} = \frac{1}{St^2} \cdot \frac{C_c}{\sqrt{\frac{Sc}{4\pi} - K_a \cdot \left(1 - \left(\frac{\sigma_y}{b \cdot a_L} \right)^2 \right)}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{ar} \cdot b^2}{m_e}} \cdot \sqrt{\frac{b}{h}} \quad (5.231)$$

Na equação (5.231), C_c representa uma constante aerodinâmica dependente da forma da secção transversal, K_a é o parâmetro de amortecimento aerodinâmico e a_L uma amplitude limitada normalizada dando a deformação da estrutura com um amortecimento muito baixo. Estes três parâmetros podem ser obtidos a partir da Quadro 5.9, K_a podendo ser tomado igual a $K_{a,\max}$.

Quadro 5.9 – Constantes para a determinação dos efeitos da libertação de vórtices [23].

Constante	Secção Circular	Secção Circular	Secção Circular	Secção Quadrada
	$Re \leq 10^5$	$Re = 5 \cdot 10^5$	$Re \geq 10^6$	
C_c	0,02	0,005	0,01	0,04
$K_{a,\max}$	2	0,5	1	6
a_L	0,4	0,4	0,4	0,4

A solução da equação (5.231) pode ser obtida, de uma forma aproximada, através de

$$\left(\frac{\sigma_y}{b} \right)^2 = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2} \quad (5.232)$$

com as constantes c_1 e c_2 dadas por

$$c_1 = \frac{a_L^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{Sc}{4\pi \cdot K_a} \right) \quad c_2 = \frac{\rho_{ar} \cdot b^2}{m_e} \cdot \frac{a_L^2}{K_a} \cdot \frac{C_c^2}{St^4} \cdot \frac{b}{h} \quad (5.233)$$

6. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS ESBELTAS SOB OS EFEITOS DE RAJADA

6.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentados dois casos de estudo tratados através da aplicação das metodologias abordadas nos capítulos anteriores, relativas à análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência, e tendo em consideração o contexto normativo em vigor.

No primeiro caso de estudo, é efectuada uma comparação entre as análises quasi-estacionária dos efeitos de rajada, no domínio da frequência e no domínio do tempo, e as análises simplificadas regulamentares, para uma chaminé metálica com 60 m de altura, destinada à exaustão de gases de uma unidade industrial de Santo Tirso (Termolan). Dada a susceptibilidade da secção transversal desta estrutura à libertação de vórtices capaz de induzir um nível de vibrações elevado, procedeu-se também à análise de vibrações laterais induzidas por este fenómeno.

Na segunda, aplicação é realizada a análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada induzidos pela acção do vento sobre a antena espiada de 265m de altura da Rádio Renascença localizada em Muge, destacando-se nesta estrutura a presença de um elevado grau de não-linearidade geométrica devida à presença de cabos pouco tensos. Ainda neste contexto, é apresentada a análise desta mesma estrutura sob a óptica da norma EN1993-3-1, específica para o tratamento deste tipo de estruturas.

6.2. Chaminé de 60m

6.2.1. Descrição da chaminé

A estrutura em estudo é uma chaminé metálica com 60 metros de altura, diâmetro exterior constante de 2 metros e espessura variável em altura. A chaminé não contém “liner” interior tornando-se por isso uma estrutura bastante leve.

Na extremidade superior, é dotada de deflectores (alhetas) aerodinâmicos helicoidais, espaçados de 2 metros (3 hélices com passo de 120°) e que se prolongam por um terço da altura da chaminé. Na base, a chaminé apresenta 3 tomadas de gases com as respectivas aberturas de $0,75 \times 1,5 \text{ m}^2$, $0,75 \times 3,5 \text{ m}^2$ e $0,75 \times 2,0 \text{ m}^2$, apresentando também nessas regiões um reforço da secção transversal, garantindo-se desta forma que a influência destas aberturas na capacidade resistente da secção seja escassa.

A variação da espessura é discreta em altura (podendo distinguir-se 6 cilindros de secção transversal circular) em que a espessura de acordo com cada um dos tramos pode ser vista na Figura 6.1.

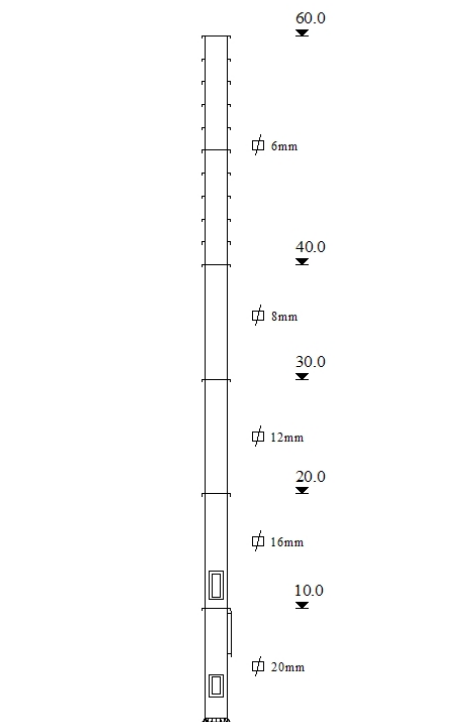


Figura 6.1 – Alçado da chaminé metálica com 60 metros de altura, com a indicação da espessura da secção a variar em altura.

No Quadro 6.1 são apresentadas as principais propriedades do material utilizados na concepção da chaminé.

Quadro 6.1 – Principais propriedades físicas e mecânicas do material utilizado na concepção da chaminé.

Aço	S275
f_y [MPa]	275
f_u [MPa]	430
E [GPa]	200
G [GPa]	80
ν	0,3
α [$^{\circ}\text{C}$]	$1,2 \times 10^{-5}$
$\rho_{aço}$ [kg/m^3]	7850
$\gamma_{aço}$ [kN/m^3]	77

6.2.2. Modelo numérico

6.2.2.1. Discretização estrutural

De forma a caracterizar as propriedades dinâmicas da chaminé, foram construídos quatro modelos de elementos finitos, dois dos quais com recurso ao software comercial de análise estrutural SAP2000 [58], um com recurso ao software comercial SOLVIA03 [59] e o quarto através de um programa desenvolvido no âmbito deste trabalho com recurso ao software MATLAB2007 [60].

No primeiro modelo, recorreu-se a elementos de casca rectangulares, com espessuras correspondente à das paredes da chaminé metálica. Cada um dos troços de espessura diferente é constituído por 640 elementos (32 perimetrais por 20 em altura), dispostos perimetralmente de acordo com um raio médio. A ligação entre cada um dos tramos é realizada através de elementos fictícios de compatibilização de deslocamentos (rigidlinks, bodys) e os apoios são materializados através de apoios duplos colocados perimetralmente nos nós da base da estrutura.

O segundo modelo foi construído no seguimento do primeiro, tendo como diferenças a inclusão das tomadas de gases, por supressão dos elementos na região onde estas se encontram, e a inclusão dos reforços materializados através de elementos de viga com as propriedades designadas em projecto.

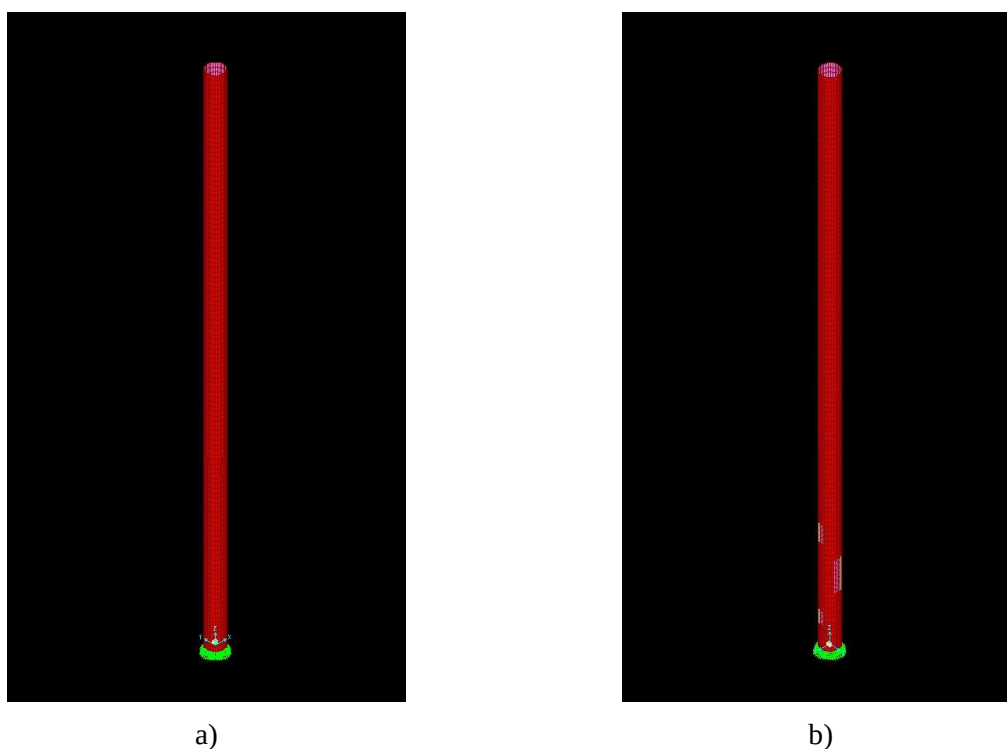


Figura 6.2 – Modelação da chaminé em elementos finitos de casca sem as tomadas de gases (a) e com as tomadas de gases (b).

O terceiro modelo é constituído por 60 elementos de viga (Figura 6.3) com as propriedades mecânicas das secções transversais que constituem a estrutura e que se podem ver representados sumariamente no Quadro 6.2 (em correspondência com as espessuras apresentadas na Figura 6.1). Na extremidade inferior, a ligação da estrutura à fundação foi considerada através da restrição de movimentos de todos os graus de liberdade materializando-se desta forma um encastramento.

Quadro 6.2 – Propriedades da secção transversal em correspondência com as espessuras da Figura 6.1

Secção tipo	d_{ext} [m]	d_{int} [m]	e [m]	A [m ²]	$I_x=I_y$ [m ⁴]	I_o [m ⁴]
1	2.000	1.988	0.006	0.03759	0.01868	0.03736
2	2.000	1.984	0.008	0.05006	0.02483	0.04967
3	2.000	1.976	0.012	0.07495	0.03703	0.07405
4	2.000	1.968	0.016	0.09973	0.04907	0.09814
5	2.000	1.960	0.020	0.12441	0.06097	0.12194

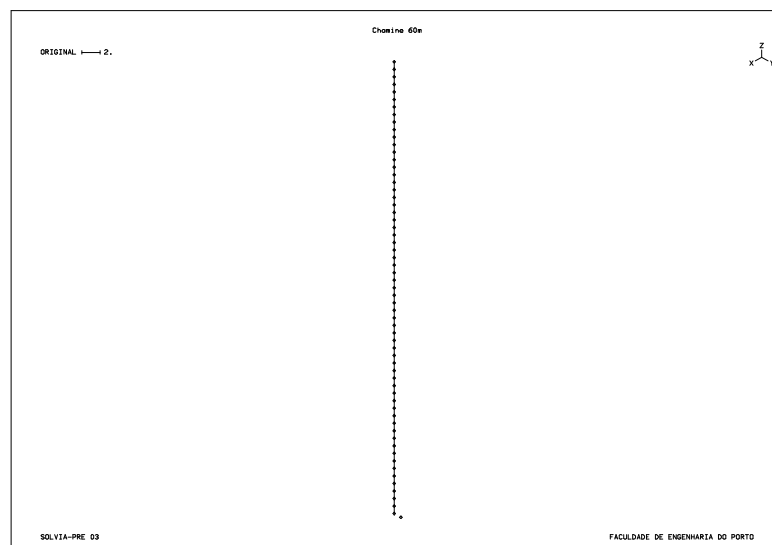


Figura 6.3 – Modelo da chaminé, construído no programa SOLVIA, em elementos finitos de viga.

O quarto modelo é constituído por 60 elementos de viga com as propriedades presentes no Quadro 6.2, gerados através de uma rotina programada em MATLAB, com o intuito de se proceder a posterior análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio da frequência e num espaço modal. Tal como no modelo 3, o apoio da extremidade inferior foi realizado através da restrição de todos os graus de liberdade desse nó.

6.2.2.2. Caracterização do comportamento dinâmico (frequências naturais e modos de vibração)

A modelação em elementos finitos realizada no decorrer deste trabalho através dos diversos programas utilizados (SAP2000, SOLVIA e MATLAB) permitiu avaliar as características dinâmicas da estrutura. Desta análise, obtiveram-se as frequências naturais da chaminé para cada um dos modelos, as quais apresentam uma concordância bastante satisfatória, como se pode observar através do Quadro 6.3, onde se representam os valores das primeiras 19 frequências naturais, bem como o tipo de configuração modal que lhe está associada.

Quadro 6.3 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 19 primeiros modos de vibração.

nº modo	SAP2000		SOLVIA03	MATLAB	Configuração modal
	s/ aberturas n [Hz]	c/ aberturas n [Hz]			
1	0.859	0.850	0.863	0.863	1º modo longitudinal
2	0.859	0.856	0.863	0.863	1º modo transversal
3	3.743	3.678	3.790	3.790	2º modo longitudinal
4	3.743	3.697	3.790	3.790	2º modo transversal
5	4.265	4.265	-	-	1º modo casca (longitudinal)
6	4.265	4.265	-	-	1º modo casca (transversal)
7	9.595	9.164	9.850	9.850	3º modo longitudinal
8	9.595	9.356	9.850	9.850	3º modo transversal
9	10.419	10.419	-	-	2º modo casca (longitudinal)
10	10.419	10.419	-	-	2º modo casca (transversal)
11	11.239	11.239	-	-	3º modo casca (longitudinal)
12	11.239	11.239	-	-	3º modo casca (transversal)
13	12.169	12.169	-	-	4º modo casca (longitudinal)
14	12.169	12.169	-	-	4º modo casca (transversal)
15	17.052	17.052	-	-	5º modo casca (longitudinal)
16	17.052	17.052	-	-	5º modo casca (transversal)
17	17.346	12.662	-	-	1º modo casca diametral
18	18.055	17.486	18.887	18.887	4º modo longitudinal
19	18.055	17.723	18.887	18.887	4º modo transversal

Dos valores observados no Quadro 6.3, relativos aos dois primeiros modelos (modelos de casca com e sem aberturas), pode constatar-se que, dada a proximidade de frequências registada, as aberturas

reforçadas para as tomadas de gases não têm grande influência nas frequências, bem como nas respectivas configurações modais. A diferença registada nas frequências e nos modos dos restantes modelos da estrutura, relativamente ao modelo com inclusão das aberturas reforçadas, foi muito pequena, pelo que também se podem considerar válidos os modelos simplificados de elementos de viga (modelos 3 e 4) a utilizar no decurso das análises no domínio do tempo (caso do modelo 3 desenvolvido com o programa SOLVIA) e no domínio da frequência (caso do modelo 4 desenvolvido com o software MATLAB).

Na Figura 6.4 e na Figura 6.5 apresentam-se os 4 primeiros modos de vibração obtidos com o modelo 2 (modelo de casca com aberturas) e com o modelo 3 (modelo de viga SOLVIA), respectivamente.

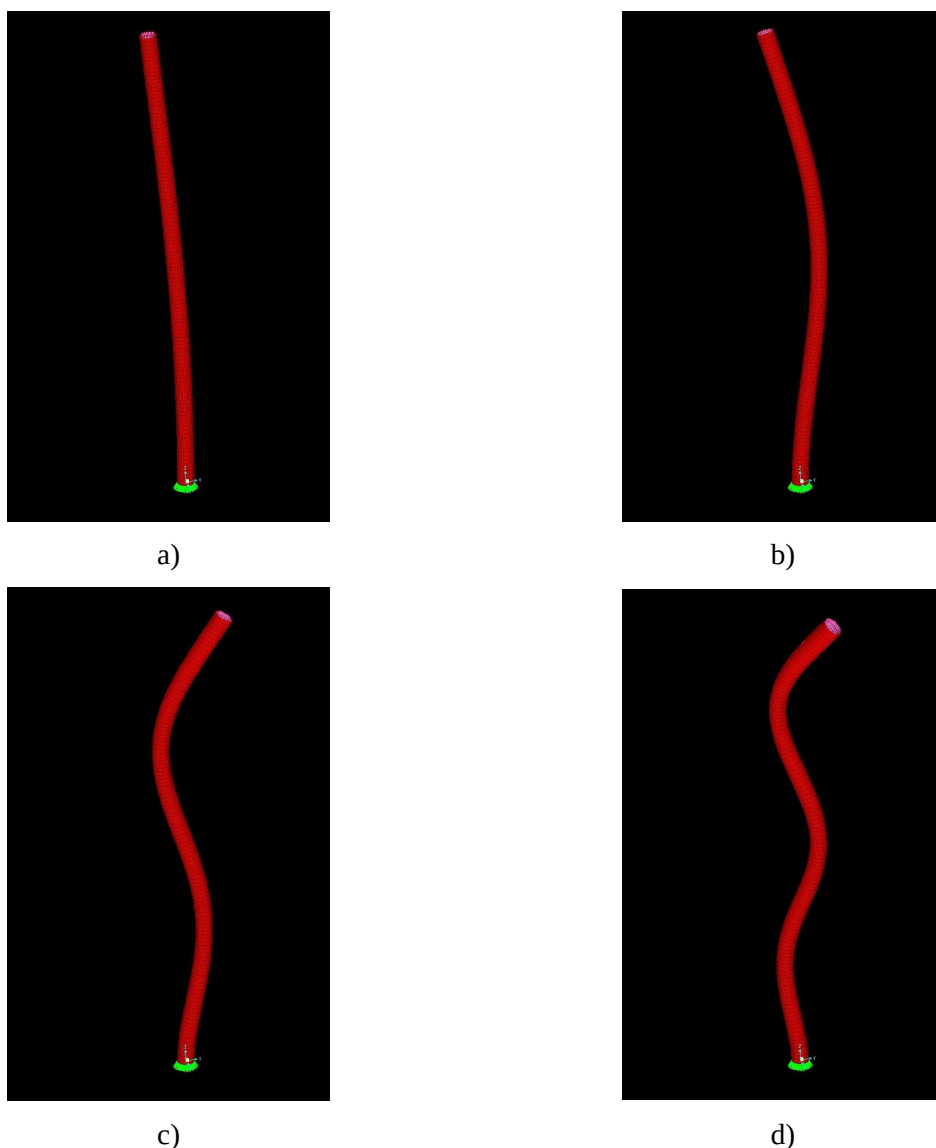


Figura 6.4 – Quatro primeiros modos de vibração longitudinais obtidos com o modelo 2 (elementos de casca com aberturas, SAP2000).

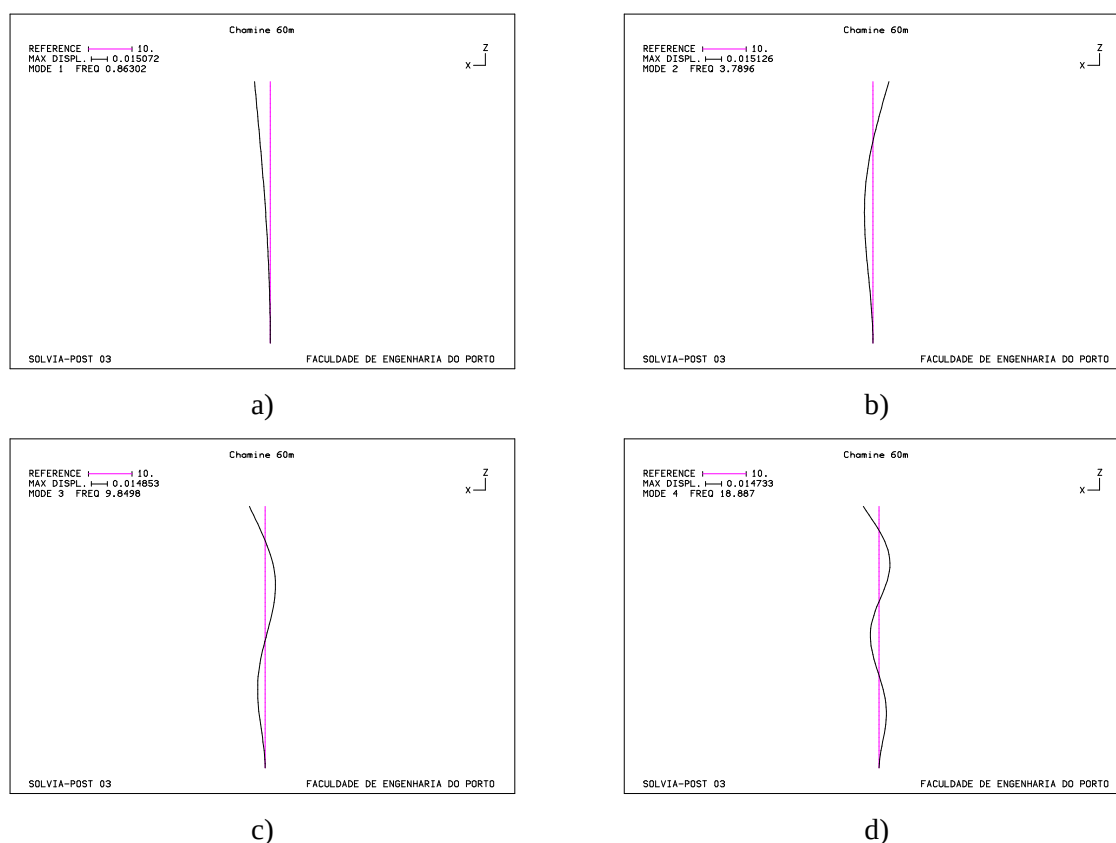


Figura 6.5 – Quatro primeiros modos de vibração longitudinais obtidos com o modelo 3 (elementos de viga, SOLVIA)

O modo registado com os modelos de casca, cuja configuração modal apresenta a ovalização da secção transversal da chaminé (ver Figura 6.6) pode ser desprezado no que respeita à análise dos efeitos de rajada, visto que nas direcções relevantes apresenta um factor de participação modal quase desprezível.

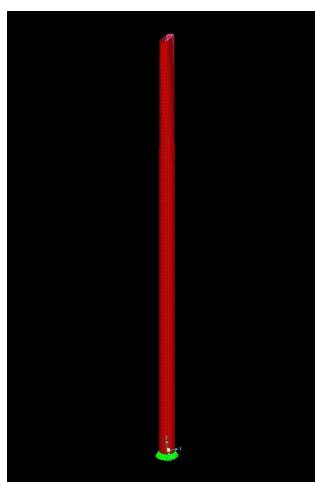


Figura 6.6 – Primeiro modo de vibração com ovalização da secção transversal da estrutura.

6.2.3. Definição da acção

6.2.3.1. Velocidade média

A chaminé metálica em estudo localiza-se numa zona industrial de forte predominância rural, do concelho de Santo Tirso.

Por isso, e com base na regulamentação em vigor pode optar-se por dois perfis de velocidades médias distintos, o primeiro assenta na legislação nacional [26] e o outro baseado na normalização europeia [23] e no respectivo Documento Nacional de Aplicação (DNA) [23]. Nas análises quasi-estacionárias dos efeitos de rajada realizadas no domínio do tempo e no domínio da frequência adoptou-se o perfil preconizado pela norma europeia.

A norma EN1991-1-4 adopta o perfil logarítmico para a variação da velocidade média em altura.,

$$\begin{aligned}\bar{U}(z) &= v_b \cdot k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{para } z \geq z_{\min} \\ \bar{U}(z) &= \bar{U}(z_{\min}) & \text{para } z < z_{\min}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Nestas circunstâncias, atendendo à localização geográfica da estrutura e às características orográficas do terreno circundante, pode aferir-se os parâmetros necessários à caracterização do perfil de variação da velocidade média em altura, que neste caso correspondem a características de um terreno do tipo II (ver ponto 4.3.3.2) e à zona A do território Português o que, em conformidade com o DNA, conduz a uma velocidade básica v_b de 28 m/s.

O valor da velocidade básica adoptado pelo DNA refere-se ao valor característico médio do vento registado em períodos de 10 minutos, à cota de 10 metros e tendo uma probabilidade anual de excedência de 0,02, o que equivale um período de retorno de 50 anos.

Quadro 6.4 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades da EN1991-1-4, de acordo com o local de implantação da estrutura.

EN1991-1-4	
v_b [m/s]	28
z_0 [m]	0.05
k_r	0.19
$z_{\min}$ [m]	2

O Regulamento Português de Segurança e Acções (RSA) considera todavia uma abordagem diferente no que respeita à lei de variação em altura da velocidade média do vento. O RSA utiliza um perfil de potência,

$$\begin{aligned}\bar{U}(z) &= U_{ref} \cdot \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha & \text{para } z \geq z_{min} \\ \bar{U}(z) &= \bar{U}(z_{min}) & \text{para } z < z_{min}\end{aligned}\quad (6.2)$$

sendo que, neste caso, a definição dos parâmetros necessários à caracterização deste perfil são objecto de uma abordagem semelhante a referida para o caso da EN1991-1-4. Assim sendo, e à luz deste regulamento, a estrutura insere-se na zona A do território, num terreno com as características do tipo II (ver secção 4.3.3.1).

No regulamento Português é apresentado um conceito diferente ao nível da definição de uma velocidade média de referência, que é entendida como o valor característico das velocidades médias obtidas em intervalos de registo de 10 minutos, segundo um só rumo, para um período de referência de 50 anos e um período de retorno de 1000 anos (aos quais corresponde uma probabilidade de excedência de 0,05).

No contexto deste trabalho, foram realizadas as análises da estrutura sujeita a ambas as acções normativas, achando-se por bem inserir, apenas a título de curiosidade, a análise dos efeitos de rajada a luz do RSA, mas caracterizando a probabilidade de excedência correspondente à preconizada pela EN1991-1-4. Com efeito, atendendo à equação (4.47), para uma probabilidade de excedência de 0,02 e um tempo de referência de 50 anos, o período de retorno valeria 2475,42 anos. Segundo a expressão apresentada por Mendes [13],

$$U_{k,T_1,1R} = U_{k,T_2,1R} \left[1 - 0,071 \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \right] \quad (6.3)$$

com T_1 e T_2 como os tempos em comparação, chega-se à relação entre a velocidade de referência para uma probabilidade de excedência de 0,02 e 0,05,

$$U_{k,2475,1R} = 1,0644 \cdot U_{k,1000,1R} \quad (6.4)$$

No Quadro 6.5 apresentam-se os parâmetros caracterizadores dos perfis de velocidade média do RSA, para dois valores diferentes de probabilidade de excedência, representando-se posteriormente na Figura 6.7.

Quadro 6.5 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades do RSA, para dois valores diferentes da probabilidade de excedência, para o local de implantação da estrutura.

	RSA1	RSA2
Prob. Exc.	0,05	0,02
U_{ref} [m/s]	25	26,61
z_{ref} [m]	10	10
α	0,2	0,2
z_{min} [m]	15	15

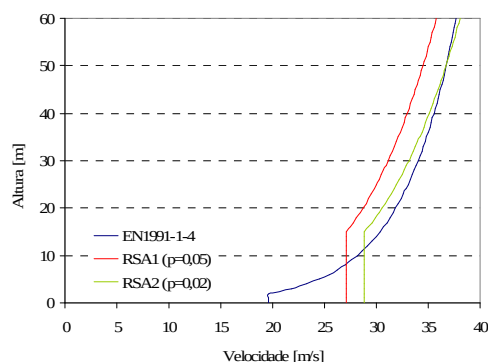


Figura 6.7 – Variação da velocidade média do vento em altura, correspondente às três situações regulamentares consideradas.

6.2.3.2. Turbulência atmosférica

Como já foi referido, a velocidade do vento pode ser decomposta na soma de uma componente média, associada ao movimento de transporte, com uma componente variável de carácter aleatório e designada por turbulenta.

No decorrer deste trabalho é, em geral, assumido que o rumo do vento é horizontal e perpendicular ao eixo da estrutura. As flutuações temporais da velocidade do vento segundo a direcção longitudinal são designadas por $u(t)$.

A intensidade de turbulência associada à componente longitudinal u da velocidade do vento, num determinado ponto de cota z , é definida através de

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u(z)}{\bar{U}(z)} \quad (6.5)$$

onde $\sigma_u(z)$ representa o desvio-padrão da flutuação da velocidade segundo a componente longitudinal, sendo esta praticamente constante nas camadas inferiores da atmosfera em situações próximas do equilíbrio indiferente [3], e que de acordo com a EN1991-1-4, pode ser obtido através da relação [23]

$$\sigma_u = k_r \cdot v_b \quad (6.6)$$

Por outro lado, a intensidade de turbulência decresce naturalmente com a altura, em virtude do crescimento da velocidade média, dependendo da rugosidade, da mesma forma que $\sigma_u(z)$ e $\bar{U}(z)$, pelo que pode escrever-se que [23],

$$\begin{aligned} I_u(z) &= \frac{k_r \cdot v_b}{\bar{U}(z)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} & \text{para } z \geq z_{\min} \\ I_u(z) &= I_u(z_{\min}) & \text{para } z < z_{\min} \end{aligned} \quad (6.7)$$

A caracterização da componente longitudinal flutuante da velocidade do vento pode ser efectuada idealizando aquelas flutuações através de processos estocásticos estacionários, cuja estrutura probabilística pode ser convenientemente caracterizada através de funções densidade espectral de potência.

No presente estudo utilizou-se a função densidade espectral de potência $S_u(z, n)$ indicada pela norma EN1991-1-4, que apresenta a forma reduzida

$$S_L(z, n) = \frac{n \cdot S_u(z, n)}{\sigma_u^2} = \frac{6,8 \cdot f_L(z, n)}{(1 + 10,2 \cdot f_L(z, n))^{5/3}} \quad f_L(z, n) = \frac{n \cdot L(z)}{\bar{U}(z)} \quad (6.8)$$

onde n representa a frequência (Hz) e $f_L(z, n)$ uma coordenada adimensional. A variável $L(z)$ representa a escala de turbulência e pode ser obtida a partir da equação 4.127.

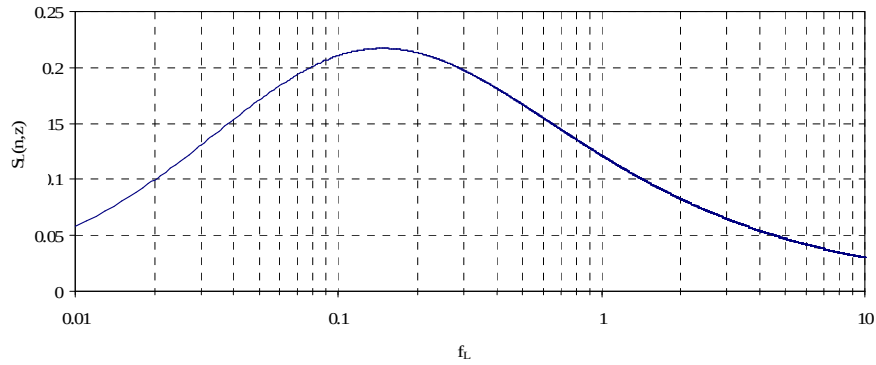


Figura 6.8 – Função densidade espectral de potência reduzida de acordo com a EN1991-1-4[23].

Tendo em conta a forma de caracterização do vento anteriormente exposta, resumem-se no Quadro 6.6 os valores dos principais parâmetros relativos a três pontos com cotas diferentes ao longo da estrutura em análise.

Quadro 6.6 – Principais parâmetros caracterizadores da turbulência nos pontos à cota 6m, 10m e 58m segundo a EN1991-1-4.

z [m]	6	10	58
U(z) [m/s]	25.47	28.19	37.54
σ_u [m/s]	5.32	5.32	5.32
$I_u(z)$	0.209	0.189	0.142
L(z) [m]	48.41	63.14	157.56

Os valores deste quadro conduzem, para os pontos em causa, aos espectros ilustrados na Figura 6.9, relativos à componente de flutuação longitudinal.

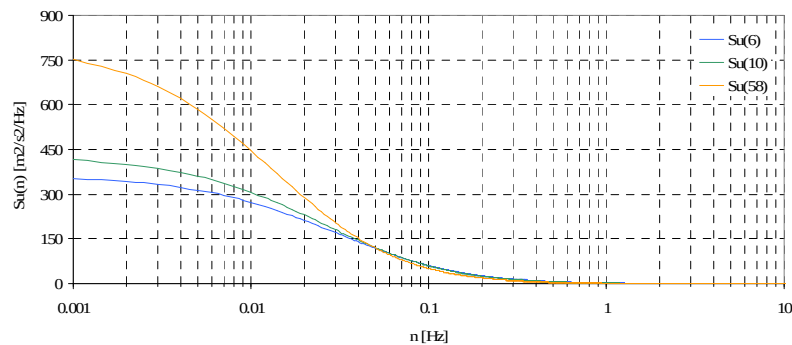


Figura 6.9 – Funções densidade espectral de potência para os 3 pontos caracterizados no Quadro 6.6

Um aspecto importante na idealização da acção turbulenta do vento corresponde à caracterização da correlação espacial das flutuações de velocidade, o que requer a definição de funções densidade espectrais cruzadas, $S_u^{ij}(\Delta r, n)$. Estas funções complexas dizem respeito às flutuações de velocidade em dois pontos distintos, $P_i(x, y, z)$ e $P_j(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. É usual admitir-se, que a parte imaginária destas funções é nula, para condições de turbulência atmosférica homogénea [3]. As funções densidade espectral cruzadas relacionam-se com os espectros de potência das flutuações em cada um dos pontos P_i e P_j através da equação,

$$S_u^{ij}(\Delta r, n) = \sqrt{S_u^{ii}(P_i, n) S_u^{jj}(P_j, n)} \cdot coh_{ij}(\Delta r, n) \quad (6.9)$$

onde $coh_{ij}(\Delta r, n)$ representa a chamada função de coerência e que pode ser avaliada através da expressão,

$$coh_{ij}(\Delta r, n) = \exp \left\{ - \frac{n \cdot \sqrt{C_{ey}^2 \cdot \Delta y^2 + C_{ez}^2 \cdot \Delta z^2}}{\frac{1}{2} \cdot [\bar{U}(P_i) + \bar{U}(P_j)]} \right\} \quad (6.10)$$

sendo que C_{ey} e C_{ez} representam os coeficientes de decaimento exponencial nas direcções transversal y e vertical z , respectivamente. Estes coeficientes espelham a dependência estatística das flutuações da velocidade entre dois pontos à distância Δr , e o seu valor depende da rugosidade do terreno envolvente (tal como foi referido no capítulo 4). No presente caso de estudo foram adoptados os seguintes valores, de acordo com referido na EN1991-1-4: $C_{ey} = 11,5$ (direcção transversal) e $C_{ez} = 11,5$ (direcção vertical).

Na Figura 6.10 representam-se a função de coerência e as funções densidade espectral cruzadas, para os mesmos três pontos anteriormente referidos.

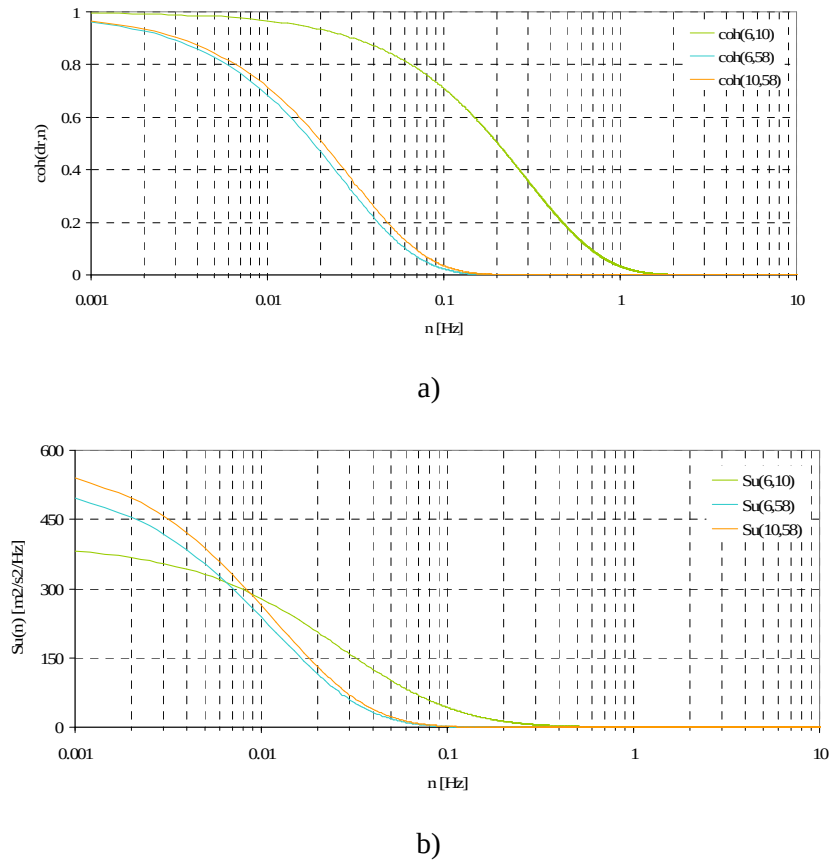


Figura 6.10 – Funções de coerência (a) e funções densidade espectral cruzada (b) para os 3 pontos caracterizados no Quadro 6.6.

6.2.4. Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada

A análise dos efeitos de rajada induzidos pelo vento sobre a chaminé metálica em estudo foi realizada assumindo em particular as seguintes hipóteses:

- O comportamento estrutural da chaminé pode ser idealizado através de um oscilador de N graus de liberdade com amortecimento viscoso;
- As componentes de flutuação da velocidade do vento em cada ponto podem ser idealizadas através de um processo estocástico vectorial gaussiano e estacionário com valor médio nulo e densidades espectrais conhecidas;

- O comportamento aerodinâmico é quasi-estacionário, isto é, o valor instantâneo das forças aerodinâmicas é igual ao das forças induzidas num escoamento estacionário com a mesma velocidade e direcção relativas ao escoamento instantâneo.

Assim, a equação de equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em análise pode ser expressa sob a forma

$$M.\ddot{q}(t) + C.\dot{q}(t) + K.q(t) = F(t) \quad (6.11)$$

onde $q(t)$ representa o vector dos deslocamentos relativos aos N graus de liberdade, $F(t)$ o processo estocástico vectorial caracterizador das forças exteriores aplicadas e M , C e K as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura, respectivamente.

Os deslocamentos $q(t)$ podem ser expressos através de uma combinação linear dos deslocamentos modais $\varepsilon(t)$, isto é

$$q(t) = \Phi.\varepsilon(t) \quad (6.12)$$

em que Φ representa a matriz dos modos de vibração. A condição de ortogonalidade dos modos de vibração permite analisar, em separado, o comportamento dinâmico de N osciladores de 1 grau de liberdade independentes e calcular posteriormente a resposta dinâmica do oscilador de N graus de liberdade por combinação linear das respostas individuais, operação traduzida matematicamente sob a forma

$$R(t) = \Gamma.\varepsilon(t) \quad (6.13)$$

Cada um dos osciladores de 1 grau de liberdade independentes está associado a um modo de vibração específico, sendo a respectiva equação do movimento

$$\varepsilon_i(t) + 2.\zeta_i.\omega_i.\dot{\varepsilon}_i(t) + \omega_i^2.\varepsilon_i(t) = \frac{\tau_i(t)}{m_i} \quad (6.14)$$

sendo $m_i = \phi_i^T.M.\phi_i$ a massa generalizada correspondente ao i -ésimo modo, ω_i a frequência natural angular, ζ_i o coeficiente de amortecimento modal e $\tau_i(t) = \phi_i^T.F(t)$ a excitação modal.

No presente estudo, foram seguidas duas formas de abordagem para a análise dos efeitos de rajada nesta estrutura, uma no domínio do tempo e a outra no domínio da frequência.

Na abordagem temporal foi seguida uma via de análise passo-a-passo, baseada na geração de séries temporais caracterizadoras das forças aerodinâmicas incidentes em diferentes pontos da estrutura, tendo como base a prévia geração de séries temporais correlacionadas de flutuações da velocidade do vento.

Para cada conjunto de séries temporais caracterizadoras da excitação dinâmica do vento, a resposta dinâmica da estrutura foi avaliada, com base no programa SOLVIA, através do método de sobreposição modal e de uma técnica de integração numérica de cada uma das N equações “desligadas”.

Os resultados obtidos para os diferentes conjuntos de séries temporais foram subsequentemente objecto de tratamento estatístico adequado, tomando em consideração um conjunto de variáveis de controlo da resposta considerado mais relevante.

Na abordagem espectral (domínio da frequência), o procedimento de cálculo foi desenvolvido com recurso à programação de uma rotina em MATLAB, tendo como base uma formulação modal.

6.2.4.1. Abordagem no domínio do tempo

6.2.4.1.1. Geração artificial de amostras de séries temporais de velocidade de vento

A geração artificial de séries temporais de velocidade do vento, em vários pontos da chaminé metálica, foi realizada através do método de sobreposição de harmónicas proposto por Deodatis [46].

O método de Deodatis para a geração de séries temporais de velocidade do vento em m pontos distintos, envolvendo cada uma N instantes de tempo (sendo N uma potência de 2) igualmente espaçados de Δt , foi implementada automaticamente em MATLAB, tendo como base o procedimento descrito no ponto 5.3.2.1.2.2.

Na presente aplicação à chaminé metálica, foram gerados inicialmente 3 grupos com 10 lotes de séries temporais de velocidade longitudinal do vento, distinguindo-se esses grupos no número de pontos considerados ao longo da estrutura na geração de cada lote de séries (6, 15 e 30 pontos). A localização destes pontos, que coincidem com os nós do modelo numérico da estrutura, encontra-se caracterizada esquematicamente na Figura 6.11.

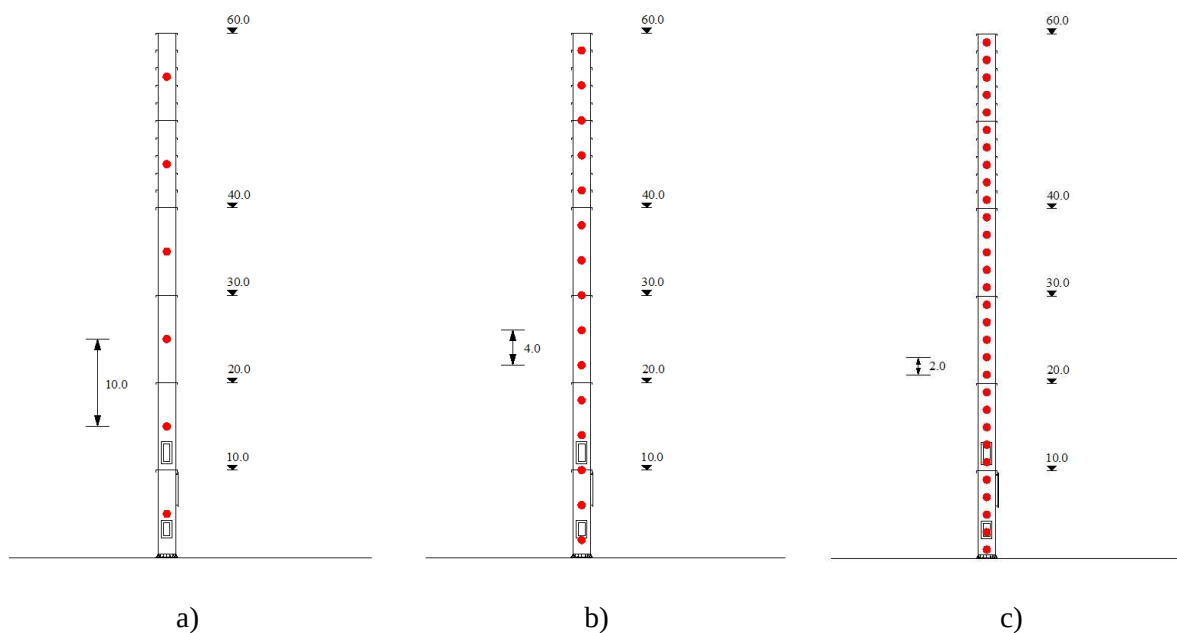
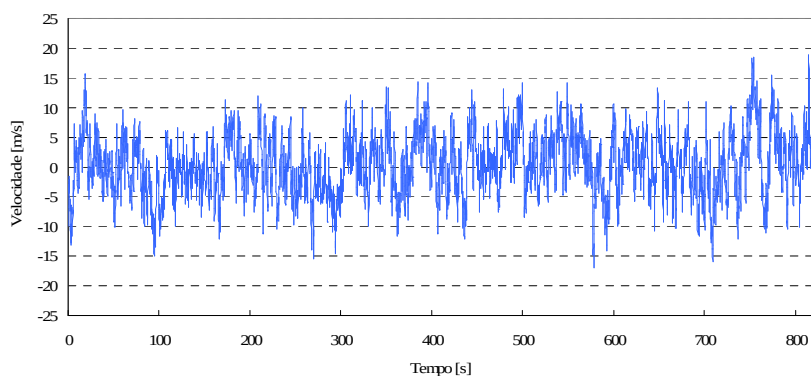


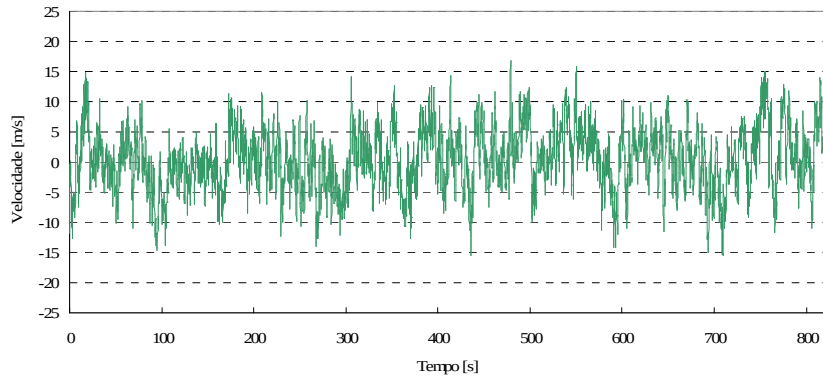
Figura 6.11 – Representação dos nós da estrutura onde foram geradas séries temporais de velocidade de vento, nas 3 situações consideradas.

Todas as séries geradas correspondem a um intervalo de tempo de 819,2 segundos, discretizado em 4096 intervalos de tempo elementares ($\Delta t = 0,2s$). Cada série resulta assim da sobreposição de $N/2 = 2048$ harmónicas, varrendo uma gama de frequências de 0 até 2,5 Hz, com uma resolução em frequência $\Delta n = 0,001221Hz$.

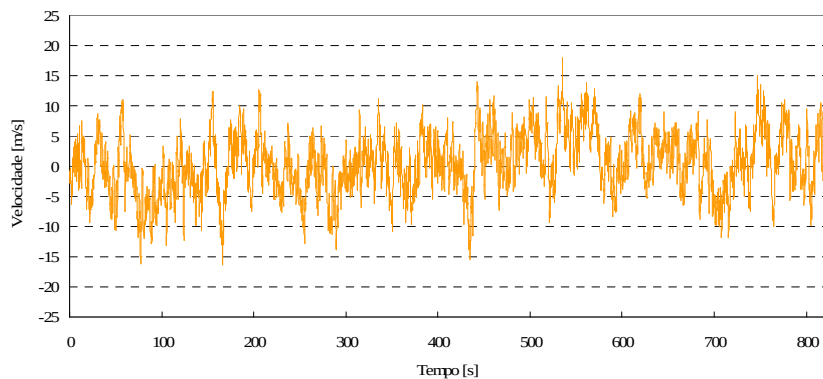
Na Figura 6.12, apresentam-se, a título de exemplo, representações gráficas de séries temporais das flutuações longitudinais da velocidade do vento nos pontos às cotas 6, 10 e 58 m, para as condições definidas anteriormente de acordo com a EN1991-1-4.



a)



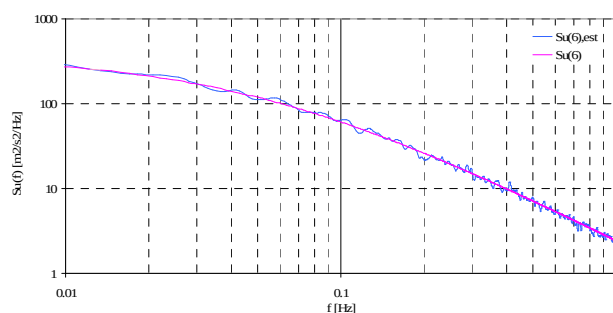
b)



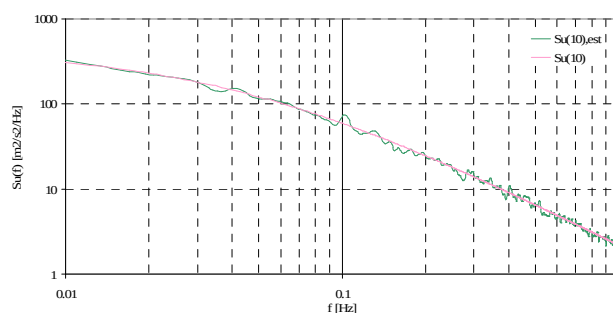
c)

Figura 6.12 – Séries temporais de velocidade do vento geradas nos pontos às cotas 6m (a), 10m (b) e 58m (c).

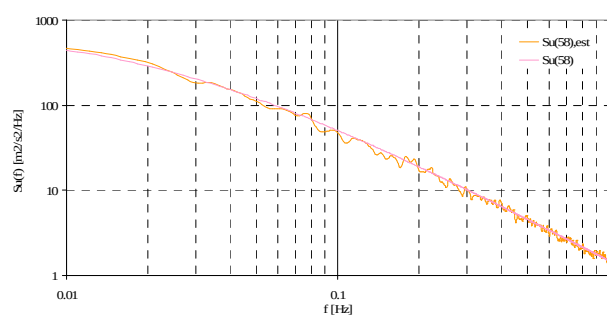
No sentido de confirmar a boa qualidade do procedimento de geração de séries temporais de velocidade utilizado, foram efectuadas comparações entre os espectros de potência de partida e as estimativas espectrais médias obtidas, com base nos diferentes lotes de séries temporais geradas artificialmente. A Figura 6.13 e a Figura 6.14 apresentam comparações dessa natureza, relativas aos 3 pontos já referidos (pontos às cotas 6m, 10m e 58m), podendo observar-se a excelente concordância conseguida ao nível dos auto-espectros, utilizando 10 lotes de séries temporais. A concordância relativa aos espectros cruzados é de menor qualidade, aspecto que todavia poderia ser melhorado recorrendo a um maior número de lotes. Porém, tal procedimento foi considerado dispensável face ao grau de aproximação já atingido, às incertezas inerentes à modelação da acção e ao aumento do tempo de cálculo.



a)

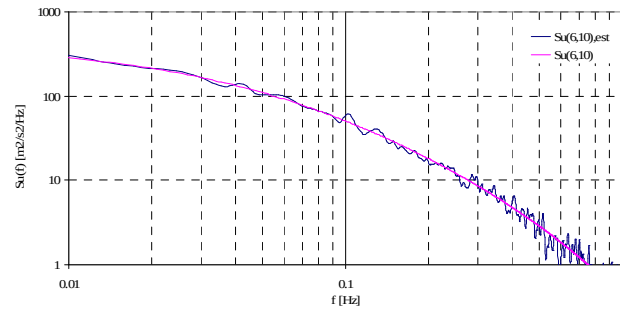


b)

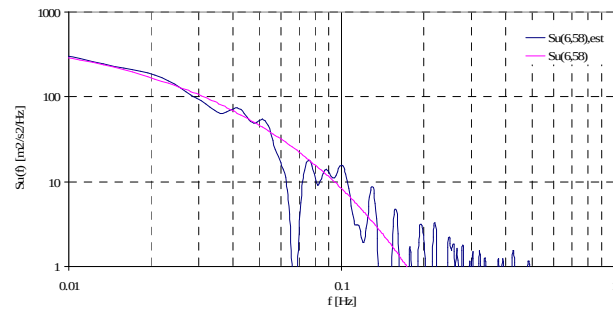


c)

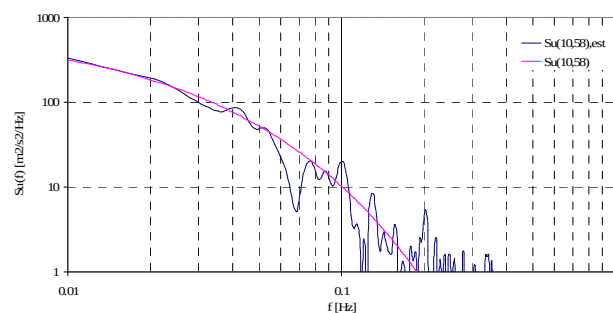
Figura 6.13 – Comparação entre as funções densidade espectral de partida e as estimativas espectrais médias referentes aos 10 lotes de séries correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.6.



a)



b)



c)

Figura 6.14 – Comparação entre as funções densidade espectral cruzada de partida e as estimativas espectrais médias cruzadas referentes aos 10 lotes correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.6.

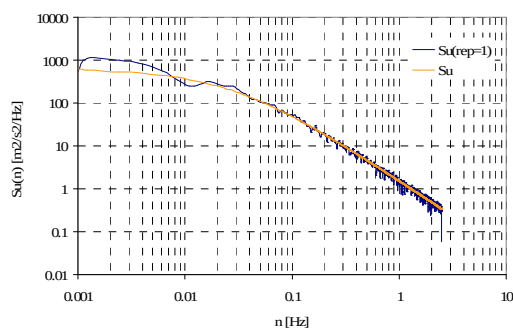
No Quadro 6.7, apresentam-se, complementarmente, os valores calculados dos desvios-padrão relativos às séries temporais da componente longitudinal da velocidade do vento nos pontos às cotas 6m, 10m e 58m, para os 10 lotes considerados. É de realçar que as estimativas obtidas são muito próximas do valor do desvio-padrão calculado através da área subentendida pelos espectros de potência originais (Quadro 6.6), devendo-se alguma pequena disparidade encontrada, em particular, ao facto de o conteúdo espectral das séries geradas estar limitado a 2,5 Hz.

Lote	Desvios-Padrão		
	u(6) [m/s]	u(10) [m/s]	u(58) [m/s]
1	5.198	5.145	5.057
2	5.158	5.087	5.093
3	4.928	5.037	4.928
4	5.116	5.091	5.039
5	5.194	5.139	4.855
6	5.198	5.145	5.057
7	5.097	5.084	5.360
8	5.200	5.229	5.410
9	5.180	5.277	4.955
10	5.062	4.982	4.817
Média	5.133	5.122	5.057
Coef. var.	0.017	0.017	0.039

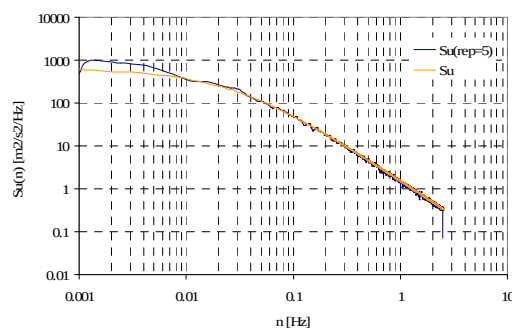
Quadro 6.7 – Valores dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries geradas para cada um dos pontos do Quadro 6.6, e respectivos valores médios e coeficientes de variação.

Ainda neste contexto, procedeu-se à geração de diversos lotes de séries com o intuito de aferir o número de simulações necessárias à obtenção de um erro quadrático médio dos espectros médios estimados aceitável, na aproximação à função densidade espectral de potência de partida. Desta forma, foram geradas 100 repetições de séries temporais para o ponto da chaminé à cota 60 m.

Na Figura 6.15 representa-se a comparação da função densidade espectral de partida com a média das funções densidade espectral dos processos gerados, para diferentes números de repetições (1, 5, 10, 25, 50 e 100 repetições).



a)



b)

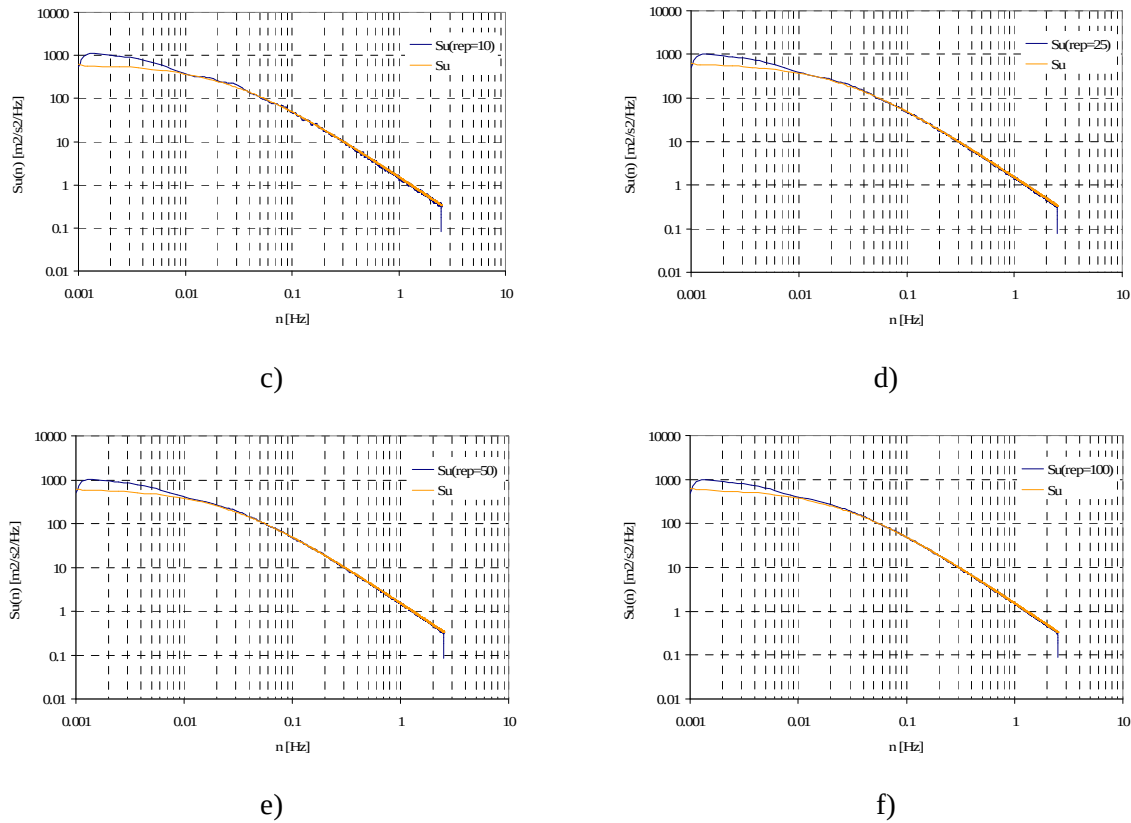


Figura 6.15 – Comparação entre a função densidade espectral de potência de partida e as estimativas espectrais médias dos processos gerados para diferentes números de repetições: 1(a), 5(b), 10(c), 25(d), 50(e) e 100(f).

Na Figura 6.16 representa-se o erro quadrático médio em função do número de simulações realizadas. Deste gráfico pode concluir-se que para obter um erro quadrático médio inferior a 20% sobre a densidade espectral de potência são necessárias cerca de 20 simulações, enquanto que para ter um erro inferior a 10% são necessárias cerca de 100. No entanto, se se quiser avaliar a evolução característica de uma determinada variável (por exemplo deslocamento) uma dezena de simulações é largamente suficiente.

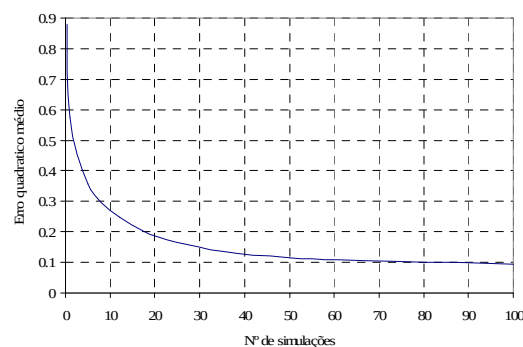


Figura 6.16 – Erro quadrático médio em função do número de simulações realizadas.

6.2.4.1.2. Séries temporais de forças aerodinâmicas

A força de arrastamento induzida pela acção do vento, em condições aerodinâmicas de quasi-estacionaridade, sobre uma secção genérica imersa num escoamento pode ser expressa através de,

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot U^2(z, t) \quad (6.15)$$

onde ρ_{ar} representa a massa específica do ar ($\rho_{ar} = 1,23 \text{ kg/m}^3$), $d(z)$ a dimensão transversal da estrutura, $C_D(z)$ o coeficiente aerodinâmico de arrastamento da estrutura e $U(z, t)$ a velocidade relativa.

Atendendo a que a velocidade relativa $U(z, t)$ pode ser representada por (ver capítulo 5),

$$U^2(z, t) \approx \bar{U}^2(z) + 2\bar{U}(z)u(z, t) - 2\bar{U}(z)\dot{q}(z) \quad (6.16)$$

a força de arrastamento toma a forma

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}^2(z) + \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}(z)u(z, t) - \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}(z) \cdot \dot{q}(z) \quad (6.17)$$

estando cada uma das parcelas da equação associada, respectivamente, à componente média da força aerodinâmica, à componente turbulenta da força aerodinâmica e à componente oscilante da estrutura.

A força generalizada $\tau_i(t)$ para um modo de vibração genérico i obtém-se a partir de

$$\tau_i(t) = \int_0^L F(z, t) \cdot \phi_i(z) dz \quad (6.18)$$

em que L representa toda a extensão da estrutura.

Os coeficientes de arrastamento $C_D(z)$ são habitualmente obtidos a partir de ensaios em túnel de vento sobre modelos a escala reduzida, de parte da estrutura ou mesmo da sua totalidade. Neste caso particular adoptaram-se, nos $\frac{2}{3}$ inferiores da altura os valores dos coeficientes de arrastamento propostos pela EN1991-1-4 para estruturas com secção transversal circular. Segundo esta norma, estes coeficientes dependem da rugosidade superficial da estrutura e do número de Reynolds.

No último terço da estrutura, dada a presença dos deflectores aerodinâmicos, a norma EN1993-3-2 aconselha o coeficiente de arrastamento de 1,2 para a globalidade das secções onde haja a presença destes dispositivos.

Na Figura 6.17 pode ver-se ilustrada a variação do coeficiente de arrastamento em função da altura.

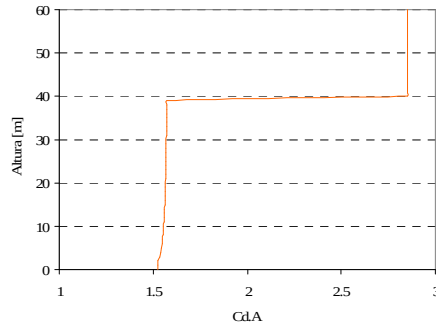


Figura 6.17 – Variação do arrastamento (produto do coeficiente de arrastamento pela área exposta) com a altura da estrutura.

É ainda de salientar que cada uma das séries temporais de forças aerodinâmicas geradas foi afectada de uma função de modulação temporal de natureza trapezoidal, com as características indicadas na Figura 6.18, por forma a suavizar as fases de arranque e cessação da excitação dinâmica do vento, garantindo desta forma a ocorrência de uma fase de actuação da acção de natureza estacionária com 10 minutos de duração.

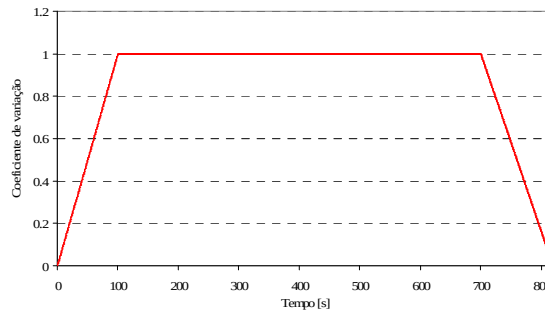


Figura 6.18 – Função de modulação temporal da acção.

6.2.4.1.3. Amortecimento aerodinâmico

Substituindo a expressão das forças aerodinâmicas generalizadas (6.18) na equação de equilíbrio dinâmico (6.14), constata-se o aparecimento da componente de amortecimento associada às oscilações longitudinais, dada por

$$\xi_{a,i} = \frac{\int_0^L \rho_{ar} \cdot \bar{U}(z) \cdot d(z) \cdot C_D(z) \cdot \phi_i^2(z) dz}{4\pi \cdot n_i \cdot \int_0^L m(z) \cdot \phi_i^2(z) dz} \quad (6.19)$$

Utilizando a equação (6.19), obtiveram-se os coeficientes modais de amortecimento aerodinâmico que se resumem no Quadro 6.8, para os primeiros 4 modos longitudinais.

Nesse mesmo quadro, são apresentados os valores adoptados para o amortecimento global (e o respectivo valor do decremento logarítmico $\delta = 2\pi\xi$), representando este a soma do amortecimento aerodinâmico com o amortecimento de natureza estrutural. De acordo com a informação fornecida pela norma EN1991-1-4 relativamente ao decremento logarítmico do amortecimento estrutural para este tipo de estruturas, adoptou-se o valor de $\delta = 0,012$ ($\xi = 0,191\%$).

Quadro 6.8 – Valores dos decrementos logarítmicos e amortecimentos relativos, estruturais, aerodinâmicos e globais, para os primeiros 4 modos de vibração longitudinais.

Modo	δ_s	ξ_s	δ_a	ξ_a	δ_{global}	ξ_{global}
1º	0,0120	0,00191	0,2267	0,03608	0,2387	0,03799
2º	0,0120	0,00191	0,0313	0,00498	0,0432	0,00688
3º	0,0120	0,00191	0,0123	0,00196	0,0243	0,00387
4º	0,0120	0,00191	0,0062	0,00099	0,0182	0,00290

6.2.4.1.4. Simulações numéricas para avaliação dos efeitos de rajada

A análise dos efeitos de rajada foi efectuada mediante a realização de simulações no domínio do tempo, seguindo-se para tal o procedimento que se resume em seguida:

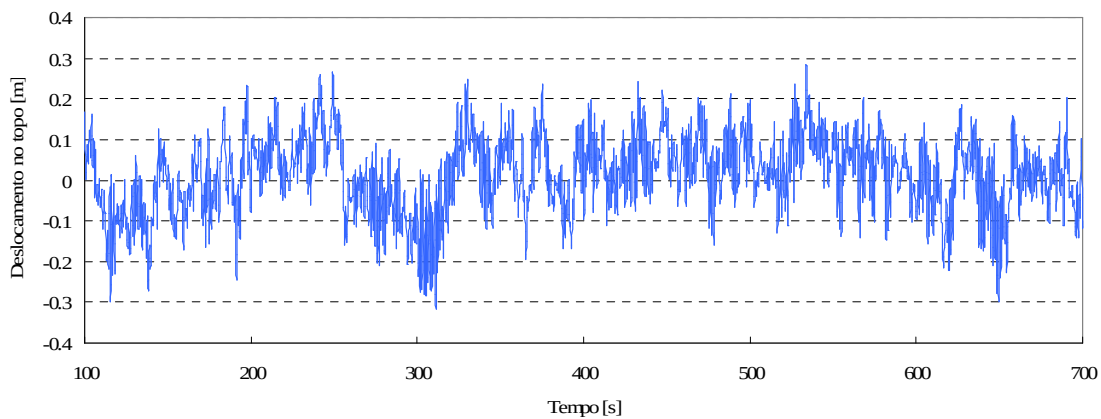
Foram inicialmente gerados 3 grupos com 10 lotes séries temporais de velocidade do vento cada um, a partir das matrizes de densidades espectrais prescritas, relativas à direcção longitudinal. Para cada um dos grupos de séries, o número de pontos é diferente, sendo que no primeiro se consideraram 6 pontos, no segundo 15 e no terceiro 30 pontos.

Posteriormente procedeu-se à obtenção das correspondentes séries temporais de forças aerodinâmicas actuantes nos pontos correspondente ao centro de gravidade de cada uma das secções da chaminé, passando-se subsequentemente à obtenção da resposta dinâmica no espaço modal, ao longo de um intervalo de tempo $T = 819,2s$, com $\Delta t = 0,02s$.

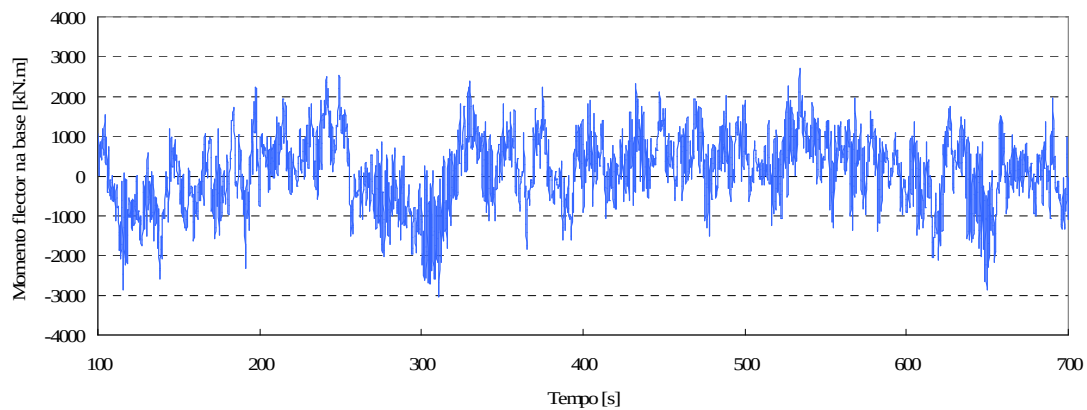
For fim, procedeu-se à obtenção da evolução temporal da resposta dinâmica da estrutura, bem como ao seu tratamento estatístico, com intuito de caracterizar a resposta em termos de extremos de absolutos e desvios-padrão, num intervalo de $T = 600s$ (correspondente ao tramo constante da função de modulação temporal). Para tal foram escolhidos as seguintes variáveis de controlo:

- Deslocamento horizontal na secção do topo da chaminé e na direcção longitudinal de incidência do vento (dx);
- Momento flector transversal à direcção longitudinal do vento na base da torre (My);

Na Figura 6.19 a) e b) são caracterizadas as respostas temporais correspondentes ao primeiro lote de velocidades do terceiro grupo (30 pontos), para as variáveis de controlo acima definidas.



a)



b)

Figura 6.19 – Resposta temporal relativa às variáveis de controlo, para o primeiro lote de séries do 3º grupo (deslocamento no topo (a) e momento flector na base (b)).

No Quadro 6.9 e no Quadro 6.10 resumem-se os valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão das variáveis de controlo obtidas com base nos 10 lotes de séries de cada um dos 3 grupos considerados.

Quadro 6.9 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do deslocamento no topo (dx), para os 10 lotes de séries de cada um dos 3 grupos. Respectivos valores médios e desvios padrão.

Lote	Deslocamento no topo (dx) [m]					
	6 pontos		15 pontos		30 pontos	
	R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R
1	0,340	0,101	0,309	0,093	0,318	0,094
2	0,356	0,101	0,312	0,093	0,319	0,086
3	0,445	0,101	0,311	0,097	0,330	0,090
4	0,320	0,099	0,342	0,091	0,313	0,093
5	0,418	0,107	0,345	0,098	0,330	0,093
6	0,390	0,097	0,309	0,093	0,298	0,094
7	0,330	0,105	0,329	0,093	0,349	0,092
8	0,429	0,103	0,347	0,100	0,275	0,090
9	0,349	0,105	0,281	0,092	0,301	0,090
10	0,349	0,105	0,282	0,093	0,292	0,092
Média	0,373	0,102	0,327	0,094	0,313	0,091
Coef. Var.	0,1193	0,0294	0,0733	0,0283	0,0692	0,0277

Quadro 6.10 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do momento flector na base (My), para os 10 lotes de séries de cada um dos 3 grupos. Respectivos valores médios e desvios padrão.

Lote	Momento flector na base (My) [N.m]					
	6 pontos		15 pontos		30 pontos	
	R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R
1	3242920	959241	2945310	891255	3033390	894323
2	3393010	957934	2978110	891010	3042480	819297
3	4240410	964218	2966330	922029	3148440	858723
4	3050960	940045	3260270	871758	2988820	889848
5	3989030	1015326	3241830	930590	3151090	884506
6	3720320	928507	2945310	891255	2839100	898654
7	3150910	998936	3134150	885479	3329300	872886
8	4092730	982905	3307440	950534	2621610	854995
9	3329220	998439	2679840	877429	2871990	856258
10	3329220	998439	2684620	891241	2788840	879389
Média	3553873	974399	3114321	900258	2981506	870888
Coef. Var.	0,1193	0,0294	0,0733	0,0283	0,0692	0,0276

Seguindo novamente o procedimento acima descrito, geraram-se para o grupo constituído por 15 pontos ao longo da estrutura 10 novos lotes de séries temporais, com o intuito de quantificar a resposta dinâmica estrutural tendo em conta o contributo dos primeiros 4 modos longitudinais. Estas séries temporais foram geradas com 750 segundos, intervalo de tempo este discretizado em 30000 sub-intervalos de tempo elementares ($\Delta t = 0,025s$). Cada série resulta assim da sobreposição de 2048 harmónicas, varrendo uma gama de frequências de 0 até 20 Hz, com uma resolução em frequência de $\Delta n = 0,009766 Hz$.

Os valores obtidos dos extremos absolutos e dos desvios-padrão correspondentes às variáveis de controlo são apresentados nos Quadro 6.11 e Quadro 6.12, tendo em conta o contributo de cada modo.

Quadro 6.11 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do deslocamento no topo (dx), para os 10 lotes de séries. Respectivos valores médios e coeficientes de variação.

Lote	Deslocamento horizontal no topo (dx)							
	modo 1		modo 2		modo 3		modo 4	
	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$
1	0,3528	0,0929	0,0086	0,0024	0,0012	0,0003	0,0002	0,0001
2	0,3388	0,0902	0,0093	0,0024	0,0012	0,0003	0,0002	0,0001
3	0,3492	0,0955	0,0093	0,0026	0,0012	0,0003	0,0003	0,0001
4	0,3583	0,0955	0,0096	0,0026	0,0012	0,0003	0,0002	0,0001
5	0,3426	0,0936	0,0089	0,0026	0,0013	0,0003	0,0002	0,0001
6	0,3412	0,0933	0,0099	0,0026	0,0012	0,0003	0,0002	0,0001
7	0,3188	0,0883	0,0104	0,0026	0,0011	0,0003	0,0002	0,0001
8	0,3777	0,0960	0,0099	0,0027	0,0014	0,0003	0,0002	0,0001
9	0,3714	0,0947	0,0094	0,0025	0,0015	0,0003	0,0002	0,0001
10	0,3429	0,0965	0,0096	0,0024	0,0013	0,0003	0,0003	0,0001
Média	0,3494	0,0936	0,0095	0,0026	0,0012	0,0003	0,0002	0,0001
Coef. Var.	0,048	0,028	0,057	0,038	0,096	0,020	0,049	0,037

Quadro 6.12 – Valores extremos absolutos e desvios-padrão do momento flector (My) na base, para os 10 lotes de séries. Respectivos valores médios e coeficientes de variação.

Lote	Momento flector na base (My)							
	modo 1		modo 2		modo 3		modo 4	
	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$	$R_{p,j}$	$\sigma_{R,j}$
1	3364640	885810	390639	111253	147081	37827	51732	13507
2	3231060	860484	425055	110611	139460	37178	54510	13180
3	3329600	910670	421275	119481	140153	37797	58680	14240
4	3416480	884980	438722	115435	147100	39132	57617	13264
5	3266790	892776	402743	116092	153700	36395	51940	13089
6	3253210	889624	450732	119188	142370	38847	55930	13401
7	3040320	842432	474810	116967	134913	37112	52790	12854
8	3601550	915268	451921	122638	168220	36636	55110	12972
9	3541250	902670	427131	115688	181914	38180	52670	13129
10	3269810	919775	438963	109140	157340	36855	58360	13047
Média	3331471	890449	432199	115649	151225	37596	54934	13268
Coef. Var.	0,048	0,027	0,057	0,037	0,096	0,025	0,048	0,030

A Figura 6.20 caracteriza a participação de cada um dos modos na resposta estrutural em termos das duas variáveis de controlo consideradas, podendo concluir-se que embora a participação do segundo modo na resposta em deslocamentos não seja significativa ela é mais relevante em termos de momentos flectores.

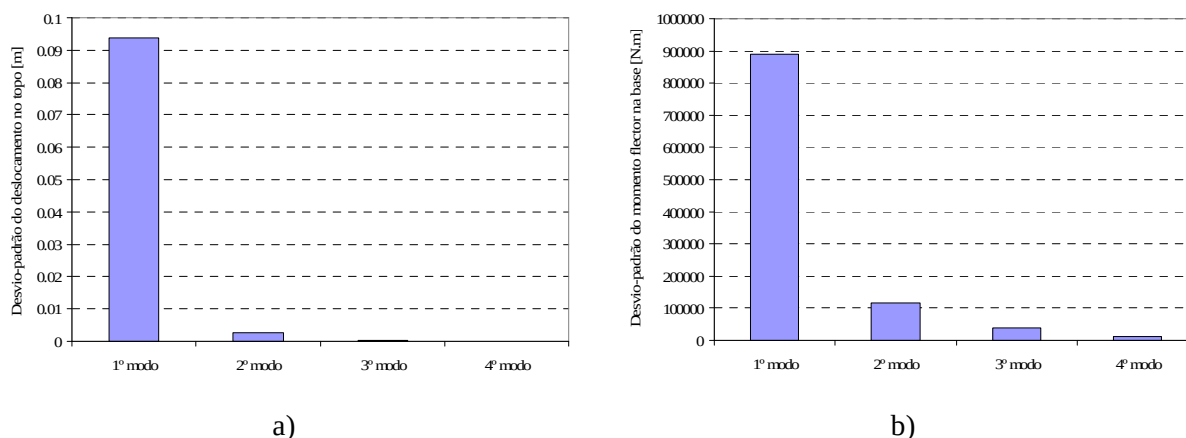
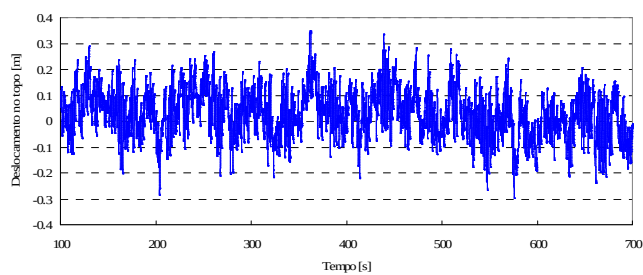
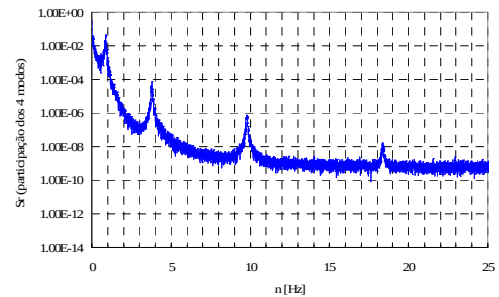


Figura 6.20 – Participação de cada um dos modos na resposta estrutural, em termos das variáveis de controlo definidas.

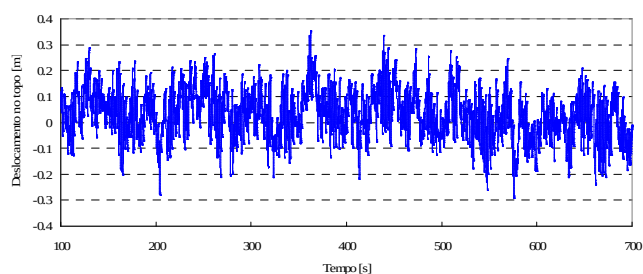
Na Figura 6.21 representa-se a resposta temporal e a respectiva função densidade espectral de potência, quer em termos globais quer em termos de contributo de cada um dos modos em separado, considerando como variável de controlo o deslocamento no topo da estrutura ao primeiro lote de séries geradas.



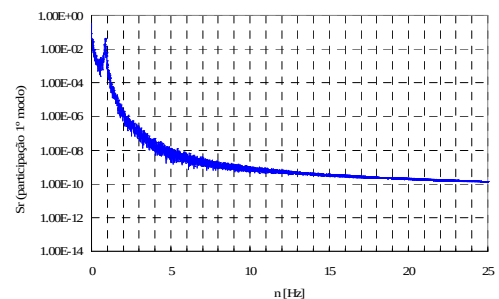
a1)



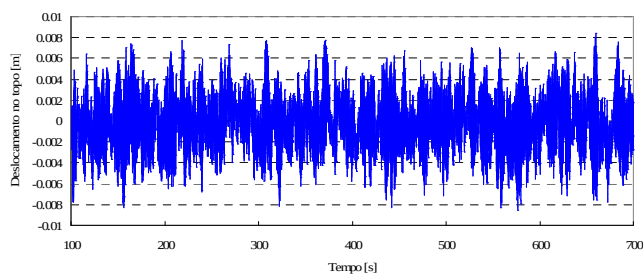
a2)



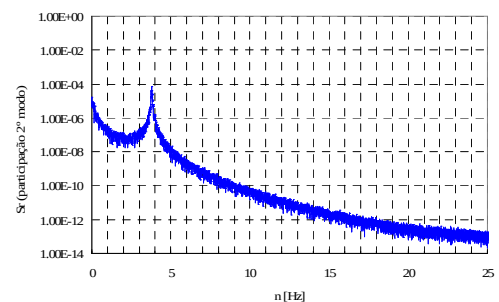
b1)



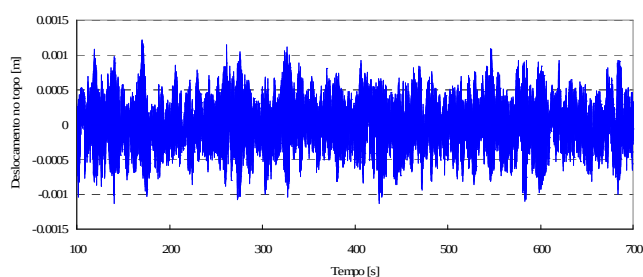
b2)



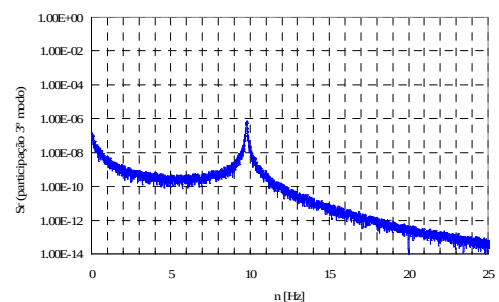
c1)



c2)



d1)



d2)

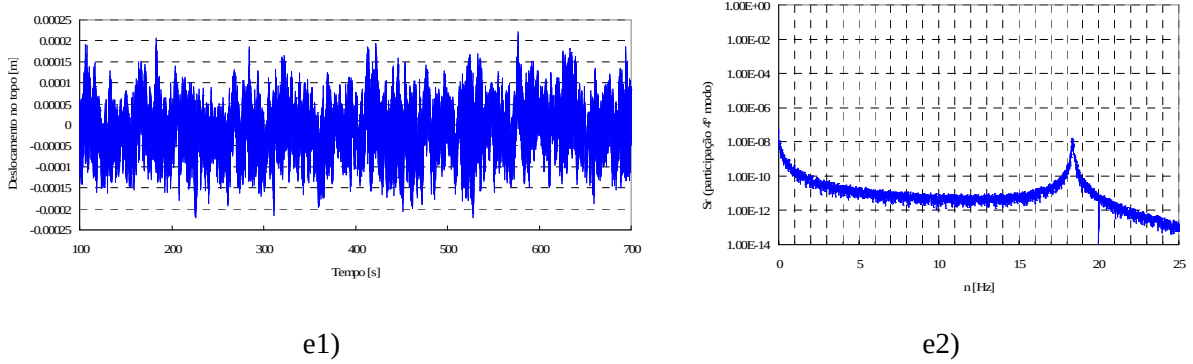


Figura 6.21 – Representação da resposta temporal em deslocamentos (dx) e da respectiva estimativa espectral quer em termos globais (a), quer em termos de contributo dos modos 1 a 4 ((b) a (e)).

6.2.4.2. Abordagem no domínio da frequência

Na análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio da frequência, os valores médios da distribuição de extremos de cada uma das componentes da resposta foi obtida a partir da relação

$$R_{e,j} = R_{m,j} + k_{p,j} \cdot \sigma_{R,j} \quad (6.20)$$

onde $R_{m,j}$ é o valor médio da j -ésima componente da resposta (tomado como a resposta devida à velocidade média do vento) e $\sigma_{R,j}$ o desvio padrão das flutuações da resposta,

$$\sigma_{R,j} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{R,j}(n) dn} \quad (6.21)$$

A densidade espectral de cada uma das componentes de resposta j foi obtida por combinação linear das densidades espectrais das respostas modais $S_{\varepsilon,i}(n)$ através de,

$$S_{R,j}(n) = \sum_i \Gamma_{ji}^2 \cdot S_{\varepsilon,i}(n) \quad (6.22)$$

as quais por sua vez foram obtidas a partir das densidades espectrais das forças modais $S_{\tau,i}(n)$,

$$S_{\varepsilon,i}(n) = |H_i(n)|^2 \cdot S_{\tau,i}(n) \quad (6.23)$$

com

$$|H_i(n)|^2 = \frac{1}{m_i^2 \cdot 16\pi^4 \cdot n_i^4 \cdot \left[1 + (4\xi_i^2 - 2) \left(\frac{n}{n_i} \right)^2 + \left(\frac{n}{n_i} \right)^4 \right]} \quad (6.24)$$

$$S_{\tau,i}(n) = \int_0^L \int_0^L \phi_i(z_1) \cdot \phi_i(z_2) \cdot S_F(z_1, z_2, n) dz_1 dz_2 \quad (6.25)$$

onde $|H_i(n)|^2$ representa a função modal de transferência e $S_F(z_1, z_2, n)$ a densidade espectral cruzada das forças aerodinâmicas.

O factor de pico $k_{p,j}$, poderá ser obtido a partir,

$$k_{p,j} = \sqrt{2 \cdot \ln(v_{0,j} \cdot T)} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \cdot \ln(v_{0,j} \cdot T)}} \quad (6.26)$$

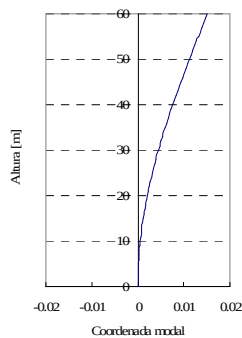
onde T representa o intervalo de observação e $v_{0,j}$ a frequência média de passagens pelo nível zero,

$$v_{0,j} = \frac{1}{\sigma_{R,j}} \sqrt{\int_0^\infty n^2 \cdot S_{R,j}(n) dn} \quad (6.27)$$

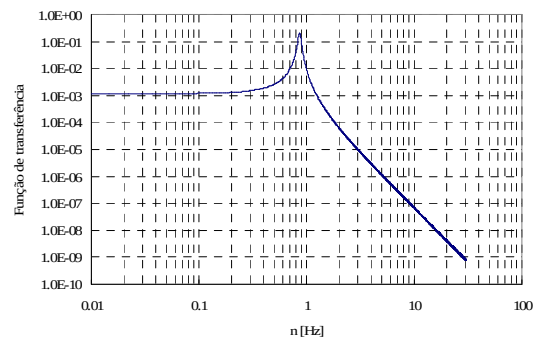
6.2.4.2.1. Funções de transferência modais

Após a construção da matriz de rigidez e da matriz de massa de acordo com as propriedades da estrutura, procedeu-se a uma análise modal, da qual se extraíram as frequências naturais e as respectivas configurações modais normalizadas.

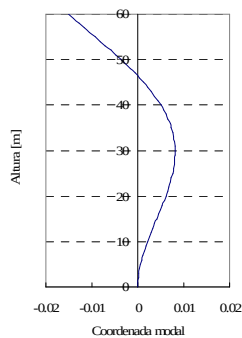
Partindo dos valores obtidos e utilizando equação (6.24), foi possível construir as funções de transferência modais, que se encontram representadas na Figura 6.22, para os primeiros 4 modos de vibração longitudinais.



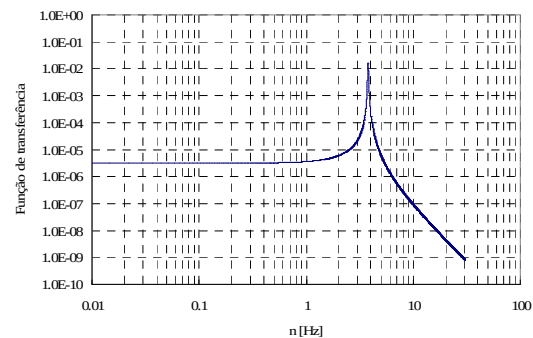
a1)



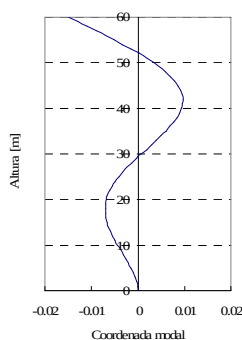
a2)



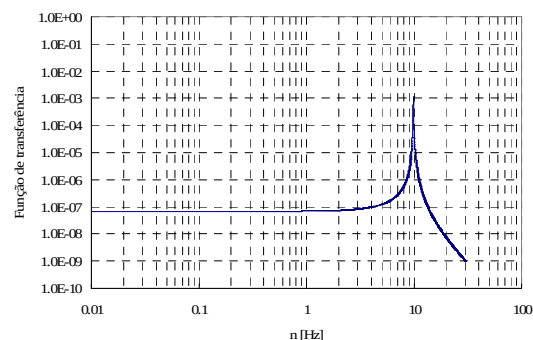
b1)



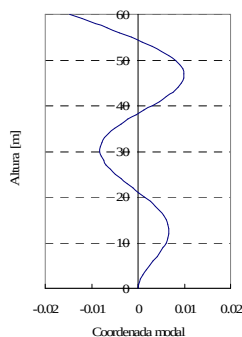
b2)



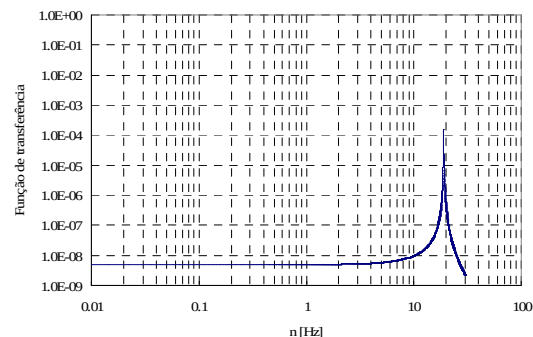
c1)



c2)



d1)



d2)

Figura 6.22 – Configurações modais e respectivas funções de transferência para os primeiros 4 modos de vibração longitudinais.

6.2.4.2.2. Funções densidade espectral de forças modais

A matriz de funções densidade espectral de potência cruzada das forças aerodinâmicas pode ser obtida a partir da equação

$$S_F(z_1, z_2, n) = \rho_{ar}^2 \cdot (C_D \cdot \bar{U} \cdot d)_{z_1} (C_D \cdot \bar{U} \cdot d)_{z_2} \cdot \sqrt{S_u(z_1, n) \cdot S_u(z_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ez,u}^2 \cdot \Delta z^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{z_1} + \bar{U}_{z_2})} \right] \quad (6.28)$$

que substituída na equação (6.25) conduz a

$$S_{\tau,i}(n) = \int_0^L \int_0^L \phi_i(z_1) \cdot \phi_i(z_2) \cdot \rho_{ar}^2 \cdot (C_D \cdot \bar{U} \cdot d)_{z_1} (C_D \cdot \bar{U} \cdot d)_{z_2} \cdot \sqrt{S_u(z_1, n) \cdot S_u(z_2, n)} \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ez,u}^2 \cdot \Delta z^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}_{z_1} + \bar{U}_{z_2})} \right] dz_1 dz_2 \quad (6.29)$$

Tomando como referência um ponto da estrutura, a função densidade espectral de potência relativa a esse ponto virá

$$S_F(z_{ref}, n) = (\rho_{ar} \cdot C_D(z_{ref}) \cdot \bar{U}(z_{ref}))^2 \cdot S_u(z_{ref}, n) \quad (6.30)$$

O ponto de referência considerado para o estudo da chaminé foi o nó à cota 60m, isto é, o nó no topo da estrutura.

Desta forma, dividindo a equação (6.29) por (6.30), pode obter-se uma nova expressão para a função densidade espectral das forças modais, dada por

$$S_{\tau,i}(n) = S_F(z_{ref}, n) \cdot |J_i(n)|^2 \quad (6.31)$$

onde $|J_i(n)|^2$ é a função modal de transferência aerodinâmica.

6.2.4.2.3. Função modal de transferência aerodinâmica

As funções modais de transferência aerodinâmica têm a seguinte forma

$$|J_i(n)|^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi_i(z_1) \cdot \phi_i(z_2) \cdot g_F(y_1, n) \cdot g_F(z_2, n) \cdot \exp \left[-\frac{n \cdot \sqrt{C_{ez}^2 \cdot \Delta z^2}}{\frac{1}{2}(\bar{U}(z_1) + \bar{U}(z_2))} \right] dz_1 dz_2 \quad (6.32)$$

em que

$$g_F(z, n) = \frac{\rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot \bar{U}(z) \cdot d(z) \cdot \sqrt{S_u(z, n)}}{\rho_{ar} \cdot C_D(z_{ref}) \cdot \bar{U}(z_{ref}) \cdot d(z_{ref}) \cdot \sqrt{S_u(z_{ref}, n)}} \quad (6.33)$$

podendo ser avaliados através do método proposto por Hansen et al. [2] e descrito na secção 5.3.1.2.3. (e numericamente no Anexo A).

Na Figura 6.23 são apresentadas as funções modais de transferência aerodinâmica bem como as funções densidade espectral de potência das forças modais, para cada um dos quatro modos considerados neste exemplo.

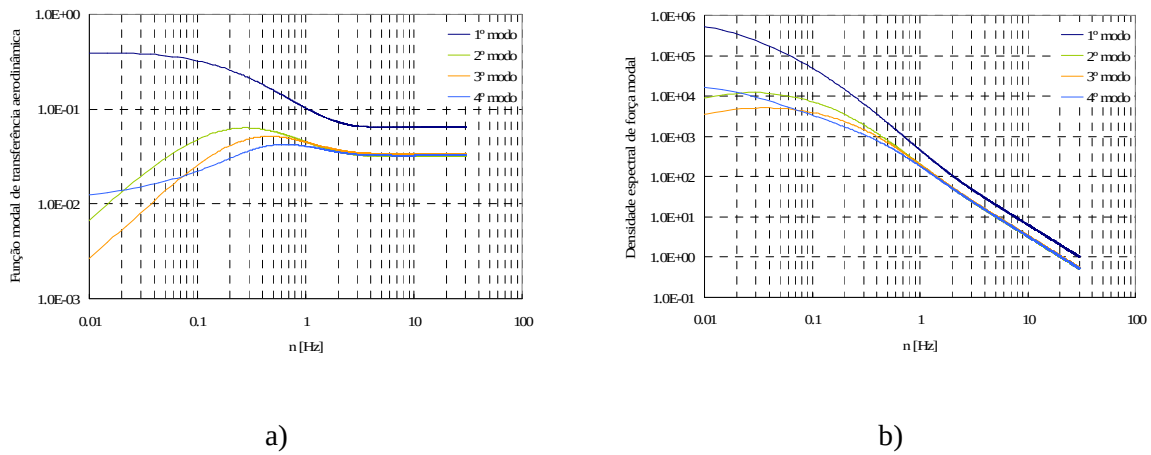


Figura 6.23 – Funções modais de transferência aerodinâmica (a) e densidade espectral das forças modais (b).

Convém realçar que, ao longo do presente texto, as configurações dos diversos modos de vibração supõem-se normalizadas em relação à matriz de massa, pelo que,

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi = I \quad (6.34)$$

6.2.4.2.4. Funções densidade espectral de resposta modal

As funções densidade espectral de resposta modal foram obtidas através da simples aplicação da equação (6.23), encontrando-se representadas na Figura 6.24 para cada uma das 4 configurações modais.

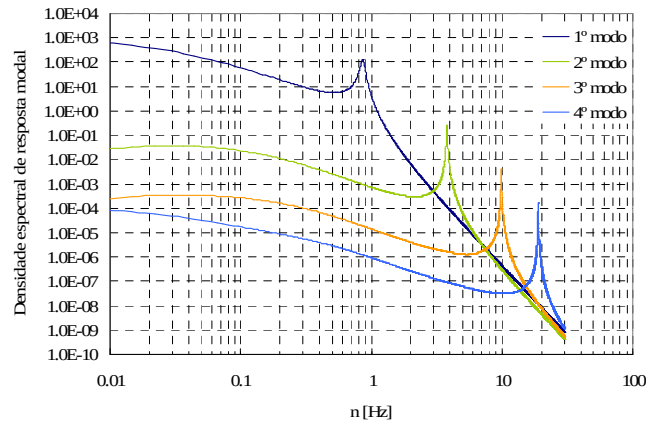


Figura 6.24 – Densidades espectrais das respostas modais para cada um dos primeiros 4 modos longitudinais.

No Quadro 6.13 apresentam-se os valores dos desvios-padrão, dos factores de pico e dos valores extremos absolutos, de cada uma das componentes de reposta referentes às variáveis de controlo definidas na secção 6.2.3.1.4. (deslocamento no topo e momento flector na base).

Quadro 6.13 – Valores dos desvios-padrão, dos factores de pico e dos extremos absolutos das respostas modais relativas as variáveis de controlo definidas.

Modo	Deslocamento no topo (dx) [m]			Momento flector na base (My) [N.m]		
	σ_R	k_p	$k_p \cdot \sigma_R$	σ_R	k_p	$k_p \cdot \sigma_R$
1º	0.1013	3.53	0.357	991577	3.53	3499287
2º	0.0026	4.04	0.010	104392	4.04	422019
3º	0.0004	4.28	0.002	43665	4.28	186890
4º	0.0001	4.42	0.000	9662	4.42	42749

Na Figura 6.25 pode observar-se, uma representação gráfica do nível de participação de cada um dos modos na resposta referente às variáveis de controlo consideradas, à imagem do realizado anteriormente no domínio do tempo.

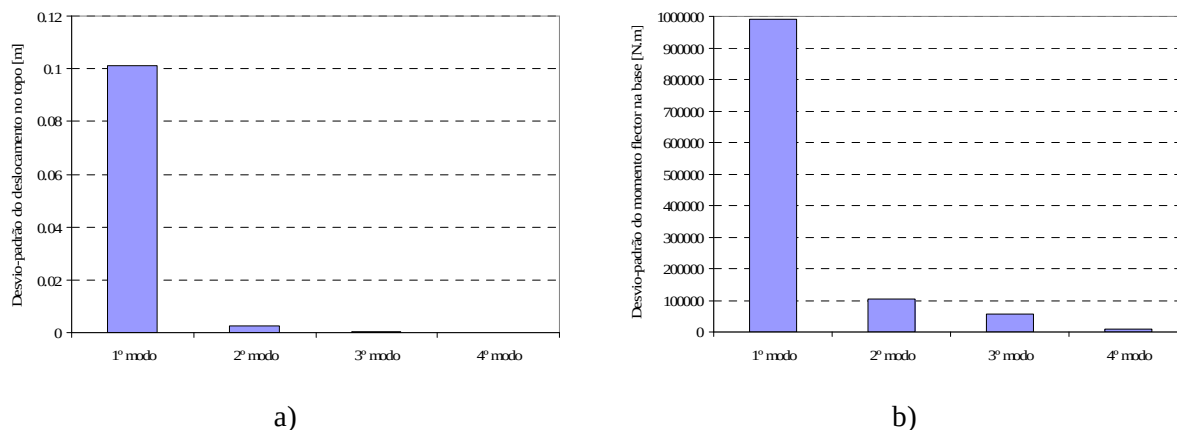


Figura 6.25 – Participação de cada modo de vibração na resposta estrutural em termos das variáveis de controlo consideradas (deslocamento no topo e momento flector na base).

6.2.5. *Análise regulamentar*

Esta secção é dedicada à análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada à luz da regulamentação vigente em Portugal. Para tal, foram construídos três modelos de análise, com recurso a uma folha de Microsoft Excel.

O primeiro modelo refere-se à abordagem seguida pela EN1991-1-4, tendo sido seguido o procedimento de cálculo nela descrito, complementado pelas referências normativas constantes da norma EN1993-3-2, específica para este tipo de estruturas.

O segundo modelo é referente à abordagem seguida pelo Regulamento de Segurança e Acções (RSA). O procedimento descrito neste regulamento é bastante simplista, como se evidenciou na secção 4.4.6.1. Com efeito, a velocidade de ponta é obtida neste caso simplesmente através da adição de uma parcela com o valor 14 m/s à lei de variação da velocidade média em altura, por forma a ter em conta o efeito da componente turbulenta.

O terceiro modelo difere do segundo apenas na probabilidade de excedência considerada. A velocidade de referência definida no regulamento Português, está definida para uma probabilidade de excedência com o valor de 0,05, o que significa que, se se quiser equiparar a probabilidade de excedência definida pela EN1991-1-4, isto é com o valor 0,02, esta velocidade terá de ser ajustada, tal como descrito na secção 6.2.2.1.

Na definição dos dois últimos modelos o Regulamento de Segurança e Acções, quando aplicado a estruturas com simetria de revolução prevê o uso de um coeficiente de majoração da velocidade característica de $\sqrt{1,3}$.

Na Figura 6.26 e na Figura 6.27, encontram-se ilustradas a evolução com a altura dos valores obtidos do deslocamento e do momento flector através de cada um dos modelos analisados e considerando cada uma das parcelas em separado (parcelas média e turbulenta).

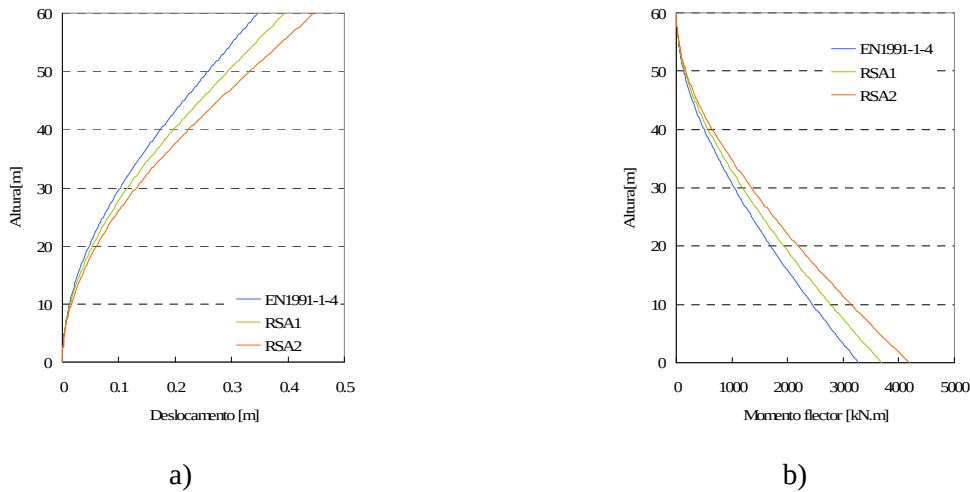


Figura 6.26 – Envolvente dos valores médios da resposta estrutural (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados, em função da altura.

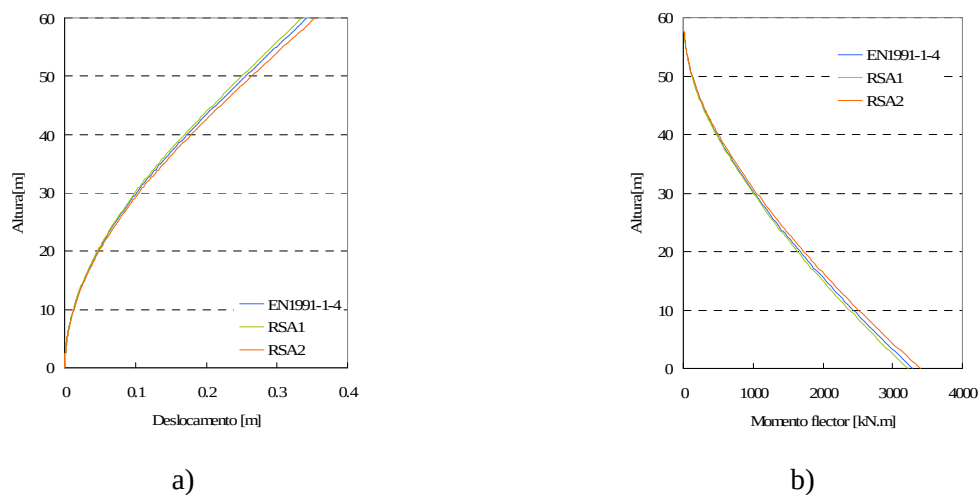


Figura 6.27 – Envolvente dos valores extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados, em função da altura.

No quadro seguinte apresenta-se, para cada um dos modelos, os valores médios e os valores extremos da componente turbulenta da resposta, correspondentes às variáveis de controlo previamente definidas.

Quadro 6.14 – Valores médios e extremos absolutos da componente turbulenta da resposta estrutural para cada um dos modelos e para as variáveis de controlo previamente definidas.

	Deslocamento no topo (dx) [m]		Momento flector na base (My) [kN.m]	
	R_m	R_p	R_m	R_p
EN1991-1-4	0,346	0,342	3272,053	3288,301
RSA1	0,393	0,335	3692,256	3218,738
RSA2	0,446	0,354	4186,249	3396,499

6.2.6. Análise comparativa dos resultados obtidos

No Quadro 6.15 resumem-se os resultados obtidos através das várias abordagens descritas nos pontos anteriores. Os resultados são referentes apenas às variáveis de controlo definidas (deslocamento no topo da estrutura e momento flector na base), sendo que os valores associados à componente turbulenta se apresentam expressos em termos dos correspondentes valores médios dos extremos.

Quadro 6.15 – Valores médios e extremos absolutos da componente turbulenta da resposta estrutural para cada um dos modelos e para as variáveis de controlo previamente definidas.

			Deslocamento no topo [m]		Momento flector na base [kN.m]	
			R_m	R_p	R_m	R_p
Análise dinâmica no domínio do tempo	1º modo	-	-	0,3494	-	3331,471
	2º modo	-	-	0,0095	-	432,199
	3º modo	-	-	0,0012	-	151,225
	4º modo	-	-	0,0002	-	54,933
	4 modos		0,3464	0,3497	3272,053	3460,481
Análise dinâmica no domínio da frequência	1º modo	-	-	0,3573	-	3499,287
	2º modo	-	-	0,0104	-	422,019
	3º modo	-	-	0,0015	-	186,890
	4º modo	-	-	0,0004	-	42,748
	4 modos		0,3464	0,3575	3272,053	3532,853
Análise estática regulamentar	EC1	$p = 0,02$	0,3464	0,3425	3272,053	3288,301
	RSA1	$p = 0,05$	0,3934	0,3353	3692,256	3218,738
	RSA2	$p = 0,02$	0,4459	0,3537	4186,249	3396,499

Complementarmente, apresentam-se na Figura 6.28 as envolventes relativas aos valores médios dos extremos absolutos da componente turbulenta da resposta estrutural, referentes aos 3 grupos de simulações no domínio do tempo. Apresentam-se também na Figura 6.29, as envolventes correspondentes às análises no domínio do tempo e no domínio da frequência, contemplando apenas a participação do 1º modo ou dos 4 primeiros modos combinados, bem como para as três situações regulamentares abordadas.

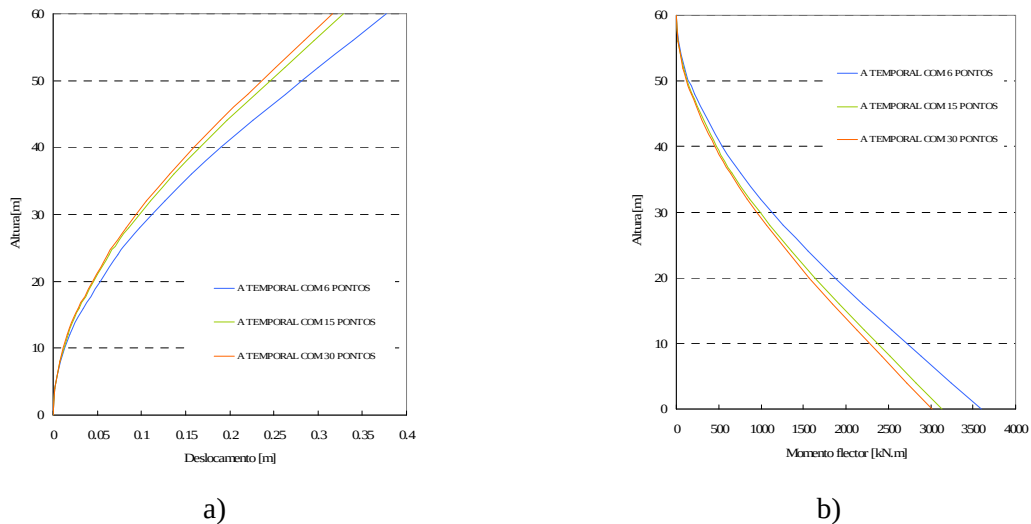


Figura 6.28 – Envolvente dos valores médios dos extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b))

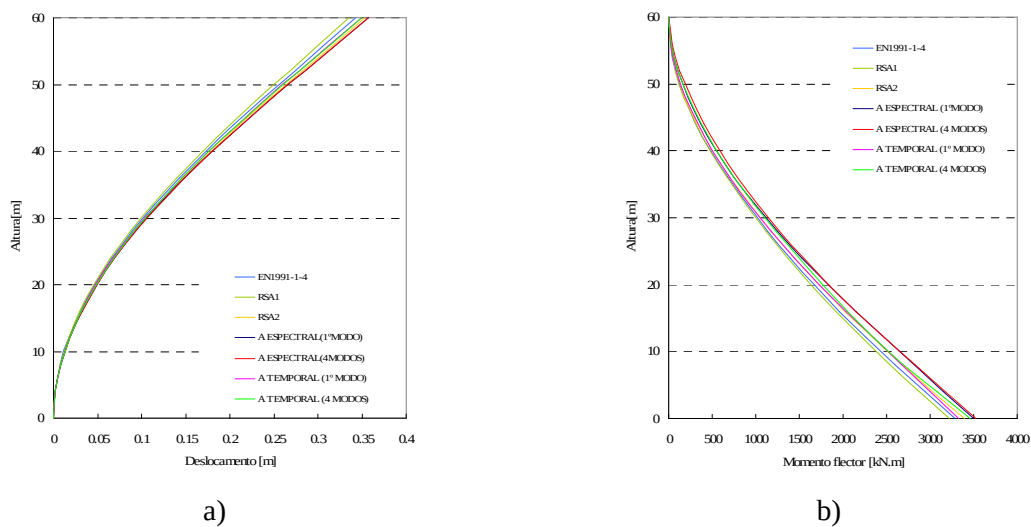


Figura 6.29 – Envolvente dos valores médios extremos absolutos da componente turbulenta da resposta (deslocamento (dx) (a) e momento flector (My) (b)) para cada um dos modelos considerados no Quadro 6.15.

Na Figura 6.30 pode observar-se, para os desvios-padrão do deslocamento no topo e do momento flector na base, os gráficos comparativos da participação de cada um dos primeiros quatro modos na resposta, para os casos das análises temporal e espectral.

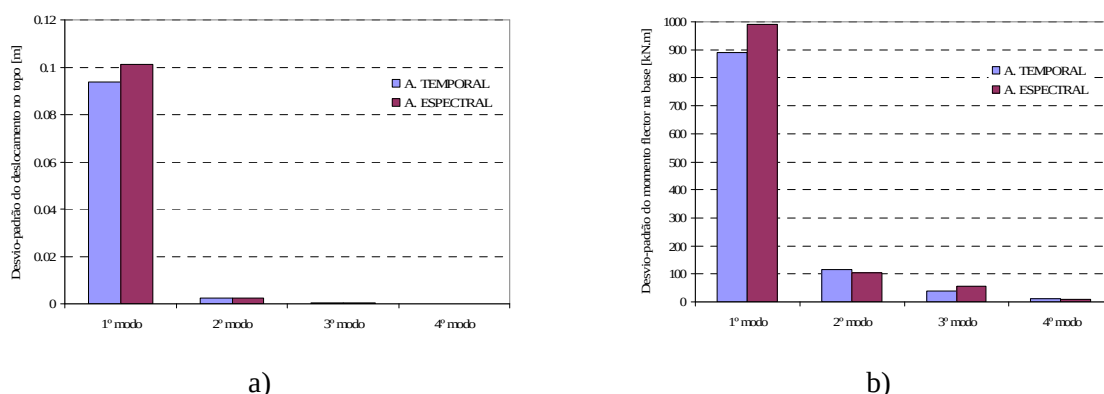


Figura 6.30 – Participação de cada um dos quatro modos de vibração na resposta estrutural para os casos das análises temporal e espectral (deslocamento no topo (a) e momento flector na base (b)).

Dos resultados apresentados, pode concluir-se haver uma boa concordância entre os valores obtidos nos diversos tipos de análise.

A análise espectral conduziu a valores ligeiramente superiores, possivelmente devido ao facto de o procedimento numérico utilizado na integração das equações (6.21) e (6.25) necessitar de uma maior discretização (maior número de pontos de integração), contudo os resultados são bastante satisfatórios.

Pode também constatar-se que, examinando a resposta em termos da variável de controlo deslocamento, a participação de modos superiores ao primeiro modo não é muito significativa, não sucedendo todavia o mesmo na variável de controlo momento flector, em essa influência é um pouco mais notória.

Da comparação das respostas estruturais referentes aos 3 grupos iniciais calculados no domínio do tempo pode também concluir-se a necessidade de discretizar a acção num número de forças equivalentes adequado de forma a reproduzir com alguma fidelidade a variação da carga em altura e evitar erros grosseiros na quantificação da acção.

Constata-se também que o uso de apenas 10 lotes de simulações temporais conduz a resultados bastante satisfatórios e em concordância com as restantes análises, apesar de a obtenção de maior precisão na aplicação do método aconselhar o uso de um maior número de lotes de séries.

As análises estáticas simplificadas, efectuadas para uma probabilidade de excedência de 0,02, conduziram a valores concordantes com os obtidos no decurso das análises de carácter dinâmico, pelo que se podem considerar uma metodologia adequada ao projecto de estruturas deste tipo.

6.2.7. Análise dos efeitos laterais induzidos pela libertação de vórtices

A análise dos efeitos laterais induzidos pela libertação de vórtices foi realizada segundo as metodologias propostas por Ruchweich [2, 36] e adoptadas pela norma europeia EN1991-1-4 [23], para duas configurações da chaminé. As configurações diferem entre si na adopção ou não dos dispositivos aerodinâmicos helicoidais de controlo de vibrações (alhetas helicoidais).

A velocidade média com que se dá a libertação de vórtices pode ser obtida a partir de

$$V_{crit} = \frac{n_{y,i} \cdot b}{St} \quad (6.35)$$

sendo $n_{y,i}$ a frequência do i -ésimo modo de vibração mobilizado pela excitação transversal, b o diâmetro da chaminé e St o número de Strouhal, que neste caso toma o valor $St = 0,18$ (ver Quadro 5.5).

O fenómeno de libertação de vórtices pode ocorrer para os casos em que velocidades críticas associadas a determinados modos transversais de vibração sejam inferiores a 1,25 vezes a velocidade média do escoamento circundante à secção transversal. Deste modo, a partir da análise do Quadro 6.16, onde constam alguns parâmetros necessários a este estudo, pode concluir-se a necessidade de proceder à investigação da possibilidade de libertação de vórtices para os dois primeiros modos transversais de vibração.

Quadro 6.16 – Velocidades críticas referentes a cada um dos modos transversais de vibração.

modo de vibração i	$n_{y,i}$ [Hz]	V_{crit} [m/s]	$\bar{U}(60m)$ [m/s]	$V_{crit} / \bar{U}(60m)$	
1	0,863	9,59	37,72	0,25	< 1,25
2	3,790	42,11	37,72	1,12	< 1,25

De modo a avaliar a susceptibilidade desta estrutura a elevadas amplitudes devidas à libertação de vórtices, calculou-se o número de Scruton, Sc , através da expressão (5.223), tendo-se obtido os valores indicados no Quadro 6.17, que evidenciam uma elevada susceptibilidade a elevadas amplitudes de vibração devido a este fenómeno, justificando-se assim, a necessidade de utilização de dispositivos de atenuação de vibrações, tais como as alhetas helicoidais ou TMD's [2, 57].

Quadro 6.17 – Valores dos números de Scruton para o 1º e 2º modos de vibração.

modo de vibração i	$m_{e,i}$ [kg/m]	δ_s	b [m]	Sc_i
1	318,54	0,012	2	1,55
2	422,25	0,012	2	2,06

Desta forma, procedeu-se ao cálculo da amplitude máxima de deslocamento da estrutura devido ao fenómeno de libertação de vórtices, para ambos os modos e configurações da chaminé (sem e com a adopção de alhetas helicoidais).

O deslocamento máximo foi obtido através da expressão,

$$\frac{y_{F,\max}}{b} = \frac{1}{St^2} \cdot \frac{1}{Sc} \cdot K \cdot K_w \cdot c_{lat} \quad (6.36)$$

sendo os parâmetros K , K_w e c_{lat} obtidos a partir do procedimento descrito no ponto 5.4.4 e constante da norma EN1991-1-4 [23].

No Quadro 6.18, são apresentados os valores dos deslocamentos máximos, bem como dos parâmetros que são necessários para o cálculo destes.

Quadro 6.18 – Amplitude máxima de deformação para cada um dos modos de vibração e de acordo com cada uma das configurações da chaminé.

Modo de vibração i	Sem alhetas helicoidais		Com alhetas helicoidais	
	1º	2º	1º	2º
St	0,18	0,18	0,18	0,18
Sc	1,55	2,06	1,55	2,06
K	0,125	0,158	0,125	0,158
K_w	0,6	0,256	0,6	0,256
c_{lat}	0,200	0,062	0,059	0,018
$y_{\max}$ [m]	0,598	0,074	0,177	0,022

Da análise do Quadro 6.18, pode concluir-se que, apesar de o 2º modo de vibração transversal ser susceptível de ter associada alguma libertação de vórtices, a sua ocorrência não se apresenta condicionante no que respeita às deformações. Contudo e tal como previsto, na avaliação dos valores representados no Quadro 6.18, a adopção de alhetas helicoidais é claramente necessária e pode ser justificada pelos resultados obtidos para a velocidade crítica relativa ao 1º modo referente à

configuração da chaminé sem alhetas. A adição de alhetas helicoidais ao último terço da estrutura conduz a uma redução bastante elevada da amplitude de vibração, devendo-se este aspecto à destruição parcial do mecanismo de formação de vórtices e consequente redução do coeficiente de sustentação. Neste âmbito, a presença destes dispositivos foi tida em conta através da adopção do coeficiente α_s proposto pela norma EN1993-3-2 [61] para a redução do coeficiente de sustentação c_{lat} , que se pode representar por

$$\alpha_s = \left(1 - \frac{l_s}{h}\right)^3 \quad (6.37)$$

sendo l_s o comprimento da chaminé provido de alhetas helicoidais e h a altura total da chaminé.

Na Figura 6.31, são apresentadas as envolventes das deformações e dos momentos flectores ao longo da chaminé, para ambas as configurações (com e sem alhetas helicoidais). Da observação da Figura 6.31, pode concluir-se que apesar de as deformações obtidas para o 2º modo de vibração transversal não serem significativas comparativamente com os resultados obtidos para o 1º modo, já o mesmo não sucede em termos dos esforços gerados, isto é existe uma zona mais elevada da estrutura onde se pode observar um acréscimo dos momentos devido a configuração do 2º modo transversal de vibração, que pode conduzir a níveis de tensões mais elevados nessas zonas.

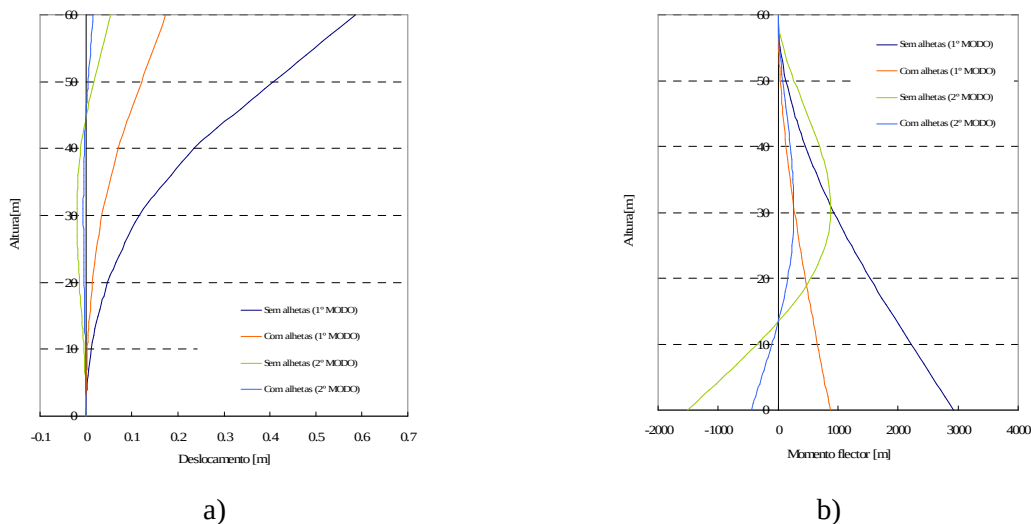


Figura 6.31 – Representação das deformações (a) e dos momentos flectores (b) para o 1º e 2º modos transversais de vibração e para ambas as configurações da chaminé, em função da altura.

É de realçar que embora a estrutura avaliada tenha sido projectada e executada com alhetas helicoidais, poder-se-ia ter optado por outro tipo de dispositivo de atenuação de vibrações, como é frequente em estruturas deste tipo [56, 62, 63]. No capítulo 7 será apresentada uma aplicação de um desses dispositivos, como alternativa ao aqui analisado.

6.3. Antena espiada com 265m da Rádio Renascença (Muge)

6.3.1. Descrição da estrutura

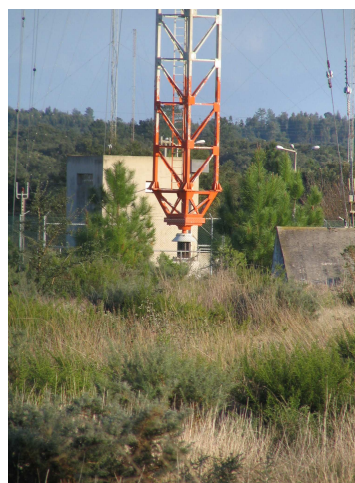
A segunda estrutura analisada é uma antena metálica espiada com 265 m de altura, constituída por um fuste metálico em estrutura articulada tridimensional, sendo a sua secção quadrada com a dimensão média de 1,50 m de face, rotulada na base e com sete níveis de espiação a 40,5 m, 81 m, 121,5 m, 162 m, 193,5 m, 225 m e 256,5 m.

A secção do fuste é constituída por quatro montantes, cada um deles formado por duas cantoneiras em caixão, travados no plano horizontal por diagonais que ligam alternadamente dois vértices opostos do quadro por eles formado, e no plano vertical por travessas espaçadas de 1,5 m e por diagonais que ligam os vértices opostos de duas travessas consecutivas.

A ligação do fuste à fundação é realizada por meio de um isolador de porcelana.



a)



b)

Figura 6.32 – Foto da antena espiada (a) e pormenor da ligação do fuste à fundação (b).

As espias estão dispostas segundo as diagonais da secção do fuste, amarrando as duas primeiras em maciços que se encontram a uma distância de 60 m do eixo do fuste, as 3ª e 4ª em maciços a 160 m e as 5ª, 6ª e 7ª em maciços a 180 m do mesmo eixo. Cada uma das espias é provida de isoladores no seu curso espaçados de 61 m entre eles e isoladores nos pontos de apoio destas. Cada uma das espias é ligada ao fuste por meio de dois cabos que convergem para o ponto médio da travessa horizontal da face da secção do fuste, sendo esta reforçada nos pontos de apoio dos cabos por diagonais no plano vertical e no plano horizontal, e que por sua vez ajudam à uniformização da transmissão dos esforços aos montantes.

A deformação das espigas foi limitada em projecto a $f_{\max}/80$ no caso do 1º, 2º, 3º e 4º níveis de espionamento e a $f_{\max}/60$ para os restantes níveis.

A antena é provida ainda de uma escada vertical interior de manutenção e plataformas metálicas em cada um dos níveis de espionamento e a meio de cada dois níveis consecutivos.

Na Figura 6.33 apresenta-se um desenho esquemático da estrutura onde se representa o fuste e o espionamento.

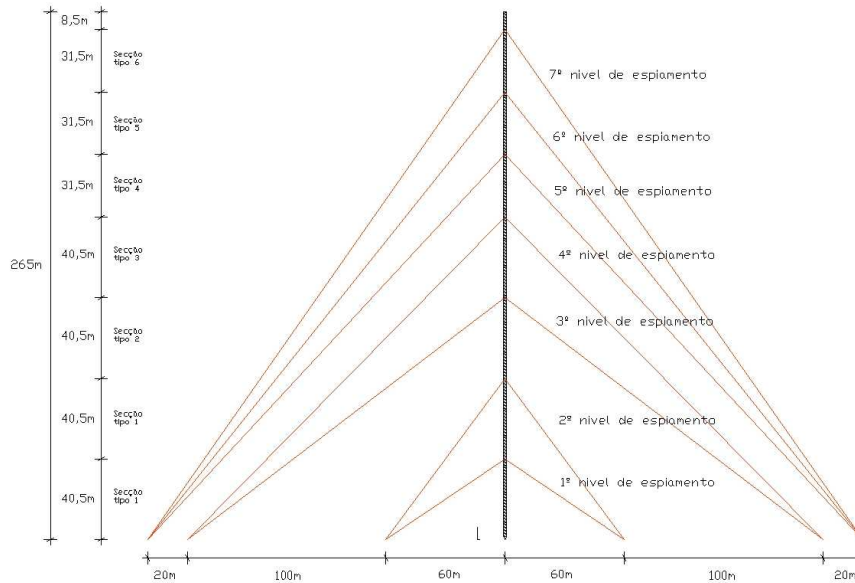


Figura 6.33 – Esquema estrutural com a representação do fuste e dos diversos níveis de espionamento.

No quadro seguinte apresentam-se as principais propriedades dos materiais utilizados no projecto da antena espiada.

Quadro 6.19 – Propriedades dos materiais utilizados na construção da antena espiada.

	Fuste	Cabos
Aço	S275	-
f_y [MPa]	275	1674
f_u [MPa]	430	1860
E [GPa]	206	200
G [GPa]	80	80
ν	0,3	0,3
α [°C]	$1,2 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-5}$
$\rho_{aço}$ [kg/m³]	7850	7850
$\gamma_{aço}$ [kN/m³]	77	77

6.3.2. Modelo numérico

6.3.2.1. Discretização estrutural

Os mastros espiados, para além, da elevada sensibilidade que apresentam aos efeitos turbulentos da acção do vento, têm a particularidade de terem também um acentuado comportamento não-linear geométrico, devido à presença dos cabos nestas estruturas. Deste modo, com o intuito de estudar o comportamento estrutural sob o efeito da acção turbulenta do vento no domínio do tempo, foram construídos 3 modelos, com recurso ao programa comercial de análise estrutural SOLVIA03.

O primeiro modelo foi idealizado através de uma modelação em elementos finitos que envolveu a discretização da estrutura em 205 elementos. O fuste é constituído por 177 elementos de viga com as propriedades mecânicas definidas a partir dos dados de projecto e apresentados no Quadro 6.20. Cada um dos cabos foi idealizado através de um elemento de barra com as respectivas propriedades mecânicas dadas no Quadro 6.21.

Quadro 6.20 – Propriedades mecânicas de cada uma das secções tipo do fuste.

Secção tipo	Largura [m]	Área [m ²]	$I_x=I_y$ [m ⁴]	I_o [m ⁴]
1	1,5	0,02030	0,01146	0,02293
2	1,5	0,01532	0,00864	0,01729
3	1,5	0,01370	0,00776	0,01551
4	1,5	0,00981	0,00553	0,01106
5	1,5	0,00863	0,00488	0,00975
6	1,5	0,00638	0,00361	0,00721

Quadro 6.21 – Propriedades mecânicas de cada um dos cabos em correspondência com o nível a que está ligado.

Nível	d [m]	m [kg/m]	A [m ²]
1º	0,017	1,131	0,000108
2º	0,020	1,549	0,000151
3º	0,020	1,549	0,000151
4º	0,020	1,549	0,000151
5º	0,022	1,783	0,000175
6º	0,024	2,130	0,000211
7º	0,024	2,130	0,000211

Neste modelo, foi tida em conta a massa distribuída das escadas, o acréscimo de peso devido às ligações, e as massas pontuais das plataformas, bem como dos isoladores. A rótula proporcionada pelo isolador cerâmico junto à base do fuste foi idealizada através de um apoio duplo.

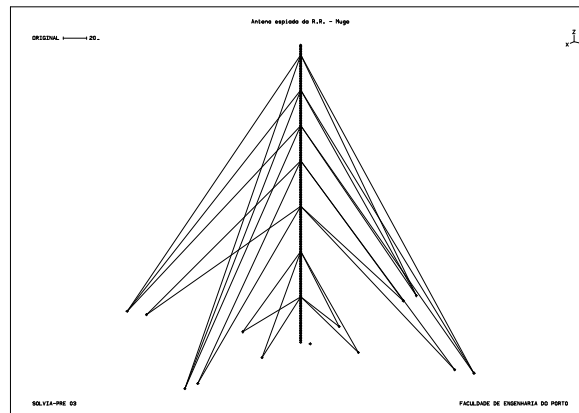


Figura 6.34 – Representação do modelo 1 da antena espiada (simulação dos cabos através de 1 elemento de barra).

Este primeiro modelo é manifestamente insuficiente, visto que não consegue traduzir correctamente o comportamento estático e muito menos o dinâmico da estrutura sob a acção do vento. A presença dos cabos na estrutura, e neste caso cabos pouco tensos, leva a que o comportamento desta quando solicitada por uma acção horizontal apresente um elevado carácter não-linear geométrico, que se faz notar através da gradual diminuição de rigidez associada à perda de tensão dos cabos a barlavento, com o consequente aumento das deformações do mastro.

Se se imaginarem os cabos idealizados como apoios elásticos, cuja rigidez das molas seja igual à rigidez dos cabos, à medida que a estrutura for solicitada por forças horizontais, um dos cabos ficará mais tensionado, enquanto o outro perderá tensão (ver Figura 6.35). Esta perda de tensão dos cabos de um dos lados, leva a que a haja uma redução da rigidez das molas equivalentes à medida que a estrutura se deforma, efeito que não é captado pelo modelo anterior, dado que a rigidez equivalente se mantém constante durante o processo de deformação.

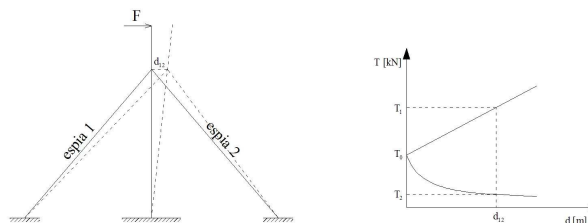


Figura 6.35 – Comportamento de cabos pouco tensos de uma estrutura solicitada por um carregamento horizontal.

Deste modo, o segundo modelo difere do primeiro apenas nas propriedades com que os cabos foram modelados, tendo a sua consideração como objectivo uma análise não-linear geométrica dos efeitos de rajada, em que cada cabo é suposto constituído por um conjunto de elementos de barra (“multi-link approach” [64]) com as características correspondentes a cada um dos cabos.

Para este efeito, surge a necessidade de quantificar o número de elementos finitos de barra por cabo necessários para traduzir correctamente o comportamento do mastro, tanto sob efeito de uma carga estática, como sob o efeito de uma carga com carácter dinâmico. Para a quantificação do número de elementos em que os cabos são discretizados, procedeu-se a um estudo comparativo com base nas equações apresentadas na secção 6.3.1.2.1., correspondentes à formulação teórica da catenária elástica (no caso do comportamento estático de cabos) e a teoria das cordas vibrantes aplicada a cabos inclinados (no caso do comportamento dinâmico). Neste estudo, procedeu-se à comparação dos resultados obtidos, para os cabos relativos a diferentes níveis de espiamento, usando formulações teóricas e a formulação de elementos finitos, e para um número crescente de elementos, até à obtenção de um erro inferior a 5%, considerando as análises conduzidas para as frequências abaixo dos 2Hz . Este estudo foi realizado tendo como base a referência [64] sobre o comportamento de cabos em pontes atirantadas.

Assim sendo, conclui-se que o valor necessário de elementos de barra para uma correcta modelação do comportamento dos cabos é de 20, por cada cabo.

A Figura 6.36 ilustra o modelo utilizado nos cálculos, onde se pode ver cada um dos cabos discretizado em 20 elementos de barra.

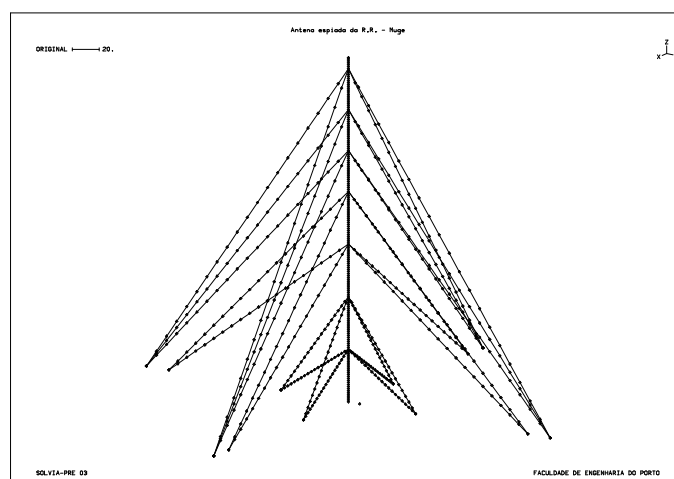


Figura 6.36 – Representação do modelo 2 da antena espiada (simulação dos cabos através de 20 elementos de barra).

Com o intuito de obter os parâmetros modais referentes à estrutura sem a inclusão dos cabos foi construído ainda um ultimo modelo, em que os cabos foram substituídos por apoios elásticos com uma rigidez equivalente, correspondente à configuração deformada (Figura 6.37).

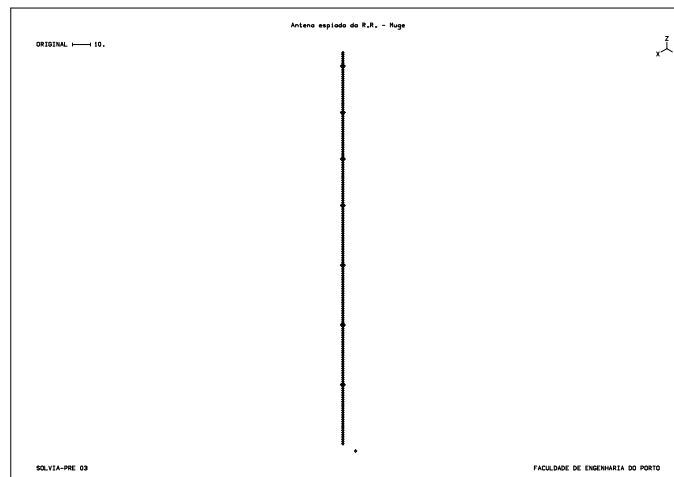


Figura 6.37 – Representação do modelo 3 da antena espiada (simulação dos cabos como molas com rigidez equivalente).

Como informação complementar, apresenta-se também na Figura 6.38 a variação do peso próprio w_m e do parâmetro $E.I_m$, relacionado com a rigidez do fuste, com a altura deste.

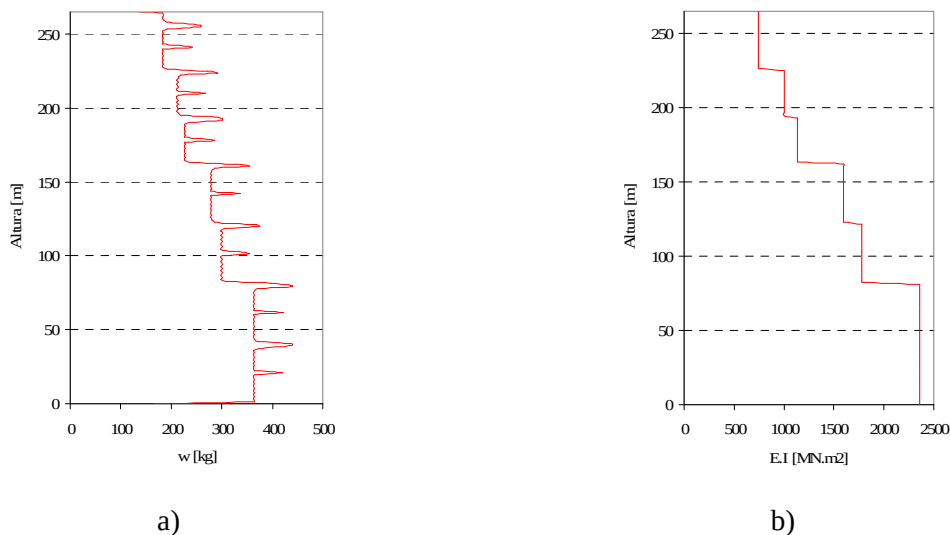


Figura 6.38 – Variação do peso próprio (a) e da rigidez à flexão do fuste (b) em altura.

6.3.2.1.1. Cabos

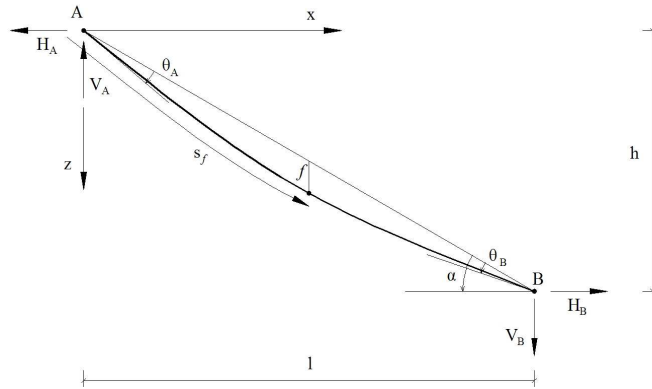


Figura 6.39 – Representação genérica de um cabo isolado.

Na determinação dos parâmetros indicados no Quadro 6.22 para cada um dos cabos isolados, foi utilizada a formulação geral apresentada no documento [64], também designada por formulação da catenária elástica. Assim para um cabo inclinado como o representado genericamente na Figura 6.39, com as propriedades de área A_0 e módulo de elasticidade E , a sua deformada pode ser representada parametricamente a partir de

$$x(s) = \frac{H_A \cdot s}{E \cdot A_0} + \frac{H_A \cdot L_0}{W} \cdot \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V_A}{H_A} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V_A - W \cdot s / L_0}{H_A} \right) \right] \quad (6.38)$$

$$z(s) = \frac{W \cdot s}{E \cdot A_0} \left(\frac{V_A}{W} - \frac{s}{2 \cdot L_0} \right) + \frac{H_A \cdot L_0}{W} \cdot \left\{ \left[1 + \left(\frac{V_A}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V_A - W \cdot s / L_0}{H_A} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (6.39)$$

$$T(s) = \left[H_A^2 + \left(V_A - \frac{W \cdot s}{L_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.40)$$

Da observação destas equações pode concluir-se que a posição deformada de um ponto P , ao qual está associado um comprimento de um segmento do cabo indeformado s , depende das reacções na extremidade A , V_A e H_A , do peso do cabo $W = m \cdot g \cdot L_0$, do comprimento inicial do cabo L_0 e da rigidez axial deste $E \cdot A_0$.

As reacções V_A e H_A nas extremidades do cabo podem ser obtidas impondo condições fronteira na resolução das equações transcendentais (6.38) e (6.39).

O conhecimento destas reacções permite também a obtenção do esforço máximo do cabo T_A dado por

$$T_A = [H_A^2 + V_A^2]^{1/2} \quad (6.41)$$

e os ângulos de desvio máximo do cabo nas ancoragens

$$\theta_A = \text{atan}\left(\frac{V_A}{H_A}\right) - \alpha \quad (6.42)$$

$$\theta_B = \alpha - \text{atan}\left(\frac{V_B}{H_B}\right) = \alpha - \text{atan}\left(\frac{V_A - W}{H_A}\right) \quad (6.43)$$

A flecha do cabo (“cable sag”) f definida como a máxima distância à corda na vertical, pode ser obtida a partir das expressões [64]

$$f = z(x_f) - \frac{h}{l} x_f \quad \text{tal que } x_f = x(s_f) \text{ e } s_f = \frac{L_0}{W} \left(V_A - h \frac{H_A}{l} \right) \quad (6.44)$$

O comprimento do cabo deformado L_1 pode ser obtido através de

$$L_1 = L_0 + \frac{H_A^2 \cdot L_0}{2 \cdot W \cdot E \cdot A_0} \cdot \left[\frac{V_A}{H_A} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_A} \right)^2} + \ln \left(\frac{V_A}{H_A} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_A} \right)^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{V_A - W}{H_A} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{V_A - W}{H_A} \right)^2} - \ln \left(\frac{V_A - W}{H_A} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_A - W}{H_A} \right)^2} \right) \right] \quad (6.45)$$

Um parâmetro de grande importância na caracterização de um cabo suspenso é o parâmetro de Irvine λ^2 [64],

$$\lambda^2 = \left(\frac{m \cdot g \cdot L}{T} \right)^2 \cdot \frac{L}{\frac{T \cdot L_e}{E \cdot A_0}} \quad (6.46)$$

Este parâmetro traduz as características geométricas e de deformação do cabo. As variáveis L e T representam o comprimento da corda e o esforço ao longo da corda do cabo, respectivamente. A variável L_e representa o comprimento virtual do cabo e pode ser definido por

$$L_e = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \approx L \cdot \left[1 + 8 \left(\frac{d}{L} \right)^2 \right] \quad (6.47)$$

Este parâmetro dá a indicação do grau de tensão e do grau de não-linearidade geométrica que o cabo apresenta, ou seja de quão dependente das deformações os seus esforços são. Para cabos tensos (como no caso de pontes atirantadas) os seu valor encontra-se no intervalo entre 0 e 1, enquanto que para cabos pouco tensos (caso de pontes suspensas) o valor de λ^2 pode ser superior a 100.

Quadro 6.22 – Caracterização estática dos cabos correspondentes a cada nível de espiamento.

Nível	h [m]	l [m]	L _o [m]	α [°]	W [kN/m]	f [m]	T _o [kN]	H [kN]	V _A [kN]	V _B [kN]	L _e [m]	λ^2
1°	40.5	60	72.39	34.02	0.0111	0.905	8.035	6.66	4.90	4.09	72.45	18.50
2°	81	60	100.80	53.47	0.0152	1.260	15.322	9.12	13.08	11.55	100.85	6.99
3°	121.5	160	200.90	37.21	0.0152	2.511	30.537	24.32	19.99	16.94	201.06	6.28
4°	162	160	227.69	45.36	0.0152	2.846	34.609	24.32	26.35	22.89	227.83	4.31
5°	193.5	180	264.28	47.07	0.0175	4.405	34.686	23.63	27.71	23.08	264.55	8.31
6°	225	180	288.14	51.34	0.0209	4.802	45.166	28.22	38.28	32.26	288.39	6.48
7°	256.5	180	313.36	54.94	0.0209	5.223	49.119	28.22	43.48	36.93	313.59	5.04

Para além dos parâmetros estáticos apresentados, também podem ser avaliadas algumas características dinâmicas. Para tal, recorreu-se a uma formulação simplificada da teoria linear das cordas vibrantes descrita em [64, 65].

A teoria das cordas vibrantes horizontais foi estendida por Irvine, em 1981, aos cabos inclinados. A metodologia aplicada consiste em transformar o sistema de eixos horizontal/vertical, num sistema de eixos paralelo/perpendicular à corda do cabo inclinado, assumindo que a componente do peso paralela à corda é desprezável, o que se pode traduzir numa perda de precisão à medida que o ângulo de inclinação α cresce, isto é assume-se habitualmente que esta teoria é válida para ângulos de inclinação inferiores a 60°. Deste modo, considere-se o cabo inclinado representado na Figura 6.39 e a correspondente transformação de eixos coordenados definidos de acordo com as equações

$$\begin{aligned}x_* &= x \cdot \sec \alpha + z \cdot \sin \alpha \\ z_* &= z \cdot \cos \alpha\end{aligned}\tag{6.48}$$

Tal como no caso dos cabos horizontais, os movimentos do cabo fora do plano estão desligados dos movimentos no plano. No plano da estrutura, a componente longitudinal é muito mais pequena que a componente transversal, não sendo por isso afectado o cálculo das frequências naturais.

Definindo ω_{*n} como a frequência natural do cabo inclinado de ordem n e $\bar{\omega}_{*n} = \omega_{*n} \cdot l_* \cdot \sqrt{m/H_*}$ como a correspondente frequência adimensional, com $l_* = l \cdot \sec \alpha$ e $H_* = H \cdot \sec \alpha$, os modos de vibração do cabo fora do plano da estrutura podem ser caracterizados através de

$$\bar{\omega}_{*n} = n.\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.49)$$

Os modos anti-simétricos no plano da estrutura podem ser obtidos a partir de

$$\bar{\omega}_{*n} = 2.n.\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.50)$$

Para modos simétricos no plano da estrutura, o valor de $\bar{\omega}_{*n}$ é obtido a partir das raízes da equação transcendente

$$\tan\left(\frac{\bar{\omega}_{*n}}{2}\right) = \frac{\bar{\omega}_{*n}}{2} - \frac{4}{\lambda_*^2} \left(\frac{\bar{\omega}_{*n}}{2}\right)^3 \quad (6.51)$$

No Quadro 6.23, são apresentadas algumas das frequências naturais relativas a modos no plano da estrutura, calculadas pela teoria das cordas vibrantes e avaliadas a partir da discretização dos cabos em elementos finitos de barra. Os resultados apresentados reportam-se ao caso adoptado através da utilização do procedimento descrito para a obtenção da discretização óptima, isto é considerando os cabos discretizados em 20 elementos finitos de barra.

Quadro 6.23 – Caracterização dinâmica dos cabos correspondentes a cada nível de espiamento.
Comparação das frequências (em Hz), entre a abordagem teórica e o modelo com discretização em 20 elementos finitos de barra.

Modo de vibração	Nível de espiamento													
	1 ^a		2 ^a		3 ^a		4 ^a		5 ^a		6 ^a		7 ^a	
	Irvine	MEF	Irvine	MEF	Irvine	MEF	Irvine	MEF	Irvine	MEF	Irvine	MEF	Irvine	MEF
1	0,916	0,915	0,618	0,618	0,430	0,429	0,382	0,382	0,341	0,341	0,312	0,312	0,288	0,288
2	1,164	1,169	0,987	0,991	0,699	0,701	0,656	0,659	0,528	0,530	0,505	0,507	0,485	0,487
3	1,766	1,780	1,485	1,499	1,052	1,061	0,987	0,996	0,795	0,802	0,761	0,767	0,729	0,735
4	2,328	2,367	1,973	2,006	1,398	1,421	1,313	1,334	1,055	1,073	1,011	1,027	0,969	0,985
5	2,916	2,989	2,466	2,531	1,747	1,793	1,641	1,684	1,319	1,354	1,263	1,297	1,211	1,243
6	3,492	3,623	2,960	3,070	2,096	2,175	1,969	2,043	1,583	1,642	1,516	1,573	1,454	1,508
7	4,074	4,282	3,453	3,629	2,446	2,570	2,297	2,414	1,847	1,941	1,769	1,859	1,696	1,782
8	4,656	4,965	3,946	4,208	2,795	2,981	2,626	2,800	2,111	2,251	2,021	2,156	1,938	2,067
9	5,239	5,677	4,439	4,811	3,145	3,408	2,954	3,201	2,374	2,573	2,274	2,465	2,181	2,363
10	5,821	6,418	4,933	5,439	3,494	3,853	3,282	3,619	2,638	2,909	2,527	2,786	2,423	2,672

6.3.2.2. Caracterização do comportamento dinâmico da estrutura

A modelação em elementos finitos realizada com recurso ao programa de cálculo SOLVIA03 permitiu avaliar as características dinâmicas da estrutura.

Dado que a rigidez dos cabos depende directamente da tensão a que estes estão sujeitos, as frequências naturais da estrutura variam à medida que esta é carregada, isto é, para condições em que a estrutura esteja apenas sujeita ao seu peso próprio e à pré-tensão inicial dos cabos, ela apresenta determinadas propriedades dinâmicas, enquanto que, quando se encontre sujeita à acção do vento, ela apresenta propriedades dinâmicas diferentes, pois há uma variação da rigidez do conjunto das espigas, que se pode observar de acordo com o esquematizado na Figura 6.35, referente a cabos pouco tensos.

Deste modo, apresentam-se no Quadro 6.24 as frequências naturais de vibração para cada um dos modelos e para as configurações da estrutura em repouso e da estrutura sujeita ao carregamento horizontal devido ao vento médio.

As frequências apresentadas no Quadro 6.24 referentes ao modelo 2 (modelo com os cabos discretizados em 20 elementos finitos) referem-se aos modos de vibração com maior preponderância no comportamento do fuste, podendo observar-se que em resultado da discretização dos cabos surge o aparecimento de um elevado número de modos com a participação dos cabos, que, para a estrutura em repouso, se iniciam nos $0,228\text{Hz}$, e para a estrutura sujeita à solicitação horizontal devida ao vento médio, se iniciam nos $0,158\text{Hz}$.

Quadro 6.24 – Frequências naturais e respectivas configurações modais, referentes aos 19 primeiros modos de vibração.

Sem actuação do vento médio			Com actuação do vento médio			Configuração modal
modelo 1	modelo 2	modelo 3	modelo 1	modelo 2	modelo 3	
n [Hz]	n [Hz]	n [Hz]	n [Hz]	n [Hz]	n [Hz]	
0,740	0,726	0,740	-	0,542	0,526	1º modo longitudinal
0,759	0,759	0,759	-	0,565	0,572	2º modo longitudinal
0,857	0,895	0,857	-	0,650	0,641	3º modo longitudinal
1,045	1,119	1,045	-	0,861	0,876	4º modo longitudinal
1,362	1,413	1,362	-	1,211	1,230	5º modo longitudinal
1,833	1,898	1,833	-	1,715	1,735	6º modo longitudinal
2,450	2,504	2,450	-	2,362	2,403	7º modo longitudinal
3,279	3,343	3,279	-	3,244	3,312	8º modo longitudinal
4,245	4,253	4,339	-	3,943	4,123	1º modo vertical
4,262	4,309	4,262	-	4,214	4,278	9º modo longitudinal
5,211	5,253	5,211	-	5,107	5,136	10º modo longitudinal
6,401	6,425	6,401	-	6,299	6,351	11º modo longitudinal
7,703	7,719	7,703	-	7,589	7,601	12º modo longitudinal
9,078	9,128	9,078	-	8,946	8,962	13º modo longitudinal
10,201	10,232	10,181	-	9,894	10,553	2º modo vertical
10,738	10,772	10,738	-	10,593	10,628	14º modo longitudinal
12,466	12,512	12,466	-	12,362	12,433	15º modo longitudinal
13,919	13,982	13,919	-	13,609	13,673	16º modo longitudinal

Na Figura 6.40 e na Figura 6.41, são apresentadas as configurações modais em correspondência com as frequências naturais dos primeiros 4 modos de vibração.

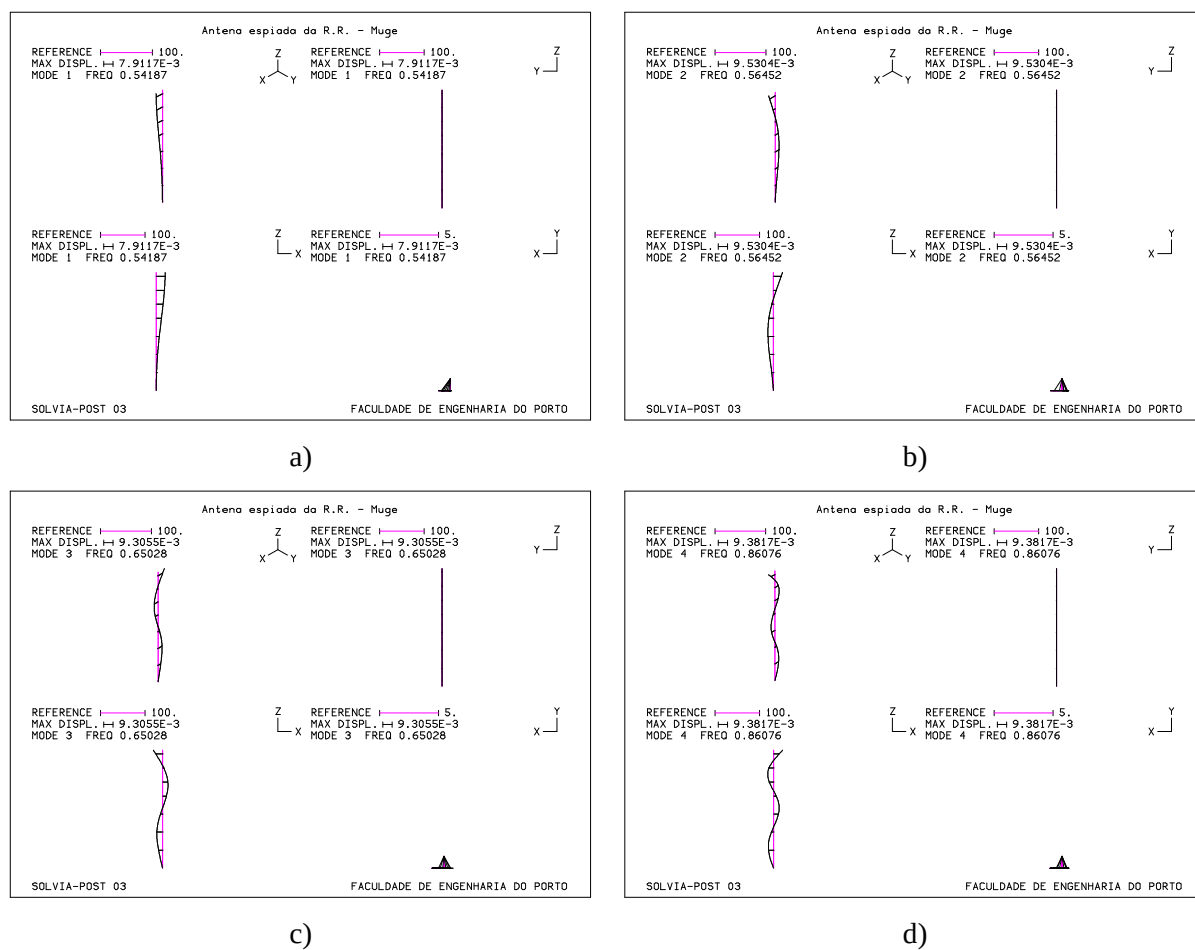


Figura 6.40 – Configurações modais correspondentes aos primeiros 4 modos de vibração longitudinais para a situação deformada devida ao carregamento horizontal do vento médio para o modelo 3 (modelo com molas).

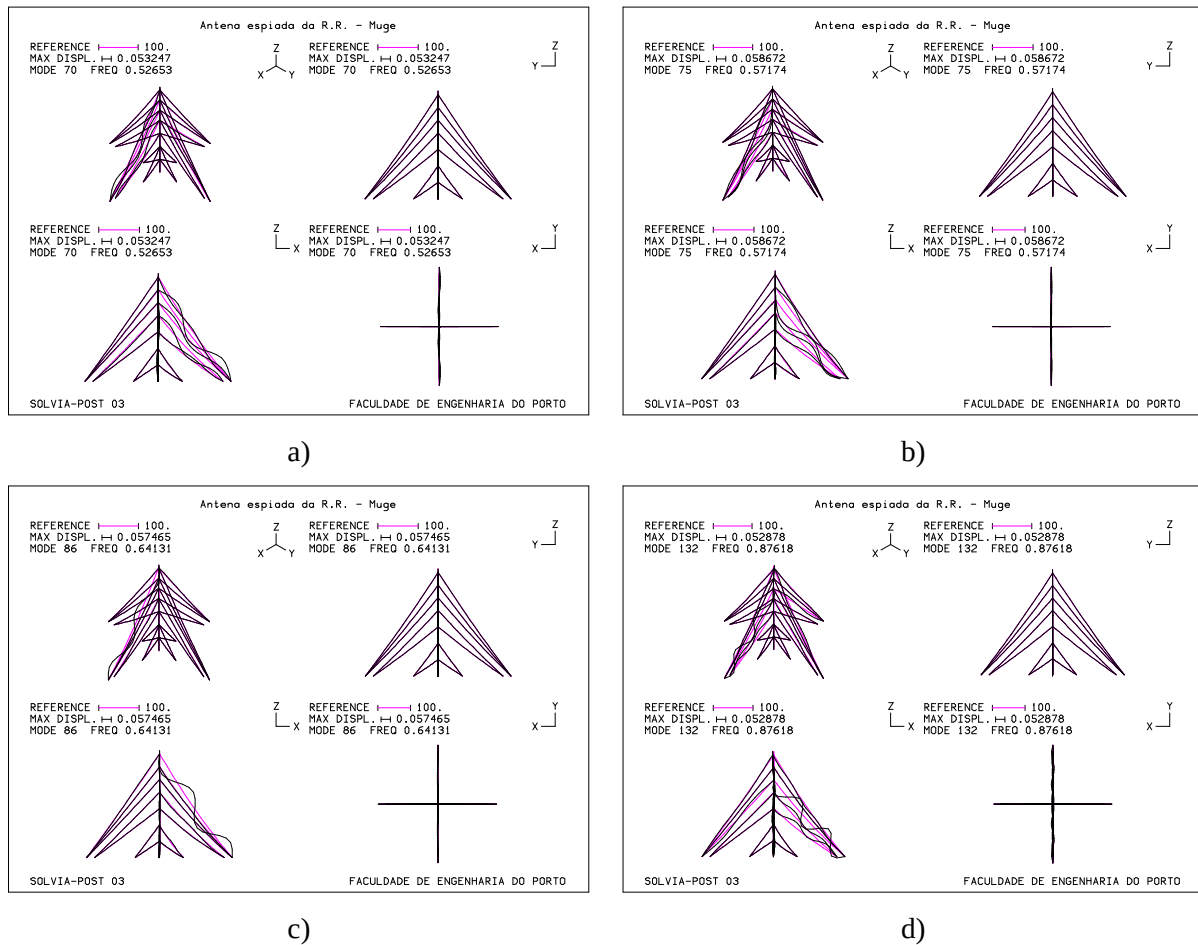


Figura 6.41 – Configurações modais correspondentes aos primeiros 4 modos de vibração longitudinais para a situação deformada devida ao carregamento horizontal do vento médio sobre o modelo 2 (modelo com cabos discretizados em 20 elementos de barra).

6.3.3. Definição da acção

6.3.3.1. Velocidade média

A antena espiada em estudo está inserida numa zona predominantemente rural, da freguesia de Muge, no concelho de Salvaterra de Magos.

Nas análises quasi-estacionárias dos efeitos de rajada realizados no domínio do tempo, foi adoptado o perfil médio de velocidades preconizado pela norma europeia EN1991-1-4.

A norma EN1991-1-4 propõem o perfil logarítmico para a variação da velocidade média do vento em altura, de tal modo que

$$\begin{aligned}\bar{U}(z) &= v_b \cdot k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{para } z \geq z_{\min} \\ \bar{U}(z) &= \bar{U}(z_{\min}) & \text{para } z < z_{\min}\end{aligned}\quad (6.52)$$

Com base, na localização geográfica da estrutura e dadas as características orográficas do terreno circundante, podem identificar-se os parâmetros necessários à caracterização do perfil de variação da velocidade média em altura, que neste caso correspondem às características de um terreno do tipo II (ver ponto 4.3.3.2) e à zona A do território Português, o que em conformidade com o DNA [23] conduz a uma velocidade básica v_b de 28 m/s.

O valor da velocidade básica adoptado pelo DNA refere-se ao valor característico médio do vento registado em períodos de 10 minutos, à cota de 10 metros e tendo uma probabilidade anual de excedência de 0,02 à qual equivale um período de retorno de 50 anos.

Quadro 6.25 – Parâmetros caracterizadores do perfil médio de velocidades da EN1991-1-4, de acordo com o local de implantação da estrutura.

v_b [m/s]	28
z_o [m]	0.05
k_r	0.19
$z_{\min}$ [m]	2

6.3.3.2. Turbulência atmosférica

Como já foi referido, a velocidade do vento pode ser decomposta na soma de uma componente média, associada ao movimento de transporte, com uma componente variável de carácter aleatório e designada por turbulenta.

No decorrer deste trabalho é, em geral, assumido que o rumo do vento é horizontal e perpendicular ao eixo da estrutura. As flutuações temporais da velocidade do vento segundo a direcção longitudinal são designadas por $u(t)$.

A intensidade de turbulência associada à componente longitudinal u da velocidade do vento, num determinado ponto de cota z , é definida através de

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u(z)}{\bar{U}(z)} \quad (6.53)$$

onde $\sigma_u(z)$ representa o desvio padrão da flutuação da velocidade segundo a componente longitudinal, sendo esta praticamente constante nas camadas inferiores da atmosfera em situações próximas do equilíbrio indiferente [3]. De acordo com a EN1991-1-4, este pode ser obtido a partir da seguinte expressão [23]

$$\sigma_u = k_r \cdot v_b \quad (6.54)$$

Por outro lado, a intensidade de turbulência decresce naturalmente com a altura, em virtude do crescimento da velocidade média, dependendo da rugosidade, da mesma forma que $\sigma_u(z)$ e $\bar{U}(z)$, pelo que pode escrever-se que [23]

$$\begin{aligned} I_u(z) &= \frac{k_r \cdot v_b}{\bar{U}(z)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} & \text{para } z \geq z_{\min} \\ I_u(z) &= I_u(z_{\min}) & \text{para } z < z_{\min} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Na Figura 6.42 apresenta-se a sobreposição do perfil de variação da velocidade média do vento e da intensidade de turbulência, com a altura

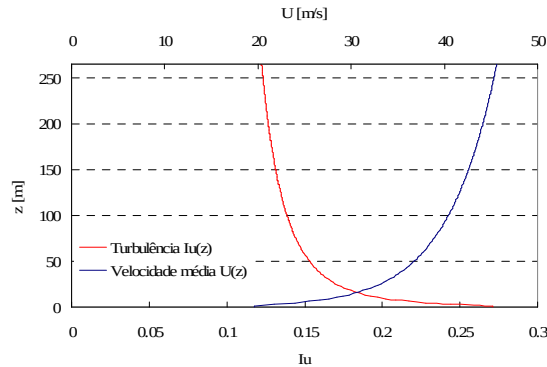


Figura 6.42 – Representação dos perfis de variação da velocidade média e da intensidade de turbulência com a altura.

A caracterização da componente longitudinal flutuante da velocidade do vento pode ser efectuada idealizando aquelas flutuações através de processos estocásticos estacionários, cuja estrutura probabilística pode ser convenientemente caracterizada através de funções densidade espectral de potência.

No presente estudo, utilizou-se a função densidade espectral de potência $S_u(z, n)$ indicada pela norma EN1991-1-4, que apresenta a forma reduzida

$$S_L(z, n) = \frac{n \cdot S_u(z, n)}{\sigma_u^2} = \frac{6,8 \cdot f_L(z, n)}{(1 + 10,2 \cdot f_L(z, n))^{\frac{5}{3}}} \quad f_L(z, n) = \frac{n \cdot L(z)}{\bar{U}(z)} \quad (6.56)$$

onde n representa a frequência (Hz) e $f_L(z, n)$ uma coordenada adimensional. A variável $L(z)$ representa a escala de turbulência e pode ser obtida a partir da equação 4.127.

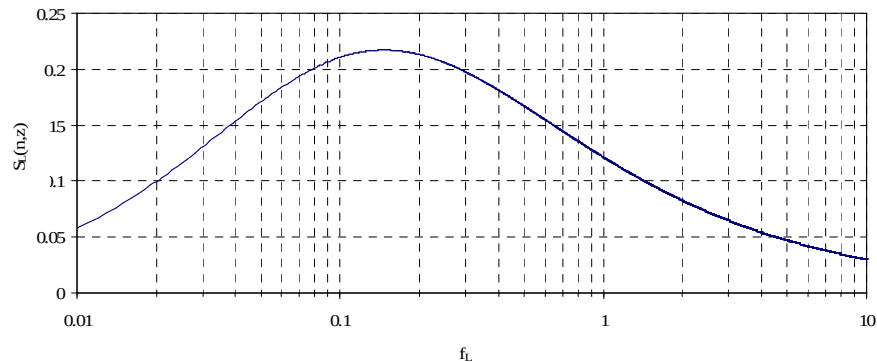


Figura 6.43 – Função densidade espectral de potência reduzida, de acordo com a EN1991-1-4[23].

Tendo em conta a forma de caracterização do vento anteriormente exposta, resumem-se no Quadro 6.26 os valores dos principais parâmetros relativos a três pontos com cotas diferentes ao longo da estrutura em análise.

Quadro 6.26 – Principais parâmetros caracterizadores da turbulência nos pontos à cota 18m , 40,5m e 256,5m , segundo a EN1991-1-4.

z [m]	18	40.5	256.5
U(z) [m/s]	31.31	35.63	45.45
σ_u [m/s]	5.32	5.32	5.32
$I_u(z)$	0.170	0.149	0.117
L(z) [m]	85.72	130.71	341.46

Os valores deste quadro conduzem, para os pontos em causa, aos espectros ilustrados na Figura 6.44, relativos à componente de flutuação longitudinal.

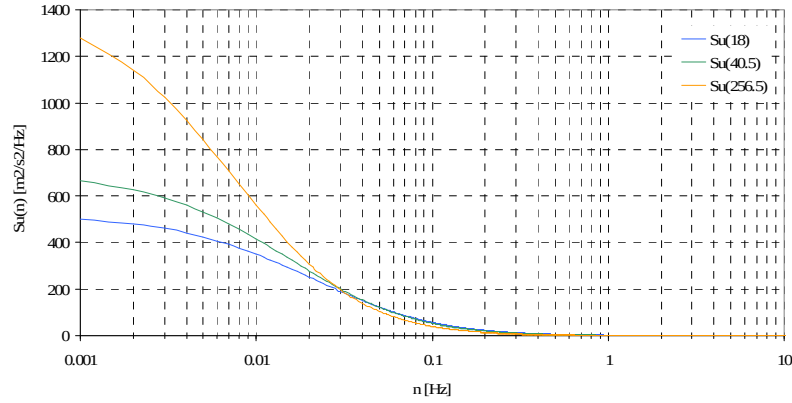


Figura 6.44 – Funções densidade espectral de potência relativos aos 3 pontos caracterizados no Quadro 6.26

Um aspecto importante na idealização da acção turbulenta do vento corresponde à caracterização da correlação espacial das flutuações de velocidade, o que requer a definição de funções densidade espectrais cruzadas, $S_u^{ij}(\Delta r, n)$. Estas funções complexas dizem respeito às flutuações de velocidade em dois pontos distintos, $P_i(x, y, z)$ e $P_j(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. É usual admitir-se que a parte imaginária destas funções é nula, para condições de turbulência atmosférica homogênea [3]. As funções densidade espectral cruzadas relacionam-se com os espectros de potência das flutuações em cada um dos pontos P_i e P_j através da equação

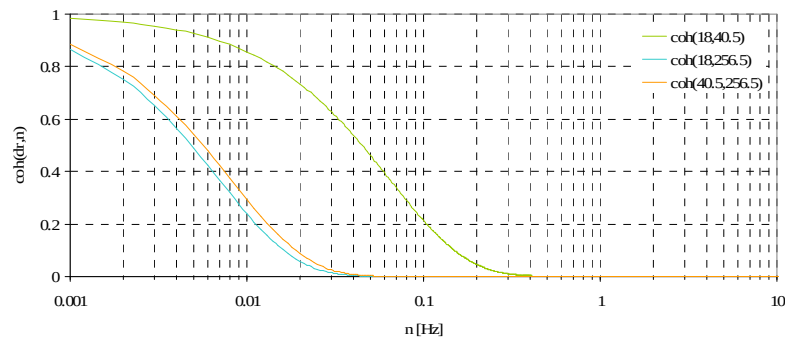
$$S_u^{ij}(\Delta r, n) = \sqrt{S_u^{ii}(P_i, n) S_u^{jj}(P_j, n)} \cdot coh_{ij}(\Delta r, n) \quad (6.57)$$

onde $coh_{ij}(\Delta r, n)$ representa a chamada função de coerência, que pode ser avaliada através da expressão

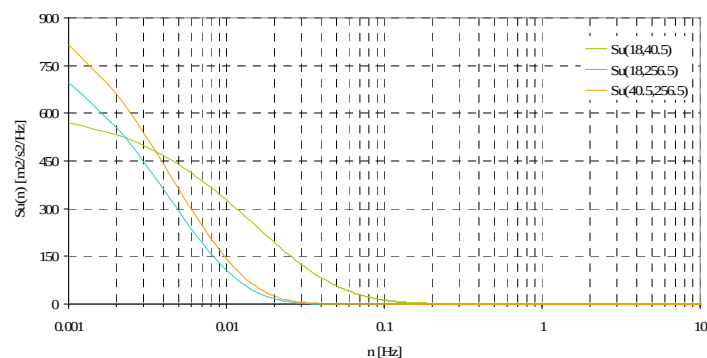
$$coh_{ij}(\Delta r, n) = \exp \left\{ - \frac{n \sqrt{C_{ey}^2 \Delta y^2 + C_{ez}^2 \Delta z^2}}{\frac{1}{2} [\bar{U}(P_i) + \bar{U}(P_j)]} \right\} \quad (6.58)$$

e que C_{ey} e C_{ez} representam os coeficientes de decaimento exponencial nas direcções transversal y e vertical z , respectivamente. Estes coeficientes espelham a dependência estatística das flutuações da velocidade entre dois pontos à distância Δr , e o seu valor depende da rugosidade do terreno envolvente (tal como foi referido no capítulo 4). No presente caso de estudo, foram adoptados os seguintes valores, de acordo com referido na EN1991-1-4: $C_{ey} = 11,5$ (direcção transversal) e $C_{ez} = 11,5$ (direcção vertical).

Na Figura 6.45 representa-se a função de coerência e as funções densidade espectral cruzadas, para os mesmos três pontos referidos acima.



a)



b)

Figura 6.45 – Funções de coerência (a) e funções densidade espectral cruzada (b) relativas aos 3 pontos caracterizados no Quadro 6.26.

6.3.4. Análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio do tempo

A análise no domínio do tempo dos efeitos de rajada induzidos pelo vento sobre a antena espiada foi realizada assumindo em particular as seguintes hipóteses:

- O comportamento estrutural da antena pode ser idealizado através de um oscilador de N graus de liberdade com amortecimento viscoso;
- As componentes de flutuação da velocidade do vento em cada ponto podem ser idealizadas através de um processo estocástico vectorial gaussiano e estacionário, com valor médio nulo e densidades espectrais conhecidas;

- O comportamento aerodinâmico é quasi-estacionário, isto é, o valor instantâneo das forças aerodinâmicas é igual ao das forças induzidas num escoamento estacionário com a mesma velocidade e direcção relativas ao escoamento instantâneo.

Assim, a equação de equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em análise pode ser expressa sob a forma

$$M.\ddot{q}(t) + C.\dot{q}(t) + K.q(t) = F(t) \quad (6.59)$$

onde $q(t)$ representa o vector dos deslocamentos relativos aos N graus de liberdade, $F(t)$ o processo estocástico vectorial caracterizador das forças exteriores aplicadas e M , C e K as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura, respectivamente.

A resposta temporal $q(t)$ da estrutura foi obtida por integração directa passo-a-passo do sistema de equações do movimento pelo método de integração numérica de Newmark.

A cada passo temporal Δt , a equação de equilíbrio incremental[12]

$$M.\ddot{q}(t + \Delta t) + C.\dot{q}(t + \Delta t) + K.q(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) \quad (6.60)$$

foi solucionada calculando os vectores deslocamentos, velocidades e acelerações a partir das equações,

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + (1 - \alpha).\Delta t.\ddot{q}(t) + \alpha.\Delta t.\ddot{q}(t + \Delta t) \quad (6.61)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t.\dot{q}(t) + (\frac{1}{2} - \beta).\Delta t^2.\ddot{q}(t) + \beta.\Delta t^2.\ddot{q}(t + \Delta t) \quad (6.62)$$

com $\alpha = 0,25$ e $\beta = 0,5$ para o caso do método utilizado, designado por método das acelerações médias constantes.

É de salientar que, na determinação da resposta temporal para além da utilização do método numérico de integração passo-a-passo acima referido, dada a presença de uma forte componente não-linear geométrica se recorreu a um método iterativo, tendo-se optado, no caso do programa comercial SOLVIA03, pelo método “Full-Newton”[59], dada a sua elevada capacidade de convergência.

As forças exteriores actuantes na estrutura foram obtidas através da geração de séries temporais caracterizadoras das forças aerodinâmicas incidentes em diferentes pontos da estrutura, tendo como base a prévia geração de séries temporais correlacionadas de flutuações da velocidade do vento.

As respostas temporais obtidas para os diferentes conjuntos de séries temporais foram subsequentemente objecto de tratamento estatístico adequado, tomando em consideração um conjunto de variáveis de controlo da resposta considerado mais relevante.

6.3.4.1. Geração artificial de amostras séries temporais de velocidade do vento

A geração artificial de séries temporais de velocidade do vento, em vários pontos da antena espiada, foi realizada através do método de sobreposição de harmónicas proposto por Deodatis [46].

O método de Deodatis para a geração de séries temporais de velocidade do vento em m pontos distintos, cada uma relativa a N instantes de tempo (sendo N uma potência de 2) igualmente espaçados de Δt , foi implementada automaticamente em MATLAB, tendo como base, o procedimento descrito no ponto 5.3.2.1.2.2.

Na presente aplicação à antena espiada, foram gerados 10 lotes de séries temporais de velocidade longitudinal do vento em correspondência com 59 pontos do fuste da estrutura. A localização destes pontos, coincidentes com os nós do modelo numérico, encontra-se caracterizada esquematicamente na Figura 6.46.

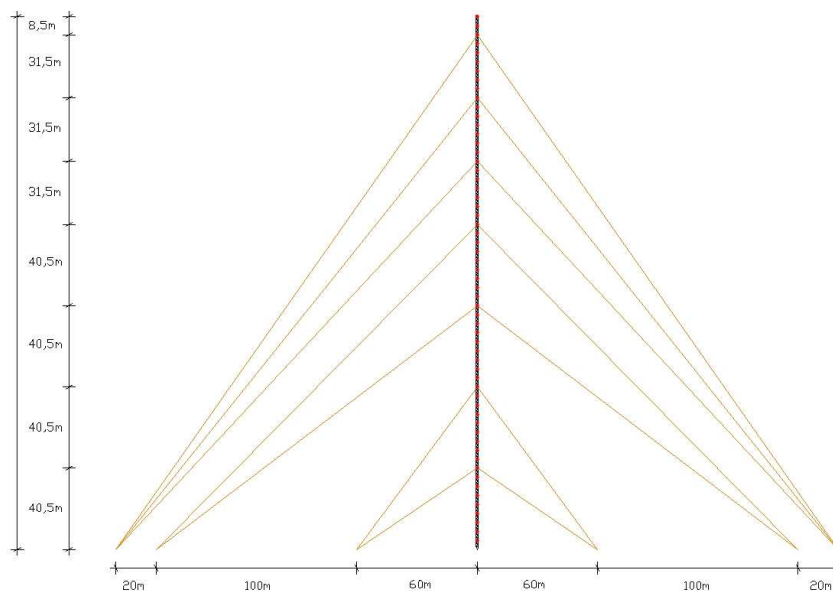
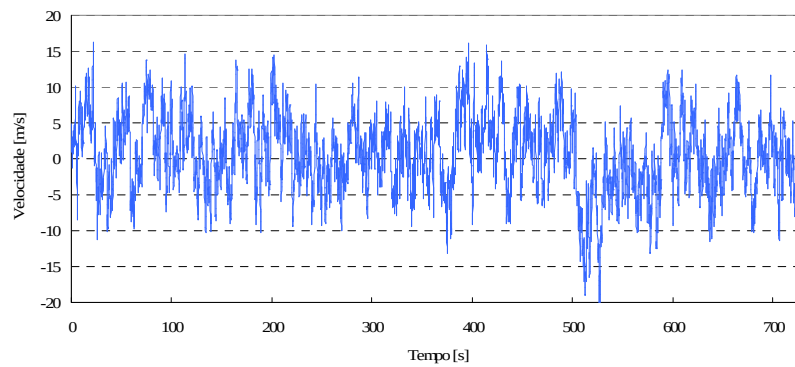


Figura 6.46 – Representação dos nós da estrutura para os quais foram geradas séries temporais de velocidade de vento.

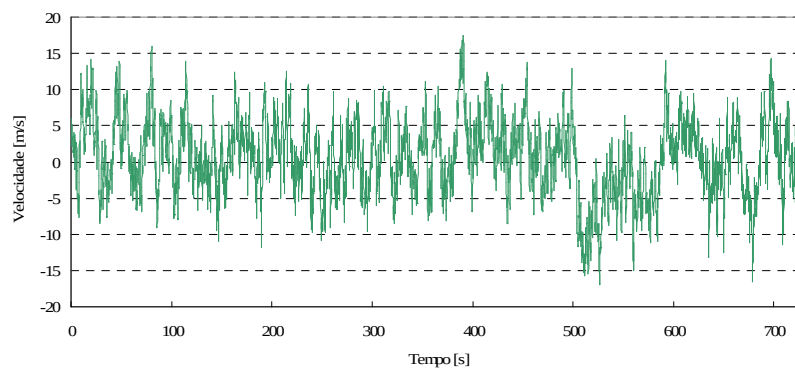
Todas as séries geradas correspondem a um intervalo de tempo de 731,43 segundos, discretizados em 4096 intervalos de tempo elementares ($\Delta t = 0,1786\text{ s}$). Cada série resulta assim da sobreposição de

$N/2 = 2048$ harmônicas, varrendo uma gama de frequências de 0 até 2,8 Hz, com uma resolução em frequência de $\Delta n = 0,001367\text{Hz}$.

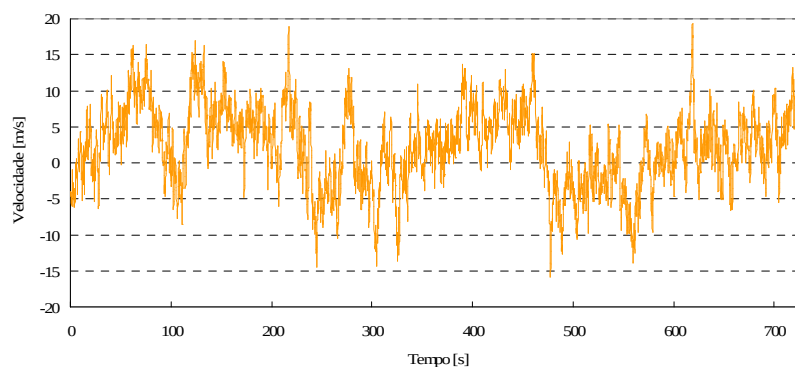
Na Figura 6.47, apresentam-se, a título de exemplo, representações gráficas de séries temporais das flutuações longitudinais da velocidade do vento nos pontos às cotas 18m, 40,5m e 256,5m, para as condições definidas anteriormente, de acordo com a EN1991-1-4.



a)



b)



c)

Figura 6.47 – Séries temporais de velocidade do vento geradas nos pontos às cotas 18m (a), 40,5m (b) e 256,5m (c).

No sentido de confirmar a boa qualidade do procedimento de geração de séries temporais de velocidade, foram efectuadas comparações entre os espectros de potência de partida e as estimativas espectrais médias obtidas, com base nos diferentes lotes de séries temporais geradas artificialmente. A Figura 6.48 e a Figura 6.49 apresentam comparações dessa natureza, relativas aos 3 pontos já apresentados (pontos às cotas 18m, 40,5m e 256,5m), podendo observar-se a excelente concordância conseguida ao nível dos auto-espectros, utilizando 10 lotes de séries temporais. A concordância relativa aos espectros cruzados é de menor qualidade, aspecto que todavia poderia ser melhorado recorrendo a um maior número de lotes. Porém, tal procedimento foi considerado dispensável face ao grau de aproximação já atingido, às incertezas inerentes à modelação da acção e ao aumento do tempo de cálculo.

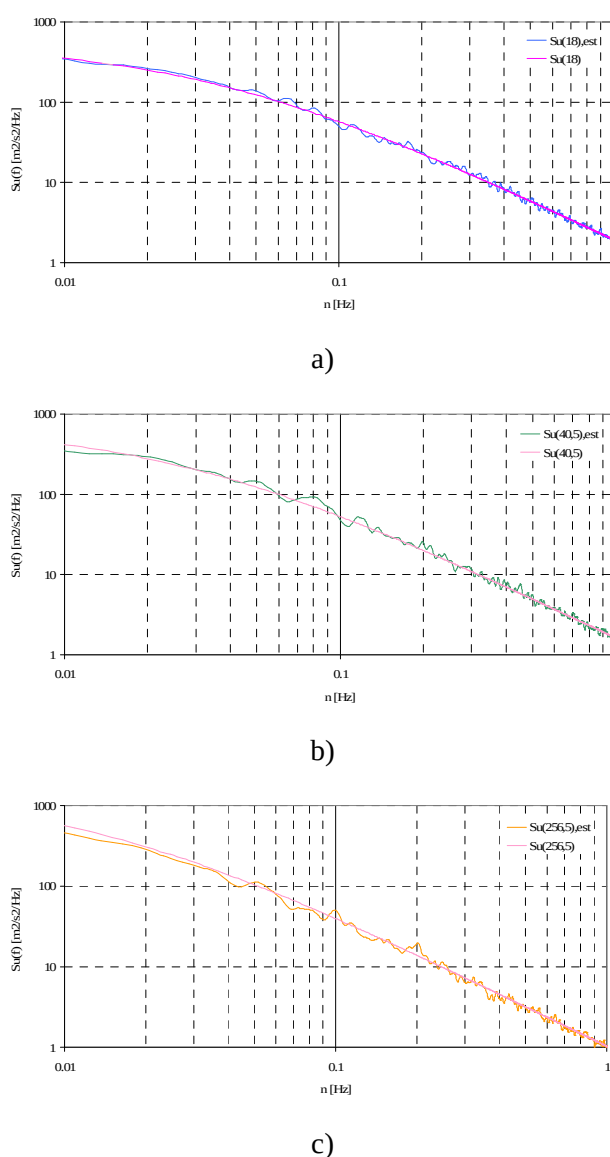
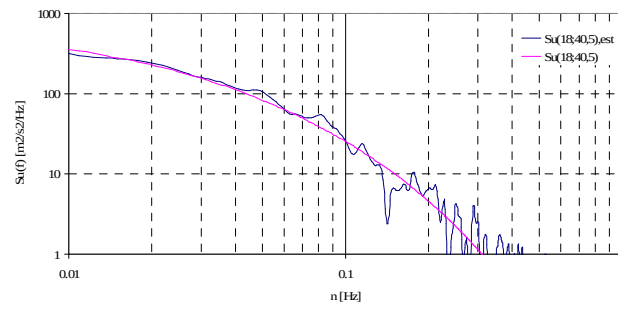
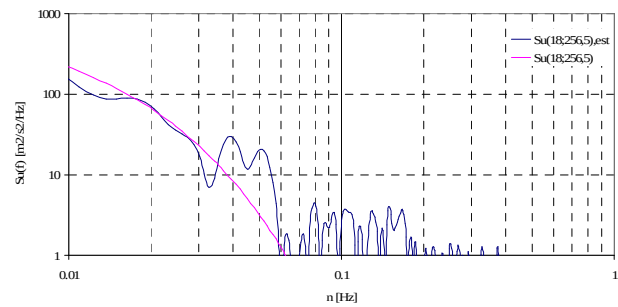


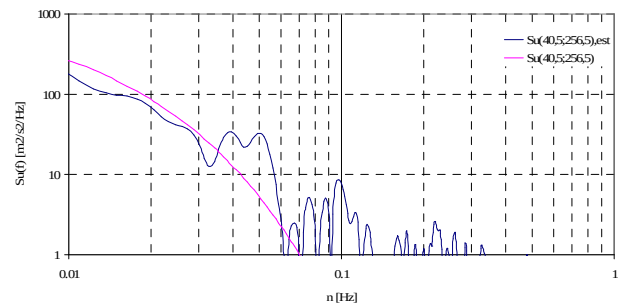
Figura 6.48 – Comparação entre as funções densidade spectral de partida e as estimativas espectrais médias referentes aos 10 lotes de séries correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.26.



a)



b)



c)

Figura 6.49 – Comparação entre as funções densidade espectral cruzada de partida e as estimativas espectrais médias cruzadas referentes aos 10 lotes correspondentes aos 3 pontos do Quadro 6.26.

No Quadro 6.27, apresentam-se complementarmente os valores calculados dos desvios-padrão relativos às séries temporais da componente longitudinal da velocidade do vento nos pontos às cotas 18m, 40,5m e 256,5m, para os 10 lotes considerados. É de realçar que as estimativas obtidas são muito próximas do valor do desvio-padrão calculado através da área subentendida pelos espectros de potência originais (Quadro 6.26), devendo-se alguma pequena disparidade encontrada, em particular, ao facto de o conteúdo espectral das séries geradas estar limitado a 2,8 Hz.

Quadro 6.27 – Valores dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries geradas para cada um dos pontos do Quadro 6.26, e respectivos valores médios e coeficientes de variação.

Lote	Desvios-Padrão		
	u(18) [m/s]	u(40,5) [m/s]	u(256,6) [m/s]
1	5.297	5.172	5.459
2	4.968	4.979	4.706
3	5.108	5.281	4.582
4	5.132	5.083	5.133
5	5.225	5.530	4.832
6	5.294	5.143	4.813
7	5.089	5.160	5.195
8	5.177	5.108	5.002
9	5.112	5.004	4.458
10	5.210	5.146	4.636
Média	5.161	5.160	4.881
Coef. Var.	0.020	0.030	0.064

6.3.4.2. Séries temporais de forças aerodinâmicas

A força de arrastamento induzida pela acção do vento, em condições aerodinâmicas de quasi-estacionaridade, sobre uma secção genérica imersa num escoamento pode ser expressa através de

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot U^2(z, t) \quad (6.63)$$

onde ρ_{ar} representa a massa específica do ar ($\rho_{ar} = 1,23 \text{ kg/m}^3$), $d(z)$ a dimensão transversal de referência da estrutura, $C_D(z)$ o coeficiente aerodinâmico de arrastamento e $U(z, t)$ a velocidade relativa.

Atendendo a que (ver capítulo 5),

$$U^2(z, t) \approx \bar{U}^2(z) + 2\bar{U}(z)u(z, t) - 2\bar{U}(z)\dot{q}(z) \quad (6.64)$$

a força de arrastamento toma a forma

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}^2(z) + \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}(z) \cdot u(z, t) - \rho_{ar} \cdot C_D(z) \cdot d(z) \cdot \bar{U}(z) \cdot \dot{q}(z) \quad (6.65)$$

estando cada uma das parcelas da equação associada, respectivamente, à componente média da força aerodinâmica, à componente turbulenta da força aerodinâmica e à componente oscilante da estrutura.

Nas fases de concepção e dimensionamento de uma estrutura, devem ser analisadas todas as situações susceptíveis de ocorrer durante o seu tempo de vida. Como é óbvio a acção do vento não actua apenas numa só direcção, sendo que as normas aconselham a análise dos seus efeitos, neste tipo de estruturas, no mínimo em duas direcções distintas ou em número eventualmente superior, dependendo da configuração da estrutura. No presente caso, a norma EN1993-3-1[66] sugere a análise em duas direcções distintas (na direcção normal à face e a 45° à face), contudo dado a distribuição dos equipamentos ser uniforme e atendendo ao facto de ser notoriamente condicionante para os montantes e para as espias a situação em que o vento actua segundo a direcção a 45° relativamente a face da secção do fuste, optou-se apenas por realizar todas as análises para esta direcção.

Os coeficientes de arrastamento $C_D(z)$ são habitualmente obtidos a partir de ensaios em túnel de vento sobre modelos a escala reduzida de parte da estrutura ou mesmo da sua globalidade. Neste caso particular, adoptaram-se os coeficientes de arrastamento recomendados no anexo B da norma EN1993-3-1 [66] e especificados para o tratamento da acção do vento em mastros estaiados. Todos os valores adoptados para os elementos estruturais, elementos suplementares e para os cabos foram retirados desta norma.

Na Figura 6.50, pode ver-se ilustrada a variação do coeficiente de arrastamento multiplicado pela área em função da altura.

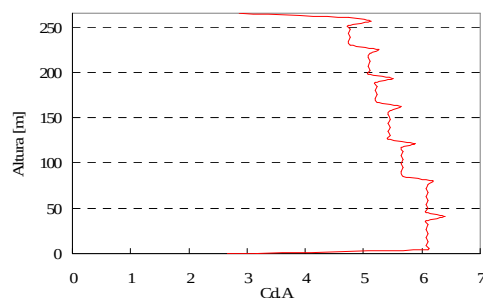


Figura 6.50 – Variação do arrastamento (coeficiente de arrastamento multiplicado pela área batida) em função da altura.

É ainda de salientar que cada uma das séries temporais de forças aerodinâmicas geradas foi afectada de uma função de modulação temporal de natureza trapezoidal, com as características indicadas na Figura 6.51, por forma a suavizar as fases de arranque e cessação da excitação dinâmica do vento, garantindo desta forma a ocorrência de uma fase de actuação da acção de natureza estacionária com 10 minutos de duração.

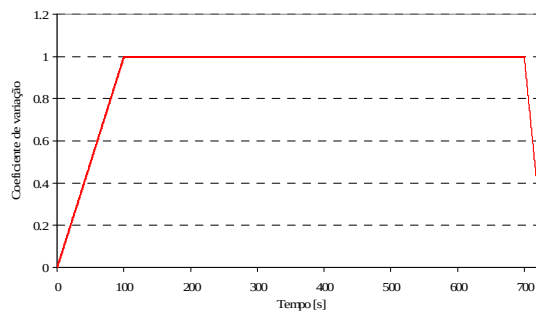


Figura 6.51 – Função de modulação temporal da acção.

6.3.4.3. Amortecimento aerodinâmico

Substituindo a expressão das forças aerodinâmicas generalizadas (6.18) na equação de equilíbrio dinâmico (6.14), constata-se o aparecimento da componente de amortecimento associada às oscilações longitudinais, a qual é traduzida pela equação genérica

$$\xi_{a,i} = \frac{\int_0^L \rho_{ar} \cdot \bar{U}(z) \cdot d(z) \cdot C_D(z) \cdot \phi_i^2(z) dz}{4\pi \cdot n_i \cdot \int_0^L m(z) \cdot \phi_i^2(z) dz} \quad (6.66)$$

Utilizando as expressão (6.19), obtiveram-se os coeficientes modais de amortecimento aerodinâmico em correspondência com as propriedades da estrutura sujeita ao carregamento devido à componente média da velocidade do vento e que se resumem para os primeiros 8 modos no Quadro 6.28.

Nesse mesmo quadro, são apresentados os valores adoptados para o amortecimento global (e o respectivo valor do decremento logarítmico $\delta = 2\pi \cdot \xi$), representando este a soma do amortecimento aerodinâmico com o amortecimento de natureza estrutural. De acordo com a informação fornecida pela norma EN1991-1-4 relativamente ao decremento logarítmico do amortecimento estrutural para este tipo de estruturas, adoptou-se o valor de $\delta = 0,04$ ($\xi = 0,637\%$), que por sua vez também é próximo do adoptado por Sparling et al. em [67-69].

Quadro 6.28 – Valores dos decrementos logarítmicos e dos amortecimentos estruturais, aerodinâmicos e globais, para os primeiros 8 modos longitudinais.

Modo	δ_s	ξ_s	δ_a	ξ_a	δ_{global}	ξ_{global}
1º	0,040	0,00637	0,187	0,02975	0,227	0,03612
2º	0,040	0,00637	0,176	0,02798	0,216	0,03435
3º	0,040	0,00637	0,145	0,02308	0,185	0,02945
4º	0,040	0,00637	0,116	0,01848	0,156	0,02484
5º	0,040	0,00637	0,088	0,01399	0,128	0,02035
6º	0,040	0,00637	0,067	0,01063	0,107	0,01700
7º	0,040	0,00637	0,049	0,00787	0,089	0,01424
8º	0,040	0,00637	0,042	0,00665	0,082	0,01301

Para se proceder à obtenção da resposta com recurso a um método de integração passo-a-passo, foi necessário proceder à obtenção dos coeficientes a_0 e a_1 de modo a que a matriz C de amortecimento definida pela matriz proporcional de amortecimento de Rayleigh [12, 69, 70],

$$C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K \quad (6.67)$$

seja compatível com o amortecimento correspondente aos diferentes modos de vibração utilizados na análise. Assim foram obtidos os parâmetros $a_0 = 0.038173$ e $a_1 = 0.004489$, podendo também observa-se na Figura 6.52 o ajuste conseguido.

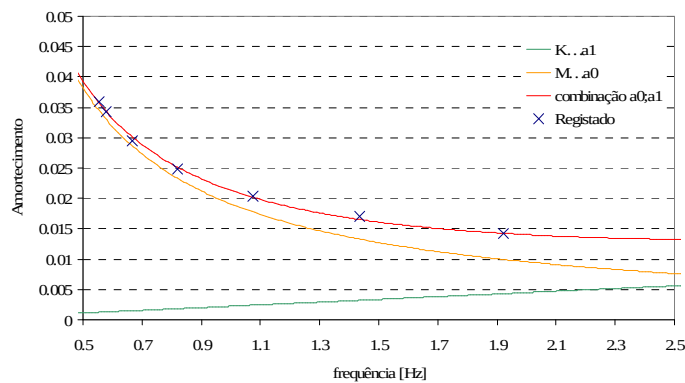


Figura 6.52 – Representação dos amortecimentos correspondentes a cada um dos modos bem como da respectiva curva de ajustamento da matriz proporcional de amortecimento de Rayleigh.

6.3.4.4. Simulações numéricas para avaliação dos efeitos de rajada

A análise dos efeitos de rajada foi efectuada mediante a realização de simulações no domínio do tempo, seguindo-se para tal o procedimento que se resume em seguida:

- Iniciou-se o procedimento com a geração 10 lotes de séries temporais de velocidade do vento, cada um, a partir das matrizes de densidades espectrais prescritas, relativas à direcção longitudinal. Cada um dos lotes de séries é constituído por 59 séries correlacionadas ao longo de 59 pontos do fuste.
- Posteriormente, procedeu-se à obtenção das correspondentes séries temporais de forças aerodinâmicas actuantes na antena espiada, para se passar de seguida a obtenção da resposta dinâmica ao longo de um intervalo de tempo $T = 731,43s$, com $\Delta t = 0,01786s$.

As análises para a obtenção da resposta temporal da estrutura ocorreram em duas fases. Na primeira fase foi realizada uma análise estática, em que a estrutura foi solicitada apenas pelo peso desta e pela componente média da força aerodinâmica descrita na equação (6.65). Na segunda fase foi conduzida uma análise passo-a-passo com o intuito de determinar a resposta dinâmica da estrutura à solicitação turbulenta da acção do vento, partindo-se da configuração deformada anterior.

A razão para se proceder desta forma decorre do facto de a rigidez global da estrutura depender directamente do estado de tensão dos cabos.

- Por fim, procedeu-se à obtenção da evolução temporal da resposta dinâmica da estrutura, bem como ao seu tratamento estatístico com intuito de caracterizar a resposta em termos de extremos absolutos e desvios-padrão, num intervalo $T = 600s$ (correspondente ao tramo constante da função de modulação). Com o intuito de caracterizar o comportamento estrutural, foram escolhidas as seguintes variáveis de controlo:

- Deslocamentos horizontais em 15 pontos críticos da estrutura (ver Quadro 6.29);
- Momentos flectores em 15 pontos críticos da estrutura (ver Quadro 6.29);
- Esforços nos tirantes a sotavento e barlavento correspondentes ao 7º nível de espiaamento (apenas é apresentada a análise dos esforços desta espia, visto que esta pode considerar-se representativa da globalidade da estrutura);

Quadro 6.29 – Pontos críticos considerados ao longo do fuste.

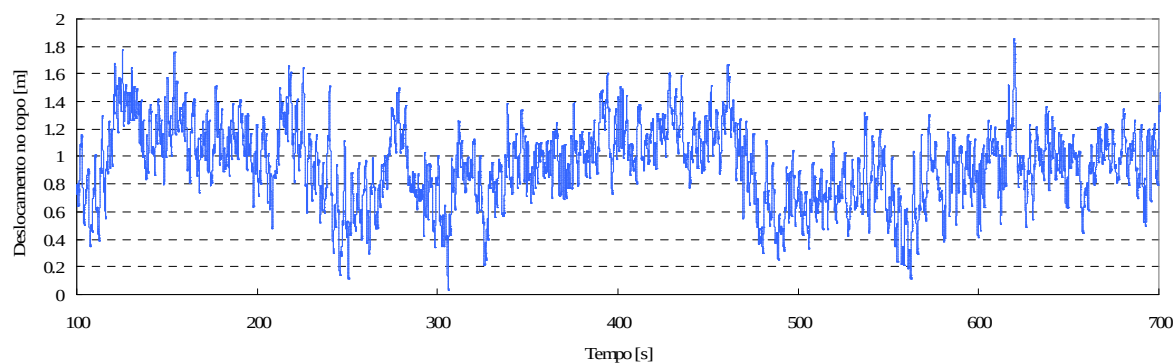
Ponto	Cota	Nr. Nó
1	19,5	14
2	40,5	28
3	60,0	41
4	81,0	55
5	100,5	68
6	121,5	82
7	141,0	95
8	162,0	109
9	177,0	119
10	193,5	130
11	208,5	140
12	225,0	151
13	240,0	161
14	256,5	172
15	265,0	178

Neste contexto, é oportuno referir que o cálculo da reposta dinâmica foi efectuado considerando as forças aerodinâmicas aplicadas nos centros de gravidade das secções. Além disso, é de salientar terem sido consideradas apenas as forças aerodinâmicas médias resultantes da incidência do vento nas espas, visto que em estudos realizados por autores como Sparling, Iannuzzi e Peil, relacionados com a influência da força de arrastamento flutuante em tirantes de mastros, foi observado que a sua influência na resposta do mastro não se revela significativa[67-69, 71]. Com efeito, apresenta-se no Quadro 6.30 a comparação entre o total da componente média das forças aerodinâmicas actuaes ao nível do fuste e das espas, podendo constatar-se que a componente relativa as espas tem uma participação da ordem dos 19,82%.

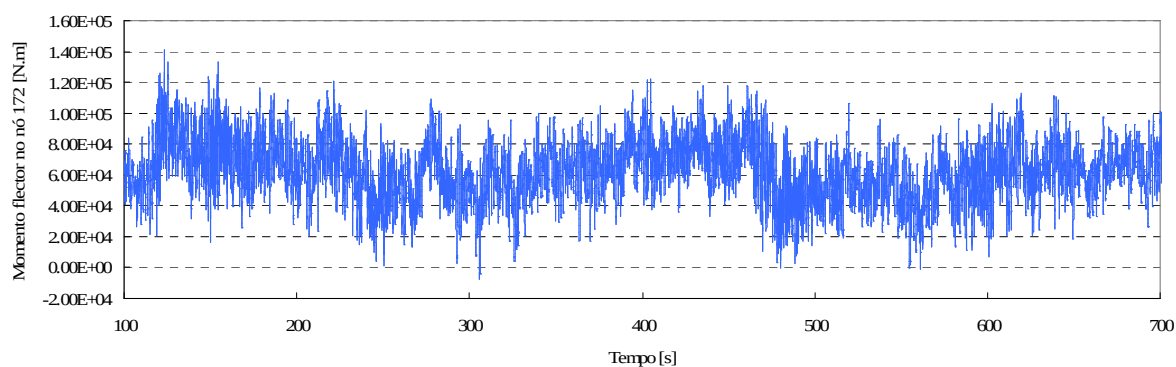
Quadro 6.30 – Força total no fuste versus força total nos cabos.

	Força [kN]	% Força Total
Fuste	326,94	80,18
Cabos	80,83	19,82
Total	407,77	

Na Figura 6.53 são caracterizadas as respostas temporais correspondentes ao primeiro lote de velocidades, para o deslocamento no topo do fuste (a) e para o momento flector numa secção do fuste (b) à cota 256,5m (nó 172).



a)



b)

Figura 6.53 – Evolução temporal dos deslocamentos do topo do fuste (a) e dos momentos flectores no nó à cota 256,5m (b) da estrutura solicitada pelo primeiro lote de séries geradas.

Na Figura 6.54 apresentam-se, por seu turno, as funções densidade espectral de potência da resposta para as mesmas variáveis de controlo, podendo observar-se quais as gamas de frequências correspondentes aos modos de vibração com maior preponderância na resposta em termos das variáveis de controlo consideradas.

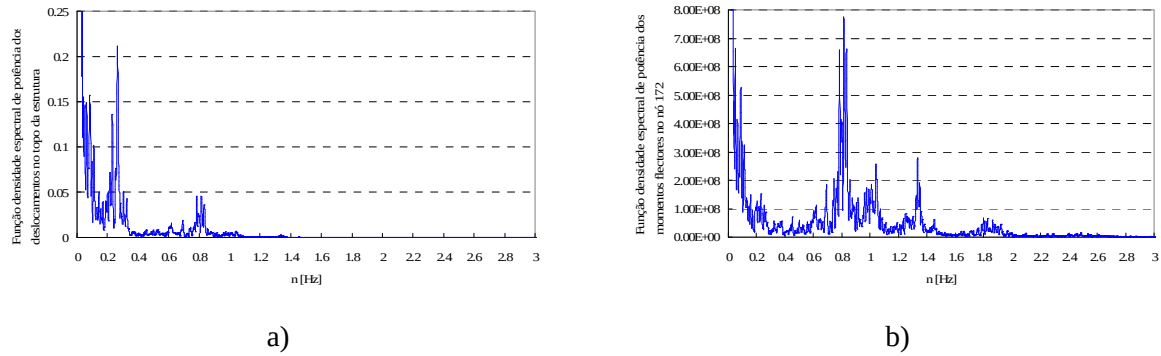
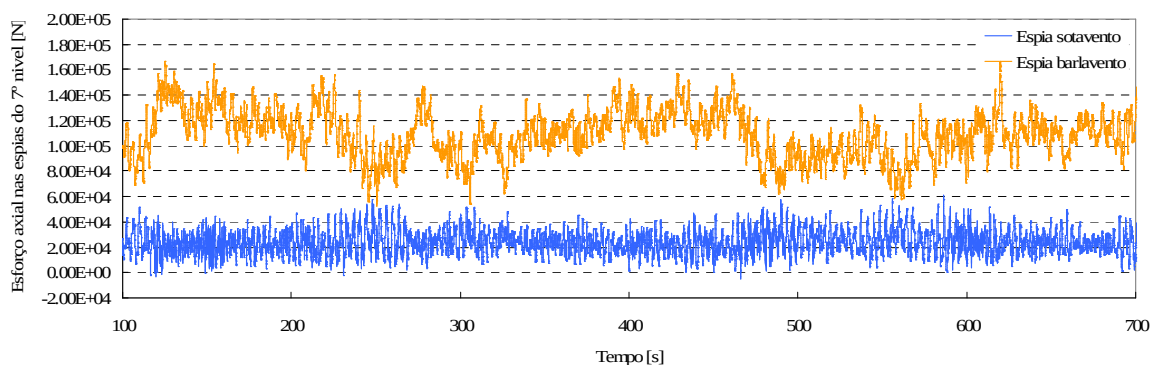


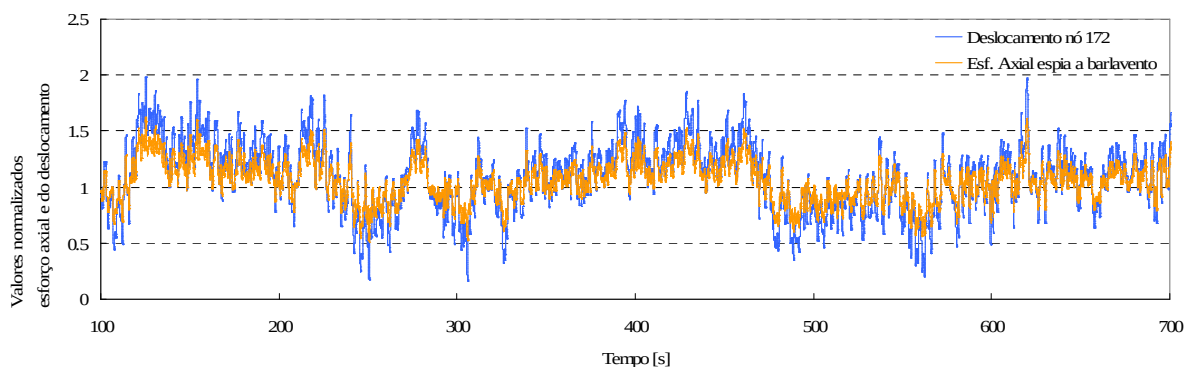
Figura 6.54 – Funções densidade espectral de potência da resposta referente aos deslocamentos do topo do fuste (a) e aos momentos flectores no nó à cota 256,5m (b) da estrutura.

Da análise da Figura 6.54, pode concluir-se que as respostas relativas às diferentes variáveis de controlo envolvem participação de diferentes modos, sendo que para a variável deslocamento no topo da estrutura participam modos mais baixos do que em relação à variável momento flector no nó 172.

Na Figura 6.55 são caracterizadas as respostas temporais correspondentes ao primeiro lote de velocidades, em termos de esforço axial nos cabos correspondentes ao 7º nível de espiaamento a barlavento e a sotavento (a) e do deslocamento do nó 172 versus o esforço axial na espia a barlavento nesse mesmo nó (b) ambos normalizados relativamente à correspondente componente estática relativa à análise inicial.



a)



b)

Figura 6.55 – Evolução temporal do esforço axial nas espias a barlavento e a sotavento do 7º nível de espiaamento (a) e do deslocamento no nó à cota 256,5m versus o esforço da espia barlavento do 7º nível (b), ambos normalizados relativamente à correspondente componente estática relativa à análise inicial.

No Quadro 6.31, são resumidos os valores dos extremos absolutos e dos desvios-padrão registados com base nos 10 lotes de séries geradas, para as cinco variáveis de controlo representadas nas figuras anteriores.

Quadro 6.31 – Valores dos extremos absolutos e desvios-padrão das variáveis de controlo representadas na Figura 6.53 e na Figura 6.55 para os 10 lotes de séries e respectivos valores médios e coeficientes de variação.

Lote	Deslocamento no topo [m]		Momento flector nó 172 [N.m]		Deslocamento nó 172 [m]		Esf. Axial Espia 7º nível barlavento [N]		Esf. Axial Espia 7º nível sotavento [N]	
	R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R
1	0,993	0,279	82809	19112	0,848	0,261	64012	18866	37007	9334
2	0,778	0,234	63118	17241	0,726	0,219	54345	15614	39103	9748
3	0,776	0,215	84512	17022	0,710	0,197	52712	14066	39349	9302
4	0,898	0,252	66627	19385	0,848	0,237	62567	17122	30206	9360
5	1,001	0,251	100513	18531	0,869	0,235	65515	16853	39839	10260
6	0,882	0,244	72123	17898	0,768	0,228	51192	16183	41963	10445
7	0,827	0,242	71094	18400	0,764	0,225	49603	15932	48182	9896
8	0,792	0,244	77522	18335	0,742	0,230	55148	16318	47930	9853
9	0,769	0,215	66221	17145	0,695	0,201	53121	14396	35122	8888
10	0,854	0,220	68732	17233	0,785	0,205	58123	14841	38375	9139
Média	0,857	0,240	75327	18030	0,775	0,224	56634	16019	39708	9623
Coef. Var.	0,101	0,083	0,151	0,047	0,079	0,086	0,099	0,089	0,137	0,052

No Quadro 6.32 são apresentados os valores da componente média, e os valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão da resposta nos 15 pontos consideradas no Quadro 6.29.

Quadro 6.32 – Valores da componente média e dos valores médios dos extremos absolutos e desvios-padrão da resposta em cada um dos 15 pontos críticos definidos no Quadro 6.29

Nr. Nó	Cota [m]	Deslocamento [m]			Momento flector [N.m]		
		R_M	R_p	σ_R	R_M	R_p	σ_R
14	19,5	0,122	0,119	0,032	113715	331079	82141
28	40,5	0,238	0,214	0,059	-109221	315306	82227
41	60,0	0,344	0,292	0,081	155040	387372	100026
55	81,0	0,438	0,358	0,101	-57998	288879	75084
68	100,5	0,515	0,404	0,117	137554	350221	94044
82	121,5	0,576	0,443	0,130	-184487	294897	79216
95	141,0	0,642	0,493	0,144	111638	376861	94414
109	162,0	0,694	0,540	0,156	-128009	282684	76831
119	177,0	0,736	0,570	0,164	55686	299798	80172
130	193,5	0,775	0,595	0,171	-86023	299520	75342
140	208,5	0,812	0,622	0,180	85378	332937	83223
151	225,0	0,838	0,643	0,189	-75905	317910	76901
161	240,0	0,859	0,691	0,203	92968	223424	54573
172	256,5	0,860	0,775	0,224	-58311	75327	18030
178	265,0	0,860	0,857	0,240	0	0	0

Além disso, na Figura 6.56 e na Figura 6.57 apresentam-se as envolventes relativas aos valores da componente média e os valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão, para todas as variáveis de controlo em deslocamentos e momentos flectores.

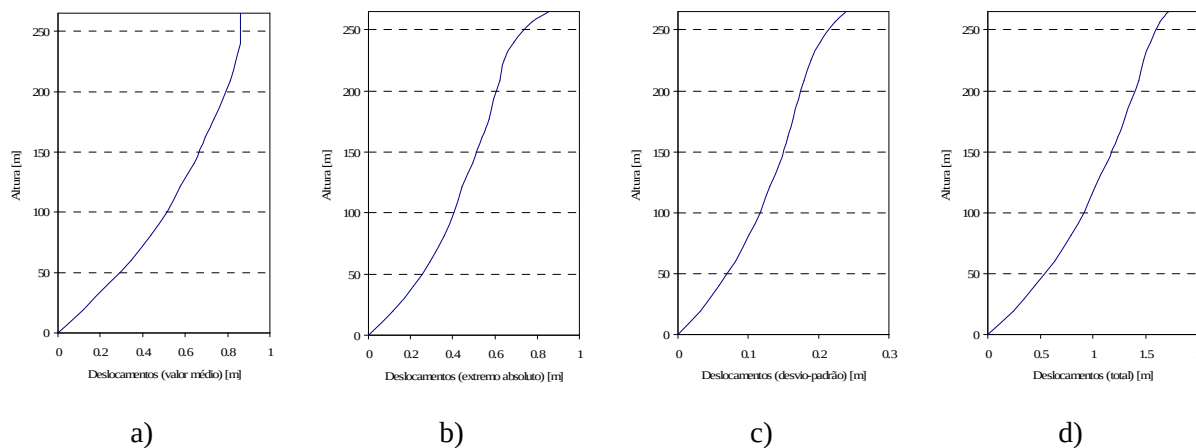


Figura 6.56 – Envolventes de deslocamentos referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

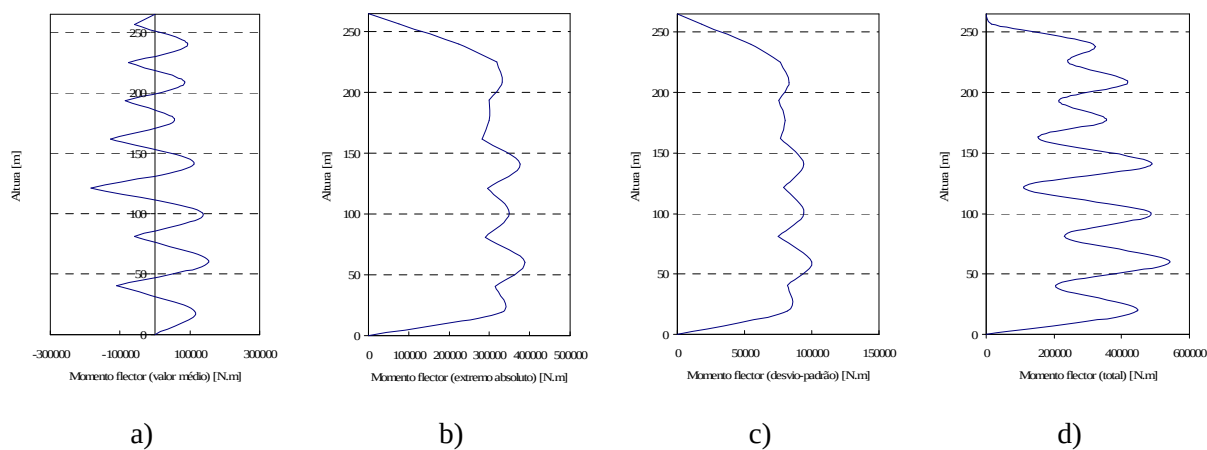


Figura 6.57 – Envolventes de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

É de realçar que o amortecimento aerodinâmico neste tipo de estruturas não desempenha um papel tão importante como noutros casos. Este facto é referido em [72] e pôde ser comprovado com os resultados de um cálculo efectuado com os valores dos parâmetros $a_0 = 0,006$ e $a_1 = 0,0046$, definidores da matriz de amortecimentos de Rayleigh correspondente à presença exclusiva de amortecimento estrutural. Deste cálculo pôde concluir-se que a omissão do amortecimento aerodinâmico conduz a resultados cerca de 2,7% superiores aos registados, no caso dos deslocamentos no topo, e 3,7% superior no caso dos momentos num ponto a cota 256,5m.

No Quadro 6.33, é apresentada a comparação entre os valores obtidos na análise tendo em consideração apenas o amortecimento estrutural e a análise tendo em conta ambos os amortecimentos estrutural e aerodinâmico.

Quadro 6.33 – Comparação entre as análises realizadas com e sem o amortecimento aerodinâmico.

	Sem amortecimento Aerodinâmico	Com amortecimento aerodinâmico	Diferença relativa
Deslocamento no topo [m]	1,904	1,853	+2,71%
Momento flector à cota 256,5 m [N.m]	146498	141121	+3,67%

Pode ainda referir-se que a discretização de cada espia em 10 elementos de barra conduz a resultados da resposta cerca de 3,73% inferiores aos resultados obtidos para uma discretização das espias em 20 elementos de barra, o que em parte demonstra a preocupação que se deve ter no estudo da discretização das espias a adoptar.

6.3.5. *Análise regulamentar*

Esta secção é dedicada à análise do mastro espiado seguindo a metodologia proposta para este tipo de estruturas pela norma EN1993-3-1 [66].

A norma EN1993-3-1 apresenta um método simplificado, para a obtenção dos esforços nas diversas componentes de mastros espiados, designado de método estático. Para a aplicação deste procedimento de análise estático esta norma define os seguintes critérios:

- qualquer consola acima do ultimo nível de espiamento não deve ter um comprimento superior a metade do espaçamento entre o último e o penúltimo nível de espiamento;
- o parâmetro β_s definido pela equação:

$$\beta_s = \frac{4 \cdot \left(\frac{E_m \cdot I_m}{L_s^2} \right)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_{Gi} \cdot H_{Gi} \right)} \quad (6.68)$$

deve ser inferior a 1, com $K_{Gi} = 0,5 \cdot N_i \cdot A_{Gi} \cdot E_{Gi} \cdot \cos^2 \alpha_{Gi} / L_{Gi}$ e onde N representa o número de níveis de espiaamento, N_i , A_{Gi} , E_{Gi} , α_{Gi} , H_{Gi} e L_{Gi} representam respectivamente o número de espias a convergir no nível i , a área da secção transversal da espia ao nível i , o módulo de elasticidade da espia ao nível i , o ângulo que cada espia faz com a horizontal, a altura desde a base do mastro até ao nível de espiaamento i e o comprimento da corda correspondente a cada nível de espiaamento i . As variáveis I_m , E_m e L_s representam respectivamente a inércia média, o módulo de elasticidade médio e o vão médio do fuste do mastro.

- o parâmetro Q definido pela equação:

$$Q = \frac{1}{30} \sqrt[3]{\frac{H \cdot V_H}{D_0}} \sqrt{\frac{m_0}{H \cdot R}} \quad (6.69)$$

deverá ser inferior a 1, com m_0 como a massa média por unidade de comprimento do fuste do mastro espiado incluído os acessórios, D_0 como a largura média da face do mastro, V_H o valor da velocidade média do vento no topo do mastro, R o valor da média do arrastamento total (m^2/m) e H a altura total do fuste incluindo a consola no topo do mastro, se esta existir.

Caso algum destes critérios não seja satisfeito, esta norma [66] remete a análise deste tipo estrutura para procedimentos de cálculo mais complexos, tais como análises dinâmicas no domínio da frequência.

No caso desta estrutura, todos estes critérios foram satisfeitos, podendo observar-se os respectivos valores no Quadro 6.34.

Quadro 6.34 – Critérios para a aplicação da metodologia definida na norma EN1993-3-1.

	Limite	Obtido
β_s	1,0	0,2261
Q	1,0	0,5140
Consola	15,75	8,50

Assim, segundo a EN1993-3-1, nestas condições para se obter a resposta dinâmica de mastros sujeitos à acção do vento estes devem ser, sujeitos a uma análise estática para um conjunto variado de padrões de “trechos” de carga (“patch loading”), baseadas na aplicação da carga média do vento acrescida de diversos padrões de carga colocadas estrategicamente em posições ao longo da estrutura. Este procedimento requer um considerável número de análises estáticas da estrutura submetida aos

diferentes padrões a considerar, sendo os resultados finais combinados de forma a obter a resposta máxima.

Tal como referido no ponto anterior, esta norma prevê que esta análise seja realizada para várias direcções diferentes. No caso de mastros de secção transversal quadrada, apenas se torna necessário proceder a análises em duas direcções diferentes (normal à face e a 45° à face), sendo que neste caso apenas serão realizadas na direcção a 45°, dado ser a situação que origina maiores esforços no dimensionamento dos cabos e dos montantes.

As forças devidas à componente média da acção do vento incidente sobre a estrutura devem ser calculadas a partir da equação,

$$F_M = \frac{\rho_{ar}}{2} V_m^2(z) \cdot \sum R(z) \quad (6.70)$$

onde ρ_{ar} é a densidade ar, $V_m(z)$ a velocidade média no ponto de aplicação da força à altura z e $\sum R(z)$ o arrastamento total correspondente à área batida à cota z da estrutura ($C_D \cdot A$ definido de acordo com o especificado por esta norma EN1993-3-1 e exposto no ponto 6.3.4.2).

Todas as propriedades referentes à consideração da componente média da velocidade do vento, bem como da componente turbulenta, devem ser tomadas de acordo com o prescrito pela norma EN1991-1-4 (e descritas no ponto 6.3.3). Em adição à carga devida à componente média, derivada da expressão (6.70), devem ser aplicados à estrutura sucessivos padrões de carga, constituindo, cada um deles, um caso de carga, que deve ser aplicado com as seguintes regras:

- em cada vão do mastro entre níveis de cabos adjacentes (e no vão entre a base do mastro e o primeiro nível de cabos);
- na consola, se relevante;
- de ponto médio a ponto média de vãos adjacentes;
- desde a base até à altura média do primeiro nível de espiamento;
- desde o ponto médio do vão entre o último e o penúltimo nível de espiamento até este último nível, se não houver a presença de uma consola, mas caso esta exista até ao topo desta.

Os “trechos” de carga (“patch loads”) devem ser determinados de acordo com a seguinte equação:

$$F_{PL} = \rho_{ar} \cdot k_p \cdot I_v(z) \cdot \left(\frac{1}{C_0(z)} \right) \cdot V_m^2(z) \cdot \sum R(z) \quad (6.71)$$

onde ρ_{ar} , V_m e $\sum R(z)$ representam as mesmas quantidades expostas aquando da definição da expressão (6.70), e k_p representa o factor de pico correspondente ao efeito da turbulência longitudinal, tal como definido na norma EN1991-1-4, podendo ser tomado como $k_p = 3,5$. $I_v(z)$ é a intensidade de turbulência definida de acordo com a norma EN1991-1-4 e $C_0(z)$ o factor orográfico definido de acordo com a mesma norma.

Cada caso de carga relativo a cada “trecho” de carga deve ser aplicado de acordo com a ilustração esquemática apresentada na Figura 6.58.

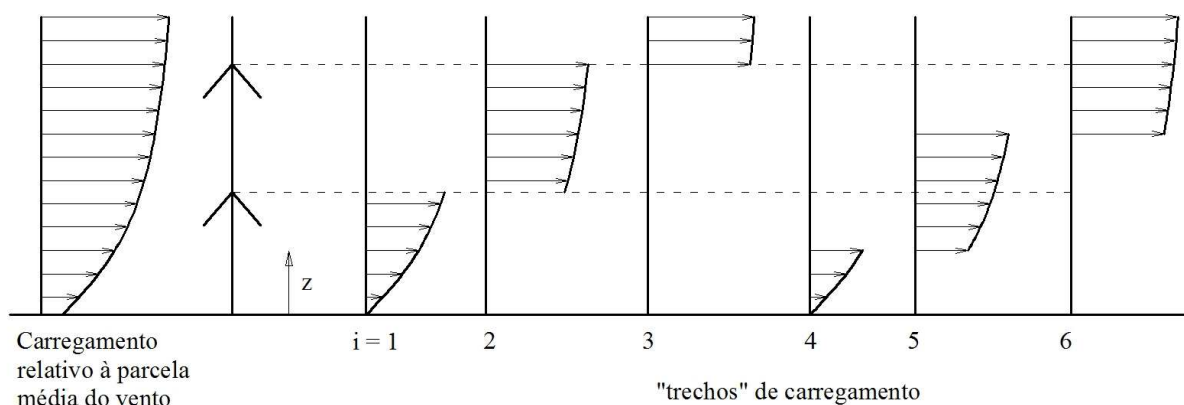


Figura 6.58 – Aplicação dos trechos de carga [66].

Isto implica que, para o mastro espiado em análise, tem de ser considerados 16 casos de carga com 16 “trechos” de carga diferentes, contemplando cada um destes casos de carga a aplicação das respectivas forças nos cabos da estrutura.

As respostas estruturais devidas à componente média da acção do vento R_M e a cada um dos casos dos “trechos” de carga R_{MPLi} devem ser determinadas para toda a estrutura através de uma análise estática e não-linear geométrica, sob a actuação das respectivas cargas F_M e F_{PLi} . Para tal foi utilizado o segundo modelo referido na secção 6.3.2.2.

Cada uma das respostas R_{PLi} deve ser obtida a partir da diferença entre a resposta a cada um dos respectivos casos de carga R_{MPLi} e a resposta à componente média da acção do vento R_M , sendo depois todas objecto de ponderação quadrática, através de

$$R_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N R_{PLi}^2} \quad (6.72)$$

A resposta total R_{TM} , para cada uma das variáveis de controlo, é então obtida a partir de

$$R_{TM} = R_M \pm R_p \quad (6.73)$$

No Quadro 6.35, apresentam-se os valores da componente média e os valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão das respostas estruturais para as variáveis de controlo definidas em 6.3.4.4.

Quadro 6.35 – Valores da componente média e valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão, das respostas estruturais (deslocamentos e momentos flectores) para os pontos críticos definidos no Quadro 6.29

Nr. Nó	Cota [m]	Deslocamento [m]			Momento flector [N.m]		
		R_M	R_p	σ_R	R_M	R_p	σ_R
14	19,5	0,122	0,118	0,034	113626	362260	103503
28	40,5	0,239	0,215	0,061	-109406	366843	104812
41	60,0	0,346	0,294	0,084	155050	462263	132075
55	81,0	0,440	0,361	0,103	-57779	361781	103366
68	100,5	0,518	0,417	0,119	138001	448871	128249
82	121,5	0,579	0,461	0,132	-183797	327344	93527
95	141,0	0,645	0,509	0,145	112330	459958	131416
109	162,0	0,697	0,541	0,155	-127316	342052	97729
119	177,0	0,739	0,562	0,161	56340	377546	107870
130	193,5	0,778	0,581	0,166	-85413	317649	90757
140	208,5	0,814	0,608	0,174	85850	372639	106468
151	225,0	0,839	0,647	0,185	-75586	284268	81219
161	240,0	0,860	0,710	0,203	93136	225534	64438
172	256,5	0,860	0,806	0,230	-58311	67370	19249
178	265,0	0,860	0,872	0,249	0	0	0

Na Figura 6.59 e na Figura 6.60, podem observar-se as envolventes relativas aos valores da componente média e aos valores médios dos extremos absolutos e dos desvios-padrão, para as variáveis de controlo deslocamentos e momentos flectores.

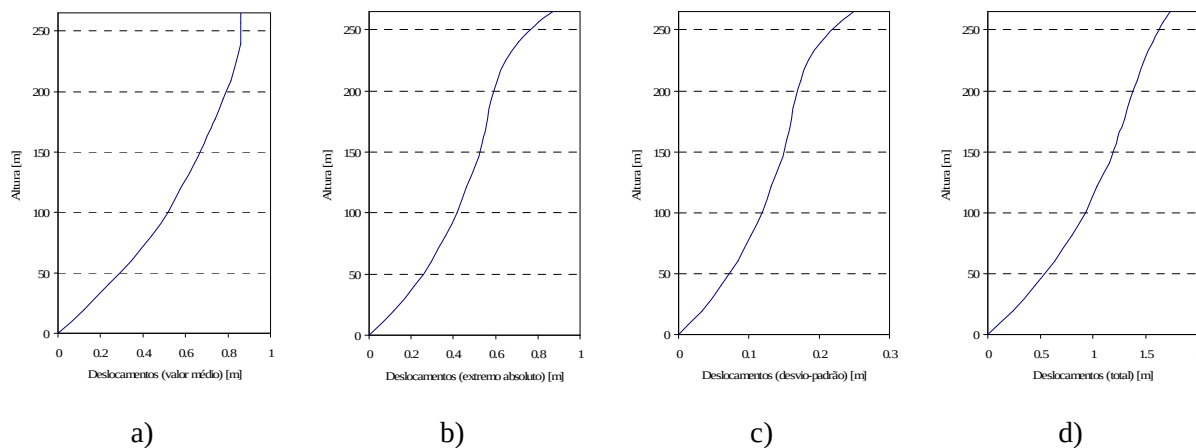


Figura 6.59 – Envolvente de deslocamentos referentes a componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

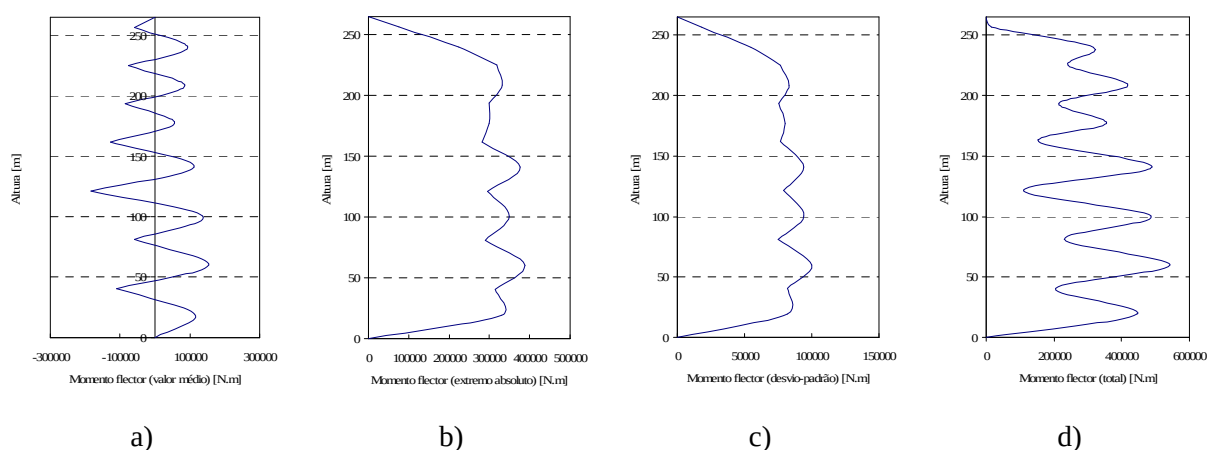


Figura 6.60 – Envolvente de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

6.3.6. Análise comparativa dos resultados obtidos

Na Figura 6.61 e na Figura 6.62 são sobrepostas as envolturas das respostas relativas às análises dinâmicas no domínio do tempo e segundo a norma EN1993-3-1, caracterizando-se os valores da componente média e das médias dos extremos absolutos e dos desvios-padrão, para variáveis de controlo deslocamentos e momentos flectores.

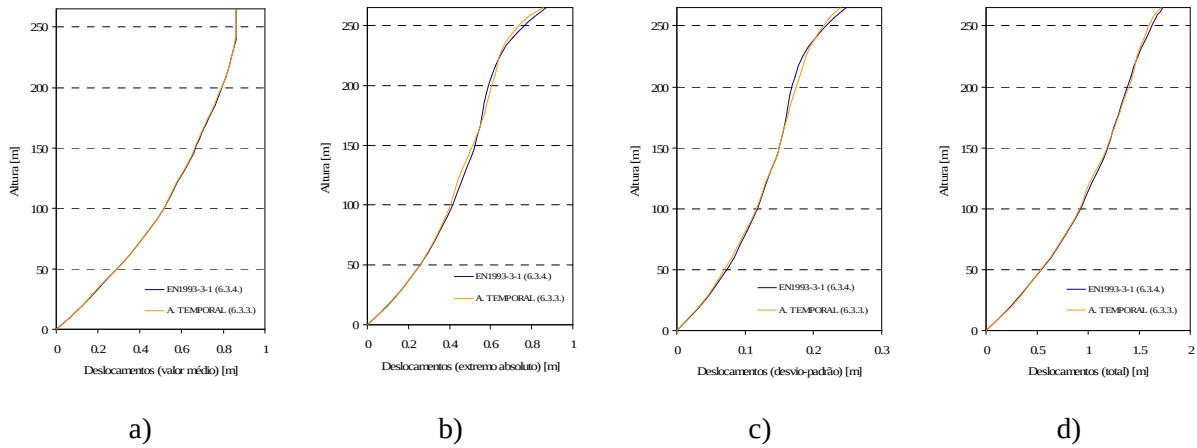


Figura 6.61 – Envolvente de deslocamentos referentes a componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

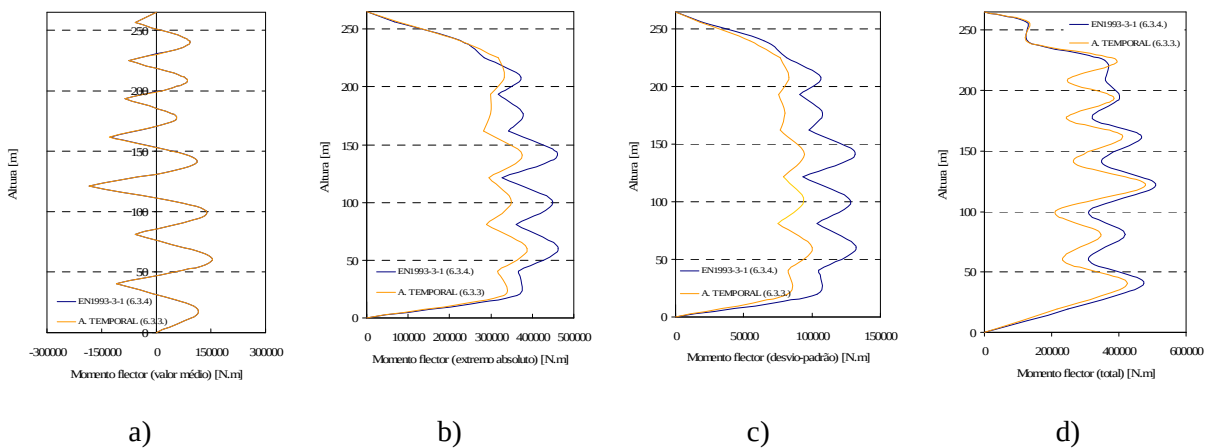


Figura 6.62 – Envolvente de momentos flectores referentes à componente média (a), e aos valores médios dos extremos absolutos (b), desvios-padrão (c) e da resposta global (d).

Dos resultados apresentados, pode observar-se existir uma concordância bastante boa entre deslocamentos calculados através da análise dinâmica no domínio do tempo e deslocamentos calculados através do procedimento estático simplificado da norma EN1993-3-1. Contudo, no que respeita aos momentos calculados, existe alguma discrepância entre os valores obtidos por ambos os procedimentos descritos. Esta discrepância pode ser devida não só às diferenças entre os procedimentos de cálculo mas também ao facto de o conteúdo espectral da excitação estar limitado aos 2,8Hz, o que tende a sugerir que a limitação aconselhada pela norma [66] de 2,0Hz é restritiva, levando à exclusão da participação de modos mais elevados na resposta.

O uso da abordagem preconizada pela norma EN1993-3-1 pode considerar-se bastante adequada à concepção e projecto de estruturas regulares deste tipo. Contudo, esta mesma norma prevê que, para estruturas com características mais complexas, fora dos padrões considerados por esta, se deva proceder a análises dinâmicas dos esforços no domínio da frequência.

O uso de análises espectrais para a obtenção da resposta de estruturas com a presença de cabos (sendo estes pouco tensos) é bastante questionável, dado que a existência destes cabos introduz na estrutura uma elevada componente não linear, que se traduz na variação das propriedades dinâmicas globais ao longo do carregamento. Com efeito, ao proceder-se à análise espectral numa estrutura pré deformada, com características dinâmicas bem conhecidas (dado que esta posição depende a componente estática do carregamento), as vibrações induzidas pela turbulência ocorrem de forma linear em torno de um valor médio. Todavia, na realidade, tal não corresponde à verdade, pois a variação instantânea da tensão nos cabos devida à oscilação do fuste do mastro pode originar um alívio ou um “endurecimento” do comportamento deste (dada a perda ou ganho de rigidez com as oscilações do fuste em torno de uma posição). Apesar de autores como Sparling [69] terem demonstrado que as técnicas de análise no domínio do tempo e no domínio da frequência podem conduzir a respostas numéricas similares em estruturas não muito complexas, o uso das análises espectrais a partir da linearização de sistemas com características não-lineares, deve ser acompanhado com algum cuidado, principalmente quando na presença de espiamentos com elevado comportamento não-linear (cabos pouco tensos).

Pelos motivos apresentados, a abordagem no domínio do tempo constitui a metodologia mais adequada para o estudo dos efeitos de rajada em estruturas com acentuado comportamento não-linear. Apesar deste tipo de análises requererem tempos de cálculo mais elevados (devido ao elevado número de realizações necessárias para se obter uma boa caracterização probabilística), os resultados obtidos correspondem a uma melhor tradução do comportamento real da estrutura, podendo melhor captar-se determinados fenómenos como o comportamento não-linear geométrico e a interacção cabos-estrutura [68, 71].

Em estruturas com comportamento não-linear bastante acentuado, os fenómenos de interacção cabos-estrutura desempenham um papel bastante importante no comportamento global, podendo o seu estudo requerer a consideração de uma quantidade numerosa de modos híbridos, bem como de fenómenos não lineares de excitação paramétrica dos cabos.

É ainda interessante referir que os valores das tensões nas espas obtidos das análises realizadas para a antena espiada pelos dois procedimentos de cálculo apresentam valores bastante próximos no que diz respeito às espas a barlavento, mas bastante dispares relativamente às espas a sotavento (ver Quadro

6.36). Este aspecto deve-se principalmente ao facto de o comportamento não linear geométrico das espias a sotavento ser bastante mais acentuado que o das espias a barlavento.

Além desta questão, pode ainda constatar-se que a tensão máxima nos cabos a barlavento pode ser avaliada de uma forma bastante segura através de um procedimento de cálculo quasi-estático, que se passa a descrever.

Conduzindo uma análise puramente estática das espias a barlavento, considerando como solicitação o deslocamento do nó de extremidade induzido pelos valores extremos da configuração da deformada dinâmica do fuste, nesses nós de apoio das espias, pode obter-se valores consistentes em cerca de 5% com os valores extremos das tensões obtidas das análises dinâmicas (ver Quadro 6.36). Pode concluir-se daí que o comportamento dinâmico dos cabos a barlavento, aparentemente não origina o aumento das tensões destes. Contudo para os cabos pouco tensos do lado a sotavento, o seu comportamento torna-se difícil de prever por procedimentos de análise mais simplistas dada a não-linearidade que lhes é inerente. Estes cabos apresentam valores extremos das tensões obtidos a partir da análise temporal bastante superiores (cerca de cinco vezes) aos valores obtidos a partir do procedimento estático segundo a norma EN1993-3-1, o que pode indiciar a presença de fenómenos de excitação paramétrica.

Quadro 6.36 – Valores médios, extremos e desvios-padrão da tensão nas espias do 7º nível a sotavento e a barlavento, para os diferentes procedimentos de análise.

Espias do 7º nível	R_M	Procedimento estático EN1993-3-1		Procedimento dinâmico Análise temporal		Procedimento quasi-estático - Irvine	
		R_p	σ_R	R_p	σ_R	R_p	σ_R
Sotavento	23602	7803	2229	39707	9622	-	-
Barlavento	102936	46237	13210	56633	16019	59867	-

7. DISPOSITIVOS DE CONTROLO DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS PELO VENTO

7.1. Introdução

A acção dinâmica do vento sobre as estruturas pode conduzir a níveis de vibração elevados, susceptíveis de conduzirem a desconforto humano, a fenómenos de degradação estrutural (e. g. fadiga provocada pela libertação de vórtices), ou mesmo, em determinados casos, à perda de estabilidade (galope, flutter).

Deste modo, justifica-se o uso de dispositivos de controlo, tendo em vista a redução, para níveis considerados aceitáveis, dos níveis de vibração inicialmente registados, quer do ponto de vista estrutural, quer do conforto humano.

Neste contexto, o presente capítulo tem como objectivo descrever algumas técnicas de controlo de vibrações em estruturas, dando-se especial ênfase às técnicas de controlo passivo e activo de vibrações induzidas pela acção dinâmica do vento sobre estruturas esbeltas.

Ainda neste contexto, julga-se importante referir alguns autores que muito contribuíram para o desenvolvimento científico e tecnológico do tema a abordar neste capítulo, salientando-se assim Den Hartog [73], Hirsch [36], Bachmann [74], Beards [75], Ruscheweyh [36] e Kasperski [63].

7.2. Amortecimento de estruturas

O amortecimento de uma estrutura traduz a capacidade de dissipação da energia que esta apresenta durante um fenómeno vibratório. Esta energia dissipada iguala o trabalho realizado pelas forças de amortecimento, sendo que muitas das vezes é convertida em energia térmica [74].

O modelo numérico mais utilizado na idealização das forças de amortecimento estrutural é o amortecimento linear viscoso ideal. De acordo com este modelo, uma força de amortecimento opõe-se ao movimento estrutural através de uma força proporcional à velocidade,

$$F_{damp} = c \cdot \frac{dq}{dt} = 2m \cdot \omega_n \cdot \xi \cdot \frac{dq}{dt} \quad (7.1)$$

onde $q(t)$ representa o deslocamento da estrutura.

Na realidade, frequentemente, a força de amortecimento não segue as propriedades do amortecimento viscoso ideal, pelo que a estrutura em questão pode apresentar outras formas de dissipação de energia. Deste modo, o amortecimento pode ser traduzido por outros modelos de dissipação equivalentes, destacando-se, de entre estes o amortecimento de Coulomb, o amortecimento quadrático e o amortecimento histerético [36].

7.3. Controlo passivo de vibrações induzidas pelo vento

Na prática a concepção, dimensionamento e implementação do controlo de vibrações em estruturas sujeitas à acção do vento não assenta em geral numa perspectiva puramente científica, visto que, apesar de se poder procurar obter os dados necessários ao desenvolvimento e optimização das medidas apropriadas de controlo a partir de análises numéricas ou mesmo experimentais, existem na realidade frequentemente condicionalismos de tempo, de equipamento e economia, obrigando à tomada de decisões relacionadas com as medidas de controlo de vibrações sem que se tenha a informação global e necessária à optimização do sistema. Isto significa que certas suposições têm de ser consideradas, tendo em conta a experiência passada, obrigando a que medidas de controlo, muitas vezes longe do ponto óptimo, sejam procuradas, não sendo as soluções adoptadas muitas vezes as mais perfeitas.

Um dos aspectos fundamentais na concepção de dispositivos de amortecimento de vibrações é a determinação da quantidade de amortecimento realmente necessária para atenuar o fenómeno vibratório a níveis desejados. Esta questão só poderá ser correctamente solucionada se se conseguir quantificar o amortecimento existente na estrutura original. A avaliação deste amortecimento inicial é de extrema importância, estando todos os melhoramentos subsequentes directamente relacionados com esse valor.

Relativamente ao controlo da resposta dinâmica de estruturas sujeitas à acção do vento, existem diversos fenómenos que devem ser tidos em consideração, dos quais como já referido, se destacam os efeitos da turbulência atmosférica, a libertação de vórtices, o galope e o flutter. Estruturas esbeltas, tais como chaminés, mastros espiados, edifícios altos e pontes atirantadas ou suspensas, apresentam-se como estruturas susceptíveis de serem sensíveis a este tipo de fenómenos, podendo por isso apresentar um nível de vibrações não aceitável, tanto do ponto de vista da sua integridade física, como do ponto de vista do conforto dos utilizadores.

O controlo dos efeitos vibratórios induzidos pela acção do vento pode, por vezes, ser realizado através da adopção de dispositivos aerodinâmicos que reduzem estes efeitos e que serão abordados no ponto 7.3.1.

Outra forma possível de atenuar os efeitos vibratórios da acção do vento, consiste em proceder ao aumento da rigidez da estrutura e da redução da massa, de modo a obter frequências naturais de vibração mais elevadas, o que conduz a velocidades críticas do vento superiores ao máximo das velocidades de vento locais. Contudo, pode ser mais eficiente projectar dispositivos especiais de amortecimento ou de supressão de vibrações como parte integrante da estrutura, com o objectivo de reduzir estes efeitos dinâmicos. No ponto 7.3.2 serão abordados alguns dos dispositivos mais utilizados no domínio do amortecimento ou mesmo supressão de vibrações em estruturas, em que a inerente falta de amortecimento estrutural justifica o seu uso para a redução das vibrações induzidas pelo vento.

7.3.1. Dispositivos aerodinâmicos de redução de vibrações devidas a libertação de vórtices

Uma das formas de reduzir os efeitos vibratórios da acção do vento consiste na introdução de dispositivos que alteram o escoamento em torno da secção da estrutura, perturbando desta forma o mecanismo regular de formação de vórtices.

A forma como estes dispositivos são materializados é muito variável, sendo habitualmente materializada através da adição de deflectores à secção transversal da estrutura, que contribuem para a alteração do escoamento, tendo como consequência a perturbação do mecanismo de formação de vórtices, e na maior parte das vezes, o aumento do coeficiente de arrastamento da secção. Este tipo de dispositivos é bastante utilizado principalmente em estruturas como cabos, chaminés ou mastros de secção transversal circular e tabuleiros de pontes.

Na Figura 7.1 e na Figura 7.2, caracterizam-se alguns dos diferentes tipos de dispositivos aerodinâmicos.

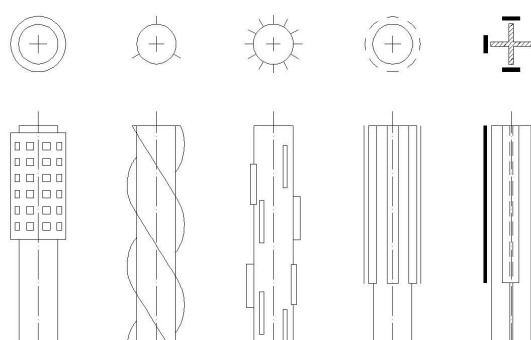


Figura 7.1 – Exemplos de dispositivos aerodinâmicos utilizados em estruturas de secção transversal circular (cabos, chaminés)[36]

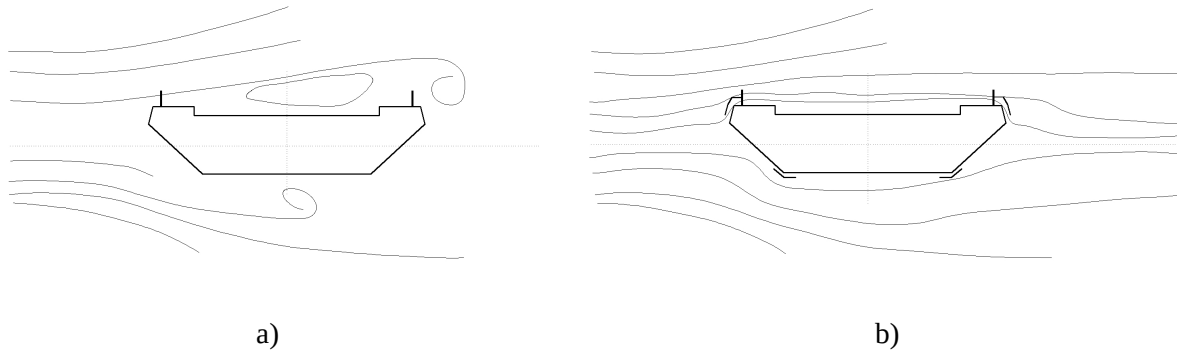


Figura 7.2 – Escoamento em torno da secção do tabuleiro de uma ponte antes (a) e depois (b) da adopção de dispositivos aerodinâmicos [1].

Neste contexto é ainda de referir que estudos comparativos efectuados em túnel de vento de três modelos (modelo I, secção simples; modelo II, secção com alhetas helicoidais; modelo III, secção com alhetas verticais (ver Figura 7.3)) a escala reduzida, por Janeiro Borges [76], conduziram aos resultados apresentados na Figura 7.4.

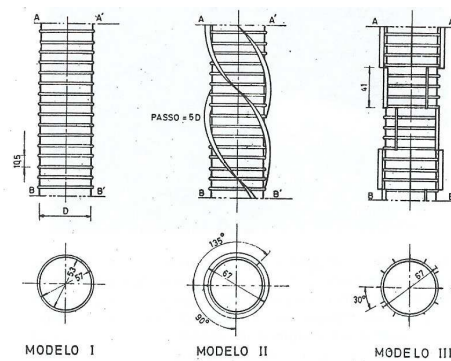


Figura 7.3 – Esquema dos modelos ensaiados por Janeiro Borges [76].

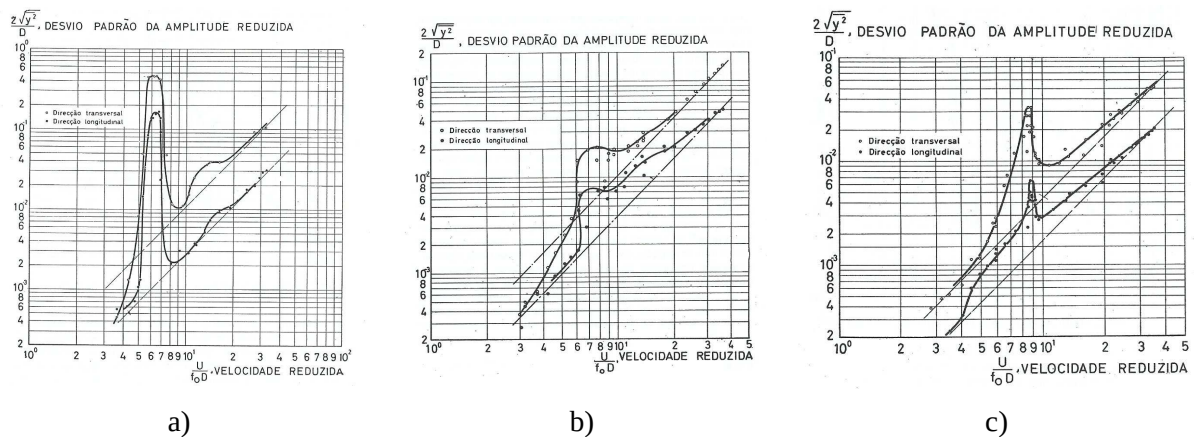


Figura 7.4 – Representação gráfica do desvio padrão da amplitude em função da velocidade reduzida para cada um dos modelos ensaiados [76].

Dos resultados, concluiu-se que os modelos equipados com alhetas apresentam resistência aerodinâmica superior a do modelo I, sendo que o terceiro é o que apresenta resultado mais elevado. Além disso, o primeiro modelo apresenta uma região de ressonância em que as amplitudes de movimento são bastante mais elevadas, isto é, as respostas de todos os modelos são predominantemente transversais sendo que as que se referem aos modelos I e III apresentam picos de ressonância muito pronunciados em ambas as direcções do movimento, enquanto que o modelo II apresenta somente uma “bossa” como consequência do desprendimento turbilhonar. Observa-se assim que o desvio padrão das amplitudes de oscilação do modelo I, correspondente ao pico de ressonância segundo a direcção transversal, é cerca de 14 vezes superior ao correspondente ao modelo III e cerca de 23 vezes superior ao que se refere ao modelo II, sendo desta forma legítimo concluir que, do ponto de vista da atenuação dos efeitos de desprendimento de vórtices, o dispositivo de alhetas helicoidais é bastante mais eficaz que o de alhetas planas verticais [76].

A adopção deste tipo de dispositivos requer o ensaio em túnel de vento de modelos a escala reduzida. No entanto, é frequente encontrar na bibliografia da especialidade [2, 3, 18], indicação dos valores aproximados de $t \approx 0,10.d$ e $h_s \approx 5.d$ com base em casos experimentais, para a altura e distância de referência entre as alhetas helicoidais em estruturas de secção transversal circular. Ainda neste contexto, a norma EN1993-3-1 [61] apresenta as seguintes condições para a aplicação de um dispositivo de alhetas helicoidais a estruturas com secção transversal circular constante em altura:

- a altura das alhetas deve encontrar-se entre $t \approx 0,10.d$ e $t \approx 0,12.d$;
- a distância entre as alhetas deve respeitar o valor entre $h_s \approx 4,5.d$ e $h_s \approx 5.d$;
- as alhetas devem prolongar-se por um comprimento de no mínimo $0,3.h$ desde o topo da estrutura.

(As variáveis t , h_s , d e h referem-se respectivamente a altura das alhetas, à distancia entre as alhetas, ao diâmetro da secção transversal da estrutura e à altura da estrutura).

Dentro do âmbito dos dispositivos aerodinâmicos, pode ainda referir-se que os deflectores utilizados para melhorar o comportamento aerodinâmico do tabuleiro de pontes, para além de reduzirem o nível de vibrações devido a libertação de vórtices, também podem conduzir a redução do risco de fenómenos de flutter (por aumento da correspondente velocidade crítica) [1].

7.3.2. Dispositivos de amortecimento de vibrações induzidas pelo vento

De modo a atenuar o nível de vibrações induzidas pela acção do vento em estruturas, sem o recurso a fontes de energia exterior, vários dispositivos podem ser utilizados, destacando-se entre estes os amortecedores adicionais e os amortecedores de massas sintonizadas ou de colunas líquidas sintonizadas.

Os amortecedores adicionais são dispositivos propositadamente introduzidos no seio da estrutura, com o objectivo de contribuir para a dissipação da energia devida as acções exteriores.

Existem diferentes tipos de amortecedores adicionais, distinguindo-se estes entre eles no modo como a dissipação de energia é efectuada.

Os dispositivos mais utilizados são os amortecedores viscosos (“Viscous Damper” ou “Hydraulic Shock-Absorber”), os amortecedores viscoelásticos (“Viscoelastic Damper”), os amortecedores metálicos e os amortecedores friccionais (“Friction Damper”).

O funcionamento dos amortecedores viscosos tem como princípio de dissipação de energia a passagem forçada de um fluido viscoso através de um ou vários orifícios, tal como indicado na Figura 7.5a). Este tipo de amortecedores é muito utilizado em estruturas como cabos de pontes (ver Figura 7.5b)), podendo ser consultado o seu procedimento de análise sucintamente descrito no documento [64].

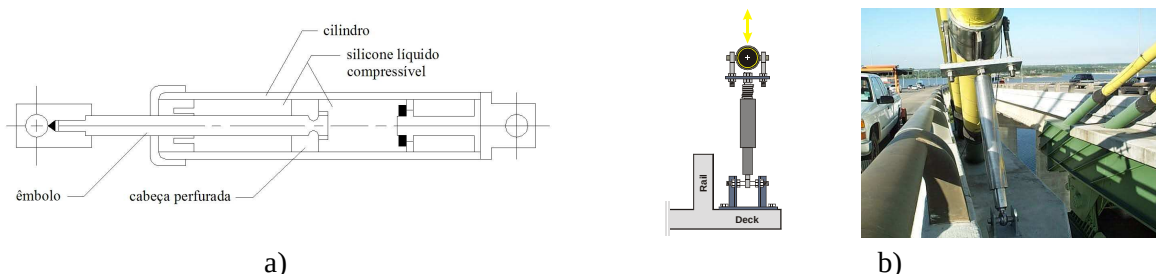


Figura 7.5 – Esquema de funcionamento de um amortecedor viscoso (a) e sua aplicação ao controlo de vibrações em tirantes de uma ponte (b)[64].

Neste contexto, pode referir-se a título de exemplificativo o caso dos mastros espiados. Estas estruturas são muito utilizadas para a montagem de antenas e transmissores que, sob o vento natural, apresentam problemas estruturais delicados devido ao seu comportamento dinâmico complexo. A razão desta complexidade consiste na interacção entre as diversas subestruturas (mastro, cabos, suportes de antenas). Os cabos exibem um comportamento não-linear geométrico, em que a pré-tensão efectiva nos cabos tem um papel extremamente importante do ponto de vista do seu comportamento dinâmico. Cabos com uma pré-tensão muito elevada têm um comportamento muito próximo do linear, enquanto

que cabos pouco tensionados apresentam uma resposta irregular, dado que as suas propriedades dinâmicas dependem da amplitude de vibração, contribuindo dentro de determinadas circunstâncias para o controle passivo das vibrações nos mastros [36] e dificultando a aplicação de amortecedores adicionais, dada a incerteza ligada a quantificação do amortecimento.

Outro exemplo pode ser o caso de uma chaminé metálica sujeita a oscilações transversais excessivas induzidas pelo vento. O nível de vibrações pode ser reduzido com bastante sucesso através da ligação de um amortecedor viscoso entre uma estrutura contígua e a meia altura da estrutura em causa. A utilização deste tipo de sistema pode trazer um aumento efectivo do amortecimento estrutural de cerca de dez vezes o inicial [36].

Os amortecedores viscoelásticos, tal como os amortecedores friccionais e os metálicos, são muito utilizados para o controle do nível de vibrações em pórticos metálicos de edifícios. O mecanismo de dissipação de energia dos amortecedores viscoelásticos e dos amortecedores metálicos é bastante semelhante e dá-se por deformação do material que os constitui (no caso dos amortecedores viscoelásticos o efeito dissipativo processa-se através da deformação por corte de um material viscoelástico e no caso dos amortecedores metálicos das deformações plásticas associadas ao comportamento histerético do material constituinte do amortecedor). Já nos amortecedores friccionais, a dissipação da energia é realizada através do atrito entre as várias superfícies de deslizamento de um aparelho, do modo esquematizado na Figura 7.6b).

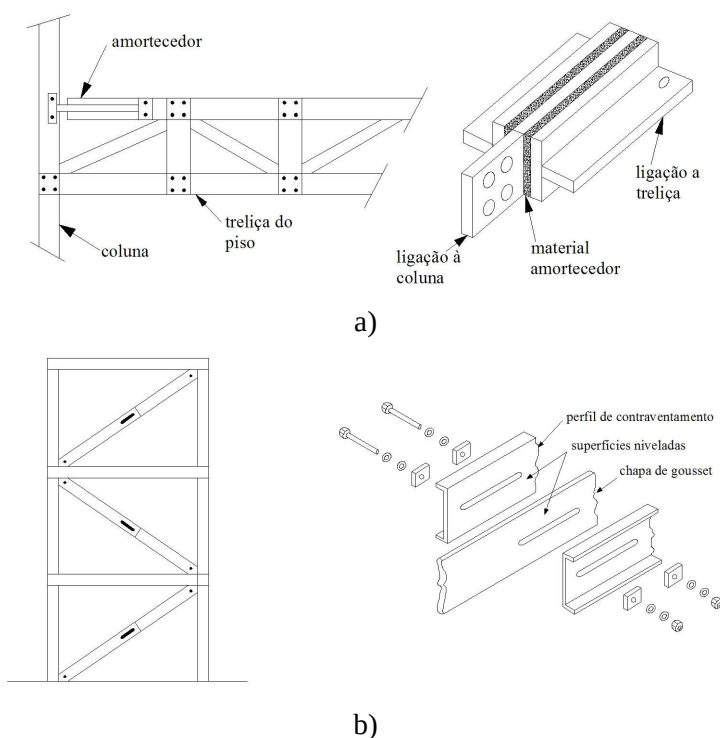


Figura 7.6 – Exemplo da aplicação de um amortecedor viscoelástico (a)[36] e de um amortecedor friccional (b) [77].

Outros dos dispositivos muito utilizados na redução de vibrações induzidas pelo vento em estruturas são os amortecedores de massas sintonizadas (“Tuned Mass Dampers”), também designados de TMD’s.

Um TMD é constituído por uma massa adicional fixada à estrutura através de uma mola e de um amortecedor dispostos em paralelo (ver Figura 7.7), actuando como um grau de liberdade adicional cuja frequência natural se situa ligeiramente abaixo da frequência natural da estrutura [77]. O seu funcionamento tem por base a acção exercida pela reacção do subsistema mola amortecedor sobre a estrutura principal, a qual, ao longo do tempo, tende a contrariar o movimento da estrutura.

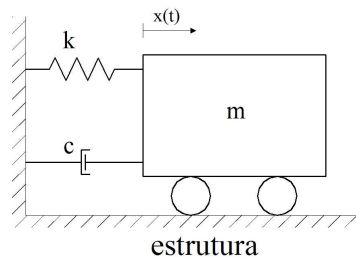


Figura 7.7 – Esquema de funcionamento de um TMD acoplado a uma estrutura.

Este tipo de dispositivos tem vindo a ser bastante utilizado no controlo de vibrações excessivas em cabos, torres, edifícios e pontes, tal como se ilustra na Figura 7.8 e na Figura 7.9.

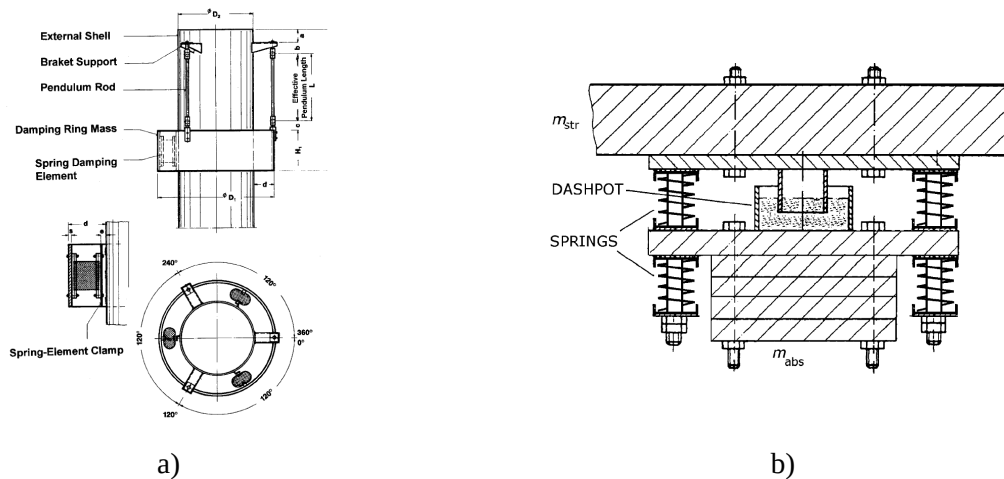


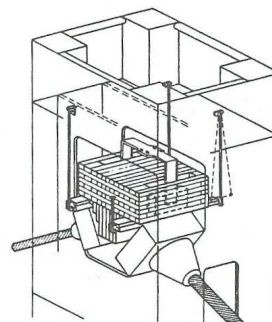
Figura 7.8 – Exemplo de TMD pendular utilizado numa chaminé (a) [78] e de um TMD utilizado para a redução do efeito vibratório induzido pelo vento no tabuleiro de uma ponte (b) [62].

Os TMD’s são usados para controlar os modos de vibração excitados, neste contexto pela acção do vento, sendo que na maior parte das vezes o controlo do primeiro modo é suficiente para atenuar significativamente o nível de vibrações registado, bastando a introdução de um único TMD. Contudo, pode ocorrer que haja necessidade de controlar simultaneamente o contributo de modos de ordem superior ao primeiro, tornando-se necessária a inclusão de mais do que um TMD. Neste contexto, é

ainda de referir que o uso de TMD's é eficaz apenas para estruturas com baixo amortecimento, verificando-se que no caso de estruturas com coeficientes de amortecimento superiores a valores na ordem dos 5%, os TMD's não produzem efeitos satisfatórios [77].



a)



b)

Figura 7.9 – TMD tipo stockbridge utilizado nos cabos da cobertura de um estádio (a) e TMD utilizado para a atenuação de vibrações nas torres de uma ponte atirantada (b) [36].

Outro dispositivo de controlo de vibrações induzidas pelo vento bastante utilizado, e cujo funcionamento é bastante similar aos TMD's, corresponde aos amortecedores de coluna líquida sintonizada (“Tuned Liquid Column Dampers”), também designados por TLCD's. Estes dispositivos, apesar de serem igualmente eficazes em comparação com os TMD's, estão bastante menos divulgados. Os TLCD's estão principalmente vocacionados para o controlo de vibrações horizontais e por isso a sua maior utilização em estruturas como edifícios e tabuleiros de pontes [79]. Um TLCD consiste, tal como esquematizado na Figura 7.10, num tubo com a forma de “U”, no qual circula um líquido com uma determinada viscosidade e que ao passar por um orifício situado na base deste, induz forças sobre a estrutura.

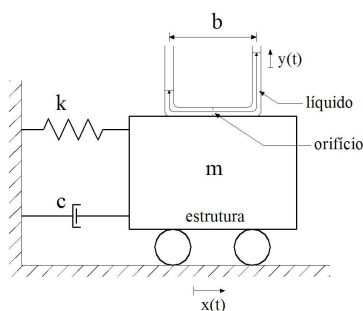


Figura 7.10 – Esquema de funcionamento de um TLCD [79].

No ponto subsequente caracteriza-se a forma de dimensionamento de um TMD para o controlo das vibrações induzidas pela acção do vento.

7.3.2.1. Dimensionamento um amortecedor de massas sintonizadas

Tome-se como referência o modelo teórico proposto por Den Hartog [73] para uma estrutura sem amortecimento, caracterizada por uma massa m_1 , ligada ao exterior através de uma mola com rigidez k_1 , à qual está ligada uma massa adicional m_2 através de uma mola com rigidez k_2 e um amortecedor de constante c_2 , tal como representado na Figura 7.11.

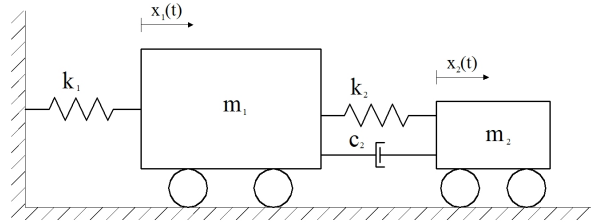


Figura 7.11 – Esquema de funcionamento de um amortecedor de massa sintonizada aplicado a uma estrutura sem amortecimento.

Considerando a actuação de uma força sinusoidal $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$ sobre a massa principal m_1 , a amplitude do movimento permanente desta massa é dada pela seguinte equação

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{(2 \cdot r_1 \cdot \xi_2 \cdot q)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{(2 \cdot r_1 \cdot \xi_2 \cdot q)^2 \cdot [1 - r_1^2(1 + \mu)]^2 + \{r_1^4 - [1 + (1 + \mu) \cdot q^2] \cdot r_1^2 + q^2\}^2}} \quad (7.2)$$

enquanto que a amplitude do movimento permanente da massa adicional m_2 é dado por

$$\frac{x_2}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{(2 \cdot \xi_2 \cdot q)^2 + q^4}{(2 \cdot r_1 \cdot \xi_2 \cdot q)^2 \cdot [1 - r_1^2(1 + \mu)]^2 + \{r_1^4 - [1 + (1 + \mu) \cdot q^2] \cdot r_1^2 + q^2\}^2}} \quad (7.3)$$

sendo ξ_2 o amortecimento do TMD,

$$\xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} \quad (7.4)$$

r_1 a razão entre a frequência de excitação e a frequência inicial do sistema,

$$r_1 = \omega \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \frac{\omega}{\omega_{11}} \quad (7.5)$$

r_2 a razão entre a frequência de excitação e a frequência do amortecedor,

$$r_2 = \omega \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = \frac{\omega}{\omega_{22}} \quad (7.6)$$

μ o quociente entre as massas m_2 e m_1 ,

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (7.7)$$

q a razão entre a frequência do amortecedor ω_{22} e a frequência inicial do sistema ω_{11}

$$q = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} \quad (7.8)$$

e $x_{1,est}$ o deslocamento estático da estrutura principal,

$$x_{1,est} = \frac{F_0}{k_1} \quad (7.9)$$

Na Figura 7.12 a) e b) aparece representada a amplitude de movimento da massa m_1 em função de r_1 , de acordo com a equação (7.2), tomando-se respectivamente para a) e b), $q = 0,90$, $\mu = 0,10$ e $q = 0,95$, $\mu = 0,10$ e fazendo-se variar o amortecimento do TMD em cada uma das alíneas entre 0,10, 0,15 e 0,20.

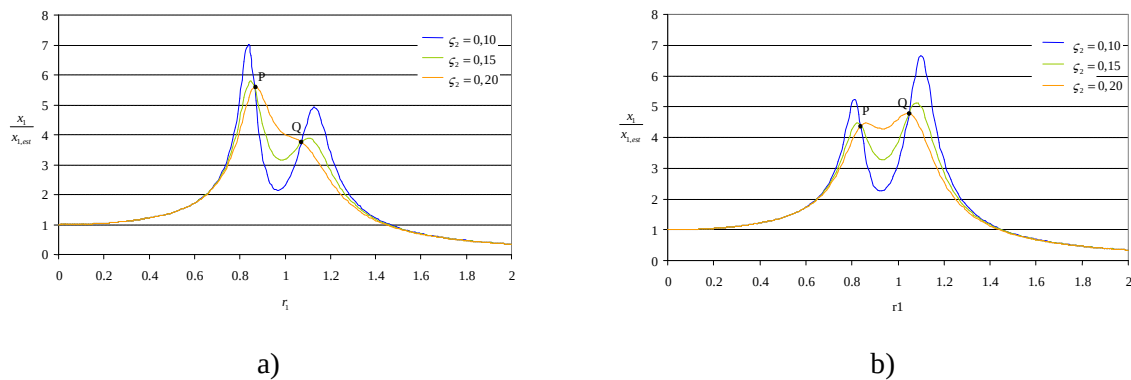


Figura 7.12 – Amplitude do movimento da massa m_1 em função de r_1 para $q = 0,90$ (a) e $q = 0,95$ (b)

Da observação da Figura 7.12, pode constatar-se a existência de dois picos correspondentes às duas frequências de ressonância deste sistema, sendo que para qualquer frequência de excitação não é possível anular completamente o movimento da massa principal. Pode observar-se ainda que todas as curvas passam por dois pontos fixos, P e Q, dependentes apenas de q e μ .

Para otimizar o funcionamento do TMD, é necessário escolher os parâmetros adequados a que a amplitude dos deslocamentos do sistema principal tenha o menor valor possível. Este procedimento é designado sintonização do TMD.

O valores adoptados de q nas figuras anteriores é tal que as funções apresentam um máximo mais elevado que o outro, contudo é possível encontrar um valor de q de modo a que os máximos da amplitude correspondentes às duas frequências de ressonância tenham o mesmo valor.

A igualdade destes dois máximos é conseguida para um valor óptimo de q independente do amortecimento do TMD, sendo que o amortecimento apenas condicionará a amplitude de pico [77]. Tendo em consideração que todas as curvas associadas a diferentes coeficientes de amortecimento do TMD passam por dois pontos fixos P e Q , é possível encontrar um valor do amortecimento ξ_2 que leve a que esses pontos correspondam aos máximos da função da amplitude de movimento.

Partindo então das duas condições descritas, uma referente ao valor de q e a outra referente ao valor de ξ_2 , podem obter-se os parâmetros óptimos de funcionamento de um TMD.

Deste modo, uma vez definidos μ e q , existem dois valores de r_1 que determinam os valores da amplitude dos deslocamentos da massa principal independentes do amortecimento (pontos fixos), sendo a amplitude x_1 susceptível de ser expressa na forma [77]

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{A(\mu, q) \cdot \xi_2^2 + B(\mu, q)}{C(\mu, q) \cdot \xi_2^2 + D(\mu, q)}} \quad (7.10)$$

A independência de x_1 relativamente a ξ_2 impõe que

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} \quad (7.11)$$

Relembrando a equação (7.2) e substituindo as respectivas parcelas na equação (7.11), pode chegar-se à seguinte equação com a forma quadrática

$$r_1^4 \cdot \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) - [1 + (q^2 \cdot (1 + \mu))] \cdot r_1^2 + q^2 = 0 \quad (7.12)$$

As raízes da equação (7.12) fornecem a localização dos pontos fixos P e Q ,

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 + (1 + \mu) \cdot q^2 \pm \sqrt{1 - 2q^2 + (1 + \mu)^2 \cdot q^4}}{2 + \mu}} \quad (7.13)$$

Sendo a amplitude dos deslocamentos x_1 independente do amortecimento ξ_2 para os valores de r_1 dados na equação (7.13), e fazendo tender os valores de ξ_2 na equação (7.10) para infinito, chega-se à equação seguinte para a amplitude do movimento

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{1}{[1 - r_1^2 \cdot (1 + \mu)]^2}} \quad (7.14)$$

Por fim, impondo amplitudes de deslocamentos iguais para os dois pontos fixos, pode obter-se

$$q_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (7.15)$$

que conduz à rigidez óptima para a mola de um TMD.

Por conseguinte, substituindo de q_{opt} e r_1 dado pela equação (7.13), na equação (7.14), tem-se que

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{2 + \mu}{\mu}} \quad (7.16)$$

que representa o valor máximo da amplitude do movimento.

Para determinar o amortecimento óptimo de um TMD, basta impor que os pontos fixos P e Q correspondam ao máximo da função amplitude dos deslocamentos. Para esse efeito, deve proceder-se à substituição da equação (7.15) em (7.2) e posteriormente igualar a derivada desta em ordem a r_1 a zero, obtendo-se daí uma equação quadrática da qual se pode extrair o valor do amortecimento óptimo, com a forma

$$\xi_{2,opt} = \sqrt{\frac{3 \cdot \mu}{8 \cdot (1 + \mu)^3}} \quad (7.17)$$

Na Figura 7.13, pode ver-se representada a amplitude de movimento para três casos com o valor comum de $\mu = 0,10$, fazendo-se variar apenas o valor do parâmetro q entre o valor óptimo ($q_{opt} = 0,909$), um valor abaixo do óptimo ($q = 0,87$) e um valor acima do óptimo ($q = 0,93$). O valor do amortecimento foi tomado igual a $\xi_{2,opt} = 0,168$. Da observação da figura, pode concluir-se que a

curva correspondente a $q_{opt} = 0,909$ apresenta o menor valor possível da amplitude máxima do movimento.

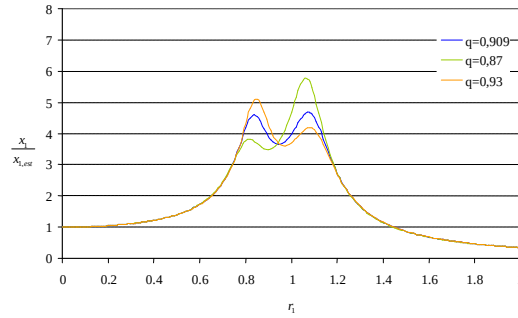


Figura 7.13 – Amplitude de movimento da massa m_1 em função de r_1 .

No caso de a estrutura, à qual está acoplado um TMD ter o amortecimento não nulo (caso das estruturas reais), o modelo teórico de funcionamento é semelhante ao anterior acrescentando-lhe apenas a presença de um amortecedor de constante c_1 na ligação da estrutura ao exterior (ver Figura 7.14).

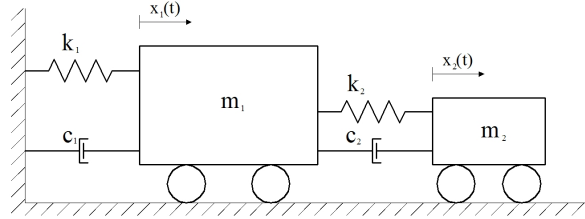


Figura 7.14 – Esquema de funcionamento de um TMD acoplado a uma estrutura com amortecimento.

Considerando a estrutura principal actuada por uma força com carácter sinusoidal $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$, a sua amplitude de movimento permanente pode ser obtida a partir da seguinte equação [77],

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{(2r_1 \cdot \xi_2)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{(2r_1)^2 \cdot [\xi_2 \cdot (r_1^2(1 + \mu) - 1) + \xi_1(r_1^2 - q^2)]^2 + [\mu \cdot q^2 \cdot r_1^2 - (r_1^2 - 1)(r_1^2 - q^2) + (2r_1)^2 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2]^2}} \quad (7.18)$$

Para proceder ao dimensionamento do TMD pode ser feito o mesmo raciocínio descrito nos parágrafos anteriores, contudo ele só é valido para estruturas cujo amortecimento estrutural seja muito baixo ($\xi_1 \leq 1\%$) [74], isto é, a função de amplificação continua a ter dois ponto fixos sobre os quais passam todas as curvas correspondentes a diversos valores do amortecimento do TMD.

Para valores do amortecimento estrutural mais elevados, já não é possível identificar os pontos fixos com a facilidade descrita no procedimento anterior, deixando de se poder sintonizar o TMD a partir das expressões (7.15) e (7.17), dado que a consideração de amortecimento estrutural nulo deixa de ser

válida (ver Figura 7.15). Nestas situações pode recorrer-se ao uso dos ábacos descritos na referência [77], obtidos a partir do estudo numérico da equação (7.18) com o objectivo de otimizar os valores de q e ξ_2 para a menor amplitude de movimento e para um pré-determinado amortecimento estrutural ξ_1 e rácio de massa μ .

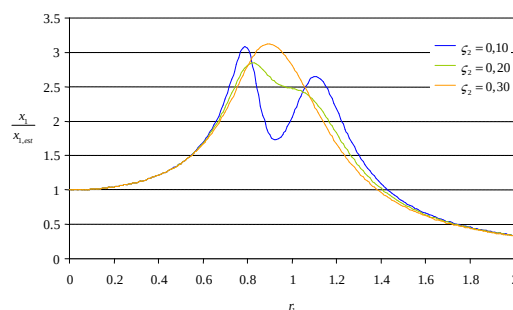


Figura 7.15 – Amplitude de movimento da massa m_1 de uma estrutura com amortecimento, em função de r_1 .

É ainda de referir o caso mais simples destes dispositivos, o qual tem a designação de supressor de vibrações (“vibration absorber”). Este dispositivo difere na sua concepção de um amortecedor de massas sintonizadas, simplesmente por não incluir qualquer amortecer (ver Figura 7.16). Embora seja irrealista a inexistência de amortecimento entre o amortecedor e a estrutura o seu estudo apresenta algum interesse no caso de estruturas solicitadas por acções dinâmicas caracterizadas por uma largura de banda bastante estreita, podendo assim através da simples consideração de uma estrutura com dois graus de liberdade “fugir” a uma excitação conhecida [77].

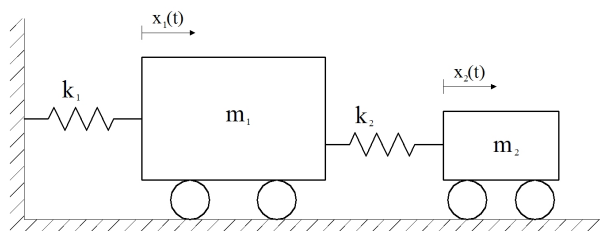


Figura 7.16 – Esquema de funcionamento de um supressor de vibrações.

7.3.2.1.1. Aplicação de um amortecedor de massas sintonizadas a uma estrutura

Nesta secção é apresentada uma aplicação de um amortecedor de massas sintonizadas, tendo por base a estrutura referida no ponto 6.3.6, excitada devida ao fenómeno de libertação de vórtices.

Tendo por base as características da chaminé descritas no capítulo anterior, e assumindo a relação entre a massa do TMD e a massa modal do modo com maior participação na resposta, $\mu = 0.10$ (valor que equivale a cerca de 1% na relação entre a massa do TMD e a massa total da chaminé), podem avaliar-se os parâmetros óptimos do TMD ideal para esta estrutura (ver equações (7.15) e (7.17)), representados no Quadro 7.1. Pode observar-se, a azul, na Figura 7.13, a curva correspondente à amplitude de oscilação do sistema em função da frequência relativa.

Quadro 7.1 – Parâmetros utilizados na definição do dispositivo de controlo de vibrações da chaminé.

m_1 [kg]	4402,2
n_1 [Hz]	0,863
μ	0,1
q_{opt}	0,9091
$\xi_{2,opt}$	0,1678
m_2 [kg]	440,2
n_2 [Hz]	0,784
k_2 [N/m]	10697,1
$(x_1/x_{1,est})_{max}$	4,58

Atendendo a que o fenómeno de libertação de vórtices origina uma acção harmónica com as características descritas na secção 5.4, apresenta-se na Figura 7.17 a resposta correspondente para a coordenada do topo da estrutura, com e sem a aplicação do TMD.

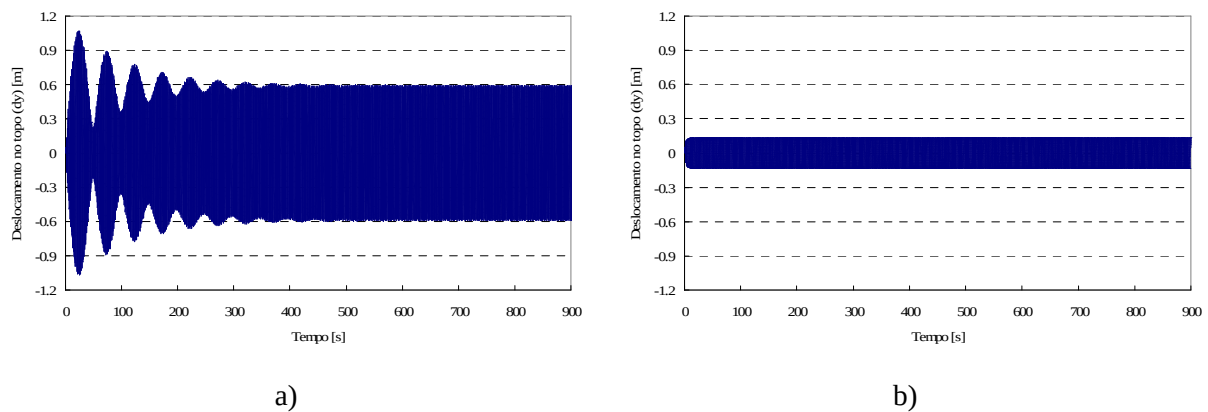


Figura 7.17 – Deslocamentos no topo da chaminé, induzidos por acção harmónica de “vortex shedding”, sem a presença do TMD (a) e com o TMD em funcionamento (b).

Deste modo, resumem-se no Quadro 7.2 os resultados alcançados, em termos dos deslocamentos no topo da chaminé, através das análises efectuadas tendo em conta o uso de deflectores aerodinâmicos, de um TMD e sem qualquer dispositivo de controlo de vibrações.

Quadro 7.2 – Amplitude máxima de vibração do topo da chaminé obtida através das diversas análises, tendo em conta a aplicação de dispositivos de controlo de vibrações.

Chaminé sem qualquer dispositivo de controlo de vibrações	ξ_s	0,00191
	$y_{\max}$	0,598
Chaminé com alhetas helicoidais	ξ_s	0,00191
	$y_{\max}$	0,177
Chaminé com aplicação de um TMD	$\xi_{s,1}$	0,00191
	$\xi_{s,2}$	0,16785
	$y_{\max}$	0,133

Da observação do Quadro 7.2 pode concluir-se que, para esta estrutura, o uso de um TMD com as características acima indicadas, é bastante eficaz, constituindo este dispositivo uma alternativa bastante eficaz relativamente ao uso de deflectores aerodinâmicos.

Recorrendo à equação (5.226), fez-se variar o número de Scruton (ver equação (5.224)), de modo a conseguir estimar iterativamente o amortecimento equivalente da estrutura, que limita as deformações devidas ao fenómeno de libertação de vórtices aos valores obtidos através da adopção dos dois sistemas de controlo de vibrações aplicados. Deste modo, pôde concluir-se que a adopção de alhetas helicoidais ou de um TMD conduz a um incremento do amortecimento estrutural para 0,00645 e 0,00745, respectivamente.

7.4. Controlo activo de vibrações induzidas pelo vento

O controlo activo de vibrações assenta no conceito de redução da resposta estrutural de modo a cumprir determinados requisitos, mediante a aplicação de forças adicionais, associadas à utilização de uma fonte de energia exterior, em que os seus valores são definidos a cada instante, ao longo do período de actuação das acções de carácter dinâmico, tendo em consideração uma determinada estratégia de controlo tendente a fazer com que a resposta estrutural siga, tanto quanto possível, os padrões comportamento pré desejados [77].

O controlo activo de estruturas tem sido usado habitualmente na indústria aeronáutica e aeroespacial com o intuito de reduzir a resposta aos efeitos de rajada e a supressão do fenómeno de flutter em perfis alares. No domínio do controlo de vibrações em estruturas de engenharia civil, apesar de ser uma tecnologia relativamente recente, tem vindo a captar um número crescente de adeptos, dado os excelentes resultados que permite alcançar, principalmente no controlo do comportamento de estruturas sujeitas a acções dinâmicas provocadas por sismos ou vento.

Um número já significativo de sistemas de controlo activo têm vindo a ser desenvolvidos, com o intuito de tornar o comportamento das estruturas nas quais estes sistemas estão implementados, semelhantes a máquinas com características adaptativas e reactivas às acções exteriores. Assim sendo, o desenvolvimento do conceito de controlo activo tem vindo a progredir a par do desenvolvimento tecnológico de determinadas áreas como a informática, a electrónica, os dispositivos de instrumentação e monitorização, os materiais...

Neste contexto, as próximas secções visam a apresentação dos conceitos básicos associados à implementação de um sistema de controlo activo, passando pela caracterização de algumas principais estratégias de controlo, bem como de alguns exemplos concretos de aplicação prática do controlo activo em estruturas.

7.4.1. Bases teóricas

Geralmente as estruturas podem ser representadas como sistemas de parâmetros distribuídos. Quando estas são discretizadas espacialmente, tendem a apresentar um número bastante elevado de graus de liberdade. Contudo, é reconhecido que as vibrações induzidas pelo vento em estruturas como por exemplo em edifícios altos, torres ou pontes, são dominadas apenas por um pequeno número de modos de vibração, com frequências bastante baixas.

A implementação de um sistema de controlo activo implica, numa primeira fase, o desenvolvimento de um modelo numérico que permita simular o comportamento dinâmico da estrutura, tendo por base as suas características de rigidez, massa e amortecimento.

De uma forma simples, o objectivo de um sistema de controlo activo consiste em actuar em tempo real sobre um dado sistema estrutural, de modo a que a evolução temporal da resposta respeite um conjunto de condições pré-definidas, sendo para o efeito utilizado um modelo numérico (controlador) capaz de possibilitar a determinação de um conjunto de forças de controlo a aplicar sobre a estrutura, por forma a obter o comportamento pretendido [77]. Neste contexto, é necessário construir um controlador, conjugando o modelo numérico anterior com uma determinada estratégia de controlo, isto

é, deve estabelecer-se uma relação funcional entre a resposta estrutural registada e o sinal de controlo, de tal modo que a relação possibilite a determinação das forças de controlo a aplicar sobre a estrutura, em cada instante, por forma que a resposta a acção dinâmica seja a desejada.

De modo a ilustrar este processo, apresenta-se na Figura 7.18 o diagrama esquemático onde se podem ver representados todos os elementos que podem estar envolvidos num processo de controlo activo [80].

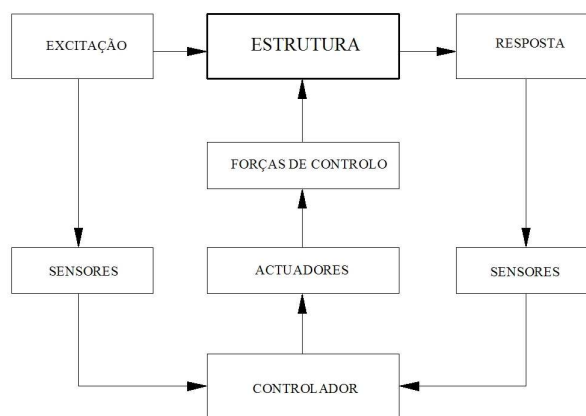


Figura 7.18 – Esquema teórico de funcionamento de um sistema de controlo activo.

Quando, num sistema de controlo, o controlador gera um conjunto de forças a aplicar à estrutura, de modo a que o comportamento desta evolua no sentido de se obter uma resposta desejada, sem contudo receber qualquer informação acerca da resposta realmente obtida anteriormente, pode dizer-se que a estrutura opera em laço aberto (“open-loop”). Este modo de funcionamento que geralmente apresenta uma eficácia bastante limitada podendo ver-se esquematizado na Figura 7.19.

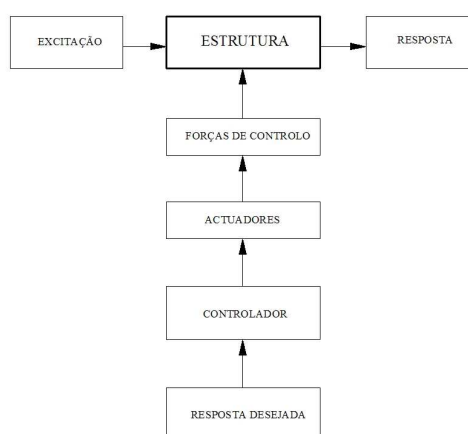


Figura 7.19 – Esquema de sistema operar em laço aberto (“open-loop”)

Por outro lado, caso o controlador tenha, a cada instante, a informação dos valores da resposta obtida através de um sistema de realimentação (“feedback”), este pode calcular a partir destes valores um

conjunto de forças de controlo adequadas, tendo por base uma estratégia de controlo que procure atingir a resposta desejada. Este sistema de controlo é designado como operando em laço fechado (“closed-loop”) e pode ver-se esquematizado no diagrama da Figura 7.20.

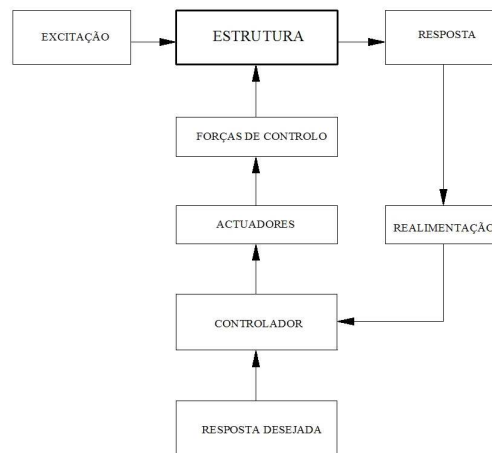


Figura 7.20 – Esquema de sistema a operar em laço fechado (“closed-loop”)

O controlo activo da resposta dinâmica de uma estrutura pode ser efectuado através de um sistema analógico ou digital. A característica principal dos sistemas analógicos reside no facto de tanto o processo de medição, como o de controlo se realizarem em tempo contínuo, sendo a estratégia de controlo igualmente simulada em tempo contínuo.

A gigantesca evolução tecnológica registada nos últimos anos, nomeadamente, no que se refere aos meios computacionais, levou a que as técnicas de controlo activo implementadas na actualidade tenham predominantemente carácter digital, o que conduz à necessidade de consideração de estratégias de controlo em tempo discreto.

Os sistemas de controlo digital apresentam algumas vantagens relativamente aos sistemas analógicos, particularmente no que diz respeito à precisão, capacidade de memória e custo [77].

A implementação de um sistema de controlo activo envolve a utilização de um número variado de sensores e de actuadores de forças.

Neste campo, alguns dos aspectos que afectam a eficiência global do sistema relacionam-se principalmente com a existência erros de modelação, acoplamento de diferentes modos de vibração devido as forças de controlo (“spill-over effects”), não linearidades estruturais, incerteza de alguns parâmetros estruturais, número de sensores e actuadores limitado, controlo em tempo discreto e o tempo de atraso (“time delay”), daí que nem sempre as medidas de controlo sejam totalmente estáveis, tendo por isso de ser bastante bem aferidas [36].

7.4.1.1. Estratégias de controlo

Segundo Falcó et al [80], as estratégias mais utilizadas no âmbito do controlo activo de estruturas de engenharia civil são a estratégia de controlo óptimo e a estratégia de controlo por realimentação negativa. Contudo, recentemente outras metodologias têm vindo a ser aplicadas com sucesso das quais se destacam a estratégia por alocação de pólos e a estratégia de controlo preditivo.

As equações do movimento de um sistema estrutural onde se implementou um sistema de controlo activo podem ser escritas sob a forma matricial através de

$$M.\ddot{y}(t) + C.\dot{y}(t) + K.y(t) = u(t) + f(t) \quad (7.19)$$

em que M , C e K representam respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, $y(t)$ o vector dos deslocamentos, $f(t)$ o vector das forças externas aplicadas e $u(t)$ o vector das forças de controlo.

A estratégia por realimentação negativa caracteriza-se pela geração de um sinal de controlo em função da diferença entre a resposta do sistema e uma resposta de referência, habitualmente designada por erro. Os principais inconvenientes desta estratégia têm a ver com o facto de geralmente conduzir a uma eficácia limitada em termos de redução da resposta, podendo surgir problemas de estabilidade relativamente ao algoritmo, obrigando ao ajuste prévio dos seus parâmetros. Esta estratégia é apenas aplicável a estruturas modeladas com um único grau de liberdade.

A estratégia de controlo óptimo baseia-se no facto de as forças de controlo serem determinadas minimizando uma função de custo linear quadrática, a qual é supostamente proporcional à energia total desenvolvida na estrutura ao longo de todo o intervalo de tempo de actuação da excitação e incorpora uma contribuição relativa ao trabalho realizado pelas forças de controlo.

Esta estratégia apresenta como inconveniente o facto de, para estruturas com muitos graus de liberdade, o seu processamento ser bastante moroso, apesar de poder apresentar algum interesse no que diz respeito a estruturas com comportamento linear.

A estratégia de controlo por alocação de pólos é baseada numa lei de controlo por realimentação, em que a matriz de ganho D se escolhe por forma a que a equação em espaço de estado (relativo ao vector de estado $x(t)$) que determina o comportamento do sistema controlado em laço fechado, tenha pólos iguais a valores previamente fixados.

$$u(t) = -D.x(t) \quad (7.20)$$

Para esta estratégia de controlo, é de referir que existindo teoricamente pelo menos um conjunto de pólos estáveis no caso de sistemas controláveis, pode todavia não ser fácil na prática achar a localização de tais pólos para que numa estrutura se garanta um bom funcionamento do controlo. Deve ainda salientar-se também que diferentes matrizes de ganho podem conduzir aos mesmos pólos, obtendo-se contudo respostas dinâmicas que podem ser muito diferentes.

As estratégias de controlo até agora descritas são formuladas tendo como base modelos matemáticos de natureza contínua, ao contrário da estratégia de controlo predictivo que assenta numa formulação em tempo discreto.

A estratégia de controlo predictivo consiste em terminar a cada instante de tempo $k.\Delta t$ (com k um inteiro e Δt o intervalo em que o tempo é discretizado) o conjunto das forças de controlo a aplicar à estrutura, para que a sua resposta num determinado instante posterior $(k + \lambda).\Delta t$, se aproxime da resposta desejada. Esta estratégia de controlo é bastante eficaz na redução da resposta estrutural, resultando dela equações mais simples e mais fáceis de implementar.

7.4.2. Sistemas de actuadores e mecanismos de controlo

Um actuador é um dispositivo mecânico que interpreta o sinal de controlo transmitido pelo controlador, sendo daí capaz de aplicar a força de controlo necessária para produzir uma determinada atenuação da resposta estrutural. Os actuadores devem ser sensíveis ao sinal de controlo e proporcionar forças com amplitude e frequência adequadas a cada estrutura onde aplicados.

Existem alguns problemas relacionados com a implementação prática de actuadores, estando estes relacionados principalmente com a dificuldade de aplicação de forças intensas a operar em frequências elevadas e a elevada inércia dos sistemas mecânicos. Com efeito, existe sempre um tempo de atraso (“time delay”), devendo este tempo ser devidamente considerado no algoritmo de controlo. A qualidade do actuador depende do grau de inércia traduzido por este tempo de atraso, sendo aconselhável a utilização de actuadores com reduzido tempo de resposta, proporcionando uma maior eficácia e estabilidade do processo de controlo activo [77].

Na implementação de sistemas de controlo activo de estruturas de engenharia civil, existe uma grande diversidade de actuadores eficazes, passando-se a descrever algumas das aplicações genéricas deste tipo de sistemas.

7.4.2.1. Controlo por cabos activos

A implementação do sistema de controlo activo baseado na utilização de cabos activos, foi proposto por Freyssinet no início dos anos 60, tendo desde então sido um dos mecanismos de controlo mais estudados tanto teoricamente como em laboratório [36]. Este tipo de dispositivos são essencialmente mais utilizados no controlo activo de vibrações induzidas por acções horizontais em edifícios, para além de ser um dos procedimentos de possível utilização em casos de reabilitação e reforço de estruturas existentes.

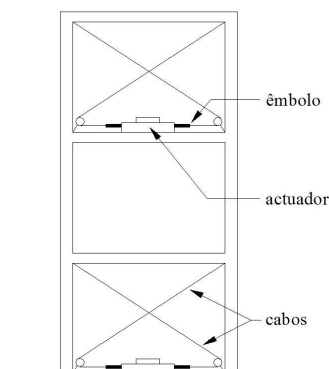


Figura 7.21 – Esquema de uma estrutura de um edifício com um sistema de controlo com cabos activos [77].

O sistema consiste num conjunto de cabos pré-esforçados ligados à estrutura e a um actuador, sendo o comportamento da estrutura controlado através do movimento deste actuador, introduzindo-se desta forma as forças de controlo necessárias ao efeito deste sistema. Na Figura 7.22 pode ver-se esquematicamente representado um sistema de cabos activos para o controlo de uma estrutura de um edifício sujeita a acções horizontais.

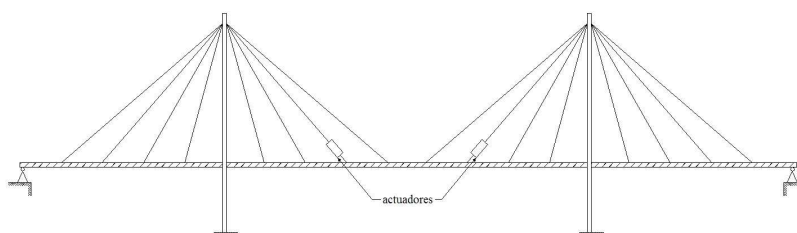


Figura 7.22 – Esquema de uma ponte atirantada com um sistema de controlo de vibrações através da introdução de actuadores nos cabos [77].

Pode ainda referir-se que este método se revela bastante eficaz no que diz respeito ao controlo de vibrações em pontes, tal como sucede aquando da introdução de actuadores em tirantes de pontes

atirantadas (ver Figura 7.22), em que a variação das tensões instaladas nos tirantes tem repercussões ao nível do comportamento dinâmico do tabuleiro.

7.4.2.2. Amortecedores activos de massas

Os amortecedores activos de massas sintonizadas (“active tuned mass damper”), também designados de ATMD’s, são constituídos por uma massa, a qual é ligada à estrutura por meio de uma mola, de um amortecedor e de um actuador responsável por provocar um movimento forçado da massa. A força que é gerada sobre a estrutura resulta da força de inércia associada ao movimento da massa, que é transmitida pela reacção da mola, do amortecedor e do actuador ligado a estrutura (ver Figura 7.23).

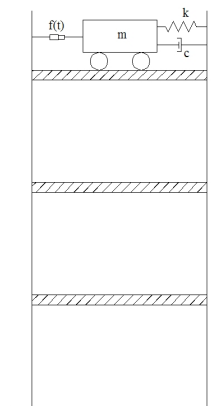


Figura 7.23 – Esquema de estrutura de edifício com um ATMD implementado.

O método de controlo passivo da resposta estrutural através da utilização de amortecedores de massas sintonizadas, tal como referido anteriormente, tem vindo a ser aplicado em diversos casos actuais tais como chaminés ou mesmo torres bastante esbeltas. Contudo, quando aplicado a estruturas de muito grande escala, devem ter-se em conta os seguintes comportamentos [36]:

- torna-se necessária uma massa auxiliar muito significativa;
- a frequência do dispositivo de amortecimento deve estar sincronizada com a da estrutura, pois havendo dessincronização, a eficácia do TMD é reduzida drasticamente;
- o facto do dispositivo ser baseado nas características naturais de vibração da estrutura leva à demora de algum tempo na entrada em funcionamento;

O uso de dispositivos activos de massas sintonizadas permite ultrapassar este tipo de limitações, através da combinação das características típicas de um TMD com a eficiência associada à utilização de um actuador.

Este tipo de dispositivos tem sido usado no controlo de vibrações induzidas pelo vento em edifícios muito altos (“arranha-céus”), como é o caso do amortecedor activo de massa sintonizada instalado no 63º piso do Citycorp Center Building em Nova York [74].

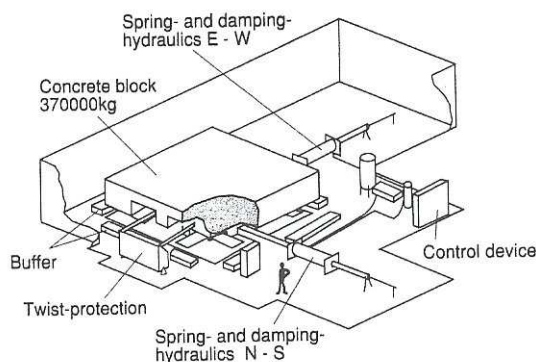


Figura 7.24 – Esquema do amortecedor de massa sintonizada activa implementado no Citycorp Center Building em Nova York [74].

A ordem de grandeza da massa utilizada neste tipo de aplicações ronda 1% da massa total do edifício, sendo os sistemas de mola do tipo pneumático e os amortecedores do tipo hidráulico. Estes dispositivos, sendo habitualmente utilizados no controlo activo de estruturas sujeitas a acções horizontais, são geralmente colocados nos últimos pisos, dado ser o local onde a sua actuação é mais vantajosa.

7.4.2.3. Deflectores aerodinâmicos de controlo activo

Os deflectores aerodinâmicos de geometria variável constituem outro sistema de controlo fundamentalmente utilizado para a redução da resposta dinâmica provocada pela actuação do vento sobre tabuleiros de pontes. Estes dispositivos permitem modificar o escoamento aerodinâmico em torno da secção transversal a cada instante, com o objectivo não só de reduzir a resposta aos efeitos induzidos pela turbulência do vento, como para aumentar a estabilidade aeroelástica da estrutura (caso de tabuleiros de pontes) e o conforto dos utilizadores da estrutura, atenuando problemas relacionados com a fadiga estrutural [1].

Na Figura 7.25, apresenta-se um exemplo de um dispositivo de controlo activo através de deflectores aerodinâmicos.

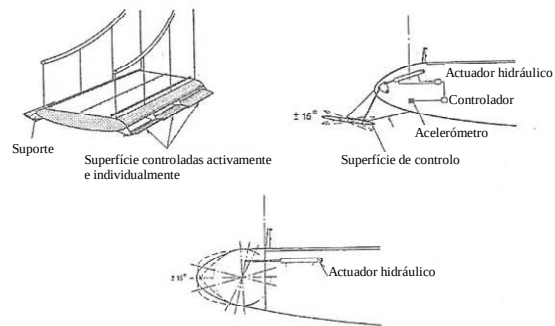


Figura 7.25 – Sistema de controlo activo através de deflectores aerodinâmicas para o controlo de vibrações no tabuleiro de uma ponte [1].

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

8.1. Considerações finais

O trabalho desenvolvido no âmbito desta dissertação teve como principal objectivo a aquisição de conhecimentos na área da Engenharia do Vento, que permitiram a compreensão e a sistematização de um conjunto de conceitos relacionados em especial com a análise dos efeitos de rajada em estruturas esbeltas. Durante a evolução deste trabalho, foi desenvolvido e testado um conjunto de ferramentas visando a análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada, tendo por base formulações no domínio do tempo e no domínio da frequência. Os resultados obtidos a partir da aplicação destas formulações a exemplos concretos foram comparados com as abordagens normativas em vigor.

De seguida, sistematizam-se os principais resultados obtidos em cada um dos capítulos da presente tese.

No capítulo 2 foram resumidas as bases teóricas da teoria de processos estocásticos, necessárias à compreensão e sistematização dos conceitos fundamentais relativos à caracterização da acção do vento, e avaliação dos seus efeitos sobre estruturas de engenharia civil. Neste capítulo foram abordadas as noções de processo estocástico e campo estocástico, bem como as principais grandezas envolvidas na sua caracterização. Foram apresentados os conceitos de homogeneidade, estacionaridade e de ergodicidade, tendo-se dado a importância necessária às grandezas que caracterizam este tipo de processos no domínio do tempo e no domínio da frequência.

No capítulo 3, foram apresentadas as formulações clássicas da Dinâmica Estrutural Estocástica Linear. Deste modo, iniciou-se a sistematização pela descrição das relações determinísticas e estocásticas excitação-resposta, no domínio do tempo e no domínio da frequências, para um oscilador linear de um grau de liberdade (1-GL), passando-se em seguida aos osciladores de múltiplos graus de liberdade (N-GL) e finalizando com a formulação modal.

O conteúdo destes dois capítulos iniciais é de grande relevância no contexto desta dissertação, proporcionando não só o “background” necessário ao tratamento de fenómenos relacionados com a acção do vento, como também ao tratamento de outros problemas no domínio das vibrações em estruturas (tais como a caracterização e identificação de parâmetros dinâmicos).

O capítulo 4 é dedicado exclusivamente à caracterização do vento na camada limite atmosférica e encontra-se subdividido em três secções.

A primeira secção foi dedicada à descrição das principais propriedades da atmosfera, dando especial importância aos principais mecanismos da génese dos ventos, revelando-se assim um panorama geral relativo aos principais mecanismos de funcionamento da camada limite atmosférica.

A segunda secção foi dedicada à definição da componente média associada à velocidade do vento. Nela foram descritas as várias leis de variação da velocidade média em altura, bem como os conceitos estatísticos e físicos subjacentes ao seu estabelecimento. Nesta secção, é ainda feita uma pequena síntese da abordagem preconizada por diversos códigos de referência mundial.

A terceira secção é dedicada à definição da componente turbulenta da acção do vento. Nesta secção, foram descritos todos os parâmetros estatísticos necessários à definição da componente turbulenta da acção do vento, tendo-se, à imagem do que foi realizado na secção anterior, sintetizado, para os mesmos códigos, a abordagem relativa a esta componente da acção.

No capítulo 5, foram sistematizados os princípios teóricos fundamentais relativos à análise do comportamento aerodinâmico de estruturas esbeltas. Este capítulo, tal como o anterior, divide-se em três secções distintas. Na primeira secção são abordados de forma resumida os principais conceitos relativos aos escoamentos livres, bem como em torno de corpos imersos, dando-se o devido realce à forma como os escoamentos poderão ser influenciados pela presença de um corpo no seu seio.

Na segunda secção, foram sistematicamente abordados os conceitos utilizados na construção de ferramentas para a análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada, quer no domínio da frequência, através de uma formulação modal, quer no domínio do tempo, através da geração de séries temporais de forças aerodinâmicas a partir de séries temporais de velocidade do vento.

Na apresentação das metodologias descritas nesta secção, tentou-se ser o mais genérico possível, com o intuito alargar o tratamento dos efeitos de rajada a todos tipos de estruturas susceptíveis de serem sensíveis a este tipo de solicitação.

Na secção final deste capítulo, foram abordados os principais conceitos de análise de vibrações laterais induzidas pela libertação de vórtices, dando-se especial ênfase ao caso de estruturas esbeltas de secção circular.

De modo a completar os temas abordados neste capítulo, e apesar de apenas ser aplicável a estruturas com um grau de complexidade bastante baixo, realizou-se uma pequena síntese dos procedimentos utilizados pela norma EN1991-1-4, para o tratamento tanto da acção devida aos efeitos de rajada, como devida aos fenómenos de libertação de vórtices.

O capítulo 6 é dedicado ao estudo do comportamento dinâmico de duas estruturas sob a acção do vento, tendo-se para tal implementado as metodologias sistematizadas nos capítulos anteriores.

O primeiro caso de estudo consiste numa chaminé metálica com 60 metros de altura, para a qual foram avaliados os efeitos de rajada seguindo as abordagens no domínio do tempo, no domínio da frequência e na óptica da regulamentação em vigor.

Para proceder à análise dos efeitos de rajada no domínio do tempo, foram gerados 5 grupos aos quais correspondem diferentes parâmetros de geração de séries. Nos três primeiros grupos, foram gerados 10 lotes de séries temporais, com conteúdo espectral no intervalo 0-2,5 Hz, diferindo entre eles, no número de pontos ao longo da estrutura onde foram geradas as séries em cada um dos lotes (isto é, no primeiro grupo os 10 lotes de séries foram gerados em 6 pontos, no segundo grupo em 15 pontos e no terceiro grupo em 30 pontos ao longo da estrutura). Estes três primeiros grupos foram gerados com o intuito de aferir a necessidade de maior ou menor, discretização da solicitação, de forma a obter maior precisão com o menor custo no tempo de geração das séries. Durante a geração destes grupos de séries foram escolhidos três pontos da estrutura para os quais se compararam as estimativas médias espectrais correspondentes aos 10 lotes de séries geradas em cada um desses pontos com as funções densidade espectral de potência das flutuações longitudinais da velocidade do vento nesses mesmos pontos, tendo-se observado uma aproximação bastante boa entre estas funções. Posteriormente, no quarto grupo, foram geradas 100 repetições das séries relativas a um ponto escolhido da estrutura, tendo-se posteriormente comparado novamente as funções densidade espectral das flutuações longitudinais com as estimativas médias espectrais referentes a 1, 5, 10, 25, 50 e 100 repetições de gerações. Deste procedimento, foi possível construir a curva da Figura 6.16, da qual se pode concluir que para obter um erro quadrático médio inferior a 20%, entre os valores obtidos nas estimativas médias espectrais e a função densidade espectral de potência, são necessárias cerca de 20 simulações, sendo que para ter um erro inferior a 10% são necessárias cerca de 100. No entanto se se quiser avaliar a evolução característica de uma determinada variável (por exemplo deslocamento) uma dezena de simulações é largamente suficiente.

Por fim, e ainda no domínio do tempo, gerou-se um quinto grupo, constituído por 10 lotes contendo cada lote as séries correspondentes à geração ao longo de 15 pontos da estrutura para uma frequência de corte de 20Hz. A geração deste quinto grupo tem a finalidade de poder captar o comportamento dinâmico da estrutura sob a acção da componente turbulenta da acção do vento com um conteúdo espectral que abrangesse os primeiros 4 modos de vibração longitudinais da estrutura, podendo assim aferir-se a participação de cada um dos 4 modos na resposta estrutural.

A análise no domínio da frequência dos efeitos de rajada sobre a chaminé foi realizada através de uma rotina programada em MATLAB e de modo a tentar captar os 4 primeiros modos longitudinais, pelo

que se limitou o conteúdo espectral a 30Hz. A excitação espectral foi gerada em 15 pontos ao longo da estrutura, tendo-se obtido as respectivas funções densidade espectral de resposta para cada um dos modos de vibração e consequentemente as quantidades relativas às variáveis de controlo previamente definidas.

A estrutura foi ainda analisada sob a óptica da regulamentação em vigor em Portugal (EN1991-1-4 e RSA). Os procedimentos estáticos adoptados por estas normas para o tratamento dos efeitos de rajada em estruturas baseiam-se na abordagem espectral, sendo que dadas as simplificações adoptadas apenas podem ser aplicados a casos de estruturas com baixo grau de complexidade, tal como a chaminé em análise. As repostas estruturais foram obtidas para três situações regulamentares. A primeira análise foi realizada segundo a abordagem da norma EN1991-1-4 e para uma probabilidade de excedência de 2%, já a segunda e a terceira análises foram realizadas segundo o regulamento Português – RSA – para as probabilidades de excedência de 5% (preconizada pelo regulamento) e de 2% (com o intuito de poder comparar com os valores das respostas estruturais referentes à norma EN1991-1-4).

Da comparação dos resultados obtidos através das diferentes metodologias de análise levadas a cabo, pôde concluir-se haver uma concordância muito pronunciada entre os valores das respostas relativas a cada uma destas. Os valores obtidos nas análises dinâmicas no domínio do tempo e no domínio da frequência apresentam-se em consonância, daí que se possa concluir que ambos os métodos se adequam perfeitamente à análise dos efeitos de rajada em estruturas lineares. Para ambos os métodos pode ainda concluir-se que a resposta estrutural relativa a variável de controlo deslocamento é influenciada, quase exclusivamente, pela participação do primeiro modo de vibração, já no caso da variável de controlo momento flector, denota-se um maior contributo dos modos de vibração de ordem maior ao primeiro modo.

Constata-se também que o uso de apenas 10 lotes de simulações temporais conduz a resultados bastante satisfatórios e em concordância com as restantes análises, apesar de a obtenção de maior precisão na aplicação do método aconselhar o uso de um maior número de lotes de séries.

As análises estáticas simplificadas, efectuadas para uma probabilidade de excedência de 0,02, conduziram a valores concordantes com os obtidos no decurso das análises de carácter dinâmico, pelo que estas metodologias simplificadas se podem considerar adequadas ao projecto de estruturas deste tipo.

No âmbito ainda da primeira aplicação, foi também analisada a susceptibilidade desta estrutura aos efeitos laterais induzidos pela libertação de vórtices. Das análises realizadas, pôde observar-se que a estrutura (sem qualquer dispositivo de controlo de vibrações) pode apresentar violentas oscilações

devido à libertação de vórtices, justificando-se deste modo o uso das alhetas helicoidais (adoptadas na estrutura real), com o intuito de prevenir qualquer problema relacionado com a libertação de vórtices.

O segundo caso de estudo descrito nesta dissertação consiste de uma antena com 265 metros de altura com sete níveis de espiamento. A presença dos cabos, neste caso pouco tensos, confere à estrutura um comportamento pronunciadamente não-linear geométrico. Partindo destes pressupostos procedeu-se à análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio do tempo e segundo a abordagem regulamentar da norma EN1993-3-1, com o intuito de obter a resposta estrutural tendo em conta o comportamento não-linear geométrico estrutural.

A estrutura foi idealizada através de um modelo em elementos finitos com recurso ao software comercial SOLVIA03. De modo a traduzir o comportamento real, não-linear, foi necessário estudar a discretização necessária, em elementos de barra, a que os cabos estariam sujeitos, tendo-se adoptado 20 elementos por cabo.

Para proceder à análise no domínio do tempo, geraram-se 10 lotes, contendo cada um deles séries temporais de forças aerodinâmicas correlacionadas entre si em correspondência com 59 pontos distribuídos uniformemente ao longo da altura do fuste e com um conteúdo espectral contido no intervalo 0-2,8 Hz. A qualidade do procedimento de geração, tal como na primeira aplicação, foi comprovada através da comparação das funções densidade espectral da flutuações da velocidade longitudinal do vento com as estimativas médias espectrais dos 10 lotes, correspondentes a 3 pontos escolhidos da estrutura.

Dado a estrutura ter comportamento não-linear geométrico procedeu-se à integração directa (através do método de Newmark) do sistema de equações do movimento de modo a obter a resposta estrutural, tendo-se para tal recorrido à formulação da Rayleigh para definir a matriz de amortecimento. A matriz de amortecimento utilizada de acordo com o prescrito contempla uma parcela de carácter estrutural e outra parcela de carácter aerodinâmico. Em estruturas com comportamento não-linear geométrico muito acentuado, como é o caso da antena espiada em estudo, a parcela do amortecimento aerodinâmico apresenta muito menor influência que no caso de estruturas com comportamento linear como é o caso da chaminé de 60 metros. De modo a comprovar esta observação procedeu-se a um cálculo exemplificativo, tendo-se deste resultado que a omissão do amortecimento aerodinâmico conduz a resultados cerca de 2,7% superiores aos registados para o caso dos deslocamentos no topo e 3,7% para o caso dos momentos no fuste num ponto à cota 256,5m.

Cada uma das análises ocorreu em duas fases. Na primeira fase foi realizada uma análise estática, em que a estrutura se considerou solicitada apenas pelo peso desta e pela componente média da força aerodinâmica, e na segunda fase foi conduzida uma análise passo-a-passo com o intuito de determinar

a resposta dinâmica da estrutura à solicitação turbulenta da acção do vento, partindo-se da configuração deformada anterior.

Para proceder à análise segundo a norma EN1993-3-1, partiu-se novamente do modelo utilizado nas análises no domínio do tempo, tendo este sido solicitado por diversos padrões de cargas estabelecidos segundo o método dos “trechos” de carga (“patch loads”), definido nesta norma. A resposta da estrutura à acção turbulenta do vento foi assim obtida a partir da combinação das respostas estáticas a cada um dos padrões de carga, considerados para a análise.

Os resultados obtidos relativos às deformações do fuste decorrentes das análises descritas revelaram uma aproximação bastante boa, contudo no que diz respeito aos momentos flectores o mesmo já não se pode dizer. Estes últimos apresentam uma pequena discrepância que possivelmente se deve à falta de algum conteúdo espectral relevante, dado que o procedimento de geração das séries foi limitado a 2,8 Hz, denotando-se desta forma que a limitação aconselhada pela norma EN1993-3-1 de 2,0Hz é muito restritiva, podendo invalidar a participação de modos de ordem mais elevadas na resposta. Deste modo, o uso da abordagem preconizada pela norma EN1993-3-1 pode considerar-se bastante adequada ao contexto de concepção e projecto de estruturas regulares deste tipo. Contudo, esta mesma norma prevê que, para estruturas com características mais complexas, fora dos padrões regulares considerados por esta, se deva proceder a análises com carácter dinâmico dos esforços, no domínio da frequência.

O uso de análises espectrais para a obtenção da resposta de estruturas com a presença de cabos, (sendo estes pouco tensos) é bastante questionável. A existência de cabos pouco tensos introduz na estrutura uma elevada componente não linear, que se traduz na variação das propriedades dinâmicas da estrutura em análise ao longo do carregamento, isto é, apesar de se proceder a análise espectral numa estrutura pré deformada com características dinâmicas bem conhecidas (dado que esta posição depende a componente estática do carregamento), a consideração das vibrações induzidas pela turbulência ocorrerá de forma linear em torno de um valor médio, o que na realidade não corresponde à verdade, pois a variação instantânea da tensão nos cabos devida a oscilação do fuste do mastro poderá originar um alívio ou um “endurecimento” do comportamento deste (dada a perda ou ganho de rigidez com as oscilações do fuste em torno de uma posição). Apesar de autores como Sparling [69] terem demonstrado que as técnicas de análise no domínio do tempo e no domínio da frequência podem conduzir a respostas numéricas similares em estruturas não muito complexas, o uso das análises espectrais a partir da linearização de sistemas com características não-lineares deverá ser acompanhado com algum cuidado, principalmente quando na presença de espiaamentos com elevado comportamento não-linear (cabos pouco tensos).

Pelos motivos apresentados, a abordagem no domínio do tempo constitui a metodologia mais adequada para o estudo dos efeitos de rajada em estruturas com acentuado comportamento não-linear. Apesar deste tipo de análises requerem maiores tempos de processamento, devido ao elevado número de realizações para se obter uma amostra bem caracterizada no domínio probabilístico, os resultados obtidos e os princípios aplicados apresentam um maior grau de aproximação ao comportamento real da estrutura, podendo melhor captar-se determinados fenómenos como o comportamento não-linear geométrico e a interacção cabos-estrutura.

Em estruturas com comportamento não-linear bastante acentuado, os fenómenos de interacção cabos estrutura desempenham um papel bastante importante no comportamento global, podendo dar origem ao aparecimento de uma quantidade numerosa de modos híbridos bem como, de fenómenos não lineares de excitação paramétrica dos cabos.

Torna-se importante referir ainda, e de acordo com o demonstrado no quadro 6.6, que os valores das tensões nas espigas obtidos das análises realizadas para a antena espiada pelos dois procedimentos de cálculo, apresentam valores bastante próximos no que diz respeito às espigas a barlavento, mas bastante, dispare relativamente às espigas a sotavento. Este aspecto deve-se principalmente ao facto de a componente não-linear geométrica das espigas a sotavento ser bastante mais acentuado que o das espigas a barlavento.

Além deste aspecto, pode ainda constatar-se que a tensão máxima nos cabos a barlavento pode ser avaliada de uma forma bastante segura através de um procedimento de cálculo quasi-estático, que se passa a descrever.

Conduzindo uma análise puramente estática das espigas a barlavento, considerando como solicitação o deslocamento do nó de extremidade induzido pelos valores extremos da configuração da deformada dinâmica do fuste, nesses nós de apoio das espigas, pode obter-se valores consistentes em cerca de 5% com os valores extremos das tensões obtidas das análises dinâmicas (ver Quadro 6.36). Pode concluir-se daí que o comportamento dinâmico dos cabos a barlavento, aparentemente não origina o aumento das tensões destes. Contudo para os cabos pouco tensos do lado a sotavento, o seu comportamento torna-se difícil de prever por procedimentos de análise mais simplistas, dada a não-linearidade que lhes é inerente. Estes cabos apresentam valores extremos das tensões obtidos a partir da análise temporal bastante superiores (cerca de cinco vezes) aos valores obtidos a partir do procedimento estático segundo a norma EN1993-3-1, o que pode indiciar a presença de fenómenos de excitação paramétrica.

No capítulo 7 foram abordadas as principais técnicas de controlo passivo e activo de vibrações induzidas pelo vento em estruturas. No domínio do controlo passivo de vibrações, foram referidas as

principais técnicas de controlo, tendo-se dado maior ênfase à aplicação de deflectores aerodinâmicos e de amortecedores de massas sintonizadas (“TMD’s”), apresentando-se uma aplicação prática desta última técnica ao caso de uma estrutura real. Dos resultados obtidos, pode concluir-se que a aplicação de um TMD é uma alternativa bastante viável relativamente ao dispositivo realmente implementado (alhetas helicoidais) na estrutura analisada.

Ainda neste capítulo, foi realizada uma breve apresentação dos principais conceitos teóricos, estratégias de controlo bem como de alguns exemplos concretos da aplicação prática ao controlo activo de vibrações induzidas pelo vento em estruturas.

8.2. Perspectivas de desenvolvimentos futuros

Neste trabalho foram sistematizados vários métodos de análise quasi-estacionária dos efeitos de rajada no domínio do tempo e no domínio da frequência. Assim, e dando o prosseguimento natural aos trabalhos realizados, pretende-se futuramente não só aperfeiçoar as metodologias estudadas, como também estendê-las ao domínio da aeroelasticidade, tendo assim em conta a interacção entre o fluido envolvente e a estrutura.

Na actualidade, dado os desafios lançados pelo aparecimento de estruturas extremamente leves e flexíveis, torna-se necessário o desenvolvimento de procedimentos e ferramentas capazes de avaliar de forma eficaz o comportamento destas sob o efeito da acção do vento. Estruturas como pontes atirantadas ou suspensas, coberturas com grandes vãos, ou mesmo, estruturas com grande desenvolvimento em altura, apresentam elevada sensibilidade aos efeitos desta acção.

Tradicionalmente este campo do conhecimento assenta numa base experimental, através de ensaios em túnel de vento e da instrumentação de estruturas reais, bastante sólida. Sob esta óptica, é de grande interesse a sistematização de um conjunto de conceitos e técnicas com o intuito de desenvolver campanhas experimentais com o fim de obter por esta via conhecimentos relativos à caracterização da acção do vento nos locais de implantação das estruturas, bem como à caracterização das propriedades aerodinâmicas e aeroelásticas, de modo a prever e melhorar o comportamento estrutural sob a acção do vento.

O progresso tecnológico tem beneficiado o desenvolvimento de avançadas técnicas numéricas de modelação estrutural, destacando-se dentro destas o recurso à Dinâmica Computacional de Fluidos (“CFD”), sendo já possível implementar numericamente a interacção entre o fluido e as estruturas (“FSI”). Sob este ponto de vista, o desenvolvimento de um conjunto de potentes ferramentas numéricas, como os métodos “Discrete Vortex Method - DVM” e de elementos finitos, combinadas e

calibradas com recurso a técnicas experimentais, poderá conduzir a instrumentos de grande utilidade no auxílio ao projecto, bem como na investigação de fenómenos relacionados com as instabilidades aerodinâmicas e aeroelásticas (previsão de velocidades críticas de ocorrência de fenómenos de flutter, vortex-shedding e galope, por exemplo em tabuleiros de pontes).

Estas ferramentas poderão também trazer grande contributo para a análise de estruturas com elevado grau de não-linearidade geométrica, como é o caso de estruturas com a presença de cabos (mastros espiados, pontes atirantadas, pontes suspensas e coberturas de estádios). Neste domínio poderão antever-se algumas linhas de investigação mais relacionadas com a interacção entre os cabos e a estrutura, destacando-se determinados fenómenos já enunciados durante esta dissertação, como é o caso do aparecimento de um elevado número de modos híbridos e os fenómenos não lineares de excitação paramétrica de tirantes.

A.1. Decomposição de Cholesky

Dada uma matriz definida positiva e simétrica S , a decomposição de Cholesky da matriz S é definida pela matriz triangular inferior H , com as mesmas dimensões e que satisfaz a seguinte condição [11]

$$S = H.H^T \quad (\text{A.1})$$

Expandindo esta equação,

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1i} & \cdots & s_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i1} & \cdots & s_{ii} & \cdots & s_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{N1} & \cdots & s_{Ni} & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \cdots & h_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{Ni} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1i} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{ii} & \cdots & h_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

e desenvolvendo a multiplicação matricial, coluna por coluna, poder-se-á concluir que a primeira coluna conduz a

$$\begin{cases} s_{11} = h_{11} \cdot h_{11} \\ s_{21} = h_{21} \cdot h_{11} \\ \vdots \\ s_{N1} = h_{N1} \cdot h_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_{11} = \sqrt{s_{11}} \\ h_{21} = s_{21}/h_{11} \\ \vdots \\ h_{N1} = s_{N1}/h_{11} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

enquanto a segunda coluna conduz a

$$\begin{cases} s_{22} = h_{21} \cdot h_{21} + h_{22} \cdot h_{22} \\ s_{32} = h_{31} \cdot h_{21} + h_{32} \cdot h_{22} \\ \vdots \\ s_{N2} = h_{N1} \cdot h_{21} + h_{N2} \cdot h_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_{22} = \sqrt{s_{22} - h_{21} \cdot h_{21}} \\ h_{32} = (s_{32} - h_{31} \cdot h_{21})/h_{22} \\ \vdots \\ h_{N2} = (s_{N2} - h_{N1} \cdot h_{21})/h_{22} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

sendo que este procedimento se repete para as restantes colunas.

Assim, este procedimento poderá ser sumarizado da forma que se passa a apresentar:

$$h_{11} = \sqrt{s_{11}} \quad (\text{A.5})$$

$$h_{ii} = \sqrt{s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2} \quad \text{para } i = 2, \dots, N-1 \quad (\text{A.6})$$

$$h_{ij} = \frac{s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik} h_{kj}}{h_{jj}} \quad \text{para qualquer } i > j \quad (\text{A.7})$$

$$h_{NN} = \sqrt{s_{NN}} \quad (\text{A.8})$$

B.1. Determinação numérica da função modal de transferência aerodinâmica

B.1.1. Solução directa

O cálculo dos efeitos da acção do vento no domínio da frequência envolve inevitavelmente o estabelecimento de funções modais de transferência aerodinâmica, normalizadas ou não-normalizadas.

Tal como apresentado na secção 5.3.1.2.3, esta representa a correlação estatística espacial, e aparece sob a forma de um integral do tipo,

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(\hat{x}_1).f(\hat{x}_2).\exp(-\mu.\Delta\hat{x})d\hat{x}_1d\hat{x}_2 \quad (\text{B.1})$$

onde $f(\hat{x})$ representa uma função de influência ou um modo de vibração, $\hat{x}$ uma coordenada adimensional entre 0 e 1 (ou seja, $\hat{x} = x/L$), $\Delta\hat{x} = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$ e $\mu = C_{e,m}^n.n.L/\bar{U}$ (com $m = y$ ou z , $n = u$ ou w e L a extensão da estrutura).

8.2.1. Solução numérica

Na maioria dos casos, a integração numérica é a solução mais simples para a determinação da função modal de transferência aerodinâmica, sendo que desta forma a equação (B.1) poderá ser substituída pela seguinte forma:

$$I = \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N f(\hat{x}_p).f(\hat{x}_k).\exp(-\mu.\Delta\hat{x}) \quad (\text{B.2})$$

onde $\Delta\hat{x} = |\hat{x}_p - \hat{x}_k|$ e N o número de pontos de integração. Deve salientar-se que geralmente deverá ser utilizado uma malha de integração com um esquema bastante refinado, isto é um elevado número de pontos de integração N . A razão para este princípio, assenta no facto de a função exponencial decrescer rapidamente, à medida que o seu argumento cresce [11].

B.1.1.1. Aplicação do procedimento numérico

Considere-se o caso hipotético de uma consola em que a função de influência pode ser representada por $f(\hat{x}) = x/L = \hat{x}$ e por simplicidade a coerência espacial definida por $\psi(\Delta\hat{x}) = \exp(-\Delta\hat{x})$, ao

escolher como incremento de integração o valor $\Delta x/L = 0,2$ (correspondente a 5 pontos), os valores da função influência $f(\hat{x})$ e da coerência espacial $\psi(\Delta\hat{x})$ são dados por

$$f(\hat{x}) = [0,1 \quad 0,3 \quad 0,5 \quad 0,7 \quad 0,9]^T \quad (\text{B.3})$$

$$\psi(\Delta\hat{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0,82 & 0,67 & 0,55 & 0,45 \\ 0,82 & 1 & 0,82 & 0,67 & 0,55 \\ 0,67 & 0,82 & 1 & 0,82 & 0,67 \\ 0,55 & 0,67 & 0,82 & 1 & 0,82 \\ 0,45 & 0,55 & 0,67 & 0,82 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

pelo que a multiplicação das funções de influência virá

$$f(\hat{x}_p) \cdot f(\hat{x}_k) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,03 & 0,05 & 0,07 & 0,09 \\ 0,03 & 0,09 & 0,15 & 0,21 & 0,27 \\ 0,05 & 0,15 & 0,25 & 0,35 & 0,45 \\ 0,07 & 0,21 & 0,35 & 0,49 & 0,63 \\ 0,09 & 0,27 & 0,45 & 0,63 & 0,81 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

e o produto interno $f(\hat{x}_p) \cdot f(\hat{x}_k) \cdot \psi(\Delta\hat{x})$ será então

$$f(\hat{x}_p) \cdot f(\hat{x}_k) \cdot \psi(\Delta\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,025 & 0,034 & 0,039 & 0,041 \\ 0,025 & 0,09 & 0,123 & 0,141 & 0,149 \\ 0,034 & 0,123 & 0,25 & 0,287 & 0,302 \\ 0,039 & 0,141 & 0,287 & 0,49 & 0,517 \\ 0,041 & 0,149 & 0,302 & 0,517 & 0,81 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Como se pode verificar, o produto interno $f(\hat{x}_p) \cdot f(\hat{x}_k) \cdot \psi(\Delta\hat{x})$ é simétrico segundo a diagonal e aumenta com o aumento da distância à base da consola.

Posto isto, o integral I pode ser obtido através de

$$I = \frac{1}{5^2} [0,01 + 0,09 + 0,25 + 0,49 + 0,81 + 2 \cdot (0,025 + 0,034 + 0,039 + 0,041 + 0,123 + 0,141 + 0,149 + 0,287 + 0,302 + 0,517)] \approx 0,2 \quad (\text{B.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Cremona, C.; Foucriat, J.-C. - "Comportement au vent des ponts", Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [2] Dyrbye, C.; Hansen, S. O. - "Wind Loads on Structures", John Wiley & Sons, 1997.
- [3] Simiu, E.; Scanlan, R. H. - "Wind Effects on Structures: Fundamental and Applications to Design", John Wiley & Sons, Third Edition, 1996.
- [4] Newland, D. E. - "An Introduction to Random vibrations, spectral and wavelet analysis", Longman Scientific & Technical, 1993.
- [5] Doob, J. L. - "Stochastic Processes", John Wiley & Sons, 1953.
- [6] Papoulis, A. - "Probability, random variables, and stochastic processes", McGraw-Hill, Second edition, 1986.
- [7] Yang, C. Y. - "Random Vibration of Structures", John Wiley & Sons, 1986.
- [8] Cunha, Á. - "Dinâmica Estrutural Estocástica - Aplicações à Engenharia Sísmica", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 1990.
- [9] Ortiz, K.; Paez, T. L.; Wirsching, P. H. - "Random Vibrations: Theory and Practice", John Wiley & Sons, 1995.
- [10] Azevedo, J. J. R. T. d. - "Vibrações Aleatórias - Dinâmica Estocástica", IST-UTL, Lisboa, 1996.
- [11] Strommen, E. - "Theory of Bridge Aerodynamics", Springer, 2006.
- [12] Clough, R.; Penzien, J. - "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, Second edition, 1993.
- [13] Mendes, P. A. M. - "Modelação Numerica do Comportamento Aerodinâmico de Estruturas Esbeltas", Tese de Doutoramento, IST-UTL, Lisboa, 1994.
- [14] wikipédia - "Vento", <http://pt.wikipedia.org/wiki/Vento>, 2007.
- [15] Baker, C. J. - "Wind engineering - Past, present and future", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 95(2007), 843-870, 2007.
- [16] Cook, N. - "Designers' Guide to EN 1991-1-4", Thomas Telford, 2007.
- [17] Davenport, A. G. - "Past, present and future of wind engineering", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 90(1), 1371-1380, 2002.
- [18] Holmes, J. D. - "Wind Loading of Structures", Spon Press, 2001.
- [19] "ISO4354 - Wind Actions on Structures", International Organization for Standardization, 1997.
- [20] "Australian/New Zealand Standard 1170.2 - Structural Design Actions - Wind Actions", Standards Australia / Standards New Zealand International Ltd, 2002.

- [21] "ASCE 07-05 - Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures", American Society of Civil Engineers, 2005.
- [22] "Recommendations for Calculating the Effects of Wind on Constructions", ECCS, (Technical Committee 12 - Wind), 1987.
- [23] "Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions", (EN 1991-1-4:2005), Comité Européen de Normalisation, Brussels, Belgium, 2005.
- [24] Holmes, J. D.; Baker, C. J.; English, E. C.; Choi, E. C. C. - "Wind structure and codification", Wind and Structures, Vol. 8(4), 235-250, 2005.
- [25] Holmes, J. D.; Kasperski, M.; Miller, C. A.; Zuranski, J. A.; Choi, E. C. C. - "Extreme wind prediction and zoning", Wind and Structures, Vol. 8(4), 269-281, 2005.
- [26] "Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes", DL 235/83, Diário da República, 1983.
- [27] Tamura, Y.; Kareem, A.; Solari, G.; Kwok, K. C. S.; Holmes, J. D.; Melbourne, W. H. - "Aspectsof the dynamic wind-induced response of structures and codification", Wind and Structures, Vol. 8(4), 251-268, 2005.
- [28] "AIJ Recommendations for Loads on Buildings", Architectural Institute of Japan, 2004.
- [29] Fermi, E. - "Termodinâmica", Livraria Almedina, 1973.
- [30] Cook, N. J. - "The designer's guide to wind loading of building structures (Part 1: Background, damage survey, wind data and structural classification)", Butterworths, 1985.
- [31] MCT-ADI/MCES - "Vento", <http://web.rcts.pt/~pr1085/Vento/Vento.htm>, 2002.
- [32] Davenport, A. G. - "The Dependence of Wind on Meteorological Parameters", Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, Canada.1967.
- [33] Davenport, A. G.; Isyumov, N. - "The Application of the Boundary Layer Wind Tunnel to the Prediction of Wind Loading", Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, Canada.1967.
- [34] Castanheta, M. - "Sobre a quantificação da acção do vento com vista à verificação da segurança de estruturas", nº 59/86, LNEC, Lisboa, 1986.
- [35] Zhou, Y.; Kijewski, T.; Kareem, A. - "Along-wind Load Effects on Tall Buildings: Comparative Study of Major International Codes and Standards", Journal of Structural Engineering, Vol. 128(6), 788-796, 2002.
- [36] Sockel, H. - "Wind-Excited Vibrations of Structures", Springer - Verlag, 1994.
- [37] Koeten, H. v. - "Wind Measurements of High Buildings in the Netherlands", Wind Effects on Buildings and Structures, Ottawa, Canada.1967.
- [38] Editora, P. - "Dicionário da Língua Portuguesa 2007", Porto Editora, 2006.
- [39] Cook, N. J. - "The designer's guide to wind loading of building structures (Part 2: Static structures)", Butterworths, 1985.

- [40] Scruton, C. - "Aerodynamics of Structures", Wind Effects on Buildings and Structures
Ottawa, Canada.1967.
- [41] Simiu, E.; Miyata, T. - "Design Of Buildings And Bridge For Wind", John Wiley & Sons,
First Edition, 2006.
- [42] Shinozuka, M. - "Simulation of multivariate and multi-dimensional random processes", The
Journal of Acoustical Society of America, Vol. 49(1), 357-367, 1971.
- [43] Shinozuka, M. - "Monte Carlo solution of structural dynamics", Computers and Structures,
Vol. 2(1972), 855-874, 1972.
- [44] Shinozuka, M.; Deodatis, G. - "Simulation of stochastic processes by spectral representation",
Rev. Applied Mechanics, Vol. 44(4), 191-204, 1991.
- [45] Shinozuka, M.; Jan, C. - "Digital simulation of random processes and its applications", Journal
of Sound and Vibrations, Vol. 25(1), 111-128, 1972.
- [46] Deodatis, G. - "Simulation of Ergodic Multivariate Stochastic Processes", Journal of
Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 122(8), 778-787, 1996.
- [47] Barbosa, J. N. - "Mecânica dos Fluidos e Hidráulica Geral", Porto Editora, 1985.
- [48] Lopes, A. V. - "Aplicação da Dinâmica Computacional de Fluidos à Análise Aeroelástica de
Estruturas Esbeltas." Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra,
Coimbra, Portugal, 2002.
- [49] Mendes, P. M.; Branco, F. - "Análise dos Efeitos de Rajada de Vento no Tabuleiro da Ponte
Vasco da Gama", IST, 1995.
- [50] "Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance - Part 1: General rules, seismic
actions and rules for buildings", (EN 1998-1:2004), Comité Européen de Normalisation,
Bruxels, Belgium, 2004.
- [51] Mendes, P. M. - "Geração de amostras de processos estocásticos gaussianos estacionários
através de sobreposição de harmónicas - Aplicação a séries de velocidade do vento", IST,
1995.
- [52] Yang, J. - "Simulation of random envelope processes", Journal of Sound and Vibrations, Vol.
25(1), 111-128, 1972.
- [53] Hérmou, P.; Santi, F. - "Simulation of a spatially correlated turbulent velocity field using
biorthogonal decomposition", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.
95(2007), 21-29, 2007.
- [54] Tubino, F.; Solari, G. - "Gust buffeting of long span bridges by Double Modal
Transformation", EACWE4 - The Fourth European & African Conference on Wind
Engineering, Prague.2005.
- [55] Paola, M. D. - "Digital simulation of wind field velocity", Journal of Wind Engineering and
Industrial Aerodynamics, Vol. 74-76(1998), 91-109, 1998.
- [56] Tranvik, P.; Alpsten, G. - "Dynamic Behaviour under Wind Loading of a 90m Steel
Chimney", Alstom Power Sweden/ Stalbyggnadskontroll, 2002.

- [57] "CICIND - Model Code for Steel Chimney", (Revision 1 / Amendment A), CICIND, Zurich, Switzerland, 1999, 2002.
- [58] Structures, C. - "SAP2000 v.11", Berkeley, California, 2007.
- [59] AB, S. E. - "SOLVIA 03", Västerås, Sweden, 2003.
- [60] Mathworks - "Matlab R2007a", Natick, Massachusetts, 2007.
- [61] "Eurocode 3: Design of steel structures - Part 3-2: Towers, Masts and Chimneys - Chimneys", (EN 1993-3-2:2006), Comité Européen de Normalisation, Brussels, Belgium, 2006.
- [62] Fischer, O. - "Wind-excited vibrations - Solution by passive dynamic vibration absorbers of different types", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 95(2007), 1028-1039, 2007.
- [63] Kasperski, M. - "Designing tuned mass damper systems for uncertain structural parameters", EVACES'07, Porto.2007.
- [64] Caetano, E. d. S. - "Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges", SED nº9, IABSE, 2007.
- [65] Irvine, H. M. - "Cable Structures", MIT, 1981.
- [66] "Eurocode 3: Design of steel structures - Part 3-1: Towers, Masts and Chimneys - Towers and masts", (EN 1993-3-1:2006), Comité Européen de Normalisation, Brussels, Belgium, 2006.
- [67] Sparling, B. F.; Davenport, A. G. - "Three-dimensional dynamic response of guyed towers to wind turbulence", Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 25(1998), 512-525, 1998.
- [68] Sparling, B. F.; Wegner, L. D. - "Comparison of frequency- and time-domain analyses for guyed masts in turbulent winds", Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 33(2006), 169-182, 2006.
- [69] Sparling, B. F.; Wegner, L. D. - "Estimating peak wind load effects in guyed masts", Wind and Structures, Vol. 10(4), 347-366, 2007.
- [70] Kim, H.-K.; Shinozuka, M.; Chang, S.-P. - "Geometrically Nonlinear Buffeting Response of a Cable-Stayed Bridge", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 130(7), 848-857, 2004.
- [71] Sparling, B. F.; Davenport, A. G. - "Nonlinear dynamic behaviour of guy cables in turbulent winds", Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 28(2001), 98-110, 2001.
- [72] Oudin, G. - "Design of Extrem Slender Guyed Structures", CICIND REPORT, Vol. 23(2), 79-85, 2007.
- [73] Hartog, D. - "Mechanical Vibrations", Mcgraw-hill Book Company, Inc, 1956.
- [74] Bachmann, H. - "Vibration Problems In Structures: Pratical Guidelines", Birkhauser, 1997.
- [75] Beards, C. F. - "Structural Vibration: Analysis and Damping", Arnold (John Wiley & Sons Inc.), 1996.
- [76] Borges, A. R. J. - "Aerodinâmica das Estruturas Verticais Esbeltas - Aspectos da constituição da camada limite atmosférica e do comportamento dinâmico das estruturas", LNEC, 1977.

- [77] Moutinho, C. M. R. - "Controlo Passivo e Activo de Vibrações em Pontes de Peões", Tese de Mestrado, FEUP, Porto, Portugal, 1998.
- [78] Klein, H. W.; Kaldenbach, W. - "A NEW VIBRATION DAMPING FACILITY FOR STEEL CHIMNEYS", GERB - Technical Reports Vol. 2001.
- [79] Shum, K. M.; Xu, Y. L.; Guo, W. H. - "Wind-induced vibration control of long span cable-stayed bridges using multiple pressurized tuned liquid column dampers", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 98(2008), 166–192, 2008.
- [80] Falcó, X.; Aparicio, A. C.; Barbat, A. H.; Rodellar, J. - "Control activo de puentes sometidos a cargas de tráfico", CIMNE, 1990.

