

Estudo Analítico da Transferência de Calor num Escoamento Laminar de um Fluido de Bingham com Dissipação Viscosa

Jorge Avelino Da Cunha Faria

Relatório do Projecto Final – MIEM

Orientador:

Prof. Paulo José da Silva Martins Coelho



FEUP **FACULDADE DE ENGENHARIA**
UNIVERSIDADE DO PORTO

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Julho 2010

Resumo

Neste trabalho realizou-se um estudo analítico da transferência de calor num escoamento laminar, em tubos de secção circular, de um fluido de Bingham com dissipação viscosa. Obteve-se assim, por integração da equação de energia, as equações de cálculo do número Nusselt, Nu , e dos perfis de temperatura num escoamento laminar completamente desenvolvido, com fluxo de calor constante na parede e dissipação viscosa. Posteriormente, analisou-se o comportamento dos perfis de temperatura e do número de Nusselt e a influência sobre estes do número de Brinkman generalizado, Br^* , e das características do fluido.

Inicialmente, fez-se uma análise para um dado fluido de Bingham estudando-se o efeito do número de Reynolds e do diâmetro da conduta sobre o número de Nusselt. Posteriormente, realizou-se uma análise do efeito do número de Brinkman sobre o número de Nusselt de uma forma genérica e que, portanto, é válida para qualquer fluido de Bingham, e diâmetro de tubagem, em regime laminar. Seguidamente, efectuou-se uma análise dos perfis de temperatura, para diferentes números de Brinkman e diferentes valores do parâmetro U^+ .

A correcta contabilização do calor gerado por efeitos viscosos por parte do número de Brinkman é crucial para a correcta determinação posterior do número de Nusselt.

Analytical study about the heat transfer in a laminar flow, in circular cross section tubes, of a Bingham fluid with viscous dissipation

Abstract

In this dissertation it was realized an analytical study about the heat transfer in a laminar flow, in circular cross section tubes, of a Bingham fluid with viscous dissipation. The mathematical expressions of Nusselt, Nu , and temperature profile were obtained from the integration of the energy equation for a fully developed laminar flow, with constant heat flux on the wall and viscous dissipation. The behavior of the temperature profiles and Nusselt number and influence on these of the generalized Brinkman number, Br^* , and the fluid characteristics was then studied.

Initially, it was analyzed, for a certain Bingham fluid, the effect of the Reynolds number and the tube diameter in Nusselt number. Afterwards, a generic analysis of the Brinkman number effect upon the Nusselt number, valid for any Bingham fluid and pipe diameter, in laminar flow conditions was elaborated. The temperature profiles were also analyzed, for different Brinkman numbers and different values of U^+ .

The proper accounting, by the Brinkman number, of the heat generated by viscous effects it's crucial for the correct Nusselt number determination.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Paulo José da Silva Martins Coelho por toda a sua disponibilidade, ajuda, paciência e presença constante em todos os momentos. Muito obrigado por tudo.

Agradeço ao meu pai, Armindo, amigo de todas as horas, sempre disponível e presente, que tanto lutou comigo para que este objectivo fosse concretizado. Um obrigado à minha mãe, Arminda, por todo o apoio demonstrado, obrigado pela confiança que sempre depositaste em mim. Agradeço a todos os meus irmãos.

Quero agradecer também à pessoa que me tem acompanhado e apoiado ao longo destes anos para vencer esta luta, obrigada Marisa.

Índice de figuras

Figura 1.1 Variação da tensão de corte em função da taxa de deformação para os fluidos puramente viscosos.....	2
Figura 1.2 Comparação das curvas de viscosidade do Modelo de Bingham e Lei de Potência, $n < 1$	6
Figura 1.3 Comparação do perfil de velocidades dado pelo Modelo de Bingham, com o obtido pela Lei de Potência. Equações (1.4) e (1.7) respectivamente	7
Figura 1.4 Relação entre a viscosidade e a taxa de deformação.....	9
Figura 2.1 Escoamento laminar estacionário e as suas condições de fronteira	20
Figura 4.1 Análise do número de Nu relativamente ao número de Re' para diferentes diâmetros	30
Figura 4.2 Perfis de velocidade adimensionalizados para vários diâmetros de conduta e $Re' = 1000$	31
Figura 4.3 Relação entre o parâmetro a e U^+	33
Figura 4.4 Análise para o caso de $Br^* > 0$	34
Figura 4.5 Inverso do Nu para $Br^* = 0$	35
Figura 4.6 Análise para o caso de $Br^* \leq 0$	37
Figura 4.7 Análise para o caso de $Br > 0$ da literatura	38
Figura 5.1 Dissipação viscosa em função do raio	40
Figura 5.2 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $0 \leq Br^* \leq 1$	41
Figura 5.3 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $Br^* \geq 1$	42
Figura 5.4 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$	43
Figura 5.5 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $Br^* \leq -1$	43
Figura 5.6 Ampliação do perfil de temperaturas junto à parede para $-1 \leq Br^* \leq 0$	44
Figura 5.7 Perfis de temperatura para $Br^* = -0,2$ e vários valores de U^+	45
Figura B.1 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $0 \leq Br^* \leq 1$	68
Figura B.2 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$	69
Figura B.3 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $0 \leq Br^* \leq 1$	69
Figura B.4 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$	70
Figura B.5 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $Br^* \geq 1$	70
Figura B.6 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $Br^* \leq -1$	71
Figura B.7 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $Br^* \geq 1$	71

Figura B.8 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $Br^* \leq -1$	72
---	----

Índice de tabelas

Tabela 1. Características do fluido	29
Tabela A.12. Relação entre o parâmetro U^+ e o Nu com variação do Br^*	51

Nomenclatura

Br^*	Número de Brinkman generalizado $Br^* = \bar{U}\tau_w/8q_w$	
Br	Número de Brinkman $Br = \eta\bar{U}^2/\dot{q}_w D$	
C_p	Calor específico do fluido	kJ/kgK
D	Diâmetro do tubo	m
D_{ij}	Tensor de deformação	Pa
f	Coeficiente de fricção de Darcy $f_F = 16/Re'$ ou $f = 64/Re'$	
h	Coeficiente de convecção	W/m ² K
k	Condutividade térmica	W/mK
n	Índice de potência (modelo lei de potência)	
Nu	Número de Nusselt	
P	Pressão	N/m ²
$\mathcal{P}$	Perímetro da tubagem	m
Pe	Número de Péclet	
$\dot{q}_w$	Fluxo de calor constante na parede, positivo quando aquece o fluido	W/m ²
R	Raio da conduta	m
r	Coordenada radial	m
r_0	Posição radial na conduta onde $\tau_{rx} = \tau_0$	m
r^*	Coordenada radial adimensional $r^* = r/R$	
Re	Número de Reynolds	
$T_m \equiv \bar{T}$	Temperatura da mistura	K
T_w	Temperatura da parede	K
T_0	Temperatura de entrada	K
T^*	Temperatura adimensional	
$\bar{U}$	Velocidade média de escoamento	m/s
u	Componente velocidade axial	m/s
u^*	Componente velocidade axial adimensional $u^* = u/\bar{U}$	
v	Componente velocidade radial	m/s
v^*	Componente da velocidade radial adimensional $v^* = v/\bar{U}$	

$\dot{V}$	Caudal volúmico	m^3/s
$\dot{W}$	Potência dissipada por fricção	kW
$\dot{w}$	Potência dissipada por fricção por unidade de área	kW/m^2
x^*	Coordenada axial adimensional $x^* = x/D$	
x	Coordenada axial	m
α	Difusividade térmica	$\text{W}/\text{m}^2\text{k}$
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação	s^{-1}
η	Viscosidade de corte	Ns/m^2
μ_0	Viscosidade plástica (modelo de Bingham)	Ns/m^2
μ	Viscosidade	Ns/m^2
ν	Viscosidade cinemática	Ns/m^2
ρ	Massa volúmica do fluido	kg/m^3
τ_0	Tensão de cedência (modelo de Bingham)	Pa
τ_{rx}	Tensão de corte	Pa
τ_w	Tensão de corte da parede	Pa
τ^*	Tensão de corte adimensional $\tau^* = \tau_{rx}/\tau_w$	

Índice de conteúdos

1	Introdução.....	1
1.1	Modelos Reológicos	1
1.2	Números adimensionais	7
1.2.1	Número de Reynolds e número de Prandtl.....	7
1.2.2	Número de Nusselt	10
1.2.3	Forma genérica do número de Brinkman	11
1.2.4	Número de Bingham.....	12
1.3	Revisão Bibliográfica	12
1.4	Objectivo.....	14
2	Equação de Energia e condições fronteira	15
2.1	Introdução	15
2.2	Equações diferenciais	15
2.3	Adimensionalização das equações.....	16
2.4	Apresentação das Condições de Fronteira	19
2.4.1	Adimensionalização das condições de fronteira.....	21
2.5	Expressão de cálculo do número de Nusselt.....	21
3	Integração da Equação de Energia	23
3.1	Introdução	23
3.2	Integração da equação da energia	23
3.3	Cálculo da temperatura da mistura	25
3.4	Cálculo do número de Nusselt.....	26
4	Análise do efeito da dissipação viscosa no Nu	29
4.1	Introdução	29
4.2	Análise do número de Nu relativamente ao número de Re'	29
4.3	Parâmetro U^+	31
4.4	Relação entre o número de Nusselt e o parâmetro U^+	33
4.4.1	Análise para caso de $Br^* > 0$	34
4.4.2	Análise para caso de $Br^* < 0$	35
4.4.3	Análise do caso de $Br > 0$ usando a expressão da literatura	37
5	Análise do perfil de temperaturas e influência da dissipação viscosa.....	39
5.1	Introdução	39
5.2	Dissipação viscosa em função do raio	39

5.3	Análise do perfil de temperaturas	41
5.3.1	Perfis de temperatura para $U^+ = 0,001$	41
5.3.2	Perfis de temperatura para $Br^* = -0,2$ e vários valores de U^+	44
6	Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	47
6.1	Conclusões	47
6.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	47
	Referências Bibliográficas.....	48
	ANEXO A	50
	ANEXO B	68

1 Introdução

Neste capítulo, para além da revisão bibliográfica, será apresentada toda a informação relevante para uma melhor compreensão da metodologia utilizada. Para tal, será feito inicialmente uma apresentação dos modelos reológicos relevantes e dos perfis de velocidade inerentes, bem como dos números adimensionais usados.

1.1 Modelos Reológicos

O estudo da transferência de calor dos fluidos não-Newtonianos é mais complicado do que a dos fluidos Newtonianos devido à sua natureza não linear da relação tensão/deformação. A principal razão da necessidade do estudo dos fluidos não-Newtonianos deve-se, por um lado, à sua natureza complexa e às suas interacções complexas com o escoamento, e por outro lado, à necessidade cada vez maior de melhorar os métodos de dimensionamento de equipamentos, ao nível da transferência de calor e de perdas de carga, onde sejam intervenientes fluidos não-Newtonianos.

Metzner A. B. (1965) classificou os fluidos em três grupos distintos:

- Fluidos puramente viscosos;
- Fluidos viscoelásticos;
- Fluidos dependentes do tempo.

Os fluidos Newtonianos são uma subclasse dos fluidos puramente viscosos.

Os fluidos não-Newtonianos puramente viscosos estão divididos em duas categorias, fluidos espessantes regressivos (pseudoplásticos), onde existe uma diminuição de viscosidade com a taxa de deformação e os fluidos dilatantes, em que existe o aumento da viscosidade com o aumento da taxa de deformação. A figura 1.1 exibe de uma forma simples a evolução da tensão de corte em função da velocidade de deformação para os fluidos puramente viscosos.

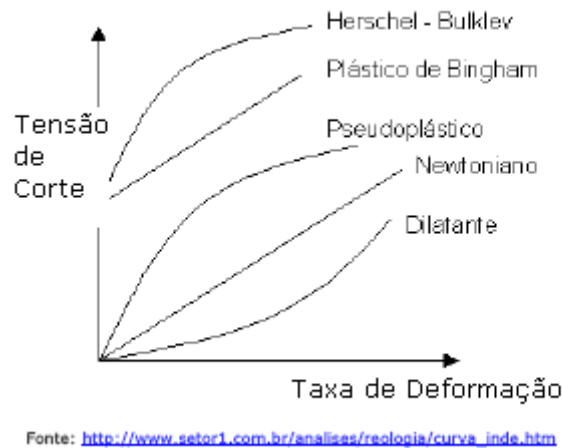


Figura 1.1 Variação da tensão de corte em função da taxa de deformação para os fluidos puramente viscosos

Os fluidos viscoelásticos, além de poderem possuir uma tensão de corte dependente da taxa de deformação, idêntica às dos fluidos inelásticos, possuem memória, ou seja, apresentam características elásticas.

De acordo com a literatura, a transferência de calor dos fluidos viscoelásticos numa conduta de secção circular com escoamento laminar não difere significativamente da transferência de calor dos fluidos inelásticos que possuam a mesma curva de viscosidade, pelo menos em escoamentos onde o perfil de velocidades se encontra plenamente desenvolvido.

Num escoamento de fluidos Newtonianos dentro de um tubo a transição de laminar para turbulento é tipicamente definida por $Re = 2100$.

Num escoamento para fluidos não-Newtonianos puramente viscosos, a literatura apresenta um ligeiro aumento de Re na transição de laminar para turbulento, no entanto, o valor de 2100 pode continuar a ser usado como critério de transição.

Num escoamento de fluidos viscoelásticos, o número Re de transição é significativamente maior que 2100, sendo aproximadamente de 6000, o que torna o regime laminar mais comum nestes fluidos.

1.1.1 Fluido de Bingham

Este tipo de fluido necessita ser sujeito a uma tensão inicial, superior à tensão de cedência do modelo, τ_0 , para haver escoamento.

A viscosidade plástica μ_0 e a tensão de cedência τ_0 são os parâmetros do modelo reológico de um material de Bingham cuja curva de viscosidade é dada pela seguinte relação:

$$\eta = \mu_0 + \tau_0 / \dot{\gamma} \quad \text{para } \tau_{rx} \geq \tau_0$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{para } \tau_{rx} \leq \tau_0$$
(1.1)

Onde a variável η representa a viscosidade de corte que tende para o valor de μ_0 quando a taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, tende para um valor muito elevado.

Num escoamento genérico, a taxa de deformação é igual ao segundo invariante do tensor taxa de deformação (D_{ij}) , que no caso de escoamento desenvolvido numa conduta de secção circular fica reduzido a du/dr .

Para qualquer fluido a escoar num tubo de secção circular, um balanço de forças a um elemento de fluido cilíndrico num troço de conduta conduz à seguinte relação:

$$\tau_{rx} = (dP/dx)r/2$$
(1.2)

onde τ_{rx} é tensão de corte, P é a pressão e r é a coordenada radial. Como na parede a coordenada r é igual ao raio do tubo, $r = R$, e a tensão de corte é igual à tensão de corte na parede, $\tau_{rx} = -\tau_w$, a equação anterior toma a seguinte forma:

$$\tau_{rx} = -\tau_w r/R$$
(1.3)

Combinando a equação anterior com a equação do modelo reológico em causa, neste caso para o fluido de Bingham, e substituindo neste $\dot{\gamma}$ por du/dr é possível obter por integração a expressão do perfil de velocidades bem como da velocidade média, ver Khatyr *et al.* (2002) e Coelho e Pinho (2008). O perfil de velocidades do fluido de Bingham em escoamento laminar numa conduta de secção circular é pois dado por:

$$u(r) = \begin{cases} \bar{U} \frac{2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2a \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right]}{1 - \frac{4a}{3} + \frac{a^4}{3}} & \text{se } r_0 \leq r \leq R \\ \bar{U} \frac{2(1-a)^2}{1 - \frac{4a}{3} + \frac{a^4}{3}} & \text{se } 0 \leq r \leq r_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

onde, a representa os quocientes $\tau_0/\tau_w = r_0/R = r_0^*$, sendo r_0 a posição radial abaixo do qual a taxa de deformação é nula, onde τ_0 é a tensão de cedência do fluido de Bingham e $\bar{U}$ representa a velocidade média na conduta, sendo dada pela seguinte expressão:

$$\bar{U} = \frac{D\tau_w}{8\mu_0} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\tau_w} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^4 \right] = \frac{D\tau_w}{8\mu_0} \left[1 - \frac{4}{3} a + \frac{1}{3} a^4 \right] \quad (1.5)$$

1.1.2 Fluido Lei da Potência

Este modelo é aqui apresentado pois vai ser utilizado para definir o número de Reynolds generalizado que vai caracterizar o escoamento, conforme se verá na próxima secção. Este modelo é caracterizado pela seguinte relação entre a viscosidade de corte e a taxa de deformação:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.6)$$

onde, n é o índice de potência e o K o índice de consistência, a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ é obtida pelo segundo invariante do tensor taxa de deformação (D_{ij}) , que, como se referiu anteriormente, no caso de escoamento desenvolvido numa conduta de secção circular fica reduzido a $\dot{\gamma} = du/dr$.

Para $n=1$ obtém-se um fluido com viscosidade constante, Newtoniano. Quanto mais pequeno for o n , maior é a redução da viscosidade com a taxa de deformação, fluido pseudoplástico e para $n>1$ temos os fluidos dilatantes.

De um modo análogo ao referido anteriormente para o modelo de Bingham é possível obter o perfil de velocidades num escoamento laminar numa conduta de secção circular para um fluido lei de potência. O referido perfil é dado pela seguinte equação:

$$\frac{u}{\bar{U}} = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] \quad (1.7)$$

Sendo a velocidade média $\bar{U}$ dada pela seguinte equação, Byrd *et al.* (1987):

$$\bar{U} = \frac{R}{\left(\frac{1}{n} + 3 \right)} \left(\frac{\tau_w}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.8)$$

1.1.3 Comparação dos Modelos Bingham e Lei de Potência

Na figura 1.2 apresenta-se, de forma genérica, as curvas de viscosidade dos modelos de Bingham, equação (1.1), e lei de potência, $n < 1$, equação (1.6). Como se pode ver o fluido de Bingham apresenta também características pseudoplásticas com a viscosidade a tender para um patamar de valor μ_0 , para taxas de deformação mais elevadas. Como seria de esperar, num gráfico Log-Log, a representação da viscosidade com a taxa de deformação, no modelo lei de potência, adquire uma forma linear.

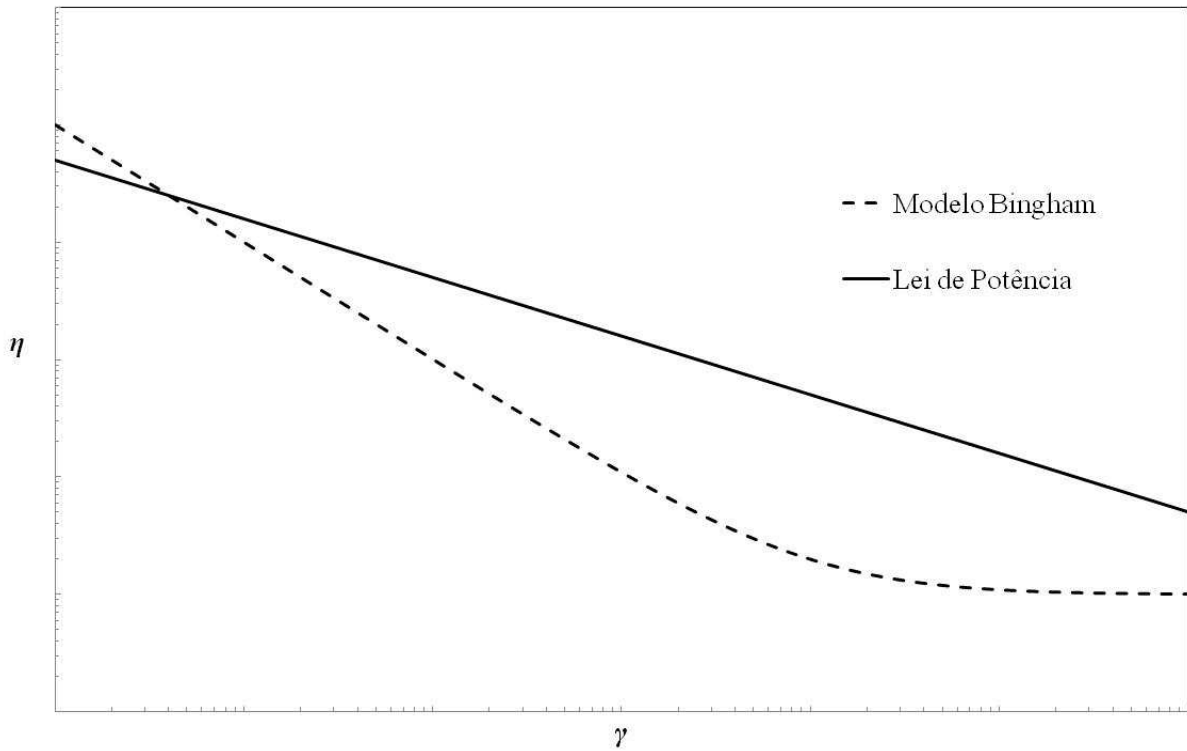


Figura 1.2 Comparação das curvas de viscosidade do Modelo de Bingham e Lei de Potência, $n < 1$

Na figura 1.3, comparam-se vários perfis de velocidade adimensional, numa conduta de secção circular, para os fluidos de Bingham, apenas função de a , equação (1.4), e lei de potência, apenas função de n , equação (1.7). Como se pode ver, para $a = 0$ o perfil de velocidade é coincidente com o de $n = 1$, perfil este Newtoniano, o mesmo sucedendo no extremo oposto, $a = 1$ e $n = 0$, onde o perfil de velocidade tende para um perfil pistão.

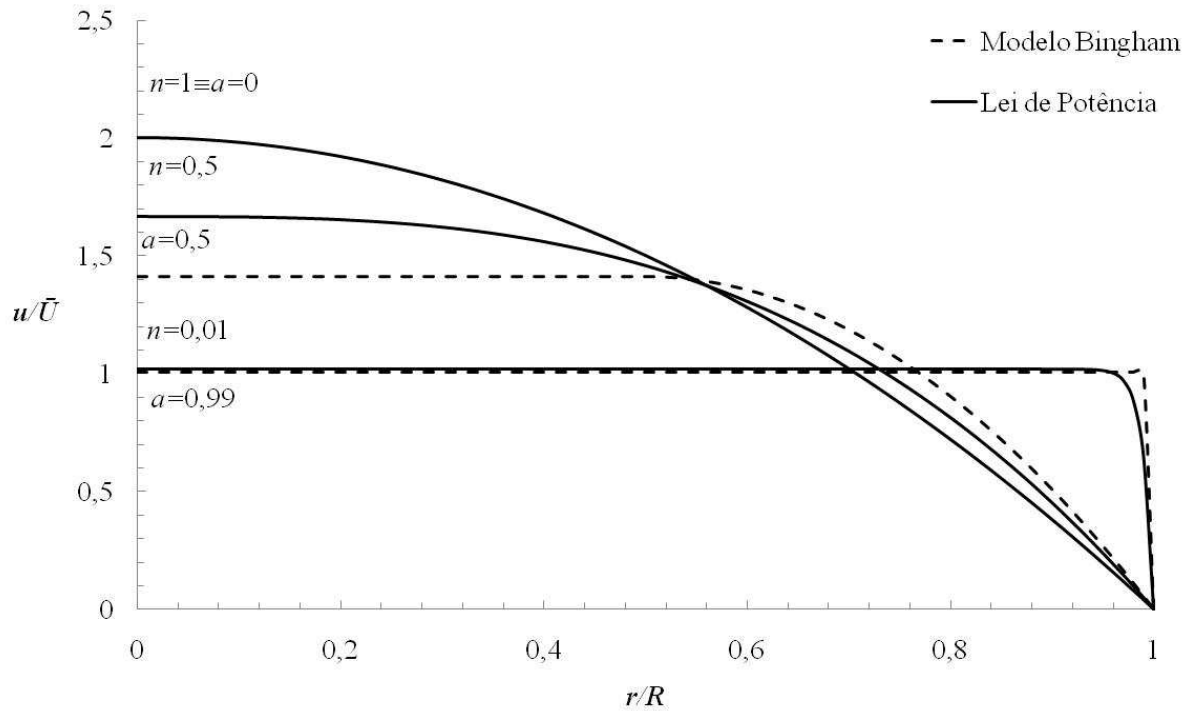


Figura 1.3 Comparação do perfil de velocidades dado pelo Modelo de Bingham, com o obtido pela Lei de Potência. Equações (1.4) e (1.7) respectivamente

1.2 Números adimensionais

Nesta secção vão ser apresentados todos os números adimensionais utilizados ou referidos neste trabalho e o seu significado.

1.2.1 Número de Reynolds e número de Prandtl

O número de Reynolds, que é comum para os fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, representa o quociente entre as forças de inércia e as forças viscosas, e é definido por:

$$Re = \frac{\rho \bar{U} D}{\eta} \quad (1.9)$$

onde, ρ é a massa volúmica do fluido, $\bar{U}$ a velocidade média na conduta, D o diâmetro da conduta e η a viscosidade de corte.

As forças viscosas têm grande importância para valores de Re baixos e as forças de inércia assumem um papel preponderante para valores de Re superiores a 2100.

O número de Prandtl, também é utilizado em fluidos Newtonianos e não-Newtonianos, representa a razão entre a difusividade da quantidade de movimento e a difusividade térmica:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu}{\left(\frac{k}{\rho C_p} \right)} \quad (1.10)$$

Onde, ν é a viscosidade cinemática e α é a difusividade térmica do fluido que é definida por $k/\rho C_p$, onde k é condutividade térmica do fluido, ρ a massa volúmica do fluido e C_p o calor específico.

O produto entre o número de Reynolds e o número de Prandtl é chamado de número de Péclet e é dado por:

$$Pe = RePr = \frac{\rho \bar{U} D C_p}{k} = \frac{\bar{U} D}{\alpha} \quad (1.11)$$

Este é independente da viscosidade do fluido, no entanto, continua a ser dependente de outras propriedades do fluido.

Para fluidos não-Newtonianos que obedecem à lei de potência a escoar no interior de condutas, é frequentemente utilizado um número de Reynolds e de Prandtl generalizado. O número de Reynolds, Re' , é calculado de forma a que o coeficiente de fricção de Fanning, f_F , ou de Darcy, f , para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos num escoamento laminar tende a convergir numa só curva, que é dada por $f_F = 16/Re'$ ou $f = 64/Re'$.

$$\eta' = K' \left(\frac{8\bar{U}}{D} \right)^{n-1}, Re' = \frac{\rho \bar{U} D}{\eta'} = \frac{\rho \bar{U}^{2-n} D^n}{K' 8^{n-1}}, Pr' = \frac{\eta' C_p}{k} = \frac{k' \left(\frac{8\bar{U}}{D} \right)^{n-1} C_p}{k} \quad (1.12)$$

O coeficiente K' está relacionado com o índice de consistência (K) e o índice de potência (n), sendo dado pela seguinte expressão:

$$K' = K \left(\frac{3n+1}{4n} \right) \quad (1.13)$$

K' surgiu na equação que calcula a tensão de corte na parede, τ_w , para um escoamento laminar completamente desenvolvido numa conduta de secção circular, $\tau_w = K' \left(8\bar{U}/D \right)^n$ e η' não é mais que o quociente de τ_w por $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$, sendo esta última a taxa de deformação na parede num escoamento laminar de um fluido Newtoniano num tubo de secção circular. Esta definição de número de Reynolds será também a definição que irá ser utilizada neste trabalho, com o n e a viscosidade, sendo calculados para cada valor local da taxa de deformação, $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$, consoante a curva de viscosidade do modelo de Bingham utilizado, conforme se esquematiza na figura 1.4:

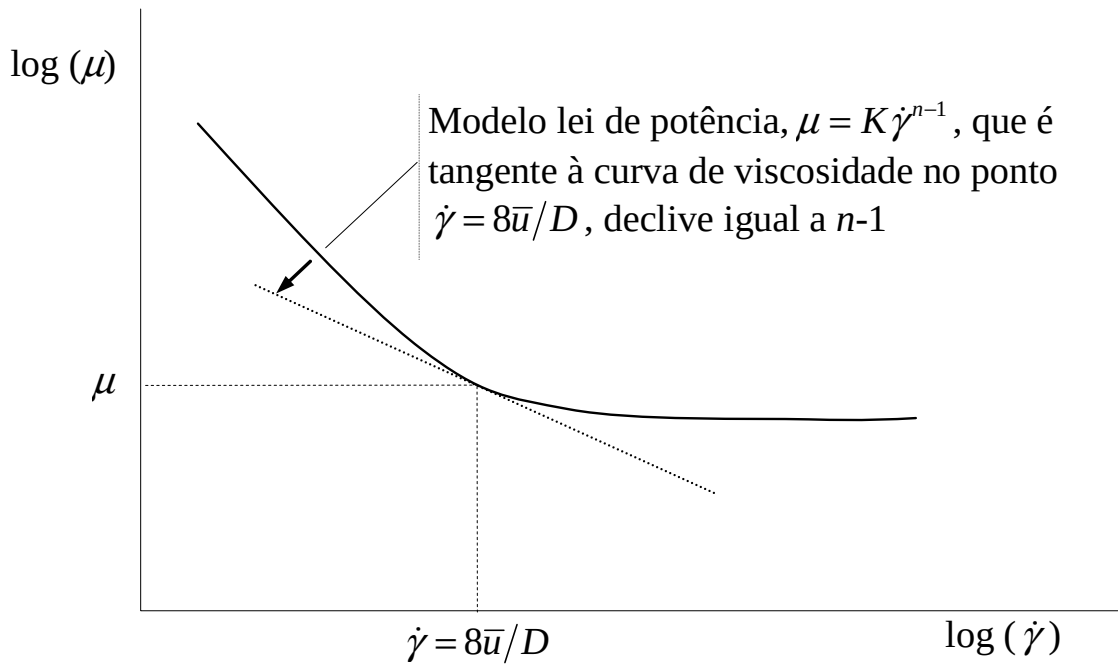


Figura 1.4 Relação entre a viscosidade e a taxa de deformação

O cálculo do n_{local} pode ser realizado facilmente através da expressão da derivada da viscosidade em ordem à taxa de deformação do modelo lei de potência que é dada por:

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} = K(n-1)\dot{\gamma}^{(n-2)} = \tau(n-1)\dot{\gamma}^{-2} \quad (1.14)$$

Ou seja, n_{local} , para qualquer fluido, é dado pela seguinte expressão:

$$n_{\text{local}} = \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \frac{\dot{\gamma}^2}{\tau} + 1 \quad (1.15)$$

que aplicada ao modelo de Bingham origina a seguinte expressão para n_{local} :

$$n_{\text{local}} = -\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}^2} \frac{\dot{\gamma}^2}{(\mu_0 \dot{\gamma} + \tau_0)} + 1 = -\frac{1}{\mu_0 \dot{\gamma} / \tau_0 + 1} + 1 \quad (1.16)$$

Por sua vez $\eta' = K' \left(8\bar{U}/D \right)^{n_{\text{local}}-1} = (3n_{\text{local}} + 1/4n_{\text{local}}) K \left(8\bar{U}/D \right)^{n_{\text{local}}-1} = (3n_{\text{local}} + 1/4n_{\text{local}}) \mu$

em que μ será a viscosidade no ponto da curva de viscosidade em que $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$, ver figura 1.4. Para mais detalhes sobre esta metodologia, consultar o trabalho de Diogo Cruz (2010).

1.2.2 Número de Nusselt

A análise das condições de fronteira da equação da energia introduz o conceito do coeficiente de convecção, h . Este é definido como o rácio entre o fluxo de calor por unidade de área, $\dot{q}_w$, e uma diferença de temperatura. O fluxo de calor na parede é positivo quando está a entrar para o fluido. A diferença de temperaturas é a diferença entre a temperatura da parede, T_w , e a temperatura de mistura, $\bar{T}$.

O número de Nusselt é definido pela equação $Nu = hD/k$, normaliza o coeficiente de convecção, h , definido pela equação $h = \dot{q}_w / (T_w - \bar{T})$ com a condutibilidade térmica do fluido, k , e o comprimento característico da conduta, neste caso é o diâmetro, D , e compara o calor transferido por convecção com o calor transferido por condução para um mesmo ΔT .

Para um fluido lei de potência, o número de Nusselt num escoamento laminar num tubo de secção circular com fluxo de calor constante na parede é dado, de acordo com Barleta (1997), pela seguinte equação:

$$Nu_{\infty} = \frac{8(5n+1)(3n+1)}{31n^2 + 12n + 1} \quad (1.17)$$

1.2.3 Forma genérica do número de Brinkman

Quando os efeitos de dissipação são importantes num escoamento, o número de Brinkman (Br) é bastante usado para quantificar a relação entre o calor gerado por dissipação viscosa e o calor trocado na parede. Este grupo adimensional foi chamado de Brinkman, no seguimento do trabalho do mesmo autor de 1951, após este ter resolvido o problema de transferência de calor num escoamento laminar Newtoniano num tubo com a dissipação viscosa.

O número de Brinkman generalizado, Br^* , foi introduzido por Coelho e Pinho (2009) e destaca-se por contabilizar correctamente a potência dissipada por atrito viscoso, $\dot{w}$, com $\dot{w} = \tau_w \bar{U}$, independentemente do fluido ou secção da conduta. Embora este número adimensional fosse mais correctamente apresentado pelo rácio $\dot{w}/\dot{q}_w$, onde $\dot{q}_w$ representa o calor transferido na parede da tubagem, foi introduzida uma pequena modificação para assegurar uma equivalência com a anterior definição do número de Brinkman para fluidos Newtonianos em regime laminar. Assim, foi introduzido o coeficiente 8, fazendo com que o número de Brinkman generalizado seja definido por:

$$Br^* = \frac{\dot{w}}{8\dot{q}_w} \quad (1.18)$$

Como o caso de estudo é efectuado para fluxo de calor constante na parede, temos então:

$$Br^* = \frac{\bar{U}\tau_w}{8\dot{q}_w} \quad (1.19)$$

Normalmente, o número de Brinkman para fluidos Newtonianos é contabilizado através da seguinte equação:

$$Br = \frac{\eta \bar{U}^2}{\dot{q}_w D} \quad (1.20a)$$

$$Br = \frac{\eta \bar{U}^2}{\dot{q}_w D} = \eta \frac{8\bar{U}}{D} \frac{\bar{U}}{8\dot{q}_w} = \frac{\tau_w \bar{U}}{8\dot{q}_w} = Br^* \quad (1.20b)$$

Sendo o quociente $8\bar{U}/D$ a taxa de deformação na parede num escoamento laminar dentro de uma conduta de secção circular de um fluido Newtoniano, o produto $\eta 8\bar{U}/D$ não é mais que a tensão de corte na parede, τ_w , e assim se mostra que a definição Br^* está implícita na definição original do número de Brinkman. Num fluido cuja viscosidade varie com a taxa de deformação, a utilização da definição patente na equação (1.20a), onde a viscosidade η é frequentemente substituída por uma viscosidade característica do fluido em detrimento da definição (1.20b), não traduz com rigor o quociente potência dissipada /potência na parede, acarretando consequências nefastas quando se pretende contabilizar ou comparar o efeito da dissipação viscosa em escoamentos de diferentes fluidos não-Newtonianos e, por vezes, para o mesmo fluido em escoamentos com números de Reynolds distintos.

1.2.4 Número de Bingham

O número de Bingham surge quando se trabalha com fluidos de Bingham e serve para quantificar a importância da tensão de cedência, Poole e Chhabra (2010), sendo definido da seguinte forma:

$$Bn = \frac{\tau_0 D}{\mu_0 \bar{U}} \quad (1.21)$$

1.3 Revisão Bibliográfica

Dos diversos trabalhos realizados até à actualidade sobre soluções analíticas para transferência de calor no interior de um tubo circular de um fluido de Bingham, serão apenas mencionados os que estiveram na origem da realização do presente trabalho.

Ravindra Kumar (1964) efectuou um estudo analítico sobre os efeitos da dissipação e da transferência de calor em escoamento laminar de um fluido de Bingham numa conduta de secção circular, por integração directa da equação da energia para escoamento totalmente desenvolvido e desprezando a condução axial. Contudo, no referido trabalho, o autor negligenciou o efeito da dissipação no cálculo do gradiente de temperatura axial. Deste modo, o resultado obtido só está correcto para a ausência da dissipação viscosa.

Num outro trabalho, mais recente, R. Khatyr *et al.* (2003), estudaram a transferência de calor para três situações assintóticas distintas de distribuição axial do fluxo de calor na

parede e para os casos de temperatura de parede constante e escoamento exterior sobre o tubo de um fluido isotérmico, tudo para um escoamento hidrodinamicamente desenvolvido:

- No primeiro caso, quando a distribuição axial de calor $\dot{q}_w$ tende para zero, isto é, o número local de Brinkman tende para infinito, os resultados mostraram que o valor assintótico de Nusselt é zero;
- No segundo caso, onde a distribuição axial de calor não tende para zero, enquanto $d\dot{q}_w/dx$ tende para zero, o valor assintótico de Nusselt é diferente de zero e depende unicamente do número de Brinkman assintótico Br_∞ e do raio do núcleo a . Verificou-se que a dissipação viscosa e o esforço de corte têm um papel importante na determinação das características da transferência de calor de um escoamento completamente desenvolvido;
- No terceiro caso, a distribuição axial de calor $\dot{q}_w$ tende para infinito, enquanto $d\dot{q}_w/dx$ tende para uma constante positiva.

Com interesse para o presente trabalho está o resultado do segundo caso, fluxo de calor constante na parede, onde a equação para o número de Nusselt obtida só foi testada pelos autores para o caso limite do fluido Newtoniano, $a = 0$, mas falha quando testada para a outra situação limite, $a = 1$, situação em que o perfil de velocidades é o mesmo do caso de um fluido lei de potência para o qual $n = 0$, ver secção 1.1.3, perfil pistão, a que corresponde o número de Nusselt de 8, mas que, pela equação apresentada no trabalho em questão resulta num valor infinito. Tal facto pode ficar a dever-se a um erro tipográfico, mas o resultado é o mesmo, i.e., uma equação inútil.

T.Min e J.Y. Yoo (1999) efectuaram um estudo analítico de um escoamento laminar em desenvolvimento térmico de um fluido de Bingham num tubo circular com fluxo de calor uniforme na parede.

Em particular, demonstraram que as características da transferência de calor na região de entrada são afectadas significativamente pela tensão de corte com a inclusão da dissipação viscosa.

Quando o raio adimensional $r_0 = a$ é zero e o número de Peclet tende para um valor infinito, as soluções coincidem exactamente com as soluções referidas em estudos anteriores para fluidos Newtonianos. Verificaram também que o número de Nusselt, para o fluido de Bingham, é menos afectado pelo número de Brinkman para elevadas tensões de corte. De notar, que o Br utilizado por estes autores não foi o generalizado, pelo que, é de esperar que os efeitos da dissipação viscosa não tenham sido correctamente contabilizados.

A solução obtida por estes autores para o escoamento desenvolvido, na ausência de dissipação, está aparentemente correcta pois verifica ambas as situações limite, fluido Newtoniano e fluido lei de potência com $n = 0$ equação (1.6).

P.M Coelho e F.T Pinho efectuaram um estudo, em 2008, onde apresentam uma nova forma de cálculo do número de Brinkman, denominado de número de Brinkman generalizado, que permite quantificar correctamente os efeitos de aquecimento por dissipação viscosa, de maneira que com esta nova definição o mesmo valor numérico de Br significa exactamente a mesma relação de potência gerada por dissipação e potência que atravessa a parede do tubo, independentemente do fluido, algo que não sucedia até então. Com base neste novo Br , serão realizadas análises, mais fiáveis que as actuais, sobre o efeito da dissipação na transferência de calor em fluidos de Bingham.

1.4 Objectivo

Por integração da equação diferencial de energia para escoamento laminar totalmente desenvolvido ir-se-á pois tentar comparar a solução assim obtida com a solução para o número de Nusselt do artigo de Min e Yoo (1999), uma vez que mediante as análises referidas anteriormente aos artigos de Ravindra Kumar e ao artigo R. Khatyr et al, as soluções nelas apresentadas não estão, ao que tudo indica, totalmente correctas.

Tirando partido da definição do número de Brinkman generalizado, que contabiliza correctamente a dissipação viscosa no escoamento, pretende-se neste trabalho estudar a influência deste fenómeno na transferência de calor com fluxo de calor constante na parede (arrefecimento e aquecimento), de uma forma nunca realizada até à data, já que nenhum trabalho publicado utilizou a definição generalizada do número de Brinkman. Para tal, ir-se-á estudar a influência da reologia e dos números de Reynolds, de Brinkman e de Bingham no comportamento dos perfis de temperatura e do número de Nusselt.

2 Equação de Energia e condições fronteira

2.1 Introdução

Neste capítulo serão adimensionalizadas e simplificadas as equações que vão ser usadas no caso em estudo.

2.2 Equações diferenciais

A equação da energia (2.1) é válida para perfis de velocidade totalmente desenvolvidos e em desenvolvimento em condutas circulares na ausência de rotação, $w = 0$. No entanto, poderá ser simplificada para casos de perfis de velocidade totalmente desenvolvidos em que $v = 0$, $\partial v / \partial r = 0$. As simplificações são normalmente usadas na obtenção de soluções analíticas em escoamentos totalmente desenvolvidos, as integrações da equação da energia na sua forma mais abrangente, conforme se mostra na equação (2.1), só são realizadas recorrendo a integrações numéricas.

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \tau_{rx} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (2.1)$$

A primeira parcela do lado esquerdo da equação (2.1) está relacionada com a convecção de calor na direcção axial e, a segunda parcela, com a convecção de calor na direcção radial. A primeira parcela do lado direito da equação corresponde ao balanço de calor transportado por condução na direcção radial. A segunda parcela do lado direito da equação está relacionada com o balanço de calor transportado por condução na direcção axial. Por fim, a última parcela no lado direito da equação corresponde ao importante efeito da dissipação viscosa, que é bastante relevante para fluidos muito viscosos e que neste trabalho irá ser considerado, visto estar associados com números de Pr elevados nos quais é lícito assumir que o perfil de velocidades já está totalmente desenvolvido na entrada da conduta.

Uma vez que o perfil se encontra totalmente desenvolvido não vamos ter velocidade segundo a direcção radial (v), podemos também desprezar a condução axial face à condução

radial, prática usual quando o Pe é elevado, ($Pe > 50$) para fluidos Newtonianos, Özişik (1985), e assim obtemos uma equação passível de ser integrada analiticamente:

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \tau_{rx} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

2.3 Adimensionalização das equações

O primeiro passo será adimensionalizar todas as variáveis da equação da energia, as variáveis adimensionais serão assinaladas com um asterisco.

Começaremos então por adimensionalizar as seguintes variáveis: x , r e u como se pode ver nas seguintes equações:

$$x^* = \frac{x}{D} \quad (2.3)$$

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (2.4)$$

$$u^* = \frac{u}{U} \quad (2.5)$$

Aplicando as definições anteriores na equação (1.4), obtemos a seguinte equação adimensionalizada para o perfil de velocidade:

$$u^* = \begin{cases} \frac{2 \left[1 - (r^*)^2 - 2a(1-r^*) \right]}{1 - \frac{4a}{3} + \frac{a^4}{3}} & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ \frac{2(1-a)^2}{1 - \frac{4a}{3} + \frac{a^4}{3}} & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (2.6)$$

As adimensionalizações da temperatura e da tensão de corte serão apresentadas nas equações (2.7) e (2.8) respectivamente:

$$T^* = \frac{T - T_0}{\frac{\dot{q}_w D}{k}} \quad (2.7)$$

$$\tau^* = \frac{\tau_{rx}}{\tau_w} \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (1.3) na equação (2.8) obtemos a seguinte equação:

$$\tau_{xr}^* = -r/R \quad (2.9)$$

Ou seja, combinando a equação (2.4) com a equação (2.9) podemos dizer que:

$$-r^* = \tau_{xr}^*$$

Introduzindo as adimensionalizações atrás referidas na equação de energia obtemos a seguinte equação:

$$\rho C_p \bar{U} u^* \frac{\dot{q}_w D}{k} \frac{\partial T^*}{D \partial x^*} = \frac{1}{R^2} k \frac{\dot{q}_w D}{k} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\tau_w \bar{U}}{R} \tau_{xr}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.10)$$

Dividindo a equação (2.10) por $\dot{q}_w$ obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\rho C_p \bar{U} u^*}{k} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{2R}{R^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\tau_w \bar{U}}{\dot{q}_w R} \tau_{xr}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.11)$$

Atendendo às definições de Brinkman equação (1.19) e de Peclet equação (1.11), obtemos uma equação ainda mais simplificada:

$$\rho C_p \bar{U} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{2}{R} \frac{k}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{8 \tau_w \bar{U}}{8 \dot{q}_w R} k \tau_{xr}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.12)$$

A equação final fica:

$$\frac{Pe}{4} \cdot u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) - 4 r^* Br^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.13)$$

Esta será pois a equação da energia adimensional, passível ainda de algumas simplificações, conforme se verá seguidamente.

Considerando um balanço de energia num volume de controlo a um troço de conduta teremos:

$$\dot{q}_w D \pi dx + \bar{U} D \pi \tau_w dx = \rho \bar{U} \pi \frac{D^2}{4} C_p d\bar{T} \quad (2.14)$$

Simplificando a equação (2.14):

$$(\dot{q}_w + \bar{U} \tau_w) = \frac{\rho \bar{U} D C_p}{4} \frac{d\bar{T}}{dx} \quad (2.15)$$

Adimensionalizando a equação anterior obtém-se:

$$(\dot{q}_w + \bar{U} \tau_w) = \frac{\rho \bar{U} D C_p}{4} \frac{\dot{q}_w D}{k} \frac{dT^*}{D dx^*} \quad (2.16)$$

Atendendo às definições de Brinkman e de Péclet obtemos:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{4}{Pe} (1 + 8 Br^*) \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) na equação (2.13), verifica-se que para um escoamento desenvolvido, $v=0$, a equação da energia adimensional deixará de depender do número Péclet:

$$u^*(1+8Br^*) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) - 4r^* Br^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.18)$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} = \begin{cases} \frac{12(a-r^*)}{a^4-4a+3} & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (2.19)$$

Para simplificar a forma das equações consideramos que

$$\Omega = a^4 - 4a + 3, \quad (2.20)$$

e atendendo à equação do perfil de velocidade, equação (2.6), obtém-se a seguinte equação de energia para o caso concreto do fluido de Bingham.

$$\begin{cases} \frac{6[1-(r^*)^2-2a(1-r^*)]}{\Omega} (1+8Br^*) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) - 4r^* Br^* \left[\frac{12(a-r^*)}{\Omega} \right] & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ \frac{6(1-a)^2}{\Omega} (1+8Br^*) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (2.21)$$

As condições fronteira, que vão permitir integrar esta equação, são apresentadas seguidamente.

2.4 Apresentação das Condições de Fronteira

Considerando o escoamento laminar estacionário de um fluido de Bingham através de uma conduta rectilínea de secção circular como se pode ver na figura 2.1, a região I é a zona

do perfil de velocidade onde há gradiente de velocidade e a região II é a zona onde a taxa de deformação é nula, perfil de velocidade uniforme. As condições de fronteira do escoamento são definidas pelas seguintes equações:

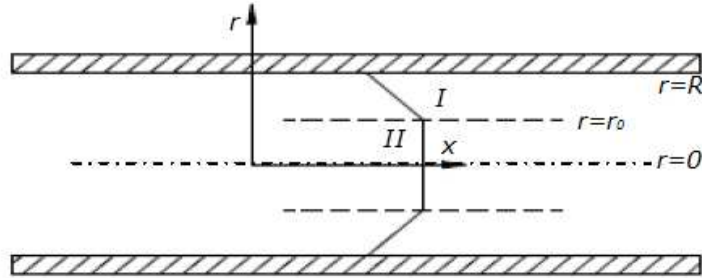


Figura 2.1 Escoamento laminar estacionário e as suas condições de fronteira

$$r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.22)$$

Para

$$r = r_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_I = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{II} \quad (2.23)$$

e

$$T_I(r_0, x) = T_{II}(r_0, x)$$

E para

$$r = R, \quad k \frac{\partial T}{\partial r} = \dot{q}_w \quad (2.24)$$

e

$$T = T_w(x)$$

2.4.1 Adimensionalização das condições de fronteira

Adimensionalizando as condições de fronteira vamos obter:

$$r^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (2.25)$$

Para

$$r^* = a, \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_I = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{II} \text{ e } T^* \Big|_I = T^* \Big|_{II} \quad (2.26)$$

E para

$$r^* = 1, \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{R}{D} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

2.5 Expressão de cálculo do número de Nusselt

Partindo da equação que traduz a lei de Newton do arrefecimento,

$$\dot{q}_w = h(T_w - \bar{T}), \quad (2.28)$$

e adimensionalizando-a obtêm a seguinte equação:

$$\dot{q}_w = h(T_w^* - \bar{T}^*) \frac{\dot{q}_w D}{k} \quad (2.29)$$

simplificando-a obtemos a equação de cálculo do número de Nusselt:

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{1}{(T_w^* - \bar{T}^*)} \quad (2.30)$$

A temperatura de mistura, $\bar{T}$, que vai ser usada no cálculo do número de Nusselt, é obtida através da seguinte expressão:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^R 2\pi r u T \, dr}{\pi R^2 \bar{U}} \quad (2.31)$$

Adimensionalizando a equação anterior obtemos:

$$\bar{T}^* = \int_0^1 2r^* u^* T^* \, dr^* \quad (2.32)$$

3 Integração da Equação de Energia

3.1 Introdução

Neste capítulo ir-se-á integrar a equação da energia, para posteriormente obtermos as equações da distribuição da temperatura, da temperatura de mistura e a equação do número de Nusselt.

Vamos também fazer uma breve comparação com a solução apresenta no artigo de Min e Yoo (1999).

3.2 Integração da equação da energia

Com a ajuda do programa de cálculo, Derive 5, procedeu-se à primeira integração da equação da energia, obtendo a seguinte equação para as derivadas da temperatura em ordem ao raio:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)_I = \frac{48Br^* r^{*2} [2a(r^* - 1) - r^{*2} + 1] + 2\Omega C_1 + r^{*2} [4a(2r^* - 3) - 3(r^{*2} - 2)]}{2r^* \Omega} & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)_{II} = \frac{[24Br^* r^{*2} (a - 1)^2 + \Omega C_2 + 3r^{*2} (a - 1)^2]}{r^* \Omega} & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (3.1)$$

Para a condição:

$$r^* = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{II} = 0 \quad (3.2)$$

$$C_2 = 0$$

Para a condição:

$$r^* = a, \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_I = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{II} \quad (3.3)$$

$$C_1 = \frac{a^4}{2\Omega}$$

Mediante os resultados das constantes C_1 e C_2 verificamos a condição de fronteira:

$$r^* = 1, \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_I = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

Ficando a equação final com as constantes C_1 e C_2 substituídas:

$$\begin{cases} \left(\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_I \right) = \frac{48Br^* r^{*2} [2a(r^* - 1) - r^{*2} + 1] + a^4 + 4ar^{*2}(2r^* - 3) - 3r^{*2}(r^{*2} - 2)}{2r^* \Omega} & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ \left(\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{II} \right) = \frac{[24Br^* r^* (a - 1)^2 + 3r^* (a - 1)^2]}{\Omega} & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (3.5)$$

2ª Integração da equação de dT^*/dr^* :

$$\begin{cases} T^*|_I = C_3 + \frac{a^4 \ln(r^*)}{2\Omega} + \frac{r^* [48Br^* (4a(2r^* - 3) - 3(r^{*2} - 2)) + 8a(4r^* - 9) - 9(r^{*2} - 4)]}{24\Omega} & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ T^*|_{II} = C_4 + \frac{3r^{*2}(8Br^* + 1)}{2(a^2 + 2a + 3)} & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (3.6)$$

Para a condição de fronteira:

$$\begin{aligned} r^* = 1 \text{ e } T^*|_I &= T_w^* \\ C_3 &= T_w^* + \frac{48Br^* (4a - 3) + 40a - 27}{24\Omega} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para a condição de fronteira:

$$r^* = a \text{ e } T^*|_{II} = T^*|_I$$

$$C_4 = T_w^* + \frac{48Br^*(a^3 + a^2 + a - 3) + 13a^3 + 13a^2 + 13a - 27}{24(1-a)(a^2 + 2a + 3)} + \frac{a^4 \ln(a)}{2(a-1)^2(a^2 + 2a + 3)} \quad (3.8)$$

Ficando a equação final com as constantes C_3 e C_4 substituídas:

$$\begin{cases} T^*|_I = T_w^* + \frac{a^4 \ln(r^*)}{2\Omega} + J(r^*) & \text{se } a \leq r^* \leq 1 \\ T^*|_{II} = T_w^* + \frac{a^4 \ln(a)}{2(a-1)^2(a^2 + 2a + 3)} + Z(r^*) & \text{se } 0 \leq r^* \leq a \end{cases} \quad (3.9)$$

sendo:

$$J(r^*) = \frac{(r^* - 1)[48Br^*(r^* - 1)[4a(2r^* + 1) - 3(r^{*2} + 2r^* + 1)] + 8a(4r^{*2} - 5r^* - 5) - 9(r^{*3} + r^{*2} - 3r^* - 3)]}{24\Omega} \quad (3.10)$$

e

$$Z(r^*) = \frac{48Br^*[a^3 + a^2 + a(1 - 6r^{*2}) + 3(2r^{*2} - 1)] + 13a^3 + 13a^2 + a(13 - 36r^{*2}) + 9(4r^{*2} - 3)}{24(1-a)(a^2 + 2a + 3)} \quad (3.11)$$

3.3 Cálculo da temperatura da mistura

A temperatura da mistura será calculada através da seguinte equação (2.30), apresentando-se desta forma:

$$\bar{T}^* = \int_0^a 2r^* u_{II}^* T_{II}^* dr^* + \int_a^1 2r^* u_I^* T_I^* dr^* \quad (3.12)$$

Substituindo e calculando obtemos para a temperatura da mistura a seguinte equação final:

$$\bar{T}^* = T_w^* + \frac{a^8 \ln(a)}{2(a^2 + 2a + 3)^2(a^2 - 2a + 1)^2} - Br^* + S \quad (3.13)$$

sendo:

$$S = \frac{195a^7 + 2211a^6 + 1203a^5 - 4397a^4 - 617a^3 - 617a^2 + 6327a - 3465}{1680(1-a)^3(a^2 + 2a + 3)^2} \quad (3.14)$$

3.4 Cálculo do número de Nusselt

Para calcular o número de Nusselt utilizamos a equação (2.30), ficamos então com a seguinte equação final:

$$Nu = \frac{1}{Br^* - \frac{a^8 \ln(a)}{2(a^2 + 2a + 3)^2(a^2 - 2a + 1)^2} + \frac{195a^7 + 2211a^6 + 1203a^5 - 4397a^4 - 617a^3 - 617a^2 + 6327a - 3465}{1680(a-1)^3(a^2 + 2a + 3)^2}} \quad (3.15)$$

Para testar a validade desta equação fez-se $a = 0$, situação equivalente ao caso de um fluido Newtoniano, tendo-se obtido a solução esperada de $Nu = 48/(48Br^* + 11)$, Pinho e Oliveira (2000), fazendo $Br^* = 0$ e a tender para 1, obtém-se $Nu = 8$, valor também esperado já que para $a = 1$ o perfil de velocidade do fluido de Bingham é igual ao do fluido lei de potência para $n = 0$, figura 1.3, e para $n = 0$ o valor do número de Nusselt dado pela equação (1.17) é precisamente 8.

Equação para o número de Nusselt do artigo de Min e Yoo (1999) é a seguinte:

$$Nu = \frac{2}{\left[\frac{3}{(3-4a+a^4)} \right] Br - 2 \left[\left(\frac{3}{(3-4a+a^4)} \right)^2 \left(-\frac{11}{48} + \frac{68a}{105} - \frac{62a^2}{135} - \frac{a^4}{4} + \frac{10a^5}{27} + \frac{a^6}{15} - \frac{2a^7}{15} - \frac{13a^8}{1008} + \frac{a^8 \ln(a)}{18} \right) \right]} \quad (3.16)$$

Estes autores definiram a equação de Br da seguinte forma:

$$Br = \frac{\mu_0 \bar{U}^2}{\dot{q}_w R} \quad (3.17)$$

Como a definição de Br usada é diferente, as equações de Nu apresentam-se algebricamente diferentes, no entanto, as equações são formalmente idênticas para o caso do número de Brinkman ser igual a zero.

4 Análise do efeito da dissipação viscosa no Nu

4.1 Introdução

Neste capítulo ir-se-á fazer fundamentalmente uma análise do efeito da dissipação viscosa no número de Nusselt. Inicialmente, far-se-á uma análise para um dado fluido de Bingham analisando-se o efeito do número de Reynolds e do diâmetro da conduta sobre o número de Nusselt. E posteriormente, realizar-se-á uma análise do efeito do número de Brinkman sobre o número de Nusselt de uma forma genérica e que, portanto, é válida para qualquer fluido de Bingham e quaisquer condições de escoamento em regime laminar. Esta última maneira de apresentar os dados, por ter um carácter genérico, reveste-se de um grande interesse prático.

4.2 Análise do número de Nu relativamente ao número de Re'

Em virtude do número de Reynolds ser um grupo adimensional relevante nos escoamentos de fluidos e na transferência de calor, optou-se por iniciar esta análise com uma avaliação da forma como o número Nusselt e o número de Reynolds podem representar os dados da transferência de calor no interior de um tubo para um fluido de Bingham.

Recorrendo à equação (3.15) e à definição de número de Reynolds dada pela equação (1.12), utilizando a metodologia proposta na equação (1.16) para o cálculo do índice de potência, representou-se na figura 4.1, a evolução do número de Nusselt em função do número de Reynolds para o caso do número de Brinkman ser igual a zero. As características do fluido de Bingham utilizado nesta análise são dadas na tabela 1.

Tabela 1. Características do fluido

τ_0	3 Pa
μ_0	0,001 Ns/m ²

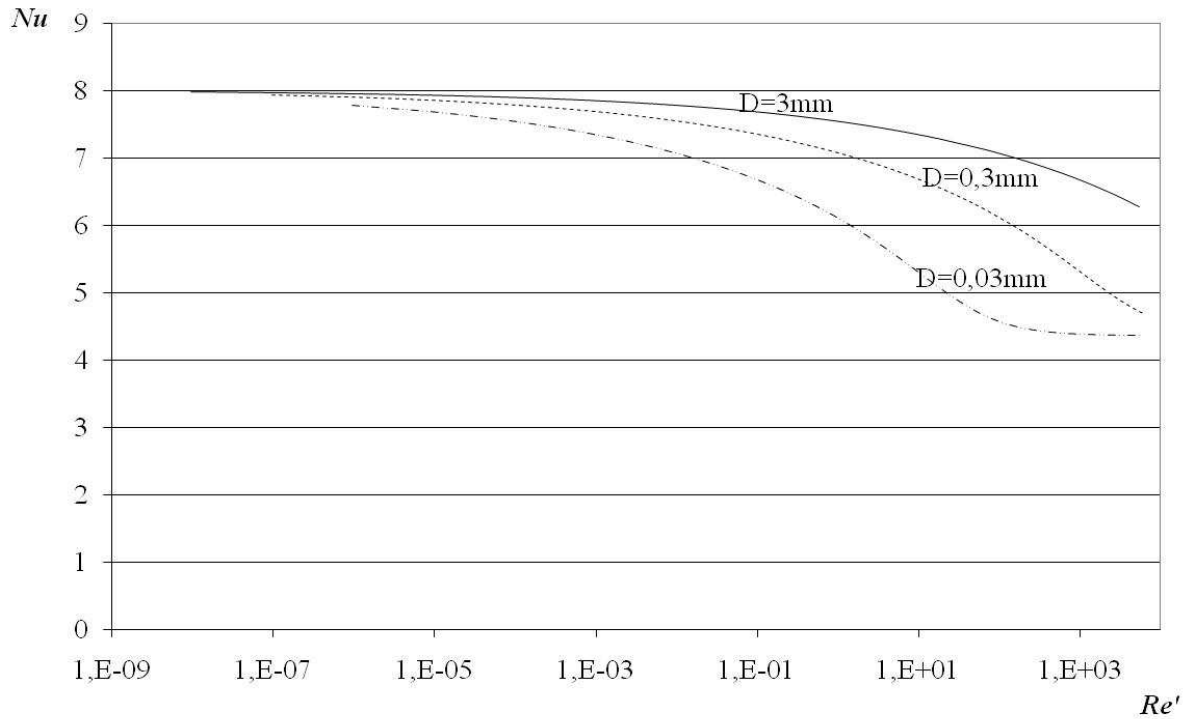


Figura 4.1 Análise do número de Nu relativamente ao número de Re' para diferentes diâmetros

O facto de se optar por realizar esta análise para números de Reynolds até 6000 está relacionado com a constatação experimental de que o regime laminar pode existir a este valor elevado de Re' para fluidos viscoelásticos, Hartnett e Cho (1998), o que, embora não sendo o caso do fluido em análise, permite apresentar dados que possam vir a ter interesse noutros casos.

Como se pode ver pela figura 4.1 o Re' , só por si, não é suficiente para caracterizar a transferência de calor, ao contrário do que sucede com a perda de carga em tubos, ver Cruz (2010). Esta característica deve-se à circunstância de embora para o mesmo Re' só existir um coeficiente de atrito, f , o mesmo não ocorre com a tensão de corte na parede, τ_w . Assim, para os mesmos Re' e Br , é possível haver vários valores de τ_w , como o Nusselt é apenas função do quociente τ_0/τ_w existe um número de Nusselt diferente para cada diâmetro de tubagem em virtude da tensão de corte na parede ser também diferente para cada diâmetro.

O facto do número de Nusselt diminuir com o aumento do número de Reynolds e com a diminuição do diâmetro, está relacionado com a inerente diminuição do quociente $a = \tau_0/\tau_w$. À medida que este último diminui, o perfil de velocidade afasta-se do perfil pistão, a velocidade junto à parede diminui e, conseqüentemente, o mesmo sucede com o coeficiente de convecção e necessariamente com o número de Nusselt. Na figura 4.2 representam-se os

perfis de velocidade adimensionalizados para os três diâmetros analisados e um número de Reynolds igual a 1000, podendo-se observar o fenómeno anteriormente descrito.

Podemos pois concluir que a relação do número de Nusselt com o número de Reynolds, Re' não será a representação mais apropriada para a análise que se pretende fazer, uma vez que Re' não congrega a totalidade dos efeitos que afectam a transferência de calor num fluido de Bingham.

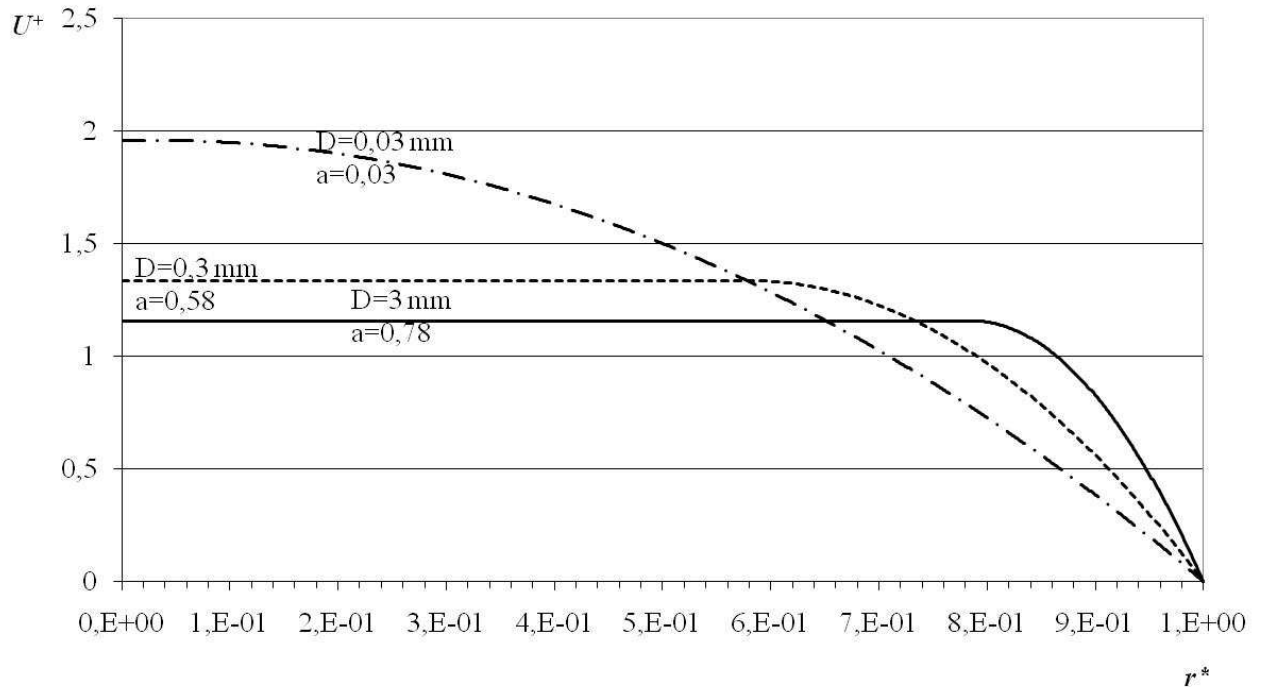


Figura 4.2 Perfis de velocidade adimensionalizados para vários diâmetros de conduta e $Re' = 1000$

4.3 Parâmetro U^+

Como se viu anteriormente o número de Nusselt não é só função do número de Reynolds, mas, para um dado Brinkman, depende exclusivamente do quociente τ_0 / τ_w , ver equação (3.15), que por sua vez depende univocamente do parâmetro $U^+ = \bar{U} 8 \mu_0 / (D \tau_0) = 8 / Bn$ em que Bn é o número de Bingham, Coelho e Pinho (2008). Assim sendo, surgiu a ideia de realizar o estudo do número de Nusselt em função deste parâmetro, tornando a análise simultaneamente genérica e com um grande carácter prático, pois para um dado valor de U^+ , que só depende das características geométricas, de escoamento e do próprio fluido, existe um e um só número de Nusselt.

O rácio $a = \tau_0/\tau_w$ pode ser obtido através da resolução da seguinte equação, Coelho e Pinho (2008):

$$\frac{\bar{U}}{D\tau_0/(8\mu_0)} = \frac{8}{Bn} = \left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^{-1} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\tau_w} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^4 \right] \quad (4.1)$$

cuja solução é a seguinte:

$$a = \frac{2^{5/6}}{4} \left\{ \sqrt{(B^{1/3} + C^{1/3})} - \sqrt{\left[2\sqrt{(B^{2/3} - B^{1/3}C^{1/3} + C^{2/3})} - B^{1/3} - C^{1/3} \right]} \right\} \quad (4.2)$$

com:

$$B = (3U^+ + 4)^2 - \sqrt{3U^+ (27U^{+3} + 144U^{+2} + 288U^+ + 256)} \quad (4.3)$$

,

$$C = (3U^+ + 4)^2 + \sqrt{3U^+ (27U^{+3} + 144U^{+2} + 288U^+ + 256)} \quad (4.4)$$

e

$$U^+ = \frac{\bar{U}}{D\tau_0/(8\mu_0)} = \frac{8}{Bn} \quad (4.5)$$

Como se referiu anteriormente, dada a relação explícita entre o número de Nusselt e parâmetro a e entre este último e o parâmetro U^+ , que simultaneamente congrega os dados sobre o fluido, através de τ_0 e μ_0 , e do escoamento, através da velocidade média e do diâmetro, é possível apresentar uma relação entre Nu e U^+ que é válida para qualquer fluido de Bingham num dado escoamento laminar. Deste modo, o cálculo do número de Nusselt em regime laminar resume-se ao cálculo do parâmetro U^+ e à posterior consulta de uma tabela, gráfico ou equação que permita encontrar o Nu respectivo.

Uma outra vantagem desta abordagem é que o efeito da dissipação viscosa sobre o número de Nusselt pode, também ela, ser feita de uma forma genérica utilizando também para o efeito o parâmetro U^+ . Esta análise irá ser realizada seguidamente.

Na figura 5 apresenta-se graficamente a função matemática (4.2) onde se pode ver que com o aumento do parâmetro U^+ de zero até um valor muito elevado, o parâmetro $a = \tau_0/\tau_w$, diminui desde um até zero.

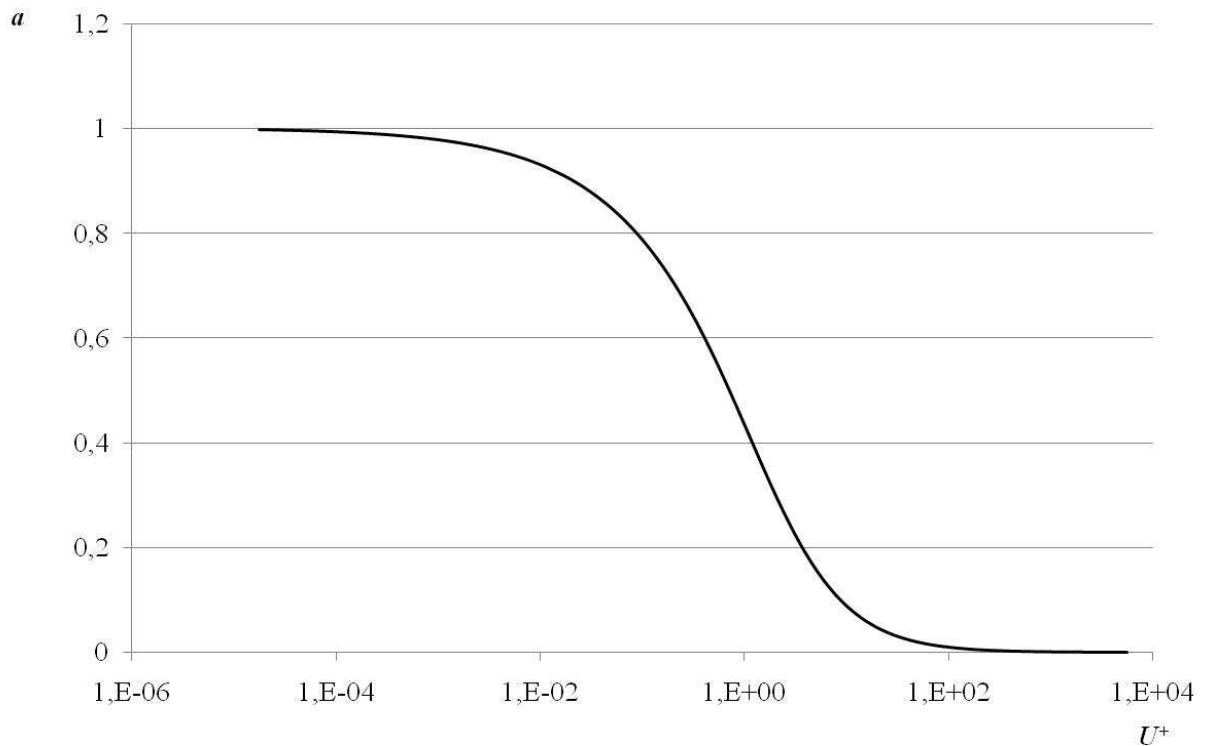


Figura 4.3 Relação entre o parâmetro a e U^+

4.4 Relação entre o número de Nusselt e o parâmetro U^+

Recorrendo à equação (3.15) e à sua relação com o parâmetro U^+ , equações (4.1) a (4.5) ir-se-á analisar nesta secção o comportamento do número de Nusselt em função do parâmetro U^+ para vários números de Brinkman positivos, aquecimento, $\dot{q}_w > 0$, e negativos, $\dot{q}_w < 0$.

4.4.1 Análise para caso de $Br^* > 0$

Na figura 4.4, representamos o número de Nusselt em função do parâmetro U^+ , tendo-se variado o número de Brinkman generalizado. No anexo A encontram-se tabelados os valores Nu em função de U^+ e Br^* para facilitar a leitura e aumentar a precisão dos valores que venham a ser necessários num caso prático.

Verificou-se que um aumento do número de Brinkman generalizado, para os mesmos valores do parâmetro U^+ , provoca uma diminuição do número de Nusselt. Para Br^* superiores a um, o Nu praticamente deixa de ser função de U^+ , passando a depender apenas do número de Brinkman. Esta dependência exclusiva do número de Brinkman deve-se ao maior peso que este adquire no denominador da equação (3.15).

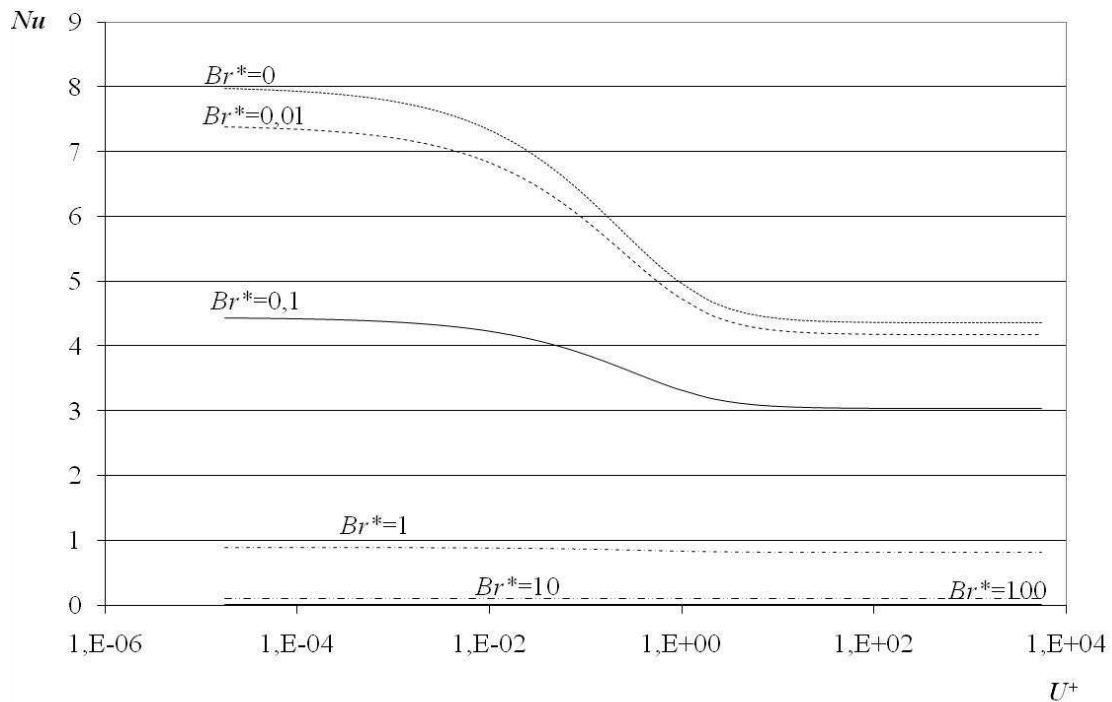


Figura 4.4 Análise para o caso de $Br^* > 0$

Na figura 4.5 representa-se graficamente as parcelas que estão no denominador da equação (3.15) e que só dependem do parâmetro a , em função de U^+ .

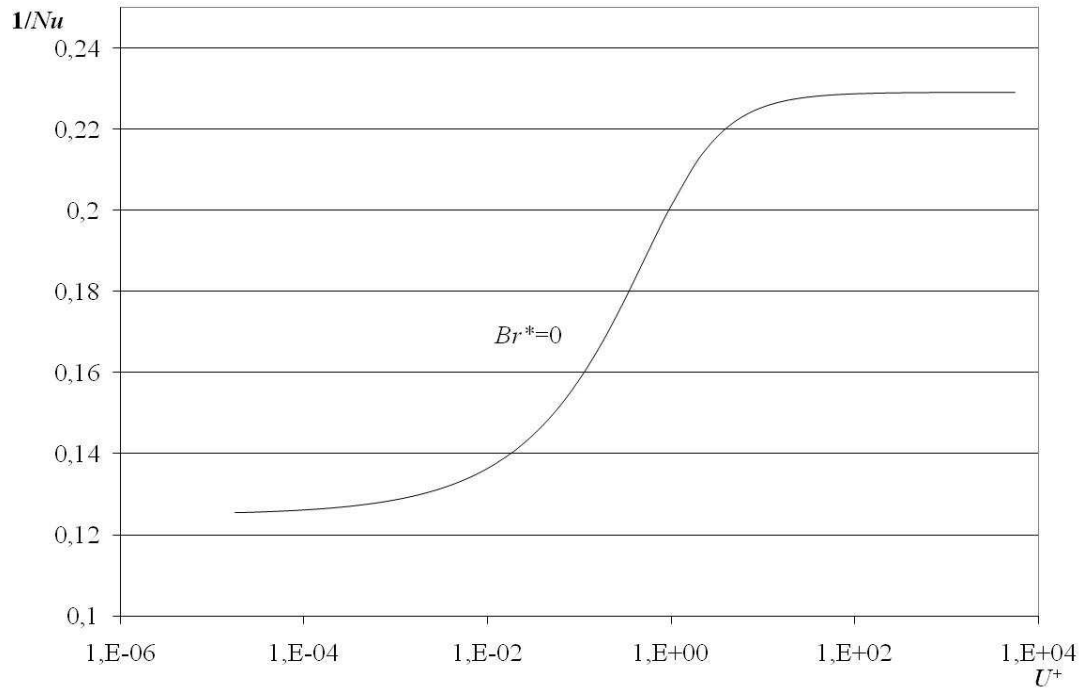


Figura 4.5 Inverso do Nu para $Br^* = 0$

Como se pode ver, esta parcela varia entre $1/8$ e $11/48$, um número de Brinkman igual ou superior a um já é pois suficientemente grande, comparativamente com $11/48$, para se tornar predominante e fazer com que o número de Nusselt deixe de ser função de U^+ .

A diminuição do número de Nusselt com o aumento do número de Brinkman já era expectável pois revendo a equação de cálculo do coeficiente de convecção, $h = \dot{q}_w / (T_w - \bar{T})$, aumentando a dissipação viscosa a diferença de temperaturas $T_w - \bar{T}$ também aumenta, o calor gerado por dissipação viscosa é libertado junto à parede aumentando a temperatura desta, diminuindo assim o coeficiente de convecção e, consequentemente, o número de Nusselt. No capítulo seguinte ir-se-á realizar um estudo mais detalhado da evolução da temperatura e da localização da potência dissipada por atrito.

4.4.2 Análise para caso de $Br^* < 0$

Na figura 4.6 representamos a evolução dos mesmos grupos adimensionais da figura 4.4, mas desta vez para valores de Br^* negativos, caso do arrefecimento.

Para números de Brinkman negativos e inferiores, em valor absoluto, a $1/8$, ver figura 4.5, o número de Nusselt é sempre positivo e aumenta com o aumento de Br^* em valor

absoluto. O facto de Nu ser superior a zero deve-se ao facto de $T_w - \bar{T}$ ser também negativo, i.e., devido ao elevado valor de $\dot{q}_w$ retirado na parede, baixo valor de Br^* , equação (1.19), e ao facto da energia gerada por dissipação viscosa ser inferior ao calor retirado na parede, $Br^* < 1/8$, em valor absoluto, a temperatura da parede é inferior à temperatura de mistura o que origina um $Nu > 0$. Um ligeiro aumento do número de Brinkman em valor absoluto, caso de Br^* passar de -0.01 para -0.1, figura 4.6, acarreta um aumento do Nu pois a dissipação viscosa promove um aumento da temperatura da parede, a diferença de temperaturas, $T_w - \bar{T}$, diminui em valor absoluto e o coeficiente de convecção e, consequentemente, o número de Nusselt, aumentam pois $h = \dot{q}_w / (T_w - \bar{T})$.

Para valores de $-1/8 < Br^* < -11/48$, o número de Nusselt começa por ser negativo, ver figura 4.6, enquanto $T_w > \bar{T}$, tomando um valor infinito no instante em que $T_w = \bar{T}$, o denominador na expressão de cálculo do coeficiente de convecção anula-se passando pois Nu de menos infinito para mais infinito. A partir desse instante a temperatura da parede fica inferior à temperatura da mistura, $T_w < \bar{T}$, e o Nu permanece sempre positivo.

O facto da temperatura da parede, para o mesmo Brinkman, deixar de ser superior à temperatura da mistura para se tornar inferior com o aumento de U^+ e, consequentemente, uma diminuição de a , está relacionada com o local, mais ou menos próximo da parede, onde ocorre a libertação de calor em virtude da dissipação viscosa. Para valores de a próximos de um, a referida libertação de calor ocorre junto à parede, zona de grandes gradientes de velocidade, o que promove um aquecimento desta, ver figura 4.2, à medida que U^+ aumenta e a diminui, o gradiente de velocidade junto à parede é menor, o que faz com que o local onde se gera o calor por dissipação se afaste da parede e a temperatura desta diminua, ver secção 5.2, aumentando a temperatura da mistura.

Para valores $Br^* < -11/48$, o Nu é sempre negativo e diminui com a diminuição de Br^* , isso deve-se ao facto de o calor gerado por dissipação ser agora 11/6 vezes, ou mais, superior ao calor retirado na parede o que faz com que, independentemente, da forma do perfil de velocidade a temperatura da parede seja sempre superior à temperatura da mistura.

No próximo capítulo tentar-se-á mostrar de forma mais detalhada alguns dos fenómenos acima referidos afim de melhor se compreender os comportamentos observados.

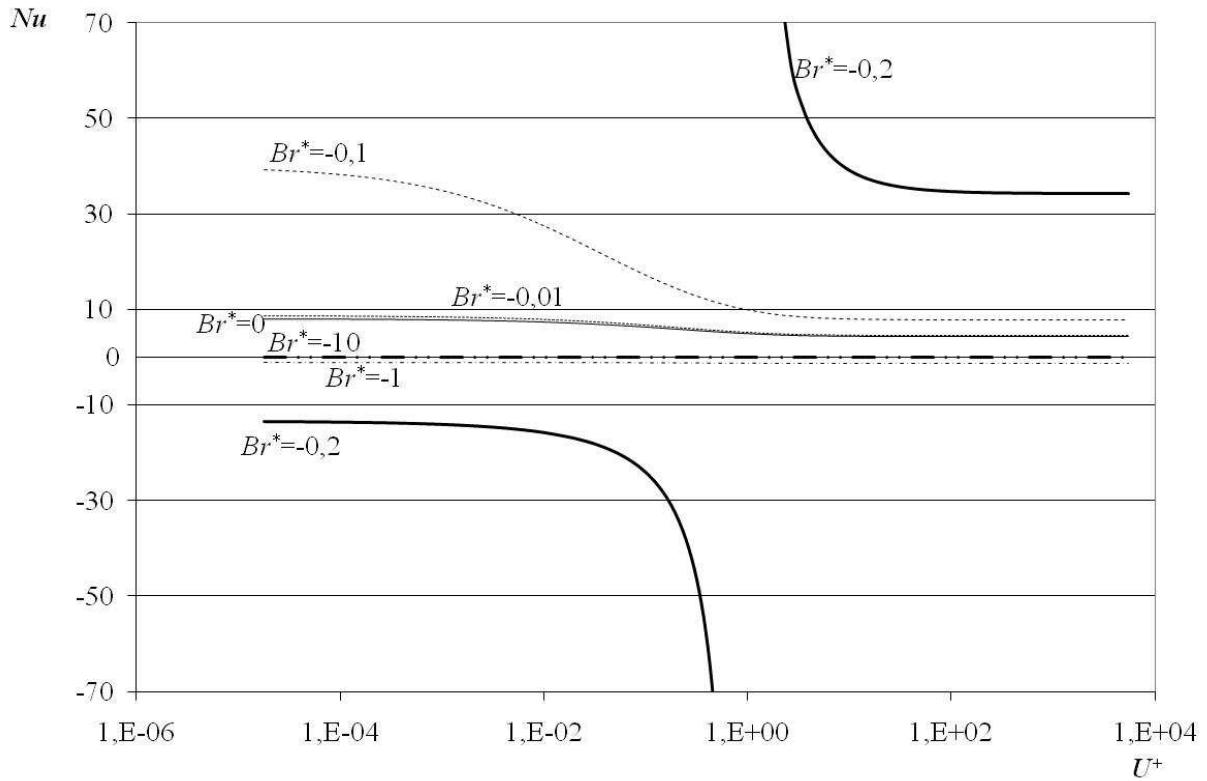


Figura 4.6 Análise para o caso de $Br^* \leq 0$

4.4.3 Análise do caso de $Br > 0$ usando a expressão da literatura

Na figura 4.7 efectuamos novamente a representação de Nu versus U^+ , mas desta vez com a definição do número de Brinkman de Min e Yoo (1999), ou seja, $Br = \mu_0 \bar{U}^2 / \dot{q}_w R$.

Podemos verificar que, para o caso de Brinkman igual a zero, o comportamento do número de Nusselt é o mesmo que o anteriormente exibido na figura 4.4, mas com o aumento do número de Brinkman ocorre uma diminuição acentuada do número de Nusselt, chegando mesmo este último a anular-se, o que é totalmente irrealista. Esta diminuição deve-se ao factor $3/(3-4a+a^4)$ que multiplica o número de Brinkman utilizado por estes autores, equação (3.16), e que tende para infinito quando o parâmetro U^+ tende para zero, fazendo com Nu tenda irrealisticamente para zero.

Na realidade o quociente potência dissipada por atrito viscoso / calor trocado na parede, não é $\mu_0 \bar{U}^2 / \dot{q}_w R$, mas sim $\left[3/(3-4a+a^4) \right] \left(\mu_0 \bar{U}^2 / \dot{q}_w R \right) = \tau_w \bar{U} / (4\dot{q}_w)$, ver equação (4.1). Esta é a consequência de usar formalmente a mesma definição de número de Brinkman dos fluidos Newtonianos, que nestes fluidos contabiliza correctamente o quociente potência dissipada por atrito viscoso / calor trocado na parede, nos fluidos não-Newtonianos, sem se ter

o cuidado de verificar se, neste caso, a potência dissipada por atrito viscoso continua a ser correctamente quantificada, Coelho e Pinho (2008).

Os valores de Nu reais, no caso de números de Brinkman positivos, são aqueles patentes na figura 4.4, uma vez que a equação (1.19) usada para definir o número de Brinkman contabiliza de uma forma correcta a potência gerada por atrito viscoso e, consequentemente, calcula correctamente o número de Nusselt.

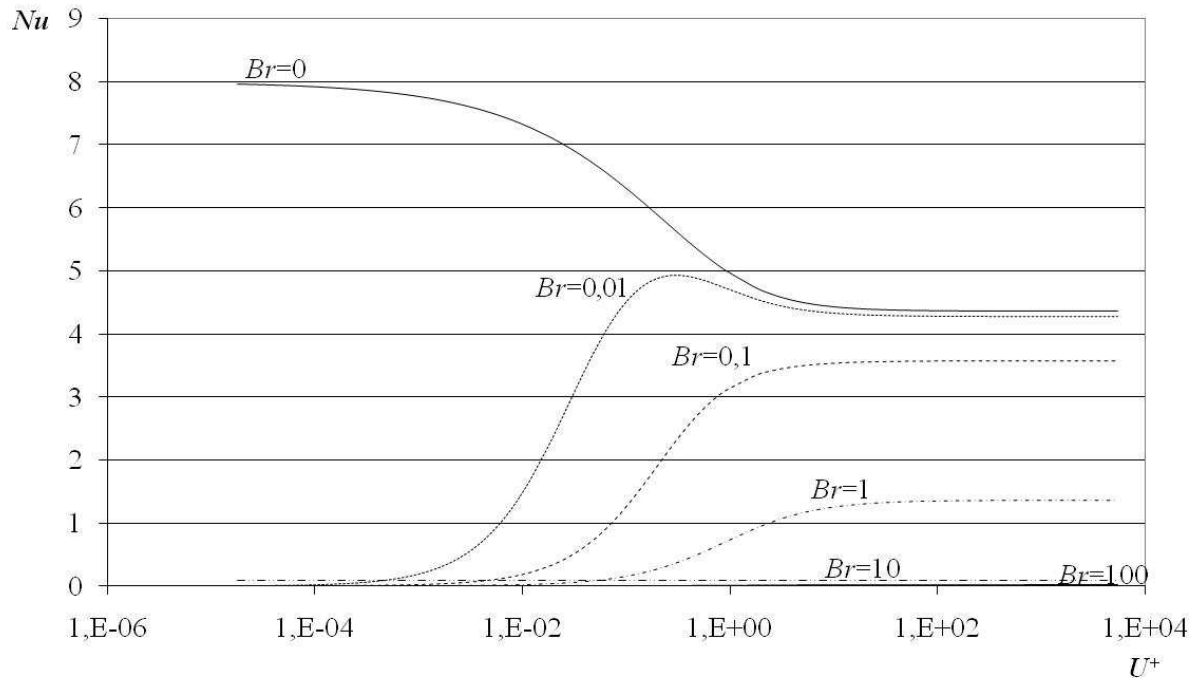


Figura 4.7 Análise para o caso de $Br > 0$ da literatura

As consequências para o projecto e dimensionamento de uma instalação poderão ser nefastas já que ao se assumir, erradamente, um número de Nusselt baixo, próximo de zero, este facto induziria um aumento desnecessário da potência de aquecimento ou do comprimento da tubagem, caso se pretendesse aquecer um fluido nessa região de U^+ .

5 Análise do perfil de temperaturas e influência da dissipação viscosa

5.1 Introdução

Neste capítulo ir-se-á fazer fundamentalmente uma análise do perfil de temperaturas ao longo do raio da tubagem, para diferentes números de Brinkman e diferentes valores do parâmetro U^+ . Pretende-se assim fundamentar as explicações dadas no capítulo anterior sobre o comportamento do número de Nusselt em função do parâmetro U^+ e do número de Brinkman.

De forma a que os perfis de temperatura representados, i.e., $T^* - T_w^*$, não sejam contra intuitivos, optou-se por adimensionalizar estes, utilizando o módulo do fluxo de calor imposto na parede, ou seja,

$$T^* = \frac{T - T_w}{\frac{|\dot{q}_w| D}{k}} \quad (5.1)$$

deste modo o sinal, positivo ou negativo, da diferença $T - T_w$ não sofre alterações em virtude do sinal do fluxo de calor, $\dot{q}_w$, que como foi referido anteriormente é positivo quando o calor entra no tubo, aquecimento, e negativo quando o calor é removido das paredes do tubo, arrefecimento. Em cada perfil de temperaturas será representado, por intermédio do símbolo “*”, o valor correspondente da temperatura média, $\bar{T}^* - T_w^*$.

Antes de analisar os perfis de temperatura ir-se-á analisar o comportamento da potência dissipada por atrito viscoso em função do raio.

5.2 Dissipação viscosa em função do raio

De forma a se visualizar o local onde ocorre a geração de calor por dissipação viscosa em função do quociente $a = \tau_0 / \tau_w$ efectuou-se, na figura 5.1, uma análise gráfica da potência dissipada, na forma adimensional e para um dado Brinkman mantido constante,

$-4r^* Br^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)$, ver equação (2.13), em função do raio adimensional, r^* , e para diferentes valores do parâmetro a .

Conforme foi referido no capítulo anterior, secção 4.4.1, verifica-se na figura 5.1 que com o aumento do parâmetro a , menores valores de U^+ , maior é a intensificação e concentração da dissipação viscosa junto à parede do tubo. Este comportamento é pois responsável por um aumento da temperatura da parede T_w e consequente diminuição do número de Nusselt que, para um mesmo $Br^* > 0$, é tanto mais significativa quanto maior for o valor de a , menor valor de U^+ , ver figura 4.4.

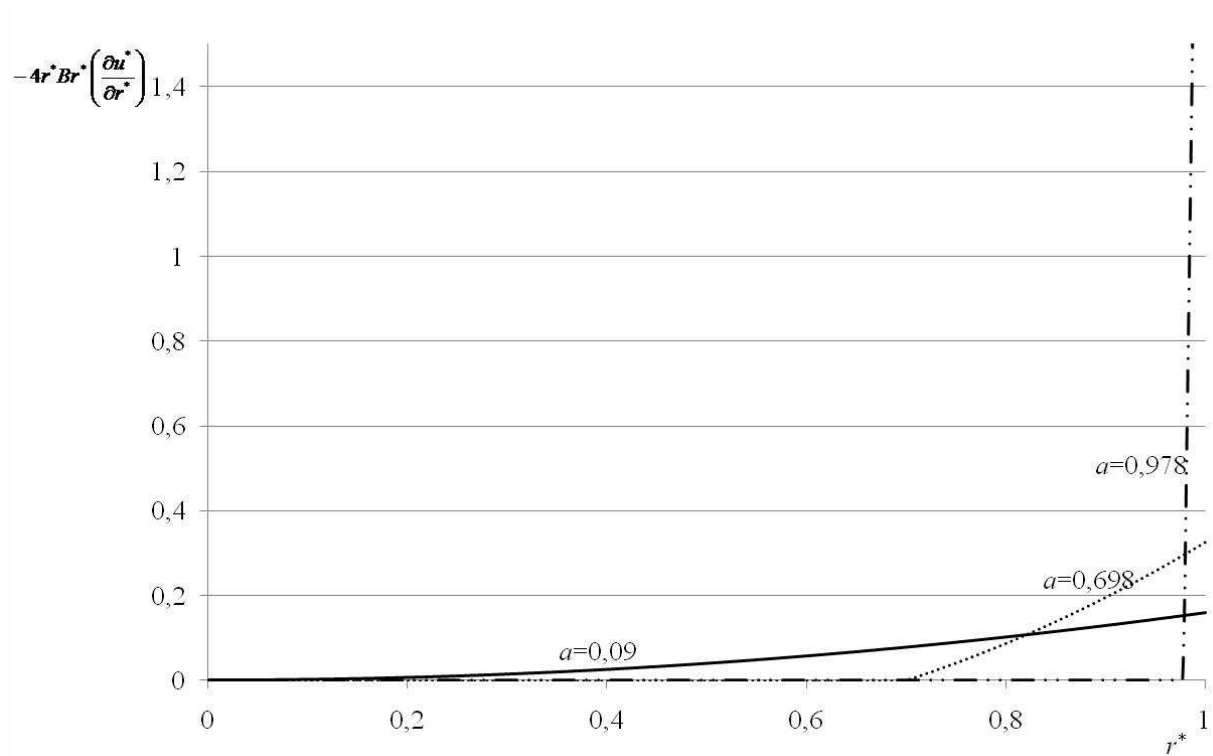


Figura 5.1 Dissipação viscosa em função do raio

5.3 Análise do perfil de temperaturas

5.3.1 Perfis de temperatura para $U^+ = 0,001$

Nas figuras 5.2 a 5.5 representou-se o comportamento dos perfis de temperatura, $T^* - T_w^*$, em função do raio adimensional, r^* , para diferentes números de Brinkman e para $U^+ = 0,001$.

Para $Br^* > 0$, figuras 5.2 e 5.3, verificou-se que a temperatura da parede é sempre superior à temperatura da mistura, isto deve-se ao facto de ambos, o aquecimento e a dissipação viscosa, promoverem o aumento da temperatura da parede. Como seria de esperar, à medida que nos aproximamos da parede, a diferença $T^* - T_w^*$ tende para zero pois a temperatura do fluido tende para a temperatura da parede.

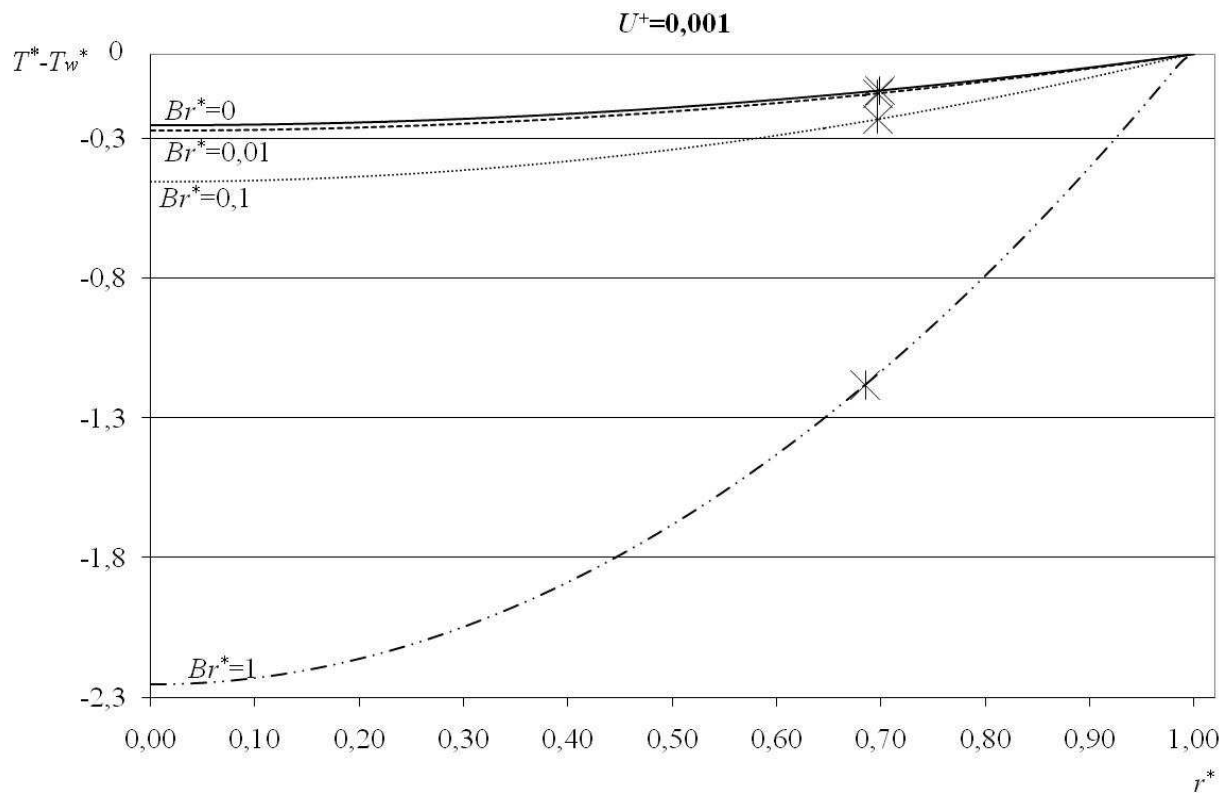


Figura 5.2 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $0 \leq Br^* \leq 1$

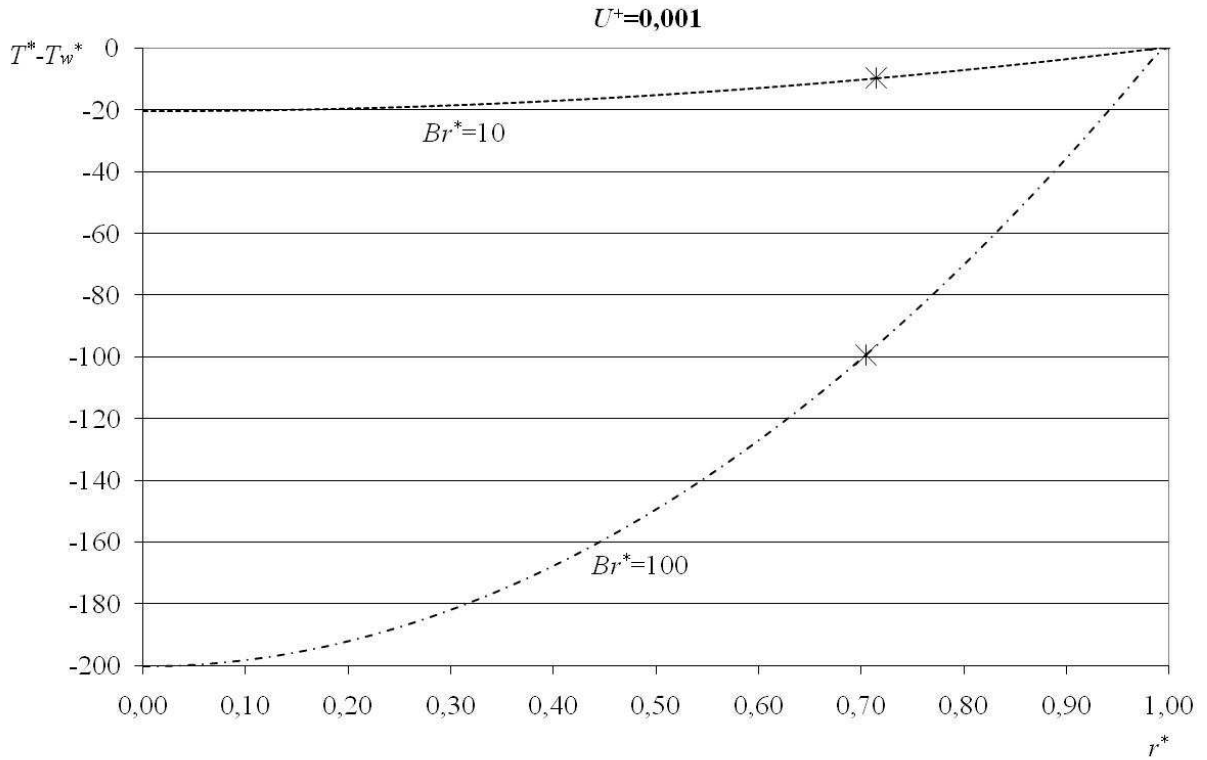


Figura 5.3 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $Br^* > 1$

Da análise destes dois gráficos é também notório o aumento da diferença de temperaturas $T_w^* - T^*$ e $T_w^* - \bar{T}^*$ com o aumento do número de Brinkman. Para $Br^* = 0$, como seria de esperar, é onde ocorre as menores diferenças de temperaturas $T_w^* - T^*$ e $T_w^* - \bar{T}^*$.

Para $Br^* < 0$, figuras 5.4 e 5.5 surgem comportamentos distintos dos perfis de temperatura consoante o fluido esteja a arrefecer, $|Br^*| < 1/8$, $Br^* = 0, -0.01$ e -0.1 , figura 5.4, em virtude do calor retirado na parede ser superior ao gerado por dissipação viscosa, ou então o fluido esteja a aquecer, $|Br^*| > 1/8$, $Br^* = -0.2, -1, -10$ e -100 , figuras 5.4 e 5.5, onde o calor retirado na parede é inferior ao gerado por dissipação viscosa. No primeiro caso, o perfil de temperaturas apresenta apenas um local onde a derivada dT^*/dr^* é igual a zero, esse local é no eixo da conduta. No segundo caso, além da derivada nula no eixo de simetria do perfil de temperaturas, surge um outro local mais próximo da parede onde se verifica igualmente que $dT^*/dr^* = 0$.

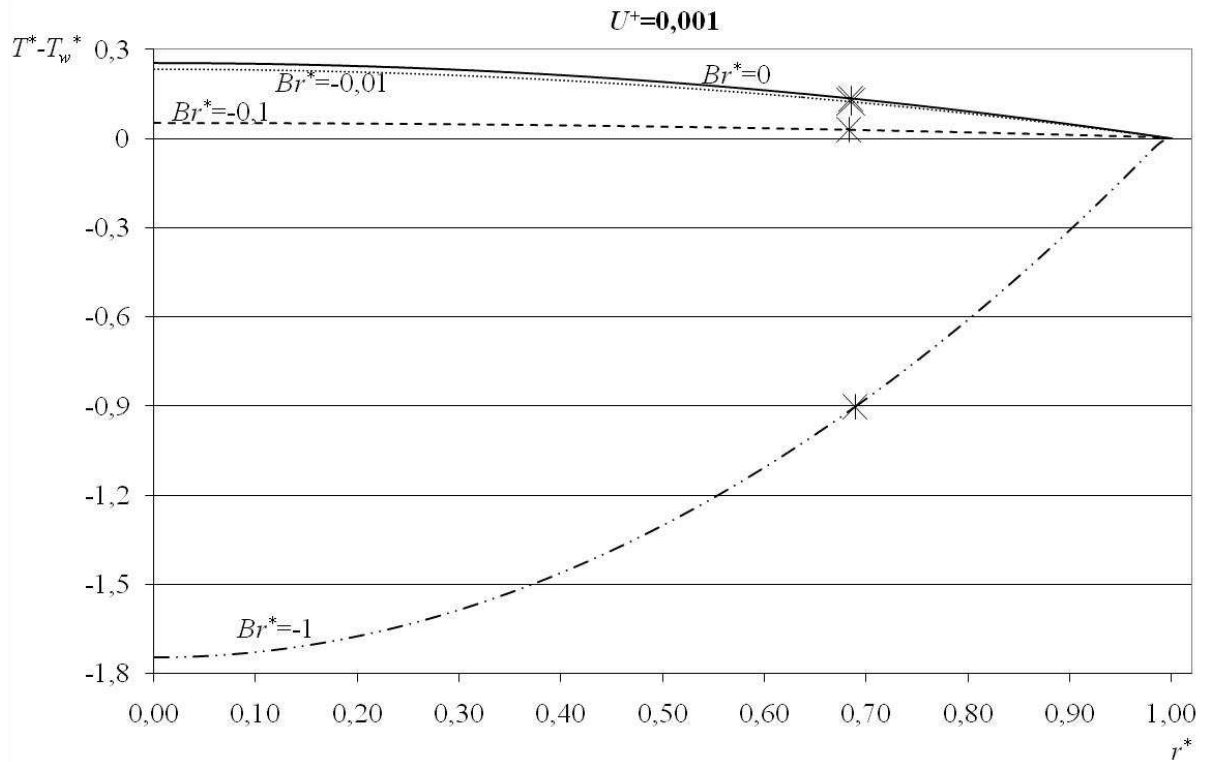


Figura 5.4 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$

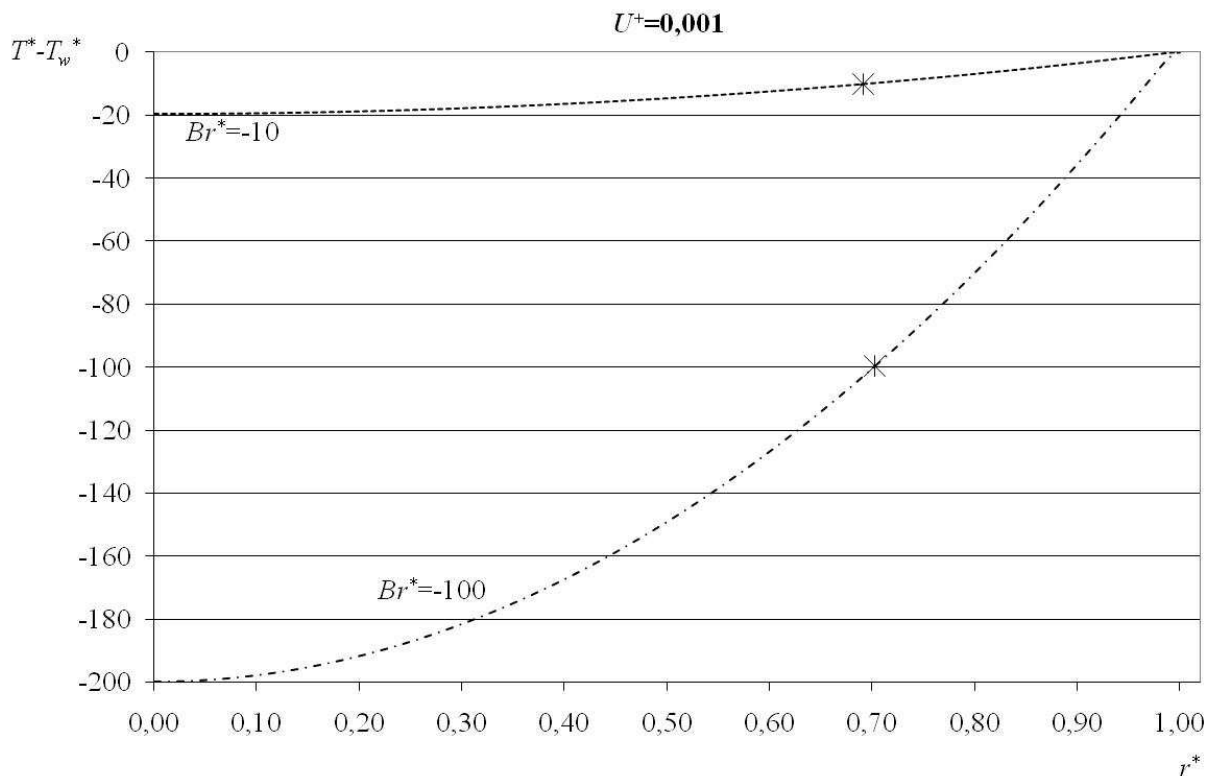


Figura 5.5 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,001$ e $Br^* < -1$

Na figura 5.6 mostra-se uma ampliação do perfil de temperatura junto à parede, onde para o número de Brinkman igual a -1 é notório este segundo local onde $dT^*/dr^* = 0$. Esta

segunda derivada igual a zero surge em virtude de, na parede, $dT^*/dr^* < 0$ pois $q_w < 0$, independentemente do fluido estar a arrefecer ou a aquecer o que, nesta última situação, $|Br^*| > 1/8$, obriga a que exista uma derivada dT^*/dr^* positiva algures no perfil de temperatura, o que origina um máximo local onde a derivada é nula.

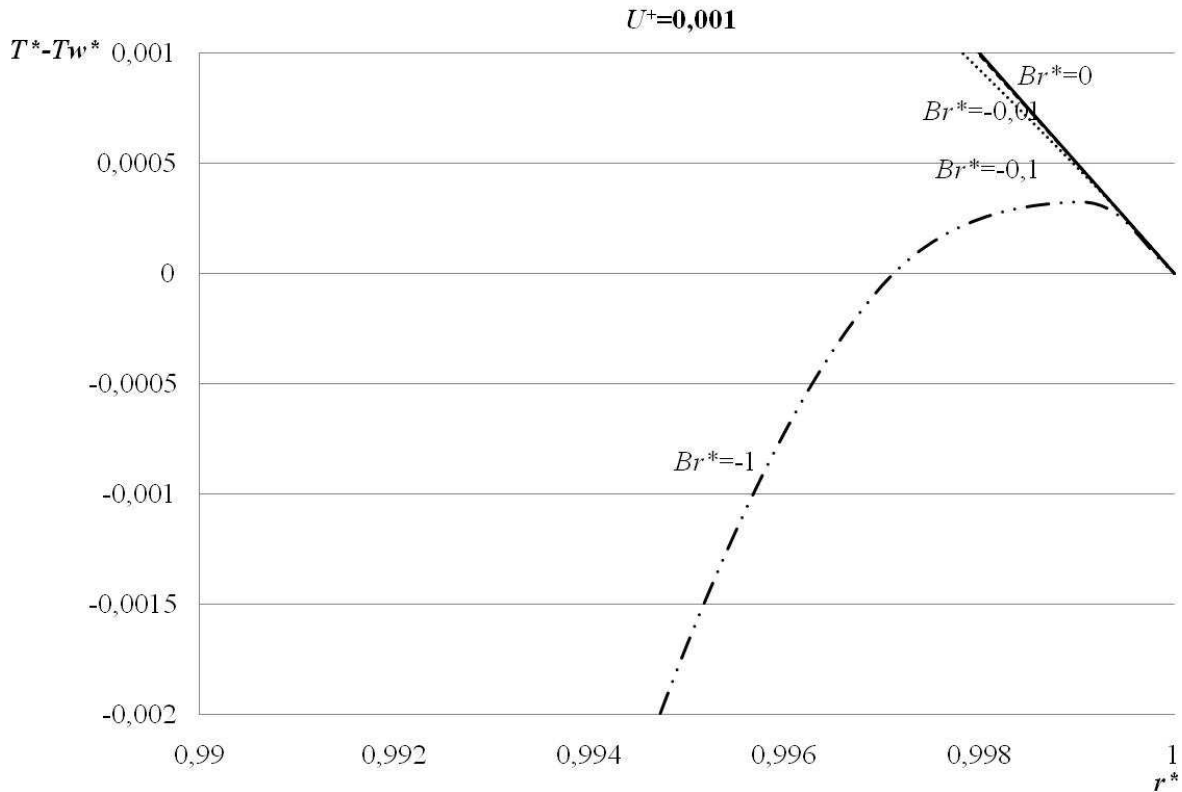


Figura 5.6 Ampliação do perfil de temperaturas junto à parede para $-1 \leq Br^* \leq 0$

No Anexo B apresentam-se os gráficos de outros perfis de temperatura para valores mais elevados do parâmetro U^+ , nomeadamente $U^+ = 0,2$ e 100 . Como se poderá constatar, no geral, o comportamento dos perfis de temperatura não difere daquele aqui apresentado.

5.3.2 Perfis de temperatura para $Br^* = -0,2$ e vários valores de U^+

Nesta secção vão ser apresentados os perfis de temperatura para o caso em que o número de Brinkman é igual a $-0,2$, situação em que o fluido está a aquecer pois o calor retirado na parede é inferior ao calor gerado por dissipação, para vários valores de U^+ . O gráfico do Nusselt para o caso em análise poderá ser visto na figura 4.6.

Os valores de U^+ estudados são: $U^+ = 0,001$ e $0,213$, casos em que o Nu é negativo; $U^+ = 0,927$, caso em que a curva de Nu apresenta uma descontinuidade e finalmente $U^+ = 106,7$, caso em que o número de Nusselt é positivo, c.f. figura 4.6.

A figura 5.7 apresenta pois os perfis de temperatura para os casos referidos anteriormente. Podendo-se observar claramente os dois locais do perfil onde existe uma derivada nula como foi referido na secção 5.3.1. Também se pode constatar o aumento da temperatura da mistura com o aumento de U^+ , chegando esta a ser superior à temperatura da parede, $U^+ = 106,7$, Nu positivo na figura 4.6, apesar do fluido estar a aquecer.

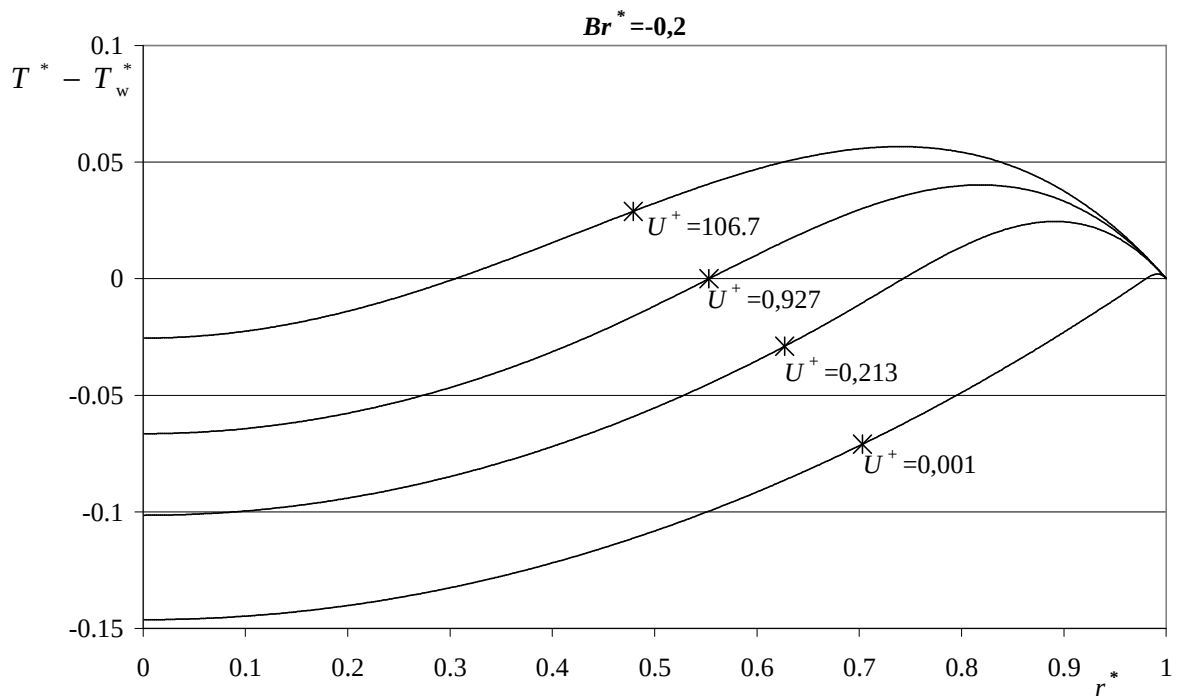


Figura 5.7 Perfis de temperatura para $Br^* = -0,2$ e vários valores de U^+

6 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

6.1 Conclusões

Após a realização deste trabalho podemos tirar as seguintes conclusões:

O parâmetro $U^+ = \bar{U}8\mu_0/(D\tau_0) = 8/Bn$ é o mais adequado para representar as evoluções do número de Nusselt, uma vez que congrega num único número os parâmetros reológicos, μ_0 e τ_0 , e os parâmetros relativos ao escoamento, $\bar{U}$ e D , sendo que, para um dado valor de U^+ e um dado valor de Br^* existe um e um só valor do número de Nusselt.

Quando a dissipação por efeitos viscosos está presente, é fundamental contabilizar correctamente o número de Brinkman, $Br^* = (\bar{U}\tau_w)/(8\dot{q}_w)$, caso contrário o número de Nusselt obtido fica, neste caso, desprovido de qualquer significado físico. Podendo até a sua utilização ter consequências nefastas já que o Nu assim obtido dá valores até cerca de oitenta vezes mais pequeno que o valor real.

Nos perfis de temperatura, e nos casos em que o calor gerado por dissipação viscosa é superior ao retirado na parede, estes apresentam sempre dois pontos de derivada nula, além da derivada nula no eixo de simetria do perfil de temperaturas surge um outro local mais próximo da parede onde se verifica igualmente que $dT^*/dr^* = 0$.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como trabalhos futuros poder-se-á pensar em estender esta análise aos casos de temperatura de parede constante, ou outras secções de conduta que não a secção circular, e também a outros fluidos não-Newtonianos.

Referências Bibliográficas

Barletta, A. 1997. Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation. *Int. J. Heat Mass Transfer* 40,15-26.

Bird R. B., Armstrong R. C. and Hassager O. (1987). *Dynamics Of Polymeric Liquids*. A Wiley-Interscience Publication Volume 1

Brinkman H.C., Heat effects in capillary flow I, *Appl. Sci. Res. A2* (1951) 120–124

Coelho, P. M. and Pinho, F. T.(2009). A generalized Brinkman number for non Newtonian duct flows. *Journal of Fluids Engineering* 156 202–206

Coelho, P. M., Pinho, F. T. and Oliveira P.J. (2002). Fully developed forced convection of the Phan-Thien-Tanner fluid in ducts with a constant wall temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 1413-1423

Cruz D. (2010). Cálculo simplificado do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos em condutas circulares. Faculdade de Engenharia do Porto, Relatório Projecto Final-MIEM (em execução).

Fonseca J. E. A. (2009). Análise da Transferência de Calor em Tubos com Desenvolvimento Simultâneo dos Perfis Térmicos e Hidrodinâmicos em Regime Laminar. Faculdade de Engenharia do Porto, Relatório Projecto Final-MIEM.

Hartnett, J. P. and Cho, Y. I. (1998). Non-Newtonian fluids. *Handbook of heat transfer* chap. 10, (3rd ed. W. Rohsenow, J. Hartnett and Y. Cho), 10.1–10.53. New York: McGraw-Hill.

Khatyr R., Ouldhadda D. and Il Idrissi A. (2003). Viscous dissipation effects on the asymptotic behavior of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 589-598

Kumar Ravindra (1964). Heat Transfer in Laminar Flow Of Bingham Material Through a Circular Pipe. *Appl. Sci. Res. Section A*, Vol. 15.

Min T. and Yoo J.Y. (1999). Laminar Convective Heat Transfer of Bingham Plastic in a Circular Pipe With Uniform Wall Heat Flux: The Graetz Problem Extended. Journal of Heat Transfer ASME Vol.121.

Özişik, M. N., “Heat Transfer a Basic Approach”, McGraw-Hill, New York, 1985.

Pinho F.T., Oliveira P.J. (2000). Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien-Tanner fluid, Int. J. Heat Mass Transfer 43 2273-2287.

Poole R. J., Chhabra R.P. (2010). Development Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Yield Stress Fluids. Journal of Fluids Engineering ASME 132, 034501-1.

ANEXO A

Neste anexo apresentam-se os valores numéricos do número de Nusselt para diferentes números de Brinkman positivos, caso mais frequente que é o aquecimento do fluido, em função do parâmetro genérico U^+ , que é dado por:

$$U^+ = \frac{\bar{U}}{D\tau_0/(8\mu_0)} = \frac{8}{Bn} \quad (4.5)$$

Estes valores são válidos para fluxo de calor constante na parede e escoamento laminar de um fluido de Bingham numa conduta de secção circular.

Tabela A.12. Relação entre o parâmetro U^+ e o Nu com variação do Br^*

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$8,9 \times 10^{-06}$	7,97943	7,38977	4,43809	0,88863	0,09876	0,00999
$3,6 \times 10^{-05}$	7,95538	7,36914	4,43064	0,88833	0,09875	0,00999
$6,2 \times 10^{-05}$	7,94108	7,35687	4,42620	0,88815	0,09875	0,00999
$8,9 \times 10^{-05}$	7,92971	7,34711	4,42266	0,88801	0,09875	0,00999
$1,2 \times 10^{-04}$	7,91998	7,33875	4,41963	0,88789	0,09875	0,00999
$1,4 \times 10^{-04}$	7,91136	7,33135	4,41695	0,88778	0,09875	0,00999
$1,7 \times 10^{-04}$	7,90353	7,32463	4,41451	0,88768	0,09875	0,00999
$2,0 \times 10^{-04}$	7,89632	7,31843	4,41226	0,88759	0,09874	0,00999
$2,5 \times 10^{-04}$	7,88329	7,30724	4,40818	0,88742	0,09874	0,00999
$3,0 \times 10^{-04}$	7,87164	7,29723	4,40454	0,88728	0,09874	0,00999
$3,6 \times 10^{-04}$	7,86103	7,28811	4,40121	0,88714	0,09874	0,00999
$3,9 \times 10^{-04}$	7,85441	7,28241	4,39914	0,88706	0,09874	0,00999
$4,5 \times 10^{-04}$	7,84354	7,27307	4,39573	0,88692	0,09874	0,00999
$5,0 \times 10^{-04}$	7,83484	7,26559	4,39299	0,88681	0,09873	0,00999
$5,8 \times 10^{-04}$	7,82395	7,25623	4,38957	0,88667	0,09873	0,00999
$6,5 \times 10^{-04}$	7,81376	7,24746	4,38636	0,88654	0,09873	0,00999
$7,2 \times 10^{-04}$	7,80414	7,23919	4,38333	0,88641	0,09873	0,00999
$8,0 \times 10^{-04}$	7,79391	7,23038	4,38010	0,88628	0,09873	0,00999
$8,8 \times 10^{-04}$	7,78421	7,22203	4,37703	0,88615	0,09873	0,00999
$9,6 \times 10^{-04}$	7,77497	7,21408	4,37411	0,88603	0,09873	0,00999
$1,1 \times 10^{-03}$	7,76423	7,20483	4,37071	0,88589	0,09872	0,00999
$1,2 \times 10^{-03}$	7,75492	7,19681	4,36775	0,88577	0,09872	0,00999
$1,3 \times 10^{-03}$	7,74425	7,18762	4,36437	0,88563	0,09872	0,00999
$1,4 \times 10^{-03}$	7,73489	7,17956	4,36139	0,88551	0,09872	0,00999
$1,5 \times 10^{-03}$	7,72112	7,16770	4,35701	0,88533	0,09872	0,00999
$1,6 \times 10^{-03}$	7,71491	7,16234	4,35503	0,88525	0,09872	0,00999
$1,7 \times 10^{-03}$	7,70439	7,15328	4,35168	0,88511	0,09871	0,00999
$1,8 \times 10^{-03}$	7,69429	7,14457	4,34846	0,88498	0,09871	0,00999
$2,0 \times 10^{-03}$	7,68050	7,13268	4,34405	0,88479	0,09871	0,00999

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$2,1 \times 10^{-03}$	7,67321	7,12638	4,34171	0,88470	0,09871	0,00999
$2,2 \times 10^{-03}$	7,66610	7,12025	4,33944	0,88460	0,09871	0,00999
$2,4 \times 10^{-03}$	7,65178	7,10790	4,33485	0,88441	0,09870	0,00999
$2,5 \times 10^{-03}$	7,64517	7,10220	4,33272	0,88432	0,09870	0,00999
$2,7 \times 10^{-03}$	7,63181	7,09067	4,32843	0,88414	0,09870	0,00999
$2,8 \times 10^{-03}$	7,62562	7,08532	4,32644	0,88406	0,09870	0,00999
$3,0 \times 10^{-03}$	7,61360	7,07494	4,32257	0,88390	0,09870	0,00999
$3,2 \times 10^{-03}$	7,60150	7,06449	4,31866	0,88374	0,09870	0,00999
$3,3 \times 10^{-03}$	7,59586	7,05962	4,31684	0,88366	0,09870	0,00999
$3,5 \times 10^{-03}$	7,58438	7,04971	4,31313	0,88350	0,09869	0,00999
$3,7 \times 10^{-03}$	7,57376	7,04052	4,30969	0,88336	0,09869	0,00999
$3,9 \times 10^{-03}$	7,56298	7,03121	4,30620	0,88321	0,09869	0,00999
$4,1 \times 10^{-03}$	7,55298	7,02256	4,30296	0,88308	0,09869	0,00999
$4,3 \times 10^{-03}$	7,54281	7,01377	4,29965	0,88294	0,09869	0,00999
$4,5 \times 10^{-03}$	7,53334	7,00558	4,29658	0,88281	0,09868	0,00999
$4,7 \times 10^{-03}$	7,52369	6,99724	4,29344	0,88267	0,09868	0,00999
$4,9 \times 10^{-03}$	7,51469	6,98945	4,29050	0,88255	0,09868	0,00999
$5,1 \times 10^{-03}$	7,50549	6,98150	4,28750	0,88242	0,09868	0,00999
$5,3 \times 10^{-03}$	7,49690	6,97406	4,28470	0,88231	0,09868	0,00999
$5,6 \times 10^{-03}$	7,48398	6,96288	4,28047	0,88213	0,09868	0,00999
$5,8 \times 10^{-03}$	7,47584	6,95583	4,27781	0,88201	0,09868	0,00999
$6,1 \times 10^{-03}$	7,46356	6,94520	4,27379	0,88184	0,09867	0,00999
$6,3 \times 10^{-03}$	7,45546	6,93819	4,27113	0,88173	0,09867	0,00999
$6,6 \times 10^{-03}$	7,44377	6,92806	4,26729	0,88156	0,09867	0,00999
$6,8 \times 10^{-03}$	7,43637	6,92165	4,26486	0,88146	0,09867	0,00999
$7,1 \times 10^{-03}$	7,42519	6,91196	4,26118	0,88130	0,09867	0,00999
$7,4 \times 10^{-03}$	7,41460	6,90279	4,25769	0,88115	0,09866	0,00999
$7,8 \times 10^{-03}$	7,40056	6,89062	4,25306	0,88096	0,09866	0,00999
$8,0 \times 10^{-03}$	7,39355	6,88454	4,25074	0,88086	0,09866	0,00999

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$8,3 \times 10^{-03}$	7,38339	6,87573	4,24738	0,88072	0,09866	0,00999
$8,6 \times 10^{-03}$	7,37345	6,86711	4,24409	0,88057	0,09866	0,00999
$8,9 \times 10^{-03}$	7,36400	6,85891	4,24096	0,88044	0,09866	0,00999
$9,2 \times 10^{-03}$	7,35447	6,85064	4,23779	0,88030	0,09866	0,00999
$9,5 \times 10^{-03}$	7,34512	6,84253	4,23469	0,88017	0,09866	0,00999
$9,8 \times 10^{-03}$	7,33622	6,83480	4,23173	0,88004	0,09866	0,00999
$1,0 \times 10^{-02}$	7,33011	6,82950	4,22970	0,87995	0,09865	0,00999
$1,1 \times 10^{-02}$	7,30517	6,80785	4,22138	0,87959	0,09865	0,00999
$1,2 \times 10^{-02}$	7,28071	6,78660	4,21320	0,87924	0,09865	0,00999
$1,8 \times 10^{-02}$	7,13966	6,66388	4,16558	0,87714	0,09862	0,00999
$2,2 \times 10^{-02}$	7,05467	6,58978	4,13650	0,87585	0,09860	0,00999
$2,7 \times 10^{-02}$	6,98039	6,52493	4,11086	0,87469	0,09859	0,00999
$3,1 \times 10^{-02}$	6,91416	6,46702	4,08779	0,87364	0,09857	0,00999
$3,6 \times 10^{-02}$	6,85423	6,41456	4,06677	0,87268	0,09856	0,00999
$4,0 \times 10^{-02}$	6,79941	6,36652	4,04741	0,87179	0,09855	0,00999
$4,4 \times 10^{-02}$	6,74881	6,32214	4,02943	0,87095	0,09854	0,00999
$4,9 \times 10^{-02}$	6,70180	6,28087	4,01262	0,87016	0,09853	0,00999
$5,3 \times 10^{-02}$	6,65786	6,24226	3,99683	0,86942	0,09852	0,00999
$5,8 \times 10^{-02}$	6,61660	6,20597	3,98192	0,86871	0,09851	0,00998
$6,2 \times 10^{-02}$	6,57769	6,17173	3,96780	0,86803	0,09850	0,00998
$6,7 \times 10^{-02}$	6,54087	6,13930	3,95437	0,86739	0,09849	0,00998
$7,1 \times 10^{-02}$	6,50591	6,10850	3,94156	0,86677	0,09849	0,00998
$7,6 \times 10^{-02}$	6,47263	6,07915	3,92933	0,86618	0,09848	0,00998
$8,0 \times 10^{-02}$	6,44088	6,05114	3,91760	0,86561	0,09847	0,00998
$8,4 \times 10^{-02}$	6,41052	6,02433	3,90635	0,86506	0,09846	0,00998
$8,9 \times 10^{-02}$	6,38143	5,99863	3,89553	0,86452	0,09846	0,00998
$1,1 \times 10^{-01}$	6,27590	5,90529	3,85595	0,86256	0,09843	0,00998
$1,2 \times 10^{-01}$	6,18432	5,82414	3,82118	0,86081	0,09841	0,00998
$1,4 \times 10^{-01}$	6,10352	5,75242	3,79018	0,85922	0,09839	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$1,6 \times 10^{-01}$	6,03130	5,68823	3,76220	0,85778	0,09837	0,00998
$1,8 \times 10^{-01}$	5,96610	5,63020	3,73673	0,85645	0,09835	0,00998
$2,0 \times 10^{-01}$	5,90675	5,57731	3,71336	0,85521	0,09834	0,00998
$2,1 \times 10^{-01}$	5,85236	5,52880	3,69179	0,85406	0,09832	0,00998
$2,3 \times 10^{-01}$	5,80224	5,48404	3,67178	0,85299	0,09831	0,00998
$2,5 \times 10^{-01}$	5,75581	5,44255	3,65313	0,85198	0,09829	0,00998
$2,7 \times 10^{-01}$	5,71262	5,40392	3,63569	0,85103	0,09828	0,00998
$2,8 \times 10^{-01}$	5,67230	5,36782	3,61932	0,85013	0,09827	0,00998
$3,0 \times 10^{-01}$	5,63454	5,33399	3,60390	0,84927	0,09826	0,00998
$3,2 \times 10^{-01}$	5,59906	5,30219	3,58936	0,84846	0,09825	0,00998
$3,4 \times 10^{-01}$	5,56564	5,27221	3,57559	0,84769	0,09823	0,00998
$3,6 \times 10^{-01}$	5,53409	5,24389	3,56254	0,84696	0,09823	0,00998
$3,7 \times 10^{-01}$	5,50423	5,21707	3,55015	0,84625	0,09822	0,00998
$3,9 \times 10^{-01}$	5,47593	5,19164	3,53835	0,84558	0,09821	0,00998
$4,0 \times 10^{-01}$	5,44905	5,16747	3,52711	0,84494	0,09820	0,00998
$4,3 \times 10^{-01}$	5,42348	5,14447	3,51638	0,84432	0,09819	0,00998
$4,4 \times 10^{-01}$	5,39911	5,12254	3,50612	0,84373	0,09818	0,00998
$4,6 \times 10^{-01}$	5,37586	5,10160	3,49630	0,84316	0,09817	0,00998
$4,8 \times 10^{-01}$	5,35364	5,08159	3,48689	0,84261	0,09817	0,00998
$5,0 \times 10^{-01}$	5,33239	5,06244	3,47786	0,84208	0,09816	0,00998
$5,2 \times 10^{-01}$	5,31204	5,04409	3,46919	0,84157	0,09815	0,00998
$5,3 \times 10^{-01}$	5,29252	5,02649	3,46086	0,84108	0,09815	0,00998
$5,5 \times 10^{-01}$	5,27379	5,00960	3,45284	0,84061	0,09814	0,00998
$5,7 \times 10^{-01}$	5,25580	4,99336	3,44512	0,84015	0,09813	0,00998
$5,9 \times 10^{-01}$	5,23850	4,97774	3,43767	0,83970	0,09813	0,00998
$6,0 \times 10^{-01}$	5,22184	4,96270	3,43049	0,83928	0,09812	0,00998
$6,2 \times 10^{-01}$	5,20580	4,94821	3,42356	0,83886	0,09812	0,00998
$6,4 \times 10^{-01}$	5,19034	4,93424	3,41687	0,83846	0,09811	0,00998
$6,6 \times 10^{-01}$	5,17543	4,92076	3,41040	0,83807	0,09810	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$6,8 \times 10^{-01}$	5,16103	4,90774	3,40414	0,83769	0,09810	0,00998
$6,9 \times 10^{-01}$	5,14713	4,89517	3,39809	0,83732	0,09809	0,00998
$7,1 \times 10^{-01}$	5,13368	4,88300	3,39222	0,83697	0,09809	0,00998
$7,3 \times 10^{-01}$	5,12068	4,87124	3,38654	0,83662	0,09808	0,00998
$7,5 \times 10^{-01}$	5,10810	4,85985	3,38103	0,83628	0,09808	0,00998
$7,6 \times 10^{-01}$	5,09591	4,84882	3,37569	0,83596	0,09808	0,00998
$7,8 \times 10^{-01}$	5,08411	4,83813	3,37051	0,83564	0,09807	0,00998
$8,0 \times 10^{-01}$	5,07267	4,82777	3,36547	0,83533	0,09807	0,00998
$8,2 \times 10^{-01}$	5,06157	4,81772	3,36059	0,83503	0,09806	0,00998
$8,4 \times 10^{-01}$	5,05080	4,80796	3,35584	0,83473	0,09806	0,00998
$8,5 \times 10^{-01}$	5,04035	4,79849	3,35122	0,83445	0,09805	0,00998
$8,7 \times 10^{-01}$	5,03020	4,78929	3,34673	0,83417	0,09805	0,00998
$8,9 \times 10^{-01}$	5,02034	4,78035	3,34236	0,83390	0,09805	0,00998
1,8	4,73636	4,52218	3,21407	0,82567	0,09793	0,00998
2,8	4,62059	4,41652	3,16033	0,82208	0,09788	0,00998
3,6	4,55867	4,35992	3,13124	0,82010	0,09785	0,00998
4,4	4,52042	4,32492	3,11315	0,81885	0,09784	0,00998
5,3	4,49457	4,30124	3,10086	0,81800	0,09782	0,00998
6,2	4,47596	4,28420	3,09200	0,81738	0,09781	0,00998
7,1	4,46195	4,27136	3,08530	0,81692	0,09781	0,00998
8,0	4,45103	4,26135	3,08008	0,81655	0,09780	0,00998
8,9	4,44228	4,25334	3,07589	0,81625	0,09780	0,00998
9,8	4,43512	4,24677	3,07245	0,81601	0,09779	0,00998
$1,0 \times 10^{01}$	4,42915	4,24129	3,06958	0,81581	0,09779	0,00998
$1,2 \times 10^{01}$	4,42410	4,23666	3,06716	0,81564	0,09779	0,00998
$1,24 \times 10^{01}$	4,41976	4,23269	3,06507	0,81549	0,09779	0,00998
$1,3 \times 10^{01}$	4,41601	4,22925	3,06327	0,81536	0,09779	0,00998
$1,4 \times 10^{01}$	4,41273	4,22624	3,06169	0,81525	0,09778	0,00998
$1,5 \times 10^{01}$	4,40983	4,22358	3,06029	0,81515	0,09778	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$1,60 \times 10^{+01}$	4,40726	4,22122	3,05905	0,81506	0,09778	0,00998
$1,69 \times 10^{+01}$	4,40495	4,21911	3,05794	0,81498	0,09778	0,00998
$1,78 \times 10^{+01}$	4,40288	4,21720	3,05695	0,81491	0,09778	0,00998
$1,87 \times 10^{+01}$	4,40101	4,21548	3,05604	0,81485	0,09778	0,00998
$1,96 \times 10^{+01}$	4,39931	4,21392	3,05522	0,81479	0,09778	0,00998
$2,0 \times 10^{+01}$	4,39775	4,21250	3,05447	0,81474	0,09778	0,00998
$2,1 \times 10^{+01}$	4,39632	4,21119	3,05378	0,81469	0,09778	0,00998
$2,2 \times 10^{+01}$	4,39501	4,20998	3,05315	0,81464	0,09778	0,00998
$2,3 \times 10^{+01}$	4,39380	4,20887	3,05257	0,81460	0,09777	0,00998
$2,4 \times 10^{+01}$	4,39268	4,20785	3,05203	0,81456	0,09777	0,00998
$2,49 \times 10^{+01}$	4,39164	4,20689	3,05152	0,81453	0,09777	0,00998
$2,58 \times 10^{+01}$	4,39068	4,20600	3,05106	0,81449	0,09777	0,00998
$2,67 \times 10^{+01}$	4,38977	4,20517	3,05062	0,81446	0,09777	0,00998
$2,76 \times 10^{+01}$	4,38893	4,20440	3,05021	0,81443	0,09777	0,00998
$2,8 \times 10^{+01}$	4,38814	4,20367	3,04983	0,81441	0,09777	0,00998
$2,9 \times 10^{+01}$	4,38739	4,20299	3,04947	0,81438	0,09777	0,00998
$3,0 \times 10^{+01}$	4,38669	4,20235	3,04913	0,81436	0,09777	0,00998
$3,1 \times 10^{+01}$	4,38603	4,20174	3,04881	0,81433	0,09777	0,00998
$3,2 \times 10^{+01}$	4,38541	4,20117	3,04851	0,81431	0,09777	0,00998
$3,29 \times 10^{+01}$	4,38482	4,20063	3,04823	0,81429	0,09777	0,00998
$3,38 \times 10^{+01}$	4,38426	4,20012	3,04796	0,81427	0,09777	0,00998
$1,6 \times 10^{+01}$	4,38373	4,19963	3,04770	0,81426	0,09777	0,00998
$1,69 \times 10^{+01}$	4,38323	4,19917	3,04746	0,81424	0,09777	0,00998
$1,78 \times 10^{+01}$	4,38275	4,19873	3,04723	0,81422	0,09777	0,00998
$1,87 \times 10^{+01}$	4,38229	4,19831	3,04701	0,81421	0,09777	0,00998
$1,96 \times 10^{+01}$	4,38186	4,19791	3,04680	0,81419	0,09777	0,00998
$2,0 \times 10^{+01}$	4,38144	4,19753	3,04659	0,81418	0,09777	0,00998
$2,1 \times 10^{+01}$	4,38105	4,19717	3,04640	0,81416	0,09777	0,00998
$2,2 \times 10^{+01}$	4,38067	4,19682	3,04622	0,81415	0,09777	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$2,3 \times 10^{+01}$	4,39380	4,20887	3,05257	0,81460	0,09777	0,00998
$2,4 \times 10^{+01}$	4,39268	4,20785	3,05203	0,81456	0,09777	0,00998
$2,49 \times 10^{+01}$	4,39164	4,20689	3,05152	0,81453	0,09777	0,00998
$2,58 \times 10^{+01}$	4,39068	4,20600	3,05106	0,81449	0,09777	0,00998
$2,67 \times 10^{+01}$	4,38977	4,20517	3,05062	0,81446	0,09777	0,00998
$2,76 \times 10^{+01}$	4,38893	4,20440	3,05021	0,81443	0,09777	0,00998
$2,8 \times 10^{+01}$	4,38814	4,20367	3,04983	0,81441	0,09777	0,00998
$2,9 \times 10^{+01}$	4,38739	4,20299	3,04947	0,81438	0,09777	0,00998
$3,0 \times 10^{+01}$	4,38669	4,20235	3,04913	0,81436	0,09777	0,00998
$3,1 \times 10^{+01}$	4,38603	4,20174	3,04881	0,81433	0,09777	0,00998
$3,2 \times 10^{+01}$	4,38541	4,20117	3,04851	0,81431	0,09777	0,00998
$3,29 \times 10^{+01}$	4,38482	4,20063	3,04823	0,81429	0,09777	0,00998
$3,38 \times 10^{+01}$	4,38426	4,20012	3,04796	0,81427	0,09777	0,00998
$3,47 \times 10^{+01}$	4,38373	4,19963	3,04770	0,81426	0,09777	0,00998
$3,56 \times 10^{+01}$	4,38323	4,19917	3,04746	0,81424	0,09777	0,00998
$3,64 \times 10^{+01}$	4,38275	4,19873	3,04723	0,81422	0,09777	0,00998
$3,7 \times 10^{+01}$	4,38229	4,19831	3,04701	0,81421	0,09777	0,00998
$3,8 \times 10^{+01}$	4,38186	4,19791	3,04680	0,81419	0,09777	0,00998
$3,9 \times 10^{+01}$	4,38144	4,19753	3,04659	0,81418	0,09777	0,00998
$4,0 \times 10^{+01}$	4,38105	4,19717	3,04640	0,81416	0,09777	0,00998
$4,0 \times 10^{+01}$	4,38067	4,19682	3,04622	0,81415	0,09777	0,00998
$4,2 \times 10^{+01}$	4,38030	4,19649	3,04604	0,81414	0,09777	0,00998
$4,27 \times 10^{+01}$	4,37996	4,19617	3,04588	0,81412	0,09777	0,00998
$4,36 \times 10^{+01}$	4,37962	4,19586	3,04571	0,81411	0,09777	0,00998
$4,4 \times 10^{+01}$	4,37930	4,19557	3,04556	0,81410	0,09777	0,00998
$4,5 \times 10^{+01}$	4,37899	4,19528	3,04541	0,81409	0,09777	0,00998
$4,6 \times 10^{+01}$	4,37870	4,19501	3,04527	0,81408	0,09777	0,00998
$4,7 \times 10^{+01}$	4,37841	4,19475	3,04513	0,81407	0,09777	0,00998
$4,8 \times 10^{+01}$	4,37814	4,19450	3,04500	0,81406	0,09777	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$4,9 \times 10^{+01}$	4,37788	4,19426	3,04487	0,81405	0,09777	0,00998
$5,0 \times 10^{+01}$	4,37762	4,19402	3,04475	0,81404	0,09777	0,00998
$5,07 \times 10^{+01}$	4,37738	4,19380	3,04463	0,81404	0,09777	0,00998
$5,16 \times 10^{+01}$	4,37714	4,19358	3,04451	0,81403	0,09777	0,00998
$5,24 \times 10^{+01}$	4,37691	4,19337	3,04440	0,81402	0,09777	0,00998
$5,33 \times 10^{+01}$	4,37669	4,19317	3,04430	0,81401	0,09777	0,00998
$5,42 \times 10^{+01}$	4,37647	4,19297	3,04419	0,81400	0,09777	0,00998
$5,51 \times 10^{+01}$	4,37627	4,19278	3,04409	0,81400	0,09777	0,00998
$5,60 \times 10^{+01}$	4,37607	4,19260	3,04399	0,81399	0,09777	0,00998
$5,69 \times 10^{+01}$	4,37587	4,19242	3,04390	0,81398	0,09777	0,00998
$5,78 \times 10^{+01}$	4,37568	4,19224	3,04381	0,81398	0,09777	0,00998
$5,87 \times 10^{+01}$	4,37550	4,19208	3,04372	0,81397	0,09777	0,00998
$5,96 \times 10^{+01}$	4,37532	4,19191	3,04363	0,81396	0,09777	0,00998
$6,04 \times 10^{+01}$	4,37515	4,19176	3,04355	0,81396	0,09777	0,00998
$6,13 \times 10^{+01}$	4,37498	4,19160	3,04347	0,81395	0,09777	0,00998
$6,22 \times 10^{+01}$	4,37482	4,19145	3,04339	0,81395	0,09777	0,00998
$6,31 \times 10^{+01}$	4,37466	4,19131	3,04332	0,81394	0,09777	0,00998
$6,40 \times 10^{+01}$	4,37451	4,19117	3,04324	0,81394	0,09777	0,00998
$6,49 \times 10^{+01}$	4,37436	4,19103	3,04317	0,81393	0,09777	0,00998
$6,58 \times 10^{+01}$	4,37422	4,19090	3,04310	0,81393	0,09776	0,00998
$6,67 \times 10^{+01}$	4,37407	4,19077	3,04303	0,81392	0,09776	0,00998
$6,76 \times 10^{+01}$	4,37394	4,19064	3,04296	0,81392	0,09776	0,00998
$6,84 \times 10^{+01}$	4,37380	4,19052	3,04290	0,81391	0,09776	0,00998
$6,93 \times 10^{+01}$	4,37367	4,19040	3,04284	0,81391	0,09776	0,00998
$7,02 \times 10^{+01}$	4,37355	4,19028	3,04277	0,81390	0,09776	0,00998
$7,11 \times 10^{+01}$	4,37342	4,19017	3,04271	0,81390	0,09776	0,00998
$7,20 \times 10^{+01}$	4,37330	4,19006	3,04266	0,81389	0,09776	0,00998
$7,29 \times 10^{+01}$	4,37318	4,18995	3,04260	0,81389	0,09776	0,00998
$7,38 \times 10^{+01}$	4,37307	4,18984	3,04254	0,81389	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$7,47 \times 10^{+01}$	4,37296	4,18974	3,04249	0,81388	0,09776	0,00998
$7,56 \times 10^{+01}$	4,37285	4,18964	3,04244	0,81388	0,09776	0,00998
$7,64 \times 10^{+01}$	4,37274	4,18954	3,04238	0,81388	0,09776	0,00998
$7,73 \times 10^{+01}$	4,37263	4,18944	3,04233	0,81387	0,09776	0,00998
$7,82 \times 10^{+01}$	4,37253	4,18935	3,04228	0,81387	0,09776	0,00998
$7,91 \times 10^{+01}$	4,37243	4,18926	3,04224	0,81386	0,09776	0,00998
$8,0 \times 10^{+01}$	4,37233	4,18917	3,04219	0,81386	0,09776	0,00998
$8,09 \times 10^{+01}$	4,37224	4,18908	3,04214	0,81386	0,09776	0,00998
$8,18 \times 10^{+01}$	4,37214	4,18900	3,04210	0,81385	0,09776	0,00998
$8,27 \times 10^{+01}$	4,37205	4,18891	3,04205	0,81385	0,09776	0,00998
$8,36 \times 10^{+01}$	4,37196	4,18883	3,04201	0,81385	0,09776	0,00998
$8,44 \times 10^{+01}$	4,37188	4,18875	3,04197	0,81385	0,09776	0,00998
$8,53 \times 10^{+01}$	4,37179	4,18867	3,04192	0,81384	0,09776	0,00998
$8,62 \times 10^{+01}$	4,37171	4,18859	3,04188	0,81384	0,09776	0,00998
$8,71 \times 10^{+01}$	4,37162	4,18852	3,04184	0,81384	0,09776	0,00998
$8,80 \times 10^{+01}$	4,37154	4,18844	3,04180	0,81383	0,09776	0,00998
$8,89 \times 10^{+01}$	4,37146	4,18837	3,04177	0,81383	0,09776	0,00998
$1,07 \times 10^{+02}$	4,37016	4,18717	3,04113	0,81379	0,09776	0,00998
$1,24 \times 10^{+02}$	4,36923	4,18632	3,04068	0,81375	0,09776	0,00998
$1,42 \times 10^{+02}$	4,36853	4,18567	3,04034	0,81373	0,09776	0,00998
$1,60 \times 10^{+02}$	4,36798	4,18518	3,04008	0,81371	0,09776	0,00998
$1,78 \times 10^{+02}$	4,36755	4,18478	3,03987	0,81370	0,09776	0,00998
$1,96 \times 10^{+02}$	4,36719	4,18445	3,03970	0,81368	0,09776	0,00998
$2,13 \times 10^{+02}$	4,36690	4,18418	3,03955	0,81367	0,09776	0,00998
$2,31 \times 10^{+02}$	4,36665	4,18395	3,03943	0,81366	0,09776	0,00998
$2,49 \times 10^{+02}$	4,36643	4,18375	3,03933	0,81366	0,09776	0,00998
$2,67 \times 10^{+02}$	4,36624	4,18358	3,03924	0,81365	0,09776	0,00998
$2,84 \times 10^{+02}$	4,36608	4,18343	3,03916	0,81364	0,09776	0,00998
$3,02 \times 10^{+02}$	4,36594	4,18330	3,03909	0,81364	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$3,20 \times 10^{+02}$	4,36581	4,18318	3,03903	0,81363	0,09776	0,00998
$3,38 \times 10^{+02}$	4,36569	4,18307	3,03897	0,81363	0,09776	0,00998
$3,56 \times 10^{+02}$	4,36559	4,18298	3,03892	0,81363	0,09776	0,00998
$3,73 \times 10^{+02}$	4,36550	4,18289	3,03888	0,81362	0,09776	0,00998
$3,91 \times 10^{+02}$	4,36541	4,18282	3,03884	0,81362	0,09776	0,00998
$4,09 \times 10^{+02}$	4,36534	4,18275	3,03880	0,81362	0,09776	0,00998
$4,27 \times 10^{+02}$	4,36527	4,18268	3,03876	0,81362	0,09776	0,00998
$4,44 \times 10^{+02}$	4,36520	4,18262	3,03873	0,81361	0,09776	0,00998
$4,62 \times 10^{+02}$	4,36514	4,18257	3,03870	0,81361	0,09776	0,00998
$4,80 \times 10^{+02}$	4,36508	4,18251	3,03868	0,81361	0,09776	0,00998
$4,98 \times 10^{+02}$	4,36503	4,18247	3,03865	0,81361	0,09776	0,00998
$5,16 \times 10^{+02}$	4,36498	4,18242	3,03863	0,81361	0,09776	0,00998
$5,33 \times 10^{+02}$	4,36494	4,18238	3,03861	0,81360	0,09776	0,00998
$5,51 \times 10^{+02}$	4,36490	4,18234	3,03859	0,81360	0,09776	0,00998
$5,69 \times 10^{+02}$	4,36486	4,18231	3,03857	0,81360	0,09776	0,00998
$5,87 \times 10^{+02}$	4,36482	4,18227	3,03855	0,81360	0,09776	0,00998
$6,04 \times 10^{+02}$	4,36479	4,18224	3,03853	0,81360	0,09776	0,00998
$6,22 \times 10^{+02}$	4,36475	4,18221	3,03852	0,81360	0,09776	0,00998
$6,40 \times 10^{+02}$	4,36472	4,18218	3,03850	0,81360	0,09776	0,00998
$6,58 \times 10^{+02}$	4,36469	4,18216	3,03849	0,81360	0,09776	0,00998
$6,76 \times 10^{+02}$	4,36467	4,18213	3,03847	0,81360	0,09776	0,00998
$6,93 \times 10^{+02}$	4,36464	4,18211	3,03846	0,81359	0,09776	0,00998
$7,11 \times 10^{+02}$	4,36461	4,18208	3,03845	0,81359	0,09776	0,00998
$7,29 \times 10^{+02}$	4,36459	4,18206	3,03844	0,81359	0,09776	0,00998
$7,47 \times 10^{+02}$	4,36457	4,18204	3,03843	0,81359	0,09776	0,00998
$7,64 \times 10^{+02}$	4,36455	4,18202	3,03842	0,81359	0,09776	0,00998
$7,82 \times 10^{+02}$	4,36453	4,18200	3,03841	0,81359	0,09776	0,00998
$8,00 \times 10^{+02}$	4,36451	4,18198	3,03840	0,81359	0,09776	0,00998
$8,18 \times 10^{+02}$	4,36449	4,18197	3,03839	0,81359	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$8,36 \times 10^{+02}$	4,36447	4,18195	3,03838	0,81359	0,09776	0,00998
$8,53 \times 10^{+02}$	4,36445	4,18193	3,03837	0,81359	0,09776	0,00998
$8,71 \times 10^{+02}$	4,36443	4,18192	3,03836	0,81359	0,09776	0,00998
$8,89 \times 10^{+02}$	4,36442	4,18190	3,03835	0,81359	0,09776	0,00998
$9,07 \times 10^{+02}$	4,36440	4,18189	3,03835	0,81359	0,09776	0,00998
$9,24 \times 10^{+02}$	4,36439	4,18188	3,03834	0,81359	0,09776	0,00998
$9,42 \times 10^{+02}$	4,36437	4,18186	3,03833	0,81358	0,09776	0,00998
$9,60 \times 10^{+02}$	4,36436	4,18185	3,03833	0,81358	0,09776	0,00998
$9,78 \times 10^{+02}$	4,36435	4,18184	3,03832	0,81358	0,09776	0,00998
$9,96 \times 10^{+02}$	4,36433	4,18183	3,03831	0,81358	0,09776	0,00998
$1,01 \times 10^{+03}$	4,36432	4,18181	3,03831	0,81358	0,09776	0,00998
$1,03 \times 10^{+03}$	4,36431	4,18180	3,03830	0,81358	0,09776	0,00998
$1,05 \times 10^{+03}$	4,36430	4,18179	3,03830	0,81358	0,09776	0,00998
$1,07 \times 10^{+03}$	4,36429	4,18178	3,03829	0,81358	0,09776	0,00998
$1,08 \times 10^{+03}$	4,36428	4,18177	3,03829	0,81358	0,09776	0,00998
$1,10 \times 10^{+03}$	4,36427	4,18176	3,03828	0,81358	0,09776	0,00998
$1,12 \times 10^{+03}$	4,36426	4,18175	3,03828	0,81358	0,09776	0,00998
$1,14 \times 10^{+03}$	4,36425	4,18175	3,03827	0,81358	0,09776	0,00998
$1,16 \times 10^{+03}$	4,36424	4,18174	3,03827	0,81358	0,09776	0,00998
$1,17 \times 10^{+03}$	4,36423	4,18173	3,03826	0,81358	0,09776	0,00998
$1,19 \times 10^{+03}$	4,36422	4,18172	3,03826	0,81358	0,09776	0,00998
$1,21 \times 10^{+03}$	4,36421	4,18171	3,03825	0,81358	0,09776	0,00998
$1,23 \times 10^{+03}$	4,36420	4,18170	3,03825	0,81358	0,09776	0,00998
$1,24 \times 10^{+03}$	4,36420	4,18170	3,03825	0,81358	0,09776	0,00998
$1,26 \times 10^{+03}$	4,36419	4,18169	3,03824	0,81358	0,09776	0,00998
$1,28 \times 10^{+03}$	4,36418	4,18168	3,03824	0,81358	0,09776	0,00998
$1,30 \times 10^{+03}$	4,36417	4,18168	3,03823	0,81358	0,09776	0,00998
$1,32 \times 10^{+03}$	4,36416	4,18167	3,03823	0,81358	0,09776	0,00998
$1,33 \times 10^{+03}$	4,36416	4,18166	3,03823	0,81358	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$1,35 \times 10^{+03}$	4,36415	4,18166	3,03822	0,81358	0,09776	0,00998
$1,37 \times 10^{+03}$	4,36414	4,18165	3,03822	0,81358	0,09776	0,00998
$1,39 \times 10^{+03}$	4,36414	4,18164	3,03822	0,81358	0,09776	0,00998
$1,40 \times 10^{+03}$	4,36413	4,18164	3,03821	0,81358	0,09776	0,00998
$1,42 \times 10^{+03}$	4,36413	4,18163	3,03821	0,81358	0,09776	0,00998
$1,44 \times 10^{+03}$	4,36412	4,18163	3,03821	0,81358	0,09776	0,00998
$1,46 \times 10^{+03}$	4,36411	4,18162	3,03821	0,81358	0,09776	0,00998
$1,48 \times 10^{+03}$	4,36411	4,18162	3,03820	0,81358	0,09776	0,00998
$1,49 \times 10^{+03}$	4,36410	4,18161	3,03820	0,81358	0,09776	0,00998
$1,51 \times 10^{+03}$	4,36410	4,18161	3,03820	0,81358	0,09776	0,00998
$1,53 \times 10^{+03}$	4,36409	4,18160	3,03820	0,81358	0,09776	0,00998
$1,55 \times 10^{+03}$	4,36409	4,18160	3,03819	0,81357	0,09776	0,00998
$1,56 \times 10^{+03}$	4,36408	4,18159	3,03819	0,81357	0,09776	0,00998
$1,58 \times 10^{+03}$	4,36408	4,18159	3,03819	0,81357	0,09776	0,00998
$1,60 \times 10^{+03}$	4,36407	4,18158	3,03819	0,81357	0,09776	0,00998
$1,62 \times 10^{+03}$	4,36407	4,18158	3,03818	0,81357	0,09776	0,00998
$1,64 \times 10^{+03}$	4,36406	4,18158	3,03818	0,81357	0,09776	0,00998
$1,65 \times 10^{+03}$	4,36406	4,18157	3,03818	0,81357	0,09776	0,00998
$1,67 \times 10^{+03}$	4,36405	4,18157	3,03818	0,81357	0,09776	0,00998
$1,69 \times 10^{+03}$	4,36405	4,18156	3,03817	0,81357	0,09776	0,00998
$1,71 \times 10^{+03}$	4,36404	4,18156	3,03817	0,81357	0,09776	0,00998
$1,72 \times 10^{+03}$	4,36404	4,18155	3,03817	0,81357	0,09776	0,00998
$1,74 \times 10^{+03}$	4,36404	4,18155	3,03817	0,81357	0,09776	0,00998
$1,76 \times 10^{+03}$	4,36403	4,18155	3,03817	0,81357	0,09776	0,00998
$1,78 \times 10^{+03}$	4,36403	4,18154	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998
$1,80 \times 10^{+03}$	4,36402	4,18154	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998
$1,81 \times 10^{+03}$	4,36402	4,18154	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998
$1,83 \times 10^{+03}$	4,36402	4,18153	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998
$1,85 \times 10^{+03}$	4,36401	4,18153	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$1,87 \times 10^{+03}$	4,36401	4,18153	3,03816	0,81357	0,09776	0,00998
$1,88 \times 10^{+03}$	4,36401	4,18152	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,90 \times 10^{+03}$	4,36400	4,18152	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,92 \times 10^{+03}$	4,36400	4,18152	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,94 \times 10^{+03}$	4,36400	4,18151	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,96 \times 10^{+03}$	4,36399	4,18151	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,97 \times 10^{+03}$	4,36399	4,18151	3,03815	0,81357	0,09776	0,00998
$1,99 \times 10^{+03}$	4,36399	4,18151	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,01 \times 10^{+03}$	4,36398	4,18150	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,03 \times 10^{+03}$	4,36398	4,18150	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,04 \times 10^{+03}$	4,36398	4,18150	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,06 \times 10^{+03}$	4,36397	4,18149	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,08 \times 10^{+03}$	4,36397	4,18149	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,10 \times 10^{+03}$	4,36397	4,18149	3,03814	0,81357	0,09776	0,00998
$2,12 \times 10^{+03}$	4,36396	4,18149	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,13 \times 10^{+03}$	4,36396	4,18148	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,15 \times 10^{+03}$	4,36396	4,18148	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,17 \times 10^{+03}$	4,36396	4,18148	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,19 \times 10^{+03}$	4,36395	4,18148	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,20 \times 10^{+03}$	4,36395	4,18147	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,22 \times 10^{+03}$	4,36395	4,18147	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,24 \times 10^{+03}$	4,36395	4,18147	3,03813	0,81357	0,09776	0,00998
$2,26 \times 10^{+03}$	4,36394	4,18147	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,28 \times 10^{+03}$	4,36394	4,18146	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,29 \times 10^{+03}$	4,36394	4,18146	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,31 \times 10^{+03}$	4,36394	4,18146	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,33 \times 10^{+03}$	4,36393	4,18146	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,35 \times 10^{+03}$	4,36393	4,18146	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,36 \times 10^{+03}$	4,36393	4,18145	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$2,38 \times 10^{+03}$	4,36393	4,18145	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,40 \times 10^{+03}$	4,36393	4,18145	3,03812	0,81357	0,09776	0,00998
$2,42 \times 10^{+03}$	4,36392	4,18145	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,44 \times 10^{+03}$	4,36392	4,18145	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,45 \times 10^{+03}$	4,36392	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,47 \times 10^{+03}$	4,36392	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,49 \times 10^{+03}$	4,36392	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,51 \times 10^{+03}$	4,36391	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,52 \times 10^{+03}$	4,36391	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,54 \times 10^{+03}$	4,36391	4,18144	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,56 \times 10^{+03}$	4,36391	4,18143	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,58 \times 10^{+03}$	4,36391	4,18143	3,03811	0,81357	0,09776	0,00998
$2,60 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18143	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,61 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18143	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,63 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18143	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,65 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18143	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,67 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,68 \times 10^{+03}$	4,36390	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,70 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,72 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,74 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,76 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18142	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,77 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18141	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,79 \times 10^{+03}$	4,36389	4,18141	3,03810	0,81357	0,09776	0,00998
$2,81 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,83 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,84 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,86 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,88 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$2,90 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18141	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,92 \times 10^{+03}$	4,36388	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,93 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,95 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,97 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$2,99 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$3,0 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$3,02 \times 10^{+03}$	4,36387	4,18140	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$3,04 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$3,06 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03809	0,81357	0,09776	0,00998
$3,08 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,09 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,11 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,13 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,15 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,16 \times 10^{+03}$	4,36386	4,18139	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,18 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,20 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,22 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,24 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,25 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,27 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,29 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,31 \times 10^{+03}$	4,36385	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,32 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,34 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18138	3,03808	0,81357	0,09776	0,00998
$3,36 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,38 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,40 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$3,41 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,43 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,45 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,47 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,48 \times 10^{+03}$	4,36384	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,5 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,52 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,54 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,56 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18137	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,57 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,59 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,61 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,63 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,64 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,66 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,68 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,7 \times 10^{+03}$	4,36383	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,72 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18136	3,03807	0,81357	0,09776	0,00998
$3,73 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18136	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,75 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,77 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,79 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,8 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,82 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,84 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,86 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,88 \times 10^{+03}$	4,36382	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,89 \times 10^{+03}$	4,36381	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998
$3,91 \times 10^{+03}$	4,36381	4,18135	3,03806	0,81357	0,09776	0,00998

	$Br^* = 0$	$Br^* = 0,01$	$Br^* = 0,1$	$Br^* = 1$	$Br^* = 10$	$Br^* = 100$
U^+	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu	Nu
$4,92 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$4,94 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$4,96 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$4,98 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,0 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,01 \times 10^{+03}$	4,36378	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,03 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,05 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,07 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,08 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,10 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,12 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,14 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,16 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,17 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,19 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,21 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,23 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,24 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,26 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,28 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,30 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,32 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,33 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18131	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,35 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,37 \times 10^{+03}$	4,36376	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,39 \times 10^{+03}$	4,36376	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,40 \times 10^{+03}$	4,36377	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998
$5,42 \times 10^{+03}$	4,36376	4,18130	3,03804	0,81356	0,09776	0,00998

ANEXO B

Nas figuras B.1 a B.8 mostram-se as curvas dos perfis de temperatura, para números de Brinkman positivos e negativos, mas agora em casos onde a região em que o fluido tem um comportamento de sólido indeformável tem um peso mais reduzido, valores maiores de U^+ .

Como se pode verificar, o comportamento dos perfis de temperatura é semelhante ao analisado no capítulo 5 para $U^+ = 0,001$, variando apenas os valores numéricos homólogos.

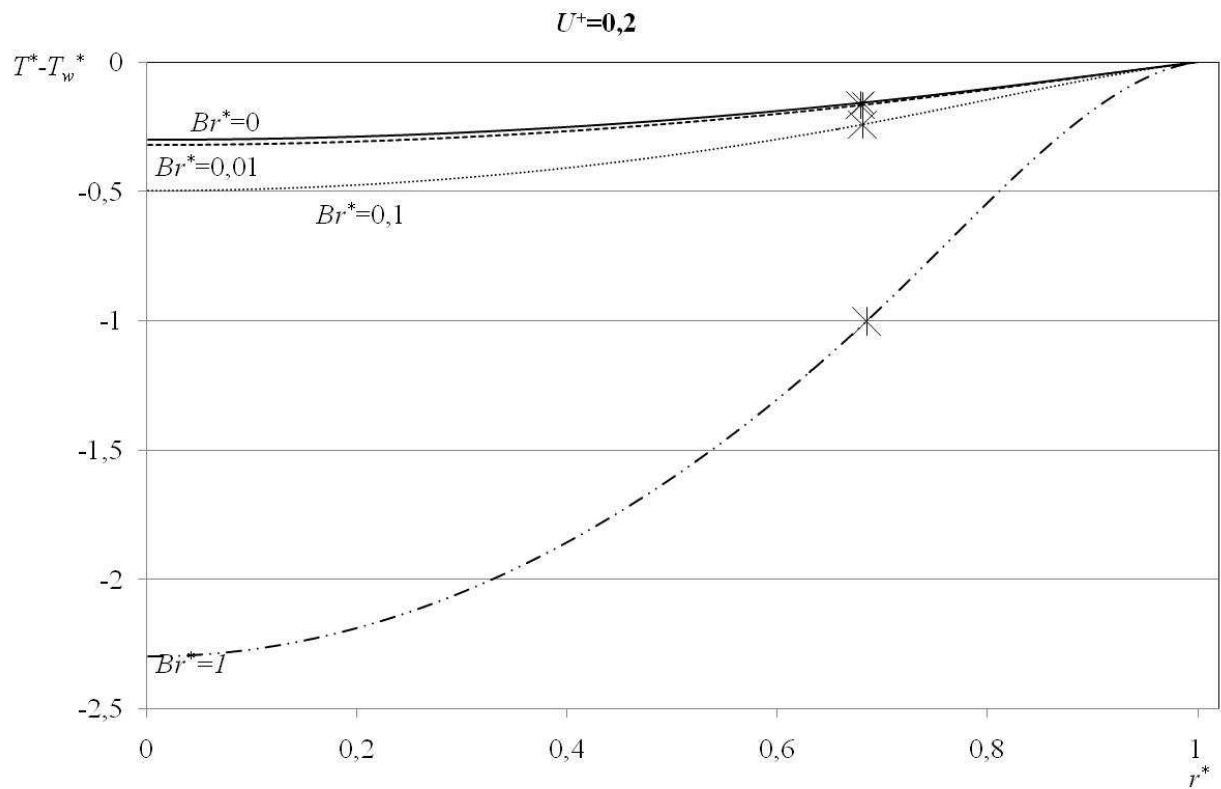


Figura B.1 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $0 \leq Br^* \leq 1$

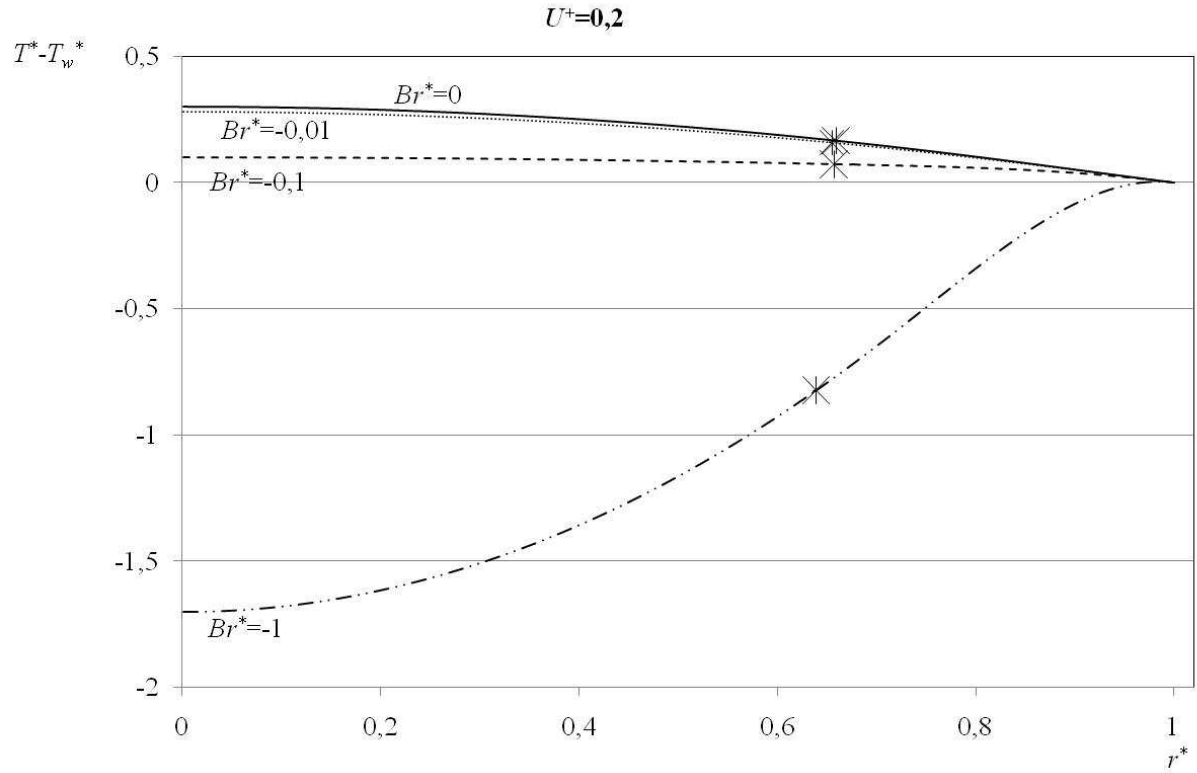


Figura B.2 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$

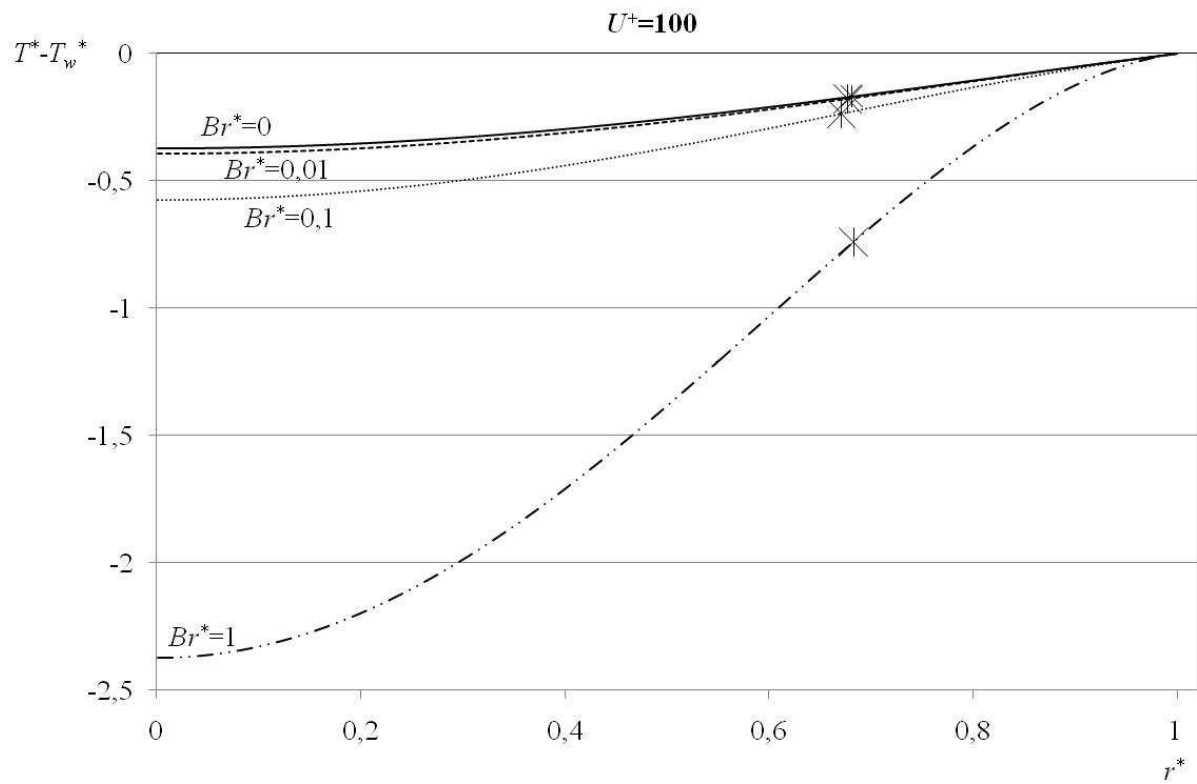


Figura B.3 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $0 \leq Br^* \leq 1$

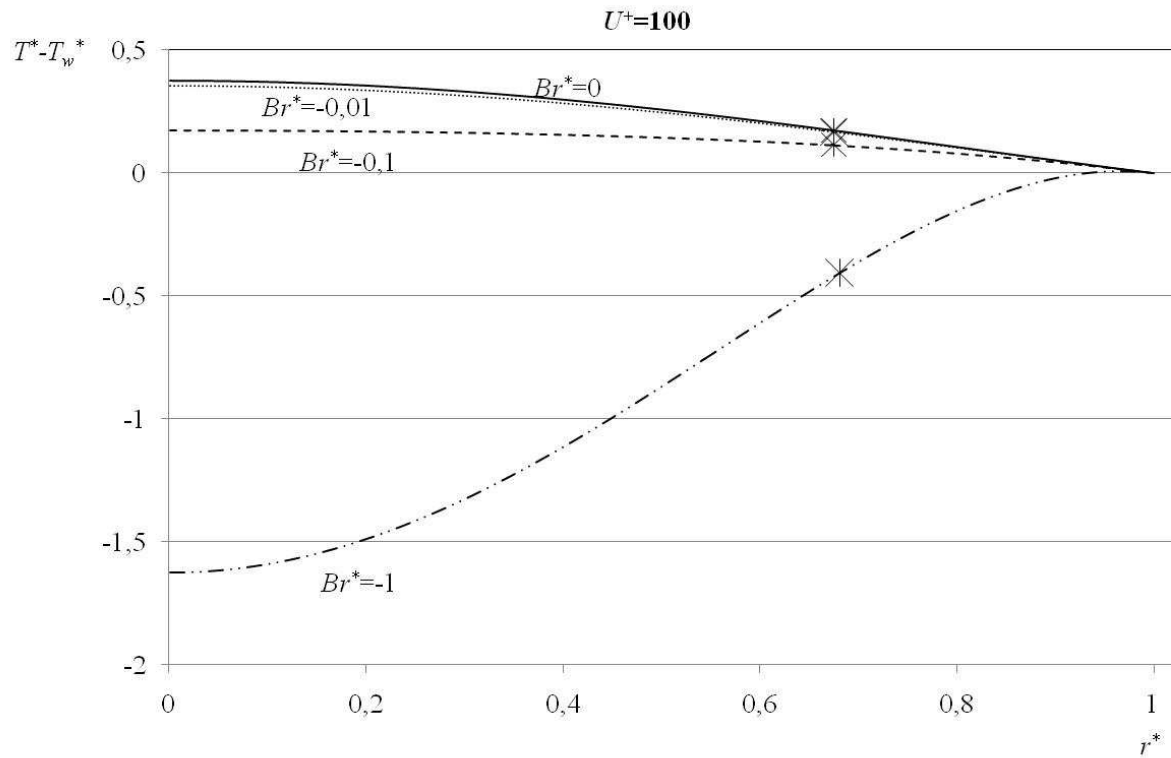


Figura B.4 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $-1 \leq Br^* \leq 0$

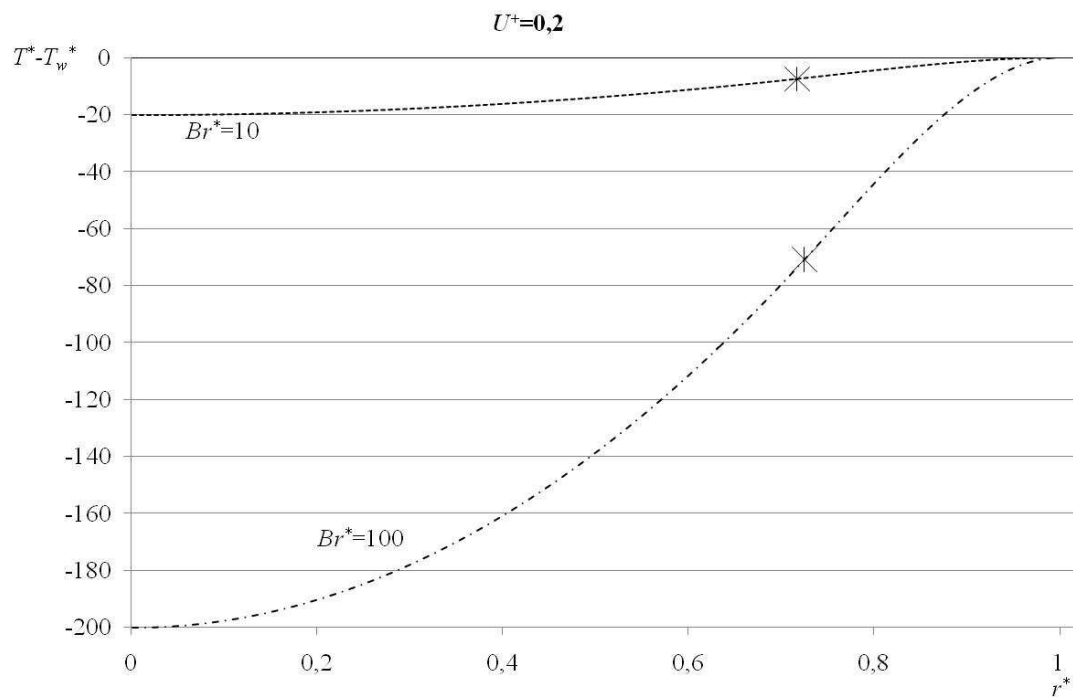


Figura B.5 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $Br^* > 1$

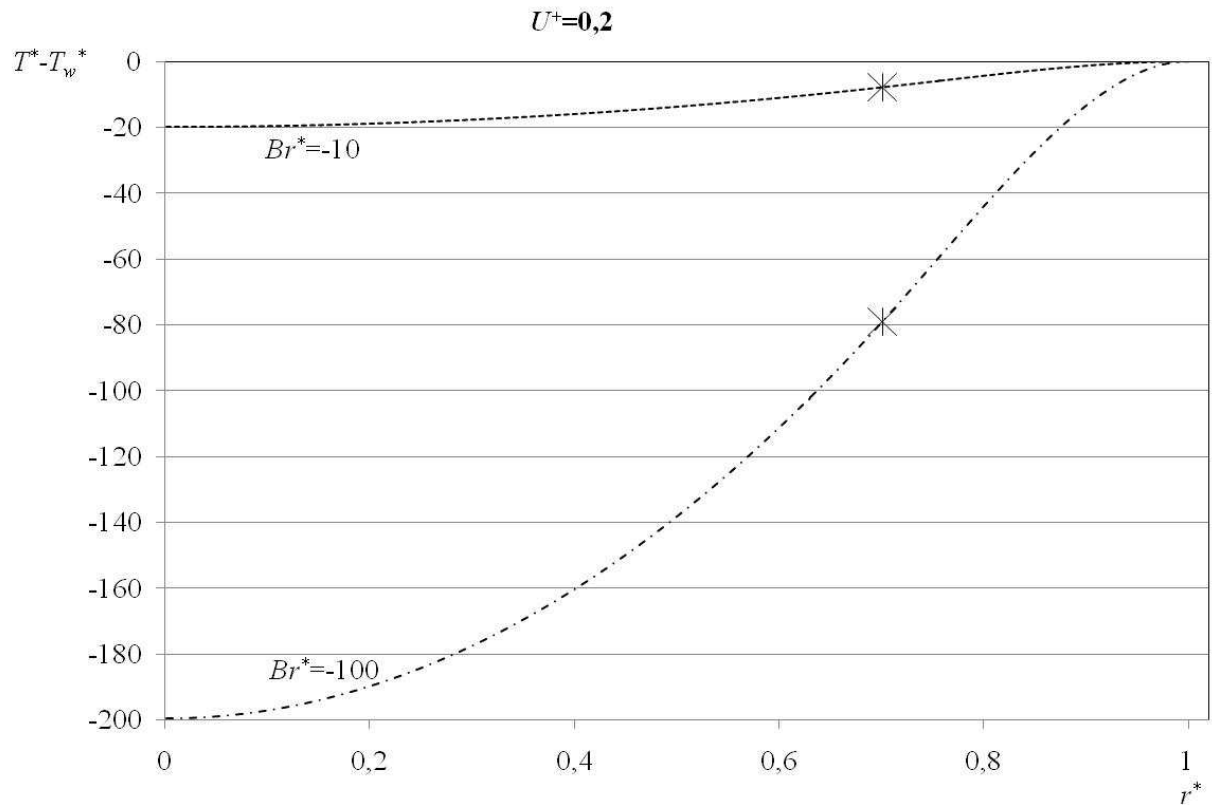


Figura B.6 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 0,2$ e $Br^* < -1$

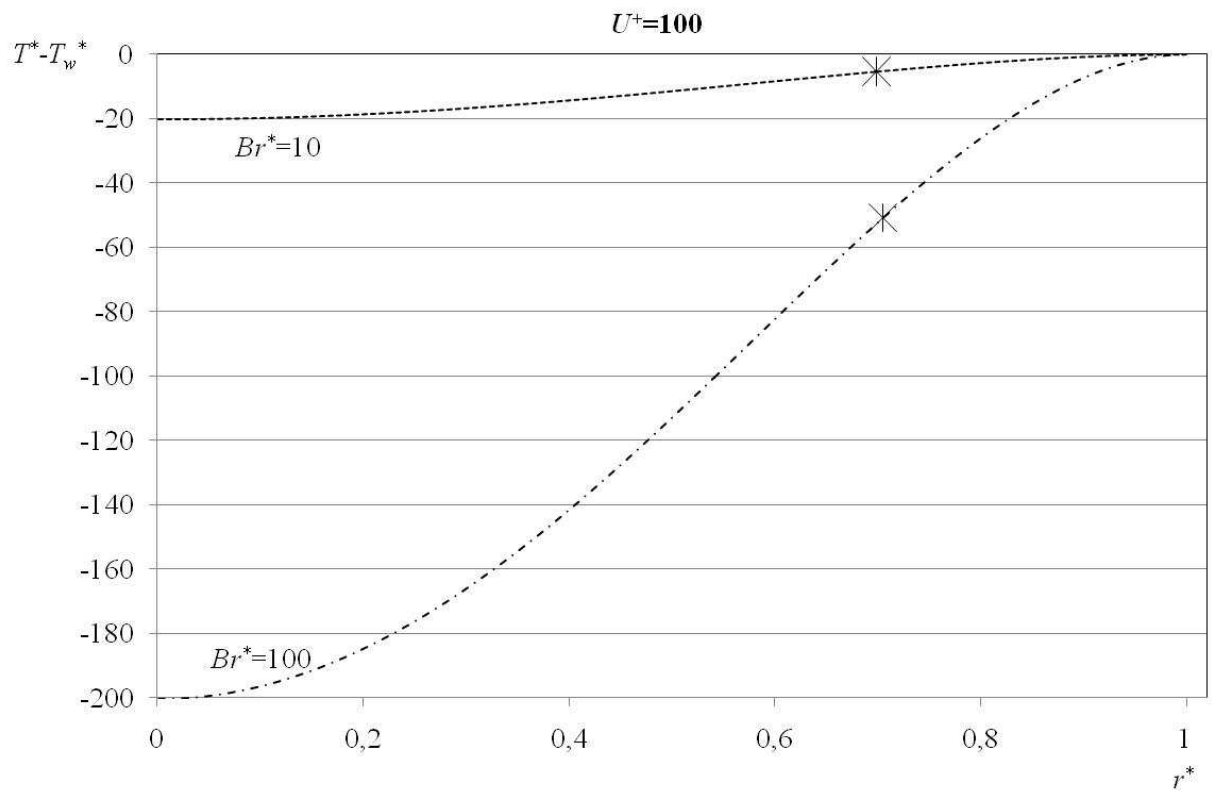


Figura B.7 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $Br^* > 1$

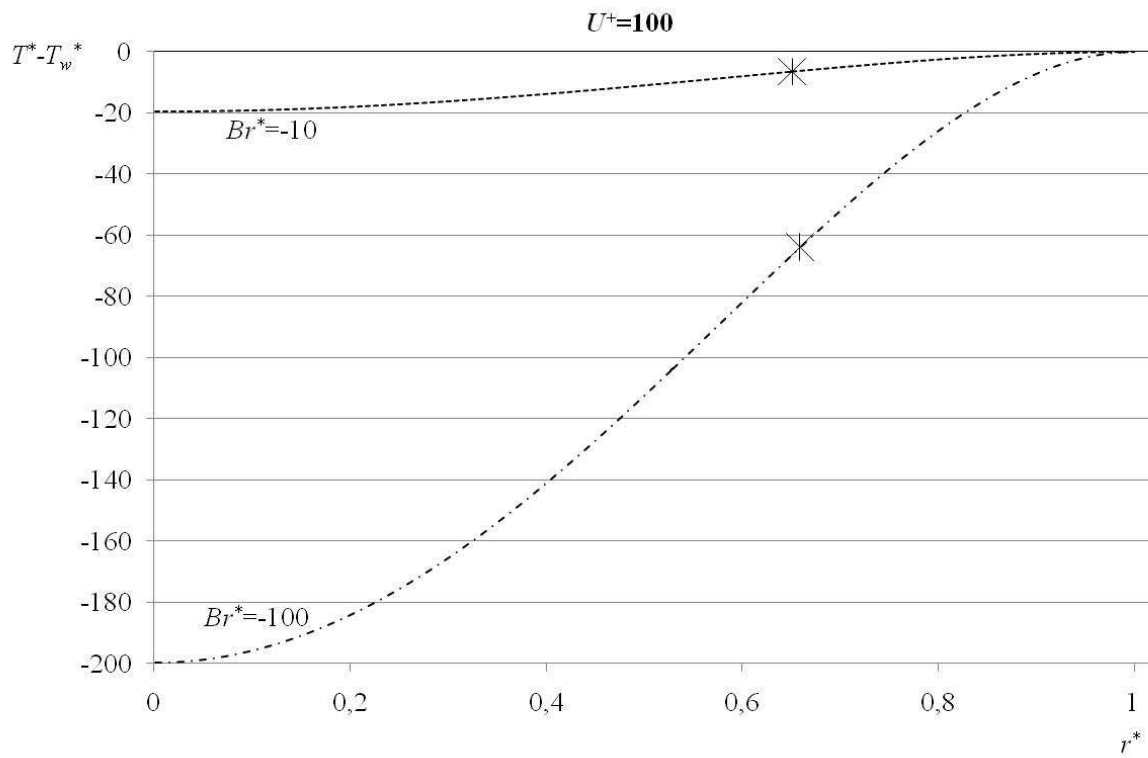


Figura B.8 Perfis de temperatura em função de r^* para $U^+ = 100$ e $Br^* < -1$