

INVESTIGAÇÃO SOBRE A CARGA ÚLTIMA DE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS EM SOLOS GRANULARES CONSIDERANDO O PESO PRÓPRIO

DAVID JOSÉ DOS ANJOS MALHEIRO

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM GEOTECNIA

Orientador: Professor Doutor José Manuel Mota Couto Marques

FEVEREIRO DE 2009

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2008/2009

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miiec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2008/2009 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2009*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

A meus Pais

Conhecimento real é saber a extensão da própria ignorância

Confúcio

AGRADECIMENTOS

Ao professor Doutor José Couto Marques agradeço toda a disponibilidade, paciência e interesse que demonstrou durante a realização deste trabalho. Como também o modo como orientou a tese, tornando-a estimulante e enriquecedora.

Aos meus pais, pelo amor, carinho, compreensão, incentivo e apoio que sempre concederam. Aos meus irmãos, Filipa e Jorge, pelo amor fraterno que sempre me transmitiram.

Aos meus amigos de sempre agradeço a companhia, preocupação e motivação que sempre me transmitiram.

Aos colegas e amigos do MIEC, sobretudo aos da opção de Geotecnia, agradeço a amizade e a partilha de conhecimento, particularmente ao João Cunha e Tiago Sacadura.

RESUMO

Esta dissertação aborda questões da capacidade de carga de fundações superficiais, centrando-se na investigação sobre a carga última de fundações em solos granulares considerando o peso próprio. Esse estudo realizou-se através da análise de uma nova proposta para a fórmula exacta do factor de capacidade de carga N_γ apresentada por C.M. Martin e incorporada no programa do mesmo autor de nome ABC (Analysis of Bearing Capacity).

É feita uma abordagem teórica sobre o Método dos Elementos Finitos, os Teoremas da Análise Limite, assim como uma pesquisa bibliográfica sobre as numerosas propostas que foram surgindo ao longo dos anos para o factor N_γ .

Para verificar a validade dessa nova proposta são criados vários modelos de elementos finitos para serem comparados com os exemplos fornecidos no manual do ABC. Para tal, são utilizados vários programas, nomeadamente o Plaxis 8.2 Professional Version, o Phase2 Version 6.0 e o Sigma/W Version 5.11.

Por último, são feitas algumas considerações sobre a validade da proposta em estudo, salientando a importância que esta abordagem poderá ter no dimensionamento de fundações superficiais.

PALAVRAS-CHAVE: Fundações superficiais, capacidade de carga, método dos elementos finitos, método das características, solos granulares.

ABSTRACT

This thesis deals with issues of bearing capacity of shallow foundations, focusing on the ultimate load of foundations on granular soils considering the self-weight.

This study was performed by analyzing a novel proposal for the exact formula of the bearing capacity factor N_γ , by CM Martin, incorporated in the program of the same author, ABC (Analysis of Bearing Capacity).

A brief overview is then presented of the Finite Element Method and the theorems of limit analysis, as well as a literature survey of the proposals that emerged over the years for the N_γ factor.

To check the validity of the novel proposal various finite element models have been created to provide comparison with the examples included in the ABC manual. To accomplish this task, several commercial programs are used, namely Plaxis 8.2 Professional Version, Phase2 Version 6.0 and Sigma/W Version 5.11.

Finally, some considerations are made on the validity of the proposal under study, highlighting the importance that this approach will have on the design of shallow foundations.

KEYWORDS: shallow foundations, bearing capacity, finite element method, granular soils.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 ASPECTOS GERAIS.....	1
1.2 OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO.....	1
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	2
2. CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS EM SOLOS PURAMENTE ATRÍTICOS	3
2.1 INTRODUÇÃO.....	3
2.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO DO EQUILÍBRIO LIMITE	4
2.3 APLICAÇÕES DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	5
2.4 APLICAÇÕES DO MÉTODO DO LIMITE SUPERIOR.....	7
2.5 APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	8
3. ANÁLISE LIMITE.....	9
3.1 INTRODUÇÃO.....	9
3.2 TEOREMA DA REGIÃO INFERIOR	10
3.3 TEOREMA DA REGIÃO SUPERIOR	10
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	13
4.1 INTRODUÇÃO.....	13
4.2 APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	14
4.3 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO.....	15
4.3.1 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO GLOBAIS	15
4.3.2 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS.....	17
4.4 APROXIMAÇÃO À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	18
4.4.1 APROXIMAÇÃO RECORRENDO AO MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS.....	18
4.4.2 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	22
4.5 APROXIMAÇÃO EXACTA DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA ESSENCIAIS. MÉTODO DE GALERKIN.	23
4.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM GEOTECNIA	24
4.6.1 MODELOS CONSTITUTIVOS	24

4.6.1.1 Modelo elástico.....	25
4.6.1.2 Modelo hiperbólico	26
4.6.1.3 Modelo de Mohr-Coulomb.....	28
5. PROGRAMAS UTILIZADOS	31
5.1. INTRODUÇÃO	31
5.2. PROGRAMA ABC (ANALYSIS OF BEARING CAPACITY)	31
5.2.1. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA	31
5.2.2. STATUS DAS SOLUÇÕES.....	32
5.2.3. APLICAÇÕES POSSÍVEIS.....	33
5.2.3.1. Cálculo rigoroso dos tradicionais factores de capacidade de carga N_c , N_q , N_γ	33
5.2.3.2. Estabelecer pontos de referência para a validação de outros métodos de cálculo.....	33
5.2.4. FUNCIONAMENTO DO ABC.....	33
5.2.4.1. Equações fundamentais	34
5.2.4.2. Condições de fronteira	35
5.2.5. MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	37
5.3. PLAXIS	37
5.3.1. ENTRADA DE DADOS - (INPUT)	37
5.3.1.1. Modelo e tipo de elemento finito.....	38
5.3.1.2. Geometria, condições de contorno e propriedades dos materiais.....	39
5.3.1.3. Condições iniciais do problema e geração da malha de elementos finitos	40
5.3.2. CÁLCULO – (CALCULATION).....	40
5.3.3. SAÍDA DE DADOS (OUTPUT).....	41
5.3.4. CURVAS (CURVES).....	41
5.4. PHASE2.....	41
5.5. SIGMA/W	42
6. ESTUDO NUMÉRICO	43
6.1 INTRODUÇÃO	43
6.2 MODELAÇÃO DO SOLO PELOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS	43
6.2.1 CASO COESIVO.....	43
6.2.2 CASO ATRÍTICO	46
6.2.2.1 Programa Sigma/w	46
6.2.2.2 Programa Phase2.....	47
6.2.2.3 Programa Plaxis	47

6.3 ESTUDO PARAMÉTRICO PARA O CASO DE SOLO PURAMENTE ATRÍTICO.....	48
6.4 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.....	50
6.5 CONCLUSÕES.....	54
7. CONCLUSÕES	55
Bibliografia.....	57

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Mecanismo de rotura de Prandtl.....	4
Figura 2.2 – Efeito da consideração do peso na forma das superfícies de deslizamento	6
Figura 3.1 - Exemplo de superfícies de ruptura hipotética de uma fundação superficial.	9
Figura 3.2 - Representação dos teoremas da análise limite.....	10
Figura 4.1 Malha de elementos finitos	14
Figura 4.2 Função de aproximação global N_j	16
Figura 4.3 - Aproximação $\hat{u}$ no interior de um elemento Ω^e	17
Figura 4.4 - Função de aproximação global no nó i	17
Figura 4.5 - Domínio e fronteira de um problema.	20
Figura 4.6 - Malha de elementos finitos constituída por elementos de 4 nós.....	23
Figura 4.7- Relações tensão-deformação.....	25
Figura 4.8 Modelos elásticos: (a) linear e (b) não linear.....	26
Figura 4.9 - Modelo hiperbólico – curva tensão-deformação.....	27
Figura 4.10 - Modelo elástico perfeitamente plástico.....	28
Figura 4.11 – Critério de ruptura de Mohr-Coulomb no plano ($\sigma - \tau$).	29
Figura 5.1 - Definição do problema	31
Figura 5.2 - Notações e convenção de sinais	34
Figura 5.3 - Círculo de Mohr à superfície do solo	36
Figura 5.4 - Círculos de Mohr sob a fundação: (a) Flexível (b) Rígida	36
Figura 5.5 - Cálculo de um novo ponto de solução.....	37
Figura 5.6 - Modelos de análise: (a) deformação plana e (b) axissimetria (Brinkgreve, 2002).	38
Figura 5.7 - Tipos de elemento: (a) triangular de 6 nós e (b) triangular de 15 nós (adaptado Brinkgreve, 2002).	39
Figura 6.1 - Modelo e malha utilizados no programa Sigma/w.....	44
Figura 6.2 – Modelo e malha utilizados no programa Plaxis	45

Figura 6.3– Modelo e malha utilizados no programa Phase2.....	45
Figura 6.4 - Malha de elementos finitos considerada no programa Sigma/w	46
Figura 6.5 – Malha de elementos finitos considerada no programa Phase2.....	47
Figura 6.6 – Malha de elementos finitos considerada no programa Plaxis.....	48
Figura 6.7 – Malha de elementos finitos considerada no programa Plaxis.....	49
Figura 6.8 – Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=20^\circ$	50
Figura 6.9 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=25^\circ$	51
Figura 6.10 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=30^\circ$	51
Figura 6.11 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=35^\circ$	52
Figura 6.12 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=40^\circ$	52
Figura 6.13 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=45^\circ$	53
Figura 6.14 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=50^\circ$	53

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1 – Linha características α e β para estado plano de deformação	34
Tabela 5.2 – Linhas características α e β para Simetria axial	35
Tabela 6.1 - Valores da capacidade de carga (em kPa) para o caso puramente coesivo	44
Tabela 6.2 – Comparação de valores de N_y	50

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Alfabeto Latino

A – área [m^2]

B – largura [m]

c – coesão [kPa]

D – diâmetro [m]

d_y – assentamento sob o ponto médio da sapata [m]

E – módulo de Young [GPa]

G – módulo de distorção [GPa]

k – incremento da coesão com a profundidade

k_0 – coeficiente de impulso em repouso

L – comprimento [m]

– operador diferencial linear

M – número de nós da malha

N_c , N_q , N_γ – factores de capacidade de carga

N_j – função de aproximação relativa

Q – carga definida em termos de força [kN]

Q_{ult} – carga definida em termos de força [kN]

q – carga definida em termos de força [kN]

– sobrecarga [kPa]

q_{ult} – carga de rotura definida em termos de tensão [kPa]

R – raio do círculo de Mohr

R_Ω – erro ou resíduo de uma aproximação

r – raio [m]

s – assentamento [m]

$\hat{u}$ - aproximante

ABC – Analysis of Bearing Capacity

DEC - Departamento de Engenharia Civil

FEUP – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

MEF – método dos elementos finitos

MRP – método dos resíduos pesados

Alfabeto Grego

α – direcção característica

β – direcção característica

γ – peso volúmico [kN/m³]

ε – extensão

ε^p - extensão plástica

ε^e - extensão elástica

θ – orientação da tensão principal [°]

ν – coeficiente de Poisson

σ – tensão normal total [kPa]

σ_m – tensão total média [kPa]

σ_v – tensão vertical [kPa]

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – tensões normais nas direcções dos eixos dos xx, yy e zz [kPa]

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – tensões totais principais máxima, intermédia e mínima [kPa]

σ' – tensão efectiva [kPa]

τ – tensão tangencial [kPa]

ϕ – ângulo de atrito [°]

ψ – ângulo de dilatância [°]

Γ – fronteira

Ω – domínio

INTRODUÇÃO

1.1 ASPECTOS GERAIS

A utilização de métodos computacionais de análise numérica tem vindo a incrementar-se na investigação e a tornar-se uma prática generalizada em projecto. Existindo outros, como o método das diferenças finitas ou dos elementos fronteira, o método dos elementos finitos (surgido na década de 1940) é possivelmente aquele a que mais se recorre.

A constatação das potencialidades destes métodos levou à criação de aplicações informáticas cada vez mais amigáveis do ponto de vista do utilizador, simplificando e generalizando a sua utilização. Desta forma passou-se de uma situação em que quem se servia dos programas informáticos eram os seus próprios criadores (possuidores portanto não só de excelentes bases teóricas como de um perfeito conhecimento do funcionamento do programa) para outra em que não é estritamente necessário compreender o método utilizado e os processos de cálculo envolvidos. Neste último cenário, é fácil tomarem-se como certas os resultados fornecidos pelo programa, que estando obviamente dependentes da correcta introdução de dados podem não corresponder à realidade da situação que se pretende analisar.

Sendo ferramentas extremamente úteis e cada vez mais potentes, o uso de aplicações informáticas de análise numérica em engenharia deve ser acompanhado de uma considerável dose de experiência, conhecimento e bom senso.

1.2 OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho tem como objectivo analisar a expressão do factor de capacidade de carga N_γ , tal como apresentada em bibliografia da especialidade e na proposta defendida por C.M. Martin, mediante a comparação com os resultados obtidos por via numérica recorrendo ao método dos elementos finitos.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 1 – Introdução**, reservado a um enquadramento dos temas tratados e à descrição dos objectivos e organização da dissertação;
- **Capítulo 2 - Capacidade de carga de fundações superficiais em solos puramente atríticos**, onde compilo grande parte das propostas que surgiram ao longo dos tempos relativamente à capacidade de carga neste tipo de solo;
- **Capítulo 3 – Análise limite**, no qual dou uma breve explicação acerca dos teoremas da análise limite;
- **Capítulo 4 – Método dos elementos finitos**, onde faço uma introdução ao método, discutindo-se depois a aplicação de MEF a problemas geotécnicos;
- **Capítulo 5 – Programas utilizados**, onde são apresentados os programas informáticos aplicados na simulações numéricas;
- **Capítulo 6 – Estudo Numérico**, no qual são apresentadas as simulações numéricas relativas a este tema levadas a cabo no âmbito do presente trabalho;
- **Capítulo 7 – Conclusões**, reservado à exposição das mais significativas conclusões resultantes deste trabalho.

2

CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS EM SOLOS PURAMENTE ATRÍTICOS

2.1 INTRODUÇÃO

Terzaghi (1943) propôs a bem conhecida expressão base para a capacidade de carga de uma sapata corrida sujeita a carga vertical e centrada

$$q_{ult} = \frac{Q_{ult}}{B'} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma B'N_\gamma \quad (2.1)$$

onde c é a coesão do solo, γ é o seu peso volúmico, B é a largura da sapata, q é a tensão vertical devida ao peso do solo acima da base da sapata e N_c , N_q e N_γ são os factores de capacidade de carga que dependem apenas do ângulo de atrito do solo, ϕ , e representam a contribuição da coesão, sobrecarga e peso próprio para a capacidade de carga total.

Desde que esta abordagem foi proposta, vários estudos se debruçaram sobre os factores de capacidade de carga. O procedimento mais comum para a avaliação destes coeficientes é o método das características (Sokolovskii, 1963). Este método fornece soluções exactas para N_c e N_q , as quais são obtidas através da análise de solo sem peso.

A avaliação do terceiro coeficiente, N_γ , requer que o peso próprio do solo seja considerado. Uma dificuldade fundamental na aplicação do método das características a fundações em solos com peso é o facto de o problema estático e cinemático serem tratados separadamente. Apesar de inúmeras tentativas, chegou-se à conclusão que num ponto qualquer do solo não podem ser separadas as duas componentes, tendo o conjunto que ser satisfeito simultaneamente.

Outra complicação no uso do método das características surge quando a base da sapata é assumida como rígida. Neste caso é de supor que o efeito da rigidez da sapata deverá aumentar N_γ , mas a natureza das condições de fronteira que devem ser aplicadas não é clara.

Bowles (1988) refere que, após uma pesquisa bibliográfica, encontrou um intervalo de valores de N_γ para $\phi=40^\circ$ desde 38 até 192. É claramente excessiva a gama de valores propostos, em particular para ângulos de atrito superiores a 30° , sendo necessária uma solução melhorada para esta questão. Torna-se assim evidente que a correcta avaliação do factor N_γ é um problema importante da mecânica dos solos e ainda sem solução.

Os cálculos baseados no método das características sofrem de uma importante dificuldade que reside no facto destes estarem presos a princípios da teoria da plasticidade, sendo esta dificuldade especialmente notada no caso de sapatas rígidas. A maior parte das soluções deste problema assume que o solo se comporta como um material plástico com o ângulo de dilatância, ψ , igual ao ângulo de atrito, ϕ . Apesar de esta consideração ser necessária, é do conhecimento geral, que para solos reais o ângulo de dilatância é, de um modo geral, substancialmente mais baixo que o ângulo de atrito.

Métodos numéricos como o dos elementos finitos utilizam algoritmos que garantem, em cada elemento da malha e em todas as fases de cálculo, o respeito pelos princípios da estática e da cinemática em simultâneo, tendo como desvantagem o facto de as discretizações espaciais usadas no esquema numérico poderem levar a erros na solução. Assim, devido às dificuldades que existem na avaliação no factor N_γ pelos métodos clássicos, é plenamente justificada a tentativa de estudo do problema usando este tipo de abordagem.

Poucos autores tentaram aplicar o método dos elementos finitos para analisar a capacidade de carga de fundações superficiais, particularmente em solos sem coesão. Isto parece ser largamente devido à dificuldade em desenvolver algoritmos que sejam capazes de fornecer soluções precisas.

Em seguida apresenta-se um breve resumo das propostas de diversos autores para a determinação do factor N_γ , agrupadas de acordo com o método utilizado.

2.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO DO EQUILÍBRIO LIMITE

A estrutura da equação básica da capacidade de carga (Equação 2.1) não mudou desde o famoso trabalho de Terzaghi (1943), que foi desenvolvido usando o método do equilíbrio limite. Nesta técnica, assume-se que o colapso ocorre como resultado do escorregamento ao longo de determinadas superfícies, sendo a forma do mecanismo de rotura, composto por entidades geométricas simples, escolhido por razões físicas. O equilíbrio é garantido a nível global, considerando cada parte do mecanismo como um corpo livre sujeito a forças, algumas das quais estão relacionadas com as propriedades de resistência do solo. Neste sentido o método é puramente estático e nada é dito acerca da distribuição de tensões em nenhum lugar excepto sobre a superfície de rotura. Para remover qualquer indeterminação estática que possa ocorrer, são feitas hipóteses em relação à distribuição de forças. De seguida, é feita uma pesquisa sistemática para encontrar a superfície específica para a qual o colapso é atingido com menor carga. Nos seus cálculos, Terzaghi assumiu uma superfície de rotura do tipo proposto por Prandtl (Figura 2.1), a qual é composta por uma cunha rígida activa, uma zona de corte radial limitada por uma espiral logarítmica e uma cunha rígida passiva.

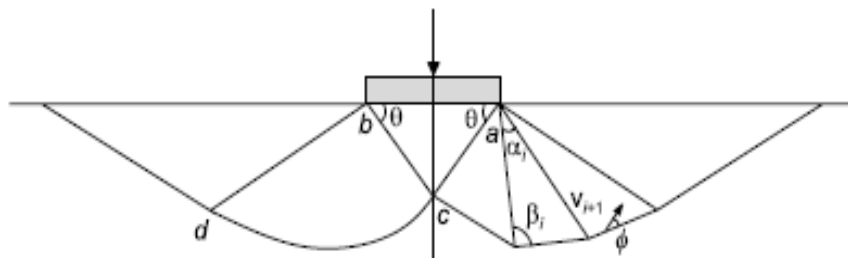


Figura 2.1 – Mecanismo de rotura de Prandtl

Como o campo de tensão não é definido não se pode afirmar que a solução obtida corresponda ao limite inferior. Desde que a forma da superfície de rotura seja escolhida com um cuidado razoável, o erro na carga de colapso calculada deverá ser pequeno. Contudo, se a superfície assumida diferir muito

da verdadeira, o erro pode ser considerável, sendo que no caso de solos em que o peso próprio é considerado, a mesma difere bastante da proposta por Prandtl.

Em solos considerados sem peso, a superfície crítica corresponde à proposta de Prandtl (Figura 2.1), sendo b o centro da espiral logarítmica que se desenvolve entre c e d . Usando equações de equilíbrio de momentos o método fornece soluções exactas para os factores de capacidade de carga, N_q e N_c :

$$N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right), \quad N_c = (N_q - 1) \cot \phi \quad (2.2)$$

Todavia este tipo de mecanismo é insatisfatório para o cálculo de N_γ . Assim, Terzaghi admitiu que o centro da espiral logarítmica estava sobre bd (Figura 2.1) e procurou a configuração mais desfavorável usando um método gráfico.

Mais de três décadas depois, Kumbhojkar (1993), usou uma abordagem parecida, mas derivou uma expressão analítica para N_γ e comparou os seus resultados com os de Terzaghi. Ao encontrar grandes diferenças para ângulos de atrito elevados atribuiu essa discrepância à natureza aproximada do método gráfico usado por Terzaghi.

Em 1951 Meyerhof publicou uma teoria da capacidade de carga para fundações superficiais e profundas. A sua teoria é baseada no método do equilíbrio limite mas usa uma superfície de rotura ligeiramente diferente para ter em conta a resistência ao corte do solo sobrejacente. A zona de corte radial continua a ser definida por uma espiral logarítmica que é otimizada por meio de um método semi-gráfico. Alguns anos depois, Meyerhof (1963) aproximou os resultados obtidos com o método semi-gráfico através de uma expressão analítica para N_γ que é muito semelhante à do factor N_c :

$$N_\gamma = (N_q - 1) \cot(1.4\phi) \quad (2.3)$$

2.3 APLICAÇÕES DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O método das características constitui uma abordagem matematicamente mais rigorosa para a análise de estruturas geotécnicas. Vários investigadores incluindo Sokolovskii (1965), Lundgren e Mortensen (1953), Hansen (1970), Bolton e Lau (1993) e Kumar (2003) aplicaram este método para estimar os factores de capacidade de carga.

No método das características, o critério de rotura de Coulomb, combinado com as equações de equilíbrio, permite obter um conjunto de equações diferenciais de equilíbrio plástico que, juntamente com as condições de fronteira de tensão, pode ser usado para investigar o início da plastificação em pontos do solo sob a sapata. A solução envolve a construção de duas famílias de superfícies de deslizamento curvilíneas (as linhas α e β) que se intersectam entre si, partindo de tensões conhecidas na fronteira. Para obter um limite inferior rigoroso para a carga última é necessário demonstrar que, nas regiões rígidas que circundam as zonas em equilíbrio plástico, existe um estado de tensão estaticamente admissível. As soluções obtidas a partir deste método não correspondem geralmente a cargas de rotura exactas, já que nem sempre é possível integrar a relação tensão-deformação para obter um campo cinemático admissível ou prolongar o campo de tensões a todo o semi-espaço do solo. Para além do referido, este método só consegue lidar com problemas em que as condições de fronteira são definidas em termos de forças ou pressões, para o problema ser estaticamente determinado. Assim, se existirem deslocamentos impostos (como no caso de fundações rígidas), têm que se arbitrar uma distribuição de tensão nessa zona da fronteira para se conseguir obter uma solução. Esta pode revelar-se muito sensível a estas hipóteses, particularmente se o peso próprio for considerado.

Existem poucas soluções exactas para as equações deste método, mas aproximadas há muitas. Um procedimento largamente utilizado é a aproximação através de diferenças finitas sugerido por Sokolovskii (1965). Para solos com peso, Sokolovskii concluiu que pelo menos uma das duas famílias de superfícies de deslizamento tem de ser curva (Figura 2.2). Como o método numérico de Sokolovskii exige sempre uma pequena sobrecarga q , não é possível isolar completamente o efeito do peso próprio γ .

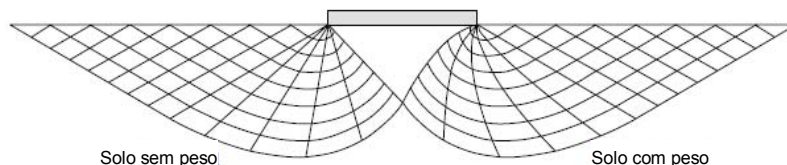


Figura 2.2 – Efeito da consideração do peso na forma das superfícies de deslizamento

Uma nova solução para o método das características aplicado a problemas de capacidade de carga, foi proposta por Lundgren e Mortensen (1953). Os autores consideraram um mecanismo onde a cunha de rotura é delimitada por superfícies curvas que são tangentes à base da sapata e terminam ao longo da linha central da fundação com um ângulo interior igual a $\pi/2 - \phi$. Lundgren e Mortensen resolveram o problema numericamente aplicando o postulado de von Kármán (1926) de maneira a evitar dificuldades numéricas quando não é considerada sobrecarga. Nesse trabalho apenas calcularam o valor de N_γ para $\phi=30^\circ$. O resultado de $N_\gamma=14.8$ corresponde a 70% do valor geralmente aplicado. No entanto, esta solução é incompleta porque não tem em consideração o campo de deformação plástica incremental e não mostra que o campo de tensão pode ser estendido à região rígida sem violar o critério de cedência.

Hansen e Christensen (1969) usaram a mesma figura de rotura e forneceram valores numéricos de N_γ sob a forma de gráfico. Mais tarde Hansen (1970) propôs uma expressão semi-empírica que aproxima os resultados numéricos obtidos pelo método das características:

$$N_\gamma = 1.5(N_q - 1) \tan \phi \quad (2.4)$$

Vesic (1975), baseado numa solução devida a Caquot e Kérisel (1953), sugeriu, alguns anos depois, uma fórmula ligeiramente diferente:

$$N_\gamma = 2(N_q - 1) \tan \phi \quad (2.5)$$

Booker (1969) conseguiu obter resultados para sapatas lisas, mas como o campo de tensão não foi estendido até à região rígida, esses resultados apenas fornecem um limite superior para N_γ .

Já neste século, Poulos *et al.* (2001) propuseram as seguintes expressões, que aproximam os resultados numéricos obtidos por Booker:

$$\begin{aligned} N_\gamma &\simeq 0.0663e^{9.3\phi} && \text{(sapata lisa)} \\ N_\gamma &\simeq 0.1045e^{9.6\phi} && \text{(sapata rugosa)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde ϕ é dado em radianos e $N_\gamma=0$ se $\phi=0$.

Bolton e Lau (1993) utilizaram o método das características para estimar a capacidade de carga vertical de sapatas circulares e rectangulares assentes em solos com peso. Para sapatas lisas, os autores usaram um mecanismo de rotura superficial de Hill, enquanto para sapatas rugosas adoptaram um mecanismo profundo de Prandtl com cunhas triangulares.

Recentemente, Kumar (2003) propôs outra solução baseada no mecanismo de rotura de Lundgren e Mortensen, recorrendo ao método das diferenças finitas de Sokolovskii.

Por fim importa referir o excelente trabalho de Martin (2005) que se debruça sobre o uso do método das características no cálculo exacto da capacidade de carga de fundações. O autor desenvolveu e disponibiliza na Internet o programa ABC (Analysis of Bearing Capacity), que, além de possuir uma interface gráfica muito atraente, permite obter estimativas extremamente rigorosas da capacidade de carga com qualquer combinação de parâmetros c , ϕ , γ , B e q e para uma ampla gama de valores do ângulo de atrito, pelo que constitui um notável contributo para a solução do problema da determinação do factor de capacidade de carga N_γ que tanta atenção recebeu de ilustres geotécnicos ao longo de quase cem anos.

2.4 APLICAÇÕES DO MÉTODO DO LIMITE SUPERIOR

No método do limite superior, é considerado um mecanismo composto por blocos rígidos triangulares que se movem com velocidades constantes (Figura 2.1). É considerado que a cunha abc se move verticalmente como um corpo rígido e com a mesma velocidade da sapata. O movimento descendente da cunha abc é acomodado pelo movimento lateral do solo adjacente. As variáveis são os ângulos independentes θ , α_i , e β_i , que proporcionam alguma flexibilidade na escolha do mecanismo mais crítico. Como não é permitida nenhuma deformação plástica do solo, a energia é dissipada nas interfaces entre blocos adjacentes, o que provoca descontinuidade de velocidade, e entre blocos em movimento e o solo em repouso. Admitindo plasticidade associada pode provar-se que a dissipação é função apenas das velocidades. Esta propriedade é usada para calcular a dissipação ao longo das descontinuidades nas zonas onde, através do diagrama de velocidades, se verificam saltos na sua magnitude. A geometria é otimizada para minimizar a energia dissipada e, por conseguinte, a carga de rotura correspondente. Durante a última década, esta abordagem foi estimulada pelo trabalho de Drescher e Detournay (1993), que trataram o problema não associado utilizando propriedades de resistência modificadas. Vários estudos aproveitando esta técnica, usaram diferentes métodos para obter o limite superior mínimo.

Para uma sapata rugosa Michalowski (1997) considerou um mecanismo do tipo de Prandtl onde a zona de corte é composta por n blocos triangulares rígidos. O autor estudou o problema usando dois esquemas. No primeiro é procurada a soma mínima e os três factores de capacidade de carga são coerentes com um único mecanismo. No segundo cada parcela da equação geral da capacidade de carga é minimizada com mecanismos eventualmente distintos para dar uma estimativa conservativa para q_u . Nesta abordagem N_γ torna-se função apenas de ϕ , mas a geometria para a qual N_γ atinge o mínimo deixa de ser consistente com a correspondente para N_c e N_q . Para sapatas lisas, Michalowski concluiu que o mecanismo de blocos rígidos de Hill fornece os melhores resultados.

Soubra (1998) usou um método similar e forneceu resultados que são quase idênticos àqueles obtidos por Michalowski.

Num artigo posterior, Wang *et al.* (2001) sugeriram o uso de blocos quadriláteros na zona de corte radial de um mecanismo do tipo Prandtl. Estes autores compararam resultados com e sem a influência simultânea da coesão, da sobrecarga e do peso próprio, e concluíram que os factores de capacidade de carga são ligeiramente maiores quando são todos considerados em conjunto. Os seus valores numéricos para os factores de capacidade de carga são superiores aos obtidos por Michalowski.

Zhu (2000) propôs um método mais rápido para a determinação da superfície de rotura crítica e daí o factor N_γ . A técnica é baseada numa equivalência entre os métodos de equilíbrio limite e os baseados no mecanismo de blocos rígidos. O resultado que obteve é idêntico ao de Michalowski.

Mais recentemente, Hiaj *et al.* (2004) sugeriram uma expressão analítica baseada na análise limite. Assumindo uma lei de fluxo associada, consegue chegar a uma carga de colapso bastante aproximada da real usando fronteiras superiores e inferiores rigorosas. As formulações numéricas são obtidas pelo método dos elementos finitos e resolvidas usando programas matemáticos eficientes.

2.5 APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos também foi utilizado para obter estimativas dos factores de capacidade de carga. No estudo de Griffiths (1982), o solo foi representado por um modelo elasto-plástico não associado com critério de cedência de Mohr-Coulomb. O mesmo foi modelado por uma malha relativamente grosseira composta por elementos quadriláteros de oito nós. O algoritmo adoptado como solução foi o método viscoplástico de Zienkiewicz (1974). Devido a problemas numéricos de convergência, Griffiths não investigou casos em que o ângulo de atrito excedesse 35°. Para isolar o termo N_γ , foi considerado um solo com peso e sem coesão nem sobrecarga. A acção da gravidade foi introduzida em simultâneo com o correspondente estado de tensão inicial. Assim, a tensão vertical resulta do produto do peso próprio pela profundidade e a tensão horizontal é obtida a partir da vertical multiplicando-a pelo coeficiente de repouso, K_0 . As análises foram conduzidas através da utilização de velocidades incrementais descendentes aplicadas aos nós superficiais sob a sapata. Foram simuladas interfaces rugosas e lisas, fixando ou libertando o movimento lateral dos nós em contacto com a sapata. Uma conclusão surpreendente do estudo foi a existência de uma ligeira dependência de N_γ da largura da fundação. Foi reconhecido mais tarde que este efeito é devido à topologia da malha (Woodward e Griffiths, 1998) e ao método usado para o cálculo de N_γ a partir das tensões nos pontos de Gauss. Uma abordagem mais adequada, como referido por Day e Potts (2000), consiste em somar as forças nodais de reacção nos nós da sapata para obter a força total aplicada na fundação. Como seria de esperar, a singularidade do campo de tensão no bordo da sapata influencia consideravelmente a capacidade de carga e pode dar a ilusão que N_γ é dependente da sua largura.

O efeito do ângulo de atrito na capacidade de carga foi considerado por Frydman e Burd (1997). O seu trabalho utilizou duas técnicas diferentes para estimar N_γ ; nomeadamente, o método das diferenças finitas e o dos elementos finitos. A maior parte das suas soluções foram obtidas usando um programa de diferenças finitas (FLAC), com o apoio de um programa de elementos finitos (OXFEM). Na vizinhança da sapata foi adoptada uma malha relativamente densa. O modelo elasto-plástico do solo utilizou a função de cedência de Matsuoka, seleccionando os parâmetros do material de maneira a corresponder ao modelo de Mohr-Coulomb sob deformação plana. Os autores empregaram o método da rigidez tangente na solução das equações algébricas decorrentes dos elementos finitos.

3

ANÁLISE LIMITE

3.1 INTRODUÇÃO

A análise limite vem sendo aplicada na resolução de problemas há muitos anos, tendo os seus conceitos sido consolidados com os trabalhos publicados por Chen (1975) e Chen e Liu (1990), tendo os teoremas do limite inferior e superior sido estabelecidos de forma concisa.

A aplicação da análise limite de forma analítica encontrava-se condicionada pela necessidade de se conhecer um campo estático e um campo cinemático admissíveis. A definição de um campo cinemático é mais fácil e, por este motivo, o teorema do limite superior foi sendo aplicado por muitos autores com sucesso na análise de diversas situações. Numa aplicação cinemática, por exemplo, seria definida uma superfície de ruptura do solo por baixo de uma fundação, como mostrado na Figura 3.1, baseada na experiência e no bom senso, e esta seria calibrada até ser alcançada uma consistência satisfatória dos resultados.

Com o passar dos anos e a grande aplicação dos métodos numéricos na engenharia, especialmente o Método dos Elementos Finitos (MEF), pôde-se por seu intermédio obter o campo estático e cinemático de forma automática, para utilização em aplicações da Análise Limite. Desta forma a Análise Limite, que já mostrava consistência na abordagem analítica, passou também a ser empregada numericamente, sendo então denotada por Análise Limite Numérica (ALN).

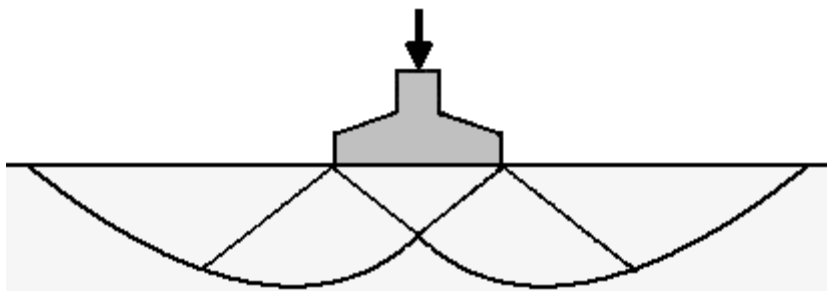


Figura 3.1 - Exemplo de superfícies de ruptura hipotética de uma fundação superficial.

Na mecânica dos sólidos deformáveis, segundo Chen e Liu (1990), existem três condições que devem ser satisfeitas para que uma solução possa ser alcançada:

- Equações de equilíbrio de tensões;
- Equações constitutivas (relação tensão-deformação);

- Equações de compatibilidade relacionando deformação com deslocamento.

A Análise Limite segue os preceitos da mecânica dos sólidos deformáveis, mas considera uma condição idealizada no comportamento do material, tomando-o como rígido perfeitamente plástico. Admitindo a lei de fluxo associado ou condição de normalidade, são estabelecidos os teoremas sobre os quais a análise limite está fundamentada: teorema do limite inferior e teorema do limite superior (Figura 3.2).

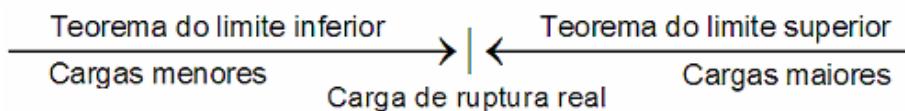


Figura 3.2 - Representação dos teoremas da análise limite.

3.2 TEOREMA DA REGIÃO INFERIOR

O teorema da região inferior postula que um corpo não sofre colapso para uma dada solicitação, se existir pelo menos um campo de tensões estaticamente admissível. Para tal, tem de satisfazer as equações de equilíbrio indefinido, as condições de fronteira respeitantes às tensões e, além disso, não pode ser violado em nenhum ponto o critério de cedência.

No fundo, este teorema sustenta que um corpo responde às solicitações adaptando-se da melhor maneira possível, isto é, compensando os pontos mais tensionados com redistribuições de tensões para outros pontos. Enquanto existir uma distribuição de tensões que, respeitando as condições de fronteira, equilibre a solicitação, então o corpo não entrará em cedência geral.

Existem vários métodos baseados neste teorema, nomeadamente, o método de Rankine para cálculo de impulsos, o Método de Caquot para cálculo de impulsos e o método para avaliação de capacidade de carga de sapatas.

Em resumo, mesmo que a distribuição de tensões considerada não seja verdadeira, se essa distribuição for estaticamente admissível, podemos estar seguros que a solicitação correspondente constitui um valor inferior às forças que se podem aplicar ao corpo sem que este entre em colapso. As soluções baseadas neste teorema designam-se como soluções estáticas incompletas.

3.3 TEOREMA DA REGIÃO SUPERIOR

Este teorema assume que um corpo sofre colapso quando sujeito a uma dada solicitação, se existir pelo menos um campo de deformações plásticas cinematicamente admissível para o qual se produza um excesso de energia cinética. Assim, este campo tem de satisfazer as condições de compatibilidade e as condições de fronteira respeitantes aos deslocamentos e, além disso, as deformações plásticas produzem-se de acordo com uma lei de fluxo plástico associado.

O corpo entra em colapso se for possível imaginar uma forma de deformação cinematicamente compatível (não é necessário que seja a que realmente se vai produzir) para a qual o trabalho produzido pelas forças exteriores seja superior ou igual ao trabalho dissipado internamente pela deformação plástica.

Entre os métodos baseados neste teorema, podem-se referir o de Coulomb aplicado ao cálculo de impulsos e alguns utilizados na avaliação da capacidade de carga de sapatas.

Em conclusão, mesmo que o modo de deformação admitido seja errado, podemos estar seguros de que as forças que supomos aplicadas são superiores às forças verdadeiras capazes de produzir a cedência geral do corpo. As soluções baseadas neste critério designam-se como soluções cinemáticas incompletas.

4

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos fenómenos que ocorrem na natureza pode ser descrita por modelos físicos, formulados matematicamente através de equações diferenciais (ou integrais) que relacionam os diversos parâmetros intervenientes na sua caracterização.

Embora tais equações se consigam estabelecer com relativa facilidade, a sua resolução por via analítica está restringida apenas a casos bastante simples.

Este facto, aliado ao permanente desenvolvimento a nível informático, tem conduzido ao incremento da utilização dos métodos numéricos, através dos quais as equações são tratadas de modo a assumirem uma forma algébrica, envolvendo assim apenas operações aritméticas elementares.

Dos métodos numéricos mais divulgados destacam-se os métodos de diferenças finitas, métodos variacionais (Ritz, mínimos quadrados, Courant), os métodos de resíduos pesados e o método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais utilizados presentemente. Os trabalhos pioneiros neste método devem-se a Clough (1960) que desenvolveu o método para o estudo estrutural de aeronaves e a Zienkiewicz e Cheung (1965) generalizando o método à mecânica dos meios contínuos. Vários autores têm opiniões diferentes acerca da origem do MEF mas pensa-se que Clough terá sido o primeiro a empregar o termo “elemento finito”.

Ainda que primeiramente o MEF tenha sido amplamente utilizado em problemas de mecânica dos sólidos e de estruturas complexas, posteriormente tornou-se também uma poderosa ferramenta para solucionar problemas de mecânica dos fluidos, sendo hoje em dia aplicado com frequência na análise de problemas geotécnicos.

A utilização do método dos elementos finitos permite a transformação de problemas de tipo contínuo em problemas discretos. Isto é, os problemas regidos por equações diferenciais, cuja solução é dada por funções contínuas das coordenadas espaciais e/ou do tempo, reduzem-se à obtenção do valor dessas funções em pontos discretos do domínio. A obtenção dos valores das grandezas nos restantes pontos ou instantes é conseguida através de processos de aproximação (ou interpolação) ao nível de cada elemento. Em contrapartida, os métodos variacionais e de resíduos pesados têm por objectivo a construção de uma função que seja uma boa aproximação à solução da equação diferencial em todo o domínio.

Por esta razão, o MEF pode ser interpretado como a aplicação, ao nível do elemento finito, de um dos métodos variacionais ou de resíduos pesados já referidos. Enquanto estes são de difícil aplicação em domínios de geometria irregular, o MEF apresenta a vantagem de permitir, ao discretizar o domínio, a transformação de um domínio geometricamente irregular em vários subdomínios (ou elementos finitos) de geometria mais simples.

Efectivamente, a aplicação do MEF implica a divisão do domínio de análise em subdomínios (elementos), ligados entre si por pontos (nós), de tal forma que a solução aproximada é calculada nos nós dos elementos que discretizam o domínio em causa (Figura 3.1).

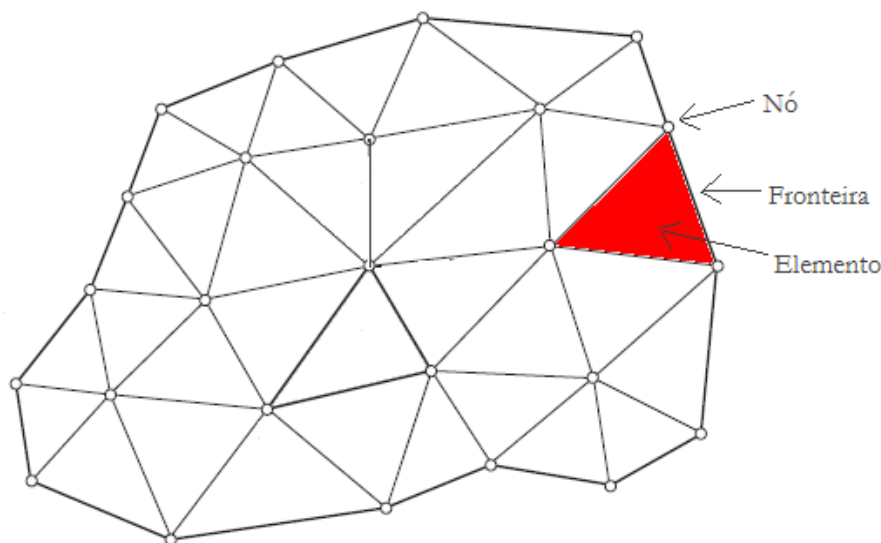


Figura 4.1 Malha de elementos finitos

Assim, o método dos elementos finitos, ao caracterizar-se pela sua versatilidade, quer na aplicação a domínios de geometria complexa, quer no desenvolvimento dos algoritmos matemáticos subjacentes à implementação de programas de cálculo automático, tornou-se no método de discretização e aproximação mais completo e divulgado na actualidade.

4.2 APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

No método dos elementos finitos, o domínio Ω , onde é definida uma determinada equação diferencial cuja solução exacta se pretende aproximar, é tratado como um somatório de subdomínios elementares Ω^e . Consequentemente, a fronteira Γ do domínio Ω , também é constituída por um conjunto de fronteiras parciais Γ_f^e , correspondentes a zonas dos elementos finitos que coincidam com a fronteira Γ . Tem-se então:

$$\Omega = \sum_e^E \Omega^e \quad (3.1)$$

$$\Gamma = \sum_e^E \Gamma_f^e \quad (3.2)$$

Nas expressões 3.1 e 3.2, E é igual ao número de elementos finitos em que é dividido o domínio Ω .

Da transformação pelo MEF de problemas do tipo contínuo em problemas discretos, decorre que o vector das incógnitas associado ao problema é constituído pelos valores da variável dependente nos nós da malha.

Por outro lado, às incógnitas do problema está ainda atribuída a tarefa de servirem de coeficientes de combinação linear na formação da função aproximante $\hat{u}$ que se pretende determinar. Esta função toma o aspecto:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^M u_j \cdot N_j \approx u \quad (3.3)$$

Na equação 3.3 u_j é o valor da variável dependente no nó j da malha de elementos finitos; N_j é a função de aproximação relativa ao nó j da mesma malha; M é o número de nós da malha; u é a solução exacta.

Da análise da equação 3.3 infere-se que as funções aproximadas $\{N_j\}$ vão conferir à função aproximante $\hat{u}$ um papel interpolador no domínio. Isto é, para calcular o valor da variável dependente, ou das suas derivadas, em qualquer dos restantes pontos do domínio, basta introduzir o valor das respectivas coordenadas na equação 3.3.

Note-se que no MEF a divisão do domínio Ω em subdomínios implica que cada função de aproximação N_j esteja apenas referida ao seu subdomínio de aplicação.

4.3 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

As funções de aproximação devem ser completas, linearmente independentes, devem permitir uma aproximação exacta em parte da fronteira e satisfazer as exigências de continuidade das equações diferenciais ou de eventuais formulações fracas.

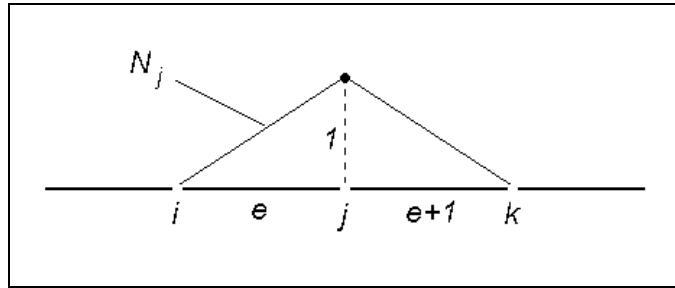
Ser uma função completa significa que se o seu grau for n deve conter todos os termos de ordem igual ou inferior a n . O termo de ordem zero não deve ser excluído, já que é necessário à construção da aproximação à solução u de valor constante. Dizer que as funções têm que ser linearmente independentes significa que acrescentar a uma combinação linear de funções uma nova função que seja combinação linear das já existentes, é o mesmo que não acrescentar nada de novo.

4.3.1 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO GLOBAIS

Pelo facto da aproximação $\hat{u}$ à solução exacta u poder ser construída a partir de uma combinação linear de funções associadas aos nós, a cada nó j terá que corresponder uma função N_j com as seguintes propriedades:

- A função N_j terá que assumir um valor nulo em todo o domínio, excepto nos elementos associados ao nó j ;
- A função N_j é igual à unidade no nó j a que está associada e tem valor nulo nos restantes nós.

Para ilustrar esta situação, considere-se uma função $u(x)$ definida num domínio unidimensional $\Omega=[0,L_x]$ dividido em E elementos finitos ligados por $E+1$ nós. A função mais simples que se consegue definir, obedecendo às condições a) e b), é uma função linear como se pode observar na figura 3.2.

Figura 4.2 Função de aproximação global N_j .

A função N_j é uma função de aproximação global já que é diferente de zero em mais do que um elemento do domínio (e e $e+1$). Se tal se verificasse em relação a um único elemento, a função passaria a ser designada por função de aproximação local. Considere-se para a função aproximante $\hat{u}$, uma combinação linear de funções dada por:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^M a_j \cdot N_j \quad (3.4)$$

Na expressão 3.4 a_j é um coeficiente de aproximação.

Impondo-se que a aproximação seja exacta nos nós ($\hat{u}_i = u_i$, para $i = 1, \dots, M$) é possível estabelecer o seguinte sistema de M equações lineares a M incógnitas:

$$[N_{ij}] \{a_i\} = \{u_i\} \quad (3.5)$$

Na expressão 3.5 N_{ij} é o valor da função N_j calculada no nó i (para $i, j = 1, \dots, M$); u_i é o valor exacto da solução u no nó i da malha; $\{a_j\}$ é o vector das incógnitas ou dos coeficientes de aproximação.

Atendendo à propriedade b) das funções N_j , a matriz $[N_{ij}]$ é uma matriz identidade, podendo por isso concluir-se que os coeficientes $\{a_j\}$ representam os valores da função $u(x)$ nos nós do domínio. Como tal, a expressão 3.4 é reescrita na forma:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^M u_j \cdot N_j \quad (3.6)$$

Se esta aproximação é exacta em todos os pontos do domínio, então também é exacta nos pontos que definem a fronteira. Portanto, desde que as funções N_j gozem das propriedades a) e b), a expressão 3.6 permite uma aproximação exacta às condições de fronteira essenciais.

Refira-se que estas conclusões são extensíveis a domínios bidimensionais ou tridimensionais.

4.3.2 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS

A determinação do valor da aproximação $\hat{u}$ no interior de um elemento Ω^e pode ser feita, como é previsível, a partir da expressão 3.6. Neste caso, apenas as funções N_i relativas aos nós do elemento assumem valores diferentes de zero.

Deste modo, por força das propriedades a) e b), na construção da função aproximante $\hat{u}$ apenas intervêm os termos afectados pelos valores de u_i e u_j :

$$\hat{u} = \dots + 0 + u_i N_i + u_j N_j + 0 + \dots \quad (3.7)$$

Reescrevendo a expressão (7) tem-se:

$$\hat{u} = u_i N_i^e + u_j N_j^e \quad \text{para} \quad x_i \leq x \leq x_j \quad (3.8)$$

Representando N_i^e e N_j^e , respectivamente, as partes das funções N_i e N_j relativas ao elemento e como apresentado na fig. 3.

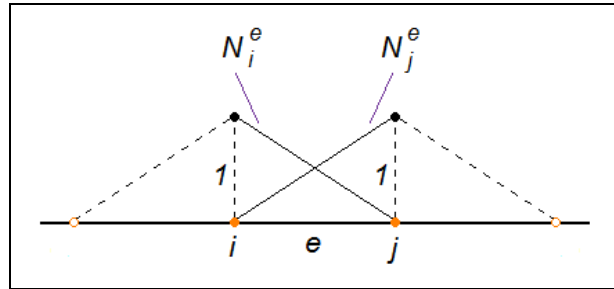


Figura 4.3 - Aproximação $\hat{u}$ no interior de um elemento Ω^e .

Desta forma, conclui-se que uma função de aproximação global, relativa a um dado nó i , pode ser obtida por combinação das funções de aproximação locais, correspondentes aos elementos que contêm esse nó (Fig. 4.4).

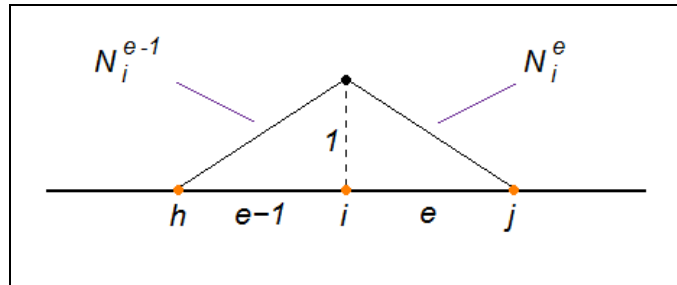


Figura 4.4 - Função de aproximação global no nó i .

Analogamente ao que sucedeu para as funções de aproximação globais, esta conclusão também é extensível a domínios bidimensionais ou tridimensionais.

4.4 APROXIMAÇÃO À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

4.4.1 APROXIMAÇÃO RECORRENDO AO MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS

A aproximação à solução exacta de uma equação diferencial será abordada pelo Método dos Resíduos Pesados (MRP). Pretende-se que a introdução do MRP seja feita de uma forma concisa mas que, ainda assim, permita a compreensão do modelo numérico desenvolvido pelo MEF.

O objectivo deste método é a determinação de uma função aproximante $\hat{u}$ à solução exacta u de uma equação diferencial que governa um determinado fenómeno, garantindo o cumprimento das condições de fronteira, isto é, que seja exacta na fronteira Γ do domínio Ω . Considere-se para a função aproximante, uma combinação de funções:

$$u \approx \hat{u} = \Psi + \sum_{j=1}^M a_j \cdot N_j \quad (3.9)$$

Na expressão 3.9, Ψ é uma função que na fronteira Γ assume exactamente os valores de u ($\Psi_\Gamma = u_\Gamma$); $\{N_j\}$ para $j=1, \dots, M$, é um conjunto de funções de aproximação linearmente independentes, que devem anular-se na fronteira $\square\square\{a_j\}$ para $j=1, \dots, M$, é o conjunto dos coeficientes de aproximação que devem ser determinados de forma que a aproximação $\hat{u}$ seja a melhor possível.

A determinação dos coeficientes $\{a_j\}$ pode ser conseguida impondo a condição de a função aproximante assumir valores exactos em M pontos distintos do domínio. Ao impor-se que $\hat{u}_{p_i} = u_{p_i}$, para $j=1, \dots, M$, torna-se possível estabelecer um sistema de M equações lineares a M incógnitas que permite calcular os valores dos coeficientes $\{a_j\}$:

$$k_{ij} \cdot a_j = f_i \quad \text{ou} \quad [K]\{a\} = \{f\} \quad (3.10)$$

$$f_i = u_{p_i} - \Psi_i \quad \text{ou} \quad \{f\} = \{u_p\} - \{\Psi\} \quad (3.11)$$

Nas expressões 3.10 e 3.11 k_{ij} é o valor da função N_j calculada no ponto p_i ($i, j=1, \dots, M$); u_{p_i} é o valor exacto da função u num dos pontos p_i escolhidos ($i=1, \dots, M$); Ψ_i é o valor de Ψ num dos pontos p_i escolhidos ($i=1, \dots, M$); a_j para $i=1, \dots, M$ correspondem aos coeficientes de aproximação ou incógnitas do problema.

Introduza-se agora a noção de resíduo. Entende-se por erro ou resíduo de uma aproximação a diferença entre a solução exacta e a aproximação:

$$R_\Omega = u - \hat{u} \quad (3.12)$$

Constatando-se que as funções u e $\hat{u}$ são apenas função das coordenadas do domínio Ω , então a função resíduo R_Ω também tem por variáveis dependentes as mesmas coordenadas do domínio em causa.

Numa primeira asserção poderia considerar-se que a precisão de uma aproximação será tanto maior quanto menor for o valor do resíduo associado. Bastaria então para isso que se impusesse o anulamento do integral do resíduo estendido ao domínio, de tal forma que os erros por defeito compensassem os erros por excesso:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} . d\Omega = \int_{\Omega} (u - \hat{u}) . d\Omega \quad (3.13)$$

No entanto, face à possibilidade de surgirem funções aproximantes geradoras de resíduos que se caracterizem pela sua grande amplitude e dispersão no domínio, poderá acontecer que um grande resíduo de valor negativo, num certo ponto do domínio, possa ser compensado por outro grande resíduo, mas agora de sinal positivo, noutra qualquer ponto do domínio.

Consequentemente, infere-se que o critério preconizado em 3.13 para minimização do resíduo não garante a obtenção de uma boa aproximação.

Alternativamente, sugere-se um outro critério 3.14 que consiste no anulamento de um número apropriado de integrais do resíduo estendidos ao domínio, mas agora com o resíduo pesado de diversas formas.

$$\int_{\Omega} W_i . R_{\Omega} . d\Omega = \int_{\Omega} W_i (u - \hat{u}) . d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (3.14)$$

Na expressão acima W_i , para $i=1, \dots, M$, é um conjunto de funções de peso linearmente independentes.

Neste critério, o peso varia de ponto para ponto por força das funções de peso que se encontram a afectar o resíduo. Visto que cada uma destas funções corresponde a uma distribuição de pesos diferente, a cada integral corresponde um integral do resíduo pesado de forma diferente.

Resulta então que o anulamento de diversos integrais do resíduo pesado de formas diferentes, só é compatível com uma aproximação cada vez mais ajustada à solução exacta. Na realidade, o aumento do número das funções de aproximação $\{N_j\}$ e de peso $\{W_i\}$ contribui para a melhoria da qualidade da aproximação obtida.

Sendo as M incógnitas associadas ao problema os M coeficientes de aproximação $\{a_j\}$ que intervêm na função aproximante $\hat{u}$, torna-se necessário estabelecer M integrais do resíduo pesado para outras tantas funções de peso linearmente independentes.

Com efeito, combinando a expressão (9) da função aproximante $\hat{u}$ com a expressão 3.14 é possível estabelecer um sistema de M equações lineares a M incógnitas como em 3.10, ficando neste caso, k_{ij} e f_i :

$$k_{ij} = \int_{\Omega} W_i . N_j . d\Omega \quad i, j = 1, \dots, M \quad (3.15)$$

$$f_i = \int_{\Omega} W_i . (u - \Psi) . d\Omega \quad i = 1, \dots, M \quad (3.16)$$

Consoante a escolha do tipo de funções de peso o MRP pode assumir vários cambiantes. O método de Galerkin, por exemplo, é uma variante do MRP caracterizada pela adopção de funções de peso iguais às funções de aproximação.

Suponha-se agora um problema regido por uma equação diferencial $A(u)$, definida num domínio Ω (ver Fig. 4.5) cuja forma genérica é:

$$A(u) = L(u) + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.17)$$

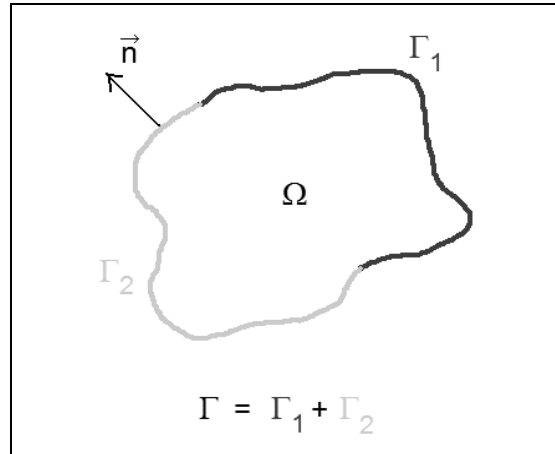


Figura 4.5 - Domínio e fronteira de um problema.

Na equação diferencial 3.17, L é um operador diferencial linear, ou seja, um operador que obedece à condição 3.18, onde α e β assumem valores escalares, u e v são funções e p é uma função das coordenadas do domínio Ω .

$$L(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.L(u) + \beta.L(v) \quad (3.18)$$

Considere-se ainda as condições de fronteira $B(u)$, associadas à equação diferencial $A(u)$, cuja forma genérica é dada por:

$$B(u) = M(u) + r = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (3.19)$$

Em 3.19 M é também um operador diferencial linear e r uma função das coordenadas na fronteira Γ .

Tanto o operador M como a função r assumem diferentes aspectos conforme o tipo de condição de fronteira. Assim, tem-se:

- 1) Condição de fronteira essencial ou de Dirichlet – condição em que os valores da função são impostos em determinados trechos da fronteira:

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.20)$$

$$M(u) = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.21)$$

$$r = -\bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.22)$$

- 2) Condições de fronteira naturais ou de Neumann – a derivada da função, segundo a normal à fronteira, tem valores prescritos:

$$\bar{q} = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.23)$$

$$M(u) = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.24)$$

$$r = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.25)$$

Até agora, a formulação do MRP exposta não dispensa o conhecimento prévio da solução exacta u . Ora, como a solução de uma equação não é conhecida antecipadamente, torna-se necessário redefinir o conceito de resíduo sem recorrer ao conhecimento prévio da solução exacta. Considerando a equação diferencial 3.17 este consiste em:

$$R_\Omega = A(\hat{u}) - A(u) = A(\hat{u}) \quad (3.26)$$

Substituindo a expressão da função aproximante 3.9 e a equação 3.17 em 3.26 tem-se:

$$R_\Omega = A(\hat{u}) = L(\hat{u}) + p = L(\Psi) + \sum_{j=1}^M a_j \cdot L(N_j) + p \quad (3.27)$$

Na expressão 3.27 o operador linear L faz com que as funções a que está associado sejam tão diferenciáveis quanto o exigido por este operador diferencial.

Para domínios geometricamente complexos é difícil, se não mesmo impossível, encontrar funções de aproximação que obedeçam a algumas condições estabelecidas anteriormente, quer relativamente às condições de fronteira, quer em relação ao grau de diferenciação exigido. Para além disso, cada vez que as condições de fronteira são modificadas, torna-se necessário encontrar nova função Ψ . Assim, deve-se construir uma aproximação em que seja possível relaxar esta imposição. Para tal, considere-se a expressão:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^M a_j \cdot N_j \approx u \quad (3.4)$$

Esta traduz uma aproximação que, à partida, não satisfaz as condições de fronteira. Consequentemente para além de se considerar um resíduo no domínio, emerge agora um resíduo que terá que ser considerado na fronteira:

$$R_\Omega = A(\hat{u}) = L(\hat{u}) + p \quad \text{no domínio } \Omega \quad (3.28)$$

$$R_\Gamma = B(\hat{u}) = M(\hat{u}) + r \quad \text{na fronteira } \Gamma \quad (3.29)$$

A construção da aproximação passa novamente pela minimização do resíduo, mas agora estendida ao domínio e à fronteira. Esta condição traduz-se matematicamente pelo anulamento da soma dos integrais dos resíduos pesados, no domínio e na fronteira, que é dada por:

$$\int_{\Omega} W_i \cdot R_{\Omega} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \cdot R_{\Gamma} \cdot d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (3.30)$$

Finalmente, importa referir que existe a possibilidade de procurar uma aproximação exacta apenas no trecho da fronteira onde o valor da função u é prescrito, sem contudo perder a precisão da aproximação já conseguida pelos outros processos de aproximação à fronteira. Esta aproximação, cuja formulação exacta não interessa aqui desenvolver, dá origem à formulação fraca do MRP que é expressa pela equação 3.31. Esta designação deve-se ao facto da equação poder ser estabelecida com base apenas na integração do resíduo pesado estendido ao domínio Ω .

$$\int_{\Omega} C(W_i) \cdot D(\hat{u}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} W_i \cdot p \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q} W_i \cdot r \cdot d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (3.31)$$

Na equação 3.31 C e D são operadores diferenciais lineares de ordem inferior ao operador L ; Γ_q é a parte da fronteira onde existe diferença entre a solução aproximada e a solução exacta.

4.4.2 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

Como se poderá concluir facilmente pela análise da expressão 3.3, a continuidade da função aproximante $\hat{u}$ está directamente relacionada com a continuidade das funções de aproximação $\{N_j\}$.

Conforme foi visto num domínio unidimensional, as funções de aproximação enfermam de uma descontinuidade da primeira derivada nas fronteiras dos elementos finitos, induzindo assim esta mesma descontinuidade na função aproximante $\hat{u}$. Nesta medida, ressalta a necessidade de determinação do grau de continuidade a impor a uma aproximação 3.3 à solução de uma qualquer equação diferencial. Introduzindo as expressões dos resíduos 3.28 e 3.29 na equação 3.30 pode escrever-se:

$$\int_{\Omega} W_i \cdot L(\hat{u}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} W_i \cdot p \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} V_i \cdot M(\hat{u}) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} V_i \cdot r \cdot d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (3.32)$$

Ao resolver esta equação, é fundamental garantir que os argumentos dos integrais que constituem as parcelas do primeiro membro assumam sempre valores finitos, em todos os pontos do domínio de integração. Para que tal seja viável, é necessário que os operadores diferenciais L e M , quando aplicados à função aproximante $\hat{u}$, também assumam sempre valores finitos em todos os pontos do domínio de integração.

Geralmente, para que esta imposição seja respeitada, basta escolher funções de aproximação que obedeçam ao critério: se os argumentos dos integrais contêm derivadas de ordem n , as derivadas de ordem $n-1$ das funções de aproximação N_j devem ser contínuas.

Analogamente ao que se passa com $L(\hat{u})$ e $M(\hat{u})$, também as funções de peso $\{W_i\}$ e $\{V_i\}$ terão que assumir valores finitos em todo o domínio de integração, excepto no caso da função delta de Dirac ser escolhida para função de peso.

4.5 APROXIMAÇÃO EXACTA DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA ESSENCIAIS. MÉTODO DE GALERKIN.

Sendo a aproximação 3.3 exacta no trecho da fronteira Γ_u , onde o valor de u é prescrito, é possível utilizar a formulação fraca do MRP (31) desde que os operadores diferenciais E e M sejam idênticos.

A partir da equação 3.31 é possível gerar o sistema de M equações a M incógnitas $[K]\{u\} = \{f\}$ considerando $\{u\}$ o vector das incógnitas e, neste caso, k_{ij} e f_i :

$$k_{ij} = \int_{\Omega} C(W_i) \cdot D(N_j) \cdot d\Omega \quad i, j = 1, \dots, M \quad (3.33)$$

$$f_i = - \int_{\Omega} W_i \cdot p \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_q} W_i \cdot r \cdot d\Gamma \quad i = 1, \dots, M \quad (3.34)$$

Caso L seja um operador diferencial de ordem par, os operadores C e D têm a mesma ordem de diferenciação, tornando deste modo iguais os graus de diferenciação a exigir às funções de peso $\{W_i\}$ e de aproximação $\{N_i\}$. Por este facto, é recomendável a utilização da variante de Galerkin do MRP, e tomar $W_i = N_i$. Modificando 3.33 e 3.34 tem-se finalmente:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} C(N_i) \cdot D(N_j) \cdot d\Omega \quad i, j = 1, \dots, M \quad (3.35)$$

$$f_i = - \int_{\Omega} N_i \cdot p \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \cdot r \cdot d\Gamma \quad i = 1, \dots, M \quad (3.36)$$

A matriz $[K]$ do sistema de equações revela-se uma matriz simétrica, esparsa e em banda. Veja-se o exemplo na Fig. 4.6 e a matriz do sistema de equações 3.37.

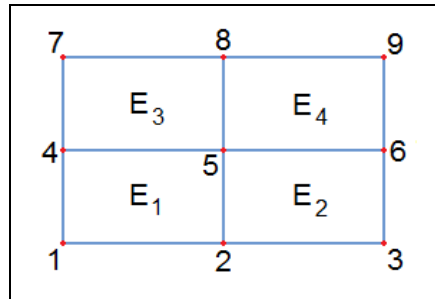


Figura 4.6 - Malha de elementos finitos constituída por elementos de 4 nós

$$[K] = \begin{bmatrix} * & * & & * & * & & & & \\ * & * & * & * & * & * & & & \\ & & * & * & & * & * & & \\ * & * & & * & * & & * & * & \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & & * & & * & * \\ & & & * & * & & * & * & \\ & & & * & * & * & * & * & * \\ & & & & * & * & & * & * \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A simetria da matriz acima resulta da aplicação do método de Galerkin. Por sua vez o facto de a matriz $[K]$ ser esparsa e em banda, resulta da utilização de funções de aproximação que obedecem às condições a) e b) referidas em 1.3.1. Neste sentido, cada função tem N_i tem valor nulo em todos os elementos que não contêm o nó a que está associada. Isto é, o elemento k_{ij} da matriz $[K]$ é nulo sempre que os índices i e j se referem a nós que não pertencem a um mesmo elemento.

Assim, a resolução do sistema de equações $[K]\{u\} = \{f\}$ constituído pelo MEF, exige menos operações do que a resolução do seu homólogo, constituído pela aplicação do MRP a todo o domínio, cuja matriz $[K]$ associada se revela completa. Conclui-se que o MEF é um método mais versátil e eficiente do que o MRP, como aliás já tinha sido referido.

4.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM GEOTECNIA

A solução numérica por meio de elementos finitos aplicada a problemas geotécnicos, apesar de bastante eficiente no que diz respeito à aproximação dos resultados, exige uma série de parâmetros dos materiais para alimentação das matrizes constitutivas. Devido à grande variabilidade dos solos, todo cuidado deve ser tomado na definição dos parâmetros de forma a garantir a fiabilidade dos resultados obtidos nas análises numéricas.

4.6.1 MODELOS CONSTITUTIVOS

As matrizes constitutivas relacionam incrementos de tensão com incrementos de deformação nos materiais de acordo com as hipóteses dos modelos constitutivos adoptados.

Nas análises numéricas, pode-se adoptar vários modelos constitutivos para representar o comportamento mecânico dos materiais.

Alguns destes modelos possuem relações, tensão *versus* deformação, fundamentadas na teoria da elasticidade infinitesimal. O modelo elástico propriamente dito e o modelo hiperbólico, que é um modelo incrementalmente elástico.

Também existem modelos elasto-plásticos, cuja teoria da plasticidade constitui a base do seu desenvolvimento. O primeiro deles é um modelo elasto-plástico clássico que se comporta de forma linear até que o critério de ruptura de Mohr-Coulomb seja atingido. No Plaxis este modelo é chamado de Mohr-Coulomb (MC). O segundo modelo, de formulação mais recente, inclui aspectos da formulação hiperbólica. No Plaxis este modelo é chamado de Solo com Endurecimento (HSM).

4.6.1.1 Modelo elástico

Pela definição clássica de Cauchy, em um material elástico, o estado de tensão é função apenas do estado de deformação, ou vice-versa, compreendendo-se que as trajetórias de carregamento, descarregamento ou recarregamento são todas coincidentes neste tipo de material.

A relação entre componentes de tensão e deformação é dependente das propriedades dos materiais em consideração. As equações que definem esta relação, entre tensão e deformação, são chamadas de equações constitutivas. A teoria da elasticidade linear tem base no comportamento elásticos dos materiais, independentes de suas taxas de variação, e a sua equação constitutiva assume a forma da Lei de Hooke generalizada.

Quando tratamos de materiais isotrópicos as propriedades relativas ao seu comportamento são as mesmas em todas as direcções para um mesmo ponto.

Materiais elásticos e isotrópicos são representados por duas constantes elásticas independentes: módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson, ν . Para um material elástico e isotrópico, as relações tensões-deformações se escrevem da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \frac{1}{2G}\tau_{xy} & \frac{1}{2G}\tau_{xz} \\ \frac{1}{2G}\tau_{yx} & \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \frac{1}{2G}\tau_{yz} \\ \frac{1}{2G}\tau_{zx} & \frac{1}{2G}\tau_{zy} & \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{bmatrix}$$

Figura 4.7- Relações tensão-deformação

onde G é o módulo de distorção ou módulo de elasticidade transversal e é definido pela equação 3.38:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.38)$$

O modelo elástico também pode ser considerado sob o ponto de vista incremental. Nos modelos quase lineares, onde se assume que o incremento de tensão é função apenas do incremento de deformação, a lei de Hooke generalizada é usada incrementalmente.

A relação tensão-deformação elástica não está restrita à linearidade, elas podem ser não lineares. A figura seguinte ilustra os dois comportamentos.

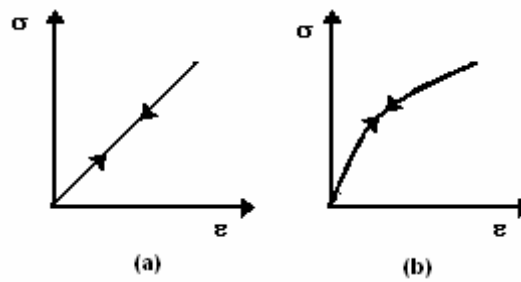


Figura 4.8 Modelos elásticos: (a) linear e (b) não linear.

A relação constitutiva geral do modelo elástico, não restrita a linearidade, pode ser escrita como na equação 3.39.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (3.39)$$

onde: σ_{ij} é o tensor de tensão;
 ε_{kl} é o tensor de deformação;
 f_{ij} são funções de resposta do material.

4.6.1.2 Modelo hiperbólico

Numa tentativa de simular incrementalmente a relação tensão *versus* deformação observada no comportamento de solos, diversos modelos quase lineares foram propostos na literatura. Estes modelos também são conhecidos como módulos variáveis, pois em cada incremento linear os parâmetros elásticos E e ν (ou K e G), da lei de Hooke generalizada, são conferidos de forma incremental em função do estado de tensões.

O modelo hiperbólico assume que as curvas tensão *versus* deformação de solos, sob determinada tensão confinante (σ_3), podem ser aproximadas razoavelmente por hipérboles, como mostra a figura seguinte.

A relação hiperbólica entre tensão e deformação é definida, matematicamente, pela equação 3.40.

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \varepsilon} \quad (3.40)$$

onde: $\sigma_1 - \sigma_3$ é a tensão desviadora,
 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ é a tensão desviadora última;
 ε é a deformação axial;
 E_i é o módulo de rigidez inicial.

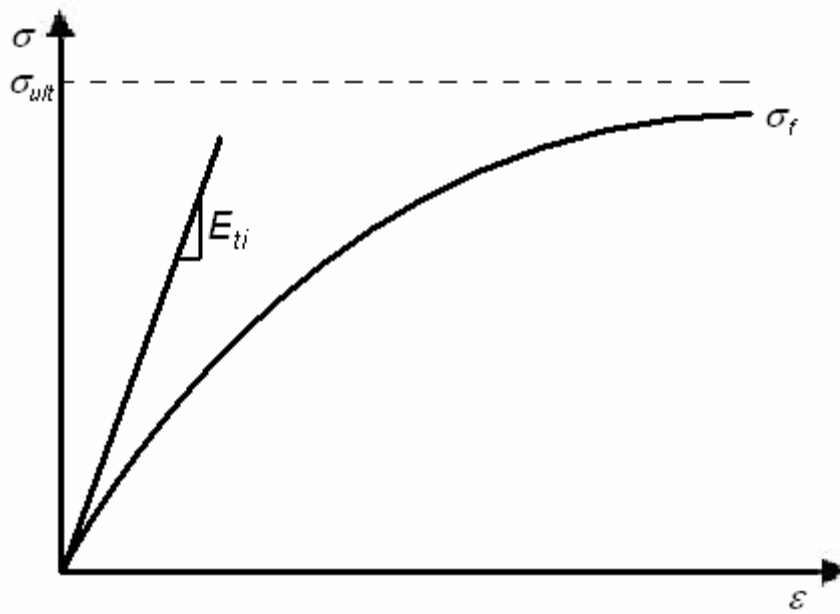


Figura 4.9 - Modelo hiperbólico – curva tensão-deformação

Considerando σ_3 constante obtém-se o módulo tangente derivando a equação acima.

Na versão de Duncan e Chang (1970), são incorporadas à formulação básica a razão de ruptura R_f e a variação do módulo inicial com a tensão de confinamento σ_3 , cujas relações estão nas equações 3.41, respectivamente.

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} < 1 \quad (3.41)$$

$$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3.42)$$

Onde: K_h e n são parâmetros do material;

p_a é a pressão atmosférica;

$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ é a tensão desviadora na ruptura, obtida em função dos parâmetros de resistência do solo, pela equação 3.43.

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2(c \cos \phi + \sigma_3 \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \quad (3.43)$$

Cinco parâmetros básicos definem o modelo hiperbólico, como pode ser visto na expressão final, equação seguinte, proposta por Duncan e Chang (1970). Estes parâmetros são obtidos através dos resultados experimentais do ensaio triaxial de compressão convencional. Os parâmetros são os K_h , n , c , ϕ e R_f .

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi} \right]^2 K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3.44)$$

4.6.1.3 Modelo de Mohr-Coulomb

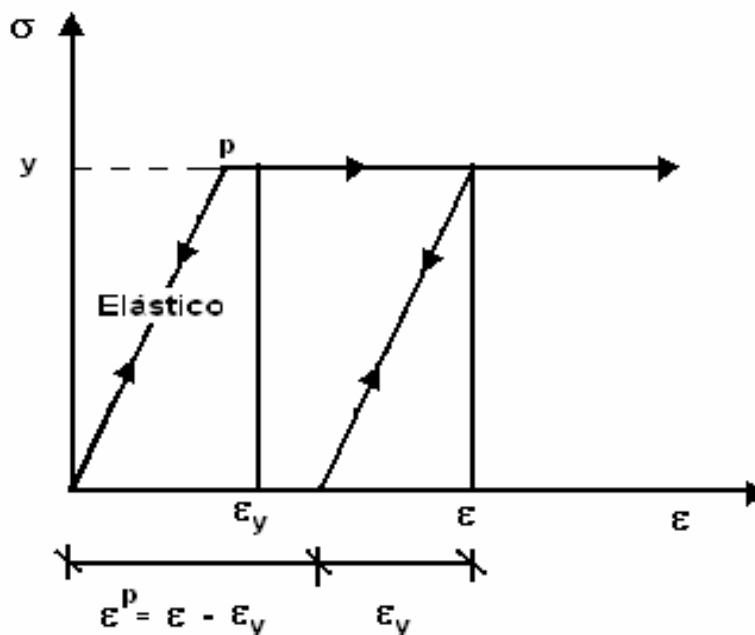
O modelo de Mohr-Coulomb integra a categoria dos modelos elasto-plásticos. Deve-se realçar que Mohr-Coulomb é, na realidade, um critério de ruptura, não um modelo representativo do comportamento tensão *versus* deformação dos materiais.

Para superar as limitações dos modelos elásticos, em relação à sua não capacidade de representar consistentemente os processos de escoamentos e os estados de descarregamento e recarregamento, foram desenvolvidos modelos mais versáteis, como os modelos elasto-plásticos.

O princípio da elasto-plasticidade considera que as deformações são decompostas em uma parte elástica (reversíveis), ε^e , e outra plástica (irreversíveis), ε^p , como mostrado na equação seguinte.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.45)$$

A figura seguinte mostra a ideia básica de um modelo elástico perfeitamente plástico. A relação tensão-deformação é elástica linear até o ponto **p**. Quando a tensão se iguala a do ponto **p** (no caso da figura, tensão igual a **y**) as deformações deixam o regime elástico e se tornam plásticas. Caso as tensões atinjam a tensão **y**, no descarregamento parte da deformação não será recuperada e antes desta tensão, qualquer deformação é inteiramente recuperada.



O ponto **p** da curva indica que o material mudou de comportamento (de elástico para plástico). Este ponto é definido pelos critérios de plastificação.

De entre os critérios de ruptura (ou plastificação), um largamente utilizado em Geotecnia é o critério de Mohr-Coulomb (MC). É um critério de ruptura que considera o carácter friccional e coesivo dos materiais, como os solos. De acordo com o critério, a resistência ao corte na iminência da ruptura, é determinada pela relação mostrada na equação seguinte.

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (3.46)$$

onde: c é a coesão;

σ é a tensão normal no plano de ruptura, no momento da ruptura;

ϕ é o ângulo de atrito.

A figura seguinte mostra o critério de escoamento de Mohr-Coulomb representado graficamente no plano $(\sigma - \tau)$. O estado de tensões no momento da ruptura é representado pelo círculo de Mohr tangente à envolvente de resistência.

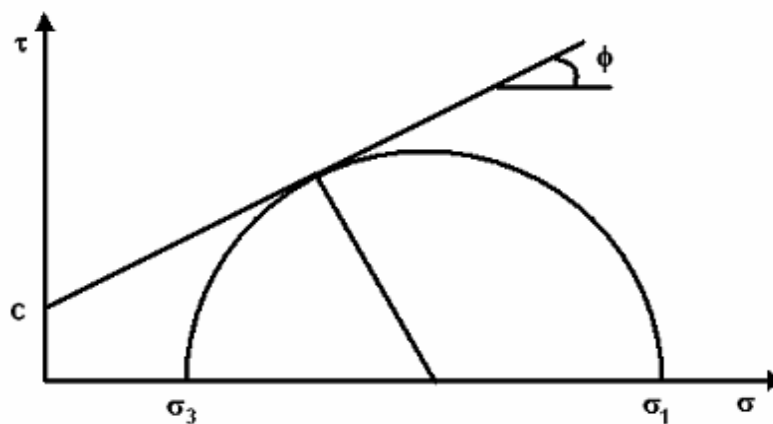


Figura 4.11 – Critério de ruptura de Mohr-Coulomb no plano $(\sigma - \tau)$.

Utilizando o conceito de círculo de Mohr, pode-se expressar a função de cedência em termos das tensões principais σ_1 e σ_3 . A equação 3.47 mostra a relação.

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tan \phi + c \cos \phi \quad (3.47)$$

É de realçar que o critério de Mohr-Coulomb não leva em consideração o efeito da tensão intermediária σ_2 .

O modelo de Mohr-Coulomb é, então, um modelo elástico perfeitamente plástico com uma superfície de plastificação fixa (não há endurecimento devido ao fluxo plástico). Para estados de tensões representados por pontos dentro da superfície de plastificação as deformações são todas reversíveis.

Em um solo sob escoamento plástico, o ângulo de dilatação pode ser facilmente obtido pela lei de fluxo generalizada (Ibañez, 2003). Porém, quando se aplica uma lei de fluxo associada ao critério de Mohr-Coulomb, nota-se que a dilatação plástica é maior que a experimentalmente observada em laboratório.

Esta característica intrínseca do material pode ser minimizada utilizando uma lei de fluxo não associada, por meio do potencial plástico, com o emprego do ângulo de dilatação.

Cinco parâmetros básicos definem o modelo. Estes parâmetros podem ser obtidos nos ensaios de laboratório básicos em amostras de solo. Os parâmetros são o Módulo de Young, E , o coeficiente de Poisson, ν , a coesão, c , o ângulo de atrito interno, ϕ e o ângulo de dilatação, ψ .

5

PROGRAMAS UTILIZADOS

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão sumariamente descritos os programas utilizados no trabalho. São eles o ABC, o Plaxis, o Phase2 e o Sigma.

5.2. PROGRAMA ABC (ANALYSIS OF BEARING CAPACITY)

5.2.1. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa ABC usa o método das características para resolver o problema clássico da determinação da capacidade de carga de fundações superficiais sobre um solo coesivo-friccional sob a acção de uma força vertical centrada. A figura 5.1 mostra o problema clássico:

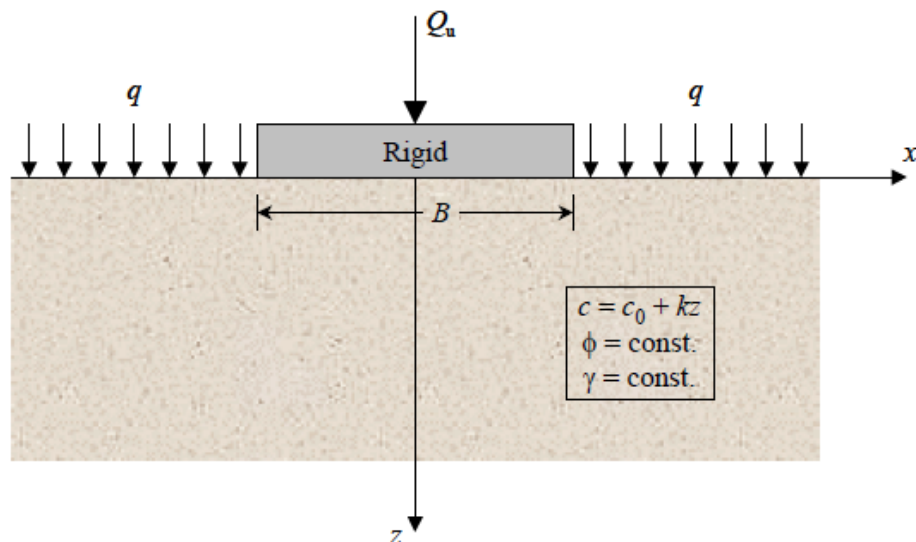


Figura 5.1 - Definição do problema

As diversas componentes de cada problema obedecem a determinadas hipóteses e condições.

No que diz respeito ao solo, o programa assume que:

- O solo é modelado como um material rígido perfeitamente plástico, isotrópico e de extensão semi-infinita;
- A coesão c pode variar linearmente com a profundidade ($c=c_0+kz$);
- O ângulo de atrito ϕ e o peso volúmico γ são constantes.

Para a sapata é adoptado o seguinte:

- É possível assumir deformação plana e simetria axial nos problemas estudados;
- A interação solo-fundação pode ser definida como lisa ou rugosa;
- Uma sobrecarga vertical uniforme q pode ser aplicada ao solo adjacente à fundação.

Em relação ao modo de resolução dos problemas considera-se:

- Uma sequência de cálculos de precisão crescente, envolvendo malhas cada vez mais refinadas, é utilizada para obter uma solução convergente;
- Quando é necessário resolver problemas complexos, uma variedade de estratégias automáticas, incluindo adaptabilidade da malha, mantém a precisão e eficiência do método.

Por fim, no tratamento de resultados, o programa permite que:

- A capacidade de carga seja reportada como uma força Q_u e como uma tensão q_u ;
- A malha possa ser modificada de maneira a mostrar as tracções da fundação ou as tensões principais do solo.

5.2.2. STATUS DAS SOLUÇÕES

Na terminologia da análise limite, as soluções obtidas pelo programa ABC são classificadas como incompletas. Isto acontece porque apenas parte do campo de tensões em colapso, nomeadamente o necessário para calcular a capacidade de carga, é construído.

Para muitos problemas de deformação plana e simetria axial, tem sido demonstrado que a capacidade de carga obtida por este método é idêntica à carga de rotura real. No entanto, são necessários cálculos adicionais para alargar a precisão deste programa a todas as combinações de parâmetros possíveis. Especificamente, estes cálculos devem provar que o campo de tensões incompleto baseado no teorema da região inferior é capaz de:

- Ser alargado ao resto do solo sem violar o equilíbrio;
- Ser associado a um campo de velocidades que forneça uma carga de rotura, baseada no teorema do limite superior, coincidente.

É importante apercebermo-nos de que as fronteiras e os teoremas da análise limite são apenas válidos para materiais ideais que exibem plasticidade perfeita e uma lei de fluxo associada. O último requisito significa que, no caso de um solo ao abrigo da lei de Mohr-Coulomb, os teoremas só se podem aplicar se o ângulo de dilatação, ψ , é igual ao ângulo de atrito, ϕ . Apesar dos solos reais apenas exibirem esse comportamento no caso especial de corte não drenado ($\phi_u=\psi_u=0$), cálculos baseados na associatividade permanecem um ponto de referência importante. Por exemplo, os métodos de cálculo da capacidade de carga são invariavelmente baseados nos factores N_c , N_q , N_γ que dizem respeito ao solo com uma lei de fluxo associada.

5.2.3. APLICAÇÕES POSSÍVEIS

5.2.3.1. Cálculo rigoroso dos tradicionais factores de capacidade de carga N_c , N_q , N_γ

O método tradicional baseia-se na sobreposição de três capacidades de carga – uma técnica conservativa por inerência – mas também se fundamenta em valores tabelados do factor N_γ , que podem ser não conservativos. Aproximações adicionais são introduzidas se a fundação é circular ou se o solo não é homogéneo. Em contraste, o programa ABC constrói uma solução numérica sem recorrer a sobreposições, factores de forma ou outra forma de aproximação.

5.2.3.2. Estabelecer pontos de referência para a validação de outros métodos de cálculo

Para avaliar o desempenho de, por exemplo, um programa de elementos finitos usado no cálculo de capacidades de carga pode-se conduzir uma série de problemas de teste, com o programa ABC. Estes problemas podem depois ser analisados utilizando o programa de elementos finitos, assegurando que as definições adoptadas são consistentes com o ABC (critério de Mohr-Coulomb, lei de fluxo associado, etc.). Assumindo que as comparações sejam satisfatórias, o software de elementos finitos pode então ser aplicado com maior confiança em problemas mais complexos, envolvendo talvez um critério de rotura ou lei de fluxo diferente, cargas não verticais e geometria de fundação 3D.

5.2.4. FUNCIONAMENTO DO ABC

Se for assumido antecipadamente que o solo está em rotura, o estado de tensão bidimensional num ponto genérico (x,z) pode ser totalmente especificado através de duas variáveis auxiliares, nomeadamente a tensão média σ e a orientação da tensão principal θ , juntamente com a função $R(x, z, \sigma, \theta)$ que define o raio do círculo de Mohr e consequentemente a resistência do solo. A convenção de sinais adoptada é indicada na figura 5.2, que também mostra o critério de rotura usado no programa ABC.

$$R = c \cos \theta + \sigma \sin \phi \quad (5.1)$$

Esta é a forma bidimensional do critério de Mohr-Coulomb. Por definição, um solo de Mohr-Coulomb é isotrópico porque num dado ponto (x,z) a resistência não depende da orientação das tensões principais. Se os parâmetros de resistência c e ϕ são constantes, o solo é considerado homogéneo; se c e/ou ϕ variarem com a posição, o solo não é considerado homogéneo. Por simplificação, o programa ABC apenas permite variação linear da coesão através da equação

$$c = c_0 + kz \quad (5.2)$$

O ângulo de atrito, ϕ , é considerado constante ao longo do solo.

Quando as tensões em rotura da figura 5.2 são combinadas com as equações de equilíbrio, um par de equações diferenciais parciais é obtido (variáveis espaciais x e z , variáveis do solo σ e θ). Através de algumas técnicas pode ser mostrado que este sistema de equações é hiperbólico, portanto existem duas direcções características – α e β – ao longo das quais as equações diferenciais parciais são reduzidas a equações diferenciais ordinárias. As equações relevantes para problemas de deformação plana e simetria axial serão resumidas na secção seguinte.

5.2.4.1. Equações fundamentais

Nas tabelas abaixo, ε representa o ângulo entre a direcção da tensão principal σ_1 e as direcções de α e β (figura 5.2a). É de notar que as características coincidem com os planos onde o critério de Mohr-Coulomb é satisfeito (figura 5.2b).

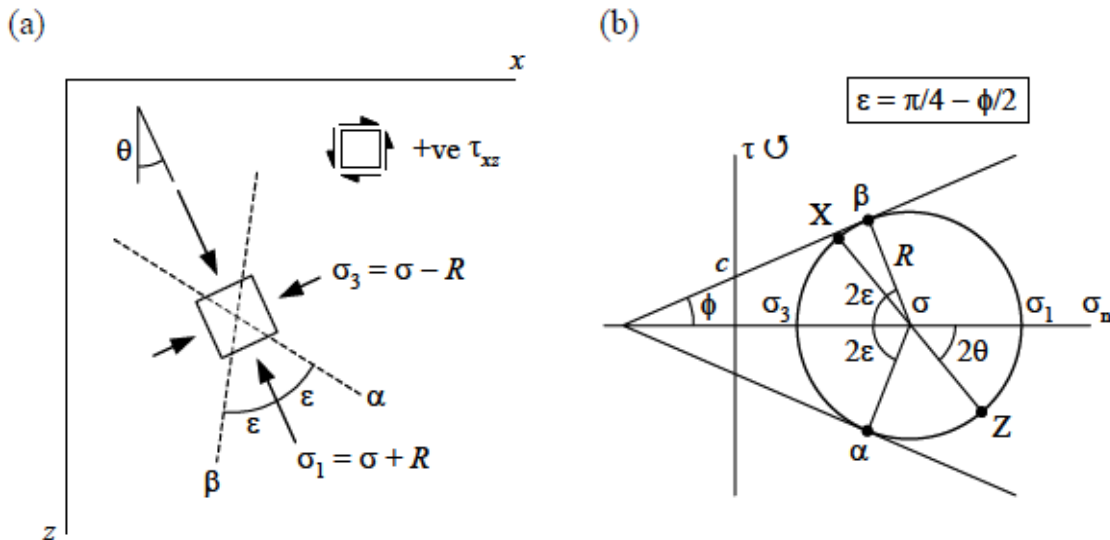


Figura 5.2 - Notações e convenção de sinais

5.2.4.1.1. Deformação plana

Tensões recorrendo a variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} \bullet \sigma_{xx} &= \sigma - R \cos 2\theta \\ \bullet \sigma_{zz} &= \sigma + R \cos 2\theta \\ \bullet \sigma_{xz} &= R \sin 2\theta \end{aligned} \tag{5.3}$$

Características:

	Direcções	Equações diferenciais ordinárias
	$\frac{dx}{dz} = \tan(\theta + \varepsilon)$	$\sigma + \frac{2R}{\cos \emptyset} d\theta = (\gamma_x - \gamma_z \tan \phi - k)dx + (\gamma_z + \gamma_x \tan \phi)dz$
	$\frac{dx}{dz} = \tan(\theta - \varepsilon)$	$\sigma - \frac{2R}{\cos \emptyset} d\theta = (\gamma_x + \gamma_z \tan \phi + k)dx + (\gamma_z - \gamma_x \tan \phi)dz$

Tabela 5.1 – Linha características α e β para estado plano de deformação

Na tabela 5.1, γ_x e γ_z representam forças por unidade de volume nas direcções x e z. Na versão corrente do programa, é assumido que $\gamma_x = 0$ e $\gamma_z = \gamma$, para que as equações principais sejam ligeiramente simplificadas.

5.2.4.1.2. Simetria axial

Tensões recorrendo a variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \bullet \sigma_{xx} &= \sigma - R \cos 2\theta \\
 \bullet \sigma_{zz} &= \sigma + R \cos 2\theta \\
 \bullet \sigma_{yy} &= \sigma - R \\
 \bullet \tau_{xy} &= R \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Características:

Direcções	Equações diferenciais ordinárias
α $\frac{dx}{dz} = \tan(\theta + \varepsilon)$	$d\sigma + \frac{2R}{\cos \phi} d\theta = (\gamma_x^* - \gamma_z^* \tan \phi - k)dx + (\gamma_z^* + \gamma_x^* \tan \phi)dz$
β $\frac{dx}{dz} = \tan(\theta - \varepsilon)$	$d\sigma - \frac{2R}{\cos \phi} d\theta = (\gamma_x^* + \gamma_z^* \tan \phi + k)dx + (\gamma_z^* - \gamma_x^* \tan \phi)dz$

Tabela 5.2 – Linhas características α e β para Simetria axial

Onde:

$$\begin{aligned}
 \bullet \gamma_x^* &= \gamma_x + \frac{R(\cos 2\theta - 1)}{x} \\
 \bullet \gamma_z^* &= \gamma_z - \frac{R \sin 2\theta}{x}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nas equações anteriores, γ_x e γ_z representam as forças por unidade de volume nas direcções x (radial) e z , que como foi dito anteriormente são iguais a 0 e γ respectivamente. As variáveis γ_x^* e γ_z^* podem ser vistas como forças de deformação plana fictícias que foram modificadas para incorporar o efeito da simetria axial. Refira-se que γ_x^* e γ_z^* não são constantes, dependem dos valores locais de x e θ , assim como dos valores locais de c e σ .

Uma característica importante das equações anteriores está relacionada com o facto das mesmas se tornarem singulares no eixo de simetria, $x = 0$. Para além disso, as equações dariam resultados sem sentido se o raio, x , assumisse valores negativos durante a construção de uma malha de características. Por estas razões, a solução de um problema de capacidade de carga usando o método das características é consideravelmente mais difícil em situações de simetria axial do que em deformação plana.

5.2.4.2. Condições de fronteira

5.2.4.2.1. Superfície do solo

Como mostra a figura 5.1, o solo adjacente à fundação é submetido a uma sobrecarga uniforme, q , e encontra-se no estado passivo. Assim, os valores de σ e θ à superfície do solo são:

$$\begin{aligned}
 \bullet \sigma_{passivo} &= \frac{q + c_0 \cos \phi}{1 - \sin \phi} \\
 \bullet \theta_{passivo} &= \pi/2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

A primeira destas equações pode ser obtida a partir da construção do círculo de Mohr (figura 5.3), notando que $c = c_0$ desde que $z = 0$, e que a tensão principal mínima σ_3 é vertical e igual a q . As

características α e β são inclinadas de $\pm\varepsilon$ com a horizontal. A segunda equação serve apenas para evidenciar que a tensão principal, σ_1 , é horizontal.

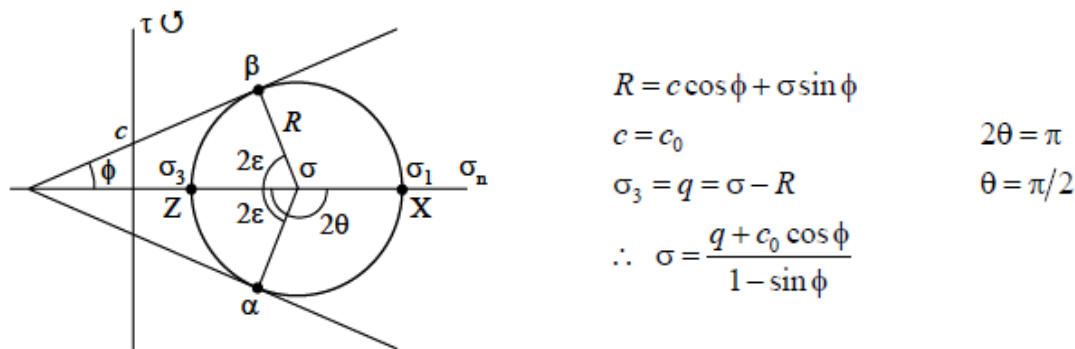


Figura 5.3 - Círculo de Mohr à superfície do solo

5.2.4.2.2. Zona sob a fundação

O solo imediatamente abaixo da sapata encontra-se no estado activo. A orientação, θ , da tensão principal máxima depende da rugosidade da base da fundação. Se for flexível, a tensão principal máxima é vertical ($\theta_{\text{fundação}} = 0$). Sendo rígida, o critério de Mohr-Coulomb é satisfeito no plano da interface ($\theta_{\text{fundação}} = -\pi/4 - \phi/2$).

No caso flexível, a tensão de corte na interface é zero e as características α e β estão inclinadas de $\pm\varepsilon$ em relação à vertical. Por outro lado, na situação de fundação rígida, a sapata exerce no solo uma tensão de corte interior, com a característica β tangente à interface. Os círculos de Mohr relativos aos dois casos estão representados na figura 4.

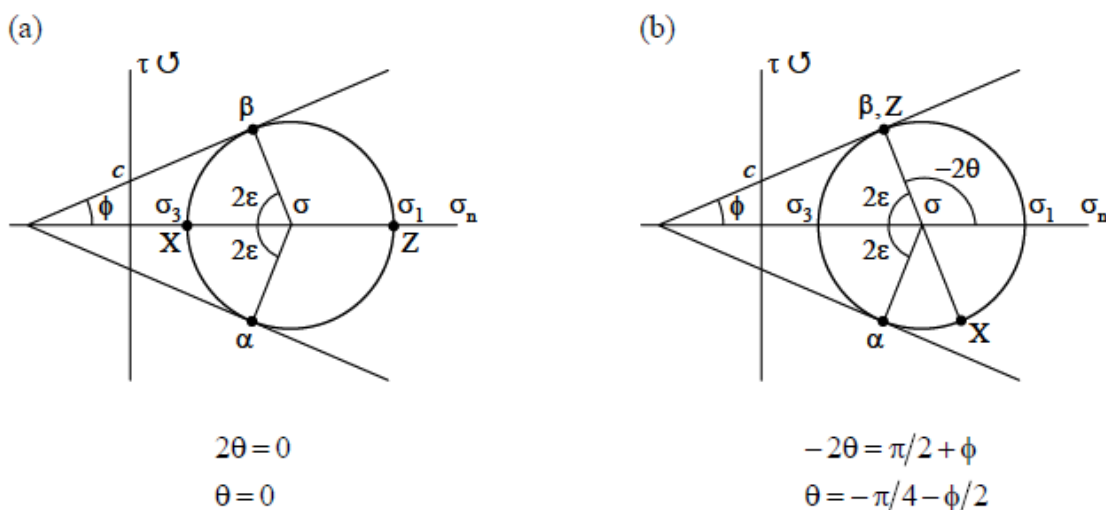


Figura 5.4 - Círculos de Mohr sob a fundação: (a) Flexível (b) Rígida

5.2.5. MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Tendo como referência a figura 5.5, se a solução é conhecida em dois pontos, A (α) e B (β), ela pode ser propagada para um novo ponto C integrando as equações governantes simultaneamente ao longo do segmento α e β . Por vezes, há situações em que estas integrações podem ser realizadas analiticamente, nomeadamente em condições de deformação plana quando o solo se enquadra num dos seguintes casos:

- Homogéneo e puramente coesivo ($c > 0$, $k=0$, $\phi = 0$)
- Homogéneo e puramente atrítico ($c=0$, $k=0$, $\phi > 0$, $\gamma \neq 0$)

Contudo, geralmente é necessária uma integração numérica aproximada.

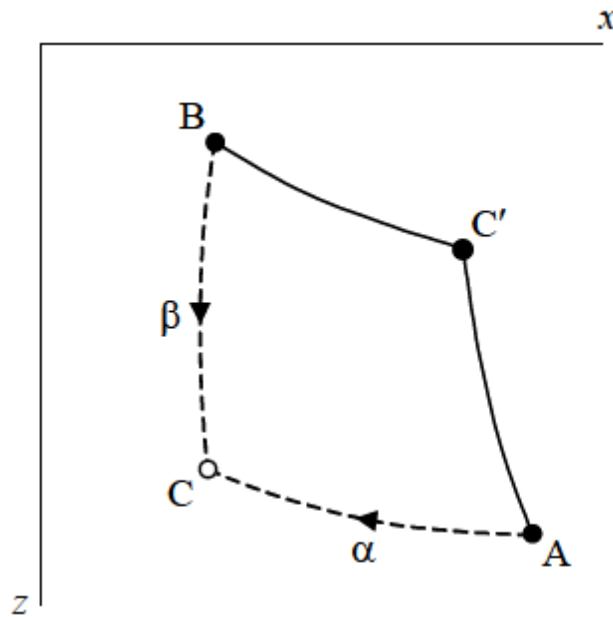


Figura 5.5 - Cálculo de um novo ponto de solução

5.3. PLAXIS

No presente trabalho será utilizado o programa Plaxis – Versão 8.2 como ferramenta numérica. O Plaxis V. 8.2 é um pacote de elementos finitos de análise bidimensional de deformações e estabilidade em engenharia geotécnica.

O Plaxis funciona em ambiente Windows e a sua estrutura está dividida em quatro subprogramas: entrada de dados (Input), fase de cálculo (Calculations), saída de dados (Output) e edição de curvas (Curves).

5.3.1. ENTRADA DE DADOS - (INPUT)

O Input consiste em um subprograma de entrada de dados. Neste subprograma o utilizador define os dados do problema, como o modelo e o tipo de elemento que será usado na análise, a geometria e as condições de contorno, além das propriedades dos materiais envolvidos. Ainda, gera-se a malha de elementos finitos e são definidas as condições iniciais do problema.

5.3.1.1. Modelo e tipo de elemento finito

No Plaxis, os problemas a serem analisados podem ser modelados para as condições de Deformação Plana e de Axissimetria. A Figura seguinte mostra os dois modelos de análise.

O modelo de deformação plana é muito utilizado para análises de obras geotécnicas (barragens, túneis, fundações corridas, etc.). Fisicamente, tal estado ocorre em estruturas longas com carregamento uniforme ao longo da maior dimensão do corpo. Devido a grande dimensão, qualquer secção transversal assumida será considerada como secção de simetria e não apresentará deformação perpendicular ao seu plano. Pelo efeito de Poisson, as tensões na direcção da maior dimensão são não nulas.

Os problemas axissimétricos são particularizações do estado plano de deformações em coordenadas cilíndricas. Neste caso, existe um eixo (eixo y, no caso da figura seguinte) de simetria axial no corpo.

O processo de geração da malha é automático, e a geometria é dividida em elementos triangulares isoparamétricos de 6 ou 15 nós. No primeiro a interpolação é de segunda ordem para cálculo dos deslocamentos e a matriz de rigidez é avaliada por integração numérica em três pontos de Gauss. No segundo a interpolação é de quarta ordem e a matriz de rigidez é avaliada em 12 pontos de Gauss. A figura 35 mostra os elementos triangulares de 6 e 15 nós disponíveis no programa Plaxis.

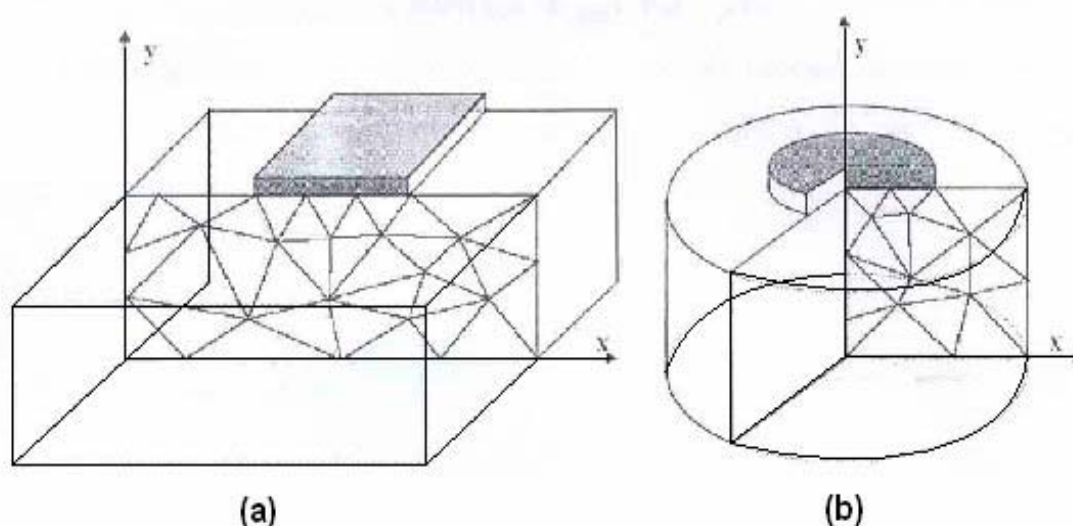


Figura 5.6 - Modelos de análise: (a) deformação plana e (b) axissimetria (Brinkgreve, 2002).

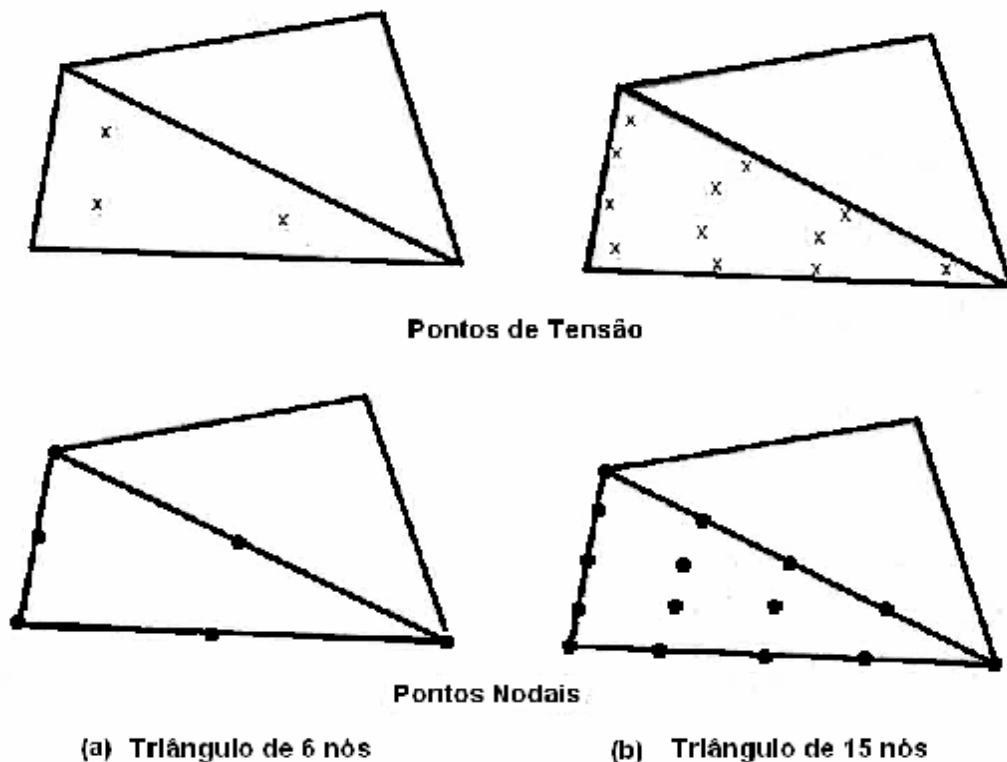


Figura 5.7 - Tipos de elemento: (a) triangular de 6 nós e (b) triangular de 15 nós (adaptado Brinkgreve, 2002).

5.3.1.2. Geometria, condições de contorno e propriedades dos materiais

A geometria é função do problema que será analisado. Diversos são os componentes para definição do problema. Depois que se define a geometria dos problemas, são definidas as propriedades dos materiais envolvidos, cujos parâmetros são função do elemento estrutural e/ou do comportamento do solo.

A seguir estão os diversos componentes disponíveis no Plaxis para compor uma geometria, bem como suas funções, características e propriedades de interesse do material.

- Elementos de placa (Plate): são elementos utilizados para simular estruturas esbeltas no solo e que apresentam elevadas rigidez a flexão e rigidez normal, tais como, paredes, muros, estruturas de túneis, entre outras. Os parâmetros requeridos na modelagem para reproduzir o comportamento destes elementos são: rigidez à flexão (EI) e rigidez axial (EA).
- Elementos de ancoragem (Anchor): são elementos lineares utilizados para simular ancoragens (tração) e suportes (compressão), existindo a possibilidade de aplicação de pretensões.
- Elementos de geogrelhas (Geogrid): são elementos lineares esbeltos que trabalham, apenas, à tração. O único parâmetro requerido na modelagem deste elemento é a rigidez axial elástica (EA). Este elemento permite a modelagem de reforços planos contínuos.
- Elementos de interface (Interface): são elementos capazes de simular o contacto entre diferentes materiais. Estes elementos são utilizados, por exemplo, em problemas de interacção solo-estrutura envolvendo estacas, muros, solos reforçados, entre outros. As propriedades de

resistência da interface são dependentes das propriedades de resistência do solo. A relação é definida como nas equações seguintes, com o factor de redução de resistência R_{inter} .

$$c_i = R_{inter} c_{solo}$$

$$\tan \delta_i = R_{inter} \tan \phi_{solo} \leq \tan \phi_{solo}$$

$$\psi_i = R_{inter} \psi_{solo} \leq \psi_{solo}$$

Onde: c_i é a coesão da interface;

c_{solo} é a coesão do solo;

δ_i é o ângulo de atrito da interface;

ϕ_{solo} é o ângulo de atrito do solo;

ψ_i é o ângulo de dilatação da interface;

ψ_{solo} é o ângulo de dilatação do solo.

As condições de contorno dos problemas podem ser definidas através de forças ou deslocamentos prescritos. O programa Plaxis permite a adopção de carregamentos distribuídos, em linha e pontuais e a prescrição de deslocamentos nulos ou não.

5.3.1.3. Condições iniciais do problema e geração da malha de elementos finitos

Definida a geometria e as condições de contorno do problema e as propriedades dos materiais, procede-se a geração da malha de elementos finitos. A geração da malha é feita de forma automática pelo próprio programa podendo ser composta por elementos de 6 ou 15 nós, conforme mencionado no item atrás. A malha gerada pode ser refinada em locais onde haja concentração de tensão e/ou deformação, de acordo com as necessidades do problema.

Depois de gerada a malha de elementos finitos deve-se definir as condições iniciais do problema. A análise pode ser conduzida levando-se em consideração, ou não, a presença de água. Geralmente as análises são realizadas em termos de tensões efectivas.

5.3.2. CÁLCULO – (CALCULATION)

Neste subprograma, o usuário define o tipo de análise que será realizada. As análises disponíveis para deformações são as plásticas (Plastic Calculation), as de consolidação (Consolidation Analysis) e as de determinação do factor de segurança (Phi-c reduction) e são adoptadas da seguinte maneira:

- Cálculo Plástico: é seleccionado para análises elasto-plásticas, onde não há necessidade de levar em consideração o tempo;
- Análise de Consolidação: é seleccionado em casos onde se tem geração e dissipação de pressões neutras como uma função do tempo;
- Determinação do Factor de Segurança: são cálculos do factor de segurança onde os parâmetros de resistência do solo são sucessivamente reduzidos até que ocorra a ruptura.

Similarmente ao que ocorre nas obras correntes de engenharia, o Plaxis permite que o usuário divida o cálculo em fases, onde os carregamentos, elementos estruturais e geometria, que foram determinados no subprograma de Entrada de Dados, podem ser activados ou desactivados. Por exemplo, em um ensaio triaxial o usuário dividiria a fase de cálculo em consolidação e corte, conforme é realizado no laboratório, activando o carregamento representativo da tensão confinante que determinaria a primeira fase de cálculo e o carregamento representativo da tensão desviadora que determinaria a segunda fase de cálculo.

Neste subprograma define-se os pontos onde se deseja avaliar as relações carregamentos-deslocamentos e tensões-deformações. A escolha dos pontos de interesse no cálculo deve ser feita em função da malha gerada automaticamente pelo programa. Vale lembrar que os pontos de tensão são escolhidos para traçado das trajectórias de tensão e/ou deformação e diagramas tensão versus deformação e os pontos nodais dos elementos são escolhidos para traçado dos diagramas carregamento versus deslocamento.

5.3.3. SAÍDA DE DADOS (OUTPUT)

Neste subprograma o usuário obtém a saída de dados do cálculo realizado e o programa gera a malha deformada.

Podem ser avaliadas as tensões (totais e efectivas), deformações, deslocamentos e pontos de plastificação. A fase no qual o usuário tem interesse em avaliar os resultados dos cálculos deve ser seleccionada no subprograma de Cálculo. Os resultados podem ser visualizados através da interface gráfica ou em forma de tabelas.

Vale lembrar que em um cálculo de elementos finitos os deslocamentos são obtidos para os nós da malha e as tensões e deformações são obtidas para os pontos de tensão.

5.3.4. CURVAS (CURVES)

Neste programa é possível gerar as curvas de tensão-deformação, força versus deslocamento e trajectórias de tensões obtidas nas análises. Os pontos (nodais ou de tensão), para os quais se deseja a obtenção das curvas, devem ser seleccionados no subprograma de cálculo.

5.4. PHASE2

O programa Phase2 é um software, desenvolvido pela Rocscience em conjunto com a Universidade de Toronto, Canadá, para análise do comportamento dos maciços através da sua modelagem bidimensional, isto é, permite a criação de um modelo 2D. Utilizando como método de cálculo o Método dos Elementos Finitos, é particularmente apropriado para o estudo de problemas geotécnicos, e a sua análise abrange aspectos dos meios em investigação, como o estudo da variação dos seus estados de tensão, deslocamentos ocorridos, entre outros, aquando da aplicação de esforços ou de outras perturbações impostas a esse meio.

Na definição do maciço é permissível a sua definição como um meio em que os materiais podem assumir ou um comportamento elástico ou plástico. No primeiro caso, o programa distribuirá as tensões induzidas, de modo que cada elemento do modelo resistirá aos esforços nele actuates, independentemente de qual seja a sua resistência de pico. Já nos modelos plásticos, as tensões serão

redistribuídas para os elementos vizinhos sempre que as actuações forem superiores às resistências de pico. No elemento plastificado, apenas permanece a actuar o equivalente às resistências residuais. Embora seja esta situação que mais se aproxima do comportamento real dos maciços, a simulação de plasticidade, como de resto qualquer não – linearidade, requer o conhecimento de parâmetros adicionais, mais concretamente os parâmetros de deformabilidade residuais do maciço em estudo, que nem sempre estão bem estabelecidos, ficando a definição dos mesmos a cargo da maior ou menor sensibilidade do utilizador na matéria.

O programa possibilita ainda a inserção no modelo a estudar de juntas, suportes (desde cabos, tirantes, etc.) e níveis freáticos possibilitando o estudo de tensões neutras.

Outra das potencialidades deste programa, é a possibilidade de geração automática da malha de elementos finitos, e de acordo com as preferências do utilizador, podendo este optar pelo tipo de malha (que pode ser variável, uniforme ou radial), tipo de elemento (triangular de 3 ou 6 nós ou quadrilateral de 4 ou 8 nós) e ainda pelo número de nós a incluir na envolvente do modelo definido (contorno exterior). A malha será gerada automaticamente após a definição destes parâmetros.

O programa Phase2 permite a simulação em múltiplos estágios, “stages”. Este utensílio permite definir a sequência do carregamento a simular, permitindo no final da simulação numérica a visualização dos resultados referentes a cada “stage”. Outros aspectos como o tipo de análise desejada, procedimento de resolução do sistema de equações, assim como a quantidade máxima de iterações estão ao critério do utilizador.

Posteriormente à caracterização completa do modelo, bem como ao estudo numérico efectuado pelo programa, os resultados podem ser visualizados através de vários elementos gráficos, destacando-se os gráficos de deslocamentos, horizontais e verticais, ocorridos durante todo o ensaio, assim como o aparecimento de elementos em rotura, entre outros.

A utilização do software Phase2 e a fiabilidade dos seus resultados dependem do rigor com que o modelo é criado. Como tal, a criação de um modelo que se aproxime o máximo possível ao caso em estudo, é determinante para a legitimidade dos resultados.

5.5. SIGMA/W

O SIGMA/W é um software que pode ser usado para analisar problemas bidimensionais de tensão e deformação, para estruturas de terra. Sua formulação torna possível analisar problemas simples ou altamente complexos, como por exemplo, uma análise linear simples da deformação elástica ou uma análise não-linear da deformação no estado elásto-plástico. Os diferentes materiais constituintes do solo permitem que sejam representadas várias camadas do solo ou de materiais estruturais. Estas características permitem analisar quase todos os projectos de engenharia civil.

É utilizado em problemas que envolvam pequenos deslocamentos e deformações ou para a formulação de cargas incrementais. Para cada passo de carga, os deslocamentos em cada nó resultantes desse acréscimo são calculados e adicionados ao deslocamento inicial para dar o deslocamento total.

6

ESTUDO NUMÉRICO

6.1 INTRODUÇÃO

O objectivo deste estudo é comparar as soluções obtidas através de três programas comerciais de elementos finitos com as obtidas pelo programa ABC na análise de fundações superficiais assentes em solo puramente coesivo e atrítico. Para o efeito considerou-se uma sapata corrida flexível, de largura B , submetida a um carregamento vertical e centrado. Admite-se que o solo seja um material elasto-plástico perfeito, que respeita o critério de cedência de Mohr-Coulomb.

Embora o objectivo principal deste trabalho esteja centrado nos solos atríticos, foi considerada interessante a inclusão no estudo do caso puramente coesivo.

Neste caso tomou-se uma sapata com as seguintes características: $B=2.5\text{m}$, $E=10\text{ MPa}$, $\nu=0.495$, $q=10\text{kPa}$, $c_o=15\text{kPa}$, $\gamma=18\text{kN/m}^3$. No caso atrítico, os parâmetros de entrada considerados são: $B=2\text{m}$, $E=10\text{ MPa}$, $\nu=0.3$, $c=0$ e $\gamma=1\text{kN/m}^3$. Serão obtidas soluções para valores do ângulo de atrito do solo (ϕ) variando entre 20° e 50° , e assumindo o ângulo de dilatância (ψ) como $\psi = 0$, $\psi = \phi$ e $\psi = \phi - 30$. Esta última alternativa para a escolha do ângulo de dilatância em função do ângulo de atrito é sugerida no manual do programa Plaxis como a melhor forma de obter resultados satisfatórios para valores de ϕ superiores a 30° . Com estes elementos ficam caracterizados os problemas que se pretendem analisar.

Como o problema trata de sapatas flexíveis, a solução é obtida a partir de incrementos de tensão nos nós da malha de elementos finitos em contacto com a sapata.

As análises são realizadas em estado plano de deformação, e em razão da simetria do problema, apenas metade do domínio será considerado. Esta condição já impõe a primeira condição de fronteira do problema – deslocamento horizontal nulo ao longo do eixo de simetria – sendo que ao longo da outra linha vertical do modelo restringe-se apenas o movimento horizontal enquanto o fundo é sempre fixo.

6.2 MODELAÇÃO DO SOLO PELOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS

6.2.1 CASO COESIVO

Apesar do objectivo deste trabalho não ser focado no estudo de fundações assentes em solo puramente coesivo, a análise deste caso com o recurso aos três programas de elementos finitos permite ganhar experiência e realizar comparações com os resultados fornecidos pelo programa ABC perante este tipo situação.

O estudo leva à conclusão de que os três programas fornecem resultados satisfatórios e bastante aproximados do valor de referência proveniente do ABC, sendo no entanto de referir que o programa Phase2 é o que mais se afasta desse valor, talvez por estar mais especializado na a modelação de maciços rochosos.

ABC	Sigma/w	Phase2	Plaxis
87,12	86,9	96	87,3

Tabela 6.1 - Valores da capacidade de carga (em kPa) para o caso puramente coesivo

Apresentam-se em seguida as malhas utilizadas nos três programas de cálculo.

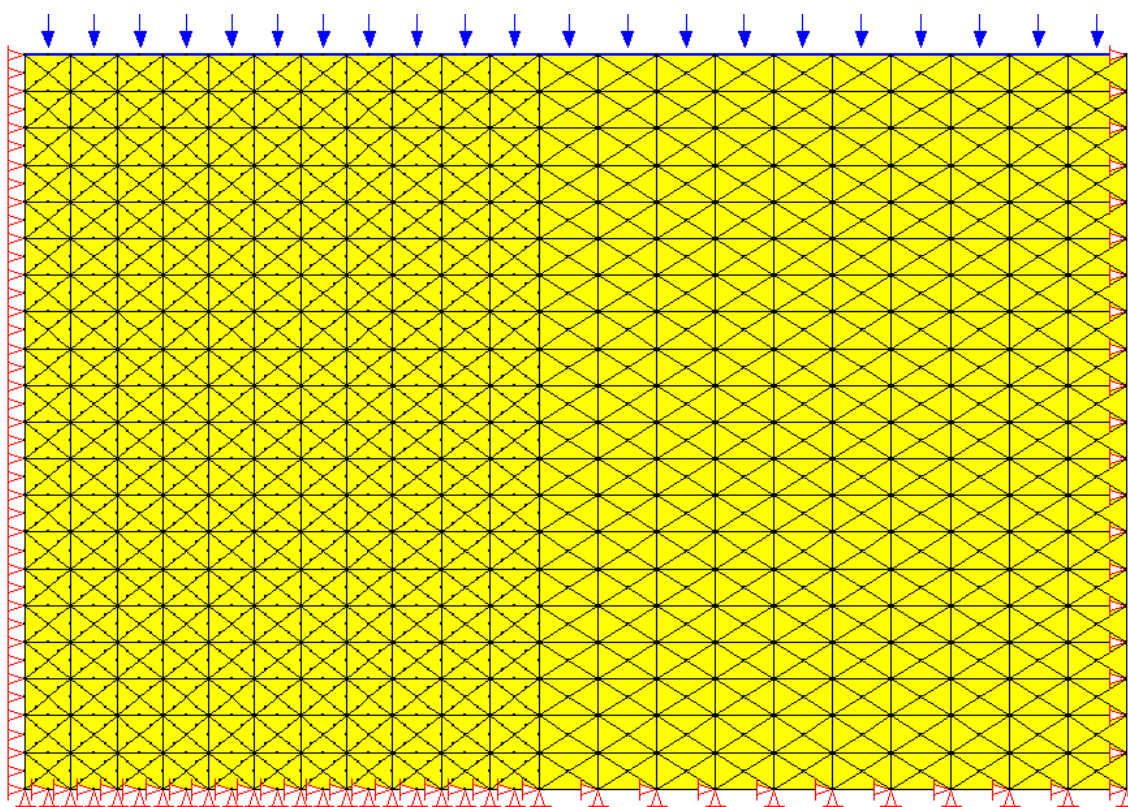


Figura 6.1 - Modelo e malha utilizados no programa Sigma/w

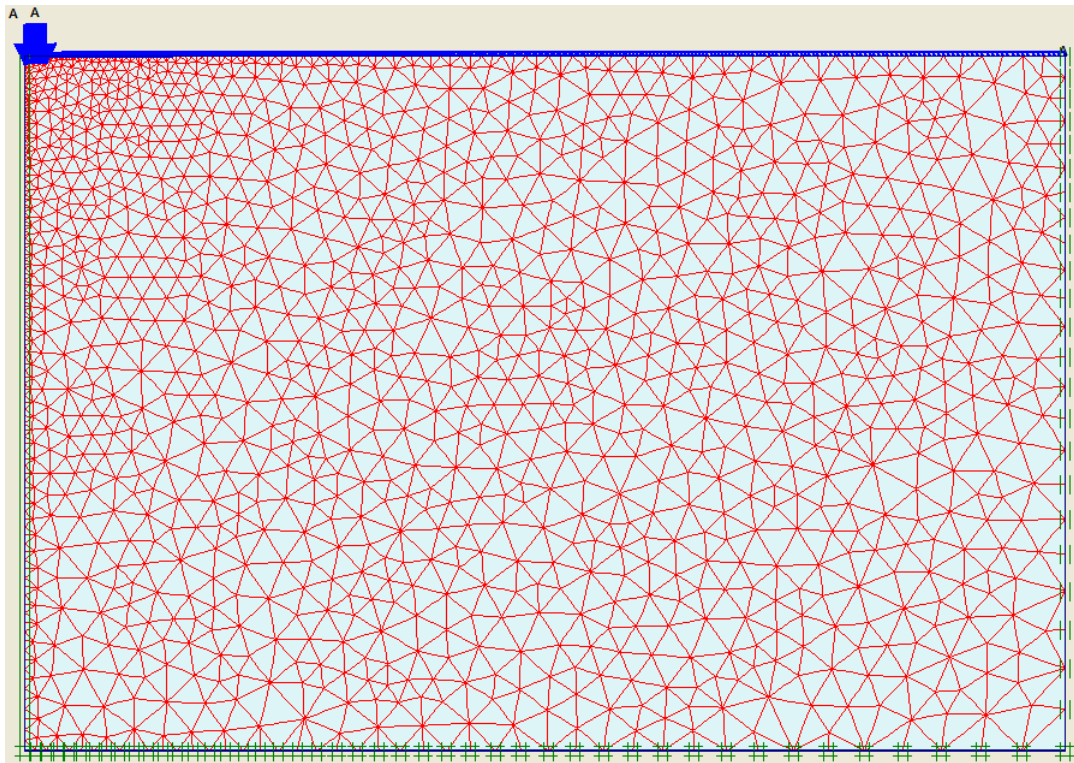


Figura 6.2 – Modelo e malha utilizados no programa Plaxis

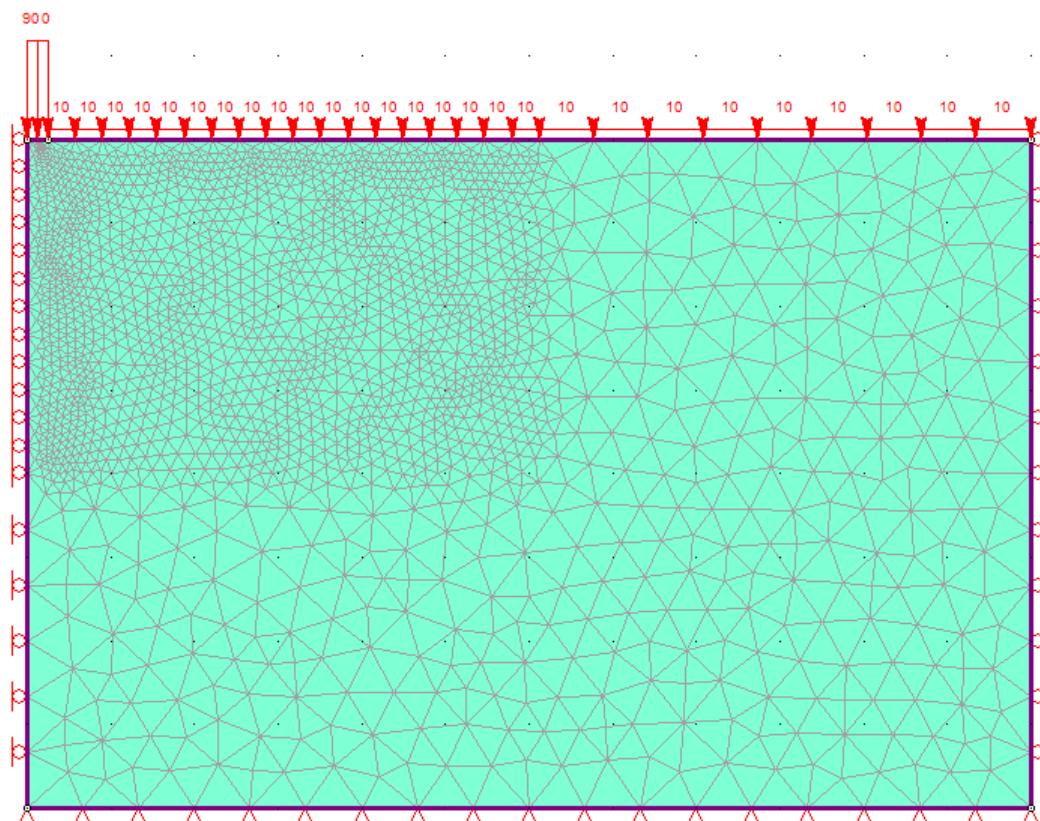


Figura 6.3– Modelo e malha utilizados no programa Phase2

6.2.2 CASO ATRÍTICO

O estudo da sapata assente em solo puramente atrítico foi realizado comparando os valores obtidos através do programa ABC com os modelos idealizados nos três programas utilizados. Numa primeira fase deste estudo paramétrico os cálculos foram realizados com $\phi = 30^\circ$ e $\psi = \{0, \phi\}$. Pôde constatar-se que este tipo de solo suscita bastantes complicações na modelação por elementos finitos. Ao contrário do caso em que o solo é puramente coesivo, neste tipo de material surgem problemas numéricos que dificultam a obtenção de resultados fiáveis.

6.2.2.1 Programa Sigma/w

Neste programa o cálculo é realizado em duas fases. Na primeira, procede-se a uma análise do tipo “*in situ*” de maneira a ter em conta o peso próprio do solo na determinação do estado de tensão inicial. Na segunda fase é importado esse estado previamente estabelecido, dando-se início ao carregamento que pode ser controlado por uma função definida pelo utilizador.

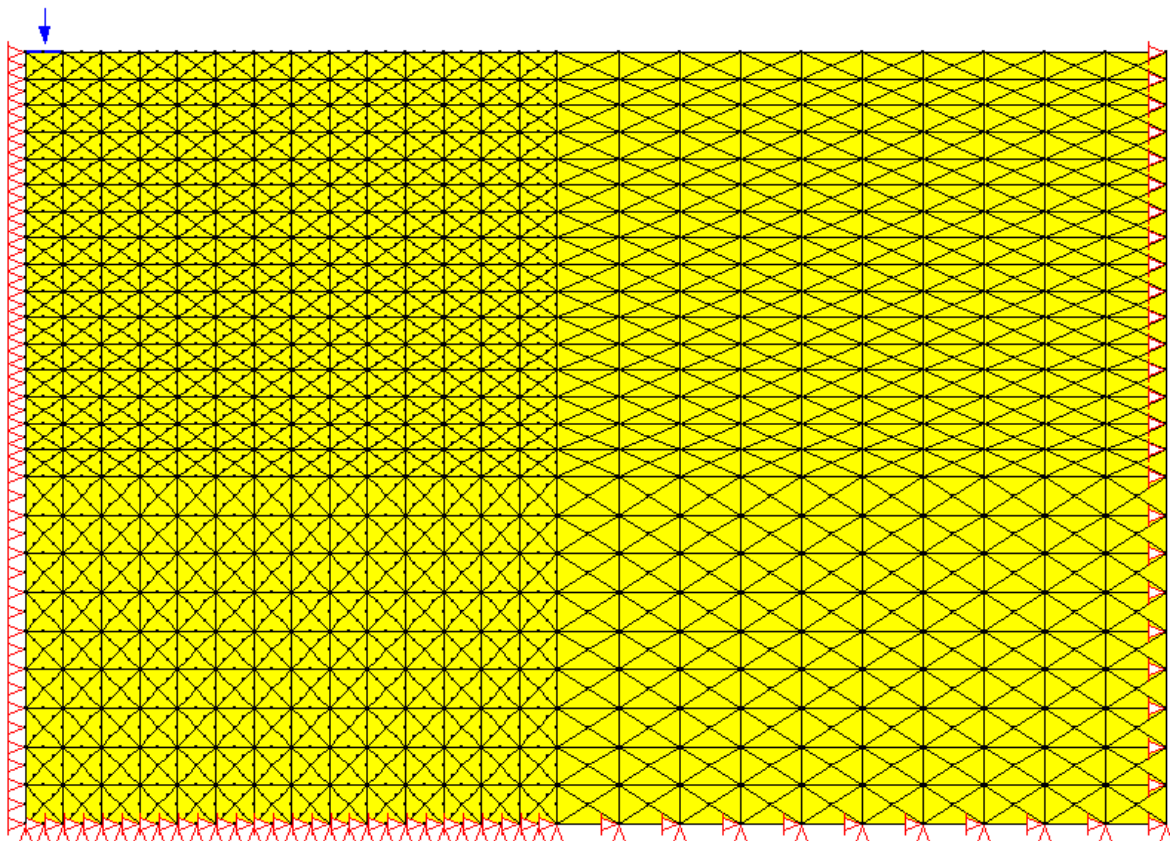


Figura 6.4 - Malha de elementos finitos considerada no programa Sigma/w

É de referir que se procurou localizar o máximo refinamento da malha na zona onde se concentra a plastificação do solo.

Apesar das várias tentativas realizadas com este programa, não se chegou a valores satisfatórios para a capacidade de carga da fundação.

6.2.2.2 Programa Phase2

Ao contrário do programa anterior, neste caso não é necessário proceder ao cálculo em duas fases. A carga é introduzida por incrementos sucessivos através da definição de “*stages*”. À semelhança do caso anterior, também neste programa se fez coincidir o máximo refinamento da malha com a zona de provável plastificação do solo.

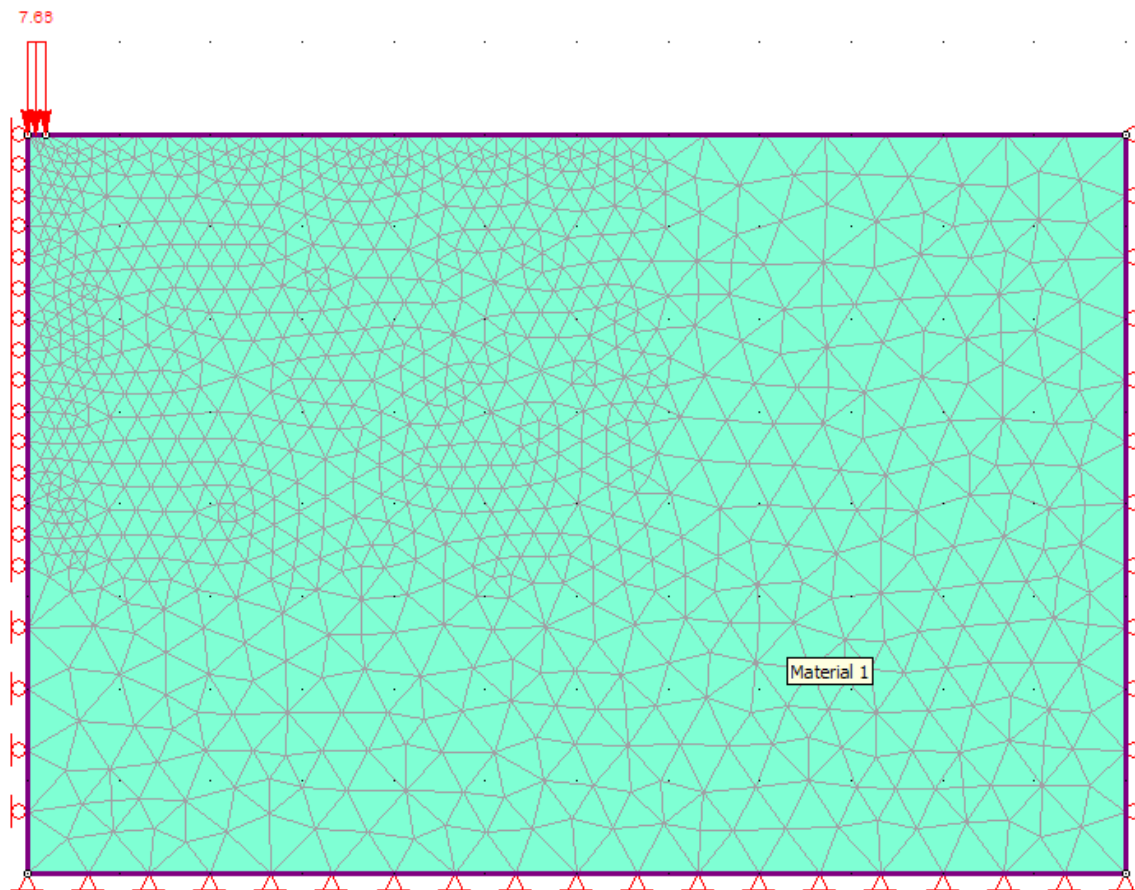


Figura 6.5 – Malha de elementos finitos considerada no programa Phase2

À semelhança do que aconteceu no caso anterior, também neste programa e após várias tentativas não foi possível obter um valor satisfatório para a capacidade de carga da fundação.

6.2.2.3 Programa Plaxis

Conforme já foi descrito no Capítulo 5 neste programa começa por definir-se a geometria do modelo, a malha de elementos finitos e as tensões iniciais no módulo “*Input*”. De seguida estabelece-se o valor da carga máxima a aplicar no módulo “*Calculations*”. Neste caso também foi refinada a malha na zona de maior plastificação.

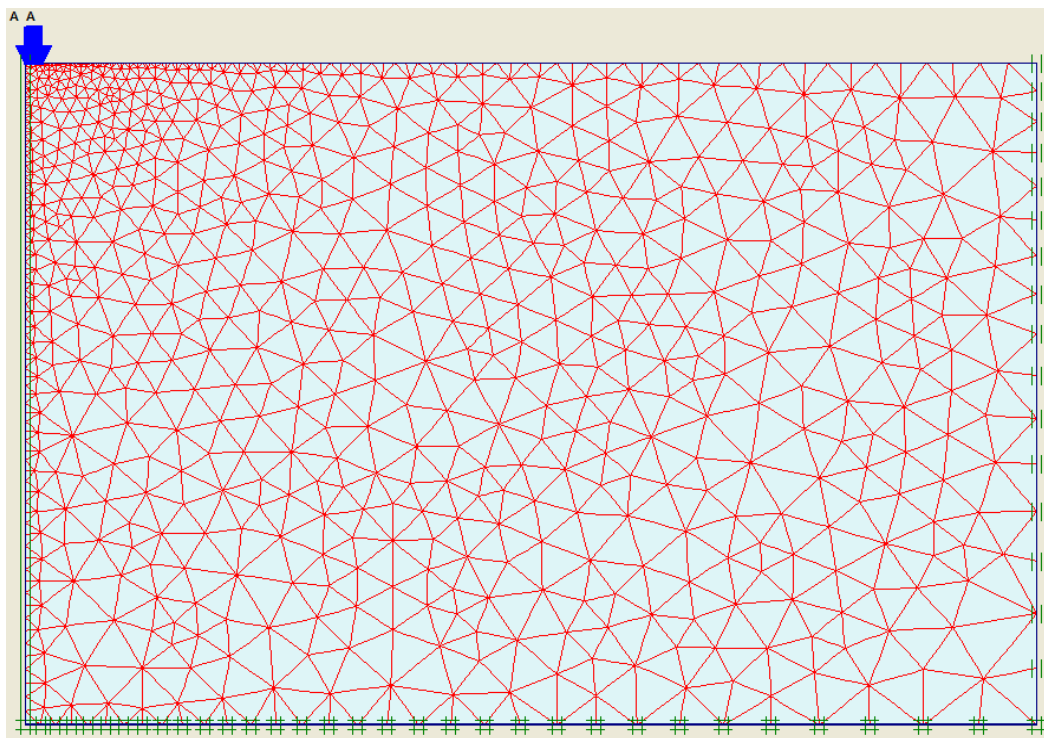


Figura 6.6 – Malha de elementos finitos considerada no programa Plaxis

Ao contrário dos dois casos anteriores este programa forneceu resultados satisfatórios para a capacidade de carga da fundação. Para o ângulo de atrito de 30 graus obteve-se valores de q_{ult} de 7,25 kPa para o caso de $\psi = 0$ e 7,88 kPa para $\psi = \phi$, sendo que o valor de referência proveniente do programa ABC é de 7,653 kPa.

Devido aos bons resultados obtidos, em contraste com o que aconteceu com os dois outros programas, decidiu-se utilizar apenas o programa Plaxis no estudo paramétrico que se segue.

6.3 ESTUDO PARAMÉTRICO PARA O CASO DE SOLO PURAMENTE ATRÍTICO

Neste estudo paramétrico realizado com o programa Plaxis faz-se variar o ângulo de atrito de 20° até 50°, assumindo $\psi = \{0, \phi, \phi - \psi\}$, estabelecendo-se comparações com a aplicação da fórmula de Vesic para N_γ (adoptada no EC7) e, fundamentalmente, com os valores fornecidos pelo programa ABC.

No processo de geração da malha a utilizar nesta segunda fase do estudo decidiu-se recorrer a dois “clusters” distintos de maneira a poder refinar bastante a zona de maior plastificação. A malha utilizada neste estudo é composta por 2542 elementos triangulares de 15 nós com 12 pontos de integração.

A Tabela 6.2 resume os valores da capacidade de carga obtidos. É de referir que, dado os valores numéricos escolhidos para a largura total da sapata corrida e o peso volúmico do solo, o valor de q_u coincide directamente como o de N_γ .

$$q_u = \frac{1}{2} * \gamma * B * N_\gamma \Leftrightarrow q_u = \frac{1}{2} * 1 * 2 * N_\gamma \Leftrightarrow q_u = N_\gamma$$

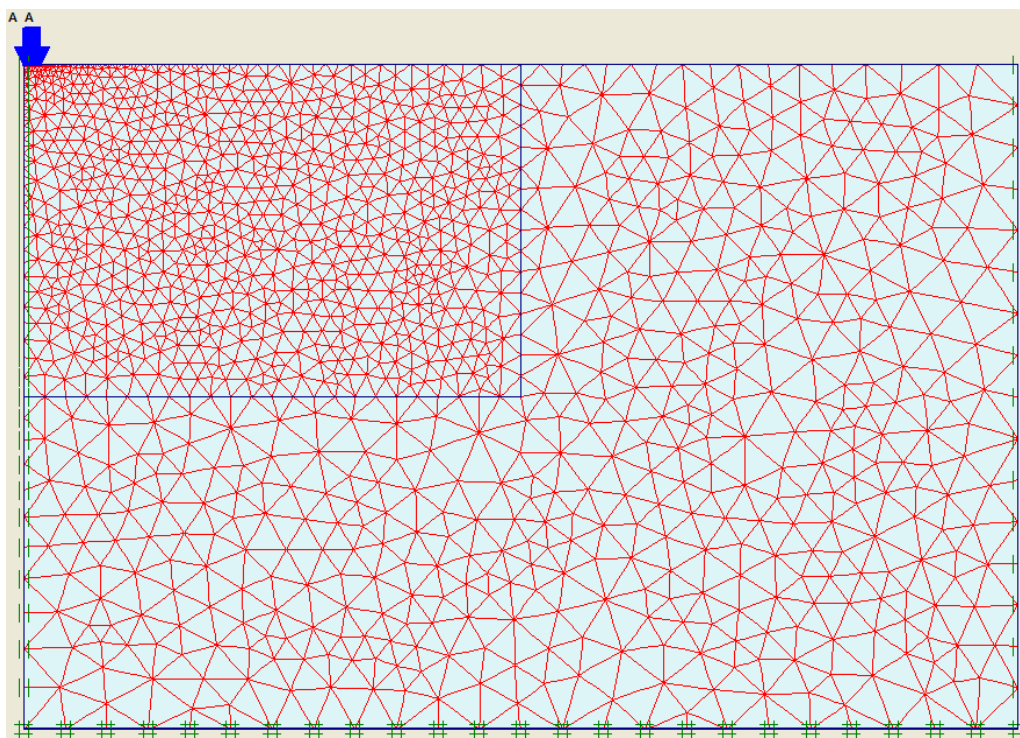


Figura 6.7 – Malha de elementos finitos considerada no programa Plaxis

ϕ (°)	ψ (°)	ABC	Plaxis	Vesic
20	0	-	0,97	3,93
	20	1,579	1,37	
25	0	-	3,10	9,01
	25	3,461	3,6	
30	0	-	6,62	20,09
	30	7,653	7,53	
35	0	-	7,23	45,23
	5	-	17,41	
	35	17,58	13,2	
40	0	-	12,54	106,6
	10	-	42,5	
	40	43,19	32,7	
45	0	-	28,3	267,76
	15	-	117,5	
	45	117,6	56,75	

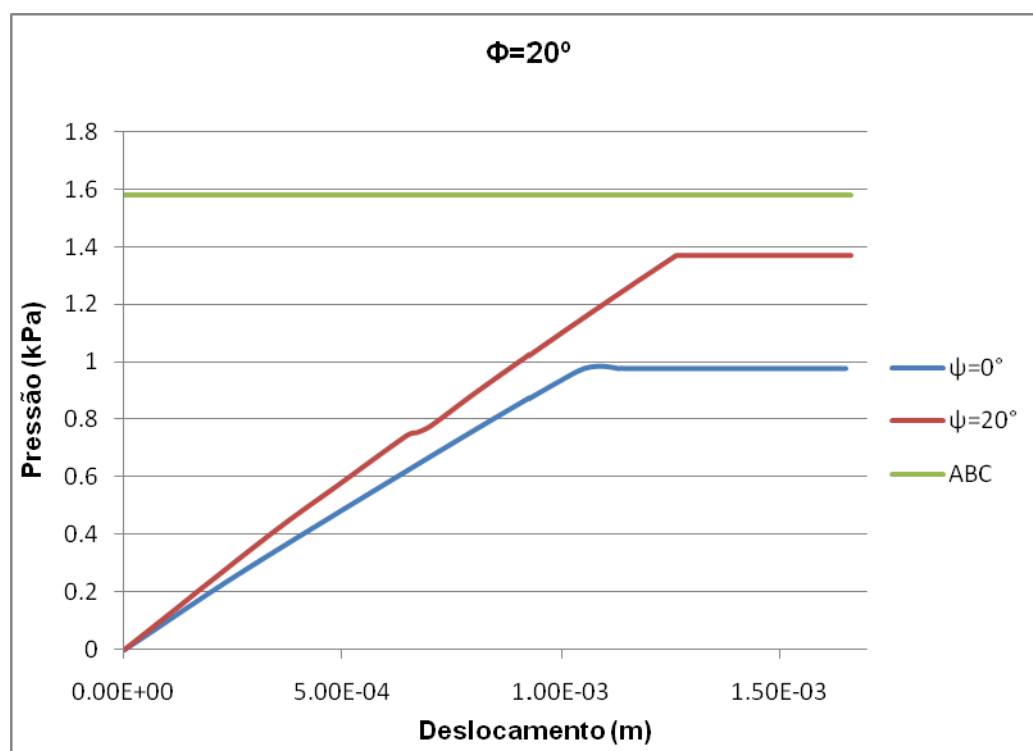
50	0	-	62,32	758,12
	20	-	357,2	
	50	372,0	71,44	

Tabela 6.2 – Comparação de valores de N_v

Pela análise desta tabela conclui-se que há uma aproximação bastante elevada entre os valores a sombreado, ou seja, entre os fornecidos pelo programa ABC e os obtidos pelo programa de elementos finitos Plaxis. Contudo, essa proximidade só se verifica para o caso m que $\psi = \phi$, para $\phi < 30^\circ$ e $\psi = \phi - 30^\circ$, para $\phi > 30^\circ$. Por fim, conclui-se que os valores provenientes da proposta de Vesic excedem largamente os obtidos pelo método dos elementos finitos, fornecendo estimativas largamente por excesso não estando por conseguinte do lado da segurança.

6.4 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Apresentam-se em seguida os gráficos pressão-deslocamento para cada valor do ângulo de atrito adoptado entre 20 e 50 graus, representando em cada um as várias hipóteses consideradas para o ângulo de dilatação, bem como o valor de referência fornecido pelo programa ABC.

Figura 6.8 – Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=20^\circ$

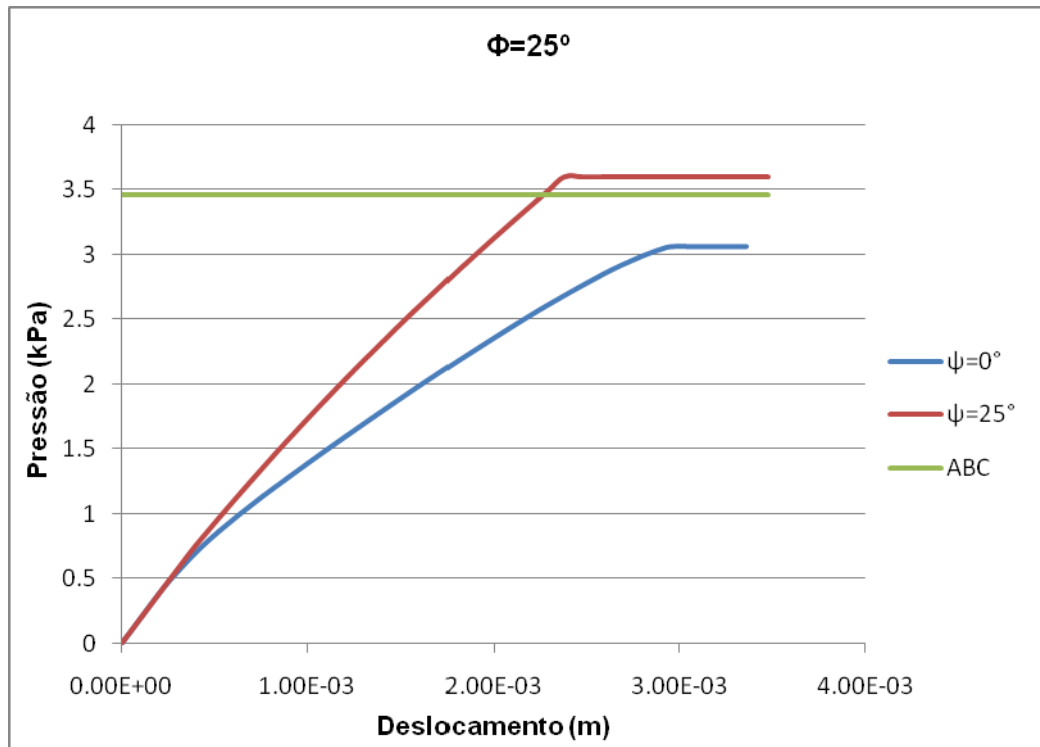


Figura 6.9 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=25^\circ$

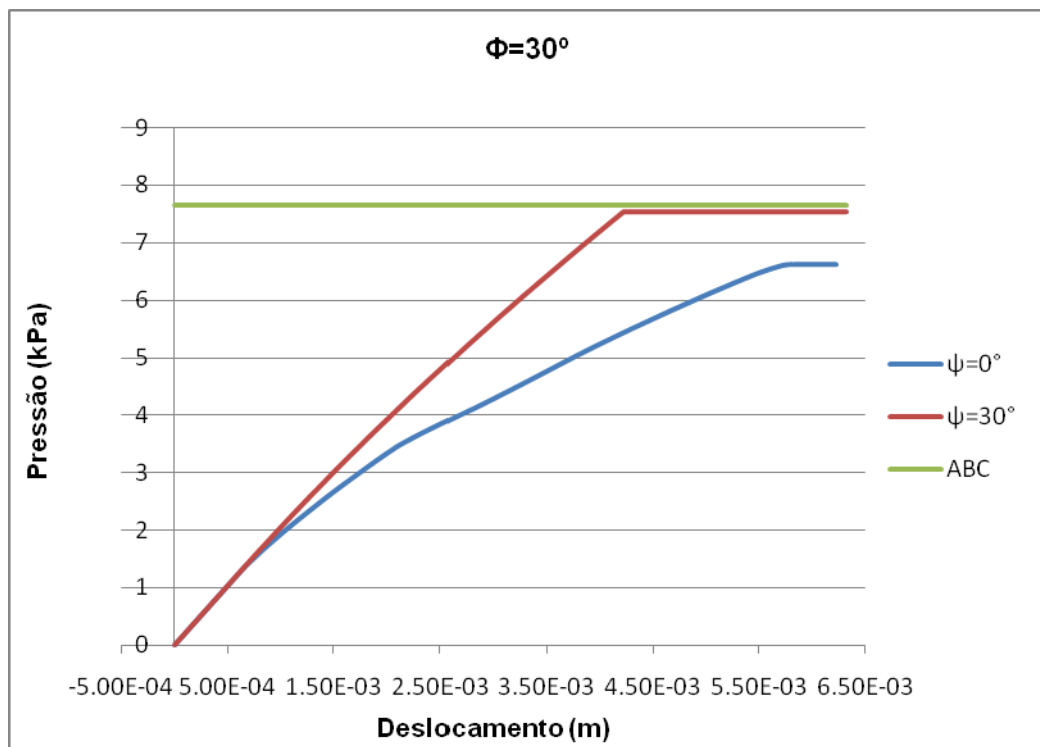


Figura 6.10 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=30^\circ$

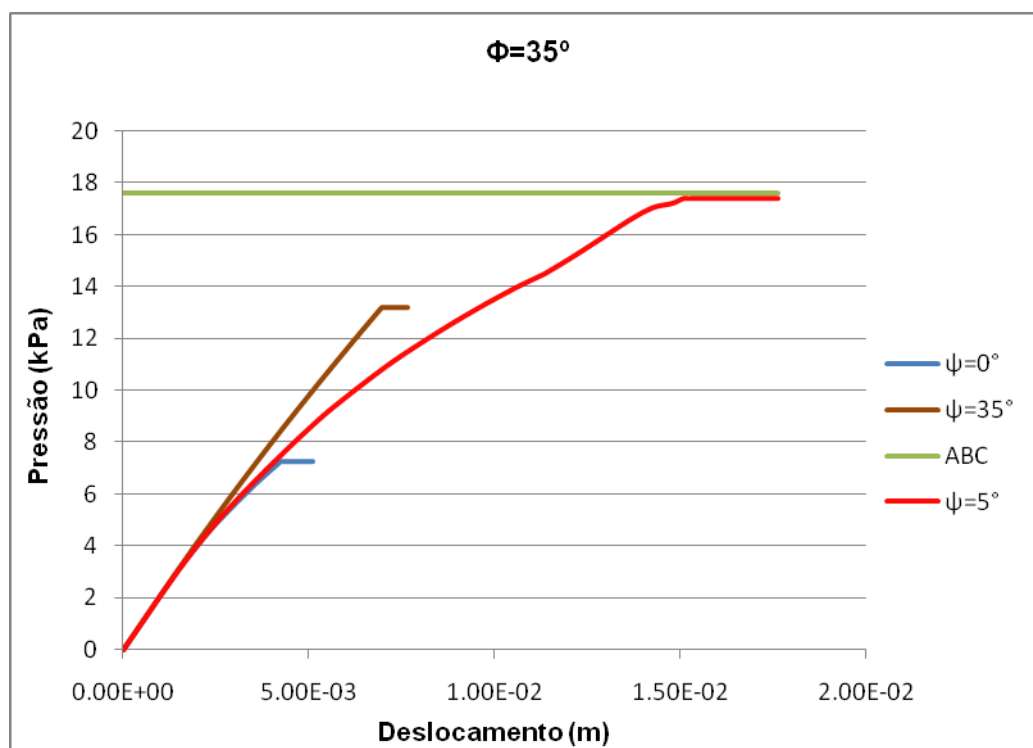


Figura 6.11 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=35^\circ$

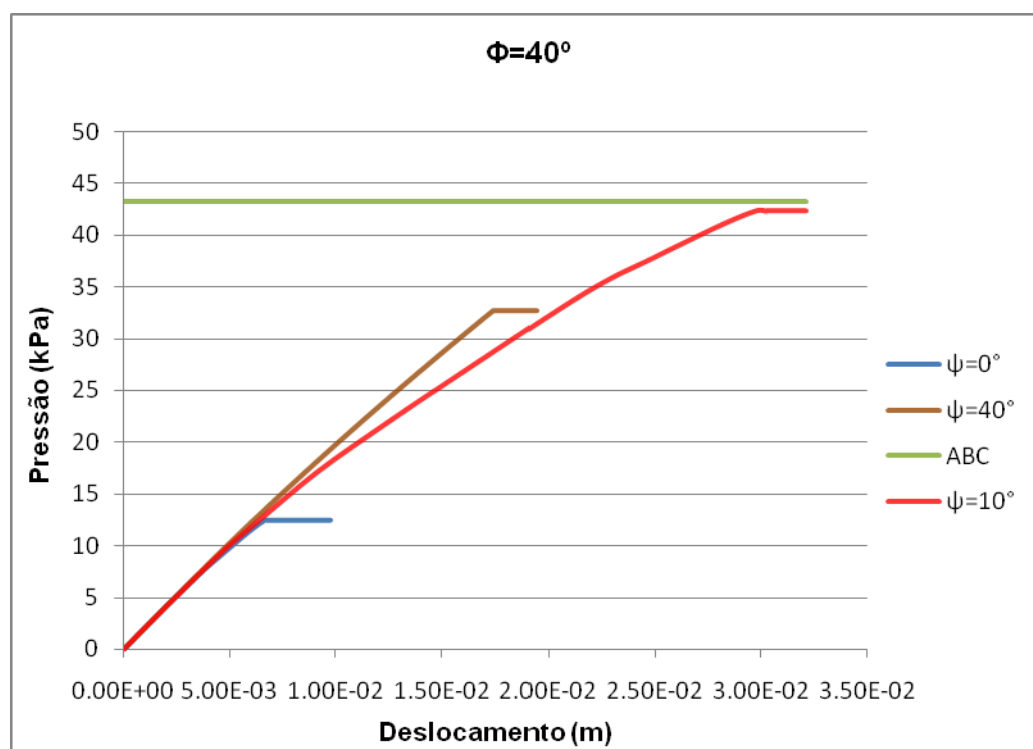


Figura 6.12 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=40^\circ$

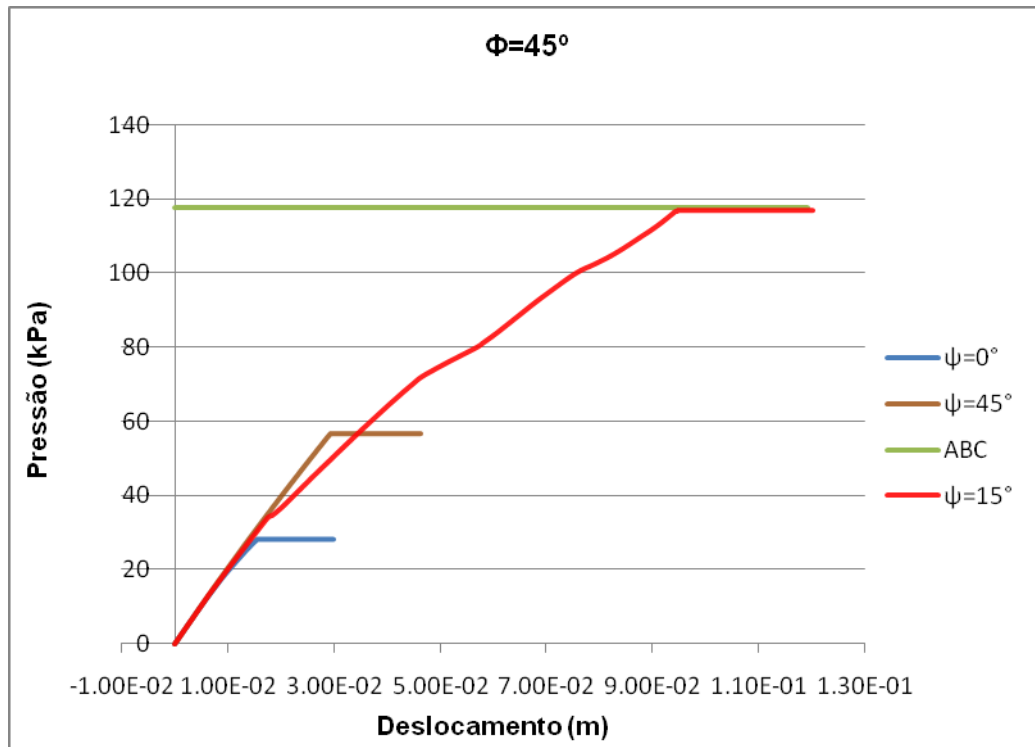


Figura 6.13 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=45^\circ$

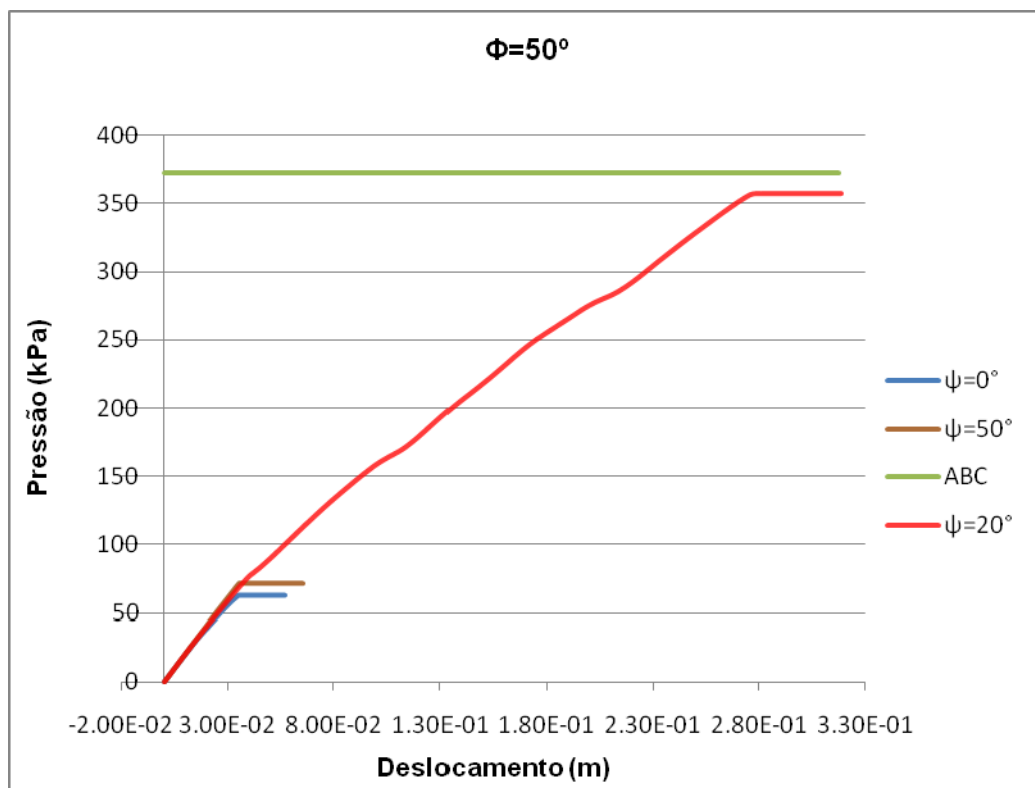


Figura 6.14 - Gráfico pressão-deslocamento para $\Phi=50^\circ$

6.5 CONCLUSÕES

O modelo reproduziu o carregamento de um solo coesivo e atrítico por fundação flexível. As análises numéricas realizadas demonstraram bons resultados para o caso coesivo, onde os valores se aproximaram bastante do esperado. No caso atrítico os resultados foram de pior qualidade, sendo que só um dos programas de elementos finitos forneceu valores aceitáveis.

Relativamente aos valores obtidos para o factor de capacidade de carga N_γ , cheguei a resultados diferentes nas propostas tidas em conta. No caso da proposta de Vésic existe uma grande disparidade entre os resultados do modelo numérico e os provenientes da fórmula do mesmo autor. Pelo contrário, a proposta de Martin incorporada no programa ABC, apresenta excelentes resultados para $\psi = \phi$ ($\phi \leq 30$) e $\psi = \phi - 30$ ($\phi > 30$) quando comparados com os provenientes do estudo numérico.

7

CONCLUSÕES

Depois de expostas e discutidas as análises numéricas efectuadas, apresentam-se neste capítulo as principais conclusões extraídas deste estudo.

O objectivo deste trabalho era a investigação sobre a carga última de fundações em solos granulares considerando o peso próprio. Para tal foi tomado como referência uma nova abordagem, baseada no método das características, recentemente proposta por C.M. Martin e incorporada no programa de cálculo ABC. Foram postos à prova três programas comerciais de elementos finitos: o PLAXIS, da Delft University of Technology e Plaxis b.v., o SIGMA/W, da GEO-SLOPE, e o PHASE2, da RocScience.

Começou-se por modelar o caso de uma sapata corrida com carga vertical centrada assente em solo puramente coesivo. Nesta situação, todos os programas de elementos finitos utilizados forneceram resultados satisfatórios e bastante aproximados dos obtidos pelo programa ABC.

No que diz respeito ao solo puramente atritivo, rapidamente se verificou que esta é uma situação que implica bastante mais esforço para a obtenção de resultados aceitáveis. Assim, e após a tentativa de modelação nos três programas de elementos finitos referidos, apenas um deles forneceu valores adequados, o Plaxis.

Depois de se ter escolhido o Plaxis como ferramenta numérica de referência, foi efectuado um estudo paramétrico em que se fez variar os ângulos de atrito e de dilatância, parâmetros fundamentais no tipo de problema em causa. Desta análise foram retiradas conclusões importantes sobre a melhor maneira de definir o ângulo de dilatância, que permitiram alcançar com o Plaxis resultados muito aproximados dos do ABC.

Outra conclusão de grande interesse prático está relacionada com o facto de quer este programa, quer o Plaxis, fornecerem, por duas vias completamente distintas, resultados para os valores do factor de capacidade de carga, N_{γ} , muito inferiores aos que resultam da fórmula de Vesić. Este facto torna-se ainda mais importante dado estar este erro não do lado de segurança, mas sim da sobreavaliação da capacidade de carga do solo.

Por tudo o que foi referido torna-se claro que este é um tema muito importante na área de conhecimento da Mecânica dos Solos e que já mereceu ao longo dos últimos cem anos a atenção de inúmeros e muito ilustres investigadores. No entanto, talvez nunca se tenha chegado tão perto de um método exacto para o cálculo da capacidade de carga de fundações. Assim, são necessários estudos mais aprofundados para confirmar inequivocamente a validade desta nova abordagem e, consequentemente, contribuir para um dimensionamento mais rigoroso deste tipo de estruturas geotécnicas.

Bibliografia

- American Society of Civil Engineers, United States Army. Corps of Engineers, *Bearing capacity of soils*, ASCE Press, 1993.
- Aysen, A., *Soil Mechanics: Basic Concepts and Engineering Applications*, A. A. Balkema Publishers, Lisse, (2002).
- Bolton, M.D., Lau, C.K., 1993. Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr–Coulomb soil. *Canadian Geotechnical Journal* 30 (6).
- Booker, J.R., 1969. Applications of Theories of Plasticity to Cohesive Frictional Soils. PhD thesis, Sydney University.
- Bowles, J.E. (1996). *Foundation Analysis and Design*, 5th ed. McGraw-Hill, Nova Iorque.
- Caquot, A., Kérisel, J., 1953. Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulents. In: *Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurique.
- Cardoso, A.S., *Textos de apoio à disciplina de Modelos e Segurança em Geotecnia*, FEUP.
- Cerato, A.B., Lutenecker, A.J. Scale Effects of Shallow Foundation Bearing Capacity on Granular Material, University of Massachusetts, Amherst.
- Couto Marques, J. M. M., Apontamentos sobre o Método dos Elementos Finitos.
- Day, R.A., Potts, D.M., 2000. Discussion of ‘Observations on the computation of the bearing capacity factor N_c by finite elements’ by P.K. Woodward and D.V. Griffith. *Géotechnique* 50 (3).
- Drescher, A., Detournay, E., 1993. Limit load in translational failure mechanism for associative and non-associative materials. *Géotechnique* 43 (3).
- Fang, Hsai-Yang, *Foundation Engineering Handbook*, Kluwer Academic, cop., Boston, 1991, 2nd edition.
- Frydman, S., Burd, H.J., Numerical studies of the bearing capacity factor N_γ , University of Oxford, 1997.
- Griffiths, D.V., 1982. Computation of bearing capacity factors using finite elements. *Géotechnique* 32 (3).
- Hansen, B., Christensen, N.H., 1969. Discussion of “Theoretical bearing capacity of very shallow footings” by A.L. Larkin. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division (ASCE)* 95 (SM6).
- Hansen, J.B., 1970. A revised and extended formula for bearing capacity. *Bulletin of the Danish Geotechnical Institute* 28.

Hjjaj, M., *et al.*, Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ , International Journal of Solids and Structures, 2005.

Hua Chen, F., *Soil Engineering Testing, Design and Remediation*, CRC Press, Boca Raton, (2000).

Kármán, Th.v., 1926. Uber elastische Grenzzustände. In: Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich.

Kumar, J., 2003. N_c for rough strip footing using the method of characteristics. Canadian Geotechnical Journal 40 (3).

Kumbhojkar, A.S., 1993. Numerical evaluation of Terzaghi's N_c . ASCE Journal of Geotechnical Engineering 119 (3).

Larkin, L.A., 1968. Total bearing capacity of very shallow footings. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division (ASCE) 94 (SM6).

Lundgren, H., Mortensen, K., 1953. Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footings on sand.

Martin, C.M., Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics, Department of Engineering Science, University of Oxford.

Matos Fernandes, M. (2006). *Mecânica dos Solos. II Volume*. FEUP, Porto.

Meyerhof, G.G., 1951. The ultimate bearing capacity of foundations. Géotechnique 2 (4).

Meyerhof, G.G., 1963. Some recent research on the bearing capacity of foundations. Canadian Geotechnical Journal 1 (1).

Michałowski, R.L., 1997. An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis. Soils and Foundations 37 (4).

Poulos, H.G., Carter, J.P., Small, J.C., 2001. Foundations and retaining structures—research and practice. In: Proc. 15th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Istanbul, Turkey, vol. 4. A.A. Balkema, Rotterdam.

Sokolovskii, V.V., 1965. Statics of Soil Media. Pergamon Press.

Soubra, A.-H., 1998. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 125 (1).

Terzaghi, K., *Soil Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, (1996).

Ukritchon, B., *et al.*, journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, ASCE, 2003.

Vesic', A., 1975. Bearing capacity of shallow foundations. In: Winterkorn, H.F., Fang, H.Y. (Eds.), Foundation Engineering Handbook. Van Nostrand Reinhold, New York.

Wang, Y.-J., Yin, J.-H., Chen, Z.-Y., 2001. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 25 (8).

Woodward, P.K., Griffiths, D.V., 1998. Observations on the computation of the bearing capacity factor N_c by finite elements. *Géotechnique* 48 (1).

Zhu, D.Y., Lee, C.F., Jiang, H.D., 2001. A Numerical study of the bearing capacity factor N_c . *Canadian Geotechnical Journal* 38 (1).

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, Volumes 1 e 2, Butterworth Heinemann, Oxford, (2000).

Zienkiewicz, O.C., Corneau, I.C., 1974. Viscoplasticity, plasticity and creep in elastic solids. A unified numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 8 (4).