

Relatório de Estágio

Estágio para licenciatura no tema

Técnicas de Simulação, Controlo e Optimização para Sistemas Autónomos-
Aplicações na Robótica e em Processos de Manufactura

PRODEP Proc. Nº 4.3/7.04/92

Autor

Fernando Arménio Castro Fontes

Junho de 1993



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex, PORTUGAL

Telef. 351-2-317105/107/412/457 · Telex 27323 FEUP P · Telefax 351-2-319280

Ação de Formação Prodep 4.3/1.04/92

Formando: Fernando Arménio Costa Castro Fontes

Orientador Científico: Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira

Este relatório corresponde à apreciação científica das actividades desenvolvidas pelo Licº Fernando Arménio Costa Castro Fontes durante o segundo semestre de 1992.

O trabalho desenvolvido foi de elevado mérito e executado com grande dedicação.

Os trabalhos realizados e o relatório apresentados pelo formando reflectem, com rigor a natureza dos trabalhos executados.

Além do empenhamento e das excelentes qualidades do estagiário concorreram para o sucesso deste trabalho, os meios disponibilizados.

O Supervisor do Estágio na FEUP

Fernando M. F. Lobo Pereira
Prof. Aux. da FEUP

ISR - Instituto de Sistemas e Robótica

DEEC - R. dos Bragas, 4099 Porto Codex, Portugal

Fax: 351 - 2- 319280

Tel: 351 -2 - 2007505

REFERÊNCIA DO PROJECTO 4.3/1.57/92

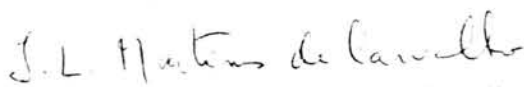
Parecer Técnico

Acompanhei os trabalhos de estágio realizados no Pólo do Porto do Instituto de Sistemas e Robótica pelo Licº Fernando Arménio Costa Castro Fontes, bem como apreciei os trabalhos produzidos e apresentados em Congressos Internacionais e o relatório oportunamente apresentado.

Com base no acompanhamento referido, considero que aqueles trabalhos reflectem o trabalho efectivamente realizado, revelando elevado empenhamento do estagiário.

Sou portanto de parecer que foram plenamente atingidos os objectivos inicialmente propostos no plano de trabalhos,

O Supervisor do Estágio no Instituto de Sistemas e Robótica


Prof. Doutor Jorge L. Martins de Carvalho

Algoritmos e Aplicações de Controlo Óptimo Discreto em Sistemas de Manufatura

*Relatório apresentado para o estágio do PRODEP sob o tema:
Técnicas de Simulação, Controlo e Optimização para Sistemas Autónomos-
Aplicações na Robótica e em Processos de Manufatura*

Realizado por: Fernando Arménio Castro Fontes

4

6213(0423)/LCCC 1992 / FENF
25 09 09

Índice

1 Actividade desenvolvida	3
1.1 Estudos orientados efectuados	3
1.2 Disciplinas frequentadas (ver programa de trabalhos)	3
1.3 Envolvimento/Apoio a Projectos de I&D	3
1.4 Participações em Conferências e Publicações em actas ou "proceedings" de congressos internacionais resultantes (comunicação em apêndice)	4
1.5 Acções de formação avançada em que contribuiu	4
1.6 Estágios	4
1.7 Visitas de estudo	4
2. Apêndices	5
2.1 Projecto Realizado	5
2.2 Comunicações Apresentadas.	5

1 Actividade desenvolvida

1.1 Estudos orientados efectuados

Neste trabalho propomos uma análise de sistemas de manufatura e sua eventual solução através de metodologias de controlo óptimo discreto.

A análise dinâmica, que iremos estudar neste trabalho refere-se à eficiência de funcionamento do sistema em regime normal e permite a avaliação da performance do sistema.

Iremos modelizar o nosso sistema através de um modelo matemático e apenas iremos abordar os modelos de simulação como comparação com os utilizados. Então sempre que possível, ou seja quando o sistema real não seja tão complexo que seja difícil modelizá-lo matematicamente ou então que haja a necessidade de proceder a simplificações que tornem o comportamento do modelo diferente do sistema real em aspectos cruciais, é preferível recorrer a modelos matemáticos.

Assim enquanto que a abordagem pela simulação deverá ser utilizada para estudar grandes sistemas com muitos e complexos critérios para analisar, a abordagem matemática é mais adequada para analisar pequenos sistemas automatizados e para analisar uma pequena quantidade restrita de fenómenos em grandes sistemas (resultam modelos simples para o que nos interessa analisar apesar do sistema no seu global ser complexo).

1.2 Disciplinas frequentadas (ver programa de trabalhos)

Controlo Óptimo
Identificação e Modelização de Sistemas
Métodos de Optimização
Robótica
Análise de Sistemas Informáticos
Planeamento e Gestão da Produção

1.3 Participações em Conferências e Publicações em actas ou "proceedings" de congressos internacionais resultantes (comunicação em apêndice).

"Algoritmos de Tempo Mínimo para Problemas de Controlo em Robótica"
apresentado nas 3^{as} Jornadas Hispano-Lusas em Barcelona.

Participação em diversas palestras sobre modelização e controlo de veículos submarinos autónomos, efectuadas na FEUP pelo Prof. Anthony Healey da Naval Postgraduate School (EUA).

Participação no " Workshop on Autonomous Underwater Vehicles " realizado no Porto e durante o qual foram abordados temas por várias personalidades pioneiras na área, nomeadamente o Prof. James Bellingham do MIT (EUA), Prof. Anthony Healey, Prof. Thor Fossen NIT (Noruega).

1.4 Estágios

O estágio no Instituto de Sistemas e Robótica permitiu, por um lado, o acesso a uma rede de computação necessária ao desenvolvimento de algumas fases do trabalho e, por outro, tornou possível a participação em projectos de I&D nacionais e europeus que endereçam aspectos práticos dos tópicos abordados no âmbito deste trabalho.

2. Apêndices

2.1 Projecto Realizado

2.2 Comunicações Apresentadas.

Algoritmos e Aplicações de Controlo Óptimo Discreto em Sistemas de Manufatura

*Relatório apresentado para o estágio do PRODEP sob o tema:
Técnicas de Simulação, Controlo e Optimização para Sistemas Autónomos-
Aplicações na Robótica e em Processos de Manufatura*

Realizado por: Fernando Armenio Castro Fontes

Índice

1 SISTEMAS DE MANUFACTURA 2

2. CONTROLO ÓPTIMO DE SISTEMAS DE MANUFACTURA..... 4

 2.1 Formulação de um Exemplo 4

 2.2 Método de Solução..... 5

 2.3 Algoritmo de Resolução 10

3. ABORDAGENS ALTERNATIVAS: estado da arte..... 11

 3.1 Abordagem Por Programação Linear 11

 3.2 Abordagem por Programação Inteira 12

 3.3 Outras Abordagens..... 12

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO..... 14

5. BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS 15

6. ANEXOS 16

 Resultados Preliminares..... 16

 Funções mensuráveis: 16

 Convexidade..... 16

 Teorema da Separação (de Hahn Banach) 16

1 SISTEMAS DE MANUFACTURA

Os sistemas de manufactura tem por objectivo a produção eficiente de componentes discretos. A sua gestão, em sistemas de razoável dimensão, é complexa e por isso é usual dividi-la em vários níveis de gestão da responsabilidade de pessoas distintas. Assim é usual a divisão em sistema de gestão estratégico, tático e operacional, tendo este último um ênfase no carácter técnico e os primeiros no carácter mais negocial.

O estudo do subsistema operacional poderá por sua vez ser dividido em análise dinâmica e análise estática.

A análise dinâmica, que iremos estudar mais em pormenor, refere-se à eficiência de funcionamento do sistema em regime normal e permite a avaliação da performance do sistema. Não nos interessando aqui considerações sobre o seu layout, decisões relativas ao investimento em equipamentos, etc. que poderão ser englobadas na análise estática. Assim enquanto que na análise estática estamos interessados em definir os recursos do sistema, na análise dinâmica estamos interessados em maximizar a utilização dos recursos do sistema disponíveis. Mas embora não sendo essa a sua preocupação fundamental a análise que aqui faremos poderá também ajudar na tomada de decisões a vários níveis de gestão superiores.

O tratamento da incerteza relativa a todos os dados necessários ao nosso modelo dinâmico do sistema de manufactura deverá ser realizada pelos níveis de gestão tático e estratégico. Assim no modelo que aqui nos propomos a analisar iremos trabalhar apenas com informação determinística já "filtrada" da incerteza pelos subsistemas de gestão de carácter mais negocial.

Num sistema de produção completamente integrado, conhecido por Sistema de Manufatura Flexível, todos os estados do sistema foram já especificados e todos os correspondentes controlos óptimos foram já calculados off-line na fase de desenvolvimento do sistema e nele integrados na fase de implementação. Com o sistema em funcionamento, o controlo consiste somente em reconhecer o estado do sistema, ir buscar o correspondente controlo óptimo a uma base de dados, e aplicar tal controlo ao sistema. É quase nula a computação realizada em tempo real. Tal é consequência do facto de alta integração dos sistemas de manufactura implicarem rigidez (apesar de se chamarem flexíveis).

No caso contrário, baixa integração e alta complexidade dos sistemas de manufactura permite, na maior parte das vezes, uma grande variação nos possíveis estados do sistema o que implica que seja necessário proceder ao cálculo do controlo óptimo a aplicar em tempo real (i.e. on-line).

A avaliação da performance do sistema consistirá na realização dos seguintes passos:

- construção do modelo
- resolução do modelo
- avaliação da solução

Estes passos deverão ser executados sequencialmente embora por vezes haja a necessidade de rever a modelização e refazer o ciclo até conseguirmos atingir uma solução satisfatória.

Na construção do modelo teremos que proceder a uma análise do sistema - definição das entidades representativas, os seus atributos mais importantes as suas interações e os controlos admissíveis para o sistema - e escolher o compromisso do grau de detalhe - fidelidade de representação da realidade versus complexidade do modelo.

Para a avaliação da solução poderemos recorrer a vários tipos de modelos entre eles:

- modelos físicos (protótipos ou modelos analógicos)
- modelos cuja descrição das relações é baseada em inteligência artificial
- modelos simbólicos formais
- modelos de simulação
- modelos matemáticos

respectivamente por ordem de abstracção inerente à modelização crescente.

Neste trabalho iremos modelizar o nosso sistema através de um modelo matemático e apenas iremos abordar os modelos de simulação como comparação com os utilizados.

Assim se recorrêssemos aos modelos de simulação, para a avaliação da solução teríamos que fazer uma corrida de simulação para cada linha de acção possível, sendo difícil julgar a performance do sistema devido à grande quantidade de dados geralmente gerada.

Então sempre que possível, ou seja quando o sistema real não seja tão complexo que seja difícil modelizá-lo matematicamente ou então que haja a necessidade de proceder a simplificações que tornem o comportamento do modelo diferente do sistema real em aspectos cruciais, é preferível recorrer a modelos matemáticos.

Assim enquanto que a abordagem pela simulação deverá ser utilizada para estudar grandes sistemas com muitos e complexos critérios para analisar, a abordagem matemática é mais adequada para analisar pequenos sistemas automatizados e para analisar uma pequena quantidade restrita de fenómenos em grandes sistemas (resultam modelos simples para o que nos interessa analisar apesar do sistema no seu global ser complexo).

O modelo matemático é composto por :

- Um conjunto de parâmetros que caracterizam o fenómeno a estudar - estado do sistema
- Um pequeno conjunto de critérios de performance - a função objectivo a maximizar ou minimizar
- Um conjunto de variáveis representando as entradas através das quais nos é permitido actuar no sistema - o controlo
- Interações entre as variáveis de estado e as variáveis de controlo do sistema - As restrições incluindo as equações de estado que poderão ser sob a forma de equações diferenciais (ou às diferenças), formulação de programação linear, formulação de programação dinâmica, processos de Markov, etc.

Os sistemas de manufactura tem vindo a ser simplificados, devido à automatização e à estandardização, os modelos matemáticos dos sistemas de manufactura terão um interesse cada vez maior no futuro.

2. CONTROLO ÓPTIMO DE SISTEMAS DE MANUFACTURA

2.1 Formulação de um Exemplo

Consideremos o problema de optimização de um sistema de manufactura com a seguinte modelização:

Consideremos as variáveis:

N - nº de unidades de tempo para o horizonte considerado

p - índice do produto, $p=1, \dots, P$

m - índice de máquina-tipo, $m=1, \dots, M$

i - índice de produto-tipo

As variáveis de decisão:

$u_{mi}(t)$ - taxa de produção do produto tipo i no grupo de máquinas m

$u_m(t)$ - vector de taxas de produção para o grupo de máquinas m

$u_p(t)$ - vector de taxas de entrada de produtos do tipo p

$u(t) = \text{col}(u_1(t), \dots, u_M(t), u_1(t), \dots, u_P(t))$

Sendo W o número de componentes do vector u .

As restrições à produção:

U_m - conjunto dos possíveis valores para as taxas de produção para o grupo de máquinas do tipo p

U_p - conjunto dos possíveis valores para as taxas de entrada de produtos

$$\Omega = \prod_{m=1}^M U_m \times \prod_{p=1}^P U_p$$

As variáveis de estado:

$b_{mi}(t)$ - nº de produtos do tipo i no buffer imediatamente anterior ao grupo de máquinas m

$b_m(t)$ - vector com o conteúdo do buffer para o grupo de máquinas m

$b(t) = \text{col}(b_1(t), \dots, b_M(t))$

Sendo z a dimensão do sistema; nº de componentes de b .

E as constantes do sistema:

$d_p(t)$ - perfil da procura para os produtos do tipo p acumulada até ao instante t

$d(t) = \text{col}(d_1(t), \dots, d_P(t))$

$a_{mm'}$ - representa a dinâmica do sistema, o trajecto dos produtos entre o grupo de máquinas m e m'

$A = [a_{11}, \dots, a_{MM}]$

o_{mp} - produto final tipo p saído do grupo de máquinas m .

$O = [o_{11}, \dots, o_{MP}]$

c_1 - vector de custos arbitrado associados à existência de elementos no buffer (custo dos stocks intermédios) que penalizam o tempo global de processamento de um produto. Em princípio penalizará tanto mais quanto mais avançado for o buffer na linha de produção.

d_1 - vector de custos de produção que pretende penalizar a produção em excesso (superior à procura)

b_0 - Estado inicial do sistema, conteúdo inicial dos buffers.

Neste problema iremos obter as taxas de produção óptimas que minimizam o custo do conteúdo dos buffers intermédios. Esta minimização implicará a minimização do tempo de permanência dos produtos semi-acabados no processo produtivo logo minimizando o WIP (Work In Process) e minimizando o tempo

de ciclo para cada produto o que terá como consequência não só o abaixamento dos custos de produção, mas também uma maior rapidez e flexibilidade de resposta às solicitações do mercado.

Além disso, na função objectivo, a produção em excesso relativamente à procura será também penalizada. Neste problema o vector dos conteúdos dos buffers $b(t)$ e o vector das taxas de produção $u(t)$ assumirão o papel de variáveis de estado e de controlo respectivamente.

Como resultado obteremos as taxas de produção e fluxo de materiais de forma contínua, não determinando o problema de sequenciamento caso as máquinas só permitam a produção não interrompível de um único produto de cada vez e a produção de um número inteiro de produtos.

O problema poderá ser formulado como um problema de controlo óptimo:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^N [c_1^T b(t) + d_1^T O \cdot u(t-1)] \quad (12.1)$$

Sujeito a:

$$b(0) = b_0 \quad (12.2a)$$

$$b(t+1) - b(t) = Au(t) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (12.2b)$$

$$u(t) \in \Omega \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (12.2c)$$

$$\sum_{k=0}^t O \cdot u(k) \geq d(t+1) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (12.2d)$$

$$b(t) \geq 0 \quad t = 1, \dots, N \quad (12.2e)$$

2.2 Método de Solução

O estudo deste problema, apesar da existência da inequação (12.2d), poderá ser feito à luz das condições necessárias de optimalidade consideradas no capítulo 3 bastando para tal executar mudanças de variável adequadas

Consideremos

$$y(t+1) = \sum_{k=0}^t O \cdot u(k) \quad (12.3)$$

o que implica que

$$\begin{cases} y(t+1) - y(t) = Ou(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (12.4)$$

Sejam ainda

$$h_1(t, b(t)) = -b(t) \quad (12.5)$$

$$h_2(t, y(t)) = d(t) - y(t)$$

$$h(t, b(t), y(t)) = \text{col}(h_1(t, b(t)), h_2(t, y(t)))$$

e

$$z(t) = \sum_{k=0}^t c_1^T b(k) + d_1^T O \cdot u(k-1) \quad (12.6)$$

Deste modo tem-se que:

$$\begin{cases} z(t+1) - z(t) = c_1^T b(t+1) + d_1^T O \cdot u(t) \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad (12.7)$$

Então o problema é equivalente a:

$$\text{Min } z(N)$$

Sujeito a

$$\begin{cases} b(t+1) - b(t) = Au(t) & t = 0, \dots, N-1 \\ y(t+1) - y(t) = Ou(t) \\ z(t+1) - z(t) = c_1^T b(t+1) + d_1^T O \cdot u(t) \\ b(0) = b_0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ h(t, b(t), y(t)) \leq 0 \\ u(t) \in \Omega \end{cases} \quad (12.8)$$

em que:

$$\begin{array}{ll} b(t) \in \mathbb{R}^{n1} & n1 = \text{número de buffers do sistema, } z \\ y(t) \in \mathbb{R}^{n2} & n2 = \text{número de produto, } P \\ z(t) \in \mathbb{R}^{n3} & n3 = \text{dimensão da função objectivo, } 1 \\ u(t) \in \mathbb{R}^m & m = \text{número de componentes do controlo} \end{array}$$

Consideremos ainda

$$w(t) = z(t) - c_1^T b(t)$$

tendo assim que

$$\begin{cases} w(t+1) - w(t) = c_1^T b(t) + d_1^T O u(t) \\ w(0) = -c_1^T b_0 \end{cases}$$

Ficamos finalmente com o problema:

$$\text{Min } w(N) + c_1^T b(N)$$

Sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} b(t+1) - b(t) = Au(t) \\ y(t+1) - y(t) = Ou(t) \\ w(t+1) - w(t) = c_1^T b(t) + d_1^T O \cdot u(t) \\ b(0) = b_0 \\ y(0) = 0 \\ w(0) = -c_1^T b_0 \\ h(t, b(t), y(t)) \leq 0 \\ u(t) \in \Omega \end{array} \right. \quad t=0, \dots, N-1 \quad (12.8a)$$

em que:

$$\begin{array}{ll} b(t) \in \mathbb{R}^{n1} & n1 = \text{número de buffers do sistema, } z \\ y(t) \in \mathbb{R}^{n2} & n2 = \text{número de produto, } P \\ w(t) \in \mathbb{R}^{n3} & n3 = \text{dimensão da função objectivo, } 1 \\ u(t) \in \mathbb{R}^m & m = \text{número de componentes do controlo} \end{array}$$

Sendo

$$A = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

as condições necessárias de optimalidade para este problema vem

Se $u^*(k)$ é uma estratégia óptima de controlo então existem:

$$\begin{array}{l} p_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^{n1} \\ p_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^{n2} \\ p_3 : A \rightarrow \mathbb{R}^{n3} \\ v_1 : A \rightarrow \mathbb{R}_+^{n1} \\ v_2 : A \rightarrow \mathbb{R}_+^{n2} \end{array}$$

tais que:

o Hamiltoneano vem

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = \left[\begin{array}{c} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \Sigma_1(t) \\ \Sigma_2(t) \\ 0 \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} Au(t) \\ Ou(t) \\ c_1^T b(t) + d_1^T O \cdot u(t) \end{array} \right] \quad (12.9)$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \text{col}(b(t), y(t), w(t)) \\
 p(t) &= \text{col}(p_1(t), p_2(t), p_3(t)) \\
 \Sigma_1(t) &= \sum_{s=0}^t [h_{1b}(s, b(s))v_1(s)] = -\sum_{s=0}^t v_1(s) \\
 \Sigma_2(t) &= \sum_{s=0}^t [h_{2y}(s, y(s))v_2(s)] = -\sum_{s=0}^t v_2(s)
 \end{aligned} \tag{12.10}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
 h_{1b}(t, b(t), v_1(t)) &= -I_{n_1 \times n_1} \\
 h_{2y}(t, y(t), v_2(t)) &= -I_{n_2 \times n_2}
 \end{aligned} \quad (\text{sendo } I \text{ matriz identidade}) \tag{12.11}$$

O vector adjunto vem

$$\left\{ \begin{aligned} p^T(t) - p^T(t-1) &= \begin{bmatrix} p_1(t) + \Sigma_1(t) \\ p_2(t) + \Sigma_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_1(N) + \Sigma_1(N) \\ p_2(N) + \Sigma_2(N) \\ p_3(N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -c_1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \tag{12.12}$$

logo

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1^T(t) - p_1^T(t-1) \\ p_2^T(t) - p_2^T(t-1) \\ p_3^T(t) - p_3^T(t-1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -c^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_1(N) \\ p_2(N) \\ p_3(N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\Sigma_1(N) - c_1 \\ -\Sigma_2(N) \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \tag{12.13}$$

donde

$$\left\{ \begin{aligned} p_1(t) &= (N-t-1)c_1 - \Sigma_1(N) \\ p_2(t) &= -\Sigma_2(N) \\ p_3(t) &= -1 \end{aligned} \right. \tag{12.14}$$

Então o Hamiltoniano vem

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = [(N-t-1)c + \Sigma_1(t) - \Sigma_1(N)]^T Au(t) + (\Sigma_2(t) - \Sigma_2(N))^T Ou(t) - c_1^T b(t) - d_1^T O \cdot u(t) \tag{12.15.}$$

A maximização do Hamiltoniano

$$H(t, x(t), p(t), u^*(t)) \geq H(t, x(t), p(t), u) \quad \forall u \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1] \tag{12.16}$$

é equivalente a

$$\sigma(t, \Sigma(t)) \cdot u^*(t) \geq \sigma(t, \Sigma(t)) \cdot u \quad \forall_{u \in \Omega, \forall_{t \in [t_0, t_1]}} \quad (12.17)$$

Sendo

$$\sigma(t, \Sigma(t)) = [(N - t - 1)c^T + \Sigma_1(t) - \Sigma_1(N)]A + (\Sigma_2(t) - \Sigma_2(N) - d_1^T)O \quad (12.18)$$

Para a determinação da estratégia de controlo óptimo consideremos:

Num dado instante para as componentes da primeira restrição de estado que não estiverem activas

$$b^i(t+1) > 0 \quad (12.19)$$

então

$$\Sigma_1^i(t) = 0 \quad (12.20)$$

para as componentes da segunda restrição de estado que não estiverem activas o processo é semelhante

$$h_2^j(t, y^*(t)) < 0$$

Neste caso temos que

$$y^j(t+1) = \left[\sum_{k=0}^t O \cdot u(k) \right]^j > d^j(t+1) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (12.21)$$

e

$$\Sigma_2^j(t) = 0 \quad (12.22)$$

No caso das restrições de estado estarem activas:

Temos para o caso da primeira restrição de estado

$$b^i(t+1) = 0 \quad (12.23)$$

e então

$$(Au(t))^i = -b^i(t) \quad (12.24)$$

e sabe-se ainda que

$$\exists_{k \in \{1, \dots, m\}} \text{ tal que } \sigma^k(t, \Sigma(t)) = 0 \quad (12.25)$$

Para o caso das componentes da segunda restrição de estado que estiverem activas temos que

$$\left[\sum_{k=0}^t O \cdot u(k) \right]^j = d^j(t+1) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (12.26)$$

e que

$$\exists_{k \in \{1, \dots, m\}} \text{ tal que } \sigma^k(t, \Sigma(t)) = 0 \quad (12.27)$$

Finalmente temos então que para $t=0,...,N-1$ e para $k=1,...,m$

$$u^{k*}(t) = \begin{cases} \text{Min}\{u^k(t): u(t) \in \Omega\} & \text{se } \sigma^k(t, \Sigma(t)) < 0 \\ \text{Max}\{u^k(t): u(t) \in \Omega\} & \text{se } \sigma^k(t, \Sigma(t)) > 0 \end{cases} \quad (12.28)$$

e nos casos em que

$$\sigma^k(t, \Sigma(t)) = 0 \quad (12.29)$$

$u^{*k}(t)$ determina-se (pela (.12.24) e (pela (.12.26)

Assim em cada instante t se tivermos α equações triviais dadas por (12.28) teremos necessariamente que ter β equações (12.24) e (12.26) (i.e. β restrições de estado activas) de tal modo que $\alpha+\beta=m$, permitindo-nos determinar as m componentes de $u^*(t)$.

2.3 Algoritmo de Resolução

Para a resolução deste problema podemos aplicar o seguinte algoritmo:

INICIO

-PÁRA $t=0$ ATÉ $N-1$

-N_restrições_ativas=0

Determinar $b(t+1)$ considerando $u(t)$ dado por (12.28) com $\Sigma(t)=0$
 {i.e. supor restrições não activas para verificar se são violadas}

PARA $i=1$ ATÉ $n1$

SE $b^i(t+1) \leq 0$ {i.e. restrição activa}

N_restrições_ativas=N_restrições_ativas+1

SIST_EQUAÇÕES[N_restrições_ativas]=(12.24)

SENÃO $\Sigma_1^i(t)=0$

-FIM_PÁRA

-Determinar $y(t+1)-d(t+1)$ considerando $u(t)$ dado por (12.28) com
 $\Sigma(t)=0$ {i.e. supor restrições não activas para verificar se são violadas}

-PÁRA $j=1$ ATÉ $n2$

SE $y^j(t+1)-d^j(t+1) \leq 0$ {i.e. restrição activa}

N_restrições_ativas=N_restrições_ativas+1

SIST_EQUAÇÕES[N_restrições_ativas]=(12.26)

SENÃO $\Sigma_1^j(t)=0$

-FIM_PÁRA

N_equações=N_restrições_ativas

-PARA $k=1$ ATÉ m

SE $\sigma^k \neq 0$ {i.e. restrição não activa}

N_equações=N_equações+1

SIST_EQUAÇÕES[N_equações]=(12.28)

-FIM_PÁRA

-SE N_equações=m

resolver o sistema m equações a m incógnitas
 SIST_EQUAÇÕES[] determinando assim $u^*(t)$ em todas as
 suas m componentes

SENÃO ERRO_NUMERICO

-FIM_PÁRA

FIM

A principal desvantagem deste algoritmo será os graves problemas numéricos devidos às comparações com zero. Assim as comparações do tipo $X=0$ são na realidade implementadas com $|X| < \delta$ com o valor de δ dinamicamente corrigido na rotina ERRO_NUMERICO. Assim se N_equações for maior do que m o valor de δ é diminuído e se N_equações for menor do que m este valor é incrementado.

3. ABORDAGENS ALTERNATIVAS: ESTADO DA ARTE

3.1 Abordagem Por Programação Linear

Para além da abordagem referida este problema poderia também ser formulado como um problema de Programação Linear.

Sendo

$$\begin{aligned} b_t &= b(t) & t=0, \dots, N \\ u_t &= u(t) & t=0, \dots, N \end{aligned}$$

e reescrevendo $u(t) \in \Omega$ sob a forma de desigualdades levaria a, no mínimo, $2 \cdot N \cdot W$ desigualdades ficando

$$\Omega_{\min} \leq u_t \leq \Omega_{\max} \quad t = 0, \dots, N$$

sendo as desigualdades entendidas para cada componente do vector u

O problema poderá ser formulado como:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^N [c_1^T b_t + d_1^T O \cdot u_{t-1}]$$

Sujeito a:

$$b_t = b_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A \cdot u_k \quad (1)$$

$$b_t \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^t O \cdot u_k \geq d_{t+1} \quad (3)$$

$$\Omega_{\min} \leq u_t \leq \Omega_{\max} \quad (4)$$

Sendo todas as restrições para $t=0, \dots, N-1$ e tendo (1) e (2) Z componentes, (3) P componentes e (4) W componentes, teremos no total $N \cdot (2Z + P + 2W)$ restrições e $(Z + W) \cdot N$ variáveis que aumentariam caso se coloque este problema na forma canónica da programação linear (transformações de todas as restrições sob a forma de desigualdades em igualdades com variáveis positivas)

Dada a dimensão do problema, e mesmo sabendo existir algoritmos muito eficientes para programação linear (simplex revisto etc.) estes algoritmos gerais não me parecem ser eficientes para a resolução do problema em causa em relação ao algoritmo proposto anteriormente que aproveita melhor a estrutura do problema e resolve-o em tempo determinístico (a solução é encontrada de forma fechada e não iterativamente) e polinomial de ordem de grandeza $O(N \cdot W)$.

No entanto não elimino a hipótese de existirem algoritmos de programação linear particulares mais adaptados à estrutura do problema que permitam resolvê-lo eficazmente.

3.2 Abordagem por Programação Inteira

Em programação inteira, ou mais geralmente em programação mista algumas das variáveis independentes serão restringidas à integralidade. Este tipo de modelização irá permitir também a resolução do problema do sequenciamento embora isto torne o problema de muito difícil resolução (problema NP completo) sem importantes vantagens na prática devido à imposição muito rígida do escalonamento não poderá ser muitas vezes implementada devido ma situações inesperadas (falhas, avarias, manutenção, etc) de ocorrência frequente.

Em todo o caso a formulação seria semelhante à anterior acrescentando restrições de que uma máquina num determinado instante estará a produzir apenas um produto , introduzindo a variável

$$q_{mi}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se a máquina } m \text{ estiver a produzir o produto } i \text{ no instante } t \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

as restrições viriam

$$q_{mi}(t) = 0 \Rightarrow u_{mi} = 0$$

ou na forma standard

$$M \cdot q_{mi}(t) \geq u_{mi}(t), \text{ com } M \text{ suficientemente grande}$$

$$u_{mi}(t) \geq 0$$

$$q_{mi} \in \{0,1\}$$

Para a resolução deste problema poder-se-ia utilizar técnicas de Branch-and-Bound que teriam o defeito de não garantir a convergência para a solução ótima em tempo polinomial. Alternativamente poderíamos utilizar informação sobre a estrutura particular do problema para desenvolver heurísticas de auxílio à pesquisa. Sendo esta última alternativa muito mais eficiente em termos computacionais não garante a optimalidade da solução.

3.3 Outras Abordagens

Incluiremos aqui a referência a algumas outras abordagens como por exemplo a abordagem por Programação Dinâmica em que poderemos encontrar múltiplas modelizações em se busca a optimalidade embora na grande maioria das vezes com um peso computacional elevado - das várias modelizações poderemos destacar a de Held and Carp .

Os desenvolvimentos recentes na área têm-se dado em abordagens hierárquicas à resolução do problema (Pereira et al, 1993) e à modelização dos sistemas de manufactura como Sistemas de Eventos Discretos (DES) (Gershiwn et al, 1987).

4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO

Vimos anteriormente como determinar o controlo óptimo do fluxo de produção em sistemas de manufactura. Esta informação deverá permitir uma gestão da produção eficaz, tendo em conta que permite uma liberdade a nível do sequenciamento de tarefas que deverá ser definida on-line tendo em conta situações inesperadas (falhas, avarias, manutenção, etc.). Pretendendo definir o sequenciamento a partida poderia ser utilizada uma abordagem hierárquica que entre em linha de conta com a informação de quais as máquinas mais críticas, informação essa que poderá ser dada pelo vector adjunto (Pereira et al, 1993) e poderemos ainda considerar outro nível hierárquico de modo a ser possível considerar um horizonte deslizando para a variável tempo.

Uma outra evolução possível para este trabalho poderá ser a consideração de alguns dados do modelo (tais como a procura, a capacidade das máquinas, custos arbitrados) como processos estocásticos. Assim os níveis superiores de gestão definiriam não só o valor médio dos dados de entrada no modelo como também a sua distribuição estatística.

5. BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- Macky, Jack e Aaron Strauss (1982). "An Introduction to Optimal Control Theory", Springer Verlag, New York
- Tu, Pierre N.V. (1984). "Introductory Optimization Dynamics", Springer Verlag, Berlin
- Tavares, L. Valadares e F. Nunes Correia (1984). "Optimização Linear e não Linear", Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa
- Athans, Michael e P. L. Falb (1966). "Optimal Control - An Introduction to the theory and its applications" McGraw-Hill, New York
- Clarke, F. H. (1993). "Optimization and Nonsmooth Analysis", Wiley, New York
- Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. R. Mishchenko (1962). "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience, New York
- Halkin
- Ferreira, José A. S. (1984), "Optimal Control of Discrete Time Systems with Applications", dissertação de doutoramento, IMSOR, Universidade Técnica da Dinamarca, Lyngby.
- Pereira, F. Lobo e J. Borges Sousa (1991). "An Algorithm for Optimal Control Problems", 15th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Zurich
- Pereira, F. Lobo e J. Borges Sousa (1993) "Optimal Flow Control of Manufacturing Systems "
- French, S. (1982). "Sequencing and Scheduling: An Introduction to the Mathematics of the Job Shop", Ellis Horwood, John Wiley, New York
- Proth, J. M. e H. P. Hillion "Mathematical tools in Production Management"
- Gershwin S. B. (1987) "A Hierarchical Framework for Discrete Event Scheduling in Manufacturing Systems", Lecture notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag
- Hillier, F. S. e G. J. Lieberman (1990) "Introduction to Operations Research", McGraw-Hill, New York
- Press W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling (1986) "Numerical Recipes", Cambridge University Press.

6. ANEXOS

Resultados Preliminares

Seguidamente, apresentamos um conjunto de resultados auxiliares e de definições importantes para plausibilificar o Princípio do Máximo.

Funções mensuráveis:

Seja $f: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ limitada e contínua por segmentos.

Então $t \rightarrow F(t) = \int_0^t f(s)ds$ é Lipschitz contínua.

Por outro lado na classe das funções limitadas e mensuráveis, tem-se que dada

$F: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ Lipschitz contínua,

existe f tal que

$$F(t) = F(s) + \int_s^t f(w)dw \quad \forall t, s.$$

Convexidade

Def.: C convexo $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in C, \forall \alpha \in [0,1], \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C$
ou seja, o segmento unindo dois pontos do conjunto está nele contido.

Teorema da Separação (de Hahn Banach)

Sejam C_1 e C_2 conjuntos convexos não vazios de $\mathfrak{R}^n$.

- (i) $\left[\exists p \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\} \text{ tal que } \inf_{x \in C_1} \{p \cdot x\} \geq \sup_{x \in C_2} \{p \cdot x\} \right] \Leftrightarrow \left[\overset{\circ}{C}_1 \cap \overset{\circ}{C}_2 = \emptyset \right]$
- (ii) Se além de convexos e não vazios C_1 e C_2 são fechados e disjuntos e um deles é limitado, tem-se que $\exists p \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\inf_{x \in C_1} \{p \cdot x\} > \sup_{x \in C_2} \{p \cdot x\}$.

Demonstração:

- (i) $C = C_1 - C_2$ é convexo e $0 \notin \overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{C}_1 - \overset{\circ}{C}_2$

Então, $\exists p \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $C \subset D = \{x \in \mathfrak{R}^n: x \cdot p \geq 0\}$ e $C \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$

Tem-se que $0 \leq \inf_{x \in C} \{x \cdot b\} = \inf_{x_1 \in C_1} \{x_1 \cdot b\} - \sup_{x_2 \in C_2} \{x_2 \cdot b\}$

- (ii) $0 \notin C_1 - C_2 = \overline{C_1 - C_2}$ (fecho de $C_1 - C_2$) uma vez que um dos conjuntos é limitado



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000101632