

UNIVERSIDADE DO PORTO  
**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

METODOS NUMERICOS  
EM  
GEOTECNIA

LUIS MIGUEL FEIJO DA CRUZ QUEIROS

PORTO, DEZEMBRO DE 1993



**Métodos Numéricos  
em  
Geotecnia**



**Trabalho de Luís Miguel Queirós**



# **Apresentação do Trabalho**

---

## 1. Introdução

Este trabalho tem como objectivo um contacto mais profundo com o Método dos Elementos Finitos através da análise e aplicação prática de alguns programas.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

1ª Parte - Aplicações do MEF à resolução de:

- Problemas planos elásticos (Programa PLANE)
- Problemas regidos pela equação quase-harmónica (Programa QUASAR)

2ª Parte - Estudo e implementação de algumas alterações no programa QUASAR:

- Armazenamento em vector da semibanda de largura variável
- Resolução de malhas compreendendo elementos infinitos

## 2. O Método dos Elementos Finitos

Quase todos os fenómenos na natureza podem ser descritos, com o auxílio das leis da física, através de equações algébricas, diferenciais ou integrais.

Enquanto que a obtenção das equações poderá não ser muito difícil, a sua resolução por métodos exactos pode apresentar-se muito trabalhosa e até impossível.

Recorre-se, por isso, a métodos aproximados de análise que fornecem meios alternativos de determinar as soluções das equações.

De entre estes métodos destacam-se, pela sua utilização mais ou menos corrente, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

No método das diferenças finitas, as equações diferenciais são aproximadas substituindo as derivadas por quocientes de diferenças em que intervêm os valores da função em determinados pontos do domínio. Através da imposição de condições fronteira é possível a resolução das equações resultantes obtendo-se o valor da solução para os pontos considerados.

Este método apresenta diversos inconvenientes como, por exemplo, a falta de precisão, a dificuldade em impor as condições fronteira em algumas situações especiais assim como a dificuldade de representação de domínios geometricamente complexos.

---

O método dos elementos finitos (MEF) ultrapassa as dificuldades de outros métodos mais simples devido a duas particularidades fundamentais:

- um domínio geometricamente complexo pode ser representado como um conjunto de subdomínios geometricamente simples e a que se chama *elementos finitos*;
- para cada elemento finito, as funções de aproximação (ou *funções de interpolação*) são obtidas a partir do princípio de que qualquer função contínua pode ser representada por uma combinação linear de polinómios algébricos.

O MEF pode ainda ser descrito como uma aplicação de métodos variacionais em que as funções de aproximação são polinómios algébricos e os parâmetros não determinados representam os valores da solução num número finito e determinado de pontos chamados *nós* nas fronteiras ou no interior dos elementos.

Na aplicação do MEF podem ser utilizados elementos com um número de nós variável de problema para problema. Os elementos triangulares correntes têm habitualmente 3 nós enquanto que os elementos rectangulares podem ter 4, 8 ou 9 nós (estes números são os mais correntes).

Em termos gerais, a aplicação do MEF à resolução de qualquer problema deverá seguir os seguintes passos:

- a) Discretização do domínio num conjunto de elementos finitos.
- b) Obtenção das equações dos elementos.
- c) Combinação das equações dos diversos elementos para obter as equações que descrevem o problema.
- d) Imposição das condições fronteira do problema.
- e) Resolução das equações (sistema de equações).
- f) Pós-processamento dos resultados.

Para tipos de problemas determinados, alguns destes passos podem estar já programados. Isto obriga à utilização de diferentes programas de acordo com o tipo de problema.

## **1ª Parte**

# **Aplicações do MEF**

**Problemas Elásticos Planos**  
**Programa PLANE**

---

## 1. Introdução

Utiliza-se o PLANE para a resolução do problema de um tubo cilíndrico de parede espessa com pressão interior e exterior em regime elástico e comparam-se os resultados obtidos com os fornecidos pela solução analítica do mesmo problema.

Na preparação dos dados para o PLANE utilizou-se o programa GEN2D para a geração da malha de elementos finitos.

## 2. O programa PLANE

Não se pretendendo uma descrição pormenorizada do programa, destacam-se a seguir algumas das suas características.

O PLANE permite a resolução de 2 tipos de problemas elásticos pelo MEF:

- problemas em estados planos de deformação;
- problemas axissimétricos.

De acordo com o tipo de problema, as relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são definidas de forma distinta, de acordo com a Teoria da Elasticidade.

É possível a definição de malhas de elementos finitos rectangulares de 4, 8 ou 9 nós assim como a consideração de 2 ou 3 pontos de Gauss na integração numérica pelo método de Gauss-Legendre, necessária à determinação das características dos elementos.

## 3. O programa GEN2D

A discretização de um domínio complexo em elementos simples pode transformar-se numa tarefa morosa. De facto, um domínio geometricamente mais complicado pode obrigar à definição de dezenas de elementos e um número muito mais elevado de nós e respectivas coordenadas.

O programa GEN2D gera automaticamente a malha de elementos finitos com 4, 8 ou 9 nós a partir de uma malha mais simples de macroblocos com 8 nós.

Além da definição dos macroblocos em termos de nós, é necessária a indicação das coordenadas de cada nó. Estas coordenadas podem ser definidas num sistema cartesiano  $(x,y)$  ou polar  $(R,\Theta)$ . As coordenadas dos nós situados a meio de lados rectilíneos, se não forem indicadas pelo utilizador, são interpoladas pelo programa.

Para cada macrobloco indicam-se ainda o número de divisões pretendidas em cada uma das direcções definidas pela indicação dos seus nós. A cada uma destas divisões é atribuído

---

um peso o que permite a divisão dos macroblocos em elementos de dimensões variáveis.

#### 4. Aplicação

Utilizam-se a seguir os programas GEN2D, para geração das malhas de elementos finitos, e PLANE para a resolução do problema de um tubo cilíndrico de parede espessa sujeito a pressão interior e exterior, apenas interior e apenas exterior.

Em primeiro lugar é resolvido o problema em estado plano de deformação e, depois, como problema axissimétrico.

Apresentam-se, em anexo, os ficheiros de dados utilizados assim como os fragmentos significativos dos ficheiros de resultados obtidos.

##### 4.1 Caracterização do problema

Geometria:

- $r_i$  = 10.0
- $r_e$  = 20.0
- $l$  = 10.0
- $e$  = 1.0

Material:

- $E$  =  $10^4$
- $\nu$  = 0.3
- $\rho$  = 0.0
- $\alpha$  = 0.0

Acções:

- $p_i$  = 10.0
- $p_e$  = 5.0

##### 4.2 Estado plano de deformação

###### 4.2.1 Introdução

Tirando partido da simetria da figura, tanto na horizontal como na vertical, é suficiente a análise de um sector correspondente a 1/4 do tubo.

###### 4.2.2 Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada na resolução deste problema foi obtida com auxílio do programa GEN2D, a partir de um único macrobloco que foi dividido



---

em 3 ao longo da parede do tubo e em 4 ao longo do perímetro.

Daqui resultou uma malha de 12 elementos com 51 nós, 14 dos quais situados sobre os planos de simetria.

#### 4.2.3 Utilização do PLANE

A criação do ficheiro de dados para utilização do PLANE seguiu as indicações que constam do seu guia do utilizador.

Sublinha-se a determinação do tipo de problema (2) correspondente ao estado plano de deformação assim como a definição das acções.

Consideraram-se três casos de carga:

- pressão interior e exterior;
- pressão interior;
- pressão exterior.

Em qualquer um deles, tratou-se de forças distribuídas em lados de elementos.

Sublinhe-se ainda o tipo de apoios considerados nos planos de simetria, isto é, apoios simples com o deslocamento permitido na direcção correspondente ao plano de simetria.

#### 4.2.4 Resultados

Os ficheiros de resultados obtidos através da aplicação do MEF são, normalmente, muito extensos não tendo qualquer interesse, neste caso, a sua inclusão, na totalidade, neste trabalho.

No nosso caso, para comparação com os resultados obtidos a partir do problema axissimétrico e a partir da solução exacta, apresentam-se, em anexo, os valores dos deslocamentos dos diferentes nós da malha de elementos finitos.

### 4.3 Problema axissimétrico

#### 4.3.1 Introdução

Este tipo de problema surge quando a distribuição das tensões (e deslocamentos) é simétrica em relação a um eixo.

A consideração de um corte longitudinal ao longo da parede do tubo

---

---

corresponde a um problema deste tipo.

#### 4.3.2 Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada na resolução deste problema foi também obtida com o auxílio do programa GEN2D a partir de um único macrobloco.

Tendo em vista a comparação de resultados, procurou-se a coincidência das posições dos nós da malha gerada em 5.2.2 localizados sobre os planos de simetria com os nós localizados, na malha a gerar, ao longo do topo e do fundo do plano longitudinal.

Para isso bastou garantir que o número de divisões do macrobloco e pesos respectivos nas direcções indicadas coincidissem.

Uma vez que o número de divisões adoptado para o macrobloco foi igual ao adoptado em 5.2.2, a malha resultante apresenta as mesmas características, isto é, 12 elementos e 51 nós, 7 dos quais situados no topo do plano e 7 no fundo do plano longitudinal.

#### 4.3.3 Utilização do PLANE

A criação do ficheiro de dados para utilização do PLANE seguiu as indicações que constam do seu guia do utilizador.

Sublinha-se a determinação do tipo de problema (3) correspondente ao problema axissimétrico enquanto que a definição de acções é idêntica à indicada em 5.2.3.

A consideração de apoios simples ao longo do topo e do fundo do plano corresponde à consideração de planos de simetria prolongando portanto o cilindro em ambas as direcções.

#### 4.3.4 Resultados

Apresentam-se, em anexo, os valores dos deslocamentos dos diferentes nós da malha de elementos finitos.

#### 4.4 Solução analítica

A solução analítica para o problema do tubo cilíndrico de parede espessa sujeito a pressão interior e exterior em estado plano de deformação em regime elástico é dada por:

---

$$\alpha = \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$\beta = \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$\sigma_R = p_i \alpha \left( 1 - \frac{r_e^2}{R^2} \right) - p_e \beta \left( 1 - \frac{r_i^2}{R^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = p_i \alpha \left( 1 + \frac{r_e^2}{R^2} \right) - p_e \beta \left( 1 + \frac{r_i^2}{R^2} \right)$$

$$\sigma_z = 2 \nu p_i \alpha - 2 \nu p_e \beta$$

$$U = \frac{p_i \alpha}{2 G} \left[ (1 - 2 \nu) R + \frac{r_e^2}{R} \right] - \frac{p_e \beta}{2 G} \left[ (1 - 2 \nu) R + \frac{r_i^2}{R} \right]$$

$$G = \frac{E}{2 (1 + \nu)}$$

#### 4.5 Comparação de Resultados

A comparação de resultados é efectuada com base no caso de carga correspondente à existência de pressão interior e exterior.

Apresentam-se a seguir os deslocamentos, segundo a direcção radial, calculados a partir da solução analítica, da consideração de estado plano de deformação e do problema axissimétrico.

Escolheram-se, para esta comparação, nós com posições correspondentes nas duas resoluções pelo MEF.

Sol. Analítica		E.P.D.		P. Axissimétrico	
R (m)	Deslocamento (x 10 <sup>-3</sup> )	Nó	Deslocamento (x 10 <sup>-3</sup> )	Nó	Deslocamento (x 10 <sup>-3</sup> )
10.0	6.933333	1	6.846067	45	6.933333
11.0	5.972121	2	5.902315	46	5.972121
12.0	5.142222	3	5.092806	47	5.142222
13.5	4.079753	4	4.053124	48	4.079753
15.0	3.177778	5	3.162939	49	3.177778
17.5	1.919048	6	1.910495	50	1.919048
20.0	0.866667	7	0.876922	51	0.866667

Verifica-se que os resultados obtidos através da consideração das características axissimétricas do problema coincidem com os resultados obtidos através da solução analítica.

Os resultados obtidos através da consideração do E.P.D. não são coincidentes com a solução analítica mas constituem uma boa aproximação razoável. A discrepância entre os valores obtidos pela solução analítica e pela consideração do E.P.D. deve-se à utilização de uma malha simples, com um número pequeno de elementos.

---

## APÊNDICES

- Estado Plano de Deformação

Apêndice A: [GEN2D] Ficheiro de Dados

Apêndice B: [PLANE] Ficheiro de Dados

Apêndice C: [PLANE] Resultados

- Problema Axissimétrico

Apêndice D: [GEN2D] Ficheiro de Dados

Apêndice E: [PLANE] Ficheiro de Dados

Apêndice F: [PLANE] Resultados

---

**Apêndice A:** Estado Plano de Deformação  
[GEN2D] Ficheiro de Dados

\*\* TUBO CILÍNDRICO DE PAREDE ESPESSE EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO \*\*

8	1	8							
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	0	0						
3	20	0	0						
4	20	45	1						
5	0	20	0						
7	0	10	0						
8	10	45	1						
3	4								
2	3	5							
1	1	1	1						

**Apêndice B: Estado Plano de Deformação**  
 [PLANE] Ficheiro de Dados

\*\* TUBO CILÍNDRICO DE PAREDE ESPESA EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO \*\*

51	12	14	1	8	2	2	3		
1	1	1	2	3	9	14	13	12	8
2	1	3	4	5	10	16	15	14	9
3	1	5	6	7	11	18	17	16	10
4	1	12	13	14	20	25	24	23	19
5	1	14	15	16	21	27	26	25	20
6	1	16	17	18	22	29	28	27	21
7	1	23	24	25	31	36	35	34	30
8	1	25	26	27	32	38	37	36	31
9	1	27	28	29	33	40	39	38	32
10	1	34	35	36	42	47	46	45	41
11	1	36	37	38	43	49	48	47	42
12	1	38	39	40	44	51	50	49	43
1	10.00000		.00000						
2	11.00000		.00000						
3	12.00000		.00000						
4	13.50000		.00000						
5	15.00000		.00000						
6	17.50000		.00000						
7	20.00000		.00000						
8	9.65609		2.15609						
9	11.58731		2.58731						
10	14.48414		3.23414						
11	19.31218		4.31218						
12	9.05330		4.05330						
13	9.95863		4.45863						
14	10.86396		4.86396						
15	12.22196		5.47196						
16	13.57995		6.07995						
17	15.84328		7.09328						
18	18.10660		8.10660						
19	8.19163		5.69163						
20	9.82995		6.82995						
21	12.28744		8.53744						
22	16.38325		11.38325						
23	7.07107		7.07107						
24	7.77817		7.77817						
25	8.48528		8.48528						
26	9.54594		9.54594						
27	10.60660		10.60660						
28	12.37437		12.37437						
29	14.14214		14.14214						
30	5.69163		8.19163						



---

31	6.82995	9.82995
32	8.53744	12.28744
33	11.38325	16.38325
34	4.05330	9.05330
35	4.45863	9.95863
36	4.86396	10.86396
37	5.47196	12.22196
38	6.07995	13.57995
39	7.09328	15.84328
40	8.10660	18.10660
41	2.15609	9.65609
42	2.58731	11.58731
43	3.23414	14.48414
44	4.31218	19.31218
45	.00000	10.00000
46	.00000	11.00000
47	.00000	12.00000
48	.00000	13.50000
49	.00000	15.00000
50	.00000	17.50000
51	.00000	20.00000

1	01
2	01
3	01
4	01
5	01
6	01
7	01
45	10
46	10
47	10
48	10
49	10
50	10
51	10

1	10000.0	0.30	1.0	0.0	0.0
	***	PRESSAO	EXTERIOR	E	INTERIOR
					***

0	0	1	0	0	0
8					
1	12	10.	0.		
	8	10.	0.		
	1	10.	0.		
4	23	10.	0.		
	19	10.	0.		
	12	10.	0.		
7	34	10.	0.		
	30	10.	0.		
	23	10.	0.		
10	45	10.	0.		
	41	10.	0.		

---

---

	34	10.	0.		
3	7	5.	0.		
	11	5.	0.		
	18	5.	0.		
6	18	5.	0.		
	22	5.	0.		
	29	5.	0.		
9	29	5.	0.		
	33	5.	0.		
	40	5.	0.		
12	40	5.	0.		
	44	5.	0.		
	51	5.	0.		
*** PRESSAO INTERIOR ***					
0	0	1	0	0	0
4					
1	12	10.	0.		
	8	10.	0.		
	1	10.	0.		
4	23	10.	0.		
	19	10.	0.		
	12	10.	0.		
7	34	10.	0.		
	30	10.	0.		
	23	10.	0.		
10	45	10.	0.		
	41	10.	0.		
	34	10.	0.		
*** PRESSAO EXTERIOR ***					
0	0	1	0	0	0
4					
3	7	5.	0.		
	11	5.	0.		
	18	5.	0.		
6	18	5.	0.		
	22	5.	0.		
	29	5.	0.		
9	29	5.	0.		
	33	5.	0.		
	40	5.	0.		
12	40	5.	0.		
	44	5.	0.		
	51	5.	0.		

---

**Apêndice C:** Estado Plano de Deformação  
[PLANE] Resultados

Apresentam-se a seguir os deslocamentos obtidos para cada caso de carga:

\*\*\*\*\*  
\*\* Caso de carga nº. 1\*\*  
\*\*\*\*\*

\*\*\* PRESSAO EXTERIOR E INTERIOR \*\*\*

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****			*****		
Nó	dx(m)	dy(m)	Nó	dx(m)	dy(m)
1	6.846067E-03	.000000E+00	27	2.146594E-03	2.146594E-03
2	5.902315E-03	.000000E+00	28	1.265526E-03	1.265526E-03
3	5.092806E-03	.000000E+00	29	5.392473E-04	5.392473E-04
4	4.053124E-03	.000000E+00	30	3.792071E-03	5.667345E-03
5	3.162939E-03	.000000E+00	31	2.847637E-03	4.139812E-03
6	1.910495E-03	.000000E+00	32	1.750867E-03	2.542490E-03
7	8.769218E-04	.000000E+00	33	5.059383E-04	6.224470E-04
8	6.835038E-03	1.521728E-03	34	2.688923E-03	6.361536E-03
9	5.092150E-03	1.099141E-03	35	2.374738E-03	5.485622E-03
10	3.166873E-03	7.051808E-04	36	2.078248E-03	4.728376E-03
11	9.064070E-04	2.059308E-04	37	1.652800E-03	3.740673E-03
12	6.361536E-03	2.688923E-03	38	1.290266E-03	2.914560E-03
13	5.485622E-03	2.374738E-03	39	8.025506E-04	1.765907E-03
14	4.728376E-03	2.078248E-03	40	4.291479E-04	7.827820E-04
15	3.740673E-03	1.652800E-03	41	1.521728E-03	6.835038E-03
16	2.914560E-03	1.290266E-03	42	1.099141E-03	5.092150E-03
17	1.765907E-03	8.025506E-04	43	7.051808E-04	3.166873E-03
18	7.827820E-04	4.291479E-04	44	2.059308E-04	9.064070E-04
19	5.667345E-03	3.792071E-03	45	.000000E+00	6.846067E-03
20	4.139812E-03	2.847637E-03	46	.000000E+00	5.902315E-03
21	2.542490E-03	1.750867E-03	47	.000000E+00	5.092806E-03
22	6.224470E-04	5.059383E-04	48	.000000E+00	4.053124E-03
23	4.788100E-03	4.788100E-03	49	.000000E+00	3.162939E-03
24	4.096925E-03	4.096925E-03	50	.000000E+00	1.910495E-03
25	3.521831E-03	3.521831E-03	51	.000000E+00	8.769218E-04
26	2.780703E-03	2.780703E-03			

\*\*\*\*\*  
 \*\* Caso de carga nº. 2 \*\*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* PRESSAO INTERIOR \*\*\*

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****					
Nó	dx(m)	dy(m)	Nó	dx(m)	dy(m)
1	1.889213E-02	.000000E+00	27	9.808620E-03	9.808620E-03
2	1.752463E-02	.000000E+00	28	8.965724E-03	8.965724E-03
3	1.642561E-02	.000000E+00	29	8.432407E-03	8.432407E-03
4	1.512625E-02	.000000E+00	30	1.054379E-02	1.559434E-02
5	1.412588E-02	.000000E+00	31	9.246849E-03	1.339120E-02
6	1.292099E-02	.000000E+00	32	7.941203E-03	1.147445E-02
7	1.215384E-02	.000000E+00	33	6.931167E-03	9.764184E-03
8	1.869124E-02	4.164624E-03	34	7.485563E-03	1.743079E-02
9	1.620970E-02	3.543683E-03	35	7.067964E-03	1.614973E-02
10	1.386550E-02	3.092114E-03	36	6.685756E-03	1.510601E-02
11	1.185515E-02	2.654195E-03	37	6.151019E-03	1.383676E-02
12	1.743079E-02	7.485563E-03	38	5.742107E-03	1.289069E-02
13	1.614973E-02	7.067964E-03	39	5.293607E-03	1.177032E-02
14	1.510601E-02	6.685756E-03	40	5.073728E-03	1.098100E-02
15	1.383676E-02	6.151019E-03	41	4.164624E-03	1.869124E-02
16	1.289069E-02	5.742107E-03	42	3.543683E-03	1.620970E-02
17	1.177032E-02	5.293607E-03	43	3.092114E-03	1.386550E-02
18	1.098100E-02	5.073728E-03	44	2.654195E-03	1.185515E-02
19	1.559434E-02	1.054379E-02	45	.000000E+00	1.889213E-02
20	1.339120E-02	9.246849E-03	46	.000000E+00	1.752463E-02
21	1.147445E-02	7.941203E-03	47	.000000E+00	1.642561E-02
22	9.764184E-03	6.931167E-03	48	.000000E+00	1.512625E-02
23	1.325316E-02	1.325316E-02	49	.000000E+00	1.412588E-02
24	1.223850E-02	1.223850E-02	50	.000000E+00	1.292099E-02
25	1.145601E-02	1.145601E-02	51	.000000E+00	1.215384E-02
26	1.052530E-02	1.052530E-02			

\*\*\*\*\*  
 \*\* Caso de carga nº. 3 \*\*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* PRESSAO EXTERIOR \*\*\*

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****					
Nó	dx(m)	dy(m)	Nó	dx(m)	dy(m)
1	-1.204607E-02	.000000E+00	27	-7.662026E-03	-7.662026E-03
2	-1.162232E-02	.000000E+00	28	-7.700198E-03	-7.700198E-03
3	-1.133281E-02	.000000E+00	29	-7.893160E-03	-7.893160E-03
4	-1.107312E-02	.000000E+00	30	-6.751718E-03	-9.926992E-03
5	-1.096294E-02	.000000E+00	31	-6.399212E-03	-9.251386E-03
6	-1.101050E-02	.000000E+00	32	-6.190336E-03	-8.931959E-03
7	-1.127692E-02	.000000E+00	33	-6.425228E-03	-9.141737E-03
8	-1.185620E-02	-2.642895E-03	34	-4.796639E-03	-1.106925E-02
9	-1.111755E-02	-2.444542E-03	35	-4.693226E-03	-1.066411E-02
10	-1.069863E-02	-2.386934E-03	36	-4.607508E-03	-1.037763E-02
11	-1.094874E-02	-2.448264E-03	37	-4.498219E-03	-1.009609E-02
12	-1.106925E-02	-4.796639E-03	38	-4.451840E-03	-9.976134E-03
13	-1.066411E-02	-4.693226E-03	39	-4.491056E-03	-1.000441E-02
14	-1.037763E-02	-4.607508E-03	40	-4.644580E-03	-1.019821E-02
15	-1.009609E-02	-4.498219E-03	41	-2.642895E-03	-1.185620E-02
16	-9.976134E-03	-4.451840E-03	42	-2.444542E-03	-1.111755E-02
17	-1.000441E-02	-4.491056E-03	43	-2.386934E-03	-1.069863E-02
18	-1.019821E-02	-4.644580E-03	44	-2.448264E-03	-1.094874E-02
19	-9.926992E-03	-6.751718E-03	45	.000000E+00	-1.204607E-02
20	-9.251386E-03	-6.399212E-03	46	.000000E+00	-1.162232E-02
21	-8.931959E-03	-6.190336E-03	47	.000000E+00	-1.133281E-02
22	-9.141737E-03	-6.425228E-03	48	.000000E+00	-1.107312E-02
23	-8.465056E-03	-8.465056E-03	49	.000000E+00	-1.096294E-02
24	-8.141573E-03	-8.141573E-03	50	.000000E+00	-1.101050E-02
25	-7.934176E-03	-7.934176E-03	51	.000000E+00	-1.127692E-02
26	-7.744592E-03	-7.744592E-03			

---

**Apêndice D: Problema Axissimétrico**  
[GEN2D] Ficheiro de Dados

\*\* TUBO CILÍNDRICO DE PAREDE ESPESA - PROBLEMA AXISSIMÉTRICO \*\*

8	1	8							
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	0	0						
3	20	0	0						
5	20	10	0						
7	10	10	0						
8	10	5	0						
3	4								
2	3	5							
1	1	1	1						

**Apêndice E: Problema Axissimétrico**  
 [PLANE] Ficheiro de Dados

\*\* TUBO CILÍNDRICO DE PAREDE ESPESSA - PROBLEMA AXISSIMÉTRICO \*\*

51	12	14	1	8	3	2	3		
1	1	1	2	3	9	14	13	12	8
2	1	3	4	5	10	16	15	14	9
3	1	5	6	7	11	18	17	16	10
4	1	12	13	14	20	25	24	23	19
5	1	14	15	16	21	27	26	25	20
6	1	16	17	18	22	29	28	27	21
7	1	23	24	25	31	36	35	34	30
8	1	25	26	27	32	38	37	36	31
9	1	27	28	29	33	40	39	38	32
10	1	34	35	36	42	47	46	45	41
11	1	36	37	38	43	49	48	47	42
12	1	38	39	40	44	51	50	49	43
1	10.00000		.00000						
2	11.00000		.00000						
3	12.00000		.00000						
4	13.50000		.00000						
5	15.00000		.00000						
6	17.50000		.00000						
7	20.00000		.00000						
8	10.00000		1.25000						
9	12.00000		1.25000						
10	15.00000		1.25000						
11	20.00000		1.25000						
12	10.00000		2.50000						
13	11.00000		2.50000						
14	12.00000		2.50000						
15	13.50000		2.50000						
16	15.00000		2.50000						
17	17.50000		2.50000						
18	20.00000		2.50000						
19	10.00000		3.75000						
20	12.00000		3.75000						
21	15.00000		3.75000						
22	20.00000		3.75000						
23	10.00000		5.00000						
24	11.00000		5.00000						
25	12.00000		5.00000						
26	13.50000		5.00000						
27	15.00000		5.00000						
28	17.50000		5.00000						
29	20.00000		5.00000						
30	10.00000		6.25000						
31	12.00000		6.25000						



---

32	15.00000	6.25000
33	20.00000	6.25000
34	10.00000	7.50000
35	11.00000	7.50000
36	12.00000	7.50000
37	13.50000	7.50000
38	15.00000	7.50000
39	17.50000	7.50000
40	20.00000	7.50000
41	10.00000	8.75000
42	12.00000	8.75000
43	15.00000	8.75000
44	20.00000	8.75000
45	10.00000	10.00000
46	11.00000	10.00000
47	12.00000	10.00000
48	13.50000	10.00000
49	15.00000	10.00000
50	17.50000	10.00000
51	20.00000	10.00000

1	01
2	01
3	01
4	01
5	01
6	01
7	01
45	01
46	01
47	01
48	01
49	01
50	01
51	01

1	10000.0	0.30	1.0	0.0	0.0
	***	PRESSAO	EXTERIOR	E	INTERIOR
				***	
0	0	1	0	0	0
8					
1	12	10.	0.		
	8	10.	0.		
	1	10.	0.		
4	23	10.	0.		
	19	10.	0.		
	12	10.	0.		
7	34	10.	0.		
	30	10.	0.		
	23	10.	0.		
10	45	10.	0.		
	41	10.	0.		
	34	10.	0.		

---

---

3	7	5.	0.
	11	5.	0.
	18	5.	0.
6	18	5.	0.
	22	5.	0.
	29	5.	0.
9	29	5.	0.
	33	5.	0.
	40	5.	0.
12	40	5.	0.
	44	5.	0.
	51	5.	0.

\*\*\* PRESSAO INTERIOR \*\*\*

0	0	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---

4			
1	12	10.	0.
	8	10.	0.
	1	10.	0.
4	23	10.	0.
	19	10.	0.
	12	10.	0.
7	34	10.	0.
	30	10.	0.
	23	10.	0.
10	45	10.	0.
	41	10.	0.
	34	10.	0.

\*\*\* PRESSAO EXTERIOR \*\*\*

0	0	1	0	0	0
---	---	---	---	---	---

4			
3	7	5.	0.
	11	5.	0.
	18	5.	0.
6	18	5.	0.
	22	5.	0.
	29	5.	0.
9	29	5.	0.
	33	5.	0.
	40	5.	0.
12	40	5.	0.
	44	5.	0.
	51	5.	0.

**Apêndice F: Problema Axissimétrico**  
**[PLANE] Resultados**

Apresentam-se a seguir os deslocamentos obtidos para cada caso de carga:

\*\*\*\*\*  
**\*\* Caso de carga nº. 1 \*\***  
 \*\*\*\*\*

**\*\*\* PRESSAO EXTERIOR E INTERIOR \*\*\***

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****			*****		
Nó	dr(m)	dz(m)	Nó	dr(m)	dz(m)
1	6.933333E-03	.000000E+00	27	3.177778E-03	1.298704E-18
2	5.972121E-03	.000000E+00	28	1.919048E-03	5.120473E-19
3	5.142222E-03	.000000E+00	29	8.666667E-04	-1.215081E-18
4	4.079753E-03	.000000E+00	30	6.933333E-03	-4.805377E-19
5	3.177778E-03	.000000E+00	31	5.142222E-03	2.344283E-18
6	1.919048E-03	.000000E+00	32	3.177778E-03	9.406817E-19
7	8.666667E-04	.000000E+00	33	8.666667E-04	-9.847787E-19
8	6.933333E-03	-3.320989E-19	34	6.933333E-03	-7.247241E-20
9	5.142222E-03	1.555145E-18	35	5.972121E-03	-2.147059E-19
10	3.177778E-03	7.132315E-19	36	5.142222E-03	7.072050E-19
11	8.666667E-04	-2.551588E-19	37	4.079753E-03	1.077613E-18
12	6.933333E-03	-8.188079E-19	38	3.177778E-03	1.012660E-18
13	5.972121E-03	3.201125E-19	39	1.919048E-03	1.268525E-19
14	5.142222E-03	1.302817E-18	40	8.666667E-04	-7.678552E-19
15	4.079753E-03	2.062993E-18	41	6.933333E-03	-4.886196E-19
16	3.177778E-03	1.593846E-18	42	5.142222E-03	4.611210E-19
17	1.919048E-03	-3.950489E-19	43	3.177778E-03	7.035476E-19
18	8.666667E-04	-1.305256E-19	44	8.666667E-04	-5.035622E-19
19	6.933333E-03	-9.877744E-19	45	6.933333E-03	.000000E+00
20	5.142222E-03	9.563267E-19	46	5.972121E-03	.000000E+00
21	3.177778E-03	1.948997E-18	47	5.142222E-03	.000000E+00
22	8.666667E-04	-8.630246E-19	48	4.079753E-03	.000000E+00
23	6.933333E-03	-1.049632E-18	49	3.177778E-03	.000000E+00
24	5.972121E-03	8.876501E-19	50	1.919048E-03	.000000E+00
25	5.142222E-03	1.740202E-18	51	8.666667E-04	.000000E+00
26	4.079753E-03	1.537844E-18			

\*\*\*\*\*  
 \*\* Caso de carga nº. 2 \*\*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* PRESSAO INTERIOR \*\*\*

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****					
Nó	dr(m)	dz(m)	Nó	dr(m)	dz(m)
1	1.906667E-02	.000000E+00	27	1.415556E-02	4.554072E-18
2	1.766424E-02	.000000E+00	28	1.293810E-02	-6.766887E-19
3	1.652444E-02	.000000E+00	29	1.213333E-02	-2.449034E-19
4	1.517951E-02	.000000E+00	30	1.906667E-02	1.169930E-18
5	1.415556E-02	.000000E+00	31	1.652444E-02	7.798100E-18
6	1.293810E-02	.000000E+00	32	1.415556E-02	3.229699E-18
7	1.213333E-02	.000000E+00	33	1.213333E-02	-2.360736E-18
8	1.906667E-02	-1.157843E-18	34	1.906667E-02	5.797792E-19
9	1.652444E-02	7.286612E-18	35	1.766424E-02	-4.294117E-19
10	1.415556E-02	1.611068E-18	36	1.652444E-02	2.705828E-18
11	1.213333E-02	-1.180631E-19	37	1.517951E-02	2.123059E-18
12	1.906667E-02	1.595520E-19	38	1.415556E-02	2.625416E-18
13	1.766424E-02	2.714985E-18	39	1.293810E-02	5.798973E-19
14	1.652444E-02	5.835913E-18	40	1.213333E-02	-3.444584E-18
15	1.517951E-02	6.498584E-18	41	1.906667E-02	-7.205450E-20
16	1.415556E-02	4.884226E-18	42	1.652444E-02	1.017152E-18
17	1.293810E-02	-2.518958E-18	43	1.415556E-02	1.641611E-18
18	1.213333E-02	1.751433E-18	44	1.213333E-02	-1.709060E-18
19	1.906667E-02	-8.950212E-19	45	1.906667E-02	.000000E+00
20	1.652444E-02	4.306144E-18	46	1.766424E-02	.000000E+00
21	1.415556E-02	6.431563E-18	47	1.652444E-02	.000000E+00
22	1.213333E-02	8.513825E-20	48	1.517951E-02	.000000E+00
23	1.906667E-02	-9.790408E-19	49	1.415556E-02	.000000E+00
24	1.766424E-02	3.122916E-18	50	1.293810E-02	.000000E+00
25	1.652444E-02	5.959358E-18	51	1.213333E-02	.000000E+00
26	1.517951E-02	6.414886E-18			

\*\*\*\*\*  
 \*\* Caso de carga nº. 3 \*\*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\* PRESSAO EXTERIOR \*\*\*

\*\*\*\*\*

***** Deslocamentos *****					
Nó	dr(m)	dz(m)	Nó	dr(m)	dz(m)
1	-1.213333E-02	.000000E+00	27	-1.097778E-02	-2.014140E-18
2	-1.169212E-02	.000000E+00	28	-1.101905E-02	1.341696E-18
3	-1.138222E-02	.000000E+00	29	-1.126667E-02	1.888830E-18
4	-1.109975E-02	.000000E+00	30	-1.213333E-02	-1.544361E-18
5	-1.097778E-02	.000000E+00	31	-1.138222E-02	-5.720482E-18
6	-1.101905E-02	.000000E+00	32	-1.097778E-02	-2.133999E-18
7	-1.126667E-02	.000000E+00	33	-1.126667E-02	3.071487E-18
8	-1.213333E-02	9.250314E-19	34	-1.213333E-02	-4.348344E-19
9	-1.138222E-02	-5.956197E-18	35	-1.169212E-02	4.294117E-20
10	-1.097778E-02	-7.238599E-19	36	-1.138222E-02	-2.459843E-18
11	-1.126667E-02	-3.555400E-19	37	-1.109975E-02	-2.380400E-18
12	-1.213333E-02	-7.122842E-19	38	-1.097778E-02	-1.800285E-18
13	-1.169212E-02	-3.414060E-18	39	-1.101905E-02	1.353094E-18
14	-1.138222E-02	-5.713578E-18	40	-1.126667E-02	2.640848E-18
15	-1.109975E-02	-4.519265E-18	41	-1.213333E-02	-3.242453E-19
16	-1.097778E-02	-3.201312E-18	42	-1.138222E-02	-1.489913E-18
17	-1.101905E-02	2.727386E-18	43	-1.097778E-02	-7.035476E-19
18	-1.126667E-02	-7.002094E-19	44	-1.126667E-02	1.220757E-18
19	-1.213333E-02	-3.465407E-19	45	-1.213333E-02	.000000E+00
20	-1.138222E-02	-5.061239E-18	46	-1.169212E-02	.000000E+00
21	-1.097778E-02	-3.380805E-18	47	-1.138222E-02	.000000E+00
22	-1.126667E-02	8.879111E-19	48	-1.109975E-02	.000000E+00
23	-1.213333E-02	-8.417735E-19	49	-1.097778E-02	.000000E+00
24	-1.169212E-02	-2.979977E-18	50	-1.101905E-02	.000000E+00
25	-1.138222E-02	-5.180583E-18	51	-1.126667E-02	.000000E+00
26	-1.109975E-02	-4.115327E-18			

---

## FIGURAS

- Estado Plano de Deformação

Figura 1: Numeração dos Elementos

Figura 2: Numeração dos Nós

Figura 3: Localização dos Apoios

- Problema Axissimétrico

Figura 4: Numeração dos Elementos

Figura 5: Numeração dos Nós

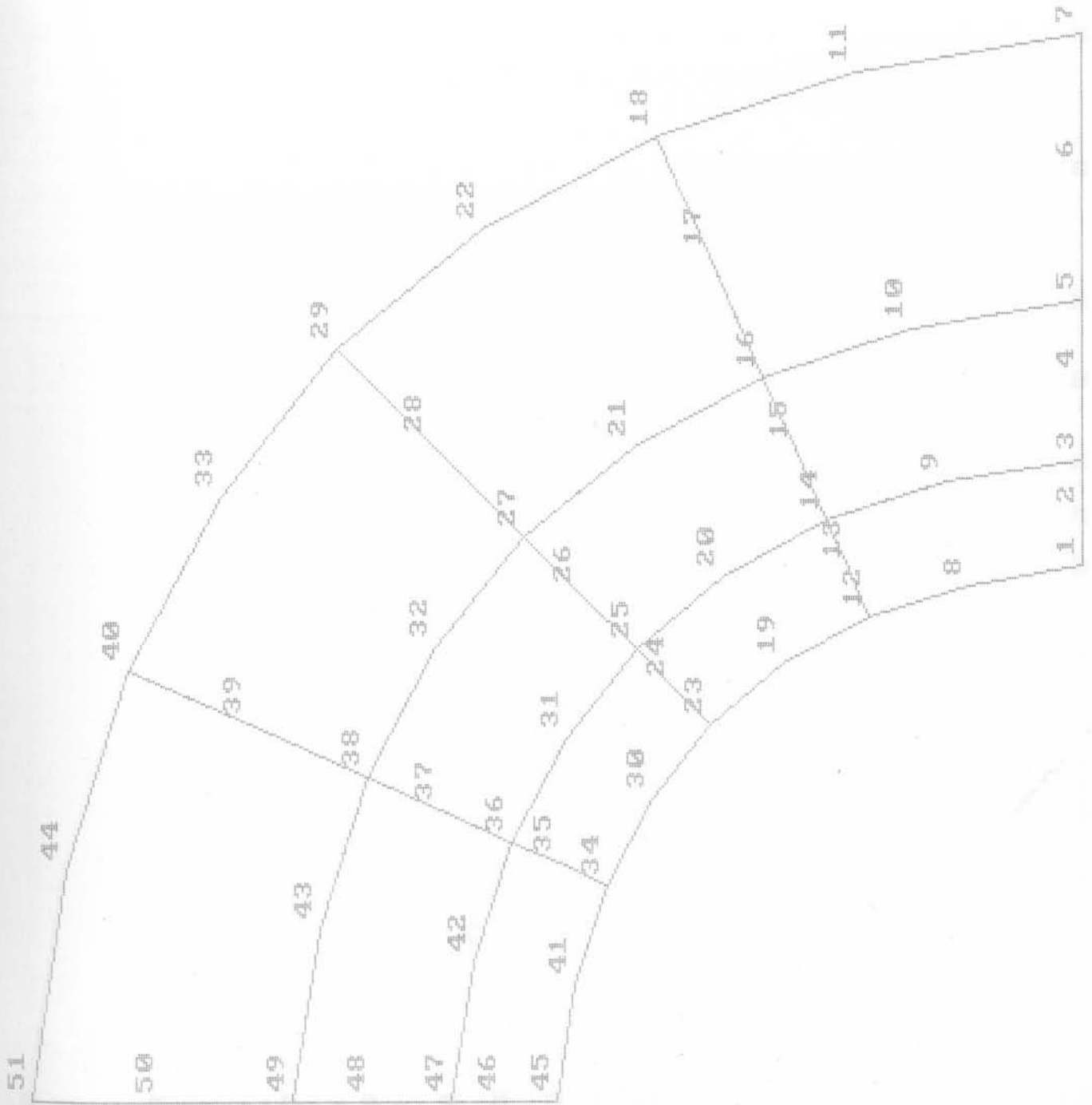
Figura 6: Localização dos Apoios

**Figura 1:** Estado Plano de Deformação  
Numeração dos Elementos





Figura 2: Estado Plano de Deformação  
Numeração dos Nós



**Figura 3:** Estado Plano de Deformação  
Localização dos Apoios

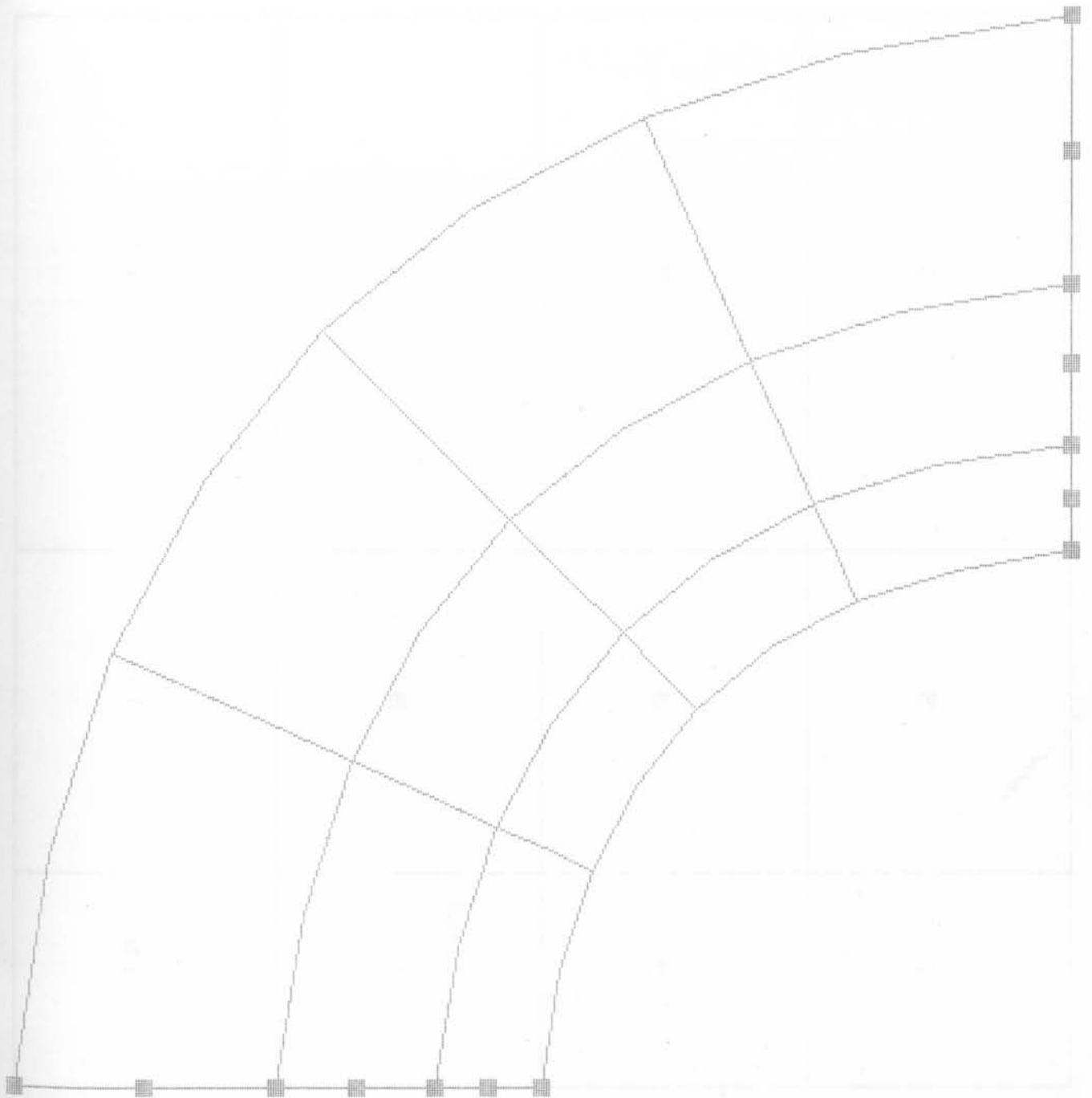


Figura 4: Problema Axissimétrico  
Numeração dos Elementos

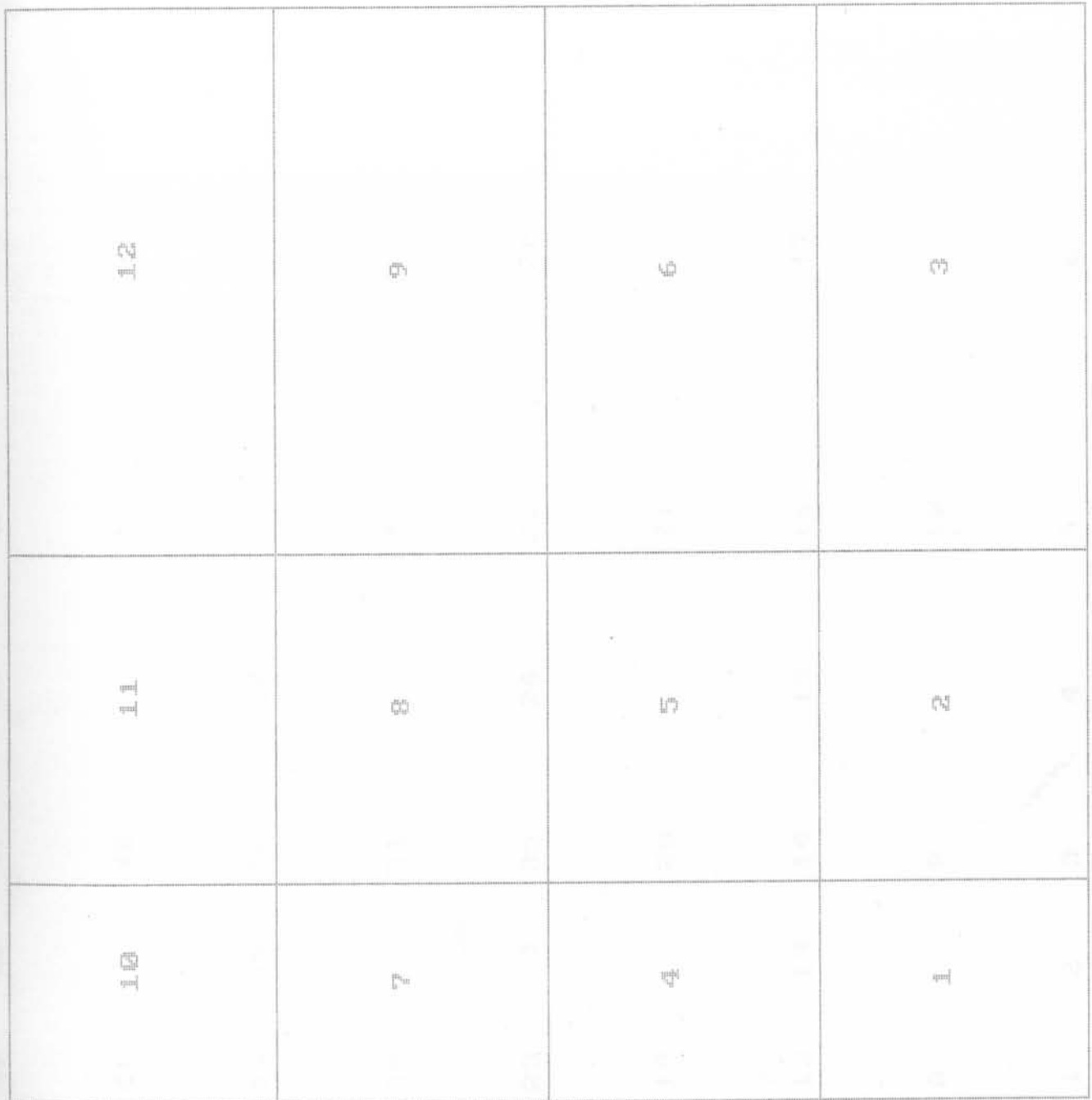
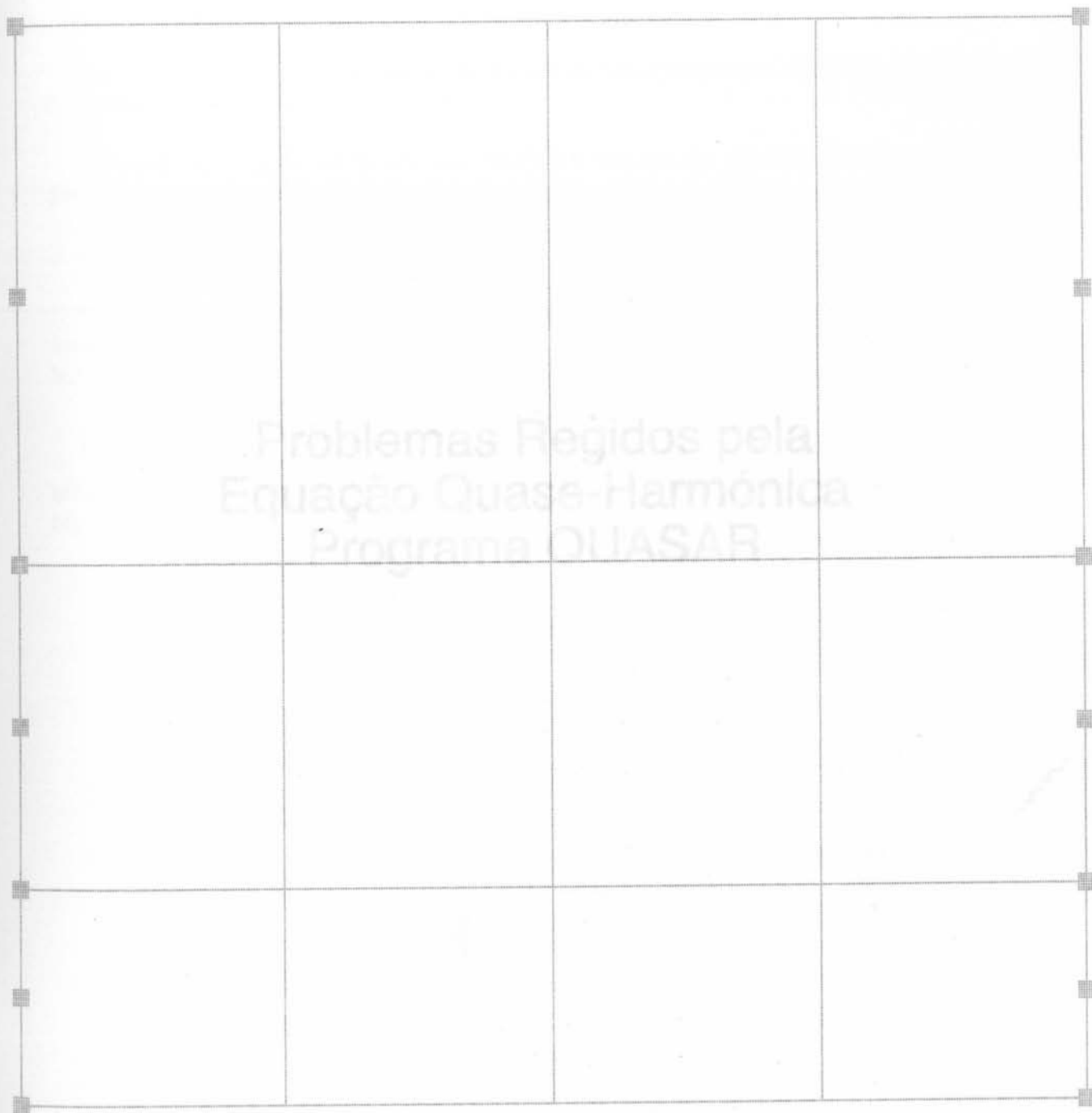


Figura 5: Problema Axissimétrico  
Numeração dos Nós

45	46	47	48	49	50	51
41	42	43	44	45	46	47
34	35	36	37	38	39	40
30	31	32	33	34	35	36
23	24	25	26	27	28	29
19	20	21	22	23	24	25
12	13	14	15	16	17	18
8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7

**Figura 6:** Problema Axissimétrico  
Localização dos Apoios



**Problemas Regidos pela  
Equação Quase-Harmónica  
Programa QUASAR**

---

## 1. Introdução

Utiliza-se o QUASAR para a resolução de 2 problemas:

- percolação sob uma cortina de estacas-prancha;
- percolação sob a barragem de Crestuma.

Na preparação dos dados para o QUASAR utilizou-se o programa GEN2D para a geração da malha de elementos finitos.

Apresenta-se a seguir um resumo dos princípios teóricos em que se baseiam este tipo de problemas, com base nos apontamentos fornecidos.

## 2. Equação quase-harmónica

Diversos problemas envolvem o conhecimento da distribuição no domínio em análise de uma grandeza escalar como o calor, a massa, a concentração de uma substância, a carga hidráulica.

Sendo  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_i$  a velocidade de transferência da grandeza por unidade de área e sendo  $Q$  a velocidade de geração da grandeza por unidade de volume, em regime permanente, a equação de continuidade impõe:

$$\nabla \cdot \vec{v} = Q$$

$$v_{i,i} = Q \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = Q$$

É possível, em geral, exprimir a velocidade como proporcional ao gradiente de um potencial:

$$\vec{v} = -K \nabla \phi$$

$$v_i = k_i \phi_{,i} \tag{2}$$

$$(v_x, v_y, v_z) = - \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}, k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Substituindo a equação (2) em (1):

$$\nabla \cdot \vec{K} \nabla \phi + Q = 0$$

$$(k_i \phi_i)_{,i} + Q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (3)$$

Obteve-se assim a chamada Equação Quase-Harmónica, que apresenta os casos particulares:

- i. Equação de Poisson (se  $k_x = k_y = k_z = 1$  )

$$\nabla^2 \phi + Q = 0 \quad (4)$$

- ii. Equação de Laplace (se  $k_x = k_y = k_z = 1$  e  $Q = 0$  )

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5)$$

### 3. Condições no domínio e na fronteira

Seja o domínio de análise a região V do espaço limitado pela superfície S.

#### 3.1 Condições no domínio

No domínio V, tem que ser satisfeita a equação quase-harmónica:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (3)$$

#### 3.2 Condições na fronteira

Na fronteira S podemos ter dois tipos de condições:



- 
- i. Condição fronteira de Dirichlet (na parte  $S_a$  de  $S$ )
  - ii. Condição fronteira de Cauchy (na parte  $S_b$  de  $S$ ,  $S = S_a \cup S_b$ )

### 3.2.1 Condição fronteira de Dirichlet

A condição fronteira de Dirichlet corresponde à imposição de um determinado valor de  $\phi$ , isto é:

$$\phi = \bar{\phi} \quad (\text{valor prescrito}) \quad (6)$$

### 3.2.2 Condição fronteira de Cauchy

A condição fronteira de Cauchy é traduzida por:

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + q + \alpha (\phi - \phi_a) = 0 \quad (7)$$

$n_x, n_y, n_z$  são as componentes do vetor da normal exterior à superfície  $S$ , enquanto que  $q, \alpha, \phi_a$  são constantes.

Utilizando a equação (2) e após algumas transformações, podemos exprimir a condição fronteira de Cauchy como:

$$v_n = q + \alpha (\phi - \phi_a)$$

em que  $v_n$  é a componente da velocidade normal à superfície  $S$ .

Fisicamente, a condição fronteira de Cauchy corresponde então à prescrição na zona  $S_b$  da superfície  $S$  de um caudal, de uma velocidade com determinadas características.

Casos particulares:

- i. Condição fronteira natural ou de Neumann

Se  $q = \alpha = 0$  então  $v_n = 0$  - fronteira impermeável.

---

ii. Condição fronteira de fluxo

Se  $\alpha = 0$  então  $V_n = q$  - caudal prescrito.

iii. Condição fronteira de convecção

Se  $q = 0$  então  $V_n = \alpha ( \phi - \phi_a )$  - o fluxo é proporcional à diferença de potencial.

#### 4. Método dos resíduos pesados

Quando se procura uma solução aproximada para a equação (3) em  $V$  e (7) em  $S_B$ , obtêm-se os erros correspondentes  $e_v$  e  $e_s$ .

Não há erro associado no caso da condição fronteira de Dirichlet, uma vez que esta é satisfeita pela imposição de  $\phi$  em  $S_A$ .

Utilizando um método dos resíduos pesados, recorre-se a funções de peso  $w_v$  e  $w_s$  para procurar minimizar de forma global os erros no domínio e na fronteira impondo que:

$$\int_V w_v e_v dV + \int_{S_B} w_s e_s dS = 0 \quad (8)$$

#### 5. Discretização por elementos finitos

Introduzindo uma discretização por elementos finitos, aproxima-se a variável de campo  $\phi$  através de:

$$\phi = \sum_{j=1}^m N_j \phi_j \quad (9)$$

- $m$  - número total de nós da malha;
- $N_j$  - função de interpolação global correspondente ao nó  $j$ ;
- $\phi_j$  - valor de  $\phi$  no nó  $j$ .

O método dos resíduos pesados adoptado é o método de Bubnov-Galerkin pelo que teremos

tantas funções de peso quantos os nós da malha sendo  $w_i = N_i$  para cada nó  $i$ .

Obtém-se, a partir de (8), após diversas transformações, a expressão simplificada:

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} \phi_j = f_i \quad (10)$$

A matriz de rigidez  $K_{ij}$  é dada por:

$$K_{ij} = \int_V \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \int_{S_B} \alpha N_i N_j dS \quad (11)$$

O vector de solicitação  $f_i$  é dado por:

$$f_i = \int_V N_i Q dV - \int_{S_B} N_i (q - \alpha \phi_a) dS + X_i \quad (12)$$

em que  $X_i$  representa a parcela do vector de solicitação associada à condição fronteira de Dirichlet imposta em  $S_A$ , ou seja, numa analogia estrutural,  $X_i$  corresponde às reações de apoio correspondentes aos deslocamentos impostos ( $\phi = \bar{\phi}$ ) em  $S_A$ . Note-se que:

$$X_i = - \int_{S_A} N_i v_n dS \quad (13)$$

pelo que  $X_i$  representa o fluxo necessário em  $S_A$  para garantir os valores fixados  $\bar{\phi}$  da variável de campo  $\phi$ .

A matriz de rigidez global  $[K]$  e o vector de solicitação global  $\{f\}$  descritos em (11) e (12) são obtidos como habitualmente por agrupamento das contribuições  $[K^e]$  e  $\{f^e\}$  provenientes dos elementos finitos, sendo:

$$K_{ij}^e = \int_{V_e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \int_{S_B^e} \alpha N_i N_j dS \quad (14)$$

---


$$f_i^e = \int_{V_e} N_i Q dV - \int_{S_B^e} N_i (q - \alpha \phi_a) dS \quad (15)$$

Estas expressões podem ser escritas ainda de forma simplificada recorrendo ao tipo de notação utilizado normalmente nas aplicações estruturais. Teremos então:

$$K^e = \int_{V_e} B^T P B dV + \int_{S_B^e} \alpha N^T N dS \quad (16)$$

$$f^e = \int_{V_e} N^T Q dV - \int_{S_B^e} N^T (q - \alpha \phi_a) dS \quad (17)$$

onde:

$$B = [ B_1 , B_2 , \dots , B_i , \dots , B_n ] \quad (18)$$

$$B_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$P = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$N = [ N_1 , N_2 , \dots , N_i , \dots , N_n ] \quad (21)$$

sendo n o número de nós do elemento.

## 5. Problemas planos

Quando não existe dependência em relação a uma das direcções coordenadas, por exemplo Z, as expressões anteriores simplificam-se de maneira óbvia.

---

## 6. Problemas axissimétricos

Se existir simetria de condições no domínio e na sua fronteira em relação a um dos eixos, por exemplo Z, é possível simplificar as expressões gerais (10)-(17).

## 7. Aplicações

### 7.1 Percolação sob uma cortina de estacas-prancha

#### 7.1.1 Caracterização do problema

Apresentam-se em anexo, na Figura 1, as características geométricas do problema.

Os elementos apresentam as seguintes características:

- $Q = 0$
- $\theta = 0$
- $K_x = 5 \times 10^{-9} \text{ m/s}$
- $K_y = 5 \times 10^{-9} \text{ m/s}$

#### 7.1.2 Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada na resolução deste problema foi obtida com auxílio do programa GEN2D, a partir de 4 macroblocos.

A cortina foi idealizada sem espessura. A sua materialização foi obtida separando a zona correspondente da malha à esquerda e à direita da cortina pelo que, nessa zona, se obteve uma duplicação dos nós.

Uma vez que o GEN2D não permite a existência de vários nós com as mesmas coordenadas foi necessário fornecer abcissas ligeiramente diferentes para os nós dos macroblocos na zona de duplicação.

Tendo em vista a obtenção de uma representação gráfica da malha obtida e dada a limitação do programa utilizado para esse fim, que não permite malhas com um número de elementos superior a 50, obteve-se uma malha de apenas 48 elementos com 179 nós.

Apresentam-se em anexo, as figuras correspondentes à malha gerada assim como o ficheiro de dados que permitiu a sua obtenção.

---

### 7.1.3 Utilização do QUASAR

O QUASAR não permite a utilização de elementos infinitos pelo que foi necessário considerar o domínio limitado à esquerda e à direita da cortina, a uma distância que se considerou suficiente para não afectar os resultados.

A condição fronteira considerada foi a de Dirichlet que se verificou em 18 nós, situados na fronteira solo-água.

### 7.1.4 Resultados

Apresentam-se, em anexo, os valores dos potenciais nos diferentes nós da malha de elementos finitos.

## 7.2 Percolação sob a barragem de crestuma

### 7.2.1 Caracterização do problema

Apresentam-se em anexo, na Figura 5, as características geométricas do problema.

Os elementos apresentam as seguintes características:

- $Q = 0$
- $\theta = 0$
- $K_x = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$
- $K_y = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$

### 7.2.2 Malha de elementos finitos

A malha de elementos finitos utilizada na resolução deste problema foi obtida com auxílio do programa GEN2D, a partir de 8 macroblocos.

Tal como em 7.1.2, limitou-se o número de elementos da malha definitiva, de forma a ser possível a representação gráfica desta através do programa DRAWMESH, resultando uma malha de 37 elementos com 148 nós

Apresentam-se em anexo, as figuras correspondentes à malha gerada assim como o ficheiro de dados que permitiu a sua obtenção.

### 7.2.3 Utilização do QUASAR

O domínio em estudo foi limitado à esquerda e à direita da barragem, a uma distância que se considerou suficiente para não afectar os resultados dada a limitação do

---

programa que não permite a utilização de elementos infinitos.

A condição fronteira considerada foi a de Dirichlet que se verificou em 14 nós, situados na fronteira solo-água.

#### 7.2.4 **Resultados**

Apresentam-se, em anexo, os valores dos potenciais nos diferentes nós da malha de elementos finitos.

---

## APÊNDICES

- Percolação sob uma cortina de estacas-prancha

Apêndice A: [GEN2D] Ficheiro de Dados

Apêndice B: [QUASAR] Ficheiro de Dados

Apêndice C: [QUASAR] Resultados

- Percolação sob a barragem de Crestuma

Apêndice D: [GEN2D] Ficheiro de Dados

Apêndice E: [QUASAR] Ficheiro de Dados

Apêndice F: [QUASAR] Resultados



---

**Apêndice A:** Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
[GEN2D] Ficheiro de Dados

Estudo da percolação na vizinhança de uma cortina de estacas-prancha

23	4	8							
1	1	1	2	3	7	11	10	9	6
2	1	3	4	5	8	13	12	11	7
3	1	9	10	11	15	20	19	18	14
4	1	11	12	13	17	23	22	21	16
1	0	0	0						
2	9	0	0						
3	18	0	0						
4	27	0	0						
5	36	0	0						
6	0	4.5	0						
7	18	4.5	0						
8	36	4.5	0						
9	0	9	0						
10	9	9	0						
11	18	9	0						
12	27	9	0						
13	36	9	0						
14	0	13.5	0						
17	36	13.5	0						
18	0	18	0						
19	9	18	0						
20	18.00	18	0						
21	18.01	18	0						
22	27	18	0						
23	36	18	0						
4	3								
4	3	2	1						
1	1	1							
4	3								
1	2	3	4						
1	1	1							
4	3								
4	3	2	1						
1	1	1							
4	3								
1	2	3	4						
1	1	1							

---

**Apêndice B:** Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
[QUASAR] Ficheiro de Dados

Estudo da percolação na vizinhança de uma cortina de estacas-prancha

179	48	18	1	8	1	2			
1	1	1	2	3	11	17	16	15	10
2	1	3	4	5	12	19	18	17	11
3	1	5	6	7	13	21	20	19	12
4	1	7	8	9	14	23	22	21	13
5	1	15	16	17	25	31	30	29	24
6	1	17	18	19	26	33	32	31	25
7	1	19	20	21	27	35	34	33	26
8	1	21	22	23	28	37	36	35	27
9	1	29	30	31	39	45	44	43	38
10	1	31	32	33	40	47	46	45	39
11	1	33	34	35	41	49	48	47	40
12	1	35	36	37	42	51	50	49	41
13	1	9	52	53	60	65	64	23	14
14	1	53	54	55	61	67	66	65	60
15	1	55	56	57	62	69	68	67	61
16	1	57	58	59	63	71	70	69	62
17	1	23	64	65	72	77	76	37	28
18	1	65	66	67	73	79	78	77	72
19	1	67	68	69	74	81	80	79	73
20	1	69	70	71	75	83	82	81	74
21	1	37	76	77	84	89	88	51	42
22	1	77	78	79	85	91	90	89	84
23	1	79	80	81	86	93	92	91	85
24	1	81	82	83	87	95	94	93	86
25	1	43	44	45	97	103	102	101	96
26	1	45	46	47	98	105	104	103	97
27	1	47	48	49	99	107	106	105	98
28	1	49	50	51	100	109	108	107	99
29	1	101	102	103	111	117	116	115	110
30	1	103	104	105	112	119	118	117	111
31	1	105	106	107	113	121	120	119	112
32	1	107	108	109	114	123	122	121	113
33	1	115	116	117	125	131	130	129	124
34	1	117	118	119	126	133	132	131	125
35	1	119	120	121	127	135	134	133	126
36	1	121	122	123	128	137	136	135	127
37	1	51	88	89	139	145	144	143	138
38	1	89	90	91	140	147	146	145	139
39	1	91	92	93	141	149	148	147	140
40	1	93	94	95	142	151	150	149	141
41	1	143	144	145	153	159	158	157	152
42	1	145	146	147	154	161	160	159	153

---

43	1	147	148	149	155	163	162	161	154
44	1	149	150	151	156	165	164	163	155
45	1	157	158	159	167	173	172	171	166
46	1	159	160	161	168	175	174	173	167
47	1	161	162	163	169	177	176	175	168
48	1	163	164	165	170	179	178	177	169
1	.00000	.00000							
2	3.60000	.00000							
3	7.20000	.00000							
4	9.90000	.00000							
5	12.60000	.00000							
6	14.40000	.00000							
7	16.20000	.00000							
8	17.10000	.00000							
9	18.00000	.00000							
10	.00000	1.50000							
11	7.20000	1.50000							
12	12.60000	1.50000							
13	16.20000	1.50000							
14	18.00000	1.50000							
15	.00000	3.00000							
16	3.60000	3.00000							
17	7.20000	3.00000							
18	9.90000	3.00000							
19	12.60000	3.00000							
20	14.40000	3.00000							
21	16.20000	3.00000							
22	17.10000	3.00000							
23	18.00000	3.00000							
24	.00000	4.50000							
25	7.20000	4.50000							
26	12.60000	4.50000							
27	16.20000	4.50000							
28	18.00000	4.50000							
29	.00000	6.00000							
30	3.60000	6.00000							
31	7.20000	6.00000							
32	9.90000	6.00000							
33	12.60000	6.00000							
34	14.40000	6.00000							
35	16.20000	6.00000							
36	17.10000	6.00000							
37	18.00000	6.00000							
38	.00000	7.50000							
39	7.20000	7.50000							
40	12.60000	7.50000							
41	16.20000	7.50000							
42	18.00000	7.50000							
43	.00000	9.00000							
44	3.60000	9.00000							
45	7.20000	9.00000							

---

---

46	9.90000	9.00000
47	12.60000	9.00000
48	14.40000	9.00000
49	16.20000	9.00000
50	17.10000	9.00000
51	18.00000	9.00000
52	18.90000	.00000
53	19.80000	.00000
54	21.60000	.00000
55	23.40000	.00000
56	26.10000	.00000
57	28.80000	.00000
58	32.40000	.00000
59	36.00000	.00000
60	19.80000	1.50000
61	23.40000	1.50000
62	28.80000	1.50000
63	36.00000	1.50000
64	18.90000	3.00000
65	19.80000	3.00000
66	21.60000	3.00000
67	23.40000	3.00000
68	26.10000	3.00000
69	28.80000	3.00000
70	32.40000	3.00000
71	36.00000	3.00000
72	19.80000	4.50000
73	23.40000	4.50000
74	28.80000	4.50000
75	36.00000	4.50000
76	18.90000	6.00000
77	19.80000	6.00000
78	21.60000	6.00000
79	23.40000	6.00000
80	26.10000	6.00000
81	28.80000	6.00000
82	32.40000	6.00000
83	36.00000	6.00000
84	19.80000	7.50000
85	23.40000	7.50000
86	28.80000	7.50000
87	36.00000	7.50000
88	18.90000	9.00000
89	19.80000	9.00000
90	21.60000	9.00000
91	23.40000	9.00000
92	26.10000	9.00000
93	28.80000	9.00000
94	32.40000	9.00000
95	36.00000	9.00000
96	.00000	10.50000

---

---

97	7.20000	10.50000
98	12.60000	10.50000
99	16.20000	10.50000
100	18.00000	10.50000
101	.00000	12.00000
102	3.60000	12.00000
103	7.20000	12.00000
104	9.90000	12.00000
105	12.60000	12.00000
106	14.40000	12.00000
107	16.20000	12.00000
108	17.10000	12.00000
109	18.00000	12.00000
110	.00000	13.50000
111	7.20000	13.50000
112	12.60000	13.50000
113	16.20000	13.50000
114	18.00000	13.50000
115	.00000	15.00000
116	3.60000	15.00000
117	7.20000	15.00000
118	9.90000	15.00000
119	12.60000	15.00000
120	14.40000	15.00000
121	16.20000	15.00000
122	17.10000	15.00000
123	18.00000	15.00000
124	.00000	16.50000
125	7.20000	16.50000
126	12.60000	16.50000
127	16.20000	16.50000
128	18.00000	16.50000
129	.00000	18.00000
130	3.60000	18.00000
131	7.20000	18.00000
132	9.90000	18.00000
133	12.60000	18.00000
134	14.40000	18.00000
135	16.20000	18.00000
136	17.10000	18.00000
137	18.00000	18.00000
138	18.00167	10.50000
139	19.80120	10.50000
140	23.40047	10.50000
141	28.79987	10.50000
142	36.00000	10.50000
143	18.00333	12.00000
144	18.90285	12.00000
145	19.80240	12.00000
146	21.60160	12.00000
147	23.40093	12.00000

---

---

148	26.10018	12.00000
149	28.79973	12.00000
150	32.39960	12.00000
151	36.00000	12.00000
152	18.00500	13.50000
153	19.80360	13.50000
154	23.40140	13.50000
155	28.79960	13.50000
156	36.00000	13.50000
157	18.00667	15.00000
158	18.90570	15.00000
159	19.80480	15.00000
160	21.60320	15.00000
161	23.40187	15.00000
162	26.10037	15.00000
163	28.79947	15.00000
164	32.39920	15.00000
165	36.00000	15.00000
166	18.00833	16.50000
167	19.80600	16.50000
168	23.40233	16.50000
169	28.79933	16.50000
170	36.00000	16.50000
171	18.01000	18.00000
172	18.90855	18.00000
173	19.80720	18.00000
174	21.60480	18.00000
175	23.40280	18.00000
176	26.10055	18.00000
177	28.79920	18.00000
178	32.39880	18.00000
179	36.00000	18.00000
1		
5E-9	5E-9	0
129	27	
130	27	
131	27	
132	27	
133	27	
134	27	
135	27	
136	27	
137	27	
171	19.5	
172	19.5	
173	19.5	
174	19.5	
175	19.5	
176	19.5	
177	19.5	
178	19.5	

---

---

179 19.5

**Apêndice C:** Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
[QUASAR] Resultados

***** Potenciais *****					
Nó	$\phi$ (m)	Nó	$\phi$ (m)	Nó	$\phi$ (m)
1	2.537102E+01	61	2.215232E+01	121	2.619885E+01
2	2.529182E+01	62	2.143980E+01	122	2.618909E+01
3	2.504516E+01	63	2.111542E+01	123	2.616980E+01
4	2.474193E+01	64	2.303650E+01	124	2.678691E+01
5	2.433323E+01	65	2.283096E+01	125	2.674428E+01
6	2.400291E+01	66	2.244543E+01	126	2.665919E+01
7	2.363811E+01	67	2.210186E+01	127	2.660390E+01
8	2.344468E+01	68	2.169170E+01	128	2.659434E+01
9	2.325049E+01	69	2.139255E+01	129	2.700000E+01
10	2.538519E+01	70	2.115159E+01	130	2.700000E+01
11	2.506091E+01	71	2.107486E+01	131	2.700000E+01
12	2.434856E+01	72	2.278703E+01	132	2.700000E+01
13	2.364466E+01	73	2.201834E+01	133	2.700000E+01
14	2.325049E+01	74	2.131345E+01	134	2.700000E+01
15	2.542574E+01	75	2.100669E+01	135	2.700000E+01
16	2.534904E+01	76	2.298025E+01	136	2.700000E+01
17	2.510815E+01	77	2.269751E+01	137	2.700000E+01
18	2.480909E+01	78	2.224233E+01	138	2.191355E+01
19	2.439903E+01	79	2.189056E+01	139	2.174641E+01
20	2.405551E+01	80	2.148320E+01	140	2.117502E+01
21	2.367003E+01	81	2.120390E+01	141	2.070115E+01
22	2.346451E+01	82	2.098272E+01	142	2.049388E+01
23	2.325051E+01	83	2.091391E+01	143	2.128221E+01
24	2.549390E+01	84	2.255354E+01	144	2.127620E+01
25	2.518724E+01	85	2.169965E+01	145	2.116104E+01
26	2.448255E+01	86	2.106458E+01	146	2.102498E+01
27	2.371401E+01	87	2.079480E+01	147	2.085861E+01
28	2.325053E+01	88	2.263519E+01	148	2.064443E+01
29	2.558664E+01	89	2.219753E+01	149	2.048303E+01
30	2.551785E+01	90	2.176556E+01	150	2.035730E+01
31	2.529676E+01	91	2.147688E+01	151	2.031720E+01
32	2.501757E+01	92	2.112652E+01	152	2.075959E+01
33	2.461035E+01	93	2.089462E+01	153	2.072092E+01
34	2.425867E+01	94	2.071185E+01	154	2.052235E+01
35	2.380358E+01	95	2.065611E+01	155	2.025214E+01
36	2.352091E+01	96	2.600652E+01	156	2.012486E+01
37	2.325058E+01	97	2.579937E+01	157	2.033131E+01
38	2.570571E+01	98	2.532575E+01	158	2.031176E+01
39	2.543605E+01	99	2.475469E+01	159	2.030183E+01
40	2.480124E+01	100	2.458815E+01	160	2.024613E+01
41	2.394770E+01	101	2.618313E+01	161	2.018154E+01
42	2.325067E+01	102	2.614306E+01	162	2.008614E+01
43	2.584435E+01	103	2.601742E+01	163	2.000740E+01
44	2.578864E+01	104	2.585610E+01	164	1.994355E+01



---

45	2.560595E+01	105	2.564204E+01	165	1.992296E+01
46	2.537418E+01	106	2.547579E+01	166	1.990639E+01
47	2.502400E+01	107	2.534000E+01	167	1.989646E+01
48	2.473550E+01	108	2.522505E+01	168	1.984099E+01
49	2.430376E+01	109	2.521939E+01	169	1.975584E+01
50	2.386634E+01	110	2.637539E+01	170	1.971318E+01
51	2.325098E+01	111	2.624821E+01	171	1.950000E+01
52	2.305629E+01	112	2.597816E+01	172	1.950000E+01
53	2.286285E+01	113	2.577997E+01	173	1.950000E+01
54	2.249801E+01	114	2.574181E+01	174	1.950000E+01
55	2.216764E+01	115	2.657721E+01	175	1.950000E+01
56	2.175887E+01	116	2.655664E+01	176	1.950000E+01
57	2.145556E+01	117	2.649285E+01	177	1.950000E+01
58	2.120883E+01	118	2.641415E+01	178	1.950000E+01
59	2.112960E+01	119	2.631881E+01	179	1.950000E+01
60	2.285631E+01	120	2.625433E+01		

**Apêndice D: Percolação sob a barragem de Crestuma**  
**[GEN2D] Ficheiro de Dados**

ESTUDO DA PERCOLAÇÃO SOB A BARRAGEM DE CRESTUMA

43	8	8							
1	1	1	2	3	13	20	19	18	12
2	1	3	4	5	14	22	21	20	13
3	1	5	6	7	15	24	23	22	14
4	1	7	8	9	16	26	25	24	15
5	1	9	10	11	17	28	27	26	16
6	1	18	19	20	30	37	36	35	29
7	1	22	23	24	32	40	39	38	31
8	1	26	27	28	34	43	42	41	33
1	0.0	0.0	0						
3	40.0	0.0	0						
5	42.5	0.0	0						
7	87.5	0.0	0						
9	90.0	0.0	0						
11	130.0	0.0	0						
18	0.0	20.0	0						
20	40.0	20.0	0						
22	42.5	20.0	0						
24	87.5	20.0	0						
26	90.0	20.0	0						
28	130.0	20.0	0						
35	0.0	38.0	0						
37	40.0	38.0	0						
38	42.5	27.5	0						
40	87.5	27.5	0						
41	90.0	36.0	0						
43	130.0	36.0	0						
3	2								
3	2	1							
1	1								
1	2								
1									
1	1								
3	2								
1	1	1							
1	1								
1	2								
1									
1	1								
3	2								
1	2	3							
1	1								
3	2								
3	2	1							
1	1								
3	1								

---

1	1	1
1		
3	2	
1	2	3
1	1	

**Apêndice E: Percolação sob a barragem de Crestuma**  
**[QUASAR] Ficheiro de Dados**

ESTUDO DA PERCOLAÇÃO SOB A BARRAGEM DE CRESTUMA

148	37	14	1	8	1	2				
1		1	1	2	3	9	14	13	12	8
2		1	3	4	5	10	16	15	14	9
3		1	5	6	7	11	18	17	16	10
4		1	12	13	14	20	25	24	23	19
5		1	14	15	16	21	27	26	25	20
6		1	16	17	18	22	29	28	27	21
7		1	7	30	31	32	34	33	18	11
8		1	18	33	34	35	37	36	29	22
9		1	31	38	39	44	48	47	34	32
10		1	39	40	41	45	50	49	48	44
11		1	41	42	43	46	52	51	50	45
12		1	34	47	48	53	57	56	37	35
13		1	48	49	50	54	59	58	57	53
14		1	50	51	52	55	61	60	59	54
15		1	43	62	63	64	66	65	52	46
16		1	52	65	66	67	69	68	61	55
17		1	63	70	71	76	80	79	66	64
18		1	71	72	73	77	82	81	80	76
19		1	73	74	75	78	84	83	82	77
20		1	66	79	80	85	89	88	69	67
21		1	80	81	82	86	91	90	89	85
22		1	82	83	84	87	93	92	91	86
23		1	23	24	25	95	100	99	98	94
24		1	25	26	27	96	102	101	100	95
25		1	27	28	29	97	104	103	102	96
26		1	98	99	100	106	111	110	109	105
27		1	100	101	102	107	113	112	111	106
28		1	102	103	104	108	115	114	113	107
29		1	37	56	57	117	122	121	120	116
30		1	57	58	59	118	124	123	122	117
31		1	59	60	61	119	126	125	124	118
32		1	69	88	89	128	133	132	131	127
33		1	89	90	91	129	135	134	133	128
34		1	91	92	93	130	137	136	135	129
35		1	131	132	133	139	144	143	142	138
36		1	133	134	135	140	146	145	144	139
37		1	135	136	137	141	148	147	146	140
1		.00000	.00000							
2		10.00000	.00000							
3		20.00000	.00000							
4		26.66667	.00000							
5		33.33333	.00000							

---

6	36.66667	.00000
7	40.00000	.00000
8	.00000	5.00000
9	20.00000	5.00000
10	33.33333	5.00000
11	40.00000	5.00000
12	.00000	10.00000
13	10.00000	10.00000
14	20.00000	10.00000
15	26.66667	10.00000
16	33.33333	10.00000
17	36.66667	10.00000
18	40.00000	10.00000
19	.00000	15.00000
20	20.00000	15.00000
21	33.33333	15.00000
22	40.00000	15.00000
23	.00000	20.00000
24	10.00000	20.00000
25	20.00000	20.00000
26	26.66667	20.00000
27	33.33333	20.00000
28	36.66667	20.00000
29	40.00000	20.00000
30	41.25000	.00000
31	42.50000	.00000
32	42.50000	5.00000
33	41.25000	10.00000
34	42.50000	10.00000
35	42.50000	15.00000
36	41.25000	20.00000
37	42.50000	20.00000
38	50.00000	.00000
39	57.50000	.00000
40	65.00000	.00000
41	72.50000	.00000
42	80.00000	.00000
43	87.50000	.00000
44	57.50000	5.00000
45	72.50000	5.00000
46	87.50000	5.00000
47	50.00000	10.00000
48	57.50000	10.00000
49	65.00000	10.00000
50	72.50000	10.00000
51	80.00000	10.00000
52	87.50000	10.00000
53	57.50000	15.00000
54	72.50000	15.00000
55	87.50000	15.00000
56	50.00000	20.00000

---

---

57	57.50000	20.00000
58	65.00000	20.00000
59	72.50000	20.00000
60	80.00000	20.00000
61	87.50000	20.00000
62	88.75000	.00000
63	90.00000	.00000
64	90.00000	5.00000
65	88.75000	10.00000
66	90.00000	10.00000
67	90.00000	15.00000
68	88.75000	20.00000
69	90.00000	20.00000
70	93.33333	.00000
71	96.66667	.00000
72	103.33333	.00000
73	110.00000	.00000
74	120.00000	.00000
75	130.00000	.00000
76	96.66667	5.00000
77	110.00000	5.00000
78	130.00000	5.00000
79	93.33333	10.00000
80	96.66667	10.00000
81	103.33333	10.00000
82	110.00000	10.00000
83	120.00000	10.00000
84	130.00000	10.00000
85	96.66667	15.00000
86	110.00000	15.00000
87	130.00000	15.00000
88	93.33333	20.00000
89	96.66667	20.00000
90	103.33333	20.00000
91	110.00000	20.00000
92	120.00000	20.00000
93	130.00000	20.00000
94	.00000	24.50000
95	20.00000	24.50000
96	33.33333	24.50000
97	40.00000	24.50000
98	.00000	29.00000
99	10.00000	29.00000
100	20.00000	29.00000
101	26.66667	29.00000
102	33.33333	29.00000
103	36.66667	29.00000
104	40.00000	29.00000
105	.00000	33.50000
106	20.00000	33.50000
107	33.33333	33.50000

---

---

108	40.00000	33.50000
109	.00000	38.00000
110	10.00000	38.00000
111	20.00000	38.00000
112	26.66667	38.00000
113	33.33333	38.00000
114	36.66667	38.00000
115	40.00000	38.00000
116	42.50000	23.75000
117	57.50000	23.75000
118	72.50000	23.75000
119	87.50000	23.75000
120	42.50000	27.50000
121	50.00000	27.50000
122	57.50000	27.50000
123	65.00000	27.50000
124	72.50000	27.50000
125	80.00000	27.50000
126	87.50000	27.50000
127	90.00000	24.00000
128	96.66667	24.00000
129	110.00000	24.00000
130	130.00000	24.00000
131	90.00000	28.00000
132	93.33333	28.00000
133	96.66667	28.00000
134	103.33333	28.00000
135	110.00000	28.00000
136	120.00000	28.00000
137	130.00000	28.00000
138	90.00000	32.00000
139	96.66667	32.00000
140	110.00000	32.00000
141	130.00000	32.00000
142	90.00000	36.00000
143	93.33333	36.00000
144	96.66667	36.00000
145	103.33333	36.00000
146	110.00000	36.00000
147	120.00000	36.00000
148	130.00000	36.00000

1			
1E-5	1E-5	0	0
109	51.0		
110	51.0		
111	51.0		
112	51.0		
113	51.0		
114	51.0		
115	51.0		
142	49.0		

---

---

143	49.0
144	49.0
145	49.0
146	49.0
147	49.0
148	49.0



**Apêndice F: Percolação sob a barragem de Crestuma  
[QUASAR] Resultados**

***** Potenciais *****					
Nó	$\phi(m)$	Nó	$\phi(m)$	Nó	$\phi(m)$
1	5.078823E+01	51	4.970832E+01	101	5.087510E+01
2	5.077049E+01	52	4.956002E+01	102	5.085433E+01
3	5.071285E+01	53	5.011909E+01	103	5.083944E+01
4	5.064730E+01	54	4.985487E+01	104	5.083959E+01
5	5.056135E+01	55	4.954333E+01	105	5.096110E+01
6	5.051027E+01	56	5.024080E+01	106	5.094766E+01
7	5.045480E+01	57	5.012143E+01	107	5.092787E+01
8	5.079320E+01	58	4.998698E+01	108	5.092323E+01
9	5.071807E+01	59	4.985251E+01	109	5.100000E+01
10	5.056719E+01	60	4.973313E+01	110	5.100000E+01
11	5.045604E+01	61	4.957836E+01	111	5.100000E+01
12	5.080596E+01	62	4.954365E+01	112	5.100000E+01
13	5.078983E+01	63	4.951942E+01	113	5.100000E+01
14	5.073562E+01	64	4.951808E+01	114	5.100000E+01
15	5.067498E+01	65	4.952833E+01	115	5.100000E+01
16	5.058519E+01	66	4.949761E+01	116	5.031050E+01
17	5.053416E+01	67	4.949017E+01	117	5.011571E+01
18	5.047627E+01	68	4.949281E+01	118	4.985823E+01
19	5.082778E+01	69	4.940507E+01	119	4.966341E+01
20	5.076527E+01	70	4.946395E+01	120	5.026724E+01
21	5.062817E+01	71	4.941315E+01	121	5.023567E+01
22	5.048372E+01	72	4.932756E+01	122	5.010258E+01
23	5.085663E+01	73	4.926255E+01	123	4.998697E+01
24	5.084469E+01	74	4.920556E+01	124	4.987137E+01
25	5.080417E+01	75	4.918814E+01	125	4.973826E+01
26	5.076078E+01	76	4.940718E+01	126	4.970669E+01
27	5.069325E+01	77	4.925731E+01	127	4.924918E+01
28	5.064240E+01	78	4.918321E+01	128	4.921319E+01
29	5.056866E+01	79	4.944007E+01	129	4.913202E+01
30	5.043052E+01	80	4.938892E+01	130	4.909423E+01
31	5.040603E+01	81	4.929979E+01	131	4.915004E+01
32	5.041138E+01	82	4.923976E+01	132	4.915056E+01
33	5.044560E+01	83	4.918646E+01	133	4.913470E+01
34	5.041394E+01	84	4.917070E+01	134	4.911200E+01
35	5.043056E+01	85	4.934588E+01	135	4.908998E+01
36	5.048100E+01	86	4.921019E+01	136	4.907059E+01
37	5.039552E+01	87	4.914930E+01	137	4.906408E+01
38	5.026821E+01	88	4.933012E+01	138	4.907203E+01
39	5.012650E+01	89	4.928042E+01	139	4.906678E+01
40	4.998699E+01	90	4.921343E+01	140	4.904566E+01
41	4.984749E+01	91	4.917139E+01	141	4.903249E+01
42	4.970580E+01	92	4.913238E+01	142	4.900000E+01
43	4.956811E+01	93	4.912117E+01	143	4.900000E+01
44	5.012659E+01	94	5.088800E+01	144	4.900000E+01

---

45	4.984739E+01	95	5.084862E+01	145	4.900000E+01
46	4.956268E+01	96	5.076797E+01	146	4.900000E+01
47	5.026566E+01	97	5.073701E+01	147	4.900000E+01
48	5.012645E+01	98	5.092353E+01	148	4.900000E+01
49	4.998698E+01	99	5.091668E+01		
50	4.984751E+01	100	5.089675E+01		

---

## FIGURAS

- Percolação sob uma cortina de estacas-prancha

Figura 1: Geometria do Problema

Figura 2: Numeração dos Elementos

Figura 3: Numeração dos Nós

Figura 4: Localização das Fronteiras

- Percolação sob a barragem de Crestuma

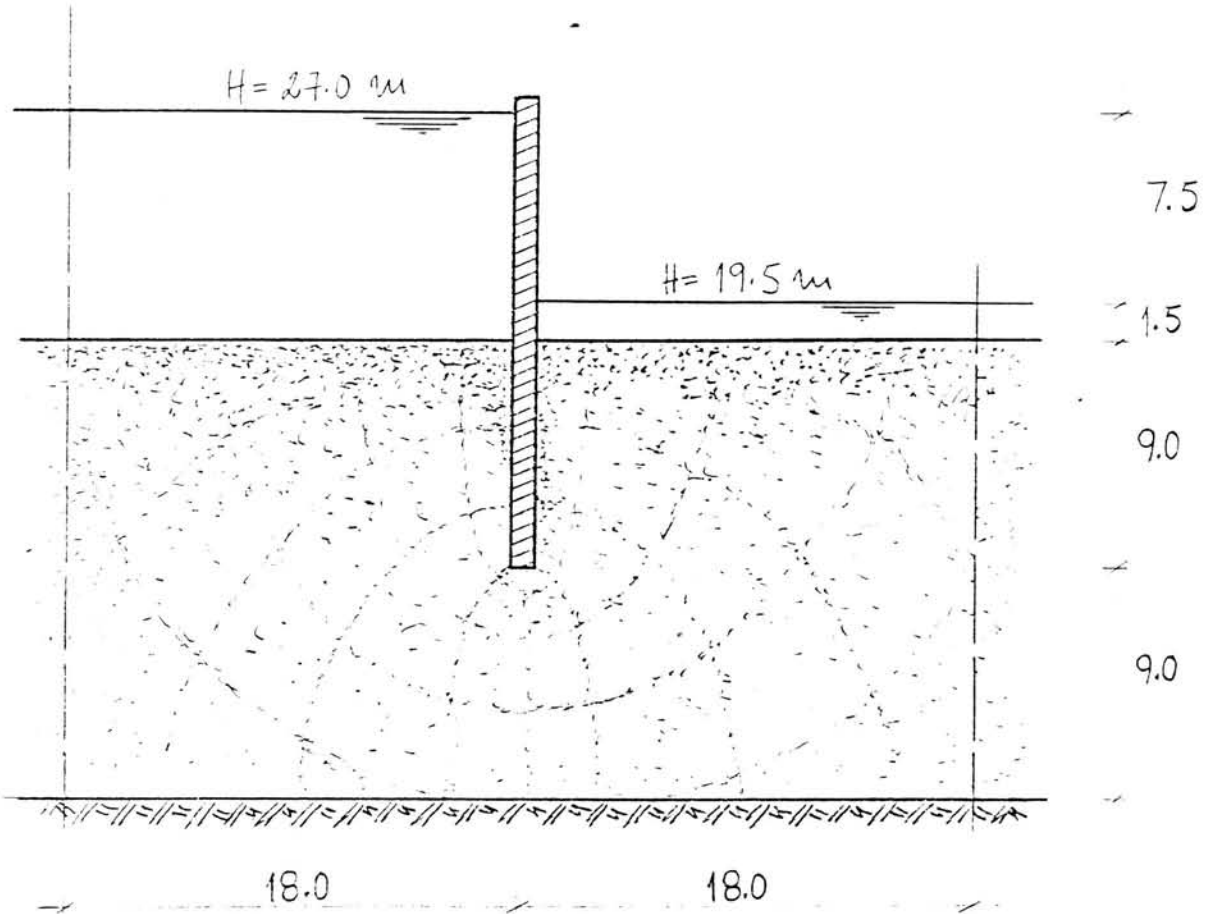
Figura 5: Geometria do Problema

Figura 6: Numeração dos Elementos

Figura 7: Numeração dos Nós

Figura 8: Localização das Fronteiras

**Figura 1:** Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
Geometria do Problema



CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS :

$$Q = 0$$

$$\partial = 0$$

$$K_x = K_y = 5 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

**Figura 2:** Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
 Numeração dos Elementos

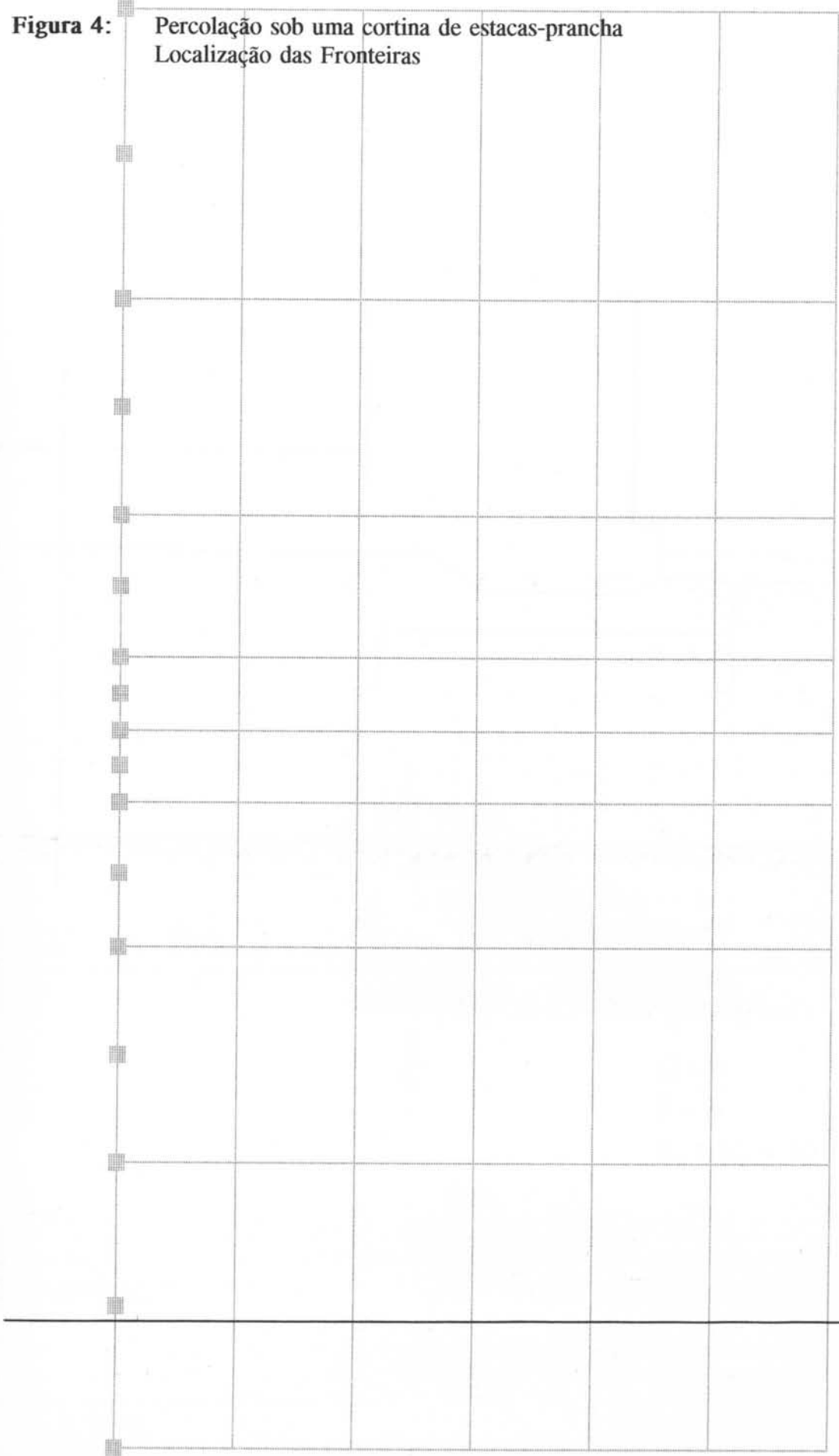
33	34	35	36	45	46	47	48
29	30	31	32	41	42	43	44
25	26	27	28	37	38	39	40
9	10	11	12	21	22	23	24
5	6	7	8	17	18	19	20
1	2	3	4	13	14	15	16

Figura 3: Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
Numeração dos Nós

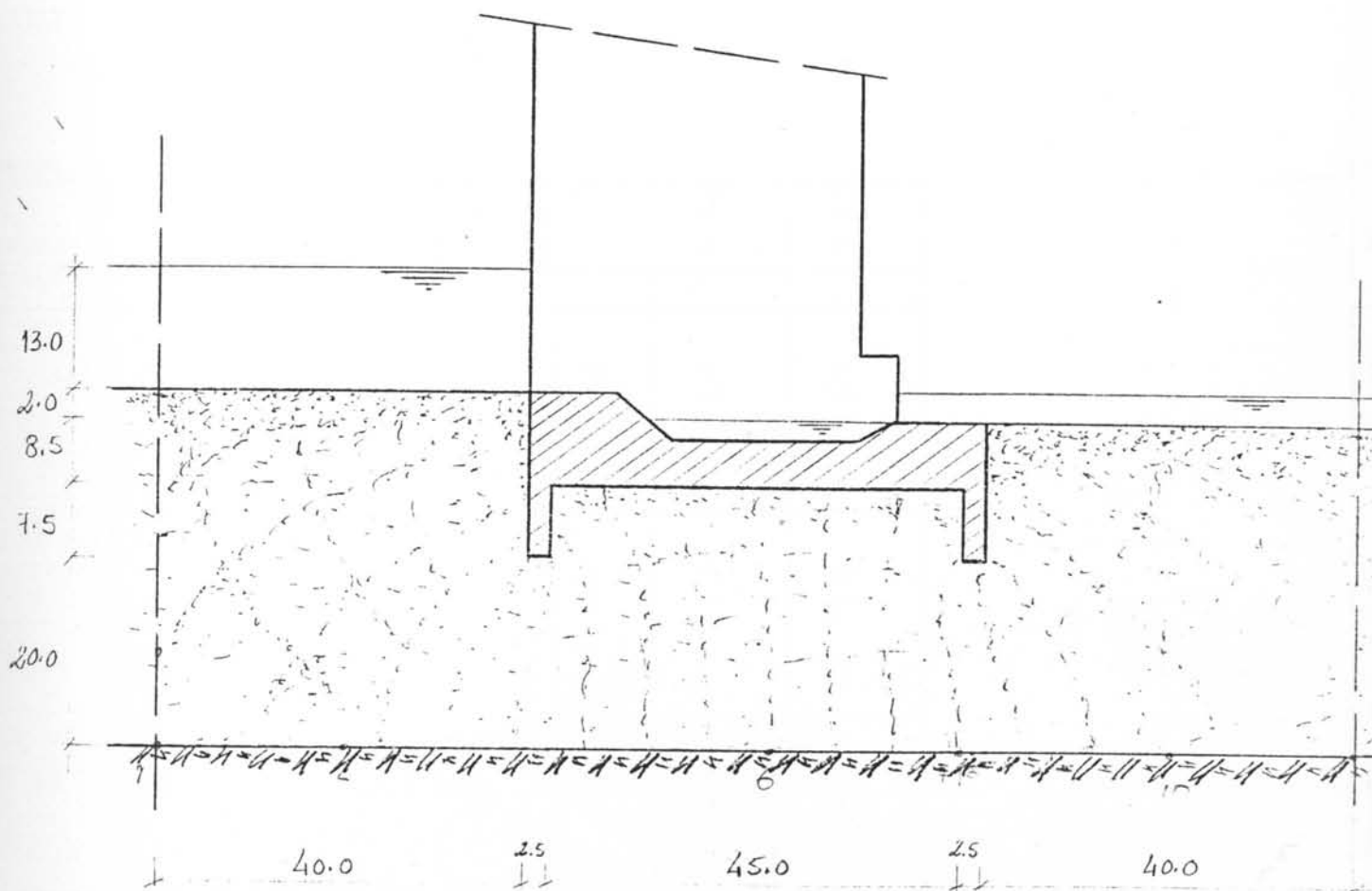
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	178	179
124		125	126	127	128	129	130	131	132	133	169	170
115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	163	165
110		111	112	113	114	115	116	117	118	119	155	156
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	149	151
96		97	98	99	100	101	102	103	104	105	141	142
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	93	95
38		39	40	41	42	43	44	45	46	47	86	87
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	81	83
24		25	26	27	28	29	30	31	32	33	74	75
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	69	71
10		11	12	13	14	15	16	17	18	19	62	63
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	57	59

Figura 4:

Percolação sob uma cortina de estacas-prancha  
Localização das Fronteiras



**Figura 5:** Percolação sob a barragem de Crestuma  
Geometria do Problema



CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS:

$$Q = 0$$

$$\theta = 0$$

$$K_x = K_y = 10^{-5} \text{ m/s}$$

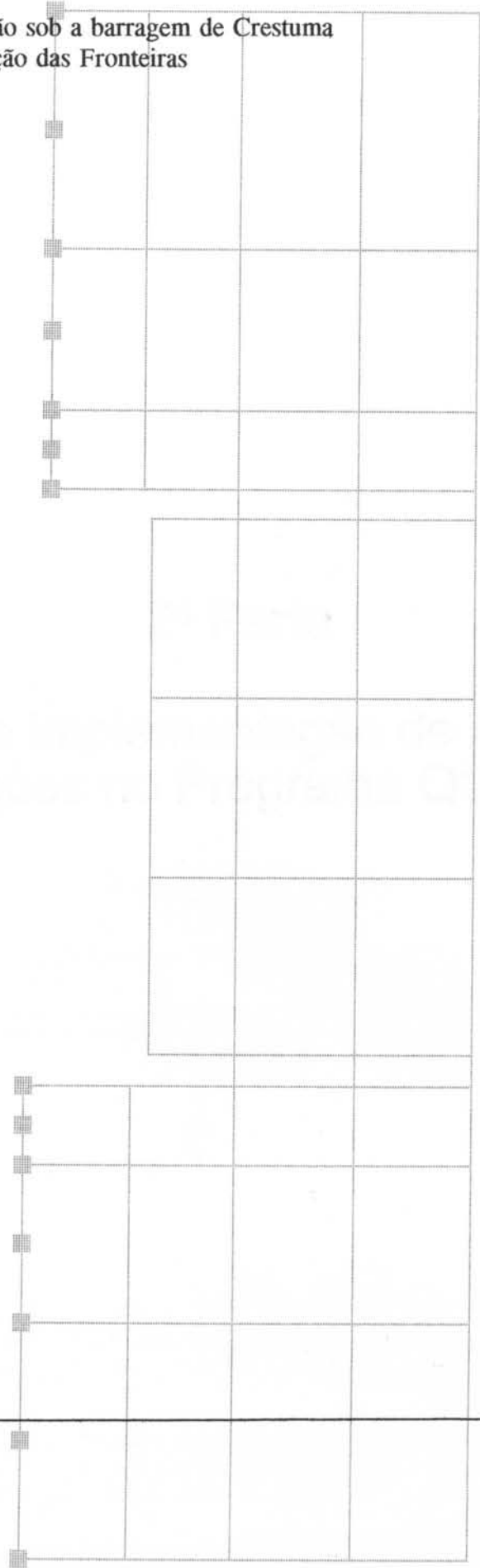


**Figura 6:** Percolação sob a barragem de Crestuma  
 Numeração dos Elementos

26	27	28			35	36	37
23	24	25	29	30	31	32	33
4	5	6	8	12	13	14	16
1	2	3	7	9	10	11	15
							17
							18
							19
							20
							21
							22



**Figura 8:** Percolação sob a barragem de Crestuma  
Localização das Fronteiras



## **2ª Parte**

### **Estudo e Implementação de Algumas Alterações no Programa QUASAR**

## **Armazenamento em Vector da Semibanda de Largura Variável**

---

## 1. Introdução

A resolução de problemas através da aplicação do MEF implica normalmente a manipulação de matrizes simétricas de dimensões razoáveis mas com grande número de elementos nulos que não afectam os cálculos pelo que o seu armazenamento não é necessário.

Tendo em vista a optimização do funcionamento do programa QUASAR em termos de ocupação de memória, procedeu-se ao estudo de algumas alterações através da sua aplicação ao programa PORTIC, de cálculo de pórticos planos pelo método dos deslocamentos.

As alterações têm como objectivo diminuir a ocupação do espaço disponível na memória do computador, tirando partido da simetria da matriz de rigidez global resultante da aplicação do método dos deslocamentos.

## 2. O programa PORTIC

O programa PORTIC efectua a análise de pórticos planos pelo método dos deslocamentos.

É constituído por 11 módulos organizados da seguinte forma:

- Programa principal;
- 8 subrotinas principais;
- 3 subrotinas auxiliares.

Estes módulos estão relacionados entre si de acordo com a Fig.1.

A versão fornecida faz o armazenamento completo da matriz de rigidez global. Este processo tem o inconveniente de armazenar:

- informação em duplicado devido à simetria da matriz.
- elementos nulos que não intervêm no cálculo;

## 3. Soluções Possíveis

### 3.1 Simetria

Uma vez que a matriz de rigidez global é simétrica em relação à diagonal, apenas é necessário armazenar o seu triângulo superior. Reduz-se assim, numa primeira fase, a ocupação de memória em cerca de:

$$\frac{n-1}{2n} \times 100 (\%)$$

n - número de nós da estrutura

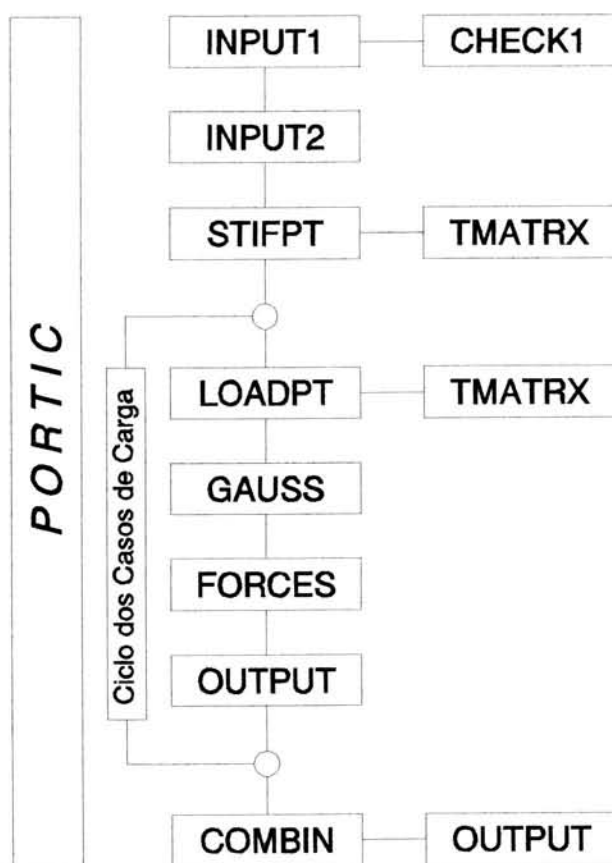


Fig. 9

### 3.2 Elementos Nulos

A matriz de rigidez, para uma dada estrutura, é uma matriz esparsa, isto é, apresenta uma grande percentagem de elementos nulos que resultam de não existir relação directa, isto é, uma barra, entre todos os nós.

Designa-se por matriz em banda, toda a matriz cujos coeficientes não nulos se encontram concentrados na vizinhança da diagonal principal.

A semibanda, que resulta da consideração do triângulo superior da matriz, poderá ser definida, para uma linha, como os elementos compreendidos entre a diagonal e o elemento não nulo com índice mais elevado.

A largura da semibanda é tanto maior quanto maior for a diferença entre os números dos nós de uma barra. É possível, adoptando uma numeração adequada para os nós das diferentes barras, reduzir a largura máxima da semibanda.

---

Tomando em consideração o funcionamento do método de Gauss, os elementos compreendidos na semibanda podem:

- situar-se, para determinada linha, no triângulo activo e, assim, interferir no resultado final;
- não se situar, qualquer que seja a linha, num triângulo activo não intervindo, por isso, na resolução do sistema.

Existem diversos processos para reduzir o espaço ocupado pelos elementos nulos no armazenamento do triângulo superior da matriz de rigidez global. De entre estes processos, destacamos:

- armazenamento em matriz da semibanda de largura constante;
- armazenamento em vector da semibanda de largura constante;
- armazenamento em vector da semibanda de largura variável.

Os dois primeiros processos obrigam a adoptar uma largura constante para a semibanda que terá que ser igual à largura máxima.

O terceiro processo apresenta uma maior economia de memória já que, para cada linha da matriz, são armazenados apenas os elementos que interferem na resolução do sistema.

Os processos indicados, optimizam a utilização do espaço disponível em memória permitindo assim a resolução de problemas de maiores dimensões. Apresentam, no entanto, o inconveniente de necessitarem de uma série de cálculos intermédios que fazem a localização dos elementos na matriz ou nos vectores em função das suas posições na matriz global.

O trabalho foi desenvolvido tendo em vista a implementação do terceiro processo, isto é, armazenamento do triângulo superior da matriz de rigidez global em vector considerando a largura variável da semibanda.

## 4. Implementação

### 4.1 Introdução

Para a implementação do armazenamento em vector tornou-se necessário proceder a alterações em alguns dos módulos que constituem o programa original. Foi necessária também a criação de um novo módulo, de acordo com a Fig. 2.

Tentou-se reduzir ao mínimo as alterações procurando-se tirar partido de todo o processo de cálculo já programado.

Descrevem-se a seguir as três opções possíveis para o armazenamento da matriz de rigidez de uma estrutura e cuja análise conduziu à criação do módulo **SEMBV**.



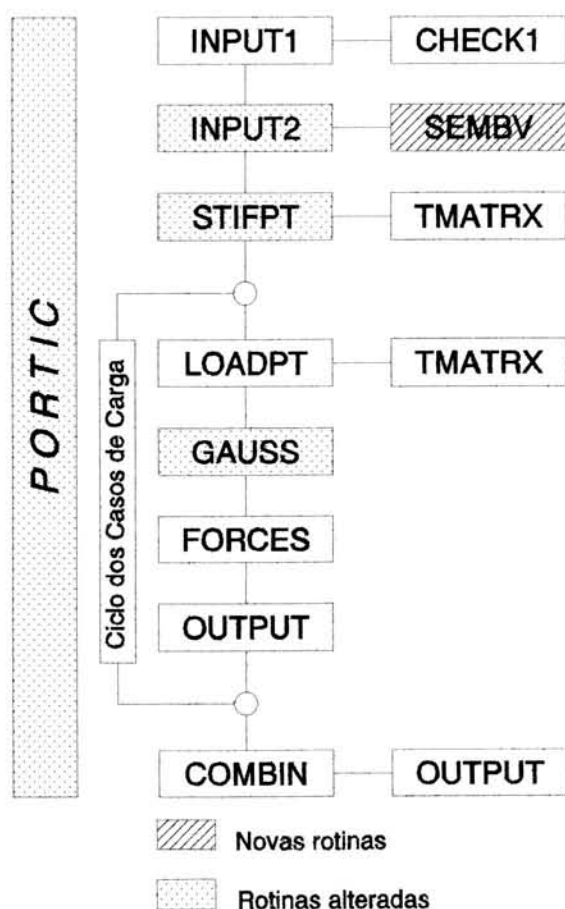


Fig. 10

#### 4.1.1 Armazenamento em matriz com semibanda de largura constante

Tal como já foi referido, neste método é necessário considerar a semibanda com uma largura constante e igual à máxima (LSB). O armazenamento é efectuado numa matriz  $\mathbf{M}$  com as seguintes características:

- nº de linhas -  $i_{max} = NPOIN \times NDOFN$
- nº de colunas -  $LSB$
- NPOIN - nº de nós da estrutura
- NDOFN - nº de graus de liberdade por nó

A correspondência entre os elementos das duas matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{M}$ , de acordo com a Fig. 3, é:

$$G(i, j) = M(i, j-i+1)$$

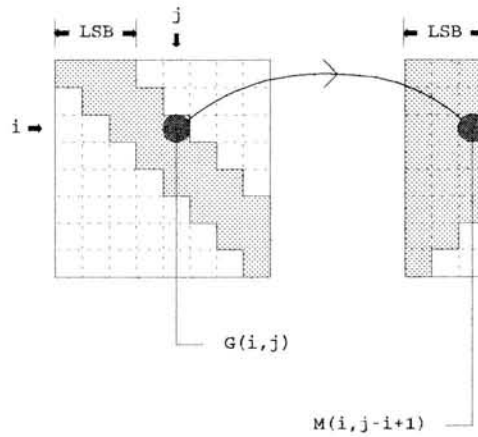


Fig. 11

#### 4.1.2 Armazenamento em vector com semibanda de largura constante

À semelhança do anterior, neste método é necessário considerar a semibanda com uma largura constante e igual à máxima ( $LSB$ ). O armazenamento é efectuado num vector  $V$  com dimensão dada por:

$$LSB \times NPOIN \times NDOFN$$

A correspondência entre os elementos da matriz  $G$  e os elementos do vector  $V$ , de acordo com a Fig. 4, é:

$$G(i, j) = V [ (i-1) \times LSB + j - i + 1 ]$$

#### 4.1.3 Armazenamento em vector com semibanda de largura variável

Neste método não existe uma relação directa entre os elementos da matriz de rigidez e os elementos do vector resultante  $W$ .

Para determinar a posição de um elemento  $(i, j)$  da matriz  $G$  no vector  $W$  é necessário conhecer a posição, no vector, do elemento  $(i, i)$ , isto é, do elemento da diagonal da linha  $i$ .

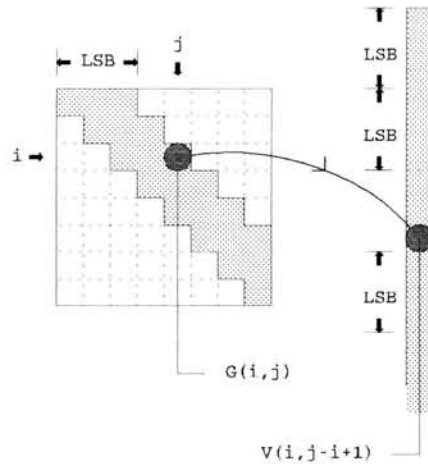


Fig. 12

Se POS representar a posição, no vector  $\mathbf{W}$ , do elemento  $(i,i)$  da matriz  $\mathbf{G}$ , obtém-se a relação:

$$G(i, j) = W(POS + j - i)$$

Uma vez que o vector  $\mathbf{W}$  é utilizado ao longo de todo o processo de cálculo é necessário dispor das posições, nesse vector, de todos os elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{G}$ . Estas posições podem ser armazenadas num vector  $\mathbf{P}$  com dimensão:

$$NPOIN \times NDOFN$$

A relação entre os elementos da matriz  $\mathbf{G}$  e os elementos do vector  $\mathbf{W}$ , de acordo com a Fig. 5, passará a ser:

$$G(i, j) = W[P(i) + j - i]$$

A dimensão do vector  $\mathbf{W}$  é dada pelo conteúdo do último elemento do vector  $\mathbf{P}$ .

#### 4.2 O módulo SEMBV

O módulo **SEMBV**, a partir das ligações nodais dos diversos elementos, cria um vector **INDX** onde são armazenadas as posições, no vector **GSTIF**, dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez da estrutura.

As dimensões dos vectores **INDX** e **GSTIF**, assim como a relação entre os elementos da

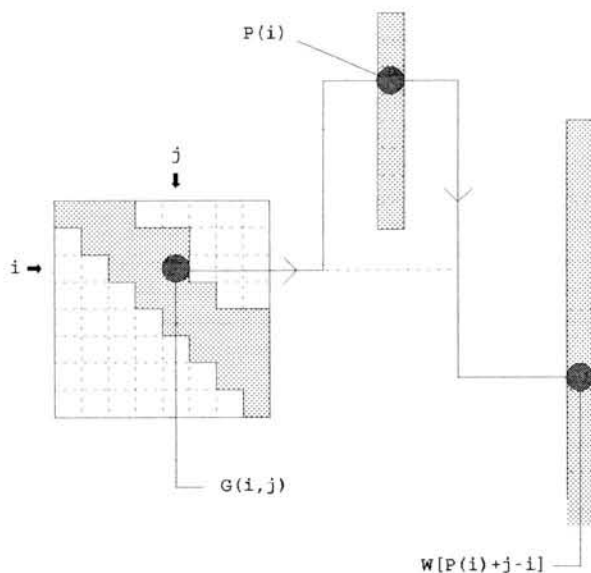


Fig. 13

matriz de rigidez e os elementos do vector **GSTIF**, obedecem ao exposto em 5.1.3.

O módulo está dividido em 6 partes:

#### 4.2.1 Declaração de variáveis

Como parâmetros, o módulo necessita da seguinte informação:

- NPOIN - n<sup>o</sup> de nós da estrutura;
- NELEM - n<sup>o</sup> de elementos da estrutura;
- NNODE - n<sup>o</sup> de nós por elemento;
- LNODS - ligações nodais de cada elemento;
- NTOTV - n<sup>o</sup> total de variáveis

Como parâmetro, o módulo fornece a seguinte informação:

- INDX - posições, no vector **GSTIF**, dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez da estrutura.

#### 4.2.2 Determinação da largura máxima da semibanda em cada linha

É necessário, para obtermos as posições dos elementos da diagonal no vector, conhecer a largura da semibanda em cada uma das linhas da matriz de rigidez.

A largura da semibanda é dada pela diferença entre o número do nó em estudo e o

```

SUBROUTINE SEMBV (NPOIN, NELEM, NNODE, INDX, LNODS,NTOTV)
C*****
**
C***  CALCULO DO VECTOR NECESSÁRIO A SEMIBANDA VARIÁVEL
C**** 1992/10/23 * PAT & LMQ *****
$debug
$large
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION LNODS(NNODE,NELEM), INDX(NTOTV)
C***  INICIALIZACAO DO VECTOR INDX *****
      DO 50 I = 1,NTOTV
         INDX(I) = 0
50  CONTINUE

```

número do nó contíguo mais elevado. Em termos de graus de liberdade, o raciocínio é análogo.

Explica-se a seguir, passo a passo, a codificação do exposto.

```

C*** DETERMINAÇÃO DA LARGURA MAXIMA DE CADA LINHA *****
      DO 100 IELEM = 1, NELEM
      [...]
100 CONTINUE

```

Este ciclo varre todos os elementos da estrutura. Para cada um dos elementos:

A variável **K** é inicializada com o número do nó que se encontra na primeira posição, da matriz de ligações nodais, correspondente ao elemento em estudo.

O ciclo **150** percorre as restantes posições da mesma matriz que correspondem ao elemento em estudo. Para cada uma dessas posições é verificado se o número de nó aí armazenado é superior ao valor corrente da variável **K**. Em caso afirmativo, **K** toma o valor dessa posição.

Uma vez que a matriz de rigidez é desenvolvida em termos de graus de liberdade e cada nó pode ter até 3 graus de liberdade, teremos a seguinte correspondência:

```

C***  DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DO NO MAIS ALTO DA BARRA EM ESTUDO  *****
      K=LNODS(1,IELEM)
      DO 150 L=2,NNODE
        IF (LNODS(L,IELEM).GT.K) THEN
          K=LNODS(L,IELEM)
        ENDIF
150    CONTINUE
      K=K*3

```

Nó	Graus de Liberdade
<b>n</b>	3.n-2
	3.n-1
	3.n

Tendo em consideração a relação acima indicada, ao número de nó mais elevado de um elemento armazenado na variável **K** corresponderá um grau de liberdade máximo de **K\*3**.

Depois de obtido, para um elemento, o número do grau de liberdade mais elevado é necessário verificar se, para cada um dos outros graus de liberdade relacionados com o mesmo elemento, a largura da semibanda é inferior à determinada por este máximo.

Através do ciclo **200** percorremos, em primeiro lugar, os nós do elemento em estudo e, a seguir, os graus de liberdade correspondentes a cada um desses nós.

Para cada um dos graus de liberdade é verificado se a largura correspondente da semibanda registada no vector **INDX** é inferior à obtida através deste elemento. Em caso afirmativo, é feita a substituição correspondente.

A largura da semibanda é determinada por:

$$K - M + 1$$

- K - grau de liberdade máximo;
- M - n<sup>o</sup> do grau de liberdade em estudo.

#### 4.2.3 Verificação e correcção das reentrâncias na matriz e determinação da largura máxima da semibanda

```

DO 200 L=1,NNODE
C*** PASSAGEM DA VERIFICAÇÃO DO NO PARA OS GRAUS DE LIBERDADE *****
DO 200 M=LNODS(L,IELEM)*3-2, LNODS(L,IELEM)*3
C*** SE NECESSÁRIO ARMAZENAR NOVO VALOR PARA A LARGURA DESDE A DIAGONAL
      IF (INDX(M).LT.K-M+1) THEN
          INDX(M) = K-M+1
      ENDIF
200 CONTINUE

```

Durante a aplicação do método de Gauss, alguns dos elementos nulos tomam valores diferentes de zero. Estes elementos fazem parte dos triângulos activos das linhas da matriz.

É necessário, por isso, que, para além dos valores não nulos resultantes da formação da matriz de rigidez, sejam também armazenados todos os valores que façam parte dos referidos triângulos.

Para uma linha  $i$  com largura da semibanda **LSB** e cujo elemento pertencente à diagonal principal se encontra na posição  $j$ , o triângulo activo abrange as **LSB-1** linhas seguintes (Fig.6). A largura da semibanda em cada uma destas linhas não poderá ser inferior a **LSB-(j-i)**.

Em termos gerais, a linha  $i=j+1$  deverá ter uma largura mínima:

$$LSB-(j-i) \Leftrightarrow LSB-(j-(j+1)) \Leftrightarrow LSB-j+j-1 \Leftrightarrow LSB-1$$

A diferença entre as larguras de duas linhas consecutivas não pode ser superior à unidade.

O ciclo **500** percorre todas as linhas da matriz a partir da segunda. Para cada linha, se o conteúdo da posição correspondente do vector **INDX** for inferior ao da posição anterior diminuído de uma unidade, então o seu valor será igualado a este último diminuído da unidade.

Para comparar a ocupação de memória que resultaria da aplicação dos diversos métodos de armazenamento da matriz global de rigidez é necessário determinar a largura máxima da semibanda.

A largura máxima da semibanda é armazenada na variável **LGMAX** que é inicializada com o valor da largura da semibanda na primeira linha. À medida que são

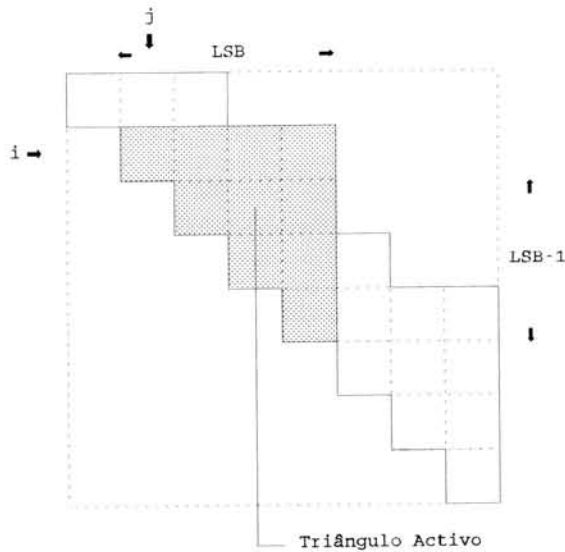


Fig. 14

```

C*** VERIFICAÇÃO E CORRECCAO DAS REENTRÂNCIAS NA MATRIZ E
C DETERMINAÇÃO DA LARGURA MAXIMA DA SEMIBANDA ***

LGMAX=INDX(1)
DO 500 I = 2, NPOIN*3
  IF (INDX(I).LT.INDX(I-1)-1) THEN
    INDX(I)=INDX(I-1)-1
  ENDIF
  IF (INDX(I).GT.LGMAX) THEN
    LGMAX=INDX(I)
  ENDIF
500 CONTINUE

```

efectuadas as correcções das larguras das linhas, estas são comparadas com o valor armazenado em **LGMAX**. Se alguma destas larguras corrigidas, armazenadas no vector **INDX**, for superior a **LGMAX**, esta toma o seu valor.

#### 4.2.4 Cálculo das posições dos elementos da diagonal

De acordo com 4.1.3 o vector **P** ou, no programa, o vector **INDX** deverá conter as posições, no vector de rigidez global, dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez global.

O elemento da diagonal da primeira linha da matriz de rigidez ocupa a primeira posição no vector de rigidez. A posição correspondente do vector **INDX** deverá ser



---

```

C***  CALCULO DAS POSIÇÕES DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL *****
      I=INDX(1)
      INDX(1)=1

      DO 600 L = 2, NTOTV
         J = INDX(L)
         INDX(L) = INDX(L-1)+I
         I = J
600    CONTINUE

```

inicializada com a unidade.

Cada uma das posições dos restantes elementos da diagonal da matriz (**INDX(L)**) é obtida somando a largura da linha anterior (**I**) à posição do elemento anterior (**INDX(L-1)**).

As variáveis **I** e **J** são variáveis temporárias que permitem a substituição dos valores contidos em **INDX** sem que se perca a informação necessária aos cálculos posteriores.

### 4.3 Outras alterações

O armazenamento da matriz de rigidez em vector considerando a semibanda de largura variável, para além da introdução do módulo **SEMBV**, implica outras alterações noutros módulos do programa **PORTIC** que se descrevem a seguir.

#### 4.3.1 O módulo INPUT2

O módulo **INPUT2** faz a leitura da topologia da malha e das características das secções tipo. É a partir deste módulo que é executado o módulo **SEMBV**. Por isso, foi alterada a lista de parâmetros de forma a que o vector **INDX** possa ser utilizado em outras alturas do processo de cálculo. No que respeita às variáveis declara-se o vector **INDX** e procede-se ao seu dimensionamento.

Para o funcionamento do módulo **SEMBV** é necessária apenas a matriz de ligações nodais pelo que a sua chamada se processa imediatamente após a conclusão da leitura da matriz.

#### 4.3.2 O módulo STIFPT

O módulo **STIFPT** calcula a matriz de rigidez de cada barra no referencial global e procede ao respectivo espalhamento no vector de rigidez global **GSTIF**.

---

```
[...]
```

```
C*** CHAMADA DA ROTINA SEMBV PARA CALCULO DO VECTOR SEMIB VARIÁVEL ***
```

```
CALL SEMBV (NPOIN, NELEM, NNODE, INDX, LNODS,NTOTV)
```

```
[...]
```

Na lista de parâmetros, este módulo inclui o vector **INDX** e a variável **MXDIM** que toma o valor do último elemento do vector **INDX**. O último elemento do vector **INDX** corresponde à última posição do vector de rigidez global, isto é, a posição, no vector, do último elemento da diagonal principal da matriz de rigidez. Como resultado, é fornecido o vector de rigidez **GSTIF** de dimensão **MXDIM**.

Na declaração de variáveis são dimensionados os vectores **INDX** e **GSTIF**.

Tal como já foi referido, procurou-se reduzir o número de alterações do programa ao mínimo. Assim, define-se neste módulo uma função **KFUNC** que, a partir de uma posição **I, J** na matriz de rigidez, calcula a posição de um elemento no vector de rigidez.

```
[...]
```

```
C*** FUNÇÃO QUE CALCULA A POSIÇÃO DO ELEM. (I,J) DA MATRIZ NO VECTOR **
```

```
KFUNC(I,J)=INDX(I)+J-I
```

```
[...]
```

A inicialização do vector **GSTIF** poderia ser efectuada mantendo os ciclos sobre as linhas e as colunas da matriz de rigidez *teórica* e utilizando a função definida para calcular a posição correspondente. Optou-se, no entanto, por utilizar apenas um ciclo sobre todos os elementos do vector para proceder à sua inicialização.

Para o espalhamento dos elementos da matriz de rigidez de cada barra é calculada em primeiro lugar a posição de cada um desses elementos na matriz de rigidez *teórica* (**ITOTV, JTOTV**).

Dada a simetria da matriz de rigidez global, só são armazenados no vector correspondente os elementos que se encontrem no triângulo superior da matriz. Estes elementos são aqueles cujo número da coluna (**JTOTV**) é igual ou superior ao seu número de linha (**ITOTV**).

```

[... ]
C*** INICIALIZACAO DO VECTOR DE RIGIDEZ GLOBAL
      DO 100 JTOTV = 1,INDX(NTOTV)
          GSTIF(JTOTV) = 0.0
100   CONTINUE
[... ]

```

As alterações efectuadas na realização do espalhamento resumem-se à verificação da condição referida e, através da função **KFUNC**, à actualização do elemento do vector **GSTIF** correspondente à posição na matriz global.

```

[... ]
      IF (JTOTV.GE.ITOTV) THEN
          IJTTV = KFUNC(ITOTV, JTOTV)
          GSTIF(IJTTV) = GSTIF(IJTTV)+STIFK(IEVAB,JEVAB)
      ENDIF
[... ]

```

#### 4.3.3 O módulo GAUSS

O método dos deslocamentos requer a resolução de um sistema de equações. Apesar de, em termos de rapidez de cálculo, não ser o mais eficiente, o método de Gauss é eficiente em termos de ocupação de memória e simplicidade do processo o que permite uma mais fácil adaptação a situações específicas.

Este módulo, após as alterações introduzidas, efectua a redução e retrosubstituição de Gauss tendo em conta a simetria da matriz de coeficientes e o armazenamento do triângulo superior em vector.

Como parâmetros, este módulo recebe o vector **GSTIF** no vector **A**, o vector **INDX** e a variável **MXDIM** com os valores e significados indicados em 4.3.2.

Define-se também a função **KFUNC** de forma semelhante à indicada em 4.3.2.

No desenvolvimento do método de Gauss com armazenamento total da matriz de coeficientes, durante o processo de redução da matriz, são percorridas todas as linhas que se

---

encontrem abaixo da linha do pivot.

Com o armazenamento em vector da matriz de coeficientes do tipo da matriz global de rigidez global, durante o processo de redução da matriz, apenas deverão ser percorridas as linhas em que existam elementos dentro do triângulo activo da linha do pivot.

Para cada escolha de pivot, é necessário determinar, de acordo com o indicado em 4.2.3, o número de linhas que fazem parte do triângulo activo.:

```
[...]  
C***  VERIFICAÇÃO DA DIMENSÃO DO TRIÂNGULO ACTIVO  
      IF (L.LT.N) THEN  
        NI=L+INDX(L+1)-INDX(L)-1  
      ELSE  
        NI=N  
      ENDIF  
[...]
```

No processo de retrosubstituição, pelo mesmo motivo, utiliza-se uma condição semelhante.

```
[...]  
C***  VERIFICAÇÃO DA DIMENSÃO DO TRIÂNGULO ACTIVO  
      IF (L.LT.N) THEN  
        NI=L+INDX(L+1)-INDX(L)-1  
      ELSE  
        NI=N  
      ENDIF  
[...]
```

Apesar do número de alterações efectuadas neste módulo, a maior parte delas consistiu apenas na aplicação da função **KFUNC** não carecendo de qualquer explicação.

---

#### 4.3.4 O módulo PORTIC

As principais alterações efectuadas no módulo principal estão ligadas à alteração da definição de algumas variáveis assim como à definição de novas variáveis. As restantes alterações consistem na alteração da lista de parâmetros nos comandos de chamada de alguns dos módulos.

```
[...]  
C*** DEFINICAO DE VARIÁVEIS ASSOCIADAS COM O DIMENSIONAMENTO DINÂMICO  
PARAMETER (MPOIN = 70, MELEM = 45, MMATS = 20, MCASE = 10,  
.          NNODE = 2, NDOFN = 3, NDIME = 2, NPROP = 6,  
.          NEVAB = NNODE*NDOFN,          MTOTV = MPOIN*NDOFN,  
.          MXDIM = 15*MTOTV*(MTOTV+1)/100)  
[...]
```

Define-se a variável **MXDIM** como a maior dimensão provável para o vector de rigidez global. Para a sua definição considerou-se que o triângulo superior da matriz de rigidez global, em média, tem apenas cerca de 30% de elementos não nulos:

$$MXDIM = \frac{30}{100} \times \frac{MTOTV \times (MTOTV + 1)}{2} \Leftrightarrow MXDIM = \frac{15}{100} \times MTOTV \times (MTOTV + 1)$$

O vector **GSTIF** é dimensionado com a dimensão máxima **MXDIM** enquanto que o vector **INDX** é dimensionado com o valor **MTOTV** que corresponde ao número máximo de graus de liberdade ou incógnitas em jogo.

```
[...]  
      DIMENSION IFFIX(MTOTV), GLOAD(MTOTV), GSTIF(MXDIM),  
.             DDISP(MTOTV), REACT(MTOTV), FIXED(MTOTV),  
.             CDISP(MTOTV), CREAC(MTOTV), INDX(MTOTV)  
[...]
```

A alteração da lista de parâmetros nos comandos de chamada de alguns dos módulos obedece ao referido oportunamente para cada um deles.

#### 5. Exemplo

## PÓRTICO DE NAVE INDUSTRIAL

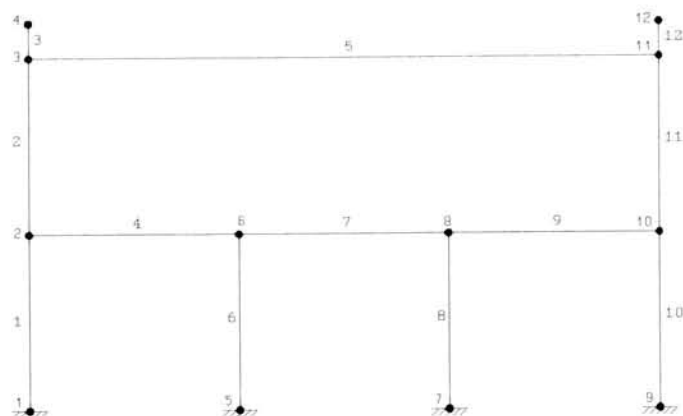


Fig. 15

A resolução do exemplo da Fig. 7 permitiu obter os seguintes valores:

```
*** DIAGNÓSTICO DA SUBROTINA "SEMBV" :  
*** Economia de memória em relação ao armazenamento:  
- Total da matriz:                65.28 %  
- Do triângulo superior:          32.43 %  
- Da semibanda de largura fixa:   53.70 %
```

## 6. Comentários

O armazenamento em vector da semibanda de largura variável representará, em quase todos os casos, uma economia de espaço que poderá mesmo ser considerável.

A eficiência deste processo pode, no entanto, ser diminuída se os elementos da estrutura não forem numerados com algum cuidado. Por exemplo, se o primeiro elemento da estrutura ligar os nós extremos o triângulo activo da primeira linha obrigaria ao armazenamento da totalidade do triângulo superior.

A condicionante existente nos computadores pessoais do acesso directo à memória estar limitada a 640k torna este processo útil para a resolução de problemas de dimensão maior. O incremento que se verifica no número de operações matemáticas perde importância se tomarmos em consideração a crescente velocidade de cálculo dos computadores actuais.

---

Anexam-se listagens dos módulos alterados assim como o guia do utilizador.

As alterações implementadas no programa PORTIC, dada a semelhança entre o processo de cálculo do método dos deslocamentos e do MEF, são facilmente transportáveis para o QUASAR.

---

## APÊNDICES

- Apêndice A: Guia do Utilizador
- Apêndice B: Módulo SEMBV
- Apêndice C: Módulo INPUT2
- Apêndice D: Módulo STIFPT
- Apêndice E: Módulo GAUSS
- Apêndice F: Módulo PORTIC

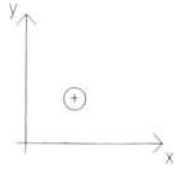


---

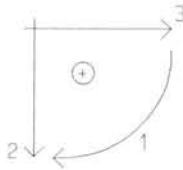
## Apêndice A: Guia do Utilizador

Convenções utilizadas:

- Coordenadas



- Variáveis Generalizadas



- Esforços Finais



Ficheiro de Dados (Formato livre)

1. Título do Problema [3 linhas]
2. Parâmetros de Controle [1 linha]

**NPOIN, NELEM, NVFIX, NMATS, NCASE, NCOMB**

NPOIN: n° de nós;	NMATS: n° de secções tipo;
NELEM: n° de barras;	NCASE: n° de casos de carga;
NVFIX: n° de nós ligados ao exterior;	NCOMB: n° de combinações.

3. Características das Barras [NELEM linhas]

**N° BARRA, N° SECÇÃO-TIPO, N° EXTREM.1, N° EXTREM.2**

4. Coordenadas dos Nós [NPOIN linhas]

---

**Nº NÓ, COORDENADA X, COORDENADA Y**

5. Ligações ao Exterior

[NVFIX linhas]

**Nº NÓ, CÓDIGO 1 - CÓDIGO 2 - CÓDIGO 3**

Código 1: rotação

Código:

Código 2: desl. vertical

1 - deslocamento impedido

Código 3: desl. horizontal

2 - deslocamento livre

6. Características Geométricas e Mecânicas das Secções-Tipo

[2 x NMATS linhas]

**Nº DA SECÇÃO TIPO**

**E, b, h, I<sub>x</sub>, A, α**

E: módulo de Young;

I<sub>x</sub>: momento de inércia;

b: largura da secção recta;

A: área da secção recta;

h: altura da secção recta;

α: coef. dilatação térmica.

Se I<sub>x</sub>=0 então  $I_x = \frac{b \times h^3}{12}$

Se A=0 então  $A = b \times h$

7. Definição das Acções

7.1 Título do Caso de Carga

[1 linha]

7.2 Parâmetros de Controle

[1 linha]

**IPNOD, IPBAR, IDIST, ITERM, ISETL, IWRIT**

Valores possíveis: 1 - Sim;

0 - Não.

7.3 Forças Concentradas Aplicadas nos Nós

**NPNOD**

[1 linha]

**Nº NÓ, M, F<sub>v</sub>, F<sub>h</sub>**

[NPNOD linhas]

NPNOD: nº de cargas concentradas

Omitir este bloco se NPNOD=0.

---

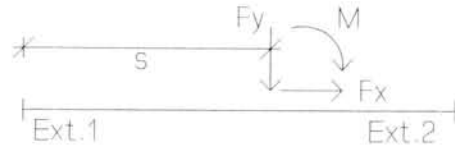
#### 7.4 Forças Concentradas Aplicadas nas Barras

**NPBAR**

**Nº BARRA, S, M, F<sub>y</sub>, F<sub>x</sub>**

[1 linha]  
[NPBAR linhas]

NPBAR: nº cargas concentradas.



Omitir este bloco se IPBAR=0.

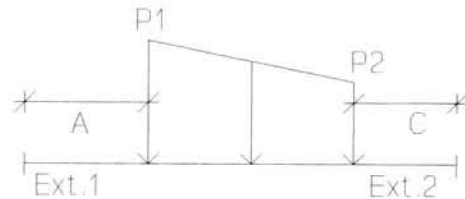
#### 7.5 Forças Distribuídas Normais às Barras

**NDIST**

**Nº BARRA, A, C, P1, P2**

[1 linha]  
[NDIST linhas]

NDIST: nº de barras carregadas.



Omitir este bloco se NDIST=0.

#### 7.6 Variação de Temperatura

**NTERM**

**Nº BARRA,  $\Delta T_s$ ,  $\Delta T_i$**

[1 linha]  
[NTERM linhas]

NTERM: nº barras solicitadas.



Omitir este bloco se ITERM=0.

#### 7.7 Assentamentos de Apoio

---

**NSETL**  
**Nº NÓ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$**

[1 linha]  
[NSETL linhas]

NSETL: nº nós com assentamento.

Omitir este bloco se ISETL=0.

O bloco 7 (Definição das Acções) deverá ser repetido NCASE vezes, isto é, tantas vezes quantos os casos de carga.

## 8. Definição das Combinações

8.1 Título da Combinação

[1 linha]

8.2 Coefficientes da Combinação

**COEF(1), COEF(2), ... , COEF(NCASE)**

[1 ou mais linhas]

Devem ser definidos tantos coeficientes de carga quantos os casos de carga.

---

## Apêndice B: Módulo SEMBV

```
      SUBROUTINE SEMBV (NPOIN, NELEM, NNODE, INDX, LNODS,NTOTV)
C*****
C***  CALCULO DO VECTOR NECESSARIO A SEMIBANDA VARIÁVEL
C***  1992/10/23 * PAT & LMQ *****
$debug
$large
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION LNODS(NNODE,NELEM), INDX(NTOTV)
C***  INICIALIZACAO DO VECTOR INDX *****
      DO 50 I = 1,NTOTV
          INDX(I) = 0
50     CONTINUE
C***  DETERMINACAO DA LARGURA MAXIMA DE CADA LINHA *****
      DO 100 IELEM = 1, NELEM
C***  DETERMINACAO DO NUMERO DO NO MAIS ALTO DA BARRA EM ESTUDO *****
          K=LNODS(1,IELEM)
          DO 150 L=2,NNODE
              IF (LNODS(L,IELEM).GT.K) THEN
                  K=LNODS(L,IELEM)
              ENDIF
150     CONTINUE
          K=K*3
          DO 100 L=1,NNODE
C***  PASSAGEM DA VERIFICACAO DO NO PARA OS GRAUS DE LIBERDADE *****
              DO 100 M=LNODS(L,IELEM)*3-2,LNODS(L,IELEM)*3
C***  SE NECESSARIO ARMAZENAR NOVO VALOR PARA A LARGURA DESDE A DIAGONAL
                  IF (INDX(M).LT.K-M+1) THEN
                      INDX(M) = K-M+1
                  ENDIF
100     CONTINUE
C***  VERIFICACAO E CORRECCAO DAS REENTRANCIAS NA MATRIZ E
C          DETERMINAÇÃO DA LARGURA MAXIMA DA SEMIBANDA ***
          LGMAX=INDX(1)
```

---

---

```

DO 500 I = 2, NPOIN*3
  IF (INDX(I).LT.INDX(I-1)-1) THEN
    INDX(I)=INDX(I-1)-1
  ENDIF
  IF (INDX(I).GT.LGMAX) THEN
    LGMAX=INDX(I)
  ENDIF
500 CONTINUE

C*** CALCULO DAS POSICOES DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL *****

I=INDX(1)
INDX(1)=1

DO 600 L = 2, NTOTV
  J = INDX(L)
  INDX(L) = INDX(L-1)+I
  I = J
600 CONTINUE

C*** CALCULO DA ECONOMIA POR UTILIZACAO DO ARMAZENAMENTO EM VECTOR E
C      CONSIDERACAO DA LARGURA VARIÁVEL DA SEMIBANDA

ECON1=100.0-100.0*INDX(NTOTV)/(NTOTV*NTOTV)
ECON2=100.0-100.0*INDX(NTOTV)/(NTOTV*(NTOTV+1.0)/2.0)
ECON3=100.0-100.0*INDX(NTOTV)/(LGMAX*NTOTV)

WRITE (6,800)
WRITE (6,850) ECON1, ECON2, ECON3

800  FORMAT(///' *** DIAGNOSTICO DA SUBROTINA "SEMBV" :'
.      '/' *** Economia de memória em relação ao armazenamento:')
850  FORMAT (' - Total da matriz:',15X,1F10.2,' %'
.      '/' - Do triângulo superior:',9X,1F10.2,' %'
.      '/' - Da semibanda de largura fixa:',2X,1F10.2,' %')

RETURN
END

```

---

---

**Apêndice C: Módulo INPUT2**

```
      SUBROUTINE INPUT2 (NPOIN, NELEM, NVFIX, NMATS, COORD, TLENG,
      .                  NNODE, NDOFN, LNODS, NTOTV, ANGLE, PROPS,
      .                  NPROP, NDIME, IFFIX, MATNO, INDX)
C*****
C
C***  LE A TOPOLOGIA DA MALHA E AS CARACTERISTICAS DAS SECCOES-TIPO
C
C***  1989.10.14 * JCM * Alteracoes: 1992/11/09 * PAT & LMQ *****
$debug
$large
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION MATNO(NELEM), LNODS(NNODE,NELEM),
      .          IFFIX(NTOTV), COORD(NDIME,NPOIN),
      .          TLENG(NELEM), PROPS(NPROP,NMATS),
      .          ANGLE(NELEM), ICODE(3), INDX (NTOTV)
C
C***  LEITURA DAS LIGACOES NODAIS DAS BARRAS E DO NUMERO DO MATERIAL
C
      WRITE (6,902)
902  FORMAT(/// ***** CARACTERISTICAS DAS BARRAS',
      .      // ' Barra Material Ext.1 Ext.2 ',
      .      ' Barra Material Ext.1 Ext.2',/1X,30('-'),8X,30('-'))
C
      DO 100 IELEM = 1,NELEM
          READ (5,*) J,MATNO(J),(LNODS(I,J),I=1,NNODE)
100  CONTINUE
      NROWS = (NELEM+1)/2
      DO 110 IROWS = 1,NROWS
          I1 = IROWS
          I2 = MIN(I1+NROWS,NELEM)
          WRITE (6,903)(J,MATNO(J),(LNODS(I,J),I=1,NNODE),J=I1,I2,NROWS)
110  CONTINUE
903  FORMAT(2(I5,I9,5X,2I6,7X))

C***  CHAMADA DA ROTINA SEMBV PARA CALCULO DO VECTOR SEMIB VARIÁVEL ***
      CALL SEMBV (NPOIN, NELEM, NNODE, INDX, LNODS,NTOTV)

C***  LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS
      WRITE (6,904)
904  FORMAT(/// *** COORDENADAS NODAIS',
      .      //3X,'Nó',9X,'X(m)',8X,'Y(m)',17X,'Nó',9X,'X(m)',8X,'Y(m)',
      .      /1X,29('-'),15X,29('-'))
C
      DO 200 IPOIN = 1,NPOIN
          READ (5,*) J,(COORD(I,J),I=1,NDIME)
200  CONTINUE
C
```

---

```

NROWS = (NPOIN+1)/2
DO 210 IROWS = 1,NROWS
    ICOL1 = IROWS
    ICOL2 = MIN0(ICOL1+NROWS,NPOIN)
    WRITE (6,906)(J,(COORD(I,J),I=1,NDIME),J=ICOL1,ICOL2,NROWS)
210 CONTINUE
906 FORMAT(I5,2X,F10.2,2X,F10.2,15X,I5,2X,F10.2,2X,F10.2)
C
C*** LEITURA DAS LIGACOES AO EXTERIOR
C
WRITE (6,907)
907 FORMAT(///' *** LIGAÇÕES AO EXTERIOR',
.         ///'  Nó          Cód.',/1X,14(' - '))
C
DO 300 ITOTV = 1,NTOTV
    IFFIX(ITOTV) = 0
300 CONTINUE
C
DO 320 IVFIX = 1,NVFIX
    READ (5,*) IPOIN,JCODE
    ICODE(1) = JCODE/100
    JCODE    = JCODE-ICODE(1)*100
    ICODE(2) = JCODE/10
    ICODE(3) = JCODE-ICODE(2)*10
    WRITE (6,909) IPOIN,(ICODE(I),I=1,3)
909 FORMAT(I5,6X,3I1)
C
    ITOTV = (IPOIN-1)*NDOFN
    DO 315 IDOFN = 1,NDOFN
        ITOTV = ITOTV+1
        IFFIX(ITOTV) = ICODE(IDOFN)
315 CONTINUE
320 CONTINUE
C
C*** LEITURA DAS PROPRIEDADES DAS SECCOES-TIPO
C
WRITE (6,910)
910 FORMAT(///' **** PROPRIEDADES DOS MATERIAIS',
.         ///' Mat      E      B      H      Ix      A      α ',
.         ///'          GPa    cm    cm    cm4    cm2    /°C ',
.         /1x,51(' - '))
DO 450 IMATS = 1,NMATS
    READ (5,*) NUMAT
    READ (5,*)(PROPS(I,NUMAT),I=1,NPROP)
C
    YOUNG = PROPS( 1,NUMAT)
    BLENG = PROPS( 2,NUMAT)
    HLENG = PROPS( 3,NUMAT)
    XINER = PROPS( 4,NUMAT)
    SAREA = PROPS( 5,NUMAT)
    ALFAT = PROPS( 6,NUMAT)

```



---

```

C      IF (XINER.EQ.0.0) THEN
          XINER = BLENG*HLENG*HLENG*HLENG/12.
          PROPS(4,NUMAT) = XINER
      ENDIF
C
      IF (SAREA.EQ.0.0) THEN
          SAREA = BLENG*HLENG
          PROPS(5,NUMAT)= SAREA
      ENDIF
C
      WRITE (6,940) NUMAT,YOUNG*1.E-6,BLENG*1.E2,HLENG*1.E2,
          XINER*1.E8,SAREA*1.E4,ALFAT
940     FORMAT(I3,3F6.1,F13.1,F9.1,1PE9.2E1)
450     CONTINUE
C
C***  CALCULO DO COMPRIMENTO E INCLINACAO DAS BARRAS
C
      DO 220 IELEM = 1,NELEM
          NODE1 = LNODS(1,IELEM)
          NODE2 = LNODS(2,IELEM)
          XLENG = COORD(1,NODE2)-COORD(1,NODE1)
          YLENG = COORD(2,NODE2)-COORD(2,NODE1)
          ELENG = SQRT(XLENG*XLENG+YLENG*YLENG)
          ANGLE(IELEM) = ACOS(XLENG/ELENG)*DSIGN(1.DO,SIN(YLENG/ELENG))
          TLENG(IELEM) = ELENG
220     CONTINUE
C
      RETURN
      END

```

---

---

**Apêndice D: Módulo STIFPT**

```
      SUBROUTINE STIFPT (MATNO, PROPS, TLENG, ANGLE, LNODS, GSTIF,
      .                 NMATS, NPROP, NTOTV, NELEM, NNODE, NDOFN,
      .                 INDX, MXDIM)
C*****
C
C***  CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ "STIFK" DE CADA BARRA NO REFERENCIAL
C      GLOBAL E PROCEDE AO RESPECTIVO ESPALHAMENTO NO VECTOR DE RIGIDEZ
C      GLOBAL "GSTIF"
C
C**** 1990.10.14 * JCM * Alteracoes: 1992/11/09 * PAT & LMQ *****
$debug
$large
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
      DIMENSION MATNO(NELEM), TLENG(NELEM), PROPS(NPROP,NMATS),
      .         ANGLE(NELEM), STIFK( 6, 6), LNODS(NNODE,NELEM),
      .         INDX(NTOTV), GSTIF(MXDIM)
C***  FUNCAO QUE CALCULA A POSICAO DO ELEM. (I,J) DA MATRIZ NO VECTOR **
      KFUNC(I,J)=INDX(I)+J-I
C***  INICIALIZACAO DO VECTOR DE RIGIDEZ GLOBAL
      DO 100 JTOTV = 1,INDX(NTOTV)
          GSTIF(JTOTV) = 0.0
100  CONTINUE
C***  ABERTURA DE UM FICHEIRO AUXILIAR
C
      OPEN (1, FORM='UNFORMATTED', STATUS='NEW')
C
C***  CICLO SOBRE AS BARRAS
C
      DO 800 IELEM = 1,NELEM
C
C***  CARACTERISTICAS GEOMETRICAS E MATERIAIS DA BARRA
C
          LPROP = MATNO(IELEM)
          YOUNG = PROPS(1,LPROP)
          XINER = PROPS(4,LPROP)
          SAREA = PROPS(5,LPROP)
C
          ELENG = TLENG(IELEM)
          ALPHA = ANGLE(IELEM)
C
C***  VARIAVEIS AUXILIARES
C
          FACT1 = 4.0*YOUNG*XINER/ELENG
```

---

---

```
FACT2 = 0.5*FACT1
FACT3 = (FACT1+FACT2)/ELENG
FACT4 = 2.0*FACT3/ELENG
FACT5 = YOUNG*SAREA/ELENG
```

```
C
```

```
C*** COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA NO REFERENCIAL LOCAL
```

```
C
```

```
STIFK(1,1) = +FACT1
STIFK(1,2) = +FACT3
STIFK(1,3) = 0.0
STIFK(1,4) = +FACT2
STIFK(1,5) = -FACT3
STIFK(1,6) = 0.0
STIFK(2,1) = +FACT3
STIFK(2,2) = +FACT4
STIFK(2,3) = 0.0
STIFK(2,4) = +FACT3
STIFK(2,5) = -FACT4
STIFK(2,6) = 0.0
STIFK(3,1) = 0.0
STIFK(3,2) = 0.0
STIFK(3,3) = +FACT5
STIFK(3,4) = 0.0
STIFK(3,5) = 0.0
STIFK(3,6) = -FACT5
STIFK(4,1) = +FACT2
STIFK(4,2) = +FACT3
STIFK(4,3) = 0.0
STIFK(4,4) = +FACT1
STIFK(4,5) = -FACT3
STIFK(4,6) = 0.0
STIFK(5,1) = -FACT3
STIFK(5,2) = -FACT4
STIFK(5,3) = 0.0
STIFK(5,4) = -FACT3
STIFK(5,5) = +FACT4
STIFK(5,6) = 0.0
STIFK(6,1) = 0.0
STIFK(6,2) = 0.0
STIFK(6,3) = -FACT5
STIFK(6,4) = 0.0
STIFK(6,5) = 0.0
STIFK(6,6) = +FACT5
```

```
C
```

```
C*** CALCULO DE [K][T] E SUA ARMAZENAGEM (PARA USO POSTERIOR NO
C CALCULO DOS ESFORÇOS FINAIS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS)
```

```
C
```

```
IF (ALPHA.NE.0.0) CALL TMRX (ALPHA, STIFK, 6, 2)
WRITE (1) STIFK
```

```
C
```

```
C*** CALCULO DE [T][K][T]
```

---

```

C          IF (ALPHA.NE.0.0) CALL TMATRX (ALPHA, STIFK,    6,    1)
C
C***  ESPALHAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA JA NO REFERENCIAL
C      GLOBAL
C
C          IEVAB = 0
C          DO 200 INODE = 1, NNODE
C              IPOIN = LNODS(INODE, IELEM)
C              ITOTV = (IPOIN-1)*NDOFN
C              DO 200 IDOFN = 1, NDOFN
C                  ITOTV = ITOTV+1
C                  IEVAB = IEVAB+1
C                  JEVAB = 0
C                  DO 200 JNODE = 1, NNODE
C                      JPOIN = LNODS(JNODE, IELEM)
C                      JTOTV = (JPOIN-1)*NDOFN
C                      DO 200 JDOFN = 1, NDOFN
C                          JTOTV = JTOTV+1
C                          JEVAB = JEVAB+1
C                      IF (JTOTV.GE.ITOTV) THEN
C                          IJTTV = KFUNC(ITOTV, JTOTV)
C                          GSTIF(IJTTV) = GSTIF(IJTTV)+STIFK(IEVAB, JEVAB)
C                      ENDIF
C
C          200      CONTINUE
C
C          800      CONTINUE
C
C          RETURN
C          END

```

---

## Apêndice E: Módulo GAUSS

```
      SUBROUTINE GAUSS (A, B, N, X, R, IFFIX, FIXED, ICASE, INDX,  
                      .      MXDIM)  
C*****  
C  
C***  EFECTUA A REDUCAO E RETROSUBSTITUICAO DE GAUSS  
C      * MATRIZ DE COEFICIENTES SIMETRICA  
C      * ARMAZENAMENTO DO TRIANGULO SUPERIOR EM VECTOR  
C      * SEM ESCOLHA DE PIVOT  
C      * VECTOR DAS INCOGNITAS COM COMPONENTES NAO LIVRES  
C  
C**** 1990.10.14 * JCM * Alteracoes: 1992/11/09 * PAT & LMQ *****  
$debug  
$large  
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)  
      DIMENSION A(MXDIM), B(N), X(N), R(N), IFFIX(N), FIXED(N), INDX(N)  
C***  FUNCAO QUE CALCULA A POSICAO DO ELEM. (I,J) DA MATRIZ NO VECTOR **  
      KFUNC(I,J)=INDX(I)+J-I  
C***  .....REDUCAO  
C***  CICLO SOBRE AS EQUACOES  
C  
      DO 500 L = 1,N  
C***  VERIFICACAO DA DIMENSAO DO TRIANGULO ACTIVO  
      IF (L.LT.N) THEN  
          NI=L+INDX(L+1)-INDX(L)-1  
      ELSE  
          NI=N  
      ENDIF  
C  
C***  VARIÁVEL LIVRE  
C  
      IF (IFFIX(L).NE.1) THEN  
C  
C***  VERIFICACAO DO PIVOT  
C  
          PIVOT = A(INDX(L))  
          IF (PIVOT.LT.1.E-10) THEN  
              WRITE (6,900) PIVOT,L  
900          FORMAT(/5X,' *** STOP na subrotina GAUSS : PIVOT =',E12.3,  
                  ' na equação nº.',I5)  
              STOP ' *** STOP na subrotina GAUSS'  
          ENDIF  
C  
      DO 190 I = L+1,NI
```

```

        LI=KFUNC(L,I)
        FACTR = A(LI)/PIVOT
        IF (FACTR.NE.0.0) THEN
            IF (ICASE.EQ.1) THEN
                DO 180 J = I,NI
                    IJ=KFUNC(I,J)
                    LJ=KFUNC(L,J)
                    A(IJ) = A(IJ)-FACTR*A(LJ)
180                CONTINUE
            ENDIF
            B(I) = B(I)-FACTR*B(L)
        ENDIF
190    CONTINUE
C
C***  VARIÁVEL NAO LIVRE
C
        ELSE
            DIFIX = FIXED(L)
            IF (DIFIX.NE.0.0) THEN
                DO 310 I = L,NI
                    LI=KFUNC(L,I)
                    B(I) = B(I)-A(LI)*DIFIX
310                CONTINUE
            ENDIF
        ENDIF
500    CONTINUE
C***  .....RETROSUBSTITUICAO
C***  CICLO EM ORDEM INVERSA SOBRE AS EQUACOES REDUZIDAS
DO 700 I = N,1,-1
    AUX  = B(I)

    IF (I.LT.N) THEN
        NN=I+INDX(I+1)-INDX(I)-1
    ELSE
        NN=N
    ENDIF

    DO 600 J = I+1,NN
        IJ = KFUNC(I,J)
        AUX = AUX-A(IJ)*X(J)
600    CONTINUE
C
    IF (IFFIX(I).NE.1) THEN
        X(I) = AUX/A(INDX(I))
        R(I) = 0.0
    ELSE
        X(I) = FIXED(I)
        R(I) = -AUX

```

---

```
700   ENDIF  
      CONTINUE  
C  
      RETURN  
      END
```

---

## Apêndice F: Módulo PORTIC

```
C*** INTERFACES PARA ACEDER AOS COMANDOS "DATE" E "TIME" DO MS-DOS ***
C
  interface to subroutine time (n,str)
  character*10 str [near,reference]
  integer*2 n [value]
  end
C
  interface to subroutine date (n,str)
  character*10 str [near,reference]
  integer*2 n [value]
  end
C
  PROGRAM PORTIC
C*****
C
C**** PROGRAMA PARA A ANALISE DE PORTICOS PLANOS
C
C**** 1992.11.09 * JCM * Alteracoes de Paulo Torres & Miguel Queiros ***
$debug
$large
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  CHARACTER*12 FILEI, FILEO
  character*10 stime, sdate
C
C*** DEFINICAO DE VARIAVEIS ASSOCIADAS COM O DIMENSIONAMENTO DINAMICO
C
  PARAMETER (MPOIN = 70, MELEM = 45, MMATS = 20, MCASE = 10,
.           NNODE = 2, NDOFN = 3, NDIME = 2, NPROP = 6,
.           NEVAB = NNODE*NDOFN, MTOTV = MPOIN*NDOFN,
.           MXDIM = 15*MTOTV*(MTOTV+1)/100)
C
  DIMENSION MATNO(MELEM), TLENG(MELEM), LNODS(NNODE,MELEM),
.           ANGLE(MELEM), ELOAD(NEVAB,MELEM),
.           CLOAD(NEVAB,MELEM)
C
  DIMENSION COORD(NDIME,MPOIN)
C
  DIMENSION IFFIX(MTOTV), GLOAD(MTOTV), GSTIF(MXDIM),
.           DDISP(MTOTV), REACT(MTOTV), FIXED(MTOTV),
.           CDISP(MTOTV), CREAC(MTOTV), INDX(MTOTV)
C
  DIMENSION PROPS(NPROP,MMATS)
C
  DIMENSION CFACT(MCASE)
C
C*** ABERTURA DE CANAIS DE LEITURA E ESCRITA
C
1000 WRITE (*,'(A\)' ) ' NOME DO FICHEIRO DE DADOS ? '
      READ (*,'(A)') FILEI
```

---



---

```

WRITE (*,'(A\)') ' NOME DO FICHEIRO DE RESULTADOS ? '
READ (*,'(A)') FILEO
C
OPEN (5, FILE= FILEI, STATUS='OLD', ERR=1000)
OPEN (6, FILE= FILEO, STATUS='NEW')
C
C*** ESCRITA DO CABEÇALHO DO FICHEIRO DE RESULTADOS
C
call date ( 10, sdate)
call time ( 10, stime)
C
WRITE (6,9000) FILEI,sdate,FILEO,stime
9000 FORMAT(1X,78('*'),/1X,15('*'),' Resultados obtidos com o',
. ' PROGRAMA "PORTIC" [versão 5.10] ',4('*'),
. /1X,15('*'),' Ficheiro de dados : ',A12,
. T58,4('*'),3X,A10,1X,4('*'),
. /1X,15('*'),' Ficheiro de resultados : ',A12,
. T58,4('*'),3X,A10,1X,4('*'))
C
C*** INTRODUCAO DA GEOMETRIA DA ESTRUTURA E CARACTERISTICAS DAS BARRAS
C
WRITE (*,*) ' *** Leitura dos parametros de controle'
CALL INPUT1 (NPOIN, NELEM, NVFIX, NMATS, NCASE, NCOMB,
. NPROP, NNODE, NDOFN, NDIME, NEVAB, NTOTV,
. MELEM, MPOIN, MMATS, MCASE)
C
WRITE (*,*) ' *** Leitura da topologia da malha'
CALL INPUT2 (NPOIN, NELEM, NVFIX, NMATS, COORD, TLENG,
. NNODE, NDOFN, LNODS, NTOTV, ANGLE, PROPS,
. NPROP, NDIME, IFFIX, MATNO, INDX)
C
C*** CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
C
WRITE (*,*) ' *** Formacao da matriz de rigidez global'
CALL STIFPT (MATNO, PROPS, TLENG, ANGLE, LNODS, GSTIF,
. NMATS, NPROP, NTOTV, NELEM, NNODE, NDOFN,
. INDX, INDX(NTOTV))
C
C*** INTRODUCAO DAS CARGAS
C
DO 100 ICASE = 1,NCASE
WRITE (*,*) ' *** Caso de carga nº ',ICASE
WRITE (*,*) ' * Formacao do vector de solicitacao global'
CALL LOADPT (NTOTV, GLOAD, FIXED, NELEM, NEVAB, ICASE,
. NDOFN, LNODS, TLENG, MATNO, NPROP, PROPS,
. NMATS, IFFIX, ANGLE, ELOAD, NNODE, REACT)
C
C*** RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C
WRITE (*,*) ' * Resolucao do sistema de equacoes'
CALL GAUSS (GSTIF, GLOAD, NTOTV, DDISP, REACT, IFFIX,

```

---

---

```

      .          FIXED, ICASE, INDX, INDX(NTOTV))
C
C*** CALCULO DOS ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS
C
      WRITE (*,*) ' * Calculo dos esforços nos extremos das barras'
      CALL FORCES (NELEM, NNODE, NEVAB, NDOFN, DDISP, LNODS,
      .          ELOAD, NTOTV, ICASE, NCOMB, REACT)
C
C*** ESCRITA DOS RESULTADOS FINAIS
C
      WRITE (*,*) ' * Escrita de resultados do caso de carga'
      CALL OUTPUT (NELEM, NPOIN, NDOFN, DDISP, NTOTV, NNODE,
      .          IFFIX, REACT, LNODS, NEVAB, ELOAD)
100 CONTINUE
      CLOSE (1)
C
C*** COMBINACAO DE ACCOES
C
      IF (NCOMB.NE.0) THEN
          WRITE (*,*) ' *** Calculo das combinacoes'
          CALL COMBIN (NCOMB, NCASE, CFACT, NTOTV, CDISP, CREAC,
          .          CLOAD, NELEM, NEVAB, DDISP, REACT, ELOAD,
          .          NPOIN, NDOFN, IFFIX, LNODS, NNODE)
      ENDIF
C
C*** FECHO DE CANAIS DE LEITURA E ESCRITA
C
      CLOSE (5)
      CLOSE (6)
C
      STOP ' *** STOP - fim de execucao.'
      END

```

---

# Resolução de Malhas Compreendendo Elementos Infinitos

---

## 1. Introdução

O recurso ao Método dos Elementos Finitos para o estudo de meios não finitos, como os normalmente associados a problemas geotécnicos, obriga a que o domínio em estudo seja truncado.

O truncamento do domínio deverá ser de forma a não afectar a zona em estudo o que poderá obrigar à consideração de malhas complexas para o estudo de um fenómeno relativamente simples.

Considere-se, por exemplo, o estudo da percolação sob uma cortina de estacas apresentado anteriormente. Apesar do domínio em estudo se prolongar indefinidamente, foi necessário proceder ao truncamento de forma a que a malha utilizada não excedesse um determinado número de elementos. Criou-se assim uma fronteira impermeável que, na realidade, não existe pelo que os resultados obtidos nos pontos mais afastados da cortina poderão apresentar erros grosseiros.

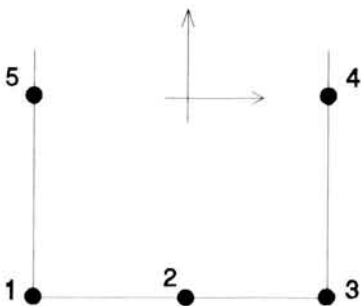
Como alternativa surge a introdução dos *elementos infinitos* que, colocados na periferia da malha de elementos finitos, permitem simular o prolongamento, para o infinito, do domínio em estudo.

## 2. O elemento infinito

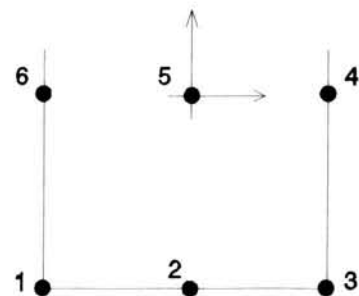
Neste trabalho procurou-se a inclusão dos elementos infinitos de forma a utilizar todo o processo de cálculo já definido para os elementos finitos. Para isso, recorreu-se a uma técnica de *mapping* em tudo semelhante à utilizada para os elementos isoparamétricos mas recorrendo a funções de interpolação apropriadas.

A modelação da geometria é efectuada através de funções de *mapping*,  $M$ , adaptadas à natureza não finita do domínio do elemento enquanto que a interpolação da variável de campo é efectuada através de funções de forma  $N$ .

No caso do programa QUASAR, podemos ter dois tipos de elementos infinitos:



- *serendipity* de 5 nós - se a malha for formada por elementos finitos com 8 nós;
- lagrangiano de 6 nós - se a malha for formada por elementos finitos com 9 nós.



---

No 1º caso (*serendipity* de 5 nós) teremos as seguintes funções de *mapping* e de forma:

$$M_1 = (1 - \xi) (-1 - \xi - \eta) / (1 - \eta)$$

$$M_2 = (1 - \xi^2) / (1 - \xi)$$

$$M_3 = (1 + \xi) (-1 + \xi + \eta) / (1 - \eta)$$

$$M_4 = (1 + \xi) (1 + \eta) / [2 (1 - \eta)]$$

$$M_5 = (1 - \xi) (1 + \eta) / [2 (1 - \eta)]$$

$$N_1 = (1 - \xi) (1 + \eta) (-1 - \xi - \eta) / 4$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) (1 - \eta) / 2$$

$$N_3 = (1 + \xi) (1 - \eta) (-1 + \xi - \eta) / 4$$

$$N_4 = (1 + \xi) (1 - \eta^2) / 2$$

$$N_5 = (1 - \xi) (1 - \eta^2) / 2$$

No caso do lagrangiano de 6 nós teremos:

$$M_1 = (\xi^2 - \xi) (-\eta) / (1 - \eta)$$

$$M_2 = (1 - \xi^2) (-2 \eta) / (1 - \eta)$$

$$M_3 = (\xi^2 + \xi) (-\eta) / (1 - \eta)$$

$$M_4 = (\xi^2 + \xi) (1 + \eta) / [2 (1 - \eta)]$$

$$M_5 = (1 - \xi^2) (1 + \eta) / (1 - \eta)$$

$$M_6 = (\xi^2 - \xi) (1 + \eta) / [2 (1 - \eta)]$$

$$N_1 = (\xi^2 - \xi) (\eta^2 - \eta) / 4$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) (\eta^2 - \eta) / 2$$

$$N_3 = (\xi^2 + \xi) (\eta^2 - \eta) / 4$$

$$N_4 = (\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)/2$$

$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

$$N_6 = (\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)/2$$

A numeração dos nós de um elemento define, neste programa, as orientações  $\xi$ ,  $\eta$ . A numeração inicia-se num vértice prosseguindo no sentido directo. O primeiro lado a ser numerado define, para esse elemento, a direcção  $\xi$ .

No caso dos elementos infinitos, a numeração dos nós não pode ser iniciada em qualquer vértice. A orientação  $\eta$  deverá corresponder ao prolongamento indefinido do domínio pelo que a numeração dos nós terá que ser iniciada pelo lado de ligação ao elemento finito correspondente.

### 3. Processo de cálculo

Apresenta-se o processo de cálculo em termos gerais. A sua adaptação a situações específicas como o programa QUASAR não oferece dificuldades.

Sendo  $\underline{B}$  uma matriz deformação-deslocamento ( $\underline{\epsilon} = \underline{B} \cdot \underline{d}$ ) e  $\underline{D}$  uma matriz das constantes elásticas ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}$ ), a matriz de rigidez elementar é dada por  $\underline{K}^e = \int \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dv$ . Este integral, estendido ao volume  $v_e$  do elemento é calculado numericamente pelo método de Gauss-Legendre. No caso do elemento infinito são realizadas as operações:

- calcular a posição  $(\xi_i, \eta_i)$  e os pesos  $w_i, w_j$  do ponto de integração;
- calcular, nesse ponto, as funções de *mapping*  $M(\xi_i, \eta_j)$  e as suas derivadas  $\partial M / \partial \xi$ ,  $\partial M / \partial \eta$ ;
- formar a matriz jacobiana  $\underline{J}$  com as derivadas  $\partial x / \partial \xi$ ,  $\partial y / \partial \xi$ ,  $\partial x / \partial \eta$ ,  $\partial y / \partial \eta$  onde  $x = \sum M_k x_k$ ,  $y = \sum M_k y_k$ , sendo  $k$  o número de nós utilizados para a interpolação da geometria;

- 
- calcular o determinante da matriz  $\underline{J}$  bem como a sua inversa  $\underline{J}^{-1}$ ;
  - calcular as funções de interpolação  $N(\xi_i, \eta_j)$  e suas derivadas  $\partial N/\partial \xi$ ,  $\partial N/\partial \eta$ ;
  - calcular as derivadas cartesianas  $[\partial N/\partial x \quad \partial N/\partial y] = [\partial N/\partial \xi \quad \partial N/\partial \eta] \cdot \underline{J}^{-1}$ ;
  - formar a matriz  $\underline{B}$  utilizando estas derivadas cartesianas;
  - formar a matriz  $\underline{D}$ ;
  - calcular a contribuição do ponto de Gauss corrente para a matriz de rigidez do elemento, dada por  $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \cdot w_i \cdot w_j \det \underline{J}$ .

Recorre-se, portanto, às funções de *mapping* para relacionar as coordenadas locais do elemento com as globais no cálculo da matriz  $\underline{J}$  cuja inversa é depois utilizada na obtenção das derivadas cartesianas das funções de forma que vão integrar a matriz  $\underline{B}$ .

#### 4. Implementação

A implementação, em programa, do processo anteriormente descrito não oferece dificuldade já que o objectivo de tal processo é, precisamente, reduzir ao mínimo as alterações necessárias em programas existentes de aplicação do MEF.

Referem-se a seguir as principais alterações efectuadas no programa QUASAR tendo em vista a utilização de malhas com elementos finitos e infinitos.

O número de nós de uma malha de elementos finitos a ser resolvida com o QUASAR apresenta um número de nós por elemento fixo (4, 8 ou 9). Com a introdução dos elementos infinitos surgem, na mesma malha, elementos com números de nós diferentes.

Para cada elemento é necessário conhecer o número de nós que o definem pelo que foi definido um vector com dimensão igual ao número de elementos da malha contendo o número de nós de cada um.

Este facto veio implicar também pequenas alterações na estrutura do ficheiros de dados. Assim, em termos de parâmetros gerais, passa a constar o número máximo de nós por elemento na malha. Em termos de elementos, antes da leitura dos números dos nós que formam um elemento, é fornecido o número de nós desse elemento.

---

As principais alterações foram introduzidas ao nível da rotina SHAPE2 de cálculo das funções de forma e respectivas derivadas tendo-se definido as expressões que permitem o cálculo das funções de forma e suas derivadas no caso dos elementos infinitos.

No início da execução da rotina é determinado o tipo de elemento por comparação do seu número de nós com o máximo definido para o problema. Após esta primeira verificação determina-se qual o número de nós e são efectuados os cálculos respectivos.

O cálculo dentro da rotina JACOB2 mantém-se para qualquer caso apenas se alterando parâmetros transmitidos. Após as chamadas da rotina SHAPE2 a partir de JACOB2 há que ter em conta a correspondência entre as posições dos nós de um elemento finito utilizado para efeitos de cálculo e os nós do elemento infinito em estudo.

Apresentam-se, em anexo, listagens das principais alterações introduzidas no programa QUASAR bem como o ficheiro de dados do problema *Percolação sob a barragem de Crestuma* com a consideração de elementos semi-infinitos e resultados obtidos. Apresentam-se ainda os diagnósticos sobre economia de memória por utilização do armazenamento em vector da semibanda de largura variável para o mesmo problema nos casos de elementos finitos e de elementos semi-infinitos.



---

## APÊNDICES

- Alterações no programa QUASAR

Apêndice A: Módulo SHAPE2

Apêndice B: Módulo JACOB2

- Percolação sob a barragem de Crestuma

Apêndice C: [QUASAR] Ficheiro de Dados (Elem. Semi-Infinitos)

Apêndice D: [QUASAR] Resultados

- Economia de memória (Percolação sob a barragem de Crestuma)

Apêndice E: Elementos finitos

Apêndice F: Elementos semi-infinitos

---

**Apêndice A:** Alterações no programa QUASAR  
Módulo SHAPE2

```
      SUBROUTINE SHAPE2 (DERIV, ETASP, EXISP, NNODE, SHAPE, NNODM)
C*****
C
C***** CALCULA AS FUNCOES DE FORMA E SUAS DERIVADAS PARA ELEMENTOS PLANOS
C      DE 4, 8 E 9 NOS
C
C***** CALCULA AS FUNCOES DE FORMA E SUAS DERIVADAS PARA ELEMENTOS
C      PLANOS SEMI-INFINITOS DE 5 OU 6 NOS
C
C***** 1993.01.08 * JPT & LMQ (JL) *****
$debug
$large
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION DERIV(2,9), SHAPE(9)
C
      S = EXISP
      T = ETASP
C
C***** VERIFICACAO SE O ELEMENTO E INFINITO OU FINITO
      IF (NNODE.EQ.NNODM) THEN
C***** ELEMENTOS DE 4 NOS
C
      IF (NNODE.EQ.4) THEN
C
      SM = (1.-S)/2.
      SP = (1.+S)/2.
      TM = (1.-T)/2.
      TP = (1.+T)/2.
      DM = -0.5
      DP = +0.5
C
      SHAPE( 1) = SM*TM
      DERIV(1, 1) = DM*TM
      DERIV(2, 1) = SM*DM
C
      SHAPE( 2) = SP*TM
      DERIV(1, 2) = DP*TM
      DERIV(2, 2) = SP*DM
C
      SHAPE( 3) = SP*TP
      DERIV(1, 3) = DP*TP
      DERIV(2, 3) = SP*DP
C
      SHAPE( 4) = SM*TP
      DERIV(1, 4) = DM*TP
```

---

```

      DERIV(2, 4) = SM*DP
C
C***** ELEMENTOS DE 8 NOS
C
      ELSEIF (NNODE.EQ.8) THEN
C
      SM = 0.5*(1.-S)
      TM = 0.5*(1.-T)
      SP = 0.5*(1.+S)
      TP = 0.5*(1.+T)
      SS = 0.5*(1.-S*S)
      TT = 0.5*(1.-T*T)
      S2 = -2.*S
      T2 = -2.*T
C
      AA      = +SM+TM- 1.5
      SHAPE( 1) = +SM*TM*(AA+AA)
      DERIV(1, 1) = - TM*(AA+SM)
      DERIV(2, 1) = -SM *(AA+TM)
C
      SHAPE( 2) = +SS*TM*2.
      DERIV(1, 2) = +S2*TM
      DERIV(2, 2) = -SS
C
      AA      = +SP+TM- 1.5
      SHAPE( 3) = +SP*TM*(AA+AA)
      DERIV(1, 3) = + TM*(AA+SP)
      DERIV(2, 3) = -SP *(AA+TM)
C
      SHAPE( 4) = +SP*TT*2.
      DERIV(1, 4) = + TT
      DERIV(2, 4) = +SP*T2
C
      AA      = +SP+TP- 1.5
      SHAPE( 5) = +SP*TP*(AA+AA)
      DERIV(1, 5) = + TP*(AA+SP)
      DERIV(2, 5) = +SP *(AA+TP)
C
      SHAPE( 6) = +SS*TP*2.
      DERIV(1, 6) = +S2*TP
      DERIV(2, 6) = +SS
C
      AA      = +SM+TP- 1.5
      SHAPE( 7) = +SM*TP*(AA+AA)
      DERIV(1, 7) = - TP*(AA+SM)
      DERIV(2, 7) = +SM *(AA+TP)
C
      SHAPE( 8) = +SM*TT*2.
      DERIV(1, 8) = - TT
      DERIV(2, 8) = +SM*T2
C

```

---

---

```

C***** ELEMENTOS DE 9 NOS
C
      ELSEIF (NNODE.EQ.9) THEN
C
      SSM = (S*S-S)/2.
      SSP = (S*S+S)/2.
      SSO = -S*S+1.
      TTM = (T*T-T)/2.
      TTP = (T*T+T)/2.
      TTO = -T*T+1.
      DSM = -.5+S
      DSP = +.5+S
      DSO = -2.*S
      DTM = -.5+T
      DTP = +.5+T
      DTO = -2.*T
C
      SHAPE( 1) = SSM*TTM
      DERIV(1, 1) = DSM*TTM
      DERIV(2, 1) = SSM*DTM
C
      SHAPE( 2) = SSO*TTM
      DERIV(1, 2) = DSO*TTM
      DERIV(2, 2) = SSO*DTM
C
      SHAPE( 3) = SSP*TTM
      DERIV(1, 3) = DSP*TTM
      DERIV(2, 3) = SSP*DTM
C
      SHAPE( 4) = SSP*TTO
      DERIV(1, 4) = DSP*TTO
      DERIV(2, 4) = SSP*DTO
C
      SHAPE( 5) = SSP*TTP
      DERIV(1, 5) = DSP*TTP
      DERIV(2, 5) = SSP*DTP
C
      SHAPE( 6) = SSO*TTP
      DERIV(1, 6) = DSO*TTP
      DERIV(2, 6) = SSO*DTP
C
      SHAPE( 7) = SSM*TTP
      DERIV(1, 7) = DSM*TTP
      DERIV(2, 7) = SSM*DTP
C
      SHAPE( 8) = SSM*TTO
      DERIV(1, 8) = DSM*TTO
      DERIV(2, 8) = SSM*DTO
C
      SHAPE( 9) = SSO*TTO
      DERIV(1, 9) = DSO*TTO

```

---

---

```

        DERIV(2, 9) = SS0*DT0
    ENDIF
ELSE
C**** ELEMENTOS SEMI-INFINITOS DE 5 NOS
C
    IF (NNODE.EQ.5) THEN
C
        SM = 1.+S
        TM = 1.+T
        STN = -1.-S-T
        SN = 1.-S
        TN = 1.-T
        TNS = -1.+S-T
        SSN = 1.-S*S
C
        SHAPE( 1) = SN*STN/TN
        DERIV(1, 1) = (2*S+T)/TN
        DERIV(2, 1) = (-SN*TN+SN*STN)/TN/TN
C
        SHAPE( 2) = SSN*2/TN
        DERIV(1, 2) = -4*S/TN
        DERIV(2, 2) = 2*SSN/TN/TN
C
        SHAPE( 3) = SM*TNS/TN
        DERIV(1, 3) = (2*S-T)/TN
        DERIV(2, 3) = (-SM*TN+SM*TNS)/TN/TN
C
        SHAPE( 4) = SM*TM/2/TN
        DERIV(1, 4) = TM/2/TN
        DERIV(2, 4) = (SM*TN+SM*TM)/2/TN/TN
C
        SHAPE( 5) = SN*TM/2/TN
        DERIV(1, 5) = -TM/2/TN
        DERIV(2, 5) = (SN*TN+SN*TM)/2/TN/TN
C
C**** ELEMENTOS SEMI-INFINITOS DE 6 NOS
C
    ELSEIF (NNODE.EQ.6) THEN
C
        SM = 1.+S
        TM = 1.+T
        STN = -1.-S-T
        SN = 1.-S
        TN = 1.-T
        TNS = -1.+S-T
        SSN = 1.-S*S
C
        SHAPE( 1) = S*SN*T/TN
        DERIV(1, 1) = -(2*S-1)*T/TN
        DERIV(2, 1) = (S*SN*TN+S*SN*T)/TN/TN

```

---

---

```

C      SHAPE( 2) = -SSN*2*T/TN
      DERIV(1, 2) = 4*S*T/TN
      DERIV(2, 2) = (-2*SSN*TN+SSN*(-2)*T)/TN/TN
C
      SHAPE( 3) = -S*SM*T/TN
      DERIV(1, 3) = (2*S+1)*(-T)/TN
      DERIV(2, 3) = (-S*SM*TN-S*SM*T)/TN/TN
C
      SHAPE( 4) = S*SM*TM/2/TN
      DERIV(1, 4) = (2*S+1)*TM/2/TN
      DERIV(2, 4) = (S*SM*TN+S*SM*TM)/2/TN/TN
C
      SHAPE( 5) = SSN*TM/TN
      DERIV(1, 5) = -2*S*TM/TN
      DERIV(2, 5) = (SSN*TN+SSN*TM)/TN/TN
C
      SHAPE( 6) = -S*SN*TM/2/TN
      DERIV(1, 6) = (2*S-1)*TM/2/TN
      DERIV(2, 6) = (-S*SN*TN-S*SN*TM)/2/TN/TN
C
      ENDIF
C
      ENDIF
C
      RETURN
      END

```

---

**Apêndice B:** Alterações no programa QUASAR  
Módulo JACOB2

```
      SUBROUTINE JACOB2 (CARTD, DERIV, DJACB, ELCOD, KGASP, IELEM,  
      .                  NNODE, SHAPE, NDIME, GPCOD)  
C*****  
C  
C***  CALCULA E INVERTE A MATRIZ JACOBIANA E AS DERIVADAS CARTESIANAS  
C      DAS FUNCOES DE FORMA  
C  
C**** 1990.01.01 * JCM *****  
$debug  
$large  
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)  
      DIMENSION CARTD(2,9), SHAPE(9), XJACI(2,2), DERIV(2,9),  
      .          ELCOD(2,9), GPCOD(2), XJACM(2,2)  
C  
C***  CALCULO DAS COORDENADAS DO PONTO DE GAUSS  
C  
      DO 120 IDIME = 1,NDIME  
        GCORD = 0.0  
        DO 110 INODE = 1,NNODE  
          GCORD = GCORD + ELCOD(IDIME,INODE)*SHAPE(INODE)  
110      CONTINUE  
        GPCOD(IDIME) = GCORD  
  
120      CONTINUE  
C  
C***  DETERMINACAO DA MATRIZ JACOBIANA  
C  
      DO 210 IDIME = 1,NDIME  
        DO 210 JDIME = 1,NDIME  
          XJACO = 0.0  
          DO 200 INODE = 1,NNODE  
            XJACO = XJACO + DERIV(IDIME,INODE)*ELCOD(JDIME,INODE)  
200      CONTINUE  
          XJACM(IDIME,JDIME) = XJACO  
210      CONTINUE  
C  
C***  CALCULO DO DETERMINANTE E INVERSA DA MATRIZ JACOBIANA  
C  
      DJACB = XJACM(1,1)*XJACM(2,2)-XJACM(1,2)*XJACM(2,1)  
C  
      IF (DJACB.LE.0.0) THEN  
        WRITE (6,900) KGASP,IELEM,DJACB  
        STOP ' *** STOP na subrotina JACOB2'  
      ENDIF  
900      FORMAT(/' *** STOP na subrotina JACOB2 - o ponto de Gauss n° ',I2,  
      .          ' do elemento ',I3,' tem área ',E10.3)  
C
```

---

---

```

XJACI(1,1) = +XJACM(2,2)/DJACB
XJACI(2,2) = +XJACM(1,1)/DJACB
XJACI(1,2) = -XJACM(1,2)/DJACB
XJACI(2,1) = -XJACM(2,1)/DJACB
C
C*** CALCULO DAS DERIVADAS CARTESIANAS
C
IF (NNODE.EQ.5) THEN
  CALL SHAPE2 (DERIV, ETASP, EXISP, 8, SHAPE, 8)
  DO 250 JDIME = 1, NDIME
    DERIV(JDIME,5) = DERIV(JDIME,8)
    SHAPE(5) = SHAPE(8)
250  CONTINUE
ELSEIF (NNODE.EQ.6) THEN
  CALL SHAPE2 (DERIV, ETASP, EXISP, 9, SHAPE, 9)
  DO 260 JDIME = 1, NDIME
    DERIV(JDIME,5) = DERIV(JDIME,8)
    DERIV(JDIME,6) = DERIV(JDIME,9)
    SHAPE(5) = SHAPE(8)
    SHAPE(6) = SHAPE(9)
260  CONTINUE
ENDIF
C
DO 310 IDIME = 1,NDIME
  DO 310 INODE = 1,NNODE
    DCART = 0.0
    DO 300 JDIME = 1,NDIME
      DCART = DCART + XJACI(IDIME,JDIME)*DERIV(JDIME,INODE)
300  CONTINUE
    CARTD(IDIME,INODE) = DCART
310  CONTINUE
C
RETURN
END

```

---



---

**Apêndice C:** Percolação sob a barragem de Crestuma  
[QUASAR] Ficheiro de Dados (Elem. Semi-Infinitos)

ESTUDO DA PERCOLAÇÃO SOB A BARRAGEM DE CRESTUMA

158	45	16	1	1	2	8				
1	1	8	1	2	3	9	14	13	12	8
2	1	8	3	4	5	10	16	15	14	9
3	1	8	5	6	7	11	18	17	16	10
4	1	8	12	13	14	20	25	24	23	19
5	1	8	14	15	16	21	27	26	25	20
6	1	8	16	17	18	22	29	28	27	21
7	1	8	7	30	31	32	34	33	18	11
8	1	8	18	33	34	35	37	36	29	22
9	1	8	31	38	39	44	48	47	34	32
10	1	8	39	40	41	45	50	49	48	44
11	1	8	41	42	43	46	52	51	50	45
12	1	8	34	47	48	53	57	56	37	35
13	1	8	48	49	50	54	59	58	57	53
14	1	8	50	51	52	55	61	60	59	54
15	1	8	43	62	63	64	66	65	52	46
16	1	8	52	65	66	67	69	68	61	55
17	1	8	63	70	71	76	80	79	66	64
18	1	8	71	72	73	77	82	81	80	76
19	1	8	73	74	75	78	84	83	82	77
20	1	8	66	79	80	85	89	88	69	67
21	1	8	80	81	82	86	91	90	89	85
22	1	8	82	83	84	87	93	92	91	86
23	1	8	23	24	25	95	100	99	98	94
24	1	8	25	26	27	96	102	101	100	95
25	1	8	27	28	29	97	104	103	102	96
26	1	8	98	99	100	106	111	110	109	105
27	1	8	100	101	102	107	113	112	111	106
28	1	8	102	103	104	108	115	114	113	107
29	1	8	37	56	57	117	122	121	120	116
30	1	8	57	58	59	118	124	123	122	117
31	1	8	59	60	61	119	126	125	124	118
32	1	8	69	88	89	128	133	132	131	127
33	1	8	89	90	91	129	135	134	133	128
34	1	8	91	92	93	130	137	136	135	129
35	1	8	131	132	133	139	144	143	142	138
36	1	8	133	134	135	140	146	145	144	139
37	1	8	135	136	137	141	148	147	146	140
38	1	5	1	8	12	150	149			
39	1	5	12	19	23	151	150			
40	1	5	23	94	98	152	151			
41	1	5	98	105	109	153	152			
42	1	5	84	78	75	154	155			
43	1	5	93	87	84	155	156			

---

44	1	5	137	130	93	156	157
45	1	5	148	141	137	157	158
1	10		0				
2	20		0				
3	30		0				
4	36.6667		0				
5	43.3333		0				
6	46.6667		0				
7	50		0				
8	10		5				
9	30		5				
10	43.3333		5				
11	50		5				
12	10		10				
13	20		10				
14	30		10				
15	36.6667		10				
16	43.3333		10				
17	46.6667		10				
18	50		10				
19	10		15				
20	30		15				
21	43.3333		15				
22	50		15				
23	10		20				
24	20		20				
25	30		20				
26	36.6667		20				
27	43.3333		20				
28	46.6667		20				
29	50		20				
30	51.25		0				
31	52.5		0				
32	52.5		5				
33	51.25		10				
34	52.5		10				
35	52.5		15				
36	51.25		20				
37	52.5		20				
38	60		0				
39	67.5		0				
40	75		0				
41	82.5		0				
42	90		0				
43	97.5		0				
44	67.5		5				
45	82.5		5				
46	97.5		5				
47	60		10				
48	67.5		10				
49	75		10				

---

---

50	82.5	10
51	90	10
52	97.5	10
53	67.5	15
54	82.5	15
55	97.5	15
56	60	20
57	67.5	20
58	75	20
59	82.5	20
60	90	20
61	97.5	20
62	98.75	0
63	100	0
64	100	5
65	98.75	10
66	100	10
67	100	15
68	98.75	20
69	100	20
70	103.3333	0
71	106.6667	0
72	113.3333	0
73	120	0
74	130	0
75	140	0
76	106.6667	5
77	120	5
78	140	5
79	103.3333	10
80	106.6667	10
81	113.3333	10
82	120	10
83	130	10
84	140	10
85	106.6667	15
86	120	15
87	140	15
88	103.3333	20
89	106.6667	20
90	113.3333	20
91	120	20
92	130	20
93	140	20
94	10	24.5
95	30	24.5
96	43.3333	24.5
97	50	24.5
98	10	29
99	20	29
100	30	29

---

---

101	36.6667	29
102	43.3333	29
103	46.6667	29
104	50	29
105	10	33.5
106	30	33.5
107	43.3333	33.5
108	50	33.5
109	10	38
110	20	38
111	30	38
112	36.6667	38
113	43.3333	38
114	46.6667	38
115	50	38
116	52.5	23.75
117	67.5	23.75
118	82.5	23.75
119	97.5	23.75
120	52.5	27.5
121	60	27.5
122	67.5	27.5
123	75	27.5
124	82.5	27.5
125	90	27.5
126	97.5	27.5
127	100	24
128	106.6667	24
129	120	24
130	140	24
131	100	28
132	103.3333	28
133	106.6667	28
134	113.3333	28
135	120	28
136	130	28
137	140	28
138	100	32
139	106.6667	32
140	120	32
141	140	32
142	100	36
143	103.3333	36
144	106.6667	36
145	113.3333	36
146	120	36
147	130	36
148	140	36
149	0	0
150	0	10
151	0	20

---

---

152	0	29
153	0	38
154	190	0
155	190	10
156	190	20
157	190	28
158	190	36
1		
1.00E-05	1.00E-05	0 0
109	51	
110	51	
111	51	
112	51	
113	51	
114	51	
115	51	
142	49	
143	49	
144	49	
145	49	
146	49	
147	49	
148	49	
153	51	
158	49	

**Apêndice D:** Percolação sob a barragem de Crestuma  
[QUASAR] Resultados

***** Potenciais *****					
Nó	$\phi(m)$	Nó	$\phi(m)$	Nó	$\phi(m)$
1	2.528631E+01	54	4.437592E+01	107	4.881625E+01
2	3.200553E+01	55	4.523231E+01	108	4.905889E+01
3	3.681724E+01	56	4.349688E+01	109	5.100000E+01
4	3.929418E+01	57	4.377397E+01	110	5.100000E+01
5	4.108961E+01	58	4.405931E+01	111	5.100000E+01
6	4.165284E+01	59	4.440986E+01	112	5.100000E+01
7	4.209143E+01	60	4.471448E+01	113	5.100000E+01
8	2.455965E+01	61	4.520852E+01	114	5.100000E+01
9	3.731262E+01	62	4.496561E+01	115	5.100000E+01
10	4.114189E+01	63	4.499812E+01	116	4.349028E+01
11	4.222711E+01	64	4.504476E+01	117	4.378205E+01
12	2.616025E+01	65	4.513451E+01	118	4.439206E+01
13	3.307886E+01	66	4.520187E+01	119	4.494283E+01
14	3.773123E+01	67	4.537635E+01	120	4.348453E+01
15	4.013053E+01	68	4.553466E+01	121	4.358706E+01
16	4.171967E+01	69	4.588543E+01	122	4.377996E+01
17	4.217742E+01	70	4.505381E+01	123	4.407702E+01
18	4.253225E+01	71	4.505618E+01	124	4.434989E+01
19	2.644601E+01	72	4.480036E+01	125	4.472659E+01
20	3.930740E+01	73	4.425883E+01	126	4.479711E+01
21	4.246259E+01	74	4.296788E+01	127	4.682071E+01
22	4.303403E+01	75	4.084423E+01	128	4.686726E+01
23	2.940496E+01	76	4.508934E+01	129	4.651483E+01
24	3.642188E+01	77	4.444400E+01	130	4.330712E+01
25	4.080349E+01	78	4.064398E+01	131	4.756026E+01
26	4.263676E+01	79	4.528965E+01	132	4.756030E+01
27	4.381356E+01	80	4.532656E+01	133	4.759747E+01
28	4.395522E+01	81	4.514971E+01	134	4.747692E+01
29	4.381943E+01	82	4.463560E+01	135	4.714824E+01
30	4.225084E+01	83	4.340633E+01	136	4.666713E+01
31	4.240554E+01	84	4.127805E+01	137	4.461611E+01
32	4.250224E+01	85	4.568618E+01	138	4.829220E+01
33	4.264557E+01	86	4.522990E+01	139	4.825327E+01
34	4.273167E+01	87	4.154018E+01	140	4.818212E+01
35	4.314444E+01	88	4.617358E+01	141	4.629911E+01
36	4.360271E+01	89	4.629915E+01	142	4.900000E+01
37	4.344514E+01	90	4.619568E+01	143	4.900000E+01
38	4.309883E+01	91	4.581827E+01	144	4.900000E+01
39	4.357707E+01	92	4.474840E+01	145	4.900000E+01
40	4.398373E+01	93	4.269943E+01	146	4.900000E+01
41	4.434236E+01	94	3.042587E+01	147	4.900000E+01
42	4.467712E+01	95	4.286844E+01	148	4.900000E+01
43	4.493084E+01	96	4.518141E+01	149	5.100000E+01
44	4.359873E+01	97	4.546850E+01	150	5.100000E+01

---

45	4.435092E+01	98	3.437671E+01	151	5.100000E+01
46	4.497759E+01	99	4.266657E+01	152	5.100000E+01
47	4.324762E+01	100	4.469629E+01	153	5.100000E+01
48	4.364003E+01	101	4.630472E+01	154	4.900000E+01
49	4.401528E+01	102	4.709818E+01	155	4.900000E+01
50	4.436655E+01	103	4.713632E+01	156	4.900000E+01
51	4.471646E+01	104	4.710835E+01	157	4.900000E+01
52	4.505596E+01	105	3.992596E+01	158	4.900000E+01
53	4.370404E+01	106	4.843159E+01		

---

**Apêndice E:** Economia de Memória (Percolação sob a barragem de Crestuma)  
Elementos finitos

SEMIBANDA VARIÁVEL ARMAZENADA EM VECTOR POR LINHAS			
	número de linhas	=	148
	largura máxima	=	86
banda inicial	[ comprimento	=	2652
	[ % de zeros	=	53.96
banda efectiva	[ comprimento	=	6231
	[ % de zeros	=	80.40
Economia de espaço em relação a outras técnicas			
	banda constante	*	51.04 %
	triângulo superior em vector	*	43.49 %
	armazenamento completo	*	71.55 %



---

**Apêndice F:** Economia de Memória (Percolação sob a barragem de Crestuma)  
Elementos semi-infinitos

SEMIBANDA VARIÁVEL ARMAZENADA EM VECTOR POR LINHAS			
	número de linhas	=	158
	largura máxima	=	150
banda inicial	[ comprimento	=	3762
	[ % de zeros	=	64.04
banda efectiva	[ comprimento	=	11995
	[ % de zeros	=	88.72
Economia de espaço em relação a outras técnicas			
	banda constante	*	49.39 %
	triângulo superior em vector	*	4.51 %
	armazenamento completo	*	51.95 %

---

## Bibliografia

- (i) ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Elements Method, 3.rd ed., Mc Graw-Hill, London, 1977
- (ii) HINTON, E., OWEN, D. R. J., An Introduction to Finite Element Comportations, Pineridge Press, Swansea, 1979
- (iii) HINTON, E., OWEN, D. R. J., Finite Element Programming, Academic Press, London, 1977
- (iv) MARQUES, J. M. M. C., Textos de Apoio do Seminário "Métodos Numéricos em Geotecnia", FEUP, 1993
- (v) MARQUES, J. M. M. C., Textos de Apoio de "Complementos de Cálculo Numérico", FEUP, 1993

# INDÍCE

## Apresentação do Trabalho

1.	Introdução . . . . .	4
2.	O Método dos Elementos Finitos . . . . .	4

---

## 1ª Parte Aplicações do MEF

### Problemas Elásticos Planos - Programa PLANE

1.	Introdução . . . . .	8
2.	O programa PLANE . . . . .	8
3.	O programa GEN2D . . . . .	8
4.	Aplicação . . . . .	9
4.1	Caracterização do problema . . . . .	9
4.2	Estado plano de deformação	
4.2.1	Introdução . . . . .	9
4.2.2	Malha de elementos finitos . . . . .	9
4.2.3	Utilização do PLANE . . . . .	10
4.2.4	Resultados . . . . .	10
4.3	Problema axissimétrico	
4.3.1	Introdução . . . . .	10
4.3.2	Malha de elementos finitos . . . . .	11
4.3.3	Utilização do PLANE . . . . .	11
4.4	Solução analítica . . . . .	11
4.5	Comparação de Resultados . . . . .	12
Apêndice A:	Estado Plano de Deformação - [GEN2D] Ficheiro de Dados . . . . .	15

Apêndice B: Estado Plano de Deformação - [PLANE] Ficheiro de Dados . . . . .	16
Apêndice C: Estado Plano de Deformação - [PLANE] Resultados . . . . .	19
Apêndice D: Problema Axissimétrico - [GEN2D] Ficheiro de Dados . . . . .	22
Apêndice E: Problema Axissimétrico - [PLANE] Ficheiro de Dados . . . . .	23
Apêndice F: Problema Axissimétrico - [PLANE] Resultados . . . . .	26
Figura 1: Estado Plano de Deformação - Numeração dos Elementos . . . . .	30
Figura 2: Estado Plano de Deformação - Numeração dos Nós . . . . .	31
Figura 3: Estado Plano de Deformação - Localização dos Apoios . . . . .	32
Figura 4: Problema Axissimétrico - Numeração dos Elementos . . . . .	33
Figura 5: Problema Axissimétrico - Numeração dos Nós . . . . .	34
Figura 6: Problema Axissimétrico - Localização dos Apoios . . . . .	35

Problemas Regidos Pela Equação Quase-Harmónica  
Programa QUASAR

1. Introdução . . . . .	37
2. Equação quase-harmónica . . . . .	37
3. Condições no domínio e na fronteira . . . . .	38
3.1 Condições no domínio . . . . .	38
3.2 Condições na fronteira . . . . .	38
3.2.1 Condição fronteira de Dirichlet . . . . .	39
3.2.2 Condição fronteira de Cauchy . . . . .	39
4. Método dos resíduos pesados . . . . .	40
5. Discretização por elementos finitos . . . . .	40
5. Problemas planos . . . . .	42
6. Problemas axissimétricos . . . . .	43
7. Aplicações	

7.1	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha	
7.1.1	Caracterização do problema . . . . .	43
7.1.2	Malha de elementos finitos . . . . .	43
7.1.3	Utilização do QUASAR . . . . .	44
7.1.4	Resultados . . . . .	44
7.2	Percolação sob a barragem de Crestuma	
7.2.1	Caracterização do problema . . . . .	44
7.2.2	Malha de elementos finitos . . . . .	44
7.2.3	Utilização do QUASAR . . . . .	44
7.2.4	Resultados . . . . .	45
Apêndice A:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha [GEN2D] Ficheiro de Dados . . . . .	47
Apêndice B:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha [QUASAR] Ficheiro de Dados . . . . .	48
Apêndice C:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha [QUASAR] Resultados . . . . .	54
Apêndice D:	Percolação sob a barragem de Crestuma [GEN2D] Ficheiro de Dados . . . . .	56
Apêndice E:	Percolação sob a barragem de Crestuma [QUASAR] Ficheiro de Dados . . . . .	58
Apêndice F:	Percolação sob a barragem de Crestuma [QUASAR] Resultados . . . . .	63
Figura 1:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha - Geometria do Problema .	66
Figura 2:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha - Numeração dos Elementos	67
Figura 3:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha - Numeração dos Nós . . .	68
Figura 4:	Percolação sob uma cortina de estacas-prancha - Localização das Fronteiras	69
Figura 5:	Percolação sob a barragem de Crestuma - Geometria do Problema . . . . .	70

Figura 6: Percolação sob a barragem de Crestuma - Numeração dos Elementos . . . .	71
Figura 7: Percolação sob a barragem de Crestuma - Numeração dos Nós . . . . .	72
Figura 8: Percolação sob a barragem de Crestuma - Localização das Fronteiras . . . .	73

---

2ª Parte

Estudo e Implementação de Algumas Alterações no Programa QUASAR

Armazenamento em Vector da Semibanda de Largura Variável

1. Introdução . . . . .	76
2. O programa PORTIC . . . . .	76
3. Soluções Possíveis	
3.1 Simetria . . . . .	76
3.2 Elementos Nulos . . . . .	77
4. Implementação	
4.1 Introdução . . . . .	78
4.1.1 Armazenamento em matriz com semibanda de largura constant	79
4.1.2 Armazenamento em vector com semibanda de largura constant	80
4.1.3 Armazenamento em vector com semibanda de largura variável	80
4.2 O módulo SEMBV . . . . .	81
4.2.1 Declaração de variáveis . . . . .	82
4.2.2 Determinação da largura máxima da semibanda em cada linha	82
4.2.3 Verificação e correcção das reentrâncias na matriz e determinação da largura máxima da semibanda . . . . .	84
4.2.4 Cálculo das posições dos elementos da diagonal . . . . .	86
4.3 Outras alterações . . . . .	87
4.3.1 O módulo INPUT2 . . . . .	87

4.3.2	O módulo STIFPT	87
4.3.3	O módulo GAUSS	89
4.3.4	O módulo PORTIC	91
5.	Exemplo	91
6.	Comentários	92
Apêndice A: Guia do Utilizador		95
Apêndice B: Módulo SEMBV		99
Apêndice C: Módulo INPUT2		101
Apêndice D: Módulo STIFPT		104
Apêndice E: Módulo GAUSS		107
Apêndice F: Módulo PORTIC		110

#### Resolução de Malhas Compreendendo Elementos Infinitos

1.	Introdução	114
2.	O elemento infinito	114
3.	Processo de cálculo	116
4.	Implementação	117
Apêndice A: Alterações no programa QUASAR - Módulo SHAPE2		120
Apêndice B: Alterações no programa QUASAR - Módulo JACOB2		125
Apêndice C: Percolação sob a barragem de Crestuma [QUASAR] Ficheiro de Dados (Elem. Semi-Infinitos)		127
Apêndice D: Percolação sob a barragem de Crestuma [QUASAR] Resultados		132
Apêndice E: Economia de Memória (Percolação sob a barragem de Crestuma) Elementos finitos		134
Apêndice F: Economia de Memória (Percolação sob a barragem de Crestuma) Elementos semi-infinitos		135

---

Bibliografía . . . . . 136





FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000101595