

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA TORRE SINEIRA

Igreja de Santo António das Antas

PAULO MIGUEL MONTEIRO BAIÃO

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientadora: Professora Doutora Elsa de Sá Caetano

Co-Orientador: Professor Catedrático Álvaro Cunha

AGOSTO DE 2010

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2009/2010

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2009/2010 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2009.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

Aos meus pais e irmão

O homem é o pêndulo entre o sorriso e o pranto

George Gordon Byron (Lord Byron)

AGRADECIMENTOS

Várias pessoas auxiliaram e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho desde Março de 2010:

- ✓ À minha orientadora e mentora, Professora Doutora Elsa de Sá Caetano, e ao meu co-orientador, Professor Catedrático Álvaro Cunha, que demonstraram a prontidão e empenho com que sempre me acompanharam durante a realização do presente trabalho;
- ✓ Ao Professor Miguel Mendes, pela importante ajuda ao nível de bibliografia de natureza matemática, o que permitiu obter a profundidade necessária na análise do fenómeno da acção do sino;
- ✓ Ao Padre Bacelar, da Paróquia Igreja de Santo António das Antas, que autorizou a realização das medições e ensaios necessários para a realização das várias análises efectuadas;
- ✓ Ao Arlindo Jerónimo, sócio-gerente da empresa *A Fundação de Sinos de Braga de Serafim da Silva Jerónimo & Filhos, Lda.*, que disponibilizou informação relativa aos sinos;
- ✓ Ao Departamento de Engenharia Civil e à Biblioteca da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, por todo o suporte informático e material disponibilizado;
- ✓ Ao Professor Sarmento pelas informações relativas ao projecto da Torre Sineira das Antas;
- ✓ Aos meus familiares e amigos, que contribuíram directa ou indirectamente para a concretização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho compreende a análise do comportamento dinâmico de um caso em estudo, particularmente este corresponde à Torre Sineira das Antas, localizada na cidade do Porto.

Inicialmente é realizada o tratamento dos vários aspectos associados aos sinos, desde o seu processo de fabrico, expondo o seu significado para as populações e descrevendo os sinos mais emblemáticos do mundo, assim como a exposição das diferentes tipologias de toque e a apresentação das torres sineiras e suas composições de sinos em Portugal. Assim é possível que o leitor seja sensibilizado para as várias temáticas associadas aos sinos.

De seguida, é apresentado o caso particular em estudo, desde a descrição da cidade, percorrendo o seu enquadramento e sua descrição da sua evolvente, passando pela exposição dos vários aspectos relativos ao projecto, em que se descreve a evolução do processo e é dada maior ênfase à apresentação das várias características da Torre Sineira das Antas. Isto é importante para o desenvolvimento dos passos seguintes.

Posteriormente, é realizada a descrição do modo de quantificar a acção do sino, em que se inclui a exposição dos vários aspectos físicos e matemáticos essenciais. Também é realizada a apresentação da abordagem presente na norma alemã “DIN 4178 Glockentürme”.

Ainda é efectuada a apresentação dos resultados experimentais do Ensaio de Vibração Ambiental, seu tratamento e o fundamento teórico que permite a concretização deste.

Por fim, são apresentados os diversos aspectos relacionados com a produção do modelo numérico que servirá de base para a análise dinâmica, quando este se encontra sujeito à acção dos vários sinos.

PALAVRAS-CHAVE: torre, sinos, dinâmica, Portugal.

ABSTRACT

This work includes the analysis of the dynamic behavior of a case study, particularly corresponding to the Bell Tower of Antas, located in the city of Porto.

Initially the treatment is performed with various aspects associated with bells, since their manufacturing process, exposing its significance to the people and describing the most emblematic bells of the world, exposure to different types of sound generation and presentation of the bell tower and bells compositions in Portugal. So it's possible that the reader is aware of the various issues associated with the bells.

Next, the particular case under study is presented, covering the description of its location, going by the exposure of various aspects of the project, which describes the evolution of the process and is given more emphasis on the presentation of the various features of the Bell Tower of Antas. This is important for the development of the next steps.

Then, a description of how to quantify the action induced of the bell is presented, which includes the exposure of various physical and mathematical aspects. The German standard, “DIN 4178 Glockentürme” is also described.

As part of the author's development, results from an ambient vibration test are presented and the corresponding theoretical basis is discussed.

A numerical model and corresponding peculiarities are also presented, together with the results from a dynamic analysis, when the action of the various bells is applied.

KEYWORDS: tower, bells, dynamics, Portugal.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v

1. INTRODUÇÃO	1
----------------------------	---

2. SINOS E TORRES SINEIRAS EM PORTUGAL	5
---	---

2.1. SINOS DE IGREJA	5
-----------------------------------	---

2.1.1. PROCESSO DE FABRICO	5
----------------------------------	---

2.1.2. O SEU SIGNIFICADO	9
--------------------------------	---

2.1.3. PROCESSO DE AFINAÇÃO	12
-----------------------------------	----

2.1.4. TIPOLOGIAS DE TOQUE	13
----------------------------------	----

2.1.4.1. Bamboar	13
------------------------	----

2.1.4.2. Badalar	14
------------------------	----

2.1.4.3. Matraquear	14
---------------------------	----

2.2. TORRES SINEIRAS EM PORTUGAL	15
---	----

2.2.1. TORRE DOS CLÉRIGOS – PORTO	15
---	----

2.2.2. IGREJA DOS PASTORINHOS – ALVERCA	16
---	----

2.2.3. BASÍLICA DO SANTUÁRIO DE FÁTIMA – FÁTIMA	17
---	----

2.3. COMPOSIÇÃO DE SINOS – CARRILHÃO	17
---	----

2.3.1. DEFINIÇÃO	17
------------------------	----

2.3.2. PRINCIPAIS CARRILHÕES EM PORTUGAL	18
--	----

2.3.2.1. Torre dos Clérigos – Porto	18
---	----

2.3.2.2. Palácio Nacional de Mafra – Mafra	19
--	----

2.3.2.3. Igreja dos Pastorinhos – Alverca	20
---	----

2.3.2.4. Basílica do Santuário de Fátima – Fátima	20
---	----

3. DESCRIÇÃO DO CASO EM ESTUDO - TORRE SINEIRA DAS ANTAS	21
3.1. ENQUADRAMENTO GERAL	21
3.1.1. BREVE DESCRIÇÃO DA CIDADE DO PORTO	21
3.1.2. CARACTERIZAÇÃO DA ENVOLVENTE AO CASO EM ESTUDO	22
3.2. IGREJA DE SANTO ANTÓNIO DA ANTAS – PROJECTO	24
3.2.1. HISTORIAL DO PROCESSO	24
3.2.2. DESCRIÇÃO DETALHADA DO PROJECTO	25
3.2.2.1. Igreja	25
3.2.2.2. Torre Sineira	26
3.3. CARACTERÍSTICAS DOS SINOS	31
4. ACÇÃO DOS SINOS	33
4.1. PROPAGAÇÃO DAS ONDAS	33
4.2. FORMA DO SINO E RESPECTIVA FREQUÊNCIA EMITIDA	36
4.3. CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO MOVIMENTO PENDULAR	41
4.3.1. CÁLCULO VARIACIONAL	41
4.3.1.1. Equação de Euler-Lagrange	41
4.3.1.2. Princípio de Hamilton	43
4.3.2. INTEGRAIS E FUNÇÕES ELÍPTICAS	46
4.3.2.1. Integrais Elípticos	46
4.3.2.2. Funções Elípticas de Jacobi	48
4.3.3. PÊNDULO GRAVÍTICO SIMPLES (SINO)	50
4.3.3.1. Movimento livre não amortecido	50
4.3.3.2. Movimento livre amortecido	53
4.3.3.3. Período de oscilação	54
4.3.1. PÊNDULO GRAVÍTICO COMPOSTO (SINO+BADALO)	57
4.3.2.1. Movimento livre não amortecido	57
4.3.2.2. Movimento livre amortecido	59
4.4. MODO DE APLICAÇÃO DA ACÇÃO E RESPECTIVO EFEITO	60
4.5. DISPOSIÇÕES NORMATIVAS – DIN 4178	63

5. ENSAIO DE VIBRAÇÃO AMBIENTAL	67
5.1. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO MODAL, NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	67
5.1.1. ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL	67
5.1.2. MÉTODO DE SELECÇÃO DE PICOS	69
5.1.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	70
5.1.4. IDENTIFICAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES MODAIS	70
5.2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E EQUIPAMENTO UTILIZADO	71
5.3. RESULTADOS OBTIDOS	73
6. MODELAÇÃO NUMÉRICA DA ESTRUTURA	79
6.1. INCERTEZAS ASSOCIADOS À MODELAÇÃO NUMÉRICA	79
6.2. CARACTERÍSTICAS DO MODELO NUMÉRICO	80
6.2.1. TORRE SINEIRA	80
6.2.2. ESCADAS INTERIORES	81
6.2.3. ESTRUTURA METÁLICA E SINOS	82
6.3. ANÁLISE MODAL	83
6.4. ANÁLISE DA RESPOSTA DINÂMICA	85
6.4.1. CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS SINOS	85
6.4.2. CARACTERIZAÇÃO DA ACÇÃO DOS SINOS	86
6.4.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	89
6.4.3.1. Deslocamentos máximos	90
6.4.3.2. Acelerações máximas	92
6.4.3.3. Tensões máximas	94
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
BIBLIOGRAFIA	101

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Terminologia associada às componentes de um sino [1].....	5
Figura 2.2 – Aspecto típico de um molde em execução [1].	6
Figura 2.3 – Núcleo do molde em execução [1].	6
Figura 2.4 – Núcleo do molde a adquirir forma [1].	7
Figura 2.5 – Aplicação da decoração [1].....	7
Figura 2.6 – Cobertura ou capa protectora [1].	7
Figura 2.7 – Cabeça do sino ou asa [1].	8
Figura 2.8 – Vara utilizada para conduzir o material derretido [1].....	8
Figura 2.9 – Desmolde [1].	9
Figura 2.10 – Resultado final [1].....	9
Figura 2.11 – Liberty Bell [1].....	11
Figura 2.12 – Tsar Kolokol [5].....	11
Figura 2.13 – Sino do Templo, em Pequim [6].	12
Figura 2.14 – Os 5 Harmónicos, segundo a tradição cristã [1].	12
Figura 2.15 – Bamboar um sino manualmente (à esq.) e electricamente (à dir.) [1].	13
Figura 2.16 – Badalar [1].....	14
Figura 2.17 – Matraquear um sino manualmente (à esq.) e electricamente (à dir.) [1].....	14
Figura 2.18 – Torre dos Clérigos [8].	16
Figura 2.19 – Igreja dos Pastorinhos [13].	16
Figura 2.20 – Santuário de Fátima [15].....	17
Figura 2.21 – Teclado de Carrilhão [5].....	18
Figura 2.22 – Sinos do Carrilhão da Torre dos Clérigos [9].	18
Figura 2.23 – Igreja do Palácio Nacional de Mafra [5].....	19
Figura 2.24 – Sinos do Carrilhão da Igreja dos Pastorinhos [1].	20
Figura 2.25 – Pormenores do Santuário de Fátima [15].	20
Figura 3.1 – Brasão da cidade do Porto [5].....	22
Figura 3.2 – Disposição dos vários elementos emblemáticos - Virtual Earth™.....	22
Figura 3.3 – Vias que delimitam a Igreja de Santo António das Antas - Virtual Earth™.....	23
Figura 3.4 – Vistas segundo os 4 pontos cardeais - Virtual Earth™.....	23
Figura 3.5 – Monumento simbólico em memória do Padre Joaquim Teixeira [16].	25
Figura 3.6 – Os vários corpos distintos da Igreja de Santo António das Antas - Blender	25

Figura 3.7 – Desenho representativo da Torre Sineira – AutoCad.....	26
Figura 3.8 – Desenho representativo da secção da Torre Sineira – AutoCad.....	27
Figura 3.9 – Aspecto de uma janela da Torre.	27
Figura 3.10 – Saliência que existe ao nível do terraço – AutoCad.....	28
Figura 3.11 – Localização do Relógio, em azul ciano (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)	28
Figura 3.12 – Início da escada interior, em 2D (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)	29
Figura 3.13 – Escada interior a partir do 2º nível, em 2D (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)	29
Figura 3.14 – Disposição relativa das lajes em, em 2D (AutoCad, à esq) e em 3D (Blender, à dir.).....	30
Figura 3.15 – Localização da abertura de acesso ao carrilhão (cinzento claro) – AutoCad.....	30
Figura 3.16 – Escada metálica de acesso ao carrilhão e respectivo desenho esquemático - AutoCad	30
Figura 3.17 – Estrutura de suporte aos sinos.....	31
 Figura 4.1 – Representação esquemática das ondas transversais e das ondas longitudinais [16].....	34
Figura 4.2 – Relação entre comprimento de onda (λ), velocidade de propagação (v) e frequência (f) [18].	34
Figura 4.3 – Relação entre pressão e deslocamento das partículas, devido a uma perturbação do meio [19].....	35
Figura 4.4 – Dimensões principais de um sino: altura (A) e largura da boca (L) [1].	36
Figura 4.5 – Modos de vibração dos vários harmónicos (sistema aberto numa das extremidades) [21].	40
Figura 4.6 – Modos de vibração de um sino - IJME 2006 [22].	40
Figura 4.7 – Representação esquemática dos parâmetros da elipse.	46
Figura 4.8 – Representação esquemática de um pêndulo gravítico simples [23].	50
Figura 4.9 – Representação gráfica da função escalar $E_T(\theta, \omega)$ - <i>Matlab</i>	52
Figura 4.10 – Retrato de fase no plano (θ, ω) de um pêndulo gravítico simples não amortecido [26]. ..	52
Figura 4.11 – Retrato de fase no plano (θ, v) de um pêndulo gravítico simples amortecido [26].	53
Figura 4.12 – Função $\phi(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=1$ – <i>MatLab</i> ™.....	56
Figura 4.13 – Função $\phi(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=1$ – <i>MatLab</i> ™.	56
Figura 4.14 – Representação esquemática de um pêndulo gravítico composto [27].....	57
Figura 4.15 – Equilíbrio de forças dinâmicas relativas ao sino [27].....	60
Figura 4.16 – Função $H(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=l=m=1$ – <i>MatLab</i> ™.	62
Figura 4.17 – Função $V(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=l=m=1$ – <i>MatLab</i> ™.	62

Figura 4.18 – Função $M(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n = l = m = 1$ – MatLab.	62
Figura 4.19 – Diagrama de corpo livre [29].	63
Figura 4.20 – Representação gráfica de β_n^h , em função do i -ésimo harmónico [29].	65
Figura 4.21 – Representação gráfica de β_n^v , em função do i -ésimo harmónico [29].	65
Figura 4.22 – Ábaco para calcular valores máximos e mínimos das acções horizontais e verticais [29].	66
Figura 5.1 – Disposições possíveis dos sismógrafos (modo de fixação).	71
Figura 5.2 – Localização dos sismógrafos nos vários <i>setup</i> 's.	72
Figura 5.3 – Disposição dos sismógrafos no primeiro e último <i>setup</i> , respectivamente.	73
Figura 5.4 – Gráfico do ANPSD, para identificação de frequências naturais.	74
Figura 5.5 – Magnitude da função de densidade espectral média S_{41} .	75
Figura 5.6 – Ângulo de fase da função de densidade espectral média S_{41} .	76
Figura 5.7 – Representação esquemática das componentes modais.	77
Figura 6.1 – Disposição dos elementos numéricos da torre – SAP2000™ e Blender.	80
Figura 6.2 – Disposição dos elementos numéricos das escadas interiores – Blender.	81
Figura 6.3 – Modelação da estrutura metálica – SAP2000™.	82
Figura 6.4 – Modos de Vibração obtidos pela modelação numérica.	84
Figura 6.5 – Modos de vibração do ensaio experimental e do modelo numérico.	85
Figura 6.6 – Representação das funções $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 1 – MatLab™.	86
Figura 6.7 – Representação das funções $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 2 – MatLab™.	87
Figura 6.8a – Representação da função $\theta(t)$ do sino 3 – MatLab™.	87
Figura 6.8b – Representação das funções $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 3 – MatLab™.	87
Figura 6.9a – Representação das funções $\theta(t)$ e $\omega(t)$ dos 3 sinos – MatLab™.	88
Figura 6.9b – Representação da função $H(t)$ dos 3 sinos – MatLab™.	88
Figura 6.10 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao sino 1 – MatLab™.	90
Figura 6.11 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao sino 2 – MatLab™.	90
Figura 6.12 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao sino 3 – MatLab™.	90
Figura 6.13 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos separadamente – MatLab™.	91
Figura 6.14 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos em conjunto – MatLab™.	91
Figura 6.15 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 1 – MatLab™.	92
Figura 6.16 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 2 – MatLab™.	92
Figura 6.17 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 3 – MatLab™.	92

Figura 6.18 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos separadamente – MatLab™.....	93
Figura 6.19 – Aceleração da estrutura no nível 0 dos 3 sinos em conjunto – MatLab™.	93
Figura 6.20 – Mapa de tensões máximas, devido ao peso próprio – SAP2000™.....	94
Figura 6.21 – Mapa de tensões mínimas, devido ao peso próprio – SAP2000™.....	94
Figura 6.22 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 1 – SAP2000™.....	95
Figura 6.23 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 2 – SAP2000™.....	95
Figura 6.24 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 3 – SAP2000™.....	96
Figura 6.25 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 1 – SAP2000™.....	96
Figura 6.26 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 2 – SAP2000™.....	97
Figura 6.27 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 3 – SAP2000™.....	97

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 – Características dos sinos da Torre Sineira das Antas.....	31
Tabela 4.1 – Características dos sinos do Sistema Moderno [1].	37
Tabela 4.2 – Características dos sinos do Sistema Antigo [1].	38
Tabela 4.3 – Duas oitavas, segundo a Escala Musical Temperada.	39
Tabela 5.1 – Frequências identificadas experimentalmente	74
Tabela 5.2 – <i>Delay</i> médio dos vários sismógrafos relativamente a S1, nas várias direcções principais.	76
Tabela 5.3 – Componentes dos modos puros, para cada direcção.	77
Tabela 6.1 – Frequências e natureza dos modos de vibração do modelo numérico.	83
Tabela 6.2 – Componentes dos modos puros do modelo numérico, para cada direcção.....	83
Tabela 6.3 – Características mecânicas dos sinos que bamboam.	85
Tabela 6.4 – Valores máximos absolutos das grandezas características dos 3 sinos.	89
Tabela 6.5 – Valores máximos absolutos dos deslocamentos, devido a cada um dos sinos.....	91
Tabela 6.6 – Valores máximos absolutos dos deslocamentos, devido a cada um dos sinos.....	93
Tabela 6.7 – Valores máximos das tensões, devido à componente estática.	94
Tabela 6.8 – Valores máximos das tensões, devido à componente dinâmica.....	98
Tabela 6.9 – Valores máximos das tensões, devido à combinação das componentes de acção.	98

1

INTRODUÇÃO

A preservação e utilização cuidada do património existente são importantes, uma vez que este representa a identidade de uma determinada localidade, e consequentemente da cultura de um país. Além disso, resulta do contributo das várias civilizações que deixaram o seu testemunho, e assim permite às gerações futuras contemplar esta herança cultural vasta. Este conjunto de expressões artísticas constitui o principal marco das grandes realizações da humanidade.

A conservação das construções históricas corresponde a uma actividade complexa, logo necessita de uma intervenção multidisciplinar, requerendo a experiência de arquitectos, historiadores, restauradores e em diversos casos, a participação de especialistas em engenharia estrutural, geotecnia, de materiais, etc. O papel de cada um dos especialistas no projecto específico varia em função do grau de complexidade do dano presente no elemento que vai sofrer a dita intervenção.

A estabilidade da estrutura corresponde a um dos aspectos mais importantes na análise do modo de intervenção, uma vez que uma igreja, cuja estrutura que necessita da mesma pode ter sofrido todas as obras de restauro ao nível dos frescos, mas se não se realizar primeiro um reforço da sua capacidade resistente, o conjunto entra em colapso e a operação de restauro na pintura deixa de ter qualquer valor. Uma obra eclesiástica, com o grau de importância patrimonial que possui, não pode carecer na análise destes aspectos fundamentais, a ter em atenção aquando da requisitada intervenção.

A capacidade resistente das estruturas pode diminuir face a diversos factores de natureza intrínseca e extrínseca, entre os quais se encontram de seguida:

- ✓ A deterioração natural dos materiais;
- ✓ Os danos resultantes de sismos anteriores, movimentos das fundações e acções que actuam ao longo da vida da estrutura, como o vento e as variações de temperatura;
- ✓ Eventuais alterações na estrutura, como acrescentos em planta ou em altura, ligações entre partes da construção outrora independentes e a substituição das coberturas originais em madeira por outras mais pesadas.

O valor de um monumento reside nas técnicas e soluções estruturais adoptadas por estas serem inovadoras relativamente à época em que foram construídas. Além do aspecto técnico, o facto de resistirem às acções sofridas ao longo do tempo – em alguns casos centenas e até milhares de anos – contribui para que o fascínio que é atribuído a estas obras não seja reduzido. Antigamente, os vários monumentos chegaram a demorar centenas de anos a serem erguidos, o que obrigava à alteração do mestre de obra, uma vez que a sua execução ultrapassava a esperança média de vida da época em questão.

Ao longo dos tempos, o conhecimento estrutural evoluiu no sentido de criar melhores soluções para resistir à acção do peso próprio da estrutura. O processo de aprendizagem aplicado era baseado essencialmente no método de tentativa e erro. A experiência com os vários eventos geológicos (sismos) conduziu à modificação da prática construtiva, incorporando aspectos dirigidos a incrementar a resistência face a esses. Por exemplo, no caso das igrejas, a fachada principal tornou-se mais larga que alta e as torres laterais da fachada são constituídas por um corpo só. As construções passaram a ser mais baixas e maciças, as paredes ficaram cada vez mais espessas e sem janelas, incorporaram-se contrafortes e usaram-se tectos mais leves.

Independentemente do material empregue, a forma atribuída e o método de construção adoptado, os princípios e critérios da engenharia estrutural continuam a ser válidos para todos os tipos de construção, consequentemente as metodologias aplicadas actualmente para os edifícios modernos podem ser adoptados no estudo da estabilidade dos edifícios históricos, tendo presente as devidas adaptações.

Além das várias componentes de acção acima evidenciadas, existe a parcela relativa à acção do sino. O estudo da sua acção começou muito recentemente. Os sinos continuam a tocar e a sua musicalidade sempre provocou admiração dos seus espectadores, mas o seu impacto ao nível dos danos que estes foram provocando nas estruturas que o suportam tem significado. O nível tecnológico e técnico que se verifica actualmente, permite que seja possível a demanda no encontro de uma metodologia que permita definir um modo de intervenção eficaz de modo a minimizar ao máximo os seus danos. Por essa razão, algumas das igrejas já assistiram à suspensão da actividade de parte dos seus sinos, chegando este acto a afectar à sua totalidade.

Actualmente existe uma norma alemã intitulada de “DIN 4178 Glockentürme”, que realiza uma caracterização dos várias directrizes ao nível da definição da acção dos sinos e também das outras variáveis extrínsecas a este, tais como o módulo de elasticidade do terreno. Esta norma realiza uma distinção de abordagem quer se trate de uma torre sineira a construir, quer de uma já existente, de que se pretende realizar uma verificação da estabilidade.

O trabalho que se apresenta de seguida, realiza um estudo do comportamento dinâmico de uma torre sineira, tendo por objectivo avaliar a estabilidade estrutural e o confronto devido às acções dinâmicas exercidas pelos sinos sobre a torre que os suporta, segundo os vários modos de actuação.

O caso em estudo corresponde à torre sineira da Igreja de Santo António das Antas, no Porto. Segundo informações recolhidas junto do Projectista e Responsáveis pela Igreja, verificaram-se vibrações elevadas no topo da torre aquando dos testes do balançar do sino de maiores dimensões, de tal modo que as pessoas pensavam que a torre iria entrar em colapso. Por essa razão, actualmente o sistema de accionamento do sino foi alterado. Noutras torres, tem havido situações de desactivação dos sinos.

Para além deste capítulo inicial introdutório, o trabalho encontra-se estruturado em mais seis Capítulos, cujo conteúdo de cada um se encontra resumidamente descrito de seguida:

- ✓ Capítulo 2 – é realizada uma referência dos vários aspectos relativos aos sinos, desde a sua fabricação até à descrição dos principais sistemas que se encontram em Portugal. Além disso, é feita uma descrição dos exemplos mais importantes de Torres Sineiras em Portugal, desde o norte até ao sul do território nacional;
- ✓ Capítulo 3 – faz-se a apresentação do caso em estudo com a realização do seu enquadramento geral, de seguida procede-se à sua exposição ao nível dos vários aspectos relativos ao projecto e posteriormente são exibidas as características dos sinos que se situam no topo da torre;

- ✓ Capítulo 4 – é feita a descrição da acção de um sino, percorrendo os vários aspectos físicos e matemáticos que permitiram realizar uma exposição relativa à propagação das ondas, realizar um paralelismo com a forma e nota musical expressa por um sino, descrever o movimento pendular simples e composto, caracterizar a acção propriamente dita e por fim apresentar as suas disposições normativas;
- ✓ Capítulo 5 – é efectuada a caracterização e apresentação dos resultados obtidos nos ensaios realizados, fundamentais para a calibração do modelo numérico, que servirá de apoio da quantificação e análise dos efeitos produzidos pela acção dos sinos;
- ✓ Capítulo 6 – é realizada a análise dos resultados obtidos a partir do cálculo numérico da acção e da estrutura, o que conduz às várias análises, começando por uma descrição dos vários aspectos relativos às incertezas inerentes à modelação numérica. De seguida é realizada a caracterização dos vários elementos que compõem o modelo adoptado para a estrutura em causa. De seguida são realizadas as diversas análises: modal e resposta dinâmica ao nível de deslocamentos e tensões;
- ✓ Capítulo 7 – procede-se à exposição das considerações finais, em que se realiza a apresentação das conclusões obtidas pela análise do conjunto de resultados obtidos, e também de perspectivas de desenvolvimentos no futuro.

2

SINOS E TORRES SINEIRAS EM PORTUGAL

No presente capítulo é efectuada a apresentação dos diversos aspectos relativos aos sinos e às torres sineiras em território nacional. Inicialmente são apresentadas as questões relativas aos sinos, começando pela descrição do processo de fabrico, passando de seguida pela explicação do significado dos sinos para a civilização, posteriormente pela distinção das diversas formas de tocar um sino e também é explicado o conceito de carrilhão. Termina com a exibição das principais torres sineiras e respectivas composições de sinos mais conhecidos em Portugal.

2.1. SINOS DE IGREJA

2.1.1. PROCESSO DE FABRICO

Cada sino tem uma nota musical característica e por essa razão necessita de ser estudada com muito cuidado, antes do mesmo ser fundido. A sua nota musical é determinada pelas dimensões, forma geométrica, diâmetro da boca e pela relação da espessura da aba, ou seja, a parte terminal do sino e onde bate o badalo.

Com o intuito de facilitar a comunicação, apresenta-se a terminologia relativa às diversas componentes de um sino, na Figura 2.1.

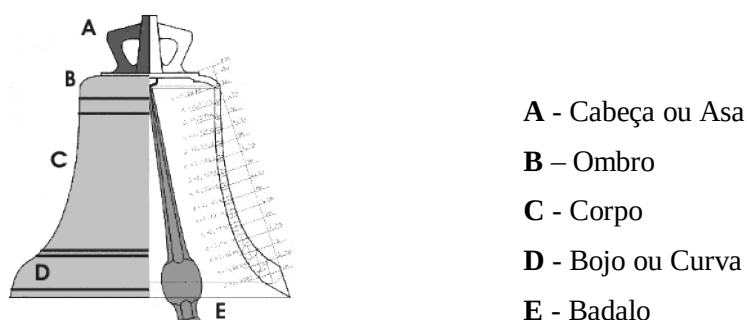


Figura 2.1– Terminologia associada às componentes de um sino [1].

O aspecto anterior explica a razão pela qual o fabrico de um sino corresponde a uma actividade que exige um elevado grau de detalhe uma vez que é necessário que o elemento final reproduza o som com as características pretendidas, correspondendo à principal exigência apresentada pelo requerente.

Relativamente ao processo de fabrico propriamente dito, este encontra-se descrito de acordo com os seguintes fases [1]:

- ✓ Inicialmente é necessário proceder à realização do molde, que irá servir de estrutura base para os passos seguintes. O molde é constituído pelo conjunto formado pelos tijolos, à prova de fogo, ligados por uma mistura de argila, pêlos de cabra e estrume do cavalo. O estrume de cavalo aumenta a resistência da argila do molde ao calor e os pêlos de cabra são usados como um ligante flexível e poroso;



Figura 2.2 – Aspecto típico de um molde em execução [1].

- ✓ Sobre a estrutura do molde, espalha-se sobre este a mistura acima mencionada, formando várias camadas que conduzirão à forma interna, ou seja, o núcleo do molde. O núcleo é seco com o calor de uma fogueira de carvão vegetal. Então, uma camada isolante é posta sobre o núcleo de modo que a segunda parte não adira à primeira;



Figura 2.3 – Núcleo do molde em execução [1].

- ✓ O conjunto finalizado na secção anterior é aparado de forma a obter a forma do perfil interior do sino, o que corresponde ao espaço ocupado pela espessura do futuro sino. A parte dura do “sino falso” é arredondada usando a mistura já descrita;



Figura 2.4 – Núcleo do molde a adquirir forma [1].

- ✓ De seguida, unta-se com gordura de vaca para que o molde fique completamente liso e permita aplicar os frisos decorativos e as inscrições estampadas em cera a partir de madeira gravada;



Figura 2.5 – Aplicação da decoração [1].

- ✓ Com o auxílio de uma escova especial para o efeito, o "sino falso" é coberto com várias camadas da mesma mistura, para que as decorações fiquem bem seguras. Estas camadas, cada vez mais grossas, vão formar um conjunto com o aspecto de uma concha em volta do "sino falso", transformando-se na capa protectora;



Figura 2.6 – Cobertura ou capa protectora [1].

- ✓ A asa do sino é feita a partir dum modelo de cera coberta pela argila. Este elemento é aquecido numa estufa à temperatura de 100°C, de modo que a cera derreta e deixe o interior oco. Esta é uma técnica chamada "cera perdida". O molde obtido é posto então sobre o molde do sino;



Figura 2.7 – Cabeça do sino ou asa [1].

- ✓ As partes do molde estão construídas. Devido a um aquecimento mais intensivo do molde, a cera da decoração derrete deixando ocultas as formas decorativas do interior da capa protectora. Posteriormente, é levantada a capa protectora para permitir que se quebre o "sino falso". Aplicando novamente a capa protectora, é obtido um espaço vazio onde o metal derretido é derramado;
- ✓ Nesta fase é possível proceder à fundição. O bronze campanil corresponde à designação do material de que os sinos são feitos e é constituído por uma liga composta de 78% de cobre e 22% de estanho, fundindo a uma temperatura de 1200°C. Para sinos que pesem mais de 500 quilos, o metal é derretido numa fornalha de cadinho. Uma parte do metal derretido é conduzida pelo fundidor, usando uma vara para encaminhar o material saído do forno e vertido para o interior do molde. Os moldes são construídos e enterrados em poços abertos para o efeito. Um canal de tijolos construído na parte superior do poço permitirá que o metal derretido seja derramado, por gravidade, do forno para os moldes;



Figura 2.8 – Vara utilizada para conduzir o material derretido [1].

- ✓ Depois de fundido, o bronze é levado a esfriar, aproximadamente, 5 dias para sinos de 2 toneladas. Durante esse tempo, é retirada a terra que havia sido cuidadosamente posta em redor dos moldes, para aumentar a sua resistência. Posteriormente, a capa protectora é quebrada. O sino ainda sujo de argila queimada, será raspado, escovado e polido;



Figura 2.9 – Desmolde [1].

- ✓ Após o cumprimento das diversas fases acima descritas, o resultado final obtido é semelhante ao que se verifica na Figura 2.10. As decorações dependem da fábrica de fundição de sinos.



Figura 2.10 – Resultado final [1].

2.1.2. O SEU SIGNIFICADO

Os sinos têm origem oriental. Em tempos remotos, eram usados na Índia e na China para anunciar ao povo as festas religiosas e transmitir para zonas distantes diferentes sinais. Foi depois adoptado pelo cristianismo que fez dele, por excelência, a voz do chamamento à “casa de Deus”.

Eles representam um sinal, o que explica a origem do nome em latim "signum". São feitos de bronze, em que se pode adicionar uma dosagem de ouro ou de prata e outros componentes de modo a melhorar sua sonoridade, segundo fórmulas secretas guardadas e passadas de geração a geração pelas famílias construtoras, geralmente italianas, alemãs e portuguesas.

Os primeiros a utilizá-los foram os mosteiros beneditinos para convocar os monges às orações das horas em Itália, França e Inglaterra. S. Paolino de Nola anteriormente já os tinha usado na sua catedral em 431, ou seja, em meados do século V. No século VIII, o Papa Estevão II fez construir uma torre na

antiga Basílica de S. Pedro, onde ordenou a colocação de três sinos. No século IX começaram a surgir em todas as catedrais e igrejas paroquiais.

Os sinos são instrumentos que se encontram directamente ligados ao culto e costumam receber uma bênção própria. Esta é realizada pelo Bispo, que costuma homenagear determinados santos, cujos nomes são gravados em alto-relevo com forma cónica [2].

Actualmente, vive-se numa época com meios de comunicação mais evoluídos, tais como: satélites, televisões, rádios, telefones, telemóveis, etc. Mesmo assim, os sinos que se encontram instalados nas torres das igrejas continuam a cumprir o seu papel de anunciar as notícias de alegria e tristeza às populações locais. Este papel é desempenhado pelo sineiro, homem que sabe tocar o sino, e este consegue variar os sons conforme os actos que quer anunciar.

Anunciam alegrias nos baptizados, na véspera de Natal, na Páscoa, quando repicam (o sineiro bate directa e repetidamente com o badalo contra o sino). Quando o sineiro o faz o sino bamboar (movimento pendular) nos dias festivos, de modo a anunciar que a banda musical chegou à aldeia e que esta vai percorrendo as ruas a tocar, antes das cerimónias religiosas, aos domingos, e dias da semana. Existe uma diferenciação dos toques no nascimento de uma criança, no caso de esta corresponder ao sexo masculino ou feminino.

Anunciam tristezas para anunciar a morte de um homem, em que o sineiro toca três vezes seguidas, com um intervalo de 1 minuto e para anunciar a morte de uma mulher, toca duas vezes. Na morte dos “anjinhos” (crianças de tenra idade), o sino repica em sinal de que um “anjo partiu para o céu”. Em dias de funerais dos vizinhos, trabalhos nos campos eram suspensos.

O toque das Ave-Marias, Trindades e das Almas, corresponde a uma prática que se aplicava em quase todo o país e encontra-se associado à crença religiosa e também a algumas superstições. Uma das crenças mais enraizadas no povo transmontano era o toque para afastar as trovoadas [3].

Transcreve-se de seguida o poema “ Toque das Ave Marias” da Antologia de Poetas de Sempre coordenado por Barroso da Fonte:

*«Os melros cantam
Canta a cotovia
Chegam os pastores
Quando acaba o dia
Cuidados tamanhos
Com os seus rebanhos.
Mal ouvem o sino
De chapéu na mão
Param e rezam.
Ave-maria»*

O sino também tinha a função de convocar o Conselho da Aldeia, presidido pelo Presidente da Junta da Freguesia de modo a ser possível a resolução de problemas colectivos; validar o início dos obras nos caminhos, realizar as valas da água de rega, etc. Também tinham a função de alertar a população em caso de incêndio, de modo a que pudesse ser possível acudir as vítimas, numa época em que o conceito de “bombeiro” ainda era desconhecido.

Existem três períodos durante o dia em que normalmente os sinos tocam, de modo a recordar ao povo a hora da oração das ave-marias, e estas correspondem às 6 horas, às 12 horas e às 18 horas. Durante o

tempo do advento (primeiro tempo do Ano litúrgico, o qual antecede o Natal) e particularmente no período da quaresma, os sinos não são tocados. Em compensação, no Natal na Missa da meia-noite (popularmente conhecida por “missa do galo”) e na solene Vigília da Páscoa, os sinos são tocados de uma forma intensiva e festiva.

Para finalizar, de seguida estão apresentados alguns dos mais emblemáticos sinos a nível mundial, através de uma breve descrição de cada um destes, acompanhados pelas respectivas ilustrações:

- ✓ Um dos mais célebres sinos é o *Liberty Bell*, Sino da Liberdade, o qual se encontra em Filadélfia, no estado da Pensilvânia nos Estados Unidos da América (Figura 2.11). Ele tocou logo após a Declaração da Independência deste país e tornou-se um símbolo nacional;



Figura 2.11 – Liberty Bell [1].

- ✓ No Kremlin, na cidade de Moscovo na Rússia, encontra-se o maior sino do mundo actualmente. É conhecido como sino *Tsar Kolokol* (Sino de Tsar) e possui ornamentos, retratos, e inscrições. Fundido em 1735, tem 6.14 metros de altura, 6.6 metros de diâmetro e pesa 216 toneladas. Nunca foi usado, uma vez que ao ser erguido, caiu e danificou-se, o que é visível na Figura 2.12;



Figura 2.12 – Tsar Kolokol [5].

- ✓ Um dos maiores sinos do mundo encontra-se em Da Zhong Si (Templo do Grande Sino), situado na zona ocidental da cidade de Pequim, na China. Tem 4.54 metros de altura 3.3 metros de diâmetro na base da campânula e pesa cerca de 46.6 toneladas (Figura 2.13). Os sinos na China não têm badalo e são percutidos de fora, com uma espécie de grande martelo de madeira;



Figura 2.13 – Sino do Templo, em Pequim [6].

2.1.3. PROCESSO DE AFINAÇÃO

O som, o timbre e o tom do sino são verificados recorrendo a um analisador espectral electrónico. Se necessário, estas características podem ser ajustadas, eliminando parte do material que se encontra no seu interior através de uma rebarbadora. Este processo é cumprido quando se encontram respeitadas as regras harmónicas padrão de afinação.

Segundo a tradição cristã, os sinos são sempre afinados em 5 harmónicos, conforme mostra a Figura 2.14. Estes harmónicos são: o nominal (N), a quinta da nota fundamental (Q), a terceira menor da nota fundamental (T), a fundamental, nota da primeira oitava inferior - ou abaixo (F) e o bordão, nota da segunda oitava inferior – ou abaixo (B). Assim, nasce um sino afinado.

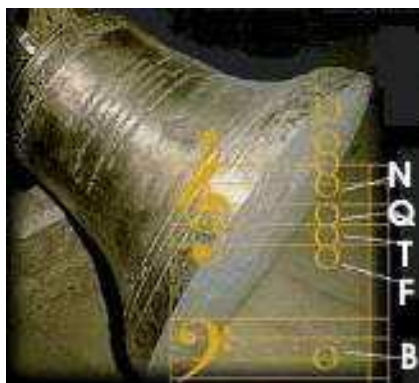


Figura 2.14 – Os 5 Harmónicos, segundo a tradição cristã [1].

2.1.4. TIPOLOGIAS DE TOQUE

2.1.4.1. Bamboar

É o equivalente a dobrar e balançar. Corresponde a provocar o movimento pendular do sino, onde o cabeçalho (contra-peso no topo) é responsável pelo prolongamento deste. O toque é realizado pelo badalo que se encontra no seu interior, devido à acção da gravidade. Este processo pode ser realizado manualmente ou electricamente, tal como se verifica na Figura 2.15.

No caso de o dobrar ser manual, é amarrada uma corda ao braço (B) do cabeçalho (A) de madeira ou de ferro, que depois de puxada dá início ao movimento pendular do sino. Isto obriga ao badalo (C) a tocar no interior do sino, por acção da gravidade. Nas situações em que os sinos possuem o peso bastante elevado, é sempre aconselhável que este trabalho seja realizado por, pelo menos duas pessoas.

No caso de se proceder ao mesmo processo electricamente, ao cabeçalho (A) do sino é aplicado um volante de ferro zincado (B) que por meio de uma forte corrente de aço (C), engrenada na cremalheira do motor (D), transmite ao sino o movimento pendular. Este corresponde à forma mais segura, limpa, prática e cómoda para qualquer sacristão, uma vez que evita a subida à torre, onde os invernos rigorosos se fazem sentir com maior intensidade. Da sacristia ou de qualquer outro sítio do templo, basta somente accionar o interruptor, ou o comando à distância, para dar início ao movimento do sino [1].



Figura 2.15 – Bamboar um sino manualmente (à esq.) e electricamente (à dir.) [1].

2.1.4.2. Badalar

Designa-se badalar ao tocar do sino com o badalo existente e suspenso no seu interior (Figura 2.16). Neste tipo de toque o sino está fixo e é somente o badalo que, puxado por uma corda, bate no sino produzindo o som.

Existem badalos eléctricos que aplicados no interior do sino, substituindo assim o badalo mecânico, fazem a mesma função e são accionados à distância. Em Portugal esta forma de badalar é extremamente rara ou até mesmo inexistente.



Figura 2.16 – Badalar [1].

2.1.4.3. Matraquear

É o equivalente a martelar e corresponde à acção de tocar o sino com um martelo existente, exteriormente próximo do sino. Neste tipo de toque o sino também está fixo e é somente o martelo que, puxado manualmente por uma corda, bate no sino por acção da gravidade, produzindo, assim, o som.

Também é possível matraquear electricamente no sino, tal como se encontra evidenciado na Figura 2.17. Para o efeito, basta instalar um martelo eléctrico (M) junto ao sino para o fazer tocar à distância. Pode ser accionado à distância para toques litúrgicos ou para sinais horários, proveniente de um sistema de relojoaria de torre.



Figura 2.17 – Matraquear um sino manualmente (à esq.) e electricamente (à dir.) [1].

2.2. TORRES SINEIRAS EM PORTUGAL

2.2.1. TORRE DOS CLÉRIGOS – PORTO

A justificação do nome da torre está associada ao facto de a Igreja, construída no período de tempo entre 1731 a 1749, constituir a sede de uma irmandade ou associação, resultante da fusão de três numa só. A concretização da sua construção tinha como objectivo a ajuda espiritual e material aos clérigos pobres. Por clérigos entendem-se todos os sacerdotes, assim como os que se preparavam para o sacerdócio.

Foi mandada erigir por D. Jerónimo de Távora Noronha Leme e Sernache, a pedido da Irmandade dos Clérigos Pobres. O seu arquitecto foi o italiano Nicolau Nasoni que contribuiu durante muitos anos para a construção da grande Torre dos Clérigos sem receber nada em troca e este facto só aconteceu apenas alguns anos depois. Corresponde à obra mais marcante do estilo barroco.

Nasoni foi aceite, a seu pedido, aos 52 anos, como “irmão-leigo” da Irmandade, «por ter sido o Mestre das obras do nosso templo, há tantos anos, sem levar paga alguma». Encontra-se sepultado na Igreja que concebeu.

A construção da torre foi iniciada em 1754, tendo em conta o aproveitamento do terreno que sobrara para a instalação da enfermaria dos Clérigos, e encontrava-se concluída nove anos depois, em 1763. O projecto inicial previa a construção de duas torres, e não apenas de uma. A sua decoração seguiu o estilo barroco, com esculturas de santos, fogaréus, cornijas bem acentuadas e balaustradas. Os materiais utilizados na construção da Torre dos Clérigos foi principalmente o granito.

Por barroquismo, ou arte barroca, entende-se o tipo de arte que surgiu em Portugal nos séculos XVII e XVIII e que se caracteriza pela abundância da decoração, pelo deslumbramento da decoração, de que a Torre dos Clérigos é um caso paradigmático [7].

A Torre dos Clérigos tem 75 metros de altura, acessíveis por uma escada em espiral com 225 degraus. Na época da sua construção era o edifício mais alto de Portugal. Assumindo que é possível compartimentar a torre em vários andares, estes encontram-se descritos de seguida:

- ✓ 1º andar – por cima da porta exterior da Torre vê-se uma imagem de S. Paulo e abaixo, dentro dum medalhão, um texto de S. Paulo, na Carta aos Romanos. Neste 1º andar, a espessura das paredes de granito, mede 2.20 metros.
- ✓ 2º andar – dispõe de uma janela oval, que corresponde a uma estrutura forte para conferir segurança à torre.
- ✓ 3º andar – existem quatro sineiras e onde se encontra instalado o carrilhão de concerto, descrito na secção 2.3.2.1.;
- ✓ 4º andar – apresenta uma janela abalaustrada, na face sul, e quatro mostradores de relógio. Subindo mais uns degraus atinge-se o corpo terminal. Este corpo da torre, mais estreito que o anterior, tem dois pisos: o primeiro é constituído por um elevado pedestal e rematado por um varandim abalaustrado, ornamentado com fogaréus, que forma a base do último andar, aberto em sineiras nas quatro faces. Remata todo o conjunto com uma cúpula bolbosa e fogaréus nos cantos, sobre a qual se encontra uma cruz de ferro no topo, onde esta última se apoia sobre uma esfera.

Corresponde ao *ex-libris* da cidade do Porto, é classificada pelo IPPAR (Instituto Português do Património Arquitectónicos) como Monumento Nacional desde 1910. A Torre dos Clérigos faz parte do Centro Histórico do Porto e é Património Mundial da UNESCO [5].



Figura 2.18 – Torre dos Clérigos [8].

2.2.2. IGREJA DOS PASTORINHOS – ALVERCA

O início da construção ocorreu em 13 de Maio de 2002 e foi inaugurada em 1 de Maio de 2005, cerca de 3 anos depois. Para preparar o lançamento da obra no dia 13 de Maio, uma data marcante nas aparições de Fátima, a paróquia organizou um conjunto de acções, que se iniciaram com uma conferência sobre estas aparições e a ligação de Fátima ao Papa João Paulo II.

No dia da inauguração, a Imagem Peregrina de Nossa Senhora de Fátima, oferecida pelo Santuário de Fátima, e a Imagem dos Pastorinhos, oferecidas pela Postulação para a Canonização, foram transportadas por um helicóptero da Força Aérea Portuguesa para o estádio do Futebol Clube de Alverca, de onde seguiram em procissão até à nova igreja. Cerca de oito mil pessoas encheram o recinto desportivo.

O conjunto integra uma igreja com capacidade para cerca de 500 pessoas sentadas, o Centro Paroquial “João Paulo II” de quatro andares e uma torre de 47 metros de altura. O terreno para o novo templo foi cedido pela autarquia. O projecto pretendeu dotar Alverca de um *ex-libris* cultural e religioso [12].



Figura 2.19 – Igreja dos Pastorinhos [12].

2.2.3. BASÍLICA DO SANTUÁRIO DE FÁTIMA – FÁTIMA

O início da sua construção ocorreu em 13 de Maio de 1917, no local das aparições de Nossa Senhora de Fátima.

A responsabilidade pela concepção do projecto foi atribuída ao arquitecto holandês Gerad Van Kriechen, do qual o arquitecto João Antunes deu continuidade. A primeira pedra foi benzida pelo arcebispo de Évora, D. Manuel da Conceição Santos, em 13 de Maio de 1928. O título de "Basílica" foi-lhe concedido por Pio XII, em Novembro de 1954.

O edifício, que mede 70.5 metros de comprimento e 37 de largura, foi construído totalmente com pedra da região (lugar do Moimento).

A torre sineira possui 65 metros de altura que termina com uma coroa de bronze de 7 000 quilos, construída na fundição do Bolhão, na cidade do Porto. Sobre esta coroa se encontra uma cruz iluminada que de noite é visível a longa distância [13].

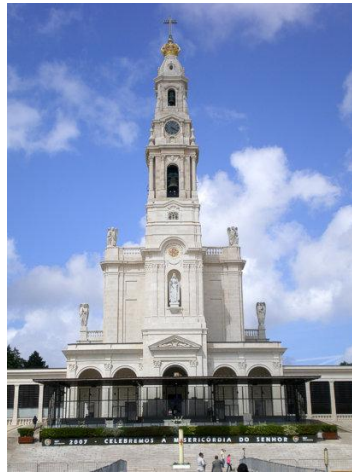


Figura 2.20 – Santuário de Fátima [14].

2.3. COMPOSIÇÃO DE SINOS – CARRILHÃO

2.3.1. DEFINIÇÃO

O carrilhão corresponde a um instrumento musical de percussão constituído por um teclado e por um conjunto de sinos com várias dimensões controlados por este, tal como se verifica pela Figura 2.21. Estes instrumentos encontram-se normalmente localizados em torres de igrejas ou conventos e correspondem aos maiores instrumentos que existem no mundo.

Como a cada sino está associada uma nota, logo a amplitude musical do carrilhão está directamente relacionada com o número de sinos que este possui. Os conjuntos que contenham menos de 23 sinos (2 oitavas) não são considerados como um verdadeiro carrilhão. Por norma, os carrilhões têm 47 sinos (4/5 oitavas), enquanto os maiores possuem 77 sinos (6 oitavas).

O carrilhonista, sentado numa cabine por baixo do carrilhão, pressiona as teclas que accionam um mecanismo construído por alavancas e fios que se encontram ligados directamente aos badalos dos sinos. Assim, este pode fazer variar a intensidade da nota de acordo com a força aplicada na pressão da respectiva tecla. Juntamente com as teclas manuais, os sinos maiores possuem também pedais que permitem que as notas graves possam ser tocadas de duas formas diferentes.



Figura 2.21 – Teclado de Carrilhão [5].

Existe um outro tipo de carrilhão, o Carrilhão de Concerto. Estes são formados por tubos ocos dotados de diferentes tamanhos, logo diferentes notas. Estes tubos encontram-se dispostos na vertical, suspensos de forma gradual, de acordo com as suas dimensões. O accionar do carrilhão é realizado através de uma baqueta, batendo esta na extremidade superior do carrilhão, produzido sons semelhantes a sinos de igreja [5].

2.3.2. PRINCIPAIS CARRILHÕES EM PORTUGAL

2.3.2.1. Torre dos Clérigos – Porto

O carrilhão da Torre dos Clérigos foi inaugurado em 1995. Foi fundido na Holanda e tem 49 sinos que pesam cerca de dez toneladas, dispostos como se observa na Figura 2.22. O mecanismo para accionar os sinos inclui um teclado que, para ser tocado, exige uma técnica que se pode tornar fisicamente esgotante.

Um computador, ligado a um relógio atómico na Inglaterra ou na Alemanha, é responsável pelo controlo do carrilhão e organização das horas a partir desses relógios. O carrilhão da Torre dos Clérigos encontra-se programado para tocar às 12 e às 18 horas [7].



Figura 2.22 – Sinos do Carrilhão da Torre dos Clérigos [9].

2.3.2.2. Palácio Nacional de Mafra – Mafra

O rei D. João V encontrava-se casado com D. Maria Ana de Áustria. Completados 3 anos de casamento, D. Maria Ana ainda não tinha concebido um filho para ser o próximo sucessor do trono português. Devido a tal facto, o rei de Portugal, em 1711, fez uma promessa: construir um convento de franciscanos em Mafra se tivessem um filho no prazo de um ano.

Em menos de um ano, a rainha encontrava-se grávida, e assim nascia D. José. De modo a cumprir a promessa, em 1717 iniciam-se as obras do Convento de Mafra.

D. João V, em 1720, viajou para Antuérpia, na Bélgica, onde ouve pela primeira vez a música de sinos com um carrilhão. O monarca, pelo facto de ter gostado e de o preço ser reduzido, decidiu comprar dois e fez a encomenda a Melchior de Haze, o melhor fabricante de carrilhões da Flandres. No entanto, é Guilherme de Witlocx que acaba por fazer o carrilhão da torre Sul do Convento de Mafra e os 47 sinos que se encontram actualmente neste monumento. O carrilhão da Torre Norte é feito em Liège, também na Bélgica.

A chegada dos sinos a Lisboa foi um acontecimento de grande importância, pelo tamanho de cada um deles, pela diferença das dimensões entre eles e também pela quantidade. Depois de desembarcados, os sinos foram levados para Mafra em carros puxados por bois e sob forte escolta militar [1].

O Palácio Nacional de Mafra ainda alberga os dois carrilhões, dos mais antigos da Europa, em que o sino de maiores dimensões pesa cerca de 10 toneladas e o conjunto mais de 200 toneladas. São considerados os maiores e melhores do mundo.

Actualmente, todos os domingos às 18 horas, existe um concerto realizado por este carrilhão [5].



Figura 2.23 – Igreja do Palácio Nacional de Mafra [5].

2.3.2.3. Igreja dos Pastorinhos – Alverca

O Carrilhão dos Pastorinhos em Alverca é o terceiro construído em Portugal, depois daqueles que foram instalados, no século XVIII, no Convento de Mafra e na Torre dos Clérigos, no Porto. Corresponde ao segundo maior carrilhão da Europa e ao terceiro maior do mundo.

Os 72 sinos foram fabricados na Holanda e envolvem 42 toneladas de bronze. O transporte dos sinos para Alverca teve lugar em duas fases: primeiro os mais leves, que pesam cinco quilos, e depois os mais pesados, que atingem as oito toneladas [10].



Figura 2.24 – Sinos do Carrilhão da Igreja dos Pastorinhos [1].

2.3.2.4. Basílica do Santuário de Fátima – Fátima

O carrilhão do Santuário de Fátima é composto por 62 sinos. O sino maior pesa 3 000 quilos e o respectivo badalo pesa 90 quilos. Os anjos presentes na fachada foram realizados em mármore. A estátua do Imaculado Coração de Maria, na reentrância curva da torre, tem 4.73 metros e pesa 14 toneladas [13].

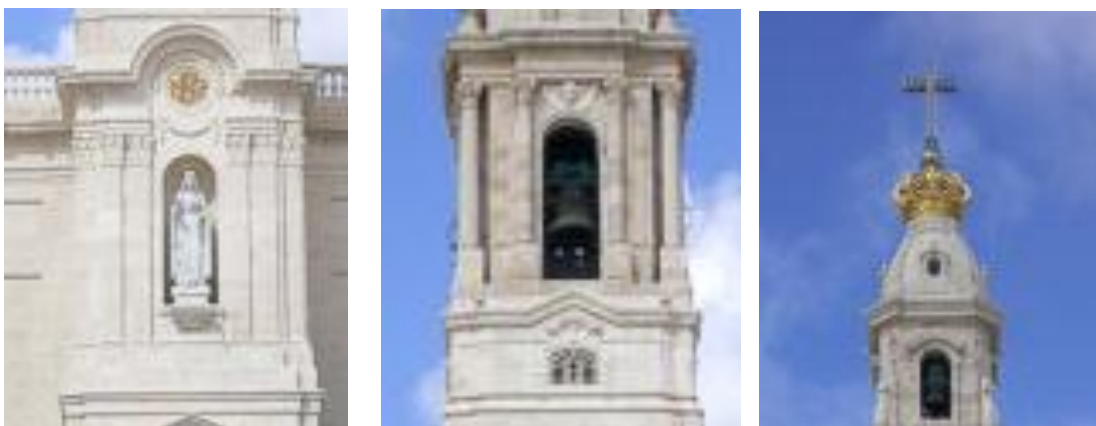


Figura 2.25 – Pormenores do Santuário de Fátima [14].

3

DESCRIÇÃO DO CASO EM ESTUDO - TORRE SINEIRA DAS ANTAS

Neste capítulo é realizada a exposição do caso em estudo, de modo a ser possível a elaboração das análises que se encontram no Capítulo 6. Em termos de abordagem, o presente capítulo começa com a realização de um enquadramento geral da Torre Sineira das Antas, com a apresentação dos vários aspectos relativos à sua localização e à sua relação com a envolvente. De seguida, procede-se à exposição dos vários aspectos relativos ao seu projecto, onde se expõe os vários factos que ocorreram de modo a obter o produto final e posteriormente é elaborada uma descrição detalhada do projecto. Finalmente, encontram-se as características dos sinos que se situam no topo da torre.

3.1. ENQUADRAMENTO GERAL

3.1.1. BREVE DESCRIÇÃO DA CIDADE DO PORTO

O Porto é uma cidade portuguesa situada no noroeste da Península Ibérica. Possui cerca de 41.66 km² de área e população de cerca de 216 000 habitantes. Corresponde à segunda maior cidade de Portugal, considerada como cidade global (importante no sistema económico mundial) e é também a capital do Distrito de Porto e da Área Metropolitana do Porto.

A Área Metropolitana do Porto é formada por municípios adjacentes que formam entre si um único aglomerado urbano, cuja sede é a cidade do Porto e alberga 16 concelhos com cerca de 1.7 milhões de habitantes e 2 089 km² de área.

Porto é a cidade que deu o nome a Portugal, desde muito cedo (200 a.C.), quando se designava de *Portus Cale*. Posteriormente tornou-se a capital do Condado Portucalense, ou Condado de *Portucale* (condado que deu o nome a Portugal). A bravura com que comportou o cerco das tropas miguelistas durante a guerra civil de 1832-34 e os feitos corajosos cometidos pelos seus habitantes contribuíram para a atribuição pela rainha D. Maria II do título de «Invicta Cidade do Porto», único entre as cidades portuguesas.

É ainda uma cidade conhecida mundialmente pelo seu vinho (Vinho do Porto), pelas suas pontes e arquitectura contemporânea e antiga, o seu centro histórico classificado como Património Mundial pela UNESCO, e pelo seu clube de futebol: Futebol Clube do Porto [5].



Figura 3.1 – Brasão da cidade do Porto [5].

3.1.2. CARACTERIZAÇÃO DA ENVOLVENTE AO CASO EM ESTUDO

A Torre Sineira das Antas situa-se no lote respeitante à Igreja de Santo António das Antas. De modo a facilitar a análise da sua envolvente, é necessário recorrer às imagens obtidas através da plataforma disponibilizada via internet pela instituição *Microsoft*®, cuja designação é *Virtual Earth*™.

Na sua envolvente encontram-se vários elementos emblemáticos, de modo particular:

- ✓ Praça de Velásquez (1);
- ✓ Edifício Torre das Antas (2);
- ✓ Parque de S. Roque (3);
- ✓ Centro Comercial *Dolce Vita* (4);
- ✓ Estádio do Dragão (5).



Figura 3.2 – Disposição dos vários elementos emblemáticos - *Virtual Earth*™.

A envolvente mais próxima da igreja objecto de estudo é caracterizada por uma zona urbanizada, essencialmente com edifícios de ocupação unifamiliar até 2 pisos e multifamiliar até 4 pisos. Existem ainda algumas zonas urbanizáveis, tal como o lote relativo ao antigo Estádio das Antas (6), que pertenceu ao clube de futebol local, Futebol Clube do Porto.

A Igreja de Santo António das Antas é demarcada por 4 vias: Avenida de Fernão Magalhães, Rua de Naulila, Rua de Fernando de Bulhões e a Rua de Santo António das Antas, esta última com o mesmo nome da igreja que lhe é adjacente. Esta delimitação é visível na Figura 3.3.



Figura 3.3 – Vias que delimitam a Igreja de Santo António das Antas - Virtual Earth™.

De modo a obter uma visualização tridimensional da Igreja e respectiva Torre Sineira, é apresentada uma sucessão de fotografias obtida pela plataforma *Virtual Earth*™, dispostas segundo os 4 pontos cardeais: Norte (N), Sul (S), Este (E), Oeste (O).

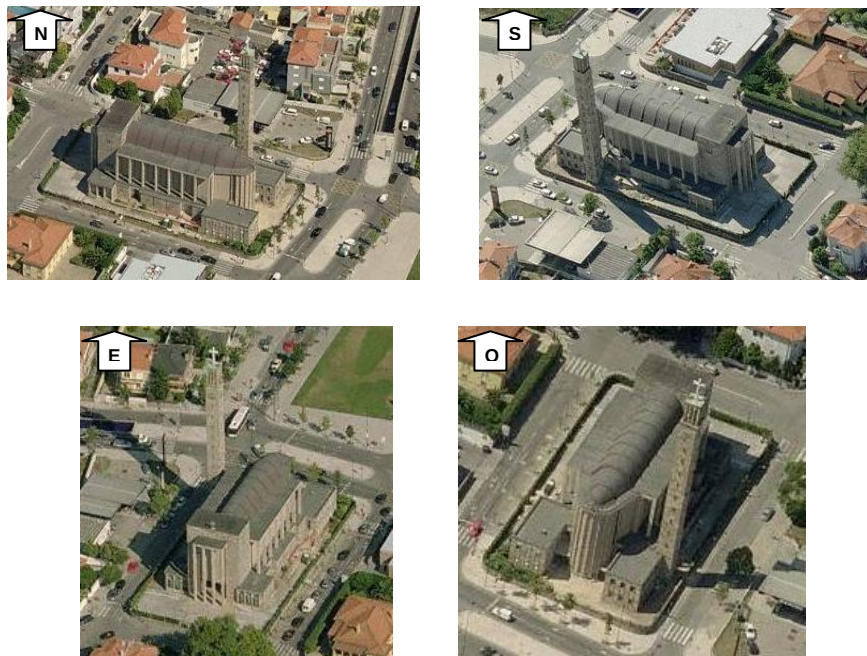


Figura 3.4 – Vistas segundo os 4 pontos cardeais - Virtual Earth™.

3.2. IGREJA DE SANTO ANTÓNIO DA ANTAS – PROJECTO

3.2.1. HISTORIAL DO PROCESSO

No passado existiram rumores de que tinha sido projectada, na extremidade da Avenida dos Combatentes da Grande Guerra, uma praça de touros. Este projecto não se concretizou porque não existiu nenhuma entidade interessada em investir com essa finalidade.

As ruas que circundam o local actual de implantação da Igreja das Antas ainda não existiam e o número de habitações era muito reduzido.

A Igreja de Santo António das Antas foi criada no dia 13 de Junho de 1938, na cidade do Porto, por decreto episcopal de D. António Augusto de Castro Meireles, cujo primeiro Pároco foi o Padre Crispim Gomes Leite.

Três anos mais tarde, o Padre Joaquim Teixeira Carvalho de Sousa foi nomeado Pároco desta paróquia, que por sua orientação foi erigida a actual Igreja de Santo António das Antas.

Após muitos esforços desenvolvidos, várias dificuldades vencidas e incontáveis horas dispendidas em reuniões com os dois engenheiros (Professor Joaquim Sarmiento e Professor Correia de Araújo, ambos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - FEUP), dois arquitectos (Fernando Vouzela e Fernando Barbosa) e o então Pároco das Antas, a construção da futura Igreja Paroquial de Santo António das Antas no terreno que actualmente ocupa foi concretizada.

A construção foi levada a cabo por uma cooperativa de empreiteiros. Ao nível do financiamento, existiu a comparticipação financeira parcial por parte do Estado e também a contribuição para o ofertório por parte dos paroquianos.

Realizado o concurso em fase de ante-projecto, a 20 de Março de 1944, e ultimado o projecto definitivo, cuja aprovação oficial se efectivou cerca de 4 anos depois, a 20 de Março de 1948, era benzida solenemente a rocha granítica de fundação, com cerca de 7 metros de profundidade, pelo prelado Diocesano, Senhor Dom Agostinho de Jesus e Sousa.

Um ano depois, foi celebrada solenemente, com assistência de Pontifical, a Festa de Santo António, numa fase de construção da igreja em que as paredes atingiam a altura de 4 metros, com o suporte por abóbada. No dia 13 de Junho de 1951 a Capela-Mor continha a cobertura.

A 6 de Junho de 1954, cerca de três anos após, o Bispo da Diocese António Ferreira Gomes, benzia solenemente a Igreja de Santo António das Antas e se encontrava presente na Missa Solene Vespertina para a inauguração do culto paroquial.

Após o falecimento do Padre Joaquim Teixeira, em 2003, foi nomeado Padre António José Rodrigues Bacelar para pároco desta Igreja pelo actual Bispo da Diocese do Porto, D. Armindo Lopes Coelho [15].



Figura 3.5 – Monumento simbólico em memória do Padre Joaquim Teixeira [15].

3.2.2. DESCRIÇÃO DETALHADA DO PROJECTO

3.2.2.1. Igreja

A Igreja de Santo António das Antas é essencialmente composta por 6 corpos visíveis na Figura 3.4, presente na secção 3.1.2:

- ✓ 2 corpos centrais – corresponde ao local são celebradas as missas. Um dos corpos contém a capela principal que possui o formato de um rectângulo com uma semi-elipse na parte posterior deste corpo, em planta, e o outro corpo é um paralelogramo que se sobressai em altura. O primeiro corpo possui duas consolas apoiadas por 9 pilares igualmente espaçados e o segundo apenas tem uma consola suportada por 4 pilares, em ambos os casos são muito esbeltos;
- ✓ 2 corpos frontais e 2 corpos posteriores – correspondem a paralelepípedos com a altura até aproximadamente a soleira da porta de acesso ao terraço deste;
- ✓ 1 corpo adjacente – corresponde à Torre Sineira, com as características descritas na secção seguinte.



Figura 3.6 – Os vários corpos distintos da Igreja de Santo António das Antas - Blender

3.2.2.2. Torre Sineira

A Torre Sineira das Antas tem cerca de 45 metros de altura, tal como se verifica pela Figura 3.8, cujo desenho de pormenor se encontra em Anexo, e alberga um carrilhão de 9 sinos com as características descritas na secção 3.3 do presente capítulo.

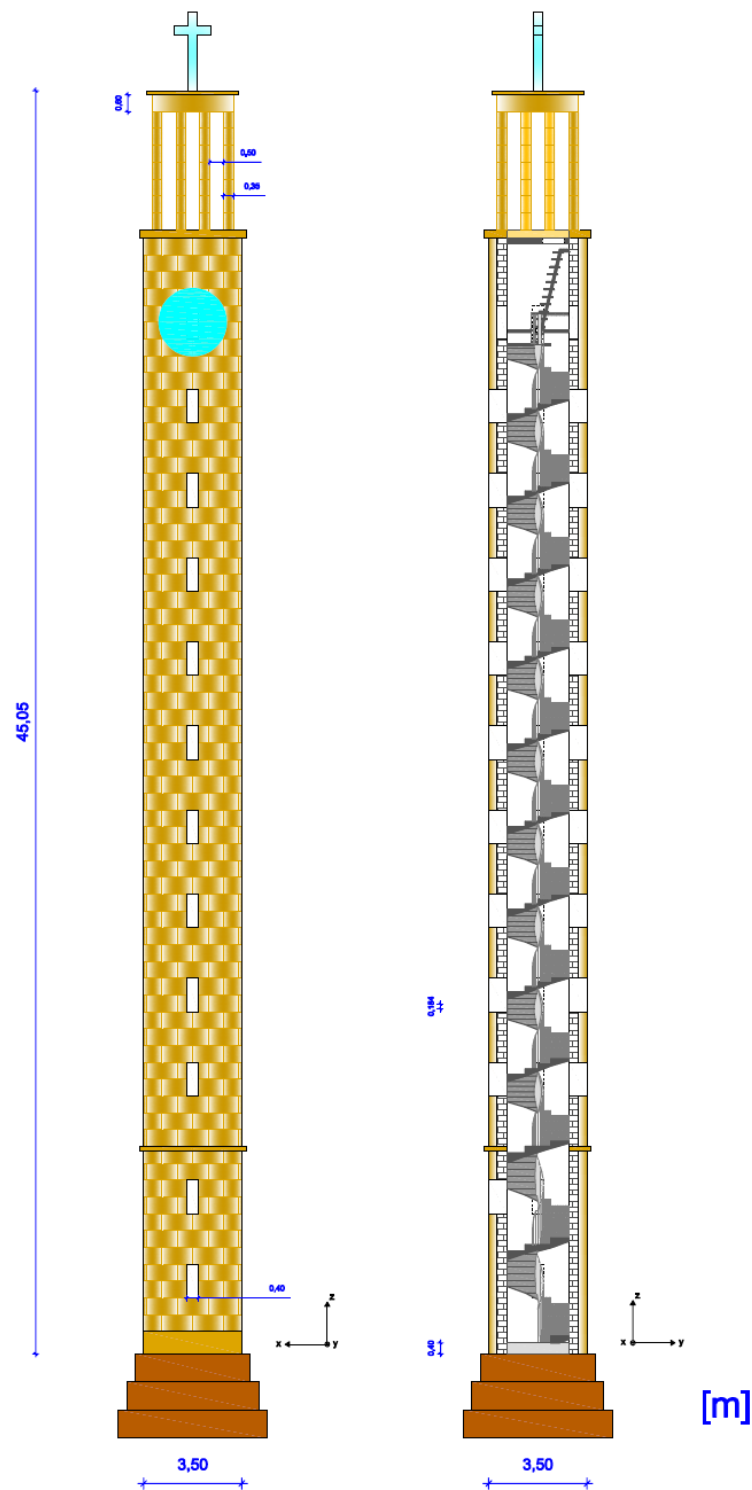


Figura 3.7 – Desenho representativo da Torre Sineira – AutoCad.

É dotada de uma secção com formato quadrangular de lado 3.50 metros, medidos no exterior. A espessura das paredes da torre é de 0.65 metros. Esta espessura é divisível por duas: 0.35 metros são realizados em alvenaria de granito, cujas juntas são preenchidas por argamassa, e 0.30 metros compostos por blocos de granito de paralelepípedos dispostos em cantaria, em que cada bloco possui 0.60 metros de altura e juntas com cerca de 0.002 metros de espessura.

Existe um reforço nos cantos interiores em argamassa, cuja secção corresponde a um triângulo equilátero de lado 0.20 metros, com um varão de 0.025 metros em cada canto. Este surge após a realização das escadas e tem o intuito de compensar a diferença de espessura relativamente ao previsto no projecto, com 0.70 metros de espessura.

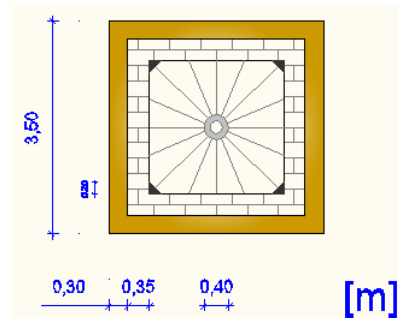


Figura 3.8 – Desenho representativo da secção da Torre Sineira – AutoCad.

Ao nível das fachadas é possível observar que o número de janelas, de dimensões $0.40 \times 1.20 \text{ m}^2$, difere da face que foi considerada apenas nos primeiros 2 níveis, até ao correspondente terraço do corpo que lhe é adjacente. Nestes pisos verifica-se que:

- ✓ Fachada Norte – 2 janelas;
- ✓ Fachada Sul – não possui janelas, mas no seu lugar existem portas interiores de acesso à torre de dimensões $0.85 \times 2.20 \text{ m}^2$;
- ✓ Fachada Este – 1 janela no segundo nível;
- ✓ Fachada Oeste – não possui janelas.



Figura 3.9 – Aspecto de uma janela da Torre.

A partir do nível do terraço, demarcado por uma saliência do mesmo material que o paramento exterior, verifica-se que existem 9 janelas espaçadas de 3 metros em todas as fachadas. Existe uma excepção na fachada Sul, onde esta é substituída por uma porta que permite o acesso ao referido terraço, com dimensões $0.85 \times 1.80 \text{ m}^2$.

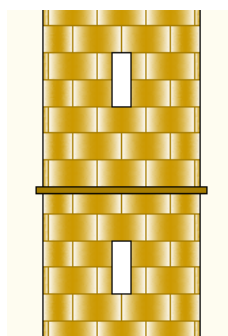


Figura 3.10 – Saliência que existe ao nível do terraço – AutoCad.

Além das 9 janelas, existe mais um nível que é aberto apenas no paramento interior em alvenaria de granito, com o mesmo espaçamento das aberturas inferiormente dispostas, uma vez que a este nível se encontra o relógio, tal como se verifica na Figura 3.11.

O topo da torre é formado por 4 pilares visíveis por fachada, cujas dimensões correspondem a uma de secção quadrangular em planta de 0.35 metros de lado e 7 fiadas de blocos, logo cada pilar tem 4.20 metros de altura. Estas encontram-se rigidamente ligadas por uma fiada de travessas, cujo conjunto é rematado por uma laje com 0.20 metros de espessura. Todos estes elementos são do mesmo material que o utilizado nas paredes da torre. É neste local que se encontram alojados os sinos, apoiados numa estrutura metálica que ocupa o espaço limitado pelos pilares. Sobre a laje existe uma cruz metálica centrada, tal como se apresenta na Figura 3.11, voltada segundo o alinhamento Este-Oeste.

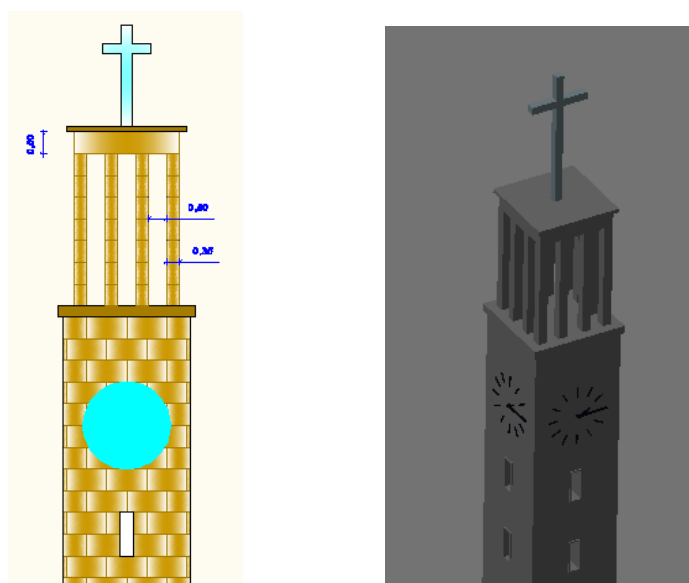


Figura 3.11 – Localização do Relógio, em azul ciano (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)

De modo a ser possível aceder ao carrilhão, existem escadas interiores que se desenvolvem em espiral no sentido directo com um total de 186 degraus, cujas características geométricas variam à medida que evoluem as cotas. Estas são realizadas em betão armado.

Existe um desfasamento da grandeza de um degrau nos níveis em que existe porta, de modo a permitir a sua abertura para o interior, tal como se verifica na Figura 3.13.

Assim, é possível distinguir duas partes:

- ✓ Até ao segundo nível – a espessura de laje é de 0.12 metros, os degraus possuem uma espessura média de 0.230 metros, o que perfaz um total de 30 degraus (15+15). Contém uma guarda relativamente ao centro com 1.20 metros de altura, diâmetro interior de 0.10 metros e espessura de igual valor;

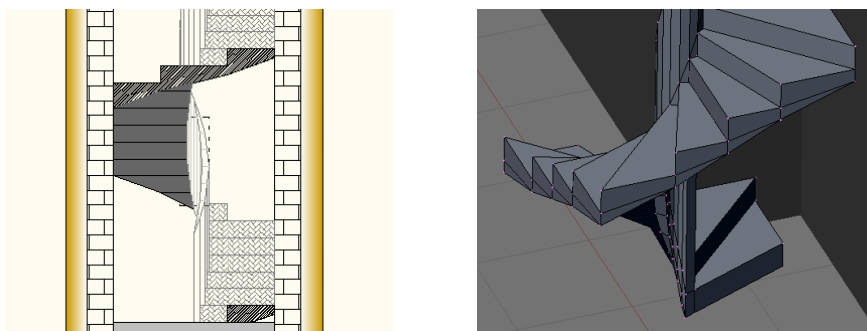


Figura 3.12 – Início da escada interior, em 2D (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)

- ✓ A partir do segundo nível – a espessura de laje é de 0.07 metros, os degraus possuem uma espessura média de 0.184 metros, o que perfaz um total de 156 degraus (9·16+12). Contém uma guarda relativamente ao centro com 1.20 metros de altura, diâmetro interior de 0.26 metros e espessura de 0.07 metros.

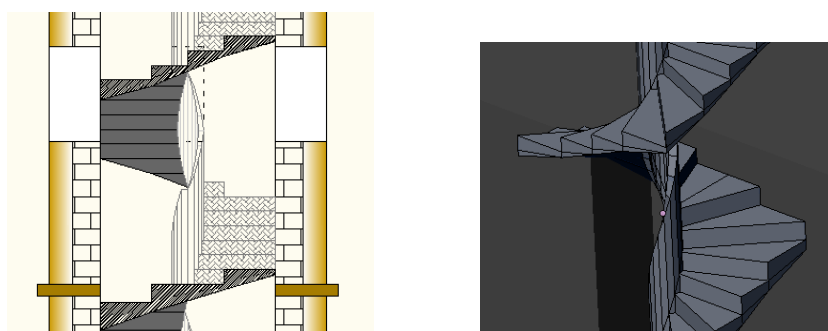


Figura 3.13 – Escada interior a partir do 2º nível, em 2D (AutoCad, à esq.) e em 3D (Blender, à dir.)

À medida que se sobe as escadas, verifica-se que o passo não é constante e quando se efectua a última volta completa, existem mais doze degraus, de modo que a face vertical do último degrau se encontra na direcção da Igreja. A laje é de betão armado de espessura 0.10 metros (cinzento claro) e além desta existe outra que ocupa a região oposta a 0.80 metros da anterior, com uma espessura de 0.08 metros. As suas disposições relativas encontram-se apresentadas na Figura 3.14.

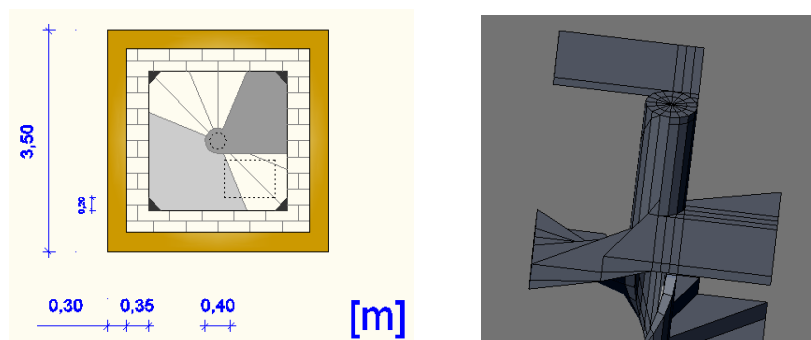


Figura 3.14 – Disposição relativa das lajes em, em 2D (AutoCad, à esq) e em 3D (Blender, à dir).

Existe uma abertura com um formato rectangular de dimensões $0.60 \times 0.80 \text{ m}^2$, obstruída por uma placa metálica amovível, como se observa na Figura 3.15.

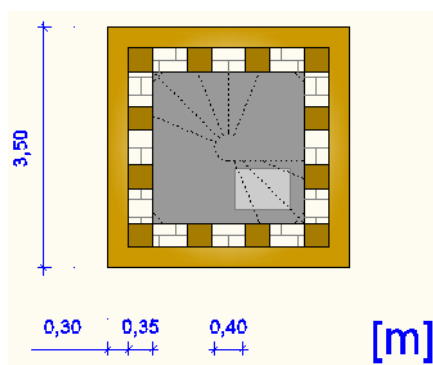


Figura 3.15 – Localização da abertura de acesso ao carrilhão (cinzento claro) – AutoCad.

O seu alcance é possível devido à presença de uma escada metálica, evidenciado na Figura 3.16.

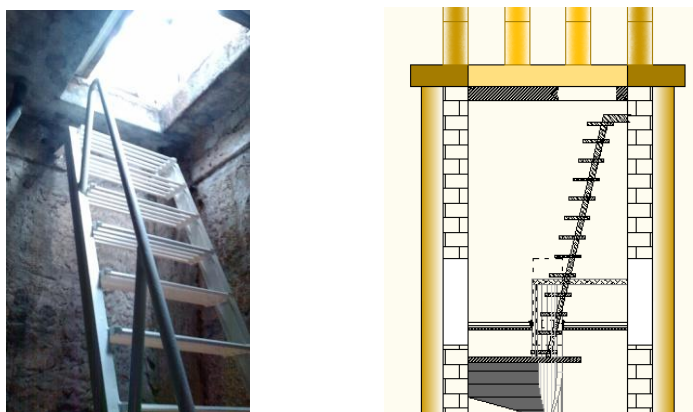


Figura 3.16 – Escada metálica de acesso ao carrilhão e respectivo desenho esquemático - AutoCad

Existem também varões metálicos correspondentes aos eixos que servem de rotação para o funcionamento dos 4 relógios presentes a esse nível, que se encontram protegidos por elementos também metálicos.

3.3. CARACTERÍSTICAS DOS SINOS

O carrilhão da Torre sineira das Antas localiza-se a cerca de 43 metros da base e é composto por 9 sinos, cujas características se encontram na Tabela 3.1. O seu suporte é assegurado por uma estrutura metálica construída especificamente para este caso particular.

Tabela 3.1 – Características dos sinos da Torre Sineira das Antas

Sino	Nota Musical	Frequência (Hz)	Altura (mm)	Diâmetro da Boca (mm)	Peso do Sino (kg)
1	RE 1	293.66	1 200	1 377	1 620
2	MI 1	329.62	1 040	1 224	1 120
3	FA# 1	369.99	928	1 071	750
4	SOL 1	392.00	876	1 020	650
5	LA 1	440.00	782	918	450
6	SI 1	493.88	689	816	325
7	DO 2	523.36	657	765	270
8	DO# 2	554.36	615	720	215
9	RE 2	587.32	574	689	198

As dimensões de cada sino confrontado com as dimensões limitadas do espaço disponível para a sua disposição, conduzem à restrição da amplitude do movimento pendular, para os casos em que isto é aplicável. Existem sinos que efectuem o movimento a bamboar (3 sinos – 1 a 3) outros que se encontram fixos e são accionados por intermédio de um martelo (6 sinos – 4 a 9), sendo que todos são accionados mecanicamente e de forma programada, ou seja, nas horas em que pretende que cada um destes toques, existe uma ordem e um desfasamento entre os toques segundo uma disposição que permita obter a musicalidade pretendida.

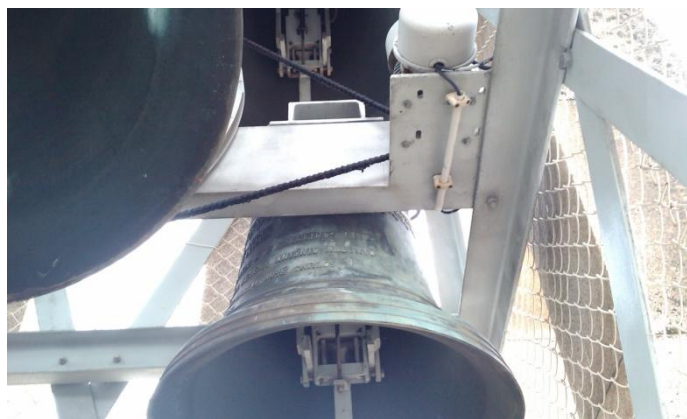


Figura 3.17 – Estrutura de suporte aos sinos.

4

ACÇÃO DOS SINOS

No presente capítulo é realizada a caracterização da acção do sino. Inicialmente é realizada a descrição do fenómeno associado à propagação das ondas, com o paralelismo entre as dimensões do sino e a frequência do som emitido em correspondência. De seguida é efectuada exposição dos aspectos matemáticos particulares e necessários para o estudo que se realiza nos capítulos seguintes, em que se efectua a demonstração da Equação de Euler-Lagrange, associada ao cálculo de variações, incluindo um paralelo com o Princípio de Hamilton e depois são apresentadas os Integrais e Funções Elípticas, em que se começa pela primeira componente com a caracterização dos vários parâmetros associados à sua geometria e a exposição dos vários tipos e formas que as estas, finalizado pela exposição das suas propriedades. Posteriormente é realizada a caracterização do movimento pendular, comparando dois pares de situações: com e sem amortecimento e períodos de oscilação curtos ou longos. Apresenta-se de seguida a definição da acção do sino, abordando duas situações distintas: fixo, actuado por intermédio de um martelo e em movimento pendular (bamboar), por impacto do badalo que se encontra no seu interior. Finalmente, descreve-se as várias disposições normativas da norma alemã “DIN 4178 Glockentürme” relativas à caracterização da acção do sino.

4.1. PROPAGAÇÃO DAS ONDAS

Um sino, em repouso, não produz qualquer resposta das partículas que se encontram na sua vizinhança. Para que este induza alguma perturbação, é necessária a aplicação de uma acção exterior. A sua resposta corresponde a uma onda mecânica.

Uma onda mecânica corresponde a uma perturbação do meio envolvente. Esta provoca a oscilação das moléculas de ar na vizinhança, em torno das respectivas posições de equilíbrio, o que promove o choque inter-partículas. Desta interacção resultarão duas componentes: uma transversal e outra longitudinal. Deste modo, é possível afirmar que as ondas apenas transportam energia, sem transportar matéria.

As ondas transversais caracterizam-se pela propagação perpendicular à direcção de perturbação e as ondas longitudinais propagam-se na direcção paralela à direcção de perturbação, tal como se verifica na Figura 4.1.

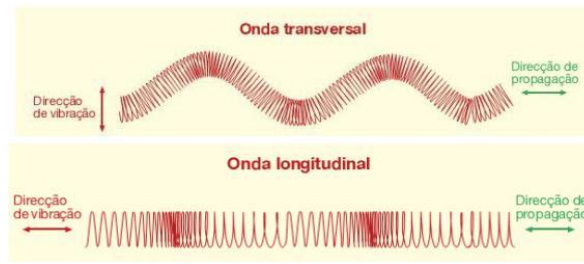


Figura 4.1 – Representação esquemática das ondas transversais e das ondas longitudinais [16].

Em termos teóricos [17], a onda resultante é sonora e harmónica, uma vez que o movimento harmónico das partículas provoca uma variação de pressão, que por sua vez produz som. Assim podemos afirmar que o som é um exemplo de uma onda longitudinal, uma vez que as moléculas do elemento pelo qual este percorre oscilam ao longo da linha de propagação, alternadamente comprimindo e rarefazendo o meio.

É possível exprimir analiticamente o deslocamento das partículas a partir do repouso. Este deslocamento, s , é função da posição (x) e do instante em que pretendemos estudar o fenómeno, dependendo da frequência angular (ω), do comprimento de onda (λ) e da amplitude do movimento (s_0), de acordo com a seguinte expressão

$$s(x,t) = s_0 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda} - \omega \cdot t\right) \quad (4.1)$$

O comprimento de onda corresponde à distância entre pontos em que se verifica a periodicidade da mesma, por exemplo os extremos. Analiticamente, depende da velocidade de propagação da onda no meio e da frequência da mesma, tal como representado na Figura 4.2:

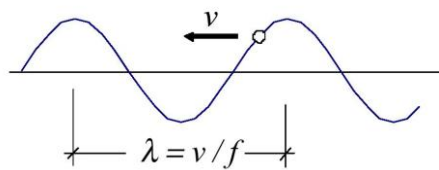


Figura 4.2 – Relação entre comprimento de onda (λ), velocidade de propagação (v) e frequência (f) [18].

A variação de pressão do meio perturbado é proporcional à velocidade do som (v), à massa específica (ρ), à frequência angular (ω) e à amplitude (s_0) do movimento harmónico das partículas, sendo traduzida pela seguinte expressão

$$p(x,t) = p_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda} - \omega \cdot t\right), \text{ com } p_0 = \rho \cdot v \cdot \omega \cdot s_0 \quad (4.2)$$

Da análise das expressões acima apresentadas, verifica-se que a onda de pressão está desfasada em 90° da onda de deslocamento. Assim, quando o deslocamento for nulo, as variações de pressão são máximas e vice-versa.

De um modo esquemático, é possível realizar um confronto entre as várias ideias acima expostas, a partir da Figura 4.3.

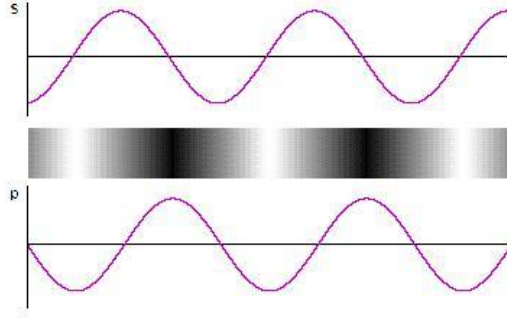


Figura 4.3 – Relação entre pressão e deslocamento das partículas, devido a uma perturbação do meio [19].

A **Equação de Onda** corresponde a uma equação diferencial que caracteriza o movimento descrito por esta e é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \text{ com } y = y(x, t) \quad (4.3)$$

Através da equação (4.1) é possível verificar que esta é solução da equação (4.3), se tomarmos as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad k &= \frac{\lambda}{2\pi} \wedge \omega = 2\pi \cdot f \wedge v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \\ \checkmark \quad \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)] = s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (k \cdot x - \omega \cdot t) = k \cdot s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [k \cdot s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)] = -k^2 \cdot s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ \checkmark \quad \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)] = s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (k \cdot x - \omega \cdot t) = -\omega \cdot s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} [-\omega \cdot s_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)] = -\omega^2 \cdot s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte proposição verdadeira:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 \cdot s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) = \frac{1}{v^2} \cdot [-\omega^2 \cdot s_0 \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)] = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

4.2. FORMA DO SINO E RESPECTIVA FREQUÊNCIA EMITIDA

Ao longo da história, o formato dos sinos não evoluiu, apenas se verifica uma evolução ao nível da relação entre a altura/diâmetro da boca (A/L), permitindo distinguir dois sistemas principais de sinos:

- ✓ Sistema Antigo – este tipo de sino caracteriza-se por uma altura (A) superior ao diâmetro da boca (L), logo é mais alto e estreito;
- ✓ Sistema Moderno – este tipo de sino caracteriza-se por uma altura (A) muito aproximada ao diâmetro da boca (L), logo é mais baixo e largo.

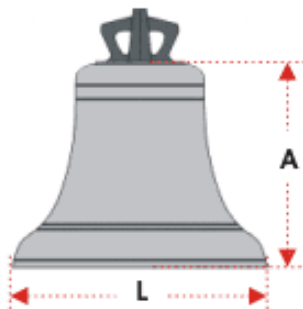


Figura 4.4 – Dimensões principais de um sino: altura (A) e largura da boca (L) [1].

Deste modo, é possível evidenciar as principais características dos sinos com o formato do Sistema Moderno:

- ✓ Distância entre a base e o topo da asa é próxima do diâmetro da boca;
- ✓ A espessura aumenta gradualmente desde o ombro até à base do bojo;
- ✓ O som é mais timbrado e prolongado;
- ✓ Requer sineiras mais largas e não tão altas.

Os sinos da Torre das Antas, com as características apresentadas na secção 3.3, cumprem os requisitos do Sistema Moderno, com uma relação altura/diâmetro da boca menor do que o que verificava no Sistema Antigo, para o mesmo peso.

Tabela 4.1 – Características dos sinos do Sistema Moderno [1].

A (m)	L (m)	Massa (kg)	Nota Musical
1.26	1.49	2 160	DÓ
1.18	1.40	1 700	DÓ#
1.15	1.32	1 550	RÉ
1.10	1.25	1 280	RÉ#
1.00	1.19	1 100	MI
0.95	1.12	920	FÁ
0.89	1.04	720	FÁ#
0.84	0.97	620	SOL
0.78	0.93	520	SOL#
0.75	0.89	450	LÁ
0.71	0.84	380	LÁ#
0.66	0.79	315	SI
0.63	0.74	260	DÓ
0.59	0.70	210	DÓ#
0.55	0.66	190	RÉ
0.53	0.62	150	RÉ#
0.50	0.57	135	MI
0.47	0.55	110	FÁ
0.45	0.52	95	FÁ#
0.42	0.49	80	SOL
0.39	0.46	65	SOL#
0.38	0.44	58	LÁ
0.36	0.42	50	LÁ#
0.33	0.40	40	SI
0.31	0.37	32	DÓ
0.30	0.34	27	DÓ#
0.28	0.33	23	RÉ
0.26	0.31	19	RÉ#

Tabela 4.2 – Características dos sinos do Sistema Antigo [1].

A (m)	L (m)	Massa (kg)	Nota Musical
1.42	1.52	1 840	DÓ
1.33	1.43	1 570	DÓ#
1.25	1.34	1 350	RÉ
1.18	1.27	1 200	RÉ#
1.11	1.20	1 000	MI
1.08	1.14	840	FÁ
0.99	1.06	650	FÁ#
0.93	1.02	540	SOL
0.87	0.94	450	SOL#
0.83	0.91	380	LÁ
0.80	0.86	310	LÁ#
0.75	0.80	265	SI
0.71	0.76	220	DÓ
0.67	0.72	185	DÓ#
0.63	0.68	155	RÉ
0.59	0.63	130	RÉ#
0.55	0.60	115	MI
0.53	0.57	95	FÁ
0.50	0.53	80	FÁ#
0.47	0.50	70	SOL
0.44	0.48	60	SOL#
0.42	0.46	48	LÁ
0.40	0.43	42	LÁ#

É importante referir que o símbolo cardinal colocado posteriormente à designação da nota musical corresponde ao termo ‘sustenido’ (semi-tom). É fácil de relacionar a sua posição na escala de notas, se tivermos um piano à nossa disposição, uma vez que estas se encontram nas teclas negras.

Pela análise das tabelas verifica-se que a cada par de dimensões A e L está associada uma nota musical, logo uma frequência, cujos valores podem ser obtidos segundo a seguinte lógica: o intervalo de uma oitava (12 intervalos) é de 1.0594631, uma vez que numa oitava é que a frequência duplica. Assim, de acordo com a **Escala Musical Temperada** [20], resulta que o factor a multiplicar para obter a frequência no intervalo seguinte é:

$$i^{12} = 2 \Leftrightarrow i = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1.0594631 \quad (4.5)$$

De modo a ser possível o enquadramento na oitava respectiva, estão tabelados de seguida duas oitavas, obtidas segundo a lógica evidenciada acima. Para obter as frequências das oitavas seguintes, basta duplicar as frequências da anterior.

Tabela 4.3 – Duas oitavas, segundo a Escala Musical Temperada.

Nota Musical	Frequência (Hz)	Nota Musical	Frequência (Hz)
DÓ 1	261.62	DÓ 2	523.24
DÓ# 1	277.18	DÓ# 2	554.36
RÉ 1	293.66	RÉ 2	587.32
RÉ# 1	311.12	RÉ# 2	622.24
MI 1	329.62	MI 2	659.24
FÁ 1	349.22	FÁ 2	698.45
FÁ# 1	369.99	FÁ# 2	739.98
SOL 1	391.99	SOL 2	783.98
SOL# 1	415.30	SOL# 2	830.60
LÁ 1	439.99	LÁ 2	879.99
LÁ# 1	466.16	LÁ# 2	932.31
SI 1	493.88	SI 2	987.75

Simplificadamente, ao nível das condições de fronteira, o sino pode ser analisado como um elemento com uma das extremidades fechada (ombro), e a outra aberta (boca). Logo, é possível afirmar que os harmónicos produzidos por este são múltiplos ímpares inteiros da frequência harmónica fundamental, f_1 . Esta sequência de frequências é designada por série harmónica.

As frequências harmónicas estão associadas a frequências ressonantes. Por exemplo, no caso de uma corda de comprimento L com uma das extremidades fixa (gerador mecânico de ondas) e a outra ligada a um anel de massa desprezável, livre de deslizar na vertical. A onda produzida pelo gerador percorre ao longo da corda até à extremidade livre, onde é reflectida e invertida. O tempo total de ida e volta é $4L/v$. Se esse intervalo de tempo é igual ao período do gerador, então a crista de onda duas vezes reflectida sobrepõe-se à segunda crista de onda produzida pelo gerador. Como se interferem construtivamente, a amplitude irá aumentar até estabilizar, sendo visível a posição dos pontos fixos (nós) e da máxima amplitude (crista), através da Figura 4.5:

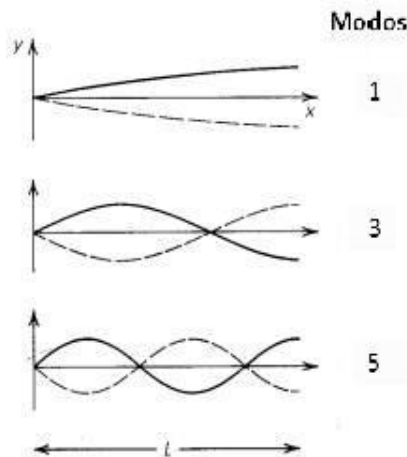


Figura 4.5 – Modos de vibração dos vários harmônicos (sistema aberto numa das extremidades) [21].

Generalizando, para o harmónico n e tendo presente que a velocidade de propagação da onda é a mesma ($v_{som}=340$ m/s), temos que as frequência do harmónico n definida do seguinte modo:

$$v = \lambda_n \cdot f_n = const. \Leftrightarrow f_n = \frac{v}{(4L/n)} = n \cdot \left(\frac{v}{4L} \right) = n \cdot f_1, \text{ com } n \text{ ímpar} \quad (4.6)$$

Segundo vários estudos realizados de modo a caracterizar este elemento ao nível das suas frequências e modos de vibração, com o auxílio de programas de software adequados para o efeito, verifica-se que as frequências de vibração não respeitam a lógica acima indicada, uma vez que as frequências obtidas não são puramente múltiplas. Na Figura 4.6 encontram-se expressas alguns dos modos de vibração típicos de um sino, resultantes de uma análise modal.

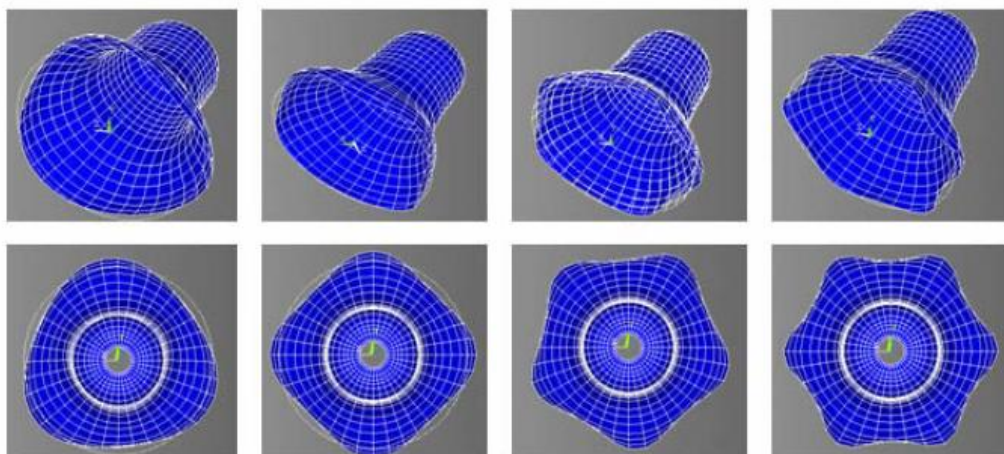


Figura 4.6 – Modos de vibração de um sino - IJME 2006 [22].

4.3. CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DO MOVIMENTO PENDULAR

4.3.1. CÁLCULO VARIACIONAL

4.3.1.1. Equação de Euler-Lagrange

O cálculo variacional tem pelo menos 200 anos, mas os seus primeiros passos foram dados pelos gregos antigos. A característica principal deste problema é que a variável do problema é uma curva.

Leonhard Euler foi o responsável por tornar o cálculo das variações de uma forma analítica e descobriu a equação diferencial que soluciona muitos problemas variacionais, entre os quais a teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Para a sua demonstração, considere-se uma função $f(t, r, \dot{r})$ da qual se pretende minimizar o respectivo integral, tendo como pressuposto que r é um vector diferenciável no intervalo de integração. O integral I é designado por funcional e r corresponde a um vector com várias componentes que se encontram escritas em função da variável t .

$$I = I(r) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, r, \dot{r}) dt \quad (4.7)$$

De modo a simplificar a demonstração, inicia-se com o caso particular de o vector r apenas possuir uma variável. Assim, a resolução deste problema é conseguida através da introdução de uma pequena perturbação à função r , adicionando a parcela $\varepsilon \cdot \eta(t)$, em que ε é uma função constante positiva e $\eta(t)$ corresponde a uma função que varia pouco (lisa) e é nula nos extremos do integral I . Assim a igualdade (4.7) possui o seguinte aspecto.

$$H(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \tilde{r}, \dot{\tilde{r}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t, r + \varepsilon \cdot \eta, \dot{r} + \varepsilon \cdot \dot{\eta}) dt \quad (4.8)$$

Para obter o mínimo deste integral, é necessário calcular a primeira derivada de $H(\varepsilon)$.

$$H'(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \tilde{r}, \dot{\tilde{r}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, r + \varepsilon \cdot \eta, \dot{r} + \varepsilon \cdot \dot{\eta}) dt \quad (4.9)$$

Como cálculo auxiliar, é possível determinar a seguinte componente do integral, por aplicação da regra da cadeia.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \tilde{r}, \dot{\tilde{r}}) = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \cdot \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \eta(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \cdot \eta'(t) \quad (4.10)$$

Quando $\varepsilon=0$, a variável $\tilde{r}$ é igual a r , e como se pretende minimizar o integral definido em (4.7), logo obtêm-se a seguinte igualdade.

$$H'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \eta(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \cdot \eta'(t) dt = 0 \quad (4.11)$$

Como a função $\eta(t)$ é nula nos extremos com o recurso do conceito de integração por partes, é possível simplificar a segunda parcela.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \cdot \eta'(t) dt = \left(\eta(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) dt \quad (4.12)$$

Deste modo, a equação (4.11), possui o seguinte aspecto.

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) \right] dt = 0 \quad (4.13)$$

Para que a igualdade apresentada pela equação (4.13) seja válida para qualquer que seja a função $\eta(t)$ com as características acima evidenciadas, basta que ocorra o seguinte. Assim obtêm-se a **Equação de Euler-Lagrange**.

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Para o caso de a dimensão do vector r ser superior a um, obtêm-se um sistema de equações com a mesma dimensão de r , obtida segundo a mesma lógica apresentada para uma variável. Logo a equação i deste sistema é apresentada da seguinte forma.

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}_i} \right) = 0 \quad (4.15)$$

A título de curiosidade, a equação (4.14) é válida através da aplicação do **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, onde a função é escrita como a combinação linear de duas funções, em que uma corresponde à função da qual se pretende extrair os candidatos a extremo (g) e a outra corresponde à restrição onde estes se apresentam (h).

$$\hat{f} = g + \lambda \cdot h \quad (4.16)$$

onde λ corresponde ao **Multiplicador de Lagrange** [24].

4.3.1.2. Princípio de Hamilton

Os matemáticos do século XIX procuraram descobrir um princípio geral a partir do qual a mecânica de Newton pudesse ser deduzida. O cálculo de variações, por Euler, surge na ideia unificadora que rege todos os fenómenos físicos. O sonho de Euler em unificar estes fenómenos a partir de um princípio matemático foi realizado um século depois por William Rowan Hamilton.

O enunciado do Princípio de Hamilton é o seguinte:

“Se uma partícula se move de um ponto P_1 a um ponto P_2 num intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$, a trajectória real que ela efectua é aquela para a qual a Acção (Integral de Hamilton) assume um valor estacionário.”

A demonstração deste enunciado inicia-se pelo caso particular de uma partícula de massa, m , movendo-se no espaço sob a influência de uma força conservativa, ou seja, o trabalho realizado por esta é independente da trajectória realizada. O vector posição da partícula é expresso da seguinte forma.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k} = (x_1, y, z) \quad (4.17)$$

Por sua vez, a força encontra-se expressa com o seguinte aspecto.

$$\vec{F} = F_1 \cdot \hat{i} + F_2 \cdot \hat{j} + F_3 \cdot \hat{k} = (F_1, F_2, F_3) \quad (4.18)$$

A **Energia Potencial** da partícula, $U(x, y, z)$ é o simétrico da Função Potencial, uma vez que a variação do seu potencial entre os pontos P_1 e P_2 é precisamente igual ao trabalho realizado por F para mover a partícula de P_1 para P_2 . Logo, a seguinte condição é válida, para uma força conservativa.

$$\vec{F} = -\nabla U \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = -\partial U / \partial x \\ F_2 = -\partial U / \partial y \\ F_3 = -\partial U / \partial z \end{cases} \quad (4.19)$$

De modo a obter o vector velocidade da partícula, basta derivar o seu vector posição e assim obter o seguinte.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k} \quad (4.20)$$

A sua norma, designada por velocidade escalar, é dada pela seguinte relação.

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (4.21)$$

Assim, é possível caracterizar a **Energia Cinética** da partícula, que é expressa da seguinte forma.

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \quad (4.22)$$

O **Integral de Hamilton (Acção)** é definido da seguinte forma.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (4.23)$$

A entidade, L, é designada por **Lagrangiana** e é expressa como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial.

$$L = T - U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - U(x, y, z) \quad (4.24)$$

Por aplicação da **Equação de Euler-Lagrange**, obtêm-se o seguinte sistema de equações.

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

De uma forma mais compacta, pela soma das várias equações, é possível obter a seguinte igualdade.

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla U = \vec{F} \quad (4.26)$$

A equação (4.26) é precisamente a **Segunda Lei de Newton**. Logo, a lei de Newton é uma condição necessária para que a Acção da partícula tenha um valor estacionário e vice-versa.

Quando se encontra perante um sistema de partículas, o raciocínio é o mesmo e conduz ao seguinte resultado generalizado para a partícula j.

$$m_j \cdot \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_j \quad (4.27)$$

No caso de o sistema de forças não ser conservativo, apenas é necessário realizar a seguinte operação.

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = -\frac{\partial F_{res,i}}{\partial \dot{r}_i} \quad (4.28)$$

O princípio de Hamilton é muito importante na Física, uma vez através deste é possível exprimir as suas leis em termos de energia, sem se referir a um sistema de coordenadas [24].

4.3.2. INTEGRAIS E FUNÇÕES ELÍPTICAS

4.3.2.1. Integrales Elípticos

Os integrais elípticos surgem durante o século XVIII em problemas de determinação do comprimento de algumas curvas. Em particular, no problema de determinação do comprimento da elipse, daí a atribuição do nome a estes integrais. Esta tarefa pode ser efectuada à custa do esquema representado na Figura 4.7.

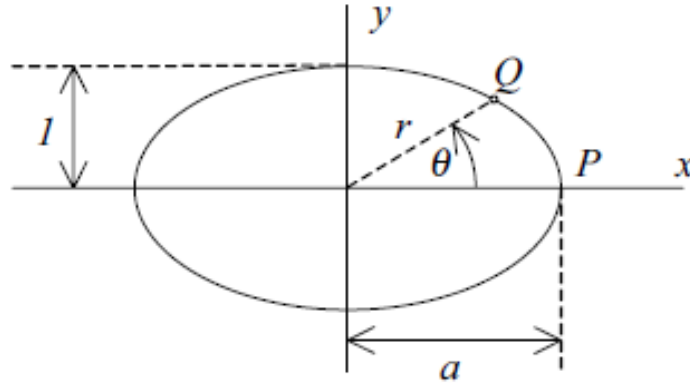


Figura 4.7 – Representação esquemática dos parâmetros da elipse.

Assim é possível escrever a parametrização da elipse, pela definição das coordenadas em função dos parâmetros que a caracteriza, em que a e l são escalares positivos e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \\ y = l \cdot \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(\theta) = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} \quad (4.29)$$

Desta forma, e pela aplicação da **Fórmula Fundamental da Trigonometria**, a equação da elipse é a seguinte.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1 \quad (4.30)$$

A excentricidade da elipse corresponde a um parâmetro característico da elipse. Quando esta é unitária, coincide com o caso particular do círculo e é expressa da seguinte forma.

$$e^2 = \frac{a^2 - l^2}{a^2} \Leftrightarrow e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2}} \quad (4.31)$$

Para determinar o comprimento da elipse é necessário definir o vector tangente, uma vez que esta quantidade corresponde ao integral de linha do vector tangente. Este vector encontra-se definido de seguida, tendo em conta a definição de excentricidade expressa na equação (4.31).

$$v(\theta) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \theta + l^2 \cdot \cos^2 \theta} = a \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta} \quad (4.32)$$

Portanto, o comprimento da elipse é quantificável pela seguinte definição.

$$L = \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta} d\theta \quad (4.33)$$

Existem três integrais elípticos, em que cada um destes possui duas formas equivalentes, uma na forma de Legendre e outra na forma de Jacobi.

Começando pela forma de Legendre, os respectivos integrais elípticos de primeira, segunda e terceira ordem são os seguintes.

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \quad (4.34a)$$

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} d\phi \quad (4.34b)$$

$$\Pi(n, k, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 + n \cdot \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \quad (4.34c)$$

Para obter os integrais elípticos na forma de Jacobi, basta realizar a seguinte mudança de variável: $x = \sin \phi$.

$$F_1(k, x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}} dx \quad (4.35a)$$

$$E_1(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2 \cdot x^2}{1-x^2}} dx \quad (4.35b)$$

$$\Pi_1(n, k, x) = \int_0^x \frac{1}{(1+n \cdot x^2) \cdot \sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}} dx \quad (4.35c)$$

Os integrais acima apresentados encontram-se escritos em função de três termos: a constante $0 \leq k \leq 1$ corresponde ao módulo do integral elíptico, ϕ à amplitude e n ao termo característico. Quando os limites de integração são $\phi = \pi/2$ e $x=1$, os integrais elípticos acima apresentados são designados por **Integrais Elípticos Completos** [25].

4.3.2.2. Funções Elípticas de Jacobi

No caso extremo $k=0$, os integrais elípticos (4.35a) e (4.35a) são igualmente expressos da seguinte forma.

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) \quad (4.36)$$

Assim, o estudo da função inversa arco-seno é bastante facilitado pela consideração da função seno, o que permite realizar o estudo das funções inversas de F_1 e E_1 pela introdução da seguinte função.

$$\phi = am(u) \quad (4.37)$$

O argumento u corresponde ao seguinte integral, de acordo com as considerações até então evidenciadas.

$$u = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sen^2 \phi}} d\phi \quad (4.38)$$

Deste modo, é possível definir as **Funções Elípticas de Jacobi**.

$$sn(u) = \operatorname{sen} \phi \quad (4.39a)$$

$$cn(u) = \cos \phi \quad (4.39b)$$

$$dn(u) = \sqrt{1 - k^2 \cdot sn(u)} \quad (4.39c)$$

Quando $k=0$, verifica-se que o argumento u é igual a $\pi/2$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2} \quad (4.40)$$

De modo a ser possível obter o período das funções elípticas $sn(u)$ e $cn(u)$, é necessário definir o parâmetro K , que corresponde ao seguinte integral.

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}} dx \quad (4.41)$$

Adicionado ao facto de o período das funções seno e co-seno serem iguais a 2π , é possível provar que estas são periódicas de período igual a $4K$.

As duas propriedades mais importantes das funções elípticas são as seguintes.

$$sn^2 u + cn^2 u = 1 \quad (4.42a)$$

$$dn^2 u + k^2 \cdot sn^2 u = 1 \quad (4.42b)$$

Quando $k=0$, as funções elípticas possuem o comportamento já conhecido pela trigonometria ordinária, logo as propriedades acima evidenciadas são válidas, já que a equação (4.42a) vai ao encontro da Fórmula Fundamental da Trigonometria e a (4.42b) à equação paramétrica que define o círculo [25].

4.3.3. PÊNDULO GRAVÍTICO SIMPLES (SINO)

4.3.3.1. Movimento livre não amortecido

O movimento de um pêndulo gravítico simples caracteriza-se pela oscilação de um corpo de massa (m) a uma distância conhecida (l) relativamente ao ponto fixo (O) que inicia o seu movimento a uma amplitude inicial (θ_0) segundo um determinado plano, tal como se encontra evidenciado na Figura 4.8.

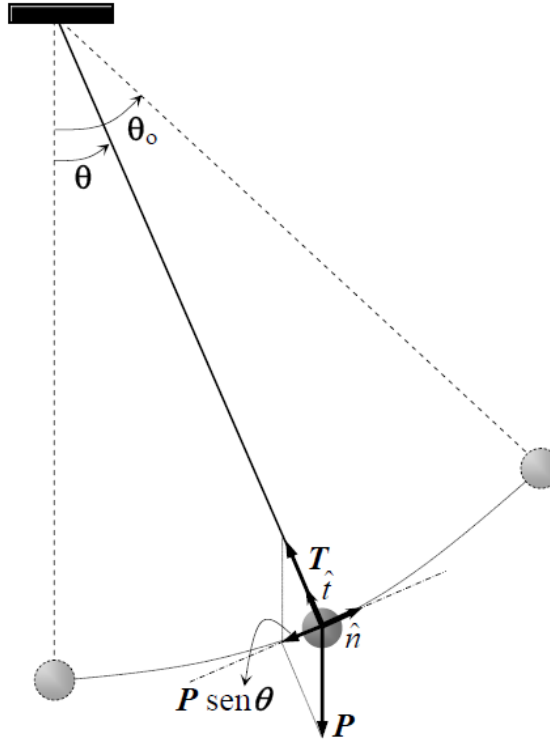


Figura 4.8 – Representação esquemática de um pêndulo gravítico simples [23].

Descrevendo a trajectória da referida massa [25], com o referencial localizado no ponto fixo, obtêm-se as seguintes equações paramétricas e as respectivas derivadas temporais de segunda ordem.

$$\begin{cases} x = l \cdot \sin \theta \\ y = l \cdot \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -l \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + l \cdot \cos \theta \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = -l \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - l \cdot \sin \theta \cdot \ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.43)$$

Através da expressão do equilíbrio de forças relativamente às componentes que estão definidas segundo as direcções principais do referencial cartesiano, é possível escrever:

$$\begin{cases} F_x = m \cdot \ddot{x} \\ F_y = m \cdot \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -T \cdot \sin \theta \\ m \cdot \ddot{y} = mg - T \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (4.44)$$

A substituição das expressões (4.43) nas equações definidas em (4.44), leva à seguinte Equação de Equilíbrio Dinâmico (EED) do movimento de um pêndulo gravítico simples (sem amortecimento).

$$m \cdot \ddot{\theta} + m \cdot \left(\frac{g}{l} \right) \cdot \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \sin \theta = 0 \quad (4.45)$$

em que ω_n corresponde à frequência angular do sistema.

De modo a perceber os diversos comportamentos oscilatórios de um pêndulo simples, é necessário realizar o respectivo retrato de fase. Para isso, começa-se por multiplicar ambos os membros da EED (4.45) por $\dot{\theta}$.

$$\dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (4.46)$$

Tendo presente que é possível expressar os termos com outro aspecto através da realização do processo inverso à derivação de uma função composta e de seguida proceder à integração temporal da equação resultante, obtém-se a seguinte igualdade.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2) - \omega_n^2 \cdot \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2(t) - \omega_n^2 \cdot \cos \theta(t) = c = \text{const.} \quad (4.47)$$

Ao realizar a multiplicação de ambos os termos da equação por ml^2 , obtemos a **Lei de Conservação de Energia**, uma vez que esta indica que a Energia Total (E_T) se mantém constante:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 \right)}_T + \underbrace{\left(-m \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta \right)}_U = E_T(\theta, \omega) \quad (4.48)$$

em que T corresponde à Energia Cinética e U à Energia Potencial Gravítica.

A EED (4.45) é passível de ser escrita através do seguinte sistema equações diferenciais autónomo de representada o retrato de fase no plano (θ, ω) , uma vez que se trata de um **Sistema Hamiltoniano**, logo as linhas de corrente do campo de vectores corresponde às curvas de nível da função escalar $E_T(\theta, \omega)$.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\omega_n^2 \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (4.49)$$

Em termos tridimensionais, a função escalar $E_T(\theta, \omega)$ encontra-se expressa na Figura 4.9.

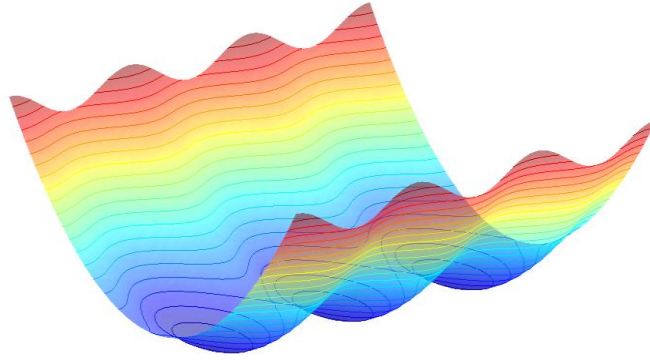


Figura 4.9 – Representação gráfica da função escalar $E_T(\theta, \omega)$ - *Matlab*.

Realizando a análise do sistema autónomo (4.49), o seu retrato de fase é o seguinte:

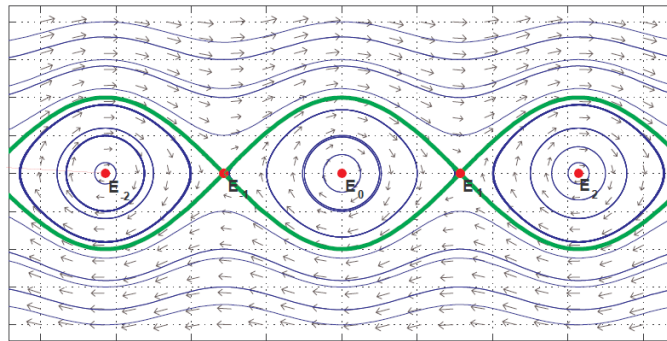


Figura 4.10 – Retrato de fase no plano (θ, ω) de um pêndulo gravítico simples não amortecido [26].

Pela análise do retrato de fase acima evidenciado, é possível obter as seguintes observações:

- ✓ Os pontos de equilíbrio estável E_2 e E_0 correspondem aos valores de $\theta=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ✓ Os pontos de sela E_1 correspondem aos valores de $\theta=\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ✓ A região de oscilação – cada órbita é percorrida no sentido horário e gira em torno de pontos de equilíbrio estável. Nesta região o pêndulo atinge uma altura máxima com velocidade angular zero quando o seu movimento muda de sentido;
- ✓ A região de revolução – o pêndulo tem energia suficiente para fazer revoluções completas sem nunca atingir o repouso;
- ✓ As fronteiras (verde) – as órbitas convergem nos pontos E_1 , quando o tempo tende para infinito.

4.3.3.2. Movimento livre amortecido

Para o caso de um pêndulo gravítico simples amortecido, apenas é necessário acrescentar a sua contribuição na equação (4.45), ou seja:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{c}{m}\right) \cdot \dot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + (2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n) \cdot \dot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \sin\theta = 0 \quad (4.50)$$

onde ξ_n corresponde ao coeficiente de amortecimento da ligação existente no ponto fixo.

A partir do mesmo raciocínio realizado para o caso de ausência de amortecimento, o sistema de equações associado ao retrato de fase no plano (θ, ω) é definido por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot \omega - \omega_n^2 \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (4.51)$$

Através da análise da do sistema autónomo (4.51) é possível representar o respectivo retrato de fase:

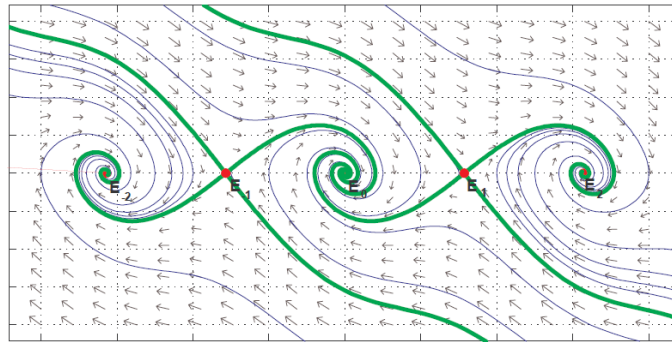


Figura 4.11 – Retrato de fase no plano (θ, v) de um pêndulo gravítico simples amortecido [26].

Pela análise do retrato de fase acima evidenciado, é possível obter as seguintes observações comparativas, considerando $\xi_n \neq 0$:

- ✓ Os pontos de equilíbrio E_2 e E_0 mantêm-se estáveis;
- ✓ Os pontos de equilíbrio E_1 mantêm-se pontos de sela;
- ✓ A região de oscilação – cada órbita é percorrida no sentido horário e gira em torno de pontos de equilíbrio estável, onde a velocidade angular tende para zero, quando o tempo tende para infinito;
- ✓ A região de revolução – não possui a periodicidade do caso anterior, apenas o número de voltas que o pêndulo descreve depende das condições iniciais;
- ✓ As fronteiras (verde) – as órbitas limite convergem nos pontos E_1 , quando o tempo tende para infinito e simultaneamente tendem para zero, em função das condições iniciais.

4.3.3.3. Período de oscilação

Considerando de novo a EED (4.45), sem amortecimento, o movimento de pêndulo simples no domínio das pequenas oscilações é definido pelas seguintes considerações, e consequentemente é regido pela respectiva EED:

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0 \quad (4.52)$$

Neste domínio, a frequência angular ω_n e, por conseguinte, o respectivo período de oscilação (T) é definido do seguinte modo:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.53)$$

Assim, a igualdade anterior exprime a **Lei do Isocronismo das pequenas oscilações**.

De modo a calcular o período do movimento das grandes oscilações, é necessário considerar que o pêndulo é abandonado de um determinado ângulo $-\pi < \theta_0 < 0$, iniciando assim o movimento. Recorrendo à igualdade (4.46), obtém-se:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^t \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} dt - \int_0^t \omega_n^2 \cdot \sin \theta \cdot \underbrace{\dot{\theta} dt}_{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = 2 \cdot \omega_n^2 \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4.54)$$

A partir da relação anterior é possível afirmar que o movimento é periódico de amplitude $|\theta_0|$, pelo que pode ser descrito através de uma equação diferencial de variáveis separadas, logo:

$$\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta = \omega_n \cdot t \quad (4.55)$$

De modo a obter um outro aspecto do integral do primeiro membro, é necessário ter presente a seguinte igualdade trigonométrica e a introdução da variável $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$:

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \cdot \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (4.56a)$$

$$\operatorname{sen} \phi \cdot \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.56b)$$

Assim, obtém-se para o primeiro membro a função **Integral Elíptica de 1ª Ordem na forma de Legendre**:

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi}} d\phi, \text{ com } 0 < k = \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| < 1 \quad (4.57)$$

Para o cálculo do período do pêndulo, é necessário introduzir as seguintes condições de fronteira na equação (4.55) e de seguida obter a respectiva expressão:

$$\begin{cases} t = T/4 \\ \phi = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{4}{\omega} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi}} d\phi \quad (4.58)$$

O integral anterior não pode ser escrito sob a forma de funções elementares, mas é possível calcular de uma forma aproximada, usando o seguinte desenvolvimento binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \cdot k^4 \cdot \operatorname{sen}^4 \phi + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \cdot k^6 \cdot \operatorname{sen}^6 \phi + \dots \quad (4.59)$$

Ao integrar a série de potências obtém-se o período de oscilação:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot k^6 + \dots \right] \quad (4.60)$$

É possível obter a lei de variação de $\phi(t)$ a partir do conhecimento da função inversa de $F(k, \phi)$, designada por **Função Elíptica de Jacobi**:

$$F(k, \phi) = u = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \phi}} d\phi \Rightarrow \operatorname{sn}(u) = \operatorname{sen}(\phi) \quad (4.61)$$

Assim se define a lei de variação $\phi(t)$ com o recurso à equação (4.55)

$$\phi(t) = \text{arsen}[sn(\omega_n \cdot t)] \quad (4.62)$$

Consequentemente a resposta dinâmica do movimento pendular $\theta(t)$ é obtida pela mudança de variável definida pela equação (4.56b)

$$\theta(t) = 2 \cdot \text{arsen}[k \cdot sn(\omega_n \cdot t)] \quad (4.63)$$

É importante notar que a resposta dinâmica do pêndulo simples depende da amplitude do ângulo θ_0 em que inicia o movimento.

Graficamente as funções $\phi(t, \theta_0)$ e $\theta(t, \theta_0)$ estão representadas da seguinte forma:

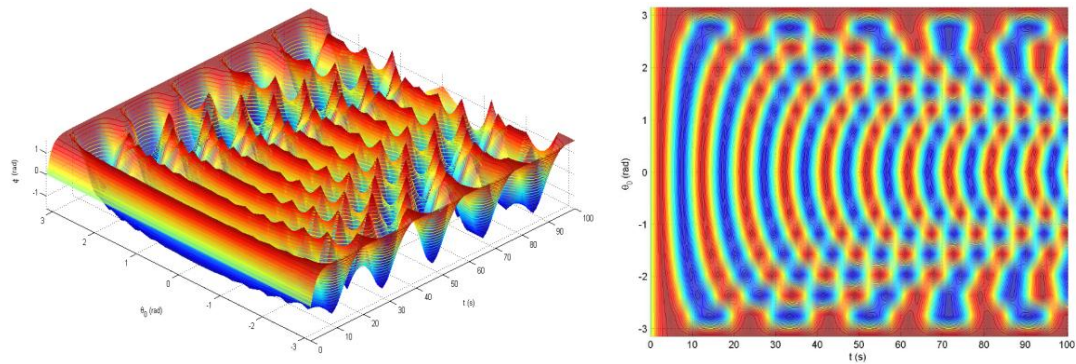


Figura 4.12 – Função $\phi(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=1$ – MatLab™.

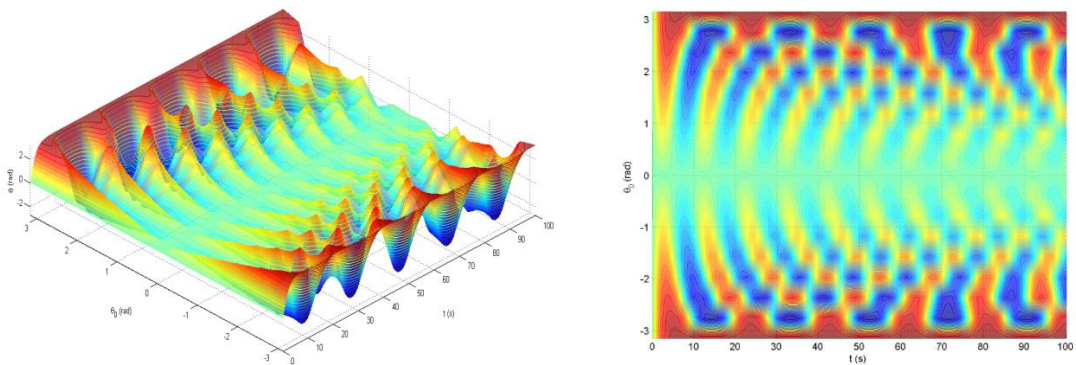


Figura 4.13 – Função $\phi(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=1$ – MatLab™.

4.3.1. PÊNDULO GRAVÍTICO COMPOSTO (SINO+BADALO)

4.3.2.1. Movimento livre não amortecido

A equação do pêndulo simples apenas é aplicável no caso em que existe apenas o sino, já que o badalo também possui uma contribuição para o movimento do conjunto que não pode ser negligenciada. A partir desta ideia, é possível definir o seguinte esquema relativo ao movimento de um pêndulo gravítico composto:

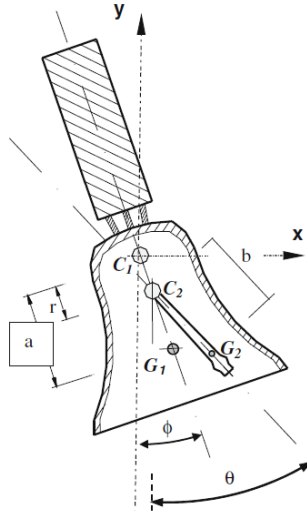


Figura 4.14 – Representação esquemática de um pêndulo gravítico composto [27].

Tal como se encontra apresentado no caso de um pêndulo gravítico simples, é possível proceder à caracterização da trajectória do sino e do badalo, com as respectivas massas concentradas nos seus centros de gravidade, tendo por base o referencial localizado no ponto fixo (Figura 4.14), obtém-se as seguintes equações paramétricas e respectivas primeiras derivadas:

$$\text{Sino : } \begin{cases} x_1 = a \cdot \sin \varphi \\ y_1 = -a \cdot \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y}_1 = a \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.64a)$$

$$\text{Badalo : } \begin{cases} x_2 = r \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin \theta \\ y_2 = -r \cdot \cos \varphi - b \cdot \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + b \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y}_2 = r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + b \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases} \quad (4.64b)$$

A partir destas equações é possível definir a **Energia Potencial** do sistema:

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 &= M \cdot g \cdot y_1 + m \cdot g \cdot y_2 = \\ &= -(M \cdot g \cdot a + M \cdot g \cdot r) \cdot \cos \varphi - m \cdot g \cdot b \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (4.65)$$

É necessário atender que a velocidade escalar é da seguinte forma

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \\ v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \end{cases} \quad (4.66)$$

Assim, a **Energia Cinética** do sistema pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot (a \cdot \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[(r \cdot \dot{\varphi})^2 + 2 \cdot r \cdot b \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\varphi - \theta) + (b \cdot \dot{\theta})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Para definir as equações que regem o movimento composto, é necessário recorrer à aplicação da **Equação de Euler-Lagrange** [24], ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \end{cases}, \text{ com } L = T - U \quad (4.68)$$

Logo as equações diferenciais pretendidas que descrevem o movimento de um pêndulo gravítico composto são as seguintes:

$$\begin{cases} (M \cdot a^2 + m \cdot r^2) \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\varphi - \theta) + \\ \quad + m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + (M \cdot a + m \cdot r) \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \\ m \cdot b^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi - \theta) - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + m \cdot b \cdot g \cdot \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

De modo a simplificar a resolução do problema e compactar as equações, é preciso introduzir o facto de a massa do badalo ser cerca de 2.5% da massa do sino que lhe está associado e também definir os respectivos momentos de inércia [27]:

$$\begin{cases} I_1 = M \cdot a^2 \\ I_2 = m \cdot b^2 \end{cases} \quad (4.70)$$

Logo, as equações são reescritas com o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi} + M \cdot a \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \\ I_2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi - \theta) - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + m \cdot b \cdot g \cdot \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

Verifica-se pelo sistema de equações acima apresentado que a primeira equação corresponde à EED do pêndulo gravítico simples do sino, tal como já foi tratado. Assim, a segunda equação caracteriza o movimento do badalo, dependente da primeira equação. A resolução deste sistema de equações diferenciais é efectuada recorrendo a métodos numéricos de resolução de equações diferenciais, devido à inexistência da sua solução analítica. É necessário atender que o ângulo θ se encontra limitado e é necessário ter em conta o impacto do badalo sobre o sino e recomendo a leitura do artigo [28], presente na bibliografia, que se encontra no final deste documento.

4.3.2.2. Movimento livre amortecido

No caso de um pêndulo gravítico composto amortecido, apenas é necessário ter em consideração que a diminuição de energia do sistema é igual ao trabalho das forças resistentes ao movimento, que são definidos como

$$\begin{cases} F_1 = M \cdot (\xi_{n,1} \cdot \omega_{n,1}) \cdot v_1^2 \\ F_2 = m \cdot (\xi_{n,2} \cdot \omega_{n,2}) \cdot v_2^2 \end{cases} \quad (4.72)$$

Assim é possível aplicar a mesma lei adaptada da situação caracterizada em (4.71) e obter

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -\frac{\partial F_1}{\partial \dot{\varphi}} = -M \cdot a^2 \cdot (2 \cdot \xi_{n,1} \cdot \omega_{n,1}) \cdot \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -\frac{\partial F_2}{\partial \dot{\theta}} = -m \cdot (2 \cdot \xi_{n,2} \cdot \omega_{n,2}) \cdot [r \cdot b \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi - \theta) + b^2 \cdot \dot{\theta}] \end{cases} \quad (4.73)$$

Logo as equações diferenciais pretendidas que descrevem o movimento de um pêndulo gravítico composto com amortecimento são as seguintes:

$$\begin{cases} (M \cdot a^2 + m \cdot r^2) \cdot \ddot{\phi} + M \cdot a^2 \cdot (2 \cdot \xi_{n,1} \cdot \omega_{n,1}) \cdot \dot{\phi} + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\varphi - \theta) + \\ + m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + (M \cdot a + m \cdot r) \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \\ m \cdot b^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot (2 \cdot \xi_{n,2} \cdot \omega_{n,2}) \cdot [r \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\varphi - \theta) + b^2 \cdot \dot{\theta}] + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\varphi - \theta) - \\ - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + m \cdot b \cdot g \cdot \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

De modo com as mesmas considerações simplificativas do problema, é possível reescrever as equações da seguinte forma

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\phi} + (2 \cdot \xi_{n,1} \cdot \omega_{n,1}) \cdot I_1 \cdot \dot{\phi} + M \cdot a \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \\ I_2 \cdot \ddot{\theta} + (2 \cdot \xi_{n,2} \cdot \omega_{n,2}) \cdot [I_2 \cdot \dot{\theta} + m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\varphi - \theta)] + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\varphi - \theta) - \\ - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\varphi - \theta) + m \cdot b \cdot g \cdot \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

4.4. MODO DE APLICAÇÃO DA ACÇÃO E RESPECTIVO EFEITO

Existem várias formas de tocar o sino, mas no caso em estudo apenas será explorada o caso em que o sino bamboa (movimento pendular).

A quantificação dos impulsos exercidos pelo sino, devido ao seu movimento pendular, pode ser efectuada através do equilíbrio de acções dinâmicas, negligenciando o efeito do badalo na amplificação das acções, uma vez que a massa do badalo é muito reduzida relativamente à do respectivo sino. Tendo presente este aspecto, é possível definir as acções do modo que se descreve nos próximos parágrafos.

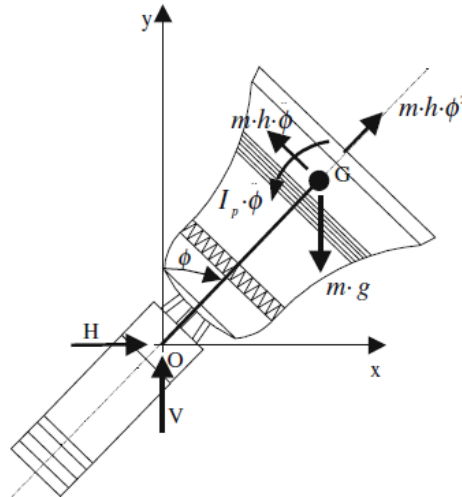


Figura 4.15 – Equilíbrio de forças dinâmicas relativas ao sino [27].

As componentes de força transversal, normal e momento associadas ao movimento pendular, são definidas com o seguinte aspecto

$$\begin{aligned}
 F_t(t) &= m \cdot a_t(t) = m \cdot l \cdot \dot{\theta} \\
 F_n(t) &= m \cdot a_n(t) = m \cdot \left(\frac{v^2}{l} \right) = m \cdot \frac{\dot{\theta}^2 \cdot l^2}{l} = m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \\
 M_G(t) &= I_G \cdot \ddot{\theta}(t)
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

em que m corresponde à massa do pêndulo e φ ao ângulo de rotação com o eixo vertical.

Este conjunto de forças aplicado no centro de gravidade do pêndulo, pode ser referido ao eixo de rotação O, de acordo com:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= F_n(t) \cdot \sin \theta(t) - F_t(t) \cdot \cos \theta(t) = \\
 &= m \cdot l \cdot [\dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta(t) - \ddot{\theta} \cdot \cos \theta(t)] \\
 V(t) &= -m \cdot g - F_n(t) \cdot \cos \theta(t) - F_t(t) \cdot \sin \theta(t) = \\
 &= -m \cdot g - m \cdot l \cdot [\dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta(t) + \ddot{\theta} \cdot \sin \theta(t)] \\
 M(t) &= I_O \cdot \ddot{\theta}(t) = (I_G + m \cdot l^2) \cdot \ddot{\theta}(t)
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Conforme se verifica na análise nas expressões anteriores, é necessário conhecer a lei de variação que caracteriza o movimento pendular do sino, θ , as respectivas leis de variação da velocidade angular, $\dot{\theta}$ e aceleração angular, $\ddot{\theta}$.

Segundo o que está disposto na secção anterior, é possível determiná-las do seguinte modo, no caso em que o amortecimento é nulo:

$$\begin{cases}
 \theta(t, \theta_0) = 2 \cdot \arcsin[\sin(\theta_0 / 2) \cdot \sin(\omega_n \cdot t)] \\
 \dot{\theta}^2(t, \theta_0) = 4 \cdot \omega_n^2 \cdot [\sin^2(\theta_0 / 2) - \sin^2(\theta(t) / 2)] \\
 \ddot{\theta}(t, \theta_0) = -\omega_n^2 \cdot \sin \theta(t)
 \end{cases} \tag{4.78}$$

Quando o amortecimento não é nulo, a sua solução analítica não é passível de ser obtida, devido ao cálculo do integral da parcela de força de amortecimento. Para o encontro da sua resolução recorre-se à via numérica.

Estão graficamente expressas as leis de variação temporal das acções do sino: horizontal $H(t, \theta_0)$, vertical $V(t, \theta_0)$ e momento $M(t, \theta_0)$, nas Figura 4.16 a 4.18.

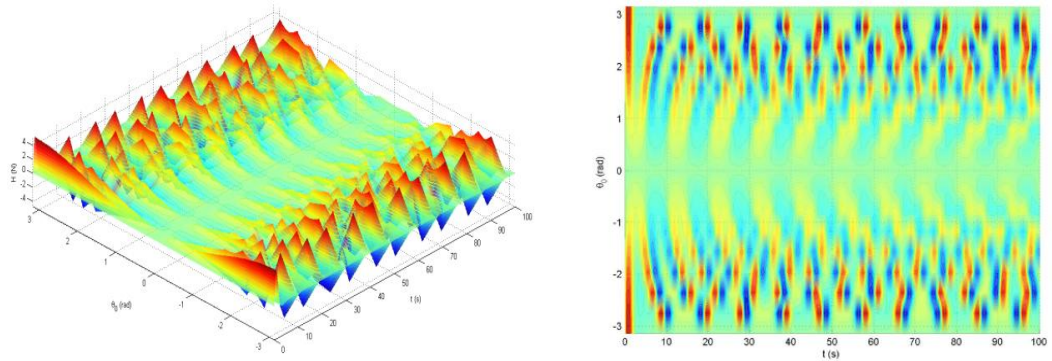


Figura 4.16 – Função $H(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=l=m=1$ – *MatLab*TM.

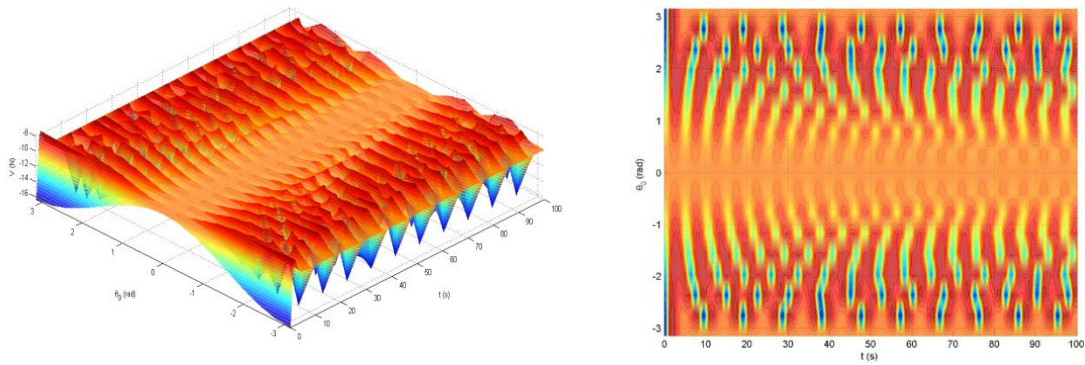


Figura 4.17 – Função $V(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=l=m=1$ – *MatLab*TM.

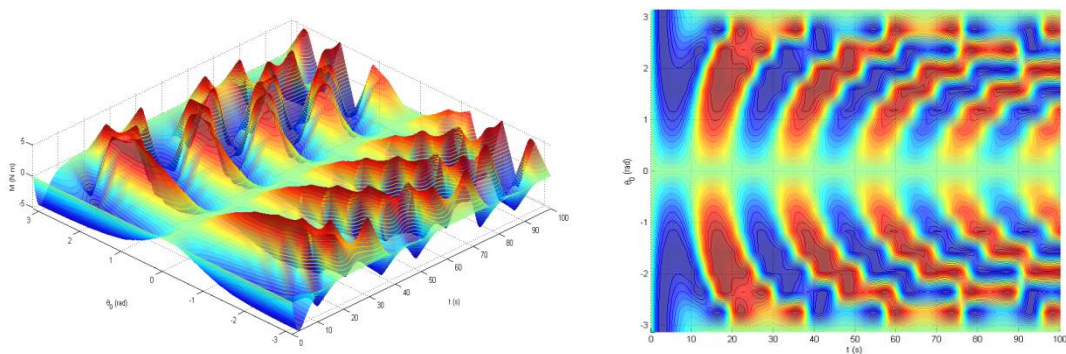


Figura 4.18 – Função $M(t, \theta_0)$, vista em perspectiva (à esq.) e de topo (à dir.) – $\omega_n=l=m=1$ – *MatLab*.

Na análise da acção do conjunto de sinos, apenas é necessário aplicar o princípio da sobreposição de efeitos, ou seja:

$$\begin{aligned}
 H_{Total}(t) &= \sum_{i=1}^N H_i(t) = \sum_{i=1}^N [F_{n,i}(t) \cdot \sin \theta_i(t) - F_{t,i}(t) \cdot \cos \theta_i(t)] = \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \cdot l_i \cdot [\dot{\theta}_i^2 \cdot \sin \theta_i(t) - \ddot{\theta}_i \cdot \cos \theta_i(t)] \\
 V_{Total}(t) &= \sum_{i=1}^N V_i(t) = \sum_{i=1}^N [-m_i \cdot g - F_{n,i}(t) \cdot \cos \theta_i(t) - F_{t,i}(t) \cdot \sin \theta_i(t)] = \\
 &= \sum_{i=1}^N -m_i \cdot g - m_i \cdot l_i \cdot [\dot{\theta}_i^2 \cdot \cos \theta_i(t) + \ddot{\theta}_i \cdot \sin \theta_i(t)] \\
 M_{Total}(t) &= \sum_{i=1}^N M_i(t) = \sum_{i=1}^N [I_{O,i} \cdot \ddot{\theta}_i(t)]
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

4.5. DISPOSIÇÕES NORMATIVAS – DIN 4178

A norma anterior, "DIN 4178 Glockentürme, Berechnung und Ausführung" [29], foi publicada em Agosto de 1978, o que perfaz quase 27 anos de idade até à sua alteração.

Em Abril de 2004 surgiu a nova norma "DIN 4178 Glockentürme" como a substituição da versão de 1978 que se encontrava até então em vigor, que contém o cálculo e a aproximação das acções do toque dos sinos, outros aspectos relativos à manutenção e restauração de edifícios históricos, bem como informações para a medição de vibrações.

Relativamente ao cálculo das acções do toque dos sinos, é necessário primeiro referir o modo como a norma define todos os parâmetros, ou seja, o diagrama de corpo livre incluindo o respectivo sistema de eixos:

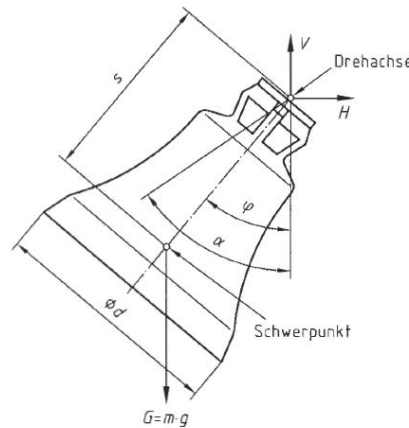


Figura 4.19 – Diagrama de corpo livre [29].

A abordagem seguida pela referida norma para o cálculo dos efeitos da vibração dos sinos, consiste na realização de uma análise considerando a contribuição dos diversos harmónicos, incluindo as sinusóides de índices i ímpares para a componente horizontal e co-sinusoidais de índices i pares para a componente vertical. Normalmente são considerados os primeiros 6 harmónicos. Para o cálculo da amplitude máxima da acção entram: o peso do sino, incluindo o respectivo contrapeso, o coeficiente de forma do mesmo e um outro coeficiente (β_{ni}), que tem em conta a amplitude máxima do movimento (α) associado ao harmónico i , ou seja:

$$\begin{aligned} H_n(t) &= \sum_i H_{n,i}(t) = c_n \cdot G_n \cdot \sum_i \beta_{n,i}^h \cdot \text{sen}(\Omega_{n,i} \cdot t), \text{ com } i=1,3,5,\dots \\ V_n(t) &= \sum_i V_{n,i}(t) = c_n \cdot G_n \cdot \sum_i \beta_{n,i}^v \cdot \text{sen}(\Omega_{n,i} \cdot t), \text{ com } i=2,4,6,\dots \end{aligned} \quad (4.80)$$

- ✓ G_n – peso do n -ésimo sino, incluindo o respectivo contrapeso;
- ✓ c_n – coeficiente de forma do sino, incluindo o respectivo contrapeso, calculado segundo a equação (4) e Tabela A.1. da referida norma;
- ✓ β_{ni}^h – coeficiente que depende da amplitude máxima do movimento α , relativamente à amplitude de excitação horizontal (Figura 2 da norma), correspondente ao n -ésimo sino e no i -ésimo harmónico;
- ✓ β_{ni}^v – coeficiente que depende da amplitude máxima do movimento α , relativamente à amplitude de excitação vertical (Figura 3 da norma), correspondente ao n -ésimo sino e no i -ésimo harmónico;
- ✓ Ω_{ni} – frequência angular de excitação associado ao n -ésimo sino e no i -ésimo harmónico ($\Omega_{ni} = \pi \cdot A_n / 60$, onde A_n corresponde ao número de batidas do badalo no sino por minuto).

O coeficiente de forma acima referido, c_n , depende apenas das características mecânicas do conjunto sino/contrapeso e corresponde essencialmente à razão entre a componente relativa à distância entre o centro de gravidade do conjunto ($m \cdot s^2$) e o momento de inércia de massa do mesmo relativamente ao respectivo eixo de rotação, por aplicação do **Teorema de Steiner**, e possui o seguinte aspecto:

$$c_n = \frac{m \cdot s^2}{J_s + m \cdot s^2} \quad (4.81)$$

Os ábacos relativos aos coeficientes β_{ni}^h e β_{ni}^v estão apresentados na Figura 4.20 e Figura 4.21, respectivamente. Estes coeficientes encontram-se definidos em função da amplitude máxima, α .

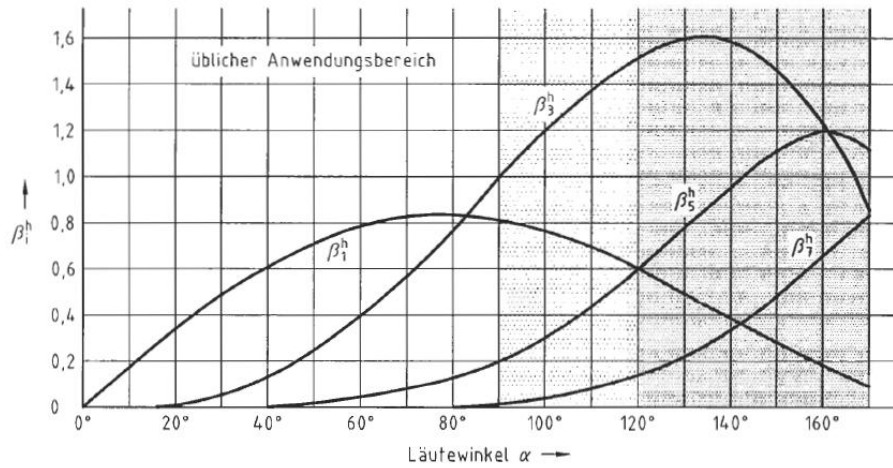


Figura 4.20 – Representação gráfica de β_n^h , em função do i -ésimo harmónico [29].

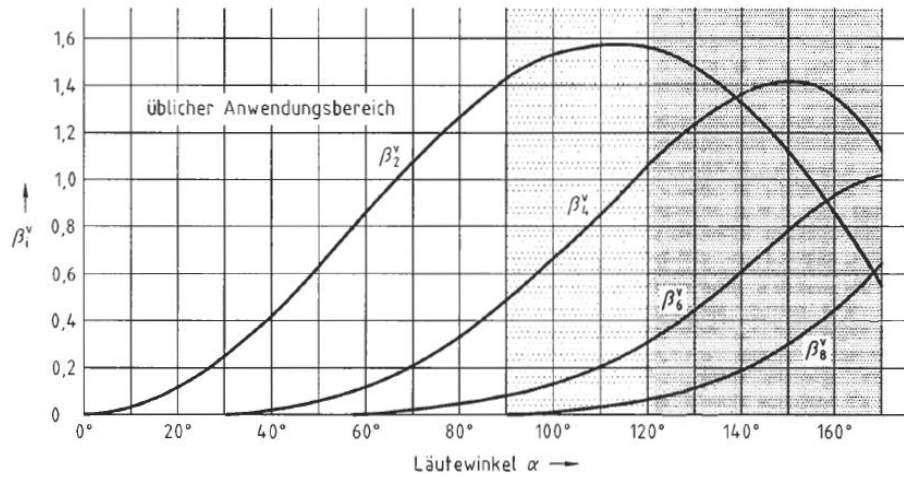


Figura 4.21 – Representação gráfica de β_n^v , em função do i -ésimo harmónico [29].

Se as forças devidas ao movimento pendular do badalo forem negligenciáveis, o cálculo desta componente da acção pode ser obtida através do seu valor máximo e mínimo, uma vez que estas não ocorrem no mesmo instante. O mínimo de $H(t)$ é nulo. Deste modo é possível definir estas componentes do seguinte modo:

$$\max H_n = c_n \cdot G_n \cdot \lambda_{\max,h}(\alpha_n)$$

$$\max V_n = c_n \cdot G_n \cdot \lambda_{\max,v}(\alpha_n) + G_n \quad (4.82)$$

$$\min V_n = c_n \cdot G_n \cdot \lambda_{\min,v}(\alpha_n) + G_n$$

Os valores de $\lambda_{\text{máx,h}}$, $\lambda_{\text{máx,v}}$ e $\lambda_{\text{mín,v}}$ estão definidos no ábaco retratado na Figura 4.22, em função da amplitude máxima, α .

A combinação da acção dos vários sinus é realizada pelo somatório das resultantes vectoriais dos vários sinus. No caso de considerar o fenómeno da fadiga, apenas os dois primeiros sinus, com maior magnitude, e os restantes são adicionados segundo a **Combinação Quadrática Simples**, ou seja:

$$R_{ges} = \sum_{n=1}^N |R_n|, \text{ para verificação de estabilidade} \quad (4.83)$$

$$R_{ges} = \sum_{n=1}^2 |R_n| + \sqrt{\sum_{n=2}^N R_n^2}, \text{ para análise à fadiga}$$

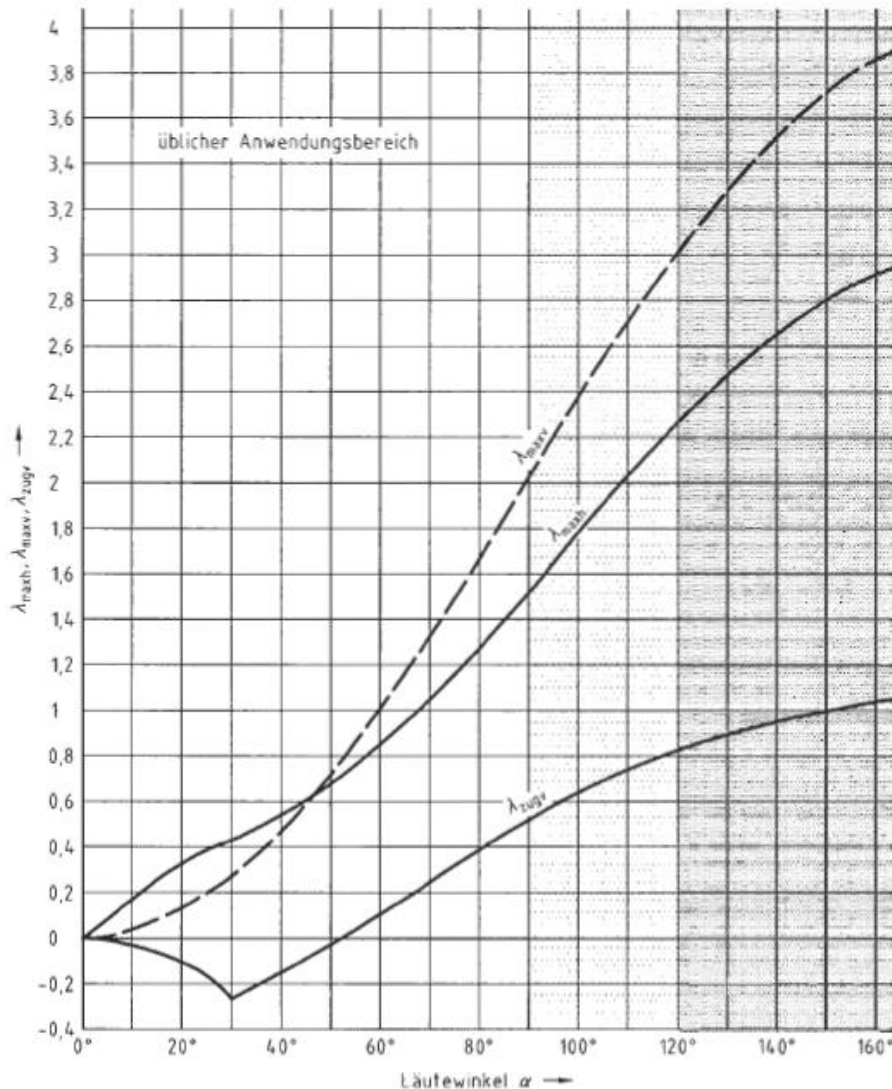


Figura 4.22 – Ábaco para calcular valores máximos e mínimos das acções horizontais e verticais [29].

5

ENSAIO DE VIBRAÇÃO AMBIENTAL

No presente capítulo é realizada a apresentação e análise dos resultados experimentais obtidos nos ensaios realizados na Torre Sineira, de forma a servir de auxílio à calibração do modelo numérico, que é descrito no capítulo seguinte. Inicialmente é apresentada a fundamentação teórica necessária para o tratamento dos dados recolhidos no Ensaio de Vibração Ambiental, de seguida procede-se à descrição do procedimento experimental e por fim é efectuada a apresentação dos resultados obtidos, fruto desse tratamento.

5.1. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO MODAL, NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

5.1.1. ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL

No Ensaio de Vibração Ambiental, a medição da resposta dinâmica de estruturas é realizada em vários pontos das mesmas, uma vez que se pretende obter a caracterização fidedigna do seu comportamento dinâmico. Como para tal é exigido um elevado número de sensores, o que nem sempre é possível corresponder a esta exigência, é usual recorrer a várias fases, designadas por *setups*, logo é necessário estudar as diferentes disposições dos sensores.

Durante o período de tempo em que decorre um *setup*, é registada a evolução das acelerações ao longo do tempo, neste caso realizado com recurso a sismógrafos. É necessário garantir que os sismógrafos se encontrem numa posição de tal forma que estes possuam as acelerações em concordância com os que se verificam na estrutura, ou seja, o aparelho não pode ter oscilações independentes da estrutura devido ao facto de este não se encontrar conveniente ligado à estrutura em estudo.

É necessário também garantir que as medições realizadas nas diversas fases sejam relacionáveis com as realizadas num nível em comum, designado por nível de referência, logo os seus graus de liberdade também recebem o mesmo tratamento. Este facto corresponde um dos aspectos em que se baseia a lógica do processamento destas séries.

Assim, colhe-se um conjunto de séries temporais que posteriormente serão tratadas segundo a metodologia a seguir apresentada, que exige o recurso a algumas noções de processamento digital e de análise espectral.

As funções de densidade espectral podem ser estimadas da seguinte forma:

$$S_{ij}(\omega_n) = \frac{X_i^*(\omega_n) \cdot X_j(\omega_n)}{T} \quad (5.1)$$

Na expressão anterior, o termo X_i^* corresponde ao conjugado da Transformada Discreta de Fourier da série temporal registada i e o termo X_j corresponde à Transformada Discreta de Fourier da série temporal registada em correspondência com o grau de liberdade j. Além disso, a constante T corresponde ao intervalo de tempo em que está definido o registo, que pode ser expresso como o produto do número de pontos do mesmo (N) pelo intervalo de tempo entre amostras (Δt).

Se o ensaio for realizado com um único *setup*, é possível definir a matriz de densidade espectral, em que cada termo desta é obtido segundo o que se encontra definido na equação (5.1). Repescando os conhecimentos relativos aos números complexos, observa-se que os termos da diagonal principal (auto-espectros) são números reais, uma vez que o produto de um número complexo pelo seu conjugado resulta de um número real, enquanto nos restantes (espectros cruzados) os termos são números complexos.

Para definir o passo da função densidade espectral é suficiente ter conhecimento que a frequência é o inverso do período de tempo, logo:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \text{ [Hz]} \quad (5.2a)$$

$$\Delta \omega = 2 \cdot \pi \cdot \Delta f = \frac{2 \cdot \pi}{N \cdot \Delta t} \text{ [rad/s]} \quad (5.2b)$$

Ao aplicar directamente a expressão (5.1), verifica-se que a estimativa espectral resultante tem uma elevada variância, uma vez que o seu cálculo é baseado apenas numa série temporal discretizada com duração finita. Para atenuar esta variância, utiliza-se o Procedimento de Welch, em que se divide a série temporal em troços mais curtos, com comprimento T_d , e realiza-se posteriormente a média das estimativas espectrais simples destes troços, obtendo-se assim uma estimativa alisada da função de densidade espectral, definida assim desta forma.

$$S_{ij}(\omega_n) = \frac{1}{n_d} \cdot \sum_{m=1}^{n_d} \left[\frac{X_i^*(\omega_n) \cdot X_j(\omega_n)}{T_d} \right]_m \quad (5.3)$$

em que n_d , corresponde ao número total de segmentos utilizados.

Porém, esta abordagem tem como consequência um agravamento dos erros por escorregamento (*leakage*), uma vez que quanto mais curtos são os segmentos, maior é o efeito deste tipo de erros. Para atenuar este agravamento, é usual recorrer à eliminação das médias dos segmentos e também a alguma sobreposição (*overlapping*) dos mesmos.

O erro por escorregamento ocorre devido ao facto de o tempo de observação ser limitado e também à existência de descontinuidades do sinal periodizado. Isto poder ser atenuado através da aplicação de janelas de dados a cada um dos segmentos. A aplicação mais corrente corresponde às janelas de Hanning sobre as séries temporais provenientes, e encontra-se expressa da seguinte forma.

$$w(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) \right] \quad (5.4)$$

em que t não deve superar metade do comprimento total do segmento.

A utilização de janelas de Hanning associada a uma sobreposição de segmentos de 2/3 corresponde ao caso em que se verifica a optimização do aproveitamento da informação contida nas séries temporais. Contudo, é corrente utilizar-se uma sobreposição de 1/2.

É importante referir que é necessário ter em consideração da exigência de um desfaseamento mínimo entre os registos (*delay*), uma vez que a presença deste afectará negativamente o resultado final [30].

5.1.2. MÉTODO DE SELECÇÃO DE PICOS

A caracterização experimental do comportamento dinâmico de uma estrutura, requer a medição da sua resposta, em vários graus de liberdade, logo a análise isolada de apenas uma função de densidade espectral é insuficiente para identificar todas as frequências naturais da estrutura, uma vez que o grau de liberdade em questão pode localizar-se sobre um nodo de um ou mais modos de vibração e assim impossibilita a identificação das frequências associadas a esses modos.

De modo a concretizar a sua identificação, é importante efectuar a análise espectral de todos os auto-espectros e espectros cruzados obtidos. Porém, esta tarefa corresponde a uma operação que se pode tornar extremamente exaustiva, em função do número de graus de liberdade envolvidos. De modo a atenuar este facto, recorre-se a espectros normalizados médios – ANPSD.

Para a obtenção deste espectro é necessário calcular os auto-espectros normalizados (NPSD), a partir da divisão de cada auto-espectro médio pela soma das suas N ordenadas.

$$NPSD_i(\omega_n) = \frac{\tilde{S}_{ii}(\omega_n)}{\sum_{i=1}^N \tilde{S}_{ii}(\omega_n)} \quad (5.5)$$

De seguida, calcula-se a média dos auto-espectros normalizados de todos os graus de liberdade instrumentados (n_{GL}), obtendo-se o pretendido espectro normalizado médio.

$$ANPSD(\omega_n) = \frac{1}{n_{GL}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{GL}} NPSD_i(\omega_n) \quad (5.6)$$

Com a determinação do ANPSD é possível evidenciar os picos de ressonância, uma vez que o conceito de média assim o permite, isto é, as maiores ordenadas com maior número de ocorrências são mais evidentes e permite também suavizar estes mesmos picos [30].

5.1.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A função de transferência, ou também designada por função de resposta em frequência (FRF) de transmissibilidade entre o ponto j e o ponto ref , e é definido pelo quociente entre os elementos de uma coluna das funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração e um dado elemento considerado como referência.

$$T_{j,ref} = \frac{\tilde{S}_{j,ref}(\omega)}{\tilde{S}_{ref,ref}(\omega)} \quad (5.7)$$

É possível referir que as configurações modais avaliadas resultam da relação entre as respostas observadas nos diversos graus de liberdade das estruturas, pelo que os modos identificados por esta via devem ser designados por modos de deformação operacionais, uma vez que não resultam do ajuste de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico da estrutura [30].

5.1.4. IDENTIFICAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES MODAIS

O processo usualmente utilizado para avaliar as configurações modais baseia-se na consideração de um ponto instrumentado, considerado como referência, e também no facto de ser possível obter a diferença de fase entre todos os pontos, para todas as frequências, dividindo todos os espectros cruzados pelo auto-espectro tomado como referência, utilizando a seguinte relação aproximada para a frequência k .

$$\frac{\tilde{S}_{j,ref}(\omega_k)}{\tilde{S}_{ref,ref}(\omega_k)} \approx \frac{(\phi_j)_k}{(\phi_{ref})_k} \quad (5.8)$$

Deste modo, é possível obter as componentes dos modos de vibração, relativos a cada uma das frequências naturais da estrutura, a menos de um factor de escala. A escolha da referência deverá ser efectuada com particular cuidado, evitando pontos sobre os nodos dos modos de vibração.

É importante referir que, tendo em consideração que os espectros cruzados são funções complexas, logo a razão entre um elemento de uma qualquer coluna e os restantes elementos, resultarão igualmente funções complexas.

Para uma determinada frequência, a amplitude corresponde à amplitude do modo de vibração, enquanto a diferença de fase ou é 0° ou 180° , caso sejam expectáveis apenas modos reais. A diferença de fase corresponde ao indicador do sentido a atribuir às amplitudes na avaliação das configurações modais, ou seja, quando a diferença de fase é 0° significa que a amplitude do modo o mesmo sentido da referência (encontra-se em fase) e quando a fase é 180° a amplitude tem sentido oposto ao da referência (encontra-se em oposição de fase).

O processo de identificação das configurações modais a partir de resultados experimentais, tem alguns aspectos relevantes associados à sua correcta aplicação que importam referir, entre os quais:

- ✓ os modos de vibração obtidos por este processo não coincidem exactamente com os modos de vibração teóricos, já que representam a configuração deformada que a estrutura assume quando excitada por um harmónico puro;
- ✓ nos sistemas estruturais em que verifiquem que as frequências naturais se encontram próximas, os modos de deformação operacionais, identificados na vizinhança dessas frequências, correspondem à combinação dos modos de vibração respectivos;
- ✓ nos sistemas estruturais em que as frequências se encontram bem separadas e com valores de coeficientes de amortecimentos modais pequenos, sujeitos a forças de excitação com características de ruído branco, a resposta na frequência de um dos seus modos de vibração é claramente dominada por esse modo de vibração [30].

5.2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E EQUIPAMENTO UTILIZADO

O procedimento levado a cabo durante a realização do Ensaio de Vibração Ambiental compreende os seguintes passos:

- ✓ Planeamento da disposição dos sismógrafos nos vários *setup*'s, assim como da duração e pausa entre cada um destes;
- ✓ Colocação dos sismógrafos nas janelas da Torre Sineira. Quando não era cumprida a estabilidade do sismógrafo (eixos diagonais imóveis), estes encontram-se localizados nos degraus o mais próximo possível da janela, tal como se comprova pela Tabela 5.1;



Figura 5.1 – Disposições possíveis dos sismógrafos (modo de fixação).

- ✓ O plano adoptado corresponde à realização de 4 *setup*'s intermédios de 15 minutos de registo e pausas de 5 minutos, de forma a ser possível transportar e verificar a estabilidade dos mesmos. O sismógrafo S2 mantido no nível 1 é tomado como o nível de referência e os restantes cumprem a regra de descer 3 níveis. Esta disposição descrita encontra-se presente na Figura 5.2;

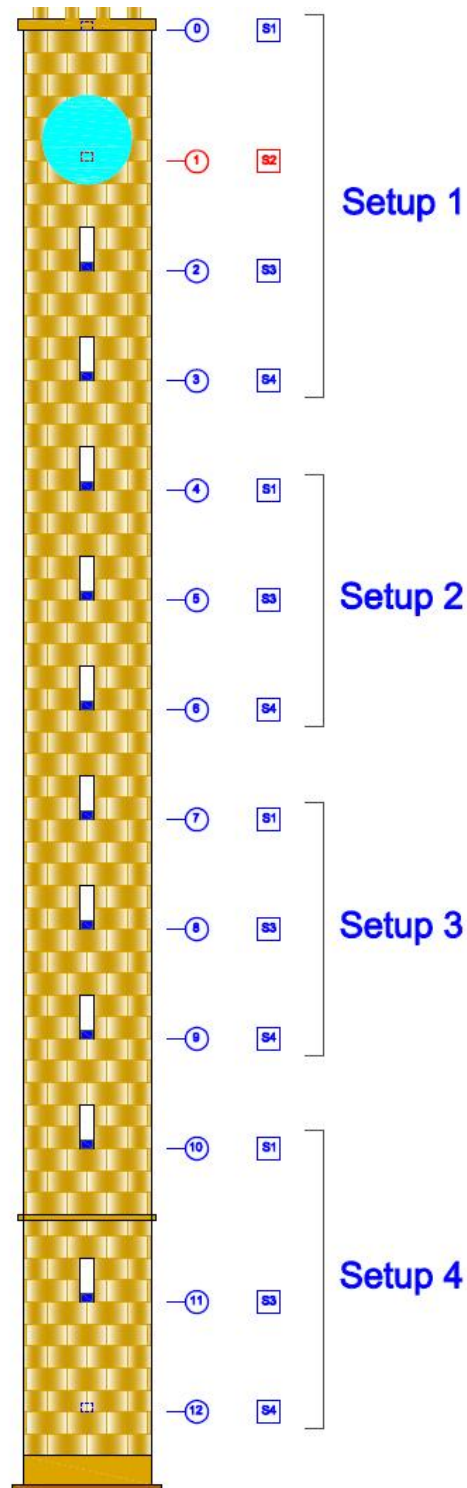


Figura 5.2 – Localização dos sismógrafos nos vários *setup*'s.

- ✓ Antes e após a realização do transporte entre os vários *setup*'s, é necessário quantificar o atraso entre os registos dos 4 sismógrafos. Para tal todos são colocados em função do espaço disponível, voltados para o mesmo sentido, tal como se verifica na figura.



Figura 5.3 – Disposição dos sismógrafos no primeiro e último *setup*, respectivamente.

Os sismógrafos utilizados são munidos de acelerómetros triaxiais do tipo *force-balance*, que permitem a medição de frequências a partir de zero (DC – *direct current*), e conversores analógico-digitais de 18 bit, que garantem a medição de acelerações entre -0.5g e +0.5g com uma resolução de $4 \cdot 10^{-6}$ g [30].

A aquisição foi efectuada com intervalos de tempo entre pontos (Δt) de 0.01s, o que corresponde a uma frequência de amostragem de 100 Hz, e como 15 minutos corresponde a 900s, logo obtêm-se 90000 pontos em cada registo e estimativas espectrais com resolução em frequência de 0.0089Hz. A sincronização dos sismógrafos foi conseguida através do relógio interno de um computador portátil, com a programação dos intervalos de registo.

5.3. RESULTADOS OBTIDOS

O tratamento das séries temporais registadas no decorrer do Ensaio de Vibração Ambiental é realizado através de várias rotinas desenvolvidas em MatLab™, em que se adopta a divisão de 8 a cada série, segundo a ordem a seguir indicada, de acordo com o evidenciado na secção 5.1:

- ✓ *fft_eva* – nesta rotina é realizada a Transformada Rápida de Fourier a cada segmento, sem sobreposição, com o número de pontos múltiplo de 2, em que anteriormente se procede à subtracção da média deste e de seguida é aplicada a janela de Hanning;
- ✓ *plot_anpsd* – são construídos os gráficos que permitem identificar as frequências naturais da estrutura;
- ✓ *ha_eva* – é realizada a determinação das funções de densidade espectral de cada segmento já tratado e determinação da média destas. Posteriormente são determinadas os gráficos das amplitudes e ângulo de fase;
- ✓ *han_eva* – procede-se à determinação das componentes modais em cada nível, permitindo exportar as mesmas para o Excel.

Com o auxílio deste conjunto de rotinas desenvolvidas, é possível avançar com a apresentação e discussão dos resultados. Em primeiro lugar, é necessário identificar as várias frequências naturais da estrutura, através dos gráficos do ANPSD segundo as três direcções principais, expresso pela Figura 5.4.

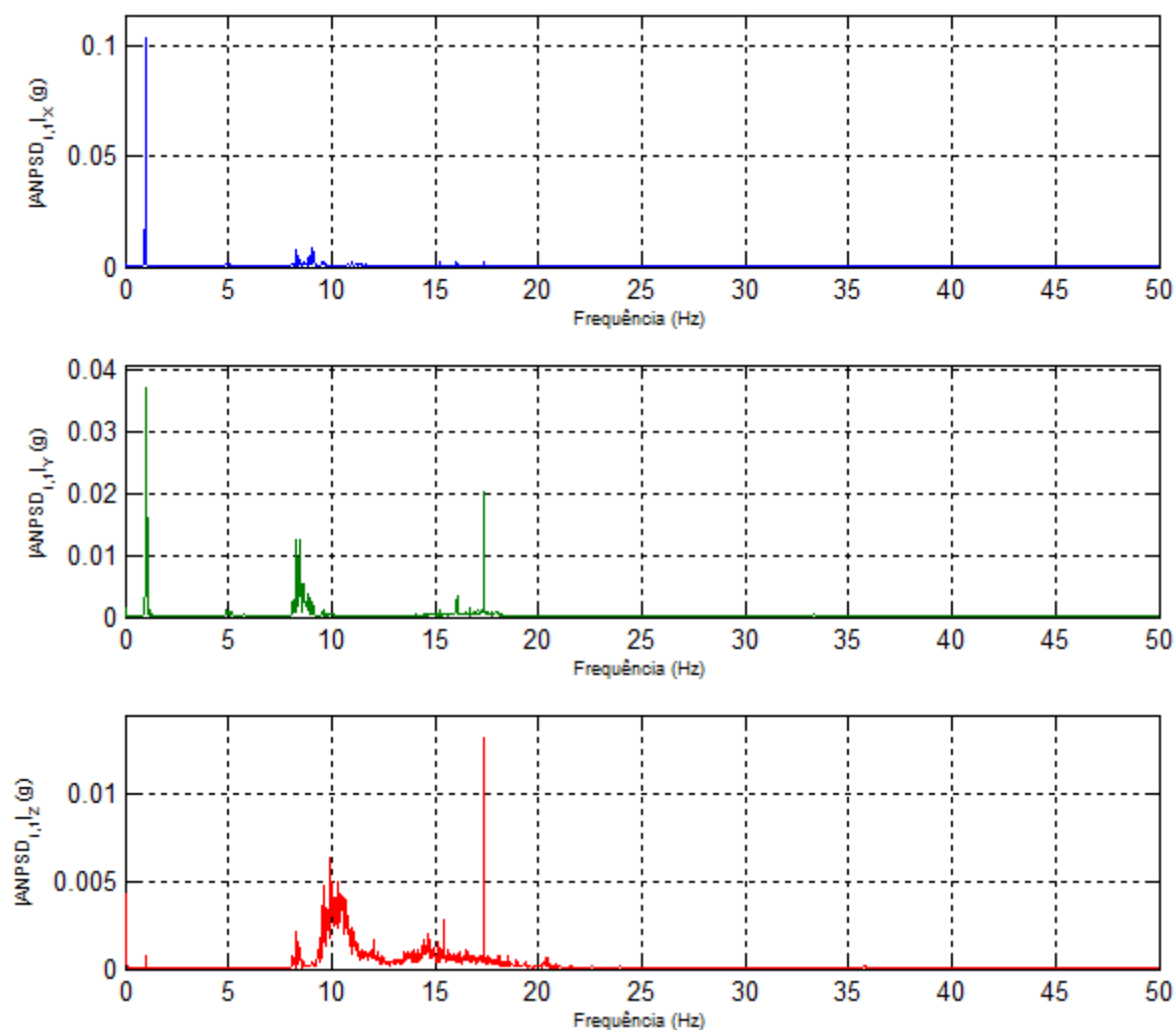


Figura 5.4 – Gráfico do ANPSD, para identificação de frequências naturais.

Da análise da Figura 5.4, é possível resumidamente obter as seguintes frequências experimentais identificadas, dispostas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Frequências identificadas experimentalmente

Modo	Frequência (Hz)			Natureza
	X	Y	Z	
1	0.9954	-	-	Translação
2	-	1.0400	-	Translação
3	8.3130	-	-	Translação
4	-	8.4960	-	Translação
5	15.2200	-	-	Translação
6	-	16.0600	-	Translação
7	-	-	17.3800	Translação

A título de exemplo, é discutido o caso particular da função de densidade espectral média de S_{41} o que corresponde ao espectro cruzado entre o nível 4 e o nível 1, correspondente ao nível de referência.

Inicia-se o estudo pela apresentação da magnitude e do respectivo ângulo de fase do vector complexo de S_{41} , presente na Figura 5.5.

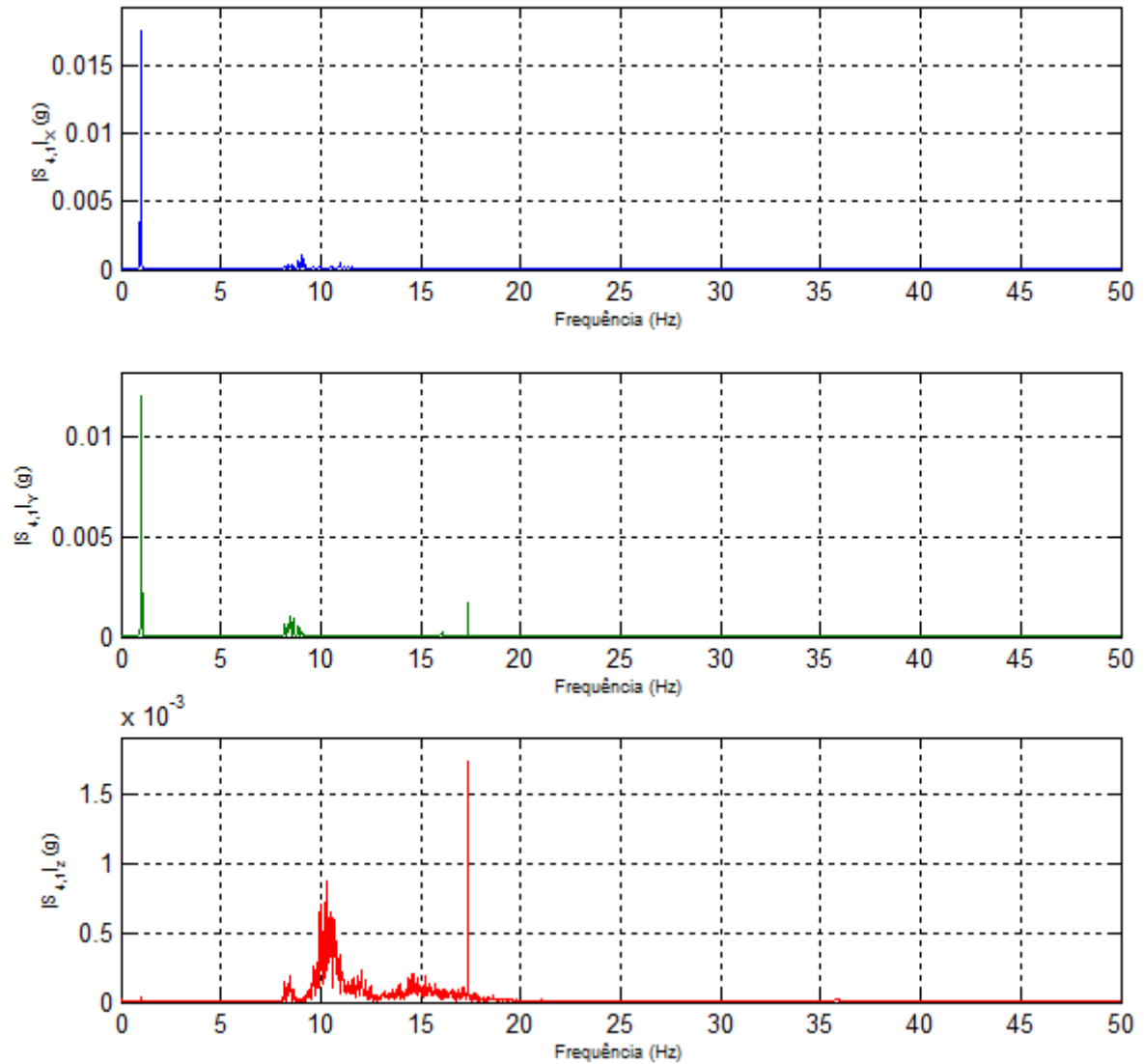


Figura 5.5 – Magnitude da função de densidade espectral média S_{41} .

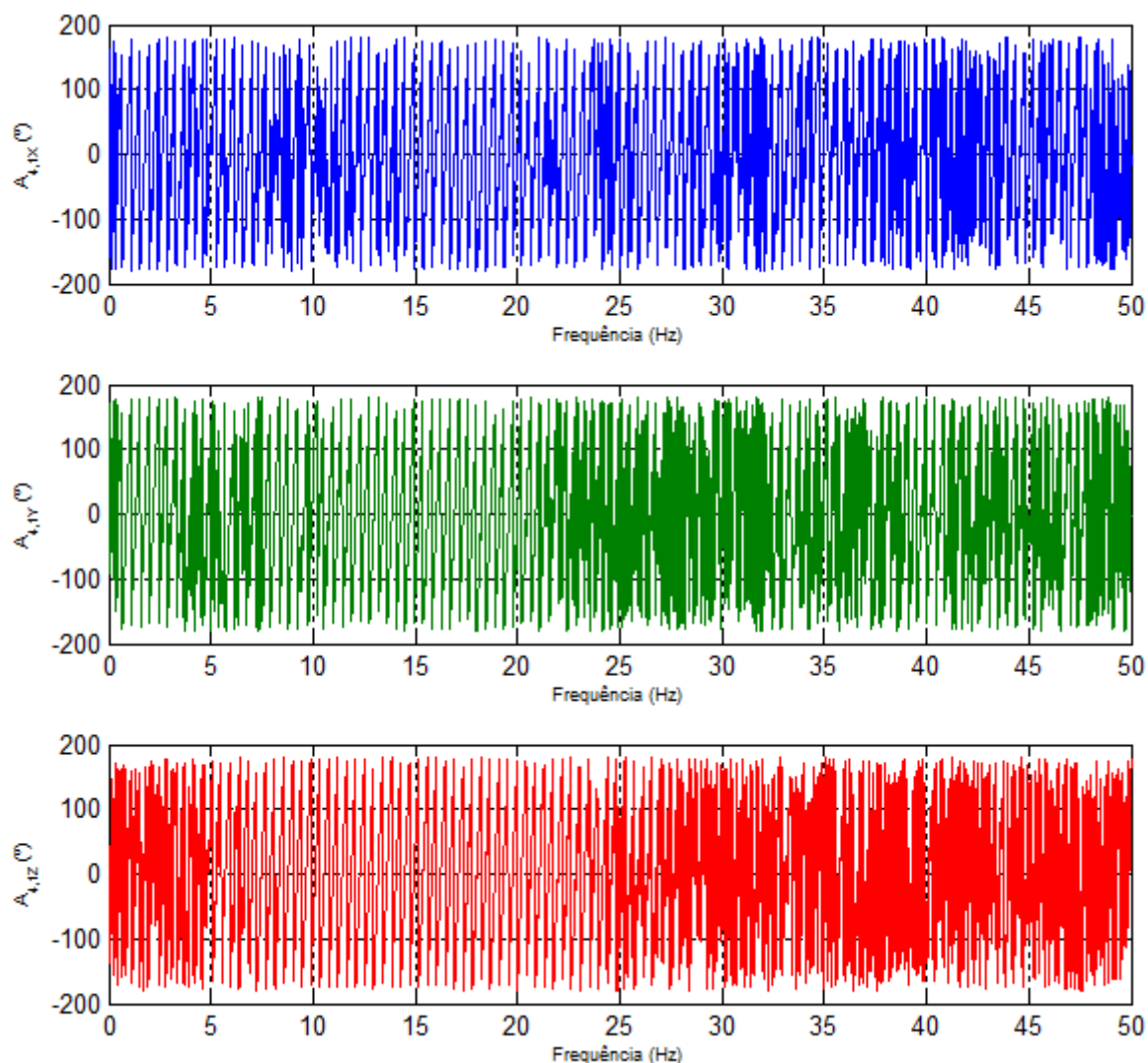


Figura 5.6 – Ângulo de fase da função de densidade espectral média S_{41} .

Da análise dos registos do primeiro e último *setup*, é possível identificar os seguintes *delay's* médios relativamente ao sismógrafo S1, uma vez que os restantes encontram-se atrasados relativamente a este, isto é, o mesmo ponto encontra-se no instante posterior. Estes encontram-se resumidamente apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – *Delay* médio dos vários sismógrafos relativamente a S1, nas várias direcções principais.

Direcção	Delay_11 (s)	Delay_21 (s)	Delay_31 (s)	Delay_41 (s)
X	0.00	2.20	2.86	1.80
Y	0.00	2.18	2.85	1.78
Z	0.00	2.18	2.85	1.79

Assim, obtêm-se as seguintes componentes modais para os primeiros modos puros, segundo as três direcções principais, expressos na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Componentes dos modos puros, para cada direcção.

Nível	Cota (m)	$\phi_{1,x}$	$\phi_{2,y}$	$\phi_{7,z}$
0	39.8000	1.1305	0.9587	0.8727
1	35.4760	1.0000	1.0000	1.0000
2	32.4760	0.8758	0.7877	0.7771
3	29.4700	0.7343	0.6454	0.7560
4	26.4700	0.6255	0.5580	0.5561
5	23.8280	0.5050	0.4611	0.3825
6	20.7000	0.3841	0.3506	0.3121
7	17.4700	0.2867	0.2685	0.2890
8	14.9960	0.2059	0.1819	0.2152
9	11.4700	0.7043	0.3452	1.3847
10	8.9240	0.0593	0.0629	0.1891
11	6.2100	0.0160	0.0220	0.0624
12	2.7600	0.0469	0.0126	0.0809

Pela análise da Tabela 5.3, verifica-se que o nível 9 é incoerente com a configuração expectável para os vários modos, apresentando valores muito elevados.

De modo a ser possível analisar a evolução das componentes modais em altura e evidenciar a discrepância assinalada na proposição anterior, recorre-se à apresentação dos valores apresentados na Tabela 5.3, através da Figura 5.7.

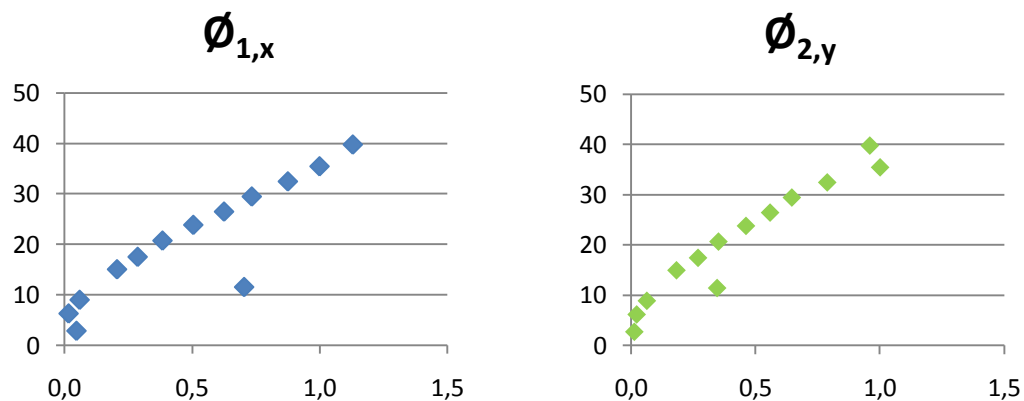


Figura 5.7 – Representação esquemática das componentes modais.

A partir dos resultados acima evidenciados é possível calibrar o modelo numérico e posteriormente obter os resultados que se encontram evidenciados no capítulo seguinte.

6

MODELAÇÃO NUMÉRICA DA ESTRUTURA

Neste capítulo é efectuada a apresentação e análise dos resultados numéricos obtidos a partir da realização do modelo de cálculo, com o recurso a uma ferramenta computacional de análise estrutural, em que no presente trabalho corresponde ao *software* SAP2000™. Inicialmente é realizada a exposição ao nível das incertezas associadas a este tipo de análise. De seguida é realizada a análise modal da estrutura, a partir do qual são obtidos as frequência e modos de vibração da estrutura. Posteriormente é efectuada a análise da resposta dinâmica da mesma, quando sujeita à acção dinâmica dos sinos, com as características definidas na secção 3.3 do presente estudo.

6.1. INCERTEZAS ASSOCIADOS À MODELAÇÃO NUMÉRICA

Pelo facto de se estar perante uma ferramenta computacional, existem sempre simplificações associadas. Estas ferramentas de cálculo recorrem a métodos numéricos, logo estão sempre presentes aproximações relativamente ao resultado teoricamente obtido, isto é, se estas sucessivas aproximações não fossem efectuadas. Assim, é possível afirmar que os resultados dos cálculos numéricos correspondem a uma acumulação de erros, que se vão propagando à medida que evoluem as sucessivas iterações.

Ao longo do tempo, a abordagem relativamente a um determinado problema numérico foi evoluindo, de tal modo que a eficiência que estas metodologias foram adquirindo, conduziu ao vasto leque de opções que se encontram actualmente à disposição. É claro que normalmente se adopta aquela que conduz a resultados mais fiáveis, ou seja, cuja acumulação de erros é a mais reduzida possível, mas isto traduz em maior esforço computacional.

À medida que os ajustes são realizados pelos respectivos autores, existe uma perda na simplicidade do algoritmo. Estas adaptações resultam de exigências ao nível do cumprimento de diversos critérios numéricos de convergência do método em causa, onde estes variam de autor para autor.

Ao nível das simplificações obtidas na realização do seu modelo numérico de cálculo estrutural, os diversos elementos que compõem a estrutura real são traduzidos em elementos mais simples de viga e de casca, logo existe à partida uma simplificação associada à representação da estrutura. Ao nível das suas características geométricas, verifica-se que a sua disposição relativamente ao plano médio é relevante, uma vez que uma das características mecânicas mais importantes é o momento de inércia da secção.

6.2. CARACTERÍSTICAS DO MODELO NUMÉRICO

O *software* utilizado corresponde ao SAP2000™, em que o modelo numérico possui no total 928 elementos de casca (elementos de 8 nós) e 235 elementos de viga. As suas características encontram-se de seguida evidenciadas, que foram baseadas nas características da estrutura real que se encontram definidas na secção 3.2.2.2.

6.2.1. TORRE SINEIRA

A modelação das paredes da torre é realizada por elementos de casca com 0.65 metros de espessura. A secção transversal da torre é quadrangular com 2.85 metros de lado, de forma as suas paredes se localizem no plano médio.

As aberturas (janelas e portas) possuem as dimensões indicadas na secção 3.2.2.2. No topo deste os pilares, travessas e laje possuem as dimensões definidas na mesma secção já referida.

Acerca das restrições, é possível referir que estas são horizontais onde não existe ligação de rigidez com o corpo da igreja, apenas existem ligações de encastramento devido ao contacto com o solo. Este facto resulta da calibração do modelo para as frequências fundamentais nas direcções principais, conduzindo a um módulo de elasticidade equivalente de 20.712 GPa.

Ao nível dos materiais, é então adoptado o módulo de elasticidade equivalente referido, o coeficiente de Poisson é de 0.20 e o seu peso volúmico é de 22 kN/m³, correspondente ao valor corrente de elementos desta natureza.

De uma forma esquemática, a disposição dos elementos numéricos da torre encontra-se representada na Figura 6.1.

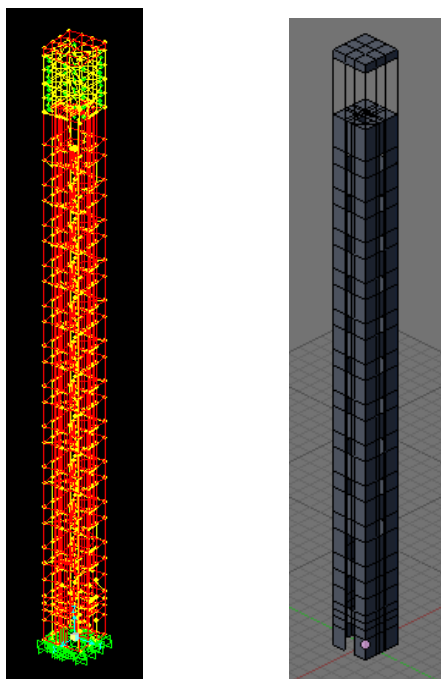


Figura 6.1 – Disposição dos elementos numéricos da torre – SAP2000™ e Blender.

6.2.2. ESCADAS INTERIORES

As escadas interiores desenvolvem-se em espiral e são realizadas em betão com módulo de elasticidade de 20 GPa, coeficiente de Poisson de 0.20 e peso volúmico de 24.6 kN/m³ (25 ton/ m³), tal como adoptado pelo projectista.

De modo a modelar a espessura das escadas, é adoptado o valor da espessura da laje da mesma adicionada pelo valor médio da espessura dos degraus. Assim, a espessura de laje utilizada é de 0.24 metros nos dois primeiros níveis e 0.16 metros nos seguintes. As respectivas guardas ao longo do seu desenvolvimento e as lajes na terminação possuem as espessuras que se verificam na realidade, referidas na secção 3.2.2.2.

O reforço dos cantos em argamassa é realizado por elementos de viga com a secção quadrangular com momento de inércia equivalente, assim esta possui 0.20 metros de lado. Estes encontram-se nos cantos do contorno da escada, cujas dimensões em planta correspondem ao que verifica na realidade.

De modo a compatibilizar os deslocamentos ao longo das cotas, recorre-se a bielas de secção transversal circular de grande rigidez, com 0.20 metros de diâmetro e módulo de elasticidade de 200 GPa, o que conduz a uma rigidez axial média de 20 GN/m. Estas ligam os vários nós do contorno com o nó mais próximo existente nas paredes da torre que envolve esta.

De modo esquemático, as escadas e os reforços dos cantos adquirem o aspecto evidenciado na Figura 6.2.

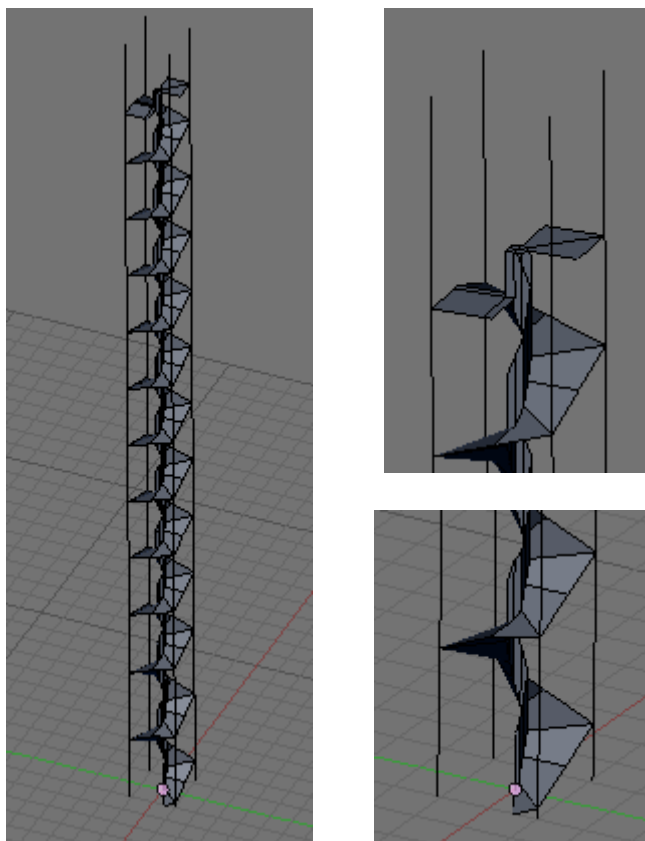


Figura 6.2 – Disposição dos elementos numéricos das escadas interiores – Blender.

6.2.3. ESTRUTURA METÁLICA E SINOS

A estrutura metálica constitui um elemento que confere rigidez ao topo da torre e serve de suporte ao conjunto de sinos que nele se encontram apoiados.

De modo a simular esta estrutura, é adoptado uma configuração simplificada, em que se recorre à utilização de cantoneiras de perfis metálicos L110x110x10 nos 3 níveis quadrangulares, em planta, e 4 perfis verticais nos cantos destes.

Existem também 2 níveis intermédios aos anteriores que juntamente com o nível médio, são colocados elementos de viga com o formato em cruz, com as características geométricas das bielas de elevada rigidez descritas no item anterior. Estes elementos dispõem de um nó central com o intuito de permitir a colocação das massas os sinos que bamboam, assim como se verifica na Figura 6.3.

Os perfis metálicos responsáveis pelo suporte dos sinos nas suas posições são dotados secções formadas por dois perfis UNP220, cujas massas são distribuídas para o nó mais próximo.

De forma a evitar os modos de vibração locais, são colocadas bielas com rigidez elevada, com as mesmas características descritas na secção anterior.

O peso volúmico do perfil metálico é de 77 kN/m³, o módulo de elasticidade é de 200 GPa e o coeficiente de Poisson é de 0.30.

As massas dos sinos encontram-se localizadas segundo a numeração presente na Figura 6.3.

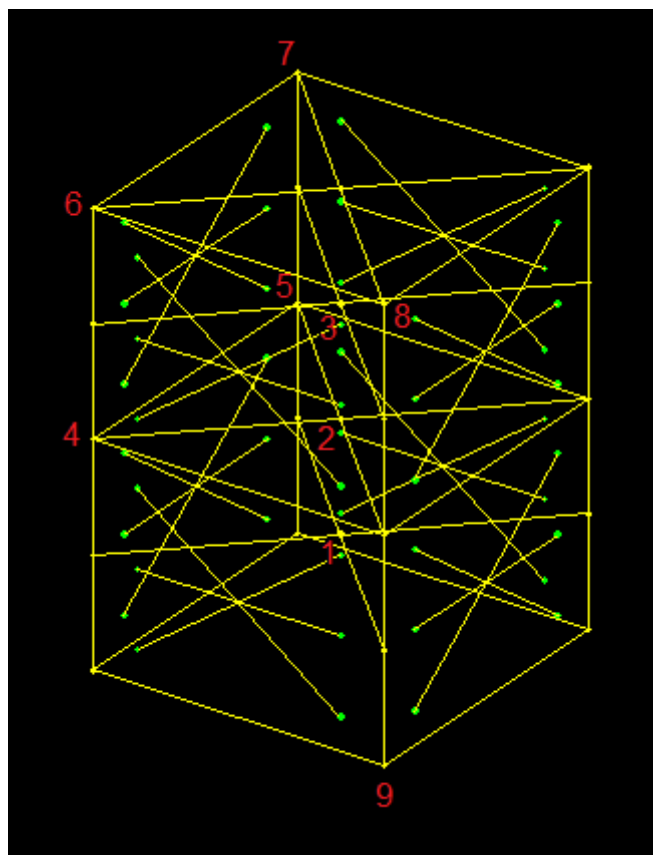


Figura 6.3 – Modelação da estrutura metálica – SAP2000™.

6.3. ANÁLISE MODAL

Os resultados obtidos, ao nível de valores de frequências e natureza dos modos de vibração da estrutura, encontram-se na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Frequências e natureza dos modos de vibração do modelo numérico.

Modo	Frequências (Hz)			Natureza
	X	Y	Z	
1	0.9954	-	-	Translação
2	-	1.0300	-	Translação
3	5.7467	-	-	Translação
4	-	5.7782	-	Translação
5	14.2740	-	-	Translação
6	-	14.7390	-	Translação
7	-	-	16.3790	Translação

Relativamente à configuração dos modos de vibração referentes às direcções principais, as suas componentes nos níveis referenciados no capítulo anterior encontram-se na Tabela 6.2. A representação esquemática dos 12 modos de vibração do modelo numérico encontram-se na Figura 6.4.

Tabela 6.2 – Componentes dos modos puros do modelo numérico, para cada direcção.

Nível	Cota (m)	$\phi_{1,x}$	$\phi_{2,y}$	$\phi_{7,z}$
0	39.8000	1.1480	1.1472	1.0203
1	35.4760	1.0000	1.0000	1.0000
2	32.4760	0.8776	0.8731	0.9543
3	29.4700	0.7602	0.7563	0.8996
4	26.4700	0.6429	0.6345	0.8341
5	23.8280	0.5306	0.5228	0.7597
6	20.7000	0.4235	0.4162	0.6780
7	17.4700	0.3265	0.3147	0.5902
8	14.9960	0.2347	0.2284	0.4968
9	11.4700	0.1582	0.1523	0.3992
10	8.9240	0.0918	0.0863	0.3070
11	6.2100	0.0612	0.0558	0.2644
12	2.7600	0.0102	0.0102	0.1201

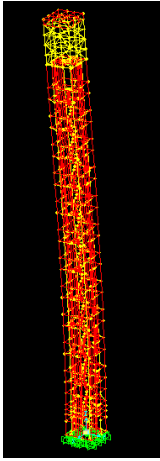
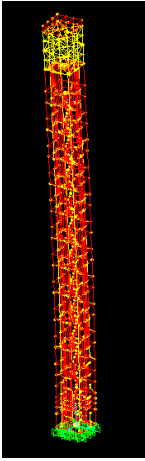
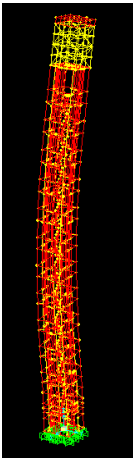
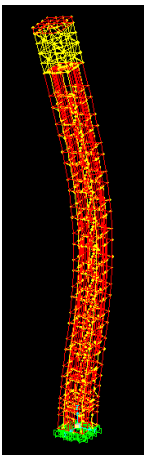
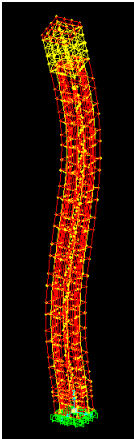
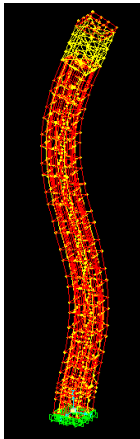
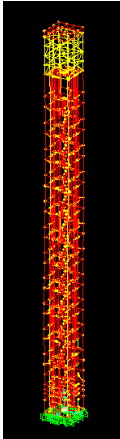
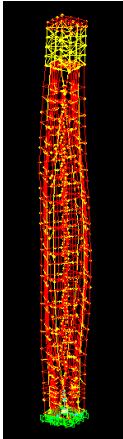
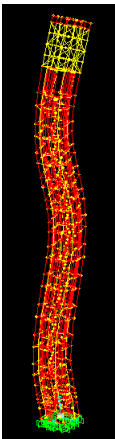
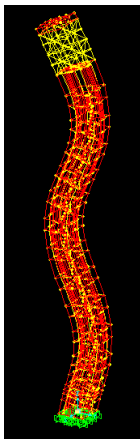
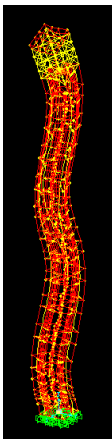
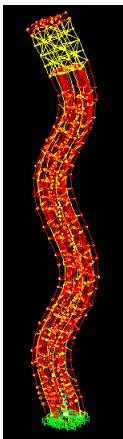
			
$f_1 = 0.9954 \text{ Hz}$	$f_2 = 1.0300 \text{ Hz}$	$f_3 = 5.7467 \text{ Hz}$	$f_4 = 5.7782 \text{ Hz}$
			
$f_5 = 14.2736 \text{ Hz}$	$f_6 = 14.7391 \text{ Hz}$	$f_7 = 16.3786 \text{ Hz}$	$f_8 = 19.1695 \text{ Hz}$
			
$f_9 = 25.0483 \text{ Hz}$	$f_{10} = 25.9059 \text{ Hz}$	$f_{11} = 36.7762 \text{ Hz}$	$f_{12} = 38,2360 \text{ Hz}$

Figura 6.4 – Modos de Vibração obtidos pela modelação numérica.

Pela análise da Tabela 6.1, é possível verificar que apenas as frequências dos modos 3 e 4 são inferiores aos identificados experimentalmente (Tabela 5.1), sendo que as restantes já são muito próximas.

Apresenta-se na Figura 6.5 uma comparação entre as componentes obtidas experimental e numericamente para os modos de vibração 1 e 2.

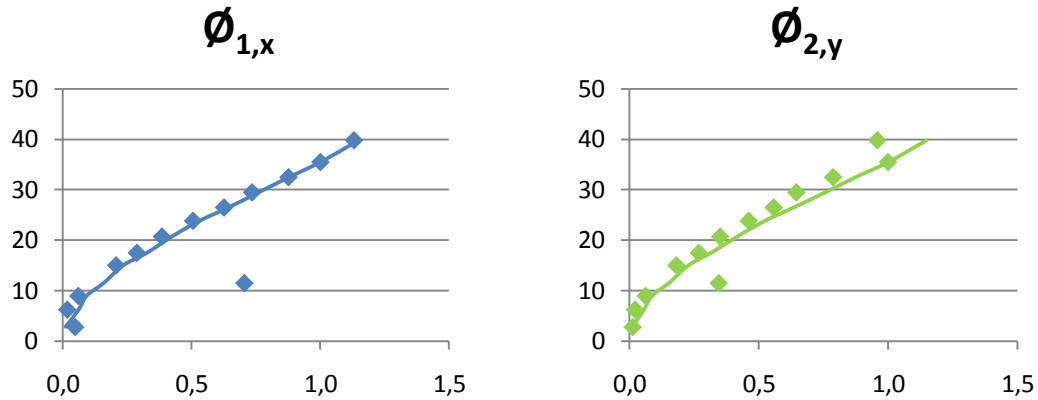


Figura 6.5 – Modos de vibração do ensaio experimental e do modelo numérico.

Pela análise da Figura 6.5, é possível verificar que não existem diferenças significativas entre os modos obtidos experimentalmente e pelo modelo numérico.

6.4. ANÁLISE DA RESPOSTA DINÂMICA

6.4.1. CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS SINOS

Devido ao facto de as frequências de vibração dos sinos serem muito superiores, quando este é excitado pelo matraquear destes, é de esperar que não se verifiquem fenómenos ressonantes e deslocamentos perceptíveis. Além disso, é negligenciado o efeito do badalo na amplificação das acções. Assim se assume que a componente que contribuiu mais significativamente para a resposta da estrutura é o movimento pendular.

Na análise da resposta dinâmica é considerado que o amortecimento para todos os modos da estrutura é de 2%. O movimento pendular do sino inicia a partir da posição de equilíbrio, atinge a amplitude máxima, cerca de 90°, e posteriormente encontra-se em movimento livre não amortecido.

De uma forma resumida, as características mecânicas dos sinos que entram na análise da resposta dinâmica da Torre Sineira, segundo os pressupostos evidenciados no Capítulo 4, encontram-se presentes na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Características mecânicas dos sinos que bamboam.

Sino	I_s (kg m ²)	l (m)	$\omega_{n,s}$ (rad/s)	$\theta_{máx}$ (rad)
1	238.554	0.384	5.056	1.5708
2	105.811	0.307	5.649	1.5708
3	66.275	0.297	5.745	1.5708

6.4.2. CARACTERIZAÇÃO DA ACÇÃO DOS SINOS

Relativamente ao sino 1, é possível referir que é o sino de maiores dimensões e que a variação da rotação, velocidade de rotação e força horizontal que este exerce ao longo do tempo, correspondente à parcela estacionária do movimento do sino, se encontram expressas na Figura 6.6.

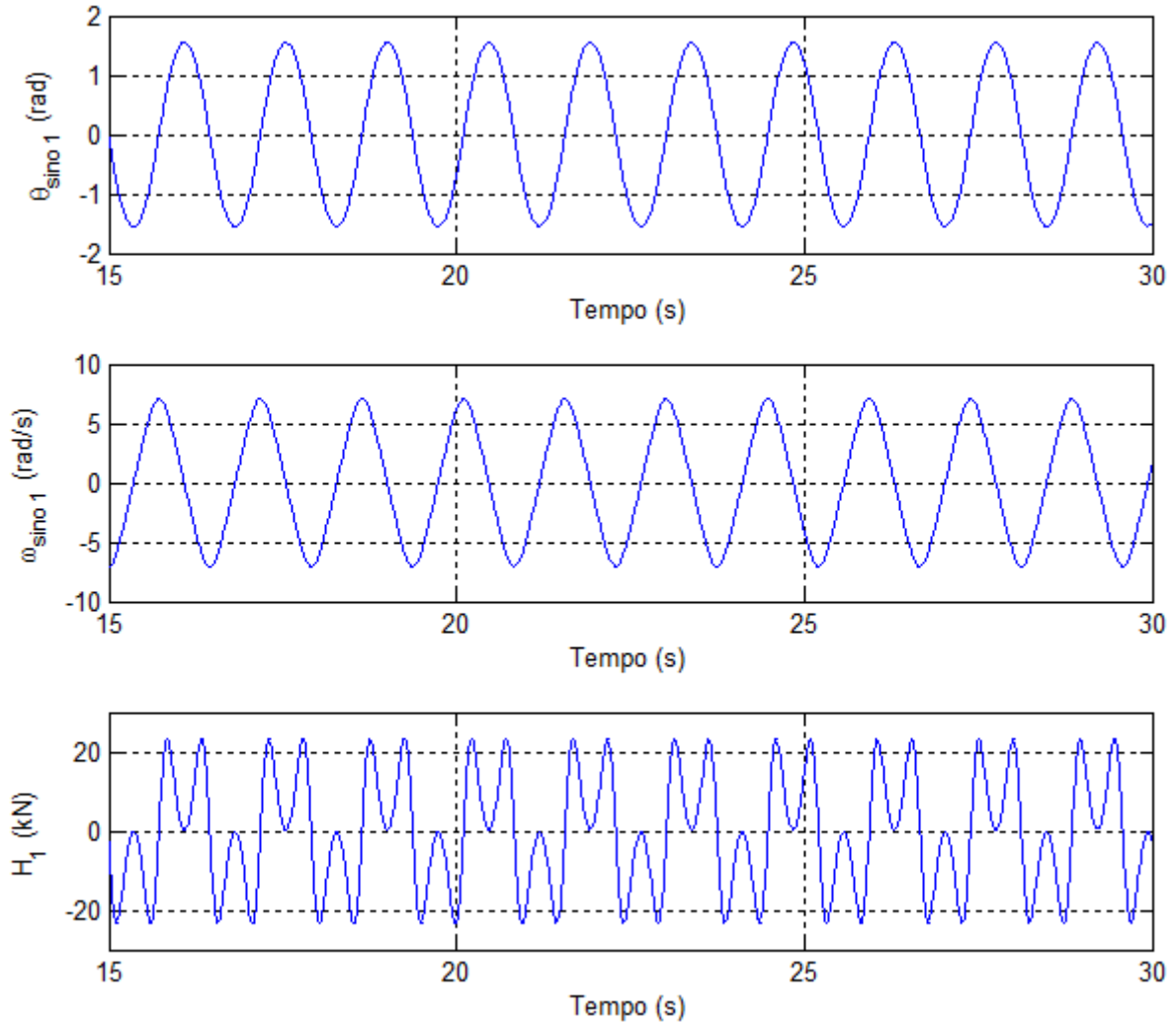


Figura 6.6 – Representação das funções $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 1 – MatLab™.

É importante referir que estas funções foram obtidas com o recurso à uma rotina desenvolvida com o auxílio da funcionalidade *ode45* fornecida pelo *software* MatLab™, que permite a resolução numérica de equações diferenciais numericamente, desde que se introduzam as condições iniciais do problema.

Relativamente ao sino 2, a lei de variação da rotação, velocidade de rotação e força horizontal que este exerce ao longo do tempo sino 3, se encontram expressas na Figura 6.7.

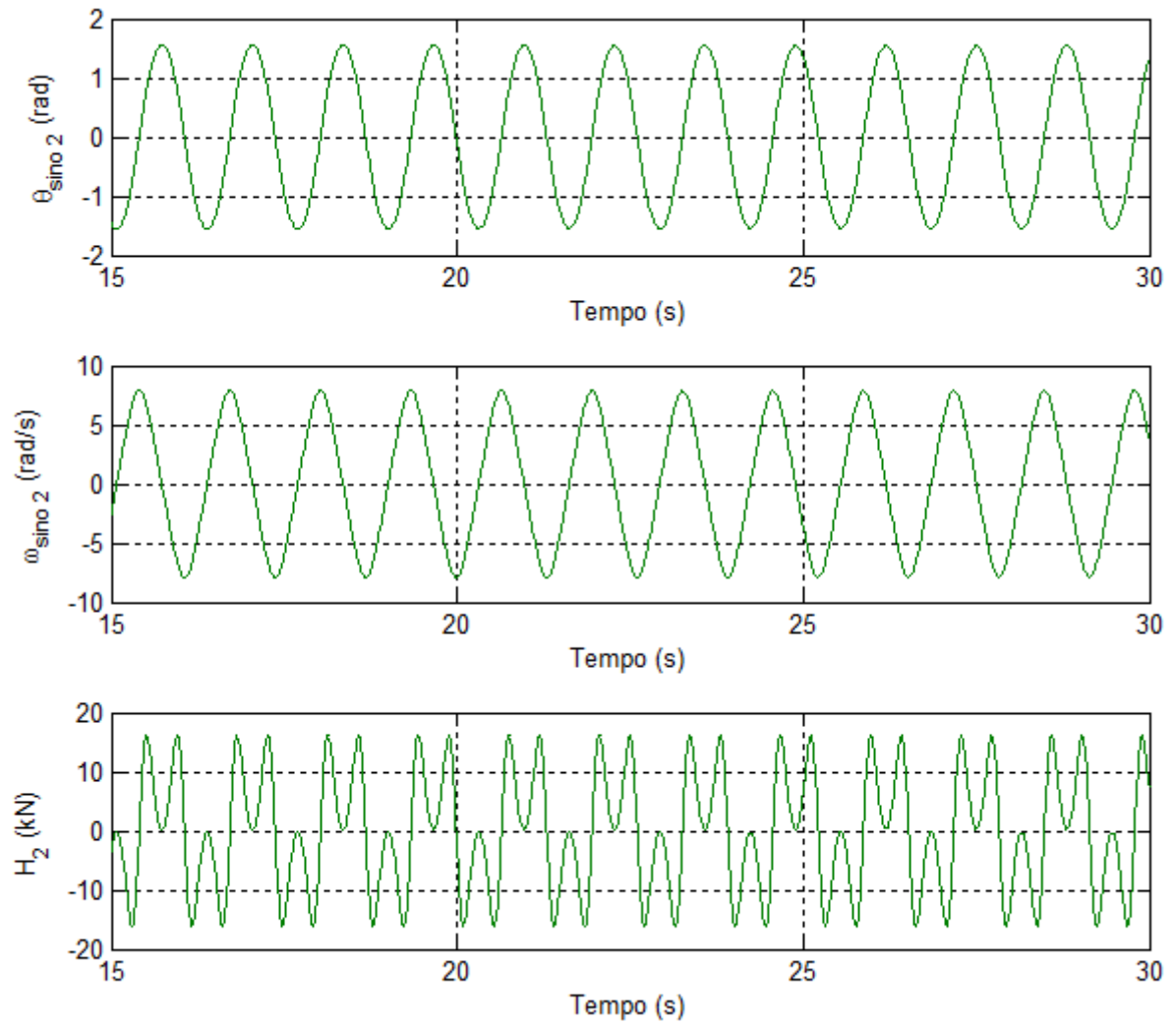


Figura 6.7 – Representação das funções $\theta(t)$, $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 2 – MatLab™.

Relativamente ao sino 3, a lei de variação da rotação, velocidade de rotação e força horizontal que este exerce ao longo do tempo do sino 3, se encontram expressas nas Figura 6.8a e 6.8b.

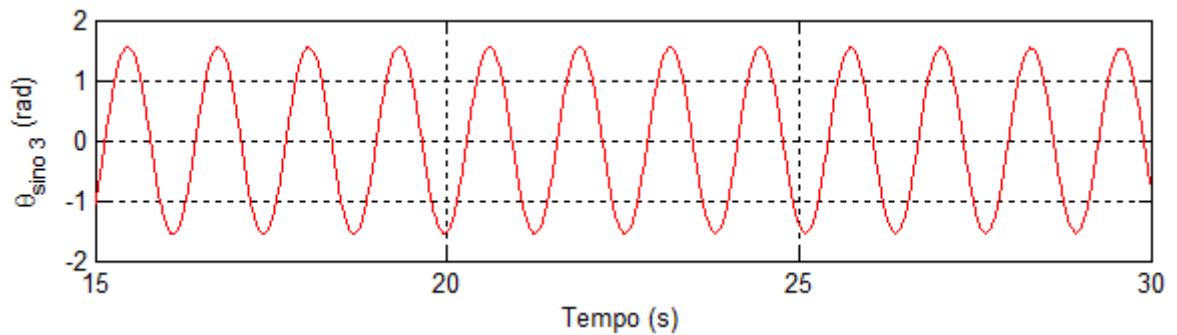


Figura 6.8a – Representação da função $\theta(t)$ do sino 3 – MatLab™.

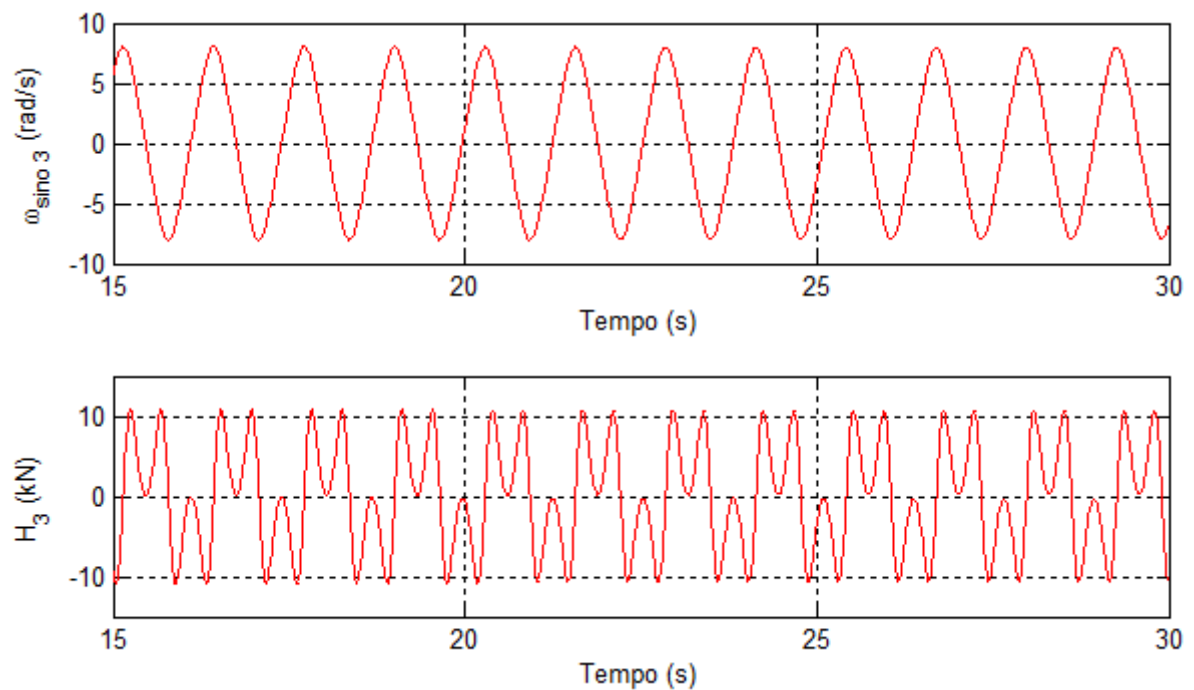


Figura 6.8b – Representação das funções $\omega(t)$ e $H(t)$ do sino 3 – MatLab™.

De modo a ser possível a realização de uma análise comparativa entre os vários sinos que bamboam, é necessário apresentar os gráficos acima apresentados sobrepostos, assim como os valores máximos registados, pela exposição das Figura 6.9a e 6.9b.

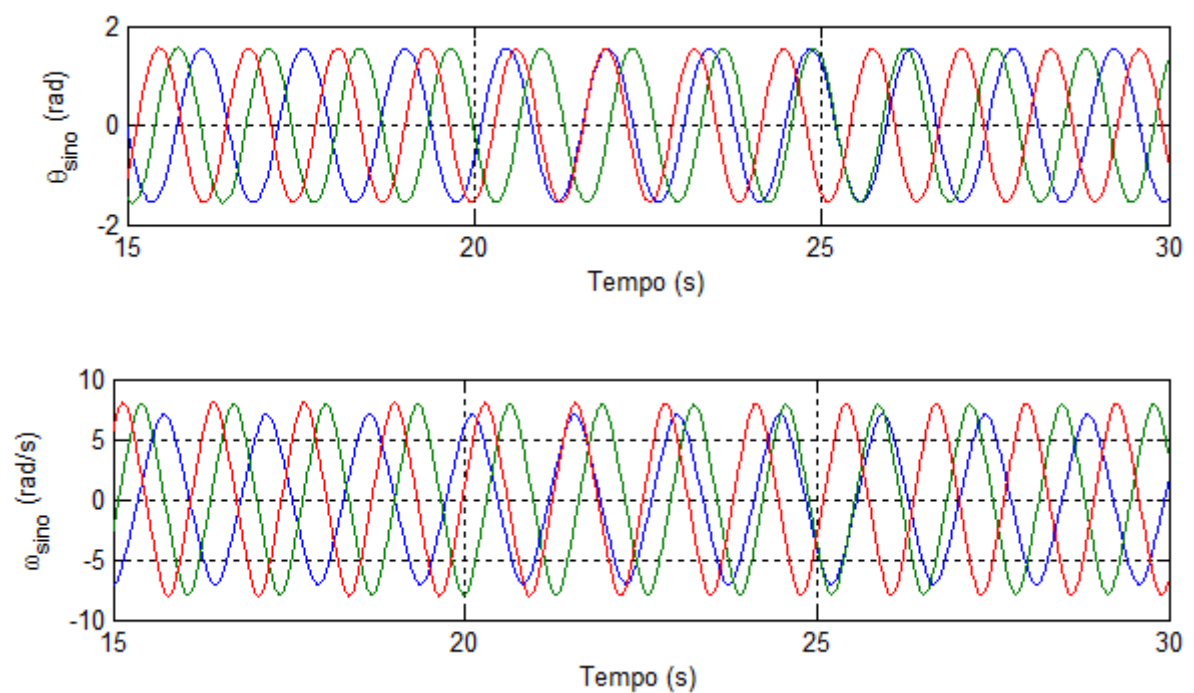


Figura 6.9a – Representação das funções $\theta(t)$ e $\omega(t)$ dos 3 sinos – MatLab™.

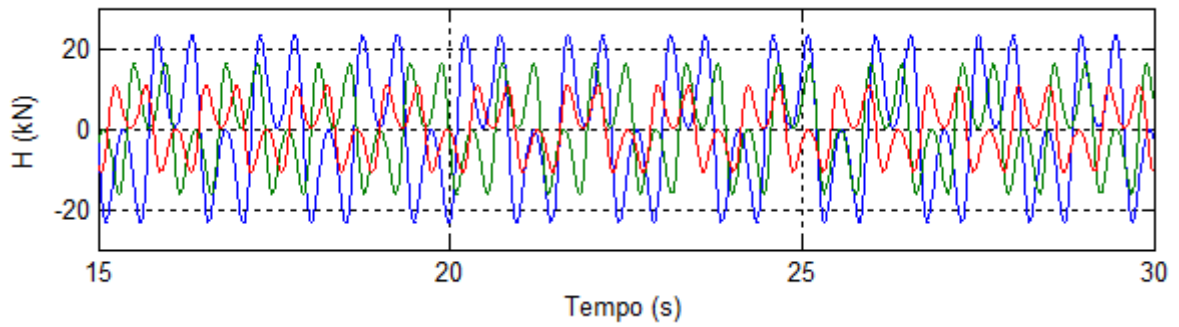


Figura 6.9b – Representação da função $H(t)$ dos 3 sinos – MatLab™.

É possível observar que quanto maior é o sino, maior é o período das três funções representadas pela Figura 6.9, menor é a velocidade de rotação máxima.

De modo a complementar estas conclusões, é apresentada a Tabela 6.4 com os valores máximos absolutos das três grandezas acima expostas.

Tabela 6.4 – Valores máximos absolutos das grandezas características dos 3 sinos.

Sino	$\theta_{\text{máx}}$ (rad)	$\omega_{\text{máx}}$ (rad/s)	$H_{\text{máx}}$ (kN)
1	1.5708	7.1516	23.4801
2	1.5708	7.9860	16.4155
3	1.5708	8.1201	10.8667

Pela análise da Tabela 6.4, é possível verificar que no caso em estudo a acção horizontal máxima exercida é cerca de 1.5 vezes a massa do respectivo sino.

6.4.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

De modo a ser possível a introdução da acção do sino, além da distribuição criteriosa das massas na zona do campanário, ou seja, onde se encontram os sinos, é necessário introduzir as acções horizontais correspondentes de forma a obter os valores extremos dos parâmetros de análise do respectivo sino. Apenas é considerada esta componente de acção, uma vez que corresponde ao plano de menor rigidez.

Assim, é possível introduzir as funções *Time History* relativas à acção no programa de cálculo *SAP2000*™, em que é aplicada uma carga concentrada unitária no nó em que se encontra o respectivo sino e a massa de cálculo provém da acção que se pretende implementar.

A resposta da estrutura é obtida por integração directa, introduzindo o amortecimento de Rayleigh, com coeficientes α de 0.1272 e β de 0.003143, o que corresponde a fixar em 2% o coeficiente de amortecimento dos primeiros dois modos de vibração.

De modo a ir ao encontro do efeito conjunto dos três sinos que bamboam, sem ignorar a contribuição da massa dos restantes sinos apenas são excitados pelo matraquear destes, é aconselhável em primeiro lugar realizar o estudo da resposta da Torre Sineira quando esta é sujeita ao efeito isolado do bamboar de cada sino. Posteriormente é realizado o estudo da sobreposição dos efeitos dos vários sinos em acção em simultâneo.

6.4.3.1. Deslocamentos máximos

Os deslocamentos no nível 0, referenciado no Capítulo 5, devido ao efeito do movimento pendular dos vários sinos separadamente segundo a mesma direcção Y, tem a variação evidenciada nos gráficos presentes desde a Figura 6.10 à Figura 6.12.

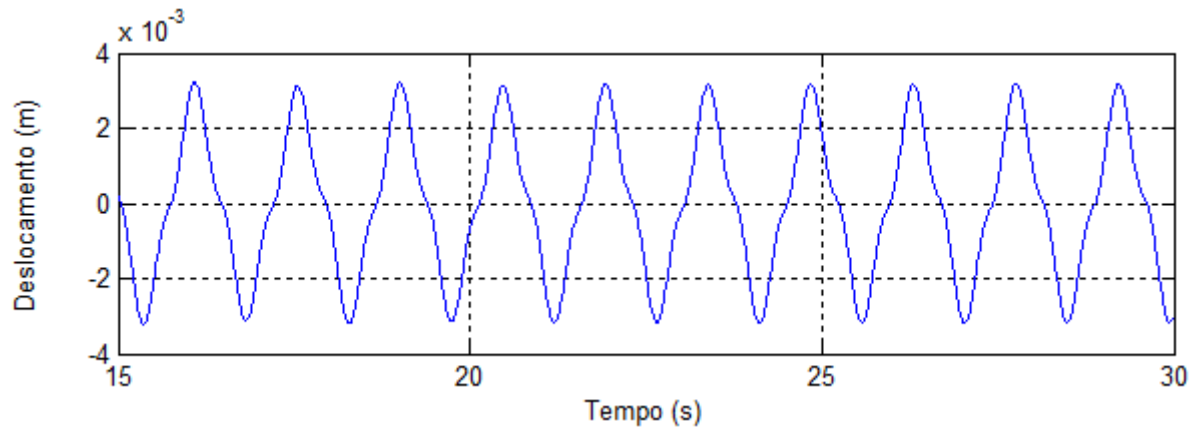


Figura 6.10 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao seno 1 – MatLab™.

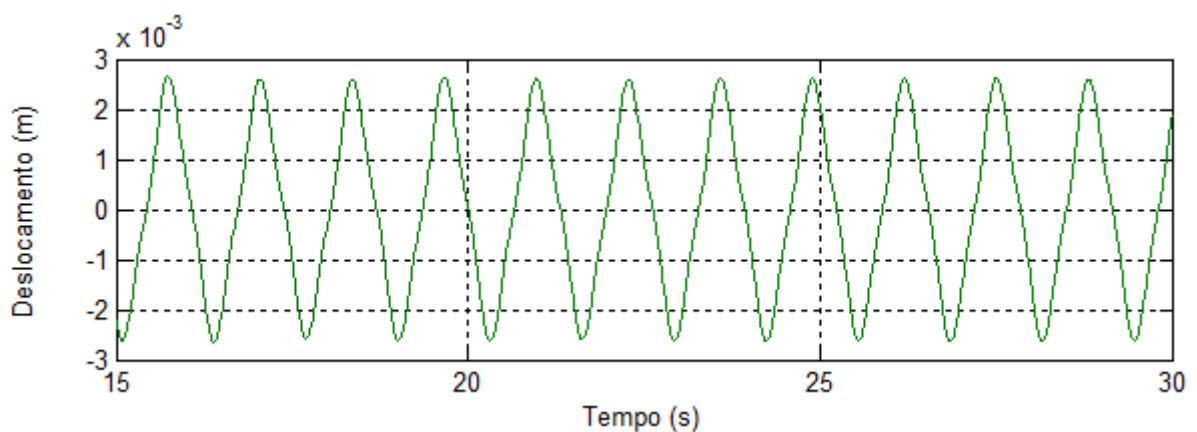


Figura 6.11 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao seno 2 – MatLab™.

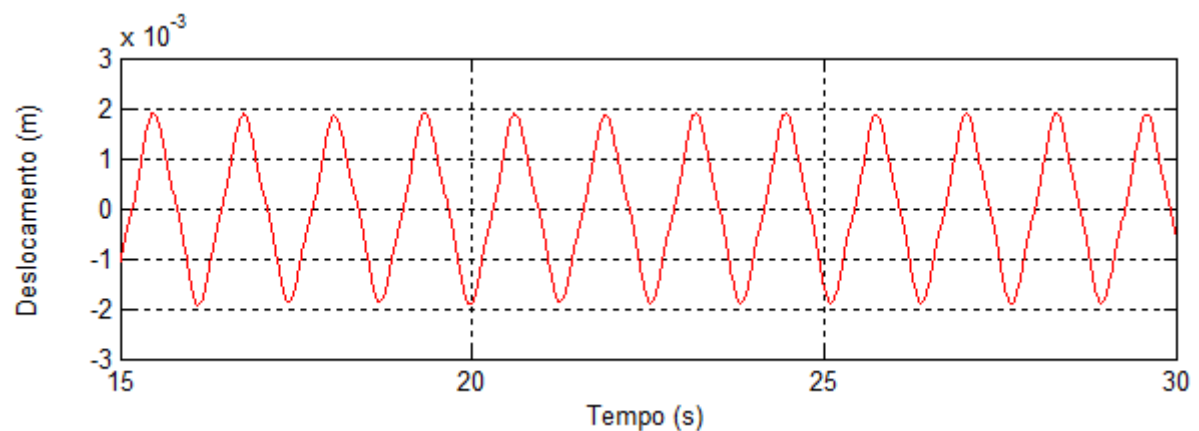


Figura 6.12 – Resposta da estrutura no nível 0, devido ao seno 3 – MatLab™.

A sobreposição dos gráficos relativos aos efeitos dos 3 sinos separadamente obtém-se a Figura 6.13, associada à direcção Y.

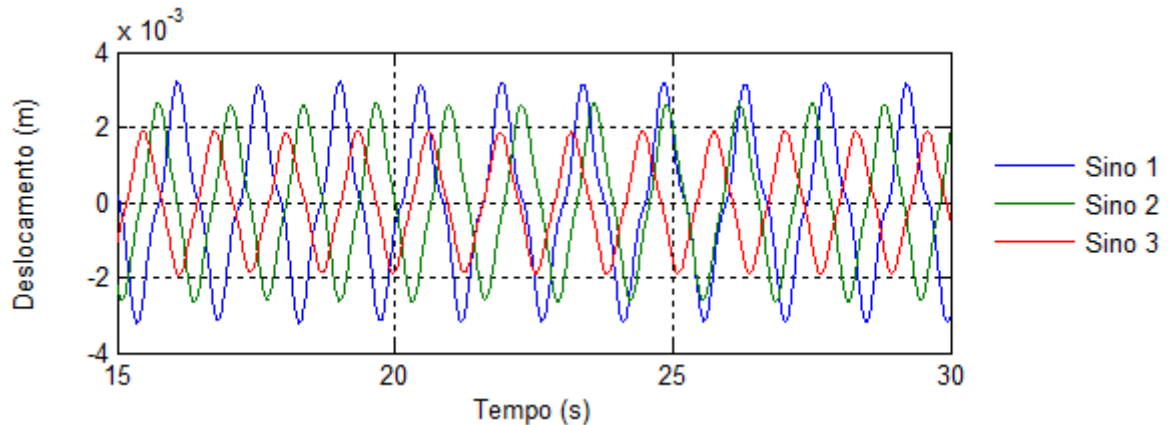


Figura 6.13 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos separadamente – MatLab™.

Deste modo é possível verificar que o comportamento geral da função deslocamento é semelhante para os três sinos. Também que a componente de acção que contribui mais significativamente para a resposta dinâmica ao nível dos deslocamentos da estrutura é o sino 1. De uma forma resumida, tem-se os deslocamentos máximos verificados pelo efeito de cada sino, através da Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Valores máximos absolutos dos deslocamentos, devido a cada um dos sinos.

Sino	$d_{\text{máx}}$ (m)
1	0.0032
2	0.0027
3	0.0019

Ao aplicar a acção dos 3 sinos em conjunto, verifica-se que os deslocamentos no nível 0 possuem a evolução temporal presente na Figura 6.14.

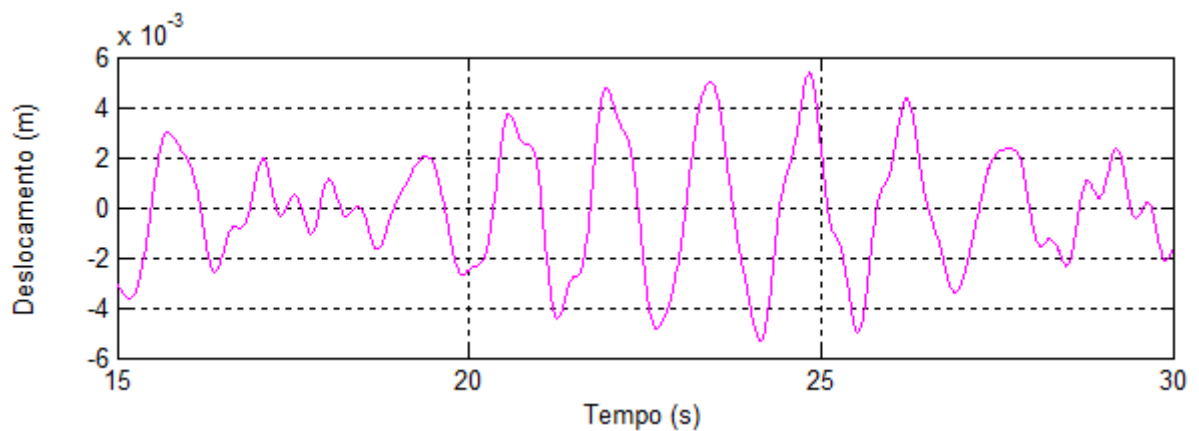


Figura 6.14 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos em conjunto – MatLab™.

O valor absoluto do deslocamento máximo é de 0.0055 m comparativamente com cota do nível 0 de 39.8 m, corresponde a uma pendente de aproximadamente 0.014%, que é admissível para qualquer tipo de estrutura.

6.4.3.2. Acelerações máximas

As acelerações no nível 0, devido ao efeito do movimento pendular dos vários sinos separadamente segundo a mesma direcção Y, tem a variação evidenciada nos gráficos presentes desde a Figura 6.15 à Figura 6.17.

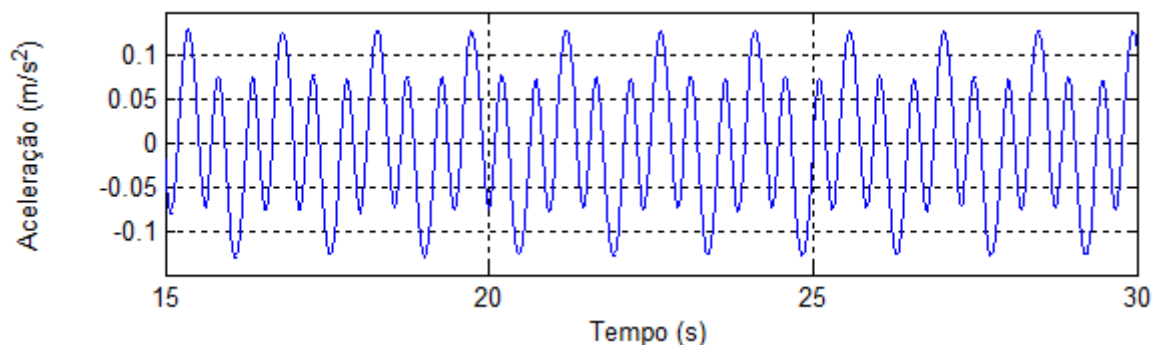


Figura 6.15 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 1 – MatLab™.

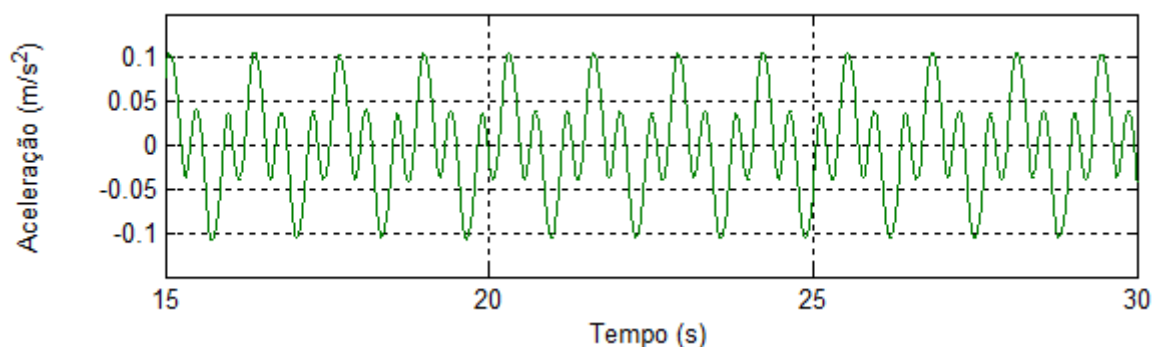


Figura 6.16 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 2 – MatLab™.

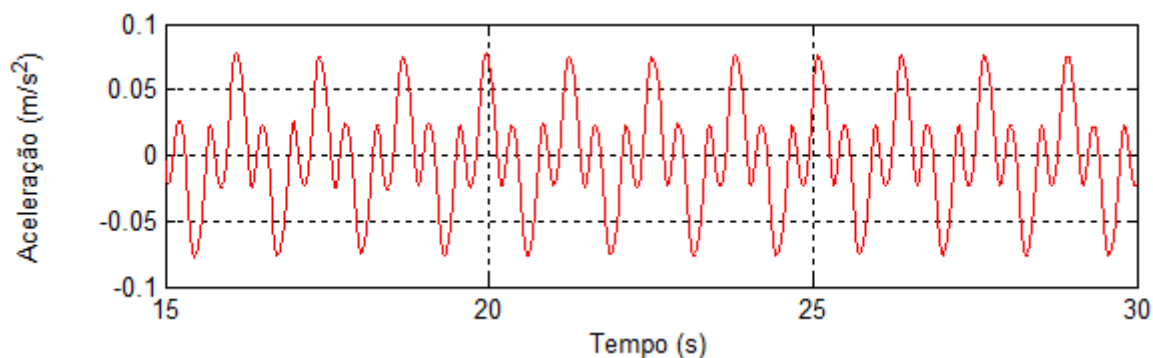


Figura 6.17 – Aceleração da estrutura no nível 0, devido ao sino 3 – MatLab™.

A sobreposição dos gráficos relativos aos efeitos dos 3 sinos separadamente obtém-se a Figura 6.18, associada à direcção Y.

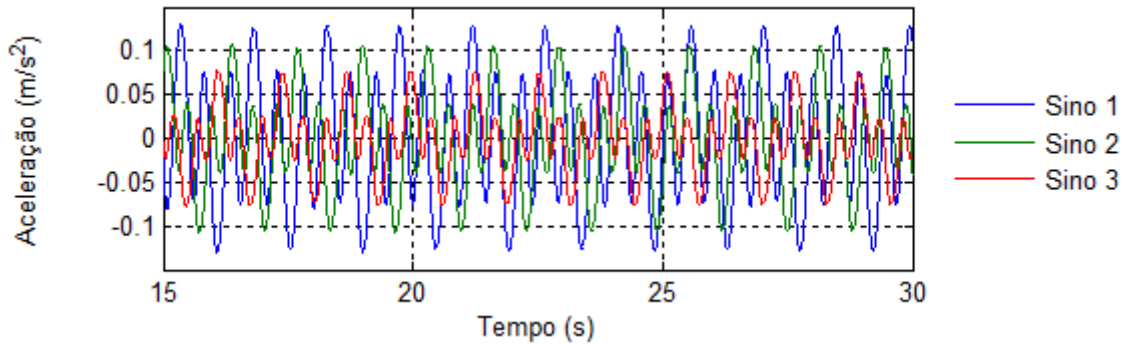


Figura 6.18 – Resposta da estrutura no nível 0 dos 3 sinos separadamente – MatLab™.

Assim é possível verificar que o comportamento da função aceleração é semelhante para os três sinos. Também que a componente de acção que contribui mais significativamente para a resposta dinâmica ao nível das acelerações da estrutura é o sino 1, assim como se verifica ao nível dos deslocamentos. Resumidamente, a aceleração máxima obtida pelo efeito de cada sino encontra-se na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Valores máximos absolutos dos deslocamentos, devido a cada um dos sinos.

Sino	$a_{\text{máx}}$ (m/s ²)
1	0.1301
2	0.1074
3	0.0778

Quando se aplica a acção dos 3 sinos em simultâneo, verifica-se que as acelerações no nível 0 possuem a evolução temporal presente na Figura 6.19.

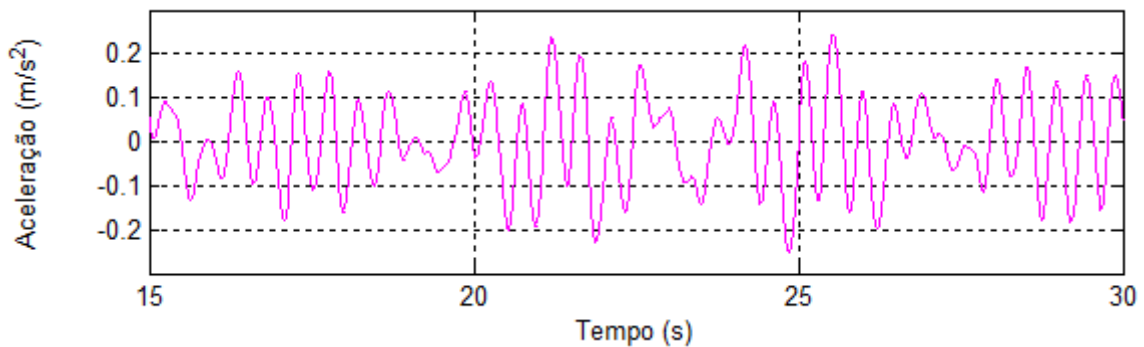


Figura 6.19 – Aceleração da estrutura no nível 0 dos 3 sinos em conjunto – MatLab™.

O valor absoluto da aceleração máxima é de 0.2511 m/s², que é aproximadamente o dobro do nível de conforto horizontal de aproximadamente 0.10 m/s². Este limite é excedido com a acção do sino 1 isoladamente, coerente com os sinais de alarme dados pelos intervenientes na montagem dos sinos.

6.4.3.3. Tensões extremas

A componente estática, devido ao peso próprio, adquire a distribuição de tensões evidenciada na Figura 6.20 e na Figura 6.21, em que as tensões mais elevadas possuem a cor azul (100 kPa) e as menores a violeta (-1200 kPa). Os valores extremos das tensões encontram-se na Tabela 6.7.

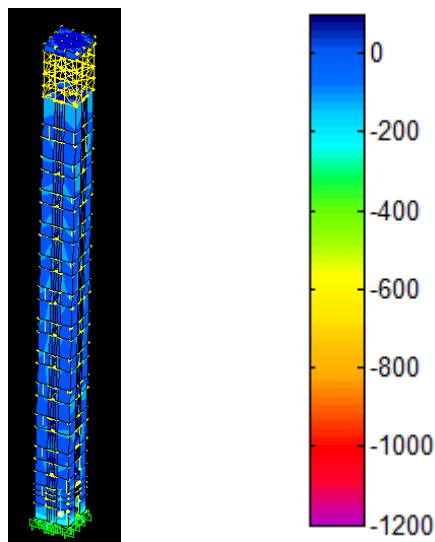


Figura 6.20 – Mapa de tensões máximas, devido ao peso próprio – SAP2000™.

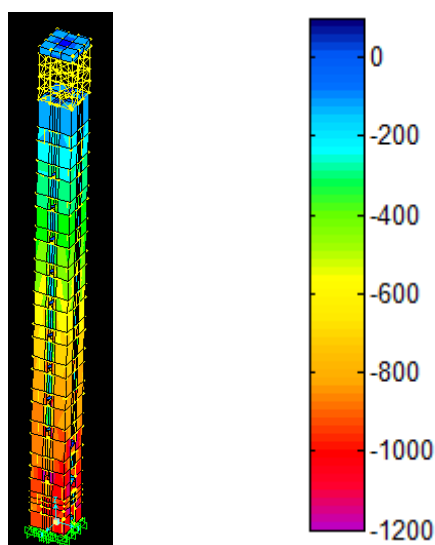


Figura 6.21 – Mapa de tensões mínimas, devido ao peso próprio – SAP2000™.

Tabela 6.7 – Valores máximos das tensões, devido à componente estática.

Componente	$\sigma_{\text{máx}}^+$ (MPa)	$\sigma_{\text{máx}}^-$ (MPa)
Estática	0.080	-1.124

Relativamente às tensões máximas, devido ao bamboar dos vários sinos separadamente segundo a mesma direcção Y, possui a distribuição evidenciada nos mapas de tensões representados desde a Figura 6.22 à Figura 6.24, no instante em que estas são máximas. As tensões mais elevadas possuem a cor azul (300 kPa) e as menores a violeta (-60 kPa).

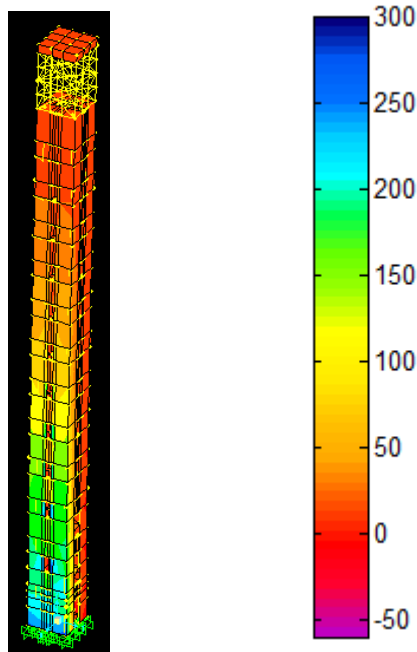


Figura 6.22 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 1 – SAP2000™.

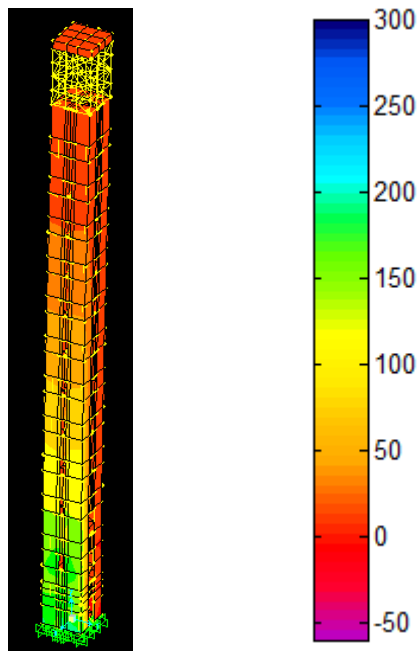


Figura 6.23 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 2 – SAP2000™.

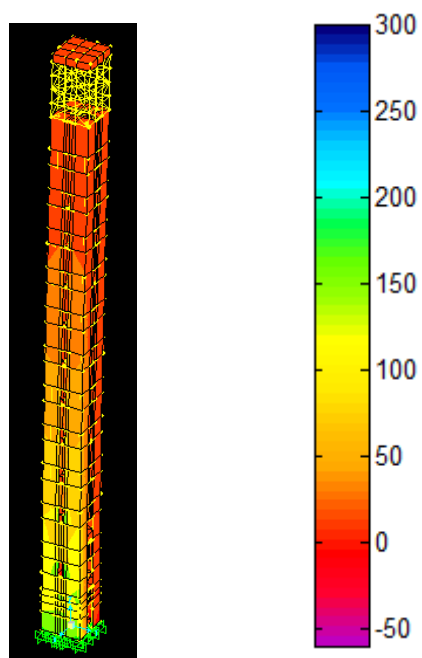


Figura 6.24 – Mapa de tensões máximas, devido ao sino 3 – SAP2000™.

Quanto às tensões mínimas, para a mesma de acção, possui a distribuição evidenciada nos mapas de tensões representados desde a Figura 6.25 à Figura 6.27, no instante em que se verifica o seu valor mínimo. As tensões mais elevadas possuem a cor azul (60 kPa) e as menores a violeta (-300 kPa).

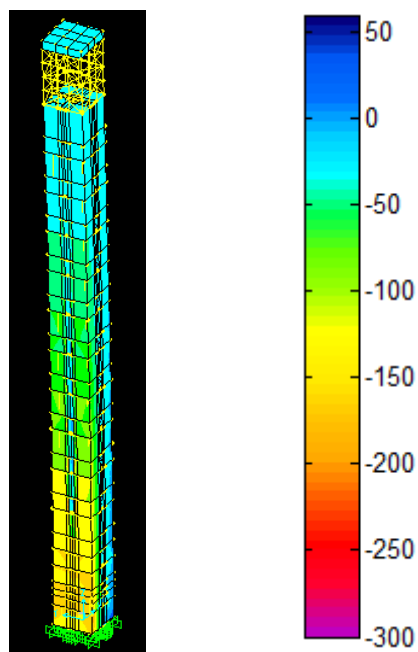


Figura 6.25 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 1 – SAP2000™.

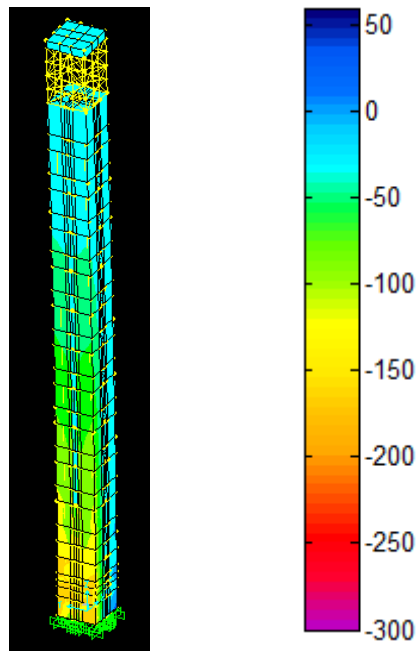


Figura 6.26 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 2 – SAP2000™.

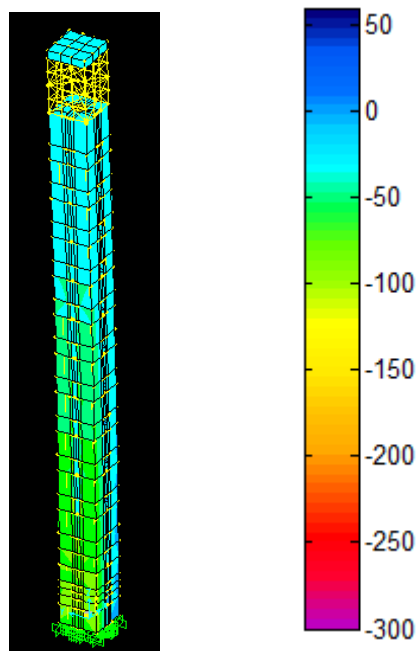


Figura 6.27 – Mapa de tensões mínimas, devido ao sino 3 – SAP2000™.

De uma forma resumida, encontram-se as tensões máximas verificadas pelo efeito de cada sino isoladamente e também do conjunto dos três sinos, através da Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Valores máximos das tensões, devido à componente dinâmica.

Sino	$\sigma_{\text{máx}}^+$ (MPa)	$\sigma_{\text{máx}}^-$ (MPa)
1	0.281	-0.154
2	0.211	-0.152
3	0.164	-0.089
1+2+3	0.388	-0.234

As tensões máximas verificadas pelo efeito de cada sino isoladamente e também do conjunto dos três sinos, incluindo a parcela de tensão devida à componente estática encontram-se na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 – Valores máximos das tensões, devido à combinação das componentes de acção.

Sino	$\sigma_{\text{máx}}^+$ (MPa)	$\sigma_{\text{máx}}^-$ (MPa)
1	0.361	-1.278
2	0.291	-1.276
3	0.244	-1.213
1+2+3	0.524	-2.176

Pela análise da Tabela 6.9, verifica-se que a tensão máxima atinge o valor mais reduzido no caso do sino 3. Verifica-se também que a combinação dos três sinos não conduz à aproximação do limite da capacidade resistente da estrutura ao nível das tracções, se considerarmos que a tensão de tracção limite para as estruturas de alvenaria é em média 2.2 MPa. As tensões de compressão instaladas são muito inferiores à sua capacidade resistente a este nível. Assim, a capacidade resistente da estrutura não é comprometida.

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelação da acção do sino constituiu um grande desafio, uma vez que a abordagem do fenómeno não segue o mesmo caminho que demonstrado durante o curso. Constituiu uma aprendizagem ao nível da modelação da acção e o aperfeiçoar de conhecimentos ao nível da análise no domínio da frequência, modelação de uma estrutura e respectivas condições de fronteira, e dos ensaios correntes de análise modal da estrutura real (Ensaio de Vibração Ambiental).

Relativamente aos resultados obtidos, é possível afirmar que o bamboar do sino corresponde à parcela da acção do sino com maior expressão, sendo por essa razão estudada pela maioria dos investigadores. Este facto é ainda mais acentuado se o caso em estudo, apresenta níveis de frequência fundamentais naturais da ordem de 1 Hz, ou seja, a estrutura tem um comportamento de uma estrutura flexível.

A realização de Ensaio Ambiental contribuiu principalmente para a definição da importância do corpo adjacente à torre e assim calibrar o modelo numérico, de forma a ser possível efectuar a análise da resposta dinâmica da estrutura.

Ao nível das frequências de vibração da estrutura em estudo, estas são semelhantes nas duas direcções, uma vez que se verifica a simetria da torre e a existência das escadas em espiral pode também contribuir para esta ligeira diferença.

Como para obter frequências ressonantes com as frequências emitidas pelos sinos, quando estes são excitados pelo matraquear destes, a componente de resposta ao nível dos deslocamentos é muito reduzida, tal como se observou no período de tempo que decorreu o Ensaio de Vibração Ambiental. O que significa que, para que tal fenómeno ressonante ocorresse, os sinos deveriam ter maiores dimensões.

Ao analisar a abordagem seguida pela norma alemã “DIN 4178 Glockentürme”, é possível modelar a acção do sino é através da sobreposição de várias funções harmónicas, cuja amplitude é proporcional à massa do sino e é afectada por componentes que dependem da forma do sino e da amplitude inicial do movimento. Em comparação com o que se verifica relativamente à modelação numérica da resposta ao nível dos deslocamentos, e tendo presente os conhecimentos ao nível de equações diferenciais, se a acção pode ser decomposta por várias funções harmónicas, então a solução da equação de equilíbrio diferencial que caracteriza o comportamento dinâmico da estrutura também inclui componentes harmónicos, o que comprova o comportamento das funções deslocamentos obtidas.

Relativamente aos resultados obtidos através da simulação da acção do bamboar dos sinos na torre estudada, verifica-se que, para os níveis de amortecimento da ordem de 2%, os deslocamentos máximos ao nível do topo da torre de 0.0055 m. A combinação dos três sinos que bamboam não conduz a níveis de tensões que se aproximam a capacidade resistente da mesma.

Quando apenas o sino 1 é accionado, atinge-se a aceleração máxima de 0.1301 m/s^2 , que corresponde a um nível que é superior ao limite de conforto horizontal se encontra a 0.10 m/s^2 . Assim, é atingida a aceleração máxima compatível com os sinais de alarme dados pelos intervenientes na montagem dos sinos. Quando os vários sinos são accionados é possível atingir o nível de aceleração próximo de 0.2511 m/s^2 , o que representa um nível de desconforto maior no interior do campanário.

Em suma, pela análise dos resultados, é possível concluir que o facto de actualmente todos os sinos do carrilhão serem excitados por intermédio de martelo mecânico (matraquear), corresponde à solução mais segura para que se verifiquem as condições de serviço, apesar de não comprometer a capacidade resistente da estrutura.

Ao nível de desenvolvimentos futuros, é possível enumerar os seguintes:

- ✓ realização do estudo dinâmico relativo à quantificação da contribuição da componente vibratória dos sinos, quando excitados por impacto, incluindo a determinação de frequências e modos de vibração de sinos, de modo a obter as frequências parciais a introduzir na modelação da acção;
- ✓ execução da análise da importância do impacto do badalo que se encontra no interior, por forma a concretizar o que já foi exposto no Capítulo 4, através da programação em MatLab™, de modo a reproduzir a limitação da amplitude do movimento, e assim caracterizar completamente o movimento composto;
- ✓ estudo ao nível do desfasamento entre os vários instantes em que os sinos são actuados (sequências de toque dos sinos), por forma a reduzir os efeitos causados por estes, minimizando as consequências ao nível da musicalidade que este transmite aos ouvintes, ou seja, actuar sobre o problema sem criar conflitos com a população local;
- ✓ determinação analítica da resposta dinâmica da componente relativa ao bamboar do sino, quando se considera a componente do amortecimento na ligação entre este o seu apoio;
- ✓ análise dinâmica da combinação da acção sísmica com os vários elementos contribuintes na acção do sino evidenciados nos itens anteriores.

BIBLIOGRAFIA

- [1] <http://sinos.cousinha.pt/>, 20-03-2010.
- [2] <http://quemtembocavaiaroma.livreforum.com/>, 03-05-2010.
- [3] <http://belezaserrana.blogs.sapo.pt/19303.html>, 03-05-2010.
- [4] <http://www.ushistory.org/libertybell/>, 05-05-2010.
- [5] <http://pt.wikipedia.org/wiki/>, 15-04-2010.
- [6] <http://portuguese.cri.cn/>, 03-05-2010.
- [7] BASTO, A. de Magalhães, *Nasoni e a Igreja dos Clérigos*. Biblioteca do Porto, 1950.
- [8] <http://portugaleoturismo12c.blogspot.com/2008/04/porto.html>, 03-05-2010.
- [9] <http://tic72clara.blogspot.com/>, 03-05-2010.
- [10] <http://www.agencia.ecclesia.pt/cgi-bin/noticia.pl?id=18570>, 06-05-2010.
- [11] GOMES, J. da C. *Descrição minuciosa do monumento de Mafra, ideia geral da sua origem e construção e dos objectos mais importantes que o constituem*, Segunda edição, 1871.
- [12] <http://www.carlaedaniel.com/Portals/>, 04-05-2010.
- [13] <http://www.portugalvirtual.pt/>, 04-05-2010.
- [14] <http://www.engeplus.com.br/fotos/>, 04-05-2010.
- [15] <http://www.paroquia-antas.pt/>, 20-03-2010.
- [16] www.scribd.com/doc/27181110/Ondas-Transversais-e-Ondas-Longitudinais, 20-04-2010.
- [17] TIPLER, P. A., *Física para cientistas e engenheiros, vol. 1: Mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora, 2004.
- [18] www.vision.ime.usp.br/~ronaldo/mac0417-03/aula_02.html, 22-04-2010.
- [19] www.py6cj.qsl.br/propagacaoondas.htm, 22-04-2010.
- [20] http://caraipora.tripod.com/esc_temp_freq_.htm, 23-04-2010.
- [21] www.colorado.edu/physics/phys4830/phys4830_fa01/lab/n1106.htm, 23-04-2010.
- [22] ANSARI J., *Finite Element Vibration Analysis and Modal Testing of Bells*, IJME, 2006.
- [23] evunix.uevora.pt/~bafcc/pendulo.pdf, 25-04-2010.
- [24] SIMMONS, F. G., KRANTZ, S. G., *Equações Diferenciais: teoria, técnica e prática*, McGraw-Hill, 2008.
- [25] FIGUEIREDO, D. G., NEVES, A. F., *Equações Diferenciais Aplicadas (2ª edição)*, INIPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [26] www.fgv.br/grad/rj/area_restrita/_arquivos/repositorio/Calculo%20III/Liapunov.pdf, 20-04-2010.
- [27] SALVADOR, I., *Dynamic Forces Produced by Swinging Bells*, Springer, 2006.
- [28] BLAKEBOROUGH, A., *An Analytical Response of Church Bells to Earthquake Excitation*, Journal of Earthquake Engineering, 2001.

[29] DIN 4178: “Glockentürme”, Abril de 2004.

[30] MAGALHÃES, F., *Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos*, Mestrado em Engenharia Civil - 2004/2005 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004.

ANEXO

Igreja de Santo António das Antas



Torre Sineira

Igreja de Santo António das Antas

