FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Modelo de Avaliação do Comportamento Estrutural de Obras de Arte

Miguel Ângelo Carvalho Ferraz
2010

U.PORTO

Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Modelo para Avaliação do Comportamento Estrutural de Obras de Arte

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil por

Miguel Ângelo Carvalho Ferraz

realizada sob a orientação do Professor Joaquim Figueiras

e a co-orientação do Professor Rui Faria

Julho de 2010

Ciência Inovação 2010

Aos meus Pais

Resumo

Na presente dissertação desenvolveu-se um modelo de análise estrutural para a avaliação do comportamento de obras de arte. Utilizando as potencialidades disponíveis no paradigma de Programação Orientada por Objectos, desenvolveu-se uma plataforma computacional, designada por Evolution, com o objectivo de facilitar o desenvolvimento de modelos de análise estrutural baseados no Método dos Elementos Finitos. Com recurso a bibliotecas de objectos genéricos robustos, a plataforma possibilita a criação de modelos computacionais de análise estrutural eficientes, capazes de integrar alterações e novas funcionalidades, e passíveis de serem desenvolvidos por equipas multidisciplinares de programadores.

Como exemplo de aplicação de referida plataforma, desenvolveu-se um programa de cálculo orientado para a análise estrutural de obras de arte, desde o seu faseamento construtivo até à fase de exploração. Dirigido para a análise de estruturas evolutivas tridimensionais, passíveis de serem discretizadas através de elementos finitos lineares (tipo viga), o programa de cálculo desenvolvido permite alterações do sistema estático ao longo do tempo e utiliza métodos incrementais e iterativos de forma a resolver os problemas suscitados por análises material e geometricamente não-lineares. Os elementos finitos lineares utilizados baseiam-se na formulação de viga de Timoshenko, com discretização da secção transversal através de fibras. A formulação incorpora ainda elementos finitos específicos para a discretização de armaduras passivas, de cabos de pré-esforço (embebidos e exteriores) e de tirantes. Todos os elementos finitos desenvolvidos incorporam na respectiva formulação a não-linearidade geométrica, de forma a possibilitar uma análise mais realista de peças esbeltas. Foram ainda introduzidos diversos tipos de ligação ao exterior para simular todos os componentes e operações específicos deste tipo de estruturas e do seu processo construtivo, entre os quais apoios deslizantes e unidireccionais. O modelo desenvolvido incorpora diversas leis constitutivas, que incluem a análise não-linear material, designadamente o comportamento elasto-plástico do aço e a fissuração do betão. Foram ainda incorporadas leis de comportamento diferido do material, nomeadamente a maturação, a retracção e a fluência do betão, e a relaxação do aço de pré-esforço. De forma a acompanhar os últimos desenvolvimentos no domínio da instrumentação de estruturas, nomeadamente os ensaios dinâmicos de vibração ambiental, o modelo de cálculo desenvolvido permite a determinação de frequências e modos próprios de vibração da estrutura em qualquer fase do seu ciclo de vida, inclusivamente durante a fase construtiva.

De forma a validar o modelo de cálculo desenvolvido, este foi utilizado na análise do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira no Porto, tanto durante a fase construtiva, como no ensaio de carga e durante a fase de exploração. Utilizando o sistema de monitorização permanente instalado na referida obra foi possível comparar os resultados medidos com os obtidos por intermédio da modelação numérica, durante todas as fases referidas. Através da análise criteriosa dos resultados obtidos foi possível calibrar com bastante rigor o modelo numérico criado, e através dele prever o futuro comportamento estrutural desta obra de arte.

Abstract

In the present dissertation a structural analysis model was developed for bridge behaviour evaluation. The potentialities of the Object Oriented Programming Paradigm were used to set up a platform named Evolution. The aim was that of facilitating the development of structural analysis models based on the Finite Element Method, taking advantage of libraries containing robust generic objects. The platform allows for the creation of efficient computational structural analysis models, capable of integrating changes and new functions, which may be further developed by multidisciplinary programming teams.

As an application example of the platform, a computational model for the structural analysis of bridges that covered from the building phase up to the final application phase was developed, so as to obtain a three-dimensional analysis of evolutive structures susceptible to discretization through linear finite elements (beam type). The computational model developed allows for static system alterations to be made over time, and applies incremental and iterative methods to solve problems involving material and/or geometrical non-linearities. The linear finite elements used are based on the Timoshenko beam formulation, with a transversal section discretization through fibres. The formulation also incorporates specific finite elements for the discretization of reinforcement bars, prestress (both embedded and exterior) and stay cables. All the finite elements developed incorporate the geometric non-linearity in their formulation, so as to allow for a more realistic analysis of slender elements. Different types of external links have been introduced to simulate all the components and specific operations in these types of structures and their building process, including sliding and unidirectional supports. The model developed incorporates numerous constitutive laws, which include the elasto-plastic behaviour of steel and the concrete cracking. Some time-dependent material behaviour laws have also been incorporated, such as concrete ageing, shrinkage and creep, as well as prestress relaxation. So as to follow the latest developments in the structural instrumentation domain, namely the dynamic ambient vibration tests, the numerical model allows for the determination of both the frequency and modes of vibration in any phase of the structure life cycle, including the construction stage.

The developed model was validated by carrying out a structural behaviour analysis of the Corujeira Viaduct in Oporto, during the construction, load test and exploration phases. The measurements made by the permanent monitoring system installed in the viaduct were compared to those obtained by the numerical model throughout all the aforementioned phases. A discerning analysis of the results allowed for a correct calibration of the numerical model and, therefore, provided predictions as to the future structural behaviour of the viaduct.

Résumé

Dans la présente dissertation un modèle d'analyse structurelle d'évaluation du comportement d'ouvrages d'art a été développé. En utilisant les potentialités disponibles dans le paradigme de Programmation Orientée Objet, une plateforme informatique, désignée par Evolution, a été développé ayant l'objectif de faciliter le développement de modèles d'analyse structurelle basés sur la Méthode des Éléments Finis. Utilisant des bibliothèques d'objets génériques robustes, la plateforme permet la création de modèles informatiques d'analyse structurelle efficaces, capables d'intégrer des modifications et des nouvelles fonctionnalités, et passibles d'être développés par des équipes multidisciplinaires de programmeurs.

Comme exemple d'application de cette plateforme, un modèle informatique guidé pour l'analyse structurelle d'ouvrages d'art a été développé, depuis sa construction jusqu'à la phase d'exploration. Dirigé pour l'analyse de structures évolutives tridimensionnelles, qui peuvent être discrétisées par des éléments finis linéaires (type poutre), le modèle informatique développé permet la modification du système statique au long du temps et utilise des méthodes incrémentales et itératives pour résoudre les problèmes suscités par des analyses matériellement et géométriquement non-linéaires. Les éléments finis linéaires utilisés se basent sur la formulation de poutre de Timoshenko, utilisant une discrétisation de la section transversale par des fibres. La formulation incorpore encore des éléments finis spécifiques pour la discrétisation d'armatures passives, des câbles de précontrainte (incorporées et extérieurs) et des haubans. Tous les éléments finis développés incorporent dans leur formulation la non-linéarité géométrique, de manière à permettre une analyse plus réaliste de pièces minces. Divers types de liaisons à l'extérieur ont été aussi introduites pour simuler tous les composants et les opérations spécifiques de ce type de structure et de leur procès constructif, notamment les aides coulissants et unidirectionnelles. Le modèle développé incorpore diverses lois constitutives, qui incluent l'analyse non-linéaire matériel, notamment le comportement élasto-plastique de l'acier et la fissuration du béton. Quelques lois de comportement différé du matériel ont aussi été incorporées, notamment la maturation, la rétraction et le fluage du béton, et la relaxation de l'acier de précontrainte. De manière à accompagner les derniers développements dans le domaine de l'instrumentation de structures, notamment en ce qui concerne les essais dynamiques de vibration ambiante, le modèle de calcul développé permet la détermination des fréquences et des configurations des modes propres de vibration de la structure dans toutes les phases de son cycle de vie, notamment pendant la phase constructive.

Pour valider le modèle de calcul développé, l'analyse du comportement structurel du Viaduc du Corujeira à Porto a été utilisée, considérant la phase constructive, l'essai de chargement et la phase d'exploration. En utilisant le système de surveillance permanente installé dans cet ouvrage, il y a été possible de comparer les résultats mesurés avec ceux qui ont été obtenus à travers de l'analyse numérique pour toutes les phases mentionnées. Par une analyse judicieuse des résultats obtenus, le modèle numérique développé a put être calibré avec une rigueur suffisante, ce qui a permit de prévoir le comportement structurel future de cet ouvrage d'art.

Agradecimentos

Expresso aqui uma palavra de agradecimento a todos os que directa ou indirectamente tornaram possível a concretização deste trabalho, em particular:

À minha família, e em especial aos meus Pais, pela forma como sempre me incentivaram e apoiaram no decorrer da minha formação humana e técnica;

Aos meus orientadores Professor Joaquim Figueiras e Professor Rui Faria, pelo modo generoso e disponível com que me incentivaram e auxiliaram;

Ao LABEST, e em especial ao Professor Carlos Félix, pela utilização das medições realizadas no Viaduto da Corujeira, e que possibilitaram a aferição do modelo de computacional desenvolvido;

A todos os amigos e colegas de trabalho, mas de uma forma especial ao António Topa Gomes, ao Carlos Sousa, ao Eduardo Costa, ao Filipe Magalhães, ao Luis Noites, ao Mário Pimentel, ao Miguel Azenha, ao Nuno Raposo e ao Pedro Costa, pelo excelente ambiente de trabalho, convívio e amizade que sempre me proporcionaram;

À Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo apoio financeiro através da Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/31717/2006, co-financiada pelo Programa Operacional da Ciência e Inovação 2010 e pelo Fundo Social Europeu;

Por fim quero agradecer a todos os que, privados da minha companhia durante as fases mais complicadas deste trabalho, não deixaram de me apoiar.

Índice geral

Resumo **i**

Abstract **iii**

Résumé **v**

Agradecimentos **vii**

Índice geral **ix**

Índice de figuras **xv**

Índice de quadros **xxvii**

1. Introdução **3**

1.1. Motivação 3
1.2. A programação orientada por objectos 6
1.3. Objectivos 8
1.4. Organização da tese 11

2. A Programação Orientada por Objectos **15**

2.1. Introdução 15
2.2. A evolução do MEF e das linguagens de programação 15
2.3. Conceitos da Programação Orientada por Objectos 18
2.3.1. Objecto 19
2.3.2. Classe 20
2.3.3. Hereditariedade 21
2.3.4. Polimorfismo 22
2.3.5. Interface 22
2.3.6. Bibliotecas de ligação dinâmica ou *DLLs* 23
2.3.7. Interfaces genéricas para encaixe ou *plugins* 24
2.4. A linguagem Visual C# 25
2.5. A plataforma *Evolution* desenvolvida 25
2.5.1. Biblioteca de objectos genéricos de gestão de dados 26
2.5.2. Biblioteca de componentes do MEF 28

2.5.2.1. Biblioteca de objectos genéricos do MEF 29
2.5.2.2. Biblioteca de tipos de elementos finitos 33
2.5.2.3. Biblioteca de tipos de ligações 36
2.5.2.4. Biblioteca de algoritmos 36
2.5.3. Algumas particularidades 37
2.5.3.1. Versão DOS e versão Windows 37
2.5.3.1. Organização de dados 37
2.5.3.1. Interfaces gráficas 38
2.5.3.2. Utilização de *plugins* 39
2.5.3.3. Validação automática 40
2.5.3.4. Manual de utilização automático 41
2.5.3.5. Parametrização 43
2.6. Considerações finais 43

3. Modelo estrutural para a análise de obras de arte 47

3.1. Introdução 47
3.2. Algoritmo incremental e iterativo 49
3.2.1. Técnicas incrementais e iterativas para resolução de problemas não-lineares 51
3.3. Equações incrementais do movimento para a análise estática 55
3.4. Formulação geral dos elementos finitos 64
3.5. Formulações específicas dos elementos finitos 70
3.5.1. Discretização de peças lineares curvas 70
3.5.1.1. Exemplos de aplicação 76
3.5.1.1.1. Deformação por flexão e por corte 76
3.5.1.1.2. Peças curvas 78
3.5.1.1.3. Peças curvas com torção 79
3.5.1.1.4. Peças de secção variável 81
3.5.1.1.5. Análise não-linear geométrica de um pórtico plano 81
3.5.2. Discretização das armaduras longitudinais 83
3.5.3. Discretização de cabos de pré-esforço aderentes 84
3.5.3.1. Exemplos de aplicação 87
3.5.3.1.1. Viga simplesmente apoiada com cabo de pré-esforço parabólico 87
3.5.4. Modelação de tirantes de retenção e de cabos de pré-esforço exterior 90
3.5.4.1. Exemplos de aplicação 91
3.5.4.1.1. Tirante horizontal com carga concentrada a meio vão 91
3.5.4.1.2. Viga simplesmente apoiada com cabo de pré-esforço exterior 93
3.6. Simulação de apoios e ligações especiais 95
3.6.1. Deslocamentos prescritos 96
3.6.2. Apoios elásticos 97
3.6.3. Imposição de incrementos de deslocamentos relativos 97
3.6.4. Incrementos de deslocamentos condicionados 98

3.6.5. Apoios unidireccionais 100
3.7. Algoritmo de determinação de frequências e modos próprios de vibração 102
3.7.1. Formulação 102
3.7.2. Exemplos de aplicação 103
3.7.2.1. Oscilador de 1 grau de liberdade 103
3.7.2.2. Consola com massa distribuída 104
3.7.2.3. Pórtico com massa distribuída 105
3.7.2.4. Tirante com massa distribuída 106
3.8. Considerações finais 108

4. Modelos constitutivos 113

4.1. Introdução 113
4.2. Leis de comportamento dos materiais 113
4.2.1. Betão 113
4.2.1.1. Maturação 113
4.2.1.2. Retracção 114
4.2.1.3. Fluência 116
4.2.1.4. Utilização de ensaios laboratoriais e de prismas compensadores de retracção e fluência 118
4.2.1.4.1. Ajuste da lei de retracção do EC2 119
4.2.1.4.2. Ajuste da lei de fluência do EC2 120
4.2.1.4.3. Ajuste da lei de maturação do EC2 121
4.2.2. Pré-esforço 121
4.2.2.1. Aplicação de pré-tensão e de pós-tensão 121
4.2.2.2. Perdas instantâneas 122
4.2.2.2.1. Perdas por deformação elástica 122
4.2.2.2.2. Perdas por relaxação a curto prazo 123
4.2.2.2.3. Perdas por atrito 123
4.2.2.2.4. Perdas por escorregamento do dispositivo de ancoragem 123
4.2.2.3. Perdas diferidas 125
4.2.2.3.1. Relaxação 125
4.3. Simulação do comportamento instantâneo e diferido 127
4.3.1. Método incremental 127
4.3.2. Deformação diferida mecânica 128
4.3.3. Equilíbrio incremental 131
4.4. Simulação de não-linearidades materiais 131
4.4.1. Modelo de comportamento elásto-plástico uniaxial com endurecimento linear 131
4.4.2. Modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening* 139
4.4.2.1. Exemplo de aplicação 147
4.5. Aplicações 148
4.5.1. Vigas de Espion e Halleux 148

4.5.2. Viga de betão armado e pré-esforçado em escala reduzida 154
4.6. Considerações finais 166

5. Viaduto da Corujeira - Faseamento construtivo 171

5.1. Introdução 171
5.2. Descrição da estrutura 171
5.3. Modelação numérica 175
5.4. Monitorização permanente 178
5.5. Propriedades dos materiais 182
5.5.1. Ajuste da lei de maturação do betão 182
5.5.2. Ajuste da lei de retracção do betão 184
5.5.3. Ajuste da lei de fluência do betão 188
5.6. Faseamento construtivo 191
5.7. Resultados 193
5.8. Análise modal durante o faseamento construtivo 209
5.9. Considerações finais 214

6. Viaduto da Corujeira – Ensaio de carga e projecções para o futuro 219

6.1. Introdução 219
6.2. Ajuste final do modelo numérico 220
6.3. Simulação do ensaio de carga 223
6.3.1. Descrição dos procedimentos 223
6.3.2. Monitorização provisória 225
6.3.3. Resultados 226
6.3.3.1. Deformadas verticais do tabuleiro 226
6.3.3.2. Extensões no betão 229
6.4. Previsão do comportamento futuro da obra 235
6.4.1. Controlo de deslocamentos 235
6.4.1.1. Deslocamentos verticais 235
6.4.1.2. Deslocamentos horizontais no mastro 237
6.4.1.3. Deslocamentos horizontais nas juntas de dilatação dos encontros 237
6.4.2. Controlo de tensões 239
6.4.2.1. Betão do tabuleiro 239
6.4.2.2. Betão do mastro 240
6.4.2.3. Tirantes 241
6.5. Efeito de variações uniformes de temperatura 242
6.6. Modelação de operações de manutenção e reparação 243
6.6.1. Substituição de aparelhos de apoio 244
6.6.2. Substituição de tirantes 249
6.7. Análise modal na fase de exploração 254
6.8. Considerações finais 254

7. Conclusões e desenvolvimentos futuros **259**

7.1. Conclusões 259
7.2. Desenvolvimentos futuros 262

Bibliografia **267**

Anexos **275**

Anexo A. Formulação específica dos elementos lineares curvos 275
Anexo A.1. Matriz B 275
Anexo A.2. Matriz G 276
Anexo A.3. Matriz A 278
Anexo B. Formulação específica das armaduras passivas longitudinais 281
Anexo B.1. Matriz B 281
Anexo B.2. Matriz G 281
Anexo B.3. Matriz A 282
Anexo C. Formulação específica das armaduras de pré-esforço embebido 283
Anexo C.1. Matriz B 283
Anexo C.2. Matriz G 283
Anexo C.3. Matriz A 284
Anexo D. Formulação específica dos tirantes e cabos de pré-esforço exterior 285
Anexo D.1. Matriz B 285
Anexo D.2. Matriz G 285
Anexo D.3. Matriz A 285

Índice de figuras

Figura 1.1 – Organização da plataforma *Evolution*. 8

Figura 1.2 – Vista geral do programa de cálculo desenvolvido. 9

Figura 1.3 – Viaduto da Corujeira no Porto (Vista aérea). 10

Figura 2.1 – Cronologia das linguagens de programação (Brás (2003)). 16

Figura 2.2 – Esquema de funcionamento de um *plugin.* 24

Figura 2.3 – Interface *IBasic.* 27

Figura 2.4 – Organização interna da classe *vBasic.* 27

Figura 2.5 – Interface *IStructural.* 29

Figura 2.6 – Interfaces *INLG*, *IIncremental*, *IIterative* e *IModal.* 29

Figura 2.7 – Classe *vStructural*. 30

Figura 2.8 – Classe *STRUCTURE*. 30

Figura 2.9 – Classe *vAnalysis.* 31

Figura 2.10 – Classe *NODE.* 32

Figura 2.11 – Classe *vElement.* 32

Figura 2.12 – Classe *vStressStrain.* 33

Figura 2.13 – Classe *FIBREELEMENT.* 34

Figura 2.14 – Classe *vFibre.* 35

Figura 2.15 – Árvore de componentes. 38

Figura 2.16 – Visualização gráfica de resultados. 38

Figura 2.17 – Perspectiva da obra no instante N. 39

Figura 2.18 – Perspectiva da obra no instante N em modo “Only On”. 39

Figura 2.19 – Exemplo de árvore de *plugins* instalados. 40

Figura 2.20 – Exemplo de diagrama em árvore de *plugins* disponíveis. 42

Figura 2.21 – Ficheiro de ajuda da classe *PLASTICLINEAR1D*. 42

Figura 3.1 – Interpretação física das segundas tensões de Piola-Kirchhoff (Póvoas (1991)). 56

Figura 3.2 – Movimento do corpo num sistema coordenado cartesiano fixo. 57

Figura 3.3 – Representação de um elemento de volume nos estados indeformado e deformado e os correspondentes vectores de forças actuantes sobre uma superfície particular. 59

Figura 3.4 - Elemento finito de viga de Timoshenko 3D. 70

Figura 3.5 – Teoria da flexão de vigas de Timoshenko. 74

Figura 3.6 – Esquema estrutural da consola. 76

Figura 3.7 – Modelo numérico da consola. 76

Figura 3.8 – Deformação por flexão e corte da Viga de Timoshenko. 77

Figura 3.9 – Modelo numérico e deformada da consola circular (vertical horizontal). 78

Figura 3.10 – Modelo numérico e deformada da consola circular (eixo vertical). 80

Figura 3.11 – Modelo numérico e deformada da consola de secção variável. 81

Figura 3.12 – Esquema estrutural do pórtico. 82

Figura 3.13 – Modelo numérico do pórtico. 82

Figura 3.14 – Análise comparativa da evolução do deslocamento horizontal do andar entre diversos autores. 82

Figura 3.15 – Análise comparativa da evolução do deslocamento horizontal do andar para diversos modelos de discretização da estrutura. 83

Figura 3.16 - Elemento finito de cabo de pré-esforço aderente 3D. 84

Figura 3.17 – Modelo numérico da viga com cabo de pré-esforço parabólico. 88

Figura 3.18 – Tensões normais no betão (para aplicação de tensão inicial). 90

Figura 3.19 – Tensões normais no betão (para imposição de tensão final). 90

Figura 3.20 - Deformação ampliada da estrutura aquando da aplicação do pré-esforço. 90

Figura 3.21 – Esquema estrutural do tirante com carga a meio vão. 92

Figura 3.22 – Esquema estrutural do tirante horizontal. 92

Figura 3.23 – Modelo numérico do tirante horizontal. 92

Figura 3.24 – Evolução do deslocamento vertical a meio vão. 93

Figura 3.25 – Evolução da tensão axial no tirante. 93

Figura 3.26 – Modelo numérico da viga com cabo de pré-esforço exterior. 94

Figura 3.27 – Tensões normais na secção de meio vão da viga. 95

Figura 3.28 – Deformação ampliada da estrutura aquando da aplicação do pré-esforço. 95

Figura 3.29 – Implementação dos apoios unidirecionais na fase de construção da matriz de rigidez global. 101

Figura 3.30 – Implementação dos apoios unidireccionais na fase de construção do vector de forças internas. 101

Figura 3.31 – Esquema estrutural do oscilador de 1 grau de liberdade. 104

Figura 3.32 - Modelo numérico do oscilador de 1 grau de liberdade. 104

Figura 3.33 – Modos de vibração da consola com massa distribuída na direcção x (modelo numérico desenvolvido). 105

Figura 3.34 – Modelo numérico do pórtico com massa distribuída. 105

Figura 3.35 – Modos de vibração de pórtico com massa distribuída. 106

Figura 3.36 – Modelo numérico do tirante com massa distribuída. 107

Figura 3.37 – Modos de vibração do tirante com massa distribuída. 108

Figura 4.1 – Perdas de pré-esforço por escorregamento do dispositivo de ancoragem. 124

Figura 4.2 – Variação da extensão diferida e da tensão ao longo do tempo. 130

Figura 4.3 – Modelo de comportamento elásto-plástico uniaxial com endurecimento linear. 132

Figura 4.4 – Fluxograma de implementação do modelo de comportamento não-linear uniaxial com endurecimento linear. 134

Figura 4.5 – Modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening.* 140

Figura 4.6 – Fluxograma de implementação do modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening.* 141

Figura 4.7 – Definição dos deslocamentos impostos. 147

Figura 4.8 – Ensaio da classe do modelo de comportamento uniaxial para o betão com *tension-stiffening*. 147

Figura 4.9 – Esquema estrutural das vigas de Espion e Halleux. 148

Figura 4.10 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-05 e LT-05Q. 148

Figura 4.11 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-08 e LT-08Q. 148

Figura 4.12 – Modelo numérico utilizado nas vigas LT-0.5 e LT-0.5Q. 151

Figura 4.13 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-05 e LT-05Q. 151

Figura 4.14 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-08 e LT-08Q. 151

Figura 4.15 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.5. 152

Figura 4.16 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.8. 152

Figura 4.17 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.5Q. 152

Figura 4.18 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.8Q. 152

Figura 4.19 – Variação do módulo de elasticidade do betão ao longo do tempo de acordo com o EC2. 153

Figura 4.20 – Tensões normais a meio vão da viga LT-05Q após a aplicação do 2º incremento de carga. 153

Figura 4.21 – Tensões normais a meio vão da viga LT-08Q após a aplicação do 2º incremento de carga. 153

Figura 4.22 – Vista geral do ensaio. 154

Figura 4.23 – Secção transversal da viga. 154

Figura 4.24 – Esquema estrutural da viga em escala reduzida. 155

Figura 4.25 – Valores medidos nos prismas de retracção e fluência. 156

Figura 4.26 – Extensões por retracção do betão. 157

Figura 4.27 – Aferição da função de fluência. 157

Figura 4.28 – Localização das secções instrumentadas da viga. 158

Figura 4.29 – Instrumentação das secções da viga. 158

Figura 4.30 – Modelo numérico da viga em escala reduzida. 158

Figura 4.31 – Secção transversal das vigas nas secções correntes. 159

Figura 4.32 – Secção transversal das vigas nas secções instrumentadas. 159

Figura 4.33 – Extensões medidas na secção S1. 159

Figura 4.34 – Extensões medidas na secção S2. 160

Figura 4.35 – Extensões medidas na secção S3. 160

Figura 4.36 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1. 161

Figura 4.37 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1. 161

Figura 4.38 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3. 162

Figura 4.39 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3. 162

Figura 4.40 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S2. 163

Figura 4.41 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S2. 163

Figura 4.42 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros inferiores aquando da aplicação do pré-esforço. 164

Figura 4.43 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros superiores aquando da aplicação do pré-esforço. 164

Figura 4.44 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros inferiores aquando da aplicação da carga exterior. 164

Figura 4.45 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros superiores aquando da aplicação da carga exterior. 165

Figura 4.46 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S1. 165

Figura 4.47 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S1. 165

Figura 4.48 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S2. 165

Figura 4.49 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S2. 165

Figura 4.50 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S3. 166

Figura 4.51 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S3. 166

Figura 5.1 – Viaduto da Corujeira no Porto (vista aérea). 171

Figura 5.2 – Viaduto da Corujeira - Corte longitudinal pelo eixo da obra. 172

Figura 5.3 – Construção do mastro. 173

Figura 5.4 – Alçado do mastro. 173

Figura 5.5 – Secções transversais do mastro (assinaladas na Figura 5.4). 173

Figura 5.6 – Secção transversal tipo dos pilares correntes. 173

Figura 5.7 – Corte transversal numa secção corrente. 174

Figura 5.8 – Corte transversal numa secção de amarração dos tirantes. 174

Figura 5.9 – Modelo numérico do Viaduto da Corujeira. 175

Figura 5.10 – Alçado de pormenor da ligação do pilar P4 ao tabuleiro. 176

Figura 5.11 – Alçado do Tramo 1 aquando da instalação do respectivo pré-esforço. 176

Figura 5.12 – Pormenor de ligação dos tirantes de retenção ao tabuleiro. 177

Figura 5.13 – Pormenor da ligação dos fustes no topo do mastro. 177

Figura 5.14 – Secção tipo do tabuleiro e quadro de propriedades. 177

Figura 5.15 – Localização das secções instrumentadas com extensómetros. 179

Figura 5.16 – Localização dos extensómetros na secção S1. 179

Figura 5.17 – Localização dos extensómetros na secção S2. 179

Figura 5.18 – Localização dos extensómetros na secção S3. 180

Figura 5.19 – Localização dos extensómetros na secção S4. 180

Figura 5.20 – Localização dos extensómetros na secção S5. 180

Figura 5.21 – Localização dos extensómetros nas secções do mastro. 181

Figura 5.22 – Maturação do betão do tabuleiro. 183

Figura 5.23 – Maturação do betão do mastro. 183

Figura 5.24 – Prismas PR1 e PR2 sobre o tabuleiro. 184

Figura 5.25 – Prismas PR3 e PR4 no interior do caixão. 184

Figura 5.26 – Extensões de retracção do betão do tabuleiro medidas nos prismas PR1 a PR4. 185

Figura 5.27 – Precipitação versus extensões de retracção de secagem nos prismas (Félix (2005)). 186

Figura 5.28 – Leis de retracção de secagem. 187

Figura 5.29 – Componentes das leis de retracção. 187

Figura 5.30 – Extensões de fluência do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente. 188

Figura 5.31 – Extensões do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente pelo LABEST. 188

Figura 5.32 – Valores das extensões de fluência medidas e estimadas no prisma de fluência ensaiado pelo LABEST. 189

Figura 5.33 – Extensões medidas e estimadas numericamente para diversas leis de fluência nos extensómetros colocados junto ao banzo inferior da secção S3. 190

Figura 5.34 – Extensões medidas e estimadas numericamente para diversas leis de fluência nos extensómetros colocados junto ao banzo superior da secção S3. 190

Figura 5.35 – Faseamento construtivo – Fase 1 191

Figura 5.36 – Faseamento construtivo – Fase 2 192

Figura 5.37 – Faseamento construtivo – Fase 3 192

Figura 5.38 – Faseamento construtivo – Fase 4 193

Figura 5.39 – Faseamento construtivo – Fase final. 193

Figura 5.40 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3. 194

Figura 5.41 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros intermédios da secção S3. 194

Figura 5.42 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3. 195

Figura 5.43 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S4. 196

Figura 5.44 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S4. 196

Figura 5.45 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5. 197

Figura 5.46 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5. 197

Figura 5.47 – Localização da secção S2. 198

Figura 5.48 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S2. 198

Figura 5.49 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S2. 198

Figura 5.50 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1. 199

Figura 5.51 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1. 199

Figura 5.52 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7. 200

Figura 5.53 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros e tensões totais estimadas numericamente na posição do extensómetro ES7-2 da secção S7. 201

Figura 5.54 – Gráficos tensão/extensão estimados numericamente para o betão na posição do extensómetro ES7-2 da secção S7 utilizando um modelo elástico e um modelo não-linear. 201

Figura 5.55 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6. 202

Figura 5.56 – Rotações no inclinómetro IE1. 203

Figura 5.57 – Rotações no inclinómetro IE2. 203

Figura 5.58 – Tensão no tirante T1. 205

Figura 5.59 – Tensão no tirante T2. 205

Figura 5.60 – Tensão no tirante T3. 206

Figura 5.61 – Tensão no tirante T4. 206

Figura 5.62 – Tensão no tirante T5. 206

Figura 5.63 – Tensão no tirante T6. 207

Figura 5.64 – Tensão no tirante T7. 207

Figura 5.65 – Tensão no tirante T8. 207

Figura 5.66 – Tensão no tirante T9. 208

Figura 5.67 – Tensão no tirante T10. 208

Figura 5.68 – Tensão no tirante TR1. 208

Figura 5.69 – Tensão no tirante TR2. 209

Figura 5.70 – Tensão no tirante TR3. 209

Figura 5.71 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 1 (f = 2.967 Hz). 210

Figura 5.72 – Modos de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 6. 211

Figura 5.73 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 11 (f = 0.900 Hz). 211

Figura 5.74 – 3º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 11 (f = 0.996 Hz). 211

Figura 5.75 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 16 (f = 0.739 Hz). 212

Figura 5.76 – 2º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 16 (f = 0.770 Hz). 212

Figura 5.77 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 0.629 Hz). 212

Figura 5.78 – 2º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 1.145 Hz). 213

Figura 5.79 – 3º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 1.510 Hz). 213

Figura 5.80 – 1º modo de vibração após ajuste dos esforços nos tirantes (f = 0.889 Hz). 213

Figura 5.81 – 3º modo de vibração após a aplicação do betuminoso (f = 0.1.297 Hz). 213

Figura 6.1 – Evolução das tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro no final da aplicação do betuminoso no tabuleiro, sem e com ajuste final dos esforços nos tirantes. 222

Figura 6.2 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro, no final do faseamento construtivo. 222

Figura 6.3 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro, no final do faseamento construtivo. 223

Figura 6.4 – Posicionamento das viaturas durante o ensaio de carga – Posições 1L a 4L. 224

Figura 6.5 – Posicionamento das viaturas durante o ensaio de carga – Posições 1I a 4I. 225

Figura 6.6 – Viaduto da Corujeira – Localização dos sensores de pressão e secções com extensómetros. 226

Figura 6.7 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 1L. 227

Figura 6.8 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 2L. 227

Figura 6.9 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 3L. 227

Figura 6.10 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 4L. 227

Figura 6.11 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 1I. 228

Figura 6.12 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 2I. 228

Figura 6.13 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 3I. 228

Figura 6.14 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 4I. 228

Figura 6.15 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1. 229

Figura 6.16 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1. 230

Figura 6.17 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3. 231

Figura 6.18 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3. 231

Figura 6.19 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5. 232

Figura 6.20 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5. 233

Figura 6.21 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6. 233

Figura 6.22 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7. 234

Figura 6.23 – Deslocamentos verticais totais dos nós do tabuleiro no instante da conclusão da obra e no final de 2050. 235

Figura 6.24 – Incrementos de deformada vertical do tabuleiro em relação ao instante da conclusão da obra para os anos compreendidos entre 2003 e 2010. 236

Figura 6.25 – Incrementos de deformada do tabuleiro relativos ao instante da conclusão da obra entre 2010 e 2050. 236

Figura 6.26 – Deslocamentos verticais previstos numericamente nas secções DV1 a DV4 do tabuleiro ao longo do processo construtivo e até 2050. 237

Figura 6.27 – Variação do deslocamento horizontal do topo do mastro ao longo do tempo. 237

Figura 6.28 – Variação do deslocamento horizontal da junta de dilatação do Encontro Oeste ao longo do processo construtivo e até 2050. 238

Figura 6.29 – Variação do deslocamento horizontal da junta de dilatação do Encontro Este ao longo do processo construtivo e até 2050. 239

Figura 6.30 – Tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro, após o ajuste final dos tirantes e em 2050. 240

Figura 6.31 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro após o ajuste final dos tirantes e em 2050. 240

Figura 6.32 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro após o ajuste final dos tirantes e em 2050. 241

Figura 6.33 – Variação de tensão prevista nos tirantes de suspensão ao longo do processo construtivo e até 2050. 241

Figura 6.34 – Variação de tensão prevista nos tirantes de retenção ao longo do processo construtivo e até 2050. 241

Figura 6.35 – Diagramas de incrementos de tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro devidas a variações uniformes de temperatura de +15ºC e de -15ºC. 242

Figura 6.36 – Incrementos da deformada vertical do tabuleiro devidos a variações uniformes de temperatura. 243

Figura 6.37 – Deformada do Viaduto da Corujeira para uma variação uniforme de temperatura de +15ºC. 243

Figura 6.38 – Incrementos da deformada do tabuleiro devido ao levantamento dos apoios. 245

Figura 6.39 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o Encontro Oeste 246

Figura 6.40 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P1. 246

Figura 6.41 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P2. 247

Figura 6.42 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P4. 247

Figura 6.43 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro devido ao levantamento sobre o pilar P4. 248

Figura 6.44 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro devido ao levantamento sobre o pilar P4. 248

Figura 6.45 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P5. 249

Figura 6.46 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o Encontro Este. 249

Figura 6.47 – Incrementos de deformada do tabuleiro devidos à substituição dos tirantes T1 e T10. 250

Figura 6.48 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro antes e durante a substituição do tirante T1. 251

Figura 6.49 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro antes e durante a substituição do tirante T10. 251

Figura 6.50 – Incrementos de deformada do tabuleiro relativos devidos à substituição do tirante T1RN. 252

Figura 6.51 – Tensões nas fibras inferiores e superiores de betão ao longo do tabuleiro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN. 252

Figura 6.52 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN. 253

Figura 6.53 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN. 253

Índice de quadros

Quadro 3.1 – Deslocamentos na extremidade da consola. 79

Quadro 3.2 – Deslocamentos na extremidade da consola. 80

Quadro 3.3 – Deslocamentos. 81

Quadro 3.4 – Características geométricas da secção transversal da viga I. 88

Quadro 3.5 – Deslocamento vertical a meio vão. 89

Quadro 3.6 – Tensões instaladas no betão. 89

Quadro 3.7 – Características geométricas da secção transversal da viga em caixão. 94

Quadro 3.8 – Tensões instaladas. 95

Quadro 3.9 – Frequências. 104

Quadro 3.10 – Frequências de vibração de consola com massa distribuída. 105

Quadro 3.11 – Frequências de vibração do pórtico com massa distribuída. 106

Quadro 3.12 – Frequências de vibração do tirante com massa distribuída. 108

Quadro 4.1 – Coeficiente k_h. 115

Quadro 4.2 – Coeficientes α_{ds1} e α_{ds2}. 115

Quadro 4.3 – Coeficientes C_1 e C_2. 126

Quadro 4.4 – Armaduras das vigas LT-05 e LT-05Q. 149

Quadro 4.5 – Armaduras das vigas LT-08 e LT-08Q. 149

Quadro 4.6 – Historial de carregamento da viga LT-05. 149

Quadro 4.7 – Historial de carregamento da viga LT-08. 149

Quadro 4.8 – Historial de carregamento da viga LT-05Q. 149

Quadro 4.9 – Historial de carregamento da viga LT-08Q. 149

Quadro 4.10 – Propriedades dos materiais da viga LT-05..... 150

Quadro 4.11 – Propriedades dos materiais da viga LT-08..... 150

Quadro 4.12 – Propriedades dos materiais da viga LT-05Q..... 150

Quadro 4.13 – Propriedades dos materiais da viga LT-08Q..... 150

Quadro 4.14 – Definição das armaduras..... 154

Quadro 4.15 – Historial de carregamento. 155

Quadro 4.16 – Propriedades do betão aos 25 dias..... 155

Quadro 5.1 – Operações modeladas. 178

Quadro 5.2 – Tensão de rotura média à compressão dos betões do tabuleiro e do mastro..... 182

Quadro 5.3 – Módulos de elasticidade dos betões do tabuleiro e do mastro. 182

Quadro 5.4 – Extensões de retracção do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente. 184

Quadro 5.5 – Esforços medidos nos tirantes com base em ensaios de vibração. 203

Quadro 5.6 – Esforços medidos nos tirantes com base em testes *lift-off*. 204

Quadro 5.7 – Esforços aplicados nos tirantes..... 204

Quadro 5.8 – 1ª frequência natural dos tirantes de suspensão. 210

Quadro 5.9 – 1ª frequência natural dos tirantes de retenção..... 210

Quadro 5.10 – Frequências naturais estimadas para os primeiros 20 modos de vibração ao longo do processo construtivo..... 214

Quadro 6.1 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção aquando do fecho do tabuleiro. ... 220

Quadro 6.2 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003..... 220

Quadro 6.3 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003 (medidos versus estimados numericamente na 1ª iteração do processo de retroanálise)..... 221

Quadro 6.4 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003 (medidos versus estimados numericamente na 3ª iteração do processo de retroanálise). 221

Quadro 6.5 – Descrição, objectivos e sensores interessados em cada caso de carga..... 224

Quadro 6.6 – Operações modeladas numericamente. 225

Quadro 6.7 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1. 230

Quadro 6.8 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1. 230

Quadro 6.9 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3. 231

Quadro 6.10 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3. 232

Quadro 6.11 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5. 232

Quadro 6.12 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5. 233

Quadro 6.13 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6. 234

Quadro 6.14 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7. 235

Quadro 6.15 – Reacções durante as operações de levantamento de apoios. 244

Quadro 6.16 – Frequências naturais estimadas para os primeiros 20 modos de vibração desde o final da construção e até 2050. 254

Capítulo 1

Introdução

1. Introdução

1.1. Motivação

O desenvolvimento económico e social vivido nas últimas décadas em Portugal tem tido as mais diversas implicações, entre as quais a ampliação, modernização e reabilitação da rede de vias de comunicação existente. Uma gama alargada de novos conceitos relacionados com os modelos de financiamento, exploração e conservação da rede viária implicam a utilização de novas soluções a nível de concepção, projecto, construção e manutenção, de forma a optimizar os recursos disponíveis e controlar os custos. As obras de arte são uma área de grande importância na rede de vias de comunicação, pelo que soluções criativas e inovadoras têm sido utilizadas na sua construção, manutenção e reabilitação, e novos processos tem sido utilizados na procura de uma maior eficiência dos seus modelos integrados de gestão, nomeadamente a observação permanente de obras de arte.

Alguns trágicos acontecimentos ocorridos durante o processo construtivo de obras de arte, em Portugal (Ponte Vasco da Gama em 1997, Viaduto sobre o Rio Fanadia na Auto-estrada 15 em 2001, Ponte Sardão/Meirinhos em 2002) e no estrangeiro (Injaka Bridge na África do Sul em 1998, Ponte sobre o Almuñecar em Espanha em 2005, Ponte I-35W nos Estados Unidos da América em 2006, Ponte sobre o Rio Tuo na China em 2007), assim como durante a fase de exploração, em Portugal (Ponte de Entre os Rios em 2001) e no estrangeiro (Ponte Pedonal Maccabiah em Israel em 1997, Ponte pedonal Asagiri no Japão em 2001, Ponte Kadalundi na India em 2001, Ponte Velilonga na India em 2005, Viaduto em Laval no Canadá em 2006, Ponte pedonal de Chhinchu no Nepal em 2007), também contribuíram para que observação permanente de obras de arte em fase de construção, utilização ou reabilitação se tornasse num tema actual.

É neste enquadramento que o LABEST – Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Unidade de Investigação onde o autor se encontra integrado, tem desenvolvido um trabalho importante na área da monitorização e observação de estruturas, designadamente de obras de arte (Félix *et al.* (1999); Dimande *et al.* (2002); Félix *et al.* (2002b); Félix *et al.* (2002c); Figueiras *et al.* (2005); Rodrigues *et al.* (2009)), inserido num âmbito mais vasto que visa o desenvolvimento de um sistema de gestão de infra-estruturas ferroviárias e rodoviárias.

De facto, existe actualmente bastante experiência no desenvolvimento e aplicação de sistemas completos e eficientes de monitorização permanente de obras de arte. Baseados na medição e registo permanente de grandezas como deslocamentos, temperaturas, humidades, extensões e

rotações, estes sistemas possibilitam o acompanhamento constante das obras de arte em tempo real e em qualquer fase da sua vida. No entanto, a utilidade da informação recolhida está, em geral, directamente associada à utilização de modelos estruturais que permitam interpretar eficazmente os dados recolhidos.

Surge assim a necessidade de desenvolver um processo integrado de análise estrutural de obras de arte, interligando o sistema de monitorização permanente com modelos de análise estrutural perfeitamente validados e aferidos. Um modelo com estas características, desenvolvido de forma a ser eficiente, é numa ferramenta importante para o sistema de gestão de infra-estruturas ferroviárias e rodoviárias.

Uma vez que se pretende que o modelo se torne uma realidade prática, a eficiência que se pretende para o processo baseia-se na facilidade e robustez de utilização, e na precisão e utilidade dos resultados obtidos. Com a facilidade de utilização e robustez do modelo pretende-se diminuir a probabilidade de erro e alargar o número de utilizadores, nomeadamente aos técnicos das entidades responsáveis pela gestão de obras de arte.

A precisão e utilidade dos resultados obtidos estão intimamente ligados à interligação entre o sistema de monitorização e os modelos estruturais utilizados, e é aí que reside a dificuldade e inovação do desenvolvimento do processo integrado. Sendo os sistemas de monitorização passivos, funcionando apenas como uma fonte permanente de informação, é necessário dedicar atenção ao desenvolvimento de modelos computacionais de análise estrutural. Estes últimos devem então estar preparados para utilizar a informação obtida através da monitorização, possibilitando a comparação dos resultados da análise com os obtidos através da monitorização.

Uma forma de atingir os objectivos enunciados é através da utilização de modelos desenvolvidos de acordo com as especificações de cada obra de arte, ou tipo de obra. Desta forma pretende-se dotar os modelos computacionais de todas as funcionalidades necessárias a uma correcta e precisa análise e interpretação do comportamento estrutural da obra, tanto na fase construtiva como após a entrada em serviço. Através de modelos numéricos adequadamente aferidos deverá ser possível reproduzir, de uma forma correcta e computacionalmente eficaz, o carácter evolutivo do comportamento estrutural e das acções durante o faseamento construtivo, e no decurso das fases de exploração ou reabilitação das obras de arte.

Apesar dos avanços verificados em todos os domínios da análise estrutural, nomeadamente através da utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), a análise estrutural de obras de arte continua a ser um problema muito complexo. Esta complexidade advém de factores como o carácter evolutivo do comportamento estrutural e das acções ao longo do tempo, o comportamento reológico dos materiais, a utilização de pré-esforço ou a não-linearidade geométrica associadas à utilização de peças de grande esbelteza (nomeadamente os tirantes de suspensão), entre outros.

Actualmente existem inúmeros programas de modelação numérica baseados no MEF. Na família destes programas, muito generalistas, podem-se encontrar códigos computacionais como o Diana

(TNO DIANA (2009)) e o Ansys (Ansys Inc. (2009)), desenvolvidos sobretudo como ferramentas de investigação, que são capazes de efectuar análises complexas em diversas áreas através de uma grande quantidade de opções. Permitem a realização de diversos tipos de análise, como por exemplo estática linear e não-linear (material, de contacto, geométrica, etc.) e dinâmica (modal, espectral, no domínio do tempo, etc.). Permitem ainda a utilização de inúmeras leis materiais, métodos de resolução, tipos de elementos finitos (plano, cascas, 3D), e mesmo a inclusão de algumas funcionalidades desenvolvidas pelo utilizador. A elevada abrangência deste tipo de programas torna a sua utilização vocacionada para especialistas, embora a utilização de interfaces de pré e pós-processamento tenha vindo a contribuir para a sua maior divulgação junto da comunidade técnica.

Diminuindo o respectivo domínio de abrangência dos programas, existem programas, como o Sap2000 (Computers & Structures Inc. (2009)) ou o Autodesk Robot (Autodesk (2009)), que embora menos versáteis e com menos capacidade de intervenção por parte do utilizador do que os referidos anteriormente, são de mais fácil utilização e permitem, mesmo assim, um elevado número de análises de grande complexidade. Sendo muito utilizados por gabinetes e consultores de engenharia, possuem interfaces muito completas para facilitar a sua utilização e consequente difusão.

Ao contrário dos programas generalistas, em que os esforços de desenvolvimento são normalmente dirigidos para os métodos de análise e menos para as interfaces de pré e pós-processamento, estão actualmente disponíveis no mercado aplicações cuja função se centra sobretudo no dimensionamento. Este tipo de aplicações possui funcionalidades que vão desde o dimensionamento de elementos estruturais de acordo com diversos regulamentos, até ao desenho de pormenores de execução. No entanto são normalmente bastante fechadas, não dando ao utilizador grande margem de escolha, seja no tipo de análise a efectuar ou no tipo de elementos finitos a utilizar. Exemplos deste tipo de aplicações são, na área dos edifícios, o CypeCad (CYPE Ingenieros (2009)) e o Tricalc (Arktec S.A. (2009)), na área das obras de arte o Atena (Cervenka Consulting (2009)) e o Bentley Bridge (Bentley (2009)) e na área das estruturas metálicas o Strucad (AceCad Software (2009)) e o ProSteel 3D (StrucSoft Solutions (2009)).

Conforme foi referido, os programas comerciais de dimensionamento são geralmente vocacionados para o projecto de obras de arte correntes. De forma a aumentar a sua facilidade de utilização, estes programas utilizam normalmente soluções parametrizadas, com consequências na sua adequabilidade ao estudo de obras especiais. Um exemplo desta limitação são as leis de comportamento material instantâneo e diferido disponíveis, pois cingem-se muitas vezes às definidas nos regulamentos, que nem sempre são adequadas às especificidades das obras em estudo. Uma vez que os modelos são vocacionados para o dimensionamento de obras de arte e não para o seu acompanhamento permanente, os resultados obtidos não são, normalmente, directamente comparáveis com os resultados obtidos pela instrumentação da obra de arte, implicando trabalho acrescido na transformação de resultados. Sendo programas comerciais o seu código computacional é selado, não permitindo a sua alteração, nem o controlo dos parâmetros de análise utilizados, e

portanto dos resultados finais. Desta forma fica minimizada a sua flexibilidade e inviabilizada a introdução de novas funcionalidades.

Destas considerações acerca dos modelos de análise estrutural actualmente disponíveis conclui-se que estes não se adequam ao processo integrado que se pretende desenvolver. É neste contexto que se pretende aproveitar a experiência do autor da presente tese no desenvolvimento de modelos de análise estrutural (Ferraz (2001)) e no projecto de obras de arte.

1.2. A programação orientada por objectos

Foi considerado como essencial que o programa de cálculo a desenvolver no presente trabalho fosse dotado de grande flexibilidade, expansibilidade e facilidade de implementação e reutilização. Estes aspectos foram cruciais na selecção do paradigma de programação a adoptar no desenvolvimento do código, pelo que a escolha recaiu sobre a Programação Orientada por Objectos, doravante designada por POO. A POO provou nos últimos anos ser uma das mais rápidas e eficientes formas de programar código computacional científico robusto. As capacidades possibilitadas por esta nova forma de programar são inúmeras, e a sua utilização crescente vem demonstrando isso mesmo. A filosofia subjacente a este novo paradigma da programação é a de que um programa não é mais do que uma colecção de objectos inteligentes e interactivos, com capacidades muito claras e capazes de gerir informação de forma autónoma e eficiente.

No entanto, a alteração radical da estruturação do código computacional não permite, ou pelo menos dificulta sobremaneira, a sua integração em códigos antigos, nomeadamente os baseados na Programação Estruturada. Este aspecto é uma das principais causas da ainda pequena implementação da POO no desenvolvimento de código computacional na área da investigação científica, onde normalmente os progressos são efectuados através de melhoramentos implementados em código existente. Desta forma, torna-se ousada a adopção da POO como base do código computacional a desenvolver, uma vez que implica a necessidade de escrever todo o código de raiz.

A observação do panorama actual sobre o desenvolvimento de modelos de análise estrutural mostra que este é caracterizado pelo aumento da capacidade dos computadores pessoais e pela popularidade do MEF. O MEF foi originalmente desenvolvido para a análise estrutural, mas o carácter generalista da teoria tornou a sua aplicação possível em problemas de outros campos da engenharia, inclusivamente multidisciplinares, passíveis de serem descritos em termos de equações algébricas, diferenciais ou integrais (D'Souza (1994)). Este largo espectro de utilização torna o MEF perfeitamente indicado para a análise do comportamento de obras de arte, sendo uma das principais razões da sua escolha como base para o programa de cálculo a desenvolver na presente tese.

Programas baseados no MEF, mesmo que relativamente simples, podem ter associados algoritmos de programação bastante complexos, requerendo sofisticados padrões de escrita caso se pretenda que o código seja entendido e reutilizado por outrem (Cross *et al.* (1999)). Assim, a POO é propícia à programação de modelos computacionais de análise baseados no MEF devido à modularidade da

formulação deste último. De facto, os componentes básicos do MEF, como o nó, o elemento, o material, podem ser facilmente integrados no mundo dos objectos da POO com o seu próprio comportamento, estado e identidade (Commend e Zimmermann (2001)).

Em POO, o desenvolvimento de um programa de cálculo baseado no MEF requer um bom planeamento inicial, com vista à estruturação da família de objectos e do relacionamento entre eles. Uma vez que a referida estruturação é similar para qualquer programa de cálculo baseado no MEF, o seu desenvolvimento deverá ser feito de uma forma genérica, servindo de molde para a construção de qualquer programa subsequente. Uma estrutura desenvolvida desta forma não se trata de um código computacional executável, mas sim de um modelo de código para um domínio, usualmente designado por plataforma, ou em inglês *framework*. Numa óptica de optimização de esforços e recursos, garantindo a generalidade, extensibilidade e desempenho dos seus constituintes, a plataforma torna-se adequada ao uso e desenvolvimento por equipas multidisciplinares, tais como as de uma Unidade de Investigação, simplificando a execução de novos modelos computacionais e a inclusão de novas funcionalidades. Evidentemente que a criação de uma plataforma com estas características, implica um esforço muito superior ao do desenvolvimento de um único programa de cálculo. No entanto, a médio e a longo prazo os resultados poderão ser muito gratificantes, não apenas pela facilidade de construção de novos modelos, mas também pela qualidade, expansibilidade e facilidade de manutenção dos mesmos. Assim espera-se que a plataforma criada funcione como uma ferramenta de investigação, acessível a um conjunto alargado de utilizadores e programadores, e seja um reforço das competências científicas e tecnológicas do autor, da Unidade de Investigação e da comunidade em geral.

Uma vez desenvolvida a plataforma, esta deverá ser utilizada na construção de um programa de cálculo para avaliação do comportamento estrutural de pontes e viadutos durante todo o seu ciclo de vida. Vocacionado para o estudo de estruturas passíveis de serem simuladas através de elementos finitos de barra tridimensionais, com discretização da secção transversal por intermédio de fibras, o modelo deverá incorporar leis constitutivas e de comportamento dos materiais usualmente utilizadas neste tipo de obra. O modelo deverá ainda ser capaz de modelar todas as operações específicas decorrentes do processo construtivo e da utilização das referidas obras, como por exemplo a simulação dos cabos de pré-esforço, aparelhos de apoio ou cargas rolantes.

Tendo em conta a complexidade e sofisticação que tem de ser captada por este modelo, a aferição deste deve também ser considerada uma etapa essencial (Saraf e Nowak (1998); Maragakis *et al.* (2001); Zwicky e Vogel (2002)), devendo sempre que possível ser efectuada automaticamente através dos dados obtidos através dos sistemas de monitorização. Depois de aferido deve resultar um modelo realista da obra, capaz de projectar no tempo o comportamento desta, e servir para balizar e interpretar em tempo real os resultados da monitorização permanente instalada.

1.3. Objectivos

Do exposto conclui-se que são três os principais objectivos da presente tese:

i) Desenvolvimento de uma plataforma destinada à construção de modelos computacionais de análise estrutural baseada na POO;

ii) Implementação e validação de um programa de cálculo baseado no MEF para análise do comportamento estrutural de pontes e viadutos;

iii) Aplicação do programa desenvolvido na análise e interpretação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira.

Desenvolvimento de uma plataforma destinada à construção de modelos computacionais de análise estrutural baseada na POO

O primeiro objectivo que se pretende alcançar na presente dissertação é o desenvolvimento de uma plataforma, baseada na POO, designadamente através do Visual C# da Microsoft, destinada à construção de modelos computacionais de análise estrutural baseados no MEF. Esta plataforma deverá ser adequada ao uso por equipas multidisciplinares, recorrendo às novas tecnologias e paradigmas da programação.

Conforme se pode ver na Figura 1.1, são dois os principais componentes de uma plataforma deste tipo:

i) Uma biblioteca de objectos genéricos de gestão de dados;

ii) Uma biblioteca de componentes do MEF.

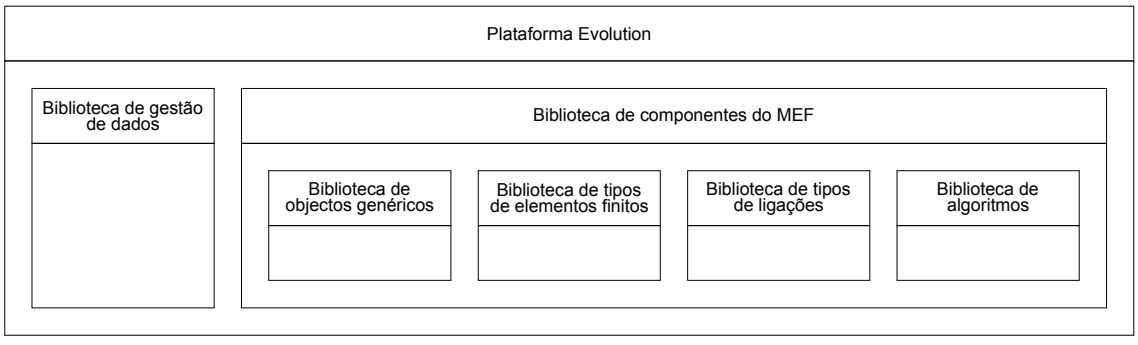


Figura 1.1 – Organização da plataforma *Evolution*.

Na componente i) encontram-se os objectos capazes de ler, armazenar e escrever informação, gerir os procedimentos matemáticos, sustentar a execução de interfaces gráficas e todos os procedimentos básicos relativos à gestão do código computacional. Esta biblioteca, composta por objectos muito generalistas, é a base da plataforma a desenvolver. A componente ii) é, por sua vez, composta por quatro bibliotecas relativas a: objectos genéricos do MEF, tipos de elementos finitos, tipos de apoios e ligações e algoritmos.

A implementação e validação de um programa de cálculo baseado no MEF para análise do comportamento estrutural de pontes e viadutos

O segundo objectivo da presente tese é a construção de um programa de cálculo para a análise e interpretação do comportamento estrutural, tanto na fase construtiva como após a entrada em serviço de pontes e viadutos. Este deverá ser capaz de modelar todos os aspectos particulares deste tipo de estruturas, como o faseamento construtivo, os ensaios de carga ou a fase de exploração. Na fase de projecto o programa de cálculo deverá estimar de forma eficiente todas as grandezas relacionadas com o comportamento estrutural da obra de arte, inclusivamente os resultados previstos pela instrumentação, desde o início do processo construtivo e durante a vida útil. Na fase de construção, e após a entrada em serviço do sistema de monitorização permanente, proceder-se-á a uma análise comparativa dos resultados previstos numericamente com os medidos pelos sistemas de monitorização instalados.

O programa de cálculo a desenvolver deverá então ser capaz de reproduzir com o máximo rigor não só a geometria da obra, em termos de secções e ligações ao exterior, mas também o comportamento dos materiais utilizados, o faseamento construtivo e o historial de carregamento (ver Figura 1.2). Embora a ênfase deva ser colocada no comportamento sob acções estáticas, incluindo quando necessário os efeitos associados ao comportamento reológico do betão e das armaduras de pré-esforço, deverão estar previstas algumas funcionalidades na área da dinâmica estrutural, como a possibilidade de determinar frequências e modos de vibração das estruturas em qualquer fase da sua vida.

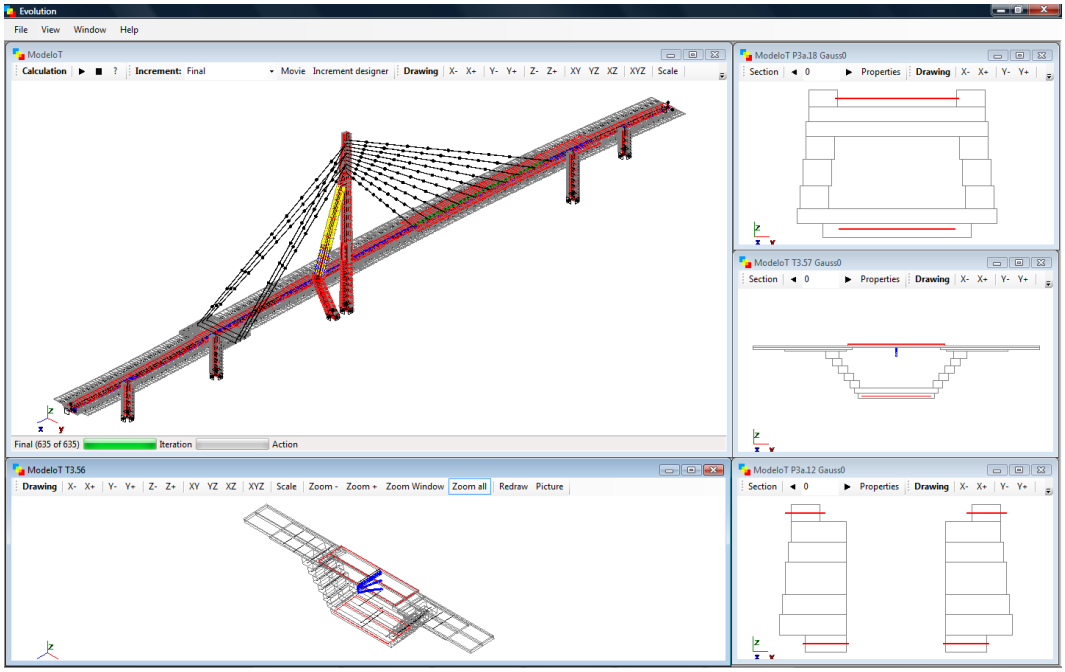


Figura 1.2 – Vista geral do programa de cálculo desenvolvido.

Uma vez que a análise estrutural deste tipo de obras se adequa a uma discretização através de elementos de barra, utilizar-se-á uma formulação baseada no elemento finito de viga (2D ou 3D) de

Timoshenko, com discretização da secção transversal por fibras. Implementar-se-ão formulações específicas para a modelação de armaduras passivas, cabos de pré-esforço embebidos e tirantes externos. Será considerada a não-linearidade geométrica em todas as formulações de forma permitir uma análise rigorosa de elementos esbeltos e tirantes externos. Os modelos materiais incluem a análise não-linear material e englobam os fenómenos de fluência, retracção e maturação do betão, assim como a relaxação do aço de pré-esforço.

Aplicação do programa desenvolvido na análise e interpretação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira

Neste objectivo proceder-se-á à aplicação do programa de cálculo desenvolvido, através da utilização de um modelo numérico eficazmente aferido, à análise e interpretação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira (ver Figura 1.3), de forma a evidenciar as potencialidades conseguidas e os aspectos que necessitam de desenvolvimentos futuros. O Viaduto da Corujeira está inserido na Alameda que liga a Praça das Flores à Praça da Corujeira, no Porto, e permite a passagem desnivelada das linhas de caminho de ferro, da rede de metropolitano e de vias rodoviárias, entre as quais a Via de Cintura Interna. A dimensão do conjunto de vias a transpor, associada à imposição de manutenção ininterrupta do tráfego nelas existente, conduziu à concepção de uma obra de arte pouco frequente em ambiente urbano. O processo construtivo da obra em estudo foi bastante complexo, envolvendo diversos métodos, desde o cimbre ao solo e a construção por avanços sucessivos utilizando cabos de pré-esforço embebido ou tirantes. Se a complexidade da obra e do seu processo construtivo a tornam um bom exemplo de teste para o modelo desenvolvido no presente trabalho, existem mais duas fortes razões para a respectiva escolha como exemplo de aplicação na presente tese: a existência de dados recolhidos por um sistema de monitorização permanente, desenvolvido e implementado pelo LABEST (Félix e Figueiras (2002a)), bem como de um ensaio de carga efectuado e monitorizado pelo LABEST (Félix *et al.* (2002b)).

Figura 1.3 – Viaduto da Corujeira no Porto (Vista aérea).

O Viaduto da Corujeira é um viaduto urbano, que se desenvolve segundo uma directriz recta e possui um comprimento total de 316.5m entre eixos dos encontros. Dividido em seis tramos com comprimentos entre os 23.0m e os 120.0m, o tabuleiro em betão armado pré-esforçado tem uma

largura de 18.0m, com secções de altura constante ou com altura a variar parabolicamente. O tramo central, com 120.0m, é suspenso por tirantes inseridos no plano médio da secção e convergentes no topo de um mastro, onde ancoram por cruzamento do fuste. A ligação do tabuleiro aos pilares e aos encontros é efectuada através de aparelhos de apoio de neoprene guiados, e a ligação ao mastro é monolítica.

1.4. Organização da tese

A presente tese foi dividida em sete capítulos, sendo o presente o Capítulo 1.

No Capítulo 2 faz-se um resumo da relação entre o MEF e os paradigmas de programação ao longo dos tempos. Expõem-se os princípios da programação orientada por objectos e a forma como estes foram utilizados na construção da plataforma desenvolvida. É ainda apresentada a composição da plataforma desenvolvida e algumas particularidades desta.

No Capítulo 3 é realizada uma breve introdução ao MEF para análise estrutural, da sua formulação geral e são descritas as formulações específicas dos elementos finitos utilizados. São ainda apresentadas as formulações referentes à simulação das condições de fronteira e descritos os algoritmos associados a procedimentos incrementais (geometria e acções), a soluções iterativas ou à resolução de problemas de análise modal. Termina-se o capítulo com algumas aplicações exemplificativas das formulações implementadas.

No Capítulo 4 apresentam-se as leis de comportamento dos materiais, a metodologia utilizada na simulação do comportamento diferido do betão e do aço de pré-esforço e as técnicas de resolução dos problemas não-lineares envolvidos. É ainda apresentada uma análise comparativa dos resultados obtidos através da aplicação dos modelos implementados e dos fornecidos pela monitorização de um ensaio laboratorial, relativo a uma viga de betão armado pré-esforçado simplesmente apoiada sujeita a duas cargas concentradas permanentes.

No Capítulo 5 descreve-se o processo construtivo do Viaduto da Corujeira, e o modelo numérico correspondente. Realiza-se ainda uma análise comparativa entre os resultados numéricos e os obtidos através do sistema de monitorização permanente instalado na referida obra, de forma a validar o modelo numérico e estudar o comportamento da obra ao longo do processo construtivo. É ainda efectuada uma análise modal ao longo de todo o faseamento construtivo da obra.

No Capítulo 6 é apresentado um ajuste do modelo numérico utilizado no capítulo anterior, sendo o modelo assim aferido utilizado em diversas análises estruturais, nomeadamente do ensaio de carga e na previsão do comportamento futuro da obra. É ainda efectuado um estudo do efeito de uma variação de temperatura uniforme, assim como analisadas diversas operações de manutenção, designadamente a substituição de aparelhos de apoio e de tirantes de suspensão e retenção. Por fim é realizada uma análise modal ao longo da fase de exploração do Viaduto da Corujeira.

No Capítulo 7 apresenta-se um resumo do trabalho desenvolvido, sintetizando os principais objectivos alcançados e indicando-se os desenvolvimentos previstos numa perspectiva de continuidade do presente trabalho.

Capítulo 2

A Programação Orientada por Objectos

2. A Programação Orientada por Objectos

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se as motivações subjacentes ao paradigma de programação escolhido para o desenvolvimento deste trabalho e da respectiva linguagem de implementação. Realiza-se uma breve introdução à Programação Orientada por Objectos, explicando os seus conceitos gerais de forma a poderem ser entendidos por um universo alargado de leitores. Expõe-se ainda a organização da plataforma desenvolvida, assim como as principais funcionalidades criadas e algumas das suas particularidades.

2.2. A evolução do MEF e das linguagens de programação

Durante os últimos 50 anos o MEF tornou-se na ferramenta numérica predominante em vários domínios. No campo da análise estrutural o MEF permite a realização de estudos e análises que, no estado actual do conhecimento, seriam dificilmente alcançáveis com outra ferramenta numérica (Mackerle (2004)). O desenvolvimento do MEF está directamente associado à evolução dos computadores, e ambos têm sido acompanhados pela evolução dos paradigmas de programação, desde a Programação Orientada por Procedimentos até à POO.

As primeiras linguagens de programação baseavam-se numa representação simbólica de instruções perceptíveis pelo computador, reduzindo o esforço da máquina na "tradução" do código, numa tentativa de economizar os escassos recursos dos computadores existentes. Este tipo de linguagem, designada "de baixo nível", como o Cobol ou o Algol, obrigava o programador a utilizar uma linguagem pouco perceptível, fluxogramas muito simples e tornava a programação acessível apenas a especialistas.

Durante os anos 70 do século XX o aumento da capacidade dos computadores em termos de processamento e armazenamento levou ao aumento da complexidade dos programas. De forma a facilitar a programação nasce o conceito de Programação Estruturada e surgem as linguagens "de alto nível" como o C, o Fortran ou o Pascal. Este tipo de linguagem utiliza alguns recursos para "traduzir" o código, mas permite a utilização de uma linguagem mais perceptível e uma programação mais flexível, possibilitando a criação de novas funcionalidades e a redução dos custos de programação e manutenção dos programas. Na Programação Estruturada as funções ou métodos são desenvolvidos com o objectivo de realizar uma tarefa, e só funções muito genéricas são passíveis de serem utilizadas noutros programas, pelo que o desenvolvimento de novas funcionalidades ou a actualização das existentes implica um considerável esforço de programação.

Foi durante os anos 90 que a utilização da POO se tornou corrente com o surgimento do *Java* ou do *Visual Basic*. O termo Programação Orientada por Objectos, em inglês *Object-Oriented Programming*, foi criado por Alan Kay, criador da linguagem *Smaltalk*, surgida no início dos anos 80. No entanto algumas ideias da POO eram já utilizadas em linguagens como o *Simula 67*, criada por Ole Johan Dahl e Kristen Nygaard em 1967 (David (2007)). Estas primeiras linguagens orientadas por objectos utilizam como base uma linguagem previamente existente, adicionando-lhe novas funcionalidades. Assim surge a possibilidade de utilizar objectos, mas estas linguagens não forçam o utilizador a adoptar este paradigma de programação e ainda possuem resquícios da Programação Estruturada. É no início da primeira década do século XXI que surgem linguagens orientadas por objectos num sentido mais puro, como o *Visual C#* e o *VisualBasic.Net*, onde tudo é orientado por objectos, desaparecendo definitivamente a Programação Estruturada. Na Figura 2.1 encontra-se esquematizado o nascimento e a evolução de algumas linguagens de programação (Brás (2003)).

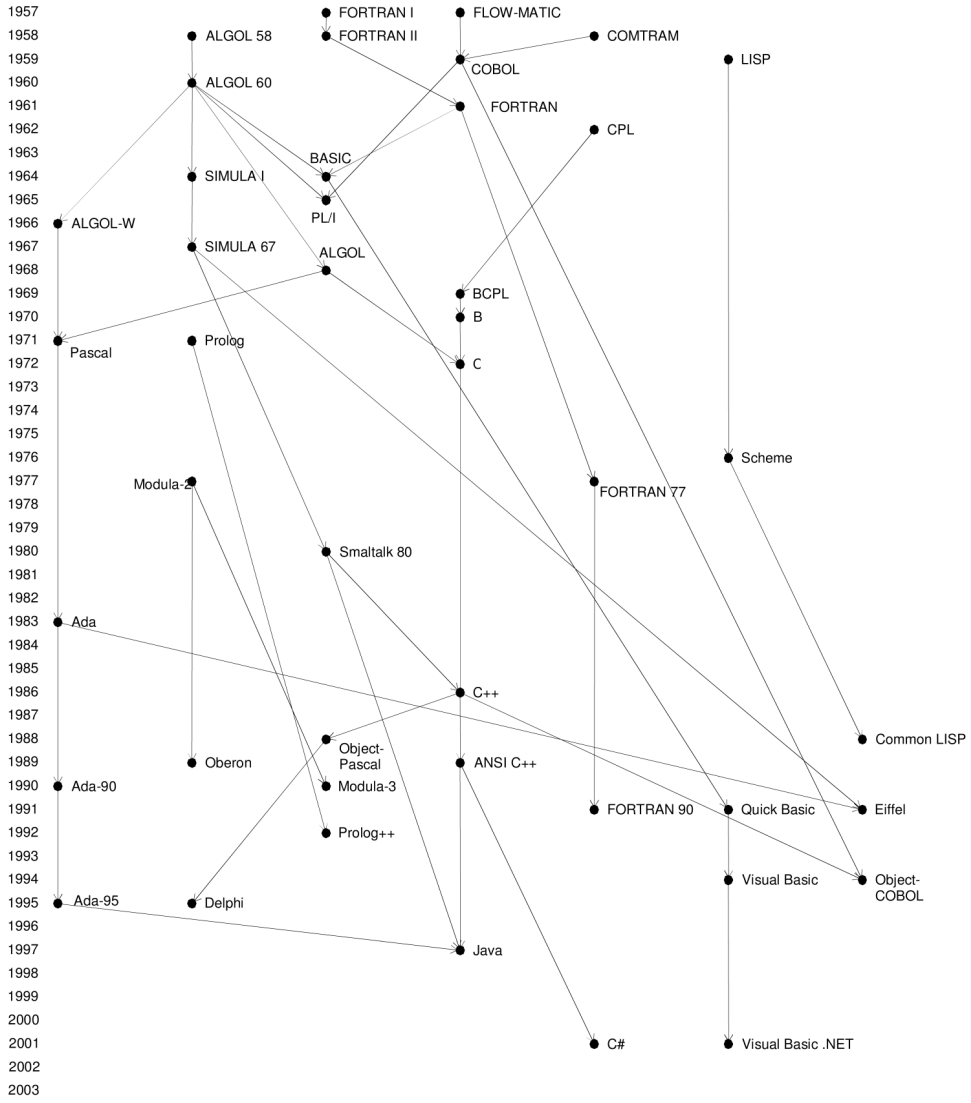


Figura 2.1 – Cronologia das linguagens de programação (Brás (2003)).

Talvez devido ao facto de terem surgido na mesma altura (anos 70 do século XX), o paradigma dos programas baseados no MEF foi durante muito tempo a Programação Estruturada, nomeadamente através do uso do *Fortran* e do *C*. Os modelos computacionais assim desenvolvidos são baseados na utilização de procedimentos (funções, subrotinas, etc.) que manipulam informação (números, matrizes, etc.). Nestes casos, sempre que um procedimento é utilizado é necessário fornecer a informação correcta, o que normalmente requer que o utilizador não só saiba o que o procedimento faz mas a forma como o faz. O código computacional obtido por esta via é, normalmente, complexo, muito específico e dependente do contexto, associado a um algoritmo em particular e a uma estrutura de dados bastante rígida. Interdependências na estrutura do programa são difíceis de detectar, implicando por parte do programador um elevado grau de conhecimento da totalidade do programa. Criado para resolver um determinado tipo de problema, normalmente dentro de uma área restrita, não é adequado a alterações, apresentando diversas dificuldades no desenvolvimento de novas funcionalidades e no tratamento de problemas multidisciplinares.

A solução para esta dificuldade recai normalmente na ligação de diversos modelos computacionais através de um código que gere algoritmos de interacção e transfere os dados entre eles. No entanto, a quantidade de informação manipulada pelo programa é enorme, originando estruturas de controlo e de dados muito complexas, tornando propícia a erros a respectiva implementação ou modificação. Apesar de esta solução ter sido utilizada frequentemente, na prática resulta em duplicação de implementação, redundância de informação e um esforço suplementar do computador na transformação e transferência de dados entre modelos (Dadvand (2007)).

É então necessário adoptar novas estratégias de organização do código, de modo a que novas funcionalidades possam ser introduzidas sem afectar o código previamente desenvolvido, e isto torna-se possível utilizando a POO. Utilizando este paradigma de programação a organização do código computacional mantém um apertado controlo sobre os dados e os procedimentos. Mantém os dados estruturados em entidades designadas “objectos”, em vez de manter os dados dispersos, e os procedimentos são atribuídos aos objectos e controlados por eles, em vez de permanecerem isolados (Dubois-Pélerin e Pegon (1998)).

Também a flexibilidade e reutilização do código computacional são incentivadas na POO, através da possibilidade de desenvolver formulações genéricas, especialmente nas linguagens mais recentes. Este tipo de formulações, designadas por “plataformas”, são constituídas por um conjunto de objectos genéricos e pela forma como estas se relacionam, e servem de base à execução de novos códigos computacionais. Algumas das vantagens da utilização de plataformas são:

i) A reutilização de código, pois as componentes genéricas são utilizadas em qualquer dos modelos desenvolvidos;

ii) A facilidade de manutenção e expansibilidade, pois as alterações e melhorias introduzidas na plataforma são automaticamente incorporadas em todos os modelos computacionais desenvolvidos sobre a mesma;

iii) A robustez do código, pois a estruturação das componentes e do fluxo de informação é centralizada na plataforma, e é comum a todos os modelos desenvolvidos sobre esta.

Após esta breve descrição da POO, evidenciam-se duas particularidades que a tornam especialmente adequada ao desenvolvimento de modelos computacionais de análise estrutural com base no MEF:

i) A natureza muito modular da formulação do MEF, pois a modularidade é uma das características mais relevantes da POO. De facto, os constituintes básicos do MEF, como os nós, os elementos e o material, são passíveis de ser simulados através de objectos.

ii) O carácter generalista da formulação do MEF é adequado à implementação de modelos evolutivos, pois o desenvolvimento de formulações genéricas é possível, e mesmo incentivada, na POO.

Através da utilização de novos conceitos como objectos, classes, interfaces, hereditariedade, polimorfismo e encapsulamento, a POO permite uma eficiência, flexibilidade e reutilização de recursos inimaginável nas linguagens precedentes. Foi neste enquadramento que, apesar da experiência do autor da presente dissertação no desenvolvimento de código em *Fortran* para a análise de obras de arte (Ferraz (2001)), se optou por desenvolver novo código, baseado na Programação Orientada por Objectos. A escolha da linguagem de implementação do código recaiu sobre o *Visual C#*, incluído no *Microsoft Visual Studio*.

2.3. Conceitos da Programação Orientada por Objectos

A POO procura simular o mundo real no computador, sendo que para isso utiliza objectos, uma vez que o mundo real é também composto por objectos. Desta forma "…um programa orientado por objectos não é mais do que uma colecção de objectos inteligentes e interactivos…" (Cross *et al.* (1999)).

Ao contrário da Programação Estruturada, que se baseia sobretudo na utilização de funções ou métodos dependentes de variáveis globais ou passadas como parâmetros, a POO baseia-se na utilização de objectos e na forma como estes vão interagir. A fim de tirar proveito das potencialidades da POO, o programador deverá ter em atenção que qualquer objecto deverá ser passível de ser utilizado noutros programas, desenvolvendo-o da forma mais genérica possível.

Uma das principais vantagens da POO reside na simplicidade de relacionamento entre objectos. Desta forma a divisão do código torna-se mais lógica, permitindo uma mais fácil manutenção e extensão daquele, e um menor risco de introdução de erros. Desde que exista um bom planeamento inicial, a gestão do desenvolvimento do código, nomeadamente quando estão envolvidos simultaneamente diversos programadores, torna-se muito simplificada, pois é possível desenvolver partes do modelo de forma completamente autónoma. No entanto, um mau planeamento inicial poder ser muito difícil de corrigir posteriormente, e comportar custos de desenvolvimento mais elevados.

Uma das desvantagens da POO é a aprendizagem do paradigma de programação, bastante mais complicado do que na Programação Estruturada, pois para começar o mais simples dos programas é necessário compreender uma série considerável de conceitos. No entanto, na execução de código de média ou elevada complexidade rapidamente se recupera o tempo gasto na aprendizagem da linguagem, devido às vantagens atrás enunciadas. Outra desvantagem da POO reside no desempenho em tempos de execução do código, uma vez que a linguagem se distancia bastante das linguagens de baixo nível perceptíveis pelo computador, obrigando a um maior esforço da máquina em termos de interpretação. No entanto a evolução dos computadores nos últimos anos tem vindo a minimizar esta desvantagem.

2.3.1. Objecto

A melhor forma de perceber o conceito de objecto, no sentido da POO, é encará-lo como um "fornecedor de serviços que é vivo, responsável e inteligente" (Cross *et al.* (1999)). Um objecto é "vivo", pois tem a capacidade de se criar e destruir, é "responsável", pois monitoriza a integridade da sua própria informação e não autoriza nenhum pedido que possa violar essa integridade, e é "inteligente", pois é capaz de seguir as instruções do utilizador sem que este necessite de saber como essas instruções são realizadas (Cline e Lomov (1995)). O objecto fornece um serviço aos seus clientes, os objectos que o utilizam, atingindo os objectivos propostos de forma clara nas suas especificações.

A base da POO é a abstracção, no sentido em que cada um dos constituintes do programa não necessita de saber quais são, nem como são, os restantes constituintes daquele. Na POO o programador é responsável pela moldagem do mundo dos objectos, e por definir de que forma estes devem interagir entre si, sendo que a comunicação é conseguida através do envio de mensagens.

Assim a definição de objecto no presente contexto é conceptualmente similar ao de um objecto do mundo real, definido pelo seu estado (atributos) e comportamento (métodos). Os atributos, conhecidos como variáveis em diversas linguagens de programação, são os elementos que determinam o estado de cada objecto, e podem inclusivamente ser outros objectos. Caso um objecto possua como atributos outros objectos, aquele passará a ser designado como "dono" (em inglês *owner*), e os objectos por ele possuídos como "membros" (em inglês *members*). Os métodos definem as habilidades de cada objecto e são invocados através do próprio objecto; neste sentido mensagem é a chamada a um objecto para invocar um dos seus métodos. As mensagens enviadas a um objecto podem alterar o valor de um ou mais dos seus atributos, alterando o estado do objecto. Um aspirador, por exemplo, possui um estado definido através de *ligado* ou *desligado*, e um comportamento definido por *ligar* ou *desligar*.

A grande vantagem do uso de objectos ou empacotamento do código (em inglês *bundling*), em objectos individuais é o facto de possibilitar o "encapsulamento", ou seja, a utilização de atributos e métodos conhecidos sem necessidade de conhecimento da sua estrutura interna. Do encapsulamento advêm muitas vantagens, entre as quais:

i) Simplicidade: a especialização do código dentro de cada objecto torna a divisão do código bastante lógica e consequentemente menos extensa;

ii) Facilidade de gestão: uma vez que o código pode ser desenvolvido e implementado sem necessidade de se conhecer o código dos restantes objectos, resulta uma modularidade particularmente importante no desenvolvimento por equipas de diversos programadores;

iii) Confidencialidade: interagindo exclusivamente através dos seus métodos a implementação do código fica escondida dentro do próprio objecto, permitindo ocultar os procedimentos inerentes a um determinado método;

iv) Reutilização: uma vez criado um objecto para um determinado fim, mesmo que por outro programador, aquele pode ser utilizado em qualquer código desenvolvido que necessite das capacidades associadas a esse objecto;

v) Encaixe: desde que um objecto cumpra os requisitos de interface implementados por um determinado código, aquele pode ser utilizado no código sem que o programador ou o próprio código tenham conhecimento das especificidades internas do referido objecto.

vi) Robustez: toda a parte encapsulada pode ser alterada sem que os usuários da classe em questão sejam afectados.

Voltando ao exemplo do aspirador, a caixa deste permite o encapsulamento, protegendo o utilizador dos mecanismos internos e o aspirador das acções do utilizador, ficando a comunicação entre o aspirador e o utilizador perfeitamente definida e limitada à utilização dos botões. Pode-se *ligar* ou *desligar* o aspirador utilizando os botões existentes, que funcionam como interface, sem saber como funciona o motor. Isto permite, por exemplo que se substitua o motor sem ser necessário alterar a forma de usar o aspirador. Esta simplicidade de comunicação permite que o aspirador seja utilizado por inúmeros utilizadores, independentemente do seu grau de especialização, de uma forma segura e robusta.

2.3.2. Classe

De forma simplificada, em POO uma classe representa um molde que permite a criação de objectos, definindo os métodos e atributos de um conjunto de objectos com características afins. Assim, o objecto mais não é que uma instância, ou concretização, de uma classe.

Uma *Pessoa* pode ser considerada uma classe que possui atributos como o *nome*, a *idade* ou a *altura*, e métodos como *respirar*, *comer* ou *trabalhar*. Uma instância de *Pessoa* pode ser o objecto cujo nome é *Miguel* que, apesar de carregar todas as características do molde *Pessoa*, é completamente independente das outras instâncias de *Pessoa*, como *Pedro* ou *Manuel*.

Os atributos e métodos de uma classe podem ser “estáticos” ou de “instância”, sendo os primeiros comuns a todos os objectos da mesma classe, e os segundos particulares de cada instância dessa classe. Caso a *Classe Animal* fosse um atributo da classe *Pessoa*, este atributo poderia ser estático

uma vez que *Mamífero* seria o único valor possível para esse atributo em qualquer objecto da classe *Pessoa*. Já o atributo *Nome* tem de ser um atributo de instância, uma vez que é definido de forma particular para cada objecto.

Para que seja possível a criação de objectos de uma determinada classe é necessário que este possua um ou mais métodos para a sua iniciação, designados por "construtores". Os construtores podem receber ou não informação do exterior, e ser de diversos tipos, sendo os mais usuais os seguintes:

i) "Defeito", onde a classe é iniciada atribuindo a todas os atributos valores por defeito;

ii) "Iniciação", em que se inicia a classe utilizando os valores a conferir aos atributos da classe;

iii) "Cópia", sendo a classe iniciada utilizando como parâmetro de passagem outro objecto do mesmo tipo, e copiando todos os atributos deste.

Normalmente a robustez de uma classe é proporcional ao nível de abstracção da programação, ou encapsulamento, e a flexibilidade é inversamente proporcional àquela. Desta forma é necessário definir um equilibrado nível de abstracção, o que depende directamente da forma como os atributos e os métodos de uma determinada classe podem ser acedidos através do exterior. São diversos os tipos de acesso aos atributos e métodos de uma classe, por exemplo:

i) "Público", em que os atributos e métodos podem ser acedidos directamente através de outra classe ou outro qualquer componente do programa;

ii) "Privado", sendo que neste caso os atributos e métodos apenas podem ser acedidos por componentes da própria classe;

iii) "Protegido", onde os atributos e métodos podem apenas ser acedidos por componentes da classe ou de classes derivadas.

Apenas os atributos e métodos declarados como públicos possibilitam a comunicação da classe com outros objectos.

2.3.3. Hereditariedade

A hereditariedade, ou herança, é um princípio da POO que permite criar uma classe descendente, designada por "subclasse", tendo como base outra classe ascendente, designada por "classe base". Utilizando os atributos e métodos da classe base, a subclasse é construída adicionando atributos e métodos próprios. Desta forma é possível a criação de classes especializadas a partir de classes genéricas, eliminando-se a repetição de código, pois uma vez criadas as classes base novas classes são geradas muito rapidamente. O conjunto da classe base e de todas as suas subclasses designa-se por "família".

Exemplificando, se se quiser criar as classes *Aluno* e *Professor* pode-se utilizar a hereditariedade fazendo-as descender de *Pessoa*, mantendo todos os atributos e métodos desta e adicionando os novos atributos e métodos que as tornarão em subclasses. No caso da subclasse *Aluno* um novo atributo poderia ser o *Número de aluno* e um novo método poderia ser *Estudar*, enquanto na subclasse *Professor* um novo atributo poderia ser o *Cargo* e um novo método *Ensinar*.

Este princípio permite que classes que possuam atributos ou métodos semelhantes sejam repetidamente criados, permitindo uma reutilização de código e possibilitando que alterações e melhoramentos na classe base sejam automaticamente implementados nas classes descendentes, com todas as vantagens que daí advêm.

2.3.4. Polimorfismo

O polimorfismo é uma propriedade importante da classe, pois permite que um método possa ser implementado de diversas formas, ou realizar coisas diferentes. Existem dois tipos de polimorfismo, designadamente:

i) "Sobrecarga", onde numa mesma classe se utilizam métodos com o mesmo nome mas com argumentos diferentes, permitindo uma simplificação enorme do código desenvolvido baseado na especificação dos métodos. Por exemplo, na classe *Pessoa* o método *Comer* pode ser definido de forma diferente caso o argumento seja *Batata* ou *Sopa*. Assim, não é necessário dentro do método proceder à análise da comida, uma vez que o método utilizado só funciona para um determinado tipo desta.

ii) "Sobreposição", quando numa subclasse se redefine um método herdado da classe base mantendo a designação e o tipo de argumentos. Esta redefinição pode ser efectuada através do estabelecimento de um comportamento distinto do definido na classe base, ou utilizando a função original da classe base mas introduzindo algumas alterações particulares. O método *Trabalhar* implementado na classe *Pessoa* pode ser definido nas subclasses *Professor* e *Aluno* de forma diferente, sendo que na subclasse *Professor* o método *Trabalhar* deve originar a acção de *Ensinar*, e na classe *Aluno* deve originar a acção de *Estudar*.

Como se viu a utilização de polimorfismos vai de encontro ao elevado nível de especialização que se pretende que exista na POO, permitindo que a semântica de um método seja efectivamente separada da implementação que a representa.

2.3.5. Interface

A interface, ou protocolo, é uma característica que permite isolar a implementação de um componente do código, funcionando como um contrato entre a classe e o resto daquele, definindo um conjunto de métodos que a classe deve suportar. Quando uma classe implementa uma interface fica obrigada a fornecer o comportamento publicado pela interface, tornando a classe mais formal na sua relação com os restantes constituintes do código.

Suponha-se que se pretende criar uma classe *Escritor* que escreve o nome de qualquer objecto, seja este um *Aspirador* ou uma *Pessoa*. Aquela classe só poderá escrever o nome de um objecto que de facto possua um nome, desta forma a classe deverá impor a condição de que só analisa objectos de classes que implementam o método *Nome*. Esta obrigatoriedade pode ser conseguida através da utilização de uma interface. Definindo a interface *INome* que inclui entre os seus métodos o *Nome* fica garantido que qualquer classe que implemente esta interface tem de obrigatoriamente implementar o método *Nome*. Obrigando a classe *Escritor* a apenas aceitar pedidos de classes que implementem a interface *INome* fica garantido que esta será capaz de escrever o nome de qualquer um destes objectos. Assim, caso as classes *Aspirador* e *Pessoa* implementem a interface *INome* pode ser fornecido à classe *Escritor* um conjunto de objectos composto por aspiradores e pessoas, que, independentemente da sua origem, ela terá a capacidade de escrever o nome de todos eles.

No C# não existe herança múltipla, ou seja, cada classe pode herdar apenas de uma só classe. No entanto é possível uma classe implementar várias interfaces, e desta forma ser utilizada em diversos contextos. O princípio da interface é a base da programação modular, parte integrante e precursora da POO, e é uma das características fundamentais de que se pretendia dotar o programa de cálculo a desenvolver no âmbito da presente tese.

2.3.6. Bibliotecas de ligação dinâmica ou *DLLs*

As bibliotecas de ligação dinâmica (em inglês *Dynamic Linking Library*) são a implementação feita pela *Microsoft* para o conceito de bibliotecas partilhadas, versões actuais das *librarys* utilizadas nas antigas linguagens de programação. Estas bibliotecas podem conter dados, classes ou outros tipos de informação, e possuir ou não referências a outras bibliotecas. Uma vez que não é usual a utilização da nomenclatura em português para as bibliotecas de ligação dinâmica, doravante utilizar-se-á a sigla *DLL* para as referir.

O propósito inicial das *DLL* foi o de economizar espaço em disco e memória necessária para os aplicativos, uma vez que parte do código está num arquivo independente acessível por qualquer aplicação, e o computador apenas carregará esse código em memória caso uma aplicação necessite de o aceder. Desta forma utilizam-se mais bibliotecas mas com uma dimensão muito reduzida, que o computador lê apenas à medida que necessita delas. Pelo contrário, na Programação Estruturada se vários programas usarem a mesma rotina o código não só deve ser introduzido em todos eles, como será carregado em memória mesmo que os programas não necessitem dele permanentemente.

As *DLL* são parte importante na busca da modularidade, pois permitem que sejam feitas alterações no seu código, encapsulado, compartilhado por vários aplicativos, sem que seja necessária qualquer modificação destes. No entanto a sua utilização pressupõe uma organização rigorosa das classes ascendentes, de forma a torná-las genéricas e ao mesmo tempo robustas.

Um aspecto interessante na utilização de *DLL* é o de ser possível, dentro de algumas restrições, o funcionamento numa mesma aplicação de *DLL* desenvolvidas em diferentes linguagens de programação. Esta particularidade permite que um programador não familiarizado com a linguagem

de eleição da aplicação, no presente caso *C#*, possa ainda assim desenvolver código útil em *DLL* noutra linguagem em que está mais familiarizado, alargando sobremaneira o potencial leque de programadores possíveis para funcionalidades futuras.

2.3.7. Interfaces genéricas para encaixe ou *plugins*

Uma grande vantagem da modularidade associada às *DLL* é a utilização de interfaces genéricas para encaixe (em inglês *plugins*). Um *plugin* é um programa que interage com uma aplicação anfitriã para fornecer uma função por encomenda, normalmente muito específica. Uma das primeiras formas de utilizar *plugins* na programação de métodos numéricos foi a geração gráfica e a visualização de dados (Cross *et al.* (1999)). No entanto, o seu uso foi posteriormente muito alargado. As razões para as aplicações utilizarem *plugins* são diversas, entre as quais:

i) Permitir a colaboradores externos a criação de novas capacidades sem acesso ao código base da aplicação;

ii) Permitir a introdução de conteúdos inicialmente não previstos;

iii) Reduzir o tamanho de uma aplicação;

iv) Separar o código base de uma aplicação devido a incompatibilidade de licenças.

Na Figura 2.2 é apresentado um esquema de funcionamento de um *plugin*, de acordo com John Prikkel (Wikipedia (2009)).

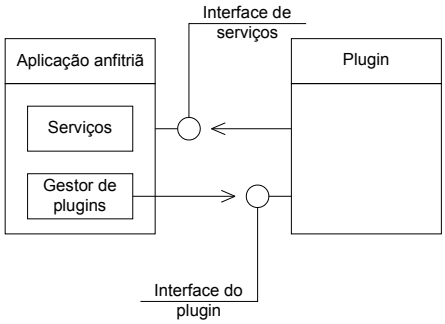


Figura 2.2 – Esquema de funcionamento de um *plugin.*

Normalmente um *plugin* não funciona por si mesmo, dependendo dos serviços disponibilizados pela aplicação anfitriã, sendo o seu campo de actuação perfeitamente definido. A aplicação anfitriã fornece serviços que o *plugin* pode utilizar, e que inclui uma forma de o *plugin* se registar na aplicação anfitriã e uma interface para comunicarem com aquela. Inversamente as aplicações anfitriãs funcionam independentemente dos *plugins*, tornando possível ao utilizador adicionar ou actualizar os *plugins* sem necessidade de introduzir alterações na aplicação anfitriã.

A utilização de *plugins* permite a construção de aplicações feita à medida para um determinado fim, disponibilizando apenas as funcionalidades pretendidas, sem necessidade de qualquer intervenção no código.

2.4. A linguagem Visual C#

O *Visual C#* é uma linguagem de programação orientada por objectos, simples e poderosa. Desenvolvida pela Microsoft como parte da plataforma *.Net*, é considerada por muitos a linguagem símbolo do *.Net*. Em 1999 o desenvolvimento da linguagem foi coordenado por Anders Hejlsberg, arquitecto de alguns compiladores da Borland, por exemplo o *Turbo Pascal* e o *Delphi*. Ao contrário de algumas linguagens anteriores, como o *C++*, o *C#* é uma linguagem verdadeiramente orientada por objectos, uma vez que foi praticamente criada do zero para funcionar na nova plataforma, sem preocupações de compatibilidade com código anterior. As várias inovações introduzidas pelo *C#* permitem o desenvolvimento rápido de aplicações, mantendo a expressividade e a elegância das linguagens do tipo da linguagem *C*.

O *Microsoft Visual Studio* é um pacote de programas da *Microsoft* para desenvolvimento de software, especialmente dedicado à plataforma *.Net* e às linguagens *Visual Basic*, *C*, *C++*, *C#* e *F#*. A plataforma *Microsoft .Net*, usualmente conhecido por *.Net Framework* ou simplesmente por *.Net*, é uma iniciativa da empresa *Microsoft* e um componente essencial do *Windows*, que visa uma plataforma única para desenvolvimento e execução de modelos e aplicações. O *.Net* oferece suporte à criação e execução da próxima geração de aplicativos e serviços, e foi criado para, entre outros objectivos, fornecer um ambiente de programação por objectos consistente e minimizar os conflitos de implementação e versionamento de software.

A biblioteca de classes do *.Net* fornece acesso a vários serviços do sistema operativo e outras classes úteis e bem estruturadas, que aceleram significativamente o ciclo de desenvolvimento de código computacional. Todo e qualquer código gerado para *.Net* pode ser executado em qualquer dispositivo que possua uma plataforma *.Net*. Num processo semelhante ao da plataforma *Java*, o programador deixa de escrever código para um sistema ou dispositivo específico, e passa a escrever para a plataforma *.Net*.

Os dois componentes principais do *.Net* são a *Common Language Runtime* (*CLR*) e a biblioteca de classes (Microsoft (2009)). De uma forma simplificada pode-se dizer que a *CLR* dirige o código no tempo de execução, fornecendo serviços principais como a gestão de memória e a arquitectura de comunicação remota. A biblioteca de classes é uma colecção orientada por objectos de tipos reutilizáveis para desenvolver aplicativos, e organizadas num conjunto de *namespaces*. Os *namespaces* agrupam classes com funções similares, por exemplo *System.Drawing* para gráficos, *System.Collections* para estruturas de dados ou *System.Math* para operações matemáticas, e o programador pode adicionar novos *namespaces* ou novas classes aos *namespaces* existentes.

2.5. A plataforma *Evolution* desenvolvida

Conforme referido, um dos objectivos da presente tese é o desenvolvimento de uma plataforma baseada na POO, destinada à construção de modelos computacionais de análise estrutural através do MEF. Desta forma, construiu-se uma plataforma baseada na generalidade, reutilização e extensibilidade dos respectivos constituintes, e adequada ao uso por equipas multidisciplinares,

designada por *Evolution*. Foi dispendido um esforço significativo no desenvolvimento de raiz do código computacional inteiramente orientado por objectos, de forma a utilizar as capacidades da POO em todo o seu alcance.

No código computacional desenvolvido pretendeu-se sobretudo criar uma família de objectos bem estruturada, constituída por objectos robustos e flexíveis, passível de dar origem às mais diversas funcionalidades. Os objectos criados são diversos, desde os mais simples dedicados à leitura e escrita de ficheiros, às interfaces gráficas ou ao manuseamento de funções matemáticas, até a objectos dedicados à implementação de elementos finitos, leis de comportamento material ou análise de modos de vibração. Estes objectos têm em comum a capacidade de poderem ser aperfeiçoados e expandidos de forma autónoma e simples.

São dois os principais componentes da plataforma desenvolvida que se apresentam nas secções seguintes: uma biblioteca de objectos genéricos de gestão de dados e uma biblioteca de componentes do MEF. Não se pretende fazer uma exposição exaustiva das classes desenvolvidas, mas sim expor o suficiente para que se possa entender a organização da plataforma *Evolution*.

2.5.1. Biblioteca de objectos genéricos de gestão de dados

A biblioteca de objectos de gestão de dados, designada por *Evolution.Core*, foi desenvolvida de uma forma totalmente genérica para poder servir outros fins que não apenas a construção da plataforma em causa. As suas componentes principais estão organizadas de acordo com os seguintes *namespaces*:

i) *Evolution.Text* – Classes responsáveis pela gestão de texto, nomeadamente gestão de formatos, leitura e escrita de ficheiros de dados.

ii) *Evolution.Maths* – É uma extensão de *System.Math* (componente da plataforma do sistema operativo) que reúne os objectos responsáveis pelas operações matemáticas desenvolvidas, entre as quais as relativas a operações matriciais, métodos de integração e gestão de séries.

iii) *Evolution.Drawing* – Aqui encontra-se o motor de desenho tridimensional desenvolvido, composto por objectos gráficos básicos (como pontos, linhas, polígonos ou texto), e objectos gráficos compostos (como setas ou outros símbolos). Fazem também parte do motor de desenho os objectos responsáveis pelas operações necessárias ao desenho tridimensional com conversões de escala, planificação de desenhos tridimensionais ou exportação de desenhos em diferentes formatos.

iv) *Evolution.Plugins* – Gestor de *plugins* e o respectivo manual de utilização automático.

v) *Evolution.Basic* – Implementação da interface *IBasic*, responsável pela gestão da comunicação entre objectos.

A gestão da comunicação entre objectos de todas as aplicações está baseada na interface *IBasic*, tendo este facto repercussões a todos os níveis, seja na estruturação das famílias de classes ou na

organização de ficheiros de dados ou resultados. Através da observação da Figura 2.3 pode ver-se que a interface *IBasic* é muito simples, impondo a existência de apenas quatro métodos, designadamente *Name*, *FullName*, *Owner* e *BasicList*.

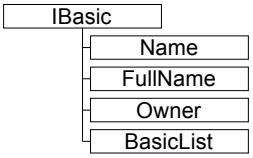


Figura 2.3 – Interface *IBasic.*

Qualquer classe que implemente *IBasic*, respeitando as condições impostas pela interface, é um *IBasic*. No entanto, de forma a não ser necessário implementar sucessivamente os mesmos métodos em todas as classes, e de poder concentrar apenas num local a definição destes, criou-se a classe *vBasic*. De forma a não tornar demasiado extensa a apresentação desta biblioteca apenas se fará uma referência sucinta a esta classe, devido à importância da mesma no desenvolvimento da plataforma *Evolution*. A classe *vBasic* é uma classe virtual, pois existe apenas com o intuito de servir de ascendente a toda a família de objectos desenvolvidos através da implementação da interface IBasic de uma forma genérica. Desta forma a classe *vBasic* é a base da maioria das classes desenvolvidas, pelo que qualquer alteração àquela classe introduz alterações às restantes classes da aplicação. A classe *vBasic*, apresentada na Figura 2.4, contém apenas três atributos, designadamente *pName*, *pOwner* e *pBasicList*, e sete métodos, os quatros impostos pela interface *IBasic* e mais três, *Draw*, *Import* e *Write*.

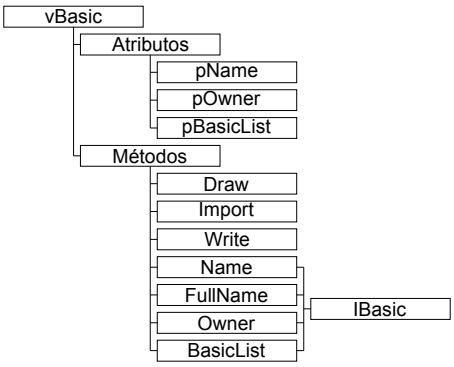


Figura 2.4 – Organização interna da classe *vBasic.*

O atributo privado *pName*, acedido do exterior do objecto através do método *Name*, serve para identificar o objecto pelo seu dono, uma vez que um objecto não pode ter vários membros com o mesmo nome. No entanto não é suficiente para identificar o objecto de uma forma unívoca pela aplicação, uma vez que nesta poderão existir diversos objectos com o mesmo nome. Assim o método *FullName* cria uma designação para o objecto que, além do respectivo nome próprio, inclui o *FullName* do dono, criando desta forma uma identificação do objecto unívoca para a aplicação.

A gestão do relacionamento entre objectos assenta fundamentalmente nos métodos *Owner* e *BasicList* que permitem, respectivamente, o acesso às variáveis privadas *pOwner* e *pBasicList*. A

variável *pBasicList* não é mais do que uma lista de objectos que são do tipo *vBasic*, e ao mesmo tempo membros do objecto em causa; por sua vez a variável *pOwner* é um apontador para o objecto que possui o objecto em causa, ou seja, o respectivo dono. Quando um objecto cria um dos seus membros adiciona-o automaticamente à sua *pBasicList* e o objecto criado armazena no seu apontador *pOwner* uma referência ao objecto que o criou.

Uma vez que todos os objectos da aplicação são descendentes da classe *vBasic*, é possível armazenar na lista *pBasicList* qualquer objecto. Por exemplo, a estrutura de uma ponte (classe *STRUCTURE*) é constituída por um conjunto de membros que podem ser nós (classe *NODE*), elementos finitos (classe *ELEMENT*), apoios (classe *LINK*) ou outros; no entanto todos podem ser armazenados na mesma lista, *pBasicList*, independentemente da sua classe, uma vez que descendem todos da classe *vBasic*. Esta capacidade é extremamente importante uma vez que permite a integração de novas classes, baseadas em *vBasic* ou nos seus descendentes, designadamente através da utilização de *plugins*, sem que haja necessidade de proceder a qualquer alteração dos atributos das classes existentes.

A simplicidade da classe *vBasic* permite um nível de abstracção muito elevado, fundamental para uma boa reutilização do código, e permite a criação de uma família de classes bastante consistente e bem estruturada, que por sua vez facilita a utilização da hereditariedade.

As funções de desenho, leitura e escrita, acessíveis através dos métodos *Draw*, *Import* e Write implementados na classe *vBasic*, estão disponíveis para todas as classes descendentes desta, através da hereditariedade, podendo as classes descendentes utilizar directamente os métodos originais, ou através de sobrescrita introduzir alterações aos mesmos, e posteriormente utilizar os métodos originais. Estes três métodos utilizam a *BasicList*, para que quando um deles é activado todos os seus membros da lista sejam instruídos a fazer o mesmo. A utilização conjunta da hereditariedade e das listas de membros permite uma enorme robustez e facilidade de programação.

Voltando ao exemplo da estrutura da ponte, caso se pretenda desenhá-la basta pedir ao objecto *STRUCTURE* que utilize o método *Draw*. Este pedido activa o método *Draw* de *STRUCTURE*, que vai proceder ao desenho da informação do objecto (estrutura da ponte). Terminada a actuação do método *Draw* definido em *STRUCTURE* é actuado o método *Draw* definido na classe ascendente *vBasic*, que solicitará a todos os membros do objecto que activem a sua implementação do método *Draw*. Serão então activados os métodos *Draw* de todos os nós, elementos, apoios, etc., que por sua vez solicitarão o mesmo a todos os seus membros, e o processo apenas terminará quando toda a informação acerca da estrutura da ponte e de toda a família de componentes seja desenhada. A facilidade da operação é notória, assim como a robustez da mesma, uma vez que é virtualmente impossível que alguma informação acerca da estrutura da ponte seja omitida.

2.5.2. Biblioteca de componentes do MEF

A biblioteca de componentes do MEF para análise estrutural é composta por quatro bibliotecas: uma de objectos genéricos do MEF, uma de tipos de elementos finitos, uma de tipos de ligações e uma de

algoritmos. Neste capítulo apenas se refere a organização das classes desenvolvidas, sendo que a respectiva implementação é apresentada nos Capítulos 3 e 4.

2.5.2.1. Biblioteca de objectos genéricos do MEF

A biblioteca de objectos genéricos do MEF está organizada em torno do *namespace Evolution*.*Structural* e está baseada na utilização da interface *IStructural*. Esta interface impõe os procedimentos básicos comuns a qualquer componente do MEF através dos métodos *Dimensioning*, *Assembling* e *Results*, conforme se pode verificar na Figura 2.5, correspondentes às acções de atribuir dimensões, agrupamento e armazenamento de resultados.

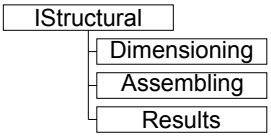


Figura 2.5 – Interface *IStructural.*

Uma vez que se pretende desenvolver um modelo de análise computacional capaz de lidar com análise não-linear geométrica, com métodos incrementais, iterativos e de análise modal, desenvolveram-se ainda as interfaces *INLG*, *Incremental*, *IIterative* e *IModal*, apresentadas na Figura 2.6.

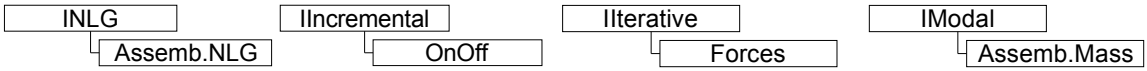


Figura 2.6 – Interfaces *INLG*, *IIncremental*, *IIterative* e *IModal.*

A interface *INLG* impõe a existência do método *AssemblingNLG*, responsável pelo agrupamento das matrizes de rigidez correspondentes à análise não-linear geométrica, da mesma forma que a interface *IModal* impõe a existência do método *AssemblingMass*, responsável pela assemblagem das matrizes de massa necessárias para a análise modal. A interface *IIncremental* impõe a existência do método *OnOff*, responsável pela determinação do estado da componente (Ligado/Desligado) ao longo de uma análise incremental, e a interface *IIterative* impõe a existência do método *Forces*, responsável pela determinação das forças internas ao longo de um processo iterativo.

A classe *vStructural*, apresentada esquematicamente na Figura 2.7, é uma classe virtual descendente de *vBasic*, que serve de base a todos os objectos utilizados no cálculo de estruturas, como por exemplo elementos finitos, nós e forças. Além da interface *IBasic* herdada de *vBasic*, implementa ainda as interfaces *IStructural*, *INLG*, *IIncremental, IIterative* e *IModal*. Desta forma todas as componentes construídas tomando como base *vStructural* deverão estar aptas a lidar com a análise não-linear geométrica, métodos incrementais, iterativos e de análise modal.

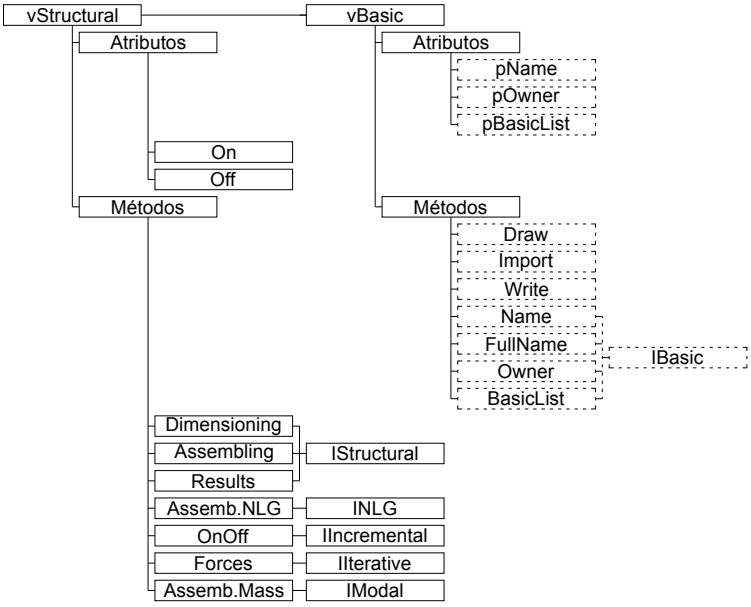


Figura 2.7 – Classe *vStructural*.

Uma das classes desenvolvidas sobre *vStructural* é a *STRUCTURE* (ver Figura 2.8), responsável pela modelação da estrutura que se pretende analisar. Além dos atributos e métodos herdados de *vStructural*, esta classe implementa como atributos uma lista de graus de liberdade e as matrizes de rigidez, deslocamentos, forças aplicadas, forças internas e de massa, e como único método implementa o *Calculate*, responsável pela gestão dos algoritmos de resolução.

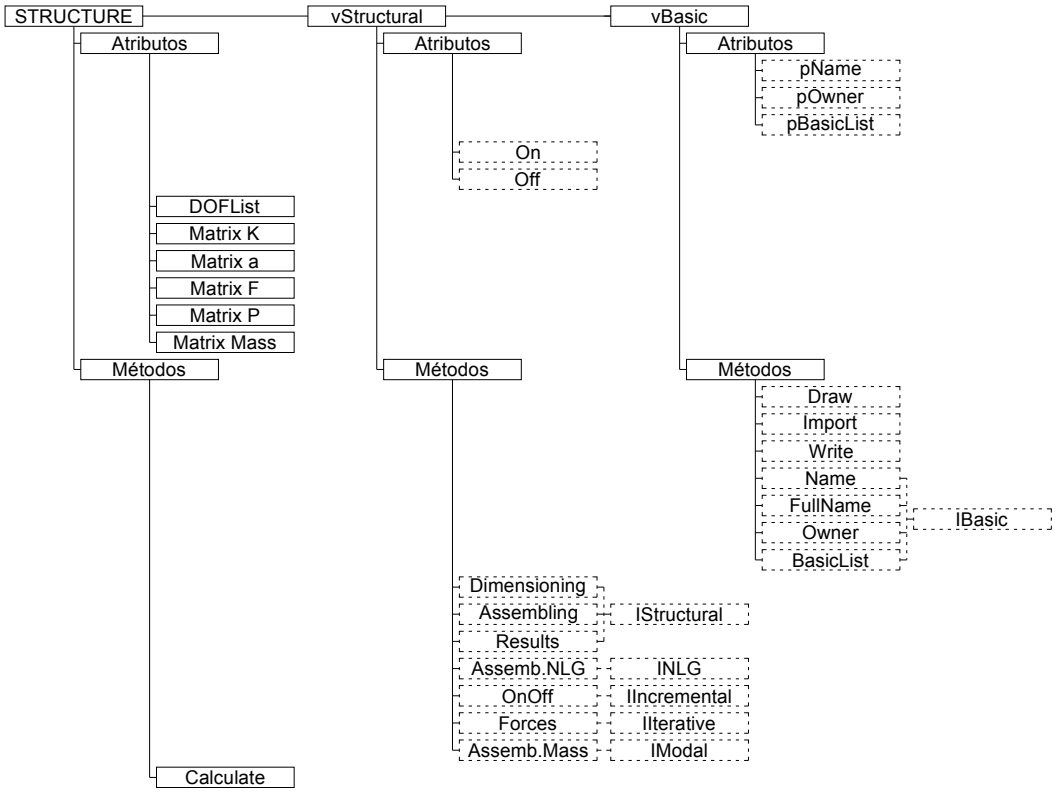


Figura 2.8 – Classe *STRUCTURE*.

Como a plataforma *Evolution* poderá incluir outros tipos de análise que não a estrutural, uma vez que poderão ser desenvolvidas outras bibliotecas de componentes do MEF vocacionadas para outras áreas de estudo, a classe *STRUCTURE* foi desenvolvida como um *plugin* de *Evolution*.

Um leitor mais habituado à implementação do MEF poderá ficar surpreendido pela inexistência de uma lista de nós ou de elementos na classe *STRUCTURE*, mas convém relembrar que todas as componentes de *STRUCTURE* deverão implementar a interface *IBasic*, e desta forma esses componentes podem ser armazenados no *pBasicList* de *STRUCTURE*.

De forma a utilizar o método *Calculate* foi criada a classe *vAnalysis* (ver Figura 2.9), que é uma classe virtual para implementação de algoritmos de resolução e serve de base para os objectos pertencentes ao gestor de algoritmos, conforme se expõe na secção 2.5.2.4.

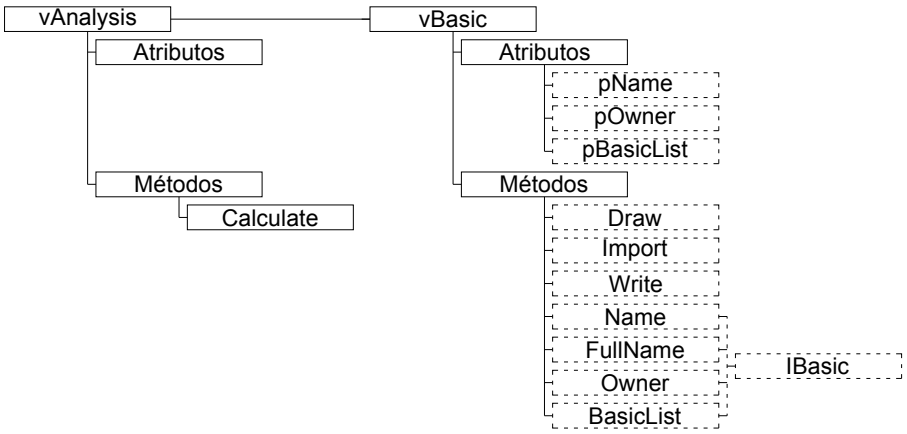


Figura 2.9 – Classe *vAnalysis.*

A classe *NODE* (ver Figura 2.10) foi criada para simular os nós das estruturas, sendo descendente de *vStructural*. Aos atributos herdados de *vStructural* foram adicionados os atributos *Position* e *Pointer*, responsáveis, respectivamente, pela informação relativa ao posicionamento do nó no espaço e pela localização dos correspondentes graus de liberdade nas matrizes globais da estrutura. Esta classe tem algumas características invulgares, como por exemplo o facto do respectivo método *OnOff* e o número de graus de liberdade ser controlado por objectos exteriores. De facto, o estado (Ligado/Desligado) de um nó depende dos elementos que estão ligados a ele: se num determinado incremento de análise nenhum elemento estiver ligado ao nó então este encontra-se desligado; caso contrário o nó tem de estar ligado, sendo assim o seu estado controlado por objectos exteriores.

No máximo são seis os graus de liberdade de um nó, correspondentes a três deslocamentos e três rotações. Mas se num determinado incremento estão ligados a um nó apenas elementos de tirante, o nó apenas deverá possuir os graus de liberdade relativos aos deslocamentos. Se num incremento posterior se ligar ao nó um elemento de viga então os graus de liberdade relativos às rotações deverão ser activados. Este ajuste automático do número de graus de liberdade é fundamental para a utilização de diferentes tipos de elemento finito sem preocupações relativas ao tipo de nó a utilizar, contribuindo determinantemente para a expansibilidade da plataforma desenvolvida.

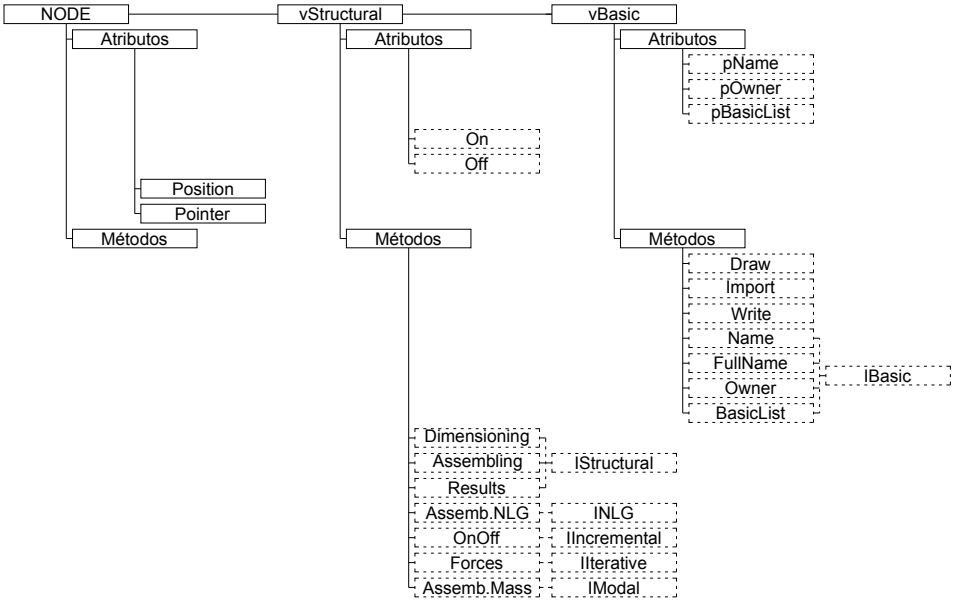


Figura 2.10 – Classe *NODE.*

Uma vez que o cálculo estrutural implica usualmente a utilização de diversos tipos de elementos finitos, foi criada e armazenada na biblioteca de componentes genéricos a classe virtual *vElement*, apresentada na Figura 2.11, que serve de molde para qualquer tipo de elemento finito que se pretenda utilizar. Esta classe, descendente de *vStructural*, tem como atributos uma lista de nós, uma lista de pontos de Gauss, as matrizes de rigidez e os vectores de deslocamentos, de forças externas, de forças internas e de massa do elemento. As implementações desta classe serão as componentes da biblioteca de tipos de elementos finitos definida na secção 2.5.2.2.

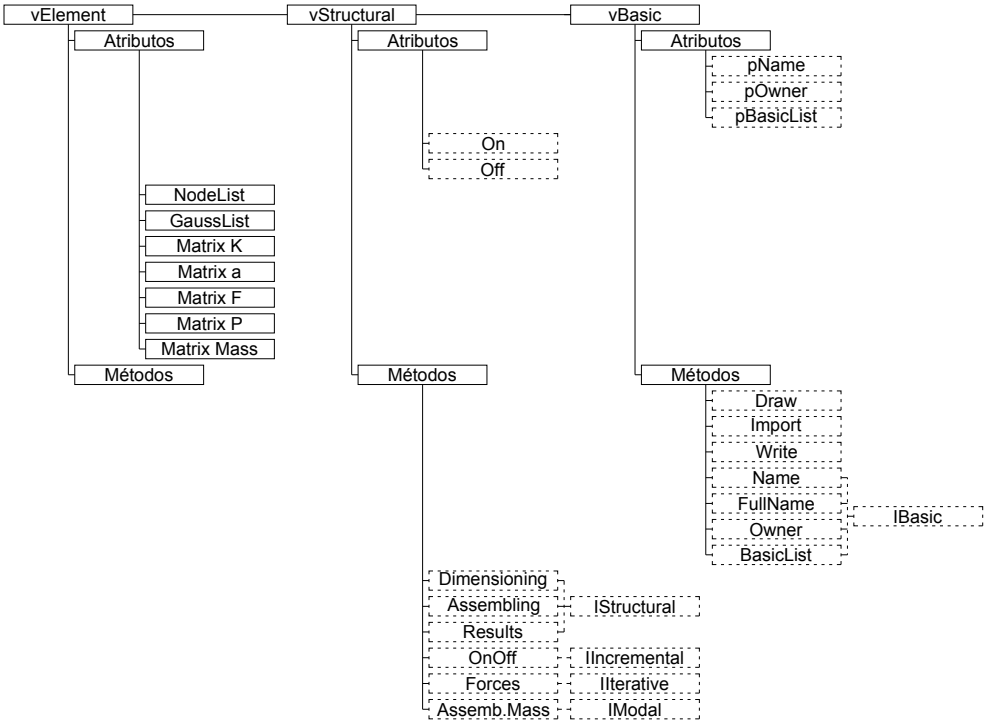


Figura 2.11 – Classe *vElement.*

Outra classe virtual sem implementação nesta biblioteca é a *vStressStrain*, relativas às leis constitutivas dos materiais, apresentada na Figura 2.12. Esta classe não é uma componente estrutural, pelo que descende directamente de *vBasic*, e inclui os métodos *E*, *G*, *StressFromStrain*, *Stress* e *Strain*. Em qualquer instante da análise o método *E* permite obter o valor do módulo de elasticidade do material, o método *G* o módulo de distorção e os métodos *Stress* e *Strain*, permitem obter as tensões e extensões do material. Apesar de todos os métodos serem públicos, são todos de consulta com a excepção de *StressFromStrain*, sendo este o único com capacidade para alterar qualquer um dos valores referidos. Este método tem como função determinar o valor do incremento de tensão criado por um incremento de extensão, e ao fazê-lo actualiza todas as variáveis do objecto de forma a respeitarem a lei do material. A implementação desta classe virtual deverá ser efectuada de acordo com o tipo de elemento para a qual a lei material se destina, e armazenada no *namespace* correspondente.

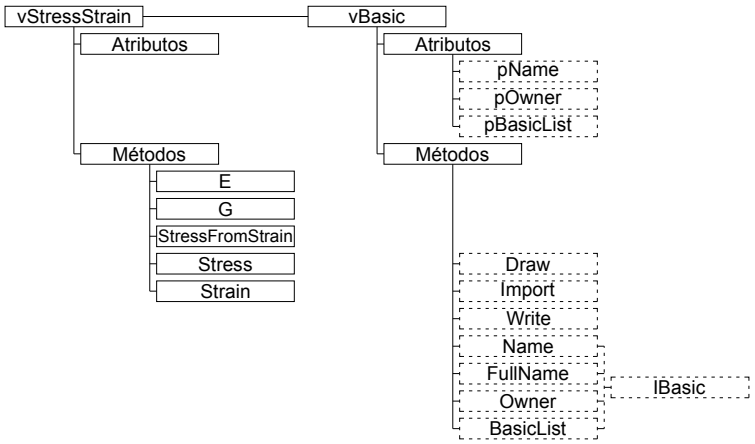


Figura 2.12 – Classe *vStressStrain.*

2.5.2.2. Biblioteca de tipos de elementos finitos

Esta biblioteca é constituída pelos objectos que implementam a formulação dos diversos tipos de elementos finitos, e são responsáveis por controlar o comportamento geometricamente não-linear e pela geração da matriz de rigidez, forças internas e cálculo das extensões. Cada tipo de elemento finito deverá conter uma biblioteca de tipos de materiais, composta por objectos onde se implementam os modelos constitutivos mais utilizados, designadamente o betão e o aço das armaduras passivas e de pré-esforço. A biblioteca de tipos de elementos finitos desenvolvidos, organizada em *Evolution.Structural.Element*, compreende um tipo de elemento definido pela classe *FIBREELEMENT*, apresentada na Figura 2.13, desenvolvida para a simulação de elementos unidimensionais num espaço a três dimensões, como, por exemplo, vigas, pilares, cabos ou tirantes. Desenvolvida como um *plugin* de *STRUCTURE*, é descendente de *vElement* e o seu único atributo próprio é *FibreList*, correspondente a uma lista de fibras que pode ser composta por um qualquer número ou tipo de fibras, dependendo do elemento estrutural que se pretende simular. A sua implementação está organizada no *namespace Evolution.Structural.Element.FibreElement* e será apresentada detalhadamente na secção 3.5.

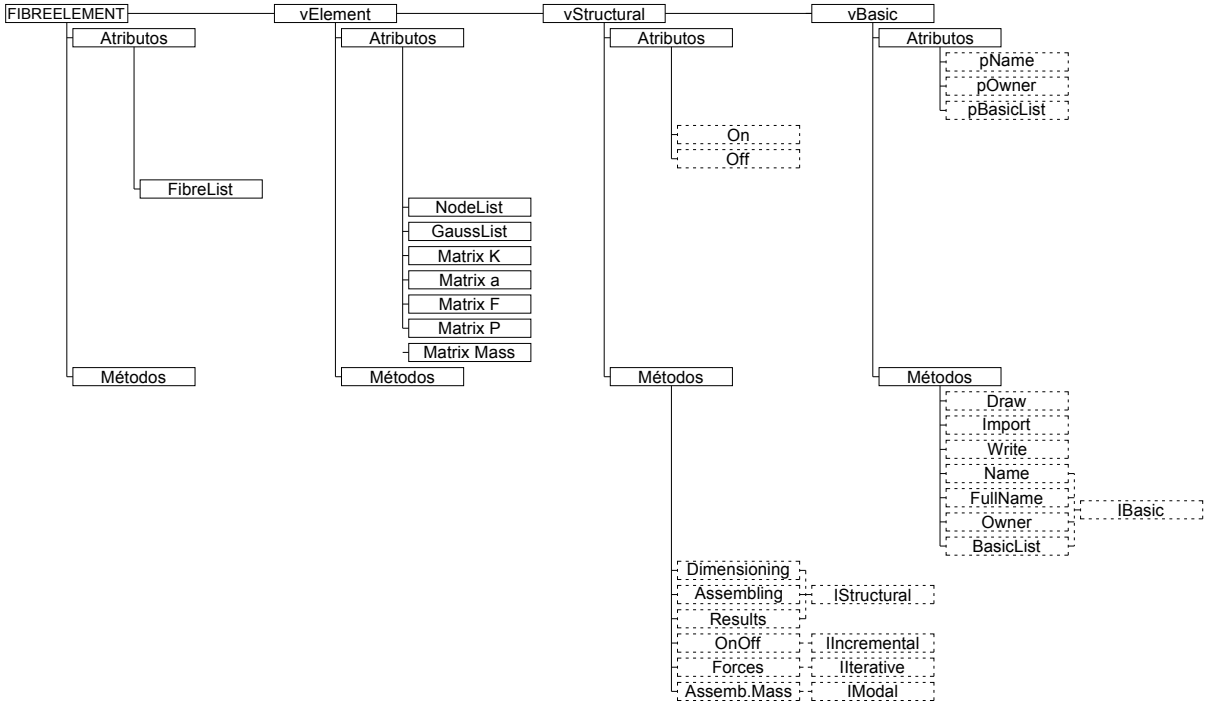


Figura 2.13 – Classe *FIBREELEMENT.*

Tendo como base a classe virtual *LOAD*, criada no *namespace* anterior, foram criados os *plugins* correspondentes às classes *FORCE, SELFWEIGHT, TRAPEZOIDAL* e *MASS*, de modo a simular solicitações em elementos de fibras, respectivamente, cargas concentradas, peso próprio, cargas distribuídas variáveis e massa distribuída (esta última para a análise modal).

Para organização dos tipos, solicitações e leis constitutivas das fibras foi criado o namespace *Evolution.Structural.Element.FibreElement.Fibre*. Para implementação dos diversos tipos de fibra foi criada a classe virtual *vFibre*, apresentada na Figura 2.14, descendente de *vStructural*, tendo como atributos próprios a lei constitutiva do material da fibra, *StressStrain* e as matrizes *B*, *D*, *A* e *G*, que serão definidas na secção 3.5. Os métodos próprios desta classe são *AssemblingB*, *AssemblingD*, *AssemblingA* e *AssemblingG*, responsáveis pela construção das matrizes atrás referidas.

As implementações de *vFibre* criadas foram *TIMOSHENKO, REINFORCEMENT, EMBEDDEDCABLE e STAYCABLE*, que simulam, respectivamente, secções de betão, armaduras longitudinais, cabos de pré-esforço embebido e tirantes exteriores. Todas as implementações de *vFibre* são *plugins* de *FIBREELEMENT*, e a sua formulação específica varia apenas na formulação das correspondentes matrizes, que é apresentada na secção 3.5.

Foi criada a classe abstracta *LOAD* no *namespace Evolution.Structural.Element.FibreElement.Fibre* para simular as solicitações das fibras, nomeadamente *SELFWEIGHT*, *MASS*, *IMPOSEDSTRESS*, *IMPOSEDSTRAIN*, *APPLIEDSTRESS* e *APPLIEDSTRAIN*, que correspondem, respectivamente, à simulação do peso próprio, de massa (para análise modal), de tensões e extensões impostas, de tensões e extensões aplicadas.

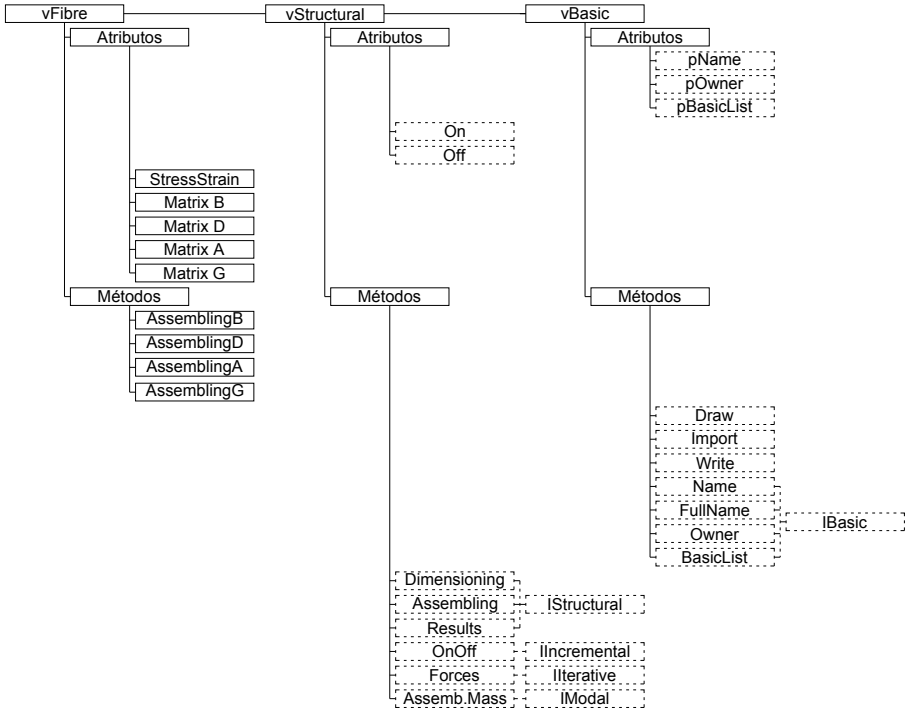


Figura 2.14 – Classe *vFibre.*

A biblioteca de tipos de materiais desenvolvida para os elementos de fibra utiliza como ascendente a classe virtual *STRESSSTRAIN* definida no *namespace* correpondente ao elemento de fibra, por sua vez descendente de *vStressStrain*. As implementações da classe virtual foram desenvolvidas como *plugins* e correspondem a *ELASTICLINEAR, CONCRETE_CEB90, CONCRETE_EC2, PLASTICLINEAR1D e PLASTICLINEAR1D_CONCRETE*. As classes *CONCRETE_CEB90* e *CONCRETE_EC2* correspondem às leis constituintes elásticas lineares com maturação do betão definidas, respectivamente, no CEB90 (CEB-FIP (1993)) e no Eurocódigo 2 (EC2 (2004)), e apresentadas na secção 4.2.1.1. A classe *ELASTICLINEAR* corresponde à implementação de uma lei constitutiva elástica linear sem limitação de tensões ou extensões. As leis constitutivas *PLASTICLINEAR1D* e *PLASTICLINEAR1D_CONCRETE* correspondem a implementações de comportamento não-linear material, adequadas, respectivamente, à modelação de armaduras e da fissuração do betão armado, conforme será exposto na secção 4.3.3.

Ainda relativamente ao comportamento do material das fibras, foram desenvolvidas classes virtuais para simulação da retracção e da fluência do betão, e da relaxação do aço de pré-esforço, designadas por *SHRINKAGE*, *CREEP* e *RELAXATION*. Foram três as implementações de *SHRINKAGE* desenvolvidas: *EC2*, *CEB90* e *MULTILINEAR*. As duas primeiras correspondem à modelação das leis de retracção do betão definidas no EC2 e no modelo código CEB90, e a terceira à modelação de leis de retracção do betão definidas pelo utilizador através de múltiplos troços lineares. Todas as referidas leis e a sua implementação serão detalhadas na secção 4.2.1.2. As implementações de *CREEP* foram *EC2* e *CEB90*, correspondendo às leis de fluência definidas no EC2 (EC2 (2004)) e no CEB90, a apresentar na secção 4.2.1.3. A modelação da relaxação do aço de

pré-esforço é efectuada através das classes *EC2* e *CEB90*, implementações de *RELAXATION*, responsáveis pela modelação das leis definidas no EC2 e no CEB90, a apresentar na secção 4.2.2.3.

De salientar que todas as classes relativas à modelação de cargas, leis constitutivas e comportamento material das fibras são *plugins* de *vFibre*.

2.5.2.3. Biblioteca de tipos de ligações

Na biblioteca de tipos de ligações são armazenados os objectos onde se implementam as formulações relativas às ligações, que podem ser conexões ao exterior, como por exemplo apoios fixos, elásticos ou unidireccionais, ou ligações internas, como por exemplo compatibilidade de graus de liberdade entre nós. A biblioteca de tipos de ligações está organizada no *namespace Evolution.Structural.Link*, baseando-se nas implementações da classe virtual *LINK*, que por sua vez é um *plugin* de *STRUCTURE*.

As classes criadas de modo a simular as ligações exteriores são *APPLIEDDOF*, *IMPOSEDDOF*, *ELASTIC* e *UNIDIRECTIONAL*, sendo que qualquer uma delas pode actuar sobre qualquer grau de liberdade. As duas primeiras classes permitem, respectivamente, aplicar ou impor um determinado valor para o deslocamento segundo o grau de liberdade em causa; a classe *ELASTIC* permite a simulação de apoios elásticos lineares (molas); e a última classe permite a simulação de apoios unidireccionais. As classes criadas de modo a simular ligações internas são *SAMEDOF* e *MASTERDOF*: a primeira classe permite impor a igualdade entre quaisquer dois graus de liberdade, enquanto a segunda permite condicionar o deslocamento segundo um grau de liberdade de um nó em relação a um outro nó. A implementação das referidas classes será apresentada na secção 3.6.

2.5.2.4. Biblioteca de algoritmos

A biblioteca de algoritmos é a colecção de objectos responsáveis pela implementação e resolução dos processos de análise, lineares ou não-lineares, como processos incrementais, iterativos ou de análise modal. Estes objectos devem controlar a formação e resolução do sistema de equações, e a gestão da convergência em análises não-lineares. Organizados em *Evolution.Structural.Analysis,* e tomando como ascendente a classe virtual *vAnalysis*, foram desenvolvidas como *plugins* de *STRUCTURE* as implementações *NLG*, *INCREMENTAL, ITERATIVE* e *MODAL*, correspondentes às análises não-linear geométrica, aos procedimentos incremental e iterativo, bem como à análise modal.

Para funcionamento dos processos iterativos, que serão apresentados na secção 3.2, foi necessário criar a classe virtual *CRITERIUM*, que implementa os diversos critérios de convergência. Encontram-se desenvolvidas seis implementações da referida classe, *DISPLACEMENT, ROTATION, DISPLACEMENTANDROTATION, FORCE, MOMENT, FORCEANDMOMENT, ENERGY*, correspondentes a critérios de convergência definidos em termos de deslocamentos, rotações, deslocamentos e rotações, forças, momentos, forças e momentos e energéticos.

2.5.3. Algumas particularidades

Nesta secção dar-se-á relevo a algumas particularidades do código desenvolvido, importantes para demonstração da versatilidade e facilidade de utilização da aplicação.

2.5.3.1. Versão DOS e versão Windows

Uma particularidade interessante reside na possibilidade de utilizar as aplicações desenvolvidas num ambiente de consola, em vez de num ambiente de janelas, de forma a economizar recursos do computador, designando o procedimento como “Modo DOS” (designação atribuída em homenagem ao *Disk Operating System* desenvolvido na década de 80 por Tim Paterson). Neste modo a aplicação funciona ignorando todos os *plugins* não essenciais para a execução da tarefa em vigor, diminuindo os recursos necessários ao seu funcionamento. Desta forma é aumentada a velocidade de processamento e são disponibilizados mais recursos para uso do utilizador. As interfaces gráficas, por exemplo, estão normalmente associadas a consumos elevados em termos de processamento, mas não são essenciais em muitas etapas da análise de um determinado modelo; desta forma a sua não utilização permite economizar tempo computacional. Esta funcionalidade tem particular interesse quando associada a uma outra, também implementada, que reside na utilização de rotinas agendadas, em que o utilizador programa uma série de tarefas a desempenhar pela aplicação, normalmente utilizada na análise paramétrica de um determinado problema.

2.5.3.1. Organização de dados

Ao contrário de muitas aplicações actualmente em uso, na aplicação desenvolvida não é possível a parametrização de componentes nas funcionalidades dedicadas ao cálculo, tendo esta que ser efectuada *a priori* caso seja necessário. Este procedimento tem a vantagem de tornar toda a informação bastante simples e completamente visível, no entanto implica a utilização de ficheiros de dados bastante extensos. De forma a minimizar o tamanho dos ficheiros utilizados, o modelo de organização de dados criado incorpora diversas funcionalidades, entre as quais a utilização de indexação de ficheiros, a criação dos objectos por uma ordem aleatória, a segmentação da informação e a utilização do mesmo ficheiro de dados por diversos componentes.

Outro aspecto a referir prende-se com a introdução de dados, que está adaptada ao modelo de programação utilizado, baseando-se na criação de objectos e na subsequente leitura de toda a informação relativa a esses objectos. Conforme foi referido em 2.5.2.1, a leitura de dados é controlada pelos métodos definidos na classe *vBasic*, pelo que qualquer alteração nesses métodos tem repercussões imediatas em toda a aplicação. Assim foi dedicada muita atenção ao desenvolvimento destes métodos, de forma a torná-los eficientes e robustos.

A saída de resultados utiliza uma organização em tudo semelhante à entrada de dados, de modo a que a saída de resultados de um objecto seja passível de ser utilizada na entrada de dados de um outro, procedimento que permite uma enorme interacção entre aplicações distintas. Por exemplo, se uma aplicação tem como resultado um objecto que representa um desenho, e outra aplicação

necessita desse objecto, então nada mais prático do que a escrita de dados de um objecto obedecer rigorosamente aos mesmos critérios da entrada de dados deste.

2.5.3.1. Interfaces gráficas

De forma responder às necessidades de utilização dos modernos modelos computacionais de análise por elementos finitos, a plataforma criada e o programa de cálculo desenvolvido incluem ferramentas de utilização de pré e pós-processamento, normalmente sob a forma de interfaces gráficas, permitindo uma facilidade de aplicação superior à de um trabalho normalmente desenvolvido no contexto de uma formação pós-graduada. Nas capacidades gráficas implementadas incluiu-se a possibilidade do utilizador vizualizar uma árvore de componentes do modelo numérico, sendo possível através desta aceder à totalidade da informação respeitante a qualquer um dos componentes. Na Figura 2.15 é possível observar um exemplo de uma árvore de componentes, onde seleccionando "STRAIN_TOTAL" do ponto de Gauss "Gauss0" da fibra "Fibre0" do elemento finito "Beam0" se acede ao historial de tensões no referido ponto de Gauss, que é apresentado na Figura 2.16.

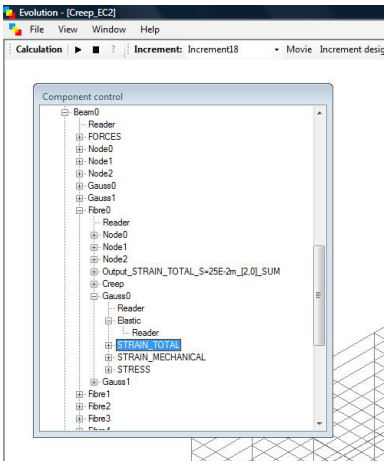


Figura 2.15 – Árvore de componentes.

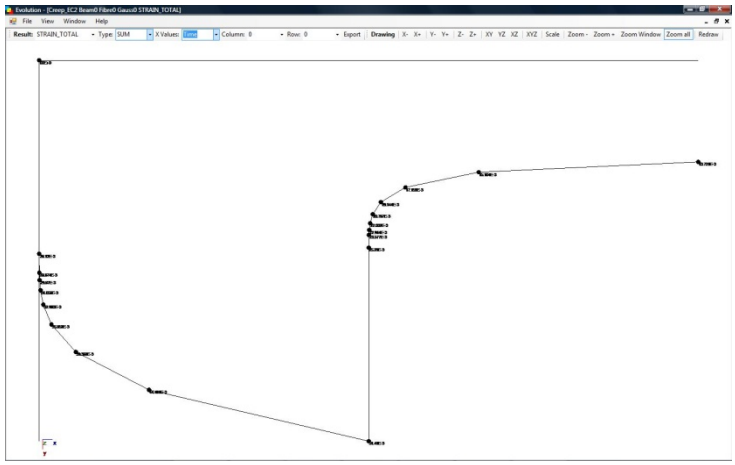


Figura 2.16 – Visualização gráfica de resultados.

Uma das funcionalidades da ferramenta de visualização desenvolvida especificamente para lidar com estruturas evolutivas (como obras de arte construídas por fases) designada por modo "Only On", é a capacidade de em cada fase permitir representar apenas os elementos ou carga que começam a funcionar nessa fase. Na Figura 2.17 é apresentada uma vista de uma estrutura, e na Figura 2.18 é apresentada a estrutura no mesmo instante mas no referido modo "Only On", pelo que apenas são visíveis apenas os elementos que começam a funcionar nesse instante, neste caso as novas aduelas e os cabos de pré-esforço (cabos consola) correspondentes.

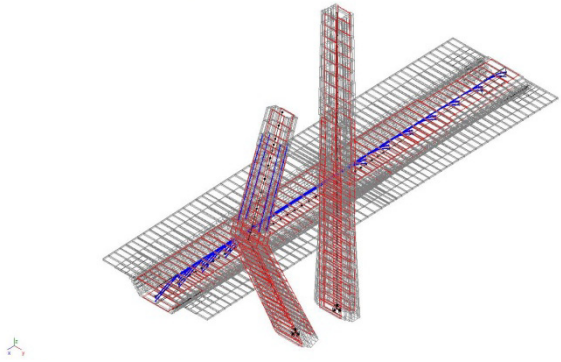


Figura 2.17 – Perspectiva da obra no instante N.

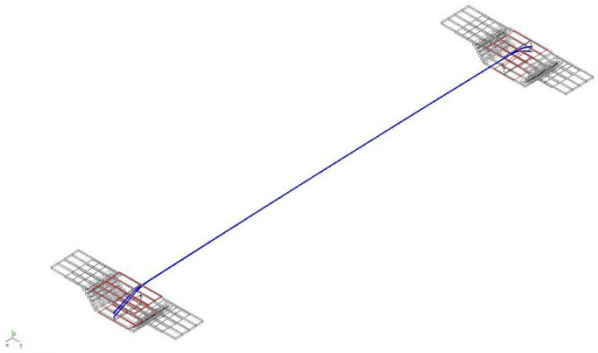


Figura 2.18 – Perspectiva da obra no instante N em modo “Only On”.

2.5.3.2. Utilização de *plugins*

Uma das grandes mais-valias alcançadas na plataforma desenvolvida foi o facto de toda a arquitectura do código ter sido estruturada para suportar a utilização de *plugins*. Conforme foi já referido, a plataforma inclui um gestor de *plugins*, designado com o mesmo nome da plataforma, *EVOLUTION*. O referido gestor é uma aplicação cuja função é examinar todos os ficheiros com extensão “.exe” ou “.dll” armazenados na mesma localização da aplicação principal, procurando classes passíveis de serem utilizadas como *plugins*, e efectuar o seu registo de forma a serem utilizadas quando necessário. Assim a inclusão de *plugins* na aplicação é efectuada de forma automática, e permite a qualquer utilizador adicionar ou remover funcionalidades ao programa apenas através da colocação ou remoção de ficheiros num directório, capacidade particularmente útil quando se pretende desenvolver “aplicações à medida”. Na Figura 2.19 é apresentada a árvore com os *plugins* utilizados no programa de cálculo utilizado na análise estrutural do Viaduto da Corujeira, objecto de estudo dos Capítulos 5 e 6.

A utilização de *plugins* permite ainda a execução de código bastante simples, uma vez que é possível a criação de uma nova classe com um mínimo de funcionalidades. A utilização de interfaces gráficas, por exemplo, não é condição necessária para a construção de uma classe, desta forma a construção da classe é muito simplificada. Caso seja necessário *a posteriori* a utilização de uma interface gráfica, esta poderá ser adicionada sobre a forma de *plugin* da classe original.

A utilização de *plugins* cria problemas de gestão da aplicação com alguma complexidade, nomeadamente na validação das alterações e novas funcionalidades, bem como na organização de um manual de utilização do código desenvolvido. Uma vez que a utilização de *plugins* foi considerada desde o início da estruturação do código, foram previstos esses problemas e implementadas funcionalidades de forma a minimizá-los conforme se passa a explicar.

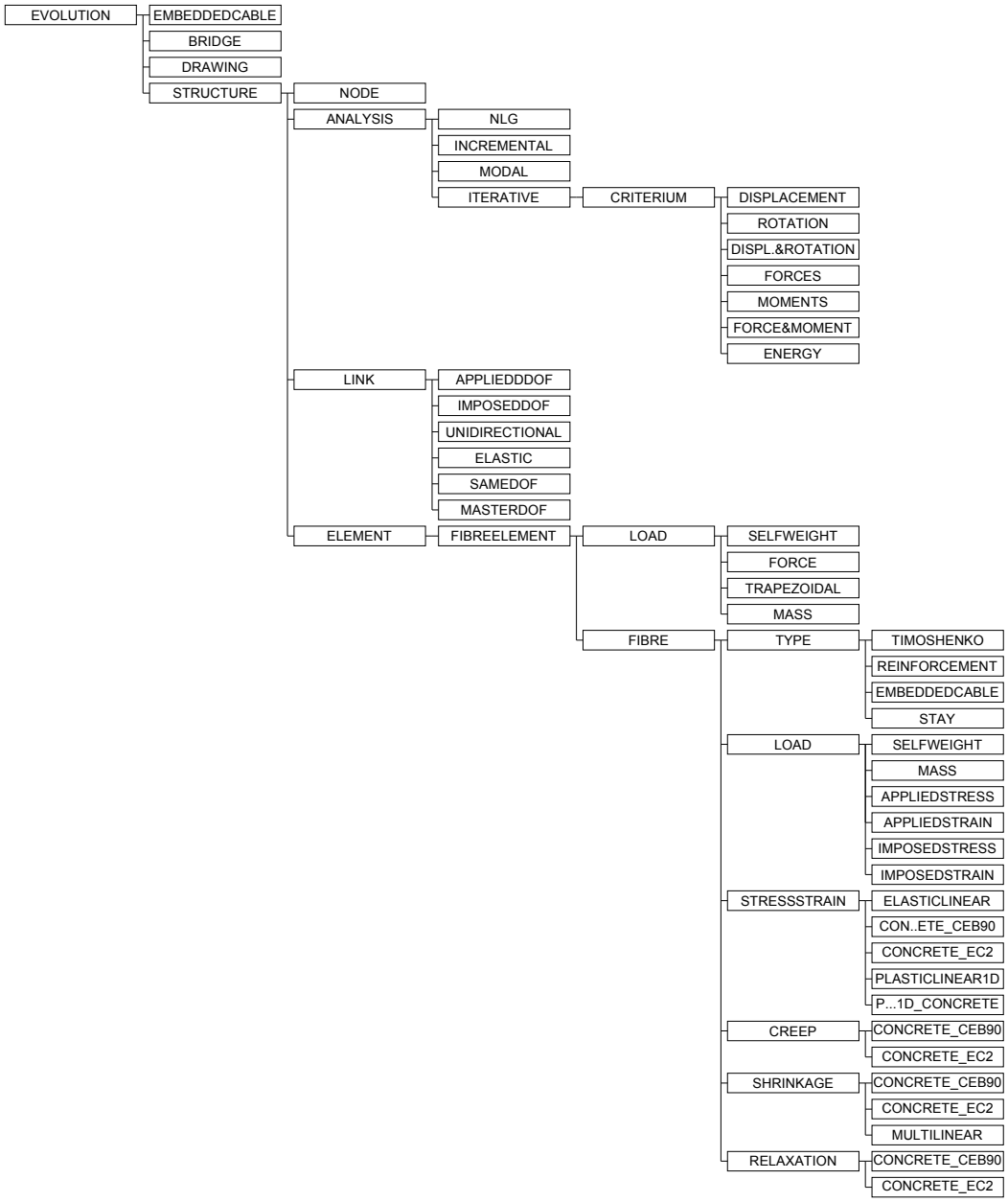


Figura 2.19 – Exemplo de árvore de *plugins* instalados.

2.5.3.3. Validação automática

Qualquer funcionalidade ou alteração implementada num código computacional deverá ser validada, antes de ser disponibilizada para os utilizadores finais. Uma forma de realizar essa validação é através da comparação de resultados obtidos com o código desenvolvido com resultados de *benchmarks*, podendo estes últimos ter as mais diversas origens, como por exemplo, bibliografia, ensaios, outros códigos ou métodos simplificados.

Embora a verificação de uma funcionalidade ou alteração em si possa parecer um processo relativamente simples, convém ter presente que as classes desenvolvidas são normalmente interactivas, e podem ser ascendentes de outras. Assim, apesar de uma das premissas presentes na

criação de uma classe ser a robustez desta, existe sempre a possibilidade de ocorrerem interacções não previstas entre classes supostamente autónomas. Desta forma é necessária a utilização de um leque alargado de *benchmarks*. Por outro lado, a alteração de classes da base da família tem repercussões em grande parte das classes ascendentes, pelo que requer a verificação de todas as classes ascendentes e respectivas funcionalidades.

Estes aspectos aumentam sobremaneira o trabalho necessário a uma adequada validação da totalidade do código. Desta forma foi implementada de raiz uma funcionalidade que permite a validação automática de todos os *benchmarks* existentes e referenciados no programa. Apesar de resultar de um procedimento simples, no qual se comparam resultados previamente verificados e criteriosamente escolhidos com os resultados obtidos pelo código após alterações, a utilização de um conjunto alargado de exemplos de verificação reduz de forma muito substancial o trabalho do programador, e aumenta também de forma considerável a fiabilidade do código implementado.

2.5.3.4. Manual de utilização automático

Um aspecto crucial para a gestão e utilização de um código computacional extensível, actualizável e de utilização alargada é a criação e manutenção de um manual de utilização completo e actualizado. De facto, a inexistência ou falta de rigor de um manual de utilização é uma das razões para o abandono de muito código desenvolvido, nomeadamente em ambiente académico. Não sendo um aspecto exclusivo da POO, a manutenção actualizada de um manual de utilização é particularmente crítica em código desenvolvido por vários programadores, e em particular com a utilização de *plugins*. Desta forma, mesmo controlando os executáveis e DLL armazenados, não é possível saber quais as funcionalidades disponíveis, e muito menos quais os parâmetros de entrada das mesmas, uma vez que dependem do número de *plugins* utilizados.

A criação de um manual de utilização gerado de forma automática foi prevista desde o inicio da estruturação da aplicação desenvolvida. Assim a aplicação faz a gestão de todos os *plugins*, e cria um diagrama em árvore de todos os *plugins* disponíveis a cada instante, que funciona como um manual. Na Figura 2.20 está exemplificado um diagrama de *plugins* disponíveis, onde se pode verificar que na origem da árvore apenas se encontram quatro opções, designadamente *BRIDGE*, *DRAWING*, *CABLE* e *STRUCTURE*, mas conforme se vai avançando na árvore novas opções vão surgindo. No exemplo, a ramificação apresentada começa no *plugin STRUCTURE*, passa para o tipo *FIBREELEMENT* do *plugin ELEMENT*, continua para o tipo *EMBEDDEDCABLE* do *plugin FIBRE* e termina nos diversos tipos de *STRESSSTRAIN* disponíveis.

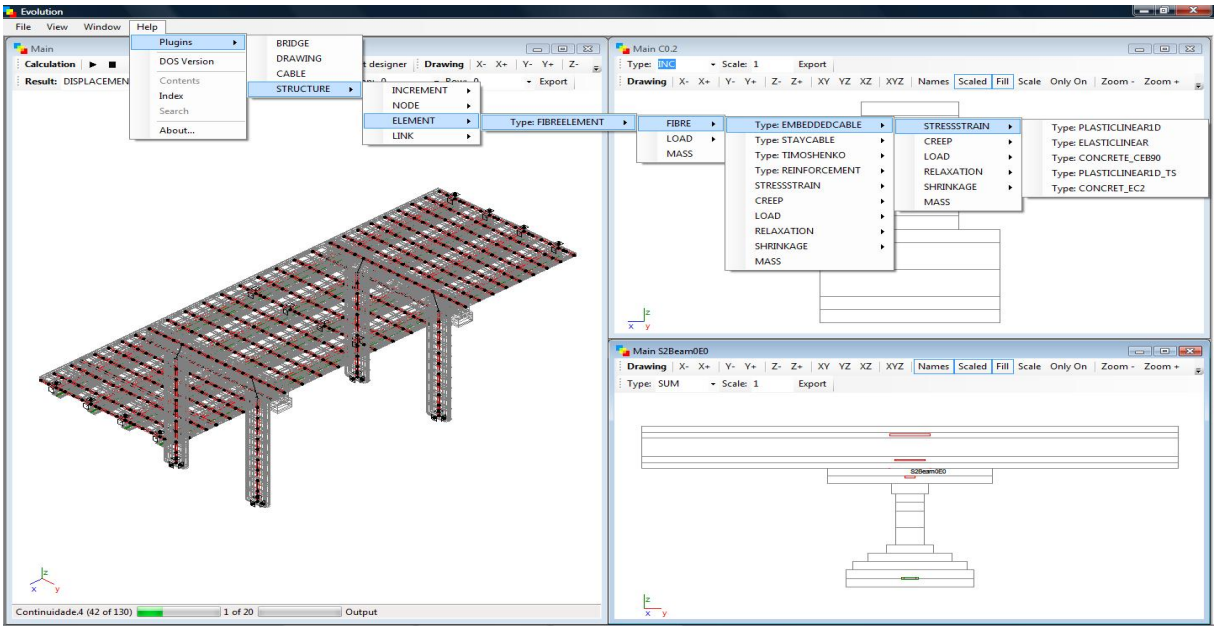


Figura 2.20 – Exemplo de diagrama em árvore de *plugins* disponíveis.

A existência de um diagrama em árvore dos *plugins* disponíveis facilita de forma considerável a utilização do código computacional desenvolvido. No entanto, foi ainda imposta na interface de qualquer classe criada para servir de *plugin* a existência de um método *Help*, que tem como parâmetro de saída um texto resumido com a descrição da classe e os argumentos necessários à criação de objectos dessa classe e respectivas unidades. Desta forma, quando se pretende informação acerca de um determinado *plugin* basta clicar sobre o botão correspondente ao mesmo no diagrama, que a aplicação resume num texto não só a informação resultante da utilização do *Help* dessa classe, mas também do *Help* das classes ascendentes. Na Figura 2.21 pode-se observar a informação disponível acerca da classe *PLASTICLINEAR1D*.

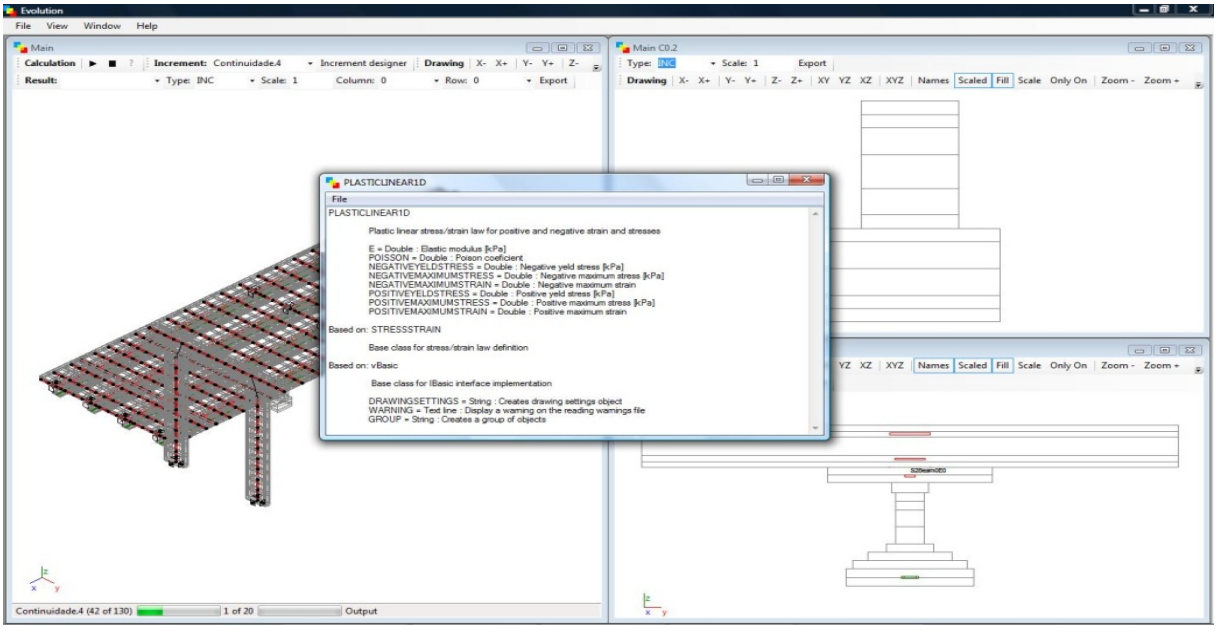


Figura 2.21 – Ficheiro de ajuda da classe *PLASTICLINEAR1D*.

2.5.3.5. Parametrização

Em muitos programas é usual a utilização de componentes previamente tabelados, como materiais (por exemplo, tipos de betão ou de aço), elementos estruturais (por exemplo, lajes pré-fabricadas ou secções transversais de vigas), etc. Desta forma o utilizador fica dispensado de definir todos os parâmetros referentes a uma determinada entidade, sendo estes definidos pelos seus valores por defeito. Associado à vantagem inerente à facilidade de utilização do procedimento, em muitos casos existe a desvantagem do utilizador ficar limitado na visualização ou alteração da totalidade da informação referente à escolha efectuada. No presente trabalho optou-se por tornar acessível toda a informação utilizada no processo de cálculo, conforme referido na secção 2.5.3.1, pelo que não existem componentes estruturais pré-definidos dentro do processo de cálculo de uma estrutura. No entanto a estruturação dos ficheiros de dados e resultados utilizada, é propícia à utilização de componentes parametrizados no pré e pós processamento, desta forma o utilizador pode ter usufruir das vantagens da parametrização e ao mesmo tempo ter a flexibilidade e fiabilidade oferecidas pelo total acesso aos dados.

Desta forma foram desenvolvidas algumas classes que são normalmente *plugins* de outras classes ou aplicações, como por exemplo as classes *EMBEDDEDCABLE* e *BRIDGE* apresentadas na Figura 2.20. A primeira classe, *EMBEDDEDCABLE*, é um *plugin* de *EVOLUTION* para auxílio na modelação de cabos de pré-esforço embebidos, cujos resultados são ficheiros de dados de *STRUCTURE*. A segunda classe, *BRIDGE*, é também um *plugin* de *EVOLUTION* cuja finalidade é a geração automática parametrizada de tabuleiros de obras de arte, cujos ficheiros de resultados servem como ficheiros de dados de *STRUCTURE*.

Mesmo a análise estrutural pode ser parametrizada, de forma que o programa de cálculo corra uma lista de modelos numéricos ou um mesmo modelo numérico diversas vezes sem intervenção do utilizador. Esta possibilidade é particularmente útil na execução de análises paramétricas e no estudo de soluções estruturais alternativas.

2.6. Considerações finais

Após uma fase inicial de assimilação do paradigma da Programação Orientada por Objectos, a estruturação da plataforma *Evolution* começou a ser desenvolvida de acordo com os princípios estabelecidos à partida, nomeadamente a generalidade, reutilização, extensibilidade e desempenho dos seus constituintes. Definida a estrutura de dados procedeu-se ao desenvolvimento da biblioteca de objectos genéricos de gestão de dados, tendo sido dada especial relevância à robustez e generalidade dos seus componentes, assim como à facilidade de utilização, nomeadamente através do investimento efectuado na área das interfaces gráficas de gestão de dados e de visualização.

Durante a primeira fase de desenvolvimento da plataforma foram testadas diversas soluções e metodologias que se mostraram cruciais no desenvolvimento da biblioteca de componentes genéricos do MEF. Assim, o bom planeamento aplicado na estruturação da família dos objectos responsáveis pela gestão de dados associado a particularidades da POO, como a hereditariedade e o

polimorfismo, permitiram o desenvolvimento dos componentes relacionados com o MEF com uma simplicidade e facilidade que não seriam possíveis de atingir com outro qualquer paradigma de programação.

Um dos aspectos interessantes da plataforma desenvolvida foi a utilização de *plugins*, que possibilitou a introdução de inúmeras funcionalidades de uma forma extremamente simples, mas ao mesmo tempo eficiente e robusta.

A implementação de algumas funcionalidades, como as interfaces gráficas, o manual de utilização automático e o diagrama em árvore dos *plugins* existentes, facilita a utilização da plataforma e dos modelos desenvolvidos, permitindo alargar o domínio de potenciais utilizadores e programadores. Pretende-se desta forma rentabilizar o investimento efectuado, disponibilizando uma ferramenta de análise estrutural moderna e eficiente, facilmente expansível e muito flexível.

Capítulo 3

Modelo estrutural para a análise de obras de arte

3. Modelo estrutural para a análise de obras de arte

3.1. Introdução

Numa época em que os processos de fabrico, construção e reabilitação de obras de arte são cada vez mais complexos, numa busca crescente de fiabilidade estrutural e economia, os métodos clássicos de análise baseados no comportamento elástico e instantâneo dos materiais mostram-se bastantes limitados. Apesar de serem conhecidos os comportamentos instantâneos e diferidos dos materiais utilizados na construção e reabilitação de obras de arte, a utilização conjunta de diversos materiais, associada a complexos métodos construtivos, torna por vezes difícil de prever o comportamento das estruturas ao longo do tempo. Fenómenos inerentes ao betão como a fissuração, a fluência, a retracção e a maturação, e no caso do aço a relaxação do pré-esforço, ocorrem na generalidade das obras de betão estrutural, e portanto nas obras de arte. Todos estes fenómenos só podem ser adequadamente reproduzidos mediante o desenvolvimento e utilização de modelos numéricos que incluam a análise incremental no domínio do tempo, e eventualmente a análise não-linear material (Póvoas (1991); Faria (1994); Calgaro e Lacroix (1997); Henriques (1998)).

Aspectos igualmente importantes a considerar nas obras de arte dizem respeito à simulação do faseamento construtivo, que inclui uma contínua actualização da geometria e do próprio sistema estrutural, bem como a alteração das ligações ao exterior, induzindo significativas alterações das distribuições dos esforços, cuja simulação e previsão requer a utilização de ferramentas numéricas apropriadas, como as que se pretendem desenvolver nesta tese.

Por sua vez o reforço de estruturas existentes, tendo em vista o aumento da capacidade de carga ou a reposição da segurança em níveis adequados, é actualmente um procedimento corrente, não sendo contudo isenta de dificuldades a previsão do comportamento estrutural associado. Neste enquadramento, e nomeadamente para o caso das obras de arte, revela-se de todo o interesse que os modelos numéricos a desenvolver sejam capazes de reproduzir adequadamente os reforços estruturais mais usuais, nomeadamente com recurso a materiais compósitos (Juvandes (1999); Shang (2003); Li *et al.* (2005)).

Assim, no presente trabalho pretende-se utilizar a plataforma *Evolution* referida no Capítulo 2 para a construção de um programa de análise estrutural direccionado para a interpretação do comportamento de obras de arte, tanto na fase construtiva como após a entrada em serviço, e que possibilite a utilização da informação obtida através da monitorização. Conforme foi já referido, alguns dos aspectos a considerar no programa de cálculo a desenvolver deverão ser:

i) A componente instantânea e diferida do comportamento dos materiais;

ii) Os efeitos das deformações impostas induzidas pelas variações de temperatura e da retracção do betão;

iii) A não-linearidade geométrica associada a elementos esbeltos, nomeadamente dos tirantes de retenção;

iv) Várias possibilidades de ligações ao exterior;

v) A simulação de intervenções de reforço ou de reabilitação;

vi) Determinação de frequências próprias e modos de vibração.

Serão ainda implementadas algumas funcionalidades básicas, consideradas úteis à análise e ao desenvolvimento futuro do modelo, que baseadas na estimativa da distribuição de tensões e da evolução das deformações deverão permitir:

i) Na fase construtiva: o controlo da geometria e a avaliação da segurança da estrutura;

ii) Na fase de utilização: verificar a funcionalidade da estrutura;

iii) Na fase de reabilitação: avaliar o comportamento da estrutura reforçada e a segurança desta;

iv) Aferir o grau de segurança de estruturas existentes.

Conforme foi já referido, a utilização do MEF permite a resolução de problemas diversos, dos quais se destacam os relativos à análise estrutural. Assim, o programa de cálculo desenvolvido, baseado no MEF e considerando a teoria dos grandes deslocamentos, é vocacionado para a análise estrutural de obras de arte, como pontes e viadutos, adequadas à modelação numérica através de elementos lineares espaciais. Utilizar-se-á uma formulação tridimensional baseada em elementos finitos de viga, apoiada na formulação de Timoshenko com análise não-linear geométrica, sendo que na discretização das secções transversais se recorre a uma discretização por fibras, para modelação das peças lineares. Para modelação de cabos de pré-esforço aderentes (rectilíneos ou curvos) foi implementada uma formulação bastante genérica, de forma a poder ser utilizada em vários tipos de elementos finitos, que não apenas os lineares atrás referidos. A modelação dos tirantes de retenção e dos cabos de pré-esforço exteriores é realizada através de elementos específicos desenvolvidos com base na não-linearidade geométrica, ao contrário do método mais usual baseado num módulo de elasticidade equivalente.

O interesse da análise não-linear geométrica no contexto do presente trabalho prende-se com a utilização nas obras de arte de elementos estruturais especiais, tais como os já referidos tirantes e cabos de pré-esforço exterior, mas também de peças esbeltas sujeitas a grandes deformações, como os pilares e mastros de pontes atirantadas. No presente trabalho admite-se a teoria dos grandes deslocamentos, ou seja, admite-se que as deformações (deslocamentos e rotações) são

suficientemente grandes para causar alterações consideráveis na geometria da estrutura, no entanto considera-se que a nível local as deformações (extensões e curvaturas) são pequenas. Desta forma as equações de equilíbrio são formuladas para a configuração deformada, o que implica a presença de termos não-lineares geométricos na resolução do sistema de equações.

Embora a ênfase seja colocada no comportamento sob acções estáticas, incluindo os efeitos associados ao comportamento reológico do betão e das armaduras de pré-esforço, considerou-se que deveriam ser igualmente previstas algumas funcionalidades na área da dinâmica estrutural, como a possibilidade de determinar frequências e modos próprios de vibração em qualquer fase da vida da obra de arte.

Neste capítulo descrevem-se os algoritmos de resolução utilizados, nomeadamente as técnicas incrementais e iterativas, as equações incrementais do movimento para a análise estática e a formulação geral dos elementos finitos. Seguidamente apresentam-se as formulações específicas dos elementos finitos utilizados, nomeadamente dos elementos de viga, das armaduras passivas, dos cabos de pré-esforço aderentes e dos tirantes de retenção, a implementação das condições de fronteira e o algoritmo de determinação de frequências e modos próprios de vibração.[1]

Ao longo do capítulo são apresentados alguns dos exemplos de aplicação utilizados para validar as implementações efectuadas.

3.2. Algoritmo incremental e iterativo

São diversos os factores que transformam o problema que se pretende resolver num problema não-linear, e que podem ser agrupados em três categorias:

i) Alteração de estado, seja por evolução do esquema estrutural (por ex. adição ou subtracção de elementos e apoios no faseamento construtivo), por evolução do carregamento (por ex. adição, subtracção ou aplicação gradual de cargas) ou por não-linearidade de contacto (por ex. apoios unidireccionais);

ii) Não-linearidade geométrica, considerada em elementos esbeltos, incluindo os tirantes de retenção e os cabos de pré-esforço externos;

iii) Não-linearidade material, considerada em modelos constitutivos (por ex. modelos elasto-plásticos).

[1] No presente trabalho privilegiou-se a utilização das notações indicial (ou tensorial) e simbólica (ou vectorial), respectivamente na descrição de sistemas contínuos e discretos. Uma vez que nas formulações apresentadas se utilizam exclusivamente tensores cartesianos, beneficia-se das simplificações daí decorrentes. Assim, na notação indicial consideram-se índices inferiores, adoptando-se a convenção usual relativa à utilização de índices repetidos na representação de somatórios. As matrizes e vectores são identificados através de símbolos sublinhados ou através de parênteses rectos. Sempre que possível adoptou-se uma notação em que as letras maiúsculas designam entidades definidas em relação à configuração de referência (total) e as letras minúsculas designa entidades definidas em relação à configuração corrente (incremento).

Devido à complexidade do problema de análise a resolver a obtenção de resultados fiáveis de uma forma eficiente implica a utilização de técnicas de resolução de problemas não-lineares, normalmente baseadas na discretização do problema por intermédio de um procedimento incremental, de forma a linearizar a resposta na vizinhança da configuração correspondente ao início do incremento. Desta forma é necessário que a configuração no início de cada incremento, coincidente com a solução obtida no final do incremento anterior, verifique com rigor suficiente os requisitos cinemáticos, condições de equilíbrio e modelos materiais. A obtenção da solução de cada incremento implica a utilização de um ciclo iterativo que permita anular os resíduos resultantes da linearização do problema (Zienkiewicz e Taylor (1991b); Bathe (1996)).

No modelo desenvolvido no presente trabalho utilizou-se um procedimento incremental e iterativo, em que a definição de incremento tem um carácter bastante alargado, e que permite:

i) A alteração de estado das componentes do problema;

ii) A aplicação gradual das solicitações;

iii) A correcção da geometria ao longo do processo de análise;

iv) A introdução da variável tempo na análise do problema.

A consideração da alteração de estado das componentes do problema está sobretudo associada à possibilidade de as "ligar" ou "desligar", capacidade essencial na modelação de processos evolutivos, como por exemplo a análise estrutural do processo construtivo de uma obra de arte. De facto, para uma análise realista e rigorosa de um processo deste tipo é fundamental existir a capacidade de "ligar" ou "desligar" componentes de forma a modelar correctamente a alteração do sistema do estrutural aquando da adição ou remoção de um elemento ou apoio. Imagine-se, por exemplo, a betonagem de uma aduela num processo de construção por avanços sucessivos, a remoção do escoramento ou a introdução de pré-esforço num tirante de retenção. Conforme foi referido na secção 2.5.2.1, no programa de cálculo desenvolvido essa capacidade de "ligar/desligar" é comum a todos os objectos implicados na análise estrutural, e é possibilitada precisamente pela utilização do processo incremental que permite "ligar" uma componente no incremento *i*, e "desligá-la" no instante *i*+*n*. Esta capacidade de "ligar/desligar" um componente tem um campo de utilização muito vasto, permitindo, por exemplo, no caso da análise da retracção de um elemento de betão pré-fabricado exposto a uma mudança de ambiente, "desligar" a lei de retracção definida para um ambiente de armazenamento em fábrica, e "ligar" depois uma lei de retracção definida para um ambiente em obra.

A alteração de estado não está apenas relacionada com a capacidade de "ligar/desligar" componentes, mas também com a capacidade de alterar qualquer variável de estado de qualquer componente, como por exemplo em problemas de não-linearidade de contacto, onde um apoio unilateral, além da variável de estado "ligado/desligado", tem de possuir a variável "encostado/desencostado", sem a qual não é possível modelar correctamente o seu comportamento.

A utilização do processo incremental permite também a aplicação gradual do carregamento, dividindo uma determinada solicitação em parcelas e aplicando cada uma das parcelas em incrementos sucessivos. Este procedimento é fundamental sobretudo em problemas com análise não-linear geométrica ou não-linear material, cujos resultados obtidos dependem do historial de aplicação da carga. Desta forma na realização de análises não-lineares a aplicação do valor total das forças externas não é, normalmente, adequada, pois não só fica comprometida a convergência do processo iterativo como também a própria fiabilidade dos resultados obtidos (Borst (1991)).

Uma vez que a formulação utilizada nos elementos finitos implementados se baseia na correcção da geometria da estrutura ao longo do processo de análise, no modelo desenvolvido utiliza-se o processo incremental de forma a que em cada incremento é efectuada uma correcção da geometria de todos os componentes envolvidos.

O processo incremental utilizado possibilita ainda a introdução da variável tempo na análise do problema, uma vez que a cada incremento de análise se pode associar uma variável que define o instante em que esse incremento se realiza. Desta forma a análise:

i) Pode ser realizada no domínio do tempo, caso se definam valores diferentes para a variável tempo de cada incremento;

ii) Pode ser efectuada de forma instantânea, caso se defina para todos os incrementos o mesmo valor para o tempo;

iii) Pode ainda ser efectuada de uma forma mista, por exemplo utilizando incrementos com o mesmo valor do tempo para subdividir as cargas exteriores e utilizando incrementos com valores de tempo diferentes de forma a analisar efeitos diferidos.

A introdução da variável tempo através do processo incremental de análise é essencial para a simulação dos efeitos diferidos. A consideração de factores como a fluência e retracção do betão ou a relaxação do aço de pré-esforço, assim como a interdependência entre efeitos diferidos e esforços, só pode ser correctamente modelada através de um historial preciso ao longo do tempo de todas as componentes envolvidas.

3.2.1. Técnicas incrementais e iterativas para resolução de problemas não-lineares

Considere-se a condição de equilíbrio de um problema não-linear no incremento *n* expresso por

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{f_{ext}} \tag{3.1}$$

onde $\underline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez, $\underline{u}$ é o vector dos incrementos dos deslocamentos e $\underline{f_{ext}}$ é o vector dos incrementos das forças exteriores. Enquanto no caso de problemas lineares a matriz de rigidez é

composta apenas pela matriz de rigidez linear $\underline{K_L}$, em problemas não-lineares pode ser composta também pela matriz de rigidez não-linear $\underline{K_{NL}}$, de acordo com

$$\underline{K} = \underline{K_L} + \underline{K_{NL}} \tag{3.2}$$

O equilíbrio de um problema não-linear é obtido quando as forças internas $\underline{F_{int}}$ (ou forças nodais) equivalentes ao estado de tensão instalado na iteração estão em equilíbrio com as forças exteriores aplicadas $\underline{F_{ext}}$, ou seja

$$\underline{F_{int}} = \underline{F_{ext}} \tag{3.3}$$

No caso de existir convergência no incremento anterior n-1, o equilíbrio também ser expresso igualando os incrementos de forças internas $\underline{f_{int}}$ e os incrementos de forças exteriores aplicadas $\underline{f_{ext}}$

$$\underline{f_{int}} = \underline{f_{ext}} \tag{3.4}$$

No presente programa de cálculo foram implementados o Método de Newton-Raphson e o Método de Newton-Raphson Modificado para resolução do problema não-linear através de um método iterativo, sendo que a diferença fundamental entre ambos reside no facto de o primeiro efectuar a actualização da matriz de rigidez em cada iteração e no segundo a matriz de rigidez utilizada ser sempre a inicial ou a actualizada na segunda iteração.

Para o caso do Método de Newton-Raphson considere-se então o vector das forças residuais $\underline{\psi}_{n,i}$ definido de acordo com

$$\underline{\psi}_{n,i}\left(\underline{u}_{n,i}\right) = \underline{F_{ext}}_{n,i} - \underline{F_{int}}_{n,i}\left(\underline{u}_{n,i}\right) = \underline{f_{ext}}_{n,i} - \underline{f_{int}}_{n,i}\left(\underline{u}_{n,i}\right) \tag{3.5}$$

onde todas as grandezas são definidas para a iteração i do incremento n.

Desenvolvendo o vector das forças residuais $\underline{\psi}_{n,i}$ para a iteração i em série de Taylor obtém-se

$$\underline{\psi}_{n,i}\left(\underline{u}_{n,i-1} + \delta\underline{u}_{n,i}\right) = \underline{\psi}_{n,i-1}\left(\underline{u}_{n,i-1}\right) + \left(\frac{\partial \underline{\psi}_n}{\partial \underline{u}_n}\right)_{i-1} \delta\underline{u}_{n,i} + \ldots \tag{3.6}$$

sendo $\delta\underline{u}_{n,i}$ a correcção do vector dos incrementos de deslocamentos.

Se existir uma solução exacta no incremento n e iteração i ter-se-á

$$\underline{\psi}_{n,i}\left(\underline{u}_{n,i-1}+\delta\underline{u}_{n,i}\right)=\underline{0} \tag{3.7}$$

pelo que considerando apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor se obtém

$$\underline{\psi}_{n,i-1}\left(\underline{u}_{n,i-1}\right)+\left(\frac{\partial\underline{\psi}_{n}}{\partial\underline{u}_{n}}\right)_{i-1}\delta\underline{u}_{n,i}=\underline{0} \tag{3.8}$$

Admitindo que

$$\underline{\underline{K}}_{n,i}=\left(-\frac{\partial\underline{\psi}_{n}}{\partial\underline{u}_{n}}\right)_{i-1}=\left(\frac{\partial\underline{f}_{int}}{\partial\underline{u}_{n}}\right)_{i-1}-\left(\frac{\partial\underline{f}_{ext}}{\partial\underline{u}_{n}}\right)_{i-1} \tag{3.9}$$

ou simplificando no caso de o carregamento ser independente do campo de deslocamentos

$$\underline{\underline{K}}_{n,i}=\left(\frac{\partial\underline{f}_{int}}{\partial\underline{u}_{n}}\right)_{i-1} \tag{3.10}$$

é então possível obter a correcção do vector dos incrementos de deslocamentos $\delta\underline{u}_{n,i}$ na iteração i através da resolução do seguinte sistema de equações

$$\underline{\underline{K}}_{n,i}\,\delta\underline{u}_{n,i}=\underline{\psi}_{n,i-1}\left(\underline{u}_{n,i-1}\right) \tag{3.11}$$

Obtido o vector dos incrementos de deslocamento $\delta\underline{u}_{n,i}$ por intermédio desta equação podem obter-se os vectores dos incrementos de deslocamentos $\underline{u}_{n,i}$ e dos deslocamentos $\underline{U}_{n,i}$

$$\underline{u}_{n,i}=\underline{u}_{n,i-1}+\delta\underline{u}_{n,i} \tag{3.12}$$

$$\underline{U}_{n,i}=\underline{U}_{n,0}+\underline{u}_{n,i} \tag{3.13}$$

sendo $\underline{u}_{n,i}$ o vector dos incrementos de deslocamento para a iteração i e $\underline{U}_{n,0}$ o vector de deslocamentos correspondente ao início do incremento (igual à solução convergida no final do incremento n-1).

Obtido o vector dos incrementos de deslocamento é possível obter o vector dos incrementos de extensões $\Delta\underline{\varepsilon}_{n,i}$ e o vector de extensões $\underline{\varepsilon}_{n,i}$ por intermédio das seguintes expressões

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{n,i} = \underline{\underline{B}}_{L_{n,i}}\,\underline{u}_{n,i} \tag{3.14}$$

$$\underline{\varepsilon}_{n,i} = \underline{\varepsilon}_{n,0} + \Delta\underline{\varepsilon}_{n,i} \tag{3.15}$$

onde $\underline{\varepsilon}_{n,0}$ é o vector de extensões correspondente ao início do incremento e $\underline{\underline{B}}_{L_{n,i}}$ é a matriz de deformação linear do elemento actualizada para a iteração i.

O tensor dos incrementos de tensão $\Delta\underline{\sigma}_{n,i}$ e o tensor de tensões $\underline{\sigma}_{n,i}$ são obtidos de acordo com a lei constitutiva admitida para os materiais, utilizando o vector de tensões correspondente ao início do incremento $\underline{\sigma}_{n,0}$ e os valores de $\underline{\varepsilon}_{n,0}$ e $\Delta\underline{\varepsilon}_{n,i}$:

$$\Delta\underline{\sigma}_{n,i} = \Delta\underline{\sigma}_{n,i}\left(\underline{\sigma}_{n,0}, \underline{\varepsilon}_{n,0}, \Delta\underline{\varepsilon}_{n,i}\right) \tag{3.16}$$

$$\underline{\sigma}_{n,i} = \underline{\sigma}_{n,0} + \Delta\underline{\sigma}_{n,i} \tag{3.17}$$

A determinação do vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na iteração i $\underline{\underline{F}}_{int_{n,i}}$ pode agora ser obtido através de

$$\underline{\underline{F}}_{int_{n,i}} = \int_V \underline{\underline{B}}_{L_{n,i}}^{T}\,\underline{\sigma}_{n,i}\,dV \tag{3.18}$$

O vector dos incrementos de forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na iteração i é obtido através de

$$\underline{f}_{int_{n,i}} = \underline{\underline{F}}_{int_{n,i}} - \underline{\underline{F}}_{int_{n,0}} \tag{3.19}$$

onde $\underline{\underline{F}}_{int_{n,0}}$ é o vector de forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado no início do incremento (igual ao valor obtido na solução final do incremento anterior).

A opção de interromper o cálculo ou efectuar nova iteração sobre o incremento é efectuada de acordo com critérios de convergência, definidos em termos de tolerâncias admissíveis. Estes critérios são estabelecidos através da monitorização de uma ou mais grandezas como as normas euclidianas dos

deslocamentos, das forças residuais ou do trabalho produzido pelas forças internas ou externas, isto é

$$\frac{\left\|\delta G_{n,i}\right\|}{\left\|\underline{G}_{n,j}\right\|} \leq \text{Tolerância} \tag{3.20}$$

onde $\left\|\delta G_{n,i}\right\|$ representa a norma da variação da grandeza escolhida na iteração i e $\left\|\underline{G}_{n,j}\right\|$ representa a norma do valor total da grandeza na referida iteração anterior j.

O valor da tolerância deve ser criteriosamente escolhido, pois se por um lado com a utilização um valor demasiado grande se pode obter uma solução pouco precisa, a utilização de valores demasiado pequenos pode implicar um esforço de cálculo exagerado face à qualidade dos resultados obtidos.

Após algumas aplicações realizadas com o programa de cálculo desenvolvido, constatou-se que a utilização do Método de Newton-Raphson Modificado é, normalmente, bastante mais eficiente (em termos do tempo de cálculo dispendido) do que o Método de Newton-Rapshon. Uma vez que neste último método se procede à contínua actualização da matriz de rigidez, a discretização em fibras considerada para a secção transversal dos elementos requer bastante tempo para a construção das matrizes de rigidez elementares. Desta forma torna-se mais rápido resolver o sistema de equações diversas vezes utilizando a matriz de rigidez construída na primeira iteração do que actualizar constantemente a matriz de rigidez, razão pela qual o Método de Newton-Raphson Modificado se mostrou neste caso mais rápido.

3.3. Equações incrementais do movimento para a análise estática

Na descrição do movimento em problemas geometricamente não-lineares é usual a utilização de duas formulações distintas: a Lagrangeana Total e a Lagrangeana Actualizada, que se distinguem pela configuração de base utilizada como referência. Na formulação Lagrangeana Total todas as variáveis do problema são referidas à configuração inicial indeformada (t=0), enquanto na Lagrangeana Actualizada as variáveis são referidas à última configuração obtida (t-Δt), onde t representa o instante actual e Δt o incremento de tempo.

Desta forma, a posição ${}^{t}\underline{x}$ de um ponto genérico pertencente a um corpo no instante t, definido pelas suas coordenadas ${}^{t}x_i$ (com i=1,2,3), pode ser obtido de duas formas:

i) Formulação Lagrangeana Total:

$${}^{t}x_i = {}^{0}x_i + {}^{t}U_i \text{, com i=1,2,3} \tag{3.21}$$

ii) Formulação Lagrangeana Actualizada:

$$^{t}x_i = {}^{t-\Delta t}x_i + {}^{t}u_i \text{, com i=1,2,3} \tag{3.22}$$

onde $^{t}U_i$ e $^{t}u_i$ representam, conforme atrás referido, as componentes do deslocamento total e do incremento de deslocamento desse ponto instante t.

Sendo ambas as formulações correctas do ponto de vista teórico, a utilização de qualquer delas depende do campo de aplicação visado (Bathe (1982); Zienkiewicz e Taylor (1991a)). No presente trabalho de forma optou-se pela Formulação Lagrangeana Total, pelo que se procederá apenas ao desenvolvimento desta.

Adoptando a Formulação Lagrangeana Total, onde o movimento é expresso em função de um referencial fixo, e utilizando um sistema coordenado cartesiano, as coordenadas do ponto genérico P de um volume ^{0}V são, no instante 0 ($^{0}x_1$, $^{0}x_2$, $^{0}x_3$). Para o instante t as coordenadas de P, agora representado por P' ($^{t}x_1$, $^{t}x_2$, $^{t}x_3$), são obtidas através de (3.21).

A formulação das condições de equilíbrio para a configuração deformada implica a consideração das variações de área, de volume ou de densidade do corpo, resultando que para um instante genérico t essas quantidades são desconhecidas *a priori*. A utilização do tensor das extensões de Green-Lagrange, bem como do tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff (ver Figura 3.1), na definição da energia do sistema permite superar a referida dificuldade, possibilitando a utilização de integrais sobre a área e volume originais da estrutura, para t=0.

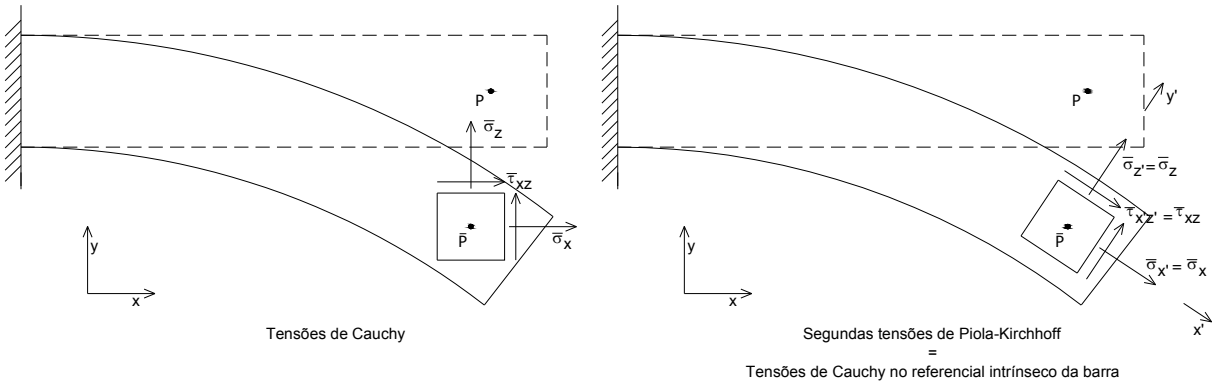


Figura 3.1 – Interpretação física das segundas tensões de Piola-Kirchhoff (Póvoas (1991)).

Considere-se um triângulo definido por três pontos vizinhos P, Q e R pertencentes ao corpo ^{0}V na sua configuração original, representado na Figura 3.2. Determinando a variação dos comprimentos do triângulo para a configuração deformada P'Q'R' no instante t é possível avaliar as deformações do corpo ^{t}V.

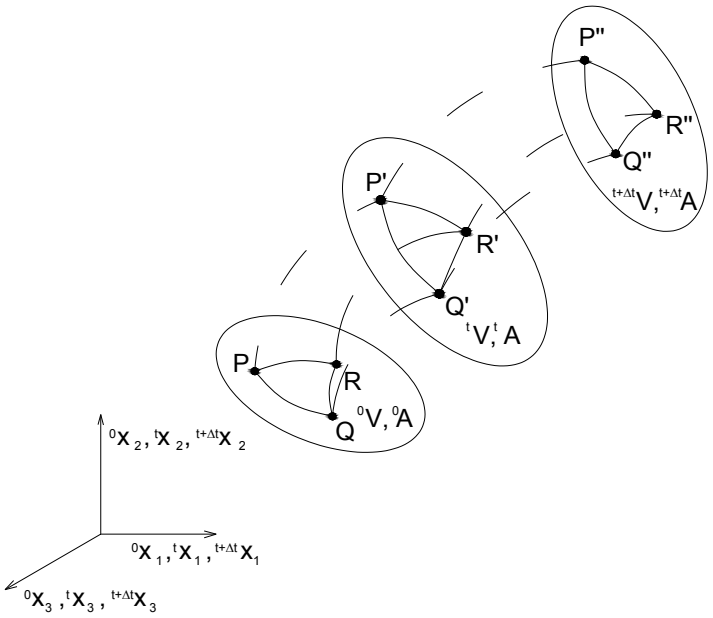


Figura 3.2 – Movimento do corpo num sistema coordenado cartesiano fixo.

O quadrado do comprimento ^0ds do segmento de recta infinitesimal que une dois pontos, por exemplo P e Q, na configuração indeformada no instante 0 é dado por

$$\left(^0ds\right)^2 = d^0x_i \; d^0x_i \tag{3.23}$$

O quadrado do comprimento ^tds do segmento de linha infinitesimal que une os mesmos dois pontos na configuração deformada, P' e Q', no instante t é dado por

$$\left(^tds\right)^2 = d^tx_i \; d^tx_i \tag{3.24}$$

Admitindo uma variação contínua da configuração é possível relacionar as componentes d^0x_i do segmento na configuração indeformada com as componentes genéricas d^tx_k do segmento deformado através de

$$d^tx_k = \frac{\partial^tx_k}{\partial^0x_i} d^0x_i \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.24) obtém-se

$$\left(^tds\right)^2 = \frac{\partial^tx_k}{\partial^0x_i}\frac{\partial^tx_k}{\partial^0x_j} d^0x_i d^0x_j \tag{3.26}$$

A diferença entre os quadrados dos comprimentos dos segmentos infinitesimais PQ e P'Q' é dada por

$$\left({}^{t}ds\right)^{2}-\left({}^{0}ds\right)^{2}=\left(\frac{\partial {}^{t}x_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}}\frac{\partial {}^{t}x_{k}}{\partial {}^{0}x_{j}}-\delta_{ij}\right)d^{0}x_{i}\;d^{0}x_{j}=\left({}^{t}C_{ij}-\delta_{ij}\right)d^{0}x_{i}\,d^{0}x_{j} \tag{3.27}$$

onde ${}^{t}C_{ij}$ é definido como o tensor das extensões de Green e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Conforme foi já referido, a presente formulação baseia-se na utilização do tensor das extensões de Green-Lagrange ${}^{t}E_{ij}$, sendo este definido no instante t por

$${}^{t}E_{ij}=\frac{1}{2}\left({}^{t}C_{ij}-\delta_{ij}\right) \tag{3.28}$$

Este tensor pode ser definido utilizando a definição de ${}^{t}U_{i}$ exposta em (3.21), através de

$$\frac{\partial {}^{t}x_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}}=\frac{\partial {}^{0}x_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}}+\frac{\partial {}^{t}U_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}}=\delta_{ki}+\frac{\partial {}^{t}U_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}} \tag{3.29}$$

Substituindo (3.29) em (3.27) e utilizando a equação (3.28) obtém-se a expressão para o tensor das extensões de Green-Lagrange como função das componentes do deslocamento:

$${}^{t}E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial {}^{t}U_{i}}{\partial {}^{0}x_{j}}+\frac{\partial {}^{t}U_{j}}{\partial {}^{0}x_{i}}+\frac{\partial {}^{t}U_{k}}{\partial {}^{0}x_{i}}\frac{\partial {}^{t}U_{k}}{\partial {}^{0}x_{j}}\right) \tag{3.30}$$

Definidos os tensores das extensões resta definir os tensores das tensões. Considere-se um sólido infinitesimal deformado, conforme apresentado na Figura 3.3, cujo centro é caracterizado pelas coordenadas ${}^{t}x_{1}$, ${}^{t}x_{2}$ e ${}^{t}x_{3}$. Usualmente as tensões actuantes sobre uma superfície exterior do elemento de volume estão definidas em relação à configuração deformada do sólido, e são caracterizadas através do tensor das tensões de Cauchy σ_{ij}. Assim o vector de força $d^{t}T$ actuante sobre a superfície deformada P'Q'R'S' pode ser definido através de

$$d^{t}T_{\alpha}=\sigma_{\beta\alpha}\;{}^{t}n_{\beta}\;d^{t}S\text{, com }\beta=1,2,3 \tag{3.31}$$

onde $d^{t}S$ é a área infinitesimal da superfície P'Q'R'S' e ${}^{t}n_{\beta}$ são as componentes do versor da normal à referida superfície.

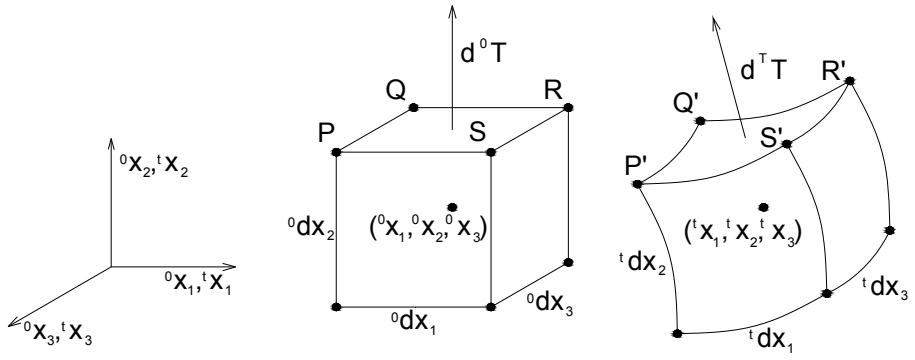


Figura 3.3 – Representação de um elemento de volume nos estados indeformado e deformado e os correspondentes vectores de forças actuantes sobre uma superfície particular.

Adoptar-se-á a lei de Kirchhoff de forma a definir as tensões em relação à configuração indeformada do sólido, à semelhança do critério utilizado na definição dos tensores das extensões. Assim o vector de forças d^tT actuante sobre a superfície infinitesimal deformada P'Q'R'S' pode ser relacionado com o vector de forças d^0T actuante sobre a superfície indeformada PQRS através de

$$d^0T_i = \frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_\alpha} d^tT_\alpha \tag{3.32}$$

onde $^0x_1$, $^0x_2$ e $^0x_3$ são as coordenadas do centro do sólido indeformado.

Utilizando o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff $^tS_{ij}$, que expressa o estado de tensão no instante t em função do referencial inicial indeformado, pode-se definir o vector de forças d^0T através de

$$d^0T_i = {}^tS_{ji}\ {}^0n_j\ d^0S \tag{3.33}$$

onde d^0S é a área da superfície infinitesimal indeformada PQRS, ver Figura 3.3.

A relação entre as grandezas $^0n_j\ d^0S$ e $^tn_j\ d^tS$ pode ser expressa através da hipótese da conservação da massa de acordo com

$$\frac{\partial^0 x_j}{\partial^t x_\beta}\ {}^0n_j\ d^0S = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\ {}^tn_\beta\ d^tS \tag{3.34}$$

sendo $^0\rho$ e $^t\rho$ as densidades do material nos estados indeformado e deformado, respectivamente.

Substituindo a expressão (3.31) em (3.32) obtém-se

$$d^0T_i = \frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_\alpha}\sigma_{\beta\alpha}\ {}^t n_\beta\, d^tS \tag{3.35}$$

Reorganizando a expressão (3.34) na forma

$${}^t n_\beta\, d^tS = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\frac{\partial^0 x_j}{\partial^t x_\beta}\ {}^0 n_j\, d^0S \tag{3.36}$$

e substituindo em (3.35) resulta

$$d^0T_i = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\frac{\partial^0 x_j}{\partial^t x_\beta}\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_\alpha}\sigma_{\beta\alpha}\ {}^0 n_j\, d^0S \tag{3.37}$$

Igualando as expressões (3.33) e (3.37) obtém-se a seguinte relação entre o tensor das tensões de Cauchy σ_{ij} e o tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff S_{ij}:

$${}^tS_{ji} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_\alpha}\frac{\partial^0 x_j}{\partial^t x_\beta}\sigma_{\beta\alpha} \tag{3.38}$$

Utilizando (3.29) pode-se definir ${}^tS_{ij}$ em função das componentes ${}^tU_i$ conforme segue:

$${}^tS_{ji} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\left[\sigma_{ji} - \left(\delta_{j\beta}\frac{\partial^t U_i}{\partial^0 x_\alpha} + \delta_{i\alpha}\frac{\partial^t U_j}{\partial^t x_\beta} + \frac{\partial^t U_i}{\partial^0 x_\alpha}\frac{\partial^t U_j}{\partial^0 x_\beta}\right)\sigma_{\alpha\beta}\right] \tag{3.39}$$

Note-se que a relação entre as densidades de massa nos instantes 0 e t, pode ser estabelecida utilizando a hipótese da conservação de massa

$${}^t\rho = {}^0\rho\,\det\left(\frac{\partial^0 x_i}{\partial^t x_j}\right) \tag{3.40}$$

onde det() representa o determinante.

Aplicando o princípio dos deslocamentos virtuais no instante t, a expressão que representa o trabalho interno pode ser escrita em função do tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff ${}^tS_{ij}$ e do tensor das extensões de Green-Lagrange ${}^tE_{ij}$ na configuração deformada, ou do tensor das tensões de Cauchy ${}^t\sigma_{mn}$ e do tensor das extensões infinitesimais ${}^te_{mn}$ na configuração inicial:

$$\int_{{}^0V} {}^tS_{ij}\,\delta {}^tE_{ij}\,{}^0dV = \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{mn}\,\delta {}^te_{mn}\,{}^tdV \tag{3.41}$$

em que δ representa "variação" e ${}^te_{mn}$ vem definido por

$${}^te_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial {}^tU_m}{\partial {}^tx_n} + \frac{\partial {}^tU_n}{\partial {}^tx_m}\right) \tag{3.42}$$

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais no instante t+Δt, admitindo uma formulação incremental e conhecido o equilíbrio para todos os instantes discretos entre 0 e t, resulta em

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}\,\delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}\,{}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}\Re \tag{3.43}$$

sendo ${}^{t+\Delta t}\Re$ o trabalho virtual externo definido por

$${}^{t+\Delta t}\Re = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^V\,\delta u_i^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}f_i^S\,\delta u_i^{t+\Delta t}dS \tag{3.44}$$

onde ${}^{t+\Delta t}f^V_i$ e ${}^{t+\Delta t}f^S_i$ representam as componentes das forças externas de volume e de superfície.

Definindo u_i (utilizar-se-á esta nomenclatura em vez de ${}^{t+\Delta t}u_i$ ou $\Delta {}^tU_i$ de forma simplificar as expressões) como o incremento de deslocamento entre os instantes t+Δt e t

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i = \Delta {}^tU_i = {}^{t+\Delta t}U_i - {}^tU_i \tag{3.45}$$

então as coordenadas do ponto P no instante t+Δt são

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}U_i = {}^0x_i + {}^tU_i + {}^{t+\Delta t}u_i = {}^tx_i + {}^{t+\Delta t}u_i \tag{3.46}$$

Para utilizar a expressão (3.41) em função do tensor das extensões ${}^{t+\Delta t}_tE_{ij}$ e do tensor das tensões de ${}^{t+\Delta t}_tS_{ij}$ é necessário defini-los para o instante t+Δt mas referidos ao instante t de acordo com

$${}^{t+\Delta t}_tE_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^tx_i} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^tx_i}\frac{\partial u_k}{\partial {}^tx_j}\right) \tag{3.47}$$

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ji} = \frac{{}^{t}\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\frac{\partial {}^{t}x_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_\alpha}\frac{\partial {}^{t}x_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_\beta}\,{}^{t+\Delta t}\sigma_{\beta\alpha} \tag{3.48} $$

Utilizando agora a expressão (3.41) com os tensores definidos em (3.47) e (3.48) resulta

$$ \int_{{}^{t}V} {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij}\,\delta\,{}^{t+\Delta t}_{t}E_{ij}\,{}^{t}dV = {}^{t+\Delta t}\Re \tag{3.49} $$

Admitindo que a solicitação é independente da deformação da estrutura, o trabalho virtual externo pode ser obtido por

$$ {}^{t+\Delta t}\Re = \int_{{}^{0}V} {}^{t+\Delta t}f_i^{V}\,\delta u_i{}^{0}dV + \int_{{}^{0}S} {}^{t+\Delta t}f_i^{S}\,\delta u_i{}^{0}dS \tag{3.50} $$

Decompondo o tensor das extensões segundo

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}E_{ij} = {}^{t}e_{ij} + {}^{t}\eta_{ij} \tag{3.51} $$

onde

$$ {}^{t}e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^{t}x_i}\right) \tag{3.52} $$

$$ {}^{t}\eta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial {}^{t}x_i}\frac{\partial u_k}{\partial {}^{t}x_j} \tag{3.53} $$

o tensor das tensões pode ser decomposto de acordo com

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij} = {}^{t}_{t}S_{ij} + {}_{t}S_{ij} = {}^{t}\sigma_{ij} + {}_{t}S_{ij} \tag{3.54} $$

Substituindo as expressões (3.51) e (3.54) na expressão (3.49) resulta

$$ \int_{{}^{t}V} {}_{t}S_{ij}\,\delta\,{}_{t}E_{ij}\,{}^{t}dV + \int_{{}^{t}V} {}^{t}\sigma_{ij}\,\delta\,{}^{t}\eta_{ij}\,{}^{t}dV = {}^{t+\Delta t}\Re - \int_{{}^{t}V} {}^{t}\sigma_{ij}\,\delta\,{}^{t}e_{ij}\,{}^{t}dV \tag{3.55} $$

A equação (3.55) pode agora ser linearizada através das seguintes aproximações

$$ {}_tS_{ij} \cong {}_tC_{ijrs}\ {}^te_{rs} \tag{3.56} $$

$$ \delta {}_tE_{ij} \cong \delta {}^te_{ij} \tag{3.57} $$

onde ${}_tC_{ijrs}$ é o tensor das propriedades do material no instante t. Assim a linearização de (3.55) resulta em

$$ \int_{{}^tV} {}_tC_{ijrs}\ {}^te_{rs}\ \delta {}_te_{ij}\ {}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij}\ \delta\ {}^t\eta_{ij}\ {}^tdV = {}^{t+\Delta t}\Re - \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij}\ \delta\ {}^te_{ij}\ {}^tdV \tag{3.58} $$

Admitindo que o problema é linear elástico as componentes de C_{ijrs} tomam valores constantes expressos por

$$ C_{ijrs} = \lambda\ \delta_{ij}\ \delta_{rs} + \mu\left(\delta_{ir}\ \delta_{js} + \delta_{is}\ \delta_{jr}\right) \tag{3.59} $$

onde λ e μ são as constantes de Lamé:

$$ \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.60} $$

$$ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.61} $$

sendo E e ν o módulo de elasticidade o coeficiente de Poisson do material, respectivamente.

Assim, a expressão (3.58) permite obter os incrementos de deslocamento u_i para o instante $t+\Delta t$. No entanto, conforme foi referido na secção 3.2, devido à linearização utilizada, os trabalhos virtual e externo não são exactamente iguais, e a diferença é obtida de

$$ \text{Erro} = {}^{t+\Delta t}\Re - \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(1)}\ \delta\ {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)}\ {}^{t+\Delta t}dV \tag{3.62} $$

onde o índice (1) se refere à primeira iteração. Deste modo é necessário utilizar um processo iterativo de forma a obter uma solução em que o erro seja considerado admissível, podendo empregar-se a seguinte equação

$$\int_{{}^tV} {}_tC_{ijrs}\,\Delta {}^te_{rs}^{(k)}\,\delta {}_te_{ij}\,{}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij}\,\delta\Delta {}^t\eta_{ij}^{(k)}\,{}^tdV = {}^{t+\Delta t}\Re - \int_{t+\Delta t_V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(k-1)}\,\delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(k-1)}\,{}^{t+\Delta t}dV \tag{3.63}$$

sendo k o número da iteração em análise.

O valor total do deslocamento para o instante t+Δt actualizado para iteração k vem assim dado por

$${}^{t+\Delta t}U_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}U_i^{(k-1)} - u_i^{(k)} \tag{3.64}$$

sendo o valor do deslocamento no início do processo iterativo igual ao obtido no final do processo iterativo do instante precedente, de acordo com

$${}^{t+\Delta t}U_i^{(0)} = {}^tU_i \tag{3.65}$$

3.4. Formulação geral dos elementos finitos

Utilizando um elemento finito de viga de n nós é possível estimar as componentes do incremento de deslocamento u_i de um ponto de coordenadas x_j em função dos incrementos de deslocamento dos nós u^k_i, através da utilização de funções de interpolação $N^k(s)$ de acordo com

$$u_i(s) = \sum_{k=1}^{n} N^k(s)\,u_i^k \text{ , com i=1,2,3 e k=1,...,n} \tag{3.66}$$

sendo s o comprimento ao longo da directriz do elemento.

De igual forma é possível determinar as coordenadas $x_i(s)$ de um ponto do elemento finito em função das coordenadas dos nós x^k_i na forma:

$$x_i(s) = \sum_{k=1}^{n} N^k(s)\,x_i^k \text{ , com i=1,2,3 e k=1,...,n} \tag{3.67}$$

As expressões (3.66) e (3.67) podem ser escritas sob forma matricial

$$\underline{u}(s) = \underline{N}\,\underline{u} \tag{3.68}$$

$$\underline{x}(s) = \underline{N}\,\underline{x} \tag{3.69}$$

onde $\underline{N}$ é uma matriz constituída pelo produto das funções de forma associadas a cada nó e matrizes identidade de dimensões 3x3:

$$\underline{N} = \left[N_1 \underline{I} \quad N_2 \underline{I} \quad \ldots \quad N_n \underline{I} \right] \tag{3.70}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

O vector dos incrementos dos deslocamentos nodais $\underline{u}$ é definido pelas componentes dos incrementos dos deslocamentos dos n nós conforme

$$\underline{u}^T = \left[u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \,|\, u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \,|\, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \,|\, u_1^n \quad u_2^n \quad u_3^n \right] \tag{3.72}$$

As componentes do tensor dos incrementos das extensões de Green-Lagrange podem ser expressas na forma vectorial através de

$$\underline{\varepsilon}^T = \left[{}_tE_{11} \quad {}_tE_{22} \quad {}_tE_{33} \quad 2{}_tE_{12} \quad 2{}_tE_{23} \quad 2{}_tE_{31} \right] \tag{3.73}$$

De forma análoga as componentes do tensor dos incrementos das tensões de Cauchy podem ser expressos por

$$\underline{T}^T = \left[{}_t\sigma_{11} \quad {}_t\sigma_{22} \quad {}_t\sigma_{33} \quad {}_t\sigma_{12} \quad {}_t\sigma_{23} \quad {}_t\sigma_{31} \right] \tag{3.74}$$

De acordo com (3.51) o tensor dos incrementos das extensões $\underline{\varepsilon}$ pode ser decomposto em componentes lineares $\underline{\varepsilon_L}$ e não-lineares $\underline{\varepsilon_{NL}}$, resultando

$$\underline{\varepsilon_L}^T = \left[{}_te_{11} \quad {}_te_{22} \quad {}_te_{33} \quad 2{}_te_{12} \quad 2{}_te_{23} \quad 2{}_te_{31} \right] \tag{3.75}$$

$$\underline{\varepsilon_{NL}}^T = \left[{}_t\eta_{11} \quad {}_t\eta_{22} \quad {}_t\eta_{33} \quad {}_t\eta_{12} \quad {}_t\eta_{23} \quad {}_t\eta_{31} \right] \tag{3.76}$$

Considerando as expressões (3.52) e (3.53) podem-se obter as componentes dos vectores dos incrementos dos deslocamentos através de

$$\underline{\varepsilon_L}^T = \underline{B_L}\,\underline{u} \tag{3.77}$$

$$\underline{\varepsilon_{NL}}^T = \frac{1}{2}\underline{B_{NL}}\,\underline{u} \tag{3.78}$$

em que a matriz $\underline{B_L}$ é formada pelas derivadas das funções de interpolação de acordo com

$$\underline{B_L} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{array}\right] \tag{3.79}$$

A matriz $\underline{B_{NL}}$ depende dos incrementos dos deslocamentos nodais e é obtida através de

$$\underline{B_{NL}} = \underline{A}\,\underline{G} \tag{3.80}$$

onde a matriz $\underline{A}$ depende dos incrementos dos deslocamentos nodais e é definida por

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{array}\right] \tag{3.81}$$

A matriz $\underline{G}$ é composta por derivadas das funções de interpolação:

$$\underline{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \end{array}\right] \tag{3.82}$$

A utilização da equação de equilíbrio linearizada expressa em (3.58) implica a definição da variação das componentes dos tensores das extensões $\delta\underline{\varepsilon_L}$ e $\delta\underline{\varepsilon_{NL}}$ de acordo com

$$\delta\underline{\varepsilon_L} = \underline{B_L}\,\delta\underline{u} \tag{3.83}$$

$$\delta\underline{\varepsilon_{NL}} = \underline{B_{NL}}\,\delta\underline{u} \tag{3.84}$$

onde $\delta\underline{u}$ representa a variação a introduzir no incremento dos deslocamentos nodais.

Admitindo um material elástico linear definido através de C_{ijrs}, pode-se definir a matriz elasticidade $\underline{D}$, de acordo com

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

Assim, utilizando $\delta\underline{\varepsilon_L}$, $\delta\underline{\varepsilon_{NL}}$ $\delta_{\underline{\varepsilon}}$NL e $\underline{D}$ na equação (3.58) resulta a seguinte expressão

$$\int_{{}^tV} \delta\underline{\varepsilon_L}^T \underline{D}\,\underline{\varepsilon_L}\,{}^t dV + \int_{{}^tV} \delta\underline{\varepsilon_{NL}}^T \underline{T}\,{}^t dV = {}^{t+\Delta t}\underline{\Re} - \int_{{}^tV} \delta\underline{\varepsilon_L}^T \underline{T}\,{}^t dV \tag{3.86}$$

ou utilizando (3.83) e (3.84) resulta

$$\int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{B_L}^T \underline{D}\underline{B_L}\,\underline{u}\,{}^t dV + \int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{B_{NL}}^T \underline{T}\,{}^t dV = {}^{t+\Delta t}\underline{\Re} - \int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{B_L}^T \underline{T}\,{}^t dV \tag{3.87}$$

Assim

$$\underline{B_{NL}}\,\underline{T} = \underline{G}^T \underline{\sigma}\underline{G}\underline{u} \tag{3.88}$$

sendo $\underline{\sigma}$ definido por

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{31} & {}^t\sigma_{32} & {}^t\sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{31} & {}^t\sigma_{32} & {}^t\sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{31} & {}^t\sigma_{32} & {}^t\sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

A expressão (3.87) resulta em

$$\int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{B_L}^T \underline{D}\underline{B_L}\,\underline{u}\,{}^t dV + \int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{G}^T \underline{\sigma}\underline{G}\underline{u}\,{}^t dV = {}^{t+\Delta t}\underline{\Re} - \int_{{}^tV} \delta\underline{u}^T \underline{B_L}^T \underline{T}\,{}^t dV \tag{3.90}$$

Pode-se definir o trabalho virtual externo em função do vector dos incrementos de deslocamento nodais de acordo com

$${}^{t+\Delta t}\underline{\Re} = \int_{{}^0V} \delta\underline{u}^T \underline{\underline{N}}^{V\,T} \underline{\underline{f}}^{V\,0} dV + \int_{{}^0S} \delta\underline{u}^T \underline{\underline{N}}^{S\,T} \underline{\underline{f}}^{S\,0} dS \tag{3.91}$$

em que N^V e N^S são, respectivamente, as funções de interpolação de volume e de superfície.

As equações gerais de equilíbrio para incrementos de carga no instante t+Δt e para a iteração i podem agora ser obtidas através de

$$\left({}^{t}_{t}\underline{K_L} + {}^{t}_{t}\underline{K_{NL}}\right)\underline{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{f_{ext}} + {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\underline{f_{int}}^{(i-1)} \tag{3.92}$$

sendo $\underline{u}^{(i)}$ o vector dos incrementos de deslocamentos nodais na iteração (i), e ${}^{t}_{t}\underline{K_L}$ a matriz de rigidez incremental de extensões lineares, definida para o instante t por:

$$ {}^{t}_{t}\underline{K_L} = \int_{{}^{t}V} \underline{B_L}^{T}\,\underline{D}\,\underline{B_L}\;{}^{t}dV \tag{3.93}$$

e ${}^{t}_{t}\underline{K_{NL}}$ a matriz de rigidez incremental de extensões não-lineares, definida para o mesmo instante através de:

$$ {}^{t}_{t}\underline{K_{NL}} = \int_{{}^{t}V} \underline{G}^{T}\,\underline{\sigma}\,\underline{G}\;{}^{t}dV \tag{3.94}$$

${}^{t+\Delta t}\underline{f_{ext}}$ é o vector das forças nodais exteriores aplicadas no instante t+Δt, definido através de:

$$ {}^{t+\Delta t}\underline{f_{ext}} = \int_{{}^{0}V} \underline{N}^{V\,T}\,\underline{f}^{V}\;{}^{0}dV + \int_{{}^{0}S} \underline{N}^{S\,T}\,\underline{f}^{S}\;{}^{0}dS \tag{3.95}$$

e ${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\underline{f_{int}}^{(i-1)}$ é o vector dos incrementos de forças nodais exteriores equivalentes ao estado de tensão no elemento finito no instante t+Δt, e associado à iteração precedente (i-1), sendo definido por:

$$ {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\underline{f_{int}}^{(i-1)} = \int_{{}^{t}V} \underline{B_L}^{T}\,\underline{T}^{(i-1)}\;{}^{t}dV \tag{3.96}$$

O vector de deslocamentos nodais ${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)}$ no instante t+Δt na iteração (i) dado por

$$ {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{u}^{(i-1)} + \underline{u}^{(i)}. \tag{3.97}$$

em que o vector de deslocamentos nodais em t+Δt e no início do processo iterativo é igual ao do final do processo iterativo do instante precedente:

$$^{t+\Delta t}\underline{U}^{(0)} = {}^{t}\underline{U}. \tag{3.98}$$

3.5. Formulações específicas dos elementos finitos

3.5.1. Discretização de peças lineares curvas

Na discretização de peças lineares curvas utilizou-se a divisão da respectiva directriz em elementos finitos lineares curvos, e uma discretização da secção transversal através de uma formulação de fibras. A utilização de uma modelação de fibras permite a divisão da secção em parcelas elementares, facto que permite utilizar leis constitutivas diferenciadas para cada material de cada fibra. Admite-se que a secção transversal da peça pode variar, no entanto essa variação deverá ser gradual e pouco acentuada, para que a directriz de cada fibra permaneça aproximadamente equidistante da directriz do elemento.

No programa de cálculo desenvolvido para a modelação de elementos lineares de betão utilizou-se uma abordagem baseada na formulação de Timoshenko, generalizada para o caso de peças curvas 3D (Oñate (1995); Ferraz *et al.* (2004)) e tendo como resultado desta implementação surgido a classe *TIMOSHENKO* referida na secção 2.5.2.2.

Considerando um elemento finito curvo definido por uma linha directriz S que passa pelos nós (sendo estes coincidentes com o centro de gravidade da secção recta) defina-se um sistema de eixos locais $x'_1x'_2x'_3$ com origem no centro de gravidade de cada secção, sendo x'_1 perpendicular à secção, e x'_2 e x'_3 coincidentes com as direcções principais de inércia (ver Figura 3.4).

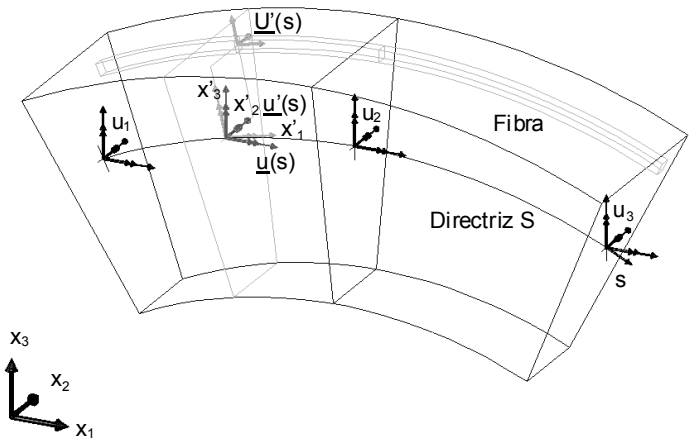


Figura 3.4 - Elemento finito de viga de Timoshenko 3D.

O vector dos incrementos de deslocamento $\underline{u}_i$ de um nó genérico i definido no referencial global $x_1x_2x_3$ é dado por

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_{x_1,i} \\ u_{x_2,i} \\ u_{x_3,i} \\ \theta_{x_1,i} \\ \theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_3,i} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

onde $u_{x1,i}$, $u_{x2,i}$, $u_{x3,i}$ são os incrementos de deslocamento do nó segundo os eixos x_1, x_2 e x_3, respectivamente, e $\theta_{x1,i}$, $\theta_{x2,i}$ e $\theta_{x3,i}$ são os incrementos de rotação do nó em torno dos referidos eixos.

Sendo s o comprimento ao longo da directriz S do elemento finito, e cuja origem coincide com o primeiro nó, o vector do incrementos de deslocamentos no referencial global $x_1x_2x_3$ de um ponto genérico da directriz do elemento $\underline{u}(s)$, localizada na coordenada s, pode ser expresso por

$$\underline{u}(s) = N_i(s)\, \underline{I}\, \underline{u}_i \tag{3.100}$$

onde $N_i(s)$ são as funções de forma do elemento e $\underline{I}$ é uma matriz identidade de dimensões 6x6.

O vector dos incrementos de deslocamentos no referencial local $\underline{u}'(s)$ de um ponto da directriz do elemento é obtido através de

$$\underline{u}'(s) = \underline{R}(s)\underline{u}(s) \tag{3.101}$$

sendo $\underline{R}(s)$ a seguinte matriz de transformação do referencial $x_1x_2x_3$ para o referencial $x'_1x'_2x'_3$:

$$\underline{R}(s) = \begin{bmatrix} e_{x'_1,x_1} & e_{x'_1,x_2} & e_{x'_1,x_3} & 0 & 0 & 0 \\ e_{x'_2,x_1} & e_{x'_2,x_2} & e_{x'_2,x_3} & 0 & 0 & 0 \\ e_{x'_3,x_1} & e_{x'_3,x_2} & e_{x'_3,x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x'_1,x_1} & e_{x'_1,x_2} & e_{x'_1,x_3} \\ 0 & 0 & 0 & e_{x'_2,x_1} & e_{x'_2,x_2} & e_{x'_2,x_3} \\ 0 & 0 & 0 & e_{x'_3,x_1} & e_{x'_3,x_2} & e_{x'_3,x_3} \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

Esta matriz é formada pelas componentes dos versores das direcções x'_1, x'_2 e x'_3 do referencial local, respectivamente $\underline{e}_{x'1}$, $\underline{e}_{x'2}$ e $\underline{e}_{x'3}$, definidos no ponto de coordenada s da directriz do elemento.

O vector de posição $\underline{p}(s)$ de um ponto genérico da directriz do elemento definido por

$$\underline{p}(s) = x_1(s)\,\underline{e}_{x_1} + x_2(s)\,\underline{e}_{x_2} + x_3(s)\,\underline{e}_{x_3} \tag{3.103}$$

onde $\underline{e}_{x1}$, $\underline{e}_{x2}$ e $\underline{e}_{x3}$ são, respectivamente, os versores das direcções x_1, x_2 e x_3, as coordenadas $x_1(s)$, $x_2(s)$ e $x_3(s)$ podem ser obtidas através de (3.69).

Definido o vector posição do ponto de coordenada s da directriz do elemento finito é possível definir o vector tangente $\underline{t}(s)$ à directriz através de

$$\underline{t}(s) = \frac{dx_1(s)}{ds}\underline{e}_{x_1} + \frac{dx_2(s)}{ds}\underline{e}_{x_2} + \frac{dx_3(s)}{ds}\underline{e}_{x_3} \tag{3.104}$$

Admitindo que o eixo local x'_1 é coincidente com o vector $\underline{t}(s)$, as componentes do seu versor no referencial global $x_1x_2x_3$, podem ser definidas por intermédio de

$$\underline{e}_{x'_1} = e_{x'_1,x_1}\,\underline{e}_{x_1} + e_{x'_1,x_2}\,\underline{e}_{x_2} + e_{x'_1,x_3}\,\underline{e}_{x_3} \tag{3.105}$$

sendo

$$e_{x'_1,x_1} = \frac{1}{\left\|\underline{t}(s)\right\|}\frac{dx_1(s)}{ds} \tag{3.106}$$

$$e_{x'_1,x_2} = \frac{1}{\left\|\underline{t}(s)\right\|}\frac{dx_2(s)}{ds} \tag{3.107}$$

$$e_{x'_1,x_3} = \frac{1}{\left\|\underline{t}(s)\right\|}\frac{dx_3(s)}{ds} \tag{3.108}$$

e $||\underline{t}(s)||$ é a norma de $\underline{t}(s)$.

Uma vez que o referencial local tem de constituir um sistema de coordenadas directo e homogéneo, a orientação da direcção de x'_2 fica definida através do produto vectorial entre $\underline{e}_{x'1}$ e um vector auxiliar designado por $\underline{e}_{Local}$:

$$\underline{e}_{x'_2} = \frac{\underline{e}_{x'_1} \times e_{Local}}{\left\|\underline{e}_{x'_1} \times e_{Local}\right\|} \tag{3.109}$$

O vector $\underline{e}_{Local}$ é definido pelo utilizador de forma a orientar a secção transversal em torno da directriz do elemento finito, e deverá ficar contido no plano formado pelos versores x'_1 e x'_3. Uma vez que o produto vectorial de dois versores ortogonais é um versor, o versor da direcção x'_3 fica definido por

$$\underline{e}_{x'_3} = \underline{e}_{x'_1} \times \underline{e}_{x'_2} \tag{3.110}$$

Depois de obtido o vector dos incrementos de deslocamentos no referencial local $\underline{u}'(s)$, e admitindo que o centro de corte é coincidente com o centro de gravidade da secção, o vector dos incrementos de deslocamentos $\underline{u_f}'(s)$ de um ponto da secção genérica correspondente à directriz de uma fibra fica definido através de

$$\underline{u_f}'(s) = \underline{T}(s)\,\underline{u}'(s) = \begin{bmatrix} u_{f\,x'_1}'(s) \\ u_{f\,x'_2}'(s) \\ u_{f\,x'_3}'(s) \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

em que $\underline{T}(s)$ é a matriz de transformação definida por

$$\underline{T}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +x'_3(s) & -x'_2(s) \\ 0 & 1 & 0 & -x'_3(s) & 0 & +x'_1(s) \\ 0 & 0 & 1 & +x'_2(s) & -x'_1(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

sendo $x'_1(s)$, $x'_2(s)$ e $x'_3(s)$ as coordenadas no referencial local da fibra na secção com coordenada s. A coordenada $x'_1(s)$ de uma secção perpendicular à directriz da peça tem sempre um valor nulo; no entanto aqui apresentam-se as expressões com a referida variável, de forma a manter a generalidade da formulação.

A formulação de Timoshenko estabelece que as secções planas normais à directriz da viga antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente normais à directriz da viga após a deformação. Esta hipótese representa uma melhor aproximação relativamente à formulação de Euler-Bernoulli, na medida em que quando a relação vão/altura da peça diminui as secções transversais deixam de se manter planas após a deformação (Oñate (1995)), por efeito do corte. Timoshenko propôs tomar uma rotação média para a secção, de maneira a considerar o efeito da deformação por corte da secção, admitindo em termos práticos que a secção se mantém plana (ver Figura 3.5).

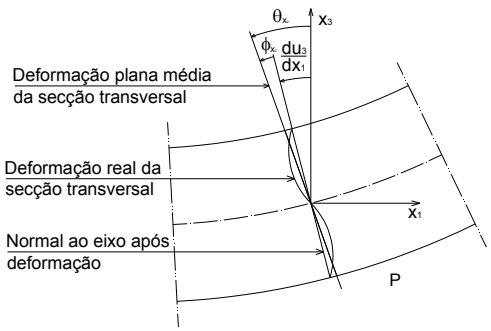


Figura 3.5 – Teoria da flexão de vigas de Timoshenko.

Considere-se então que a rotação total da secção segundo o eixo x'$_2$, $\theta_{x'2}$, é dada por

$$\theta_{x_2'} = \frac{du_{f\,x'3}'}{dx_1'} + \phi_{x'2} \tag{3.113}$$

em que $du_{f\,x'3}'/dx_1'$ é a rotação do eixo do elemento e $\phi_{x'2}$ é uma rotação adicional devido à deformação por esforço transverso. Admitindo que a deformações $\varepsilon_{x'2}$, $\varepsilon_{x'3}$ e $\gamma_{x'2x'3}$ são nulas, resultam nulas as tensões $\sigma_{x'2}$, $\sigma_{x'3}$ e $\tau_{x'2x'3}$, ficando assim o vector das extensões locais $\underline{\varepsilon}$ definido por

$$\underline{\varepsilon'} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'_1} \\ \gamma_{x'_1,x'_2} \\ \gamma_{x'_1,x'_3} \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

e as três deformações não nulas expressam-se através de

$$\varepsilon_{x'_1} = \frac{\partial u_f'(s)_{x'_1}}{\partial x_1'} \tag{3.115}$$

$$\gamma_{x'_1,x'_2} = \frac{\partial u_f'(s)_{x'_1}}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_f'(s)_{x'_2}}{\partial x_1'} = -\varphi_{x_2} \tag{3.116}$$

$$\gamma_{x'_1,x'_3} = \frac{\partial u_f'(s)_{x'_1}}{\partial x_3'} + \frac{\partial u_f'(s)_{x'_3}}{\partial x_1'} = -\varphi_{x_3} \tag{3.117}$$

Isolando cada uma das componentes do vector de deslocamentos nodais obtêm-se os termos da matriz de deformação $\underline{B}$ do elemento para o nó i, que se encontram detalhados no Anexo A.1. As matrizes $\underline{G}$ e $\underline{A}$ da não-linearidade geométrica são obtidas de forma idêntica à matriz $\underline{B}$, e são apresentadas nos Anexos A.2 e A.3, respectivamente.

O vector das tensões locais elásticas $\underline{\sigma}$ pode ser obtido através de

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'_1} \\ \tau_{x'_1,x'_2} \\ \tau_{x'_1,x'_3} \end{bmatrix} = \underline{D}\,\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'_1} \\ \gamma_{x'_1,x'_2} \\ \gamma_{x'_1,x'_3} \end{bmatrix} \tag{3.118}$$

Assim as matrizes de rigidez de um elemento finito constituído por n_f fibras podem ser obtidas por intermédio das seguintes relações

$$\underline{K}_L = \int_V \underline{B}_L{}^T \underline{D} \underline{B}_L \, dV = \sum_{g=1}^{n_g} \left(\sum_{i=1}^{n_n} \left(\sum_{f=1}^{n_f} \left(\underline{B}_L{}^T \underline{D} \underline{B}_L \right)_f \right)_i J \right)_g w_g \tag{3.119}$$

$$\underline{K}_{NL} = \int_V \underline{B}_{NL}{}^T \underline{D} \underline{B}_{NL} \, dV = \sum_{g=1}^{n_g} \left(\sum_{i=1}^{n_n} \left(\sum_{f=1}^{n_f} \left(\underline{B}_{NL}{}^T \underline{D} \underline{B}_{NL} \right)_f \right)_i J \right)_g w_g \tag{3.120}$$

onde n_g designa o número de pontos de Gauss e w_g é o peso do ponto de Gauss de ordem g, utilizados para a integração numérica ao longo da directriz do elemento (ver Figura 3.4). J é igual a $ds/d\xi$, sendo ξ a coordenada isoparamétrica ao longo de s.

O vector de forças nodais no referido elemento pode ser obtido por

$$\underline{f} = \underline{P_{nod}} + \underline{P_{ele}} + \underline{Q_{ele}} + \underline{Q_{apl}} \tag{3.121}$$

sendo $\underline{P_{nod}}$ o vector das forças concentradas aplicadas nos nós, e $\underline{P_{ele}}$, $\underline{Q_{ele}}$ e $\underline{Q_{apl}}$ os vectores de forças concentradas, de forças distribuídas e de extensões aplicadas, definidos por

$$\underline{P_{ele}} = \sum_{j=1}^{n_P} \left(\sum_{i=1}^{n_n} \left(\sum_{f=1}^{n_f} \left(N \,!\, \underline{p} \right)_f \right)_i \right)_j \tag{3.122}$$

$$\underline{Q_{ele}} = \int_V \underline{q} \, dV = \sum_{g=1}^{n_g} \left(\sum_{i=1}^{n_n} \left(N \,!\, \underline{q} \right)_i J \right)_g w_g \tag{3.123}$$

$$\underline{Q_{apl}} = \int_V \underline{B}_L{}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_{apl} \, dV = \sum_{g=1}^{n_g} \left(\sum_{i=1}^{n_n} \left(\sum_{f=1}^{n_f} \left(\underline{B}_L{}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_{apl} \right)_f \right)_i J \right)_g w_g \tag{3.124}$$

Nestas expressões n_P é o número de forças concentradas $\underline{p}$, $\underline{q}$ são as cargas distribuídas e $\underline{\varepsilon}_{apl}$ são as extensões aplicadas.

3.5.1.1. Exemplos de aplicação

3.5.1.1.1. Deformação por flexão e por corte

Neste exemplo, apresentado por Oñate (1995), pretende-se verificar o funcionamento da implementação da formulação da viga de Timoshenko, nomeadamente na deformação por flexão e por corte, de peças de directriz recta, através da comparação de resultados obtidos numericamente com a solução teórica conhecida. A estrutura analisada corresponde a uma consola de comprimento L, solicitada por uma carga vertical concentrada P na extremidade livre, de acordo com a Figura 3.6.

Analisaram-se quatro modelos:

i) Um elemento finito de 2 nós, com 1 ponto de Gauss, designado por 1E2N1G;

ii) Um elemento finito de 2 nós, com 2 pontos de Gauss, designado por 1E2N2G;

iii) Dois elementos finitos de 2 nós, com 1 ponto de Gauss, designado por 2E2N1G;

iv) Um elemento finito de 3 nós, com 2 pontos de Gauss, designado por 1E3N2G;

Em todos os modelos utilizados a secção transversal é quadrada, com 1.0m de lado, é discretizada em altura através de 10 fibras com 0.10m de altura, conforme se pode ver na Figura 3.7.

Figura 3.6 – Esquema estrutural da consola.

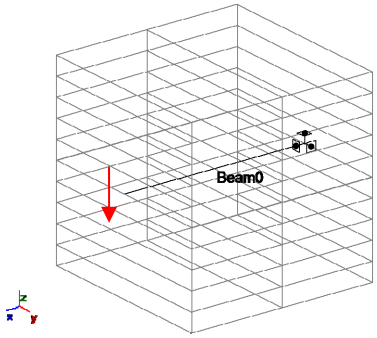


Figura 3.7 – Modelo numérico da consola.

Fazendo variar o valor da vão da consola entre 0.5m e 5.0m mediram-se os deslocamentos verticais da extremidade livre nos diversos modelos numéricos, e construiu-se o gráfico apresentado na Figura 3.8, onde as grandezas representadas são φ e λ. O valor de φ corresponde a

$$\varphi = \frac{\delta_{\text{Timoshenko}}}{\delta_{\text{Euler-Bernoulli}}} \tag{3.125}$$

onde $\delta_{\text{Euler-Bernoulli}}$ é o deslocamento vertical da extremidade livre da consola considerando a formulação de viga de Euler-Bernoulli, e $\delta_{\text{Timoshenko}}$ é o correspondente deslocamento considerando a formulação de viga de Timoshenko. O valor de λ é dado por

$$\lambda = \frac{L}{h} \tag{3.126}$$

onde h é a altura da secção transversal, neste caso igual a 1.0m.

A solução exacta para o valor de φ apresentada em Oñate (1995) é

$$\varphi = \frac{3\left(4\lambda^2 + 3\right)}{4\lambda^2\left(\lambda^2 + 3\right)} \tag{3.127}$$

sendo assinalada por "Solução exacta" na Figura 3.8.

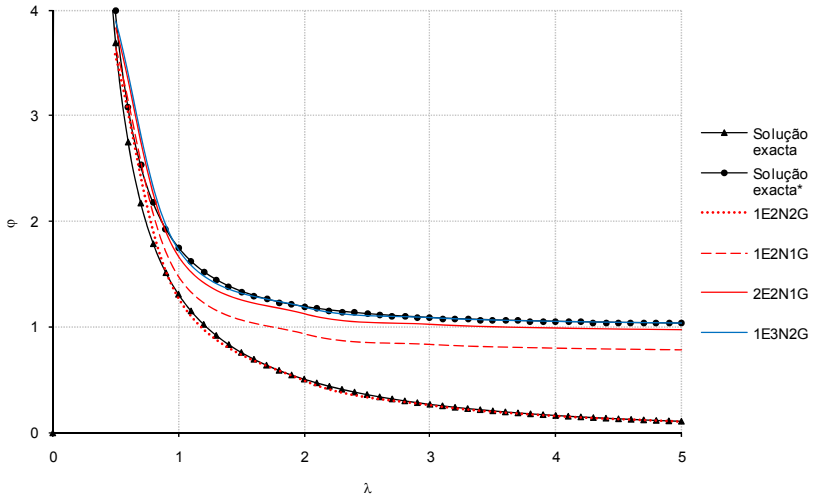


Figura 3.8 – Deformação por flexão e corte da Viga de Timoshenko.

Facilmente se pode concluir da análise da Figura 3.8 que o valor de φ deveria tender para 1 à medida que o valor de λ tende para infinito. No entanto, para vigas muito esbeltas quando λ tende para infinito produz-se um fenómeno de sobre-rigidez numérica, sendo que no limite se torna infinitamente rígida, conforme se verifica pela análise das séries designadas por "Solução Exacta" e 1E2N2G. De acordo com Oñate (1995) uma solução para este problema reside em diminuir a influência do esforço transverso sub-integrando os correspondentes termos da matriz de rigidez, resultando em

$$\varphi = \frac{3\lambda^2 + 3}{4\lambda^2} \tag{3.128}$$

e que corresponde à "Solução exacta*" assinalada na Figura 3.8.

Numericamente são vários os procedimentos para contornar este problema:

i) Utilização de integração reduzida (ver série 1E2N1G);

ii) Utilização de um maior número de elementos (ver série 2E2N1G);

iii) Utilização de elementos com maior número nós (ver série 1E3N2G).

Na Figura 3.8 pode-se observar que os procedimentos apresentados melhoram significativamente os resultados obtidos, sendo que série 1E3N2G representa fielmente os resultados previstos pela expressão (3.128), validando a implementação da formulação no presente modelo.

3.5.1.1.2. Peças curvas

Com este exemplo, apresentado por Timoshenko (1976), pretende-se verificar o funcionamento da implementação da formulação da viga de Timoshenko, nomeadamente na deformação por flexão de peças curvas, através da comparação de resultados obtidos numericamente com a solução teórica conhecida. A estrutura analisada corresponde a uma consola circular cuja directriz se encontra no plano vertical, de raio R e com 90º, solicitada por uma carga vertical concentrada P na extremidade livre. Utilizaram-se 8 modelos estruturais que se distinguem pelo raio da consola, nomeadamente 5m, 10m, 25m e 50m, e pelo número de elementos finitos utilizados. Em cada raio considerado utilizaram-se dois modelos diferentes, um composto por 5 e outro por 10 elementos finitos de viga de Timoshenko com 3 nós, com dois pontos de Gauss. A secção transversal utilizada em todos os modelos é quadrada, com 1.0m de lado, discretizada através de 10 divisões na direcção da altura e 10 divisões na direcção da base, correspondendo a um total de 100 fibras quadradas com 0.10m de lado. Na Figura 3.9 é possível visualizar o modelo correspondente a um raio de 5m e 5 elementos finitos. Admitiu-se um valor de 30GPa para o módulo de elasticidade do material e um coeficiente de Poisson igual a 0.20.

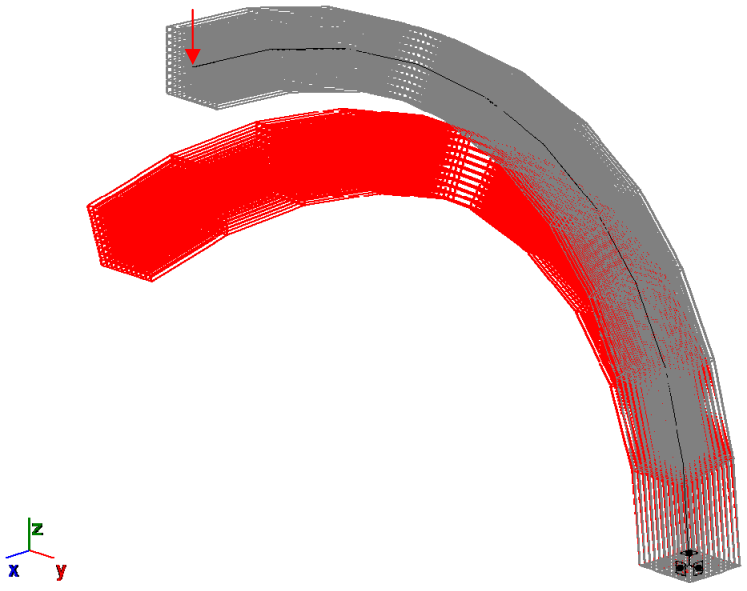


Figura 3.9 – Modelo numérico e deformada da consola circular (vertical horizontal).

Segundo Timoshenko (1976) a solução teórica para determinação do deslocamento vertical da extremidade livre da consola, sem considerar a deformação por corte, é dada por

$$\delta = \frac{P R^3}{E I_y} \frac{\pi}{4} \tag{3.129}$$

onde I_y é o momento de inércia da secção transversal da peça na direcção perpendicular à carga aplicada.

No Quadro 3.1 são apresentados os valores dos deslocamentos obtidos nos diversos modelos numéricos utilizados, assim como o correspondente valor teórico.

Quadro 3.1 – Deslocamentos na extremidade da consola.

	Teórico	5 Elementos finitos		10 Elementos finitos	
Raio	Deslocamento	Deslocamento	Erro	Deslocamento	Erro
[m]	[m]	[m]	[%]	[m]	[%]
5	0.0039	0.0041	5.0	0.0040	2.9
10	0.0314	0.0327	4.0	0.0320	2.0
25	0.4909	0.5091	3.7	0.4991	1.7
50	3.9270	4.0712	3.7	3.9920	1.7

Como seria de esperar, as maiores diferenças entre os valores dos deslocamentos obtidos numericamente e fornecidos pela solução teórica foram detectadas para os menores raios da consola, uma vez que a solução teórica não considera a deformação por corte. À medida que o valor do raio aumenta, nomeadamente para valores superiores a 25m, o erro diminui substancialmente e passa a ser constante, pelo que a deformação por corte passa a ser desprezável. Assim os erros obtidos para valores do raio superiores a 25m são representativos do bom funcionamento da implementação computacional efectuada e da discretização adoptada para a secção transversal.

Apesar do aumento do número de elementos finitos utilizados melhorar o rigor dos resultados obtidos, pode-se considerar que mesmo para um pequeno número de elementos finitos o desempenho do modelo foi bastante razoável.

3.5.1.1.3. Peças curvas com torção

Com este exemplo apresentado por Timoshenko (1976), muito semelhante ao anterior, pretende-se verificar o funcionamento da implementação da formulação da viga de Timoshenko, nomeadamente na deformação por flexão e torção de elementos curvos, através da comparação de resultados obtidos numericamente com a solução teórica conhecida. A estrutura analisada é em tudo idêntica à do exemplo anterior, com a única diferença de neste caso a directriz da consola se encontrar no plano horizontal. Utilizaram-se 8 modelos estruturais em tudo semelhantes aos utilizados no exemplo anterior, sendo a única diferença o posicionamento dos nós no espaço. Na Figura 3.10 é possível visualizar o modelo correspondente a um raio de 5.0m, discretizado com 5 elementos finitos, e a respectiva deformada.

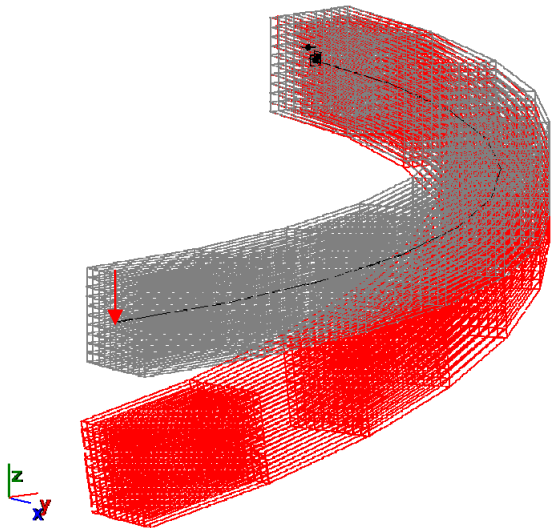


Figura 3.10 – Modelo numérico e deformada da consola circular (eixo vertical).

Segundo Timoshenko (1976) a solução teórica para determinação do deslocamento vertical da extremidade livre da consola, sem considerar a deformação por esforço transverso, é dada por

$$\delta = \frac{P\,r^3}{E\,I_y}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{E\,I_y}{G\,J}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\right] \tag{3.130}$$

onde I_y e J são, respectivamente, o valor da inércia da secção transversal da peça na direcção perpendicular à carga aplicada e o valor da inércia à torção da secção transversal, e G é o módulo de distorção do material constituinte da consola.

No Quadro 3.2 são apresentados os valores dos deslocamentos obtidos nos diversos modelos numéricos assim como o correspondente valor teórico.

Quadro 3.2 – Deslocamentos na extremidade da consola.

	Teórico	5 Elementos		10 Elementos	
Raio	Deslocamento	Deslocamento	Erro	Deslocamento	Erro
[m]	[m]	[m]	[%]	[m]	[%]
5	0.0065	0.0068	5.2	0.00667	3.3
10	0.0517	0.0539	4.3	0.05293	2.4
25	0.8076	0.8403	4.0	0.82503	2.2
50	6.4610	6.7193	4.0	6.59814	2.1

À semelhança do caso anterior, verifica-se as maiores diferenças entre os valores dos deslocamentos obtidos numericamente e fornecidos pela solução teórica foram detectadas para os menores raios da consola, uma vez que a solução teórica não considera a deformação por corte. Para peças com raios de curvaturas superiores a 25.0m as diferenças observadas são muito reduzidas, comprovando um bom funcionamento da formulação implementada na análise de peças curvas com torção.

3.5.1.1.4. Peças de secção variável

Com este exemplo pretende-se verificar o funcionamento da implementação da formulação da viga de Timoshenko em peças de secção variável, através da comparação de resultados obtidos numericamente com a solução teórica conhecida. A estrutura analisada corresponde a uma consola de comprimento L solicitada por uma carga vertical concentrada P na extremidade livre. A secção transversal é rectangular, com 1.0m de base e com variação parabólica da altura, sendo de 1.0m na secção de encastramento, 0.60m a meio vão e 0.40m na extremidade livre. Admitiu-se um valor de 1GPa para o módulo de elasticidade do material e um coeficiente de Poisson igual a 0.20. Nos modelos numéricos utilizaram-se 5 elementos finitos de 3 nós, com 2 pontos de Gauss, cuja secção transversal foi discretizada em altura através de 10 fibras com altura variável, conforme se pode ver na Figura 3.11.

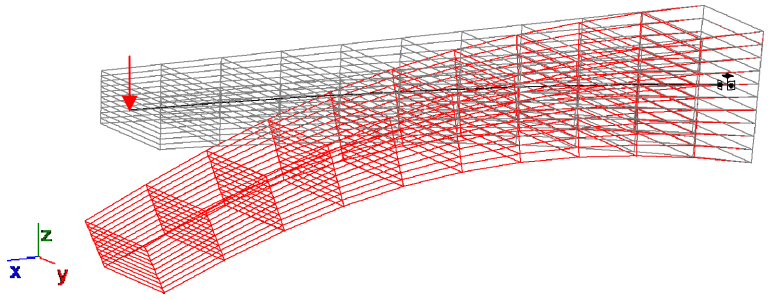


Figura 3.11 – Modelo numérico e deformada da consola de secção variável.

Fazendo variar o vão da consola mediram-se os valores do deslocamentos da extremidade livre e compararam-se os valores obtidos com os resultados teóricos da solução, onde se desprezou a variação por corte uma vez que no caso em estudo não tem grande significado. No Quadro 3.3 apresentam-se os valores dos deslocamentos obtidos numericamente para vãos de 2.5m, 5m e 10m, e os correspondentes valores teóricos, obtidos através do Método da Integração da Elástica.

Quadro 3.3 – Deslocamentos.

	Deslocamento		
Vão	Teórico	Modelado	Erro
[m]	[m]	[m]	[%]
2.5	0.00056	0.00055	1.1
5	0.00446	0.00439	1.5
10	0.03567	0.03509	1.6

À medida que o vão aumenta e o número de nós se mantém constante o erro aumenta, pois a modelação da variação da secção transversal começa a ser menos rigorosa. No entanto, face aos reduzidos erros obtidos, considera-se que ficou demonstrado um bom funcionamento da implementação da formulação da viga de Timoshenko na análise de peças com secção variável.

3.5.1.1.5. Análise não-linear geométrica de um pórtico plano

Através da análise de um pórtico de um tramo sujeito a um carregamento simultâneo segundo as direcções vertical e horizontal (ver Figura 3.12), pretende-se aferir a capacidade do programa de

cálculo desenvolvido na análise dos efeitos da não-linearidade geométrica, observando-se a evolução dos deslocamentos horizontais do andar. Utiliza-se ainda o presente exemplo para aferir a influência do número de nós dos elementos finitos utilizados na precisão dos resultados.

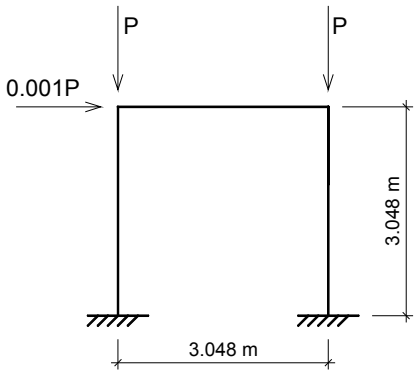


Figura 3.12 – Esquema estrutural do pórtico.

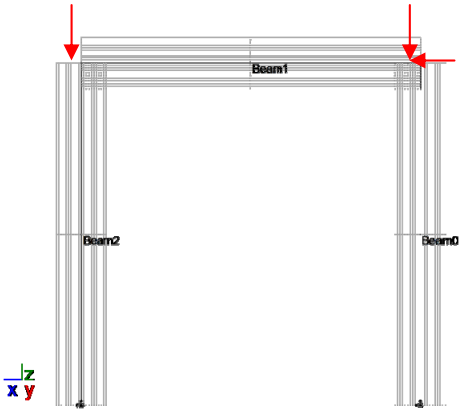


Figura 3.13 – Modelo numérico do pórtico.

A secção transversal das barras tem uma base de 18.814mm e uma altura de 451.634mm. O valor considerado para o módulo de elasticidade foi de 206.85GPa e para o coeficiente de Poisson de 0.30. No modelo numérico utilizado para comparação com os resultados obtidos pelos outros autores cada barra foi discretizada através de um único elemento finito de 3 nós, com dois pontos de Gauss, conforme representado na Figura 3.13, e utilizou-se um critério de convergência em forças com uma tolerância de 0.1%.

Na Figura 3.14 é apresentada a evolução do deslocamento horizontal do andar obtida através do presente modelo, e são também apresentados os resultados obtidos por outros autores (Connor *et al.* (1968); Wen e Rahimzadeh (1983); Won e Tin-Loi (1990); Cruz (1991)) que realizaram estudos sobre o mesmo modelo. Da análise da referida figura constata-se uma boa concordância dos resultados obtidos com os apresentados pelos diversos autores.

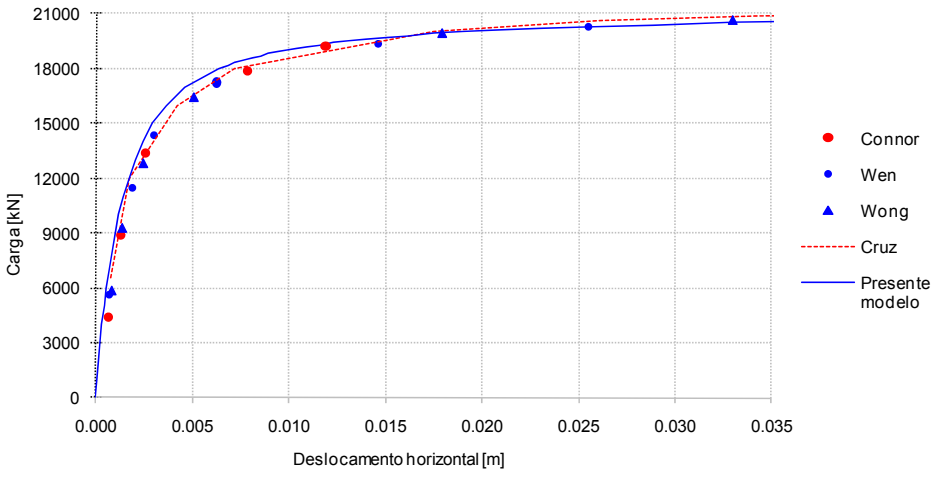


Figura 3.14 – Análise comparativa da evolução do deslocamento horizontal do andar entre diversos autores.

Na Figura 3.15 são apresentadas as evoluções dos deslocamentos horizontais do andar obtidas através do programa de cálculo desenvolvido, e utilizando diversas discretizações e tipos de elemento finito. Para realizar esta análise construíram-se 9 modelos estruturais:

i) Cinco modelos com elementos finitos de 2 nós, compostos por 3, 6, 9, 12 e 24 elementos finitos, designados respectivamente por 2N_3E, 2N_6E, 2N_9E, 2N_12E e 2N_24E;

ii) Três modelos com elementos finitos de 3 nós, compostos por 3, 6 e 9 elementos finitos, designados respectivamente por 3N_3E, 3N_6E e 3N_9E ;

iii) Um modelo com 3 elementos finitos de 4 nós, designado 4N_3E.

Através da análise da Figura 3.15 constata-se que a influência do número de nós do elemento utilizado no resultado final é bastante grande. Com um número reduzido de elementos de 2 nós é-se conduzido a soluções demasiadamente rígidas e afastadas da realidade (caso dos modelos com 3, 6 e 9 elementos finitos). São necessários 12 elementos finitos de 2 nós para obter resultados semelhantes aos obtidos com apenas 3 elementos finitos de 3 nós, e são necessários 24 elementos de 2 nós para obter resultados semelhantes aos obtidos com 3 elementos de 4 nós. Assim, os elementos finitos de 3 nós permitem a obtenção de bons resultados, mesmo para uma discretização pouco densa. A utilização de 6 elementos finitos de 3 nós é suficiente para obter resultados semelhantes aos obtidos com 3 elementos finitos de 4 nós.

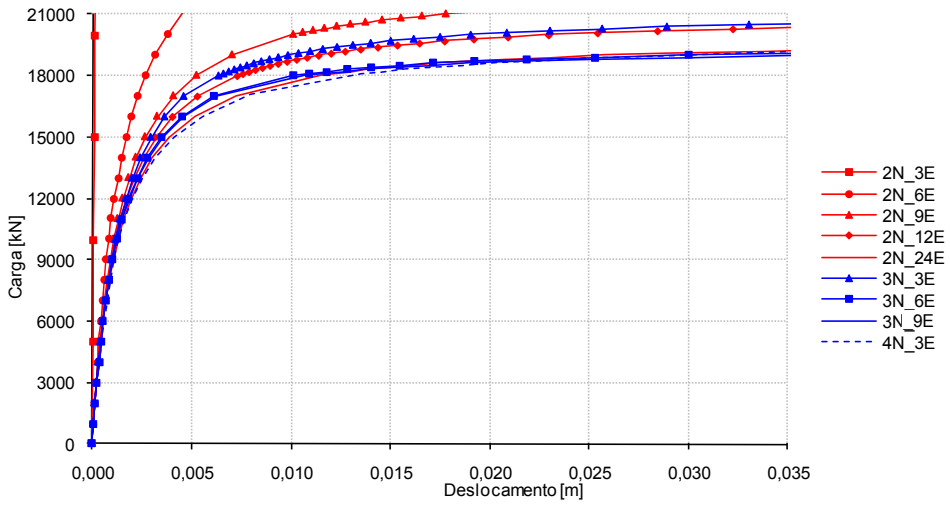


Figura 3.15 – Análise comparativa da evolução do deslocamento horizontal do andar para diversos modelos de discretização da estrutur$_{3N\ 9E}$

3.5.2. Discretização das armaduras longitudinais

A modelação de armaduras longitudinais em elementos de fibras corresponde à implementação da classe *REINFORCEMENT*, referida na secção 2.5.2.2. Admitindo que a directriz da armadura longitudinal é aproximadamente equidistante à directriz do elemento finito em que se encontra inserida, a respectiva modelação é efectuada utilizando a formulação base descrita na secção 3.5.1,

considerando a extensão axial mas desprezando as distorções por corte. Deste modo o resulta como única extensão $\varepsilon_{x'_1}$, e as tensões locais elásticas são obtidas através de

$$\sigma_{x'_1} = E\,\varepsilon_{x'_1} \tag{3.131}$$

A matriz de deformações $\underline{B}$ é apresentada no Anexo B.1. As matrizes $\underline{G}$ e $\underline{A}$ são obtidas de forma idêntica à matriz $\underline{B}$, e são apresentadas respectivamente nos Anexos B.2 e B.3. As matrizes de rigidez e o vector de forças nodais podem ser obtidos com base nas equações (3.119) a (3.123).

3.5.3. Discretização de cabos de pré-esforço aderentes

A modelação de cabos de pré-esforço aderentes em elementos de fibras corresponde à implementação da classe EMBEDDEDCABLE, referida na secção 2.5.2.2. A formulação apresentada admite uma ligação rígida entre os nós do elemento finito que discretiza o cabo e os nós do elemento finito em que aquele está inserido, designado doravante por elemento finito de suporte, e admite ainda que os nós do primeiro pertencem ao plano das secções transversais dos nós do segundo. No entanto a formulação do elemento finito de cabo de pré-esforço aderente é independente da do elemento finito de suporte, possibilitando a sua utilização em associação com qualquer elemento finito, e não estando associada à discretização por fibras, ver Figura 3.16.

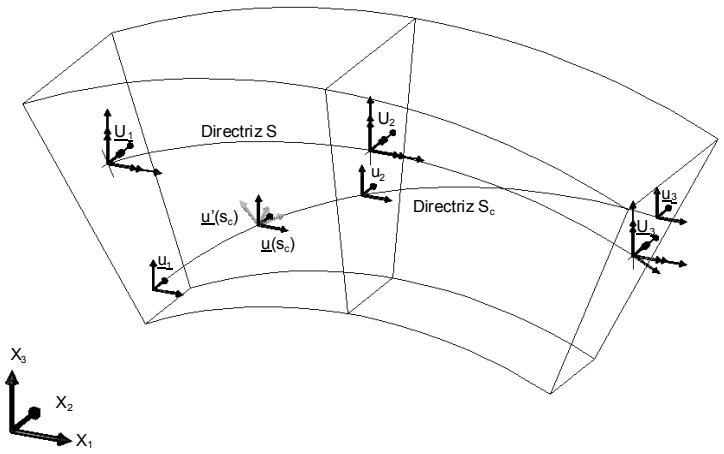


Figura 3.16 - Elemento finito de cabo de pré-esforço aderente 3D.

Considere-se então um elemento finito de suporte definido pela directriz S, e um elemento finito de cabo de pré-esforço definido pela directriz S_c, esta definida pelos seus nós no sistema de eixos global $x_1x_2x_3$. À semelhança do efectuado para a modelação da armadura passiva longitudinal, na modelação dos cabos de pré-esforço aderentes considera-se apenas a extensão axial $\varepsilon_{x'1}$ e desprezam-se as distorções por corte, deste modo o vector das tensões locais é dado pela equação (3.131).

Uma vez que neste caso não existe a imposição de a armadura ser equidistante à directriz do elemento finito de suporte, a interpolação dos deslocamentos deve ser feita ao longo da directriz do

elemento finito de cabo, e não ao longo da do elemento finito de suporte. Desta forma, sendo o vector dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento finito de suporte no referencial global definido pela equação (3.99), pode-se obter o vector dos incrementos de deslocamentos nodais nos nós do elemento de cabo de pré-esforço aderente $\underline{u_c}$ no mesmo referencial através de

$$\underline{u_c}_i = \underline{T}_i \, \underline{u}_i \tag{3.132}$$

onde a matriz $\underline{T}_i$ se define, de modo análogo a (3.112), para cada um dos nós do elemento finito de suporte de acordo com

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +\Delta x_{3,i} & -\Delta x_{2,i} \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_{3,i} & 0 & +\Delta x_{1,i} \\ 0 & 0 & 1 & +\Delta x_{2,i} & -\Delta x_{1,i} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.133}$$

sendo $\Delta x_{1,i}$, $\Delta x_{2,i}$ e $\Delta x_{3,i}$ as diferenças de coordenadas no referencial global entre o nó i do elemento finito de armadura de pré-esforço aderente e o nó i do elemento de finito de suporte. As referidas diferenças podem ser obtidas a partir das coordenadas locais do nó i do elemento finito de cabo, $x'_{1,i}$, $x'_{2,i}$ e $x'_{3,i}$, em relação ao referencial local do nó i do elemento finito de suporte, através de

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,i} \\ \Delta x_{2,i} \\ \Delta x_{3,i} \end{bmatrix} = \underline{R}_i \begin{bmatrix} x'_{1,i} \\ x'_{2,i} \\ x'_{3,i} \end{bmatrix} \tag{3.134}$$

onde $\underline{R}_i$ é a matriz de transformação do referencial global para o referencial local do nó i do elemento finito de suporte, e se define por intermédio da expressão (3.102).

Sendo s_c o comprimento ao longo da directriz S_c do elemento finito de pré-esforço aderente, cuja origem coincide com o primeiro nó do elemento finito correspondente, o vector dos incrementos de deslocamentos ao longo do elemento no referencial global $\underline{u_c}(s_c)$ define-se como

$$\underline{u_c}(s_c) = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(s_c) \, \underline{u}_i \tag{3.135}$$

O vector dos incrementos de deslocamentos no referencial local do elemento $\underline{u_c}'(s_c)$ pode expressar-se através de

$$\underline{u_c}'(s_c) = \underline{R}(s_c)\underline{u}(s_c) = \begin{bmatrix} u_c{}'_{x'_{1,i}}(s_c) \\ u_c{}'_{x'_{1,i}}(s_c) \\ u_c{}'_{x'_{1,i}}(s_c) \end{bmatrix} \tag{3.136}$$

onde a matriz de transformação $\underline{R}(s_c)$ é

$$\underline{R}(s_c) = \begin{bmatrix} e_{x'_1,x_1} & e_{x'_1,x_2} & e_{x'_1,x_3} \\ e_{x'_2,x_1} & e_{x'_2,x_2} & e_{x'_2,x_3} \\ e_{x'_3,x_1} & e_{x'_3,x_2} & e_{x'_3,x_3} \end{bmatrix} \tag{3.137}$$

sendo formada pelas componentes dos versores $e_{x'1}$, $e_{x'2}$ e $e_{x'3}$ das direcções x'_1, x'_2 e x'_3 do referencial local no ponto de coordenada s_c da directriz do elemento de cabo de pré-esforço aderente, de forma análoga à equação (3.102).

Uma vez que os versores do referencial local do elemento finito de cabo não coincidem com os versores da directriz do elemento finito de suporte, as coordenadas do nó i do elemento finito de cabo, $x_{c1,i}$, $x_{c2,i}$ e $x_{c3,i}$, no referencial global são definidas através de

$$\begin{bmatrix} x_{c1,i} \\ x_{c2,i} \\ x_{c3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{1,i} \\ \Delta x_{2,i} \\ \Delta x_{3,i} \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

onde $x_{1,i}$, $x_{2,i}$ e $x_{3,i}$ são as coordenadas do nó i do elemento de suporte no referencial global. Desta forma o vector de posição de um ponto genérico do directriz do elemento finito de cabo é definido por

$$\underline{p}(s_c) = x_{c1}(s_c)\underline{e}_{x_1} + x_{c2}(s_c)\underline{e}_{x_2} + x_{c3}(s_c)\underline{e}_{x_3} \tag{3.139}$$

em que as coordenadas $x_{c1}(s_c)$, $x_{c2}(s_c)$ e $x_{c3}(s_c)$ podem ser obtidas por intermédio de

$$\begin{bmatrix} x_{c1}(s_c) \\ x_{c2}(s_c) \\ x_{c3}(s_c) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(s_c) \begin{bmatrix} x_{c1,i} \\ x_{c2,i} \\ x_{c3,i} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

Definido o vector posição do ponto de coordenada s_c da directriz do elemento finito de cabo é possível definir o vector tangente através de

$$\underline{t}(s_c) = \frac{d\, x_{c1}(s_c)}{ds_c}\underline{e}_{x_1} + \frac{d\, x_{c2}(s_c)}{ds_c}\underline{e}_{x_2} + \frac{d\, x_{c3}(s_c)}{ds_c}\underline{e}_{x_3} \tag{3.141}$$

Admitindo que o eixo local x'_1 é coincidente com o vector $\underline{t}(s_c)$, as componentes do seu versor no referencial global $x_1x_2x_3$, podem ser definidas por intermédio de

$$\underline{e}_{x'_1} = e_{x'_1,x_1}\underline{e}_{x_1} + e_{x'_1,x_2}\underline{e}_{x_2} + e_{x'_1,x_3}\underline{e}_{x_3} \tag{3.142}$$

em que

$$e_{x'_1,x_1} = \frac{1}{\left\|t(s_c)\right\|}\frac{dx_{c1}(s_c)}{ds_c} \tag{3.143}$$

$$e_{x'_1,x_2} = \frac{1}{\left\|t(s_c)\right\|}\frac{dx_{c2}(s_c)}{ds_c} \tag{3.144}$$

$$e_{x'_1,x_3} = \frac{1}{\left\|t(s_c)\right\|}\frac{dx_{c3}(s_c)}{ds_c} \tag{3.145}$$

e os versores $\underline{e}_{x'2}$ e $\underline{e}_{x'2}$ são definidos de forma análoga ao expresso nas equações (3.109) e (3.110).

Obtido o vector dos incrementos de deslocamentos nodais no referencial local $\underline{u}^{c'}(s_c)$, e considerando que no caso em estudo apenas interessa considerar a componente $\varepsilon(s_c)_{x'1}$ do tensor das extensões, resulta

$$\varepsilon_{x'_1} = \frac{\partial u_c'(s_c)_{x'_1}}{\partial x'_1} \tag{3.146}$$

As matrizes $\underline{B}$, $\underline{G}$ e $\underline{A}$ são obtidas de forma idêntica ao exposto nos restantes elementos finitos e são apresentadas nos Anexos C.1, C.2 e C.3, respectivamente. As matrizes de rigidez e o vector de forças nodais podem ser obtidos pelas relações (3.119) a (3.123).

3.5.3.1. Exemplos de aplicação

3.5.3.1.1. Viga simplesmente apoiada com cabo de pré-esforço parabólico

Com este exemplo pretende-se validar a formulação implementada para a simulação de cabos de pré-esforço aderentes, aproveitando-se para exemplificar a modelação de pré-tensão e de pós-tensão. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada com um cabo de pré-esforço aderente com

traçado parabólico num plano vertical, com excentricidade máxima a meio vão e excentricidade nula nas extremidades. Sendo L o vão da viga, A_c a área da secção transversal do cabo, σ_0 a tensão inicial aplicada e f a excentricidade do cabo a meio vão, é possível determinar simplificadamente o valor da carga q equivalente à acção do cabo de pré-esforço através de

$$q = \frac{8\, A_c \sigma_0 f}{L^2} \tag{3.147}$$

A peça corresponde a uma viga simplesmente apoiada tem L=10m, e a respectiva secção transversal, em forma de I, possui as características geométrica apresentadas no Quadro 3.4. O cabo com seis cordões de pré-esforço de 0.6'', cuja área total corresponde a 8.4cm^2, apresenta um traçado parabólico vertical com excentricidade máxima de 0.40m a meio vão e excentricidade nula nos topos. Utilizaram-se 5 elementos de viga de Timoshenko de 3 nós, com 2 pontos de Gauss, e uma discretização da secção transversal através de 20 fibras. Na Figura 3.17 pode-se ver o modelo numérico utilizado.

Quadro 3.4 – Características geométricas da secção transversal da viga I.

Área	Inércia y	Altura	y_{inf}	y_{sup}
[m^2]	[m^4]	[m]	[m]	[m]
0.35250	0.04299	1.00	-0.475	+0.475

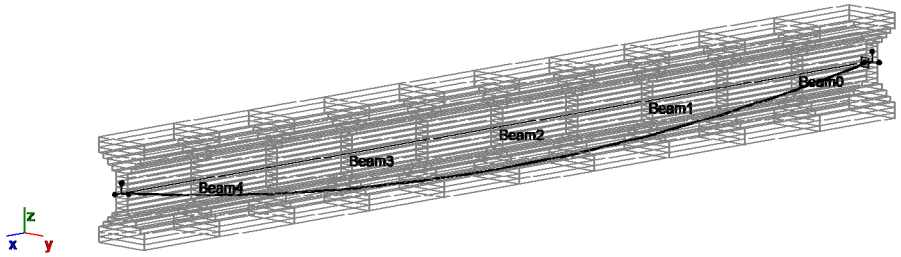


Figura 3.17 – Modelo numérico da viga com cabo de pré-esforço parabólico.

Foram consideradas duas formas distintas de aplicação da tensão no cabo de pré-esforço:

i) Aplicação de tensão inicial.

   Neste caso foi aplicada uma tensão inicial no cabo de pré-esforço de 1395MPa, conforme acontece em operações de pré-tensão. Esta operação originou deformações na viga, que originaram perdas no valor da tensão aplicada, resultando neste caso uma tensão final a meio vão instalada no cabo de 1346MPa.

ii) Imposição de tensão final.

   Neste caso foi imposta uma tensão inicial no cabo de pré-esforço de 1395MPa, conforme acontece nas operações de pós-tensão. Seguidamente o código computacional efectuou automaticamente os ajustes necessários ao tensionamento do cabo, de forma a compensar

as perdas por deformação da viga, resultando uma tensão final de pré-esforço igual ao valor inicial.

No Quadro 3.5 são apresentados os deslocamentos verticais na secção de meio vão aquando da aplicação da tensão no cabo de pré-esforço para cada uma das formas de aplicação do pré-esforço. Onde se observa que as diferenças entre deslocamentos verticais modelados e teóricos são muito reduzidas.

Quadro 3.5 – Deslocamento vertical a meio vão.

Aplicação de tensão inicial			Imposição de tensão final		
Tensão no cabo			Tensão no cabo		
[kPa]			[kPa]		
1346133			1395000		
Deslocamento vertical a meio vão			Deslocamento vertical a meio vão		
Teórico	Numérico	Erro	Teórico	Numérico	Erro
[mm]	[mm]	[%]	[mm]	[mm]	[%]
5.68	5.63	0.9	5.68	5.70	0.4

No Quadro 3.6 são apresentadas as tensões instaladas no betão na secção de meio vão aquando da aplicação do pré-esforço para cada uma das formas de aplicação deste. Conforme se pode verificar, as diferenças detectadas nas tensões no betão relativamente às tensões teóricas são muito pequenas, e são devidas à aproximação da geometria da peça de betão através da discretização por fibras, confirmando-se assim o bom funcionamento da implementação da formulação dos cabos de pré-esforço aderentes.

Quadro 3.6 – Tensões instaladas no betão.

	Aplicação de tensão inicial			Imposição de tensão final		
	Tensão no cabo			Tensão no cabo		
	[kPa]			[kPa]		
	1346133			1395000		
	Tensão no betão			Tensão no betão		
Fibra	Teórico	Numérico	Erro	Teórico	Numérico	Erro
[m]	[kPa]	[kPa]	[%]	[kPa]	[kPa]	[%]
-0.475	1790.0	1762.6	1.6	1855.0	1825.7	1.6
+0.475	-8205.6	-8177.2	0.3	-8503.5	-8473.1	0.4

Como exemplo ilustrativo das capacidades gráficas do programa de cálculo desenvolvido, nas Figuras 3.18 e 3.19 são apresentadas representações gráficas das tensões normais no betão, para cada uma das formas de aplicação do pré-esforço, e na Figura 3.20 é possível ver a deformada da estrutura aquando a da aplicação do pré-esforço.

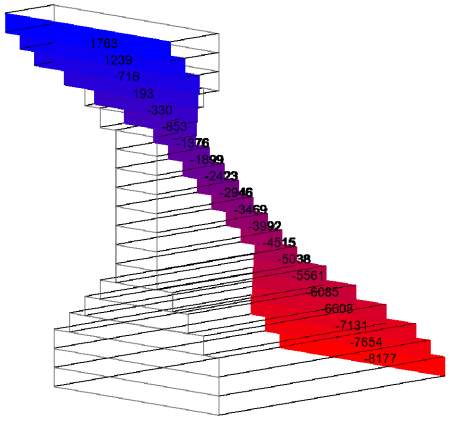


Figura 3.18 – Tensões normais no betão (para aplicação de tensão inicial).

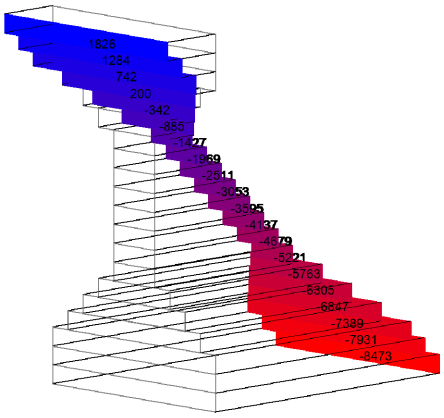


Figura 3.19 – Tensões normais no betão (para imposição de tensão final).

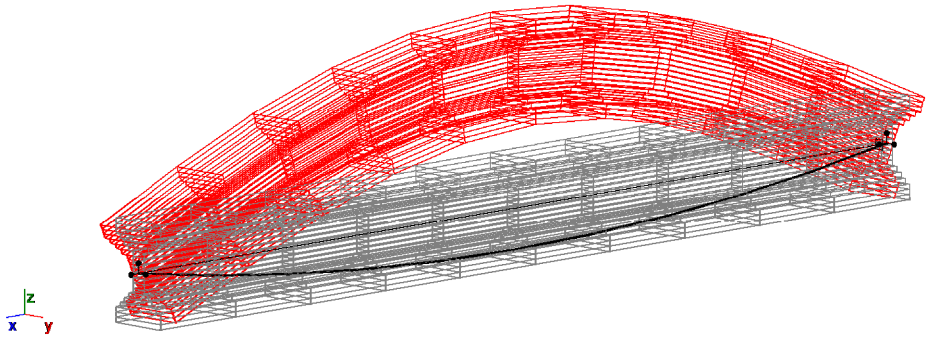


Figura 3.20 - Deformação ampliada da estrutura aquando da aplicação do pré-esforço.

3.5.4. Modelação de tirantes de retenção e de cabos de pré-esforço exterior

A modelação de tirantes de retenção e de cabos de pré-esforço exterior corresponde à implementação da classe *STAYCABLE* referida na secção 2.5.2.2, que foi muito simplificada devido ao facto de a formulação geral utilizada na plataforma *Evolution* incluir a não-linearidade geométrica. De facto, qualquer uma das formulações específicas apresentadas nas secções 3.5.1 a 3.5.3 é passível de ser utilizada, sem a não-linearidade geométrica. No entanto a modelação rigorosa de tirantes de retenção e de cabos de pré-esforço exterior impõe a sua utilização, pois a não-linearidade geométrica tem duas origens: a flecha introduzida pelo peso próprio do cabo e a alteração da sua geometria devido a grandes deslocamentos da estrutura.

À semelhança do efectuado para a modelação da armadura passiva longitudinal e dos cabos de pré-esforço aderentes, na modelação de tirantes de retenção e cabos de pré-esforço exterior apenas se considera a extensão axial $\varepsilon_{x'1}$ e desprezam-se as distorções por corte. Uma diferença importante na formulação do elemento finito que aqui será apresentado, em relação às formulações apresentadas nas secções 3.5.2 e 3.5.3, prende-se com o facto de aquele não se encontrar necessariamente embebido em nenhum elemento finito de suporte. Na formulação do elemento finito existe ainda uma diferença substancial em relação às formulações apresentadas em 3.5.1, 3.5.2 e

3.5.3, que se prende com o facto de o vector dos incrementos de deslocamentos nodais $\underline{u}^t_i$ que vai ser considerado não possuir rotações como graus de liberdade, resultando

$$\underline{u}_{t_i} = \begin{bmatrix} u_{t\,x_1,i} \\ u_{t\,x_2,i} \\ u_{t\,x_3,i} \end{bmatrix} \tag{3.148}$$

Considerando s o comprimento ao longo da directriz S do elemento finito do tirante ou do cabo, cuja origem coincide com o primeiro nó, o vector de deslocamentos no referencial global ao longo da directriz define-se por intermédio da expressão (3.100), sendo neste caso $\underline{I}$ a matriz identidade de dimensão 3x3.

O vector de deslocamentos nodais no referencial local no mesmo ponto fica definido através da expressão (3.101), sendo que neste caso a matriz de rotação $\underline{R}(s)$ fica definida por

$$\underline{R}(s) = \begin{bmatrix} e_{x'_1,x_1} & e_{x'_1,x_2} & e_{x'_1,x_3} \\ e_{x'_2,x_1} & e_{x'_2,x_2} & e_{x'_2,x_3} \\ e_{x'_3,x_1} & e_{x'_3,x_2} & e_{x'_3,x_3} \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

Neste caso não é necessário obter os deslocamentos fora da directriz do elemento finito, pelo que a componente $\varepsilon(s)_{x'1}$ do tensor das extensões é definida directamente através de $\underline{u_t}'(s)$, resultando

$$\varepsilon_{x'_1} = \frac{\partial u_t'(s)_{x'_1}}{\partial x'_1} \tag{3.150}$$

As matrizes $\underline{B}$, $\underline{G}$ e $\underline{A}$ são obtidas de forma idêntica ao apresentado para os restantes elementos finitos, e são apresentadas nos Anexos D.1, D.2 e D.3, respectivamente. As matrizes de rigidez e o vector de forças nodais podem ser obtidos pelas relações (3.119) a (3.123).

3.5.4.1. Exemplos de aplicação

3.5.4.1.1. Tirante horizontal com carga concentrada a meio vão

Com este exemplo de que se conhece a solução teórica, pretende-se aferir as capacidades do modelo de cálculo desenvolvido na simulação de tirantes de retenção e na resolução de problemas de 2ª ordem, como é o caso. A peça resume-se a um tirante horizontal de comprimento L, ligado a dois apoios simples e sujeito a uma carga concentrada F aplicada a meio vão, de acordo com a Figura 3.21.

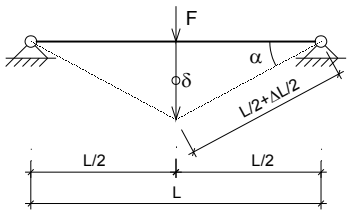


Figura 3.21 – Esquema estrutural do tirante com carga a meio vão.

Sendo A a área da secção transversal do tirante, E o módulo de elasticidade do material e σ_0 a tensão inicial aplicada, é possível determinar o valor do ângulo α da deformação final do tirante através da relação teórica

$$2\,\mathrm{sen}\alpha\left[\sigma_0+\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)E\right]A=F \tag{3.151}$$

Uma vez obtido o ângulo α é possível determinar o deslocamento vertical δ a meio vão e o incremento de tensão $\Delta\sigma$ do tirante:

$$\delta=\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\alpha \tag{3.152}$$

$$\Delta\sigma=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)E \tag{3.153}$$

O esquema estrutural da peça modelada está apresentada na Figura 3.22, e as propriedades consideradas para o tirante são de A=1cm^2 e de E=200GPa. A estrutura foi solicitada por diversas cargas P, entre 2kN e 10kN, sendo que a tensão de pré-esforço inicial aplicada no tirante foi 100MPa e se desprezou o peso próprio do tirante. Na Figura 3.23 pode observar-se o modelo numérico, no qual se utilizaram 10 elementos finitos de 2 nós, com 1 ponto de Gauss, e um critério de convergência em forças com uma tolerância de 0.1%.

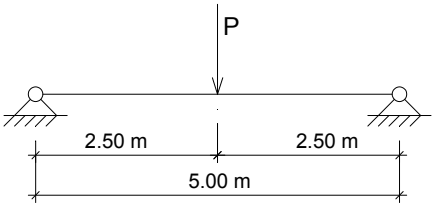


Figura 3.22 – Esquema estrutural do tirante horizontal.

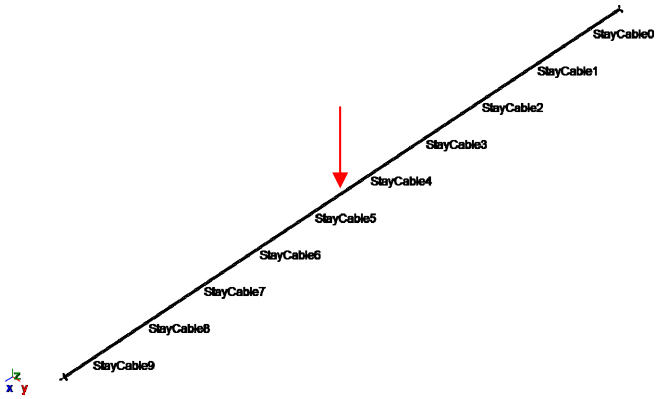


Figura 3.23 – Modelo numérico do tirante horizontal.

Na Figura 3.24 pode-se observar a evolução do deslocamento vertical a meio vão, comparando a solução teórica e solução do modelo numérico, para vários níveis da carga aplicada P.

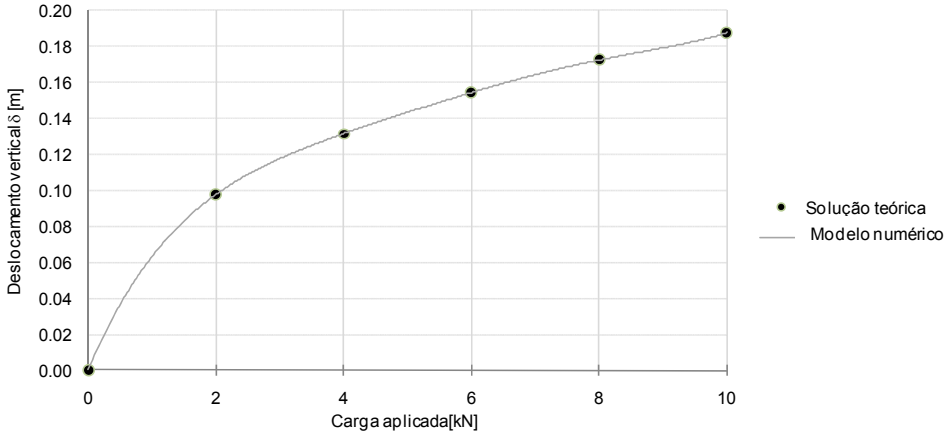


Figura 3.24 – Evolução do deslocamento vertical a meio vão.

Na Figura 3.25 pode-se observar a evolução da tensão final no tirante para vários níveis da carga aplicada.

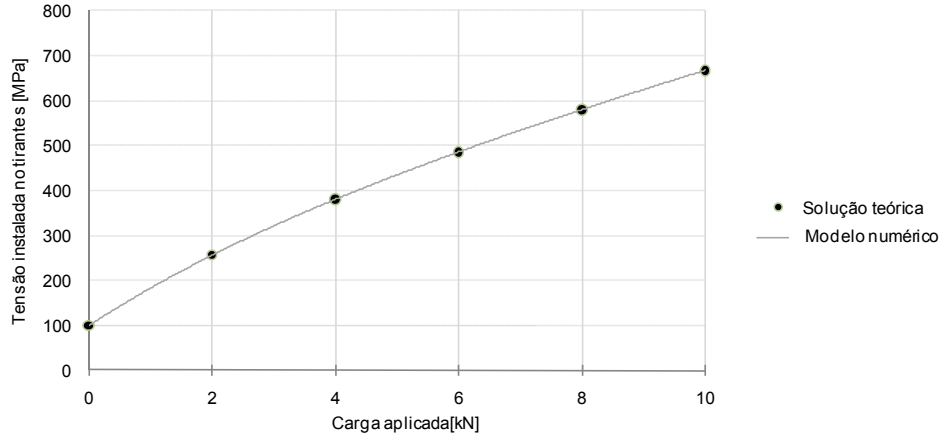


Figura 3.25 – Evolução da tensão axial no tirante.

Da observação das figuras anteriores é imperceptível a diferença entre os resultados teóricos e os previstos pelo modelo numérico pelo que se confirma o bom funcionamento da formulação implementação para tirantes.

3.5.4.1.2. Viga simplesmente apoiada com cabo de pré-esforço exterior

Este exemplo pretende validar a formulação implementada para a simulação de cabos de pré-esforço exteriores. Modelou-se uma viga simplesmente apoiada, com um cabo de pré-esforço exterior com traçado bilinear, com um ponto de sela correspondente à excentricidade máxima a meio vão e excentricidade nula nas extremidades. Sendo L o vão da viga, A_c a área da secção transversal do

cabo, σ_0 a tensão inicial aplicada e f a excentricidade a meio vão no mesmo, é possível determinar o valor da carga Q equivalente à acção do cabo de pré-esforço:

$$Q = A_c \sigma_0 \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2f}{L}\right)\right) \tag{3.154}$$

A viga modelada tem L=12m, e a correspondente secção transversal, em caixão, possui as características geométrica indicadas no Quadro 3.7. O cabo é formado por seis cordões de pré-esforço de 0.6'', cuja área total corresponde a 8.4cm^2, apresentando uma excentricidade máxima f=0.40m.

Quadro 3.7 – Características geométricas da secção transversal da viga em caixão.

Área	Iy	Altura	y_{inf}	y_{sup}
[m^2]	[m^4]	[m]	[m]	[m]
1.04	0.11263	1.00	-0.629	+0.321

Utilizaram-se 6 elementos finitos de viga de Timoshenko de 3 nós, com 2 pontos de Gauss cada, uma discretização da secção transversal da viga através de 20 fibras e 4 elementos finitos de cabo externo para modelar o pré-esforço. Utilizou-se ainda uma ligação rígida na modelação do ponto de sela do cabo a meio vão. Na Figura 3.26 reproduz-se o modelo numérico utilizado.

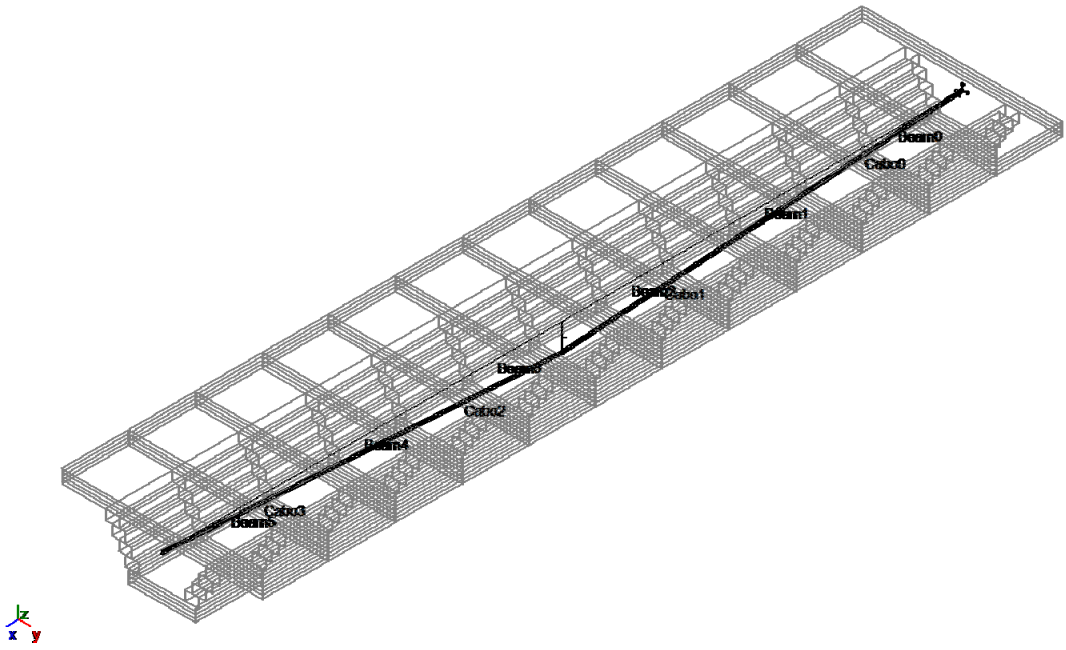


Figura 3.26 – Modelo numérico da viga com cabo de pré-esforço exterior.

No Quadro 3.8 são apresentadas as tensões instaladas na secção de meio vão aquando do tensionamento do cabo de pré-esforço. Conforme se pode verificar, as diferenças detectados entre as soluções teórica e numérica são muito pequenas.

Quadro 3.8 – Tensões instaladas.

	Tensão no cabo [kPa] 1395000 Tensão no betão		
Excent.	[kPa]		Erro
[m]	Teórico	Numérico	[%]
+0.321	209.5	209.6	0.1
-0.629	-3735.2	-3736.1	0.0

Na Figura 3.27 são apresentadas graficamente as tensões normais na secção de meio vão da viga aquando do tensionamento do cabo de pré-esforço.

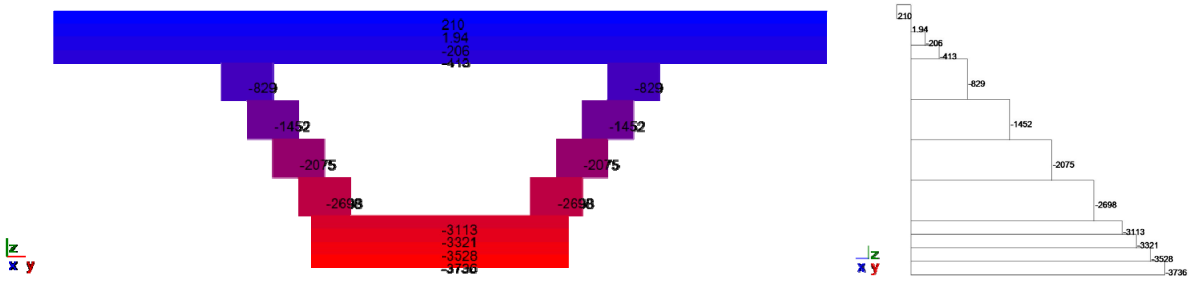


Figura 3.27 – Tensões normais na secção de meio vão da viga.

Na Figura 3.28 é possível observar a deformada da estrutura aquando do tensionamento do cabo, sendo interessante verificar o deslocamento relativo entre o cabo de pré-esforço exterior e a viga caixão em todos os pontos excepto nos extremos e no ponto de sela, assim como o facto do traçado do cabo de pré-esforço se manter rectilíneo após a deformação.

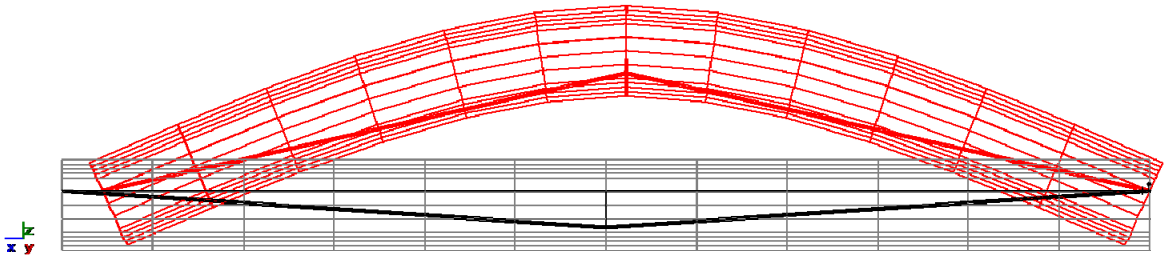


Figura 3.28 – Deformação ampliada da estrutura aquando da aplicação do pré-esforço.

3.6. Simulação de apoios e ligações especiais

A modelação de estruturas espaciais e do seu processo construtivo, nomeadamente em obras de arte, implica a utilização de diversos tipos de apoios e de ligações entre elementos, como por exemplo: aparelhos de apoio, juntas de dilatação, rótulas ou apoios com levantamento. Nesta secção são apresentadas as formulações utilizadas na simulação das condições de fronteira no programa de cálculo desenvolvido. A implementação das formulações referidas sobre a classe virtual *LINK* resultou na biblioteca de ligações referida na secção 2.5.2.3.

3.6.1. Deslocamentos prescritos

Os deslocamentos prescritos são utilizados na modelação de ligações rígidas ao exterior, permitindo simular, por exemplo, encontros, fundações rígidas e assentamentos de apoio. A respectiva implementação resultou nas classes *IMPOSEDDOF* e *APPLIEDDOF*. A diferença entre estas classes reside no facto de o deslocamento imposto na primeira ser constante ao longo da análise (entre os instantes em que é esta funcionalidade é activada e desactivada), e no caso da segunda classe o incremento de deslocamento imposto apenas existe no instante em que a funcionalidade é activada.

Considere-se a condição de equilíbrio de um problema linearizado expresso por

$$\underline{K}\,\underline{u} = \underline{F_{ext}} \tag{3.155}$$

A imposição de incrementos de deslocamentos pode ser representada pela condição

$$u_i = u_{imp} \tag{3.156}$$

onde u_i é o incremento do deslocamento associado ao grau de liberdade i e u_{imp} é o valor que se pretende prescrever para esse incremento (que pode ser nulo no caso de apoios rígidos). Mantendo inalterada a matriz de rigidez da estrutura, pode-se adicionar à equação (3.155) uma nova equação que contemple a condição (3.156), adicionando-se também uma coluna de forma a manter a simetria da nova matriz resolvente:

$$\begin{bmatrix} k_{0,0} & \dots & k_{0,i} & \dots & k_{n,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i,0} & \dots & k_{i,i} & \dots & k_{i,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,0} & \dots & k_{n,i} & \dots & k_{n,n} & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \\ -f_{imp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_n \\ u_{imp} \end{bmatrix} \tag{3.157}$$

Multiplicando a linha n+1 pelo vector $\underline{u}$ resulta a equação (3.156), e multiplicando a linha i pelo vector $\underline{u}$ resulta

$$K_{i,0}\,u_0 + \dots + K_{i,i}\,u_i + \dots + K_{i,n}\,u_n - f_{imp} = f_i \tag{3.158}$$

onde f_{imp} representa a força que aplicada no grau de liberdade i satisfaz a condição de deslocamento imposta pretendida.

3.6.2. Apoios elásticos

Os apoios elásticos permitem a simulação, por exemplo, de estruturas de apoio secundárias, fundações directas ou indirectas com comportamento elástico, e a respectiva implementação resultou na classe *ELASTIC*. O procedimento utilizado para modelar apoios elásticos é extremamente simples, resumindo-se a adicionar ao termo da diagonal principal de $\underline{K}$ correspondente ao grau de liberdade em causa, $k_{i,i}$, o valor da constante k_{elas} referente ao apoio elástico:

$$\begin{bmatrix} k_{0,0} & \dots & k_{0,i} & \dots & k_{n,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i,0} & \dots & k_{i,i}+k_{elas} & \dots & k_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,0} & \dots & k_{n,i} & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

A obtenção da força f_{elas} que aplicada no grau de liberdade i satisfaz a condição imposta resulta de

$$f_{elas} = k_{elas}\, u_i \tag{3.160}$$

3.6.3. Imposição de incrementos de deslocamentos relativos

A imposição de incrementos de deslocamentos relativos permite modelar ligações entre elementos estruturais num ou em vários graus de liberdade, como seja a simulação de rótulas, aparelhos de apoio deslizantes ou correcção de erros de fabrico, resultando a respectiva implementação na classe *SAMEDOF*. Caso a ligação entre dois elementos estruturais não seja total, existindo apenas compatibilidade de incrementos dos deslocamentos em alguns graus de liberdade, devem-se utilizar nós sobrepostos para as extremidades em causa de cada um dos elementos estruturais e impor o valor da diferença dos incrementos dos deslocamentos nos graus de liberdade pretendidos desses nós. Caso se pretenda que os deslocamentos sejam iguais deve-se utilizar um valor nulo para a diferença. Por exemplo, uma ligação deslizante, como é o caso da ligação de pilares e tabuleiros quando existem aparelhos de apoio deslizantes no topo dos primeiros, é modelada criando dois nós sobrepostos, um para a extremidade em causa de cada elemento estrutural, e impondo a condição de que a diferença do incremento de deslocamento vertical para os dois nós é nula.

O procedimento para a imposição de incrementos de deslocamentos relativos é muito semelhante ao apresentado na secção 3.6.1, e pode ser representada por

$$u_{i_g} - u_{j_g} = u_{imp} \tag{3.161}$$

sendo u_{ig} e u_{jg} os incrementos dos deslocamentos associados ao grau de liberdade g do nós i e j, respectivamente, e u_{imp} é a diferença imposta entre os incrementos de deslocamentos anteriores.

Adiciona-se à equação (3.155) uma nova equação que contemple a condição (3.161), e de forma a manter a simetria adiciona-se também uma coluna de acordo com

$$\begin{bmatrix} k_{0,0} & \dots & k_{0,i_g} & \dots & k_{0,j_g} & \dots & k_{0,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i_g,0} & \dots & k_{i_g,i_g} & \dots & k_{i_g,j_g} & \dots & k_{i_g,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j_g,0} & \dots & k_{j_g,i_g} & \dots & k_{j_g,j_g} & \dots & k_{j_g,n} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,0} & \dots & k_{n,i_g} & \dots & k_{n,j_g} & \dots & k_{n,n} & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_{i_g} \\ \dots \\ u_{j_g} \\ \dots \\ u_n \\ -f_{imp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_{i_g} \\ \dots \\ f_{j_g} \\ \dots \\ f_n \\ u_{imp} \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

Multiplicando a linha n+1 pelo vector $\underline{u}$ resulta a equação (3.161) e multiplicando a linha i_g pelo vector $\underline{u}$ resulta

$$K_{i_g,0}\, u_0 + \dots + K_{i_g,i_g}\, u_{i_g} + \dots + \dots + K_{i_g,j_g}\, u_{j_g} + \dots + K_{i_g,n}\, u_n - f_{imp} = f_{i_g} \tag{3.163}$$

Multiplicando a linha j_g pelo vector $\Delta\underline{U}$ resulta

$$K_{j_g,0}\, u_0 + \dots + K_{j_g,i_g}\, u_{i_g} + \dots + K_{j_g,j_g}\, u_{j_g} + \dots + K_{j_g,n}\, u_n + f_{imp} = f_{j_g} \tag{3.164}$$

Nas equações (3.162), (3.163) e (3.164) f_{imp} representa o incremento da força de ligação que aplicada no grau de liberdade g dos nós i e j satisfaz a condição imposta, vulgarmente designado por incremento de força de interacção.

3.6.4. Incrementos de deslocamentos condicionados

A imposição de incrementos de deslocamentos condicionados permite modelar ligações rígidas entre elementos através de um ou vários graus de liberdade, permitindo desta forma a simulação de barras infinitamente rígidas, e a sua implementação resultou na classe MASTERDOF. Neste tipo de ligação admite-se que os incrementos de deslocamentos do nó j são originados pelos incrementos de deslocamentos do nó i, admitindo que existe uma ligação rígida entre ambos. Assim, conhecidos os incrementos de deslocamentos do nó i é possível determinar os incrementos de deslocamentos do nó j através da matriz de transformação $\underline{T}$, conforme se segue:

$$\underline{u_j} = \underline{T}\,\underline{u_i} \tag{3.165}$$

ou mais detalhadamente

$$\begin{bmatrix} u_{x_1,i} \\ u_{x_2,i} \\ u_{x_3,i} \\ \theta_{x_1,i} \\ \theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +\Delta x_{3_{i,j}} & -\Delta x_{2_{i,j}} \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_{3_{i,j}} & 0 & +\Delta x_{1_{i,j}} \\ 0 & 0 & 1 & +\Delta x_{2_{i,j}} & -\Delta x_{1_{i,j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x_1,i} \\ u_{x_2,i} \\ u_{x_3,i} \\ \theta_{x_1,i} \\ \theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_3,i} \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

sendo $\Delta x_{1\,i,j}$, $\Delta x_{2\,i,j}$ e $\Delta x_{3\,i,j}$ as diferenças de coordenadas dos nós i e j no referencial global.

Desta forma é possível definir os deslocamentos do nó j quando estes estão condicionados pelos deslocamentos do nó i:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1,j} \\ u_{x_2,j} \\ u_{x_3,j} \\ \theta_{x_1,j} \\ \theta_{x_2,j} \\ \theta_{x_3,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_1,i} + \Delta x_{3_{i,j}}\,\theta_{x_2,i} - \Delta x_{2_{i,j}}\,\theta_{x_3,i} \\ u_{x_2,i} - \Delta x_{3_{i,j}}\,\theta_{x_1,i} + \Delta x_{1_{i,j}}\,\theta_{x_3,i} \\ u_{x_3,i} + \Delta x_{2_{i,j}}\,\theta_{x_1,i} - \Delta x_{1_{i,j}}\,\theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_1,i} \\ \theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_3,i} \end{bmatrix} \tag{3.167}$$

O procedimento a utilizado para a imposição de incrementos de deslocamentos condicionados é semelhante ao descrito na secção 3.6.3. No entanto, uma vez que, de acordo com a equação (3.167), o incremento de deslocamento condicionado é, por vezes, função de vários incrementos de deslocamento do nó condicionante, a nova equação a adicionar à equação (3.155) é um pouco mais complexa. Veja-se, por exemplo, o procedimento necessário para condicionar o deslocamento em x_1 do nó j em relação aos deslocamentos do nó i, onde a condição a cumprir é

$$u_{x_1,j} = u_{x_1,i} + \Delta x_{3_{i,j}}\,\theta_{x_2,i} - \Delta x_{2_{i,j}}\,\theta_{x_3,i} \tag{3.168}$$

Neste caso, será necessário adicionar à equação (3.155) uma nova equação que contemple a condição (3.168), e de forma a manter a simetria do sistema adicionar-se-á também uma coluna de acordo com

$$\begin{bmatrix} k_{0,0} & \dots & k_{0,u_{x_1,i}} & k_{0,u_{x_2,i}} & k_{0,u_{x_3,i}} & k_{0,r_{x_1,i}} & k_{0,r_{x_2,i}} & k_{0,r_{x_3,i}} & \dots & k_{0,u_{x_1,j}} & \dots & k_{0,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{u_{x_1,i},0} & \dots & k_{u_{x_1,i},u_{x_1,i}} & k_{u_{x_1,i},u_{x_2,i}} & k_{u_{x_1,i},u_{x_3,i}} & k_{u_{x_1,i},r_{x_1,i}} & k_{u_{x_1,i},r_{x_2,i}} & k_{u_{x_1,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{u_{x_1,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{u_{x_1,i},n} & 1 \\ k_{u_{x_2,i},0} & \dots & k_{u_{x_2,i},u_{x_1,i}} & k_{u_{x_2,i},u_{x_2,i}} & k_{u_{x_2,i},u_{x_3,i}} & k_{u_{x_2,i},r_{x_1,i}} & k_{u_{x_2,i},r_{x_2,i}} & k_{u_{x_2,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{u_{x_2,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{u_{x_2,i},n} & 0 \\ k_{u_{x_3,i},0} & \dots & k_{u_{x_3,i},u_{x_1,i}} & k_{u_{x_3,i},u_{x_2,i}} & k_{u_{x_3,i},u_{x_3,i}} & k_{u_{x_3,i},r_{x_1,i}} & k_{u_{x_3,i},r_{x_2,i}} & k_{u_{x_3,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{u_{x_3,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{u_{x_3,i},n} & 0 \\ k_{r_{x_1,i},0} & \dots & k_{r_{x_1,i},u_{x_1,i}} & k_{r_{x_1,i},u_{x_2,i}} & k_{r_{x_1,i},u_{x_3,i}} & k_{r_{x_1,i},r_{x_1,i}} & k_{r_{x_1,i},r_{x_2,i}} & k_{r_{x_1,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{r_{x_1,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{r_{x_1,i},n} & 0 \\ k_{r_{x_2,i},0} & \dots & k_{r_{x_2,i},u_{x_1,i}} & k_{r_{x_2,i},u_{x_2,i}} & k_{r_{x_2,i},u_{x_3,i}} & k_{r_{x_2,i},r_{x_1,i}} & k_{r_{x_2,i},r_{x_2,i}} & k_{r_{x_2,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{r_{x_2,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{r_{x_2,i},n} & +\Delta x_{3,j} \\ k_{r_{x_3,i},0} & \dots & k_{r_{x_3,i},u_{x_1,i}} & k_{r_{x_3,i},u_{x_2,i}} & k_{r_{x_3,i},u_{x_3,i}} & k_{r_{x_3,i},r_{x_1,i}} & k_{r_{x_3,i},r_{x_2,i}} & k_{r_{x_3,i},r_{x_3,i}} & \dots & k_{r_{x_3,i},u_{x_1,j}} & \dots & k_{r_{x_3,i},n} & -\Delta x_{4,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{u_{x_1,j},0} & \dots & k_{u_{x_1,j},u_{x_1,i}} & k_{u_{x_1,j},u_{x_2,i}} & k_{u_{x_1,j},u_{x_3,i}} & k_{u_{x_1,j},r_{x_1,i}} & k_{u_{x_1,j},r_{x_2,i}} & k_{u_{x_1,j},r_{x_3,i}} & \dots & k_{u_{x_1,j},u_{x_1,j}} & \dots & k_{u_{x_1,j},n} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,0} & \dots & k_{n,u_{x_1,i}} & k_{n,u_{x_2,i}} & k_{n,u_{x_3,i}} & k_{n,r_{x_1,i}} & k_{n,r_{x_2,i}} & k_{n,r_{x_3,i}} & \dots & k_{n,u_{x_1,j}} & \dots & k_{n,n} & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & +\Delta x_{3,j} & -\Delta x_{4,j} & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_{x_1,i} \\ u_{x_2,i} \\ u_{x_3,i} \\ \theta_{x_1,i} \\ \theta_{x_2,i} \\ \theta_{x_3,i} \\ \dots \\ u_{x_1,j} \\ \dots \\ u_n \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{u_0} \\ \dots \\ f_{u_{x_1,i}} \\ f_{u_{x_2,i}} \\ f_{u_{x_3,i}} \\ f_{r_{x_1,i}} \\ f_{r_{x_2,i}} \\ f_{r_{x_3,i}} \\ \dots \\ f_{u_{x_1,j}} \\ \dots \\ f_{u_n} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

sendo f o incremento da força de ligação entre os nós i e j. Pode-se verificar que multiplicando a linha n+1 da matriz $\underline{K}$ pelo vector $\underline{u}$ resulta a equação (3.168).

3.6.5. Apoios unidireccionais

Os apoios unidireccionais funcionam apenas num sentido, como por exemplo aparelhos de apoio de neoprene não ancorados ou superfícies de contacto de cimbres, resultando a sua implementação na classe *UNIDIRECTIONAL*. Este tipo de condição fronteira torna-se particularmente interessante no estudo de processos construtivos complexos de obras de arte especiais, onde por vezes existe levantamento de elementos previamente apoiados. O procedimento implementado para a modelação deste tipo de condição fronteira é não-linear (não-linearidade de contacto), no entanto a base do procedimento é idêntica à referida na secção 3.6.1.

O controlo do processo tem de ser efectuado através do deslocamento do grau de liberdade em causa, U_i, e da força total aplicada no mesmo grau de liberdade, R_i, para garantir a condição imposta. Desta forma existem quatro possibilidades para a situação em que se encontra a ligação pelo que a forma como é efectuada a assemblagem das condições na matriz de rigidez deve contabilizar essas mesmas possibilidades: A encostar; Encostado; A desencostar; Desencostado.

Na Figura 3.29 pode-se ver um fluxograma relativo à implementação dos apoios unidireccionais na fase de agrupamento da matriz de rigidez global, onde a variável i se refere ao grau de liberdade que se está a impor, e j ao número da linha da matriz de rigidez global correspondente à equação introduzida para impor a condição pretendida.

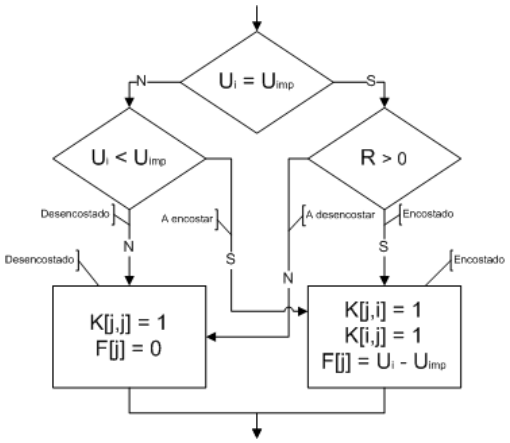


Figura 3.29 – Implementação dos apoios unidirecionais na fase de construção da matriz de rigidez global.

Durante a fase de construção da matriz de rigidez global nos casos das condições “A encostar” ou “Encostado” a introdução das condições fronteira é igual à utilizada na secção 3.6.1. Nos casos das condições “A desencostar” ou “Desencostado” não é necessária qualquer condição, uma vez que a ligação se encontra inactiva.

Na Figura 3.30 apresenta-se um fluxograma que descreve a implementação dos apoios unidireccionais na fase de construção do vector de forças internas.

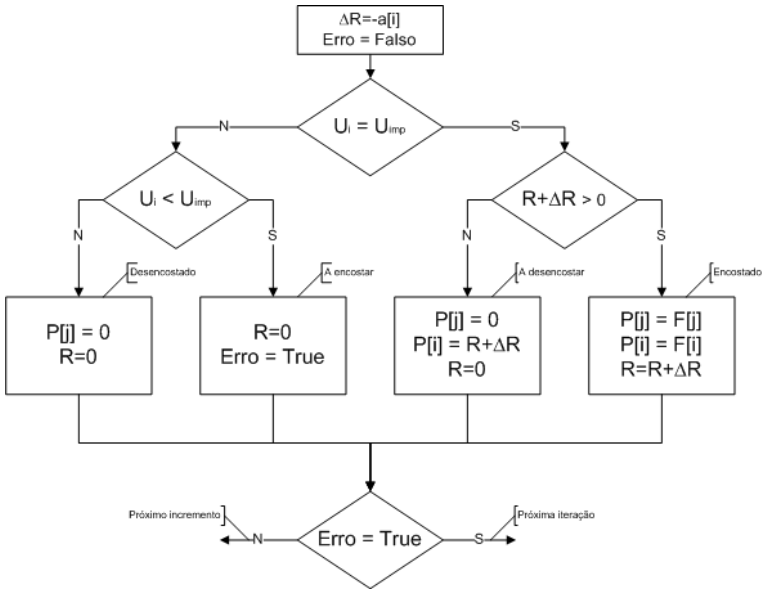


Figura 3.30 – Implementação dos apoios unidireccionais na fase de construção do vector de forças internas.

Durante a fase de agrupamento do vector das forças internas o equilíbrio encontra-se garantido caso a ligação permaneça encostada ou desencostada. No primeiro caso o valor da força interna a adicionar no vector de forças internas será igual ao valor da reacção de apoio, e no segundo caso esse valor será zero.

Nas situações em que o apoio altera o respectivo estado, caso esteja “A encostar” ou “A desencostar”, o equilíbrio não se encontra garantido. Quando o apoio se encontra “A desencostar” dever-se-á adicionar o valor da reacção de apoio ao vector das forças internas; assim aquando da verificação dos critérios de convergência esta força não estará equilibrada, obrigando o algoritmo a uma nova iteração para atingir o equilíbrio, desta vez com a ligação desligada.

Caso a ligação se encontre “A encostar” tem de se utilizar um subterfúgio de modo a forçar o programa a uma nova iteração, uma vez que não existindo ainda reacção de apoio todas as forças se encontram equilibradas, desta forma criou-se uma nova variável lógica designada por *Error*, que fará parte dos critérios de convergência. Assim, aquando da verificação dos critérios de convergência se a variável *Error* possuir o valor “true” o programa faz uma nova iteração mesmo que os restantes critérios de convergência estejam verificados. Conforme está exposto na Figura 3.29, ao ser detectado um deslocamento inferior ao imposto o programa introduz o deslocamento imposto no grau de liberdade em causa, de forma a colocar este na posição pretendida.

3.7. Algoritmo de determinação de frequências e modos próprios de vibração

A utilização de técnicas de identificação dos parâmetros modais de estruturas (frequências naturais, configurações dos modos de vibração e coeficientes de amortecimento) com base na realização de ensaios dinâmicos, e em particular ensaios de vibração ambiental, surge cada vez mais como suporte à análise da correlação entre parâmetros identificados e calculados, na validação de modelações numéricas. O modelo computacional desenvolvido, que se apresentará em continuação, é adequado para as análises que se pretende realizar, designadamente em estruturas com funcionamento em regime linear elástico.

3.7.1. Formulação

A equação de equilíbrio que governa a resposta dinâmica linear de um sistema é

$$\underline{M}\ddot{\underline{U}} + \underline{C}\dot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F} \tag{3.170}$$

onde $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, $\underline{F}$ é o vector das forças externas aplicadas, e $\underline{U}$, $\dot{\underline{U}}$ e $\ddot{\underline{U}}$ são, respectivamente, os vectores de deslocamento, velocidade e aceleração.

Matematicamente a equação (3.170) representa um sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem, cuja solução pode ser obtida por procedimentos padrão para equações diferenciais de coeficientes constantes. Admitindo o equilíbrio do sistema em vibração livre e sem amortecimento a equação (3.170) converte-se em

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\,\underline{U} = \underline{0} \tag{3.171}$$

A solução para este sistema de equações pode ser postulada da seguinte forma

$$\underline{U} = \underline{\phi} \sin \omega \left(t - t_0 \right) \tag{3.172}$$

onde $\underline{\phi}$ é um vector que expressa o modo de vibração, t_0 é uma constante temporal e ω representa a frequência de vibração, em radianos por segundo, associada a $\underline{\phi}$.

Substituindo (3.172) em (3.171) obtém-se um problema de valores e vectores próprios, que permite determinar $\underline{\phi}$ e ω

$$\underline{K}\,\underline{\phi} = \omega^2 \underline{M}\,\underline{\phi} \tag{3.173}$$

A resolução do problema tem n soluções (ω_1, $\underline{\phi}_1$), …, (ω_n, $\underline{\phi}_n$), onde os vectores próprios podem ser normalizados em relação a $\underline{M}$, isto é

$$\underline{\phi}_i^T \underline{M}\,\underline{\phi}_j \begin{cases} = 1; i = j \\ = 0; i \neq j \end{cases} \tag{3.174}$$

$$\omega_1^2 \leq \ldots \leq \omega_n^2 \tag{3.175}$$

A implementação do método resultou na classe *MODAL*, referida na secção 2.5.2.4, e uma das suas particularidades consiste na possibilidade de utilizar massas diferentes em cada direcção coordenada, incluindo a situação de massa nula.

3.7.2. Exemplos de aplicação

3.7.2.1. Oscilador de 1 grau de liberdade

O exemplo de aplicação mais simples utilizado para determinação de frequências e modos de vibração corresponde a um oscilador harmónico de um grau de liberdade, conforme apresentado na Figura 3.31, sendo que neste caso a frequência pode ser obtida através da expressão

$$f = \sqrt{\frac{K}{M}} \frac{1}{2\pi} \tag{3.176}$$

onde K e M são, respectivamente, a rigidez e a massa associadas ao grau de liberdade em análise.

A estrutura modelada corresponde a uma consola vertical com uma altura L=10m, tendo uma secção transversal quadrada com 1.0m de lado, sendo o módulo de elasticidade E=30GPa e o coeficiente de Poisson ν=0.30. As massas concentradas colocadas na extremidade livre da consola foram de 10ton na direcção x e de 20ton na direcção y. Utilizaram-se 5 elementos finitos de Timoshenko com 3 nós, com 2 pontos de Gauss, e uma discretização da secção transversal através de 100 fibras para modelar a estrutura, conforme reproduzido na Figura 3.32.

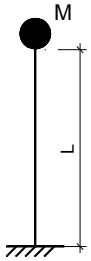


Figura 3.31 – Esquema estrutural do oscilador de 1 grau de liberdade.

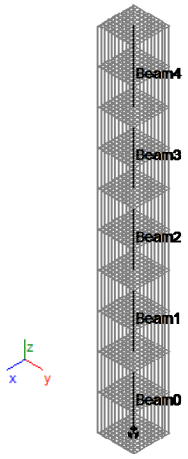


Figura 3.32 - Modelo numérico do oscilador de 1 grau de liberdade.

No Quadro 3.9 são apresentadas as frequências dos modos próprios de vibração correspondentes às massas consideradas nas direcções x e y, determinadas por intermédio do modelo numérico e através da solução teórica. Conforme se pode constatar da observação do quadro, as diferenças obtidas no cálculo das frequências dos dois modos de vibração são muito pequenos, confirmando-se assim a boa implementação do algoritmo do modelo desenvolvido.

Quadro 3.9 – Frequências.

	Modelo desenvolvido	Solução teórica	Diferença
Direcção	[Hz]	[Hz]	[%]
y	3.082	3.067	0.5
x	4.359	4.337	0.5

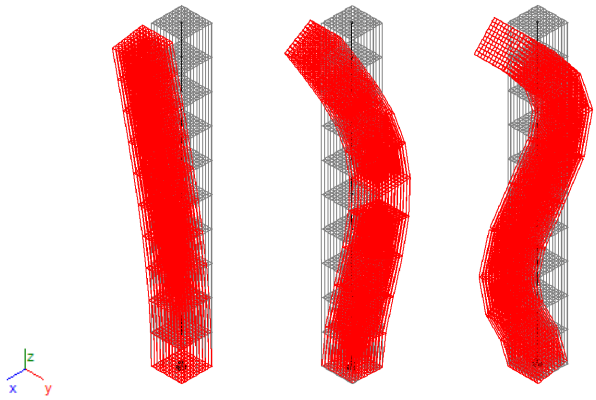
3.7.2.2. Consola com massa distribuída

Neste exemplo pretende-se validar o comportamento do modelo desenvolvido na determinação de frequências e modos próprios de vibração de uma estrutura simples com massa distribuída. Para o efeito far-se-á a comparação das frequências próprias de uma consola com massa distribuída, obtidas através da utilização do código computacional desenvolvido e com base no programa de análise comercial ROBOT (Autodesk (2009)).

A estrutura modelada tem a mesma geometria e propriedades elásticas do exemplo anterior, mas no presente caso considerando-se uma massa distribuída por metro linear na direcção x de 2.5ton/m. Conforme se pode verificar no Quadro 3.10, as frequências obtidas através do programa de cálculo desenvolvido são muito semelhantes às fornecidas pelo ROBOT. Conforme o número do modo de vibração aumenta a respectiva configuração torna-se mais complexa, ver Figura 3.33, e consequentemente aumenta o erro obtido na estimação da frequência.

Quadro 3.10 – Frequências de vibração de consola com massa distribuída.

	Modelo desenvolvido	Modelo comercial	Diferença
Modo	[Hz]	[Hz]	[%]
1	5.57	5.53	0.7
2	34.92	34.27	1.9
3	98.34	94.40	4.2



1º modo 2º modo 3º modo

Figura 3.33 – Modos de vibração da consola com massa distribuída na direcção x (modelo numérico desenvolvido).

3.7.2.3. Pórtico com massa distribuída

Neste exemplo pretende-se verificar a validade do modelo desenvolvido na determinação de frequências e modos próprios de vibração de um pórtico com massa distribuída ao longo dos elementos lineares nas 3 direcções. A estrutura modelada corresponde a um pórtico bi-encastrado com 10m de altura e uma viga com 20m de vão, sendo a secção transversal quadrada com 1.0m de lado, igual para todos os elementos. Admitiu-se um módulo de elasticidade E=30GPa e um coeficiente de Poisson ν=0.30 para o material constituinte da estrutura, e uma massa distribuída de 2.5ton/m nas 3 direcções. Utilizaram-se 15 elementos finitos de Timoshenko com 3 nós, com 2 pontos de Gauss, e uma discretização da secção transversal através de 100 fibras (ver Figura 3.34).

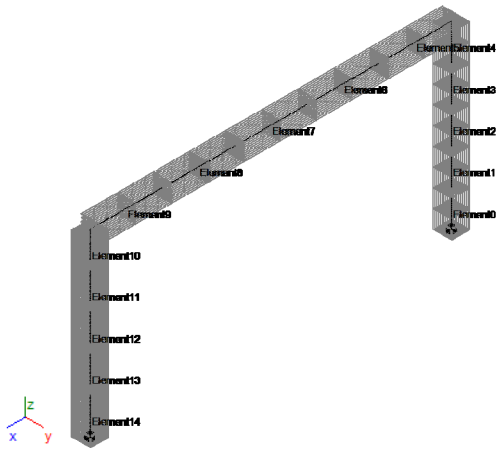


Figura 3.34 – Modelo numérico do pórtico com massa distribuída.

Quadro 3.11 – Frequências de vibração do pórtico com massa distribuída.

	Modelo numérico	Programa comercial	Diferença
Modo	[Hz]	[Hz]	[%]
1	2.25	2.25	0.0
2	3.59	3.61	0.6
3	4.31	4.33	0.5
4	6.40	6.44	0.6

Na Figura 3.35 são apresentados os 4 primeiros modos de vibração obtidos através do modelo desenvolvido.

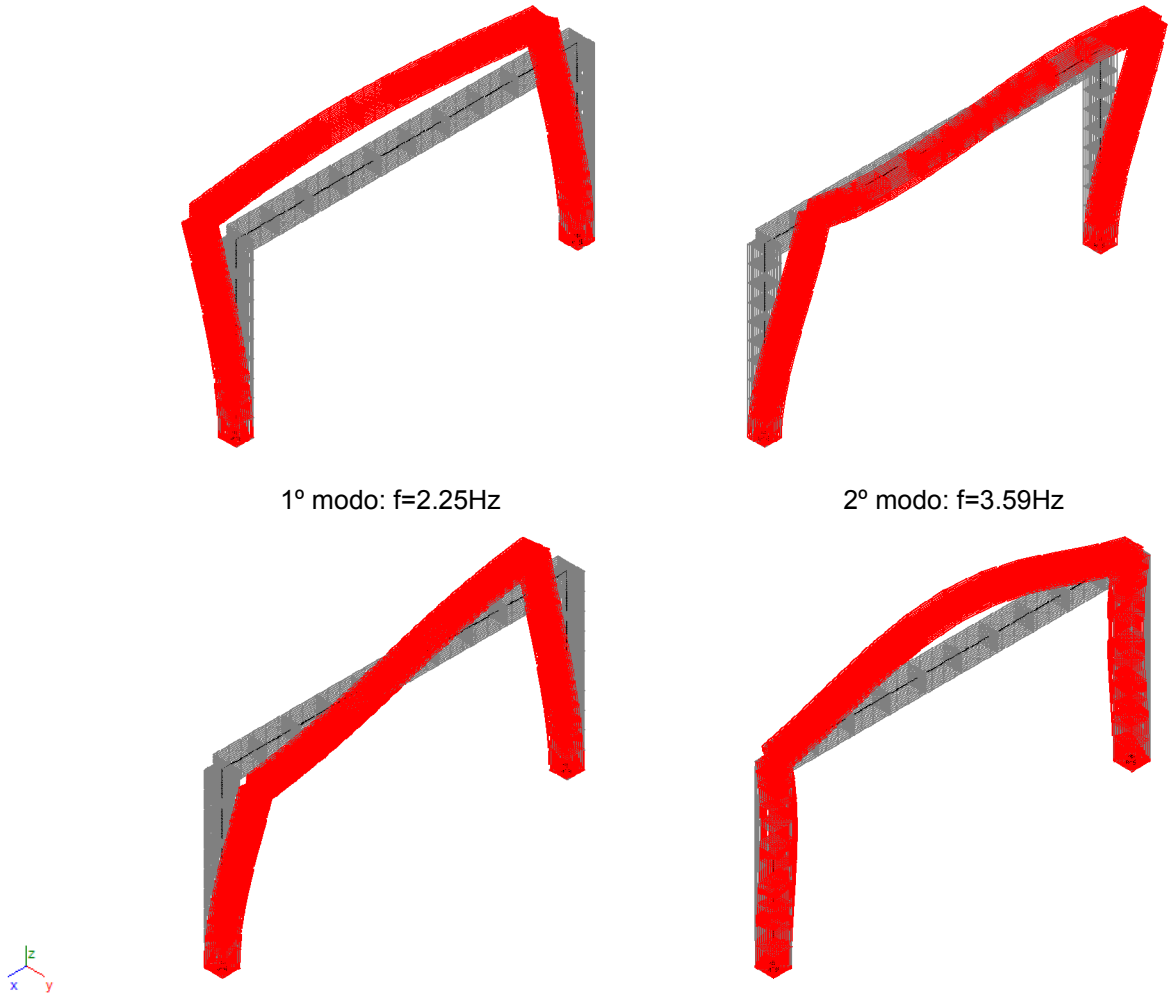


Figura 3.35 – Modos de vibração de pórtico com massa distribuída.

3.7.2.4. Tirante com massa distribuída

Com este exemplo pretende-se validar o programa de cálculo desenvolvido relativamente à determinação de frequências e modos próprios de vibração num tirante com massa distribuída, como os utilizados para a suspensão de tabuleiros. A validação dos resultados obtidos pode neste caso ser efectuada através da equação das cordas vibrantes

$$f_n = n\frac{1}{L}\sqrt{\frac{N}{4\,m}} \tag{3.177}$$

onde f_n é a frequência própria do n-ésimo modo de vibração, L é o comprimento da corda, m é a massa por unidade de comprimento e N é o esforço axial instalado. O tirante considerado tem um comprimento L=18.03m, uma secção transversal de 4cm^2, sendo constituído por um aço com E=200GPa e massa volúmica de 7.7ton/m^3, considerada apenas na direcção z, e sujeito a uma tensão de 500MPa (ver Figura 3.36). Utilizaram-se 5 elementos finitos de tirante com 3 nós, com 2 pontos de Gauss cada.

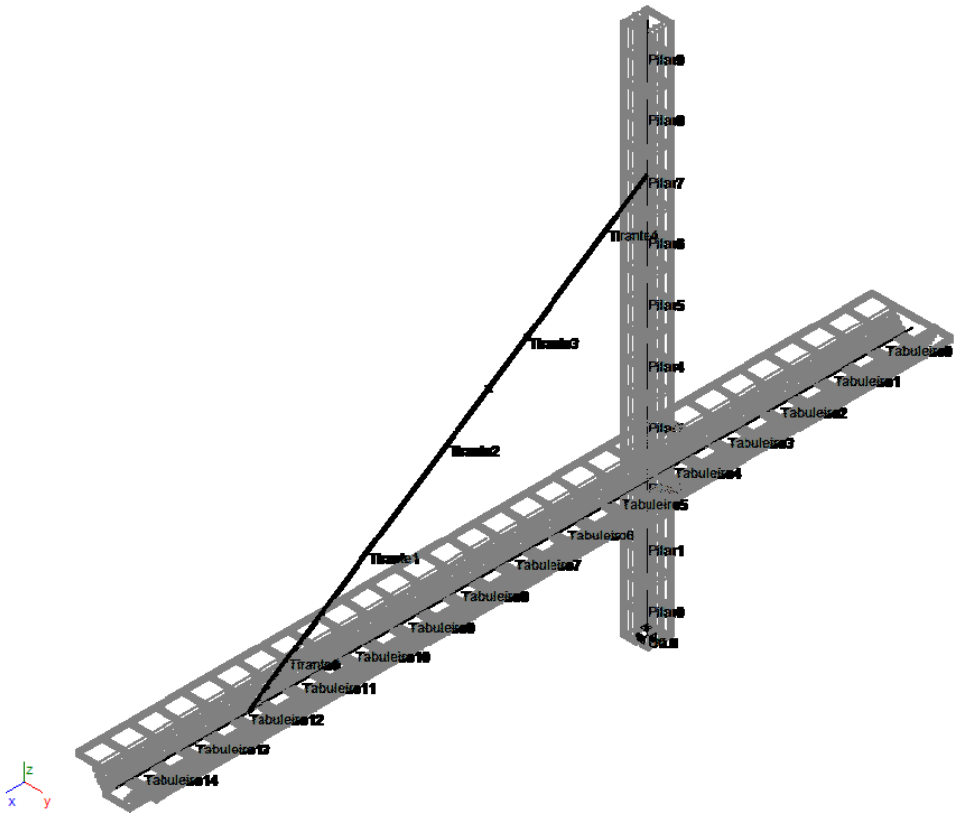


Figura 3.36 – Modelo numérico do tirante com massa distribuída.

Uma vez que a rigidez do tabuleiro e pilar considerados é muito elevada admite-se que as frequências próprias de vibração do tirante podem ser obtidas através da equação das cordas vibrantes (3.177). Conforme se pode verificar pela análise do Quadro 3.12, apesar do reduzido número de elementos finitos utilizados as frequências próprias de vibração obtidas através do programa de cálculo desenvolvido são muito semelhantes às da solução teórica. Conforme o número do modo de vibração aumenta a configuração deste torna-se mais complexa, ver Figura 3.37, e consequentemente aumenta o erro associado à determinação da correspondente frequência.

Quadro 3.12 – Frequências de vibração do tirante com massa distribuída.

	Modelo numérico	Solução teórica	Erro
Modo	f [Hz]	f [Hz]	[%]
1	7.06	7.07	0.1
2	14.11	14.14	0.1
3	21.08	21.20	0.6
4	27.69	28.27	2.1
5	31.80	35.34	10.0

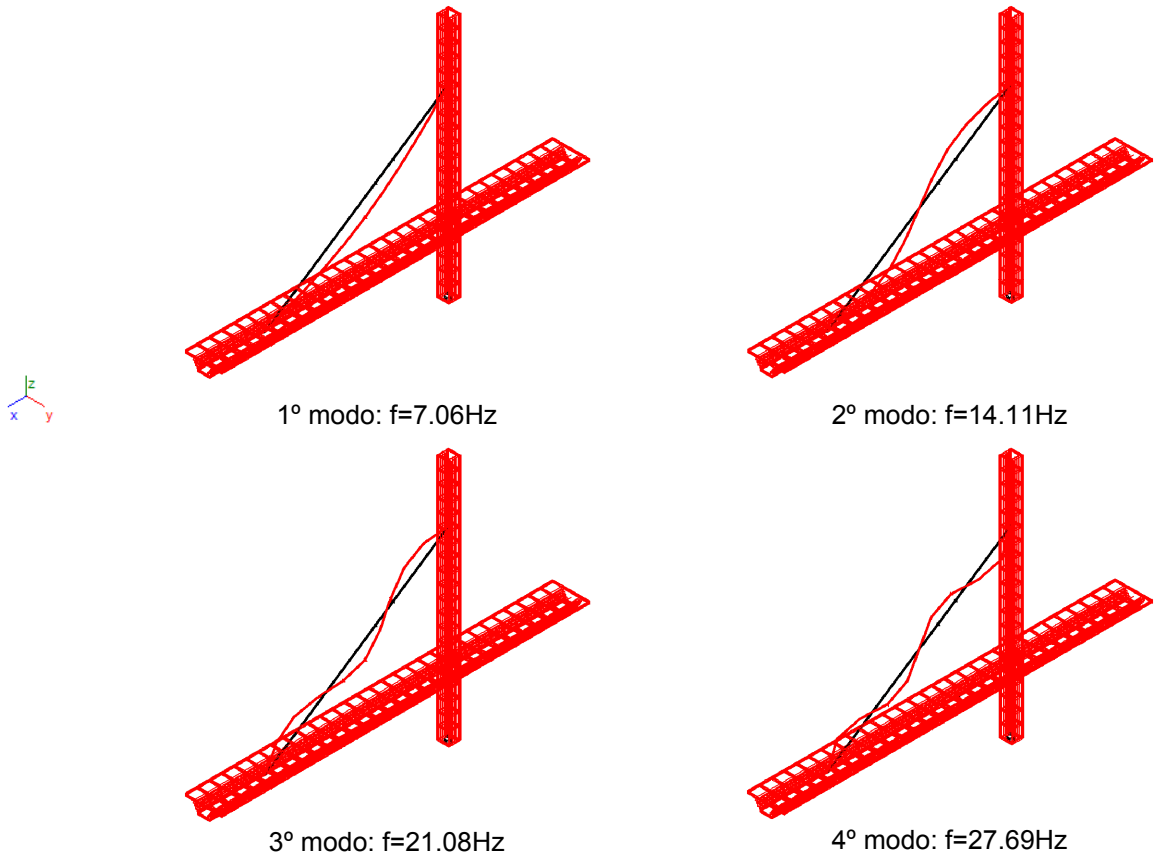


Figura 3.37 – Modos de vibração do tirante com massa distribuída.

De salientar que os bons resultados obtidos em todos os exemplos de validação da análise modal servem também para comprovar a fiabilidade das formulações dos elementos finitos utilizados, nomeadamente dos elementos de viga e de tirante.

3.8. Considerações finais

A implementação dos diversos tipos de elementos finitos, ligações e algoritmos foi muito simplificada através do uso da plataforma *Evolution* e dos seus componentes genéricos, permitindo alterações e integração de novas funcionalidades através de pouco esforço em termos de programação.

As formulações dos elementos finitos, desenvolvidas num espaço tridimensional e com consideração da não-linearidade geométrica, mostraram-se bastante consistentes e eficazes, como o provaram os vários exemplos de validação apresentados. A discretização bidimensional da secção transversal dos

elementos finitos através de fibras comprovou ser uma opção consistente com os objectivos propostos, nomeadamente na modelação de secções de geometria complexa.

A utilização de elementos específicos para a modelação de armaduras passivas e de pré-esforço embebidos, bem como de tirantes e cabos de pré-esforço exteriores, opção pouco usual na generalidade dos modelos computacionais de análise estrutural correntes, mostrou-se bastante eficiente, não só no rigor das modelações efectuadas mas também no desempenho e facilidade de utilização das formulações implementadas.

Os diversos tipos de ligação considerados mostraram-se eficientes na modelação das várias condições particulares necessárias para a correcta simulação de obras de arte, nomeadamente na modelação de aparelhos de apoio, juntas de dilatação e de problemas de levantamento de apoios (problema estruturalmente não-linear).

Por fim, o algoritmo de resolução de problemas não-lineares, bem como o algoritmo de determinação de frequências e modos próprios de vibração, mostraram-se eficazes em termos do rigor dos resultados obtidos.

Capítulo 4

Modelos constitutivos

4. Modelos constitutivos

4.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se os modelos constitutivos desenvolvidos para simulação dos fenómenos de fluência, retracção e maturação do betão, assim como as perdas do aço de pré-esforço. Descreve-se a simulação do comportamento diferido por intermédio de uma análise incremental e apresentam-se ainda os modelos utilizados para análise não-linear material e respectiva implementação. Uma vez que o programa de cálculo desenvolvido se baseia na utilização de elementos tipo viga, os modelos constitutivos para simulação do comportamento do material que aqui se apresentarão correspondem a leis unidimensionais.

No final do capítulo apresentam-se duas aplicações que visam validar os modelos constitutivos e de comportamento material desenvolvidos, baseados em ensaios laboratoriais (Espion (1993); Sousa (2002)).

4.2. Leis de comportamento dos materiais

De forma a não tornar demasiado extenso este capítulo optou-se por referir apenas as leis de comportamento material mais utilizadas no presente trabalho, nomeadamente as apresentadas no Eurocódigo 2 (EC2 (2004)).

4.2.1. Betão

4.2.1.1. Maturação

Na lei de maturação para o betão apresentada no EC2(EC2 (2004)) a variação do módulo de elasticidade $E_{cm}(t)$ com o tempo t é expressa por

$$E_{cm}(t) = \left(\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}} \right)^{0.3} E_{cm} \tag{4.1}$$

sendo $f_{cm}(t)$ a resistência média à compressão do betão para uma idade t em dias, f_{cm} a resistência média à compressão do betão em provetes cilíndricos para a idade de 28 dias e E_{cm} o módulo de elasticidade secante para a idade de 28 dias (para $0 \le \sigma_c \le 0.4\, f_{cm}$). O valor de $f_{cm}(t)$ pode ser obtido por

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm} \tag{4.2}$$

onde

$$\beta_{cc}(t) = e^{s\left[1-\left(\frac{28}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]} \tag{4.3}$$

sendo o coeficiente s função do tipo de cimento (velocidade de endurecimento):

$$\begin{array}{l} \text{Classe S} \Rightarrow s = 0.38 \\ \text{Classe N} \Rightarrow s = 0.35 \\ \text{Classe R} \Rightarrow s = 0.20 \end{array} \tag{4.4}$$

onde as designações S, N e R das classes de cimento correspondem a cimentos de secagem lenta, normal e rápida, respectivamente. A implementação desta lei resultou na classe *CONCRETE_EC2* do tipo *STRESSSTRAIN* referida na secção 2.5.2.2.

4.2.1.2. Retracção

A lei de retracção do betão apresentada no EC2 depende da humidade ambiente, das dimensões do elemento e da composição do betão. A extensão de retracção total ε_{cs} é composta pela retracção por secagem ε_{cd} e pela retracção autogénea ε_{ca}.

A extensão de retracção de secagem desenvolve-se de forma lenta, dado que é provocada pela migração da água através do betão endurecido para o exterior, podendo ser quantificada a partir de

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \, \varepsilon_{cd,0} \tag{4.5}$$

onde k_h depende da espessura equivalente do elemento h_0, conforme reproduzido no Quadro 4.1.

A espessura equivalente do elemento é definida por

$$h_0 = \frac{2 A_c}{u} \tag{4.6}$$

sendo A_c a área da secção transversal e u o perímetro desta em contacto com o ambiente.

Quadro 4.1 – Coeficiente k_h.

h_0 [mm]	k_h
100	1.00
200	0.85
300	0.75
≥ 500	0.70

$\beta_{ds}(t,t_0)$ vem definido através de

$$\beta_{ds} = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0.04\sqrt{h_0^3}} \tag{4.7}$$

onde t é a idade do betão em dias e t_s é a idade em dias em que tem início a retracção por secagem.

O valor de $\varepsilon_{cd,0}$ pode ser calculado através de

$$\varepsilon_{cd,0} = 0.85\left[(220 + 110\,\alpha_{ds1})e^{\left(-\alpha_{ds2}\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)}\right]10^{-6}\,\beta_{RH} \tag{4.8}$$

sendo β_{RH} definido por

$$\beta_{RH} = -1.55\left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3\right] \tag{4.9}$$

em que f_{cm0} = 10MPa, RH_0 = 100%, RH é o valor da humidade relativa ambiente (em %), e os coeficientes α_{ds1} e α_{ds2} dependem do tipo de cimento, de acordo com o Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Coeficientes α_{ds1} e α_{ds2}.

Classe	α_{ds1}	α_{ds2}
S	3	0.13
N	4	0.12
R	6	0.11

A retracção autogénea desenvolve-se durante o endurecimento do betão, isto é, nos primeiros dias após a betonagem, e está relacionada com as reacções químicas do cimento com a água. Podem-se obter os valores da extensão de retracção autogénea para uma idade t (em dias) a partir de

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t)\,\varepsilon_{ca,\infty} \tag{4.10}$$

sendo

$$\beta_{as}(t) = 1 - e^{-2\sqrt{t}} \tag{4.11}$$

$$\varepsilon_{ca,\infty} = 2.5(f_{ck} - 10)10^{-6} \tag{4.12}$$

em que f_{ck} é a resistência característica do betão (em MPa), medida em provetes cilíndricos à idade de 28 dias.

A implementação desta lei de retracção resultou na classe *EC2* do tipo *SHRINKAGE* referida na secção 2.5.2.2. De salientar que foram ainda consideradas a lei de retracção do CEB90 (CEB-FIP (1993)), e a possibilidade de utilizar uma série temporal com valores da extensão de retracção pré-definidos pelo utilizador, resultando, respectivamente, as classes *CEB90* e *MULTILINEAR* referidas na secção 2.5.2.2. A utilização da série de valores é de grande utilidade na modelação de ensaios experimentais, nos quais se dispõe de medições de extensões em provetes de retracção.

4.2.1.3. Fluência

De acordo com o EC2 a fluência depende da humidade ambiente, das dimensões do elemento, da composição do betão, da maturidade deste quando é aplicada a primeira carga, da duração e intensidade do carregamento e ainda da temperatura. O valor da extensão por fluência do betão $\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ num instante t para uma tensão de compressão constante σ_c aplicada num instante t_0 é dada por

$$\varepsilon_{cc}(t,t_0) = \varphi(t,t_0)\frac{\sigma_c}{E_c} \tag{4.13}$$

em que os valores do coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$ são relacionáveis com o módulo de elasticidade tangente E_c, que se pode admitir igual a 1.05 E_{cm}. O coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$ pode ser calculado através de

$$\varphi(t,t_0) = \varphi_0 \beta_c(t,t_0) \tag{4.14}$$

com

$$\varphi_0 = \varphi_{RH}\beta(f_{cm})\beta(t_0) \tag{4.15}$$

sendo

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}} \tag{4.16}$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{0.20}} \tag{4.17}$$

O coeficiente φ_{RH} depende da humidade relativa RH, podendo ser determinado com base nas seguintes expressões

$$\begin{aligned} f_{cm} \le 35MPa \quad &\Rightarrow \quad \varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0.1\sqrt[3]{h_0}} \\ f_{cm} > 35MPa \quad &\Rightarrow \quad \varphi_{RH} = \left(1 + \frac{1 - RH/100}{0.1\sqrt[3]{h_0}}\alpha_1\right)\alpha_2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

em que

$$\alpha_1 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0.7} \quad \alpha_2 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0.2} \tag{4.19}$$

O coeficiente $\beta_c(t,t_0)$ que na equação (4.14) descreve a evolução da fluência ao longo do tempo é determinado através da equação

$$\beta_c(t,t_0) = \left(\frac{t - t_0}{\beta_H - t - t_0}\right)^{0.3} \tag{4.20}$$

onde β_H é um coeficiente dependente da humidade relativa e da espessura equivalente do elemento, definido por

$$\begin{aligned} f_{cm} \le 35MPa \quad &\Rightarrow \quad \beta_H = 1.5\left(1 + (0.012RH)^{18}\right)h_0 + 250 \le 1500 \\ f_{cm} > 35MPa \quad &\Rightarrow \quad \beta_H = 1.5\left(1 + (0.012RH)^{18}\right)h_0 + 250\,\alpha_3 \le 1500\,\alpha_3 \end{aligned} \tag{4.21}$$

sendo

$$\alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0.5} \tag{4.22}$$

As influências do tipo de cimento e da temperatura podem ser consideradas alterando a idade de carregamento t_0 de acordo com a equação

$$t_0 = t_{0,T}\left(\frac{9}{2+t_{0,T}^{1.2}}+1\right)^{\alpha} \geq 0.5 \tag{4.23}$$

em que $t_{0,T}$ é a idade de carregamento em dias ajustada em função da temperatura

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^{n} e^{-\left(\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)}-13.65\right)}\Delta t_i \tag{4.24}$$

sendo $T(\Delta t_i)$ a temperatura (em ºC) durante o intervalo de tempo Δt_i medido em dias e α é definido de acordo com

$$\begin{aligned} &\text{Classe S} \Rightarrow \alpha = -1 \\ &\text{Classe N} \Rightarrow \alpha = 0 \\ &\text{Classe R} \Rightarrow \alpha = +1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Caso o valor da tensão aplicada no instante t_0 ultrapasse o valor de 0.45 $f_{ck}(t_0)$ deve-se considerar a não-linearidade da fluência, substituindo $\varphi(t,t_0)$ por um coeficiente de fluência não-linear $\varphi_k(t,t_0)$ definido por

$$\phi_k(t,t_0) = \phi(t,t_0)\, e^{1.5(k_\sigma - 0.45)} \tag{4.26}$$

sendo

$$k_\sigma = \frac{\sigma_c}{f_{cm}(t_0)} \tag{4.27}$$

A implementação desta lei de fluência resultou na classe *EC2* do tipo *CREEP* referida na secção 2.5.2.2.

4.2.1.4. Utilização de ensaios laboratoriais e de prismas compensadores de retracção e fluência

A utilização de prismas compensadores, colocados no local da obra, visa a caracterização dos fenómenos de retracção e fluência de um modo mais rigoroso e, consequentemente, possibilita uma modelação numérica mais realista. Estes prismas são executados com o mesmo betão utilizado na execução da estrutura destes fenómenos diferidos, pelo que se deverão garantir as mesmas

condições de cura e ambientais e deverão ser ensaiados nas datas relevantes para o estudo do comportamento da estrutura. No interior de cada um dos prismas dever-se-á introduzir um extensómetro de embeber e um termómetro, no sentido de obter a medição automática dos parâmetros em observação.

Os prismas compensadores de retracção não são sujeitos a forças exteriores, e sendo o extensómetro utilizado para a medição de deformações auto-compensado para variações de temperatura os valores da extensão nele medidos $\varepsilon_{exp}(t)$ são unicamente provocados pela retracção $\varepsilon_{cs}(t)$.

Os prismas de fluência são solicitados por uma carga axial em datas criteriosamente escolhidas, pelo que a extensão total diferida medida no prisma de fluência $\varepsilon_{dif}(t)$ é a soma das extensões por fluência $\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ e por retracção $\varepsilon_{cs}(t)$. Posto que se admite que o prisma de fluência retrai da mesma forma que o prisma de retracção, a diferença entre as medições observadas nos dois prismas representa a extensão devida apenas à fluência. Assim obtém-se

$$\varepsilon_{cc}\left(t,t_0\right)=\varepsilon_{dif}\left(t\right)-\varepsilon_{cs}\left(t\right) \tag{4.28}$$

4.2.1.4.1. Ajuste da lei de retracção do EC2

A utilização de quatro coeficientes correctores para ajustar a lei de retracção do EC2 a medições experimentais é proposta por Félix (2005). Partindo da equação (4.8), a retracção por secagem pode então ser obtida através da utilização da equação (4.5), onde $\varepsilon_{cd,0}$ e $\beta_{ds}(t,t_0)$ vêm corrigidos pelos coeficientes $C_{\varepsilon cd,0}$ e $C_{\beta ds}$, respectivamente:

$$\varepsilon_{cd,0}=0.85\left[\left(220+110\,\alpha_{ds1}\right)e^{\left(-\alpha_{ds2}\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)}\right]10^{-6}\,\beta_{RH}\,C_{\varepsilon cd,0} \tag{4.29}$$

$$\beta_{ds}=\left[\frac{\left(t-t_s\right)}{\left(t-t_s\right)+0.04\sqrt{h_0^{\,3}}}\right]^{C_{\beta ds}} \tag{4.30}$$

De igual forma a retracção autogénea pode ser ajustada através da utilização da equação (4.10), onde $\varepsilon_{ca,\infty}$ e $\beta_{as}(t)$ vêm corrigidos pelos coeficientes $C_{\varepsilon ca,\infty}$ e $C_{\beta as}$, de acordo com

$$\varepsilon_{ca,\infty}=\left[2.5\left(f_{ck}-10\right)10^{-6}\right]C_{\varepsilon ca,\infty} \tag{4.31}$$

$$\beta_{as}\left(t\right)=\left[1-e^{-0.2\sqrt{t}}\right]^{C_{\beta as}} \tag{4.32}$$

A obtenção dos coeficientes é efectuada por ajuste das equações (4.29) a (4.32) aos resultados experimentais através do método dos mínimos quadrados.

4.2.1.4.2. Ajuste da lei de fluência do EC2

No ajuste da lei de fluência do EC2 a resultados experimentais não se utilizam directamente as extensões medidas, sendo estas utilizadas na obtenção de um coeficiente de fluência experimental $\varphi_{exp}(t,t_0)$, e este comparado com o coeficiente de fluência $\varphi_0(t,t_0)$ obtido através do EC2.

A aplicação da tensão inicial σ_c ao provete de fluência provoca uma extensão instantânea $\varepsilon_c(t_0)$ dada por

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_c}{E_{cm}(t_0)} \tag{4.33}$$

O coeficiente de fluência que se obtém experimentalmente $\varphi_{exp}(t,t_0)$ está relacionado com o módulo de elasticidade secante $E_{cm}(t_0)$, segundo o preconizado pelo EC2 na equação:

$$\varepsilon_{cc}(t,t_0) = \varphi_{exp}(t,t_0)\frac{\sigma_c}{E_{cm}(t_0)} \tag{4.34}$$

Para relacionar o coeficiente de fluência com o módulo de elasticidade tangente E_c, Santos (2001) propõe a seguinte correcção:

$$\varphi_{exp,corr}(t,t_0) = \varphi_{exp}(t,t_0)\frac{E_c}{E_{cm}(t_0)} \tag{4.35}$$

sendo que a partir da equação (4.13) é possível obter o coeficiente de fluência experimental corrigido através de

$$\varphi_{exp,corr}(t,t_0) = \varepsilon_{cc}(t,t_0)\frac{E_c}{\sigma_c} \tag{4.36}$$

No ajuste da lei de fluência do EC2 a medições experimentais utilizam-se dois coeficientes: $C\varphi_0$ e $C_{\beta c}$. Assim as expressões (4.15) e (4.20) tomam o seguinte aspecto, após o referido ajuste

$$\varphi_0 = \varphi_{RH}\,\beta(f_{cm})\,\beta(t_0)\,C_{\varphi_0} \tag{4.37}$$

$$\beta_c\left(t,t_0\right)=\left[\frac{t-t_0}{\beta_H-t-t_0}\right]^{0.3\,C_{\beta c}} \tag{4.38}$$

A obtenção dos coeficientes $C_{\varphi 0}$ e $C_{\beta c}$ é efectuada por minimização do erro entre as leis adoptadas e os valores medidos experimentalmente, através da utilização do método dos mínimos quadrados.

4.2.1.4.3. Ajuste da lei de maturação do EC2

À semelhança dos ajustes propostos para as leis de retracção e de fluência, a lei de maturação do betão proposta no EC2 poderá também ser ajustada. Neste caso utiliza-se o coeficiente $C_{\beta E_{CM}}$ no ajuste da expressão (4.2), resultando:

$$E_{cm}(t)=\left(\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}}\right)^{0.3\,C_{\beta E_{cm}}} E_{cm} \tag{4.39}$$

Na expressão (4.3) utiliza-se os coeficientes C_s e $C_{\beta cc}$, obtendo-se

$$\beta_{cc}(t)=e^{s\,C_s\left[1-\left(\frac{28}{t}\right)^{\frac{1}{2}}C_{\beta cc}\right]} \tag{4.40}$$

Os coeficientes $C_{\beta E_{CM}}$, C_s e $C_{\beta cc}$ são obtidos através do mesmo processo referido para o ajuste das leis de retracção e de fluência.

4.2.2. Pré-esforço

4.2.2.1. Aplicação de pré-tensão e de pós-tensão

No presente programa de cálculo os efeitos da aplicação do pré-esforço são simulados através da aplicação de tensão inicial ou da imposição de tensão final, em fibras dos elementos finitos lineares ou em elementos finitos específicos, como os de cabos de pré-esforço aderente ou de tirantes de retenção e de pré-esfroço exterior. A distinção entre aplicação de tensão inicial e imposição de tensão final não é muito usual nos modelos computacionais de análise estrutural, sendo no entanto muito útil para simular as acções de pré-tensão e de pós-tensão, conforme foi já sugerido em 3.5.3.1.1.

A aplicação de pré-tensão é realizada através da transferência de forças das armaduras previamente pré-esforçadas para o betão da estrutura, do que resultam deformações nas próprias armaduras de pré-esforço. Desta forma o valor final do pré-esforço instalado não coincide com o inicialmente aplicado, sendo este fenómeno conhecido como perdas de pré-esforço por deformação elástica.

A aplicação de pós-tensão difere do processo anterior, pois o pré-esforço das armaduras é simultâneo à transferência dos esforços entre estas e a estrutura, pelo que o valor final do pré-esforço instalado no cabo accionado coincide com o valor aplicado, pois a deformabilidade da estrutura acontece durante o processo de pós-tensão.

Desta forma foram desenvolvidas classes distintas para reproduzir estas duas formas de aplicação de pré-esforço, no caso da aplicação de tensão (ou extensão) inicial criaram-se as classes *APLLIEDSTRESS* e *APPLIEDSTRAIN* e no caso da imposição de tensão (ou extensão) final criaram-se as classes *IMPOSEDSTRESS* e *IMPOSEDSTRAIN*. De salientar que as duas últimas classes requerem processos iterativos de forma a corrigir as tensões e extensões introduzidas pela deformabilidade da estrutura conforme será apresentado em 4.3.

4.2.2.2. Perdas instantâneas

As perdas instantâneas em cabos de pré-esforço são dadas por

$$\Delta P_{\mu} = \Delta P_{elás} + \Delta P_{r} + \Delta P_{\mu} + \Delta P_{si} \tag{4.41}$$

onde $\Delta P_{elás}$ são as perdas por deformação elástica, ΔP_{r} são as perdas por relaxação a curto prazo, $\Delta P_{\mu}(s)$ são as perdas por atrito e ΔP_{si} são as perdas por escorregamento do dispositivo de amarração.

No presente contexto as perdas instantâneas de pré-esforço devem ser divididas em dois grupos: as contabilizadas no contexto da análise estrutural e as contabilizadas antes da análise estrutural. Esta divisão é necessária devido à forma como são modelados os elementos estruturais e as acções decorrentes da aplicação do pré-esforço em fibras. Assim durante a análise estrutural não existe a simulação do cabo mas de parcelas deste discretizadas por diversos elementos finitos de cabo, pelo que as perdas por atrito e por escorregamento do dispositivo de amarração deverão ser determinadas numa fase anterior à análise estrutural. No grupo das perdas instantâneas contabilizadas dentro do processo de análise estrutural incluem-se as perdas por deformação elástica do betão e as perdas por relaxação a curto prazo.

Para auxiliar a utilização de cabos de pré-esforço embebidos foi criado um *plugin* que, através de pontos do traçado de um cabo e da forma como o pré-esforço é aplicado, define a geometria dos elementos finitos responsáveis pela respectiva modelação e as forças instaladas nestes (contabilizando as perdas por atrito e por escorregamento do dispositivo de amarração). Com este procedimento de pré-processamento pretende-se manter visível e acessível toda a informação necessária à análise estrutural, conforme referido na secção 2.5.3.5.

4.2.2.2.1. Perdas por deformação elástica

As perdas por deformação elástica são contabilizadas automaticamente, uma vez que a modelação das armaduras de pré-esforço é efectuada através de fibras ou elementos finitos. Desta forma, a deformação da estrutura implica deformações nas armaduras de pré-esforço, e consequentemente

alteração do estado de tensão destas. No caso de cabos de pré-esforço externos podem surgir perdas devido à alteração da geometria da estrutura de suporte, como por exemplo devido à perda de excentricidade originada pelo deslocamento relativo entre o cabo e a estrutura. A implementação da análise não-linear geométrica na plataforma de cálculo desenvolvida permite que esses efeitos sejam considerados de forma automática no decurso da própria análise.

4.2.2.2.2. Perdas por relaxação a curto prazo

As perdas por relaxação a curto prazo ocorrem durante o período de tempo entre o tensionamento das armaduras de pré-esforço e a sua transferência para a estrutura, e só acontecem aquando da utilização de pré-tensão. Desta forma devem ser contabilizadas antes da aplicação do pré-esforço, através do procedimento para avaliação das perdas por relaxação do aço de pré-esforço que será apresentado em 4.2.2.3.1.

4.2.2.2.3. Perdas por atrito

As perdas por atrito $\Delta P_\mu(s)$ em cabos pós-tensionados podem ser estimadas através de

$$\Delta P_\mu(s) = P_0\left(1 - e^{-\mu(\theta + k\,s)}\right) \tag{4.42}$$

onde s é distância sobre o cabo desde o ponto em análise até ao ponto em que a força é igual à força inicial P_o na extremidade activa, θ é a soma dos desvios angulares na distância s (independentes da respectiva direcção ou sinal), μ é o coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha e k é o desvio angular parasita por unidade de comprimento.

4.2.2.2.4. Perdas por escorregamento do dispositivo de ancoragem

Sendo Δa o valor do escorregamento verificado no dispositivo de ancoragem e $\Delta\varepsilon_s(s)$ a extensão do cabo na secção de coordenada s, definida como a distância sobre a armadura desde o dispositivo de ancoragem até ao ponto de análise, pode escrever-se:

$$\Delta a = \int_0^{l_1} \Delta\varepsilon_s(s)\,ds \tag{4.43}$$

onde l_1 é a distância ao longo da qual se faz sentir o efeito do escorregamento, conforme exposto na Figura 4.1.

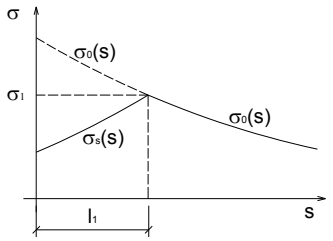


Figura 4.1 – Perdas de pré-esforço por escorregamento do dispositivo de ancoragem.

Designando por $\sigma_0(s)$ a tensão de esticamento na extremidade activa do cabo e por $\sigma_s(s)$ a tensão posterior ao escorregamento, na secção de coordenada s obtém-se

$$\Delta a = \int_0^{l_1} \frac{\sigma_0(s) - \sigma_s(s)}{E} ds \tag{4.44}$$

onde E é o módulo de elasticidade do aço de pré-esforço.

Rescrevendo a expressão (4.42) obtém-se o esforço axial $P_0(s)$ no cabo após consideradas as perdas por atrito antes do escorregamento

$$P_0(s) = P_0 e^{-\mu(\theta + k s)} = P_0(s=0) e^{-\mu(\theta + k s)} \tag{4.45}$$

pelo que

$$\sigma_o(s) = \sigma_o(s=0) e^{-\mu(\theta + k s)} \tag{4.46}$$

Considerando o mesmo coeficiente de atrito durante o aumento ou diminuição da tensão instalada, e que o sentido do movimento do cabo é inverso na zona definida na Figura 4.1 por l_1 obtém-se

$$\sigma_s(s) = \sigma_s(s=0) e^{\mu(\theta + k s)} \tag{4.47}$$

Assim, admitindo que $\sigma_0(l_1) = \sigma_s(l_1) = \sigma_1$ deduz-se que

$$\sigma_s(0) = \sigma_0(0) e^{-2\mu(\theta + k s)} \tag{4.48}$$

Utilizando as expressões (4.46) a (4.48) e substituindo em (4.44) obtém-se

$$\Delta a = \int_0^{l_1} \frac{\sigma_0(0)e^{-\mu(\theta+k\,s)} - \left(\sigma_0(0)e^{-2\mu(\theta+k\,s)}\right)e^{\mu(\theta+k\,s)}}{E} ds \tag{4.49}$$

Resolvendo a expressão (4.49) obtém-se o comprimento l_1, e consequentemente ficam definidos os limites de aplicabilidade das expressões de $\sigma_0(s)$ e $\sigma_s(s)$.

4.2.2.3. Perdas diferidas

As perdas diferidas de pré-esforço ocorrem devido à retracção e fluência do betão e à relaxação do aço de pré-esforço. Uma vez que a modelação das armaduras de pré-esforço é efectuada através de fibras ou elementos finitos, a determinação dos incrementos de deformação diferida da estrutura, de acordo com o que será exposto na secção 4.3, implica a alteração do estado de deformação das armaduras, e consequentemente do seu estado de tensão. Desta forma a contabilização das perdas de pré-esforço por deformação diferida da estrutura é realizada ao longo da análise incremental no cálculo computacional, à semelhança do que foi exposto na secção 4.2.2.2.1 relativamente às perdas instantâneas por deformabilidade da estrutura. Assim sendo, nesta secção apenas se fará referência às perdas por relaxação do aço de pré-esforço.

4.2.2.3.1. Relaxação

No EC2 a determinação das perdas por relaxação do aço de pré-esforço é definida com base na perda por relaxação ρ_{1000} (em %) 1000 horas após o tensionamento, e para uma temperatura ambiente média de 20ºC. Esta perda é expressa como uma percentagem do pré-esforço inicial, e é obtida para uma tensão inicial de $0.7f_{pk}$, onde f_{pk} é o valor da tensão resistente do aço de pré-esforço. De forma a ter em linha de conta a influência do tipo de aço de pré-esforço são definidas três classes de relaxação:

i) Classe 1: Fio ou cordão – Relaxação ordinária;

ii) Classe 2: Fio ou cordão – Baixa relaxação;

iii) Classe 3: Barras perfiladas a quente ou moldadas

O valor absoluto das perdas por relaxação do aço de pré-esforço $\Delta\sigma_{pr}$ para um instante t (em horas) após o tensionamento pode ser definido por

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = C_1\ \rho_{1000}\ e^{C_2\,\mu}\left(\frac{t}{1000}\right)^{0.75(1-\mu)} 10^{-5} \tag{4.50}$$

sendo os coeficientes C_1 e C_2 definidos no Quadro 4.3.

Quadro 4.3 – Coeficientes C_1 e C_2.

Classe	C_1	C_2
1	5.39	6.70
2	0.66	9.10
3	1.98	8.00

μ é o quociente entre a tensão inicial σ_{pi} instalada e o valor característico da tensão resistente do aço de pré-esforço f_{pk}:

$$\mu = \frac{\sigma_{pi}}{\sigma_{pk}} \tag{4.51}$$

A equação (4.50) foi deduzida para quando não existem incrementos de tensão aplicados no aço de pré-esforço, pelo que quando se efectua uma análise incremental e a tensão do aço varia deve-se adoptar o método de tempo equivalente, exposto no Anexo D do EC2, e que consiste em substituir na equação (4.50) o valor de t_i por um tempo equivalente t_e. O tempo t_e é determinado para que, substituindo o seu valor na equação (4.50), as perdas por relaxação calculadas num determinado instante sejam iguais ao somatório das perdas determinadas para uma tensão inicial igual ao somatório dos incrementos de tensão aplicados ao aço de pré-esforço.

Rescrevendo a equação (4.50) em ordem a $t=t_e$ obtém-se

$$t_e = 1000 \sqrt[0.75\,(1-\mu)]{\frac{\sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{pr,j}}{\left(\Delta\sigma_{p,i} + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{p,j}\right) 10^{-5}\ C_1\ \rho_{1000}\ e^{C_2 \cdot \mu}}} \tag{4.52}$$

em que:

$\Delta\sigma_{p,i}$ é o incremento de tensão no aço de pré-esforço no instante i;

$\sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{pi,j}$ é o somatório de todos os incrementos de tensão aplicados ao aço de pré-esforço;

$\sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{pr,j}$ é o somatório de todas as perdas por relaxação determinadas até ao instante t_{i-1}.

Nestas condições o valor de μ pode ser obtido através de

$$\mu = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{pr,j}}{\Delta\sigma_{p,i} + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta\sigma_{p,j}} \tag{4.53}$$

Após a obtenção do tempo t_e recorre-se à equação (4.50) para determinar as perdas por relaxação $\Delta\sigma_{pr,j}$ no intervalo de tempo Δt_i, utilizando para t o valor de $t_e + \Delta t_i$.

4.3. Simulação do comportamento instantâneo e diferido

4.3.1. Método incremental

A principal dificuldade na análise dos efeitos diferidos numa estrutura hiperestática reside na interdependência do historial de tensão relativamente a algumas das parcelas da deformação diferida (Burdette e Goodfasture (1973); Póvoas (1991); Ferraz (2001)). As leis constitutivas visco-elásticas do material permitem determinar a deformação diferida $\varepsilon_{dif}(t,t_0)$ admitindo que o elemento se encontra sujeito a um estado tensão constante e livre de restrições, ou seja, que não é afectado pelas ligações que aquele possui com o exterior. No entanto, apenas esporadicamente tal consideração é aplicável, pois o caso mais usual é os elementos estarem ligados a outros elementos estruturais, com os quais tem de existir compatibilidade de deformações e equilíbrio de forças.

Considerando o princípio da aditividade das deformações, a deformação total $\underline{\varepsilon}_{tot}(t)$ de um elemento no instante t pode ser decomposta em duas componentes

$$\underline{\varepsilon}_{tot}(t) = \underline{\varepsilon}_{inst}(t) + \underline{\varepsilon}_{dif}(t) \tag{4.54}$$

onde $\underline{\varepsilon}_{inst}(t)$ é a deformação instantânea e $\underline{\varepsilon}_{dif}(t)$ é a deformação diferida. Cada uma destas componentes pode ainda ser dividida em duas parcelas, uma mecânica (dependente do estado de tensão) e outra autogénea (independente do estado de tensão), de acordo com

$$\underline{\varepsilon}_{inst}(t) = \underline{\varepsilon}_{inst,mec}(t) + \underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t) \tag{4.55}$$

$$\underline{\varepsilon}_{dif}(t) = \underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t) + \underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t) \tag{4.56}$$

A deformação instantânea autogénea $\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t)$ é provocada por solicitações independentes do estado de tensão, como por exemplo a variação de temperatura e tensões ou extensões aplicadas ou impostas. A deformação diferida autogénea $\underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t)$ é igualmente independente do estado de tensão, mas depende do tempo e é provocada por fenómenos como a retracção do betão. A deformação diferida mecânica $\underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t)$ depende do estado de tensão, e do tempo e é provocada por fenómenos como a fluência do betão ou a relaxação do aço de pré-esforço.

Através da diferença das deformações em instantes de tempo consecutivos t_{i-1} e t_i é possível obter os respectivos incrementos de deformação:

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{tot}(t_i) = \underline{\varepsilon}_{tot}(t_i) - \underline{\varepsilon}_{tot}(t_{i-1}) = \Delta\underline{\varepsilon}_{inst}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{dif}(t_i) \tag{4.57}$$

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{inst}(t_i) = \underline{\varepsilon}_{inst}(t_i) - \underline{\varepsilon}_{inst}(t_{i-1}) = \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t_i) \tag{4.58}$$

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{dif}(t) = \underline{\varepsilon}_{dif}(t_i) - \underline{\varepsilon}_{dif}(t_{i-1}) = \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t_i) \tag{4.59}$$

Utilizando as equações (4.57) a (4.59) pode-se definir o incremento de deformação mecânica instantânea através de

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec}(t_i) = \Delta\underline{\varepsilon}_{tot}(t_i) - \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t_i) - \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t_i) - \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t_i) \tag{4.60}$$

O incremento de tensão correspondente à deformação incremental mecânica instantânea para o intervalo de tempo considerado pode ser obtido por intermédio de

$$\Delta\underline{\sigma}(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underline{D}(\tau)\, \delta\Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec}(\tau)\, d\tau \tag{4.61}$$

onde $\underline{D}(\tau)$ é a matriz constitutiva tangente e $\delta\Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec}(\tau)$ designa a variação de $\Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec}(\tau)$. A aproximação utilizada para resolução numérica da expressão (4.61) resulta em

$$\Delta\underline{\sigma} = \underline{D}'\, \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,mec} \tag{4.62}$$

onde $\underline{D}$' é a matriz de elasticidade aproximada do elemento finito. Em problemas em que se considera a variação das propriedades do material ao longo do tempo, como por exemplo a maturação do betão, a matriz $\underline{D}(\tau)$ não é constante, pelo que é necessário considerar uma aproximação de forma a obter $\underline{D}$'. No presente trabalho admitiu-se uma aproximação definida através da regra do trapézio, resultando

$$\underline{D}' = \frac{\underline{D}(t_i) + \underline{D}(t_{i-1})}{2} \tag{4.63}$$

4.3.2. Deformação diferida mecânica

As leis de comportamento diferido do material, por exemplo a lei de fluência no caso de se tratar de uma fibra de betão, ou a lei de relaxação no caso de se tratar de uma fibra de pré-esforço, permitem determinar a deformação diferida mecânica $\varepsilon_{dif,mec}(t,t_0)$ no instante t provocada por uma solicitação $\sigma(t_0)$ aplicada no instante t_0.

Na presente tese a deformação diferida mecânica é obtida através de uma integração passo a passo usando a totalidade do historial de tensões, em detrimento da utilização de séries de Dirichelet, uma vez que a utilização destas últimas em problemas cuja divisão do tempo é complexa levanta muitas dificuldades na obtenção dos termos da referida série.

De referir que as leis de comportamento diferido utilizadas no presente trabalho se reflectem apenas na componente normal da tensão aplicada na fibra $\sigma_{x'1}$, pelo que permitem exclusivamente a obtenção da componente normal da extensão diferida mecânica $\varepsilon_{x'1}$. Desta forma indicar-se-á toda a formulação baseada nestas duas componentes, e no final desta secção apresenta-se o procedimento utilizado para obtenção do vector dos incrementos de extensão diferida mecânica.

Introduzindo a variável independente $\tau(t_0<\tau<t)$, a variação de extensão diferida $\varepsilon_{x'1\ dif,mec}(t,\tau)$ para um historial de tensão $\sigma_{x'1}(\tau)$ qualquer vem definida pela equação

$$d\varepsilon_{x'1\ dif,mec}(t,\tau) = F(t,\tau)\, d\sigma_{x'1}(\tau) \tag{4.64}$$

e consequentemente

$$\varepsilon_{dif,mec}(t,\tau) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\, d\sigma_{x'1}(\tau) \tag{4.65}$$

Sendo $\sigma(t_0)$ o valor da tensão aplicada em t_0 obtém-se

$$\varepsilon_{x'1\ dif,mec}(t,t_0) = F(t,t_0)\sigma_{x'1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\, d\sigma_{x'1}(\tau) \tag{4.66}$$

Esta equação pode ser resolvida procedendo a uma integração passo a passo, o que implica a divisão do intervalo de tempo $[t_0,t]$ em n_t intervalos, cada um com duração Δt_j, admitindo uma aproximação linear e o princípio da sobreposição dos efeitos para as histórias de tensões e extensões (formulação visco-elástica para os efeitos diferidos). Considerando que em cada um dos intervalos Δt_j a variação da tensão é discreta, conforme representado na Figura 4.2, correspondendo a um incremento de tensão $\Delta\sigma_{x'1}(t_j)$ que ocorre no início do instante t_j, a expressão (4.66) toma o aspecto

$$\varepsilon_{x'1\ dif,mec}(t,t_o) = F(t,t_o)\sigma_{x'1}(t_o) + \sum_{j=1}^{n_t} F(t,t_j)\Delta\sigma_{x'1}(t_j) \tag{4.67}$$

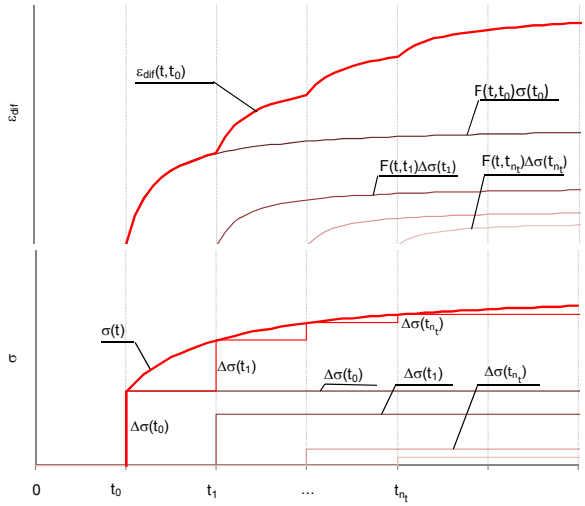


Figura 4.2 – Variação da extensão diferida e da tensão ao longo do tempo.

Note-se que as expressões continuam válidas mesmo para variações instantâneas da tensão, desde que se defina um intervalo de tempo com duração nula. Assim a primeira parcela da expressão (4.67) pode ser incluída no somatório de forma a simplificar a expressão:

$$\varepsilon_{x'1\ dif,mec}\left(t,t_o\right)=\sum_{j=0}^{n_t}F\left(t,t_j\right)\Delta\sigma_{x'1}\left(t_j\right) \tag{4.68}$$

Avaliando a expressão (4.68) em dois instantes consecutivos t_{i-1} e t_i, obtém-se o incremento de extensão diferida mecânica de acordo com

$$\Delta\varepsilon_{x'1\ dif,mec}\left(t_i\right)=\varepsilon_{x'1\ dif,mec}\left(t_i,t_0\right)-\varepsilon_{x'1\ dif,mec}\left(t_{i-1},t_0\right) \tag{4.69}$$

ou simplificadamente através de

$$\Delta\varepsilon_{x'1\ dif,mec}\left(t_i\right)=\sum_{j=0}^{n_t}\left(F\left(t_i,t_j\right)-F\left(t_{i-1},t_j\right)\right)\Delta\sigma_{x'1}\left(t_j\right) \tag{4.70}$$

O vector dos incrementos de extensão diferida mecânica é obtido admitindo a existência de uma relação de proporcionalidade entre todas as componentes do vector dos incrementos de solicitação e do vector dos incrementos de extensão diferida mecânica, podendo-se desta forma considerar:

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{dif,mec}\left(t_i\right)=\sum_{j=0}^{n_t}\left(F(t_i,t_j)-F(t_{i-1},t_j)\right)\Delta\underline{\sigma}(t_j) \tag{4.71}$$

4.3.3. Equilíbrio incremental

Conhecidos os incrementos de deformação diferido autogéneo $\Delta\underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t_i)$, o de deformação diferido mecânico $\Delta\underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t_i)$ e a deformação instantânea autogénea $\Delta\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t_i)$, a consideração do efeito a nível global da estrutura dos efeitos diferidos e da extensão instantânea autógénea da fibra é efectuada sob a forma de uma solicitação $\Delta\underline{Q}_{apl}$. Esta solicitação é determinada por intermédio da expressão (3.124) considerando um incremento de extensão aplicado $\Delta\underline{\varepsilon}_{apl}(t_i)$ definido por

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{apl}(t_i) = \Delta\underline{\varepsilon}_{dif}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t_i) = \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,mec}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{dif,aut}(t_i) + \Delta\underline{\varepsilon}_{inst,aut}(t_i) \tag{4.72}$$

Através dos procedimentos expostos no Capítulo 3 determina-se o incremento de deslocamentos $\underline{u}$ registado no intervalo de tempo, que contabiliza os efeitos referidos, respeitando a compatibilidade de deformações e o equilíbrio de forças. O valor do incremento de extensão total pode então ser obtido por intermédio de

$$\Delta\underline{\varepsilon}_{tot}(t_i) = \left(\underline{B}_L + \underline{B}_{NL}\right)\underline{u}(t_i) \tag{4.73}$$

e o valor do incremento de deformação mecânica instantânea através da equação (4.60).

4.4. Simulação de não-linearidades materiais

Nesta secção abordar-se-á a implementação no programa de cálculo desenvolvido de duas leis constitutivas unidimensionais, adequadas à simulação do comportamento não-linear uniaxial em tracção/compressão utilizado na discretização por fibras da secção transversal de elementos tipo viga. Nesta secção não se utilizará uma nomenclatura matricial e a extensão e tensão normais em cada fibra serão representadas simplificadamente por ε e σ.

4.4.1. Modelo de comportamento elásto-plástico uniaxial com endurecimento linear

A lei constitutiva representada pelo modelo de comportamento elasto-plástico uniaxial com endurecimento linear é adequada à modelação de materiais como o aço, através da consideração do comportamento uniaxial em tracção e compressão, e a sua implementação resultou na classe PLASTICLINEAR1D referida na secção 2.5.2.2. Na Figura 4.3 está representada a referida lei constitutiva, onde se encontra definido o módulo de elasticidade E, bem como os módulos tangentes pós-cedência E^{p+} e E^{p-} para tracções e compressões, respectivamente.

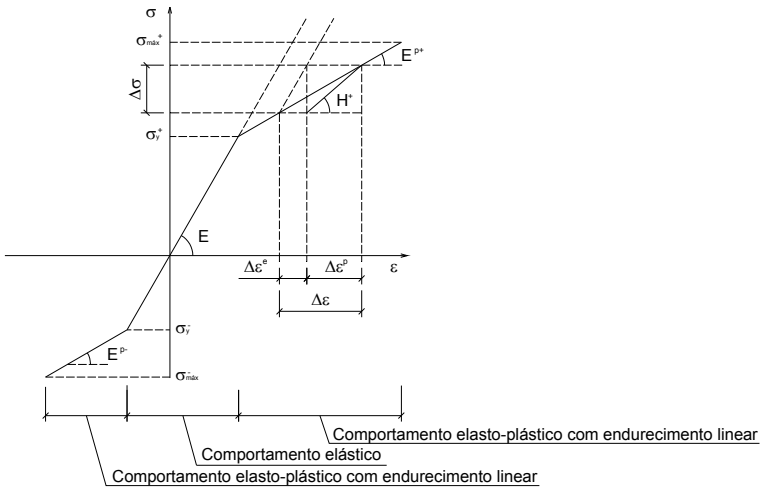


Figura 4.3 – Modelo de comportamento elásto-plástico uniaxial com endurecimento linear.

Enquanto o valor da tensão σ permanece inferior ao valor da tensão de cedência em tracção σ_y^+ e superior ao valor da tensão de cedência em compressão σ_y^- o incremento de tensão $\Delta\sigma$ pode ser obtido de acordo com

$$\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon \tag{4.74}$$

Quando o valor da tensão σ sai do intervalo referido, o incremento de extensão é composto por duas parcelas, uma elástica $\Delta\varepsilon^e$ e outra elasto-plástica $\Delta\varepsilon^p$:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \tag{4.75}$$

Durante a fase elasto-plástica deixa de ser linear a relação entre a tensão e a extensão, e o incremento de tensão plástico $\Delta\sigma^p$ é definido por

$$\Delta\sigma^p = H^+\,\Delta\varepsilon^p \tag{4.76}$$

onde o parâmetro de endurecimento H^+ é definido por

$$H^+ = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon^p} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^e} = \frac{E^{p+}}{1 - \dfrac{E^{p+}}{E}} \tag{4.77}$$

O incremento de tensão $\Delta\sigma$ pode então ser obtido através de

$$\Delta\sigma = E\left(1 - \frac{E}{E + H^{+}}\right)\Delta\varepsilon \tag{4.78}$$

No caso de um material perfeitamente plástico (H^{+}=0) $\Delta\sigma$ assume sempre um valor nulo, pelo que nesse caso é usual a utilização de um valor de H^{+} muito pequeno mas diferente de zero, de forma a evitar a utilização de matrizes de rigidez tangentes singulares.

A implementação deste modelo de comportamento implica a utilização de um algoritmo como o representado na Figura 4.4, em que é necessário conhecer o historial de carregamento do ponto em análise.

Uma vez que a análise envolvida é não-linear, algoritimicamente é necessário utilizar um processo incremental e iterativo, conforme foi exposto na secção 3.2.1. Assim passar-se-á a expor o procedimento a adoptar na iteração i do incremento de carga n, neste caso apenas para o comportamento em tracção, uma vez que para compressão o procedimento é similar.

i) Determinação do incremento de extensão

O vector dos incrementos de extensão na iteração i, $\Delta\underline{\varepsilon}_{i}$, é determinado a partir do incremento de deslocamentos nodais $\underline{u}_{i}$

$$\Delta\underline{\varepsilon}^{(i)} = \underline{\underline{B}}_{L}^{(i)}\,\underline{u}^{(i)} \tag{4.79}$$

ii) Determinação do vector de extensão total $\underline{\varepsilon}^{(i)}$ na iteração i

O vector de extensão total $\underline{\varepsilon}^{(i)}$ é determinado a partir de

$$\underline{\varepsilon}^{(i)} = \underline{\varepsilon}^{(i-1)} + \Delta\underline{\varepsilon}^{(i)} \tag{4.80}$$

Conforme foi já referido, nesta implementação apenas se considera a componente normal da extensão $\varepsilon_{x'1}^{(i)}$ e da tensão $\sigma_{x'1}^{(i)}$, assim, de forma a simplificar a nomenclatura, omitir-se-á a referência ao eixo x'1 e utilizar-se-á

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_{x'1}^{(i)} \tag{4.81}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma_{x'1}^{(i)} \tag{4.82}$$

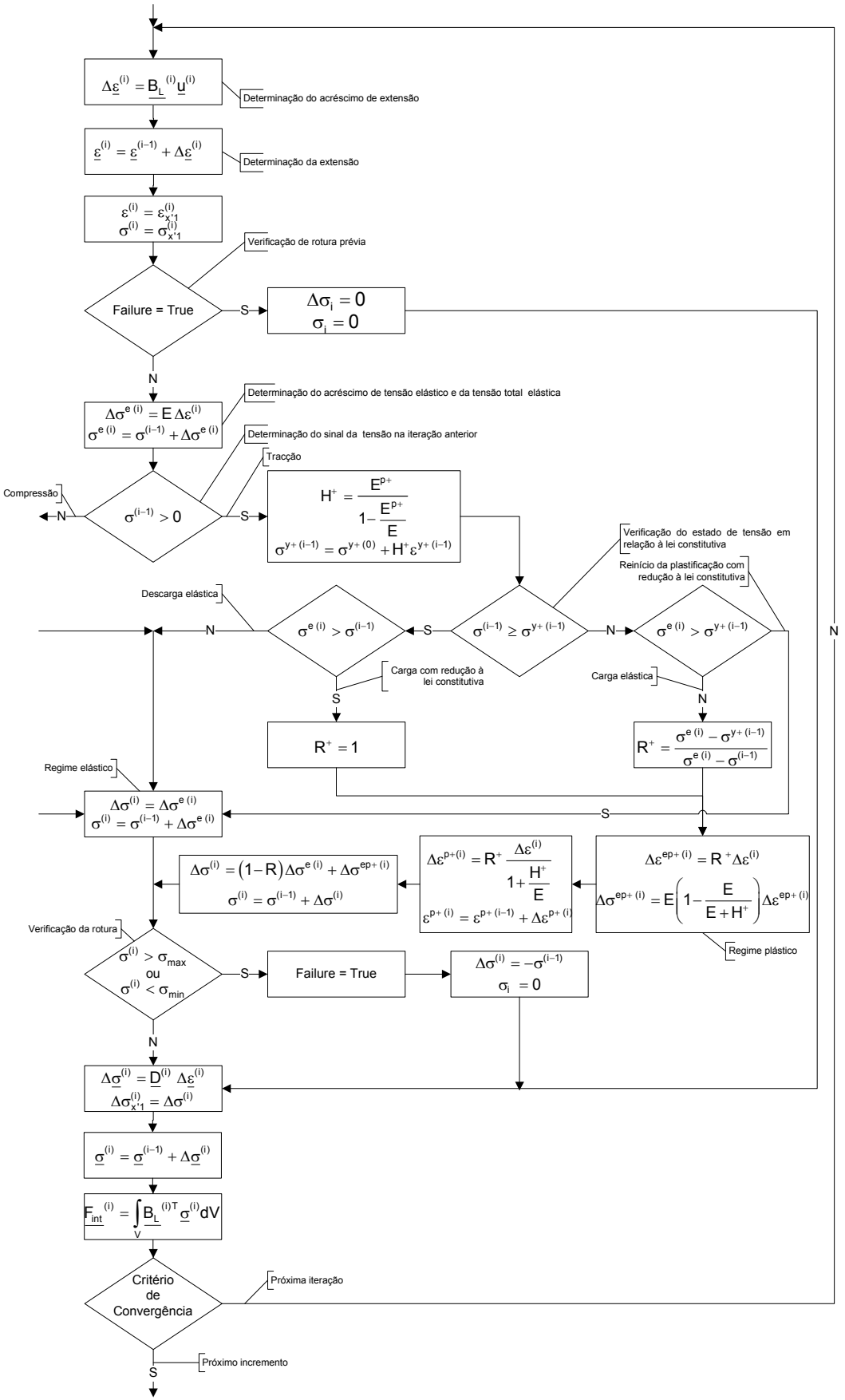


Figura 4.4 – Fluxograma de implementação do modelo de comportamento não-linear uniaxial com endurecimento linear.

iii) Verificação de rotura prévia

Caso exista rotura prévia (*Failure*, na Figura 4.4), que significa que o material atingiu o valor de $\sigma^{+}_{máx}$ ou de $\sigma^{-}_{máx}$ num incremento anterior, na iteração i considera-se nulo o valor do incremento de tensão $\Delta\sigma^{(i)}$ e do valor da tensão total $\sigma^{(i)}$

$$\Delta\sigma^{(i)} = 0 \tag{4.83}$$

$$\sigma^{(i)} = 0 \tag{4.84}$$

e prossegue-se com a determinação das forças interna $\underline{F_{int}}^{(i)}$ conforme o passo x).

iv) Determinação do incremento de tensão elástica e da tensão total elástica

Na iteração i o incremento de tensão elástica $\Delta\sigma^{e(i)}$ e a tensão total elástica $\sigma^{e(i)}$ podem ser determinados admitindo que o comportamento é elástico

$$\Delta\sigma^{e(i)} = E\,\Delta\varepsilon^{(i)} \tag{4.85}$$

$$\sigma^{e(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{e(i)} \tag{4.86}$$

onde $\sigma^{(i-1)}$ é a tensão acumulada na iteração anterior, que obedece ao critério de cedência. Caso o comportamento não seja elástico serão posteriormente efectuadas as correcções necessárias.

v) Determinação do sinal da tensão total na iteração anterior

Nesta fase é necessário distinguir se a tensão instalada é de tracção ou de compressão, pois o comportamento do material pode ser distinto para cada um dos casos, se E^{p+} e E^{p-} forem diferentes.

$$\sigma^{(i-1)} > 0 \tag{4.87}$$

Caso se verifique a inequação (4.87) o material encontrava-se em tracção na iteração anterior, caso contrário encontrava-se em compressão. Seguidamente apresentar-se-á apenas o procedimento utilizado para tracções uma vez que o procedimento utilizado para compressões é em tudo semelhante.

vi) Verificação do estado de tensão em relação à lei constitutiva

A determinação da tensão de cedência para a iteração anterior $\sigma^{y+\,(i-1)}$ é efectuada por intermédio de

$$\sigma^{y+\,(i-1)} = \sigma^{y+\,(0)} + H^{+}\,\varepsilon^{y+\,(i-1)} \tag{4.88}$$

onde $\sigma^{y+\,(0)}$ é o valor da tensão de cedência inicial, $\varepsilon^{y+\,(i-1)}$ é o valor da extensão plástica na iteração anterior e H^{+} é o parâmetro de endurecimento, obtido através de

$$H^{+} = \frac{E^{p+}}{1-\dfrac{E^{p+}}{E}} \tag{4.89}$$

Caso se verifique a inequação

$$\sigma^{(i-1)} \geq \sigma^{y+\,(i-1)} \tag{4.90}$$

o material encontra-se em carga com redução à lei constitutiva ou descarga elástica. Neste caso deve-se comparar o valor da tensão total da iteração corrente com o valor total da iteração anterior

$$\sigma^{e\,(i)} > \sigma^{(i-1)} \tag{4.91}$$

Caso seja verdadeira a inequação (4.91) então existe cedência subsequente e a tensão total foi sobrestimada, pelo que deve ser reduzida à lei constitutiva. Para o efeito utilizam-se os procedimentos apresentados em vii) para regime plástico adoptando para o coeficiente de redução R^{+} aí utilizado um valor igual à unidade

$$R^{+} = 1 \tag{4.92}$$

Caso contrário existe descarga em funcionamento elástico, pelo que se devem seguir os procedimentos específicos para regime elástico apresentados em viii).

Caso não se verifique a condição (4.90) o material está em carga elástica ou em reinício da plastificação. Neste caso deve-se comparar o valor da tensão total na iteração corrente com o valor da tensão de cedência da iteração anterior

$$\sigma^{e\,(i)} > \sigma^{y+\,(i-1)} \tag{4.93}$$

Caso seja verdadeira a inequação (4.93) então existe reinício da plastificação e a tensão total foi sobrestimada, pelo que deve ser reduzida à lei constitutiva prosseguindo com os procedimentos específicos para regime plástico definidos em vii) admitindo para o coeficiente de redução R^+ o valor dado por

$$R^+ = \frac{\sigma^{e\,(i)} - \sigma^{y+\,(i)}}{\sigma^{e\,(i)} - \sigma^{(i-1)}} \tag{4.94}$$

Caso seja falsa a inequação (4.93) então existe carga em funcionamento elástico, pelo que se devem seguir os procedimentos específicos para regime elástico definidos em viii).

vii) Regime plástico

A correcção da tensão total de modo a ser chamada à lei constitutiva passa pela determinação do incremento de tensão elasto-plástico $\Delta\varepsilon^{ep+\,(i)}$ definido por

$$\Delta\varepsilon^{ep+\,(i)} = R^+ \Delta\varepsilon^{(i)} \tag{4.95}$$

Então de acordo com a teoria elasto-plástica

$$\Delta\sigma^{ep+\,(i)} = E\left(1 - \frac{E}{E + H^+}\right)\Delta\varepsilon^{ep+\,(i)} \tag{4.96}$$

sendo que o incremento de extensão plástica $\Delta\varepsilon^{p+\,(i)}$ pode ser obtido das equações (4.95) e (4.96), resultando

$$\Delta\varepsilon^{p+\,(i)} = R^+ \frac{\Delta\varepsilon^{(i)}}{1 + \frac{H^+}{E}} \tag{4.97}$$

A deformação plástica total do elemento $\varepsilon^{p+\,(i)}$ é definida por

$$\varepsilon^{p+\,(i)} = \varepsilon^{p+\,(i-1)} + \Delta\varepsilon^{p+\,(i)} \tag{4.98}$$

O incremento de extensão elástica total para o incremento corrente pode ser obtido por

$$\Delta\varepsilon^{e\,(i)} = \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{E} \tag{4.99}$$

É então possível determinar o incremento de extensão total e a tensão total para a iteração corrente através de

$$\Delta\sigma^{(i)} = (1-R)\,\Delta\sigma^{e\,(i)} + \Delta\sigma^{ep+\,(i)} \tag{4.100}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{(i)} \tag{4.101}$$

e prosseguir com o cálculo das forças internas conforme exposto em x).

viii) Regime elástico

No caso dos elementos que ainda se encontram em regime elástico, em carga ou descarga, o incremento de tensão foi correctamente determinado por intermédio de (4.85) pelo que

$$\Delta\sigma^{(i)} = \Delta\sigma^{e\,(i)} \tag{4.102}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{(i)} \tag{4.103}$$

Em seguida deve-se prosseguir com o cálculo das forças internas conforme o passo x).

ix) Verificação de rotura

Caso a tensão instalada seja superior à tensão máxima em tracção de acordo com

$$\sigma^{(i)} > \sigma^{+}_{max} \tag{4.104}$$

o material atingiu a rotura e deste modo não deverá ser considerado nos incrementos posteriores. Assim a variável booleana *Failure* deve tomar o valor *true*, considerar que o incremento de tensão aplicado é simétrico da tensão instalada no incremento anterior e desta forma anular a tensão instalada no presente incremento

$$\Delta\sigma^{(i)} = -\sigma^{(i-1)} \tag{4.105}$$

$$\sigma^{(i)} = 0 \tag{4.106}$$

x) Cálculo das forças internas

Uma vez que se considera um comportamento elástico para todas as componentes do vector dos incrementos de tensão este pode ser obtido através de

$$\Delta\underline{\sigma} = \underline{D}\,\Delta\underline{\varepsilon} \tag{4.107}$$

alterando-se depois a componente normal de acordo com

$$\Delta\sigma_{x'1} = \Delta\sigma \tag{4.108}$$

O vector da tensão no elemento pode ser obtido através de

$$\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}^{(i-1)} + \Delta\underline{\sigma}_i \tag{4.109}$$

As forças internas do elemento podem ser obtidas por intermédio de

$$\underline{F_{int}}^{(i)} = \int_V \underline{B_L}^{(i)\,T}\,\underline{\sigma}^{(i)} dV \tag{4.110}$$

xi) Verificação da convergência

Conforme exposto na secção 3.2.1, existe a necessidade de utilizar critérios para verificar a obtenção da convergência do processo iterativo com a tolerância especificada. Caso sejam verificados os critérios de convergência deve-se passar para o incremento seguinte; caso contrário dever-se-á proceder a uma nova iteração, repetindo o processo exposto.

4.4.2. Modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening*

A lei constitutiva correspondente ao comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening* é adequada para a simulação do comportamento do betão em peças de betão armado onde apenas se considera o comportamento uniaxial, utilizando apenas a tensão e extensão normais à secção transversal do elemento e admitindo que as restantes componentes possuem comportamento elástico. A implementação deste modelo resultou na classe *PLASTICLINEAR1D_CONCRETE* referida na secção 2.5.2.2.

A presente lei utiliza para as tracções um diagrama de retenção de tensão no betão, conforme o ilustrado na Figura 4.5, usualmente designado como *tension-stiffening*, e para as compressões a lei apresentada na secção anterior. Assim, quando se atinge o valor máximo da tensão em tracção o comportamento passa a ter amolecimento, e a descarga passa a ser efectuada para a origem. Após

atingido o ponto de extensão máxima para tracções ε_{max}^{+} o valor da tracção instalada é igual a zero independentemente do valor da extensão considerada; no entanto continua-se a admitir como possível a descarga para a origem, ou seja, o fecho de fendas caso surjam extensões negativas.

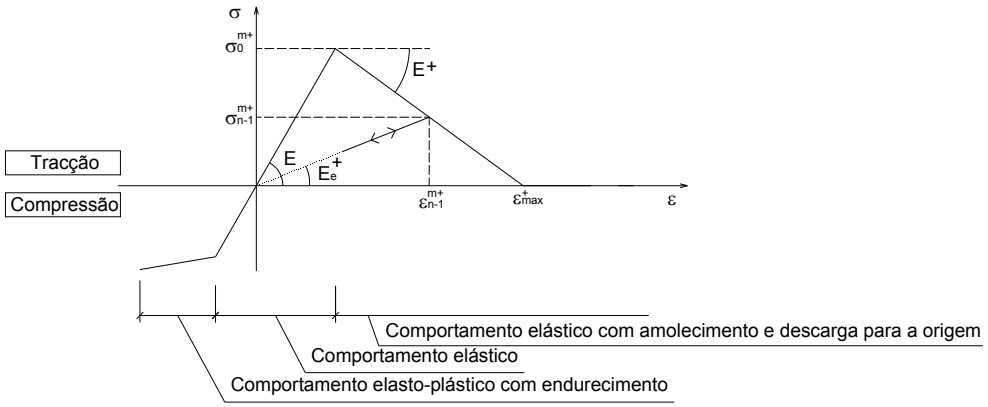


Figura 4.5 – Modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening.*

A implementação deste modelo de comportamento material para compressões é em tudo semelhante à apresentada na secção anterior, pelo que apenas se apresentará a implementação do modelo para tracções. À semelhança do modelo anterior, a análise a efectuar implica a utilização de um procedimento incremental e iterativo, pelo que se passará a expor o conjunto de passos a adoptar na iteração i do incremento de carga n, cujo fluxograma é apresentado na Figura 4.6.

i) Determinação do incremento de extensão

Na iteração i incremento de extensão $\Delta\underline{\varepsilon}^{(i)}$ $\Delta\underline{\varepsilon}_i$ é determinado a partir do incremento de deslocamentos nodais $\underline{u}^{(i)}$

$$\Delta\underline{\varepsilon}^{(i)} = \underline{\underline{B}}_L{}^{(i)}\,\underline{u}^{(i)} \tag{4.111}$$

ii) Determinação da extensão total

A extensão total $\underline{\varepsilon}^{(i)}$ é determinada a partir da extensão no incremento anterior $\underline{\varepsilon}^{(i-1)}$

$$\underline{\varepsilon}^{(i)} = \underline{\varepsilon}^{(i-1)} + \Delta\underline{\varepsilon}^{(i)} \tag{4.112}$$

Conforme foi já referido, nesta implementação apenas se considera a componente normal da extensão $\varepsilon_{x'1}^{(i)}$ e da tensão $\sigma_{x'1}^{(i)}$, assim, de forma a simplificar a nomenclatura, omitir-se-á a referência ao eixo x'1 e utilizar-se-á

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_{x'1}^{(i)} \tag{4.113}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma_{x'1}^{(i)} \tag{4.114}$$

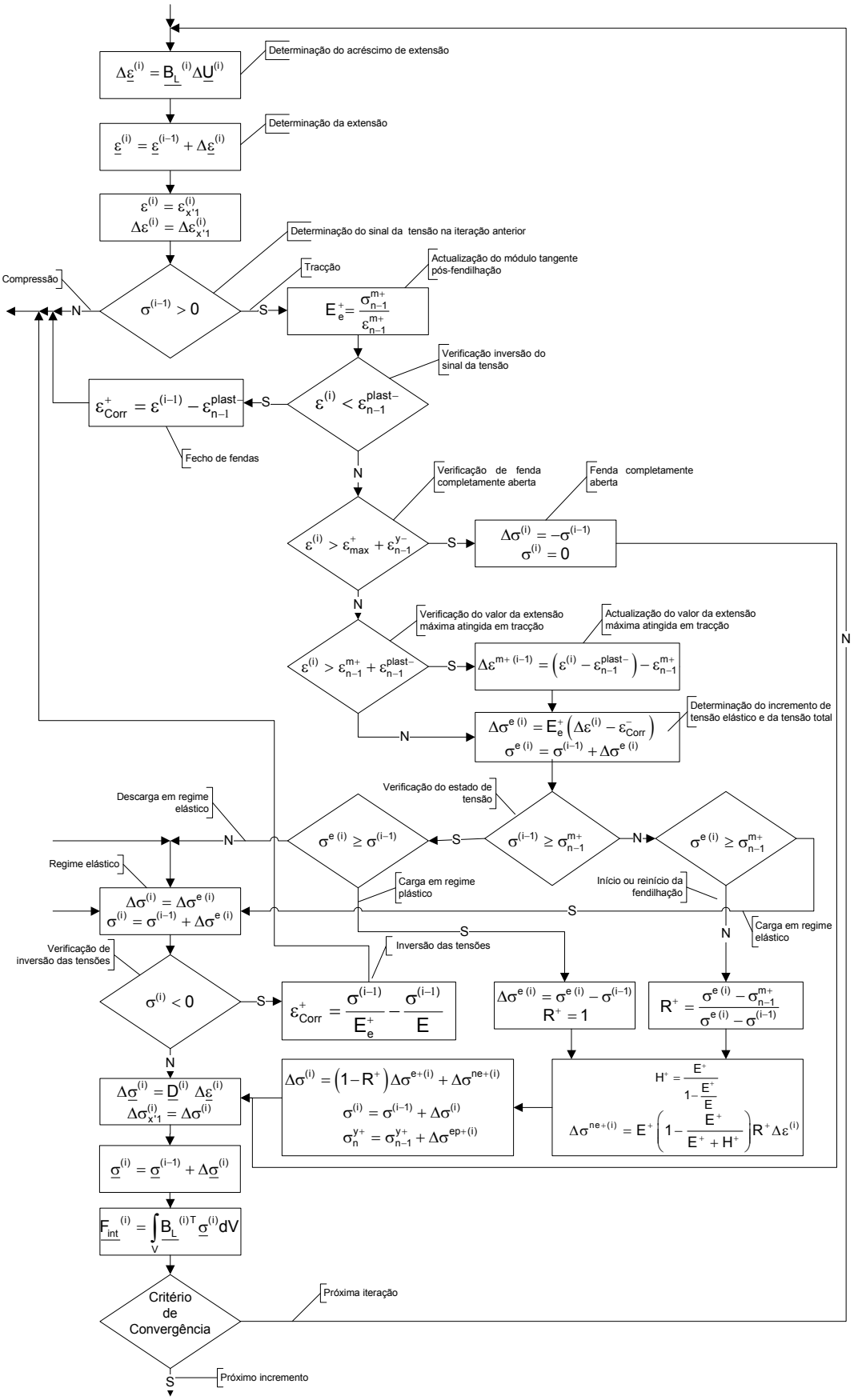


Figura 4.6 – Fluxograma de implementação do modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening.*

iii) Determinação do sinal da tensão total na iteração anterior

Nesta fase é necessário distinguir se a tensão instalada na iteração anterior $\sigma^{(i-1)}$ é de tracção ou de compressão, pois conforme referido o comportamento do material é distinto para cada um dos casos. Caso não se verifique que $\sigma^{(i-1)} > 0$ o material encontrava-se comprimido, e como tal deve-se utilizar o procedimento para compressões; caso contrário deve-se adoptar o presente procedimento (válido para tracção).

iv) Actualização do módulo tangente pós-fendilhação em tracção

A determinação do módulo tangente pós-fendilhação em tracção E_e^+ é efectuada por intermédio de

$$E_e^+ = \frac{\sigma_{n-1}^{m+}}{\varepsilon_{n-1}^{m+}} \tag{4.115}$$

onde σ_{n-1}^{m+} é o valor da tensão máxima no incremento anterior e ε_{n-1}^{m+} é o valor da extensão máxima no incremento anterior, conforme definido na Figura 4.5. Caso ainda não tenha existido fendilhação o módulo tangente é igual ao módulo de elasticidade.

v) Verificação de inversão do sinal da tensão

Uma vez que a plastificação do betão em compressão provoca uma translação da lei constitutiva no eixo das ordenadas de valor igual à extensão plástica em compressão $\varepsilon_{n-1}^{plast-}$ é necessário considerar essa possibilidade no procedimento a utilizar em tracção. Assim sendo, deve-se verificar se a extensão instalada $\varepsilon^{(i)}$ é inferior à extensão plástica em compressão $\varepsilon_{n-1}^{plast-}$ no incremento anterior:

$$\varepsilon^{(i)} < \varepsilon_{n-1}^{plast-} \tag{4.116}$$

Se a inequação (4.116) não se verificar significa que o material se encontra traccionado, devendo-se prosseguir conforme o passo vi); caso contrário existe inversão do sinal da tensão e o material encontra-se comprimido, mas antes de mudar para o procedimento em compressão deverá ser definida uma correcção da extensão ε_{Corr}^{+}. Esta correcção é necessária uma vez que após a ocorrência de fendilhação o módulo de elasticidade para tracções e compressões deixa de ser igual, e é quantificada de acordo com

$$\varepsilon_{Corr}^{+} = \varepsilon^{(i-1)} - \varepsilon_{n-1}^{plast-} \tag{4.117}$$

No procedimento em compressão a determinação do valor do incremento de tensão em regime elástico $\Delta\sigma_i^e$ é então obtida por intermédio de

$$\Delta\sigma^{e\,(i)} = E(\Delta\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{+}_{Corr}) \tag{4.118}$$

vi) Verificação da fenda completamente aberta

Caso a extensão total seja superior à soma da extensão máxima para tracções com a extensão de plastificação para compressões no incremento anterior

$$\varepsilon^{(i)} > \varepsilon^{+}_{max} + \varepsilon^{m-}_{n-1} \tag{4.119}$$

a fenda encontra-se completamente aberta e deve-se prosseguir conforme o passo vii). Caso contrário deve-se prosseguir de acordo com o exposto em viii).

vii) Fenda completamente aberta

Caso a fenda se encontre totalmente aberta deve-se considerar que o incremento de tensão aplicado é simétrico da tensão instalada no incremento anterior, e desta forma anular a tensão instalada no presente incremento

$$\Delta\sigma^{(i)} = -\sigma^{(i-1)} \tag{4.120}$$

$$\sigma^{(i)} = 0 \tag{4.121}$$

e proceder ao cálculo das forças internas de acordo com o passo xv).

viii) Actualização do valor da extensão máxima atingida em tracção

Caso se verifique a inequação

$$\varepsilon^{(i)} > \varepsilon^{m+}_{n-1} + \varepsilon^{plast-}_{n-1} \tag{4.122}$$

onde ε^{m+}_{n-1} é o valor da extensão máxima atingida em tracção no incremento anterior, deve ser quantificado o incremento de extensão máxima atingida em tracção no presente incremento $\Delta\varepsilon^{m+}_{n}$

$$\Delta\varepsilon^{m+}_{n} = \left(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{plast-}_{n-1}\right) - \varepsilon^{m+}_{n-1} \tag{4.123}$$

ix) Determinação do incremento de tensão elástica e da tensão total elástica

Para os casos em que os valores do incremento de tensão elástica $\Delta\sigma^{e\,(i)}$ e da tensão elástica $\sigma^{e\,(i)}$ são determinados admitindo que o comportamento é elástico ter-se-á:

$$\Delta\sigma^{e\,(i)} = E_e^{+}\left(\Delta\varepsilon^{(i)} - \varepsilon_{Corr}^{-}\right) \tag{4.124}$$

$$\sigma^{e\,(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{e\,(i)} \tag{4.125}$$

onde ε_{Corr}^{-} é uma extensão de correcção com o mesmo significado de ε_{Corr}^{+} mas para extensões negativas, e $\sigma^{(i-1)}$ é a tensão acumulada na iteração anterior.

x) Verificação do estado de tensão

Se a tensão na presente iteração for superior à tensão máxima atingida no incremento anterior, isto é,

$$\sigma^{(i-1)} \geq \sigma_{n-1}^{m+} \tag{4.126}$$

o material encontra-se fendilhado ou não houve descarga na iteração anterior, e deve-se prosseguir no passo xi); caso contrário o material ainda não fendilhou ou houve descarga na iteração anterior, e deve-se prosseguir conforme o passo xii).

xi) Material fendilhado ou sem descarga na iteração anterior

Se o material se encontra fendilhado ou não tenha existido descarga na iteração anterior dever-se-á verificar se a tensão elástica neste incremento é superior à tensão no incremento anterior

$$\sigma^{e\,(i)} \geq \sigma^{(i-1)} \tag{4.127}$$

Caso se verifique a inequação (4.127) significa que existe carga em regime fendilhado pelo que se deverá efectuar uma redução à lei constitutiva, utilizando um é um coeficiente de redução R^{+}, de acordo com

$$\Delta\sigma^{e\,(i)} = \sigma^{e\,(i)} - \sigma^{(i-1)} \tag{4.128}$$

$$R^{+} = 1 \tag{4.129}$$

e prosseguindo em regime fendilhado conforme o exposto em xiii); caso contrário existe uma descarga em regime elástico, pelo que se deve prosseguir conforme o passo xiv).

xii) Material não fendilhado ou com descarga na iteração anterior

Caso o material não se encontre fendilhado ou tenha existido descarga na iteração anterior dever-se-á verificar se a tensão elástica nesta iteração é superior à tensão máxima no incremento anterior:

$$\sigma^{e\,(i)} \geq \sigma_{n-1}^{m+} \tag{4.130}$$

Caso se verifique a inequação (4.130) há início ou reinício da fendilhação, pelo que se tem de actualizar o coeficiente de redução R^+ de acordo com

$$R^+ = \frac{\sigma^{e\,(i)} - \sigma_{n-1}^{y+}}{\sigma^{e\,(i)} - \sigma^{e\,(i-1)}} \tag{4.131}$$

e prosseguir de acordo com o descrito em xiii). Caso contrário o material encontra-se em carga (regime elástico) e deve-se prosseguir conforme indicado em xiv).

xiii) Regime fendilhado

Em regime fendilhado a avaliação do incremento de tensão não elástico é efectuado através de

$$\Delta\sigma^{ne+\,(i)} = E^+ \left(1 - \frac{E^+}{E^+ + H^+}\right) R^+ \Delta\varepsilon^{(i)} \tag{4.132}$$

onde

$$H^+ = \frac{E^+}{1 - \dfrac{E^+}{E}} \tag{4.133}$$

A determinação do incremento de tensão e da tensão total na presente iteração pode então ser obtida por intermédio de

$$\Delta\sigma^{(i)} = \left(1 - R^+\right) \Delta\sigma^{e+\,(i)} + \Delta\sigma^{ne+\,(i)} \tag{4.134}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{(i)} \tag{4.135}$$

Após a actualização do valor da tensão máxima para tracções

$$\sigma_n^{m+} = \sigma_{n-1}^{m+} + \Delta\sigma^{ne+\,(i)} \tag{4.136}$$

deve-se prosseguir com cálculo das forças internas conforme o exposto em xv).

xiv) Regime elástico

Em regime elástico o incremento de tensão e a tensão total no final da iteração podem ser obtidos como segue

$$\Delta\sigma^{(i)} = \Delta\sigma^{e\,(i)} \tag{4.137}$$

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(i-1)} + \Delta\sigma^{(i)} \tag{4.138}$$

Após a determinação do incremento de tensão e do valor da tensão deve-se verificar se não há inversão do sinal da tensão

$$\sigma^{(i)} < 0 \tag{4.139}$$

Caso se verifique a inequação (4.139) deve-se prosseguir para o procedimento em compressão após definir o valor da correcção ε_{Corr}^{+}

$$\varepsilon_{Corr}^{+} = \frac{\sigma^{(i-1)}}{E_e^{+}} - \frac{\sigma^{(i-1)}}{E} \tag{4.140}$$

No caso contrário deve-se prosseguir para o cálculo das forças internas.

xv) Cálculo das forças internas

Após determinado o valor das forças internas por intermédio de

$$\underline{F_{int}}^{(i)} = \int_V \underline{B_L}^{(i)T}\,\underline{\sigma}^{(i)}\,dV \tag{4.141}$$

deve-se prosseguir com a verificação da convergência do processo iterativo.

xvi) Verificação da convergência

Caso sejam verificados os critérios de convergência deve-se passar para o incremento seguinte, caso contrário dever-se-á proceder a uma nova iteração, repetindo o processo exposto.

4.4.2.1. Exemplo de aplicação

Neste exemplo de aplicação pretende-se validar o modelo de comportamento uniaxial para betão armado com *tension-stiffening*, pelo que foi modelado um ensaio de tracção/compressão axial. A barra analisada tem 1.00m de comprimento e foi discretizada com dois elementos finitos de 3 nós, com 2 pontos de Gauss. A secção transversal é quadrada com 1.0m de lado, discretizada em 10 fibras iguais. A lei constitutiva do material encontra-se representada na Figura 4.8, sendo que o carregamento foi aplicado através de incrementos de deslocamentos axiais impostos na extremidade livre da barra, conforme representado na Figura 4.7.

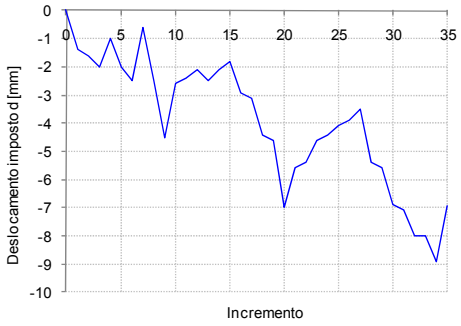


Figura 4.7 – Definição dos deslocamentos impostos.

Na Figura 4.8 é apresentado o gráfico tensão normal σ versus extensão ε normal numa fibra da barra modelada. Conforme se pode verificar, o programa de cálculo simulou correctamente a resposta do material, nomeadamente para plastificação em compressão (A), em descarga elástica (B), no início da fendilhação (C e D), e na rotura por compressão (E e F).

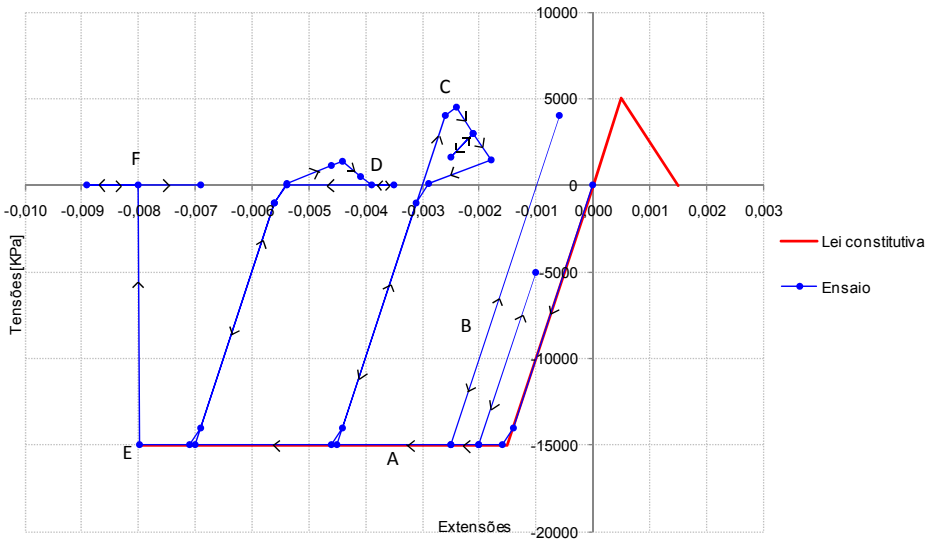


Figura 4.8 – Ensaio da classe do modelo de comportamento uniaxial para o betão com *tension-stiffening.*

4.5. Aplicações

Nesta secção serão apresentados dois conjuntos de exemplos de aplicação do programa de cálculo desenvolvido, de modo a validar algumas das implementações apresentadas, nomeadamente na análise diferida de estruturas de betão armado pré-esforçado com carregamentos faseados, ou seja em condições análogas às das obras que se pretende estudar com o referido modelo.

4.5.1. Vigas de Espion e Halleux

Nesta secção simular-se-á o comportamento de quatro vigas de betão armado pré-esforçado, ensaiadas entre 1981 e 1986 por Espion (Espion (1993)) na Universidade de Bruxelas. As vigas são simplesmente apoiadas, conforme exposto na Figura 4.9, com vãos de 8.0m, e possuem a mesma secção transversal rectangular de betão, distinguindo-se pela quantidade de armadura passiva, pré-esforço e história de carga, designadamente o peso próprio (pp) e as cargas concentradas (Q). Os ensaios decorreram durante quatro anos e meio, sem que se tivesse efectuado qualquer descarga ao longo desse tempo.

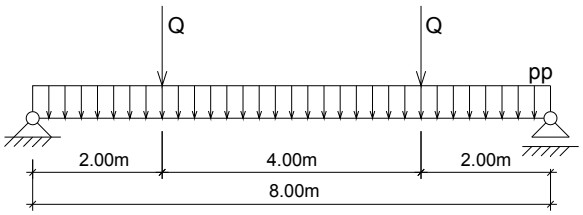


Figura 4.9 – Esquema estrutural das vigas de Espion e Halleux.

As vigas designadas por LT-05 e LT-05Q possuem a secção transversal ilustrada na Figura 4.10 e caracterizada no Quadro 4.4, enquanto as vigas designadas por LT-08 e LT-08Q possuem a secção transversal ilustrada na Figura 4.11 e definida no Quadro 4.5.

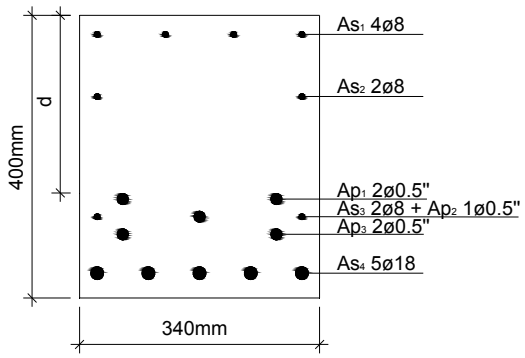


Figura 4.10 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-05 e LT-05Q.

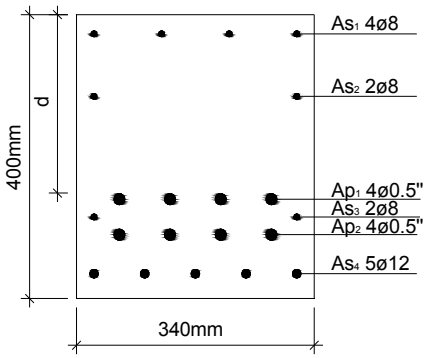


Figura 4.11 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-08 e LT-08Q.

Quadro 4.4 – Armaduras das vigas LT-05 e LT-05Q.

Armadura	d [m]	As [mm^2]
As_1	0.027	201
As_2	0.115	100
As_3	0.285	100
As_4	0.365	1272
Ap_1	0.260	186
Ap_2	0.285	93
Ap_3	0.310	186

Quadro 4.5 – Armaduras das vigas LT-08 e LT-08Q.

Armadura	d [m]	As [mm^2]
As_1	0.027	201
As_2	0.115	100
As_3	0.285	100
As_4	0.365	565
Ap_1	0.260	372
Ap_2	0.310	372

O pré-esforço (pós-tensão) foi aplicado em todas as vigas 14 dias após a betonagem, numa extremidade, sendo o valor da força aplicada em cada um dos cordões de 122.8 kN. Nas vigas LT-05 e LT-05Q existe uma variação linear com 3.2º de inclinação do traçado dos cabos de pré-esforço entre os apoios e as forças Q; nas vigas LT-08 e LT-08Q a excentricidade dos cabos é constante.

A solicitação das vigas LT-05 e LT-08 foi unicamente o respectivo peso próprio, conforme o exposto nos Quadros 4.6 e 4.7, enquanto nas vigas LT-05Q e LT-08Q além do peso próprio, foram ainda consideradas duas cargas concentradas variáveis Q, conforme documentado nos Quadros 4.8 e 4.90.

Quadro 4.6 – Historial de carregamento da viga LT-05.

Tempo [Dias]	Peso próprio pp [kN/m]	F [kN]
0 ≤ t < 14	0	0
14 ≤ t < 28	3.332	0
28 ≤ t < 84	0	0
84 ≤ t < 1642	0	0

Quadro 4.7 – Historial de carregamento da viga LT-08.

Tempo [Dias]	Peso próprio pp [kN/m]	F [kN]
0 ≤ t < 14	0	0
14 ≤ t < 28	3.332	0
28 ≤ t < 84	0	0
84 ≤ t < 1642	0	0

Quadro 4.8 – Historial de carregamento da viga LT-05Q.

Tempo [Dias]	Peso próprio pp [kN/m]	F [kN]
0 ≤ t < 14	0	0
14 ≤ t < 28	3.332	0
28 ≤ t < 84	0	16.5
84 ≤ t < 1642	0	63.75

Quadro 4.9 – Historial de carregamento da viga LT-08Q.

Tempo [Dias]	Peso próprio pp [kN/m]	F [kN]
0 ≤ t < 14	0	0
14 ≤ t < 28	3.332	0
28 ≤ t < 85	0	16.5
85 ≤ t < 1642	0	63.75

As propriedades dos materiais utilizados são apresentadas nos Quadros 4.10 a 4.13, onde $f_{cm,28}$ é a resistência média à compressão aos 28 dias, Ec é o módulo de elasticidade aos 28 dias e ν é o coeficiente de Poisson do betão; E_s é o módulo de elasticidade e f_{sy} a tensão de cedência da

armadura passiva; E_p é o módulo de elasticidade, $f_{py0.2}$ é a tensão limite de proporcionalidade para 0.2% e f_{pu} é a tensão de rotura do aço de pré-esforço.

Quadro 4.10 – Propriedades dos materiais da viga LT-05.

Betão	Armadura	
	Passiva	Pré-esforço
$f_{cm,28}$ = 37.2	E_s = 200 GPa	E_p = 200 GPa
E_c = 31.72 GPa	f_{sy} = 500 MPa	f_{py} = 1715 MPa
ν = 0.20	-	f_{pu} = 1892 MPa

Quadro 4.11 – Propriedades dos materiais da viga LT-08.

Betão	Armadura	
	Passiva	Pré-esforço
$f_{cm,28}$ = 36.2	E_s = 200 GPa	E_p = 200 GPa
E_c = 31.60 GPa	f_{sy} = 500 MPa	f_{py} = 500 MPa
ν = 0.20		f_{pu} = 1892 MPa

Quadro 4.12 – Propriedades dos materiais da viga LT-05Q.

Betão	Armadura	
	Passiva	Pré-esforço
$f_{cm,28}$ = 33.9	E_s = 200 GPa	E_p = 200 GPa
E_c = 30.75 GPa	f_{sy} = 500 MPa	f_{py} = 1715 MPa
ν = 0.20		f_{pu} = 1892 MPa

Quadro 4.13 – Propriedades dos materiais da viga LT-08Q.

Betão	Armadura	
	Passiva	Pré-esforço
$f_{cm,28}$ = 34.9	E_s = 200 GPa	E_p = 200 GPa
E_c = 31.04 GPa	f_{sy} = 500 MPa	f_{py} = 1715 MPa
ν = 0.20		f_{pu} = 1892 MPa

Os valores de E_c foram deduzidos a partir dos valores experimentais do $f_{cm,28}$, através da expressão

$$E_c = 9500 \sqrt[3]{f_{cm,28}} \tag{4.142}$$

Tirando partido da simetria da estrutura e da solicitação, e desprezando as perdas por atrito do pré-esforço devido ao seu traçado recto, procedeu-se à discretização de metade de cada uma das vigas descritas utilizando 10 elementos de viga de Timoshenko de 3 nós, com 2 pontos de Gauss, conforme representado na Figura 4.12 para as vigas LT-0.5 e LT-0.5Q.

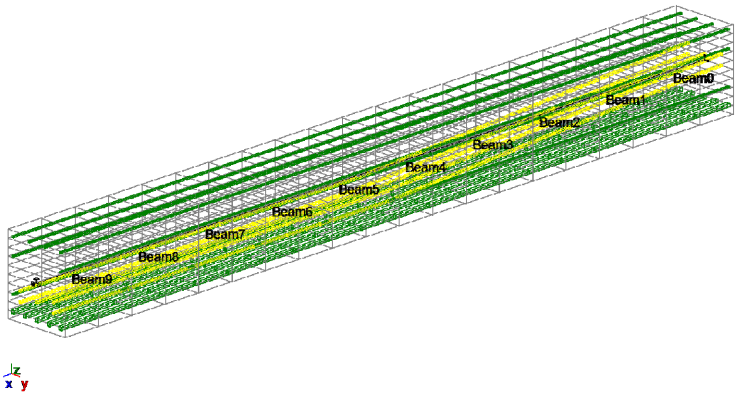


Figura 4.12 – Modelo numérico utilizado nas vigas LT-0.5 e LT-0.5Q.

As secções transversais das vigas LT-0.5 e LT-0.5Q foram discretizadas através de 10 fibras de betão, 13 fibras de armadura passiva e 5 fibras de armadura de pré-esforço (ver Figura 4.13). As secções transversais das vigas LT-0.8 ye LT-0.8Q foram discretizadas através de 10 fibras de betão, 13 fibras de armadura passiva e 8 fibras de armadura de pré-esforço (ver Figura 4.14).

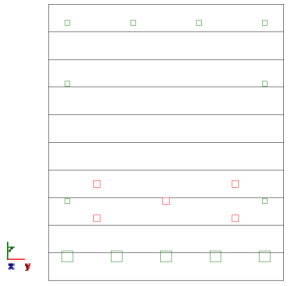


Figura 4.13 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-05 e LT-05Q.

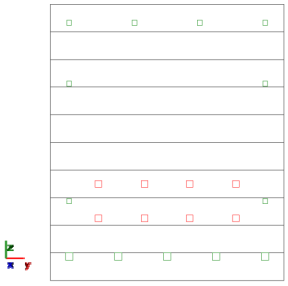


Figura 4.14 – Secção transversal a meio vão das vigas LT-08 e LT-08Q.

Na falta de uma caracterização mais rigorosa dos materiais utilizados, as leis de fluência, de retracção e de maturação do betão e de relaxação do aço de pré-esforço utilizadas na presente análise foram as descritas no EC2. A observação das Figuras 4.15 a 4.18 permite efectuar uma análise comparativa entre os deslocamentos verticais a meio vão obtidos com o presente modelo, as medições experimentais obtidas por Espion (1993) e os valores obtidos numericamente por Cruz (1994) e Henriques (1998).

De acordo com Espion, os comportamentos das vigas LT-0.5 e LT-0.8, apresentados nas Figuras 4.15 e 4.16, salienta a importância da presença da armadura passiva no estudo de vigas de betão armado pré-esforçado. Enquanto a flecha da viga LT-0.5 diminui após a aplicação do pré-esforço e chega a tomar valores ascendentes passados cerca de 300 dias, a flecha da viga LT-0.8 continua a aumentar e tende a estabilizar para valores próximos dos 13mm. Estes comportamentos não são observados em estruturas pré-esforçadas com pequenas quantidades de armadura passiva, e são tipicamente o resultado de redistribuições de tensões entre o betão e a armadura passiva. Este

fenómeno não é devidamente reconhecido em muitos métodos publicados para a simulação numérica de estruturas parcialmente pré-esforçadas, no entanto o programa de cálculo desenvolvido previu eficazmente os resultados experimentais destas duas vigas.

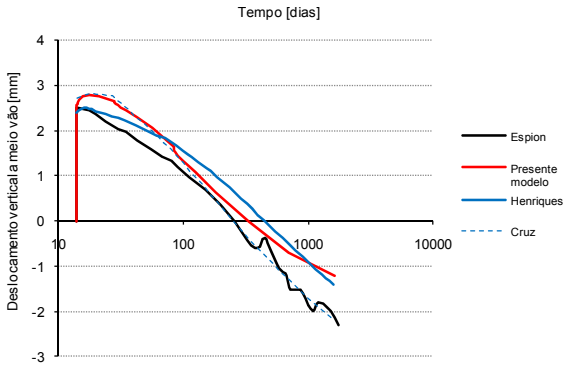


Figura 4.15 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.5.

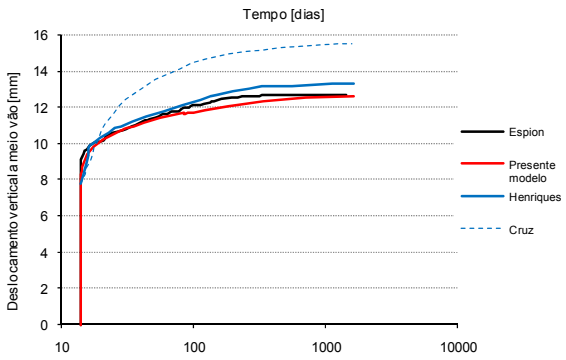


Figura 4.16 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.8.

Os comportamentos das vigas LT-0.5Q e LT-0.8Q são apresentados nas Figuras 4.17 e 4.18, onde se podem observar os instantes de aplicação do pré-esforço e do peso próprio (A), a aplicação do 1º incremento de carga (B) e do 2º incremento de carga (C). Até à aplicação do 2º incremento de carga o presente modelo prevê com bastante rigor os deslocamentos obtidos de forma experimental em ambas as vigas, no entanto após esse instante existe alguma discrepância. Além da deformação diferida estimada numericamente a partir desse instante ser ligeiramente inferior à registada experimentalmente em ambas as vigas, na LT-05Q o incremento de deslocamento instantâneo estimado devido à aplicação do 2º incremento de carga é manifestamente menor do que o medido. Segundo Espion ocorreu fendilhação nas vigas LT-0.5Q e LT-0.8Q após a aplicação do 2º incremento de carga, embora nesta última a fendilhação só tenha ocorrido algum tempo depois da aplicação da carga; assim sendo a lei constitutiva utilizada não se mostra adequada para modelar o referido ensaio a partir desse instante.

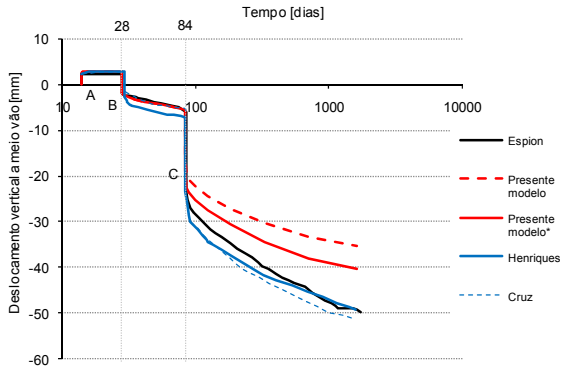


Figura 4.17 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.5Q.

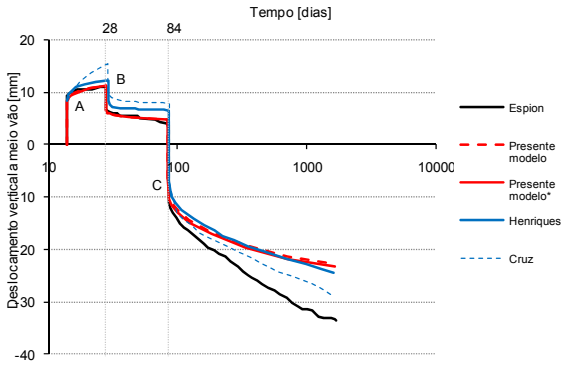


Figura 4.18 – Deslocamento vertical a meio vão da viga LT-0.8Q.

De forma a modelar com mais precisão o comportamento das vigas LT-05Q e LT-08Q substituíram-se as leis constitutivas utilizadas para o betão nos modelos designados por “Presente modelo” por leis constitutivas com comportamento não-linear (*tension-stiffening*), e designaram-se estes novos modelos por “Presente modelo*”. O facto das leis constitutivas agora utilizadas não contabilizarem o efeito da maturação, ao contrário do que acontecia com as originalmente utilizadas, não introduz erros significativos uma vez que o valor do módulo de elasticidade aquando da aplicação das cargas, nomeadamente a partir do 14º dia, já não apresentar grande variabilidade, conforme se pode verificar na Figura 4.19.

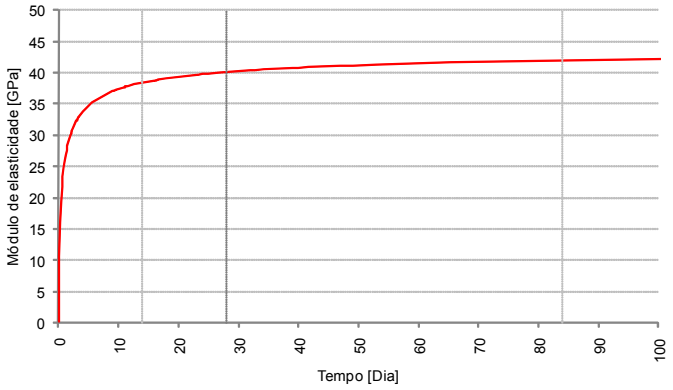


Figura 4.19 – Variação do módulo de elasticidade do betão ao longo do tempo de acordo com o EC2.

Nas Figuras 4.20 e 4.21 são apresentadas as distribuições de tensões normais no betão a meio vão imediatamente após a aplicação do 2º incremento de carga para as vigas LT-05Q e LT-08Q, respectivamente, obtidas através dos modelos numéricos que utilizam leis constitutivas com comportamento não linear (*tension-stiffening*). Como se pode verificar da observação da Figura 4.20, foi possível captar a cedência do betão em tracção na face inferior da viga LT-05Q, razão pela qual na Figura 4.17 a série “Presente modelo*” aproxima melhor dos resultados experimentais do que a série “Presente modelo”, nomeadamente após a aplicação do 2º incremento. Já no caso da viga LT-08Q não se verificaram tensões capazes de introduzir um comportamento não-linear no betão, razão pela qual os resultados apresentados na Figura 4.18 para as séries “Presente modelo” e “Presente modelo*” foram tão semelhantes.

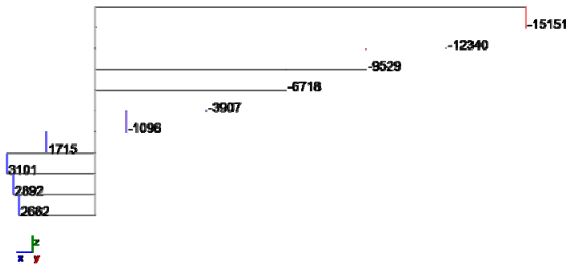


Figura 4.20 – Tensões normais a meio vão da viga LT-05Q após a aplicação do 2º incremento de carga.

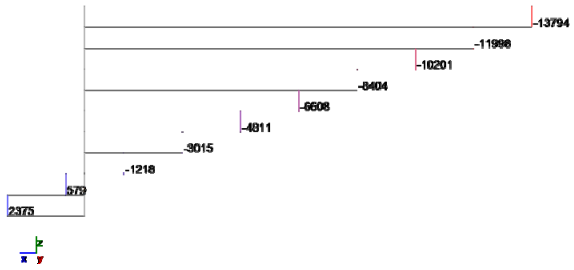


Figura 4.21 – Tensões normais a meio vão da viga LT-08Q após a aplicação do 2º incremento de carga.

Apesar de se ter detectado numericamente na viga LT-05Q cedência em tracção do betão na base da viga, em nenhuma das vigas se conseguiu detectar numericamente qualquer fendilhação, conforme descrito por Espion. Nas armaduras passivas e de pré-esforço também não se observou numericamente nenhum valor susceptível de provocar cedência de qualquer delas

As boas aproximações obtidas entre os valores estimados numericamente e os medidos experimentalmente indiciam um bom funcionamento do programa de cálculo desenvolvido, nomeadamente na análise instantânea e diferida de estruturas de betão armado pré-esforçado.

4.5.2. Viga de betão armado e pré-esforçado em escala reduzida

O modelo em estudo foi construído em Novembro de 2001 nas instalações do LABEST na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (Sousa (2002)), estando a ser monitorizado até à presente data. Corresponde a uma viga de betão armado e pré-esforçado, simplesmente apoiada, de secção transversal rectangular, ver Figura 4.22. A viga encontra-se monitorizada em três secções através de extensómetros colados na armadura passiva e embebidos no betão, ainda através de uma célula de carga colocada num dos extremos do pré-esforço.

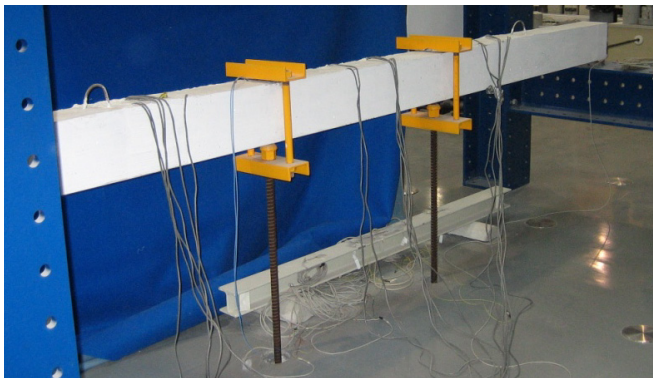


Figura 4.22 – Vista geral do ensaio.

As características da secção transversal são constantes ao longo da viga, encontrando-se definidas na Figura 4.23 e no Quadro 4.14. O pré-esforço é materializado por um cordão não aderente, possui um traçado rectilíneo e é constituído por aço com f_{pk} = 1860MPa, relaxação normal e módulo de elasticidade de 195GPa. O esquema estrutural do modelo está representado na Figura 4.24.

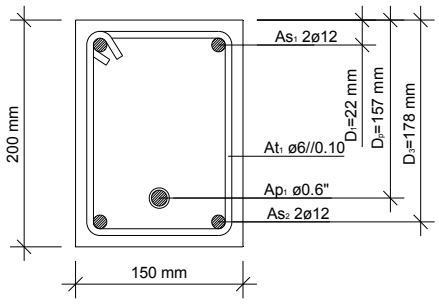


Figura 4.23 – Secção transversal da viga.

Quadro 4.14 – Definição das armaduras.

As_1	226mm^2	D_1	0.022m
As_2	226mm^2	D_2	0.178m
Ap_1	140mm^2	D_p	0.157m

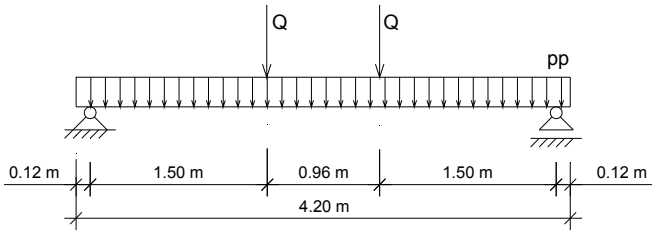


Figura 4.24 – Esquema estrutural da viga em escala reduzida.

A viga encontra-se sujeita ao peso próprio, à acção do pré-esforço e a duas cargas concentradas Q, segundo um historial de carregamento definido no Quadro 4.15. De salientar que o valor do pré-esforço apresentado corresponde ao valor instalado na extremidade do cordão após a reentrada das cunhas, e não inclui as perdas por relaxação do aço de pré-esforço.

Quadro 4.15 – Historial de carregamento.

Tempo [Dias]	Peso próprio pp [kN/m]	Pré-esforço [kN]	Q [kN]
$0 \leq t < 24$	0	0	0
$24 \leq t < 25$	0.75	0	0
$25 \leq t < 87$	0	172.4	0
$87 \leq t < 203$	0	0	8.376
$203 \leq t < 209$	0	0	0
$209 \leq t < \infty$	0	0	8.376

Após a betonagem a face exposta da viga foi coberta por um revestimento plástico, de modo a diminuir as trocas de humidade entre o betão e o meio ambiente. Este revestimento foi removido aos 13 dias, aquando da descofragem da viga.

Através de ensaios de compressão em provetes cilíndricos realizados 25 dias após a betonagem foi possível caracterizar a resistência média do betão à compressão f_{cm} utilizado na execução da viga. Recorrendo às relações definidas no EC2 foi possível extrapolar os resultados dos ensaios efectuados, e obter valores de outras propriedades do betão, apresentadas no Quadro 4.16. No quadro f_{ctm} corresponde ao valor da resistência média do betão à tracção, E_c e E_{cm} são, respectivamente, os módulos de elasticidade tangente e secante do betão.

Quadro 4.16 – Propriedades do betão aos 25 dias.

Medido	
$f_{cm,25}$ (Cubo)	57.23 MPa

Extrapolado	
f_{cm}	46.79 MPa
f_{ck}	41.79 MPa
f_{ctm}	3.61 MPa
E_c	35.32 GPa
E_{cm}	30.02 GPa

No Quadro 4.16 as designações f_{cm} e f_{ck} correspondem respectivamente a valores da resistência do betão à compressão, respectivamente o valor médio e o valor característico, f_{ctm} corresponde ao valor da resistência média do betão à tracção. E_{ci} e E_c são respectivamente os módulos de elasticidade tangente e secante do betão.

Os prismas utilizados para caracterizar a retracção e fluência do betão possuem as dimensões de 15x15x55cm^3, e no interior de cada um foi introduzido um extensómetro de embeber, segundo a maior dimensão. Os prismas foram colocados junto da viga de forma a garantir as mesmas condições ambientais, e foram protegidos durante a cura por um revestimento plástico, à semelhança do descrito para a viga, tendo sido descofrados aos 14 dias. O prisma de fluência foi solicitado por uma tensão de compressão de 7.2MPa aos 24 dias de idade. Na Figura 4.25 são apresentados os resultados da instrumentação dos prismas de retracção e fluência, e uma série de extensões obtida por diferença dos valores medidos nos prismas, de forma a representar exclusivamente as extensões por fluência do betão.

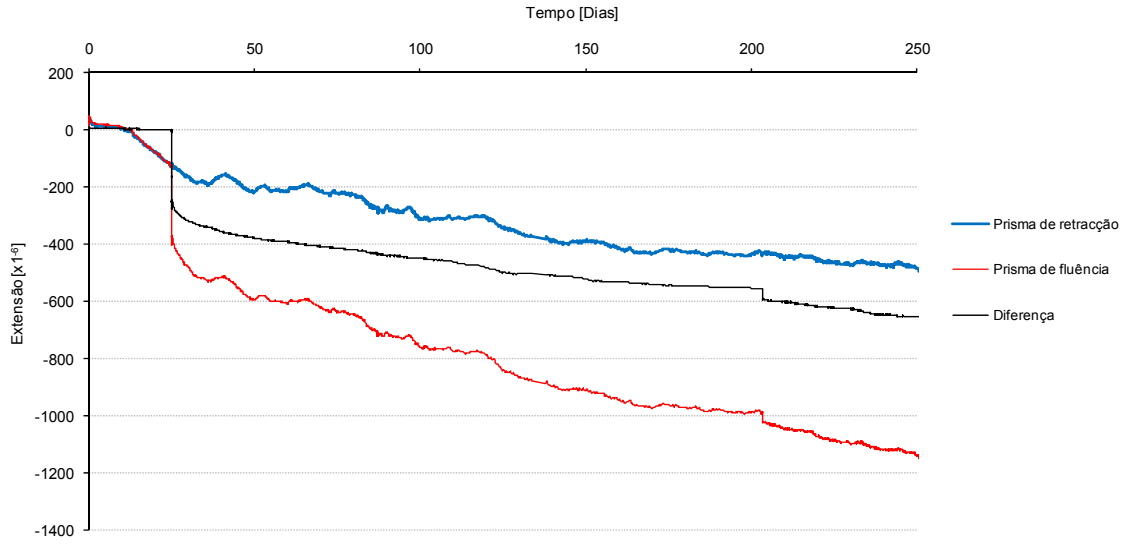


Figura 4.25 – Valores medidos nos prismas de retracção e fluência.

Aferição da retracção

Na Figura 4.26 podem-se observar os valores das extensões medidas no prisma compensador de retracção (na série designada por “Prisma”), assim como possíveis aproximações por diferentes leis de retracção. A série “EC2” representa a evolução das extensões por retracção do betão utilizando as leis definidas no EC2. Através do procedimento exposto na secção 4.2.1.4.3 foi possível ajustar a referida lei e obter a série “EC2*”, cujos coeficientes de correcção obtidos foram C_{d1} = 0.656245, C_{d2} = 2.574791, C_{a1} = -0.246733 e C_{a2} = 1.623671. A série “APP” aproxima os valores medidos por uma série de segmentos e foi a utilizada na modelação numérica.

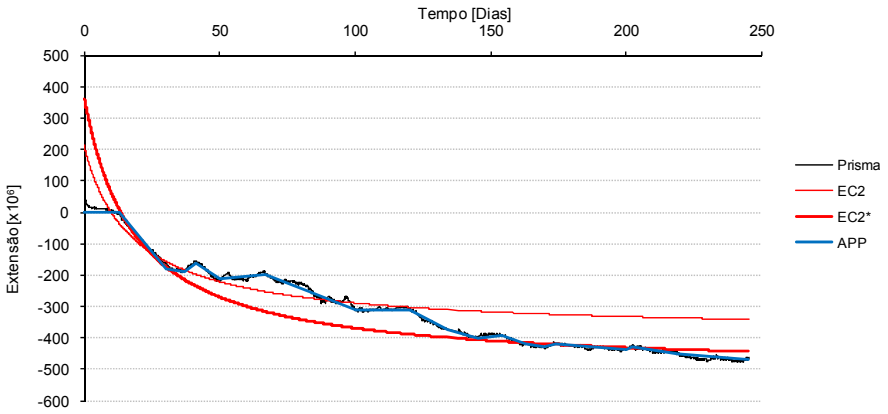


Figura 4.26 – Extensões por retracção do betão.

Aferição da fluência

Na Figura 4.27 podem-se observar os valores do coeficiente de fluência obtidos através do prisma compensador de fluência na série designada por "Prisma", assim como possíveis aproximações por várias leis de fluência. As séries $\phi(t,25)$ e $\phi(t,87)$ da Figura 4.27 representam a estimativa da evolução do coeficiente de fluência ao longo do tempo utilizando as lei definidas no EC2, considerando idades de carregamento de 25 e 87 dias, respectivamente. Através do procedimento exposto na secção 4.2.1.4.2 foi possível efectuar uma aproximação bastante rigorosa dos resultados experimentais para uma idade de carga de 25 dias, ver série $\phi(t,25)^*$ da Figura 4.27. Ao fim de 200 dias existe uma anomalia nas medições, pelo que apenas se utilizaram os valores obtidos até essa data na aproximação efectuada. Os coeficientes de correcção obtidos foram C_1 = 1.060571 e C_2 = 1.763012. Uma vez que existe um carregamento sobre as vigas ensaiadas para uma idade de 87 dias, mas não existem ensaios de fluência para essa idade de carregamento, adoptaram-se estes coeficientes de correcção como representativos de qualquer idade de carregamento. Assim estimou-se como ajuste da fluência para uma idade de carregamento de 87 dias a série $\phi(t,87)^*$ apresentada na Figura 4.27. Este procedimento não se encontra isento de erros, no entanto na falta de prismas de fluência para outras idades de carregamento considerou-se como a melhor aproximação possível.

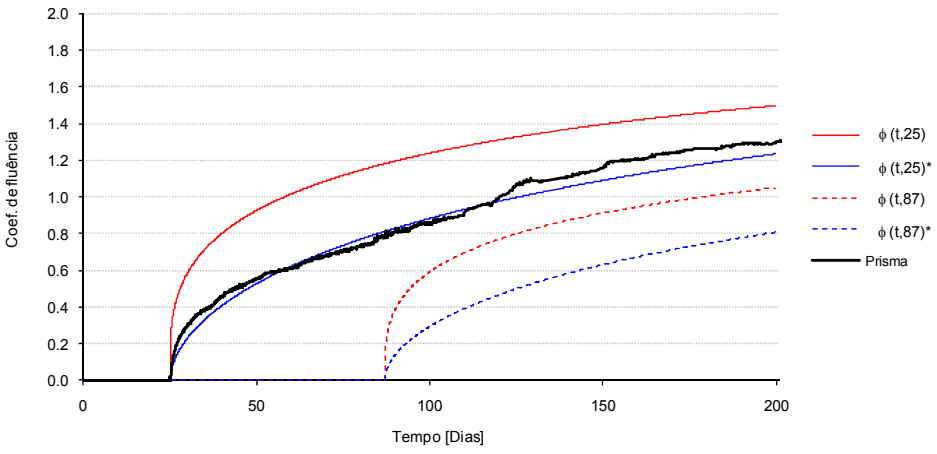


Figura 4.27 – Aferição da função de fluência.

Monitorização

Foram instrumentadas 3 secções da viga (S_1, S_2 e S_3), cuja localização está definida na Figura 4.28. A instrumentação de cada secção foi realizada através de dois extensómetros de embeber no betão (EE) e de quatro extensómetros de colar na armadura (EC) conforme ilustrado na Figura 4.29. De modo a registar o esforço axial instalado no cordão desde a aplicação do pré-esforço foi intercalada uma célula de carga entre a amarração deste e a viga de betão, com quatro extensómetros colados diametralmente.

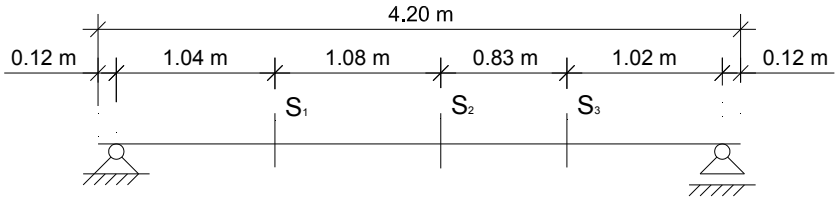


Figura 4.28 – Localização das secções instrumentadas da viga.

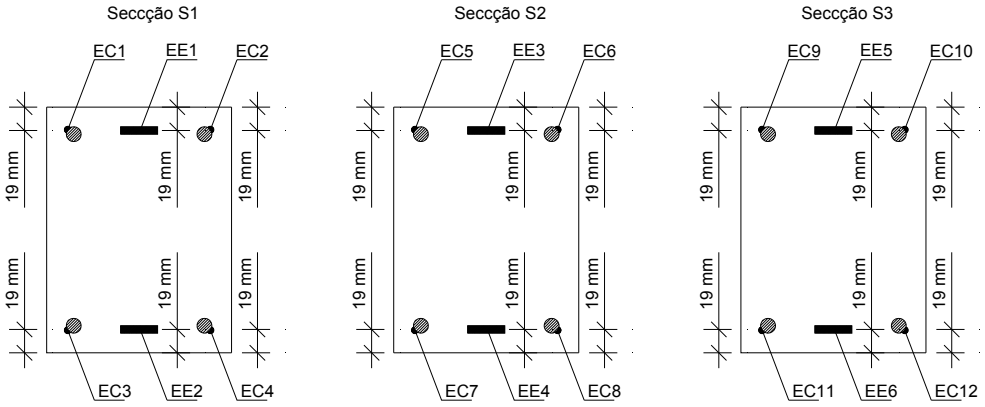


Figura 4.29 – Instrumentação das secções da viga.

O modelo numérico utilizado é composto por 22 elementos de viga de Timoshenko de três nós, com dois pontos de Gauss, e 1 elemento de cabo de pré-esforço não aderente, conforme se pode observar na Figura 4.30. As secções transversais da viga foram discretizadas através de 23 fibras de betão e 4 fibras de armadura passiva, conforme representado nas Figuras 4.31 e 4.32.

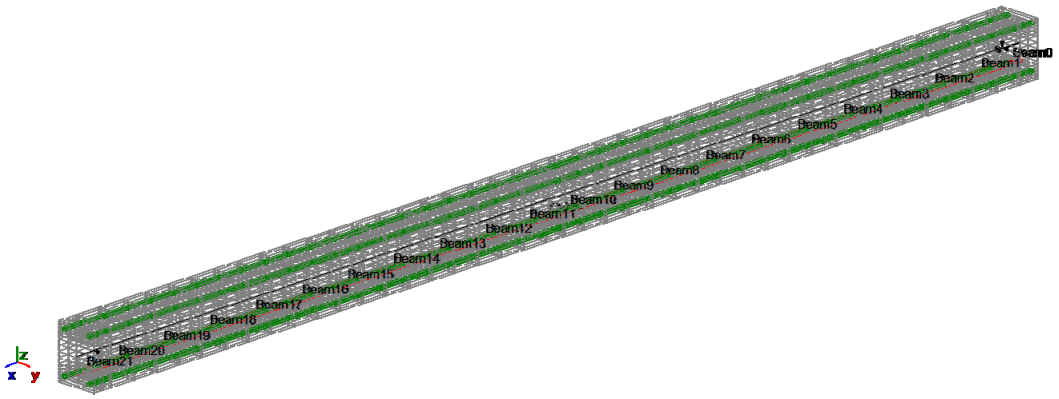


Figura 4.30 – Modelo numérico da viga em escala reduzida.

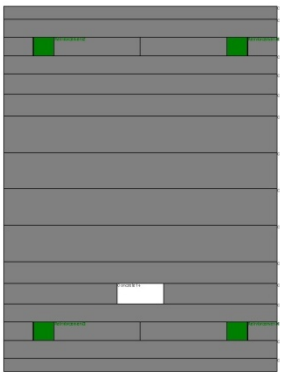


Figura 4.31 – Secção transversal das vigas nas secções correntes.

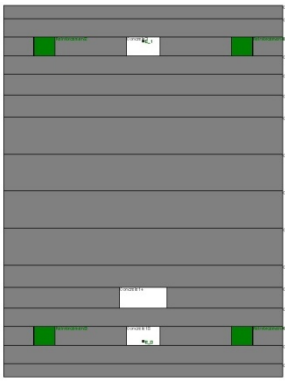


Figura 4.32 – Secção transversal das vigas nas secções instrumentadas.

A utilização de extensómetros de embeber no betão em secções de dimensão reduzida, como as deste modelo, pode introduzir alguma alteração na área e inércia da secção, devido às dimensões e reduzido módulo de elasticidade daqueles. Assim, na modelação das secções instrumentadas optou-se por não considerar a área ocupada pelos extensómetros de embeber, conforme se pode verificar na Figura 4.32, numa extensão equivalente ao comprimento de cada extensómetro, cerca de 20cm.

As medições das extensões nas secções são apresentadas nas Figuras 4.33 a 4.35. As séries de resultados são designadas por ECA e EEB, correspondendo a medições nos extensómetros de colar nas armaduras e nos embeber no betão, respectivamente.

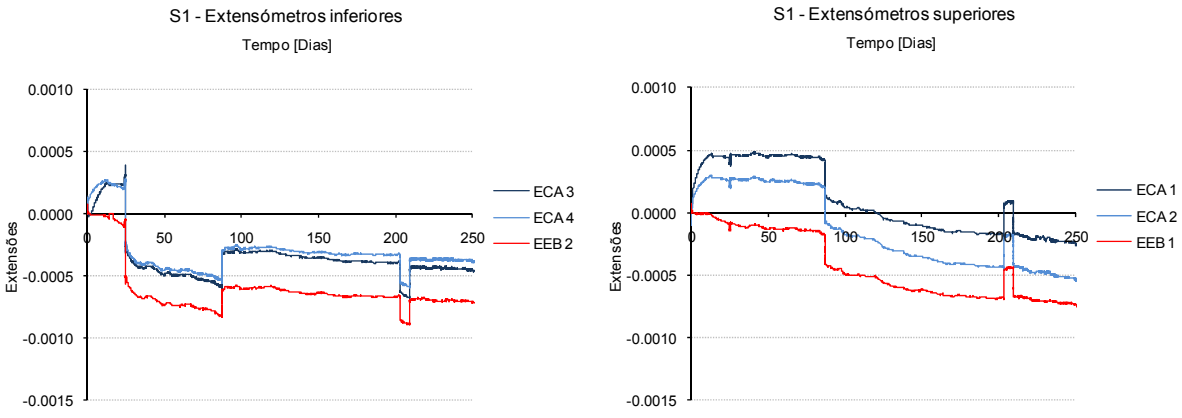


Figura 4.33 – Extensões medidas na secção S1.

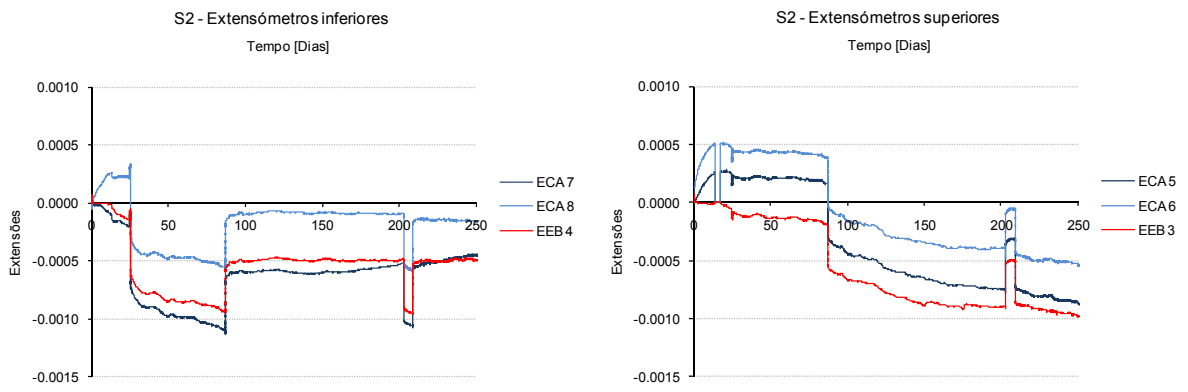


Figura 4.34 – Extensões medidas na secção S2.

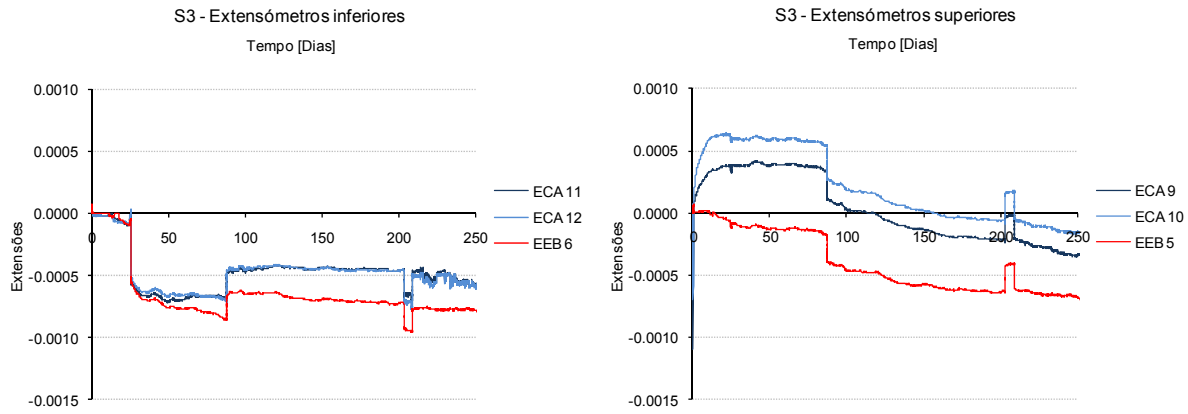


Figura 4.35 – Extensões medidas na secção S3.

Dado que nas secções instrumentadas cada conjunto de dois extensómetros de colar e um de embeber se encontram à mesma distância relativamente ao centro de gravidade da secção transversal, e que a viga não se encontra sujeita a flexão desviada, seria de esperar que os resultados obtidos em cada um dos extensómetros do conjunto fossem idênticos entre si. No entanto, na maioria dos conjuntos existe uma dispersão das medições desde os primeiros instantes do ensaio até à descofragem da viga (aproximadamente 13 dias); a partir desta data, apesar de se registarem valores diferentes da extensão, estas possuem uma evolução semelhante. De acordo com Félix (2005) a diferença descrita tem a ver com os gradientes térmicos que se verificam durante a cura do betão, e que afectam particularmente os extensómetros de colar, uma vez que os extensómetros de embeber são termicamente auto-compensados. De forma a corrigir os valores obtidos com os extensómetros de colar deve-se proceder à medição simultânea da temperatura e ajustar o sinal da deformação térmica aparente de acordo com as especificações técnicas dos extensómetros.

Nas Figuras 4.36 a 4.41 são apresentadas as séries de extensões medidas, nas quais se efectuou uma translação das ordenadas de modo a que à data da descofragem da viga todos os extensómetros apresentem valores nulos. Apresentam-se igualmente estimativas das extensões nas mesmas fibras obtidas por intermédio do modelo de cálculo desenvolvido. As séries “SRF” foram obtidas sem a consideração dos fenómenos de retracção e fluência, as séries “EC2” foram obtidas

utilizando as leis de maturação, de fluência e de retracção do EC2 e as séries “RFA” foram obtidas utilizando a lei de maturação do EC2, uma lei de retracção definida através das extensões medidas nos prismas de retracção e uma lei de fluência ajustada de acordo com o exposto na secção 4.2.1.4.2.

Como seria expectável, as extensões obtidas através do modelo numérico “SRF”, em que não se consideram os efeitos diferidos, são manifestamente diferentes das medidas experimentalmente, como se pode observar nas Figuras 4.36 a 4.41. As extensões estimadas através do modelo “EC2” aproximam-se bastante das medidas experimentalmente, no entanto foi através da utilização do modelo “RFA” que se conseguiu uma melhor aproximação. Nas Figuras 4.36 e 4.37 pode-se observar a boa aproximação entre as extensões estimadas numericamente através da utilização do modelo “RFA” e as medidas experimentalmente nos extensómetros da secção S1, e em particular nos extensómetros de embeber.

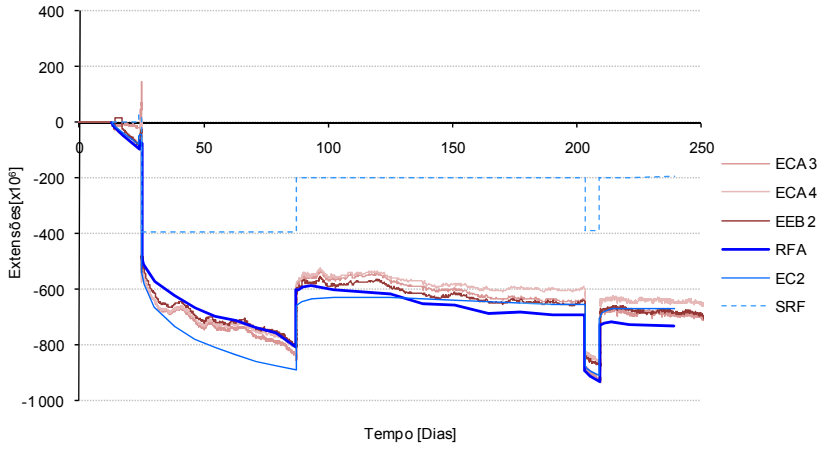


Figura 4.36 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1.

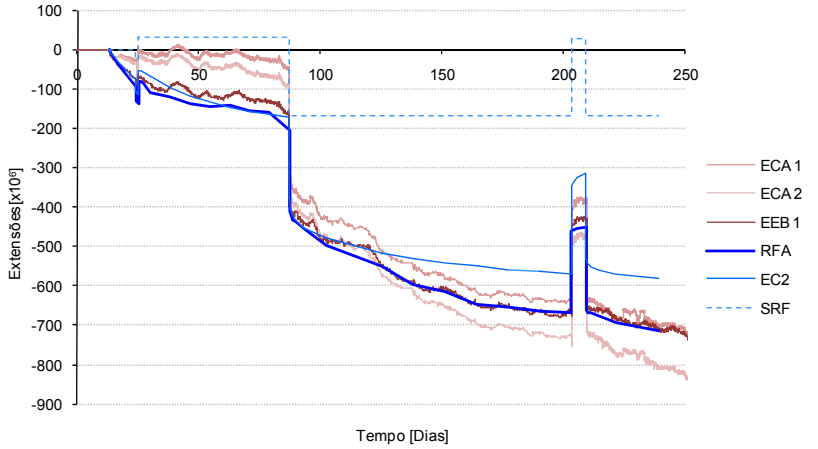


Figura 4.37 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1.

Foi nos extensómetros da secção S3 que se verificaram as maiores diferenças nas medições efectuadas com os extensómetros de embeber e de colar. No entanto as extensões estimadas numericamente através do modelo "RFA" foram muito semelhantes às medidas nos extensómetros de embeber, conforme se pode observar nas Figuras 4.38 e 4.39.

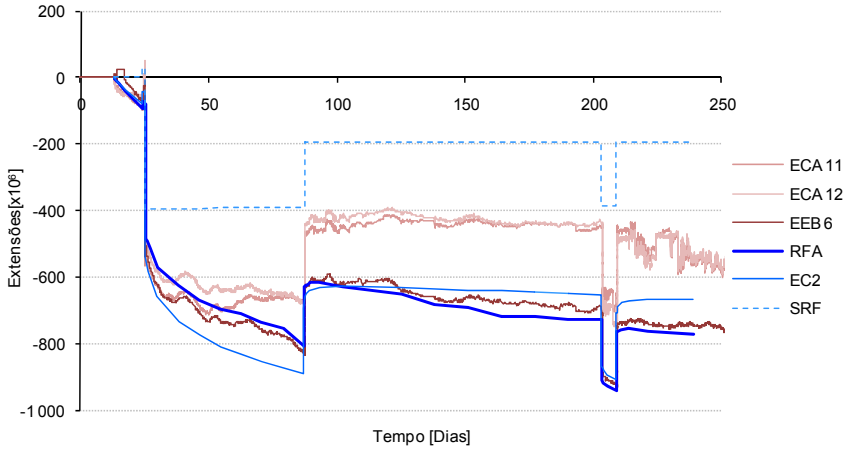


Figura 4.38 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3.

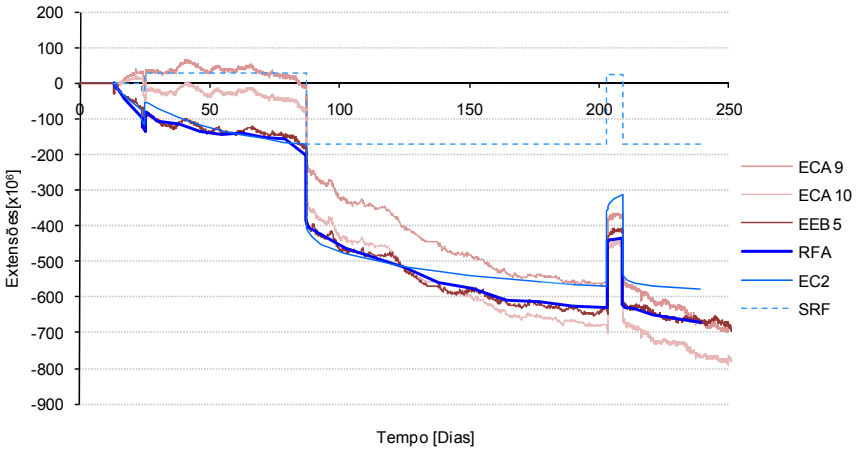


Figura 4.39 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3.

Nas Figuras 4.40 e 4.41 pode-se observar a boa aproximação obtida entre as extensões estimadas numericamente através do modelo "RFA" e as medidas experimentalmente nos extensómetros da secção S2.

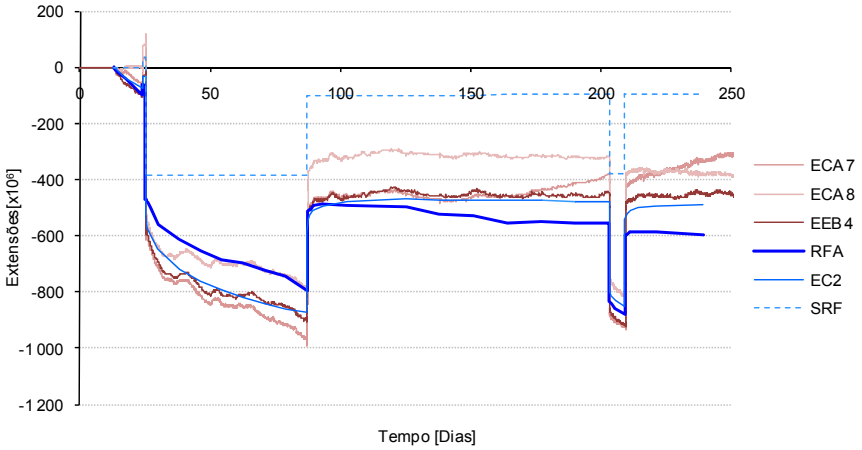


Figura 4.40 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S2.

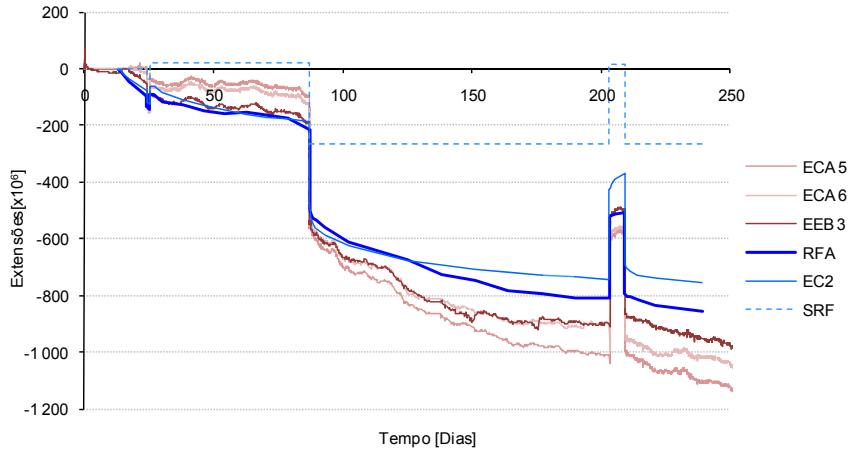


Figura 4.41 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S2.

Apesar da boa aproximação conseguida entre extensões estimadas numericamente e as medidas experimentalmente, aquando da aplicação das 2 forças concentradas existem diferenças entre os incrementos de extensões instantâneas previstos e medidos, sendo aqueles ligeiramente inferiores aos medidos, conforme se pode observar nas Figuras 4.42 a 4.45. A diferença é sobretudo notória na secção S2, e poderá ter sido causada por diversos factores como a existência de fendilhação na secção (ver Figura 4.48), estimativa incorrecta do módulo de elasticidade do betão, redução da rigidez da secção transversal originada pela instrumentação ou deficiente posicionamento dos extensómetros. Devido a entraves de ordem logística não foi possível efectuar a medição do módulo de elasticidade do betão à idade de aplicação das cargas, nem a medição de flechas na estrutura ao longo do tempo. A falta desta informação não permite, através de informação redundante, verificar qual o factor ou factores responsáveis pelas diferenças identificadas.

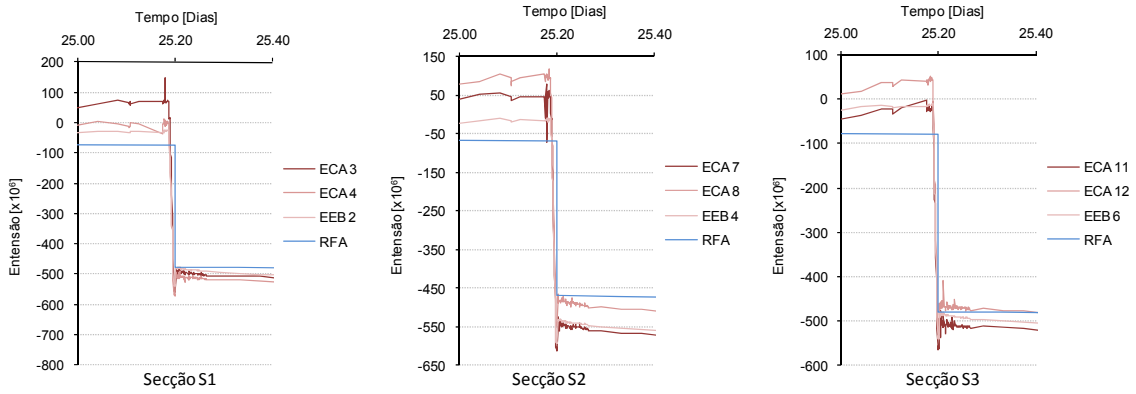


Figura 4.42 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros inferiores aquando da aplicação do pré-esforço.

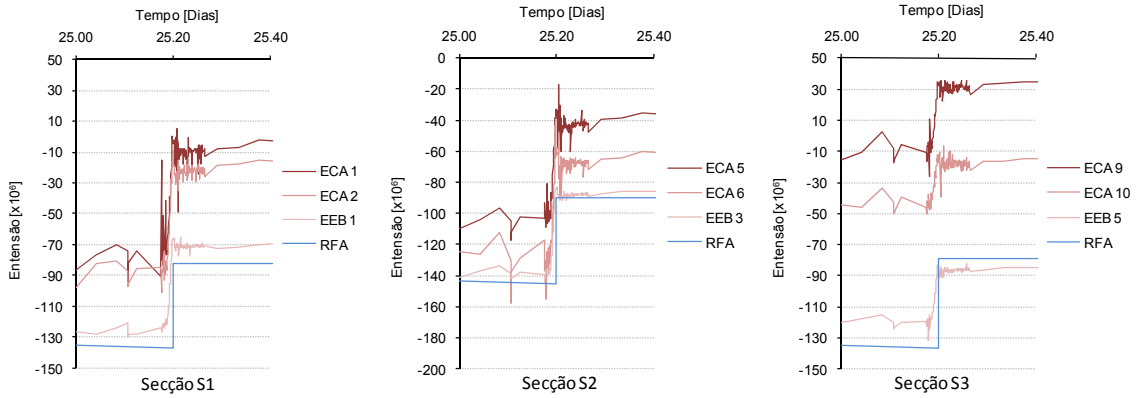


Figura 4.43 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros superiores aquando da aplicação do pré-esforço.

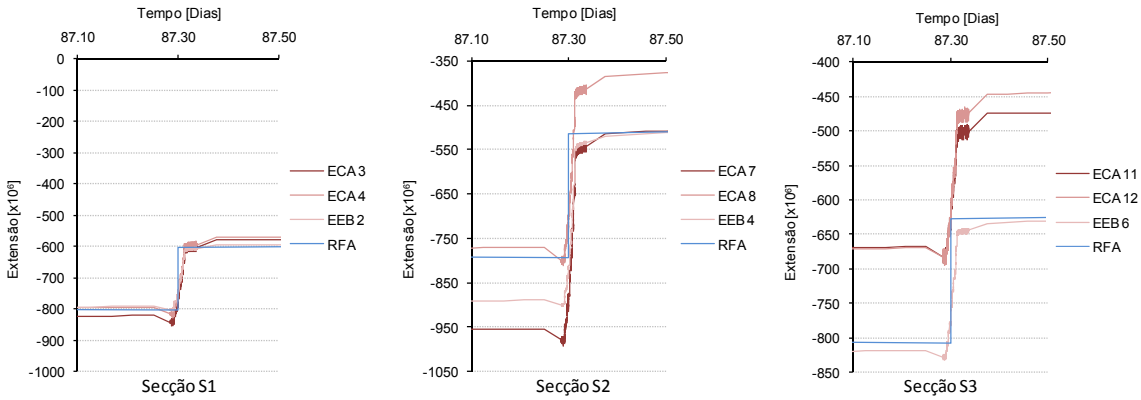


Figura 4.44 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros inferiores aquando da aplicação da carga exterior.

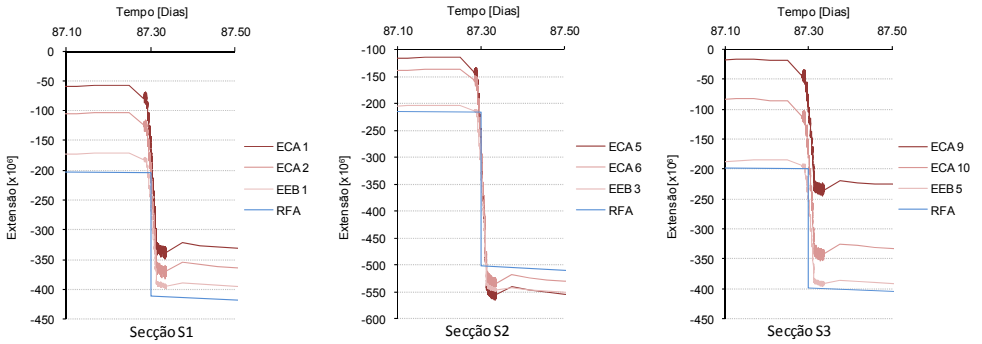


Figura 4.45 – Extensões medidas e estimadas nos extensómetros superiores aquando da aplicação da carga exterior.

Tendo em consideração o bom ajuste entre os valores medidos com os extensómetros de embeber e os obtidos para as extensões através do modelo desenvolvido, procedeu-se à estimativa das tensões no betão e nas armaduras nas secções instrumentadas. Assim, são apresentados nas Figuras 4.46 a 4.51 os valores estimados das tensões nas fibras extremas de betão, sendo as séries "Ci" e "Cs" correspondentes às tensões nas fibras inferiores e superiores, respectivamente, e as séries "Si" e "Ss" correspondentes às tensões nas armaduras inferiores e superiores, respectivamente.

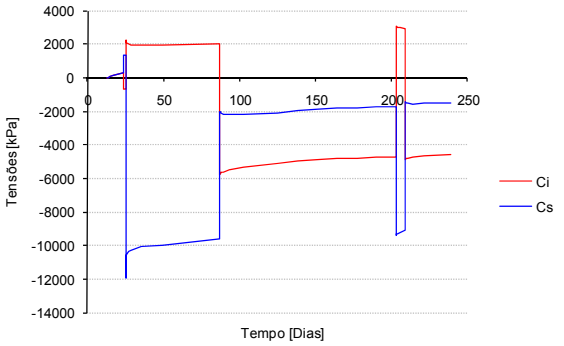


Figura 4.46 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S1.

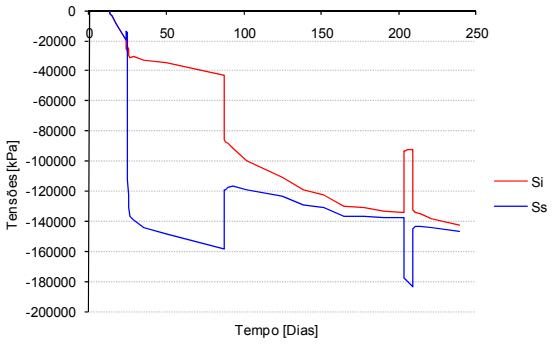


Figura 4.47 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S1.

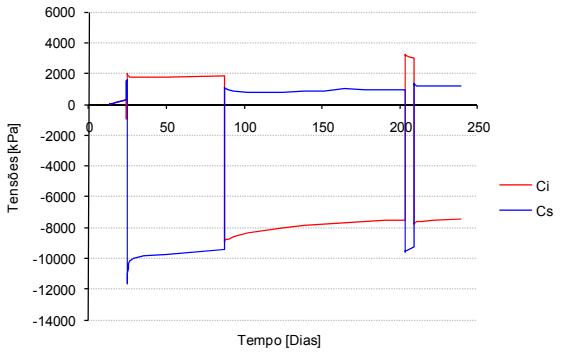


Figura 4.48 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S2.

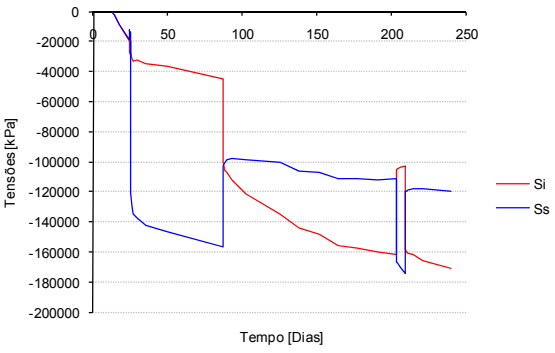


Figura 4.49 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S2.

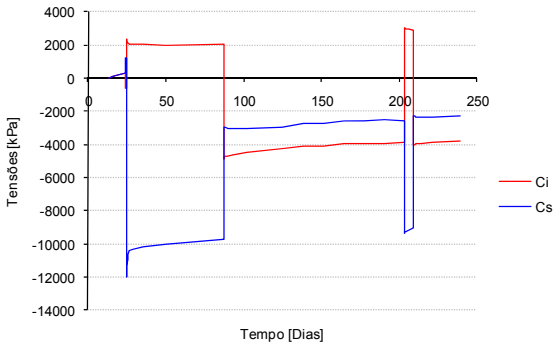


Figura 4.50 – Tensões estimadas nas fibras de betão da secção S3.

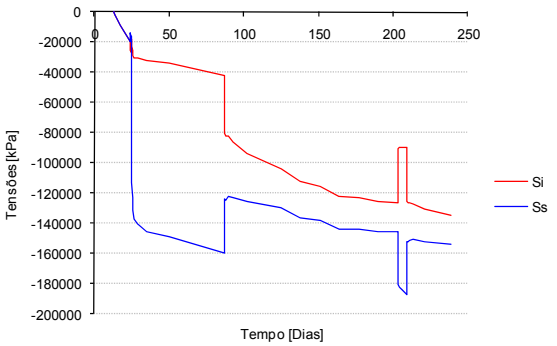


Figura 4.51 – Tensões estimadas nas armaduras da secção S3.

A análise das tensões obtidas não indicia que tenha ocorrido fendilhação do betão ou cedência das armaduras, no entanto modelou-se a viga utilizando uma lei constitutiva não-linear para o betão, como a apresentada em 4.4.2, utilizando os valores apresentados no Quadro 4.16, não se tendo verificado qualquer modificação relativamente às extensões estimadas anteriormente.

Apesar das pequenas discrepâncias verificadas nos incrementos de extensão aquando da aplicação das solicitações, conseguiu-se simular o ensaio realizado de uma forma bastante rigorosa, mostrando-se o modelo desenvolvido adequado à modelação do comportamento estrutural de estruturas de betão solicitadas em diferentes idades.

4.6. Considerações finais

As leis de comportamento dos materiais implementadas (maturação, retracção e fluência do betão e relaxação do aço de pré-esforço) mostraram-se adequadas aos objectivos propostos, nomeadamente na modelação dos ensaios laboratoriais.

As diversas opções disponíveis para a modelação do pré-esforço, em termos de simulação e aplicação de tensões e deslocamentos impostos, assim como de cálculo de perdas instantâneas e diferidas, permitem uma modelação bastante ampla e realista de todos os tipos de pré-esforço normalmente utilizados em obras de arte.

O método incremental implementado para simulação do comportamento instantâneo e diferido revelou-se igualmente uma boa estratégia para a resolução dos problemas abrangidos pelo programa de cálculo desenvolvido. Os critérios de convergência implementados foram suficientes para a obtenção de bons resultados em todas as análises realizadas no âmbito deste trabalho. A utilização da integração passo a passo usando a totalidade do historial de tensões no estudo do comportamento diferido, nomeadamente na modelação da fluência do betão, em detrimento da utilização de séries de Dirichelet, não conduziu a tempos de computação proibitivos, graças aos elevados desempenhos dos computadores actuais, resultando desta forma mais directo e simplificado o processo de análise.

A boa aproximação obtida entre os valores estimados numericamente e os medidos experimentalmente nas aplicações apresentadas confirma o bom funcionamento do programa de cálculo desenvolvido, nomeadamente na análise instantânea e diferida de estruturas de betão armado pré-esforçado.

No decorrer dos trabalhos realizados no âmbito do presente capítulo foi notória a facilidade de implementação de novas funcionalidades, utilizando as capacidades disponíveis na plataforma desenvolvida, nomeadamente as relativas à hereditariedade e à utilização de *plugins*. Desta forma foram facilmente implementados diversos modelos de comportamento material, leis constitutivas e critérios de convergência.

Capítulo 5

Viaduto da Corujeira - Faseamento construtivo

5. Viaduto da Corujeira - Faseamento construtivo

5.1. Introdução

Os modelos numéricos utilizados no projecto de obras de arte são normalmente construídos utilizando valores disponíveis em regulamentos, dados de estações meteorológicas ou bibliografia. No entanto, após o início da obra e respectiva monitorização, o modelo original pode, e deve, ser aperfeiçoado através da nova informação obtida *in situ*, seja através da instrumentação permanente, onde se podem medir diversas grandezas como deslocamentos, inclinações, temperatura, humidade, extensões, etc., ou através de ensaios dos materiais efectivamente utilizados, cuja avaliação rigorosa de propriedades é impossível *a priori*. Desta forma a aferição de um modelo numérico é um processo iterativo e demorado, que se desenvolve simultaneamente com a obra que pretende simular. É neste contexto que no presente capítulo se utiliza o programa de cálculo descrito nos Capítulos 3 e 4 para o estudo do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira durante o faseamento construtivo, procedendo-se à comparação das previsões numéricas (extensões, rotações e tensões) com os resultados obtidos na campanha de monitorização.

No final do capítulo faz-se uma análise da variação dos modos de vibração e das frequências próprias da estrutura ao longo do processo construtivo, onde se procura identificar a influência das alterações do sistema estático e do efeito da maturação do betão.

5.2. Descrição da estrutura

O Viaduto da Corujeira, integrado na Alameda que liga a Praça das Flores à Praça da Corujeira, no Porto, possibilita a passagem desnivelada da Avenida 25 de Abril sobre a Via de Cintura Interna e a Travessa da Bonjóia, bem como sobre as linhas de caminho de ferro e do Metro. Na Figura 5.1 é apresentada uma fotografia aérea da obra em estudo.

Figura 5.1 – Viaduto da Corujeira no Porto (vista aérea).

Dada a singularidade da obra em estudo a APOR - Agência para a Modernização do Porto, S.A., solicitou ao LABEST – Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural da FEUP a execução de dois trabalhos de monitorização, com base nos programas de observação elaborados pelo projectista, a GRID – Consultas, Estudos e Projectos de Engenharia, Lda. O primeiro plano de monitorização incidiu sobre a fase construtiva, incluindo o ensaio de carga (de verificação da conformidade), e o segundo plano incidiu sobre a fase de exploração do viaduto.

O Viaduto da Corujeira desenvolve-se segundo uma directriz recta e uma concordância convexa na rasante, sendo que o tabuleiro contínuo (possuindo juntas de dilatação apenas nos encontros) se localiza a uma cota que varia entre os 7.5m e os 18.0m acima do terreno natural. A obra possui um comprimento total de 316.5m entre eixos dos encontros, designados Encontro Oeste e Encontro Este, dividido em seis tramos com comprimentos entre os 23.0m e os 120.0m, numerados de 1 a 6 no sentido Oeste/Este conforme se pode observar na Figura 5.2, onde é apresentado um corte longitudinal pelo eixo da obra, e se podem observar os aspectos gerais e os atravessamentos. Os pilares foram numerados de 1 a 5 no mesmo sentido que os tramos, correspondendo o pilar P3 ao mastro que suporta os tirantes.

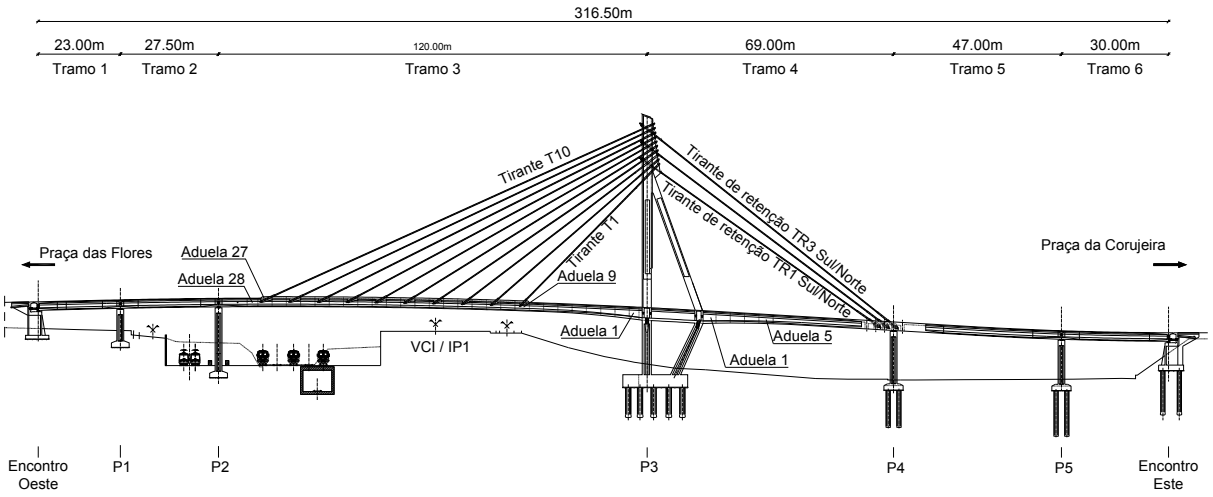


Figura 5.2 – Viaduto da Corujeira - Corte longitudinal pelo eixo da obra.

Conforme ilustrado nas Figuras 5.3 e 5.4, o mastro é composto por dois fustes de betão pré-esforçado de inércia variável parcialmente tubulares, tem uma altura de 73.2m acima da cota de fundação, sendo a altura acima do tabuleiro de 54.3m. Junto ao tabuleiro o mastro possui aberturas centradas, de forma a possibilitar a passagem de peões na zona central do tabuleiro (ver secção BB na Figura 5.5). Por sua vez os pilares são de betão armado de secção tubular constante, conforme apresentado na Figura 5.6.

Figura 5.3 – Construção do mastro.

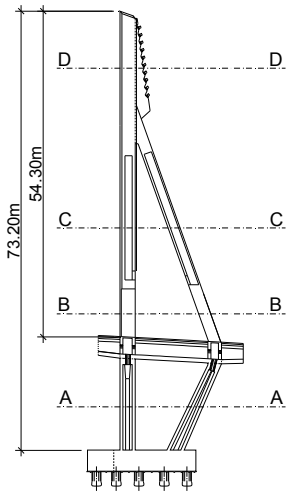


Figura 5.4 – Alçado do mastro.

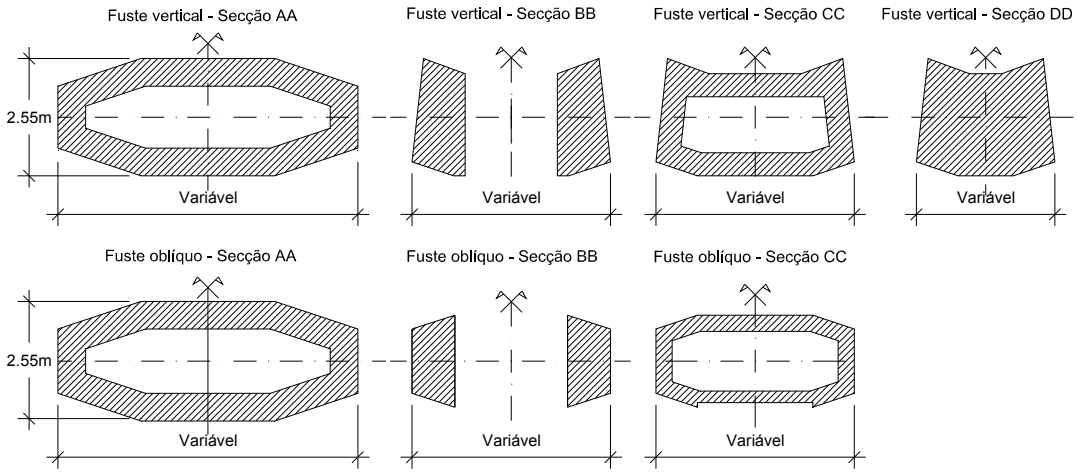


Figura 5.5 – Secções transversais do mastro (assinaladas na Figura 5.4).

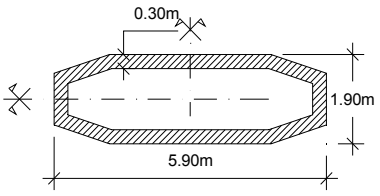


Figura 5.6 – Secção transversal tipo dos pilares correntes.

A ligação do tabuleiro aos pilares e aos encontros é efectuada através de aparelhos de apoio de neoprene guiados, e a ligação ao mastro é monolítica. Os referidos aparelhos de apoio permitem deslocamentos longitudinais do tabuleiro, sendo a estabilidade da obra nesta direcção garantida pela fixação ao mastro e por quatro amortecedores oleodinâmicos ligados aos encontros. Desta forma, na direcção longitudinal os deslocamentos relativos e lentos devidos à retracção, à fluência e às variações de temperatura são permitidos, sendo os deslocamentos relativos e rápidos devidos aos sismos limitados pelos referidos amortecedores. Na ligação entre os encontros e o tabuleiro existem

juntas de dilatação capazes de absorver os deslocamentos horizontais no sentido longitudinal da obra, mantendo a continuidade do pavimento. Devido a condicionantes geotécnicas, as fundações do Encontro Oeste e dos pilares P1 e P2 são do tipo directas sobre sapatas de betão armado, e as do Encontro Este, do mastro e dos pilares P4 e P5 são do tipo indirecto sobre estacas de betão.

O tabuleiro em betão armado pré-esforçado tem uma largura de 18.0m, integra duas faixas de rodagem de 6.0m cada, com guardas laterais e separadas por um passeio para peões com 5.0m de largura. O tabuleiro possui uma altura constante de 2.40m, com excepção das zonas de ligação ao mastro, onde a altura varia parabolicamente até aos 3.60m. A secção transversal do tabuleiro, apresentada nas Figuras 5.7 e 5.8, é em caixão unicelular, com uma laje superior pré-esforçada transversalmente e integrando duas consolas laterais com cerca de 4.0m de vão e espessura variável entre os 0.17m e os 0.40m, e uma laje, entre almas, com cerca de 7.0m e espessura variável entre os 0.20 e os 0.40m.

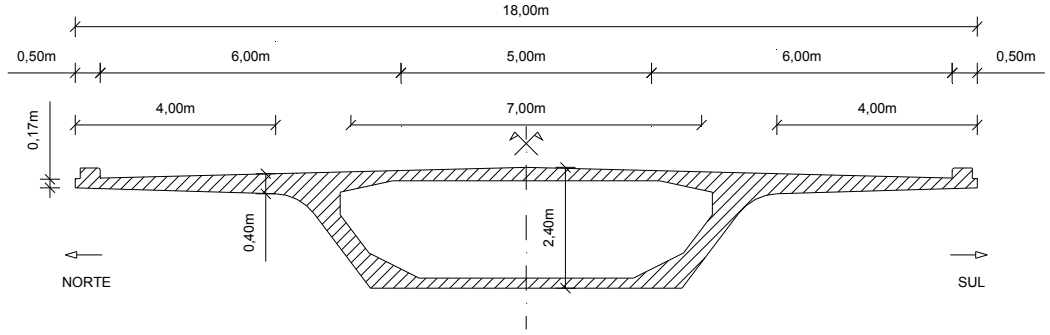


Figura 5.7 – Corte transversal numa secção corrente.

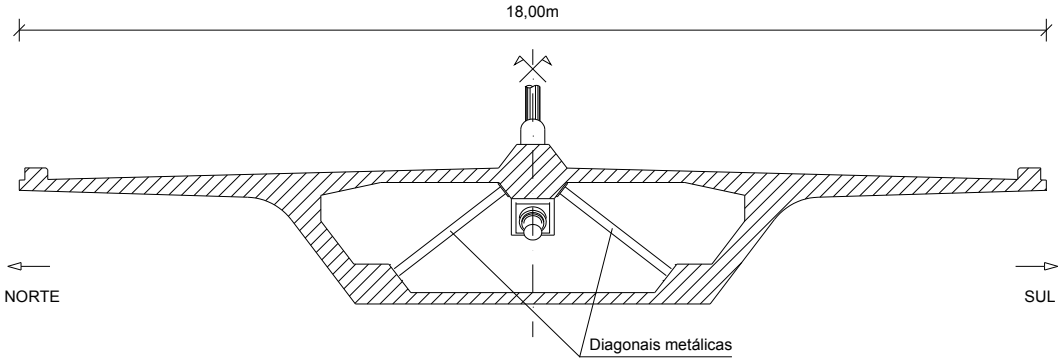


Figura 5.8 – Corte transversal numa secção de amarração dos tirantes.

O Tramo 3 do viaduto, com 120.0m, contém 28 aduelas, numeradas de 1 a 28 a partir do mastro no sentido Este/Oeste, e é suspenso por 10 tirantes inseridos no plano médio da secção e convergentes no topo do mastro, onde ancoram por cruzamento do fuste, numerados de 1 a 10, conforme se pode observar na Figura 5.2. A amarração dos tirantes ao tabuleiro é efectuada com o auxílio de diagonais metálicas pré-esforçadas colocadas no interior do caixão, que transmitem a componente vertical das forças de fixação às almas (ver Figura 5.8). Os tirantes de retenção divergem em dois planos, Norte e Sul, do topo do mastro (P3) para os extremos da secção transversal do tabuleiro na zona de amarração inferior, junto ao pilar P4, de forma a aumentar a estabilidade transversal do mastro, e

foram numerados de 1 a 3 em cada um dos planos, conforme se pode observar na Figura 5.2. O Tramo 4 contém 5 aduelas numeradas de 1 a 5 a partir do fuste oblíquo do mastro e no sentido Oeste/Este.

5.3. Modelação numérica

Na modelação numérica efectuada procurou-se reproduzir com o máximo rigor não só a geometria da obra mas também os materiais utilizados, o faseamento construtivo e o historial de carregamento. Uma vez que não existem "telas finais", para além da informação contida no projecto original e nas subsequentes alterações foi utilizada informação recolhida da análise dos registos da obra, dos faxes trocados entre o projectista, o empreiteiro e a fiscalização, dos ensaios realizados sobre os materiais utilizados e dos ensaios de vibração. Na modelação da estrutura foram utilizados 591 nós, 297 elementos de viga de 3 nós de inércia variável e 80 elementos de tirante. Na Figura 5.9 é apresentada uma representação do modelo numérico, representada utilizando o *plugin DRAWING* referido na secção 2.5.3.1.

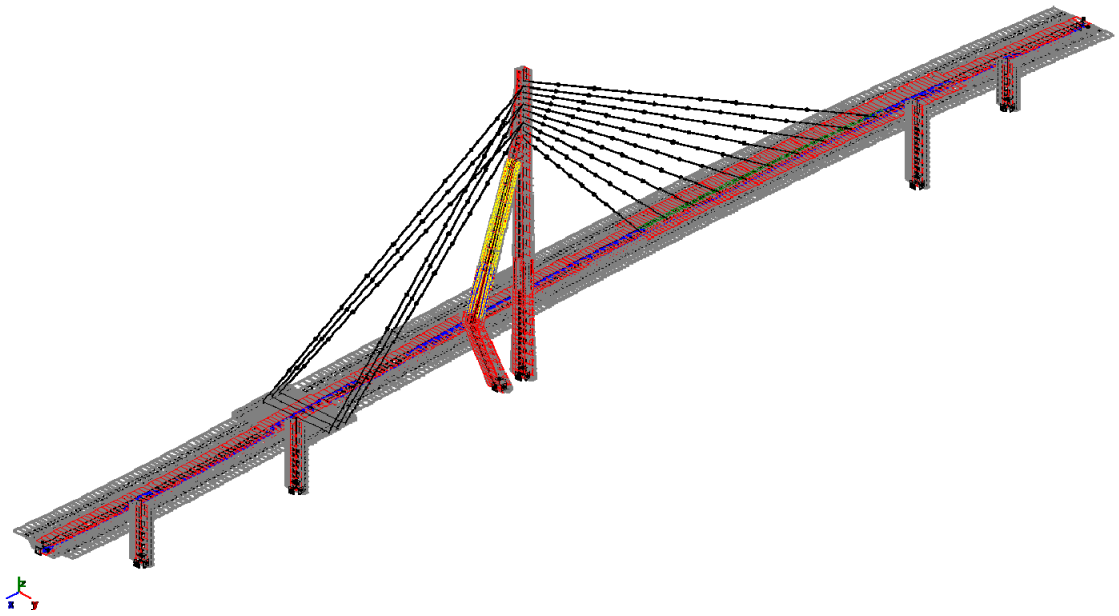


Figura 5.9 – Modelo numérico do Viaduto da Corujeira.

As ligações ao exterior foram modeladas com recurso a 44 ligações do tipo *IMPOSEDDOF*, referido na secção 2.5.2.3, e nas ligações entre o tabuleiro e os pilares utilizaram-se 12 ligações do tipo *SAMEDOF*, referido na secção 2.5.2.3, possibilitando a modelação de aparelhos de apoio deslizantes guiados, sendo apresentados nas Figuras 5.10 e 5.11 dois exemplos destes apoios. Na ligação entre o tabuleiro e o pilar P4, realizada através de apoios deslizantes e apresentada na Figura 5.10, pretende-se que os deslocamentos verticais do topo do pilar e do nó do tabuleiro situado sobre aquele sejam iguais (sendo os deslocamentos nos restantes graus de liberdade independentes), assim foi utilizada uma ligação do tipo SAMEDOF, que permite compatibilizar deslocamentos entre dois nós. O mesmo tipo de ligação foi utilizado entre o pilar P1 e o tabuleiro (ver Figura 5.11). Já na modelação do Encontro Oeste, também realizada por intermédio de aparelhos de apoio deslizantes,

foram utilizadas ligações do tipo IMPOSEDDOF, uma vez que se pretende impor deslocamentos verticais nulos nas correspondentes extremidades do tabuleiro.

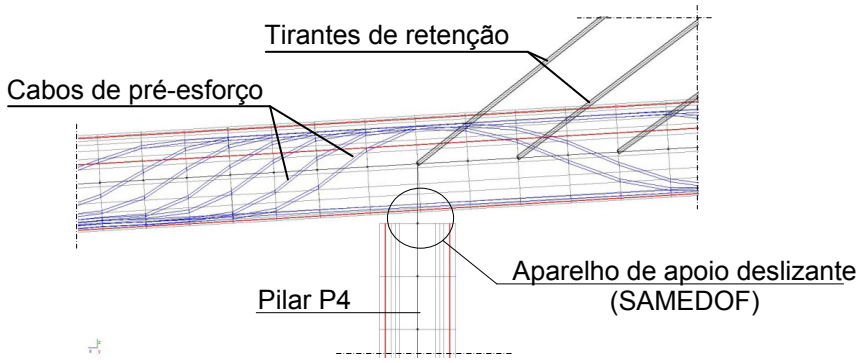


Figura 5.10 – Alçado de pormenor da ligação do pilar P4 ao tabuleiro.

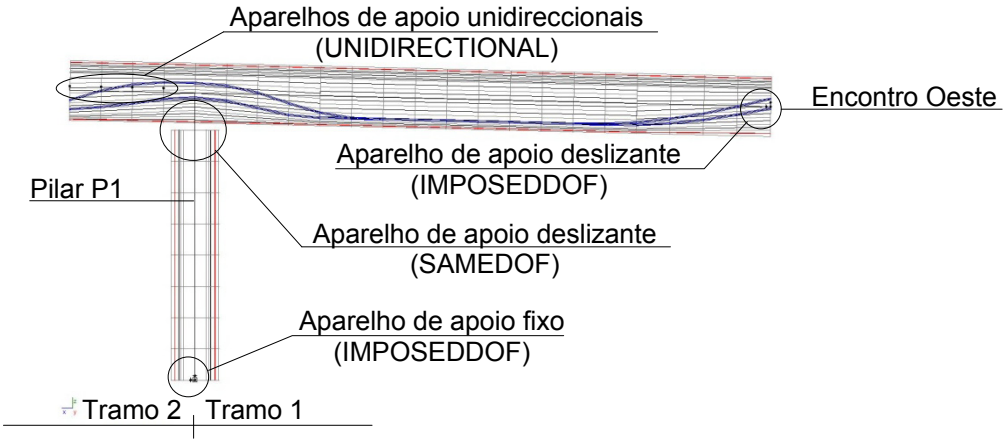


Figura 5.11 – Alçado do Tramo 1 aquando da instalação do respectivo pré-esforço.

A fundação do pilar P1, representada na Figura 5.11, foi modelada através de 6 ligações do tipo IMPOSEDDOF, de modo a impor nulos os deslocamentos nos 6 graus de liberdade do nó. Na modelação de escoramentos ao solo em que era previsível que o tabuleiro permanecesse encostado ao cimbre após as operações de pré-esforço utilizaram-se 22 ligações do tipo *UNIDIRECTIONAL*. Na Figura 5.11 é visível a utilização destes apoios, que neste caso apenas funcionam para reacções no sentido ascendente, na extremidade em consola do tabuleiro no início do Tramo 2. Nas ligações entre os tirantes de retenção e o tabuleiro, bem como na ligação entre os fustes do mastro foram utilizadas 24 ligações do tipo *MASTERDOF*, referido na secção 2.5.2.3. Nas Figuras 5.12 e 5.13 estão assinaladas a vermelho as localizações de algumas destas ligações.

Apenas os encontros foram simulados utilizando ligações rígidas ao exterior, devido à sua dimensão e ao facto de estarem parcialmente enterrados. Uma vez que os elementos estruturais que constituem os encontros são peças de betão de grandes dimensões, as tensões aí instaladas são, para as solicitações permanentes, muito reduzidas, reduzindo-se desta forma as deformações devidas à fluência. Por outro lado, o facto dos encontros se encontrarem enterrados quase na

totalidade faz com que seja substancialmente reduzida a retracção do betão e se encontrem isolados das variações de temperatura.

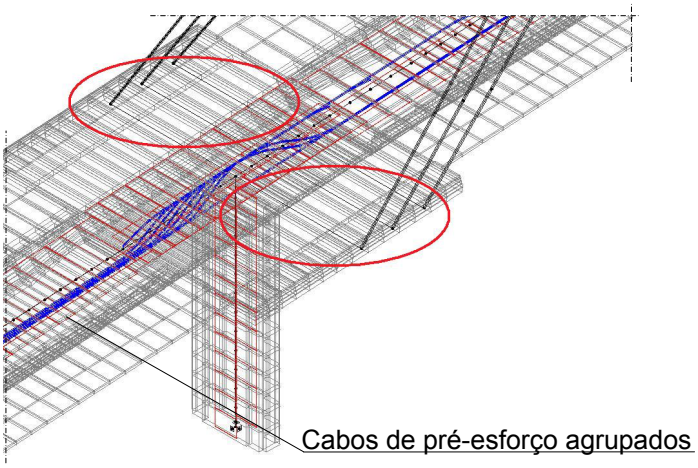


Figura 5.12 – Pormenor de ligação dos tirantes de retenção ao tabuleiro.

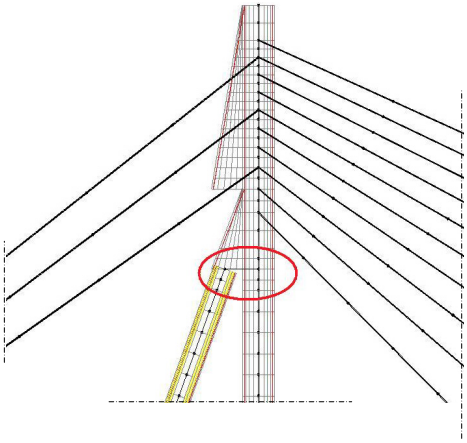


Figura 5.13 – Pormenor da ligação dos fustes no topo do mastro.

Na modelação do tabuleiro foram utilizadas 3483 fibras do tipo *TIMOSHENKO*, 559 fibras do tipo *REINFORCEMENT* e 1063 fibras do tipo *EMBEDDEDCABLE*. Uma vez que a obra de arte tem um desenvolvimento longitudinal rectilíneo em planta, e o presente trabalho consistiu sobretudo na análise do comportamento sob acções verticais, a discretização das secções transversais do tabuleiro foi efectuada privilegiando a divisão da secção em fibras na direcção vertical. Na modelação das armaduras passivas e de pré-esforço seguiu-se um critério de modelação análogo: em vez de se colocarem os varões de armadura passiva individualmente foram agrupados em camadas, conforme se pode ver na Figura 5.14; os cabos de pré-esforço existentes nas almas da secção do tabuleiro, do lado Norte e do lado Sul, foram agrupados num cabo de pré-esforço central (representado a azul), conforme se pode ver na Figura 5.12.

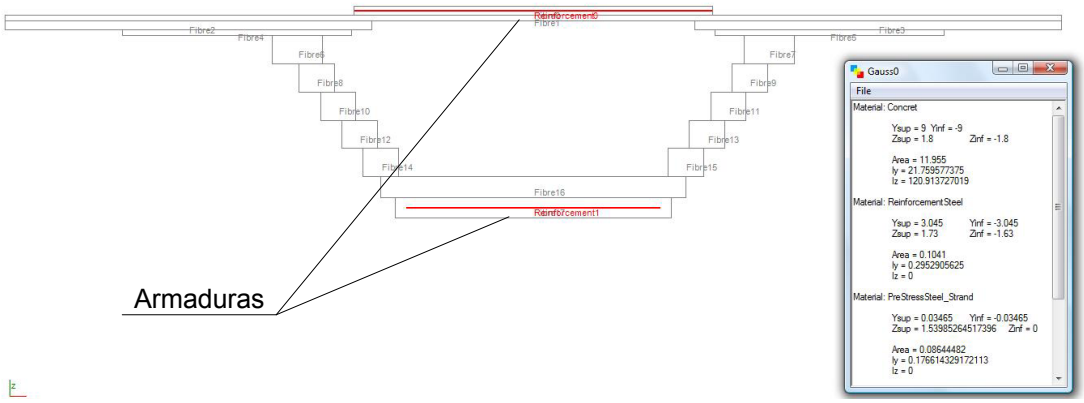


Figura 5.14 – Secção tipo do tabuleiro e quadro de propriedades.

Na Figura 5.14 pode-se observar que o *plugin* desenvolvido para a visualização da secção transversal dos elementos estruturais permite também a verificação das respectivas características geométricas e mecânicas.

Foram modeladas cerca de 150 operações sobre a estrutura, incluindo alterações do esquema estrutural, aplicação de cargas, aplicação de pré-esforço, ensaio de carga, etc. No Quadro 5.1 estão resumidas as operações modeladas, relativas ao faseamento construtivo.

Quadro 5.1 – Operações modeladas.

Operação	Data	Hora
Pré-esforço da aduela A01	12-03-2001	14:00
Betonagem da aduela A02	23-03-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 1	24-03-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A02	26-03-2001	14:00
Betonagem da aduela A03	30-03-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 2	30-03-2001	16:00
Pré-esforço da aduela A03	02-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 1	05-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 3	06-04-2001	14:00
Betonagem da aduela A04	06-04-2001	18:00
Pré-esforço da aduela A04	10-04-2001	12:00
Betonagem da aduela A05	12-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 4	12-04-2001	16:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 2	12-04-2001	18:00
Pré-esforço da aduela A05	16-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 5	19-04-2001	14:00
Betonagem da aduela A06	20-04-2001	11:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 3	21-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 6	24-04-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A06	24-04-2001	16:00
Betonagem da aduela A07	27-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 7	27-04-2001	16:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 4	27-04-2001	18:00
Pré-esforço da aduela A07	30-04-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 8	01-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 5	03-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 9	04-05-2001	14:00
Betonagem da aduela A08	05-05-2001	9:00
Pré-esforço da aduela A08	07-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 6	08-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 7	11-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 8	15-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Oblíquo) - Fase 9	18-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 10	24-05-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 11	30-05-2001	14:00
Pré-esforço dos tramos 5 e 6	01-06-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 12	08-06-2001	14:00
Betonagem da aduela A05 do tramo 4	18-06-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 13	22-06-2001	12:00
Betonagem da aduela A09	29-06-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 14	29-06-2001	16:00
Pré-esforço da aduela A09	02-07-2001	14:00
Betonagem do mastro (Vertical) - Fase 15	06-07-2001	14:00
Pré-esforço do mastro	07-07-2001	14:00
Betonagem da aduela de fecho do tramo 4	20-07-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 1 - Fase1	26-07-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 1 - Fase2	27-07-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 1 - Fase1	01-08-2001	14:00
Betonagem da aduela A10	03-08-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A10	06-08-2001	14:00
Betonagem da aduela A11	10-08-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A11	14-08-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 2	14-08-2001	16:00
Betonagem da aduela A12	17-08-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A12	21-08-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 1 - Fase2	21-08-2001	16:00
Betonagem da aduela A13	24-08-2001	14:00

Operação	Data	Hora
Pré-esforço da aduela A13	28-08-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 3	28-08-2001	16:00
Betonagem da aduela A14	31-08-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A14	04-09-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 1 - Fase3	04-09-2001	23:00
Pré-esforço do tirante 1 - Fase3	05-09-2001	9:00
Betonagem da aduela A15	07-09-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A15	09-09-2001	12:00
Pré-esforço do tirante 4	11-09-2001	14:00
Betonagem da aduela A16	13-09-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 2 - Fase 1	15-09-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A16	16-09-2001	12:00
Pré-esforço do tirante de retenção 2 - Fase 2	18-09-2001	14:00
Betonagem da aduela A17	20-09-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A17	23-09-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 5	25-09-2001	12:00
Betonagem da aduela A18	26-09-2001	16:00
Pré-esforço da aduela A18	29-09-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 2 - Fase 3	01-10-2001	18:00
Betonagem da aduela A19	03-10-2001	15:00
Pré-esforço da aduela A19	06-10-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 6	09-10-2001	14:00
Betonagem da aduela A20	10-10-2001	9:00
Pré-esforço da aduela A20	10-10-2001	12:00
Pré-esforço do tirante de retenção 2 - Fase 4	16-10-2001	14:00
Betonagem da aduela A21	16-10-2001	18:00
Pré-esforço da aduela A21	18-10-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 7_F1	19-10-2001	12:00
Pré-esforço do tirante 7_F2	20-10-2001	12:00
Betonagem da aduela A22	23-10-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A22	26-10-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 3 - Fase 1	26-10-2001	16:00
Betonagem da aduela A23	30-10-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A23	02-11-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 8	03-11-2001	16:00
Retensionamento de tirantes	06-11-2001	18:00
Betonagem da aduela A24	07-11-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A24	09-11-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 3 - Fase 2	12-11-2001	16:00
Betonagem da aduela A25	13-11-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A25	15-11-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 9	15-11-2001	16:00
Betonagem da aduela A26	20-11-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A26	23-11-2001	14:00
Pré-esforço do tirante de retenção 3 - Fase 3	23-11-2001	16:00
Betonagem da aduela A27	27-11-2001	14:00
Pré-esforço da aduela A27	30-11-2001	14:00
Pré-esforço do tirante 10	05-12-2001	12:00
Pré-esforço do tramo 1	05-12-2001	14:00
Pré-esforço do tramo 2	05-12-2001	16:00
Betonagem de fecho do tramo3	06-12-2001	14:00
Fecho do tramo 3 - Fase 1	07-12-2001	14:00
Fecho do tramo 3 - Fase 2	08-12-2001	14:00
Fecho do tramo 3 - Fase 3	13-12-2001	14:00
Betonagem dos passeios	03-04-2002	14:00
Aplicação do betuminoso	17-04-2002	14:00

5.4. Monitorização permanente

Nesta secção descreve-se o sistema de monitorização desenvolvido pelo LABEST (Félix e Figueiras (2002a)) para acompanhamento do faseamento construtivo e da fase de exploração do Viaduto da Corujeira. O referido sistema inclui a observação de cinco secções do tabuleiro e duas secções do mastro, designadas por S1 a S7, utilizando-se um total de 38 extensómetros de resistência eléctrica e

11 sensores de temperatura, todos de embeber no betão. A localização das secções S1 a S7 pode ser observada na Figura 5.15, e o posicionamento dos extensómetros nas referidas secções encontra-se esquematizado nas Figuras 5.16 a 5.21.

Utilizaram-se ainda 4 pares de extensómetros colados nas diagonais metálicas localizadas no interior do tabuleiro, 3 sensores de temperatura ambiente e ainda 2 inclinómetros eléctricos biaxiais dispostos junto às intersecções do mastro com o tabuleiro. Foram instalados 4 postos de observação no interior do tabuleiro, ligados em rede, que permitiam a aquisição e o armazenamento das medições efectuadas (ver nas Figuras 5.17 e 5.18 a localização dos postos de observação P01, P02 e P04).

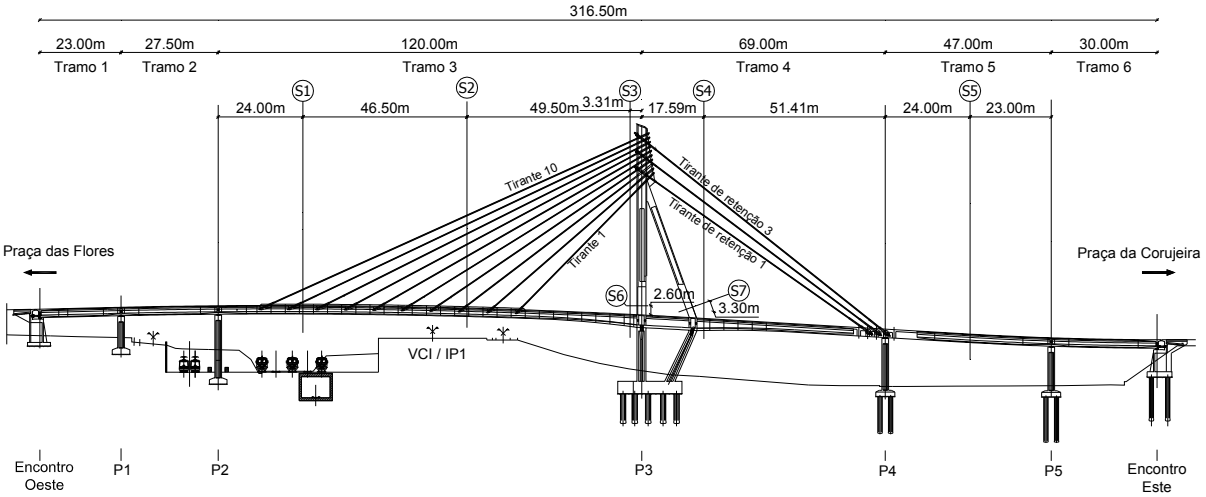


Figura 5.15 – Localização das secções instrumentadas com extensómetros.

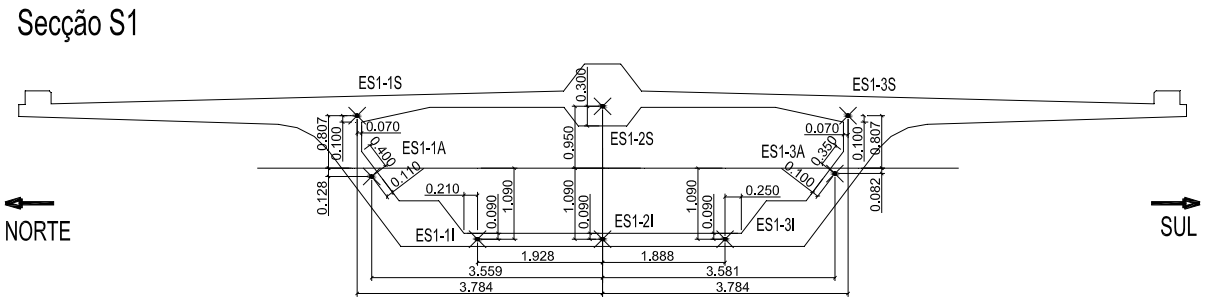


Figura 5.16 – Localização dos extensómetros na secção S1.

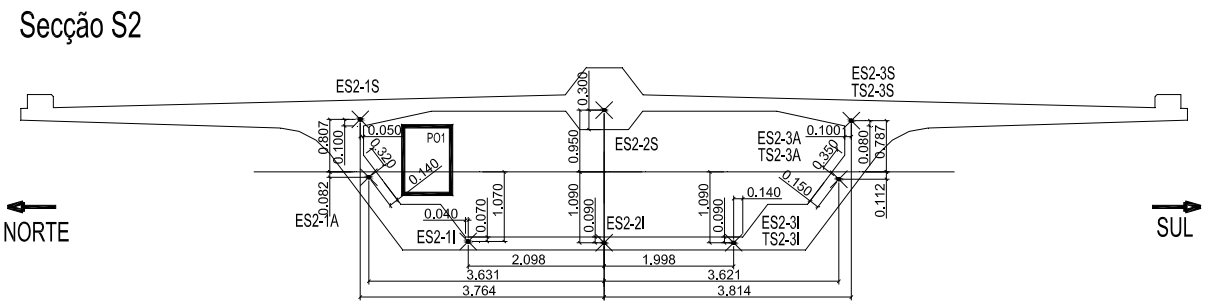


Figura 5.17 – Localização dos extensómetros na secção S2.

Secção S3

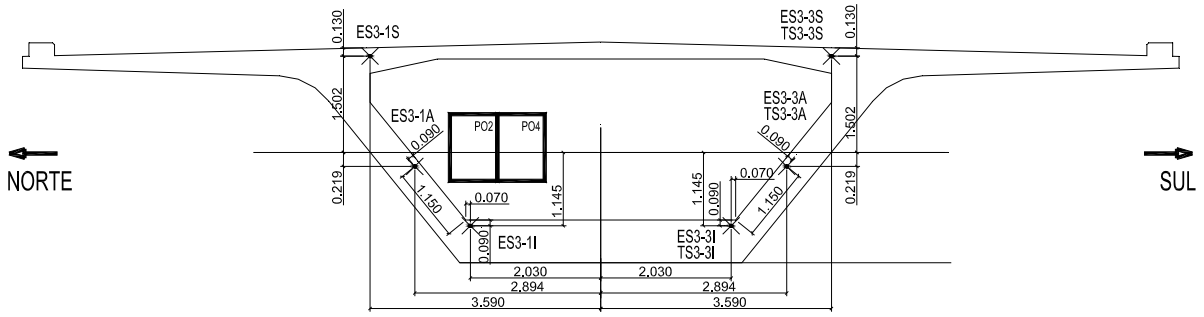


Figura 5.18 – Localização dos extensómetros na secção S3.

Secção S4

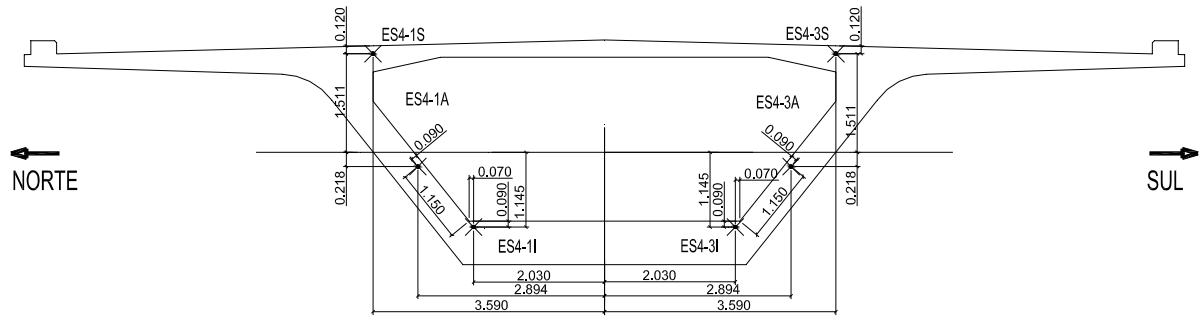


Figura 5.19 – Localização dos extensómetros na secção S4.

Secção S5

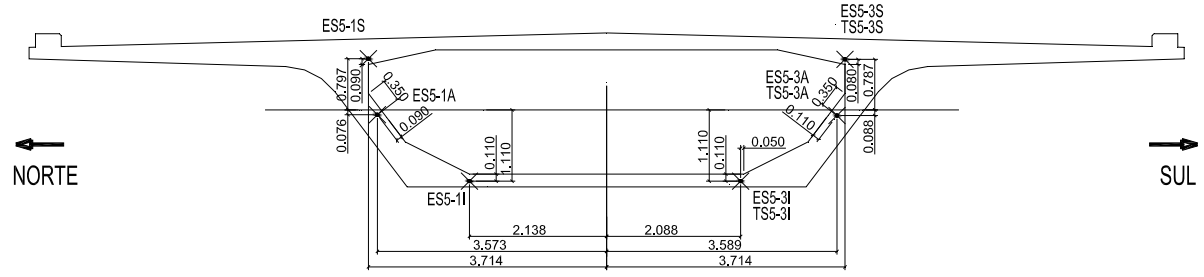


Figura 5.20 – Localização dos extensómetros na secção S5.

Conforme se pode observar nas Figuras 5.16 a 5.20, os extensómetros nas secções S1 a S5 foram colocados nas intersecções de 3 alinhamentos verticais e 3 alinhamentos horizontais. A designação atribuída a cada um desses extensómetros foi definida através da sigla *E*, seguida do nome da secção onde se situam e os eixos que se intersectam no local da sua colocação. Designaram-se os eixos verticais por:

i) Alinhamento 1 – Contém a face do caixão voltada a Norte;

ii) Alinhamento 2 – Contém o eixo longitudinal do tabuleiro;

iii) Alinhamento 3 – Contém a face do caixão voltada a Sul.

Os eixos horizontais foram designados por:

i) Alinhamento S – Junto do banzo superior do caixão;

ii) Alinhamento A – A meia altura da secção;

iii) Alinhamento I – Junto do banzo inferior do caixão.

Desta forma, por exemplo, o extensómetro ES3-1A estará colocado a meia altura da face Norte da secção S3.

A designação dos extensómetros colocados no mastro, nas secções S6 e S7, foi definida através da sigla *E*, seguida do nome da secção onde se situam e do número 1 no caso de se situarem numa face voltada para Oeste, ou do número 2 no caso de se situarem numa face voltada para Este, conforme se pode ver na Figura 5.21. O extensómetro ES7-2 do mastro deixou de funcionar a partir de 19 de Maio de 2001, tendo sido substituído por outro equivalente a 2 de Julho de 2001, data em que se deu o reatamento da medição e esta foi zerada.

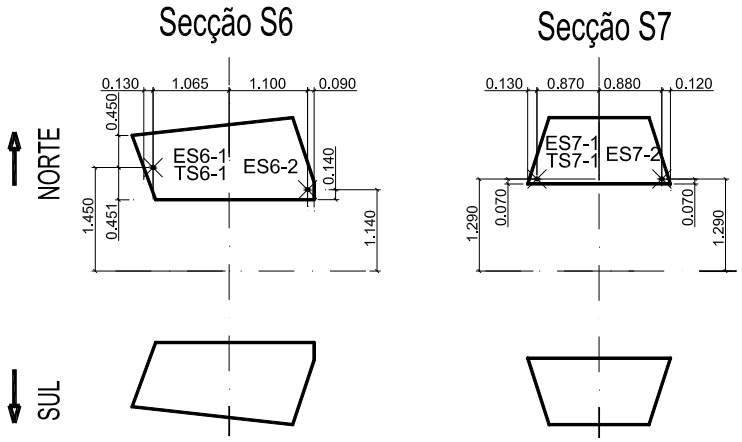


Figura 5.21 – Localização dos extensómetros nas secções do mastro.

Os extensómetros utilizados, de embeber no betão, são auto-compensados para a temperatura, e a respectiva ligação foi efectuada de forma a minimizar os efeitos das variações da temperatura sobre os fios condutores. Assim, doravante utilizar-se-á a designação extensões para referir as extensões medidas nos extensómetros, que no entanto não incluem as extensões provocadas pelas variações de temperatura. A fim de minimizar a possibilidade de dano dos extensómetros e respectivas ligações, estes foram instalados preferencialmente na véspera da betonagem, sendo que nas secções S3 a S5 a instalação foi efectuada em duas etapas, pelo facto de a betonagem dessas secções ter também sido efectuada em duas fases. O início das medições ocorreu, normalmente, cerca de uma semana depois da instalação dos extensómetros.

Os inclinómetros utilizados permitiram a medição da inclinação em relação ao plano horizontal segundo duas direcções ortogonais. Foram instalados nas faces voltadas a Sul dos fustes do mastro

e 0.60m acima da face superior do tabuleiro, de forma que na direcção x-x é medida a inclinação segundo o sentido Poente/Nascente e na direcção y-y é medida a inclinação segundo o sentido Sul/Norte, sendo ambas positivas nos sentidos referidos.

Infelizmente, cerca de 4 anos após o final da construção da obra o sistema de monitorização foi vandalizado de forma irrecuperável, ficando comprometida a continuidade do plano de monitorização durante a fase de utilização do Viaduto da Corujeira.

5.5. Propriedades dos materiais

Neste item pretende-se justificar as opções tomadas na modelação numérica relativamente às características dos materiais utilizados. Assim sendo, serão apresentadas as leis de maturação, retracção e fluência do betão utilizadas no modelo numérico, e os procedimentos utilizados para obtenção dessas leis.

Os betões indicados pelo projectista para a execução do tabuleiro e do mastro foram o C40/50 e o C45/55, respectivamente, produzidos numa central da obra.

5.5.1. Ajuste da lei de maturação do betão

Nos Quadros 5.2 e 5.3 são apresentados os valores obtidos em ensaios de caracterização para a tensão de rotura média à compressão e para os módulos de elasticidade do betão do tabuleiro e do mastro, de acordo com Ribeiro (2001), realizados no Laboratório de Geotecnia e Materiais (LMG) do Centro de Formação Profissional da Indústria da Construção Civil e Obras Públicas do Norte (CICCOPN).

Quadro 5.2 – Tensão de rotura média à compressão dos betões do tabuleiro e do mastro.

	fcm - Tensão de Rotura Média [MPa]									
	Tabuleiro (C40/50)					Mastro (C45/55)				
	Provete cúbico		Provete cilíndrico	Prisma		Provete cúbico		Provete cilíndrico	Prisma	
Idade	Imerso em água	Guardado em obra	Guardado em obra	Livre	Selado	Imerso em água	Guardado em obra	Guardado em obra	Livre	Selado
3	47.7	42.6	-	-	-	46.5	44.0	-	-	-
7	53.5	54.4	46.3	38.6	33.8	56.8	51.9	44.4	40.5	35.0
14	57.9	55.5	-	-	-	56.3	55.4	-	-	-
28	59.9	66.6	57.5	53.9	33.7	58.3	60.9	55.4	52.1	37.3

Quadro 5.3 – Módulos de elasticidade dos betões do tabuleiro e do mastro.

	Módulo de elasticidade [GPa]			
	Tabuleiro (C40/50)		Mastro (C45/55)	
Idade	Prismas livres	Prismas selados	Prismas livres	Prismas selados
3	32.4	33.5	31.5	32.3
7	35.5	35.5	36.7	35.7
14	37.7	37.7	39.4	37.7
28	40.1	40	40.8	41.4

Admitindo para o betão do tabuleiro as propriedades $f_{cm,28}$ = 57.5MPa e $E_{cm,28}$ = 40.1GPa, extraídos respectivamente do Quadro 5.2 e do Quadro 5.3, e que o cimento é de endurecimento normal (classe N), considera-se que a função de maturação do EC2 para o módulo de elasticidade do betão, assinalada na Figura 5.22 como Ecm(t), representa de forma bastante razoável os valores obtidos por

intermédio dos ensaios de caracterização realizados. Na Figura 5.22 é igualmente apresentada a lei de maturação do betão utilizada na modelação numérica, designada por Ecm(t)*, obtida através da utilização do processo proposto na secção 4.2.1.4.3, e para a qual se obtiveram para os parâmetros de ajuste os valores de C_{Bcc} = 1.036922, C_{Ecm} = 1 e C_s = 1.

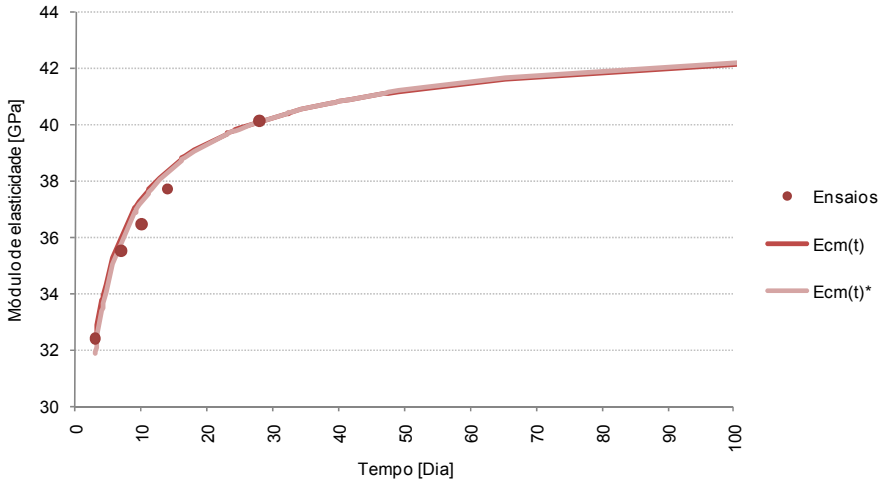


Figura 5.22 – Maturação do betão do tabuleiro.

À semelhança do efectuado para o betão utilizado no tabuleiro, também a lei de maturação utilizada na modelação numérica do betão utilizado no mastro foi ajustada de acordo com o exposto na secção 4.2.1.4.3, pelo que utilizando os valores de $f_{cm,28}$ = 55.4MPa e de $E_{cm,28}$ = 40.8GPa, extraídos respectivamente do Quadro 5.2 e do Quadro 5.3, e admitindo que o cimento é de endurecimento normal (classe N), se obtiveram para os parâmetros de ajuste os valores de C_{Bcc} = 1.087, de C_{Ecm} = 1 e de C_s = 1. Na Figura 5.23 são apresentados os valores do módulo de elasticidade obtidos através dos ensaios e as leis de maturação do betão utilizado no mastro, nomeadamente a lei do EC2 designada por Ecm(t).

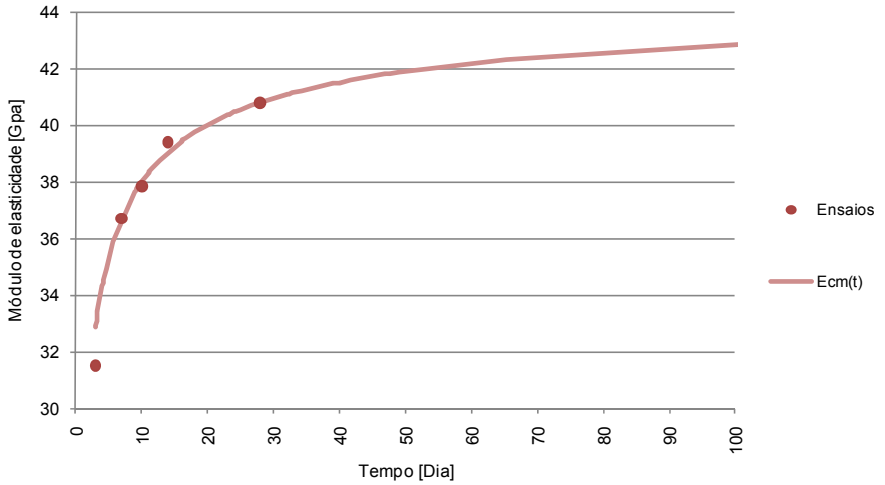


Figura 5.23 – Maturação do betão do mastro.

5.5.2. Ajuste da lei de retracção do betão

Uma correcta aferição da lei de retracção do betão do tabuleiro é bastante importante, pois além da relevância para a resposta da estrutura que se pretende estudar, a retracção influencia a forma como se ajusta a lei de fluência do betão do tabuleiro. Foram utilizados pelo LGM 6 provetes prismáticos, de dimensões 0.15x0.15x0.50m^3, executados com betão proveniente do tabuleiro e moldados em obra. Quatro destes prismas foram utilizados para aferição dos valores da retracção do betão do tabuleiro, de acordo com a norma E-398 (LNEC (1993)), e os restantes foram utilizados na aferição da lei de fluência. Dos 4 provetes utilizados no estudo da retracção 2 foram selados; os outros 2 foram mantidos em contacto directo com o ambiente, sendo por isso designados por provetes livres. Um conjunto formado por um provete livre e um selado foi mantido em obra; o outro conjunto foi armazenado em laboratório. Ao longo de 28 dias foram efectuadas medições pontuais das extensões de retracção nos referidos provetes, cujos valores se apresentam no Quadro 5.4.

Quadro 5.4 – Extensões de retracção do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente.

	Provetes selados		Provetes livres	
	Laboratório	Obra	Laboratório	Obra
t	ε_s [x10^{-6}]	ε_s [x10^{-6}]	ε_s [x10^{-6}]	ε_s [x10^{-6}]
3	-25	-32	-3	-27
7	-65	-42	-48	-28
14	-78	-90	-133	-119
28	-112	-96	-140	-175

O LABEST executou 5 prismas de betão simples, betonados em simultâneo e nas mesmas condições da Aduela 13, e colocados nas mesmas condições de cura e endurecimento desta. A dimensão dos prismas foi escolhida de forma que estes fossem o mais representativos possível da generalidade dos elementos que constituem o tabuleiro: considerou-se que 0.30m seria a espessura indicada, e como tal foram adoptadas as dimensões 0.30x0.30x0.60m^3. Um par de prismas foi colocado sobre o tabuleiro junto ao fuste vertical do mastro (prismas PR1 e PR2), e outro par foi colocado no interior do caixão (prismas PR3 e PR4), junto ao fuste vertical do mastro; o prisma restante foi utilizado na aferição da lei de fluência do betão do tabuleiro, conforme será descrito na secção 5.5.3. Nas Figuras 5.24 e 5.25 são apresentadas imagens dos prismas mantidos em obra.

Figura 5.24 – Prismas PR1 e PR2 sobre o tabuleiro.

Figura 5.25 – Prismas PR3 e PR4 no interior do caixão.

No interior de cada um dos prismas, e segundo a maior dimensão destes, foram colocados extensómetros de embeber no betão idênticos aos utilizados na instrumentação do tabuleiro. Imediatamente após a desmoldagem os prismas foram selados com tela asfáltica e aglomerado negro de cortiça, à excepção de duas faces opostas de maior dimensão, conforme se pode observar nas Figuras 5.24 e 5.25, de forma a simular, na medida do possível, as condições termo-higrométricas do tabuleiro. Na Figura 5.26 são apresentadas as extensões de retracção medidas nos extensómetros dos prismas PR1 a PR4.

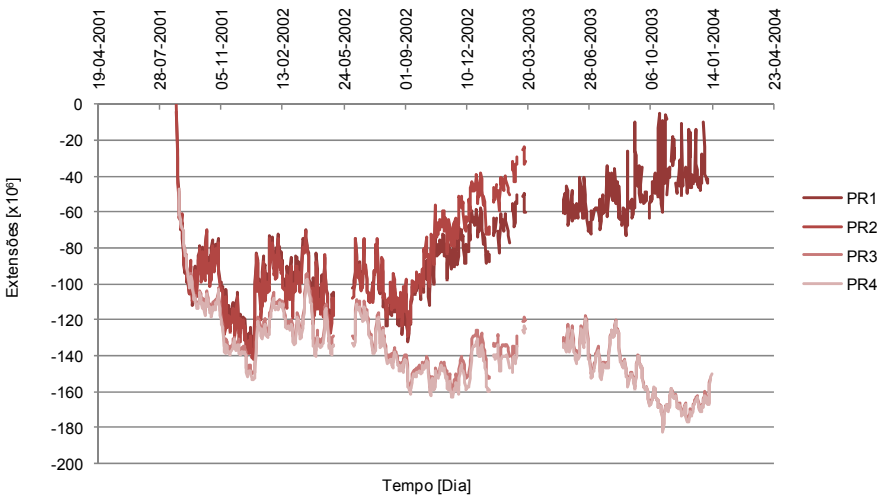


Figura 5.26 – Extensões de retracção do betão do tabuleiro medidas nos prismas PR1 a PR4.

Segundo Santos (2001) os valores da extensão de retracção de secagem medidos em prismas colocados sobre o tabuleiro (neste caso os prismas PR1 e PR2) não são completamente representativos, uma vez que ficaram sujeitos às condições atmosféricas, nomeadamente à chuva, o que não acontece com a maior parte do betão do tabuleiro, principalmente após a impermeabilização. Na Figura 5.27, retirada de Félix (2005), é possível verificar a grande influência da precipitação nos valores medidos das extensões de retracção de secagem nos prismas PR1 a PR4. Embora a influência da precipitação sobre os valores medidos nos prismas colocados no interior do caixão seja manifestamente inferior à verificada nos prismas colocados sobre o tabuleiro, a representatividade dos primeiros na retracção do betão da generalidade do tabuleiro foi ligeiramente comprometida devido ao facto de durante a construção haver entrada de água para o interior do caixão, que fez com que os prismas se encontrassem molhados por longos períodos de tempo.

Numa fase final da construção, em Janeiro de 2002, e aquando da execução dos passeios, os prismas PR1 e PR2 foram envolvidos pela betonagem do passeio central, o que compromete os resultados obtidos nesses prismas daí em diante. Assim sendo, na definição da lei de retracção ajustada para a modelação numérica optou-se por utilizar os valores obtidos nos prismas colocados no interior do tabuleiro.

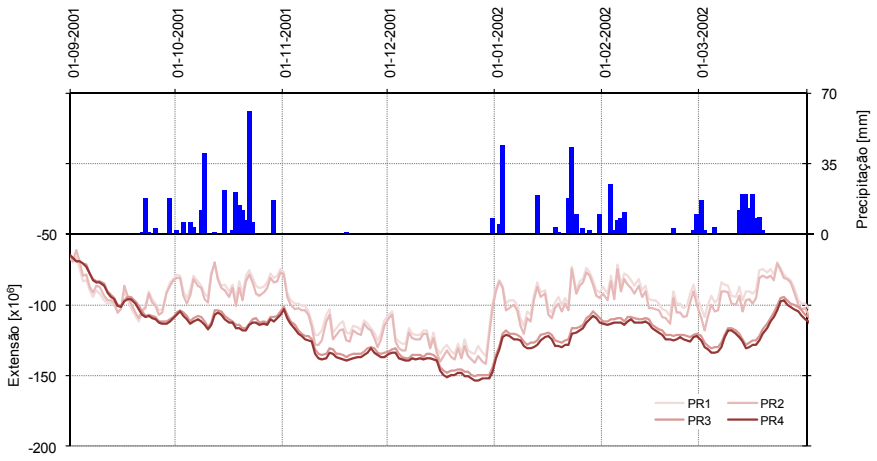


Figura 5.27 – Precipitação versus extensões de retracção de secagem nos prismas (Félix (2005)).

Na Figura 5.28 são apresentadas séries de valores das extensões de retracção de secagem obtidas por diversas formas, designadamente:

i) Medidas directamente no prisma PR3 (designada por PR3);

ii) Medidas no provete selado em obra (designada por CICCOPN).

iii) Prevista por aplicação directa da lei de retracção do CEB90 (designada por CEB90);

iv) Prevista por aplicação directa da lei de retracção do EC2 (designada por EC2);

v) Prevista por aproximação da lei de retracção do EC2 através do exposto na secção 4.2.1.4.1, utilizando o método dos mínimos quadrados (designada por EC2*);

vi) Prevista por aproximação da lei de retracção do EC2 através do exposto na secção 4.2.1.4.1, utilizando o método dos mínimos quadrados mas limitando o campo de variabilidade dos coeficientes de correcção (designada por EC2**).

Os valores da série CICCOPN só são apresentados como referência, uma vez que não foram calculados nas mesmas condições do prisma PR3. A lei de retracção do CEB90 é apresentada de forma a exemplificar a grande discrepância que pode ser observada entre diferentes códigos, neste caso entre o CEB90 e o EC2. O ajuste da lei de retracção EC2* foi os valores admitindo $f_{cm,28}$ = 57.5GPa e $C_{\varepsilon cd,0}$ = 0.160, $C_{\beta ds}$ = 0.822, $C_{\varepsilon ca,\infty}$ = 1.205 e $C_{\beta as}$ = 0.516. No entanto, apesar dos valores assim obtidos aproximarem bastante bem os obtidos nos extensómetros, a retracção do EC2 surge algo desvirtuada:

i) Uma vez que o valor $C_{\varepsilon cd,0}$ afecta o valor da extensão da retracção de secagem a tempo infinito, considerá-lo igual a 0.160 significa, de uma forma simplificada, que apenas se consideraria 16% do valor estimado pelo EC2;

ii) Adoptando um valor de 1.205 para $C_{\varepsilon ca,\infty}$ corresponde a considerar que o valor da extensão da retracção autogénea a tempo infinito seria 120% do valor estimado pelo EC2.

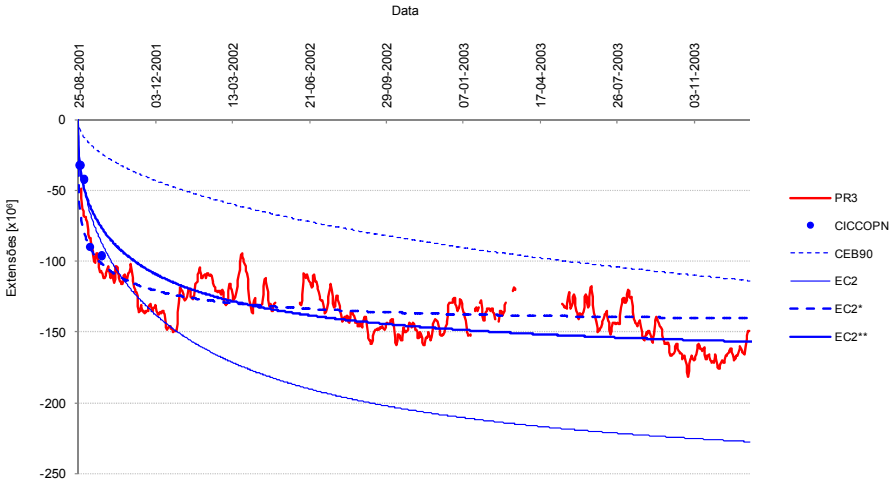


Figura 5.28 – Leis de retracção de secagem.

Na Figura 5.29 é possível comparar as componentes da extensão de retracção estimadas pelo EC2 e da extensão ajustada (EC2*), e verificar que a contribuição das respectivas componentes é completamente diferente para os dois casos.

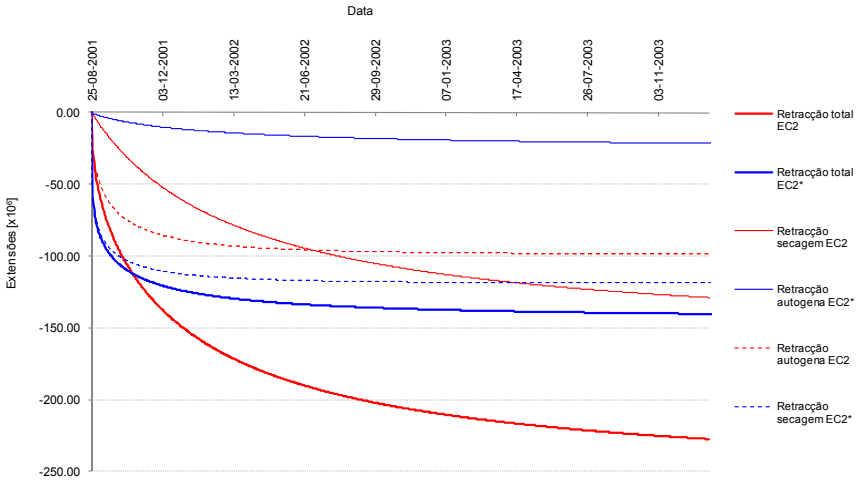


Figura 5.29 – Componentes das leis de retracção.

De forma a tentar dar algum significado físico às constantes obtidas, não desvirtuando a lei de retracção, introduziram-se algumas restrições às variações possíveis para os parâmetros de ajuste da lei. Assim, admitiu-se que a variação dos coeficientes que ajustam as formas das curvas da retracção autogénea e de secagem deverá estar contida num intervalo entre os 0% e os 25%. Da mesma forma admitiu-se que a variação dos coeficientes que ajustam o valor final das extensões da retracção autogénea e de secagem a tempo infinito deverá estar contida num intervalo entre os 0% e os 40%, sendo o valor de 40% definido pela diferença entre o último valor medido no prisma PR3 e o valor correspondente estimado pela lei de retracção do EC2 sem qualquer ajuste. Utilizando estas

restrições obteve-se a função de retracção utilizada na modelação numérica do betão do tabuleiro, designada na Figura 5.28 por EC2**, e cujos coeficientes de ajuste foram $C_{\varepsilon cd,0}$ = 0.60, $C_{\beta ds}$ = 0.750, $C_{\varepsilon ca,\infty}$ = 0.762 e $C_{\beta as}$ = 0.750.

5.5.3. Ajuste da lei de fluência do betão

Das leis de comportamento diferido, a função de fluência é a mais difícil de obter, devido ao número de variáveis intervenientes e à complexidade do historial de carregamento da obra em causa. Conforme foi referido na secção 5.5.2, foram moldados dois prismas com betão do tabuleiro para serem ensaiados de acordo com a norma E-399 (LNEC (1993)). Na Figura 5.30 são apresentadas as extensões de fluência medidas nos ensaios efectuados nos referidos prismas (Ribeiro (2001)).

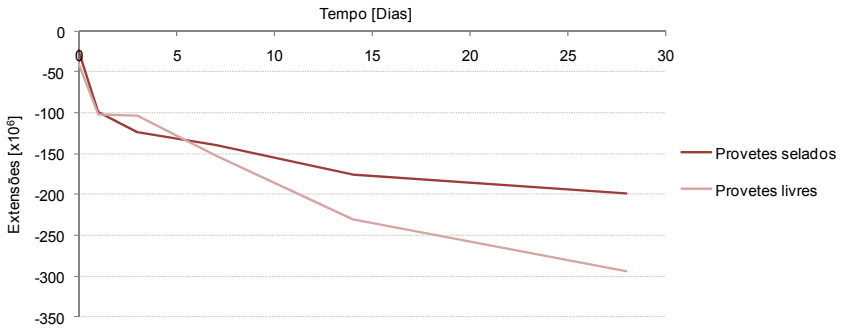


Figura 5.30 – Extensões de fluência do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente.

No prisma utilizado pelo LABEST para aferição da fluência, foi utilizado um extensómetro, conforme o procedimento utilizado nos prismas utilizados para aferição da retracção, e quando o prisma atingiu uma idade de 10.65 dias foi solicitado por uma tensão de compressão constante de 1.1MPa sendo mantido numa câmara de cura com a humidade relativa de 80%. Na Figura 5.31 são apresentadas as extensões totais medidas no referido prisma, assim como as extensões de retracção e fluência, estimadas de acordo com o exposto na secção 5.5.2.

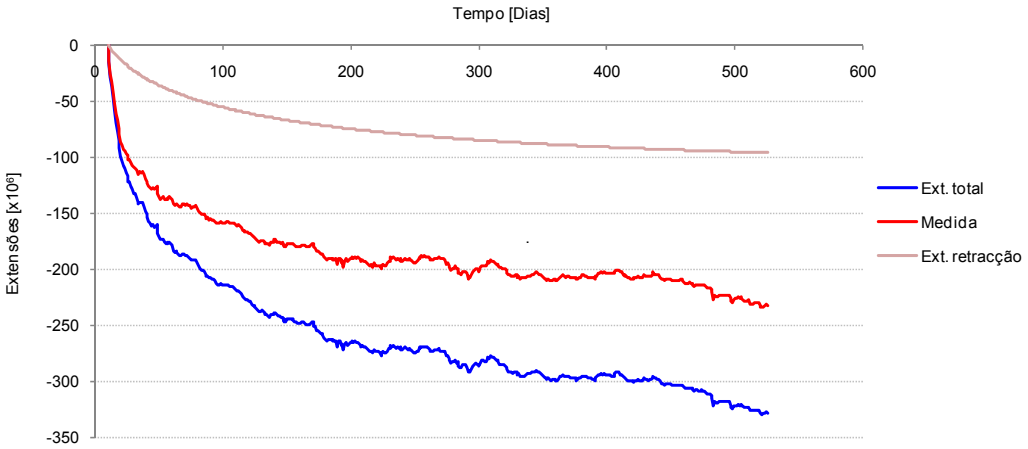


Figura 5.31 – Extensões do betão do tabuleiro obtidas experimentalmente pelo LABEST.

Para o ajuste da lei de fluência do betão do tabuleiro foram consideradas as extensões de fluência obtidas pelo LABEST, uma vez que a medição efectuada de uma forma contínua e durante um longo período de tempo. Admitindo valores de $E_{cm,28}$ = 40.1GPa, $f_{cm,28}$ = 57.5GPa e um cimento de endurecimento normal (Classe N), são apresentadas na Figura 5.32 a lei de fluência do EC2 e a correspondente lei de fluência ajustada, designadas respectivamente por EC2 e EC2*. No ajuste da lei de fluência foi utilizado o procedimento apresentado na secção 4.2.1.4.2, e obtidos para parâmetros de ajuste os valores $C\varphi_0$ = 1.673 e $C_{\beta c}$ = 0.883.

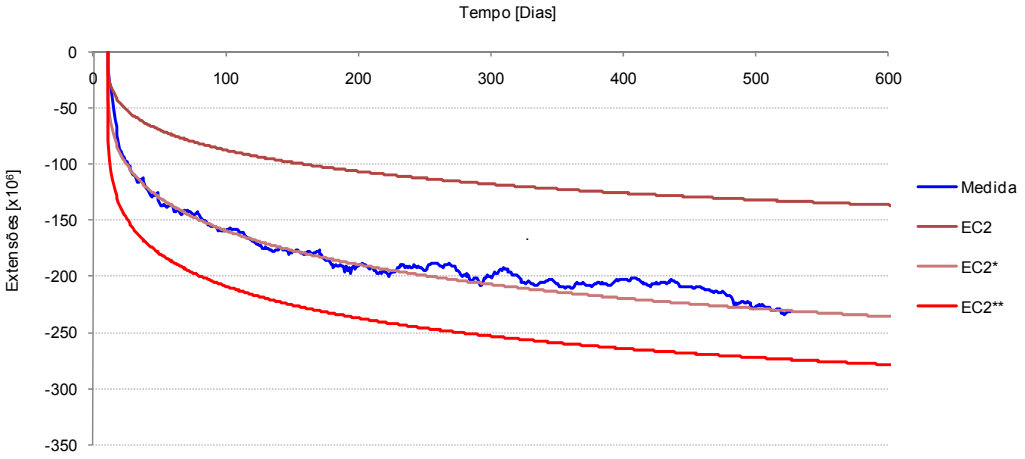


Figura 5.32 – Valores das extensões de fluência medidas e estimadas no prisma de fluência ensaiado pelo LABEST.

Após alguns ensaios de modelação numérica do faseamento construtivo do Viaduto da Corujeira concluiu-se que a lei de fluência ajustada do EC2 subavaliava ligeiramente o referido fenómeno, em comparação com os resultados obtidos através de medições efectuadas em obra, provavelmente devido ao facto de as condições termo-higrométricas no laboratório e na obra serem diferentes. Realizou-se então um estudo paramétrico, onde se variaram de forma criteriosa os parâmetros de ajuste da função de fluência referidos na secção 5.5.3, e se analisou o ajuste dos resultados obtidos numericamente às correspondentes medições em obras na globalidade das secções instrumentadas. Utilizando como parâmetros de ajuste da lei de fluência $C_{\varphi 0}$ = 1.850 e $C_{\beta c}$ = 0.650 obteve-se a lei de fluência usada na modelação numérica, designada por EC2** na Figura 5.32.

No ajuste final da lei de fluência foi dada relevância aos resultados das medições obtidas na secção S3 (ver secção 5.4), situada na aduela 1 do Tramo 3 do tabuleiro. A escolha desta secção prende-se com diversos aspectos, nomeadamente por ter sido a primeira secção instrumentada a entrar em funcionamento, por ser influenciada por diversas fases do método construtivo e pelo facto de o tramo do tabuleiro em que ela se encontra estar durante bastante tempo em consola, sendo assim externamente isostático. Desta forma, e sendo os carregamentos bem definidos, verificadas as deformações instantâneas e admitindo como pequenas tanto as perdas por relaxação do aço de pré-esforço como as transferências de tensão para as armadura passivas, a variação das extensões medidas depende maioritariamente dos efeitos diferidos do betão, nomeadamente da retracção e da fluência.

Nas Figuras 5.33 e 5.34 são representadas extensões medidas e previstas numericamente utilizando várias leis de fluência no modelo numérico, em extensómetros da secção S3 (ES3-1I, ES3-3I, ES3-1S e ES3-3S), onde se pode observar a melhoria significativa dos ajustes obtidos por intermédio da lei EC2**. Conforme se pode ver nestas figuras, a alteração dos parâmetros de ajuste da lei de fluência afecta sobretudo as extensões nas fibras inferiores da secção, o que seria de esperar pois a secção encontra-se num troço em consola pré-esforçado, e como tal as referidas fibras encontram-se sujeitas a tensões bastante superiores (em valor absoluto) às das fibras superiores. De igual forma, verifica-se que as extensões finais estimadas são influenciadas sobretudo pela sua evolução nas primeiras idades, uma vez que as curvas obtidas em idades mais avançadas são praticamente equidistantes independentemente da lei de fluência utilizada na modelação numérica.

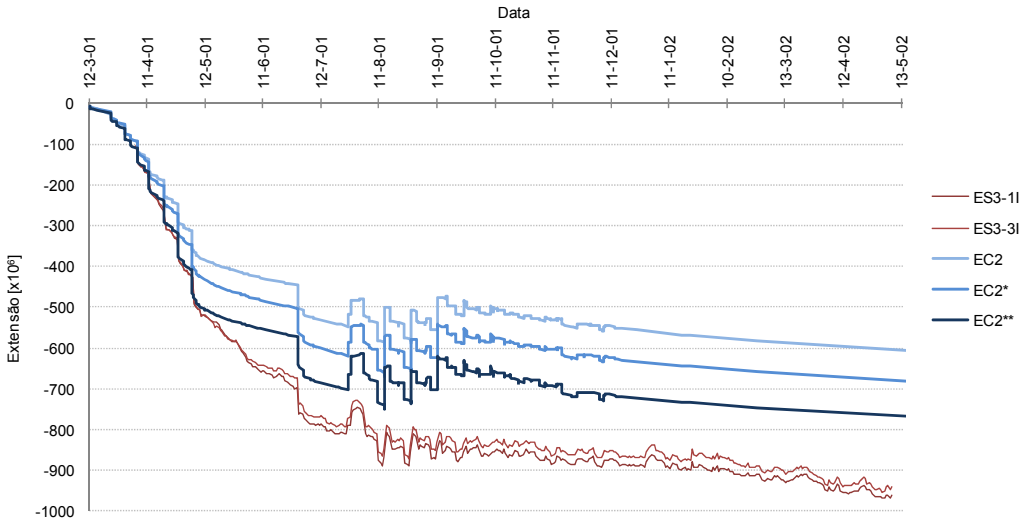


Figura 5.33 – Extensões medidas e estimadas numericamente para diversas leis de fluência nos extensómetros colocados junto ao banzo inferior da secção S3.

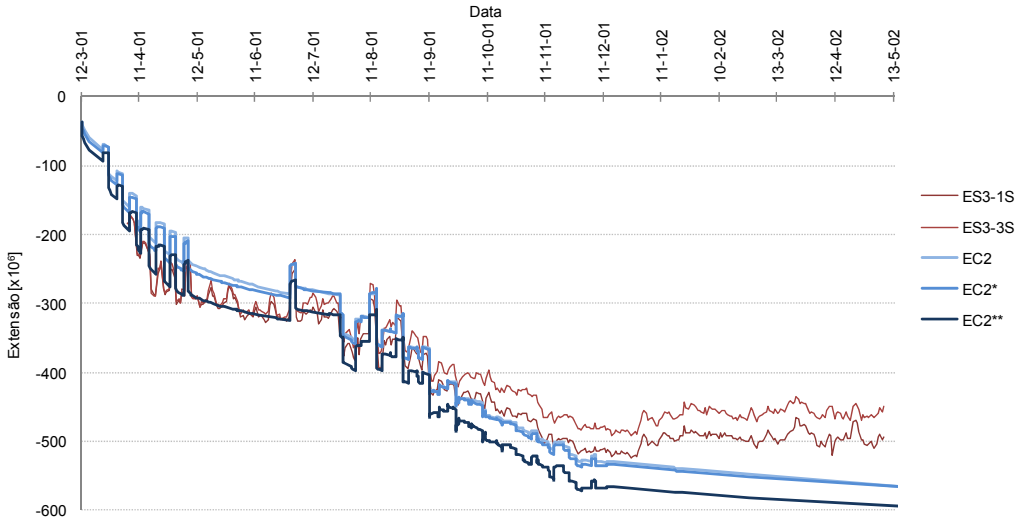


Figura 5.34 – Extensões medidas e estimadas numericamente para diversas leis de fluência nos extensómetros colocados junto ao banzo superior da secção S3.

5.6. Faseamento construtivo

O processo construtivo utilizado, nomeadamente na execução do tabuleiro, foi bastante complexo e sofreu alterações no decurso da obra. De uma forma sucinta pode dizer-se que os Tramos 1, 2, 5 e 6 foram executados com cimbre ao solo, e os Tramos 3 e 4 foram realizados através de avanços sucessivos. Em todas as técnicas de avanços sucessivos foram utilizadas aduelas betonadas *in situ* pré-esforçadas. No pré-esforço foram utilizados cabos de pré-esforço embebidos, ou barras de pré-esforço embebidas e/ou tirantes, dependendo da localização da aduela. Nas Figuras 5.35 a 5.39 está representado esquematicamente o faseamento construtivo do viaduto, que se passa a descrever:

Fase 1 - Execução dos pilares, dos encontros, do mastro até à cota superior do tabuleiro e de parte do tabuleiro (nomeadamente o tramo entre fustes do mastro, um troço do Tramo 4 do lado Este, e os Tramos 5 e 6). Seguiu-se a aplicação do pré-esforço embebido nos Tramos 5 e 6, que foram executados utilizando cimbre ao solo, tendo sido betonadas numa primeira fase a laje inferior e as almas da secção, e numa segunda fase a laje superior (ver Figura 5.35).

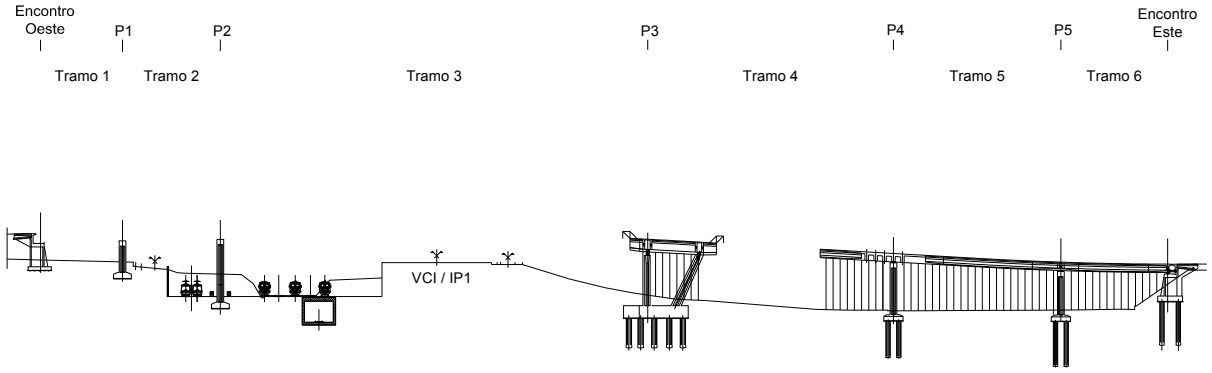


Figura 5.35 – Faseamento construtivo – Fase 1.

Fase 2 - Execução por avanços sucessivos do tabuleiro no Tramo 3 entre os tirantes e o mastro, e da metade Oeste do Tramo 4. Durante os avanços do tabuleiro procedeu-se à execução dos fustes superiores do mastro (ver Figura 5.36). O avanço dos tabuleiros apresentou o seguinte faseamento:

i) Montagem do carrinho de avanço;

ii) Betonagem de uma aduela de 4.0m de comprimento;

iii) Aplicação de cabos de pré-esforço embebido;

iv) Desmontagem e avanço do carrinho.

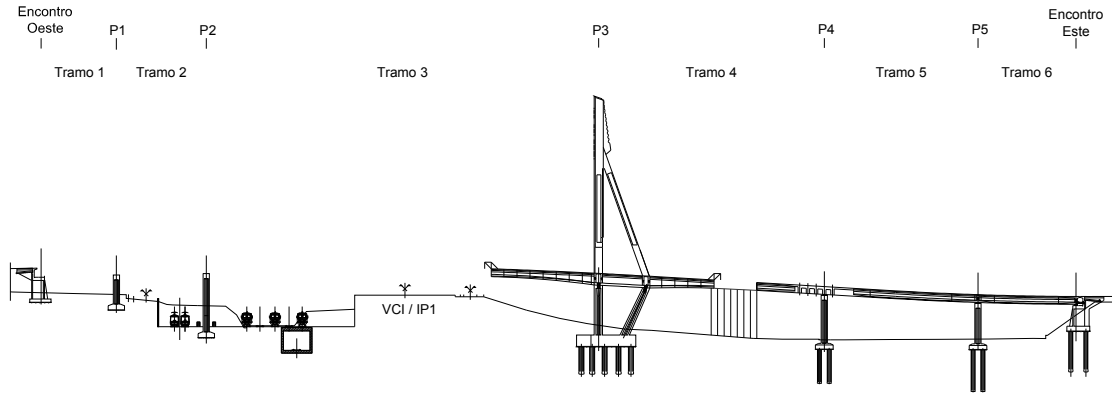


Figura 5.36 – Faseamento construtivo – Fase 2.

Fase 3 - Conclusão da betonagem do troço do tabuleiro do Tramo 4, e aplicação do respectivo pré-esforço de continuidade com os Tramos 5 e 6. Execução por avanços sucessivos do Tramo 3 na zona atirantada do tabuleiro (ver Figura 5.37), realizada da seguinte forma:

i) Montagem do carrinho de avanço;

ii) Betonagem de aduela de 4.0m de comprimento;

iii) Aplicação de barras pré-esforço embebidas;

iv) Desmontagem e avanço do carrinho de avanço;

v) Montagem do carrinho de avanço;

vi) Betonagem de aduela de 4.0m de comprimento;

vii) Montagem e pré-esforço de um tirante na extremidade livre da última aduela betonada.

Após a montagem de cada conjunto de três tirantes procedeu-se à montagem e pré-esforço de um tirante de retenção.

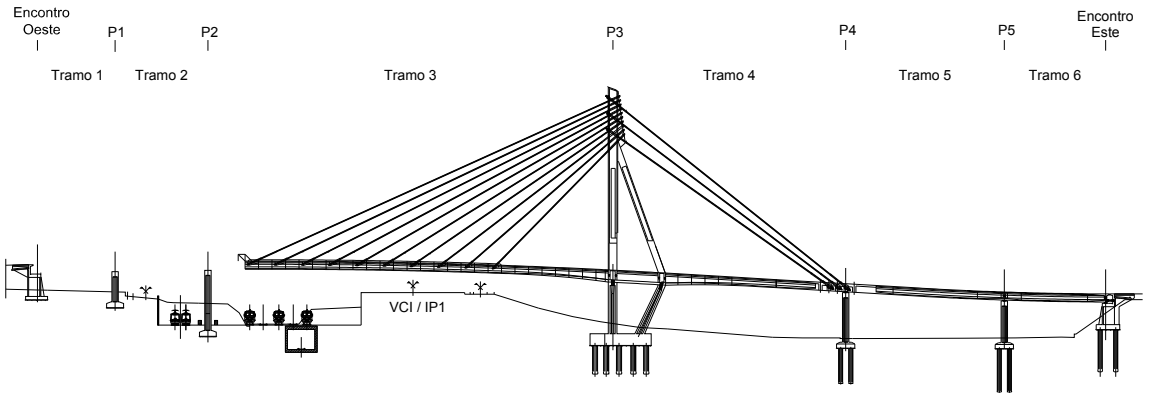


Figura 5.37 – Faseamento construtivo – Fase 3.

Fase 4 - Betonagem do Tramo 1 do tabuleiro utilizando cimbre ao solo, e aplicação do respectivo pré-esforço. Seguiu-se a betonagem do Tramo 2 do tabuleiro, também utilizando cimbre ao solo, e a aplicação do pré-esforço. A betonagem da aduela de fecho do Tramo 3 do

tabuleiro foi efectuada utilizando cofragem suspensa, seguida da aplicação do pré-esforço de continuidade entre os Tramos 1, 2 e 3 do tabuleiro (ver Figura 5.38).

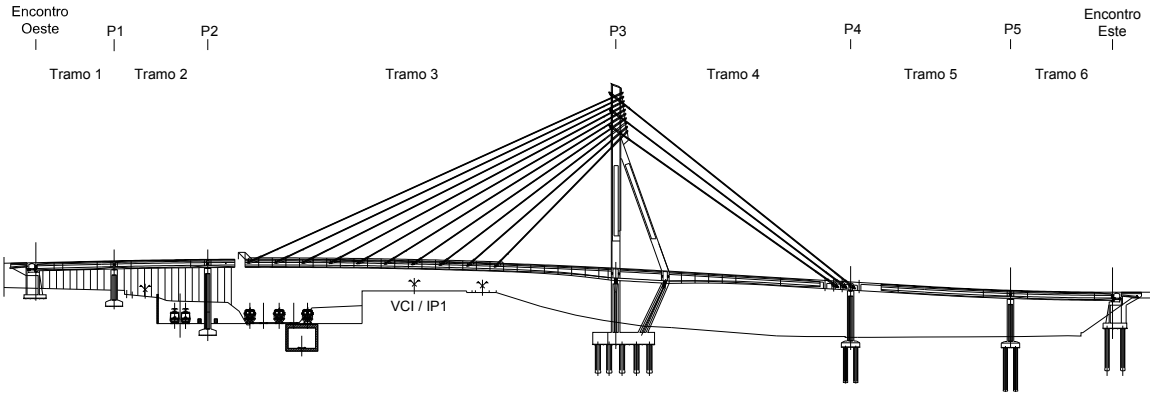


Figura 5.38 – Faseamento construtivo – Fase 4.

Na Figura 5.39 pode-se observar a Fase Final do processo construtivo do Viaduto da Corujeira, onde se procedeu à betonagem dos passeios, à pavimentação das faixas de rodagem, à colocação de guardas de segurança e aos acabamentos finais.

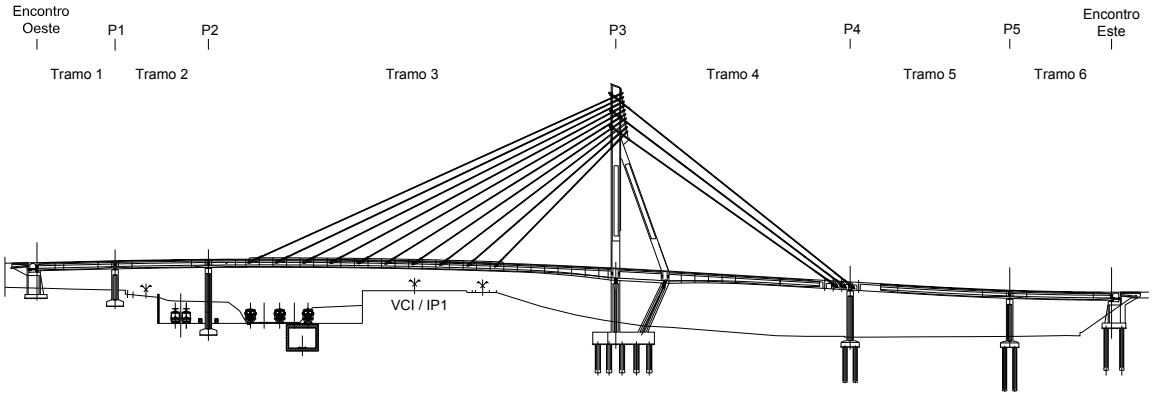


Figura 5.39 – Faseamento construtivo – Fase final.

5.7. Resultados

Nesta secção serão apresentados os valores medidos em obra durante o faseamento construtivo e as respectivas estimativas obtidas com base no programa de cálculo desenvolvido. Não estando disponíveis medições relativas a deslocamentos da estrutura, numa primeira fase serão apresentados os resultados obtidos nos extensómetros, onde cada série de valores será designada pelo nome do extensómetro e será representada em tons de vermelho; a correspondente série de valores estimados será designada pelo nome do extensómetro seguido de "*", sendo representada em tons de azul.

Uma vez que a aquisição de dados nos extensómetros só foi iniciada quando o betão das diferentes secções já tinha alguma idade, as séries de valores medidos foram deslocadas no tempo, para coincidir cronologicamente com as correspondentes séries previstas numericamente.

Nas Figuras 5.40 a 5.42 são apresentadas as extensões medidas na secção S3, estando assinalados alguns instantes importantes no faseamento construtivo, utilizando uma terminologia que será também adoptada na apresentação dos restantes resultados desta secção:

i) Instante A (07.05.2001) – Final da construção de aduelas em avanços sucessivos com pré-esforço interior;

ii) Instante B (01.06.2001) - Pré-esforço dos Tramos 5 e 6;

iii) Instante C (20.07.2001) - Fecho do Tramo 4 e início da construção de aduelas em avanços sucessivos com pré-esforço exterior (Tirantes);

iv) Instante D (13.12.2001) – Fecho do Tramo 3.

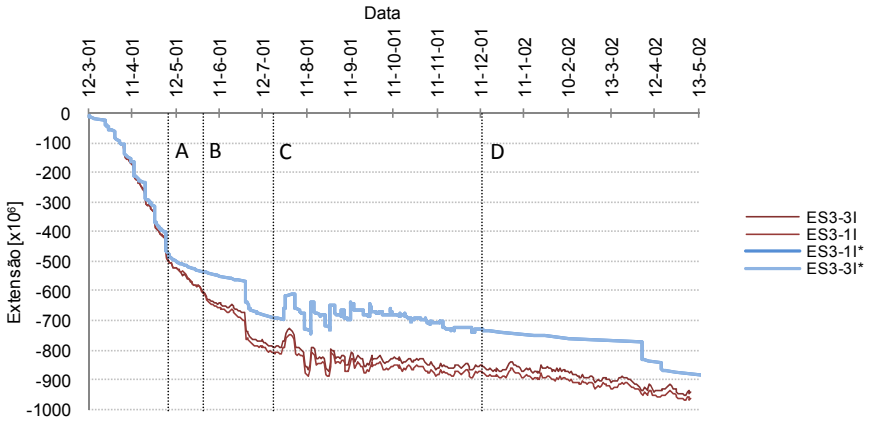


Figura 5.40 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3.

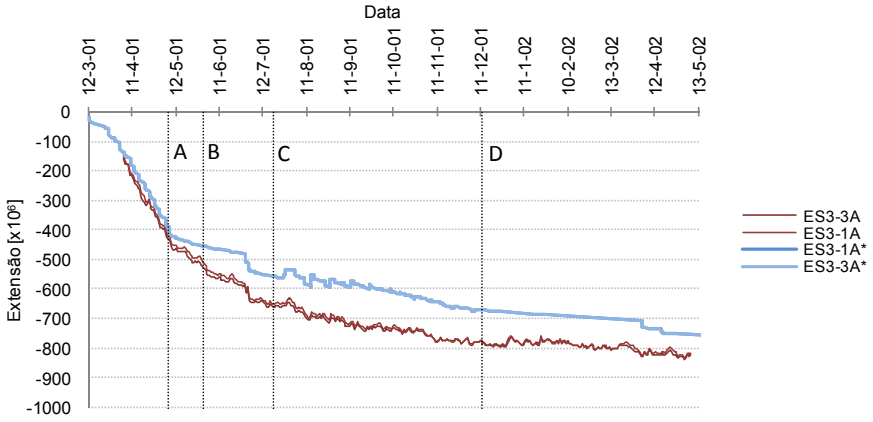


Figura 5.41 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros intermédios da secção S3.

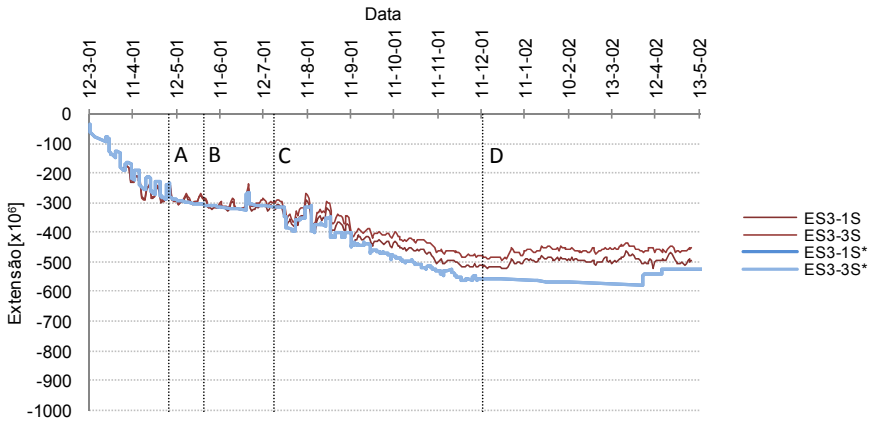


Figura 5.42 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3.

De uma forma geral as previsões obtidas numericamente acompanham de uma forma bastante satisfatória os valores das extensões medidas. No entanto, é possível observar na Figura 5.40 que a partir do instante A existe um desfasamento entre os valores medidos e estimados da extensão nas fibras superiores: durante o período de tempo entre os instantes A e B a frente da obra dedicava-se à execução do pilar P3 e dos Tramos 5 e 6, e não há registo de operações sobre o Tramo 3 que se encontra em consola. Nas Figuras 5.41 e 5.42 observa-se que existem variações de extensão nas fibras intermédias e inferiores, que não se encontram modeladas por falta de informação. Após o instante B as séries de valores medidos e previstos numericamente, embora com amplitudes diferentes, apresentam evoluções com tendências muito semelhantes.

Caso existisse na altura da construção do viaduto um modelo numérico associado ao sistema de monitorização implementado, teriam sido detectadas as referidas diferenças e seria possível averiguar a causa das mesmas, procedendo à correcção do modelo numérico ou à resolução duma eventual anomalia.

Os resultados obtidos para as secções S3 e S4 são bastante distintos apesar das duas secções se encontram na primeira aduela dos tramos em que se inserem, e sendo igual o número de cabos de pré-esforço interior que passa nessas secções. No entanto, no Tramo 4 existem metade das aduelas construídas em consola com recurso a pré-esforço interior das correspondentes ao Tramo 3, pelo que no topo de cada uma das aduelas do Tramo 4 terminam quatro cabos de pré-esforço interior, enquanto nas aduelas do Tramo 3 terminam dois cabos de pré-esforço. Nas Figuras 5.43 e 5.44 são apresentadas as extensões medidas e estimadas numericamente na secção S4. À semelhança do verificado com os resultados da secção S3 na secção S4, os valores estimados acompanham de uma forma bastante satisfatória os valores medidos, mas a partir do instante A existe um ligeiro desfasamento entre os valores medidos e estimados. Na Figura 5.44 é visível no instante A um incremento da extensão prevista numericamente nos extensómetros inferiores que não tem correspondência com os valores medidos; também se observa que existe um incremento de extensão medido nos referidos extensómetros no instante B, que parece ter sido modelado numericamente cerca de 3 semanas depois. As diferenças detectadas serão, supostamente, devidas a erros de

registo das operações efectuadas; no entanto, e na falta de melhor informação, não foi possível rectificar o modelo numérico, como teria sido desejável.

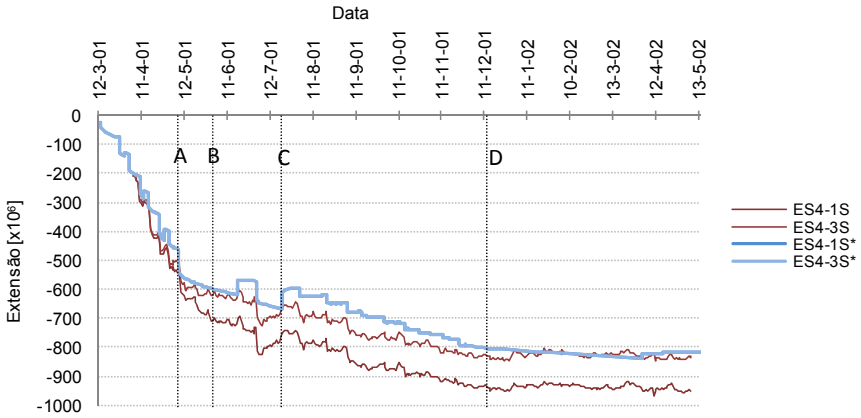


Figura 5.43 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S4.

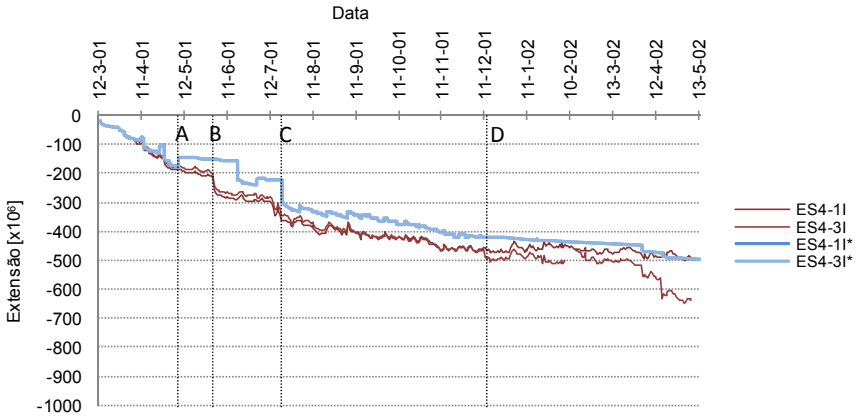


Figura 5.44 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S4.

A secção S5 pertence ao Tramo 5, que construído com utilização de cimbre ao solo não é significativamente influenciado pelo processo construtivo utilizado para o resto do tabuleiro. Desta forma é pequena a variação das extensões aí medidas, conforme se pode observar nas Figuras 5.45 e 5.46, e resulta sobretudo dos efeitos diferidos. Da observação destas figuras também se pode concluir que a concordância entre os valores medidos e as previsões da modelação numérica é apreciável.

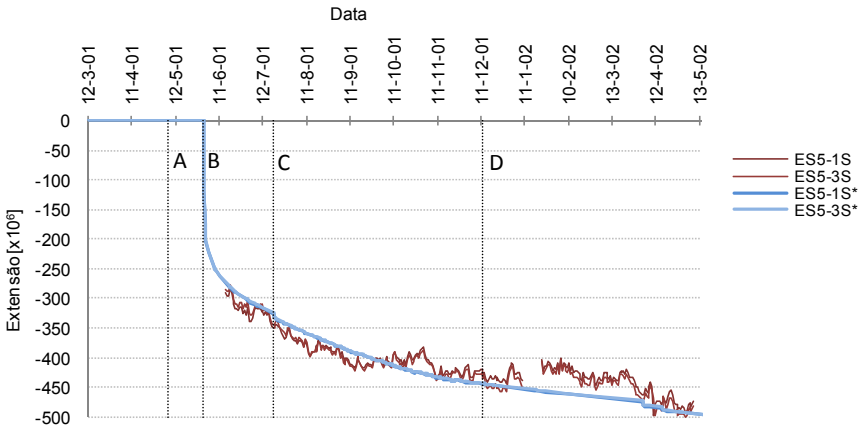


Figura 5.45 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5.

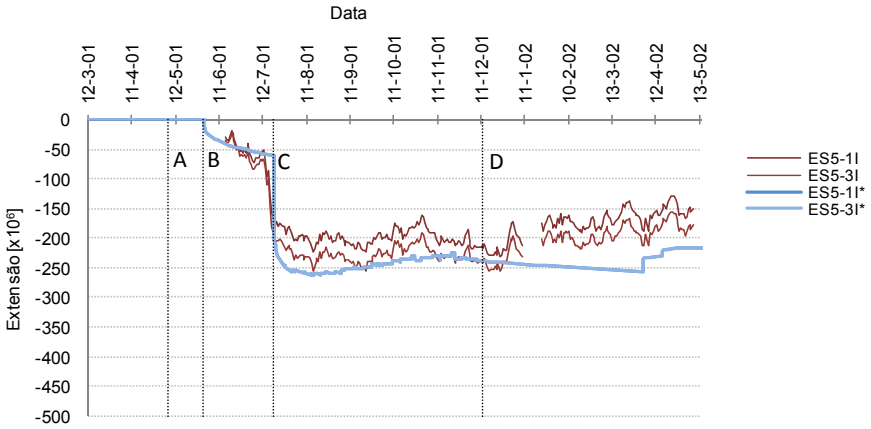


Figura 5.46 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5.

Conforme se pode observar na Figura 5.47, a secção S2 está instalada na aduela 13 do Tramo 3, e tem a particularidade de estar muito próxima da zona de ancoragem do tirante T3. Este facto pode justificar as diferenças entre os valores das extensões medidas e das estimadas numericamente, identificável nas Figuras 5.48 a 5.49, devido à clara insuficiência do elemento de viga de Timoshenko para simulação deste claro efeito local, particularmente aquando da aplicação de forças no tirante T3. A análise das Figuras 5.48 e 5.49 mostra ainda que as operações de pré-esforço dos tirantes têm grande influência nas variações de extensão medidas na secção, principalmente nas fibras inferiores, onde se verificam variações na ordem dos 200×10^{-6}, correspondendo a cerca de 80% da extensão instalada. Idêntica análise realizada na secção S3 permitiu encontrar variações de extensão nas fibras inferiores da ordem de 100×10^{-6}, correspondendo apenas a cerca de 15% da extensão instalada.

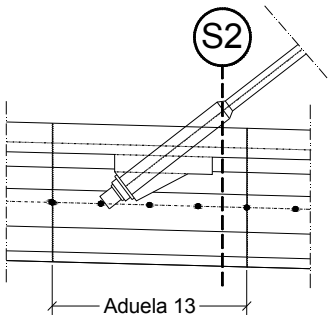


Figura 5.47 – Localização da secção S2.

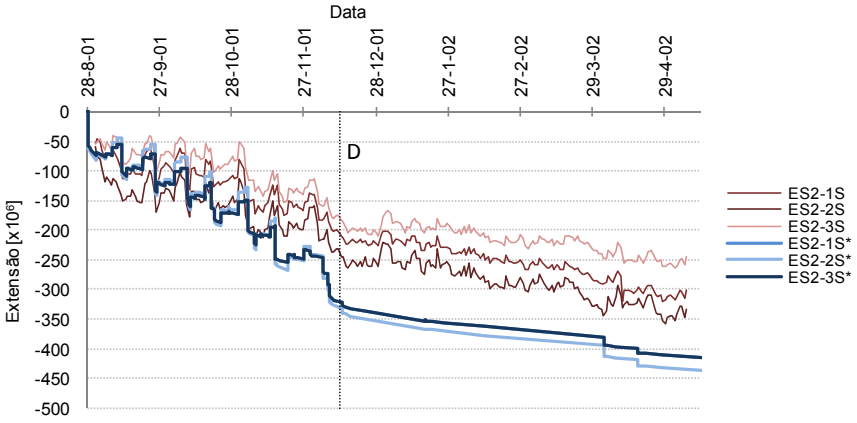


Figura 5.48 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S2.

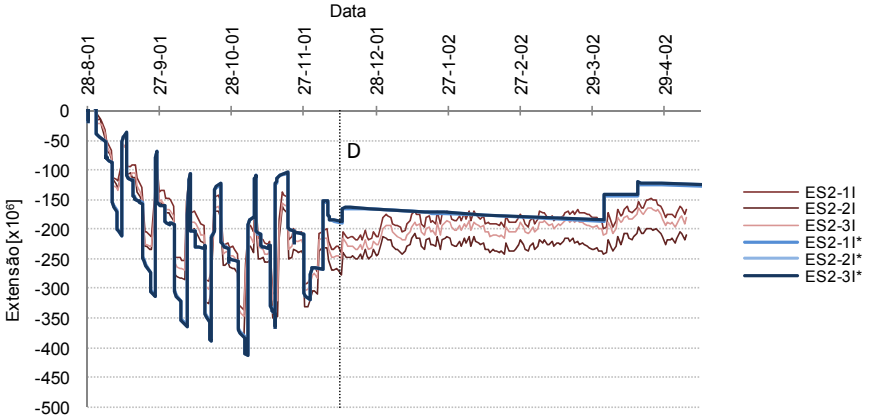


Figura 5.49 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S2.

A secção S1 situa-se na aduela 24 do Tramo 3 do tabuleiro. Uma vez que este Tramo possui 27 aduelas, foi, portanto, das últimas a ser executada. Assim sendo, as séries de valores medidas são mais curtas do que as apresentadas anteriormente, e as variações aí observadas são menores, como seria de esperar. As séries de valores medidos e estimados numericamente na secção S1 são apresentadas nas Figuras 5.50 e 5.51. Da análise destes gráficos conclui-se que a aproximação entre

os resultados estimados numericamente e medidos em obra foi muito razoável. Conclui-se ainda que devido à inclinação dos tirantes aplicados após a execução da secção S1, nomeadamente os T9 e T10, esta secção não sofre variações de extensão tão elevadas quanto a secção S2 aquando da aplicação do pré-esforço dos referidos tirantes.

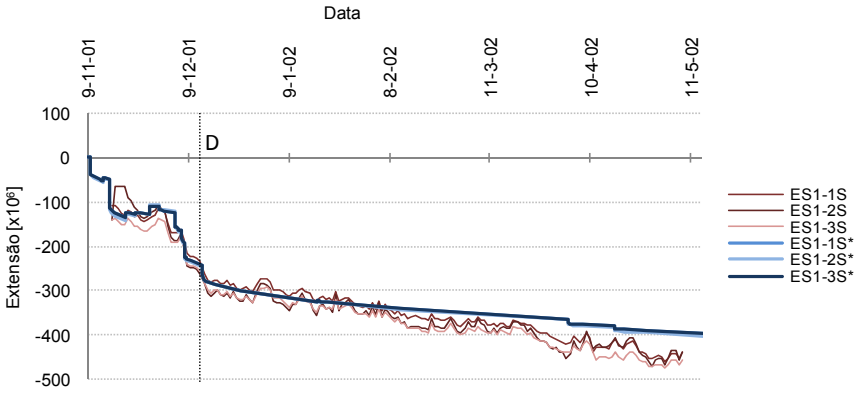


Figura 5.50 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1.

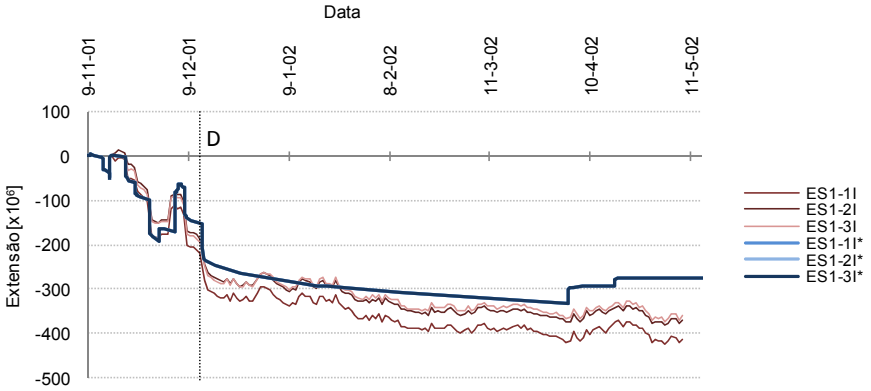


Figura 5.51 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1.

Na Figura 5.52 são apresentados os valores das extensões medidas e previstas numericamente na secção S7, situada no fuste oblíquo do mastro, imediatamente acima do tabuleiro. Conforme referido na secção 5.4, a certa altura houve uma perda de sinal do extensómetro ES7-2 e este foi substituído, razão pela qual na Figura 5.52 existem as séries ES7-2a e ES7-2b, correspondentes às extensões medidas no extensómetro original e no substituto, respectivamente. Uma das razões equacionadas para a perda de sinal do extensómetro ES7 (Félix (2005)) foi a ocorrência de fendilhação no betão, uma vez que os extensómetros de resistência utilizados não são adequados à medição de deformações em secções fendilhadas. Nestes extensómetros a deformação do betão é imposta à grelha do extensómetro por aderência ao longo de todo o material compósito que o envolve, pelo que a ocorrência de fendilhação no betão conduz a que localmente a extensão seja de tal modo elevada que inutiliza o extensómetro.

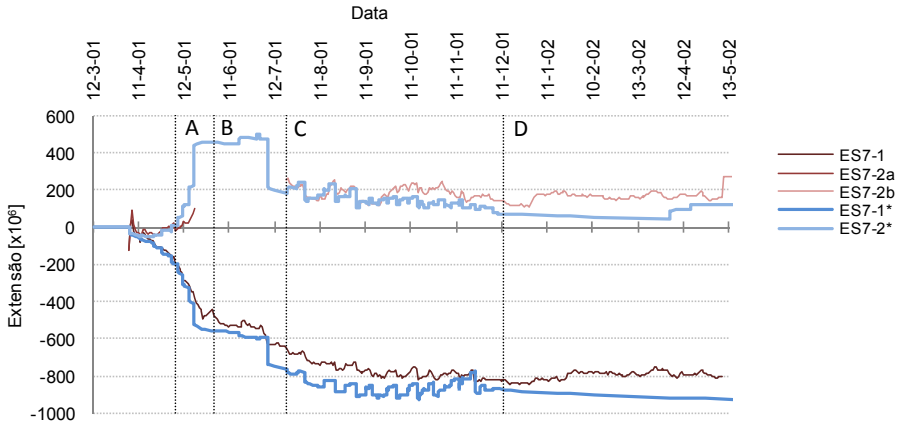


Figura 5.52 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7.

De forma a clarificar a provável ocorrência de fendilhação nas imediações do extensómetro ES7, analisaram-se as tensões previstas no betão do fuste inclinado (com recurso a uma lei constitutiva linear elástica) tendo-se verificado que estas ultrapassavam o valor da tensão resistente à tracção. Assim sendo, substituiu-se a lei constitutiva utilizada por uma lei não-linear, conforme a apresentada em 4.4.2, de forma a tornar o modelo numérico mais adequado à realidade. Com a utilização deste modelo numérico numa fase anterior à execução do viaduto teria sido possível prever a fendilhação do fuste do mastro e proceder à alteração do processo construtivo.

Na Figura 5.53 são apresentadas as extensões medidas no extensómetro ES7-2, designadas por séries ES7-2a e ES7-2b, bem como as correspondentes previsões numéricas das extensões totais e mecânicas para o mesmo extensómetro, respectivamente as séries ES7-2* e ES7-2.Mec.. As extensões mecânicas são apresentadas pois, conforme referido na secção 4.3, devido a fenómenos como a fluência, a retracção e a maturação, a análise das extensões totais de uma fibra de betão não é suficiente para aferir o estado de tensão da mesma. Na mesma figura são ainda apresentadas as estimativas das tensões instaladas no betão na posição do extensómetro ES7-2, através das séries Tensões e Tensões*, sendo que a primeira foi obtida utilizando a lei constitutiva inicial (elástica linear) e a segunda foi obtida utilizando a lei constitutiva não-linear (fissuração do betão em tracção). De salientar que os resultados da modelação numérica apresentados para a secção S7 foram sempre obtidos através do modelo não-linear para o betão, tendo-se apresentado neste caso o valor da tensão obtido através do modelo elástico de forma a evidenciar a enorme diferença em termos de resultados finais. Da comparação das duas séries de tensões apresentadas na Figura 5.53 é possível identificar que os efeitos da fissuração do betão se fazem sentir não só no valor das tensões registadas como também na diminuição do módulo de elasticidade secante do material. Na Figura 5.54 são apresentadas os gráficos tensão/extensão total estimados numericamente para o betão na posição do extensómetro ES7-2 da secção S7 utilizando para o betão o modelo elástico (série Tensões) e o não-linear (série Tensões*), evidenciando-se uma vez mais a enorme diferença de resultados obtidos com os referidos modelo.

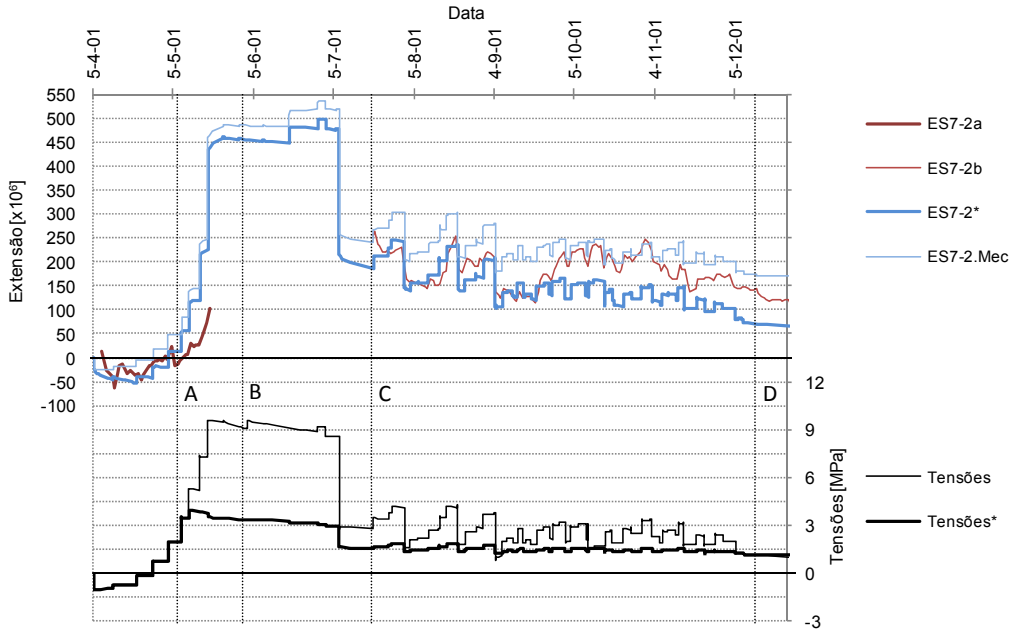


Figura 5.53 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros e tensões totais estimadas numericamente na posição do extensómetro ES7-2 da secção S7.

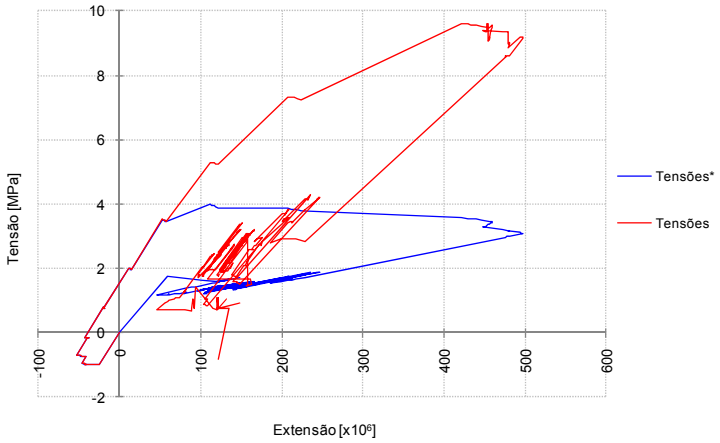


Figura 5.54 – Gráficos tensão/extensão estimados numericamente para o betão na posição do extensómetro ES7-2 da secção S7 utilizando um modelo elástico e um modelo não-linear.

Nas Figura 5.55 são apresentados os valores das extensões medidas e previstas numericamente na secção S6, situada no fuste vertical do mastro, imediatamente acima do tabuleiro. Da observação da referida figura constata-se que numa fase inicial, durante a construção do mastro, existe uma diferença considerável, que tem repercussões na diferença final entre as extensões medidas e as estimadas numericamente. Uma vez que a secção instrumentada se encontra no fuste vertical do mastro seria de esperar que até à união dos dois fustes a extensão medida nos extensómetros ES6-1 e ES6-2 fossem semelhantes. No entanto, o progressivo afastamento das correspondentes medições a partir do início de Junho de 2001 sugere a introdução de momentos flectores na secção instrumentada. Uma vez que este acontecimento é coincidente com a fissuração do fuste oblíquo do pilar inclinado, supõe-se que os momentos flectores introduzidos tenham sido provocados pelo

escoramento do fuste oblíquo do mastro. Dado que não há informação suficiente para a modelação do referido escoramento, não foi possível modelá-lo e assim refinar o modelo numérico. No entanto, o modelo numérico serviu para detectar e identificar as ocorrências verificadas.

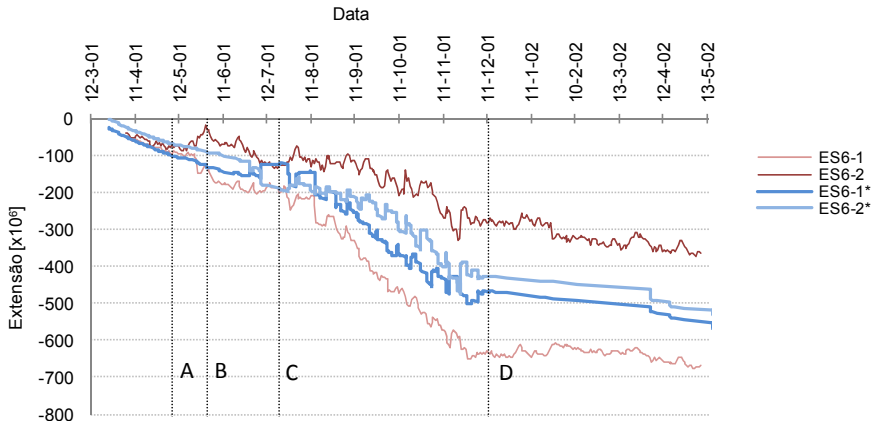


Figura 5.55 – Extensões totais medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6.

Nas Figuras 5.56 e 5.57 são apresentados os valores medidos e previstos numericamente para as inclinações nas secções onde se encontram os inclinómetros IE1 e IE2 entre 7 de Agosto de 2001 e 16 de Janeiro de 2002. Na Figura 5.56 as séries IE1-x e IE1-x* representam, respectivamente, os valores da inclinação medidos e estimados numericamente no inclinómetro IE1, enquanto na Figura 5.57 as séries IE2-x e IE2-x* representam, respectivamente, os valores da inclinação medidos e estimados numericamente no inclinómetro IE2. A concordância entre os valores medidos e modelados numericamente é bastante elevada, com excepção do intervalo de tempo assinalado nos gráficos através de uma seta. No referido período existem medições que não têm correspondência em termos de operações modeladas, resultando uma translação da série dos valores numéricos em relação aos valores medidos. Apesar de, através da informação disponível, não se ter identificado a possível operação responsável pelos referidos desvios, aquela não teve grande influência nos resultados finais, uma vez que parece ter sido temporária. Esta diferença seria facilmente detectável através de um sistema integrado de monitorização, e permitiria à fiscalização, ao dono de obra ou ao empreiteiro tomar imediatamente as medidas necessárias para identificar a sua origem, e caso fosse necessário proceder a eventuais reparações ou correcções.

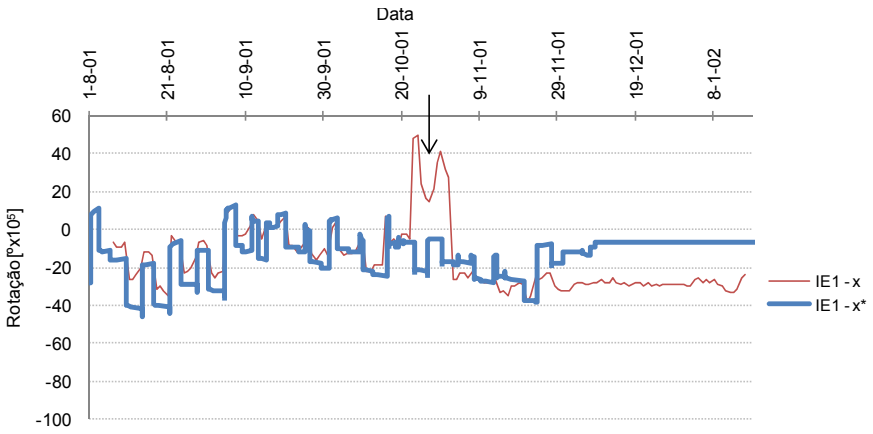


Figura 5.56 – Rotações no inclinómetro IE1.

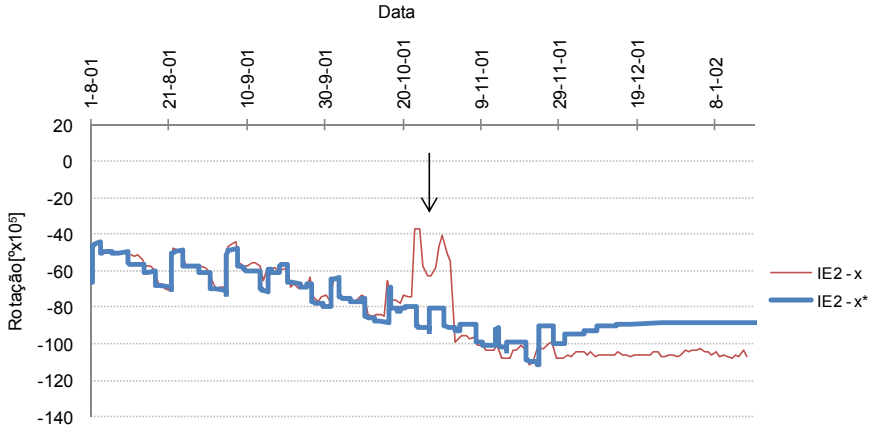


Figura 5.57 – Rotações no inclinómetro IE2.

Uma vez que nos tirantes de suspensão e de retenção não foram colocados extensómetros ou outro qualquer dispositivo de medição de forma permanente, a medição das tensões neles instaladas foram efectuadas pontualmente, com recurso a ensaios de vibração ambiental (Cunha e Caetano (2001)), e com recurso a testes *lift-off* realizados pela empresa responsável pela aplicação do pré-esforço. Nos testes de *lift-off* os esforços instalados num tirante são estimados através do valor da pressão necessária no mecanismo hidráulico de tensionamento, de forma a anular os esforços no dispositivo de amarração. Os resultados dos ensaios de vibração ambiental (VA) são apresentados no Quadro 5.5 e os dos testes *lift-off* (LO) no Quadro 5.6.

Quadro 5.5 – Esforços medidos nos tirantes com base em ensaios de vibração.

	Esforços medidos por ensaios de vibração [kN]															
Data	TR1N.VA	TR1S.VA	TR2N.VA	TR2S.VA	TR3N.VA	TR3S.VA	T1.VA	T2.VA	T3.VA	T4.VA	T5.VA	T6.VA	T7.VA	T8.VA	T9.VA	T10.VA
09-08-2001 12:00	1843	1928	-	-	-	-	2277	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13-12-2001 12:00	6678	6480	6221	6221	6377	6074	1300	2063	2712	3835	4740	4699	4527	4555	5636	2099
16-05-2002 12:00	-	-	7505	7505	-	-	2166	-	-	-	-	4998	-	-	-	4922
17-05-2002 16:00	-	-	7731	7505	-	-	2166	-	-	-	-	5150	-	-	-	4922
17-05-2002 17:00	-	-	7731	7731	-	-	2353	-	-	-	-	5305	-	-	-	4922
03-04-2003 12:00	8037	8037	7617	7617	7778	7539	2321	3019	3724	4776	5441	5150	4605	5076	5144	4723

Quadro 5.6 – Esforços medidos nos tirantes com base em testes *lift-off*.

	Esforços medidos por "lift of" [kN]															
Data	TR1N.LO	TR1S.LO	TR2N.LO	TR2S.LO	TR3N.LO	TR3S.LO	T1.LO	T2.LO	T3.LO	T4.LO	T5.LO	T6.LO	T7.LO	T8.LO	T9.LO	T10.LO
26-07-2001 12:00							745									
27-07-2001 12:00							1486									
01-08-2001 12:00	1566	1506					1591									
07-08-2001 16:30	1690	1582														
13-08-2001 20:30							2813									
14-08-2001 09:00								2930								
14-08-2001 21:30	1700	1772					1655									
16-08-2001 19:00							1689									
21-08-2001 09:30	1735	1957														
21-08-2001 15:30	3513	3734														
22-08-2001 12:00							2077	3418								
28-08-2001 12:00									3433							
04-09-2001 14:00	3761	4087														
04-09-2001 23:00	5797	5834														
05-09-2001 09:00							1889									
05-09-2001 09:00							2206									
11-09-2001 12:00										4002						
15-09-2001 12:00			1210	1193												
18-09-2001 12:00			1493	1512												
01-10-2001 09:00			2048	2078												
01-10-2001 18:30			3368	3360												
09-10-2001 12:00												4313				
19-10-2001 12:00													3662			
20-10-2001 12:00													4291			
03-11-2001 12:00														4365		
26-10-2001 12:00					1453	1477										
30-10-2001 16:00	6349	6348	6599	6603			1879	2701	3526	4369	5212	5232	4889			
30-10-2001 16:00											5616	5618	5317			
12-11-2001 09:00					2076	2154										
12-11-2001 16:30					3338	3308										
17-01-2002 14:00	7098	6891	7051	7059	6846	6851	1711	2104	2773	3993	4695	4866	4533	4475	6105	2602

No Quadro 5.7 é apresentado um resumo com toda a informação disponível acerca dos esforços aplicados nos tirantes.

Quadro 5.7 – Esforços aplicados nos tirantes.

	Esforços aplicados [kN]															
Data	TR1N	TR1S	TR2N	TR2S	TR3N	TR3S	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
26-07-2001 12:00							750									
27-07-2001 12:00							1500									
01-08-2001 12:00	1650	1650														
14-08-2001 09:00								3000								
21-08-2001 15:30	3591	3591														
28-08-2001 12:00									3500							
04-09-2001 14:00	5832	5832														
05-09-2001 09:00							2265									
11-09-2001 12:00										4000						
15-09-2001 12:00			1106.5	1106.5												
18-09-2001 12:00			1475	1475												
25-09-2001 12:00											4300					
01-10-2001 18:00			3365	3365												
09-10-2001 12:00												4300				
10-10-2001 12:00			5688	5688												
19-10-2001 12:00													3225			
20-10-2001 12:00													4300			
26-10-2001 12:00					1475	1475										
03-11-2001 12:00														4300		
12-11-2001 12:00					3177	3177										
15-11-2001 16:00															5500	
23-11-2001 12:00					6323	6323										
05-12-2001 12:00																**3000**
19-05-2003 12:00							500	500	500							

Nas Figuras 5.58 a 5.67 são apresentadas as tensões estimadas numericamente e os valores medidos pontualmente nos tirantes T1 a T10. Nas referidas figuras surgem representadas 3 séries de valores de tensões: uma série contínua com o nome do tirante seguido de "*", e que representa os valores obtidos através da modelação numérica, e duas séries discretas que representam os valores medidos em obra, sendo que a série com o nome do tirante seguida de "LO" representa as medições

por *lift-off* e a série com nome do tirante seguida de "VA" representa as medições por ensaios de vibração ambiental.

Nas Figura 5.58 a 5.61 pode-se observar que a concordância dos valores medidos e previstos numericamente nos tirantes T1 a T4 é bastante assinalável ao longo de todo o processo construtivo; no entanto após o final da obra notam-se algumas discrepâncias, à semelhança do que acontece nos restantes tirantes, que se supõe estarem associadas a operações de re-tensionamento não modeladas por falta de informação nesse sentido. De facto, ao contrário do que sucede com as operações de tensionamento iniciais, em que esteve disponível a informação relevante, nas operações de re-tensionamento dos tirantes a informação documental é bastante reduzida, ou mesmo inexistente. Uma vez que os referidos tirantes foram os primeiros a ser instalados, foram sujeitos a uma maior influência do processo construtivo, e consequentemente a uma maior variação de tensões do que os restantes tirantes, pelo que é assinalável a concordância obtida.

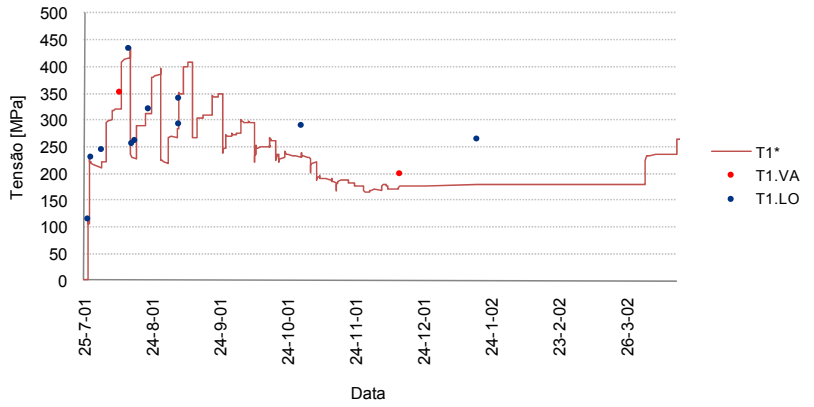


Figura 5.58 – Tensão no tirante T1.

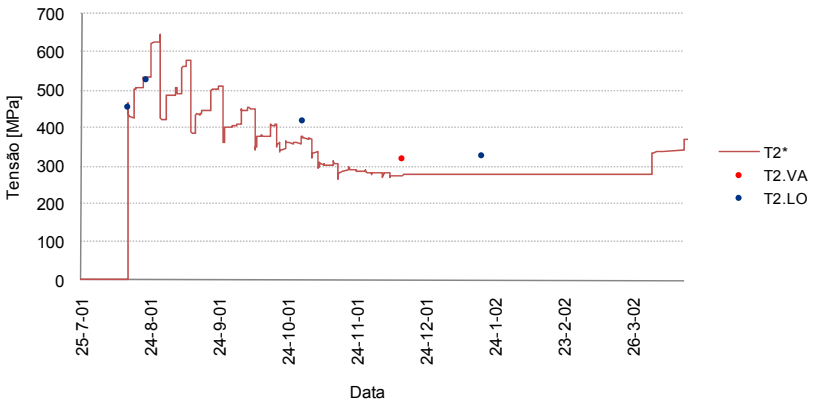


Figura 5.59 – Tensão no tirante T2.

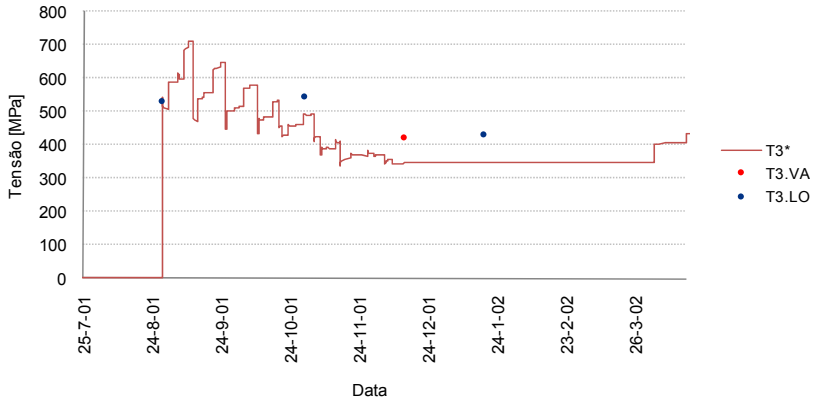


Figura 5.60 – Tensão no tirante T3.

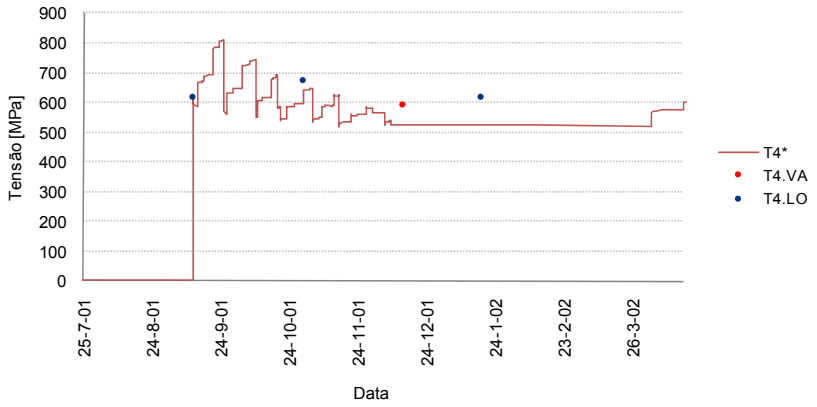


Figura 5.61 – Tensão no tirante T4.

Da análise das Figuras 5.62 e 5.63 constatam-se algumas diferenças assinaláveis entre as séries de valores de tensões estimadas para os tirantes T5 e T6 e os valores medidos por *lift-off* em 30 de Outubro de 2001, principalmente no tirante T5. Mais uma vez tudo indica que a razão da diferença encontrada seja a falta de informação relativa a operações de re-tensionamento de tirantes.

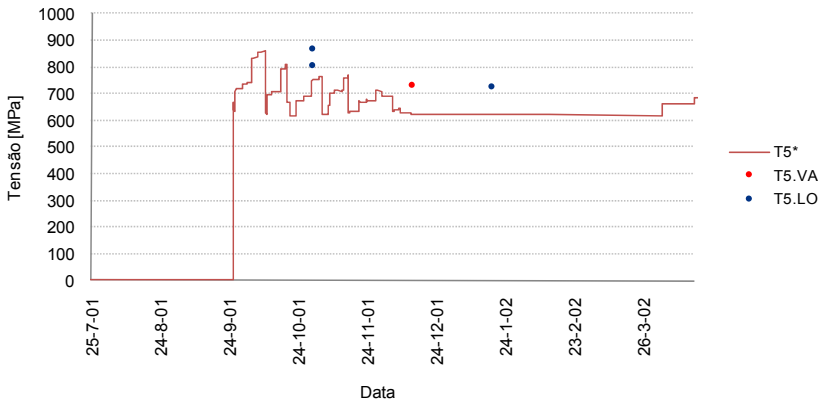


Figura 5.62 – Tensão no tirante T5.

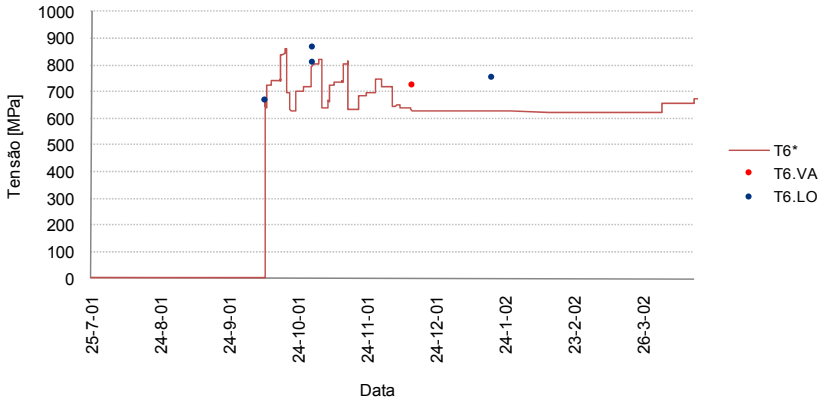


Figura 5.63 – Tensão no tirante T6.

Da análise das Figuras 5.64 a 5.67 constata-se que existe uma boa concordância entre os valores das tensões medidos e calculados numericamente nos tirantes T7 a T10, sendo que à semelhança do que aconteceu nos restantes tirantes as maiores diferenças ocorrem após o término do processo construtivo. Existe ainda uma discrepância bastante relevante nos valores relativos ao tirante T10, nomeadamente aquando da medição através de ensaios de vibração ambiental de 13 de Dezembro de 2001, embora não tenha sido possível identificar a respectiva origem.

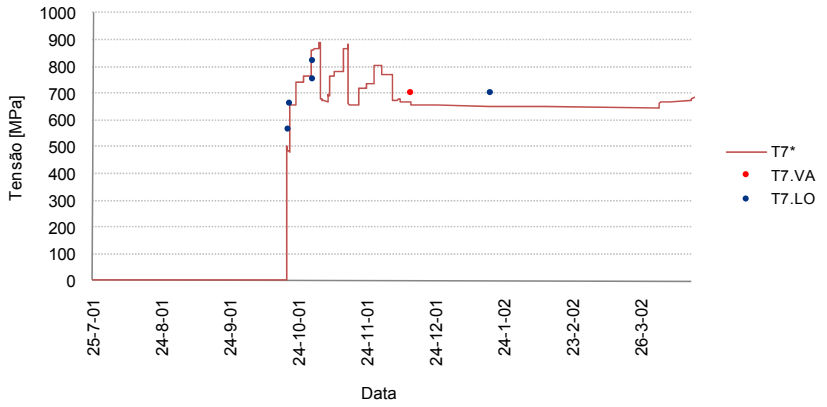


Figura 5.64 – Tensão no tirante T7.

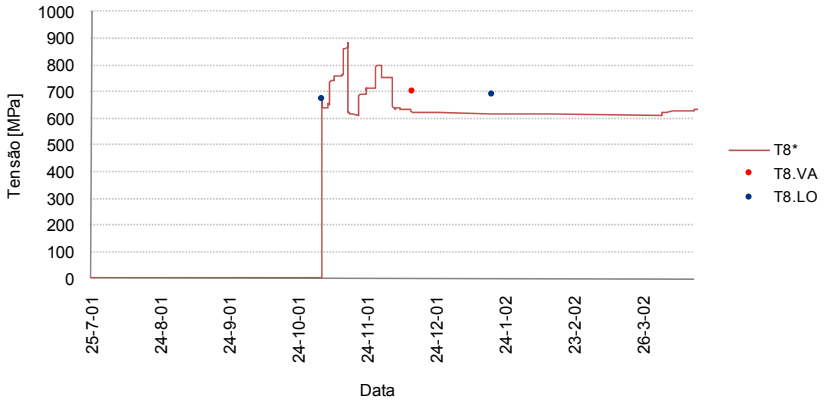


Figura 5.65 – Tensão no tirante T8.

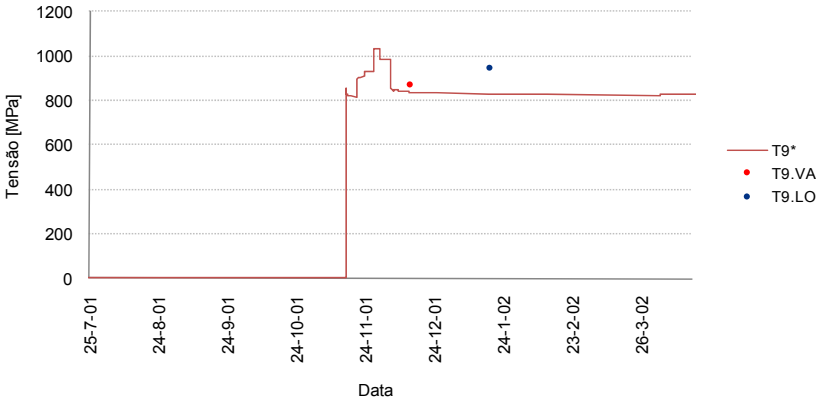


Figura 5.66 – Tensão no tirante T9.

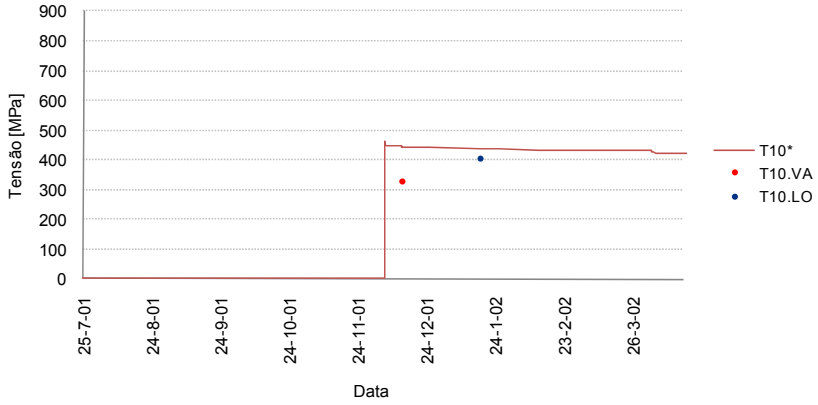


Figura 5.67 – Tensão no tirante T10.

Nas Figuras 5.68 a 5.70 são apresentadas as tensões previstas numericamente nos tirantes de retenção e os valores medidos em obra. Da observação das referidas figuras conclui-se que as tensões previstas numericamente aproximam de forma bastante razoável os valores medidos experimentalmente.

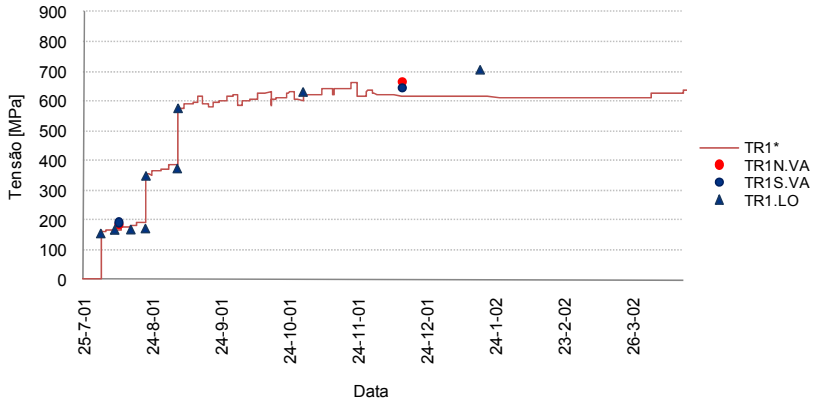


Figura 5.68 – Tensão no tirante TR1.

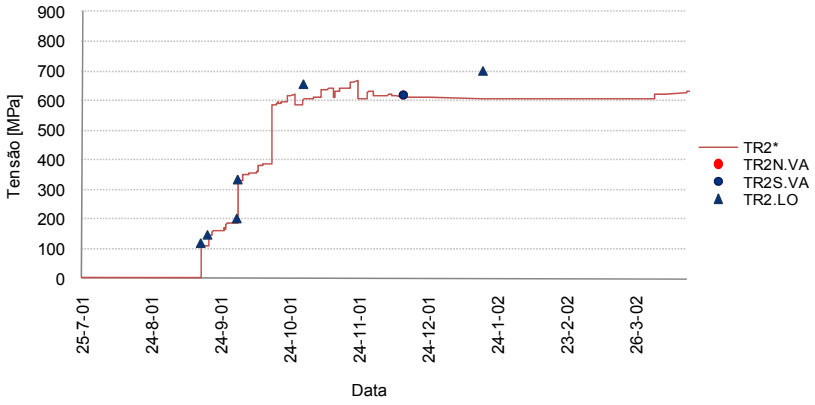


Figura 5.69 – Tensão no tirante TR2.

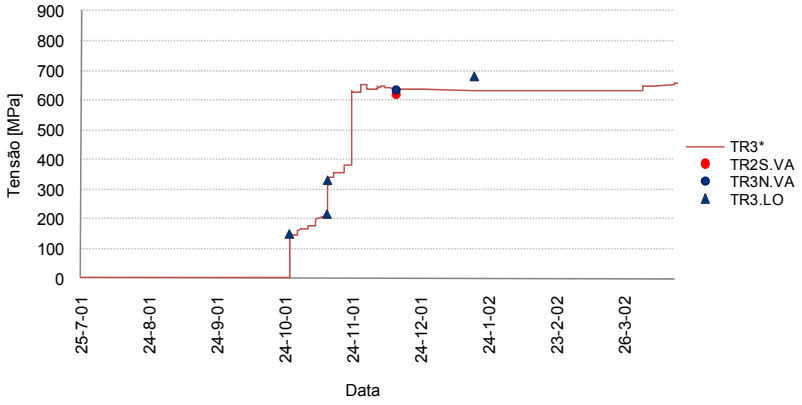


Figura 5.70 – Tensão no tirante TR3.

5.8. Análise modal durante o faseamento construtivo

Nesta secção pretende-se apresentar a capacidade do modelo de cálculo desenvolvido na obtenção de frequências e modos próprios da estrutura durante o faseamento construtivo do Viaduto da Corujeira. Até à presente data, na obra em estudo os únicos resultados de medições de frequências e modos próprios de vibração foram os efectuados aquando da medição dos esforços axiais nos tirantes de suspensão e de retenção, pelo que, infelizmente, não é possível comparar os resultados obtidos numericamente com os decorrentes de medições no próprio viaduto. Assim sendo, as únicas comparações possíveis são as apresentadas nos Quadros 5.8 e 5.9, relativamente à 1ª frequência natural dos tirantes de suspensão e de retenção, medidas em 2 de Abril de 2003. De salientar que os valores obtidos numericamente foram alcançados após uma aferição do modelo numérico do viaduto, que será explicada na secção 6.2. Da observação dos Quadros 5.8 e 5.9 conclui-se que a precisão obtida com a estimativa numérica é muito assinalável, variando o erro obtido entre os 2.5 e os 8.9%.

Quadro 5.8 – 1ª frequência natural dos tirantes de suspensão.

	1ª Frequência natural [Hz]		Erro
Tirante	Medida	Numérica	[%]
T1	1.794	1.954	8.9
T2	1.831	1.961	7.1
T3	1.831	1.939	5.9
T4	1.880	1.972	4.9
T5	1.831	1.908	4.2
T6	1.636	1.698	3.8
T7	1.428	1.479	3.5
T8	1.392	1.435	3.1
T9	1.306	1.343	2.9
T10	1.172	1.201	2.5

Quadro 5.9 – 1ª frequência natural dos tirantes de retenção.

	1ª Frequência natural [Hz]		Erro
Tirante	Medida	Numérica	[%]
TR1N	1.794	1.883	4.9
TR1S	1.794	1.883	4.9
TR2N	1.648	1.728	4.8
TR2S	1.648	1.728	4.8
TR3N	1.575	1.640	4.1
TR3S	1.550	1.640	5.8

A evolução do processo construtivo utilizado, as propriedades reológicas dos materiais e a actualização da geometria tornam trabalhoso o processo de estimar as frequências e modos próprios do Viaduto da Corujeira ao longo do faseamento construtivo. No entanto, considerando a qualidade dos resultados apresentados neste Capítulo, crê-se que o modelo numérico utilizado está suficientemente bem aferido para permitir a obtenção de bons resultados no domínio da análise modal. Uma vez que o modelo numérico foi desenvolvido fundamentalmente para análises no plano longitudinal/vertical do viaduto, a análise modal que se apresenta para o Viaduto da Corujeira reportar-se-á apenas às frequências e modos próprios neste plano.

Na Figura 5.71 é apresentado o 1º modo de vibração da estrutura aquando do pré-esforço da Aduela 1, ou seja na fase inicial da construção, a que corresponde uma frequência própria de vibração de 2.967 Hz.

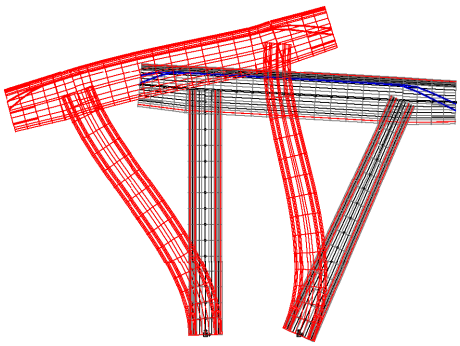
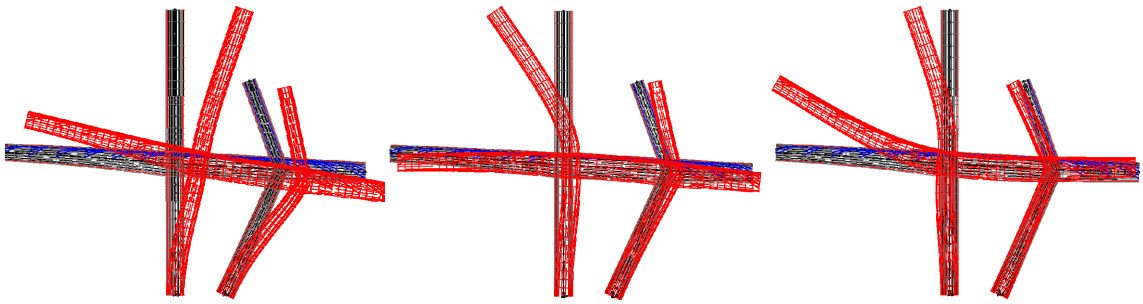


Figura 5.71 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 1 (f = 2.967 Hz).

Com o decurso da obra aumenta a complexidade da estrutura, e devido ao processo construtivo utilizado aumenta a flexibilidade da mesma. Consequentemente aumenta o número de modos de

vibração e diminuem os valores das frequências próprias dos primeiros modos. Na Figura 5.72 são apresentados os três primeiros modos de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 6, onde se pode observar o aumento da complexidade dos modos e o decréscimo do valor da frequência própria do primeiro modo de vibração (1.759 Hz) relativamente ao início da construção (2.967 Hz).



1º modo (f = 1.759 Hz) 2º modo (f = 3.751 Hz) 3º modo (f = 4.015 Hz)

Figura 5.72 – Modos de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 6.

A partir do instante em que são aplicados os primeiros tirantes de suspensão e de retenção, e até à consola do Tramo 3 atingir a Aduela 21, os primeiros modos de vibração envolvem apenas os próprios tirantes, conforme acontece aquando do pré-esforço da Aduela 11: para o referido instante é apresentado na Figura 5.73 o 1º modo de vibração, associado à vibração local de um tirante de retenção. Na Figura 5.74 é apresentado o 3º modo de vibração da estrutura, associado à flexão da consola do Tramo 3. Aquando do pré-esforço da Aduela 16 o 1º modo permanece associado à vibração de um dos tirantes de retenção, conforme apresentado na Figura 5.75.

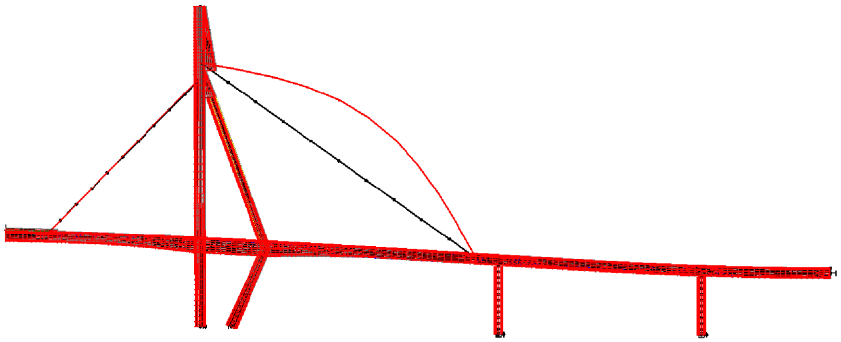


Figura 5.73 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 11 (f = 0.900 Hz).

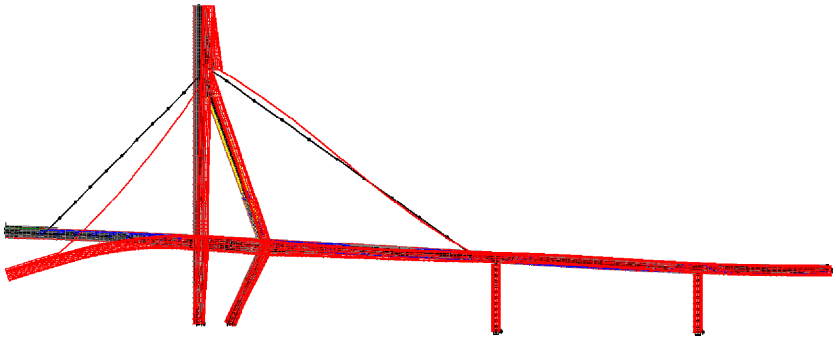


Figura 5.74 – 3º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 11 (f = 0.996 Hz).

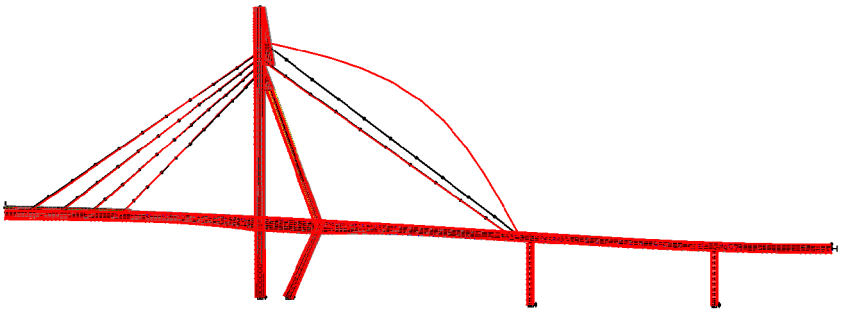


Figura 5.75 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 16 (f = 0.739 Hz).

O aumento de flexibilidade da consola do Tramo 3 diminui a frequência do correspondente modo de vibração, aproximando-a da frequência do 1º modo de vibração do 2º tirante de retenção, razão pela qual na Figura 5.76 o modo de vibração apresentado combina vibração do 2º tirante de retenção com flexão da consola do Tramo 3.

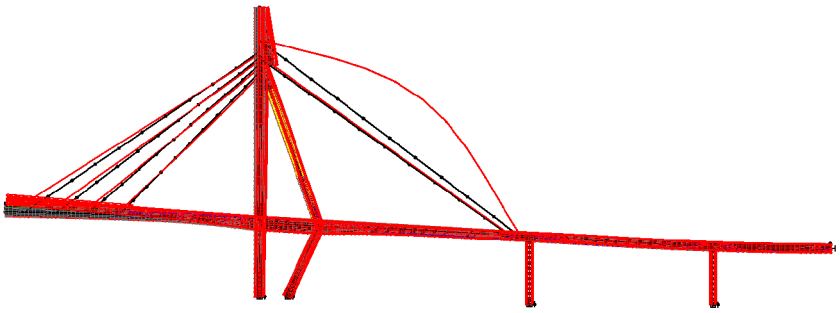


Figura 5.76 – 2º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 16 (f = 0.770 Hz).

Quando se atinge a Aduela 21 do Tramo 3, e até ao fecho do tabuleiro, os modos de vibração passam a estar associados essencialmente a deformações verticais da consola, com frequências de valores 0.629 Hz e 1.145 Hz, conforme é apresentado nas Figuras 5.77 e 5.78. O 1º modo de vibração associado à vibração de tirantes corresponde ao 3º modo de vibração da estrutura, conforme é apresentado na Figura 5.79.

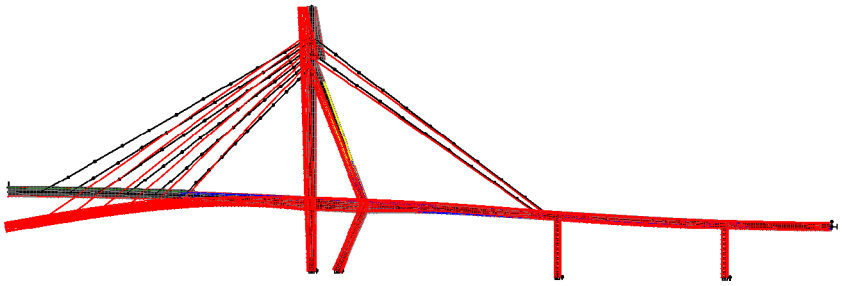


Figura 5.77 – 1º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 0.629 Hz).

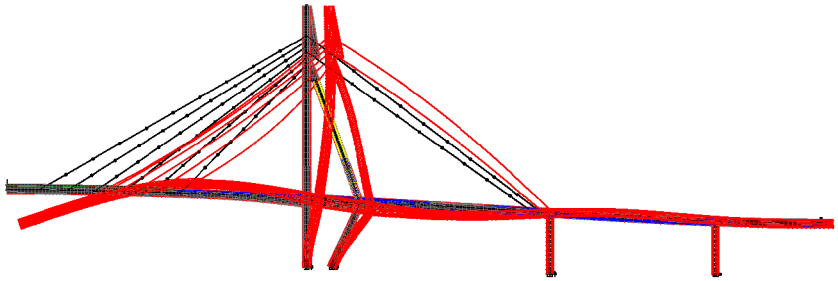


Figura 5.78 – 2º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 1.145 Hz).

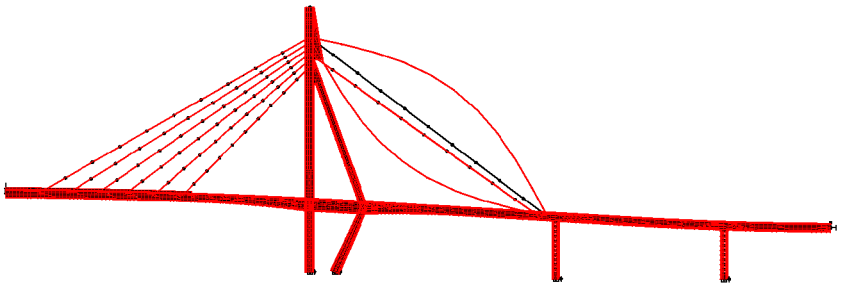


Figura 5.79 – 3º modo de vibração aquando do pré-esforço da Aduela 21 (f = 1.510 Hz).

Após o ajuste dos esforços nos tirantes, o 1º modo de vibração da estrutura é invariavelmente associado à flexão do Tramo 3, conforme apresentado na Figura 5.80. O 2º modo de vibração está associado à deformada do 1º harmónico do tirante T10 e o 3º modo de vibração está associado ao 1º harmónico do tirante T9 e à flexão do Tramo 3, conforme apresentado na Figura 5.81.

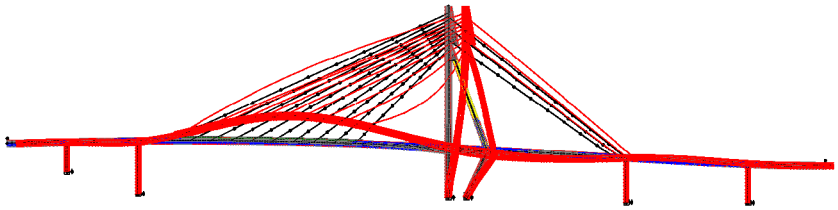


Figura 5.80 – 1º modo de vibração após ajuste dos esforços nos tirantes (f = 0.889 Hz).

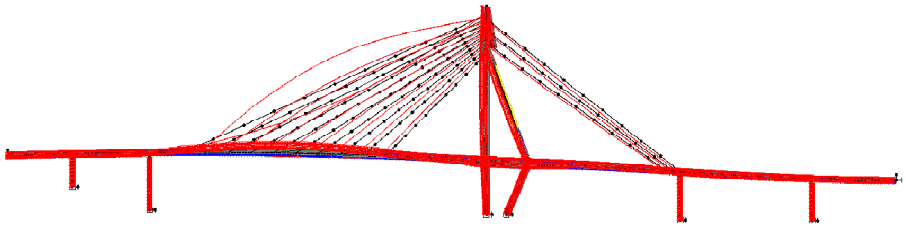


Figura 5.81 – 3º modo de vibração após a aplicação do betuminoso (f = 0.1.297 Hz).

No Quadro 5.10 são apresentadas as frequências naturais estimadas para os primeiros 20 modos de vibração ao longo do processo construtivo.

Quadro 5.10 – Frequências naturais estimadas para os primeiros 20 modos de vibração ao longo do processo construtivo.

	Frequências naturais [Hz]								
Modo	Aduela 1	Aduela 6	Aduela 11	Aduela 16	Aduela 21	Aduela 26	Fecho	Betuminoso	Ajuste
1	2.967	1.759	0.900	0.739	0.629	0.525	0.885	0.891	0.889
2	-	3.752	0.913	0.770	1.145	1.062	0.928	0.904	1.211
3	-	4.015	0.996	0.874	1.510	1.165	1.258	1.262	1.289
4	-	7.733	1.585	1.302	1.511	1.166	1.286	1.292	1.360
5	-	12.045	1.745	1.304	1.627	1.343	1.348	1.354	1.463
6	-	17.577	1.745	1.308	1.628	1.367	1.362	1.425	1.522
7	-	-	2.082	1.604	1.646	1.431	1.403	1.511	1.663
8	-	-	2.608	1.605	1.743	1.476	1.478	1.512	1.664
9	-	-	2.608	1.791	1.809	1.516	1.481	1.538	1.754
10	-	-	3.059	1.877	1.840	1.525	1.488	1.562	1.754
11	-	-	3.263	1.883	1.847	1.544	1.489	1.562	1.756
12	-	-	3.423	1.891	1.883	1.569	1.493	1.641	1.912
13	-	-	3.424	1.954	2.054	1.608	1.538	1.650	1.912
14	-	-	3.932	1.954	3.010	1.610	1.539	1.662	1.983
15	-	-	3.932	2.558	3.013	1.688	1.623	1.662	2.067
16	-	-	3.996	2.559	3.082	1.695	1.636	1.696	2.070
17	-	-	4.158	2.940	3.247	1.698	1.638	1.706	2.117
18	-	-	4.621	2.940	3.248	1.699	1.638	1.748	2.135
19	-	-	5.259	3.034	3.283	2.317	1.848	1.799	2.413
20	-	-	5.259	3.194	3.480	2.317	2.398	2.425	2.434

5.9. Considerações finais

A simulação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira durante o faseamento construtivo revelou-se um desafio interessante mas, ao mesmo tempo, complexo e trabalhoso. A complexidade da geometria da obra e do processo construtivo requereu a utilização simultânea de praticamente todas as funcionalidades implementadas no programa de cálculo, sendo necessário um elevado número de elementos finitos e apoios para simulação da estrutura, assim como a utilização de um elevado número de incrementos para simular todas as fases do processo construtivo.

A análise comparativa entre os valores medidos (extensões, rotações e tensões) através do sistema de monitorização permanente instalado na obra e os valores estimados numericamente revelou, normalmente, uma boa concordância entre ambos. Foram identificadas algumas discrepâncias entre os valores referidos, que no entanto, não corresponderam a anomalias no funcionamento do programa de cálculo desenvolvido, mas sim a falhas de informação do realmente ocorrido em obra. De facto, um dos maiores entraves à modelação do comportamento estrutural foi a falta de alguns dados relativos ao processo construtivo, nomeadamente alterações de datas de betonagem e de aplicação de pré-esforço, assim como informação mais específica acerca das operações de re-tensionamento de tirantes. Por vezes só através de interpretação dos dados fornecidos através do sistema de monitorização permanente foi possível a identificação da data de algumas destas operações. Desta forma, parece importante a execução de um manual rigoroso de recolha de informação das operações realizadas em obra, nomeadamente nas estruturas em que se prevê ser instalada monitorização.

O bom ajuste dos valores medidos e estimados numericamente, tanto na simulação das acções instantâneas como no comportamento diferido, assim como os bons resultados obtidos na análise modal efectuada ao longo do processo construtivo, sugerem uma boa aferição do modelo numérico utilizado. O programa de cálculo desenvolvido mostrou-se robusto e eficiente na simulação do comportamento estrutural de uma estrutura com a complexidade e dimensão do referido viaduto, sem

que se tenha registado qualquer tipo de conflito ou anomalia de funcionamento das funcionalidades utilizadas. Foi possível efectuar uma análise minuciosa e realista do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira, observando a evolução dos estados de tensão e deformação ao longo do faseamento construtivo da obra, e identificando as implicações estruturais das operações e solicitações modeladas. Da análise efectuada pode-se concluir que a obra evidenciou globalmente o comportamento estrutural previsto para uma obra com estas características, sendo a fendilhação no fuste oblíquo do mastro a única anomalia detectada.

A aposta na simplicidade dos constituintes do programa de cálculo, em detrimento da economia dos recursos computacionais, teve, porém, os seus custos, implicando em certas análises efectuadas a utilização de cerca de 4Gb de memória RAM e de cerca de 2h de tempo de processamento. No entanto os computadores actuais, associados a sistemas operativos capazes de gerir grandes capacidades de memória, mostram-se capazes de lidar com este tipo de requisitos.

Capítulo 6

Viaduto da Corujeira – Ensaio de carga e projecções para o futuro

6. Viaduto da Corujeira – Ensaio de carga e projecções para o futuro

6.1. Introdução

Neste capítulo pretende-se apresentar as capacidades do programa de cálculo desenvolvido como ferramenta de auxílio à gestão de obras de arte, através da previsão do comportamento estrutural futuro do Viaduto da Corujeira e da modelação de algumas operações de manutenção e reparação. Utiliza-se o mesmo modelo numérico descrito no Capítulo 5 na simulação do ensaio de carga e na análise de modos de vibração e frequências próprias na fase de exploração.

Na secção 6.2 descrevem-se os procedimentos utilizados no ajuste do modelo numérico do Viaduto da Corujeira, designadamente no tocante aos esforços instalados nos tirantes, de forma a torná-lo mais adequado ao estudo do comportamento estrutural a longo prazo, após a finalização da construção.

De forma a avaliar a fiabilidade do modelo numérico, e consequentemente a viabilidade da respectiva utilização na simulação de operações futuras, na secção 6.3 é efectuada uma descrição dos procedimentos utilizados no ensaio de carga, descrito o sistema de monitorização provisória realizado para observação do referido ensaio e, por fim, é feita uma análise comparativa entre os resultados medidos em obra e os estimados numericamente.

Na secção 6.4 apresenta-se uma série de análises onde se procura prever o comportamento da estrutura a longo prazo, identificando possíveis anomalias e eventuais operações de manutenção e reparação. Para tal avaliam-se as evoluções dos deslocamentos verticais ao longo do tabuleiro e dos deslocamentos horizontais nos encontros e no topo do mastro, bem como das tensões no betão do tabuleiro e do mastro, e nos tirantes.

De forma a quantificar os efeitos causados pela variação de temperatura, na secção 6.5 apresentam-se as estimativas dos deslocamentos verticais do tabuleiro, dos deslocamentos horizontais nas juntas de dilatação dos encontros e das tensões no betão do tabuleiro, para acréscimos e decréscimos de temperatura de 15ºC.

Na secção 6.6 procede-se à modelação de algumas operações de manutenção e reparação com implicações a nível estrutural, como sejam a substituição de aparelhos de apoio e de tirantes de suspensão e de retenção, avaliando o comportamento estrutural do viaduto.

Por fim, na secção 6.7 faz-se uma análise resumida da variação dos modos de vibração e das frequências próprias da estrutura durante a fase de exploração.

6.2. Ajuste final do modelo numérico

Através das medições de esforços nos tirantes de suspensão e de retenção realizados com base em ensaios de vibração ambiental foi possível detectar discrepâncias relativamente aos valores estimados numericamente, após o final do processo construtivo. Uma vez que os esforços instalados nos tirantes influenciam o comportamento estrutural da obra, torna-se necessário ajustar o modelo numérico, reduzindo as referidas diferenças de forma a modelar correctamente o ensaio de carga e o comportamento estrutural futuro da obra. Da análise do Quadro 6.1 verifica-se que a diferença entre os valores dos esforços axiais nos tirantes de suspensão e de retenção estimados numericamente e os medidos com base em ensaios de vibração ambiental, aquando do fecho do tabuleiro, atinge os 10~15%. No tirante T10 esta diferença atinge os 37.9%, que eventualmente se deverá à falta da modelação de uma operação de retensionamento no referido tirante, por falta de registos.

Quadro 6.1 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção aquando do fecho do tabuleiro.

	Esforços nos tirantes [kN]												
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	TR1	TR2	TR3
Medido	1300	2063	2712	3835	4740	4699	4527	4555	5636	2099	6579	6221	6226
Numérico	1157	1821	2292	3455	4123	4175	4340	4108	5455	2895	6266	6217	6475
Erro [%]	-11.0	-11.7	-15.5	-9.9	-13.0	-11.2	-4.1	-9.8	-3.2	37.9	-4.8	-0.1	4.0

Após o fecho do tabuleiro e antes do ensaio de carga foi efectuada uma operação de retensionamento dos tirantes, da qual não foi possível obter qualquer registo. No entanto, em Abril de 2003, cerca de um ano após o final da obra, foram efectuadas novas medições dos esforços nos tirantes de suspensão e de retenção com base em ensaios de vibração ambiental, que são apresentadas no Quadro 6.2.

Quadro 6.2 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003.

	Esforços nos tirantes [kN]												
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	TR1	TR2	TR3
Medido	2321	3019	3724	4776	5441	5150	4605	5076	5144	4723	8037	7617	7659
Numérico	1714	2394	2819	3887	4435	4356	4404	4071	5329	2700	6414	6368	6630
Erro [%]	-26.2	-20.7	-24.3	-18.6	-18.5	-15.4	-4.4	-19.8	3.6	-42.8	-20.2	-16.4	-13.4

Se as diferenças obtidas entre os valores dos esforços estimados e medidos aquando do fecho do tabuleiro se podem considerar bastante aceitáveis, considerando a complexidade do faseamento construtivo da obra, as diferenças assinaladas no Quadro 6.2, da ordem dos 20~25% (e nalguns casos superior), são demasiado elevadas para o nível de rigor que se pretende com a modelação numérica efectuada.

A partir de medições em obra, as tentativas para corrigir os esforços nos tirantes de suspensão e de retenção seguiram um procedimento de retroanálise. Da observação das Figuras 5.58 a 5.70 conclui-se que a variação de tensão nos tirantes ao longo do tempo é relativamente reduzida após o fim da construção. Não se sabendo exactamente qual a data em que foi efectuado o ajuste da tensão

nos tirantes, admitiu-se que este ocorreu logo após a aplicação do betuminoso no tabuleiro. Assim foram impostos no modelo numérico, em Maio de 2002, os valores dos esforços medidos em Abril de 2003, e apresentados no Quadro 6.2. Como seria de esperar, devido ao comportamento reológico dos materiais os esforços obtidos numericamente em Abril de 2003 através deste procedimento não são coincidentes com os valores medidos, mas as diferenças entre ambos diminuíram de forma assinalável, conforme se pode observar no Quadro 6.3.

Quadro 6.3 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003 (medidos versus estimados numericamente na 1ª iteração do processo de retroanálise).

	Esforços nos tirantes [kN]												
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	TR1	TR2	TR3
Medido	2321	3019	3724	4776	5441	5150	4605	5076	5144	4723	8037	7617	7659
Numérico	2062	2727	3421	4481	5169	4917	4418	4926	5033	4636	7835	7430	7487
Erro [%]	-11.2	-9.7	-8.1	-6.2	-5.0	-4.5	-4.1	-3.0	-2.2	-1.8	-2.5	-2.5	-2.2

Da análise do Quadro 6.3 concluiu-se que os esforços impostos nos tirantes em Maio de 2002 foram, nesta primeira iteração, subavaliados pelo modelo numérico, pelo que foram novamente corrigidos e o processo de cálculo reiniciado. Este procedimento foi repetido até se considerar que os desvios obtidos estavam de acordo com o rigor pretendido, apresentando-se no Quadro 6.4 os esforços na terceira (e última) iteração do processo. Conforme se pode constatar da análise do Quadro 6.4, conseguiu-se uma redução substancial dos desvios entre os valores dos esforços nos tirantes estimados numericamente e medidos, resultando uma diferença máxima de 2% no final do processo de retroanálise.

Quadro 6.4 – Esforços nos tirantes de suspensão e de retenção, em Abril de 2003 (medidos versus estimados numericamente na 3ª iteração do processo de retroanálise).

	Esforços nos tirantes [kN]												
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	TR1	TR2	TR3
Medido	2321	3019	3724	4776	5441	5150	4605	5076	5144	4723	8037	7617	7659
Numérico	2368	3079	3796	4858	5529	5238	4689	5159	5221	4802	8177	7742	7767
Erro [%]	2.0	2.0	1.9	1.7	1.6	1.7	1.8	1.6	1.5	1.7	1.7	1.6	1.4

Uma vez que a operação de ajuste dos esforços nos tirantes de suspensão e de retenção foi modelada sem apoio de informação adequadamente reportada em registos, não foi possível considerar a ordem de retensionamento dos tirantes. Os esforços foram assim impostos em todos os tirantes de forma simultânea, embora não se considere que este facto seja muito relevante, uma vez que o faseamento construtivo da obra estava já concluído.

Na Figura 6.1 são apresentadas as evoluções das tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro, no final da aplicação do betuminoso e após o ajuste final dos esforços nos tirantes. Pode observar-se a grande influência dos esforços nos tirantes de suspensão e de retenção no estado de tensão do betão, não só no vão suspenso (Tramo 3), entre os pilares P2 e P3, mas também no Tramo 1 e Tramo 2, entre o Encontro Oeste e o pilar P2. Nos diagramas de tensões ao longo do tabuleiro é apresentado o valor da resistência média à tracção do betão do tabuleiro (f_{ctm}=4.8MPa), aquando das referidas operações. Uma vez que uma operação de retensionamento do

tirante T10 não foi considerada, conforme foi já referido, e que os esforços nesse tirante influenciam as tensões no tabuleiro na zona do pilar P2, é plausível que as tensões na fibra superior do tabuleiro sobre o pilar P2 não atinjam valores de tracção tão elevados como os apresentados na Figura 6.1. No entanto, admite-se que a diferença entre os valores obtidos e os valores realmente instalados não é muito relevante, uma vez que as referidas tensões não atingiram o f_{ctm}, e portanto não se prevê a ocorrência fissuração.

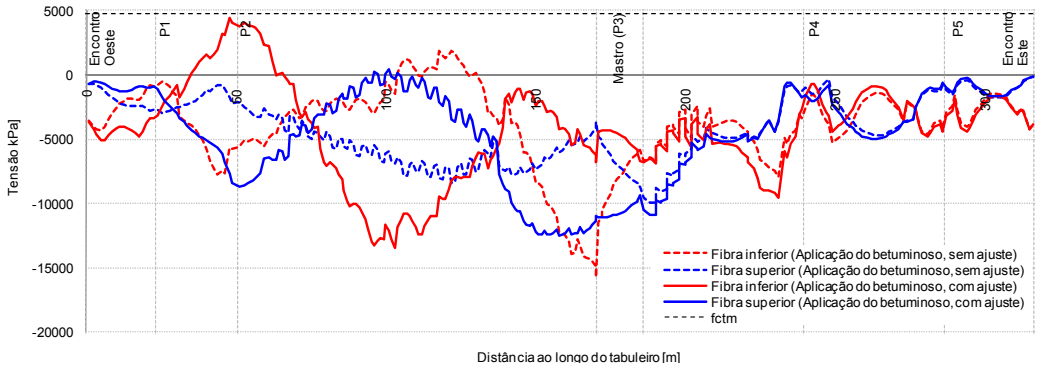


Figura 6.1 – Evolução das tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro no final da aplicação do betuminoso no tabuleiro, sem e com ajuste final dos esforços nos tirantes.

Nas Figuras 6.2 e 6.3 são apresentados as tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo dos fustes do mastro no final da aplicação do betuminoso e após o ajuste final dos esforços nos tirantes. Pode observar-se que as maiores alterações introduzidas pelo ajuste de esforços nos tirantes aconteceram nas fibras Este do fuste vertical do mastro. Após o ajuste dos esforços nos tirantes, no topo do fuste vertical do mastro e junto à fundação do fuste oblíquo registaram-se tensões de tracção; no entanto, uma vez que são zonas de betão não pré-esforçadas e as tracções não atingem o valor de f_{ctm}=4.6MPa, consideram-se aquelas admissíveis. Na secção do fuste oblíquo imediatamente acima do tabuleiro mantêm-se as tensões de tracção nas fibras Oeste, que foram já motivo de análise na secção 5.7.

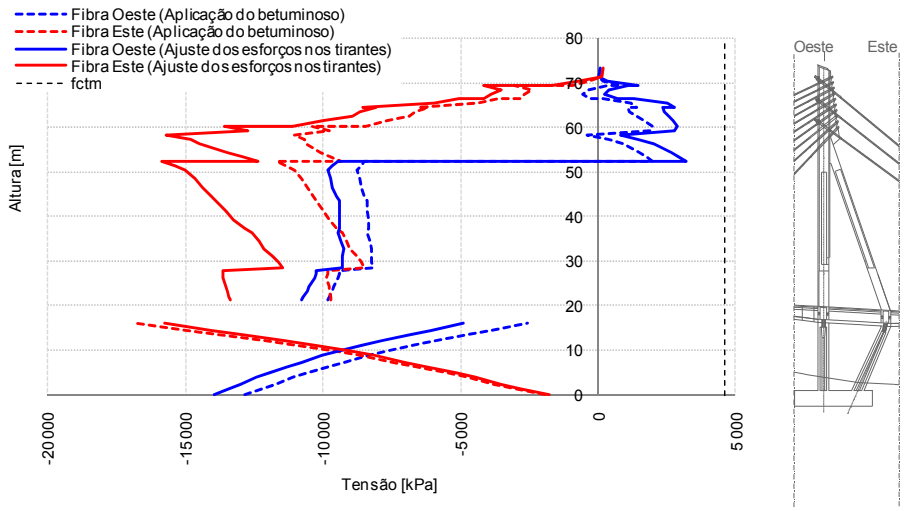


Figura 6.2 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro, no final do faseamento construtivo.

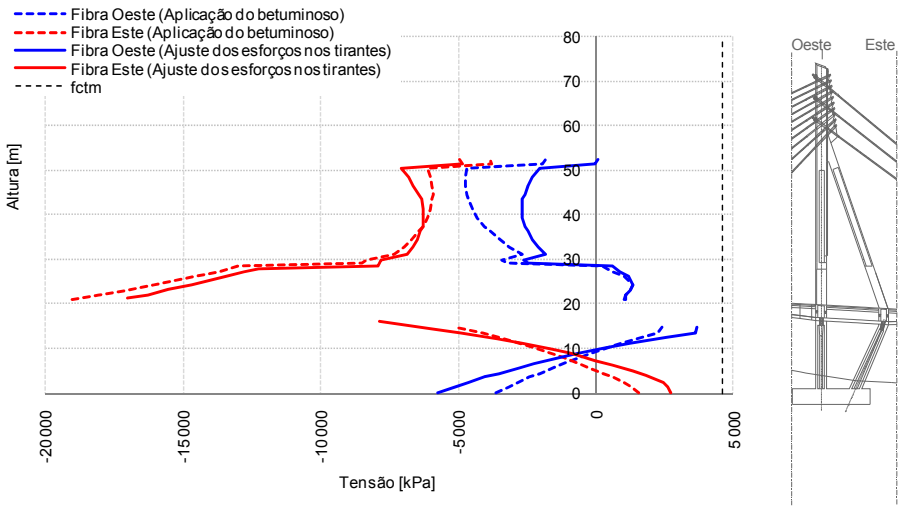


Figura 6.3 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro, no final do faseamento construtivo.

Com o ajuste dos esforços nos tirantes de suspensão e de retenção foi possível calibrar melhor o modelo numérico, obtendo-se um estado de tensão mais realista, e desta forma tornar a utilização do modelo mais adequada aos estudos que se pretende fazer efectuar no resto deste Capítulo. As alterações evidenciadas pelo ajuste dos esforços nos tirantes vêm reforçar a ideia da necessidade de uma documentação rigorosa de todas as operações e procedimentos efectuados em obra, sem a qual a utilização eficiente dos modelos numéricos e sistemas de monitorização é muito dificultada.

6.3. Simulação do ensaio de carga

6.3.1. Descrição dos procedimentos

O ensaio de carga foi realizado no dia 17 de Maio de 2002, entre as 13h55m e as 18h02m, sob condições atmosféricas bastante adversas (ventos e períodos de chuva intensa), pelo que a precisão de algumas medições pode ter sido afectada, servindo como um bom teste à robustez do sistema de medição instalado no Viaduto da Corujeira. Para o ensaio foram utilizadas 12 viaturas com pesos brutos aproximados de 200kN (Félix e Figueiras (2002a)), e além da instrumentação permanente instalada no viaduto foi utilizada instrumentação adicional para medição de flechas.

O posicionamento dos veículos em planta e em perfil foi efectuado de forma a produzir os valores máximos das grandezas instrumentadas, conforme o indicado no Quadro 6.5. Os posicionamentos 1L a 4L das viaturas durante o ensaio de carga são apresentados na Figura 6.4.

Quadro 6.5 – Descrição, objectivos e sensores interessados em cada caso de carga.

Caso de carga	Descrição	Objectivo	Sensores interessados
1L	12 veículos parados no Tramo 3, 6 em cada faixa de rodagem	Flecha máx. do 3º tramo; Esforços máx. nos tirantes; Rotação máx. do mastro; Esforços máx. nas secções S1 e S3.	DV1 a DV4; Extensómetros da secção S1; Extensómetros da secção S2; Extensómetros da secção S3.
2L	6 veículos parados no Tramo 5, 3 em cada faixa de rodagem	Flecha máx. do 5º tramo; Esforços máx. na secção S5.	DV8; Extensómetros da secção S5.
3L	4 veículos parados no Tramo 2, 2 em cada faixa de rodagem	Influência sobre os esforços na secção S1.	Extensómetros da secção S1.
4L	8 veículos parados no Tramo 3, 4 em cada faixa de rodagem	Flecha máx. do 4º tramo; Esforços máx. na secção S4.	DV6; Extensómetros da secção S5.
1T	6 veículos parados no Tramo 3, na faixa de rodagem do lado Sul	Comportamento do tabuleiro à torção	DV3; DV3n e DV3s.
2T	6 veículos parados no Tramo 3, na faixa de rodagem do lado Norte	Comportamento do tabuleiro à torção	DV3; DV3n e DV3s.

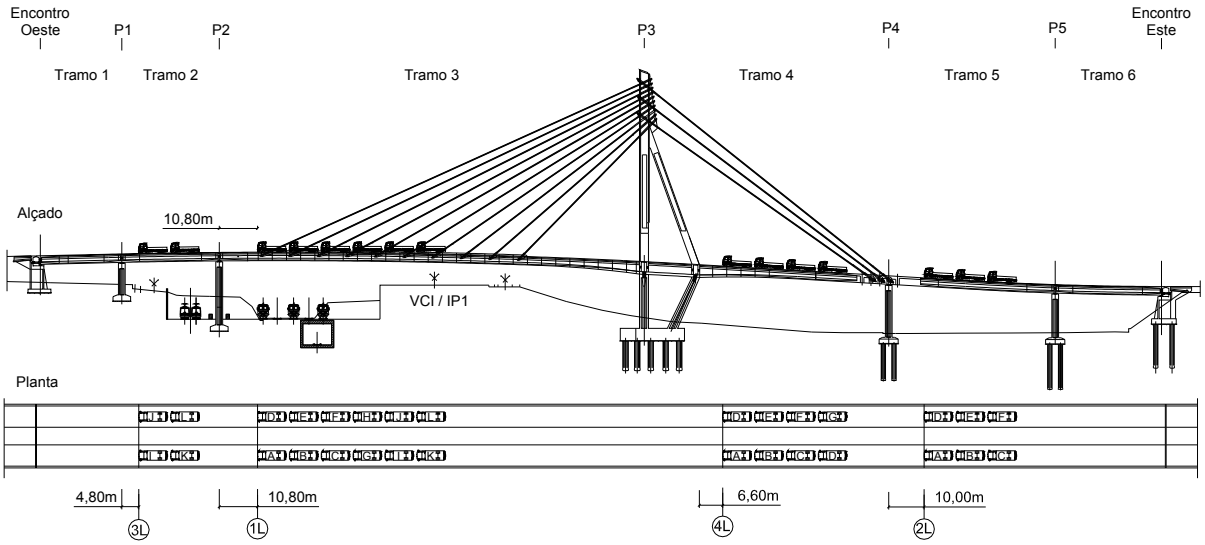


Figura 6.4 – Posicionamento das viaturas durante o ensaio de carga – Posições 1L a 4L.

Além dos casos de carga 1L a 4L, foram definidos dois trajectos de quatro veículos a par, que percorreram o viaduto em marcha lenta em sentidos opostos. Durante o percurso efectuado no sentido Este/Oeste os veículos imobilizaram-se aproximadamente dois minutos em cada uma das quatro posições correspondentes aos centros dos casos de carga 1L a 4L. Os novos quatro casos de carga assim definidos designaram-se por 1I a 4I, e encontram-se esquematizados na Figura 6.5.

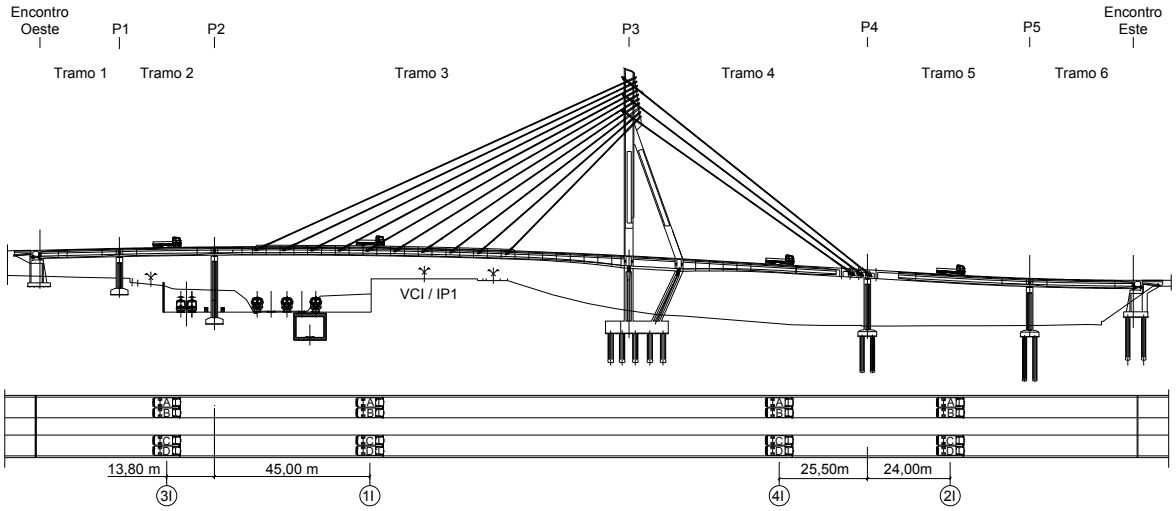


Figura 6.5 – Posicionamento das viaturas durante o ensaio de carga – Posições 1I a 4I.

No Quadro 6.6 são apresentadas as operações modeladas numericamente, assim como a respectiva data e hora.

Quadro 6.6 – Operações modeladas numericamente.

Operação	Data	Hora
AjusteFinal	17-01-2002	16:00
Ensaio de carga - Início	17-05-2002	13:59
Ensaio de carga 2L - Início	17-05-2002	14:02
Ensaio de carga 2L - Final	17-05-2002	14:03
Ensaio de carga 4L - Início	17-05-2002	14:27
Ensaio de carga 4L - Final	17-05-2002	14:28
Ensaio de carga 1L - Início	17-05-2002	14:50
Ensaio de carga 1L - Final	17-05-2002	14:51
Ensaio de carga 3L - Início	17-05-2002	15:00
Ensaio de carga 3L - Final	17-05-2002	15:01
Ensaio de carga 1T - Início	17-05-2002	15:33
Ensaio de carga 1T - Final	17-05-2002	15:34
Ensaio de carga 2T - Início	17-05-2002	15:51
Ensaio de carga 2T - Final	17-05-2002	15:52
Ensaio de carga 3I - Início	17-05-2002	17:40
Ensaio de carga 3I - Final	17-05-2002	17:41
Ensaio de carga 1I - Início	17-05-2002	17:45
Ensaio de carga 1I - Final	17-05-2002	17:46
Ensaio de carga 4I - Início	17-05-2002	17:48
Ensaio de carga 4I - Final	17-05-2002	17:49
Ensaio de carga 2I - Início	17-05-2002	17:53
Ensaio de carga 2I - Final	17-05-2002	17:54
Ensaio de carga - Final	17-05-2002	18:01
Final	31-12-2010	0:00

6.3.2. Monitorização provisória

Durante o ensaio de carga a medição de flechas verticais foi realizada utilizando um sistema baseado num circuito hidráulico de vasos comunicantes, com terminais em todos os pontos onde se pretende efectuar medições. O reservatório de água que alimenta o circuito é colocado num ponto fixo, e à saída deste, e em todos os terminais são instalados sensores de pressão. Desta forma, aquando do deslocamento vertical de um dos terminais é possível determinar qual o deslocamento vertical relativo entre este e o reservatório, através da medição da variação da pressão da água entre os dois pontos.

No presente caso foram instrumentadas desta forma oito secções da estrutura, designadas por DV1 a DV8, conforme se pode observar na Figura 6.6. Devido ao traçado longitudinal da obra (altimetria) foi necessário utilizar dois circuitos independentes de vasos comunicantes. O primeiro circuito inclui os pontos DV1 a DV5, sendo que o depósito foi colocado na posição DV5, considerada fixa para deslocamentos verticais. Neste circuito introduziram-se ainda mais 2 sensores na secção transversal DV3, um na extremidade Norte da secção, designado por DV3n, e outro na extremidade Sul, designado por DV3s, que permitiriam medir rotações por torção do tabuleiro. Estes sensores seriam particularmente úteis durante a aplicação de cargas descentradas; no entanto, como não foi possível obter sinal do sensor DV3s, no presente trabalho não se dará ênfase aos casos de carga não centrados, nomeadamente aos carregamentos 1T e 2T. O segundo circuito inclui os pontos DV6 a DV8, e o reservatório foi localizado no ponto DV7, considerado fixo para deslocamentos verticais.

De referir que nas condições de realização do ensaio (mau tempo) a precisão do sistema de medição de flechas não pode ser considerada melhor que ± 1mm, uma vez que as variações de pressão atmosférica interferem directamente nas medições efectuadas pelos referidos sensores.

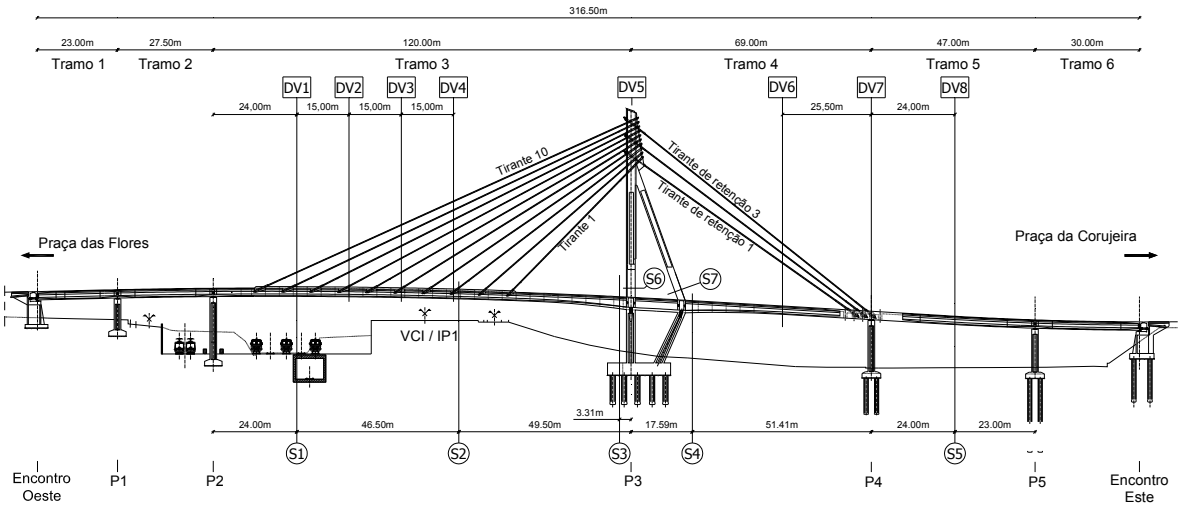


Figura 6.6 – Viaduto da Corujeira – Localização dos sensores de pressão e secções com extensómetros.

6.3.3. Resultados

6.3.3.1. Deformadas verticais do tabuleiro

Nas Figuras 6.7 a 6.10 são apresentadas as deformadas verticais do tabuleiro obtidas numericamente para os carregamentos 1L a 4L (linhas vermelhas contínuas), que são comparadas com as medições nos sensores DV1 a DV8 (círculos azuis). Após uma observação atenta das referidas figuras verifica-se que a concordância entre os deslocamentos medidos e estimados numericamente é bastante elevada, nomeadamente na zona de aplicação das cargas. Apenas para deslocamentos muito pequenos, inferiores a 2mm, nomeadamente nas Figuras 6.8 e 6.9, a concordância entre os valores medidos e estimados não é tão boa. No entanto, nesses pontos o desvio padrão da medida é normalmente muito grande, e em muitos casos superior à grandeza

medida. Desta forma, a menor concordância deve ser originada pela limitada precisão do processo de medição utilizado para medir os deslocamentos verticais.

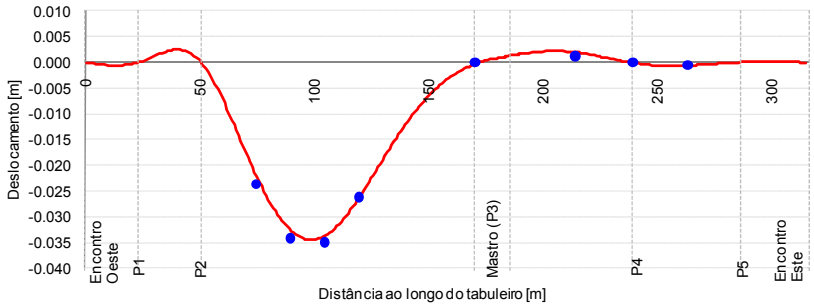


Figura 6.7 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 1L.

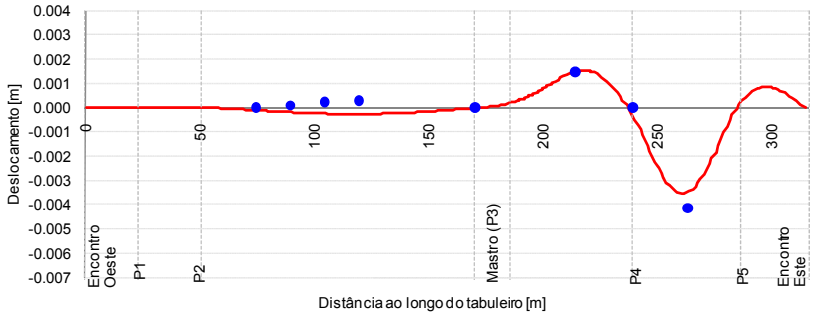


Figura 6.8 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 2L.

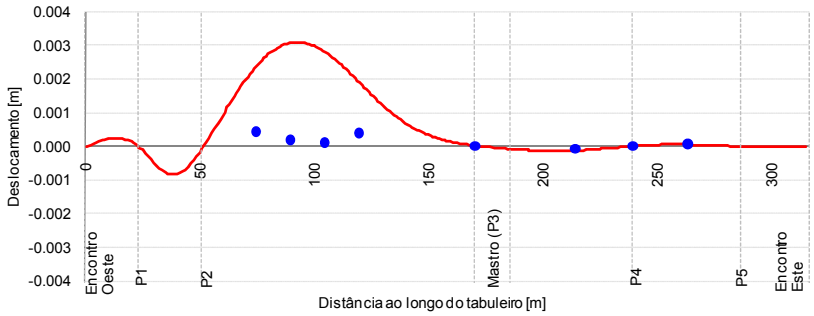


Figura 6.9 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 3L.

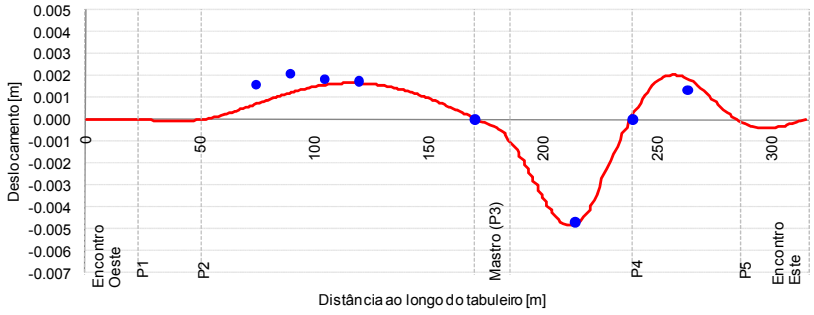


Figura 6.10 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 4L.

Nas Figuras 6.11 a 6.14 são apresentadas as deformadas do tabuleiro para os carregamentos 1l a 4l, respectivamente. Nestas volta-se a constatar a elevada concordância entre os deslocamentos medidos e estimados numericamente, desde que o deslocamento em causa seja neste caso superior a 1mm.

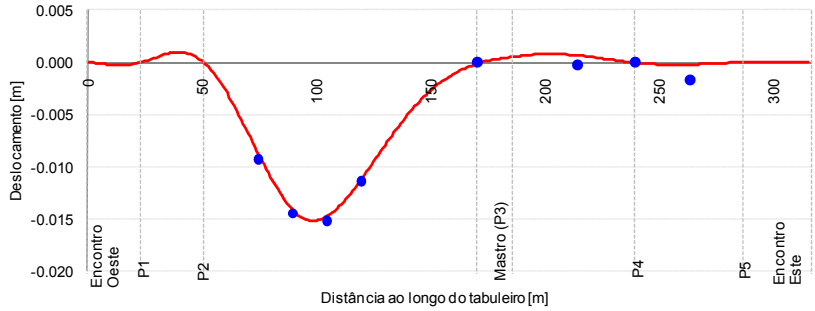


Figura 6.11 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 1l.

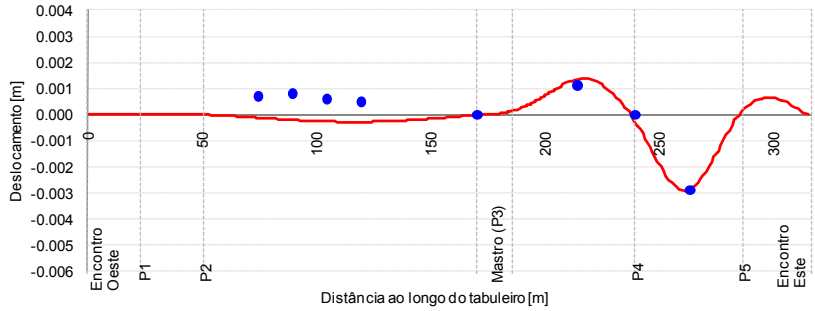


Figura 6.12 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 2l.

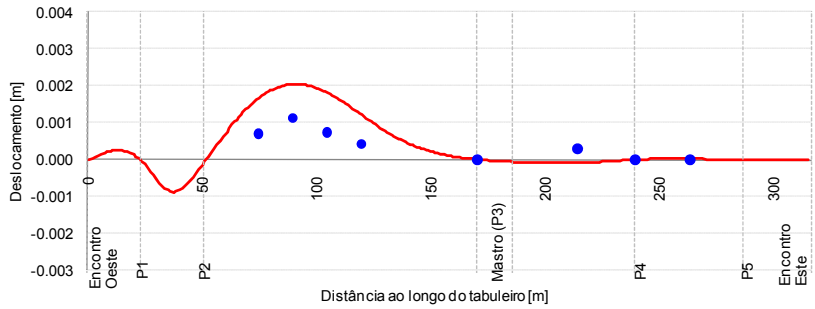


Figura 6.13 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 3l.

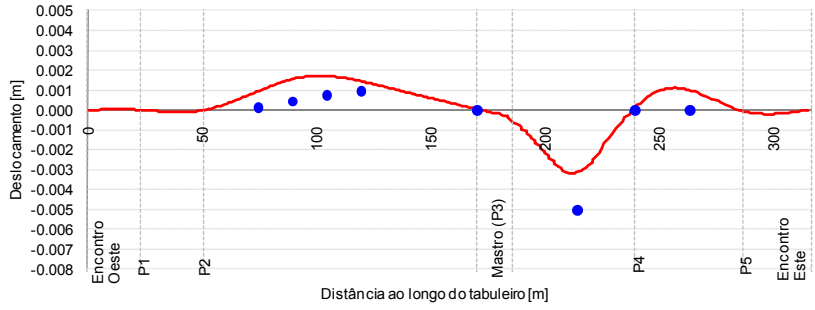


Figura 6.14 – Deformada do tabuleiro para o carregamento 4l.

Conclui-se, assim, que para todas as deformadas obtidas, e caso se considerem apenas os sensores interessados em cada caso de carga de acordo com o Quadro 6.5, os valores estimados numericamente estão em boa concordância com os valores medidos na campanha de monitorização.

6.3.3.2. Extensões no betão

Nas Figuras 6.15 a 6.22 são apresentadas as extensões no betão medidas e estimadas numericamente nas secções S1, S3, S5, S6 e S7. Os resultados nas secções S2 e S4 não são apresentados uma vez que não trazem informação adicional relevante. Posto que os valores obtidos por medição apresentam oscilações bastante consideráveis durante os intervalos de tempo em que foram recolhidos, os resultados são também apresentados nos Quadros 6.7 a 6.14, onde constam os valores estimados numericamente, o valor médio e desvio padrão das medições correspondentes e os erros dos valores numéricos relativamente às médias das medições.

Da observação das referidas figuras e quadros conclui-se que os valores medidos são normalmente muito pequenos, e portanto susceptíveis de serem muito afectadas pelas condições atmosféricas adversas em que decorreu o ensaio. De facto, factores como a existência de ventos fortes, o movimento de pessoas ou a vibração dos motores dos camiões parados sobre a ponte, provocam movimentos da estrutura que são captados pelos extensómetros, que interferem com as medições que se pretendem efectuar. Desta forma, para o erro dos valores estimados numericamente relativamente aos medidos ser pequeno, o valor médio da medição deverá ser claramente superior ao correspondente desvio padrão, o que neste caso acontece para valores médios das extensões superiores a $10x10^{-6}$.

De acordo com o Quadro 6.5 os casos de carga que interessam aos extensómetros da secção S1, situada no Tramo 3, são os 1L e 3L. Da observação da Figura 6.15 e do Quadro 6.7 verifica-se que mesmo para o caso de carga 1L, onde ocorrem as maiores extensões medidas nas fibras superiores da secção, que rondam os $10x10^{-6}$, as diferenças entre os valores previstos numericamente e os valores medidos variam entre os 16.4% e os 76.3%. Uma vez que as maiores diferenças ocorrem para os menores valores médios medidos, supõe-se que a sua causa seja sobretudo o facto de as solicitações ambientais não modeladas influenciarem substancialmente o valor médio medido.

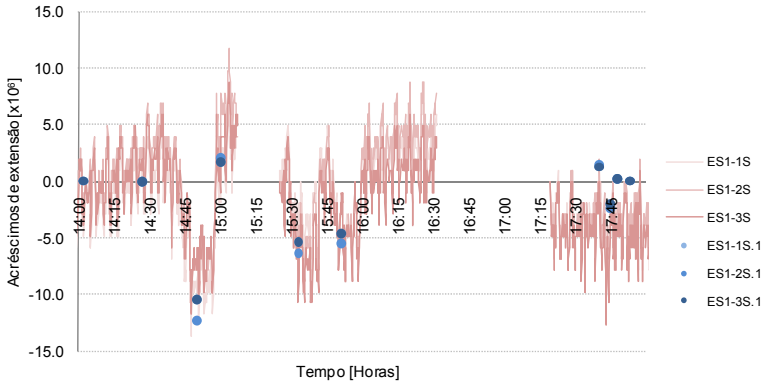


Figura 6.15 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1.

Quadro 6.7 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S1.

Caso de carga	ES1-1S				ES1-2S				ES1-3S			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
1L	-10.5	-9	2	-16.4	-12.3	-7	2	-76.3	-10.5	-7	2	-49.6
3L	1.7	3	2	42.6	2.0	7	2	71.0	1.7	4	2	57.0
1T	-5.4	-4	2	-34.5	-6.3	-6	2	-5.7	-5.4	-7	2	23.1
2T	-4.7	-4	2	-16.6	-5.5	-5	2	-9.9	-4.7	-5	2	6.7
3I	1.2	-4	2	131.2	1.5	-3	2	149.1	1.2	-4	2	131.2
1I	-2.0	-6	2	66.6	-2.4	-6	3	60.6	-2.0	-6	2	66.6

Na Figura 6.16 e no Quadro 6.8 são apresentadas as extensões estimadas numericamente e medidas nas fibras inferiores da secção S1, onde se observa que para o caso de carga 1L os valores das extensões medidas são da ordem dos 35x10^{-6}, pelo que neste caso as diferenças obtidas diminuíram para valores entre os 9.3% e os 17.8%. Para o caso de carga 3L os valores médios medidos são muito pequenos, pelo que os erros obtidos são enormes, atingindo valores próximos dos 300%.

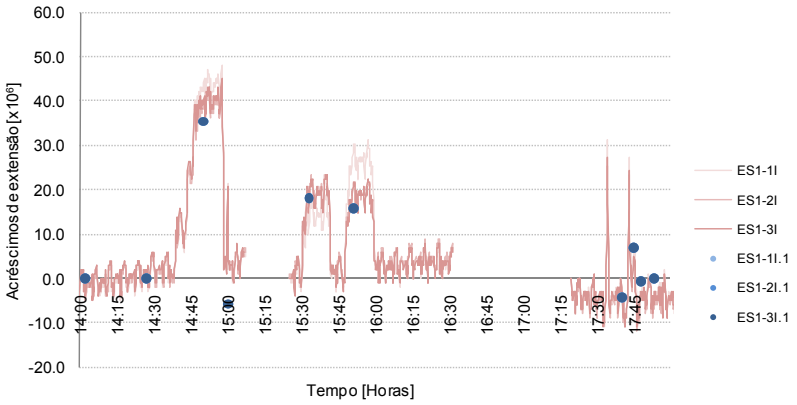


Figura 6.16 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1.

Quadro 6.8 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S1.

Caso de carga	ES1-1I				ES1-2I				ES1-3I			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
1L	35.4	43	2	17.8	35.4	39	2	9.3	35.4	40	2	11.6
3L	-5.8	3	2	294.5	-5.8	3	2	294.5	-5.8	3	2	294.5
1T	18.1	15	2	-20.8	18.1	20	2	9.4	18.1	19	2	4.7
2T	15.7	27	2	41.9	15.7	19	2	17.4	15.7	19	2	17.4
3I	-4.3	-7	2	38.7	-4.3	-8	2	46.3	-4.3	-7	2	38.7
1I	6.8	4	2	-70.7	6.8	2	2	-241.4	6.8	2	2	-241.4

As extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3 são apresentadas na Figura 6.17 e no Quadro 6.9. Os valores medidos voltam a não ser suficientemente grandes, todos inferiores a 10x10^{-6}, para avaliar o rigor da modelação numérica.

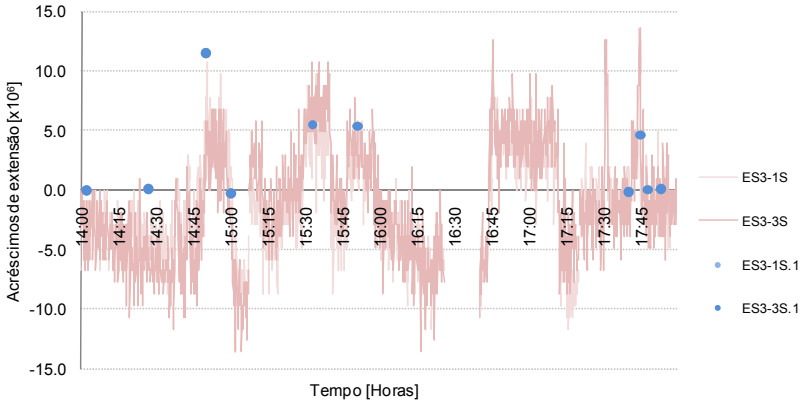


Figura 6.17 – Extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3.

Quadro 6.9 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S3.

Caso de carga	ES3-1S				ES3-3S			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
1L	11.5	5	2	-129.8	11.5	3	2	-283.0
1T	5.5	4	2	-37.2	5.5	6	2	8.5
2T	5.4	2	2	-168.1	5.4	3	2	-78.7
1I	4.6	3	3	-54.1	4.6	2	3	-131.2

Na Figura 6.18 e no Quadro 6.10 são apresentadas as extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3, sendo que para o caso de carga 1L, que interessa à secção, os valores medidos, na ordem dos 20x10^{-6}, são bastante semelhantes aos estimados numericamente, variando as diferenças entre os 6.6% e os 12.8%.

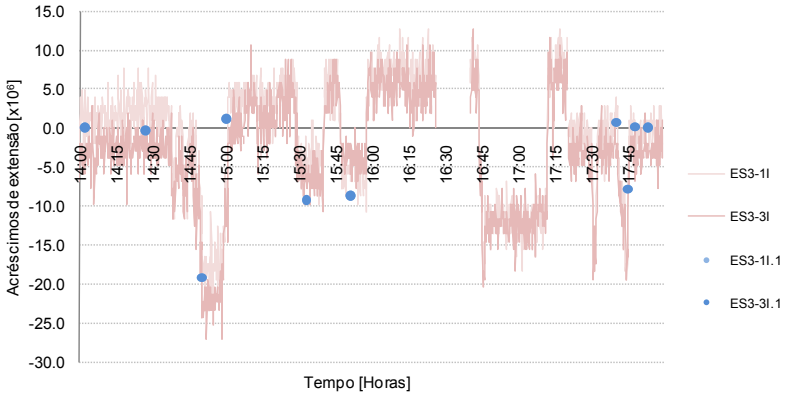


Figura 6.18 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3.

Quadro 6.10 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S3.

Caso de carga	ES3-1I				ES3-3I			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
1L	-19.2	-18	3	-6.6	-19.2	-22	2	12.8
1T	-9.2	-4	2	-130.8	-9.2	-6	1	-53.9
2T	-8.7	-6	2	-45.0	-8.7	-4	2	-117.5
1I	-7.8	-7	2	-11.9	-7.8	-9	2	13.0

Na Figura 6.19 e no Quadro 6.11 são apresentados os valores das extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5, aquando dos casos de carga 2L e 4L, onde se pode observar que apesar de aquelas serem pequenas, cerca de 10x10^{-6}, as diferenças registadas são relativamente pequenas, entre os 7.8% e os 23.7%. Uma vez que os extensómetros utilizados em toda a monitorização da estruturas são iguais, o suposto aumento da precisão dos resultados obtidos nestes extensómetros poderá estar associado ao facto de a secção S5 se encontrar numa zona menos flexível do tabuleiro, e desta forma menos sujeita às solicitações ambientais não modeladas.

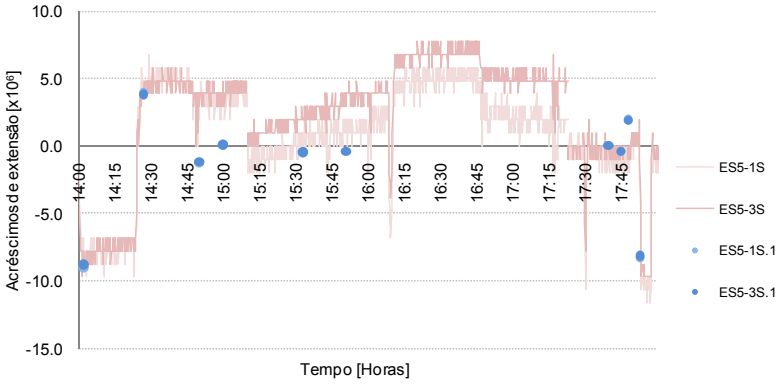


Figura 6.19 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5.

Quadro 6.11 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros superiores da secção S5.

Caso de carga	ES5-1S				ES5-3S			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
2L	-9.0	-8	1	-12.7	-8.8	-8	1	-10.3
4L	3.9	5	1	22.1	3.8	5	0	23.7
4I	1.9	0	2	-	1.9	0	2	-
2I	-8.3	-9	4	7.8	-8.1	-9	5	9.8

Na Figura 6.20 e no Quadro 6.12 são apresentadas as extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5, para os casos de carga 2L e 4L, onde se observam diferenças superiores às referidas para os extensómetros superiores da mesma secção. No

entanto para o caso de carga 2L, que mais interessa à secção, ainda se encontram dentro de limites aceitáveis, nomeadamente entre os 8.8% e os 23%.

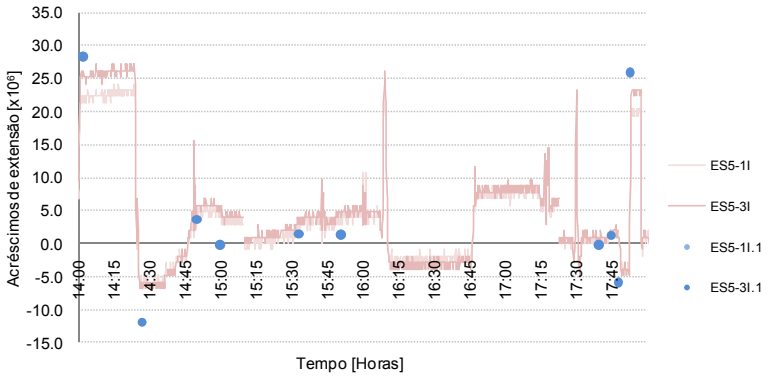


Figura 6.20 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5.

Quadro 6.12 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros inferiores da secção S5.

Caso de carga	ES5-1I				ES5-3I			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
2L	28.3	23	1	-23.0	28.3	26	1	-8.8
4L	-12.0	-6	1	-99.4	-12.0	-6	0	-99.4
4I	-6.0	-3	1	-99.2	-6.0	-3	1	-99.2
2I	25.9	18	2	-43.7	25.9	21	2	-23.2

Observando a Figura 6.21 e o Quadro 6.13, onde são apresentados os valores das extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6, conclui-se que o fuste vertical do mastro, onde se encontra a secção S6, é muito pouco sensível à aplicação de cargas no tabuleiro, sendo o valor da extensão máxima medida de 16x10^{-6}, aquando da aplicação do caso de carga 1L. As diferenças entre os valores estimados numericamente e os valores médios medidos variam entre os 13.1% e os 138.2%, sendo que para valores médios medidos superiores a 10x10^{-6} as diferenças não ultrapassam os 23.0%.

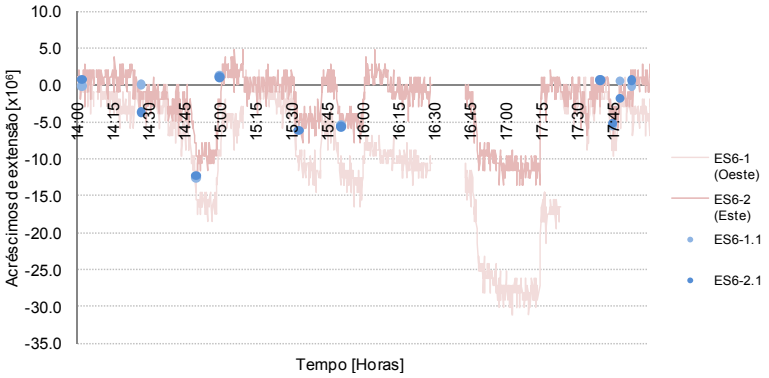


Figura 6.21 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6.

Quadro 6.13 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S6.

Caso de carga	ES6-1 (Oeste)				ES6-2 (Este)			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
2L	-0.2	-2	1	92.0	0.8	1	1	24.3
4L	0.0	-2	1	100.5	-3.7	-2	1	-85.0
1L	-12.5	-16	1	21.7	-12.3	-10	1	-23.0
3L	1.3	-5	1	125.7	1.1	2	1	46.9
1T	-6.1	-11	1	44.3	-6.1	-5	1	-22.6
2T	-5.5	-13	1	57.5	-5.7	-5	1	-13.1
3I	0.8	-2	0	138.2	0.7	0	1	-
1I	-5.5	-7	1	21.9	-5.2	-4	2	-29.8
4I	0.6	-2	1	128.4	-1.8	-1	1	-79.1
2I	-0.2	-4	1	95.4	0.6	1	1	36.4

Uma conclusão interessante resulta da observação de que as extensões na secção S6 são semelhantes em ambas as faces do fuste vertical, indiciando que este elemento estrutural é solicitado quase exclusivamente por esforços axiais.

Na Figura 6.22 e no Quadro 6.14 são apresentados os valores das extensões medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7, situado no fuste oblíquo do mastro, onde se pode observar que as extensões apresentadas são típicas de uma secção sujeita a flexão composta. De facto, as extensões de um dos lados do fuste (ES7-2) mantêm-se praticamente inalteradas em todos os casos de carga, atingindo um valor máximo estimado numericamente de 5x10^{-6}, enquanto no outro lado do fuste (ES7-1) a variação de tensão correspondente toma um valor estimado de 27.6x10^{-6}. As diferenças entre os valores estimados numericamente e os valores médios medidos variam entre os 2.7% e os 398.8%, sendo que para valores médios medidos superiores a 10x10^{-6} as diferenças variam entre 16.3% e 51.1%.

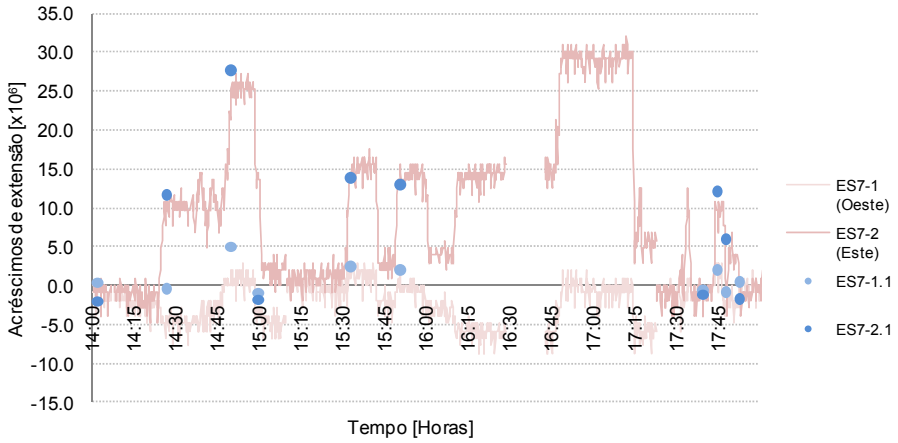


Figura 6.22 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7.

Quadro 6.14 – Extensões no betão medidas e estimadas numericamente nos extensómetros da secção S7.

Caso de carga	ES7-1 (Oeste)				ES7-2 (Este)			
	Numérico	Medido		Erro	Numérico	Medido		Erro
		Média	Desv.P.			Média	Desv.P.	
	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[x10^{-6}]	[%]
2L	0.4	-2	1	117.9	-2.0	-1	1	-104.9
4L	-0.5	-5	1	90.8	11.6	10	1	-16.3
1L	5.0	1	1	-398.8	27.6	25	1	-10.4
3L	-1.0	-5	1	80.9	-1.9	3	2	162.1
1T	2.4	2	1	-19.1	13.9	15	1	7.6
2T	2.0	0	1	-	12.9	14	1	7.9
3I	-0.6	-1	1	36.5	-1.2	-1	1	-22.7
1I	2.1	2	1	-2.7	12.1	8	3	-51.1
4I	-0.9	-2	1	56.9	5.9	3	3	-98.2
2I	0.5	0	1	-	-1.8	-1	1	-80.1

6.4. Previsão do comportamento futuro da obra

6.4.1. Controlo de deslocamentos

6.4.1.1. Deslocamentos verticais

Na Figura 6.23 são apresentados os deslocamentos verticais totais dos nós do tabuleiro previstos numericamente no instante da conclusão da obra e no final de 2050. Uma vez que há nós "ligados" em instantes diferentes, o deslocamento de um nó e de um nó contíguo "ligado" noutro instante possuem historiais de deslocamento diferentes, pelo que as linhas apresentadas na Figura 6.23 se apresentam segmentadas. Evidentemente que o tabuleiro não apresenta uma deformada com o aspecto da Figura 6.23, uma vez que na construção cada nova aduela é justaposta à aduela precedente, e portanto é automaticamente corrigida a origem do deslocamento de cada nó. Assim sendo, doravante passar-se-ão a apresentar diagramas de incrementos de deslocamento entre diferentes instantes, pelo que os gráficos apresentados corresponderão a incrementos de deformada da estrutura. A observação da Figura 6.23 permite ainda identificar a grande amplitude de deslocamento de algumas secções do tabuleiro, em especial no Tramo 3 construído por avanços sucessivos com recurso a tirantes, onde as operações de betonagem das aduelas e de tensionamento de tirantes provocam deslocamentos que chegam a atingir cerca de 20cm na extremidade em consola do tabuleiro.

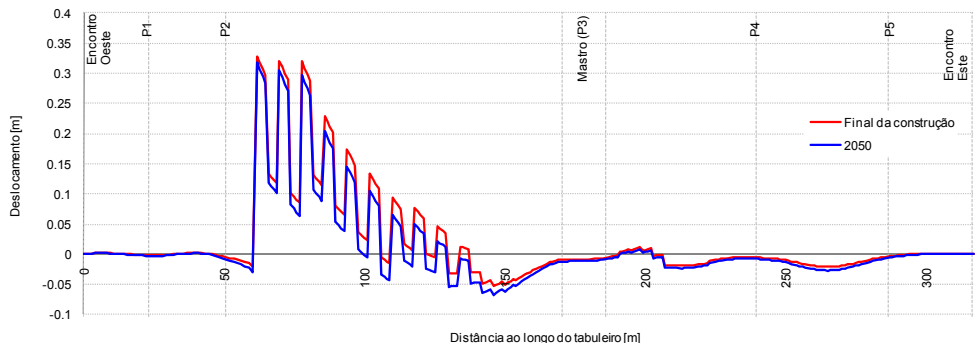


Figura 6.23 – Deslocamentos verticais totais dos nós do tabuleiro no instante da conclusão da obra e no final de 2050.

Nas Figuras 6.24 e 6.25 são apresentados os incrementos de deformada vertical do tabuleiro previstos numericamente em relação ao instante da conclusão da obra, aquando do ajuste dos esforços nos tirantes, para os anos compreendidos entre 2003 e 2010 e entre 2010 e 2050, respectivamente. Os deslocamentos apresentados reflectem o comportamento estrutural diferido do betão e do aço de pré-esforço, e pode observar-se que a variação dos deslocamentos tende a diminuir ao longo do tempo, como seria expectável. A máxima variação do deslocamento vertical no tabuleiro acontece no Tramo 3, sendo de 22mm nos primeiros 8 anos e de apenas 6mm nos 40 anos subsequentes, atingindo uma variação total de 28mm que poderá ser considerada muito reduzida, uma vez que é apenas 1/4000 do vão livre no tramo em causa.

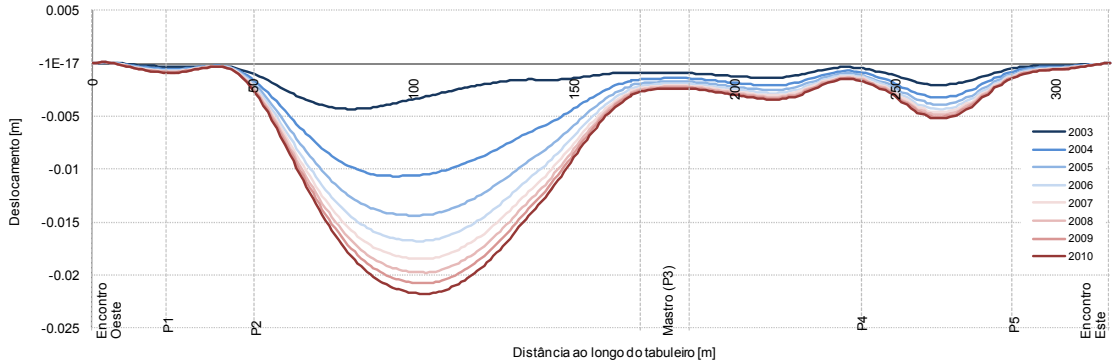


Figura 6.24 – Incrementos de deformada vertical do tabuleiro em relação ao instante da conclusão da obra para os anos compreendidos entre 2003 e 2010.

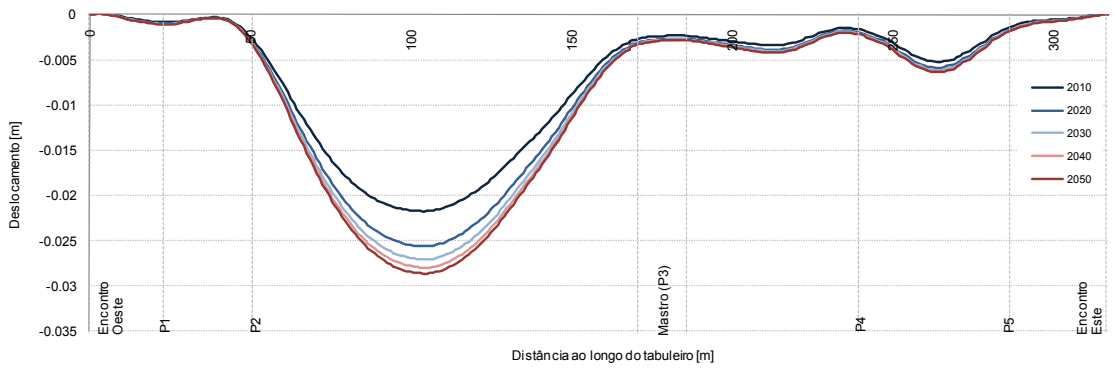


Figura 6.25 – Incrementos de deformada do tabuleiro relativos ao instante da conclusão da obra entre 2010 e 2050.

Na modelação numérica de obras de arte é frequente, pelo menos para o estudo do comportamento vertical do tabuleiro, substituir os pilares que possuem aparelhos de apoio deslizantes e rotulados na sua extremidade superior por apoios rígidos ao exterior. No entanto, da observação das Figuras 6.24 e 6.25 constata-se que existem incrementos de deslocamentos verticais do tabuleiro de diferentes valores, provocados pelo comportamento diferido dos pilares de apoio, nomeadamente devido aos efeitos da retracção e da fluência do betão. Assim sendo, e estando o programa de cálculo preparado simular qualquer tipo de aparelho de apoio, parece mais adequada a modelação completa dos pilares através de elementos finitos, de forma a considerar os assentamentos diferenciais do tabuleiro.

Na Figura 6.26 são apresentados os deslocamentos verticais previstos numericamente nas secções DV1 a DV4 do tabuleiro ao longo do processo construtivo e até 2050, de forma a avaliar a sua evolução ao longo do tempo. Como seria de esperar, após o final do processo construtivo e do ajuste final de esforços nos tirantes a variação dos deslocamentos em qualquer uma das secções do tabuleiro é muito reduzida, e tende a diminuir ao longo do tempo.

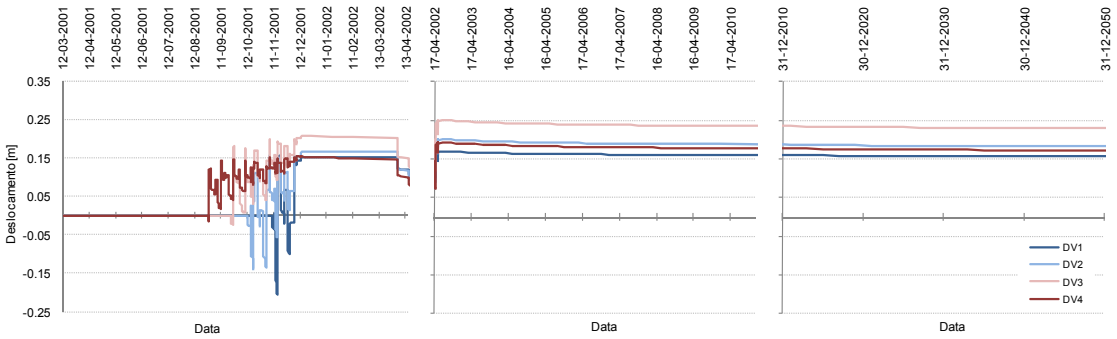


Figura 6.26 – Deslocamentos verticais previstos numericamente nas secções DV1 a DV4 do tabuleiro ao longo do processo construtivo e até 2050.

6.4.1.2. Deslocamentos horizontais no mastro

O ponto da estrutura onde se verificam maiores deslocamentos horizontais é o topo do mastro, atingindo uma amplitude de 15cm durante as operações de construção, conforme se pode observar na Figura 6.27. No início do faseamento construtivo o deslocamento do topo do mastro dá-se no sentido Oeste, e posteriormente no sentido contrário, sendo condicionado pelas sucessivas forças horizontais introduzidas pelos tirantes de suspensão e de retenção. Após o final da construção e do ajuste final de esforços nos tirantes existe um ligeiro deslocamento diferido no sentido Este, da ordem dos 10mm, que reforça as conclusões tiradas em 6.4.2 acerca da redistribuição de esforços introduzida pelo abaixamento do Tramo 3 na zona dos tirantes de suspensão.

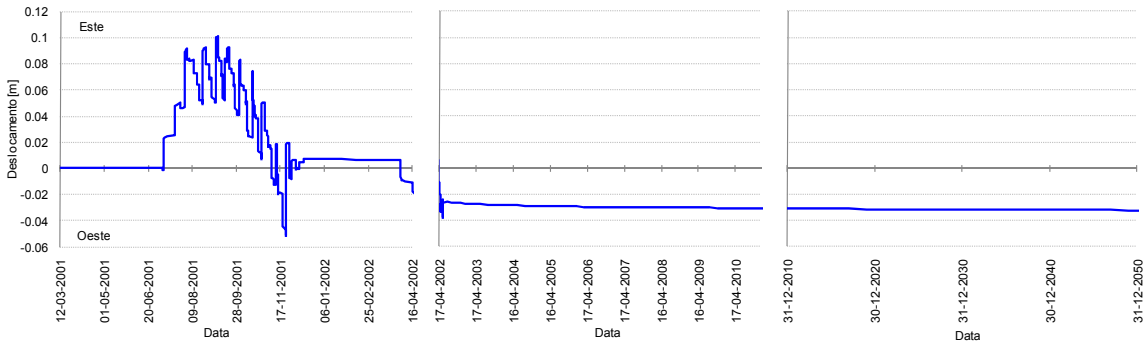


Figura 6.27 – Variação do deslocamento horizontal do topo do mastro ao longo do tempo.

6.4.1.3. Deslocamentos horizontais nas juntas de dilatação dos encontros

Um dos parâmetros de dimensionamento das juntas de dilatação é a amplitude do deslocamento horizontal a acomodar, e existem pelo menos duas formas de a reduzir:

i) Montar as juntas apenas no final da obra, ou seja após terem ocorrido os deslocamentos induzidos pelo processo construtivo e parte dos deslocamentos diferidos;

ii) Montar as juntas durante o processo construtivo mas com uma deformação imposta contrária ao deslocamento final expectável no final da obra, que inclui os deslocamentos instantâneos e diferidos, de modo a que no final da construção a junta se encontre centrada.

Uma vez que a montagem das juntas no final da obra acarreta com frequência dificuldades, torna-se relevante a análise dos respectivos deslocamentos horizontais durante o processo construtivo, de forma a ser possível utilizar a segunda hipótese equacionada.

Os deslocamentos horizontais das juntas dos encontros são condicionados pela forma como o tabuleiro está ligado ao exterior, sendo que neste caso os apoios nas extremidades superiores dos pilares e nos encontros são deslizantes no sentido longitudinal da obra. Assim sendo, e uma vez que o tabuleiro está ligado monoliticamente ao mastro, os deslocamentos horizontais instantâneos das juntas são forçosamente semelhantes aos deslocamentos horizontais instantâneos do mastro ao nível do tabuleiro, e a amplitude dos movimentos diferidos das juntas é função da distância destas àquele. Os deslocamentos horizontais diferidos das juntas são fundamentalmente provocados pela retracção e fluência do betão, sendo que ambos os fenómenos provocam um progressivo encurtamento do tabuleiro.

A pequena variabilidade do deslocamento horizontal da junta do Encontro Oeste, observável na Figura 6.28, é justificada pelo facto dos Tramos 1 e 2 serem ligados ao resto do tabuleiro após a construção por avanços do Tramo 3, sendo desta forma pouco influenciada pela complexidade do processo construtivo utilizado na execução deste tramo. Os deslocamentos horizontais instantâneos identificáveis na Figura 6.28 são originados pela acção de aplicação do pré-esforço de continuidade no Tramo 3, pela aplicação do betuminoso no tabuleiro e pelo ajuste final dos esforços nos tirantes. Já os deslocamentos diferidos da mesma junta são provocados sobretudo pela retracção e fluência do betão do tabuleiro, cujo efeito é ampliado pela grande distância, cerca de 170m, que separa a junta do mastro. A amplitude do deslocamento horizontal da junta do Encontro Oeste durante o faseamento construtivo é de 35mm, no sentido Este, e o deslocamento diferido após o faseamento construtivo é de 33mm no mesmo sentido.

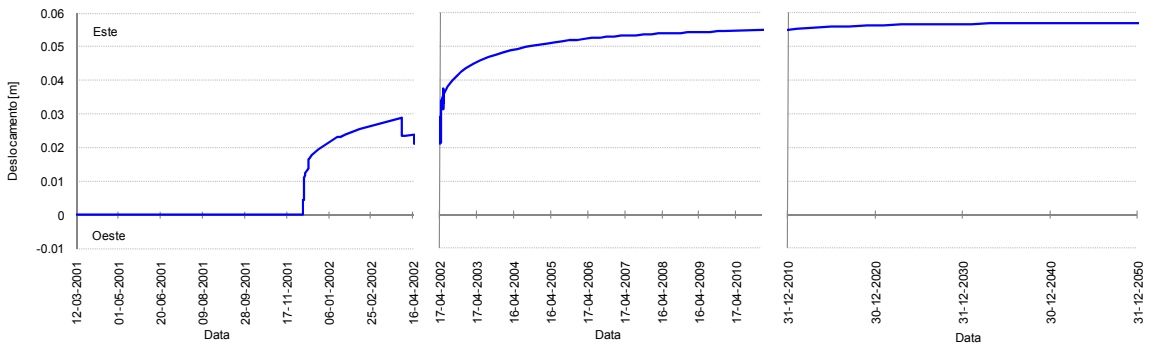


Figura 6.28 – Variação do deslocamento horizontal da junta de dilatação do Encontro Oeste ao longo do processo construtivo e até 2050.

A variação do deslocamento horizontal da junta do Encontro Este é bastante complexa, conforme se pode observar na Figura 6.29, uma vez que os Tramos 4, 5 e 6 do tabuleiro são ligados ao Tramo 3 ainda durante o faseamento construtivo deste último. Desta forma os deslocamentos horizontais instantâneos são condicionados pelos movimentos horizontais do mastro, que conforme foi explicado, são influenciados pelo processo construtivo do Tramo 3, justificando assim a semelhança das Figuras 6.27 e 6.29 durante o processo construtivo.

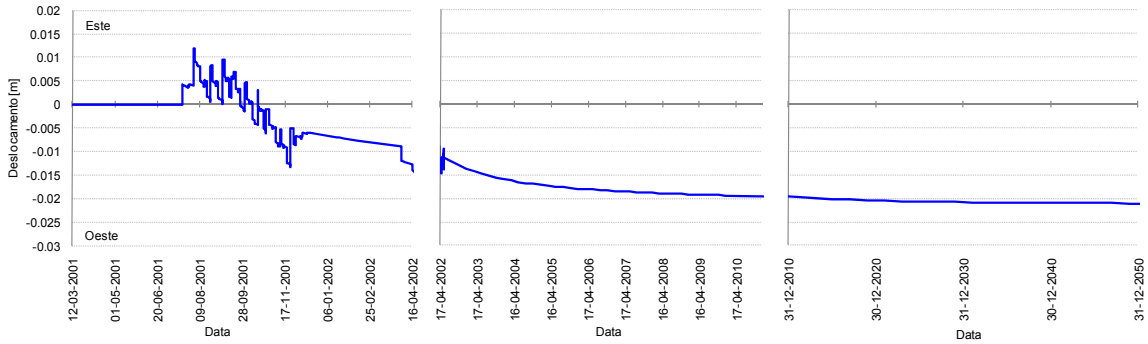


Figura 6.29 – Variação do deslocamento horizontal da junta de dilatação do Encontro Este ao longo do processo construtivo e até 2050.

Após o final do faseamento construtivo e do ajuste final dos esforços nos tirantes os deslocamentos horizontais da junta do Encontro Este são sobretudo provocados pelo encurtamento do tabuleiro, devido ao comportamento reológico do betão, e a respectiva grandeza condicionada pela distância até ao mastro, cerca de 130m. A amplitude do deslocamento horizontal da junta do Encontro Este durante o faseamento construtivo é de 24mm, sendo de 12mm no sentido Este e de 12mm no sentido Oeste, e o deslocamento diferido após o faseamento construtivo é de 10mm no sentido Oeste.

6.4.2. Controlo de tensões

6.4.2.1. Betão do tabuleiro

Na Figura 6.30 são apresentadas as tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro, previstas numericamente após o ajuste final dos tirantes e em 2050. Pode observar-se que a variação das referidas tensões é considerável, nomeadamente entre o Encontro Oeste e o mastro. Num troço do tabuleiro compreendido entre os 0 e os 140m, medidos a partir do Encontro Oeste, os valores das tensões nas fibras extremas em 2050 tendem a aproximar-se, indiciando que existe uma diminuição do valor dos momentos flectores nessa zona, do que resulta um estado de tensão mais uniforme. Num troço do tabuleiro compreendido entre os 140m e os 230m acontece o inverso, ou seja, os valores das tensões nas fibras inferiores e superiores afastam-se, indiciando um aumento dos momentos flectores nesta secção do tabuleiro. Do exposto conclui-se que o comportamento diferido da estrutura teve como consequência uma redistribuição de esforços, do vão suspenso para as imediações do mastro. Como consequência o diagrama de tensões instaladas no tabuleiro torna-se mais uniforme e aumentam as tensões de compressão na generalidade do tabuleiro, situação particularmente desejável em estruturas de betão armado pré-esforçado.

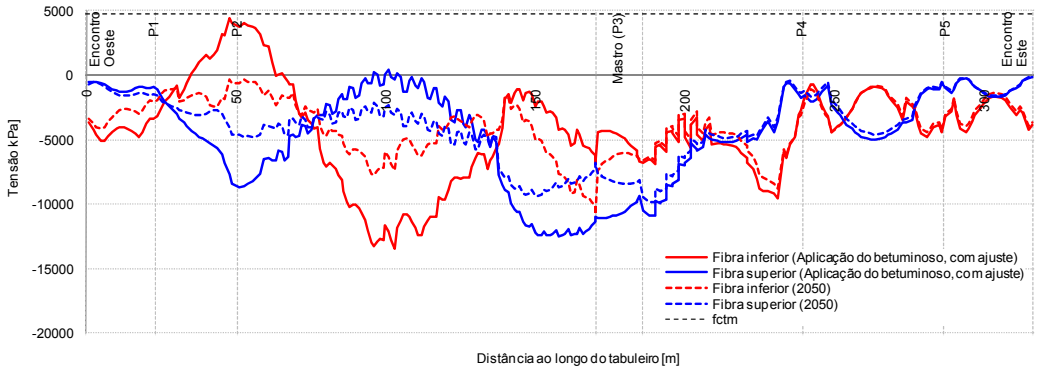


Figura 6.30 – Tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro, após o ajuste final dos tirantes e em 2050.

6.4.2.2. Betão do mastro

Nas Figuras 6.31 e 6.32 são apresentadas as tensões previstas numericamente nas fibras Oeste e Este de betão ao longo dos fustes do mastro, após o ajuste final dos tirantes e em 2050. Pode observar-se que em 2050 nas secções do mastro superiores ao tabuleiro, tanto no fuste vertical como no oblíquo, os valores das tensões nas fibras Oeste e Este se aproximam, e de uma forma geral diminuem, indiciando uma diminuição dos momentos flectores e do esforço axial nessas secções. Esta observação vai de encontro às observações finais apresentadas em 6.4.2.1, pois a redistribuição de esforços no tabuleiro entre a zona suspensa e a zona próxima do mastro implica a diminuição dos esforços nos tirantes, e consequentemente no mastro.

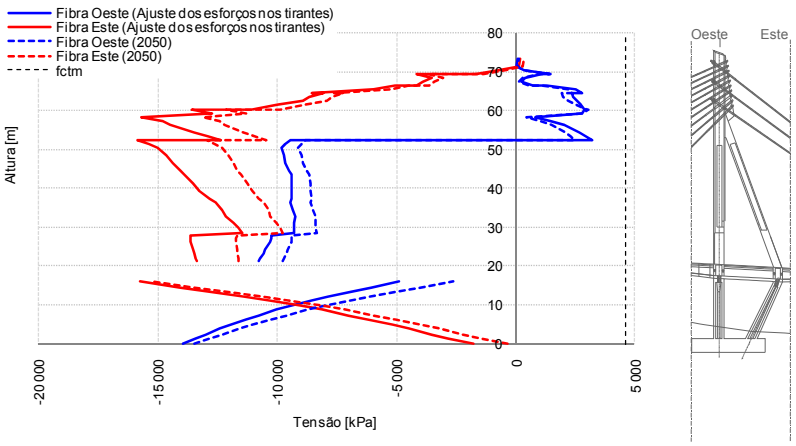


Figura 6.31 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro após o ajuste final dos tirantes e em 2050.

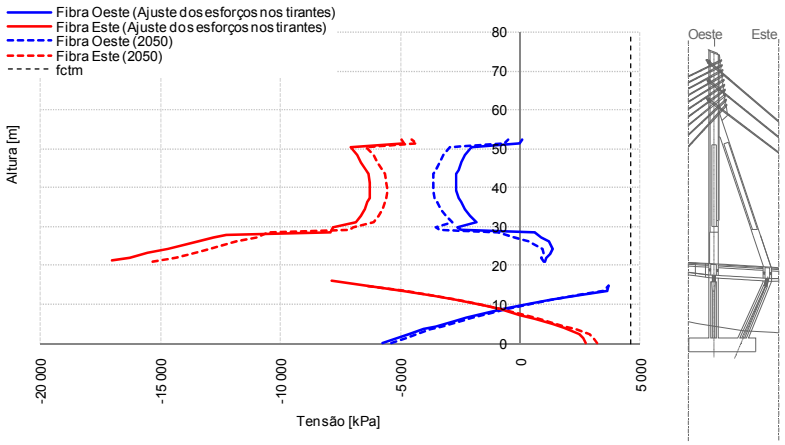


Figura 6.32 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro após o ajuste final dos tirantes e em 2050.

6.4.2.3. Tirantes

Nas Figuras 6.33 e 6.34 são apresentadas as variações de tensão previstas numericamente nos tirantes de suspensão e nos tirantes de retenção ao longo do processo construtivo e até 2050. Pode observar-se que inicialmente existe uma elevada variabilidade dos esforços nos tirantes, resultante do processo construtivo, mas uma vez aplicado o ajuste final de esforços nos tirantes a variação é muito reduzida, e com tendência a diminuir ao longo do tempo.

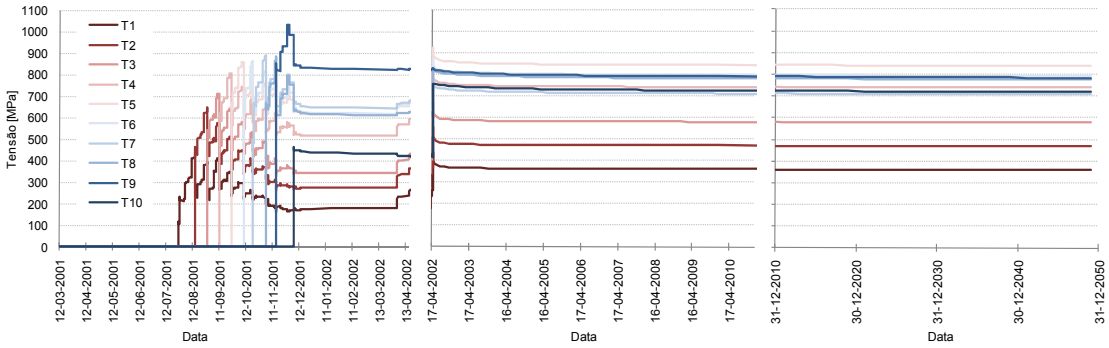


Figura 6.33 – Variação de tensão prevista nos tirantes de suspensão ao longo do processo construtivo e até 2050.

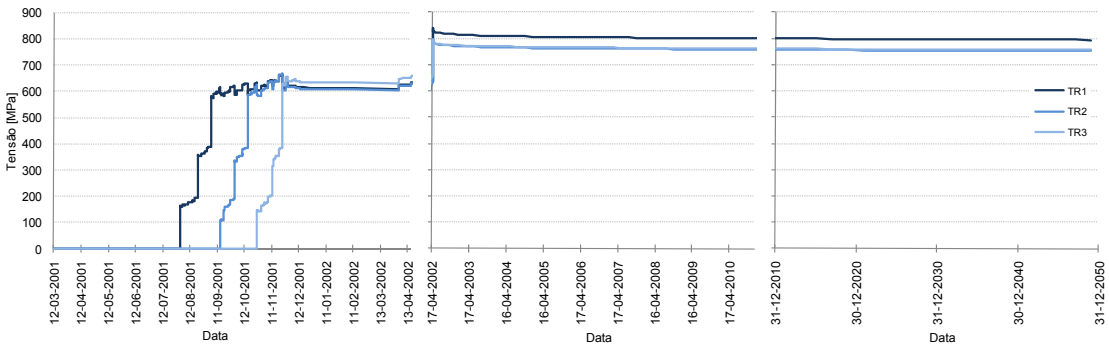


Figura 6.34 – Variação de tensão prevista nos tirantes de retenção ao longo do processo construtivo e até 2050.

Do comportamento previsto para os tirantes ao longo do tempo, associado às observações efectuadas nas secções 6.4.2.1 e 6.4.2.2, não se prevê a necessidade de retensionamento dos tirantes até 2050.

6.5. Efeito de variações uniformes de temperatura

As variações uniformes de temperatura podem ter grandes implicações a nível estrutural de uma obra de arte, e são função do grau de hiperestaticidade desta. A alteração das tensões instaladas no betão do tabuleiro do Viaduto da Corujeira pode ser observada na Figura 6.35, para variações uniformes de temperatura de +15ºC e de -15ºC. Pode observar-se que as variações de tensão no betão estimadas não ultrapassam os 0.3MPa. Uma observação mais atenta da Figura 6.35 permite identificar alguns aspectos interessantes, como o facto de existirem incrementos de tensão nas extremidades do tabuleiro, e do diferencial de tensões entre as fibras superiores e inferiores indiciar a ocorrência de momentos flectores.

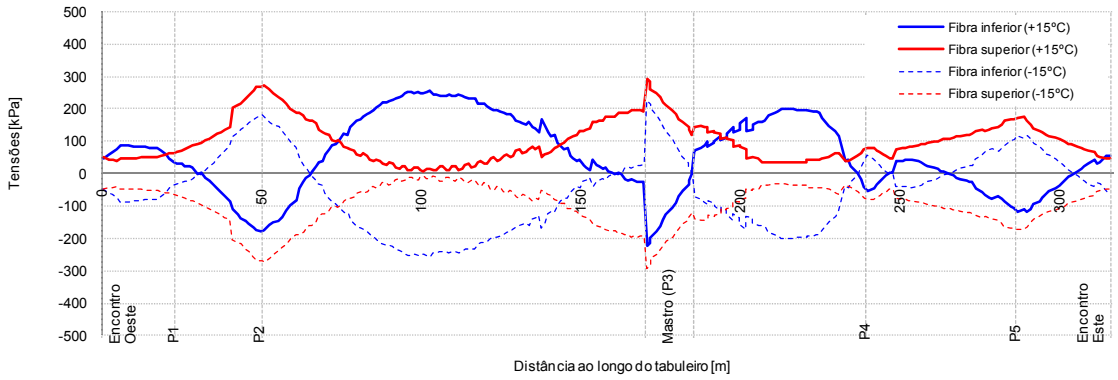


Figura 6.35 – Diagramas de incrementos de tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro devidas a variações uniformes de temperatura de +15ºC e de -15ºC.

A existência nas extremidades do tabuleiro de tensões de igual valor nas fibras superior e inferior, são provocadas pela redistribuição de tensões ao longo da secção, devido ao comportamento distinto do betão e do aço. O facto de o aço possuir um coeficiente de dilatação térmica (1.2×10^{-5}/ºC) ligeiramente superior ao do betão (1×10^{-5}/ºC) faz com que a extensão imposta nos dois materiais por uma variação de temperatura origine tensões de sinais contrários em cada um destes, de forma a haver compatibilidade de deformações.

A introdução de momentos flectores no tabuleiro é provocada pelos assentamentos diferenciais dos respectivos apoios devido às variações de temperatura, que afectam os pilares e os tirantes de suspensão e de retenção, conforme se pode observar através da Figura 6.36. Pode ainda observar-se que um aumento uniforme de temperatura provoca no Tramo 3 um deslocamento descendente relativamente aos seus extremos, originado pelo aumento de comprimento dos tirantes de suspensão e de retenção. No entanto o deslocamento absoluto é ascendente, devido ao aumento de comprimento dos pilares e do próprio mastro.

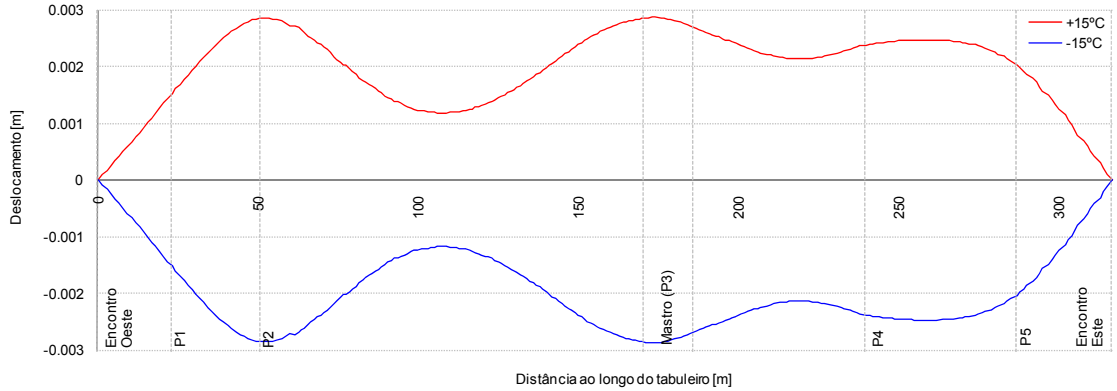


Figura 6.36 – Incrementos da deformada vertical do tabuleiro devidos a variações uniformes de temperatura.

A consequência mais assinalável das variações uniformes de temperatura está associada à grande variação da dimensão longitudinal de alguns dos elementos estruturais, como os pilares, o mastro e o tabuleiro. Na Figura 6.37, onde se apresenta a deformada do Viaduto da Corujeira para uma variação uniforme de temperatura de +15ºC, é possível observar o aumento do comprimento do mastro, cerca de 11mm, o movimento ascendente do tabuleiro e o aumento de comprimento deste.

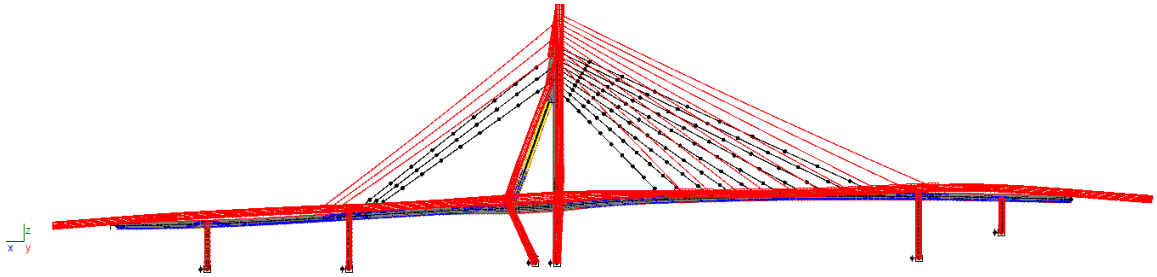


Figura 6.37 – Deformada do Viaduto da Corujeira para uma variação uniforme de temperatura de +15ºC.

As variações de temperatura são as acções, não acidentais, que maiores deslocamentos horizontais originam na estrutura do viaduto, pelo que deverão ser devidamente identificadas de forma a dimensionar a amplitude útil de deslocamento das juntas de dilatação dos encontros. Assim sendo, através da modelação numérica verificou-se que uma variação de temperatura de ±15ºC provoca movimentos horizontais na junta do Encontro Oeste de ±27mm, e de ±21mm na junta do Encontro Este, a que correspondente uma variação total do comprimento do tabuleiro de 96mm, e de ±1.4mm no topo do mastro.

6.6. Modelação de operações de manutenção e reparação

Nesta secção pretende-se avaliar as capacidades do modelo numérico para a simulação de operações de manutenção da obra que tenham implicações ao nível do comportamento estrutural. Desta forma modelaram-se operações de substituição de aparelhos de apoio e de tirantes de suspensão e de retenção. Todas as simulações foram efectuadas para a data de 1 de Janeiro de 2010, quando o viaduto já se encontrava em funcionamento há cerca de 8 anos.

6.6.1. Substituição de aparelhos de apoio

Uma das operações de manutenção e reparação mais frequentes em obras de arte, com implicações a nível estrutural, é a substituição de aparelhos de apoio. Esta operação consiste, normalmente, no levantamento do tabuleiro sobre o apoio em causa através de mecanismos hidráulicos, remoção do aparelho de apoio danificado, colocação de um novo aparelho de apoio e, por fim, no carregamento do novo aparelho através do abaixamento do tabuleiro. Na primeira linha do Quadro 6.15, correspondente à designação "Original", são apresentadas as reacções pré-existentes em cada um dos apoios à data das operações individuais de levantamento, que correspondem às forças que os mecanismos hidráulicos deverão aplicar de forma a libertar cada um dos aparelhos de apoio.

Quadro 6.15 – Reacções durante as operações de levantamento de apoios.

	Reacções de apoio [kN]					
	Encontro Oeste	Pilar P1	Pilar P2	Pilar P4	Pilar P5	Encontro Este
Original	3971	8137	10838	11591	13143	3776
Apoio a levantar						
Encontro Oeste (+10mm)	4318	7456	11195	11605	13141	3776
Pilar P1 (+10mm)	3289	**9607**	9936	11518	13151	3774
Pilar P2 (+10mm)	**4328**	7235	**11548**	11716	13129	3779
Pilar P4 (+10mm)	3985	8065	10964	**12339**	12716	**3934**
Pilar P5 (+10mm)	3969	8145	10824	11164	**13690**	3511
Encontro Este (+10mm)	3971	8135	10841	11749	12878	3920

Uma vez que a aplicação de forças nos dispositivos hidráulicos de levantamento iguais às reacções de apoio não é usualmente suficiente para remoção dos respectivos aparelhos de apoio, admitiu-se como suficiente um levantamento de 10mm do tabuleiro para a realização dessa operação. Assim, simulou-se o levantamento do tabuleiro actuando sobre cada um dos apoios de forma independente, apresentando-se no Quadro 6.15 as forças necessárias a aplicar pelos mecanismos hidráulicos (células a sombreado), e as correspondentes reacções nos restantes apoios, de forma não só a dimensionar os mecanismos hidráulicos, mas também a controlar possíveis levantamentos noutros apoios.

Da observação do Quadro 6.15 verifica-se que nos apoios colocados nos encontros do viaduto as reacções máximas (salientadas a negrito) não acontecem durante as operações dos respectivos levantamentos, mas durante as operações de levantamento sobre pilares relativamente afastados. Este facto ocorre devido aos deslocamentos impostos pelo levantamento do tabuleiro, que originam um "efeito de alavanca" sobre os pilares P1 e P5. Assim, no Encontro Oeste a reacção máxima acontece aquando do levantamento do tabuleiro sobre o pilar P2, e no Encontro Este a reacção máxima acontece aquando do levantamento do tabuleiro sobre o pilar P4.

Na Figura 6.38 são apresentados os incrementos da deformada do tabuleiro previstos durante as operações de levantamento dos apoios. É particularmente interessante a observação da deformada associada ao levantamento do apoio situado sobre o pilar P2, uma vez que devido às características de rigidez do tabuleiro nessa zona a referida operação provoca um levantamento superior no Tramo 3, conforme assinalado na Figura 6.38 através de uma seta.

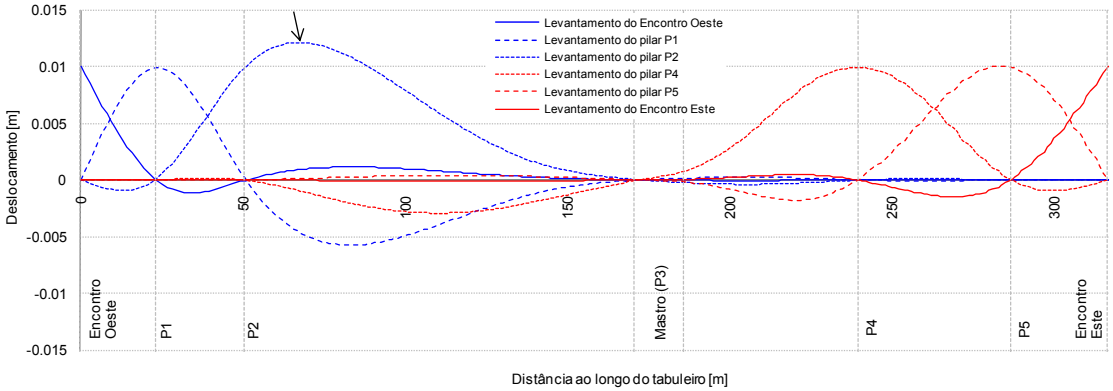


Figura 6.38 – Incrementos da deformada do tabuleiro devido ao levantamento dos apoios.

Devido à hiperestaticidade da estrutura qualquer levantamento de um ponto do tabuleiro introduz alterações no estado de tensão, pelo que, aquando de cada uma das operações de levantamento dos apoios se analisou o estado de tensão em todo o viaduto. Foi dada particular ênfase à análise das tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro, uma vez que os pilares e os tirantes não são tão sensíveis às operações modeladas.

Uma vez que um levantamento considerado de 10mm pode não ser suficiente para a substituição dos apoios, determinou-se para cada um deles o levantamento máximo admissível sem que a tensão normal no betão ultrapassasse o valor de f_{ctm} à data da realização das operações, que no caso do betão do tabuleiro corresponde a 4.8MPa. Os resultados obtidos são apresentados sobre a forma gráfica nas Figuras 6.39 a 6.46, onde se apresentam as tensões nas fibras superiores e inferiores de betão ao longo do tabuleiro durante o levantamento de cada um dos apoios, tanto para 10mm como para o levantamento máximo correspondente. Uma vez que os valores máximos de levantamento obtidos variam entre os 36mm e os 86mm, e foram considerados como suficientes para realizar as operações de substituição dos apoios, não se consideraram outras hipóteses possíveis de levantamento do tabuleiro, como o levantamento simultâneo de mais do que um apoio, devido aos acrescidos custo e dificuldades técnicas que uma operação com essas características acarretaria.

Na Figura 6.39 pode-se verificar que um levantamento de 10mm dos apoios do Encontro Oeste provoca a descompressão das fibras inferiores do tabuleiro, e mesmo tensões de tracção nas fibras inferiores nas imediações do pilar P1; o levantamento máximo admitido, de 40mm, é condicionado pelas tracções nessas fibras conforme assinalado no diagrama. Como seria de esperar, a influência deste levantamento está essencialmente centrada nos Tramos 1 e 2 do tabuleiro.

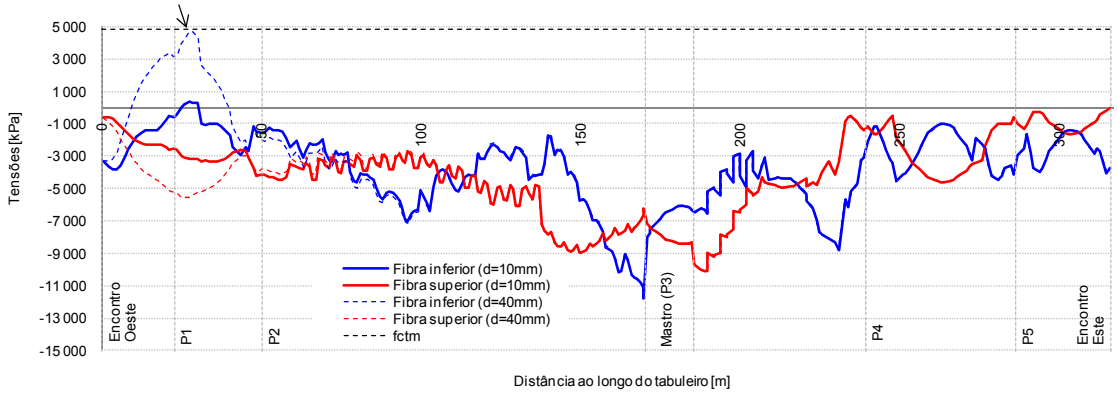


Figura 6.39 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o Encontro Oeste.

O levantamento do apoio sobre o pilar P1, ver Figura 6.40, é o que está sujeito a maiores restrições, devido à relação dos vãos dos Tramos 1 e 2, correspondentes à área de influência do levantamento em causa. De facto, para um levantamento de 10mm já existem tensões de tracção nas fibras superiores de betão do tabuleiro sobre o referido pilar, e um levantamento de 36mm faz com que as mesmas atinjam valores próximos de f_{ctm}. Caso o valor de 36mm para o levantamento não seja suficiente para a substituição do aparelho de apoio em causa, a solução passa pelo levantamento simultâneo do apoio sobre o Encontro Oeste, diminuindo a curvatura do tabuleiro imposta sobre o pilar P1.

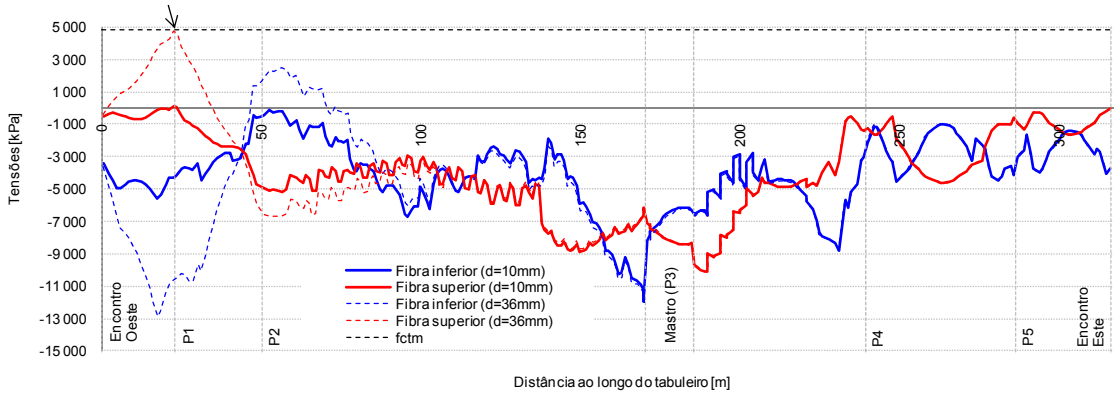


Figura 6.40 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P1.

A zona de influência do levantamento do apoio sobre o pilar P2, ver Figura 6.41, inclui os três primeiros tramos do viaduto, sendo que o levantamento de 10mm apenas introduz tensões de tracção nas fibras inferiores de betão do tabuleiro na proximidade do pilar P1. O levantamento máximo, de cerca de 46mm, é condicionado pelas tensões de tracção nas referidas fibras.

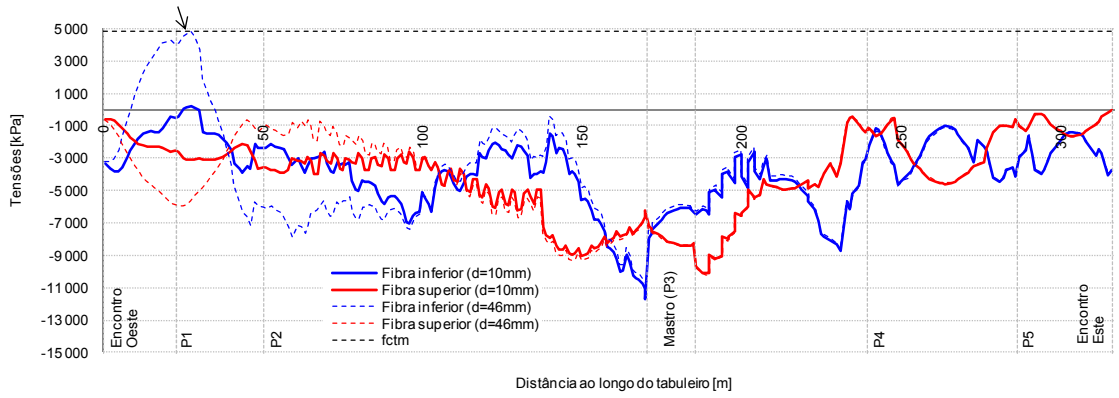


Figura 6.41 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P2.

O levantamento do pilar P4 influencia o estado de tensão de praticamente todo o tabuleiro, embora o seu efeito seja preponderante nos três últimos tramos, conforme se pode verificar através da análise da Figura 6.42. A justificação para uma zona de influência tão alargada deste levantamento prende-se com o facto de os tirantes de retenção terem extremidades localizadas precisamente nessa zona; assim, o movimento vertical do tabuleiro introduz um relaxamento destes tirantes, influenciando directamente o estado de tensão no Tramo 3, e com consequências visíveis nos Tramos 1 e 2. O levantamento de 10mm do apoio sobre o pilar P4 introduz ligeiras tensões de tracção nas fibras superiores de betão do tabuleiro nas imediações do referido pilar. No entanto o levantamento máximo, de cerca de 76mm, é condicionado pelas tensões de tracção das fibras inferiores nas imediações do pilar P5, conforme assinalado na Figura 6.42.

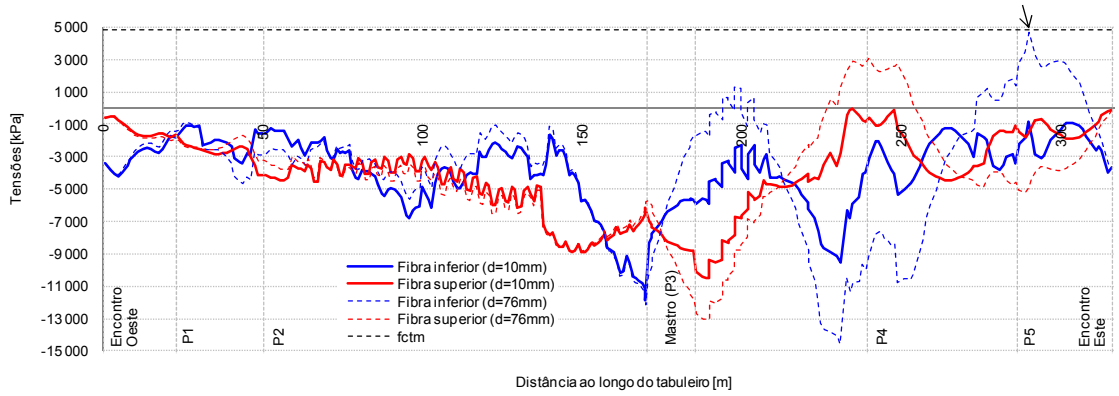


Figura 6.42 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P4.

O movimento do tabuleiro sobre o pilar P4 é a operação de levantamento de apoio que mais influencia o estado de tensão no mastro, uma vez que interfere com os apoios dos tirantes de retenção. Nas Figuras 6.43 e 6.44 são apresentados as tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo dos fustes do mastro, devido ao levantamento do tabuleiro de 76mm sobre o Pilar 4. É possível concluir que apesar de os incrementos de tensão introduzidos serem consideráveis, sobretudo na base dos fustes, em nenhuma secção as tensões obtidas podem ser consideradas preocupantes.

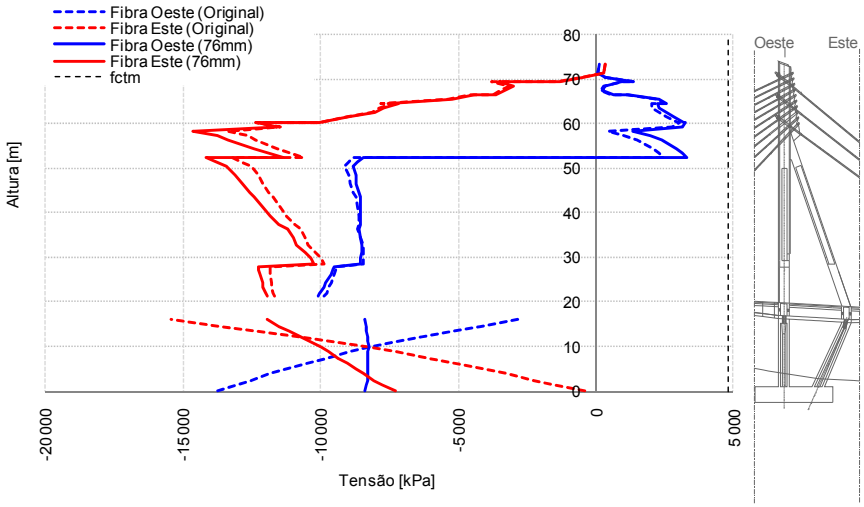


Figura 6.43 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro devido ao levantamento sobre o pilar P4.

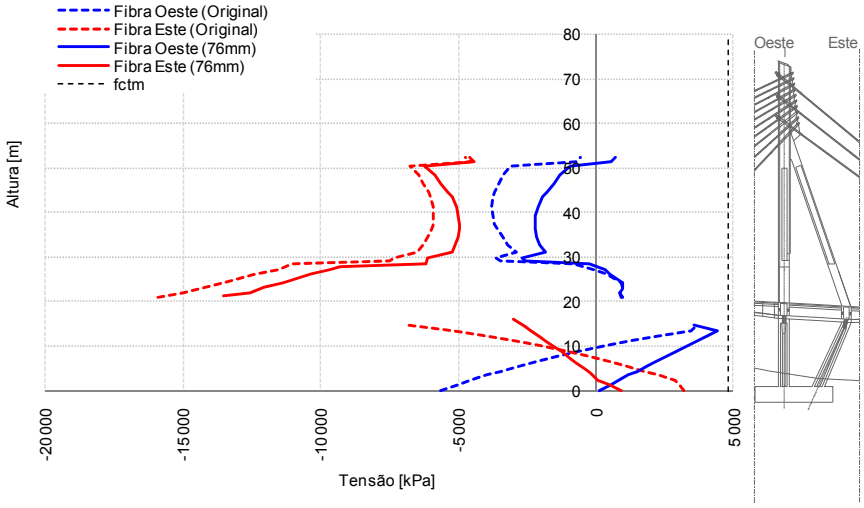


Figura 6.44 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro devido ao levantamento sobre o pilar P4.

Da análise da Figura 6.45 constata-se que o levantamento de 10mm do apoio localizado sobre o pilar P5 introduz tensões de tracção nas fibras superiores de betão do tabuleiro nas imediações do referido pilar, e que o levantamento máximo, de cerca de 60mm, é condicionado pelas tensões de tracção nessas mesmas fibras. Uma vez que a secção transversal do tabuleiro nos tramos não suspensos é igual em todo o viaduto, e os Tramos 5 e 6 têm vãos superiores aos dos Tramos 1 e 2, o tabuleiro apresenta nas imediações do pilar P5 uma flexibilidade ligeiramente superior ao que acontecia nas imediações do pilar P1. De qualquer forma o levantamento do pilar P5 é a segunda zona mais sensível em termos de levantamento do apoio.

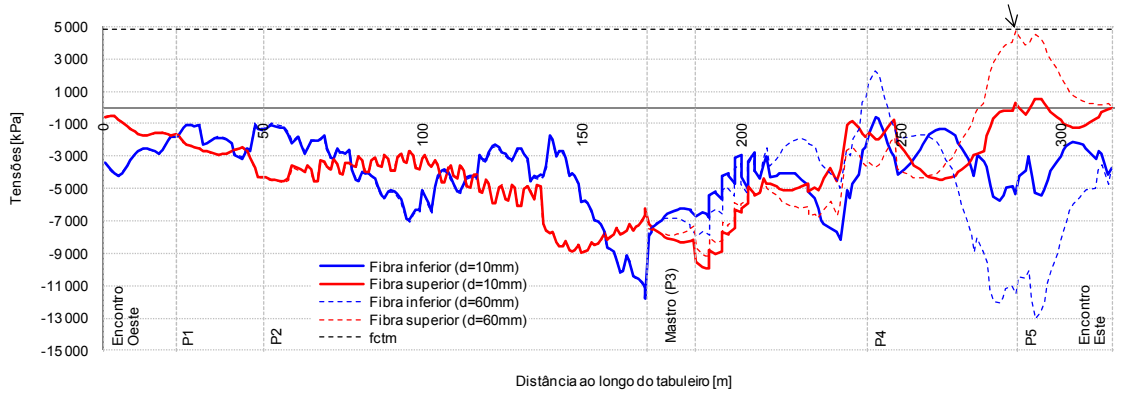


Figura 6.45 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o pilar P5.

A acrescida flexibilidade do tabuleiro nos Tramos 5 e 6 permite um levantamento máximo do apoio sobre o Encontro Este, na ordem dos 86mm, condicionado pelas tensões de tracção nas imediações do pilar P5, sendo que o levantamento de 10mm não introduz tensões de tracção em qualquer ponto da tabuleiro, conforme se pode concluir da análise da Figura 6.46.

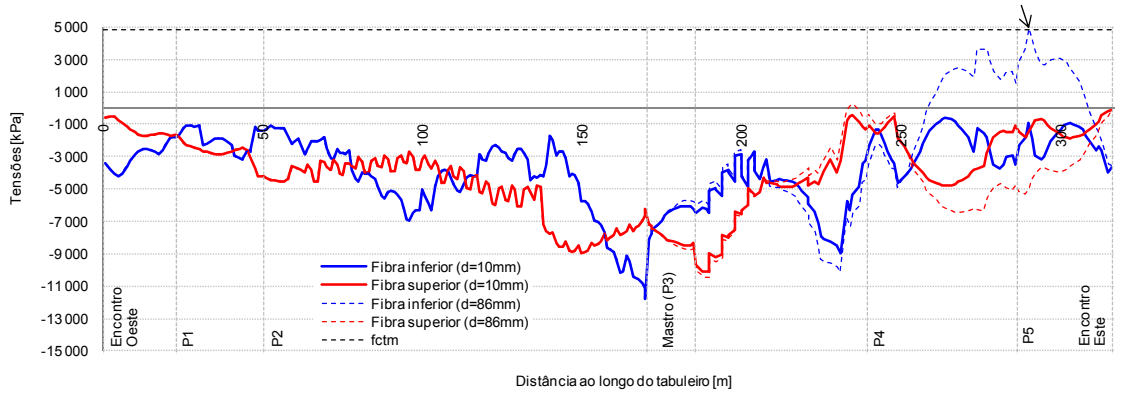


Figura 6.46 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro devido ao levantamento sobre o Encontro Este.

6.6.2. Substituição de tirantes

Apesar de ser uma hipótese muito pouco provável, poderá ser necessário substituir algum dos tirantes existentes no Viaduto da Corujeira devido a uma acção de acidente ou de sabotagem. Desta forma simulou-se a substituição de dois tirantes de suspensão, o T1 e o T10, e de um tirante de retenção, o T1RN. A simulação de remoção dos tirantes foi efectuada desligando os elementos finitos correspondentes (operação “Off”), enquanto a simulação da substituição foi realizada através da utilização de novos elementos finitos (operação “On”), aos quais foi imposto um estado de tensão igual ao existente no tirante original. No entanto, uma vez que a tensão existente nos tirantes no instante em que são removidos é resultado de um faseamento construtivo relativamente complexo, conforme foi apresentado no Capítulo 5, a substituição por um tirante com as mesmas características e igual estado de tensão não repõe as condições iniciais existentes na estrutura, em termos de tensões e deformações. Na Figura 6.47 são apresentados os incrementos de deformada do tabuleiro

devidos às operações de substituição dos tirantes T1 e T10, onde se pode verificar que os incrementos de deformada aquando da introdução dos novos tirantes não são simétricos dos obtidos aquando da remoção dos tirantes originais. De facto, no Tramo 3 o abaixamento do tabuleiro (12mm) provocado pela remoção do tirante T1 não é compensado pelo levantamento (9mm) provocado pela entrada em funcionamento do tirante substituto; de igual forma, o levantamento do tabuleiro (6mm) provocado pela remoção do tirante T10 é demasiado compensado pelo abaixamento (8mm) provocado pela entrada em funcionamento do respectivo tirante substituto. Uma observação interessante resultante da análise da Figura 6.47 é o facto de se verificar que uma extensão considerável do Tramo 3 sobe no instante em que o tirante T10 é removido, situação contrária ao que seria expectável numa análise menos atenta. A razão para o sucedido reside na grande inclinação do tirante T10, necessária por razões associadas ao processo construtivo, mas que introduz forças horizontais muito elevadas no topo do mastro. Estas forças originam deslocamentos horizontais do topo do mastro no sentido Oeste, que interferem com a eficácia de todos os outros tirantes de suspensão, gerando assim um comportamento indesejável após o final da obra.

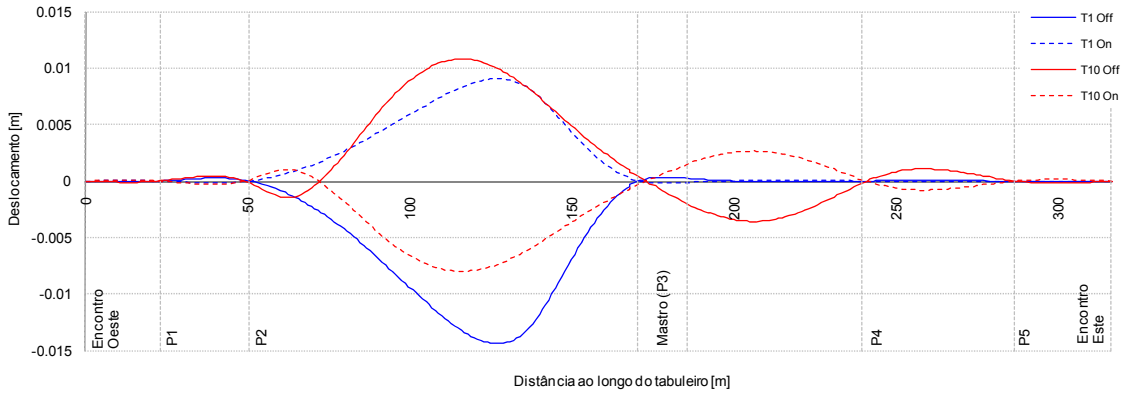


Figura 6.47 – Incrementos de deformada do tabuleiro devidos à substituição dos tirantes T1 e T10.

Na Figura 6.48 são apresentados as tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro antes e durante as operações de substituição do tirante T1, onde se pode verificar que existe uma zona relativamente grande do tabuleiro afectada pela operação localizada no Tramo 3, e em especial junto ao mastro e na ligação do tirante T1. A justificação para a grande dimensão de tabuleiro afectado prende-se com o facto de o tirante T1 ser o primeiro apoio do tabuleiro em relação ao mastro numa distância de cerca de 35m. Apesar das alterações introduzidas no estado de tensão do betão do tabuleiro, fazendo com que as fibras inferiores na zona de ligação do tirante T1 se aproximem da descompressão, não existem tracções no betão em nenhum ponto do tabuleiro. Assim sendo, e apesar de não se conseguir repor exactamente o estado de tensão original após a montagem do tirante de substituição, concluiu-se que a operação de substituição do tirante T1 é viável.

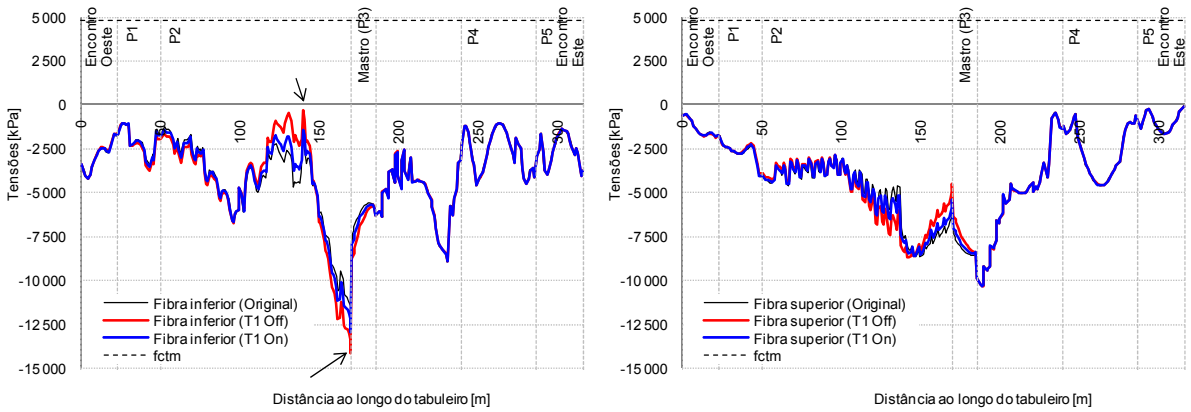


Figura 6.48 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro antes e durante a substituição do tirante T1.

Na Figura 6.49 apresentam-se as tensões nas fibras inferiores e superiores de betão ao longo do tabuleiro antes e durante as operações de substituição do tirante T10, onde se verifica que a zona de tabuleiro afectada é relativamente menos extensa do que acontecia com a operação idêntica no tirante T1. Este facto é justificado pela menor distância, cerca de 12m, que separa o tirante T10 do apoio de tabuleiro contíguo, o pilar P2. Apesar da menor extensão do tabuleiro afectada o valor do incremento de tensão na fibra inferior na zona de inserção do tirante T10 provoca a descompressão dessas fibras. Uma vez que o valor estimado das tensões de tracção é muito reduzido, não se aproximando sequer do valor de f_{ctm}, e apesar de não ser perfeitamente reposto o estado de tensão original após a montagem do tirante de substituição, conclui-se que a operação de substituição do tirante T10 é igualmente viável.

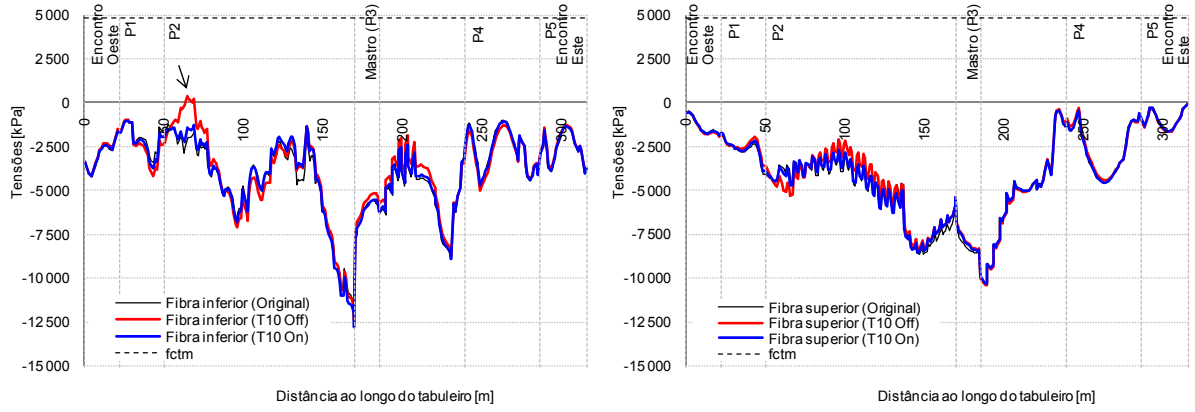


Figura 6.49 – Tensões nas fibras extremas de betão ao longo do tabuleiro antes e durante a substituição do tirante T10.

Como seria de esperar, as operações de substituição de um tirante de retenção são estruturalmente mais exigentes do que as operações de substituição de um tirante de suspensão. Na Figura 6.50 são apresentados os incrementos de deformada do tabuleiro devidos às operações de substituição do tirante T1RN, onde se pode verificar que, também neste caso, a reposição de um tirante removido por um idêntico com uma tensão instalada igual à inicial não repõe a geometria original do tabuleiro.

Conforme se pode observar no Tramo 3 o abaixamento do tabuleiro aquando da remoção do tirante (29mm) não é compensado pelo levantamento aquando da introdução do tirante substituto (20mm). Também a geometria do Tramo 4 não é devidamente reposta; no entanto a diferença prevista é de cerca de 10mm, que pode ser considerada insignificante para um vão com estas dimensões. Da observação da Figura 6.50 constata-se que a remoção do tirante T1RN tem influência no estado de tensão na generalidade do tabuleiro, sendo que nos Tramos 3 e 4 as tensões nas fibras inferiores de betão atingem a descompressão em zonas muito localizadas. Também no Tramo 5 surgem tensões de tracção em algumas fibras superiores de betão, embora em ambos os casos os valores previstos sejam muito reduzidos, não se aproximando sequer do valor de f_{ctm}. Como era previsível, após a substituição do tirante de retenção o estado de tensão original no betão do tabuleiro não é perfeitamente reposto, sendo no Tramo 4 que as tensões finais mais se afastam das originais, existindo duas pequenas zonas em que a tensão final instalada nas fibras inferiores é de tracção.

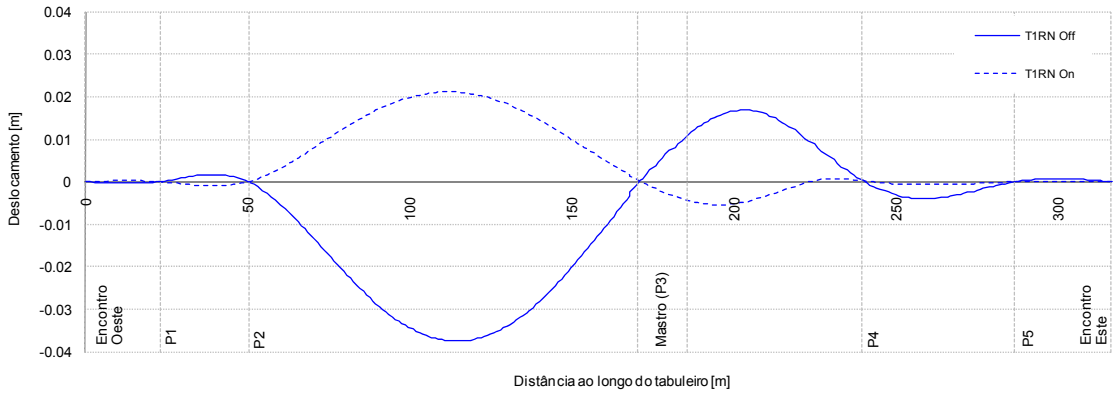


Figura 6.50 – Incrementos de deformada do tabuleiro relativos devidos à substituição do tirante T1RN.

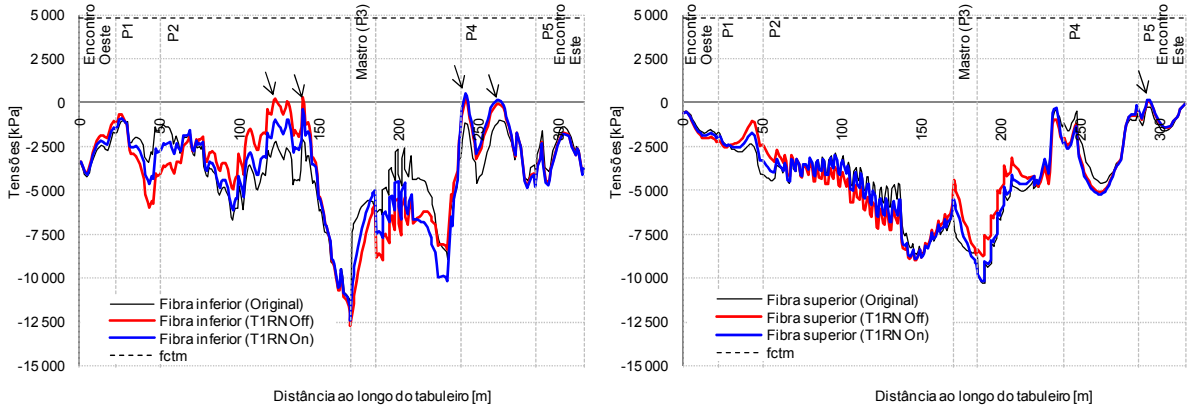


Figura 6.51 – Tensões nas fibras inferiores e superiores de betão ao longo do tabuleiro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN.

À semelhança do efectuado nas restantes operações de manutenção modeladas, foi também controlada a influência da substituição do tirante T1RN no estado de tensão do betão dos fustes do mastro. Nas Figuras 6.52 e 6.53 são apresentados as tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao

longo dos fustes do mastro, antes e durante as operações de substituição do referido tirante. Conforme se pode observar, as alterações no estado de tensão do betão ocorridas durante a remoção do tirante são muito significativas, assim como a diferença do estado de tensão final em relação ao estado de tensão original, em especial no fuste vertical acima do tabuleiro. Uma vez que a substituição de um tirante será realizada apenas como uma medida extrema e de curta duração, crê-se que a descompressão de algumas fibras de betão do tabuleiro, e a alteração do estado de tensão nos fustes do mastro, não é motivo para inviabilizar a substituição do tirante T1RN. No entanto será prudente prever medidas de forma a minimizar os referidos efeitos, como por exemplo o escoramento do Tramo 3, ou o retensionamento (se possível) dos restantes tirantes de retenção durante as operações de substituição.

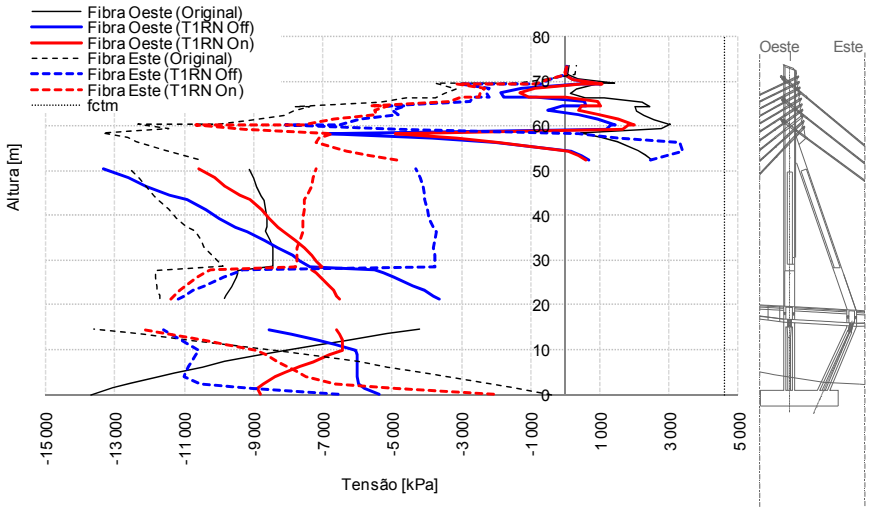


Figura 6.52 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste vertical do mastro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN.

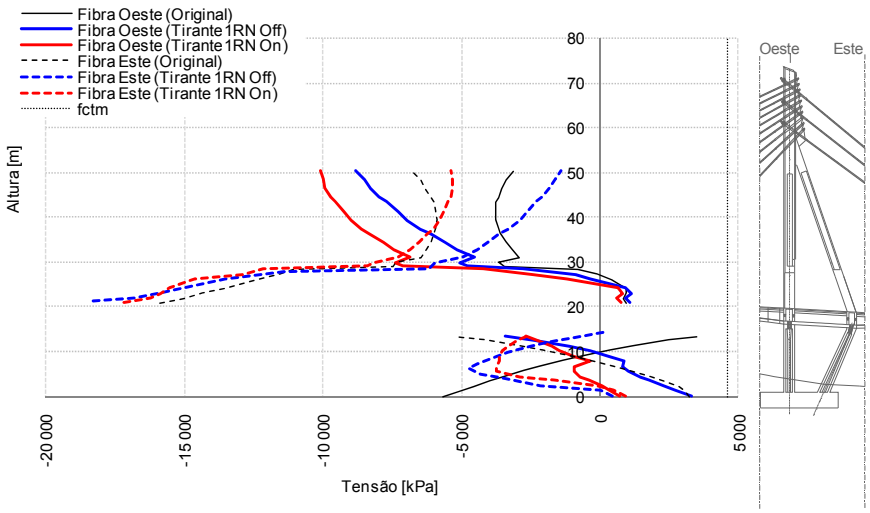


Figura 6.53 – Tensões nas fibras Oeste e Este de betão ao longo do fuste oblíquo do mastro antes e durante as operações de substituição do tirante T1RN.

6.7. Análise modal na fase de exploração

Durante a fase de exploração a alteração das frequências de vibração do Viaduto da Corujeira pode ser provocada por diversos factores, como a alteração das propriedades dos materiais (por exemplo, a maturação do betão), a variação dos esforços instalados em alguns elementos estruturais (por exemplo, a variação de esforços nos tirantes) ou até a alteração da rigidez de elementos estruturais (por exemplo, a fendilhação do betão). No Quadro 6.16 são apresentadas as frequências naturais estimadas numericamente para os primeiros 20 modos de vibração desde o final da construção até 2050, onde se pode verificar que após o ajuste final dos esforços nos tirantes de suspensão e de retenção a variação das frequências de cada modo é muito reduzida, entre 0.6% e 9.4%.

Quadro 6.16 – Frequências naturais estimadas para os primeiros 20 modos de vibração desde o final da construção e até 2050.

	Frequências naturais [Hz]						
Modo	Ajuste	2010	2020	2030	2040	2050	Diferença [%]
1	0.889	0.895	0.896	0.897	0.897	0.897	0.9
2	1.211	1.185	1.182	1.180	1.179	1.178	-2.8
3	1.289	1.297	1.297	1.297	1.297	1.297	0.6
4	1.360	1.329	1.326	1.325	1.324	1.323	-2.7
5	1.463	1.419	1.416	1.414	1.413	1.412	-3.6
6	1.522	1.463	1.460	1.458	1.457	1.457	-4.5
7	1.663	1.628	1.625	1.623	1.622	1.621	-2.6
8	1.664	1.629	1.626	1.624	1.623	1.622	-2.6
9	1.754	1.682	1.679	1.677	1.676	1.675	-4.7
10	1.754	1.714	1.710	1.709	1.708	1.707	-2.8
11	1.756	1.715	1.711	1.710	1.708	1.708	-2.8
12	1.912	1.867	1.863	1.861	1.860	1.859	-2.8
13	1.912	1.868	1.864	1.862	1.861	1.860	-2.8
14	1.983	1.893	1.889	1.888	1.886	1.886	-5.2
15	2.067	1.924	1.922	1.922	1.922	1.922	-7.6
16	2.070	1.936	1.934	1.934	1.935	1.935	-7.0
17	2.117	1.946	1.944	1.944	1.944	1.945	-8.9
18	2.135	1.957	1.954	1.953	1.953	1.952	-9.4
19	2.413	2.366	2.359	2.356	2.353	2.352	-2.6
20	2.434	2.452	2.455	2.456	2.457	2.458	1.0

A utilidade da análise das frequências naturais da estrutura ao longo do tempo prende-se com a crescente utilização de ensaios de vibração para avaliação do comportamento das estruturas. Desta forma é possível identificar em qualquer idade da estrutura se existe um desvio não previsto entre os valores medidos em obra e os estimados numericamente.

6.8. Considerações finais

O processo de retroanálise utilizado no ajuste do modelo numérico do Viaduto da Corujeira permitiu um elevado rigor na aferição do mesmo, possibilitando desta forma a sua utilização na modelação do ensaio de carga, no estudo do comportamento futuro (a longo prazo), na modelação das operações de manutenção e na análise modal da estrutura.

O programa de cálculo mostrou-se eficaz na simulação do ensaio de carga do Viaduto da Corujeira, tendo-se verificado o bom ajuste das estimativas numéricas da maioria das grandezas em estudo relativamente aos valores medidos em obra, contribuindo desta forma para a validação do modelo numérico.

O estudo do comportamento do Viaduto da Corujeira a longo prazo, onde se analisaram os estados de tensão e de deformação da estrutura ao longo de cerca de 50 anos após a finalização da construção, permitiu verificar que a obra de arte se encontra apta para um funcionamento normal, sem necessidade de qualquer tipo de intervenção estrutural, durante o período em causa.

A modelação de algumas operações de manutenção, como o levantamento de apoios e substituição de tirantes, serviu para analisar as respectivas implicações a nível estrutural, definindo valores e parâmetros de controlo passíveis de serem utilizados em obra caso aquelas operações venham a ser necessárias. Este conjunto de simulações serviu ainda para avaliar o possível interesse do programa de cálculo desenvolvido em processos relacionados com a manutenção da obra, situações em que se mostrou bastante eficiente.

A análise modal efectuada durante os 50 anos subsequentes à finalização da construção do Viaduto da Corujeira permitiu estudar a evolução das frequências de vibração da estrutura, e avaliar as capacidades do programa de cálculo desenvolvido no domínio da dinâmica de estruturas.

Capítulo 7

Conclusões e desenvolvimentos futuros

7. Conclusões e desenvolvimentos futuros

7.1. Conclusões

Nesta secção resumem-se as conclusões relativas aos três principais objectivos do presente trabalho:

i) Desenvolvimento de uma plataforma destinada à construção de modelos computacionais de análise estrutural baseada na Programação Orientada por Objectos

O investimento realizado na aprendizagem da Programação Orientada por Objectos, e a sua aplicação na construção da plataforma para desenvolvimento de modelos computacionais de análise estrutural baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) revelou-se extremamente profícuo. De facto, após uma fase inicial em que se fizeram sentir algumas dificuldades originadas pela assimilação de um novo paradigma de programação, seguiu-se uma outra onde, através da assimilação dos novos conceitos, as vantagens desta forma de programar, como a reutilização, a robustez, a facilidade de manutenção e a expansibilidade do código, se tornaram evidentes.

Por outro lado, uma vez que o código desenvolvido assenta na mesma plataforma que serve de base ao sistema operativo, as alterações e melhoramentos introduzidos neste último têm repercussões automáticas no código desenvolvido ou a desenvolver, anulando-se desta forma os problemas de compatibilidade entre versões do código e do sistema operativo utilizado.

A estruturação dos modelos computacionais desenvolvidos, baseada em *plugins*, mostrou-se muito útil, permitindo adicionar funcionalidades de uma forma simples e eficaz, capacidade fundamental para uma plataforma que se pretende divulgar e expandir. A implementação de funcionalidades dirigidas ao utilizador, como as interfaces gráficas, o manual de utilização automático, o diagrama em árvore dos *plugins* existentes e a validação semi-automática de novas funcionalidades, aumentou sobremaneira a facilidade de utilização da plataforma e dos modelos desenvolvidos.

ii) Implementação e validação do um programa de cálculo baseado no MEF desenvolvido para a análise do comportamento estrutural de pontes e viadutos

Utilizando a plataforma desenvolvida foi criado um programa de cálculo baseado no MEF para a análise do comportamento estrutural de pontes e viadutos, quer ao longo do processo construtivo quer durante a fase de exploração. Utilizando elementos finitos de viga curvos (3D), baseados na formulação de Timoshenko e combinados com uma discretização por fibras da secção transversal, o modelo revelou-se eficiente e rigoroso, conforme demonstrado através dos exemplos de aplicação apresentados. A utilização de elementos lineares curvos com qualquer número de nós permitiu a

modelação de peças com geometria variável de uma forma bastante rigorosa. A consideração da não-linearidade geométrica nas formulações implementadas permitiu ainda a formulação específica dos elementos de tirante externos, assim como uma análise mais realista de elementos esbeltos.

A discretização da secção transversal por fibras possibilitou a modelação de secções complexas, variáveis ao longo do processo construtivo e compostas por diversos materiais, como é o caso de secções de betão armado betonadas por fases em datas distintas. Utilizando leis de comportamento material independentes para cada fibra, esta forma de discretização permite uma grande simplificação das leis constituintes a utilizar, e facilita a respectiva implementação computacional.

As formulações específicas utilizadas para a modelação de cabos de pré-esforço embebidos e de tirantes externos permitiram simular de forma automática a introdução natural das forças e perdas de pré-esforço, assim como a sua contribuição para a matriz de rigidez global da estrutura. O vasto leque de formulações referentes à simulação das condições fronteira (internas e externas) implementadas, que incluiu apoios unidireccionais, apoios fora dos eixos dos elementos, apoios deslizantes, ligações rígidas e assentamentos de apoio, revelou-se eficaz, nomeadamente na modelação de estruturas complexas como o Viaduto da Corujeira.

A capacidade de "ligar/desligar" associada a todos os componentes estruturais implementados mostrou-se fundamental na modelação de estruturas com carácter evolutivo, nomeadamente em termos do sistema estrutural, das secções, do carregamento e das solicitações.

Os modelos constitutivos implementados, que englobam os fenómenos de fluência, retracção e maturação do betão, e o fenómeno de relaxação do aço de pré-esforço, associados às possibilidades de ajuste disponibilizadas, revelaram-se bastante adequados às aplicações realizadas. Através da utilização de medições em provetes foi possível ajustar as leis utilizadas, simulando adequadamente o comportamento real dos materiais aplicados em obra.

A implementação um modelo de comportamento uniaxial para o betão armado com *tension-stiffening* permitiu simular de forma simplificada a fendilhação do betão. Procedeu-se igualmente à implementação de um modelo elasto-plástico para a simulação do comportamento das armaduras. Apesar da modelação do comportamento não-linear material não ser um dos objectivos centrais deste trabalho, a sua consideração de uma forma simplificada revelou-se útil na análise do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira, nomeadamente aquando da alteração da rigidez por fissuração do mastro.

O método incremental utilizado para a resolução de problemas não-lineares revelou-se eficiente. Apesar da grande exigência em termos de recursos informáticos, nomeadamente a nível de memória e de processamento, foi utilizada uma integração passo-a-passo ao longo do tempo que permitiu reproduzir situações com grandes variações do estado de tensão. Na resolução do processo iterativo foi utilizado preferencialmente o Método de Newton Raphson Modificado, em detrimento do Método de Newton Raphson clássico, pois o primeiro, com consideração de uma matriz constante, foi normalmente mais eficiente em termos de tempo de computação. A justificação para este facto reside

no elevado o tempo de computação necessário para a construção da matriz de rigidez de cada elemento finito, devido à discretização num elevado número de fibras adoptada para a secção transversal.

Desenvolveu-se ainda um algoritmo capaz de determinar frequências e modos próprios de vibração em qualquer fase da vida da estrutura, considerando assim as alterações do esquema estrutural, das solicitações e das características reológicas dos materiais utilizados. Sendo actualmente usual e relativamente económica a identificação de frequências e modos próprios de vibração de estruturas através de ensaios de vibração ambiental, a utilização conjunta destas técnicas de identificação e do programa de cálculo desenvolvido permitirá uma avaliação global da estrutura a qualquer instante do processo construtivo, ou durante a fase de exploração.

Foram adicionadas diversas funcionalidades ao programa de cálculo desenvolvido sob a forma de *plugins*, como por exemplo a visualização gráfica da estrutura, dos seus componentes e resultados (deformadas, modos de vibração, tensões, extensões, esforços, reacções, etc.), e a utilização de estruturas e elementos parametrizáveis, como por exemplo tabuleiros de ponte e cabos de pré-esforço com traçados não rectilíneos. Estas funcionalidades relativas ao pré e pós-processamento simplificaram muito a utilização do programa, reduzindo substancialmente o tempo dispendido na construção dos modelos numéricos e no tratamento dos resultados.

A boa qualidade dos resultados obtidos num conjunto considerável de exemplos de aplicação criteriosamente escolhidos (retirados da bibliografia, desenvolvidos pelo autor e estudados em laboratório e em obra) permitiu validar as funcionalidades e o adequado funcionamento do programa desenvolvido.

iii) Aplicação do programa de cálculo desenvolvido na análise e interpretação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira

A utilização do programa de cálculo desenvolvido na análise e interpretação do comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira, durante o faseamento construtivo e na fase de exploração, bem como a modelação de algumas operações de manutenção, permitiu validar de uma forma bastante exaustiva as potencialidades do modelo e impulsionou a implementação de novas funcionalidades. A complexidade da obra e do correspondente processo construtivo implicou a utilização da totalidade dos recursos implementados no programa de cálculo, sendo modelados todos os aspectos particulares deste tipo de estruturas, como o faseamento construtivo, o comportamento diferido dos materiais, o carácter evolutivo das solicitações, o comportamento não-linear geométrico da estrutura e a utilização de estruturas secundárias e apoios provisórios.

A existência do um sistema de monitorização permanente e a realização de um ensaio de carga permitiu uma análise comparativa extensa e rigorosa dos resultados previstos numericamente com os medidos em obra. A utilização dos dados recolhidos pelo sistema de monitorização permanente instalado na obra, assim como dos resultados dos ensaios dinâmicos de vibração ambiental e de *lift-off*, permitiu uma aferição rigorosa do modelo numérico. Desta forma foi possível proceder a

previsões realistas do comportamento estrutural futuro da obra, permitindo a modelação de operações de manutenção com implicações estruturais, nomeadamente a substituição de aparelhos de apoio e de tirantes de suspensão e de retenção.

A boa concordância da generalidade dos resultados das análises numéricas efectuadas relativamente às observações da monitorização (obtidos em condições óptimas), com erros da ordem de 5% para deslocamentos e de cerca de 15% para as extensões, assinala um bom funcionamento do programa de cálculo desenvolvido e uma boa aferição do modelo numérico utilizado. De facto, com excepção de casos pontuais em que algumas operações não foram modeladas por falta de informação, existiu uma grande proximidade entre os valores estimados numericamente e os medidos em obra.

A análise das frequências de vibração da estrutura ao longo do faseamento construtivo e durante a fase de exploração permitiu analisar a correspondente evolução para o caso de estudo do Viaduto da Corujeira, com erros inferiores a 10%. Até à data no Viaduto da Corujeira apenas foram efectuados ensaios de vibração ambiental nos tirantes de suspensão e de retenção, no entanto é possível que no futuro possam ser realizados ensaios abrangendo toda a estrutura. Assim sendo, a utilização de ensaios dinâmicos de vibração ambiental suportados nas previsões das frequências e modos de vibração efectuadas com o programa de cálculo desenvolvido permitirão a avaliação da estrutura.

O programa de cálculo desenvolvido permitiu analisar profundamente o comportamento estrutural do Viaduto da Corujeira, monitorizando a evolução dos estados de tensão e deformação ao longo do faseamento construtivo, e fazendo previsões para o futuro comportamento desta obra de arte. A extensa lista de funcionalidades implementadas, especificamente direccionadas para a análise de obras de arte, permite classificar o programa de cálculo desenvolvido como uma ferramenta útil para o projecto, gestão e análise de obras de arte construídas através de diferentes métodos construtivos.

7.2. Desenvolvimentos futuros

São duas as vertentes que se pretendem explorar nos desenvolvimentos futuros deste trabalho: a continuidade e expansibilidade da plataforma desenvolvida e o aperfeiçoamento do programa de cálculo direccionado para o estudo de obras de arte.

De forma a garantir a expansibilidade da plataforma desenvolvida no âmbito deste trabalho, é essencial promover a sua divulgação de forma a cativar um número crescente de utilizadores e programadores. Desta forma pretende-se:

i) Desenvolver interfaces gráficas melhoradas, especialmente para introdução de dados;

ii) Implementar novas formulações de elementos finitos;

iii) Transformar o código desenvolvido em *Open Source*.

Actualmente a divulgação de qualquer programa de cálculo depende, em grande medida, da sua facilidade de utilização, sendo neste sentido que se pretendem melhorar as interfaces gráficas de introdução de dados do código computacional desenvolvido.

Com a implementação de novas formulações de elementos finitos pretende-se aumentar substancialmente o campo de aplicabilidade do modelo computacional desenvolvido, alargando desta forma o número de possíveis utilizadores.

Com a transformação do código computacional desenvolvido em *Open Source* pretende-se que a comunidade científica beneficie do trabalho iniciado nesta tese. A filosofia do *Open Source* encontra as suas raízes na livre troca de conhecimentos, tradicional no campo científico, base de um processo de evolução que alimenta o desenvolvimento. Com início nos anos 80 do século XX, Richard Stallman foi o primeiro a formalizar esta maneira de pensar para o código computacional, sob a forma de quatro liberdades: a liberdade de executar o software, para qualquer uso; a liberdade de estudar o funcionamento de um programa e de adaptá-lo às suas necessidades; a liberdade de redistribuir cópias; a liberdade de melhorar o programa e de tornar as modificações públicas, de modo a beneficiar toda a comunidade científica.

Com vista a aperfeiçoar o programa de cálculo desenvolvido para o estudo de obras de arte pretende-se ainda, como desenvolvimento futuro, incorporar capacidades que permitam ter em linha de conta:

i) A implementação de elementos finitos de casca, de estado plano de tensão e de volume;

ii) A implementação de leis de comportamento de elementos reforçados com novos materiais, nomeadamente fibras de carbono;

iii) A implementação de leis constitutivas não-lineares que considerem o efeito do tempo sobre as propriedades do material;

iv) A implementação de modelos de aferição de segurança;

v) A utilização de processamento paralelo e a utilização de técnicas de sub-estruturação;

vi) A interligação das previsões do programa de cálculo com os resultados obtidos através dos sistemas de monitorização.

A implementação de elementos finitos de estado plano de tensão e de casca permitirá uma melhor simulação das lajes de tabuleiros e das almas de vigas caixão, e a implementação de elementos finitos de volume permitirá o estudo de pormenores localizados e complexos, como maciçamentos e zonas de amarração de tirantes e cabos de pré-esforço.

A implementação leis constitutivas não-lineares que considerem o efeito do tempo sobre as características do material torna-se pertinente na análise de estruturas evolutivas, nomeadamente de betão armado e pré-esforçado. De facto, nas aplicações realizadas no âmbito deste trabalho a utilização de modelos de comportamento não-linear para o betão não previu, por exemplo, o fenómeno da maturação, o que para betões de idades muito diferentes dos 28 dias poderá não ser uma simplificação admissível.

Com a utilização de processamento paralelo pretende-se aumentar a eficácia do modelo desenvolvido em termos de tempo de análise, nomeadamente através da exploração das capacidades dos computadores actuais, que possuem mais do que um processador ou processadores com diversos núcleos. Com a utilização de técnicas de sub-estruturação pretende-se reduzir a dimensão dos problemas a resolver, e facilitar a utilização conjunta de diversos tipos de elementos finitos num mesmo modelo numérico.

Um passo importante para o estudo e controlo integrado de obras de arte, que integra sistemas de monitorização permanentes e modelos numéricos de análise estrutural perfeitamente validados e aferidos, passa pelo aperfeiçoamento da interface entre os sistemas de monitorização e o programa de cálculo. Um processo integrado de análise estrutural de obras de arte eficiente será uma ferramenta de apoio à tomada de decisão em sistemas de gestão de infra-estruturas ferroviárias e rodoviárias, permitindo a qualquer instante controlar o comportamento estrutural e emitindo alertas o operador sempre que exista uma divergência acentuada entre os valores medidos e os estimados numericamente para os vários parâmetros monitorizados. A definição de um manual de registo de acontecimentos em obra também poderá ser um contributo para a qualidade do referido processo, permitindo uma análise comparativa mais rigorosa entre os valores medidos em obra e os valores estimados numericamente, através de uma modelação numérica mais exacta e ajustada à realidade.

Bibliografia

Bibliografia

AceCad Software - "StruCad web page" em http://www.acecadsoftware.com/ (Acedido em 2009).

Ansys Inc. - "Ansys, Inc. web page" em http://www.ansys.com/ (Acedido em 2009).

Arktec S.A. - "Tricalc web page" em http://www.arktec.com (Acedido em 2009).

Autodesk - "Autodesk web page" em http://usa.autodesk.com (Acedido em 2009).

Bathe, K.-J. (1996) - "Finite element procedures", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, EUA.

Bathe, K.-J. (1982) - "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, EUA.

Bentley - "Bentley web page" em http://www.bentley.com (Acedido em 2009).

Borst, R. (1991) - "Report: Computational methods in non-linear solid mechanics", Delft University of Technology, Delft, Holanda.

Brás, L. (2003) - "Optimização de estruturas: Desenvolvimento de software orientado por objectos", Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Burdette, E. e Goodfasture, D. (1973) - "Test of four highway bridges to failure", ASCE - Journal of the Structural Division, Vol. 99, Nº 3, 335-348.

Calgaro, J. A. e Lacroix, R. (1997) - "Maintenance et réparation des ponts", Presses de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris, França.

CEB-FIP, Comité Euro-International du Béton (1993) - "CEB-FIP Model Code 1990 - Design Code", Thomas Telford.

Cervenka Consulting - "Cervenka Consulting web page" em http://www.cervenka.cz (Acedido em 2009).

Cline, M. e Lomov, G. (1995) - "C Programming FAQs: Frequently Asked Questions", Addison-Wesley, Reading, EUA.

Commend, S. e Zimmermann, T. (2001) - "Object-oriented nonlinear finite element programming: A primer", Advances in Engineering Software, Vol. 32, Nº 8, 611 - 628.

Computers & Structures Inc. - "Computers & Structures, Inc. web page" em http://www.csiberkeley.com (Acedido em 2009).

Connor, J.; Logcher, R. e Chan, S. C. (1968) - "Nonlinear analysis of elastic framed structures", ASCE - Journal of the Structural Division, Vol. 94, Nº, 1525-1547.

Cross, J.; Masters, I. e Lewis, R. (1999) - "Why you should consider object-oriented programming techiques for finite element methods", International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, Vol. 9, Nº 3, 333-347.

Cruz, P. (1991) - "Análise não-linear de estrutras porticadas planas de betão", Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Cruz, P. (1994) - "Un modelo para el análisis no lineal e diferido de estructuras de hormigón y acero construidas evolutivamente", Tese de Doutoramento, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha.

Cunha, Á. e Caetano, E. (2001) - "Relatório: Observação durante a fase construtiva do viaduto atirantado sobre a VCI entre a Praça das Flores e a Praça da Corujeira", Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

CYPE Ingenieros, S.A. - "CYPECAD webPage" em http://cypecad.cype.pt/ (Acedido em 2009).

D'Souza, L. R. (1994) - "Finite element analysis programming using the object oriented approach", Tese de Mestrado, University of Texas at Arlington, Arlington, EUA.

Dadvand, P. (2007) - "A framework for developing finite element codes for multi-disciplinary applications", Tese de Doutoramento, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha.

David, M. - "Programação orientada por objectos: uma introdução" em http://www.guiadohardware.net/artigos/programacao-orientada-objetos/ (Acedido em 2007).

Dimande, A.; Pimentel, M.; Félix, C. e Figueiras, J. (2002) - "Monitoring and numerical analysis of the new footbridge over river Mondego", Proc. Challenges for Civil Construction International Conference 2008: Bridge Science and Applications with Engineering Towards Innovative Solutions for Construction, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Dubois-Pélerin, Y. e Pegon, P. (1998) - "Object-oriented programming in nonlinear finite element analysis", Computers & Structures, Vol. 67, Nº, 225-241.

EC2, (2004) - "Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1.1: General rules and rules for buildings".

Espion, B. (1993) - "Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs", Proc. Fifth International RILEM Symposium, 877-888, Barcelona, Espanha.

Faria, R. (1994) - "Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão através de um modelo de dano contínuo", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Félix, C. (2005) - "Monitorização e análise do comportamento de obras de arte", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Félix, C. e Figueiras, J. (2002a) - "Relatório: Instrumentação e observação do comportamento do viaduto sobre a VCI no Porto durante a construção e ensaio de carga", LABEST - Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Félix, C.; Pimentel, M.; Faria, R. e Figueiras, J. (2002c) - "Monitorização do comportamento da Ponte Luiz I durante o ensaio de carga", Proc. Congresso Nacional da Engenharia de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal.

Félix, C.; Pimentel, M.; Faria, R. e Figueiras, J. (2002b) - "Monitorização do comportamento do viaduto sobre a VCI durante o ensaio de carga", Proc. Encontro Nacional Betão Estrutural 2002, 371-380, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal.

Félix, C.; Sang, P. S. e Figueiras, J. (1999) - "Observação e análise do comportamento de passagens hidráulicas constituídas por elementos pré-fabricados de betão", Proc. 3ªs Jornadas de Estruturas de Betão, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Ferraz, M. (2001) - "Um modelo de análise para o estudo de pontes como estruturas evolutivas", Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Ferraz, M.; Faria, R. e Figueiras, J. (2004) - "Modelo de fibras para análise de estruturas evolutivas de betão", Proc. Encontro Nacional Betão Estrutural 2004, 349-356, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Figueiras, J.; Félix, C. e Costa, B. (2005) - "Testing and monitoring of a centenary arch bridge", International Association for Bridge Maintenance and Safety, Vol.Nº, 63 - 73.

Henriques, A. (1998) - "Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento do betão estrutural", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Juvandes, L. (1999) - "Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de "CFRP"", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Li, S.-H.; Zhao, G.-F. e Wang, S.-G. (2005) - "Application of CFRP for strengthening reinforced concrete girder integral bridge", Journal of Harbin Institute of Technology, Vol. 37, Nº 2, 207-211.

LNEC (1993) - "E-398: Betões - Determinação da retracção e da expansão".

Mackerle, J. (2004) - "Object-oriented programming in FEM and BEM: a bibliography (1990 - 2003)", Advances in Engineering Software, Vol. 35, Nº 6, 325-336.

Maragakis, E. M.; Douglas, B. e Chen, Q. (2001) - "Full-scale field failure tests of railway bridge", Journal of Bridge Engineering, Vol. 6, Nº 5, 356-362.

Microsoft - "Visão geral conceitual do .Net Framework" em http://msdn.microsoft.com (Acedido em 2009).

Oñate, E. (1995) - "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - Análisis estático lineal", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, Espanha.

Póvoas, R. (1991) - "Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Ribeiro, A. (2001) - "Relatório: Ensaios de fluência, retracção e módulo de elasticidade", Laboratório de Geotecnia e Materiais de Construção do Centro de Formação Profissional da Indústria da Construção Civil e Obras Públicas do Norte, Maia, Portugal.

Rodrigues, C.; Félix, C.; Lage, A. e Figueiras, J. (2009) - "O sistema de monitorização de base óptica da Ponte da Lezíria", Proc. 1º Congresso de Segurança e Conservação de Pontes ASCP, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Santos, L. (2001) - "Observação e análise do comportamento diferido de pontes de betão", Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Saraf, V. e Nowak, A. (1998) - "Proof load testing of deteriorated steel girder bridges", Journal of Bridge Engineering, Vol. 3, Nº 2, 82-89.

Shang, S. (2003) - "Study of strengthening reinforced concrete beam using prestressed carbon fiber sheet", Journal of Building Structures, Vol. 24, Nº 5, 24-30.

Sousa, H. (2002) - "Relatório: Comportamento de uma viga de betão armado e pré-esforçado em modelo reduzido", LABEST - Laboratório da Tecnologia do Betão e do Comportamento Estrutural da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

StrucSoft Solutions - "ProSteel 3D web page" em www.strucsoftsolutions.com (Acedido em 2009).

Timoshenko, S. (1976) - "Resistência dos materiais", Livros Técnicos e Cientificos, Rio de Janeiro, Brasil.

TNO DIANA - "TNO DIANA web page" em http://www.tnodiana.com (Acedido em 2009).

Wen, R. K. e Rahimzadeh, J. (1983) - "Nonlinear elastic frame analysis by finite element", ASCE - Journal of the Structural Division, Vol. 109, Nº 8, 1952-1971.

Wikipedia - "Plug-in (computing)" em http://en.wikipedia.org/wiki/Plugin (Acedido em 2009).

Won, M. e Tin-Loi, F. (1990) - "Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures", Computer & Structures, Vol. 34, Nº 4, 633-640.

Zienkiewicz, O. e Taylor, R. (1991b) - "The finite element method - Basic formulation and linear problems", McGraw Hill.

Zienkiewicz, O. e Taylor, R. (1991a) - "The finite element method - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity", McGraw Hill, London, Reino Unido.

Zwicky, D. e Vogel, T. (2002) - "A concept for checking structural safety of existing girder bridges and comparaison with full scale tests", Proc. First International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management, 455-456, Barcelona, Spain.

Anexos

Anexos

Anexo A. Formulação específica dos elementos lineares curvos

Anexo A.1. Matriz B

$$\underline{B}_L[1,1]_i = e_{x'_1,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.1}$$

$$\underline{B}_L[2,1]_i = e_{x'_2,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.2}$$

$$\underline{B}_L[3,1]_i = e_{x'_3,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.3}$$

$$\underline{B}_L[1,2]_i = e_{x'_1,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.4}$$

$$\underline{B}_L[2,2]_i = e_{x'_2,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.5}$$

$$\underline{B}_L[3,2]_i = e_{x'_3,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.6}$$

$$\underline{B}_L[1,3]_i = e_{x'_1,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.7}$$

$$\underline{B}_L[2,3]_i = e_{x'_2,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.8}$$

$$\underline{B}_L[3,3]_i = e_{x'_3,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.9}$$

$$\underline{B}_L[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_1} - x'_2(s)e_{x'_3,x_1}\right) \tag{A.10}$$

$$\underline{B}_L[2,4]_i = -e_{x'_3,x_1}Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3(s)e_{x'_1,x_1} + x'_1(s)e_{x'_3,x_1}\right) \tag{A.11}$$

$$\underline{B}_L[3,4]_i = -e_{x'_2,x_1}Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2(s)e_{x'_1,x_1} + x'_1(s)e_{x'_2,x_1}\right) \tag{A.12}$$

$$\underline{B}_L[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_2} - x'_2(s)e_{x'_3,x_2}\right) \tag{A.13}$$

$$\underline{B}_L[2,5]_i = -e_{x'_3,x_2}\,Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3(s)e_{x'_1,x_2} + x'_1(s)e_{x'_3,x_2}\right) \quad (A.14)$$

$$\underline{B}_L[3,5]_i = -e_{x'_2,x_2}\,Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2(s)e_{x'_1,x_2} - x'_1(s)e_{x'_2,x_2}\right) \quad (A.15)$$

$$\underline{B}_L[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_3} - x'_2(s)e_{x'_3,x_3}\right) \quad (A.16)$$

$$\underline{B}_L[2,6]_i = -e_{x'_3,x_3}\,Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3(s)e_{x'_1,x_3} + x'_1(s)e_{x'_3,x_3}\right) \quad (A.17)$$

$$\underline{B}_L[3,6]_i = -e_{x'_2,x_3}\,Ni(s) + \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2(s)e_{x'_1,x_3} - x'_1(s)e_{x'_2,x_3}\right) \quad (A.18)$$

Anexo A.2. Matriz G

$$\underline{G}[1,1]_i = e_{x'_1,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.19)$$

$$\underline{G}[2,1]_i = 0 \quad (A.20)$$

$$\underline{G}[3,1]_i = 0 \quad (A.21)$$

$$\underline{G}[4,1]_i = 0 = e_{x'_2,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.22)$$

$$\underline{G}[5,1]_i = 0 \quad (A.23)$$

$$\underline{G}[6,1]_i = 0 \quad (A.24)$$

$$\underline{G}[7,1]_i = e_{x'_3,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.25)$$

$$\underline{G}[8,1]_i = 0 \quad (A.26)$$

$$\underline{G}[9,1]_i = 0 \quad (A.27)$$

$$\underline{G}[1,2]_i = e_{x'_1,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.28)$$

$$\underline{G}[2,2]_i = 0 \quad (A.29)$$

$$\underline{G}[3,2]_i = 0 \quad (A.30)$$

$$\underline{G}[4,2]_i = e_{x'_2,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.31)$$

$$\underline{G}[5,2]_i = 0 \quad (A.32)$$

$$\underline{G}[6,2]_i = 0 \quad (A.33)$$

$$\underline{G}[7,2]_i = e_{x'_3,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \quad (A.34)$$

$$\underline{G}[8,2]_i = 0 \tag{A.35}$$

$$\underline{G}[9,2]_i = 0 \tag{A.36}$$

$$\underline{G}[1,3]_i = e_{x'_1,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.37}$$

$$\underline{G}[2,3]_i = 0 \tag{A.38}$$

$$\underline{G}[3,3]_i = 0 \tag{A.39}$$

$$\underline{G}[4,3]_i = e_{x'_2,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.40}$$

$$\underline{G}[5,3]_i = 0 \tag{A.41}$$

$$\underline{G}[6,3]_i = 0 \tag{A.42}$$

$$\underline{G}[7,3]_i = e_{x'_3,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{A.43}$$

$$\underline{G}[8,3]_i = 0 \tag{A.44}$$

$$\underline{G}[9,3]_i = 0 \tag{A.45}$$

$$\underline{G}[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\ e_{x'_1,x_1} - x'_2\ e_{x'_3,x_1}\right) \tag{A.46}$$

$$\underline{G}[2,4]_i = -e_{x'_3,x_1} N_i(s) \tag{A.47}$$

$$\underline{G}[3,4]_i = e_{x'_2,x_1} N_i(s) \tag{A.48}$$

$$\underline{G}[4,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3\ e_{x'_1,x_1} + x'_1\ e_{x'_3,x_1}\right) \tag{A.49}$$

$$\underline{G}[5,4]_i = 0 \tag{A.50}$$

$$\underline{G}[6,4]_i = -e_{x'_1,x_1} N_i(s) \tag{A.51}$$

$$\underline{G}[7,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\ e_{x'_1,x_1} - x'_1\ e_{x'_2,x_1}\right) \tag{A.52}$$

$$\underline{G}[8,4]_i = e_{x'_1,x_1} N_i(s) \tag{A.53}$$

$$\underline{G}[9,4]_i = 0 \tag{A.54}$$

$$\underline{G}[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\ e_{x'_2,x_2} - x'_2\ e_{x'_3,x_2}\right) \tag{A.55}$$

$$\underline{G}[2,5]_i = -e_{x'_3,x_2} N_i(s) \tag{A.56}$$

$$\underline{G}[3,5]_i = e_{x'_2,x_2} N_i(s) \tag{A.57}$$

$$\underline{G}[4,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3\ e_{x'_1,x_2} + x'_1\ e_{x'_3,x_2}\right) \tag{A.58}$$

$$\underline{G}[5,5]_i = 0 \tag{A.59}$$

$$\underline{G}[6,5]_i = -e_{x'_1,x_2}\, N_i(s) \tag{A.60}$$

$$\underline{G}[7,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\; e_{x'_1,x_2} - x'_1\; e_{x'_2,x_2}\right) \tag{A.61}$$

$$\underline{G}[8,5]_i = e_{x'_1,x_2}\, N_i(s) \tag{A.62}$$

$$\underline{G}[9,5]_i = 0 \tag{A.63}$$

$$\underline{G}[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\; e_{x'_2,x_3} - x'_2\; e_{x'_3,x_3}\right) \tag{A.64}$$

$$\underline{G}[2,6]_i = -e_{x'_3,x_3}\, N_i(s) \tag{A.65}$$

$$\underline{G}[3,6]_i = e_{x'_2,x_3}\, N_i(s) \tag{A.66}$$

$$\underline{G}[4,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3\; e_{x'_1,x_3} - x'_1\; e_{x'_3,x_3}\right) \tag{A.67}$$

$$\underline{G}[5,6]_i = 0 \tag{A.68}$$

$$\underline{G}[6,6]_i = -e_{x'_1,x_3}\, N_i(s) \tag{A.69}$$

$$\underline{G}[7,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\; e_{x'_1,x_3} - x'_1\; e_{x'_2,x_3}\right) \tag{A.70}$$

$$\underline{G}[8,6]_i = e_{x'_1,x_3}\, N_i(s) \tag{A.71}$$

$$\underline{G}[9,6]_i = 0 \tag{A.72}$$

Anexo A.3. Matriz A

$$\underline{A}[1,1] = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\, u_{x_1,i} + e_{x'_1,x_2}\, u_{x_2,i} + e_{x'_1,x_3}\, u_{x_3,i}\right) \\ +x'_3(s)\dfrac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\, \theta_{x_1,i} + e_{x'_2,x_2}\, \theta_{x_2,i} + e_{x'_2,x_3}\, \theta_{x_3,i}\right) \\ -x'_2(s)\dfrac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\, \theta_{x_1,i} + e_{x'_3,x_2}\, \theta_{x_2,i} + e_{x'_3,x_3}\, \theta_{x_3,i}\right) \end{pmatrix} \tag{A.73}$$

$$\underline{A}[1,2] = 0 \tag{A.74}$$

$$\underline{A}[1,3] = 0 \tag{A.75}$$

$$\underline{A}[1,4]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}u_{x_3,i}\right)\\-x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\+x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.76}$$

$$\underline{A}[1,5]=0 \tag{A.77}$$

$$\underline{A}[1,6]=0 \tag{A.78}$$

$$\underline{A}[1,7]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}u_{x_3,i}\right)\\+x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\-x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.79}$$

$$\underline{A}[1,8]=0 \tag{A.80}$$

$$\underline{A}[1,9]=0 \tag{A.81}$$

$$\underline{A}[2,1]=\sum_{i=1}^{n}\left(N_i(s)\left(-e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}-e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}-e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\right) \tag{A.82}$$

$$\underline{A}[2,2]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}u_{x_3,i}\right)\\+x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\-x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.83}$$

$$\underline{A}[2,3]=0 \tag{A.84}$$

$$\underline{A}[2,4]=0 \tag{A.85}$$

$$\underline{A}[2,5]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}u_{x_3,i}\right)\\-x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\+x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.86}$$

$$\underline{A}[2,6]=0 \tag{A.87}$$

$$\underline{A}[2,7]=\sum_{i=1}^{n}\left(N_i(s)\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\right) \tag{A.88}$$

$$\underline{A}[2,8]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}u_{x_3,i}\right)\\+x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\-x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.89}$$

$$\underline{A}[2,9]=0 \tag{A.90}$$

$$\underline{A}[3,1]=\sum_{i=1}^{n}\left(N_i(s)\left(-e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}-e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}-e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\right) \tag{A.91}$$

$$\underline{A}[3,2]=0 \tag{A.92}$$

$$\underline{A}[3,3]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}u_{x_3,i}\right)\\+x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\-x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.93}$$

$$\underline{A}[3,4]=\sum_{i=1}^{n}\left(N_i(s)\left(-e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}-e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}-e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\right) \tag{A.94}$$

$$\underline{A}[3,5]=0 \tag{A.95}$$

$$\underline{A}[3,6]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}u_{x_3,i}\right)\\-x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\+x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.96}$$

$$\underline{A}[3,7]=0 \tag{A.97}$$

$$\underline{A}[3,8]=0 \tag{A.98}$$

$$\underline{A}[3,9]=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}u_{x_1,i}+e_{x'_3,x_2}u_{x_2,i}+e_{x'_3,x_3}u_{x_3,i}\right)\\+x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_1,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_1,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\\-x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\theta_{x_1,i}+e_{x'_2,x_2}\theta_{x_2,i}+e_{x'_2,x_3}\theta_{x_3,i}\right)\end{pmatrix} \tag{A.99}$$

Anexo B. Formulação específica das armaduras passivas longitudinais

Anexo B.1. Matriz B

$$\underline{B}_L[1,1]_i = e_{x'_1,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.1}$$

$$\underline{B}_L[1,2]_i = e_{x'_1,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.2}$$

$$\underline{B}_L[1,3]_i = e_{x'_1,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.3}$$

$$\underline{B}_L[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_1} - x'_2(s)e_{x'_3,x_1}\right) \tag{B.4}$$

$$\underline{B}_L[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_2} - x'_2(s)e_{x'_3,x_2}\right) \tag{B.5}$$

$$\underline{B}_L[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3(s)e_{x'_2,x_3} - x'_2(s)e_{x'_3,x_3}\right) \tag{B.6}$$

Anexo B.2. Matriz G

$$\underline{G}[1,1]_i = e_{x'_1,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.7}$$

$$\underline{G}[2,1]_i = e_{x'_2,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.8}$$

$$\underline{G}[3,1]_i = e_{x'_3,x_1}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.9}$$

$$\underline{G}[1,2]_i = e_{x'_1,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.10}$$

$$\underline{G}[2,2]_i = e_{x'_2,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.11}$$

$$\underline{G}[3,2]_i = e_{x'_3,x_2}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.12}$$

$$\underline{G}[1,3]_i = e_{x'_1,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.13}$$

$$\underline{G}[2,3]_i = e_{x'_2,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.14}$$

$$\underline{G}[3,3]_i = e_{x'_3,x_3}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{B.15}$$

$$\underline{G}[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\ e_{x'_2,x_1} - x'_2\ e_{x'_3,x_1}\right) \tag{B.16}$$

$$\underline{G}[2,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3\ e_{x'_1,x_1} + x'_1\ e_{x'_3,x_1}\right) \tag{B.17}$$

$$\underline{G}[3,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\ e_{x'_1,x_1} - x'_1\ e_{x'_2,x_1}\right) \tag{B.18}$$

$$\underline{G}[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\ e_{x'_2,x_2} - x'_2\ e_{x'_3,x_2}\right) \tag{B.19}$$

$$\underline{G}[2,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_3\ e_{x'_1,x_2} + x'_1\ e_{x'_3,x_2}\right) \tag{B.20}$$

$$\underline{G}[3,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\ e_{x'_1,x_2} - x'_1\ e_{x'_2,x_2}\right) \tag{B.21}$$

$$\underline{G}[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_3\ e_{x'_2,x_3} - x'_2\ e_{x'_3,x_3}\right) \tag{B.22}$$

$$\underline{G}[2,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-x'_1\ e_{x'_1,x_3} - x'_1\ e_{x'_3,x_3}\right) \tag{B.23}$$

$$\underline{G}[3,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+x'_2\ e_{x'_1,x_3} - x'_1\ e_{x'_2,x_3}\right) \tag{B.24}$$

Anexo B.3. Matriz A

$$\underline{A}[1,1] = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\,u_{x_1,i} + e_{x'_1,x_2}\,u_{x_2,i} + e_{x'_1,x_3}\,u_{x_3,i}\right) \\ +x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_2,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_2,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \\ -x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_3,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_3,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \end{pmatrix} \tag{B.25}$$

$$\underline{A}[1,2] = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\,u_{x_1,i} + e_{x'_2,x_2}\,u_{x_2,i} + e_{x'_2,x_3}\,u_{x_3,i}\right) \\ -x'_3(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_1,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_1,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \\ +x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_3,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_3,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

$$\underline{A}[1,3] = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\,u_{x_1,i} + e_{x'_3,x_2}\,u_{x_2,i} + e_{x'_3,x_3}\,u_{x_3,i}\right) \\ +x'_2(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_1,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_1,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_1,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \\ -x'_1(s)\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_2,x_1}\,\theta_{x_1,i} + e_{x'_2,x_2}\,\theta_{x_2,i} + e_{x'_2,x_3}\,\theta_{x_3,i}\right) \end{pmatrix} \tag{B.27}$$

Anexo C. Formulação específica das armaduras de pré-esforço embebido

Anexo C.1. Matriz B

$$B_L[1,1]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_1} \tag{C.1}$$

$$B_L[1,2]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_2} \tag{C.2}$$

$$B_L[1,3]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_3} \tag{C.3}$$

$$B_L[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-e_{x'_1,x_2}\,\Delta x_{1,i} + e_{x'_1,x_3}\,\Delta x_{2,i}\right) \tag{C.4}$$

$$B_L[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+e_{x'_1,x_1}\,\Delta x_{3,i} - e_{x'_1,x_3}\,\Delta x_{1,i}\right) \tag{C.5}$$

$$B_L[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+e_{x'_1,x_1}\,\Delta x_{2,i} - e_{x'_1,x_2}\,\Delta x_{1,i}\right) \tag{C.6}$$

Anexo C.2. Matriz G

$$\underline{G}[1,1]_i = e_{x'_1,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.7}$$

$$\underline{G}[2,1]_i = e_{x'_2,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.8}$$

$$\underline{G}[3,1]_i = e_{x'_3,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.9}$$

$$\underline{G}[1,2]_i = e_{x'_1,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.10}$$

$$\underline{G}[2,2]_i = e_{x'_2,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.11}$$

$$\underline{G}[3,2]_i = e_{x'_3,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.12}$$

$$\underline{G}[1,3]_i = e_{x'_1,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.13}$$

$$\underline{G}[2,3]_i = e_{x'_2,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.14}$$

$$\underline{G}[3,3]_i = e_{x'_3,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{C.15}$$

$$\underline{G}[1,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{3,i}\; e_{x'_1,x_2} + \Delta x_{2,i}\; e_{x'_1,x_3}\right) \tag{C.16}$$

$$\underline{G}[2,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{3,i}\ e_{x'_2,x_2} + \Delta x_{2,i}\ e_{x'_2,x_3}\right) \tag{C.17}$$

$$\underline{G}[3,4]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{3,i}\ e_{x'_3,x_2} + \Delta x_{2,i}\ e_{x'_3,x_3}\right) \tag{C.18}$$

$$\underline{G}[1,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+\Delta x_{3,i}\ e_{x'_1,x_1} - \Delta x_{1,i}\ e_{x'_1,x_3}\right) \tag{C.19}$$

$$\underline{G}[2,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+\Delta x_{3,i}\ e_{x'_2,x_1} - \Delta x_{1,i}\ e_{x'_2,x_3}\right) \tag{C.20}$$

$$\underline{G}[3,5]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(+\Delta x_{3,i}\ e_{x'_3,x_1} - \Delta x_{1,i}\ e_{x'_3,x_3}\right) \tag{C.21}$$

$$\underline{G}[1,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{2,i}\ e_{x'_1,x_1} + \Delta x_{1,i}\ e_{x'_1,x_2}\right) \tag{C.22}$$

$$\underline{G}[2,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{2,i}\ e_{x'_2,x_1} + \Delta x_{1,i}\ e_{x'_2,x_2}\right) \tag{C.23}$$

$$\underline{G}[3,6]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(-\Delta x_{2,i}\ e_{x'_3,x_1} + \Delta x_{1,i}\ e_{x'_3,x_2}\right) \tag{C.24}$$

Anexo C.3. Matriz A

$$\underline{A}[1,1] = \sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_1}\left(u_{x_1,i} + \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_2,i} - \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_2}\left(u_{x_2,i} - \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_1,i} + \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_3}\left(u_{x_3,i} + \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_1,i} - \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_2,i}\right)\end{array}\right) \tag{C.25}$$

$$\underline{A}[1,2] = \sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_2,x_1}\left(u_{x_1,i} + \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_2,i} - \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_2,x_2}\left(u_{x_2,i} - \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_1,i} + \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_2,x_3}\left(u_{x_3,i} + \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_1,i} - \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_2,i}\right)\end{array}\right) \tag{C.26}$$

$$\underline{A}[1,3] = \sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_3,x_1}\left(u_{x_1,i} + \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_2,i} - \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_3,x_2}\left(u_{x_2,i} - \Delta x_{3,i}\,\theta_{x_1,i} + \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_3,i}\right)\\ +\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_3,x_3}\left(u_{x_3,i} + \Delta x_{2,i}\,\theta_{x_1,i} - \Delta x_{1,i}\,\theta_{x_2,i}\right)\end{array}\right) \tag{C.27}$$

Anexo D. Formulação específica dos tirantes e cabos de pré-esforço exterior

Anexo D.1. Matriz B

$$B_L[1,1]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_1} \tag{D.1}$$

$$B_L[1,2]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_2} \tag{D.2}$$

$$B_L[1,3]_i = \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} e_{x'_1,x_3} \tag{D.3}$$

Anexo D.2. Matriz G

$$\underline{G}[1,1]_i = e_{x'_1,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.4}$$

$$\underline{G}[2,1]_i = e_{x'_2,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.5}$$

$$\underline{G}[3,1]_i = e_{x'_3,x_1} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.6}$$

$$\underline{G}[1,2]_i = e_{x'_1,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.7}$$

$$\underline{G}[2,2]_i = e_{x'_2,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.8}$$

$$\underline{G}[3,2]_i = e_{x'_3,x_2} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.9}$$

$$\underline{G}[1,3]_i = e_{x'_1,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.10}$$

$$\underline{G}[2,3]_i = e_{x'_2,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.11}$$

$$\underline{G}[3,3]_i = e_{x'_3,x_3} \frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \tag{D.12}$$

Anexo D.3. Matriz A

$$\underline{A}[1,1] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \left(e_{x'_1,x_1} u_{x_1,i} + e_{x'_1,x_2} u_{x_2,i} + e_{x'_1,x_3} u_{x_3,i} \right) \right) \tag{D.13}$$

$$\underline{A}[1,2] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial N_i(s)}{\partial s} \left(e_{x'_2,x_1} u_{x_1,i} + e_{x'_2,x_2} u_{x_2,i} + e_{x'_2,x_3} u_{x_3,i} \right) \right) \tag{D.14}$$

$$\underline{A}[1,3] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial N_i(s)}{\partial s}\left(e_{x'_3,x_1}\, u_{x_1,i} + e_{x'_3,x_2}\, u_{x_2,i} + e_{x'_3,x_3}\, u_{x_3,i}\right)\right) \tag{D.15}$$