

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO



Universidade do Porto

FEUP Faculdade de Engenharia

Estudo da Utilização de Filtros de Kalman para Auto Localização

Luciano Bittencourt de Abreu

Tese submetida no âmbito do
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

Orientador: Doutor Armando Jorge Miranda de Sousa

Porto, Julho de 2008

*À minha imensa e querida família pelo apoio e o amor
Isso inclui minha namorada e amigos,
que sempre estiveram ao meu lado*

Resumo

Este trabalho propõe a aplicação do Filtro de Kalman para a fusão de informações dos diferentes sensores de um robô para sua auto-localização. Inicialmente são apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do projeto, tais como a representação em espaço de estado, estimação recursiva, o Filtro de Kalman, entre outros. O sistema alvo do estudo foi um comboio que, inicialmente em repouso, se desloca segundo a trajetória descrita pela sua linha. Porém, em determinados momentos, o sistema recebe alguns diferentes tipos de perturbação externa que podem comprometer a qualidade dos dados utilizados para seu controle, que são sua posição e velocidade. O Filtro de Kalman foi utilizado para garantir que tais informações, mesmo com a ausência de determinados tipos de medidas, estejam disponíveis, uma vez que são de extrema importância para a integridade do sistema. Para isso, foi elaborado um algoritmo em Matlab que simula o deslocamento de um móvel unidimensional, como um comboio, ao longo do tempo juntamente com o Filtro de Kalman, capaz de estimar os estados do sistema. Observou-se que, mesmo com a presença de eventuais distúrbios, o Filtro de Kalman foi capaz de fazer a estimativa convergir para o estado real e sendo ainda capaz de fundir as diversas fontes de informação numa representação única do "estado do mundo", justificando assim o meio para o qual fora designado.

Palavras-chave: Fusão Sensorial, Filtro de Kalman, Robótica Móvel, Auto-Localização.

Abstract

This work proposes the application of the Kalman Filter for the fusion of information from different sensors of a robot for your own localization. Initially is shown some fundamental concepts for the development of the project, such as the estate space representation, recursive estimation, the Kalman Filtering, among several. The studied system is an unidimensional mobile vehicle that can represent, for example, a train. However, at some moments, the system gets different kinds of external disturbs that maybe damage his behavior. The Kalman Filtering was utilized to ensure the information, even when some measurements are not always available, since it's of extremely importance to the system integrity. Therefore, was developed a algorithm in Matlab that simulates the vehicle's displacement through the time with the Kalman Filter, able to estimate the estates of the system. The Kalman Filter was able to converge even in the presence of perturbations and create a meaningful world state.

Key-words: Sensorial Fusion, Kalman's Filtering, Movable Robotics, Self Localization.

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, agradeço a Deus por todas as graças que a mim são oferecidas, estando Ele presente em tudo, desde o ar que respiro até o chão onde piso. Pelos momentos em que tive fraqueza e fui carregado no colo diante da vossa graça e misericórdia.
- Agradeço imensamente aos meus queridos pais que sempre acreditaram em mim e sempre me ofereceram o melhor, dando-me sempre a oportunidade de me dedicar exclusivamente aos estudos. Obrigado por me guiar sempre no caminho da verdade e do amor.
- À minhas irmãs, Ana Olímpia e Carolina, pelo amor e carinho durante toda a minha vida, apesar das divergências ideológicas ao longo de nossa caminhada.
- Ao meu cunhado Geraldo Valente, pela presença e alegria compartilhada.
- À Larissa, minha namorada, pelo amor e companheirismo, estando sempre ao meu lado, diante de toda e qualquer dificuldade.
- À todos os meu familiares e, em especial, às minhas tias e madrinhas Ondina e Magda, que desde o meu nascimento se fizeram presente em todas as etapas do meu caminhar.
- Ao meu professor orientador, Armando Jorge Miranda de Sousa, que depositou em mim a confiança deste trabalho e sempre esteve disposto a me ajudar a crescer.
- Aos meus professores Marcelo Vieira Corrêa e Roselito Teixeira de Albuquerque, que foram meus orientadores durante o período de iniciação científica.
- Aos meus grandes amigos, que se fizeram presentes ao longo da minha caminhada, o Thiago (Thiagão), Thiago (Colatina), Geovane Brunório, Ivan (Maluco), Marcos Tolentino, Roberto Germando (Betão) e, em especial, o Gláucio Breder (Glaucíulo), que se tornou como um irmão pra mim. Não se esquecendo dos muitos outros que nunca serão esquecidos.
- Ao meu amigo Ralph, que me acompanhou durante toda esta etapa do curso em Portugal, estando sempre junto nos bons e maus momentos.
- À Keila, o Tom e a Denise (Dedê) que, durante a minha estada no Porto foram como uma família pra mim, sempre me recebendo com muito carinho.

- Seria muita pretensão da minha parte acabar os meus agradecimentos por aqui, porém minha gratidão é imensurável por todas as pessoas que se fizeram presentes, seja com um sorriso, um olhar ou com uma repreensão. O fato é que todas as situações vividas no dia a dia nos ensinam, e com isso, crescemos. Precisamos apenas saber aproveitar o melhor de cada situação e jamais nos esquecer das pessoas que nos fazem, de alguma forma, melhor.

"Que há de iluminar os que jazem nas trevas e na sombra da morte e dirigir os nossos passos no caminho da paz"

Lucas 1,79

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Lista de Figuras	xi
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Proposta de Projeto	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Justificativa	2
1.4 Organização do Texto	2
2 Representação em Espaço de Estados	5
2.1 Os Sistemas Reais	5
2.2 Conceitos Básicos	5
2.3 Exemplo de um Circuito <i>RLC</i>	7
3 Filtros de Kalman	9
3.1 Estimação Recursiva	9
3.2 O Filtro de Kalman - Introdução	9
3.3 Aplicações dos Filtros de Kalman	10
3.4 Equações do Filtro de Kalman	11
4 Implementação do Filtro de Kalman	15
4.1 Descrição do Sistema Unidimensional	15
4.2 Obtenção das Matrizes de Estado	16
4.2.1 Cinemática	16
4.2.2 O Deslocamento dos Corpos	16
4.2.3 Exemplo de Aplicação da Cinemática	17
4.2.4 Equações de Estado do Comboio	19
4.3 A Implementação do Algoritmo	20

5	Simulações e Testes	23
5.1	Primeira Etapa	24
5.2	Segunda Etapa	31
6	Conclusões	35
	Referências	37

Lista de Figuras

2.1	Circuito elétrico RLC	7
4.1	Comboio se deslocando rumo ao túnel.	16
4.2	Deslocamento dos corpos A e B.	17
5.1	Espaço percorrido (real e estimado) pelo comboio.	24
5.2	Espaço percorrido (real e estimado) pelo comboio.	25
5.3	Distância real e estimada pelo Filtro de Kalman para o comboio.	26
5.4	Velocidade e posição ao longo do tempo.	27
5.5	Auto-covariância da posição e da velocidade ao longo do tempo.	28
5.6	Covariância cruzada entre os dados estimados para posição e velocidade. . .	29
5.7	Erros de estimação da posição e da velocidade.	30
5.8	Velocidade e posição ao longo do tempo. A linha vermelha representa a resposta real e a linha preta a resposta estimada	31
5.9	Auto-covariância da posição e da velocidade ao longo do tempo.	32
5.10	Covariância cruzada entre a posição e da velocidade ao longo do tempo. . .	33
5.11	Erro de estimação da posição e da velocidade ao longo do tempo.	34

Lista de Símbolos

Aqui estão apresentados os símbolos utilizados do decorrer do trabalho, onde escalares são representados por letras minúsculas e matrizes por letras maiúsculas.

$\text{cov}[\cdot]$	Covariância;
\mathbf{R}	Conjunto dos números reais;
σ	Desvio Padrão;
ξ	Resíduo de estimação;
$E[\cdot]$	Esperança matemática;
K	Ganho de Kalman;
P	Matriz de covariância dos estados;
\tilde{P}	Matriz de covariância dos estados predita;
Q	Matriz de covariância do ruído de processo;
R	Matriz de covariância do ruído de processo;
\bar{x}	Média de x ;
\tilde{x}_k	Sinal predito;
\hat{x}_k	Sinal estimado;
X	Vetor de estados;
y_k	Sinal observado no instante k ;
\tilde{y}_k	Sinal observado no instante k aproximado;
n	Número de variáveis ou dimensão dos vetores de estado;
e	Ruído de medição;
w	Ruído de processo.

Capítulo 1

Introdução

A cada dia que passa, torna-se crescente a necessidade do homem de conhecer novos meios de realizar tarefas responsáveis por melhorar o bem estar da humanidade. A partir daí, novas técnicas são desenvolvidas e antigos métodos são aperfeiçoados. Para tais acontecimentos, é necessária a aplicação de sistemas responsáveis por realizar tarefas que não condizem com a realidade física do ser humano. Podemos ter como exemplo um robô que trabalha em ambientes cujas condições físicas não seriam suportadas por um homem comum, como uma montadora de carros, onde peças de peso elevado são fixadas de forma rápida e precisa durante um longo período de tempo. Nenhum ser vivo suportaria tais condições.

Com o intuito de conhecer alguns estados¹, que variam linearmente com o tempo, de um sistema real, foi realizado um estudo baseando-se na fusão de informações utilizando o Filtro de Kalman (Kalman,1960). Para isso, foi feito uso de um sistema análogo unidimensional que simulava o comportamento de um comboio, o qual será descrito com maiores detalhes a seguir. Os estados estimados pelo Filtro de Kalman representaram de maneira satisfatória o sistema, condizendo com o propósito a que fora designado.

Este trabalho apresentará o conceito de Filtro de Kalman de maneira introdutória aplicado à estimação de estados e fusão sensorial de sistemas reais.

1.1 Proposta de Projeto

Em todas as áreas da engenharia, incertezas são levadas em consideração a fim de se garantir o funcionamento, dentro dos limites estabelecidos, para que o sistema não apresente um comportamento que possa comprometer toda a sua estrutura. Em alguns casos, o erro considerado pode apresentar limites mais amplos, como o sistema de medição de velocidade de um automóvel. Embora não seja de interesse que a informação dada ao condutor seja incoerente com a realidade, se aceita que o dispositivo responsável por medir tal grandeza apresente um erro. Agora se analisarmos um sistema dosador, que é projetado para liberar uma quantidade exata de determinados componentes químicos, percebemos que este não

¹Conjunto mínimo de variáveis de um sistema em um dado momento t_o , juntamente com as equações que representam o seu comportamento, capazes de determinar todas as variáveis do sistema para qualquer instante de tempo.

pode apresentar erros, uma vez que uma quantidade a mais de alguns elementos pode provocar efeitos indesejáveis naqueles aos quais serão submetidos.

Em modelagem matemática, é interessante que a modelização e a simulação do sistema em estudo seja feita considerando alguns erros que existem nos sistemas reais. Em outras palavras, deve-se considerar as incertezas presentes nos sistemas ao se fazer uma modelagem matemática do mesmo, a fim de que o modelo obtido corresponda de maneira satisfatória quando aplicado a um sistema real. Tais modelos são ditos estocásticos.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como principais objetivos:

- Implementar computacionalmente um algoritmo baseado no filtro de Kalman capaz de estimar estados de um sistema quando submetido a situações reais, permitindo assim sua auto-localização;
- Testar a robustez do algoritmo implementado, submetendo o sistema a diferentes tipos de ruídos;
- Apresentar as limitações reais da utilização do método utilizado.

1.3 Justificativa

Para a obtenção de modelos que condizem com a realidade, ruídos devem ser considerados durante a sua modelização. Para tal, fez-se o uso do Filtro de Kalman para a fusão de informações, uma vez que este apresenta uma capacidade de combinar dados de diferentes sensores em uma estimativa estatisticamente ótima quando o sistema pode ser representado por um modelo linear contaminado por ruídos Gaussianos brancos.

Os sistemas reais podem apresentar falhas inesperadas, as quais podem comprometer o funcionamento correto do mesmo. Dependendo do sistema, os riscos oferecidos provenientes de tais deficiências, podem ter uma pequena ou uma elevada proporção. Para que a segurança e a confiabilidade do funcionamento dos dispositivos sejam mantidas, é de extrema necessidade que técnicas e métodos robustos a falhas sejam implantados nos sistemas de interesse. Para isso, é feito o estudo do filtro de Kalman para estimação de estados de um sistema quando este é submetido a falhas.

1.4 Organização do Texto

Este trabalho fora dividido em seis capítulos. Neste primeiro, é apresentada uma breve introdução, situando o leitor a respeito do problema a ser tratado, juntamente com o seu objetivo e justificativa de realização.

No segundo capítulo alguns conceitos básicos com relação aos sistemas reais e a representação em espaço de estados são apresentados e discutidos. Feito isto, é apresentado um exemplo de aplicação.

No capítulo três é apresentada a teoria que envolve o Filtro de Kalman, juntamente com alguns conceitos básicos de estimação recursiva, os quais foram utilizados no decorrer do trabalho.

No quarto capítulo foi feita uma descrição do sistema alvo, onde as matrizes de estado que descrevem seu comportamento foram estimadas baseando-se na teoria da cinemática, cuja mesma foi descrita e exemplificada neste capítulo. Foi mostrado também a implementação do Filtro de Kalman no ambiente MatLab. A seguir, no quinto capítulo, foram realizados testes com o intuito de saber o comportamento do Filtro de Kalman em algumas situações ditas reais. Foram então apresentados os resultados e as devidas conclusões apresentadas no capítulo seguinte.

Capítulo 2

Representação em Espaço de Estados

2.1 Os Sistemas Reais

Desde o momento em que acordamos pela manhã até o momento em que dormimos, lidamos com os mais variados tipos de sistemas que nem sempre percebemos, como por exemplo, o temporizador de um semáforo, climatizadores de ambiente, a aceleração dos automóveis, elevadores e outros. Todos esses processos apresentam, de alguma forma, um controle, seja este em *malha aberta* ou *malha fechada*. Os ditos em *malha aberta* são aqueles que necessitam de alguma intervenção externa para o ajuste do *setpoint*, como a regulação de temperatura de um ar-condicionado. Se alguém perceber que a temperatura não está agradável, pode simplesmente fazer o ajuste manualmente. Em outras palavras, um sistema em *malha aberta* é aplicado em situações em que as saídas são esperadas e conhecidas. Já os sistemas em *malha fechada*, são aqueles que são controlados automaticamente de acordo com alguns critérios pré-estabelecidos e as saídas não são previsíveis. Podemos colocar como exemplo um climatizador de ambiente que está programado para que uma determinada temperatura seja mantida. Caso o dia esteja muito quente ou muito frio, a quantidade de calor a ser fornecida ou retirada do ambiente varia, sem a intervenção do homem, bastando apenas uma programação adequada.

Todos os sistemas mencionados anteriormente precisam ser representados de alguma forma, seja pelas equações físicas que regem o seu comportamento, por diagrama de blocos ou de algumas das outras várias maneiras, onde uma delas, que será utilizada no decorrer deste trabalho, a representação por espaço de estados. O desenvolvimento de técnicas para desenvolver equações matemáticas capazes de reproduzir de forma aproximada o comportamento dinâmico de sistemas reais é um dos temas mais fascinantes da cultura humana (Ljung, 1987).

2.2 Conceitos Básicos

A representação de um sistema na forma de espaço de estados é um tipo representação feita na forma matricial que simula o seu comportamento. Tal artifício simplifica muito

o sistema de representação matemática das equações envolvidas, uma vez que com o aumento do número de variáveis de estado, entradas e saídas não aumente significativamente a complexidade das equações. A teoria de controle moderno baseia-se em representações em espaço de estados, nas quais surge o conceito de variáveis de estado (Chen, 1984). Para o entendimento de tal assunto, é necessário ter alguns conceitos básicos que serão apresentados a seguir.

Modelos de Estado

O modelo de estado é aquele utilizado para representar um sistema na forma de espaço de estados. A seguir é apresentada o modelo em sua forma discreta:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_{k+1} = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde A, B, C e D são matrizes de valores constantes que são obtidas através de equações que descrevem o comportamento do sistema. Em sua forma contínua temos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Variáveis de Estado

O estado de um sistema é um conjunto mínimo de variáveis $(x_1(t_o), x_2(t_o), \dots, x_n(t_o))$ que juntamente com a entrada $u(t)$ para $t \geq t_o$ permite a caracterização do sistema. O estado do sistema em sua forma discreta também pode ser um vetor como:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Para a forma contínua:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.3 Exemplo de um Circuito RLC

Para ilustrar os conceitos vistos até aqui, será apresentado um exemplo de representação de um sistema na forma de espaço de estados.

Dado o seguinte circuito RLC :

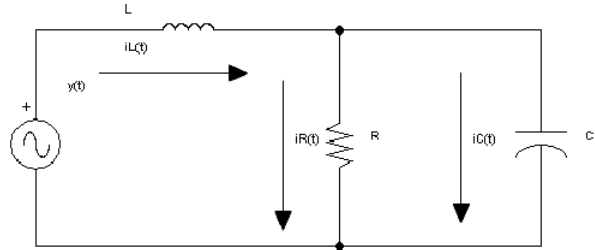


Figura 2.1: Circuito elétrico RLC

Para representar o circuito acima na forma de espaço de estados, serão necessárias duas variáveis de estado. Tal consideração é feita com base nos elementos armazenadores de energia, que no caso do circuito são dois: o capacitor, que armazena energia na forma de tensão e o indutor, que armazena energia na forma de corrente elétrica. As equações a seguir representam o comportamento da corrente no capacitor e tensão no indutor, respectivamente.

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad (2.5)$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (2.6)$$

As variáveis de estado sempre são escolhidas conforme as suas grandezas diferenciáveis. Por isso, as variáveis de estado escolhidas serão a corrente no indutor (i_L) e a tensão no capacitor (v_C). De acordo com a equação (2.2), o sistema deve ser montado em função das variáveis de estado. Em outras palavras, o lado direito da equação (2.2) deve ser escrito com uma combinação linear entre (i_L) e (v_C). A partir do método dos nós, em circuitos elétricos podemos dizer que

$$i_C = -i_R + i_L, \quad (2.7)$$

ou

$$i_C = -\frac{1}{R}v_C + i_L \quad (2.8)$$

Analisando as malhas externas temos:

$$v_L = -v_C + v(t) \quad (2.9)$$

Agora substituindo (2.5) em (2.8) e (2.6) em (2.9), temos:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L \quad (2.10)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v(t) \quad (2.11)$$

Agora para obtenção da equação de saída $i_R(t)$, sabemos que:

$$i_R(t) = \frac{v_C}{R} \quad (2.12)$$

Agora de posse das equações que regem o comportamento do sistema fica fácil montar a sua representação em espaço de estados. Relacionando a equação (2.2) com as equações (2.10), (2.11) e (2.12) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t) \quad (2.13)$$

$$i_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Esta é, então, a representação por espaço de estados do circuito *RLC* proposto. Note que todas as equações estão em função dos estados do sistema.

Capítulo 3

Filtros de Kalman

3.1 Estimação Recursiva

Mediante a nossa realidade, para se identificar um sistema e simular o seu comportamento, é necessário que se haja um estudo a fim de se obter um modelo que simule tal. Dependendo do tipo de representação escolhida, é preciso que parâmetros sejam estimados baseados em uma lógica adequada. Essa estimação pode ser feita tendo como princípios básicos:

- Estimação em *batelada*;
- Estimação *recursiva*.

A estimação em batelada é feita quando se tem todas as informações referentes ao sistema e seu comportamento antes do processo de estimação, sendo que os parâmetros são estimados em uma só etapa dentro de um só vetor.

Já na estimação recursiva, as informações que representam o comportamento do sistema são obtidas durante o próprio processo de estimação. Para isso, ocorrem atualizações dos dados dos sensores, onde tais são armazenados e então é executada a etapa de estimação. Esta técnica é largamente utilizada quando se trata de processos em que seus estados variam com o tempo, ou seja, em sistemas de tempo real.

3.2 O Filtro de Kalman - Introdução

Existem várias maneiras de se estimar estados de um sistema dinâmico, porém cada uma delas apresenta algumas limitações e restrições conforme a área de aplicação. Partindo-se desta idéia, em 1960, um estudioso chamado Rudolf Emil Kalman publica um artigo que possibilita o homem a dar um grande passo no sentido do desenvolvimento, com o título de "*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*", onde é proposto um novo método de filtragem linear e predição a partir de medições ruidosas, fazendo-se o uso de técnicas probabilísticas, o qual mais viria a ser conhecido como o Filtro de Kalman (Kalman, 1960). A formulação de seu algoritmo recursivo é semelhante ao algoritmo de mínimos quadrados recursivo com ganho normalizado (Ljung,1999).

Para se fazer um modelo matemático capaz de representar um sistema real, é preciso levar em consideração alguns fatores presentes na realidade. Tais fatores fazem a diferença no momento da aplicação do sistema desenvolvido nos sistemas reais. Métodos que utilizam tais princípios são conhecidos como métodos estocásticos. Os modelos determinísticos são aqueles nos quais não são modeladas incertezas de nenhuma natureza. Nos modelos estocásticos as incertezas são modeladas na forma de variáveis aleatórias (Aguirre, 2000). A fim de se representar matematicamente tais incertezas presentes nos sistemas reais, é utilizado um ruído Gaussiano Branco. Matematicamente, através do Teorema do Limite Central, é possível provar que, como nos sistemas reais, o ruído é causado por um somatório de pequenas fontes de perturbação, podendo assim se representado por uma PDF².

Fazendo as considerações propostas anteriormente, o Filtro de Kalman é capaz de estimar os estados de um sistema contaminado por um ruído Gaussiano branco. Suas equações matemáticas compõem um processo recursivo ótimo capaz de reduzir a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os estimados. Para tal, são consideradas duas etapas, a de atualização do tempo e a de atualização das medidas, as quais serão abordadas com maiores detalhes mais a frente.

3.3 Aplicações dos Filtros de Kalman

A grande maioria dos processos, em maior parte na área de pesquisa e desenvolvimento, apresenta diferentes faixas de trabalho. Podemos tomar como exemplo um sistema que é responsável por medir a temperatura, com o menor erro possível, de um determinado ambiente. Porém, as variações térmicas podem oscilar muito, de graus negativos até valores elevadíssimos. A partir daí, tem-se a necessidade de se fazer uso de diferentes tipos de sensores, uma vez que é muito difícil projetar um dispositivo de medição que funcione de maneira adequada em todas as faixas de operação. Então, suponhamos que serão utilizados três sistemas de medição diferente: um para baixa (A), um para média (B) e outro para altas temperaturas (C). A questão é: qual a confiabilidade depositada nos três sensores com as variações térmicas? Não é difícil perceber que em determinados momentos, o sensor A garantirá uma informação mais correta que o sensor B, ou o sensor B apresentará maior confiabilidade que o sensor C em determinados momentos. Então é aplicado o Filtro de Kalman para fazer a fusão das diferentes informações, considerando-se as regiões de confiança de cada dispositivo. Quando o problema envolve estimação simultânea de estados e de parâmetros de um processo, podendo servir de base para controle adaptativo, uma formulação aumentada do problema em espaço de estados é empregada (Chui e Chen, 1999).

Um outro exemplo de aplicação é em navegações aeroespaciais, onde grandezas físicas têm que ser medidas para se determinar variáveis de interesse, como posição e velocidade. Porém, limitações sensoriais fazem com que as medidas apresentem algumas incertezas e ruídos, tendo alguns fatores de intervenção. Para isso, torna-se necessário se fazer uma ponderação dos dados existentes, a fim de se obter estimativas confiáveis. Então o Filtro

²Função densidade de probabilidade, do inglês *probability density function*.

de Kalman é aplicado com o intuito de fazer tais filtragens de informação (Faria e Souza, 2008).

Com o avanço da tecnologia, o Filtro de Kalman tem sido empregado cada vez mais em diversos setores da indústria, como na determinação do prazo de validade de alimentos, tendências de mercado, economia e até mesmo em diagnóstico médico.

3.4 Equações do Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman apresenta, como mencionado anteriormente, uma vasta aplicabilidade nos problemas do dia-a-dia, uma vez que pode estimar estados passados, presentes e futuros de um sistema. Tais condições são de grande interesse na em quaisquer que sejam as áreas de aplicação, uma vez que dessa forma é possível prever um possível erro antes mesmo que ele aconteça. Considerando, a fim de facilitar o entendimento, um sistema unidimensional (Jeoseph,1999), ou seja, com apenas uma variável a ser estimada, onde as grandezas deixam de ser vetores e passam a ser escalares. Para a estimação de uma determinada variável aleatória x_k , tem-se:

$$x_k = a x_{k-1} + w_{k-1}, \quad (3.1)$$

onde:

- a é conhecido;
- w_{k-1} representa um ruído gaussiano branco de média igual a zero e variância q .

Através da equação (3.1) percebe-se que o estado atual x_k depende exclusivamente de condições anteriores. Em outras palavras, o estado presente de x_k está diretamente relacionado com o seu estado anterior, uma vez que este é multiplicado por a e então somado a um ruído w_{k-1} . Partindo-se deste princípio, consideremos \hat{x}_o é a melhor estimativa inicial de x_o . Apesar de \hat{x}_o ser a melhor estimativa, existe um erro de estimação, onde a sua variância pode ser expressa por:

$$p_o = E[x_o - \hat{x}_o]^2, \quad (3.2)$$

onde E representa o operador de valor esperado. A partir desatas condições, a partir das equação (3.1) torna-se possível calcular um estimativa para uma nova amostra, que será considerada sendo como \tilde{x}_1 . Então temos que:

$$\tilde{x}_1 = ax_o + w_o. \quad (3.3)$$

Analisando-se a equação (3.3) podese notar e considerar, assim como Kalman, que w_o é nulo, uma vez que consideramos o ruído como sendo gaussiano branco com média igual a

zero, e não se esquecendo que a quantidade de informações iniciais é muito pequena. Então reescrevendo a equação (3.3), obtém-se:

$$\tilde{x}_1 = a \hat{x}_o. \quad (3.4)$$

Para a variância do erro de estimação de \tilde{x}_1 , através de simples substituições das equações anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= E[x_1 - \tilde{x}_1]^2, \\ \tilde{p}_1 &= [a x_o + w_o - a \hat{x}_o]^2, \\ \tilde{p}_1 &= a^2 E[x_o - \hat{x}_o]^2 + E[w_o]^2 + 2a E[(x_o - \hat{x}_o)w_o]. \end{aligned}$$

Podemos então simplificar a equação anterior anulando-se o último termo, uma vez que x e w não são correlacionados. Logo:

$$\tilde{p} = 2 a^2 p_o + q. \quad (3.5)$$

onde q é igual a $[w_o]^2$ e representa o vetor de covariância de ruído do processo.

O próximo passo agora é obter a medida da variável x , sabendo que:

$$y_1 = c x_1 + e_1 \quad (3.6)$$

onde variável y_1 da equação anterior geralmente é um sinal medido e pode variar no tempo. c é uma constante conhecida e e_1 é um ruído gaussiano branco com variância igual a r .

Se y_1 fosse obtido antes da realização da medida, então

$$\tilde{y}_1 = c \tilde{x}_1 \quad (3.7)$$

onde \tilde{y}_1 é a saída estimada do sistema.

Através das equações anteriores, obteve-se \tilde{x}_1 , onde este é uma estimativa aproximada do estado alvo do sistema. Segundo Kalman, este valor poderia, a partir de dados coletados em tempo real (y_k), melhorar o valor obtido em \tilde{x}_1 , o qual pode ser representado abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + k_1(y_1 - \tilde{y}_1), \\ \hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + k_1(y_1 - c \tilde{x}_1), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde \hat{x}_1 é uma estimativa melhorada de \tilde{x}_1 .

Repare que na equação acima $y_1 - \tilde{y}_1$ é multiplicado por k_1 , o qual faz referência ao ganho de Kalman para aquele instante, e depois somado a \tilde{x}_1 . A diferença entre y_1 e \tilde{y}_1 é conhecida como inovação, uma vez que representa o erro de se estimar y_1 . Tal discrepância é proveniente de:

1. Ruído de medição (3.6);
2. Erro no cálculo de \tilde{x}_1 (3.4).

O ganho de Kalman, é utilizado para indicar o quanto a parcela referida acima deve ser considerada. Em outras palavras, após a estimação de \hat{x}_1 , esta é corrigida multiplicando-se a diferença entre o valor medido y_1 e o valor aproximado de \tilde{y}_1 pelo ganho de Kalman no instante de $k = 1$ (k_1).

Para se calcular o ganho de Kalman, é necessário levar em consideração a variância do erro de estimação, que é:

$$\begin{aligned} E[x_1 - \hat{x}_1] &= E[x_1 - \tilde{x}_1 - k_1(y_1 - c\tilde{x}_1)]^2, \\ E[x_1 - \hat{x}_1] &= E[x_1 - \tilde{x}_1 - k_1(c x_1 + e_1 - c \tilde{x}_1)]^2, \\ E[x_1 - \hat{x}_1] &= E[(1 - c k_1)^2(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (k_1 e_1)^2], \end{aligned}$$

logo,

$$E[x_1 - \hat{x}_1] = p_1 = \tilde{p}_1(1 - c k_1)^2 + r k_1^2. \quad (3.9)$$

Derivando-se a equação acima em relação a k_1 e igualando-a a zero, obtém-se a melhor estimativa para \hat{x}_1 , uma vez que a variância do erro de estimação será a menor possível. Com isso, temos que:

$$k_1 = \frac{1}{c \tilde{p}_1(c^2 \tilde{p}_1 + r)}; \quad (3.10)$$

Organizando-se as equações anteriores de maneira adequada, tem-se então um algoritmo recursivo que recebe o nome de Filtro de Kalman, onde sua lógica é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= a \hat{x}_{k-1} + b u_{k-1} \\ \tilde{y}_k &= c \tilde{x}_k \\ \tilde{p}_k &= a^2 p_{k-1} + q \\ k_k &= c \tilde{p}_k (c^2 \tilde{p}_k + r)^{-1} \\ p_k &= \tilde{p}_k (1 - c k_k)^2 + r k_k^2 \\ \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + k_k (y_k - \tilde{y}_k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

A fim de se aplicar a sistemas multidimensionais, através de algumas operações matriciais tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k &= A \hat{X}_{k-1} + B u_{k-1} \\ \tilde{Y}_k &= C \tilde{X}_k \\ \tilde{P}_k &= A P_{k-1} A^T + Q \\ K_k &= \tilde{P}_k C^T (C \tilde{P}_k C^T + R)^{-1} \\ P_k &= (I - K_k C) \tilde{P}_k (I - K_k C)^T + K_k R K_k^T \\ \hat{X}_k &= \tilde{X}_k + K_k (Y_k - \tilde{Y}_k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note, tanto em (3.11) como em (3.12), que as três primeiras equações são responsáveis por prever o comportamento do sistema. Esta etapa é conhecida como *Time Update*. As equações restantes, responsáveis por melhorar os valores estimados anteriormente, fazem parte de uma etapa conhecida como *Measurement Update*.

Na primeira equação, tanto em (3.11) como em (3.12), foi adicionada uma parcela de $B u_{k-1}$. Esta foi inserida com o intuito de se considerar a entrada u do sistema no instante de tempo k . B Representa uma constante conhecida.

Através das equações (3.12), devemos fazer algumas considerações em relação à dimensão das matrizes, as quais estão representadas abaixo:

- X é uma matriz $n \times 1$;
- A é uma matriz $n \times n$;
- B é uma matriz $n \times 1$;
- u é um escalar, ou seja, 1×1 ;
- C é uma matriz $m \times n$;
- Y é uma matriz $m \times 1$;
- P é uma matriz $n \times n$;
- Q e R são, para este trabalho, consideradas constantes;
- K é uma matriz $n \times n$;

Capítulo 4

Implementação do Filtro de Kalman

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma das diversas maneiras de se aplicar o Filtro de Kalman para fundir informações de diferentes sensores de um sistema. Primeiramente será feita a descrição do sistema alvo e, posteriormente, será mostrada os passos a serem seguidos com o intuito de se obter um modelo que represente suas características e, então, será elaborado um algoritmo baseando-se nas informações obtidas.

4.1 Descrição do Sistema Unidimensional

Milhares de pessoas utilizam todos os dias diversos meios de transportes para se deslocarem para seus devidos fins. Porém, elas não sabem que por traz de todos aqueles meios de locomoção são controlados por sistemas, muitas vezes inteligentes, sujeitos a falhas, sejam elas mecânicas, elétricas ou outra. Para isso, existem diferentes tipos de se remediar o possível problema. Para esclarecer, levemos em consideração o sistema de frenagem de um automóvel. Se o condutor percebe que durante um percurso o seu sistema de frenagem foi avariado, ele pode reduzir a velocidade do veículo utilizando apenas o freio de mão. A solução a princípio parece fácil, mas não quando se trata de um sistema que é monitorado remotamente e que ali estão envolvidas uma grande quantidade de pessoas. Imaginemos também que um satélite que acompanha visualmente a posição de um Comboio. Se este entrar em um túnel, o satélite é incapaz de obter a sua posição, então outros recursos são utilizados.

A partir do momento em que o comboio está dentro do túnel, é necessário estimar a sua posição em função do tempo. Seria possível fazer uso de sensores indicadores de posição, porém não seria muito viável, sendo que determinadas medidas passam a estar inacessíveis. A solução então proposta neste trabalho é a utilização do Filtro de Kalman como método de estimação recursiva. Para isso devemos fazer algumas considerações que serão descritas na próxima seção. A seguir é apresentada uma figura que descreve tal situação:

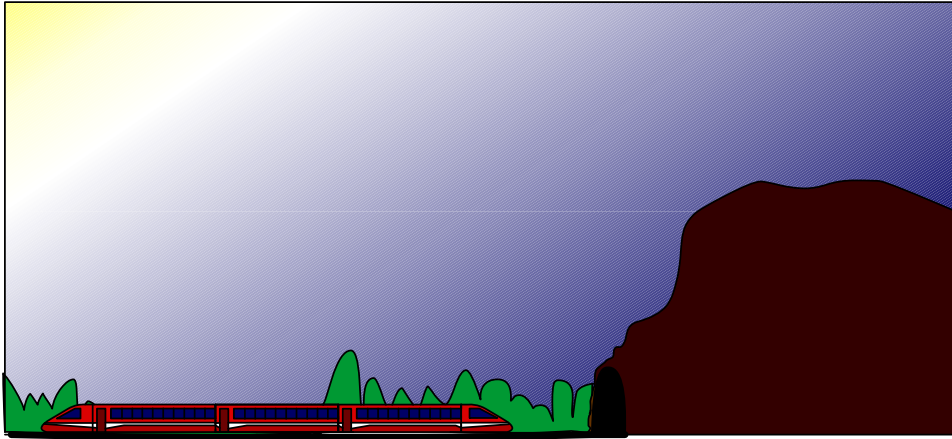


Figura 4.1: Comboio se deslocando rumo ao túnel.

4.2 Obtenção das Matrizes de Estado

A obtenção das matrizes de estado é feita, como mencionado no capítulo 2, a partir das equações que representam o comportamento do sistema em estudo. Então, para que possamos desenvolver tal raciocínio, é necessário fazer um estudo particular das equações que caracterizam o movimento do comboio, que na física é conhecida como ¹Cinemática.

4.2.1 Cinemática

A Cinemática é uma área da física que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com as forças que originam tal comportamento. Para isso, é necessário considerar informações relacionadas com a posição, o deslocamento, o espaço percorrido, a velocidade, a rapidez e a aceleração dos corpos. Neste primeiro caso, será abordada a parte da cinemática que relaciona o deslocamento de um corpo em função do tempo e da aceleração à qual este é submetido.

4.2.2 O Deslocamento dos Corpos

Ao longo dos anos, a necessidade de se conhecer o comportamento dos corpos quando submetidos a determinadas forças em determinados ambientes se tornou necessário, visto que o desenvolvimento humano está diretamente ligado a estes princípios. Em outras palavras, o estudo do movimento dos corpos foi, e ainda é, uma grande base para grandes descobertas e aplicações que facilitam a vida do homem, como a elaboração de carros que oferecem maior segurança à vida, os vários meios de transporte que são utilizados diariamente por milhões de pessoas.

A velocidade desenvolvida por um corpo está relacionada diretamente com o espaço que este percorre em função do tempo, conforme a equação apresentada a seguir.

$$v = \frac{d - d_o}{t - t_o}, \quad (4.1)$$

logo,

¹Área da mecânica que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com suas causas.

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad (4.2)$$

De acordo com a equação acima, entende-se que quanto mais o espaço percorrido em função do tempo, maior será a velocidade que este descreve. Com o mesmo raciocínio, temos que:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4.3)$$

onde,

$$\Delta v = v - v_o \quad (4.4)$$

Expandindo a equação (4.3) através da equação (4.4) temos que a velocidade representada por:

$$v = v_o + a\Delta t \quad (4.5)$$

Com isso, tem-se a representação da velocidade final em função da velocidade inicial, aceleração desenvolvida e da variação do tempo. Com base nas equações vistas anteriormente, pode-se obter todas as equações da cinemática, conforme apresentado a seguir:

$$d = \int_0^t (v_o + a(t))dt, \quad (4.6)$$

$$v(t) = \int_0^t a dt, \quad (4.7)$$

Uma aplicação deste raciocínio será então apresentada.

4.2.3 Exemplo de Aplicação da Cinemática

Dois corpos, A e B, descrevem uma trajetória cujas informações de velocidade e tempo são apresentadas na figura a seguir:

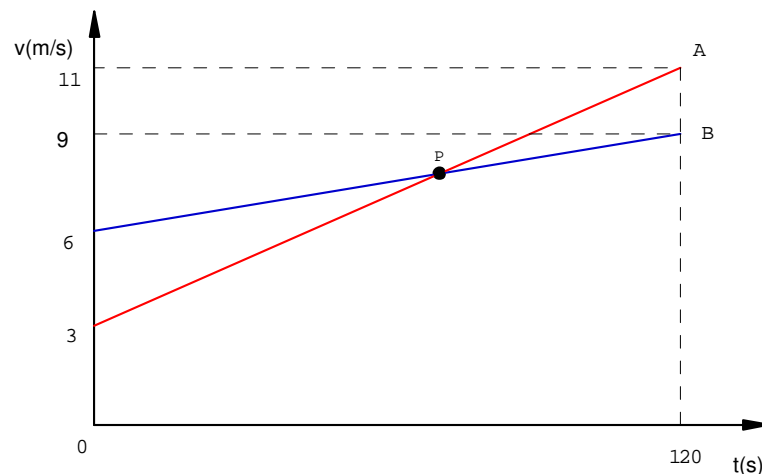


Figura 4.2: Deslocamento dos corpos A e B.

Deseja-se então saber, a partir das informações fornecidas acima, o instante de tempo no ponto P e qual a espaço percorrido por cada um dos corpos neste momento.

O primeiro passo para a solução deste problema, é montar a equação matemática que representa o movimento de cada um dos corpos. Para isso, utilizaremos a equação (4.7) para fazer a modelização. Para A então temos:

$$v_A = v_{Ao} + a_A t$$

$$11 = 3 + a_A \cdot 120$$

$$a_A = 0,067 \text{ m/s}^2$$

Então substituindo o valor encontrado da aceleração na equação (4.7) e a velocidade inicial, obtém-se a equação para da velocidade para qualquer instante de tempo.

$$v_A = 3 + 0,067t \quad (4.8)$$

Agora, para o corpo B, a partir dos mesmo procedimentos, temos que

$$9 = 6 + a \cdot 120$$

$$a = 0,025 \text{ m/s}^2$$

então,

$$v_B = 6 + 0,025t \quad (4.9)$$

De posse das equações que descrevem o movimento dos corpos A e B, basta iguala-las para se saber o instante de tempo t relacionado com o ponto P. Logo

$$v_A = v_B,$$

$$3 + 0,067t = 6 + 0,025t,$$

$$0,067t - 0,025t = 6 - 3,$$

$$t = 71,43 \text{ s.}$$

Então no instante $t = 71,43$ o corpo A passa pelo corpo B. Para se saber a distância percorrida neste instante, basta substituir o valor do tempo encontrado nas equações vistas, utilizando a aceleração e as velocidades do corpo desejado. Para o corpo A temos:

$$11^2 = 3^2 + 2 \cdot 0,067 \cdot d$$

$$d = 835,2 \text{ m}$$

Agora para o corpo B:

$$9^2 = 6^2 + 2 \cdot 0,025 \cdot d$$

$$d = 900 \text{ m}$$

Então, até o instante P, o corpo A percorreu uma distância de aproximadamente 835,2 metros, enquanto o corpo B percorreu 900 metros.

4.2.4 Equações de Estado do Comboio

Antes de encontrar as equações características do movimento do comboio, é necessário se estabelecer alguns critérios básicos que serão de grande importância no momento de montagem das matrizes. As variáveis de estado são: espaço percorrido e a velocidade. Como entrada, utilizaremos a aceleração desenvolvida pelo corpo e como saída, o espaço percorrido. Então, a partir da equação (4.6) e (4.7),

$$d = d_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_o + a t$$

Tais equações terão que ser representadas em de espaço de estados, ou seja, na forma matricial. A matriz que servirá de base para esta representação a partir da entrada e saída considerada é:

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix} a \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Relacionando as equações (4.6) e (4.7) com a matriz acima, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} a \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

4.3 A Implementação do Algoritmo

Para a implementação dos algoritmos utilizados neste trabalho foi utilizado como software o MATLAB, do inglês *MATrix LABoratory*. Este foi escolhido como ferramenta devido suas grandes capacidades e facilidades de implementação e aplicação, tendo em vista sua alta performance em problemas relacionados ao cálculo numérico, tendo como elemento básico de informação, matrizes que não necessitam ser dimensionadas, além das inúmeras formas de construções gráficas.

Para este sistema bidimensional, foi utilizado um tempo de amostragem de 0,1 segundos. Fez-se esta escolha devido a grande necessidade de atualização das informações referentes à movimentação do comboio. Em outras palavras, em frações de segundos, o sistema pode responder de maneira inesperada, o que dificultaria uma possível tentativa de correção de erro se o tempo de atualização dos dados fosse grande.

As simulações feitas em MATLAB, foram divididas em duas etapas para a avaliação da robustez do Filtro de Kalman. Na primeira, a o comboio desenvolve o seu movimento variando a sua aceleração. Neste momento, todas as medidas estão disponíveis para a atualização. Na segunda etapa, o comboio também apresenta variações na aceleração, porém mais frequentes e acentuadas. Em determinados momentos, a fim de simular uma possível falha, há ausência de medidas.

Tendo como partida esta informações e as matrizes de estado do sistema obtidas nas equações (4.12) e (4.13), define-se a primeira etapa do projeto sendo:

```
dt=0.1; %Tempo de amostragem
A=[1 dt;0 1];
B=[1/2*dt^2;dt];
C=[1,0];
D=[];
```

A fim de facilitar o desenvolvimento do projeto, escolhemos as covariâncias do ruído de medição e o ruído de processo sendo iguais a 1. Logo:

```
R=1; % R = Covariancia do ruido de medição
Q=1; % Q = Covariancia do ruido de processo
```

Definindo então a entrada, o tempo e outras variáveis:

```
t = [0:dt:100]';
u = [3*ones(1,length(t))]' ;
u(250:750)=0;
n = length(t)
randn('seed',0)
w = sqrt(Q)*randn(n,1); % w = Ruído de processo
v = sqrt(R)*randn(n,1); % v = Ruído de medição
```

Utilizando o ruído de processo w e o ruído de medição v encontrados anteriormente, temos que:

```
sys = ss(A,B,C,0,dt);
[y,t2] = lsim(sys,u+w,t);
yv = y2 + v;
```

A partir de agora, será implementado o Filtro de Kalman, considerando-se as seguintes condições iniciais:

```
P = B*Q*B';           % covariancia do erro inicial
x = zeros(2,1);       % condições iniciais do estado
ye = zeros(length(t),1);
ycov = zeros(length(t),1);

xd_est=[];
xv_est=[];
```

Agora segue-se as equações de atualização de tempo e de medida:

```
for i=1:length(t)

    % Atualização do tempo

    x = A*x + B*u(i);           % x[n+1|n]
    P = A*P*A' + B*Q*B';       % P[n+1|n]

    ye(i) = C*x;

    % Atualização da medida

    K = P*C'*(C*P*C'+R)^-1;    % Ganho de Kalman
    x = x + K*(yv(i)-C*x);     % x[n|n]
    P = (eye(2)-K*C)*P;        % P[n|n]
    errcov(i) = C*P*C';

    xd_est=[xd_est,x(1,1)];
    xv_est=[xv_est,x(2,1)];

end
```

Comparando a resposta real com a resposta estimada:

```
figure;
plot(t,yv,'r--',t,x_est(1,:),'b-')
title('Resposta do Filtro de Kalman - Distancia')
legend('Resposta Real Ruidosa','Resposta do Filtro de Kalman')
```

```
xlabel('No. de amostras'), ylabel('Saída')

figure;
plot(t,y2(:,2),'r--',t,x_est(2,:),'b-')
title('Resposta do Filtro de Kalman - Velocidade')
legend('Resposta Real Ruidosa','Resposta do Filtro de Kalman')
xlabel('Tempo'), ylabel('Velocidade')

figure;
plot(t,errcov), ylabel('Covariância do erro')
title('Convariancia do Erro')
xlabel('Tempo'), ylabel('Erro')

EstErr = y-ye;
EstErrCov = sum(EstErr.*EstErr)/length(EstErr)
```

Este algoritmo foi descrito com o intuito de mostrar a facilidade de implementação do Filtro de Kalman em diferentes ambientes de simulação, partindo-se desta lógica computacional. Algumas modificações e acréscimos, e este algoritmo pode ser utilizado como formas de testar a robustez do filtro perante a grande quantidade de situações reais, ou até mesmo adaptado a outro processo.

Após compilado, este algoritmo gera gráficos que nos permitem avaliar o desempenho do Filtro de Kalman na estimação dos estados do sistema, os quais serão apresentados no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Simulações e Testes

Este capítulo tem como principal objetivo apresentar as simulações realizadas, a partir do algoritmo elaborado e apresentado no capítulo 4, do sistema do comboio. Foram também realizados testes a partir desta simulação com o objetivo de definir um pouco das características do Filtro de Kalman quando submetido a condições ditas reais, os quais foram divididos em duas etapas que serão descritas a seguir.

Na primeira etapa, foram realizados os testes mais básicos, que tem como principal objetivo, verificar o funcionamento do Filtro de Kalman para a estimação da velocidade e do deslocamento em condições normais de operação. Já na segunda, é considerado que o sistema sofre uma perturbação externa e, por algum motivo, muda subitamente de posição. As condições submetidas aos testes são:

- **Primeira etapa:** As medidas que são utilizadas na etapa de atualização do Filtro de Kalman nem sempre estão disponíveis, mas quando estão, são de boa qualidade. Em alguns momentos, tem-se informações ora de velocidade, ora de posição, ora de velocidade e posição e, em determinados instantes, não se tem quaisquer dados do sistema real.
- **Segunda etapa:** São feitas as mesmas considerações da etapa anterior, porém em determinado momento, tem-se ausência de medidas para a fase de atualização do Filtro de Kalman e, coincidentemente, o sistema tem sua posição alterada para um valor complementar fora da lógica descrita pelas equações cinemáticas. Posteriormente, novos dados do sistema real são disponibilizados.

O sistema do comboio é interessante porque através do monitoramento remoto das variáveis de interesse, tem-se uma grande flexibilidade de tratamento das informações presentes no sistema. Através dessas, é possível controlar o processo em diferentes ambientes que não seja dentro do veículo propriamente dito. Desta forma, é possível um controle e monitoramento mais preciso de uma ou mais pessoas, o que faz deste meio mais seguro. Porém não podemos nos esquecer das possíveis falhas que todos os sistemas estão submetidos, onde a segunda etapa dos testes tem esta finalidade.

5.1 Primeira Etapa

Tendo feitas as considerações referentes à primeira etapa, a seguir será apresentado o gráfico de posição do sistema real juntamente com a estimada pelo Filtro de Kalman.

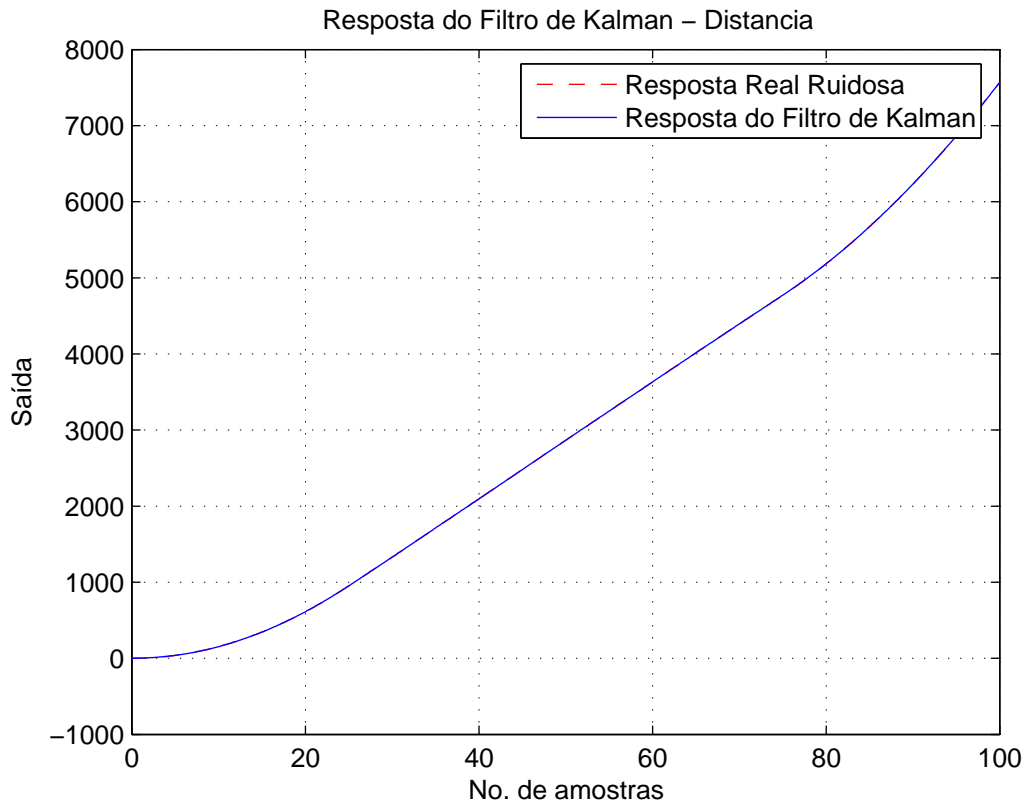


Figura 5.1: Espaço percorrido (real e estimado) pelo comboio.

Através da figura acima, notamos que o Filtro de Kalman foi capaz de estimar o estado relativo ao espaço percorrido pelo comboio de maneira a atender as expectativas. Mesmo apresentando ruídos no processo e na medição, a resposta gerada pelo filtro foi muito boa, visto que pouco se percebe os resíduos gerados em pelas diferenças de valores, apesar de estarem presentes. Para melhor esclarecer, a seguir será apresentada a figura anterior, porém em uma escala que facilite a percepção da discrepância entre a curva real e a estimada.

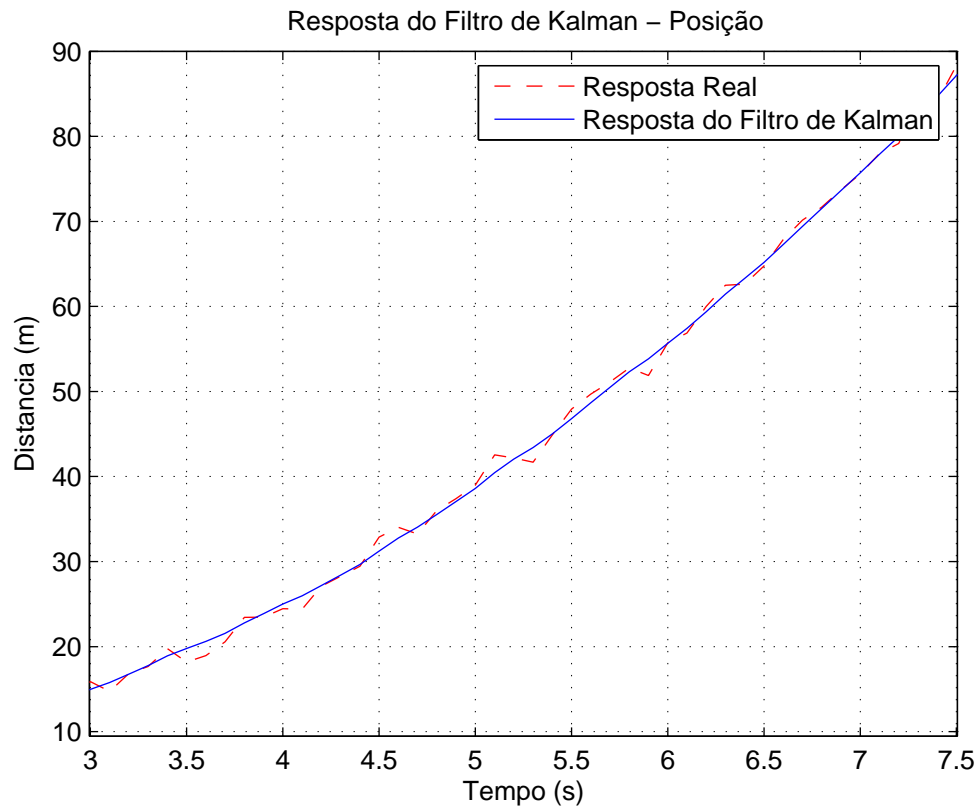


Figura 5.2: Espaço percorrido (real e estimado) pelo comboio.

Note que a resposta real apresenta ruído incorporado às suas medidas. Apesar disso, o Filtro de Kalman apresenta uma estimativa ótima, suavizando as regiões de certa instabilidade. A figura a seguir apresenta a resposta gerada pelo Filtro de Kalman na estimação do segundo estado: a velocidade.

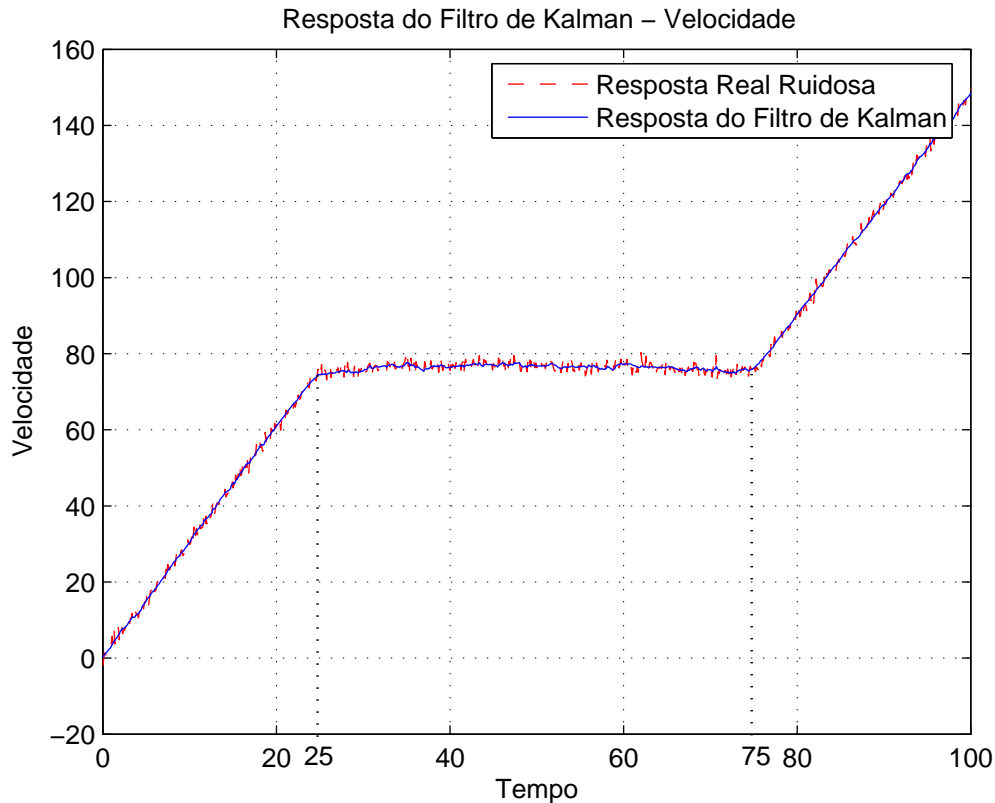


Figura 5.3: Distância real e estimada pelo Filtro de Kalman para o comboio.

Inicialmente, o comboio está com uma aceleração de aproximadamente 3 m/s^2 . No instante de $t = 25$ segundos, o veículo desacelera até obter uma velocidade constante até $t = 75$ segundos, onde o comboio varia positivamente a sua velocidade em função do tempo. Apesar de todas estas variações, o Filtro de Kalman foi capaz de acompanhar todo o desenvolvimento do sistema, embora este esteja contaminado com ruído.

Esta simulação foi feita considerando que as medidas utilizadas para atualização não estavam disponíveis em todos os instantes de tempo. Com isso, a tendência é o aumento da diferença entre os valores estimados e os valores medidos, uma vez que não existe informações a serem comparadas com os estados estimados. Porém, quando informações referentes ao estado real do sistema se encontram disponíveis, o erro diminui subitamente.

A seguir são apresentados dois gráficos: de velocidade e deslocamento, respectivamente.

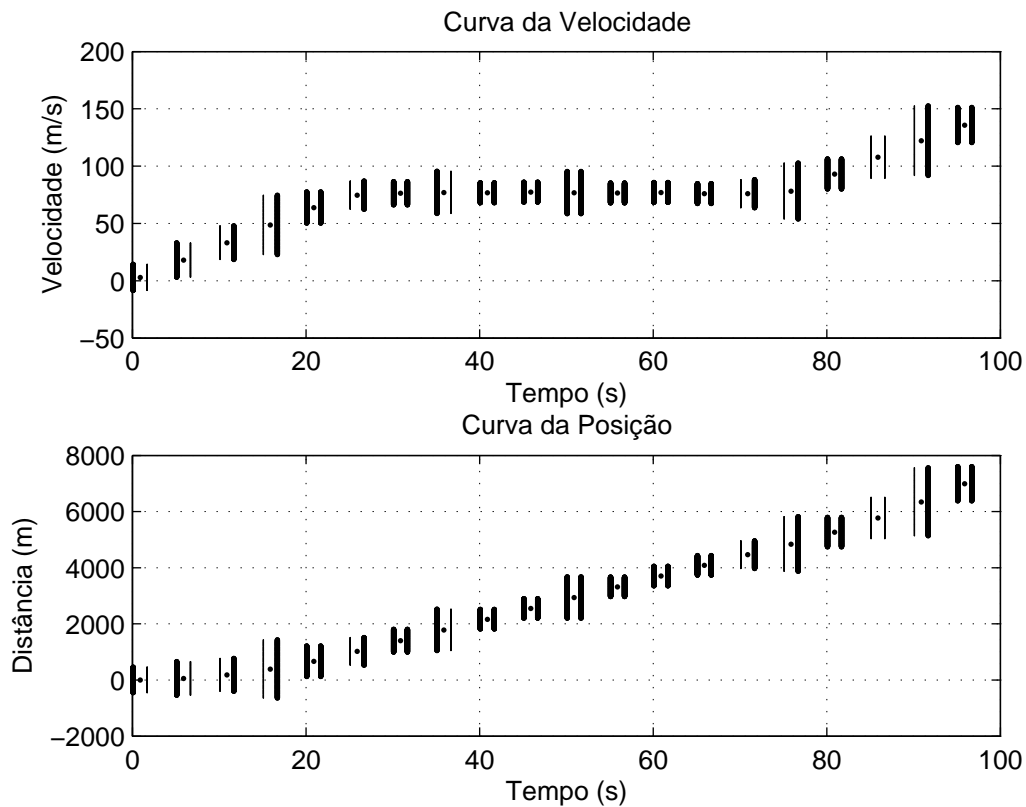





Figura 5.4: Velocidade e posição ao longo do tempo.

-  - Ausência de medidas;
-  - Apenas medidas de distância;
-  - Apenas medida de velocidade;
-  - Medidas de distância e velocidade.

O comprimento das semi-reatas acima está relacionado com o desvio padrão naquele instantes, onde o ponto presente entre estas indica a média dos dados.

É interessante perceber que à medida em que as informações de atualização do sistema não se encontram disponíveis, a matriz de covariância aumenta, o que resulta em uma variação crescente do erro dos dados estimados, uma vez que tais informações estão diretamente relacionadas. Nota-se também, que ao longo do tempo, a covariância apresentada na curva de velocidade sofre maior variação do que a curva de posição. A seguir é apresentado uma figura que representa tais relações.

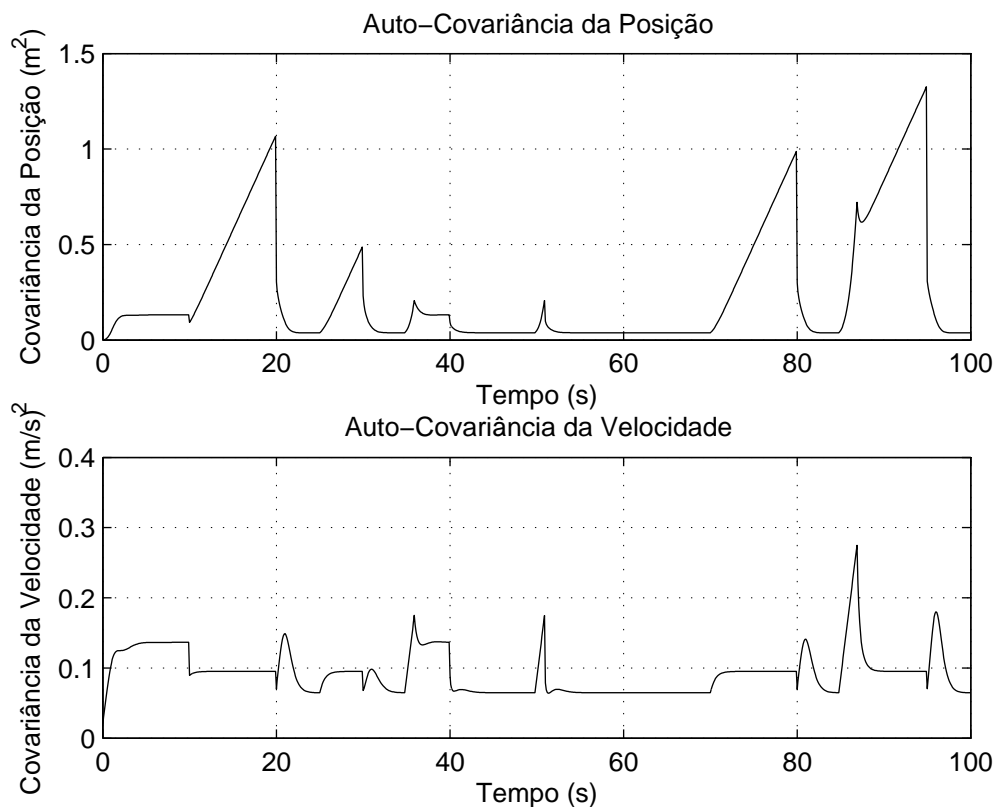


Figura 5.5: Auto-covariância da posição e da velocidade ao longo do tempo.

Comparando os gráficos das figuras (5.4) e (5.5), percebemos que a covariância dos estados estimados variam de acordo com a disponibilidade dos dados para atualização. Em momentos que existem informações referentes ao deslocamento e à velocidade, o erro apresenta os menores valores. Porém, com as limitações das medidas, sejam estas de qualquer que seja a variável de estado, o erro aumenta. Em particular, notamos através da figura (5.5) que, como mencionado anteriormente, a ausência de medidas afeta mais a estimação dos dados de posição do que a estimação dos dados de velocidade.

Outra qualidade da estimação dos estados através do Filtro de Kalman, é que quando as medidas se tornam disponíveis, o erro decresce abruptamente. Em outras palavras, a taxa de variação do erro (variação decrescente) é maior quando se tem informações reais do sistema do que quando estas não estão presentes (variação crescente).

A seguir é apresentada a figura de covariância cruzada entre os valores estimados da posição e da velocidade.

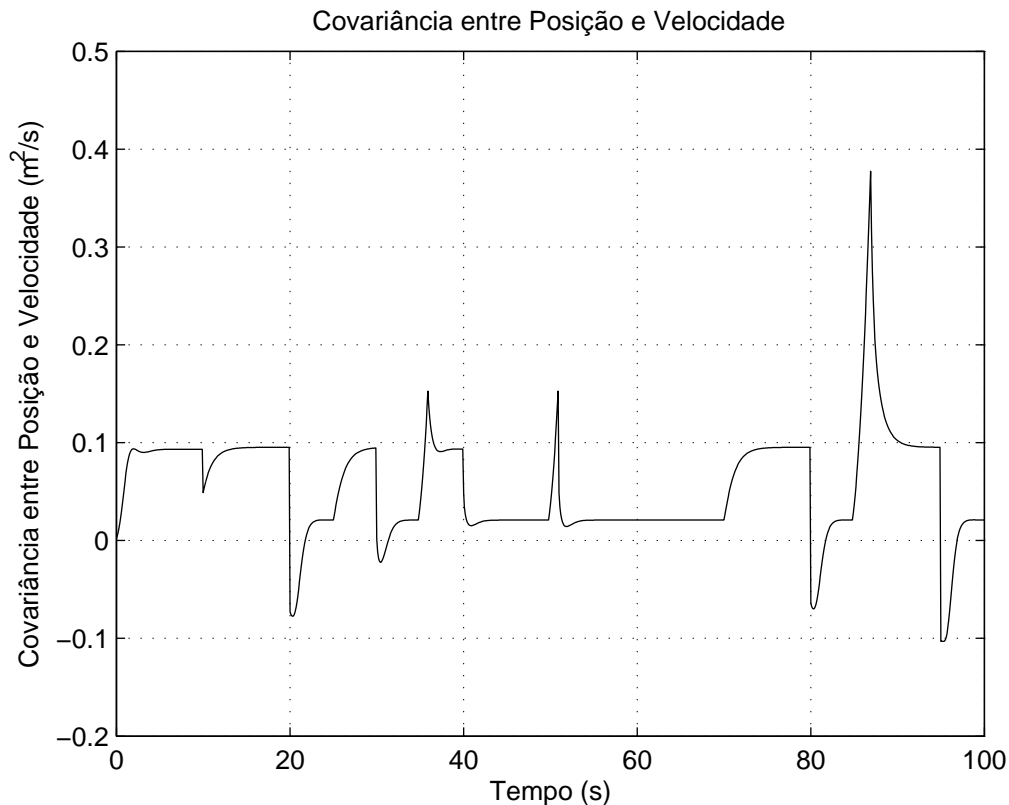


Figura 5.6: Covariância cruzada entre os dados estimados para posição e velocidade.

Analisando-se a figura (5.6), percebemos a covariância cruzada entre os dois estados estimados. Nota-se que, em alguns instantes de tempo, a covariância assume valores negativos. Como sabemos, a covariância mostrada acima é a soma do produto das diferenças entre a variável *posição* no tempo t e a sua respectiva média (ou seja, $\Delta\text{posição}$), pela diferença entre a variável *velocidade* no mesmo tempo t e sua respectiva média (ou seja, $\Delta\text{velocidade}$). Em alguns instantes, os dados estimados são inferiores à média, o que resultará em uma parcela negativa da covariância. Para o nosso caso, consideremos que em valores inferiores a zero a covariância entre as duas variáveis é nula.

A seguir será apresentado um gráfico que nos mostra os resíduos dos dados de estimação.

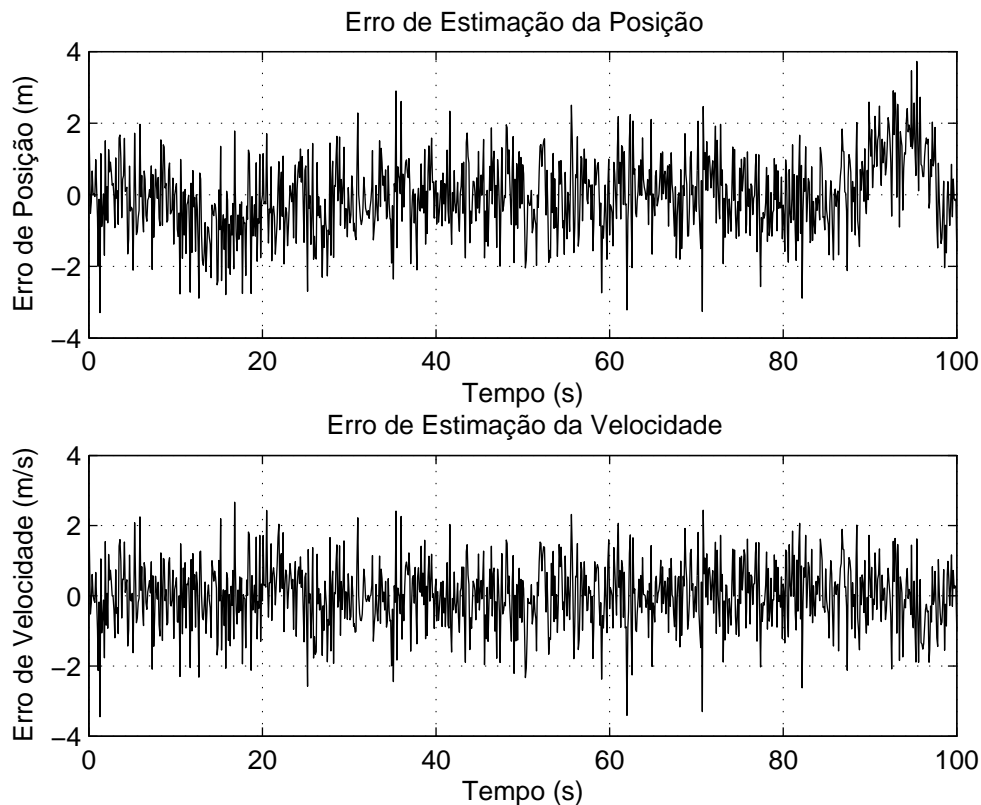


Figura 5.7: Erros de estimação da posição e da velocidade.

Dada a figura acima, percebemos que o erro de estimação assemelha-se a um ruído Gaussiano branco. Fez-se então a média aritmética das matrizes dos erros de posição e de velocidade, os quais são iguais a 0,0323 e 0,0083, respectivamente. Tais análises são de grande importância, uma vez que mostra a convergência dos dados estimados pelo Filtro de Kalman, atendendo às expectativas. Através da figura (5.5), esperava-se que o erro fosse maior para a estimação dos dados de posição, dada sua covariância ao longo do tempo. Tal suposição foi aceita a partir do momento que percebemos que a média dos resíduos de estimação de posição foi maior que os resíduos de estimação de velocidade.

5.2 Segunda Etapa

A segunda etapa dos testes realizados tem como principal objetivo, ver até que ponto o Filtro de Kalman é fiel nas estimações dos estados do sistema. Se por algum motivo as medidas das variáveis observadas pelo filtro apresentam valores que não condizem com a realidade do processo, este tenderá a estimar erroneamente as informações de interesse.

Como mencionado anteriormente, o sistema é submetido à mesma entrada das situações anteriores, porém, em determinado momento, não existem informações das variáveis de observação para efetuar a etapa de atualização das medidas do Filtro de Kalman. Alguns instantes depois, ainda na mesma condição, o sistema muda subitamente de posição. Se fôssemos comparar com um sistema robótico, no qual sua posição é descrita através das coordenadas x, y e o ângulo θ , que, durante a fase de estimação das variáveis de estado, este fosse retirado de sua posição e colocado em outra, sem qualquer relação com o estado anterior (rapto do robô). O que se espera é que, a partir do momento que não são feitas atualização das informações, o erro se eleve gradativamente e, após a mudança inesperada da posição do robô, o filtro continue estimando valores baseados nos dados anteriores. A partir do momento em o posicionamento real é informado, o Filtro de Kalman corrige corrija o erro de estimação. O gráfico que descreve esta situação é apresentado a seguir.

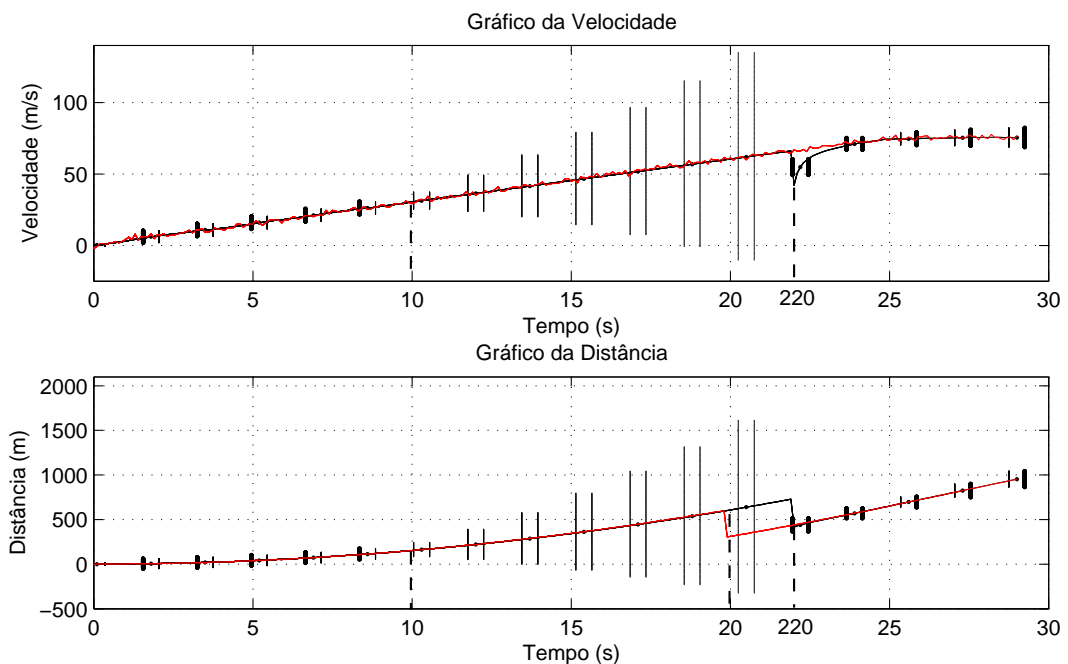


Figura 5.8: Velocidade e posição ao longo do tempo. A linha vermelha representa a resposta real e a linha preta a resposta estimada

No instante de tempo $t = 10$ segundos, não existem informação disponível das variáveis de observação (distância e velocidade), onde se percebe pelo tipo de linha. Após alguns instantes, em $t = 20$ segundos, robô (comboio) muda sua posição instantaneamente, "enganando" assim as estimações feitas pelo filtro. Logo em seguida, em $t = 22$ segundos,

novas medidas válidas são informadas para se realizar a etapa de atualização.

Através da figura anterior percebemos, conforme o previsto, que a partir do instante que as informações de atualização tornam-se restritas, o Filtro de Kalman estima os "possíveis" estados do sistema baseado em instantes passados sem garantir qualquer certeza. Como tais instantes não têm quaisquer relações de posicionamento com o estado atual, o filtro passa a apresentar resultados insatisfatórios neste intervalo. A partir do momento que novas medidas são fornecidas, o erro de estimação decresce rapidamente, atendendo às expectativas.

Para melhor compreender a situação descrita acima, a seguir é apresentado um gráfico que mostra a covariância da posição e da velocidade ao longo do tempo, respectivamente.

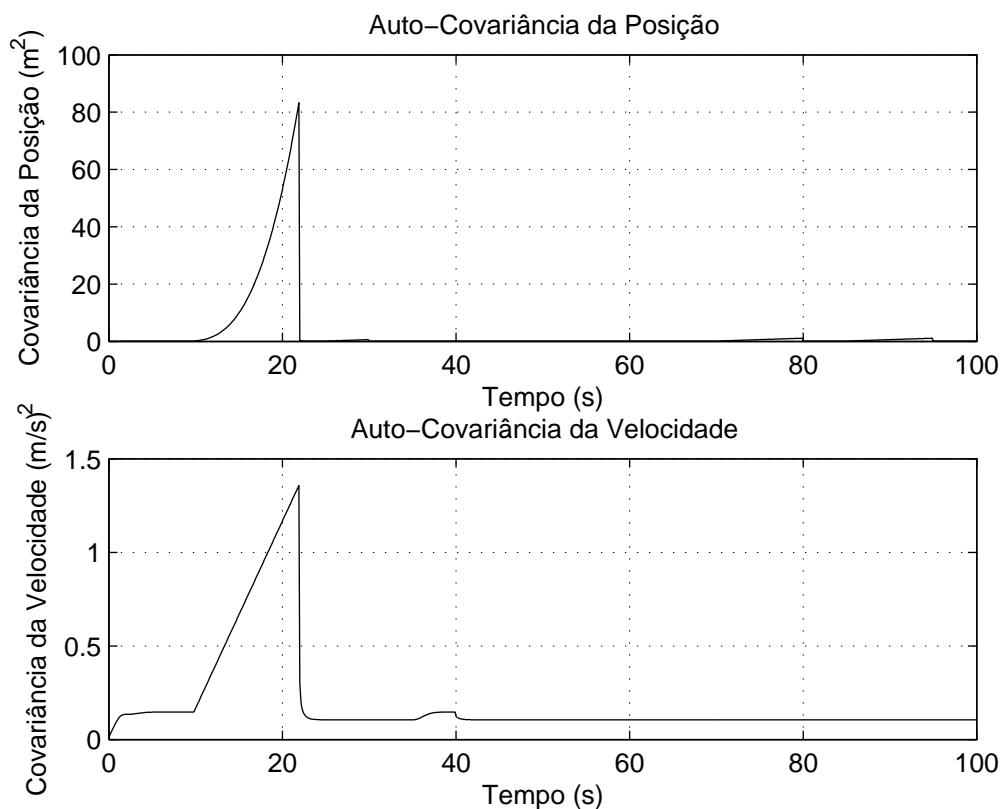


Figura 5.9: Auto-covariância da posição e da velocidade ao longo do tempo.

Através da figura apresentada, nota-se que a covariância aumenta em função da ausência de dados para a atualização das medidas do filtro. Este aumento é consideravelmente grande no instante em que o robô muda para uma posição fora da prevista. Esta elevação acontece rapidamente, porém, a partir do momento em que novos dados são disponibilizados para a etapa de atualização, a covariância reduz abruptamente. A seguir é apresentado o gráfico de covariância cruzada entre os estados estimados.

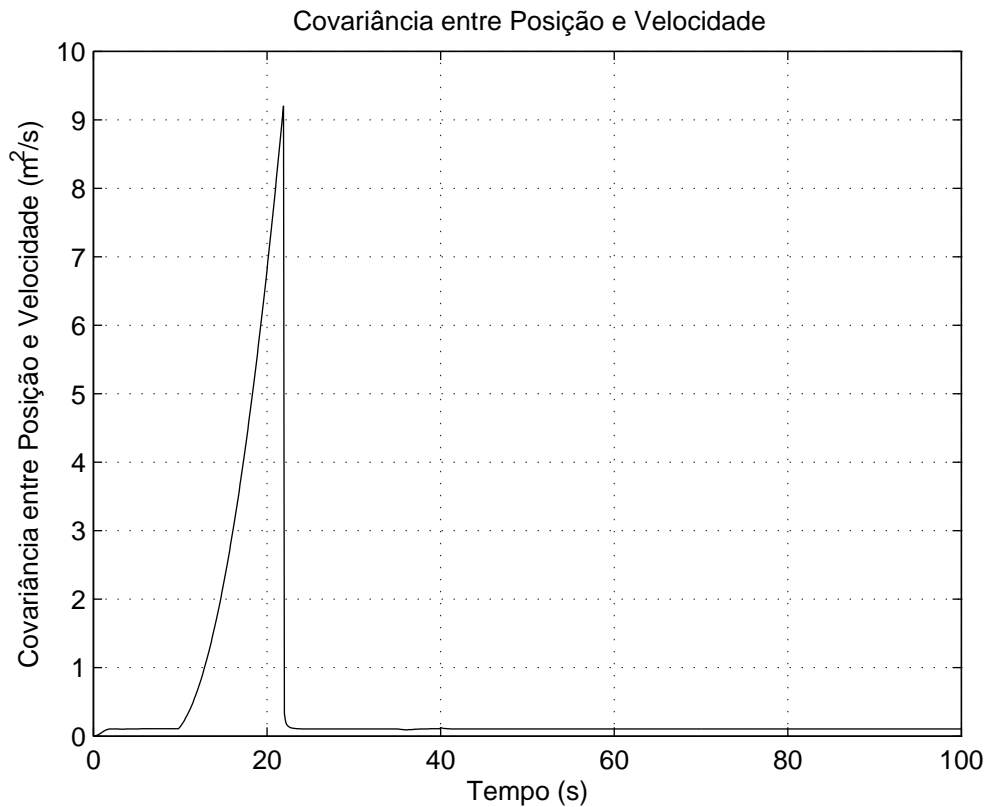


Figura 5.10: Covariância cruzada entre a posição e da velocidade ao longo do tempo.

A figura apresentada acima nos mostra a covariância cruzada entre os estados estimados pelo Filtro de Kalman, que são a posição e a velocidade. É notório que no instante que não existem medidas para atualização, a covariância aumenta muito devido a grande diferença entre o valor dos dados estimados para os dados esperados. Porém, isso acontece em um instante de tempo que tende realmente a prejudicar as estimativas, uma vez que ocorre uma mudança inesperada no sistema real e as informações referentes a este não estão disponíveis para serem percebidas pelo Filtro de Kalman. A seguir será apresentado o gráfico dos resíduos de estimação.

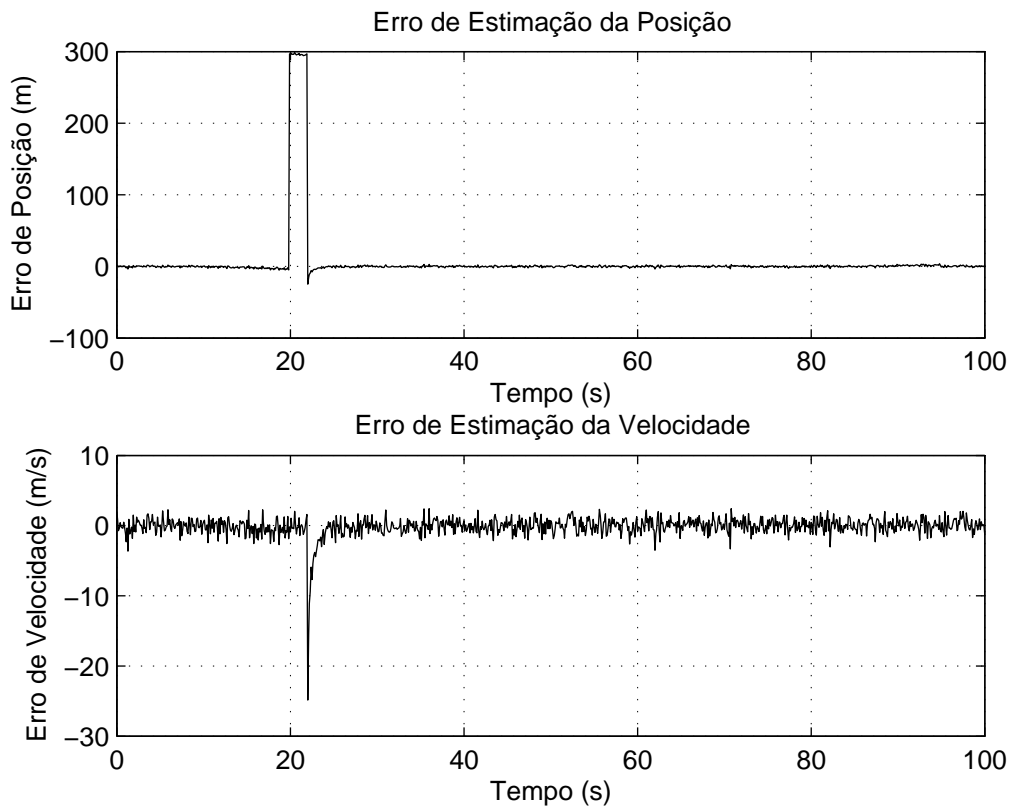


Figura 5.11: Erro de estimação da posição e da velocidade ao longo do tempo.

Dado o gráfico acima, nota-se que como na primeira etapa dos testes, os resíduos de estimação se assemelham com um ruído Gaussiano branco com média próxima de zero. Porém, no momento em que ocorre a ausência de atualização das medidas, como esperado, o filtro estima estados fora da condição real do sistema, aumentando assim os resíduos consideravelmente. Com isso, a média aritmética entre a diferença dos valores reais e os valores estimados tende a ser alterada em função do grande aumento do erro no instante mencionado acima.

Capítulo 6

Conclusões

A partir dos estudos realizados, foi possível perceber alguns aspectos fundamentais do funcionamento do Filtro de Kalman aplicado aos sistemas reais. Foi mostrado que as medições das variáveis de interesse nos sistemas reais sempre estarão contaminadas com ruídos, sejam eles provenientes do próprio processo ou da medição. Estes, por sua vez, tendem a distorcer a informação observada, falseando os dados reais. Para a estimação dos estados de interesse, o Filtro de Kalman é sempre uma boa alternativa, desde que seja possível representar o comportamento do sistema em matrizes de estado que representam o estado do mundo.

Durante a primeira etapa dos testes, notamos que o Filtro de Kalman foi capaz de atender às expectativas, uma vez que este estimou as variáveis de estado de interesse de maneira eficaz, mesmo na presença de ruído. Isto ocorre devido a algumas particularidades presentes no filtro. Ao se realizar um teste, percebeu-se que quanto maior o ruído presente no modelo dos dados do sistema, os quais são utilizados na etapa de atualização do Filtro de Kalman, maior era o tempo necessário para a convergência dos dados estimados pelo filtro. Isto ocorre devido ao ganho de Kalman presente na etapa de atualização das medidas que utiliza o modelo do ruído das medidas. Quando esta medida se encontra muito ruidosa, o filtro passa a ter menos confiança em suas informações, o que faz com que a parcela a ser somada ao estado já estimado anteriormente na fase de atualização das medidas seja pequena. O Filtro de Kalman ao perceber, através dos métodos e técnicas que o compõem, que a medida é de boa qualidade, através do ganho de Kalman faz com que a medida prevista pela etapa de atualização do tempo seja corrigida e aproximada do seu valor real, reduzindo assim os resíduos de estimação e aproximando o valor da estimativa do estado do seu valor real. A variância da estimativa depende dos modelos dos ruídos presentes no sistema (ruído do modelo e ruído da medida).

Já na segunda etapa dos testes, cujo objetivo era analisar a robustez do Filtro de Kalman, percebeu-se que na ausência de medidas para a etapa de atualização, os estados estimados tendem a apresentar uma variação crescente do erro. Se neste momento de ausência de dados para o ajuste das informações estimadas o sistema responder de uma maneira diferente da sua tendência, o Filtro de Kalman não percebe tais mudanças, o que faz com que este estime estados diferentes dos reais esperados. Quando as novas medidas reais são apresentadas ao filtro, este corrige rapidamente o erro presente em suas estimações.

Em ambos os testes realizados, nem sempre as informações referente à posição e à velocidade estavam disponíveis e foi possível estudar o impacto desse facto nas variâncias associadas. Mesmo assim o Filtro de Kalman foi capaz de estimar bem os estados de interesse e os resíduos de estimação tendem a zero, o que prova a convergência do método utilizado.

Referências

- [1] AGUIRRE, L. A. (2007). *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 3a Edição Revista e Ampliada. 3. ed. v. 1. 730 p. Editora UFMG, Belo Horizonte - MG, Brasil.
- [2] AGUIRRE, L. A. (2000) *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas à Sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte.
- [3] Brown, R. G. and P. Y. C. Hwang. 1992. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, Second Edition, John Wiley e Sons, Inc.
- [4] Kalman, R. E. 1960. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Transaction of the ASME-Journal of Basic Engineering, pp. 35-45 (March 1960).
- [5] S. Thrun, W. Burgard, D. Fox: Probabilistic Robotics (MIT Press, Cambridge 2005)
- [6] WIKIPEDIA (22/05/2008).
http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kalman_filter&oldid=225695845
- [7] WIKIPEDIA (03/04/2008).
<http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Covariance&oldid=223327275>
- [8] WIKIPEDIA (06/06/2008).
[http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=State_space_\(controls\)&oldid=225286576](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=State_space_(controls)&oldid=225286576)
- [9] A. Jazwinski. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, 1970.
- [10] S. Julier and J. Uhlmann. A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions. Technical report, Robotics Research Group, Department of Engineering Science, University of Oxford, November 1996.
- [11] S. Julier and J. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. In Proceedings of Aerosense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls, Orlando, FL, 1997.

[12] Ljung, L (1999) System Identification: Theory for the User. Prentice Hall, Second Edition., 1999.

[13] Greg Welch and Gary Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", Technical Report 95-041 - Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill, EUA (2002)

[14] CORRÊA, M. V. (2001). Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares Utilizando Representações NARMAX Polinomiais e Racionais. Tese de Doutorado do PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

[15] SOUSA, A. J. (2003) Arquitecturas de Sistemas Robóticos e Localização em Tempo Real Através de Visão. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

[16] JUNIOR, H. B. (2003) Métodos de Estimação Recursiva Baseados no Filtro de Kalman Aplicados a Sistemas Não-Lineares, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.