

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



FEUP

**Modelação e Controlo Dinâmico de uma
Embarcação Autónoma**

André Savva Bordalo e Sá

Dissertação/Relatório de Projecto realizada(o) no âmbito do
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Major Automação

Orientador: Professor Aníbal Matos

Julho, 2009

© André Savva Bordalo e Sá, 2009

Resumo

Ao longo dos últimos anos tem-se observado ao aumento generalizado do uso de sistemas autónomos, graças ao avanço tecnológico e abundância dos componentes que os constituem. Na área da robótica aquática, os sistemas autónomos servem de apoio a missões de transporte, monitorização e recolha de dados científicos, entre outros. Dos vários tipos de veículos existentes para o efeito, destacam-se os ASVs (Autonomous Surface Vehicle), veículos alvo de estudo neste trabalho, que se caracterizam por serem veículos de superfície que operam de forma autónoma.

Este trabalho foi realizado no âmbito do OceanSys, um grupo da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto que tem como missão o desenvolvimento de sistemas relacionados com a robótica aquática. Esta Dissertação tem como objectivo não só dar continuidade ao trabalho anterior com esta embarcação, mas também efectuar a modelação e controlo dinâmico de um ASV numa perspectiva de optimização de trajectórias.

Abstract

In recent years, the use of autonomous systems has been growing considerably, due to the technological progress and abundance of its components. Aquatic robotics are an example of such systems as they are used for transport, monitoring and scientific data sampling, among others. Form all types of marine vehicles available, the ASVs (Autonomous Surface Vehicles) are surface vehicles which operate autonomously and will be study target of this work.

This work arrives from the OceanSys, a group belonging to the Faculty of Engineering from the University of Porto, which the main goal are the development of systems related to aquatic robotics. The objective in this Thesis is to not only continue previous work developed on this vessel, but also to model and perform dynamic control of an ASV, in an optimal path following perspective.

Agradecimentos

Quero agradecer à Sara por tudo. O apoio, o carinho, a motivação que desde sempre me disponibilizou. Dos momentos bons aos menos bons. Ao meu Pai por sempre ter proporcionado o melhor em qualquer circunstância. À minha Irmã, por estar sempre de olho em mim. À minha família de Chipre e Portugal.

Uma nota de agradecimento também ao Professor Doutor Aníbal Matos por todo o apoio e disponibilidade no decorrer deste trabalho.

À memória da minha mãe, Eleni Savva

Índice

Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 - Motivação	1
1.2 - Objectivos	1
1.3 - Estrutura	1
Capítulo 2	3
Estado da Arte	3
2.1 - Modelos do sistema	4
2.1.1 - Hidrodinâmica	5
2.1.2 - Cinemática	6
2.2 - Controlo não Linear	6
2.2.1 - Estabilidade de Lyapunov	6
2.2.2 - Método directo de Lyapunov	8
2.3 - Controlo óptimo	9
Capítulo 3	11
Planeamento de trajectórias	11
3.1 - Problema básico	11
3.2 - Trajectórias rectilíneas	12
3.3 - Trajectória circular	12
3.3.1 - Trajectória sem corrente	13
3.3.1.1 - Direcção final livre	13
3.3.1.2 - Direcção final definida	18
3.3.2 - Trajectória com corrente	20
3.3.3 - Equações de movimento	20
3.3.3.1 - Tempo T de chegada	22
3.1.1.1 - Processo iterativo	23
Capítulo 4	27
Controlo	27
4.1 - Direcção de referencia φ_{ref}	27
4.2 - Controlo de direcção (<i>heading</i>)	28
4.2.1 - Presença de corrente	29
Capítulo 5	32
Resultados	32
5.1 - Trajectória circular sem corrente	32
5.1.1 - Evolução da posição e direcção	32

5.1.2 - Distancia percorrida	33
5.2 - Trajectória circular com corrente	34
Capítulo 6	36
Conclusões e trabalho futuro	36
Anexo A.....	37
Trigonometria	37
A1. Ângulo de um ponto pertencente a uma circunferência	37
Apêndice	39
A. Método da bissecções sucessivas	39

Lista de figuras

Figura 2.1 - Representação 3D do Zarco (via OSG).....	3
Figura 2.2 - Módulos a bordo (via OSG).	4
Figura 2.3 - Referenciais.	4
Figura 2.4 - Conceitos de estabilidade. Sistema estável 1 e sistema instável 2.	8
Figura 3.1 - Três tipos de trajectórias: (a) trajectória circular $w < 0$; (b) trajectória rectilínea $w = 0$ (c) trajectória circular $w > 0$	12
Figura 3.2 - Definição da circunferência de centro $P_c(y_c, x_c)$ a partir de $P_1(y_1, x_1)$ e $P_2(y_2, x_2)$	13
Figura 3.3 - Solução do problema (P ₁)	14
Figura 3.4 - Contraste entre deslocamentos com trajectória circular com $u < 0$ (azul) e $u > 0$ (vermelho), sempre com $R > 0$	16
Figura 3.5 - Atingibilidade do veículo para situações onde (a) $(x_i - x_i)^2 + (y_i - (y_i - R_-))^2 \leq R_-^2$ e (b) $(x_i - x_i)^2 + (y_i - (y_i + R_-))^2 \leq R_-^2$	17
Figura 3.6 - Trajectória proposta para as condições das equações (3.24) e (3.25).	17
Figura 3.7 - (a) Trajectória a seguir com direcção final definida e (b) parâmetros necessários para a sua definição	19
Figura 3.8 - Trajectórias circulares com e sem presença de corrente, sendo a trajectória óptima colorida de vermelho.....	20
Figura 3.9 - Gráfico genérico da evolução de (3.43). Componente y da posição em função do tempo T para a configuração inicial. $R = R_{\min}$	22
Figura 3.10 - Raios que formam os limites de iteração	23
Figura 4.1 - Seguimento de uma circunferência	28
Figura 4.2 - Diagrama de blocos a malha fechada do controlador de direcção.....	29
Figura 4.3 - Relação de trajectórias circulares com e sem corrente.	30
Figura 5.1 - Resultados da simulação de uma trajectória circular, nomeadamente (a) evolução temporal de posição e (b) relacionamento ente φ_{ref} (vermelho) e φ (azul). As mesma simulação com $k_{\text{dist}} = 3$	33

Figura 5.2 - Representação da zona de descontinuidade em termos de distância percorrida s_1 . Resultados para (a) $R = 10$, (b) $R = 1$ e (c) $R = 5$ 34

Figura 5.3 - Simulação de uma trajectória circular na presença de corrente ilustrada a azul, e a trajectória ideal na ausência de corrente (a vermelho). 35

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Hipótese 1-1	24
Tabela 3.2 - Hipótese 1-2	25
Tabela 3.3 - Hipótese 2-1	25
Tabela 3.4 - Hipótese 2-2	26
Tabela 5.1 - Parâmetros, trajetória sem corrente	32
Tabela 5.2 - Parâmetros, trajetória com corrente	34

Abreviaturas e Símbolos

Lista de abreviaturas (ordenadas por ordem alfabética)

ASV	Autonomous Surface Vehicle
AUV	Autonomous Underwater Vehicle
FEUP	Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
GPS	Global Positioning System
NED	North East Down
OSG	Ocean Systems Group

Lista de símbolos

ω	velocidade angular
α, β, γ	ângulo
R	raio
d, h, l	distância

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação foi desenvolvida no âmbito do Oceansys, um grupo da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) que tem como missão o desenvolvimento de sistemas avançados destinados a colecção automática e obtenção de dados em ambientes aquáticos. Este grupo possui, entre outros sistemas, o Zarco, um ASV destinado a executar missões autónomas em barragens e zonas estuarinas. Os dois principais objectivos deste veículo são de transportar equipamento de recolha de dados e de operar como baliza acústica estacionária ou móvel, de apoio a veículos subaquáticos como AUVs.

1.1 - Motivação

A recolha de dados ambientais, como por exemplo, da qualidade de água é fundamental quer para a validação do estado dessas massas de água, no sentido da sua eventual melhoria, quer também para a realização de prognósticos da evolução dessa qualidade com recurso, por exemplo, a modelos ecológicos. Nesse sentido, a correcta obtenção de dados de forma prática e automática é fundamental. É neste sentido que surgem os equipamentos aquáticos autónomos pois permitem de forma independente e eficaz de executar missões para o efeito. No ASV alvo de estudo, já foram efectuados testes com sucesso, como o percurso de trajectórias de seguimento de veículos subaquáticos desenvolvido em [1].

1.2 - Objectivos

Esta dissertação tem como objectivo dar continuidade ao trabalho anteriormente desenvolvido, nomeadamente ao seguimento e controlo de trajectórias alternativas às já implementadas numa perspectiva de controlabilidade óptima, isto é, optimização de certos parâmetros que serão alvo de estudo neste trabalho.

1.3 - Estrutura

A estrutura deste trabalho está dividido em quatro partes, iniciando-se no Capítulo 2 com a revisão da história da arte que introduz o modelo dinâmico do sistema e as ferramentas

matemáticas de análise. O Capítulo 3 desenvolve estratégias de controlo óptimo para o seguimento de trajectórias, que associadas ao controlador desenvolvido para o seguimento de circunferências do quarto Capítulo, produzem os resultados obtidos por simulação no Capítulo 5.

Capítulo 2

Estado da Arte

Os ASV's são embarcações de operação autónoma que estão integrados na família de veículos subaquáticos como por exemplo AUVs. Estes têm como missão a navegação autónoma ao longo de trajectórias pré-definidas com boa capacidade de resposta face a perturbações existentes, como por exemplo, corrente e vento. Como os ASVs operam à superfície, são plataformas mais fáceis de modelar face aos AUVs. O Zarco é um veículo de casco duplo (Figura 2.1) de 50 kg com capacidade de carga adicional de 25 kg. A propulsão é efectuada por dois motores eléctricos instalados na popa da embarcação proporcionando impulso máximo de 250 N e velocidade máxima de, aproximadamente, 3 nós.

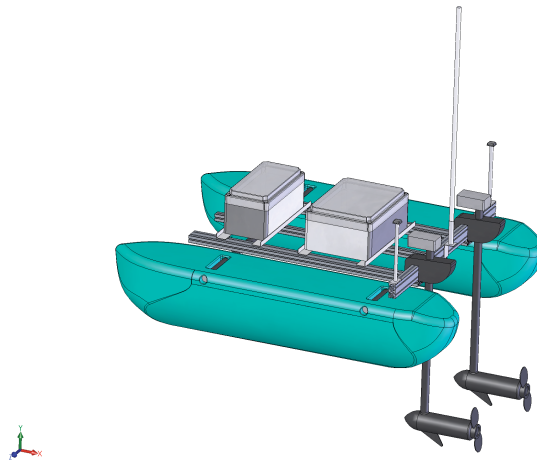


Figura 2.1 - Representação 3D do Zarco (via OSG).

A bordo estão inseridos o módulo de *software* de interface, módulo de controlo e módulo de navegação. Este último é composto por 2 sensores GPS L1 para posicionamento preciso e bússola digital com sensor de inclinação.

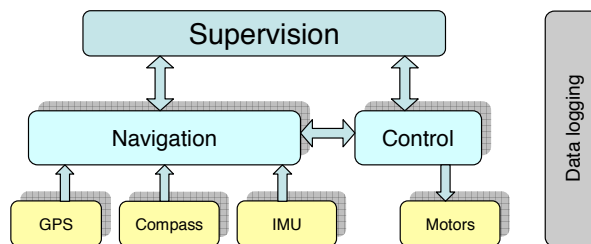


Figura 2.2 - Módulos a bordo (via OSG).

O veículo dispõe também de uma ligação *wi-fi* a uma unidade de supervisão fixa na margem do teatro de operação, garantindo comunicação e transferência de dados de banda larga em tempo real. Este ASV para além de estar desenvolvido para operar com controlo autónomo, também é possível dirigir remotamente, a partir da estação através de um *joystick*.

Os modelos do sistema, que constituem o ponto de partida para o estudo deste trabalho, serão apresentados a seguir.

2.1 - Modelos do sistema

A obtenção do modelo matemático constitui uma etapa importante em qualquer projecto de controlo visto ser possível representar o sistema por meio de equações diferenciais, que caracterizam o comportamento do sistema. Desta forma é possível analisar o sistema em termos de limitações e a relação entre sinais de entrada e de saída.

Em robótica aquática, é frequente o uso de dois referenciais distintos por forma a modelar o sistema (Figura 2.3). Temos, portanto, um referencial NED (North East Down) em que a abcissa aponta para Norte, ordenada para Este e a altura para baixo. O outro referencial é móvel e está associado ao veículo onde a ordenada aponta na direcção do movimento e a abcissa para estibordo.

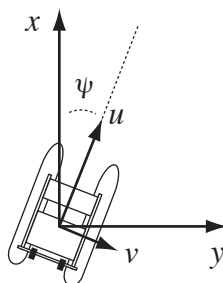


Figura 2.3 - Referenciais.

2.1.1 - Hidrodinâmica

O modelo hidrodinâmico da embarcação dispõe de 3 graus de liberdade [1]. Considerando o veículo como um corpo rígido com distribuição de massa homogénea e origem do referencial no seu centro de massa, resultam as seguintes equações:

$$X = m(\dot{u} - vr) = X_u \dot{u} + X_u u + X_{u|u} u |u| + X_{act} + X_{ww} \quad (2.1)$$

$$Y = m(\dot{v} - ur) = X_v \dot{v} + X_v v + Y_{v|v} v |v| + Y_{ww} \quad (2.2)$$

$$N = I_z \dot{r} = N_r \dot{r} + N_r r + N_{r|r} r |r| + N_{act} + N_{ww} \quad (2.3)$$

O par (u, v) representa as componentes da velocidade segundo x (*surge*) e segundo y (*sway*) respectivamente. A rotação em torno de z (*yaw*) é representada por r . Estas equações apresentam-se de forma desacoplada onde (2.1) e (2.2) representam a velocidade e (2.3) a direcção da embarcação. Neste modelo, o sistema é considerado como um corpo rígido onde a corrente é constante, originando que as forças externas dependam de u , v e r , das perturbações (X_{ww}, Y_{ww}, N_{ww}) e da actuação do próprio veículo (X_{act}, N_{act}) . Este ultimo par está relacionado com a propulsão a partir das equações (2.4) e (2.5), onde b representa a distancia entre dos eixos dos motores.

$$X_{act} = F_{bombordo} + F_{estibordo} \quad (2.4)$$

$$N_{act} = \frac{b}{2} \cdot (F_{bombordo} - F_{estibordo}) \quad (2.5)$$

Neste sistema, vamos considerar que componentes de rotação (*roll*) e inclinação (*pitch*) da velocidade são nulas, visto o barco operar à superfície e em ambientes não extremos.

Estando definido o modelo dinâmico da embarcação, passemos à apresentação das equações que descrevem o movimento do veículo.

2.1.2 - Cinemática

As equações que se seguem, relacionam as velocidades no referencial global com as velocidades do referencial móvel do veículo. A velocidade da corrente é incorporada através das suas componentes Norte c_x e Este c_y . φ indica a direcção, isto é, o ângulo formado com o referencial NED.

$$\dot{x} = u \cos \varphi - v \sin \varphi + c_x \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = u \sin \varphi + v \cos \varphi + c_y \quad (2.7)$$

$$\dot{\varphi} = r \quad (2.8)$$

2.2 - Controlo não Linear

Um sistema é não linear quando o princípio da superposição não se aplica. Deste modo, se existirem duas entradas no sistema, a resposta não pode ser obtida através da manipulação algébrica das mesmas. Embora muitos processos físicos possam ser representados por equações lineares, praticamente a sua relação é linear apenas em gamas de operação limitadas.

Um sistema dinâmico não linear pode ser apresentado por uma equação que toma a forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.9)$$

onde f é a função não linear.

Os procedimentos para obter as soluções de problemas que envolvem sistemas não lineares são em geral, extremamente complicados.

2.2.1 - Estabilidade de Lyapunov

Nesta secção são abordadas as técnicas de análise de estabilidade segundo Lyapunov. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov foi um matemático Russo cujo trabalho introduzido no século IX aborda estabilidade em sistemas não lineares. O trabalho de *Lyapunov, The general problem of the stability of motion*, publicado em 1892, inclui dois métodos de análise de estabilidade, o método de linearização e o método directo. De seguida são introduzidos conceitos e definições introdutórias por forma a poder apresentar este trabalho pois será usado ao longo deste trabalho, durante a análise de estabilidade do controlador de direcção implementado.

Na área de controlo, é frequente a utilização de técnicas de controlo linear em sistemas não lineares através da aproximação local de sistemas não lineares. A linearização de Lyapunov tem vindo a representar a justificação matemática do controlo linear ao passo que o método directo apresenta-se como a ferramenta importante de desenvolvimento e análise de sistemas não lineares. Assim, O método de linearização de Lyapunov Efectua conclusões sobre a estabilidade local de um sistema não linear em redor de um ponto de equilíbrio, a partir do estudo de estabilidade da sua aproximação linear. Por sua vez, o método directo é a extensão matemática da observação física fundamental que a energia dissipativa de um sistema tem que eventualmente convergir para um ponto de equilíbrio. De seguida são apresentadas algumas definições básicas por forma a abordar em concreto a análise de estabilidade de sistemas não lineares segundo Lyapunov.

Segundo [7], um sistema define-se como autónomo se a função que caracteriza o sua evolução for independente do tempo (2.9). Caso contrário, o sistema denomina-se de não autónomo como descrito na (2.10). A principal diferença destes sistemas reside no facto de um sistema autónomo ser independente do instante de tempo inicial, ao contrário de um sistema não autónomo.

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.10)$$

Um ponto de equilíbrio x^* de um sistema é o ponto resultante da evolução de um sistema o qual, uma vez atingido, o sistema permanece nesse ponto para o resto do tempo. Isto é, $0 = f(x^*)$ é nula a sua variação. Neste caso não se pretende analisar a estabilidade em redor e um ponto de equilíbrio mas sim a estabilidade do movimento, isto é, saber se o sistema permanece perto do movimento original sujeito a perturbações que o afastam.

A estabilidade de um sistema segundo Lyapunov pode ser interpretada a partir da noção de um sistema ser estável se o sistema se iniciar num ponto e permanecer na vizinhança do mesmo ao longo do período de controlo. Esta ultima noção no sentido de Lyapunov significa que é possível manter a trajectória do sistema próxima da origem, se for iniciada suficientemente perto da mesma. Em [7] é então definido que um ponto de equilíbrio $x = 0$ é considerado estável se para algum $R > 0$, existir um $r > 0$ tal que se $\|x(0)\| < r$, então $\|x(t)\| < R$ para todo $t \geq 0$. Por forma a formalizar esta definição são introduzidas B_R e B_r correspondendo a bolas de centro na origem e de raio R e r , respectivamente. Temos assim a definição de estabilidade segundo [7] formalmente definida em (2.11). Se esta não for verificada, o ponto de equilíbrio é dito instável. A Figura 2.4 ilustra este conceito. A instabilidade é uma situação não desejável visto resulta em comportamentos não desejados no sistema que podem provocar danos permanentes como por exemplo danos mecânicos ou eléctricos saturação de controladores.

$$\forall R > 0, \exists r > 0, x(0) \in B_r \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t)\| < B_R \quad (2.11)$$

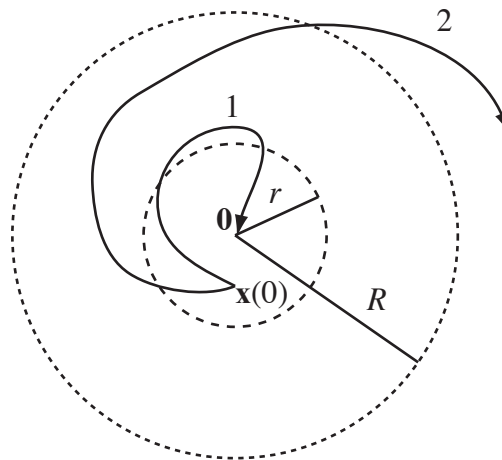


Figura 2.4 - Conceitos de estabilidade. Sistema estável 1 e sistema instável 2.

Em variadas aplicações de Engenharia, a estabilidade de Lyapunov só por si não basta para garantir a estabilidade do sistema. Assim, introduz-se o conceito de estabilidade assintótica cujo relacionamento com o ponto de equilíbrio toma da seguinte forma: um ponto de equilíbrio 0 é assintoticamente estável se for estável e se também exista um $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r$ implique $x(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$. Esta definição implica que o ponto de equilíbrio seja estável e que estados perto de 0 convergem para 0 . Adicionalmente diz-se que o sistema é globalmente estável se a definição de estabilidade assintótica se verificar para qualquer estado inicial.

2.2.2 - Método directo de Lyapunov

O método directo da análise de estabilidade segundo Lyapunov, permite determinar a estabilidade do sistema sem necessidade de integrar explicitamente a equação diferencial que descreve o mesmo. Como referido no início deste capítulo, o método directo baseia-se na generalização que existe uma medida de energia que confirme ou não a estabilidade do sistema. Desta forma, é criada uma função de energia V em redor de um ponto de equilíbrio e analisada a sua variação temporal. Seja $V(x)$ uma função não negativa com derivada $\dot{V}(x)$ ao longo da trajectória do sistema:

Para que a função $V(x)$ seja considerada como função de Lyapunov, esta tem que ser definida positiva, ao passo que $\dot{V}(x)$ definida negativa. As (2.12) e (2.13) exprimem matematicamente estas duas últimas definições.

$$V(x) \geq 0 \wedge \dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (2.12)$$

$$V(x) = 0 \wedge \dot{V}(x) = 0, \quad x = 0 \quad (2.13)$$

Se estas últimas equações se verificarem temos que o sistema é assintoticamente estável na origem. Caso contrário, nenhuma conclusão sobre estabilidade pode ser efectuada.

2.3 - Controlo óptimo

O controlo óptimo é um método comum para resolver problemas de optimização dinâmica. O objectivo é determinar os sinais de controlo que fazem com que um processo satisfaça um conjunto de restrições físicas e que, ao mesmo tempo, minimizem (ou maximizem) um critério previamente definido. Segundo [8], o paradigma de controlo óptimo envolve os seguintes ingredientes:

- Funcional desempenho, isto é, função de custo que se pretende minimizar (ou função de lucro a maximizar) que representa um critério que relaciona a dinâmica do sistema com a forma de o controlar;
- Equação Dinâmica do sistema que representa a evolução ao longo do tempo do seu estado e, uma vez definida conjuntamente com um estado inicial, permite determinar completamente a evolução temporal da variável de estado.
- Restrições de controlo indicam quais os estados que não são atingíveis, originadas por limitações do próprio sistema dinâmico ou por limitações provenientes de sinais não controláveis como por exemplo perturbações.
- Restrições na variável de estado. Estas são restrições ou objectivos que condicionam a evolução do sistema. Estes podem ser traduzidos por conjuntos de partida e chegada

A formulação de um problema de controlo óptimo requer a descrição (ou modelo) do processo a ser controlado, a declaração das restrições físicas e a especificação de um critério de desempenho. A partir de [8], apresenta-se a seguir a formulação de um problema de uma forma simples:

(P) Minimizar	$g(x(1))$
Através da escolha de um controlo	$u : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^m$
à qual corresponde uma trajectória	$x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$
ambos satisfazendo:	$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$
	$x(0) = x_0$
	$u(t) \in \Omega(t)$

Capítulo 3

Planeamento de trajectórias

Este capítulo pretende apresentar soluções de trajectórias a seguir pelo veículo. A optimização e planeamento de trajectórias constitui uma área importante pois permite a partir de uma estratégia de controlo adequada, transferir o veículo de uma posição inicial para uma posição final definida. É neste contexto de controlabilidade que, de seguida, são desenvolvidos raciocínios de trajectórias óptimas.

3.1 - Problema básico

Nesta secção estuda-se o problema da determinação do trajecto a percorrer de uma configuração inicial para uma definida configuração final. O problema inicia-se a partir do caso simples de ausência de corrente, sem definição prévia da orientação final a tomar. Gradualmente, serão adicionadas restrições ao mesmo tempo que se propõem soluções de optimização dinâmica que satisfazem o seguinte problema básico:

(P) minimizar s_1
sujeito a:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = u \cos(\varphi) + c_x \\ \dot{y}(s) = u \sin(\varphi) + c_y \\ \dot{\varphi}(s) = w \\ \dot{c}_x = 0 \\ \dot{c}_y = 0 \end{cases} \quad s \in [0, s_1] \quad (3.1)$$

$$w(s) \in [-W, +W] \quad s \in [0, s_1] \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \varphi(0) = \varphi_0 \quad (3.3)$$

$$x(s_1) = x_1, y(s_1) = y_1, [\varphi(s_1) = \varphi_1] \quad (3.4)$$

No problema básico (P), (y_0, x_0, φ_0) representa a configuração inicial do veículo e (y_1, x_1) define a posição final pretendida. O ângulo φ_1 representa a direcção final caso seja definida, estando assim a configuração final descrita. Deste problema resultará uma função de controlo $w(\cdot)$ e s_1 correspondendo à distancia total percorrida. Consideramos também desprezável a componente *drag* da velocidade ($v = 0$).

A resposta do sistema dinâmico do veículo em função do controlo é dada por $[y(\cdot), x(\cdot), \varphi(\cdot)]$, que define o caminho da embarcação na transição entre a configuração inicial à configuração final. Uma infinidade de trajectórias podem ser definidas neste problema, no entanto, apenas é relevante obter uma trajectória que minimize s_1 . Assim, é efectuado o estudo baseado nas condições de optimalidade concluindo-se que as soluções do problema (P) podem ser caracterizadas a partir de um numero finito de parâmetros.

3.2 - Trajectórias rectilíneas

Uma trajectória rectilínea não é mais que o seguimento de um segmento de recta definido por dois pontos, em que a velocidade angular é nula

$$w(s) = 0 \quad (3.5)$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3.6)$$

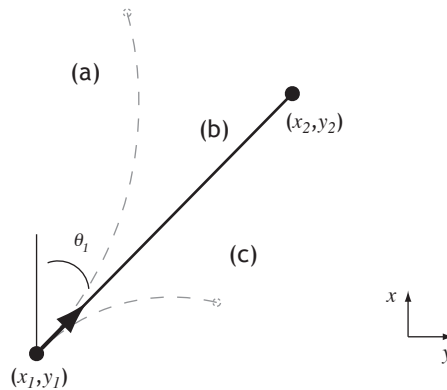


Figura 3.1 - Três tipos de trajectórias: (a) trajectória circular $w < 0$; (b) trajectória rectilínea $w = 0$
(c) trajectória circular $w > 0$

3.3 - Trajectória circular

Uma circunferência é definida por um conjunto de pontos equidistantes a um ponto central P_c . Este pode ser facilmente calculado a partir das coordenadas de dois pontos

pertencentes ao mesmo plano. Na Figura 3.2 mostra-se a circunferência definida segundo este raciocínio. A seguir demonstram-se as equações que efectuam esta operação.

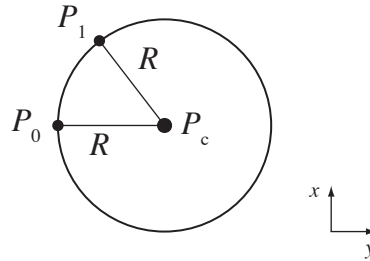


Figura 3.2 - Definição da circunferência de centro $P_c(y_c, x_c)$ a partir de $P_1(y_1, x_1)$ e $P_2(y_2, x_2)$.

Se R for conhecido existem duas hipóteses de definir a circunferência. Caso x_0 ou y_0 serem desconhecidos resulta (3.7) ou (3.8) respectivamente.

$$\begin{cases} y_c = y_0 + R \\ x_c = x_1 - \sqrt{R^2 - (y_1 - y_0 - R)^2} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} x_c = x_0 \\ y_c = y_1 - \sqrt{R^2 - (x_1 - x_0)^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Por outro lado se R não for conhecido:

$$\begin{cases} x_c = x_0 \\ y_c = \frac{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \end{cases} \quad (3.9)$$

As equações (3.7) e (3.8) serão úteis no decorrer deste capítulo pois constituem restrições ao problema de optimização a ser posteriormente abordados.

3.3.1 - Trajectória sem corrente

Retomando o problema de optimização da trajectória de uma configuração inicial a uma configuração final. Aqui, procura-se que a embarcação atinja o ponto final por meio de trajectórias circulares ou através da combinação destas com trajectórias rectilíneas. O estudo das condições de optimalidade é efectuado de seguida, assumindo inicialmente que a direcção na configuração final é livre.

3.3.1.1 - Direcção final livre

Sendo livre a direcção do veículo na posição final da trajectória, o problema de optimização é formulado do seguinte modo:

(P₁) minimizar s_1

sujeito a:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = u \cos(\varphi) \\ \dot{y}(s) = u \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi}(s) = w \end{cases} \quad s \in [0, s_1] \quad (3.10)$$

$$w(s) \in [-W, +W] \quad s \in [0, s_1] \quad (3.11)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \varphi(0) = \varphi_0 \quad (3.12)$$

$$x(s_1) = x_1, y(s_1) = y_1 \quad (3.13)$$

Admitamos inicialmente que $\varphi_0 = 0$ (embarcação orientada a Norte). Sendo livre a direcção final que o veículo adquire e ignorado o efeito da corrente, uma possível solução (Figura 3.3) será efectuar um movimento circular γ com raio constante R até (y_a, x_a) , seguida de uma trajectória rectilínea definida pelo segmento de recta definido por (y_a, x_a) e (y_1, x_1) .

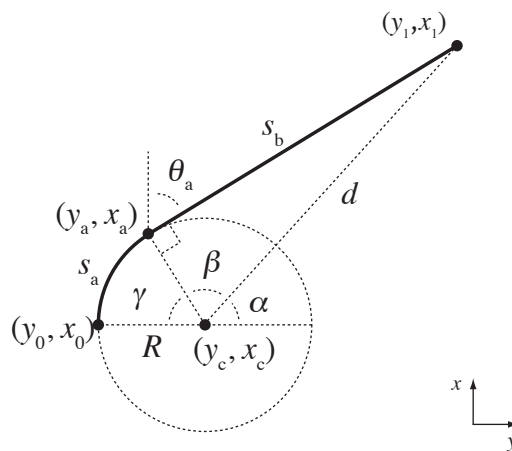


Figura 3.3 - Solução do problema (P₁)

Por interpretação geométrica, facilmente se obtêm todos os parâmetros necessários para a resolução óptima deste problema, os quais são deduzidos nas expressões (3.14)-(3.22), sendo a distancia total percorrida dependente do ângulo γ , distancia d e do raio R da circunferência.

$$\begin{cases} R > 0 & \text{se } y_1 \geq y_0 \\ R < 0 & \text{se } y_1 < y_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - (y_0 + R))^2} \quad (3.15)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{x_1 - x_c}{d} \quad (3.16)$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{|R|}{d} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \gamma = \pi - \beta - \frac{x_1 - x_c}{|x_1 - x_c|} \alpha & \text{se } (R > 0 \wedge y_1 \geq y_c) \vee (R < 0 \wedge y_1 \leq y_c) \\ \gamma = -\beta - \frac{x_1 - x_c}{|x_1 - x_c|} \alpha & \text{outros casos} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} u > 0 & \text{se } \gamma \geq 0 \\ u < 0 & \text{se } \gamma < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} x_a &= x_c + |R| \sin(\gamma) \\ y_a &= y_c - |R| \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} s_a &= |R\gamma| \\ s_b &= \sqrt{d^2 - R^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$s_1 = s_a + s_b \quad (3.22)$$

A interpretação de uma trajectória possuir raio negativo provem do facto de o veículo efectuar rotações no sentido anti-horário e assim, facilitar o cálculo de outras variáveis tal como o ângulo de rotação γ . Este é obtido de acordo com o sentido de rotação e do quadrante no qual se encontra a posição final, relativamente à posição inicial (3.18). No que toca à velocidade u esta é negativa sempre que γ é negativo. Esta situação verifica-se na situação ilustrada na Figura 3.4. Aqui o veículo efectua uma rotação de sentido positivo, embora com $u < 0$, obtendo-se um menor deslocamento na fase de rotação em contraste com a situação de $u > 0$. A distancia total percorrida é então obtida através da soma dos deslocamentos parciais das duas trajectórias efectuadas.

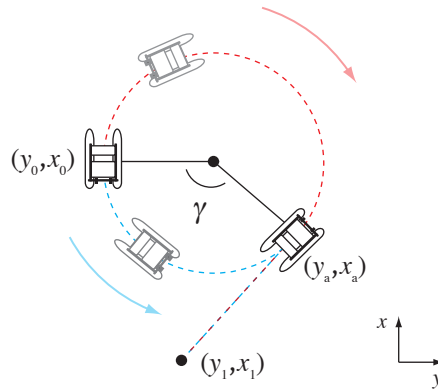


Figura 3.4 - Contraste entre deslocamentos com trajetória circular com $u < 0$ (azul) e $u > 0$ (vermelho), sempre com $R > 0$.

Da análise à equação (4.12) resulta que s_1 é mínimo quando o raio é mínimo, visto ser o único parâmetro independente da resolução do problema. O raio R_{\min} corresponde ao mínimo raio descrito pelo Zarco quando actuado num só motor constituindo assim, uma restrição imposta pelo sistema.

$$R \geq R_{\min} \quad (3.23)$$

Embora o problema aparente estar resolvido, visto obedecer a todas as restrições do problema, existe uma região de condições iniciais que não tem resolução no mesmo, em parte resultante da inclusão da nova restrição (3.23). Se considerarmos as posições iniciais da Figura 3.5, verificamos que não existem trajetórias circulares de raio mínimo que atinjam o ponto final para qualquer função de controlo aplicada. Geometricamente pode afirmar-se existir uma circunferência de raio R_{\min} partindo de (y_0, x_0) até (y_1, x_1) , se verificarem as seguintes condições:

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_1 - (y_0 - R_{\min}))^2 \geq R_{\min} \quad (3.24)$$

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_1 - (y_0 + R_{\min}))^2 \geq R_{\min} \quad (3.25)$$

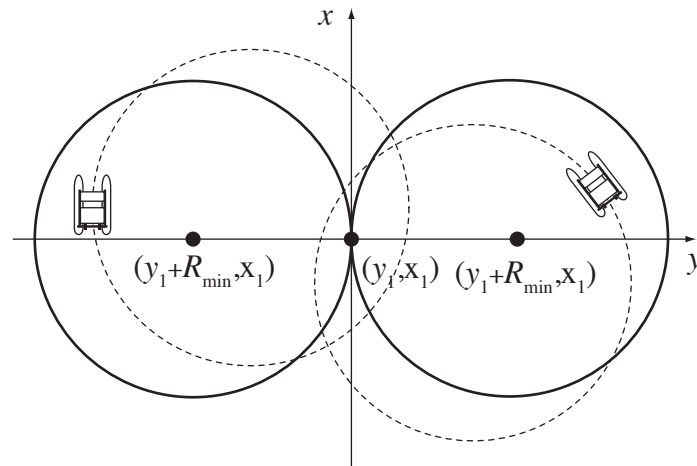


Figura 3.5 - Atingibilidade do veículo para situações onde (a) $(x_e - x_1)^2 + (y_e - (y_1 - R_{\min}))^2 \leq R_{\min}^2$ e (b) $(x_e - x_1)^2 + (y_e - (y_1 + R_{\min}))^2 \leq R_{\min}^2$.

Caso esta restrição não ocorrer, o problema terá uma outra solução que é desenvolvida a seguir.

Nesta nova situação, a solução proposta inicia-se, então, ao efectuar uma trajetória rectilínea de sentido negativo ($u < 0$) até (y_a, x_a) , seguida de uma circunferência de raio R_{\min} até à configuração final desejada (Figura 3.6).

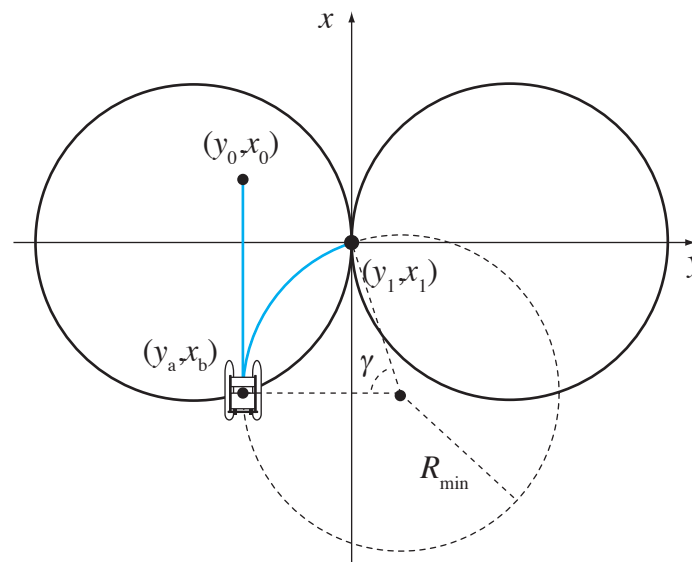


Figura 3.6 - Trajetória proposta para as condições das equações (3.24) e (3.25).

À semelhança da situação anterior, foram desenvolvidas as equações que relacionam os parâmetros da trajectória e do veículo, por forma a definir a trajectória da configuração inicial até à configuração final.

$$R = \begin{cases} R_{\min} & \text{se } y_1 \geq y_0 \\ -R_{\min} & \text{se } y_1 < y_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

O ponto de transição de trajectórias (y_a, x_a) corresponde à posição que torna possível atingir a posição final através de uma rotação de raio mínimo. A ordenada x_a é obtida através de (3.7) e novamente descrita em (3.27).

$$\begin{aligned} y_a &= y_0 \\ x_a &= x_2 - \sqrt{R^2 - (y_2 - y_0 + R)^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{y_2 - y_1}{R} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} s_a &= |x_0 - x_a| \\ s_b &= |R \cdot \gamma| \end{aligned} \quad (3.29)$$

Caso a direcção inicial não seja nula, como assumido inicialmente, esta pode facilmente transformar-se em zero efectuando para o efeito, uma rotação de φ_0 em torno de z através da seguinte matriz de rotação:

$$R_{\psi_0} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & -\sin(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = R_{\psi_0} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Desta transformação surge um novo referencial que é paralelo a φ_0 . Temos, assim, concluída a caracterização e resolução do problema (P).

Uma conclusão importante resultante da descontinuidade de s_1 verificada na zona de fronteira de (3.24) e (3.25) é ilustrado no Capítulo 5, igualmente com os resultados da simulação deste problema.

3.3.1.2 - Direcção final definida

À semelhança do caso anterior, aqui consideramos que a direcção inicial é nula, onde todas as operações de rotação são igualmente válidas.

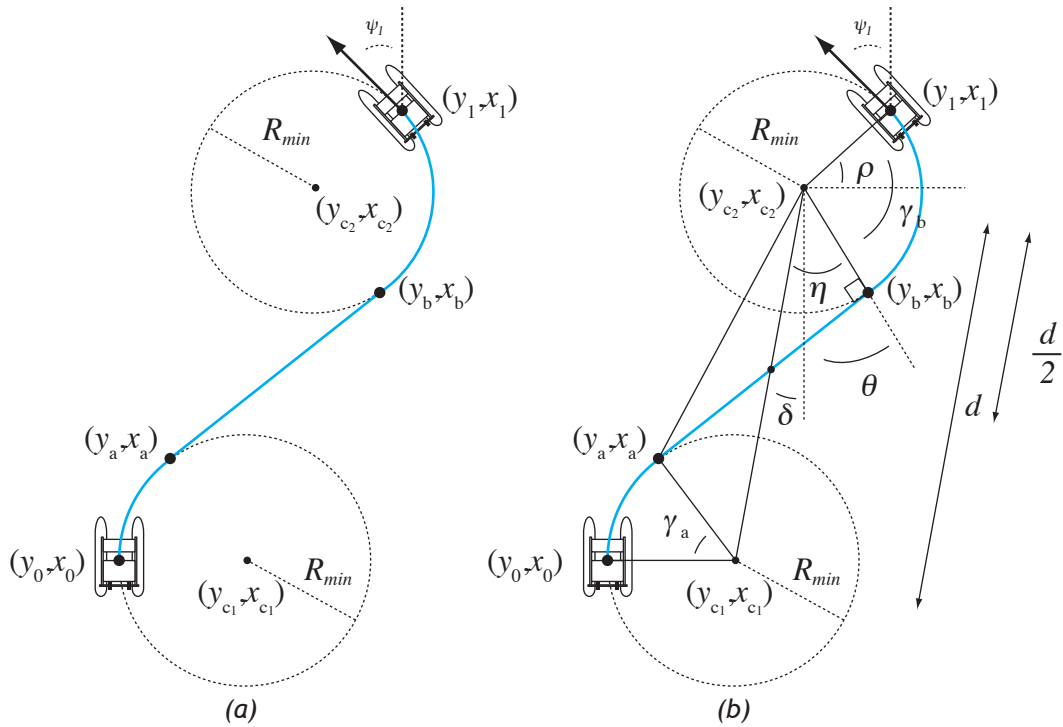


Figura 3.7 - (a) Trajectória a seguir com direcção final definida e (b) parâmetros necessários para a sua definição

A forma de atingir uma dada configuração final em que a direcção no final da trajectória seja uma das condições iniciais do problema, passa por combinar duas trajectórias circulares com uma trajectória rectilínea como se pode observar na Figura 3.7. Por forma a usufruir do raciocínio da secção anterior, numa fase inicial os únicos parâmetros que aqui se pretende obter são o ângulo γ_b e a posição (y_b, x_b) . Sequencialmente, o γ_b é obtido por meio das equações (3.32)-(3.38).

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= x_0 \\ y_{c_1} &= y_0 + R_{\min} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} y_{c_2} &= y_1 + R_{\min} \cos(\varphi_1) \\ x_{c_2} &= x_1 - R_{\min} \sin(\varphi_1) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$d = \sqrt{(x_{c_1} - x_{c_2})^2 + (y_{c_1} - y_{c_2})^2} \quad (3.34)$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{y_{c_2} - y_{c_1}}{x_{c_2} - x_{c_1}} \quad (3.35)$$

$$\eta = \cos^{-1} \frac{R_{\min}}{d/2} \quad (3.36)$$

$$\rho = \tan^{-1} \frac{x_1 - x_{c_2}}{y_1 - y_{c_2}} \quad (3.37)$$

$$\gamma_b = \frac{\pi}{2} + \rho + \eta - \delta \quad (3.38)$$

A partir secção 3.3.1, γ_a é obtido substituindo (y_1, x_1) por (y_b, x_b) do qual resulta γ_b . Temos então, a solução do problema (P) encontrada dadas as configurações inicial $[y_0, x_0, \varphi_0]$ e final $[y_1, x_1, \varphi_1]$, que é dada por:

$$s_1 = R_{\min} (\gamma_a + \gamma_b) + d \quad (3.39)$$

3.3.2 - Trajectória com corrente

Nesta subsecção estuda-se o efeito da corrente no modelo cinemático do veículo. Consideremos que a corrente é constante ou de variação muito lenta e que, para já, tem sentido Norte no nosso referencial. A Figura 3.8 ilustra a evolução de uma trajectória circular para diferentes raios de circunferência.

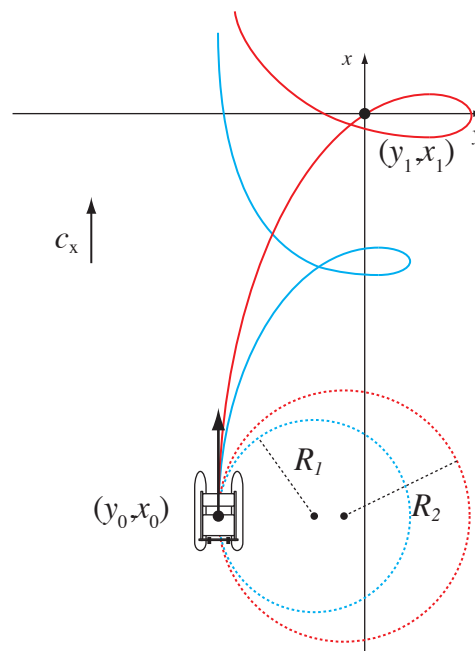


Figura 3.8 - Trajectórias circulares com e sem presença de corrente, sendo a trajectória óptima colorida de vermelho.

3.3.3 - Equações de movimento

Em contraste com o estudo na subsecção anterior, é necessário obter as equações do movimento da embarcação na presença de corrente. Estas são deduzidas de seguida.

A partir de (2.6), (2.7) e (2.8):

$$\begin{cases} \Delta x = \int_T (u \cos(\omega t + \varphi_0) + c_x) dt \\ \Delta y = \int_T u \sin(\omega t + \varphi_0) dt \\ \omega = \frac{u}{R} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\Delta x = R \left[\sin\left(\frac{u}{R}T + \varphi_0\right) - \sin(\varphi_0) \right] + c_x T \quad (3.41)$$

$$\Delta y = R(\cos(\varphi_0) - \cos(\omega T + \varphi_0)) \quad (3.42)$$

Da resolução do sistema (3.40) resulta o par de equações (3.41) e (3.42), que descrevem o movimento da embarcação. O objectivo passa agora por determinar o raio da trajectória a seguir, que permita transportar o sistema da posição inicial até a posição final. Ora, continuando o anterior desenvolvimento, a partir de (3.42) obtemos (3.43) e (3.44)

$$\cos\left(\frac{u}{R}T + \varphi_0\right) = \cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \quad (3.43)$$

Isolando T da equação anterior resulta:

$$T = \frac{R}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \right) - \varphi_0 \right) \quad (3.44)$$

Podemos afirmar que o tempo necessário para o veículo atingir a abcissa y_1 é obtido através da função $T = f(R, \Delta y, \varphi_0)$ representada pela equação (3.44). Esta função será utilizada mais tarde para a determinação do raio da trajectória.

Finalmente, substituindo (3.42) e (3.43) em (3.41) e sabendo que geometricamente para um dado ângulo, $\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)}$:

$$R \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \right)^2} - R \sin(\varphi_0) + c_x T - \Delta x = 0 \quad (3.45)$$

Esta é a expressão final que relaciona a posição actual com os parâmetros da configuração inicial do veículo, a corrente e o raio da trajectória. É uma equação não linear e para que possua solução real, é necessário garantir que R satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{cases} R \geq R_{\min} \\ \left(\cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \leq 1 \right) \vee \left(\cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \geq -1 \right) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$R \geq \max \left(R_{\min}, \frac{y - y_0}{\cos(\varphi_0) + 1} \right) \quad (3.47)$$

3.3.3.1 - Tempo T de chegada

A seguir é feito o estudo desta variável e como incorpora-la na resolução do problema.

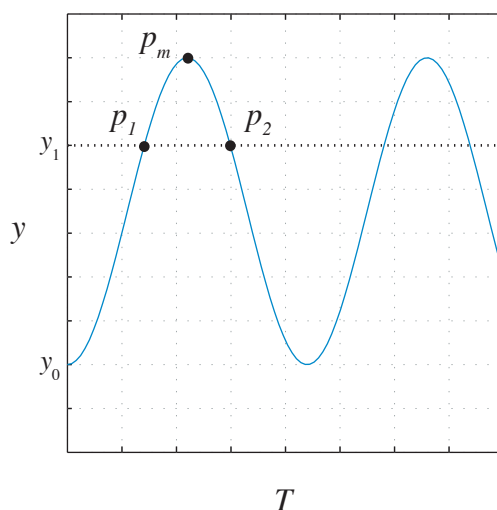


Figura 3.9 - Gráfico genérico da evolução de (3.42). Componente y da posição em função do tempo T para a configuração inicial. $R = R_{\min}$.

A Figura 3.9 ilustra a evolução temporal da componente y da posição do veículo para uma configuração inicial $[x_0, y_0, \varphi_0]$ de raio $R > R_{\min}$. Convém realçar o facto de a trajectória alcançar y_1 duas vezes por cada rotação, evidenciados pelos pontos p_1 e p_2 . Isto é, existem dois valores T_1 e T_2 os quais permitem alcançar a abcissa do ponto final. Esta conclusão pode também ser observada na Figura 3.8 e, como mencionado, para o dado raio da trajectória, existem 2 soluções em $y = y_1$.

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{R}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{R} \right) - \varphi_0 \right) \\
 T_m &= \frac{R}{u} (\pi - \psi_0) \\
 T_2 &= T_m + (T_m - T_1) = 2T_m - T_1 = \frac{R}{u} \left(2\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{R} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.1.1.1 - Processo iterativo

Visto (3.45) ser uma equação não linear complexa e de difícil resolução, é proposto que a sua solução seja obtida com recurso a métodos iterativos, nomeadamente o método das bissecções sucessivas (Anexo A). Desta forma é necessário definir o intervalo de iteração $[a, b]$ por forma a garantir que a função

$$f_R = R \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{\Delta y}{R} \right)^2} - R \sin(\varphi_0) + c_x T - \Delta x = 0 \tag{3.49}$$

possua um zero tal que $f_R(a)f_R(b) < 0$. Resta-nos, então determinar os intervalos de iteração e no caso de as condições anteriores se verificarem, estará encontrado o raio da trajectória.

Os limites inferior e superior de iteração correspondem ao raio mínimo e máximo que garantam existência de solução, respectivamente. De (3.48) resulta automaticamente o limite inferior.

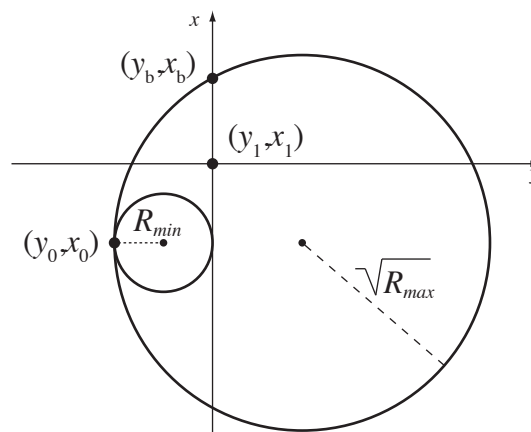


Figura 3.10 - Raios que formam os limites de iteração

Quanto ao limite superior, este não é obtido de forma implícita. Ao se escolher o quadrado do raio da circunferência que intersecta (y_0, x_0) e (y_b, x_b) , como ilustrado na Figura 3.10, teremos que:

$$\begin{aligned} y_b &= y_1 \\ x_b &= x_1 + |x_1 - x_0| \end{aligned} \quad (3.50)$$

Uma vez definido (y_b, x_b) em (3.50) e com recurso do resultado em (3.9), encontramos o raio máximo. A expressão que define o raio máximo é então dada por (3.51).

$$R_{\max} = \left| y_0 - \frac{(x_1 + (x_1 - x_0) - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \right|^2 \quad (3.51)$$

Tal como no problema sem corrente, por forma a atingir (y_1, x_1) , o veículo pode efectuar uma rotação positiva ($R > 0$) ou negativa $R < 0$. No entanto, aqui as condições que definem a direcção da rotação não se aplicam. Assim, são gerados os raios máximos e mínimos para ambas as rotações, e se a condição do processo iterativo for verificada $f(a)f(b) < 0$ em algum destes casos, existe solução, isto é, um raio cuja trajectória intersecta a posição final. A seguir são formuladas varias hipóteses distribuídas em tabelas para este raciocínio, tendo em conta o par de soluções temporais T_1 e T_2 do problema:

Tabela 3.1 - Hipótese 1-1

$R > 0, T = T_1$
$a = R_{\min} = \frac{y_1 - y_0}{\cos(\varphi_0) + 1}$
$T_a = T_1 = \frac{a}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right) - \varphi_0 \right)$
$b = R_{\max} = \left y_0 - \frac{(x_1 + (x_1 - x_0) - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \right ^2$
$T_b = T_1 = \frac{b}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right) - \varphi_0 \right)$
$f_{11}(a) = a \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right)^2} - a \sin(\varphi_0) + c_x T_a - (x_1 - x_0)$
$f_{11}(b) = b \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right)^2} - b \sin(\varphi_0) + c_x T_b - (x_1 - x_0)$

Tabela 3.2 - Hipótese 1-2

$$R > 0, T = T_2$$

$$a = R_{\min} = \frac{y_1 - y_0}{\cos(\varphi_0) + 1}$$

$$T_a = T_2 = \frac{a}{u} \left(2\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right) \right)$$

$$b = R_{\max} = \left| y_0 - \frac{(x_1 + (x_1 - x_0) - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \right|^2$$

$$T_b = T_2 = \frac{b}{u} \left(2\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right) \right)$$

$$f_{12}(a) = a \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right)^2} - a \sin(\varphi_0) + c_x T_a - (x_1 - x_0)$$

$$f_{12}(b) = b \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right)^2} - b \sin(\varphi_0) + c_x T_b - (x_1 - x_0)$$

Tabela 3.3 - Hipótese 2-1

$$R < 0, T = T_1$$

$$a = R_{\min} = - \left| y_0 - \frac{(x_1 + (x_1 - x_0) - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \right|^2$$

$$T_a = T_1 = \frac{a}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right) - \varphi_0 \right)$$

$$b = R_{\max} = - \frac{y_1 - y_0}{\cos(\varphi_0) + 1}$$

$$T_b = T_1 = \frac{b}{u} \left(\cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right) - \psi_0 \right)$$

$$f_{21}(a) = a \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right)^2} - a \sin(\varphi_0) + c_x T_a - (x_1 - x_0)$$

$$f_{21}(b) = b \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right)^2} - b \sin(\varphi_0) + c_x T_b - (x_1 - x_0)$$

Tabela 3.4 - Hipótese 2-2

$$R < 0, T = T_2$$

$$a = R_{\min} = - \left| y_0 - \frac{(x_1 + (x_1 - x_0) - x_0)^2 + y_1^2 - y_0^2}{2(y_1 - y_0)} \right|^2$$

$$T_a = T_2 = \frac{a}{u} \left(2\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right) \right)$$

$$b = R_{\max} = - \frac{y_1 - y_0}{\cos(\varphi_0) + 1}$$

$$T_b = T_2 = \frac{b}{u} \left(2\pi - \varphi_0 - \cos^{-1} \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right) \right)$$

$$f_{22}(a) = a \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{a} \right)^2} - a \sin(\varphi_0) + c_x T_a - (x_1 - x_0)$$

$$f_{22}(b) = b \sqrt{1 + \left(\cos(\varphi_0) - \frac{y_1 - y_0}{b} \right)^2} - b \sin(\varphi_0) + c_x T_b - (x_1 - x_0)$$

Se para alguma destas hipóteses, a condição $f_{ij}(a) \cdot f_{ij}(b) < 0 \quad \forall i, j \in [1, 2]$ se verificar, temos a garantia da existência um raio R nesse intervalo e condições necessárias para a execução do algoritmo iterativo. Assim a trajectória pretendida entre a posição inicial (y_0, x_0) e a final (y_1, x_1) fica definida.

Possuímos portanto, o problema resolvido mais uma vez a partir do estudo das equações do problema e derivando estratégias que nos garantam a existência de solução.

Capítulo 4

Controlo

Neste capítulo é discutida a estratégia de controlo do Zarco para executar trajectórias circulares.

4.1 - Direcção de referencia φ_{ref}

O sinal de referencia de direcção pode ser considerado como uma função linear (4.1), cujas variáveis são o par constituinte da posição actual do ASV e a configuração da circunferência a percorrer.

$$\varphi_{\text{ref}} = f(x, y, x_c, y_c, R) \quad (4.1)$$

À semelhança do estudo no capítulo de planeamento de trajectórias, x_c , y_c e R representam respectivamente a ordenada, abcissa e raio da circunferência. A obtenção de φ_{ref} é trivial bastando seguir o raciocínio descrito no anexo A1. Generalizando para todas as posições do barco relativas ao centro da circunferência e tendo em conta que o sentido de rotação é dado pelo sinal do raio, a direcção de referencia é gerada de acordo com (4.2).

$$\varphi_{\text{ref}} = \begin{cases} \pi \cdot \frac{s+1}{2} - \tan^{-1} \left| \frac{x-x_c}{y-y_c} \right| & \text{se } x \geq x_c \wedge y \geq y_c \\ \pi \cdot \frac{s-1}{2} - \tan^{-1} \left| \frac{x-x_c}{y-y_c} \right| & \text{se } x > x_c \wedge y < y_c \\ -\pi \cdot \frac{s-1}{2} - \tan^{-1} \left| \frac{x-x_c}{y-y_c} \right| & \text{se } x < x_c \wedge y < y_c \\ -\pi \cdot \frac{s+1}{2} + \tan^{-1} \left| \frac{x-x_c}{y-y_c} \right| & \text{se } x < x_c \wedge y > y_c \end{cases}, \quad s = \frac{R}{|R|} \quad (4.2)$$

4.2 - Controlo de direcção (*heading*)

Relacionar a direcção actual com a direcção de referência, não basta para que se consiga seguir a circunferência. É necessário também relacionar a componente de deslocamento do barco, isto é a posição actual face à posição ideal pertencente á fronteira da circunferência

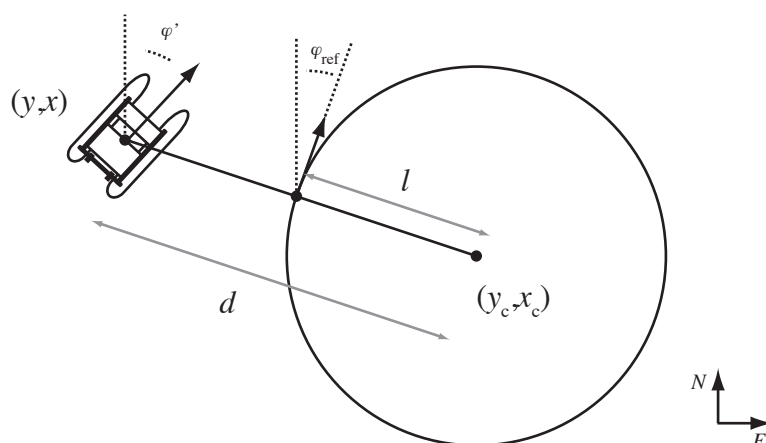


Figura 4.1 - Seguimento de uma circunferência

O principal problema no desenvolvimento deste controlador é saber qual a compensação necessária a introduzir na direcção, φ' , por forma a aproximar o veículo ao ponto desejado. Observando a **Error! Reference source not found.** verifica-se que a partir da informação disponível da posição do barco e da configuração da circunferência, são obtidas a distancia real do ASV ao centro da circunferência, d , e da distancia ideal l . Caso d seja maior que l , A embarcação efectua rotação positiva em direcção à circunferência em caso de d ser maior que l , e rotação negativa caso contrário.

$$l = R \quad (4.3)$$

$$d = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \quad (4.4)$$

$$\varphi' = (d - l) \cdot k_{\text{dist}} \quad (4.5)$$

O ganho k_{dist} introduzido em (4.5), isto é, a constante de proporcionalidade a introduzir na relação entre o erro de posição com objectivo de melhorar a taxa de aproximação à circunferência.

Figura 4.2 abaixo.

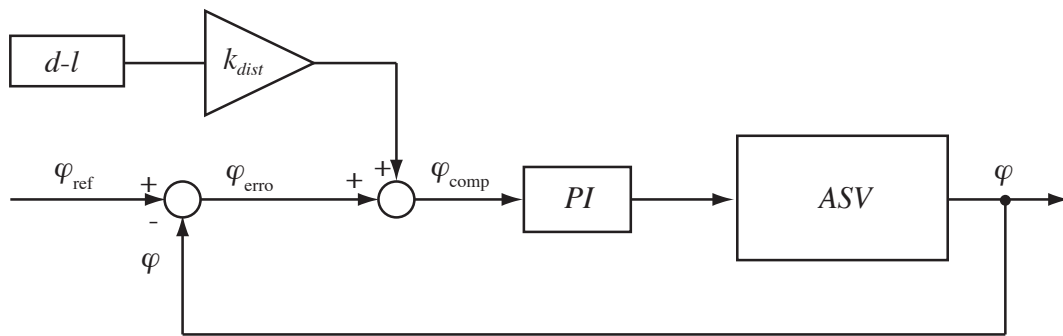


Figura 4.2 - Diagrama de blocos a malha fechada do controlador de direcção.

Através de simulações realizadas foram obtidos os valores dos ganhos do controlador do processo (4.6). É um controlador do tipo PI onde o termo integral conjugado com o termo proporcional aceleram o movimento do processo em direcção ao ponto de equilíbrio e elimina o erro residual introduzido por um controlador apenas proporcional.

$$\begin{aligned} k_p &= 40 \\ k_i &= 4.3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.1 - Presença de corrente

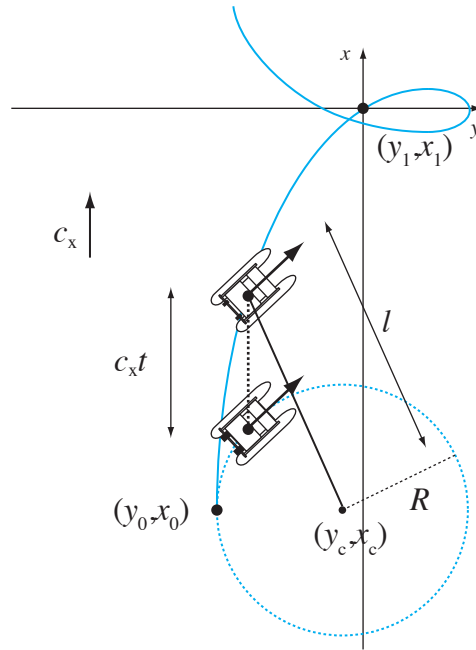


Figura 4.3 - Relação de trajetórias circulares com e sem corrente.

A presença de corrente no controlo da secção anterior, introduz no sistema uma perturbação adicional que não é tomada em conta no dimensionamento do controlador. Admitindo novamente que a corrente apenas tem sentido norte e que é constante, l pode ser modificado de acordo com a Figura 4.3 e, actualizado ao mesmo tempo que a posição do ASV, pode ser incorporado o efeito da presença de corrente no controlador anterior. A posição actual é dada por integração em ordem ao tempo das equações da cinemática em (3.1). O resultado está exposto a seguir em

Equações de movimento com efeito de corrente:

$$\begin{aligned} x_{c/\text{corrente}} &= x_0 + R(\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin(\varphi_0)) + c_x t \\ y_{c/\text{corrente}} &= y_0 + R\cos(\varphi_0) - R\cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Equações de movimento sem efeito de corrente:

$$\begin{aligned}x_{s/\text{corrente}} &= x_0 + R(\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin(\varphi_0)) \\y_{s/\text{corrente}} &= y_0 + R\cos(\varphi_0) - R\cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}x_{c/\text{corrente}} - x_{s/\text{corrente}} &= c_x t \\y_{c/\text{corrente}} - y_{s/\text{corrente}} &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

Subtraindo (4.8) a (4.7) resulta (4.9) temos a confirmação da situação ilustrada na Figura 4.3.

Capítulo 5

Resultados

Os resultados foram obtidos através do modelo em Matlab criado pelo OSG, que simula com eficácia o comportamento dinâmico e cinemático do Zarco.

5.1 - Trajectória circular sem corrente

5.1.1 - Evolução da posição e direcção

A simulação de seguimento de trajectória circular sem corrente foi efectuada os seguintes parâmetros:

Tabela 5.1 - Parâmetros, trajectória sem corrente

Parâmetro	Valor	Unidade SI
x_0	10	<i>m</i>
y_0	-5.2	<i>m</i>
φ_0	0	rad
x_c	10	<i>m</i>
y_c	-1	<i>m</i>
R	5	<i>m</i>
u	0.5	<i>m / s</i>
k_{dist}	2	-

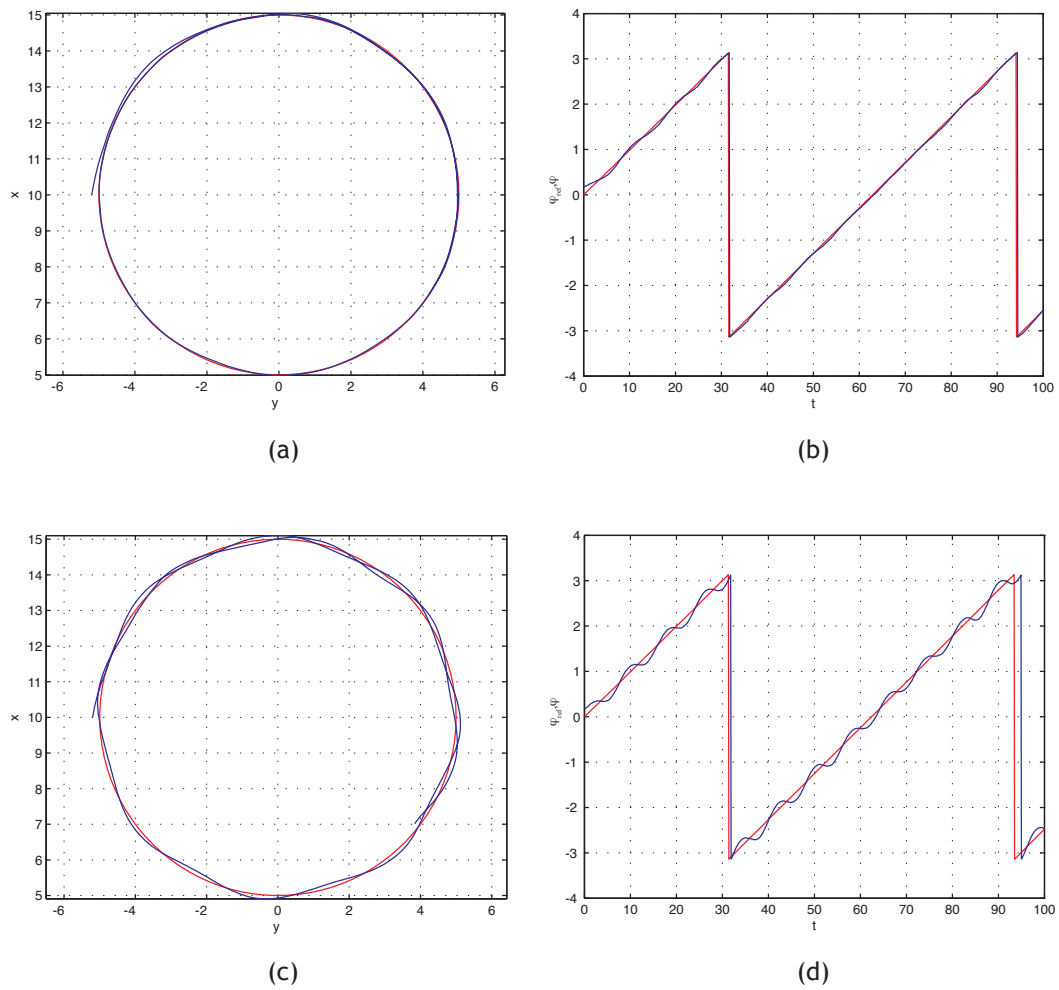


Figura 5.1 - Resultados da simulação de uma trajetória circular, nomeadamente (a) evolução temporal de posição e (b) relacionamento entre φ_{ref} (vermelho) e φ (azul). As mesma simulação com

$$k_{dist} = 3.$$

O aumento de K_{dist} introduz oscilações que tendem para a instabilidade do sistema como provado na Figura 5.1.

5.1.2 - Distancia percorrida

A figura abaixo ilustra o “custo” em termos de distancia total percorrida no capítulo 3.3. onde $s_{1-2} > s_{2-2}$ para diferentes raios. Temos portanto que os deslocamentos azulados são de menor valor que os deslocamentos vermelhos

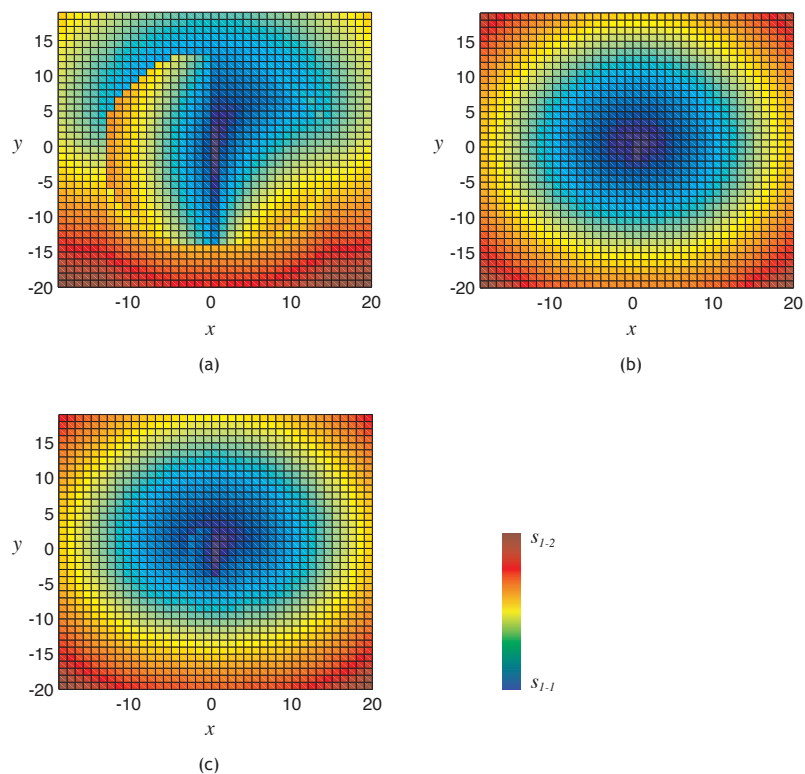


Figura 5.2 - Representação da zona de descontinuidade em termos de distância percorrida s_1 . Resultados para (a) $R = 10$, (b) $R = 1$ e (c) $R = 5$.

Conclui-se que existe descontinuidade que diminui quando $R \rightarrow 0$.

5.2 - Trajectória circular com corrente

O estudo efectuado na secção 3.3.2 - e 3.3.3 - é implementado no simulador do Zarco e a partir da configuração inicial e final na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Parâmetros, trajectória com corrente

Parâmetro	Valor	Unidade SI
x_0	-6	m
y_0	-6	m
φ_0	0	rad
x_1	0	m
y_1	0	m
u	0.5	m/s
c_x	0.3	m/s

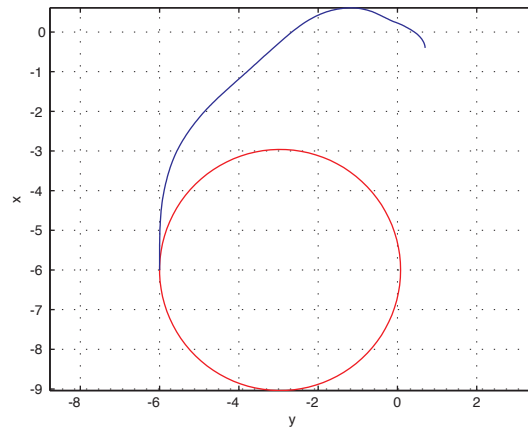


Figura 5.3 - Simulação de uma trajectória circular na presença de corrente ilustrada a azul, e a trajectória ideal na ausência de corrente (a vermelho).

Capítulo 6

Conclusões e trabalho futuro

Ao longo deste trabalho foram desenvolvidas estratégias de optimização de trajectórias e apresentadas soluções para o efeito. O estudo efectuado nesta dissertação têm aplicações não só em robótica aquática, mas também em diversas áreas, mesmo até fora da área Engenharia, no sentido de optimização de recursos.

O recurso ao modelo do sistema implementado em Matlab foi um bom apoio ao desenvolvimento deste trabalho visto não ser necessária o deslocamento do barco para a água a fim de efectuar testes básicos.

O modelo matemático do sistema manifestou-se indispensável visto que a partir do mesmo terem sido criadas noções e condições iniciais que permitem melhor interpretação dos processos envolvidos.

O trabalho futuro deste trabalho passa por aprofundar o controlo do sistema sobretudo na presença de correntes quando se pretendem trajectórias circulares. Levantar a hipótese de escolher uma trajectória quando as condições descritas neste trabalho não se verificarem. O conhecimento a priori da atingibilidade do veículo sem ser necessário alocar muitos recursos para o efeito como é o caso de processos iterativos. O controlador de direcção também pode ser alvo de trabalho futuro nomeadamente a sintonização através de métodos mais elaborados.

Este trabalho também é um ponto de partida para optimização de trajectórias na coordenação de vários veículos em operação conjunta.

Anexo A

Trigonometria

A1. Ângulo de um ponto pertencente a uma circunferência

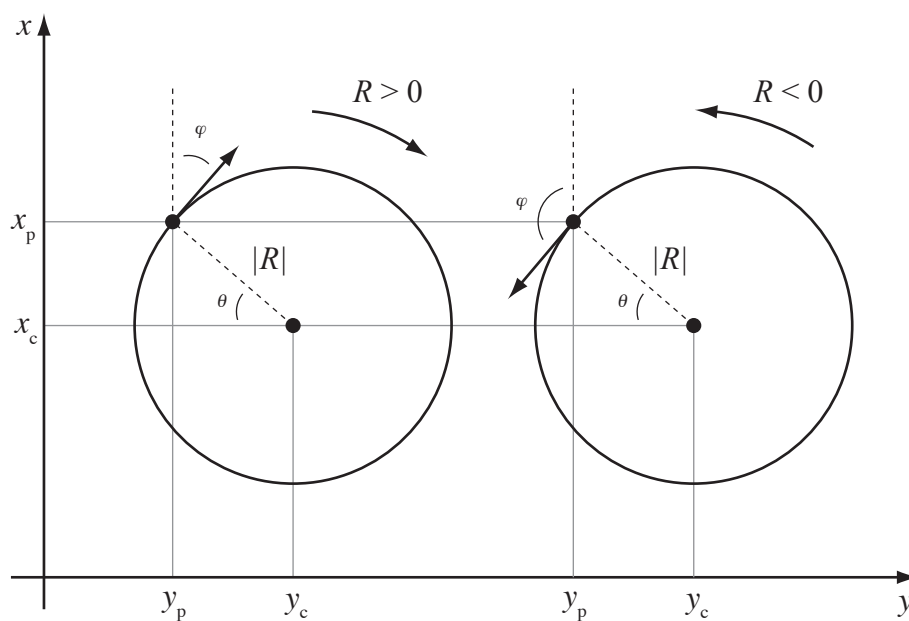


Figura A1 - Ângulo de um ponto pertencente a uma circunferência relativamente ao eixo das ordenadas para $R > 0$ e $R < 0$

Para qualquer ponto p pertencente à fronteira da circunferência e mediante o sentido de rotação, φ é o ângulo entre o eixo das ordenadas e a tangente à própria circunferência

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{x - x_c}{y - y_c} \right| \quad (\text{A1.1})$$

$$\varphi = \begin{cases} \theta & \text{se } R > 0 \\ \theta - \pi & \text{se } R < 0 \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

Apêndice

A. Método da bissecções sucessivas

Os conceitos desenvolvidos neste anexo são da autoria do Prof. Doutor Aníbal Matos [4].

Se considerarmos uma função contínua num intervalo $[a, b]$, tal que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais diferentes. O teorema dos valores intermédios permite afirmar que existe um numero s no intervalo $[a, b]$ tal que $f(s) = 0$

Método das bissecções sucessivas:

Inicialização

$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

Repetir

1. $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
2. Se $f(x_{n+1})f(a_n) < 0$

$$\text{Então } a_{n+1} = a_n ; b_{n+1} = x_n ;$$

$$\text{Senão } a_{n+1} = x_{n+1} ; b_{n+1} = b_n$$

Até

verificar critério de paragem

Teorema *Seja f contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) \leq 0$, e seja s o único zero de f nesse intervalo. Então, o método das bissecções sucessivas gera uma sucessão convergente para s .*

O número de iterações suficientes para garantir um erro absoluto não superior a δ pode ser calculado fazendo $\frac{b-a}{2^n}$ obtendo-se o valor

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\delta} \tag{A1}$$

Referências

- [1] A.Matos and N.Cruz, “Positioning Control of an Underactuated Surface Vessel”, INCORP Project Report, FEUP, Portugal, 2008.
- [2] N. Cruz, A. Matos, S. Cunha, S. Silva, “Zarco - An Autonomous Craft for Underwater Surveys”, Proceedings of Geomatica’2007, Barcelona, 2007.
- [3] José Luís da Rocha Melo. Controlo Coordenado de Veículos Autónomos Submarinos e de Superfície. Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Porto, 2008.
- [4] Aníbal Castilho Coimbra Matos. *Apontamentos da disciplina de Análise Numérica*, Documento de apoio à disciplina de Análise Numérica. Porto, Setembro de 2004.
- [5] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 4 edition, November 2001.
- [6] Anibal Castilho Coimbra de Matos. Optimização Dinâmica e Desvio de Obstáculos. Tese submetida para satisfação parcial dos requisitos do curso de Mestrado Em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Porto, 1994.
- [7] Jean-Jaques Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [8] Lobo Pereira. Introdução ao Controlo Ótimo. Mini-curso do DINCON 2006, V Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações. Brasil, 2006.