# Introdução à Teoria da Medida

**Texto Tutorial**

J.P. Marques de Sá
FEUP – DEEC – 2003
jmsa@fe.up.pt

# Índice

# 1 Classes de Subconjuntos

O estudo de classes de subconjuntos surge como necessidade de dotar colecções de subconjuntos com uma certa estrutura, que permita tornar a classe fechada relativamente a operações sobre conjuntos, tornando-se, assim, possível dotá-los de uma medida (em particular, a medida de probabilidade).

## 1.1 Classe

Dado um conjunto $X$, formamos um conjunto, $\mathcal{C}$, de subconjuntos de $X$ designado *classe* de subconjuntos de $X$.

$$\mathcal{C} = \{A : A \subseteq X\}$$

**Exemplo 1-1**

A classe $\mathcal{P}(X)$ que contém todos os subconjuntos de $X$ designa-se por vezes "classe das partes de $X$". Se $X$ finito, $|X| = n \;\Rightarrow\; |\mathcal{P}(X)| = 2^n$.
Por exemplo, $X = \{a,b,c\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} = X\}$

$\square$

## 1.2 Semi-Anel

**Definição 1-1**

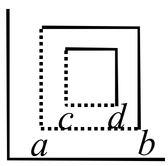
Um semi-anel $\mathcal{S}$ é a classe que satisfaz:

i. $\varnothing \in \mathcal{S}$;
ii. $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$;
iii. $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A - B = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ com $E_i \in \mathcal{S}$ e $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$.

$\blacksquare$

**Exemplo 1-2**

$X = \Re^n$; prova-se que a classe $\mathcal{I}^n$ = {intervalos finitos semiabertos de $\Re^n$ do tipo $\{(x_1,\ldots,x_n): a_i < x_i \leq b_i\}$} é um semi-anel.




Na situação da figura, para $\mathcal{I}^2$, temos: $A = ]a, b]\times]a, b]$; $B = ]c, d]\times]c, d]$;
$A - B = \{]a, b]\times]a, c] \cup ]a, c]\times]c, d] \cup ]a, b]\times]c, b] \cup ]d, b]\times]c, d]\}$.
O mesmo se aplica a outros "rectângulos". A verificação de i. e ii. é trivial.
Note-se, contudo, que $A - B$ não pertence a $\mathcal{I}^2$.

$\square$

**Exemplo 1-3**

Para o caso particular do exemplo anterior com $X = \Re$, temos a classe $\mathcal{I} = \mathcal{I}^1$ = {intervalos finitos semiabertos do tipo $]a, b]$}. O facto de ser um semi-anel reflecte-se no facto de que, com operações de intersecção, se geram elementos de $\mathcal{I}$ e, com diferenças, se geram conjuntos construíveis como reuniões de elementos disjuntos de $\mathcal{I}$. (É esta a "estrutura" do semi-anel.)

$\square$

**Exemplo 1-4**

Seja $X = \Re$, e a classe $\mathcal{C}$ = {intervalos fechados $[a, b]$}. Não é um semi-anel. P. ex., $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, com $a < c$ e $b > d$, pertencem a $\mathcal{C}$; mas $A - B$ não é construível com reuniões de elementos disjuntos de $\mathcal{C}$.. □

## 1.3 Anel

**Definição 1-2**

Um anel é qualquer classe $\mathcal{R}$ não vazia tal que

i. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$;
ii. $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \,\Delta\, B \in \mathcal{R}$. ( $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$ é a diferença simétrica)

■

Notar que, então, também é satisfeita a propriedade i. dos semi-anéis ($\varnothing = A \,\Delta\, A$). Por outro lado, $A \,\Delta\, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A - B \in \mathcal{R}$ (porque $A - B = A \,\Delta\, (A \cap B)$). Esta condição é mais forte que a anterior iii. dos semi-anéis. Um anel é, portanto, fechado para as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos.

**Exemplo 1-5**

$\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ são anéis. $\{\varnothing\}$ é o menor anel. □

**Exemplo 1-6**

$\mathcal{I}$ não é um anel. P. ex., $A = ]a, b]$, $B = ]c, d]$, com $a < c$ e $b > d$, pertencem a $\mathcal{I}$; mas $A - B \notin \mathcal{I}$.

□

**Teorema 1-1**

A classe $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ gerada pelo semi-anel $\mathcal{S}$, cujos elementos se podem exprimir como *reunião finita* de conjuntos disjuntos de $\mathcal{S}$, $E = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ , $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall\ i \neq j$, é um anel.

Demonstração:

$\mathcal{C}(\mathcal{S})$ tem de conter todos os conjuntos que se exprimem como reunião finita de conjuntos disjuntos de $\mathcal{S}$, por forma a ser fechado relativamente à reunião, como exige o anel.

Por outro lado, suponhamos que tínhamos quaisquer conjuntos: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ e sejam as intersecções $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Então os $C_{ij}$ são disjuntos e

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} \in \mathcal{C}(S)$$

Por outro lado, da definição de semi-anel, segue-se por indução que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \quad (i = 1,\ldots,n) \text{ e } B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj} \quad (j = 1,\ldots,m)$$

com as sequências finitas $\{D_{ik}\}$ ($k$ = 1,..., $r_i$) e $\{E_{kj}\}$ ($k$ = 1,..., $s_j$) consistindo em conjuntos disjuntos de $S$. Logo,

$$A \ \Delta\ B = (A - B) \cup (B - A) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right) \cup \bigcup_{j=1}^{m}\left(\bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj}\right) \in \mathcal{C}(S)$$

■

**Exemplo 1-7**

$\mathcal{C}(\mathcal{I})$, gerada da forma acima, é um anel. Para os conjuntos indicados no Exemplo 1-6 temos $A - B = ]a, c] \cup ]d, b] \in \mathcal{C}(\mathcal{I})$.

□

## 1.4 Campo (Álgebra)

Corresponde a uma classe de $X$ que é anel mas é também fechada relativamente à operação de complemento.

**Definição 1-3**

Classe não vazia, $\mathcal{F}$, que satisfaz:

i. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$;

ii. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$.

■

Note-se que, sendo fechado para o complemento, podemos aplicar as Leis de Morgan e facilmente mostrar que:

$$A \cap B \in \mathcal{F}; \quad A - B \in \mathcal{F}; \quad \varnothing \in \mathcal{S}; \quad X \in \mathcal{F}.$$

Portanto, um campo é necessariamente uma classe não vazia porque tem de conter $X$.

**Exemplo 1-8**

$\mathcal{P}(X)$ é um campo. □

**Exemplo 1-9**

A classe de todos os subconjuntos limitados de $\Re$ é um anel mas não é um campo (p. ex., não contém $\Re$). □

**Exemplo 1-10**

$X = \Re^n$; seja a classe $\Im^n$= {intervalos de $\Re^n$ do tipo $\{(x_1,...,x_n): -\infty \le a_i < x_i \le b_i < \infty, i = 1,...,n\}$}. Portanto, os intervalos semiabertos de $\Im^n$ podem estender-se infinitamente à esquerda. Prova-se que, então, $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\Im^n)$ definida como no Teorema 1-1, é um campo Os intervalos de $\Im^n$ designam-se por *rectângulos* ou *caixas* de $\Re^n$.
$\mathcal{E}$ é o campo das *figuras elementares* de $\Re^n$. Prova-se que $\mathcal{E}$ é a menor álgebra que contém $\Im^n$.

□

**Exemplo 1-11**

Seja o intervalo $\Omega = ]0, 1]$. Podemos, tal como no exemplo anterior, construir o campo $\mathcal{B}_0$ a partir de reuniões finitas de intervalos semiabertos disjuntos:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} ]\, a_i, b_i \,]$$

□

## 1.5 Sigma-Anel ($\sigma$-Anel)

Trata-se de um anel que é fechado relativamente à realização de uma sequência numerável de reuniões ("sigma" vem do alemão "summe" de soma = reunião):

$$A_i \in \mathcal{S} \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$$

Note-se que, então, pelas propriedades do anel, é também fechado para intersecções numeráveis.

## 1.6 Sigma-Álgebra ($\sigma$-Álgebra, $\sigma$-Campo)

Trata-se de uma álgebra que é fechada relativamente à realização de uma sequência numerável de reuniões.

**Definição 1-4**

Uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ definida em $X$, satisfaz:

i. $X \in \mathcal{A}$ (portanto, $\mathcal{A}$ é não vazia)
ii. $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \mathcal{A}$ (logo, também $\varnothing \in \mathcal{A}$)
iii. $A_i \in \mathcal{A} \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

■

Ao par $(X, \mathcal{A})$ chama-se *espaço mensurável*. Os elementos de $\mathcal{A}$ chamam-se *conjuntos mensuráveis*.

Dois resultados:

1. Se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra para um conjunto $X$, e $X'$ é um subconjunto de $X$, então $X' \cap \mathcal{A}$, formada por todas as intersecções de elementos de $\mathcal{A}$ cuja com $X'$, é também uma $\sigma$-álgebra (chamada *traço* de $\mathcal{A}$ em $X'$).
2. Sejam os conjuntos $X$ e $X'$, e $\mathcal{A}'$ uma $\sigma$-álgebra em $X'$. Seja a função $f$: $X \to X'$. Então a classe
$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \left\{ f^{-1}(A') : \quad A' \in \mathcal{A}' \right\}$$
é uma $\sigma$-álgebra em $X$.

**Exemplo 1-12**

A menor $\sigma$-álgebra é $\{\varnothing, X\}$. $\mathcal{P}(X)$ é uma $\sigma$-álgebra. ▯

**Exemplo 1-13**

Seja $X = \{a,b,c\}$. Então (resultado 1.), são $\sigma$-álgebras os traços de $\mathcal{P}(X)$ em $\{b\}$ e $\{b,c\}$, respectivamente $\mathcal{P}(X) \cap \{b\} = \{\varnothing, \{b\}\}$ e $\mathcal{P}(X) \cap \{b,c\} = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$.

▯

**Exemplo 1-14**

Seja $X = \{a,b,c\}$ e $X' = \{0, 1\}$. Definamos $\mathcal{A}' = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ e

$$\begin{aligned} f : X &\to X' \\ a &\to 0 \\ b &\to 1 \\ c &\to 0 \end{aligned} \quad ;$$

então $f^{-1}(\mathcal{A}') = \{\varnothing, \{a, c\}, \{b\}, \{a,b,c\}\}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$ (resultado 2.).

▯

**Exemplo 1-15**

Para todo o conjunto $X$, a classe de todos os subconjuntos $A \subset X$, para os quais ou $A$ ou $\overline{A}$ são numeráveis, é uma $\sigma$-álgebra.

▯

**Teorema 1-2**

Qualquer intersecção finita ou numerável de $\sigma$-álgebras em $X$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$.

■

Aplicando este Teorema é possível mostrar que, para cada classe $\mathcal{C}$ de $X$, existe a *menor $\sigma$-álgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ contendo $\mathcal{C}$. Para tal basta considerar a intersecção de todas as $\sigma$-álgebras que contêm $\mathcal{C}$ ($\mathcal{P}(X)$ é uma delas). $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ é chamada a *$\sigma$-álgebra gerada* por $\mathcal{C}$.

## 1.7 $\sigma$-Álgebra de Borel

**Definição 1-5**

A $\sigma$-álgebra gerada por $\Im^n$, $\mathcal{A}(\Im^n)$, designa-se por *$\sigma$-álgebra de Borel* e denota-se $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(\Im^n)$. Os elementos de $\mathcal{B}^n$ chamam-se *conjuntos de Borel*.

▯

**Teorema 1-3**

Sejam $\mathcal{O}^n$, $\mathcal{F}^n$, $\mathcal{C}^n$ as classes dos subconjuntos abertos, fechados e compactos[1] de $\Re^n$, respectivamente. Então:

$$\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(\mathcal{O}^n) = \mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{A}(\mathcal{C}^n)$$

■

[1] Conjuntos fechados e limitados, i.e., contendo todos os seus pontos limites.

Segundo este Teorema, $\mathcal{B}^n$ contém não só numeráveis reuniões e intersecções de intervalos semiabertos, mas também numeráveis reuniões e intersecções de intervalos abertos, fechados e de pontos isolados[2]. Os conjuntos que se podem assim formar suportam medidas, nomeadamente a medida de probabilidade. Constituem os conjuntos de interesse nas aplicações práticas. Existem, contudo, conjuntos patológicos, de difícil construção e sem interesse prático, que não são de Borel. Veremos isso mais adiante.

# 2 Medida de Lebesgue

A definição do campo $\mathcal{E}$ das figuras elementares de $\Re^n$ introduz a estrutura mínima de uma classe que permite definir uma função de medida. Comecemos por definir o *volume* (*comprimento*) *de Lebesgue*.

Seja:

$A \in \Im^n$; $A$ é o produto cartesiano de $n$ intervalos $\{ x_i \in \Re: -\infty < a_i < x_i \le b_i \le \infty\}$

O volume é:

$$m(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \qquad \textbf{2.1}$$

$m(A)$ é zero se algum par de extremos dos intervalos tem o mesmo valor; é infinito se algum extremo for infinito.
Vamos, agora, estender esta função para a $\sigma$-álgebra de Borel.
Dado $B \in \mathcal{B}^n$, tal que $B = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ com $A_j \in \Im^n$ e disjuntos, define-se o volume de $B$:

$$\overline{m}(B) = \sum_{j=1}^{k} m(A_j) \qquad \textbf{2.2}$$

Esta função só tem sentido se não depender da representação particular de $B$. De facto, prova-se que:

**Teorema 2-1**

A função $\overline{m}$ em $\mathcal{B}^n$ dada por 2.2 é univocamente definida, não-negativa, aditiva, monótona, e coincide com $m$ em $\Im^n$. Assim:

i. $A \subset B, A, B \in \mathcal{B}^n \;\Rightarrow\; 0 \le \overline{m}(A) \le \overline{m}(B)$
ii. $\{A, B\} \subset \mathcal{B}^n,\ A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \overline{m}(A + B) = \overline{m}(A) + \overline{m}(B)$
iii. $\overline{m}(A) = m(A), \forall A \in \Im^n$

■

Além disso:

[2] Um ponto isolado $\{x\}$ pode obter-se como intersecção de uma sequência infinita numerável de intervalos $]x - 1/n, x]$, $n = 1, 2, ...$ Note-se que no caso de uma sequência finita, como no Teorema 1-1 não poderíamos gerar, p. ex., um ponto isolado.

**Teorema 2-2**

A função $\overline{m}$ é numeravelmente aditiva, i.e., dada a família de elementos disjuntos $A_k \in \mathcal{B}^n$, se $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (logo, pertence a $\mathcal{B}^n$), então

$$\overline{m}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}(A_k)$$

■

Uma função $\mu$: $\mathcal{E} \rightarrow \Re^+$, de uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{E}$ em $\Re^+$, é chamada uma *medida* se for numeravelmente aditiva (onde a série convege). A anterior medida $\overline{m}$ definida no conjunto de Borel, que passaremos a designar por $\mu$, é chamada *medida de Lebesgue-Borel* (*medida LB*).

Um espaço mensurável ($X$, $\mathcal{A}$) dotado de uma medida $m$, i.e., o triplo ($X$, $\mathcal{A}$, $m$), chama-se um *espaço de medida*. ($\Im^n$, $\mathcal{B}^n$, $\mu$) é o *espaço de medida de Lebesgue-Borel*.

Algumas propriedades da medida LB:

1. $\mu(B) < +\infty$ , para todo o conjunto limitado $B \in \mathcal{B}^n$.
2. Qualquer hiperplano $H$ em $\Re^n$ é um conjunto LB-nulo, i.e., $\mu(H) = 0$.
3. Qualquer subconjunto numerável de $\Re^n$ é um conjunto LB-nulo, em particular $\mu(Q) = 0$.
4. Seja $W \equiv [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ o cubo unitário $n$-dimensional. Então, por definição, $\mu(W) = 1$.
5. A medida LB é a única medida em $\mathcal{B}^n$ que é invariante à translação, i.e., $T_a(\mu) = \mu$, para toda a translação $x \rightarrow T_a(x) = a + x$, e que satisfaz a condição de normalização $\mu(W) = 1$.
6. A medida LB é invariante relativamente a transformações ortogonais dos eixos.

O seguinte Teorema, que usa a propriedade 5, mostra que $\mathcal{B}^n$ não esgota $\mathcal{P}(\Re^n)$. Por outras palavras, existem subconjuntos de $\Re^n$ que não se podem construir à custa de reuniões e intersecções numeráveis de rectângulos de $\Im^n$.

**Teorema 2-3**

$$\mathcal{B}^n \neq \mathcal{P}(\Re^n),\ \forall\ n = 1, 2, ...$$

Demonstração:

Vamos indicar como se constrói um conjunto patológico. Por uma questão de facilitar a "visualização mental" a construção será em $\Re$. Contudo, a generalização para $\Re^n$ é directa. Para tal vamos usar o:

*Axioma da Escolha:*

Dado uma classe $\mathcal{C}$ de conjuntos disjuntos e não vazios $E_\alpha$, existe um conjunto $G \subset \cup E_\alpha$ tal que, para todo o $E_\alpha$, $G \cap E_\alpha$ é apenas um conjunto pontual de $E_\alpha$.

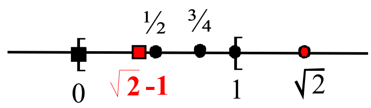
(A construção de um conjunto que tem apenas um ponto de uma colecção disjunta de subconjuntos é certamente trivial no caso da colecção ser finita ou numerável. O axioma da escolha estipula que tal construção é também possível no caso de colecções não numeráveis.)

Seja $Q \subset \Re$ o conjunto dos racionais. Consideremos a relação binária de congruência $x \sim y$ em $\Re$:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in Q$$

A relação $x \sim y$ é de equivalência e estabelece uma divisão de $\Re$ em classes de equivalência $C_x = \{x + Q\}$. A classe de equivalência de todos os racionais é $C_0$. Como para todo o real $\eta$ existe um inteiro $n$ tal que $n \le \eta < n + 1$, ou seja, $\eta - n \in [0, 1[$, então existe um ponto em $[0, 1[$ para qualquer classe de equivalência.

Alguns pontos de $C_0$ e $C_{\sqrt{2}}$:




Então, pelo axioma da escolha, existe um conjunto $K \subset [0, 1[$ tal que tem exactamente um ponto de cada classe de equivalência. Logo:

$$\Re = \bigcup_{y \in Q} \{y + K\} \qquad \text{e} \qquad y_1 \neq y_2 \quad \Rightarrow \quad \{y_1 + K\} \cap \{y_2 + K\} = \varnothing \quad (y_1, y_2 \in Q)$$

Suponhamos que $K \in \mathcal{B}$. Então é aplicável a medida de Lebesgue. Como $Q$ é numerável, temos:

$$+\infty = \mu(\Re) = \sum_{y \in Q} \mu(y + K) = \sum_{y \in Q} \mu(K) \quad \Rightarrow \quad \mu(K) \neq 0$$

$\boxed{\text{Propriedade 5.}}$

Mas:

$$\bigcup_{y \in [0,1[ \cap Q} (y + K) \subset [0,2[$$

Logo:

$$\sum_{y \in [0,1[ \cap Q} \mu(y + K) \le \mu([0,2[) = 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{y \in [0,1[ \cap Q} \mu(K) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(K) = 0$$

Chegamos a uma contradição. Logo, $K \notin \mathcal{B}$.

■

# 3 Funções Mensuráveis

**Definição 3-1**

Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis. A função $f$: $X \to X'$ diz-se uma *função $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ mensurável* se:

$$f^{-1}(X') \in \mathcal{A} \quad \text{para todo o} \quad X' \in \mathcal{A}' \quad (\text{ou seja } f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A})$$

■

**Exemplo 3-1**

Qualquer mapeamento constante $f: X \rightarrow X'$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ mensurável.

□

**Exemplo 3-2**

O Exemplo 1.14 estabelece uma função mensurável.

□

**Teorema 3-1**

Seja $f: X \rightarrow X'$ uma *função* $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ mensurável. Então, para toda a medida $\mu$ em $\mathcal{A}$,

$$\mu'(A') = \mu(f^{-1}(A'))$$

define uma medida $\mu'$ em $\mathcal{A}'$.

■

**Exemplo 3-3**

Seja o espaço de medida ($\Re$, $\mathcal{A}$, $\mu$) em que $\mathcal{A}$ é a $\sigma$-álgebra que contém todos os subconjuntos $A$ numeráveis ou não-numeráveis de $\Re$ e $\mu(A)$ = 0 ou 1 conforme $A$ ou $\overline{A}$ é numerável. Seja $X' = \{0, 1\}$ e $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(X')$ e a função $f: X \rightarrow X'$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in \overline{Q} \end{cases}$$

Provar que a função $f$ é $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ mensurável e determinar $f(\mu)$.

Temos:

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{0\}) = Q \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{1\}) = \overline{Q} \in \mathcal{A}; \quad f^{-1}(\{0,1\}) = \Re \in \mathcal{A}.$$

Logo, a função é mensurável e $\mu' = f(\mu)$ é igual a 0 para $\varnothing$ e $\{0\}$ e igual a 1 para $\{1\}$ e $\{0,1\}$.

□

**Exemplo 3-4**

Sejam dados os espaços mensuráveis [3] ($\Re$,$\mathcal{B}$), ($\{0,1\}$, $\mathcal{P}(\{0,1\})$), um conjunto $A \in \mathcal{B}$ e a função indicadora $I_A: \Re \rightarrow \{0,1\}$:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \overline{A} \end{cases}$$

Temos:

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{0\}) = \overline{A} \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{B}; \quad f^{-1}(\{0,1\}) = \Re \in \mathcal{B}.$$

Logo, a função indicadora é $\mathcal{B}$ - $\mathcal{P}(\{0,1\})$ mensurável.

□

[3] Note-se que pelo Teorema 1-3 a definição de $\mathcal{B}$ pode exprimir-se em termos de vários conjuntos suporte de $\Re$: $O$, $F$, $C$... Assim, usa-se a notação ($\Re$,$\mathcal{B}$). (Isto é abusivo porque já vimos que há subconjuntos de $\Re$ que não pertencem a $\mathcal{B}$.)

**Definição 3-2**

Seja ($X$, $\mathcal{A}$) um espaço mensurável e ($\Re$, $\mathcal{B}$) o espaço mensurável de Borel em $\Re$. A função $f$: $X \to \Re$ diz-se uma *função mensurável* se:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{para todo o} \quad B \in \Re \quad (\text{ou seja } f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A})$$

■

Pode-se mostrar que o conjunto das funções mensuráveis é fechado relativamente à adição, subtracção, multiplicação e divisão.

# 4 Medida de Probabilidade

**Definição 4-1**

Seja $P$ uma função de conjuntos definida num campo $\mathcal{F}$. A função é uma *medida de probabilidade* se satisfaz às condições seguintes:

i. $0 \le P(A) \le 1$ para todo o $A \in \mathcal{F}$;
ii. $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$;
iii. Dada uma sequência de conjuntos disjuntos $A_1$, $A_2$, ..., com $A_i \in \mathcal{F}$, tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (*aditividade numerável*).

■

**Exemplo 4-1**

Seja o campo $\mathcal{B}_0$ do Exemplo 1.11, definido em ]0, 1]. É possível mostrar que a medida de Lebesgue $P(A) = \overline{m}(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ é não só finita mas também numeravelmente aditiva; logo, $P$ define uma medida de probabilidade no campo $\mathcal{B}_0$.

□

É possível provar que uma medida de probabilidade definida num campo $\mathcal{F}$ pode estender-se à $\sigma$-álgebra gerada por $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Este aspecto é importante visto estarmos interessados em lidar com aditividade numerável para a medida de probabilidade. Assim:

**Definição 4-2**

Se $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$ e $P$ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$, então o triplo ($X$, $\mathcal{A}$, $P$) é chamado um *espaço de medida de probabilidade*, ou simplesmente *espaço de probabilidade*.

■

**Teorema 4-1** (da extensão)

Uma medida de probabilidade definida num campo $\mathcal{F}$ tem uma extensão única para a $\sigma$-álgebra gerada por $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

■

A referência [2] indica como construir a extensão.

**Exemplo 4-2**

Seja $\Omega$ = ]0, 1]. Para cada $\omega \in \Omega$ vamos associar a expansão diádica infinita e numerável:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2} \qquad \text{com} \qquad d_n(\omega) \in \{0,1\}$$

(i.e. são os bits da representação binária infinita)

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">0</td><td colspan="4" align="center">1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">00</td><td colspan="2" align="center">01</td><td colspan="2" align="center">10</td><td colspan="2" align="center">11</td></tr>
<tr><td>000</td><td>001</td><td>010</td><td>011</td><td>100</td><td>101</td><td>110</td><td>111</td></tr>
</table>

Para cada sequência $u_1, ..., u_n$, de comprimento $n$ (tal como no lançamento de uma moeda $n$ vezes), temos:

$$\{\omega : d_i(\omega) = u_i,\, i = 1,...,n\} = \left]\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{2^i},\ \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right].$$

Logo, usando a medida de Lebesgue-Borel como medida de probabilidade, temos:

$$P(\{\omega : d_i(\omega) = u_i,\, i = 1,...,n\}) = \frac{1}{2^n}$$

Considere-se o conjunto:

$$N = \left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) = \frac{1}{2}\right\}$$

Os pontos do conjunto $N$ são chamados *números normais*. A Lei Forte dos Grandes Números, aplicada a esta situação, escreve-se $P(N) = 1$. Ora, é possível provar que $\overline{N}$ é LB-nulo, logo $P(\overline{N}) = 0$.

□

# Bibliografia


1. Bauer H (1972) Probability Theory and Elements of Measure Theory. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
2. Billingsley P (1979) Probability and Measure. John Wiley & Sons, Inc.
3. Papoulis A (1965) Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mc Graw Hill.
4. Rao MM (1987) Measure Theory and Integration. John Wiley & Sons, Inc.
5. Rudin W (1987) Real and Complex Analysis. McGraw-Hill.
6. Taylor SJ (1966) Introduction to Measure and Integration. Cambridge University Press.