Dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático: Um estudo com alunos do 10.º ano de escolaridade

Lara Gigante Caldas da Silva

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026

Dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático: Um estudo com alunos do 10.º ano de escolaridade

Lara Gigante Caldas da Silva

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

2026

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar Convidada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

À minha avó, cuja força e carinho permanecem em mim.

Agradecimentos

Em vias de finalizar uma das etapas mais importantes da minha vida, sinto-me na necessidade de reconhecer que nenhum caminho se percorre sozinho – e este ano não foi exceção. Entre Viana, Porto e todos os espaços pelo meio, encontrei pessoas que me fortaleceram, me orientaram e me deram ânimo nos momentos certos, pessoas às quais tenho muito a agradecer.

À professora Fátima Delgado, cuja orientação atenta e incansável marcou todo este trabalho: a paciência, o cuidado com que reviu cada detalhe e a forma como acreditou no meu potencial fizeram toda a diferença! Nunca serei grata o suficiente por este ano de aprendizagens.

À orientadora cooperante, pelo acompanhamento durante o estágio: a sua orientação constante, os desafios que me propôs, a confiança que depositou em mim e os comentários construtivos ajudaram-me a crescer profissionalmente e a aperfeiçoar as minhas competências como futura docente. Sou grata pelo conhecimento transmitido e pelo ambiente estimulante e acolhedor criado ao longo deste percurso.

À Tatiana, enquanto minha amiga e colega de estágio, pela força e pelo apoio que me deu ao longo destes últimos meses, pelo companheirismo e pelas experiências que compartilhamos. Não tenho palavras para descrever o modo como a tua presença tornou cada dia mais leve, cada desafio mais fácil e cada conquista mais especial! Assim, confesso que nunca pensei sentir tantas saudades ao ver este percurso chegar ao fim, em grande parte por tua causa. Do fundo do coração, obrigada!

Aos professores do agrupamento onde realizei a Prática de Ensino Supervisionada, que nos acolheram como se sempre tivéssemos pertencido a esta grande família desde o primeiro momento, fazendo sempre questão de nos tratarem como iguais, de nos incluírem nas conversas, decisões, atividades e reuniões realizadas ao longo deste ano. O meu mais profundo agradecimento por reforçarem que o desejo de aprender nunca se esgota e que, quando nos dedicamos ao que gostamos, o cansaço dá lugar à realização!

Aos alunos das turmas que acompanhei, que, apesar dos desafios significativos que apresentaram ao longo deste percurso, o trabalho diário com cada um deles transformou-se numa oportunidade de crescimento e num prazer genuíno de ensinar. Muito obrigada por me ajudarem a confirmar, com total clareza, que desejo construir o

meu futuro nesta área. Por isso mesmo, a despedida desperta agora uma inevitável nostalgia, sinal do vínculo construído. Desejo-vos a todos muito sucesso!

Aos seis alunos que aceitaram participar neste estudo, o meu mais sincero obrigada! A vossa disponibilidade, boa vontade e a forma como se envolveram tornaram este percurso mais especial e significativo. Portanto, levo comigo tanto o contributo essencial que deram para este trabalho como também os momentos partilhados e tudo o que aprendi convosco.

A todas as pessoas que me acompanharam ao longo destes 5 anos, tanto na licenciatura como no mestrado, por me ajudarem a crescer e a alcançar aquilo que ambicionava.

Aos meus colegas de casa, por terem paciência nas piores horas e por me terem feito acreditar no meu potencial. Obrigada por me acompanharem nos dias de maior pressão, por saberem escutar sem julgamentos e por conseguirem transformar o caos em algo suportável. A vossa companhia trouxe equilíbrio, ânimo e uma sensação genuína de apoio que nunca esquecerei.

Por último mas não menos importante, a todos os membros da minha família, em especial aos meus pais e à minha irmã, pelo vosso apoio e incentivo, por tudo o que vivemos ao longo desta etapa que hoje se conclui. Àqueles que já não se encontram entre nós, que infelizmente não estão aqui fisicamente para assistir a esta conquista partilhada, sou verdadeiramente grata pelo tempo que passamos juntos, em especial à minha avó Lúcia, cuja ternura contagiava e cuja luz continua a guiar-me ao longo dos momentos mais desafiantes. Esta família jamais se esquecerá de ti!

Agora, juntos, chegamos ao final.

Resumo

O raciocínio matemático é uma das capacidades matemáticas transversais destacadas nas orientações curriculares de Matemática para o ensino secundário, sublinhando-se a importância de um trabalho que promova a exploração de situações problemáticas, a utilização de estratégias heurísticas, a formulação e validação de conjeturas, bem como a justificação dos processos de resolução utilizados. De entre a diversidade de processos que caracterizam o raciocínio matemático, evidenciam-se, de forma particular, a generalização, enquanto processo de extensão de conclusões a partir da análise de casos particulares, e a justificação, enquanto processo de sustentação e validação do raciocínio produzido. Face às dificuldades evidenciadas pelos alunos neste domínio, e com vista a potenciar o seu desenvolvimento, as tarefas matemáticas assumem um papel central no processo de aprendizagem. Neste sentido, o presente estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, tem como objetivo compreender as dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático. Os participantes são seis alunos do 10.º ano de escolaridade, a frequentar a disciplina de Matemática A, selecionados tendo em conta diferentes níveis de desempenho académico, bem como a sua capacidade de comunicação e de explicitação do seu pensamento durante a resolução das tarefas. Os dados foram recolhidos a partir de: i) gravações áudio de três entrevistas individuais com tarefas; ii) gravação áudio de uma entrevista final individual; e iii) produções escritas realizadas pelos alunos ao longo das entrevistas. As principais dificuldades identificadas situaram-se, sobretudo, ao nível da linguagem e do cálculo algébrico, podendo estas decorrer de fragilidades na utilização da linguagem simbólica e na aplicação de propriedades e técnicas de cálculo algébrico, bem como de um maior à-vontade dos alunos no trabalho com valores numéricos comparativamente ao trabalho com expressões algébricas. Os resultados sugerem que os alunos ainda não possuem capacidade de abstração suficiente para compreender conceitos mais complexos sem um suporte concreto, necessitando de exemplos práticos que lhes permitam construir o conhecimento matemático de forma gradual.

Palavras-chave: raciocínio matemático, generalização, justificação, dificuldades, ensino secundário

Abstract

Mathematical reasoning is one of the transversal mathematical competencies highlighted in the curricular guidelines for secondary school Mathematics, emphasizing the importance of work that promotes the exploration of problem situations, the use of heuristic strategies, the formulation and validation of conjectures, as well as the justification of the resolution processes used. Among the diversity of processes that characterize mathematical reasoning, particular emphasis is placed on generalization, as a process of extending conclusions from the analysis of particular cases, and on justification, as a process of substantiating and validating the reasoning produced. Given the difficulties demonstrated by students in this domain, and with a view to enhancing their development, mathematical tasks play a central role in the learning process. In this sense, the present study, of a qualitative and interpretative nature, aims to understand students' difficulties, and their respective causes, in carrying out tasks involving mathematical reasoning. The participants are six 10th-grade students attending the Mathematics A course, selected based on different levels of academic performance, as well as their capacity for communication and for explaining their thinking during task resolution. Data were collected from: i) audio recordings of three individual interviews with tasks; ii) an audio recording of a final individual interview; and iii) written productions made by the students throughout the interviews. The main difficulties identified were located, above all, at the level of language and algebraic calculation, which may stem from weaknesses in the use of symbolic language and in the application of algebraic properties and calculation techniques, as well as from students' greater ease in working with numerical values compared to working with algebraic expressions. The results suggest that students do not yet possess sufficient capacity for abstraction to understand more complex concepts without concrete support, requiring practical examples that allow them to construct mathematical knowledge gradually.

Keywords: mathematical reasoning, generalization, justification, difficulties, secondary education

Índice

Lista de Gráficos vii

Lista de Figuras viii

Lista de Abreviaturas x

1. Introdução 1

2. Enquadramento Teórico 6

2.1. Raciocínio matemático 6

2.2. Processos de Raciocínio Matemático 10

2.2.1. Generalização 13

2.2.2. Justificação 14

2.3. Tarefas envolvendo raciocínio matemático 16

3. Métodos e procedimentos de recolha de dados 21

3.1. Opções Metodológicas 21

3.2. Caracterização do contexto escolar 22

3.3. Escolha dos participantes 23

3.4. Procedimentos de recolha de dados 24

3.4.1. Entrevistas com tarefas 25

3.4.1.1. Tarefa da primeira entrevista 27

3.4.1.2. Tarefa da segunda entrevista 31

3.4.1.3. Tarefa da terceira entrevista 33

3.4.2. Entrevista final 35

3.4.3. Questões de natureza ética 36

4. Apresentação e discussão de resultados 38

4.1. Tarefa 1 38

4.1.1. Tarefa 1 – Parte 1 38

4.1.2. Tarefa 1 – Parte 2 44

4.2. Tarefa 2 55

4.3. Tarefa 3 61
4.4. Perceções de alunos sobre dificuldades sentidas 72
4.4.1. Dificuldades na realização das tarefas e respetivas causas 72
5. Conclusões e recomendações 80
5.1. Síntese do estudo 80
5.2. Dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo raciocínio matemático 81
5.3. Considerações finais 86
Referências Bibliográficas 91
Anexos 96
Anexo 1 - Proposta de resolução da Tarefa 1 96
Anexo 2 - Proposta de resolução da Tarefa 2 98
Anexo 3 - Proposta de resolução da Tarefa 3 99
Anexo 4 - Guião para as entrevistas finais individuais 100
Anexo 5 - Documento de consentimento informado 101

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Classificações da turma na disciplina de Matemática A no 1.º período 24

Lista de Figuras

Figura 1 - Raciocinar e pensar (Ponte et al., 2020, p.7) 7
Figura 2 - Raciocínio informal e formal com e sem compreensão (Ponte & Quaresma, 2014, p. 1468) 10
Figura 3 - Modelo do processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011, p. 11). Adaptado de Coelho (2023, p. 26) 10
Figura 4 - Processos do raciocínio matemático 11
Figura 5 - Esquema dos aspetos do raciocínio matemático segundo Jeannotte e Kieran (2017). Adaptado de Coelho (2023, p. 27) 12
Figura 6 - Tipos de formalidade e níveis de complexidade da justificação (Mata-Pereira, 2018, p. 13) 15
Figura 7 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p.8) 17
Figura 8 - Princípios orientadores para a elaboração de tarefas (REASON, 2019) 19
Figura 9 - Enunciado da Tarefa 1 28
Figura 10 - Enunciado da Tarefa 2 31
Figura 11 - Enunciado da Tarefa 3 33
Figura 12 - Organização temporal do processo de recolha de dados 36
Figura 13 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 1, parte 1) 38
Figura 14 - Resposta à alínea a) (Tarefa 1, parte 1 - Hélia) 41
Figura 15 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 1, parte 1) 42
Figura 16 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 1 - Marco) 43
Figura 17 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 1 - Rodrigo) 43
Figura 18 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 1, parte 2) 44
Figura 19 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 1, parte 2) 46
Figura 20 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 2 - Jéssica) 48
Figura 21 - Enunciado da alínea c) (Tarefa 1, parte 2) 48
Figura 22 - Enunciado da alínea d) (Tarefa 1, parte 2) 52
Figura 23 - Resposta à alínea d) (Tarefa 1, parte 2 - Hélia) 53
Figura 24 - Enunciado da Tarefa 2 55
Figura 25 - Início da resposta (Tarefa 2 - Elisa) 57
Figura 26 - Início da resposta (Tarefa 2 - Hélia) 57
Figura 27 - Resposta final (Tarefa 2- Hélia) 60
Figura 28 - Resposta final (Tarefa 2 - Rodrigo) 60
Figura 29 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 3) 61

Figura 30 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 3) 64
Figura 31 - Resposta à alínea b) (Miguel - Tarefa 3) 66
Figura 32 - Enunciado da alínea c) (Tarefa 3) 67
Figura 33 - Enunciado da alínea d) (Tarefa 3) 69
Figura 34 - Resposta à alínea d) (Hélia - Tarefa 3) 71
Figura 35 - Dificuldades manifestadas pelos alunos e respetivas causas 82

Lista de Abreviaturas

FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
REASON	RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E FORMAÇÃO DE PROFESSORES
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

1. Introdução

Ao longo do meu percurso académico, a Matemática sempre assumiu um lugar de destaque nas minhas preferências disciplinares, surgindo como uma área pela qual manifestei particular interesse e aparente facilidade. Deste modo, desde cedo que a palavra raciocínio esteve presente na minha vida quotidiana em geral, nomeadamente no contexto escolar, frequentemente associada à resolução de problemas. Contudo, apesar de me soar familiar, o significado deste conceito permaneceu, durante vários anos, pouco claro na minha própria experiência enquanto aluna.

Nos primeiros anos de escolaridade, a Matemática parecia-me, sobretudo, uma disciplina de caráter mecânico, baseada na repetição de procedimentos e na aplicação de regras previamente ensinadas e treinadas. Esta perceção não se tratava apenas de algo a nível pessoal, mas também alimentado pelo próprio contexto educativo: era-me frequentemente transmitida a ideia de que para ser boa a Matemática seria necessário repetir o mesmo exercício diversas vezes até compreender como chegar à resposta. Nesse sentido, tal conceção reforçava a crença de que a mecanização constituía a principal via para o sucesso nesta área. Contudo, a verdade é que esta visão simplificada desconsiderava a verdadeira natureza da Matemática enquanto disciplina de construção do conhecimento, intimamente ligada ao raciocínio, à interpretação e à compreensão. Assim, somente no momento de transição do 10.º para o 11º. ano de escolaridade é que comecei a compreender com mais clareza que raciocinar matematicamente não se limita ao domínio da linguagem algébrica nem à execução automática de procedimentos; implica interpretar situações, estabelecer relações, formular e justificar estratégias, argumentar e construir significados. Esta consciencialização alterou significativamente o modo como passei a encarar a disciplina e revelou-se determinante nas minhas escolhas académicas futuras, conduzindo-me à realização da licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP) e, posteriormente, ao percurso que culmina no presente relatório de estágio.

No ano letivo 2025/2026, tive a oportunidade de realizar a minha Prática de Ensino Supervisionada (PES) no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Ao longo desta experiência, tive contacto com duas turmas do 9.º ano de escolaridade, uma turma do 10.º ano e, por fim, uma turma do 12.º ano, ainda que o contacto com esta última tenha sido mais reduzido.

Desde início, tornou-se evidente para mim que muitos alunos revelavam muitas dificuldades quando confrontados com tarefas que exigiam mais do que a simples aplicação de fórmulas ou procedimentos. Particularmente, observei que a necessidade de justificar uma resposta e explicar um processo ou uma estratégia constituía um obstáculo significativo para a maioria dos estudantes. Paralelamente, verifiquei que o processo de generalização representava, igualmente, um desafio recorrente, nomeadamente no momento de transição de casos particulares para um conjunto de objetos mais amplo, devido à sensação de desconforto dos alunos em trabalhar com linguagem algébrica. Foram várias as situações nas quais este tipo de dificuldades se tornou evidente nos alunos. Sempre que eram propostas tarefas que exigiam a justificação de respostas, a explicitação do pensamento utilizado ou a simples argumentação, muitos alunos demonstravam insegurança e resistência perante este tipo de questões. Frequentemente, procuravam respostas imediatas e objetivas, manifestando desconforto quando lhes era solicitado que explicassem os procedimentos utilizados ou fundamentassem as suas conclusões. Em vários momentos, foi possível constatar que a simples presença de expressões como "justifica a tua resposta", "explica o teu raciocínio" ou "mostra como pensaste" gerava apreensão nos alunos, que tendiam a interpretar estas solicitações como particularmente difíceis, independentemente da complexidade da tarefa em si.

Paralelamente, também se verificou, ao longo do ano letivo, uma forte tendência para a memorização de fórmulas, regras e procedimentos, frequentemente dissociada da compreensão dos conceitos subjacentes. Em diversas ocasiões, os alunos revelaram capacidade para reproduzir expressões algébricas ou aplicar regras previamente trabalhados, mas evidenciaram dificuldades quando confrontados com situações que exigiam interpretar o significado dessas expressões, adaptá-las a novos contextos ou estabelecer relações entre diferentes representações matemáticas. Além disso, este tipo de dificuldades tornava-se especialmente visível no processo de generalização. A transição de um registo numérico ou aritmético para um registo algébrico constituía, para muitos alunos, um obstáculo significativo. Quando lhes era pedido que expressassem relações gerais através de linguagem algébrica, era frequente observarem-se bloqueios e hesitações. Muitos alunos conseguiam trabalhar com estas expressões quando atribuíam voluntariamente valores numéricos às variáveis, mas encontravam dificuldades em formular uma expressão geral ou em atribuir significado às variáveis envolvidas. Tal situação sugeria uma compreensão predominantemente operacional da Matemática, centrada na execução de procedimentos, em detrimento

de uma compreensão mais relacional e concetual dos objetos matemáticos. Estas observações levaram-me a refletir sobre a importância de proporcionar oportunidades regulares para o desenvolvimento do raciocínio matemático – através da argumentação, da justificação e da generalização –, apoiado pela comunicação matemática enquanto processo que permite explicitar e partilhar esse raciocínio.

Ademais, estas evidências recordaram-me da minha própria experiência enquanto aluna, nomeadamente as dificuldades que enfrentei em questões que exigiam uma justificação dos métodos utilizados para chegar à resposta ou uma generalização de conclusões retiradas a partir da utilização de casos particulares para um universo mais amplo. Percebendo que muitos dos alunos atualmente enfrentam obstáculos semelhantes, revelou-se, então, a pertinência de investigar, de forma mais aprofundada, as dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo raciocínio matemático. De facto, no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017) o raciocínio surge como uma das áreas de competências visadas neste documento curricular, referindo que as "competências na área de Raciocínio dizem respeito aos processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento. (p. 23). Na descrição desta competência, é igualmente enfatizada a necessidade de "interpretar informação, planear e conduzir pesquisas" de forma a "gerir informações e tomar decisões" e "desenvolver processos conducentes à construção de produtos e conhecimento, usando recursos diversificados" (Martins et al., 2017, p. 23). Deste modo, é realçado o papel crucial da interpretação para uma boa compreensão das tarefas e escolha de estratégias adequadas.

Além do PASEO, as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023), orientação em vigor para o 10.º ano de escolaridade no ano em que realizei a PES, valorizam o desenvolvimento do raciocínio matemático, defendendo que o "aluno deve ser sistematicamente incentivado a explorar situações problemáticas, a usar abordagens heurísticas, a formular e a validar conjeturas, a justificar processos de resolução e a encadear raciocínios" (p. 5). Deste modo, pretende-se que "o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma" (p. 5), reconhecendo-se que "o raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas" (p. 2).

Nesta linha de pensamento, o presente estudo tem como objetivo compreender as dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático. Para tal, foram definidas duas questões de investigação:

i) Quais são as dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático?

ii) Quais são as suas causas?

Este relatório encontra-se dividido em cinco capítulos principais. Primeiramente, é apresentada a presente secção, designada "Introdução", na qual constam o objetivo do estudo e as respetivas questões de investigação, bem como a relevância do mesmo e as motivações pessoais subjacentes à sua realização, incluindo ainda uma breve descrição da estrutura do documento.

De seguida, surge o segundo capítulo, intitulado "Enquadramento Teórico", que apresenta um enquadramento concetual e teórico que sustenta o presente estudo. Neste capítulo são abordados e analisados os principais referenciais teóricos e contributos da literatura considerados pertinentes para a temática em estudo, permitindo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos envolvidos e das perspetivas que fundamentam a investigação. Deste modo, procura-se estabelecer uma base teórica sólida que enquadre e suporte a análise desenvolvida ao longo do trabalho.

Posteriormente, no capítulo seguinte, denominado "Métodos e procedimentos de recolha de dados", são justificadas as principais opções metodológicas adotadas no âmbito do estudo. Além disso, apresenta-se o contexto em que a investigação foi realizada, bem como os critérios subjacentes à seleção dos participantes. Ademais, são descritas as tarefas propostas e a forma como estas foram organizadas ao longo do processo de recolha de dados, explicitando-se ainda os instrumentos utilizados e os procedimentos adotados para a sua implementação.

A seguir, no quarto capítulo, intitulado "Apresentação e discussão de resultados", é realizada a análise dos dados recolhidos à luz das questões de investigação definidas, tendo igualmente em consideração o enquadramento teórico apresentado no segundo capítulo.

Por fim, no quinto capítulo, denominado "Conclusões e recomendações", são apresentadas as principais conclusões do estudo, procurando responder às questões de investigação inicialmente formuladas. Além disso, é igualmente realizada uma

reflexão crítica sobre o trabalho desenvolvido, considerando as suas implicações para a prática profissional e são apresentadas recomendações decorrentes dos resultados obtidos, bem como sugestões para futuras investigações no âmbito da temática em estudo.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo, apresentam-se os aspetos teóricos que suportam a temática em estudo. Como o objetivo desta investigação consiste em compreender as dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático, organizei o enquadramento teórico em três subcapítulos: i) Raciocínio matemático; ii) Processos de raciocínio matemático e iii) Tarefas envolvendo raciocínio matemático.

2.1. Raciocínio matemático

As orientações curriculares de Matemática do ensino secundário sublinham, cada vez mais, a importância de os alunos desenvolverem uma relação ativa e significativa com a disciplina, sendo capazes de estabelecer conexões entre conceitos, interpretar situações problemáticas e construir o seu próprio conhecimento através de conhecimentos já existentes – em detrimento de uma abordagem mais mecânica e procedimental. Deste modo, o raciocínio matemático assume um papel fundamental na aprendizagem e no ensino da Matemática, constituindo uma das capacidades matemáticas transversais presentes nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) desde o 1.º ano de escolaridade, o que evidencia o seu lugar central ao longo de toda a escolaridade obrigatória, continuando a ser valorizado nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023). Assim, é de esperar que um professor (ou um futuro professor) se questione a si próprio de que forma é que poderá contribuir para a promoção do desenvolvimento desta capacidade nos seus alunos.

Primeiramente, é de vital importância explorar o próprio conceito e o(s) seu(s) significado(s). O que é que significa raciocinar? Segundo o dicionário da língua portuguesa[1], esta palavra, aparentemente simples e bastante utilizada na nossa vida quotidiana, possui um significado multifacetado, como podemos observar de seguida: “1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. ponderar, refletir, pensar; 4. apresentar razões; 5. concluir”. Naturalmente, num primeiro momento, a questão que se coloca é se raciocinar e pensar são, ou não, sinónimos. Neste sentido, e como procuram mostrar na Figura 1, Ponte et al. (2020) afirmam que “se deve atribuir a “raciocinar” um

[1] https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/raciocinar

significado mais restrito que "pensar"" (p. 1). Ainda nesta perspetiva, os autores afirmam que "raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (p. 1). Assim, nem todas as manifestações do pensamento implicam a existência de raciocínio, uma vez que este pressupõe um encadeamento lógico e inferencial de ideias.

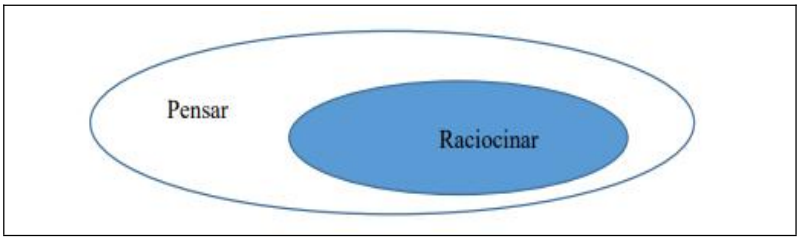


Figura 1 - Raciocinar e pensar (Ponte et al., 2020, p.7)

Numa abordagem de caráter lógico-dedutivo, Bulhões (2007) afirma que "raciocinar é pensar de acordo com princípios lógicos, de modo que partindo de determinadas premissas chega-se, necessariamente, a determinadas conclusões" (p. 256).

Russel (1999) entende que raciocínio matemático consiste naquilo que "usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" (p. 1), tratando-se de uma "ferramenta para compreender a abstração" (p. 1). Já Oliveira (2008) concetualiza raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3), evidenciando a sua natureza cognitiva e processual. Numa perspetiva centrada na atividade do sujeito, Lannin et al. (2011) consideram o raciocínio como "um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10). Por sua vez, Jeannotte e Kieran (2017) introduzem uma dimensão comunicativa, ao definirem o raciocínio como "um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos" (p. 7), reforçando o seu caráter inferencial. Mata-Pereira e Ponte (2018) referem que o raciocínio matemático consiste em "utilizar informação matemática já conhecida para obter justificadamente, novas conclusões" (p. 782), enfatizando igualmente o encadeamento lógico entre o conhecimento prévio e as conclusões a retirar.

Como se constata, existe uma grande dificuldade em chegar a um consenso relativamente à definição de raciocínio matemático, decorrendo este obstáculo, em grande medida, da multiplicidade de significados que a palavra raciocínio assume noutros domínios do saber e na vida quotidiana. Aliás, mesmo considerando apenas a comunidade de investigação em Educação Matemática, o conceito de raciocínio matemático não é monolítico (Jeannotte & Kieran, 2017), além de ser frequentemente assumido, de forma implícita, que todos compreendem o que se entende por raciocínio matemático, não se vendo, assim, a necessidade de uma definição mais rigorosa e formal. Para Henriques (2012), esta dificuldade reside no facto de o termo ser "usado por investigadores com uma variedade de significados que estão associados a práticas e abordagens teóricas distintas" (p. 140).

Como podemos constatar, independentemente da definição proposta por cada autor, grande parte das abordagens apresentam um aspeto em comum: a produção de novos conhecimentos a partir de outros já existentes. Ou seja, para a maioria dos autores, raciocinar matematicamente consiste em partir de conhecimento prévio para obter conhecimento novo. O que mais difere nas várias definições de raciocínio matemático apresentadas está relacionado com "o modo como decorre a passagem do conhecimento prévio para o conhecimento novo" (Mata-Pereira, 2018, p. 7), levando-nos a questionar de que forma é que ocorre esse processo. Responder a esta questão é importante do ponto de vista matemático, tendo em conta que, nesta área, não se deve valorizar apenas o produto final, mas sim a forma como se geram novos conhecimentos, ou seja, o processo. Nesse sentido, Galdo Jiménez (2021) refere a existência de "três formas básicas através das quais a inferência é gerada: indução, dedução e abdução" (p. 204). Deste modo, partindo das características de cada um, é-nos possibilitada uma melhor compreensão daquilo que caracteriza o raciocínio matemático e os seus processos:

- *Raciocínio dedutivo:* O raciocínio dedutivo, desenvolvido do geral para o particular, está relacionado com a demonstração e a lógica, envolvendo essencialmente um encadeamento lógico de asserções acompanhado de justificações (Ponte et al., 2008). Assim, desde que esta cadeia de deduções esteja isenta de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7).

- *Raciocínio indutivo:* O raciocínio indutivo desenvolve-se partindo de casos particulares para casos gerais, estando presente o pensamento do tipo heurístico. De acordo com Pólya (1990), o raciocínio indutivo desempenha um papel

essencial na construção de conjeturas e generalizações, que só adquirem validade matemática após serem confirmadas por demonstrações dedutivas, como é o caso da indução matemática. Neste método, o foco incide na validação de uma propriedade para uma classe de objetos previamente definida, não envolvendo a procura de soluções, mas sim a formalização e consolidação do conhecimento matemático.

- *Raciocínio abdutivo:* O raciocínio abdutivo parte de "um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência" (Silva, 2009, p. 39), sendo o objetivo chegar a uma conclusão plausível. À semelhança do raciocínio indutivo, o raciocínio abdutivo leva à formulação de conjeturas, sendo estes dois tipos de raciocínio utilizados em conjunto (Rivera & Becker, 2009). Segundo Ponte et al. (2020), um facto insólito ou pouco comum, que motiva a formulação de uma conjetura através do raciocínio abdutivo, pode conduzir à identificação de casos específicos que permitem, por sua vez, a generalização de uma regra através do raciocínio indutivo.

Assim, raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico ou demonstrativo, incluindo também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões.

Paralelamente a esta abordagem, na ótica de Ponte e Quaresma (2014), o raciocínio pode assumir uma natureza formal e informal. Estes autores consideram que

> os raciocínios realizados podem ser informais se seguem formas de pensar ou de agir próprias do dia a dia ou formais quando atendem à definição dos objetos matemáticos envolvidos, às propriedades desses objetos, às convenções matemáticas ou a procedimentos matemáticos já anteriormente aprendidos (p. 1467).

A resolução de problemas implica a mobilização de processos de raciocínio que frequentemente "combinam aspetos formais e informais" (p. 1467). O grande desafio, segundo estes autores, consiste em promover uma articulação progressiva entre os processos de raciocínio informais e formais, defendendo que a valorização do raciocínio informal contribui para reduzir a distância entre o conhecimento informal dos alunos e o seu conhecimento formal em desenvolvimento (Figura 2).

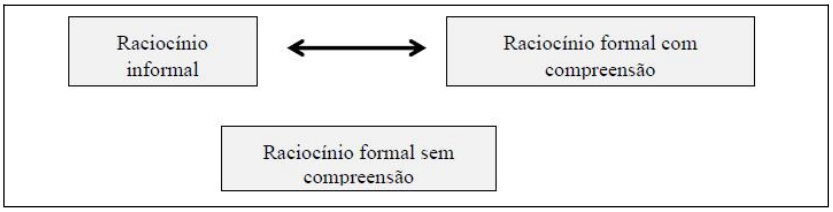


Figura 2 - Raciocínio informal e formal com e sem compreensão (Ponte & Quaresma, 2014, p. 1468)

2.2. Processos de Raciocínio Matemático

Mediante a sua natureza complexa e abrangente, o raciocínio matemático envolve a realização de uma variedade de processos (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Perante essa variedade, vários autores procuraram identificar os processos que lhe estão subjacentes. Neste âmbito, Lannin et al. (2011) destacam três processos fundamentais – conjeturar, generalizar e justificar –, definindo-os do seguinte modo:

(i) conjeturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras;

(ii) generalizar envolve identificar semelhanças entre casos e estender o raciocínio para além do intervalo que o originou;

(iii) justificar matematicamente implica apresentar um argumento lógico devidamente fundamentado em conceitos e ideias previamente assimilados.

Ainda neste âmbito, estes autores propõem um modelo sobre o processo de raciocínio matemático, concebido como um processo cíclico que, muitas vezes, se inicia com a formulação de conjeturas, que posteriormente são analisadas de forma a procurar razões que permitam a sua validação (Figura 3).

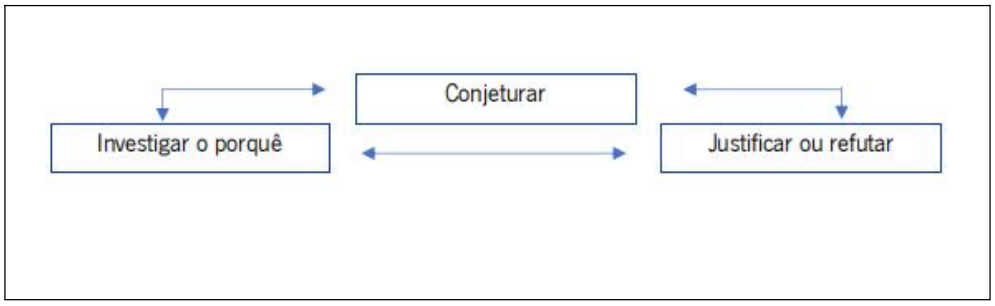


Figura 3 - Modelo do processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011, p. 11). Adaptado de Coelho (2023, p. 26)

Assim, conjeturar envolve "raciocinar sobre relações Matemáticas para desenvolver enunciados que provisoriamente se pensa serem verdadeiros, embora não se saiba se são" (Lannin et al., 2011, p. 12), podendo estas ser, ou não, generalizações. Assim, é importante investigar as razões que sustentam a sua veracidade, através da construção de justificações adequadas.

Numa concetualização mais abrangente, Jeannotte e Kieran (2017) identificam nove processos do raciocínio matemático, organizados em duas categorias – a deteção de semelhanças e diferenças e a validação –, sendo um dos processos entendido como transversal a ambas as categorias mencionadas. Tendo por base as ideias destas autoras, elaborei a Figura 4 para ilustrar essas categorias e os respetivos processos que lhes estão associados.

Categoria	**Processos**
Deteção de semelhanças e diferenças	Generalização Formulação de conjeturas Identificação de padrões Comparação Classificação
Validação	Justificação Prova Prova formal
Transversal a ambas	Exemplificação

Figura 4 - Processos do raciocínio matemático

De acordo com estas autoras, estes processos encontram-se fortemente interligados, influenciando-se mutuamente e contribuindo para o desenvolvimento de formas cada vez mais complexas de raciocínio matemático.

Além disso, Jeannotte & Kieran (2017) identificam dois aspetos do raciocínio matemático: o estrutural e o processual. O aspeto estrutural envolve o raciocínio

dedutivo, indutivo e abdutivo, enquanto o aspeto processual engloba a procura de semelhanças e diferenças, validação e exemplificação (Figura 5).

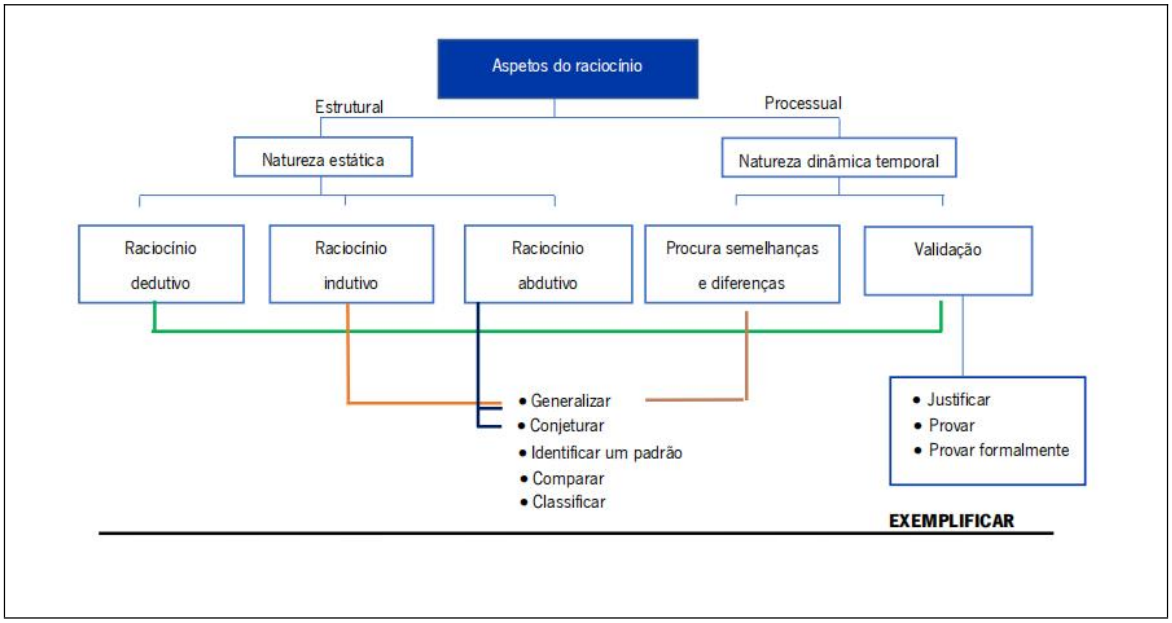


Figura 5 - Esquema dos aspetos do raciocínio matemático segundo Jeannotte e Kieran (2017). Adaptado de Coelho (2023, p. 27)

Embora sejam considerados dois aspetos do raciocínio matemático – o estrutural e o processual – de acordo com as autoras, ambos deverão ser encarados de um modo dialético, já que ambos contribuem para a sua construção mútua: "estruturas são parte do aspeto de processo do raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 7).

Tendo por base as ideias de Mata-Pereira e Ponte (2018), destaca-se, em seguida, os processos de generalização e justificação como processos - chave do raciocínio matemático. A este propósito, realçam que:

> Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas, sendo a generalização o processo de raciocínio envolvido. Por outro lado, a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações (p. 783).

2.2.1. Generalização

Generalizar é "um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo" (Ponte et al., 2020, p. 7). Segundo os mesmos autores, generalizar pode ter por base a observação, a construção, a transformação do conhecimento prévio ou combinações destas, assumindo formas como o reconhecimento de um padrão ou de uma propriedade comum a um conjunto de objetos, ou o alargamento do domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos. No seu dia-a-dia, os alunos estão naturalmente predispostos para fazer generalizações (Becker & Rivera, 2005). Contudo, estas generalizações surgem maioritariamente de forma imediata e baseadas em analogias, na identificação de padrões partindo de exemplos ou na experimentação de casos isolados ou não sistematizados (Henriques, 2010). Por esse motivo, usar a generalização de um modo matematicamente útil torna-se uma tarefa desafiante para muitos alunos (Zazkis et al., 2008). Deste modo, torna-se essencial promover o raciocínio matemático dos alunos, o que passa por criar situações em que a generalização assume um papel central (Kieran, 2007), com o intuito de levar os mesmos a apresentar generalizações baseadas em ideias, conceitos e propriedades matemáticas.

Assim, para compreender de que forma é que a generalização pode ser promovida no ensino e na aprendizagem da Matemática, torna-se pertinente clarificar a natureza deste processo e o modo como este se manifesta na construção do conhecimento matemático pelos estudantes. Neste sentido, Lannin et al. (2011) referem que "os alunos generalizam quando se concentram num aspeto específico de um problema ou de uma ideia e pensam sobre esse aspeto de forma mais ampla" (p.16). Ou seja, generalizar consiste em identificar aspetos ou padrões relevantes num problema e estendê-los a novas situações ou a um conjunto mais vasto de casos, permitindo aos discentes consolidar conceitos, relacionar ideias e transferir conhecimentos para novos contextos matemáticos. Nessa perspetiva, generalizar corresponde a "uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos" (Carraher et al., 2008, p. 3). Todavia, diversos estudos apontam para a existência de dificuldades por parte dos alunos na compreensão deste processo, dado que os mesmos "parecem não compreender a utilidade do processo de generalização para alargar o âmbito de aplicação de uma conjetura e têm tendência para considerar a generalização como um simples processo de formalização" (Henriques, 2010, p. 392).

Por fim, importa ainda notar que as generalizações que os alunos apresentam ou usam em sala de aula podem decorrer de diferentes abordagens e a diferentes níveis. Carraher et al. (2008) distinguem as mesmas conforme sejam de natureza empírica, "provenientes da análise de dados, à procura de tendências e estruturas subjacentes" (p. 18), ou de natureza teórica, que "resultam da aplicação de modelos aos dados" (p. 18).

2.2.2. Justificação

Para Ponte et al. (2020), justificar trata-se de "um processo essencial do raciocínio dedutivo" (p. 7), podendo ter por base definições, axiomas, propriedades, princípios gerais, representações ou combinações destas, e assumindo formas como a coerência lógica, o uso de exemplos genéricos, o uso de contraexemplos, a demonstração por exaustão ou por absurdo. Em termos mais amplos, este processo é entendido como a construção de uma sequência lógica de afirmações, em que cada uma se apoia em conhecimentos já estabelecidos, de modo a chegar a uma conclusão (Lannin et al., 2011).

De facto, os alunos tendem a aceitar conjeturas e generalizações como sendo válidas, sem sentirem a necessidade de as justificar (Henriques, 2010) e mesmo quando justificam, focam-se essencialmente no que lhes é familiar ou em ideias de que se recordam vagamente, sem prestar atenção às propriedades matemáticas envolvidas (Lithner, 2008). No entanto, a justificação permite aos alunos evidenciar e esclarecer o seu conhecimento matemático (NCTM, 2007), nomeadamente estabelecer conexões entre conceitos matemáticos, representações e procedimentos, resolver problemas e desenvolver novas ideias matemáticas (Brodie, 2010). Assim, é importante que os alunos compreendam, desde cedo, a necessidade de justificar no seu percurso escolar (NCTM, 2007), sustentando as suas justificações em propriedades, procedimentos e ideias matemáticas (Lannin et al., 2011).

Para Jeannotte e Kieran (2017), o processo de justificar não requer necessariamente uma argumentação com uma estrutura dedutiva, podendo mudar o valor epistémico das afirmações matemáticas apenas para provável ou muito provável. Já no que diz respeito ao processo de prova e prova formal, estes requerem uma argumentação dedutiva, alterando o valor epistémico para verdadeiro ou falso. A este nível, é crucial salientar a importância de proceder à distinção entre os processos *justificar* e *explicar*, os quais, muitas vezes, são interpretados como sinónimos: enquanto o processo de

justificar corresponde a um processo de raciocínio, envolvendo diferentes tipos de justificação que se tornam progressivamente mais formais à medida que os alunos avançam no nível de escolaridade e no conhecimento, explicar é um processo de comunicação cujo objetivo é clarificar aspetos do pensamento matemático.

Ainda que se pretenda que os alunos apresentem justificações baseadas em pressupostos matemáticos, nem todas as justificações apresentadas em sala de aula têm uma natureza puramente matemática. Na verdade, a justificação, por ser um conceito abrangente, engloba classificações de diferentes tipos e de diferentes naturezas. Um contributo para compreender as justificações dos alunos em sala de aula passa por considerar os seus níveis de formalidade e de complexidade (Figura 6), salvaguardando que, em qualquer um destes níveis, a justificação pode ainda ser considerada correta, parcialmente correta ou incorreta.

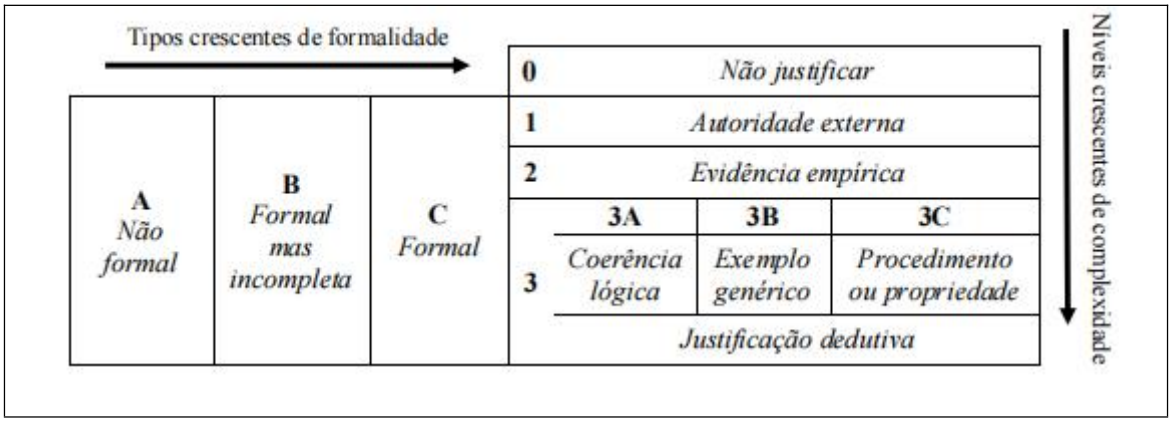


Figura 6 - Tipos de formalidade e níveis de complexidade da justificação (Mata-Pereira, 2018, p. 13)

Na figura 5, é possível observar que, relativamente à formalidade de uma justificação, existem três níveis distintos:

- Tipo A (Não formal), no qual a justificação não é apresentada de forma formal, ocorrendo, normalmente, em situações em que o aluno não utiliza conscientemente ou explicitamente um processo de justificação;
- Tipo B (Formal mas incompleta), no qual as inferências se baseiam apenas em elementos da situação em estudo, sendo utilizada em situações de formulação;
- Tipo C (Formal), no qual as justificações são suportadas através de uma cadeia de inferências lógicas relacionadas tanto com os dados da situação em estudo como pelo conhecimento considerado como verdadeiro. Este nível de formalidade é recorrente em situações de validação.

Importa salientar que o conceito de justificação formal implícito nestes três níveis não corresponde necessariamente à justificação matematicamente formal associada à demonstração matemática (Stylianides, 2007), mas sim ao que se entende por formal de acordo com a situação, nomeadamente com o ano de escolaridade e o conhecimento dos alunos.

Relativamente aos graus de complexidade de uma justificação, com base no trabalho de Mata-Pereira (2018), são identificados quatro níveis distintos:

- Sem justificação (nível 0): a resposta dada não inclui uma justificação;
- Justificação baseada numa autoridade externa (nível 1): a justificação depende de outros indivíduos ou de materiais de referência;
- Justificação baseada numa evidência empírica (nível 2): a justificação tem como base um caso particular;
- Justificação dedutiva (nível 3): a justificação possui uma natureza dedutiva, dividindo-se em três subníveis - coerência lógica (a justificação baseia-se em princípios lógicos), exemplo genérico (a justificação refere-se a um determinado exemplo) e justificação a partir de um procedimento ou propriedade (a justificação é fundamentada através de argumentos de natureza dedutiva que não estão relacionados com nenhum exemplo específico).

Assim, atendendo a que se aprende a raciocinar "raciocinando e analisando os raciocínios realizados" (Ponte & Sousa, 2010, p. 32), é importante que os alunos tenham oportunidades de justificar as suas respostas a vários níveis de formalidade e de complexidade.

2.3. Tarefas envolvendo raciocínio matemático

No ensino e aprendizagem da Matemática, as tarefas constituem ferramentas de mediação fundamentais, particularmente em abordagens que valorizam o papel ativo dos alunos na construção do conhecimento (Ponte, 2005). Assim, a seleção e a natureza das tarefas a propor assumem-se como aspetos centrais para promover o raciocínio matemático dos alunos (Brodie, 2010). Nesse sentido, Boavida et al. (2008) sugerem tarefas que facilitem o envolvimento dos alunos em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, ou seja, tarefas que promovam a resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e

argumentação. De acordo com as autoras, estas tarefas contribuem para uma compreensão global da Matemática, centrada na compreensão dos conceitos e no desenvolvimento do raciocínio matemático. Complementarmente, Brodie (2010) refere que as tarefas a propor devem considerar representações e resultados diversos, que possam culminar em desacordos e desafios, ou tarefas que permitam aos alunos investigar, conjeturar e justificar.

Deste modo, surge a questão: Que tipo de tarefas existem e como escolhê-las de modo a contribuir para a promoção do raciocínio matemático?

Para Ponte (2005), as tarefas atendem a duas dimensões consideradas fundamentais — o grau de desafio e o grau de estrutura (Figura 7). A primeira relaciona-se com a perceção do grau de dificuldade de uma questão, variando entre o desafio reduzido e elevado; a segunda é relativa ao grau de estrutura, variando entre tarefa aberta e fechada. Com base nestas características, o autor considera que se denomina por exercício uma tarefa que é fechada e admite um grau de desafio reduzido; por problema uma tarefa fechada e com grau de desafio elevado; por investigação uma tarefa aberta e de elevado grau de desafio; e por tarefa de exploração uma tarefa aberta, mas com grau de desafio reduzido.



Figura 7 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 8)

De facto, no que diz respeito à natureza das tarefas, vários estudos identificam a resolução de problemas e as tarefas de exploração e investigação como promissoras para promover o raciocínio matemático dos alunos (e.g., Azevedo, 2009; Henriques, 2010; Ponte & Quaresma, 2016). Destas tarefas, destacam-se particularmente as tarefas de exploração como centrais para promover processos de raciocínio matemático como a generalização e a justificação. Neste sentido, Azevedo (2009)

destaca que a resolução de tarefas desta natureza promove a formulação, teste e justificação de generalizações e Henriques (2010) reforça ainda que estas tarefas levam os alunos a compreender a necessidade de justificar as conjeturas que pensam ser verdadeiras.

Paralelamente, no que diz respeito ao grau de exigência das atividades propostas aos alunos, é importante reconhecer que nem todas precisam de apresentar um nível elevado (Brodie, 2010). Aliás, a manutenção constante de tarefas muito exigentes, além de ser difícil de concretizar em tempos letivos limitados, pode também contribuir para a desmotivação e a perda de interesse por parte de muitos alunos (Brodie, 2010). Assim, o grau de desafio de uma tarefa deve ser cuidadosamente considerado na sua elaboração, tendo em conta os alunos a quem se destina. Por um lado, é importante propor tarefas desafiantes, uma vez que estas estimulam o raciocínio matemático. Por outro lado, é fundamental incluir tarefas de menor exigência, que favoreçam a consolidação de propriedades e conceitos matemáticos, bem como situações que promovam um envolvimento mais acessível dos alunos nas atividades em sala de aula. Deste modo, a combinação de tarefas com diferentes níveis de exigência e desafio revela-se fundamental para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. No entanto, mesmo com a diversidade de tarefas que podem ser concebidas ou propostas, não há uma garantia absoluta de que estas contribuam efetivamente para o desenvolvimento desse raciocínio. Muitas vezes, os alunos apresentam dificuldades em responder a tarefas que envolvem o raciocínio matemático por não terem por hábito realizar tarefas exploratórias e explorar situações matemáticas (Brodie, 2010). Porém, a realização de tarefas de natureza exploratória podem promover “uma compreensão vívida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação e facilita, igualmente, o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas” (Henriques, 2010, p. 373).

De forma a promover o raciocínio matemático, o projeto REASON (Raciocínio Matemático e Formação de Professores) desenvolveu princípios (gerais e específicos) para a elaboração de tarefas cujo objetivo é promover o raciocínio matemático (Figura 8).

Princípios gerais	1. Incluir questões que permitem uma variedade de estratégias de resolução;
	2. Incluir questões que envolvem uma variedade de representações;
	3. Incluir questões que incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados;
Princípios específicos para promover a *Generalização*	4. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na observação de semelhanças e diferenças entre objetos;
	5. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações a partir do conhecimento prévio;
	6. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações por transformação das condições da situação;
Princípios específicos para promover a *Justificação*	7. Incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas;
	8. Incluir questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente, com base na coerência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contraexemplos, por exaustão ou absurdo;
	9. Incluir questões que solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas;
	10. Incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros.

Figura 8 - Princípios orientadores para a elaboração de tarefas (REASON, 2019)

Importa salientar que os princípios orientadores para a elaboração de tarefas sistematizados na Figura 8 serviram de base para a seleção das três tarefas que integram este estudo, procurando que tanto os princípios gerais como os específicos relativos à promoção da generalização e à promoção da justificação se concretizassem nas mesmas, constituindo, assim, oportunidades gratificantes para o

desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. A apresentação e análise detalhada de cada uma das tarefas propostas será feita no capítulo seguinte.

3. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, são apresentadas as opções metodológicas que orientaram o estudo. Seguidamente, procede-se à caracterização do contexto escolar e à apresentação dos participantes selecionados, acompanhada de uma breve descrição da turma. Além disso, são descritos os procedimentos de recolha de dados, designadamente as entrevistas com tarefas e as respetivas tarefas utilizadas, bem como a entrevista final. Por último, são enunciadas as medidas adotadas para salvaguardar as questões de natureza ética inerentes ao estudo.

3.1. Opções Metodológicas

Este estudo tem como objetivo compreender dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático. Para tal, optou-se por uma abordagem de natureza qualitativa e de caráter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008), que permite analisar os fenómenos em toda a sua complexidade. A investigação qualitativa é descritiva e indutiva (Bogdan & Biklen, 1994), centrando-se na compreensão dos fenómenos a partir da perspetiva dos participantes e recorrendo a dados recolhidos sob a forma de palavras e imagens, como entrevistas, notas de campo, documentos e registos audiovisuais. Como referem estes autores, os dados são recolhidos “em forma de palavras ou imagens e não de números” (p. 48), sendo analisados na sua riqueza e complexidade. Neste sentido, pretende-se não reduzir os dados a expressões numéricas, respeitando, tanto quanto possível, a forma como foram registados ou produzidos, assegurando que a descrição resulta diretamente dos dados recolhidos (Carmo & Ferreira, 2008).

Na investigação qualitativa, os resultados são construídos de forma progressiva, à medida que os dados são recolhidos e analisados. Deste modo, trata-se de uma abordagem que privilegia o contexto específico do estudo, pelo que os resultados não visam a generalização, mas sim a compreensão aprofundada da realidade investigada no ambiente em que ocorre (Bogdan & Biklen, 1994). Neste âmbito, enquanto investigadora assumi o papel de instrumento principal de recolha de dados, tendo estes sido obtidos no contexto natural dos participantes – a escola – através do contacto direto com os alunos (Carmo & Ferreira, 2008).

3.2. Caracterização do contexto escolar[2]

No ano letivo de 2025/2026, realizei a PES numa escola básica e secundária situada na área metropolitana do Porto. Esta instituição foi inaugurada no início da segunda metade do século XX, tendo funcionado como Liceu feminino e depois passando para escola mista devido às transformações educativas de 25 de abril de 1974.

Há mais de 10 anos, a escola passou a assumir a função de sede de Agrupamento, integrando quatro estabelecimentos de ensino que acompanham os alunos desde a educação pré-escolar até ao ensino secundário. No entanto, a escola onde realizei a PES acolhe apenas alunos do 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico, bem como do Ensino Secundário. No que respeita a este último nível de ensino, a instituição oferece cursos científico-humanísticos, nomeadamente Ciências e Tecnologias, Línguas e Humanidades e Ciências Socioeconómicas.

Relativamente às infraestruturas, o estabelecimento de ensino é constituído por dois blocos principais, um pavilhão desportivo e uma cantina. Ao longo dos anos, as instalações foram alvo de diversas intervenções de requalificação, destacando-se a realizada pela empresa Parque Escolar, que contribuiu para a modernização dos espaços educativos.

No âmbito dos apoios educativos e pedagógicos, a escola disponibiliza vários serviços, entre os quais se incluem a Biblioteca Escolar, a Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva, o Serviço de Psicologia e Orientação, entre outros. Para além da componente curricular, a instituição promove a plena formação dos alunos através de uma oferta diversificada de projetos e atividades de carácter cultural, ambiental e de valores humanísticos. Sendo estes o Desporto Escolar, o Projeto Erasmus+, o Projeto Educação para a Saúde, o Projeto Eco-Escolas, o Projeto Ciência Viva, entre outros. A escola oferece ainda várias oficinas extracurriculares e conta com a colaboração ativa da Associação de Pais e Encarregados de Educação.

Por fim, importa referir que a escola está localizada numa zona com bons acessos a transportes públicos, nomeadamente uma paragem de metro situada a menos de cinco minutos das instalações. Esta localização facilita o acesso à escola, permitindo

[2] A caracterização do agrupamento de escolas onde realizei a minha PES foi escrita em conjunto com outra colega, que nesse ano letivo, também realizou a sua PES nesta escola. Neste sentido, a caracterização do contexto escolar é comum aos dois relatórios de estágio: Silva, L. (2026). *Dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático: um estudo com alunos do 10.º ano de escolaridade* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]; Teixeira, T. (2026). *Papel do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].

que seja frequentada por alunos não só da freguesia onde se encontra, mas também de outras freguesias da cidade e de áreas envolventes.

3.3. Escolha dos participantes

Como já referi, no presente ano letivo (2025/2026), realizei a PES numa escola básica e secundária, onde tive oportunidade de contactar com duas turmas do 9.º ano de escolaridade, uma turma de 10.º ano e, por fim, uma turma de 12.º ano, ainda que o contacto com esta última tenha sido mais reduzido. Para desenvolver este estudo, optei pela turma do 10.º ano de escolaridade, uma vez que este nível de ensino corresponde a um momento de transição particularmente exigente do ponto de vista académico. A passagem do 3.º ciclo para o ensino secundário implica uma mudança significativa nas exigências cognitivas colocadas aos alunos, nomeadamente na disciplina de Matemática A: o grau de abstração aumenta consideravelmente, os conteúdos tornam-se mais complexos e é esperado que os estudantes mobilizem o raciocínio matemático de forma cada vez mais autónoma e estruturada. Assim, este contexto de transição pareceu-me particularmente propício para explorar as dificuldades dos alunos em tarefas que envolvem raciocínio matemático, mais concretamente que apelam à justificação e à generalização, e respetivas causas.

Esta turma era inicialmente constituída por 27 alunos; contudo, no final do 1.º período, três estudantes transitaram para outra área disciplinar, ficando o grupo reduzido a 24 alunos. Do ponto de vista cultural, o grupo integrava estudantes de nacionalidade portuguesa, brasileira e russa, o que enriquecia as dinâmicas de sala de aula, embora exigisse igualmente uma atenção diferenciada às necessidades de cada estudante. Academicamente, tratava-se de um grupo bastante heterogéneo, como se pode observar nas classificações obtidas na disciplina de Matemática A no final do 1.º período, ilustradas no Gráfico 1:

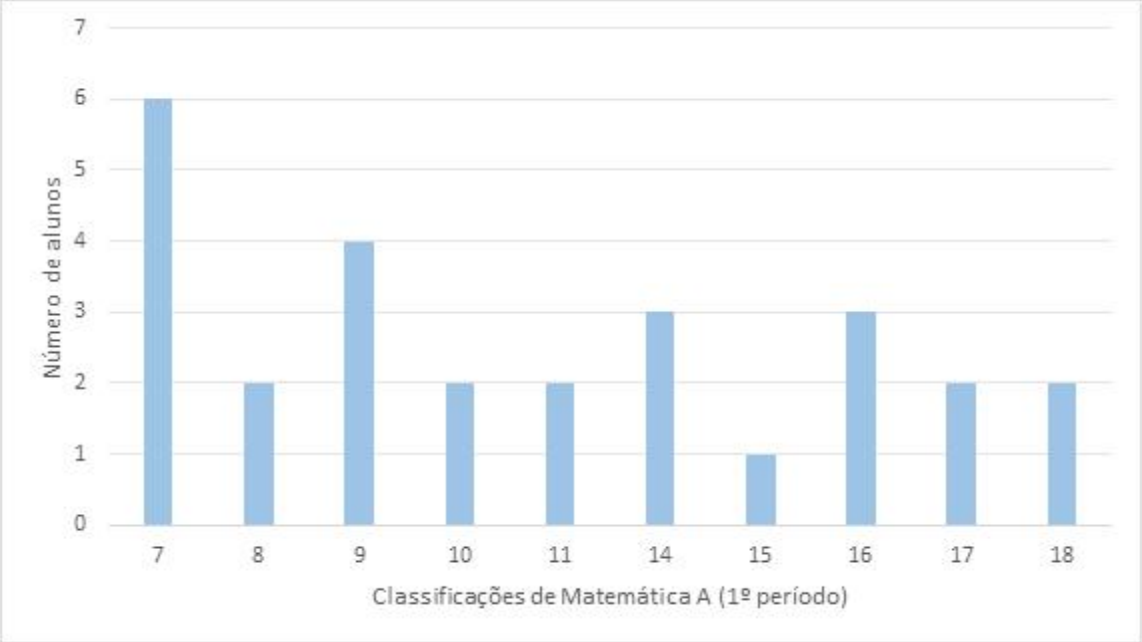


Gráfico 1 - Classificações da turma na disciplina de Matemática A no 1.º período

Em particular, optei por selecionar seis alunos desta turma, de modo a que esses elementos representassem a diversidade observada, garantindo a inclusão de diferentes níveis de desempenho académico. Assim, este grupo é composto por três alunos de cada género que obtiveram classificações compreendidas entre oito e dezoito valores na disciplina de Matemática A no final do 1.º período do ano letivo 2025/2026, assegurando tanto o equilíbrio de género como uma visão mais abrangente e representativa do panorama da turma.

Ademais, os participantes escolhidos destacam-se pela sua capacidade de comunicação, sendo capazes de verbalizar tanto o seu raciocínio como as estratégias empregues na execução das tarefas. Além disso, são estudantes que se sentem confortáveis em expor as dificuldades que enfrentam no momento. Deste modo, tais características justificam a minha escolha, de forma a garantir a eficácia do método de recolha de dados selecionado.

3.4. Procedimentos de recolha de dados

Para proceder à recolha de dados, recorri a diferentes instrumentos, nomeadamente entrevistas com tarefas, produções escritas dos alunos e uma entrevista final, os quais serão descritos detalhadamente mais adiante.

3.4.1. Entrevistas com tarefas

Considerando que este estudo se centra nas dificuldades que os alunos manifestam em tarefas envolvendo raciocínio matemático, optei pelo método de entrevistas com tarefas, o que me permitiu aceder de forma direta ao pensamento dos participantes, levando à compreensão das estratégias utilizadas na resolução das diferentes tarefas propostas e à identificação das dificuldades que os alunos enfrentaram.

Estas entrevistas são semiestruturadas, ou seja, têm por base "um guião onde se define e regista, numa ordem lógica para o entrevistador, o essencial do que se pretende obter" (Amado, 2014, p. 210). No entanto, no momento da interação entre o entrevistador (investigador) e o entrevistado (aluno), existe uma grande liberdade para explorar novas perspetivas, reformular outras perguntas, aprofundar temas emergentes e adaptar a sequência das questões consoante o decorrer da conversa. Portanto, não existe uma ordem fixa no que diz respeito à sequência das perguntas nem restrições quanto ao tipo de questões a colocar, permitindo ao investigador decidir, em cada momento, quais são os aspetos mais relevantes a explorar, tendo em conta as respostas fornecidas pelo entrevistado.

Conforme descrito por Goldin (2020), as entrevistas com tarefas envolvem um sujeito (que resolve as tarefas propostas neste caso, os alunos) e um entrevistador, que interagem em torno de uma ou mais tarefas previamente selecionadas (questões, problemas ou atividades), que são apresentadas ao sujeito. Assim, este método permite observar e compreender as estratégias de resolução dos participantes, focando-se "na verbalização dos processos mentais (...) dos atores em ação e interação" (Amado, 2014, p. 237).

As produções escritas dos alunos, resultantes das entrevistas com tarefas, constituíram também um método de recolha de dados neste estudo. A sua utilização, juntamente com as gravações áudio das entrevistas, permitiu uma análise mais aprofundada do fenómeno em estudo e contribuiu para responder de forma mais consistente às questões de investigação. Além disso, embora os alunos selecionados se expressem bastante bem oralmente, as produções escritas funcionaram como um complemento útil, permitindo registar ideias que poderiam não ter sido totalmente captadas na comunicação verbal. De facto, Cohen et al. (2007) destacam que a recolha documental – no caso deste estudo, as produções escritas resultantes das entrevistas com tarefas – constitui um recurso valioso para compreender o tema em

análise, pois permite complementar os dados obtidos pela observação, oferecendo registos mais completos e facilitando a interpretação das informações recolhidas.

Neste estudo, foram realizadas três entrevistas com tarefas com os seis alunos selecionados numa sala da escola que se encontrava livre no período definido para a sua realização. Após consultar os alunos e considerar as suas preferências, determinou-se que as entrevistas com tarefas seriam realizadas nas tardes de quarta-feira, ao longo de três semanas distintas, garantindo que não coincidissem com os períodos de avaliação previamente programados. Assim, as entrevistas com tarefas foram marcadas para os dias 25 de fevereiro, 4 de março e 11 de março, coincidindo, por mero acaso, com períodos em que não havia momentos de avaliação, o que permitiu a sua realização sem interferir com outras atividades escolares programadas. Cada aluno escolheu o horário que lhe era mais conveniente, sendo-lhe atribuído um período de 20 a 30 minutos para a resolução de cada tarefa de forma individual.

Cada entrevista foi baseada na resolução de uma só tarefa, sendo que com cada uma se procurou avaliar o raciocínio matemático de forma distinta: a primeira tarefa tinha como objetivo promover a generalização de um conceito a partir de um caso particular, a segunda tarefa solicitava que o aluno justificasse de que forma estabeleceria a relação entre duas grandezas e a terceira tarefa consistia em interpretar uma situação semirrealista. O meu papel, enquanto investigadora, consistia em solicitar esclarecimentos sobre o pensamento dos alunos sempre que estes não verbalizassem completamente as suas ideias, assim como questioná-los quando surgissem interpretações incorretas, de modo a que pudessem identificar e corrigir os próprios erros. Não foi elaborado um guião previamente estruturado para as entrevistas com tarefas; no entanto, com base na análise prévia das possíveis dificuldades dos alunos, preparei antecipadamente um conjunto de questões orientadoras que poderiam ser utilizadas para ajudá-los a tomar consciência dos seus erros e a superá-los de forma autónoma, as quais serão referidas mais à frente.

Todas as entrevistas com tarefas foram registadas em áudio, através da utilização do meu telemóvel, e posteriormente transcritas para análise. Optei por não realizar gravações em vídeo, uma vez que poderia ser mais constrangedor para os alunos e alterar a naturalidade das respostas. O uso do telemóvel, um dispositivo que lhes é familiar, permitiu que realizassem as tarefas com mais normalidade, esquecendo-se da presença do gravador. Na ausência de vídeo, tornou-se necessário esclarecer algumas situações em que os alunos apontavam para partes das suas produções

escritas, pedindo-lhes que explicassem oralmente a que se referiam, de forma a garantir a interpretação correta dos dados recolhidos.

As tarefas propostas inserem-se nos temas Funções e Geometria Analítica no Plano. A seguir, descrevem-se detalhadamente cada uma das tarefas, os objetivos de aprendizagem que cada tarefa envolve, as dificuldades previstas na sua resolução e as estratégias que planeei implementar para apoiar os alunos na superação dessas dificuldades. Nos anexos 1, 2 e 3, apresentam-se uma proposta de resolução para cada uma das tarefas.

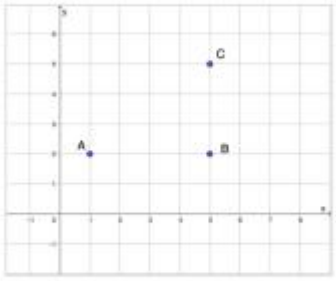
3.4.1.1. Tarefa da primeira entrevista

A primeira entrevista foi realizada na tarde do dia 25 de fevereiro, com a proposta da Tarefa 1 - Calcular distâncias (Figura 9), tendo como principal objetivo identificar as dificuldades dos alunos numa tarefa que envolve a generalização de um conceito a partir de um caso particular, antes da abordagem do conceito de distância em sala de aula.

Tarefa 1 - Calcular distâncias

Parte 1

No referencial ortogonal e monométrico Oxy, estão representados três pontos, $A(1,2)$, $B(5,2)$ e $C(5,5)$.

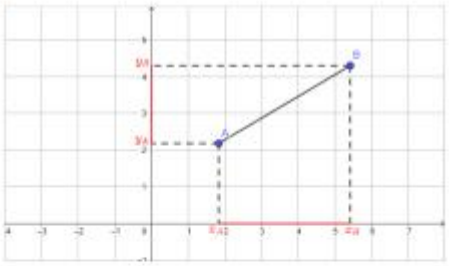


a) Qual é a distância entre os pontos A e B? E a distância entre os pontos B e C?

b) Calcula a distância entre os pontos A e C, ou seja, o comprimento do segmento $[AC]$.
Sugestão: Observa que o triângulo $[ABC]$ é retângulo no ponto B.

Parte 2

Na figura estão representados, num referencial ortonormado e monométrico, os pontos A e B.



a) Explica o significado de

- x_A
- y_A
- x_B
- y_B

b) Em termos geométricos, o que singifica:

- $x_B - x_A$
- $y_B - y_A$

c) Justifica que:

$$\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

d) O que podes dizer acerca da distância entre os pontos A e B?

Figura 9 - Enunciado da Tarefa 1

A tarefa é composta por duas partes: a primeira parte foi adaptada das coletâneas de tarefas matemáticas do 10.º ano de escolaridade[3], enquanto a segunda parte, igualmente adaptada das mesmas coletâneas, integra uma reformulação do enunciado original, tendo sido acrescentada a questão 2a), com o objetivo de aprofundar a exploração do significado das expressões apresentadas e potenciar a reflexão dos alunos ao nível da generalização.

A primeira parte é constituída por duas alíneas. Na primeira alínea, é solicitado o cálculo da distância entre pares de pontos cujas coordenadas permitem uma abordagem direta, nomeadamente através da diferença entre as abcissas, num dos casos, e das ordenadas, no outro caso. Assim, o objetivo consiste em observar se os alunos reconhecem regularidades associadas a situações particulares, como pontos

[3] https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/2024-09/mat_a_coletanea_de_tarefas_de_geometria_analitica.pdf

alinhados na horizontal ou na vertical. Na segunda questão, é introduzida uma situação que envolve três pontos que formam um triângulo retângulo, sendo sugerida a sua observação. Esta questão exige um nível de articulação superior, na medida em que implica a mobilização de conhecimentos geométricos previamente adquiridos, nomeadamente a identificação de um triângulo retângulo e a eventual aplicação do Teorema de Pitágoras para determinar a distância pretendida.

A segunda parte é composta por quatro alíneas. Na primeira questão, é pedido que os estudantes expliquem o significado de x_A, y_A, x_B e y_B, ou seja, as coordenadas dos pontos *A* e *B* num referencial ortonormado e monométrico. Deste modo, pretende-se que identifiquem x_A e x_B como as abcissas dos pontos *A* e *B* (distância dos respetivos pontos ao eixo das ordenadas) e y_A e y_B como as ordenadas dos pontos *A* e *B* (distância dos respetivos pontos ao eixo das abcissas). Na segunda alínea, solicita-se a interpretação geométrica das expressões $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$, tendo como objetivo a compreensão destas diferenças como a distância horizontal e a distância vertical entre os pontos *A* e *B* respetivamente, ou seja, a variação das suas coordenadas segundo os eixos do referencial. Na terceira alínea, considerada a questão central desta parte da tarefa, é solicitado que os alunos justifiquem a relação que conduz a uma expressão que permite determinar a distância entre dois pontos do plano, dadas as suas coordenadas. Assim, a partir das expressões anteriores, os discentes devem reconhecer que estas correspondem às medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento de reta [*AB*] e, à semelhança da segunda questão da primeira parte, deverão recorrer ao Teorema de Pitágoras para justificar a relação apresentada. Por fim, na última alínea, os alunos devem tirar conclusões sobre a distância entre os pontos *A* e *B*, culminando no estabelecimento de uma fórmula que permite determinar a distância entre quaisquer dois pontos no plano, dadas as suas coordenadas.

Tendo por base as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* para o 10.º ano de escolaridade, esta tarefa visa:

- Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano, ortogonal e monométrico;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas a fórmula da distância entre dois pontos. (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 40).

Para a resolução desta tarefa antecipei algumas dificuldades e possíveis sugestões para os alunos as ultrapassarem. Em particular, previ maiores dificuldades na segunda

parte, devido à utilização de linguagem algébrica: a introdução de notação como x_A, y_A, x_B e y_B, bem como das expressões $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$, pode constituir um obstáculo para alguns alunos, sobretudo para aqueles que revelam menor à-vontade na transição entre o registo numérico e o registo algébrico. Tal dificuldade poderá estar associada à tendência para encarar as letras apenas como elementos abstratos, sem lhes atribuir um significado concreto. No caso de esta dificuldade surgir, pensei em questionar os alunos sobre o significado das letras utilizadas, incentivando-os a explicitar o que cada símbolo representa no contexto da tarefa. Além disso, considerei útil incentivá-los a recorrer a exemplos numéricos simples antes da generalização algébrica, permitindo aos alunos estabelecerem uma ponte entre os dois registos.

De seguida, antecipei dificuldades de natureza semelhante nas últimas duas alíneas desta parte, atendendo ao facto de os estudantes ainda não terem contactado previamente com a fórmula da distância entre dois pontos. No que diz respeito à alínea c), considerei que uma das principais dificuldades poderia residir no reconhecimento de que o segmento que une os pontos A e B poderia ser interpretado como a hipotenusa de um triângulo retângulo. Embora os alunos já tivessem utilizado o Teorema de Pitágoras na primeira parte, nem todos tenderiam a mobilizá-lo neste novo contexto, não identificando de forma imediata o triângulo formado pelos deslocamentos horizontal ($x_B - x_A$) e vertical ($y_B - y_A$) entre os dois pontos. Deste modo, os alunos poderiam não reconhecer estas medidas de comprimento como correspondentes às medidas de comprimento dos catetos, evidenciando novamente constrangimentos na articulação entre registos, neste caso registo geométrico e registo algébrico. Face a estas possíveis dificuldades, o meu objetivo consistiria na orientação dos alunos através de um conjunto de questões que promovessem a construção progressiva do raciocínio. Assim, questioná-los-ia sobre o percurso entre os pontos *A* e *B* utilizando apenas movimentos horizontais e verticais, incentivando-os a identificar a figura geométrica associada e a reconhecer a existência de um ângulo reto. Posteriormente, solicitaria, ainda, que explicitassem as medidas de comprimento dos lados desse triângulo e que os relacionassem com as diferenças das coordenadas dos pontos. Por fim, levá-los-ia a recordar uma relação já conhecida que permitisse determinar o comprimento da hipotenusa a partir das medidas de comprimento dos catetos, com o intuito de os conduzir à expressão da distância de forma fundamentada e significativa.

Relativamente à alínea d), antecipei que a principal dificuldade pudesse estar associada à interpretação do resultado obtido, uma vez que os alunos tendem, com

frequência, a encarar as expressões algébricas como meros procedimentos de cálculo, desvalorizando o seu significado. Neste sentido, considerei provável que alguns não reconhecessem que a distância entre dois pontos é sempre um valor não negativo, ou que não refletissem sobre a invariância do valor da distância face à ordem dos pontos. Para ultrapassar estas dificuldades, procurei questionar os alunos acerca do significado do valor obtido, nomeadamente se faria sentido ser negativo, e sobre o que aconteceria à distância caso se invertesse a ordem dos pontos *A* e *B*. Procuraria, ainda, incentivá-los a relacionar a expressão encontrada com a noção de distância entre dois pontos no plano, reforçando a sua interpretação geométrica e promovendo uma compreensão mais sólida do conceito.

3.4.1.2. Tarefa da segunda entrevista

A segunda entrevista foi realizada na tarde do dia 4 de março, com a proposta da Tarefa 2 - Declives (Figura 10), cujo objetivo se baseia na identificação das dificuldades dos alunos no que diz respeito à justificação de relações estabelecidas entre declives de retas secantes ao gráfico de uma função.

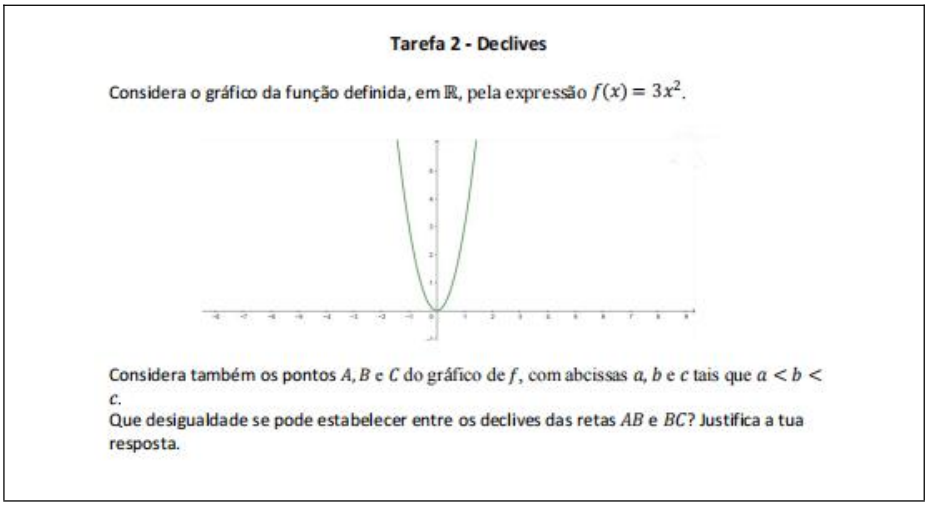


Figura 10 - Enunciado da Tarefa 2

Esta tarefa é composta por uma única questão e foi retirada e adaptada do 3.º volume do manual Novo Ípsilon 10[4], envolvendo a função quadrática *f(x) = 3x²*. Tendo isto em conta, são considerados três pontos distintos *A*, *B* e *C* do seu gráfico, cujas abcissas

[4] Andrade, C., Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2015). *Novo Ípsilon 10: Matemática A: Ensino Secundário* (Vol. 3). Raiz Editora.

são *a*, *b* e *c* tal que $a < b < c$. O objetivo consiste na comparação dos declives das retas *AB* e *BC*, ou seja, pretende-se que os alunos estabeleçam uma relação (neste caso, uma desigualdade) entre os valores destes declives, mobilizando o seu raciocínio matemático, nomeadamente, capacidade de justificação.

Tendo por base as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* para o 10.º ano de escolaridade, esta tarefa visa:

- Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia;
- Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas condições que definem conjuntos de pontos: equações de retas não verticais (Carvalho e Silva et al. 2023, pp 36-40).

No que diz respeito às dificuldades previstas, a primeira que me surgiu está relacionada com a utilização de linguagem algébrica, tendendo os alunos a substituir os valores de *a*, *b* e *c* por valores numéricos. Se esta situação ocorresse, a minha sugestão seria questionar "estás a mostrar que a relação que vais obter é sempre verdadeira ou apenas para esse exemplo em específico?", de modo a consciencializar o estudante da importância da generalização e do uso de representações algébricas para validar propriedades de forma abrangente. Pretende-se, assim, levá-lo a compreender que a utilização de casos particulares não garante a validade de uma afirmação, incentivando-o a recorrer à linguagem simbólica como ferramenta essencial do raciocínio matemático. Além disso, como não são apresentados valores numéricos, previ que os alunos ficassem confusos quando é pedido para determinarem os declives das duas retas e, posteriormente, compararem os dois valores. Para tal, julguei que questionar "o que é o declive?", "como se calcula?" e "que informação tens?" seria uma abordagem a partir da qual os estudantes poderiam mobilizar os seus conhecimentos acerca desse conceito, organizar a informação disponível e construir, de forma autónoma, o raciocínio necessário para determinar e comparar os declives das duas retas. Já no processo de determinação dos declives, caso optassem por uma resolução algébrica, ocorreu-me que alguns alunos pudessem bloquear quando surgissem as expressões $b^2 - a^2$ e $c^2 - b^2$. Ou seja, previ que alguns dos

participantes não reconheceriam as diferenças de quadrados apresentadas, não sabendo como desenvolver mais as expressões. Caso isto acontecesse, pensei em questionar "esta expressão não te lembra nada?" ou "não existe outra forma de escrevê-la?", de modo a que os estudantes reconheçam a estrutura da diferença de quadrados e, a partir daí, avançar na simplificação das expressões. Outra dificuldade que me ocorreu estaria relacionada com a resolução que os alunos optassem por seguir para resolver a questão, seguindo não necessariamente um processo algébrico, mas sim uma interpretação visual. Tratando-se de uma abordagem mais complicada de justificar procuraria incentivar os alunos a explicitar o seu raciocínio, questionando-os sobre os elementos do gráfico que estão a considerar e de que forma esses elementos sustentam as suas conclusões.

3.4.1.3. Tarefa da terceira entrevista

A terceira entrevista foi realizada na tarde do dia 11 de março, com a proposta da Tarefa 3 - O salto do gafanhoto (Figura 11), cujo objetivo passa por promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, nomeadamente a sua capacidade de interpretar uma situação contextualizada através de uma função quadrática, estabelecer relações entre diferentes representações (algébrica e gráfica) e justificar os procedimentos e conclusões obtidas.

Tarefa 3 - O salto do gafanhoto

O Tomás encontrou um gafanhoto em cima de um muro. Quando o gafanhoto saltou, a sua altura em relação ao chão (a, em centímetros) variou com o tempo (t, em segundos) de acordo com a função definida por $a(t) = -30t^2 + 20t + 80$.



a) Determina a altura do muro.

b) No contexto da situação descrita, para que valores de t é que a expressão $a(t)$ tem significado? Justifica.

c) Qual foi a altura máxima atingida pelo gafanhoto? Explica como procedeste para chegar à resposta.

d) Desde que iniciou o salto, quanto tempo esteve o gafanhoto acima de meio metro de altura? Apresenta o resultado arredondado às décimas de segundo.

Figura 11 - Enunciado da Tarefa 3

Esta tarefa é composta por 4 alíneas e, à semelhança da Tarefa 2, foi retirada e adaptada do 3.º volume do manual Novo Ípsilon 10[5]. Numa primeira fase, é solicitado aos alunos que determinem a altura do muro, a partir da interpretação do valor da função no instante inicial. De seguida, devem identificar o domínio da função no contexto da situação, atribuindo significado aos valores do tempo considerados. Numa terceira etapa, os alunos são desafiados a determinar a altura máxima atingida pelo gafanhoto, recorrendo às propriedades da função quadrática, nomeadamente ao vértice da parábola. Por fim, na última alínea, é pedido que determinem o intervalo de tempo durante o qual o gafanhoto se encontra acima de meio metro de altura, envolvendo a resolução de uma inequação e a interpretação do resultado no contexto do problema.

Tendo por base as *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* para o 10.º ano de escolaridade, esta tarefa visa:

- Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente;
- Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas. (Carvalho e Silva et al., 2023, pp. 36-37)

No que diz respeito às dificuldades previstas, era expectável que alguns alunos pudessem não compreender que o salto se inicia em $t = 0$; nesse caso, reforçaria a leitura do enunciado e questionaria diretamente o significado físico do instante inicial. Poderiam também considerar incorretamente que o domínio da função apresentada seria $\mathbb{R}$. Para ultrapassar esta dificuldade, orientaria uma discussão sobre quais os valores de tempo que fazem sentido na situação e levaria os alunos a determinar o instante em que o movimento começa e termina. Outra dificuldade poderia ser identificar o instante em que o salto termina; aqui, questionaria os alunos "o salto de um gafanhoto termina? Quando?", levando-os a concluir que isso sucede quando o gafanhoto atinge o chão, tendo de descobrir para que valores de t é que $a(t) = 0$. Relativamente à interpretação de valores negativos da variável t, alguns alunos poderiam não perceber que estes não têm significado no presente contexto; nestes casos, incentivaria a análise crítica dos resultados, questionando se fariam sentido. Na

[5] Andrade, C., Pereira, P. P., & Pimenta, P. (2015). *Novo Ípsilon 10: Matemática A: Ensino Secundário* (Vol. 3). Raiz Editora.

determinação do vértice da parábola, poderiam surgir dificuldades tanto no uso da estratégia selecionada como na interpretação; assim, faria uma revisão orientada do cálculo e destacaria que é necessário obter não só o instante, mas também a altura máxima. Finalmente, perante dificuldades na resolução de equações quadráticas, apoiaria os alunos passo a passo e, sempre que possível, recorreria à representação gráfica como forma de validação e compreensão dos resultados.

3.4.2. Entrevista final

Com o objetivo de conhecer as perceções dos alunos relativamente às dificuldades sentidas na resolução das três tarefas, realizei uma entrevista semiestruturada (Amado, 2014) no final das entrevistas com tarefas. O guião que elaborei para esta entrevista pode ser consultado no Anexo 4.

Esta entrevista final foi realizada individual e presencialmente, no dia 25 de março, de modo a não comprometer o estudo dos alunos nas várias disciplinas, uma vez que na semana anterior estes se encontravam sobrecarregados com vários momentos de avaliação. Optei por realizar entrevistas individuais, de modo a evitar que os alunos se influenciassem mutuamente nas respostas, garantindo uma recolha mais fidedigna das suas ideias e opiniões. Num primeiro momento, foi considerada a hipótese de uma entrevista com os seis alunos ou três entrevistas a pares, porém essas opções foram descartadas posteriormente por poderem comprometer a espontaneidade e autenticidade das respostas, uma vez que a presença dos colegas poderia levar os estudantes a ajustarem o seu discurso ou a concordarem entre si sem refletirem individualmente.

Cada entrevista durou cerca de 10 minutos e, tal como aconteceu nas entrevistas com tarefas, esta entrevista final foi gravada integralmente em áudio e transcrita para posterior análise. Assim, os alunos foram convidados a refletir acerca da sua participação no estudo, respondendo a perguntas relacionadas com as questões de investigação. Decidi realizar este último momento através de uma conversa oral, em vez de um questionário escrito, porque os alunos se sentem mais à vontade para falar do que para escrever. Deste modo, seria possível obter informações mais detalhadas sobre a sua experiência. Além disso, a conversa permitiu-me interpelar os alunos, pedindo esclarecimentos sobre as suas respostas - algo que não seria possível num questionário escrito.

Na Figura 12, é apresentado um esquema que retrata a organização do processo de recolha de dados, incluindo as diferentes entrevistas realizadas e as respetivas datas de concretização.



Figura 12 - Organização temporal do processo de recolha de dados

3.4.3. Questões de natureza ética

Relativamente às questões éticas, construí, em conjunto com a minha colega de estágio, um termo de autorização, que pode ser consultado no Anexo 5, entregue em papel a sete alunos com diferentes níveis de desempenho da turma de 10.º ano com a qual tive contacto no presente ano letivo, para que estes e os seus encarregados de educação expressassem a sua decisão relativamente à participação no estudo. Os alunos foram informados de que a sua participação (ou não participação) neste estudo não teria influência na classificação na disciplina de Matemática A.

Dos sete alunos selecionados, seis concordaram com a participação no estudo, sendo selecionados para as entrevistas com tarefas. Durante este estudo, mantive a confidencialidade de todos os dados recolhidos, sendo que apenas eu e a minha orientadora tivemos acesso às gravações áudio das entrevistas e às produções escritas dos alunos. Para além disso, garantiu-se o anonimato dos participantes do estudo, identificando os alunos com nomes fictícios: Elisa, Hélia, Jéssica, Marco, Miguel e Rodrigo.

4. Apresentação e discussão de resultados

Neste capítulo, são apresentados os dados recolhidos e analisados, com o objetivo de compreender as dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático. Em cada alínea das tarefas propostas nas entrevistas com tarefas, foram registadas e analisadas as principais dificuldades manifestadas pelos seis alunos. De forma a evitar redundâncias e a tornar a apresentação dos resultados mais clara, quando vários alunos evidenciaram dificuldades muito semelhantes, estas foram descritas apenas uma vez, salientando-se os aspetos mais relevantes para a análise.

4.1. Tarefa 1

A primeira tarefa (Figura 9) proposta aos alunos no âmbito deste estudo envolve a generalização de um conceito (distância entre dois pontos) a partir de um caso particular. Tive o cuidado de apresentar esta tarefa antes de abordarmos formalmente o conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano em sala de aula, uma vez que o meu objetivo consistia em observar como é que os alunos a tentam resolver de forma intuitiva, identificar as estratégias que utilizam e perceber as dificuldades que surgem ao tentarem generalizar uma ideia matemática.

4.1.1. Tarefa 1 – Parte 1

A primeira alínea da parte 1 é apresentada na Figura 13:

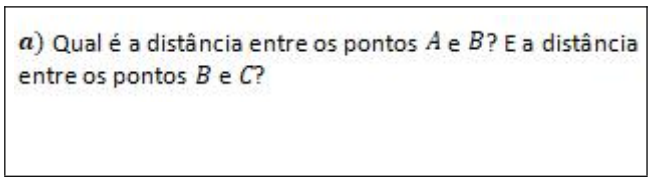


Figura 13 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 1, parte 1)

Relativamente à primeira questão desta alínea, todos os participantes conseguiram determinar a distância entre os pontos mencionados sem dificuldade. No entanto, metade deles (Elisa, Hélia e Rodrigo) optaram por uma abordagem visual, contando o número de quadrados existentes entre os pontos *A* e *B* na direção horizontal,

enquanto os restantes calcularam diretamente a diferença entre as abcissas dos mesmos. Ou seja, embora todos os alunos tenham conseguido chegar à resposta correta, evidencia-se a necessidade de apoiar os alunos na transição do raciocínio intuitivo para uma compreensão sólida do conceito de distância.

Já na segunda questão, no cálculo da distância entre os pontos *B* e *C*, dois alunos tiveram dúvidas relativamente ao valor da mesma, questionando-se se seria 0 ou 3. Portanto, embora tenham conseguido determinar muito facilmente a distância entre os pontos *A* e *B*, que têm a mesma ordenada, o mesmo não se verificou na determinação da distância entre os pontos *B* e *C*, que têm a mesma abcissa:

Rodrigo: [A distância entre *B* e *C*] é zero porque... não, é três.
Investigadora: É zero ou é três?
Rodrigo: É três, senão estavam no mesmo sítio.
(Entrevista, Rodrigo)

Investigadora: Qual é que vai ser a distância entre *B* e *C*?
Jéssica: Nenhuma.
Investigadora: Nenhuma porquê?
Jéssica: Ou 3, 5 - 2.
Investigadora: Hum. Então, em que é que ficamos?
Jéssica: É 3!
(Entrevista, Jéssica)

Esta incerteza temporária evidenciou que, embora os alunos consigam aplicar procedimentos de forma intuitiva em casos mais simples, como por exemplo na situação de pontos com a mesma ordenada, revelam dificuldades ao transpor o conceito para situações análogas, nomeadamente quando se consideram dois pontos com a mesma abcissa. A causa provável desta dificuldade poderá residir na tendência dos alunos para associarem a determinação da distância apenas à dimensão horizontal, uma abordagem que pode resultar do facto de, no ano de escolaridade anterior, terem trabalhado muito com a reta real, recorrendo sobretudo a representações visuais ou à diferença das abcissas, sem ainda terem generalizado o conceito de distância entre dois pontos de forma mais abstrata.

Além desta dificuldade, apesar de responder rapidamente à primeira questão desta alínea, o Miguel também demonstrou incerteza ao calcular a distância entre os pontos B e C:

> **Investigadora:** Qual é que é a distância entre os pontos *A* e *B*?
> **Miguel:** Sim, 4... 4*x*... 4 unidades, certo? No eixo das abcissas.
> **Investigadora:** Ok. E agora? Não é só isso que é pedido, pois não?
> **Miguel:** Sim, a distância entre os pontos *B* e *C*. A distância entre os pontos *B* e *C* eu faria pelo mesmo método que o... mas eu estou a ver aqui... porque eu fiz desta forma, mas eu acho que não ficaria igual se eu tivesse feito ao contrário.
> **Investigadora:** Hum. Se fizesses $x_A - x_B$, o que é que acontecia?
> **Miguel:** Dava -4.
> **Investigadora:** É possível termos distâncias negativas?
> **Miguel:** Aqui é? Eu acho...
> **Investigadora:** É? Existem distâncias negativas?
> **Miguel:** Não... Então talvez seja o módulo? É isso, seria o módulo. Então eu também faria agora, já que eu sei o *B* e o *C*, ficaria... a diferença entre... o módulo da diferença do *x* que é 0, o módulo de 0 é 0...
> **Investigadora:** Hum-hum.
> **Miguel:** ...e 5 - 2, que é a diferença entre os y, que dá 3. O módulo de 3 é 3. Então a distância entre o ponto *B* e *C* é de 3 unidades no eixo do *y*, no eixo das ordenadas.
>
> (Entrevista, Miguel)

Inicialmente, o Miguel apresentou algumas dificuldades na comunicação das suas ideias, ao afirmar que a distância entre *A* e *B* seria 4*x*, quando pretendia referir 4 unidades relativamente ao eixo das abcissas, ou seja, na horizontal. Posteriormente, ao considerar a distância entre os pontos *B* e *C*, apercebeu-se de que a inversão da ordem das abcissas dos pontos da questão anterior poderia conduzir a valores negativos, evidenciando uma confusão entre distância e orientação no plano: por momentos, pareceu associar deslocamentos para a esquerda a valores negativos. Contudo, reconheceu posteriormente que não existem distâncias negativas e passou a considerar a diferença tanto das abcissas como das ordenadas, recorrendo ao módulo. Este raciocínio indica um progresso significativo, pois demonstra que o Miguel começou a compreender que a determinação da distância entre dois pontos envolve a

variação de ambas as coordenadas, sinalizando uma aproximação à generalização do conceito.

De facto, não foi apenas o Miguel que estabeleceu esta associação entre a distância e um determinado eixo. Na sua resposta (Figura 14), a Hélia também expressou uma ideia semelhante, ao indicar a distância entre os pontos como um determinado valor relativamente a um eixo específico, sugerindo igualmente uma leitura do conceito ainda fortemente ancorada na representação por eixos:

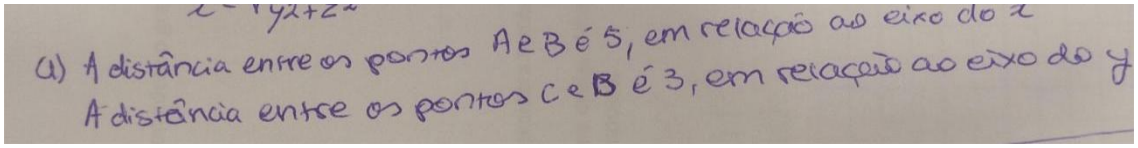


Figura 14 - Resposta à alínea a) (Tarefa 1, parte 1 - Hélia)

Embora a Hélia tenha escrito uma resposta incorreta à primeira questão da alínea a) da Parte 1, é possível que a mesma resulte de um lapso de escrita, não refletindo necessariamente o seu pensamento:

> **Hélia:** 4 quadradinhos... é só escrever... espera aí... a distância entre os pontos *A* e *B*... isto é 4 só e não tem unidade porque isto é um gráfico e não menciona unidades aqui
> **Investigadora:** E a distância entre os pontos *B* e *C*?
> **Hélia:** O *B* e o C... ahhhh ok está bem, eu estou a fazer isto em relação... calma, a distância entre os pontos *A* e *B* é 4 em relação ao eixo do *x* porque em relação ao eixo do *y* é diferente porque estão na mesma coordenada!
> **Investigadora:** Humm, certo... portanto, só o *x* é que varia nesse caso?
> **Hélia:** É...
> **Investigadora:** Ok...
> **Hélia:** E depois, aqui, a distância em relação ao eixo do *y* é 3... porque 5 - 2 dá 3, ok!
>
> (Entrevista, Hélia)

Como é possível observar, a aluna revela dependência de representações visuais, como a contagem de quadrados e a referência ao eixo. Embora reconheça que apenas uma das coordenadas varia, a sua compreensão permanece parcial e pouco

generalizável, indicando que o conceito ainda não se encontra totalmente estabilizado. Esta dificuldade poderá estar associada à predominância de estratégias concretas e visuais na abordagem ao conceito de distância, bem como à influência de aprendizagens anteriores centradas em contextos unidimensionais, como a reta real.

Segue-se a alínea b) da Parte 1, ilustrada na Figura 15:

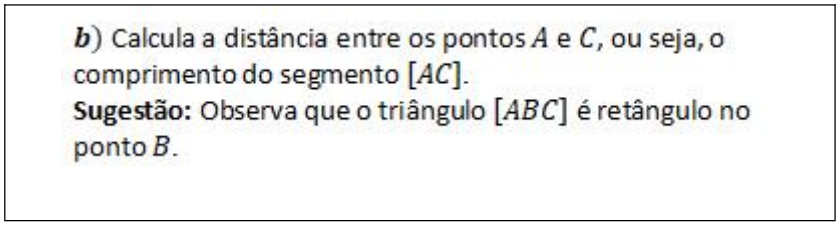

b) Calcula a distância entre os pontos A e C, ou seja, o comprimento do segmento $[AC]$.
Sugestão: Observa que o triângulo $[ABC]$ é retângulo no ponto B.

Figura 15 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 1, parte 1)

Todos os alunos chegaram à conclusão de que teriam de aplicar o Teorema de Pitágoras, chegando ao valor correto da distância entre os pontos *A* e *C*. No entanto, metade dos participantes (Marco, Miguel e Rodrigo), ao resolverem a equação do 2.º grau resultante da aplicação desse teorema, consideraram apenas a solução positiva, não existindo qualquer menção à solução negativa, nem apresentando qualquer tipo de justificação. Esta situação pode revelar uma compreensão incompleta do significado das soluções obtidas:

> **Marco:** [É o] teorema de Pitágoras. Sabemos a distância dos dois lados, dos dois catetos, já podemos fazer o teorema e descobrir a hipotenusa.
> **Investigadora:** Vamos lá então!
>
> (Entrevista, Marco)

Partindo da leitura e análise do excerto anterior, apresenta-se, na Figura 16, a produção escrita do Marco:

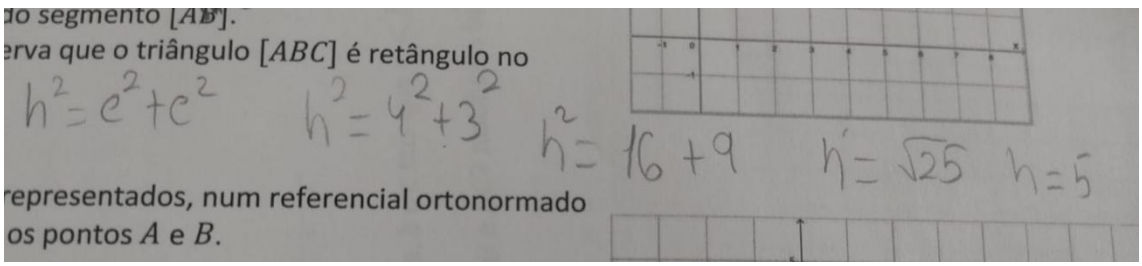


Figura 16 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 1 - Marco)

Miguel: É... vendo aqui, o que eu acho que o que eu poderia fazer logo seria o teorema de Pitágoras.
Investigadora: Hum-hum.
Miguel: Porque eu já sei a distância entre *B* e *C* e *A* e *B*. Então, usando o teorema de Pitágoras eu posso descobrir a hipotenusa do triângulo, que é a distância entre *A* e *C*. Que ficaria...ficaria a distância de *B* e *C* é... 3. 3^2 ficaria 9. E a distância de *A* e *B* é 4, ou seja, 16. Então é 9 + 16, que dá 25, e a raiz quadrada é 5. Então a distância entre *A* e *C* seria de 5 unidades.

(Entrevista, Miguel)

Rodrigo: Ok. Aqui tenho que fazer o teorema de Pitágoras... para um triângulo retângulo e para descobrir a hipotenusa.
Investigadora: Força então. [Som de escrita e calculadora].

(Entrevista, Rodrigo)

Após a análise do excerto, apresenta-se a produção escrita do Rodrigo (Figura 17):

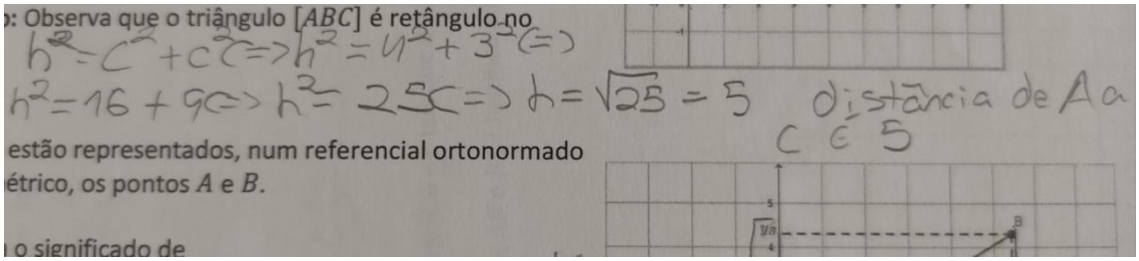


Figura 17 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 1 - Rodrigo)

Esta limitação pode estar associada ao momento em que é introduzido o Teorema de Pitágoras, no 3.º ciclo do ensino básico, no qual ainda não foi abordada a resolução de equações do 2.º grau. Como tal, e tendo em conta que as medidas de comprimento assumem apenas valores positivos, nem sequer é considerada a solução negativa da equação do 2.º grau que resulta da aplicação desse teorema. Assim, esta abordagem pode contribuir para uma compreensão incompleta da relação entre a resolução algébrica da equação e a interpretação das suas soluções.

4.1.2. Tarefa 1 – Parte 2

A Figura 18 apresenta a primeira alínea da Parte 2, que marca a transição para uma abordagem mais geral do conceito:

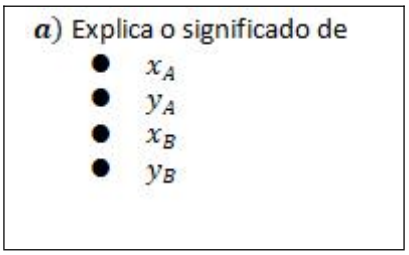


Figura 18 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 1, parte 2)

Observou-se que a maioria dos alunos revelou algumas dificuldades e hesitação na resposta à questão, evidenciando alguma confusão quanto ao significado de x_A, y_A, x_B e y_B:

> **Elisa:** Na figura estão representados num referencial ortogonal e monométrico os pontos *A* e *B*. Ok. Quais são... Ah, mas não dá para ver [os valores das coordenadas]...
> **Investigadora:** Pois...
> **Elisa:** Ok. Ok. Então... explique o significado de x_A. É o valor de *x* do ponto *A*.
> **Investigadora:** Sim...
> **Elisa:** É o valor das abcissas no ponto *A*!
>
> (Entrevista, Elisa)

Deste modo, verificou-se ainda alguma hesitação por parte da Elisa na interpretação da notação x_A, inicialmente reduzida à identificação do "valor de *x* do ponto *A*", evidenciando uma compreensão ainda pouco consolidada do significado da notação, nomeadamente enquanto representação da abcissa de um ponto num referencial cartesiano. Após esta intervenção, a aluna conseguiu explicar o significado dos restantes elementos sem apresentar dificuldades significativas, demonstrando uma compreensão mais consistente do significado das coordenadas de um ponto num referencial cartesiano.

Ainda neste âmbito, observou-se, na aluna Hélia, uma associação concetual incorreta da notação x_A, conforme se evidencia no excerto seguinte:

Hélia: Explica o significado de x_A... isto são os vetores
Investigadora: São vetores?
Hélia: Não! Não sei... vamos ver... Ah são os pontos, são os pontinhos.
Investigadora: Então o x_A corresponde a quê?
Hélia: Ao ponto *x*, ou seja... cada coordenada tem... tem dois pontos, que é o *x* e o *y*
Investigadora: Humm, cada ponto tem 2 coordenadas... acho que é isso que queres dizer.
Hélia: É isso sim! Cada ponto tem 2 coordenadas... o x_A e o y_A são as coordenadas de *A*, sendo x_A em relação ao eixo do *x* e o y_A em relação ao eixo do *y*.

(Entrevista, Hélia)

A dificuldade evidenciada por esta aluna prende-se com a inversão da relação entre os conceitos de ponto e coordenada, ao afirmar que "cada coordenada tem dois pontos", quando na realidade é o ponto que possui duas coordenadas. Esta confusão poderá estar associada a uma apropriação ainda superficial da linguagem matemática formal, na qual os termos *ponto* e *coordenada* não se encontram ainda claramente diferenciados. Ainda assim, com o apoio da investigadora, a Hélia conseguiu reformular o seu raciocínio, o que sugere que a dificuldade se situa sobretudo ao nível da expressão e verbalização dos conceitos matemáticos envolvidos.

Paralelamente, observaram-se outras interpretações alternativas da notação, como no caso do Marco, que a associou à distância do ponto aos eixos coordenados:

Marco: O significado de x_A é a distância que o ponto *A* está do eixo... do *x*.
Investigadora: Humm, é?...
Marco: Sim, e y_A é a distância que o ponto *A* está do eixo do *y*. x_B é a distância que o ponto *B* está dos eixo *x*. y_B é a distância que o ponto *B* está do eixo dos *y*.
Investigadora: Humm...

(Entrevista, Marco)

As dificuldades evidenciadas pelo aluno parecem estar relacionadas com uma associação excessivamente rígida entre a variável *x* e o eixo das abcissas (*Ox*), bem

como entre a variável *y* e o eixo das ordenadas (*Oy*). Esta associação pode ter condicionado a compreensão da notação x_A e y_A, levando o aluno a pensar que x_A e x_B correspondem às distâncias entre o eixo das abcissas e os pontos *A* e *B*, respetivamente, e y_A e y_B dizem respeito às distâncias entre o eixo das ordenadas entre os pontos *A* e *B*, respetivamente. Esta interpretação evidencia uma compreensão desajustada da relação entre as coordenadas e os eixos de referência, comprometendo a leitura correta da posição dos pontos no plano cartesiano.

Seguidamente, na Figura 19, apresenta-se a alínea seguinte da Parte 2:

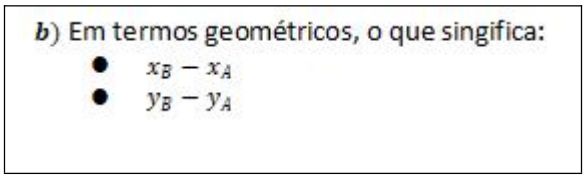


Figura 19 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 1, parte 2)

No que diz respeito a esta questão, a maioria dos alunos revelou dificuldades, traduzidas essencialmente na falta de rigor ao nível da comunicação matemática na apresentação das suas respostas:

> **Hélia:** x_B - x_A seria... é que nós estamos a dar vetores a Física e Química, isto está-me a fazer alguma confusão
> **Investigadora:** Com calma!
> **Hélia:** x_B - x_A, o *B* está aqui à frente e este [o ponto *A*] está aqui atrás... e este aqui [ponto *B*]... não está no meio mas está perto do meio do 5 e do 6 e este [ponto *A*] está mais para o 2... então, é como se originasse outro ponto
> **Investigadora:** Origina outro ponto?
> **Hélia:** Era como se fosse um ponto médio... mas não é um ponto médio porque tinha de dividir por 2
> **Investigadora:** Humm, ok... isso seria para qual das coordenadas?
> **Hélia:** Não, esta reta aqui... de [*AB*], mas não sei o que significa... não sei, não sei.
> **Investigadora:** Olha, temos x_B aqui...
> **Hélia:** Sim!
> **Investigadora:** Menos x_A.
> **Hélia:** Sim!
> **Investigadora:** Ou seja, estamos a retirar a x_B o valor de x_A...
> **Hélia:** Sim!

Investigadora: O que é que sobra?
Hélia: Sobra isto. [aponta para o segmento de reta horizontal cujo comprimento representa a distância horizontal entre *A* e *B*]
Investigadora: Exato, então isto é o quê?
Hélia: Ahhhh é um segmento de reta! Esta subtração é o comprimento do segmento de reta!

(Entrevista, Hélia)

Rodrigo: O x_B está aqui. Ou seja, é isto [aponta para a abcissa do ponto *B*]. O x_A está aqui. Ou seja, é isto [aponta para a abcissa do ponto *A*]. Temos x_B e vamos retirar-lhe x_A. Vai dar um ponto!
Investigadora: Dá um ponto?
Rodrigo: Dá um ponto de... ai, um ponto de [*AB*].
Investigadora: Um ponto? Hum... será? Olha para aqui: entre que valores está o x_A?
Rodrigo: 1 e 2.
Investigadora: Ou seja, é um número. E este [o x_B], entre que valores está?
Rodrigo: 5 e 6.
Investigadora: Ok. Então também é um número. O que é que vais obter se subtraíres um número a outro? Vai ser um ponto?
Rodrigo: Ah! Vai dar o comprimento das abcissas do referencial.
Investigadora: Ora explica-me melhor o que queres dizer.
Rodrigo: Vai dar o comprimento... sim... disto. [aponta para o segmento de reta horizontal cujo comprimento representa a distância horizontal entre *A* e *B*]

(Entrevista, Rodrigo)

Tanto a Hélia como o Rodrigo atribuíram significados geométricos inadequados às expressão $x_B - x_A$. Em particular, o Rodrigo associou esta diferença a um ponto do segmento de reta [*AB*], enquanto a Hélia foi mais específica e respondeu inicialmente que esta diferença correspondia ao ponto médio do mesmo segmento. Estas interpretações sugerem que os alunos procuraram atribuir um significado geométrico familiar às expressões apresentadas, mas revelam dificuldade em compreender que $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$ representam variações nas coordenadas, isto é, deslocamentos segundo

os eixos, e não a localização de pontos específicos no plano. A origem desta dificuldade poderá estar relacionada com uma compreensão ainda pouco consolidada da distinção entre ponto e deslocamento, bem como com a tendência para associar expressões algébricas a objetos geométricos conhecidos, sem uma análise adequada do seu significado.

Por sua vez, a Jéssica apresentou uma abordagem diferente da dos colegas, como podemos ver na Figura 20:

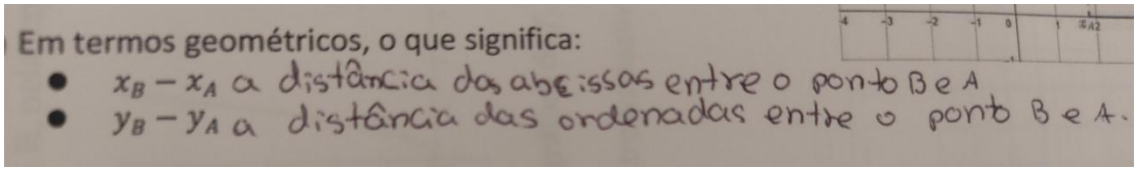


Figura 20 - Resposta à alínea b) (Tarefa 1, parte 2 - Jéssica)

Esta resposta sugere que a aluna reconhece a existência de uma diferença entre as coordenadas, aproximando-se do significado pretendido. No entanto, ao utilizar o termo "distância" em vez de "diferença", a aluna poderá estar a interpretar estas expressões como grandezas sempre positivas, não considerando que x_B - x_A e y_B - y_A são diferenças de coordenadas que podem assumir valores negativos. Esta dificuldade poderá estar relacionada com uma confusão entre os conceitos de distância e diferença, que no uso quotidiano e mesmo em contextos escolares anteriores são frequentemente tratados como equivalentes.

Seguidamente, apresenta-se na Figura 21 a terceira alínea da Parte 2:

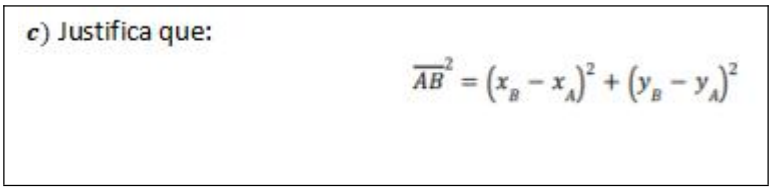


Figura 21 - Enunciado da alínea c) (Tarefa 1, parte 2)

Por um lado, existiram alunos que, através de uma simples observação da expressão apresentada, conseguiram perceber que, em algum momento da sua justificação, teriam de recorrer ao Teorema de Pitágoras, ainda que, por vezes, demonstrassem alguma hesitação nas suas afirmações:

> **Elisa:** Justifique que... isto é isto, certo? O tracinho em cima... ou seja, vai dizer a hipotenusa, é isso. Vou ter um triângulo aqui, de certeza. *B*... exatamente. Então está certo. Isto é o Teorema de Pitágoras.
> **Investigadora:** Humm...
> **Elisa:** Justifica que... sim, isto é verdade porque representa... Ok. A fórmula representada é verdadeira porque esta... retrata o Teorema de Pitágoras!
>
> (Entrevista, Elisa)

Como podemos observar, a Elisa reconhece visualmente que o quadrado do comprimento do segmento de reta [*AB*] sugere a existência de um triângulo retângulo, o qual reconhece rapidamente, identificando corretamente a sua ligação ao Teorema de Pitágoras. No entanto, a sua justificação resume-se a afirmar que *"*a fórmula é verdadeira porque retrata o Teorema de Pitágoras*".* Ou seja, a aluna utiliza o próprio teorema como prova de si mesmo, sem construir qualquer cadeia lógica de ideias, apoiando-se nos elementos que observa nesta situação em específico, mas sem recorrer ao conhecimento estabelecido de forma articulada, não explicando, por exemplo, como as expressões $(x_B - x_A)$ e $(y_B - y_A)$ correspondem às medidas dos comprimentos dos catetos do triângulo retângulo identificado nem como o teorema referido se aplica para chegar à igualdade pedida. Assim, a justificação da Elisa pode ser classificada como formal mas incompleta (Mata-Pereira, 2018).

À semelhança da Elisa, a Hélia também se apercebeu da existência de, pelo menos, um triângulo retângulo:

> **Hélia:** Eu acho que este ao quadrado está aqui a mais... ah, não!! Ahhh, espera aí... eles querem assim [desenha o triângulo retângulo de hipotenusa [*AB*]].
> **Investigadora:** O que é que obtemos então?
> **Hélia:** Um triângulo retângulo, e é retângulo em... ah podem ser 2 até, porque isto no fundo forma um retângulo dividido em 2 triângulos retângulos, um em cima e um em baixo, e ao fazermos isto [*AB*] é a hipotenusa, e quando vamos fazer o Teorema de Pitágoras vemos que... teoricamente é o que está aqui! Faz sentido, fica isto que está aqui!
>
> (Entrevista, Hélia)

Analisando o excerto anterior, verifica-se que a Hélia constrói a sua justificação de

forma estruturada, começando por desenhar um triângulo retângulo de hipotenusa [*AB*], identificando que as expressões (x_B - x_A) e (y_B - y_A) correspondem às medidas dos comprimentos dos catetos desse mesmo triângulo e aplicando o Teorema de Pitágoras para concluir que a igualdade apresentada é verdadeira. Ao contrário da Elisa, a aluna não se limita a nomear o teorema, construindo uma cadeia de inferências lógicas que liga os elementos da situação ao conhecimento matemático estabelecido. De notar que a linguagem utilizada pela Hélia revela alguma imprecisão, porém o raciocínio subjacente está presente e articulado. Deste modo, a justificação da Hélia pode ser classificada como formal (Mata-Pereira, 2018).

Por outro lado, verificou-se que alguns alunos, numa fase inicial, não compreenderam claramente o que lhes era solicitado, revelando dificuldades em interpretar a tarefa e em identificar uma estratégia de resolução:

> **Marco:** Ah... não sei, não percebi.
> **Investigadora:** O que é que não percebeste?
> **Marco:** Como é que eu vou justificar uma expressão?
> **Investigadora:** O que é que era o comprimento do segmento de reta [*AB*]?
> **Marco:** É a distância de um ponto ao outro.
> **Investigadora:** E o que é que era x_B - x_A?
> **Marco:** Era o segmento de reta horizontal.
> **Investigadora:** Ok. E y_B - y_A?
> **Marco:** Era o vertical. Segmento de reta vertical... Ahhh é um triângulo retângulo!
>
> (Entrevista, Marco)

Como podemos observar, o Marco inicia a tarefa sem compreender o que lhe é pedido, não sabendo como justificar a expressão apresentada nesta questão. Com o apoio da investigadora, vai identificando progressivamente os elementos da situação: o comprimento do segmento de reta [*AB*] como a distância entre os dois pontos, (x_B - x_A) como a medida do comprimento do segmento de reta horizontal e (y_B - y_A) como a medida do comprimento do segmento de reta vertical – e conclui que existe um triângulo retângulo. No entanto, o aluno para nesse ponto, não aplicando o Teorema de Pitágoras nem estabelecendo qualquer ligação entre os elementos identificados e a igualdade pedida. O raciocínio fica, assim, incompleto, apoiando-se apenas nos

elementos que observa nesta situação em concreto e sem recorrer ao conhecimento estabelecido de forma articulada. Assim sendo, a justificação do Marco pode ser classificada como formal mas incompleta (Mata-Pereira, 2018).

À semelhança do Marco, o Rodrigo também evidenciou, numa fase inicial, dificuldades na compreensão da tarefa proposta, vindo, contudo, a construir gradualmente o seu raciocínio com o apoio da investigadora, até reconhecer a relação com o Teorema de Pitágoras:

> **Rodrigo:** Isto não percebi.Tenho que justificar o quê?
> **Investigadora:** Tens de justificar esta igualdade. Primeiro: esta expressão é-te familiar?
> **Rodrigo:** O quadrado do binómio?
> **Investigadora:** É o quadrado do binómio?
> **Rodrigo**: Isto é um quadrado do binómio, isto é outro quadrado do binómio.
> **Investigadora:** Sim. O que é que era isto [aponta para o comprimento do segmento de reta [*AB*]]?
> **Rodrigo:** A reta do referencial, quer dizer... este bocadinho [aponta para o segmento de reta [AB]].
> **Investigadora:** Ok. E agora o resto?
> **Rodrigo:** O $(x_B - x_A)$ era isto e o $(y_B - y_A)$ era isto... Ah! Já sei! Teorema de Pitágoras!
>
> (Entrevista, Rodrigo)

Como podemos observar, o Rodrigo parte de uma leitura algébrica da expressão, identificando $(x_B - x_A)^2$ e $(x_B - x_A)^2$ como quadrados de um binómio, o que revela uma abordagem diferente relativamente aos restantes alunos. Com o apoio da investigadora, vai reorientando o seu raciocínio para uma perspetiva geométrica, identificando os segmentos correspondentes no referencial, e conclui com a sua resposta mencionando o Teorema de Pitágoras. No entanto, tal como o Marco e a Elisa, o aluno para nesse ponto, não desenvolvendo a ligação entre os elementos identificados e a igualdade pedida nem explicando como é que o teorema referido se aplica para a validar. Assim, apesar de revelar uma leitura algébrica inicial que poderia ter conduzido a uma justificação mais completa, o Rodrigo apoia-se apenas nos elementos que observa nesta situação em concreto sem articular o conhecimento

estabelecido, pelo que a sua justificação pode ser classificada como formal mas incompleta (Mata-Pereira, 2018).

A dificuldade evidenciada por estes alunos parece estar associada à interpretação da tarefa e à articulação entre diferentes representações matemáticas, nomeadamente entre a expressão algébrica e a sua interpretação geométrica. Ou seja, apesar de reconhecerem alguns elementos (como quadrados de binómios e segmentos de reta), revelam dificuldades em mobilizar esses conhecimentos de forma devidamente articulada. Esta dificuldade poderá decorrer de uma prática mais frequente de exercícios de aplicação direta, em que os procedimentos são previamente conhecidos, contrastando com tarefas que exigem interpretação, justificação e estabelecimento de conexões entre conceitos. Assim, a mediação revelou-se fundamental para apoiar os alunos na construção dessas relações e na atribuição de significado à expressão apresentada.

A quarta alínea da Parte 2, ilustrada na Figura 22, é apresentada de seguida:

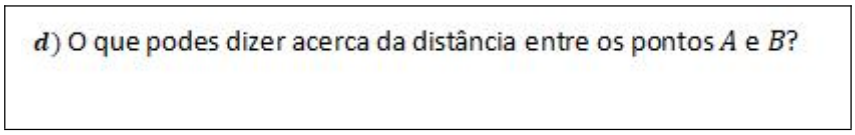


Figura 22 - Enunciado da alínea d) (Tarefa 1, parte 2)

Na interpretação da questão apresentada na figura, vários alunos revelaram algumas dificuldades iniciais e hesitação na identificação da distância entre os pontos *A* e *B* e na sua representação no referencial, evidenciando uma necessidade de apoio na mobilização de conhecimentos geométricos e na sua formalização:

Investigadora: O que é que podes dizer sobre a distância entre os pontos *A* e *B*?
Jéssica: É a hipotenusa.
Investigadora: Sim. E o que é que nós obtivemos... a que conclusão chegámos há pouco?
Jéssica: Que a hipotenusa era a soma dos dois catetos ao quadrado.
Investigadora: A hipotenusa?
Jéssica: Ah... ao quadrado.
Investigadora: Mas agora o que é que queremos saber? É a hipotenusa ao

quadrado?

Jéssica: Não, a hipotenusa sem ser ao quadrado.

Investigadora: Ok, e então como é que vamos fazer?

Jéssica: Raiz quadrada.

(Entrevista, Jéssica)

Após esta intervenção, a Jéssica considerou ambas as soluções (positiva e negativa); no entanto, selecionou apenas a solução positiva, argumentando que se trata de um comprimento, não podendo assumir valores negativos. As dificuldades e hesitação da Jéssica, já observadas em questões anteriores por outros alunos, voltam a verificar-se nesta situação, particularmente ao nível da interpretação do significado geométrico e da articulação com os procedimentos algébricos. A persistência destas dificuldades sugere que as mesmas continuam associadas à pouca familiaridade com tarefas de caráter interpretativo, exigindo a atribuição de significado às expressões matemáticas para além da mera aplicação de procedimentos.

Paralelamente, na abordagem da Hélia observa-se uma estratégia distinta, na qual a aluna recorre a uma reformulação da expressão através da substituição das variáveis, com o objetivo de facilitar a sua interpretação e os cálculos subsequente:

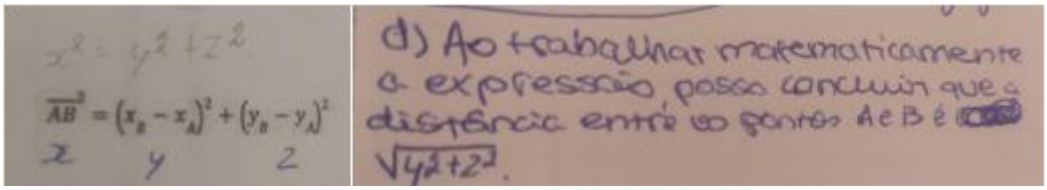


Figura 23 - Resposta à alínea d) (Tarefa 1, parte 2 - Hélia)

Através desta substituição, a aluna simplifica a expressão original, tornando-a mais acessível do ponto de vista simbólico. Esta reformulação permite evidenciar a estrutura da relação envolvida, aproximando-a de uma relação algébrica conhecida, nomeadamente devido ao Teorema de Pitágoras, o que facilita a compreensão da questão e a obtenção de uma resposta final . Esta opção torna-se ainda mais evidente no discurso da aluna durante a resolução da tarefa, onde se observa a sua preocupação em simplificar a expressão e identificar padrões familiares:

Hélia: O que podes dizer acerca da distância entre os pontos *A* e *B*... ahhh, então a sua distância é o quadrado da soma... do quadrado da soma dos catetos!
Investigadora: Humm [expressão de confusão]
Hélia: Ou seja, é... não sei... calma
Investigadora: Olha para a expressão da questão anterior... sabes quanto é que é o valor do comprimento do segmento de reta [*AB*] ao quadrado , agora queres saber quanto é que é o valor da distância entre *A* e *B*, então...
Hélia: Ah! É a raíz quadrada, mas aqui não tem valores, então não posso dar o valor exato... o que eu posso dizer é $x^2 = y^2 + z^2$.
Investigadora: Ok... e agora, se queres saber o valor de *x*, o que é que fazes?
Hélia: Passo para o outro lado! x é raíz quadrada de $y^2 + z^2$... os quadrados cortam com a raíz!
Investigadora: É?
Hélia: Ai não, isto é uma soma! Ahhh... esqueci-me da solução negativa!
Investigadora: Hummm, e a distância pode ser os dois valores?
Hélia: Não não, ahhh é um comprimento então só consideramos o positivo

(Entrevista, Hélia)

Como podemos observar, a aluna incorre num erro concetual relacionado com a manipulação de raízes quadradas, que posteriormente conseguiu identificar. Contudo, nem todos os alunos revelaram a mesma capacidade de deteção e correção do erro, tendo apresentado respostas incorretas:

Marco: A distância entre os pontos *A* e *B* é a hipotenusa do triângulo...
Investigadora: Hum-hum.
Marco: Assim como os catetos são os segmentos de reta que usámos anteriormente.
Investigadora: Ok. E então, aqui tenho o quê? Hipotenusa ao...
Marco: Quadrado.
Investigadora: O que é que fazemos para saber apenas a hipotenusa?
Marco: A raiz quadrada dos catetos. Mas como já são iguais ao quadrado, uma coisa corta e fica só $x_B - x_A + y_B - y_A$.
Investigadora: Será?

Marco: Sim porque estão os dois ao quadrado.

(Entrevista, Marco)

De facto, erros de natureza algébrica são frequentes e resultam, em grande medida, de fragilidades na interpretação e manipulação de expressões, bem como da aplicação incorreta das propriedades das operações. Estes constrangimentos evidenciam dificuldades concetuais que vão além do procedimento mecânico, refletindo uma compreensão ainda pouco consolidada dos procedimentos algébricos.

4.2. Tarefa 2

A segunda tarefa proposta aos alunos (Figura 10) é composta por uma única questão e envolve a justificação de uma desigualdade entre os valores dos declives de duas retas secantes ao gráfico de uma função (neste caso, $f(x) = 3x^2$), atendendo ao comportamento da mesma ao longo do seu domínio.

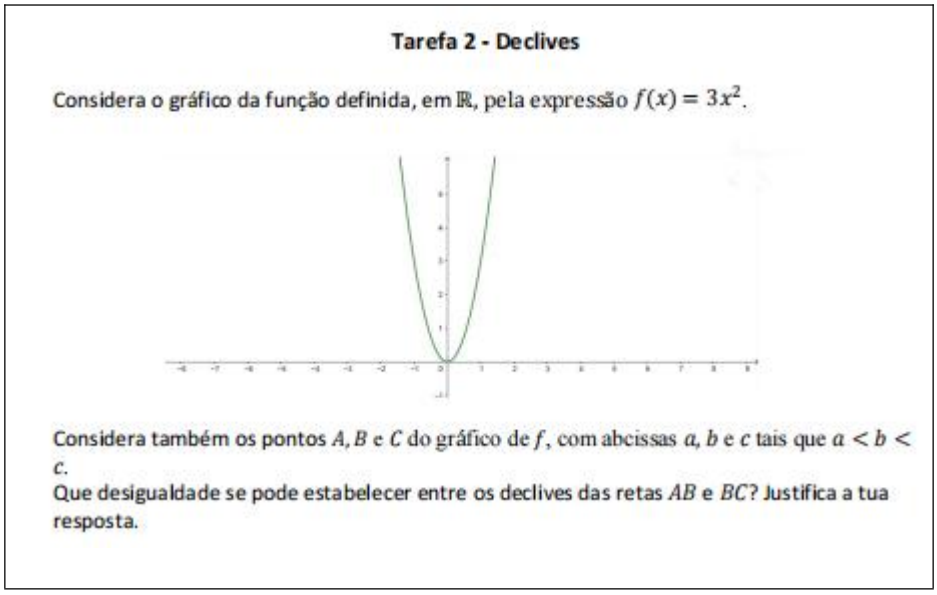


Figura 24 - Enunciado da Tarefa 2

Além disso, requer uma certa familiaridade com a linguagem algébrica, nomeadamente no modo como os alunos expressam e relacionam os valores solicitados. Deste modo, o meu objetivo consistia em compreender de que forma os alunos interpretam o comportamento de uma função a partir do seu gráfico, em particular na comparação de declives de duas retas secantes, e como articulam essa

interpretação com a utilização de linguagem algébrica na justificação de uma desigualdade.

De facto, desde os momentos iniciais da tarefa, os alunos evidenciaram sinais de desorientação e confusão, quer através das suas reações, quer nos diálogos estabelecidos numa primeira instância:

> [momentos de hesitação]
> **Investigadora:** Então, entendeste a questão?
> **Elisa:** Não... nem por isso.
>
> (Entrevista, Elisa)

> [momentos de silêncio]
> **Investigadora:** Percebeste o enunciado?
> **Rodrigo:** Não, não percebi os pontos...
>
> (Entrevista, Rodrigo)

Estes indícios sugerem dificuldades na compreensão do que era solicitado e, consequentemente, na definição de uma estratégia de resolução, particularmente no que diz respeito à mobilização da linguagem algébrica:

> **Hélia:** (...) Então A, B e C... e os pontos *A*, *B* e *C* fazem parte do gráfico de *f*, ou seja... Estão aqui... estão algures aqui.
> **Investigadora:** Certo...
> **Hélia:** Ok. E nós... pois, isto é uma incógnita... eu odeio exercícios com incógnitas.
>
> (Entrevista, Hélia)

> **Investigadora:** Então quais são as coordenadas do ponto *A*?
> **Jéssica:** As abcissas...
> **Investigadora:** Humm, qual é que é a abcissa do *A*?
> **Jéssica:** Como é que eu sei qual é que é a abcissa do *A*?
> **Investigadora:** Ora lê de novo o enunciado...

Jéssica: Considera também os pontos *A*, *B* e *C* do gráfico de *f* com abcissas *a*, *b*, *c.*

Investigadora: Então qual é a abcissa do *A*?

Jéssica: O *b*?

(Entrevista, Jéssica)

Estas dificuldades poderão estar associadas a uma familiaridade insuficiente com a articulação entre diferentes representações matemáticas, em particular na passagem do registo gráfico para o registo algébrico, bem como a dificuldades na mobilização de linguagem matemática adequada para justificar as suas ideias.

No que diz respeito à abordagem adotada pelos alunos, a maioria optou por sustentar a sua resposta através de processos algébricos. No entanto, embora os estudantes conhecessem a expressão do declive de uma reta (quociente entre y_B - y_A e x_B - x_A), revelaram dificuldades na sua aplicação, uma vez que as ordenadas dos pontos *A* e *B* surgiam expressas em função de *a* e *b*, não lhes ocorrendo de imediato substituir a variável *x* por *a* e *b* na expressão da função para determinar *f(a)* e *f(b)*. Aliás, alguns alunos substituíram, primeiramente, os valores de *a* e *b* por valores numéricos:

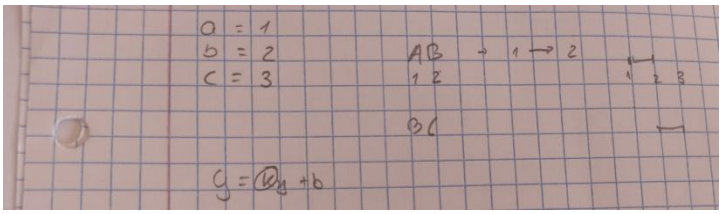


Figura 25 - Início da resposta (Tarefa 2 - Elisa)

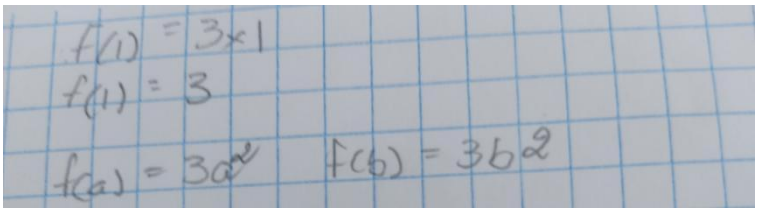


Figura 26 - Início da resposta (Tarefa 2 - Hélia)

Esta abordagem revelou-se essencial, pois permitiu aos alunos compreender que deveriam substituir a variável independente (*x*) por *a* e *b* na expressão algébrica da função, obtendo assim uma forma de representar as ordenadas dos pontos *A* e *B*. De seguida, após calcularem *f(a)* e *f(b)*, os participantes conseguiram desenvolver com

facilidade a expressão do declive em função dos valores obtidos:

> **Investigadora:** Bem, já temos as coordenadas dos dois pontos. E agora, como é que calculamos o declive da reta *AB*?
> **Marco:** Como temos de ter dois pontos no gráfico, fazia o y_B menos o y_A...
> $3b^2 - 3a^2$ sobre $b - a$.
> **Investigadora:** Ok. Esse é o declive da reta *AB*.
>
> (Entrevista, Marco)

Assim, após a escrita do declive da reta *AB* (quociente entre $3b^2 - 3a^2$ *e* $b - a$), os alunos evidenciaram dificuldades na manipulação algébrica da expressão, particularmente no processo de simplificação:

> **Investigadora:** Ok... Mas esta expressão parece muito complicada... Será que dá para ficar mais simples?
> **Jéssica:** Cortar?
> **Investigadora:** Podes cortar?
> **Jéssica:** Ui, não!
>
> (Entrevista, Jéssica)

> **Investigadora:** (...) Será que esta expressão não poderá ficar mais simples?
> **Rodrigo:** Corta, corta...
> **Investigadora:** Podes cortar?
> **Rodrigo:** Ah pois não...
> **Investigadora:** Podes cortar quando está a...
> **Rodrigo:** Multiplicar
>
> (Entrevista, Rodrigo)

Esta dificuldade poderá estar associada a fragilidades ao nível da fatorização de polinómios, em particular numa menor familiaridade com a manipulação simbólica de expressões algébricas, o que limita a capacidade de simplificação.

Adicionalmente, observaram-se dificuldades na identificação do caso notável da multiplicação envolvido na expressão algébrica – diferença de quadrados, o que

comprometeu a sua aplicação adequada e a simplificação da mesma.

> **Investigadora:** [...] Olha bem para esta expressão aqui de cima. O que é que estas duas parcelas têm em comum?
> **Marco:** O 3.
> **Investigadora:** O 3. Então quando dois fatores têm uma coisa em comum, dá para pôr em...
> **Marco:** Evidência!
> **Investigadora:** Evidência. Ok.
> [Marco escreve a expressão com 3 em evidência no numerador]
> **Investigadora:** E agora, continuando a focar na expressão daqui de cima. Não te é nada familiar?
> **Marco:** Humm, não....
> **Investigadora:** Uma coisa que deste no 9.º ano.
> **Marco:** Quadrado do binómio?
> **Investigadora:** É o quadrado de um binómio?
> **Marco:** Não, é uma diferença... de quadrados!
>
> (Entrevista, Marco)

Esta dificuldade poderá estar associada a uma compreensão insuficiente das estruturas algébricas subjacentes e de uma menor automatização das propriedades dos casos notáveis da multiplicação, o que dificulta o seu reconhecimento em contextos não explícitos.

Após a identificação do caso notável da multiplicação em questão, os alunos conseguiram simplificar a expressão até $3(a + b)$ ou, de forma equivalente, $3b + 3a$. Para a determinação do declive da reta *BC*, aperceberam-se de que o processo de resolução era análogo ao anteriormente realizado, pelo que não se verificaram dificuldades nesta etapa, obtendo que o mesmo era igual a $3(c + b)$ ou, de forma equivalente, $3c + 3b$. Posteriormente, com base nos declives determinados em função das variáveis algébricas a, b e c, os alunos conseguiram estabelecer a relação entre os mesmos, demonstrando compreensão das interdependências algébricas subjacentes, como mostram os exemplos apresentados nas Figuras 27 e 28:

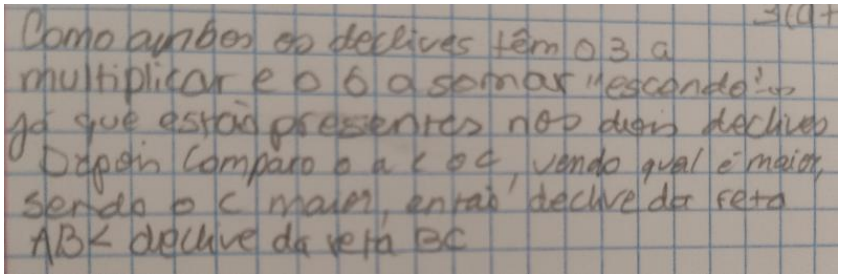


Figura 27 - Resposta final (Tarefa 2- Hélia)

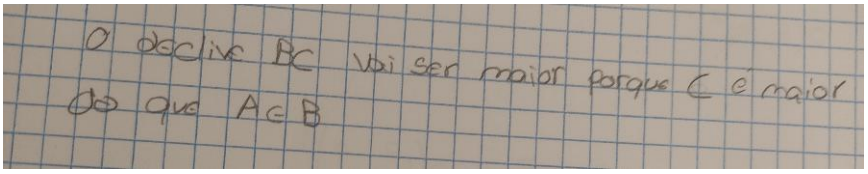


Figura 28 - Resposta final (Tarefa 2 - Rodrigo)

Como podemos observar nas figuras anteriores, verificaram-se ainda alguns erros ao nível do formalismo matemático, que poderão decorrer de alguns lapsos pontuais ou de uma menor atenção aos procedimentos, não comprometendo, contudo, a compreensão global da tarefa. No que respeita ao tipo de justificação, os alunos que seguiram esta abordagem apresentaram uma justificação formal (Mata-Pereira, 2018), construindo uma cadeia de inferências lógicas que liga os dados da situação – as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* e os declives das retas *AB* e *BC* – ao conhecimento estabelecido, nomeadamente as propriedades da função $f(x) = 3x^2$ e a comparação algébrica entre os declives. No entanto, importa ressalvar que esta justificação foi alcançada com o apoio da investigadora, o que poderá indicar que os alunos não teriam chegado de forma totalmente autónoma a uma justificação tão estruturada.

Paralelamente à abordagem algébrica, observou-se que um dos alunos recorreu à interpretação gráfica para sustentar o seu raciocínio:

> **Miguel:** Vai ser... hum... eu acho que... parece que o declive da reta *AB* é menor que o declive da reta *BC*. É o que parece.
> **Investigadora:** E porquê?
> **Miguel:** Porque... vendo assim graficamente, pelo menos... mesmo negativo ou positivo... por exemplo, se todos os pontos, se *A*, *B* e *C* tivessem abcissas negativas, então *AB*, como está mais para um... tem uma abcissa maior, então a reta estaria mais inclinada entre os dois pontos, porque tem uma diferença

> maior entre eles, não é? Se eu fizesse esta reta assim e depois fizesse, sei lá, um outro ponto aqui... como a parábola vai aumentando...
>
> (Entrevista, Miguel)

Na sua resolução, o Miguel recorre essencialmente à leitura do gráfico para comparar os declives das retas, formulando uma justificação ancorada na sua perceção visual da inclinação. Deste modo, o aluno estabelece uma relação entre a posição dos pontos no eixo das abcissas e a variação das inclinações das duas retas, embora a sua argumentação revele alguma imprecisão concetual na interpretação do declive. Ainda assim, evidencia uma tentativa de mobilizar relações entre a representação gráfica e a comparação de grandezas, nomeadamente ao considerar como elemento explicativo a inclinação da reta. O raciocínio do Miguel apoia-se exclusivamente nos elementos que observa na representação gráfica, sem recorrer ao conhecimento algébrico estabelecido – como o cálculo dos declives a partir das coordenadas dos dois pontos – para construir uma justificação mais completa. Portanto, a justificação do Miguel pode classificada como formal mas incompleta (Mata-Pereira, 2018).

4.3. Tarefa 3

A terceira tarefa apresentada aos alunos, intitulada “O salto do gafanhoto” (Figura 11), incidiu sobre a exploração de uma função quadrática, $a(t) = -30t^2 + 20t + 80$, inserida num contexto semirrealista. A situação descrita traduz a variação da altura do salto de um gafanhoto ao longo do tempo, permitindo a análise do papel dos parâmetros da função no enquadramento do fenómeno apresentado, como veremos de seguida na análise das quatro alíneas que compõem a tarefa.

A Tarefa 3 começa com a alínea apresentada a seguir:

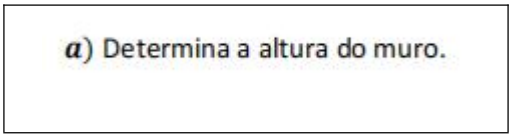


Figura 29 - Enunciado da alínea a) (Tarefa 3)

Na análise da primeira alínea, observou-se que alguns alunos apresentaram uma resolução imediata, evidenciando uma abordagem quase automática do procedimento:

Investigadora: Então?
Jéssica: Humm tenho de... substituir o t por zero... e depois a altura que vai ser o 80.

(Entrevista, Jéssica)

Investigadora: Vamos lá então.
Rodrigo: A altura do muro é 80 centímetros.
Investigadora: Porquê?
Rodrigo: Porque no início, no tempo zero, a altura é o valor de *c* na função [tendo em conta a expressão algébrica escrita na forma $ax^2 + bx + c$].
Investigadora: Exatamente.

(Entrevista, Rodrigo)

Em contrapartida, outros participantes evidenciaram dificuldades na interpretação do enunciado e na articulação com a expressão algébrica da função, o que comprometeu a modelação correta daquilo que era pedido:

Miguel: Vendo assim... eu estou a supor... eu vou supor que a altura do muro vai ser... hum... porque é que eu estou a pensar assim? Altura do muro... eu estou a supor que a altura do muro vai ser a altura máxima do salto, né? Ou um pouquinho mais baixo... tipo, se o muro tiver 5 metros, ele saltou 5 metros mais um pouquinho. É o que eu estou a supor que seja.
Investigadora: Ok...
Miguel: Mas isto é supondo que ele saltou, né, a quantidade exata para passar do muro, mas ele também podia ter saltado a mais e ter ido para longe do muro... que confusão!
Investigadora: Ora lê de novo o enunciado.
Miguel: Ah! Ele está em cima do muro!

(Entrevista, Miguel)

Hélia: Ahhh... determina a altura do muro. Bem, a altura é o *a* e ele saltou de cima do muro. Então vamos... isto está a pedir basicamente o zero da função? Por isso vamos fazer $0 = -30t^2 + 20t + 80$...

Investigadora: O que é que tu queres descobrir?

Hélia: [observa a expressão que referiu] Ah, pois é assim vou descobrir o tempo! Então calma... já me estou a confundir toda. Altura... quero descobrir a altura no início.

Investigadora: Sim, ou seja...

Hélia: O tempo é zero! Então é $a(0) = -30\times0^2 + 20\times0 + 80$ ... Ah! Vai ser 80. Vai ser 80.

(Entrevista, Hélia)

No caso do Miguel, é possível observar que a principal dificuldade esteve relacionada com a interpretação do enunciado. Inicialmente, o aluno formulou hipóteses com base na sua própria interpretação da situação, associando a altura do muro à altura máxima do salto. No entanto, ao ser incentivado a reler o enunciado, conseguiu identificar a informação essencial – o gafanhoto está em cima do muro quando inicia o salto – reformulando imediatamente o seu raciocínio.

No caso da Hélia, observa-se inicialmente alguma dificuldade em identificar exatamente o que estava a ser pedido, levando-a a associar a resolução ao cálculo dos zeros da função. No entanto, através de algum questionamento orientador, a aluna conseguiu recentrar a sua atenção no significado da situação e reconhecer que pretendia determinar a altura inicial, correspondente ao instante $t = 0$.

Em ambas as situações, evidencia-se a importância do questionamento orientador enquanto estratégia de mediação da aprendizagem. Tanto o Miguel como a Hélia demonstraram dificuldades iniciais na interpretação da informação presente no enunciado e na identificação do objetivo da tarefa; contudo, através de intervenções breves, conseguiram reorganizar o seu raciocínio e chegar autonomamente à interpretação adequada da situação. Assim, verifica-se que, muitas vezes, as dificuldades dos alunos não estão relacionadas com a ausência de conhecimento, mas sim com a compreensão do contexto e com a atribuição de significado às informações apresentadas no enunciado.

Na Figura 30, encontra-se a segunda alínea da Tarefa 3:

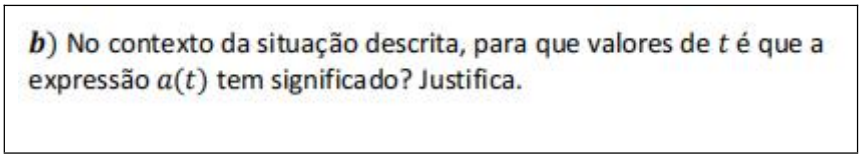


Figura 30 - Enunciado da alínea b) (Tarefa 3)

Praticamente todos os participantes chegaram à conclusão de que a variável *t* só poderia assumir valores maiores ou iguais a zero. A Jéssica constituiu a única exceção, revelando dificuldades na interpretação da questão, possivelmente por não ter associado a variável *t* ao tempo no contexto da situação apresentada. Contudo, através de algum questionamento, começou progressivamente a compreender o que lhe era solicitado:

> **Investigadora:** Então... percebeste a questão?
> **Jéssica**: Não...
> **Investigadora**: Ora... o que é que o *t* representa?
> **Jéssica:** Tempo.
> **Investigadora:** Tempo. Então vamos pensar nos valores do tempo. Pode ser qualquer número?
> **Jéssica:** Não, não pode ser negativo! Só dá para 0 e valores positivos...
>
> (Entrevista, Jéssica)

Na verdade, a dificuldade mais evidenciada nesta alínea prendeu-se com a identificação da possível existência de um limite superior para os valores de *t*. De facto, a maioria dos alunos assumiu de imediato que bastaria referir que *t* teria de ser maior ou igual a zero, não considerando inicialmente a necessidade de analisar a existência de outros valores que restringissem o domínio da função *a(t)* no contexto da situação apresentada:

> **Rodrigo:** O *t* tem que ser maior ou igual a zero, porque não há tempo negativo.
> **Investigadora:** Sim... E mais?
> **Rodrigo:** Mais?
> **Investigadora:** O salto nunca acaba?
> **Rodrigo:** Acaba quando ele chega ao chão, ou seja, quando *a(t)* é zero.
>
> (Entrevista, Rodrigo)

> **Elisa:** Hum, ok. Ou seja, o tempo não pode ser negativo. De facto, o tempo não pode ser negativo nem zero... não, pode ser zero. Pode ser zero, logo não

pode ser negativo porque não vale... ou seja, porque não há tempos negativos. Ok. Ou seja, é quando t é maior ou igual a zero.
Investigadora: Ok. Então... o gafanhoto nunca para de saltar?
Elisa: Não, ele vai ter que parar...
Investigadora: E quando é que ele vai parar?
Elisa: Não sei. Tenho que fazer... ou seja, é um zero da função. Pressupondo que ele vai saltar, ou seja, para $a(t) = 0$.

(Entrevista, Elisa)

Esta dificuldade poderá estar relacionada com a tendência dos alunos para associarem imediatamente a variável tempo a valores não negativos, privilegiando uma interpretação mais intuitiva do conceito em detrimento de uma análise cuidada do contexto da situação apresentada nesta tarefa.

Em contraste, o Marco e o Miguel conseguiram resolver a questão de forma mais autónoma, não tendo sido necessária qualquer intervenção durante o processo:

Investigadora: No contexto da situação descrita, para que valores de *t* é que a expressão tem significado?
Marco: Tem significado... hum... é entre zero e o valor que eu descobrir ao substituir o *a(t)* por zero, porque não existem alturas negativas...

(Entrevista, Marco)

Miguel: [...] Ok. No contexto da situação descrita, para que valores de *t* é que a expressão *a(t)* tem significado? Hum... os valores de *t* são... tem de ser, para começar, tem de ser maior... tem de ser zero, tem de ser maior ou igual a zero, porque não existe tempo negativo. E tem de ser um valor em que a altura também não seja negativa, porque os gafanhotos ainda não conseguem atravessar o chão. [risos]
Investigadora: Boa!

(Entrevista, Miguel)

Como é possível observar, os dois alunos evidenciaram uma interpretação adequada do contexto e mobilizaram corretamente os conhecimentos necessários para a

determinação do domínio da variável considerada, chegando de forma consistente à resposta pretendida. Nestes casos, a maior dificuldade situou-se ao nível da apresentação formal da solução, evidenciada sobretudo no caso do Miguel, como se apresenta na Figura 31:

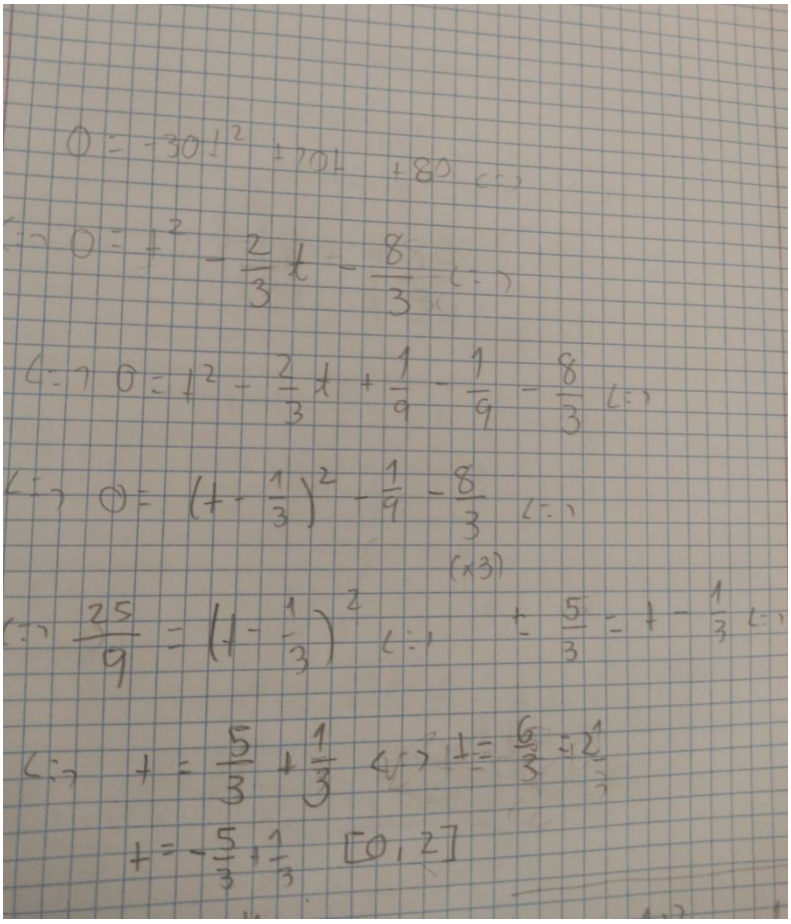


Figura 31 - Resposta à alínea b) (Miguel - Tarefa 3)

Observando a resolução do Miguel, verifica-se que, apesar do procedimento algébrico e da resposta estarem globalmente corretos, existe alguma fragilidade na interpretação final das soluções obtidas, em particular na exclusão imediata da solução negativa da equação resolvida sem explicitar por escrito as razões dessa escolha. Estas fragilidades parecem resultar sobretudo da tendência para a automatização do procedimento algébrico, com menor atenção à interpretação das soluções no contexto do problema e à explicitação das justificações necessárias. Deste modo, apesar de o cálculo estar correto, alguns passos de validação são feitos de forma implícita, sem registo escrito das razões que os fundamentam, o que revela necessidade de reforçar o rigor na comunicação matemática escrita.

Como podemos verificar, todos os alunos identificaram as duas condições necessárias para que a expressão *a(t)* tenha significado no contexto da situação – o tempo não pode ser negativo e o salto termina quando o gafanhoto regressa ao chão, ou seja, quando *a(t) = 0* – articulando o conhecimento contextual com as propriedades matemáticas da função em questão. Embora alguns alunos tenham necessitado de algum apoio pontual da investigadora para chegar à segunda condição, todos construíram uma cadeia de inferências lógica e coerente, pelo que as suas justificações podem ser classificadas como formais (Mata-Pereira, 2018).

Posteriormente, a Figura 32 dá conta da terceira alínea da Tarefa 3:

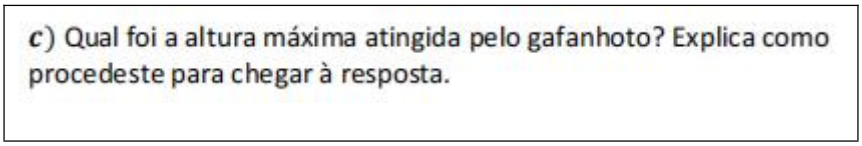


Figura 32 - Enunciado da alínea c) (Tarefa 3)

No geral, todos os alunos conseguiram concluir que a altura máxima atingida pelo gafanhoto correspondia à ordenada do vértice da parábola, identificando corretamente esse valor como o máximo da função quadrática que representava a trajetória do gafanhoto. No entanto, observaram-se diferenças ao nível da autonomia na resolução: alguns alunos necessitaram de um acompanhamento mais próximo para estruturar o procedimento, enquanto outros evidenciaram compreender o raciocínio subjacente, manifestando apenas dificuldades na recordação do processo de cálculo necessário para determinar o valor pedido. Os excertos seguintes ilustram esta situação:

Investigadora: Como é que determinamos a altura máxima?
Jéssica: Hum, não sei...
Investigadora: Ou melhor... quando é que o gafanhoto vai atingir o máximo?
Jéssica: ...no 80.
Investigadora: No 80?
Jéssica: Ah não! Isso é onde estava inicialmente... No 2?
Investigadora: É no 2? No 2 está onde?
Jéssica: No chão! Ai não sei...
Investigadora: Calma... vamos pensar. O gafanhoto salta. [A investigadora acompanha, com um gesto, o movimento ascendente e descendente da trajetória do gafanhoto.] Daqui... atinge o chão passados 2 segundos... quando é que ele esteve mais alto?

Jéssica: Ahhh, no vértice!

(Entrevista, Jéssica)

Marco: Não sei quanto é que ele saltou, não sei a altura máxima...
Investigadora: Mas sabes que a altura do gafanhoto é determinada através desta função, que é uma parábola.
Marco: Certo!
Investigadora: Como é que é esta parábola?
Marco: É para baixo... Ahhh, então a altura máxima é o vértice.
Investigadora: Exatamente. Como é que nós determinávamos o vértice?
Marco: Ui... [risos]

(Entrevista, Marco)

Como podemos observar, no caso da Jéssica, nota-se, inicialmente, a existência de alguma dificuldade na interpretação do significado dos valores envolvidos no problema, sendo necessário recorrer a questões mais orientadoras e à representação gestual da trajetória do gafanhoto para que a aluna estabelecesse a relação entre a altura máxima e o vértice da parábola. Já o Marco demonstrou identificar as propriedades da representação gráfica da função, nomeadamente a concavidade da parábola, conseguindo concluir que a altura máxima correspondia ao vértice da parábola que representa o gráfico da função. Contudo, evidenciou dificuldades em recordar o procedimento necessário para determinar esse valor:

Investigadora: O que é que descobriste na alínea *b)*?
Marco: Que o t onde o $a(t)$ é igual a zero, o t é igual a dois.
Investigadora: Humm, só deu esse resultado?
Marco: Não, também deu $-\frac{80}{60}$ ... ahhh vou fazer isto mais o 2 e dividir por dois.
Investigadora: E vais encontrar o quê?
Marco: O t do vértice.
Investigadora: É isso que é pedido?
Marco: Não.
Investigadora: Então?
Marco: Tenho que substituir depois na função!

(Entrevista, Marco)

Como podemos observar, a dificuldade manifestada pelo aluno não se prendeu com a compreensão dos conceitos envolvidos, mas com a mobilização dos conhecimentos necessários para dar início à resolução da questão. Contudo, bastou uma breve referência ao trabalho realizado na alínea anterior para que conseguisse identificar o procedimento adequado e prosseguir a resolução de forma autónoma.

Assim, enquanto alguns alunos necessitaram de apoio sobretudo ao nível da interpretação do problema e da atribuição de significado aos valores presentes no contexto, outros revelaram dificuldades mais associadas à recuperação e aplicação de procedimentos previamente aprendidos. Tais dificuldades poderão estar relacionadas com uma compreensão ainda pouco consolidada das características da função quadrática e da relação que se estabelece entre a sua representação gráfica e o contexto da situação apresentada.

Por fim, a Figura 33 apresenta a quarta e última alínea da Tarefa 3:

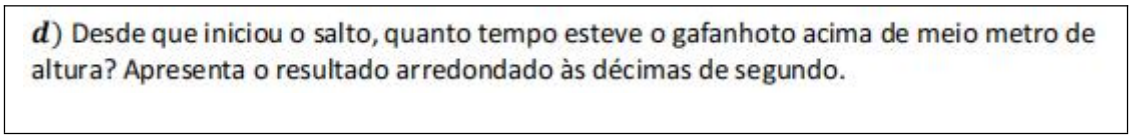


Figura 33 - Enunciado da alínea d) (Tarefa 3)

Todos os participantes foram capazes de interpretar corretamente o enunciado e compreender o objetivo da tarefa, identificando que era necessário determinar entre que valores de *t* é que *a(t)* assumia valores superiores a meio metro. Uma das principais dificuldades surgiu, curiosamente, na conversão das unidades, nomeadamente na passagem de metros para centímetros, uma vez que a variável *t* se encontrava expressa em centímetros:

Jéssica: Tenho de fazer isto [*a(t)*] maior que meio metro.
Investigadora: Ok...
Jéssica: Mas está em metros e na fórmula está em centímetros... como é que faço?
Investigadora: Quando alguém te diz “meço um metro e meio”, significa que mede um metro e...
Jéssica: ...e cinquenta.

Investigadora: Pronto. Então mede...
Jéssica: ...150 centímetros.
Investigadora: Então... se um metro e meio são 150 centímetros... então meio metro vão ser...
Jéssica: 50.

(Entrevista, Jéssica)

Embora esta dificuldade tenha sido registada, pareceu corresponder a um lapso momentâneo da Jéssica e não a uma dificuldade a nível concetual, Aliás, após uma breve orientação, a aluna converteu corretamente meio metro em 50 centímetros e prosseguiu na resolução da questão.

Paralelamente, a Elisa demonstrou compreender de forma autónoma os diferentes aspetos da questão. A aluna converteu corretamente meio metro em 50 centímetros, reconheceu que era necessário determinar os valores para os quais a altura do gafanhoto era superior a esse valor e formulou adequadamente a inequação correspondente. A única dificuldade observada surgiu no momento de prosseguir a resolução da inequação do 2.º grau, revelando alguma incerteza relativamente ao procedimento a adotar:

Elisa: 1 metro... meio metro, ou seja, 0,50 metros. 1 metro é igual a 100 centímetros. Meio metro vai ser igual a 50 centímetros. Pronto, então tenho que saber para cima, logo, para que valores de *t* é que *a(t)* é superior a *50*? Logo, $-30t^2 + 20t + 80 > 50$. Passo o 80 para o outro lado, fica $-30t^2 + 20t > -30$.
E agora?
Investigadora: Pois... e agora?
Elisa: Posso passar a raiz para o outro lado?
Investigadora: Hummm, como é que resolvíamos inequações do 2.º grau?
Elisa: Ahhh ok, igualávamos primeiro!

(Entrevista, Elisa)

Apesar de, durante a interação, a Elisa revelar capacidade de ajuste do seu raciocínio, aproximando-se posteriormente do procedimento adequado, a dificuldade observada pode estar associada à tendência que alguns alunos têm de aplicar procedimentos de resolução de equações à resolução de inequações do 2.º grau. Neste caso, a aluna

procura chegar diretamente à solução através de manipulações algébricas, sem considerar explicitamente o processo de análise da inequação, o que sugere uma compreensão ainda pouco consolidada da resolução de inequações do 2.º grau, em particular da necessidade de analisar a expressão em diferentes intervalos do domínio.

Perante as dificuldades iniciais evidenciadas pela Elisa, relacionadas com a tentativa de resolver a inequação através de manipulações algébricas, a Hélia optou por esboçar a representação gráfica da função *a(t)* na sua resolução, como se pode constatar na Figura 34:

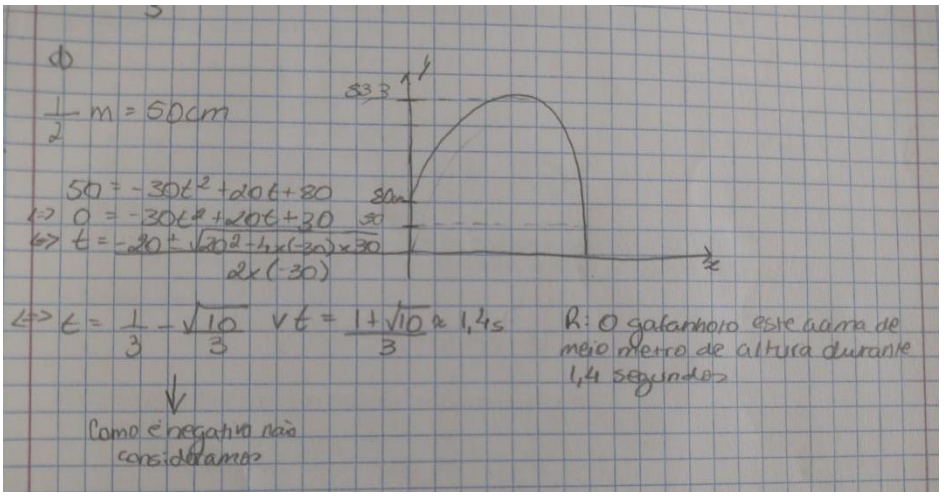


Figura 34 - Resposta à alínea d) (Hélia - Tarefa 3)

De facto, a representação gráfica revelou-se uma estratégia útil, permitindo à aluna compreender de forma mais clara o procedimento a seguir na resolução da inequação, nomeadamente na identificação dos intervalos em que a função assume valores superiores a 50.

Ao contrário da Hélia, que determinou as soluções da equação através das potencialidades da calculadora gráfica, existiram alunos que optaram pelo processo analítico, como foi o caso do Marco. Apesar de este procedimento conduzir às mesmas conclusões, observou-se que o mesmo suscitou algumas dúvidas no aluno, nomeadamente na interpretação de resultados:

Marco: [...] Deu $\frac{1\pm\sqrt{10}}{-3}$.

Investigadora: Ok. Dá para simplificar mais alguma coisa?

Marco: Não.

Investigadora: Então e agora?

Marco: Ui, $\sqrt{10}$ não dá um número inteiro, fiz alguma coisa mal... devia dar um número inteiro

Investigadora: Lê a última frase do enunciado.

Marco: Apresenta o resultado arredondado às décimas de segundo. Ahhh não é suposto dar inteiro! Só posso considerar o positivo...Que deu 1,38. Ou seja, 1,4 segundos.

(Entrevista, Marco)

Efetivamente, mesmo no 10.º ano de escolaridade, alguns alunos ainda têm a tendência de associarem a validação de um resultado à sua forma numérica, valorizando sobretudo valores inteiros ou expressões consideradas mais simples. Deste modo, resultados que envolvem raízes, aproximações decimais ou valores menos usuais podem ser interpretados como sinais de erro, condicionando o reconhecimento de soluções matematicamente corretas quando estas não apresentam uma forma numérica considerada simples.

4.4. Perceções de alunos sobre dificuldades sentidas

Após a realização das entrevistas com tarefas, realizou-se uma entrevista individual com cada aluno, na qual se procurou identificar as dificuldades sentidas em cada tarefa e as causas que lhes foram atribuídas segundo a perspetiva de cada participante.

4.4.1. Dificuldades na realização das tarefas e respetivas causas

Quando questionado sobre quais foram as maiores dificuldades sentidas na Tarefa 1, o Rodrigo indicou que as dificuldades que sentiu estariam relacionadas com a interpretação das alíneas da Parte 2: “Na primeira tarefa foi mais a segunda parte, porque do nada começaram a aparecer letras e isso baralhou-me um pouco... no princípio não conseguia compreender bem o que era suposto responder.” (Entrevista, Rodrigo). O Rodrigo não foi o único a indicar este tipo de dificuldades. Inicialmente, o Marco não referiu qualquer obstáculo na realização da Tarefa 1; contudo, quando incentivado a refletir sobre o processo seguido, acabou por destacar que “foi na interpretação das questões” que começou a surgir alguma confusão, nomeadamente na Parte 2, quando “já não havia números” (Entrevista, Marco). No entanto, se por um

lado estes dois alunos indicaram dificuldades bastante semelhantes, por outro lado, as causas que lhes atribuíram diferiram significativamente. Enquanto o Rodrigo apontou a falta de estudo e o facto de o conceito ainda não ter sido abordado em contexto de sala de aula como causa, o Marco não foi capaz de expressar, de forma tão clara, o motivo pelo qual sentiu dificuldades, afirmando que "foi mesmo na interpretação do exercício" (Entrevista, Marco).

Por sua vez, a Jéssica referiu que, na sua opinião, as maiores dificuldades surgiram noutra alínea:

> **Jéssica:** Não tive nenhuma dificuldade nesta.
> **Investigadora:** Nenhuma? A sério? Achas que conseguiste chegar a todas com a mesma facilidade?
> **Jéssica:** Nesta... acho que não.
> **Investigadora:** Qual? Na alínea *b)* da Parte 1?
> **Jéssica:** Sim, essa foi mais difícil para mim. A outra [alínea *a)*] consegui mais depressa.
>
> (Entrevista, Jéssica)

Ao contrário do Rodrigo e do Marco, a Jéssica não referiu nenhuma dificuldade perante as questões que envolviam o uso de linguagem algébrica na Parte 2 da Tarefa 1. Aliás, a aluna afirmou que a maior dificuldade surgiu na alínea b) da Parte 1, que implicava a determinação da distância entre dois pontos através da aplicação do Teorema de Pitágoras. No caso da Jéssica, a estudante não foi capaz de explicitar a origem dessa dificuldade, referindo apenas que demorou mais tempo a chegar à resolução do que na alínea anterior, isto porque "se calhar não tinha percebido muito bem a pergunta nem como lá chegar" (Entrevista, Jéssica).

A Hélia identificou dificuldades na mesma alínea, porém devido a uma causa diferente:

> **Hélia:** Hum... nesta aqui, na de calcular distâncias... assim, como já não me lembrava muito da composição de vetores do 8.º ano ou do 9.º, foi um bocadinho mais difícil chegar lá e, tipo, chegar à cena do... à coisinha do Teorema de Pitágoras. Essa foi assim a maior dificuldade, mas mesmo assim foi pacífico.
>
> (Entrevista, Hélia)

Como podemos observar, embora não fosse o caso, segundo a aluna, a resolução desta alínea exigia a mobilização de conhecimentos relacionados com a composição de vetores, conteúdos que já não recordava com clareza. Deste modo, concluiu que foi esta necessidade de recuperar aprendizagens anteriores que tornou mais difícil reconhecer a estratégia de resolução adequada e chegar à aplicação do Teorema de Pitágoras. Não obstante, a Hélia considerou que essa dificuldade não constituiu um obstáculo relevante à resolução da questão.

Por sua vez, tanto o Miguel como a Elisa não identificaram nenhuma dificuldade significativa na realização da Tarefa 1. Além disso, ambos manifestaram uma apreciação positiva da atividade, com a Elisa a descrever a tarefa como "muito engraçada" (Entrevista, Elisa), referindo ter gostado da sua realização. Já o Miguel destacou a organização da tarefa em duas partes, valorizando a progressão do registo numérico para o registo algébrico, pois, na sua perspetiva, a tarefa “não foi difícil porque, fazendo as alíneas anteriores, chegávamos facilmente à expressão [da distância entre dois pontos]” (Entrevista, Miguel).

Passando para a Tarefa 2, todos os participantes referiram, desde início, que se tratou da tarefa mais desafiante. Contudo, as razões subjacentes a esta perceção não foram propriamente coincidentes, tendo sido identificados diferentes fatores como origem das dificuldades manifestadas.

Por um lado, o Rodrigo, a Elisa e a Hélia associaram as suas dificuldades ao trabalho com linguagem algébrica. Em particular, o Rodrigo destacou que “termos letras e que uma letra é maior que a outra... isso confunde muito” (Entrevista, Rodrigo). De forma semelhante, a Elisa referiu sentir alguma dificuldade pelo facto de “[ser] tudo muito com letras, não com números” (Entrevista, Elisa), identificando essa característica como um obstáculo à determinação dos declives. Já a Hélia atribuiu as suas dificuldades à manipulação de expressões algébricas e ao cálculo de declives envolvendo incógnitas, referindo sentir algum desconforto perante resultados expressos sob a forma algébrica. Por outro lado, a Jéssica afirmou que demonstrou dificuldades nesta tarefa sobretudo porque “não sabia o que tinha de fazer... o enunciado era estranho, não estou habituada a que seja tão “abstrato”” (Entrevista, Jéssica). Ou seja, a participante considerou que o caráter mais abstrato da tarefa e a sua menor familiaridade com este tipo de questões, nas quais não é explicitamente indicada uma estratégia de resolução, terão condicionado a compreensão do objetivo da questão, bem como a identificação de uma estratégia de resolução adequada. Uma perspetiva semelhante foi evidenciada pelo Miguel, embora de forma distinta, ao referir

"que parecia que estava a faltar algo, como se não desse para chegar à resposta por falta de dados" (Entrevista, Miguel), sugerindo uma perceção de incompletude da informação disponibilizada no enunciado e de dificuldade em definir uma estratégia de resolução eficiente.

Por sua vez, o Marco destacou um fator distinto dos anteriormente referidos:

> **Investigadora:** Hum. E então na Tarefa 2. O que é que foi mais difícil?
> **Marco:** Entender o gráfico.
> **Investigadora:** Entender o gráfico?
> **Marco:** Sim, eu não consigo... não sou muito bom com gráficos e atrapalho-me.
>
> (Entrevista, Marco)

Através da análise deste excerto, verifica-se que o Marco atribui as dificuldades sentidas na Tarefa 2 à interpretação de representações gráficas, evidenciando uma menor confiança neste tipo de registo e reconhecendo que esta limitação condiciona a sua capacidade de compreender e articular a informação apresentada.

De seguida, quando questionado sobre quais seriam as dificuldades sentidas na Tarefa 3, o Miguel destacou o seguinte:

> **Miguel:** [...] Isto foi... isto foi muito por causa da minha interpretação... porque eu não sabia, basicamente não tinha percebido se o gafanhoto tinha saltado por cima do muro, se tinha saltado para cima do muro... ou se tinha saltado mais e depois caído... porque, tecnicamente, ele podia saltar muito e depois cair para baixo e cair no muro. Foi só essa dúvida que eu tive.
>
> (Entrevista, Miguel)

A análise do discurso de Miguel sugere que a dificuldade sentida teve origem numa interpretação demasiado elaborada da questão apresentada: ao considerar hipóteses adicionais relativamente ao movimento do gafanhoto, o participante afastou-se da leitura mais direta do enunciado, introduzindo elementos de incerteza que dificultaram a resolução da tarefa. De facto, o aluno referiu que as dificuldades sentidas, não apenas nesta tarefa, mas de uma forma geral, decorrem, sobretudo, de momentos de falta de atenção e da tendência para complexificar situações relativamente simples,

admitindo que, por vezes, acaba por "pensar demasiado numa coisa que é mais simples" (Entrevista, Miguel).

Por sua vez, tanto a Hélia como o Marco referiram não terem sentido dificuldades significativas na realização da tarefa. Contudo apenas a Hélia justificou esta perceção, nomeadamente através do facto de já ter contactado anteriormente com problemas semelhantes, referindo que "já tinha treinado tanto isto para o teste... para os testes anteriores" (Entrevista, Hélia). Ainda assim, a aluna destacou a interpretação do enunciado como o aspeto mais desafiante, afirmando que "a parte mais difícil seria interpretar" e que "se soubermos interpretar, conseguimos fazer" (Entrevista, Hélia). Assim, as considerações da participante sugerem que, na sua perspetiva, o sucesso na resolução da tarefa não depende tanto dos conhecimentos matemáticos mobilizados mas sim da capacidade de compreender adequadamente a situação que a tarefa apresenta. Adicionalmente, ao referir que "isso vai de pessoa para pessoa" (Entrevista, Hélia), a aluna reconhece a existência de diferenças individuais na forma como os alunos interpretam os enunciados, apontando a interpretação como uma possível fonte de dificuldade para alguns alunos.

Em contraste com os participantes anteriormente referidos, o Rodrigo identificou dificuldades de natureza distinta na resolução da tarefa:

> **Investigadora:** E então na tarefa 3, qual é que achas que foi a tua maior dificuldade?
> **Rodrigo:** [A maior dificuldade] foi a... decompor em fatores primos. Quando fiz, ainda tive dificuldades a fazer... não é simplificar, é com números primos.
>
> (Entrevista, Rodrigo)

Deste modo, em contraste com a perceção apresentada pela Hélia, observa-se que as dificuldades identificadas por este aluno assumem uma natureza essencialmente procedimental, centrando-se na decomposição em fatores primos, em detrimento de dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado.

Por fim, no que diz respeito à Elisa e à Jéssica, ambas as participantes não reportaram dificuldades significativas na resolução da tarefa. Em ambos os casos, a alínea *b)* foi identificada como o único momento de maior atenção e dificuldade. A Elisa referiu uma ligeira demora no raciocínio nessa alínea, associando-a ao facto de ser necessário considerar restrições relativas à variável independente *t*,

nomeadamente compreender que “o gafanhoto não passa do chão... nem vai antes do eixo do *y*, nem abaixo do eixo do *x*, ou seja, é tudo positivo” (Entrevista, Elisa). Por sua vez, a Jéssica indicou igualmente a alínea *b)* como a única em que sentiu maior dificuldade, referindo que “foi mesmo falta de compreensão, se calhar” (Entrevista, Jéssica), admitindo que inicialmente não entendeu o que tinha de fazer.

Importa destacar que, no que diz respeito a esta última tarefa, os participantes demonstraram, em geral, maior facilidade na sua resolução, referindo que o contexto do problema lhes era familiar, por estar próximo da sua realidade:

> **Hélia:** Foi mais fácil, porque eu consigo visualizar melhor o gafanhoto do que, por exemplo, o do declive. Porque tipo, o gafanhoto a saltar é algo que eu consigo imaginar... sim.
>
> (Entrevista, Hélia)

Como podemos observar, a aluna admite que, de facto, este fator poderá ter condicionado a existência de menores dificuldades, nomeadamente por ser possível imaginar a situação descrita no problema.

Por sua vez, o Miguel, o Marco e o Rodrigo partilharam uma abordagem semelhante:

> **Miguel:** Eu acho que [o contexto do problema] ajudou porque, de certa forma, dá para visualizar. Se não fosse um gafanhoto, seria um ponto... Teria que imaginar isso de alguma forma... eu acho que seria mais complicado, porque a pessoa teria que visualizar um ponto a passar pela função. Um gafanhoto a pessoa sabe, intuitivamente, que vai saltar, meio que numa parábola. Então acho que ajudou.
>
> (Entrevista, Miguel)

> **Marco:** (...) Acho que tive menos dificuldades [na Tarefa 3].
> **Investigadora:** Menos? E porque é que achas isso?
> **Marco:** Porque dá para imaginar o gafanhoto a saltar e os exercícios são relativamente simples e... a dificuldade não é muito grande.
>
> (Entrevista, Marco)

Rodrigo: [O contexto da Tarefa 3] Facilitou.
Investigadora: Facilitou porquê?
Rodrigo: Porque, por exemplo, já sei que o tempo nunca vai ser negativo e que a altura também não tem como ser negativa, porque ele não consegue saltar para baixo. [risos]

(Entrevista, Rodrigo)

Tanto o Miguel como o Marco salientaram que a sensação de familiaridade com o contexto da Tarefa 3 constituiu um elemento facilitador da sua resolução, na medida em que lhes permitiu visualizar mais facilmente a situação apresentada. Além disso, à semelhança da Hélia, ambos destacaram que o contexto da tarefa era facilmente imaginável, referindo que a representação de um gafanhoto em movimento tornava mais intuitiva a compreensão da trajetória descrita.

Já o Rodrigo considerou, igualmente, que o contexto da tarefa facilitou a sua resolução, na medida em que lhe permitiu atribuir significado aos valores envolvidos e reconhecer algumas das restrições inerentes à situação descrita. Em particular, referiu que o facto de se tratar do salto de um gafanhoto o levou a assumir que nem o tempo nem a altura poderiam assumir valores negativos, utilizando características do contexto para interpretar o comportamento da função. Assim, neste caso, o elemento facilitador não parece residir na familiaridade da situação apresentada, mas na possibilidade de mobilizar conhecimentos intuitivos sobre o fenómeno descrito para interpretar matematicamente o problema. Deste modo, o contexto funcionou como um suporte para a atribuição de significado às variáveis e para a delimitação dos valores considerados plausíveis.

Por fim, também a Jéssica atribuiu ao contexto da tarefa um papel facilitador no processo de resolução:

Jéssica: [O contexto da Tarefa 3] Facilitou.
Investigadora: Facilitou? Porquê? Por que é que achas que facilitou?
Jéssica: Humm, não sei explicar... se calhar, porque com isso foi mais fácil de fazer do que as outras tarefas.
Investigadora: Porque achas que foi mais fácil que o resto das tarefas propostas?
Jéssica: Porque um gafanhoto a saltar vê-se no dia-a-dia.

(Entrevista, Jéssica)

Analisando a resposta da Jéssica, é percetível alguma dificuldade em explicitar de forma imediata os motivos subjacentes à sensação de maior facilidade. Apesar de reconhecer que a tarefa lhe pareceu mais simples devido ao contexto da Tarefa 3, a participante não consegue inicialmente justificar essa perceção, remetendo apenas para uma explicação pouco desenvolvida. Apenas após novas questões colocadas pela investigadora associa a mesma ao facto de a situação apresentada lhe ser familiar e observável no quotidiano, o que indica que a articulação entre a sua experiência pessoal e a interpretação da tarefa surge de forma menos espontânea quando comparada com outros participantes.

5. Conclusões e recomendações

Do meu ponto de vista, a realização deste estudo constituiu uma experiência bastante enriquecedora, tanto do ponto de vista investigativo como profissional, proporcionando momentos de reflexão acerca da prática letiva e sobre o papel da investigação na compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. O desenvolvimento deste trabalho permitiu mobilizar e consolidar conhecimentos adquiridos ao longo do meu percurso formativo no mestrado, bem como aprofundar a compreensão de uma problemática identificada no contexto da PES, considerada relevante para a promoção das aprendizagens dos alunos. Para além dos contributos decorrentes da investigação realizada, este processo possibilitou o desenvolvimento de competências de análise crítica, interpretação de dados e reflexão sobre a prática pedagógica, reforçando a importância de uma ação docente sustentada por evidências e por uma postura de investigação contínua.

Neste sentido, no presente capítulo, apresenta-se uma síntese do estudo desenvolvido, seguida da discussão das principais conclusões obtidas, estabelecendo-se a sua articulação com o enquadramento teórico apresentado anteriormente. Posteriormente, são identificadas algumas limitações do estudo e apresentadas recomendações para futuras investigações e para a prática educativa.

5.1. Síntese do estudo

Este estudo teve como objetivo compreender as dificuldades dos alunos, e respetivas causas, na realização de tarefas que envolvem raciocínio matemático. Neste sentido, procurou-se dar resposta às seguintes questões de investigação: i) Quais são as dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático? e ii) Quais são as suas causas?.

Para a concretização deste estudo, foram selecionados seis alunos da turma do 10.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias com a qual tive contacto na escola onde decorreu a PES. A seleção dos participantes procurou assegurar a inclusão de alunos com diferentes perfis, quer ao nível do desempenho e das capacidades matemáticas, quer ao nível do envolvimento e da participação nas atividades da disciplina, permitindo uma análise mais abrangente das dificuldades manifestadas. Estes alunos participaram em três entrevistas com tarefas, durante as quais verbalizaram o seu pensamento ao longo do processo de resolução, permitindo

identificar as dificuldades manifestadas e as causas que poderão estar na sua origem. Após a realização destas entrevistas, foi conduzida uma entrevista final individual, na qual os participantes foram convidados a refletir sobre a sua experiência no estudo, explicitando as dificuldades sentidas na resolução das tarefas e as causas que lhes atribuíram.

5.2. Dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo raciocínio matemático

Perante um trabalho em torno de tarefas que envolvem raciocínio matemático, os alunos revelaram dificuldades relacionadas com a interpretação de enunciados, a utilização da linguagem e do cálculo algébrico, a articulação entre diferentes representações matemáticas, a comunicação matemática escrita e oral, e a interpretação e validação de resultados. Estas dificuldades decorrem de diversos fatores, nomeadamente de natureza cognitiva, processual e relacionados com hábitos de trabalho previamente consolidados, que se sintetizam na Tabela 3:

Dificuldades	Causas
Interpretação de enunciados	• Leitura pouco atenta do enunciado; • Falta de concentração; • Menor familiaridade com tarefas desafiantes.
Linguagem e cálculo algébrico	• Fragilidades na utilização de linguagem simbólica e na aplicação de propriedades e técnicas de cálculo algébrico; • Maior à-vontade no trabalho com valores numéricos do que com expressões algébricas.
Articulação entre diferentes representações matemáticas	• Preferência por representações mais familiares e intuitivas; • Maior facilidade em trabalhar com cada representação de forma independente.
Comunicação matemática escrita e oral	• Experiência reduzida em tarefas que exigem explicitação do raciocínio; • Valorização da resposta final em detrimento do processo de resolução.
Interpretação e validação de resultados	• Domínio insuficiente dos conceitos matemáticos; • Falta de atenção na análise do contexto apresentado; • Memorização de conceitos e mecanização de procedimentos.

Figura 35 - Dificuldades manifestadas pelos alunos e respetivas causas

A primeira dificuldade evidenciada pelos alunos na realização das três tarefas propostas relacionou-se com a *interpretação dos enunciados*. De facto, foram vários os momentos nos quais os alunos revelaram incertezas na compreensão do que era pedido, sobretudo na realização da Tarefa 2. Desde os momentos iniciais, observou-se alguma desorientação, associada sobretudo a uma leitura pouco atenta do enunciado, à falta de concentração e a uma menor familiaridade com tarefas desafiantes. Em alguns casos, foi necessário reler o enunciado e prestar algum apoio pontual no sentido de clarificar o que era solicitado, evidenciando que a dificuldade dos alunos não estaria propriamente relacionada com a resolução em si, mas com a construção inicial do significado da tarefa.

Efetivamente, a compreensão do enunciado constitui uma etapa determinante no trabalho dos alunos, sendo a interpretação correta das situações propostas e a atribuição de significado às mesmas condições essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 2007). Acresce ainda que as tarefas desafiantes implicam um maior grau de autonomia interpretativa, o que pode dificultar o desempenho dos alunos menos habituados a este tipo de abordagem (Ponte, 2005), constituindo este um desafio amplamente reconhecido na introdução de tarefas matemáticas exigentes ao nível da interpretação (Boavida et al., 2008).

As maiores dificuldades dos alunos surgiram ao nível da *linguagem e cálculo algébrico*, ou seja, na compreensão e interpretação da linguagem simbólica própria da Álgebra, na representação de situações matemáticas sob a forma de expressões algébricas e na manipulação destas expressões através da aplicação de propriedades e regras previamente abordadas em anos letivos anteriores. Tanto na realização da parte 2 da Tarefa 1 como da Tarefa 2, os participantes evidenciaram dificuldades na utilização e manipulação de expressões algébricas, manifestando um elevado desconforto perante a ausência de valores numéricos explícitos. Esta ausência condicionou as suas abordagens às tarefas, sendo frequentemente interpretada como uma insuficiência de informação no enunciado, o que se refletiu numa hesitação em prosseguir com os procedimentos algébricos necessários. Este tipo de dificuldades tem sido amplamente referido como um dos principais obstáculos na aprendizagem da Álgebra, particularmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Ponte et al., 2008; Kieran, 2007). Em particular, diversos estudos têm salientado que a compreensão e interpretação da linguagem simbólica, bem como a utilização e manipulação de expressões algébricas através da aplicação de propriedades e regras, constituem aspetos críticos no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (Boavida et al., 2008; Lannin, 2005). Este conjunto de dificuldades surge frequentemente associado à necessidade de uma transição do raciocínio aritmético, fortemente dependente de valores numéricos, para uma compreensão mais estrutural e relacional das expressões algébricas, processo identificado como particularmente exigente para muitos alunos (Carraher et al., 2008; Kieran, 2007). Neste sentido, a tendência observada nos participantes numa dependência da presença de valores numéricos explícitos encontra eco em investigações que evidenciam dificuldades na mobilização de conhecimentos algébricos em contextos mais abstratos, nomeadamente na aplicação de propriedades (Lannin, 2005; Zazkis et al., 2008). Adicionalmente, esta dificuldade pode ser compreendida, segundo Lithner (2008),

como estando associada à predominância de um raciocínio baseado na imitação, ou seja, baseado na reprodução de procedimentos previamente memorizados, em detrimento de um raciocínio mais flexível e orientado para a compreensão.

A terceira dificuldade identificada na realização das três tarefas propostas diz respeito à *articulação entre diferentes representações matemáticas*. Aquando da apresentação e discussão dos resultados, constatou-se que a maioria dos alunos privilegiava as representações com as quais estava mais familiarizada, nomeadamente as representações numéricas, evidenciando maior facilidade em trabalhar com cada representação de forma independente do que em estabelecer conexões entre as diferentes formas de representar um mesmo conceito matemático. Esta dificuldade manifestou-se de modo particularmente evidente quando os alunos interpretaram expressões algébricas com significado geométrico como correspondendo diretamente a pontos no plano. A título de exemplo, alguns alunos associaram diferenças entre coordenadas à localização de um ponto sobre o segmento de reta, ou ao respetivo ponto médio, o que revela uma interpretação incorreta dessas expressões: estas foram entendidas como pontos pertencentes a um segmento de reta, quando, na verdade, correspondiam a variações entre valores. Esta tendência sugere que a dificuldade observada poderá estar associada à complexidade inerente aos processos de conversão e coordenação entre representações, os quais exigem uma compreensão mais aprofundada dos conceitos envolvidos. De facto, muitos alunos revelam dificuldades na articulação entre diferentes representações matemáticas, mesmo quando são capazes de utilizar cada uma delas separadamente (Hitt, 1998). Com efeito, a capacidade de transitar entre representações assume um papel central na atribuição de significado aos conceitos matemáticos, na medida em que permite aos alunos reconhecer um mesmo objeto matemático sob diferentes formas. Nesta linha de pensamento, a compreensão concetual desenvolve-se precisamente quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre as diferentes formas de representar um mesmo conceito, sendo as representações centrais para a compreensão dos processos de raciocínio matemático (Ponte & Quaresma, 2014).

Outra dificuldade identificada relaciona-se com a *comunicação matemática*, tanto na vertente *escrita* como *oral*. Ao longo da realização das tarefas, verificou-se que alguns alunos tinham dificuldade em explicar e justificar os seus raciocínios, sobretudo quando lhes era pedido que descrevessem os procedimentos utilizados ou fundamentassem as suas conclusões. Por exemplo, vários alunos questionaram

repetidamente "tenho de justificar o quê?", o que revela dificuldade em estruturar e comunicar o seu pensamento matemático. Esta dificuldade poderá estar relacionada com a reduzida experiência destes alunos em tarefas que exijam justificar, oralmente ou por escrito, os seus raciocínios, bem como com a tendência para valorizar mais a obtenção da resposta do que o processo de resolução. A comunicação matemática das ideias assume, por isso, um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio, na medida em que permite aos alunos organizar, clarificar e justificar o seu pensamento. De facto, Mata-Pereira e Ponte (2018) destacam a importância de criar oportunidades para que os alunos expliquem e fundamentem as suas ideias, promovendo o desenvolvimento do raciocínio matemático. Também Ponte et al. (2020) salientam que a explicitação do raciocínio contribui para uma compreensão mais aprofundada dos conceitos e para o desenvolvimento das capacidades de argumentação e justificação.

A última dificuldade identificada relaciona-se com a *interpretação e a validação de resultados*. Verificou-se que alguns alunos revelaram dificuldade em analisar criticamente os resultados obtidos e em avaliar a sua adequação à situação apresentada, observando-se, por exemplo, uma tendência para excluir soluções negativas de forma imediata, por serem consideradas "não realistas", sem qualquer validação matemática explícita. Esta dificuldade poderá estar associada a um domínio insuficiente de determinados conceitos matemáticos e à falta de atenção na análise do contexto apresentado, o que condiciona a interpretação dos resultados alcançados, mas também à tendência para recorrer à memorização de conceitos e à mecanização de procedimentos, o que poderá ter limitado a capacidade dos alunos para refletir sobre a razoabilidade das suas respostas e de as validar de forma consistente. A interpretação, a validação e a reflexão sobre os resultados constituem, assim, aspetos essenciais do raciocínio matemático. A este respeito, Lithner (2008) distingue o raciocínio criativo do raciocínio imitativo, salientando que este último, baseado na reprodução de procedimentos memorizados, pode limitar a capacidade dos alunos para justificar e validar as suas respostas. Também Ponte et al. (2020) referem que a validação de resultados constitui uma componente essencial do raciocínio matemático, na medida em que implica a análise crítica das soluções e a sua adequação ao contexto da situação apresentada. No caso específico da terceira tarefa, a interpretação e validação dos resultados exigiam que os alunos articulassem o conhecimento matemático com o contexto que a tarefa envolvia. Neste sentido, Gravemeijer (2005) sublinha a importância da ligação entre a matemática e os

contextos de aplicação, defendendo que a compreensão concetual se desenvolve quando os alunos conseguem atribuir significado às suas produções matemáticas.

De um modo geral, o presente estudo permitiu identificar e caracterizar as dificuldades reveladas pelos alunos na realização de tarefas que mobilizam o raciocínio matemático. Estas dificuldades refletem-se em diferentes dimensões da aprendizagem da matemática, nomeadamente na compreensão dos enunciados, no domínio da linguagem algébrica, na articulação entre diferentes representações, na comunicação matemática e na validação dos resultados obtidos. Conclui-se, assim, que o desenvolvimento do raciocínio matemático exige uma intervenção pedagógica intencional e contínua, que promova a construção de processos de pensamento mais autónomos, críticos e sustentados..

5.3. Considerações finais

Importa salientar que o desenvolvimento deste estudo não esteve isento de desafios, ainda que tenha proporcionado aprendizagens significativas e gerado oportunidades de reflexão sobre as suas limitações e implicações. Entre essas aprendizagens, destaco, em particular, a possibilidade de conduzir uma investigação no domínio da educação matemática, mobilizando os conhecimentos construídos ao longo do mestrado para o estudo de uma problemática que reconheci como relevante durante a PES. Este percurso permitiu-me compreender com maior clareza as dificuldades que os alunos manifestam na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático e refletir sobre possíveis estratégias para as colmatar, nomeadamente formas de apoiar os alunos nos processos de generalização e de justificação. Para além disso, tive a oportunidade de selecionar e adaptar tarefas sobre funções quadráticas e geometria analítica no plano, e de as implementar junto de alguns alunos, o que me permitiu identificar que tipo de tarefas tem maior potencial para promover a aprendizagem e desenvolver a minha capacidade de antecipar as dificuldades dos estudantes. Por exemplo, na Tarefa 1, não tinha previsto que pudessem existir alunos que interpretassem a diferença entre duas coordenadas, como $x_B - x_A$, como a localização de um ponto do segmento de reta ou mesmo do seu ponto médio, em vez de a encararem como uma variação entre valores. Na Tarefa 2, não esperava que fosse necessário um apoio no passo intermédio de fatorização – colocar o fator numérico comum em evidência – antes de os alunos conseguirem reconhecer a estrutura da diferença de quadrados, uma vez que tinha previsto apenas a dificuldade relativa ao reconhecimento dessa estrutura, e não a etapa que a precede. Na Tarefa 3, não tinha

antecipado que a simples conversão de metros para centímetros pudesse, por si só, constituir um obstáculo à resolução da inequação, sobretudo porque os alunos demonstravam já dominar os procedimentos matemáticos mais complexos exigidos pela tarefa. Estas situações fizeram-me perceber que a antecipação de dificuldades, ainda que essencial para preparar a condução das entrevistas com tarefas, nunca esgota a diversidade de estratégias e ideias que os alunos podem mobilizar.

No entanto, importa salientar que surgiram algumas dificuldades e desafios ao longo da implementação deste estudo, os quais influenciaram, em determinados momentos, o processo de recolha de dados. Um dos principais desafios relacionou-se com a timidez e a insegurança demonstradas por alguns dos participantes durante a realização das entrevistas com tarefas. Em determinados momentos, mesmo sendo bastante comunicativos em ambiente de sala de aula, observou-se algum receio em responder às questões ou em cometer erros, o que levou a hesitações e a respostas menos espontâneas. Perante esta situação, foi necessário adotar uma postura encorajadora e criar um ambiente de confiança, reforçando que não existiam respostas certas ou erradas. Embora esta circunstância possa ter condicionado parcialmente a profundidade de algumas respostas, os participantes foram gradualmente demonstrando maior conforto ao longo das entrevistas, permitindo a obtenção dos dados necessários para o desenvolvimento do estudo.

Para além dos desafios associados à participação dos alunos, importa igualmente reconhecer algumas dificuldades sentidas por mim enquanto investigadora. A condução das entrevistas constituiu uma experiência particularmente exigente, não apenas pela responsabilidade inerente à recolha de dados, mas também pela necessidade de manter uma postura rigorosa e coerente com os objetivos do estudo. Nas fases iniciais, senti alguma insegurança relativamente à minha capacidade para desempenhar adequadamente o papel de entrevistadora, sobretudo no que respeita à gestão das interações com os participantes e à recolha de informação sem interferir nos seus processos de raciocínio. Em determinados momentos, a minha recente experiência em sala de aula enquanto docente levou-me a adotar uma postura mais orientadora do que a desejável no contexto da investigação, intervindo ocasionalmente para apoiar os alunos durante a realização das tarefas. Contudo, a reflexão sistemática sobre cada entrevista realizada, bem como a audição e análise dos registos recolhidos, permitiram-me identificar progressivamente aspetos a melhorar e ajustar a minha atuação nas entrevistas subsequentes. Este processo revelou-se

fundamental para o desenvolvimento das minhas competências enquanto investigadora, contribuindo para uma maior consciência do impacto que a intervenção do entrevistador pode ter na produção dos dados e para uma condução cada vez mais rigorosa das entrevistas. Apesar das dificuldades sentidas, considero que esta evolução ao longo do estudo possibilitou a recolha de um conjunto de dados consistente e adequado aos objetivos da investigação.

Como em qualquer investigação, o presente estudo apresenta algumas limitações que importa serem reconhecidas. Uma delas prende-se com a falta de experiência da investigadora na condução de estudos desta natureza. Embora tenham sido seguidos os procedimentos metodológicos definidos e adotadas estratégias que procuraram garantir o rigor da investigação, a minha falta de experiência neste domínio poderá ter influenciado algumas decisões tomadas ao longo do processo, nomeadamente ao nível da recolha e condução dos dados. A análise retrospetiva do estudo permitiu identificar aspetos que poderiam ter sido abordados de forma distinta, constituindo, simultaneamente, uma oportunidade de aprendizagem e desenvolvimento das minhas competências de investigação. Por exemplo, se agora voltasse a realizar este estudo muito provavelmente repensaria a ordem de apresentação das tarefas propostas aos participantes, tendo em conta a progressão da complexidade do raciocínio matemático envolvido. Considero que teria sido mais adequado iniciar pela Tarefa 3, uma vez que esta se encontrava mais ancorada em contextos próximos das experiências dos estudantes, o que poderia facilitar a sua compreensão inicial do problema e o envolvimento no processo de resolução. Seguidamente, avançaria para a Tarefa 1, que envolve a passagem do registo numérico para o registo algébrico, constituindo uma etapa intermédia importante na formalização do raciocínio matemático. Por fim, seria aplicada a Tarefa 2, centrada predominantemente no registo algébrico e, por conseguinte, num nível mais elevado de abstração. Esta reorganização da sequência – Tarefa 3, Tarefa 1 e Tarefa 2 – permitiria uma progressão mais consistente do raciocínio matemático, desde abordagens mais intuitivas e contextuais até formas de representação mais formais e simbólicas, potenciando uma transição mais gradual entre diferentes níveis de abstração. Para além dos aspetos anteriormente referidos, o tempo disponível constituiu igualmente uma limitação a considerar neste estudo. Embora a recolha de dados tenha sido iniciada de forma relativamente atempada, o calendário definido para a sua realização acabou por impor algumas restrições à gestão do processo investigativo. Em particular, a necessidade de conciliar a investigação com outras exigências académicas e contextuais, nomeadamente as

associadas ao estágio, condicionou a possibilidade de prolongar a fase de recolha de dados e de aprofundar a análise dos resultados de forma mais detalhada e extensiva. Ainda que o planeamento tenha permitido assegurar a concretização das etapas essenciais do estudo, reconhece-se que um período temporal mais alargado poderia ter favorecido uma exploração mais aprofundada dos dados e a introdução de eventuais ajustes ao longo do processo de investigação.

Associado a este constrangimento temporal, importa referir que o ritmo de desenvolvimento do estudo não permitiu que a análise dos dados fosse realizada com a antecedência necessária para sustentar o desenho e a implementação de uma eventual intervenção pedagógica subsequente. Apesar da recolha de dados ter sido iniciada atempadamente, não foi possível proceder, em tempo útil, à identificação sistemática de padrões de erro e dificuldades que permitissem fundamentar o planeamento de estratégias de intervenção ajustadas.

Em futuras investigações, poderá ser considerada a implementação de uma intervenção pedagógica orientada para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em tarefas semelhantes às utilizadas neste estudo. Esta intervenção poderia consistir na realização de momentos semanais de discussão coletiva em sala de aula, centrados na explicitação, comparação e validação de diferentes estratégias de resolução. Nestes momentos, os alunos seriam incentivados a resolver tarefas progressivamente mais exigentes, promovendo a verbalização e a justificação do seu raciocínio em diferentes etapas do processo de resolução. A intervenção poderia ser estruturada em três fases articuladas. Numa fase inicial, seriam propostas tarefas mais contextualizadas, com o objetivo de mobilizar estratégias intuitivas e promover a compreensão do problema. Numa fase intermédia, seriam trabalhadas tarefas que exigissem a mobilização e articulação de diferentes formas de representação e pensamento matemático, incentivando os alunos a explicitar os seus procedimentos e justificações. Numa fase final, seriam propostas tarefas mais exigentes do ponto de vista concetual, centradas na generalização de relações matemáticas e na promoção de níveis mais elevados de abstração. Ao longo de todo o processo, o professor assumiria um papel de mediador, promovendo a discussão coletiva das diferentes resoluções apresentadas e valorizando o erro como ponto de partida para a reflexão. Desta forma, a intervenção não procuraria apenas melhorar o desempenho dos alunos neste tipo de tarefas, mas sobretudo desenvolver a sua capacidade de justificação e generalização de forma articulada e consistente.

Outras sugestões para investigações futuras prendem-se com o ampliar deste estudo a alunos de diferentes níveis de escolaridade, abrangendo momentos distintos do percurso educativo. Tal permitiria analisar com maior profundidade a evolução das capacidades de justificação e generalização ao longo da escolaridade obrigatória, bem como compreender de que forma os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático. Adicionalmente, estudos com diferentes faixas etárias poderão contribuir para identificar dificuldades recorrentes e momentos particularmente desafiantes na construção do pensamento matemático mais abstrato, fornecendo indicadores relevantes para a definição de estratégias pedagógicas que promovam, de forma progressiva e consistente, o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Em jeito de conclusão, realço que a realização deste relatório constituiu a etapa final de um percurso marcado por múltiplas aprendizagens e desafios. O desenvolvimento deste estudo permitiu-me compreender melhor a importância da investigação em educação e o modo como esta pode contribuir para uma prática pedagógica mais consciente e devidamente sustentada. A análise das estratégias e dificuldades dos alunos levou-me a olhar para as suas ideias com maior atenção, valorizando não apenas os resultados obtidos, mas também os processos que lhes dão origem. Este trabalho permitiu-me ainda reconhecer alguns dos desafios associados ao ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente a necessidade de criar oportunidades para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de justificar, generalizar e atribuir significado aos conceitos matemáticos com os quais contactam. Assim, a minha convicção de que o ensino e aprendizagem da Matemática deve promover a participação ativa dos alunos e valorizar o raciocínio como elemento central da aprendizagem foi bastante reforçada. Por sua vez, a PES proporcionou-me um contacto próximo com a realidade da profissão docente, permitindo-me aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo da minha formação, enfrentar desafios reais e desenvolver uma maior consciência das responsabilidades associadas ao papel do professor. A interação com os alunos, a necessidade de adaptar estratégias às características da turma e os momentos de reflexão sobre a prática contribuíram muito para o meu crescimento pessoal e profissional. Ao concluir este percurso, sinto que levo comigo não apenas os conhecimentos adquiridos, mas também uma visão mais clara da professora que pretendo ser: uma professora que procura compreender os seus alunos, que valoriza o seu pensamento e que encara a aprendizagem como um processo contínuo, tanto para os alunos como para si própria.

Referências Bibliográficas

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Universidade de Coimbra.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções* [Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. https://repositorio.ulisboa.pt/entities/publication/ae248b99-7990-474a-97e8-23df7333cd20

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). PME.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.

Bulhões, F. M. (2007). Como diria Nietzsche, pensar é (antes de tudo) uma atividade criativa. *Princípios*, *14*(22), 253–260.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais de Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico, 1.º ano*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_1.o_ano.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação - Guia para autoaprendizagem* (2.ª ed.). Universidade Aberta.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM – Mathematics Education, 40*(1), 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário, 10.º ano*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Coelho, L. (2023). *As representações de funções na promoção do raciocínio matemático de alunos do 10.º ano de escolaridade* [Relatório de estágio, Universidade do Minho]. https://repositorium.uminho.pt/server/api/core/bitstreams/23718204-dca3-4fab-a1b8-7d7727a2bdbd/content

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge Falmer.

Galdo Jiménez, A. J. (2021). El razonamiento deductivo, inductivo y abductivo: diferencias e integración desde ejemplos empresariales . Phainomenon, 20(2), 203–222. https://doi.org/10.33539/phai.v20i2.2458

Goldin, G. (2020). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds,), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K. (2005). *What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?* In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83–101). APM.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. https://repositorio.ulisboa.pt/entities/publication/d814f497-9a26-4c67-a635-031165a07110

Henriques, A., & Ponte, J. P. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Boletim de*

Educação Matemática (Bolema), 28(48), 276-298. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a14

Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários. *Quadrante*, *21*(2), 139–164.

Hitt, F. (1998). Difficulties in articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123–134.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–23. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K–Grade 8*. NCTM.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula* [Tese de doutoramento, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa]. https://repositorio.ulisboa.pt/bitstreams/450c8791-2f0a-45ff-943f-584fb7693ba6/download

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, *32*(62), 781–801. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. NCTM.

Oliveira, P. (2008) O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, (100), 3–9.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning: Volume 1. Induction and analogy* (2nd ed.). Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, *100*, 89–96.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. *Bolema*, *28*(50), 1464–1484. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a22

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). *Teachers' professional practice conducting mathematical discussions*. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 51–66.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, (156), 7-11.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). APM.

Projeto REASON. (2019). *Princípios para a elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos*. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213–221. https://doi.org/10.5951/MTMS.15.4.0212

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K–12* (pp. 1–12). National Council of Teachers of Mathematics.

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática*, *101*, 37–41

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). *The role of examples in forming and refuting generalizations*. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 131–141. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0065-9

Anexos

Anexo 1 - Proposta de resolução da Tarefa 1

Tarefa 1

Parte 1

a) Os pontos $A(1,2)$ e $B(5,2)$ têm a mesma ordenada, pelo que se encontram alinhados na horizontal. Assim, a distância entre A e B corresponde ao módulo da diferença entre as abcissas dos dois pontos:

$$d(A,B) = |5-1| = |1-5| = 4$$

Os pontos $B(5,2)$ e $C(5,5)$ têm a mesma abcissa, pelo que se encontram alinhados na vertical. Assim, a distância entre B e C corresponde ao módulo da diferença entre as ordenadas dos dois pontos:

$$d(B,C) = |5-2| = |2-5| = 3$$

b) Através da alínea anterior, tem-se que $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{gathered}\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 16 + 9 \\ \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{25} \\ \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm 5\end{gathered}$$

Como $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = 5$.

Parte 2

a)

- x_A representa a abcissa do ponto A, isto é, a distância do ponto A ao eixo das ordenadas;
- y_A representa a ordenada do ponto A, isto é, a distância do ponto A ao eixo das abcissas;
- x_B representa a abcissa do ponto B, isto é, a distância do ponto B ao eixo das ordenadas;
- y_B representa a ordenada do ponto B, isto é, a distância do ponto B ao eixo das abcissas;

b)

- $x_B - x_A$ representa a distância horizontal entre os pontos A e B;
- $y_B - y_A$ representa a distância vertical entre os pontos A e B;

c) Notemos que $|x_B - x_A|$ corresponde ao comprimento do cateto horizontal do triângulo retângulo cuja hipotenusa é $\overline{AB}$. De modo análogo, $|y_B - y_A|$ corresponde ao cateto vertical do mesmo triângulo.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\overline{AB}^2 = (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

d) Através da alínea anterior, sabemos que:

$$\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Note-se que a distância entre dois pontos não depende da ordem em que são considerados, ou seja, $\overline{AB} = \overline{BA}$. De facto,

- $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$
- $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$

Portanto, $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Assim, para quaisquer dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano, a distância entre eles é dada pela expressão:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Anexo 2 - Proposta de resolução da Tarefa 2

Tarefa 2

Se os pontos A, B e C pertencem à função $f(x) = 3x^2$ e as suas abcissas são, respetivamente, a, b e c tais que $a < b < c$, então:

$$y_A = f(a) = 3a^2$$
$$y_B = f(b) = 3b^2$$
$$y_C = f(c) = 3c^2$$

Assim, $A(a, 3a^2)$, $B(b, 3b^2)$ e $C(c, 3c^2)$.

De seguida, determinamos o declive das retas AB e BC através das coordenadas dos pontos que obtivemos:

$$m_{AB} = \frac{3b^2-3a^2}{b-a} = \frac{3(b^2-a^2)}{b-a} = \frac{3(b+a)(b-a)}{b-a} = 3(b+a)$$
$$m_{BC} = \frac{3c^2-3b^2}{c-b} = \frac{3(c^2-b^2)}{c-b} = \frac{3(c+b)(c-b)}{c-b} = 3(c+b)$$

Sabendo que $a < c$, então:

$$b + a < c + b \Leftrightarrow 3(b+a) < 3(c+b) \Leftrightarrow m_{AB} < m_{BC}$$

O declive da reta AB é menor que o declive da reta BC.

Anexo 3 - Proposta de resolução da Tarefa 3

Tarefa 3

a) Para determinar a altura do muro, temos de calcular o valor de $a(t)$ quando $t = 0$, dado que, no instante incial, o gafanhoto estavam em cima do muro. Deste modo, a altura do muro é igual a:

$$a(0) = -30 \times 0^2 + 20 \times 0 + 80 = 80 \text{ cm}$$

b) Notemos que, por um lado, como a variável independente t representa o tempo (em segundos), t não pode tomar valores inferiores a 0.

Por outro lado, o valor de t terá de ser limitado superiormente uma vez que o salto do gafanhoto termina quando o mesmo atinge o chão, ou seja, quando a altura a (em centímetros) se anula. Deste modo, reta-nos determinar para que valores de t é que $a(t) = 0$:

$$\begin{gathered} a(t) = 0 \\ \Leftrightarrow -30t^2 + 20t + 80 = 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times (-30) \times 80}}{2 \times (-30)} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 9600}}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{10000}}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm 100}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20-100}{-60} \vee t = \frac{-20+100}{-60} \\ \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -\frac{4}{3} \end{gathered}$$

Como $t > 0$, então o valor máximo que t pode tomar é 2. Assim, a expressão $a(t)$ tem significado para $t \in [0, 2]$.

c) O salto do gafanhoto, descrito a partir da expressão $a(t)$, corresponde a uma parábola com concavidade voltada para baixo, ou seja, a altura máxima atingida pelo gafanhoto será no momento em que é atingido o vértice da parábola.

Deste modo, determinamos a abcissa do vértice (h) através das abcissas dos pontos obtidos na alínea anterior:

$$h = \frac{2 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Por fim, determinamos o valor de $k = a(h)$:

$$k = a(h) = -30 \times (\tfrac{1}{3})^2 + 20 \times \tfrac{1}{3} + 80 = -\tfrac{30}{9} + \tfrac{20}{3} + 80 = -\tfrac{30}{9} + \tfrac{60}{9} + \tfrac{720}{9} = \tfrac{750}{9} \approx 83,3$$

A altura máxima atingida pelo gafanhoto foi aproximadamente 83, 3cm

d) Sabe-se que meio metro corresponde a 50 centímetros e que o gafanhoto inicia o salto a uma altura de 80 centímetros.

Queremos resolver a inequação $a(t) > 50$, ou seja, $-30t^2 + 20t + 80 > 50$.

Começamos por resolver, auxiliarmente, a equação $-30t^2 + 20t + 80 = 50$:

$$\begin{gathered} -30t^2 + 20t + 80 = 50 \\ \Leftrightarrow -30t^2 + 20t + 30 = 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times (-30) \times 30}}{2 \times (-30)} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 3600}}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{4000}}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm 20\sqrt{10}}{-60} \\ \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \\ \Leftrightarrow t = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \vee t = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \end{gathered}$$

Sabemos que $t > 0$, logo apenas podemos considerar o valor $\frac{1+\sqrt{10}}{3} \approx 1,4$.

O gafanhoto esteve acima de meio metro 1, 4 segundos.

Anexo 4 - Guião para as entrevistas finais individuais

1. Em cada uma das tarefas realizadas, quais é que achas que foram as tuas maiores dificuldades?

2. Porque é que achas que tiveste as dificuldades que referiste?

Anexo 5 - Documento de consentimento informado

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Ex.mo(a) Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Na disciplina de Matemática, a turma do(a) seu(sua) educando(a) conta atualmente com três professoras, sendo duas professoras estagiárias a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP).

No contexto da unidade curricular de **Prática de Ensino Supervisionada**, as referidas professoras estagiárias encontram-se a desenvolver um **projeto de investigação pedagógica**, sob orientação da Professora Doutora Maria de Fátima Delgado (maria.delgado@fc.up.pt), docente da FCUP, com vista à elaboração do respetivo relatório de estágio.

A concretização de cada um destes projetos de investigação pedagógica envolve a implementação de uma intervenção pedagógica integrada no normal funcionamento das aulas de Matemática. A realização destes trabalhos pressupõe a recolha de dados relativos às aprendizagens dos alunos, a qual poderá incluir **a gravação de áudio** de algumas aulas ou de momentos específicos de aula, a **recolha das produções escritas** dos alunos e a **realização de entrevistas** a alguns alunos da turma. As entrevistas, quando realizadas, serão igualmente gravadas em áudio, decorrerão em horário extra-aula, a combinar com os alunos, e poderão realizar-se presencialmente ou através de plataformas de comunicação à distância (Zoom, Microsoft Teams, Google Meet ou outra).

A participação do(a) seu(sua) educando(a) neste estudo é **inteiramente voluntária**. O(a) aluno(a), bem como o(a) respetivo(a) Encarregado(a) de Educação, poderá **retirar o consentimento a qualquer momento**, sem necessidade de apresentar justificação e **sem qualquer prejuízo** para o(a) aluno(a).

Todos os dados recolhidos serão tratados de forma **estritamente confidencial**. Em nenhum momento será divulgada a identidade dos alunos, sendo garantido o **anonimato** nos relatórios de estágio. Após a conclusão dos referidos relatórios, **todos os dados recolhidos serão destruídos**.

A participação neste estudo não envolve quaisquer riscos previsíveis para o(a) aluno(a) e **não interfere de forma alguma com a avaliação** do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática.

Para qualquer esclarecimento adicional, poderá contactar:
Lara Silva, up202107650@up.pt
Tatiana Teixeira, up202006200@up.pt

Agradecemos, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, com os melhores cumprimentos,

____________________ (Lara Silva) ____________________ (Tatiana Teixeira)

Porto, 5 de janeiro de 2026

✂- -

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a)
____________________________, nº _____ da turma ____ do _____ ano,

☐ **Autorizo**
☐ **Não autorizo**

a participação do(a) meu(minha) educando(a) no projeto de investigação das professoras estagiárias acima identificadas.

____________________________ (Assinatura) Porto, ____ de janeiro de 2026