O papel do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau

Tatiana Pinhora Teixeira

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026

O papel do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau

Tatiana Pinhora Teixeira

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3. º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

2026

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar Convidada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Ser professor é plantar sementes invisíveis com a certeza de que, um dia, florescerão em lugares que jamais poderíamos imaginar[1].

[1] Retirado de uma publicação no instagram de @eerepublicadoparaguay.

Agradecimentos

Gostaria de começar por expressar o meu profundo agradecimento a todos aqueles que tornaram possível a realização deste relatório.

Aos meus alunos, agradeço a disponibilidade, a participação no estudo e, mesmo àqueles que não participaram diretamente, agradeço por me terem ajudado, ao longo deste ano, a crescer enquanto professora e pessoa. Muito obrigada pelo carinho e pela forma tão acolhedora como me receberam. Foi um prazer ser vossa professora.

À Professora Doutora Fátima Delgado, agradeço toda a orientação prestada na redação deste relatório, bem como todas as sugestões que contribuíram para a melhoria do meu trabalho. Agradeço, igualmente, a partilha de conhecimentos, a disponibilidade e o apoio prestados ao longo deste ano.

À professora cooperante, deixo o meu sincero agradecimento por todas as orientações e conselhos que tanto contribuíram para o meu crescimento profissional. A sua presença foi, sem dúvida, também marcada pela amizade e pela disponibilidade, tornando este ano de estágio ainda mais enriquecedor.

À minha colega de estágio e amiga, Lara, agradeço por este ano tão especial, vivido com partilhas, companheirismo e entreajuda. Obrigada por todos os momentos, pelas conversas, pela ajuda e por celebrares comigo cada conquista e cada passo deste percurso. Que bonito caminho percorremos juntas.

Gostaria também de expressar o meu agradecimento aos professores extraordinários que tive ao longo do Ensino Secundário e que me inspiraram a seguir este caminho. A professora Helena, o professor Rui e o professor Filipe marcaram profundamente a minha trajetória, não apenas pelo conhecimento que me transmitiram, mas também pelo exemplo e pela motivação que sempre me ofereceram.

Aos meus amigos, novos e antigos, agradeço por estarem sempre presentes, por me apoiarem e por acreditarem em mim, mesmo nos dias em que eu própria duvidava das minhas capacidades.

À minha família, agradeço todo o apoio ao longo destes anos e por serem, sempre, o meu porto de abrigo, independentemente das circunstâncias. Um agradecimento

especial à minha mãe, Lurdes, e ao meu irmão, Tiago, por acompanharem de perto esta caminhada longa e exigente, e por serem os meus pilares.

Agradeço também à minha família emprestada, Susana e Paulo, por tudo o que fizeram e continuam a fazer por mim ao longo destes anos. Levo no coração tudo o que partilharam comigo.

Por fim, quero agradecer ao meu namorado, por estar sempre ao meu lado, por me ouvir nos meus desabafos e por aturar os meus devaneios com tanto carinho e paciência. Não estaria aqui sem o teu apoio incondicional, sem o incentivo constante para ser e fazer melhor, e sem a forma como celebraste cada uma das minhas conquistas como se fossem tuas. Obrigada pelo companheirismo e por toda a paciência que tens tido comigo.

Resumo

A resolução de problemas assume um papel central no currículo de Matemática, desde o ensino básico ao ensino secundário. A utilização de problemas desafiantes permite aos alunos mobilizar os seus conhecimentos e, quando alcançam uma resolução correta, o sentimento de realização resultante contribui para o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à disciplina. Paralelamente, a investigação evidencia que os alunos manifestam frequentemente dificuldades na Álgebra, tentando recorrer sobretudo a estratégias aritméticas e revelando limitações na utilização da linguagem algébrica. Reconhecendo o erro como uma oportunidade de aprendizagem valiosa, os professores devem integrá-lo no processo de ensino e aprendizagem. Quando explorados em sala de aula, os erros podem funcionar como um catalisador da aprendizagem, ao incentivar os alunos a questionar o seu pensamento e a reconstruir o conhecimento de forma mais significativa. Nesta linha de ideias, desenvolveu-se este estudo com o objetivo compreender de que forma a análise de erros promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau. Assim, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: (i) Que tipos de erros surgem com mais frequência na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau? (ii) De que forma a análise do erro contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau? e (iii) Quais são as perceções dos alunos face ao erro? Neste âmbito, com este propósito foi implementada uma intervenção pedagógica, numa turma do 9.º ano de escolaridade, estruturada em três fases. Numa primeira fase, os alunos resolveram individualmente três problemas envolvendo equações do 2.º grau. Na segunda fase, realizaram uma tarefa que reunia os erros mais frequentes, trabalhando em grupo e discutindo as suas conclusões em grande grupo. A terceira fase replicou a primeira, mas com problemas diferentes. Numa abordagem qualitativa e interpretativa, os dados recolhidos incluíram produções escritas dos alunos nas três fases, gravações de áudio de momentos da discussão coletiva, notas de campo resultantes das observações realizadas ao longo da intervenção pedagógica e entrevistas semiestruturadas realizadas no final da intervenção pedagógica. Os resultados evidenciam que os erros mais frequentes ocorrem predominantemente a nível da execução da estratégia definida para a resolução do problema, em particular na resolução das equações do 2.º grau que os modelam. Verificaram-se, ainda, melhorias na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau após a análise e discussão dos erros. Adicionalmente, os alunos

reconheceram a importância do erro no processo de ensino e aprendizagem, embora manifestem algum constrangimento na sua exposição.

Palavras-chave: análise de erros, discussão do erro, resolução de problemas, equações do 2.º grau, perceções de alunos.

Abstract

Problem solving plays a central role in the mathematics curriculum, from primary to secondary schooling. The use of challenging problems allows students to mobilize their knowledge and, when they reach a correct solution, the resulting sense of achievement contributes to the development of a positive disposition towards the subject. At the same time, research shows that students often experience difficulties in Algebra, tending to rely on arithmetic strategies and revealing limitations in the use of algebraic language. Recognizing error as a valuable learning opportunity, teachers are encouraged to integrate it into the teaching and learning process. When explored in the classroom, errors can act as catalysts for learning by encouraging students to question their reasoning and reconstruct knowledge in a more meaningful way. In this context, the present study aims to understand how error analysis promotes the development of problem-solving skills involving quadratic equations. The study seeks to answer the following research questions: (i) What types of errors occur most frequently in solving problems involving quadratic equations? (ii) How does error analysis contribute to the development of problem-solving skills involving quadratic equations? and (iii) What are students' perceptions of error? To address these questions, a pedagogical intervention was implemented in a 9th-grade class, structured in three phases. In the first phase, students individually solved three problems involving quadratic equations. In the second phase, they worked in groups on a task that compiled the most frequent errors and discussed their conclusions in a whole class setting. The third phase replicated the first, but with different problems. Adopting a qualitative and interpretative approach, data collection included students' written productions across the three phases, audio recordings of classroom discussions, field notes from classroom observations, and semi-structured interviews conducted at the end of the intervention. The results show that the most frequent errors occur mainly at the level of executing the chosen problem-solving strategy, particularly in solving the quadratic equations that model the problems. Improvements were also observed in students' problem-solving performance after the analysis and discussion of errors. Additionally, students recognized the importance of error in the teaching and learning process, although they expressed some discomfort in exposing their own mistakes.

Keywords: error analysis, error discussion, problem solving, quadratic equations, students' perceptions.

Índice

Lista de Gráficos x

Lista de Figuras xi

Lista de Abreviaturas xiii

1. Introdução 1

2. Enquadramento Teórico 6

2.1. Resolução de problemas 6

2.2. Ensino e aprendizagem da Álgebra 10

2.2.1. Equações do 2. º grau 12

2.3. O lugar do erro no processo de ensino e aprendizagem 17

3. Intervenção Pedagógica 22

3.1. Caracterização do contexto escolar 22

3.2. Descrição da intervenção pedagógica 25

3.2.1. Intervenção Pedagógica – Fase 1 26

3.2.2. Intervenção Pedagógica – Fase 2 27

3.2.3. Intervenção Pedagógica – Fase 3 30

3.3. Intervenção pedagógica no decorrer do tempo 31

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados 34

4.1. Opções metodológicas 34

4.2. Participantes 35

4.3. Procedimentos de recolha de dados 35

4.4. Procedimentos de análise de dados 37

5. Apresentação e discussão de resultados 38

5.1. Fase 1 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: erros mais frequentes 38

5.1.1. Problema 1 39

5.1.2. Problema 2 43

5.1.3. Problema 3 46

5.2. Fase 2 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: análise de erros.... 51
5.2.1. Problema 1 54
5.2.2. Problema 2 57
5.2.3. Problema 3 58
5.3. Fase 3 – Implicações da análise do erro na resolução de problemas 61
5.3.1. Problema 1 61
5.3.2. Problema 2 64
5.3.3. Problema 3 67
5.4. Perceções dos alunos face ao erro 74
6. Conclusões e recomendações 79
6.1. Síntese do estudo realizado 79
6.2. Erros mais frequentes na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau 80
6.3. Implicações da análise do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas 83
6.4. Perceções dos alunos face ao erro 85
6.5. Considerações finais e implicações para a prática e investigação futura..... 87
Referências Bibliográficas 91
Anexos 97
Anexo 1 – Documento de Consentimento informado 97
Anexo 2 – Documento de Assentimento 98
Anexo 3 – Tarefa 1 (Fase 1) 99
Anexo 4 – Possíveis resoluções da Tarefa 1 (Fase 1) 100
Anexo 5 –Tarefa 2 (Fase 2) 103
Anexo 6 – Possíveis resoluções da Tarefa 2 (Fase 2) 105
Anexo 7 –Tarefa 3 (Fase 3) 109
Anexo 8 – Possíveis resoluções da Tarefa 3 (Fase 3) 110
Anexo 9 – Guião das entrevistas 112

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Nacionalidade dos alunos da turma selecionada 24
Gráfico 2 - Distribuição dos níveis de classificação no 1.º Período a Matemática 25

Lista de Figuras

Figura 1 - Relação entre os diferentes tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e estrutura (Ponte, 2005a, p.18) 6
Figura 2 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Ponte et al., 2009, pp. 96-97) 15
Figura 3 - Esquema de tipificação de erros 21
Figura 4 - Problemas propostos na Fase 1 (Tarefa 1) 26
Figura 5 - Problemas propostos na Fase 2 (Tarefa 2) 29
Figura 6 - Problemas propostos na Fase 3 (Tarefa 3) 31
Figura 7 - Esquematização da intervenção pedagógica ao longo do tempo 33
Figura 8 - Resolução do Problema 1 do Vicente (Fase 1) 39
Figura 9 - Resolução do Problema 1 da Constança (Fase 1) 40
Figura 10 - Resolução do Problema 1 da Letícia (Fase 1) 40
Figura 11 - Resolução do Problema 1 da Ariana (Fase 1) 41
Figura 12 - Resolução do Problema 1 do João (Fase 1) 41
Figura 13 - Resolução do Problema 1 da Mafalda (Fase 1) 42
Figura 14 - Resolução do Problema 1 da Benedita (Fase 1) 42
Figura 15 - Resolução do Problema 2 do Vicente (Fase 1) 43
Figura 16 - Resolução do Problema 2 do João (Fase 1) 44
Figura 17 - Resolução do Problema 2 da Mafalda (Fase 1) 45
Figura 18 - Resolução do Problema 2 do Leonardo (Fase 1) 45
Figura 19 - Resolução do Problema 2 da Letícia (Fase 1) 46
Figura 20 - Problema 3 da Tarefa 1 (Fase 1) 47
Figura 21 - Resolução do Problema 3 da Lara (Fase 1) 47
Figura 22 - Resolução do Problema 3 do Rafael (Fase 1) 49
Figura 23 - Resolução do Problema 3 da Mafalda (Fase 1) 49
Figura 24 - Resolução do Problema 3 do Martim (Fase 1) 50
Figura 25 - Problema 1 da Tarefa 2 54
Figura 26 - Análise da resolução 1 do Problema 1 pelo grupo do Leonardo (Fase 2) 54
Figura 27 - Resolução proposta pelo grupo do Leonardo para o Problema 1 (Fase 2) 56
Figura 28 - Análise das resoluções do Problema 2 pela Letícia e a Graça (Fase 2) 57
Figura 29 - Análise das resoluções do Problema 3 pelo grupo do João (Fase 2) 59
Figura 30 - Problema 1 da Tarefa 3 (Fase 3) 61
Figura 31 - Resolução do Problema 1 da Graça (Fase 3) 62
Figura 32 - Resolução do Problema 1 do Vicente (Fase 3) 62

Figura 33 - Problema 1 da Fase 1 63
Figura 34 - Problema 1 da Fase 3 63
Figura 35 - Problema 2 da ficha da Fase 3 64
Figura 36 - Resolução do Problema 2 da Constança (Fase 3) 64
Figura 37 - Resolução do Problema 2 do João (Fase 3) 65
Figura 38 - Resolução do Problema 2 da Letícia (Fase 3) 65
Figura 39 - Resolução do Problema 2 da Anabela (Fase 3) 66
Figura 40 - Problema 3 da ficha da Fase 3 67
Figura 41 - Resolução do Problema 3 do João (Fase 3) 68
Figura 42 - Resolução do Problema 3 da Constança (Fase 3) 69
Figura 43 - Resolução do Problema 3 do Leonardo (Fase 3) 70
Figura 44 - Resolução do Problema 3 da Paula (Fase 3) 71
Figura 45 - Problema 3 (Fase 1) 72
Figura 46 - Resolução do Problema 1 da Anabela (Fase 1) 73
Figura 47 - Resolução do Problema 1 da Anabela (Fase 3) 73
Figura 48 - Erros cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 1 80
Figura 49 - Erros de execução cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 1 81
Figura 50 - Erros cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 3 83
Figura 51 - Erros de execução cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 3 84

Lista de Abreviaturas

PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
RE	RELATÓRIO DE ESTÁGIO
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

1. Introdução

"Os erros são os portais da descoberta."

(James Joyce)

Esta citação de James Joyce mostra perfeitamente que crescer e aprender tem tudo a ver com a coragem de tentar. No fundo, isto resume bem a nossa própria vida: passamos o tempo a guiar-nos pelos nossos princípios, a tentar perceber se estamos a tomar as decisões certas, mas quase sempre com aquele medo de falhar ou de fazer algo errado. Na aprendizagem da Matemática, as coisas funcionam exatamente da mesma maneira, entre acertos e falhas. É verdade que se não arriscarmos não cometemos erros, mas também é certo que perdemos a experiência, a tentativa e a oportunidade de descobrir algo novo. Como o erro faz parte de quem somos e, mais precisamente, do processo de aprendizagem, acredito que o mais importante é perceber como integrá-lo na minha prática letiva como professora. Foi esta vontade que me levou a procurar mais acerca sobre o tema e a desenvolver uma intervenção pedagógica que culminou neste relatório.

De facto, compreender os erros cometidos pelos alunos, bem como as justificações que eles apresentam, dá-nos pistas para criar abordagens de ensino e aprendizagem. Quando um aluno erra, ele não o faz de propósito, pelo contrário, ele acredita que está a proceder de forma correta, o que significa que por trás da falha existe um pensamento que, para ele, faz todo o sentido. Por isso, limitarmo-nos a apontar e a corrigir o erro não vai ajudar o aluno a esclarecer a sua dúvida. Sempre que alguém nos corrige, a nossa intuição natural é perguntar "porquê?". No entanto, pela pouca experiência que tenho em sala de aula, percebo que os alunos tendem a aceitar a correção do professor sem contestar, talvez por acreditarem que ele é o único detentor do saber.

Ademais, se o erro não provocar um conflito cognitivo no próprio professor, ou seja, se não lhe despertar a atenção e a curiosidade, não haverá espaço para questionar a origem do mesmo, podendo estar a perder oportunidades de os alunos melhorarem as suas aprendizagens. Cabe-nos a nós, enquanto professores, usar este conhecimento para intervir com intencionalidade, criando contextos propícios para que o aluno aprenda. Para que isto funcione, o erro tem de deixar de ser visto como algo negativo, passando a ser encarado como um forte aliado que ajuda os alunos a desmistificar as suas próprias dificuldades. Afinal, a componente emocional também é importante. Tal como afirma Barbosa (2010), ao errar, a criança pode sentir-se culpada, e "essa culpa

pode levar a uma mudança de atitude como a apatia, ao desânimo, à frustração e à retração, sentimentos muito presentes no insucesso escolar" (p. 12). É, portanto, o nosso dever transformar o erro num momento de confiança e descoberta.

A resolução de problemas constitui um contexto privilegiado para operacionalizar essa transformação. É na resolução de problemas que os alunos se confrontam com situações novas, em que o erro é esperado, natural e parte do processo de resolução. Ao envolver-se em tarefas de resolução de problemas, o aluno é levado a experimentar, a testar diferentes estratégias, a reformular o seu pensamento e a compreender que o erro não é o fim, mas um passo necessário na direção da solução. Assim, a resolução de problemas oferece uma boa oportunidade para integrar o erro como recurso pedagógico, transformando-o numa oportunidade de aprendizagem.

A resolução de problemas assume um papel central no ensino e aprendizagem da Matemática, sendo reconhecida no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017) e nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021b) como uma capacidade transversal a desenvolver ao longo da escolaridade obrigatória, pela sua contribuição para o pensamento crítico, a criatividade, a autonomia e a aplicação de conhecimentos em contextos novos. O PASEO dá particular ênfase a esta capacidade, salientando que

> os alunos colocam e analisam questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir. Definem e executam estratégias adequadas para investigar e responder às questões iniciais. Analisam criticamente as conclusões a que chegam, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (Martins et al., 2017, p. 23)

Esta perspetiva é corroborada pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), ao afirmar que “um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas” (NCTM, 2014, p. 17). Assim, a resolução de problemas revela-se fundamental não apenas como estratégia pedagógica, mas como meio privilegiado para desenvolver o raciocínio matemático, a criatividade, o pensamento crítico e a capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (Martins et al., 2017).

Esta importância é igualmente evidente nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021b), onde a resolução de problemas é

identificada como uma das seis capacidades matemáticas transversais. Paralelamente, este documento explicita a relevância da Álgebra, referindo que

> O estabelecimento de relações algébricas entre quantidades desconhecidas, o expressar a generalidade por representações adequadas e usar o processo de modelar para descrever e fazer previsões, devem ser trabalhados com o objetivo de permitir determinar valores desconhecidos e como uma importante forma de representar relações entre grandezas ou quantidades do dia-a-dia. (Canavarro et al., 2021b, p. 10)

A investigação evidencia que os alunos manifestam frequentemente dificuldades na Álgebra (Nobre, 2016; Ponte, 2005b). Em particular, tendem a recorrer sobretudo a estratégias aritméticas, revelando dificuldades na utilização da linguagem algébrica. Ponte (2005b) refere que alunos com bom desempenho na Aritmética podem evidenciar dificuldades na aprendizagem da Álgebra, nomeadamente na adaptação a novos símbolos, regras e interpretações. O estudo de Nobre (2016) mostrou que a resolução de problemas pode promover um pensamento mais abstrato e uma perspetiva algébrica das resoluções contribuindo, também para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Tendo em consideração estes pressupostos e o facto de, no 9.º ano de escolaridade, se definir como objetivo de aprendizagem "resolver problemas que envolvam equações do 2.º grau, em diversos contextos" (Canavarro et al., 2021b, p. 23), torna-se pertinente valorizar não apenas o produto final, mas sobretudo o processo de resolução. A análise desse processo permite identificar as estratégias mobilizadas pelos alunos, detetar dificuldades e formular hipóteses sobre os erros cometidos. Neste sentido, a análise de erros constitui-se como uma ferramenta importante para a aprendizagem.

Foi a junção do meu interesse pelo papel do erro na aprendizagem com as dificuldades que os alunos revelavam em expor os seus erros e a reconhecê-los como parte integrante e fundamental da aprendizagem que me levou a preparar uma intervenção pedagógica baseada nesta temática. Neste âmbito defini como objetivo deste estudo compreender de que forma a análise de erros promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau.

Assim sendo, a minha investigação foi guiada pelas seguintes questões de investigação:

1. Que tipos de erros surgem com mais frequência na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau?
2. De que forma a análise do erro contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau?
3. Quais são as perceções dos alunos face ao erro?

O presente relatório encontra-se organizado em seis capítulos. No primeiro capítulo, *Introdução*, são apresentados os objetivos da investigação, as questões que a orientam, a relevância do estudo e as razões que me levaram a escolher o tema em questão.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico*, é apresentada a fundamentação teórica que sustenta o trabalho. São apresentados os temas relevantes no contexto do estudo, nomeadamente a resolução de problemas, o ensino e a aprendizagem da Álgebra e o lugar do erro no processo de ensino-aprendizagem. São também integradas as orientações curriculares relacionadas com o tema em estudo, bem como literatura de referência na área de investigação em educação matemática.

No terceiro capítulo, *Intervenção Pedagógica*, é apresentada a caracterização do contexto escolar, bem como a descrição da intervenção pedagógica, das tarefas utilizadas, da forma como foram aplicadas e da sua concretização ao longo do tempo. É ainda feita uma breve referência à recolha de evidências produzidas pelos alunos.

No quarto capítulo, *Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados*, apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas deste estudo, os métodos e procedimentos de recolha de dados, bem como o processo de análise dos dados recolhidos. É ainda referido como foram tratadas as questões de natureza ética relevantes para a investigação.

No quinto capítulo, *Apresentação e Discussão de Resultados*, são apresentados os resultados deste estudo, provenientes da análise dos dados recolhidos. A apresentação dos resultados assenta no objetivo e nas questões de investigação previamente definidos. São também incluídas evidências que considero fundamentais para tornar compreensíveis as minhas interpretações dos dados.

No sexto capítulo, *Conclusões e Recomendações*, é apresentada uma breve síntese do estudo bem como as principais conclusões, tendo em conta os resultados obtidos e com vista a responder às questões de investigação, articulando os aspetos teóricos com os

resultados. São também apresentadas algumas limitações que podem ter interferido com os resultados, sugerindo-se recomendações para futuras investigações no mesmo tema. É, ainda, feita uma reflexão sobre a importância deste estudo para a minha prática futura e para o meu desenvolvimento profissional.

Por último, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas na realização deste relatório, bem como os anexos necessários para uma melhor compreensão do estudo.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo apresentam-se os principais eixos teóricos que sustentam a temática do estudo desenvolvido. Considerando que o objetivo do estudo consiste em compreender de que forma a análise de erros promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau, o enquadramento teórico organiza-se nas seguintes temáticas: (i) resolução de problemas; (ii) ensino e aprendizagem da Álgebra; (iii) equações do 2.º grau e (iv) o lugar do erro no processo de ensino e aprendizagem.

2.1. Resolução de problemas

As tarefas matemáticas podem assumir naturezas muito distintas, variando quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005a). Relativamente ao grau de estrutura, as tarefas podem ser mais abertas ou fechadas. Uma tarefa fechada caracteriza-se por apresentar de forma explícita o que é dado e o que é pedido, enquanto uma tarefa aberta envolve um grau de indeterminação no que é dado, no que é pedido ou em ambos. Já o grau de desafio relaciona-se com a perceção da dificuldade da tarefa por parte do aluno, podendo variar entre reduzido e elevado. Em função destas duas dimensões ficam definidos quatro tipos de tarefas: exercícios, explorações, investigações e problemas como apresentado na Figura 1.

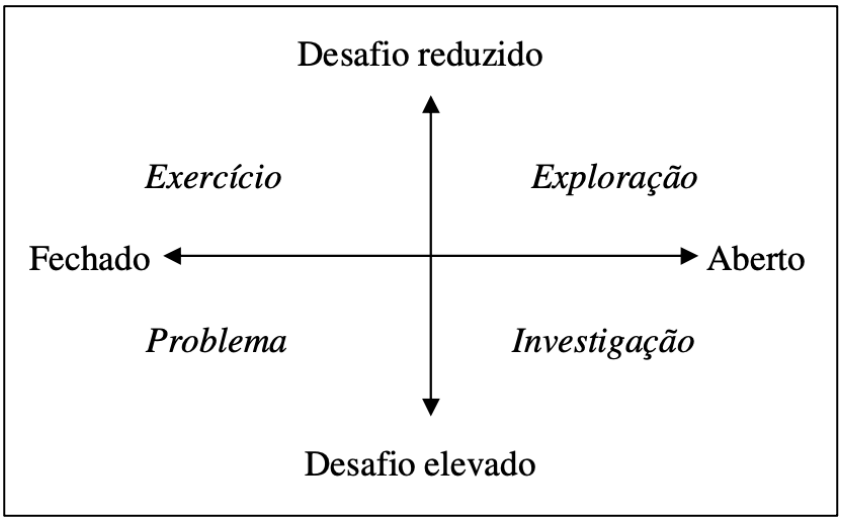


Figura 1 - Relação entre os diferentes tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e estrutura (Ponte, 2005a, p.18)

Neste quadro, os problemas correspondem a tarefas fechadas com elevado grau de desafio matemático. Contudo o grau de desafio depende sempre do aluno que a resolve. Uma tarefa pode constituir um problema para um aluno e apenas um exercício para outro dependendo se o aluno possui, ou não, um processo imediato para a resolver. Assim, "a questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não de um processo imediato de resolução" (Ponte, 2005a, p.14). Quando um aluno conhece e consegue aplicar diretamente um procedimento, a tarefa transforma-se num exercício; caso contrário, constitui um problema. Esta ideia está em consonância com outras perspetivas, como a de Lesh e Zawojewski (2007), que consideram que uma tarefa se transforma num problema quando obriga o aluno a desenvolver uma forma mais produtiva de pensar sobre a situação. Na verdade, diversos autores apresentaram uma definição para este conceito, tendo sempre presente duas ideias em comum: a existência de um objetivo a cumprir e o facto do indivíduo não o conseguir atingir de forma imediata (Lester, 2013).

Importa ainda considerar as diferentes perspetivas sobre a resolução de problemas na sala de aula. Inicialmente, defendia-se uma linha de ensino explícito de estratégias que os alunos podiam desenvolver, perspetiva que Hatfield (1978) designa por ensino acerca da resolução de problemas, entendendo esta como um tema a ser previamente planificado e desenvolvido pelo professor (Vale et al., 2015). Posteriormente, surgiu uma abordagem que concebia a resolução de problemas como uma finalidade do ensino da Matemática, cabendo ao professor ensinar o aluno a pensar e prepará-lo para este resolver eficazmente um problema. Nesta linha, enquadra-se o ensino para a resolução de problemas (Vale et al., 2015). Já o ensino através da resolução de problemas assenta numa visão em que o aluno testa diferentes procedimentos, mobiliza saberes anteriormente adquiridos e apresenta as suas justificações, uma vez que encontrar uma solução para o problema exige ajustar, integrar e reorganizar esses conhecimentos (Vale et al., 2015).

A resolução de problemas assume, atualmente, um eixo estruturante do ensino e da aprendizagem da Matemática, sendo amplamente reconhecida como uma competência essencial do currículo em diferentes níveis de ensino (Vale et al., 2015). Esta valorização não é recente. Já em 1977, o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) dos Estados Unidos, salientou que a resolução de problemas deveria ocupar um lugar central no ensino da Matemática. Esta orientação foi posteriormente reforçada pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que, em 1980, afirmava que "A resolução de problemas deve ser o foco central do

currículo de matemática" (NCTM, 1980, p. 1). Mais tarde, em 2000, o mesmo organismo reiterou que a resolução de problemas "não deve ser uma parte isolada do programa de matemática" (NCTM, 2000, p. 52).

No contexto nacional, esta perspetiva também foi assumindo um lugar de destaque na comunidade de educadores matemáticos como parte integrante do currículo de Matemática. Em 1988, a Associação de Professores de Matemática (APM) assumiu que a resolução de problemas deveria estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática em todos os níveis escolares. Posteriormente, em 1990, o Ministério da Educação integrou a resolução de problemas no programa de curricular de Matemática como uma capacidade a desenvolver pelo aluno (ME, 1990).

Em 2007, no *Programa de Matemática do Ensino Básico*, a resolução de problemas passou a ser assumida, juntamente com a comunicação matemática e o raciocínio matemático como "três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática" (Ponte et al, 2007, p. 7). Esta orientação veio reforçar uma perspetiva de ensino através da resolução de problemas (Vale et al., 2015), na medida que a resolução de problemas não deve constituir um tópico isolado, mas antes integrar o próprio processo de aprendizagem da Matemática (Cai & Lester, 2010; Lesh & Zawojeski, 2007; NCTM, 1989).

Ainda assim, apesar da valorização constante atribuída à capacidade de resolução de problemas, no *Programa de Matemática para o Ensino Básico*, em 2013 o foco voltou a centrar-se nas capacidades básicas, passando este documento a salientar que a:

> resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (Bivar et al., 2013, p. 5)

Com estes novos programas, a perspetiva sobre o lugar da resolução de problemas no currículo passou a ser a de um ensino para a resolução de problemas (Vale et al., 2015), na medida que esta é entendida sobretudo como a simples aplicação de regras e procedimentos previamente preconizados.

Em 2021, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* volta a reafirmar-se que a "resolução de problemas é uma atividade central da Matemática"

(Canavarro et al., 2021b, p.3), defendendo-se ainda que os alunos devem tornar-se progressivamente mais eficazes nesta capacidade. Neste documento, o desenvolvimento desta capacidade envolve a mobilização de conhecimentos matemáticos já adquiridos, bem como a capacidade de os mobilizar na procura de estratégias apropriadas para alcançar as soluções. Esta perspetiva vai ao encontro daquelas mencionadas anteriormente, retomando a visão do ensino através de problemas (Vale et al., 2015), uma vez que a resolução de problemas se assume como uma atividade complexa que vai além da aplicação de procedimentos. O documento refere ainda que resolver problemas permite aos alunos enfrentar desafios, aplicar conceitos matemáticos em novas situações e desenvolver capacidades como a perseverança, a autoconfiança, o pensamento crítico e criativo.

De igual modo, o PASEO (Martins et al., 2017) apresenta a resolução de problemas como uma área de competência fundamental. Segundo este documento, resolver problemas implica que os alunos consigam "interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas, desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados" (p.23), sendo esta uma das competências essenciais para a formação integral dos alunos e para a sua participação ativa na sociedade.

Esta capacidade acompanha de forma consistente os documentos curriculares atualmente em vigor, pelo que também deve orientar a prática de sala de aula. Neste sentido, o papel do professor revela-se fundamental. Cabe ao professor propor problemas aos alunos para que estes desenvolvam o gosto pela descoberta (Pólya, 1975). No entanto, o grau de desafio dos problemas deve ser equilibrado em função dos alunos que se tem: se for demasiado elevado, pode conduzir à desistência e se for demasiado reduzido, transforma-se num mero exercício. Aprender Matemática implica aprender a resolver problemas, sendo importante que o aluno desenvolva um trabalho autónomo, ainda que acompanhado pelo professor de forma equilibrada. O apoio do professor deve centrar-se principalmente na compreensão da estratégia que o aluno está a aplicar, auxiliando-o através de questões ou sugestões que promovam a reflexão (Pólya, 1975).

Por fim, importa destacar que a resolução de problemas envolve uma dimensão pessoal. Para que uma tarefa se constitua efetivamente como um problema, é necessário que o aluno se aproprie dela e manifeste vontade de a resolver. Neste sentido, o professor deve criar ambientes de aprendizagem que valorizem o envolvimento do aluno, a

discussão e até o erro. O aluno aprende a resolver problemas resolvendo-os (Vale et al., 2015).

2.2. Ensino e aprendizagem da Álgebra

A Álgebra constitui um dos quatro grandes temas da Matemática e, em conjunto com as capacidades matemáticas transversais é considerada essencial ao longo dos três ciclos de ensino (Ponte et al., 2009). A visão mais comum da Álgebra associa este tema a um conjunto de regras para transformar expressões e a processos de resolução de equações (Ponte, 2006). No entanto, esta perspetiva é redutora, uma vez que a Álgebra vai muito além da manipulação de símbolos. Como refere o NCTM (2000), "os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações" (p.37). Neste sentido, a Álgebra não pode ser dissociada do pensamento algébrico, através do qual os alunos desenvolvem a capacidade de representar relações, analisar regularidades e atribuir significado a símbolos e expressões matemáticas (Ponte et al., 2009). Em suma, o desenvolvimento do pensamento algébrico implica a capacidade de atribuir significados e de utilizar os símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão (Canavarro, 2007). No entanto, a adaptação de alguns alunos a novos símbolos, regras e interpretações nem sempre é simples. Há alunos que revelam um bom desempenho na Aritmética, mas que posteriormente sentem dificuldades na aprendizagem da Álgebra. Perante esta realidade, vários autores defendem que o pensamento algébrico deve começar a ser desenvolvido precocemente, através do estudo de padrões e regularidades (Ponte, 2005b).

O lugar que a Álgebra ocupa nos programas de Matemática nem sempre teve a mesma relevância. No programa de 1991, a Álgebra nem sequer surgia como um tema autónomo, integrando-se, por um lado, no tema Números e Cálculo e, por outro, no tema Estatística e Funções (ME,1991). Já no *Programa de Matemática do Ensino Básico* de 2007, a Álgebra passou a ser introduzida como um tema programático no 2.º e 3.º ciclos. No 1.º ciclo, foi introduzida uma iniciação ao pensamento algébrico através do estudo de sequências, das relações entre os números e operações, e do estudo de propriedades geométricas, como a simetria (Ponte et al., 2007).

A alteração mais significativa em relação ao programa anterior foi, assim, o estabelecimento de um percurso de aprendizagem da Álgebra ao longo do 1.º e 2.º

ciclos. Contudo, esta abordagem acabou por se perder com a implementação do *Programa de Matemática para o Ensino Básico* de 2013, no qual a Álgebra voltou a assumir uma visão mais restrita (Bivar et al., 2013). Neste programa, no 3.º ciclo, o domínio Funções, Sequências e Sucessões passou a ser distinto do domínio da Álgebra, deixando de integrar este último. Verificam-se ainda incoerências ao nível da organização curricular. Um exemplo disso é o facto de o item Sequências e Regularidades surgir no domínio da Álgebra no 2.º ciclo e deixar de o fazer no 3.º ciclo, passando a integrar outro domínio. Para além disso, o longo do 1.º ciclo, este item encontra-se apenas contemplado no 2.º ano, voltando a surgir somente no 6.º ano. Considerando que um dos principais objetivos da Álgebra no currículo escolar é o desenvolvimento do pensamento algébrico, esta descontinuidade de trabalho não parece contribuir de forma significativa para esse desenvolvimento (Veloso et al., 2013).

Com a introdução das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* de 2018, a Álgebra voltou a ter destaque no currículo, retomando-se a preocupação com a articulação entre todos os ciclos de ensino e o desenvolvimento gradual do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade (ME, 2018). Posteriormente, com a entrada em vigor *das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* de 2021, a Álgebra passou, pela primeira vez, a constituir um tema autónomo no 1.º ciclo do ensino básico.

> No 1.º Ciclo, assume-se pela primeira vez a Álgebra enquanto tema matemático autónomo, reconhecendo-se a sua transversalidade e facilidade de articulação interna com os outros temas matemáticos, em especial com Números, enfatizando-se uma abordagem à aritmética generalizada. Valoriza-se que os alunos desenvolvam desde cedo e progressivamente o pensamento algébrico, denotando compreensão da variação em situações diversas e desenvolvendo a capacidade de conjeturar, reconhecer e exprimir relações e generalizações, numéricas e algébricas (...). (Canavarro et al., 2021a, p.10)

Esta orientação curricular contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, na medida em que lhes proporciona um contacto precoce e progressivo com a Álgebra, contribuindo para uma aprendizagem mais articulada e significativa deste tema.

2.2.1. Equações do 2. º grau

As equações do 2.º grau são um tópico que acompanha o currículo de Matemática desde, pelo menos a partir de 1991, mantendo-se presentes até às atuais *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021b). Embora a sua presença tenha sido constante, os objetivos de aprendizagem associados a este tópico foram mudando ao longo dos anos. De um modo geral, observa-se uma evolução no sentido de uma abordagem cada vez mais abrangente e conceptual da resolução de equações do 2.º grau.

No Programa de 1991, este conteúdo surgia sobretudo essencialmente centrado na resolução de equações completas e incompletas, bem como na aplicação da fórmula resolvente, sem que fosse exigida a sua demonstração (ME, 1991). Posteriormente, no *Programa de Matemática para o Ensino Básico* de 2007, mantém-se a preocupação com a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita, evidenciando-se já uma maior consolidação deste tipo de trabalho algébrico no currículo (Ponte et al., 2007). Para além disso, este programa destaca o trabalho com equações do 2.º grau associado à resolução de problemas, sendo definido como objetivo específico "resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações" (Ponte et al., 2007, p. 57). Esta ampliação dos conteúdos sugere uma valorização crescente da compreensão dos processos envolvidos e da sua aplicação em diferentes contextos matemáticos. O *Programa de Matemática para o Ensino Básico* de 2013 aprofunda a resolução das equações do 2.º grau ao incluir o completamento do quadrado (Bivar et al., 2013).

Nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* de 2018, a ênfase desloca-se para a capacidade de reconhecer, interpretar e resolver equações do 1.º e do 2.º grau a uma incógnita, bem como para a sua utilização na representação de situações matemáticas e não matemáticas. Relativamente à resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau, esta mantém o seu destaque, incluindo agora a tecnologia na resolução: "resolver problemas utilizando equações, inequações e funções, em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias para a sua resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados" (ME, 2018, p.12). Valoriza-se ainda o sentido crítico dos alunos, uma vez que é proposto que analisem a plausibilidade dos resultados obtidos. Esta orientação reflete uma perspetiva mais crítica e consciente da Álgebra (ME, 2018). Nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* de 2021, o tema da resolução de equações do 2.º grau surge com algumas alterações relativamente às

que estavam em vigor anteriormente. De acordo com os objetivos de aprendizagem definidos, os alunos deverão ser capazes de resolver equações completas de 2.º grau recorrendo, essencialmente, aos casos notáveis e à lei do anulamento do produto (Canavarro et al., 2021b). Por outro lado, a resolução de equações do 2.º grau através da fórmula resolvente perde o destaque que assumia em anos anteriores, passando a integrar as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A para o Ensino Secundário*, mais especificamente no 10.º ano de escolaridade (Carvalho e Silva et al., 2023). À semelhança do que já acontecia no programa de 2018, mantém-se a valorização da resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, através da mobilização deste tipo de equações, continuando a ser privilegiado o uso da tecnologia para tal. Nestas últimas e atuais orientações, é ainda atribuída particular importância ao trabalho colaborativo, bem como à análise e discussão das diferentes ideias e raciocínios associados a este tema. Esta orientação contribui para o desenvolvimento do sentido crítico dos alunos e das suas capacidades de comunicação matemática.

A definição de "equação" de modo adequado para alunos do ensino básico não é tarefa fácil. O primeiro contacto dos alunos com este conceito ocorre logo no 1.º ciclo, quando os alunos são confrontados com expressões do tipo $_ + 3 = 5$. No 2.º ciclo, prevê-se que os alunos iniciem o uso da linguagem algébrica, sendo a resolução de equações simples, envolvendo apenas uma operação, uma das estratégias para promover essa aprendizagem (Ponte et al., 2009). Já no 3.º ciclo, espera-se que os alunos compreendam que uma equação corresponde a "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" (Ponte et al., 2009, p. 93). O valor desconhecido de uma equação pode ser representado por diferentes símbolos. Em Álgebra, é habitual designar variáveis e incógnitas por x (variável real) e n (variável natural). No entanto, o uso exclusivo de x e n pode criar dificuldades aos alunos quando confrontados com outras letras como variáveis (Ponte et al., 2009).

Um aspeto fundamental na aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau é o domínio das regras práticas de resolução, baseadas nos princípios de equivalência (Ponte et al., 2009). O princípio de equivalência que permite somar ou subtrair a mesma quantidade a ambos os membros da equação deixou progressivamente de ser enunciado dessa forma, sendo substituído pela regra prática de transposição de termos, que permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. O princípio que afirma que se pode multiplicar ou dividir ambos o membro de uma equação por um número diferente de zero passou a ser apresentado como uma regra prática. Finalmente, o

princípio que permite substituir uma expressão por outra equivalente deixou, em muitos casos, de ser enunciado (Ponte et al., 2009).

Muitas dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem de erros no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado dessas expressões ou as condições da sua equivalência. Parte dessas dificuldades decorre do facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. No entanto, existem ainda alguns alunos que não chegam propriamente a cometer erros: a sua dificuldade é de tal ordem que não percebem bem o que representa uma equação e muito menos o que está envolvido na respetiva resolução (Ponte et al., 2009). Ponte et al. (2009) sistematizaram, com base na literatura, os erros e dificuldades mais comuns no trabalho com expressões algébricas e equações. Estes encontram-se sistematizados na Figura 2.

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: – quatro "y 's"; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – $4+y$ por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996

Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita represen-tam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x-215=265 \Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x+5=8 \Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x=24 \Leftrightarrow 6+x=24$ $11x=9x=\frac{11}{9}$ $2x=4 \Leftrightarrow$ *i)* $x=4-2$; *ii)* $x=\frac{4}{-2}$; *iii)* $x=\frac{2}{4}$ $-x=-17 \Leftrightarrow ??$ $-x=4 \Leftrightarrow ??$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

Figura 2 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Ponte et al., 2009, pp. 96-97)

Neste âmbito, Hall (2002) realizou um estudo com jovens, no qual identificou alguns dos erros mais frequentes na resolução de equações do 1.º grau. Com base na literatura existente, o autor sistematizou esses erros em diferentes categorias:

- Erros por eliminação (*deletion errors*), que resultam de uma generalização excessiva de operações matematicamente válidas em domínios mais restritos. Um exemplo deste erro consiste em simplificar $2yz - 2y$ para z.

- Erros de inversão (*inverse errors*), que ocorrem quando os alunos confundem as operações ao transferirem termos entre membros da equação. Um exemplo deste erro consiste em simplificar $4x = 1$ para $x = 1 - 4$.

- Erros por transposição incorreta de termos (*transposing errors*), nos quais a noção de equivalência entre os membros da equação não é devidamente considerada. Um exemplo é transformar $\frac{x}{2} + 3 = 5$ em $x + 3 = 10$.

- Erros de cálculo com números negativos (*number line error*).

- Aplicação de regras que parecem funcionar (*mal-rules*).

Uma mal-*rule* de manipulação corresponde a "uma variação de uma regra correta que tem um subestágio omitido ou substituído por uma operação incorreta ou inapropriada" (Sleeman, 1984, p. 403). Neste contexto, a aplicação incorreta da lei do anulamento do produto pode ser interpretada como uma mal-*rule,* uma vez os alunos tendem, por vezes, a utilizá-la sem verificar se estão reunidos todos os pressupostos necessários à sua aplicação.

A tipologia de erros apresentada por Hall (2002) é coerente com as dificuldades identificadas na Figura 2, uma vez que ambas evidenciam obstáculos frequentes na resolução de equações do 1.º grau, relacionados com a compreensão da estrutura algébrica e com a aplicação de regras operatórias. Assim, as duas perspetivas complementam-se e corroboram-se.

As equações do 2.º grau constituem, em certa medida, uma continuação natural do trabalho desenvolvido com as equações do 1.º grau. Neste sentido, dificuldades de manipulação algébrica que não tenham sido ultrapassadas durante a resolução de equações do 1.º grau tendem a persistir quando os alunos se confrontam com equações do 2.º grau. Assim, é expectável que muitos dos erros identificados na resolução de equações do 1.º grau continuem a manifestar-se na resolução de equações do 2.º grau. Relativamente à resolução de equações de 2.º grau, a literatura evidencia ainda que os alunos revelam dificuldades com os processos de fatorização necessários para a resolução de determinadas equações (Ponte et al., 2009). A identificação destas dificuldades revela-se fundamental para a prática pedagógica, na medida em que permite ao professor antecipar possíveis obstáculos e planear estratégias de ensino que promovam uma compreensão mais sólida dos processos algébricos envolvidos.

2.3. O lugar do erro no processo de ensino e aprendizagem

Crescemos a ouvir que "errar é humano" e, de facto, o erro faz parte da nossa vida quotidiana. Aprendemos a andar ao cair, assim como aprendemos a andar de bicicleta depois de algumas quedas, pois, muitas vezes, é precisamente ao errar que desenvolvemos novas aprendizagens. Também na Matemática, o erro pode assumir um papel importante no processo da construção de conhecimento. No entanto, durante muitos anos, o erro no ensino da Matemática foi associado exclusivamente ao fracasso, à incapacidade ou à ausência de conhecimento. Esta visão refletiu-se em práticas pedagógicas centradas no produto final, nas quais acertar é sinónimo de sucesso e errar como sinal de insucesso (Spinillo et al., 2014). Esta perspetiva levou muitos professores a acreditar que permitir o erro podia levar à sua fixação, tornando-o mais difícil de eliminar posteriormente. Assim, tentavam evitar o erro a qualquer custo, privilegiando a obtenção de uma resposta correta em detrimento da valorização dos processos de pensamentos mobilizados pelos alunos (Macedo, 1990).

Contudo, o erro constitui um elemento inerente e necessário ao processo de aprendizagem. Longe de ser entendido exclusivamente como um indicador de fracasso, pode assumir-se como um instrumento de diagnóstico, reflexão e desenvolvimento cognitivo, permitindo que os alunos se consciencializem das suas dificuldades, reestruturem o seu pensamento e construam novos significados (Pinto & Santos, 2006). Neste sentido, errar não só é inevitável, como é essencial para o desenvolvimento do pensamento crítico (Perrenoud, 2000). Do ponto de vista teórico, vários autores reforçam a importância do erro no desenvolvimento do conhecimento. Popper (1991) defende que o progresso do conhecimento depende da capacidade de aprender com os erros, enquanto De Bono (1973) considera que estes são inerentes ao funcionamento do pensamento humano. Também na Matemática, autores como Poincaré (1956) evidenciam que até os especialistas cometem erros, especialmente em raciocínios mais complexos, o que reforça a ideia de que o erro integra naturalmente a atividade cognitiva.

Na mesma linha, Luckesi (2003) defende uma visão construtiva do erro entendendo-o como um instrumento de crescimento e desenvolvimento intelectual. Assim, em vez de ser encarado como algo a eliminar imediatamente, o erro deve ser analisado, problematizado e discutido. Quando o aluno tem oportunidade de refletir sobre o que fez, identificar as razões do seu engano e reformular o seu pensamento, o erro

transforma-se numa oportunidade de aprendizagem. Neste contexto, o processo de correção ganha um significado diferente: deixa de ser apenas um momento de substituição do incorreto pelo correto e passa a constituir um espaço de reflexão e construção de novos conhecimentos (Hadji, 1994). Deste modo, o erro pode ser entendido como um mecanismo de regulação do próprio processo de aprendizagem, permitindo ao aluno perceber não só o que deve fazer, mas também o que deve evitar (Rosso & Berti, 2010).

Importa ainda reconhecer que muitos dos erros cometidos pelos alunos não resultam da ausência de conhecimento, mas sim da utilização inadequada de conhecimentos previamente construídos. Frequentemente, os estudantes memorizam regras ou procedimentos sem compreender o seu significado, aplicando-os depois de forma mecânica e indiscriminada em situações aparentemente semelhantes (Pinto & Santos, 2006). Este fenómeno evidencia a necessidade de promover uma aprendizagem baseada na compreensão e não na simples memorização. Por conseguinte, a análise do erro e a compreensão das dificuldades dos alunos permitem ao professor identificar fragilidades específicas e ajustar as suas estratégias pedagógicas de forma mais eficaz e inclusiva (Cury, 2007).

Neste contexto, o papel do professor é determinante. Quando o erro não provoca qualquer tipo de questionamento por parte do professor, perde-se uma oportunidade de compreender o pensamento do aluno e de melhorar o processo de ensino (Cury, 2007). Borasi (1996) defende que a sala de aula deve constituir um espaço seguro e estimulante, no qual os erros possam emergir naturalmente e ser utilizados como objeto de discussão coletiva. Em vez de esconder o erro por medo da crítica ou da punição, os alunos devem sentir-se encorajados a partilhar os seus raciocínios, explicando o modo como pensaram e identificando possíveis inconsistências. De facto, a simples correção de um erro, sem a análise das suas causas, revela-se insuficiente. Práticas que se limitam a substituir um procedimento incorreto por outro considerado correto tendem a não promover aprendizagens significativas, podendo ainda comprometer a confiança dos alunos nas suas capacidades (Pacheco & Medeiros, 2009; Brito & Souza, 2015).

Deste modo, a análise de erros em contexto de sala de aula assume particular relevância, sobretudo quando os alunos são envolvidos no processo. Ao serem incentivados a observar, interpretar e discutir os seus próprios erros, os alunos desenvolvem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos ao mesmo tempo que fortalecem a autorregulação da aprendizagem e a capacidade de reformular

estratégias perante as dificuldades encontradas (Hadji, 1994). Além disso, ao analisar os próprios erros, o aluno deixa de assumir uma postura passiva e passa a participar ativamente na construção das suas aprendizagens, transformando o erro num instrumento de reflexão e crescimento cognitivo (Borasi, 1996). Assim, mais do que corrigir respostas incorretas, importa promover práticas pedagógicas que incentivem os alunos a compreender as razões dos seus erros, utilizando-os como ponto de partida para a construção de conhecimentos matemáticos mais consistentes e significativos (Cury, 2007). É neste enquadramento que se insere a presente investigação, centrada na análise de erros realizada pelos próprios alunos, entendida como uma via privilegiada para promover aprendizagens matemáticas mais consistentes, críticas e autónomas.

Quando se aborda o erro no contexto da Educação Matemática, é necessário compreender de que forma os erros dos alunos podem ser classificados. A literatura apresenta diversas perspetivas que sistematizam e categorizam esses erros. Uma das classificações mais referenciadas é a de Radatz (1979), que organiza os erros em cinco categorias associadas à atividade matemática: dificuldades de linguagem, dificuldades na perceção de informações espaciais, domínio insuficiente de pré-requisitos (como factos, conceitos e habilidades), associações incorretas ou rigidez de pensamento, e aplicação inadequada de regras ou estratégias. Embora esta proposta consiga relacionar o erro com as suas possíveis origens, a sua aplicação prática pode revelar-se complexa, sobretudo no contexto da sala de aula, devido à dificuldade em identificar de forma objetiva a causa subjacente a cada erro uma vez que essa identificação implicaria, muitas vezes, uma interação individualizada com cada aluno, o que nem sempre é viável face às limitações de tempo com que os professores se deparam.

Movshovitz-Hadar et al. (1987) propõem uma classificação centrada na forma como o erro se manifesta, em vez de privilegiar a sua causa. A partir de um estudo empírico, os autores identificam seis categorias: utilização incorreta dos dados, interpretação inadequada da linguagem, inferências lógicas inválidas, uso indevido de teoremas ou definições, respostas que não correspondem ao que é solicitado (frequentemente por ausência de verificação) e erros de natureza técnica. Esta abordagem revela-se mais viável no contexto de sala de aula, facilitando a identificação e análise dos erros no contexto da prática pedagógica.

Numa linha complementar, Torre (2007) apresenta o Modelo de Análise Didática dos Erros (MADE), que tenta enquadrar o erro a partir de diferentes dimensões do processo de aprendizagem. Partindo da ideia de erro como discrepância entre o resultado

esperado e o obtido, o autor propõe a análise de três dimensões fundamentais: entrada da informação, organização da informação e execução da tarefa. A dimensão da entrada da informação refere-se a situações em que o erro resulta de insuficiências ou inadequações ao nível da intenção, perceção ou compreensão da informação. A dimensão da organização da informação diz respeito ao modo como o aluno processa e articula os dados disponíveis para construir uma resposta. Neste âmbito, os erros podem surgir durante operações como a análise (isolamento de elementos), a síntese (combinação de informações), a conexão com conhecimentos prévios ou a ordenação lógica dos passos necessários à resolução. Por fim, a dimensão da execução relaciona-se com a forma como o aluno concretiza a tarefa, envolvendo aspetos ligados às estratégias adotadas, ao estilo de resolução e à atitude perante a aprendizagem (Torre, 2007).

Para a categorização dos erros podem ser consideradas diferentes perspetivas. No presente estudo, opta-se pela proposta de Torre (2007), por se revelar a mais adequada aos objetivos definidos, a qual contempla três eixos principais: entrada, organização da informação e execução. Estes eixos permitem analisar as possíveis dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau, uma vez que a sua resolução implica, em primeiro lugar, a compreensão do enunciado e do que é solicitado (entrada), seguida da organização da informação disponível e da definição de uma estratégia de resolução (organização da informação), e, por fim, a concretização dessa estratégia (execução). Este modelo é ainda complementado com a tipificação apresentada no subcapítulo relativo às equações do 2.º grau, com base em Hall (2002) e Ponte et al. (2009). Adicionalmente, com base na minha experiência letiva, ainda que reduzida, considerou-se pertinente incluir uma categoria adicional relativa às situações em que os alunos não apresentam resposta ao problema, por se tratar de uma ocorrência frequente.

O esquema seguinte (Figura 3) apresenta a tipologia de erros adotada na análise dos dados recolhidos para este estudo.

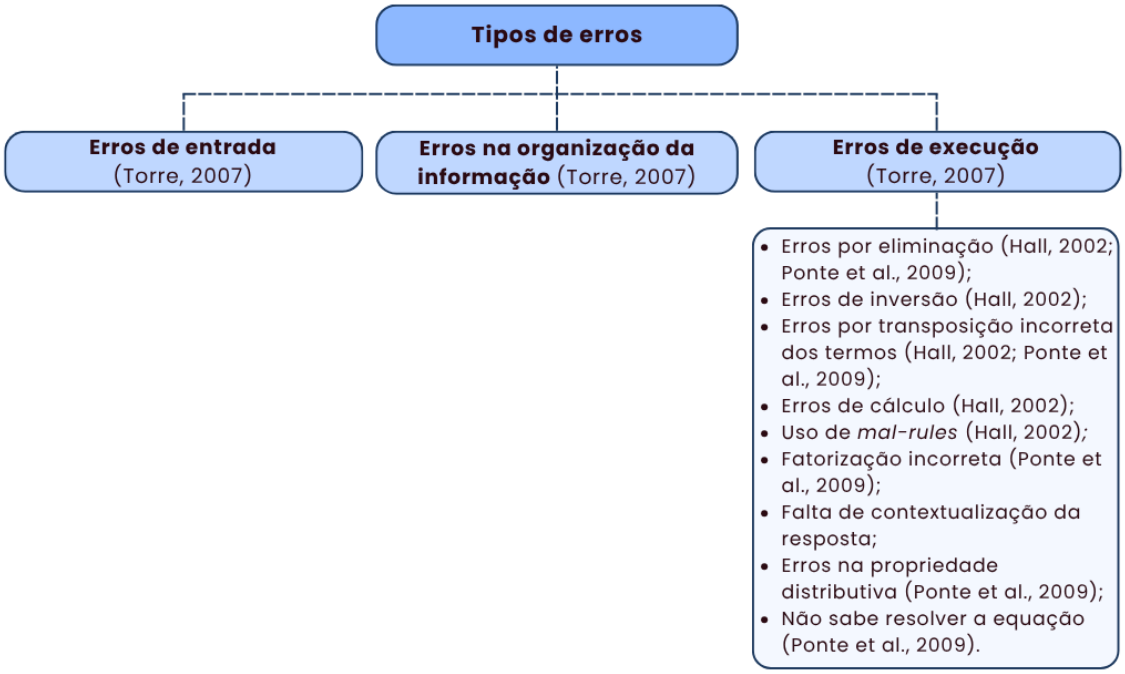


Figura 3 - Esquema de tipificação de erros

Em suma, a análise do erro constitui uma ferramenta pedagógica de grande relevância, na medida em que, ao envolver o aluno na reflexão sobre a sua própria produção, lhe permite identificar e compreender os seus erros, desenvolvendo uma atitude crítica perante as suas resoluções futuras (Hadji, 1994).

3. Intervenção Pedagógica

Neste capítulo, começa-se por apresentar uma breve descrição do contexto escolar onde foi desenvolvido o estudo, nomeadamente a caracterização da escola e da turma selecionada para participar na investigação. Em seguida, descreve-se a intervenção pedagógica realizada no âmbito deste trabalho, explicando as motivações que levaram à sua concretização na turma escolhida. Por fim, apresenta-se a planificação das atividades propostas e a forma como estas foram organizadas e distribuídas ao longo do tempo.

3.1. Caracterização do contexto escolar[2]

No ano letivo de 2025/2026, realizei a PES numa escola básica e secundária situada na área metropolitana do Porto. Esta instituição foi inaugurada no início da segunda metade do século XX tendo funcionado como Liceu feminino e depois passando para escola mista devido às transformações educativas decorrentes da Revolução de 25 de abril de 1974.

Há mais de 10 anos, a escola passou a assumir a função de sede de Agrupamento, integrando quatro estabelecimentos de ensino que acompanham os alunos desde a educação pré-escolar até ao ensino secundário. No entanto, a escola onde realizei a PES acolhe apenas alunos do 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico, bem como do Ensino Secundário. No que respeita a este último nível de ensino, a instituição oferece cursos científico-humanísticos, nomeadamente Ciências e Tecnologias, Línguas e Humanidades e Ciências Socioeconómicas.

Relativamente às infraestruturas, o estabelecimento de ensino é constituído por dois blocos principais, um pavilhão desportivo e uma cantina. Ao longo dos anos, as instalações foram alvo de diversas intervenções de requalificação, destacando-se a realizada pela empresa Parque Escolar, que contribuiu para a modernização dos espaços educativos.

[2] A caracterização do agrupamento de escolas onde realizei a minha PES foi escrita em conjunto com outra colega, que nesse ano letivo, também realizou a sua PES nesta escola. Neste sentido, a caracterização do contexto escolar é comum aos dois relatórios de estágio: Silva, L. (2026). *Dificuldades dos alunos na realização de tarefas envolvendo raciocínio matemático: um estudo com alunos do 10.º ano de escolaridade* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]; Teixeira, T. (2026). *Papel do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].

No âmbito dos apoios educativos e pedagógicos, a escola disponibiliza vários serviços, entre os quais se incluem a Biblioteca Escolar, a Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva, o Serviço de Psicologia e Orientação, entre outros. Para além da componente curricular, a instituição promove a plena formação dos alunos através de uma oferta diversificada de projetos e atividades de carácter cultural, ambiental e de valores humanísticos. Sendo estes o Desporto Escolar, o Projeto Erasmus+, o Projeto Educação para a Saúde, o Projeto Eco-Escolas, o Projeto Ciência Viva, entre outros. A escola oferece ainda várias oficinas extracurriculares e conta com a colaboração ativa da Associação de Pais e Encarregados de Educação.

Por fim, importa referir que a escola está localizada numa zona com bons acessos a transportes públicos, nomeadamente uma paragem de metro situada a menos de cinco minutos das instalações. Esta localização facilita o acesso à escola, permitindo que seja frequentada por alunos não só da freguesia onde se encontra, mas também de outras freguesias da cidade e de áreas envolventes.

Ao longo do presente ano letivo (2025/2026), tive a oportunidade de contactar com alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico e com alunos do Ensino Secundário do curso Ciências e Tecnologias. No total, conheci quatro turmas: duas do 9.º ano de escolaridade, uma do 10.º ano e uma do 12.º ano. Contudo, devido a limitações de horário, o acompanhamento mais regular incidiu apenas sobre três delas, sendo a turma de 12.º ano aquela que o acompanhamento não foi feito de forma tão regular.

A intervenção pedagógica que desenvolvi foi implementada numa das turmas de 9.º ano de escolaridade. A escolha desta turma prendeu-se com o facto de, desde o início do ano letivo, os alunos revelarem alguma relutância em expor as suas dificuldades, nomeadamente os seus erros, bem como em solicitar ajuda para os superar. A turma caracterizava-se por uma postura tímida e inibida, que apenas com o decorrer do tempo começou a revelar um maior à-vontade no contexto de sala de aula. Ao longo desse processo, tornou-se evidente a existência de um receio acentuado de errar e de tornar públicos os erros que cometiam, quer perante as professoras, quer perante os colegas. Esta perceção de erro como algo negativo parecia condicionar a participação dos alunos e o seu envolvimento na realização das tarefas propostas. Essa perceção levou-me a refletir sobre a importância de valorizar o erro como parte integrante da aprendizagem. Assim, decidi orientar a minha intervenção pedagógica no sentido de contribuir para a desconstrução da sua conotação negativa e de promover uma perspetiva em que este fosse entendido como uma oportunidade de crescimento e de consolidação do

conhecimento.Com esta, pretendi também fomentar, junto dos alunos, uma atitude mais confiante e reflexiva perante o erro, reforçando a ideia de que, no processo de ensino-aprendizagem, errar é natural e produtivo e que o que deve ser evitado é a perpetuação de conceções incorretas sem a devida reflexão e correção. Nesta linha de ideias, defini como objetivo desta investigação compreender de que forma a análise dos erros promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau.

A turma era composta por 28 alunos, dos quais 27 já se conheciam por terem integrado a mesma turma no ano letivo anterior. Apenas uma aluna era nova, tendo integrado a turma no início do presente ano letivo. Os alunos tinham idades compreendidas em os 13 e 16 anos de idade. Importa ainda referir que três alunos apresentavam retenções, uma aluna registava duas retenções no 8.º ano de escolaridade, um aluno uma retenção no 2.º ano de escolaridade e uma aluna tinha ficado retida no 9.º ano de escolaridade. Do ponto de vista cultural, tratava-se de uma turma com alguma heterogeneidade com alunos provenientes do Brasil e da Venezuela (Gráfico 1).

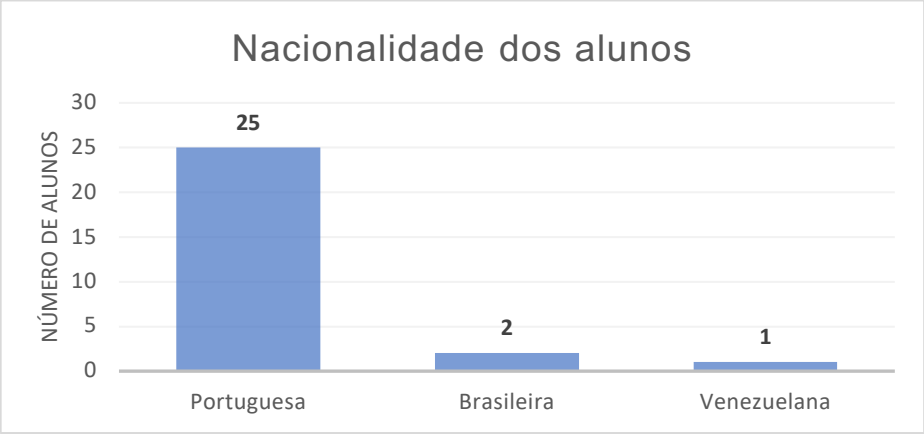


Gráfico 1 - Nacionalidade dos alunos da turma selecionada

Salienta-se ainda que sete alunos beneficiavam de medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão ao abrigo do Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. Relativamente à Ação Social Escolar, três alunos eram abrangidos por este apoio, sendo um incluído no Escalão A e dois no Escalão B.

De um modo geral era uma turma com uma atitude passiva nas aulas, destacando-se um grupo reduzido de alunos que procurava participar com frequência. Esta reduzida participação constituía o principal constrangimento, uma vez que era frequentemente necessário o incentivo das professoras para que os alunos colocassem questões ou

expressassem os seus pensamentos acerca dos temas que estavam a ser abordados. No que concerne ao comportamento, era uma turma afável e respeitosa que, de vez em quando, se perdia com assuntos alheios à aula de Matemática. No entanto, após chamados à atenção, retomavam o foco e realizavam as tarefas que lhes eram propostas.

Relativamente ao aproveitamento na disciplina de Matemática, o desempenho global da turma era razoável. No final do 1.º período, 11 dos 28 alunos obtiveram um nível de classificação inferior a 2, sendo que um desses alunos obteve nível 1. A média da turma situou-se no nível 3, evidenciando-se alguma heterogeneidade nos resultados obtidos, conforme ilustra o Gráfico 2.

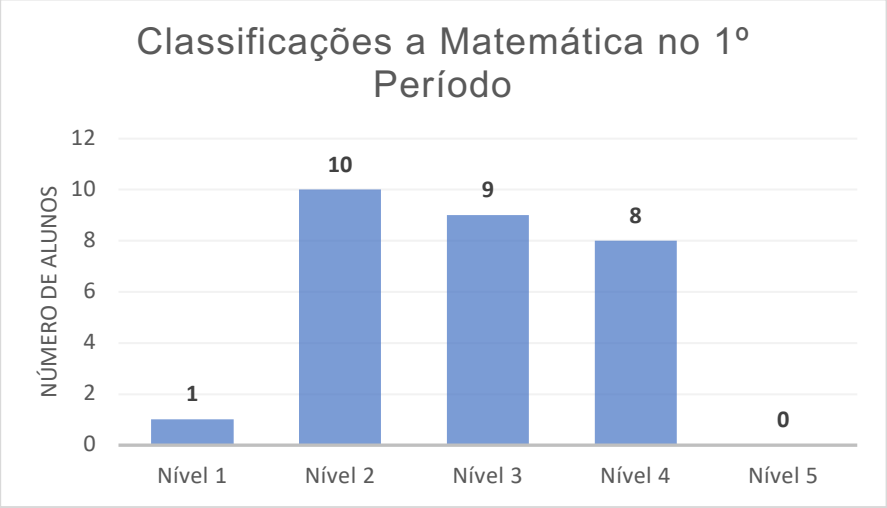


Gráfico 2 - Distribuição dos níveis de classificação no 1.º Período a Matemática

3.2. Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica foi desenvolvida entre o dia 26 de fevereiro de 2026 e o dia 13 de abril de 2026. Como referido anteriormente, a principal motivação para a realização deste trabalho foi desmistificar a conotação negativa que os alunos frequentemente atribuem ao erro. Pretendi valorizar o erro como uma oportunidade de aprendizagem, levando os alunos a compreender que é precisamente através dele que se aprende. Simultaneamente, queria criar um bom ambiente de aprendizagem, evitando que os alunos se sentissem expostos perante a turma de uma forma que os deixasse desconfortáveis. Com base nestes pressupostos, e após a leitura de literatura relevante sobre o tema (Cury, 2007; Torre, 2007), decidi estruturar a intervenção

pedagógica em três fases distintas, designadas por Fase 1, Fase 2 e Fase 3, respetivamente.

Este estudo teve como referência a importância do desenvolvimento da capacidade matemática transversal resolução de problemas, contemplada nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021b) atualmente em vigor. Para além disso, os problemas selecionados em cada umas das fases da intervenção pedagógica poderiam ser facilmente integrados na prática letiva regular, independentemente da realização do presente estudo. Assim, explorei a resolução de problemas no âmbito do subtópico: "Resolver problemas que envolvam equações do 2.º grau, em diversos contextos", conforme previsto nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico,* em particular para o 9.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021b).

3.2.1. Intervenção Pedagógica – Fase 1

Na Fase 1 foi proposta a resolução da Tarefa 1 composta por três problemas distintos conforme ilustrado na Figura 4.

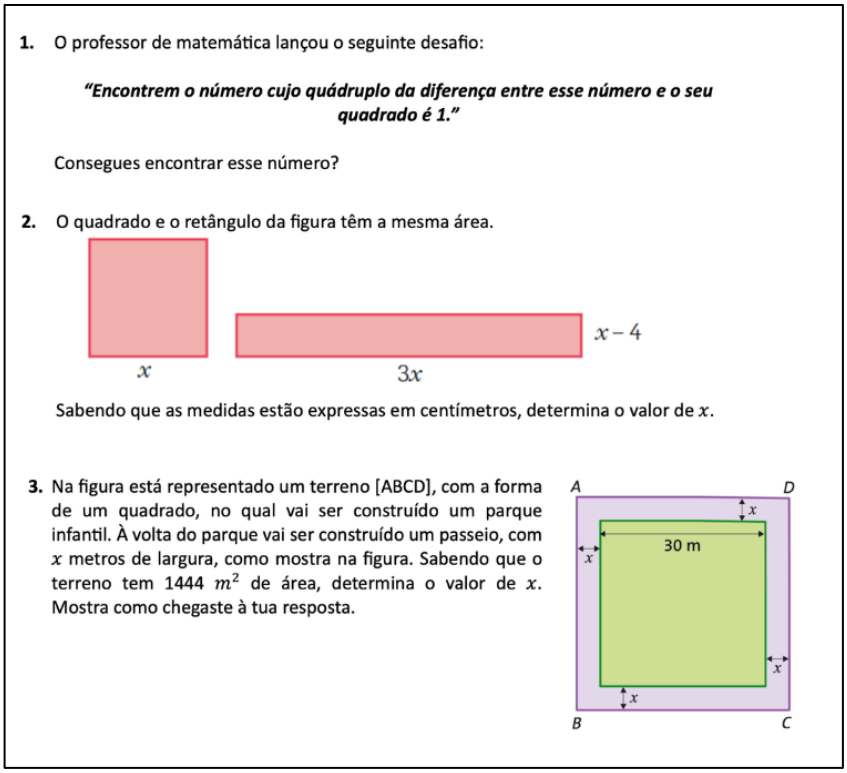


Figura 4 - Problemas propostos na Fase 1 (Tarefa 1)

Os dois primeiros problemas foram retirados do manual MAT9[3] e o terceiro problema foi retirado manual Prisma 9[4]. A seleção dos problemas teve como principal critério a possibilidade de surgir diferentes tipos de erros na sua resolução. O Problema 1 foi escolhido por potencialmente gerar dificuldades na interpretação, uma vez que se trata de uma tarefa que exige sobretudo compreensão textual não apresentando uma representação matemática que facilite a sua tradução simbólica. Por sua vez, o Problema 2 foi selecionado por poder originar erros a nível do processo de resolução algébrica, uma vez que implicava a aplicação da lei do anulamento do produto, conteúdo em que os alunos já tinham demonstrado alguma dificuldade em contexto de sala de aula. Assim, caso este erro se verificasse com frequência, constituiria uma oportunidade para o explorar e esclarecer. Por fim, o Problema 3 foi escolhido com a intenção de analisar possíveis erros relacionados com a organização e o tratamento da informação fornecida no enunciado. Pretendeu-se observar de que forma os alunos extraíam e estruturavam essa informação, bem como identificar eventuais equívocos associados a esse processo.

Nesta fase, os alunos trabalharam de forma individual, resolvendo a tarefa proposta. As professoras circulavam pela sala, auxiliando os alunos quando chamadas. Essa intervenção foi realizada de modo a não reduzir o nível cognitivo da tarefa, assegurando, ao mesmo tempo, que os alunos não ficavam desorientados ou estagnados na resolução dos problemas.

3.2.2. Intervenção Pedagógica – Fase 2

A Fase 2 consistiu, mais uma vez, na resolução de uma ficha contendo os mesmos problemas apresentados aos alunos na Fase 1, acompanhados por duas resoluções distintas de cada problema como se pode ver na Figura 5. Esta etapa teve como objetivo levar os alunos a refletir sobre os erros anteriormente cometidos, procurando promover a sua análise e discussão e, deste modo, o seu reconhecimento.

[3] Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2024). *MAT9*. Texto Editores.

[4] Magro, F. C., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2024). *Prisma 9*. ASA.

Comenta e analisa as resoluções apresentadas em cada problema. No final, apresenta a tua própria resolução.

1. O professor de matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

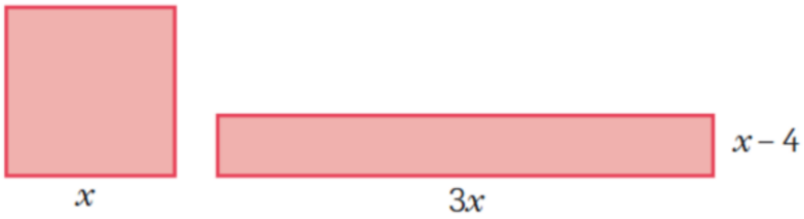
Resolução 1

$$
\begin{aligned}
& 4x - x^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x - 4 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee x - 4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 4 + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 5
\end{aligned}
$$

Resolução 2

$$
\begin{aligned}
& 4(x - x^2) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4(x - x^2) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4 = 0 \ \vee\ x - x^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

2. O quadrado e o retângulo da figura têm a mesma área.



Sabendo que as medidas estão expressas em centímetros, determina o valor de x.

Resolução 1

$$
\begin{aligned}
& x \times x = \text{Área do quadrado} \\
& 3x \times x - 4 = \text{Área do retângulo} \\
& x^2 = 3x \times x - 4 \\
& x^2 = 4x - 4 \ \Leftrightarrow \\
& +4 = x^2 + 4x \ \Leftrightarrow \\
& \sqrt{4} = x + 4x \ \Leftrightarrow \\
& 2 = 5x \ \Leftrightarrow \\
& \frac{5}{2} = x \ \Leftrightarrow \\
& 2.5 = x
\end{aligned}
$$

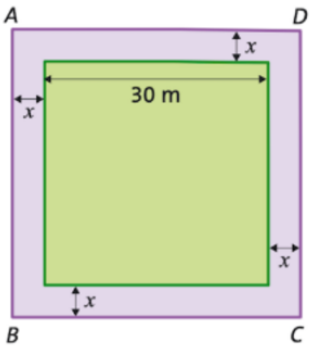
R.: $x = 2.5$

Resolução 2

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{A}_{\text{quadrado}} = \mathrm{A}_{\text{retângulo}} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 3x \times (x - 4) \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 3x^2 - 12x \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 3x^2 + 12x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2x^2 + 12x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2x^2 = 0 \vee 12x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{0}{-2} \vee x = \frac{0}{12} \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \vee x = 0
\end{aligned}
$$

C.S.=$\{0\}$

3. Na figura está representado um terreno [ABCD], com a forma de um quadrado, no qual vai ser construído um parque infantil. À volta do parque vai ser construído um passeio, com x metros de largura, como mostra na figura. Sabendo que o terreno tem 1444 m^2 de área, determina o valor de x. Mostra como chegaste à tua resposta.



Resolução 1

$$A_{quadrado} = l \times l$$
$$A_{quadrado} = 1444m^2 - 900m^2$$
$$A_{retângulo} = comprimento \times altura$$
$$= 30 + 2x + x$$
$$= 30 + 2x^2$$

$$544m^2 = (30 + 2x^2) \times 4$$
$$544m^2 = 120 + 8x^2$$
$$8x^2 = 120 - 544$$
$$8x^2 = 424$$
$$x^2 = 424 \times 8$$
$$x^2 = -3392$$
$$x = \sqrt{3392}$$
$$x \approx 58$$

R.: $x \approx 58$

Resolução 2

$$(30 + 2x)^2 = 1444$$
$$\Leftrightarrow 30 + 2x = \sqrt{1444}$$
$$\Leftrightarrow 30 + 2x = 38$$
$$\Leftrightarrow 2x = 38 - 30$$
$$\Leftrightarrow 2x = 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

Figura 5 - Problemas propostos na Fase 2 (Tarefa 2)

A Tarefa 2 (Fase 2) foi elaborada a partir da análise das resoluções dos alunos produzidas na Fase 1. As resoluções incluídas nos Problemas 1 e 2 integram os erros mais recorrentes, especialmente ao nível da manipulação algébrica. Embora as resoluções não fossem idênticas entre si, os alunos cometiam essencialmente o mesmo tipo de erro, razão pela qual considerei pertinente selecioná-las, de modo a tornar a discussão mais rica para toda a turma. O mesmo critério foi aplicado na escolha da resolução 2 do Problema 3. Já a resolução 1 desse problema foi incluída por ter sido elaborada por apenas dois alunos da turma, cuja estratégia de resolução era diferente das restantes. Para além disso, essa resolução também apresentava erros algébricos, o que a tornava duplamente relevante para análise e discussão em sala de aula.

Esta fase foi conduzida tendo por base uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória, estruturada em três etapas: o "lançamento da tarefa", a "exploração pelos alunos" e a "discussão e síntese" (Stein et al., 2008). O trabalho exploratório na aula de

Matemática proporciona oportunidades para que os alunos construam e aprofundem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Assim, os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação fornecida e na conceção e implementação de estratégias de resolução, que devem depois apresentar e justificar à turma (Ponte et al., 2015).

Na fase de exploração, os alunos trabalharam autonomamente em grupos, solicitando apoio das professoras apenas quando surgiam dúvidas. As intervenções eram feitas de modo a não diminuir o nível cognitivo das tarefas, mas assegurando, ao mesmo tempo, que os alunos não ficassem estagnados ou desorientados na resolução dos problemas.

Por fim, na "discussão e síntese", diferentes grupos foram convidados a apresentar no quadro as suas conclusões e resoluções, promovendo a partilha de estratégias e a reflexão coletiva sobre os erros e os processos de resolução terminando com uma síntese coletiva acerca dos principais erros explorados e as etapas a seguir na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau.

3.2.3. Intervenção Pedagógica – Fase 3

A dinâmica de trabalho da Fase 3 foi semelhante à da Fase 1, passando pela proposta de uma tarefa (Tarefa 3) que integrou também três problemas, que apesar de serem diferentes dos problemas propostos na Fase 1, envolviam os mesmos objetivos de aprendizagem (Figura 6). Tal como na Fase 1, os alunos trabalharam de forma autónoma, sendo apenas apoiados quando necessário, sem que o nível cognitivo da tarefa fosse comprometido.

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

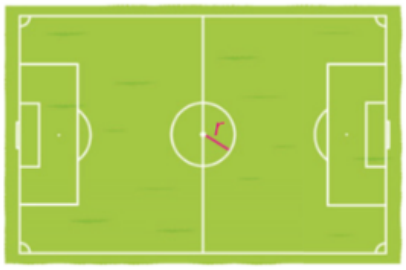
"A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto dos dois números maiores. Quais são esses números?"

Encontra esses números. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

2. Num retângulo, o comprimento é o dobro da largura. Sabendo que a medida da área desse retângulo é igual ao triplo da medida do seu perímetro, determina as dimensões do retângulo.

3. As dimensões do campo de futebol da escola do Rui são tais que:

- a largura é cinco vezes o raio do círculo central;
- o comprimento é nove vezes o raio do círculo central;
- a área do campo sem o círculo central é igual a 3390 m^2.



Determina, em metros, o raio do círculo central. Apresenta o resultado arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, preserva, no mínimo, três casas decimais.

Figura 6 - Problemas propostos na Fase 3 (Tarefa 3)

Todos os problemas apresentados na tarefa foram retirados do manual MAT9[5]. Esta fase teve como principal objetivo avaliar a evolução dos alunos, procurando compreender em que medida as aprendizagens e reflexões desenvolvidas na Fase 2 contribuíram para uma redução dos erros anteriormente observados, ou seja, para uma efetiva aprendizagem das ideias matemáticas envolvidas.

3.3. Intervenção pedagógica no decorrer do tempo

Como referido anteriormente, a intervenção pedagógica teve início na aula do dia 26 de fevereiro de 2026. Nos 30 minutos finais dessa aula, entreguei a cada aluno a ficha da Fase 1 e pedi-lhes que a resolvessem individualmente, uma vez que um dos meus objetivos era identificar e classificar os erros cometidos por cada um, bem como a sua frequência, tarefa que ficaria comprometida caso os problemas fossem resolvidos em grupo. No entanto, por se tratar de uma turma habituada a trabalhar de forma

[5] Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2024). *MAT9*. Texto Editores.

colaborativa, especialmente com o colega de mesa, houve momentos em que, de forma espontânea, os alunos esclareceram dúvidas entre si. Importa referir que foi dito aos alunos que poderiam colocar dúvidas às professoras presentes na sala de aula.

Durante a análise das produções escritas dos alunos, apercebi-me de que nenhum deles tinha conseguido chegar ao Problema 3, o que me levou a concluir que o tempo disponibilizado não fora suficiente para a sua realização. Face a isso, decidi propor novamente apenas o Problema 3 na aula seguinte, no dia 2 de março de 2026, concedendo aos alunos cerca de 15 minutos para o resolver.

Após analisar as resoluções dos três problemas, preparei a aula seguinte, que decorreu no dia 3 de março de 2026. Antes do início da aula, organizei a sala juntando quatro mesas, de modo a formar grupos de quatro alunos. No momento da entrada, solicitei que se organizassem nesses grupos, sendo a única alteração em relação à disposição habitual da sala o facto de os dois alunos das mesas da frente se voltarem para trás, formando assim um grupo de quatro com os colegas da mesa posterior. Com a sala organizada, os alunos trabalharam em seis grupos, designados da seguinte forma: Grupo do Leonardo, de quatro elementos; Grupo do Vicente, de quatro elementos; Grupo da Paula, de quatro elementos; Grupo do João, de quatro elementos; Grupo do Martim, de quatro elementos; Par Letícia e Gabriela. Esta configuração foi escolhida por se tratar de grupos com os quais os alunos já estavam habituados a trabalhar em aulas anteriores, o que favorecia uma boa dinâmica e colaboração entre eles. Importa ainda referir que foram tomadas as devidas precauções para garantir que os dados apresentados relativamente à Fase 2 (nomeadamente produções escritas e registos áudio do momento da discussão coletiva e da síntese) correspondem exclusivamente aos alunos que obtiveram o consentimento para participar no estudo.

A fase de trabalho em grupo realizada pelos alunos demorou mais tempo do que o previsto na planificação da aula, uma vez que não se antecipou a dificuldade que demonstraram na análise dos erros. Tanto a professora cooperante como a minha colega de estágio e eu concluímos que os alunos revelavam significativa dificuldade em progredir nas suas resoluções, por terem ainda muitas dúvidas acerca do que lhes era solicitado, mesmo após diversas intervenções. Observou-se, de forma recorrente nos diferentes grupos, que embora os alunos identificassem a presença de erros nas resoluções apresentadas, encontravam dificuldade em precisar onde esses erros se situavam. Para a maioria, a tarefa reduzia-se a indicar se a solução estava correta ou incorreta, o que não correspondia ao objetivo pretendido. Deste modo, devido a este contratempo, a discussão não pôde ser concluída na aula do dia 3 de março, ficando

por analisar o Problema 3. Na aula seguinte, a 5 de março, retomou-se a discussão e procedeu-se à síntese final. Concluídos esses dois momentos, foi entregue aos alunos a ficha correspondente à Fase 3, da qual dispuseram de 35 minutos para resolução individual.

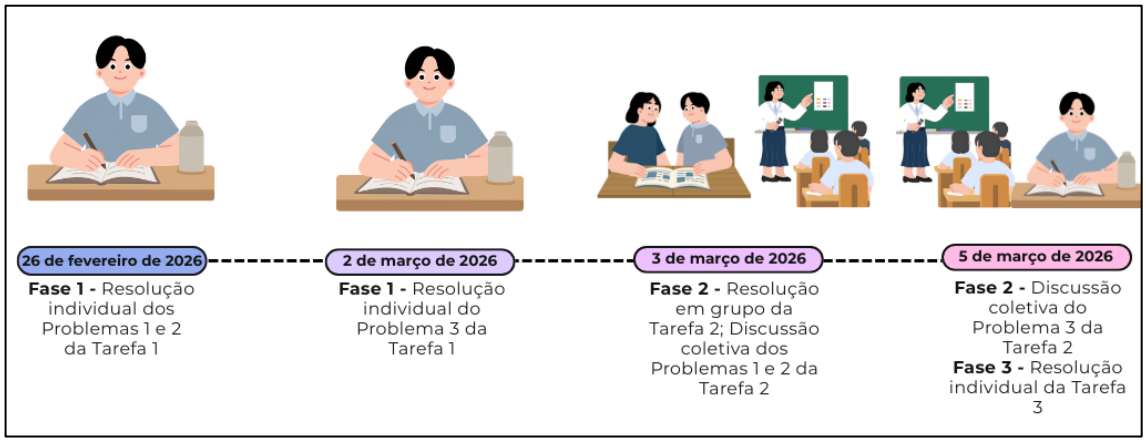


Figura 7 - Esquematização da intervenção pedagógica ao longo do tempo

No final do relatório de estágio, nos anexos 4, 6 e 8 encontram-se possíveis resoluções de cada uma das tarefas propostas nas 3 fases da intervenção pedagógica.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo são expostos e explicados os processos de recolha e análise de dados. Começa-se por caracterizar as escolhas metodológicas adotadas, a descrição dos participantes do estudo bem como as razões que levaram à seleção dos mesmos. Indicam-se, justificando, os métodos e procedimentos de recolha de dados tal como o processo de análise dos mesmos. Finaliza-se com a explicação de como foram acauteladas as questões de natureza ética deste estudo.

4.1. Opções metodológicas

Este estudo adotou uma abordagem metodológica de natureza qualitativa e de caráter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008), de forma a responder às questões de investigação inicialmente formuladas. Escolhi esta metodologia uma vez que um dos objetivos deste trabalho consistiu em descrever e categorizar os erros cometidos pelos alunos, bem como compreender de que forma a análise desses erros pode influenciar a capacidade matemática transversal de resolução de problemas (Carmo & Ferreira, 2008). Esta escolha metodológica enquadra-se na perspetiva de Bogdan e Biklen (1994), que definem a investigação qualitativa como aquela em que a fonte de recolha de dados é o ambiente natural e o investigador desempenha o papel de instrumento principal. No contexto deste estudo, o ambiente natural dos participantes foi a escola e, ao assumir o papel de professora-investigadora, recolhi dados de natureza qualitativa em situações inseridas no normal funcionamento das aulas. Esta recolha foi feita de modo discreto e natural, tentando garantir a autenticidade das interações e das produções dos alunos (Carmo & Ferreira, 2008).

Para além disso, o estudo não teve como objetivo confirmar ou infirmar hipóteses previamente definidas. Pelo contrário, as conclusões foram sendo construídas à medida que os dados eram analisados, evidenciando o caráter indutivo e interpretativo da investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). O estudo não teve também como propósito a generalização dos resultados, mas sim a reflexão acerca das evidências obtidas dos alunos participantes, valorizando o processo em detrimento do produto final. Desta forma, a investigação tentou compreender experiências e significados no seu contexto real, o que reforça o enquadramento qualitativo e interpretativo do estudo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008).

4.2. Participantes

Como referido anteriormente, a intervenção pedagógica envolveu todos os alunos de uma turma de 9.º ano de escolaridade e foi integrada no normal funcionamento das aulas de Matemática. No entanto, embora todos os alunos tenham participado na realização das tarefas propostas, apenas 18 foram considerados elegíveis para integrarem o estudo, uma vez que os restantes alunos não dispunham de autorização dos encarregados de educação para participarem no estudo.

Face à elevada quantidade de informação recolhida relativamente a estes 18 alunos, e ao tempo necessário para a sua análise, optou-se por diferentes níveis de exploração dos dados. Assim, para a caracterização dos erros cometidos foram utilizados os dados de todos os 18 participantes, enquanto que para averiguar de que forma a análise de erros influenciou a capacidade resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau, foram analisados dados apenas de 11 alunos, uma vez que, dos 18 participantes, apenas 11 estiveram presentes nas três fases da intervenção pedagógica. Considerando o objetivo desta investigação, julgou-se fundamental que os alunos participassem nas três fases, para poder verificar a influência que a análise de erros tem nas produções dos alunos. Relativamente às perceções dos alunos sobre o erro, foram recolhidos e analisados dados de sete participantes. A seleção dos alunos teve como principal critério a representatividade da turma, visando incluir aqueles que melhor refletissem a sua diversidade e, consequentemente, o desempenho global do grupo. Por fim, importa salientar que a identidade de todos os participantes foi preservada. Os nomes apresentados ao longo deste relatório são fictícios e destinam-se a garantir o anonimato dos alunos.

4.3. Procedimentos de recolha de dados

O processo de recolha de dados visou a utilização de múltiplos instrumentos, com o objetivo de minimizar a perda de informação e assegurar uma maior abrangência dos resultados obtidos (Carmo & Ferreira, 2008). Tendo em conta o objetivo do estudo e as questões de investigação, os dados foram recolhidos através de: (i) produções escritas dos alunos, correspondentes às 3 tarefas propostas nas três fases; (ii) gravações de áudio da discussão coletiva e síntese (Fase 2); (iii) entrevistas semiestruturadas realizadas no final da intervenção pedagógica; e (iv) notas de campo resultantes das observações realizadas ao longo da intervenção pedagógica.

Com a recolha das produções escritas, pretendeu-se analisar dois aspetos distintos. Por um lado, através das produções dos alunos na Fase 1 da intervenção, procurou-se identificar os erros mais frequentes, de modo a proceder posteriormente à sua categorização. Por outro lado, a análise das produções escritas das Fases 1 e 3 permitiu averiguar de que forma a análise dos erros influenciou o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos.

Deste modo, na Fase 1 foi possível ter acesso aos erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas; na Fase 2, os alunos trabalharam em grupo para identificar esses erros e encontrar formas de os superar; e, na Fase 3, foi possível observar a influência da análise de erros no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Assim, as produções escritas dos alunos referentes às Tarefas 1 e 3 foram analisadas com vista a identificar aspetos em que os alunos progrediram, regrediram ou se mantiveram, de forma a compreender a influência da análise de erros no seu desempenho. As produções escritas constituíram, ainda, um registo útil de atividades que enquanto investigadora não pude observar diretamente (Vale, 2004).

A gravação áudio do momento de "discussão e sintetização" (Stein et al., 2008) da Fase 2 da intervenção pedagógica permitiu registar o desenvolvimento integral da discussão e aceder, ainda que indiretamente, às resoluções apresentadas no quadro, bem como às correções e aos acréscimos realizados. Optei por não recorrer a registos fotográficos das resoluções no quadro, uma vez que, conhecendo a turma, previ que tal poderia constranger os alunos e levá-los a alterar o seu comportamento, ou até a inibir-se de apresentar as suas resoluções.

Além disso, recorri a notas de campo elaboradas enquanto professora-investigadora, sobretudo nos momentos em que os alunos se encontravam a resolver os problemas das Fases 1 e 3. Estas notas funcionaram como um auxílio à memória (Carmo & Ferreira, 2008) e basearam-se em momentos observados e ouvidos que considerei relevantes para a redação do presente relatório.

As entrevistas realizadas foram de natureza semiestruturada (Amado, 2014) e seguiram um guião previamente elaborado (Anexo 9). No decorrer das entrevistas, tive em conta a necessidade de adaptar a linguagem e a condução da conversa a cada um dos participantes, ajustando, quando necessário, a ordem das questões ou acrescentando perguntas em função das respostas dos alunos. Estas entrevistas foram realizadas com o objetivo de compreender a perspetiva e as conceções dos alunos face ao erro (Vale,

2004). As entrevistas foram realizadas na escola, no final da intervenção pedagógica, e num formato individual, de modo a evitar que a presença dos colegas pudesse constranger os participantes. Foram registadas em áudio, tendo o dispositivo sido colocado discretamente, para que a conversa entre mim e o aluno decorresse da forma mais natural possível.

4.4. Procedimentos de análise de dados

O processo de análise de dados teve por base as informações recolhidas a partir de todos os instrumentos de recolha de dados utilizados, os quais se revelaram cruciais para responder às questões de investigação, ainda que com contributos distintos. A análise foi realizada através do cruzamento desses dados, de modo a obter uma compreensão mais completa das informações obtidas.

Para responder à questão de investigação – Que tipos de erros surgem com mais frequência na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau? – procedi à análise das produções escritas dos alunos relativas à Fase 1 da intervenção, complementando essa leitura com as informações que obtive a partir da observação e que registei em notas de campo. A partir destes dados, foi possível identificar e categorizar os erros.

Para responder à questão de investigação – De que forma a análise do erro contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau? – foi feita uma comparação entre as produções escritas das Fases 1 e 3, tendo também em consideração as produções da Fase 2, bem como os comportamentos observados nessa fase, essencialmente, no momento da discussão coletiva. Este cruzamento de dados permitiu analisar possíveis progressos, regressões ou aspetos mantidos ao longo da intervenção.

Para responder à questão de investigação – Quais são as perceções dos alunos face ao erro? – foram analisadas as entrevistas, tentando identificar as conceções manifestadas pelos participantes. As respostas foram lidas e organizadas, de modo a identificar semelhanças e diferenças nas perspetivas dos alunos.

Relativamente a questões éticas, é importante referir que foram solicitadas autorizações por escrito, enviadas em formato de papel, a cada um dos encarregados de educação (Anexo 1) e o assentimento de cada um dos alunos para a participação no estudo (Anexo 2), sendo sempre garantido o seu anonimato.

5. Apresentação e discussão de resultados

Neste capítulo, são apresentados e analisados os dados recolhidos de acordo com o objetivo e questões de investigação definidas para este trabalho. Apresento uma discussão destes resultados, fundamentando as interpretações feitas no enquadramento teórico apresentado no capítulo 2. Os resultados serão apresentados com base em evidências provenientes dos vários instrumentos usados para a recolha de informação. O presente capítulo está dividido em 4 subcapítulos: (i) Fase 1 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: erros mais frequentes; (ii) Fase 2 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: análise de erros; (iii) Fase 3 – Implicações da análise do erro na resolução de problemas e (iv) Perceções dos alunos face ao erro.

5.1. Fase 1 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: erros mais frequentes

No capítulo anterior foi referido que o primeiro momento da intervenção pedagógica consistiu na realização, por parte dos alunos, da Tarefa 1 composta por três problemas. Esta atividade foi proposta para ser realizada individualmente, com o objetivo de identificar os erros cometidos por cada aluno durante o processo de resolução. A opção pelo trabalho individual prendeu-se com a necessidade de recolher evidências mais fidedignas das dificuldades dos alunos, uma vez que, em contexto de trabalho a pares, estes tendem, por vezes, a reproduzir a resolução do colega, sobretudo quando percecionam que este apresenta maior domínio dos conteúdos.

Importa, no entanto, salientar que, tratando-se de uma turma habituada ao trabalho colaborativo verificaram-se momentos pontuais de discussão entre os alunos durante a realização da tarefa.

Durante a realização da tarefa, as três professoras presentes na sala (a professora-investigadora, a colega de estágio e a orientadora cooperante) circularam pelo espaço com o intuito de apoiar os alunos sempre que necessário. Paralelamente, com vista à recolha de dados, foi solicitado às docentes que registassem as dúvidas manifestadas pelos alunos, complementando assim as observações efetuadas pela professora-investigadora.

De um modo geral, os alunos demonstraram envolvimento na resolução dos problemas propostos. Ainda assim, emergiram diversas dificuldades, particularmente no primeiro

problema da tarefa. As dúvidas manifestadas incidiram, maioritariamente, ao nível da interpretação do enunciado, evidenciando fragilidades na compreensão e tradução da linguagem verbal para linguagem matemática.

5.1.1. Problema 1

Dos 18 participantes, apenas um aluno conseguiu resolver corretamente o problema, o que evidencia que os alunos tiveram dificuldades na sua resolução. Como seria expectável, os alunos evidenciaram, na sua maioria, dificuldades ao nível da compreensão do enunciado, uma vez que não conseguiram traduzi-lo corretamente para uma equação que representasse a situação apresentada. Por exemplo, o Vicente conseguiu identificar corretamente a tradução simbólica de grande parte das palavras do enunciado (Figura 8). No entanto, interpretou que o "quádruplo" incidia apenas sobre o x e não sobre a diferença. Este erro revela que o aluno demonstra domínio dos conteúdos matemáticos, mas evidencia alguma dificuldade na interpretação da linguagem verbal do problema. De acordo com a tipificação apresentada no capítulo 2, este erro enquadra-se como um erro de entrada (Torre, 2007). Para além disso, verifica-se um erro de execução (Torre, 2007), uma vez que a fatorização do polinómio não está correta (Ponte et al., 2009). Também não contextualiza as soluções obtidas numa resposta ao problema.

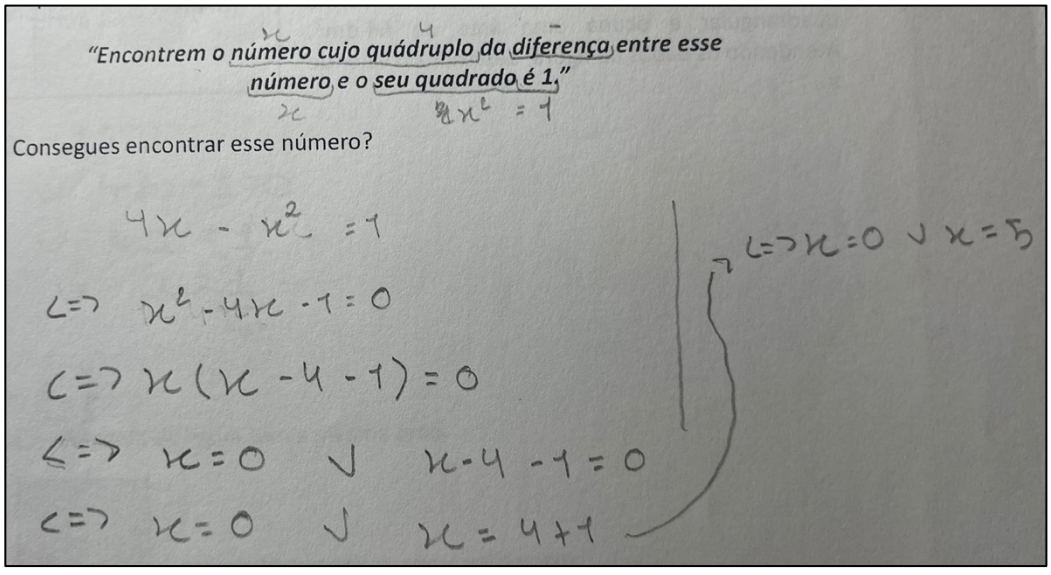


Figura 8 - Resolução do Problema 1 do Vicente (Fase 1)

Já a Constança, tal como o Vicente cometeu erros de entrada ao associar o quádruplo apenas ao x^2, tendo ainda considerado que essa diferença deveria ser igual a zero (Figura 9). Esta interpretação poderá ter resultado da tentativa de aplicar a lei do anulamento do produto, uma vez que, no passo seguinte, a aluna fatoriza a expressão e recorre a essa propriedade. Além disso, a aluna também não contextualizou as soluções obtidas numa resposta final ao problema.

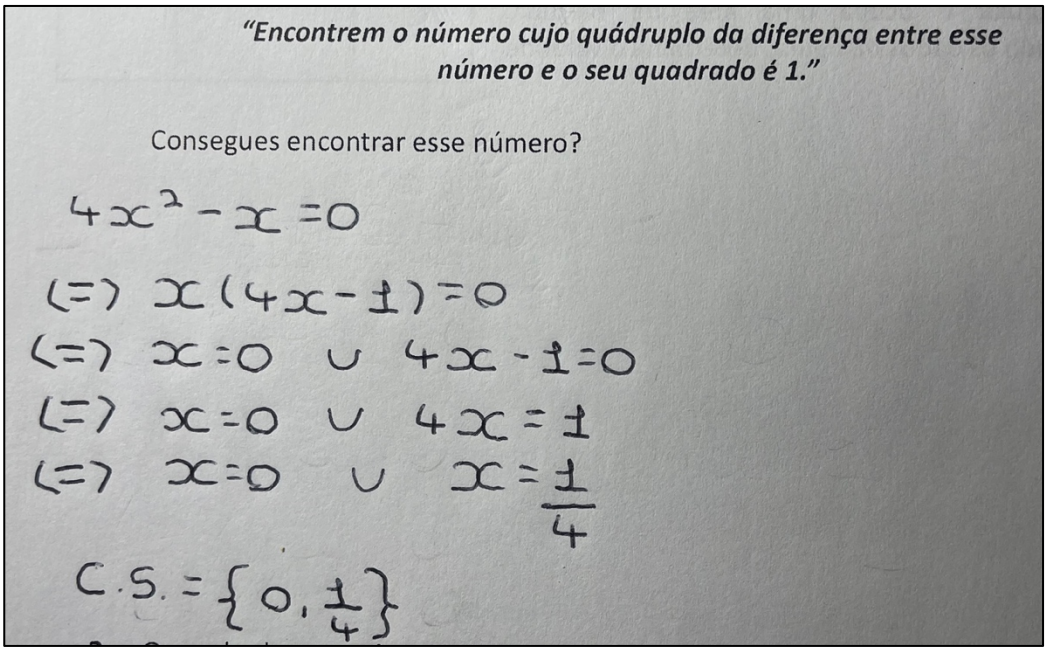


Figura 9 - Resolução do Problema 1 da Constança (Fase 1)

A Letícia revelou mais dificuldades do que a Constança e o Vicente na interpretação do enunciado, uma vez que não considerou a informação de que o número se encontra ao quadrado nem teve em conta que a diferença entre esse número e o seu quadrado é 1 (Figura 10). Tal como os colegas, também não apresentou uma resposta final ao problema.

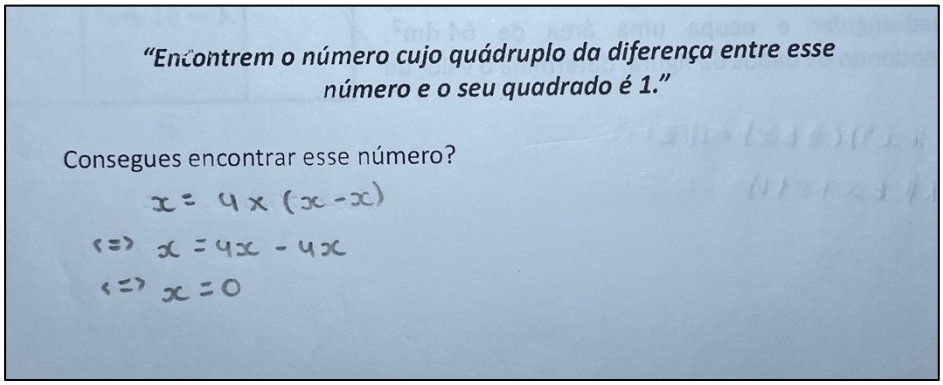


Figura 10 - Resolução do Problema 1 da Letícia (Fase 1)

Também a Ariana não considerou o quadrado do número nem a diferença, apesar de ter sublinhado essa informação no enunciado (Figura 11). Este comportamento evidencia não só um erro de entrada, mas também erros de execução, uma vez que a resolução apresentada carece de consistência matemática. Ainda assim, a aluna demonstra ter identificado alguns elementos relevantes do enunciado, embora não os tenha conseguido articular de forma adequada para chegar à solução.

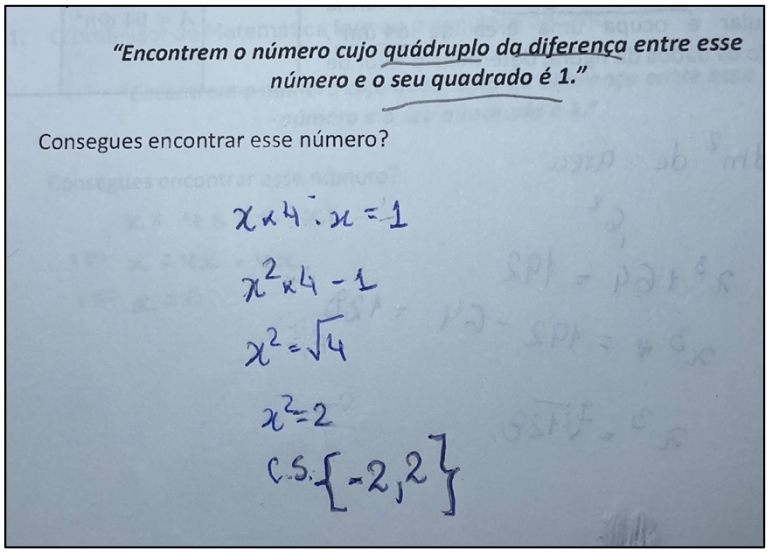


Figura 11 - Resolução do Problema 1 da Ariana (Fase 1)

Numa linha de análise semelhante, o João limitou-se a formular a equação que, na sua perspetiva, traduzia o problema (Figura 12). Contudo nesta modelação, o aluno ignorou a diferença e o quadrado estipulados no enunciado, fazendo surgir, em contrapartida, uma expressão de 4.º grau. Esta abordagem reflete, inicialmente, um erro de entrada que, por conseguinte, culmina num erro de execução, uma vez que não conseguiu resolver a equação (Ponte et al., 2009). Perante o resultado, seria expectável uma postura mais reflexiva por parte do aluno, visto que equações de grau superior ao segundo ultrapassam o quadro de conteúdos lecionados até ao momento.

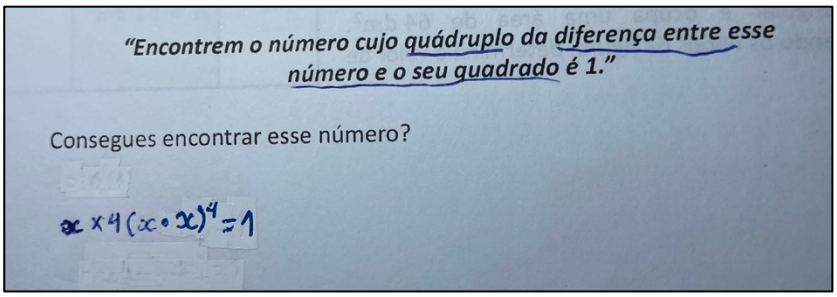


Figura 12 - Resolução do Problema 1 do João (Fase 1)

Por outro lado, os alunos que conseguiram traduzir corretamente o enunciado do problema numa equação, revelaram, ainda assim, erros na execução. Estes deveram-se, essencialmente, à dificuldade em delinear uma estratégia eficaz que permitisse a resolução da equação obtida. Alguns tentaram fatorizar o polinómio como a Mafalda (Figura 13).

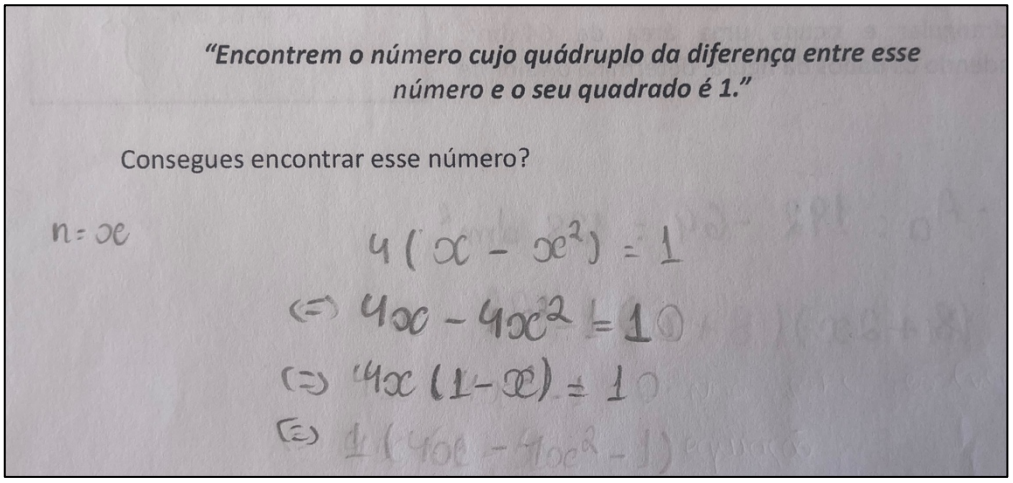


Figura 13 - Resolução do Problema 1 da Mafalda (Fase 1)

Em contrapartida, outros alunos, tal como a Benedita (Figura 14), não conseguiram delinear quaisquer estratégias que lhes permitissem avançar na resolução da equação. A sua ação limitou-se a uma manipulação algébrica inicial, reorganizando a igualdade ao transpor todos os termos para o primeiro membro de forma a escrever a equação na forma canónica. No entanto essa manipulação, não se traduziu no desenvolvimento de um método de resolução.

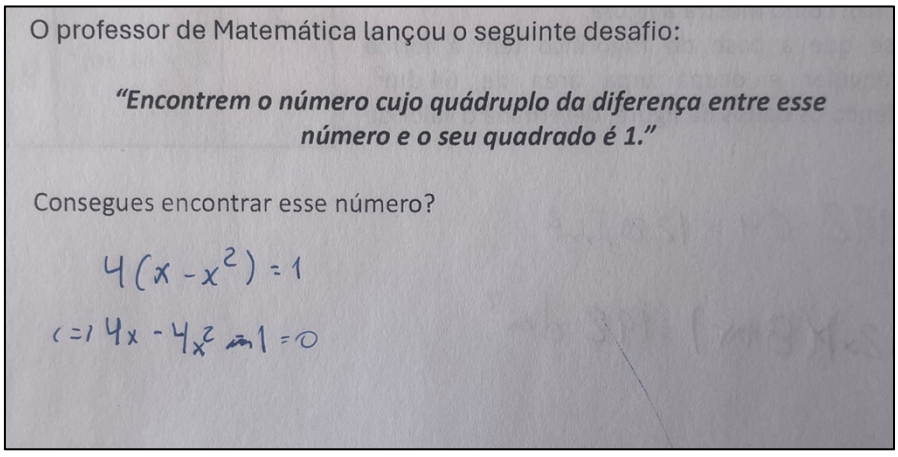


Figura 14 - Resolução do Problema 1 da Benedita (Fase 1)

5.1.2. Problema 2

Novamente, dos 18 participantes, apenas um aluno conseguiu resolver corretamente o problema. Relativamente ao Problema 2, os alunos não evidenciaram erros de entrada. No entanto, foram detetadas lacunas na organização de informação, uma vez que foram vários os alunos que, tal como o Vicente, consideraram corretamente as expressões que representam o comprimento (x) e a largura do retângulo $(x-4)$, mas não apresentam corretamente uma expressão que represente a área do retângulo (Figura 15). Esta falha resultou na expressão $3x \times x - 4$, a qual não representa a área pretendida.

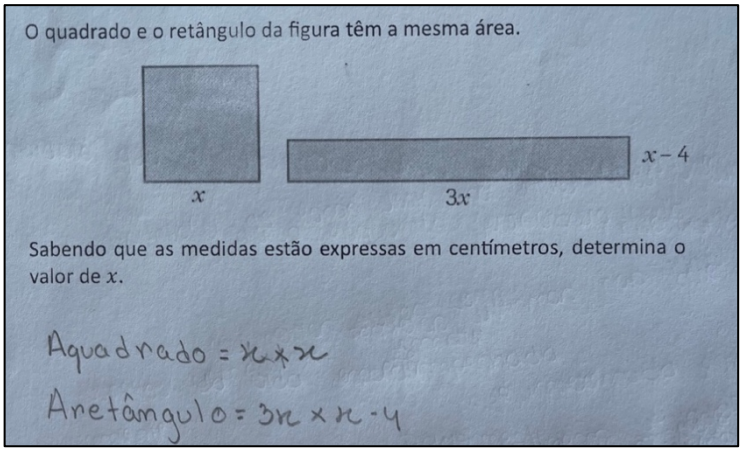


Figura 15 - Resolução do Problema 2 do Vicente (Fase 1)

O João manifestou uma falha idêntica à do Vicente na organização inicial, acumulando, contudo, sucessivos erros de execução (Figura 16). O primeiro surgiu no cálculo algébrico, ao efetuar incorretamente o produto de monómios, traduzindo $3x \times x$ por $4x$. Posteriormente, evidenciou um erro na transposição de termos, ao aplicar a raiz quadrada para anular o expoente do termo em x^2, ignorando a presença do termo $4x$. Por fim, o aluno incorreu num erro de inversão ao concluir que $x = \frac{5}{2}$, quando o quociente correto seria $x = \frac{2}{5}$.

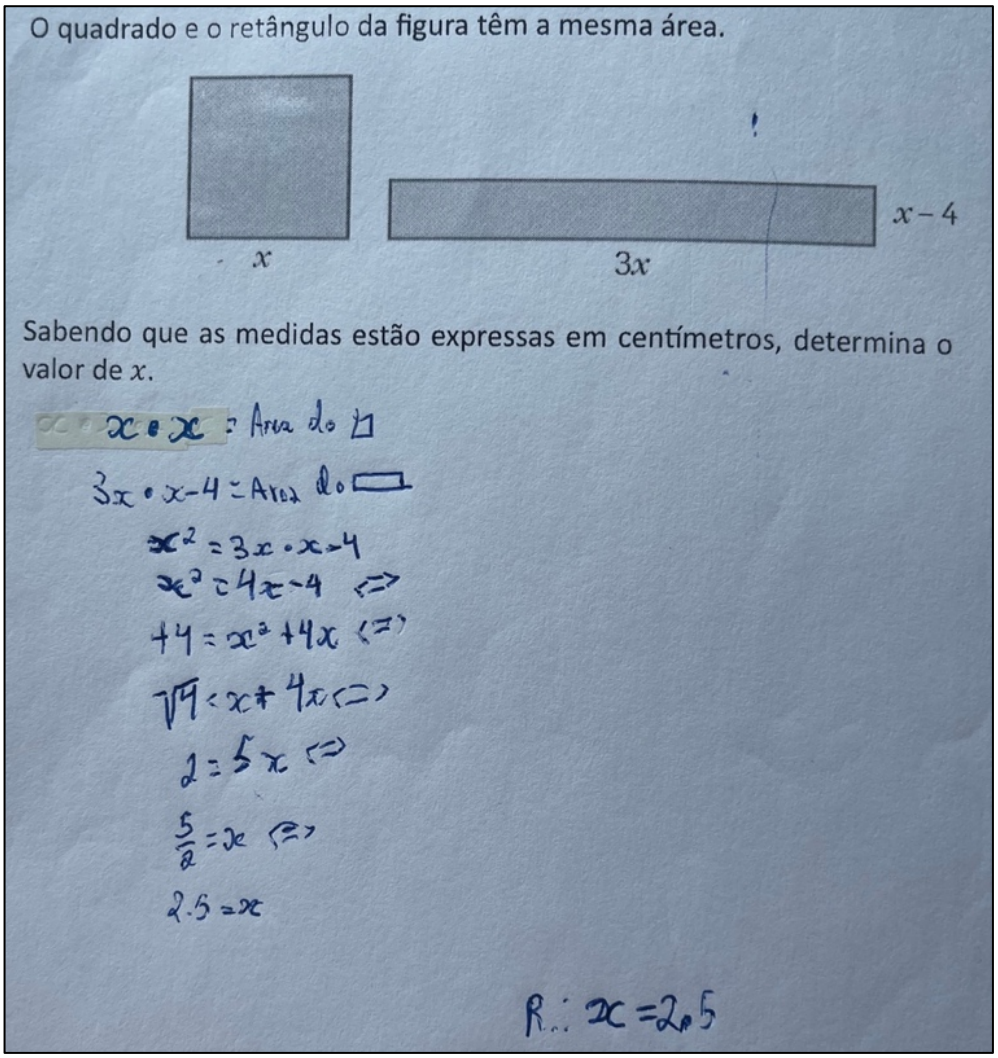


Figura 16 - Resolução do Problema 2 do João (Fase 1)

Ainda no âmbito dos erros de execução, registaram-se falhas por eliminação de variáveis. A Mafalda cometeu este tipo de erro ao operar a expressão $3x^2 - x^2$ assumindo que o resultado seria apenas 3 (Figura 17). Na sequência deste percurso algébrico, a aluna acabou por deixar a resolução da equação incompleta, um comportamento que sugere um bloqueio procedimental por não conseguir encontrar uma estratégia para prosseguir.

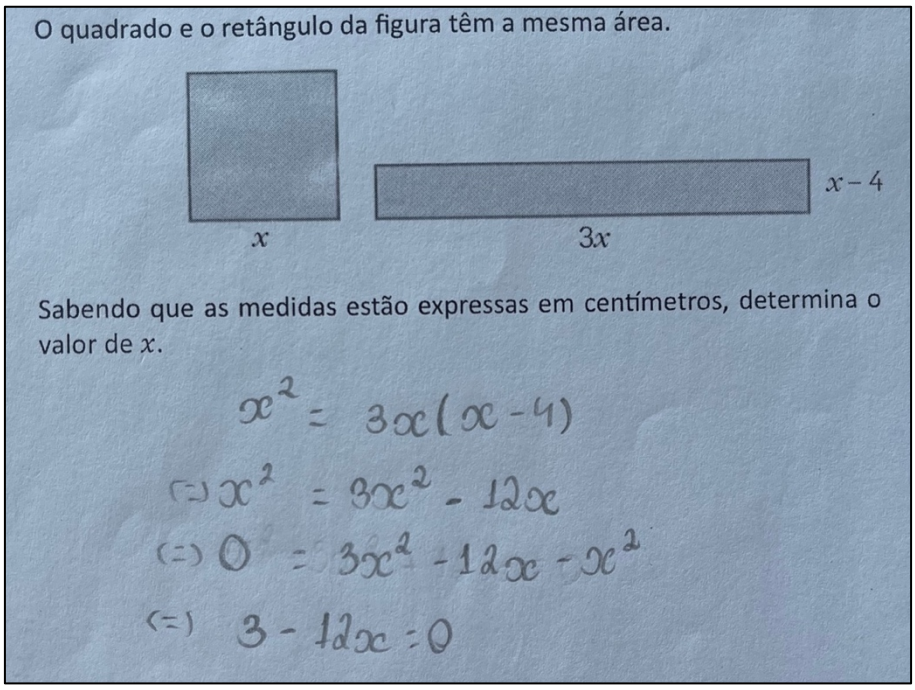


Figura 17 - Resolução do Problema 2 da Mafalda (Fase 1)

Registaram-se ainda casos de alunos que identificaram corretamente as áreas a calcular e compreenderam a necessidade de igualar as respetivas expressões para solucionar o problema. No entanto, uma vez estabelecida a equação, demonstraram não dispor de ferramentas para a resolver. Ficou, assim, evidente um erro na execução, motivado pela ausência de um método de resolução da equação com que foram confrontados. O Leonardo foi um dos alunos cujo desempenho ilustra esta abordagem (Figura 18).

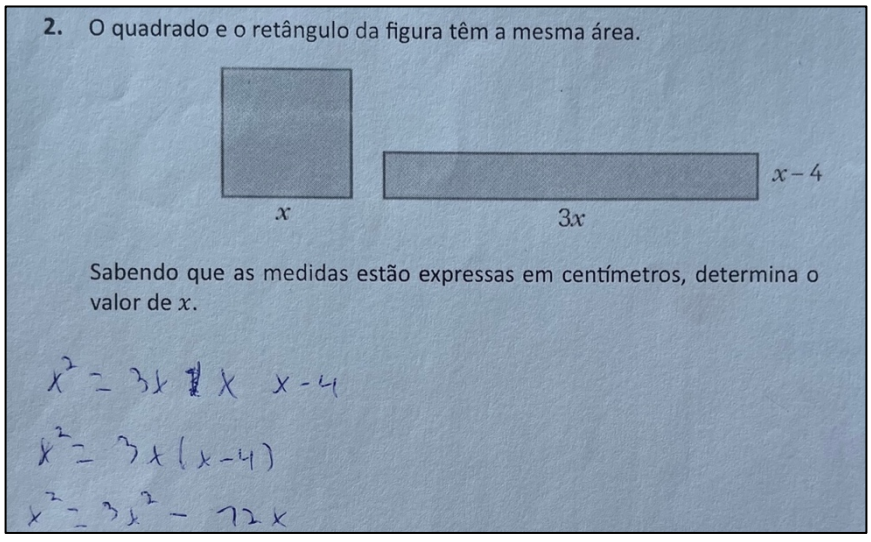


Figura 18 - Resolução do Problema 2 do Leonardo (Fase 1)

Adicionalmente, nota-se que a resolução do Leonardo carece de rigor procedimental, uma vez que o aluno apresenta expressões e equações sem qualquer fundamentação, tornando evidente uma lacuna no desenvolvimento da sua comunicação matemática escrita. Verifica-se ainda um défice de rigor matemático, manifestado na ausência dos símbolos de equivalência (⇔) ao longo dos diferentes passos da resolução da equação.

Outro caso que merece destaque é o da Letícia (Figura 19). À semelhança do Leonardo, identificou corretamente as áreas envolvidas, incorrendo apenas em erros de execução. A aluna aplicou incorretamente a lei do anulamento do produto, assumindo, de forma errónea que esta propriedade seria válida quando uma soma de parcelas é igual a zero. Esta abordagem configura a ativação de uma *mal-rule* (Hall, 2002). Adicionalmente, verifica-se que, apesar de ter determinado o conjunto-solução da equação, a aluna não a contextualizou no problema, deixando-o sem resposta.

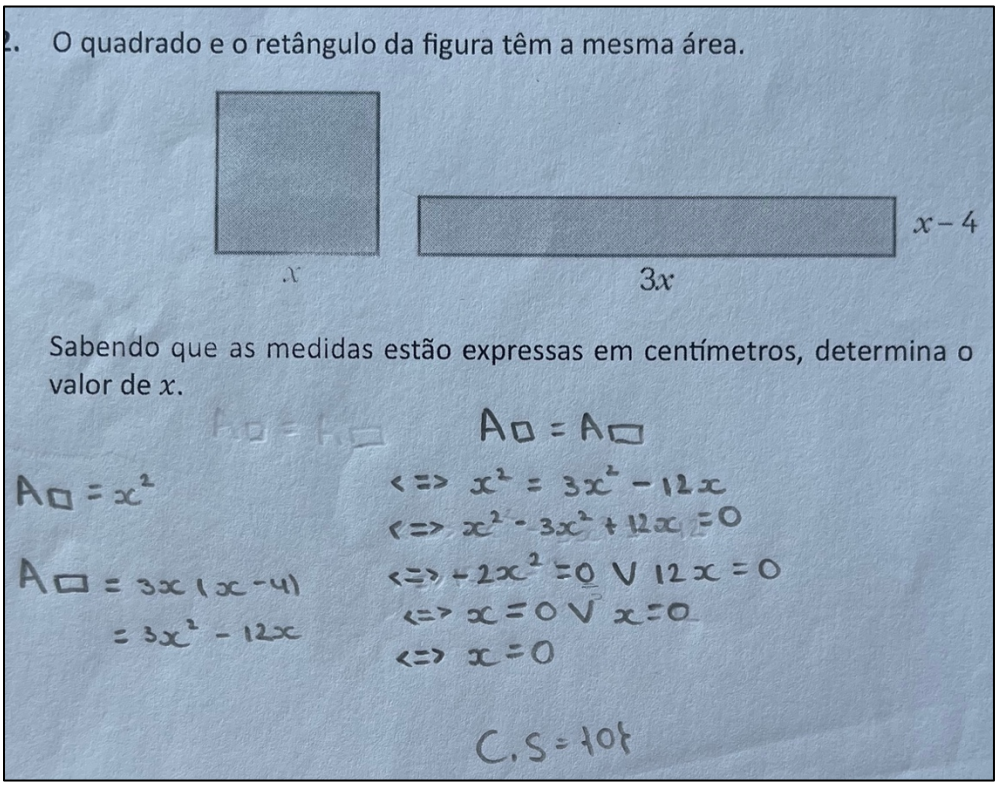


Figura 19 - Resolução do Problema 2 da Letícia (Fase 1)

5.1.3. Problema 3

Neste problema, foram sete os alunos que o conseguiram resolver. Relativamente ao problema 3 (Figura 20), a abordagem que me chamou mais a atenção seguiu uma estratégia diferente da restante turma, tendo sido adotada por apenas dois estudantes.

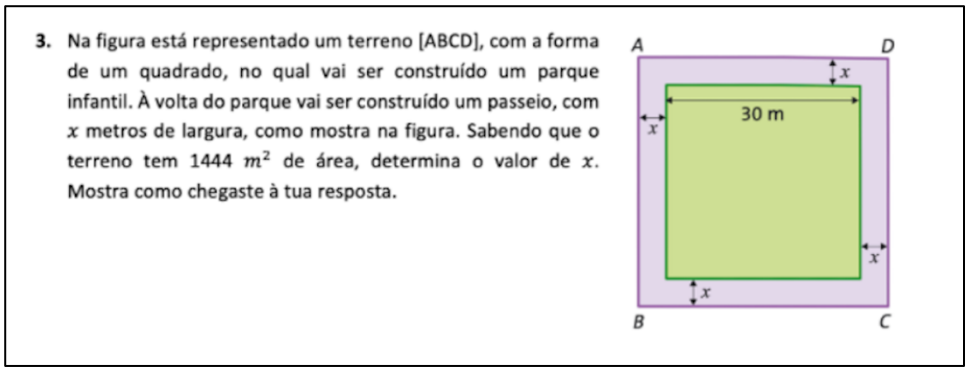


Figura 20 - Problema 3 da Tarefa 1 (Fase 1)

Embora o caminho delineado pudesse conduzir à solução correta, os erros cometidos ao nível da execução impediram que os alunos chegassem ao resultado correto. A Lara foi uma das alunas que optou por este processo de resolução (Figura 21).

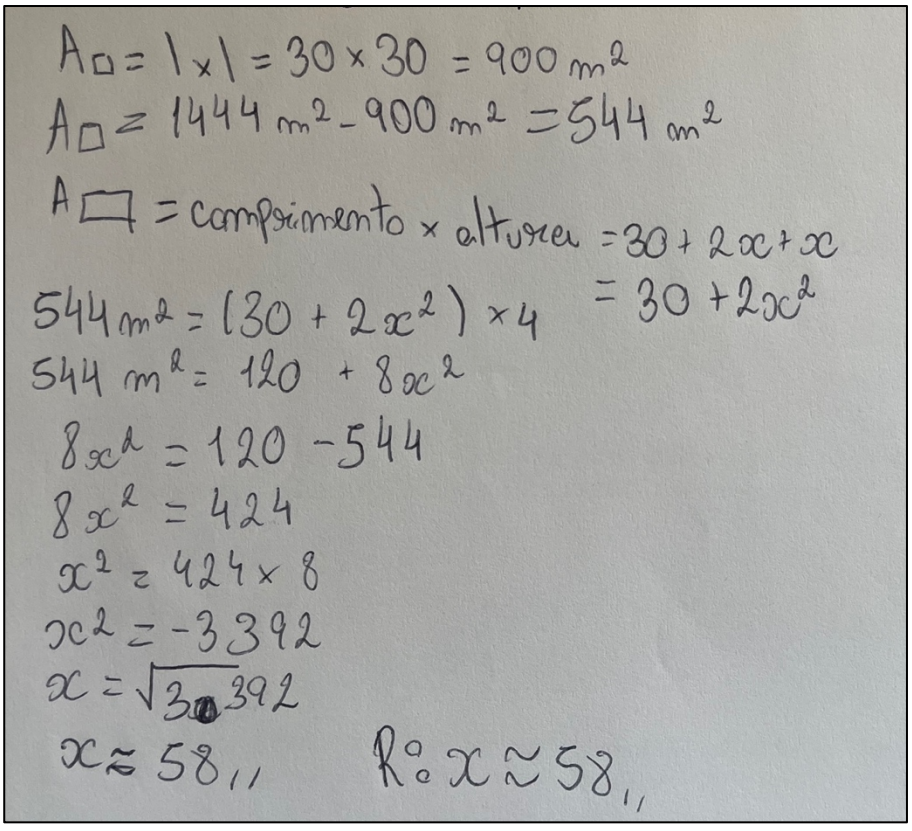


Figura 21 - Resolução do Problema 3 da Lara (Fase 1)

A estratégia pensada pela Lara envolvia determinar o valor de x a partir da área do passeio, uma vez que conseguia calcular o seu valor e sabia que esta área podia ser dividida em quatro retângulos. No entanto, o raciocínio perde clareza quando a aluna

refere, na sua resolução, que a área do passeio corresponde à área do quadrado (que representa como $A_{\square}$). No passo seguinte surge outra imprecisão: embora afirme que a área do retângulo é dada pelo produto do comprimento pela largura, na igualdade imediata acaba por omitir o sinal de multiplicação, substituindo-o pelo da soma. Ainda assim, o resultado que obtém decorre da multiplicação dos dois últimos termos. Esta incongruência pode ser interpretada de duas formas: ou a aluna não compreende plenamente as manipulações algébricas que realiza, ou revela alguma falta de rigor e clareza na sua produção escrita.

No que diz respeito à resolução da equação, nota-se que a aluna introduz a expressão matemática sem qualquer explicação sobre a sua origem. Ainda assim, é possível inferir que considera o passeio como sendo composto por quatro retângulos iguais, conforme sugere a expressão $(30 + 2x^2) \times 4$. Esta interpretação é reforçada pelo facto de igualá-la à área que tinha calculado como sendo a do passeio, o que não está correto. Embora a propriedade distributiva tenha sido bem aplicada, a Lara comete um erro logo de seguida devido à transposição incorreta do termo $8x^2$, que transita para o outro membro da equação sem a necessária alteração de sinal. Na etapa seguinte, surge um erro de cálculo quando assume que $120 - 544$ é igual a 424. Posteriormente, volta a falhar na transposição de um termo: tendo isolado $8x^2$, deveria ter efetuado a divisão de 424 por 8, mas a aluna acabou por multiplicar por 8. Nessa mesma multiplicação incorre num erro de cálculo ao definir o resultado de 424×8 como -3392. Como a tentativa de calcular a raiz quadrada desse número negativo na calculadora terá resultado num erro de sintaxe, a aluna optou por ignorar o sinal menos, extraindo apenas a raiz do valor positivo para eliminar o quadrado do termo x. Por fim, embora tenha tentado contextualizar a solução, faltou à Lara o sentido crítico para perceber que o valor obtido não fazia qualquer sentido no âmbito do problema.

O Rafael, por outro lado, cometeu um erro a nível da organização da informação (Torre, 2007) ao assumir, na sua segunda linha de cálculo, que a medida da área do passeio corresponde a $1444\,m^2$, quando o enunciado explicita que esse valor representa a medida da área total do terreno (Figura 22).

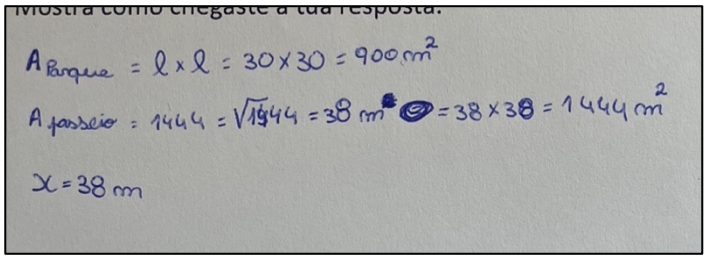


Figura 22 - Resolução do Problema 3 do Rafael (Fase 1)

Para além disso, sobressaem erros a nível conceptual no uso do sinal de igual. O aluno constrói uma cadeia de igualdades sem sentido, ao escrever que $1444 = \sqrt{1444} = 38$, tratanto o sinal de igualdade como um mero indicador de etapas consecutivas e não como uma relação de equivalência. Embora tenha calculado corretamente a medida da área do parque ($900\ m^2$) logo no início, o Rafael acabou por ignorar esse dado, não estabelecendo qualquer relação entre as áreas. Assim, ao descobrir que a raiz quadrada de 1444 era 38, assumiu diretamente que $x = 38\ m$. Embora seja possível compreender que o aluno procurou a medida do lado do terreno, a falta de clareza e a fraca comunicação matemática escrita prejudicaram a estrutura lógica da sua resposta.

A resolução da Mafalda reflete aquilo que foi o desempenho de maior parte dos alunos neste problema (Figura 23).

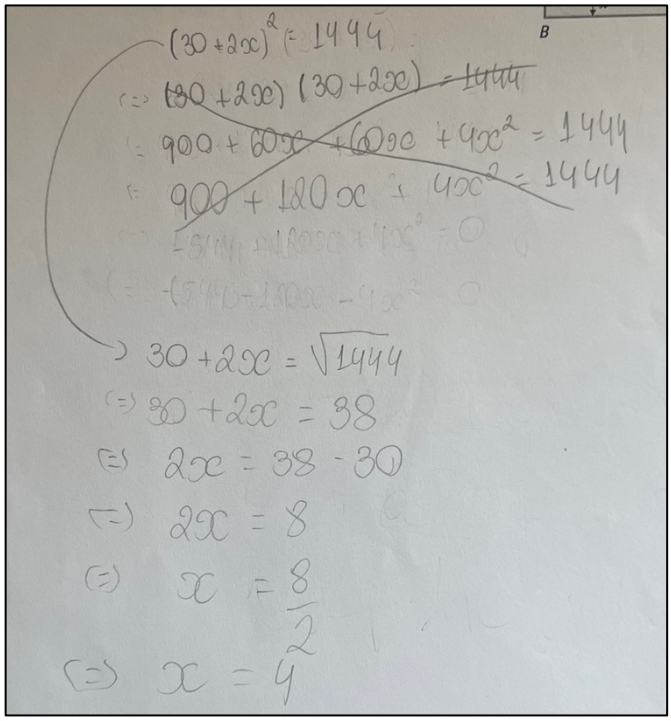


Figura 23 - Resolução do Problema 3 da Mafalda (Fase 1)

Na sua resolução, a Mafalda introduz diretamente uma equação sem contextualizar o que esta representa ou de que forma se relaciona com o problema. Um aspeto curioso no seu registo é a primeira tentativa de resolução na qual apresenta a equação $(30 + 2x)^2 = 1444$. Nesta, começa por resolver a equação desenvolvendo o quadrado da soma, gerando uma equação de 2.º grau completa. No entanto, ao aperceber-se da complexidade desse caminho, optou por riscar esse bloco e avançar com outra estratégia. Analisando a resolução no seu todo, parece ser possível afirmar que a partir da primeira tentativa, a aluna compreende que pode obter a medida do lado do quadrado [ABCD], efetuando $\sqrt{1444}$, e relacioná-la com uma expressão que representa esse mesmo elemento, daí propor a equação do 1.º grau $30 + 2x = \sqrt{1444}$. Adicionalmente, após chegar ao valor matemático de $x = 4$, a Mafalda não apresentou uma resposta explícita à pergunta do problema, deixando a resolução do problema incompleta.

O Martim, apesar de chegar a um resultado correto, carece de alguma clareza na sua comunicação matemática escrita, uma vez que assume a medida do comprimento do segmento de reta $[AD]$ como sendo a raiz quadrada de 1444 sem fundamentar essa ideia (Figura 24). No entanto, o aluno escreve $\overline{AD} = \pm\sqrt{1444}$ e acrescenta a restrição $\overline{AD} > 0$. Isto indicia que o Martim tendeu a replicar os procedimentos mecânicos da resolução de uma equação do 2.º grau, esquecendo-se que na determinação da medida do comprimento do lado de um quadrado a partir da sua área, não faz sentido incluir o valor negativo.

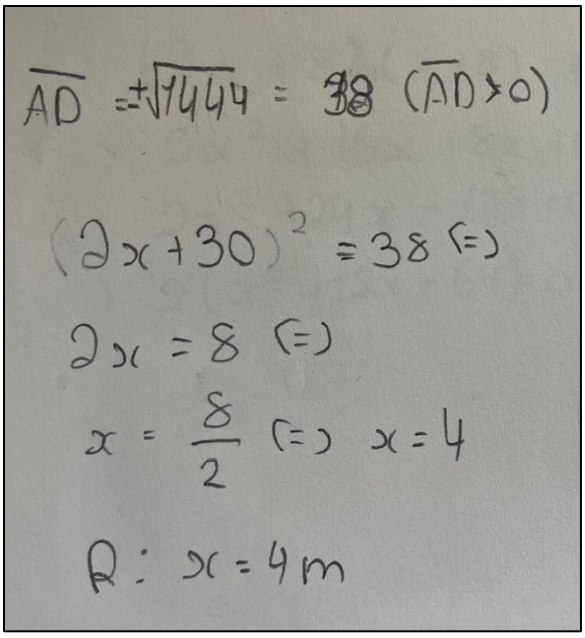


Figura 24 - Resolução do Problema 3 do Martim (Fase 1)

O mesmo se verifica com a equação seguinte, que o aluno se propõe a resolver sem apresentar qualquer justificação ou introdução sobre a origem da mesma ou o seu significado no contexto. Apesar de inicialmente ter considerado o polinómio $(2x + 30)^2$, o aluno acabou por conseguir compreender que o quadrado não era necessário acabando por estabelecer a equação correta correspondente ao processo de resolução que definiu. No final, contudo, demonstra o cuidado de destacar uma resposta e aplicar a unidade de medida referida no enunciado.

É notório que a maior dificuldade demonstrada pelos alunos, de forma transversal em todos os problemas, residiu na falta de contextualização das soluções obtidas após a resolução da equação e na ausência de uma resposta explícita ao problema. Acredito que os estudantes omitam este passo não por desconhecimento, mas por considerarem que se trata de algo trivial. Esta dificuldade prende-se, assim, diretamente com a comunicação matemática escrita, uma capacidade que os alunos demonstraram ter ainda pouco desenvolvida.

5.2. Fase 2 – Problemas envolvendo equações do 2.º grau: análise de erros

Ao analisar as resoluções, tal como referido anteriormente, os alunos trabalharam em grupo. Optei por esta modalidade de trabalho, uma vez que a discussão entre os elementos do grupo se revela particularmente enriquecedora. No entanto, a tarefa de analisar e comentar as resoluções apresentadas na Tarefa 2 revelou-se exigente para os alunos.

De um modo geral, os alunos encararam a tarefa como um processo de identificação de respostas corretas ou incorretas. Contudo, este não era o objetivo pretendido, uma vez que se procurava que analisassem cada resolução de forma mais aprofundada, discutindo em grupo se estava apresentava imprecisões ou se poderia ser considerada correta e completa, apresentando justificações e procurando compreender os erros cometidos. Perante esta dificuldade generalizada, considerei pertinente intervir, esclarecendo, junto de cada grupo, o que era efetivamente solicitado. Nesse sentido, sugeri que adotassem o papel de um professor na correção de um teste, incentivando-os não só a identificar o que estava correto e incorreto, mas também a fundamentar as incorreções assinaladas. Após essa explicação, alguns alunos evidenciaram uma melhor compreensão da tarefa. Ainda assim, a componente de comentário e análise crítica continuou a revelar-se exigente, sendo notória alguma resistência por parte dos

alunos. Este facto poderá estar relacionado com a falta de hábito em analisar criticamente resoluções, o que sugere que, possivelmente, também não adotam essa postura relativamente às suas próprias resoluções, focando-se na obtenção da resposta final. Verificou-se ainda que, quando uma resolução apresentava um erro logo na sua formulação inicial, os alunos tendiam a não analisar os passos seguintes, não aprofundando a sua análise. Este comportamento evidencia uma visão pouco global da resolução, uma vez que a identificação de um erro não invalida a análise dos restantes procedimentos apresentados.

Neste contexto, procurou-se desenvolver nos alunos um olhar crítico sobre as resoluções apresentadas. A promoção desta competência assume particular relevância no contexto atual, em que a inteligência artificial está cada vez mais presente. Torna-se, por isso, fundamental capacitar os alunos para a sua utilização de forma crítica, o que implica, entre outros aspetos, a capacidade de analisar, questionar e validar as respostas obtidas.

Ainda durante a realização da tarefa, ocorreu uma situação que importa referir. Um dos grupos, onde se incluía a aluna Paula, pediu para não ser escolhido para apresentar a resolução no quadro. Perante este pedido, questionei o motivo, mas o grupo não se explicou, limitando-se a sorrir. Mais tarde, na entrevista individual, retomei essa questão com a Paula, de forma a perceber melhor esta reação. Quando questionada sobre o receio de ir ao quadro a aluna respondeu:

> Porque... hum... o problema, pelo menos para mim, não é errar, é tipo... (riu-se) é o que as pessoas vão depois dizer porque para além de nós termos que ir ao quadro, temos que explicar o que íamos fazer. Se explicássemos alguma coisa mal, logo dava assim uma certa vergonha. (Entrevista, Paula)

A partir da sua resposta, percebe-se que o principal receio não está no erro em si, mas na exposição perante os colegas e na possibilidade de julgamento ao explicar o raciocínio.

Ainda nesta fase, reparei num outro detalhe que me chamou a atenção desta vez relacionado com o Martim. O Martim é um aluno habitualmente envolvido e empenhado, que apresenta um bom trabalho de sala de aula e se esforça em todas as tarefas propostas. Contudo, perante a resolução desta tarefa, o estudante teve um investimento muito inferior ao seu habitual. Curiosa com este comportamento, aproveitei o momento

da entrevista individual para compreender as razões subjacentes a esta reação face à tarefa proposta.

Investigadora: Por que é que achas que tiveste tanta dificuldade a analisar?

Martim: Porque... eu não queria fazer aquilo (riu-se).

Investigadora: É só por isso? Não te apetecia?

Martim: Não me queria esforçar a pensar na solução. (Entrevista, Martim)

A resposta do Martim indica que o seu fraco investimento não se deveu a um bloqueio cognitivo ou à falta de competências matemáticas, mas sim a uma quebra de natureza motivacional no momento da tarefa. Esta falta de disposição para despender esforço cognitivo poderá ter sido potenciada pela própria dinâmica do trabalho em grupo, onde os estímulos sociais e as conversas paralelas se tornam, por vezes, mais apelativos do que o foco na realização da tarefa. O dado mais relevante a retirar desta interação é que o desinteresse do Martim não foi despoletado pela natureza ou complexidade da tarefa em si, mas por fatores contextuais e motivacionais associados àquele momento.

Após a resolução autónoma da tarefa, seguiu-se o momento de discussão coletiva. Para a apresentação das resoluções à turma, procedi, enquanto circulava pela turma no sentido de acompanhar e apoiar o trabalho autónomo dos alunos, a uma seleção criteriosa dos grupos que iriam expor as suas estratégias. Assim, para cada um dos problemas, são apresentados apenas os dados relativos a esses grupos, tendo em conta constrangimentos de tempo. Adicionalmente, serão explicitados os critérios que orientaram a seleção dos grupos para a apresentação das suas resoluções.

5.2.1. Problema 1

Como já apresentado no capítulo 3, para o Problema 1 selecionei as duas resoluções apresentadas na Figura 25.

1. O professor de matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

Resolução 1

$$
\begin{aligned}
& 4x - x^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x - 4 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee x - 4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 4 + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 5
\end{aligned}
$$

Resolução 2

$$
\begin{aligned}
& 4(x - x^2) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4(x - x^2) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4 = 0 \ \vee\ x - x^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Figura 25 - Problema 1 da Tarefa 2

Relativamente ao Problema 1, optei por selecionar um grupo que considerou a resolução incorreta a partir do momento em que identificou um erro na sua tradução (Figura 26). Esta escolha foi intencional, uma vez que permitia evidenciar uma das principais dificuldades observadas durante a realização da Tarefa 2, nomeadamente um erro logo na sua formulação inicial, os alunos tendiam a não analisar os passos seguintes. Para além disso, a resolução que apresentaram como sendo a correta continha um erro a nível da execução.

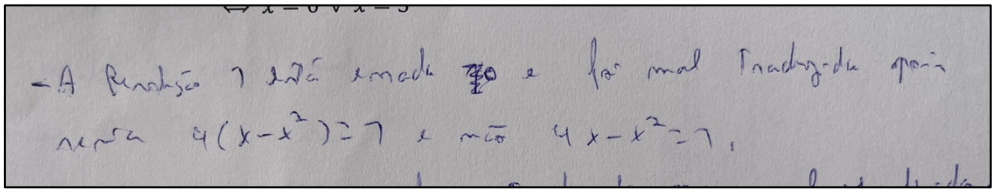


Figura 26 - Análise da resolução 1 do Problema 1 pelo grupo do Leonardo (Fase 2)

O grupo escolheu o Leonardo como porta-voz. Foi visível que o aluno se encontrava bastante nervoso ao expor a sua resolução, pelo que, tanto eu como a minha orientadora cooperante, fomos colocando questões que o ajudaram a desenvolver as

suas conclusões. Inicialmente, o Leonardo referiu que o seu grupo considerava a resolução 1 incorreta.

Investigadora: A resolução 1 está errada, porquê?

Leonardo: Foi mal traduzida. (Aula, 3 de março de 2026)

Esta observação revela que os alunos conseguiram reconhecer que o erro não se limitava ao cálculo, mas ocorria na passagem do enunciado para a equação correspondente, o que evidencia uma compreensão inicial da importância da tradução do problema. Uma vez que o grupo não tinha analisado a resolução algébrica da equação, foi necessário suscitar uma discussão em que fossem os colegas da turma a ajudar o Leonardo a identificar o que ainda faltava comentar.

Investigadora: Está tudo bem do primeiro para o segundo passo na resolução 1?

Turma: Não.

Investigadora: O que é que falhou?

Benedita: Hum... Ah, os símbolos inverteram.

Investigadora: Os símbolos de?

Benedita: Os símbolos dos sinais.

Investigadora: Então qual era a correção que faria Leonardo? No primeiro passo para o segundo?

Leonardo: $4x - x^2$em vez de $x^2 - 4x$. (Aula, 3 de março de 2026)

Ainda na análise da resolução 1, e incentivado pelas minhas perguntas, o Leonardo conseguiu detetar outro erro no passo seguinte da resolução da equação, uma vez que reconheceu que não era possível pôr o x em evidência, dado que uma das parcelas não continha a variável. No decorrer da discussão os alunos identificaram, contudo, que o passo seguinte foi bem concretizado, uma vez que foi corretamente aplicada a lei do anulamento do produto. Para instigar a discussão e aprofundar a análise, decidi questionar a turma se ao Leonardo ainda faltaria identificar algo mais. Foi então que o Martim respondeu que não tinha sido indicado o conjunto-solução, nem a resposta ao problema.

Relativamente à resolução 2 o Leonardo referiu que o problema tinha sido corretamente equacionado, mas que a sua resolução continha incorreções, afirmando: "Está mal resolvida" (Leonardo, Aula, 3 de março de 2026). Os alunos reconheceram que não se tratava de um produto igual a zero e, por isso, não seria possível aplicar a lei do anulamento do produto. Uma vez que nada mais foi desenvolvido na resolução, os alunos não dispunham de elementos adicionais para comentar, pelo que pedi ao Leonardo que expusesse a resolução que tinha encontrado com a turma (Figura 27).

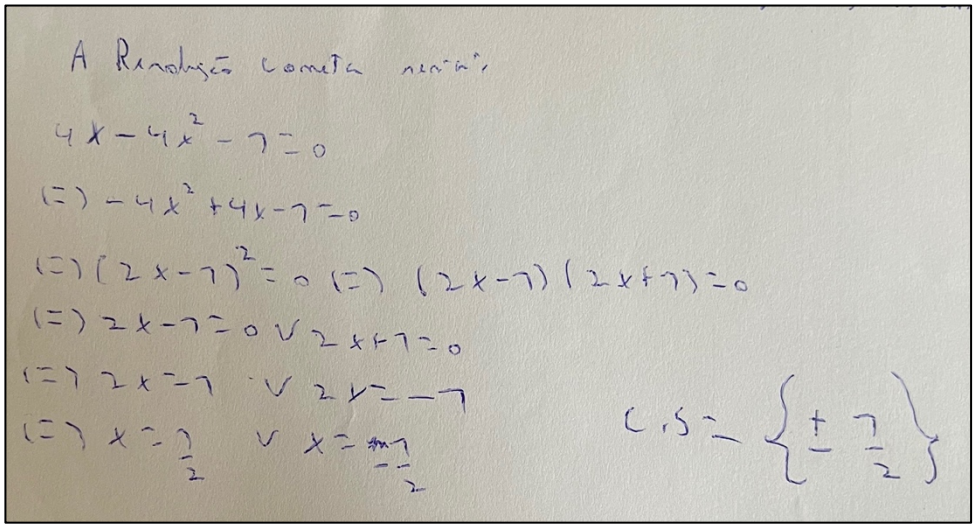


Figura 27 - Resolução proposta pelo grupo do Leonardo para o Problema 1 (Fase 2)

Após escrever a resolução no quadro, a turma referiu que não tinha chegado às mesmas soluções que o grupo do Leonardo, mas não conseguiu identificar claramente o que poderia ter originado essa diferença. Nesse momento, a minha orientadora cooperante interveio, colocando questões que orientaram a reflexão dos alunos:

> **Orientadora cooperante:** Ó Leonardo, só não percebi aí uma parte na terceira linha que tu escreveste. Tens $(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 0$, porquê?
>
> **Leonardo:** É o quadrado do binómio.
>
> **Orientadora cooperante:** O quadrado do binómio, o que é que significa o expoente 2? Então $(2x-1)^2$ é $(2x-1)$ que multiplica por?
>
> **Leonardo:** $2x-1$. (Aula, 3 de março de 2026)

Perante esta intervenção, os alunos identificaram que o grupo do Leonardo não tinha dado resposta ao problema e ajudaram-no, a construir uma possível resposta, que foi escrita no quadro.

Adicionalmente, na entrevista realizada com o Leonardo, considerei pertinente explorar como este se sentiu ao apresentar as suas resoluções à turma. Quando questionado o aluno referiu: “Estava um pouco nervoso, não queria errar à frente da turma” (Entrevista, Leonardo).

A partir da sua resposta, é possível perceber que o aluno associa a apresentação das resoluções a algum nervosismo, sobretudo devido ao receio de errar em contexto público. Esta perspetiva vai ao encontro da ideia anteriormente referida pela Paula, reforçando a influência que o medo da exposição e do julgamento dos colegas pode ter na participação dos alunos em momentos de partilha em sala de aula.

5.2.2. Problema 2

No âmbito da discussão relativa às resoluções do Problema 2, foram chamadas ao quadro a Letícia e a Graça, que estavam a trabalhar juntas. Decidi escolhê-las para apresentarem a sua resolução (Figura 28) porque ambas tinham aplicado incorretamente a lei do anulamento do produto na resolução da Tarefa 1 (Fase 1).

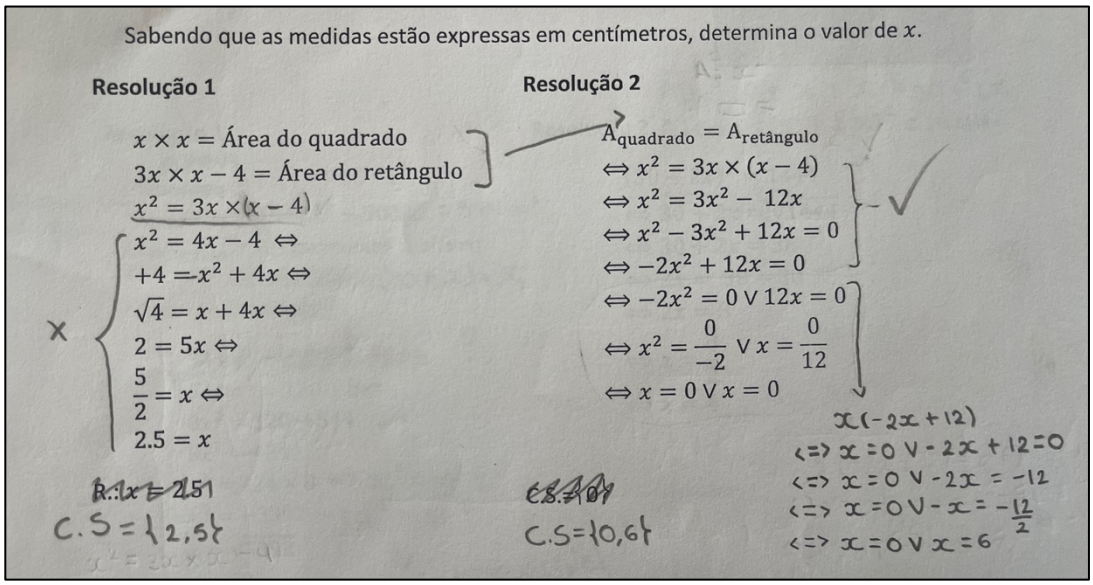


Figura 28 - Análise das resoluções do Problema 2 pela Letícia e a Graça (Fase 2)

As duas alunas foram ao quadro tendo a Graça apresentado a análise acerca da resolução 1 e a Letícia a análise da resolução 2.

A Graça iniciou a sua análise destacando a falta de parênteses numa das expressões, o que alterava a prioridade das operações e, consequentemente, corrompia o resultado: "Depois, na resolução 1, temos a área do quadrado e a área do retângulo, só que a resolução está errada e faltava aqui parêntesis porque o $3x$ influencia o x e o -4, não só o x" (Graça, Aula, 3 de março de 2026). Para além disso, a Graça conseguiu identificar corretamente que $3x \times x$ seria $3x^2$ e não $4x$ como apresentado na resolução.

De seguida a Letícia começou por referir:

> na segunda aqui, falta só dizer que a área do quadrado é igual a $x \times x$ e a área do retângulo é igual $3x \times (x - 4)$. Pronto, depois até aqui está certo (apontou até à expressão $-2x^2 + 12x = 0$); só que aqui (apontou para $-2x^2 = 0 \ \vee \ 12x = 0$), nós devíamos pôr em evidência, ou seja, meter o x em evidência e ficaria x, entre parêntesis $-2x + 12$. (Letícia, Aula, 3 de março de 2026)

A partir desse momento, a Letícia escreveu no quadro a resolução proposta para o problema e acrescentou ainda que: "A resposta seria o x igual a 6 porque o comprimento não pode ser 0" (Letícia, Aula, 3 de março de 2026).

Este reconhecimento é muito importante, já que a resolução de problemas, e neste caso envolvendo equações de 2.º grau, implica a validação das soluções encontradas tendo em conta o contexto e/ou as condições do próprio problema. Mostra, assim, que os alunos começaram a compreender que a validação de soluções no contexto do problema é uma etapa essencial.

5.2.3. Problema 3

Para comentar as resoluções 1 e 2 e apresentar a resolução do Problema 3, escolhi o grupo que integrava um dos alunos que o tinha resolvido através do processo apresentado na resolução 1 (Figura 29). Esta escolha respaldou-se no facto de que, ao circular pelos grupos durante o trabalho autónomo, se detetou que muitos alunos não perceberam claramente o que estava a ser realizado na resolução e, sobretudo, a razão dessa realização, principalmente no passo em que aparece a multiplicação por 4. Assim,

considerei pertinente que esse aluno explicasse à turma o raciocínio que estava por trás da resolução 1.

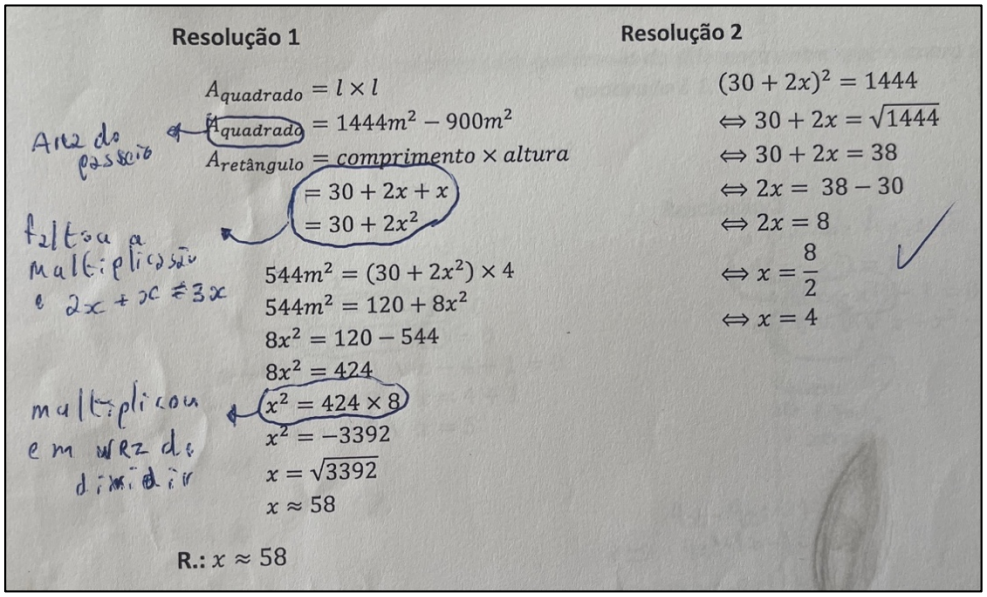


Figura 29 - Análise das resoluções do Problema 3 pelo grupo do João (Fase 2)

O escolhido para porta-voz foi o João que começou por identificar que a área deveria ser a do passeio e não a do quadrado, como era indicado na resolução. De seguida, clarificou esta ideia, explicando que essa representava a área total do passeio, uma vez que: “Nós sabemos que a área inteira é 1444, então nós precisamos de fazer a área do quadrado para conseguir saber a área total do passeio” (João, Aula, 5 de março de 2026). De seguida, os alunos identificaram que, na resolução, faltava determinar o valor dessa subtração. Prosseguindo com a análise, o João foi questionado sobre o motivo de surgir a área do retângulo, referindo: “Porque este passeio todo nós podemos traduzir em... em retângulos” (João, Aula, 5 de março de 2026).

Com a ajuda da turma, o João foi organizando a resolução, corrigindo os erros identificados, nomeadamente a falta de parenteses na expressão e a confusão no cálculo. No entanto, os alunos depararam-se com uma equação completa do 2.º grau cujo termo independente do polinómio não correspondia a um quadrado perfeito. Como esta turma ainda não tinha abordado a resolução de equações do 2.º grau pelo método do completamento do quadrado, nesse momento não souberam como proceder a partir daí. Este momento serviu para esclarecer os alunos que, por vezes, nem todas as estratégias que definimos nos levam à solução do problema.

Orientadora cooperante: Então, por este método, conseguíamos chegar ao resultado?

João: Não.

Orientadora cooperante: O que nos leva a pensar que, às vezes, podemos ir por um caminho, mas se esse caminho não nos leva a lado nenhum, quer dizer...

João: Que não é esse o caminho a seguir. (Aula, 5 de março de 2026)

Relativamente à análise da resolução 2, os alunos não identificaram qualquer erro, argumentado que, como x representava a medida de um comprimento, não era necessário encontrar a solução negativa da equação. Nesse ponto, intervim para esclarecer que, embora a equação possa ter duas soluções, nem todas podem corresponder à resposta do problema. O que se espera é deixar explícito o porquê de certas soluções não serem adequadas ao contexto do problema. No seguimento da discussão, os alunos acabaram por identificar que ainda não tinha sido dada resposta ao problema.

Terminadas as análises, os alunos realizaram uma síntese do que é necessário fazer quando se resolve um problema envolvendo equações do 2.º grau:

Investigadora: Então, o que é que concluímos? Quais são as etapas essenciais na resolução de problemas com equações de segundo grau?

Graça: Equacionar, resolver e...

Alunos: ... e dar a resposta. (Aula, 5 de março de 2026)

Deste modo, a discussão coletiva revelou-se uma estratégia particularmente eficaz para a análise de erros, na medida em que permitiu aos alunos identificar incorreções, justificar respostas, rever procedimentos e compreender melhor os conceitos envolvidos. Para além de favorecer a correção dos erros, esta dinâmica promoveu a reflexão sobre o próprio processo de resolução, contribuindo para uma aprendizagem mais consciente e crítica. Assim, a análise de erros revelou-se uma ferramenta não para apenas detetar erros, mas sobretudo para transformar essas falhas em oportunidades de aprendizagem.

5.3. Fase 3 – Implicações da análise do erro na resolução de problemas

Para compreender de que forma o trabalho desenvolvido a partir de erros teve implicações nas aprendizagens dos alunos, nomeadamente ao nível da capacidade de resolução de problemas, importa analisar e comparar o desempenho dos estudantes entre a Fase 1 e a Fase 3. Antes de iniciar esta componente comparativa, apresento os dados referentes aos três problemas, mas agora na Fase 3. Tal como referido no subcapítulo 4.2, serão analisados dados relativos a 11 alunos, uma vez que nem todos os participantes estiveram presentes em todas as fases da intervenção pedagógica. Atendendo ao objetivo do estudo, considerou-se relevante incluir apenas os alunos que participaram nas três fases, de modo a garantir uma avaliação mais consistente das implicações da análise de erros na resolução de problemas.

5.3.1. Problema 1

É relevante notar que, nesta Fase 3, os alunos revelaram maiores dificuldades na resolução do Problema 1 (Figura 30).

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto dos dois números maiores. Quais são esses números?"

Figura 30 - Problema 1 da Tarefa 3 (Fase 3)

De uma forma geral, os alunos demonstraram dificuldade em exprimir três números consecutivos em função de uma única incógnita. O facto de utilizarem três incógnitas diferentes parar representar cada número gerava um impasse, impedindo-os de avançar na tarefa. Para combater esta fragilidade, a minha orientação baseou-se num ciclo de perguntas simples: desafiei os alunos a pensarem num número aleatório, de seguida solicitei que identificassem o número seguinte e, finalmente, perguntei-lhes como tinham obtido esse novo valor. Através deste diálogo, os estudantes conseguiram compreender a relação existente entre os números e conseguiram progredir nas suas resoluções.

Uma estratégia de resolução bastante comum para este problema foi o método de tentativa e erro, sendo que, neste caso, bastou uma única tentativa para encontrar o

resultado. Embora o objetivo didático passasse pelo trabalho com as equações do 2.º grau, esta abordagem é completamente válida e revela que os alunos compreenderam o enunciado, uma vez que iniciaram as suas tentativas com o número 1, o primeiro número natural. Ao testarem a condição referida no enunciado e verificarem a igualdade, os estudantes chegaram, corretamente, à solução. A Graça foi uma das alunas que seguiu esta linha de raciocínio, contudo, não contextualizou o processo numa resposta ao problema (Figura 31).

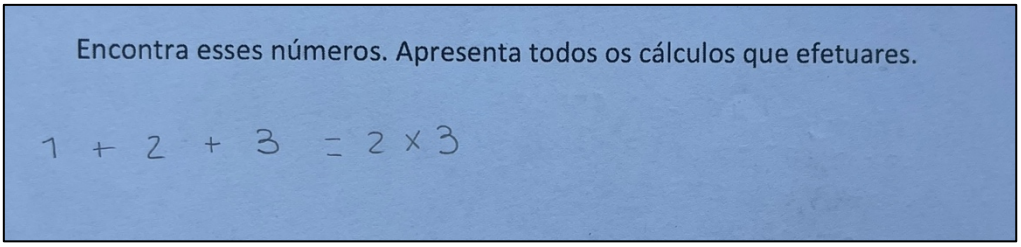


Figura 31 - Resolução do Problema 1 da Graça (Fase 3)

Verificou-se também a existência de um grupo de alunos que optou por modelar o problema analiticamente através de uma equação. A única dificuldade observada neste grupo tendeu a ser, novamente, a falta de contextualização das soluções obtidas numa resposta ao problema. Este foi o caso do Vicente, que, à semelhança de vários colegas, omitiu a resposta final, embora importe referir que, ao contrário dele, alguns alunos conseguiram realizar esta validação (Figura 32).

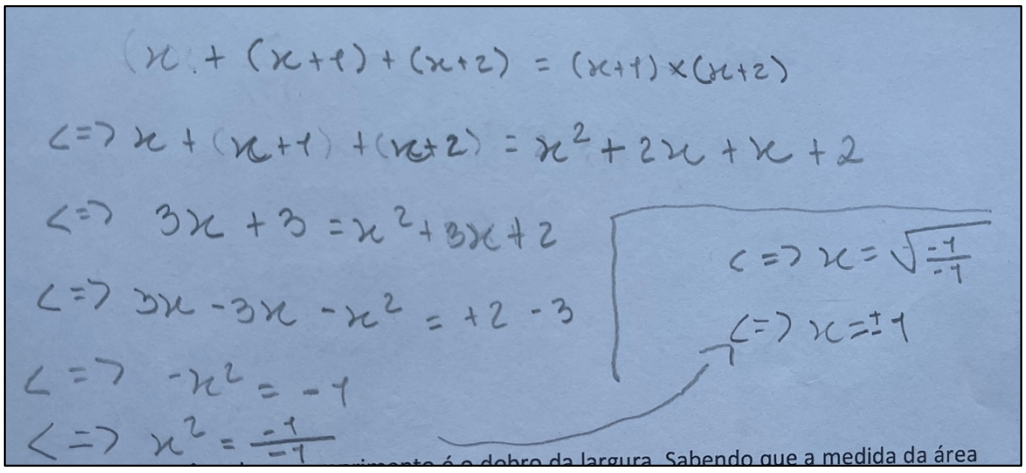


Figura 32 - Resolução do Problema 1 do Vicente (Fase 3)

Para além disso, nenhum dos alunos identificou que a incógnita x correspondia ao primeiro número natural que se procurava.

Relativamente ao desempenho dos alunos no Problema 1 da Fase 1 e da Fase 3, os alunos evidenciaram maiores dificuldades na interpretação do enunciado do problema na Fase 1 (Figura 33) do que na Fase 3 (Figura 34), observando-se uma melhoria neste aspeto. Contudo, considera-se que as dificuldades sentidas na Fase 1 poderão ter sido influenciadas pela formulação do enunciado, uma vez que o grupo de alunos evidenciou maior dificuldade, refletida no maior tempo despendido na progressão da sua resolução, em comparação com o Problema 1 da Fase 3.

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

Figura 33 - Problema 1 da Fase 1

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto dos dois números maiores. Quais são esses números?"

Encontra esses números. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Figura 34 - Problema 1 da Fase 3

Para além disso, um outro indicador da melhoria das produções dos alunos prendeu-se com o facto de 8 dos 11 alunos terem resolvido corretamente o problema, embora alguns não tenham apresentado uma resposta final explícita.

Em termos comparativos, como referido na secção 5.1.1., no Problema 1 da Fase 1 os alunos evidenciaram erros ao nível da entrada e da execução. Na resolução do presente problema, deixaram de se verificar erros a nível de entrada e, ao nível da execução, apenas se registou um erro, cometido pelo Vicente, que não procedeu à contextualização das soluções obtidas.

Assim sendo, verifica-se uma melhoria global na resolução deste problema quando comparado com o Problema 1 da Fase 1.

5.3.2. Problema 2

Relativamente ao segundo problema presente na Tarefa 3 (Figura 35), apenas a Constança revelou dificuldades significativas a nível da interpretação do enunciado.

2. Num retângulo, o comprimento é o dobro da largura. Sabendo que a medida da área desse retângulo é igual ao triplo da medida do seu perímetro, determina as dimensões do retângulo.

Figura 35 - Problema 2 da ficha da Fase 3

Apesar de ter realizado um esquema para representar o retângulo, indicando expressões corretas para representar as dimensões do retângulo, a aluna associa uma expressão incorreta à área do retângulo (Figura 36).

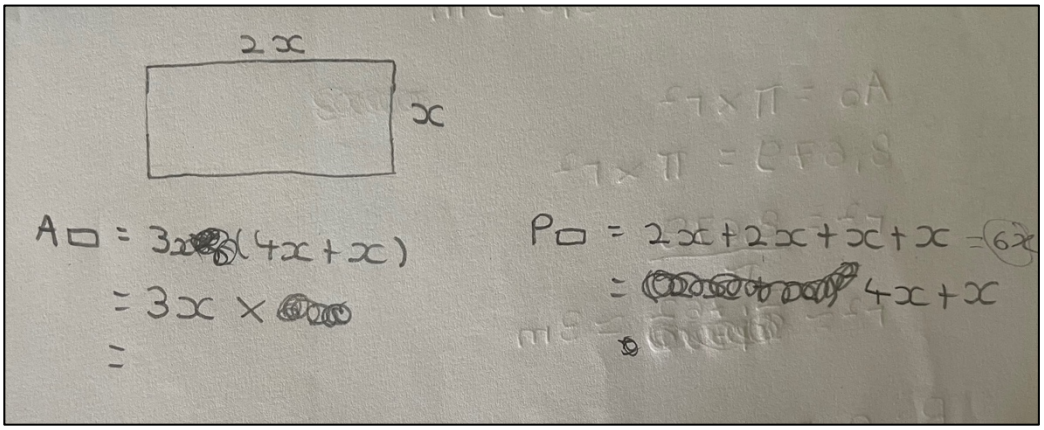


Figura 36 - Resolução do Problema 2 da Constança (Fase 3)

No que diz respeito ao perímetro, a aluna indicou uma expressão correta $2x + 2x + x + x$, mas ao proceder a uma primeira tentativa de simplificação $(4x + x)$, fê-lo de forma incorreta. Contudo, após identificar o erro, corrigiu essa simplificação, apresentando a expressão $6x$. No entanto, talvez pela falta de tempo, a aluna não terminou a resolução do problema, uma vez que não explorou a ideia de o perímetro ser representado por $6x$ numa tentativa de encontrar uma expressão para a área do retângulo.

No caso dos restantes alunos, as dificuldades que se fizeram sentir foram essencialmente ao nível da execução associados a erros procedimentais. Os alunos conseguiram delinear uma estratégia estruturada, mas uma minoria acabou por não conseguir resolver a equação subsequente à mesma, como foi o caso do João (Figura 37).

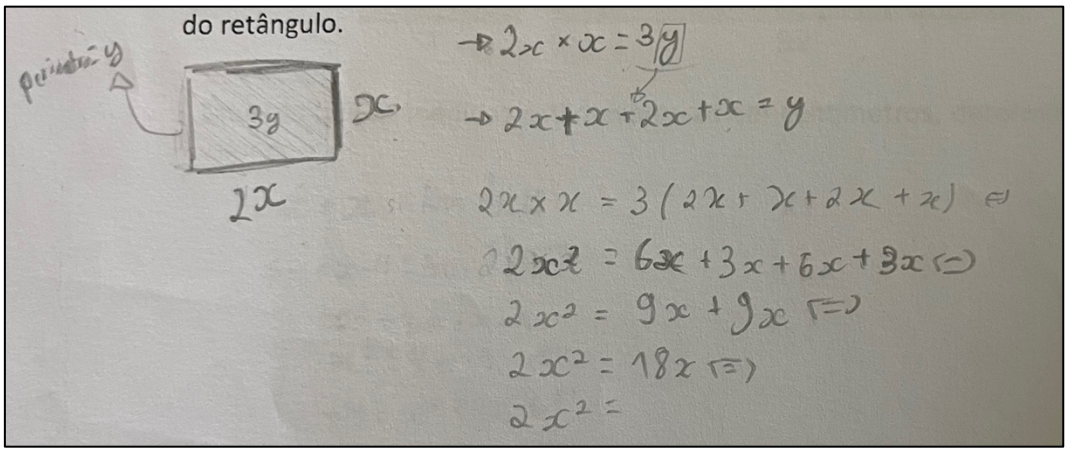


Figura 37 - Resolução do Problema 2 do João (Fase 3)

A Letícia foi uma das alunas que, já na resolução do Problema 2 da Fase 1, tinha revelado dificuldades na aplicação da lei do anulamento do produto. Também na Fase 3, na resolução do Problema 2, revelou essa dificuldade (Figura 38). Apesar de, na sua resolução, não estar perante uma equação de 2.º grau, a aluna acabou por forçar a aplicação da lei do anulamento do produto.

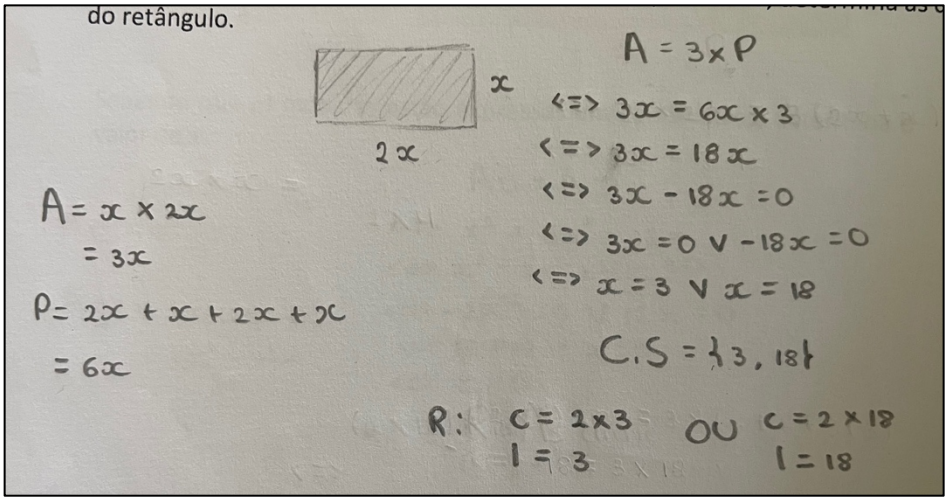


Figura 38 - Resolução do Problema 2 da Letícia (Fase 3)

Adicionalmente, a Letícia cometeu um erro de simplificação ao considerar que $x \times 2x = 3x$, confundindo a multiplicação de monómios com a soma. Contudo, é relevante destacar que a estudante teve o cuidado de contextualizar as soluções obtidas, formulando uma resposta final ao problema, ainda que estivesse incorreta devido a erros processuais anteriores.

Este foi um cuidado que a Anabela não revelou. A aluna não manifestou qualquer dificuldade no processo algébrico, apresentando uma resolução correta (Figura 39). Importa notar que, ao estruturar a expressão para o perímetro do retângulo, a aluna incorporou diretamente a multiplicação por três. O aspeto mais curioso surge na fase de contextualização da resposta: apesar da aluna ter sublinhado explicitamente no enunciado o que lhe era pedido, e de ter calculado na margem as medidas da largura ($x = 9$) e do comprimento ($x = 18$), falhou na articulação final. Ao redigir a resposta, a Anabela limitou-se a indicar de forma vaga que $x = 9$, não identificando claramente as dimensões do retângulo.

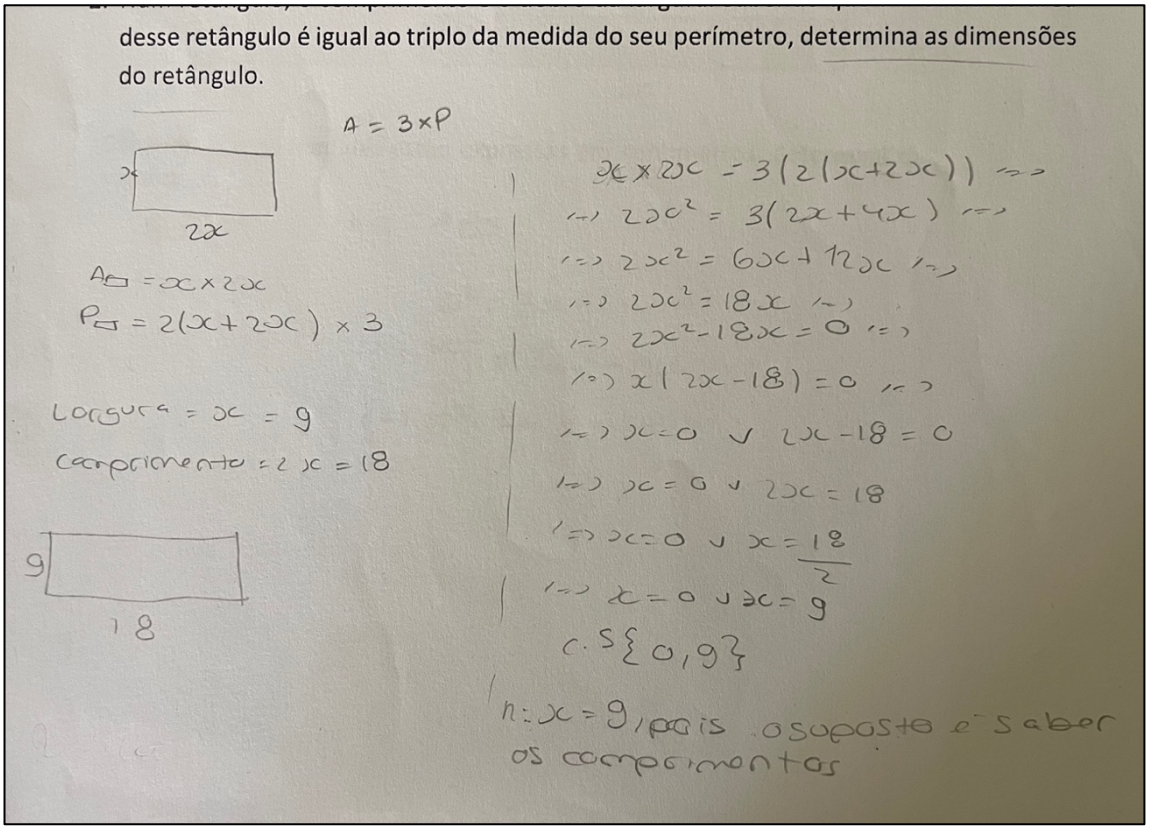


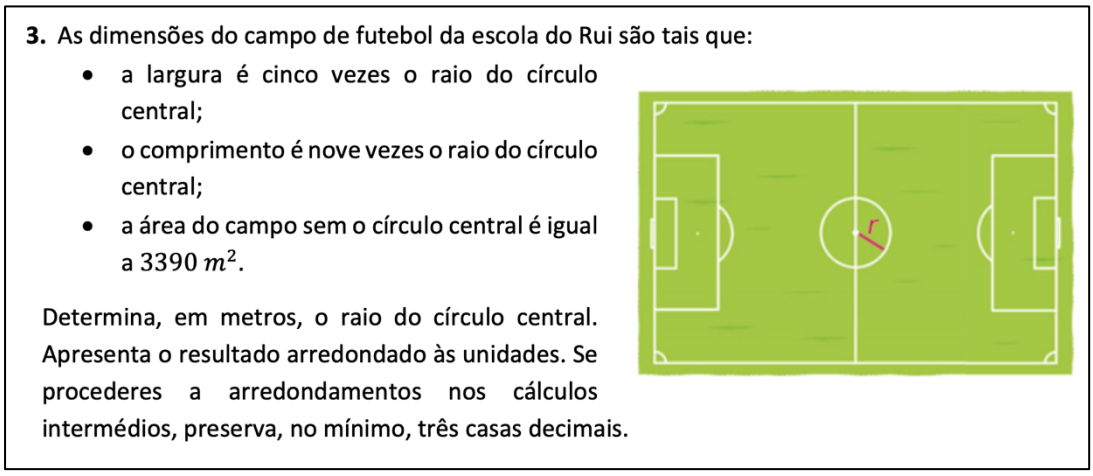
Figura 39 - Resolução do Problema 2 da Anabela (Fase 3)

Neste problema, apenas quatro alunos resolveram corretamente o problema, sendo que apenas dois procederam à contextualização da resposta no âmbito do mesmo. Embora este resultado não seja particularmente expressivo, representa ainda assim uma melhoria face ao Problema 2 da Fase 1, no qual apenas um aluno conseguiu resolver o problema.

Em termos comparativos, no Problema 2 da Fase 3 deixaram de se verificar erros ao nível da organização da informação, ao contrário do que ocorreu na Fase 1. Contudo, registaram-se erros de entrada e mantiveram-se erros de execução. Relativamente à tipologia dos últimos, no Problema 2 da Fase 1 observaram-se erros por eliminação, erros de inversão, erros por transposição incorreta de termos, erros de cálculo, aplicação de *mal-rules*, falta de contextualização da resposta e não saber resolver a equação. Já na Fase 3, persistiram apenas erros de cálculo, aplicação de *mal-rules,* falta de contextualização da resposta e não saber resolver a equação, tendo estes ocorrido com menor frequência. Estes resultados evidenciam, assim, uma melhoria na capacidade de os alunos resolverem problemas.

5.3.3. Problema 3

O terceiro e último problema exigia que os alunos identificassem e organizassem corretamente os dados fornecidos sobre o campo de futebol, de modo a estruturar uma estratégia que lhes permitisse determinar o raio do círculo central (Figura 40).


3. As dimensões do campo de futebol da escola do Rui são tais que:

- a largura é cinco vezes o raio do círculo central;
- o comprimento é nove vezes o raio do círculo central;
- a área do campo sem o círculo central é igual a $3390\ m^2$.

Determina, em metros, o raio do círculo central. Apresenta o resultado arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, preserva, no mínimo, três casas decimais.

Figura 40 - Problema 3 da ficha da Fase 3

Nenhum dos alunos cometeu erros de entrada, tendo todos apresentado uma expressão que identificasse corretamente as medidas da largura e do comprimento em função do raio do círculo central. Para organizar esta informação surgiram duas abordagens,

enquanto uns optaram por registar os dados diretamente por escrito, outros recorreram à figura apresentada no enunciado para legendar com as medidas correspondentes. O João foi o único aluno que revelou dificuldades em estabelecer a relação correta entre a área total do campo de futebol e a área do campo de futebol sem o círculo central (Figura 41).

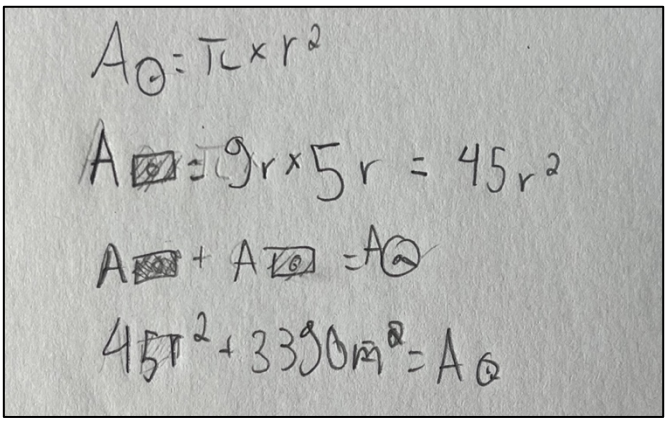


Figura 41 - Resolução do Problema 3 do João (Fase 3)

O aluno começou por deduzir uma expressão que representasse as áreas do círculo e do campo de futebol. Contudo, manifestou uma falha grave na organização da informação e na delineação da estratégia ao assumir, de forma errada, que a soma da área total com a área sem o círculo central correspondia à área do círculo. Deste modo, apesar do João ter as fórmulas estruturadas na folha, não conseguiu estruturar uma estratégia para dar seguimento à resolução do problema.

Por outro lado, a Constança, apesar de ter estabelecido corretamente, do ponto de vista algébrico, as relações entre as áreas, revelou dificuldades ao longo do processo de resolução, o que a levou a obter uma resposta incorreta (Figura 42).

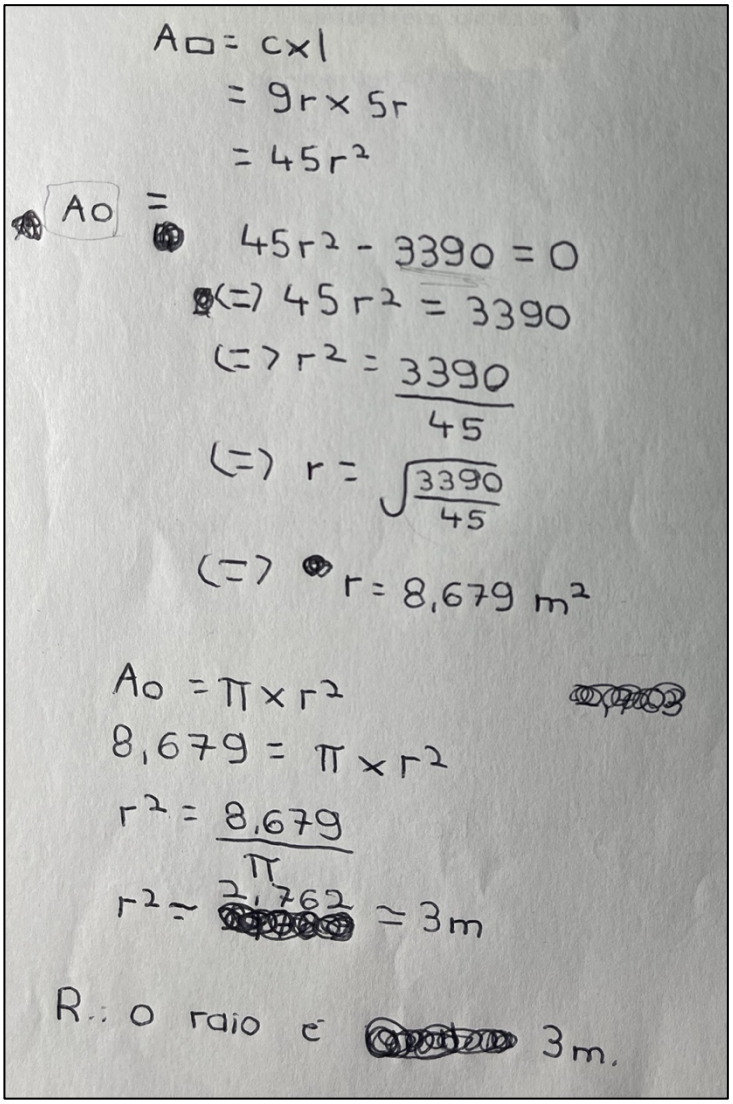


Figura 42 - Resolução do Problema 3 da Constança (Fase 3)

A inconsistência da resolução começa quando a aluna assume que a área do círculo central é zero. Importa referir que, já no Problema 2 da Tarefa 1, a Constança tinha evidenciado a mesma dificuldade, ao considerar que as expressões obtidas para o cálculo de áreas de figuras eram sempre iguais a zero. Além disso, na resolução da equação, a aluna não justificou o facto de ter considerado apenas o valor positivo. A incoerência mantém-se quando identifica o valor de r, que é precisamente a incógnita pedida no problema, mas interpreta-o como sendo a medida da área do círculo. Ainda assim, a aluna atribui ao valor obtido a unidade de medida correspondente à área, o que mostra alguma consciência de que esse valor deveria representar uma área. Posteriormente, ao concluir que $r^2 = 3$ e que, portanto, o raio é 3 metros, volta a evidenciar dificuldades na resolução da equação, mas também fragilidades na

interpretação da linguagem algébrica, uma vez que não parece compreender claramente o significado da incógnita r. Assim, as dificuldades da aluna parecem ir além da resolução de equações, revelando problemas a nível da interpretação das variáveis.

Também o Leonardo revelou alguma dificuldade a nível da linguagem algébrica (Figura 43).

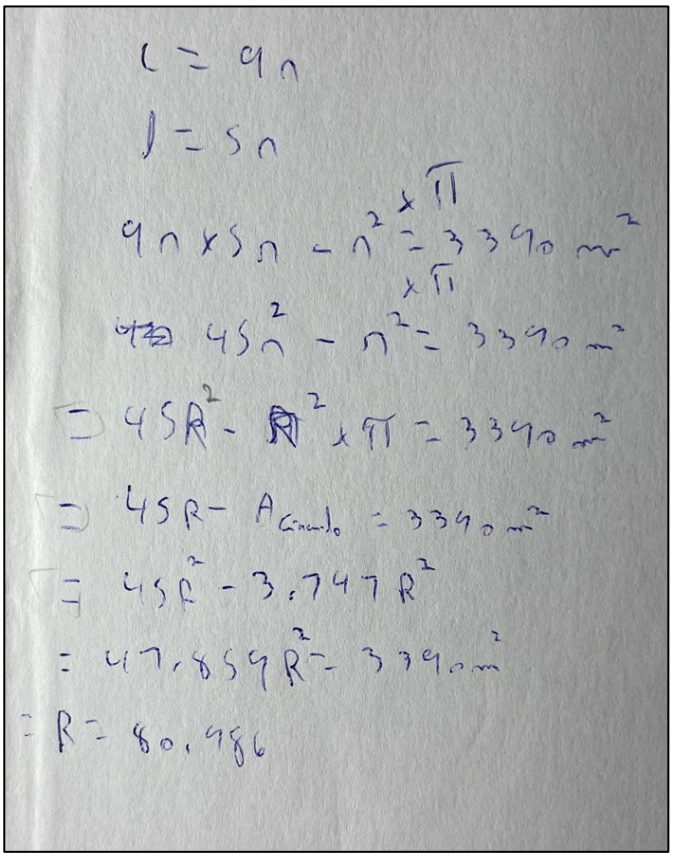


Figura 43 - Resolução do Problema 3 do Leonardo (Fase 3)

Para além de não apresentar qualquer explicação sobre a forma como chegou à expressão que lhe permitiu encontrar o valor de r, a sua resolução torna-se pouco clara, uma vez que omite alguns passos intermédios e, em certos momentos, apresenta inconsistências na escrita algébrica. Por exemplo, há termos que aparecem sem os expoentes correspondentes e, num dos passos, o aluno parece ainda desconsiderar o segundo membro da equação, o que fragiliza a coerência do processo. Esta postura mais desleixada, que foi recorrente ao longo do ano letivo e que tanto eu como as outras professoras fomos assinalando, acabou por dificultar ainda mais a compreensão do seu pensamento. No entanto, o erro mais evidente ocorre quando o aluno estabelece a equivalência $41{,}859\, r^2 = 3390 \Leftrightarrow r = 80{,}986$, quando deveria ser $41{,}859\, r^2 = 3390 \Leftrightarrow$

$r^2 = 80{,}986$. Estas fragilidades poderão estar associadas a um simples lapso de escrita (esquecimento do expoente associado à incógnita r) ou à falta de compreensão das propriedades a usar na resolução de uma equação do 2.º grau do tipo $ax^2 = b$. Por fim, o aluno acabou por não contextualizar a solução obtida no contexto do problema, nem apresenta uma resposta final que dê sentido ao valor encontrado.

Já a Paula, apresentou, na sua resolução, erros estritamente ao nível da execução. Após ter delineado uma estratégia e estruturado a equação correspondente, a aluna cometeu um erro de inversão, uma vez que ao isolar r^2 acabou por dividir $41{,}858$ por 3390, em vez de dividir 3390 por $41{,}858$ (Figura 44).

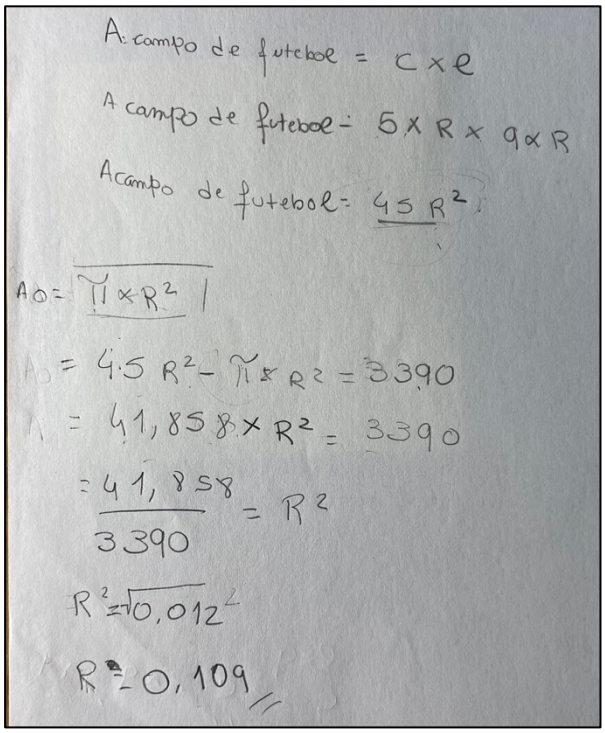


Figura 44 - Resolução do Problema 3 da Paula (Fase 3)

Para além disso, denota-se uma falta de rigor matemático no encadeamento dos cálculos, traduzida no uso indevido e excessivo do sinal de igual em detrimento dos símbolos de equivalência (⇔), culminando na expressão $r^2 = \sqrt{0{,}012}$. Esta notação apresenta-se incorreta, uma vez que a aluna usa a raiz quadrada (sem justificar o facto de não considerar a solução negativa) e, simultaneamente, mantém o expoente 2 na incógnita. Finalmente, a Paula, à semelhança do Leonardo, não contextualizou a solução obtida no âmbito do problema, deixando-o sem uma resposta.

Cinco dos 11 alunos conseguiram resolver o problema, apesar de nem todos apresentarem uma resposta final explícita. Ainda assim, o número de alunos que

resolveu corretamente o problema é inferior ao registado na Fase 1, em que sete alunos resolveram o Problema 3.

Relativamente aos erros cometidos, no Problema 3 da Fase 3 mantiveram-se erros ao nível da organização da informação e erros de execução. No que diz respeito aos erros de execução, estes mantiveram-se. Na Fase 1, foram identificados erros por transposição incorreta de termos, erros de cálculo, falta de contextualização da resposta e dificuldades na resolução das equações. Já na Fase 3, observaram-se apenas erros de inversão, falta de contextualização da resposta e dificuldades na resolução de equações; contudo, estes ocorreram com maior frequência do que no Problema 3 da Fase 1. Este facto poderá ser explicado pelo facto de, na Fase 1, no Problema 3 (Figura 45), os alunos terem recorrido a estratégias de resolução que não implicavam diretamente a resolução de uma equação do 2.º grau uma vez que conseguiram concluir que a medida do lado do quadrado $[ABCD]$ por um lado, era representada pela expressão $30 + 2x$ e, por outro, tomava o valor de raiz quadrada de 1444.

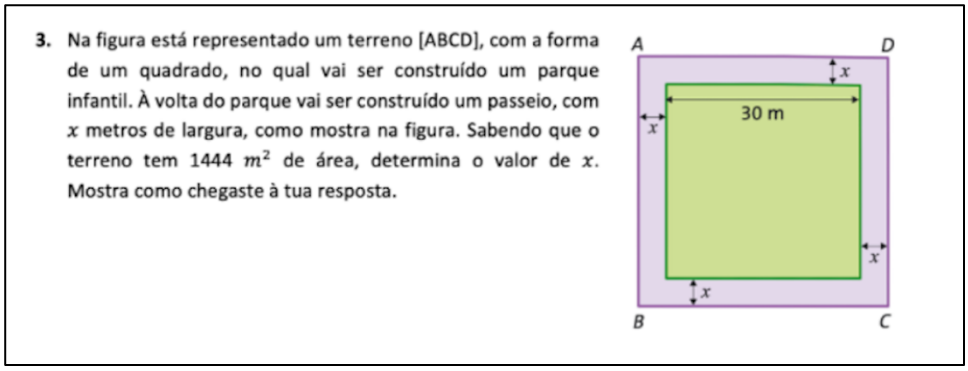


Figura 45 - Problema 3 (Fase 1)

Assim, e contrariamente ao observado nos problemas anteriores, os alunos revelaram, de uma forma geral, um desempenho inferior ao demonstrado no Problema 3 da Fase 1.

Um aspeto consideravelmente notório, num panorama geral, surge ao comparar as produções dos alunos na Fase 3 com as da Fase 1. Na Fase 1, um número considerável de alunos conseguiu modelar as situações descritas nos problemas e encontrar uma equação que as traduzia, mas não conseguiu delinear uma estratégia que lhes permitisse resolver as equações. Na Fase 3, embora persistam alguns erros

procedimentais na resolução, os alunos delinearam e aplicaram estratégias que possibilitaram o desenvolvimento das mesmas e a obtenção do conjunto-solução.

A Anabela foi uma das alunas que registou uma evolução significativa neste aspeto. Se na Fase 1, no total dos 3 problemas, a aluna não conseguiu progredir na resolução da equação em dois deles, na Fase 3 revelou-se capaz de delinear e resolver corretamente dois dos problemas, apenas não concluindo o último por manifesta falta de tempo, como a própria indicou.

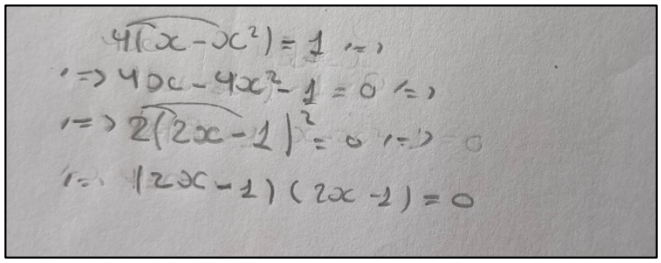


Figura 46 - Resolução do Problema 1 da Anabela (Fase 1)

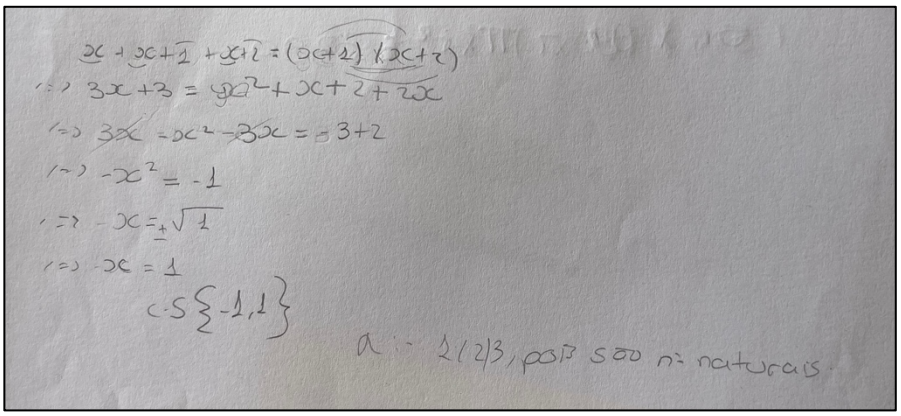


Figura 47 - Resolução do Problema 1 da Anabela (Fase 3)

Relativamente à Anabela, importa destacar um episódio particularmente enriquecedor ocorrido no momento da recolha da Tarefa 3 da Fase 3. A aluna partilhou, com um sentimento de orgulho, que o seu desempenho nesta fase tinha sido consideravelmente superior ao demonstrado na Fase 1. Este comentário espontâneo permite inferir que a metodologia de análise de erros surtiu o efeito desejado, promovendo a autorregulação da estudante e permitindo que esta se sentisse mais confiante e segura relativamente ao seu próprio progresso e trabalho desenvolvido.

Importa ainda referir que relativamente aos erros a nível da execução, é possível concluir que houve uma melhoria relativamente à Fase 1. Na análise das resoluções que continham erros, apresentada no presente subcapítulo, foram identificados menos erros neste nível e com menor frequência.

Finalmente, um dos aspetos em que a turma manteve um desempenho semelhante ao da Fase 1 prende-se com a resistência em contextualizar, através de uma resposta formal, as soluções que obtiveram na resolução das equações. Esta tendência para encerrar a tarefa assim que se atinge o resultado analítico reflete uma visão redutora da Matemática, encarada frequentemente como uma disciplina puramente procedimental e mecânica. Adicionalmente, este comportamento evidencia que os estudantes ainda enfrentam barreiras na comunicação matemática escrita, uma vez que não explicitam, no papel, as conclusões e as estratégias que delineiam mentalmente.

5.4. Perceções dos alunos face ao erro

Como referido no capítulo anterior, as entrevistas foram realizadas com o objetivo de compreender a perceção dos alunos sobre o papel do erro no seu processo de aprendizagem e decorreram apenas com sete alunos da turma, por limitações de tempo na análise de dados. A seleção destes sete alunos foi feita tendo em conta o comportamento demonstrado ao longo das três fases bem como o desempenho à disciplina de Matemática: dois alunos obtiveram nível 2, dois alunos nível 3 e três alunos nível 4. Deste grupo, três são rapazes e quatro são raparigas.

Todas as entrevistas iniciaram-se com a solicitação de uma definição de erro e, neste âmbito, a maioria dos alunos associa o erro a uma falha, a fazer algo incorretamente ou a um engano. Estas conceções indicam que os alunos tendem a encarar o erro como um resultado negativo associado à realização de uma tarefa. No entanto, o Leonardo apresentou uma perspetiva distinta, ao referir que o erro corresponde à incapacidade de alcançar algo que se pretende:

> **Investigadora:** A primeira pergunta que tenho para ti é: o que é que é para ti um erro?
>
> **Leonardo:** …não conseguir algo que eu quero, não conseguir fazer algo.
>
> **Investigadora:** Ok, não conseguires chegar a algo que tu queres.
>
> **Leonardo:** Sim. (Entrevista, Leonardo)

A perspetiva do Leonardo mostra uma visão mais limitadora do erro, na medida em que este surge associado ao insucesso antes mesmo da realização a tarefa. Esta forma de encarar o erro pode estar associada a uma menor confiança nas suas capacidades e contribuir para que o aluno evite realizar as tarefas, uma vez que se poderá sentir desmotivado para tentar.

O Martim também apresentou uma perspetiva interessante associada ao erro:

> **Investigadora:** Martim, o que é que para ti é um erro?
>
> **Martim:** Um erro? Hum... não sei, quando fazemos a coisa da forma que é pedida, ou como nós achamos que devemos fazer, ou como queremos fazer. (Entrevista, Martim)

Esta resposta reflete, mais uma vez, a possível falta de confiança do aluno nas suas produções, ao associar o erro à forma como ele próprio pensa ou decide resolver. Durante a entrevista, esta ideia suscitou-me alguma curiosidade, pois pareceu indicar que o Martim tinha consciência dos seus erros. Assim, decidi aprofundar esta questão:

> **Investigadora:** Quando tu cometes um erro, tu sabes que estás a cometê-lo?
>
> **Martim:** Sim.
>
> **Investigadora:** Tu sabes que estás a cometer um erro?
>
> **Martim:** Às vezes sei (riu-se).
>
> **Investigadora:** Então e o que é que sentes quando erras, quando estás a fazer alguma coisa errada?
>
> **Martim:** Não sei, depende da gravidade do erro. Às vezes sinto culpa, mas...
>
> **Investigadora:** Hum-hum..., mas e assim mais na Matemática?
>
> **Martim:** Eu não sei quando tou a errar na Matemática, às vezes... Quer dizer, não, eu às vezes até sei, só que não sei a forma certa de fazer então...
>
> **Investigadora:** Então aceitas o erro?
>
> **Martim:** Tem que ser (riu-se). (Entrevista, Martim)

Durante esta interação, foi necessário direcionar a conversa para o contexto da Matemática, uma vez que o Martim estava a interpretar o erro numa perspetiva mais pessoal. Destaca-se o facto de o Martim referir que, em algumas situações, tem

consciência de que está a errar, mas, por não dispor de uma alternativa correta, acaba por aceitar a sua resposta. Esta ideia também é partilhada pela Constança:

> **Investigadora:** Descontente, ok. E tu achas que quando tu erras, tu sabes que estás a errar?
>
> **Constança:** Hum... Depende das situações.
>
> **Investigadora:** Então, diz-me por exemplo algumas.
>
> **Constança:** Tipo... Às vezes eu sei que estou a fazer uma coisa mal, mas como não sei outra forma, tento... não tenho a certeza se está certo, mas acho que está errado. (Entrevista, Constança)

Mais uma vez, o erro surge associado à insegurança dos alunos relativamente às suas resoluções. No entanto, o que se evidencia nestes discursos é a aceitação do erro sem uma tentativa de o compreender. Os alunos reconhecem que a resposta poderá estar errada, mas não tentam identificar ou analisar a origem desse erro, possivelmente pela falta de hábitos de reflexão sobre as suas próprias produções. Neste sentido, a análise do erro emerge como uma mais-valia, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, competência preconizada no PASEO.

Por outro lado, alguns alunos referiram que, ao constatarem que a sua resposta difere da solução que deveriam obter, optam por refazer a tarefa e praticar até obterem a solução correta. Esta abordagem sugere uma valorização do resultado em detrimento do processo, ficando de fora uma análise crítica das resoluções. Assim, acabam por se perder oportunidades de aprendizagem que poderiam surgir da análise do erro.

Ainda assim, a Ariana e o Leonardo referiram que, quando o erro é identificado, estes tentam corrigi-lo:

> **Investigadora:** Ok. E quando alguma professora te ajuda a perceber que alguma coisa está errada, como é que tu tentas corrigir depois essa coisa?
>
> **Leonardo:** Tento acertar, faço outra vez, procuro o erro. (Entrevista, Leonardo)
>
> **Investigadora:** E quando tu sabes que erraste uma coisa, como é que tu tentas corrigir?

Ariana: Tento perceber como é que eu errei e tento melhorar... (Entrevista, Ariana)

Apesar de semelhantes, as respostas diferem num aspeto relevante. O Leonardo refere que procura o erro que cometeu na resolução, enquanto a Ariana evidencia uma preocupação em compreender o processo que conduziu ao erro.

Segundo os alunos, errar está, em primeiro lugar, associado a um conjunto de emoções negativas, frequentemente ligadas à frustração e à perceção de falha. A este propósito, a Ariana refere que: "às vezes fico triste ou chateada por ter errado, porque às vezes até sei a coisa e errei" (Entrevista, Ariana). Este excerto evidencia que o erro é particularmente difícil de aceitar, quando ocorre em situações em que a aluna considera que domina o conteúdo. No mesmo sentido, o Leonardo partilha: "Fico zangado, fico desiludido" (Entrevista, Leonardo). Ambos os testemunhos mostram que o erro tem um impacto emocional significativo gerando sentimentos de frustração e desilusão.

Para além disso, quando o erro é identificado por outros, emergem sentimentos de exposição e desconforto, como se constata no discurso da Anabela: "No início, posso ter ah um pouquinho de vergonha..." (Entrevista, Anabela). Ainda assim, a aluna acrescenta que não sente dificuldade em admitir erros perante as professoras, opinião que é partilhada por todos os alunos entrevistados, com exceção do Martim que referiu: "Não sei. Depende da professora" (Entrevista, Martim). Perante esta resposta, procurou-se aprofundar a questão com o Martim, no entanto, tornou-se evidente algum desconforto por parte do aluno ao longo da interação. Considera-se que este poderá ter evitado especificar a sua resposta por se tratar de uma situação recente, tendo-se optado por redirecionar a conversa de modo a salvaguardar o seu bem-estar.

Ainda assim, de um modo geral, os alunos referiram sentir maior desconforto quando têm de expor os seus erros perante os colegas:

Investigadora: Então não tens problema nenhum em admitir erros às professoras?

Anabela: Não.

Investigadora: Mas aos colegas...

Anabela: É um problema. (Entrevista, Anabela)

Ainda assim, importa salientar que a perceção do julgamento dos outros nem sempre corresponde à realidade.

> **Investigadora:** E achas que os teus colegas te julgam?
>
> **Leonardo:** Não. Não tanto quanto eu penso, de certeza, mas... (Entrevista, Leonardo)

Este aspeto evidencia a existência de uma antecipação de julgamento que pode intensificar a ansiedade associada ao erro, reforçando a importância de promover um ambiente de sala de aula seguro e favorável à participação.

Ainda assim, observa-se que estes sentimentos não são necessariamente estáticos, sendo possível identificar uma evolução na forma como alguns alunos encaram o erro. A Paula exemplifica essa mudança.

> **Investigadora:** Ok e o que é que tu sentes quando erras?
>
> **Paula:** (riu-se) Eu... eu tenho dois tipos de emoções, sinto-me triste, mas depois sei que com aquele erro, para a próxima vez vou conseguir não fazer, porque já aprendi com ele. (Entrevista, Paula)

Assim, embora o erro seja, numa fase inicial, vivido de forma negativa, os alunos revelam alguma capacidade para o reinterpretar como uma oportunidade de aprendizagem. De facto, todos os alunos concordam que o erro pode assumir um papel relevante no processo de aprendizagem, na medida em que lhes permite tomar consciência das suas dificuldades e evitar a sua repetição. Os seus discursos evidenciam que os erros tendem a permanecer na memória, funcionando como referência em situações futuras. Vicente explicita esta ideia: “Porque quando eu erro esforço-me mais... tento compreender o que não sabia” (Entrevista, Vicente). Também a Constança reconhece esse impacto, ao afirmar: “Porque se eu erro uma vez já tenho consciência do que...” (Entrevista, Constança). Prosseguindo, a própria aluna confirma que o erro a “marca”, contribuindo para que não volte a cometer o mesmo engano.

Assim, as perceções dos alunos revelam uma relação ambivalente com o erro, marcada por emoções negativas e constrangimentos sociais, mas também pelo reconhecimento do seu potencial enquanto instrumento fundamental de aprendizagem.

6. Conclusões e recomendações

Neste capítulo apresenta-se uma síntese do estudo realizado, relembrando o seu objetivo, as questões de investigação e uma visão clara e concisa de toda a intervenção pedagógica bem como os procedimentos de recolha de dados adotados. São também expostas as conclusões do estudo, fundamentadas na análise de dados e orientadas pelas questões de investigação, tendo em conta a literatura revista. Inclui-se, ainda, uma reflexão final, na qual se discutem as implicações deste estudo para o meu desenvolvimento profissional, bem como as limitações da investigação. Adicionalmente, apresentam-se sugestões para investigações futuras.

Assim, o capítulo organiza-se em cinco subcapítulos: i) Síntese do estudo realizado; ii) Erros mais frequentes na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau; iii) Implicações da análise do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas; iv) Perceções dos alunos face ao erro; e v) Considerações finais e implicações para a prática e investigação futura.

6.1. Síntese do estudo realizado

Este trabalho teve como propósito compreender de que forma a análise de erros promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau. Nesse sentido, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: (i) Que tipos de erros surgem com mais frequência na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau?; (ii) De que forma a análise do erro contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau?; (iii) Quais são as perceções dos alunos face ao erro?

Este estudo tem por base uma intervenção uma intervenção pedagógica realizada numa turma do 9.º ano de escolaridade, constituída por vinte e oito alunos. A intervenção desenvolveu-se em três fases distintas. Na primeira fase os alunos resolveram três problemas envolvendo equações do 2.º grau. Na segunda fase, foi proposta uma tarefa com os mesmos problemas, acompanhados por duas resoluções selecionadas a partir das produções dos alunos na fase anterior, escolhidas por evidenciarem erros frequentes ou estratégias alternativas de resolução. Em grupo, os alunos analisaram e discutiram essas resoluções, tendo posteriormente partilhado as suas conclusões em discussão coletiva. Finalmente, na terceira fase, voltaram a resolver uma tarefa com três problemas distintos.

Dos vinte e oito alunos, apenas dezoito foram considerados participantes no estudo, por terem manifestado o seu assentimento e apresentado a devida autorização pela parte do encarregado de educação.

Adotando uma abordagem qualitativa e interpretativa, os dados recolhidos incluíram: (i) produções escritas dos alunos, correspondentes às 3 tarefas propostas em cada fase; (ii) gravações de áudio da discussão coletiva e síntese (Fase 2); (iii) entrevistas semiestruturadas realizadas no final da intervenção pedagógica; e (iv) notas de campo resultantes das observações realizadas enquanto professora e investigadora.

6.2. Erros mais frequentes na resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau

Com o objetivo de sistematizar e tornar mais claras as conclusões, foi elaborada uma tabela (Figura 48) que apresenta os tipos de erros cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 1.

	Erros de entrada	Erros na organização da informação	Erros de execução
Problema 1	X		X
Problema 2		X	X
Problema 3		X	X

Figura 48 - Erros cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 1

Os alunos revelaram dificuldades significativas ao nível da interpretação do enunciado, especialmente no Problema 1, o que se traduziu na ocorrência de erros de entrada que comprometeram a restante resolução do problema. Deste modo, verificou-se uma maior incidência de erros de entrada no Problema 1 que exigia uma interpretação mais cuidada do enunciado. Estes erros resultaram, sobretudo da incapacidade de estabelecer uma expressão matemática que traduzisse adequadamente a informação apresentada no enunciado. Embora os alunos conseguissem identificar elementos isolados, como “quádruplo”, “o quadrado” ou a “diferença”, evidenciaram dificuldades em articular esses elementos na construção de uma expressão coerente que

representasse a situação descrita. Estes resultados corroboram a ideia de Ribeiro (2012) de que as dificuldades dos alunos na resolução de problemas não decorrem da ausência de conhecimentos matemáticos, mas sim de limitações na compreensão dos enunciados.

Apesar de se terem verificado erros na organização da informação tanto no Problema 2 como no Problema 3, estes foram cometidos por uma minoria de alunos. Em particular, no Problema 3 os alunos evidenciaram mais dificuldades a este nível, principalmente na definição da expressão para calcular a área do passeio, decorrente de uma combinação inadequada das informações disponíveis.

Foi possível constatar que os erros de execução estiveram presentes em todos os três problemas. Podendo estes erros ser catalogados em diferentes categorias, foi elaborada uma tabela que indica em que problemas se manifestou cada tipo de erro (Figura 49).

	Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**
Erros por eliminação		X	
Erros de inversão		X	
Erros por transposição incorreta dos termos		X	X
Erros de cálculo		X	X
Mal-rules		X	
Fatorização incorreta	X		
Falta de contextualização da resposta	X	X	X
Erros na propriedade distributiva			
Não sabe resolver a equação	X	X	X

Figura 49 - Erros de execução cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 1

A análise dos dados permitiu verificar que relativamente à propriedade distributiva, constatou-se que os alunos não manifestaram qualquer tipo de erro na sua aplicação. Adicionalmente, embora tenham sido identificados erros por eliminação, erros de inversão e o recurso a *mal-rules* (neste caso particular, circunscritos ao uso indevido da lei do anulamento do produto), a sua incidência revelou-se bastante reduzida, surgindo em produções de apenas dois a quatro alunos. Devido ao pequeno número de

ocorrências, estas dificuldades não foram incluídas no grupo dos erros mais frequentes cometidos pelos alunos na resolução de equações do 2.º grau.

Em contraste, a transposição incorreta de termos surgiu como um dos erros mais recorrentes nas produções dos alunos. Segundo Hall (2002), esta dificuldade parece estar associada a dois fatores: (i) uma compreensão limitada da estrutura e do significado das equações e (ii) uma simplificação excessiva da regra "passa para o outro lado, muda o sinal", impulsionada pela tendência natural dos alunos de simplificar sempre que possível. Assim, mais do que um erro procedimental, a transposição incorreta revela uma falta de compreensão conceptual dos conceitos algébricos.

Paralelamente, os alunos revelaram dificuldades ao nível das operações de cálculo com números negativos. Observou-se que a maioria dos alunos resolve com facilidade expressões organizadas na forma $a - b$, mas manifesta fortes entraves quando a mesma operação se apresenta com o termo negativo em primeiro lugar (na forma $-b + a$). De acordo com Vergnaud (1993), esta assimetria deve-se ao facto de expressões como $2 - 1$ acionarem o modelo intuitivo e concreto da subtração ("ter e tirar"). Pelo contrário, a configuração $-1 + 2$ exige que o aluno reconheça o sinal menos não como uma operação, mas como um estado (um número abaixo de zero), o que aumenta a complexidade da tarefa para os alunos.

Relativamente aos erros cometidos pelos alunos na resolução dos três problemas, destacam-se dois: (i) o aluno não saber resolver a equação que construiu para dar resposta ao problema, e (ii) a não contextualização da(s) solução(ões) numa resposta ao problema. O primeiro entrave pode ser explicado pela dificuldade dos alunos em compreender o sentido da álgebra e dos símbolos. Segundo Daniels e Anghileri (1995), para os estudantes que exibem maiores dificuldades na aprendizagem, as representações formais da matemática surgem frequentemente de forma desconectada da realidade. Para muitos alunos, a Álgebra permanece um domínio puramente abstrato, uma vez que não conseguem atribuir um significado à linguagem algébrica, transformando o processo de resolução de uma equação num mero formalismo mecânico e sem sentido. No entanto, constatou-se que a falha mais transversal entre os alunos foi a ausência de uma resposta explícita ao problema. Este comportamento reitera que a obtenção de um valor numérico final é sobrevalorizada pelos estudantes. Os alunos tendem a realizar o cálculo e a dar o problema por concluído, sem analisar criticamente o caminho percorrido ou verificar se o resultado obtido responde, efetivamente, à pergunta inicial.

6.3. Implicações da análise do erro no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas

De forma análoga ao subcapítulo anterior, optei por organizar os erros cometidos pelos alunos na Fase 3 numa tabela (Figura 50), com o objetivo de sistematizar e facilitar a sua análise.

	Erros de entrada	Erros na organização da informação	Erros de execução
Problema 1			X
Problema 2	x	X	X
Problema 3		X	X

Figura 50 - Erros cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 3

Em relação à Fase 1, os alunos melhoraram a sua prestação no Problema 1, evidenciando apenas erros de execução, enquanto no Problema 2 a prestação piorou, registando-se erros de entrada, na organização da informação e de execução. No Problema 3, mantiveram os erros observados na Fase 1. É importante referir que, no entanto, apesar de se registar uma maior diversidade de erros no Problema 2, a frequência global dos erros diminuiu em relação à Fase 1.

Relativamente aos erros de execução observados em cada problema, na Fase 3, a Figura 51 apresenta a distribuição dos tipos de erro por problema:

	Problema 1	Problema 2	Problema 3
Erros por eliminação			
Erros de inversão			X
Erros por transposição incorreta dos termos			
Erros de cálculo		X	
Mal-rules		X	
Fatorização incorreta			
Falta de contextualização da resposta	X	X	X
Erros na propriedade distributiva			
Não sabe resolver a equação		X	X

Figura 51 - Erros de execução cometidos pelos alunos em cada um dos problemas da Fase 3

Ao comparar os erros de execução cometidos pelos alunos entre a Fase 1 (Figura 49) e a Fase 3 (Figura 51), é possível observar um impacto positivo na resolução das tarefas, traduzido numa menor diversidade e quantidade de erros em quase todos os problemas. O caso mais evidente de evolução ocorreu no Problema 1, onde deixaram de se manifestar dificuldades procedimentais como a fatorização incorreta ou a incapacidade de resolver a equação. Embora o erro – não sabe resolver a equação – ainda surja em evidência na Fase 3, importa referir que este foi um dos aspetos em que os alunos demonstraram maior progresso. Há uma diferença assinalável quando se compara o número de alunos que, na Fase 1, abandonaram a equação sem qualquer tipo de resolução com aqueles que fizeram o mesmo na Fase 3. Esta mudança mostra que, apesar de subsistirem dificuldades, a metodologia de análise de erros ajudou os alunos a mobilizarem estratégias e a melhorarem as suas produções. Contudo, a falta de contextualização da resposta permaneceu inalterada e transversal a todos os problemas. Tendo sido o erro que mais se observou na Fase 3. Este cenário demonstra que, embora os alunos tenham melhorado as suas competências na resolução de equações do 2.º grau, a ausência de uma resposta explícita e interpretada à luz do enunciado continuou a ser a falha mais persistente.

Ainda assim, considero que a análise de erros tenha sido uma mais-valia, uma vez que se verificaram melhorias significativas no desempenho dos alunos. Adicionalmente, confrontá-los com resoluções incorretas foi uma tarefa que pareceu promover o

desenvolvimento do seu sentido crítico. Esta abordagem constitui também uma ferramenta pedagógica fundamental para o professor, uma vez que lhe permite identificar e sinalizar falhas específicas. Como observa Borasi (1994), embora os professores e investigadores reconheçam que há muito valor em analisar os erros dos alunos para fins de diagnóstico, os próprios estudantes raramente são incentivados a aproveitar esses erros como oportunidades de aprendizagem. Neste sentido, a integração desta prática em sala de aula pode contribuir para que os alunos passem a encarar o erro como uma etapa construtiva do seu processo de aprendizagem.

6.4. Perceções dos alunos face ao erro

Quando confrontados com a ideia de errar, a generalidade dos alunos, tende a percecionar o erro como algo negativo e a evitar. No entanto, esta rejeição inicial reflete essencialmente o impacto imediato do erro. No decurso do diálogo, alguns alunos esclareceram que este sentimento de rejeição representa, sobretudo, o impacto inicial e imediato perante a constatação do erro. Ou seja, o primeiro sentimento associado ao erro é frequentemente de desconforto, mas esse posicionamento tende a ser reformulado quando os alunos refletem sobre o processo. Nesse seguimento, os alunos reconheceram que, apesar de o erro ser entendido como algo “mau”, ele acaba por assumir uma dimensão positiva, uma vez que lhes permite melhorar, compreender melhor os conteúdos e evoluir nas suas aprendizagens. Esta valorização posterior do erro revela uma mudança importante na forma como o mesmo é encarado: de obstáculo ou falha, passa a ser visto como um instrumento de aprendizagem.

Outro aspeto relevante prende-se com a relação entre o erro e o medo de errar. Os alunos afirmaram não ter propriamente medo de errar. Contudo, esse aparente à-vontade altera-se quando o erro implica exposição pública perante a turma. Nesses momentos, o desconforto não decorre tanto do erro em si, mas da possibilidade de exporem uma resolução incorreta diante dos colegas. Tal situação gera ansiedade, sobretudo porque os alunos receiam “fazer má figura” ou serem julgados pelos pares. Esta dimensão social do erro mostra que o problema não está apenas na presença do erro, mas sobretudo na visibilidade que ele assume quando é exposto em contexto coletivo.

Quando questionados sobre a exposição dos seus erros perante os professores, os alunos revelaram uma postura diferente. De modo geral, afirmaram que essa situação não lhes causa desconforto, o que sugere que o professor continua a ser visto como

uma figura perante a qual o erro pode ser mais facilmente assumido. Ainda assim, surgiu uma observação particularmente significativa quando um dos alunos referiu que essa aceitação depende do professor em causa. Esta resposta pode estar relacionada com experiências anteriores em que o erro terá sido vivido como objeto de punição ou censura, o que reforça a ideia de que as vivências escolares passadas influenciam fortemente a forma como os alunos se relacionam com o erro. Um aluno que tenha sido marcado por atitudes menos compreensivas por parte de alguns docentes, pode desenvolver maior reserva, menor confiança e até receio de se expor, mesmo quando está num ambiente seguro.

Relativamente ao julgamento dos colegas, os alunos reconheceram que, muitas vezes, a perceção de que serão alvo de crítica é maior do que aquilo que efetivamente acontece. Alguns afirmaram mesmo que esse julgamento é, em grande medida, construído por eles próprios, isto é, é antecipado de forma mais negativa do que se concretiza na realidade. Acresce ainda que, quando o julgamento ocorre, a sua duração é breve e acaba por não ter a dimensão catastrófica inicialmente imaginada. Esta constatação é importante, pois evidencia que parte da ansiedade associada ao erro resulta da antecipação do olhar do outro e não apenas do erro em si.

No que respeita ao potencial que o erro tem na aprendizagem, todos os alunos afirmaram que é possível aprender com os erros. Alguns foram ainda mais longe, referindo que, quando erram, esse erro “fica com eles”, o que significa que guardam a memória do equívoco e, por isso, dificilmente o repetem da mesma forma. Esta observação é particularmente relevante, porque demonstra que o erro, quando devidamente analisado, pode deixar uma marca cognitiva positiva. O erro deixa de ser apenas uma falha momentânea para se transformar num elemento estruturante da aprendizagem. Neste sentido, a perspetiva de Cury (2007) torna-se especialmente pertinente, ao defender que o erro do aluno corresponde a um saber por ele construído e que, por isso mesmo, exige intervenções didáticas capazes de desestabilizar as suas certezas e levá-lo a questionar as respostas produzidas. Esta leitura enquadra-se no que foi relatado pelos alunos, uma vez que afirmaram que, ao aperceber-se de que algo estava incorreto, quer por indicação do professor, quer por constatação própria, o erro passava a desempenhar um papel decisivo na superação da tarefa proposta, reformulando a sua resolução e tentando superar os obstáculos encontrados. Neste processo, o erro funciona como uma ponte para a aprendizagem (Vale, 2010), na

medida em que conduz os alunos à identificação do que não estava correto e à necessidade de reformular o raciocínio.

A forma como o erro foi desmistificado ao longo da intervenção contribuiu também para que os alunos se sentissem mais motivados e mais envolvidos nas diferentes atividades matemáticas. Ao perceberem que errar não era motivo de punição, mas sim uma etapa natural do processo de aprender, tornaram-se progressivamente mais disponíveis para participar, arriscar e verbalizar os seus raciocínios. Esta mudança de atitude foi particularmente visível no decorrer do ano letivo. No início, tratava-se de uma turma mais tímida, pouco participativa e com pouca disposição para se expor perante os colegas. Sempre que tinham de apresentar uma resolução, costumavam antes confirmar junto de uma das professoras se a resposta continha algum erro. Com o avançar do ano, os alunos foram ganhando confiança e à-vontade, começando a arriscar mais e a expor os seus pensamentos com maior segurança.

Considero que esta evolução resultou, em parte, do ambiente seguro e favorável ao erro que foi sendo promovido ao longo do ano, bem como da intervenção pedagógica desenvolvida no âmbito da elaboração deste relatório. A minha prática assentou sempre na ideia de que errar é natural e inerente à aprendizagem, transmitindo aos alunos que o erro não deve ser entendido como uma falha a esconder, mas como um instrumento a explorar. Assim, parece claro que cabe ao professor desempenhar um papel fundamental na construção de uma cultura de sala de aula em que o erro não seja encarado como algo punível, mas antes como uma oportunidade de aprendizagem. Quando o professor valoriza o erro, promove a reflexão sobre ele e cria um ambiente seguro para que os alunos se possam expor sem receio, está a contribuir não só para melhores aprendizagens, mas também para uma relação mais positiva e confiante com a Matemática.

6.5. Considerações finais e implicações para a prática e investigação futura

No final da investigação, importa também refletir sobre as dimensões que poderiam ter sido abordadas de forma diferente. Apesar do estudo ter sido cuidadosamente planeado e fundamentado na literatura, alguns aspetos não correram como previsto e seria possível ter adotado outras opções de modo a obter melhores resultados. A primeira dificuldade que senti foi relativa ao planeamento temporal em que os alunos trabalharam

na primeira tarefa (Fase 1). Os alunos começaram a resolvê-la no final de uma aula em que tinham estado a trabalhar o tema da Geometria. Esta quebra na linha de raciocínio pode ter contribuído para que revelassem mais dificuldades na resolução dos problemas. Esta situação fez com que os 30 minutos previstos para a resolução dos três problemas fossem insuficientes. Ainda assim, refletindo sobre a intervenção, considera-se que uma duração de 50 minutos teria sido uma escolha mais prudente para a realização da tarefa.

Posto isto, uma das mudanças a implementar seria a redução da ficha de trabalho para dois problemas. Em alternativa, em vez de aplicar a análise de erros apenas ao tópico das equações do 2.º grau, esta metodologia poderia ser distribuída ao longo do ano letivo, abrangendo vários temas previstos nas Aprendizagens Essenciais, o que permitiria realizar fichas com apenas um ou dois problemas sem comprometer a quantidade de dados recolhidos. Assim, deixa-se a sugestão de replicar esta intervenção com problemas relacionados com outros temas.

A mesma dificuldade fez-se sentir na Fase 2, na qual os alunos demoraram mais tempo do que o previsto a resolver a tarefa, uma vez que revelaram entraves na compreensão do que era solicitado. Este acontecimento poderá dever-se ao facto de a análise de produções matemáticas não ser uma prática recorrente, gerando alguma resistência inicial. Perante isto, teria sido pertinente questionar a turma se já tinham realizado previamente este tipo de atividade, antecipando este constrangimento. Recomenda-se que futuras investigações tenham em conta esta informação. Para mitigar este impacto, uma estratégia possível teria sido a resolução conjunta de um exemplo. Em consequência deste atraso, a discussão coletiva não pôde ser concluída nessa aula, o que constituiu uma limitação do estudo. Sendo esta etapa fundamental para a consolidação de ideias, a sua interrupção comprometeu a retoma na aula seguinte, dado que os alunos já não se recordavam dos pontos debatidos anteriormente.

Um dos aspetos que há a considerar é o facto de, além de investigadora, assumir o papel de professora. Esta dualidade, aliada ainda à pouca experiência, poderá ter constituído uma limitação na condução da discussão coletiva, dado que, por vezes, as questões formuladas poderão não ter sido as mais adequadas para orientar o debate. Adicionalmente, esta sobreposição de papéis poderá ter condicionado a recolha das notas de campo. A necessidade de acompanhar e monitorizar o trabalho autónomo desenvolvido pelos alunos dificultou o registo imediato dos dados, o que poderá ter resultado na perda de informações relevantes para o estudo.

Adicionalmente, outro aspeto relevante prende-se com a realização das entrevistas. A falta de experiência na condução das mesmas nem sempre viabilizou a abordagem ideal, em determinados momentos, a formulação das perguntas poderá ter direcionado a resposta dos alunos. Verificou-se ainda que a presença a sós com a professora-investigadora numa sala gerou algum nervosismo em alguns dos participantes. Uma alternativa futura para mitigar estes fatores seria a aplicação de um questionário anónimo, o qual permitiria não só abranger uma amostra mais alargada de alunos, mas também obter perceções mais sinceras sobre o erro.

Ademais, outra limitação que posso considerar prende-se com o facto de nem todas as resoluções com erros terem sido alvo de análise, o que poderá ter privado alguns alunos de clarificar os seus próprios erros. Contudo, uma tarefa que exigisse a avaliação de todas as resoluções incorretas, e estando perante três problemas, poder-se-ia tornar exaustiva para a turma, além de inviável em termos de tempo. Em face disto, emerge a questão pertinente para futuras investigações: aferir se a análise de todas as resoluções erradas traduz benefícios superiores quando comparada com a abordagem focada apenas nos erros mais frequentes.

No entanto, tal como defendo para os meus alunos, considero que as limitações enfrentadas ao longo deste estudo serviram como oportunidades para a minha própria aprendizagem e crescimento profissional. Afinal, faria pouco sentido promover a importância de aprender com os erros se não aplicasse esse princípio na minha prática pedagógica. Esta investigação serviu para muito mais do que compreender de que a forma a análise de erros pode ajudar os alunos. Contribuiu para os tornar mais confiantes e capazes de errar sem se sentirem culpados ou julgados. A cultura de que o acerto tem mais valor do que o erro precisa de ser desmistificada. Se ainda subsistiam dúvidas quanto à potencialidade deste método de trabalho, as conclusões deste estudo procuram dissipá-las. Esta investigação permitiu confirmar que o erro é uma ferramenta didática de extrema importância e que práticas desta natureza são fundamentais para garantir aprendizagens significativas, permitindo que os alunos assumam uma postura mais crítica e se tornem mais autónomos na construção do seu próprio conhecimento.

Apesar de todos os desafios enfrentados, considero que esta experiência foi positiva para os alunos e para a sua aprendizagem, mas também para mim, que levo comigo novas perspetivas e questões que pretendo esclarecer no meu futuro enquanto professora. Termino com uma citação que me foi transmitida por uma professora no Ensino Secundário e que, desde então, tem norteado a minha visão sobre o que é educar:

“Aqueles que passam por nós não vão sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.” (Antoine de Saint-Exupéry)

Referências Bibliográficas

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

APM. (1988). *A renovação do currículo de matemática*. APM.

Barbosa, M. A. (2010). *Afectividade e Aprendizagem Matemática.* [Tese de Mestrado em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa].

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Bono, E. (1973). *Lateral Thinking: Creativity Step by Step*. Penguin Books.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, *25*(2), 166-208. https://doi.org/10.2307/749507

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics Instruction: a focus on errors*. Ablex Publishing Corporation.

Brito, M. R. F., & Souza, L. F. N. I. (2015). Autoeficácia na solução de problemas matemáticos e variáveis relacionadas. *Temas em psicologia*, *23*(1), 29-47. https://doi.org/10.9788/TP2015.1-03

Cai, J., & Lester F. (2010). Whys is teaching with problem solving important to student learning?, *Research Brief*, *14*, 1-6.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118. https://quadrante.apm.pt/article/view/22816/16882

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021a). *Aprendizagens essenciais de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, 1.º ano*.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_1.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021b). *Aprendizagens essenciais de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, 9.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação – guia para auto-aprendizagem*. Universidade Aberta.

Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M.E.G., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A para o Ensino Secundário, 10.º ano. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf*

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* (3ª ed.). Autêntica.

Daniels, H., & Anghileri, J. (1995). *Secondary mathematics and special educational needs*. Cassel.

Decreto-lei n.º 54/2018 do Ministério da Educação e Ciência. (2018) Diário da República n.º 129, Série I de 2018-07-06. https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/54-2018-115652961

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo. Das intenções aos instrumentos*. Porto Editora.

Hall, R. D. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *15*(1), 1-67. https://academic.sun.ac.za/mathed/174/ErrorsEquatins.pdf

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In L. Hatfield, & A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving. Papers from a research workshop* (pp. 21-42), ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modelling. In F. Lester (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Information Age Publishing.

Lester, F. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *Mathematics Enthusiast*, *10*, 245-278.

Luckesi, C. C. (2003). *Avaliação da aprendizagem escolar* (5ª ed.). Cortez.

Macedo, L. de (1990). Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. In *Coletânea de textos de psicologia: Psicologia da educação* (pp. 65-81). Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo.

Magro, F. C., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2024). *Prisma 9*. ASA.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R. & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação, DGE. https://www.dge.mec.pt/perfil-dos-alunos

Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2024). *MAT9*. Texto Editores.

Ministério da Educação. (1990). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3.º Ciclo*. Direção Geral do Ensino Básico e Secundário. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/3c_matematica_1990.pdf

Ministério da Educação. (1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*. Departamento da Educação Básica. https://mat.absolutamente.net/documentos_curriculares/arquivo/3ciclo/1991_3ciclo.pdf

Ministério da Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática no 9.º ano*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_9a_ff_18julho_rev.pdf

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). *Position paper on basic mathematical skills*. NSCM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). Principles to Actions Ensuring Mathematical Success for All. NCTM.

Nobre, S. G. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: Uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano*. [Tese de doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. http://hdl.handle.net/10451/25071

Pacheco, A. B., & Medeiros, C. F. (2009). Uma investigação sobre as dificuldades no uso de estratégias para a resolução de problemas verbais no campo da análise combinatória. In C. Maranhão (Org.), *Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio: pesquisa e perspectivas* (pp. 76-86). Musa Editora.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Artes Médicas Sul.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Universidade Aberta.

Poincaré, H. (1956). Mathematical Creation. *The world of Mathematics* (Vol. 4, pp. 2017-2025). Tradução portuguesa de Olga Pombo disponível em https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/poincare/invencao.htm

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Editora Interciência.

Ponte, J. P. (2005a). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2005b). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85,* 36-42. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1434/1473

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, *24*(2), 111-134.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação: Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/programamatematica_2007.pdf

Popper, K. (1991, 29 de outubro). *12 principios para una nueva ética*. El País. https://elpais.com/diario/1991/10/29/cultura/688690801_850215.html

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(2), 163-172.

Ribeiro, C. (2012). *Compreensão de enunciados de problemas de Matemática*. [Dissertação de Mestrado em Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores, Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra]. https://hdl.handle.net/10316/26118

Rosso, A. J., & Berti, N. M. (2010). O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. *Boletim de Educação Matemática*, *23*(37), 1005-1035.

Sleeman, D. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic Algebra. *Cognitive Science*, *8*, 387-412.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da Matemática: Errar é preciso?. *Boletim Gepem*, *64*, 1-15. http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2015.005

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Torre, S. (2007). *Aprender com os erros: O erro como estratégia de mudança*. Artmed Editora.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE*, *5*, 171-202.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39-60.

Vale, M. L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. http://hdl.handle.net/10451/2489

Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *123*, 3-8. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2123/3156

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos concetuais. In L. Nasser (Ed.), *1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (pp. 1-26). UFRJ.

Anexos

Anexo 1 – Documento de Consentimento informado

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Ex.mo(a) Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Na disciplina de Matemática, a turma do(a) seu(sua) educando(a) conta atualmente com três professoras, sendo duas professoras estagiárias a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP).

No contexto da unidade curricular de **Prática de Ensino Supervisionada**, as referidas professoras estagiárias encontram-se a desenvolver um **projeto de investigação pedagógica**, sob orientação da Professora Doutora Maria de Fátima Delgado (maria.delgado@fc.up.pt), docente da FCUP, com vista à elaboração do respetivo relatório de estágio.

A concretização de cada um destes projetos de investigação pedagógica envolve a implementação de uma intervenção pedagógica integrada no normal funcionamento das aulas de Matemática. A realização destes trabalhos pressupõe a recolha de dados relativos às aprendizagens dos alunos, a qual poderá incluir **a gravação de áudio** de algumas aulas ou de momentos específicos de aula, a **recolha das produções escritas** dos alunos e a **realização de entrevistas** a alguns alunos da turma. As entrevistas, quando realizadas, serão igualmente gravadas em áudio, decorrerão em horário extra-aula, a combinar com os alunos, e poderão realizar-se presencialmente ou através de plataformas de comunicação à distância (Zoom, Microsoft Teams, Google Meet ou outra).

A participação do(a) seu(sua) educando(a) neste estudo é **inteiramente voluntária**. O(a) aluno(a), bem como o(a) respetivo(a) Encarregado(a) de Educação, poderá **retirar o consentimento a qualquer momento**, sem necessidade de apresentar justificação e **sem qualquer prejuízo** para o(a) aluno(a).

Todos os dados recolhidos serão tratados de forma **estritamente confidencial**. Em nenhum momento será divulgada a identidade dos alunos, sendo garantido o **anonimato** nos relatórios de estágio. Após a conclusão dos referidos relatórios, **todos os dados recolhidos serão destruídos**.

A participação neste estudo não envolve quaisquer riscos previsíveis para o(a) aluno(a) e **não interfere de forma alguma com a avaliação** do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática.

Para qualquer esclarecimento adicional, poderá contactar:
Lara Silva, up202107650@up.pt
Tatiana Teixeira, up202006200@up.pt

Agradecemos, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, com os melhores cumprimentos,

____________________ (Lara Silva)   ____________________ (Tatiana Teixeira)

Porto, 9 de janeiro de 2026

✂ -

Eu, ______________________________, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ______________________________, nº ______ da turma _____ do ______ ano,

☐ **Autorizo**
☐ **Não autorizo**

a participação do(a) meu(minha) educando(a) no projeto de investigação das professoras estagiárias acima identificadas.

______________________________ (Assinatura)   Porto, ____ de janeiro de 2026

Anexo 2 – Documento de Assentimento

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Caro(a) Aluno(a),

Na disciplina de Matemática tens três professoras. Duas delas são professoras estagiárias e estão a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP).

No âmbito do estágio que estão a realizar, estas professoras estão a desenvolver um pequeno estudo sobre as aprendizagens dos alunos, orientado pela Professora Doutora Maria de Fátima Delgado, docente da FCUP.
Para este estudo, poderá ser necessário:

- **gravar o áudio** de algumas aulas ou de pequenos momentos da aula;
- recolher alguns dos teus **trabalhos escritos**;
- **realizar entrevistas** com alguns alunos da turma.

As entrevistas, quando existirem, serão gravadas em áudio, realizadas fora do horário das aulas, combinadas contigo, e poderão ser feitas presencialmente ou através de plataformas online (como Zoom, Microsoft Teams, Google Meet ou outras).

A tua participação neste estudo é **voluntária**. Isto significa que:

- podes dizer **que não queres participar**;
- podes **desistir a qualquer momento**;
- não precisas de explicar o motivo;
- isso **não terá qualquer consequência negativa para ti**.

Os dados recolhidos serão tratados de forma **confidencial**. O teu nome não aparecerá em nenhum relatório ou trabalho, sendo garantido o **anonimato**. Depois de concluído o relatório de estágio, todos os dados recolhidos serão destruídos.

Participar neste estudo **não traz riscos** para ti e **não influencia a tua avaliação** na disciplina de Matemática.

Ao participares, estarás a ajudar as professoras a melhorar a forma como se ensina e aprende Matemática, o que pode ser útil para outros alunos no futuro.

Se tiveres alguma dúvida ou quiseres mais esclarecimentos poderás contactar:
Lara Silva, up202107650@up.pt
Tatiana Teixeira, up202006200@up.pt

Obrigada pela tua atenção,

______________________________ ______________________________
(Lara Silva) (Tatiana Teixeira)

Porto, 9 de janeiro de 2026

✂ -

Eu, ______________________________________, nº ______ da turma _____ do ______ ano,

☐ **Autorizo**
☐ **Não autorizo**

a gravação de áudio e recolha dos meus trabalhos na aula de Matemática, para fins de investigação pedagógica.

______________________________ Porto, ____ de janeiro de 2026
(Assinatura)

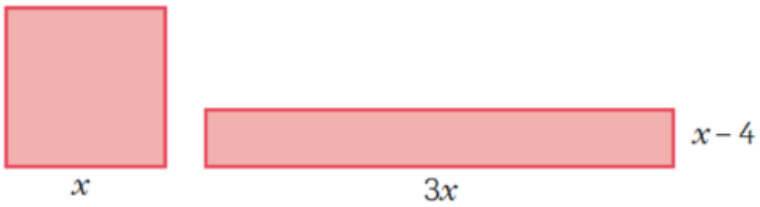
Anexo 3 – Tarefa 1 (Fase 1)

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

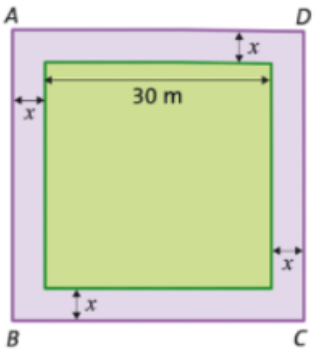
Consegues encontrar esse número?

2. O quadrado e o retângulo da figura têm a mesma área.



Sabendo que as medidas estão expressas em centímetros, determina o valor de x.

3. Na figura está representado um terreno [ABCD], com a forma de um quadrado, no qual vai ser construído um parque infantil. À volta do parque vai ser construído um passeio, com x metros de largura, como mostra na figura. Sabendo que o terreno tem 1444 m^2 de área, determina o valor de x. Mostra como chegaste à tua resposta.



Anexo 4 – Possíveis resoluções da Tarefa 1 (Fase 1)

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

$x \rightarrow$ número que queremos encontrar

$4(x - x^2) = 1$

$\Leftrightarrow x - x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \quad \vee \quad x - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

C.S. $= \{\frac{1}{2}\}$

$4(x - x^2) = 1$

$\Leftrightarrow 4x - 4x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -(4x^2 - 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -(2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0$

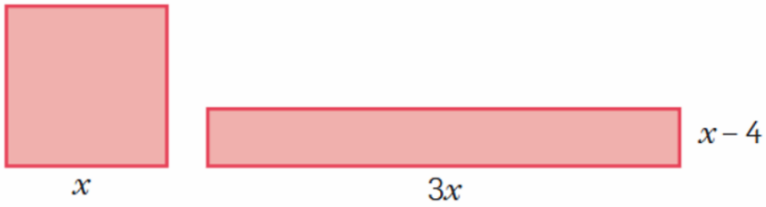
$\Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

C.S. $= \{\frac{1}{2}\}$

R.: O número procurado é $\frac{1}{2}$.

2. O quadrado e o retângulo da figura têm a mesma área.



Sabendo que as medidas estão expressas em centímetros, determina o valor de x.

$A_{quadrado} = x \times x = x^2$

$A_{retângulo} = 3x \times (x-4)$
$= 3x^2 - 12x$

$A_{quadrado} = A_{retângulo}$

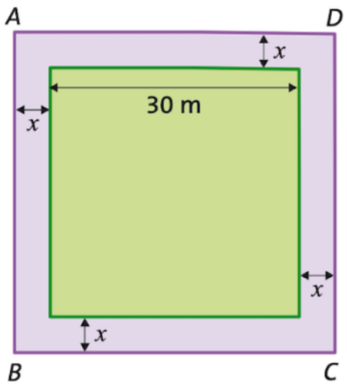
$\Leftrightarrow x^2 = 3x^2 - 12x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x(x-6) = 0$
$\Leftrightarrow -2x = 0 \vee x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$
$C.S. = \{0, 6\}$

$A_{quadrado} = A_{retângulo}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3x^2 - 12x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow x(-2x + 12) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee -2x + 12 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee -2x = -12$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -12/-2$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$
$C.S. = \{0, 6\}$

R.: Como x é um comprimento, o seu valor é de 6cm.

Na figura está representado um terreno [ABCD], com a forma de um quadrado, no qual vai ser construído um parque infantil. À volta do parque vai ser construído um passeio, com x metros de largura, como mostra na figura. Sabendo que o terreno tem 1444 m^2 de área, determina o valor de x. Mostra como chegaste à tua resposta.



$\overline{AD} = 30 + 2x$

$A_{terreno} = (30+2x) \times (30+2x)$

$= (30+2x)^2$

$A_{terreno} = 1444$

$(30+2x)^2 = 1444$

$\Leftrightarrow 30+2x = \pm\sqrt{1444}$

$\Leftrightarrow 30+2x = 38 \vee 30+2x = -38$

$\Leftrightarrow 2x = 38-30 \vee 2x = -38-30$

$\Leftrightarrow 2x = 8 \vee 2x = -68$

$\Leftrightarrow x = 8/2 \vee x = -68/2$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -34$

C.S. $= \{-34, 4\}$

R.: Como x representa um comprimento, o seu valor é 4 metros.

$\overline{AD} = \sqrt{1444}$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = 38$

$\overline{AD} = 30 + 2x$

$38 = 30 + 2x$

$\Leftrightarrow 38 - 30 = 2x$

$\Leftrightarrow 8 = 2x$

$\Leftrightarrow \frac{8}{2} = x$

$\Leftrightarrow x = 4$ C.S. $= \{4\}$

R.: O valor de x é 4.

Anexo 5 –Tarefa 2 (Fase 2)

Comenta e analisa as resoluções apresentadas em cada problema. No final, apresenta a tua própria resolução.

1. O professor de matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

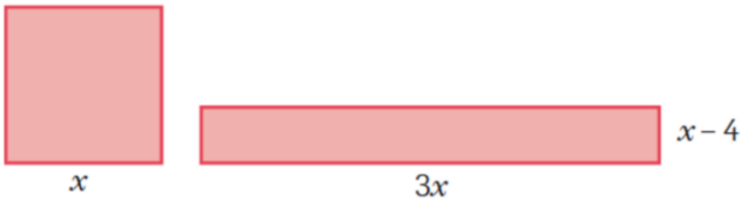
Resolução 1

$4x - x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 4 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee x - 4 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 + 1$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

Resolução 2

$4(x - x^2) = 1$
$\Leftrightarrow 4(x - x^2) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 4 = 0 \vee x - x^2 - 1 = 0$

2. O quadrado e o retângulo da figura têm a mesma área.



Sabendo que as medidas estão expressas em centímetros, determina o valor de x.

Resolução 1

$x \times x =$ Área do quadrado
$3x \times x - 4 =$ Área do retângulo
$x^2 = 3x \times x - 4$
$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow$
$+4 = x^2 + 4x \Leftrightarrow$
$\sqrt{4} = x + 4x \Leftrightarrow$
$2 = 5x \Leftrightarrow$
$\frac{5}{2} = x \Leftrightarrow$
$2.5 = x$

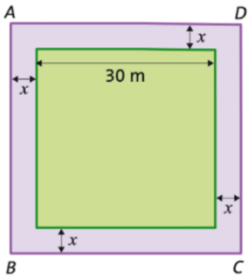
R.: $x = 2.5$

Resolução 2

$A_{quadrado} = A_{retângulo}$
$\Leftrightarrow x^2 = 3x \times (x - 4)$
$\Leftrightarrow x^2 = 3x^2 - 12x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 = 0 \vee 12x = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{-2} \vee x = \frac{0}{12}$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0$

C.S.=$\{0\}$

3. Na figura está representado um terreno [ABCD], com a forma de um quadrado, no qual vai ser construído um parque infantil. À volta do parque vai ser construído um passeio, com x metros de largura, como mostra na figura. Sabendo que o terreno tem 1444 m^2 de área, determina o valor de x. Mostra como chegaste à tua resposta.



Resolução 1

$A_{quadrado} = l \times l$
$A_{quadrado} = 1444m^2 - 900m^2$
$A_{retângulo} = comprimento \times altura$
$= 30 + 2x + x$
$= 30 + 2x^2$

$544m^2 = (30 + 2x^2) \times 4$
$544m^2 = 120 + 8x^2$
$8x^2 = 120 - 544$
$8x^2 = 424$
$x^2 = 424 \times 8$
$x^2 = -3392$
$x = \sqrt{3392}$
$x \approx 58$

R.: $x \approx 58$

Resolução 2

$(30 + 2x)^2 = 1444$
$\Leftrightarrow 30 + 2x = \sqrt{1444}$
$\Leftrightarrow 30 + 2x = 38$
$\Leftrightarrow 2x = 38 - 30$
$\Leftrightarrow 2x = 8$
$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2}$
$\Leftrightarrow x = 4$

Anexo 6 – Possíveis resoluções da Tarefa 2 (Fase 2)

Comenta e analisa as resoluções apresentadas em cada problema. No final, apresenta a tua própria resolução.

1. O professor de matemática lançou o seguinte desafio:

"Encontrem o número cujo quádruplo da diferença entre esse número e o seu quadrado é 1."

Consegues encontrar esse número?

Resolução 1

$$
\begin{aligned}
& 4x - x^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x - 4 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee x - 4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 4 + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 5
\end{aligned}
$$

1) Não está indicado o que é que x representa;

2) A equação não traduz corretamente o problema;

3) A fatorização do polinómio está errada já que $x(x-4-1) = x^2-4x-x = x^2-5x$;

4) Não foi apresentado o conjunto-solução da equação;

5) Não foi dada uma resposta ao problema.

Resolução 2

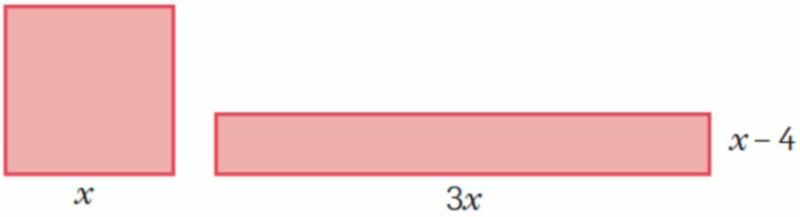
$$
\begin{aligned}
& 4(x - x^2) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4(x - x^2) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4 = 0 \ \vee\ x - x^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

1) Não está indicado o que x representa;

2) A lei do anulamento do produto foi indevidamente aplicada: não temos a multiplicação de duas parcelas igual a 0;

3) 4 não é igual a 0.

2. O quadrado e o retângulo da figura têm a mesma área.



Sabendo que as medidas estão expressas em centímetros, determina o valor de x.

Resolução 1

$x \times x =$ Área do quadrado
$3x \times x - 4 =$ Área do retângulo
$x^2 = 3x \times x - 4$
$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow$
$+4 = x^2 + 4x \Leftrightarrow$
$\sqrt{4} = x + 4x \Leftrightarrow$
$2 = 5x \Leftrightarrow$
$\frac{5}{2} = x \Leftrightarrow$
$2.5 = x$

R.: $x = 2.5$

Resolução 2

$A_{quadrado} = A_{retângulo}$
$\Leftrightarrow x^2 = 3x \times (x - 4)$
$\Leftrightarrow x^2 = 3x^2 - 12x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 + 12x = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 = 0 \vee 12x = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{-2} \vee x = \frac{0}{12}$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0$

C.S.=$\{0\}$

1) A largura do retângulo é $x-4$, como

$A_{retângulo}$ = comprimento × largura
$= 3x \times (x-4)$

em vez de $3x \times x-4$;

2) $3x \times x-4 = 3x^2-4$;

3) Só podemos aplicar o método da raíz quadrada quando um dos membros está elevado ao quadrado. Para além disso, temos que considerar a raíz positiva e a raíz negativa;

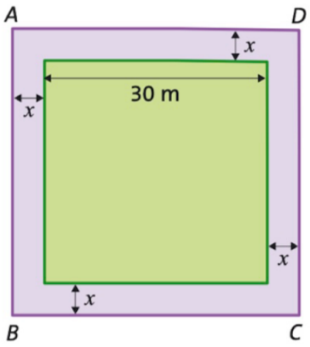
4) Não foi apresentado o conjunto-solução.

1) A lei do anulamento do produto foi indevidamente aplicada pois não existe um produto de fatores igual a zero;

2) Como x representa um comprimento, é impossível que este seja 0.

3) Não foi dada resposta ao problema.

3. Na figura está representado um terreno [ABCD], com a forma de um quadrado, no qual vai ser construído um parque infantil. À volta do parque vai ser construído um passeio, com x metros de largura, como mostra na figura. Sabendo que o terreno tem 1444 m^2 de área, determina o valor de x. Mostra como chegaste à tua resposta.



Resolução 1

$A_{quadrado} = l \times l$
$A_{quadrado} = 1444m^2 - 900m^2$
$A_{retângulo} = comprimento \times altura$
$= 30 + 2x + x$
$= 30 + 2x^2$

$544m^2 = (30 + 2x^2) \times 4$
$544m^2 = 120 + 8x^2$
$8x^2 = 120 - 544$
$8x^2 = 424$
$x^2 = 424 \times 8$
$x^2 = -3392$
$x = \sqrt{3392}$
$x \approx 58$

R.: $x \approx 58$

Resolução 2

$(30 + 2x)^2 = 1444$
$\Leftrightarrow 30 + 2x = \sqrt{1444}$
$\Leftrightarrow 30 + 2x = 38$
$\Leftrightarrow 2x = 38 - 30$
$\Leftrightarrow 2x = 8$
$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2}$
$\Leftrightarrow x = 4$

Resolução 1

1) Não está identificado o que $900\,m^2$ representa;

2) Quando é referido quadrado e retângulo não está explícito a que figura se refere;

3) Temos $A_{retângulo} = comp. \times altura = 30+2x+x$ a multiplicação passou a soma;

4) Não está explícito o que é que a equação representa;

5) $8x^2$ trocou de membro mas manteve o sinal;

6) $120 - 544 = -424$;

7) Como $8x^2 = 8 \times x^2$, quando trocamos de membro realizamos a operação inversa;

8) A multiplicação de 2 números positivos é um número positivo;

9) Não foi apresentado conjunto-solução;

10) Na resposta não foram apresentadas unidades de medida;

11) É impossível a largura do parque medir mais do que o lado do parque.

Resolução 2

1) Não está indicado o que é que representa a equação;

2) Quando aplicamos o método da raíz devemos considerar a raíz positiva e negativa;

3) Falta o conjunto-solução da equação;

4) Falta dar resposta ao problema

Anexo 7 –Tarefa 3 (Fase 3)

1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

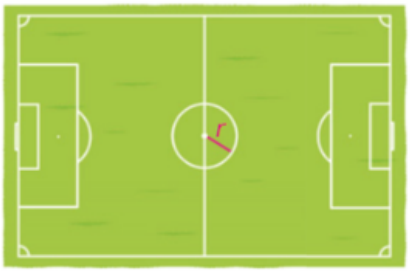
"A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto dos dois números maiores. Quais são esses números?"

Encontra esses números. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

2. Num retângulo, o comprimento é o dobro da largura. Sabendo que a medida da área desse retângulo é igual ao triplo da medida do seu perímetro, determina as dimensões do retângulo.

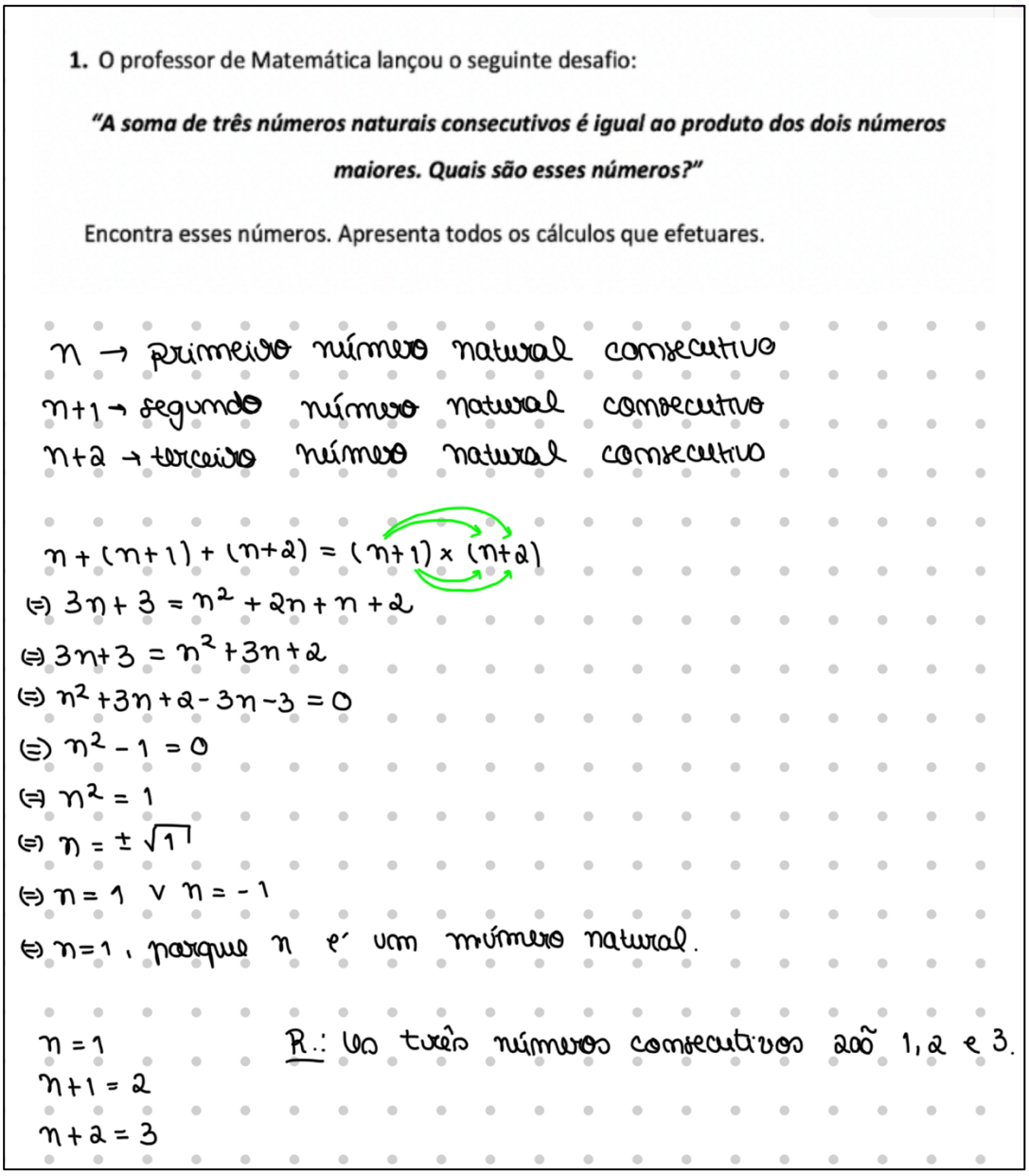
3. As dimensões do campo de futebol da escola do Rui são tais que:

- a largura é cinco vezes o raio do círculo central;
- o comprimento é nove vezes o raio do círculo central;
- a área do campo sem o círculo central é igual a 3390 m^2.



Determina, em metros, o raio do círculo central. Apresenta o resultado arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, preserva, no mínimo, três casas decimais.

Anexo 8 – Possíveis resoluções da Tarefa 3 (Fase 3)



1. O professor de Matemática lançou o seguinte desafio:

"A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto dos dois números maiores. Quais são esses números?"

Encontra esses números. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$n \rightarrow$ primeiro número natural consecutivo
$n+1 \rightarrow$ segundo número natural consecutivo
$n+2 \rightarrow$ terceiro número natural consecutivo

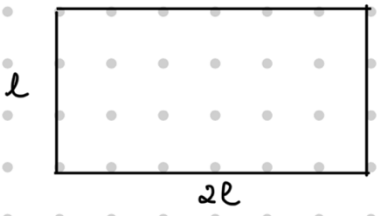
$n + (n+1) + (n+2) = (n+1) \times (n+2)$
$\Leftrightarrow 3n + 3 = n^2 + 2n + n + 2$
$\Leftrightarrow 3n + 3 = n^2 + 3n + 2$
$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 - 3n - 3 = 0$
$\Leftrightarrow n^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow n^2 = 1$
$\Leftrightarrow n = \pm \sqrt{1}$
$\Leftrightarrow n = 1 \ \vee \ n = -1$
$\Leftrightarrow n = 1$, porque n é um número natural.

$n = 1$
$n+1 = 2$
$n+2 = 3$

R.: Os três números consecutivos são 1, 2 e 3.

2. Num retângulo, o comprimento é o dobro da largura. Sabendo que a medida da área desse retângulo é igual ao triplo da medida do seu perímetro, determina as dimensões do retângulo.

l → largura do retângulo



$A_{retângulo} = 3 \times P_{retângulo}$

$\Leftrightarrow 2l \times l = 3 \times (l + l + 2l + 2l)$

$\Leftrightarrow 2l^2 = 3 \times 6l$

$\Leftrightarrow 2l^2 = 18l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 18l = 0$

$\Leftrightarrow 2l(l - 9) = 0$

$\Leftrightarrow 2l = 0 \vee l - 9 = 0$

$\Leftrightarrow l = 0 \vee l = 9$

ou

$\Leftrightarrow l(2l - 18) = 0$

$\Leftrightarrow l = 0 \vee 2l - 18 = 0$

$\Leftrightarrow l = 0 \vee 2l = 18$

$\Leftrightarrow l = 0 \vee l = 18/2$

$\Leftrightarrow l = 0 \vee l = 9$

$\Rightarrow l = 9$, porque representa a largura do retângulo

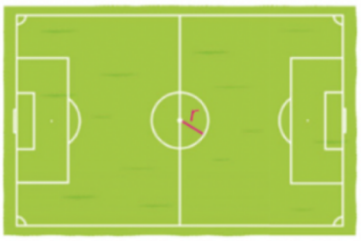
largura = 9 u.c.

comprimento = 2 × 9 = 18 u.c.

R.: O comprimento do retângulo é 18 u.c. e a largura

3. As dimensões do campo de futebol da escola do Rui são tais que:

- a largura é cinco vezes o raio do círculo central;
- o comprimento é nove vezes o raio do círculo central;
- a área do campo sem o círculo central é igual a $3390\ m^2$.



Determina, em metros, o raio do círculo central. Apresenta o resultado arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, preserva, no mínimo, três casas decimais.

$l = 5r$

$c = 9r$

$A_{\text{sem círculo}} = 3390\ m^2$

$r = ?$

$A_{\text{campo}} = c \times l$

$= 9r \times 5r$

$= 45r^2$

$A_{\text{círculo}} = \pi \times r^2$

$= \pi r^2$

$A_{\text{campo}} = A_{\text{círculo}} + A_{\text{sem círculo}}$

$\Leftrightarrow 45r^2 = \pi r^2 + 3390$

$\Leftrightarrow 45r^2 - \pi r^2 = 3390$

$\Leftrightarrow (45 - \pi) r^2 = 3390$ ou $\Leftrightarrow 41{,}858\, r^2 = 3390$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{3390}{45 - \pi}$ ou $\Leftrightarrow r^2 = \frac{3390}{41{,}858}$

$\Leftrightarrow r^2 \approx 80{,}987$ ou $\Leftrightarrow r^2 \approx 80{,}988$

$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{80{,}987}$ ou $\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{80{,}988}$

$\rightarrow r \approx 9$, porque $r > 0$ ou $\Leftrightarrow r \approx 9$, porque $r > 0$

R.: O raio do círculo central mede, aproximadamente, 9 metros.

Anexo 9 – Guião das entrevistas

Guião para as entrevistas

1. Para ti, o que é um erro?
2. O que sentes quando erras?
3. Como é que tentas corrigir os teus erros?
4. Achas que podes aprender com os teus erros? Porquê?

Pergunta extra para o Martim:

1. De todo o trabalho desenvolvido, em que fase tiveste mais dificuldade?

Pergunta extra para a Paula:

1. Porque é que o teu grupo não queria ir ao quadro apresentar a vossa resolução?