

O uso do GeoGebra na resolução de tarefas matemáticas: Conversão de registos e perceções dos alunos

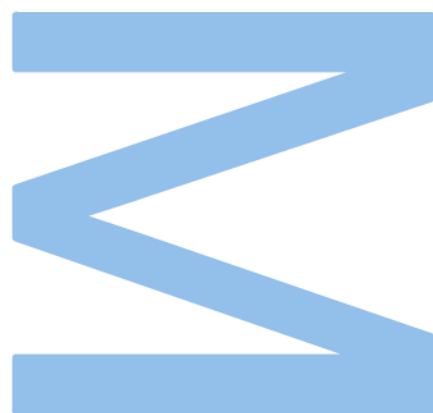
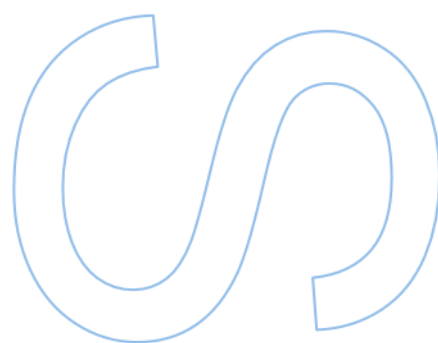
Matheus de Albuquerque Coelho dos
Santos

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino
Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026



O uso do GeoGebra na resolução de tarefas matemáticas: Conversão de registos e perceções dos alunos

**Matheus de Albuquerque Coelho dos
Santos**

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2026

Orientadora

Sandra Maria Jorge dos Santos, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe, Domingas de Fátima Coelho Pinto, aos meus irmãos, Thiago Coelho Pinto e Lalia Yasmin Pinto Maia, e ao meu padrasto, Igor Lalor Maia, por todo o apoio, força e incentivo ao longo deste percurso. Foram essenciais para que eu conseguisse ultrapassar os momentos mais difíceis.

Aos meus amores, Amanda Batista da Cunha e Goreth Cunha, que embarcaram nos meus sonhos e me impulsionaram a chegar mais longe do que eu poderia imaginar.

A Aracy Vasco Santos, a José Santos (*in memoriam*) e a toda a sua família, deixo um agradecimento muito especial por todo o apoio e por terem contribuído para que este sonho se tornasse possível.

Aos meus avós, Maria de Nazaré Monteiro de Albuquerque e José da Conceição Moraes de Albuquerque (*in memoriam*), Walter de Jesus Vinhote dos Santos (*in memoriam*) e Francisca Coelho Pinto, agradeço pelos ensinamentos, pelo carinho e pelos valores que levo comigo.

Aos meus amigos e às suas famílias, obrigado por estarem presentes em todos os momentos, tanto nos bons como nos mais desafiantes, e por tornarem esta caminhada mais leve.

Aos professores desta instituição, agradeço pela dedicação, pelo conhecimento partilhado e pelo papel importante na minha formação.

Agradeço também à orientação e ao acompanhamento proporcionados ao longo da realização do estágio, que foram importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do BIM, do IFPA e da UEPA, o meu reconhecimento pela contribuição significativa na minha formação académica.

Por fim, a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste percurso, o meu sincero obrigado.

Resumo

Este relatório apresenta uma investigação realizada no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, numa turma de 9.º ano de uma escola pública do Norte de Portugal, com 21 alunos. O estudo centra-se no uso do GeoGebra no ensino dos sistemas de equações, articulado com a Teoria dos Registos de Representação Semiótica (Duval, 1993, 2009), que identifica a conversão entre registos algébrico, gráfico e em linguagem natural, como um dos obstáculos à compreensão da matemática com significado.

O presente estudo estruturou-se em três fases: a primeira fase de ambientação ao GeoGebra Classic, a segunda fase de revisão de sistemas de equações com recurso a múltiplos registos de representação, e na terceira fase a aplicação de uma ficha de trabalho para recolha de dados.

Optou-se por uma metodologia de interferir o mínimo possível durante a resolução das tarefas, preservando a autenticidade das produções dos alunos para fins de investigação.

A investigação segue uma abordagem qualitativa interpretativa e os dados foram recolhidos através de dois inquéritos por questionário via Google Forms, um aplicado no final da ambientação do GeoGebra e outro após a ficha de trabalho, complementados pela análise das resoluções feitas pelos alunos e pela observação direta (notas de campo) durante a resolução das tarefas.

Os resultados evidenciam que os alunos realizaram os três tipos de conversão presentes nas tarefas, com maior fluência na conversão do registo algébrico para o registo gráfico e maiores dificuldades nas conversões de gráfico para algébrico e de linguagem natural para algébrico.

As percepções dos alunos sobre as potencialidades do GeoGebra foram consistentemente positivas, destacando a visualização gráfica como uma das principais. Todos os participantes que responderam à questão reconheceram que o registo gráfico os ajudou a compreender os sistemas de equações de forma mais significativa do que o cálculo algébrico isolado.

Palavras-chave: GeoGebra; registos de representação semiótica; conversão de registos; sistemas de equações; percepções dos alunos

Abstract

This report presents a research study conducted within the framework of the Supervised Teaching Practice of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education, in a 9th-grade class of a public school in Northern Portugal, comprising 21 students. The study focuses on the use of *GeoGebra* in the teaching of systems of equations, drawing on Duval's (1993; 2009) Theory of Semiotic Representation Registers, which identifies conversion between algebraic, graphical, and natural language registers as one of the obstacles to meaningful mathematical understanding.

The study was structured into three phases: the first phase consisted of familiarisation with *GeoGebra Classic*; the second involved a review of systems of equations using multiple registers of representation; and the third consisted of the application of a worksheet for data collection.

A methodology was adopted that sought to minimise interference during task resolution, thereby preserving the authenticity of students' productions for research purposes.

The study follows a qualitative interpretive approach. Data were collected through two questionnaire surveys administered via *Google Forms*: one at the end of the *GeoGebra* familiarisation phase and another after the worksheet. These were complemented by an analysis of the students' solutions and direct observation, with field notes taken during task resolution.

The results show that students performed the three types of conversion present in the tasks, with greater fluency in algebraic-to-graphical conversion and greater difficulties in graphical-to-algebraic and natural language-to-algebraic conversions.

Students' perceptions of the potential of *GeoGebra* were consistently positive, with graphical visualisation standing out as one of its main strengths. All students recognised that the graphical register helped them understand systems of equations more meaningfully than algebraic calculation alone.

Keywords: GeoGebra; semiotic representation registers; conversion of registers; systems of equations; students' perceptions

Índice

Lista de Quadros	vii
Lista de Gráficos	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviaturas	xi
Introdução.....	1
1. Enquadramento Teórico	3
1.1. Ensinar e aprender Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico.....	3
1.2. A Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval	5
1.3. Sistemas de equações e representações matemáticas	9
1.4. Tecnologias digitais no ensino da Matemática.....	10
1.5. O GeoGebra como ambiente de aprendizagem: conversão de registos e percepções dos alunos	13
2. Contexto e organização das aulas	15
2.1. Caracterização da escola	15
2.2. Caracterização da turma	15
2.3. Descrição da intervenção pedagógica	16
2.3.1. Fase 1 — Ambientação ao GeoGebra	17
2.3.2. Fase 2 — Revisão de Sistemas de Equações	18
2.4. Balanço final da intervenção pedagógica	19
3. Metodologia da Investigação	22
3.1. Enquadramento.....	22
3.2. Opções metodológicas	22
3.3. Participantes	24
3.4. Processo de recolha de dados	25
3.4.1. Inquérito por questionário	25
3.4.2. Observação direta	26
3.4.3. Produções dos alunos	27

3.5.	Processo de análise de dados.....	27
4.	Análise de Dados.....	28
4.1.	Análise do formulário de ambientação.....	28
4.2.	Análise da ficha de trabalho sobre sistemas de equações	34
4.2.1.	Problema contextualizado: conversão da linguagem natural para a representação algébrica e da representação algébrica para a representação gráfica	34
4.2.2.	Classificação dos sistemas: conversão de algébrico para gráfico.....	39
4.2.3.	Exploração do parâmetro k: conversão dinâmica entre registos	46
4.2.4.	Tarefa inversa: de um ponto para um sistema	49
4.2.5.	Percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra na ficha	54
4.3.	Síntese e triangulação dos dados.....	57
5.	Conclusão.....	61
5.1.	Síntese do estudo	61
5.2.	De que modo os alunos utilizam os diferentes registos de representação durante a resolução de tarefas com o <i>GeoGebra</i> ?	62
5.3.	Quais as percepções dos alunos sobre as potencialidades e as dificuldades do uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas?	63
5.4.	Considerações finais	65
5.4.1.	Limitações	65
5.4.2.	Recomendações para investigação futura	66
	Referências Bibliográficas	68
	Anexos	73
	Anexo 1 – Autorização de material para ambientação ao GeoGebra.....	73
	Anexo 2 – Material de ambientação ao GeoGebra	74
	Anexo 3 – Plano de Aula: Ambientação ao GeoGebra.....	89
	Anexo 4 – Plano de Aula – Revisão de Sistemas de Equações do 1.º Grau (2x2).....	93
	Anexo 5 – Termo de Assentimento (Alunos).....	97
	Anexo 6 – Termo de Consentimento (EE).....	98

Anexo 7 - Ficha de Ambientação ao <i>GeoGebra</i> (Google forms)	99
Anexo 8 - Explorando Sistemas de Equações com o <i>GeoGebra</i>	103

Lista de Quadros

Quadro 1 – Descrição da intervenção pedagógica.....	17
Quadro 2 - Síntese dos objetivos	24
Quadro 3 - Objetivos específicos e procedimentos de recolha de dados	25
Quadro 4 – Conversões de gráfico para o algébrico	31
Quadro 5 - Síntese da triangulação dos dados	58

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Respostas ao ponto de interseção	30
Gráfico 2 - Respostas à questão: “O uso do GeoGebra ajudou-te a compreender melhor a relação entre equações e gráficos?”	33
Gráfico 3 - Classificações dos três sistemas	41

Lista de Figuras

Figura 1 - Possíveis registos de representação de um objeto matemático	6
Figura 2 - Cooperação e coordenação de registos	8
Figura 3 - Ilustrando a TRRS com o Objeto estudado.....	9
Figura 4 - Respostas à questão: "Como achas que o GeoGebra pode ajudar enquanto estamos a aprender Matemática?"	29
Figura 5 - Respostas à questão: "Indica as equações das duas retas na forma $y = ax+b$ "	32
Figura 6 - Respostas à questão: "Utilizando as ferramentas do GeoGebra, como podes confirmar no gráfico que não existe ponto de interseção?"	33
Figura 7 - Justificações à questão anterior.....	34
Figura 8 - Respostas à questão de definição de incógnitas	35
Figura 9 - Resposta do aluno A2	36
Figura 10 - Resposta do aluno A5.....	36
Figura 11 - Respostas à questão sobre o ponto de interseção no contexto	38
Figura 12 - Exemplo de construção correta no GeoGebra realizada por um dos pares	38
Figura 13 - Exemplo de construção incorreta no GeoGebra realizada por um dos pares	39
Figura 14 - Construção incorreta no GeoGebra realizada por um dos pares	41
Figura 15 - Construção correta no GeoGebra do Sistema 2 realizada por um dos pares	42
Figura 16 - Construção correta no GeoGebra do Sistema 3 realizada por um dos pares	43
Figura 17 - Justificações à classificação do Sistema 2.....	43
Figura 18 - Justificações à classificação do Sistema 3.....	44
Figura 19 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 1	45
Figura 20 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 2	45
Figura 21 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 3	45
Figura 22 - Respostas à pergunta: "Para que valores de k o sistema é impossível?" .	46
Figura 23 - Respostas à pergunta: "Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e indeterminado? Justifica."	47
Figura 24 - Respostas à pergunta: "Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e determinado? Justifica."	47

Figura 25 - Respostas à pergunta: “Explica a relação entre o valor de k e a posição relativa das retas.”	48
Figura 26 - Exemplo de construção correta no GeoGebra com o parâmetro k realizada por um dos pares	49
Figura 27 - Respostas à questão "Escreve o sistema construído"	49
Figura 28 - Justificações a tarefa inversa.	51
Figura 29 - Construção por pontos não colineares.....	52
Figura 30 - Construção por tentativa e erro.....	53
Figura 31 - Construção com retas perpendiculares aos eixos.....	53
Figura 32 - Respostas à pergunta: “Em que tarefas o uso do GeoGebra foi indispensável?”	55
Figura 33 - Respostas à pergunta: “Houve situações em que o gráfico te ajudou a compreender melhor do que os cálculos? Explica”	55
Figura 34 - Respostas à pergunta: “Em que momento foi mais difícil articular equações e gráficos?”	56

Lista de Abreviaturas

LED	LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO DIGITAL
TPACK	TECHNOLOGICAL PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE
TRRS	TEORIA DOS REGISTOS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

Introdução

Este relatório de estágio apresenta uma investigação realizada a partir de uma intervenção pedagógica numa turma de 9.º ano de uma escola pública do Norte de Portugal, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Esta investigação nasceu da observação recorrente nas aulas de Matemática: os alunos revelam frequentemente dificuldades na resolução de tarefas matemáticas sobretudo na interpretação em relação ao que é pretendido e na articulação entre diferentes formas de representações matemáticas, representação algébrica, representação gráfica, entre outras.

Esta dificuldade está associada à limitada capacidade de conversão entre registos de representação semiótica (Duval, 1993, 2009), processo cuja ausência, como sublinham Wichnoski e Bassoi (2019), compromete o desenvolvimento cognitivo matemático dos alunos, constituindo um obstáculo relevante à aprendizagem com significado da Matemática.

A observação desta realidade em contexto de sala de aula onde os alunos muitas vezes resolvem tarefas de forma mecanizada, recorrendo a procedimentos aprendidos sem compreensão dos conceitos subjacentes, foi o ponto de partida para uma reflexão sobre o papel das tecnologias digitais, do GeoGebra em particular, na promoção de uma aprendizagem mais significativa e conceptualmente fundamentada.

Neste contexto, o GeoGebra constitui uma das ferramentas com potencial para apoiar os alunos neste processo. O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que integra diferentes representações matemáticas, nomeadamente algébricas, gráficas, geométricas e numéricas, permitindo explorar e visualizar, de forma interativa, as relações entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático (Brito, 2021; GeoGebra, s.d.). No âmbito desta investigação, esta possibilidade assume particular relevância, uma vez que permite aos alunos observar como alterações numa representação podem refletir-se noutras representações, criando oportunidades para explorar processos de conversão entre registos. Como afirmam Zanella et al. (2018), o GeoGebra integra diferentes representações semióticas num mesmo ambiente, podendo constituir um recurso pertinente para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Contribuiu também como motivação para esta investigação, a escassez de estudos que articulem especificamente o uso do GeoGebra com a Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval no contexto do 3.º Ciclo do Ensino Básico em Portugal. Compreender de que forma os alunos percecionam esse uso, quais as potencialidades que identificam, que dificuldades sentem, e em que medida o software os apoia na interpretação e resolução de tarefas matemáticas constitui, assim, o foco central deste estudo, tendo inerente o seguinte problema de investigação: De que forma os alunos percecionam o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas, considerando os processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica?

Foram estabelecidos dois objetivos específicos que se traduzem em duas questões orientadoras:

- (i) Como é que os alunos utilizam os diferentes registos de representação durante a resolução de tarefas com o GeoGebra?
- (ii) Quais as percepções dos alunos sobre as potencialidades e as dificuldades do uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas?

O presente relatório está organizado em cinco capítulos, para além da Introdução. No primeiro capítulo, apresenta-se o enquadramento teórico que sustenta a investigação, com especial destaque para a Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval e para o papel das tecnologias digitais e do GeoGebra no ensino e na aprendizagem da Matemática. No segundo capítulo, caracteriza-se o contexto em que decorreu a intervenção pedagógica, nomeadamente a escola, a turma e a organização das aulas, apresentando-se igualmente um balanço final da intervenção. No terceiro capítulo, são apresentadas e justificadas as opções metodológicas adotadas, bem como os participantes e os procedimentos de recolha e análise dos dados. No quarto capítulo, analisam-se os dados recolhidos ao longo da intervenção, procurando responder às questões orientadoras da investigação. Por fim, no quinto capítulo, apresentam-se a síntese do estudo, as respostas às questões de investigação, as limitações e as recomendações para investigação futura.

1. Enquadramento Teórico

O presente capítulo está organizado em cinco partes. Na primeira, discutem-se práticas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Na segunda, apresenta-se a Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval, quadro conceptual central desta investigação, com particular atenção aos conceitos de tratamento, conversão e coordenação de registos. Na terceira, abordam-se os sistemas de equações e a sua relação com diferentes formas de representação matemática. Na quarta, analisa-se a importância das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Por fim, aborda-se o contributo do GeoGebra enquanto ambiente de aprendizagem favorável à conversão de registos e à compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos.

1.1. Ensinar e aprender Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico

A aprendizagem da Matemática não se reduz à execução mecânica de procedimentos nem à memorização de regras e fórmulas. Para que os alunos desenvolvam uma compreensão matemática genuína, é fundamental que se criem ambientes de aprendizagem onde seja possível dar sentido aos conceitos, estabelecer conexões entre diferentes áreas do saber e mobilizar conhecimentos em situações novas e desafiantes (Abrantes et al., 1999; Canavarro et al., 2021). Esta perspetiva é especialmente relevante no 3.º Ciclo do Ensino Básico, etapa em que os alunos são progressivamente confrontados com objetos matemáticos de maior abstração como as equações, os sistemas e as representações algébricas que exigem uma capacidade crescente de raciocínio formal e de articulação entre diferentes modos de representação.

O documento Aprendizagens Essenciais para o 9.º ano (Canavarro et al., 2021) valoriza, entre outras, a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, o uso de representações múltiplas, as conexões matemáticas e a utilização da tecnologia. Estas ideias orientam para uma prática pedagógica que vai além da transmissão de conteúdos, valorizando a exploração, a argumentação e a construção ativa do conhecimento por parte dos alunos.

Neste entendimento, o professor desempenha um papel insubstituível na criação de condições para uma aprendizagem matemática significativa. Segundo Ponte e Santos (1998), ensinar Matemática de modo que os alunos compreendam exige que o professor domine não apenas os conteúdos matemáticos, mas também o currículo, os processos

de aprendizagem dos alunos e uma diversidade de práticas pedagógicas. Shulman (1987) aprofundou esta perspetiva ao destacar a importância da articulação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico, nomeadamente através do conhecimento pedagógico do conteúdo, entendido como a capacidade de transformar o saber disciplinar em formas de ensino acessíveis e significativas para os alunos. Neste enquadramento, Mishra e Koehler (2006) propõem o modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge), que acrescenta a dimensão tecnológica e enfatiza a necessidade de articular conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e do conteúdo na tomada de decisões sobre o uso da tecnologia em contexto educativo. No presente estudo, esta perspetiva é relevante sobretudo para compreender que a integração do GeoGebra não depende apenas das potencialidades técnicas do software, mas da forma como este é selecionado e mobilizado pelo professor em articulação com os objetivos matemáticos e com as tarefas propostas. O TPACK é, assim, utilizado como enquadramento da dimensão pedagógica da integração da tecnologia na intervenção, não constituindo, contudo, uma categoria de análise dos dados recolhidos, cujo enquadramento teórico central assenta na Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval.

Uma prática pedagógica que operacionaliza muitos destes princípios é o ensino exploratório, que se distancia de uma perspetiva transmissiva e convida os alunos a trabalhar sobre tarefas matematicamente ricas de forma autónoma e colaborativa, antes de se proceder à sistematização coletiva dos conceitos (Ponte, 2005, 2014).

Nas aulas exploratórias, a tarefa matemática foi o ponto de partida para a construção do conhecimento, na qual o erro assumiu um papel produtivo, funcionando como oportunidade de aprendizagem e de refinamento do raciocínio (Janikova et al., 2024).

No contexto desta investigação, as tarefas propostas à turma foram concebidas de forma a integrar diferentes representações, promovendo uma aprendizagem que vai além do cálculo e que implica a interpretação, a tradução e a articulação entre formas distintas de representar. Esta abordagem encontra o seu enquadramento teórico mais preciso na Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval, que se apresenta na secção seguinte.

1.2. A Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval

A Teoria dos Registos de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida pelo matemático e psicólogo Raymond Duval, constitui um dos quadros teóricos mais influentes e rigorosos no campo da Didática da Matemática. O ponto de partida da teoria é uma constatação epistemológica fundamental: os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção sensorial. Ao contrário dos objetos do mundo físico que podem ser tocados, observados ou medidos, um número, uma função, um sistema de equações ou uma reta no plano são entidades abstratas, cuja existência é inteiramente semiótica. Isto significa que o acesso a qualquer objeto matemático se faz sempre e necessariamente através de representações (Duval, 1993, 2009).

Esta dependência radical das representações coloca um problema específico à aprendizagem da Matemática: como pode o aluno distinguir o objeto matemático das suas representações, se nunca tem acesso ao objeto de outra forma que não seja através delas? Duval (2009) designa este problema como o paradoxo cognitivo da representação matemática. A consequência é que a aprendizagem da Matemática implica, inevitavelmente, aprender a trabalhar com sistemas semióticos específicos e a compreender a relação entre eles. Como sublinham Wichnoski e Bassoi (2019), a cognição matemática só é verdadeiramente ampliada com a ajuda da diversidade de representações semióticas, sendo o ensino e a aprendizagem da Matemática configurados num cenário de mobilização da representação de um mesmo objeto em diferentes registos, pelo menos dois, quaisquer que sejam as situações didáticas propostas.

Duval (1993) define registo de representação semiótica como um sistema de signos que permite não apenas representar objetos matemáticos, mas também realizar transformações sobre essas representações. Para Henriques e Almouloud (2016), os signos que caracterizam cada registo incluem, por exemplo, as propriedades e escritas algébricas para o registo algébrico, as figuras geométricas para o registo figural, os números e as operações para o registo numérico, e as expressões em linguagem corrente para o registo em linguagem natural.

Henriques e Almouloud (2016) caracterizam o registo de representação semiótica como um sistema de signos que, para além de permitir representar objetos matemáticos, possibilita a realização de transformações sobre essas representações. Neste sentido, os registos de representação constituem sistemas organizados segundo regras próprias, que permitem representar e reconhecer objetos matemáticos. A representação

semiótica corresponde, assim, à forma particular como um objeto matemático é expresso num determinado registo, de acordo com as regras de conformidade que lhe são próprias. Esta perspetiva é particularmente relevante no ensino da Matemática, uma vez que as Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 9.º ano valorizam explicitamente o uso de representações múltiplas como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, salientando que a conjugação de diferentes tipos de representação contribui para clarificar as ideias matemáticas e que a compreensão depende da familiaridade e fluência dos alunos com essas diferentes formas de representação (Canavarro et al., 2021). Esta valorização é igualmente destacada por Amado (2022), que considera o estabelecimento de conexões entre diferentes modos de representação fundamental para uma melhor compreensão da Matemática, salientando ainda o papel das tecnologias digitais na construção de representações múltiplas e na promoção das conexões entre elas.

No domínio da Matemática escolar, e em particular no contexto desta investigação, os registos mais relevantes são o registo em linguagem natural, que permite descrever situações e formular problemas em linguagem corrente; o registo algébrico, que inclui equações, expressões e sistemas de equações, operando segundo regras sintáticas precisas; e o registo gráfico, que representa objetos matemáticos no plano cartesiano. Cada um destes registos possui uma estrutura interna própria e permite realizar transformações específicas que os outros não permitem com a mesma facilidade ou rigor. A Figura 1 ilustra estes e outros possíveis registos.

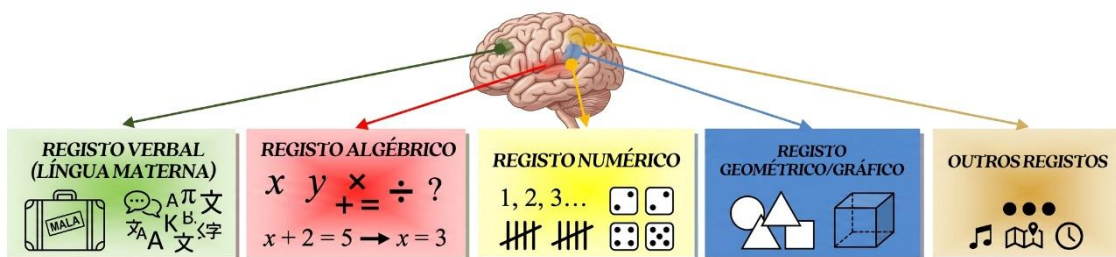


Figura 1 - Possíveis registos de representação de um objeto matemático

No interior dos registos de representação semiótica, Duval (1993) distingue dois tipos fundamentais de transformações: o tratamento e a conversão. O tratamento é uma transformação que ocorre dentro do mesmo registo como define o próprio Duval (2009, p. 39), trata-se da "transformação que se efetua no interior de um mesmo registo, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas". Um tratamento mobiliza,

portanto, apenas um registo de representação, permitindo passar de representações mais complexas para formas mais simples de entendimento.

A conversão, por sua vez, é uma transformação que implica a mudança de registo. Duval (2009, p. 39) define-a como "uma transformação que faz passar de um registo para outro", acrescentando que ela "requer então a coordenação dos registos no sujeito que ela efetua." Exemplos de conversão incluem: passar da equação algébrica de um sistema para a sua representação gráfica no plano cartesiano; extrair de um enunciado em linguagem natural a equação que o modela; ou reconhecer, a partir de um gráfico, as propriedades algébricas das retas representadas.

No contexto desta investigação, atendendo as limitações temporais, as tarefas propostas envolviam maioritariamente a conversão de algébrica para gráfica, de gráfica para algébrica, e de linguagem natural para algébrica.

Duval (2009) sublinha que, na aprendizagem da Matemática, a conversão entre registos de representação pode constituir um obstáculo maior do que o tratamento realizado no interior de um mesmo registo. Esta dificuldade relaciona-se, entre outros aspetos, com a assimetria cognitiva das conversões: saber realizar uma conversão num determinado sentido não implica, necessariamente, saber realizar a conversão inversa. Assim, um aluno pode, por exemplo, conseguir passar de uma representação algébrica para uma representação gráfica de um sistema de equações e, contudo, revelar dificuldades quando lhe é solicitado o processo inverso, isto é, identificar e formular as equações a partir de uma representação gráfica. Tal dificuldade decorre do fato de os elementos relevantes e as regras de funcionamento de cada registo não estabelecerem necessariamente uma correspondência imediata entre si. Esta questão assume particular relevância no ensino da Matemática, uma vez que as Aprendizagens Essenciais para o 9.º ano valorizam o uso de representações múltiplas e o estabelecimento de relações e conversões entre diferentes representações como meios de apoiar o raciocínio, a comunicação e a compreensão matemática. Neste sentido, compreender as dificuldades associadas às diferentes direções de conversão torna-se particularmente pertinente no estudo dos sistemas de equações, em que a relação entre as representações algébrica e gráfica constitui uma dimensão fundamental da interpretação das soluções. A Figura 2 exemplifica uma coordenação e cooperação de registos com um determinado objeto matemático.

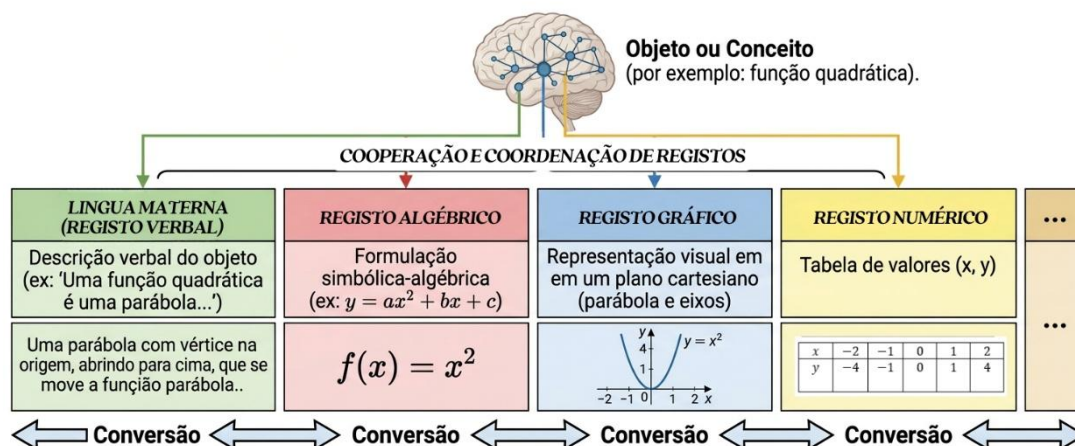


Figura 2 - Cooperação e coordenação de registos

Para Duval (2009), a compreensão matemática genuína exige a coordenação de pelo menos dois registos de representação diferentes. Essa coordenação não se reduz à capacidade de realizar conversões isoladas; implica que o aluno seja capaz de reconhecer o mesmo objeto matemático em representações estruturalmente distintas e de mobilizar, de forma flexível, o registo mais adequado em cada momento da resolução. Sem essa coordenação, os alunos tendem a trabalhar de forma compartimentada: sabem resolver um sistema algebricamente, mas não reconhecem a solução como o ponto de interseção das retas no plano; ou identificam a solução gráfica, mas não conseguem traduzi-la para o registo algébrico correspondente.

Esta perspetiva tem implicações pedagógicas diretas. O professor deve criar oportunidades sistemáticas para que os alunos realizem conversões entre registos, trabalhem com múltiplas representações do mesmo objeto e reflitam explicitamente sobre as diferenças e semelhanças entre elas (Duval, 1993; Lourenço & Silva, 2022). É precisamente aqui que o GeoGebra se revela uma ferramenta de particular relevância, como discutirei nas secções 1.4 e 1.5. A Figura 3 exemplifica a TRRS com o objeto matemático estudado.

EXEMPLIFICANDO A TRRS COM O OBJETO ESTUDADO		
Língua Natural <i>Proposição/Enunciado da Tarefa</i>	Algébrica-Numérica	Geométrica
<p>Quantos coelhos e quantas galinhas há numa quinta se ao todo existem 10 animais e 26 patas?</p> <p>Legenda:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Coelhos:</i> x • <i>Galinhas:</i> y <p><small>Nota: Para este estudo, estimula-se que os alunos utilizem “x” e “y” como incógnitas, para facilitar a conversão para o meio geométrico</small></p>	<p>Quantidade de Animais: $x + y = 10$</p> <p>Quantidade de Patas: $2x + 4y = 26$</p> $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ <p><small>Nota: Na resolução algébrica o aluno (a) opta pelo método de resolução que lhe for mais conveniente.</small></p>	

Figura 3 - Ilustrando a TRRS com o Objeto estudado

1.3. Sistemas de equações e representações matemáticas

Os sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas constituem um conteúdo matemático que envolve diferentes formas de representação e interpretação. Para além dos procedimentos algébricos associados à sua resolução, a abordagem gráfica permite interpretar a solução de um sistema a partir da posição relativa das retas que representam as equações. Assim, um sistema possível e determinado corresponde a duas retas secantes, cujo ponto de interseção representa a solução; um sistema impossível corresponde a retas paralelas distintas; e um sistema possível e indeterminado corresponde a retas coincidentes. A interpretação destas relações exige, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre a representação algébrica e a representação gráfica do mesmo objeto matemático.

No âmbito das Aprendizagens Essenciais de Matemática, os sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas são introduzidos no 8.º ano de escolaridade, sendo esperado que os alunos sejam capazes de os resolver e de interpretar graficamente as respetivas soluções, relacionando as representações algébrica e geométrica. No 9.º ano, o trabalho desenvolvido sobre representações, linguagem algébrica e resolução de problemas permite aprofundar e mobilizar conhecimentos previamente construídos em situações que exigem a articulação entre diferentes formas de representar e interpretar objetos matemáticos. Neste sentido, a utilização de

diferentes representações assume particular relevância no estudo dos sistemas de equações, uma vez que a interpretação da solução implica estabelecer relações entre a representação algébrica do sistema e a representação gráfica das retas que o constituem.

A aprendizagem dos sistemas de equações pode, neste sentido, beneficiar da utilização de diferentes representações matemáticas. Nobre, Amado e Ponte (2011) analisaram as representações utilizadas por alunos do 9.º ano na resolução de tarefas relacionadas com sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, destacando o papel dessas representações na construção do pensamento algébrico e na aprendizagem de métodos formais de resolução. Os autores evidenciam, assim, a importância de considerar as diferentes formas pelas quais os alunos representam e interpretam as relações matemáticas envolvidas nos sistemas de equações.

Esta perspetiva articula-se diretamente com a Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval, segundo a qual a compreensão de um objeto matemático não depende apenas da capacidade de operar dentro de um determinado registo, mas também da possibilidade de reconhecer e relacionar esse objeto através de diferentes registos de representação. No caso dos sistemas de equações, esta articulação manifesta-se, por exemplo, na passagem de um enunciado em linguagem natural para a sua representação algébrica, da representação algébrica para a gráfica e, em sentido inverso, da representação gráfica para a algébrica. Dificuldades nestas conversões podem comprometer a interpretação das soluções e a compreensão das relações entre os diferentes modos de representar o sistema.

Esta relação entre sistemas de equações, múltiplas representações e conversões encontra também expressão em propostas didáticas baseadas na utilização de tecnologias digitais. Freitas e Abar (2014), por exemplo, desenvolveram uma proposta de atividades para sistemas de equações lineares centrada nos registos em linguagem natural, algébrico e gráfico, recorrendo ao GeoGebra e tendo a Teoria dos Registos de Representação Semiótica como suporte teórico. Estes trabalhos reforçam a pertinência de abordar os sistemas de equações através de diferentes representações e de criar situações em que os alunos possam estabelecer relações e realizar conversões entre elas.

1.4. Tecnologias digitais no ensino da Matemática

O papel das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática tem sido amplamente estudado nas últimas décadas. O National Council of Teachers of

Mathematics (NCTM, 2007, 2017) reconhece a tecnologia como um instrumento essencial no ensino da Matemática, salientando que o seu uso adequado pode alargar significativamente aquilo que os alunos são capazes de aprender e a profundidade com que compreendem os conceitos. Em particular, o NCTM (2017) sublinha que a tecnologia não deve ser utilizada como um mero substituto do cálculo algébrico ou como um recurso de verificação, mas sim como um instrumento que enriquece e aprofunda a atividade matemática dos alunos.

Borba (1996) já questionava, nos anos 90, as mudanças que as tecnologias trariam à educação matemática, enfatizando a necessidade de que o uso do computador não se restringisse a um "caderno mais moderno", era preciso que os professores utilizassem a tecnologia para trabalhar de forma diferente os conteúdos. Esta preocupação mantém-se atual: como afirmam Nascimento e Schimiguel (2017), as tecnologias instauram uma revolução antropológica, desenvolvendo novas relações entre professor, aluno e saber, razão pela qual a sua utilização deve ser planeada para evitar usos pedagogicamente descontextualizados. A mobilização de tecnologias em contexto de sala de aula pode favorecer uma abordagem mais indutiva e experimental da Matemática, permitindo que os alunos explorem situações, formulem conjecturas, visualizem relações e testem hipóteses de forma mais rápida e rigorosa (Fernandes & Vaz, 1998).

Santos e Borba (2008) acrescentam que os softwares de geometria dinâmica possibilitaram que problemas comuns da Matemática tivessem uma nova abordagem, favorecendo atividades de investigação; Araújo e Pazuch (2018) destacam que esses softwares contribuem para o processo de validação de ideias e relações matemáticas a partir da análise de construções geométricas; e Roschelle et al. (2010) acrescentam que a tecnologia potencia a visualização de relações matemáticas que seriam difíceis ou impossíveis de representar com meios convencionais.

É igualmente importante distinguir entre o uso e a integração de tecnologias em sala de aula. Enquanto o uso se refere à simples utilização de recursos tecnológicos, a integração implica que a tecnologia seja mobilizada de forma intencional, articulada com os objetivos de aprendizagem e com as tarefas propostas, de modo a que "a tecnologia dê um significado à Matemática e a Matemática justifique o uso da tecnologia" (Laborde, 2002, p. 316).

Matos et al. (2020) sublinham que as tecnologias digitais no ensino da Matemática constituem um fator de motivação para os alunos, que são integrados no processo de ensino através de uma ferramenta que utilizam quotidianamente, favorecendo um maior

comprometimento, empenho e cooperação entre pares. Ronau et al. (2000) referem que o uso de tecnologia em contexto de sala de aula melhora a orientação dos alunos para a Matemática e a compreensão dos conceitos, enquanto Granito e Chernobilsky (2012) apontam para uma maior retenção de informação quando a tecnologia é utilizada de forma pedagogicamente intencional.

No entanto, a utilização de tecnologias digitais, por si só, não garante a aprendizagem dos alunos. Quando mobilizadas de forma pouco intencional ou descontextualizada, estas ferramentas podem limitar a atividade matemática, levando os alunos a centrar-se na obtenção rápida de respostas ou na execução de procedimentos, em vez de promoverem a compreensão, o raciocínio e a construção de significados (NCTM, 2017). O potencial educativo da tecnologia depende, assim, da forma como esta é integrada no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente dos objetivos que orientam a sua utilização, das tarefas propostas e do tipo de atividade matemática que se pretende promover. Neste sentido, a tecnologia deve ser entendida como um recurso ao serviço da aprendizagem e não como um fim em si mesma, cabendo ao professor criar condições para que a sua utilização contribua para a exploração, a argumentação, a visualização e a articulação entre diferentes representações matemáticas

Oliveira et al. (2018) alertam que, embora as escolas tenham sido munidas com diferentes recursos tecnológicos e tenha havido investimento na formação dos professores, não se podem tratar as ferramentas tecnológicas apenas como complemento do processo, os professores precisam de deter conhecimento aprofundado sobre como ensinar Matemática com uso da tecnologia. É por isso que a intencionalidade pedagógica é determinante, exigindo que o professor selecione tarefas que justifiquem o uso da tecnologia, que não sejam mecanizáveis, e que coloquem o aluno numa posição ativa de exploração e de construção de significado (Ponte et al., 2003, 2015).

Neste estudo, a relevância do modelo TPACK não reside na análise direta da competência tecnológica do professor, mas na compreensão de que a integração do GeoGebra nas tarefas propostas depende da articulação entre conhecimento matemático, conhecimento pedagógico e conhecimento tecnológico. Esta articulação esteve presente na conceção da intervenção, nomeadamente na seleção de tarefas que mobilizavam diferentes representações matemáticas e na utilização do GeoGebra como meio para favorecer a exploração e a conversão entre registos. Assim, embora o TPACK não constitua uma categoria de análise dos dados, fornece um enquadramento para

compreender as decisões pedagógicas que sustentaram a integração da tecnologia nesta investigação.

1.5. O GeoGebra como ambiente de aprendizagem: conversão de registos e percepções dos alunos

A principal pertinência do GeoGebra para esta investigação reside na possibilidade de articular dinamicamente diferentes representações matemáticas. Matos et al. (2020) destacam a acessibilidade do software e a possibilidade de o utilizar na exploração de diferentes conceitos matemáticos. Uma das suas principais potencialidades consiste na possibilidade de observar, de forma imediata, as relações entre diferentes representações de um mesmo objeto matemático, uma vez que alterações realizadas numa representação podem refletir-se nas restantes. Zanella et al. (2018) salientam que o GeoGebra integra diferentes representações semióticas num mesmo ambiente, possibilitando a construção e a exploração de diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Esta característica torna o GeoGebra particularmente pertinente para o trabalho com conversões entre registos de representação semiótica, na perspetiva de Duval (1993, 2009), ao proporcionar um ambiente no qual essas relações podem ser exploradas de forma dinâmica e visual.

Gravina (2015) mostrou que o GeoGebra possui um potencial semiótico robusto, evidenciando as chamadas figuras dinâmicas e uma relação funcional entre objetos geométricos que pode favorecer a aprendizagem. No contexto do ensino de sistemas de equações, tema central desta intervenção pedagógica, esta potencialidade revela-se com particular clareza. A resolução de um sistema de duas equações lineares pode ser abordada de forma puramente algébrica, mas a sua compreensão profunda implica reconhecer que a solução corresponde, no plano cartesiano, ao ponto de interseção das duas retas representadas pelas equações do sistema. O GeoGebra torna esta conversão, do registo algébrico para o gráfico, e vice-versa, imediata e visível: ao introduzir as equações, o aluno observa instantaneamente os gráficos correspondentes e pode identificar visualmente a solução, relacionando-a com o resultado algébrico obtido. O ambiente gráfico favorece assim a aprendizagem ao permitir a associação entre a parte algébrica e a representação gráfica, facilitando a compreensão dos procedimentos de tratamento e de conversão entre os diferentes registos (Duval, 2009; Zanella et al., 2018).

Vários estudos confirmam as potencialidades do GeoGebra para a aprendizagem da Matemática neste sentido. Correia e Fernandes (2011) referem que o software

representa uma mais-valia tanto na aprendizagem com compreensão como na motivação para a aprendizagem. Brunheira (2016) destaca que o GeoGebra promove a exploração, a intuição e a justificação, favorecendo a diversidade de resoluções e o desenvolvimento da criatividade. Ponte et al. (2006) e Cordelina e Pavanelo (2024) sublinham que ambientes de matemática dinâmica potenciam a testagem de hipóteses e a investigação de conexões o que, articulado com a teoria de Duval, corresponde ao processo de coordenação de registos. Barbosa et al. (2016) acrescentam que o GeoGebra potencia a compreensão dos conceitos matemáticos ao permitir que os alunos observem, em simultâneo, diferentes representações do mesmo objeto e estabeleçam relações entre elas.

Importa, contudo, não ignorar as suas limitações. Hoyles e Noss (2003) alertam para o risco de os alunos utilizarem o poder da tecnologia para evitar pensar, quando o que se pretende é que desenvolvam a abstração e a generalização.

A sintaxe e a interface do GeoGebra podem igualmente constituir uma sobrecarga inicial para alunos com pouca familiaridade com o software (Dias & Scortegagna, 2025), o que pode desviar a atenção da atividade matemática para questões puramente técnicas. Por estas razões, nesta investigação optou-se por incluir um momento de ambientação ao GeoGebra antes da aplicação da ficha de trabalho, de modo a minimizar essas dificuldades e a garantir-se que os alunos pudessem concentrar-se na exploração matemática em si.

Por fim, compreender de que forma os alunos experienciam o uso do software GeoGebra, que potencialidades identificam, que dificuldades sentem, e em que medida percebem o GeoGebra como um apoio à conversão de registos e à interpretação de tarefas pode contribuir para informar futuras práticas pedagógicas que integrem este tipo de ferramentas de forma mais eficaz e teoricamente fundamentada.

2. Contexto e organização das aulas

Este capítulo descreve o contexto em que decorreu a intervenção pedagógica e a forma como foi organizada, começando-se pela caracterização da escola e da turma participante no estudo.

De seguida, apresenta-se detalhadamente as três fases da intervenção: no primeiro momento a ambientação ao GeoGebra, no segundo momento a revisão sobre sistemas de equações e por último a aplicação da ficha de trabalho.

Por fim, apresenta-se uma análise reflexiva sobre a intervenção pedagógica, identificando os principais constrangimentos e as decisões tomadas ao longo do processo, de acordo com as variáveis que iam ocorrendo.

2.1. Caracterização da escola

A intervenção pedagógica foi realizada numa escola pública que integra o 2.º e o 3.º Ciclos do Ensino Básico, localizada no Norte de Portugal. Por razões de anonimato, não serão fornecidos dados que permitam a identificação da instituição. A escola dispõe das condições e dos recursos necessários ao funcionamento regular das atividades letivas. No que respeita aos recursos tecnológicos, embora o agrupamento disponha de diversos equipamentos, incluindo os disponibilizados no âmbito do Laboratório de Educação Digital (LED), existem algumas limitações na sua utilização pedagógica, nomeadamente pela ausência de profissionais especificamente dedicados ao acompanhamento e dinamização de atividades com os alunos. No âmbito da intervenção, cada aluno dispunha de um computador portátil para a realização das atividades propostas. Contudo, verificaram-se algumas dificuldades relacionadas com o funcionamento e a utilização destes equipamentos, que condicionaram, em determinados momentos, a participação dos alunos e a recolha de dados.

2.2. Caracterização da turma

O estudo foi desenvolvido numa turma de 9.º ano do Ensino Básico, constituída por 21 alunos. A turma apresentava um perfil heterogéneo, tanto em termos de desempenho matemático como de relação com a disciplina.

No período anterior à intervenção, quatro alunos apresentavam classificação negativa a Matemática, o que evidencia a existência de dificuldades consolidadas numa parte da turma e reforça a pertinência de uma abordagem pedagógica alternativa, capaz de criar novos pontos de entrada para a compreensão dos conceitos. Os restantes alunos

distribuíam-se por diferentes níveis de desempenho, configurando uma turma com uma diversidade de ritmos e formas de pensar que é comum neste nível de escolaridade.

No que diz respeito à relação com a Matemática, a turma apresentava igualmente uma diversidade de atitudes: havia alunos com uma relação positiva e motivada, e outros com menor afinidade ou com experiências prévias de insucesso que condicionavam o seu envolvimento. Ainda assim, a generalidade dos alunos demonstrou disponibilidade para participar nas atividades propostas ao longo da intervenção, procurando envolver-se nas tarefas mesmo quando sentiam dificuldades, o que constituiu uma condição favorável ao desenvolvimento do estudo.

No que diz respeito ao contacto prévio com tecnologia em contexto de aula de Matemática, os alunos estavam habituados à utilização da calculadora científica, mas o uso de computadores ou outros dispositivos digitais nas aulas era diminuto. Esta realidade é consistente com o que Proença e Canavarro (2021) descrevem sobre a situação portuguesa, em que muitos professores continuam sem recorrer a computadores no ensino da Matemática, por diversos motivos. Relativamente ao GeoGebra em particular, os alunos tinham algum conhecimento do software na fase de ambientação, vários alunos referiram já o conhecer, mas de forma superficial. A sua familiaridade era limitada e irregular: alguns tinham tido contacto ocasional em anos anteriores, mas a maioria não o utilizava de forma regular nem autónoma. Este facto, como se explica no capítulo seguinte, teve implicações diretas na organização da intervenção e justificou a decisão de alargar a fase de ambientação de dois para três tempos letivos, de modo a garantir condições mínimas de literacia digital e técnica que permitissem aos alunos concentrarem-se na atividade matemática em si.

A seleção da turma foi realizada por conveniência, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, respeitando os princípios éticos da investigação em educação. Foram recolhidos os assentimentos dos alunos e os consentimentos dos respetivos encarregados de educação, sendo garantidos o anonimato e a confidencialidade de todos os dados recolhidos. Os nomes reais dos alunos não são utilizados ao longo deste relatório no capítulo de análise de resultados, os alunos são identificados por códigos alfanuméricos (A1 a A15 no primeiro formulário; A1 a A12 no segundo).

2.3. Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica foi desenvolvida ao longo de sete tempos letivos, organizados em três fases distintas: uma fase de ambientação ao GeoGebra, uma aula de revisão

do tema matemático, e a aplicação da ficha de trabalho. O Quadro 1 sintetiza a organização temporal da intervenção.

Fase	Conteúdo	Duração
1. ^a Fase	Ambientação ao GeoGebra	3 tempos letivos
2. ^a Fase	Revisão de Sistemas de Equações	1 tempo letivo
3. ^a Fase	Ficha de trabalho sobre sistemas de equações	3 tempos letivos

Quadro 1 – Descrição da intervenção pedagógica

2.3.1. Fase 1 — Ambientação ao GeoGebra

A primeira fase da intervenção teve como objetivo familiarizar os alunos com o GeoGebra Classic na sua versão online, de modo a que as dificuldades técnicas não constituíssem um obstáculo à atividade matemática nas fases seguintes. Para o efeito, foram utilizados como material didático de referência os recursos do curso de GeoGebra da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), gentilmente cedidos pelo Professor Sérgio Dantas mediante autorização expressa para o efeito (Anexo 1), que serviram de base à apresentação das ferramentas fundamentais do software. O material de ambientação utilizado encontra-se no Anexo 2, bem como o plano de aula da referida aula presente no Anexo 3.

Nesta fase, foram trabalhados os comandos e funcionalidades básicas do GeoGebra como a introdução de pontos, retas e equações, a utilização da janela de álgebra e da janela gráfica em simultâneo, e a personalização dos objetos construídos. O objetivo era que os alunos ficassem suficientemente familiarizados com o ambiente do software para poderem usá-lo como ferramenta de exploração matemática, e não como um fim em si mesmo.

A ambientação estava inicialmente prevista para dois tempos letivos. No entanto, durante a sua realização tornou-se evidente que uma parte significativa dos alunos apresentava dificuldades em operações básicas de literacia digital como guardar um ficheiro, criar e organizar pastas, ou gerir o ambiente de trabalho do computador. Estas dificuldades, que não estavam antecipadas na planificação inicial, levaram a que a fase de ambientação fosse alargada para três tempos letivos. Ainda que este alargamento tenha implicado um ajuste na gestão do tempo disponível para a intervenção, revelou-se fundamental para nivelar a turma em termos de competências técnicas e garantir que

todos os alunos pudessem participar nas fases seguintes em condições minimamente equivalentes. Esta situação vai ao encontro do que referem Hoyles e Noss (2003) e Dias e Scortegagna (2025), quando alertam para o facto de a sintaxe e a interface dos softwares matemáticos poderem constituir uma sobrecarga cognitiva inicial, especialmente para alunos com pouca experiência prévia com este tipo de ferramentas.

No que diz respeito à organização do trabalho dos alunos, não foi imposta uma estrutura rígida de trabalho individual ou em pares. A opção foi deixar que a dinâmica emergisse de forma orgânica: os alunos trabalharam com quem estavam sentados, o que resultou naturalmente numa mistura de respostas individuais e de respostas elaboradas em conjunto por dois alunos. Esta opção foi deliberada ao não impor grupos, pretendia-se que os alunos se sentissem mais à vontade na resolução das tarefas e que a colaboração, quando acontecesse, fosse genuína e não forçada. Esta organização manteve-se nas duas fases de recolha de dados, sendo por isso possível encontrar, tanto no formulário de ambientação como na ficha de trabalho, respostas de autoria individual e respostas de autoria partilhada.

2.3.2. Fase 2 — Revisão de Sistemas de Equações

A segunda fase consistiu numa aula de revisão do tema matemático central da investigação (*sistemas de equações*), desenvolvida com recurso a múltiplos registos de representação. Esta opção foi deliberada e teoricamente fundamentada: tendo em conta que o foco do estudo incide sobre a conversão de registos de representação semiótica, foi essencial criar um momento prévio à ficha de trabalho em que os alunos pudessem rever e consolidar os conceitos matemáticos envolvidos, estimulando precisamente as conversões entre registos que seriam depois mobilizadas na fase de recolha de dados.

Assim, ao longo desta aula, foram trabalhados sistemas de equações a partir de diferentes pontos de entrada: da sua formulação em linguagem natural com situações e problemas contextualizados, passando pela construção das equações algébricas correspondentes, e chegando à sua representação gráfica no plano cartesiano. Em cada momento, procurou-se que os alunos não apenas realizassem os procedimentos, mas sobretudo que compreendessem o que estava a acontecer em cada registo e de que forma os diferentes registos se relacionavam entre si, o que, no quadro de Duval (1993, 2009), corresponde ao desenvolvimento da capacidade de coordenação de registos. A planificação detalhada desta aula encontra-se no Anexo 4.

2.3.3. Fase 3 — Ficha de trabalho

A terceira e última fase correspondeu à aplicação da ficha de trabalho, que se estendeu por três tempos letivos e constituiu o principal momento de recolha de dados desta investigação. A ficha foi construída de forma a envolver os alunos em tarefas que implicassem, de forma explícita e variada, a conversão entre registos de representação semiótica no contexto dos sistemas de equações. Estavam presentes, ao longo da ficha, os seguintes tipos de conversão: de linguagem natural para algébrico quando os alunos tinham de construir as equações de um sistema a partir de um enunciado; de algébrico para gráfico, quando eram solicitados a representar graficamente no GeoGebra o sistema dado algebricamente; e de gráfico para algébrico, quando, a partir de uma representação gráfica, os alunos tinham de identificar e escrever as equações correspondentes.

Durante a realização da ficha, a intervenção foi propositadamente mínima. Esta opção resultou de uma decisão metodológica consciente: pretendendo observar de forma mais fidedigna o raciocínio dos alunos, as dificuldades que emergiam espontaneamente e as estratégias que mobilizavam para as ultrapassar, a intervenção direta poderia enviesar os dados recolhidos e comprometer a autenticidade das produções. Foram esclarecidas dúvidas de natureza técnica relacionadas com o GeoGebra quando necessário, mas procurou-se não se interferir na atividade matemática em si, deixando que os alunos trabalhassem com base em tudo o que tinham aprendido nas fases anteriores.

2.4. Balanço final da intervenção pedagógica

As observações realizadas ao longo das três fases da intervenção permitiram registar um conjunto de episódios e tendências com relevância direta para os objetivos desta investigação.

A opção por estruturar a intervenção em três fases sequenciais e progressivas (ambientação, revisão e aplicação) não foi arbitrária.

A literatura sobre o uso pedagógico do GeoGebra sugere de forma consistente que a familiarização prévia com o software é uma condição necessária para que a atividade matemática subsequente possa decorrer sem que as dificuldades técnicas se sobreponham às conceptuais (Hoyles & Noss, 2003; Dias & Scortegagna, 2025). Esta estrutura assemelha-se à adotada em estudos sobre a utilização do GeoGebra no ensino de outros tópicos matemáticos, onde a ambientação inicial se revelou

determinante para o sucesso das atividades posteriores e para o desenvolvimento de uma relação mais autónoma e confiante dos alunos com o software (Matos et al., 2020).

Durante a fase de ambientação, as dificuldades técnicas foram generalizadas e diversificadas. Não se limitaram à utilização do GeoGebra, mas estenderam-se a operações básicas de literacia digital. Ainda assim, foi possível observar que, à medida que os alunos ganhavam familiaridade com a interface do software, surgiam os primeiros momentos de descoberta espontânea: alguns alunos perceberam, sem que fosse explicado diretamente, que ao modificar uma equação na janela de álgebra a reta correspondente se movia automaticamente na janela gráfica. Estas reações de surpresa positiva, acompanhadas frequentemente de comentários como "ah, então é assim que funciona", constituíram indicadores informais de que a articulação dinâmica entre registos começava a fazer sentido para alguns alunos, ainda antes da fase de trabalho matemático mais estruturado.

Durante a realização da ficha de trabalho, foi possível observar três padrões comportamentais distintos. Um grupo de alunos demonstrou autonomia e fluência na navegação entre registos, alternando de forma flexível entre a representação algébrica e a gráfica, consoante as exigências de cada questão, o que, no quadro de Duval (1993, 2009), pode ser interpretado como evidência de uma capacidade de coordenação de registos já relativamente desenvolvida. Um segundo grupo revelou dificuldades persistentes nos três tipos de conversão presentes na ficha do algébrico para o gráfico, do gráfico para o algébrico, e do enunciado em linguagem natural para a representação algébrica, necessitando de apoio frequente para dar continuidade à resolução. Um terceiro grupo, mais reduzido, mostrou desinteresse ou desmotivação, não se envolvendo plenamente nas tarefas propostas.

Um aspeto particularmente relevante observado durante a ficha foi a tendência da maioria dos alunos para começar a resolução diretamente no GeoGebra, sem tentar previamente uma abordagem analítica. Este comportamento pode ser interpretado de duas formas complementares: por um lado, evidencia que os alunos reconheceram o software como uma ferramenta de exploração e não apenas de verificação; por outro, levanta a questão de saber se esta preferência pelo registo gráfico como ponto de partida facilitou ou dificultou a posterior formalização algébrica. Esta tensão será retomada na análise de resultados.

Foi também notório que os alunos discutiam entre si sobre as representações, o que favoreceu a comunicação matemática e a construção partilhada de significados,

dimensões valorizadas tanto pelas Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) como pela perspectiva de Duval (1993) sobre a coordenação de registos.

Por fim, foi possível observar uma evolução clara entre o início da ambientação e o final da realização da ficha de trabalho no que diz respeito à capacidade dos alunos de mobilizar o GeoGebra para trabalhar com diferentes registos de representação. Os alunos que na fase de ambientação não conseguiam sequer introduzir uma equação na janela de álgebra foram, na generalidade, capazes de construir representações gráficas de sistemas e de identificar visualmente as suas soluções no final da intervenção. Esta evolução, ainda que não uniforme entre todos os alunos, constitui um indicador positivo da pertinência da intervenção didática.

No que diz respeito à avaliação das aprendizagens durante a intervenção, a opção foi pela observação direta sem recurso a instrumentos formais de avaliação, em coerência com a decisão metodológica de interferir o mínimo possível durante a resolução das tarefas, de modo a preservar a autenticidade das produções dos alunos para fins de investigação.

3. Metodologia da Investigação

Neste capítulo, apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas adotadas nesta investigação, descrevendo-se os procedimentos de recolha de dados, os participantes e o processo de análise dos dados. São ainda apresentadas as precauções tomadas para assegurar o cumprimento dos princípios éticos da investigação.

3.1. Enquadramento

Esta investigação tem como objetivo compreender de que forma os alunos percecionam o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas, com particular enfoque nos processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica. Trata-se de um tema com relevância crescente no contexto do ensino da Matemática em Portugal, num momento em que as orientações curriculares apelam ao uso sistemático da tecnologia e ao desenvolvimento de competências de representação e comunicação matemática, mas em que a investigação sobre as percepções dos alunos neste domínio permanece relativamente escassa, especialmente no 3.º Ciclo do Ensino Básico.

O interesse nasceu da observação direta em sala de aula, das dificuldades dos alunos em articular diferentes representações matemáticas, dificuldades que, como argumenta Duval (1993, 2009), estão no centro dos obstáculos à compreensão matemática genuína.

Investigar de que forma os alunos experienciam o uso do software GeoGebra, que potencialidades identificam, que dificuldades sentem, e em que medida percebem o GeoGebra como um apoio à conversão de registos e à interpretação de tarefas, é, assim, tanto uma questão teoricamente fundamentada como uma necessidade prática emergente da experiência de estágio.

3.2. Opções metodológicas

Para dar resposta à questão de Investigação e aos objetivos específicos desta investigação, foi adotada uma abordagem qualitativa, de natureza interpretativa, inscrita no paradigma fenomenológico-interpretativo. Numa investigação qualitativa, o investigador procura compreender o que está por trás de determinados comportamentos, atitudes e percepções, observando os fenómenos no seu contexto

natural e construindo hipóteses interpretativas a partir dos dados recolhidos, em vez de os testar a priori (Fernandes, 1991; Garnica, 2004). Esta abordagem é a mais adequada a este estudo, uma vez que o que se pretende não é medir ou quantificar, mas compreender como os alunos experienciam o uso do GeoGebra, que sentidos constroem a partir dessa experiência, e de que forma essa experiência se relaciona com os processos de conversão de registos que a teoria de Duval descreve.

O estudo assume ainda características descritivas e exploratórias: descritivas, porque procura registar e descrever com fidelidade os fenómenos observados, sem os manipular; exploratórias, porque o tema, na sua articulação específica entre GeoGebra, conversão de registos semióticos e percepções dos alunos no 3.º Ciclo, carece ainda de investigação aprofundada no contexto português. Trata-se, finalmente, de uma investigação de natureza empírica, desenvolvida em contexto real de sala de aula, com recurso a múltiplos procedimentos de recolha de dados que permitam a triangulação dos dados (Holanda & Faria, 2020).

O Quadro 2 sintetiza a relação entre a questão de investigação, as subquestões, os objetivos específicos e o objetivo geral desta investigação.

Questão de investigação	Subquestões de investigação	Objetivo geral	Objetivos específicos
De que forma os alunos percebem o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas, considerando os processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica?	Como é que os alunos utilizam os diferentes registos de representação durante a resolução de tarefas com o GeoGebra?	Analisar as percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas, à luz da Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval	Analisar como os alunos utilizam diferentes registos de representação durante a resolução das tarefas e identificar evidências de conversão de registos promovidas

	pelo uso do GeoGebra
Quais as percepções dos alunos sobre as potencialidades e as dificuldades do uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas?	Compreender as percepções dos alunos sobre as potencialidades e dificuldades do uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas.

Quadro 2 - Síntese dos objetivos

3.3. Participantes

Esta investigação contou com a participação de 21 alunos de uma turma de 9.º ano do Ensino Básico de uma escola pública de 2.º e 3.º Ciclo localizada no Norte de Portugal. A seleção dos participantes foi realizada por conveniência, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, uma vez que se tratava da turma atribuída ao estagiário investigador.

A participação na investigação foi enquadrada pelos princípios éticos da investigação em educação. Foram recolhidos os assentimentos dos alunos e os consentimentos dos respetivos encarregados de educação, tendo sido esclarecido que a participação era voluntária e que a eventual não participação ou desistência não teria qualquer consequência na avaliação escolar. Foram igualmente assegurados o anonimato e a confidencialidade dos dados recolhidos. Por esse motivo, os alunos são identificados ao longo da apresentação dos dados através de códigos alfanuméricos.

Importa ainda distinguir a participação na intervenção pedagógica da participação nas diferentes fases de recolha de dados. Embora a intervenção tenha sido realizada com a turma, nem todos os alunos participaram de igual modo nas respostas aos instrumentos de recolha, devido a circunstâncias específicas verificadas em cada momento. Assim, o número de alunos envolvidos na intervenção não corresponde

necessariamente ao número de respostas obtidas em cada instrumento, questão que será explicitada na apresentação dos procedimentos de recolha de dados e na análise dos resultados.

3.4. Processo de recolha de dados

Para este estudo foram utilizados três procedimentos de recolha de dados: inquérito por questionário através do Google Forms, observação direta com registo em notas de campo, e análise das produções dos alunos com recurso ao GeoGebra. A utilização de múltiplos procedimentos visa assegurar a triangulação dos dados, que segundo Holanda e Faria (2020) consiste na recolha de informação a partir de fontes distintas, em tempos e espaços diferentes, permitindo ao investigador analisar o fenómeno a partir de diferentes perspetivas e conferir maior credibilidade às interpretações produzidas.

O Quadro 3 relaciona cada objetivo específico com os procedimentos de recolha utilizados.

Objetivos específicos	Recolha dos dados
Analisar como os alunos utilizam diferentes registos de representação e identificar evidências de conversão	Produções dos alunos Observação direta
Compreender as percepções dos alunos sobre potencialidades e dificuldades do GeoGebra	Inquérito por questionário (Google Forms); Observação direta

Quadro 3 - Objetivos específicos e procedimentos de recolha de dados

O formulário de ambientação ao GeoGebra encontra-se no Anexo 7 e o formulário da ficha de trabalho sobre sistemas de equações no Anexo 8.

3.4.1. Inquérito por questionário

O inquérito por questionário constitui o principal instrumento de recolha das percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra. Trata-se de um processo em que se tenta "descobrir alguma coisa de forma sistemática" (Carmo & Ferreira, 2008, p. 139), sem que exista interação direta entre o investigador e o inquirido, o que reduz a possibilidade de influência nas respostas.

Para a realização e aplicação dos questionários foi utilizada a plataforma Google Forms, escolhida pela praticidade no envio e receção das respostas, pela facilidade na

sistematização dos dados obtidos e pela possibilidade de alcançar todos os participantes de forma simultânea, respeitando os condicionalismos de tempo da rotina escolar. Cada formulário integrou três tipos de questões: questões de escolha múltipla, utilizadas para recolher respostas categorizáveis sobre a experiência com o software e sobre as estratégias de resolução adotadas; questões de resposta aberta, que permitiram aos alunos expressar livremente as suas percepções, dificuldades e apreciações sobre o uso do GeoGebra; e questões com upload de ficheiro ou imagem, através das quais os alunos submeteram as suas construções no GeoGebra e as resoluções escritas das tarefas, constituindo assim simultaneamente um instrumento de recolha de percepções e uma fonte de produções para posterior análise.

O primeiro formulário foi aplicado no final da fase de ambientação e o segundo após a realização da ficha de trabalho sobre sistemas de equações.

A aplicação dos questionários foi feita de forma anónima, garantindo que as respostas dos alunos não seriam associadas à sua identidade nem influenciariam a sua avaliação académica.

É ainda de referir que o primeiro formulário foi aplicado em dois momentos distintos: um grupo de oito alunos respondeu no final da primeira sessão de ambientação, e os restantes sete alunos responderam numa sessão posterior, realizada dois dias depois. Esta circunstância, decorrente de condicionalismos na gestão do tempo letivo, pode ter implicado condições de resolução ligeiramente diferentes entre os dois grupos, facto que foi tido em conta na interpretação dos dados recolhidos.

3.4.2. Observação direta

A observação direta foi utilizada como procedimento complementar de recolha de dados ao longo das três fases da intervenção pedagógica. Este procedimento permitiu registar comportamentos, reações, dificuldades e interações dos alunos que não seriam capturáveis através dos questionários, nomeadamente, a forma como os alunos navegavam entre os diferentes registos de representação durante a resolução das tarefas, os momentos de hesitação ou de descoberta, e as estratégias espontâneas que mobilizavam perante dificuldades.

As observações foram registadas sob a forma de notas de campo, elaboradas durante e após as aulas, procurando descrever com fidelidade os episódios observados e assinalar as situações com maior relevância para os objetivos da investigação. Estas notas complementam e contextualizam os dados recolhidos pelos questionários, contribuindo para uma análise mais rica e fundamentada.

3.4.3. Produções dos alunos

As produções dos alunos, nomeadamente as respostas registadas nos formulários Google Forms e os ficheiros GeoGebra gerados durante a realização da ficha de trabalho, constituem uma fonte de dados privilegiada para analisar de forma direta os processos de conversão de registos realizados. A análise destas produções permite verificar não apenas se os alunos chegaram ou não às respostas corretas, mas sobretudo compreender os percursos de representação que seguiram, os tipos de conversão que realizaram e as dificuldades que emergiram nesse processo.

3.5. Processo de análise de dados

A análise de dados neste estudo foi realizada em duas partes: a análise das produções dos alunos, que engloba as respostas aos formulários e os ficheiros GeoGebra; e a análise dos questionários de perceção. Cada uma destas partes será tratada segundo as três fases propostas por Bardin (2016): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados com inferência e interpretação.

Na fase de pré-análise, procedeu-se à organização e seleção dos dados recolhidos, tendo em conta os objetivos específicos da investigação e as categorias emergentes da teoria de Duval, nomeadamente os tipos de conversão observados e as percepções manifestadas pelos alunos. Na fase de exploração do material, os dados foram codificados e decompostos de acordo com essas categorias. Por fim, na fase de tratamento e interpretação, os dados foram relacionados entre si, numa lógica de triangulação entre os diferentes instrumentos de recolha, procurando identificar padrões, regularidades e casos singulares com relevância interpretativa.

Para a análise das percepções dos alunos recolhidas através dos questionários, as questões foram previamente organizadas de acordo com os objetivos específicos da investigação, numa lógica de categorias prévias decorrentes do quadro teórico. As respostas foram depois analisadas procurando identificar tendências gerais, mas também posições individuais divergentes que enriquecessem a compreensão do fenómeno em estudo.

4. Análise de Dados

Neste capítulo, analisam-se os dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica, com vista a responder à questão e às subquestões de investigação. A análise organiza-se em três partes: a análise do formulário de ambientação ao GeoGebra, a análise da ficha de trabalho sobre sistemas de equações, e uma síntese triangulada que articula os dados das duas fontes com as observações diretas realizadas em aula. Os nomes dos alunos foram substituídos por códigos alfanuméricos (A1 a A15 no primeiro formulário; A1 a A12 no segundo) para garantir o anonimato, em conformidade com os procedimentos éticos descritos anteriormente.

4.1. Análise do formulário de ambientação

O formulário de ambientação foi respondido por 15 dos 21 alunos participantes na investigação e teve como objetivo perceber a familiarização e expectativas dos alunos com o GeoGebra, bem como avaliar a capacidade de realizar conversões elementares entre registos. A diferença entre o número de participantes na investigação e o número de respostas obtidas deveu-se a constrangimentos verificados no momento da aplicação do formulário, nomeadamente ausências de alunos, bem como a situações em que alguns alunos não dispunham do material necessário para realizar a atividade nas condições previstas. Assim, embora a intervenção pedagógica tenha sido realizada com a turma, nem todos os alunos conseguiram participar nesta etapa específica da recolha de dados.

4.1.1. Percepções iniciais sobre o GeoGebra

Quando questionados sobre de que forma o GeoGebra poderia ajudar na aprendizagem da Matemática, todos os alunos responderam de forma positiva. A categoria de resposta dominante foi a da *visualização*: a maioria dos alunos associou espontaneamente o GeoGebra à possibilidade de ver os objetos matemáticos de forma dinâmica e precisa, o que vai ao encontro do que a literatura refere sobre as potencialidades do software (Henrique, 2017; Ponte et al., 2006). A análise das respostas permite, contudo, distinguir dois níveis de elaboração conceptual.

Num primeiro nível, encontram-se respostas de carácter instrumental, que valorizam o GeoGebra sobretudo como ferramenta de produção gráfica rápida: "facilita no desenho das funções, assim não perdemos muito tempo a fazê-las" (A15), "ao invés de desenhar os gráficos das funções no caderno, faço no GeoGebra o gráfico que preciso" (A4), ou "podemos usar o GeoGebra para estudar para os testes e para os exames" (A11). Estas

respostas revelam que, nesta fase inicial, alguns alunos percecionam o software essencialmente como um substituto eficiente dos meios convencionais de representação, sem ainda estabelecerem uma relação entre a representação gráfica e os conceitos matemáticos subjacentes. Este posicionamento corresponde ao que Hoyles e Noss (2003) designam como uso não produtivo da tecnologia em que o software é mobilizado para obter resultados sem que o aluno desenvolva a abstração e a generalização que se pretende.

Num segundo nível, surgem respostas que revelam uma intuição mais desenvolvida sobre a relação entre representações: "ajuda a visualizar o que estamos a aprender" (A5), "é mais preciso do que um gráfico feito à mão e ajuda em trabalhos feitos no PC" (A9), ou "pode fazer representação de várias funções, tendo assim possibilidades infinitas de exemplos diferentes de funções, ensinando-nos de uma maneira dinamizada esta matéria" (A7). A resposta de A7 é particularmente significativa pela sua elaboração final, em que o aluno acrescenta: "por realizar infinitas representações gráficas, acaba por ser mais fácil compreender as relações de como para existir uma função é necessário existir uma equação." Esta formulação, ainda que intuitiva e sem recurso à terminologia técnica, encerra uma ideia central da Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval (1993, 2009): a de que o mesmo objeto matemático pode ser representado em registos distintos e que compreender a Matemática implica reconhecer esse objeto nas suas diferentes representações.

O fato de um aluno chegar a esta formulação de forma espontânea, antes de qualquer instrução explícita sobre conversão de registos, é um indicador relevante de que a experiência com o GeoGebra pode ter potenciado uma reflexão metacognitiva sobre a natureza das representações matemáticas. A Figura 4 apresenta as respostas dos alunos.

Como achas que o GeoGebra pode ajudar enquanto estamos a aprender Matemática?	Como achas que o GeoGebra pode ajudar enquanto estamos a aprender Matemática?
15 respostas	15 respostas
O GeoGebra pode ajudar a aprender funções	Acho que o GeoGebra enquanto estamos a aprender matemática pode nos ajudar a visualizar o que estamos a aprender.
O geogebra pode ajudar na visualização de gráficos o que é bastante útil	O GeoGebra pode ajudá-lo a resolver rapidamente problemas relacionados com funções, e criar gráficos de diferentes funções.
Na minha opinião o Geogebra facilita no desenho das funções ,assim não perdemos muito tempo a fazê-las.	a perceber a representação grafica de funções e etc
sim,para criar gráficos de funções	Na minha opinião, o GeoGebra é útil, pois permite construir gráficos e figuras pela colocação de expressões algébricas.
Ajuda a entender melhor a matéria já que é mais preciso do que um gráfico feito à mão e ajuda em trabalhos feitos no PC.	Podemos resolver exercicios mais complexos e é uma otima ferramenta que nos auxilia na matematica. e é uma materia que nos auxilio
O GeoGebra pode ajudar em muitas coisas com por exemplo a aprender as funções	Pode, por exemplo, fazer representação de várias funções, tendo assim possibilidades infinitas de exemplos diferentes de funções, ensinando-nos assim de uma maneira dinamizada esta matéria.
Eu acho que o Geogebra vai nos ajudar a simplificar as tarefas de matematica.	Pode ajudar a entender como se formam funções, e também a representa-las.
Podemos usar o GeoGebra para estudar para os testes e para os exames	

Figura 4 - Respostas à questão: "Como achas que o GeoGebra pode ajudar enquanto estamos a aprender Matemática?"

4.1.2. Conversões realizadas durante a ambientação

As tarefas da ambientação implicavam três tipos de conversão que importa analisar separadamente.

Conversão da representação algébrica para a representação gráfica e identificação do ponto de interseção: A primeira tarefa de conversão consistia em identificar, a partir da representação gráfica no GeoGebra, o ponto de interseção de duas retas, o que implica observar o registo gráfico e traduzir a informação visual para o registo numérico/algébrico (conversão de gráfico para algébrico). Os resultados (Gráfico 1) mostram que 13 em 15 alunos (87%) identificaram corretamente o ponto (0,5 ; 1,5). Os dois erros registados são qualitativamente distintos: A10 respondeu "não há", revelando uma falha na leitura do gráfico, o aluno não reconheceu visualmente a interseção; A11 respondeu "no ponto 1,5", omitindo a coordenada x e revelando uma leitura incompleta do registo gráfico, possivelmente por falta de atenção à natureza bidimensional das coordenadas. A distribuição dos resultados é apresentada no Gráfico 1.

Se a resposta a pergunta anterior for sim, indica o ponto de interseção:

15 respostas

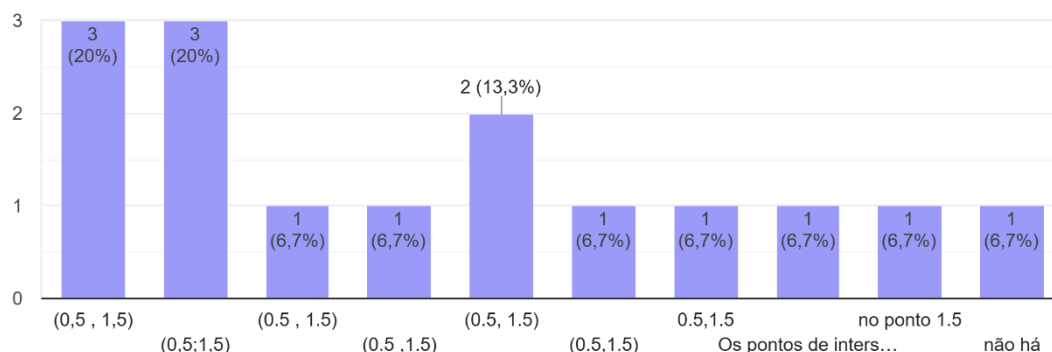


Gráfico 1 - Respostas ao ponto de interseção

Conversão da representação gráfica para a representação algébrica e equação da reta: A tarefa seguinte solicitava que os alunos escrevessem a equação da reta apresentada automaticamente pelo GeoGebra, primeiro na forma geral e depois na forma $y = ax + b$. Esta tarefa é mais exigente do ponto de vista da conversão, pois implica extrair informação do registo gráfico e chegar ao registo algébrico, precisamente a direção de conversão que Duval (1993) identifica como cognitivamente mais difícil.

A análise das respostas revela um padrão interessante: enquanto a grande maioria dos alunos conseguiu apresentar uma equação na forma $y = ax + b$ com estrutura reconhecível, a coerência entre as duas formas da equação foi muito heterogênea. Alguns alunos, como A3 e A8, apresentaram equações coerentes e matematicamente corretas nas duas formas. Outros, como A5 e A6, revelaram dificuldades significativas: A5 escreveu " $4x - 3y = -75$ " como forma geral e " $-3y = -4x - 75$ " como forma canônica, o que mostra que o aluno tentou isolar y mas não concluiu o processo de conversão algébrica; A6 apresentou " $3x + 1$ " e " $4x + 2$ ", duas expressões sem variável dependente explícita e com valores diferentes, o que sugere confusão entre a equação da reta e a sua representação.

Outro padrão relevante emerge na comparação entre alunos que leram os coeficientes diretamente do GeoGebra (obtendo valores decimais como " $y = 0,83x - 0,34$ ") e alunos que tentaram deduzir a equação analiticamente a partir de pontos identificados no gráfico (obtendo valores inteiros como " $y = -2x + 12$ "). Este contraste entre estratégias é, em si mesmo, um indicador do tipo de conversão que cada aluno realizou: os primeiros leram o registo gráfico via interface do software; os segundos realizaram uma conversão mais elaborada, extraindo pontos do gráfico e calculando declive e ordenada na origem. O Quadro 4 apresenta algumas das respostas dos alunos à indicação das equações.

Aluno	Equação definida automaticamente	Equação na forma $y = ax + b$
A3	$-x + 3y = 26$	$y = 0,33x + 8,67$
A5	$4x - 3y = -75$	$-3y = -4x - 75$
A1	$\text{Reta (A, B)} = 7.06X - 8.48y = 2.85$	$y = 0.83x - 0.34$

Quadro 4 – Conversões de gráfico para o algébrico

Conversão da representação algébrica para a representação gráfica e construção de retas paralelas: A tarefa de indicar as equações de duas retas paralelas exigia que os alunos construíssem no GeoGebra um par de retas com o mesmo declive, mas ordenadas na origem diferentes o que implica mobilizar simultaneamente o registo algébrico (escrever as equações) e o gráfico (verificar visualmente o paralelismo). Dos 15 alunos, 14 apresentaram duas equações com o mesmo declive, confirmando a compreensão da condição de paralelismo. A exceção foi A6, que escreveu " $y = 2x + 1$ "

e " $y = -x + 3$ ", duas retas com declives diferentes que, portanto, se intersectam, revelando que este aluno não associou o conceito algébrico de "mesmo declive" ao conceito gráfico de "retas paralelas". Este é um caso paradigmático de ausência de coordenação entre registos: o aluno conhece o conceito em cada registo de forma isolada, mas não os articula.

É ainda relevante notar que a maioria dos alunos utilizou declives inteiros e simples, preferindo equações como " $y = 2x + 3$ " e " $y = 2x + 7$ " a equações com coeficientes decimais como mostra a Figura 5. Isto sugere que, nesta fase, os alunos preferiram construir os exemplos analiticamente e depois verificar no GeoGebra, em vez de partir do gráfico para inferir as equações o que é consistente com o comportamento observado nas notas de campo, onde a maioria dos alunos começou a resolução no papel antes de passar para o software.

Indica as equações das duas retas na forma $y = ax+b$ 15 respostas	Indica as equações das duas retas na forma $y = ax+b$ 15 respostas
$y = 4x+3$ $y = 4x+10$	$3x+5; 3x+10$
$f(x)=2x+2$ $g=2x-y$	$y=2x+5; y=2x-2$
$y = -0.6x + 8.03$	$f: y = 2x + 3$ $g: y = 2x + 7$
$y=2x+1$	$x+y=12$ e $x+y=10$
$y=-x+3$	$y=4x$ $Y=4x+2$
$f(x)=x; g(x)=x+2$	$y=1.02x + 1,51$ /// $y= 1.02x +6.7$
$y=-2x+12$ e $y=-2x+4$	$f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 2x + 7$
$f(x)=-0.75x+5$ $g(x)=-0.75x+6$	$f: y=3x+5$ $g: y=3x+64$

Figura 5 - Respostas à questão: "Indica as equações das duas retas na forma $y = ax+b$ "

Confirmação da ausência de interseção com as ferramentas do GeoGebra: A última tarefa de conversão da ambientação solicitava que os alunos explicassem como confirmar no GeoGebra que duas retas paralelas não têm ponto de interseção. A maioria dos alunos demonstrou conhecer e saber utilizar a ferramenta "Interseção de dois objetos" e interpretar o símbolo "?" como indicador de inexistência de solução. As respostas mais elaboradas apresentadas na Figura 6 revelam uma leitura do registo gráfico com reenvio para o significado algébrico: "verificando que não há ponto de interseção no sítio onde diz interseção de dois objetos quando as retas são paralelas, este pois um ponto de interrogação à frente do igual na interseção" (A2), ou "fui à ferramenta de interseção e cliquei nas duas retas, como na caixa de entrada surgiu um ponto de interrogação, ou seja, não há um ponto de interseção" (A9). Estas respostas evidenciam que estes alunos já mobilizam o GeoGebra como ferramenta de validação

o que, no quadro de Duval (1993), corresponde a uma utilização do registo gráfico para confirmar ou refutar uma propriedade do registo algébrico.

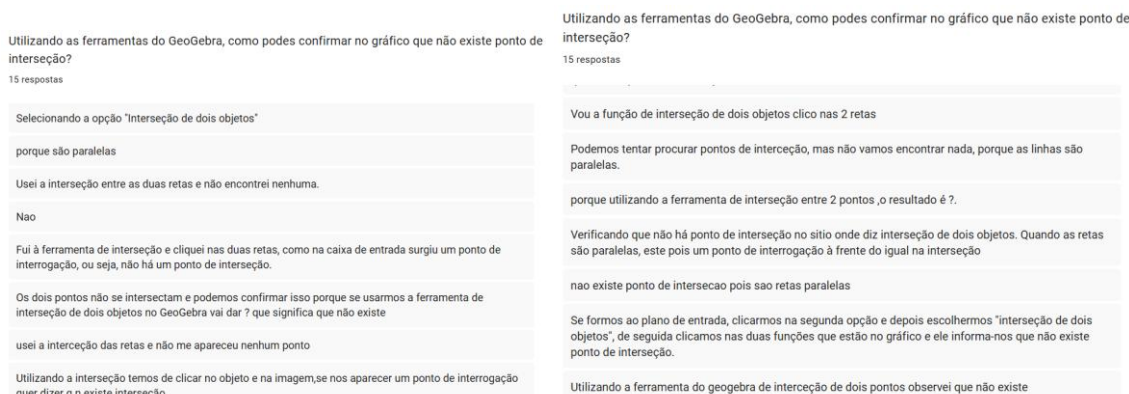


Figura 6 - Respostas à questão: "Utilizando as ferramentas do GeoGebra, como podes confirmar no gráfico que não existe ponto de interseção?"

4.1.3. Avaliação do contributo do GeoGebra após a ambientação

Quando questionados sobre se o GeoGebra os ajudou a compreender melhor a relação entre equações e gráficos, 80% dos alunos (12/15) respondeu "Sim" e 20% (3/15) respondeu "Em parte". Nenhum aluno respondeu negativamente, como ilustra o Gráfico 2.

O uso do GeoGebra ajudou-te a compreender melhor a relação entre equações e gráficos?
15 respostas

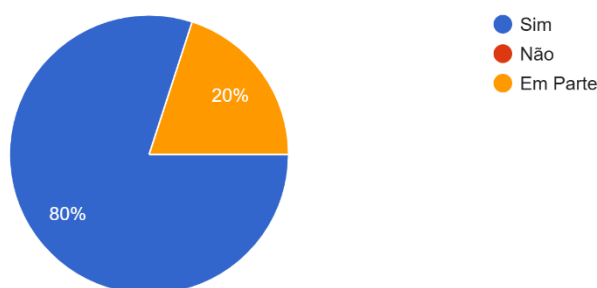


Gráfico 2 - Respostas à questão: "O uso do GeoGebra ajudou-te a compreender melhor a relação entre equações e gráficos?"

Nas justificações, na Figura 7, a visualização surge novamente como razão dominante, mas com diferentes graus de elaboração. As respostas mais superficiais limitam-se a confirmar a utilidade sem a explicar: "ajudou pois com ele pude aprender melhor sobre o assunto" (A11). As mais elaboradas estabelecem já uma relação explícita entre os

dois registos: "sim, pois diz-nos quais são as equações das retas, bem como os seus pontos de interseção e, mediante os pontos escolhidos, dá-nos a reta correspondente" (A2), ou "por realizar infinitas representações gráficas, acaba por ser mais fácil compreender as relações de como para existir uma função é necessário existir uma equação" (A7). Uma resposta merece destaque pela sua dimensão de memória e retenção: "No teste, não sabia resolver uma questão, mas lembrei como a fiz no GeoGebra e a consegui resolver" (A6 do segundo formulário) o que é consistente com o que afirmam Granito e Chernobilsky (2012) sobre a maior retenção de informação associada ao uso pedagógico da tecnologia.

Justifica brevemente 14 respostas	Justifica brevemente 14 respostas
Ajudou-me a entender como são feitos os gráficos de cada tipo de funções.	ajudou, pois com ele pude aprender melhor sobre o assunto
Ajudou, porque nós conseguimos mexer no gráfico e visualizar melhor :)	sim pois pude visualizar o que fiz
Ajudou-me a compreender como se põe uma reta num gráfico.	É mais fácil compreender as equações e gráficos quando podemos visualizar.
sim, pois através do GeoGebra aprendi melhor como por uma reta num gráfico e identificar mais coisas.	é simples e muito divertido
Ajudou pois conseguimos visualizar como cada equação fica em gráfico	sim, pois diz-nos quais são as equações das retas, bem como os seus pontos de interseção e, mediante os pontos escolhidos, dá-nos a reta correspondente.
ajudou porque é uma forma de aprender divertidamente.	O geogebra ajuda nos muito na parte de construção de graficos, e como nos preferimos aprender fazendo os graficos no geogebra. e tambem e aprendemos a utilizar uma ferramenta q futuramente podemos usar
ajudou, pois com ele pude aprender melhor sobre o assunto	Sim, pois por realizar infinitas representações gráficas, acaba por ser mais fácil compreender as relações de como para existir uma função é necessário existir uma equação.
sim pois pude visualizar o que fiz	Sim, pois deu-me a oportunidade de entender melhor sobre o assunto.
É mais fácil compreender as equações e gráficos quando podemos visualizar.	

Figura 7 - Justificações à questão anterior

4.2. Análise da ficha de trabalho sobre sistemas de equações

A ficha de trabalho foi respondida por 12 alunos menos três do que o formulário de ambientação, o que se deve a ausências verificadas no dia de aplicação. É ainda de referir que um dos participantes (A12) submeteu o formulário com um desfasamento de 14 dias relativamente aos restantes colegas (Pois estava de Erasmus), que responderam imediatamente após a sessão de trabalho. Esta circunstância pode ter influenciado as respostas de A12 comparativamente às dos colegas que responderam em contexto de aula, devendo as suas respostas ser lidas com essa ressalva.

4.2.1. Problema contextualizado: conversão da linguagem natural para a representação algébrica e da representação algébrica para a representação gráfica.

Esta tarefa exigia que os alunos partissem de um enunciado em linguagem natural, um problema sobre a venda de sumos e sandes numa feira na escola, para definir incógnitas, construir o sistema de equações e representá-lo graficamente no GeoGebra, interpretando depois a solução no contexto do problema.

Definição das incógnitas: A primeira subtarefa (definir claramente as incógnitas) constitui uma conversão do registo em linguagem natural para o algébrico, na medida em que implica extrair do enunciado textual os elementos que vão ser representados simbolicamente. Os resultados presentes na Figura 8 mostram que a maioria dos alunos realizou esta conversão corretamente, atribuindo x aos sumos e y às sandes. Há, contudo, dois casos que merecem atenção: A7 inverteu a atribuição convencional (" x que é a quantidade de sandes e y que é a quantidade de sumo"), o que não constitui um erro matemático, mas revela que a escolha das incógnitas não foi orientada por nenhum critério explícito. A11 apresentou uma resposta incompleta: "as incógnitas são o número de sumos e de sandes" sem a formalização simbólica, o que sugere dificuldade na conversão para o registo algébrico propriamente dito.

<p>Define Claramente as incógnitas:</p> <p>12 respostas</p> <p>x=sumo y=sandes</p> <p>x e os sumos Y sao as sandes</p> <p>Sumos = x Sandes= y</p> <p>Sumo = x;Sandes = y</p> <p>x-sumo y-sandes</p> <p>As icógnitas são o número de sumos e de sandes</p> <p>x são os sumos e as sandes são o y</p> <p>As incógnitas são x que é a quantidade de sandes e o y que é a quantidade de sumo</p>	<p>Define Claramente as incógnitas:</p> <p>12 respostas</p> <p>Sumo = x;Sandes = y</p> <p>x-sumo y-sandes</p> <p>As icógnitas são o número de sumos e de sandes</p> <p>x são os sumos e as sandes são o y</p> <p>As incógnitas são x que é a quantidade de sandes e o y que é a quantidade de sumo</p> <p>x - sumo y - sandes</p> <p>x=sumo y=sandes</p> <p>y=sumo,x=sandes</p> <p>Sumo=x; Sandes=y</p>
--	---

Figura 8 - Respostas à questão de definição de incógnitas

As produções dos alunos revelam abordagens distintas que ilustram diferentes graus de domínio desta conversão. O primeiro exemplo na Figura 9 evidencia uma conversão bem conseguida do registo em linguagem natural para o algébrico: o aluno identificou explicitamente o significado de cada incógnita, construiu o sistema corretamente e resolveu-o pelo método da substituição, demonstrando domínio do tratamento dentro do registo algébrico. No quadro de Duval (1993, 2009), este aluno não apenas realizou a conversão entre registos como mobilizou de seguida um tratamento algébrico rigoroso o que corresponde a um nível de coordenação entre registos já relativamente desenvolvido.

Handwritten mathematical work on grid paper showing the solution of a system of linear equations using substitution. The work is as follows:

$$\begin{aligned} x &= \text{sumos} \\ y &= \text{mandes} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 2x + 3y = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 42 - y \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ 2(42 - y) + 3y = 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 84 - 2y + 3y = 108 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ -2y + 3y = 108 - 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 42 - 24 = \\ y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 24 \end{cases} \quad (18, 24)$$

Figura 9 - Resposta do aluno A2

O segundo exemplo na Figura 10 revela uma dificuldade distinta: o aluno apresentou o sistema de equações e a resposta final, omitindo o processo de resolução. Esta produção sugere que o aluno pode ter obtido a solução diretamente através do GeoGebra, sem passar pelo tratamento algébrico. Do ponto de vista da TRRS, isto é significativo: o aluno realizou a conversão da linguagem natural para algébrico ao construir o sistema, mas não evidencia ter realizado o tratamento dentro do registo algébrico, usando o registo gráfico como atalho para a solução em vez de como complemento da resolução analítica. Esta situação vai ao encontro do que Hoyles e Noss (2003) alertam sobre o risco de a tecnologia ser usada para evitar pensar em vez de promover a abstração.

Handwritten mathematical work on grid paper showing the system of equations and the final solution. The work is as follows:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 108 \\ x + y &= 42 \\ (18, 24) \\ 18 &= x \\ 24 &= y \end{aligned}$$

Figura 10 - Resposta do aluno A5

O contraste entre estas duas produções ilustra a assimetria cognitiva que Duval (1993) descreve: a capacidade de realizar uma conversão não implica necessariamente a capacidade de coordenar os registos de forma plena. O primeiro aluno coordena os registos, parte do enunciado, formaliza algebricamente e resolve dentro desse registo; o segundo aluno converte mas não coordena, salta do enunciado para a solução sem evidenciar o percurso intermédio.

Representação gráfica e interpretação do ponto de interseção: As respostas à questão sobre a relação entre o ponto de interseção e o contexto do problema revelam diferentes graus de coordenação entre registos. As respostas mais elaboradas articulam explicitamente o registo gráfico, o algébrico e o contextual: "As coordenadas do ponto de interseção é a solução do problema, quando o X é o número de sumos vendidos e o Y é o número de sandes vendidos. Os resultados do GeoGebra são iguais aos resultados de sistema de equações, e também porque a interseção das funções é a resolução" (A12). Esta resposta é notável porque o aluno articula três registos em simultâneo, o gráfico (ponto de interseção), o algébrico (sistema de equações) e a linguagem natural (contexto do problema) e sublinha que os dois registos formais conduzem ao mesmo resultado. Trata-se precisamente da coordenação de registos que Duval (2009) considera como condição de compreensão matemática genuína.

Por contraste, respostas como "é o resultado do sistema" (A8) ou "pois só têm um ponto de interseção" (A9) revelam uma compreensão funcional, mas não coordenada o aluno identifica a solução sem a conseguir articular entre os diferentes registos ou com o contexto do problema, como indica a Figura 11. Marques e Caldeira (2018) descrevem esta tendência como a dificuldade dos alunos em relacionar os conceitos lecionados em aula com o quotidiano, o que torna o tema desinteressante e dificulta a sua aprendizagem.

Representa graficamente o sistema no GeoGebra e Explica:

1. Como o ponto de interseção se relaciona com o contexto do problema;
2. Por que razão a solução encontrada faz sentido no contexto

12 respostas

1. O ponto de interseção se relaciona com a solução obtida no sistema.
2. A solução encontrada faz sentido no contexto pois ambos os valores de "x" e "y" são valores positivos, e porque quando trocamos os valores das incógnitas com os resultados as equações apresentam o valor correto.

as Coordenadas que nos foram dadas correspondem ao quanto de sandes e de sumos que foram vendidos

1. O ponto de interseção corresponde respetivamente aos valores de x sendo os sumos e y as sandes.
2. Na feira escolar foram vendidos 24 sumos e 18 sandes.

Relaciona-se já que a interseção é o resultado do sistema de equações.

É o resultado do sistema

O ponto de interseção das duas retas representa a quantidade de sumos e de sandes vendidas ao mesmo tempo.

Representa graficamente o sistema no GeoGebra e Explica:

1. Como o ponto de interseção se relaciona com o contexto do problema;
2. Por que razão a solução encontrada faz sentido no contexto

12 respostas

O ponto de interseção relaciona-se com o contexto porque é a solução do problema, a solução faz sentido porque é um sistema possível determinado.

O ponto de interseção se relaciona com o problema pois é a solução e a solução faz sentido neste contexto porque é um sistema possível determinado

1. As coordenadas do ponto de interseção é o solução de problema, quando o X é o numero de sumos vendidos, e o Y é o numero de sandes vendidos.
2. Os resultados de GeoGebra são iguais aos resultados de sistema de equações, e também porque a interseção das funções é a resolução.

1. O ponto de interseção relaciona-se à solução do sistema.
2. A solução encontrada faz sentido no contexto pois os valores "x" e "y" como são sumos e sandes faz ambos os valores serem positivos.

Pois só têm um ponto de interseção

A razão da solução encontrada faz sentido no contexto pois as duas retas se intersectam, e a expressão algébrica faz com que elas se intersectem.

Figura 11 - Respostas à questão sobre o ponto de interseção no contexto

No que tange à representação gráfica do sistema no GeoGebra, 11 dos 12 pares construíram corretamente as duas retas correspondentes às equações do sistema, identificando visualmente o ponto de interseção como solução. Este resultado é positivo: a conversão do registo algébrico para o gráfico foi realizada com sucesso pela grande maioria dos participantes, como apresentado na Figura 12, o que sugere que a fase de ambientação ao GeoGebra cumpriu o seu objetivo de preparar os alunos para mobilizar o software como ferramenta de representação matemática.

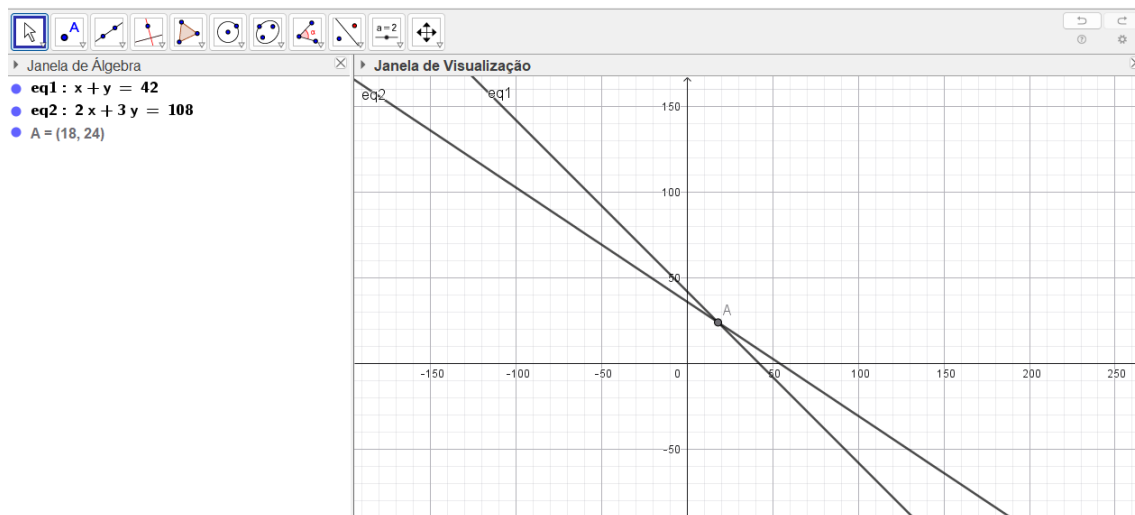


Figura 12 - Exemplo de construção correta no GeoGebra realizada por um dos pares

No quadro da TRRS, estas produções evidenciam uma conversão bem conseguida do registo algébrico para o gráfico: os alunos partem das equações construídas na sub tarefa anterior e representam-nas graficamente, reconhecendo o ponto de interseção como a solução do sistema. Esta articulação entre os dois registos, algébrico e gráfico, corresponde precisamente ao tipo de coordenação que Duval (1993, 2009)

identifica como condição de compreensão matemática genuína. É ainda de notar que, embora todas as construções corretas sejam matematicamente equivalentes, foi possível observar variações na forma como os pares introduziram as equações na janela de entrada do GeoGebra. Alguns utilizaram a forma geral, outros a forma $y = ax + b$. Esta variação, de natureza técnica e não matemática, não afetou a correção das construções nem a identificação da solução.

O único caso incorreto, apresentado na Figura 13, merece análise específica. Um par omitiu, ou esqueceu, a variável “y” numa das equações ao introduzi-la na janela de entrada do GeoGebra, escrevendo, por exemplo, “ $2x + 3 = 5$ ” em vez de “ $2x + 3y = 5$ ”, o que resultou numa representação gráfica incorreta. Esta situação é analiticamente relevante do ponto de vista da TRRS: o erro não revela uma incompreensão do conceito matemático em si, mas antes uma falha na conversão entre o registo algébrico escrito e a sintaxe do GeoGebra. O que Hoyles e Noss (2003) descrevem como a sobrecarga cognitiva associada à linguagem do software. O par sabia o que queria representar, mas não conseguiu traduzir corretamente essa intenção para o registo do software, resultando numa representação gráfica que não correspondia ao sistema pretendido.

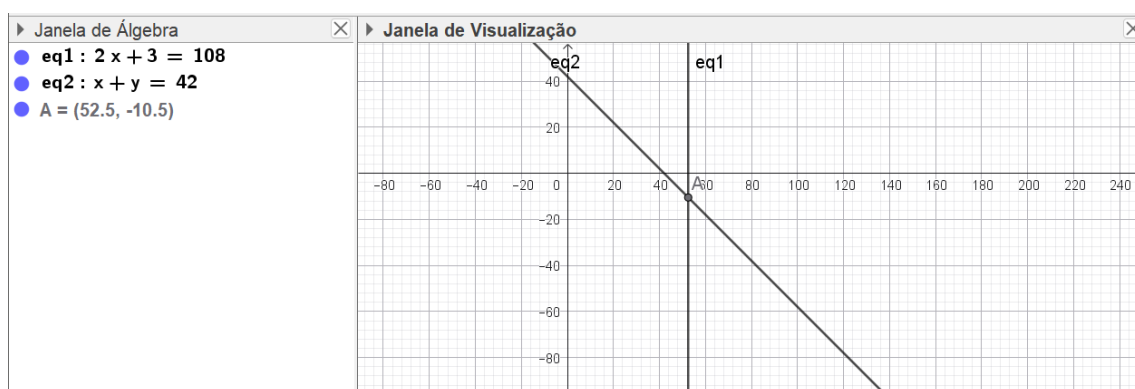


Figura 13 - Exemplo de construção incorreta no GeoGebra realizada por um dos pares

Este caso reforça a pertinência da fase de ambientação: mesmo após três tempos letivos de familiarização com o software, a sintaxe do GeoGebra continuou a constituir um obstáculo pontual para alguns pares, confirmando o que referem Dias e Scortegagna (2025) sobre a necessidade de uma familiarização prévia consistente com o ambiente do software antes da realização de tarefas matemáticas mais exigentes.

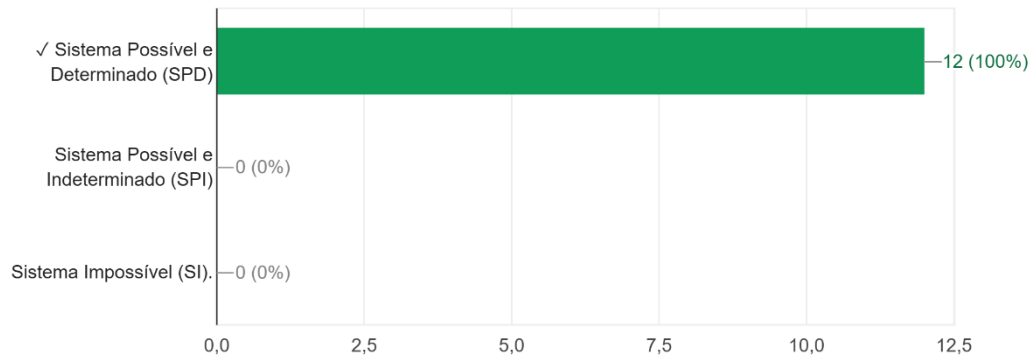
4.2.2. Classificação dos sistemas: conversão de algébrico para gráfico

A classificação dos sistemas quanto ao número de soluções constitui a tarefa que mais diretamente avalia a conversão do registo gráfico para o algébrico/conceitual: os alunos

tinham de observar a posição relativa das retas no GeoGebra e inferir a classificação do sistema correspondente.

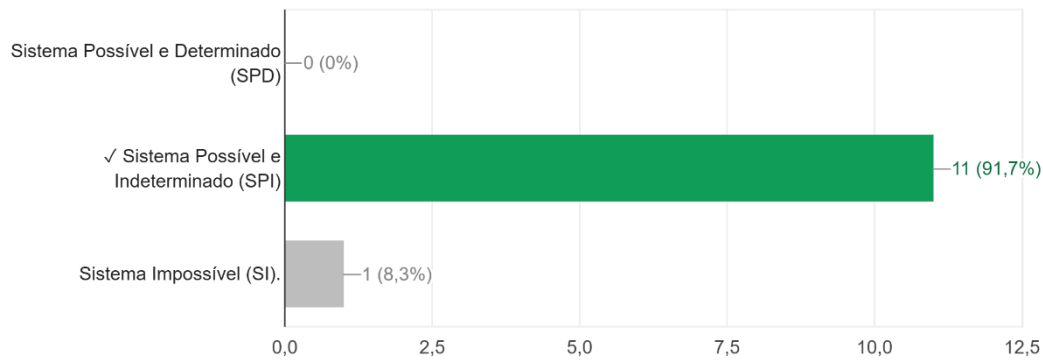
Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

12 / 12 respostas corretas



Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

11 / 12 respostas corretas



Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

11 / 12 respostas corretas

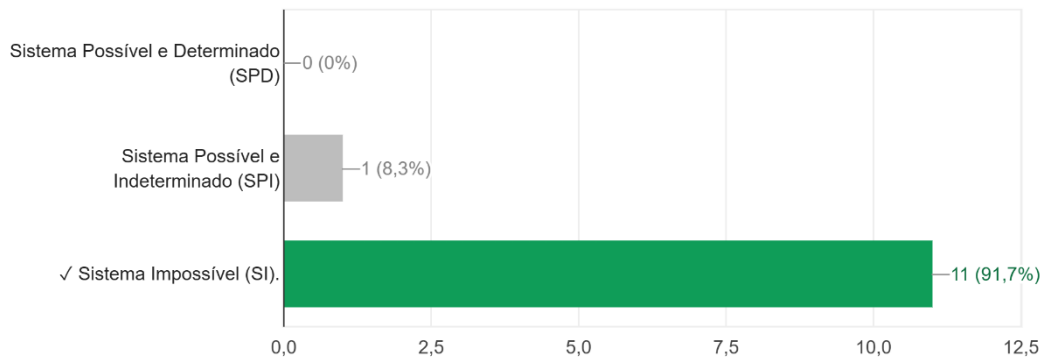


Gráfico 3 - Classificações dos três sistemas

O Gráfico 3 mostra taxas de acerto elevadas nos três sistemas de equações (100% no Sistema 1, 92% no Sistema 2 e 92% no Sistema 3). Contudo, a análise dos erros e das justificações revela padrões qualitativos que os dados quantitativos, por si só, não captam.

Em relação ao Sistema 1, a totalidade dos pares classificou-o corretamente. Este resultado é, à primeira vista, positivo. Contudo, a análise das construções no GeoGebra revela uma nuance importante: Como pode ser visto na Figura 14, um par construiu um sistema diferente do que estava no enunciado introduzindo equações distintas das fornecidas, obtendo por coincidência duas retas que se intersectam num único ponto, e classificou corretamente o sistema como SPD com base nessa construção incorreta.

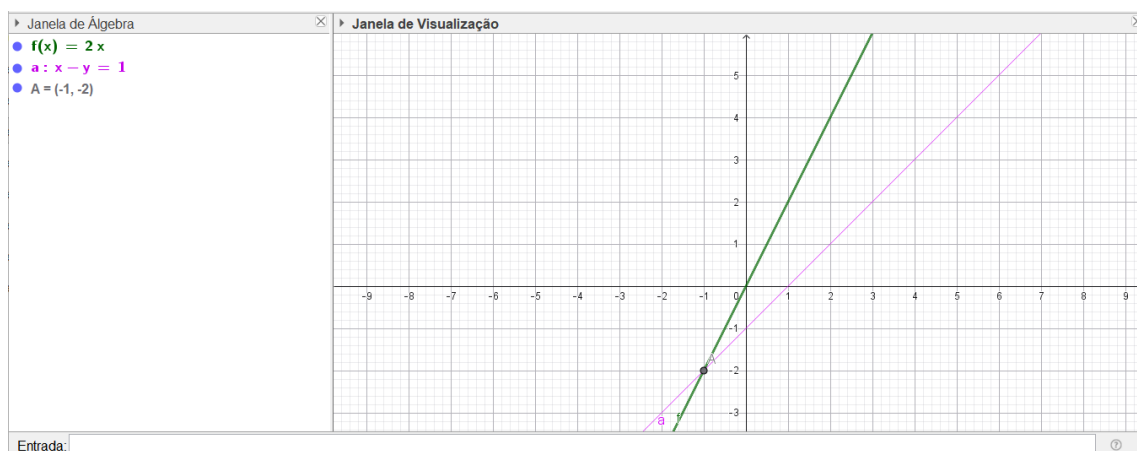


Figura 14 - Construção incorreta no GeoGebra realizada por um dos pares

Do ponto de vista da TRRS, esta situação é analiticamente relevante. A classificação correta não resultou de uma conversão genuína do registo algébrico para o gráfico, mas de uma construção errada que produziu casualmente o resultado esperado. Duval (1993, 2009) alerta precisamente para este tipo de situação: uma resposta correta não é necessariamente evidência de coordenação entre registos. O par acertou na classificação mas pelo motivo errado, não coordenou os registos, apenas obteve um resultado coincidente. Este caso reforça a importância de analisar não apenas as respostas finais mas também os processos e as construções que as sustentam, sob pena de se sobrestimar o grau de compreensão real dos alunos.

Nos sistemas 2 e 3, a taxa de acerto foi de 92%, correspondendo a 11 dos 12 pares em cada sistema. A maioria dos pares realizou corretamente a conversão do registo algébrico para o gráfico, construindo as retas adequadas no GeoGebra e identificando a posição relativa correspondente: retas coincidentes no caso do sistema possível indeterminado e retas paralelas no caso do Sistema Impossível. As Figuras 15 e 16 exemplificam construções feitas pelos alunos.

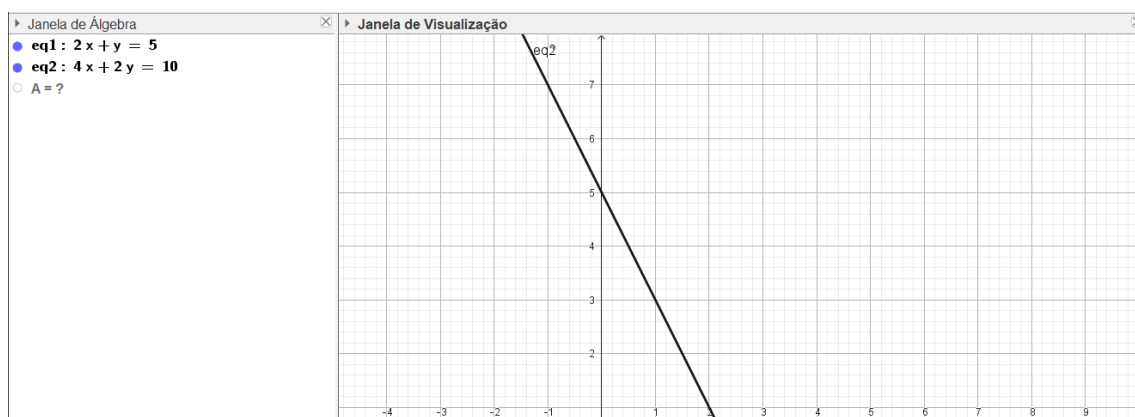


Figura 15 - Construção correta no GeoGebra do Sistema 2 realizada por um dos pares

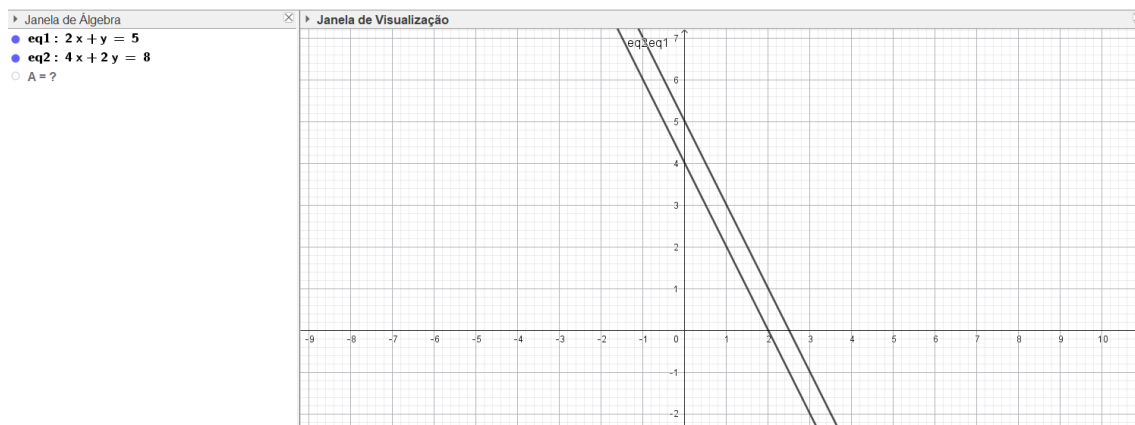


Figura 16 - Construção correta no GeoGebra do Sistema 3 realizada por um dos pares

O único erro registado nos dois sistemas foi cometido pelo mesmo par, que submeteu o mesmo ficheiro GeoGebra correspondente ao Sistema 1 nas respostas às questões 2 e 3. Este equívoco sugere que o par não terá percebido que se tratava de três sistemas distintos, construindo e submetendo a mesma representação gráfica para os três casos. Como consequência, as classificações apresentadas para os Sistemas 2 e 3 estavam incorretas. Do ponto de vista da TRRS, este caso não revela necessariamente uma dificuldade na conversão do registo algébrico para o gráfico. Revela antes uma falha na leitura e interpretação do enunciado, ou seja, uma dificuldade na conversão do registo em linguagem natural para o algébrico que antecede a própria construção gráfica. O par não chegou a realizar a conversão para o gráfico porque não partiu das equações corretas, o que confirma que a conversão de linguagem natural para algébrico continua a ser, como sublinha Duval (2009), a mais exigente do ponto de vista cognitivo.

Justifica sua resposta	Justifica sua resposta
12 respostas	12 respostas
O sistema é possível e indeterminado pois existem soluções infinitas para o problema.	Pois as retas são coincidentes.
e possível indeterminada, pois ha infinitas solucoes	Não tem interseção
Ela é possível indeterminada, pois pode ter mais que uma solução.	É um SPI porque as retas são coincidentes logo tem pontos infinitos em comum
Pois as retas são coincidentes.	porque tem infinitas soluções e porque são concorrentes
Não tem interseção	Pois na representação gráfica uma fica em cima da outra oque representa que não há um ponto de interseção
É um SPI porque as retas são coincidentes logo tem pontos infinitos em comum	As retas são concorrentes.
porque tem infinitas soluções e porque são concorrentes	O Sistema 2 é um Sistema Possível e Indeterminado pois existem infinitas soluções para o problema
Pois na representação gráfica uma fica em cima da outra oque representa que não há um ponto de interseção	Pois têm infinitas soluções e ambas são concorrentes
	Porque as retas são coincidentes.

Figura 17 - Justificações à classificação do Sistema 2

Justifica sua resposta	Justifica sua resposta
12 respostas	12 respostas
Pois para existir um sistema impossível, não pode existir nenhuma solução (não existe ponto de interseção, já que quando representado as retas são paralelas).	Têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas.
quando não possui nenhuma solução	Não tem interseção
É um sistema impossível porque as retas são infinitas	É um SPI porque as retas são coincidentes logo tem pontos infinitos em comum
Têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas.	porque as retas paralelas
Não tem interseção	Pois não se interseção em nenhum ponto
É um SPI porque as retas são coincidentes logo tem pontos infinitos em comum	As retas são paralelas.
porque as retas paralelas	O Sistema 3 é um Sistema Impossível pois as duas equações, representadas em um gráfico, são paralelas.
Pois não se interseção em nenhum ponto	Pois são retas paralelas
	Porque não se interssetam.

Figura 18 - Justificações à classificação do Sistema 3

A análise das justificações corretas, nas Figuras 17 e 18, revelam também uma gradação interessante. Algumas respostas justificam a classificação apenas pela observação gráfica: "porque as retas são coincidentes" (A10 sobre S2) ou "porque não se intersectam" (A10 sobre S3). Outras integram o argumento gráfico com o argumento algébrico: "o sistema é possível e indeterminado pois existem soluções infinitas para o problema, pois as duas equações apresentam exatamente os mesmos valores, onde a única diferença é que numa delas multiplica-se tudo por dois" (A3 sobre S2). Esta última resposta constitui uma evidencia de uma coordenação entre o registo gráfico (retas coincidentes) e o registo algébrico (equações proporcionais), o que corresponde ao nível de compreensão que Duval (2009) considera como objetivo central do ensino da Matemática.

É também relevante assinalar um erro terminológico que surge em várias respostas presentes nas Figuras 19, 20 e 21: A utilização do termo "concorrentes" para descrever retas coincidentes (A5 e A9 no Sistema 2), quando o termo correto seria "coincidentes". Esta imprecisão terminológica não se refletiu em erros de classificação, os alunos reconheceram o objeto gráfico corretamente, mas evidencia que a coordenação entre o registo gráfico e o registo em linguagem natural é ainda frágil em alguns alunos, especialmente no que respeita à formalização da descrição das posições relativas das retas.

Em relação ao Sistema 1, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico?

12 respostas

Não há nenhuma relação entre os coeficientes.
Não há relação
Não existe relação entre os coeficientes no gráfico.
Nao ha relação entre os coeficientes
Não há relação.
No gráfico as duas retas cruzam se num ponto que a solução é a mesma
sim, porque a segunda equação é o dobro da primeira
não há relação
Não noto nenhuma relação entre os Coeficientes, no Sistema 1.

Figura 19 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 1

Em relação ao Sistema 2, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico?

12 respostas

Sim, pois as duas equações apresentam exatamente os mesmos valores, onde a única diferença é que numa delas multiplica-se tudo por dois. Com isto, faz com que as equações apresentem exatamente a mesma função, não existindo assim uma solução específica (já que existem infinitas).
Ha uma relação, pois uma reta sobre poe a outra
A relação entre os coeficientes é que o primeiro coeficiente a multiplicar por 2 fica igual ao segundo
Sim, e influencia no gráfico pois, as suas equações são diretamente proporcionais.
Os coeficientes determinam a posição e a inclinação das retas, o que define como elas aparecem no gráfico e quantas soluções o sistema tem.
sim, porque o coeficiente de baixo é o dobro do de baixo
sim,multiplicando a primeira linha por 2 chegamos á 2 linha.isso influencia no grafico tornando as retas concorrentes

Em relação ao Sistema 2, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico?

12 respostas

gráfico e quantas soluções o sistema tem.
sim, porque o coeficiente de baixo é o dobro do de baixo
sim,multiplicando a primeira linha por 2 chegamos á 2 linha.isso influencia no grafico tornando as retas concorrentes
Sim, pois multiplica-se por 2 logo elas são exatamente iguais
Sim, na segunda equação todos coeficientes são duplicados em relação á primeira equação
Sim noto, pois as duas equações apresentam as mesmas soluções, uma das equações é o dobro da outra equação oque faz as duas equações ,representadas num gráfico, serem iguais entre si.
Sim,pois quando multiplicamos a primeira linha por 2,chegamos á segunda linha fazendo elas serem concorrentes.
Os coeficientes são diretamente proporcionais ,fazendo com que as retas sejam coincidentes.

Figura 20 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 2

Em relação ao Sistema 3, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico?

12 respostas

Sim, pois o declive apresenta (quando simplificado) o mesmo valor, fazendo com que as retas sejam paralelas.
sim , pois as retas ficaram paralelas.
A relação entre os coeficientes é que o primeiro coeficiente multiplicado por 2 fica igual ao segundo
São iguais isso faz com que as retas sejam paralelas.
Os coeficientes determinam a posição e a inclinação das retas, o que define como elas aparecem no gráfico e quantas soluções o sistema tem.
sim, porque o coeficiente de baixo é o dobro do de baixo
como o sistema não esta equilibrado vai ser impossível,o grafico vai ser constituído por duas retas paralelas.
Não existe

Em relação ao Sistema 3, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico?

12 respostas

Os coeficientes determinam a posição e a inclinação das retas, o que define como elas aparecem no gráfico e quantas soluções o sistema tem.
sim, porque o coeficiente de baixo é o dobro do de baixo
como o sistema não esta equilibrado vai ser impossível,o grafico vai ser constituído por duas retas paralelas.
Não existe
Tudo exceto o resultado é duplicado, o declive da reta é igual, quando a coordenada na origem é diferente.
Sim noto, as duas equações têm um declive igual.
Não tem nenhuma relação
O declive é o mesmo.

Figura 21 - Respostas sobre a relação entre coeficientes no Sistema 3

4.2.3. Exploração do parâmetro k : conversão dinâmica entre registos

A tarefa de exploração do parâmetro k foi a que mais diretamente explorou a potencialidade específica dos ambientes de matemática dinâmica, como mostram as respostas nas Figuras 22, 23 e 24: a possibilidade de manipular um parâmetro e observar em tempo real o efeito dessa manipulação no gráfico, inferindo depois a relação algébrica subjacente. Esta é, no fundo, uma forma de conversão contínua e iterativa entre o registo algébrico e o gráfico, em ambas as direções em simultâneo.

Para que valores de k o sistema é impossível?

12 respostas

O sistema é impossível em todos os valores, menos no 2.

o k é impossível de menos infinito a mais infinito exceto no valor de 2.

Se o valo for negativo.

Para qualquer valor diferente de 2.

Não existe valor de K para isso acontecer.

se o k for um número diferente de 2

para todos os valores de k menos 2

Os valores em que k é impossível é -5,-4,-3,-2,-1,0,1,3,4,5

Qualquer valor a exceto a 2.

Figura 22 - Respostas à pergunta: "Para que valores de k o sistema é impossível?"

Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e indeterminado? Justifica.	Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e indeterminado? Justifica.
12 respostas	12 respostas
2	2.
Sim, quando $k=2$, pois as duas equações (quando simplificadas) são exatamente iguais.	Não existe valor de K para isso acontecer.
O valor é 0	sim se for 2
2.	Sim, pois quando o valor de k é 2 as retas são exatamente iguais oque faz com que seja um sistema possível e indeterminado
Não existe valor de K para isso acontecer.	Sim, quando o k é igual a 2
sim se for 2	Sim, o único valor de k que faz o sistema ser possível e indeterminado é o 2 pois o valor 2 faz as duas equações do sistema serem iguais.
Sim, pois quando o valor de k é 2 as retas são exatamente iguais oque faz com que seja um sistema possível e indeterminado	Dois-2
Sim, quando o k é igual a 2	É o 2.

Figura 23 - Respostas à pergunta: “Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e indeterminado? Justifica.”

Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e determinado? Justifica.	Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e determinado? Justifica.
12 respostas	12 respostas
Não, pois o sistema será impossível em todos os valores de k menos do 2, que será um sistema possível e indeterminado. (As duas retas nunca se cruzam em nenhum ponto).	Não, para ser indeterminado, as retas tinham de ser coincidentes (iguais). Mas aqui os termos independentes são diferentes (-2 e -1), então nunca coincidem
nao existe nenhum valor pois as retas sao paralelas	não
Qualquer valor positivo	nao pois as equações são iguais só varia o valor de k
Não, pois as equações que constituem o sistema são iguais, logo os seus resultados são iguais.	Não há nenhum pois não existe um ponto de interseção
Não, para ser indeterminado, as retas tinham de ser coincidentes (iguais). Mas aqui os termos independentes são diferentes (-2 e -1), então nunca coincidem	Não existe, porque as retas vão sempre ser iguais.
não	Não, pois ao alterar o valor de k faz a equação ficar sempre paralela a outra equação assim não tendo um valor de k que faça o sistema ser possível e determinado.
nao pois as equações são iguais só varia o valor de k	Não pois são sempre paralelas
Não há nenhum pois não existe um ponto de interseção	Não pois os coeficientes são iguais.

Figura 24 - Respostas à pergunta: “Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e determinado? Justifica.”

A análise das respostas à questão sobre para que valores de k o sistema é impossível permite identificar três perfis de resposta. Um primeiro perfil, correspondente a 67% dos alunos (8/12), revelou uma compreensão correta e geral: "para qualquer valor diferente de 2" (A1), "de menos infinito a mais infinito exceto no valor de 2" (A4), ou "qualquer valor a exceto o 2" (A12). Um segundo perfil, correspondente a A3 e A6, revelou uma compreensão parcialmente correta, mas com limitações: A3 escreveu "em todos os valores menos no 2", correto em substância, mas sem a generalidade formal que a resposta exigiria; A6 respondeu "se o valor for negativo", evidenciando uma leitura parcial e incorreta do gráfico, possivelmente baseada na observação de alguns casos particulares sem generalização. Um terceiro perfil, correspondente a A7 e A8, revelou dificuldades mais profundas: A7 listou valores específicos (" $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5$ "), o que mostra que o aluno compreendeu a ideia, mas não conseguiu generalizar para uma expressão algébrica; A8 respondeu "Não existe valor

de K para isso acontecer", o que indica uma falha na compreensão fundamental da tarefa.

A gradação de elaboração nas respostas observadas na Figura 25 sobre a relação entre o valor de k e a posição relativa das retas é particularmente reveladora. O espectro vai desde respostas com apenas 3 palavras, "o valor k " (A11), passando por respostas de 16 palavras com estrutura binária simples "quando k é 2 são retas coincidentes; quando k assume valores diferentes as retas são paralelas" (A1) até respostas de 62 palavras com articulação plena entre os dois registos, "à medida que o valor de k varia, as retas são sempre paralelas uma à outra (menos na situação onde $k = 2$, pois nessa situação as equações são exatamente iguais). No resto das situações elas são paralelas pois o declive acaba por ser sempre o mesmo, onde a única coisa que varia é o valor de k , ou seja, a ordenada na origem" (A3). Esta última resposta é exemplar do ponto de vista da coordenação de registos: o aluno articula a variação do parâmetro algébrico (k) com a sua consequência no registo gráfico (posição das retas) e explica o mecanismo algébrico subjacente (o declive permanece constante, apenas a ordenada na origem varia). Trata-se precisamente da coordenação que Duval (2009) descreve como condição de compreensão matemática genuína.

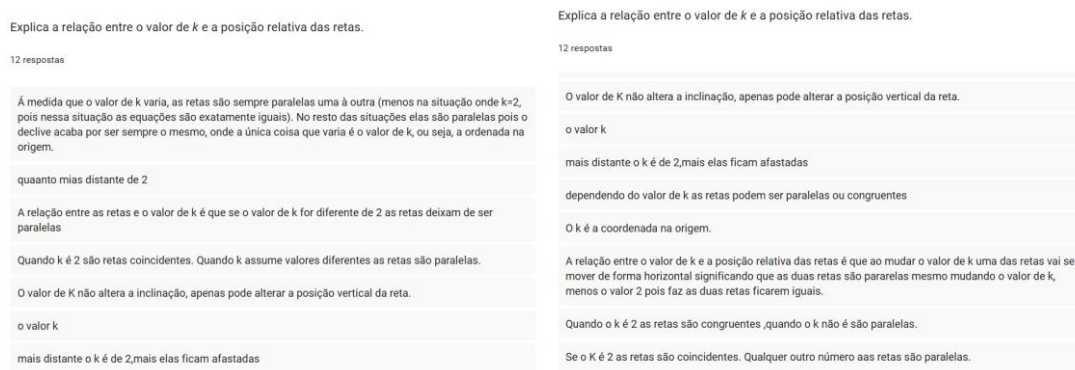


Figura 25 - Respostas à pergunta: "Explica a relação entre o valor de k e a posição relativa das retas."

Relativamente às construções no GeoGebra, a totalidade dos pares construiu corretamente o sistema com o parâmetro k , como exemplificado na Figura 26. Este resultado contrasta com a diversidade de elaboração observada nas respostas escritas, sugerindo que a capacidade de construir graficamente não implica necessariamente a capacidade de interpretar e formalizar algebricamente o que se observa. Trata-se precisamente da assimetria cognitiva entre as direções de conversão que Duval (2009) descreve: construir no GeoGebra corresponde a uma conversão do algébrico para o

gráfico, enquanto interpretar e justificar corresponde à direção inversa, cognitivamente mais exigente.

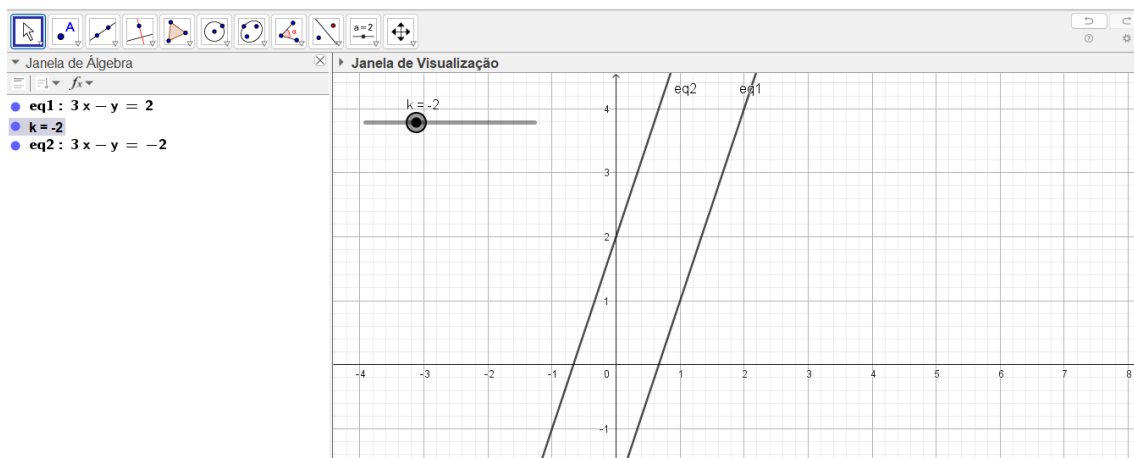


Figura 26 - Exemplo de construção correta no GeoGebra com o parâmetro k realizada por um dos pares

4.2.4. Tarefa inversa: de um ponto para um sistema

A tarefa inversa, construir um sistema cujo ponto de interseção fosse (2,1) é, do ponto de vista da teoria de Duval, a mais exigente do formulário: ao invés de partir de equações para chegar ao gráfico, os alunos tinham de partir de um ponto no plano para construir equações que o satisfizessem. Trata-se de uma conversão no sentido gráfico $\rightarrow$ algébrico, que Duval (1993) identifica como frequentemente mais difícil do que a direção inversa, dada a assimetria cognitiva entre os dois registos. As respostas à questão podem ser vistas na Figura 27.

<p>Escreve o sistema construído:</p> <p>12 respostas</p> <p>2x-3=y 3x-5=y</p> <p>y= -0,75x + 2,5 e y= x-1</p> <p>1.5x-y=2 // 1.37x+ 2.63y=6.67</p> <p>-x-2y=-4 -0,44x+1.56=0,68</p> <p>Graficamente, as duas retas intersectam-se no ponto (2,1), logo esse ponto é a solução do sistema. Algebricamente, substituindo K em ambas as equações, obtém-se K, portanto o ponto (2,1) verifica as duas equações. Como os coeficientes angulares são diferentes (1 e -1), as retas não são paralelas, logo o sistema é possível e determinado.</p> <p>5.4 - 6.56 = -7.92 1.72 + 5.5 = 12.68</p>	<p>Escreve o sistema construído:</p> <p>12 respostas</p> <p>possível e determinado.</p> <p>5.4 - 6.56 = -7.92 1.72 + 5.5 = 12.68</p> <p>x+y=3 2x+y=5</p> <p>5x-2y=8 e x-y=1</p> <p>-3x-2y=-8 2x-y=3</p> <p>x+y=3 2x-y=3</p> <p>2x+y=5 3x+y=7</p>
--	--

Figura 27 - Respostas à questão "Escreve o sistema construído"

A análise das respostas revela uma diversidade considerável de abordagens. Vários alunos construíram corretamente sistemas cuja solução é (2,1): A5 com " $x + y = 3 / 2x + y = 5$ ", A9 com " $2x + y = 5 / 3x + y = 7$ ", ou A12 com " $-3x - 2y = -8 / 2x - y =$

3". Curiosamente, A8 não apresentou um sistema na resposta à questão do sistema construído, mas apresentou na justificação uma resposta matematicamente impecável: "Graficamente, as duas retas intersectam-se no ponto (2,1), logo esse ponto é a solução do sistema. Algebricamente, substituindo nas equações, obtém-se igualdades, portanto o ponto (2,1) verifica as duas equações. Como os coeficientes angulares são diferentes (1 e -1), as retas não são paralelas, logo o sistema é possível e determinado." Esta resposta revela uma coordenação exemplar entre registos, articulando explicitamente a evidência gráfica, a verificação algébrica e a classificação do sistema, ainda que o aluno não tenha conseguido apresentar o sistema construído de forma convencional.

As justificações observadas na Figura 28 também revelam diferentes graus de coordenação entre registos. A3 escreveu: "o gráfico mostra que o ponto (2,1) é a solução do sistema pois é o ponto de interseção das duas retas. No registo algébrico, o ponto pode ser considerado a solução das duas equações pois, se utilizarmos o método da substituição, verificamos que a solução é a mesma." A articulação direta entre a evidência gráfica e a verificação algébrica, com menção explícita ao "registo algébrico", é notável e constitui um dos momentos mais claros de coordenação de registos observados na ficha.

Justifica de forma clara:

- Como o gráfico mostra que (2,1) é solução do sistema.
- Por que razão, no registo algébrico, o ponto (2,1) pode ser considerado solução das duas equações.

12 respostas

1- O gráfico mostra que o ponto (2,1) é a solução do sistema pois é o ponto de interseção das duas retas.
2- No registo algébrico, o ponto pode ser considerado a solução das duas equações pois, se utilizarmos o método da substituição verificamos que a solução é a mesma (ou podemos apenas substituir em cada equação o valor de x e de y, verificando que estão matematicamente corretas).

pois 2,1 é o ponto de interseção e a solução das duas equações

porque é a união das retas

O gráfico mostra que a solução é (2;1) devido à interseção entre as duas retas.
No registo algébrico, o ponto (2;1) é a solução da equação, pois quando igualamos as duas equações, estas apresentam estes valores.

Graficamente, as duas retas intersectam-se no ponto (2,1), logo esse ponto é a solução do sistema. Algebricamente, substituindo K em ambas as equações, obtém-se K, portanto o ponto (2,1) verifica as duas equações.
Como os coeficientes angulares são diferentes (1 e -1), as retas não são paralelas, logo o sistema é possível e determinado.

porque é o ponto de interseção

Pois os dois se intersectam no ponto 2 e 1 e usando o método de substituição a solução continua a mesma

E o ponto de interseção dos dois gráficos .

Nas duas equações ao substituir pelo ponto (2,1) obtemos igualdades verdadeiras

No gráfico mostra que (2,1) é a solução do sistema pois os únicos dois pontos que as duas retas se interseção é no ponto com o valor de x sendo 2 e o valor de y sendo 1 assim a solução é (2,1).

Para saber se (2,1) é a solução do sistema podemos usar o método de substituição onde substituímos os valores de "x" e "y" e se os resultados estiverem corretos significa que a solução é a correta.

porque intersetão

porque se formos fazer o método da substituição sabemos a solução das equações

Pois é o ponto onde se interssetam e porque o ponto e a solução da equação é a mesma.

Figura 28 - Justificações a tarefa inversa.

Análise das estratégias de Resolução: A tarefa inversa constituiu, do ponto de vista da TRRS, a mais exigente do formulário. Ao invés de partir de equações para chegar ao gráfico, os pares tinham de partir de um par ordenado dado para construir duas retas concorrentes cuja solução fosse precisamente esse ponto. Trata-se de uma conversão no sentido gráfico para algébrico: o ponto de partida é um objeto do registo gráfico e o objetivo é construir equações no registo algébrico que o satisfaçam. Duval (1993, 2009) identifica esta direção de conversão como cognitivamente mais exigente, dada a assimetria entre os dois registos. Os dados recolhidos confirmam esta exigência, mas revelam também uma diversidade de estratégias criativas que tornam esta tarefa particularmente rica do ponto de vista analítico.

Estratégia 1 — Construção geométrica por pontos não colineares: Um par adotou uma estratégia geometricamente sofisticada, definiu o ponto dado como ponto A, escolheu dois outros pontos B e C não colineares com A, e construiu os segmentos de reta AB e AC. Como os três pontos não são colineares, as duas retas intersectam-se obrigatoriamente no ponto A, garantindo que a solução do sistema é precisamente o par ordenado pedido. Esta estratégia vista na Figura 29 revela uma compreensão profunda da relação entre o registo gráfico e o conceito matemático de solução de um sistema: o par não partiu das equações, mas da propriedade geométrica que define a solução como ponto de intersecção. Do ponto de vista da TRRS, esta abordagem evidencia uma articulação entre os registos gráfico e algébrico, na medida em que o par mobilizou

propriedades geométricas para garantir algebricamente a solução correta, sem necessidade de tentativa e erro.

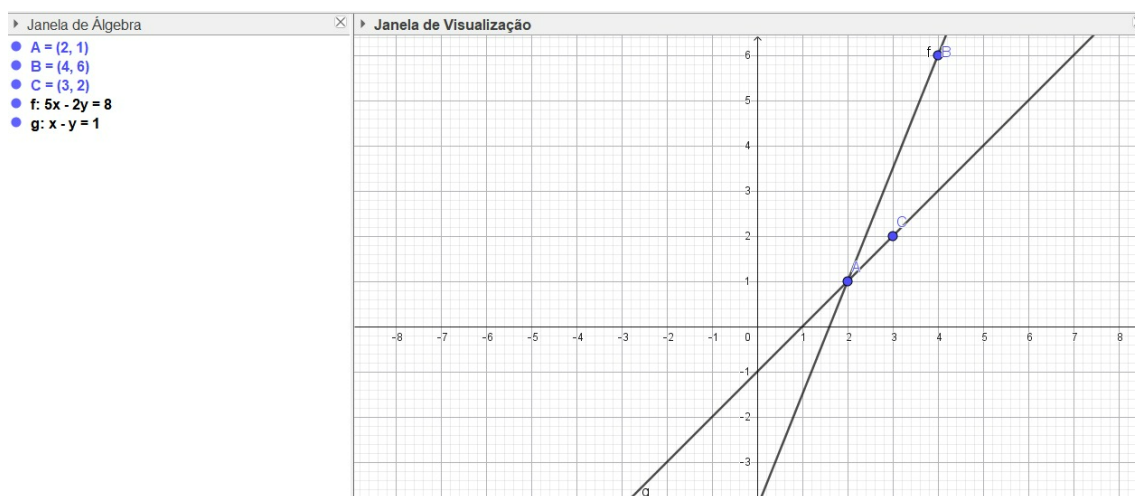


Figura 29 - Construção por pontos não colineares

Estratégia 2 — Exploração por tentativa e erro: Um segundo par adotou uma estratégia de tentativa e erro, foram testando diferentes retas no GeoGebra até encontrar duas cuja intersecção coincidissem com o par ordenado dado, submetendo como resposta final a construção que deu certo como visto na Figura 30. Esta abordagem é analiticamente interessante porque revela uma utilização do GeoGebra como ferramenta de verificação iterativa, em que o registo gráfico serve para confirmar ou refutar cada tentativa. Do ponto de vista da TRRS, o par realizou múltiplas conversões entre o registo algébrico e o gráfico ao longo do processo, ainda que de forma exploratória e não sistemática. A solução final é correta, mas o percurso não evidencia uma compreensão formal da relação entre as equações e a solução do sistema. Ainda assim, esta estratégia não deixa de ser válida: a exploração dinâmica é precisamente uma das potencialidades que Brunheira (2016) e Cordelina e Pavanelo (2024) associam aos ambientes de matemática dinâmica como o GeoGebra.

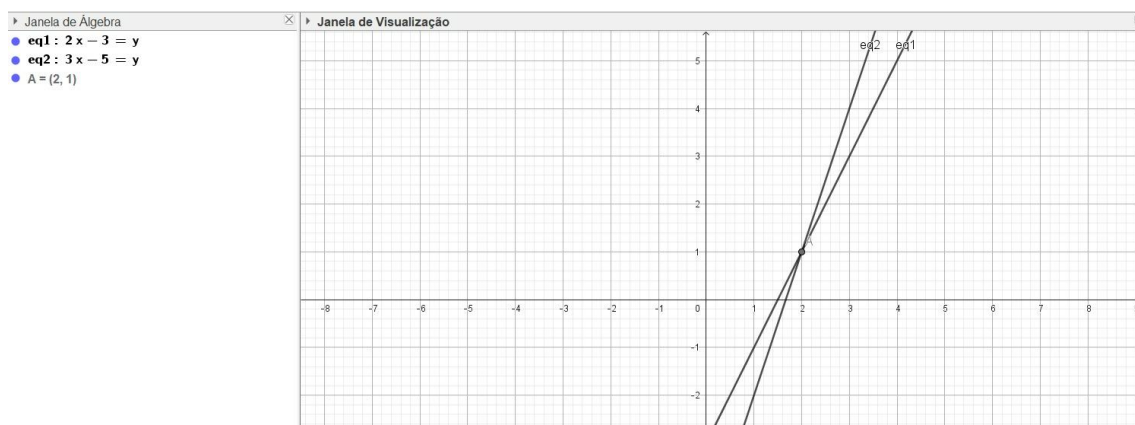


Figura 30 - Construção por tentativa e erro

Estratégia 3 — Retas perpendiculares aos eixos: Um terceiro par adotou uma estratégia prática e imediata, construiu uma reta paralela ao eixo x e uma reta paralela ao eixo y , formando uma cruz no ponto dado. Esta abordagem, vista na Figura 31, garante sempre a intersecção no ponto pretendido, uma vez que as coordenadas do ponto determinam diretamente as equações das duas retas: $x = a$ e $y = b$, onde (a, b) é o par ordenado dado. Do ponto de vista da TRRS, esta estratégia revela uma conversão direta e eficaz do registo gráfico para o algébrico: o par reconheceu que as retas paralelas aos eixos correspondem a equações da forma $x = constante$ e $y = constante$, mobilizando essa propriedade para resolver a tarefa de forma imediata. Embora seja a estratégia mais simples das três, não é menos válida matematicamente, e evidencia uma leitura correta da relação entre o registo gráfico e o algébrico.

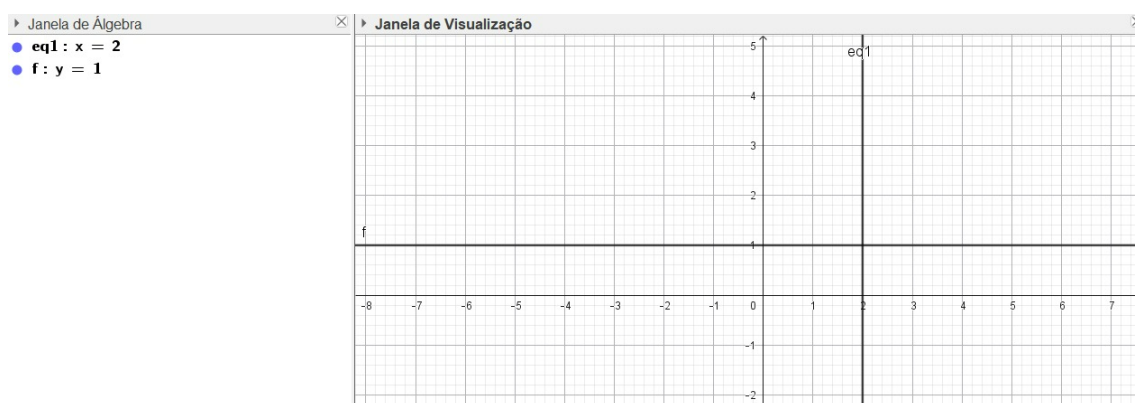


Figura 31 - Construção com retas perpendiculares aos eixos

A diversidade de estratégias observada nesta tarefa é, em si mesma, um dado relevante para a investigação. O facto de pares diferentes terem chegado à mesma solução por caminhos distintos evidencia que a tarefa inversa promoveu exatamente o tipo de

exploração criativa que Brunheira (2016) associa à utilização do GeoGebra: a variedade de ferramentas disponíveis no software estimulou abordagens diversas, todas elas matematicamente válidas. Do ponto de vista da TRRS, as três estratégias correspondem a graus distintos de coordenação entre registos: a primeira evidencia coordenação sustentada por propriedades geométricas; a segunda evidencia articulação iterativa por exploração; a terceira evidencia coordenação direta por reconhecimento de padrões. Em conjunto, estas produções confirmam que a tarefa inversa foi a que mais claramente revelou a diversidade de formas de pensar matematicamente dos alunos.

4.2.5. Percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra na ficha

As três questões finais da ficha, cujas respostas estão presentes nas Figuras 32, 33 e 34 recolheram as percepções dos alunos sobre o contributo do GeoGebra especificamente na resolução das tarefas de sistemas de equações.

Em que tarefas o uso do GeoGebra foi indispensável?

12 respostas

Na minha opinião, acho que a utilização do GeoGebra foi útil em todas as situações, pois acaba por ser mais fácil compreender o sistema em estudo.

em todas

O uso do geogebra foi indispensável na construção e visualização de gráficos

Na construção de gráficos e na resolução de sistemas de equações.

Em quase todas as questões

Foi util pois ajudou me bastante.

em todas, ajudou em tudo

na tarefa onde tínhamos de fazer duas equações que o ponto de interseção tinha de ser 2 e 1

Na resolução dos sistemas é muito mais fácil de encontrar a solução
O uso do GeoGebra ajudou me ao invés de resolver o sistema para conseguir descobrir a(s) solução(ões) eu usei o GeoGebra para descobrir a solução em segundos assim ajudando me também em descobrir o tipo de sistemas.
em todas
Acho que nenhuma pois ,o geogebra sempre nos ajuda com os gráficos.

Figura 32 - Respostas à pergunta: "Em que tarefas o uso do GeoGebra foi indispensável?"

Houve situações em que o gráfico te ajudou a compreender melhor do que os cálculos? Explica

12 respostas

Sim, pois com uma representação gráfica do sistema acaba por ser mais fácil compreender o porquê de ser, relativamente á solução obtida, possível determinada, impossível,... pois temos uma representação do sistema e não apenas "números".
todas as situaçoess o grafico ajudou me
Sim porque é simples de visualizar e entender
Sim, pois ajudou a compreender visualmente o que fazemos nos cálculos e facilitou a resolução dos sistemas de equações.
Sim
Sim pois mostrava o tipo de reta.
sim principalmente para saber se era possível determinado, indeterminado ou impossível
em todos os exercícios pois ajudou a encontrar os pontos de interseção
Encontrar as soluções dos sistemas, e na classificação dos sistemas
Sim, como já expliquei ajudou me muito ao invés de fazer vários cálculos para descobrir a(s) solução(ões) usamos o gráfico e depois o ponto de interseção para descobrir rapidamente a solução do sistema.
sim,em saber como resolver certos problemas
Sim ,pois mostrou que tipo de sistema era.

Figura 33 - Respostas à pergunta: "Houve situações em que o gráfico te ajudou a compreender melhor do que os cálculos? Explica"

Em que momento foi mais difícil articular equações e gráficos?

12 respostas

Na minha opinião, acredito que foi mais difícil no início articular os dois pois não percebia o porquê de ser assim e qual o objetivo, mas agora acredito que com a prática acaba por ser muito mais fácil do que apenas resolver no papel.

Parte c

não sei

Em nenhum momento foi difícil articular estas duas coisas.

Na C

Nenhum.

na parte b

Nenhum

Quando os sistemas são possíveis indeterminados foi difícil de perceber pois os gráficos se sobreponham.

Na minha opinião, o que foi mais difícil foi de compreender os enunciados.

nenhum

Nenhum no meu ponto de vista.

Figura 34 - Respostas à pergunta: "Em que momento foi mais difícil articular equações e gráficos?"

No que respeita à indispensabilidade do GeoGebra, a maioria dos alunos considerou o software útil ou indispensável na globalidade das tarefas. A resposta de A2 merece análise particular: "ao invés de resolver o sistema para conseguir descobrir as soluções, usei o GeoGebra para descobrir a solução em segundos, assim ajudando-me também em descobrir o tipo de sistema." Esta resposta levanta uma questão metodológica importante: se os alunos utilizam o GeoGebra para obter diretamente a solução gráfica sem passar pela resolução algébrica, em que medida estão a desenvolver a capacidade de tratamento no registo algébrico? Esta tensão que Hoyles e Noss (2003) descrevem como o risco de a tecnologia ser usada para evitar pensar em vez de promover a abstração. É um dado relevante para a reflexão sobre a sequência didática adotada e para recomendações futuras.

Quando questionados sobre os momentos em que o gráfico ajudou mais do que os cálculos, 100% dos alunos respondeu afirmativamente, com particular destaque para a classificação dos sistemas. A resposta de A3 sintetiza com clareza o argumento central da teoria de Duval: "com uma representação gráfica do sistema acaba por ser mais fácil compreender o porquê de ser possível determinada, impossível... pois temos uma representação do sistema e não apenas 'números'." A oposição espontânea entre "representação" e "apenas números" que este aluno formula é, no fundo, uma expressão intuitiva do que Duval (1993) descreve como a limitação de trabalhar com um único registo de representação e da riqueza que a coordenação entre registos proporciona.

Por fim, os momentos de maior dificuldade na articulação entre equações e gráficos concentraram-se, nas respostas dos alunos, nos sistemas possíveis indeterminados e na compreensão inicial dos enunciados. A resposta de A12 é a mais precisa: "quando os sistemas são possíveis indeterminados foi difícil de perceber pois os gráficos se sobrepunham." Esta dificuldade que corresponde a uma falha na conversão do registo gráfico (retas coincidentes) para o algébrico (equações equivalentes) é coerente com os dados de classificação já analisados e reforça a triangulação entre as diferentes fontes.

4.3. Síntese e triangulação dos dados

A triangulação dos dados recolhidos através dos dois formulários e da observação direta permite confrontar as evidências provenientes de fontes distintas e verificar a sua convergência em relação às questões de investigação. O Quadro 5 sintetiza os principais resultados de cada fonte organizados pelas questões orientadoras do estudo.

	Formulário de ambientação	Ficha de trabalho	Observação direta
Como os alunos utilizam os registos de representação durante a resolução de tarefas com o GeoGebra	87% dos pares identificou corretamente o ponto de intersecção (conversão gráfico para algébrico). A maioria construiu corretamente	Conversão algébrico para gráfico com taxa de acerto elevada nos três sistemas (100%, 92%, 92%). Conversão gráfico para algébrico mais exigente, com	A maioria dos pares começou a resolução diretamente no GeoGebra, sem tentativa analítica prévia. Alguns pares alternavam

	retas paralelas com o mesmo declive (conversão algébrico para gráfico). Dificuldades na leitura de invariantes: poucos identificaram o que permanecia igual após a alteração das equações.	dificuldades na formalização terminológica e na leitura de propriedades algébricas a partir do gráfico. Conversão linguagem natural para algébrico identificada pelos alunos como a mais difícil.	entre registos de forma flexível. Um grupo mais reduzido revelou dificuldades persistentes nos três tipos de conversão.
Percepções dos alunos sobre as potencialidades e dificuldades do uso do GeoGebra	80% afirmou que o GeoGebra ajudou a compreender a relação entre equações e gráficos. 20% respondeu "em parte". Nenhum respondeu negativamente. A visualização foi a potencialidade mais referida espontaneamente.	100% dos pares afirmou que o registo gráfico ajudou mais do que o cálculo em pelo menos um momento. A classificação dos sistemas foi o momento mais valorizado. Dificuldades centradas nos sistemas possíveis indeterminados e na interpretação dos enunciados.	Momentos de descoberta espontânea durante a ambientação, quando os alunos perceberam a articulação dinâmica entre registos. Discussão entre pares sobre as representações foi frequente e produtiva. Evolução clara entre o início da ambientação e o final da ficha.

Quadro 5 - Síntese da triangulação dos dados

Os dados recolhidos através dos dois formulários e das observações diretas convergem para um conjunto de conclusões que permitem responder à questão e subquestões de investigação.

No que respeita ao primeiro objetivo, analisar como os alunos utilizam diferentes registos de representação e identificar evidências de conversão, os dados mostram que os três tipos de conversão presentes nas tarefas foram realizados pela maioria dos alunos, ainda que com graus de sucesso e de elaboração muito distintos. A conversão do registo algébrico para o registo gráfico foi a mais fluente e a mais valorizada pelos alunos; a conversão de gráfico para algébrico revelou-se mais exigente, com dificuldades visíveis na leitura de invariantes, na formalização terminológica e na discriminação entre retas coincidentes e paralelas; a conversão de linguagem natural para algébrico foi a identificada como mais difícil, sendo a compreensão dos enunciados a principal barreira referida. A assimetria cognitiva entre as direções de conversão identificada por Duval (1993, 2009) encontra assim confirmação nos dados desta investigação e manifesta-se não apenas nas taxas de acerto, mas sobretudo na qualidade e elaboração das justificações produzidas pelos alunos.

No que respeita ao segundo objetivo, compreender as percepções dos alunos sobre potencialidades e dificuldades do GeoGebra, os dados são consistentemente positivos e convergentes com a literatura. A totalidade dos alunos que responderam às questões de perceção reconheceu o GeoGebra como uma ferramenta útil, e a visualização foi a potencialidade mais espontaneamente referida, em linha com o que afirmam Correia e Fernandes (2011) e Barbosa et al. (2016). A capacidade de confirmar resultados, de explorar casos particulares e de classificar sistemas a partir da representação gráfica foram as potencialidades mais valorizadas nas tarefas concretas, em linha com o que Matos et al. (2020) descrevem sobre o GeoGebra como ferramenta de motivação e envolvimento. As dificuldades identificadas foram sobretudo de natureza técnica na fase de ambientação e de natureza conceptual nos sistemas possíveis indeterminados, o que sugere que o software em si não constituiu um obstáculo à aprendizagem após a ambientação.

A evolução observada entre o formulário de ambientação e a ficha de trabalho é também relevante e multidimensional. Em termos quantitativos, a taxa de acerto nas tarefas de conversão foi elevada em ambos os formulários. Em termos qualitativos, as respostas tornaram-se progressivamente mais elaboradas: enquanto no formulário de ambientação a maioria dos alunos se limitava a descrever o que via no gráfico, na ficha de trabalho surgiram regularmente respostas que articulam explicitamente os dois

registos, estabelecem relações entre coeficientes e posições das retas, e mobilizam vocabulário matemático mais preciso. Esta evolução é consistente com o que Wichnoski e Bassoi (2019) sublinham sobre a necessidade de diversidade de representações semióticas para que a cognição matemática se amplie de forma sustentada, e sugere que a sequência didática adotada, ambientação, revisão, aplicação, criou condições favoráveis ao desenvolvimento da coordenação de registos no sentido proposto por Duval (1993, 2009).

Esta convergência entre a análise qualitativa e os dados quantitativos disponíveis é também corroborada pelas pontuações automáticas registadas pelo formulário na ficha de sistemas: os dois únicos alunos que obtiveram pontuação inferior à maioria, A8 e A11 são precisamente aqueles cujas respostas revelaram, na análise qualitativa, as maiores dificuldades na classificação dos sistemas e na articulação entre registos. Inversamente, os dez alunos que obtiveram a pontuação máxima correspondem, na sua generalidade, aos alunos cujas justificações revelaram maior grau de elaboração e coordenação entre registos. Este paralelismo entre os dados quantitativos e a análise qualitativa reforça a credibilidade das interpretações produzidas e a pertinência da opção metodológica pela triangulação de fontes (Holanda & Faria, 2020).

5. Conclusão

Neste último capítulo, apresenta-se uma síntese da investigação, retomando o objetivo geral e as questões orientadoras que a nortearam, em articulação com a literatura. Por fim, apresentam-se as limitações do estudo e as recomendações para investigação futura.

5.1. Síntese do estudo

Esta investigação teve como objetivo compreender de que forma os alunos percecionam o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas, considerando os processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica. O estudo foi desenvolvido numa turma de 9.º ano de uma escola pública do Norte de Portugal, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, com a participação de 21 alunos, dos quais 15 responderam ao formulário de ambientação e 12 à ficha de trabalho sobre sistemas de equações.

A investigação adotou uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa, inscrita no paradigma fenomenológico-interpretativo, e os dados foram recolhidos através de três procedimentos complementares: inquérito por questionário via Google Forms, observação direta com registo em notas de campo, e análise das produções dos alunos nos formulários e nos ficheiros do GeoGebra.

O quadro teórico central foi a Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval (1993, 2009), que distingue entre tratamento, transformações dentro do mesmo registo e conversão, transformações entre registos diferentes, identificando a conversão como o principal obstáculo à compreensão matemática genuína.

A intervenção pedagógica estruturou-se em três fases sequenciais: uma fase de ambientação ao GeoGebra, uma aula de revisão sobre sistemas de equações com recurso a múltiplos registos de representação, e a aplicação da ficha de trabalho para recolha de dados. Esta sequência foi concebida de forma a criar condições progressivas para que os alunos pudessem mobilizar o GeoGebra como ferramenta de exploração matemática e não apenas como instrumento técnico.

Para responder à questão de investigação: *De que forma os alunos percecionam o uso do GeoGebra na resolução de tarefas matemáticas, considerando os processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica?*

Procurou-se responder às duas subquestões orientadoras que se apresentam nas secções seguintes.

5.2. De que modo os alunos utilizam os diferentes registos de representação durante a resolução de tarefas com o *GeoGebra*?

Os dados recolhidos evidenciam que os alunos mobilizaram os três tipos de conversão presentes nas tarefas: Do algébrico para gráfico, de gráfico para algébrico, e de linguagem natural para algébrico, ainda que com graus de fluência e de elaboração muito distintos.

A conversão do registo algébrico para o registo gráfico foi a mais fluente e a que gerou menor número de erros. Na fase de ambientação, a maioria dos alunos conseguiu introduzir equações no GeoGebra e interpretar imediatamente a representação gráfica resultante. Na ficha de sistemas, a classificação dos três sistemas, que exige precisamente esta conversão, registou taxas de acerto de 100%, 92% e 92% nos Sistemas 1, 2 e 3, respetivamente. Este resultado é consistente com o que Henrique (2017) e Ponte et al. (2006) descrevem sobre a capacidade do GeoGebra de facilitar a visualização e a construção rigorosa de elementos gráficos.

A conversão de gráfico para algébrico revelou-se mais exigente, manifestando-se em dificuldades de dois tipos. O primeiro tipo, a leitura de invariantes, observou-se na tarefa de identificar o que permanecia igual após a alteração das equações: a maioria dos alunos identificou as mudanças visíveis no gráfico, mas apenas alguns reconheceram que o declive da primeira reta se mantinha inalterado, o que exigia uma leitura analítica do gráfico mais subtil. O segundo tipo, a formalização terminológica, observou-se nas justificações sobre sistemas coincidentes, onde vários alunos utilizaram o termo "concorrentes" em vez de "coincidentes", revelando uma coordenação funcional entre o registo gráfico e o registo em linguagem natural que não estava ainda plenamente formalizada.

A conversão de linguagem natural para algébrico foi a identificada pelos próprios alunos como a mais difícil. A resposta de A2: "o mais difícil foi compreender os enunciados" sintetiza uma dificuldade recorrente nas produções analisadas: a passagem de uma situação descrita em linguagem corrente para a sua formalização em equações implica um processo de abstração que não é imediato para todos os alunos, e que o GeoGebra, por si só, não substitui. Esta observação confirma a assimetria cognitiva entre as direcções de conversão identificada por Duval (1993, 2009), segundo a qual a dificuldade

de uma conversão não depende apenas dos registos envolvidos mas também da direção em que é realizada.

Um dado particularmente relevante é a tendência da maioria dos alunos para começar a resolução diretamente no GeoGebra, sem tentar previamente uma abordagem analítica. Este comportamento observado nas notas de campo e confirmado nas percepções expressas nos questionários pode ser interpretado de forma ambivalente. Por um lado, evidencia que os alunos reconheceram o software como uma ferramenta de exploração ativa e não apenas de verificação, o que corresponde ao uso pedagogicamente mais rico da tecnologia (NCTM, 2017). Por outro lado, levanta a questão de saber em que medida esta preferência pelo registo gráfico como ponto de partida pode comprometer o desenvolvimento do tratamento algébrico, isto é, a capacidade de operar formalmente dentro do registo algébrico sem apoio visual. Esta tensão, que não pode ser resolvida com os dados disponíveis neste estudo, constitui uma direção relevante para investigação futura.

Apesar desta tensão, a análise das produções revela momentos de coordenação entre registos que constituem os dados mais significativos da investigação. A resposta de A3 à tarefa de exploração do parâmetro k que articula a variação do parâmetro algébrico com a sua consequência no registo gráfico e explica o mecanismo algébrico subjacente e a resposta de A8 à tarefa inversa, que justifica graficamente, algebricamente e conceptualmente por que razão $(2,1)$ é solução do sistema são exemplos de coordenação de registos no sentido mais rigoroso do conceito de Duval (2009). O fato de estes momentos terem emergido de forma espontânea, sem instrução direta do professor, é um indicador relevante de que a sequência didática adotada criou condições favoráveis ao desenvolvimento desta competência.

5.3. Quais as percepções dos alunos sobre as potencialidades e as dificuldades do uso do GeoGebra na interpretação e resolução de tarefas matemáticas?

As percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra são consistentemente positivas em ambos os formulários e convergentes com a literatura sobre as potencialidades do software no ensino da Matemática.

No formulário de ambientação, 80% dos alunos afirmou que o GeoGebra os ajudou a compreender melhor a relação entre equações e gráficos, e os restantes 20% responderam "em parte", nenhum aluno respondeu negativamente. Na ficha de

sistemas, 100% dos alunos afirmou que o gráfico os ajudou a compreender melhor do que os cálculos em pelo menos um momento da resolução, e 83% obteve a pontuação máxima nas questões de classificação automática. Estes dados quantitativos são corroborados pela análise qualitativa das justificações, que revelam uma evolução progressiva na elaboração e na articulação entre registos ao longo das duas fases da intervenção.

A potencialidade mais espontaneamente referida pelos alunos foi a visualização, a possibilidade de ver os objetos matemáticos de forma dinâmica e de observar imediatamente o efeito de qualquer alteração algébrica no gráfico correspondente. Esta percepção é coerente com o que Gravina (2015) e Zanella et al. (2018) descrevem sobre o potencial semiótico robusto do GeoGebra e a sua capacidade de integrar diferentes representações num mesmo ambiente. A classificação dos sistemas foi o momento em que os alunos mais valorizaram esta potencialidade, com vários a referir que a representação gráfica tornou imediatamente visível aquilo que os cálculos não tornavam claro, nomeadamente a distinção entre retas paralelas, coincidentes e secantes. A formulação de A3 é, a este respeito, particularmente expressiva: "temos uma representação do sistema e não apenas 'números'." Esta oposição espontânea entre representação e cálculo é, no fundo, uma expressão intuitiva da ideia central de Duval (1993) sobre a limitação de trabalhar com um único registo e a riqueza que a coordenação entre registos proporciona.

A tarefa inversa, construir um sistema com solução dada, foi identificada por A7 como o momento em que o GeoGebra foi mais indispensável: "na tarefa onde tínhamos de fazer duas equações que o ponto de interseção tinha de ser (2,1)." Este dado é relevante porque a tarefa inversa foi identificada, na análise, como a mais exigente do ponto de vista da conversão de registos. O facto de ser precisamente esta a tarefa em que um aluno sentiu maior necessidade do GeoGebra sugere que o software apoiou a realização de conversões que poderiam ser mais difíceis sem apoio visual.

No que respeita às dificuldades, os alunos identificaram dois tipos principais. O primeiro, dificuldades técnicas com a interface do GeoGebra, foi predominante na fase de ambientação e praticamente ausente na ficha de trabalho, o que reforça a pertinência da fase de ambientação como preparação relevante para a atividade matemática. O segundo, dificuldade em articular equações e gráficos nos sistemas possíveis indeterminados, persistiu na ficha de trabalho e foi o único tipo de dificuldade conceptual reportado de forma consistente pelos alunos. A resposta de A12 sintetiza-o com clareza: "quando os sistemas são possíveis indeterminados foi difícil de perceber pois os gráficos

se sobrepunham." Esta dificuldade na conversão do registo gráfico (retas coincidentes) para o algébrico (equações equivalentes) é a mesma que se manifestou nos dois erros de classificação registados na ficha, reforçando a convergência observada entre as diferentes fontes de dados.

5.4. Considerações finais

Os resultados desta investigação sugerem que a utilização do GeoGebra, integrada numa sequência didática orientada para a articulação entre diferentes registos de representação, criou condições favoráveis à exploração e à coordenação desses registos e esteve associada a percepções positivas dos alunos relativamente ao seu uso no estudo dos sistemas de equações. O software apoiou a visualização, favoreceu a testagem de hipóteses, permitiu a identificação e correção de erros, e criou condições para que alguns alunos chegassem a formular, de forma espontânea, a relação entre os registos algébrico e gráfico com um grau de elaboração que não seria expectável sem o apoio do ambiente dinâmico. Estes resultados estão em linha com os de estudos anteriores sobre o uso do GeoGebra no ensino da Matemática (Correia & Fernandes, 2011; Barbosa et al., 2016; Matos et al., 2020; Zanella et al., 2018) e com as potencialidades que a teoria de Duval (1993, 2009) atribui aos ambientes de representação dinâmica na promoção da coordenação de registos.

Importa, contudo, sublinhar que os resultados positivos obtidos não decorrem apenas do uso do GeoGebra em si, mas da forma como foi integrado numa sequência didática pedagogicamente fundamentada. A fase de ambientação, a aula de revisão com recurso a múltiplos registos, e a ficha de trabalho com tarefas de diferentes tipos de conversão constituíram, em conjunto, as condições que tornaram possível o desenvolvimento observado. Como afirmam Laborde (2002) e Nascimento e Schimiguel (2017), a tecnologia não produz aprendizagem por si só é a intencionalidade pedagógica com que é integrada que determina o seu valor didático.

5.4.1. Limitações

A principal limitação deste estudo é a sua dimensão reduzida da amostra: 21 alunos de uma única turma numa única escola não permitem generalizar os resultados para outros contextos. Os dados recolhidos permitem construir interpretações plausíveis e teoricamente fundamentadas, mas não permitem estabelecer conclusões de carácter universal sobre o contributo do GeoGebra para a aprendizagem da Matemática no 3.º Ciclo.

Uma segunda limitação relaciona-se com a ausência de gravações de áudio ou vídeo das sessões de trabalho. Ao contrário de investigações que recorrem a gravações para captar as interações verbais entre alunos durante a resolução das tarefas o que permite uma análise mais fina dos processos de conversão em tempo real, os dados desta investigação restringem-se às produções escritas nos formulários, às notas de campo e às percepções reportadas nos questionários. Esta limitação implica que os processos de conversão observados são os que os alunos foram capazes de formalizar por escrito, o que pode não refletir a totalidade do raciocínio desenvolvido durante a resolução.

Uma terceira limitação prende-se com as condições de aplicação do primeiro formulário, que foi respondido em dois momentos distintos com um intervalo de dois dias entre os dois grupos, o que pode ter implicado condições de resolução diferentes. Adicionalmente, um dos participantes da ficha de trabalho submeteu o formulário com 14 dias de desfasamento relativamente aos colegas, o que pode ter influenciado as suas respostas.

Por fim, o número reduzido de tempos letivos disponíveis, sete no total, e a concentração da intervenção no final do ano letivo limitaram a profundidade do trabalho que foi possível desenvolver com os alunos. Com mais tempo, teria sido possível incluir momentos de discussão coletiva das resoluções o que, no quadro do ensino exploratório (Ponte, 2014), constitui uma fase fundamental para a sistematização e formalização das aprendizagens construídas durante o trabalho autónomo.

5.4.2. Recomendações para investigação futura

Os resultados e as limitações deste estudo sugerem várias direções relevantes para investigação futura.

Em primeiro lugar, seria pertinente replicar este estudo com uma amostra mais alargada, envolvendo múltiplas turmas e múltiplos professores, de forma a verificar se os padrões de conversão e as percepções identificadas se mantêm em contextos distintos. Uma abordagem comparativa por exemplo, entre turmas que utilizaram o GeoGebra e turmas que trabalharam o mesmo tema sem recurso ao software permitiria isolar com maior rigor o contributo específico do software para a aprendizagem.

Em segundo lugar, seria valioso incluir gravações de áudio ou vídeo das sessões de trabalho, de forma a captar os processos de conversão em tempo real e não apenas as suas marcas nas produções escritas. A análise das interações verbais entre alunos durante a resolução de tarefas com o GeoGebra permitiria uma compreensão mais fina dos mecanismos cognitivos envolvidos na coordenação de registos.

Em terceiro lugar, seria interessante explorar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de outros temas do currículo de Matemática do 3.º Ciclo e do Ensino Secundário onde a conversão de registos desempenha um papel central como as funções, a geometria analítica ou as sequências e progressões. Como o próprio GeoGebra integra múltiplos domínios da Matemática, o quadro teórico de Duval oferece uma lente analítica potencialmente fértil para investigar o seu contributo em contextos matemáticos diversificados.

Por fim, seria relevante investigar de que forma o uso continuado e sistemático do GeoGebra ao longo de um ano letivo e não apenas em intervenções pontuais influencia o desenvolvimento da capacidade de coordenação de registos dos alunos. Uma intervenção longitudinal permitiria observar a evolução desta competência de forma mais sustentada e identificar os momentos e as condições em que o software é mais eficaz como mediador da aprendizagem matemática.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Ministério da Educação.

Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 166, 2–6. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2827>

Araújo, R. E. G., & Pazuch, V. (2018). Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria. *Revista BOEM*, 6(12), 55–74.

Baptista, I., Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética da SPCE* (2.^a ed.). SPCE.

Barbosa, L., Ribeiro, A., & Borges, L. (2016). GeoGebra software dinâmico no ensino-aprendizagem da geometria. In *II Seminário Científico da FACIG* (vol. 2). <https://pensaracademico.unifacig.edu.br/index.php/semiarociencififico/article/view/59>

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto & A. Pinheiro, Trans.). Almedina Brasil. (Obra original publicada em 1977)

Borba, M. C. (1996). Informática trará mudanças na educação brasileira? *Zetetike*, 4(2), 123–134.

Brito, L. P. (2021). A tecnologia GeoGebra ao serviço do ensino e da aprendizagem à distância da Matemática. *Educação e Matemática*, 159, 17–20. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2686>

Brunheira, L. (2016). Ver as estrelas... com o GeoGebra. *Educação e Matemática*, 139/140, 38–42. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2386>

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais | Articulação com o Perfil dos Alunos — 7.º ano | 3.º Ciclo do Ensino Básico | Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais | Articulação com o Perfil dos Alunos — 8.º ano | 3.º Ciclo do Ensino Básico | Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_8.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais | Articulação com o Perfil dos Alunos — 9.º ano | 3.º Ciclo do Ensino Básico | Matemática*. Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para auto-aprendizagem*. Universidade Aberta.

Cordelina, G., & Pavanelo, E. (2024). Uma possibilidade de programação no GeoGebra: Primeiros passos. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 13(3), 23–41. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p085-103>

Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2011). Redução ao 1.º quadrante com o GeoGebra. *Educação e Matemática*, 112, 26–29. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1955>

Dias, I. H., & Scortegagna, L. (2025). GeoGebrando no mundo das funções do segundo grau: Recurso educacional digital gamificado no GeoGebra. *Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 14(1), 165–180. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p165-180>

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (L. F. Levy & M. R. A. Silveira, Trans.). Livraria da Física.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis*, 18, 64–66.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar a tecnologia nas aulas de Matemática? *Boletim da SPM*, 39, 43–55.

Freitas, N. A. de, & Abar, C. A. A. P. (2014). Sistemas de equações lineares: Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registos de representação semiótica. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, 3(2). <https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/21246>

Garnica, A. V. M. (2004). História oral e educação matemática. In M. C. Borba & J. L. Araújo (Eds.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 77–98). Autêntica.

GeoGebra. (s.d.). *O que é o GeoGebra?* <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>

Granito, M., & Chernobilsky, E. (2012). The effect of technology on a student's motivation and knowledge retention. In *NERA 2012 Annual Conference* (pp. 1–22). University of Connecticut. https://digitalcommons.lib.uconn.edu/nera_2012/17

Gravina, M. A. (2015). O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: Uma experiência ilustrativa. *Vidya*, 35(2), 1–18.

Henriques, A., & Almouloud, S. A. (2016). Teoria dos registos de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: Uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. *Ciência & Educação*, 22(2), 465–487.

Henrique, M. P. (2017). *GeoGebra no clique e na palma das mãos: Contribuições de uma dinâmica de aula para construção de conceitos geométricos com alunos do ensino fundamental* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro]. <https://rima.ufrj.br/jspui/bitstream/20.500.14407/14958/3/2017%20-%20Marcos%20Paulo%20Henrique.pdf>

Holanda, G. S., & Faria, I. M. S. (2020). Estratégia da triangulação: Uma incursão conceitual. *Atos de Pesquisa em Educação*, 15(4), 1150–1166. <https://dx.doi.org/10.7867/1809-0354.2020v15n4p1150-1166>

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (Vol. 10, pp. 323–349). Springer.

Janikova, M., Pavelková, M., & Janik, T. (2024). Dealing with student mistakes in mathematics at primary school. *Studia Paedagogica*, 29(2), 66–89.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283–317. <https://doi.org/10.1023/A:1013309728825>

Lourenço, C. M., & Silva, A. B. (2022). Sobre o livro *Semiose e pensamento humano*: Estudo hermenêutico da introdução e do capítulo I. *Revista do Ensino de Ciências e Matemática*, 13(3), 45–64.

Marques, V. D., & Caldeira, C. R. C. (2018). Dificuldades e carências na aprendizagem da matemática do ensino fundamental e suas implicações no conhecimento da geometria. *Revista Thema*, 15(2), 403–413. <https://doi.org/10.15536/thema.15.2018.403-413.851>

Matos, F. C., Santos, M. A. C., Mendes, R. L. T., & Silva, H. B. (2020). Funções afins elucidadas no software GeoGebra. *Brazilian Journal of Development*, 6(7), 49039–49049.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054.

Nascimento, E. L., & Schimiguel, J. (2017). Referenciais teórico-metodológicos: Sequências didáticas com tecnologias no ensino de matemática na educação básica. *REnCiMa*, 8(2), 115–126.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2000)

National Council of Teachers of Mathematics. (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em inglês em 2014).

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Ensino e aprendizagem da Álgebra — Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 239–259). Póvoa de Varzim. https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/14.Nobre_Amado_Ponte.pdf

Oliveira, H., Henriques, A., & Gutiérrez-Fallas, L. F. (2018). A integração da tecnologia na planificação de aulas na perspetiva do ensino exploratório: Um estudo com futuros professores de matemática. *Perspetiva*, 36(2), 421–446.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2014). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. <https://hdl.handle.net/10451/15310>

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), 3–32.

- Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 159–192). Mercado de Letras.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 133, 26–35.
- Proença, A. J., & Canavarro, A. P. (2021). Condições de uso do computador nas aulas de Matemática do ensino secundário em Portugal. *Campo Abierto Revista de Educación*, 40, 119–137.
- Ronau, R., Rakes, C., Bush, S., Driskell, S., Niess, M., & Pugalee, D. (2000). *Using calculators for teaching and learning mathematics* (NCTM Research Brief). NCTM.
- Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., Knudsen, J., & Gallagher, L. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle school mathematics: Three large-scale studies. *American Educational Research Journal*, 47(4), 833–878.
- Santos, S. C., & Borba, M. C. (2008). Internet e softwares de geometria dinâmica como atores na produção matemática on-line. *Zetetike*, 16(1), 173–208.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.
- Wichnoski, P., & Bassoi, T. S. (2019). Registos de representação semiótica e atividades de investigação matemática empreendidas e relatadas por professores participantes do PDE. *Revista Dynamis*, 25(2), 56–76.
- Zanella, I. A., Franco, V. S., & Canavarro, A. P. (2018). Apreensão de objetos geométricos com o GeoGebra. *Revista Educação Em Questão*, 56(48), 1–25.

Anexos

Anexo 1 – Autorização de material para ambientação ao GeoGebra



Matheus de Albuquerque <matheus.albuquerque1997@gmail.com>

Pedido de autorização para utilização de material de ambientação ao GeoGebra

2 mensagens

Matheus de Albuquerque <matheus.albuquerque1997@gmail.com>

4 de março de 2026 às 07:28

Para: "Sérgio,Dantas - Unespar Apucarana" <sergio.dantas@unespar.edu.br>

Bom dia, Professor Sérgio

Espero que esteja bem.

Fui aluno do curso de GeoGebra em 2019 e, em 2023, quando estava a concluir o meu Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Pará (UEPA), entrei em contacto para solicitar autorização para utilizar a apostila do Módulo I como material de ambientação ao software — autorização essa que me foi gentilmente concedida na altura.

Atualmente encontro-me a concluir o Mestrado em Ensino de Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em Portugal. A minha dissertação investiga de que modo os alunos mobilizam e articulam diferentes representações (algébrica, gráfica e em língua natural) na resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra, no estudo de sistemas de equações no 9.º ano.

Nesse contexto, pretendo novamente utilizar parte do material de ambientação ao GeoGebra, com o objetivo de familiarizar os alunos com as principais ferramentas do software antes da aplicação das tarefas investigativas.

Assim, venho por este meio solicitar a sua autorização para a utilização desse material neste novo trabalho académico.

Fico a aguardar o seu retorno e agradeço, desde já, a atenção e a disponibilidade.

Com os melhores cumprimentos,
Matheus de Albuquerque

Sérgio,Dantas - Unespar Apucarana <sergio.dantas@unespar.edu.br>

9 de março de 2026 às 11:00

Para: Matheus de Albuquerque <matheus.albuquerque1997@gmail.com>

Matheus, bom dia. Pode utilizar.

Atenciosamente.

Sérgio Dantas

e-mail: sergio.dantas@unespar.edu.br

whatsapp: (43) 9.9102-6576

[Texto das mensagens anteriores oculto]

Anexo 2 – Material de ambientação ao GeoGebra

Anexo I – Ambientação ao GeoGebra



1. Interface e Ferramentas

Nesse texto apresentamos o Software GeoGebra em linhas gerais. Fazemos uma breve abordagem de seu desenvolvimento, apresentamos sua interface, algumas funcionalidades e os passos necessários para construção de alguns objetos.

1.1 Apresentação

O GeoGebra é um programa/aplicativo com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos.

Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo é o idealizador do projeto do programa e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo.

Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores ou em dispositivos móveis com sistemas operacionais diversos.

1.2 Interface

A interface padrão do GeoGebra instalado em um computador, ao ser carregado, apresenta a seguinte configuração.

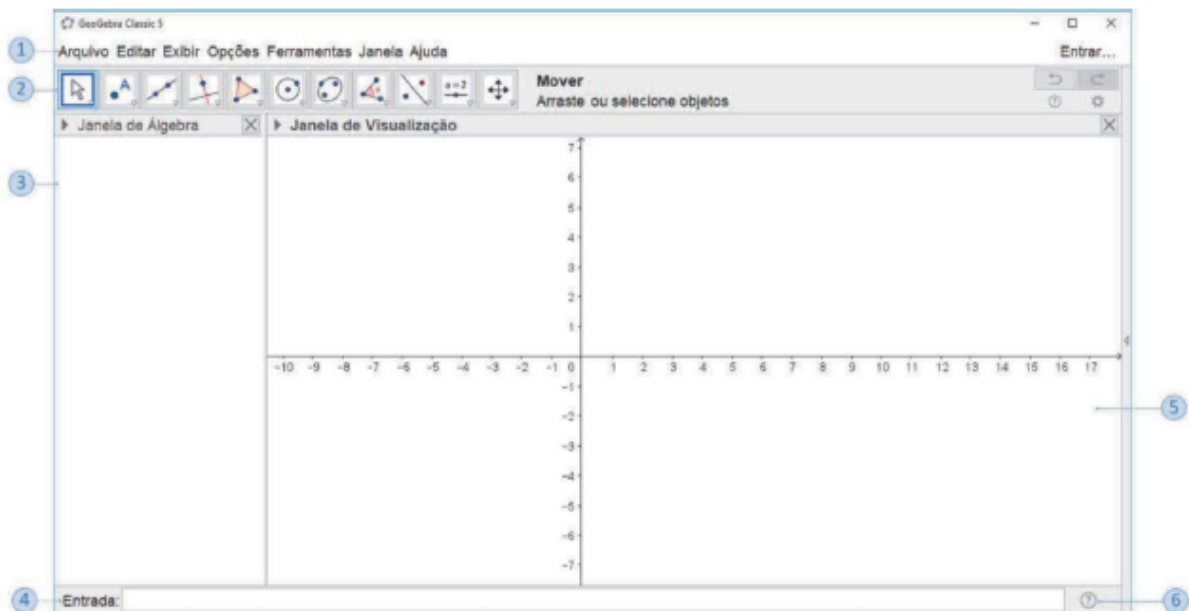
- 1 Barra de Menus
A Barra de Menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.
- 2 Barra de Ferramentas
A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
- 3 Janela de Álgebra

Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

1.3 Janela de Visualização Versus Janela de Álgebra

2

- 4 Entrada
Campo de texto para digitação de comandos.
- 5 Janela de Visualização
Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse, após clicar nos ícones da Barra de Ícones. As construções exibidas na Janela de Visualização também podem ser realizadas via comandos digitados na Entrada.
- 6 Lista de Comandos
Listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.



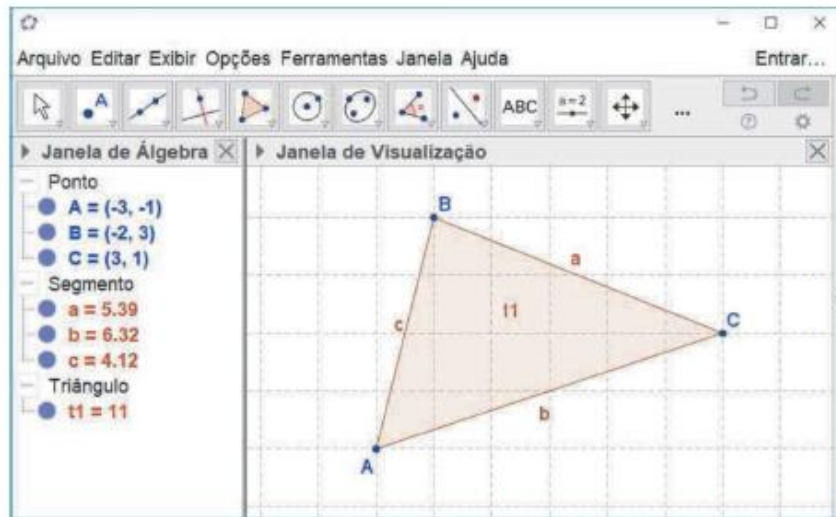
1.3 Janela de Visualização Versus Janela de Álgebra

O GeoGebra recebeu esse nome pela possibilidade de operar com as representações aritmética, algébrica e geométrica conjuntamente. Isso significa que um objeto construído com o mouse ou digitando sua sintaxe na Entrada pode possuir mais de uma representação: geométrica e aritmética ou algébrica.

Veja na Janela de Visualização representada na figura abaixo exibe um triângulo construído em um plano cartesiano.

1.4 Barra de Ferramentas

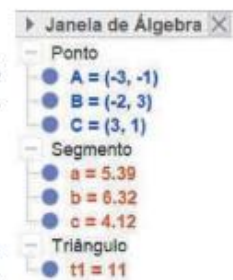
3



Janela de Álgebra e Janela de Visualização

Observe que na Janela de Visualização está representado geometricamente um triângulo com vértices A, B e C e lados a, b e c.

Observe também que no lado esquerdo da tela, na Janela de Álgebra, são exibidas as coordenadas de cada vértice desse triângulo, a medida de cada um dos lados a, b e c e a área do triângulo (11 cm²) que foi nomeado automaticamente pelo GeoGebra como t1.



1.4 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas localizada na parte superior do GeoGebra é composta de doze conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos.

Ao abrir o GeoGebra a Barra de Ferramentas apresenta a seguinte configuração visual.

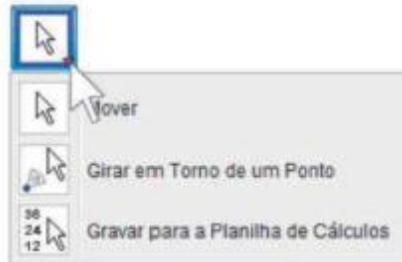


1.4 Barra de Ferramentas

4

Para ativar uma ferramenta clique em seu ícone. No entanto, para cada conjunto de ícones há apenas um visível, veja a seguir como acessar os ícones ocultos.

- 1 Clique no canto inferior esquerdo do ícone que contenha a ferramenta que deseja utilizar.



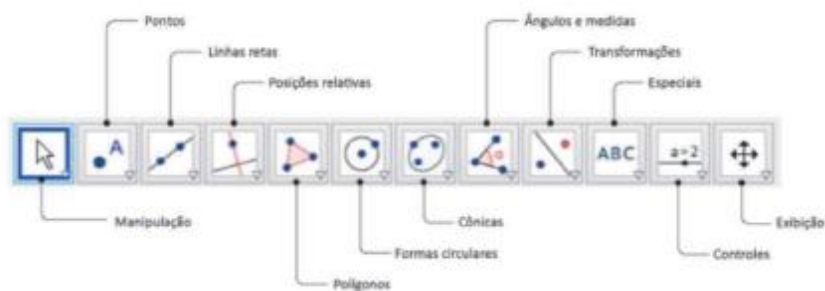
- 2 Selecione a ferramenta.



- 3 A ferramenta selecionada fica ativa e seu ícone ocupa o lugar de destaque do conjunto que ela pertence.



Na imagem da Barra de Ferramentas abaixo está indicado como é nomeamos cada conjunto de ferramentas.



1.5 Construções no GeoGebra

5

1.5 Construções no GeoGebra

Para realizar uma construção selecione a ferramenta desejada na Barra de Ícones e clique na Janela de Visualização ou digite os valores de entrada solicitados pelo GeoGebra. Considere os seguintes problemas.

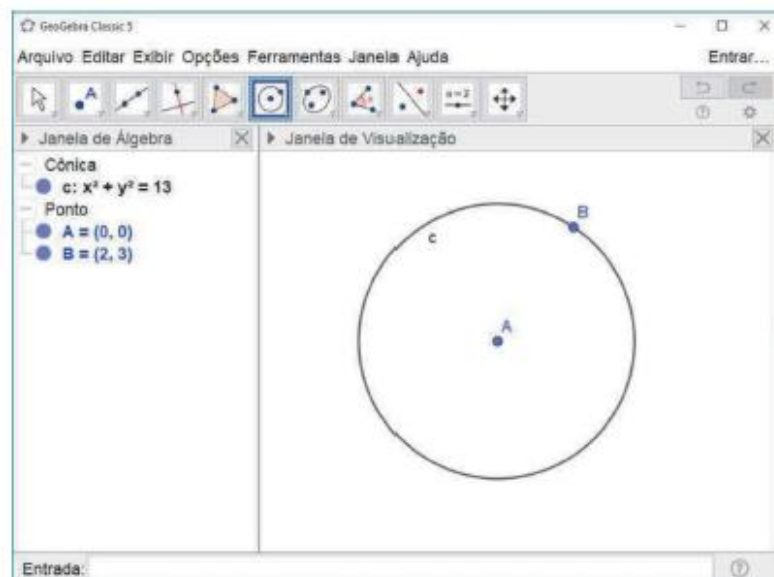
Construção 1.1 Construir um círculo de Centro A que passe por um ponto B.

- 1 Seleccione a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos.



- 2 Clique em qualquer região da Janela de Visualização para marcar o centro A do círculo.

Depois, arraste o mouse e clique em um local distinto do ponto A, marcando assim o ponto B pertencente a circunferência.



1.5 Construções no GeoGebra

6

Importante

Ao concluir uma construção, a ferramenta utilizada continua ativa. Caso o mouse seja clicado na Janela de Visualização, é iniciada uma nova construção de um novo objeto. Para que isso não ocorra é recomendável que ao término de uma construção seja selecionada a ferramenta Mover clicando em seu ícone ou pressionando a tecla ESC.

Construção 1.2 Construir um círculo de centro A com raio $r = 3$ cm.

- 1 Seleccione a ferramenta Círculo dados centro e raio.



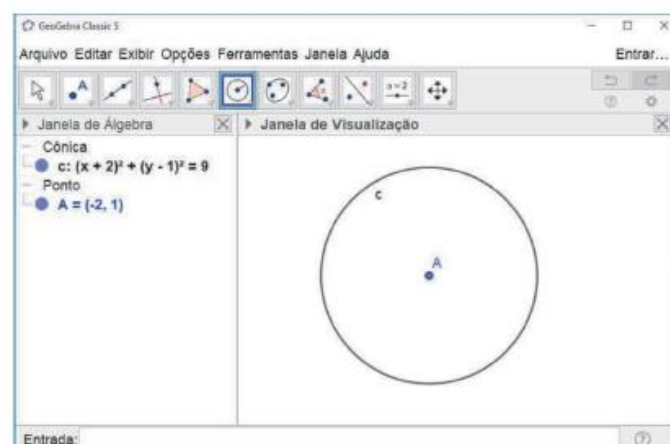
- 2 Clique em qualquer região da Janela de Visualização para marcar o centro A do círculo. Após marcar o ponto A o GeoGebra exibe a seguinte janela.

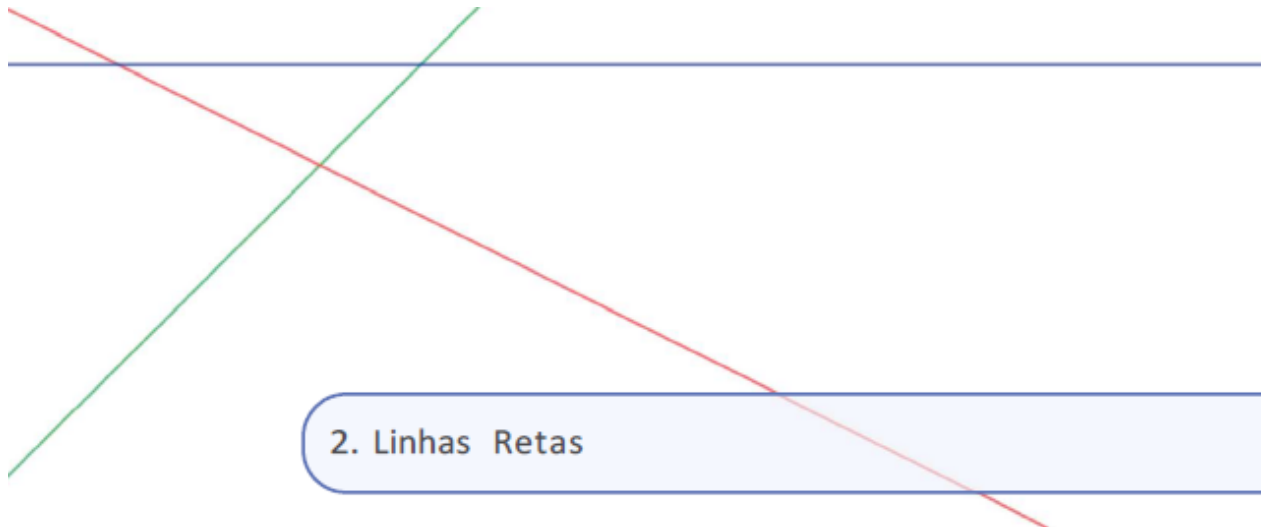


1.5 Construções no GeoGebra

7

- 3 Digite a medida do raio (3) na caixa de texto. Em seguida, clique em OK para que o GeoGebra construa o círculo.

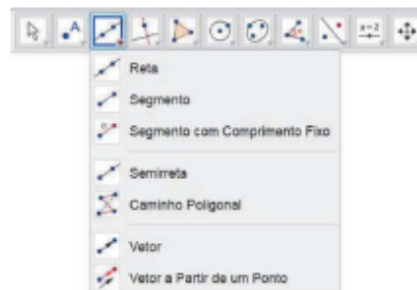




Nesse texto abordamos a construção de linhas retas: retas, semirretas, segmentos de reta e vetores. Abordamos também a construção de caminhos poligonais. Essas ferramentas estão disponíveis no conjunto de ícones que nomeamos de Linhas Retas (terceiro conjunto de ícones da esquerda para direita).

2.1 Retas

O terceiro ícone da barra de ferramentas reúne as ferramentas necessárias para a construção de linhas retas, entre elas, retas, semirretas, segmentos de retas e vetores.



Para construir uma reta basta clicar em Reta e, em seguida, clicar em dois pontos na Janela de Visualização. Os pontos são construídos no momento em que se clica na Janela de Visualização, ou ainda podem ser utilizados pontos construídos anteriormente.

Uma reta pode ainda ser construída por meio do comando

$\text{Reta}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle)$

ao digitá-lo na Entrada. Por exemplo, para construir uma reta pelos pontos (1; 2) e (3; 5), basta digitar o seguinte comando na Entrada.

Entrada: $\text{Reta}((1,2),(3,5))$

2.2 Semirreta

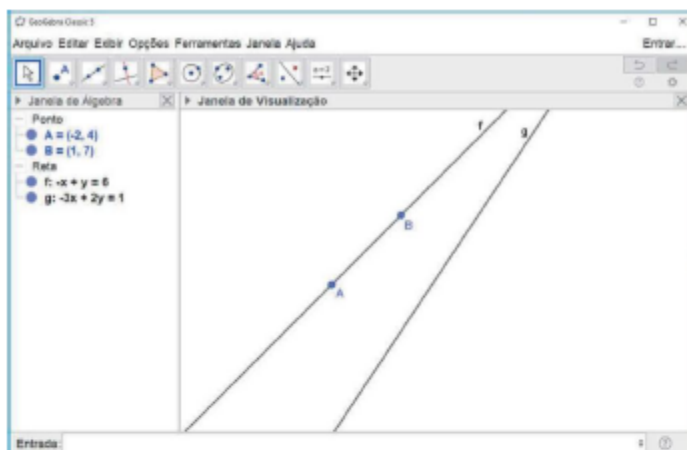
9

Na figura abaixo apresentamos duas retas construídas e exibidas na Janela de Visualização.

A reta f foi construída selecionando a ferramenta Reta e, em seguida, clicando-se em dois pontos na Janela de Visualização. A reta g foi construída digitando, na Entrada, o comando:

Reta((0; 0), (2; 2))

Na primeira construção o GeoGebra exibe a reta e os pontos pelos quais ela é definida. Na segunda é construída e exibida apenas a reta.



2.2 Semirreta

O processo para construção de semirretas com o mouse é semelhante ao de construção de retas. Deve-se clicar na opção Semirreta e, em seguida, clicar em dois pontos na Janela de Visualização.

Ao digitar o comando Semirreta na Entrada o GeoGebra apresenta duas possibilidades de sintaxe.



Na primeira sintaxe,

Semirreta(<Ponto Inicial>, <Ponto>),

é necessário apenas digitar dois pontos para obter uma semirreta. Por exemplo, digitando

Semirreta((0; 0), (1; 1)),

constrói-se uma semirreta com origem em (0; 0) passando por (1; 1).

Na segunda sintaxe,

Semirreta(<Ponto Inicial>, <Vetor Diretor>),

é preciso construir um vetor previamente ou aninhar o comando Vetor no comando Semirreta. Por exemplo, digitando-se

Semirreta((0; 0), u)

constrói-se uma semirreta com origem em (0; 0) e paralela ao vetor u previamente construído. Já, com o comando

Semirreta((0; 0), Vetor((2; 3), (4; 5))),

constrói-se uma semirreta com origem em (0; 0) e paralela ao vetor definido pelos pontos (2; 3) e (4; 5).

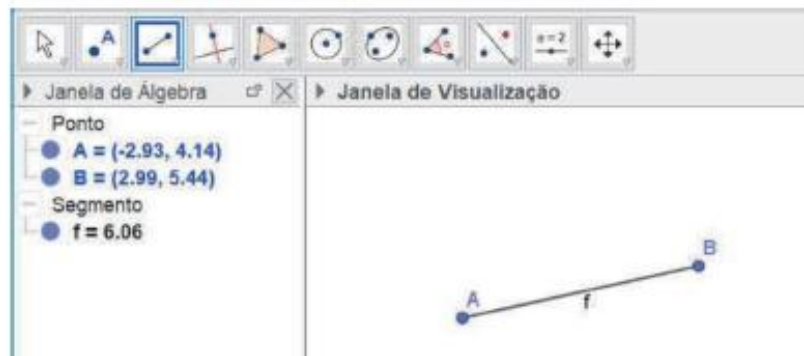
2.3 Segmentos

10

2.3 Segmentos

Há duas opções para construção de segmentos no GeoGebra: Segmento e Segmento com Comprimento Fixo.

Ao seleccionar a opção Segmento, em seguida, clicar em dois pontos na Janela de Visualização é construído um segmento cujas extremidades são os pontos construídos com os cliques do mouse ou pontos construídos em passo anterior.



Na segunda opção, Segmento com Comprimento fixo, clica-se em um ponto na Janela de Visualização. Em seguida, deve-se inserir um valor em uma caixa aberta automaticamente pelo software e, por último, clicar em OK para que o segmento seja construído.



Segmentos também podem ser construídos por meio de comandos. Para isso, basta utilizar uma das seguintes sintaxes:

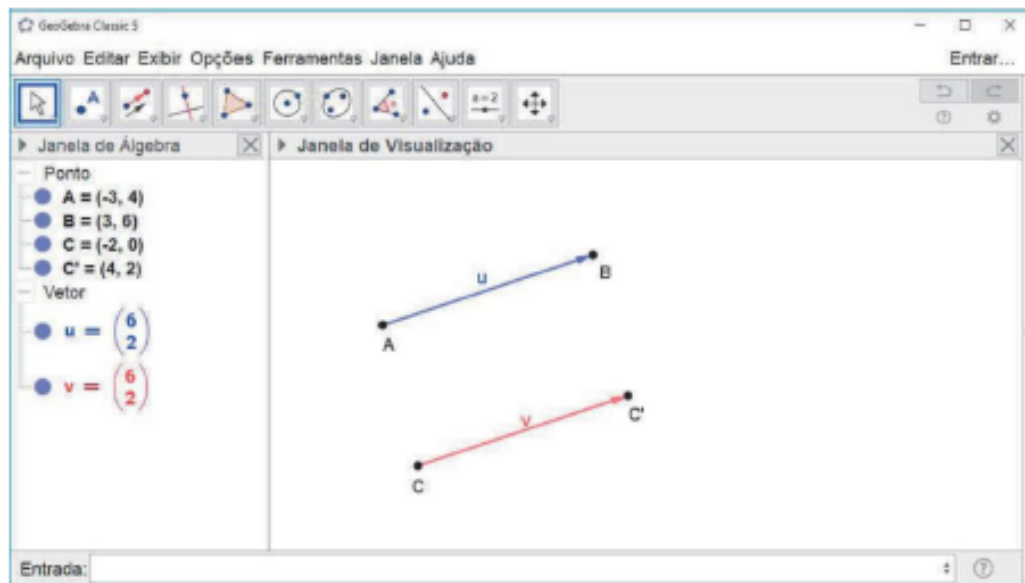
- `Segmento(<Ponto>, <Ponto>)` constrói um segmento a partir de dois pontos;
- `Segmento(<Ponto>, <Comprimento>)` constrói um segmento com comprimento fixo.

2.4 Vetores

No caso de vetores o GeoGebra oferece duas opções no ícone de construção de linhas retas: Vetor e Vetor a partir de Um Ponto. Utilizou-se cada uma dessas opções para a construção dos vetores u e v.

2.4 Vetores

11



Para construir o vetor u seleccionou-se a ferramenta Vetor e, em seguida, clicou-se em dois pontos na Janela de Visualização: A e B. Obtém-se resultado semelhante digitando o seguinte comando

$\text{Vetor}((-3; 4), (3; 6)).$

Os pares ordenados $(-3; 4)$ e $(3; 6)$ são digitados substituindo as expressões <Ponto Inicial> e <Ponto final> no comando

$\text{Vetor}(\text{<Ponto Inicial>}, \text{<Ponto Final>}).$

O vetor v foi construído a partir de um ponto C e do vetor u . Nessa construção foi seleccionada a ferramenta Vetor a partir de um ponto, clicou-se no ponto C e, por último, no vetor u .

Na Entrada ainda é possível construir um vetor tendo como parâmetro um único ponto:

$\text{Vetor}(\text{<Ponto>})$

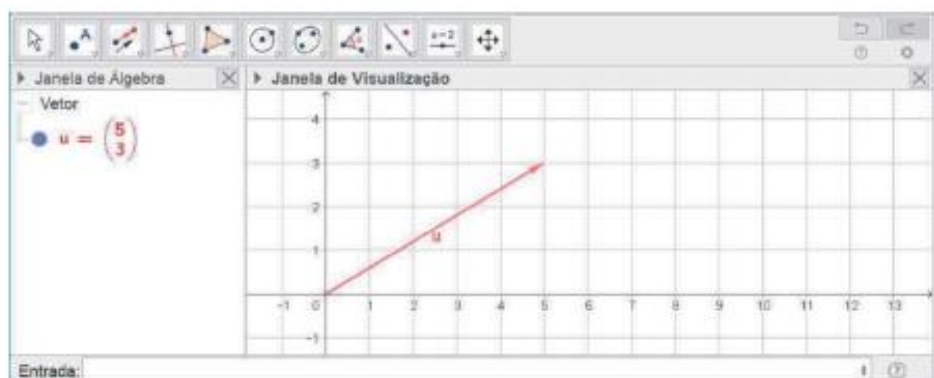
Nesse caso, o vetor tem como origem o ponto $(0; 0)$ e ponto final o ponto dado como parâmetro. Por exemplo, digitando o comando

$\text{Vetor}((5; 3))$

constrói-se o seguinte vetor.

2.5 Caminho Poligonal

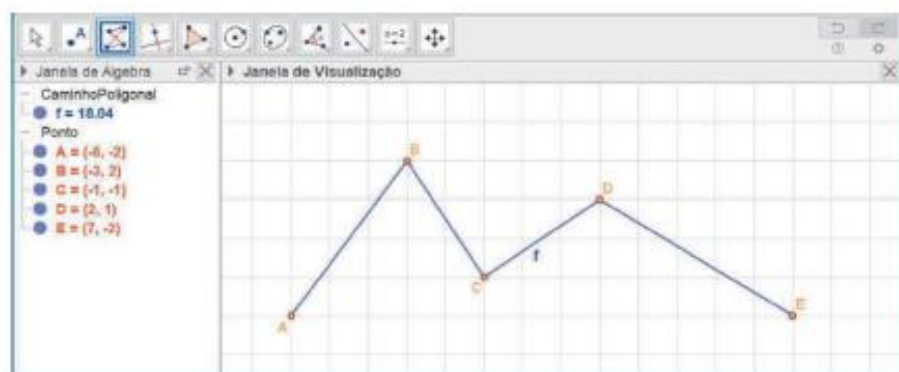
12



2.5 Caminho Poligonal

Um caminho poligonal é um conjunto de segmentos consecutivos. Para construí-lo no GeoGebra basta clicar na opção Caminho Poligonal e clicar em pontos da Janela de Visualização. Para concluir a construção deve-se clicar no ponto inicial da poligonal.

A construção abaixo foi realizada a partir da sequência de cliques: A, B, C, D, E e A.



As sintaxes desse comando digitáveis na Entrada são:

- `CaminhoPoligonal(<Ponto>, ..., <Ponto>)`
- `CaminhoPoligonal(<Lista de Pontos>)`

Na primeira sintaxe obtém-se um caminho poligonal tendo como parâmetros pontos já existentes,

`CaminhoPoligonal(A, B, C, D, E),`

ou pontos que são definidos juntamente com o comando,

`CaminhoPoligonal((1; 2), (3; 1), (4; 0), (3; 4)).`

2.5 Caminho Poligonal

13

É possível ainda construir um caminho poligonal a partir de uma lista de pontos. Por exemplo, digita-se na Entrada uma lista L com os pontos $(-5; 0)$, $(-1; 3)$, $(2; -4)$ e $(6; 2)$.

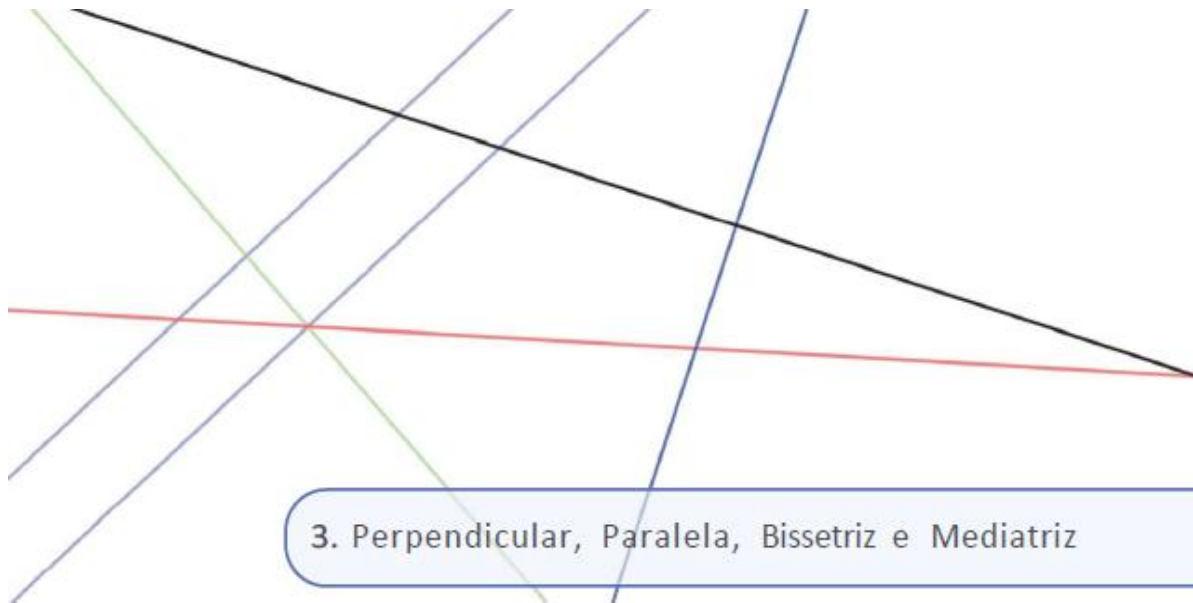
Entrada: $L = \{(-5, 0), (-1, 3), (2, -4), (6, 2)\}$

Em seguida, digita-se o comando para obter o caminho poligonal a partir de L, ou seja,

$\text{CaminhoPoligonal}(L)$.



O nome do caminho poligonal construído anteriormente é f. Note que na Janela de Álgebra é representado $f = 19:83$, ou seja, seu nome igualado a seu comprimento.



Nesse texto abordamos a construção de retas perpendiculares, retas paralelas, bissetrizes e mediatrizes. Para isso, utilizamos as ferramentas reunidas no quarto ícone da Barra de Ferramentas, da esquerda para direita.



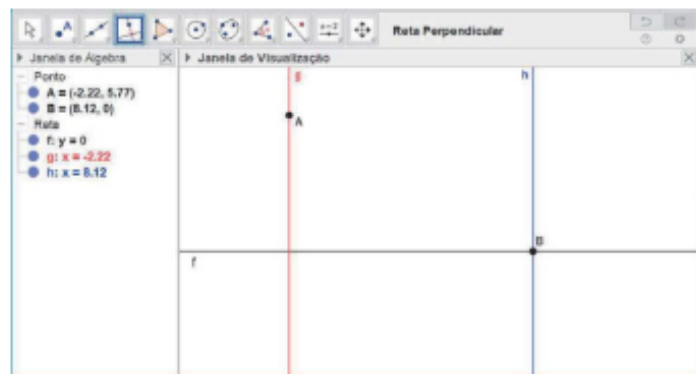
3.1 Retas Perpendiculares

Com a utilização da ferramenta Reta Perpendicular podemos construir retas perpendiculares a uma reta, a uma semirreta, a um segmento e a um vetor. Para construir uma reta perpendicular a uma reta, basta clicar na ferramenta Reta Perpendicular e, em seguida, clicar na reta e por último clicar em um ponto sobre a reta ou não pertencente a ela.

Na figura abaixo a reta g é perpendicular à reta f por um ponto A não pertencente a f . A reta h é perpendicular à reta f por um ponto B pertencente a f .

3.2 Retas Paralelas

15



O processo de construção de retas perpendiculares a semirretas, segmentos de retas e vetores é semelhante ao processo de construção descrito anteriormente.

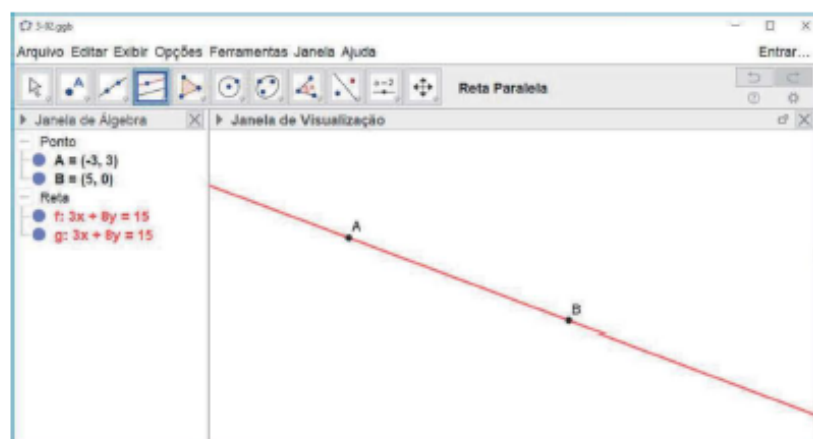
É possível ainda construir uma reta perpendicular digitando comandos na Entrada. Para isso, utilizamos uma das seguintes sintaxes:

- Perpendicular(<Ponto>, <Re ta>)
- Perpendicular(<Ponto>, <Segmento>)
- Perpendicular(<Ponto>, <Vetor>)

3.2 Retas Paralelas

Para construir retas paralelas, primeiramente clicamos no ícone Reta Paralela, em seguida, clicamos em um dos objetos para o qual se deseja construir uma reta paralela, ou seja, em uma reta, semirreta, segmento de reta ou vetor. Por último, clicamos sobre um ponto para que seja construída e exibida a reta paralela.

Na imagem abaixo aparece apenas uma reta na Janela de Visualização, mas observando atentamente a Janela de Álgebra é possível perceber que as retas f e g possuem a mesma equação. Ao construir uma reta g paralela a f clicamos sobre um ponto na reta f. Assim, as retas f e g são paralelas e coincidentes.

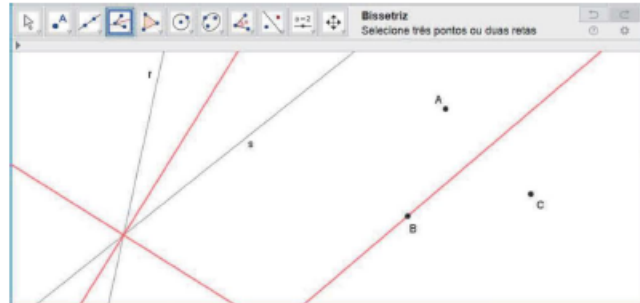


3.3 Bissetrizes

16

3.3 Bissetrizes

No GeoGebra é possível construir bissetrizes a partir de duas retas ou de três pontos. As retas de cor vermelha na imagem abaixo são bissetrizes construídas com a ferramenta Bissetriz.



Na primeira construção que aparece mais à esquerda na Janela do GeoGebra construímos duas bissetrizes, clicando na ferramenta Bissetriz e, em seguida, clicando em cada uma das retas r e s.

Na segunda construção, após selecionar Bissetriz, clicamos em A, B e C e foi obtida uma bissetriz passando por B (o segundo ponto clicado).

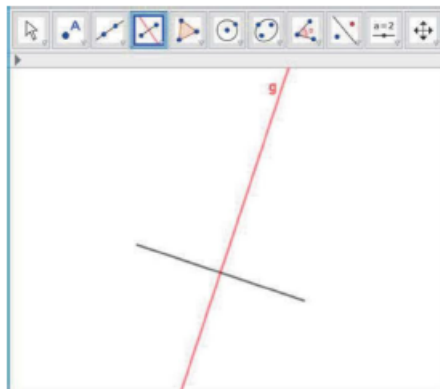
Note que na primeira construção o GeoGebra construiu e exibiu duas bissetrizes cada uma relativa a um dos ângulos formados entre as retas r e s. Já, na segunda construção, foi construída apenas uma bissetriz passando pelo segundo ponto clicado. Podemos interpretar que esse ponto seja o vértice entre duas retas: uma por A B e outra por B C.

O mesmo resultado seria obtido usando as seguintes sintaxes na Entrada:

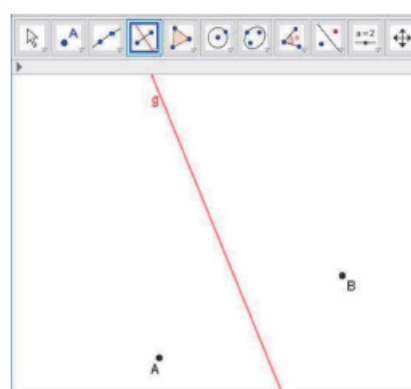
- Bissetriz(<Reta>, <Reta>)
- Bissetriz(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>)

3.4 Mediatrizes

Uma mediatriz pode ser construída a partir de dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta clicar na ferramenta Mediatriz e, em seguida, clicar no segmento ou em dois pontos.



(a) Mediatriz construída a partir de um segmento. pontos.



(b) Mediatriz construída a partir de dois pontos.

O mesmo resultado pode ser obtido digitando-se os seguintes comandos na Entrada.

- Mediatriz(<Ponto>, <Ponto>)
- Mediatriz(<Segmento>)

Anexo 3 – Plano de Aula: Ambientação ao GeoGebra

Sumário

Introdução ao software GeoGebra – exploração das ferramentas básicas, representação gráfica de equações e interpretação de gráficos no plano cartesiano.

Tópico/ Subtópicos

- Introdução ao GeoGebra e Interface do software;
- Inserção de equações na barra de entrada;
- Representação gráfica de funções lineares e Identificação de pontos de interseção;
- Articulação entre registo algébrico e gráfico;

Foco e objetivos da aula

- Familiarizar os alunos com o ambiente de trabalho do GeoGebra e desenvolver sua autonomia;
- Relacionar expressões algébricas com as respetivas representações gráficas;
- Preparar os alunos para a utilização do GeoGebra em tarefas posteriores.

Recursos

- Computadores com acesso ao GeoGebra;
- Projetor / quadro digital;
- Ficha de Ambientação ao GeoGebra;
- Material de apoio do curso de GeoGebra

Capacidades Transversais

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Criatividade e pensamento crítico.
- Competência digital

Desenvolvimento da aula

Embora os alunos já tenham tido algum contato prévio com o GeoGebra em outras oportunidades, esse contato ocorreu de forma mais geral e empírica. Assim, considera-se importante dedicar um momento inicial da aula à revisão e ao aprofundamento de algumas funcionalidades específicas do software que serão particularmente úteis para as tarefas que irão realizar posteriormente.

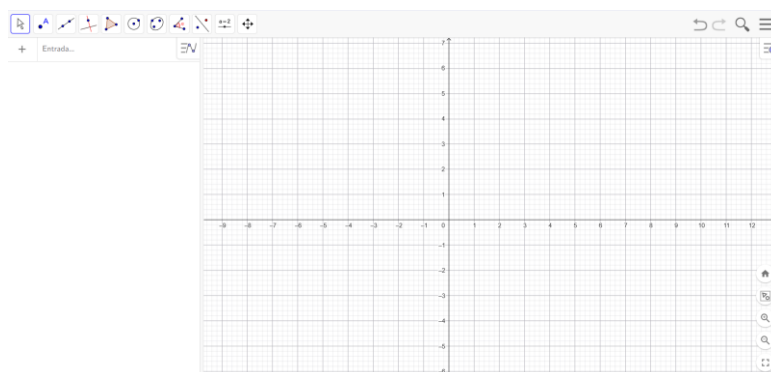
Nesta fase, pretende-se que os alunos conheçam com maior detalhe determinados recursos do GeoGebra, nomeadamente a utilização da barra de entrada para inserir expressões algébricas, a visualização das respetivas representações gráficas no plano cartesiano e a identificação de pontos relevantes no gráfico, como o ponto de interseção entre duas retas.

Desenvolvimento da aula

Para orientar esta exploração inicial, será utilizado como referência parte do material de ambientação ao GeoGebra elaborado pelo professor Sérgio Dantas, disponibilizado no âmbito de formação promovida pela Universidade Estadual do Paraná. Este material servirá como base para a familiarização mais detalhada dos alunos com algumas ferramentas fundamentais do software. Serão então apresentados e explorados com a turma os principais elementos da interface:

- Barra de entrada;
- Janela gráfica;
- Eixos cartesianos;
- Ferramentas básicas de construção

Durante esta exploração inicial, os alunos serão convidados a acompanhar os procedimentos no seu próprio computador, experimentando diretamente as funcionalidades apresentadas.



Após esta breve apresentação da interface do programa, solicitarei aos alunos que utilizem a barra de entrada para inserir algumas equações simples, como por exemplo:

$$y = 2x + 1$$

Pretendo que observem como a expressão algébrica inserida é automaticamente representada na janela gráfica do GeoGebra.

Durante este momento, incentivarei os alunos a experimentar pequenas alterações na equação, modificando coeficientes ou termos independentes, de modo a observar como essas alterações influenciam o gráfico obtido.

Ao longo desta exploração, colocarei algumas questões orientadoras, tais como:

- O que acontece ao gráfico quando alteramos o valor do coeficiente de x ?
- O que acontece quando alteramos o termo independente?
- Como podemos identificar um ponto que pertence à reta representada?

O objetivo desta etapa é que os alunos percebam a relação existente entre a expressão algébrica e a respetiva representação gráfica e entendam como utilizar as ferramentas disponíveis no GeoGebra para resolver determinados problemas.

Desenvolvimento da aula

Em seguida, pedirei aos alunos que insiram duas equações diferentes no GeoGebra, de modo a obterem duas retas representadas no plano cartesiano. A partir dessa construção, demonstrarei como utilizar a ferramenta de interseção para identificar o ponto comum entre as duas retas.

Durante esta fase, incentivarei os alunos a observar atentamente o gráfico e a refletir sobre algumas questões:

- O que representa o ponto de interseção entre as duas retas?
- O que acontece quando as retas não se cruzam?
- O que acontece quando duas equações representam exatamente a mesma reta?

Pretendo que os alunos comecem a perceber (ou lembrar) que o ponto de interseção corresponde a um par ordenado que satisfaz simultaneamente as duas equações.

Após a exploração inicial das ferramentas do software, explicarei aos alunos como guardar um ficheiro do GeoGebra numa pasta previamente indicada. Este procedimento será importante para as atividades que irão realizar posteriormente.

De seguida, solicitarei aos alunos que acedam a um formulário de teste no Google Forms (link: <https://forms.gle/TM7UyneLVaUMFwPJ9>), cujo objetivo é apenas permitir que se familiarizem com o formato de resposta digital que será utilizado. Nesta fase, pretendo garantir que todos compreendem como submeter respostas através da plataforma.

Depois de concluído esse breve teste técnico, disponibilizarei aos alunos a ficha de ambientação ao GeoGebra, também em formato digital através de um Google Forms (link: <https://forms.gle/oWUk7YMbdAfve5qZ8>). Nesta ficha, os alunos irão realizar tarefas relacionadas com a utilização do software, nomeadamente a inserção de equações, a observação dos gráficos obtidos e a identificação de pontos relevantes na representação gráfica.

GeoGebra

Ficha de Ambientação ao GeoGebra

O GeoGebra é um software de Matemática que permite relacionar números, equações e gráficos de forma dinâmica. Ao escrever uma equação, o respetivo gráfico é construído automaticamente, o que facilita a interpretação e a verificação de resultados.

Nesta aula, vais utilizar o GeoGebra para explorar a relação entre equações algébricas e a sua representação gráfica no plano cartesiano.

profmatheus01@gmail.com [Mudar de conta](#)

O nome, a foto e o e-mail associados à sua Conta do Google serão registados quando você fizer upload de arquivos e enviar este formulário.

* Indica uma pergunta obrigatória

Nome *

Durante a realização da atividade, circularemos pela sala com o objetivo de acompanhar o trabalho desenvolvido, esclarecer dúvidas e apoiar os alunos sempre que necessário.

Avaliação

A avaliação será realizada de forma **formativa**, através da observação da participação dos alunos, da execução das tarefas propostas e das respostas registadas no Google Forms. Será também considerada a capacidade dos alunos de utilizar corretamente as ferramentas do GeoGebra.

Compreensão da matéria/tema

A compreensão será verificada através das respostas dadas nas atividades propostas e pelas intervenções dos alunos durante a aula. Sempre que necessário, serão feitos esclarecimentos adicionais para garantir a consolidação das aprendizagens.

Controle do tempo de aula

O tempo será gerido de acordo com o planeamento previamente estabelecido, procurando garantir que todas as etapas da aula sejam cumpridas dentro do tempo previsto.

Controle dos alunos

Durante a aula, circularemos pela sala para acompanhar o trabalho dos alunos, esclarecer dúvidas e assegurar que todos se mantêm envolvidos nas atividades propostas.

Esquema de tempos:

ETAPA DA AULA	TEMPO ESTIMADO
APRESENTAÇÃO DA AULA E INTRODUÇÃO AO GEOGEBRA	15 min
EXPLORAÇÃO INICIAL DAS FERRAMENTAS DO GEOGEBRA	20 min
TESTE TÉCNICO NO GOOGLE FORMS	15 min
REALIZAÇÃO DA FICHA DE AMBIENTAÇÃO	40 min
DISCUSSÃO FINAL E ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS	10 min

Anexo 4 – Plano de Aula – Revisão de Sistemas de Equações do 1.º Grau (2x2)

Sumário

Revisão de sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas (2x2). Resolução algébrica e interpretação gráfica da solução como interseção de duas retas no GeoGebra. Classificação de sistemas: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.

Tópico/ Subtópicos

- Sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas (2x2);
- Resolução de sistemas por métodos algébricos (substituição / comparação);
- Interpretação da solução de um sistema como ponto de interseção de retas;
- Classificação de sistemas: SPD, SPI e SI;

Foco e objetivos da aula

- Resolver sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas;
- Interpretar graficamente a solução de um sistema e utilizar o GeoGebra para representar equações e determinar graficamente a solução de um sistema;
- Identificar e classificar sistemas como possíveis e determinados, possíveis e indeterminados ou impossíveis.

Recursos

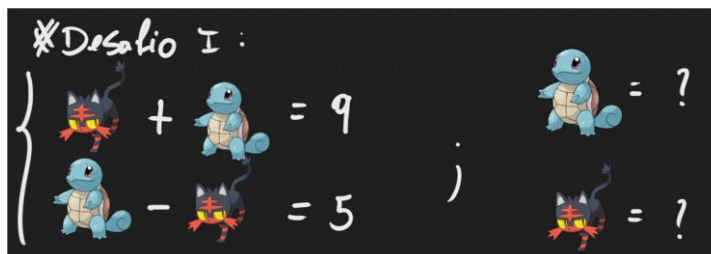
- Computadores com acesso ao GeoGebra;
- Projetor / quadro digital;
- Ficha de Ambientação ao GeoGebra;
- Material de apoio do curso de GeoGebra

Capacidades Transversais

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Criatividade e pensamento crítico.
- Competência digital

Desenvolvimento da aula

A aula terá início com a apresentação de um desafio inicial, que os alunos poderão resolver livremente. Espera-se que alguns recorram a estratégias de tentativa e erro, embora seja possível que surjam outras abordagens.



Desenvolvimento da aula

Após a resolução do desafio, será promovida uma breve discussão coletiva com o objetivo de analisar as estratégias utilizadas. Neste momento, serão colocadas questões orientadoras, procurando conduzir os alunos à representação da situação na forma de um sistema de equações e à sua resolução algébrica, sendo provável que recorram ao método da substituição.

Posteriormente, será estabelecida uma ligação com a atividade realizada na aula anterior de ambientação ao GeoGebra, conduzindo os alunos à interpretação gráfica do sistema como a interseção de duas retas.

De seguida, será apresentado um segundo desafio, cuja resolução por tentativa e erro se tornará mais difícil.

Desafio II :

$$\begin{cases} 2 \text{ owl} + 3 \text{ Pikachu} = 2 \\ 4 \text{ owl} - 9 \text{ Pikachu} = -1 \end{cases} ; \quad \begin{aligned} \text{owl} &= ? \\ \text{Pikachu} &= ? \end{aligned}$$

Neste contexto, espera-se que algum aluno sugira recorrer a um método algébrico para resolver o sistema. A partir dessa proposta, será introduzida a ideia de representar o sistema no GeoGebra, construindo graficamente as duas retas correspondentes às equações.

Dessa forma, os alunos poderão observar que a solução do sistema corresponde ao ponto de interseção das retas, reforçando a relação entre as representações algébrica e gráfica.

Após este momento, será realizada uma breve revisão sobre a classificação dos sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Serão apresentados alguns exemplos que permitirão analisar, tanto algébrica como graficamente no GeoGebra, as diferentes situações possíveis:

- Sistema possível e determinado (SPD):

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

- Sistema possível e indeterminado (SPI):

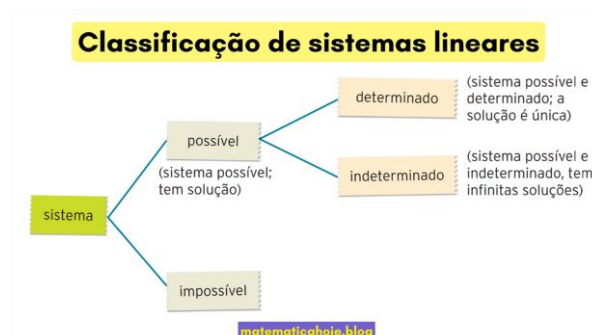
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

- Sistema impossível (SI):

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Desenvolvimento da aula

Posteriormente os alunos deverão apontar nos cadernos o seguinte resumo:



Seguidamente, será apresentado um **problema contextualizado**, no qual os alunos deverão **formular um sistema de equações** que represente a situação descrita.

Num torneio escolar de futebol, foram utilizados **20 meios de transporte** para levar os jogadores até ao estádio: **motociclos e automóveis**.

No total, havia **54 rodas** nesses veículos.

Sabendo que **cada motociclo tem 2 rodas e cada automóvel tem 4 rodas**,

quantos motociclos e quantos automóveis foram utilizados para transportar os jogadores?

Inicialmente, os alunos irão escrever o sistema **no caderno**, realizando o registo algébrico da situação. Posteriormente, irão utilizar o **GeoGebra** para representar graficamente as equações e determinar a solução do sistema.

Durante esta atividade, procurar-se-á reforçar a **transição entre diferentes registos de representação**, nomeadamente entre o **registo algébrico, gráfico e na língua materna**, de acordo com a perspetiva teórica adotada na investigação.

Na parte final da aula, os alunos irão responder à **ficha de trabalho destinada à recolha de dados para a investigação**, disponível em formato digital através de **Google Forms** (link: <https://forms.gle/RN2wVLdR1fp6qzLQ7>).



Avaliação

A avaliação será de carácter **formativo**, baseada na observação da participação dos alunos, nas estratégias utilizadas para resolver os desafios propostos e nas respostas apresentadas na ficha de trabalho.

Compreensão da matéria/tema

A compreensão será verificada através das resoluções apresentadas pelos alunos, das intervenções durante a discussão coletiva e da capacidade de relacionar as representações algébrica e gráfica dos sistemas de equações.

Controle do tempo de aula

O tempo será gerido de acordo com o planeamento definido, procurando assegurar que todas as etapas da aula sejam realizadas dentro do período previsto.

Controle dos alunos

Durante a aula, o professor circulará pela sala para acompanhar o trabalho dos alunos, esclarecer dúvidas e assegurar a participação ativa nas atividades propostas.

Esquema de tempos:

ETAPA DA AULA	TEMPO ESTIMADO
APRESENTAÇÃO DO DESAFIO I E DISCUSSÃO DAS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	10 min
DESAFIO II E RESOLUÇÃO COM GEOGEBRA	10 min
CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS (SPD, SPI E SI)	15 min
PROBLEMA CONTEXTUALIZADO E RESOLUÇÃO COM GEOGEBRA	15 min
TRABALHO AUTÓNOMO: FICHA DE RECOLHA DE DADOS	50 min

Anexo 5 – Termo de Assentimento (Alunos)



Termo de Assentimento

Aos alunos da turma da

Eu, **Matheus de Albuquerque Coelho dos Santos**, estudante da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, estou a desenvolver um estudo no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática.

A investigação tem como objetivo geral **analisar as percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de exercícios matemáticos**, incidindo especificamente sobre **sistemas de equações**, à luz da Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval.

Pretende-se compreender de que forma o recurso ao GeoGebra contribui para a interpretação e resolução de sistemas de equações, considerando os processos de conversão entre diferentes registos de representação semiótica (como o algébrico e o gráfico).

A participação consistirá na realização de tarefas com recurso ao GeoGebra durante as aulas. Poderão ser recolhidos registos escritos, digitais e efetuadas gravações áudio de algumas interações, exclusivamente para fins de investigação.

A participação é **voluntária** e a decisão de participar ou não participar **não terá qualquer influência na avaliação** da disciplina. Todos os dados serão tratados de forma **anónima e confidencial**, não sendo divulgada qualquer identificação dos participantes.

Em caso de dúvida, poderá contactar-me através do email:
up202211885@up.pt

Porto, 10 de Março de 2026

(Destacar e devolver ao professor)

Eu, aluno(a) _____, n.º _____, da turma

☐ Aceito participar do trabalho de investigação

☐ Não aceito participar do trabalho de investigação

Data: ____ / ____ / ____

Assinatura do(a) aluno(a): _____

Anexo 6 – Termo de Consentimento (EE)



Consentimento Informado para Encarregados de Educação Aos alunos da

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

O meu nome é **Matheus de Albuquerque Coelho dos Santos**, estudante do Mestrado em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. No âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, encontro-me a desenvolver um projeto de investigação pedagógica na da

O estudo tem como objetivo analisar as percepções dos alunos sobre o uso do GeoGebra na interpretação e resolução de exercícios de sistemas de equações, à luz da Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval. Pretende-se compreender de que forma a articulação entre representações algébricas e gráficas, com recurso a ferramentas digitais, pode favorecer uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

A investigação integra-se na planificação regular das aulas e envolve a realização de tarefas com recurso ao GeoGebra, a recolha de produções escritas e digitais e a gravação áudio de alguns momentos de trabalho. As gravações destinam-se exclusivamente à transcrição e análise científica, sendo eliminadas após a conclusão do estudo. Todos os dados serão tratados de forma **anónima e confidencial**, não sendo divulgada qualquer identificação dos alunos ou da escola.

A participação é **inteiramente voluntária** e não interfere na avaliação da disciplina. O(a) seu(sua) educando(a) poderá desistir a qualquer momento, sem qualquer prejuízo. Em caso de desistência, os dados já recolhidos não serão utilizados.

A colaboração dos alunos permitirá aprofundar o conhecimento sobre práticas pedagógicas inovadoras no ensino da Matemática, contribuindo para melhorar futuras estratégias de aprendizagem.

Para qualquer esclarecimento adicional, poderá contactar-me através do email: up202211885@up.pt

Porto, 10 de Março de 2026

(Destacar pelo picotado e devolver através do/a seu/sua educando/a)

Eu, _____, Encarregado(a) de Educação
do(a) aluno(a) _____, nº _____, da
da

☐ Autorizo a participação do(a) meu/minha educando(a) no projeto de investigação acima descrito.

☐ Não autorizo a participação do(a) meu/minha educando(a) no projeto de investigação acima descrito.

Data: ____ / ____ / ____

Assinatura: _____

Anexo 7 - Ficha de Ambientação ao GeoGebra (Google forms)



Ficha de Ambientação ao GeoGebra

O GeoGebra é um software de Matemática que permite relacionar números, equações e gráficos de forma dinâmica. Ao escrever uma equação, o respetivo gráfico é construído automaticamente, o que facilita a interpretação e a verificação de resultados.

Nesta aula, vais utilizar o GeoGebra para explorar a relação entre equações algébricas e a sua representação gráfica no plano cartesiano.

matheus.albuquerque1997@gmail.com [Mudar de conta](#) 

O nome, a foto e o e-mail associados à sua Conta do Google serão registrados quando você fizer upload de arquivos e enviar este formulário.

*** Indica uma pergunta obrigatória**

Nome *

Sua resposta

Abre o GeoGebra, identifica e assinala: *

0 pontos

☐ Janela de entrada

☐ Janela de visualização

☐ Eixo Ox

☐ Eixo Oy

Como achas que o GeoGebra pode ajudar enquanto estamos a aprender Matemática? *

Sua resposta

Em que tipo de tarefas pensas que o GeoGebra pode ser mais útil? *

Sua resposta

Parte B – Do algébrico ao gráfico

Na janela de entrada do GeoGebra, escreve as equações:

$$y = x + 1$$

$$y = -x + 2$$

Observa os gráficos obtidos e responde.

As duas retas intersectam-se? *

0 pontos

☐ Sim

☐ Não

Se a resposta a pergunta anterior for sim, indica o ponto de interseção: *

Sua resposta

Parte B – Do algébrico ao gráfico

Agora substitui as equações anteriores por:

$$y = x + 3$$

$$y = x - 2$$

O que mudou nos gráficos? *

Sua resposta

O que permaneceu igual? *

Sua resposta

Parte C – Do gráfico para a equação

1. Cria uma reta definida por dois pontos
2. Observa a equação correspondente apresentada pelo GeoGebra.

Escreve a respetiva equação da reta definida automaticamente pelo GeoGebra: *

Sua resposta

Agora, define a respetiva equação na forma *

$$y = ax + b$$

Escreve a equação da reta definida pelo GeoGebra:

Sua resposta

Parte D - Registos finais no GeoGebra

Constrói no GeoGebra **duas retas diferentes** de modo que:

- Sejam **paralelas**;
- Não coincidam.

Em seguida:

Indica as equações das duas retas na forma $y = ax + b$ *

Sua resposta

Utilizando as ferramentas do GeoGebra, como podes confirmar no gráfico que não existe ponto de interseção? *

Sua resposta

Agora salva o ficheiro e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra **EM FORMATO .ggb** *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Reflexão Final

O uso do GeoGebra ajudou-te a compreender melhor a relação entre equações e gráficos? *

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Em Parte

Justifica brevemente

Sua resposta

Anexo 8 - Explorando Sistemas de Equações com o *GeoGebra*

Explorando Sistemas de Equações com o *GeoGebra*

- Utiliza o GeoGebra ao longo da resolução;
- Justifica sempre as tuas respostas, articulando o registo algébrico e o gráfico.
- Quando solicitado, guarda o ficheiro com o nome indicado.

matheus.albuquerque1997@gmail.com [Mudar de conta](#)



O nome, a foto e o e-mail associados à sua Conta do Google serão registrados quando você fizer upload de arquivos e enviar este formulário.

* Indica uma pergunta obrigatória

Nome *

Sua resposta

Parte A - Modelação e interpretação

Numa feira escolar, foram vendidos sumos e sandes

- No total, venderam-se 42 produtos;
- Cada sumo custa 2€ e cada sandes custa 3€;
- O valor total arrecadado foi 108€.

Define Claramente as incógnitas: *

Sua resposta

Escreve, numa folha a parte, o sistema que descreve a situação e resolve-o por um método algébrico: *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Representa graficamente o sistema no GeoGebra e Explica: *

1. Como o ponto de interseção se relaciona com o contexto do problema;
2. Por que razão a solução encontrada faz sentido no contexto

Sua resposta

Agora salva o ficheiro e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Parte B – Análise comparativa de sistemas

Nesta parte vais construir e comparar diferentes sistemas de equações. Ao observar os gráficos e as equações, deverás identificar semelhanças e diferenças entre eles, relacionando a forma algébrica com a posição relativa das retas no plano cartesiano.

Sobre o Sistema 1:

$$\text{Sistema 1: } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases};$$

Classifique o sistema quanto ao número de soluções. *

1 ponto

- ☐ Sistema Possível e Determinado (SPD)
- ☐ Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
- ☐ Sistema Impossível (SI).

Justifica sua resposta *

Sua resposta

Em relação ao Sistema 1, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico? *

Sua resposta

Agora salva o ficheiro relativo ao Sistema 1 e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Sobre o Sistema 2:

$$\text{Sistema 2: } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases};$$

Classifique o sistema quanto ao número de soluções. *

1 ponto

☐ Sistema Possível e Determinado (SPD)

☐ Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

☐ Sistema Impossível (SI).

Justifica sua resposta *

Sua resposta

Em relação ao Sistema 2, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico? *

Sua resposta

Agora salva o ficheiro relativo ao Sistema 2 e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Sobre o Sistema 3:

$$\text{Sistema 3: } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases};$$

Classifique o sistema quanto ao número de soluções. *

1 ponto

☐ Sistema Possível e Determinado (SPD)

☐ Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

☐ Sistema Impossível (SI).

Justifica sua resposta *

Sua resposta

Em relação ao Sistema 3, notas alguma relação entre os Coeficientes? Se sim, como isso influencia no gráfico? *

Sua resposta

Agora salva o ficheiro relativo ao Sistema 3 e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Parte C – Exploração com parâmetro

Agora vais explorar um sistema que depende de um valor variável. Utilizando um controlo deslizante no GeoGebra, deverás observar como a alteração desse valor influencia o gráfico e o tipo de sistema, analisando a relação entre a expressão algébrica e a representação gráfica.

Considera o sistema:

1. Cria um controlo deslizante para o parâmetro k (entre -5 e 5, com incremento de 0,1).

2. Varia o valor de k e responde:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = k \end{cases}$$

Para que valores de k o sistema é impossível? *

Sua resposta

Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e indeterminado? Justifica. *

Sua resposta

Existe algum valor de k para o qual o sistema é possível e determinado? Justifica. *

Sua resposta

Explica a relação entre o valor de k e a posição relativa das retas. *

Sua resposta

Agora salva o ficheiro relativo ao Sistema e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Parte D - Construção orientada e justificação completa

Constrói no GeoGebra um sistema que:

- Seja possível e determinado;
- Tenha solução no ponto (2,1);
- Não tenha coeficientes iguais nas duas equações.

Em seguida:

Escreve o sistema construído: *

Sua resposta

Justifica de forma clara: *

- Como o gráfico mostra que (2,1) é solução do sistema.
- Por que razão, no registo algébrico, o ponto (2,1) pode ser considerado solução das duas equações.

Sua resposta

Agora salva o ficheiro relativo ao Sistema e faça aqui o upload do arquivo criado por ti no GeoGebra EM FORMATO .ggb *

Faça upload de 1 arquivo aceito. O tamanho máximo é de 10 MB.

[Adicionar arquivo](#)

Reflexão final

Nesta parte vais refletir sobre o trabalho realizado e sobre a utilização do GeoGebra. O objetivo é que penses em como o software te ajudou (ou não) a compreender os sistemas de equações e a relacionar equações com gráficos.

Em que tarefas o uso do GeoGebra foi indispensável? *

Sua resposta

Houve situações em que o gráfico te ajudou a compreender melhor do que os cálculos? Explica *

Sua resposta

Em que momento foi mais difícil articular equações e gráficos? *

Sua resposta