

Otimização de Rotas através da Segmentação de Clientes no Setor de Equipamentos Agrícolas Brasileiro

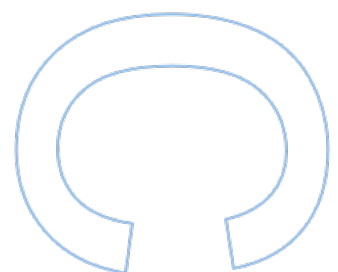
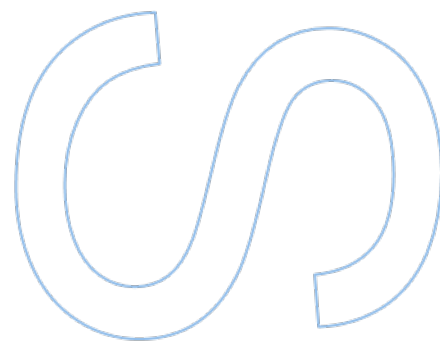
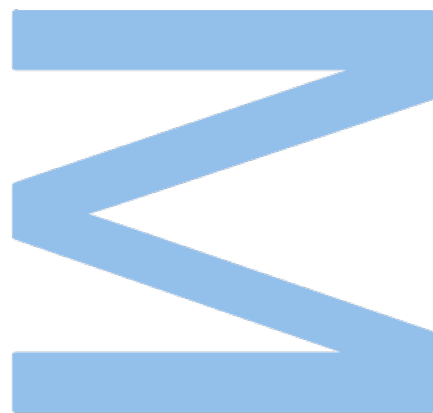
Inês Almeida Girão Soares de Pinho

Mestrado em Engenharia Matemática

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026



Otimização de Rotas através da Segmentação de Clientes no Setor de Equipamentos Agrícolas Brasileiro

Inês Almeida Girão Soares de Pinho

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Engenharia Matemática
Departamento de Matemática
2026

Orientador

Isabel Cristina da Silva Lopes, Professora Coordenadora, ISCAP –
Instituto Politécnico do Porto

Coorientador

Sílvio Marques de Almeida Gama, Professor Associado, Faculdade
de Ciências da Universidade do Porto

Coorientador

Margarida Maria Araújo Brito, Professora Associada, Faculdade de
Ciências da Universidade do Porto

Supervisor Externo na Entidade de Acolhimento

Pedro Louro, Gestor de Business Intelligence, Nors



NORS

Agradecimentos

Aos meus pais, que despertaram e sempre incentivaram a minha curiosidade, por todo o carinho e pelo apoio incondicional.

À minha irmã por ser a minha melhor amiga, companheira de aventuras e gargalhadas.

Aos meus colegas Inês, Eduarda, Guilherme, Martim, Lucas e Pedro, pela amizade genuína e companheirismo ao longo de todo o meu percurso académico.

À Professora Cristina Lopes, cuja orientação, motivação constante, paciência e pronta disponibilidade foram indispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Sílvia Gama e Margarida Brito pelo sólido acompanhamento prestado e pelas preciosas diretrizes académicas.

Aos Professores Manuel Cruz e Jorge Santos pelo interesse e cuidado demonstrados, assim como pelos importantes conselhos e sugestões.

Ao Grupo Nors, pela oportunidade de realizar este estágio, e a toda a equipa de BI, pela forma calorosa como nos receberam e integraram.

Ao Pedro Louro e à Filipa Vieira pelo acompanhamento próximo e diário em contexto empresarial.

Aos meus colegas de estágio Lara, Margarida e João pela vivência conjunta e solidária de toda esta experiência.

Ao Afonso, que cruzou o meu caminho durante esta etapa e a tornou ainda mais especial.

A todos, o meu mais sincero agradecimento!

Resumo

O presente relatório descreve o trabalho realizado no âmbito de um estágio curricular no departamento de Business Intelligence do Grupo Nors. O objetivo principal do projeto consiste em definir percursos diários para as equipas comerciais de uma empresa do grupo que comercializa equipamentos agrícolas em São Paulo, no Brasil, considerando diferentes frequências de visita, de acordo com a segmentação dos clientes.

Na primeira fase do projeto, desenvolveu-se uma segmentação da carteira de clientes com base no respetivo comportamento de compra, recorrendo ao modelo Recência, Frequência e Valor Monetário (RFM). Foram exploradas diferentes abordagens de segmentação, incluindo a aplicação do algoritmo K-Médias às variáveis RFM e um modelo RFM ponderado com normalização das variáveis originais. Com base nos resultados obtidos, que permitiram identificar grupos de clientes com diferentes níveis de relevância estratégica, foram definidas frequências de visita distintas, consoante o segmento ao qual cada cliente pertence.

Na segunda fase, foi abordado o problema de planeamento das visitas comerciais, enquadrado como um Problema de Roteamento de Veículos Periódico. O modelo desenvolvido considera restrições operacionais diversas, como as frequências de visita definidas na etapa anterior, limites de tempo útil diário e espaçamento entre visitas ao mesmo cliente. Para a resolução do problema, exploraram-se duas abordagens: uma formulação exata baseada em Programação Linear Inteira Mista e uma abordagem heurística baseada num Algoritmo Genético.

O desempenho do Algoritmo Genético foi avaliado através da comparação com uma solução de referência baseada na heurística do Vizinho Mais Próximo, tendo os resultados evidenciado uma redução média de 42,47% no tempo de deslocação e melhorias consistentes em todas as execuções realizadas.

Palavras-chave: Algoritmo Genético, K-Médias, Modelo RFM, Otimização de rotas, Programação Linear Inteira Mista, Problema de Roteamento de Veículos, Segmentação de clientes.

Abstract

This report describes the work carried out as part of a curricular internship in the Business Intelligence department of the Nors Group. The main objective of the project is to define daily routes for the sales teams of one of the group's companies that sells agricultural equipment in São Paulo, Brazil, taking into account different visit frequencies according to customer segmentation.

In the first phase of the project, the customer portfolio was segmented based on purchasing behaviour, using the Recency, Frequency and Monetary Value (RFM) model. Various segmentation approaches were explored, including the application of the K-Means algorithm to the RFM variables and a weighted RFM model with normalisation of the original variables. Based on the results obtained, which enabled the identification of customer groups with different levels of strategic relevance, distinct visit frequencies were defined according to the segment to which each customer belongs.

In the second phase, the problem of planning commercial visits was addressed, framed as a Periodic Vehicle Routing Problem. The model developed takes into account various operational constraints, such as the visit frequencies defined in the previous stage, daily working time limits and the interval between visits to the same customer. To solve the problem, two approaches were explored: an exact formulation based on Mixed-Integer Linear Programming and a heuristic approach based on a Genetic Algorithm.

The performance of the Genetic Algorithm was evaluated by comparing it with a benchmark solution based on the Nearest Neighbour heuristic; the results showed an average reduction of 42.47% in travel time and consistent improvements across all runs carried out.

Keywords: Genetic Algorithm, K-Means, RFM Model, Route optimisation, Mixed-Integer Linear Programming, Vehicle Routing Problem, Customer segmentation.

Índice

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	viii
Lista de Abreviaturas	ix
1. Introdução	1
1.1. O Grupo Nors	1
1.2. Contextualização do problema	2
1.3. Objetivo e resultados esperados	3
1.4. Metodologia	3
1.5. Software utilizado	4
1.6. Estrutura do relatório	5
2. Enquadramento teórico	6
2.1. Segmentação de clientes	6
2.2. O modelo Recência, Frequência e Valor Monetário	6
2.2.1. Principais variantes do modelo RFM	7
2.2.2. Vantagens e limitações do modelo RFM	10
2.3. Princípio de Pareto	11
2.4. Algoritmo K-Médias	12
2.5. Problema de roteamento de veículos	13
2.6. Métodos de otimização	15
2.6.1. Métodos exatos: Programação Linear	15
2.6.2. Heurísticas e meta-heurísticas	16
3. Segmentação de clientes	22
3.1. Recolha e tratamento de dados	22
3.1.1. Pré-processamento dos dados	23
3.1.2. Definição de variáveis	24
3.1.3. Análise exploratória dos dados	25
3.1.4. Tratamento de outliers	28
3.1.5. Normalização das variáveis RFM	30
3.2. Modelo RFM com K-Médias	31
3.3. Modelo RFM ponderado com normalização	35
3.3.1. Princípio de Pareto	44
4. Otimização de rotas	46
4.1. Recolha e tratamento de dados	46
4.2. Condições e restrições do problema	47
4.3. Matrizes de tempo e distância	49
4.4. Formulação como problema de programação linear inteira mista	50
4.4.1. Abordagem mensal	50

4.4.2.	Exemplo ilustrativo de aplicação do modelo mensal	54
4.4.3.	Abordagem quinzenal	55
4.4.4.	Exemplo ilustrativo de aplicação do modelo quinzenal	58
4.5.	Modelo de otimização de rotas: Algoritmo Genético.....	61
4.6.	Desempenho do algoritmo	69
4.7.	Otimização de rotas para clientes potenciais	73
5.	Conclusão e trabalho futuro	74
	Referências	76

Lista de Figuras

2.1. Comparação entre construção sequencial e paralela de rotas usando a heurística do Vizinheiro Mais Próximo.	17
2.2. Ilustração do conceito de poupança na heurística de Clarke e Wright.	18
2.3. Representação do funcionamento de um algoritmo genético simples.	19
3.1. Matriz de correlação das variáveis RFM (setor comercial).	26
3.2. Histogramas e <i>boxplots</i> das variáveis RFM (setor comercial).	27
3.3. Histogramas e <i>boxplots</i> das variáveis RFM após winsorização (setor comercial). ..	29
3.4. Histogramas e <i>boxplots</i> das variáveis RFM após normalização (setor comercial). ..	30
3.5. Aplicação do método do cotovelo para determinação do número ótimo de <i>clusters</i> (setor comercial).	31
3.6. Distribuição quantitativa de clientes por <i>cluster</i> (setor comercial).	32
3.7. Análise comparativa dos <i>clusters</i> através dos <i>boxplots</i> das variáveis RFM (setor comercial).	32
3.8. Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM com base no K-Médias (setor comercial).	33
3.9. Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM com base no algoritmo K-Médias (setor comercial).	34
3.10. Gráfico de <i>silhouette</i> para a segmentação obtida com o algoritmo K-Médias (setor comercial).	35
3.11. Distribuição da pontuação RFM (setor comercial).	36
3.12. Distribuição quantitativa dos clientes por segmento RFM (setor comercial).	37
3.13. <i>Boxplots</i> das variáveis RFM por segmento (setor comercial).	38
3.14. Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM (setor comercial).	39
3.15. Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM (setor comercial).	39
3.16. Distribuição da pontuação RFM (setor pós-venda).	40
3.17. Distribuição quantitativa dos clientes por segmento RFM (setor pós-venda).	41
3.18. <i>Boxplots</i> das variáveis RFM por segmento (setor pós-venda).	42
3.19. Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM (setor pós-venda).	43
3.20. Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM (setor pós-venda).	43
3.21. Curva de valor acumulado (setor comercial).	44
3.22. Curva de valor acumulado (setor pós-venda).	45
4.1. Mapa de São Paulo com a representação das filiais e dos municípios atribuídos a cada vendedor.	48
4.2. Exemplo ilustrativo de uma matriz de tempos de viagem, em minutos.	49
4.3. Exemplo ilustrativo de uma matriz de distâncias, em quilómetros.	49
4.4. Representação da restrição de espaçamento para uma janela temporal de 7 dias úteis.	53

4.5. Exemplo de solução e restrição do problema de roteamento de veículos.	53
4.6. Representação de um indivíduo como um mapeamento entre dias e listas orde- nadas de clientes.	62
4.7. Representação da seleção por torneio com $k = 3$	63
4.8. <i>Order crossover</i> de ponto único gerando dois descendentes.	64
4.9. Representação do <i>swap</i> intra-dia.	65
4.10. Representação do <i>swap</i> inter-dia.	65
4.11. Representação do <i>swap</i> de dias completos.	65
4.12. Rotas diárias geradas pelo algoritmo para um dos vendedores.	68
4.13. Distribuição do ganho absoluto de tempo de deslocação, em minutos, obtido pelo AG face à heurística do VMP para cada vendedor.	70

Lista de Tabelas

3.1. Exemplos dos dados na base de dados de notas fiscais.	22
3.2. Exemplos dos dados na base de dados de clientes.	23
3.3. Exemplo dos valores das variáveis RFM para alguns clientes.	25
3.4. Estatísticas descritivas das variáveis RFM.	25
3.5. Número, percentagem e limite de deteção de <i>outliers</i> severos por variável RFM.	29
3.6. Correspondência entre <i>clusters</i> e segmentos de clientes (setor comercial).	33
3.7. Divisão dos clientes em segmentos com base na pontuação RFM.	37
4.1. Exemplo ilustrativo de algumas variáveis da base de dados de localização geográfica dos clientes.	46
4.2. Exemplo ilustrativo de algumas variáveis da base de dados de vendedores.	47
4.3. Exemplo ilustrativo das variáveis da base de dados RFM.	47
4.4. Dimensão e resultados computacionais do exemplo ilustrativo.	55
4.5. Dimensão e resultados computacionais do exemplo de planeamento quinzenal.	60
4.6. Caracterização da carteira de clientes, custo mensal e tempo de execução por vendedor.	69
4.7. Resumo comparativo entre a heurística do VMP e o AG.	71
4.8. Ganho de tempo por vendedor.	72

Lista de Abreviaturas

AG Algoritmo Genético 18, 70–72, 75

AG BR SP Nors Equipamentos Agrícolas Brasil São Paulo 2–4, 22, 35, 36, 47, 73, 74

BI Business Intelligence 1

F Frequência 7–9

FCUP Faculdade de Ciências da Universidade do Porto 1

ISEP Instituto Superior de Engenharia do Porto 1

LEMA Laboratório de Engenharia Matemática 1

M Valor Monetário 7–9

NF Nota Fiscal 23

OSRM Open Source Routing Machine 49, 54, 68

PVRP Problema de Roteamento de Veículos Periódico 46, 48, 61

R Recência 7–9

RFM Recência, Frequência e Valor Monetário 4, 6–10, 23–26, 30–33, 35, 36, 38–41, 43, 47, 74

SCIP Solving Constraint Integer Programs 54, 58

SSE Soma dos Erros Quadráticos 12

TSP Problema do Caixeiro Viajante 13

VMP Vizinho Mais Próximo 16, 62, 69–72, 75

VRP Problema de Roteamento de Veículos 13–17

1. Introdução

O presente relatório apresenta o trabalho desenvolvido durante o estágio curricular realizado entre outubro de 2025 e junho de 2026, no âmbito da conclusão do Mestrado em Engenharia Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). O estágio decorreu no departamento de Business Intelligence (BI) do Grupo Nors, em colaboração com o Laboratório de Engenharia Matemática (LEMA) do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

O principal objetivo deste estágio consiste na otimização das rotas das equipas comerciais de uma das empresas do grupo, combinando técnicas de segmentação de clientes com modelos de otimização para o planeamento eficiente das visitas.

1.1. O Grupo Nors

Com sede no Porto, a Nors é um grupo empresarial português com um legado de mais de 90 anos.

A empresa foi fundada em 1933 por Luíz Óscar Jervell, quando este se tornou o representante oficial da marca Volvo em Portugal. Foi ele quem, em colaboração com Yngvar Poppe Jensen, fundou a Auto Sueco em 1949. A marca Nors surge mais tarde, em 2013, como resultado da reestruturação da empresa.

Desde então, o grupo tem vindo a aumentar a sua presença nos setores dos veículos comerciais pesados e dos equipamentos industriais. Com recurso a aquisições estratégicas e à diversificação das suas áreas de atuação, a empresa tem crescido quer no mercado nacional quer no internacional, estando atualmente presente em 17 países e 4 continentes. Mais recentemente, em 2024, o grupo renovou a sua identidade, com o objetivo de unificar todas as suas marcas numa só.

Para dar resposta às necessidades específicas do mercado, a empresa divide a sua atuação em cinco áreas distintas, resultando nos seguintes segmentos de negócio (Nors 2024):

- **Trucks and Buses** Disponibiliza soluções de transporte e mobilidade, tanto para empresas como para particulares, através da comercialização de camiões e autocarros.
- **Construction Equipment** Responsável pelo fornecimento e distribuição de maquinaria para os setores da construção, indústria, reciclagem, exploração mineira e infraestruturas.

- **Agro** Responsável pelo fornecimento e distribuição de maquinaria e equipamentos para o setor agrícola.
- **Aftermarket** Oferece serviços de assistência e apoio técnico após a venda, estando ainda encarregue da distribuição e venda de peças multimarca para veículos de todas as categorias.
- **Ventures** Dedicar-se ao desenvolvimento de soluções inovadoras em áreas emergentes, nomeadamente nos setores de mediação de seguros e sustentabilidade ambiental.

A Nors AG BR SP é uma das empresas do grupo no segmento Agro, tendo iniciado a sua atividade em 2002.

Com filiais nas cidades de Catanduva, Votuporanga e Itápolis, é a distribuidora oficial da marca *Case IH Agriculture* no Estado de São Paulo, no Brasil.

A empresa dedica-se à comercialização de máquinas agrícolas, distribuindo três categorias principais de produtos: tratores agrícolas, ceifeiras-debulhadoras de cereais e ceifeiras de cana-de-açúcar. Para além do setor comercial, oferece ainda serviços de assistência técnica e manutenção após a venda.

Deste modo, contribui para a eficácia operacional e para o aumento da produtividade do setor agrícola de São Paulo, indo de encontro ao compromisso da Nors com a modernização e inovação deste setor de atividade (Nors 2026).

1.2. Contextualização do problema

A Nors AG BR SP é responsável pela gestão de uma equipa de vendas, encarregue de visitar periodicamente uma vasta carteira de clientes. Perante tal realidade, surge a necessidade de reduzir o tempo despendido em deslocações, garantindo a eficiência das visitas aos clientes.

Face à diversidade e ao elevado volume de clientes com que a empresa se depara, os métodos de planeamento anteriormente utilizados para as visitas aos clientes, muitas vezes baseados na experiência e intuição, têm-se revelado insuficientes para assegurar a qualidade e eficácia do serviço. Isto porque nem sempre atendem às diversas características dos clientes, quer em termos das suas necessidades, quer em termos do seu comportamento de compra e consequente importância estratégica que acabam por assumir perante a empresa.

Além disso, os clientes encontram-se muito dispersos geograficamente, dada a enorme dimensão do Estado de São Paulo. De facto, a equipa de vendas opera em 117 municípios distintos

dentro do Estado, circulando tanto em áreas metropolitanas muito movimentadas como em zonas rurais extensas e, muitas vezes, isoladas. Todos estes aspetos tornam o planeamento das rotas da equipa particularmente desafiante.

Os fatores supramencionados salientam, assim, a importância de adotar uma abordagem que possibilite uma melhor compreensão dos diversos perfis de clientes e a otimização das rotas da equipa comercial.

1.3. Objetivo e resultados esperados

O principal objetivo deste estágio consiste no desenvolvimento de ferramentas que otimizem o planeamento das rotas das equipas de vendas da Nors AG BR SP, substituindo os métodos de decisão informais e subjetivos até então utilizados por uma abordagem analítica.

Numa primeira fase do projeto, pretende-se obter uma segmentação dos clientes com base no seu comportamento de compra, a fim de identificar grupos com perfis de consumo semelhantes. Com base nos resultados obtidos e após estabelecer a importância estratégica de cada um, serão ajustadas as frequências das visitas para cada grupo de clientes. Esta segmentação constitui o ponto de partida para a fase subsequente.

Na fase seguinte, pretende-se definir as rotas das visitas, cuja finalidade é minimizar o tempo gasto em viagens pelas equipas de vendas, assegurando que as frequências de visita definidas na primeira fase do projeto são respeitadas.

A combinação destas duas técnicas resulta em rotas não só eficientes em termos logísticos, mas que também refletem o valor estratégico dos clientes. Nesse sentido, espera-se alcançar uma redução dos custos de deslocação, um aumento da eficiência operacional e da produtividade das equipas e, consequentemente, uma melhoria no atendimento ao cliente.

Espera-se que a empresa fique, assim, com uma base estruturada, passível de adaptação às necessidades futuras e cuja aplicação poderá ser estendida a novos clientes e potencialmente a outras equipas e regiões.

1.4. Metodologia

O trabalho iniciou-se com o tratamento dos dados fornecidos e uma análise exploratória, recorrendo a medidas de estatística descritiva e a representações gráficas, de modo a compreender a estrutura e o comportamento dos dados existentes sobre os clientes da Nors AG BR SP.

Verificou-se que a empresa não dispunha de uma segmentação da carteira de clientes, o que

levou à necessidade de a desenvolver antes de avançar para a fase posterior de otimização de rotas. Assim, para atingir os objetivos delineados nesta primeira fase, a segmentação de clientes foi implementada recorrendo ao modelo Recência, Frequência e Valor Monetário (RFM) e ao algoritmo de *clustering* K-Médias aplicado às variáveis RFM. Para além de uma segmentação global da base de clientes, foram desenvolvidas duas segmentações específicas: uma para o setor comercial e outra para o setor pós-venda, permitindo adaptar a análise às necessidades de cada área.

Posteriormente, e já no contexto da otimização de rotas, o estudo incidiu exclusivamente sobre os clientes do setor comercial, uma vez que apenas estes integram o plano de visitas das equipas de vendas. Nesta etapa, foram inicialmente fornecidas pela empresa apenas as moradas dos clientes. Por isso, foi explorada a geocodificação automática das moradas com recurso ao Nominatim (OpenStreetMap Foundation 2026a), uma ferramenta de geocodificação baseada nos dados do OpenStreetMap (OpenStreetMap Foundation 2026b). Contudo, devido à existência de um elevado número de clientes localizados em zonas rurais de difícil mapeamento, a ferramenta não foi capaz de obter as coordenadas de uma parte significativa das moradas. Para ultrapassar esta limitação, optou-se por solicitar à empresa a disponibilização das coordenadas geográficas de todos os pontos de visita. Com o intuito de alcançar os objetivos definidos para esta segunda fase, foram então exploradas duas abordagens para a resolução do problema: uma abordagem exata baseada em programação linear e uma abordagem heurística baseada num algoritmo genético.

Importa ainda referir que, por questões de confidencialidade, os dados utilizados neste trabalho foram previamente mascarados, de forma a garantir a proteção de informação sensível da Nors AG BR SP.

1.5. Software utilizado

Toda a análise desenvolvida ao longo do presente projeto utiliza o Python como principal ferramenta de *software*. A escolha desta linguagem deve-se, fundamentalmente, ao seu carácter versátil e interpretável, ao seu extenso conjunto de bibliotecas científicas e à possibilidade de integração com outros *softwares* em uso na empresa. Entre os pacotes utilizados, destacam-se os seguintes:

- Pandas e NumPy para manipulação de dados e cálculos numéricos;
- Matplotlib e Seaborn para representação visual de resultados;

- Folium para representação em mapas;
- Pyomo para implementação de modelos de programação linear;
- Scikit-learn para análises estatísticas, pré-processamento dos dados (*scaling*/normalização), algoritmos de *clustering* e avaliação do desempenho desses mesmos modelos.

1.6. Estrutura do relatório

O presente relatório encontra-se organizado em cinco capítulos, de modo a expor o problema em estudo e os métodos adotados para a sua resolução.

No primeiro capítulo é realizada uma introdução ao trabalho desenvolvido, apresentando a empresa, o enquadramento do problema, os objetivos do projeto, a metodologia adotada e as ferramentas utilizadas.

O segundo capítulo aborda os principais conceitos teóricos que sustentam o desenvolvimento do projeto.

O terceiro capítulo é dedicado ao processo de segmentação de clientes, descrevendo a recolha e preparação dos dados, a aplicação de modelos de segmentação e a análise dos resultados obtidos para os setores comercial e pós-venda.

No quarto capítulo é apresentada a abordagem de otimização de rotas desenvolvida. São descritos os dados utilizados, as restrições consideradas, a formulação do problema e os métodos de otimização implementados. O capítulo termina com a avaliação e comparação do respetivo desempenho face a uma solução de referência.

Por último, o quinto capítulo reúne as conclusões do trabalho, destacando as contribuições e limitações encontradas ao longo deste projeto e sugestões para trabalho futuro.

2. Enquadramento teórico

Este capítulo constitui o enquadramento teórico relativo aos principais métodos de segmentação de clientes e ferramentas matemáticas para otimização de rotas, que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho.

2.1. Segmentação de clientes

A segmentação de clientes consiste na divisão da carteira de clientes de uma empresa em subconjuntos cujos membros partilham características ou comportamentos semelhantes. Idealmente, procura-se criar grupos que sejam internamente homogêneos e externamente heterogêneos, isto é, que apresentem padrões similares dentro do grupo, mas que se distingam claramente dos restantes (Anitha e Patil 2022; Chen et al. 2023; Rungruang et al. 2024).

Esta análise é fundamental para que as empresas compreendam os comportamentos e as necessidades específicas dos seus consumidores, especialmente num contexto de negócios que se tem tornado cada vez mais competitivo. Com base nesta informação, podem adaptar as técnicas de *marketing* a cada segmento consoante o seu perfil e valor estratégico, aumentando a eficácia das mesmas. Deste modo, conseguem alocar os seus recursos de forma mais eficiente e construir relações mais sólidas e duradouras com os seus clientes (Anitha e Patil 2022; Ernawati, Baharin e Kasmin 2021).

Existem diversas abordagens de segmentação, que se distinguem entre si consoante os critérios em que se baseiam para agrupar os clientes. Podem ser classificadas em quatro tipos: geográfica, demográfica, psicográfica e comportamental (Ernawati, Baharin e Kasmin 2021; Rungruang et al. 2024).

A segmentação comportamental destaca-se como uma das técnicas mais utilizadas, recorrendo ao histórico de transações dos clientes para obter uma melhor compreensão dos seus padrões de compra, frequência de interações e valor de cada cliente. O modelo RFM, que será explorado na secção seguinte, insere-se nesta categoria e é um dos mais aplicados na literatura (Ernawati, Baharin e Kasmin 2021; Rungruang et al. 2024).

2.2. O modelo Recência, Frequência e Valor Monetário

O modelo Recência, Frequência e Valor Monetário (RFM) é um modelo de segmentação comportamental introduzido formalmente por Hughes, em 1994 (Hughes 2005). É utilizado para

analisar e prever o comportamento de compra futuro dos clientes com base no respetivo histórico de transações (Wei, Lin e Wu 2010; Handojo et al. 2023).

A sua aplicação estende-se a diversos setores de atividade, sendo um dos métodos mais populares no contexto da segmentação e análise do valor do cliente (Wei, Lin e Wu 2010; Handojo et al. 2023).

A premissa fundamental deste modelo é a de que o comportamento passado e atual do cliente é o melhor indicador do seu comportamento futuro (Wei, Lin e Wu 2010).

São consideradas três variáveis fundamentais para descrever o histórico de compras dos clientes: recência, frequência e valor monetário. Estas são definidas da seguinte forma:

- **Recência (R):** tempo decorrido desde a última transação do cliente.
- **Frequência (F):** número total de transações realizadas no período de tempo em análise.
- **Valor Monetário (M):** montante total gasto pelo cliente no período de tempo em análise.

Assim, a avaliação do valor de cada cliente é influenciada de forma distinta por cada uma das métricas RFM. Um menor valor de recência indica, geralmente, um cliente mais ativo e com maior propensão a voltar a comprar (Handojo et al. 2023; Patron 2004). A frequência, por seu lado, reflete a lealdade e confiança dos clientes na empresa, pelo que um valor mais elevado desta variável implica tendencialmente um cliente mais fiel e com intenção de comprar novamente (Handojo et al. 2023; Wu et al. 2021). A variável valor monetário avalia a contribuição do cliente para o lucro da empresa. Assim, a relação entre esta variável e a rentabilidade do cliente tende a ser positiva: quanto maior for o valor monetário, mais rentável se espera que o cliente seja (Handojo et al. 2023; Christy et al. 2021; Zong e Xing 2021).

Em suma, quanto menor é o valor da recência e mais elevados são os valores da frequência e do valor monetário, mais valiosos são considerados os clientes.

2.2.1. Principais variantes do modelo RFM

A literatura descreve uma variedade de procedimentos distintos para a implementação do modelo RFM. Nesta secção são apresentadas algumas das principais abordagens.

Pontuação por quintil de clientes. A implementação tradicional do modelo RFM recorre a um processo conhecido como *método dos quintis de clientes*. Esta metodologia baseia-se num

sistema de pontuação que consiste na discretização de cada uma das variáveis, transformando-as numa escala ordinal, usualmente tomando valores de 1 a 5 (Wei, Lin e Wu 2010; Ernawati, Baharin e Kasmin 2021; Blattberg, Kim e Neslin 2008; Miglautsch 2000).

Para a discretização das três variáveis consideradas, a base de dados de clientes é ordenada de forma independente para cada variável: por ordem crescente, no caso da frequência, F , e do valor monetário, M , e por ordem decrescente, no caso da recência, R . De seguida, para cada variável, os clientes são divididos em cinco grupos de tamanho aproximadamente igual, designados *quintis*, cada um incluindo cerca de 20% do total de clientes (Carrasco et al. 2019). Atribui-se uma pontuação de 1 a 5 a cada grupo, sendo que uma pontuação mais elevada indica um melhor desempenho relativo do cliente. Os três valores, R_{score} , F_{score} e M_{score} , podem ser concatenados num código de três dígitos, sendo atribuída a cada cliente uma das 125 (5^3) combinações RFM possíveis, com 555 a corresponder ao grupo de maior valor e 111 ao de menor valor (Blattberg, Kim e Neslin 2008; McCarty e Hastak 2007).

Pontuação por quintil de comportamento. Uma alternativa à divisão equitativa da base de clientes é a divisão em quintis comportamentais.

O procedimento é semelhante ao da abordagem tradicional, distinguindo-se pelo critério utilizado para definir os pontos de corte. Neste caso, os cinco grupos são construídos a partir da distribuição acumulada de cada variável RFM, em vez de serem aplicados sobre o número de clientes (Dursun e Caber 2016; Miglautsch 2000).

Considerando, por exemplo, o valor monetário, os cinco grupos são definidos de forma a que cada segmento gere aproximadamente o mesmo retorno financeiro. Os clientes são ordenados por ordem crescente de valor monetário e é calculado o valor acumulado. O M_{score} de 1 é atribuído aos clientes cujo valor monetário acumulado é inferior ou igual a 20% do valor monetário total da carteira de clientes. Os M_{score} de 2, 3, 4 e 5 são atribuídos de forma análoga aos grupos seguintes, onde cada grupo é responsável por 20% do valor monetário total, sendo o M_{score} de 5 atribuído aos melhores clientes.

Assim, esta variante dá origem a grupos mais homogêneos em termos de comportamento de compra, ainda que o número de clientes em cada um possa variar. Importa, por isso, referir que estes grupos não correspondem a quintis estatísticos no sentido convencional, consistindo em cinco grupos, cada um representando 20% do valor monetário total.

RFM ponderado. Outra possibilidade é a agregação das três métricas numa única pontuação contínua representativa do valor relativo do cliente, geralmente através de uma média ponderada. Após a discretização em quintis, a pontuação de cada componente R , F e M é multiplicada por um peso w_R , w_F , e w_M , respetivamente, obtendo-se a pontuação ponderada RFM_{score} definida de acordo com a fórmula 2.1 (Carrasco et al. 2019).

$$RFM_{score} = w_R \times R_{score} + w_F \times F_{score} + w_M \times M_{score} \quad (2.1)$$

Relativamente à atribuição dos pesos, a literatura revela perspectivas distintas. A abordagem proposta por Hughes (Hughes 2005) defende que a recência, a frequência e o valor monetário têm igual importância para a identificação do valor do cliente, pelo que a ponderação das três métricas deve ser equitativa. Stone (Stone 1988), por outro lado, defende a atribuição de pesos distintos, argumentando que a importância de cada métrica varia consoante as características do setor de atividade (Cheng e Chen 2009). Em consonância com esta perspectiva, Miglautsch (Miglautsch 2000) propõe fórmulas de ponderação definidas empiricamente, como $RFM_{score} = 3 \times R_{score} + 2 \times F_{score} + 1 \times M_{score}$ ou ainda $RFM_{score} = 9.9 \times R_{score} + 6.6 \times F_{score} + 3.3 \times M_{score}$. Alternativamente, Tsai e Chiu (Tsai e Chiu 2004) sugerem que os pesos atribuídos a cada uma das dimensões devem igualar 1 quando somados. Esta extensão do modelo tradicional, conhecida como *weighted RFM*, permite ajustar a importância atribuída a cada variável de acordo com os objetivos definidos e as especificidades do negócio.

RFM ponderado com normalização das variáveis originais. A pontuação RFM global pode ainda ser obtida, de forma análoga, sem discretizar em quintis cada uma das três métricas RFM (Sarvari, Ustundag e Takci 2016; Wong e Wei 2018). Para implementar esta abordagem, começa-se por normalizar cada uma das variáveis originais - recência, frequência e valor monetário - de forma a assegurar a comparabilidade entre escalas e a evitar que uma variável domine as restantes. A pontuação final é obtida através de uma combinação linear ponderada das variáveis normalizadas, conforme a expressão 2.2:

$$RFM_{score} = w_R \times R_{norm} + w_F \times F_{norm} + w_M \times M_{norm} \quad (2.2)$$

Para efetuar a segmentação de clientes com recurso às variáveis RFM, são frequentemente utilizadas na literatura abordagens baseadas em regras e algoritmos de *clustering* não supervisionado. Entre estes, o algoritmo K-Médias destaca-se como a técnica mais amplamente adotada. A discretização por pontos de corte predefinidos, muitas vezes determinados através de quantis,

é, também, uma prática usual. Algumas alternativas relevantes incluem, entre outros, métodos de *clustering* hierárquico e modelos de classes latentes, ainda que sejam menos prevalentes (Gomes e Meisen 2023).

2.2.2. Vantagens e limitações do modelo RFM

Estar ciente dos pontos fortes e limitações do modelo RFM é essencial para a sua aplicação adequada, promovendo uma interpretação crítica dos resultados e a tomada de decisões mais fundamentadas.

O modelo RFM tornou-se popular sobretudo devido à sua simplicidade e interpretabilidade. A sua capacidade de traduzir o comportamento de compra dos clientes utilizando um número reduzido de variáveis reduz a complexidade da análise, tornando-o numa ferramenta intuitiva e de fácil compreensão por parte dos gestores.

Entre as suas principais vantagens destacam-se, ainda, a facilidade e rapidez de implementação, bem como as reduzidas exigências computacionais, dado que recorre apenas a dados transacionais que, na maioria dos casos, as empresas já possuem. Graças a esta eficácia computacional, o modelo é capaz de analisar grandes volumes de dados, sem que o seu desempenho seja prejudicado (Gomes e Meisen 2023).

A versatilidade do modelo é também um ponto forte a salientar, uma vez que pode ser aplicado em múltiplos setores de atividade (Dursun e Caber 2016).

Além disso, o modelo RFM revela-se bastante eficaz na previsão da resposta dos clientes a campanhas de *marketing*, permitindo que as empresas aumentem o seu lucro a curto prazo. (Carrasco et al. 2019; Handojo et al. 2023; Patron 2004; Wei, Lin e Wu 2010).

No entanto, o modelo RFM possui algumas limitações. Nos casos em que o modelo recorre à discretização de variáveis contínuas para atribuição das pontuações RFM, verifica-se uma perda significativa de informação, o que pode reduzir a precisão da análise (Blattberg, Kim e Neslin 2008; Carrasco et al. 2019).

Por ser um modelo de carácter comportamental, o RFM desconsidera outro tipo de atributos que não constam nos dados transacionais e que podem influenciar o comportamento de compra do cliente, como características pessoais, socioeconómicas ou a fase da relação com a empresa (Dursun e Caber 2016).

Além disso, o modelo não pode ser aplicado a potenciais clientes, dado que o histórico de compras, necessário para a sua implementação, não está disponível nestes casos (McCarty e

Hastak 2007).

Outra limitação relevante está associada à elevada correlação positiva frequentemente observada entre a frequência e o valor monetário, que pode dar origem a redundância na informação e enviesar a avaliação do valor dos clientes (Dursun e Caber 2016; Wei, Lin e Wu 2010).

O modelo apresenta também limitações na distinção entre clientes antigos atualmente inativos e clientes novos que começaram a comprar recentemente, podendo atribuir uma importância artificialmente alta a clientes antigos com histórico de compras elevadas, mas sem atividade recente, distorcendo a sua importância real (Handojo et al. 2023).

Por fim, a versão clássica do modelo foca-se no cliente e não considera o tipo de produto adquirido, tratando todas as compras de forma igual. De facto, quando o comportamento do mesmo cliente varia entre diferentes categorias de produtos, a capacidade preditiva do modelo tradicional pode ser comprometida (Heldt, Silveira e Luce 2021).

2.3. Princípio de Pareto

O Princípio de Pareto, também denominado Regra 80/20, surgiu a partir das observações do economista e sociólogo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923). Este notou a existência de uma grande disparidade na distribuição da riqueza em Itália: cerca de 80% da propriedade nacional estava concentrada em apenas 20% da população. Mais tarde, o consultor Joseph Juran difundiu este conceito e introduziu a expressão "os poucos vitais e os muitos triviais" para ilustrar o facto de, na maioria dos fenómenos, 20% das causas darem origem a 80% dos resultados (Abyad 2021; Dunford et al. 2014).

No entanto, esta proporção 80/20 não é rígida e, na prática, pode sofrer variações como 70/30, 90/10 ou até 90/20, dependendo do fenómeno analisado. Na verdade, a soma destas proporções não precisa de ser exatamente igual a 100%. O valor deste princípio está essencialmente associado à distinção entre os "poucos vitais" e os "muitos triviais", independentemente da percentagem exata atribuída a cada um (Abyad 2021; Dunford et al. 2014).

No contexto da segmentação de clientes, a aplicação do Princípio de Pareto traduz-se na ideia de que uma minoria dos clientes é responsável pela maioria das receitas de uma empresa (Abyad 2021). Por esse motivo, é fundamental identificar estes clientes de elevado valor, os "poucos vitais", permitindo às empresas concentrar os seus recursos nos segmentos de clientes que geram maior rendimento e que mantêm o negócio em funcionamento.

No presente relatório, o Princípio de Pareto será utilizado como referência para analisar a concentração do lucro entre os clientes, permitindo comparar a distribuição observada com o que está descrito na literatura.

2.4. Algoritmo K-Médias

O algoritmo K-Médias é uma técnica de aprendizagem não supervisionada, cujo objetivo é dividir um conjunto de dados em K subconjuntos disjuntos, designados por *clusters*, minimizando a variabilidade intra-*cluster* e promovendo simultaneamente uma boa separação entre *clusters*.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$, onde n é o número de observações e d corresponde à dimensão de cada observação, isto é, ao número de variáveis que a descrevem. A partir deste conjunto, pretende-se encontrar uma partição $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$, tal que cada observação pertença a exatamente um *cluster*.

Cada *cluster* C_j é representado pelo seu centróide μ_j , que corresponde à média de todas as observações x_i que lhe estão atribuídas:

$$\mu_j = \frac{1}{N_j} \sum_{x_i \in C_j} x_i,$$

onde N_j é o número de observações pertencentes ao *cluster* C_j .

O algoritmo procura minimizar a Soma dos Erros Quadráticos (SSE) intra-*cluster*, também designada por *inércia*, calculada através da seguinte expressão:

$$SSE = \sum_{j=1}^K \sum_{x_i \in C_j} \|x_i - \mu_j\|^2.$$

Dado um número pré-definido de *clusters*, K , o algoritmo segue o seguinte processo iterativo:

1. **Inicialização:** selecionam-se aleatoriamente K observações do conjunto X , que serão os centróides iniciais $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$.
2. **Atribuição:** cada observação $x_i \in X$ é atribuída ao *cluster* cujo centróide μ_j está mais próximo, usualmente com base na distância Euclidiana:

$$x_i \in C_j \iff \|x_i - \mu_j\| = \min_{1 \leq k \leq K} \|x_i - \mu_k\|.$$

3. **Atualização dos centróides:** após a alocação de todas as observações, e para cada *cluster* C_j , recalcula-se o novo centróide através da média das observações que lhe estão

atualmente atribuídas:

$$\mu_j \leftarrow \frac{1}{N_j} \sum_{x_i \in C_j} x_i.$$

4. **Iteração até à convergência:** os passos 2 e 3 são repetidos até que uma condição de convergência seja satisfeita, geralmente até que não haja alterações nas atribuições das observações ou até que os centróides deixem de sofrer modificações.

A ampla utilização do algoritmo K-Médias deve-se, em particular, à sua eficiência computacional, que torna este método adequado para lidar com grandes volumes de dados. Além disso, a sua rapidez de convergência e a facilidade de implementação e interpretação contribuem para a sua popularidade. Contudo, a sensibilidade à escolha inicial dos centróides, que pode conduzir à convergência para ótimos locais, e a sensibilidade a *outliers* constituem algumas das suas limitações (Maimon e Rokach 2010).

2.5. Problema de roteamento de veículos

O Problema de Roteamento de Veículos (VRP) é um dos problemas de otimização combinatória mais estudados na área da logística e investigação operacional, tendo sido introduzido pela primeira vez na literatura por Dantzig e Ramser, em 1959 (Dantzig e Ramser 1959).

De acordo com Toth e Vigo (Toth e Vigo 2002), o objetivo do VRP consiste em determinar um conjunto ótimo de rotas a serem percorridas por um conjunto de veículos, que iniciam e terminam o seu percurso no depósito, de modo a servir um conjunto de clientes geograficamente dispersos. O planeamento das rotas deve assegurar a satisfação das necessidades dos clientes, o cumprimento de restrições operacionais e, simultaneamente, minimizar o custo total de transporte, geralmente medido em termos de distância percorrida, tempo de viagem ou de custos operacionais associados às deslocações.

Conforme mencionado anteriormente, a construção das rotas deve respeitar um conjunto de restrições operacionais, de forma a garantir que as soluções obtidas são viáveis na prática. Entre as mais recorrentes, encontram-se restrições de capacidade de carga dos veículos, janelas temporais de atendimento aos clientes, limites na duração ou na distância total das rotas e, ainda, restrições de precedência na ordem de visita a determinados clientes, especialmente em problemas que envolvem entregas e recolhas.

O VRP pode ser interpretado como uma generalização do Problema do Caixeiro Viajante (TSP). Enquanto o TSP visa encontrar a rota com menor custo entre um conjunto de clientes para um único veículo, garantindo que cada cliente seja visitado exatamente uma vez e que o veículo

regresse ao ponto de partida, o VRP expande esta formulação para múltiplos veículos (Rahman e Parvez 2021).

Para determinar o custo das rotas e verificar se as restrições são cumpridas, a rede rodoviária real, normalmente esparsa, é convertida num grafo completo G . Nesta representação, os vértices correspondem aos clientes e ao depósito, enquanto cada arco (i, j) representa a conexão entre dois vértices i e j , com um custo c_{ij} e um tempo t_{ij} associados, determinados com base no percurso mais curto na rede original. O grafo pode ser orientado ou não orientado, consoante as características da rede.

Na formulação clássica do problema, a minimização do custo de transporte é o objetivo mais comum. No entanto, é possível considerar outros critérios de otimização, como a minimização do número de veículos necessários para servir todos os clientes e a distribuição equilibrada do tempo de viagem e da carga transportada entre rotas (Toth e Vigo 2002).

Dada a sua natureza combinatória, o VRP e as suas variantes são classificados como problemas NP-difíceis, já que a complexidade computacional exigida para encontrar a solução ótima aumenta de forma não polinomial com o aumento do número de clientes (Braekers, Ramaekers e Van Nieuwenhuyse 2016).

De forma a adaptar o VRP à diversidade de contextos logísticos em que pode surgir e a refletir de forma mais fiel as restrições associadas a problemas reais, foram propostas várias extensões do modelo clássico, destacando-se as seguintes:

- **VRP com restrições de capacidade:** introduz um limite máximo de capacidade de carga por veículo, que não deve ser excedido em cada rota.
- **VRP com janelas temporais:** impõe restrições temporais ao atendimento aos clientes, sendo estipulado um intervalo de tempo específico para cada cliente, durante o qual podem ser efetuadas as visitas.
- **VRP com múltiplos depósitos:** considera que os veículos podem estar distribuídos por vários depósitos geograficamente dispersos, podendo aqueles partir e regressar a depósitos distintos (Braekers, Ramaekers e Van Nieuwenhuyse 2016).
- **VRP periódico:** as rotas são determinadas para um horizonte temporal de vários dias, conhecendo previamente a frequência com que cada cliente deve ser visitado ao longo desse período (Baldoquin, Martinez e Díaz-Ramírez 2020).

2.6. Métodos de otimização

O VRP pode ser resolvido com recurso a uma grande variedade de abordagens, implicando, de modo geral, uma escolha entre a garantia de otimalidade e a viabilidade computacional, consoante a dimensão do problema.

Os métodos de resolução dividem-se em duas categorias principais: métodos exatos e heurísticas. Os métodos exatos procuram encontrar uma solução ótima global, explorando de forma sistemática todo o espaço de soluções. Contudo, sendo o VRP um problema NP-difícil, revelam-se muito exigentes computacionalmente e, logo, pouco viáveis para casos de maior dimensão. Nestas situações, recorre-se a heurísticas e meta-heurísticas. Estas técnicas conduzem a soluções de boa qualidade de forma mais eficiente em termos computacionais, ainda que sem garantia de otimalidade.

2.6.1. Métodos exatos: Programação Linear

A Programação Linear é uma classe de problemas de otimização em que se procura maximizar ou minimizar uma função objetivo linear, sujeita a um sistema de restrições composto por equações ou inequações lineares (Chen, Batson e Dang 2010). Esta abordagem constitui a base para a formulação matemática de diversos problemas de otimização, incluindo o VRP.

No entanto, muitas das decisões envolvidas na definição das rotas são discretas. Isto exige que algumas ou todas as variáveis assumam valores inteiros, tornando-se necessário recorrer a extensões da Programação Linear tradicional.

Quando todas as variáveis de decisão são inteiras, o problema é classificado como Programação Linear Inteira. Por outro lado, se o modelo combina variáveis inteiras com variáveis contínuas, utiliza-se a designação Programação Linear Inteira Mista (Chen, Batson e Dang 2010).

Estas formulações são particularmente adequadas ao VRP, pois permitem representar, através de variáveis binárias, decisões como a deslocação de um veículo entre dois clientes e, através de variáveis contínuas, elementos como a carga transportada e o início do serviço em cada cliente. A função objetivo corresponde, geralmente, ao custo total de transporte, que se pretende minimizar, enquanto as restrições garantem que as soluções obtidas são viáveis em termos operacionais.

2.6.2. Heurísticas e meta-heurísticas

Os métodos aproximados para a resolução do VRP dividem-se em heurísticas clássicas e meta-heurísticas. As primeiras caracterizam-se por limitar o espaço de procura, produzindo soluções de boa qualidade, em tempos computacionais reduzidos. As meta-heurísticas, por sua vez, realizam uma exploração mais aprofundada, permitindo, geralmente, obter soluções de melhor qualidade, embora com maior custo computacional.

A distinção destas duas classes reside no facto de as heurísticas clássicas não permitirem a deterioração temporária da solução, convergindo frequentemente para ótimos locais, enquanto as meta-heurísticas recorrem a mecanismos que lhes permitem evitar esse comportamento (Braekers, Ramaekers e Van Nieuwenhuyse 2016).

Segundo Toth e Vigo (Toth e Vigo 2002), as heurísticas clássicas no contexto do VRP podem ainda ser subdivididas em três categorias principais: *heurísticas construtivas*, que constroem iterativamente soluções, através da inserção sucessiva de clientes ou da fusão de rotas; *heurísticas de melhoria*, que procuram aprimorar uma solução já existente, através de pequenas alterações, com o objetivo de melhorar o valor da função objetivo; e *heurísticas de duas fases*, que decompõem o problema em agrupamento de clientes e construção das rotas.

Relativamente às meta-heurísticas aplicadas ao VRP, destacam-se abordagens como *Simulated Annealing*, *Pesquisa Tabu*, *Algoritmos Genéticos*, *Colónias de Formigas* e *Particle Swarm Optimization* (Marinakis 2009).

De seguida, serão abordadas de forma sucinta algumas das principais técnicas analisadas no contexto do problema em estudo.

• Heurística do Vizinho Mais Próximo

O método do Vizinho Mais Próximo (VMP) é uma das heurísticas construtivas mais simples e intuitivas para resolução do VRP. De acordo com Liu et al. (Liu et al. 2023), a construção das rotas através desta heurística pode ocorrer de duas formas principais (Figura 2.1):

- **Construção sequencial:** partindo do depósito, uma única rota é construída de forma iterativa, adicionando o cliente mais próximo que não tenha sido visitado. Quando a adição de novos clientes deixa de ser viável, sem violar as restrições operacionais, inicia-se uma nova rota a partir do depósito.
- **Construção paralela:** considera-se um número pré-definido K de veículos, sendo as respetivas rotas construídas em simultâneo. Cada rota é expandida adicionando,

sucessivamente, o cliente não visitado mais próximo, repetindo-se o processo até todos os clientes serem visitados.

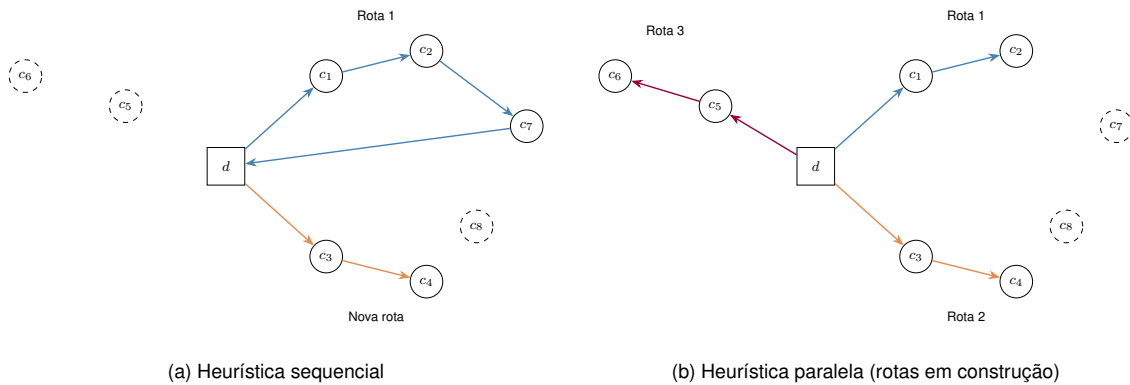


Figura 2.1 - Comparação entre construção sequencial e paralela de rotas usando a heurística do Vizinho Mais Próximo.

• Heurística de poupanças de Clarke e Wright

A heurística construtiva de Clarke e Wright é uma das técnicas mais conhecidas e utilizadas no contexto do VRP.

O algoritmo começa por considerar uma solução inicial constituída apenas por rotas do tipo $(0, i, 0)$, em que cada cliente i é servido individualmente por um veículo, e constrói a solução de forma iterativa, procurando reduzir o custo total das rotas através da fusão de rotas inicialmente independentes.

Na base deste método está, por isso, o conceito de *poupança* (Figura 2.2), que é definido através da expressão:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$$

onde c_{i0} e c_{0j} representam os custos de viagem entre os clientes e o depósito e c_{ij} representa o custo de viagem entre os dois clientes. Assim, será tanto mais vantajoso ligar os nós i e j quanto maior for o valor da poupança s_{ij} .

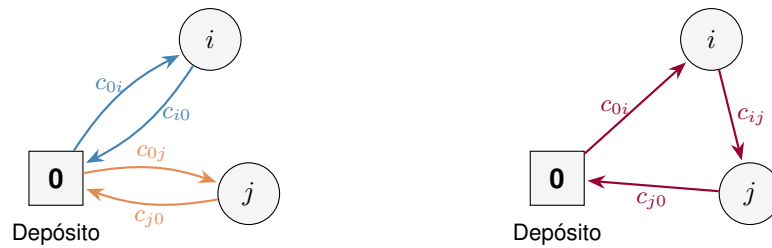


Figura 2.2 - Ilustração do conceito de poupança na heurística de Clarke e Wright.

O primeiro passo do algoritmo consiste no cálculo das poupanças s_{ij} para todos os pares de clientes i e j ($i \neq j$), que são posteriormente ordenadas de forma decrescente. De seguida, a lista ordenada das poupanças é percorrida, procedendo-se à fusão das rotas com poupança máxima, desde que sejam respeitadas as condições de viabilidade do problema. O processo repete-se até não ser possível realizar novas fusões que resultem em poupanças positivas e que satisfaçam as restrições impostas (Raff 1983; Toth e Vigo 2002).

• Algoritmo Genético

Os Algoritmos Genéticos (AG), propostos originalmente por John Holland (Holland 1975), são meta-heurísticas de pesquisa global inspiradas na seleção genética das espécies.

Os AG operam sobre uma população de soluções candidatas e selecionam as mais aptas, que evoluem ao longo de várias gerações, através de operadores que replicam fenómenos biológicos, com o intuito de melhorar progressivamente a sua qualidade à medida que as gerações vão evoluindo (Osman e Kelly 1996).

Segundo Toth e Vigo (Toth e Vigo 2002), este método segue um ciclo iterativo que está assente em quatro etapas fundamentais:

1. **Reprodução (seleção):** nesta fase, são selecionados pares de soluções para gerar descendentes. Esta seleção é enviesada a favor das soluções mais aptas, garantindo que indivíduos com melhor desempenho têm maior probabilidade de contribuir para a geração seguinte.
2. **Recombinação (cruzamento):** os dois progenitores selecionados na etapa anterior são combinados através de operadores de cruzamento, com o objetivo de gerar novos indivíduos que herdem as suas melhores características.

3. **Mutação:** após o cruzamento, são aplicadas pequenas alterações aleatórias a cada descendente, de modo a contribuir para a diversidade da população e a evitar a convergência prematura do algoritmo.
4. **Substituição da geração:** finalmente, cria-se uma nova geração removendo as piores soluções da população atual e substituindo-as pelos novos descendentes, mantendo o tamanho da população constante.

O algoritmo termina quando é satisfeito um critério de paragem definido previamente, como um número máximo de gerações, um limite de tempo computacional ou a ausência de melhorias na melhor solução ao longo de várias gerações, sendo devolvida a melhor solução encontrada ao longo de todo o processo (Baker e Ayechev 2003). A Figura 2.3 ilustra o processo acima descrito.

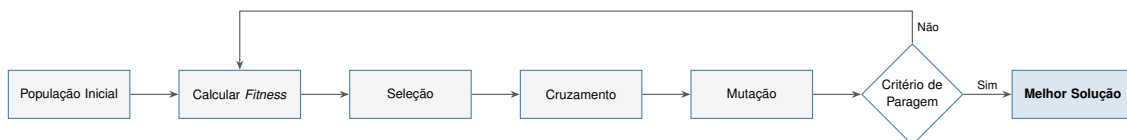


Figura 2.3 - Representação do funcionamento de um algoritmo genético simples.

• Simulated Annealing

O *Simulated Annealing* é uma meta-heurística de pesquisa local, inspirada no processo de recozimento (*annealing*) de metais, no qual um metal é aquecido e depois arrefecido gradualmente, atingindo um estado de menor energia e uma estrutura mais estável.

Considere-se uma dada iteração t , a solução atual x_t e o respetivo conjunto de soluções vizinhas $N(x_t)$. Em cada iteração t , o algoritmo procede conforme os seguintes passos, descritos em Toth e Vigo 2002:

1. **Geração de uma solução vizinha:** seleciona-se aleatoriamente uma solução $x \in N(x_t)$.
2. **Avaliação da solução:** calcula-se a variação da função objetivo entre a solução candidata e a solução atual:

$$\Delta f = f(x) - f(x_t).$$

3. **Critério de aceitação:** se $\Delta f \leq 0$, a solução candidata dá origem a uma melhoria da função objetivo, pelo que é automaticamente aceite, ou seja, $x_{t+1} = x$.

Caso contrário, a solução x pode ainda ser aceite com uma certa probabilidade p_t .

Neste caso, tem-se:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x, & \text{com probabilidade } p_t, \\ x_t, & \text{com probabilidade } 1 - p_t. \end{cases}$$

A probabilidade de aceitação p_t é usualmente definida por

$$p_t = e^{-\frac{\Delta f}{\theta_t}}$$

onde θ_t representa a temperatura na iteração t .

4. **Evolução da temperatura:** a temperatura θ_t evolui ao longo do algoritmo segundo um *esquema de arrefecimento*. Começa-se por definir uma temperatura inicial $\theta_1 > 0$ suficientemente elevada, promovendo uma maior exploração do espaço de soluções numa fase inicial do processo. Após cada bloco de T iterações, multiplica-se θ_t por um fator de arrefecimento α :

$$\theta_{t+T} = \alpha \cdot \theta_t, \quad 0 < \alpha < 1$$

Assim, à medida que a temperatura vai diminuindo, a probabilidade de aceitar soluções de pior qualidade reduz, tornando o algoritmo cada vez mais seletivo e favorecendo a melhoria da solução.

5. **Critério de paragem:** o algoritmo termina quando se verifica um determinado critério de paragem. Alguns critérios comuns são a estagnação da melhor solução encontrada, um número reduzido de movimentos aceites ou a execução de um número máximo de iterações.

• Pesquisa Tabu

A Pesquisa Tabu é uma meta-heurística de procura local, que explora iterativamente o espaço de soluções através da análise de soluções vizinhas.

O algoritmo começa com uma solução inicial, normalmente viável. Em cada iteração, é selecionada a melhor solução encontrada na vizinhança da solução atual, mesmo que este movimento degrade temporariamente o valor da função objetivo (Gendreau et al. 2008).

De forma a evitar que as mesmas soluções sejam revisitadas repetidamente, o método recorre ainda a uma estrutura de memória a curto prazo, designada *lista tabu*, onde são

armazenados determinados atributos de soluções recentemente analisadas, que são classificados como *tabu* e proibidos durante um certo número de iterações. Deste modo, o algoritmo é encorajado a procurar soluções em direções ainda não exploradas (Toth e Vigo 2002).

O estatuto *tabu* de um movimento pode, contudo, ser anulado através de um *critério de aspiração*, que permite aceitar movimentos proibidos, caso estes conduzam a uma solução melhor do que qualquer outra encontrada anteriormente no processo de busca (Osman e Kelly 1996).

Para aumentar a sua eficácia na prática, o algoritmo pode ainda ser complementado por estratégias de *intensificação*, que aprofundam a pesquisa em regiões promissoras do espaço de soluções já identificadas anteriormente, e de *diversificação*, que conduzem o algoritmo para regiões do espaço de soluções que ainda não foram exploradas (Beausoleil 2000).

O algoritmo termina quando um determinado critério de paragem é satisfeito, usualmente um número máximo de iterações, um limite de tempo computacional ou a ausência de melhoria na melhor solução após um número fixo de iterações (Gendreau et al. 2008; Toth e Vigo 2002).

3. Segmentação de clientes

Neste capítulo aborda-se o processo de segmentação dos clientes, considerando dois casos distintos: o setor comercial e o setor pós-venda. Uma vez que os procedimentos adotados foram análogos, e para evitar redundâncias, neste relatório será apresentada de forma mais detalhada apenas a segmentação relativa ao setor comercial, por ser a mais relevante para a etapa de otimização de rotas. Para o setor pós-venda, serão apresentados apenas os principais resultados.

3.1. Recolha e tratamento de dados

Tendo em vista a realização da segmentação de clientes, foram disponibilizadas pela Nors AG BR SP duas bases de dados: o registo dos clientes e o histórico de transações. A descrição pormenorizada de cada uma é apresentada a seguir.

- **Notas fiscais (NFs):** a base de dados em questão descreve o histórico de transações com clientes entre os anos de 2007 e 2025, que foram documentadas sob a forma de notas fiscais. Cada linha da tabela representa uma transação distinta e as respetivas colunas detalham as informações correspondentes a essa transação, conforme ilustrado na Tabela 3.1. As principais variáveis utilizadas na análise são as seguintes:

- *Emis.:* data de emissão da nota fiscal;
- *N.F.:* número da nota fiscal;
- *Pessoa:* código do cliente;
- *Ope:* tipo de operação;
- *Vlr da Nota:* valor total da nota fiscal.

É de notar que a base de dados inclui ainda variáveis de natureza fiscal e administrativa, que não foram consideradas na análise.

Tabela 3.1 - Exemplos dos dados na base de dados de notas fiscais.

Emis.	N.F.	Pessoa	Ope	Vlr da Nota
...	...	...	...	...
30/06/2021	37965	42817	VMP	5 182.47 R\$
...	...	...	...	...

- **Registo de clientes:** este conjunto de dados, exemplificado na Tabela 3.2, contém informações relativas à identificação dos clientes e complementa a base de dados de notas fiscais. Cada linha representa um cliente distinto e as duas bases de dados estão interligadas através do código de cliente. Assim, para além de permitir que cada transação seja associada ao respetivo cliente, permite obter características adicionais sobre os mesmos, tais como nome completo, número de identificação fiscal, cidade e outros campos descritivos.

Tabela 3.2 - Exemplos dos dados na base de dados de clientes.

Código	Nome Completo	CGC/CPF	UF	Cidade
...	...	...	...	...
123	Cliente Exemplo	00000123456789	SP	Catanduva
...	...	...	...	...

3.1.1. Pré-processamento dos dados

Com o objetivo de garantir a consistência, integridade e qualidade dos dados utilizados, foi realizado um pré-processamento dos mesmos, que se revelou imprescindível para a correta implementação do modelo RFM.

As bases de dados, que originalmente foram fornecidas em formato *txt*, começaram por ser convertidas para formato Excel, a fim de facilitar o tratamento e a análise subsequentes.

O primeiro passo consistiu na preparação das duas bases de dados e incluiu a eliminação de linhas vazias e cabeçalhos repetidos, bem como a aplicação de um cabeçalho fixo para uniformizar as colunas.

Em seguida, procedeu-se ao tratamento da base de dados de notas fiscais. Foram removidas NFs canceladas, linhas de totais e os valores monetários foram normalizados. Para lidar com NFs repetidas, foi adicionada uma coluna identificadora da filial associada à transação (*Filial*) e criou-se uma chave tripla para identificação da cada NF (variável *NF_Filial_Data*), combinando o número da NF (*N.F.*), a filial correspondente (*Filial*) e a respetiva data de emissão (*Emiss.*).

Paralelamente, os dados relativos aos clientes também foram tratados: as linhas partidas foram identificadas e reconstruídas, assegurando que cada registo representasse corretamente um cliente.

Após a limpeza e normalização, as duas bases de dados foram unidas, dando origem a um único conjunto de dados com 227 942 registos e 3019 clientes.

Para preparar a segmentação de clientes, e atendendo às instruções do negócio, foi efetuada uma filtragem de forma a considerar apenas as transações correspondentes a operações de venda efetuadas nos últimos 4 anos, reduzindo a base para 59 043 registos, associados a 1900 clientes distintos.

Esta base de dados foi ainda dividida em duas sub-bases de dados, para permitir a realização de uma segmentação individual para cada setor:

- **Base comercial:** inclui apenas transações relativas a venda de máquinas agrícolas, composta por 856 registos e 353 clientes;
- **Base pós-venda:** inclui apenas transações relativas a venda de peças e mão de obra, com 58 187 registos e 1836 clientes.

Este conjunto de procedimentos garantiu que os dados utilizados na segmentação de clientes fossem consistentes e adequados à aplicação do modelo RFM, permitindo calcular corretamente as métricas que serão definidas na secção seguinte.

3.1.2. Definição de variáveis

Nesta secção, apresenta-se a definição das variáveis utilizadas no processo de segmentação de clientes. Mais concretamente, descreve-se como foi construída cada métrica a partir dos dados transacionais disponíveis, de modo a garantir a caracterização do comportamento de compra necessária à implementação do modelo RFM.

O primeiro passo consiste na determinação de uma data de referência.

- **Data de referência:** corresponde ao dia imediatamente posterior à última data de emissão de uma nota fiscal (*Emis.*) registada no conjunto de dados.

Com esta data estabelecida, procede-se ao cálculo das variáveis RFM, conforme definido abaixo:

- **Recência:** a recência é definida como a diferença, em dias, entre a data de referência e a data mais recente de emissão de uma nota fiscal associada a cada cliente (data mais recente da variável *Emis.*).

- **Frequência:** a frequência corresponde à contagem de valores distintos da variável identificativa de cada transação, resultante da concatenação do número da nota fiscal, filial e data de emissão (variável *NF_Filial_Data*).
- **Valor Monetário:** o valor monetário é calculado através da soma dos valores das notas fiscais (*Vir da Nota*) associadas a cada cliente ao longo do período de 4 anos considerado.

Na Tabela 3.3 é possível observar, para alguns clientes, os valores das variáveis definidas acima.

Tabela 3.3 - Exemplo dos valores das variáveis RFM para alguns clientes.

Pessoa	Recência (dias)	Frequência (n.º de compras)	Valor Monetário (R\$)
678	719	13	31 987 700.00
681	305	72	130 232 670.00
698	306	1	3 373 500.00
1075	33	2	723 178.50
3641	512	1	296 445.90

3.1.3. Análise exploratória dos dados

A fim de obter uma compreensão inicial do comportamento das variáveis definidas na secção anterior, realizou-se uma breve análise exploratória dos dados. Esta etapa tem o intuito de estudar a distribuição das variáveis, perceber como as variáveis se relacionam entre si e averiguar a existência de potenciais valores atípicos, de modo a preparar a construção do modelo de segmentação e a garantir que este dê origem a uma classificação fidedigna.

Na Tabela 3.4 encontram-se algumas estatísticas descritivas para cada uma das variáveis RFM.

Tabela 3.4 - Estatísticas descritivas das variáveis RFM.

Variável	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
Recência (dias)	1	1462	547.35	412.11
Frequência (n.º de compras)	1	72	2.43	4.50
Valor Monetário (R\$)	16 262	130 232 670	2 488 032.74	8 736 929.64

Observa-se que a recência apresenta um desvio padrão relativamente consistente com a sua média, o que sugere uma distribuição mais equilibrada em torno do valor central. Em contrapartida, a frequência e o valor monetário evidenciam uma elevada variabilidade, com desvios padrão bastante superiores às respetivas médias, sobretudo no caso desta última variável. A grande amplitude destas duas variáveis, com valores tão distantes da média, é consistente com distribuições de cauda longa e com a presença de observações extremas.

Em adição à análise descritiva, importa compreender de que forma as variáveis RFM se relacionam entre si. Nessa perspetiva, analisou-se a matriz de correlação de Pearson apresentada na Figura 3.1.

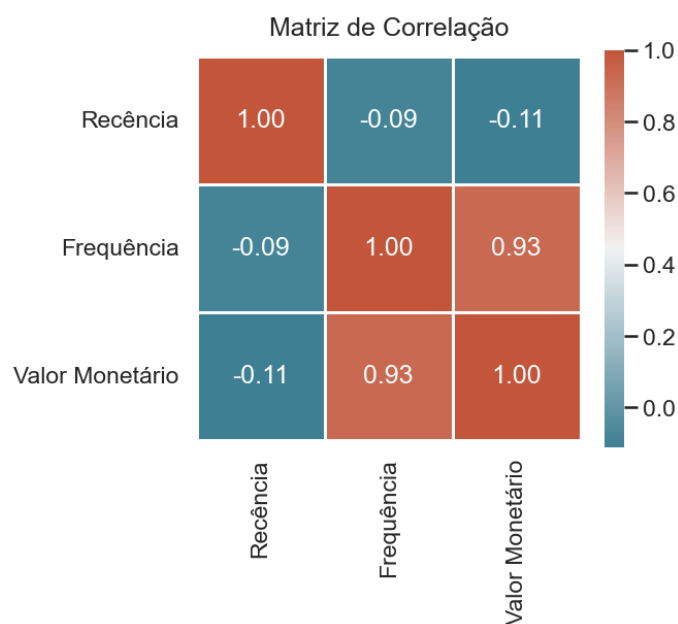


Figura 3.1 - Matriz de correlação das variáveis RFM (setor comercial).

Destaca-se uma elevada correlação positiva entre a frequência e o valor monetário ($r = 0.93$), indicando que clientes que compram mais frequentemente tendem a acumular uma quantia total gasta mais elevada. Este resultado sugere uma elevada associação entre ambas as variáveis, o que é coerente com o contexto analisado e confirma o que é indicado na literatura (Dursun e Caber 2016).

Por outro lado, a recência apresenta correlações negativas com a frequência ($r = -0.09$) e com o valor monetário ($r = -0.11$). Contudo, estes coeficientes encontram-se muito próximos de zero, pelo que não há evidência de uma associação linear relevante entre estas variáveis. Assim, a recência parece capturar uma dimensão comportamental complementar às restantes

variáveis.

De seguida, analisou-se a distribuição das variáveis através dos histogramas e *boxplots* apresentados na Figura 3.2.

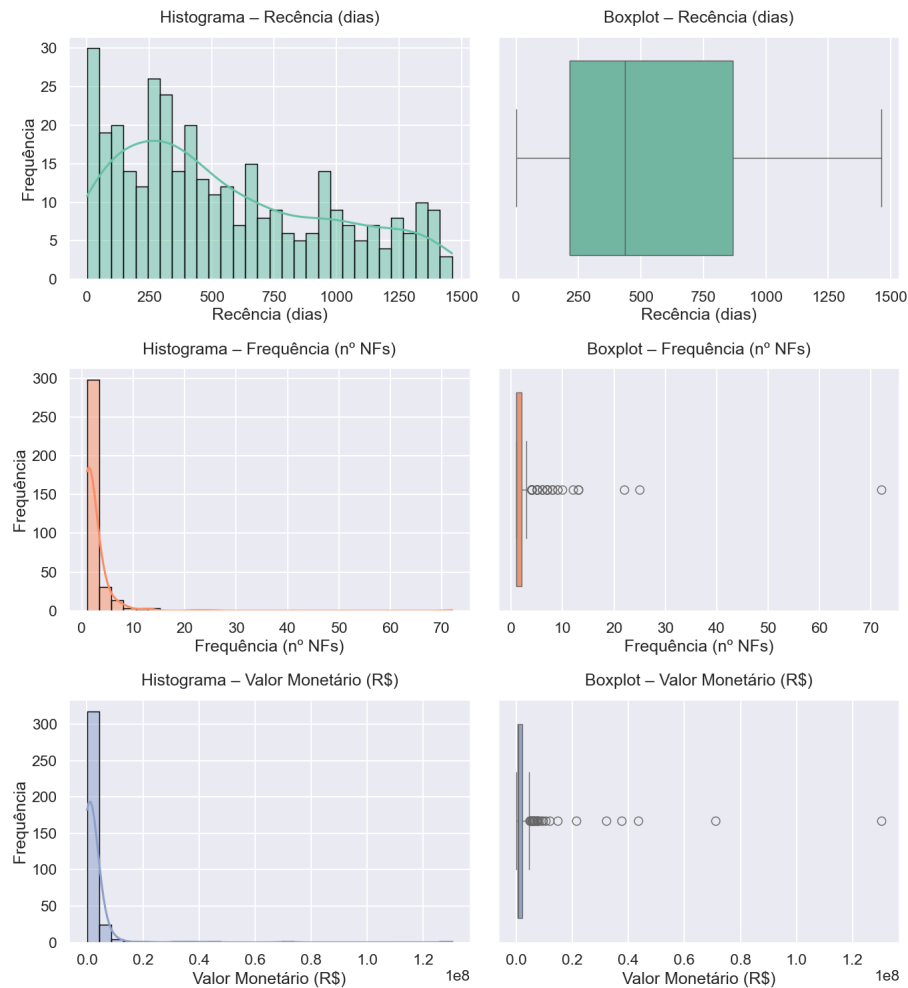


Figura 3.2 - Histogramas e *boxplots* das variáveis RFM (setor comercial).

A análise da Figura 3.2 confirma os padrões observados anteriormente. A recência apresenta uma distribuição relativamente dispersa ao longo do período de tempo observado, com uma ligeira assimetria positiva, mas sem a presença de *outliers*. Em contraste, tanto a frequência como o valor monetário exibem caudas longas à direita bastante severas e inúmeros *outliers*. Este comportamento sugere que a maioria dos clientes realiza poucas compras e gasta pouco, enquanto um grupo reduzido apresenta uma elevada atividade de compra e de valor total gasto.

Esta assimetria tão acentuada tende a comprimir as observações junto à origem, tornando menos evidentes as diferenças entre clientes e dificultando a identificação de padrões comportamentais distintos.

Nesse sentido, é importante identificar e tratar estes valores extremos, de forma a atenuar o impacto destas observações e a preservar a capacidade discriminativa do modelo.

3.1.4. Tratamento de outliers

A deteção dos *outliers* foi realizada através do método de Tukey, adaptando-o para uma abordagem mais conservadora (Shevlyakov et al. 2013). Habitualmente, consideram-se *outliers* as observações que se situam fora do intervalo:

$$[Q1 - 1.5 \cdot IQR, Q3 + 1.5 \cdot IQR]$$

onde $IQR = Q3 - Q1$ é o intervalo interquartil e $Q1$ e $Q3$ são o primeiro e o terceiro quartil da distribuição, respetivamente (Abuzaid 2024).

No entanto, este critério poderia classificar como *outliers* observações relevantes e representativas do comportamento real dos clientes, nomeadamente clientes de elevado valor. Para evitar isto, optou-se por considerar apenas os *outliers* severos, definidos como observações fora do intervalo:

$$[Q1 - 3 \cdot IQR, Q3 + 3 \cdot IQR]$$

Após a identificação dos *outliers* severos, procedeu-se ao seu tratamento através de *winsorização*, uma técnica que consiste na substituição dos valores extremos por valores mais representativos da distribuição, permitindo reduzir o seu impacto sem alterar o tamanho original da amostra (Abuzaid 2024).

Neste caso, foi utilizada uma abordagem baseada em quantis, substituindo os *outliers* severos pelo percentil 90 (P_{90}) da distribuição original da respetiva variável. Esta escolha foi o resultado de diversas experiências, tendo os resultados obtidos com o P_{90} sido considerados pela empresa como os mais interpretáveis.

Desta forma, preserva-se a estrutura hierárquica dos dados e mantém-se a distinção dos clientes de maior valor, evitando-se simultaneamente que esses valores tenham uma influência desproporcional na dispersão global dos dados. Como resultado, obtém-se uma representação mais equilibrada e maior estabilidade nos modelos de segmentação.

A Tabela 3.5 sintetiza os limites de deteção e o volume de observações tratadas.

Tabela 3.5 - Número, percentagem e limite de detecção de *outliers* severos por variável RFM.

Variável	$Q3 + 3 \times IQR$	P_{90}	Nº Outliers	% Outliers
Recência (dias)	2 830	1 219.4	0	0.00%
Frequência (n.º de compras)	5	4	24	6.80%
Valor Monetário (R\$)	7 350 770	4 266 180	16	4.53%

Observa-se que a recência não apresenta *outliers* severos, dado que o limite de Tukey se encontra muito acima do valor máximo da variável. Já a frequência e o valor monetário registam, respetivamente, 6.80% e 4.53% de *outliers* severos. Nestes casos, estas observações serão então substituídas pelo P_{90} da variável (Figura 3.3).

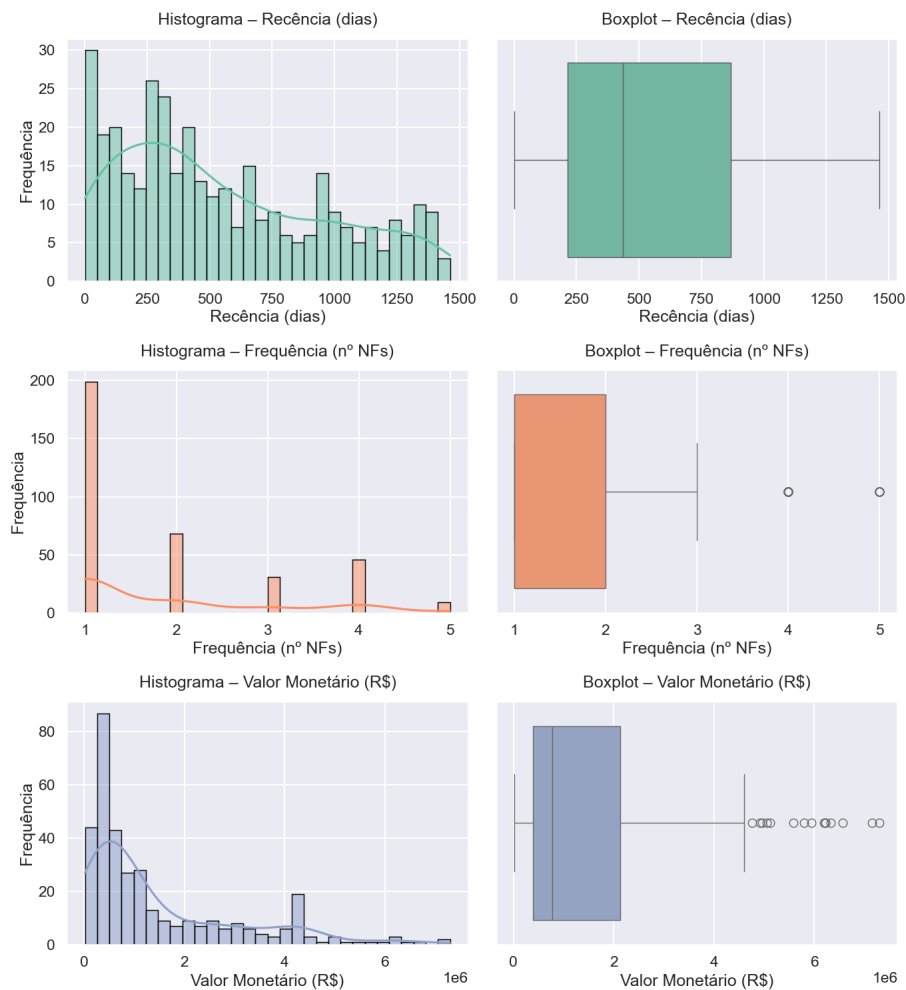


Figura 3.3 - Histogramas e *boxplots* das variáveis RFM após winsorização (setor comercial).

Conforme antecipado, a recência manteve a sua distribuição original, dada a inexistência de

outliers. No caso da frequência e do valor monetário, a winsorização permitiu reduzir consideravelmente a amplitude das escalas, atenuando o efeito de compressão das observações junto à origem. Embora a assimetria à direita persista, comportamento que é expectável em dados transacionais, verifica-se que esta transformação deu origem a distribuições mais estáveis e mais representativas do comportamento predominante dos clientes.

3.1.5. Normalização das variáveis RFM

Antes da implementação de qualquer modelo, é necessário proceder à normalização das variáveis RFM, de forma a garantir a sua comparabilidade e a assegurar que cada métrica contribui de forma equilibrada para o processo de segmentação. Para esse efeito, foi utilizado o método de normalização *Min-Max*, que normaliza as variáveis para o intervalo $[0, 1]$, de acordo com a expressão:

$$x_{norm} = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (3.1)$$

onde x é o valor original da variável a normalizar e x_{min} e x_{max} são, respetivamente, os valores mínimo e máximo da variável no conjunto de dados.

No caso da recência, a normalização foi invertida: $x_{norm} = 1 - \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$. Deste modo, mantém-se a coerência com a interpretação do valor do cliente, garantindo que clientes com menor recência obtêm pontuações mais elevadas.

As distribuições resultantes da aplicação deste método encontram-se representadas na Figura 3.4.

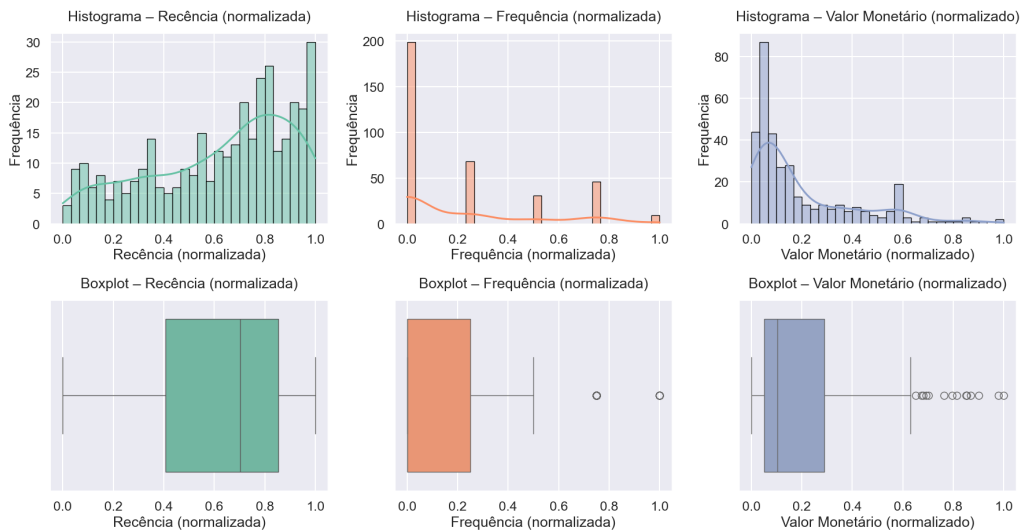


Figura 3.4 - Histogramas e *boxplots* das variáveis RFM após normalização (setor comercial).

3.2. Modelo RFM com K-Médias

Com o objetivo de identificar a abordagem mais adequada a este caso de estudo, foram explorados os métodos descritos nas secções 2.2 e 2.4. A primeira abordagem testada consiste na aplicação do algoritmo K-Médias às variáveis RFM, previamente normalizadas.

Uma vez que esta técnica requer a definição prévia do número de *clusters* K , recorreu-se ao método do cotovelo para determinar o valor ótimo a considerar. Este método baseia-se na análise da inércia e permite identificar o ponto a partir do qual a adição de novos *clusters* deixa de produzir melhorias relevantes na redução da variabilidade interna.

A Figura 3.5 ilustra a evolução da inércia em função do número de *clusters*, K .

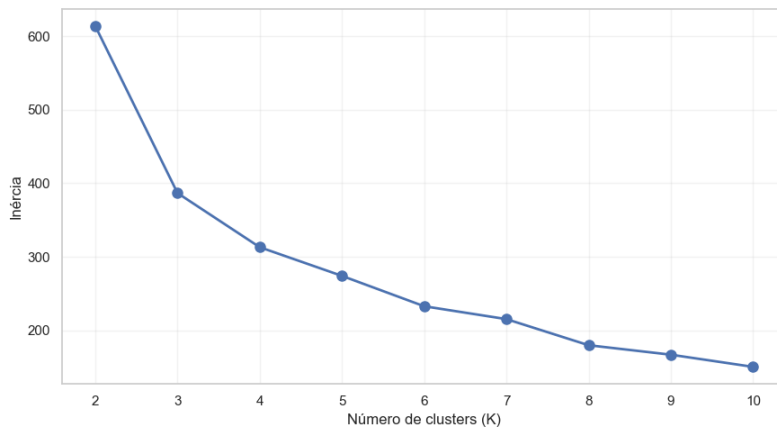


Figura 3.5 - Aplicação do método do cotovelo para determinação do número ótimo de *clusters* (setor comercial).

Como é possível observar no gráfico, a inércia diminui significativamente ao passar de $K = 2$ para $K = 3$, sendo que a curva estabiliza para valores superiores de K . Estes resultados sugerem que a escolha de $K = 3$, além de estar alinhada com os requisitos do negócio, representa o melhor equilíbrio entre simplicidade do modelo e capacidade de discriminação dos dados.

Assim, procedeu-se à implementação do algoritmo K-Médias com $K = 3$, que resultou na distribuição quantitativa de clientes pelos *clusters* apresentada na Figura 3.6.

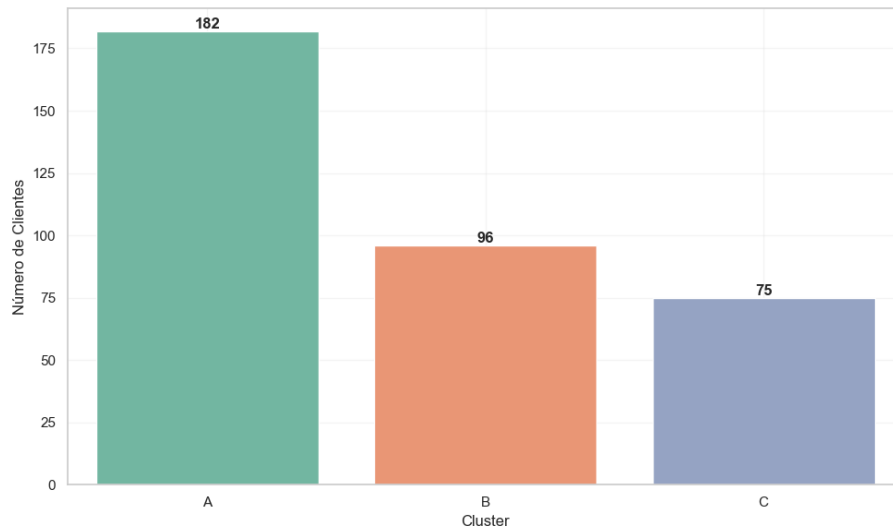


Figura 3.6 - Distribuição quantitativa de clientes por *cluster* (setor comercial).

Em seguida, é necessário analisar o perfil dos clientes que constituem cada *cluster*, de modo a traduzir os grupos resultantes do algoritmo em segmentos com um significado interpretável para o negócio.

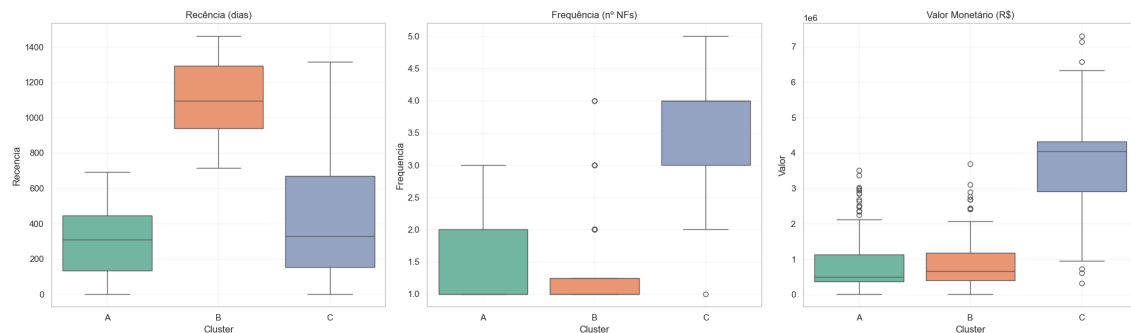


Figura 3.7 - Análise comparativa dos *clusters* através dos *boxplots* das variáveis RFM (setor comercial).

A Figura 3.7 apresenta os *boxplots* das variáveis RFM para cada *cluster*, que permitem comparar o comportamento de compra dos elementos dos três grupos.

- **Cluster A:** clientes que efetuaram transações em períodos relativamente recentes, mas cuja frequência de compra e valor monetário são reduzidos. Define um grupo que interagiu com a empresa há pouco tempo, mas que compra de forma esporádica e com baixo volume financeiro.

- **Cluster B:** clientes com uma recência muito elevada, apresentando ainda a menor frequência e reduzido valor monetário. Representa um grupo de consumidores que realizaram compras pontuais no passado e que, atualmente, têm um baixo envolvimento comercial com a empresa.
- **Cluster C:** clientes que se destacam pelos níveis elevados de frequência de compra e valor monetário, apesar de apresentarem alguma dispersão na recência. Trata-se do segmento de maior relevância, concentrando os elementos mais valiosos e fiéis.

Com base nas características observadas, foi estabelecida a seguinte correspondência entre os *clusters* e os segmentos de clientes (Tabela 3.6).

Tabela 3.6 - Correspondência entre *clusters* e segmentos de clientes (setor comercial).

Cluster	Segmento
Cluster A	Ocasionais
Cluster B	Inativos
Cluster C	Campeões

De seguida, procedeu-se à representação gráfica dos clientes no espaço RFM, através dos gráficos de dispersão bidimensionais e tridimensionais das Figuras 3.8 e 3.9.

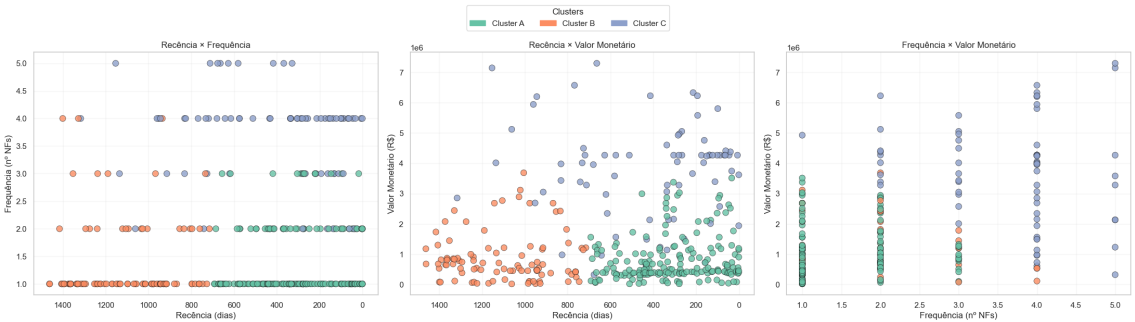


Figura 3.8 - Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM com base no K-Médias (setor comercial).

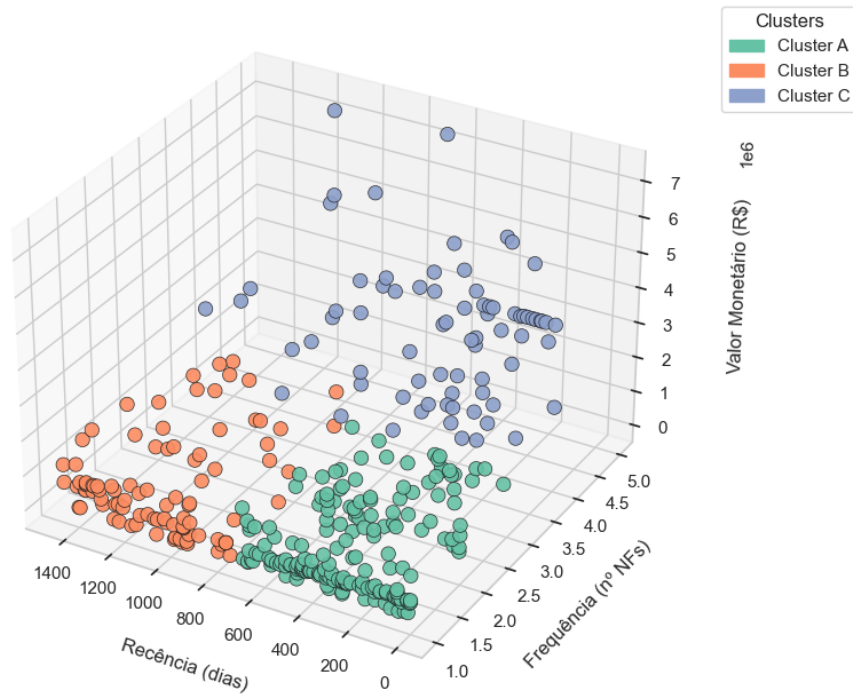


Figura 3.9 - Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM com base no algoritmo K-Médias (setor comercial).

A inspeção visual das Figuras 3.8 e 3.9 sugere que os dados não são naturalmente separáveis em *clusters* disjuntos. Observa-se, pelo contrário, uma distribuição contínua dos pontos, sem fronteiras evidentes entre segmentos. Isto indica que os *clusters* identificados pelo algoritmo K-Médias resultam essencialmente das divisões impostas pelo próprio algoritmo e não de agrupamentos naturalmente presentes nos dados, o que pode levar à classificação de clientes muito semelhantes em grupos distintos.

Para completar a avaliação da qualidade da segmentação obtida, foi analisado o índice de *silhouette*, apresentado na Figura 3.10. Este indicador, proposto por Rousseeuw (Rousseeuw 1987), permite avaliar simultaneamente a coesão interna dos *clusters* e a sua separação relativamente aos restantes. O índice assume valores no intervalo $[-1, 1]$, sendo que valores próximos de 1 correspondem a observações bem agrupadas, valores próximos de 0 indicam sobreposição entre *clusters* e valores negativos sugerem uma possível atribuição incorreta da observação ao *cluster* considerado (Anitha e Patil 2022).

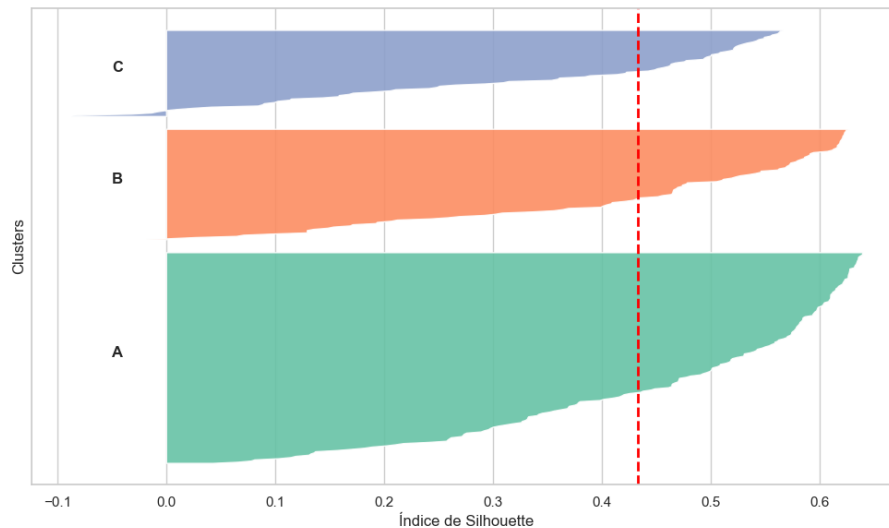


Figura 3.10 - Gráfico de *silhouette* para a segmentação obtida com o algoritmo K-Médias (setor comercial).

O valor médio de *silhouette* obtido foi de 0.434, representado pela linha vertical tracejada na Figura 3.10.

Observa-se que a maioria das observações apresenta valores positivos de *silhouette*. Isto indica que, globalmente, os clientes foram atribuídos ao grupo mais adequado. No entanto, existem também diversos clientes com valores próximos de zero e alguns com valores ligeiramente negativos, o que sugere a presença de observações situadas em zonas de transição entre *clusters*. Estes resultados estão em concordância com a análise dos gráficos de dispersão, reforçando a natureza contínua dos dados no espaço RFM.

Face a estas características, a empresa acabou por preferir uma outra abordagem mais interpretável em termos operacionais e mais facilmente replicável *a posteriori*.

Não tendo sido este o método selecionado pela Nors AG BR SP, os resultados relativos ao setor pós-venda não serão incluídos neste relatório.

3.3. Modelo RFM ponderado com normalização

Foi também explorado um método de segmentação alternativo, recorrendo a uma das variantes do modelo RFM abordadas na secção 2.2.1. Ao contrário do algoritmo K-Médias, em que os segmentos são definidos a partir da estrutura dos dados, esta abordagem requer a definição explícita de pesos para cada variável, permitindo incorporar conhecimento do negócio no processo de segmentação. Por esse motivo, oferece maior flexibilidade e capacidade de adaptação às especificidades da empresa, tendo sido selecionada como modelo final.

Para aplicar o modelo RFM ponderado com normalização, as variáveis normalizadas são agregadas numa pontuação única, calculada de forma individual para cada cliente. Para determinar essa pontuação, é necessário atribuir um peso a cada métrica. De acordo com as orientações da Nors AG BR SP, foram atribuídos pesos superiores à frequência e ao valor monetário, por serem considerados mais relevantes na caracterização do valor do cliente. Assim, ambas as variáveis receberam pesos de 0.40, enquanto a recência recebeu um peso de 0.20.

Esta escolha é um reflexo das características do setor de negócio de equipamentos agrícolas, habitualmente marcado por transações de valores elevados e compras menos frequentes. Neste contexto, o valor monetário e a frequência são os principais indicadores do valor do cliente, enquanto a recência assume um menor peso relativo, dado que períodos longos sem compras são comuns neste setor.

Assim, a pontuação RFM ponderada é dada por:

$$RFM_{score} = 0.20 \times R_{norm} + 0.40 \times F_{norm} + 0.40 \times M_{norm} \quad (3.2)$$

O RFM_{score} resume as três dimensões do comportamento do cliente num único valor no intervalo $[0, 1]$, que reflete a sua importância relativa dentro do conjunto analisado. Quanto mais próximo de 1 for este valor, maior será a relevância do cliente face aos restantes.

Na Figura 3.11 está representada a distribuição de frequências do RFM_{score} na base de clientes, obtido através da expressão 3.2.

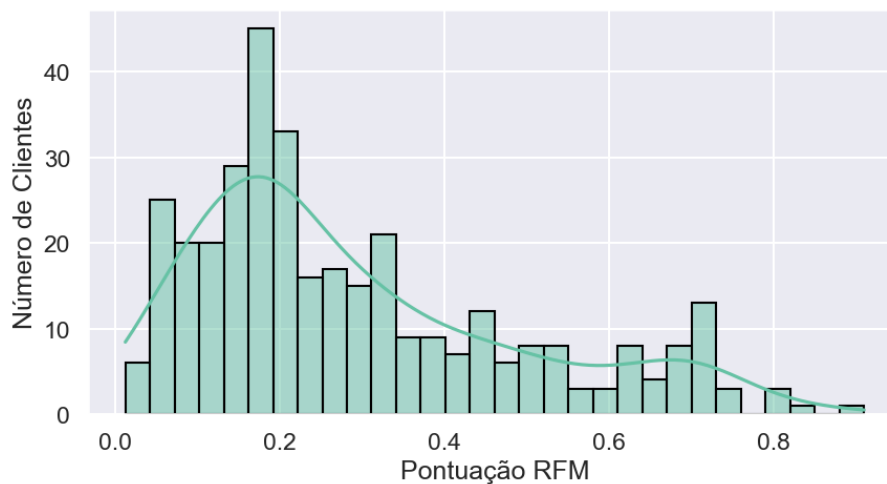


Figura 3.11 - Distribuição da pontuação RFM (setor comercial).

A assimetria observada na distribuição do RFM_{score} , caracterizada pela elevada concentração

de clientes em valores mais baixos e uma reduzida proporção de clientes com pontuação elevada, resulta sobretudo da própria estrutura das variáveis em que se baseia. Como analisado previamente, a frequência e valor monetário apresentam uma forte assimetria positiva e têm maior peso na construção do RFM_{score} , pelo que é esperado que a pontuação final herde esta característica.

A transformação do RFM_{score} em segmentos de clientes é realizada através da definição de pontos de corte. Tendo em consideração as indicações do negócio, o intervalo $[0, 1]$ é dividido em três subintervalos de igual amplitude, dando origem a três segmentos: *Ocasional*, *Leal* e *Campeão*.

A atribuição de cada cliente ao respetivo segmento, com base na sua pontuação, é feita de acordo com a Tabela 3.7.

Tabela 3.7 - Divisão dos clientes em segmentos com base na pontuação RFM.

RFM_{score}	Segmento
$[0, \frac{1}{3}[$	Ocasional
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$	Leal
$[\frac{2}{3}, 1]$	Campeão

A Figura 3.12 ilustra a distribuição quantitativa dos clientes pelos três segmentos propostos.

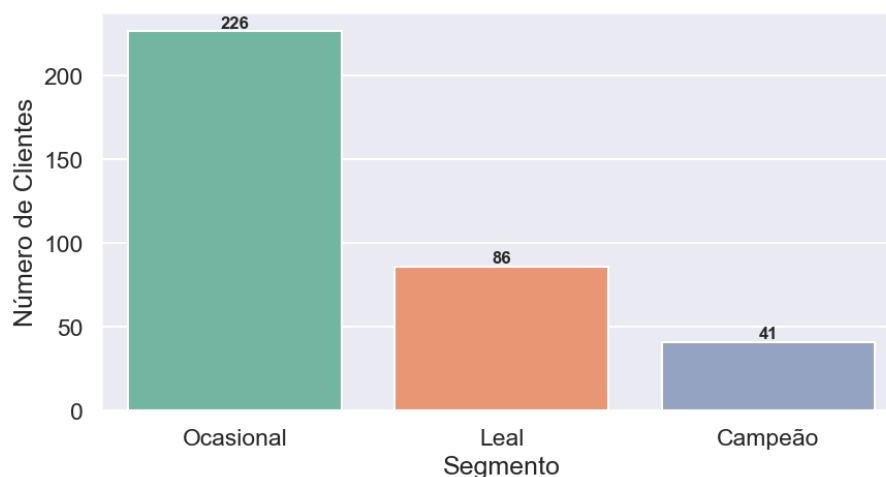


Figura 3.12 - Distribuição quantitativa dos clientes por segmento RFM (setor comercial).

Observa-se que a divisão em subintervalos de igual amplitude não dá origem a grupos de tamanho semelhante. De facto, como a distribuição da pontuação está concentrada nos valores mais baixos, os segmentos de menor valorização reúnem a maior parte dos clientes.

Com o intuito de caracterizar o perfil de compra associado a cada segmento, a Figura 3.13 ilustra a distribuição das variáveis RFM por grupo.

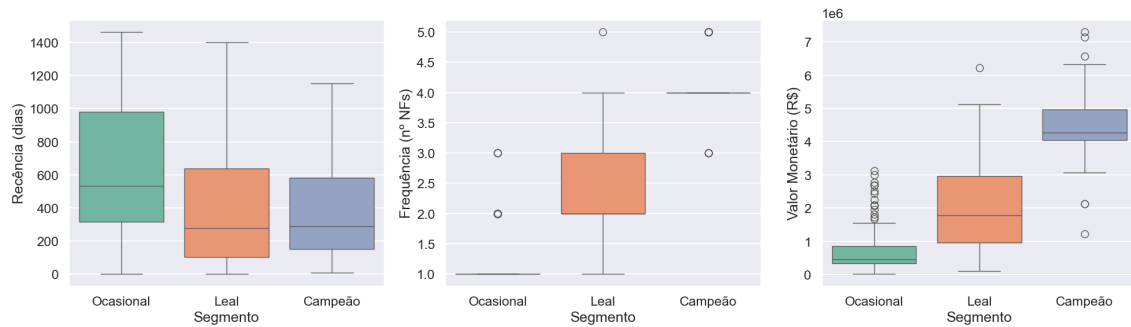


Figura 3.13 - Boxplots das variáveis RFM por segmento (setor comercial).

Através da análise dos *boxplots*, é possível verificar que a distinção entre segmentos é essencialmente determinada pela frequência e pelo valor monetário. Em ambas as métricas verifica-se que os clientes *Ocasionais* apresentam os valores mais baixos, os clientes *Leais* ocupam uma posição intermédia e os clientes *Campeões* destacam-se com os valores mais elevados. Em contrapartida, a recência revela um comportamento distinto. Embora o segmento *Ocasional* tenha uma maior dispersão e uma mediana mais elevada, as distribuições dos segmentos *Leal* e *Campeão* são semelhantes, sugerindo que esta variável desempenha um papel menos relevante na diferenciação dos grupos.

Com base nesta distribuição dos dados, as classes obtidas podem ser caracterizadas da seguinte forma:

- **Campeão:** clientes que comprem com maior frequência e geram os valores monetários mais elevados, constituindo o segmento mais valioso para o negócio.
- **Leal:** clientes com compras relativamente regulares e valor monetário intermédio, mantendo uma relação comercial estável com a empresa.
- **Ocasional:** clientes com compras pouco frequentes e baixo valor monetário, correspondendo ao segmento de menor valor estratégico.

As Figuras 3.14 e 3.15 apresentam ainda uma representação individual dos clientes no espaço RFM, permitindo visualizar, em duas e três dimensões, a distribuição das observações e a forma como os segmentos se organizam.

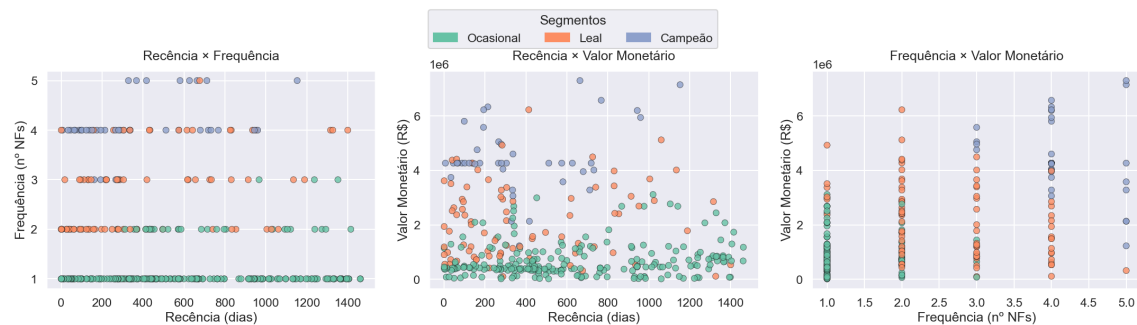


Figura 3.14 - Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM (setor comercial).

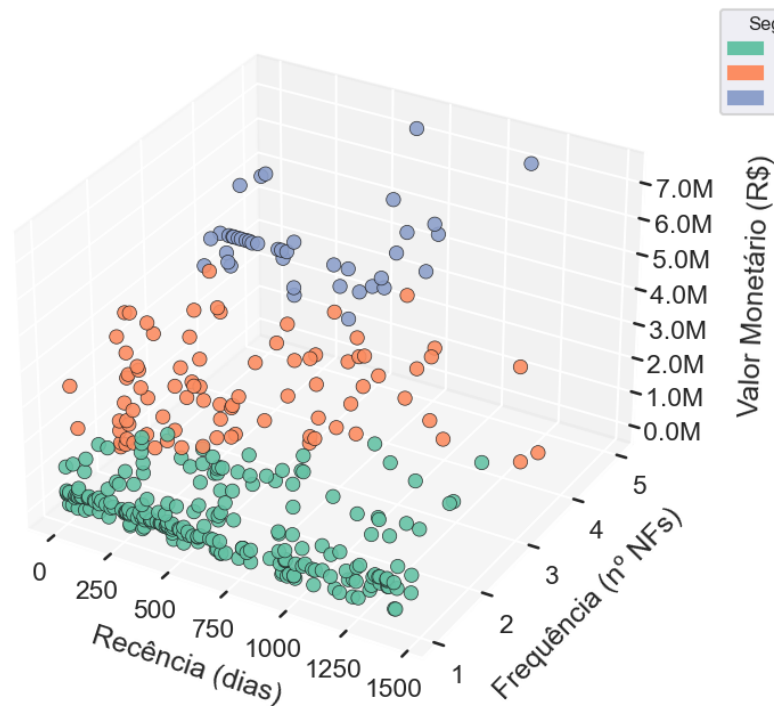


Figura 3.15 - Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM (setor comercial).

A análise dos gráficos de dispersão está alinhada com as conclusões dos *boxplots* anteriores. A dispersão da recência torna-se ainda mais evidente, com clientes distribuídos ao longo de todo o horizonte temporal nos três grupos, confirmando que o seu contributo na pontuação global não é o fator determinante para distinguir os diferentes perfis de consumo.

A separação entre segmentos surge como cortes diagonais, particularmente notórios no gráfico "Frequência × Valor Monetário" da Figura 3.14. Este comportamento resulta da formulação definida em 3.2, na qual estas duas variáveis assumem maior peso na ponderação da pontuação RFM, refletindo o impacto das decisões do negócio nos resultados obtidos.

De facto, diferentes combinações de frequência e valor monetário podem resultar em pontuações semelhantes. Isto é, um cliente com menor frequência de compra pode, mesmo assim, pertencer a um dos segmentos superiores se apresentar um valor monetário elevado e vice-versa.

Seguindo exatamente o mesmo procedimento utilizado no setor comercial, mas considerando ponderações diferentes das variáveis, foi calculado o RFM_{score} para os clientes do setor pós-venda. Neste caso, o valor monetário recebeu o maior peso, correspondente a 0.55, enquanto a frequência e a recência receberam pesos de 0.25 e 0.20, respetivamente. A formulação utilizada corresponde, então, à expressão 3.3.

$$RFM_{score} = 0.20 \times R_{norm} + 0.25 \times F_{norm} + 0.55 \times M_{norm} \quad (3.3)$$

Este ajuste na ponderação justifica-se pela natureza do setor de assistência e manutenção de equipamentos agrícolas. Neste contexto, uma elevada frequência pode estar associada apenas à compra recorrente de artigos de baixo valor, enquanto um valor monetário alto tende a estar associado a serviços de maior dimensão e de elevado retorno financeiro.

A distribuição dos valores do RFM_{score} encontra-se representada na Figura 3.16.

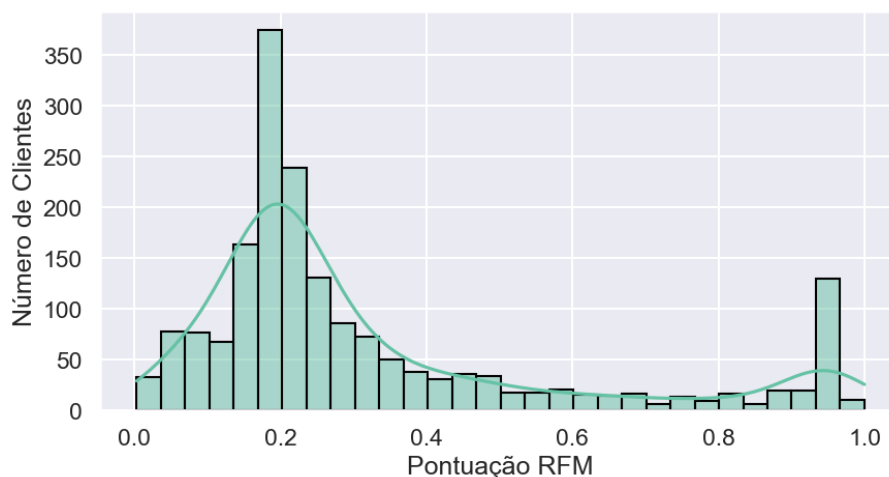


Figura 3.16 - Distribuição da pontuação RFM (setor pós-venda).

Constata-se que o RFM_{score} neste setor apresenta uma grande concentração de clientes em valores baixos, próximos de 0.2, tal como observado no setor comercial. Destaca-se ainda a presença de um pico no extremo superior da distribuição, que resulta do processo de winsorização dos *outliers*. Ao substituir os valores extremos pelo P_{90} , vários clientes de elevado valor estratégico acabam por ficar agrupados no mesmo nível. Do ponto de vista do negócio, este efeito não compromete a análise, uma vez que os clientes afetados continuam a ser classificados no segmento de maior relevância.

Esta assimetria da distribuição do RFM_{score} é igualmente visível na distribuição quantitativa dos clientes pelos segmentos, apresentada na Figura 3.17.

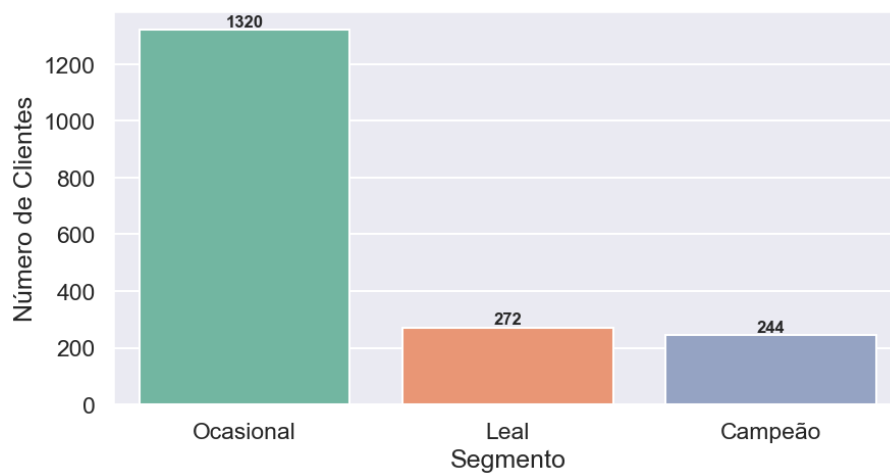


Figura 3.17 - Distribuição quantitativa dos clientes por segmento RFM (setor pós-venda).

Mais uma vez, a maioria dos clientes é atribuída ao segmento *Ocasional*, enquanto os segmentos *Leal* e *Campeão* apresentam volumes de clientes bastante menores e mais equilibrados entre si.

Para compreender o comportamento e a distribuição das variáveis RFM no setor pós-venda, a Figura 3.18 apresenta os respetivos *boxplots*, organizados de acordo com os três perfis identificados.

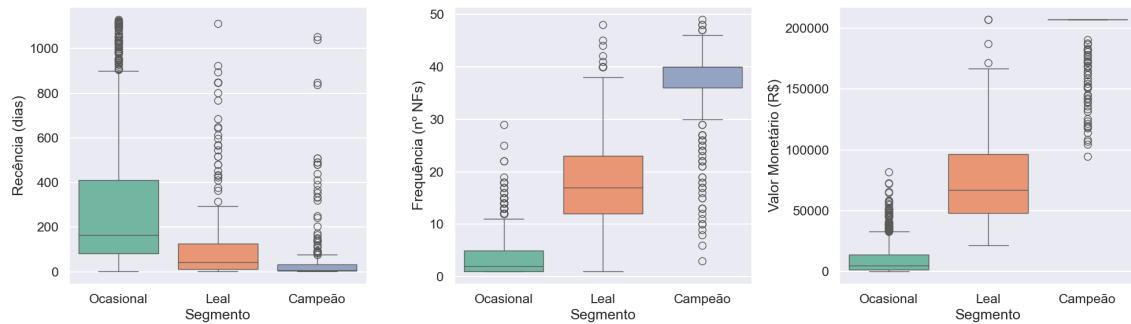


Figura 3.18 - Boxplots das variáveis RFM por segmento (setor pós-venda).

A Figura 3.18 mostra diferenças comportamentais claras entre os três segmentos definidos. À medida que se passa do segmento *Ocasional* para o segmento *Campeão*, observa-se uma diminuição da recência e um aumento simultâneo da frequência e do valor monetário. A separação entre segmentos é particularmente evidente nas variáveis frequência e valor monetário, cujas distribuições apresentam reduzida sobreposição, confirmando que estas variáveis permitem distinguir eficazmente diferentes níveis de envolvimento e valor dos clientes.

Em comparação com o setor comercial (Figura 3.13), o setor pós-venda é caracterizado por interações mais frequentes e recentes, mas por valores monetários consideravelmente inferiores. Esta diferença reflete a natureza contínua dos serviços de acompanhamento e manutenção, que exigem um contacto regular com os clientes, apesar dos montantes envolvidos serem, de um modo geral, mais reduzidos.

Tendo em consideração a análise anterior, procede-se à caracterização dos segmentos identificados para o setor pós-venda:

- **Campeão:** clientes com maior valor monetário, geralmente associados a uma elevada frequência de compra e uma recência baixa, constituindo o segmento de maior valor estratégico.
- **Leal:** clientes com uma relação consistente com a empresa, caracterizados por valores intermédios de frequência e de valor monetário.
- **Ocasional:** clientes com baixo valor monetário e reduzida frequência transaccional, dispersos por diferentes valores de recência, correspondendo ao segmento de menor envolvimento com a empresa.

As Figuras 3.19 e 3.20 apresentam, respectivamente, os gráficos de dispersão bidimensional e tridimensional no espaço RFM, permitindo visualizar a separação entre os segmentos identificados.

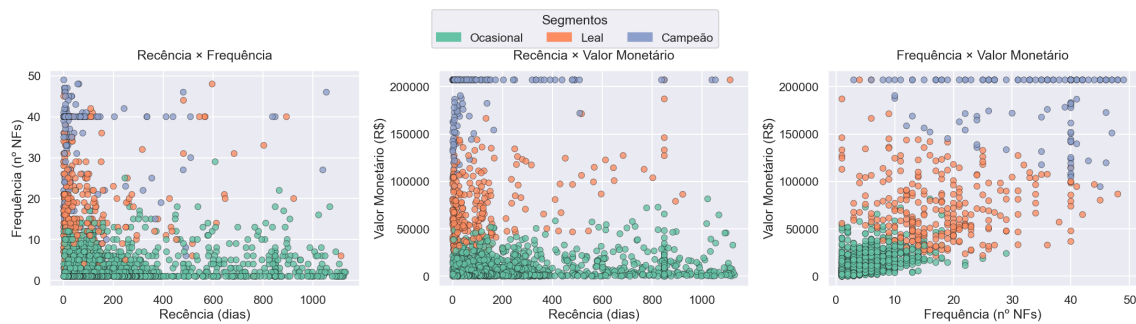


Figura 3.19 - Gráfico de dispersão bidimensional dos clientes no espaço RFM (setor pós-venda).

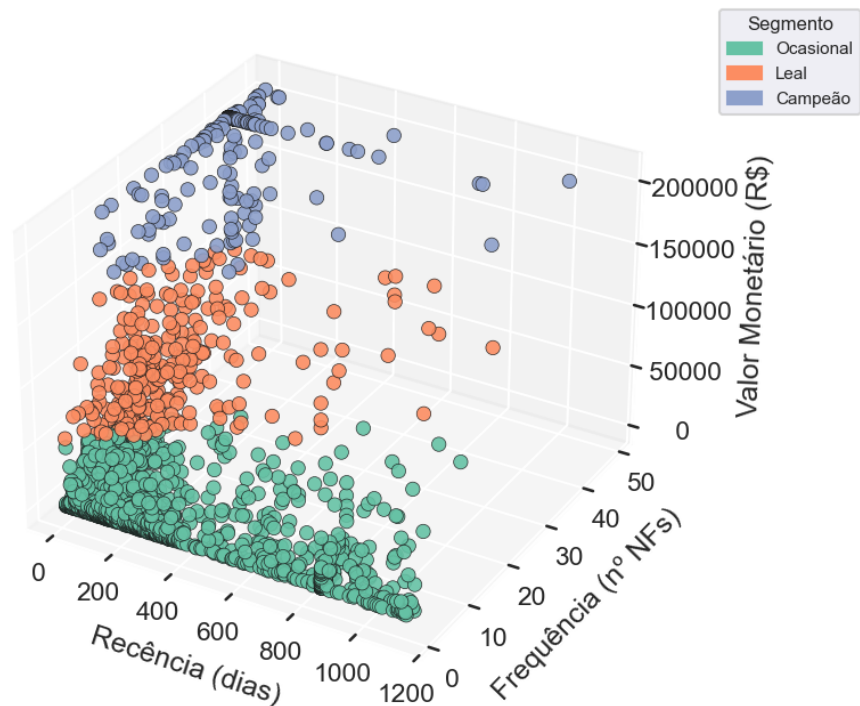


Figura 3.20 - Gráfico de dispersão tridimensional dos clientes no espaço RFM (setor pós-venda).

As Figuras 3.19 e 3.20 revelam que a distinção entre segmentos no setor pós-venda depende sobretudo do valor monetário, variável com maior peso no cálculo da pontuação RFM (equação 3.3).

No gráfico "Frequência $\times$ Valor Monetário", a separação diagonal entre segmentos indica que

clientes com menor frequência de compra podem integrar segmentos superiores caso apresentem um valor monetário elevado. Da mesma forma, clientes que compram mais frequentemente conseguem compensar um valor monetário mais reduzido.

De forma semelhante, no gráfico “Recência $\times$ Valor Monetário”, uma recência elevada tende a exigir um volume de faturação consideravelmente superior para que os clientes sejam classificados como *Leal* ou *Campeão*.

Já no gráfico “Recência $\times$ Frequência” observa-se uma grande sobreposição entre classes, sugerindo que estas duas variáveis têm menor influência na identificação dos diferentes perfis de clientes.

A concentração de pontos no limite superior dos 200 000 R\$ traduz o efeito da winsorização, que permitiu conter os *outliers* severos no topo do segmento *Campeão*, preservando simultaneamente a distribuição dos restantes clientes.

3.3.1. Princípio de Pareto

Um vez que a empresa atribui maior importância ao valor monetário na classificação dos clientes e que os segmentos resultantes não eram equilibrados em termos de número de clientes, surgiu o interesse em avaliar a aplicabilidade do princípio de Pareto ao caso de estudo. As Figuras 3.21 e 3.22 representam as curvas de valor acumulado em função da percentagem de clientes para os setores comercial e pós-venda, respetivamente.

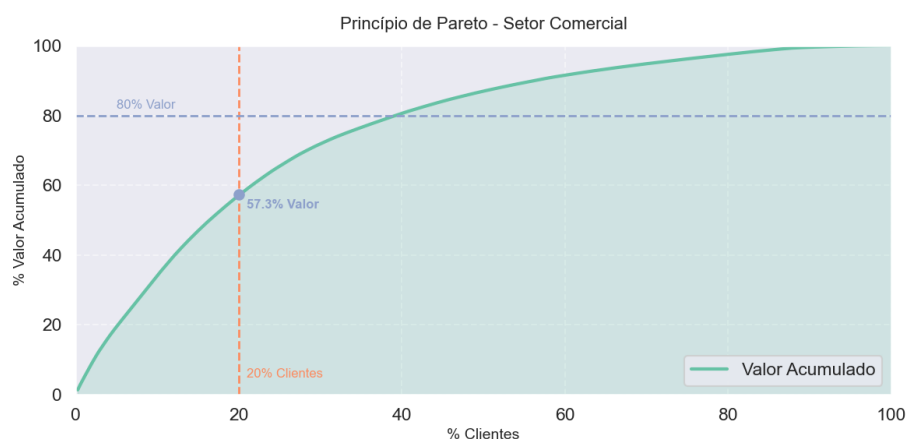


Figura 3.21 - Curva de valor acumulado (setor comercial).

A Figura 3.21 revela que, no setor comercial, 20% dos clientes geram 57.3% do retorno financeiro total do setor, o que revela uma concentração mais moderada comparativamente à distribuição clássica de Pareto. De facto, os 80% do valor acumulado previstos na teoria apenas são atingidos quando se considera cerca de 40% da carteira de clientes, sugerindo que a atividade comercial da empresa depende de uma base de clientes relativamente alargada.

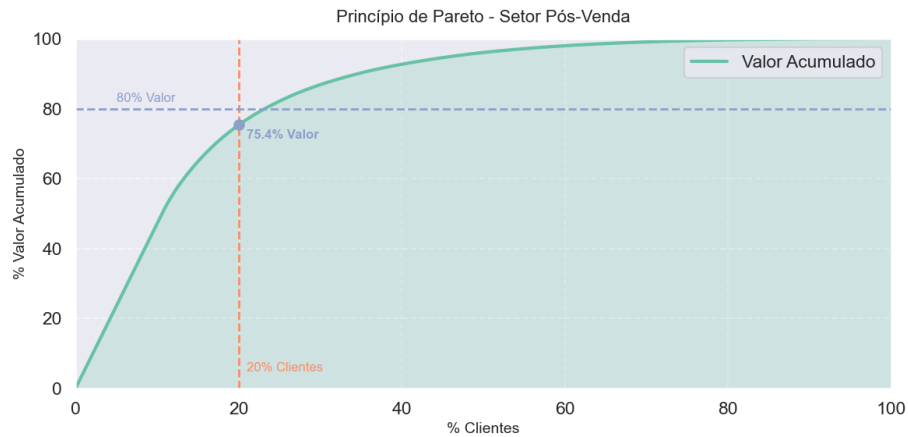


Figura 3.22 - Curva de valor acumulado (setor pós-venda).

Por outro lado, a Figura 3.22 mostra que 20% dos clientes do setor pós-venda são responsáveis por 75.4% do valor acumulado do setor, valor próximo do comportamento teórico. Isto sugere que este setor está mais dependente de um grupo reduzido de clientes do ponto de vista financeiro.

Importa, contudo, salientar que esta distribuição é intrínseca à base de clientes e não uma consequência do modelo de segmentação implementado.

4. Otimização de rotas

Após a segmentação da carteira de clientes, é necessário definir percursos diários para as equipas comerciais, com vista a minimizar o tempo total despendido em deslocações.

O problema foi formulado como um Problema de Roteamento de Veículos Periódico (PVRP), no qual se pretende determinar um conjunto de rotas ao longo de um horizonte temporal, respeitando um conjunto de restrições operacionais e de serviço aos clientes.

Para a sua resolução, foram exploradas duas abordagens distintas: uma formulação exata baseada em programação linear e uma abordagem heurística baseada num algoritmo genético.

4.1. Recolha e tratamento de dados

Para a implementação dos modelos de otimização de rotas, a empresa disponibilizou conjuntos de dados adicionais com a informação geográfica e operacional necessária para esta fase do projeto. Na construção da nova base de dados, foram consideradas apenas as variáveis mais relevantes de cada uma, cuja descrição é apresentada a seguir:

- **Moradas e coordenadas dos clientes:** este conjunto de dados contém informação relativa à localização geográfica dos clientes, incluindo as respetivas moradas e coordenadas geográficas, como se observa na Tabela 4.1. Cada linha corresponde a uma morada distinta, sendo o cliente associado identificado através do respetivo código.

Tabela 4.1 - Exemplo ilustrativo de algumas variáveis da base de dados de localização geográfica dos clientes.

Pessoa	Nome	Município	Morada	CP	Lat.	Long.
...	...	...	...	...	...	...
12345	Cliente 1	Cidade A	Rua Exemplo, 123	12345678	-20.0000	-22.0000
...	...	...	...	...	...	...

- **Registo de vendedores:** este conjunto de dados contém informação acerca dos vendedores e dos municípios que lhes estão atribuídos. Conforme ilustrado na Tabela 4.2 cada registo corresponde a um município distinto e inclui, em particular, o vendedor responsável e a respetiva filial.

Tabela 4.2 - Exemplo ilustrativo de algumas variáveis da base de dados de vendedores.

Filial	Município	Vendedor
...	...	...
Catanduva	Mirassol	Vendedor 1
...	...	...

As bases de dados acima descritas foram ainda complementadas com os resultados da segmentação de clientes desenvolvida no capítulo 3:

- **Base RFM (comercial):** contém a identificação dos clientes do setor comercial, nomeadamente o nome completo e o código, bem como a respetiva segmentação, incluindo os valores das variáveis recência, frequência e valor monetário, a pontuação RFM e o segmento ao qual cada cliente é atribuído.

Tabela 4.3 - Exemplo ilustrativo das variáveis da base de dados RFM.

Pessoa	Nome	Recência	Frequência	Valor M.	RFM_{score}	Segmento
...	...	...	...	...	...	...
12345	Cliente 1	1	20	300	0.900	Campeão
...	...	...	...	...	...	...

A junção das três bases de dados foi realizada com base no código do cliente, na morada e no município, permitindo consolidar numa única base de dados toda a informação necessária para a implementação dos modelos de otimização.

4.2. Condições e restrições do problema

O problema de otimização de rotas analisado diz respeito à operação da equipa comercial da Nors AG BR SP no Estado de São Paulo, no Brasil. Esta equipa é constituída por nove vendedores, cada um responsável por uma região de atuação previamente definida e associado a uma das três filiais da empresa, que funcionam como depósitos. A divisão dos municípios e respetiva distribuição pelos vendedores encontra-se ilustrada na Figura 4.1.

Uma vez que a atribuição de clientes a cada vendedor é fixa, o problema global pode ser decomposto em nove subproblemas independentes. Assim, o objetivo é determinar, para cada

vendedor, as rotas diárias ideais ao longo de um horizonte temporal de um mês, considerando 22 dias úteis.

A segmentação realizada no capítulo 3, determina as diferentes frequências de visita: os clientes classificados como *Campeões* e *Leais* devem ser visitados uma vez por mês e os clientes *Ocasionais* duas vezes por mês. O modelo deve ainda garantir um espaçamento mínimo entre visitas ao mesmo cliente, neste caso definido como 7 dias úteis.

O período de trabalho decorre entre as 07:30 e as 17:30, incluindo uma pausa de 1 hora e 12 minutos para almoço, o que perfaz um total de 8 horas e 48 minutos de tempo útil por dia. Seguindo as indicações da empresa, considera-se um tempo de serviço fixo de 1 hora por visita para todos os clientes.

Cada vendedor inicia e termina o seu dia de trabalho na filial à qual está associado, pelo que todas as rotas diárias são circuitos fechados, com origem e destino no respetivo depósito.

O objetivo consiste em minimizar o tempo total de deslocação, determinando um plano de visitas que respeite as restrições operacionais definidas anteriormente.

Dada a natureza periódica das visitas, o problema enquadra-se num Problema de Roteamento de Veículos Periódico (PVRP). Esta formulação exige não só a atribuição dos clientes aos dias do horizonte de planeamento, mas também a determinação da sequência ótima de visitas em cada rota diária.

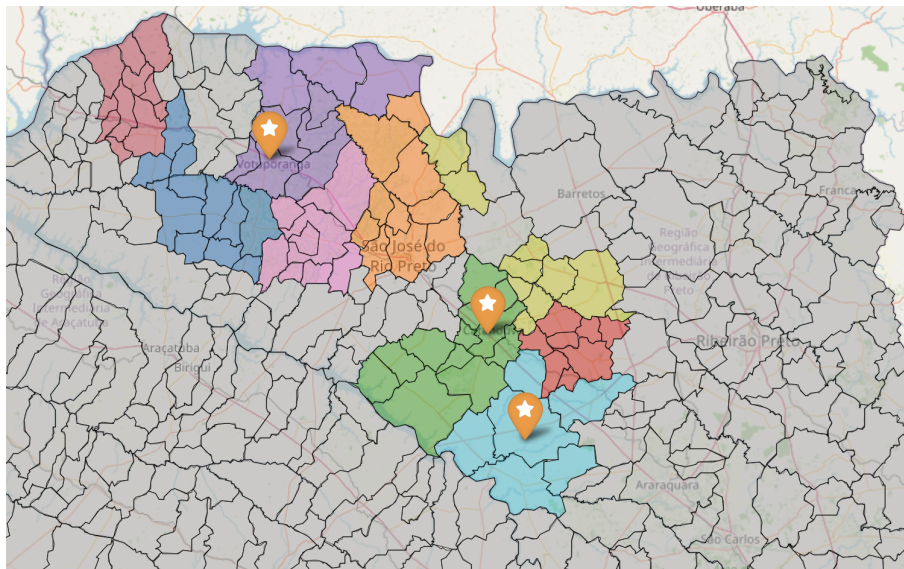


Figura 4.1 - Mapa de São Paulo com a representação das filiais e dos municípios atribuídos a cada vendedor.

4.3. Matrizes de tempo e distância

A implementação de modelos de otimização de rotas requer o conhecimento dos custos de deslocação entre cada par de nós da rede. Nesse sentido, foram construídas, para cada vendedor, duas matrizes: uma de distâncias e outra de tempos de viagem.

As coordenadas geográficas foram extraídas da base de dados de localização dos clientes (Tabela 4.1) e as matrizes foram calculadas com recurso à API Open Source Routing Machine (OSRM), que usa dados do OpenStreetMap (OpenStreetMap Foundation 2026b) para estimar distâncias e tempos de viagem entre pares de coordenadas.

A distância é determinada a partir da geometria real da rede rodoviária, enquanto o tempo de viagem é estimado com base na velocidade permitida, no tipo de via e em possíveis atrasos causados por manobras como viragens e cruzamentos. Os valores obtidos foram posteriormente convertidos para quilómetros e minutos, respetivamente.

Importa salientar que as matrizes não são simétricas, o que reflete fatores como, por exemplo, a existência de ruas de sentido único.

As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam exemplos de matrizes de tempo e distância.

	d	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
d	0	51,74667	74,175	70,90333	61,58	60,425	64,80167	41,27	61,92	79,43
c1	49,595	0	77,98667	74,715	64,60667	32,865	37,24167	76,55833	34,36	51,87
c2	72,445	78,74667	0	3,271667	15,8	50,32167	53,2	35,395	48,11333	76,94
c3	69,17333	75,475	3,271667	0	12,52833	47,05	49,92833	32,12333	44,84167	73,66833
c4	58,88833	65,975	15,62333	12,35167	0	37,55	40,42833	21,83833	35,34167	64,16833
c5	60,16167	33,18	50,32833	47,05667	36,94833	0	6,958333	55,905	2,931667	29,18167
c6	64,25333	37,27167	53,63	50,35833	40,25	7,068333	0	59,20667	6,893333	29,805
c7	37,05	74,11833	39,64333	36,37167	27,04833	58,42	62,79667	0	58,72667	85,02
c8	60,36333	33,38167	50,27333	47,00167	36,89333	2,871667	6,826667	55,85	0	30,77667
c9	79,36833	52,38667	76,725	73,45333	63,345	29,11667	29,75667	82,30167	31,22667	0

Figura 4.2 - Exemplo ilustrativo de uma matriz de tempos de viagem, em minutos.

	d	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9
d	0	39,8995	85,2772	83,913	80,1813	67,1646	71,4295	57,253	67,7347	71,9179
c1	41,9309	0	71,3516	69,9874	65,7702	28,5973	32,8622	71,6587	29,1675	33,3506
c2	82,7462	72,3927	0	1,3642	7,4357	44,6041	46,3505	30,333	43,377	62,4075
c3	81,382	71,0284	1,3642	0	6,0715	43,2399	44,9863	28,9688	42,0127	61,0432
c4	77,1295	67,2615	7,4004	6,0362	0	39,4729	41,2193	24,7164	38,2458	57,2763
c5	67,6868	29,0905	45,0758	43,7115	39,4944	0	5,3336	62,3209	1,133	18,0461
c6	71,2708	32,6745	46,0621	44,6979	40,4807	5,3336	0	63,3073	4,1538	22,7666
c7	52,4132	79,8782	35,0784	33,7141	29,9825	56,4782	60,7431	0	65,8441	73,4556
c8	67,9899	29,3936	43,2894	41,9252	37,708	1,1331	4,1538	60,5346	0	19,3875
c9	72,0932	33,4969	62,0215	60,6573	56,4401	18,003	22,7713	79,2667	18,9496	0

Figura 4.3 - Exemplo ilustrativo de uma matriz de distâncias, em quilómetros.

4.4. Formulação como problema de programação linear inteira mista

Formalmente, o problema pode ser representado por um grafo completo e direcionado $G = (V, A)$, no qual:

- $V = \{d\} \cup C$ é o conjunto de vértices, onde d representa o depósito e C o conjunto de clientes.
- $A = \{(i, j) \in V \times V : i \neq j\}$ é o conjunto de arcos, representando todas as conexões possíveis entre pares de nós distintos.

A cada arco $(i, j) \in A$ está associado o respetivo tempo de deslocação t_{ij} .

A modelação através de um grafo direcionado permite considerar situações em que o tempo de deslocação entre dois nós varia consoante o sentido da viagem, isto é, em que $t_{ij} \neq t_{ji}$.

4.4.1. Abordagem mensal

De seguida, apresenta-se um modelo de programação linear inteira mista para o problema de planeamento mensal de visitas, assente na formulação em grafo introduzida anteriormente. O modelo em questão define a atribuição de clientes aos dias e a construção das rotas diárias, constituindo a base para as decisões relativas à planificação dos percursos.

Conjuntos

- C' : conjunto de clientes *Leais e Campeões*
- C'' : conjunto de clientes *Ocasionais*
- $C = C' \cup C''$: conjunto de clientes
- d : depósito
- $H = \{1, \dots, 22\}$: conjunto de dias úteis do mês
- $V = \{d\} \cup C$: conjunto de vértices, incluindo clientes e depósito

Parâmetros

- t_{ij} : tempo de viagem entre i e j ($i, j \in V, i \neq j$)
- s_c : tempo de serviço no cliente $c \in C$ (60 min, $\forall c \in C$)
- T : duração máxima diária de trabalho (528 min)

- $n = |V|$: nº de vértices

Variáveis de decisão

- Variável de visita:

$$y_{ch} = \begin{cases} 1 & \text{se o cliente } c \text{ é visitado no dia } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall c \in C, h \in H$$

- Variável de deslocação:

$$x_{ijh} = \begin{cases} 1 & \text{se há uma deslocação de } i \text{ para } j \text{ no dia } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, h \in H$$

- Variável de utilização do dia:

$$z_h = \begin{cases} 1 & \text{se o vendedor trabalha no dia } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall h \in H$$

- Variável de ordenação: u_{ch} , $c \in C, h \in H$ – variável auxiliar contínua que determina a posição do cliente c na sequência da rota do dia h , utilizada para a eliminação de sub-rotas.

Modelo mensal

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} t_{ij} x_{ijh} \quad (4.1)$$

s.a.

$$\sum_{h \in H} y_{ch} = 1 \quad \forall c \in C' \quad (4.2)$$

$$\sum_{h \in H} y_{ch} = 2 \quad \forall c \in C'' \quad (4.3)$$

$$\sum_{\tau=h}^{h+6} y_{c\tau} \leq 1 \quad \forall c \in C'', h = 1, \dots, 16 \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in V} x_{cjh} = y_{ch} \quad \forall c \in C, h \in H \quad (4.5)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ich} = y_{ch} \quad \forall c \in C, h \in H \quad (4.6)$$

$$\sum_{j \in C} x_{djh} = z_h \quad \forall h \in H \quad (4.7)$$

$$\sum_{i \in C} x_{idh} = z_h \quad \forall h \in H \quad (4.8)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} t_{ij} x_{ijh} + \sum_{c \in C} s_c y_{ch} \leq T z_h \quad \forall h \in H \quad (4.9)$$

$$u_{dh} = 1 \quad \forall h \in H \quad (4.10)$$

$$2 \leq u_{ch} \leq n \quad \forall c \in C, h \in H \quad (4.11)$$

$$u_{ih} - u_{jh} + n x_{ijh} \leq n - 1 \quad \forall h \in H, i, j \in C, i \neq j \quad (4.12)$$

$$x_{ijh} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, h \in H \quad (4.13)$$

$$y_{ch} \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C, h \in H \quad (4.14)$$

$$z_h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H \quad (4.15)$$

$$u_{ch} \geq 0 \quad \forall c \in C, h \in H \quad (4.16)$$

A função objetivo 4.1 visa a minimização do tempo total de deslocação.

Frequência e espaçamento de visitas As restrições 4.2 e 4.3 garantem que os clientes são visitados com a frequência mensal exigida, de acordo com o segmento ao qual pertencem. Para os clientes que requerem duas visitas mensais, a restrição 4.4 assegura que ocorre, no máximo, uma única visita num intervalo de 7 dias úteis consecutivos (Figura 4.4), de forma a promover uma distribuição mais equilibrada das visitas e a evitar que o modelo planeie visitas demasiado próximas.

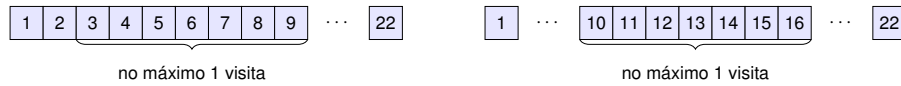


Figura 4.4 - Representação da restrição de espaçamento para uma janela temporal de 7 dias úteis.

Conservação de fluxo e conectividade ao depósito Para assegurar a conservação do fluxo da rota, recorre-se às restrições 4.5 e 4.6. A restrição 4.5 tem o intuito de garantir que, se um cliente c é visitado no dia h , o vendedor deve sair dele exatamente uma vez, dirigindo-se para outro cliente ou para o depósito. De forma análoga, a restrição 4.6 garante que se o cliente c é visitado no dia h , o vendedor deve chegar a ele exatamente uma vez, vindo de outro cliente ou do depósito. As restrições impostas por 4.7 e 4.8 asseguram que cada rota inicia e termina no depósito: se o vendedor efetua visitas no dia h , existe exatamente uma saída do depósito e exatamente um regresso correspondente.

Capacidade temporal diária A restrição 4.9 define o limite diário de horas de trabalho, garantindo que a soma do tempo total de deslocação com o tempo de serviço num determinado dia não ultrapassa a duração de trabalho diária.

Eliminação de sub-rotas Por fim, para impedir a formação de sub-rotas que não passam pelo depósito (Figura 4.5a), utiliza-se a formulação de Miller-Tucker-Zemlin (Sawik 2016), que corresponde às restrições 4.10 – 4.12. Esta abordagem recorre a variáveis auxiliares u_{ch} para definir a sequência das visitas. Conforme ilustrado na Figura 4.5b, a restrição 4.12 impõe que, se houver uma deslocação do cliente i para o cliente j , o valor de u_{jh} seja maior que u_{ih} . Como o valor da variável aumenta sempre entre dois nós consecutivos, assegura-se que o vendedor nunca regressa a um cliente já visitado na mesma rota. O depósito é a única exceção: como não está sujeito ao incremento obrigatório, garante-se que a única forma de completar a rota é através do regresso à filial.

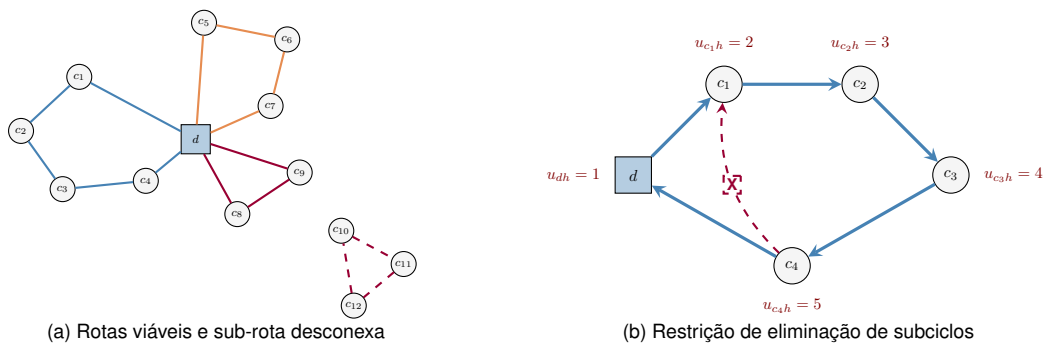


Figura 4.5 - Exemplo de solução e restrição do problema de roteamento de veículos.

4.4.2. Exemplo ilustrativo de aplicação do modelo mensal

Com o propósito de demonstrar o funcionamento da formulação apresentada e validar a sua implementação computacional, foi construído um exemplo ilustrativo, com base num subconjunto de quatro clientes pertencentes à carteira de um dos vendedores.

Para este efeito, consideram-se os seguintes conjuntos e parâmetros:

Conjuntos

- $C' = \{c_1, c_3, c_4\}$
- $C'' = \{c_2\}$
- $C = C' \cup C''$
- $H = \{1, \dots, 22\}$
- $V = \{d\} \cup C$

Parâmetros

- $s_c = 60 \text{ min}, \forall c \in C$
- $T = 528 \text{ min}$

Os tempos de deslocação t_{ij} entre todos os pares de nós $i, j \in V$ foram obtidos através da API OSRM, sendo a matriz de tempos resultante apresentada a seguir, em minutos.

$$(t_{ij})_{i,j \in V} = \begin{matrix} & d & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \begin{matrix} d \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.0 & 51.7 & 60.4 & 74.2 & 70.9 \\ 49.6 & 0.0 & 32.9 & 78.0 & 74.7 \\ 60.2 & 33.2 & 0.0 & 50.3 & 47.1 \\ 72.4 & 78.7 & 50.3 & 0.0 & 3.3 \\ 69.2 & 75.5 & 47.0 & 3.3 & 0.0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

O modelo foi implementado em Python, com recurso à biblioteca Pyomo (Bynum et al. 2021; Hart, Watson e Woodruff 2011) para a formulação do problema, e resolvido através do *solver* SCIP (Achterberg 2009). Os principais indicadores relativos à dimensão do modelo e ao seu desempenho computacional encontram-se resumidos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Dimensão e resultados computacionais do exemplo ilustrativo.

Indicador	Valor
<i>Dimensão da Formulação</i>	
N.º de clientes a visitar	4
Variáveis x_{ijh}	440
Variáveis y_{ch}	88
Variáveis z_h	22
Variáveis u_{ch}	88
N.º total de variáveis	638
N.º total de restrições	702
<i>Desempenho Computacional</i>	
Valor ótimo da função objetivo	326.40 min
Tempo de resolução	1.95 s

As rotas associadas à solução ótima são apresentadas de seguida:

- Dia 1: $d \rightarrow c_2 \rightarrow c_1 \rightarrow d$
- Dia 17: $d \rightarrow c_2 \rightarrow c_4 \rightarrow c_3 \rightarrow d$

Importa notar que a solução ilustra o cumprimento das frequências de visita: o cliente $c_2 \in C''$ é visitado duas vezes ao longo do mês, respeitando a restrição de espaçamento mínimo, enquanto os restantes clientes são visitados exatamente uma vez.

Os resultados confirmam que o modelo consegue encontrar soluções ótimas em tempos computacionais reduzidos para problemas de pequena dimensão. No entanto, constatou-se também que o número de variáveis e restrições cresce muito rapidamente com o aumento do número de clientes (Tabela 4.4), o que revela a complexidade combinatória desta abordagem e sugere potenciais limitações de escalabilidade em instâncias de maior dimensão.

4.4.3. Abordagem quinzenal

Com o intuito de tentar reduzir a complexidade computacional associada ao modelo mensal, foi explorada uma formulação alternativa do problema, baseada na decomposição do horizonte de planeamento em dois subproblemas independentes.

O conjunto H de dias úteis é dividido em:

- $H_1 = \{1, \dots, 11\}$, correspondente à 1.^a quinzena
- $H_2 = \{12, \dots, 22\}$, correspondente à 2.^a quinzena

O modelo é resolvido de forma independente para cada quinzena $q \in \{1, 2\}$, considerando apenas os respetivos dias úteis H_q .

Conjuntos e parâmetros

Os conjuntos e parâmetros para este modelo seguem as definições da secção 4.4.1, com as seguintes especificações:

- H_q : conjunto de dias úteis da quinzena q
- C' : conjunto de clientes *Leais* e *Campeões*
- C'' : conjunto de clientes *Ocasionais*
- $\tilde{C}' \subseteq C'$: subconjunto de C' que não foi visitado em H_1 (relevante apenas para a 2.^a quinzena)

Variáveis de decisão

As variáveis x_{ijh} , y_{ch} , z_h e u_{ch} mantêm as definições anteriores, mas são restritas ao horizonte temporal $h \in H_q$.

Modelo quinzenal

$$\min \sum_{h \in H_q} \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} t_{ij} x_{ijh} \quad (4.17)$$

s.a.

$$\sum_{h \in H_q} y_{ch} = 1 \quad \forall c \in C'' \quad (4.18)$$

$$\sum_{h \in H_1} y_{ch} \leq 1 \quad \forall c \in C' \quad (4.19)$$

$$\sum_{h \in H_2} y_{ch} = 1 \quad \forall c \in \tilde{C}' \quad (4.20)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ijh} = y_{ch} \quad \forall c \in C, h \in H_q \quad (4.21)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{jih} = y_{ch} \quad \forall c \in C, h \in H_q \quad (4.22)$$

$$\sum_{j \in C} x_{djh} = z_h \quad \forall h \in H_q \quad (4.23)$$

$$\sum_{i \in C} x_{idh} = z_h \quad \forall h \in H_q \quad (4.24)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} t_{ij} x_{ijh} + \sum_{c \in C} s_c y_{ch} \leq T z_h \quad \forall h \in H_q \quad (4.25)$$

$$\sum_{c \in C'} \sum_{h \in H_1} y_{ch} \geq \alpha |C'| \quad \alpha \in [0, 1] \quad (4.26)$$

$$u_{dh} = 1 \quad \forall h \in H_q \quad (4.27)$$

$$2 \leq u_{ch} \leq n \quad \forall c \in C, h \in H_q \quad (4.28)$$

$$u_{ih} - u_{jh} + n x_{ijh} \leq n - 1 \quad \forall h \in H_q, i, j \in C, i \neq j \quad (4.29)$$

$$x_{ijh} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, h \in H_q \quad (4.30)$$

$$y_{ch} \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C, h \in H_q \quad (4.31)$$

$$z_h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H_q \quad (4.32)$$

$$u_{ch} \geq 0 \quad \forall c \in C, h \in H_q \quad (4.33)$$

Para cada quinzena q , minimiza-se o tempo total de deslocação 4.17. As restrições de conservação de fluxo 4.21 e 4.22, conectividade ao depósito 4.23 e 4.24, capacidade temporal diária 4.25 e eliminação de sub-rotas 4.27, 4.28 e 4.29 seguem a mesma lógica apresentada na formulação mensal, sendo agora aplicadas apenas ao subconjunto de dias H_q . Assim sendo, e para evitar repetições, serão apenas detalhadas as particularidades desta nova abordagem.

Frequência de visitas A restrição 4.18 impõe que os clientes *Ocasionais* sejam visitados exatamente uma vez em cada quinzena, garantindo a frequência mensal de duas visitas. Para

os clientes de visita mensal única, isto é, os clientes *Leais* e *Campeões*, o modelo decide quais visitar na primeira quinzena, respeitando a restrição 4.19. Os restantes clientes do conjunto $\tilde{C}'$ tornam-se visitas obrigatórias na segunda quinzena através da restrição 4.20.

Equilíbrio de visitas A restrição 4.26 utiliza um parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ para garantir que uma porção mínima de clientes de C' seja atendida na primeira quinzena, garantindo uma distribuição mais equilibrada de trabalho ao longo do mês.

4.4.4. Exemplo ilustrativo de aplicação do modelo quinzenal

De forma a ilustrar a aplicabilidade prática do modelo, recorre-se a uma instância real do problema, correspondente à carteira de um dos vendedores da base de dados.

Neste caso, a carteira do vendedor é constituída por 14 clientes e consideram-se os seguintes conjuntos e parâmetros:

Conjuntos	Parâmetros
• $C = \{c_1, \dots, c_{14}\}$	• $s_c = 60 \text{ min}, \forall c \in C$
• $C'' = \{c_1, c_6, c_9\}$	• $T = 528 \text{ min}$
• $C' = C \setminus C''$	• $\alpha = 0.5$
• $H_1 = \{1, \dots, 11\}$	
• $H_2 = \{12, \dots, 22\}$	
• $V = \{d\} \cup C$	

Tal como no exemplo da secção 4.4.2, os tempos de deslocação t_{ij} foram obtidos através da matriz de tempos calculada previamente para o vendedor considerado. O modelo foi também implementado em Python, utilizando a biblioteca Pyomo (Bynum et al. 2021; Hart, Watson e Woodruff 2011), e resolvido com recurso ao *solver* SCIP (Achterberg 2009).

O problema é, então, resolvido em duas fases independentes. Numa primeira fase resolve-se o problema correspondente à primeira quinzena. Posteriormente, os clientes cuja frequência mensal já se encontra satisfeita são removidos da instância, sendo resolvido o problema da segunda quinzena.

Primeira quinzena A solução ótima obtida para a primeira quinzena gerou as seguintes rotas:

- Dia 10: $d \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow d$
- Dia 11: $d \rightarrow c_4 \rightarrow c_5 \rightarrow c_6 \rightarrow c_7 \rightarrow c_8 \rightarrow c_9 \rightarrow d$

Nesta fase, o modelo contém 2629 variáveis de decisão e 2523 restrições, tendo sido obtida uma solução ótima com valor da função objetivo igual a 284.97 minutos de tempo total de deslocação.

Após a resolução da primeira quinzena verificou-se que seis clientes com frequência mensal unitária já tinham satisfeito os respetivos requisitos de visita, razão pela qual foram removidos da instância seguinte.

Segunda quinzena A segunda quinzena é, então, resolvida considerando apenas os clientes cuja frequência de visitas continua por satisfazer.

As rotas obtidas foram:

- Dia 13: $d \rightarrow c_{10} \rightarrow c_6 \rightarrow c_9 \rightarrow d$
- Dia 15: $d \rightarrow c_1 \rightarrow c_{11} \rightarrow c_{12} \rightarrow c_{13} \rightarrow d$
- Dia 20: $d \rightarrow c_{14} \rightarrow d$

Nesta segunda fase, o modelo é composto por 979 variáveis e 932 restrições, tendo a sua resolução conduzido a uma solução ótima com um valor da função objetivo de 784.57 minutos.

Os principais indicadores relativos à dimensão das duas instâncias e ao respetivo desempenho computacional encontram-se resumidos na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Dimensão e resultados computacionais do exemplo de planeamento quinzenal.

Indicador	Quinzena 1	Quinzena 2
<i>Dimensão da Formulação</i>		
N.º de clientes a visitar	14	8
Variáveis x_{ijh}	2310	792
Variáveis y_{ch}	154	88
Variáveis z_h	11	11
Variáveis u_{ch}	154	88
N.º total de variáveis	2629	979
N.º total de restrições	2523	932
<i>Desempenho Computacional</i>		
Valor ótimo da função objetivo	284.97 min	784.57 min
Tempo de resolução	63.31 s	27.88 s

Observa-se que a decomposição do problema em duas quinzenas reduz consideravelmente a dimensão de cada instância. Em particular, após a resolução da primeira quinzena, vários clientes deixam de necessitar de visitas adicionais, o que conduz a uma redução substancial do número de variáveis e restrições na segunda quinzena. Consequentemente, o tempo de resolução da segunda quinzena é também significativamente inferior ao da primeira.

No entanto, esta estratégia deixa de garantir a otimização global do planeamento mensal, visto que as decisões tomadas na primeira quinzena condicionam a resolução da segunda. Consequentemente, a solução obtida corresponde à combinação de duas otimizações sucessivas e não necessariamente ao ótimo global que seria obtido através da resolução conjunta de todo o horizonte mensal. Além disso, apesar de garantir a frequência mensal de visitas, a formulação quinzenal não assegura o espaçamento mínimo entre visitas consecutivas ao mesmo cliente, permitindo que estas ocorram em dias muito próximos quando pertencem a quinzenas diferentes.

Além das formulações exatas apresentadas nas secções 4.4.1 e 4.4.3, foram consideradas várias abordagens heurísticas e meta-heurísticas identificadas no capítulo 2, tais como a heurística de Clarke e Wright, o *simulated annealing*, a pesquisa tabu e os algoritmos genéticos.

Tendo em conta as características do problema em estudo, optou-se por utilizar um algoritmo genético, devido à sua capacidade para representar soluções que combinam as duas componentes principais do problema: a calendarização das visitas ao longo do horizonte temporal e a definição da sequência dos clientes em cada rota diária. Além disso, por recorrer a uma população de soluções em vez de uma única solução candidata, permite explorar simultaneamente diferentes combinações de atribuição de clientes aos dias e de ordenação das visitas, o que é particularmente relevante num problema combinatório como o PVRP considerado neste trabalho.

Assim, nas secções seguintes são apresentados apenas os detalhes de implementação e os resultados obtidos com o algoritmo genético, por ter sido considerado o método mais adequado às especificidades do problema em análise.

4.5. Modelo de otimização de rotas: Algoritmo Genético

Nesta secção apresenta-se a implementação de um algoritmo genético para o problema de otimização das rotas da equipa comercial.

São descritos os principais elementos que o compõem, nomeadamente a forma como as soluções são representadas, a função de aptidão e os operadores genéticos de seleção, cruzamento e mutação. É também detalhado o mecanismo de reparação e validação utilizado para reduzir violações das restrições do problema antes da avaliação da função de aptidão.

Por fim, são discutidos os parâmetros adotados e as estratégias utilizadas para conciliar a qualidade das soluções obtidas, a diversidade da população e a eficiência computacional. A escolha destes parâmetros baseou-se quer em recomendações da literatura (Patil e Pawar 2015), quer em testes preliminares realizados no contexto do presente caso de estudo.

Representação do indivíduo Cada indivíduo S da população representa uma solução candidata para o planeamento mensal das rotas de um vendedor ao longo do horizonte temporal H .

A sua modelação é feita através de um dicionário, onde a chave $h \in H$ representa o dia do mês e o valor associado é uma lista ordenada de clientes a visitar nesse dia, como apresentado na Figura 4.6. Assim, um indivíduo S é definido formalmente por:

$$S = \{h : R_h, \forall h \in H\}$$

onde R_h é a sequência ordenada de clientes correspondente à rota do dia h .

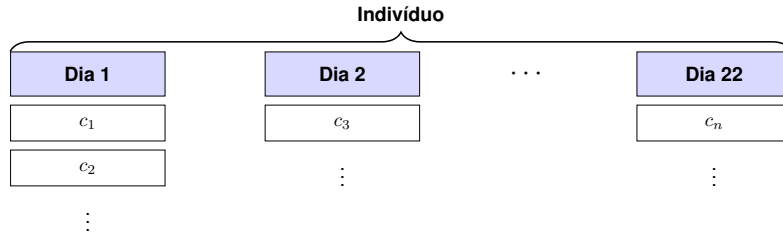


Figura 4.6 - Representação de um indivíduo como um mapeamento entre dias e listas ordenadas de clientes.

População inicial A população na geração $g \in G$, denotada por $P^{(g)}$, corresponde a um conjunto de N indivíduos, sendo definida por:

$$P^{(g)} = \{S_1^{(g)}, S_2^{(g)}, \dots, S_N^{(g)}\}.$$

A população inicial $P^{(0)}$ é constituída por $N = 50$ indivíduos, uma vez que populações maiores não resultaram em melhorias significativas na qualidade das soluções.

Os indivíduos são gerados através de uma combinação de soluções heurísticas e aleatórias. Em ambos os casos, começa-se por atribuir os clientes de forma aleatória aos dias do horizonte temporal, respeitando a frequência de visitas exigida.

Em 30% dos indivíduos, as rotas diárias são construídas através da heurística do Vizinho Mais Próximo (VMP), selecionando, a partir do depósito, o cliente mais próximo da posição atual em termos de tempo de viagem. Esta abordagem permite que o algoritmo parta de soluções iniciais de melhor qualidade, acelerando a sua convergência.

Os restantes 70% dos indivíduos são gerados aleatoriamente, com o objetivo de promover diversidade na população. Nestes indivíduos, tanto a atribuição dos clientes aos dias de visita como a ordem de visita aos clientes em cada dia são definidas de forma aleatória.

Aptidão (fitness) Uma vez que o objetivo é minimizar o tempo de deslocação mensal, a aptidão de um indivíduo $S_i^{(g)}$ é definida pelo inverso do seu custo operacional ao longo de todo o horizonte de planeamento. Seja T_h o tempo total associado à rota do dia $h \in H$, obtido a partir da soma dos tempos de deslocação e dos tempos de serviço dos clientes visitados nesse período.

O custo temporal global do indivíduo $S_i^{(g)}$ é dado por:

$$T_{total}(S_i^{(g)}) = \sum_{h \in H} T_h.$$

Consequentemente, a função de aptidão f é definida como:

$$f(S_i^{(g)}) = \frac{1}{T_{total}(S_i^{(g)})}.$$

Deste modo, quanto menor for o tempo total da solução, maior será a sua aptidão, incentivando o algoritmo a encontrar soluções de menor custo.

Seleção Para esta etapa optou-se pela *seleção por torneio*, que se baseia na competição direta entre indivíduos da população.

Em cada torneio, começa-se por retirar aleatoriamente $k = 3$ indivíduos da população $P^{(g)}$, formando um subconjunto:

$$P_{torneio} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\} \subset P^{(g)}.$$

A escolha de $k = 3$ procura equilibrar diversidade e pressão seletiva, reduzindo o risco de seleção demasiado aleatória ou de convergência prematura do algoritmo.

De seguida, avalia-se a aptidão de todos os indivíduos no subconjunto $P_{torneio}$, que são posteriormente ordenados de forma decrescente com base na sua aptidão.

Os dois indivíduos com maior aptidão são os vencedores do torneio, sendo selecionados como os progenitores para a fase seguinte (Figura 4.7).

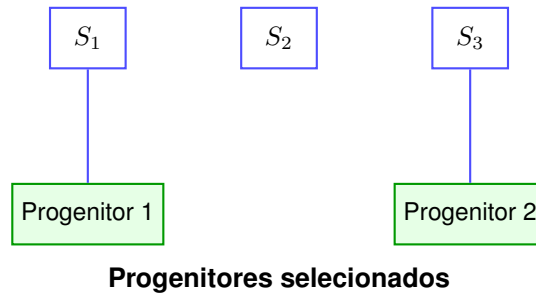


Figura 4.7 - Representação da seleção por torneio com $k = 3$.

Cruzamento Neste modelo o cruzamento é realizado com recurso a uma adaptação do operador *order crossover* (Toth e Vigo 2002), que incide sobre o horizonte temporal H de cada um dos progenitores seleccionados no torneio com uma probabilidade p_c .

Quando o cruzamento ocorre, é definido aleatoriamente um ponto de corte k , que divide o conjunto ordenado de dias no horizonte H em dois segmentos. Os descendentes são então gerados através da combinação das rotas diárias dos progenitores. O *descendente 1* herda todas as rotas do *progenitor 1* até ao dia k e as restantes rotas do *progenitor 2*. O *descendente 2* é gerado de forma simétrica, como representado na Figura 4.8.

Optou-se por esta abordagem ao invés do operador clássico, no qual o cruzamento é realizado dentro de uma única rota, por permitir preservar a estrutura das rotas diárias. Como o cruzamento é feito entre dias e não no interior de cada rota, as sequências de visita são transmitidas sem alterações para a descendência.

A probabilidade de cruzamento foi definida como $p_c = 0.85$, dentro do intervalo de 0.75 a 0.95 frequentemente associado a um bom desempenho em algoritmos genéticos (Patil e Pawar 2015).

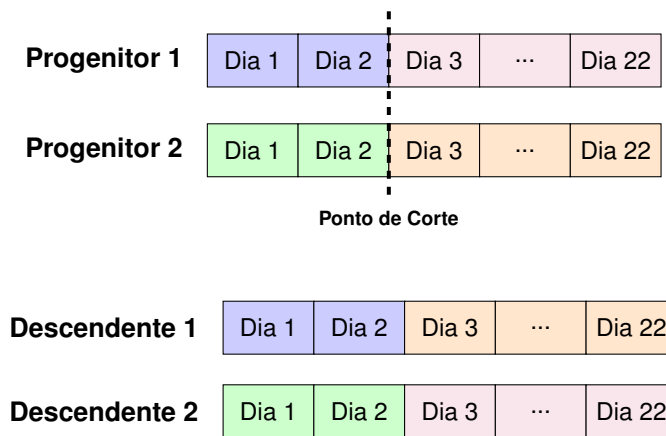


Figura 4.8 - Order crossover de ponto único gerando dois descendentes.

Mutação Após a fase de cruzamento, é aplicada uma mutação aos descendentes gerados antes de estes serem inseridos na nova geração. A estratégia de mutação implementada baseia-se em três operadores de permutação (*swap*), que são aplicados de forma independente, com uma probabilidade de mutação p_m :

- **Swap intra-dia:** troca a ordem de visita de dois clientes dentro de uma mesma rota diária. Para cada dia $h \in H$ que contenha pelo menos dois clientes, são seleccionados dois

clientes distintos da rota correspondente, trocando as suas posições (Figura 4.9).



Figura 4.9 - Representação do *swap* intra-dia.

- **Swap inter-dia:** consiste na troca de clientes entre dias distintos. O algoritmo seleciona aleatoriamente dois dias h_1 e h_2 do horizonte temporal H , escolhe aleatoriamente um cliente de cada dia e efetua a troca entre eles (Figura 4.10).

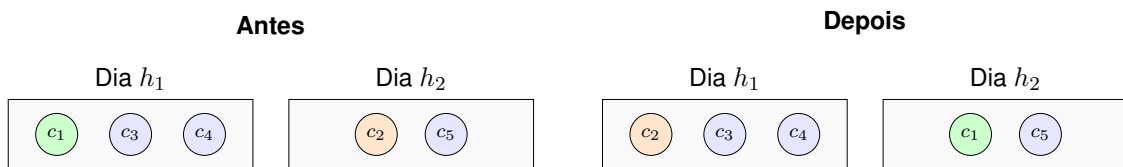


Figura 4.10 - Representação do *swap* inter-dia.

- **Swap de dias completos:** troca completa das rotas associadas a dois dias distintos. Para tal, selecionam-se dois dias h_1 e h_2 e trocam-se as respetivas rotas diárias (Figura 4.11).

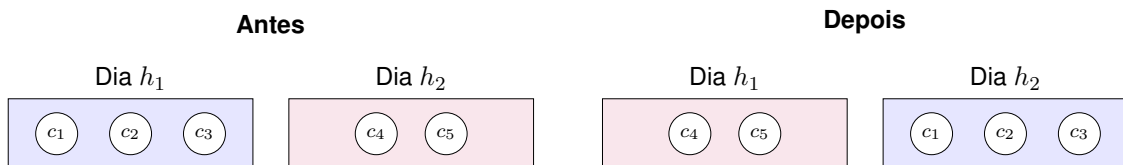


Figura 4.11 - Representação do *swap* de dias completos.

Reparação e validação Devido à natureza dos operadores de cruzamento e mutação, algumas soluções geradas podem violar as restrições do problema. Por este motivo, foi implementado um procedimento de validação e reparação, com o objetivo de reduzir essas violações e aproximar os indivíduos do espaço de soluções viáveis antes da avaliação da função de aptidão.

Do ponto de vista operacional, é fundamental garantir que o algoritmo devolve sempre uma solução, mesmo que algumas restrições possam ser relaxadas, de modo a assegurar que a empresa dispõe sempre de um plano de rotas.

Nesse sentido, a reparação é estruturada segundo uma hierarquia de prioridades das restrições do problema:

1. **Frequência de visitas:** em primeiro lugar, é garantido o cumprimento da restrição relativa à frequência de visitas de cada cliente, assegurando que cada cliente é visitado o número de vezes exigido e que não há mais do que uma visita ao mesmo cliente no mesmo dia. Caso existam visitas em excesso, estas são removidas de forma aleatória. No caso de existirem visitas em falta, o cliente é inserido em dias selecionados aleatoriamente onde ainda não se encontra agendado.
2. **Capacidade temporal:** de seguida, é verificada a restrição de capacidade temporal de cada rota diária. Sempre que ocorre uma violação, remove-se o cliente cuja exclusão conduz à maior redução do tempo total da rota. Posteriormente, esse cliente é reinserido noutro dia, privilegiando dias que respeitem a restrição de capacidade temporal ou, quando tal não seja possível, o dia que resulte no menor custo de inserção. Este processo é iterativo, até que todas as rotas cumpram a restrição ou até ser atingido um limite máximo de tentativas.
3. **Espaçamento temporal entre visitas:** por último, verifica-se o cumprimento da restrição de espaçamento mínimo entre visitas ao mesmo cliente *Ocasional*. Em caso de violação, são realizadas trocas de clientes entre dias distintos, procurando restaurar o espaçamento exigido sem comprometer as restrições já satisfeitas.

Este processo de reparação é aplicado a toda a população em cada geração, garantindo que as soluções avaliadas pela função de aptidão cumprem as principais restrições do problema.

A opção por uma abordagem baseada em reparação, em vez de penalizações na função de aptidão, justifica-se por dois fatores principais. Por um lado, a interação entre restrições faz com que muitas soluções geradas sejam inviáveis, o que, numa abordagem com penalizações, conduziria à avaliação de um grande número de soluções pouco úteis para guiar o processo evolutivo. Por outro lado, a utilização de penalizações exigiria a definição de parâmetros adicionais, cuja escolha influencia bastante o desempenho do algoritmo, aumentando a sensibilidade do modelo.

Evolução O processo evolutivo decorre ao longo de $G = 100$ gerações, dado que, nos testes preliminares, se verificou que este valor é suficiente para capturar a maior parte das melhorias na função de aptidão.

Durante esse processo, são utilizados mecanismos destinados a preservar a qualidade das soluções e a controlar a diversidade da população, nomeadamente o elitismo e a adaptação da mutação ao longo das gerações.

- **Elitismo**

Para evitar que as melhores soluções encontradas sejam perdidas ao longo do processo evolutivo, o algoritmo utiliza uma estratégia de *elitismo* (Deb et al. 2002). Em cada geração, a população é ordenada segundo o valor de *fitness*, sendo os $n_{elite} = 2$ indivíduos com melhor aptidão transferidos diretamente para a geração seguinte, sem serem submetidos aos operadores de cruzamento e mutação. Assim, garante-se que a qualidade da melhor solução não diminui entre gerações, sem perda relevante de diversidade na população.

- **Mutação adaptativa** O algoritmo incorpora ainda uma adaptação da taxa de mutação, com o objetivo de aumentar a diversidade da população em caso de estagnação do processo evolutivo (Eiben, Hinterding e Michalewicz 1999). Começa-se por definir uma taxa inicial de mutação $p_m^{(0)} = 0.01$, consistente com os valores típicos referidos por Patil e Pawar. Sempre que são detetadas $G_{estag} = 20$ gerações consecutivas sem melhoria no valor de *fitness*, a probabilidade de mutação p_m é aumentada de forma linear, com incrementos de $\Delta p = 0.005$, de acordo com a expressão 4.34:

$$p_m \leftarrow p_m + \Delta p \quad (4.34)$$

Deste modo, promove-se perturbações nas rotas para reduzir a probabilidade de convergência prematura para ótimos locais. Quando é encontrada uma solução melhor, a taxa de mutação é reposta no valor inicial e o contador de estagnação é reiniciado.

Considerando os valores definidos para G , G_{estag} e Δp , a taxa de mutação varia entre $0.01 \leq p_m \leq 0.035$. Mesmo no cenário de maior estagnação, o valor de p_m permanece inferior a 0.05, valor acima do qual se tende a observar uma degradação do desempenho do algoritmo (Patil e Pawar 2015).

Concluída a descrição do funcionamento do algoritmo proposto, apresenta-se de seguida um exemplo da sua aplicação prática.

Tabela 4.6 - Caracterização da carteira de clientes, custo mensal e tempo de execução por vendedor.

Vendedor	Nº Clientes	Campeões	Leais	Ocasionais	Deslocação (min)	Serviço (min)	Total (min)	Tempo Execução (s)
A	9	1	3	5	759.89	840	1599.89	0.52
B	14	2	9	3	1273.28	1020	2293.28	0.2
C	16	7	2	7	1051.52	1380	2431.52	0.23
D	22	4	3	15	1642.92	2220	3862.92	0.49
E	29	11	5	13	2566.23	2520	5086.23	0.5
F	29	5	12	12	1631.83	2460	4091.83	0.47
G	38	6	7	25	2912.38	3780	6692.38	1.35
H	52	7	11	34	3175.47	5160	8335.47	2.28
I	90	4	18	68	4912.02	9480	14392.02	121.24

A análise da Tabela 4.6 permite observar a relação entre a dimensão da carteira de clientes e o desempenho do algoritmo. Verifica-se que, à medida que o número de clientes aumenta, o custo total mensal também tende a crescer, o que é esperado devido ao aumento do número de deslocações e do tempo de serviço associado. Observa-se ainda que, em instâncias de maior escala, o aumento do tempo de execução é mais acentuado, o que reflete a maior complexidade do espaço de procura, apesar dos tempos de execução permanecerem globalmente reduzidos.

O vendedor I constitui um caso particular por apresentar 90 clientes e um custo total mensal de 14 392.02 minutos. Este valor excede a capacidade temporal disponível de $22 \times 528 = 11\,616$ minutos para o horizonte de planeamento de 22 dias úteis e o limite diário de 528 minutos considerados.

Assim, a carga de trabalho excede a capacidade disponível em 2 776.02 minutos, tornando a instância inviável face às restrições operacionais definidas. A obtenção de uma solução viável exigiria alterações ao problema, nomeadamente através da redistribuição de clientes por outros vendedores ou do aumento do horizonte de planeamento, pelo que o vendedor I não será incluído nas análises subsequentes.

4.6. Desempenho do algoritmo

Com o intuito de validar o desempenho do algoritmo de otimização proposto, analisou-se o ganho de tempo obtido em comparação com uma solução de referência. Como a empresa não dispunha de registos históricos das rotas realizadas pela equipa comercial, a heurística do Vizinho Mais Próximo (VMP) foi utilizada como termo de comparação. Esta heurística foi escolhida por constituir uma aproximação simples e realista ao processo de decisão humano neste tipo de

problemas, permitindo avaliar o ganho introduzido pelo algoritmo genético desenvolvido relativamente a uma abordagem não otimizada (MacGregor e Ormerod 1996).

As soluções de referência são construídas em duas etapas. Primeiro, cada visita é atribuída a um dia do horizonte de planeamento, tendo em consideração as restrições de frequência, espaçamento entre visitas e tempo útil diário. Posteriormente, para cada dia, a sequência de visitas é definida recorrendo à heurística do VMP, que constrói a rota escolhendo, iterativamente, o cliente não visitado com menor tempo de deslocação a partir da localização atual.

De modo a garantir uma comparação justa entre abordagens, a solução gerada pela heurística do VMP é submetida ao mesmo processo de validação de restrições do AG. Adicionalmente, dada a componente aleatória do AG, o seu desempenho é avaliado através de múltiplas execuções independentes. Para cada vendedor são realizadas 100 execuções válidas do algoritmo, com recurso a sementes aleatórias previamente definidas, assegurando, assim, a reprodutibilidade dos resultados. Sempre que uma execução produz uma solução que viola alguma das restrições definidas, esta é rejeitada e repetida, garantindo que apenas soluções admissíveis são consideradas na análise. No total, a avaliação incide sobre 8 vendedores, resultando em 800 execuções válidas do AG.

A Figura 4.13 apresenta a distribuição do ganho absoluto de tempo de deslocação obtido pelo AG face à heurística do VMP para cada um dos vendedores analisados.

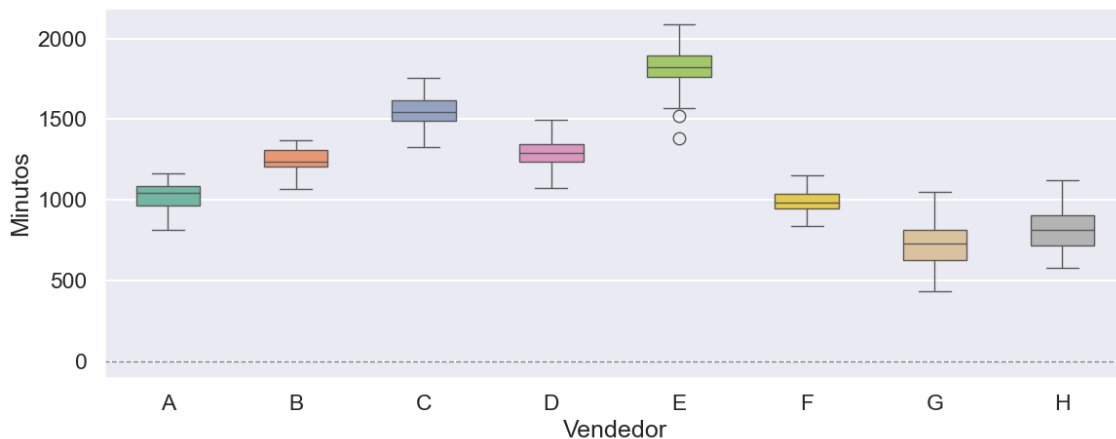


Figura 4.13 - Distribuição do ganho absoluto de tempo de deslocação, em minutos, obtido pelo AG face à heurística do VMP para cada vendedor.

Apesar das oscilações associadas à natureza estocástica do algoritmo, o AG superou a heurística do VMP em todas as simulações realizadas, uma vez que todos os *boxplots* se posicionam

acima da linha correspondente a ganho nulo (Figura 4.13). A magnitude dos ganhos varia entre vendedores, destacando-se o Vendedor E com o maior ganho mediano e o Vendedor G com o menor. Apesar desta diferença, todos os vendedores beneficiam de ganhos substanciais no tempo de deslocação. Observa-se também que a variabilidade dos ganhos difere entre vendedores, refletindo o impacto das especificidades de cada carteira de clientes nas soluções encontradas pelo algoritmo.

Na Tabela 4.7 encontram-se duas perspetivas dos resultados obtidos. A Tabela 4.7a apresenta uma perspetiva agregada por vendedor. Para cada vendedor, foi inicialmente calculada a média dos tempos obtidos nas 100 execuções válidas do algoritmo, sendo posteriormente calculada a média desses valores para o conjunto dos oito vendedores considerados. Por sua vez, a Tabela 4.7b apresenta estatísticas calculadas sobre o conjunto completo das 800 execuções válidas do AG. As métricas apresentadas descrevem a distribuição global dos ganhos percentuais obtidos pelo AG face à heurística do VMP, permitindo avaliar a consistência dos resultados entre execuções.

Tabela 4.7 - Resumo comparativo entre a heurística do VMP e o AG.

(a) Estatísticas médias por vendedor		(b) Estatísticas globais	
Métrica	Valor	Métrica	Valor (%)
Tempo médio VMP (min)	2972.52	Ganho médio tempo	42.47 %
Tempo médio AG (min)	1788.07	Ganho mediano tempo	43.95 %
		Ganho máximo tempo	69.85 %
		Ganho mínimo tempo	12.12 %
		Desvio padrão ganho tempo	14.95 %

O tempo médio de deslocação, calculado a partir das médias obtidas para cada vendedor, reduz de 2972.52 minutos com a abordagem baseada no VMP para 1788.07 minutos com o AG. Considerando o conjunto das 800 execuções válidas realizadas, observa-se um ganho médio de 42.47% e um ganho mediano de 43.95%, evidenciando um desempenho superior ao da solução de referência. A reduzida diferença entre estes valores sugere uma distribuição relativamente equilibrada dos ganhos, enquanto o desvio-padrão de 14.95% reflete a variabilidade dos ganhos entre execuções, associada tanto à componente estocástica do algoritmo como às diferenças

entre as carteiras dos vendedores. Apesar dessa variabilidade, o AG foi capaz de obter uma redução de 12.12% no tempo de rota no pior cenário registado ao longo de todas as simulações, atingindo 69.85% na melhor execução.

A Tabela 4.8 detalha estes ganhos por vendedor, permitindo relacioná-los com o tamanho da carteira de clientes. Em todos os casos, os valores médios e medianos são muito próximos, o que indica distribuições estáveis e sem forte influência de *outliers*.

Tabela 4.8 - Ganho de tempo por vendedor.

Vendedor	Nº Clientes	Ganho Tempo Médio (min)	Ganho Tempo Mediano (min)
A	9	1030.42	1044.16
B	14	1252.65	1236.90
C	16	1553.16	1545.15
D	22	1294.15	1291.35
E	29	1815.22	1824.17
F	29	988.08	983.16
G	38	726.68	731.68
H	52	815.21	811.19

A análise por vendedor mostra diferenças relevantes na magnitude dos ganhos. O Vendedor E apresenta o melhor desempenho absoluto, enquanto os vendedores G e H, que possuem carteiras de clientes mais extensas, apresentam ganhos inferiores. Adicionalmente, a comparação entre os vendedores E e F mostra que instâncias com o mesmo número de clientes podem originar resultados muito diferentes. Isto sugere que o potencial de otimização depende não apenas da dimensão da carteira de clientes, mas também das características específicas de cada instância, como a dispersão geográfica dos clientes e a forma como as rotas são estruturadas.

Em suma, os resultados obtidos demonstram que o AG supera consistentemente a heurística do VMP, alcançando uma redução média de 42.47% no tempo de deslocação. Para além da magnitude dos ganhos observados, destaca-se a sua consistência, uma vez que todas as 800 execuções válidas produziram melhorias face à solução de referência. Estes resultados validam a adequação do algoritmo ao problema em estudo e evidenciam o seu potencial para apoiar o planeamento de rotas comerciais de forma mais eficiente.

4.7. Otimização de rotas para clientes potenciais

A Nors AG BR SP solicitou uma extensão da abordagem de otimização de rotas desenvolvida, com o objetivo de integrar a prospeção de clientes potenciais no planeamento das visitas, aproveitando as deslocações dos comerciais para identificar novas oportunidades de negócio.

Para implementar esta nova abordagem, foram também efetuadas alterações às restrições do problema descritas na secção 4.2. Em particular, o horizonte de planeamento foi alargado para dois meses, ou seja, 44 dias úteis, e o intervalo mínimo entre visitas ao mesmo cliente passou a ser de 14 dias úteis. Adicionalmente, a frequência de visitas foi redefinida para o novo horizonte temporal, estabelecendo-se que os clientes classificados como *Campeões* e *Leais* devem ser visitados duas vezes, enquanto os clientes *Ocasionais* e os clientes potenciais devem ser visitados uma única vez ao longo dos dois meses.

Dado que estas modificações foram introduzidas numa fase posterior ao desenvolvimento do modelo original, descrevem-se a seguir, de forma sucinta, as etapas seguidas para incluir estes clientes.

1. **Seleção de clientes potenciais:** para cada vendedor, e de modo a garantir a viabilidade operacional, são considerados apenas os 50 clientes potenciais de maior dimensão em termos de área total das suas propriedades.
2. **Obtenção das rotas base:** aplicação do algoritmo genético detalhado na secção 4.5 para obter rotas otimizadas, considerando apenas os clientes atuais.
3. **Inserção de clientes potenciais:** os clientes potenciais selecionados são inseridos nas rotas existentes através de uma heurística de custo mínimo, na qual é simulada a inserção de cada cliente em todas as posições e dias possíveis do horizonte de planeamento.

Para cada cenário de inserção, é avaliado o impacto na duração total da rota, considerando os tempos de deslocação e de serviço, sendo selecionada a posição que minimiza o acréscimo de tempo, desde que respeite a restrição de capacidade diária.
4. **Reotimização global:** após a inserção dos clientes potenciais, aplica-se novamente o algoritmo genético sobre o conjunto expandido de clientes. Para tirar partido da qualidade da solução encontrada na etapa anterior, esta é utilizada como semente na população inicial do algoritmo genético, permitindo o refinamento global das rotas.

5. Conclusão e trabalho futuro

O principal objetivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento de uma metodologia para apoiar o planeamento das visitas comerciais da Nors AG BR SP, combinando técnicas de segmentação de clientes e de otimização de rotas.

Inicialmente, foi realizada uma segmentação da carteira de clientes com base no modelo RFM, que permitiu identificar diferentes perfis de clientes de acordo com a sua relevância para o negócio e definir frequências de visita adequadas às necessidades de acompanhamento de cada segmento.

Numa segunda fase, essas frequências foram incorporadas num problema de roteamento de veículos periódico, com o intuito de definir planos de visita que garantissem o acompanhamento dos clientes de acordo com a frequência atribuída a cada segmento, minimizando, simultaneamente, os tempos de deslocação. Para a resolução do problema, foram exploradas abordagens de programação linear e algoritmos genéticos, que permitiram comparar diferentes estratégias de otimização no contexto da empresa. Numa fase posterior, os clientes potenciais foram ainda integrados no processo de planeamento das visitas, de modo a conciliar o acompanhamento dos clientes existentes com a prospeção de novos clientes.

De um modo geral, os resultados obtidos sugerem que a metodologia proposta é uma ferramenta eficaz para apoiar o planeamento da atividade da equipa comercial. Em comparação com as soluções de referência, foi possível obter uma redução média superior a 40% nos tempos de deslocação, o que contribui para uma utilização mais eficiente do tempo dos vendedores e para uma melhor gestão da carteira de clientes. Além disso, a abordagem desenvolvida é suficientemente flexível para acomodar alterações futuras na carteira de clientes, nas frequências de visita ou noutras restrições operacionais, tendo potencial para ser utilizada de forma contínua pela empresa.

Apesar dos resultados alcançados serem muito satisfatórios, a abordagem utilizada apresenta, naturalmente, algumas limitações. Pelo facto da segmentação ter sido realizada com base em dados transacionais, não estão a ser consideradas outras características qualitativas dos clientes, que poderiam influenciar o seu valor estratégico para a empresa. Adicionalmente, modelo RFM não permite incluir clientes potenciais, uma vez que estes não possuem histórico de compras. Por esse motivo, os clientes potenciais foram classificados com base na área total das suas propriedades. Por outro lado, a abordagem exata baseada em programação linear revelou limitações de escalabilidade computacional, o que motivou o recurso a meta-heurísticas. Acresce

ainda o facto de não existirem dados históricos relativos às rotas efetivamente realizadas pelas equipas comerciais que permitissem comparar diretamente os resultados propostos pelo AG com a realidade operacional da empresa. Assim, ao recorrer à heurística do VMP para simular um cenário de referência, as percentagens de melhoria reportadas poderão estar sobrestimadas. Note-se ainda que o planeamento das rotas foi realizado considerando frequências de visita previamente definidas e assumindo condições operacionais relativamente estáveis ao longo do horizonte de planeamento.

Neste contexto, identificam-se várias oportunidades para o desenvolvimento futuro deste trabalho.

Ao nível da segmentação, pode ser explorada a utilização de métodos alternativos, caso sejam disponibilizadas novas variáveis que permitam caracterizar de forma mais completa a carteira de clientes. Poderá ser desenvolvida uma segmentação específica para os clientes potenciais, baseada em variáveis como a dimensão das propriedades, indicadores de saúde financeira ou outras características que permitam estimar o seu potencial de negócio e definir prioridades de prospeção.

No que diz respeito à otimização de rotas, seria interessante avaliar, no futuro, outras abordagens e comparar o seu desempenho com os métodos considerados neste trabalho. Além disso, podem ser desenvolvidos modelos mais flexíveis, que permitam definir rotas de forma não periódica, ajustar as periodicidades de visita à sazonalidade do setor agrícola, considerar tempos de visita distintos consoante o tipo de cliente e integrar novos clientes em rotas já existentes.

Por fim, refira-se ainda o potencial desenvolvimento de *dashboards* interativos que integrem a informação relativa à segmentação dos clientes e ao planeamento das rotas, permitindo uma visualização mais rápida e intuitiva dos resultados e apoiando o processo de tomada de decisão.

Referências

- Abuzaid (2024). “A comparative study on univariate outlier winsorization methods in data science context”. Em: *Statistica Applicata – Italian Journal of Applied Statistics* 36.1, p. 1. ISSN: 20385587. DOI: 10.26398/IJAS.0036-004 (Citado na página 28).
- Abyad, A. (2021). “The Pareto Principle: Applying the 80/20 Rule to Your Business”. Em: *Middle East Journal Of Business* 4.1 (Citado na página 11).
- Achterberg, T. (2009). “SCIP: solving constraint integer programs”. Em: *Mathematical Programming Computation* 1, pp. 1–41. ISSN: 1867-2957. DOI: 10.1007/s12532-008-0001-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s12532-008-0001-1> (Citado nas páginas 54, 58).
- Anitha, P. e Patil, M. M. (2022). “RFM model for customer purchase behavior using K-Means algorithm”. Em: *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences* 34.5, pp. 1785–1792. ISSN: 13191578. DOI: 10.1016/j.jksuci.2019.12.011 (Citado nas páginas 6, 34).
- Baker, B. M. e Ayechev, M. (2003). “A genetic algorithm for the vehicle routing problem”. Em: *Computers & Operations Research* 30.5, pp. 787–800. ISSN: 03050548. DOI: 10.1016/S0305-0548(02)00051-5 (Citado na página 19).
- Baldoquin, M. G., Martinez, J. A. e Díaz-Ramírez, J. (2020). “A unified model framework for the multi-attribute consistent periodic vehicle routing problem”. Em: *PLOS ONE* 15.8. Ed. por Xin, B., e0237014. ISSN: 1932-6203. DOI: 10.1371/journal.pone.0237014 (Citado na página 14).
- Beausoleil, R. P. (2000). “Intensification and Diversification Strategies with Tabu Search: One-Machine Problem with Weighted Tardiness Objective”. Em: *MICAI 2000: Advances in Artificial Intelligence*. Ed. por Cairó, O., Sucar, L. E. e Cantu, F. J. Red. por Goos, G., Hartmanis, J. e Van Leeuwen, J. Vol. 1793. Series Title: Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 52–62. ISBN: 978-3-540-67354-5 978-3-540-45562-2. DOI: 10.1007/10720076_5 (Citado na página 21).
- Blattberg, R. C., Kim, B.-D. e Neslin, S. A. (2008). “RFM Analysis”. Em: *Database Marketing: Analyzing and Managing Customers*. New York, NY: Springer New York, pp. 323–337. ISBN: 978-0-387-72579-6. DOI: 10.1007/978-0-387-72579-6_12 (Citado nas páginas 8, 10).
- Braekers, K., Ramaekers, K. e Van Nieuwenhuysse, I. (2016). “The vehicle routing problem: State of the art classification and review”. Em: *Computers & Industrial Engineering* 99, pp. 300–313. ISSN: 0360-8352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.12.007> (Citado nas páginas 14, 16).

- Bynum, M. L. et al. (2021). *Pyomo—optimization modeling in python*. Third. Vol. 67. Springer Science & Business Media (Citado nas páginas 54, 58).
- Carrasco, R. A., Blasco, M. F., García-Madariaga, J. e Herrera-Viedma, E. (2019). “A Fuzzy Linguistic RFM Model Applied to Campaign Management”. Em: *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence* 5.4, p. 21. ISSN: 1989-1660. DOI: 10.9781/ijimai.2018.03.003 (Citado nas páginas 8–10).
- Chen, D.-S., Batson, R. G. e Dang, Y. (2010). *Applied Integer Programming: Modeling and Solution*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons. ISBN: 978-0-470-37306-4 (Citado na página 15).
- Chen, Y., Liu, L., Zheng, D. e Li, B. (2023). “Estimating travellers’ value when purchasing auxiliary services in the airline industry based on the RFM model”. Em: *Journal of Retailing and Consumer Services* 74, p. 103433. ISSN: 09696989. DOI: 10.1016/j.jretconser.2023.103433 (Citado na página 6).
- Cheng, C.-H. e Chen, Y.-S. (2009). “Classifying the segmentation of customer value via RFM model and RS theory”. Em: *Expert Systems with Applications* 36.3, pp. 4176–4184. ISSN: 09574174. DOI: 10.1016/j.eswa.2008.04.003 (Citado na página 9).
- Christy, A. J., Umamakeswari, A., Priyatharsini, L. e Neyaa, A. (2021). “RFM ranking – An effective approach to customer segmentation”. Em: *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences* 33.10, pp. 1251–1257. ISSN: 13191578. DOI: 10.1016/j.jksuci.2018.09.004 (Citado na página 7).
- Dantzig, G. B. e Ramser, J. H. (1959). “The Truck Dispatching Problem”. Em: *Management Science* 6.1, pp. 80–91 (Citado na página 13).
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. e Meyarivan, T. (2002). “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”. Em: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6.2, pp. 182–197. ISSN: 1089778X. DOI: 10.1109/4235.996017 (Citado na página 67).
- Dunford, R., Su, Q., Tamang, E. e Wintour, A. (2014). “The Pareto Principle”. Em: *The Plymouth Student Scientist* (Citado na página 11).
- Dursun, A. e Caber, M. (2016). “Using data mining techniques for profiling profitable hotel customers: An application of RFM analysis”. Em: *Tourism Management Perspectives* 18, pp. 153–160. ISSN: 22119736. DOI: 10.1016/j.tmp.2016.03.001 (Citado nas páginas 8, 10, 11, 26).
- Eiben, A., Hinterding, R. e Michalewicz, Z. (1999). “Parameter control in evolutionary algorithms”. Em: *IEEE Trans. Evolutionary Computation* 3, pp. 124–141. DOI: 10.1109/4235.771166 (Citado na página 67).

- Ernawati, E., Baharin, S. S. K. e Kasmin, F. (2021). "A review of data mining methods in RFM-based customer segmentation". Em: *Journal of Physics: Conference Series* 1869.1, p. 012085. ISSN: 1742-6588, 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1869/1/012085. (Acedido em 30/10/2025) (Citado nas páginas 6, 8).
- Gendreau, M., Iori, M., Laporte, G. e Martello, S. (2008). "A Tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints". Em: *Networks* 51.1, pp. 4–18. ISSN: 0028-3045, 1097-0037. DOI: 10.1002/net.20192 (Citado nas páginas 20, 21).
- Gomes, M. e Meisen, T. (2023). "A review on customer segmentation methods for personalized customer targeting in e-commerce use cases". Em: *Information Systems and e-Business Management* 21.3, pp. 527–570. ISSN: 1617-9846, 1617-9854. DOI: 10.1007/s10257-023-00640-4 (Citado na página 10).
- Handojo, A., Pujawan, N., Santosa, B. e Singgih, M. L. (2023). "A multi layer recency frequency monetary method for customer priority segmentation in online transaction". Em: *Cogent Engineering* 10.1, p. 2162679. ISSN: 2331-1916. DOI: 10.1080/23311916.2022.2162679 (Citado nas páginas 7, 10, 11).
- Hart, W. E., Watson, J.-P. e Woodruff, D. L. (2011). "Pyomo: modeling and solving mathematical programs in Python". Em: *Mathematical Programming Computation* 3.3, pp. 219–260 (Citado nas páginas 54, 58).
- Heldt, R., Silveira, C. S. e Luce, F. B. (2021). "Predicting customer value per product: From RFM to RFM/P". Em: *Journal of Business Research* 127, pp. 444–453. ISSN: 01482963. DOI: 10.1016/j.jbusres.2019.05.001 (Citado na página 11).
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press (Citado na página 18).
- Hughes, A. M. (2005). *Strategic Database Marketing: The Masterplan for Starting and Managing a Profitable, Customer-Based Marketing Program*. McGraw-Hill (Citado nas páginas 6, 9).
- Liu, F. et al. (2023). "Heuristics for Vehicle Routing Problem: A Survey and Recent Advances". Em: (Citado na página 16).
- MacGregor, J. e Ormerod, T. (jun. de 1996). "Human performance on the traveling salesman problem". Em: *Perception & psychophysics* 58, pp. 527–39. DOI: 10.3758/BF03213088 (Citado na página 70).
- Maimon, O. e Rokach, L., eds. (2010). *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*. Boston, MA: Springer US. ISBN: 978-0-387-09822-7 978-0-387-09823-4. DOI: 10.1007/978-0-387-09823-4 (Citado na página 13).

- Marinakis, Y. (2009). “Metaheuristic algorithms for the vehicle routing problem”. Em: *Metaheuristic Algorithms for the Vehicle Routing Problem*. Ed. por Floudas, C. A. e Pardalos, P. M. Boston, MA: Springer US, pp. 2055–2061. ISBN: 978-0-387-74759-0. DOI: 10.1007/978-0-387-74759-0_366 (Citado na página 16).
- McCarty, J. A. e Hastak, M. (2007). “Segmentation approaches in data-mining: A comparison of RFM, CHAID, and logistic regression”. Em: *Journal of Business Research* 60.6, pp. 656–662. ISSN: 01482963. DOI: 10.1016/j.jbusres.2006.06.015 (Citado nas páginas 8, 10).
- Miglautsch, J. R. (2000). “Thoughts on RFM scoring”. Em: *Journal of Database Marketing & Customer Strategy Management* 8.1, pp. 67–72. ISSN: 1741-2447. DOI: 10.1057/palgrave.jdm.3240019 (Citado nas páginas 8, 9).
- Nors (2024). *Marca Nors: identidade e áreas de negócio*. <https://www.nors.com/pt-pt/marca-nors/>. Website institucional. (Citado na página 1).
- (2026). *Nors Equipamentos Agrícolas: Quem Somos*. <https://equipamentos-agricolas-sp.nors.com/br/quem-somos/>. Website institucional. (Citado na página 2).
- OpenStreetMap Foundation (2026a). *Nominatim*. URL: <https://nominatim.openstreetmap.org> (Citado na página 4).
- (2026b). *OpenStreetMap*. URL: <https://www.openstreetmap.org> (Citado nas páginas 4, 49).
- Osman, I. H. e Kelly, J. P. (1996). “Meta-Heuristics: An Overview”. Em: *Meta-Heuristics*. Ed. por Osman, I. H. e Kelly, J. P. Boston, MA: Springer US, pp. 1–21. ISBN: 978-1-4612-8587-8 978-1-4613-1361-8. DOI: 10.1007/978-1-4613-1361-8_1 (Citado nas páginas 18, 21).
- Patil, V. P. e Pawar, D. D. (2015). “The Optimal Crossover or Mutation Rates in Genetic Algorithm: A Review”. Em: *International Journal of Applied Engineering and Technology* 5.3, pp. 38–41 (Citado nas páginas 61, 64, 67).
- Patron, M. (2004). “Case Study: Applying RFM segmentation to the SilverMinds catalogue”. Em: *Interactive Marketing* 5.3, pp. 269–275. ISSN: 1463-5178, 1478-0844. DOI: 10.1057/palgrave.im.4340243 (Citado nas páginas 7, 10).
- Raff, S. (1983). “Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of the art”. Em: *Computers & Operations Research* 10.2. Routing and Scheduling of Vehicles and Crews. The State of the Art, pp. 63–211. ISSN: 0305-0548. DOI: [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(83\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0305-0548(83)90030-8) (Citado na página 18).
- Rahman, M. A. e Parvez, H. (2021). “Repetitive Nearest Neighbor Based Simulated Annealing Search Optimization Algorithm for Traveling Salesman Problem”. Em: *OALib* 08.6, pp. 1–17. ISSN: 2333-9721, 2333-9705 (Citado na página 14).

- Rousseeuw, P. J. (1987). "Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis". Em: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 20, pp. 53–65. ISSN: 0377-0427. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(87\)90125-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7) (Citado na página 34).
- Rungruang, C., Riyapan, P., Intarasit, A., Chuarkham, K. e Muangprathub, J. (2024). "RFM model customer segmentation based on hierarchical approach using FCA". Em: *Expert Systems with Applications* 237, p. 121449. ISSN: 09574174. DOI: 10.1016/j.eswa.2023.121449 (Citado na página 6).
- Sarvari, P. A., Ustundag, A. e Takci, H. (2016). "Performance evaluation of different customer segmentation approaches based on RFM and demographics analysis". Em: *Kybernetes* 45.7, pp. 1129–1157. ISSN: 0368-492X. DOI: 10.1108/K-07-2015-0180 (Citado na página 9).
- Sawik, T. (2016). "A note on the Miller-Tucker-Zemlin model for the asymmetric traveling salesman problem". Em: *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* 64.3, pp. 517–520. ISSN: 2300-1917. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0057 (Citado na página 53).
- Shevlyakov, G. et al. (2013). "Robust versions of the Tukey boxplot with their application to detection of outliers". Em: *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. ICASSP 2013 - 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Vancouver, BC, Canada: IEEE, pp. 6506–6510. ISBN: 978-1-4799-0356-6. DOI: 10.1109/ICASSP.2013.6638919 (Citado na página 28).
- Stone, B. (1988). *Successful Direct Marketing Methods*. Lincolnwood, IL: NTC Business Books (Citado na página 9).
- Toth, P. e Vigo, D., eds. (2002). *The vehicle routing problem*. SIAM monographs on discrete mathematics and applications. Philadelphia, Pa: Society for Industrial e Applied Mathematics. 367 pp. ISBN: 978-0-89871-579-8 978-0-89871-498-2 (Citado nas páginas 13, 14, 16, 18, 19, 21, 64).
- Tsai, C.-Y. e Chiu, C.-C. (2004). "A purchase-based market segmentation methodology". Em: *Expert Systems with Applications* 27.2, pp. 265–276. ISSN: 09574174. DOI: 10.1016/j.eswa.2004.02.005 (Citado na página 9).
- Wei, J.-T., Lin, S.-Y. e Wu, H.-H. (2010). "A review of the application of RFM model". Em: *African Journal of Business Management* 4, pp. 4199–4206 (Citado nas páginas 7, 8, 10, 11).
- Wong, E. e Wei, Y. (2018). "Customer online shopping experience data analytics: Integrated customer segmentation and customised services prediction model". Em: *International Journal of Retail & Distribution Management* 46.4, pp. 406–420. ISSN: 0959-0552. DOI: 10.1108/IJRDM-06-2017-0130 (Citado na página 9).

Wu, J. et al. (2021). “User Value Identification Based on Improved RFM Model and *K* - Means++ Algorithm for Complex Data Analysis”. Em: *Wireless Communications and Mobile Computing* 2021.1. Ed. por Zhang, Y., p. 9982484. ISSN: 1530-8669, 1530-8677. DOI: 10 . 1155 / 2021 / 9982484 (Citado na página 7).

Zong, Y. e Xing, H. (2021). “Customer stratification theory and value evaluation - analysis based on improved RFM model”. Em: *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 40.3, pp. 4155–4167. ISSN: 10641246, 18758967. DOI: 10 . 3233 / JIFS–200737 (Citado na página 7).