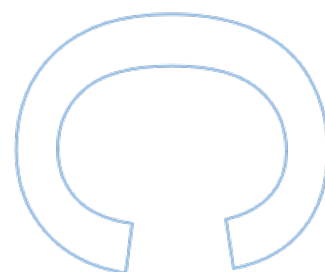
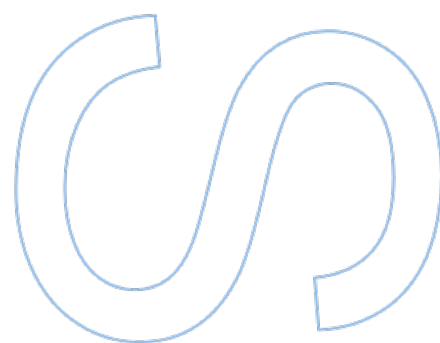
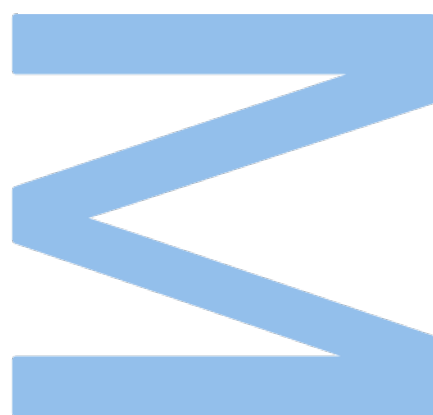


O papel do *feedback* na capacidade de comunicar por escrito a resolução de problemas numa turma do 8.º ano

Rodrigo Miguel Barros Neves Moutinho
Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2026



O papel do *feedback* na capacidade de comunicar por escrito a resolução de problemas numa turma do 8.º ano

Rodrigo Miguel Barros Neves Moutinho

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2026

Orientadora

Letícia Gabriela Baptista Martins, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Em memória do meu pai.

Agradecimentos

A concretização deste trabalho representa o culminar de um percurso exigente, marcado por desafios, aprendizagens e crescimento pessoal e profissional. Ao longo desta caminhada, tive a felicidade de contar com o apoio, a orientação e a amizade de várias pessoas, às quais expresso a minha gratidão.

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe, pelo apoio incondicional, pela confiança constante e por nunca ter deixado de acreditar em mim, mesmo nos momentos mais desafiantes. À minha irmã e ao meu cunhado, pelo carinho, incentivo e presença ao longo deste percurso, o meu profundo agradecimento.

Uma palavra muito especial aos meus colegas do Mestrado em Ensino da Matemática. Mais do que companheiros de curso, foram verdadeiros parceiros nesta jornada. As horas de trabalho, as partilhas de experiências, os momentos de entreajuda, os desabafos e as conquistas vividas em conjunto tornaram esta etapa muito mais enriquecedora e memorável. Levarei comigo as amizades construídas e as aprendizagens que resultaram desta convivência.

À Professora Doutora Letícia Martins, expresso a minha mais profunda gratidão pela orientação, pela disponibilidade, pelos conselhos e pelos valiosos *feedbacks* fornecidos ao longo das diferentes etapas deste trabalho. O seu acompanhamento, a exigência e a confiança transmitida foram fundamentais para o desenvolvimento desta investigação e para o meu crescimento enquanto futuro professor.

À orientadora cooperante, agradeço a forma generosa como me acolheu durante a Prática de Ensino Supervisionada. Obrigado por todos os ensinamentos partilhados, pela disponibilidade, pela confiança depositada no meu trabalho e pela oportunidade de desenvolver a intervenção pedagógica numa das suas turmas.

À minha colega de estágio, Margarida, agradeço o companheirismo, a entreajuda e o apoio constante ao longo deste percurso. As partilhas, as reflexões conjuntas, os conselhos e os momentos de incentivo mútuo foram essenciais para tornar esta experiência mais leve, enriquecedora e gratificante.

Por fim, deixo uma palavra de agradecimento a todos os alunos que participaram neste estudo. A sua colaboração, empenho e disponibilidade foram indispensáveis para a concretização desta investigação e contribuíram significativamente para as aprendizagens que dela resultaram.

A todos, o meu mais sincero obrigado.

Resumo

A resolução de problemas ocupa um lugar central no ensino da Matemática, constituindo um contexto privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio matemático, da comunicação e da capacidade de mobilizar conhecimentos em situações desafiantes. Neste âmbito, a comunicação matemática escrita assume particular relevância, uma vez que permite aos alunos organizar ideias, explicitar estratégias, justificar procedimentos e comunicar conclusões. Nesse sentido, o *feedback* escrito surge como instrumento de avaliação formativa com potencial para apoiar a reflexão dos alunos sobre as suas produções e promover a sua melhoria.

Desenvolvido no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada com uma turma do 8.º ano de escolaridade, este relatório de estágio apresenta uma investigação de natureza qualitativa, enquadrada no paradigma interpretativo, que analisa o papel do *feedback* na capacidade de comunicar por escrito a resolução de problemas. A intervenção pedagógica estruturou-se em torno de três problemas matemáticos, implementados através de um dispositivo didático em duas fases: uma resolução inicial e uma reformulação posterior, mediada pela entrega de *feedbacks* escritos pelo professor. Assumindo o design de um ensaio para um estudo de caso, a investigação foi orientada pelas seguintes questões: (i) Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas? (ii) Qual o contributo do *feedback* escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas? e (iii) Como os alunos percecionam o *feedback* escrito recebido? A recolha de dados baseou-se na análise das produções escritas dos alunos, das notas de campo, das gravações de áudio, dos questionários e das entrevistas semiestruturadas.

Os resultados obtidos sugerem que o *feedback* escrito pode constituir uma estratégia relevante para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita em contextos de resolução de problemas, particularmente quando integrado em práticas que valorizam a reformulação, a reflexão e a discussão das produções matemáticas dos alunos.

Palavras-chave: resolução de problemas, *feedback* escrito, comunicação matemática escrita, avaliação formativa.

Abstract

Problem-solving holds a central place in mathematics education, constituting a privileged context for the development of mathematical reasoning, communication, and the ability to mobilize knowledge in challenging situations. In this context, written mathematical communication assumes particular relevance, since it allows students to organize ideas, explain strategies, justify procedures, and communicate conclusions. In this sense, written feedback emerges as a formative assessment tool with the potential to support students' reflection on their productions and promote its improvement.

Developed within the scope of Supervised Teaching Practice with an 8th-grade class, this internship report presents a qualitative investigation, framed within the interpretative paradigm, which analyzes the role of feedback in the ability to communicate problem-solving in writing. The pedagogical intervention was structured around three mathematical problems, implemented through a two-phase didactic approach: an initial resolution and a subsequent reformulation, mediated by the provision of written feedback from the teacher. Adopting a preliminary case study design, the research was guided by the following questions: (i) How do students communicate in writing when solving problems? (ii) What is the contribution of written feedback to students' development in their ability to justify problem-solving in writing? and (iii) How do students perceive the written feedback they receive? Data collection was based on the analysis of students' written work, field notes, audio recordings, questionnaires, and semi-structured interviews.

The results suggest that written feedback can be a relevant strategy for developing written mathematical communication in problem-solving contexts, particularly when integrated into practices that value the reformulation, reflection, and discussion of students' mathematical work.

Keywords: problem-solving, written feedback, written mathematical communication, formative assessment.

Índice

Lista de Tabelas	vii
Lista de Gráficos	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviaturas	xi
1. Introdução	1
2. Enquadramento teórico	4
2.1. Problemas e resolução de problemas	4
2.2. Comunicação matemática escrita	11
2.3. <i>Feedback</i> escrito	17
3. Intervenção pedagógica	26
3.1. Caracterização do contexto escolar e da turma	26
3.2. Descrição da intervenção pedagógica	29
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados	38
4.1. Opções metodológicas	38
4.2. Instrumentos de recolha de dados	41
5. Análise e discussão dos resultados	47
5.1. Problema 1	47
5.1.1. Miguel	48
5.1.2. Carla	53
5.1.3. Joana	56
5.1.4. Rita	60
5.1.5. Marta	64
5.1.6. Síntese final da análise do Problema 1	66
5.2. Problema 2	68
5.2.1. Carla	70
5.2.2. Margarida	74
5.2.3. Rita	77

5.2.4.	Marta	79
5.2.5.	Síntese final da análise do Problema 2.....	82
5.3.	Problema 3.....	84
5.3.1.	Carla.....	86
5.3.2.	Margarida	88
5.3.3.	Joana	92
5.3.4.	Rita.....	94
5.3.5.	Síntese final da análise do Problema 3.....	96
5.4.	Perceções dos alunos relativamente ao <i>feedback</i>	99
6.	Conclusão e considerações finais.....	107
6.1.	Q1 – Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas?	107
6.2.	Q2 – Qual o contributo do <i>feedback</i> escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas? 109	
6.3.	Q3 – Como os alunos percecionam o <i>feedback</i> escrito recebido?.....	113
6.4.	Os desafios da intervenção pedagógica.....	115
6.5.	O papel do trabalho em duas fases	118
6.6.	Limitações do estudo	119
6.7.	Sugestões para investigações futuras	120
	Referências Bibliográficas	122
	Anexos.....	131
	Anexo 1 – Consentimento para os encarregados de educação e assentimento para os alunos.....	131
	Anexo 2 – Carta de consentimento informado para a direção da escola	133
	Anexo 3 – Problema 1	134
	Anexo 4 – Proposta de resolução do Problema 1	135
	Anexo 5 – Problema 2	138
	Anexo 6 – Proposta de resolução do Problema 2	139

Anexo 7 – Problema 3	141
Anexo 8 – Proposta de resolução do Problema 3	142
Anexo 9 – Questionário 1	145
Anexo 10 – Questionário 2	148
Anexo 11 – Questionário 3	149
Anexo 12 – Guião da entrevista semiestruturada	150

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Resumo da intervenção pedagógica	31
Tabela 2 - Relação entre os instrumentos de recolha de dados e as questões de investigação.....	41
Tabela 3 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do <i>feedback</i> (2) para o Problema 1	67
Tabela 4 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do <i>feedback</i> (2) para o Problema 2	83
Tabela 5 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do <i>feedback</i> (2) para o Problema 3	97
Tabela 6 - Resultados comparativos dos questionários às 6 primeiras questões (Problemas 1, 2 e 3)	99

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Níveis de classificação obtidos pela turma no 2.º período do ano letivo 2025/2026.....	29
---	----

Lista de Figuras

Figura 1 - Relação entre diferentes tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)	5
Figura 2 - Sistema de categorias utilizado para a análise dos dados relativamente à comunicação escrita (Martins, 2023, p. 104).....	14
Figura 3 - Estrutura da intervenção pedagógica	30
Figura 4 - Enunciado do primeiro problema	32
Figura 5 - Enunciado do segundo problema	34
Figura 6 - Enunciado do terceiro problema	36
Figura 7 - Resolução do Miguel da alínea a) do Problema 1	48
Figura 8 - Resolução do Miguel da alínea b) do Problema 1	50
Figura 9 - <i>Feedback</i> dado ao Miguel relativamente ao Problema 1	51
Figura 10 - Reformulação da resposta do Miguel à alínea a) do Problema 1	51
Figura 11 - Reformulação do Miguel da resposta à alínea b) do Problema 1	52
Figura 12 - Resolução da Carla da alínea a) do Problema 1	53
Figura 13 - Resolução da Carla da alínea b) do Problema 1	54
Figura 14 - <i>Feedback</i> dado à Carla relativamente ao Problema 1	54
Figura 15 - Reformulação da resposta da Carla à alínea a) do Problema 1	55
Figura 16 - Reformulação da resposta da Carla à alínea b) do Problema 1	56
Figura 17 - Resolução da Joana da alínea a) do Problema 1	57
Figura 18 - Resolução da Joana da alínea b) do Problema 1	57
Figura 19 - <i>Feedback</i> dado à Joana relativamente ao Problema 1	58
Figura 20 - Reformulação da resposta da Joana à alínea a) do Problema 1	59
Figura 21 - Reformulação da resposta da Joana à alínea b) do Problema 1	59
Figura 22 - Resolução da Rita da alínea b) do Problema 1	60
Figura 23 - <i>Feedback</i> dado à Rita relativamente ao Problema 1	61
Figura 24 - Reformulação da resposta da Rita à alínea a) do Problema 1	62
Figura 25 - Reformulação da resposta da Rita à alínea b) do Problema 1	63
Figura 26 - Resolução da Marta da alínea a) do Problema 1	64
Figura 27 - Resolução da Marta da alínea b) do Problema 1	65
Figura 28 - <i>Feedback</i> dado à Marta relativamente ao Problema 1	66
Figura 29 - Resolução da Carla do Problema 2	71
Figura 30 - <i>Feedback</i> dado à Carla relativamente ao Problema 2	72
Figura 31 - Reformulação da resposta da Carla ao Problema 2	73
Figura 32 - Resolução da Margarida do Problema 2	74

Figura 33 - <i>Feedback</i> dado à Margarida relativamente ao Problema 2	75
Figura 34 - Reformulação da resposta da Margarida ao Problema 2	76
Figura 35 - Resolução da Rita do Problema 2	77
Figura 36 - <i>Feedback</i> dado à Rita do Problema 2.....	78
Figura 37 - Reformulação da resposta da Rita ao Problema 2	79
Figura 38 - Resolução da Marta do Problema 2.....	80
Figura 39 - <i>Feedback</i> dado à Marta relativamente ao Problema 2	81
Figura 40 - Reformulação da resolução da Marta ao problema 2	81
Figura 41 - Resolução da Carla do Problema 3	86
Figura 42 - <i>Feedback</i> dado à Carla relativamente ao Problema 3.....	87
Figura 43 - Resolução da Margarida do Problema 3.....	88
Figura 44 - <i>Feedback</i> dado à Margarida relativamente ao Problema 3	90
Figura 45 - Reformulação da resposta da Margarida ao Problema 3	91
Figura 46 - Resolução da Joana do Problema 3	92
Figura 47 - <i>Feedback</i> dado à Joana relativamente ao Problema 3.....	93
Figura 48 - Resolução da Rita do Problema 3	94
Figura 49 - <i>Feedback</i> dado à Rita relativamente ao Problema 3	95
Figura 50 - Reformulação resposta da Rita ao Problema 3	96

Lista de Abreviaturas

FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
NCSM	NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

1. Introdução

A viagem visual entre uma fotografia de uma sala de aula no início do século XX e outra na atualidade evidencia como as estruturas escolares resistem à passagem do tempo. À revelia das profundas transformações que reconfiguraram a sociedade e a tecnologia, a organização espacial da sala de aula tende a replicar uma matriz visual quase intemporal. Embora existam exceções e novas abordagens à gestão do espaço, a verdade é que, a nível de localização física, o cenário mais frequente continua a coreografar os mesmos papéis, em que os alunos estão tendencialmente alinhados nas suas secretárias, o professor ocupa a habitual centralidade, e o quadro como principal foco de ação (Granda-Piñán et al., 2025; Tyack & Cuban, 1994).

Foi precisamente na busca por novas abordagens pedagógicas que, durante o percurso no Mestrado em Ensino da Matemática, o contacto com diferentes perspetivas didáticas – assentes na avaliação formativa, na expressividade, no movimento e em metodologias como o *process drama* aplicadas ao ensino – proporcionou uma importante libertação na forma de pensar o ensino. Esta experiência permitiu desconstruir a visão de uma matemática rígida, estática e algorítmica, demonstrando que esta ciência pode assumir formas dinâmicas, fluidas e interativas, distantes daquele formato tradicional expectável que a fotografia secular ilustra. Esta abordagem despertou uma sensibilidade acrescida para a importância crucial da avaliação formativa no quotidiano escolar, influenciando diretamente a forma de olhar para a prática letiva, para o erro e para a resolução de problemas. Se a Matemática é entendida como uma construção contínua, em constante movimento e ancorada na atividade do aluno, a resolução de problemas deixa de ser vista como a aplicação mecânica de regras e algoritmos para se assumir como um contexto privilegiado de descoberta, exploração e desenvolvimento do raciocínio matemático (Cai & Lester, 2010; Vale et al. 2015).

No decorrer da Prática de Ensino Supervisionada (PES) foi possível notar que, na resolução de problemas matemáticos, os alunos manifestavam uma marcada tendência para serem excessivamente sintéticos, procurando resolver as tarefas focando-se quase exclusivamente na obtenção de um resultado numérico imediato e isolado, omitindo os passos intermédios, as justificações e a respetiva interpretação da resposta. Esta tendência para uma comunicação fragmentada e focada no produto final, em detrimento do encadeamento lógico do raciocínio, encontra eco nas preocupações partilhadas por Vale (1993), que assinala a existência de uma assimetria acentuada entre o processo e o produto na resolução de problemas.

O *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017), reforça a importância da resolução de problemas no desenvolvimento de competências matemáticas, que dizem respeito aos “processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões” (p. 23). Na descrição destas competências, assume particular relevância a necessidade de o aluno saber argumentar, justificar e comunicar os seus percursos de pensamento. A nível internacional, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, 2020) considera que a comunicação matemática é uma parte essencial da aprendizagem. Para além da mera obtenção de respostas corretas, a escrita em matemática constitui um processo ativo de organização, explicitação e consolidação do próprio pensamento (Santos & Semana, 2015; Sfard, 2009). Contudo, dado que os alunos manifestam frequentemente dificuldades em expor de forma clara as suas justificações, torna-se imperativo que existam dispositivos pedagógicos que apoiem a transição de produções vagas e puramente sintéticas para textos matemáticos ricos e fundamentados (Santos & Semana, 2015). É nesta linha de pensamento que o *feedback* escrito assume a sua função central neste estudo, enquanto instrumento regulador e estruturante do processo de aprendizagem. Afastando-se de uma natureza meramente quantitativa ou classificativa – que Gipps (1999) aponta como tendo efeitos muito limitados no progresso do aluno –, o *feedback* atua como uma ferramenta de mediação, diálogo e orientação (Dias & Santos, 2008; Santos, 2008; Santos & Semana, 2015). De facto, como explicam Hattie e Timperley (2007), o *feedback* é um dos elementos que mais ajuda os alunos a aprender, desde que sirva para encurtar a distância entre o que eles já sabem fazer e o objetivo que devem atingir. Quando estão a resolver problemas e se deparam com dificuldades, as pistas e as perguntas feitas pelo professor são fundamentais para acompanhar o seu trabalho de perto (Black & Wiliam, 1998, 2009; Wiliam, 2007). Em vez de indicar a resposta final, este acompanhamento deve revestir-se de uma natureza descritiva e focado no trabalho desenvolvido, permitindo ao estudante compreender aspetos cruciais sobre a qualidade da sua resolução e os caminhos para a melhorar (Brookhart, 2008, 2017). Dessa forma, impulsiona-se o aluno a reentrar no problema, a aproveitar o erro de forma construtiva e a desenvolver dinâmicas autónomas de autorregulação e reformulação (Pólya, 2004; Sadler, 1989; Santos, 2002).

O presente estudo tem como objetivo compreender o papel do *feedback* na capacidade de comunicar por escrito a resolução de problemas numa turma do 8.º ano. Para

concretizar este objetivo, o trabalho foi guiado pelas seguintes questões de investigação:

- i) Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas?
- ii) Qual o contributo do *feedback* escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas?
- iii) Como os alunos percecionam o *feedback* escrito recebido?

De modo a facilitar a compreensão do estudo e da forma como este foi desenvolvido, o presente relatório de estágio encontra-se estruturado em seis capítulos.

No primeiro capítulo, Introdução, procede-se à contextualização do estudo e à apresentação das razões que sustentam a realização da investigação. São ainda explicitadas as questões de investigação que orientam o trabalho. Finalmente, apresenta-se a organização do relatório, de modo a proporcionar uma compreensão global da sua estrutura e dos conteúdos desenvolvidos em cada capítulo.

No segundo capítulo, Enquadramento teórico, sistematiza-se a revisão da literatura que sustenta cientificamente o trabalho, dividindo-se em três eixos fundamentais: problemas e a resolução de problemas, a comunicação matemática escrita e o *feedback* escrito.

No terceiro capítulo, Intervenção pedagógica, apresenta-se a caracterização do contexto e dos participantes do estudo, bem como a descrição do planeamento e da implementação das três tarefas matemáticas desenvolvidas.

No quarto capítulo, Métodos e procedimentos de recolha de dados, apresenta-se o enquadramento metodológico do estudo, fundamentado no paradigma interpretativo e concretizado através de um ensaio para um estudo de caso de natureza qualitativa. São igualmente descritos os instrumentos de recolha de dados adotados.

No quinto capítulo, Análise e discussão dos resultados, apresenta-se o núcleo empírico do estudo, no qual se analisam minuciosamente as produções iniciais dos alunos, o *feedback* fornecido, o seu impacto nas reformulações das produções e as perceções dos estudantes face às orientações recebidas.

No sexto capítulo, Conclusão e considerações finais, apresentam-se as conclusões do estudo em resposta direta às questões de investigação formuladas, as limitações encontradas, e sugestões para investigações futuras.

2. Enquadramento teórico

A fundamentação desta investigação assenta na revisão da literatura relevante para a problemática em estudo, que permitiu, numa primeira fase, enquadrar e orientar o desenvolvimento do estudo e, numa fase posterior, sustentar a análise e interpretação dos dados recolhidos, bem como as inferências deles decorrentes.

Neste capítulo, são apresentados os principais referenciais teóricos que enquadram esta investigação, que versa a resolução de problemas, a forma como os alunos a comunicam por escrito e o papel do *feedback* escrito nesse processo.

2.1. Problemas e resolução de problemas

A resolução de problemas matemáticos tem sido, ao longo do tempo, considerada um aspeto fundamental da Matemática, do ensino da Matemática e da aprendizagem da Matemática (Liljedahl et al., 2016). Embora a importância desta atividade remonte à Antiguidade, foi sobretudo a partir dos trabalhos de George Pólya, no século XX, que o seu papel educativo e o seu potencial formativo no contexto escolar se tornaram mais evidentes e sistematizados (Ponte, 2005). Consequentemente, a resolução de problemas passou a ocupar uma posição de destaque no ensino da Matemática, refletindo-se nos currículos de diversos países, que preconizam tanto o ensino da resolução de problemas como o ensino da Matemática através da resolução de problemas (Liljedahl et al., 2016). Não surpreendentemente, a presença da resolução de problemas continua de forma preponderante nos currículos atuais de matemática, desde o 1.º ciclo do ensino primário até ao ensino superior (Ponte, 2005).

Ainda que exista alguma unanimidade em alguns dos pilares que sustentam o conceito de problema, este apresenta alguma volatilidade quando se tomam em consideração os conhecimentos, as experiências e as estratégias que cada aluno consegue mobilizar. Kantowski (1977), considerou que um indivíduo está diante de um problema quando encontra uma situação que não consegue resolver utilizando os conhecimentos imediatamente disponíveis. Também distinguiu de forma clara um problema de um exercício, sublinhando que num problema o aluno não dispõe de um procedimento ou algoritmo que conduza com certeza à solução (Kantowski, 1981). Desta forma, um exercício ou questão passará a ser percecionado como um problema se o aluno não tiver presente uma estratégia para a sua resolução. Abrantes (1988) alertou para o risco de se restringir as diferenças apenas à forma do enunciado, em que se consideram

exercícios as tarefas que envolvem apenas números e operações e problemas aquelas que incluem um contexto concreto. De forma complementar, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) reforça esta perspetiva ao afirmar que um problema pode ser entendido como uma situação “em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel” (NCTM, 1991, p. 11). Reforçando a perspetiva de Kantowski (1977, 1981), Vale (1993) destacou que as tarefas que exigem esforços significativos para alguns alunos podem não exigir para outros, podendo ser resolvidas de forma rotineira, limitando-se a sua resolução à mobilização de conhecimentos imediatamente disponíveis. Desta forma, uma tarefa passa a ser percecionada como um problema quando o aluno não dispõe, à partida, de uma estratégia clara para a sua resolução (Vale, 1993).

Ponte (2005) apresenta uma análise das tarefas matemáticas que assenta em várias dimensões fundamentais, nas quais se destacam o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio baliza-se entre desafio reduzido e elevado. O grau da estrutura pode variar entre tarefas fechadas, em que aquilo que é fornecido e o que é pedido está claramente definido, e tarefas abertas, que agregam um grau significativo de indeterminação. Ao se relacionarem estas duas dimensões, resultam quatro quadrantes nos quais se localizam os diferentes tipos de tarefas matemáticas. Como se pode observar através da Figura 1, os problemas correspondem a tarefas fechadas com elevado grau de desafio.

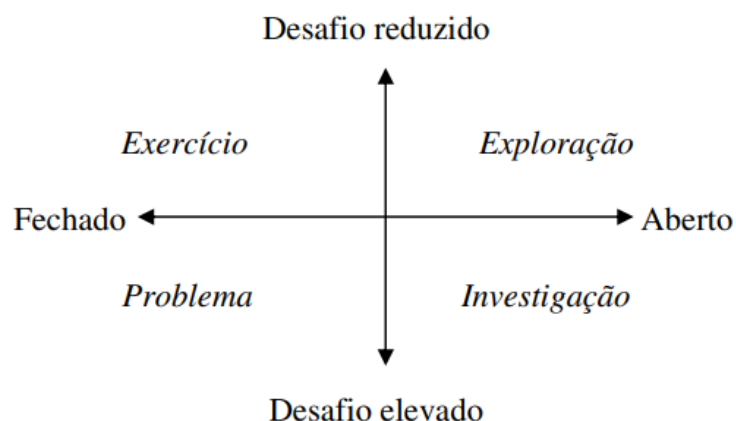


Figura 1 - Relação entre diferentes tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)

Para além destas dimensões, Ponte (2005) identifica ainda a duração (curta ou longa) e o contexto da tarefa como fatores relevantes. No que concerne ao contexto, segmentam-se as tarefas inseridas na realidade, na semirrealidade e na Matemática pura (Ponte, 2005). A investigação recente tem vindo a evidenciar que os diferentes contextos influenciam o modo como os alunos interpretam os problemas e selecionam estratégias de resolução (Kingwell, 2022; Knabbe et al., 2024; Ponte & Quaresma, 2012). Os problemas inseridos na realidade tendem a exigir processos adicionais de interpretação e modelação, uma vez que os alunos necessitam de identificar a informação relevante e traduzi-la para linguagem matemática (Knabbe et al., 2024). Em contrapartida, problemas em contexto de Matemática pura podem facilitar o reconhecimento imediato dos conceitos e procedimentos a mobilizar, reduzindo a carga interpretativa associada ao enunciado (Kingwell, 2022). A semirrealidade, frequentemente presente em manuais escolares, pode assumir um papel intermédio, embora nem sempre facilite a compreensão dos alunos. Em muitos casos, a presença de uma história, contexto ou situação do quotidiano não desempenha um papel funcional na resolução da tarefa, atuando apenas como enquadramento externo ao problema matemático (Ponte & Quaresma, 2012; Skovsmose, 2000). Esta característica pode conduzir a situações em que o contexto não contribui para a resolução, mas acrescenta complexidade linguística ao enunciado.

Existem diferentes tipologias de problemas, entre as quais se destaca a proposta de Pólya (2004), que organiza os problemas em cinco categorias: problema auxiliar, problema rotineiro, problema de determinação, problema de demonstração e problema prático. O problema auxiliar corresponde a uma tarefa intermédia que apoia a resolução de outro problema, funcionando como recurso estratégico no processo de resolução (Pólya, 2004; Schoenfeld, 1985). O problema rotineiro aproxima-se de um exercício, sendo resolvido pela aplicação direta de procedimentos previamente aprendidos, sem necessidade de planificação autónoma, e desempenha um papel importante na consolidação de conhecimentos e na fluência procedimental (Liljedahl et al., 2016, Pólya, 2004; Ponte, 2005). O problema de determinação envolve a identificação de incógnitas a partir dos dados fornecidos, enquanto o problema de demonstração exige a validação de uma proposição através de justificação matemática (Pólya, 2004). O problema prático relaciona-se com situações do mundo real, podendo envolver modelação e aproximações adequadas ao contexto (Pólya, 2004).

A relação entre contexto e natureza do problema mostra que contextos reais ou semirreais podem aumentar a complexidade interpretativa e conduzir a tarefas

percecionadas como não rotineiras, enquanto o contexto puramente matemático tende a favorecer o reconhecimento imediato de procedimentos (Kingwell, 2022; Knabbe et al., 2024; Schoenfeld, 1985). Assim, a diversidade de contextos e tipos de problemas contribui para uma aprendizagem mais abrangente e para o desenvolvimento de competências de resolução de problemas em diferentes situações (Liljedahl et al., 2016; Ponte & Quaresma, 2012). Esta diversidade de situações permite ao professor selecionar tarefas adequadas aos objetivos de aprendizagem e promover experiências matemáticas ricas e significativas.

Na perspetiva de Pólya (2004), a resolução de problemas é uma estratégia fundamental para desafiar intelectualmente os alunos, possibilitando o estímulo da curiosidade, o gosto pela descoberta e a compreensão da verdadeira natureza da atividade matemática. Segundo o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM, 1990), a atividade de resolução de problemas “consiste no processo de aplicação de conhecimentos, previamente adquiridos, a situações novas e não rotineiras” (p. 24). Tal definição alicerça a necessidade de o professor propor tarefas que representem desafios reais para os alunos. Ademais, não pode ser minorada a forma como contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático e, ulteriormente, na construção de uma relação positiva dos estudantes com a Matemática (Ponte, 2005).

As novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), atribuem à resolução de problemas o estatuto de capacidade matemática transversal e de atividade central da disciplina. Neste âmbito, pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos em diferentes contextos, formular e resolver problemas, selecionar e adaptar estratégias diversificadas, avaliar a adequação dos resultados obtidos e reconhecer a eficácia de diferentes processos de resolução. As *Aprendizagens Essenciais* evidenciam, ainda, uma valorização explícita da resolução de problemas, sendo afirmado que “a resolução de problemas é uma atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes” (Canavarro et al., 2021, p. 3). Desta forma, valoriza-se a compreensão das várias etapas inerentes à resolução de problemas, nomeadamente a interpretação da situação, a definição e execução de estratégias e a avaliação dos resultados, promovendo a autonomia, a perseverança, o pensamento crítico e a confiança dos alunos nas suas capacidades matemáticas (Canavarro et al., 2021).

A sua preponderância é reforçada no PASEO (Martins et al., 2017), que apresenta um conjunto de competências transversais que devem ser desenvolvidas ao longo do

percurso escolar, entre as quais se encontra o raciocínio e resolução de problemas. As competências na área de resolução de problemas visam “os processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões” (Martins et al., 2017, p. 23). A relevância da resolução de problemas ultrapassa a sua dimensão enquanto objetivo curricular, assumindo-se igualmente como um meio privilegiado para a construção de conhecimento matemático (Ponte, 2005). Neste sentido, English et al. (2008) mencionam que o progresso na investigação e nas práticas de ensino da resolução de problemas depende da clarificação das relações entre o desenvolvimento da compreensão dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento das competências de resolução de problemas. Segundo estes autores, uma compreensão mais aprofundada desta relação permitirá fundamentar de forma mais consistente o desenvolvimento curricular e as práticas de sala de aula, potenciando a resolução de problemas como contexto privilegiado para a aprendizagem e compreensão de conceitos matemáticos.

Esta perspetiva encontra eco na abordagem do ensino da Matemática através da resolução de problemas, na qual os problemas não são encarados apenas como instrumentos de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos, mas como contextos que promovem a construção de novas aprendizagens matemáticas (Ponte, 2007). Melo e Justulin (2019) reforçam que, ao assumir a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o problema deixa de ser um mero instrumento de aplicação para se converter no próprio ponto de partida para a construção de novos conceitos matemáticos. Ao recorrerem à metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, as autoras acrescentam que a avaliação deve ocorrer de forma intrínseca e contínua durante a resolução, permitindo ao professor acompanhar o raciocínio em tempo real e reconfigurar o erro como uma oportunidade pedagógica de discussão coletiva. Contudo, nem todas as tarefas possuem o mesmo potencial formativo. Vale et al. (2015), apoiando-se em Cai e Lester (2010), sublinham a importância de selecionar problemas matematicamente ricos, capazes de desafiar os alunos intelectualmente, estimular a exploração de ideias relevantes e promover formas de pensamento de ordem superior. Entre as características mais valorizadas, encontram-se a incorporação de ideias matemáticas significativas, a promoção do desenvolvimento conceptual, a possibilidade de utilização de múltiplas estratégias de resolução e a criação de oportunidades para discussão, argumentação e tomada de decisão (Cai & Lester, 2010). Nesta ótica, a aprendizagem emerge da necessidade de os alunos mobilizarem conhecimentos

prévios, estabelecerem conexões entre conceitos, reformularem estratégias e justificarem as suas ideias perante os colegas. A resolução de problemas constitui, assim, uma alternativa a uma aprendizagem baseada em factos isolados, favorecendo a construção de significados e o estabelecimento de relações entre diferentes conceitos matemáticos (Vale et al., 2015).

Apesar do reconhecimento generalizado da importância da resolução de problemas nos currículos de Matemática, a sua implementação efetiva continua a constituir um desafio. Ferreira et al. (2023) salientam que a resolução de problemas, quando desenvolvida num ambiente favorável à exploração e à reflexão, permite aos alunos formular conjecturas, estabelecer relações entre conceitos, generalizar resultados e desenvolver o raciocínio matemático. Neste contexto, os alunos aprendem matemática através da própria atividade matemática. Todavia, o impacto destas perspetivas nas práticas de sala de aula continua a revelar-se limitado, mesmo perante os avanços registados na investigação, situação já assinalada por Vale et al. (2015), que alertam para a dificuldade em transformar os resultados da investigação em mudanças consistentes nas práticas pedagógicas.

Menina (2010) refere que, não raras vezes, quando os alunos não sabem como iniciar o processo de resolução de um problema, leva a que estes adotem uma postura passiva na expectativa de que o professor indique o procedimento correto. Esta situação traduz conceções mais tradicionais sobre os papéis do professor e aluno no processo de ensino-aprendizagem, em que o professor é visto como o detentor das respostas, enquanto o aluno espera que o professor as partilhe. A autora sublinha, ainda, a importância de uma mudança de paradigma, em que o aluno assume um papel ativo, sendo encarado com naturalidade o facto de poder não saber imediatamente o que fazer. Apenas dessa forma, a resolução de um problema não se configurará como uma situação de frustração, mas sim, de superação, exploração de estratégias, formulação de hipóteses e tomada de decisões. Esta sucessão de etapas apenas manterá o seu potencial formativo se o professor assumir uma função de mediador, orientando o processo de resolução de problemas através de questionamento orientado e de um apoio adequado, evitando a apresentação imediata de soluções (Menina 2010). No mesmo sentido desta viragem paradigmática proposta por Menina (2010), também Melo e Justulin (2019) sublinham que o aluno deve ser o real protagonista e construtor do seu conhecimento. Enquadrando a ação docente nesta metodologia, a intervenção do professor deve abster-se de validar imediatamente as produções ou dar respostas prontas, competindo-lhe, em vez disso, orquestrar e incentivar a discussão das

diferentes estratégias propostas pelos estudantes, promovendo um ambiente de construção partilhada na sala de aula (Melo & Justulin, 2019).

A compreensão da resolução de problemas como um processo constituído por diferentes etapas pressupõe a valorização dos vários momentos envolvidos na construção de uma solução matemática. Neste sentido, o modelo de Pólya (2004) assume particular relevância ao defender que a resolução de problemas envolve quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e, por fim, analisar a solução.

Embora este modelo apresente uma organização faseada do processo, estas fases não se apresentam como uma sequência obrigatória e rígida, mas como orientações que auxiliam a organização do pensamento e estruturação do processo de resolução (Pólya, 2004).

Partindo desta perspetiva, Vale (1993) identificou como aspetos fulcrais da resolução de problemas o processo, entendido como o conjunto de comportamentos, estratégias e atividades cognitivas mobilizados na procura de uma resposta, e o produto, correspondente à solução obtida. Esta distinção enaltece o processo, permitindo compreender que a resolução de problemas não se resume ao resultado, valorizando-se o raciocínio e as estratégias apresentadas pelo aluno. Daqui se extrai que tanto o processo como o produto constituem componentes essenciais de uma experiência de resolução de problemas, podendo esta ser entendida como a articulação entre a experiência, os conhecimentos e a intuição de quem resolve, mobilizados para alcançar uma solução numa situação para a qual não existe um procedimento previamente conhecido. Assim, segundo Vale (1993), resolver um problema é um processo que envolve várias etapas, nomeadamente compreender a situação apresentada, selecionar ou recolher a informação necessária, escolher e aplicar uma ou mais estratégias de resolução, apresentar uma resposta e avaliar a adequação dessa resposta.

Na maioria das atividades de resolução de problemas intervêm diversos processos mentais, cuja eficácia depende da capacidade dos alunos para mobilizar os seus conhecimentos matemáticos, regular as suas atitudes e conceções, e utilizar de forma adequada as ideias e predisposições que já possuem (Vale, 1993). Assim, reforça-se a ideia de que a resolução de problemas não se esgota numa sequência de etapas, envolvendo também dimensões cognitivas e metacognitivas que influenciam todo o processo (Vale, 1993).

Deste modo, enquanto Vale (1993) enfatiza a distinção entre processo e produto e a centralidade das dimensões cognitivas e metacognitivas envolvidas na resolução de problemas, Pólya (2004) fornece uma estrutura heurística que organiza esse processo em fases operacionais. Em conjunto, estas perspetivas são complementares, permitindo compreender a resolução de problemas tanto na sua dimensão conceptual como na sua dimensão metodológica. No entanto, o desenvolvimento deste processo mental e a mobilização de estratégias heurísticas esbarram frequentemente com os critérios de decisão pragmáticos dos alunos. A este propósito, Rocha et al. (2024) observaram que, ao resolverem problemas, as decisões dos estudantes são fortemente influenciadas por critérios de simplicidade e rapidez. Os estudantes demonstram uma tendência acentuada para preterir ou ignorar os conteúdos matemáticos mais recentes e complexos introduzidos nas aulas, optando por regressar a ferramentas e algoritmos antigos, mais familiares e considerados mais seguros (Rocha et al., 2024).

A resolução de problemas assume, assim, um papel determinante na formação de alunos munidos de pensamento crítico, autonomia e persistência ao enfrentar situações complexas. As competências definidas no PASEO (Martins et al., 2017) articulam-se com a perspetiva de Menina (2010), segundo a qual a resolução de problemas implica aceitar a incerteza do processo, lidar com a ausência de procedimentos imediatos e construir estratégias próprias, assentes numa participação ativa e numa reflexão contínua por parte do aluno.

2.2. Comunicação matemática escrita

A comunicação matemática sustenta uma grande parte da aprendizagem matemática e acopla a partilha e a explicação de ideias, oralmente e por escrito (NCTM, 2000). De acordo com as *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), a comunicação matemática constitui uma das capacidades matemáticas transversais, assumindo um papel central no desenvolvimento da compreensão e da expressão do pensamento matemático dos alunos. Neste sentido, este documento curricular destaca que

Desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente, de modo a partilhar e discutir ideias matemáticas, formulando e respondendo a questões diferenciadas, ouvindo os outros e fazendo-se ouvir, negociando a construção de ideias coletivas em colaboração. Comunicar de forma clara aos outros requer a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos, o que

potencia a compreensão matemática e proporciona oportunidade para o uso progressivo de linguagem matemática como estratégia de comunicar com maior precisão. (p. 3)

Embora o NCTM (2000) tenha estabelecido a comunicação como um dos processos estruturantes da aprendizagem matemática, a investigação posterior tem vindo a aprofundar a especificidade da modalidade escrita, evidenciando o seu potencial formativo e regulador (Faria & Rodrigues, 2020; Santos & Semana, 2015).

A escrita constitui uma ferramenta que auxilia os alunos a organizar o pensamento, a explicitar raciocínios e a desenvolver ideias complexas (Chapin et al., 2003). A comunicação matemática escrita não deve ser entendida apenas como um instrumento de expressão de um pensamento previamente elaborado, mas como um processo através do qual os alunos produzem, reorganizam e constroem conhecimento matemático, uma vez que, ao comunicar por escrito, são levados a justificar procedimentos, explicitar relações e estruturar argumentos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e de um raciocínio mais fundamentado (Albert, 2000). Todavia, a comunicação matemática não é um processo simples nem inequívoco (Clarke et al., 1993). Diversos estudos indicam que os alunos tendem a produzir textos vagos ou pouco claros (Stonewater, 2002) e necessitam de experiências prolongadas e intencionalmente estruturadas para desenvolver uma escrita matemática mais elaborada (Davidson & Pearce, 1990). Acresce que Porter e Masingila (2000) questionam se os ganhos observados resultam especificamente da escrita ou do tempo adicional de reflexão que esta exige. Nesse sentido, Pugalee (2001, 2004) aponta para a necessidade de estudos aprofundados que analisem detalhadamente a produção escrita dos alunos, de modo a compreender o seu papel no desenvolvimento de raciocínios mais complexos e estruturados.

A escrita, enquanto forma particular de linguagem, desempenha um papel determinante na transformação da linguagem social em linguagem individual, permitindo ao aluno reorganizar e estabilizar o pensamento (Faria & Rodrigues, 2020; Santos & Semana, 2015). Esta perspetiva converge com a abordagem de Sfard (2009), segundo a qual aprender matemática implica transformar o próprio discurso, adquirindo progressivamente as propriedades do discurso matemático institucionalizado. A escrita assume, assim, uma função epistémica, pois não se limita a registar ideias previamente formadas, mas participa ativamente na sua elaboração (Sfard, 2009).

Santos e Semana (2015) aprofundam esta compreensão ao conceber a comunicação matemática escrita como uma prática complexa que integra três eixos fundamentais: interpretação, justificação e representação. A interpretação da tarefa é considerada o momento inicial do processo comunicativo. As autoras sustentam que comunicar matematicamente pressupõe compreender o propósito da tarefa, identificar o que é matematicamente relevante e atribuir significado às condições apresentadas. A qualidade da comunicação escrita depende, assim, da qualidade da leitura e interpretação da situação problemática (Santos & Semana, 2015).

A justificação surge como um pilar estruturante da escrita matemática, assumindo um papel fundamental na construção e na comunicação do raciocínio (Ponte et al., 2007; Santos e Semana, 2015). Não obstante a sua relevância, a investigação revela que os alunos tendem a privilegiar a obtenção de respostas corretas em detrimento da explicitação do processo que lhes dá origem, apresentando, por conseguinte, explicações vagas ou pouco desenvolvidas (Santos & Semana, 2015). Esta tendência para a simplificação é corroborada pelo estudo desenvolvido por Rott (2021), que evidencia que muitos estudantes manifestam dificuldades severas na formulação de justificações matemáticas elaboradas, resultando em argumentações rudimentares ou mesmo inexistentes.

A representação constitui o terceiro eixo estruturante. Santos e Semana (2015) reconhecem que a compreensão matemática exige a coordenação entre diferentes registos de representação semiótica e que a comunicação escrita frequentemente envolve a articulação entre linguagem natural, linguagem simbólica, esquemas e representações gráficas.

Martins (2023) conceptualiza a comunicação matemática escrita como uma dimensão central da aprendizagem, entendendo-a como um processo que envolve a interpretação, a explicitação e a organização do pensamento matemático. Para a autora, a comunicação escrita ultrapassa o simples registo de procedimentos ou resultados, funcionando como um meio através do qual os alunos tornam explícitas as suas ideias, estruturam o raciocínio e atribuem significado às tarefas propostas. Nesse sentido, Martins (2023) apresenta um modelo de análise das respostas escritas, apresentado na Figura 2, estruturado em quatro categorias principais: correção, completude, representações e organização. Este modelo permite analisar a comunicação escrita de forma integrada, considerando simultaneamente o conteúdo matemático e a forma como este é comunicado.

Comunicação escrita		
Subcategorias		Descrição
Correção	Correta	- <i>Quando a solução apresentada é considerada correta</i>
	Parcialmente correta	Concluída <i>Quando a solução apresentada não está correta, mas a resolução tem partes significativas corretas</i>
		Não concluída <i>Quando a resolução não está concluída, mas o que está resolvido tem uma parte significativa correta</i>
	Incorreta	- <i>Quando a solução apresentada é considerada incorreta e não tem partes significativas corretas ao longo da resolução</i>
Completeza	Nível de justificação	Alto <i>Apresenta todas as justificações necessárias</i>
		Médio <i>Apresenta quase todas as justificações necessárias, mas não as suficientes</i>
		Baixo <i>Apresenta poucas justificações</i>
		Nulo <i>Não apresenta qualquer justificação para a resposta apresentada, ou apresenta justificações vagas ou pouco claras</i>
	Tipo de justificação	Relacional <i>Justifica a validade de uma etapa, dando espaço a que haja um entendimento relacional</i>
		Procedimental <i>Justifica o que é feito em determinada etapa</i>
		Experimentação <i>Justifica com base na experimentação</i>
		Regras <i>Justifica etapas exclusivamente com base em regras, algoritmos e/ou definições</i>
	Resposta final	Vaga <i>Justifica de forma pouco clara ou pouco informativa</i>
		Explícita <i>Apresenta uma resposta explícita para o problema</i>
		Implícita <i>Não apresenta uma resposta explícita para o problema, mas é possível subentender qual é a resposta</i>
		Ausente <i>Não apresenta uma resposta explícita nem implícita, ou apresenta mais do que uma resposta</i>
Representações	Linguagem verbal <i>Linguagem verbal do dia a dia com possível terminologia matemática</i>	
	Representação icónica <i>Recurso a esquema ou desenhos</i>	
	Representação simbólica <i>Recurso a símbolos algébricos</i>	
Organização	Organizada <i>A resolução está bem organizada, tendo um fio condutor que permite o leitor seguir a resolução do princípio ao fim sem problemas</i>	
	Parcialmente organizada <i>A resolução não está totalmente organizada, havendo partes que exigem ao leitor fazer ligações entre as diferentes etapas para perceber quais devem ser lidas primeiro</i>	
	Desorganizada <i>A resolução está desorganizada, não permitindo ao leitor seguir devidamente a resolução apresentada</i>	

Figura 2 - Sistema de categorias utilizado para a análise dos dados relativamente à comunicação escrita (Martins, 2023, p. 104)

O modelo apresentado por Martins (2023) permite ao professor examinar as respostas dos alunos de forma detalhada, recorrendo a critérios específicos que ajudam a caracterizar a qualidade das produções escritas.

A primeira categoria é a correção, que avalia a validade matemática das resoluções e das respostas apresentadas pelos alunos. Segundo a autora, as respostas podem ser classificadas como corretas, parcialmente corretas ou incorretas. Uma resposta é considerada correta quando tanto o processo como o resultado estão matematicamente corretos. As respostas parcialmente corretas podem assumir duas formas: parcialmente

corretas concluídas, quando a resolução é finalizada, mas contém alguns erros ou imprecisões, e parcialmente corretas não concluídas, quando o aluno interrompe o processo antes de chegar ao resultado, embora o trabalho realizado até esse momento seja matematicamente válido. As respostas são classificadas como incorretas quando não apresentam elementos matematicamente válidos ou quando os erros comprometem todo o raciocínio desenvolvido. Numa perspetiva formativa, o erro deixa de ser visto apenas como uma falha e passa a constituir uma fonte de informação sobre o pensamento do aluno, permitindo identificar dificuldades e orientar intervenções pedagógicas adequadas (Martins, 2023).

A segunda categoria, designada por completude, procura avaliar o nível de explicitação e fundamentação do raciocínio apresentado pelo aluno (Martins, 2023). Para tal, esta dimensão é subdividida em três componentes: o nível de justificação, o tipo de justificação e a natureza da resposta final. O nível de justificação refere-se à quantidade e profundidade das explicações fornecidas, podendo ser classificado como alto, médio, baixo ou nulo. Quanto ao tipo de justificação, a autora distingue justificações relacionais, que evidenciam relações entre etapas da resolução; procedimentais, centradas na descrição dos passos realizados; justificações baseadas na experimentação; justificações assentes apenas na aplicação de regras; e justificações vagas ou pouco esclarecedoras (Martins, 2023; Martinho & Rocha, 2017, 2018). Como referem Santos e Semana (2015), as justificações apresentadas pelos alunos constituem uma importante fonte de informação sobre a sua compreensão matemática. Justificar implica apresentar razões matemáticas que sustentem uma determinada afirmação, tornando explícitas as relações entre conceitos, propriedades e resultados (Ponte et al., 2007). Esta categoria inclui ainda a análise da resposta final, que pode ser explícita, quando é claramente apresentada; implícita, quando pode ser inferida a partir da resolução; ou ausente, quando não é apresentada de forma clara ou surgem respostas contraditórias (Martins, 2023).

A terceira categoria corresponde às representações, consideradas por Martins (2023) um elemento fundamental da comunicação matemática escrita. Esta dimensão analisa os diferentes tipos de linguagem utilizados pelos alunos nas suas respostas: linguagem verbal, através de texto escrito; representações icónicas, como desenhos, esquemas, tabelas ou diagramas; e representações simbólicas, que incluem números, expressões e notação matemática (Martins, 2023). A investigação tem mostrado que a compreensão matemática e a resolução de problemas dependem da capacidade de utilizar e relacionar diferentes formas de representação (Duval, 2006). Segundo Duval (2006), a

compreensão de um conceito matemático exige a capacidade de o reconhecer e representar através de diferentes registos. Por isso, segundo Martins (2023), a análise das representações permite compreender melhor a forma como os alunos organizam e comunicam o seu pensamento matemático.

Por último, a categoria da organização avalia a clareza e a estrutura das respostas produzidas pelos alunos (Martins, 2023). As respostas podem ser classificadas como organizadas, parcialmente organizadas ou desorganizadas. Uma resposta organizada apresenta uma sequência lógica clara, permitindo acompanhar facilmente o raciocínio desenvolvido. Uma resposta parcialmente organizada contém informação dispersa ou pouco articulada, exigindo algum esforço de interpretação por parte do leitor. Já uma resposta desorganizada apresenta os elementos de forma tão fragmentada que dificulta ou impede a compreensão do raciocínio seguido pelo aluno, mesmo que alguns cálculos estejam corretos (Martins, 2023). Assim, a organização constitui um aspeto importante da comunicação matemática escrita, uma vez que facilita a compreensão das ideias por parte de quem lê (Santos & Semana, 2015).

Este modelo assume uma natureza formativa, alinhando-se com a conceção de avaliação proposta por Black e Wiliam (2009) e Wiliam (2007), na qual a avaliação é entendida como parte integrante do processo de aprendizagem. A análise detalhada das respostas escritas permite ao professor identificar padrões de pensamento, conceções implícitas, fragilidades argumentativas e dificuldades na coordenação de representações. Assim, a escrita torna-se fonte privilegiada de evidências para a regulação pedagógica, permitindo ajustar o ensino às necessidades específicas dos alunos (Black & Wiliam, 2009; Wiliam, 2007). Tal perspetiva articula-se com a ideia de que a avaliação deve promover a aprendizagem e envolver os alunos como agentes ativos do processo, exigindo uma integração consistente entre ensino, comunicação e avaliação (Pinto & Santos, 2006). Sob esta ótica, a comunicação deixa de ser encarada como um mero produto final e assume-se como um mecanismo essencial para que os estudantes possam refletir, clarificar e expandir as suas próprias ideias matemáticas (NCTM, 2020). É através destas práticas discursivas e da transposição do raciocínio para a linguagem escrita que os conceitos ganham forma, permitindo ao professor regular o ensino à medida que as necessidades dos alunos emergem na sala de aula (NCTM, 2020; Pinto & Santos, 2006).

A relevância das quatro categorias apresentadas no modelo de Martins (2023) é corroborada pelo estudo de Teledahl et al. (2025), que identificam a correção matemática, a qualidade das justificações, a utilização de diferentes representações e

a organização da resposta como dimensões fundamentais para avaliar a qualidade das produções escritas dos alunos. Os autores sustentam que uma comunicação matemática eficaz requer a articulação de diferentes recursos comunicativos, sendo insuficiente recorrer apenas à linguagem simbólica para expressar ideias matemáticas complexas (Teledahl et al., 2025). Estes resultados reforçam a pertinência do modelo de Martins (2023) e evidenciam a importância de uma análise multidimensional das respostas escritas dos alunos.

2.3. *Feedback* escrito

Nos últimos anos, têm-se observado alterações significativas na forma como a avaliação é entendida no contexto educativo. De uma perspetiva predominantemente classificativa, associada à hierarquização de resultados, evoluiu-se para uma perspetiva que a compreende como uma parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, assumindo uma função fundamentalmente reguladora (Dias & Santos, 2008). Através desta reconfiguração, torna-se evidente que o ato de avaliar não se limita à atribuição de uma classificação (qualitativa e/ou quantitativa) sobre o desempenho realizado, assumindo também uma função reguladora ao criar condições para que a aprendizagem se desenvolva de forma contínua e progressiva, favorecendo a sua consolidação (Dias & Santos, 2008).

Dias e Santos (2008) apresentam a avaliação formativa como um mecanismo orientado para apoiar os alunos na superação das suas dificuldades, assente numa intervenção pedagógica intencional, contínua e ajustada às necessidades identificadas ao longo do processo de aprendizagem. Nesta perspetiva, a avaliação deixa de ser encarada como um momento pontual ou final, passando a constituir um processo dinâmico de recolha, interpretação e utilização de informação, que permite ao professor e ao aluno tomar decisões fundamentadas para promover a melhoria das aprendizagens (Dias & Santos, 2008). É nesta perspetiva de avaliação que o *feedback* assume um papel estruturante, constituindo um dos principais mecanismos de comunicação de informação sobre a aprendizagem, ao permitir aos alunos compreender o seu desempenho, identificar aspetos a melhorar e orientar ações futuras (Hattie & Timperley, 2007; Brookhart, 2019). Brookhart (2019) refere que o *feedback* foi inicialmente interpretado através de abordagens behavioristas, nas quais a aprendizagem era entendida como a aquisição de factos e conceitos, conduzindo a uma conceção de avaliação centrada na verificação da memorização dos conteúdos e assumindo predominantemente uma função

sumativa. Com efeito, as tarefas propostas eram, não raras vezes, simples e com respostas claramente definidas, sendo o *feedback* utilizado para indicar aos alunos o que estava correto e incorreto (Brookhart, 2019). Nesta perspetiva behaviorista, influenciada pela lei do efeito de Thorndike (1913, citado em Brookhart, 2019), o *feedback* positivo era entendido como um mecanismo de reforço do comportamento, enquanto o *feedback* negativo era associado à punição.

Com o surgimento das perspetivas cognitivista e construtivista, a compreensão do conceito de aprendizagem expandiu-se, acoplando, além dos factos e conceitos, a aplicação destes a novas situações e contextos, a resolução de problemas e outras formas de aprendizagem mais complexas (Brookhart, 2019). Para Hattie e Timperley (2007), o *feedback* consiste na “informação fornecida por um agente (como professores, pares, livros ou a própria experiência) acerca do desempenho ou da compreensão do aluno” (p. 81). Por sua vez, Shute (2008) especifica o *feedback* formativo como a “informação destinada a modificar o pensamento ou o comportamento do aluno, com vista à melhoria da aprendizagem” (p. 153), sublinhando que o *feedback* que não contribui positivamente para esse processo não pode ser considerado formativo. Atualmente, a noção de *feedback* é mais abrangente do que na perspetiva behaviorista, integrando tanto informação quantitativa (como classificações ou número de respostas corretas) como qualitativa (como descrições dos pontos fortes e sugestões de melhoria). As investigações mostraram que o *feedback* mais eficaz é aquele que fornece informação descritiva, permitindo aos alunos compreender a qualidade do seu trabalho e identificar estratégias concretas para o melhorar (Brookhart, 2019).

Quando se fala em avaliação pedagógica, faz-se referência ao conjunto de processos avaliativos desenvolvidos no contexto do trabalho com os alunos, distinguindo-se, segundo Santos (2022), duas modalidades principais de avaliação: a avaliação formativa e a avaliação sumativa, que se diferenciam essencialmente pelos propósitos que orientam a sua realização. Enquanto a avaliação sumativa, associada a uma dimensão social, visa aferir o estado das aprendizagens dos alunos num determinado momento, frequentemente para efeitos de classificação e controlo, a avaliação formativa encontra-se ligada a uma dimensão pedagógica, orientada para o apoio à aprendizagem e para a regulação do ensino (Santos, 2022). Neste sentido, a avaliação formativa destaca-se pela sua função reguladora, privilegiando a recolha e utilização de informações que permitem ajustar as práticas pedagógicas e apoiar os alunos na superação das dificuldades identificadas. Ao contrário da avaliação sumativa, cujo principal objetivo consiste na tradução do desempenho do aluno numa classificação, a

avaliação formativa centra-se na compreensão dos processos de aprendizagem e na identificação de estratégias que favoreçam o seu desenvolvimento e progressão (Pinto & Santos, 2006).

Para que esta regulação se materialize, revela-se indispensável a existência de instrumentos que permitam ao aluno fazer a correspondência entre o seu desempenho com os critérios de avaliação estabelecidos (Sadler, 1989). No contexto dos processos de avaliação, existem diversas formas de apoiar as aprendizagens dos alunos, refletindo a variedade de práticas avaliativas que podem ser implementadas em sala de aula. No âmbito da avaliação formativa, o *feedback* assume um papel crucial ao fornecer informações sobre o desempenho dos alunos e os caminhos de melhoria, contribuindo diretamente para a regulação das suas aprendizagens (Santos et al., 2024).

Machado (2021) refere que, para além da sua função reguladora, o *feedback* assume uma dimensão cognitiva e motivacional. No plano cognitivo, fornece aos alunos informação que lhes permite compreender o ponto em que se encontram relativamente aos objetivos de aprendizagem e identificar os passos seguintes. No plano motivacional, favorece o desenvolvimento do sentimento de controlo sobre a própria aprendizagem, promovendo um maior envolvimento e processos mais eficazes de autorregulação. Contudo, nem todo o *feedback* produz efeitos positivos, dependendo a sua eficácia da forma como é concebido, comunicado e utilizado pelos alunos, podendo constituir tanto um poderoso recurso para a aprendizagem como um obstáculo ao seu desenvolvimento, quando não fornece orientações relevantes para a melhoria (Machado, 2021). Segundo Sadler (1989), o *feedback* deve fornecer informação sobre o desempenho realizado e sobre os aspetos que necessitam de melhoria, permitindo ao aluno reinterpretar o seu trabalho e regular as suas ações de forma a aproximar-se dos objetivos de aprendizagem. Todavia, apenas cumpre a sua função reguladora quando é compreendido, apropriado e transformado em ação pelo aluno (William, 2007).

De acordo com Machado (2021), a perceção dos alunos sobre o *feedback* resulta da interação entre diversos fatores, nomeadamente os seus conhecimentos prévios, o percurso escolar e o que pensam sobre o que é aprender e ser avaliado. Deste modo, compreender a forma como os alunos interpretam o *feedback* constitui uma condição fundamental para que este possa exercer uma função efetivamente reguladora das aprendizagens (Machado, 2021; Santos & Dias, 2007).

Reconhecido como uma das ferramentas “mais poderosas que um professor deve dominar para garantir uma avaliação formativa com impacto positivo nas aprendizagens

dos alunos” (Machado, 2021, p. 4), o *feedback* escrito constitui uma estratégia fundamental da avaliação reguladora (Santos, 2008; Vale et al., 2011). Ao incidir diretamente sobre a produção do aluno, transforma-a num objeto de análise e intervenção, retirando-lhe o seu carácter estático e favorecendo a releitura, a reflexão e a progressão das aprendizagens (Fernandes, 2021). A investigação evidencia que a sua utilização sistemática pode promover melhorias significativas nas aprendizagens, nomeadamente através da identificação e correção de erros pelos alunos (Black & Wiliam, 1998; Santos, 2008). Todavia, a elaboração de *feedback* escrito é uma tarefa exigente, que requer tempo, conhecimento didático e intencionalidade pedagógica (Sadler, 1989).

A sua relevância torna-se significativa quando articulada com o conceito de autorregulação, que pode ser entendida como um processo metacognitivo através do qual o aluno gere a sua atividade cognitiva, confronta o que realizou com os critérios de referência e mobiliza estratégias para reduzir discrepâncias (Sadler, 1989; Santos, 2002). Para tal, é fundamental a tomada de consciência da diferença entre o desempenho atual e o esperado e a ação deliberada para ultrapassar essa diferença. O *feedback* escrito surge, então, como um poderoso instrumento que pode funcionar como um catalisador deste processo, desde que não substitua o aluno na identificação e correção do erro, mas forneça pistas/caminhos que o conduzam à reformulação autónoma (Santos, 2002).

A eficácia do *feedback* está intrinsecamente relacionada com a sua natureza. Gipps (1999) efetua uma distinção entre o *feedback* avaliativo, que tem por base juízos de valor, e *feedback* descritivo, orientado para o desempenho face à tarefa. Enquanto o primeiro tende a apresentar um curto espectro de efeitos na aprendizagem, o segundo apresenta uma maior abrangência e potencial regulador, principalmente quando o aluno é o elemento central na reconstrução e sistematização de procedimentos (Gipps, 1999). Esta distinção articula-se com a tipologia proposta por Hattie e Timperley (2007), que identificam quatro níveis de incidência do *feedback*: dirigido ao aluno (*self*), à tarefa, ao processo e à autorregulação, evidenciando que nem todos contribuem de igual modo para a melhoria das aprendizagens.

O *feedback* dirigido ao aluno enquanto pessoa incide sobretudo na valorização global do seu desempenho, sendo frequentemente expresso através de comentários como “Muito bem” ou “Bom trabalho”. Embora este tipo de retorno possa ter um efeito motivador imediato, o seu contributo para a aprendizagem é reduzido, uma vez que não explicita o que foi efetivamente conseguido nem indica caminhos concretos de melhoria.

Para além disso, pode desviar o foco do aluno do processo de aprendizagem, levando-o a procurar validação externa em vez de desenvolver uma compreensão mais aprofundada do seu próprio desempenho (Hattie & Timperley, 2007).

O *feedback* centrado na tarefa foca-se, de acordo com Hattie e Timperley (2007), essencialmente no resultado apresentado, evidenciando se a resposta está correta ou incorreta e, em alguns casos, identificando erros concretos. Este tipo de retorno assume particular relevância nas fases iniciais da aprendizagem, pois ajuda o aluno a perceber até que ponto a sua resposta está adequada ao que é solicitado. Contudo, quando surge de forma isolada, revela limitações, já que não favorece, *per si*, uma compreensão aprofundada dos conceitos nem estimula a construção e diversificação de estratégias de resolução.

O *feedback* centrado no processo vai além da simples verificação da resposta, incidindo nas estratégias mobilizadas pelo aluno durante a resolução. Neste âmbito, o professor pode propor diferentes formas de abordagem, questionar os raciocínios desenvolvidos ou evidenciar procedimentos que se revelaram adequados. Trata-se de um tipo de *feedback* especialmente relevante, na medida em que favorece o desenvolvimento do pensamento matemático, promove a reflexão sobre as estratégias utilizadas e facilita a aplicação de conhecimentos em contextos distintos, contribuindo assim para aprendizagens mais consistentes e significativas (Hattie & Timperley, 2007).

Por fim, Hattie e Timperley (2007) indicam que o *feedback* ao nível da autorregulação tem como objetivo fortalecer a capacidade do aluno para acompanhar e gerir o seu próprio processo de aprendizagem. Este tipo de *feedback* pode traduzir-se em estímulos à verificação das respostas, à análise dos erros cometidos, à definição de metas ou à prática de autoavaliação.

O *feedback* centrado exclusivamente no aluno, geralmente sob a forma de elogio, revela-se pouco eficaz. Por seu turno, o *feedback* orientado para o processo e para a autorregulação potencia a compreensão, reflexão crítica e maior envolvimento na aprendizagem (Hattie & Timperley, 2007).

Para além das tipologias propostas por Gipps (1999) e Hattie e Timperley (2007), Brookhart (2019) distingue três tipos principais de *feedback*: o *feedback* de resultado, o *feedback* cognitivo e o *feedback* pessoal. O *feedback* de resultado centra-se na indicação do que está correto e incorreto, sendo útil em tarefas simples, mas limitado na promoção de aprendizagens complexas. O *feedback* cognitivo descreve o nível de desempenho e orienta os próximos passos, sendo considerado o mais eficaz, uma vez

que promove a reflexão, o desenvolvimento de estratégias e a autorregulação. O *feedback* pessoal, centrado no aluno enquanto indivíduo, apresenta um impacto reduzido, por não fornecer indicações concretas sobre o trabalho realizado (Brookhart, 2019).

Brookhart (2019) reforça que o *feedback* cognitivo é o mais relevante para contextos académicos, pois direciona a aprendizagem de forma construtiva e específica. Assim, a literatura converge na valorização de formas de *feedback* que privilegiam a compreensão e a regulação da aprendizagem (Brookhart 2019; Gipps, 1999; Hattie & Timperley, 2007).

Também Tavares e Menino (2024), com base nos trabalhos de Glover e Brown (2006), Hughes (2011) e Hughes et al. (2014), propõem uma categorização do *feedback* quanto ao seu tipo e profundidade, que contempla sete categorias: elogiar, reconhecer o progresso, identificar o erro, corrigir/exemplificar, questionar/dar pistas, explicar/clarificar/sintetizar e *feed forward*. A categoria elogiar corresponde à valorização positiva do trabalho realizado pelo estudante, enquanto reconhecer o progresso se refere à valorização da evolução evidenciada pela produção apresentada relativamente a desempenhos anteriores. Por sua vez, identificar o erro corresponde à sinalização de um erro de cálculo ou conceptual, sem que sejam fornecidas informações adicionais que permitam ao estudante ultrapassar a dificuldade identificada. Num nível de maior intervenção, corrigir/exemplificar implica apresentar as correções necessárias à produção do estudante, podendo recorrer à apresentação de exemplos.

Ainda na categorização proposta por Tavares e Menino (2024), a categoria questionar/dar pistas caracteriza-se pela identificação dos erros acompanhada de questões e/ou pistas que orientam o estudante na procura de uma resposta ou na superação das dificuldades evidenciadas. Já explicar/clarificar/sintetizar corresponde a um *feedback* de natureza explicativa e clarificadora, que inclui, habitualmente, uma síntese das ideias discutidas. Por fim, o *feed forward* distingue-se por direcionar a atenção do estudante para a importância das aprendizagens realizadas em situações futuras, nomeadamente no seu percurso académico e/ou profissional.

Um contributo particularmente relevante para a compreensão das dimensões e da complexidade do *feedback* escrito é o estudo de Santos e Dias (2007), que explora a problemática de os alunos compreenderem efetivamente o que os professores escrevem nas suas produções. Os resultados realçam que a interpretação do *feedback* não é imediata nem linear. Muitos alunos encontram barreiras relacionadas com a

linguagem utilizada, interpretação de símbolos ou na articulação eficiente entre o comentário e ações concretas de melhoria. Tais dificuldades são particularmente visíveis ao se verificar que apenas uma parte dos alunos consegue reformular corretamente a sua produção com base no *feedback* recebido (Santos & Dias, 2007).

Estes resultados corroboram que a clareza intencional do professor não garante, por si só, a compreensão do aluno (Santos & Dias, 2007). A eficácia do *feedback* tem, então, como pilares estruturantes a adequação da linguagem, o grau de explicitação das pistas fornecidas, o nível de desempenho do aluno e as práticas de ensino utilizadas na sala de aula (Hattie & Timperley, 2007). Santos e Dias (2007), bem como Wiliam (1999), salientam que os alunos pouco familiarizados com processos de revisão e reformulação tendem a conferir maior importância às avaliações sumativas do que aos comentários de natureza formativa. Deste modo, a construção de hábitos de reflexão e de melhoria contínua assume-se como uma condição essencial para que o *feedback* possa cumprir a sua função reguladora (Hattie & Timperley, 2007; Santos & Dias, 2007; Wiliam (1999).

Da literatura emergem vários princípios orientadores para a construção de um *feedback* escrito eficaz. Importa evitar a correção direta do erro, uma vez que, ao indicar a resposta correta, o professor pode restringir a oportunidade de o aluno mobilizar processos cognitivos essenciais à aprendizagem (Santos, 2002; Wiliam, 2007). O *feedback* deverá, por isso, centrar-se na tarefa e no processo, incidindo sobre a produção realizada e as estratégias utilizadas, em vez de se focar em características do aluno (Hattie & Timperley, 2007). De igual modo, o desempenho deverá ser analisado à luz de critérios previamente definidos, permitindo ao aluno compreender em que medida o seu trabalho corresponde aos critérios de avaliação estabelecidos, em vez de promover comparações com o desempenho dos colegas (Machado, 2021; Sadler, 1989). Para favorecer a compreensão e a utilização autónoma do *feedback*, é igualmente importante recorrer a uma linguagem clara e acessível, evitando comentários vagos ou excessivamente técnicos (Santos, 2002).

A eficácia do *feedback* depende também da quantidade de informação fornecida e do momento em que esta é disponibilizada. Neste sentido, a quantidade de informação fornecida no *feedback* deve ser devidamente doseada, uma vez que mais *feedback* não é diretamente proporcional a um melhor *feedback*, uma vez que o seu excesso pode dispersar a atenção do aluno (Wiliam, 2007). Por outro lado, a escolha do momento adequado para a sua atribuição assume particular importância, dado que a apresentação simultânea de uma classificação e de *feedback* tende a reduzir o seu impacto formativo, na medida em que o aluno pode centrar a sua atenção na

classificação obtida e considerar a tarefa concluída (William, 1999). A promoção da reflexão constitui igualmente um princípio relevante, podendo a utilização da forma interrogativa estimular a reanálise do raciocínio, embora nem sempre produza o efeito pretendido (Santos & Pinto, 2009). Por fim, o *feedback* deverá assumir um carácter descritivo e construtivo, identificando os aspetos conseguidos e indicando possibilidades de melhoria, através da descrição do desempenho e de sugestões de ação, em detrimento de juízos de valor ou críticas genéricas (Machado, 2021).

Brookhart (2019) refere que o *feedback* deve ser avaliado em função da sua capacidade de representar de forma fidedigna os objetivos de aprendizagem e de fornecer informação útil para a sua melhoria. Um *feedback* eficaz é, assim, na perspetiva da autora, aquele que explicita a relação entre o desempenho do aluno e os critérios de referência, permitindo ao estudante refletir sobre o seu desempenho, identificar lacunas e desenvolver estratégias de melhoria. Brookhart (2019) sublinha que o *feedback* escrito deve ser descritivo e não apenas corretivo, orientado para objetivos de aprendizagem, acessível e compreensível, evitando ambiguidades, e baseado em evidências, derivado de medição fiável do desempenho. Deste modo, o *feedback* deve ser claro, específico, compreensível e orientado para a ação (Brookhart, 2019).

Uma forma de compreender a complexidade do *feedback* consiste em considerar as questões fundamentais a que este deve responder ao longo do processo de aprendizagem. Hattie e Timperley (2007) referem que o *feedback* eficaz procura responder a três questões centrais: “Para onde vou?”, “Como estou a progredir?” e “Qual o próximo passo?”. Fisher e Frey (2009), Hattie e Timperley (2007) e Machado (2021) concebem o *feedback* como um sistema composto por diferentes elementos complementares, distinguindo três componentes fundamentais: *feed up*, *feed back* e *feed forward*. O *feed up* refere-se à clarificação dos objetivos de aprendizagem e dos critérios que orientam a avaliação. O *feed back* corresponde à informação fornecida ao aluno sobre o seu desempenho relativamente a esses objetivos. Por sua vez, o *feed forward* remete para a utilização dessa informação na definição de ações futuras, permitindo orientar novas aprendizagens e reajustar estratégias de ensino e de aprendizagem (Fisher & Frey, 2009; Hattie & Timperley, 2007; Machado, 2021). A articulação destas três componentes contribui para uma avaliação com propósito formativo, na medida em que ajuda os alunos a compreender para onde devem caminhar, onde se encontram no percurso e quais os passos necessários para progredir (Machado, 2021).

As questões que Hattie e Timperley (2007) identificam como orientadoras de um *feedback* eficaz articulam-se diretamente com as componentes do sistema de *feedback* descritas por Fisher e Frey (2009) e Machado (2021). A primeira questão corresponde ao *feed up*, uma vez que remete para a clarificação dos objetivos de aprendizagem e dos critérios que orientam o trabalho dos alunos (Fisher & Frey, 2009; Hattie & Timperley, 2007; Machado, 2021). A segunda relaciona-se com o *feed back*, através da informação fornecida sobre o desempenho realizado e o grau de aproximação aos objetivos definidos (Fisher & Frey, 2009; Hattie & Timperley, 2007; Machado, 2021). Por fim, a terceira questão encontra correspondência no *feed forward*, ao direcionar a atenção para as ações futuras e para os ajustes necessários à progressão das aprendizagens (Fisher & Frey, 2009; Hattie & Timperley, 2007; Machado, 2021).

O estudo de Santos e Pinto (2010) evidencia a evolução progressiva de práticas centradas na identificação explícita do erro para abordagens baseadas em pistas, questionamento e estímulo à melhoria contínua, tendo em conta as características da tarefa e as idiossincrasias dos alunos. De acordo com os autores, a prática do *feedback* escrito relaciona-se, assim, com o desenvolvimento profissional do professor, na medida em que a evolução das conceções e estratégias de *feedback* se respalda na reflexão contínua sobre os seus efeitos/resultados nas aprendizagens dos alunos.

3. Intervenção pedagógica

Neste capítulo, apresenta-se a intervenção pedagógica desenvolvida no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, que constitui o contexto de implementação do presente estudo. A compreensão das opções metodológicas adotadas e dos resultados posteriormente analisados exige uma contextualização do ambiente educativo em que a investigação decorreu, bem como dos participantes envolvidos.

Assim, numa primeira fase, procede-se à caracterização do contexto escolar onde se realizou a intervenção, destacando-se os aspetos institucionais, sociais e educativos considerados mais relevantes. Seguidamente, apresenta-se a caracterização da turma participante, evidenciando as suas particularidades e o modo como estas influenciaram o desenvolvimento da investigação.

Por fim, descreve-se a intervenção pedagógica implementada, detalhando os diferentes momentos que a constituíram, as tarefas propostas aos alunos, o processo de fornecimento de *feedback* escrito, as oportunidades de reformulação das resoluções e os instrumentos utilizados para recolher informação sobre as aprendizagens e as perceções dos alunos. Pretende-se, deste modo, proporcionar uma visão clara e fundamentada do contexto e das ações desenvolvidas, essenciais para a compreensão do estudo apresentado.

3.1. Caracterização do contexto escolar e da turma¹

A escola onde decorreu a Prática de Ensino Supervisionada (PES) e, consequentemente, a intervenção pedagógica que serve de base a este relatório, é uma escola localizada no concelho de Matosinhos, distrito do Porto. Esta escola funciona como escola-sede de um agrupamento de escolas integrante do Concelho Municipal de Educação de Matosinhos. Este agrupamento é constituído por seis estabelecimentos de ensino, abrangendo os diferentes níveis de escolaridade, desde o pré-escolar até ao ensino secundário. A escola em questão apresenta uma vasta diversidade formativa, assegurando a oferta do 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico, do Ensino Secundário científico-humanístico e do Ensino Profissional. Desta forma, permite assegurar a

¹ A caracterização do agrupamento de escolas onde realizei a minha PES foi elaborada em conjunto com outra colega que, nesse mesmo ano, concretizou também a sua PES neste agrupamento. Neste sentido, esta parte do texto é comum aos dois relatórios de estágio, integrando também o relatório de Gonçalves, A. (em preparação), provisoriamente intitulado *Influência do uso de representações matemáticas para a compreensão de tarefas e organização do raciocínio: Um estudo com alunos do 8.º ano* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

continuidade e a coerência do percurso educativo dos alunos ao longo das várias etapas do seu processo formativo. No ano letivo 2025/2026, o Ensino Secundário incluía os quatro cursos científico-humanísticos, bem como alguns cursos profissionais, assegurando uma resposta educativa diversificada e que vai ao encontro das necessidades da comunidade local.

A escola insere-se numa zona de forte urbanização, caracterizada pela heterogeneidade socioeconómica, em que coexistem bairros de habitação social, cooperativas habitacionais e zonas residenciais de classe média, em que o comércio e serviços se encontram em expansão. O meio envolvente caracteriza-se por uma forte presença do setor terciário, associada à existência de superfícies comerciais e serviços, coexistindo com um tecido industrial significativo, marcado pela presença de unidades fabris de grande dimensão nas áreas da eletromecânica, metalomecânica, química e da produção e transformação alimentar, bem como por pequenas e médias empresas. Esta diversidade está plasmada no perfil sociocultural dos alunos, em que a presença de estudantes de meios socioeconómicos desfavorecidos é significativa, beneficiando de apoios no âmbito da Ação Social Escolar mais de 50% dos alunos. A escola encontra-se inserida numa área geográfica dotada de boas acessibilidades, beneficiando de uma rede de transportes públicos diversificada, designadamente autocarros e estação de metro, fator que facilita o acesso da comunidade educativa à escola.

No início do ano letivo 2025/2026, o número de alunos inscritos no agrupamento era 1940 alunos, sendo que 825 desses alunos frequentavam a escola em que se realizou a PES. Não obstante o número significativo de alunos, verifica-se uma tendência de decréscimo da população escolar, principalmente ao nível do Ensino Secundário. No que respeita a composição da população discente, verifica-se uma grande diversidade cultural, com cerca de 9% dos alunos de nacionalidade estrangeira, num total de 21 nacionalidades, o que contribui para o enriquecimento humano e pedagógico, reforçando a implementação progressiva de práticas educativas inclusivas e interculturais. No ano letivo indicado, a maioria do corpo docente pertence ao quadro do agrupamento (65%), em que 77% dos docentes têm idade igual ou superior a 50 anos. O pessoal não docente é composto por 91 profissionais, na sua maioria pertencente ao quadro.

A escola-sede foi alvo de uma intervenção no âmbito do Programa de Modernização do Parque Escolar, apresentando atualmente infraestruturas modernas e adequadas, incluindo laboratórios e salas específicas para as diferentes áreas disciplinares, bem como campo e pavilhão desportivo, criando condições favoráveis ao desenvolvimento

das atividades curriculares e extracurriculares. A escola evidencia ainda uma forte dinâmica associativa e participativa, fazendo parte a Associação de Pais e Encarregados de Educação, a Associação de Estudantes, bem como um conjunto diversificado de projetos, clubes e atividades extracurriculares – como o Erasmus +, o Clube de Espanhol e o Desporto Escolar – que se desdobram em áreas científicas, artísticas, culturais, desportivas e de cidadania, fomentando o princípio de uma escola para todos, contribuindo para o desenvolvimento integral dos alunos e para a sua integração na comunidade escolar.

À data de realização deste estudo, o desenvolvimento da ação educativa da escola estava enquadrado pelo Projeto Educativo 2026 – 2029, regido por uma visão inclusiva, humanista e promotora do sucesso escolar, visando formar cidadãos críticos, conscientes e preparados para os desafios de um mundo em constante mudança, o que enquadra e confere sentido à intervenção desenvolvida no contexto da Prática de Ensino Supervisionada.

Durante a PES, houve a oportunidade de acompanhar duas turmas do 10.º ano de Ciências e Tecnologias e uma turma do 8.º ano. Nessas turmas, no geral, os alunos eram bastante comunicativos e participativos.

A intervenção pedagógica foi realizada na turma do 8.º ano, constituída por 20 alunos, em que 11 são do sexo feminino e 9 são do sexo masculino. Para a intervenção pedagógica foram considerados elegíveis 19 dos 20 alunos que constituíam a turma. Um dos alunos do sexo masculino não integrou a intervenção pedagógica desenvolvida no âmbito do estudo, uma vez que usufruía de medidas educativas diferenciadas decorrentes de uma perturbação do espectro do autismo, encontrando-se a desenvolver aprendizagens ao nível do 1.º ciclo do Ensino Básico. Atendendo às suas especificidades, teve um acompanhamento individualizado realizado por um professor (em regime de alternância entre os professores estagiários).

No segundo período, no qual decorreram os três momentos de resolução de problemas, a turma apresentou uma média de classificações de 3,4 valores e um desvio-padrão de aproximadamente 0,97, revelando uma dispersão considerável dos resultados e uma heterogeneidade entre os alunos, que se manifestava também ao nível do trabalho desenvolvido e da participação nas aulas. Essa dispersão das classificações pode ser observada através do Gráfico 1, que plasma as classificações obtidas pelos alunos no segundo período. Por aí se percebe a necessidade de ter abordagens diversificadas com os alunos para que estes avancem no processo de aprendizagem.

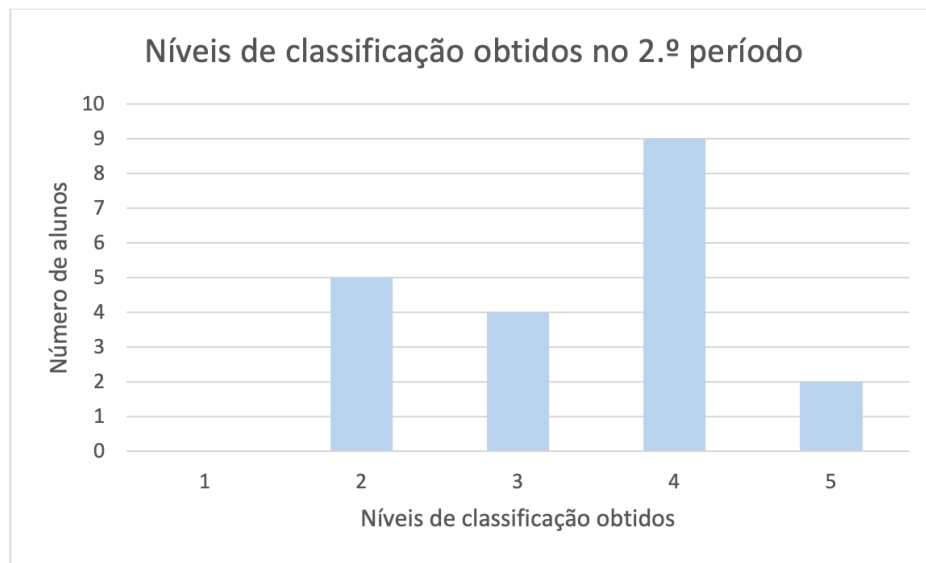


Gráfico 1 - Níveis de classificação obtidos pela turma no 2.º período do ano letivo 2025/2026

Para além da entreajuda entre os alunos, a turma caracteriza-se pela espontaneidade com que colocam dúvidas e comunicam as suas dificuldades, aspetos que se consideraram basilares para a recolha de dados realizada. A escolha desta turma justificou-se, precisamente, por essas características, bem como pela proximidade estabelecida ao longo da PES, fatores que se entendeu poderem facilitar a recolha dos dados necessários ao estudo.

3.2. Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica desenvolvida neste estudo decorreu entre 20 de fevereiro e 15 de maio de 2026 e centrou-se na resolução de três problemas matemáticos. Numa fase inicial, cada problema era proposto aos alunos, que o realizavam individualmente, em aula. Posteriormente, o professor fornecia *feedback* exclusivamente escrito sobre as produções apresentadas. A análise desse *feedback*, bem como a reflexão sobre as estratégias utilizadas, ocorria de forma individual, sendo realizada pelos alunos fora do contexto da aula, de acordo com o seu próprio ritmo e organização.

O estudo centrou-se na resolução de problemas matemáticos, tendo o *feedback* sido fornecido pelo professor, de forma escrita, a todos os alunos que participaram na intervenção pedagógica. Esta foi organizada em torno de três problemas matemáticos, implementados entre fevereiro e março de 2026, seguindo uma estrutura cíclica

composta por momentos de resolução, *feedback* e reformulação. A Figura 3 sintetiza as diferentes etapas que constituíram cada ciclo de intervenção.

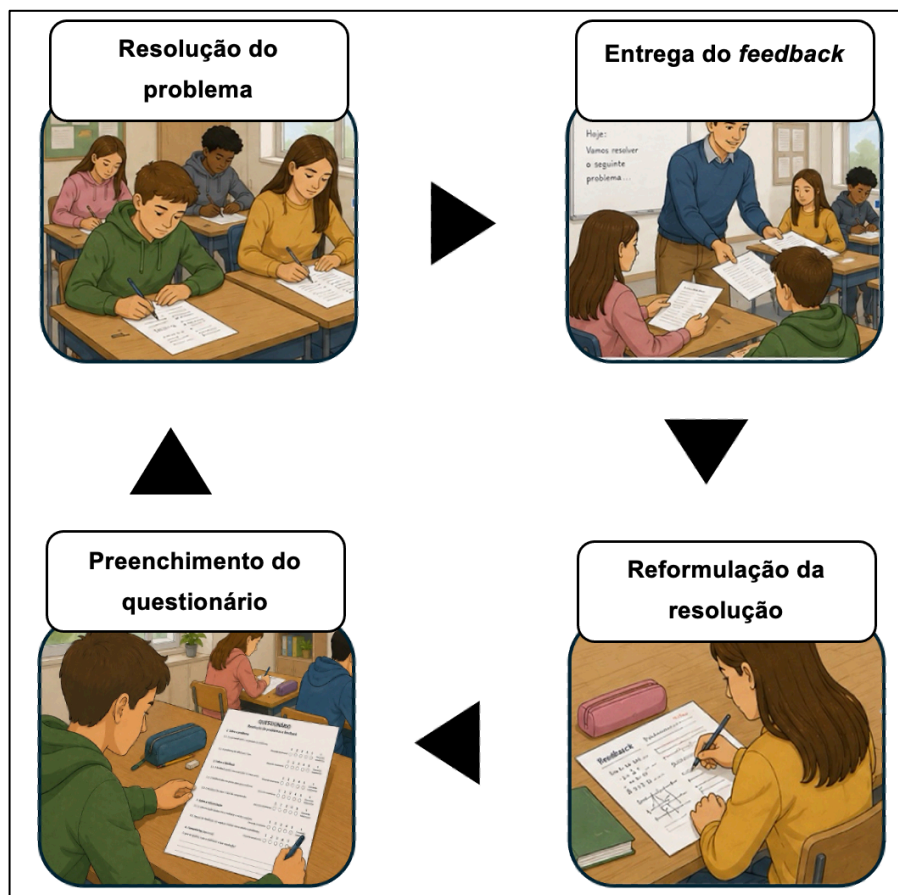


Figura 3 - Estrutura da intervenção pedagógica
Fonte: elaboração própria com recurso a inteligência artificial.

Em cada intervenção, os alunos resolviam inicialmente um problema de forma individual, em contexto de aula, mobilizando os conhecimentos matemáticos abordados previamente e explicitando, por escrito, os seus raciocínios, estratégias e justificações. Após a recolha das resoluções iniciais, estas eram analisadas pelo professor, que elaborava *feedback* escrito individualizado. Esse *feedback* incidia não apenas sobre a correção das respostas apresentadas, mas também sobre os processos de raciocínio utilizados, as estratégias mobilizadas, as dificuldades evidenciadas e os aspetos que poderiam ser aprofundados ou revistos.

Num momento posterior, os alunos recebiam o *feedback* e eram convidados a analisá-lo. A reformulação das resoluções era realizada, preferencialmente de forma individual, fora do contexto da sala de aula, sendo posteriormente entregue na aula seguinte. Nesta fase, os alunos procuravam incorporar as sugestões e pistas fornecidas. Estas

reformulações constituíram um elemento central da investigação, uma vez que permitiram observar de que forma os alunos interpretavam o *feedback* recebido, quais os aspetos que conseguiam rever e melhorar e que dificuldades persistiam após esse processo de reflexão e revisão.

A Tabela 1 sintetiza a organização temporal dos diferentes momentos que integraram a intervenção pedagógica, permitindo compreender a sequência de etapas associadas à exploração de cada problema matemático.

Data	Atividade
20 de fevereiro de 2026	Aplicação do Problema 1
24 de fevereiro de 2026	Entrega do <i>feedback</i> escrito relativo ao Problema 1
26 e 27 de fevereiro de 2026	Entrega das reformulações do Problema 1
27 de fevereiro de 2026	Aplicação do questionário relativo ao Problema 1 e aplicação do Problema 2
3 de março de 2026	Entrega do <i>feedback</i> escrito relativo ao Problema 2
5 de março de 2026	Recolha das reformulações e aplicação do questionário relativo ao Problema 2
6 de março de 2026	Aplicação do Problema 3
10 de março de 2026	Entrega do <i>feedback</i> escrito relativo ao Problema 3
12 de março de 2026	Recolha das reformulações e aplicação do questionário relativo ao Problema 3

Tabela 1 - Resumo da intervenção pedagógica

Esta organização evidencia uma dinâmica de trabalho centrada na revisão e melhoria das aprendizagens, valorizando não só o produto final, mas também o processo desenvolvido pelos alunos. Após esta visão global da intervenção pedagógica, apresenta-se, de seguida, a descrição detalhada de cada um dos problemas propostos, bem como das diferentes etapas associadas à sua implementação.

A intervenção pedagógica teve início no dia 20 de fevereiro de 2026, tendo sido aplicado o primeiro problema² (Figura 4), no âmbito de uma aula lecionada pelo autor do presente

² Adaptado de Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2025). *MAT 8 – Vol. II* (p. 107). Texto Editores.

estudo. O problema apresentado serviu de consolidação da matéria abordada na aula anterior sobre a área da superfície lateral de um cilindro.

O cilindro compactador

Na figura ao lado está representado um rolo compactador utilizado para alisar o pavimento através de um cilindro pesado que vai rodando enquanto a máquina avança.



12 m

a) Numa conversa entre dois trabalhadores, um deles afirmou que, para se saber o número mínimo de voltas inteiras que o cilindro efetua para alisar uma faixa de 12 m de comprimento, basta dividir 12 pelo diâmetro do cilindro. Concordas com a opinião desse trabalhador? Justifica a tua resposta.

b) Sabe-se que a área lateral do cilindro é aproximadamente igual a $2,4 \text{ m}^2$ e que a altura do cilindro é $\frac{8}{3}$ do raio da sua base. Qual será o número mínimo de voltas inteiras do rolo necessárias para que alise uma faixa de 12 m de comprimento? Explica o teu raciocínio justificando cada passo. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva no mínimo três casas decimais.

Figura 4 - Enunciado do primeiro problema

A tarefa foi concebida de forma a permitir a articulação entre o conceito de área da superfície lateral do cilindro e o perímetro da base, num contexto mais natural que não se limitasse à aplicação direta de fórmulas. Nesse sentido, procurou-se analisar de que forma os alunos comunicavam, por escrito, a relação entre conceitos matemáticos e situações do quotidiano. Desta forma, visou-se promover a consolidação de conceitos previamente aprendidos, bem como a mobilização do sentido crítico na justificação de escolhas.

O problema resultou de uma adaptação de uma tarefa do manual *MAT 8 – Vol. II* (Matoso et al., 2025), consistindo num enunciado contextualizado, estruturado em duas alíneas, que envolvem a determinação do número de voltas de um rolo do cilindro compactador necessárias para alisar uma faixa de pavimento.

Na alínea a), pretendia-se que os alunos analisassem criticamente a afirmação apresentada, mobilizando o conceito de comprimento da circunferência para relacionar o número de voltas do cilindro com a distância percorrida. Esperava-se que identificassem que o cálculo correto poderia envolver o perímetro da base do cilindro (e não apenas o diâmetro), justificando matematicamente a sua posição.

Na alínea b), pretendia-se que os alunos determinassem o número mínimo de voltas completas do cilindro necessárias para alisar uma determinada distância, a partir da área lateral e da relação entre a altura e o raio. Pretendia-se que os alunos estabelecessem conexões entre as diferentes grandezas geométricas (área lateral, raio, altura e comprimento da circunferência), desenvolvendo um raciocínio sequencial e devidamente justificado, com atenção ao rigor nos cálculos e arredondamentos. A proposta de resolução desta tarefa encontra-se disponível no Anexo 4 – Proposta de resolução do Problema 1.

A tarefa foi concebida para ser realizada nos últimos 20 minutos de uma aula de 100 minutos, na qual foi introduzido e explorado o conceito de volume de prismas e de outros sólidos geométricos. Apesar de ter sido implementada nesta aula, a tarefa incidia sobre os conceitos de área e perímetro abordados nas aulas anteriores, até à aula imediatamente precedente, permitindo aos alunos mobilizar e consolidar conhecimentos já adquiridos. No decorrer da resolução, verificaram-se dificuldades consideráveis na articulação dos conceitos e na mobilização dos dados fornecidos no enunciado. Ainda faltavam dois minutos para terminar o tempo disponibilizado para a tarefa e a maioria dos alunos já tinha dado por concluída a sua resolução, apesar de nenhum ter conseguido completá-la. A identificação destas dificuldades sustenta-se na observação do comportamento dos alunos durante a resolução da tarefa, bem como nas questões que foram colocando ao longo desse processo, através das quais evidenciaram dificuldades na interpretação e tratamento da informação fornecida, bem como no estabelecimento de relações entre os diferentes dados e os conceitos matemáticos necessários à resolução.

No dia 24 de fevereiro, foi entregue aos alunos o *feedback* escrito relativo às suas resoluções, tendo sido indicado que o deveriam ler atentamente, de modo a permitir a entrega da resolução reformulada na aula seguinte (dia 26 de fevereiro), com base nas orientações fornecidas. Foi também comunicado que poderiam utilizar o espaço restante da folha em que foi entregue inicialmente a tarefa ou, em alternativa, uma folha adicional.

No dia 26 de fevereiro, apenas alguns alunos procederam à entrega da reformulação, tendo surgido pedidos de esclarecimento relativamente ao *feedback* recebido. Após os esclarecimentos necessários, o prazo de entrega foi prorrogado para a aula seguinte.

No dia 27 de fevereiro, verificou-se a entrega de mais algumas reformulações, tendo-se considerado concluída esta fase, uma vez que não se pretendia prolongar a análise do problema por mais de uma semana. As reformulações entregues pelos alunos tiveram como objetivo aferir eventuais progressos decorrentes do *feedback*, não tendo sido alvo de um novo *feedback*. As resoluções reformuladas foram digitalizadas e devolvidas aos alunos na própria aula.

A fase final desta primeira intervenção consistiu na disponibilização de um questionário na plataforma *Classroom*, nesse mesmo dia. Nesta etapa, observou-se alguma demora na resposta por parte dos alunos, o que levou, em intervenções posteriores, à opção pela sua aplicação em formato papel e em contexto de aula.

A primeira fase da segunda intervenção decorreu no dia 27 de fevereiro de 2026, tendo sido aplicado o problema³ patente na Figura 5, durante uma aula orientada pela professora cooperante, nos últimos 20 minutos de aula, à semelhança da primeira intervenção.

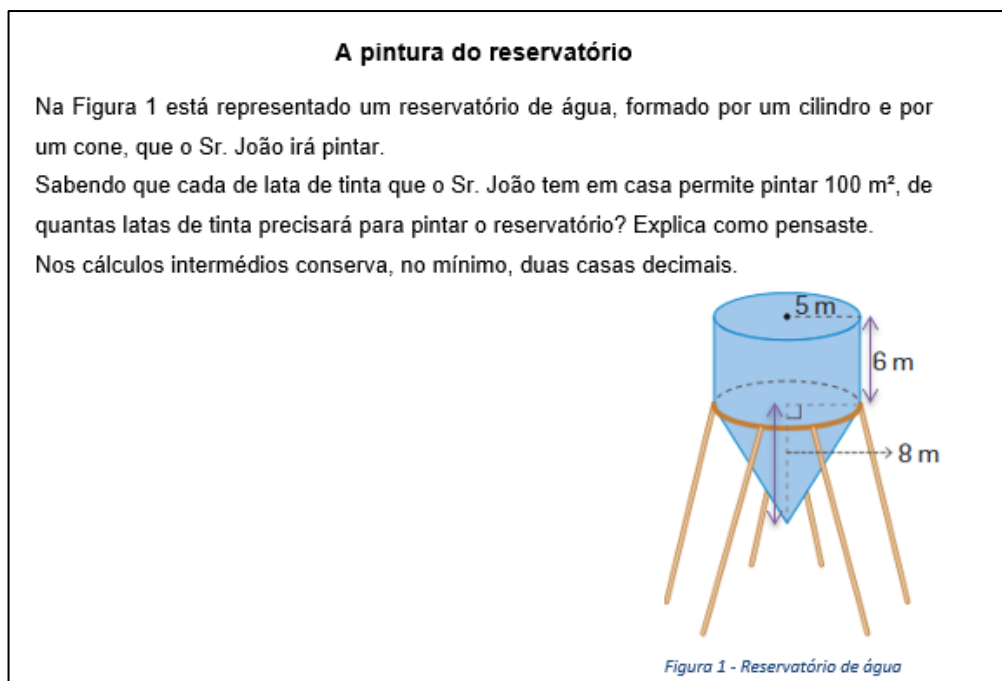


Figura 5 - Enunciado do segundo problema

³ Adaptado de Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2025). *MAT 8 – Vol. II* (p. 109). Texto Editores.

Tendo em conta as dificuldades observadas na resolução do primeiro problema, optou-se, nesta segunda intervenção, pela apresentação de uma tarefa que incidia sobre conteúdos semelhantes, mas com um enunciado mais conciso e com os dados claramente identificados na figura. Apesar do risco de diminuição do grau de dificuldade, esta opção foi ao encontro da forma como os problemas são habitualmente apresentados aos alunos, quer em contexto de aula, quer em momentos de avaliação. Existiu, assim, uma intencionalidade pedagógica neste ajuste do conceito de problema para esta turma de 8.º ano. Ao aproximar-se mais ao que os alunos estão habituados a trabalhar em aula, o produto desta intervenção serviu melhor os alunos, permitindo igualmente a recolha de dados mais concretos para análise das produções dos alunos. A proposta de resolução desta tarefa encontra-se no Anexo 6 – Proposta de resolução do Problema 2.

No dia 3 de março foi entregue o *feedback* aos alunos, em que foi comunicado que, na aula seguinte, deveriam trazer as reformulações para posterior digitalização. No dia 5 de março, a maioria dos alunos procedeu à entrega das reformulações, enquanto outros referiram não as ter realizado por considerarem, a partir da leitura do *feedback*, que a sua resolução estava correta. Verificou-se ainda a existência de alunos que optaram por não reformular. Dado o carácter não obrigatório de entrega da reformulação, considerou-se concluída esta fase, procedendo-se à distribuição dos questionários relativos à tarefa, tendo sido preenchidos em aula.

Considerando que os problemas da primeira e da segunda intervenção correspondiam a tarefas de consolidação, e que o teste de avaliação se realizaria a 6 de março, foi possível, com a conivência da professora cooperante, proceder à resolução de ambas as tarefas com a participação dos alunos, no final da aula do dia 5 de março. Observou-se que, na primeira tarefa, que inicialmente suscitou maiores dificuldades, a indicação de uma possível sequência de resolução foi suficiente para que a generalidade dos alunos compreendesse o processo, tendo estes verbalizado essa compreensão ao mobilizarem elementos do *feedback* previamente recebido.

A primeira fase da terceira e última intervenção pedagógica realizou-se no dia 6 de março, imediatamente após o teste de avaliação, nos últimos 20 minutos do segundo bloco de 50 minutos de uma aula lecionada pelo autor do presente estudo. O problema⁴ (Figura 6) foi selecionado em conjunto com a colega de estágio, uma vez que as

⁴ Retirado de Viana, J. P. (2012). Uma simples questão de velas. In J. P. Viana, *Uma vida sem problemas: A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 178). Clube do Autor.

produções dos alunos seriam analisadas no âmbito de ambas as intervenções pedagógicas.

As velas

Temos duas velas, uma com 18 centímetros de altura e outra com 11 centímetros. A vela maior arde 1,5 centímetros por hora. A vela menor arde 1 centímetro por hora.

As duas velas são acesas ao mesmo tempo.

Ao fim de quantas horas terão as duas velas a mesma altura? Apresenta e justifica o teu raciocínio.

Figura 6 - Enunciado do terceiro problema

Para este problema, procurou-se uma tarefa que não dependesse exclusivamente dos conteúdos abordados em aula, e que, simultaneamente, não apresentasse um nível de exigência que comprometesse o envolvimento dos alunos na sua resolução. Nesta tarefa, admitia-se o recurso a diferentes formas de representação, nomeadamente representações mais gráficas como desenhos ou tabelas, ou de natureza mais algébrica, como a utilização de equações. Pretendia-se que os alunos fossem capazes de mobilizar as etapas do processo de resolução de problemas e aplicar uma ou mais estratégias adequadas, não descurando o sentido crítico na avaliação das suas respostas e da eficácia do processo utilizado. A proposta de resolução desta tarefa encontra-se no Anexo 8 – Proposta de resolução do Problema 3.

A tarefa foi aplicada como introdução das equações literais, tendo a sua seleção sido orientada pela intenção de promover a perceção de que as equações podem constituir uma ferramenta de otimização na resolução de problemas de quotidiano, contribuindo para a redução do seu carácter abstrato junto dos alunos. Considerando que, aquando da abordagem das equações de 1.º grau, a maioria dos alunos evidenciou dificuldades na sua resolução, optou-se por um problema com grau de dificuldade moderado.

No dia 10 de março, foram entregues aos alunos os *feedbacks* relativos às suas resoluções, salientando-se que estas assumiram, maioritariamente, uma natureza visual, não se verificando o recurso a equações. Posteriormente, no dia 12 de março, procedeu-se ao registo das resoluções dos alunos, reformuladas após o recebimento do *feedback*, tendo sido igualmente distribuído o questionário relativo à tarefa.

A organização da intervenção pedagógica privilegiou um ciclo de resolução, *feedback* e reformulação, promovendo um trabalho centrado no processo de aprendizagem dos

alunos. Esta dinâmica permitiu valorizar as respostas finais, mas sobretudo a forma como os alunos mobilizaram o *feedback* escrito na melhoria das suas resoluções.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, apresentam-se as opções metodológicas que orientaram a realização do estudo, bem como os processos adotados para a recolha e análise dos dados. Tendo em conta questões de investigação definidas, procurou-se selecionar métodos e instrumentos que permitissem compreender, de forma aprofundada, o papel do *feedback* escrito na comunicação matemática escrita dos alunos durante a resolução de problemas.

Inicia-se com a fundamentação das opções metodológicas assumidas. Seguidamente, descrevem-se os diferentes procedimentos de recolha de dados implementados ao longo da intervenção pedagógica. Por fim, apresentam-se os procedimentos de análise de dados e as considerações éticas que orientaram a condução da investigação, procurando assegurar a validade, a consistência e o rigor científico do estudo.

4.1. Opções metodológicas

A intervenção pedagógica foi concebida com o objetivo de analisar o papel do *feedback* escrito na capacidade de comunicar por escrito a resolução de problemas numa turma do 8.º ano, tendo sido estruturada em torno da exploração de três problemas organizados em duas fases. O estudo foi norteado pelas seguintes questões de investigação:

- i. Q1 – Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas?
- ii. Q2 – Qual o contributo do *feedback* escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas?
- iii. Q3 – Como os alunos percecionam o *feedback* escrito recebido?

Este estudo insere-se no paradigma interpretativo, partindo do pressuposto de que a realidade social é construída pelos indivíduos através das suas interações e das interpretações que produzem sobre as suas experiências (Amado, 2017; Carmo & Ferreira, 2008; Cohen et al., 2018). Nesta perspetiva, a realidade não é entendida como uma entidade única e objetiva passível de ser observada de forma neutra ou totalmente apreendida, mas como uma construção dinâmica resultante dos significados que os sujeitos atribuem às suas ações e aos contextos em que estas ocorrem (Bogdan & Biklen, 1994; Denzin & Lincoln, 2005; Vale, 2004). Consequentemente, o foco da

investigação desloca-se da procura de relações de causa e efeito para a compreensão dos fenómenos tal como são vividos e interpretados pelos participantes nos seus contextos naturais (Vale, 2004). Assim, procura-se compreender as perspetivas dos participantes e os significados que atribuem às suas experiências, reconhecendo simultaneamente o papel interpretativo do investigador no processo de construção do conhecimento (Vale, 2004).

Atendendo à natureza do estudo, optou-se por uma abordagem qualitativa. Segundo Amado e Silva (2017), a investigação qualitativa consiste numa pesquisa sistemática orientada para a compreensão do sentido dos comportamentos, das experiências e das formas de pensar dos participantes, considerando os contextos sociais, culturais e institucionais em que estes fenómenos se desenvolvem. De igual modo, Denzin e Lincoln (1994, citados em Vale, 2004) referem que a investigação qualitativa assenta numa abordagem interpretativa e naturalista, procurando estudar os fenómenos nos seus ambientes naturais e compreender os significados que lhes são atribuídos pelos intervenientes. A adoção desta abordagem revela-se adequada aos objetivos do presente estudo, uma vez que não se pretende testar hipóteses nem estabelecer relações causais generalizáveis, mas compreender de forma aprofundada como os alunos comunicam matematicamente por escrito na resolução de problemas, de que modo o *feedback* escrito influencia a evolução dessa comunicação e como os alunos percecionam o *feedback* recebido. Atendendo à natureza destas questões, que exigem a análise de processos, significados e interpretações construídos pelos participantes no contexto específico da sala de aula, considera-se que uma abordagem qualitativa e interpretativa é a mais adequada para compreender o fenómeno em estudo (Merriam & Tisdell, 2016; Stake, 1995).

Em consonância com esta abordagem qualitativa e interpretativa, o estudo assume o design de um ensaio para um estudo de caso. Segundo Stake (1995) e Yin (2018), o estudo de caso caracteriza-se pela análise aprofundada de um fenómeno contemporâneo no seu contexto real, procurando compreender a sua complexidade e singularidade. Neste trabalho, o caso corresponde à intervenção pedagógica desenvolvida numa turma específica do 8.º ano, no âmbito da PES, centrando-se na utilização do *feedback* escrito na resolução de problemas matemáticos. A escolha deste desenho metodológico justifica-se pela necessidade de analisar de forma contextualizada as produções dos alunos, os processos de reformulação e as perceções construídas ao longo da intervenção, sem a pretensão de generalizar os resultados para outros contextos educativos.

Em contexto de aula, procedeu-se ao registo das reformulações das resoluções dos alunos, mediante sua digitalização ou fotografia pelo professor, tendo por base o *feedback* previamente recebido. Após a conclusão de cada etapa de reformulação, foi aplicado um questionário (Anexos 9, 10 e 11), com o objetivo de recolher as perceções dos alunos relativamente ao problema proposto, ao *feedback* disponibilizado e ao processo de revisão das suas respostas.

Complementarmente, após a realização das três intervenções, foram efetuadas, no dia 15 de maio de 2026, entrevistas semiestruturadas a seis alunos (Miguel, Carla, Margarida, Joana, Rita e Marta), selecionados de forma a representar diferentes níveis de desempenho, bem como diferentes padrões de participação nas aulas e de resposta aos problemas propostos. As entrevistas decorreram nas instalações da escola, numa sala de aula disponibilizada para o efeito, em horário previamente acordado com os alunos. Estas entrevistas permitiram aprofundar a compreensão das suas experiências e perceções relativamente ao *feedback* escrito.

A recolha de dados incidiu na análise comparativa entre as resoluções iniciais e as respetivas reformulações, permitindo identificar alterações introduzidas pelos alunos, progressos nas suas respostas e evidências da utilização do *feedback* no processo de aprendizagem. Desta forma, procurou-se compreender os efeitos do *feedback* sobre o produto final apresentado pelos alunos e a forma como este contribuiu para promover processos de reflexão, revisão e melhoria das suas produções matemáticas.

Paralelamente, foram considerados outros instrumentos de recolha de dados, nomeadamente a observação participante durante os momentos de resolução, notas de campo, registos áudio durante as resoluções, questionários aplicados aos alunos e, ainda, uma entrevista semiestruturada realizada a um conjunto de seis alunos selecionados. Esta seleção permitiu desenvolver um estudo mais aprofundado, possibilitando uma análise detalhada das suas produções, perceções e processos de aprendizagem (Stake, 1995; Yin, 2018).

A diversidade de fontes de dados mobilizada configura uma estratégia de triangulação, contribuindo para o reforço da validade e consistência da análise (Denzin & Lincoln, 2005; Patton, 2002). Deste modo, foi possível obter uma compreensão mais abrangente do impacto do *feedback* escrito, tanto ao nível da evolução das produções dos alunos, como no que se refere às suas perceções e à forma como mobilizam esse *feedback* na melhoria da comunicação matemática escrita.

4.2. Instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados foi organizada de modo a permitir uma análise rigorosa do papel do *feedback* escrito na capacidade de comunicar, por escrito, a resolução de problemas matemáticos. Para tal, recorreu-se a diferentes procedimentos de recolha de dados:

- i. Produções escritas dos alunos;
- ii. Gravações áudio;
- iii. Notas de campo;
- iv. Questionários e entrevistas.

Na Tabela 2 apresenta-se a relação entre os instrumentos de recolha de dados adotados e as questões de investigação, de forma que estas possam ser respondidas de forma mais completa e verosímil.

		Instrumentos de recolha de dados			
		Produções escritas dos alunos	Gravações de áudio	Notas de campo	Questionários e entrevistas
Questões de investigação	Q1 – Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas?	×	×	×	
	Q2 – Qual o contributo do <i>feedback</i> escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas?	×		×	×
	Q3 – Como os alunos percecionam o <i>feedback</i> escrito recebido?		×		×

Tabela 2 - Relação entre os instrumentos de recolha de dados e as questões de investigação

Face ao anteriormente descrito, procede-se à apresentação e fundamentação das opções de recolha de dados adotadas, destacando a sua adequação às questões de investigação conforme sintetizado na Tabela 2.

A análise das produções escritas dos alunos constitui um procedimento amplamente utilizado em investigação em educação matemática, na medida em que permite aceder diretamente ao pensamento dos alunos, às estratégias mobilizadas e à forma como

estruturam e comunicam o seu raciocínio (Baxter & Lederman, 1999; Boavida et al., 2008; Ponte et al., 2009). Este tipo de dados possibilita, ainda, a identificação de níveis de compreensão, dificuldades recorrentes e formas de argumentação utilizadas na resolução de problemas (NCTM, 2000).

No presente estudo, as produções escritas dos alunos assumem um papel central, sendo analisadas no âmbito dos três problemas propostos, cada uma organizada em duas fases: uma resolução inicial e uma reformulação posterior à receção de *feedback* escrito. A análise incide, em particular, sobre a forma como os alunos comunicam matematicamente por escrito, recorrendo a uma grelha de critérios apresentados na Figura 2 (secção 2.2), que contempla a correção das respostas, a completude, a utilização de representações e a organização, contribuindo assim para dar resposta à Q1. Adicionalmente, a comparação entre as resoluções iniciais e as reformulações permite analisar a evolução das produções escritas ao longo da intervenção, possibilitando compreender em que medida o *feedback* contribui para melhorar a clareza, a estrutura, o rigor e a qualidade da comunicação matemática escrita, contribuindo assim para responder à Q2.

Deste modo, as produções escritas constituem uma fonte privilegiada de dados, permitindo caracterizar a comunicação matemática dos alunos e compreender o impacto do *feedback* escrito na evolução da sua capacidade de expressão do pensamento matemático (Black & Wiliam, 1998; Hattie & Timperley, 2007).

O recurso a gravações de áudio constitui um instrumento relevante na investigação qualitativa, uma vez que permite registar com detalhe as interações verbais e os processos de pensamento dos participantes em contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen et al., 2018; Erickson, 1986). Deste modo, este tipo de registo possibilita aceder ao conteúdo das intervenções dos alunos, bem como à forma como formulam dúvidas, desenvolvem raciocínios e interagem com o professor durante a realização das tarefas.

As gravações de áudio foram realizadas durante os momentos de resolução dos problemas em sala de aula, com o objetivo de registar as questões colocadas pelos alunos, as dúvidas manifestadas, as suas reações face às tarefas e o modo como o professor respondeu às solicitações apresentadas. Adicionalmente, foram também gravadas as entrevistas individuais o que permitiu recolher as suas perceções relativamente ao *feedback* escrito recebido. Este recurso revelou-se fundamental para complementar a análise das produções escritas, possibilitando uma compreensão mais

aprofundada dos processos associados à resolução dos problemas, em particular no que se refere à construção e expressão do pensamento matemático, em articulação com a Q1. As gravações das entrevistas permitiram ainda analisar as perceções dos alunos sobre o *feedback* escrito – ao nível da sua utilidade, compreensão e impacto – contribuindo diretamente para responder à Q3.

Neste sentido, as gravações de áudio constituem uma fonte de dados essencial para compreender os processos que sustentam as produções dos alunos, permitindo uma análise mais contextualizada da influência do *feedback* na sua comunicação matemática (Kvale & Brinkmann, 2009; Patton, 2002).

As notas de campo constituem um instrumento fundamental na investigação qualitativa, permitindo registar, de forma sistemática, observações realizadas em contexto natural, bem como reflexões do investigador sobre os acontecimentos observados (Bogdan & Biklen, 1994; Emerson et al., 2011). Este tipo de registo possibilita documentar aspetos do contexto que não são facilmente captáveis por outros meios, como comportamentos, atitudes, reações dos alunos e dinâmicas de sala de aula.

No presente estudo, as notas de campo foram elaboradas durante e após os momentos de resolução dos problemas, com o objetivo de registar comportamentos dos alunos face às tarefas propostas, o seu envolvimento, as dificuldades evidenciadas e as estratégias adotadas. Foram ainda incluídas observações relativas à forma como os alunos reagiram ao *feedback* escrito e ao modo como abordaram a reformulação das suas resoluções. Para além disso, as notas de campo revelaram-se importantes para apoiar a tomada de decisões ao longo da intervenção, permitindo ajustar a formulação e a apresentação dos problemas.

A observação participante constituiu um procedimento complementar de recolha de dados ao longo da intervenção pedagógica. De acordo com Amado e Silva (2017), a observação participante permite ao investigador recolher informação em contexto natural, possibilitando uma compreensão mais aprofundada dos comportamentos, interações e significados atribuídos pelos participantes às situações vivenciadas. Neste estudo, a observação incidiu sobretudo sobre as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução dos problemas, as dificuldades evidenciadas na comunicação matemática escrita, a forma como recebiam o *feedback* escrito. Os registos resultantes desta observação foram sistematizados através de notas de campo elaboradas durante e após cada sessão. Estas notas permitiram documentar episódios considerados relevantes para a compreensão dos fenómenos em estudo, constituindo

uma fonte complementar de informação para interpretar os dados provenientes das produções escritas, das gravações áudio, dos questionários e das entrevistas.

Este recurso revelou-se, assim, essencial para complementar os restantes dados recolhidos, permitindo contextualizar as produções escritas e as interações registadas em áudio. As notas de campo contribuíram para uma compreensão mais aprofundada da forma como os alunos comunicam matematicamente por escrito, em articulação com a Q1, e para interpretar a evolução das suas produções ao longo da intervenção, contribuindo igualmente para responder à Q2. Deste modo, as notas de campo permitiram enriquecer a análise dos dados, fornecendo informação relevante para a interpretação dos resultados e para a compreensão do impacto do *feedback* escrito no processo de aprendizagem dos alunos (Patton, 2002; Flick, 2018).

Os inquéritos aos alunos foram realizados através da aplicação de questionários e da realização de entrevistas semiestruturadas, constituindo instrumentos fundamentais para aceder às perceções dos alunos relativamente ao *feedback* escrito e ao seu impacto no processo de aprendizagem.

Os questionários foram aplicados no final de cada uma das tarefas propostas, abrangendo, assim, os três problemas trabalhados ao longo da intervenção. Este instrumento revelou-se particularmente adequado para recolher informação de um conjunto alargado de alunos, permitindo identificar tendências nas suas perceções relativamente ao *feedback*, nomeadamente ao nível da sua clareza, utilidade e compreensão (Cohen et al., 2018). Para além disso, possibilitou recolher dados sobre a forma como os alunos utilizaram o *feedback* na reformulação das suas respostas, contribuindo para a análise do seu impacto na melhoria da comunicação matemática escrita.

Ao longo da intervenção pedagógica, os questionários foram aplicados em dois formatos distintos. O primeiro questionário, associado ao problema “O cilindro compactador”, foi disponibilizado através da plataforma *Classroom*, sob a forma de formulário digital (*Google Forms*), com o objetivo de recolher as respostas ao questionário apresentado no Anexo 9 – Questionário 1. Dos 19 alunos elegíveis para o estudo, 18 realizaram a tarefa e, destes, 13 responderam ao questionário. Com o intuito de aumentar a taxa de participação, optou-se por aplicar os dois questionários seguintes em formato papel, sendo preenchidos pelos alunos nos minutos finais das aulas em que foram distribuídos. Nestes casos, registou-se a participação de todos os 19 alunos elegíveis.

Relativamente às entrevistas, foram realizadas seis entrevistas semiestruturadas a seis alunos previamente selecionados. A escolha desta modalidade justifica-se pela sua flexibilidade, permitindo um fio condutor através de um guião prévio (Anexo 12), mas concedendo, simultaneamente, espaço para que os alunos expressassem livremente as suas perspetivas, sendo a entrevista o método por excelência para aceder à subjetividade e aos sentidos que os atores atribuem às suas experiências (Amado & Ferreira, 2017). Assim, as entrevistas permitiram aprofundar aspetos que não seriam facilmente captáveis através dos questionários, nomeadamente no que diz respeito às interpretações e significados atribuídos pelos alunos ao *feedback* recebido (Kvale, 1996; Kvale & Brinkmann, 2009).

Durante as entrevistas, foram exploradas de forma mais detalhada algumas das produções escritas dos alunos, procurando compreender as razões subjacentes às alterações realizadas nas reformulações e o modo como o *feedback* influenciou essas mudanças. Este processo permitiu, ainda, perceber se os alunos reconheceram ganhos na sua capacidade de comunicar matematicamente por escrito e de que forma valorizam o *feedback* no seu percurso de aprendizagem.

A articulação entre os dados recolhidos através dos questionários e das entrevistas possibilitou uma compreensão mais completa das perceções dos alunos relativamente ao *feedback* escrito, contribuindo diretamente para responder à Q3 e permitindo interpretar, de forma mais sustentada, a influência do *feedback* na evolução das suas produções escritas.

A triangulação dos dados constitui um princípio central na investigação qualitativa, uma vez que permite cruzar diferentes fontes de informação e, assim, reforçar a validade e a robustez da análise (Denzin, 2017; Flick, 2018; Patton, 2002). Neste estudo, a diversidade de procedimentos de recolha de dados, nomeadamente as produções escritas dos alunos, as gravações de áudio, as notas de campo e os inquéritos por questionário e entrevista, com as questões de investigação, permitiu a triangulação dos dados, assegurando uma análise mais abrangente e fundamentada. Desta forma, as conclusões não se basearam numa única fonte de evidência, mas na articulação de diferentes perspetivas, permitindo uma compreensão mais holística do papel do *feedback* escrito na capacidade de comunicação matemática dos alunos.

No que concerne à análise das características do *feedback*, tanto escrito como associado aos momentos de interação em sala de aula, procurou-se reduzir a subjetividade inerente ao facto de o investigador ser simultaneamente o autor dos

feedbacks. A análise foi conduzida pelo próprio investigador, assumindo-se como uma leitura interpretativa, sustentada pela literatura sobre *feedback* eficaz (Brookhart, 2008; Hattie & Timperley, 2007; Sadler, 1989; Shute, 2008). Este procedimento permitiu manter a coerência na análise e garantir a consistência interna dos dados, ainda que reconhecendo as limitações associadas à subjetividade inerente a este tipo de análise.

No que respeita às questões éticas, o estudo foi conduzido em conformidade com os princípios fundamentais da investigação em educação, assegurando o respeito pelos participantes e a proteção dos dados recolhidos (Baptista et al., 2020; British Educational Research Association [BERA], 2018). Foram garantidos princípios como o consentimento informado, a voluntariedade da participação, a confidencialidade e o anonimato dos participantes. O consentimento e o assentimento foram formalizados através de um único documento (Anexo 1), no qual se distinguiram duas secções: uma destinada à autorização por parte do encarregado de educação e outra relativa ao assentimento do aluno. Nesse documento foram explicitados os objetivos do estudo, os procedimentos adotados e as garantias de confidencialidade, permitindo que tanto os encarregados de educação como os alunos tomassem uma decisão informada relativamente à participação na investigação. A participação dos alunos foi, assim, voluntária e esclarecida, respeitando a sua autonomia e garantindo que apenas participaram aqueles que manifestaram concordância. No que concerne à confidencialidade e proteção dos dados, todas as informações recolhidas foram tratadas de forma anónima, assegurando que a identidade dos alunos não fosse associada às análises e conclusões do estudo.

Por fim, os participantes e os seus encarregados de educação foram informados de que os resultados da investigação poderiam ser disponibilizados mediante solicitação, promovendo a transparência do processo investigativo e o retorno à comunidade educativa. Para assegurar o anonimato, foram atribuídos nomes fictícios aos participantes, sem qualquer correspondência com a sua identidade real.

5. Análise e discussão dos resultados

Neste capítulo, são analisadas as produções dos seis alunos selecionados (Miguel, Carla, Margarida, Joana, Rita e Marta), bem como as respetivas reformulações após a receção de *feedback* escrito. Embora todas as produções tenham sido consideradas na análise global dos dados, apresentam-se apenas os exemplos que evidenciam aspetos mais relevantes ou diferenciadores, de acordo com os critérios definidos na secção 2.2 (Figura 2), de forma a evitar a repetição de situações semelhantes. A articulação destes critérios permitiu identificar padrões consistentes nas produções dos alunos, evidenciando tanto os aspetos em que revelam maior proficiência como aqueles em que persistem fragilidades.

É igualmente efetuada a análise do *feedback* fornecido às produções escritas dos alunos, com o objetivo de evidenciar a coerência entre o diagnóstico das dificuldades e as estratégias de regulação propostas. Esta articulação assume particular relevância no âmbito do *feedback* formativo, uma vez que, conforme referem Hattie e Timperley (2007), o *feedback* apenas se torna eficaz quando se adequa ao nível de aprendizagem do aluno e orienta de forma clara os passos seguintes. Por fim, são também apresentadas as perceções dos alunos relativamente ao *feedback* recebido, com base nos questionários e entrevistas realizados.

5.1. Problema 1

No primeiro momento da intervenção pedagógica, os alunos resolveram, em aula, o Problema 1 (Figura 4, secção 3.2), que visa a determinação do número de voltas que um cilindro compactador tem de efetuar para alisar uma faixa de 12 metros de comprimento.

De um modo geral, observou-se que os alunos que participaram na intervenção evidenciaram dificuldades na interpretação do enunciado, manifestando, desde uma fase inicial, alguma resistência à sua extensão. Esta reação traduziu-se em verbalizações espontâneas de dificuldade por parte de alguns alunos, que rapidamente se disseminaram pela turma, contribuindo para a criação de um ambiente marcado por expressões de desagrado e desmotivação.

Após a entrega do enunciado da tarefa, ocorreram algumas interações com os alunos que permitem compreender a origem das suas dúvidas. A aluna Marta verbalizou dificuldades de compreensão, afirmando: “Não estou a perceber nada!”, apenas alguns

segundos após ter recebido o enunciado. Perante esta manifestação, o professor questionou: “Já leste o enunciado com atenção?”, ao que a aluna responde: “Já li isto 3 vezes”. Esta resposta deve ser entendida não como uma evidência de uma leitura efetivamente compreensiva, mas como uma reação imediata e automatizada de justificação da dificuldade. Destaca-se ainda a questão colocada pela Joana: “Como é que o cilindro avança?”, a qual revela dificuldades na interpretação da situação contextualizada. O professor aproveitou estas dúvidas para proceder à clarificação com toda a turma. Para isso, recorreu a um estojo de uma aluna com forma cilíndrica, solicitando aos alunos que imaginassem o rolo que, ao rodar sucessivamente, vai alisando o pavimento, simulando esse movimento em cima da mesa. De seguida, colocou questões orientadoras, como: “Quando dá uma volta completa, que distância pavimentou?” e “Quanto é que percorreu ao fim de uma volta?”, com o objetivo de explicitar a relação entre a rotação do cilindro e a distância percorrida. Acrescentou ainda que, na alínea a), “não necessitam do diâmetro do cilindro, porque não é pedido qualquer cálculo. Apenas é pedido que indiquem se concordam ou não com a afirmação e que justifiquem essa escolha”.

5.1.1. Miguel

A resolução inicial do Miguel evidenciou uma compreensão global da situação apresentada no Problema 1, embora tenha revelado fragilidades ao nível da explicitação das relações matemáticas e da execução dos procedimentos necessários à sua resolução.

Relativamente à alínea a) (Figura 7), o aluno refutou a afirmação apresentada pelo trabalhador, reconhecendo que a distância percorrida pelo cilindro numa volta completa não corresponde ao diâmetro do cilindro.

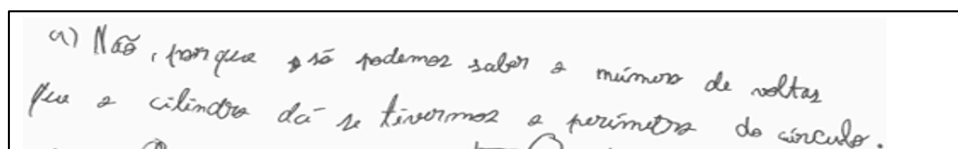


Figura 7 - Resolução do Miguel da alínea a) do Problema 1

A resposta permitiu inferir que o Miguel compreendeu, ainda que de forma implícita, que essa distância estava relacionada com o comprimento da circunferência da base. Contudo, a justificação apresentada permaneceu pouco desenvolvida, limitando-se

essencialmente à referência ao perímetro, sem estabelecer explicitamente a relação entre o movimento de rotação do cilindro e a distância percorrida. Do mesmo modo, não clarificou por que motivo o diâmetro constituía uma grandeza inadequada neste contexto.

Na alínea b), o Miguel identificou corretamente a relação matemática necessária para iniciar a resolução do problema, revelando compreender que a área lateral do cilindro constituía o ponto de partida para determinar o raio da base. Contudo, manifestou dificuldades durante o desenvolvimento algébrico da resolução, particularmente na manipulação da equação.

Miguel: O x deu-me negativo!

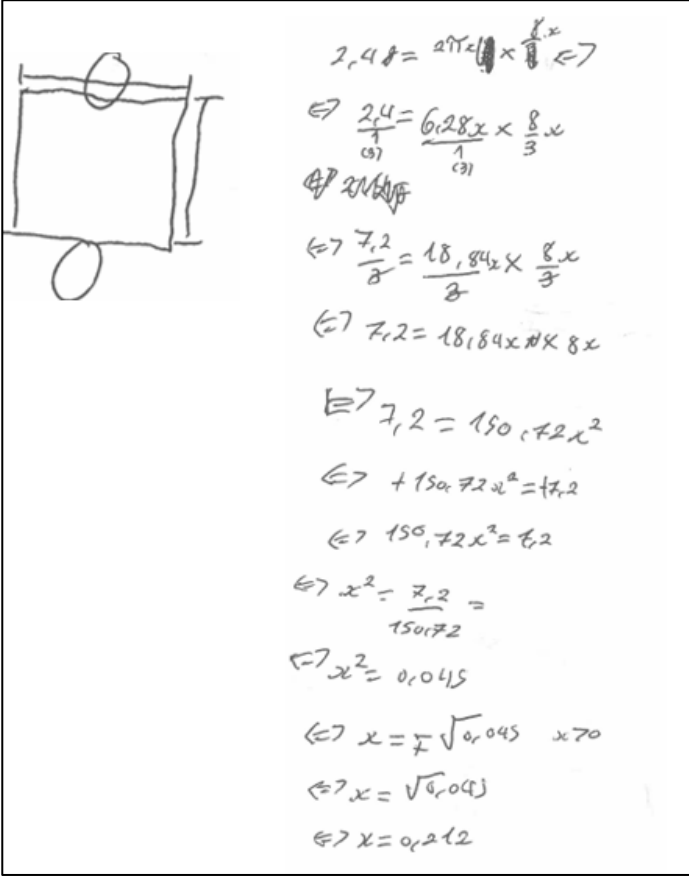
Professor: Faltam aqui coisas! Tu escreveste $2 \times \pi \times r$, mas a área lateral é dada pelo *perímetro da base* $\times$ *altura*.

Miguel: Mas eu não sei a altura.

Professor: O que diz o enunciado sobre a altura?

Miguel: $\frac{8}{3}r$. Posso resolver a equação em que o x é r .

Apesar de utilizar a informação resultante deste diálogo, como se observa na Figura 8, o Miguel recorreu a procedimentos inadequados, nomeadamente a introdução de denominadores comuns na multiplicação de frações, o que comprometeu o resultado obtido. A resolução evidenciou, assim, dificuldades ao nível da manipulação algébrica, ainda que a modelação inicial do problema tenha sido adequada.



Handwritten student work showing a diagram of a cylinder and a series of algebraic calculations:

$$2,48 = 2\pi r \times \frac{8x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2,4}{1} = \frac{6,28x}{1} \times \frac{8x}{3}$$

~~47 20/11/15~~

$$\Leftrightarrow \frac{7,2}{8} = \frac{18,84x}{8} \times \frac{8x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 7,2 = 18,84x \times 8x$$

$$\Leftrightarrow 7,2 = 150,72x^2$$

$$\Leftrightarrow +150,72x^2 = 7,2$$

$$\Leftrightarrow 150,72x^2 = 7,2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{7,2}{150,72}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0,045$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{0,045} \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{0,045}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,212$$

Figura 8 - Resolução do Miguel da alínea b) do Problema 1

Acresce que o aluno não apresentou uma resposta final explícita, interrompendo a resolução antes de determinar o número de voltas necessárias para o cilindro percorrer a distância indicada no enunciado. Apesar de ter desenvolvido parte dos procedimentos adequados, não estabeleceu a ligação entre os resultados obtidos e a questão colocada, evidenciando uma resolução centrada na realização de cálculos, sem a respetiva conclusão no contexto do problema. Atendendo a que a resolução foi classificada como parcialmente correta e não concluída, o *feedback* (Figura 9), escrito a azul, incidia diretamente sobre estes aspetos, orientando o aluno para a necessidade de completar o raciocínio desenvolvido e apresentar uma resposta adequada à situação proposta.

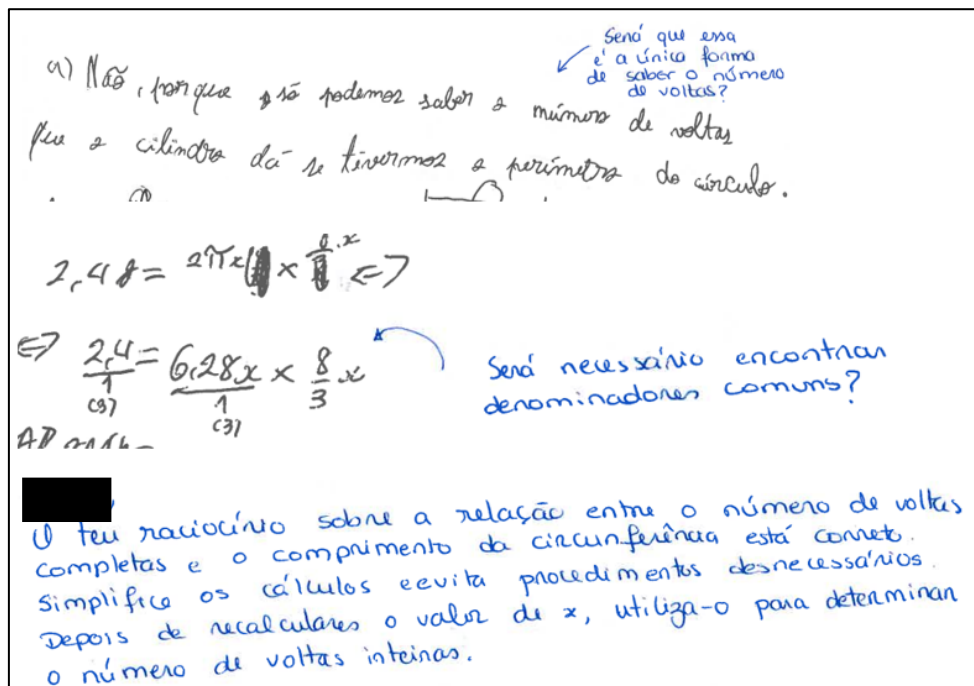


Figura 9 - Feedback dado ao Miguel relativamente ao Problema 1

Por um lado, as questões “Será que essa é a única forma de saber o número de voltas?” e “Será necessário encontrar denominadores comuns?” procuraram promover a reflexão sobre os procedimentos utilizados. Por outro lado, o comentário final “Simplifica os cálculos e evita procedimentos desnecessários. Depois de recalculares o valor de x , utiliza-o para determinar o número de voltas inteiras” orientou explicitamente a melhoria. Com este tipo de intervenção, pretendeu-se fornecer ao aluno uma orientação para o processo e para a conclusão, respondendo às fragilidades identificadas na análise da sua produção.

Na reformulação, presente na Figura 10, o aluno escreveu: “(...) quando o cilindro dá uma volta, ele não avança o valor do diâmetro, mas sim o valor do perímetro da base (círculo)”. Esta reformulação evidenciou uma melhoria na comunicação matemática, uma vez que o aluno passou a explicitar de forma mais clara a relação entre o movimento de rotação do cilindro e a distância percorrida.

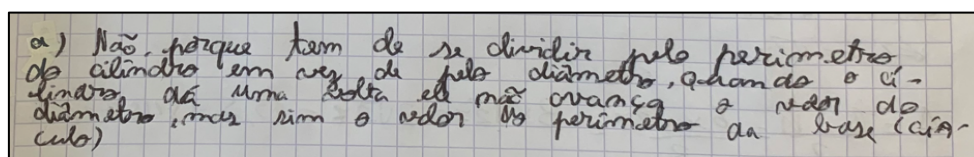


Figura 10 - Reformulação da resposta do Miguel à alínea a) do Problema 1

Deste modo, observou-se uma evolução do nível da justificação (de nível baixo para alto), que deixou de se limitar à simples referência ao perímetro e passou a integrar uma explicação contextualizada do seu significado.

Também na alínea b) se verificaram progressos relevantes. Na resolução inicial, o Miguel apresentou dificuldades ao nível da transformação e simplificação da equação, bem como na introdução de procedimentos desnecessários, como a redução ao mesmo denominador na multiplicação de frações. Essas fragilidades comprometeram a validade da resolução e dificultaram a conclusão do problema. Na reformulação da alínea b) (Figura 11), observou-se que o aluno conseguiu estruturar a resolução de forma mais organizada e coerente.

$$\begin{aligned}
 &b) \\
 &V_{\text{cilindro}} = A_b \times h = r^2 \times \pi \times h \\
 &h = \frac{8}{3} \pi \\
 &r^2 = \frac{2,4 \times 3}{16 \pi} = 0,143 \\
 &r^2 = 2,4 : (2 \pi \times \frac{8}{3}) \\
 &r^2 = 2,4 : 16,755 \\
 &r^2 = 0,143 \\
 &r = \sqrt{0,143}, \quad r \approx 0 \\
 &r = \sqrt{0,143} \\
 &r \approx 0,378 \\
 &P_{\text{circula}} = 2 \times \pi \times 0,378 \\
 &\quad \approx 2,374 \\
 &\frac{12}{2,374} \approx 5,055 \\
 &R: \text{São precisas 6 voltas}
 \end{aligned}$$

Figura 11 - Reformulação do Miguel da resposta à alínea b) do Problema 1

O Miguel utilizou corretamente a fórmula do volume do cilindro, substituiu adequadamente a relação entre a altura e o raio fornecida no enunciado, determinou um valor aproximado do raio e utilizou-o para calcular o perímetro da base do cilindro. Posteriormente, dividiu a distância total pelo comprimento da circunferência, concluindo que seriam necessárias seis voltas completas. A resposta final surgiu explicitamente formulada e adequada ao contexto do problema.

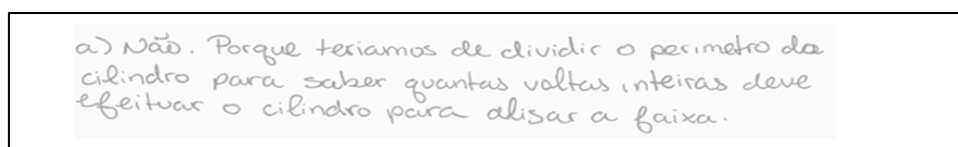
A reformulação da alínea b) foi considerada correta, organizada e com a resposta final explícita. Apresentou um nível médio de justificação, uma vez que o aluno explicitou as principais etapas e relações matemáticas utilizadas, embora algumas passagens algébricas tenham permanecido pouco detalhadas. O tipo de justificação correspondeu predominantemente à aplicação de regras, uma vez que o aluno recorreu a fórmulas matemáticas, embora não tenha explicitado a relação entre os conceitos envolvidos. Relativamente às representações, manteve o recurso exclusivo à representação simbólica.

De um modo geral, a reformulação do Miguel evidenciou que o *feedback* fornecido contribuiu para a consolidação de ideias que já se encontravam presentes na sua compreensão inicial, promovendo uma maior coerência entre a interpretação, o cálculo e a comunicação matemática.

5.1.2. Carla

A resolução inicial da Carla evidenciou dificuldades significativas na interpretação da situação apresentada no Problema 1, particularmente ao nível da modelação matemática. Embora tenha revelado uma tentativa de identificar a informação relevante no enunciado, a aluna estabeleceu relações inadequadas entre as grandezas envolvidas, comprometendo o desenvolvimento da resolução.

Na alínea a) (Figura 12), a Carla refutou a afirmação apresentada pelo trabalhador. Contudo, à semelhança do observado na maioria das produções iniciais, a justificação apresentada permaneceu pouco desenvolvida, limitando-se à referência ao perímetro, sem explicitar qual a relação entre a rotação do cilindro e o comprimento da circunferência da base.



a) Não. Porque teríamos de dividir o perímetro do cilindro para saber quantas voltas inteiras deve efetuar o cilindro para alisar a faixa.

Figura 12 - Resolução da Carla da alínea a) do Problema 1

Na alínea b), as dificuldades manifestadas pela aluna assumiram uma natureza conceptual, nomeadamente a confusão entre a área e o perímetro, como se pode observar na Figura 13.

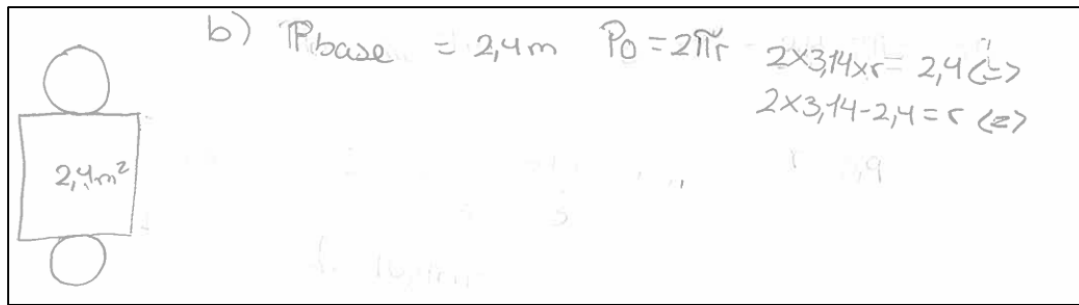


Figura 13 - Resolução da Carla da alínea b) do Problema 1

A equação $2 \times \pi \times r = 2,4$ constituiu um exemplo desta dificuldade, na medida em que revelou um erro de cálculo ou de substituição, agravado por uma interpretação incorreta da grandeza fornecida pelo enunciado. Neste caso, a aluna não esteve simplesmente a aplicar incorretamente uma fórmula, mas sim, a resolver um problema distinto daquele que foi proposto. Este tipo de erro, que ocorreu ao nível da modelação, comprometeu toda a resolução subsequente e justificou a sua classificação como incorreta. Apesar disso, observou-se o cuidado de identificar os dados relevantes do enunciado, sublinhando-os, evidenciando uma estratégia inicial de seleção de informação, embora esta não tenha sido acompanhada por uma interpretação adequada das relações matemáticas envolvidas.

Face às dificuldades apresentadas, o *feedback* fornecido à Carla (Figura 14), incidiu sobretudo na reconstrução da interpretação conceptual do problema.

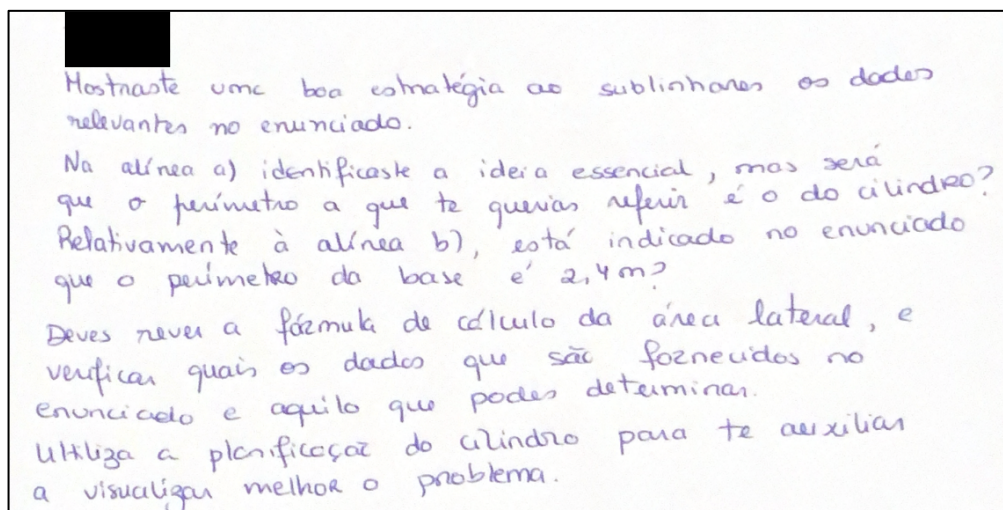
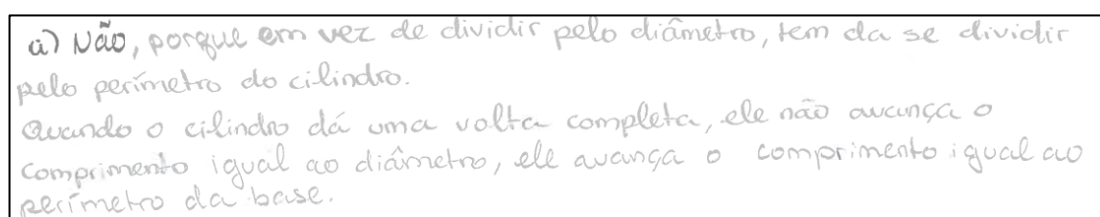


Figura 14 - *Feedback* dado à Carla relativamente ao Problema 1

A valorização inicial presente no comentário “Mostraste uma boa estratégia ao sublinhar os dados importantes do enunciado”, teve como objetivo reconhecer um aspeto positivo

da abordagem da aluna, nomeadamente a sua tentativa de identificar informação relevante no problema. Simultaneamente, o *feedback* orientou explicitamente para a reflexão sobre o erro central da resolução através da questão “Será que no enunciado indica que o perímetro da base é 2,4 metros?”. Esta formulação teve como objetivo levar a aluna a reconsiderar criticamente a interpretação da grandeza apresentada no enunciado, promovendo uma reconstrução conceptual da situação. Além disso, as orientações “Deves rever a fórmula da área lateral, e verificar quais os dados que estão fornecidos no enunciado e aquilo que podes extrair utilizando a planificação do cilindro para te auxiliar a visualizar melhor o problema” procuraram apoiar a reorganização do raciocínio matemático da aluna, incentivando-a a recorrer à planificação do cilindro como estratégia de visualização e compreensão geométrica. Este tipo de *feedback* alinha-se com a ideia de que, perante erros de natureza conceptual, o *feedback* deve promover a reorganização do conhecimento e evitar limitar-se à correção superficial (Hattie & Timperley, 2007).

A reformulação da resolução da Carla evidenciou uma evolução bastante significativa relativamente à produção inicial, nomeadamente na compreensão do enunciado e na interpretação dos dados. Como se observa na Figura 15, na resposta à alínea a), comparativamente à produção inicial, a aluna revelou uma compreensão mais consolidada da relação entre o movimento de rotação do cilindro e a distância percorrida. A Carla deixou de se limitar à referência isolada ao perímetro, passando a explicitar o significado dessa grandeza no contexto do problema, estabelecendo uma relação clara entre a rotação do cilindro e o comprimento da circunferência da base.



a) Não, porque em vez de dividir pelo diâmetro, tem de se dividir pelo perímetro do cilindro.
Quando o cilindro dá uma volta completa, ele não avança o comprimento igual ao diâmetro, ele avança o comprimento igual ao perímetro da base.

Figura 15 - Reformulação da resposta da Carla à alínea a) do Problema 1

Também na alínea b) se verificam progressos relevantes. Enquanto na resolução inicial a Carla confundia a área lateral do cilindro com o perímetro da base, conduzindo a uma modelação inadequada, na reformulação (Figura 16) conseguiu utilizar adequadamente a fórmula da área lateral do cilindro, substituir corretamente os dados fornecidos no enunciado e determinar um valor aproximado para o raio. Posteriormente, utilizou esse valor para calcular o perímetro da base e determinar o número de voltas necessárias

para o cilindro percorrer os 12 metros. A resposta final surgiu explicitamente formulada – “São precisas, no mínimo, 6 voltas” – revelando uma melhoria significativa relativamente à produção inicial, na qual a modelação incorreta impossibilitava a obtenção de uma solução adequada.

b) Área lateral do cilindro $\approx 2,4 \text{ m}^2$
 $h = \frac{8}{3}r$
 $r^2 = \frac{2,4 \times 3}{16\pi}$ $r^2 = \frac{7,2}{50,265}$
 $r^2 \approx 0,143$ $r^2 \approx \pm \sqrt{0,143}, r > 0$
 $r \approx \sqrt{0,143} \approx 0,378 \text{ m}$

Perímetro do círculo $= 2\pi r$
 $= 2 \times 3,14 \times 0,378$
 $\approx 2,374 \text{ m}$

 $\frac{12}{2,374} \approx 5,055$
R: São precisas, no mínimo, 6 voltas.

Figura 16 - Reformulação da resposta da Carla à alínea b) do Problema 1

A reformulação da Carla pôde, assim, ser considerada correta, organizada e com resposta final explícita. O nível de justificação situou-se num nível médio, pois algumas relações entre etapas e justificações de procedimentos não foram explicitadas. O tipo de justificação correspondeu predominantemente à aplicação de regras, dado que recorreu a fórmulas matemáticas e a substituições adequadas para construir a resolução.

O caso da Carla mostrou como um *feedback* centrado na problematização da interpretação inicial do enunciado e na reorganização da modelação matemática contribuiu para a reconstrução do raciocínio da aluna e para o desenvolvimento de uma resolução mais coerente, completa e matematicamente consistente. Neste sentido, o *feedback* parece ter desempenhado um papel relevante na reconstrução conceptual da situação e na clarificação das relações entre as grandezas envolvidas.

5.1.3. Joana

A resolução inicial da Joana evidenciou dificuldades ao nível da interpretação e da modelação matemática da situação apresentada no Problema 1, revelando uma compreensão ainda pouco consolidada das relações entre as grandezas envolvidas. Embora a aluna tenha recorrido a uma representação visual através de um esboço da

planificação do cilindro, esta estratégia não se encontrava devidamente articulada com o restante raciocínio matemático desenvolvido.

Na alínea a) (Figura 17), a Joana não apresentou inicialmente uma justificação matematicamente desenvolvida, evidenciando dificuldades em estabelecer a relação entre o movimento de rotação do cilindro e a distância percorrida. Apesar de ter reconhecido a necessidade de considerar o perímetro, a resposta não explicitou de forma clara que, numa volta completa, o cilindro avançava uma distância correspondente ao comprimento da circunferência da base. Assim, a compreensão subjacente ao fenómeno físico não foi adequadamente traduzida numa explicação matemática.

a) Não, porque em vez de dividir pelo diâmetro, tem de se dividir pelo perímetro do cilindro.

Figura 17 - Resolução da Joana da alínea a) do Problema 1

Na alínea b) (Figura 18), as dificuldades tornaram-se mais evidentes, uma vez que a resolução inicial apresentou erros de modelação e ausência de relações matemáticas válidas. Embora a aluna tenha recorrido a um esboço da planificação do cilindro como tentativa de compreender a situação geométrica, a representação surgiu desligada dos procedimentos posteriores, não contribuindo efetivamente para a construção do modelo matemático necessário à resolução.

b) $A_{\text{lateral}} \times P_{\text{base}} \times \text{altura}$



Figura 18 - Resolução da Joana da alínea b) do Problema 1

Deste modo, a produção inicial da Joana foi classificada como incorreta, uma vez que as relações estabelecidas não permitiram desenvolver uma resolução matematicamente adequada. Contudo, a utilização da representação icónica evidenciou uma tentativa de interpretar o problema através de diferentes formas de representação, revelando uma estratégia potencialmente adequada, embora ainda não mobilizada de forma eficaz.

Face às dificuldades identificadas, o *feedback* fornecido à Joana (Figura 19) evidenciou uma abordagem semelhante à adotada com a Carla, mas com um elemento adicional de valorização do esforço.

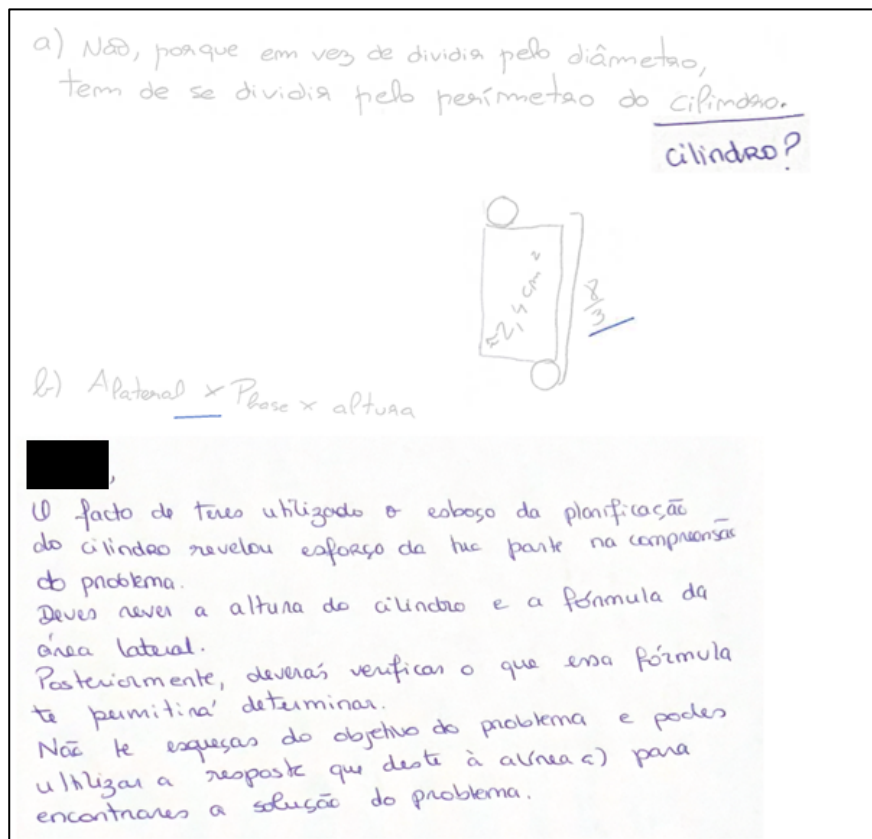


Figura 19 - *Feedback* dado à Joana relativamente ao Problema 1

A afirmação “O facto de teres utilizado o esboço da planificação do cilindro revelou um esforço da tua parte na compreensão do problema” procurou valorizar a estratégia visual utilizada pela aluna e reforçar positivamente a sua tentativa de interpretar a situação geométrica. Simultaneamente, as orientações “Deves rever a altura do cilindro e a fórmula da área lateral” procuraram direccionar a atenção da aluna para as relações matemáticas fundamentais do problema. A sugestão de utilizar a resposta da alínea a) para apoiar a resolução da alínea b) constituiu uma forma de promover um raciocínio mais integrado, incentivando a aluna a estabelecer conexões entre diferentes etapas de resolução do problema.

Na Figura 20, apresenta-se a reformulação da alínea a), em que a Joana escreveu: “Não, porque em vez de dividir pelo diâmetro, tem de se dividir pelo perímetro do cilindro. Quando o cilindro dá uma rotação completa, ele não avança o comprimento igual ao diâmetro, ele avança o comprimento igual ao perímetro da base”.

a) Não, porque em vez de dividir pelo diâmetro, tem de se dividir pelo perímetro do cilindro. Quando o cilindro dá uma volta completa, ele não avança o comprimento igual ao diâmetro, ele avança o comprimento igual ao perímetro da base.

Figura 20 - Reformulação da resposta da Joana à alínea a) do Problema 1

Comparativamente com a produção inicial, esta resposta evidenciou uma melhoria clara ao nível da explicitação da relação entre o movimento do cilindro e a distância percorrida. Enquanto anteriormente a referência ao perímetro surgia de forma pouco desenvolvida, nesta reformulação a aluna explicitou o significado do perímetro no contexto da rotação do cilindro, estabelecendo uma relação mais evidente entre o conceito geométrico e a situação física representada no problema. Esta evolução sugeriu que o *feedback* contribuiu para uma maior consciência da necessidade de justificar matematicamente os procedimentos utilizados.

Também na reformulação da alínea b), ilustrada na Figura 21, se observaram progressos relevantes. A Joana conseguiu estruturar uma sequência de cálculos coerente, recorrendo à fórmula da área lateral do cilindro e à relação entre a altura e o raio indicada no enunciado.

b) (*) Área lateral do cilindro $\approx 2,4 \text{ m}^2$

Altura $h = \frac{8}{3} r$

$$r^2 = \frac{2,4 \times 3}{16\pi} \dots$$

$\pi \approx 3,141$

$$r^2 \approx \frac{7,2}{50,265}$$

$$r^2 \approx 0,143$$

$$r \approx \pm \sqrt{0,143}, r > 0$$

$$r \approx \sqrt{0,143}$$

$r \approx 0,378 \text{ m}$

Perímetro do círculo $= 2\pi r$

$$= 2 \times 3,141 \times 0,378$$

$$\approx 2,374 \text{ m}$$

$$\frac{12}{2,374} \approx 5,055$$

R.: São precisas, no mínimo, 6 voltas.

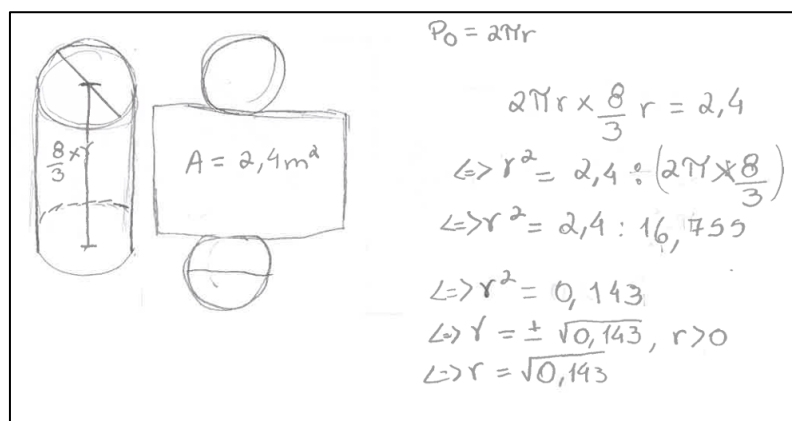
Figura 21 - Reformulação da resposta da Joana à alínea b) do Problema 1

A reformulação⁵ da Joana da alínea b) pôde, assim, ser considerada correta, organizada e com resposta final explícita. A justificação situou-se num nível médio, dado que a aluna explicitou as principais relações matemáticas envolvidas, embora alguns passos algébricos tenham permanecido pouco desenvolvidos ou sem indicações claras do que representavam. O tipo de justificação correspondeu predominantemente à aplicação de regras, recorrendo exclusivamente à representação simbólica.

5.1.4. Rita

A resolução inicial da Rita evidenciou um desempenho matemático consistente, distinguindo-se das restantes produções pela correção das relações estabelecidas e pelo domínio dos procedimentos envolvidos. Contudo, apesar da qualidade da resolução apresentada, a aluna não concluiu o processo de resolução, não articulando os resultados obtidos com o objetivo final do problema. A aluna não apresentou a resposta à alínea a), uma vez que iniciou a resolução pela alínea b). Como não conseguiu concluir essa resolução no tempo estipulado, não teve oportunidade de regressar posteriormente à primeira alínea.

Na alínea b) (Figura 22), a Rita evidenciou uma compreensão adequada da estrutura matemática subjacente ao problema. A aluna estabeleceu corretamente a relação entre a área lateral do cilindro, o perímetro da base e a altura, traduzindo a situação através de uma equação.



$$P_0 = 2\pi r h$$

$$2\pi r \times \frac{8}{3} r = 2,4$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2,4 : (2\pi \times \frac{8}{3})$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2,4 : 16,755$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 0,143$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \sqrt{0,143}, r > 0$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{0,143}$$

Figura 22 - Resolução da Rita da alínea b) do Problema 1

⁵ Pelo facto de a reformulação ser idêntica à da Carla, optou-se por não fazer uma análise tão exaustiva da mesma.

Esta produção constituiu um indicador de que compreendeu a planificação do cilindro e conseguiu relacionar as diferentes grandezas envolvidas. A Rita procedeu a uma manipulação algébrica coerente, mantendo o controlo das operações realizadas e respeitando a estrutura da equação. Embora a resolução não tenha sido concluída, os procedimentos desenvolvidos revelaram um domínio sólido dos conhecimentos matemáticos mobilizados e uma organização clara do raciocínio.

Assim, a resolução inicial da Rita foi considerada a mais consistente em termos de correção e coerência, embora incompleta. A dificuldade em concluir a resolução evidenciou uma tendência observada em vários alunos, relacionada com a interpretação da resolução matemática como uma sequência de procedimentos, sem uma preocupação explícita em responder diretamente à questão colocada.

Face à resolução apresentada pela Rita, o *feedback* (Figura 23) incidiu sobretudo na necessidade de finalizar o raciocínio matemático desenvolvido. A indicação “Confirma agora como podes utilizar o valor do raio para determinar o número mínimo de voltas” e a orientação subsequente sobre a relação entre distância percorrida e comprimento da circunferência serviram como forma de recordar a aluna a concluir a alínea b) e a responder à alínea a), respetivamente. Neste caso, o *feedback* visou a promoção da finalização do raciocínio matemático, orientando a aluna para a articulação entre os cálculos realizados e o objetivo do problema. Nesse sentido, as observações incidiram na necessidade de justificar mais claramente a relação entre o movimento do cilindro e a distância percorrida, bem como na importância de concluir adequadamente a resolução a partir dos cálculos efetuados.

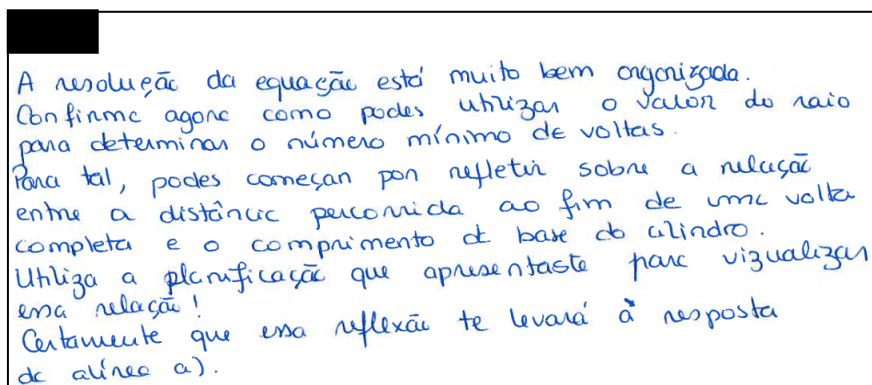
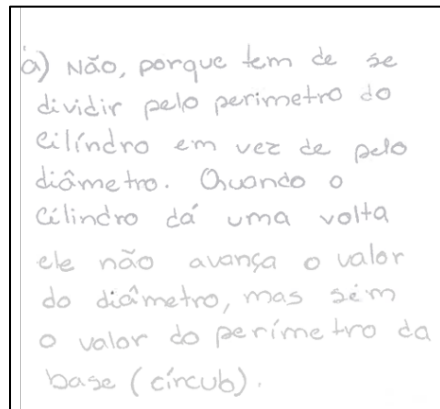


Figura 23 - *Feedback* dado à Rita relativamente ao Problema 1

Como ilustra a Figura 24, na reformulação da alínea a), a Rita explicou de forma adequada a relação entre a rotação do cilindro e o avanço realizado, ao referir que,

numa volta completa, o cilindro avançava uma distância correspondente ao perímetro da base e não ao diâmetro. Comparativamente com a resolução inicial, em que a aluna não apresentou qualquer resposta, observou-se uma evolução significativa ao nível da comunicação matemática, uma vez que a aluna passou a explicitar o significado da relação geométrica envolvida, tornando o raciocínio claro e contextualizado.



a) Não, porque tem de se dividir pelo perímetro do cilindro em vez de pelo diâmetro. Quando o cilindro dá uma volta ele não avança o valor do diâmetro, mas sim o valor do perímetro da base (círculo).

Figura 24 - Reformulação da resposta da Rita à alínea a) do Problema 1

Também na alínea b), representada na Figura 25, se verificaram progressos ao nível da estruturação da resolução e da conclusão do problema. A aluna utilizou adequadamente as fórmulas envolvidas, determinou um valor aproximado do raio, calculou o perímetro da base e utilizou-o para determinar o número de voltas necessárias para o cilindro percorrer os 12 metros indicados no enunciado. A resposta final surge explicitamente formulada, concluindo que são necessárias 6 voltas, o que evidencia uma melhoria relativamente à produção inicial, na qual a resolução não estava concluída.

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{8}{3}r \\
 r^2 &= \frac{2,4 \times 3}{16\pi} = 0,143 \\
 r^2 &= 2,4 : \left(2\pi \times \frac{8}{3} \right) \\
 r^2 &= 2,4 : 16,755 \\
 r^2 &= 0,143 \\
 r &= \pm \sqrt{0,143}, r > 0 \\
 r &= \sqrt{0,143} \\
 r &\approx 0,378 \\
 P_{\text{arcub}} &= 2 \times \pi \times 0,378 \\
 &\approx 2,374 \\
 \frac{12}{2,374} &\approx 5,055 \\
 R: &\text{ São precisas 6 voltas.}
 \end{aligned}$$

Figura 25 - Reformulação da resposta da Rita à alínea b) do Problema 1

A reformulação evidenciou igualmente uma maior coerência entre a interpretação, os procedimentos matemáticos e a resposta final. A explicitação da relação entre o perímetro da base e a distância percorrida sugeriu que o *feedback* contribuiu para reforçar a necessidade de tornar mais claras as relações matemáticas mobilizadas e de justificar os procedimentos utilizados, em vez de apenas apresentar cálculos isolados.

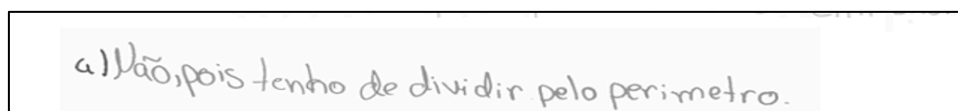
Considerou-se que a resolução da alínea b) estava correta, organizada e com resposta final explícita. A completude ao nível da justificação situou-se num nível médio, dado que a aluna explicitou as principais relações matemáticas envolvidas, embora alguns passos tenham permanecido pouco detalhados. O tipo de justificação correspondeu predominantemente à aplicação de regras, uma vez que recorreu a fórmulas matemáticas e estabeleceu relações através de substituições adequadas. Relativamente às representações utilizadas, verificou-se o recurso à representação simbólica.

Globalmente, o caso da Rita evidenciou que o *feedback* assumiu sobretudo uma função reguladora da finalização do processo matemático, permitindo transformar uma resolução já consistente numa produção mais completa e comunicativamente mais adequada.

5.1.5. Marta

A resolução inicial da Marta evidenciou uma compreensão parcial da situação apresentada no Problema 1, caracterizada por uma organização relativamente estruturada dos procedimentos, mas acompanhada por dificuldades significativas ao nível da manipulação algébrica e da validação dos resultados obtidos.

Na alínea a) (Figura 26), a Marta refutou a afirmação apresentada pelo trabalhador, reconhecendo que a distância percorrida pelo cilindro numa volta completa não correspondia ao diâmetro, mas ao perímetro da base. Contudo, tal como observado nas restantes produções iniciais, a justificação apresentada permaneceu pouco desenvolvida, uma vez que não explicitou a relação entre o movimento de rotação do cilindro e a distância percorrida. A resposta evidenciou, assim, uma compreensão intuitiva do conceito matemático envolvido, mas revelou limitações na sua comunicação escrita, dado que a aluna não transformou essa compreensão numa explicação matemática completa e contextualizada.

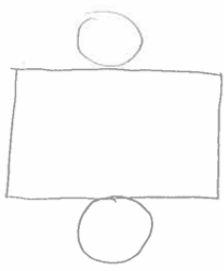


a) Não, pois tenho de dividir pelo perímetro.

Figura 26 - Resolução da Marta da alínea a) do Problema 1

Na alínea b), a Marta seguiu inicialmente uma estrutura semelhante à observada nas resoluções mais consistentes, identificando a relação matemática necessária para iniciar a resolução do problema. A aluna reconheceu a necessidade de recorrer à área lateral do cilindro e estabeleceu uma sequência de procedimentos orientada para a determinação do raio da base. Contudo, durante o desenvolvimento algébrico da resolução, evidenciou fragilidades significativas ao nível da manipulação das equações, como se pode observar na Figura 27.

b)



$$A_{\text{lateral}} = P_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$P_0 = 2\pi r = 2 \times \pi \times r$$

$$2 \times \pi \times r \times \frac{8}{3} = 2,4$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 3,14 \times r \times \frac{8}{3} = 2,4$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{3} \times \frac{9,42}{3} \times r \times \frac{8}{3} = \frac{7,2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 9,42 \times r \times 8 = 7,2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 452,16 \times 7,2$$

$$r^2 = 3255,552$$

$$r = \sqrt{3255,552}$$

$$r = 57,1$$

Figura 27 - Resolução da Marta da alínea b) do Problema 1

Isso ficou evidente quando procurou encontrar denominadores comuns na multiplicação algébrica, o que conduziu a um resultado incorreto, obtendo $r = 57,1$, que não é compatível com o contexto do problema. As dificuldades da aluna foram igualmente visíveis nas interações em sala de aula.

Marta: Mas não sei o perímetro da base.

Professor: Não sabes o valor de r , mas e se escreveres a fórmula da área lateral em função de r ? Se temos a área lateral e o perímetro é $2 \times \pi \times r$ e a altura é $\frac{8}{3} \times r$, o que podemos determinar?

Marta: O raio!

A sua resolução ilustrou, de forma clara, uma situação em que a organização foi preservada, pois existiu uma sequência lógica de passos, mas a execução comprometeu a validade do resultado. Tratou-se, portanto, de um exemplo paradigmático de dissociação entre organização e correção. O nível de justificação foi baixo, uma vez que as relações matemáticas subjacentes não foram explicitadas de forma desenvolvida. O tipo de justificação correspondeu predominantemente à aplicação de regras, dado que a aluna recorreu a fórmulas e procedimentos algébricos, mas sem evidenciar um controlo conceptual suficiente sobre as transformações realizadas.

Atendendo a que a resolução da Marta foi classificada como parcialmente correta não concluída devido aos erros algébricos, embora apresentasse uma modelação inicial correta e uma organização adequada, o *feedback* (Figura 28) incidiu na correção do procedimento específico. A questão “Numa multiplicação será que necessitas da redução ao mesmo denominador?” direcionou a atenção para o erro, enquanto a orientação “reformula a tua resolução sem te esqueceres do objetivo do problema” manteve o foco na necessidade de conclusão.

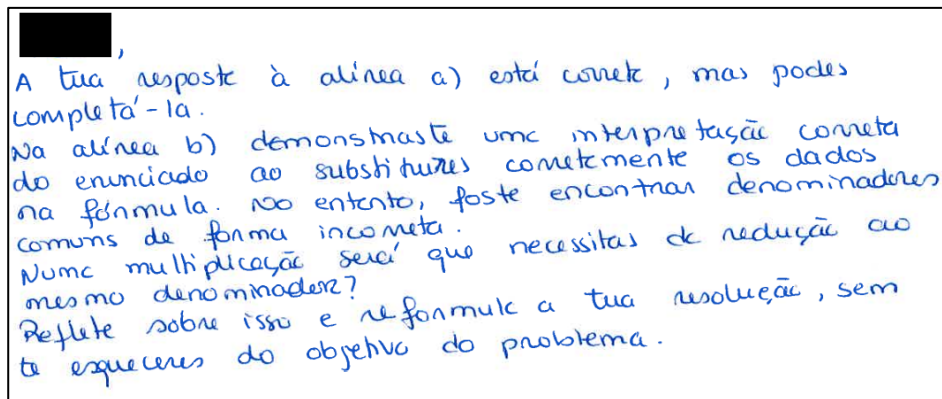


Figura 28 - *Feedback* dado à Marta relativamente ao Problema 1

5.1.6. Síntese final da análise do Problema 1

Na Tabela 3 apresenta-se uma síntese comparativa das produções escritas dos alunos antes e depois da receção do *feedback*, considerando os parâmetros de análise definidos: correção, completude, representações e organização.

Comunicação escrita antes (1) e depois do <i>feedback</i> (2)			Miguel		Carla		Margarida		Joana		Rita		Marta	
			1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Correção	a)		C	C	C	C	C	-	C	C	-	C	C	-
	b)		I	C	I	C	I	-	I	C	PC-NC	C	PC-NC	-
Nível de justificação		a)	B	A	B	A	B	-	B	A	-	A	B	-
		b)	B	M	N	M	N	-	N	M	B	M	-	-
Completo	Tipo de justificação	Relacional	-	X	-	X	-	-	-	X	-	X	-	-
		Procedimental	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Experimentação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Regras	X	X	X	X	X	-	X	X	X	X	X	-
		Vaga	X	-	X	-	X	-	X	X	-	-	X	-
Resposta final		a)	E	E	E	E	E	-	E	E	-	E	E	-
		b)	A	E	A	E	A	-	A	E	A	E	A	-
Representações	Linguagem Verbal		X	X	X	X	X	-	X	X	-	X	X	-
	Representação icónica		-	-	X	-	-	-	X	-	X	-	X	-
	Representação simbólica		X	X	X	X	X	-	X	X	X	X	X	-
Organização			PO	O	PO	O	PO	-	PO	O	O	O	O	-

Tabela 3 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do *feedback* (2) para o Problema 1

Nota: O símbolo "X" significa que esse ponto está presente na produção do aluno. Além disso: "C" correta; "PC-NC" parcialmente correta não concluída; "I" incorreta; "A" alto; "B" baixo; "M" médio; "N" nulo; "E" explícita; resposta final "A" ausente; "PO" parcialmente organizada; "O" organizada.

A análise global das produções escritas dos alunos relativas ao Problema 1, apresentada na Tabela 3, evidenciou uma evolução entre a resolução inicial e a reformulação após a receção do *feedback*. Dos seis alunos analisados, quatro (Miguel, Carla, Joana e Rita) realizaram a reformulação, enquanto a Margarida e a Marta não a entregaram, não permitindo verificar se as dificuldades identificadas inicialmente seriam ultrapassadas após o *feedback*.

Ao nível da correção, verificou-se que as reformulações dos alunos que realizaram esta etapa apresentaram alterações significativas relativamente às produções iniciais. Na alínea a), todos os alunos que reformularam mantiveram ou alcançaram uma resposta correta, evidenciando uma maior explicitação da relação entre o movimento do cilindro

e o perímetro da base. Na alínea b), observou-se uma progressão das respostas inicialmente incorretas ou parcialmente corretas para resoluções corretas e concluídas, com exceção dos alunos que não realizaram a reformulação.

Relativamente à completude da justificação, verificou-se uma evolução nos níveis de justificação entre as produções iniciais e as reformulações. Enquanto inicialmente predominaram justificações de nível baixo ou nulo, após o *feedback* os alunos passaram, maioritariamente, a apresentar justificações de nível médio, explicitando as principais etapas e relações matemáticas utilizadas. Contudo, a análise do tipo de justificação evidenciou que esta evolução ocorreu sobretudo dentro do tipo “regras”, mantendo-se a predominância da aplicação de fórmulas, embora se tenha observado, em alguns casos, a presença de elementos relacionais.

No que diz respeito à resposta final, verificou-se uma melhoria evidente, uma vez que as reformulações passaram a apresentar respostas finais explícitas, tanto na alínea a) como na alínea b). Esta evolução acompanhou também uma melhoria na organização das produções, com as resoluções a transitarem, de forma geral, de parcialmente organizadas para organizadas.

Quanto às representações utilizadas, manteve-se a predominância da linguagem verbal (na alínea a)) e da representação simbólica (na alínea b)), presentes na maioria das produções. A utilização de representações icónicas surgiu pontualmente, sobretudo associada à tentativa de apoiar a interpretação da situação, não constituindo uma representação predominante nas resoluções analisadas.

Globalmente, a comparação entre as produções antes e depois do *feedback* evidenciou uma evolução positiva nos parâmetros analisados, particularmente ao nível da correção, da completude da justificação, da explicitação da resposta final e da organização das resoluções. Apesar destes progressos, o tipo de justificação permaneceu maioritariamente associado à aplicação de regras, indicando que o desenvolvimento de justificações mais relacionais constitui ainda um aspeto a aprofundar.

5.2. Problema 2

No segundo momento da intervenção pedagógica, os alunos resolveram, em aula, o problema apresentado na Figura 5 (secção 3.2), relativo à determinação do número de latas de tinta necessárias para pintar um reservatório constituído por um cilindro e um cone.

O problema envolvia a mobilização de conhecimentos relacionados com áreas de superfícies, nomeadamente a área lateral do cilindro, a área lateral do cone e a área da base circular, bem como a interpretação do contexto para identificar quais as superfícies efetivamente pintadas.

De um modo geral, observou-se uma reação globalmente positiva dos alunos perante a tarefa, contrastando com a resistência inicial manifestada no problema anterior. Os alunos mostraram-se mais disponíveis para iniciar a resolução e revelaram maior envolvimento na realização dos cálculos. Ainda assim, verificaram-se algumas dificuldades associadas à visualização espacial do reservatório e à identificação das superfícies relevantes para o cálculo da área total a pintar.

As notas de campo evidenciaram que vários alunos sentiram necessidade de visualizar concretamente o sólido representado no enunciado. Perante estas dificuldades, recorreu-se a um objeto manipulável que representava aproximadamente a estrutura do reservatório, apontando para as diferentes superfícies e colocando questões orientadoras para que os alunos conseguissem visualizar quais deveriam ou não ser consideradas.

O Miguel questionou: “O reservatório está fechado?”. Esta dúvida levou o professor a clarificar, para toda a turma, que o reservatório se encontrava fechado, reforçando a necessidade de considerar a base superior do cilindro no cálculo da área total.

Durante a resolução, verificaram-se ainda interações particularmente relevantes para a compreensão das dificuldades conceptuais dos alunos. A Margarida, por exemplo, verbalizou inicialmente: “Não estou a compreender”, sendo posteriormente conduzida, através de questionamento orientador, à identificação das áreas necessárias e à compreensão de que a adição dessas áreas permitiria determinar o número de latas de tinta. De seguida questionou: “O raio é o mesmo?”, revelando dúvidas relativas à articulação geométrica entre o cone e o cilindro. A interação subsequente permitiu clarificar que ambas as figuras partilhavam a mesma circunferência de união.

Outro momento significativo ocorreu quando a Margarida identificou a necessidade de determinar a geratriz do cone. Após o professor solicitar que identificasse a geratriz no modelo manipulável, a aluna reconheceu que “forma um triângulo retângulo” e concluiu: “Posso aplicar o Teorema de Pitágoras”, evidenciando a mobilização de conhecimentos geométricos previamente adquiridos.

As notas de campo evidenciaram igualmente preocupações dos alunos relacionadas com arredondamentos e interpretação dos resultados. A Joana questionou: “Arredondamos às décimas ou às unidades?”, sendo conduzida à releitura do enunciado para identificar que apenas o número de latas deveria ser apresentado como valor inteiro. Já a Rita, após obter um resultado aproximado de 336 metros quadrados, concluiu inicialmente que seriam necessárias apenas três latas, tendo o professor promovido a reflexão através da questão: “Com 3 latas conseguias pintar a totalidade do reservatório?”, levando a aluna a reconhecer a necessidade de considerar quatro latas.

Importa ainda referir alguns aspetos observados ao nível da dinâmica de trabalho em sala de aula, em que se verificou que alguns alunos não tinham calculadora, tendo sido permitido o uso do telemóvel exclusivamente para a realização de cálculos. Relativamente à Carla, as notas de campo indicam que permaneceu sempre muito concentrada na resolução, realizando numerosos cálculos e recusando ajuda quando questionada pelo professor, sendo inclusivamente a última aluna a entregar a tarefa.

Estas interações e observações assumiram particular relevância para a análise das produções escritas dos alunos, uma vez que permitiram compreender melhor a origem de determinadas dificuldades evidenciadas nas resoluções, sobretudo ao nível da interpretação do contexto, da seleção das superfícies relevantes, da utilização do Teorema de Pitágoras e da interpretação do significado do número de latas de tinta no contexto do problema.

A análise das produções escritas dos alunos, permitiu identificar diferentes níveis de desempenho ao nível da correção dos procedimentos matemáticos, da organização da resolução, da utilização de linguagem matemática e da justificação das respostas. A leitura das produções evidenciou que todos os alunos mobilizam conceitos relacionados com áreas de superfícies, nomeadamente a área lateral do cilindro, a área lateral do cone e a área da base, embora com diferenças significativas ao nível do detalhe, estrutura e interpretação dos resultados.

5.2.1. Carla

Relativamente à resolução da Carla, presente na Figura 29, a aluna evidenciou uma tentativa de mobilização de conceitos, o que revelou uma abordagem que, embora extensa, introduziu elementos que não eram necessários para a resolução do problema.

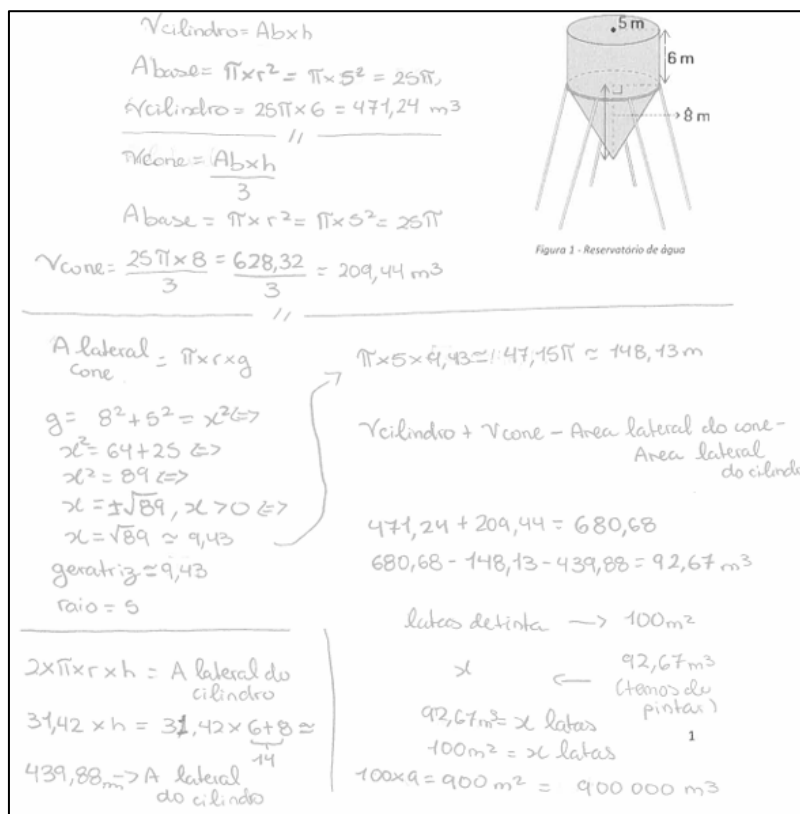


Figura 29 - Resolução da Carla do Problema 2

A aluna recorreu ao cálculo de volumes para fundamentar a resposta final, sem apresentar qualquer explicação que permitisse compreender o significado da expressão " $V_{cilindro} + V_{cone} - \text{Area lateral do cone} - \text{Area lateral do cilindro}$ " ou a sua relação com o problema. A tentativa de aplicação de uma regra de três simples, inadequada ao contexto, evidenciou ainda mais a confusão entre os conceitos de área e de volume.

A resolução apresentou-se parcialmente organizada, marcada por cálculos desnecessários e pela falta de uma hierarquização clara dos procedimentos. No que respeita à linguagem matemática, observou-se uma confusão entre unidades, nomeadamente a tentativa de conversão de metros quadrados para metros cúbicos, o que comprometeu a fiabilidade da resolução. O nível de justificação revelou-se médio, pois alguns dos cálculos apresentados não estavam devidamente articulados com o objetivo do problema, evidenciando dificuldades ao nível da interpretação e da seleção de estratégias adequadas. Acresceu, ainda, a consideração de grandezas desnecessárias e a confusão entre unidades de área e volume. O *feedback* fornecido à aluna (Figura 30) interveio diretamente sobre esta dificuldade ao questionar: "Será que necessitas do cálculo do volume para chegares à solução pretendida?" e "Será que podes converter unidades de área em unidades de volume?"

The image shows a student's handwritten work on a math problem and a teacher's handwritten feedback. The student's work is on the left, and the teacher's feedback is on the right.

Student's Work:

- geratriz $\approx 9,43$
- raio = 5
- Qual a altura do cilindro?
- $2\pi r \times h = A$ lateral do cilindro
- $2 \times 3,14 \times 5 \times h = 31,42 \times 6 + 8 \approx 199,88$
- $199,88 \rightarrow A$ lateral do cilindro

Teacher's Feedback:

- $680,68 - 148,13 - 439,88 = 92,67 \text{ m}^3$
- latas de tinta $\rightarrow 100 \text{ m}^2$
- x
- $92,67 \text{ m}^3$ (tamos de pintar)
- $92,67 \text{ m}^3 = x \text{ latas}$
- $100 \text{ m}^2 = x \text{ latas}$
- $100 \times 9 = 900 \text{ m}^2 = 900 000 \text{ m}^3$
- com que podes converter unidades de área

Feedback Text:

Os volumes e a área lateral do cone estão bem determinados, mas será que necessitas do cálculo de volumes para chegares à solução pretendida? Começa por identificar que uma lata de tinta permite pintar 100 m^2 e que uma determinada quantidade de latas permitirá a pintura de toda a superfície exterior do reservatório. Revelaste empenho na tentativa de justificar o número de latas de tinta, porém deves verificar melhor os dados que podes relacionar.

Figura 30 - Feedback dado à Carla relativamente ao Problema 2

Estas questões revelaram um forte foco na tarefa e no processo, na medida em que incidiram sobre as decisões tomadas ao longo da resolução, apresentando também uma elevada especificidade ao orientar diretamente a reflexão da aluna sobre os seus próprios procedimentos. A utilização da forma interrogativa foi intencional, procurando promover a reflexão sem impor um caminho a seguir.

Além disso, o *feedback* agregou uma valorização do trabalho realizado: “revelaste empenho na tentativa de justificar o número de latas de tinta”, contribuindo para o seu carácter motivador. De acordo com Hattie e Timperley (2007), este tipo de reconhecimento, quando associado a uma orientação para melhoria, potencia o envolvimento do aluno na tarefa. A formulação “deves verificar melhor os dados que podes relacionar” reforçou a dimensão orientada para a melhoria. Esta opção mais genérica deveu-se ao conhecimento da aluna e do grau de desafio a que gosta de ser exposta.

A reformulação da resolução da Carla, apresentada na Figura 31, evidenciou progressos relevantes relativamente à produção inicial, sobretudo ao nível da correção dos cálculos associados às áreas do sólido e da interpretação do contexto do problema.

$\text{Área da base} = \pi \times r^2$
 $= \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78,54$
 $\text{Área lateral do cilindro}$
 $A_{\text{cilindro}} = 10\pi \times 6 = 60\pi \approx 188,49$
 $\boxed{\pi \times r \times g}$ $\text{Área lateral do cone}$
 $\pi \times 5 \times 9,43 = 47,15\pi$
 $= 148,12 \text{ m}^2$
 Geratriz
 $x^2 = 8^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 + 25$
 $\Leftrightarrow x^2 = 89, x > 0 \Leftrightarrow$
 $x = \pm\sqrt{89} \approx \sqrt{89} \approx 9,43 \text{ m}$
 $\text{P}_{\text{base}} = 2 \times \pi \times 5 = 10\pi$
 $A_{\text{figura}} = 188,49 + 78,54 + 148,12 = 415,15 \text{ m}^2$
 $\frac{415,15 \text{ m}^2}{100 \text{ m}^2} \rightarrow \text{quantidade de tinta que é preciso.}$
 $\rightarrow \approx 4,15$, por isso, é preciso 5 latas de tinta para pintar o reservatório.

Figura 31 - Reformulação da resposta da Carla ao Problema 2

A aluna determinou corretamente a área da base, a área lateral do cilindro e a área lateral do cone, revelando uma melhoria significativa na mobilização das fórmulas geométricas envolvidas. Também os cálculos da geratriz e do perímetro da base se apresentaram adequados, evidenciando uma compreensão mais consistente das relações geométricas presentes no reservatório. A reformulação mostrou igualmente uma evolução ao nível da coerência global da resolução, uma vez que a aluna conseguiu calcular corretamente a área total da superfície a pintar. Apesar de a designação “ A_{figura} ” não ser a mais rigorosa no contexto do problema, a resolução evidenciou uma melhor articulação entre os cálculos efetuados e o objetivo do problema.

Ao nível da determinação do número de latas de tinta, a Carla apresentou o cálculo $\frac{415,15 \text{ m}^2}{100 \text{ m}^2}$, procurando justificar o significado dos valores envolvidos na divisão. No entanto, a explicação apresentada revelou ainda alguma imprecisão na interpretação das grandezas, uma vez que a aluna indicou que o denominador representava “cada m^2 que temos de pintar”, em vez de explicitar que corresponde à área que pode ser pintada com uma lata de tinta. Apesar desta fragilidade, observou-se uma tentativa de relacionar o cálculo realizado com o contexto do problema, o que constituiu uma evolução relativamente à produção inicial. A resposta final “ $\approx 4,15$, por isso, é preciso 5 latas de tinta para pintar o reservatório” surgiu de forma explícita e adequada à situação apresentada. No entanto, continuaram a verificar-se algumas fragilidades ao nível da organização da resolução. A presença de setas entre diferentes cálculos dificultou a

leitura sequencial do raciocínio matemático (apesar de a intenção da aluna ser mostrar a relação entre esses cálculos). Além disso, persistiram algumas omissões relativamente à indicação de unidades em determinados cálculos intermédios.

Considerou-se a reformulação da Carla correta, parcialmente organizada e com a resposta final explícita. O nível de justificação situou-se num nível médio, dado que, apesar de a aluna ter procurado explicitar o significado das operações realizadas, persistiram algumas imprecisões na interpretação das grandezas envolvidas. O tipo de justificação foi predominantemente de natureza baseada em regras e procedimental, coexistindo alguns elementos relacionais associados à interpretação do contexto do problema e à relação entre a área total e a quantidade de tinta necessária. De um modo geral, o *feedback* contribuiu para uma melhoria significativa da coerência da resolução, nomeadamente na interpretação das grandezas envolvidas e na explicitação do raciocínio subjacente à resposta final.

5.2.2. Margarida

No caso da Margarida, a sua resolução (Figura 32) apresentou uma estrutura desorganizada, com recurso a cálculos que permitiram determinar a área total do reservatório, ainda que com erros de cálculo e algumas lacunas ao nível da explicitação do raciocínio.

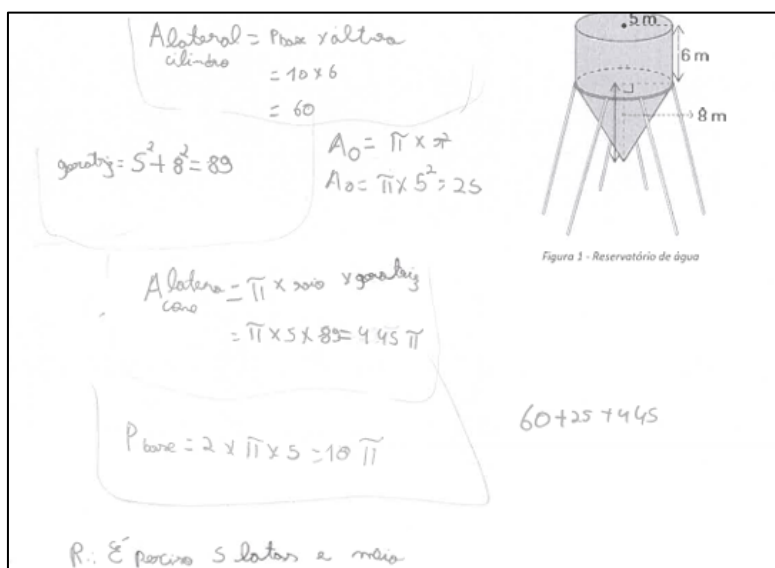


Figura 32 - Resolução da Margarida do Problema 2

A aluna escreveu, por exemplo, a expressão “ $60 + 25 + 445$ ”, evidenciando uma tentativa de adicionar os diferentes componentes da área do reservatório. No entanto, não explicitou o significado de cada termo, o que comprometeu a clareza da linguagem matemática utilizada e, conseqüentemente, a justificação da resolução. Acresceu ainda que, ao apresentar os valores exatos dos cálculos, a aluna não incluiu o fator π em algumas das expressões em que este deveria estar presente. Verificou-se também uma incorreção na determinação da geratriz, uma vez que não aplicou a raiz quadrada ao valor obtido, conduzindo a um resultado inadequado.

A resolução apresentou-se parcialmente correta e concluída, com limitações significativas na explicitação de algumas etapas, nomeadamente na transição entre o cálculo da área e a determinação do número de latas de tinta, que se traduziu num nível de justificação baixo ancorado num tipo de justificação vago e circunscrito a regras. A resolução da aluna evidenciou, assim, lacunas ao nível da justificação e explicitação do raciocínio.

O *feedback* (Figura 33) incidiu sobre esses aspetos, referindo: “Deves justificar devidamente o número de latas de tinta necessárias” e “estruturar melhor a tua resolução e rever os cálculos”.

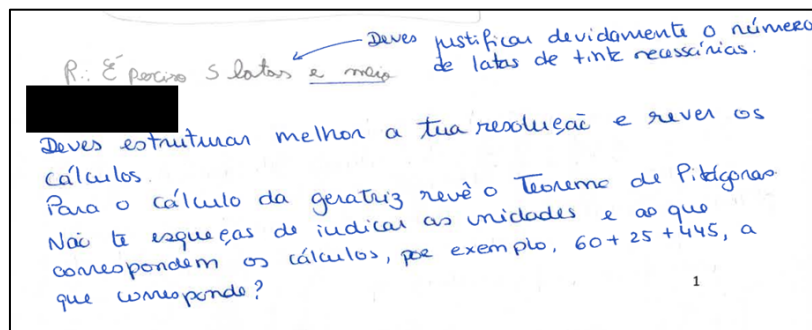
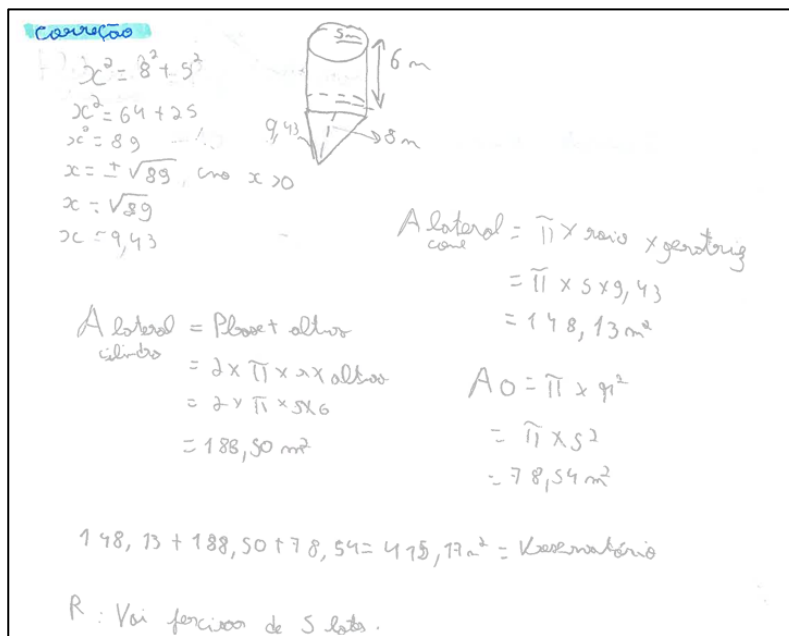


Figura 33 - *Feedback* dado à Margarida relativamente ao Problema 2

O *feedback* revelou um foco na tarefa, na medida em que procurou orientar a atenção da aluna para aspetos específicos da resolução. Apesar de ser explícito, uma vez que as instruções são diretas e linguisticamente simples, apresentou uma especificidade moderada, pois, embora identifique as fragilidades ao nível da justificação e da estrutura da resolução, não explicita detalhadamente como a aluna pode melhorar esses aspetos. A escolha deste foco deveu-se fundamentalmente ao facto de a resolução apresentar várias imprecisões algébricas, tendo sido considerado mais eficaz incidir sobre a necessidade de revisão dos cálculos e de melhoria da organização da resolução.

A reformulação da resolução da Margarida (Figura 34) apresentou progressos significativos relativamente à produção inicial, sobretudo ao nível da organização dos cálculos e da representação geométrica da situação.



correção

$$x^2 = 8^2 + 5^2$$

$$x^2 = 64 + 25$$

$$x^2 = 89$$

$$x = \pm \sqrt{89}, \text{ como } x > 0$$

$$x = \sqrt{89}$$

$$x = 9,43$$

$A_{\text{lateral}} = \pi \times \text{raio} \times \text{geratriz}$

$$= \pi \times 5 \times 9,43$$

$$= 148,13 \text{ m}^2$$

$A_{\text{lateral}} = \text{Perímetro} \times \text{altura}$

$$= 2 \times \pi \times r \times \text{altura}$$

$$= 2 \times \pi \times 5 \times 6$$

$$= 188,50 \text{ m}^2$$

$A_0 = \pi \times r^2$

$$= \pi \times 5^2$$

$$= 78,54 \text{ m}^2$$

$148,13 + 188,50 + 78,54 = 415,17 \text{ m}^2 = \text{Reservatório}$

R: Vai precisar de 5 latas.

Figura 34 - Reformulação da resposta da Margarida ao Problema 2

A aluna começou por recorrer a uma representação do reservatório, na qual identifica as medidas relevantes e o valor da geratriz, revelando uma preocupação em visualizar geometricamente o sólido antes de iniciar os cálculos. Esta estratégia constitui um aspeto positivo, uma vez que favorece a compreensão das relações entre os diferentes elementos geométricos envolvidos no problema. Na resolução apresentada, a Margarida determinou corretamente as áreas necessárias para calcular a superfície a pintar, apresentando valores coerentes com os dados do problema e utilizando adequadamente as fórmulas geométricas envolvidas. Observou-se igualmente uma preocupação com a utilização das unidades, que passaram a estar presentes na maioria dos cálculos efetuados, ainda que tenham persistido algumas omissões, nomeadamente no cálculo da geratriz.

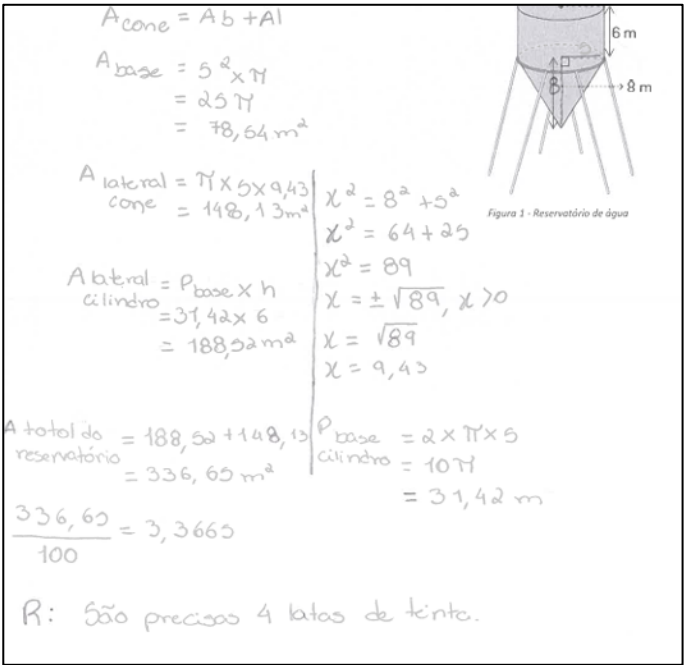
Contudo, mantiveram-se alguns aspetos menos conseguidos ao nível da interpretação matemática das grandezas envolvidas. Em particular, quando realizou a adição das áreas necessárias para determinar a superfície total a pintar, a aluna identificou incorretamente esse valor como “ $V_{\text{reservatório}}$ ” (volume do reservatório). Esta situação revelou que persistiram algumas dificuldades na distinção entre conceitos geométricos distintos, nomeadamente entre área e volume. A resposta final, “Vai precisar de 5 latas”,

surgiu explicitamente formulada e coerente com os cálculos apresentados. No entanto, a aluna não explicitou o raciocínio que relaciona a área total calculada com o número de latas necessárias, limitando-se a apresentar diretamente a conclusão. Assim, apesar de a resolução conduzir à resposta correta, o nível de justificação foi classificado como médio, dado que a aluna apresentou os cálculos necessários, mas não explicitou adequadamente o encadeamento lógico que sustenta a resposta final. O tipo de justificação foi predominantemente baseado em regras e vago, centrado na aplicação de fórmulas e cálculos. Considerou-se reformulação da Margarida correta, parcialmente organizada e com a resposta final explícita.

De forma global, a reformulação evidenciou uma melhoria ao nível da organização e da representação geométrica da situação.

5.2.3. Rita

No caso da Rita (Figura 35), a resolução demonstrou uma aplicação adequada dos conceitos matemáticos, revelando um bom nível de correção e uma mobilização pertinente das fórmulas necessárias.



$A_{\text{cone}} = A_b + A_l$
 $A_{\text{base}} = 5^2 \times \pi$
 $= 25\pi$
 $= 78,64 \text{ m}^2$
 $A_{\text{lateral}} = \pi \times 5 \times 9,43$
 $\text{cone} = 148,13 \text{ m}^2$
 $A_{\text{lateral}} = P_{\text{base}} \times h$
 $\text{cilindro} = 31,42 \times 6$
 $= 188,52 \text{ m}^2$
 $A_{\text{total do}} = 188,52 + 148,13$
 $\text{reservatório} = 336,65 \text{ m}^2$
 $\frac{336,65}{100} = 3,3665$
 $R: \text{São precisos 4 latas de tinta.}$

$x^2 = 8^2 + 5^2$
 $x^2 = 64 + 25$
 $x^2 = 89$
 $x = \pm \sqrt{89}, x > 0$
 $x = \sqrt{89}$
 $x = 9,43$
 $P_{\text{base}} = 2 \times \pi \times 5$
 $\text{cilindro} = 10\pi$
 $= 31,42 \text{ m}$

Figura 1 - Reservatório de água

Figura 35 - Resolução da Rita do Problema 2

A resolução apresentou um nível de justificação médio, com recurso quase exclusivo à aplicação de regras, conduzindo a uma resposta final explícita. Considerou-se que a

resolução se encontrava organizada, embora o cálculo da geratriz surgisse de forma implícita. A aluna recorreu predominantemente à representação simbólica para comunicar a sequência de etapas subjacentes ao seu raciocínio. De referir que a Rita não considerou a área da base do cilindro como superfície a ser pintada. Durante a resolução, a aluna questionou se o reservatório estava “tapado”, tendo essa questão sido aproveitada para esclarecer toda a turma de que o reservatório era fechado.

A principal limitação da resolução prendeu-se com a justificação, em particular na passagem do cálculo da área total para a determinação do número de latas de tinta, como se observou no cálculo $\frac{336,65}{100}$. Embora a operação estivesse matematicamente correta, a aluna não explicitou de forma clara o significado desta divisão no contexto do problema, o que comprometeu a interpretação do resultado.

Esta resolução evidenciou um bom domínio dos processos de cálculo e uma correta aplicação das fórmulas necessárias. No entanto, observou-se uma lacuna na explicitação do raciocínio, nomeadamente na passagem do cálculo da área total para a determinação do número de latas de tinta.

O *feedback* fornecido (Figura 36) identificou precisamente este aspeto ao referir: “deves (...) justificar de que forma $\frac{336,65}{100}$ permite determinar o número de latas de tinta”.

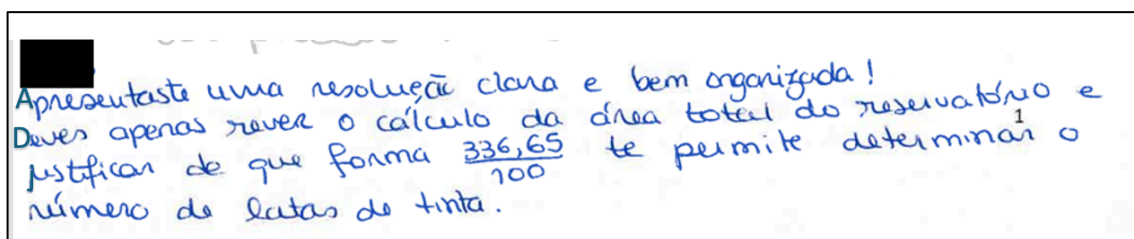
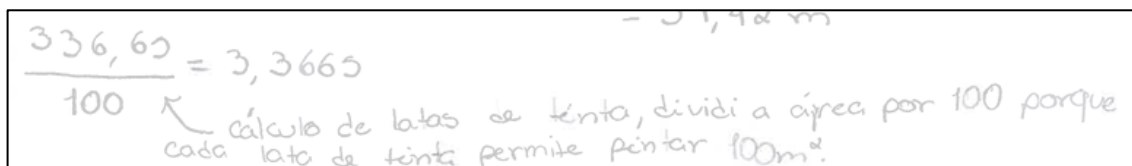


Figura 36 - *Feedback* dado à Rita do Problema 2

Esta formulação apresentou um foco na tarefa, uma vez que incidiu diretamente sobre um aspeto específico da resolução em falta, e apresentou elevada especificidade, pois apontou claramente o ponto que necessitava de ser desenvolvido. A clareza e a compreensibilidade foram elevadas, dado que a instrução foi direta e passível de ser realizada atendendo às características da aluna. Além disso, a estrutura do *feedback* integrou o reconhecimento do trabalho realizado ao referir “apresentaste uma resolução clara e bem organizada”, reforçando o seu carácter motivador e promovendo uma atitude positiva face à aprendizagem.

A reformulação da resolução da Rita (Figura 37) evidenciou alterações pontuais relativamente à produção inicial, incidindo essencialmente na explicitação do raciocínio associado à determinação do número de latas de tinta necessárias. Enquanto na resolução anterior a aluna apresentava diretamente o cálculo final, na reformulação acrescentou a explicação: “(...) dividi a área por 100 porque cada lata de tinta permite pintar 100 m^2 ”. Esta alteração revela uma melhoria ao nível da comunicação matemática e da explicitação do significado da operação realizada.



Handwritten work showing the calculation: $\frac{336,65}{100} = 3,3665$. Below the calculation, there is a handwritten explanation in Portuguese: "cálculo de latas de tinta, dividi a área por 100 porque cada lata de tinta permite pintar 100 m^2 ".

Figura 37 - Reformulação da resposta da Rita ao Problema 2

A reformulação mostrou, assim, uma maior preocupação em relacionar os cálculos efetuados com o contexto do problema, tornando mais claro o raciocínio utilizado para chegar à resposta final. Este aspeto evidenciou a influência do *feedback* fornecido, particularmente no que respeita à necessidade de justificar matematicamente os procedimentos utilizados. Contudo, a aluna não procedeu à correção de outros aspetos anteriormente identificados no *feedback*, nomeadamente relativamente ao cálculo da área total a pintar. A reformulação evidenciou melhorias na completude, tanto ao nível da justificação, que evoluiu para um nível alto, uma vez que a aluna explicitou o significado da operação realizada ao relacionar a divisão da área total ($336,65\text{ m}^2$) pela capacidade de cobertura de cada lata de tinta (100 m^2), como ao tipo de justificação, que, embora tenha permanecido predominantemente baseado em regras, passou a integrar também elementos de natureza procedimental e relacional.

De um modo geral, a reformulação evidenciou um impacto parcial do *feedback*, sobretudo ao nível da explicitação do raciocínio associado à resposta final. Apesar de a aluna ter questionado, em aula, o que estava incorreto após receber o *feedback*, e de aparentemente ter compreendido que não tinha considerado a área da base do cilindro no cálculo da área do reservatório, não procedeu a essa correção.

5.2.4. Marta

Na resolução da Marta, apresentada na Figura 38, a principal limitação prendeu-se com o erro no cálculo da geratriz, ao indicar que " $5^2 + 8^2 = 25 + 51$ ", o que comprometeu o

cálculo da área lateral do cone. De referir que a aluna não preservou o número mínimo de casas decimais em todos os cálculos intermédios.

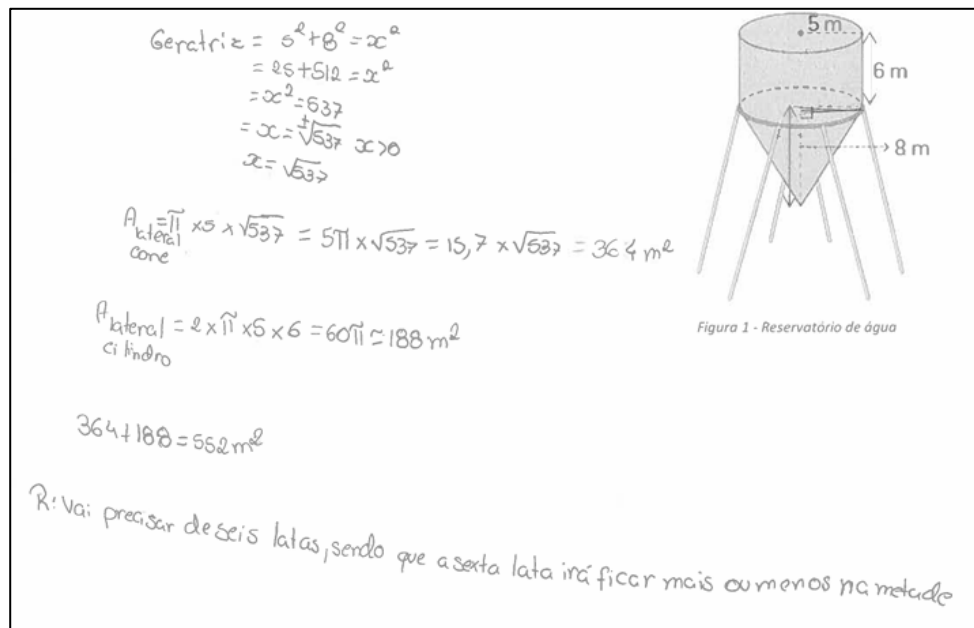


Figura 38 - Resolução da Marta do Problema 2

Relativamente à completude, a resolução apresentou um nível de justificação baixo, apoiado essencialmente na utilização de fórmulas (regras). No que concerne à correção, classificou-se como parcialmente correta, uma vez que a aluna tentou considerar os elementos necessários, mas a presença de erros comprometeu a sua eficácia. A justificação dada para a resposta ao problema foi vaga, na medida em que o cálculo que possibilitou chegar às seis latas de tinta não apresentou qualquer tipo de indicação ou explicação.

O *feedback* fornecido à aluna (Figura 39) recorreu a estratégias de questionamento, como “igual ou equivalente?”, e à sinalização de aspetos a rever, como a atenção aos arredondamentos.

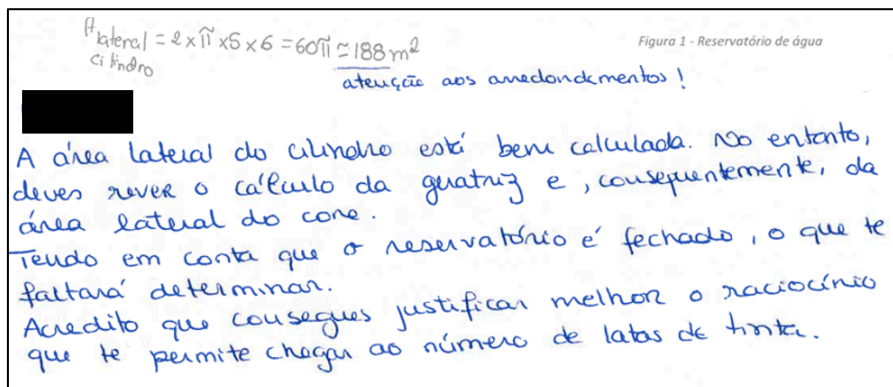


Figura 39 - Feedback dado à Marta relativamente ao Problema 2

A especificidade foi elevada, uma vez que os aspetos a rever foram identificados de forma concreta. A clareza e a compreensibilidade foram também elevadas, tendo sido utilizada uma linguagem direta, com o objetivo de facilitar a interpretação das indicações fornecidas.

A reformulação da resolução da Marta, ilustrada na Figura 40, evidenciou a persistência de dificuldades significativas nos cálculos e na aplicação adequada das fórmulas envolvidas no problema. Em particular, a aluna continuou a apresentar erros no cálculo da geratriz, nomeadamente na adição dos valores utilizados, o que comprometeu, subsequentemente, os restantes cálculos da resolução.

geratriz $\rightarrow 5^2 + 8^2 = x^2$
 $25 + 64 = x^2$
 $x = \sqrt{89}$
 $x = 9,43$

$A_{\text{lateral}} = \pi \times 5^2 \times 9,43 = 15,6 \pi \approx 490,09 \text{ m}^2$

$A_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times 5 \times 6 = 60\pi \approx 188,50 \text{ m}^2$

A_{Cilindro}

$A_{\text{Circulo}} = \pi \times 5^2 = 25\pi = 78,54 \text{ m}^2$

$A_{\text{total}} = 490,09 + 188,50 + 78,54 = 757,13 \text{ m}^2$

R: O senhor João vai precisar de 81 folhas

Figura 40 - Reformulação da resolução da Marta ao problema 2

Além disso, verificou-se uma utilização incorreta da fórmula da área lateral do cone, uma vez que a aluna considerou o raio ao quadrado, revelando dificuldades na distinção entre as fórmulas da área da base e da área lateral. Apesar disso, a Marta conseguiu

estruturar parcialmente os cálculos necessários para determinar a área total da superfície a pintar, apresentando uma sequência de procedimentos coerente com os valores que obtidos anteriormente. A resposta final, “O senhor João vai precisar de 8 latas”, surgiu explicitamente formulada, sendo sustentada pelo valor de área total calculado pela aluna. Contudo, não existiu qualquer explicitação do raciocínio que relacione a área obtida com o número de latas necessárias, tendo-se limitado à apresentação direta da conclusão.

Classificou-se a reformulação da Marta como parcialmente correta, parcialmente organizada e com resposta final explícita. A completude ao nível da justificação situou-se num nível baixo, em que os erros de cálculo e conceptuais comprometeram o grau de correção da resolução. O tipo de justificação foi predominantemente regras e vago, baseado na aplicação de fórmulas geométricas sem uma interpretação consistente das relações envolvidas.

De forma global, a reformulação evidenciou que o *feedback* fornecido não foi suficiente para promover uma reconstrução significativa da comunicação do raciocínio matemático da aluna, persistindo ainda dificuldades ao nível da utilização das fórmulas adequadas.

5.2.5. Síntese final da análise do Problema 2

Na Tabela 4 apresenta-se uma síntese comparativa das produções escritas dos alunos antes e depois da receção do *feedback*, considerando os parâmetros de análise definidos: correção, completude, representações e organização.

Comunicação escrita antes (1) e depois do <i>feedback</i> (2)		Miguel		Carla		Margarida		Joana		Rita		Marta		
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	
Correção		C	C	I	C	PC -C	C	C	C	PC -C	PC -C	PC -C	PC -C	
Complete	Nível de justificação	B	B	M	M	B	M	M	M	M	A	B	B	
	Tipo de justificação	Relacional	-	-	-	X	-	-	-	-	X	X	-	-
		Procedimental	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	-	-
		Experimentação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		Regras	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		Vaga	X	X	X	-	X	-	-	-	X	-	X	X
Resposta final		E	E	A	E	E	E	E	E	E	E	E	E	
Representações	Linguagem Verbal	-	-	-	X	-	-	-	-	-	X	-	-	
	Representação icónica	-	-	-	-	-	X	X	X	-	-	-	-	
	Representação simbólica	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Organização		PO	PO	D	PO	D	PO	PO	PO	O	O	PO	PO	

Tabela 4 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do *feedback* (2) para o Problema 2

Nota: O símbolo "X" significa que esse ponto está presente na produção do aluno. Além disso: "C" correta; "PC-C" parcialmente correta concluída; "I" incorreta; "A" alto; "B" baixo; "M" médio; "N" nulo; "E" explícita; resposta final "A" ausente; "D" desorganizada; "PO" parcialmente organizada; "O" organizada.

A análise global das produções escritas dos alunos relativas ao Problema 2, apresentada na Tabela 4, evidenciou diferentes níveis de evolução entre a resolução inicial e a reformulação após a receção do *feedback*. Ao contrário do observado no Problema 1, em que se verificou uma evolução mais homogénea entre os alunos, neste problema observaram-se diferentes níveis de apropriação das orientações fornecidas.

Ao nível da correção, verificou-se uma evolução nas reformulações de alguns alunos, nomeadamente na passagem de resoluções incorretas ou parcialmente corretas para resoluções corretas. Destacou-se a melhoria na mobilização das fórmulas associadas às áreas das superfícies do cilindro e do cone e na determinação da área total a pintar. Contudo, alguns alunos mantiveram dificuldades na aplicação adequada das fórmulas e na interpretação das grandezas envolvidas, permanecendo resoluções parcialmente corretas após o *feedback*.

Relativamente à completude da justificação, observou-se uma evolução global dos níveis de justificação apresentados pelos alunos. Nas produções iniciais predominavam justificações de nível baixo ou médio, frequentemente associadas à aplicação de regras sem explicitação das relações envolvidas. Após o *feedback*, verificou-se alguma progressão para níveis médios e altos, acompanhada, em alguns casos, pela inclusão de elementos de natureza procedimental e relacional. No entanto, a aplicação de regras continuou a ser o tipo de justificação predominante em todas as produções analisadas.

No que diz respeito à resposta final, verificou-se que a maioria dos alunos já apresentava uma resposta explícita na resolução inicial, mantendo essa característica nas reformulações. A principal evolução observada prendeu-se com a explicitação do significado dos cálculos realizados, sobretudo na relação entre a área total da superfície a pintar e o número de latas de tinta necessárias.

Quanto às representações utilizadas, verificou-se a predominância da representação simbólica em todas as produções, complementada, pontualmente, pela linguagem verbal e pela representação icónica. Esta última surgiu sobretudo como apoio à interpretação geométrica da situação, nomeadamente através da representação do reservatório e das suas dimensões.

Relativamente à organização da resolução, observou-se uma evolução menos evidente do que no Problema 1. Embora alguns alunos tenham melhorado a estruturação dos procedimentos, permaneceram produções parcialmente organizadas após o *feedback*, evidenciando que a organização da sequência de cálculos e a articulação entre as diferentes etapas continuaram a constituir aspetos a melhorar.

Globalmente, a análise da Tabela 4 evidenciou que o *feedback* contribuiu para melhorias em diferentes parâmetros analisados, sobretudo ao nível da correção, da completude da justificação e da explicitação do raciocínio associado à resposta final. Contudo, os resultados revelaram uma evolução diferenciada entre os alunos, mantendo-se como principal desafio o desenvolvimento de justificações que ultrapassassem a aplicação de regras e explicitassem de forma mais clara as relações matemáticas subjacentes aos procedimentos realizados.

5.3. Problema 3

No terceiro momento da intervenção pedagógica, os alunos resolveram, em aula, o problema apresentado na Figura 6 (secção 3.2), relacionado com a evolução da altura

de duas velas que ardiam a ritmos diferentes. O problema tinha como objetivo determinar o instante em que ambas as velas apresentavam a mesma altura, desafiando os alunos a interpretar uma situação de variação temporal e analisar relação entre grandezas.

De um modo geral, observou-se que a tarefa suscitou a curiosidade dos alunos, que procuraram compreender o resultado do problema e verificar se, em algum momento, as velas apresentariam a mesma altura. Durante a resolução, verificou-se a procura de validação para as estratégias escolhidas. A Rita, por exemplo, questionou “Professor, posso fazer por uma tabela?”, evidenciando desde o início a intenção de recorrer a uma representação tabular para organizar os dados. O professor respondeu: “Pode ser uma forma de resolver o problema”, reconhecendo essa estratégia sem impor um método único de resolução.

As interações ocorridas em sala de aula revelaram também dificuldades significativas ao nível da interpretação do conceito de “mesma altura”. Por exemplo, a Marta, que afirmou: “Nunca vão ter a mesma altura, porque uma vela apaga-se primeiro do que a outra”. Perante esta afirmação, o professor questionou: “Nesse caso, quando estiverem as duas apagadas, qual é a altura que têm?”, ao que a aluna respondeu: “Ahhhhh! Já sei! É 0”. Esta interação revelou-se particularmente relevante para compreender as resoluções apresentadas pelos alunos, uma vez que evidenciou uma dificuldade inicial em reconhecer que a igualdade entre as alturas poderia ocorrer quando ambas as velas estivessem apagadas. O diálogo mostrou ainda como o questionamento orientador permitiu conduzir a aluna à reformulação do seu raciocínio sem lhe fornecer diretamente a resposta.

As notas de campo indicaram também diferenças significativas nas posturas dos alunos perante a resolução da tarefa. A Carla, por exemplo, voltou a demonstrar uma atitude de grande autonomia, recusando ajuda mesmo quando o professor tentou intervir. Este comportamento foi particularmente relevante para interpretar a natureza dos erros presentes na sua resolução, uma vez que a ausência de orientação contribuiu para a manutenção de estratégias inadequadas ao longo do processo.

De forma geral, observou-se que muitos alunos recorreram espontaneamente a representações tabulares para acompanhar a diminuição da altura das velas ao longo do tempo. Estas representações permitiram-lhes organizar os dados e explorar experimentalmente o problema, embora, em vários casos, surgissem dificuldades na

interpretação dos resultados obtidos e na explicitação do raciocínio que justificava a conclusão apresentada.

5.3.1. Carla

A produção da Carla, patente na Figura 41, evidenciou uma tentativa de mobilização dos dados do problema, nomeadamente as alturas iniciais das velas e as respetivas taxas de variação, expressas em centímetros por hora.

Handwritten work by Carla:

$18\text{ cm} \rightarrow 1,5\text{ cm por hora}$
 $11\text{ cm} \rightarrow 1\text{ cm por hora}$
 $1\text{ cm} \rightarrow 1\text{ cm por hora}$
 $x \leftarrow 1\text{ hora}$
 $\frac{18 \times 1}{1,5} = 12\text{ cm}$
 $\frac{11 \times 1}{1} = 11\text{ cm}$

R: A final de 1h a vela com 11cm apagou-se.
 A vela com 18cm a final de 1h ainda esta acesa.
 A vela de 18cm vai apagar-se e, assim, ficará com a mesma altura que a vela que tinha 11cm.

Figura 41 - Resolução da Carla do Problema 3

A aluna começou por estabelecer relações, como, por exemplo: $18\text{ cm} \rightarrow 1,5\text{ cm/h}$ e $11\text{ cm} \rightarrow 1\text{ cm/h}$, o que indicou uma identificação inicial adequada dos dados fornecidos no enunciado. No entanto, a forma como estes dados foram posteriormente utilizados evidenciou dificuldades significativas ao nível da interpretação da situação e da modelação matemática. Em particular, a aluna realizou cálculos como $\frac{18 \times 1}{1,5} = 12\text{ cm}$ e $\frac{11 \times 1}{1} = 11\text{ cm}$, procurando estabelecer uma relação proporcional que não era adequada ao contexto do problema. Esta abordagem revelou uma mobilização inadequada do raciocínio proporcional, uma vez que o objetivo não consistia em determinar uma correspondência direta entre grandezas, mas sim em modelar a variação da altura das velas ao longo do tempo. A conclusão apresentada — “ao fim de uma hora a vela com 11 cm apagou-se” — evidenciou claramente esta dificuldade, uma vez que resultou de uma interpretação errada da forma como a vela arde ao longo do tempo.

Considerou-se a resolução incorreta, uma vez que a estratégia utilizada não permitiu responder à questão colocada, apesar da resposta final ter sido explícita. O nível de justificação foi baixo, dado que o raciocínio apresentado não foi consistente nem adequado ao problema, limitando-se à aplicação de cálculos descontextualizados. O tipo de justificação foi classificado como predominantemente baseado em regras e vago, uma vez que a aluna procurou aplicar procedimentos matemáticos sem evidenciar uma compreensão adequada da situação apresentada.

Ao nível das representações, a aluna recorreu essencialmente à linguagem simbólica, através de cálculos numéricos, e à linguagem verbal na interpretação dos resultados obtidos no contexto do problema. No entanto, não utilizou, por exemplo, representações que permitissem visualizar a evolução das alturas ao longo do tempo, o que limitou a sua capacidade de análise. A resolução apresentou-se desorganizada, uma vez que os cálculos surgiram sem uma estrutura clara que evidenciasse o encadeamento lógico do raciocínio.

O *feedback* fornecido à Carla (Figura 42) iniciou-se com o reconhecimento de um aspeto positivo ao mencionar “Identificaste corretamente os dados do problema”, o que contribuiu para o seu carácter motivador, valorizando o ponto de partida da aluna. Este tipo de validação foi particularmente relevante, visto que a resolução apresentou erros significativos, funcionando como incentivo para manter o envolvimento da aluna na tarefa.

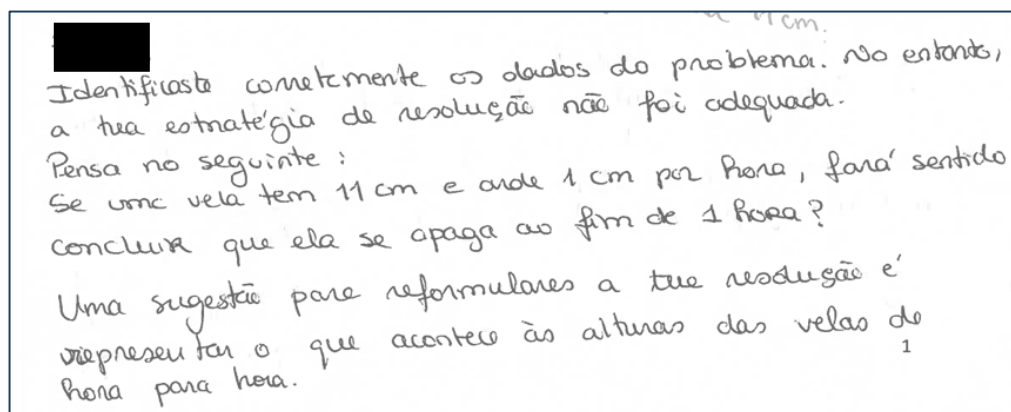


Figura 42 - *Feedback* dado à Carla relativamente ao Problema 3

A utilização da questão “Se uma vela tem 11 cm e arde 1 cm por hora, fará sentido concluir que ela se apaga ao fim de uma hora?”, constituiu um elemento de elevada especificidade do *feedback*, na medida em que pretendeu direcionar a atenção da aluna para o erro conceptual central. Escolheu-se esta estratégia de questionamento por

promover a reflexão e contribuir para a compreensibilidade do *feedback*, ao levar a aluna a identificar a inconsistência do raciocínio apresentado ao responder à questão. A sugestão para a aluna “representar o que acontece às alturas das velas de hora para hora”, evidenciou uma clara orientação para a melhoria, ao propor uma estratégia alternativa mais adequada ao problema.

De forma global, o *feedback* revelou um equilíbrio entre a identificação dos aspetos menos conseguidos, a orientação e o encorajamento, sendo consistente com uma abordagem formativa. Ao incidir diretamente sobre o erro conceptual e ao sugerir uma estratégia alternativa, o *feedback* apresentou um potencial para promover a reconstrução do raciocínio da aluna. Contudo, a aluna não apresentou a reformulação, referindo na entrevista que se tinha esquecido.

5.3.2. Margarida

Na Figura 43, apresenta-se a resolução da Margarida que evidenciou uma estratégia de resolução baseada na análise da evolução temporal da altura das velas, através de uma representação sequencial dos valores.

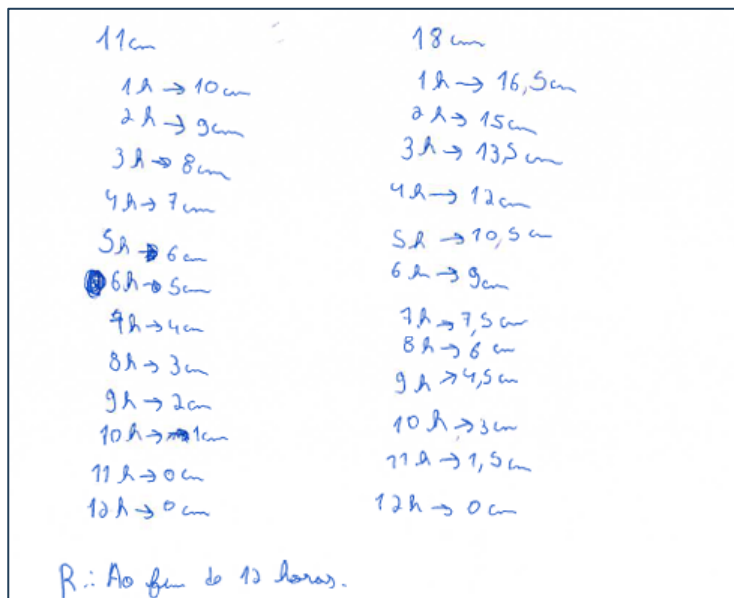


Figura 43 - Resolução da Margarida do Problema 3

A aluna começou por identificar as alturas iniciais das velas e, a partir daí, construiu uma sequência de valores associados ao tempo, indicando, por exemplo, $1 h \rightarrow 10 cm$, $2 h \rightarrow 9 cm$, prosseguindo este padrão até chegar a $11 h \rightarrow 0 cm$ para a vela menor. De forma

semelhante, para a vela maior, apresentou valores como $1 h \rightarrow 16,5 \text{ cm}$, $2 h \rightarrow 15 \text{ cm}$, prolongando a sequência até $12 h \rightarrow 0 \text{ cm}$. Esta abordagem revelou que a aluna compreendeu a ideia de variação da altura ao longo do tempo, sendo capaz de aplicar corretamente as taxas de diminuição associadas a cada vela. Assim, a produção foi considerada correta, uma vez que a aluna identificou o momento em que as alturas das velas se igualavam. Contudo, não explicitou a análise que sustentava essa conclusão, nomeadamente a relação de igualdade entre os valores obtidos.

O nível de justificação apresentado foi médio, uma vez que, embora existisse um conjunto de dados que poderia sustentar uma conclusão, não foi estabelecida explicitamente a relação que permitia determinar o instante em que as alturas se igualavam. De igual modo, não foi feita qualquer referência ao processo de obtenção das alturas ao fim das horas indicadas. O tipo de justificação foi essencialmente de experimentação e vaga, dado que a aluna recorreu à construção de uma sequência de valores para explorar a situação, mas não avançou para uma generalização ou análise mais aprofundada desses dados. A resposta final foi explícita, sendo apresentada de forma direta e em consonância com os dados produzidos.

No que respeita às representações, a aluna utilizou uma forma de representação próxima de uma tabela ou lista organizada, ainda que sem estrutura formal explícita. Esta representação foi classificada como simbólica, associada a valores numéricos, com apoio implícito de uma organização espacial. Contudo, a ausência de legendas/indicações claras comprometeu a sua interpretação. A resolução foi considerada parcialmente organizada, uma vez que existia uma sequência lógica de valores, mas sem uma explicitação suficientemente desenvolvida do significado de cada elemento, nomeadamente pela ausência de indicações como “ao fim de x horas” ou “a vela tem x centímetros”.

O *feedback* fornecido à Margarida (Figura 44) evidenciou uma preocupação com a clarificação da representação e com a melhoria da comunicação matemática.

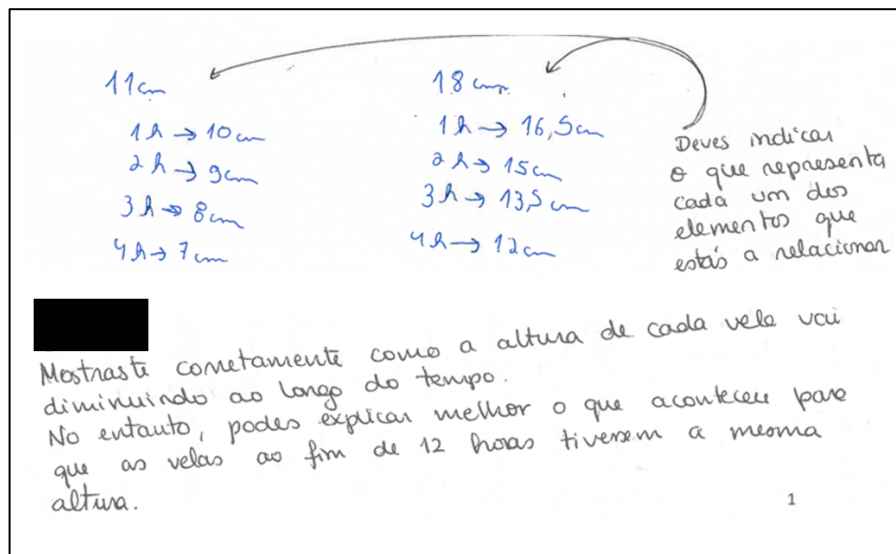


Figura 44 - Feedback dado à Margarida relativamente ao Problema 3

A indicação “deves indicar o que representa cada um dos elementos que estás a relacionar” incidia diretamente sobre a forma como a aluna organizou e comunicou a informação. Esta orientação apresentou também especificidade, na medida em que identificou concretamente o aspeto a melhorar, nomeadamente a necessidade de explicitar o significado dos dados apresentados. O comentário global “mostraste corretamente como a altura de cada vela vai diminuindo ao longo do tempo”, introduziu um elemento motivador, ao reconhecer um aspeto positivo da resolução. Este reconhecimento revelou-se particularmente relevante, uma vez que a aluna demonstrou uma compreensão da situação que poderia ser desenvolvida. A continuação, “no entanto, podes explicar melhor o que aconteceu para que as velas ao fim de 12 horas tivessem a mesma altura”, evidenciou a promoção da orientação para a melhoria, incentivando a aluna a aprofundar o seu raciocínio.

A reformulação da resolução da Margarida (Figura 45) evidenciou que a aluna acolheu as sugestões presentes no *feedback* fornecido, particularmente ao nível da explicitação da representação utilizada.

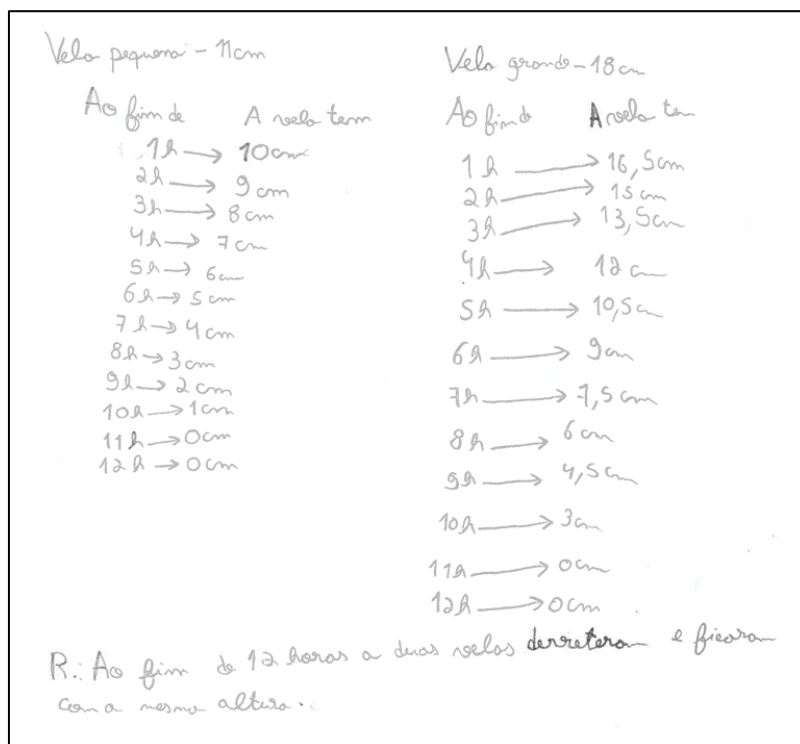


Figura 45 - Reformulação da resposta da Margarida ao Problema 3

A aluna colocou “ao fim de” e “a vela tem”, clarificando o significado dos valores apresentados na tabela e tornando mais explícita a relação entre o tempo decorrido e a altura das velas. Esta alteração representou uma melhoria significativa ao nível da comunicação matemática, contribuindo para uma maior clareza e compreensibilidade da resolução. A alteração mais relevante verificou-se na resposta final, que passou a apresentar a formulação: “Ao fim de 12 horas as duas velas derreteram e ficaram com a mesma altura”. Comparativamente com a produção inicial, esta reformulação evidenciou uma maior explicitação da igualdade entre as alturas das velas, respondendo de forma mais adequada ao objetivo do problema. A reformulação sugeriu, assim, que o *feedback* contribuiu para uma maior consciência da necessidade de justificar verbalmente a conclusão apresentada, não se resumindo à indicação da hora em que as velas atingiram a mesma altura.

A reformulação da Margarida foi considerada correta, parcialmente organizada e com uma resposta final explícita. O nível de justificação passou a ser alto, dado que a aluna explicitou de forma mais clara a relação entre os dados da “tabela” e a conclusão apresentada. O tipo de justificação manteve-se experimental, baseando-se na análise sucessiva dos valores apresentados na “tabela”. Globalmente, a reformulação

evidenciou um impacto parcial do *feedback*, particularmente ao nível da clarificação da representação e da explicitação verbal da conclusão.

5.3.3. Joana

A produção da Joana, apresentada na Figura 46, evidencia uma abordagem estruturada e coerente, recorrendo a uma representação icónica, materializada através do desenho das velas, e a uma representação tabular dos dados.

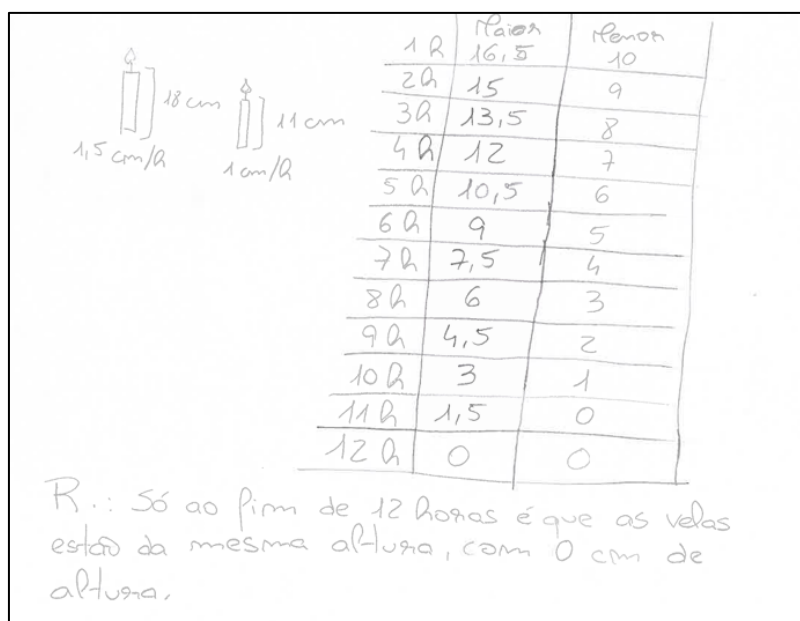


Figura 46 - Resolução da Joana do Problema 3

A aluna apresentou o desenho das duas velas, uma com 18 centímetros e outra com 11 centímetros, indicando ainda, de forma adequada, as respetivas taxas de variação. Este primeiro momento revelou uma correta interpretação dos dados do problema e uma tentativa de os tornar visuais, constituindo um aspeto positivo ao nível da compreensão da situação. Posteriormente, a aluna construiu uma tabela em que organizou a informação em três colunas: uma correspondente ao tempo, e duas colunas adicionais, identificadas como “maior” e “menor”, referindo-se implicitamente às alturas das duas velas. Nesta tabela, apresentou a evolução das alturas, partindo de 16,5 para a vela maior e 10 para a menor, até ambas apresentarem o valor 0 às 12 horas. Esta representação revelou uma compreensão consistente da variação das alturas ao longo do tempo, sendo os valores apresentados coerentes com as taxas de consumo.

Contudo, a ausência de unidades nos valores apresentados, identificada, por exemplo, nas colunas “maior” e “menor”, comprometeu a clareza da comunicação matemática.

A consistência dos cálculos levou a aluna a apresentar uma conclusão devidamente fundamentada, pelo que a resolução foi considerada correta. Ao nível de justificação, a resposta situou-se num nível alto, dado que os dados organizados na tabela sustentaram a conclusão. O tipo de justificação foi predominantemente experimental, baseado na análise de valores sucessivos. A resposta final foi explícita e correta, na medida em que apresentou uma conclusão adequada ao solicitado no problema. A resolução foi considerada organizada, uma vez que a informação foi apresentada de forma sequencial, estruturada e coerente, facilitando a leitura e interpretação do processo seguido.

Na Figura 47 encontra-se o *feedback* fornecido à Joana, que visou a valorização da sua produção ao referir que a “*resolução está correta e bem organizada*”. Esta formulação contribuiu para a dimensão motivadora do *feedback*, reconhecendo o esforço e a qualidade estrutural da resolução, o que poderia reforçar a confiança da aluna.

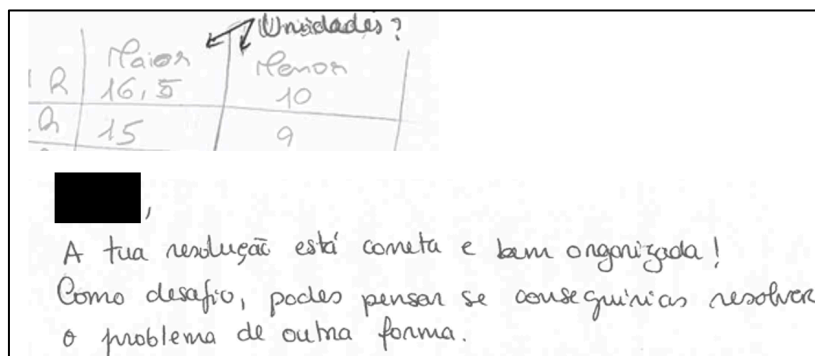


Figura 47 - *Feedback* dado à Joana relativamente ao Problema 3

Ao nível do foco no processo, a sugestão “podes pensar se conseguirias resolver o problema de outra forma” procurou promover a orientação para a melhoria, ao incentivar a diversificação de estratégias. Contudo, esta orientação poderia ter sido mais direcionada, especificando diferentes formas de representação passíveis de utilização.

A aluna não apresentou a reformulação, tendo referido, na entrevista, que não sentiu necessidade de resolver por “outras formas”.

5.3.4. Rita

A produção da Rita (Figura 48) evidenciou uma estratégia de resolução baseada numa representação icónica, que combinou um esboço inicial, através da representação de dois cilindros, com a construção de uma tabela que descrevia a evolução da altura das velas ao longo do tempo. Esta abordagem revelou uma tentativa de compreensão da situação, tanto do ponto de vista visual como numérico.

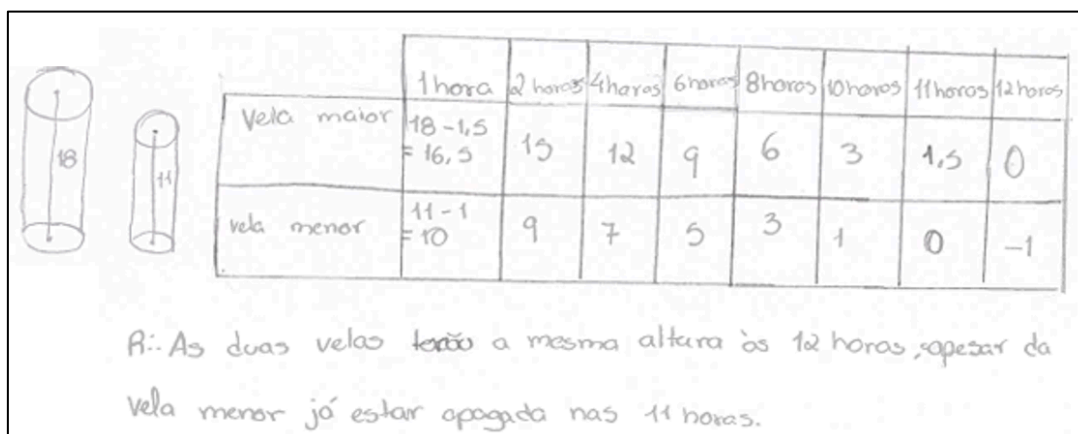


Figura 48 - Resolução da Rita do Problema 3

Na tabela apresentada, a aluna organizou a informação em duas linhas, “vela maior” e “vela menor”, e uma linha superior com os instantes de tempo. Os valores atribuídos às alturas das velas seguiram uma lógica consistente com as taxas de consumo das velas. No entanto, a irregularidade na progressão temporal, passando de intervalos de uma hora para intervalos de duas horas, comprometeu a organização da resolução. Esta irregularidade foi particularmente relevante, dado que o problema exigia a identificação de um instante específico em que as alturas se igualavam, o que pressupunha uma análise consistente dos valores obtidos.

A produção foi considerada parcialmente correta, concluída. Embora a aluna tenha mobilizado corretamente a ideia de variação e apresentado valores coerentes em vários momentos, a resposta final “as velas terão a mesma altura às 12 horas, apesar da vela menor já estar apagada nas 11 horas”, revelou uma incoerência lógica. Na tabela, a vela menor apresentou altura “0” às 11 horas e “-1” às 12 horas, enquanto a vela maior apresentou “0” apenas às 12 horas, o que significava que não existia um instante em que ambas apresentassem a mesma altura. A introdução do valor “-1” evidenciou ainda uma dificuldade na interpretação do contexto físico, uma vez que não era adequado considerar alturas negativas para uma vela. Ao nível da justificação, a resposta situou-

se num nível médio, dado que a aluna não explicitou o raciocínio que conduziu à conclusão apresentada, nem analisou criticamente os valores obtidos. O tipo de justificação foi predominantemente experimental, baseado na construção da tabela, mas sem uma interpretação adequada dos resultados no contexto do problema. A resposta final foi explícita, sendo apresentada de forma direta, mas não se encontrava sustentada pelos dados produzidos. Relativamente às representações, a aluna recorreu a uma representação icónica, através do desenho inicial dos cilindros, complementada por uma representação tabular dos dados. Esta articulação entre diferentes formas de representação constituiu um aspeto positivo da resolução. Contudo, a ausência de unidades nos valores apresentados comprometeu a clareza da comunicação matemática. Assim, a organização da resolução foi classificada como parcialmente organizada, na medida em que existia uma estrutura definida, mas com inconsistências que dificultavam a sua interpretação.

Tal como apresentado na Figura 49, o *feedback* fornecido à Rita evidenciou uma abordagem centrada na melhoria da qualidade da representação e na correção de aspetos conceptuais da resolução.

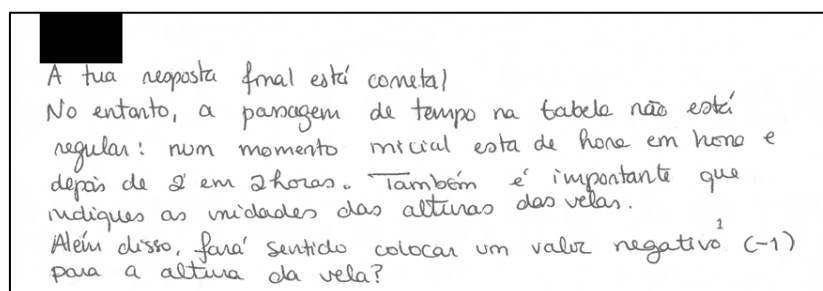


Figura 49 - *Feedback* dado à Rita relativamente ao Problema 3

O *feedback* prosseguiu com a identificação de aspetos específicos a melhorar, nomeadamente “a passagem de tempo na tabela não está regular” e “é importante que indiques as unidades das alturas das velas”. Estas indicações revelaram foco na tarefa, ao alertarem diretamente para a organização da tabela e para o rigor matemático. A especificidade foi elevada, uma vez que foram identificados aspetos concretos da resolução que necessitavam de revisão. Através da questão “fará sentido colocar um valor negativo, -1, para a altura da vela?”, o *feedback* incidiu também no processo, promovendo a reflexão sobre a adequação dos resultados ao contexto do problema. Esta estratégia contribuiu para a compreensibilidade e para a orientação para a melhoria, incentivando a aluna a reconsiderar a validade dos seus cálculos.

A reformulação da resolução da Rita (Figura 50) incidiu essencialmente sobre os dois aspetos identificados no *feedback* fornecido.

	1 hora	2 horas	4 horas	6 horas	8 horas	10 horas	11 horas	12 horas
vela maior	$18 - 1,5$ $= 16,5 \text{ cm}$	15 cm	12 cm	9 cm	6 cm	3 cm	1,5 cm	0 cm
vela menor	$11 - 1$ $= 10 \text{ cm}$	9 cm	7 cm	5 cm	3 cm	1 cm	0 cm	-1

Figura 50 - Reformulação resposta da Rita ao Problema 3

A aluna retirou o valor “-1” presente na tabela relativamente à altura da vela menor, eliminando assim a inconsistência associada à representação de alturas negativas para uma vela. Esta alteração revelou que a aluna reconsiderou parcialmente a adequação dos valores obtidos ao contexto físico do problema, respondendo implicitamente à questão colocada no *feedback* acerca do significado de uma altura negativa. Contudo, apesar de eliminar o valor incorreto, a aluna não o substituiu por “0”, mantendo alguma incompletude na representação final da evolução da vela menor. Além disso, a Rita acrescentou a indicação da unidade “centímetros” nas designações associadas às velas, respondendo à sugestão presente no *feedback* relativa à explicitação das unidades utilizadas. Esta alteração contribuiu para uma melhoria da clareza e do rigor da comunicação matemática da resolução. Apesar destas alterações, a resposta final manteve-se inalterada, não se verificando uma reformulação significativa da resolução inicialmente apresentada. Assim, embora o *feedback* tenha promovido melhorias pontuais ao nível da representação e da adequação contextual dos valores apresentados, não conduziu a uma revisão mais profunda da interpretação da situação nem da conclusão formulada pela aluna.

5.3.5. Síntese final da análise do Problema 3

Na Tabela 5 apresenta-se uma síntese comparativa das produções escritas dos alunos antes e depois da receção do *feedback*, considerando os parâmetros de análise definidos: correção, completude, representações e organização.

Comunicação escrita antes (1) e depois do <i>feedback</i> (2)		Miguel		Carla		Margarida		Joana		Rita		Marta	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Correção		C	-	I	-	C	C	C	-	PC-C	PC-C	C	-
Completeude	Nível de justificação	M	-	B	-	M	A	A	-	M	M	M	-
	Relacional	-	-	-	-	-	X	X	-	X	X	X	-
	Procedimental	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Experimentação	X	-	-	-	X	X	X	-	X	X	X	-
	Regras	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Vaga	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	-	-
Resposta final		I	-	E	-	E	E	E	-	E	E	I	-
Representações	Linguagem Verbal	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-	X	-
	Representação icónica	X	-	-	-	-	-	X	-	X	X	X	-
	Representação simbólica	-	-	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-
Organização		O	-	D	-	PO	O	O	-	PO	PO	O	-

Tabela 5 - Resumo da análise das produções escritas dos alunos antes (1) e depois da receção do *feedback* (2) para o Problema 3

Nota: O símbolo "X" significa que esse ponto está presente na produção do aluno. Além disso: "C" correta; "PC-C" parcialmente correta concluída; "I" incorreta; "A" alto; "B" baixo; "M" médio; "N" nulo; "I" implícita; "E" explícita; resposta final "A" ausente; "D" desorganizada; "PO" parcialmente organizada; "O" organizada.

A análise global das produções escritas dos alunos relativas ao Problema 3, apresentada na Tabela 5, evidenciou uma menor quantidade de dados analisáveis nas reformulações relativamente aos problemas anteriores, uma vez que, dos seis alunos analisados, apenas Margarida e Rita realizaram a reformulação após a receção do *feedback*.

Ao nível da correção, verificou-se uma evolução positiva nas reformulações realizadas, embora com diferentes níveis de progressão. A Margarida manteve uma resolução correta, passando a explicitar melhor a relação entre os valores apresentados e a conclusão obtida. A Rita, apesar de ter introduzido melhorias na representação dos dados, manteve algumas dificuldades na interpretação da situação, nomeadamente na consideração do instante em que as velas apresentam a mesma altura. Assim, a reformulação desta aluna evidenciou melhorias pontuais, mas não uma alteração significativa da estratégia inicialmente utilizada. Relativamente à completeude, observou-

se uma evolução sobretudo no caso da Margarida, cuja resolução passou de um nível de justificação médio para um nível alto. Inicialmente, a aluna apresentava uma sequência de valores sem explicitar a relação que permitia concluir o instante em que as alturas se igualavam. Após o *feedback*, passou a clarificar o significado dos elementos da representação e a explicitar melhor a resposta final. No caso da Rita, manteve-se um nível de justificação médio, uma vez que, apesar das alterações introduzidas, continuou a não explicitar completamente o raciocínio que sustentava a conclusão apresentada. Quanto ao tipo de justificação, surgiram justificações de natureza experimental e relacional, associadas à construção e análise de representações dos valores das alturas das velas ao longo do tempo, ainda que com diferentes níveis de justificação e correção.

No que diz respeito à resposta final, verificou-se que esta se manteve explícita nas reformulações realizadas. A Margarida apresentou uma melhoria neste parâmetro, passando a formular a conclusão de forma mais adequada ao contexto do problema, enquanto a Rita manteve a resposta final inicialmente apresentada. Relativamente às representações utilizadas, verificou-se uma evolução na forma como os alunos organizaram e comunicaram a informação. A Margarida melhorou a representação utilizada ao explicitar o significado dos elementos apresentados, enquanto a Rita introduziu alterações na tabela, nomeadamente através da eliminação do valor negativo associado à altura da vela e da indicação das unidades.

Ao nível da organização da resolução, observou-se uma evolução no caso da Margarida, cuja produção passou de parcialmente organizada para organizada, em resultado de uma maior clarificação da representação e da sequência dos dados apresentados.

Globalmente, a análise da Tabela 5 evidenciou que o *feedback* contribuiu para melhorias sobretudo ao nível da explicitação das representações utilizadas e da formulação das justificações. Contudo, comparativamente aos problemas anteriores, o impacto do *feedback* foi mais limitado, uma vez que apenas duas alunas (dos estudantes selecionados) realizaram a reformulação e persistiram dificuldades relacionadas com construção de justificações que ultrapassem a experimentação.

5.4. Perceções dos alunos relativamente ao *feedback*

Com o objetivo de compreender as perceções dos alunos relativamente ao *feedback* fornecido e ao trabalho em duas fases desenvolvido ao longo da intervenção pedagógica, foram aplicados questionários a todos os alunos após cada um dos três problemas e realizadas entrevistas semiestruturadas a seis alunos: Miguel, Marta, Carla, Margarida, Rita e Joana.

A construção dos questionários procurou recolher informação relativa a diferentes dimensões consideradas centrais neste estudo, nomeadamente a clareza e a compreensão do *feedback*, a sua capacidade para ajudar os alunos a identificar erros, aspetos corretos e aspetos a melhorar, o seu impacto na reformulação das resoluções, as dificuldades sentidas ao nível da comunicação matemática e, ainda, as perceções dos alunos relativamente ao processo de resolução de problemas em duas fases.

A conversão das respostas em percentagens, patente na Tabela 6⁶, espelhou as perceções da turma ao longo da intervenção pedagógica relativamente ao *feedback* recebido. No Problema 1 responderam 13 alunos, enquanto nos Problemas 2 e 3 responderam 19 alunos.

Questão	Problema 1 (n=13)	Problema 2 (n=19)	Problema 3 (n=19)
1. Através do <i>feedback</i> recebido, consegui identificar o que estava correto na minha resolução.	92,3% (12)	89,5% (17)	100% (19)
2. Através do <i>feedback</i> recebido, consegui identificar os erros que cometi e/ou o que precisava de melhorar	84,6% (11)	78,9% (15)	89,5% (17)
3. O <i>feedback</i> foi claro e de fácil de perceber compreensão.	84,6% (11)	84,2% (16)	94,7% (18)
4. O <i>feedback</i> indicava de forma explícita o que devia melhorar.	84,6% (11)	78,9% (15)	94,7% (18)
5. O <i>feedback</i> estava escrito de forma adequada ao meu trabalho e de forma que eu pudesse entender.	84,6% (11)	78,9% (15)	100% (19)
6. Fiquei frustrado(a) ao ler o <i>feedback</i> .	7,7% (1)	15,8% (3)	0% (0)

Tabela 6 - Resultados comparativos dos questionários às 6 primeiras questões (Problemas 1, 2 e 3)

No Problema 1, 92,3% dos alunos afirmaram conseguir identificar os aspetos corretos das suas resoluções através dos comentários do professor, enquanto 84,6% referiram que o *feedback* lhes permitiu perceber os erros cometidos ou os aspetos que necessitavam de melhoria. Estes dados assumiram especial relevância porque, na

⁶ A Tabela 6 apresenta as percentagens correspondentes às respostas afirmativas ("Sim") às questões indicadas.

análise das produções escritas iniciais, observaram-se frequentemente respostas incompletas, cálculos descontextualizados, ausência de justificações e dificuldades em estruturar o raciocínio matemático. Apenas um aluno (7,7%) manifestou frustração ao ler o *feedback*, o que sugeriu uma boa aceitação do modelo de avaliação centrado em comentários escritos em vez de classificações quantitativas.

No Problema 2 verificou-se uma ligeira quebra em alguns indicadores, particularmente na identificação de erros e na clareza do *feedback* (78,9%). Simultaneamente, a frustração aumentou para 15,8% (três alunos). Esta oscilação pareceu relacionar-se com a complexidade da tarefa, que mobilizava a articulação de diferentes conceitos geométricos, nomeadamente áreas de superfícies, interpretação espacial de sólidos e aplicação do Teorema de Pitágoras. Muitos alunos confundiram fórmulas de área com fórmulas de volume, o que tornou o processo de interpretação do *feedback* e de reformulação mais exigente.

No Problema 3 observou-se uma recuperação muito significativa. Todos os alunos (100%) afirmaram conseguir identificar o que estava correto nas suas respostas e consideraram o *feedback* adequado ao seu método de trabalho. A frustração associada ao *feedback* desapareceu totalmente. Estes resultados sugeriram que os alunos se foram progressivamente familiarizando com a dinâmica de trabalho e aprendendo a utilizar as pistas fornecidas pelo professor para melhorar as suas resoluções.

As respostas às questões de carácter aberto dos questionários contribuíram para uma melhor compreensão das dificuldades iniciais dos alunos. Quando questionados sobre se um colega conseguiria perceber a forma como tinham pensado a resolução, vários alunos responderam negativamente, justificando a sua resposta com diferentes fragilidades na forma como tinham apresentado o seu raciocínio. Por exemplo, um aluno referiu: “Não, porque não organizei bem os meus cálculos”, enquanto outro afirmou: “Não, porque não expliquei os passos”. Também foi apontada a dificuldade em explicitar o significado dos elementos utilizados na resolução, como evidenciado pela resposta de um aluno: “Não, porque não indiquei o que cada número significa”. Estas respostas revelaram que, no primeiro problema, alguns alunos já demonstravam ter consciência das fragilidades da sua comunicação matemática, particularmente ao nível da organização das respostas, da explicitação dos procedimentos e da atribuição de significado aos cálculos apresentados.

A questão relativa à dificuldade sentida entre “resolver o problema” e “explicar o raciocínio” revelou uma divisão interessante no Problema 1. Enquanto a maioria dos

alunos identificava maiores dificuldades na componente matemática, alguns já reconheciam a complexidade associada à explicação escrita do raciocínio, como evidenciam as respostas “Explicar como pensei” e “Tive dificuldade nas duas coisas”. Esta divisão foi particularmente relevante, uma vez que demonstrou que, numa fase inicial, muitos alunos ainda associavam o sucesso na resolução de problemas sobretudo à obtenção do resultado correto, não valorizando plenamente a necessidade de justificar e comunicar o raciocínio.

No Problema 2, a percentagem de alunos que afirmou conseguir identificar os erros ou compreender o que necessitava de melhorar desceu para 78,9%, verificando-se igualmente uma ligeira diminuição na perceção de clareza do *feedback*. As respostas às questões abertas contribuíram para complementar a interpretação destes resultados, permitindo identificar alguns dos aspetos que os alunos reconheceram como problemáticos nas suas resoluções. Alguns alunos identificaram erros relacionados com os procedimentos matemáticos, como se verifica na resposta “Eu usei as fórmulas dos volumes e eram precisas as fórmulas das áreas”, enquanto outros reconheceram fragilidades na comunicação escrita, referindo “Percebi que faltavam explicações” ou “Esqueci-me de escrever as unidades”. Surgiu ainda a preocupação com a identificação das variáveis, expressa por um aluno que afirmou: “Não apresentava completamente o que representavam as variáveis”.

Estes registos evidenciam que o *feedback* não se limitou a assinalar erros. Pelo contrário, ajudou os alunos a identificar aspetos específicos da sua comunicação matemática que necessitavam de melhoria: unidades, variáveis, explicações, contextualização e interpretação dos cálculos realizados.

Os questionários revelaram uma evolução progressiva da consciência dos alunos relativamente às exigências da escrita matemática. No Problema 2 começaram a surgir respostas mais reflexivas sobre a clareza e compreensão das resoluções, quando questionados se um colega da turma conseguiria perceber a sua resolução.

Alguns alunos responderam negativamente, justificando que esta se encontrava “um bocado confusa” ou que “faltavam explicações”, enquanto outro, apesar de considerar que a sua resolução seria compreensível, reconheceu que esta “precisava de estar mais organizada”. Estas respostas sugerem que os alunos começaram a deslocar a sua atenção do resultado obtido para a forma como o raciocínio era apresentado e compreendido por outros.

Esta consciência crescente apareceu também nas entrevistas. A Margarida reconheceu que “antes do *feedback* (...) não justificava as coisas, (...) só respondia à pergunta sem justificação”. A possibilidade de reformular as respostas após receber *feedback* permitiu-lhe perceber o que faltava explicar: “Com o *feedback* comecei a perceber como é que se justificava”. De forma semelhante, Carla reconheceu que “muitas vezes (...) fazia um processo e não justificava ou pensava que o professor podia perceber o meu processo, mas se calhar outras pessoas (...) não iam perceber”. Estes testemunhos articularam-se diretamente com os dados dos questionários, demonstrando que os alunos começaram progressivamente a compreender que comunicar matematicamente não implica apenas apresentar contas, mas também justificar procedimentos e tornar o raciocínio compreensível para os outros.

No Problema 3 observou-se a evolução mais significativa, em que os questionários mostraram uma clara consolidação das perceções positivas relativamente ao *feedback*. Todos os alunos (100%) afirmaram conseguir identificar o que estava correto nas suas respostas e consideraram o *feedback* adequado ao seu método de trabalho. Simultaneamente, a frustração associada à leitura do *feedback* desapareceu completamente. As respostas abertas deste último momento foram particularmente reveladoras da transformação ocorrida ao nível da comunicação matemática. Quando questionados sobre se um colega conseguiria compreender a sua resolução, os alunos passaram a apresentar respostas mais positivas e fundamentadas, referindo, por exemplo, “Sim, porque a minha resposta estava muito organizada”, “Sim, porque expliquei bem” e “Sim, porque organizei e expliquei melhor”. Um outro aluno justificou a sua resposta pela utilização de uma representação matemática, afirmando: “Sim, porque utilizei tabelas e acho que é um método fácil de compreender”. Estas respostas evidenciaram que os alunos passaram a atribuir maior importância a aspetos relacionados com a organização, a completude e a utilização de representações matemáticas.

Também à questão relativa à dificuldade sentida, verificou-se uma mudança muito significativa. Enquanto no Problema 1 existia uma divisão entre as dificuldades associadas à resolução e à explicação, no Problema 3 a maioria dos alunos passou claramente a considerar que explicar era mais difícil do que resolver, apresentando respostas como “Explicar como pensei”, “Foi mais complicado explicar o meu raciocínio” e “Resolver era mais fácil do que explicar”. Esta mudança foi particularmente importante porque evidenciou uma evolução metacognitiva. Os alunos começaram a perceber que resolver problemas não se limitava à obtenção de uma resposta correta, exigindo

também a organização das ideias, a justificação das decisões e a comunicação clara dos raciocínios.

Os questionários revelaram igualmente que o *feedback* contribuiu para que os alunos desenvolvessem uma maior atenção à completude das suas respostas. No Problema 3, surgiram comentários que demonstram uma análise mais crítica das próprias produções, como “Consegui perceber que a resposta estava incompleta e não respondia diretamente à questão”, “Não escrevi o que estava a indicar” e “Faltavam explicações”. Estas respostas mostraram também que os alunos começaram progressivamente a desenvolver uma postura mais crítica relativamente às suas produções escritas.

As entrevistas realizadas permitiram aprofundar esta evolução e compreender que os alunos não vivenciaram nem interpretaram o *feedback* da mesma forma. Um dos aspetos mais relevantes que emergiu da análise foi precisamente a diversidade de perceções relativamente ao suporte do *feedback* – escrito ou oral – e às condições em que este se torna mais eficaz.

A Marta reconheceu que os comentários lhe davam pistas importantes sobre o que precisava de melhorar: “Havia alguns assuntos que não sabia como fazer, e no *feedback* dizia mais ou menos o que é que eu tinha de fazer. Dava algumas pistas. E eu conseguia fazer depois”. No entanto, ao longo da entrevista tornou-se evidente que a compreensão do *feedback* não garantia autonomia suficiente para reconstruir o raciocínio matemático. A Marta acabou por desistir de fazer a reformulação da resposta ao Problema 1, admitindo que “houve algumas partes que percebi e outras que não conseguia fazer, e pelas partes que não consegui, desisti (...) ou eu me esqueci, ou eu não percebi como é que eu ia fazer e desisti”. Isto mostrou que o *feedback* escrito pode falhar quando o aluno apresenta insegurança conceptual ou receio de voltar a errar. A escrita, por si só, não conseguia substituir a interação imediata. Para esta aluna, o momento decisivo acontecia quando podia dialogar oralmente com o professor: “Se eu perguntasse ao professor, o professor explicava-me o que é que tinha que fazer”. Assim, o *feedback* escrito funcionava apenas como ponto de partida para uma mediação oral mais personalizada.

Também a Carla valorizou bastante a existência da dimensão oral do *feedback*, embora por razões diferentes. Ao contrário da Marta, a Carla demonstrava elevada autonomia e preferência por resolver os problemas sem ajuda: “Usualmente gosto de resolver as tarefas autonomamente”. Contudo, no Problema 2, confundiu áreas com volumes, reconhecendo posteriormente: “Eu estava a pensar mais na matéria dos volumes que

demos agora e depois misturei com a outra (áreas)”. Neste caso, o *feedback* funcionou como mecanismo de regulação, ajudando-a a reler o problema e a reinterpretar os conceitos utilizados. A aluna reconheceu explicitamente essa utilidade: “Conseguir perceber no que eu tinha errado”. A Carla deixou, ainda, um contributo particularmente relevante para a investigação ao afirmar que o *feedback* oral é mais eficaz do que o escrito: “Eu especificamente gosto mais do comentário oralmente, porque na escrita, se calhar, posso ter uma má interpretação, no entanto oralmente é mais fácil perceber”. Este testemunho mostrou que mesmo alunos autónomos podem interpretar incorretamente pistas escritas, sobretudo em contextos matemáticos em que pequenas ambiguidades podem comprometer a compreensão.

Em contraste, a Rita demonstrou uma clara valorização do registo escrito ao referir: “Mantinha escrito. Foi claro e as dúvidas que tive o professor conseguiu esclarecê-las”. O percurso da Rita no Problema 3 evidenciou particularmente bem o papel do *feedback* como elemento de confrontação com a realidade matemática do problema. Ao construir uma tabela relativa à altura das velas, a aluna continuou mecanicamente os cálculos até obter uma altura negativa para uma das velas. O *feedback* dado não forneceu diretamente a resposta correta, mas questionou o sentido matemático do resultado. Na reformulação, a aluna corrigiu parcialmente essa inconsistência e reorganizou a resposta. Posteriormente reconheceu: “A minha resposta era um bocado desorganizada, mas depois do *feedback*, acho que sim, melhorou”. Este caso mostrou que o *feedback* escrito podia ser eficaz quando convidava o aluno a refletir criticamente sobre a adequação dos resultados ao contexto do problema.

Também a Margarida revelou uma evolução muito significativa ao nível da comunicação matemática. Inicialmente, limitava-se a apresentar cálculos sem justificações: “Antes do *feedback* eu não justificava as coisas, eu só respondia à pergunta sem justificação”. Durante a intervenção pedagógica, começou progressivamente a compreender a importância de explicar os procedimentos: “(...) depois com o *feedback* comecei a perceber como é que se justificava”. A aluna reconheceu que o *feedback* lhe permitiu perceber o que faltava acrescentar às respostas: “Com o *feedback* eu consegui perceber o que é que me faltava colocar e depois, no fim, consegui fazer direito”. A Margarida sugeriu ainda uma alteração importante ao dispositivo pedagógico, pois considerou que a reformulação deveria acontecer dentro da sala de aula, aproveitando o tempo letivo e o apoio imediato do professor. Esta ideia foi também reforçada por outros alunos e revelou uma percepção clara de que o *feedback* se tornou mais eficaz quando acompanhado de tempo estruturado para revisão e reformulação.

A Joana evidenciou um perfil associado a um elevado desempenho matemático, tendo conseguido resolver corretamente os Problemas 2 e 3 na primeira fase. Neste caso, o *feedback* deixou de assumir uma função corretiva e passou a ter uma função heurística, procurando desafiar a aluna a explorar estratégias alternativas. No Problema 3, foi sugerido que tentasse resolver o problema por outro processo. A Joana acabou por não reformular a resolução, justificando: “Depois achei complicado, depois por outras formas”. Este testemunho evidenciou um limite importante do *feedback*: quando os alunos já atingiram a solução correta, tendem a considerar desnecessária a exploração de métodos alternativos. A Joana evidenciou um aspeto relevante acerca da avaliação formativa ao referir, quando questionada sobre a ausência de classificações quantitativas, que “Não senti falta”, uma perceção igualmente partilhada pelos restantes alunos entrevistados.

O Miguel trouxe talvez um dos contributos mais ricos para a reflexão pedagógica do estudo. Para além de reconhecer que o *feedback* o ajudava a perceber “o que faltava fazer”, o aluno questionou a natureza individual do processo. Na sua perspetiva, os comentários do professor deveriam ser discutidos coletivamente com toda a turma: “Em vez de ser só para mim, deve ser para a turma toda, que alguém pode ter os mesmos erros do que eu”. O Miguel acrescentou que tanto a resolução inicial como a reformulação deveriam ser realizadas em grupo: “Podíamos fazer em grupo”. Quando questionado sobre o formato, especificou: “Grupos de 4 (...) temos mais pensamento comum, podemos entender melhor com a partilha de estratégias”. Esta ideia de “pensamento comum” foi extremamente relevante para a interpretação dos resultados do estudo. O Miguel reconheceu implicitamente que a aprendizagem matemática não precisa de ocorrer de forma isolada e individualizada. Pelo contrário, a partilha de estratégias e a discussão coletiva podem e devem funcionar como mecanismos de clarificação conceptual e interpretação do *feedback*. Enquanto alguns alunos conseguiam interpretar autonomamente o *feedback*, outros revelavam bloqueios e desistência perante a dificuldade. O trabalho cooperativo poderia funcionar precisamente como um mecanismo intermédio de apoio, permitindo que os próprios colegas ajudassem a descodificar as pistas fornecidas pelo professor.

Os dados recolhidos sugeriram que o *feedback* escrito terá cumprido o seu principal objetivo pedagógico de ajudar os alunos a identificar erros, reorganizar as suas respostas e desenvolver uma maior consciência da necessidade de comunicar matematicamente com clareza. Contudo, as entrevistas deixaram uma conclusão particularmente importante: o *feedback* escrito não deverá funcionar como uma

ferramenta isolada. A sua eficácia aumenta significativamente quando articulado com momentos de explicação oral, mediação do professor e tempo letivo destinado à reformulação das tarefas.

Os testemunhos dos alunos sugeriram igualmente que o *feedback* não deveria ser entendido apenas como um comentário escrito entregue individualmente ao aluno, podendo atingir o seu potencial máximo quando se transforma num elemento de diálogo, reflexão coletiva, reformulação e partilha de estratégias dentro da sala de aula.

6. Conclusão e considerações finais

Este capítulo encerra o presente relatório de estágio, sintetizando as principais conclusões obtidas através da intervenção pedagógica e da investigação conduzida numa turma do 8.º ano de escolaridade. O propósito central deste estudo consistiu em compreender de que forma o fornecimento de *feedback* escrito fomenta a capacidade de comunicação matemática escrita dos alunos quando estes se confrontam com a resolução de problemas.

A escolha deste tema assentou na perceção de que a avaliação formativa pode ter um impacto significativo na forma de expressão e na estruturação do raciocínio dos estudantes, revelando-se também uma base de investigação relevante para o desenvolvimento profissional. Nas secções seguintes são apresentadas as respostas às questões de investigação, bem como uma reflexão sobre os desafios associados à intervenção pedagógica e sobre o contributo do trabalho desenvolvido em duas fases. Por fim, são discutidas as limitações do estudo e apresentadas algumas sugestões para futuras investigações.

6.1. Q1 – Como é que os alunos comunicam por escrito na resolução de problemas?

A análise das produções iniciais dos alunos evidenciou que a sua comunicação escrita se encontrava frequentemente na apresentação de resultados numéricos e em procedimentos mecânicos, verificando-se uma assimetria entre o processo e o produto (Vale, 1993). Esta tendência evidencia que a resolução de problemas não deve ser entendida apenas como a obtenção de uma resposta final, mas como um processo que envolve a compreensão da situação, a seleção de estratégias, a execução de um plano e a análise da solução obtida (Pólya, 2004).

Os alunos mostraram-se capazes de realizar cálculos e mobilizar procedimentos matemáticos adequados em diferentes situações, mas revelaram lacunas na dimensão conceptual da comunicação, identificando-se a ausência de justificações e dificuldades na articulação entre a linguagem natural, simbólica e pictórica, bem como no estabelecimento de relações claras entre os procedimentos realizados e o contexto do problema. Verificou-se igualmente dificuldade em interpretar os resultados obtidos e em comunicar de forma clara o significado matemático das estratégias utilizadas. Estas dificuldades aproximam-se das dimensões da comunicação matemática escrita

identificadas por Santos e Semana (2015), nomeadamente a interpretação, a justificação e a representação, evidenciando que comunicar matematicamente implica mais do que apresentar procedimentos, exigindo a explicitação das relações e dos significados matemáticos envolvidos. Esta situação é particularmente evidente na resolução da Marta no Problema 2, relacionada com a determinação da quantidade de tinta necessária para pintar um reservatório. A aluna recorreu à mobilização de fórmulas e efetuou os cálculos associados à situação. Contudo, a resolução apresentava um baixo nível de justificação, uma vez que não explicitava a relação entre os procedimentos realizados e a resposta apresentada. Apesar de determinar o número de latas de tinta necessário, não justificava a ligação entre a área calculada e a quantidade de tinta correspondente. Este exemplo evidencia a tendência para considerar que a apresentação dos cálculos constitui, por si só, uma explicação matemática suficiente. Contudo, a aprendizagem matemática envolve também a apropriação da linguagem matemática enquanto meio de comunicação do pensamento. Assim, os procedimentos realizados necessitam de ser acompanhados por uma explicação que permita compreender o significado dos símbolos utilizados, das operações efetuadas e das conclusões alcançadas. Neste sentido, a escrita matemática assume uma função que ultrapassa o simples registo de procedimentos, constituindo um instrumento de organização e construção do próprio pensamento matemático (Faria & Rodrigues, 2020; Santos & Semana, 2015).

Também a produção da Carla no Problema 3 evidencia dificuldades ao nível da interpretação e fundamentação da resolução. A aluna identificou corretamente alguns dados relevantes do problema, contudo utilizou esses dados através de um raciocínio proporcional inadequado, concluindo que “ao fim de uma hora a vela com 11 cm apagou-se”. Embora a resolução apresentasse uma resposta final explícita e revelasse uma tentativa de utilizar regras matemáticas para representar a situação, a ausência de uma análise crítica do resultado comprometeu a qualidade da comunicação apresentada. A aluna não questionou se a conclusão obtida era coerente com o contexto do problema, evidenciando dificuldades tanto na resolução matemática como na interpretação e validação da resposta.

No caso do Problema 3, apesar de a tarefa permitir a mobilização de equações, os alunos recorreram predominantemente a estratégias mais familiares (tabelas), não explorando essa possibilidade. Esta situação aproxima-se da perspetiva de Rocha et al. (2024), segundo a qual os alunos tendem a privilegiar procedimentos considerados mais simples, rápidos e seguros, recorrendo frequentemente a conhecimentos já dominados

em detrimento de abordagens menos familiares. Assim, o desenvolvimento da comunicação matemática escrita parece estar também relacionado com a capacidade dos alunos para reconhecerem diferentes possibilidades de resolução e selecionarem estratégias adequadas perante situações não rotineiras.

Estas análises articulam-se com a perspetiva apresentada pelo NCTM (2000), segundo a qual comunicar matematicamente envolve também justificar e avaliar a razoabilidade das soluções obtidas. Deste modo, a comunicação matemática não deve ser entendida como uma etapa posterior à resolução, mas como uma componente integrante do processo de raciocínio. No entanto, a análise das produções revelou que muitos alunos ainda apresentavam uma conceção mais restrita da resolução de problemas, associando frequentemente a qualidade da resposta à obtenção de um resultado numérico correto.

Globalmente, a comunicação caracterizou-se por ser fragmentada e focada no produto final, carecendo, frequentemente, de encadeamento lógico necessário para tornar o raciocínio claro para um leitor externo. Apesar de os alunos recorrerem a diferentes representações e procedimentos, na resolução dos problemas propostos, estes nem sempre eram acompanhados pela explicitação dos significados matemáticos subjacentes. Estes resultados sugerem que a comunicação matemática escrita exige um trabalho intencional e continuado, que potencie oportunidades para que os alunos justifiquem, interpretem e comuniquem o raciocínio desenvolvido. A frequência com que surgiram respostas centradas exclusivamente em cálculos ou resultados indica que muitos alunos ainda não encaravam a escrita como parte integrante da atividade matemática, mas sobretudo como um meio de registar procedimentos e respostas.

6.2. Q2 – Qual o contributo do *feedback* escrito na evolução dos alunos relativamente à capacidade de fundamentar por escrito a resolução de problemas?

O *feedback* exclusivamente escrito desempenhou um papel de mediação formativa e reguladora, incentivando a progressão e a reescrita das produções dos alunos (Dias & Santos, 2008; Santos, 2008). Afastando-se de uma natureza puramente classificativa, que Gipps (1999) aponta como tendo efeitos limitados na aprendizagem, as pistas fornecidas procuraram focar-se no processo de resolução e no desenvolvimento da autorregulação (Hattie & Timperley, 2007).

Como preconizado por Brookhart (2019), o *feedback* funciona como um veículo de informação que os alunos podem utilizar para reavaliar o seu trabalho. Segundo Sadler (1989), este processo ajuda o aluno a identificar a distância entre o seu desempenho atual e o esperado. Na análise das reformulações das resoluções, observou-se que esta abordagem propiciou momentos de autorregulação (Santos, 2002), levando os alunos a regressar às fases de resolução de problemas de Pólya (2004), reinvestindo na compreensão do enunciado. Estudantes que antes omitiam justificações conseguiram, após o *feedback* escrito, explicitar a origem dos dados e encadear as etapas de resolução. Um exemplo disso surgiu no questionário, em que um aluno referiu que o *feedback* escrito “ajudou-me a relacionar o perímetro da base do cilindro com uma volta completa”, mostrando que a orientação escrita auxiliou na coordenação de registos geométricos que tinham falhado na primeira fase.

Globalmente, verificou-se que o *feedback* contribuiu para que alguns alunos passassem de uma comunicação predominantemente centrada na apresentação de cálculos e resultados para uma comunicação mais explícita, na qual procuravam justificar procedimentos, interpretar resultados e tornar mais claro o raciocínio desenvolvido. Contudo, esta evolução não ocorreu de forma automática pelo simples facto de os alunos receberem comentários escritos, dependendo da forma como estes interpretaram as orientações fornecidas e da capacidade de as mobilizar para reformular as suas produções. Esta conclusão relaciona-se com a perspetiva de Santos (2008, 2022), segundo a qual o *feedback* assume uma função reguladora quando permite ao aluno compreender a distância entre a produção realizada e o objetivo pretendido, criando condições para melhorar a aprendizagem. Assim, o *feedback* escrito não deve ser entendido apenas como uma apreciação do trabalho realizado, mas como uma ferramenta que permite ao aluno refletir sobre a sua produção e tomar decisões relativamente aos aspetos a melhorar.

Ao longo da intervenção, verificou-se uma evolução progressiva na forma como os alunos utilizaram o *feedback*. No Problema 1, o Miguel, a Carla, a Joana e a Rita apresentaram melhorias significativas após receberem *feedback*, conseguindo incorporar as orientações fornecidas e alterar aspetos das suas resoluções. Esta primeira experiência parece ter sido importante para a construção de uma compreensão inicial sobre a finalidade do *feedback*. Os alunos começaram a perceber que a reformulação não consistia apenas em corrigir uma resposta errada, mas em melhorar a forma como comunicavam matematicamente as suas ideias. Contudo, nem todos os alunos conseguiram beneficiar deste processo no Problema 1. A Margarida e a Marta

não entregaram a reformulação, impossibilitando avaliar diretamente o impacto do *feedback* nas suas produções. Apesar disso, a análise das entrevistas finais permite compreender que a ausência de reformulação não significou necessariamente uma rejeição do *feedback*, estando associada, em alguns casos, a dificuldades na interpretação das orientações ou na transformação das indicações recebidas em ações concretas de melhoria.

No Problema 2, verificou-se uma maior diferenciação entre os alunos, em que as dificuldades deixaram de estar apenas relacionadas com a comunicação escrita, envolvendo também aspetos conceptuais e procedimentais. A Carla e a Margarida apresentaram uma evolução significativa, demonstrando uma apropriação mais profunda do *feedback* recebido. No caso da Carla, o *feedback* permitiu ultrapassar dificuldades relacionadas com a interpretação da situação e com a necessidade de justificar o raciocínio utilizado. A reformulação evidenciou uma maior preocupação em explicar os procedimentos realizados e em estabelecer relações entre os elementos matemáticos envolvidos.

A evolução da Margarida evidencia também o contributo do *feedback* para a melhoria da comunicação escrita, uma vez que a aluna demonstrou capacidade para utilizar as orientações recebidas como suporte à reformulação, passando a explicitar de forma mais clara as relações matemáticas presentes na resolução. Esta alteração demonstra que o *feedback* não produziu apenas uma correção pontual, mas contribuiu para uma mudança na forma como a aluna comunicava matematicamente. Estes resultados aproximam-se da perspetiva de Brookhart (2019), segundo a qual o *feedback* mais eficaz é aquele que apresenta informação específica, clara e orientada para a melhoria, permitindo ao aluno compreender aquilo que necessita de alterar e como poderá desenvolver a sua resposta.

Não obstante, no Problema 2, o Miguel, a Rita e a Marta realizaram apenas alterações parciais nas suas produções, que incidiram sobretudo sobre aspetos específicos indicados no *feedback*, não conduzindo sempre a uma revisão profunda do raciocínio desenvolvido. A reformulação da Rita é particularmente ilustrativa desta situação, pois incorporou algumas das indicações fornecidas no *feedback*, corrigindo aspetos como a organização da representação e determinados elementos formais da resposta. Contudo, manteve algumas dificuldades relacionadas com a interpretação global do problema, demonstrando que utilizou o *feedback* sobretudo para responder às indicações mais explícitas, mas não o mobilizou totalmente como instrumento de reflexão sobre a estratégia utilizada. Registaram-se, ainda, casos como o da Joana, em não se

verificaram melhorias após o *feedback* no Problema 2, o que demonstra que a existência de um comentário escrito, mesmo quando apresenta orientações específicas, não garante necessariamente uma evolução da produção do aluno. A dificuldade poderá estar relacionada com a interpretação das indicações recebidas ou com a necessidade de um apoio adicional para transformar o *feedback* em alterações concretas.

No Problema 3, verificou-se novamente uma evolução diferenciada, mas com evidências mais claras de apropriação do *feedback* por parte de alguns alunos. A Margarida, inicialmente, utilizou uma representação adequada da evolução das alturas das velas, mas não explicitava suficientemente o significado dos valores apresentados e, após o *feedback*, passou a estabelecer uma relação mais clara entre a representação e a conclusão obtida, acrescentando expressões como “ao fim de” e “a vela tem”. Este exemplo evidencia que o *feedback* contribuiu para o desenvolvimento de uma dimensão central da comunicação matemática, a capacidade de explicitar o significado das representações utilizadas, em consonância com a perspetiva do NCTM (2000), segundo a qual comunicar matematicamente implica não só apresentar procedimentos, mas também organizar e transmitir o pensamento matemático de forma clara e compreensível.

No entanto, no Problema 3 voltou a verificar-se que alguns alunos não entregaram a reformulação. As entrevistas permitiram compreender que esta situação esteve relacionada com fatores associados à perceção do *feedback*, mas também com fatores associados à gestão do próprio processo de melhoria. No caso da Marta, por exemplo, apesar de reconhecer que o *feedback* apresentava pistas úteis, a aluna referiu dificuldades em compreender como deveria aplicar essas orientações, afirmando que alguma parte conseguia perceber, mas noutras “não conseguia fazer” ou acabava por desistir. Esta situação reforça a ideia apresentada por Machado (2021), segundo a qual o *feedback* constitui uma ferramenta essencial da avaliação formativa, mas necessita de estar integrado num processo mais amplo de acompanhamento, no qual o professor apoia os alunos na interpretação e utilização da informação recebida.

De referir que se observou que algumas reformulações eram iguais ou muito semelhantes, o que pode ser explicado pelo facto de os alunos poderem ter feito em conjunto (como alguns alunos referiram nas entrevistas) ou por, eventualmente, terem recorrido à inteligência artificial.

6.3. Q3 – Como os alunos percecionam o *feedback* escrito recebido?

A análise dos questionários, das entrevistas e das reformulações realizadas pelos alunos permitiu compreender a forma como os participantes interpretaram o *feedback* escrito recebido ao longo da intervenção pedagógica e o modo como utilizaram essa informação no processo de melhoria das suas resoluções. Os resultados evidenciam uma evolução na compreensão da função do *feedback*, passando os alunos a reconhecê-lo como um recurso que permite identificar dificuldades específicas, orientar alterações nas produções escritas e desenvolver uma comunicação matemática mais clara e fundamentada.

Segundo Santos (2008, 2022), a avaliação formativa assume uma função reguladora quando fornece informação que permite ao aluno compreender o seu desempenho e agir sobre essa informação, promovendo progressivamente melhorias na aprendizagem. Neste sentido, o *feedback* escrito constitui um elemento fundamental deste processo, uma vez que estabelece uma ligação entre a produção realizada pelo aluno e os aspetos que podem ser desenvolvidos numa etapa posterior. No presente estudo, esta função reguladora tornou-se evidente na evolução das perceções dos alunos ao longo da intervenção. Inicialmente, o *feedback* parece ter sido interpretado sobretudo como uma forma de identificar incorreções presentes nas resoluções. Contudo, com a continuidade do processo de resolução, receção de *feedback* e reformulação, os alunos passaram a compreender que o propósito dos comentários recebidos era sobretudo o de fornecer orientações sobre os procedimentos a rever, as explicações a acrescentar e os aspetos da resolução que necessitavam de maior desenvolvimento. Esta evolução encontra eco na perspetiva de Fernandes (2021), segundo a qual o *feedback* escrito permite transformar a produção do aluno num objeto de análise e reflexão, criando condições para que este compreenda o seu próprio processo de aprendizagem. Assim, o *feedback* passou a ser entendido como uma orientação para rever a resolução, identificar dificuldades e desenvolver estratégias de melhoria.

Ao longo da intervenção, verificou-se que os alunos foram reconhecendo com maior clareza a relação entre o *feedback* recebido e os aspetos que poderiam melhorar nas suas produções. Esse reconhecimento é particularmente relevante porque demonstra que os alunos desenvolveram uma maior consciência sobre as exigências da comunicação matemática escrita, reconhecendo que uma resolução não se limita à

apresentação de cálculos ou de um resultado numérico, exigindo também a explicitação dos procedimentos realizados, do significado dos elementos utilizados e da coerência das conclusões obtidas. Esta ideia encontra-se articulada com a perspetiva de Vale et al. (2011), que destacam a comunicação matemática como a capacidade de explicar, justificar e tornar compreensível o raciocínio desenvolvido. Neste sentido, o *feedback* contribuiu para que os alunos identificassem que uma resposta matematicamente correta pode apresentar limitações quando não permite compreender o processo seguido.

A análise das entrevistas permitiu aprofundar estes resultados, evidenciando diferentes formas de interpretação e utilização do *feedback* por parte dos alunos. O caso da Margarida representa uma situação em que o *feedback* foi integrado no processo de aprendizagem. A aluna reconheceu que, antes da intervenção, não valorizava suficientemente a fundamentação escrita, afirmando que “só respondia à pergunta sem justificação”. Posteriormente, referiu que “com o *feedback* comecei a perceber como é que se justificava”, evidenciando uma alteração na forma como compreendia uma resolução matemática completa. As entrevistas mostraram igualmente que a compreensão da utilidade do *feedback* não significou que todos os alunos conseguissem utilizá-lo da mesma forma. O caso da Marta evidencia esta situação, pois reconheceu que o *feedback* fornecia pistas orientadoras para ultrapassar dificuldades, referindo que este indicava “mais ou menos o que é que eu tinha de fazer”. No entanto, também identificou dificuldades em aplicar essas orientações, afirmando que “algumas partes não conseguia fazer” ou que acabou por desistir. Este caso evidencia que compreender a informação transmitida pelo *feedback* constitui uma etapa essencial, mas não garante, por si só, a melhoria da produção escrita. Tal como refere Brookhart (2019), a eficácia do *feedback* depende da forma como o aluno interpreta a informação recebida e da possibilidade de a utilizar para orientar ações futuras. Neste sentido, a situação da Marta evidencia também a importância da mediação do professor, uma vez que determinadas dificuldades exigem momentos adicionais de esclarecimento e acompanhamento.

A Rita apresenta uma situação intermédia, em que a análise de algumas das suas reformulações mostra que a aluna mobilizou parte das indicações presentes no *feedback*, sobretudo na correção de elementos específicos da resposta, sem proceder a uma revisão completa do raciocínio desenvolvido. Esta interpretação é também sustentada pela entrevista, na qual a aluna evidencia uma preocupação em realizar as alterações solicitadas, nem sempre associando a reformulação a um momento de

reflexão sobre os procedimentos utilizados e sobre a forma de melhorar a sua resolução. Assim, apesar de reconhecer o contributo do *feedback*, a sua utilização parece ainda estar próxima de uma lógica centrada no cumprimento das indicações do professor, em detrimento da sua apropriação enquanto instrumento de aprendizagem.

A análise conjunta dos questionários, entrevistas e reformulações permite identificar que os alunos reconheceram no *feedback* escrito três funções principais: identificar dificuldades concretas nas suas resoluções, compreender aspetos que poderiam ser melhorados e orientar a reformulação das suas produções. No entanto, enquanto alguns alunos conseguiram integrar as orientações recebidas e alterar aspetos centrais das suas resoluções, outros reconheceram a utilidade do *feedback*, mas revelaram dificuldades em transformar essas orientações em mudanças efetivas. Por conseguinte, o *feedback* escrito assumiu um papel relevante no desenvolvimento da comunicação matemática, sendo reconhecido, pelos alunos, como tendo contribuído para uma maior atenção à necessidade de explicar, justificar e tornar compreensível o raciocínio desenvolvido.

6.4. Os desafios da intervenção pedagógica

O desenvolvimento deste estudo constituiu um desafio complexo no processo de afirmação enquanto professor-investigador, permitindo a criação de uma base de dados empírica para uma reflexão crítica sobre a ação pedagógica, a correção de práticas menos eficazes e o aperfeiçoamento de estratégias. Um dos desafios mais exigentes residiu na elaboração de um *feedback* escrito que fosse eficaz à luz do enquadramento teórico adotado. Este processo envolveu um esforço contínuo de escrita, leitura e releitura minuciosa de cada comentário, procurando assegurar que as pistas funcionavam como andaimes didáticos e não como instruções puramente diretivas que anulassem a autonomia do estudante, como acautelam Hattie e Timperley (2007) e Brookhart (2019).

Nesse percurso de calibração, a colaboração com a colega de estágio revelou-se um elemento fundamental de suporte e validação interpares. Para esse efeito, alguns dos comentários elaborados foram previamente partilhados com a colega de estágio, com vista à obtenção de uma breve apreciação sobre o *feedback* produzido. Esta partilha permitiu avaliar a clareza da linguagem e prever a forma como os alunos encarariam e interpretariam os comentários, na tentativa de mitigar o risco de os comentários parecerem herméticos ou excessivamente explícitos. Esta atenção minuciosa ao modo

como o *feedback* seria recebido evidenciou a necessidade de adequar a mensagem à maturidade cognitiva da turma do 8.º ano, garantindo que o comentário mantinha o equilíbrio entre o rigor matemático e a acessibilidade interpretativa. Apesar da identificação dos pontos a melhorar na maioria das resoluções analisadas, o *feedback* poderia ter beneficiado de uma maior orientação para o processo. Ainda assim, considera-se que a utilização de questões orientadoras contribuiu para promover a reflexão dos alunos sobre a sua resolução.

Um dos principais desafios identificados ao longo da intervenção relacionou-se com a tendência dos alunos para procurarem validação imediata por parte do professor. Em diversas situações, perante dificuldades de interpretação ou incerteza relativamente aos procedimentos adotados, os alunos procuravam confirmar constantemente se o caminho seguido era o correto. Esta postura revelou-se particularmente evidente nas fases iniciais da intervenção e parece refletir práticas de ensino em que a validação externa assume um papel predominante. Este desafio levou à necessidade de encontrar um equilíbrio entre o apoio prestado aos alunos, sem diminuir o grau de desafio das tarefas propostas. Enquanto professor, tornou-se necessário resistir à tentação de fornecer respostas ou indicações demasiado diretas, procurando antes formular questões que mantivessem os alunos envolvidos no processo de construção das suas próprias soluções.

A par do *feedback* fornecido aos alunos, a seleção dos problemas constituiu um dos maiores desafios da intervenção. Embora a caracterização inicial da turma sugerisse um desempenho global satisfatório, a implementação do primeiro problema permitiu constatar que muitos alunos não estavam habituados a trabalhar com problemas, quer em contexto de aula, quer em momentos de avaliação. Neste sentido, reconhece-se que a escolha do Problema 1 poderá não ter sido a mais adequada para iniciar a intervenção. O enunciado extenso, embora concebido com a intenção de promover a interpretação de informação matemática em contexto de uma situação do quotidiano, acabou por constituir uma barreira para vários alunos, gerando bloqueios iniciais e alguma resistência à tarefa.

Esta constatação conduziu a uma reformulação dos critérios de seleção do Problema 2, em que se optou por um enunciado mais conciso, assente numa única questão e com os dados apresentados diretamente na imagem. Embora noutras turmas de 8.º ano esta tarefa pudesse eventualmente ser percecionada como um exercício, as resoluções produzidas evidenciaram que, para estes alunos, continuava a assumir características de um problema. A manutenção do mesmo domínio de conteúdos revelou-se igualmente

pertinente, uma vez que o primeiro problema tinha evidenciado dificuldades relacionadas com a compreensão das áreas dos sólidos e a distinção entre os conceitos de área e volume. Adicionalmente, a proximidade do momento de avaliação justificava a necessidade de consolidar e rever conteúdos anteriormente lecionados. Os resultados obtidos neste segundo momento levaram à reflexão de que uma intervenção iniciada por esta tarefa poderia ter facilitado a adesão dos alunos à resolução de problemas e reduzido a resistência inicialmente observada.

Relativamente ao Problema 3, a sua seleção foi motivada pelas dificuldades previamente identificadas na resolução de equações do primeiro grau. Pretendeu-se apresentar uma situação que permitisse mobilizar diferentes formas de representação matemática e que servisse simultaneamente de ponte para a abordagem posterior das equações literais. Contudo, verificou-se que praticamente todos os alunos recorreram a estratégias mais próximas das estratégias que habitualmente utilizavam, não surgindo resoluções com recurso a equações. Esta situação reforçou a perceção de que os alunos necessitam de um trabalho mais sistemático com diferentes representações matemáticas, de forma a ampliar o repertório de estratégias disponíveis e a promover uma maior flexibilidade de pensamento (Melo & Justulin, 2019).

De um modo geral, esta experiência evidenciou que a seleção de problemas constitui um processo particularmente exigente, implicando encontrar um equilíbrio entre o potencial desafiante das tarefas, a sua adequação ao nível e às características da turma e a articulação com os objetivos curriculares em desenvolvimento.

Também a análise das produções escritas dos alunos levantou alguns desafios. Em determinadas situações, a classificação das respostas nas categorias de análise definidas revelou-se complexa, exigindo um aprofundamento da literatura e uma clarificação conceptual dos critérios utilizados. Ainda assim, estas dificuldades constituíram importantes oportunidades de aprendizagem profissional, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de interpretação das produções dos alunos.

Desta forma, os desafios que foram surgindo contribuíram para o desenvolvimento de uma postura profissional mais reflexiva e consciente da importância de ajustar continuamente as decisões pedagógicas às necessidades dos alunos e aos objetivos de aprendizagem definidos.

6.5. O papel do trabalho em duas fases

Os resultados sugerem igualmente que o trabalho desenvolvido em duas fases assumiu um papel importante no processo de aprendizagem. A possibilidade de resolver inicialmente a tarefa, receber *feedback* e, posteriormente, reformular a resposta permitiu aos alunos identificar dificuldades específicas, refletir sobre os erros cometidos, reorganizar as suas estratégias de resolução e melhorar a qualidade das produções escritas.

Além disso, esta dinâmica contribuiu para uma relação dos alunos mais amigável com o erro. Em vez de ser entendido apenas como sinal de insucesso, o erro passou progressivamente a assumir um papel formativo, funcionando como ponto de partida para a melhoria das respostas.

Contudo, importa referir que, tanto no Problema 1 como no Problema 3, menos de metade da turma procedeu efetivamente à reformulação das resoluções após a receção do *feedback*. Este aspeto poderá indicar algum distanciamento dos alunos relativamente a esta forma de trabalho, pouco habitual nas suas experiências anteriores de aprendizagem.

No caso do Problema 1, esse distanciamento poderá estar relacionado com as dificuldades sentidas na compreensão do próprio enunciado e na interpretação da tarefa proposta. Como se verificou ao longo da análise, vários alunos demonstraram insegurança perante a natureza não rotineira do problema, o que poderá ter condicionado também a disponibilidade para visitar e reformular as suas resoluções.

Relativamente ao Problema 3, apesar de o *feedback* fornecido incluir, em vários casos, sugestões específicas de melhoria ou propostas para explorar estratégias alternativas, muitos alunos pareceram considerar que as respostas inicialmente apresentadas eram já suficientes, optando por não proceder à reformulação.

Nesse sentido, a etapa da reformulação das resoluções apresentou alguns desafios, pois apesar de ter sido reforçada a sua importância, os alunos apresentaram alguma passividade na entrega das reformulações depois de terem recebido o *feedback*. Como resultado, houve uma parte significativa da turma que não apresentou a reformulação, revelando que a valorização pedagógica da reformulação não é imediata para todos os alunos e que o desenvolvimento deste tipo de práticas exige continuidade, acompanhamento, criação de rotinas de reflexão dos alunos sobre os seus trabalhos e intencionalidade pedagógica.

Importa igualmente considerar que a curta duração da intervenção poderá ter condicionado a adesão dos alunos a esta dinâmica de trabalho. A integração regular de práticas de *feedback* e reformulação ao longo do tempo poderá contribuir para uma maior familiarização dos alunos com este processo, favorecendo uma participação mais consistente e o desenvolvimento de evoluções mais significativas e duradouras ao nível da comunicação matemática escrita e da autorregulação das aprendizagens.

A estrutura em duas fases permitiu transformar a avaliação num processo contínuo de revisão e melhoria, em que os alunos foram convidados a regressar às suas respostas, interpretar as orientações recebidas e reconstruir o raciocínio desenvolvido. Esta dinâmica contribuiu para deslocar a atenção do resultado para o processo de aprendizagem. Assim, os resultados do estudo reforçam a importância de criar contextos de aprendizagem em que os alunos tenham oportunidade de visitar e reformular as suas produções matemáticas, mesmo quando essa prática não corresponde às dinâmicas de trabalho a que habitualmente estão expostos.

6.6. Limitações do estudo

O desenvolvimento de uma investigação em contexto real de sala de aula impõe, frequentemente, constrangimentos de natureza logística, temporal e curricular que importa analisar criticamente, pois condicionam a extensão e o aprofundamento de algumas dinâmicas pedagógicas projetadas.

Uma das limitações operacionais mais evidentes neste estudo prendeu-se com o distanciamento temporal verificado entre o momento de aplicação do terceiro problema (e o respetivo *feedback* escrito fornecido) e a realização das entrevistas. Devido a condicionantes de calendário escolar, feriados e interrupções letivas, as entrevistas não puderam ser efetuadas no período imediatamente subsequente à conclusão da última fase relativa ao Problema 3. Este hiato temporal pode ter atenuado a frescura das memórias e das reações imediatas dos estudantes relativamente à intervenção pedagógica, constituindo um fator que importa salvaguardar em futuras investigações da mesma natureza.

Adicionalmente, as exigências de cumprimento do programa curricular de Matemática do 8.º ano limitaram a margem de manobra quanto à gestão dos tempos em sala de aula. Devido à escassez de tempos letivos disponíveis, não foi viável alocar aulas extra para acompanhar mais de perto a fase de receção do *feedback*. A existência de mais

espaço no cronograma letivo teria permitido monitorizar individualmente as reações imediatas dos alunos, esclarecer questões de interpretação que surgissem durante a leitura dos comentários e prestar um apoio ainda mais direcionado aos estudantes que manifestavam maiores dificuldades em iniciar a reformulação autónoma.

Para além das limitações inerentes à dimensão da amostra e à natureza contextualizada do estudo, importa reconhecer os constrangimentos associados à implementação deste tipo de práticas em contexto escolar. A elaboração de *feedback* escrito individualizado revelou-se um processo exigente em termos de tempo, particularmente quando se procura que os comentários sejam específicos, compreensíveis e orientadores. Acresce que a integração de ciclos de resolução de problemas, *feedback* e reformulação implica uma gestão curricular cuidadosa. Num contexto em que os programas são extensos e o tempo letivo limitado, a criação de espaços para revisão e reescrita das resoluções constitui um desafio significativo para o professor. Ainda assim, os resultados obtidos sugerem que o investimento realizado poderá ser compensado pela qualidade das aprendizagens promovidas.

6.7. Sugestões para investigações futuras

Uma das reflexões mais promissoras deste estudo brotou das sugestões manifestadas pelos alunos nas entrevistas finais. Para investigações futuras seria interessante a transição do trabalho estritamente individual para a resolução e reformulação de problemas em grupo. Esta abordagem cooperativa poderia diluir o impacto do bloqueio interpretativo e da ansiedade inicial perante enunciados complexos (como o verificado no Problema 1), uma vez que a fase de compreensão dos problemas seria partilhada e discutida entre pares, reduzindo a frustração e aumentando a persistência.

Adicionalmente, a resolução de problemas com os alunos organizados em grupos, associada à atribuição de *feedback* escrito dirigido a cada grupo, poderá potenciar dinâmicas de mediação sociocognitiva. Neste contexto, o comentário do professor deixa de ser exclusivamente individual para se constituir como um objeto de análise, discussão e negociação entre os elementos do grupo. A eventual divergência de interpretações, bem como a necessidade de justificar, confrontar e reformular estratégias, pode favorecer processos de explicitação do raciocínio, promovendo a comunicação e a construção coletiva de significados. Este processo poderá, assim, contribuir para o desenvolvimento de consensos fundamentados e para a integração de diferentes perfis de participação na sala de aula.

Uma outra linha de investigação poderá centrar-se na utilização do *feedback* entre pares, em que os alunos, após resolverem problemas, analisassem e comentassem as resoluções dos colegas, assumindo um papel ativo na identificação de aspetos a melhorar e na formulação de sugestões. Por exemplo, a turma poderia ser organizada de modo que diferentes grupos resolvessem tarefas distintas e, posteriormente, trocassem as suas produções para análise e produção de *feedback* entre pares. Numa fase seguinte, os alunos poderiam reformular as suas resoluções com base nas sugestões recebidas. Finalmente, o processo culminaria com a apresentação, por parte de cada grupo, da respetiva reformulação à turma. Esta abordagem poderia contribuir simultaneamente para o desenvolvimento da comunicação matemática e para uma maior capacidade de reflexão sobre os processos de resolução, uma vez que a análise crítica das produções dos colegas poderá favorecer a identificação de estratégias, dificuldades e erros que também podem estar presentes nas suas resoluções.

Seria também relevante analisar o impacto do *feedback* escrito ao longo de períodos temporais mais alargados, permitindo compreender se as melhorias observadas se mantêm ao longo do tempo e se se transferem para novas situações de resolução de problemas.

Ao longo desta investigação tornou-se evidente que muitos alunos sabem mais Matemática do que aquela que conseguem comunicar por escrito. As dificuldades observadas nem sempre resultavam da ausência de conhecimentos matemáticos, mas frequentemente da dificuldade em organizar, justificar e tornar explícito o raciocínio desenvolvido. Neste contexto, o *feedback* escrito revelou-se uma ferramenta relevante para apoiar esse processo de explicitação. Mais do que conduzir à melhoria das respostas, permitiu criar oportunidades para que os alunos refletissem sobre o seu pensamento matemático, transformando a escrita num meio de construção e regulação da aprendizagem, para além do simples registo de resultados.

Referências Bibliográficas

- Albert, L. R. (2000). Outside-in–inside-out: Seventh-grade students' mathematical thought processes. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 109-141.
- Amado, J. (2017). A investigação em educação e os seus paradigmas. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (3.ª ed., pp. 21-74). Imprensa da Universidade de Coimbra. <https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1>
- Amado, J., & Ferreira, S. (2017). A entrevista na investigação em educação. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (3.ª ed., pp. 209-234). Imprensa da Universidade de Coimbra. <https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1>
- Amado, J., & Silva, L. C. (2017). Os estudos etnográficos em contextos educativos. In J. Amado (Coord.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (3.ª ed., pp. 147-170). Imprensa da Universidade de Coimbra. <https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1>
- Baptista, I. (Coord.), Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética da investigação em educação* (2.ª ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Baxter, G. P., & Lederman, N. G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 147-161). Kluwer Academic Publishers.
- BERA. (2018). *Ethical guidelines for educational research* (4th ed.). British Educational Research Association.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74. <https://doi.org/10.1080/0969595980050102>
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing a theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>

- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. <http://hdl.handle.net/10400.26/5566>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos* (M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. Baptista, Trans.). Porto Editora.
- Brookhart, S. M. (2008). *How to give effective feedback to your students*. ASCD.
- Brookhart, S. M. (2019). Feedback and measurement. In S. M. Brookhart & J. H. McMillan (Eds.), *Classroom assessment and educational measurement* (pp. 63-78). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429507533-5>
- Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* NCTM.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática para o 8.º ano do 3.º ciclo do ensino básico*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/aemat_8a_2021-08-19.pdf
- Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia de investigação: Para as ciências sociais*. Gradiva.
- Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. (2003). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn*. Math Solutions Publications.
- Clarke, D., Waywood, A., & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 235-250.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Routledge.
- Davidson, D., & Pearce, D. (1990). Perspectives on writing activities in the mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 2(1), 15-22.
- Denzin, N. K. (2017). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods* (5th ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315134543>

- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2005). *The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed.). Sage Publications.
- Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O feedback regulador. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 133–143). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://esev.ipv.pt/wp-content/uploads/sites/9/2023/11/Atas_eiem_2007_SP.pdf
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Emerson, R. M., Fretz, R. I., & Shaw, L. L. (2011). *Writing ethnographic fieldnotes* (2nd ed.). University of Chicago Press.
- English, L. D., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008, July 6–13). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development* [Paper presentation]. 11th International Congress on Mathematical Education (ICME-11), Monterrey, Mexico.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). Macmillan.
- Faria, F., & Rodrigues, M. (2020). A comunicação matemática escrita. *Da Investigação às Práticas: Estudos de Natureza Educacional*, 10(2), 90-116. <https://doi.org/10.25757/invep.v10i2.220>
- Fernandes, D. (2021). *Avaliação formativa. Folha de apoio à formação - Projeto de monitorização acompanhamento e investigação em avaliação pedagógica (MAIA)*. Direção-Geral da Educação. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2021-04/Folha1_Avaliação_Formativa.pdf
- Ferreira, R. T., Serrazina, L., & Caballero-Carrasco, A. (2023). A resolução de problemas e o ensino e a aprendizagem da matemática. In R. T. Ferreira, A. P. Canavarro, T. Neto, I. Cabrita, & N. Branco (Eds.), *Livro de atas do encontro de investigação em educação matemática EIEM 2023: Resolução de problemas* (pp. 41-47). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

- Fisher, D., & Frey, N. (2009). Feed Up, back, forward. *Educational Leadership*, 67(3), 20-25.
- Gipps, C. V. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. In P. D. Pearson & A. Iran-Nejad (Eds.), *Review of research in education* (Vol. 24, pp. 355-392). American Educational Research Association.
- Granda-Piñán, A. R., Belenguer, M. M., Martínez-Marcos, A., & Aleix, S. G. (2025). From traditional classrooms to innovative learning environments: Teachers' perceptions of space, furniture, and environmental conditions. *Revista Indexada de Textos Académicos*, 24, 79-99.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.
- Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's* (pp. 111-126). Association for Supervision and Curriculum Development.
- Kingwell, A. B. R. (2022). *Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas* [Relatório de estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]. Repositório Aberto da Universidade do Porto. <https://hdl.handle.net/10216/142868>
- Knabbe, A., Leiss, D., & Ehmke, T. (2024). Reality-based tasks with complex-situations: Identifying sociodemographic and cognitive factors for solution. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 23, 97-120. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10463-5>
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Sage Publications.
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing* (2nd ed.). Sage Publications.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. In G. Kaiser (Ed.), *Problem solving in mathematics education* (pp. 1-39). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

- Machado, E. A. (2021). *Feedback: Folha de apoio à formação - Projeto de monitorização, acompanhamento e investigação em avaliação pedagógica (MAIA)*. Direção-Geral da Educação. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2021-04/Folha%203_%20Feedback.pdf
- Martinho, M. H., & Rocha, H. (2017). A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de licenciatura em educação básica. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro, J. P. Ponte, I. Vale, M. Rodrigues, N. Branco, & T. Pimentel (Eds.), *Livro de atas do EIEM 2017: Encontro de investigação em educação matemática* (pp. 163-177). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2017.pdf
- Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2524>
- Martins, G. O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilho, J., Silva, L. U., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf
- Martins, L. G. (2023). *A resolução de problemas e a escrita matemática: Um estudo com alunos do ensino secundário* [Tese de doutoramento, Universidade do Minho]. RepositóriUM. <https://hdl.handle.net/1822/89639>
- Matoso, A., Moura, A., & Fialho, C. (2025). *MAT8 – Vol. II*. Texto Editores.
- Melo, M., & Justulin, A. (2019). Resolução de problemas: Um caminho para o ensino da matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista*, 3(1), 112-128. <https://doi.org/10.3895/etr.v3n1.10052>
- Menina, F. (2010). *Compreensão e interpretação em matemática: Dificuldades de alunos do 9.º ano na resolução de problemas* [Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências Humanas e Sociais]. Repositório da Universidade do Algarve. <http://hdl.handle.net/10400.1/256>

- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4.ª ed.). Jossey-Bass.
- NCSM (1990). A matemática essencial para o século XXI (L. Fonseca & P. Palhares, Trads.). *Educação e Matemática*, 14, 23-25.
<https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/216>
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- NCTM (2020). *Standards for the preparation of middle level mathematics teachers*. NCTM.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed.). Sage Publications. <https://doi.org/10.1177/1035719X0300300213>
- Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Universidade Aberta.
https://www.researchgate.net/publication/261214329_Modelos_de_avaliacao_das_aprendizagens
- Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Expanded ed.). Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
<http://hdl.handle.net/10451/3008>
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. In J. P. Ponte et al. (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 203-216). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. ME-DGIDC.
<http://hdl.handle.net/10400.15/1994>
- Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.

- Porter, M., & Masingila, J. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 165-177. <https://doi.org/10.1023/A:1004166811047>
- Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, 101(5), 236-245. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18026.x>
- Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem-solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 27-47. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017666.11367.c7>
- Rocha, H., Viseu, F., & Matos, S. (2024). Problem-solving in a real-life context: An approach during the learning of inequalities. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 21-37. <https://doi.org/10.30935/scimath/13828>
- Rott, B. (2021). Inductive and deductive justification of knowledge: Epistemological beliefs and critical thinking at the beginning of studying mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 117-132. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10004-1>
- Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18(2), 119-144.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens* (pp. 77-84). Ministério da Educação, DEB. <http://hdl.handle.net/10451/4884>
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. <https://repositorio.ipv.pt/entities/publication/b5719915-d8b5-42f5-b8bf-cd58f232e9bc>
- Santos, L. (2022). O feedback como uma poderosa ferramenta para a aprendizagem matemática: Uma meta-análise de estudos portugueses. *Revemop*, 4, e202210. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202210>

- Santos, L., & Dias, S. (2007). Será que os alunos compreendem o que lhes escrevem os professores? *Educação e Matemática*, 94, 11-16. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1616>
- Santos, L., & Pinto, J. (2010). The evolution of feedback practice of a mathematics teacher. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 145-152). PME.
- Santos, L., & Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49-56). PME.
- Santos, L., & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 65-87. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9557-z>
- Santos, L., Raposo, S., & Cardoso, A. (2024). O feedback: Uma prática de avaliação formativa incontornável. *Educação e Matemática*, 171, 2-6. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2944>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Sfard, A. (2009). Commentary on the chapters by Baker and Asterhan and Schwarz through the lens of commognition. In B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. HersHKowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 173-183). Routledge.
- Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*, 78(1), 153-189. <https://doi.org/10.3102/0034654307313795>
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação (T. F. de Carvalho, Trad.). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 13(14), 66-91. <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Tavares, D., & Menino, H. (2024). A importância do feedback na aprendizagem da matemática numa experiência de ensino a distância. In S. M. Lopes, S. Faria, &

- S. S. Monteiro (Coords.), *Metodologias e práticas educativas no ensino superior: Visões multidisciplinares* (pp. 135-153). Almedina.
- Teledahl, A., Kilhamn, C., Ahl, L. M., & Helenius, O. (2025). Defining and measuring quality in students' mathematical writing: A systematic literature review. *Mathematics Education Research Journal*, 37, 557-576. <https://doi.org/10.1007/s13394-024-00501-4>
- Tyack, D., & Cuban, L. (1995). *Tinkering toward utopia: A century of public school reform*. Harvard University Press.
- Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos* [Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório Científico de Acesso Aberto da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/43724>
- Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.
- Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39-60. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22923>
- Vale, L., Ferreira, R., & Santos, L. (2011). O erro na aprendizagem das sequências e regularidades: O papel dos dispositivos de regulação. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 541-554). [https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas SIEM/2011 Lisboa ATAS XXII SIEM .pdf](https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas%20SIEM/2011%20Lisboa%20ATAS%20XXII%20SIEM.pdf)
- Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8-11.
- Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Information Age Publishing.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6th ed.). Sage Publications.

Anexos

Anexo 1 – Consentimento para os encarregados de educação e assentimento para os alunos



Exmo. Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Nós, Margarida Gonçalves e Rodrigo Moutinho, somos alunos do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e encontramos-nos, de momento, a realizar a Prática de Ensino Supervisionada (PES) na Escola onde o seu(sua) filho(a) estuda, sob a orientação da [REDACTED]

No âmbito do nosso relatório de estágio, pretendemos desenvolver uma investigação. A realização de cada um destes trabalhos de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática.

Para realizar este estudo, há a necessidade de efetuar uma recolha de dados na turma em que se encontra o seu educando. Esta recolha de dados passará pelos seguintes pontos:

- Gravação de vídeos;
- Questionários;
- Entrevistas e gravação de áudios;
- Recolha das produções escritas dos alunos.

Todos estes dados serão guardados apenas durante o tempo em que se mantiverem relevantes para a publicação de trabalhos relacionados com este estudo. Salvaguardamos, desde já, que seremos as únicas pessoas com acesso direto a estes dados, comprometendo-nos a usar os mesmos apenas para fins académicos, como é o caso do relatório de estágio, artigos científicos e participação em congressos nacionais e internacionais. Além disso, a identidade de qualquer aluno será sempre preservada, sendo que os rostos dos alunos nunca serão divulgados, assim como nunca serão referidos os nomes dos alunos nem será identificada a escola no trabalho que for realizado.

Assim que a investigação estiver terminada, os encarregados de educação dos alunos que participaram na mesma terão acesso aos resultados da investigação. Além disso, serão informados sobre eventuais alterações na investigação. Durante a realização do estudo, não prevemos riscos associados, no entanto, se verificarmos que existe algum aluno desconfortável, essa situação será tratada individualmente com o próprio aluno, o diretor de turma e os professores responsáveis pela investigação e o respetivo encarregado de educação, caso se justifique.

De modo a autorizar esta recolha de dados, pedimos que assine o seguinte termo de consentimento informado. O seu educando também deve aceitar a participação neste estudo, pelo que deve também assinar o termo de assentimento. Acrescentamos que a participação neste estudo é completamente voluntária e não obrigatória, e todos os participantes podem abandonar o estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de problema associado. Para tal, basta comunicar essa decisão a um professor envolvido na investigação.



Gratos pela atenção,
Com os melhores cumprimentos,

_____, ____ de _____ de 2026

(Margarida Gonçalves)

(Rodrigo Moutinho)

Para esclarecimento de qualquer dúvida, poderá contactar:

E-mail:



Consentimento informado, livre e esclarecido

Eu, _____,
encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) da turma _____, declaro ter lido e
compreendido este documento, e autorizo/não autorizo a recolha de dados presentes nesta
declaração de consentimento informado, livre e esclarecido, nos moldes que foram aqui
apresentados.

_____, ____ de _____ de 2026

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Assentimento

Eu, _____,
aluno(a) da turma _____, aceito participar neste estudo e contribuir para a recolha de
dados que me for solicitada, de acordo com o que está afirmado nesta declaração de
assentimento.

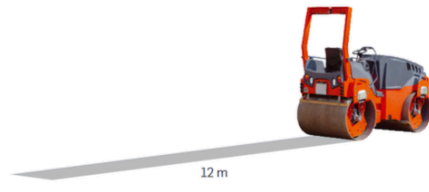
_____, ____ de _____ de 2026

(Assinatura do Aluno)

Anexo 2 – Carta de consentimento informado para a direção da escola

	 REPÚBLICA PORTUGUESA	EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO	 U. PORTO FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO
Fevereiro de 2026			
Somos alunos do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e encontramos-nos, de momento, a realizar a Prática de Ensino Supervisionada (PES) na sua Escola, sob a orientação XXXXXXXXXX De modo a realizar a parte empírica deste estudo de investigação, temos a necessidade de pedir para selecionar alunos dentro dos que se oferecerem para participar no estudo e após a obtenção do seu consentimento, dos respetivos encarregados de educação e dos próprios alunos. O trabalho irá ser desenvolvido na turma XXXX os alunos desta turma já foram informados sobre a realização deste trabalho que, mais uma vez reiteramos, se insere no decorrer das atividades letivas já planeadas. Para realizar este estudo, há a necessidade de efetuar uma recolha de dados na turma. Esta recolha de dados passará pelos seguintes pontos: • Gravação de vídeos; • Questionários; • Entrevistas e gravação de áudios; • Recolha das produções escritas dos alunos. À exceção de nós mesmos, nenhum dos alunos que aceitar colaborar connosco será identificado no relatório escrito que resultar deste estudo de investigação, uma vez que os nomes que figurarem nesse relatório serão fictícios para assegurar total anonimato. Os alunos podem desistir da sua colaboração neste estudo de investigação em qualquer momento sem qualquer prejuízo. Vimos, assim, por este meio, solicitar a sua autorização para proceder à recolha de dados para o nosso trabalho junto dos alunos da turma XXXX nas instalações da Escola, uma vez reunidos os consentimentos dos mesmos e dos seus Encarregados de Educação. Caso tenha qualquer questão a colocar em relação a este trabalho, por favor, não hesite em contactar-nos, pessoalmente ou através dos e-mails: XXXXXXXXXX Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevemo-nos, com os melhores cumprimentos, (Margarida Gonçalves) (Rodrigo Moutinho) Eu, XXXXXXXXXX Diretora do Agrupamento de XXXXXX XXXXXXXXXX autorizo a usar as instalações desta escola para realizar o vosso estudo de investigação, no âmbito da PES, em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Consciente de que está garantido o anonimato sobre os alunos intervenientes no estudo de investigação. (Data)			

Anexo 3 – Problema 1

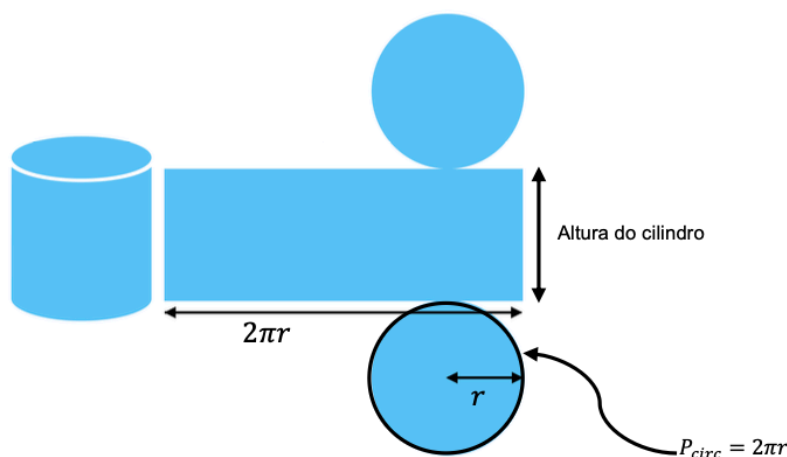
	 REPÚBLICA PORTUGUESA	EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO
Nome: _____ Nº: ____ Turma: ____ Data: ____ / 02/ 2026		
O cilindro compactador Na figura ao lado está representado um rolo compactador utilizado para alisar o pavimento através de um cilindro pesado que vai rodando enquanto a máquina avança.  a) Numa conversa entre dois trabalhadores, um deles afirmou que, para se saber o número mínimo de voltas inteiras que o cilindro efetua para alisar uma faixa de 12 m de comprimento, basta dividir 12 pelo diâmetro do cilindro. Concordas com a opinião desse trabalhador? Justifica a tua resposta. b) Sabe-se que a área lateral do cilindro é aproximadamente igual a $2,4 \text{ m}^2$ e que a altura do cilindro é $\frac{8}{3}$ do raio da sua base. Qual será o número mínimo de voltas inteiras do rolo necessárias para que alise uma faixa de 12 m de comprimento? Explica o teu raciocínio justificando cada passo. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva no mínimo três casas decimais.		

Anexo 4 – Proposta de resolução do Problema 1

Problema 1 – Cilindro Compactador

Possíveis resoluções:

- a) Dividir “12 pelo diâmetro” significa assumir que, em cada volta, o rolo compactador percorre apenas uma distância igual à largura do círculo, o que não corresponde à realidade/não é geometricamente correto.



Como se verifica através da panificação do rolo compactador (cilindro), a distância percorrida numa volta será igual ao comprimento da circunferência ($P_{circ} = 2\pi r$). Logo para determinar o número de voltas necessárias para percorrer os 12 metros, pode dividir-se os 12 metros pelo comprimento da circunferência.

Deste modo, o trabalhador não tem razão ao dizer que o número de voltas completas se pode obter a partir de $\frac{12}{\text{diâmetro}}$.

- b) Seja h a altura do cilindro e P_c o perímetro do círculo (base do cilindro), como área lateral do cilindro é aproximadamente $2,4 \text{ m}^2$, e a área lateral do cilindro é dada por:

$$A_l = h \times P_c \Leftrightarrow A_l = 2\pi r h \Leftrightarrow 2,4 = 2 \times \pi \times r \times \frac{8r}{3} \Leftrightarrow 2,4 = 2 \times \pi \times \frac{8r^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2,4 \times 3}{\pi} = 16 \times r^2 \Leftrightarrow r = \pm \sqrt{\frac{2,4 \times 3}{16\pi}}, r > 0 \Leftrightarrow r = 0,379 \text{ m}$$

O raio do rolo é aproximadamente 0,379 metros.

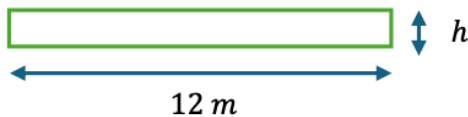
Alternativa 1:

Da alínea anterior sabe-se que o número de voltas completas se pode obter a partir de $\frac{12}{2\pi r}$. Substituindo, obtém-se $\frac{12}{2\pi r} = \frac{12}{2 \times \pi \times 0,379} = 5,039 \text{ voltas}$

Daqui se conclui que para alisar dos 12 metros de pavimento, o rolo necessita de efetuar 5,039 voltas. Mas como se quer saber o número mínimo de voltas completas, é necessário arredondar por excesso o valor obtido para o número inteiro imediatamente a seguir. Assim, serão necessárias, no mínimo, 6 voltas completas para alisar os 12 metros.

Alternativa 2: Representação da faixa a alisar através de um retângulo

$$A_{lateral} \approx 2,4 \text{ m}^2$$



Como $h = \frac{8}{3}r$, então: $h = \frac{8}{3} \times 0,3784 \approx 1,009 \text{ m}$

A altura do cilindro compactador é aproximadamente 1,009 m.

O cálculo da área do retângulo, A_r , é dado por: $A_r = 12 \times h = 1,009 \times 12 = 12,108 \text{ m}^2$.

Ao dividir a área do retângulo, que é a área da faixa a alisar, pela área da superfície lateral do cilindro, obtém-se o número de voltas completas para alisar a faixa de 12 metros:

$$\frac{12,108}{2,4} = 5,045 \text{ voltas}$$

Daqui se conclui que para alisar dos 12 metros de pavimento, o rolo necessita de efetuar 5,039 voltas. Mas como se quer saber o número mínimo de voltas completas, é necessário arredondar por excesso o valor obtido para o número

inteiro imediatamente a seguir. Assim, serão necessárias, no mínimo, 6 voltas completas para alisar os 12 metros.

Alternativa 3:

Como o perímetro da base do rolo compactador é dado por: $P_c = 2\pi r$, ao fim de uma volta terão sido alisados $2 \times \pi \times 0,379 = 2,381$ metros.

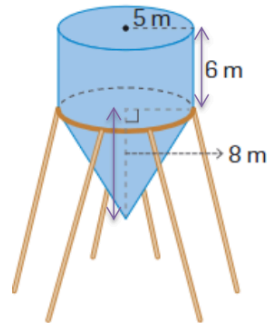
Então, para saber o número mínimo de voltas completas tem-se de adicionar esse valor n vezes até se obter um número igual ou superior a 12.

Ou

Para saber o número mínimo de voltas completas, n , apenas tem-se de multiplicar 2,380 por n até obter um número igual ou superior a 12.

Resposta: O número mínimo de voltas completas que o rolo necessita de dar para alisar os 12 metros é 6 voltas.

Anexo 5 – Problema 2

	 REPÚBLICA PORTUGUESA	EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO
Nome: _____ Nº: ____ Turma: ____ Data: ____ / 02/ 2026		
A pintura do reservatório		
Na Figura 1 está representado um reservatório de água, formado por um cilindro e por um cone, que o Sr. João irá pintar.		
Sabendo que cada de lata de tinta que o Sr. João tem em casa permite pintar 100 m^2 , de quantas latas de tinta precisará para pintar o reservatório? Explica como pensaste.		
Nos cálculos intermédios conserva, no mínimo, duas casas decimais.		
		
Figura 1 - Reservatório de água		

Anexo 6 – Proposta de resolução do Problema 2

Problema 2 - Resolução

- Cálculo da área da base do cilindro, A_b :

$$A_b = \pi \times r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 78,53 \text{ m}^2$$

- Cálculo da área lateral do cilindro, A_{l1} :

$$A_l = P_b \times altura = 2 \times \pi \times 5 \times 6 = 60\pi \approx 188,50 \text{ m}^2$$

- Cálculo da área lateral do cone, A_{l2} :

$$A_{l2} = \pi \times r \times g = \pi \times 5 \times 9,43 \approx 148,13 \text{ m}^2$$

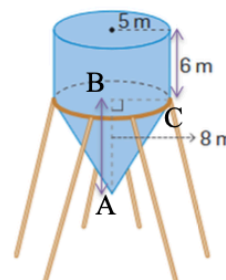
Alternativamente, a área lateral do cone também poderia ser calculada utilizando a seguinte fórmula (também abordada em aula): $A_{l2} = \frac{P_b}{2} \times g$

- Cálculos auxiliares:

Cálculo da geratriz, g :

Para calcular a geratriz, g , aplica-se o Teorema de Pitágoras, pois o triângulo ABC é retângulo e a geratriz é a hipotenusa.

Tem-se, então, que: $g^2 = 8^2 + 5^2 \Leftrightarrow g^2 = 64 + 25 \Leftrightarrow g = \pm\sqrt{89}$, $g > 0 \Leftrightarrow g = \sqrt{89} \Leftrightarrow g \approx 9,43 \text{ m}$



- Cálculo da área total a pintar, A_T :

Uma vez que apenas as superfícies exteriores do reservatório serão pintadas, a área total a pintar, A_T , é dada pela soma da área da base do cilindro, da área lateral do cilindro e da área lateral do cone.

Então, $A_T = A_b + A_l + A_{l2} \approx 78,53 + 188,50 + 148,13 \approx 415,16 \text{ m}^2$

Exemplos de possíveis respostas ao problema:

- A) Se uma lata de tinta pinta 100 m^2 , então serão necessárias 5 latas de tinta para que o Sr. João consiga pintar $415,16 \text{ m}^2$: 4 latas para pintar 400 m^2 + 1 lata (pois o Sr. João apenas tem latas de 100 m^2) para pintar os restantes $15,16 \text{ m}^2$.

- B) Sabendo que uma lata de tinta permite pintar 100 m^2 , determina-se o número de latas necessárias para pintar $414,7 \text{ m}^2$ através de uma regra de três simples:

$$1 \text{ lata} - 100 \text{ m}^2$$

$$x \text{ latas} - 415,16 \text{ m}^2$$

$$x = \frac{415,16 \times 1}{100} = 4,1516 \text{ latas}$$

Como o Sr. João apenas tem latas de 100 m^2 , é necessário arredondar por excesso o valor obtido: $4,1516 \approx 5$

Conclui-se que serão necessárias 5 latas de tinta para que o Sr. João consiga pintar a totalidade do reservatório.

- C) Nesta estratégia, em vez de calcular primeiro a área total do reservatório, determina-se quantas latas de tinta são necessárias para pintar cada superfície separadamente: a base superior do cilindro, a área lateral do cilindro e a área lateral do cone.

$$n_b = \frac{78,53}{100} = 0,7853 \text{ latas}$$

$$n_{l1} = \frac{188,50}{100} = 1,885 \text{ latas}$$

$$n_{l2} = \frac{148,13}{100} = 1,4813 \text{ latas}$$

O número de latas necessário para pintar o reservatório, n_T , é dado por:

$$n_T = n_b + n_{l1} + n_{l2} = 0,7853 + 1,885 + 1,4813 = 4,1516 \text{ latas}$$

Como o número de latas tem de ser um número inteiro, é necessário arredondar, por excesso, o valor obtido: $4,1516 \approx 5$. Então, o Sr. João vai precisar de 5 latas de tinta para pintar o reservatório.

Anexo 7 – Problema 3

	 REPÚBLICA PORTUGUESA	EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO
Nome: _____ Nº: ____ Turma: ____ Data: ____ / 02/ 2026		
As velas		
Temos duas velas, uma com 18 centímetros de altura e outra com 11 centímetros.		
A vela maior arde 1,5 centímetros por hora. A vela menor arde 1 centímetro por hora.		
As duas velas são acesas ao mesmo tempo.		
Ao fim de quantas horas terão as duas velas a mesma altura? Apresenta e justifica o teu raciocínio.		

Anexo 8 – Proposta de resolução do Problema 3

Problema 3 - As velas

Resolução A

- Vela 1: altura 18 cm; arde 1,5 cm por hora
- Vela 2: altura 11 cm; arde 1 cm por hora

Seja x o tempo em horas:

A altura da vela 1 é dada pela equação $altura_1 = 18 - 1,5x$

A altura da vela 2 é dada pela equação: $altura_2 = 11 - x$

Como queremos saber ao fim de quantas horas as velas terão a mesma altura, igualamos as duas equações:

$$altura_1 = altura_2 \Leftrightarrow 18 - 1,5x = 11 - x \Leftrightarrow -1,5x + x = 11 - 18 \Leftrightarrow -0,5x = -7 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-7}{-0,5} \Leftrightarrow x = 14 \text{ horas}$$

Mas $altura_1(14) = altura_2(14) = -3 \text{ cm}$, o que não faz sentido no contexto do problema.

Na realidade, a vela 1 demora $\frac{18}{1,5} = 12 \text{ horas}$ até apagar, ou seja, ao fim de 12 horas atinge 0 cm.

Já a vela 2 demora $\frac{11}{1} = 11 \text{ horas}$ até apagar, ou seja, ao fim de 11 horas atinge 0 cm de altura.

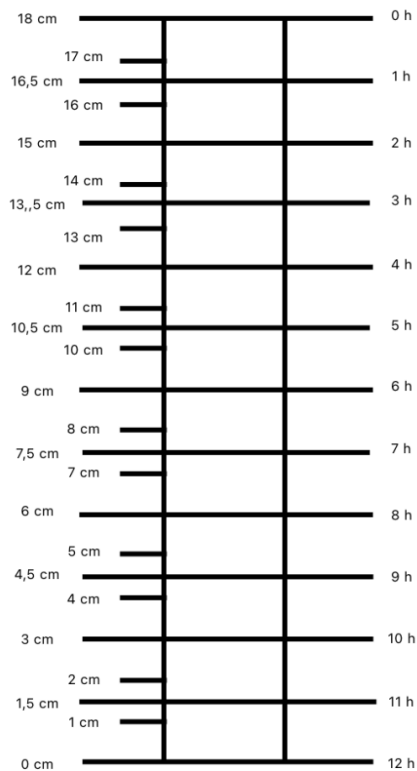
Assim, as velas terão a mesma altura ao fim de 12 horas.

Problema 3 - As velas

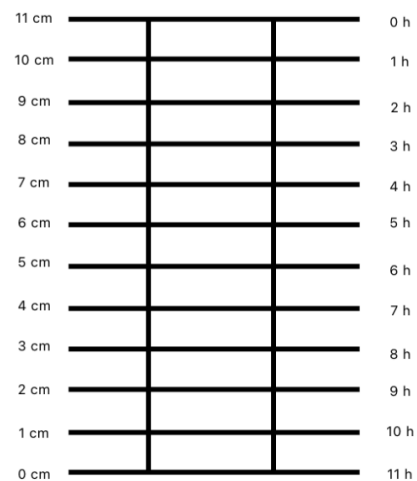
Resolução B

- Vela A: altura 18 cm; arde 1,5 cm por hora
- Vela B: altura 11 cm; arde 1 cm por hora

Vela A - arde 1,5 cm por hora



Vela B - arde 1 cm por hora



Ao fim de 12 h a vela A apaga-se (ardeu completamente), ou seja, fica com 0 cm de altura. A vela B demora 11 horas a atingir essa altura, pelo que a partir desse tempo a sua altura (0 cm) mantém-se.

Deste modo, as velas terão a mesma altura ao fim de 12 horas.

Problema 3 - As velas

Resolução C

- Vela A: altura 18 cm; arde 1,5 cm por hora
- Vela B: altura 11 cm; arde 1 cm por hora

		Tempo (horas)												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Altura (m)	Vela A	18	16,5	15	13,5	12	10,5	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0
	Vela B	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0

Na tabela estão representadas as alturas das velas A e B a cada hora, desde que foram acesas (0 h) até ao momento em que arderam totalmente.

Como se pode observar, as velas atingem a mesma altura apenas quando ambas arderam totalmente. Isso acontece ao fim de 12 horas, pois ao fim de 12 h a vela A apaga, ou seja, fica com 0 cm de altura e a vela B demora 11 horas a atingir essa altura, pelo que a partir desse tempo a sua altura (0 cm) mantém-se.

Anexo 9 – Questionário 1

Questionário 1 - "O cilindro compactador"

Este questionário insere-se no âmbito de um trabalho de investigação realizado no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Pretende-se recolher informações sobre o papel do *feedback* na comunicação escrita na resolução de problemas.

As respostas são anónimas e confidenciais, sendo utilizadas exclusivamente para fins académicos.

[Seguinte](#)[Limpar formulário](#)

Relativamente ao *feedback* escrito que recebeste, assinala a opção que melhor representa a tua opinião (Sim ou Não) para cada afirmação.

1. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar o que estava correto na minha resolução.

☐ Sim

☐ Não

2. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar os erros que cometi e/ou o que precisava de melhorar.

☐ Sim

☐ Não

3. O *feedback* foi claro e de fácil compreensão.

☐ Sim

☐ Não

3. O *feedback* foi claro e de fácil compreensão.

☐ Sim

☐ Não

4. O *feedback* indicava de forma explícita o que deveria melhorar.

☐ Sim

☐ Não

5. O *feedback* estava escrito de forma adequada ao meu trabalho e de forma que eu pudesse entender.

☐ Sim

☐ Não

6. Fiquei frustrado(a) ao ler o *feedback*.

☐ Sim

☐ Não

3. O *feedback* foi claro e de fácil compreensão.

☐ Sim

☐ Não

4. O *feedback* indicava de forma explícita o que deveria melhorar.

☐ Sim

☐ Não

5. O *feedback* estava escrito de forma adequada ao meu trabalho e de forma que eu pudesse entender.

☐ Sim

☐ Não

6. Fiquei frustrado(a) ao ler o *feedback*.

☐ Sim

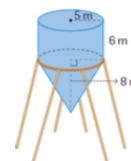
☐ Não

Anexo 10 – Questionário 2

Questionário 2 - "A pintura do reservatório"

Este questionário insere-se no âmbito de um trabalho de investigação realizado no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Pretende-se recolher informações sobre o papel do *feedback* na comunicação escrita na resolução de problemas.

As respostas são anónimas e confidenciais, sendo utilizadas exclusivamente para fins académicos.



Relativamente ao *feedback* escrito que recebeste, assinala com um X a opção que melhor representa a tua opinião (Sim ou Não) para cada afirmação.

1. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar o que estava correto na minha resolução.

Sim ☐ Não ☐

2. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar os erros que cometi e/ou o que precisava de melhorar.

Sim ☐ Não ☐

3. O *feedback* foi claro e de fácil compreensão.

Sim ☐ Não ☐

4. O *feedback* indicava de forma explícita o que deveria melhorar.

Sim ☐ Não ☐

5. O *feedback* estava escrito de forma adequada ao meu trabalho e de forma que eu pudesse entender.

Sim ☐ Não ☐

6. Fiquei frustrado(a) ao ler o *feedback*.

Sim ☐ Não ☐

Responde a cada uma das seguintes questões:

7. Foi mais difícil resolver o problema ou explicar como pensaste?

8. Achas que um colega da tua turma conseguiria perceber a forma como pensaste com base na tua resposta ao problema? Porquê?

9. Houve alguma sugestão do professor que não conseguiste perceber? Se sim, dá um exemplo.

10. O *feedback* permitiu-te perceber que faltavam justificações ou que estavam incompletas? Se sim, dá um exemplo.

Anexo 11 – Questionário 3

Questionário 3 - "As Velas"

Este questionário insere-se no âmbito de um trabalho de investigação realizado no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Pretende-se recolher informações sobre o papel do *feedback* na comunicação escrita na resolução de problemas.

As respostas são anónimas e confidenciais, sendo utilizadas exclusivamente para fins académicos.

Relativamente ao feedback escrito que recebeste, assinala com um X a opção que melhor representa a tua opinião (Sim ou Não) para cada afirmação.

1. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar o que estava correto na minha resolução.

Sim ☐ Não ☐

2. Através do *feedback* escrito recebido, consegui identificar os erros que cometi e/ou o que precisava de melhorar.

Sim ☐ Não ☐

3. O *feedback* foi claro e de fácil compreensão.

Sim ☐ Não ☐

4. O *feedback* indicava de forma explícita o que deveria melhorar.

Sim ☐ Não ☐

5. O *feedback* estava escrito de forma adequada ao meu trabalho e de forma que eu pudesse entender.

Sim ☐ Não ☐

6. Fiquei frustrado(a) ao ler o *feedback*.

Sim ☐ Não ☐

Responde a cada uma das seguintes questões:

7. Foi mais difícil resolver o problema ou explicar como pensaste?

8. Achas que um colega da tua turma conseguiria perceber a forma como pensaste com base na tua resposta ao problema? Porquê?

9. Houve alguma sugestão do professor que não conseguiste perceber? Se sim, dá um exemplo.

10. O *feedback* permitiu-te perceber que faltavam justificações ou que estavam incompletas? Se sim, dá um exemplo.

Anexo 12 – Guião da entrevista semiestruturada

Guião para a entrevista semiestruturada

1. Sentiste que o *feedback* estava claro ou houve partes difíceis de compreender?
2. O *feedback* ajudou-te a melhorar a tua resolução? Como? ¹
3. Sentiste necessidade de procurar ajuda (colegas, apontamentos, professor) durante a reformulação das resoluções dos problemas propostos?
4. Consideras que o *feedback* mudou a tua forma de resolver problemas? ²
5. O *feedback* ajudou-te a perceber o que é uma boa justificação matemática?
6. Achas que este tipo de trabalho te pode ajudar noutras tarefas matemáticas? Como?
7. Depois desta experiência, achas que receber *feedback* antes de entregar uma versão final ajuda na aprendizagem? Porquê?
8. O que mudarias neste processo para o tornar mais útil para ti?

¹ Mediante a resposta do aluno poderá o investigador colocar a questão: O *feedback* ajudou-te mais a corrigir erros ou a melhorar a explicitação do teu raciocínio?

² Mediante a resposta do aluno pode ser pertinente colocar a questão: Passaste a estar mais atento/a a algum aspeto específico quando resolves problemas?