Aprender Contagem através da Resolução de Problemas: Um estudo no 11.º ano de escolaridade

Carolina Neves dos Santos Queirós
Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2026

Aprender Contagem através da Resolução de Problemas: Um estudo no 11.º ano de escolaridade

Carolina Neves dos Santos Queirós

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2026

Orientadora
Louise dos Santos Lima, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Para marcar o fim desta etapa tão significativa da minha vida, não poderia deixar de agradecer a algumas pessoas, sem as quais a concretização deste trabalho teria sido um processo muito mais difícil.

Em primeiro lugar, queria agradecer à minha orientadora, Louise Lima, que pela sua disponibilidade para responder às minhas dúvidas. A sua experiência e o seu apoio foram peças fundamentais neste processo e sem ela não me imaginaria a fazer este trabalho.

De seguida quero agradecer à minha orientadora cooperante, por todas as dicas e conselhos que partilhou comigo ao longo do ano. Foi uma das pessoas mais importantes para mim ao longo deste ano letivo e foi uma das responsáveis pela minha experiência tão positiva enquanto professora estagiária.

Quero também agradecer às três turmas em que tive a possibilidade de lecionar pela primeira vez. E faço um agradecimento especial à turma de 11.º ano que participou neste estudo. Todos ficarão para sempre guardados na minha memória e, principalmente, no meu coração.

Devo ainda um agradecimento à escola onde realizei a PES e a todos os seus elementos, que me receberam e fizeram com que me sentisse em casa. Muito obrigada por todos os momentos em que me ajudaram, pelas vossas palavras, dicas e sorrisos de encorajamento, foram como uma segunda família para mim, nos momentos em que estava longe da minha.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer à minha família, ao meu namorado e aos meus amigos, que foram os grandes apoios ao longo deste ano. Estiveram presentes em todos os momentos de tristeza, cansaço e frustração, mas fizeram também parte dos momentos de felicidade e de concretização, e esses foram sem dúvida os meus momentos favoritos. As horas que passaram a ouvir-me falar deste relatório e as horas que tiveram de passar sem mim por estar a fazê-lo valeram a pena e estão aqui materializadas neste projeto concluído. Obrigada!

Resumo

Esta investigação foi desenvolvida no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, que é uma parte crucial do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário na FCUP.

Este estudo tem como objetivo analisar o contributo do ensino através da Resolução de Problemas para a aprendizagem dos conceitos de Contagem. Esta investigação é baseada numa abordagem qualitativa de natureza interpretativa.

A recolha de dados centrou-se nas produções escritas dos alunos, notas de campo provenientes da observação direta dos alunos e entrevistas semiestruturadas, ocorrendo ao longo de seis momentos durante o ano letivo 2025/2026. Neste estudo participaram 21 alunos, de uma turma de 11.º ano numa escola na área metropolitana do Porto.

Este estudo mostrou que, numa fase inicial, os alunos utilizavam representações mais visuais e esquemáticas, que facilitavam a compreensão dos conceitos. As interações estabelecidas entre os alunos durante o trabalho de grupo, encorajaram a discussão de ideias, fazendo com que chegassem a soluções corretas. Subsequentemente, observou-se uma transição para representações mais algébricas, durante a qual se verificou também um aumento nas dificuldades.

A resolução de tarefas individuais contribuiu também para um aumento nas dificuldades, visto que os alunos já não dispunham do espaço de discussão que o trabalho em grupo providenciava. Foi possível verificar que as diferentes estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas de Contagem tinham um impacto significativo no seu desempenho.

Quando os alunos trabalham em grupos e usam representações mais visuais, compreendem melhor o que o problema pede e como atingir o resultado pretendido. Quando utilizam representações maioritariamente algébricas, nota-se uma maior tendência para erros, dificuldades em interpretar as questões e em estruturar os seus raciocínios.

Palavras-chave: contagem, resolução de problemas, representações matemáticas, aprendizagem cooperativa

Abstract

This research is part of the Supervised Teaching Practice within the Master's Degree in Mathematics Teaching for Lower and Upper Secondary Education at FCUP.

The study aims to analyze the contribution of teaching through Problem Solving in learning the concepts of Counting. This investigation is based on a qualitative approach of an interpretative nature. Data collection focused on students' written work, camp notes and semi-structured interviews and took place at six different moments during the 2025/2026 school year, involving 21 students from one class at a school in the Porto Metropolitan Area: three moments throughout the unit and three after its completion.

This study showed that initially, students mainly used visual and schematic representations, which facilitated the understanding of concepts and contributed to distinguishing between the principles of addition and multiplication. The interactions established among students in group work encouraged discussion of ideas, generally enabling them to reach correct solutions. Subsequently, a transition to more algebraic representations was observed, which was associated with increased difficulties. After the introduction of the concept of combinations, some confusion between the fundamental counting principles emerged.

The completion of individual tasks contributed to an increase in difficulties, as students no longer had access to the discussion space provided by group work. It was possible to verify that the different strategies used by students have a significant impact on their performance. When students work in groups and use more visual representations, they tend to better understand the problem statements and the procedures required to achieve the intended result. When they mainly rely on algebraic representations, they show a greater tendency toward misconceptions and difficulties in interpreting and structuring their reasoning.

Keywords: counting, problem solving, mathematic representations, cooperative learning

Índice

Lista de Gráficos vi
Lista de Quadros vii
Lista de Figuras viii
Lista de Abreviaturas xi
1. Introdução 1
2. Enquadramento teórico 5
2.1. A Contagem 5
2.1.1. Dificuldades na aprendizagem do tópico da Contagem 7
2.2. As representações 9
2.3. A resolução de problemas 12
2.4. A aprendizagem cooperativa 18
3. Intervenção pedagógica 23
3.1. Caracterização da escola 23
3.2. A minha intervenção pedagógica 24
3.2.1. Caracterização da turma 24
3.2.2. Momentos da intervenção pedagógica 24
3.2.2.1. 1.º momento – Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem 26
3.2.2.2. 2.º momento – Ficha de trabalho sobre permutações com repetição 27
3.2.2.3. 3.º momento – Ficha de trabalho sobre combinações 28
3.2.2.4. 4.º momento – Ficha global 30
3.2.2.5. 5.º momento – Avaliação sumativa com fins classificatórios 32
3.2.3. Considerações sobre a intervenção pedagógica 33
4. Metodologia de investigação 35
4.1. Opções metodológicas 35
4.2. Escolha dos participantes 37
4.3. Questões éticas 38

4.4. Momentos e procedimentos de recolha de dados 39
4.5. Processo de análise de dados 42
5. Análise dos dados 45
5.1. 1.º momento – Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem 47
5.2. 2.º momento – Ficha de trabalho sobre permutações com repetição 59
5.3. 3.º momento – Ficha de trabalho sobre combinações 64
5.4. 4.º momento – Ficha global 69
5.5. 5.º momento – Avaliação sumativa com fins classificatórios 77
5.6. Perceção dos estudantes 90
5.7. Considerações finais 94
6. Conclusões e recomendações 95
6.1. Representações a que os alunos recorrem 96
6.2. As dificuldades que os alunos enfrentam 98
6.3. O contributo da aprendizagem cooperativa 99
6.4. Limitações e recomendações 101
Referências bibliográficas 103
Apêndices 109
Apêndice 1: Consentimento informado 109
Apêndice 2: Assentimento informado 110
Apêndice 3: Plano de aula 1.º momento 111
Apêndice 4: Plano de aula 2.º momento 114
Apêndice 5: Plano de aula 3.º momento 116
Apêndice 6: Conjunto de questões sobre os princípios gerais da Contagem 119
Apêndice 8: Ficha de trabalho sobre as combinações 123
Apêndice 9: Ficha global 125
Apêndice 10: Avaliação sumativa com fins classificatórios 127

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Distribuição das respostas à questão 1 consoante o tipo de representação utilizada 49
Gráfico 2: Distribuição das respostas à questão 2 consoante o tipo de representação utilizada 50
Gráfico 3: Distribuição das respostas à questão 4 consoante o tipo de representação utilizada 54

Lista de Quadros

Quadro 1: Dificuldades na resolução de problemas de Contagem de acordo com Batanero et al. (1997), retirado de Carvalho (2009, p. 253) 9
Quadro 2: Cruzamento entre as questões orientadoras e os objetivos específicos (estrutura adaptada de Lima (2020)) 35
Quadro 3: Vantagens e desvantagens da escolha de cada turma 37
Quadro 4: Momentos da investigação 40
Quadro 5: Relação entre as questões de investigação, os diferentes momentos e os métodos de recolha de dados 41
Quadro 6: Quadro de resultados do 1.º momento da intervenção pedagógica (Princípios gerais da contagem) 43
Quadro 7: Níveis de desempenho dos alunos na intervenção pedagógica 91

Lista de Figuras

Figura 1: Modelo do pensamento combinatório dos alunos (Lockwood, 2013, p. 253) . 6
Figura 2: Exemplificação das componentes do modelo de Lockwood (2013) 7
Figura 3: Representações matemáticas e suas conexões (Lesh et al., 1987, citado por Canavarro et al., 2022, p. 7) 10
Figura 4: Relação entre diversos tipos de tarefa, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 8) 12
Figura 5: Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p. 10) 13
Figura 6: Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p. 11) 13
Figura 7: Momentos da intervenção pedagógica 25
Figura 8: Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem 26
Figura 9: Ficha de trabalho sobre permutações com repetição 28
Figura 10: Fórmula das combinações de n elementos p a p 29
Figura 11: Ficha de trabalho sobre combinações 29
Figura 12: Ficha global 31
Figura 13: Questões da unidade Contagem do primeiro teste do 2.º período 33
Figura 14: Questões da unidade Contagem do segundo teste do 2.º período 33
Figura 15: Exemplo da grelha de observação elaborada por mim para uso em sala de aula 41
Figura 16: Composição dos grupos de trabalho 46
Figura 17: Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem 48
Figura 18: Resolução apresentada pela aluna Francisca à questão 1 49
Figura 19: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 1 49
Figura 20: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 1 50
Figura 21: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 2 51
Figura 22: Resolução apresentada pela aluna Sílvia à questão 2 51
Figura 23: Resolução apresentada pelo aluno Salvador à questão 3 52
Figura 24: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 3 53
Figura 25: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 4 54
Figura 26: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4 55
Figura 27: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 5 56
Figura 28: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 6 56
Figura 29: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 7 57
Figura 30: Resolução apresentada pela aluna Bianca à questão 7 57
Figura 31: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 8 58

Figura 32: Ficha de trabalho sobre as permutações com repetição 60
Figura 33: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 1 60
Figura 34: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 2 61
Figura 35: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 2 61
Figura 36: Resolução apresentada pelo aluno Hugo à questão 3 62
Figura 37: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 4 63
Figura 38: Ficha de trabalho sobre combinações 64
Figura 39: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 1 65
Figura 40: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 1 65
Figura 41: Resolução apresentada pelo aluno Alberto à questão 2 66
Figura 42: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 2 66
Figura 43: Resolução apresentada pelo aluno Salvador à questão 3 67
Figura 44: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 3 67
Figura 45: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4 68
Figura 46: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 4 68
Figura 47: Ficha global 70
Figura 48: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 1 70
Figura 49: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 1 71
Figura 50: Resolução apresentada pela aluna Francisca à questão 2 71
Figura 51: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 3 72
Figura 52: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 4 72
Figura 53: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4 73
Figura 54: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 5 73
Figura 55: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 5 74
Figura 56: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 6 75
Figura 57: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 6 75
Figura 58: Resolução apresentada pelo aluno Paulo à questão 7 75
Figura 59: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 7 76
Figura 60: Questões da unidade Contagem do primeiro teste do 2.º período 78
Figura 61: Questões da unidade Contagem do segundo teste do 2.º período 78
Figura 62: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 4.1. do teste 1 79
Figura 63: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4.1. do teste 1 79
Figura 64: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 4.1. do teste 1 80
Figura 65: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4.2. do teste 1 80
Figura 66: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 4.2. do teste 1 80
Figura 67: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 4.3. do teste 1 81

Figura 68: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 4.3. do teste 1 82
Figura 69: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4.3. do teste 1..... 83
Figura 70: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 5 do teste 1..... 84
Figura 71: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 5 do teste 1..... 84
Figura 72: Resolução apresentada pela aluna Sílvia à questão 6 do teste 1 85
Figura 73: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 6 do teste 1..... 85
Figura 74: Resolução apresentada pelo aluno Zé à questão 6 do teste 1 85
Figura 75: Resolução apresentada pela aluna Bianca à questão 4 do teste 2 86
Figura 76: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4 87
Figura 77: Primeira parte da resolução apresentada pela aluna Ana à questão 11 do teste 2 87
Figura 78: Segunda parte da resolução apresentada pela aluna Ana à questão 11 do teste 2 88
Figura 79: Resolução apresentada pelo aluno Zé à questão 11 do teste 2 89

Lista de Abreviaturas

CT	CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
EE	ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
RP	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
SE	CIÊNCIAS SOCIOECONÓMICAS

1. Introdução

A escolha do tema para este relatório de estágio foi um processo relativamente difícil. Em termos da minha preferência, eu gostaria de ter feito algo no tópico das Funções, no entanto, esse tópico seria lecionado apenas na parte final do 3.º período, deixando pouco tempo para os processos de recolha e análise dos dados. Deixava também pouca abertura para imprevistos que pudessem ocorrer e, portanto, achei que seria demasiado arriscado seguir por esse caminho.

Fui então analisar os tópicos que seriam lecionados ao longo do segundo período, que considerei ser a melhor altura para a recolha e análise de dados, e deparei-me com duas opções: Contagem ou Sucessões. Entre estes dois temas, optei por sair fora da minha zona de conforto, que seriam as Sucessões, e fazer algo relacionado com a Contagem.

Sendo este tópico agora lecionado no 11.º ano, como parte do tema *Matemática Discreta* (Carvalho e Silva et al., 2023), em vez de no 12.º ano como parte do tema *Probabilidades e Cálculo Combinatório* (Carvalho e Silva et al., 2018), achei que poderia ser interessante fazer a introdução dos diferentes conceitos subjacentes a este tema de uma forma diferente daquilo a que os alunos estão habituados – a partir de um ensino através da Resolução de Problemas (Lima, 2020; Schroeder & Lester, 1989).

Esta opção metodológica implicou a criação de situações de aprendizagem em que os alunos fossem desafiados a explorar problemas de Contagem recorrendo a diferentes estratégias de resolução, representações matemáticas e momentos de discussão entre pares. Assim, o ensino através da Resolução de Problemas constituiu a base para a metodologia da intervenção, sendo complementado pelo recurso à aprendizagem cooperativa e à utilização de diferentes tipos de representações, entendidas com condições para o desenvolvimento do pensamento combinatório (Lockwood, 2013).

A Contagem é um dos tópicos que traz uma grande variedade de representações que podem ser utilizadas, desde representações físicas como o uso de dados, moedas ou até mesmo cartas, representações visuais como o uso de diagramas de árvore, tabelas de dupla-entrada e outros esquemas, representações verbais dadas oralmente ou por escrito ou até mesmo representações mais simbólicas onde os alunos recorrem às fórmulas (das permutações, arranjos simples, arranjos completos, combinações etc.). Este foi um dos motivos que me fez optar por fazer um estudo relacionado com as representações a que os alunos recorrem nas diferentes fases do processo ensino-aprendizagem do tópico. Isto porque as representações desempenham um papel

fundamental na organização e comunicação do pensamento matemático. No contexto da Contagem, permitem estruturar os resultados possíveis, identificar regularidades, justificar procedimentos e comunicar estratégias de resolução, assumindo-se como instrumentos cognitivos essenciais ao desenvolvimento do pensamento combinatório (Valadão et al., 2022).

Sempre considerei que a Contagem, ou a Análise Combinatória, muito interessante pois, ao serem necessários muito poucos pré-requisitos (quando comparada, por exemplo, com as Funções), alguns alunos que normalmente manifestam muitas dificuldades na disciplina, acabam por não as manifestar neste tópico (Mota & Ferreira, 2018). No entanto, como temos diferentes conceitos que acabam por ser semelhantes uns aos outros, sei que é um tópico no qual surgem algumas confusões e dificuldades, que decidi que também queria identificar nas resoluções dos meus alunos, para abordar no presente relatório.

A opção pelo ensino através da Resolução de Problemas levou igualmente ao recurso a momentos de aprendizagem cooperativa. Considerando que muitos problemas de Contagem admitem diferentes estratégias de resolução, entendeu-se que o trabalho cooperativo poderia constituir um contexto que favoreceria a discussão matemática, a comparação de representações e a justificação dos processos de contagem desenvolvidos pelos alunos. Tendo em conta que estes problemas têm, muitas das vezes, múltiplas formas de chegar ao resultado pretendido, achei que seria interessante observar os alunos a trabalhar em grupo e a discutir os diferentes caminhos que poderiam seguir para alcançar o objetivo. Para poder analisar o contributo do trabalho cooperativo é também necessário perceber como é que os alunos trabalham individualmente, portanto, na minha intervenção pedagógica, planeei várias tarefas para serem realizadas em grupo (numa fase mais inicial) e várias tarefas para serem realizadas individualmente (após todos os conceitos terem sido introduzidos).

Neste contexto, esta investigação parte do pressuposto de que o desenvolvimento do pensamento combinatório não depende exclusivamente da aprendizagem de procedimentos de Contagem, mas também das oportunidades que os alunos têm para resolver problemas, utilizar diferentes representações matemáticas, discutir estratégias de resolução e construir conhecimento em interação com os seus pares. Assim, a intervenção pedagógica foi concebida com a intenção de fazer uma articulação entre estes quatro elementos, assumindo que cada um deles desempenha um papel complementar na aprendizagem da Contagem.

Tendo em conta os diferentes assuntos que me interessava identificar e analisar, estabeleci o objetivo geral deste estudo – analisar o contributo do ensino através da Resolução de Problemas para a aprendizagem dos conceitos de Contagem.

De forma a dar resposta ao objetivo geral do meu estudo, defini três questões orientadoras, às quais estão associados os respetivos objetivos específicos que podem ser observados no Quadro 1 que se encontra no capítulo Metodologia. São as questões:

1. A que representações é que os alunos recorrem na resolução de problemas de contagem?
2. Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas de contagem?
3. De que forma o recurso a estratégias de aprendizagem cooperativa, no ensino através da resolução de problemas, contribui para a aprendizagem dos conceitos de contagem?

Explicando agora a estrutura deste relatório, este encontra-se dividido em seis capítulos. No primeiro capítulo, a Introdução, exponho as razões que me levaram à escolha do tema, os objetivos do estudo e as questões orientadoras, que trouxeram um certo rumo a seguir no planeamento e execução desta investigação.

No segundo capítulo, Enquadramento Teórico, apresenta-se a fundamentação teórica na qual este estudo se apoia. São abordados alguns temas cuja compreensão é fundamental para o entendimento desta investigação, esses temas incluem: a importância da Contagem, a Resolução de Problemas, o uso das representações matemáticas, o ensino e a aprendizagem da contagem e ainda o trabalho em grupo.

Passando ao terceiro capítulo, Intervenção Pedagógica, apresenta-se uma caracterização da escola e da turma participante no estudo. Para além disso contém uma descrição dos diferentes momentos que compuseram esta intervenção e as tarefas que foram realizadas em cada um deles.

No quarto capítulo, Metodologia de Investigação, são abordadas e explicadas as opções metodológicas que tomei ao longo da investigação, como foi feita a escolha dos participantes e as questões éticas que esse processo envolveu, e os procedimentos de recolha e análise de dados.

O último capítulo, Conclusões e Recomendações, inclui um resumo do estudo, fazendo uma conexão entre as questões orientadoras e os principais resultados obtidos, que por sua vez estão interligados com a literatura abordada no segundo capítulo

(Enquadramento Teórico). Contém ainda uma exploração das implicações deste estudo para a prática profissional e algumas sugestões para futuras investigações nesta área.

O relatório termina com o conjunto de referências bibliográficas nas quais me apoiei para desenvolver este trabalho e com o conjunto de apêndices que considerei mais importantes incluir, para melhor compreensão do trabalho desenvolvido. Esses apêndices incluem o Consentimento Informado e o Assentimento Informado, juntamente com alguns planos de aula.

2. Enquadramento teórico

Ao longo deste capítulo será apresentada a base teórica na qual toda esta investigação se apoia. São abordados tópicos diretamente relacionados com a problemática desta investigação, nomeadamente: a Contagem e as dificuldades que surgem neste tópico; a resolução de problemas, incluindo a definição de problema e a abordagem metodológica para o ensino; as representações e o trabalho em grupo, dado que este estudo é baseado na minha intervenção pedagógica, que contou com vários momentos nas quais os alunos trabalharam em grupos.

Este capítulo tem ainda a função de apoio à análise dos dados, uma vez que que estes serão rigorosamente analisados à luz do conhecimento já existente, fornecido pelos autores aqui discutidos. Isto permitirá obter uma análise mais relevante e completa dos dados recolhidos na intervenção.

2.1. A Contagem

Nas novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023), temos a Contagem como um dos tópicos pertencentes ao tema Matemática Discreta, a ser lecionado no 11.º ano de escolaridade. Esta foi uma das mudanças relativamente às *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* (ME, 2018), documento curricular anterior ao documento em vigor, nas quais tínhamos a Contagem como um dos tópicos pertencentes ao tema Probabilidades e Cálculo Combinatório, a ser lecionado no 12.º ano de escolaridade.

A Análise Combinatória constitui-se como oportunidade para que os alunos se apropriem de ferramentas que podem ser usadas quando estes lidam com problemas do dia-a-dia (Eizenberg & Zaslavsky, 2004). Para além disso, o trabalho que os alunos realizam no estudo da Análise Combinatória é potenciador de discussões de diferentes processos usados para resolver uma determinada tarefa, promovendo a comunicação matemática (Mota & Ferreira, 2018).

Contrariamente a outros tópicos da área da Matemática, a Contagem, uma das temáticas abordadas na Análise Combinatória, não vem acompanhada de um grande número de pré-requisitos. Na verdade, acontece um fenómeno muito curioso já que

> é comum surgirem alunos que, manifestando dificuldades em outras áreas da Matemática, aprendem este tema sem experienciarem como obstáculos a falta de conhecimentos anteriores. Por outro lado, existem alunos com um excelente aproveitamento na disciplina de Matemática que não se sentem tão à vontade

> no tema da Análise Combinatória, manifestando inseguranças que tipicamente não experienciam na aprendizagem de outros temas. (Mota & Ferreira, 2018, p.39)

O facto de não estarem dependentes de uma grande quantidade de pré-requisitos para a resolução de tarefas neste tópico pode possibilitar alguma motivação aos alunos, que percebem que estão no mesmo patamar que os outros, pois não dependem de tantos pré-requisitos como, por exemplo, no tópico das Funções.

Os objetivos de aprendizagem subjacentes a este tópico, segundo as novas AE são

> conhecer e aplicar os princípios da adição e multiplicação em problemas de contagem. Usar formas diferentes de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem. Identificar arranjos completos, permutações e arranjos simples como casos particulares da aplicação do princípio da multiplicação. Identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos ($p \leq n$). (Carvalho e Silva et al., 2023, pp. 17-18)

De modo a tentar entender como os alunos pensam na resolução de problemas de combinatória, Lockwood (2013) apresenta o Modelo do pensamento combinatório dos alunos (Figura 1), onde estão representadas as suas três principais componentes e as ligações entre elas estabelecidas.

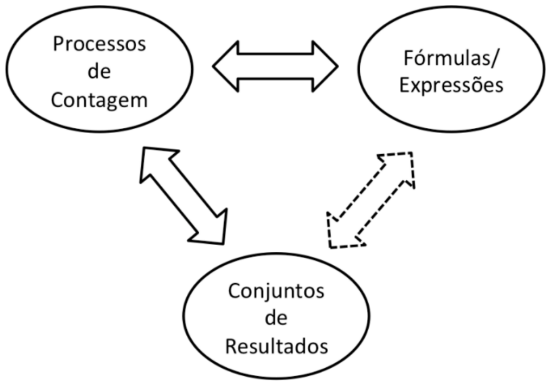


Figura 1: Modelo do pensamento combinatório dos alunos (Lockwood, 2013, p. 253)

A primeira componente, processos de contagem, está relacionada com os processos de enumeração aos quais os alunos recorrem na resolução do problema, podendo referir-se ao uso de uma estratégia mais intuitiva como listar todas as possibilidades ou fazer um diagrama de árvore, ou então usar por exemplo o princípio da multiplicação (princípio

fundamental da contagem). A segunda componente, fórmulas/ expressões, referem-se a expressões matemáticas que possuem valor numérico. A terceira componente, refere-se ao conjuntos de resultados que surgem da aplicação dos processos de contagem, ou seja, aqueles que apresentam a resposta ao problema.

Para uma melhor compreensão de cada uma das três componentes do modelo (Lockwood, 2013), na Figura 2 encontra-se um esquema baseado no seguinte problema de contagem: *A Matilde quer criar um pin para o seu telemóvel. Decidiu que o seu pin seria composto por 4 algarismos ímpares, todos diferentes. Quantas possibilidades diferentes existem para o pin da Matilde?*

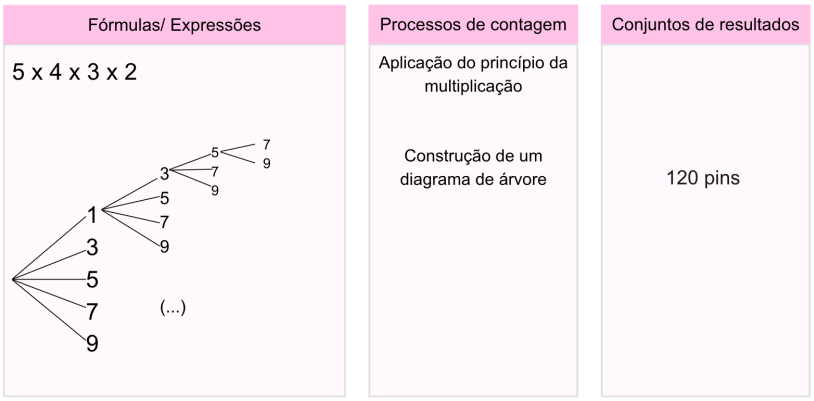


Figura 2: Exemplificação das componentes do modelo de Lockwood (2013)

Analisando a Figura 2 é possível observar que as três componentes estão interligadas. A fórmula $5 \times 4 \times 3 \times 2$ resulta diretamente da aplicação do princípio da multiplicação, que por sua vez dá resposta ao problema, 120 *pins*, que é o conjunto de resultados. Isto significa que, se algum aluno não compreender uma destas três componentes, essa dificuldade poderá comprometer totalmente a resolução da tarefa. Deste modo, no próximo subcapítulo serão abordadas algumas das dificuldades neste tópico.

2.1.1. Dificuldades na aprendizagem do tópico da Contagem

Para além das dificuldades gerais associadas às etapas da resolução de um problema (que serão apresentadas na subsecção Como resolver um problema?), existem algumas dificuldades que surgem apenas associadas ao tópico da Contagem, visto que este é um tema que introduz muita simbologia nova e conceitos bastante diferentes dos que os alunos conhecem e já estão habituados.

Durante a aprendizagem deste tópico, uma das maiores dificuldades que os alunos enfrentam é a "seleção da operação combinatória adequada para resolver uma tarefa" (Mota & Ferreira, 2016, p. 275), as autoras dão o exemplo da utilização dos arranjos e

das combinações, e que muitas vezes os alunos não são capazes de compreender qual devem utilizar, o que sugere que "os alunos não compreendem a diferença entre as duas operações nem atribuem significado às respetivas fórmulas de cálculo" (Mota & Ferreira, 2016, p. 275).

Algumas estratégias mais intuitivas, como as tabelas e os diagramas de árvore, ajudam na resolução de problemas. Neste sentido, os diagramas de árvore, são um dos recursos mais úteis para visualizar tanto as situações de combinatória como as de probabilidades, por apresentarem características intuitivas importantes, oferecerem uma representação global da estrutura da situação que contribui para uma compreensão mais imediata e para se encontrar uma solução do problema (Fischbein, 1975). No entanto quando se fala em conceitos mais complexos como as combinações, torna-se mais difícil usar estas estratégias, o que pode causar algumas dificuldades aos alunos (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

Com o objetivo de sintetizar algumas das dificuldades típicas associadas a este tópico Carvalho (2009) apresenta um quadro, a partir de Batanero et al. (1997), onde as identifica e explica (Quadro 1).

Dificuldade	Descrição
enumeração não sistemática	Utilização de tentativa e o erro, sem nenhum procedimento recursivo, conducente à formação de todas as possibilidade.
uso incorreto do diagrama de árvore	Apesar da sua importância, por vezes, os alunos acham difícil construir diagramas de árvore adequados para representar situações de problemas e, assim, este tipo de representação é a causa de muitos erros.
erro de ordem	Confusão entre os critérios para as combinações com os critérios para os arranjos, isto é, distinguir a ordem dos elementos quando é irrelevante ou, pelo contrário, não considerar a ordem quando ela é essencial.
erro de repetição	Desconsideração sobre a possibilidade de repetir os elementos quando isso é possível, ou repete-os quando não há possibilidade de o fazer.
confundir o tipo de objeto	Consideração de que objetos idênticos são distinguíveis ou que objetos diferentes são indistinguíveis.

interpretar erradamente o tipo de partição requerida	União de todos os subconjuntos numa partição não contém todos os elementos do conjunto total, ou algumas partições possíveis são esquecidas.

Quadro 1: Dificuldades na resolução de problemas de Contagem de acordo com Batanero et al. (1997), retirado de Carvalho (2009, p. 253)

Autores como Lockwood (2011) e Fischbein e Gazit (1988), mencionam também a dificuldade em **distinguir as situações em que precisamos de usar arranjos ou combinações** na resolução de um problema.

Adicionam-se, ainda, as dificuldades gerais associadas à resolução de problemas que serão abordadas ainda neste capítulo. Essas dificuldades surgem neste tópico, como em qualquer outro, mas não têm necessariamente que ver com o conteúdo teórico do problema e sim com aspetos relacionados ao próprio processo de resolução de problemas, como a **extração de dados do enunciado ou a verificação da resposta** (Polya 1995).

As dificuldades mencionadas ao longo desta secção (destacadas a negrito) serão posteriormente utilizadas no capítulo da Análise dos Dados para identificar e classificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem da contagem.

2.2. As representações

Uma prática considerada fundamental quando o objetivo é ensinar matemática é **usar e relacionar representações matemáticas** (NCTM, 2014). De facto, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário* referentes ao 11.º ano de escolaridade (Carvalho e Silva et al., 2023), é abordada a importância do uso das representações matemáticas, como forma de promover a comunicação matemática. Carvalho e Silva (2023) afirma que

> a simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. (...) A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos. (p. 8)

Isto apoia a ideia de que, enquanto professores, devemos propor tarefas diversificadas nas quais os alunos possam recorrer aos mais diversos tipos de representações, ou até mesmo fazer uma conjugação de várias representações.

Relativo ao tópico da Contagem, Batanero et al. (1997) defende que o ensino e avaliação desta temática devem ser baseados na resolução de problemas em que os alunos tenham de recorrer a uma diversidade de representações. Além disso, na perspetiva de Batanero et al. (1997) alguém que ensine este tópico deve dar ênfase ao raciocínio combinatório em vez de dar ênfase à simples aplicação das diversas fórmulas.

Ao longo deste relatório, as representações usadas pelos alunos serão classificadas tendo por base os diferentes tipos apresentados no esquema de Lesh et al. (1987, citado por Canavarro et al., 2022) que se encontra na Figura 3.

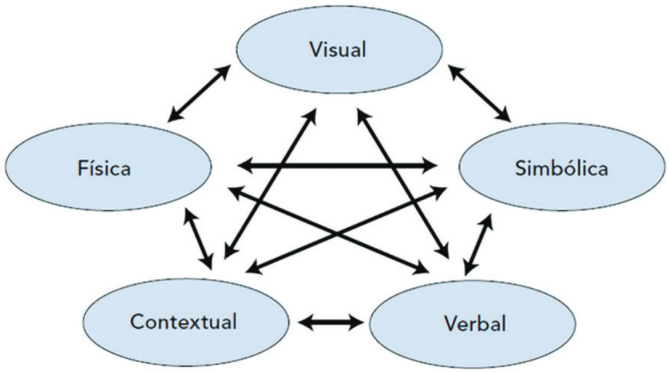


Figura 3: Representações matemáticas e suas conexões (Lesh et al., 1987, citado por Canavarro et al., 2022, p. 7)

Este esquema mostra que, de certa forma, todas as diferentes representações estão conectadas entre si. Isto é, "cada representação funciona como uma lente e a conjugação de diferentes representações proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito ou ideia matemática representada (Tripathi, 2008)" (Canavarro et al., 2022).

As representações visuais incluem ilustrações, esquemas ou gráficos. As representações simbólicas incluem notação simbólica com recurso variáveis, como por exemplo uma expressão algébrica. As representações verbais são usadas para explicar outras representações, e podem ser feitas recorrendo à linguagem escrita ou oralmente. As representações físicas referem-se ao uso objetos para explicar certos conceitos ou procedimentos matemáticos. As representações contextuais são usadas para explicar a aplicabilidade de determinados conceitos matemáticos em situações da vida real através da exploração de exemplos.

Para além do esquema apresentado na Figura 6, que transmite as classificações de Lesh et al. (1987), vários outros autores apresentaram os seus próprios sistemas de classificação dos diferentes tipos de representação.

Tripathi (2008) apresenta uma classificação de representações muito semelhante à de Lesh et al. (1987), que se encontra na Figura 6. Na classificação de Tripathi (2008), temos cinco formas de representações: a forma contextual, associada a situações do quotidiano/ vida real; a forma concreta/ física, associada ao uso de materiais manipuláveis e objetos físicos; a forma semiconcreta/ visual, associada a imagens e esquemas; a forma verbal, associada à linguagem verbal e a forma simbólica, associada ao uso de simbologia matemática.

Bruner (1999), por outro lado, refere apenas três tipos de representações: ativas, icónicas e simbólicas. As representações ativas estão relacionadas com objetos e movimentos, as icónicas com desenhos ou esquemas e as simbólicas com a utilização de símbolos matemáticos.

Thomas et al. (2002) apresenta também apenas três tipos de representação, embora diferentes dos de Bruner (1999), sendo estes as representações pictóricas, icónicas e notacionais. Pictóricas refere-se a imagens e alguns desenhos não matemáticos (como retas, pontos, circunferências), icónicas refere-se aos desenhos matemáticos e notacionais está relacionado com o uso da linguagem e simbologia matemática.

Webb et al. (2008) dividem as representações em três tipos, consoante o nível de formalidade. São então distinguidas como representações informais, preformais e formais, sendo as primeiras as que contém uma quantidade reduzida de elementos formais como o uso de simbologia matemática e as últimas totalmente compostas através destes elementos.

Face o grande número de diferentes tipos de representação, é natural, enquanto professores, termos as nossas preferências. No entanto, é fundamental darmos liberdade aos nossos alunos de usar diferentes representações e processos para resolver determinadas questões (Sriraman & English, 2004), ainda que possamos pensar que não é a representação adequada ou que não é o processo mais eficiente.

No estudo de vários tópicos da Matemática, tão importante como o uso de diversos tipos de representações é a capacidade de fazer conexões entre estas, e a capacidade de efetuar transições entre os vários tipos. Este processo de transição entre representações é exigente do ponto de vista cognitivo, sendo necessário que os professores não só promovam atividades nas quais os alunos possam praticar esta

capacidade, como também apoiem os alunos nestes momentos. Velez (2016) comenta sobre como a prática do professor determina a forma como os alunos utilizam as representações, e o impacto que isso tem na aprendizagem desses alunos. Goldin (2008) acrescenta que uma representação pode ter mais do que um significado, e que um significado pode ser representado de várias formas diferentes.

2.3. A resolução de problemas

Para se falar da resolução de problemas é necessário primeiramente estabelecer o que é um problema. Quando falamos de tarefas matemáticas, existem várias dimensões a ser consideradas, nomeadamente o seu grau de **estrutura**, grau de **desafio**, **duração** e **contexto**. Segundo Ponte (2005), o grau de desafio de uma tarefa está relacionado com a perspetiva de quem a resolve e varia entre reduzido e elevado. Isto faz com que a mesma tarefa, resolvida por alunos diferentes, apresente um grau de desafio diferente para cada um deles.

O grau de estrutura, por sua vez, varia entre aberto e fechado. Sendo uma tarefa fechada uma tarefa onde é claro aquilo que é dado e o que se pretende descobrir. No caso de uma tarefa aberta há um certo nível de indeterminação naquilo que é dado e ou pedido (Ponte, 2005).

Fazendo o cruzamento entre estas duas dimensões obtemos quatro tipos de tarefas (Figura 4). A uma tarefa fechada com grau de dificuldade reduzido chamamos de **exercício**, a uma tarefa fechada com grau de dificuldade elevado chamamos de **problema**, a uma tarefa aberta com grau de dificuldade reduzido chamamos de **exploração** e a uma tarefa aberta com grau de dificuldade elevado chamamos de **investigação** (Ponte, 2005).



Figura 4: Relação entre diversos tipos de tarefa, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)

No entanto, a determinação do grau de desafio de uma tarefa para fazer a distinção entre exercício e problema, é relativa (Vale, 1993). Isto porque uma tarefa que para um aluno exige pouco a nenhum esforço, pode exigir a outro esforços significativos. Assim, uma mesma tarefa pode ser considerada um exercício ou um problema, dependendo da relação entre a tarefa e o aluno que a resolve.

Quanto à duração de uma tarefa matemática, Ponte (2005) considera três classificações: curta, média e longa, estando os problemas inseridos no grupo de tarefas de duração média (Figura 5).

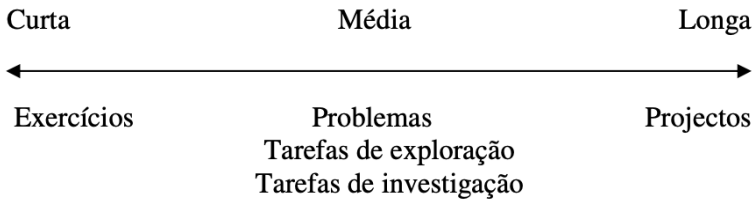


Figura 5: Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p. 20)

Relativamente ao contexto de uma tarefa matemática, Skovsmose (2000) diz que

> diferentes tipos de referência são possíveis. Primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semirrealidade; não se trata de uma realidade que "de facto" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de Matemática. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real. (p. 7)

São identificados então os três tipos de contexto de tarefas matemáticas: matemática pura, semirrealidade e realidade. Estas três classificações são também apresentadas por Ponte (2005), no esquema da Figura 6.

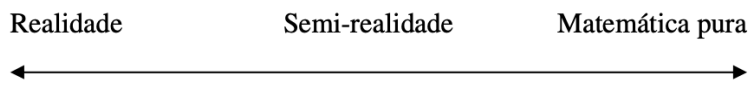


Figura 6: Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p. 21)

No presente relatório, será considerada a definição de problema usada por Ponte (2005). Isto é, considerarei que são problemas todas as **tarefas fechadas com grau de**

desafio elevado e duração média. Em termos de contexto, esse poderá ser variável nos diferentes momentos da intervenção.

Uma das práticas consideradas fundamentais quando temos o objetivo de ensinar matemática é a **proposta de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas** (NCTM, 2014). Isto porque a resolução de problemas, enquanto atividade, proporciona aos alunos um desafio intelectual que contribui posteriormente para a sua compreensão (Cai & Lester, 2012). Neste entendimento, segundo o NCTM (2000), o currículo (da matemática), deve permitir que os alunos usem a resolução de problemas como uma forma de construir o seu próprio conhecimento, através do recurso a diferentes estratégias e posterior reflexão. A realidade é que a resolução de problemas é um tema que tem estado presente nos programas curriculares em Portugal há algum tempo, de acordo com Carvalho e Silva et al. (2001), uma das finalidades da disciplina de Matemática A no Ensino Secundário é "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (p. 5) sendo ainda referida a resolução de problemas de contagem como um dos objetivos e competências gerais da disciplina, inserida na parte referente aos conhecimentos.

A resolução de problemas é considerada um tema transversal, juntamente com outros como a comunicação matemática e a lógica e o raciocínio matemático. Carvalho e Silva et al. (2001) propõe a abordagem sistemática destes temas ao longo do ciclo, não necessariamente alocados a um tema específico. Cai e Lester (2012) mencionam que o papel da resolução de problemas na matemática é de grande importância, no entanto, o saber incorporar a resolução de problemas de forma significativa no currículo da matemática não é assim tão óbvio para os professores de matemática.

No presente relatório de estágio, a resolução de problemas é reconhecida tanto como uma capacidade a ser desenvolvida por parte dos alunos, como uma abordagem metodológica, que pode assumir três perspetivas, ensinar **sobre** resolução de problemas; ensinar **para** a resolução de problemas e ensinar **através** da resolução de problemas (Lima, 2020; Schroeder & Lester, 1989). Podemos optar por uma delas ou então fazer uma conjugação de mais do que uma, para alcançar os objetivos que pretendemos relativamente às aprendizagens dos nossos alunos.

No ensino **sobre** a resolução de problemas, os alunos aprendem quais são as etapas a seguir, de acordo com o modelo de Polya (1995) bem como algumas estratégias gerais de como resolver um problema através da sua utilização. Segundo Polya (1995) um problema matemático pode ser resolvido de forma eficiente se forem seguidas quatro

fases, sendo elas: **compreender o problema**, **delinear um plano**, **executar o plano** e **verificar**. Segue-se um breve resumo daquilo em que consiste cada uma destas quatro fases segundo o autor.

Na primeira fase, **compreender o problema**, é necessário identificar os dados do problema e o objetivo que pretendemos alcançar. Para isso temos de distinguir a informação relevante do resto. Na segunda fase, **delinear um plano**, podemos tentar recordar problemas semelhantes que já tenham sido resolvidos e que nos possam ajudar no problema que temos em mãos. Podemos e devemos ainda tentar diferentes abordagens para tentar perceber qual será a mais eficaz e qual devemos aplicar. Na terceira fase, **executar o plano**, vamos aplicar a estratégia que escolhemos na fase anterior, até alcançar um resultado. Se não conseguirmos alcançar um resultado podemos sempre recuar à fase anterior e procurar uma nova estratégia. Na última fase, **verificar**, vamos analisar a solução obtida de acordo com os dados do problema, percebendo se faz ou não sentido no contexto do problema.

Nas diferentes etapas da resolução de um problema, podem surgir **dificuldades** que, eventualmente, impeçam o aluno de alcançar o resultado pretendido. Na fase **compreender o problema**, o aluno pode fazer uma interpretação incorreta daquilo que o enunciado pede ou então fazer uma transcrição errada dos dados, algo que vai impedir que o problema seja resolvido corretamente. Na fase **delinear um plano** pode ser escolhida uma estratégia que não funcione e que vá posteriormente causar dificuldades na fase **executar o plano**, sendo necessário voltar atrás e delinear um novo plano. Por fim na fase verificar pode ser feita uma verificação incorreta (até induzida por uma má interpretação do enunciado), na qual parece que resolvemos o problema corretamente quando na realidade não o fizemos.

O desafio com o ensino **sobre** a resolução de problemas (RP), é que esta é tratada como um tema por si só, em vez de se encontrar entrelaçada com todos os temas.

Na perspetiva do ensino **para** a resolução de problemas, temos agora a RP como o objetivo final. Todos os conteúdos, conceitos e procedimentos são ensinados com a finalidade de serem aplicados na resolução de problemas. Neste tipo de abordagem temos a exposição, ao longo do ano letivo, de vários modelos de problemas e os processos a fazer para os resolver, com a finalidade de os alunos serem capazes de os replicar no momento de avaliação. O constrangimento é que, deste modo, a RP tem apenas a função de consolidar e verificar conhecimentos, não sendo usada de outras formas como, por exemplo, a introdução de uma nova temática (Schroeder & Lester, 1989).

No ensino **através** da resolução de problemas, abordagem adotada no presente relatório, podemos introduzir um novo tópico recorrendo a um problema que possa "disparar o desenvolvimento de conceitos e técnicas matemáticas já conhecidas" (Lima, 2020, p.32). Além disso

> os defensores dessa abordagem não consideram a Resolução de Problemas como um tópico isolado no currículo, nem um padrão, nem uma vertente do conteúdo, mas como uma postura pedagógica. Dessa forma, os alunos, quando são confrontados com problemas, usam os conhecimentos já existentes para construírem novos conhecimentos e entendimentos. (Lima, 2020, p.32)

A opção, neste Relatório, pelo ensino através da Resolução de Problemas decorre do facto de que as tarefas, apresentadas no capítulo 3, que compõem a intervenção pedagógica na qual se baseia este estudo, possuíam a intenção clara de promover uma **aprendizagem baseada na resolução de problemas** (embora a nomenclatura varie, o princípio é o mesmo da aprendizagem através da resolução de problemas). Nesta perspetiva, o problema deixa de ser entendido como uma atividade de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos para assumir a função de desencadear a construção de novas aprendizagens. Conforme referem Cosme et al. (2021), este método distingue-se das perspetivas que defendem o ensinar sobre a resolução de problemas ou para resolver problemas (Lima, 2020; Schroeder & Lester, 1989), privilegiando antes o *ensinar através da resolução de problemas*, em que o problema constitui o ponto de partida da atividade matemática dos alunos e um contexto privilegiado para a construção de conceitos e procedimentos matemáticos.

Nesta abordagem, a resolução de problemas promove desafios intelectuais que favorecem a compreensão dos conceitos matemáticos, permitindo que os alunos atribuam significado às aprendizagens a partir da exploração de situações problemáticas, da formulação de hipóteses, da discussão de estratégias e da análise das soluções encontradas. Deste modo, os conceitos matemáticos emergem da atividade de resolução e da reflexão sobre os processos utilizados, antes de serem sistematizados pelo professor através da linguagem própria da disciplina. Simultaneamente, favorece a construção de ambientes cooperativos de aprendizagem, nos quais os alunos partilham interpretações, confrontam raciocínios e desenvolvem a capacidade de argumentação matemática, assumindo um papel ativo na construção do conhecimento.

De acordo com Cosme et al. (2021), a aprendizagem baseada na resolução de problemas organiza-se em cinco momentos fundamentais: (i) apresentação do

problema; (ii) resolução em pequenos grupos; (iii) discussão em plenário das diferentes estratégias e soluções; (iv) sistematização dos conceitos pelo professor; e (v) formulação de novos problemas pelos alunos. Esta sequência evidencia que o papel do professor não se reduz à transmissão de conteúdos, assumindo-se antes como um interlocutor qualificado (Cosme, 2009) que organiza ambientes de aprendizagem, promove o questionamento, orienta a reflexão e apoia os alunos na construção de conhecimentos matemáticos significativos. Na minha intervenção recorri apenas às primeiras quatro fases deste tipo de aprendizagem.

Neste sentido, é necessário compreender que recorrer à resolução de problemas em sala de aula, não é apenas ensinar algumas regras e apresentar os problemas aos alunos para que eles apliquem essas mesmas regras e os resolvam. A resolução de problemas pode ser um meio para atingir diversos objetivos e alcançar as aprendizagens pretendidas. Neste sentido, Lima (2020) afirma que

> a consideração da resolução de problemas como contexto entende que os problemas e o seu processo de resolução são um meio para alcançar um determinado objetivo. Podem ser uma justificativa pela qual se deve ensinar e aprender matemática (...) Relacionado com a justificativa, a resolução de problemas também pode ser trabalhada como uma motivação, ou seja, com o objetivo de atrair o interesse dos alunos. Decorrente da motivação, a resolução de problemas pode ser entendida como atividade lúdica (...) Em outra abordagem – a resolução de problemas como veículo – os problemas são fornecidos para que um novo conceito possa ser aprendido. Finalmente, a resolução de problemas pode ser considerada como a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente (p. 57).

Esta perspetiva assume particular relevância no domínio da proposta de Lockwood (2013), segundo o qual o pensamento combinatório emerge da interação dinâmica entre as três componentes fundamentais anteriormente mencionadas. De acordo com este modelo, a compreensão dos conceitos da Combinatória implica o estabelecimento de ligações entre estas três componentes durante a resolução de problemas. Assim, ao explorar tarefas combinatórias desafiantes, os alunos têm a oportunidade de construir o espaço de possibilidades, desenvolver processos de enumeração sistemática, analisar padrões e, progressivamente, compreender e justificar as expressões combinatórias que utilizam. Nesta perspetiva, a resolução de problemas pode contribuir para a promoção e análise do desenvolvimento do pensamento combinatório ao longo da intervenção didática.

No presente relatório, os problemas apresentados tinham essencialmente as duas últimas funções mencionadas por Lima (2020). Alguns foram introduzidos como veículo, para que os alunos aprendessem os novos conceitos através dos próprios problemas, outros foram introduzidos com o objetivo de reforçar e praticar os conceitos já aprendidos.

Considerando que a intervenção pedagógica privilegiou a aprendizagem baseada na resolução de problemas desenvolvida em pequenos grupos, a qualidade das interações entre os alunos assumiu um papel central na construção das aprendizagens. A discussão de estratégias, a utilização de diferentes representações e a justificação dos procedimentos constituíram elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento combinatório, razão pela qual importa aprofundar, na secção seguinte, o papel da aprendizagem cooperativa na construção do conhecimento matemático.

2.4. A aprendizagem cooperativa

A resolução de problemas de natureza combinatória caracteriza-se por admitir diferentes percursos de resolução e múltiplas formas de representar e organizar os resultados possíveis. Esta diversidade de estratégias confere um especial interesse às situações de aprendizagem cooperativa, uma vez que a discussão entre pares favorece a comparação de procedimentos, a identificação de regularidades e a justificação das opções adotadas. A verbalização do raciocínio e o confronto entre diferentes modos de resolver o mesmo problema constituem oportunidades para aprofundar a compreensão conceptual da Combinatória, permitindo aos alunos rever, reformular e consolidar os seus processos de pensamento. Nesta perspetiva, a aprendizagem cooperativa assume-se como um contexto pedagógico que favorece o desenvolvimento do pensamento combinatório, em consonância com o modelo proposto por Lockwood (2013).

No *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Oliveira Martins et al., 2017) é abordada a noção de competência, como sendo uma ligação entre os conhecimentos, capacidades e atitudes. Dentro das diferentes áreas de competências apresentadas neste documento, “nenhuma delas corresponde a uma área específica, sendo que em cada área curricular estão necessariamente envolvidas múltiplas competências teóricas e práticas” (p. 19), é destacado o **relacionamento interpessoal.**

Nos momentos de atividade em sala de aula, os alunos podem trabalhar de diferentes modos: em grande grupo (toda a turma trabalha em conjunto para atingir um objetivo

comum), em pequenos grupos, a pares e de forma individual. Dentro destes diferentes modos, apenas o trabalho individual não favorece o relacionamento interpessoal.

No ensino da Matemática, a aprendizagem cooperativa assume uma relevância particular, uma vez que favorece processos de comunicação matemática, argumentação e construção partilhada de significados. Ao discutirem diferentes estratégias de resolução, justificarem procedimentos e confrontarem interpretações distintas, os alunos tornam explícito o seu raciocínio matemático, desenvolvendo a comunicação, o pensamento crítico e a autorregulação. Assim, a interação entre pares assume-se como uma condição favorável à construção do conhecimento matemático.

Neste entendimento, as *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário,* relativas ao 11.º ano de escolaridade incentiva-nos a "valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem" (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 9). Para além disso, a

> colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 9)

Cabe então aos professores proporcionar momentos nas suas aulas em que os alunos possam realizar atividades que favoreçam estas competências. Com o trabalho em grupo, estamos a permitir que aconteçam situações em que

> os alunos juntam esforços para atingir objetivos, valorizando a diversidade de perspetivas sobre as questões em causa (…) Desenvolvem e mantêm relações diversas e positivas entre si e com os outros (…) Os alunos envolvem-se em conversas, trabalhos e experiências formais e informais: debatem, negoceiam, acordam, colaboram. Aprendem a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (…) Os alunos resolvem problemas de natureza relacional de forma pacífica, com empatia e com sentido crítico. (Oliveira Martins et al., 2017)

Neste contexto, o professor assume igualmente a responsabilidade de estruturar situações de aprendizagem cooperativa que promovam uma participação de todos os alunos. Tal ação pedagógica ultrapassa a mera divisão de alunos por grupos, mas implica criar condições para que as interações favoreçam a construção conjunta do conhecimento, regulando a comunicação, incentivando a argumentação e promovendo

a negociação de significados matemáticos. O professor assume, assim, enquanto interlocutor qualificado (Cosme, 2009), o compromisso de potenciar simultaneamente a aprendizagem individual através de uma construção coletiva do conhecimento.

Todavia, importa distinguir trabalho de grupo de aprendizagem cooperativa, uma vez que a simples organização dos alunos em grupos não garante, por si só, aprendizagens de maior qualidade. A aprendizagem cooperativa pressupõe a existência de objetivos comuns, interdependência positiva, responsabilidade individual, interação promotora e reflexão sobre o funcionamento do grupo, criando condições para que cada aluno contribua ativamente para a construção coletiva do conhecimento (Johnson & Johnson, 2009; Lopes & Silva, 2009). Nesta perspetiva, o trabalho colaborativo constitui um contexto privilegiado para a discussão matemática, para a argumentação e para a explicitação dos raciocínios desenvolvidos durante a resolução de problemas. Quando os alunos trabalham de forma individual, por vezes surgem dúvidas e os alunos não se sentem totalmente à vontade para as esclarecer com o professor, porque veem este como alguém com mais conhecimento e que de certa forma se encontra num nível superior ao deles. Por outro lado, quando trabalham em grupo, os alunos sentem-se mais confortáveis para tirar dúvidas com os colegas e expor as suas opiniões, visto que veem os colegas num nível de conhecimento igual ou mais próximo do seu (Moran, 2013). Isto faz com que certos alunos, que não participem tão ativamente nas aulas ou nos momentos de trabalho individual, se sintam mais confiantes em partilhar as suas ideias quando trabalham neste tipo de contexto.

Cohen e Lotan (2017) abordam o facto de muitas vezes, as atividades por si só não serem capazes de captar e manter a atenção daqueles alunos que enfrentam dificuldades de aprendizagem, ou que até não gostam tanto da disciplina. Estes alunos, quando se veem numa situação em que têm de trabalhar sozinhos, acabam por ficar mais distraídos e com a autoestima mais baixa pois pensam que não realizarão a tarefa sem ajuda. Por outro lado, quando trabalham em conjunto com outros colegas, estes alunos apresentam “comportamentos mais ativos e direcionados à atividade” (Cohen & Lotan, 2017, p.15).

Pela sua natureza, o trabalho em grupo é um dos pilares da **aprendizagem cooperativa**. de facto, “a aprendizagem em grupo nos permite ir além de onde cada um consegue chegar isoladamente” (Moran, 2013, p. 5). Normalmente quando os alunos trabalham em grupo, é necessária a participação e o contributo de todos para resolver a tarefa ou atingir o objetivo, e os próprios alunos têm de fazer o papel do professor e distribuir as tarefas entre os diferentes elementos (Cohen & Lotan, 2017).

Quando os alunos resolvem uma tarefa em grupo, é necessário delinear um plano e, como referido, distribuir as tarefas pelos elementos do grupo. Para isso, é necessário que os alunos discutam e falem abertamente sobre as suas perspetivas e as estratégias que consideram que serão as melhores para atingir o objetivo. Isto pode por vezes ser uma tarefa difícil e gerar momentos de tensão entre os integrantes do grupo.

Os alunos por vezes demonstram grandes dificuldades em saber ouvir e respeitar as ideias dos outros (Lucchesi et al., 2012). Neste tipo de trabalhos existe sempre a possibilidade de surgirem situações de **individualismo**, em que certos alunos desvalorizam as ideias de outros colegas, considerando que as suas são superiores. Este tipo de comportamento é comum em alunos com bom aproveitamento na disciplina, quando em grupos compostos por colegas com um aproveitamento inferior. Estes segundos acabam muitas vezes por ceder à pressão e concordar com as ideias do colega com aproveitamento superior (Lucchesi et al., 2012).

Outra dificuldade que pode surgir no trabalho em grupo são as situações de **dependência**, tanto de certos elementos do grupo como do próprio professor. Esta dificuldade encontra-se de certa forma ligada às situações de individualismo, em grande parte dos casos. Por vezes os alunos que não possuem um desempenho tão bom na disciplina podem sentir que não farão autonomamente a sua parte no trabalho, aguardando sempre alguma validação por parte dos colegas que têm um melhor desempenho. Em certos casos, existem elementos do grupo que sentem a necessidade de chamar o professor para esclarecer dúvidas que ainda não tentaram perguntar ao grupo, mostrando uma certa dependência relativamente ao professor e à sua opinião.

Em síntese, a aprendizagem cooperativa favorece a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, promove a comunicação matemática e cria oportunidades para a discussão, argumentação e validação de diferentes estratégias de resolução. Quando articulada com uma abordagem de ensino através da resolução de problemas, possibilita a mobilização de múltiplas formas de representação matemática, permitindo que os alunos organizem, comuniquem e analisem o seu raciocínio de forma progressivamente mais estruturada. As representações assumem, neste contexto, uma oportunidade de tornar visíveis os processos de pensamento e promover a construção e a partilha de significados matemáticos. No âmbito do presente estudo, recorreu-se à articulação entre a resolução de problemas, a aprendizagem cooperativa e o recurso a diferentes representações, uma vez que as tarefas de Contagem propostas exigiam a comparação de estratégias, a justificação dos processos de enumeração, a utilização

de representações adequadas para organizar os resultados possíveis e a análise crítica das diferentes soluções encontradas, com vista a criar condições favoráveis ao desenvolvimento do pensamento combinatório, em consonância com o modelo proposto por Lockwood (2013).

3. Intervenção pedagógica

Ao longo deste capítulo apresento a minha intervenção pedagógica e vários aspetos importantes para a sua compreensão, desde a caracterização da escola e da turma que participou no estudo até aos diferentes momentos que compõem esta intervenção juntamente com os conjuntos de tarefas utilizados.

3.1. Caracterização da escola

Este trabalho de investigação e intervenção foi desenvolvido, no âmbito da PES, numa escola não agrupada de 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, situada na área metropolitana do Porto, em meio urbano.

A escola está geograficamente bem localizada, sendo de fácil acesso através de diversos meios de transporte públicos, o que permite receber alunos de muitas freguesias do concelho.

No início do ano letivo 2025/26 estavam inscritos na escola 1334 alunos, 1086 a frequentar o ensino básico e os cursos científicos-humanísticos do ensino secundário, e os restantes 248 a frequentar ~~os~~ cursos profissionais do ensino secundário.

O corpo docente da escola inclui 169 docentes distribuídos pelos diferentes grupos de recrutamento, destes docentes alguns têm ainda a responsabilidade de ser diretores de turma, coordenadores de clubes, entre outras tarefas.

A oferta formativa da escola contempla os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas, Línguas e Humanidades e Artes Visuais e ainda diversos cursos profissionais como Cabeleireiro e Restauração e Bar. Para além disso possui ainda na área de formação de adultos o Centro Qualifica e turmas de português para estrangeiros em regime pós-laboral.

A escola dispõe de espaços como o Centro de Apoio à Aprendizagem onde os alunos podem requisitar material como calculadoras e computadores, e a Biblioteca Escolar onde podem estudar e fazer trabalhos em ambiente tranquilo, bem como usufruir dos computadores e consultar e/ou requisitar uma quantidade generosa de livros e revistas.

Com os objetivos de melhoria do sucesso educativo, redução do abandono escolar precoce, atratividade do ensino profissional e o maior ajuste entre as competências dos jovens e as necessidades do mercado de trabalho, a escola possui um serviço de psicologia e orientação, para o qual podem ser sinalizados alunos para frequentar ou

então os mesmos podem ter a iniciativa de marcar uma consulta através do diretor de turma ou outros meios, como o contacto direto com os elementos de SPO.

Em termos de clubes para a ocupação de tempos livres dos estudantes, a escola possui uma vasta oferta, nomeadamente o clube de programação e robótica, o clube de fotografia e vídeo e o ecoclube.

3.2. A minha intervenção pedagógica

3.2.1. Caracterização da turma

Quando iniciei a minha intervenção pedagógica, ainda não tinha uma ideia muito clara sobre qual das turmas deveria escolher para a realização do estudo. Tinha de optar entre uma turma do curso científico-humanístico de Ciências e Tecnologias e uma turma do curso científico-humanístico de Ciências Socioeconómicas, ou então realizar o estudo com as duas turmas.

Optei por fazer a recolha dos dados nas duas turmas e depois tomar a decisão que fizesse mais sentido no momento de fazer a análise desses mesmos dados. Esta opção que tomei será explicada com maior detalhe na subsecção Escolha dos participantes do capítulo Metodologia.

Deste modo, a intervenção pedagógica foi desenvolvida na turma do curso científico-humanístico de Ciências e Tecnologias ao longo do ano letivo 2025/2026. Esta turma ~~é~~ é constituída por 21 alunos, sendo 11 do sexo masculino e 10 do sexo feminino, embora um destes alunos tenha optado por não participar no estudo. Os alunos desta turma têm idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos, com bons hábitos de estudo e são alunos empenhados e interessados nas aulas.

No final do 2.º período do ano letivo 2025/2026, período durante o qual a intervenção pedagógica decorreu, a turma obteve uma média de 15,2 valores, considerando todas as disciplinas, a média da disciplina de Matemática A foi de 12,55 valores. Isto mostra que é uma turma com um bom aproveitamento ainda que revelem algumas dificuldades nas disciplinas de Matemática A e Física e Química A.

3.2.2. Momentos da intervenção pedagógica

A minha intervenção pedagógica teve lugar ao longo do 2.º e 3.º períodos do ano letivo 2025/2026, tendo sido iniciada após a recolha dos consentimentos informados assinados pelos encarregados de educação (Apêndice 1) e dos assentimentos informados assinados pelos alunos (Apêndice 2).

A intervenção decorreu ao longo de cinco momentos (Figura 7). Os três primeiros momentos tiveram lugar ao longo do mês de janeiro de 2026, o quarto e o quinto momento decorreram ao longo dos meses de fevereiro e março de 2026.

O tema escolhido, a Contagem, é um tema de grande importância, pois dá aos alunos ferramentas essenciais para a resolução de problemas do quotidiano (Mota & Ferreira, 2018) e para o desenvolvimento do seu raciocínio e pensamento. Neste sentido, esta intervenção foi idealizada com o objetivo de apoiar uma investigação que visa compreender de que modo as representações utilizadas pelos alunos, as dificuldades encontradas na resolução de problemas de contagem e o trabalho cooperativo influenciam o processo de aprendizagem dos alunos. Para alcançar uma resposta a esta questão fui observar o tipo de representações a que os alunos recorrem na resolução de problemas de contagem; quais as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução destes problemas e de que forma o recurso a estratégias de aprendizagem cooperativa, no ensino através da RP, contribui para a aprendizagem dos conceitos de contagem.

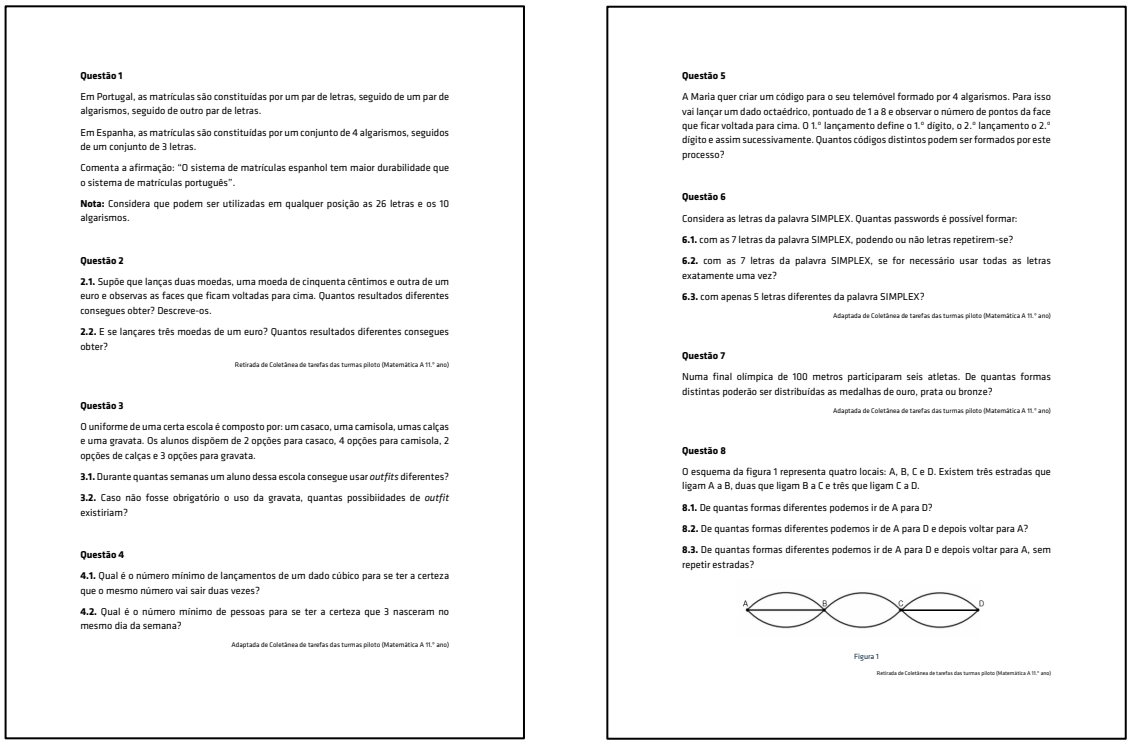
Durante o processo de ensino-aprendizagem do tema da Contagem, as fichas foram realizadas em trios, escolhidos por mim. A escolha dos trios foi feita com a intenção de formar grupos heterogéneos, e colocar os alunos a trabalhar com colegas que normalmente não costumam trabalhar. Isto, para mim, era algo indispensável, pois quando os alunos trabalham sempre com os mesmos colegas, acabam por ficar demasiado confortáveis. Acho também que é algo que os prepara para o futuro, já que nem sempre temos a possibilidade de trabalhar com os nossos amigos mais próximos. Nos restantes momentos, os alunos trabalharam de forma individual, para que eu pudesse identificar melhor as suas dificuldades e perceber quais conceitos deveriam ser revistos ou mais trabalhados.



Figura 7: Momentos da intervenção pedagógica

3.2.2.1. 1.º momento – Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem

Este primeiro momento teve lugar na aula de dia 12 de janeiro de 2026, e o plano de aula elaborado encontra-se no Apêndice 3. Os alunos trabalharam em trios para resolver um conjunto de oito questões (Figura 8), que também se encontram no disponíveis no Apêndice 6, que foram sendo distribuídas uma a uma, em tiras, ao longo da aula.



Questão 1

Em Portugal, as matrículas são constituídas por um par de letras, seguido de um par de algarismos, seguido de outro par de letras.

Em Espanha, as matrículas são constituídas por um conjunto de 4 algarismos, seguidos de um conjunto de 3 letras.

Comenta a afirmação: "O sistema de matrículas espanhol tem maior durabilidade que o sistema de matrículas português".

Nota: Considera que podem ser utilizadas em qualquer posição as 26 letras e os 10 algarismos.

Questão 2

2.1. Supõe que lanças duas moedas, uma moeda de cinquenta cêntimos e outra de um euro e observas as faces que ficam voltadas para cima. Quantos resultados diferentes consegues obter? Descreve-os.

2.2. E se lançares três moedas de um euro? Quantos resultados diferentes consegues obter?

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 3

O uniforme de uma certa escola é composto por: um casaco, uma camisola, umas calças e uma gravata. Os alunos dispõem de 2 opções para casaco, 4 opções para camisola, 2 opções de calças e 3 opções para gravata.

3.1. Durante quantas semanas um aluno dessa escola consegue usar *outfits* diferentes?

3.2. Caso não fosse obrigatório o uso da gravata, quantas possibilidades de *outfit* existiriam?

Questão 4

4.1. Qual é o número mínimo de lançamentos de um dado cúbico para se ter a certeza que o mesmo número vai sair duas vezes?

4.2. Qual é o número mínimo de pessoas para se ter a certeza que 3 nasceram no mesmo dia da semana?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 5

A Maria quer criar um código para o seu telemóvel formado por 4 algarismos. Para isso vai lançar um dado octaédrico, pontuado de 1 a 8 e observar o número de pontos da face que ficar voltada para cima. O 1.º lançamento define o 1.º dígito, o 2.º lançamento o 2.º dígito e assim sucessivamente. Quantos códigos distintos podem ser formados por este processo?

Questão 6

Considera as letras da palavra SIMPLEX. Quantas passwords é possível formar:

6.1. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, podendo ou não letras repetirem-se?

6.2. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, se for necessário usar todas as letras exatamente uma vez?

6.3. com apenas 5 letras diferentes da palavra SIMPLEX?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 7

Numa final olímpica de 100 metros participaram seis atletas. De quantas formas distintas poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata ou bronze?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 8

O esquema da figura 1 representa quatro locais: A, B, C e D. Existem três estradas que ligam A a B, duas que ligam B a C e três que ligam C a D.

8.1. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D?

8.2. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A?

8.3. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A, sem repetir estradas?

Figura 1

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Figura 8: Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem

Esta tarefa tinha dois principais objetivos, tendo por base os objetivos específicos do tema *Matemática Discreta*, tópico *Contagem* e subtópico *Princípios gerais da contagem* das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário*, referentes ao 11.º ano (Carvalho e Silva et al., 2023):

- → usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem;
- → formalizar os conceitos de Princípio da Adição, Princípio da Multiplicação e Princípio do Pombal.

Este conjunto de tarefas foi criado de forma que os alunos pudessem resolvê-lo antes de aprenderem os conceitos previamente mencionados. Para além disso não havia

qualquer restrição relativamente ao tipo de representações a serem usadas nem ao tipo de justificações a serem dadas.

O esperado com este conjunto de tarefas era que a maioria dos grupos conseguisses dar resposta a pelo menos seis das oito questões, e que mais tarde, quando fosse a discussão da resolução das mesmas, todos fossem capazes de compreender como resolver cada uma. Com a discussão também tinha a intenção de que os alunos pudessem ver outras formas de resolver cada uma das questões, e não só aquela que tinham utilizado.

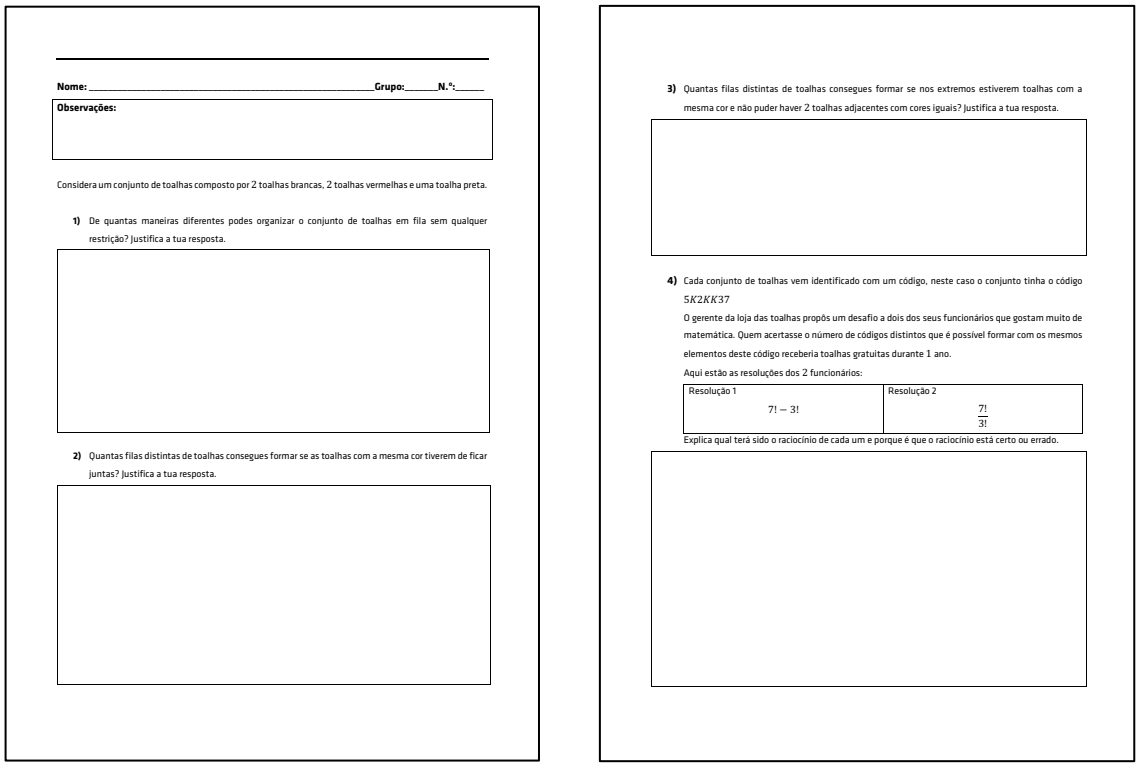
A aula correu dentro do esperado. Nem todos os alunos conseguiram responder a todas as questões, mas daquilo que observei em sala de aula, acredito que isso foi devido a uma gestão do tempo pouco eficaz por parte dos elementos do grupo e não à extensão da tarefa. Acho que poderia ter feito uma intervenção nestes grupos e sugerir que não passassem demasiado tempo a resolver apenas uma questão, mas na altura optei por não o fazer, pois não queria interromper o trabalho dos grupos que não solicitaram a minha ajuda. No momento de correção os alunos dialogaram de forma respeitosa e discutiram as suas ideias até ao momento da formalização dos princípios.

3.2.2.2. 2.º momento – Ficha de trabalho sobre permutações com repetição

Este segundo momento decorreu no dia 22 de janeiro de 2026, e o seu plano de aula elaborado encontra-se no Apêndice 4. A ficha (Figura 9), que se encontra também disponível no Apêndice 7, foi resolvida no seguimento de uma exploração no quadro usando as palavras: RUI, ANA, LARA e ARARA, na qual deduzimos a fórmula das permutações com repetição. No momento de resolução da tarefa os alunos voltaram a trabalhar nos trios da tarefa anterior.

Os objetivos desta aula e ficha de trabalho eram:

- → deduzir a fórmula das permutações com repetição através da exploração de alguns exemplos simples;
- → aplicação da fórmula em problemas com contexto semirreal.



Nome: _____ **Grupo:**_____ **N.º:**_____

Observações:

Considera um conjunto de toalhas composto por 2 toalhas brancas, 2 toalhas vermelhas e uma toalha preta.

1) De quantas maneiras diferentes podes organizar o conjunto de toalhas em fila sem qualquer restrição? Justifica a tua resposta.

2) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se as toalhas com a mesma cor tiverem de ficar juntas? Justifica a tua resposta.

3) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se nos extremos estiverem toalhas com a mesma cor e não puder haver 2 toalhas adjacentes com cores iguais? Justifica a tua resposta.

4) Cada conjunto de toalhas vem identificado com um código, neste caso o conjunto tinha o código $5K2KK37$

O gerente da loja das toalhas propôs um desafio a dois dos seus funcionários que gostam muito de matemática. Quem acertasse o número de códigos distintos que é possível formar com os mesmos elementos deste código receberia toalhas gratuitas durante 1 ano.

Aqui estão as resoluções dos 2 funcionários:

Resolução 1	Resolução 2
$7! - 3!$	$\frac{7!}{3!}$

Explica qual terá sido o raciocínio de cada um e porque é que o raciocínio está certo ou errado.

Figura 9: Ficha de trabalho sobre permutações com repetição

O esperado com esta ficha era que os alunos conseguissem compreender o como é que surge a fórmula das permutações com repetição e os casos em que faz sentido utilizá-la. Com esta aula também tinha a expectativa de que, futuramente, seria mais simples para os alunos compreenderem o conceito de combinação, devido à sua semelhança com as permutações com repetição.

A aula correu de acordo com o planeado, os alunos mostraram-se muito participativos na exploração dos exemplos, tanto os que vieram ao quadro como os que não chegaram a ter essa oportunidade. Os objetivos da aula e da ficha de trabalho foram cumpridos e os alunos conseguiram compreender as situações em que necessitam de aplicar esta fórmula/ conceito de permutações com repetição.

3.2.2.3. 3.º momento – Ficha de trabalho sobre combinações

O terceiro momento da minha intervenção pedagógica decorreu no dia 26 de janeiro de 2026, e o plano de aula elaborado encontra-se no Apêndice 5. Nesta aula, os alunos foram confrontados com o seguinte problema elaborado por mim:

> "Existem cinco seguranças diferentes (Ana, Bruno, Carla, David e Eduardo) que trabalham numa discoteca. Em cada noite tem de haver três seguranças a trabalhar, quantos grupos de trabalho diferentes podemos fazer com os cinco seguranças?"

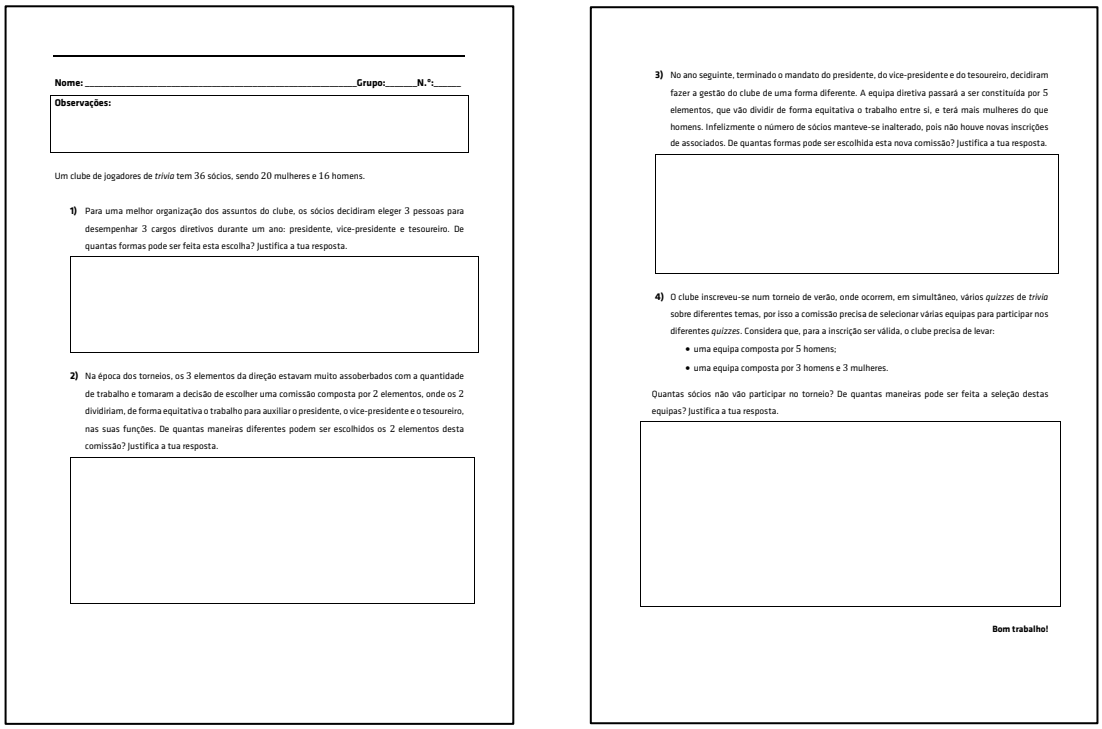
Para dar resposta a este problema fizemos uma exploração em grande grupo recorrendo ao *ChatGPT*. Foram necessários alguns *prompts* para chegar ao resultado pretendido, mas os alunos mostraram-se muito envolvidos na discussão.

Com a exploração, o objetivo era que os alunos compreendessem que para obter a fórmula das combinações de n elementos p a p, apenas tinham de pegar na fórmula dos arranjos simples de n elementos p a p, que já tinham aprendido anteriormente, e dividir por $p!$, que corresponde ao número de maneiras de ordenar um conjunto com p elementos (Figura 10).

$$ {}^{n}C_{p} = \frac{{}^{n}A_{p}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} $$

Figura 10: Fórmula das combinações de n elementos p a p

Na Figura 11 encontra-se a ficha de trabalho (que também se encontra disponível no Apêndice 8) que os alunos resolveram após a exploração. À semelhança dos dois momentos anteriores, os alunos realizaram esta ficha de trabalho em trios.



Nome: _____ **Grupo:**_____ **N.º:**_____

Observações:

Um clube de jogadores de *trivia* tem 36 sócios, sendo 20 mulheres e 16 homens.

1) Para uma melhor organização dos assuntos do clube, os sócios decidiram eleger 3 pessoas para desempenhar 3 cargos diretivos durante um ano: presidente, vice-presidente e tesoureiro. De quantas formas pode ser feita esta escolha? Justifica a tua resposta.

2) Na época dos torneios, os 3 elementos da direção estavam muito assoberbados com a quantidade de trabalho e tomaram a decisão de escolher uma comissão composta por 2 elementos, onde os 2 dividiriam, de forma equitativa o trabalho para auxiliar o presidente, o vice-presidente e o tesoureiro, nas suas funções. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 2 elementos desta comissão? Justifica a tua resposta.

3) No ano seguinte, terminado o mandato do presidente, do vice-presidente e do tesoureiro, decidiram fazer a gestão do clube de uma forma diferente. A equipa diretiva passará a ser constituída por 5 elementos, que vão dividir de forma equitativa o trabalho entre si, e terá mais mulheres do que homens. Infelizmente o número de sócios manteve-se inalterado, pois não houve novas inscrições de associados. De quantas formas pode ser escolhida esta nova comissão? Justifica a tua resposta.

4) O clube inscreveu-se num torneio de verão, onde ocorrem, em simultâneo, vários *quizzes* de *trivia* sobre diferentes temas, por isso a comissão precisa de selecionar várias equipas para participar nos diferentes *quizzes*. Considera que, para a inscrição ser válida, o clube precisa de levar:

- uma equipa composta por 5 homens;
- uma equipa composta por 3 homens e 3 mulheres.

Quantas sócios não vão participar no torneio? De quantas maneiras pode ser feita a seleção destas equipas? Justifica a tua resposta.

Bom trabalho!

Figura 11: Ficha de trabalho sobre combinações

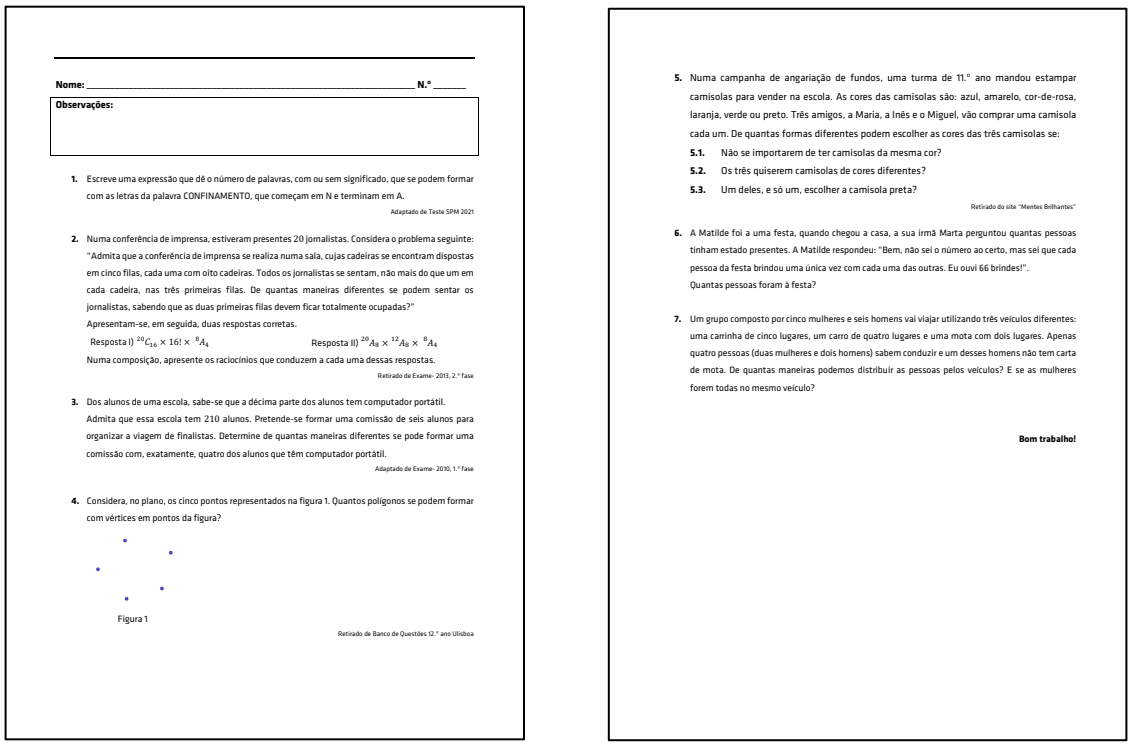
O esperado com esta ficha era que os alunos conseguissem compreender como podem chegar à fórmula das combinações através da fórmula dos arranjos simples. Para além disso era esperado que os alunos fossem capazes de distinguir, diante de um problema, se precisam de recorrer às combinações ou não, compreendendo se estão perante uma situação em que a ordem dos elementos tem ou não importância.

A aula correu parcialmente dentro do esperado, fiquei um bocado surpreendida no momento da exploração no *ChatGPT*, porque a sugestão dos alunos foi que eu colocasse o problema tal e qual estava e enviar esse *prompt*. Ora isto fez com que o *ChatGPT* devolvesse uma resposta em que utilizava já as combinações, que eles ainda não tinham aprendido.

Apesar de isto ter sido acidental (não planeado), acabou por ser algo muito positivo. Permitiu fazer uma reflexão sobre como usar a inteligência artificial e como fazer bons *prompts*. Os alunos perceberam que o *ChatGPT* nem sempre vai responder com matéria que eles deram, e que têm de ter pensamento crítico para perceberem como podem fazer os seus *prompts* de forma que obtenham respostas mais úteis por parte da inteligência artificial.

3.2.2.4. 4.º momento – Ficha global

O quarto momento da minha intervenção pedagógica decorreu no dia 9 de fevereiro de 2026. Foi a primeira ficha (Figura 12) que os alunos realizaram de forma individual e que continha toda a matéria lecionada ao longo desta unidade. A ficha, também disponível no Apêndice 9, foi elaborada com o objetivo de ajudar os alunos a rever alguns conceitos para a avaliação sumativa com fins classificatórios que iriam realizar, para além da recolha de dados para este estudo.



Nome: _____ **N.º** _____

Observações:

1. Escreve uma expressão que dê o número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra CONFINAMENTO, que começam em N e terminam em A.

Adaptado de Teste SPM 2021

2. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas. Considera o problema seguinte: "Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas. De quantas maneiras diferentes se podem sentar os jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?"
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.
Resposta I) $^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) $^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$
Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

Retirado de Exame- 2013, 2.ª fase

3. Dos alunos de uma escola, sabe-se que a décima parte dos alunos tem computador portátil. Admita que essa escola tem 210 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

Adaptado de Exame- 2010, 1.ª fase

4. Considera, no plano, os cinco pontos representados na figura 1. Quantos polígonos se podem formar com vértices em pontos da figura?

Figura 1

Retirado de Banco de Questões 12.º ano Ulisboa

5. Numa campanha de angariação de fundos, uma turma de 11.º ano mandou estampar camisolas para vender na escola. As cores das camisolas são: azul, amarelo, cor-de-rosa, laranja, verde ou preto. Três amigos, a Maria, a Inês e o Miguel, vão comprar uma camisola cada um. De quantas formas diferentes podem escolher as cores das três camisolas se:

5.1. Não se importarem de ter camisolas da mesma cor?

5.2. Os três quiserem camisolas de cores diferentes?

5.3. Um deles, e só um, escolher a camisola preta?

Retirado do site "Mentes Brilhantes"

6. A Matilde foi a uma festa, quando chegou a casa, a sua irmã Marta perguntou quantas pessoas tinham estado presentes. A Matilde respondeu: "Bem, não sei o número ao certo, mas sei que cada pessoa da festa brindou uma única vez com cada uma das outras. Eu ouvi 66 brindes!".
Quantas pessoas foram à festa?

7. Um grupo composto por cinco mulheres e seis homens vai viajar utilizando três veículos diferentes: uma carrinha de cinco lugares, um carro de quatro lugares e uma mota com dois lugares. Apenas quatro pessoas (duas mulheres e dois homens) sabem conduzir e um desses homens não tem carta de mota. De quantas maneiras podemos distribuir as pessoas pelos veículos? E se as mulheres forem todas no mesmo veículo?

Bom trabalho!

Figura 12: Ficha global

Este momento tinha quatro principais objetivos, tendo por base os objetivos específicos do tema *Matemática Discreta*, tópico *Contagem* e subtópico *Princípios gerais da contagem* das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário*, referentes ao 11.º ano (Carvalho e Silva et al., 2023):

- → Conhecer e aplicar os princípios da adição e da multiplicação em problemas de contagem;
- → Usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem;
- → Identificar arranjos completos, permutações e arranjos simples como casos particulares da aplicação do princípio da multiplicação;
- → Identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos ($p \leq n$).

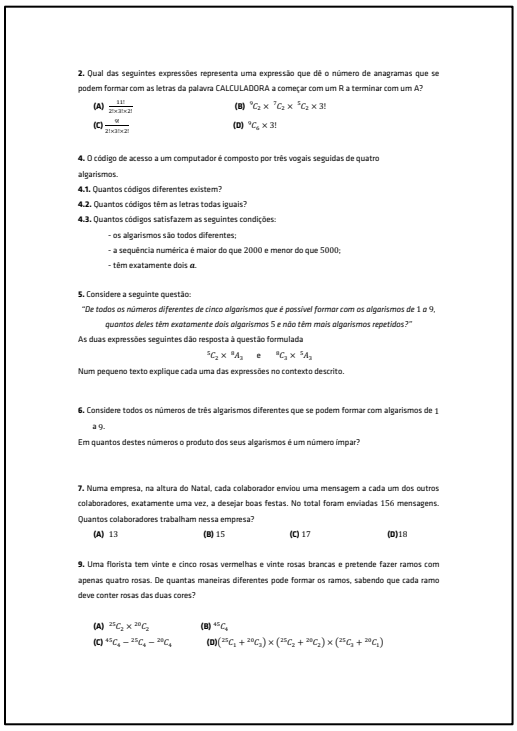
Para este momento optei por fazer uma tarefa individual para compreender melhor o que cada aluno efetivamente sabia ou não. Isto porque em grupo, com a componente de interação verbal, as ideias dos diferentes elementos unem-se para formar o produto final e torna-se difícil compreender se todos elementos do grupo efetivamente percebiam a questão e conseguiriam dar resposta se a tivessem de dar sozinhos.

Esta tarefa correu dentro do esperado. Os alunos manifestaram consideravelmente mais dificuldades a nível da resolução dos problemas, agora que se viram numa situação em que tinham de trabalhar individualmente, comparativamente aos momentos de trabalho em grupo. Ainda assim a maioria conseguiu dar resposta a todas as questões, embora tenham cometido alguns erros. Foi interessante vê-los a tentar interpretar os problemas e a perceber quais fórmulas deveriam usar em cada uma das situações.

3.2.2.5. 5.º momento – Avaliação sumativa com fins classificatórios

Ao longo do segundo período, os alunos realizaram dois instrumentos de avaliação com fins classificatórios, que contemplaram itens da unidade da Contagem. Mais precisamente, no primeiro os alunos tinham de responder a 6 itens deste tema (Figura 13), e no segundo tinham de responder a 4 itens (Figura 14). Estes itens incluíam todos os diferentes conceitos lecionados ao longo do período e encontram-se também disponíveis no Apêndice 10.

O objetivo principal deste momento foi avaliar os conhecimentos adquiridos com fins classificatórios ao longo da unidade. Também pretendi, mais uma vez, identificar outras dificuldades dos alunos na resolução deste tipo de problemas e de certa forma auxiliá-los a ultrapassar aquelas que já tinham ido evidenciando.



2. Qual das seguintes expressões representa uma expressão que dê o número de anagramas que se podem formar com as letras da palavra CALCULADORA a começar com um R a terminar com um A?

(A) $\frac{11!}{2!\times3!\times2!}$ **(B)** ${}^{9}C_{2}\times{}^{7}C_{2}\times{}^{5}C_{2}\times3!$

(C) $\frac{9!}{2!\times3!\times2!}$ **(D)** ${}^{9}C_{4}\times3!$

4. O código de acesso a um computador é composto por três vogais seguidas de quatro algarismos.

4.1. Quantos códigos diferentes existem?

4.2. Quantos códigos têm as letras todas iguais?

4.3. Quantos códigos satisfazem as seguintes condições:

- os algarismos são todos diferentes;
- a sequência numérica é maior do que 2000 e menor do que 5000;
- têm exatamente dois α.

5. Considere a seguinte questão:

"De todos os números diferentes de cinco algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9, quantos deles têm exatamente dois algarismos 5 e não têm mais algarismos repetidos?"

As duas expressões seguintes dão resposta à questão formulada

${}^{5}C_{2}\times{}^{8}A_{3}$ e ${}^{4}C_{3}\times{}^{5}A_{3}$

Num pequeno texto explique cada uma das expressões no contexto descrito.

6. Considere todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com algarismos de 1 a 9.

Em quantos destes números o produto dos seus algarismos é um número ímpar?

7. Numa empresa, na altura do Natal, cada colaborador enviou uma mensagem a cada um dos outros colaboradores, exatamente uma vez, a desejar boas festas. No total foram enviadas 156 mensagens. Quantos colaboradores trabalham nessa empresa?

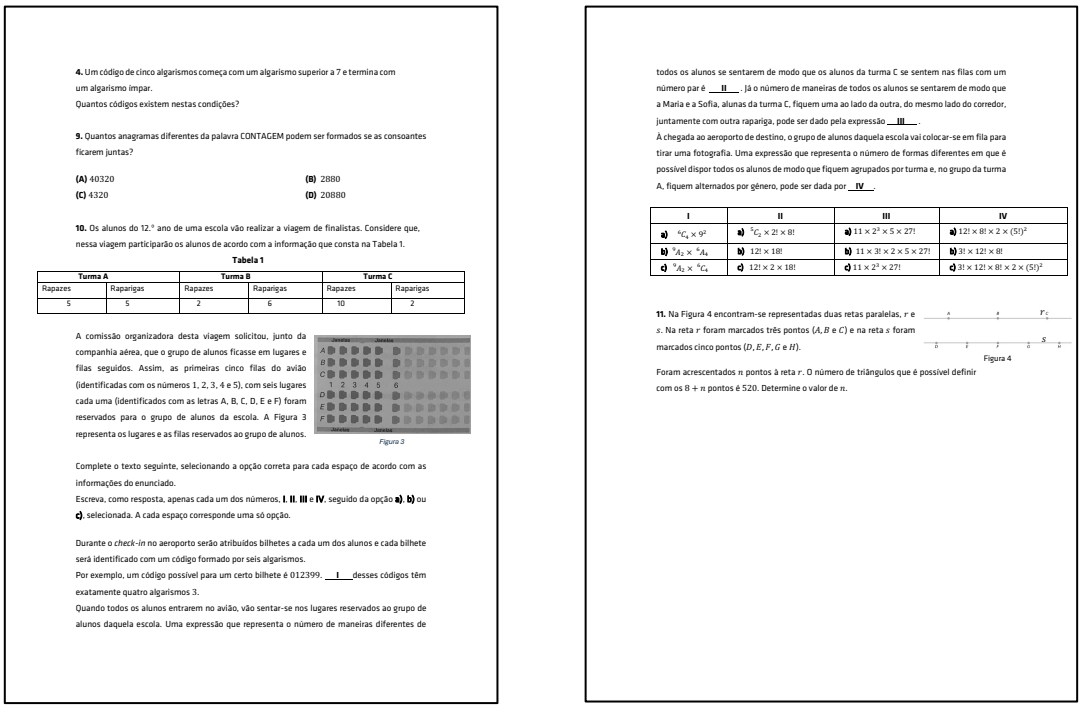
(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 17 **(D)** 18

9. Uma florista tem vinte e cinco rosas vermelhas e vinte rosas brancas e pretende fazer ramos com apenas quatro rosas. De quantas maneiras diferentes pode formar os ramos, sabendo que cada ramo deve conter rosas das duas cores?

(A) ${}^{25}C_{2}\times{}^{20}C_{2}$ **(B)** ${}^{45}C_{4}$

(C) ${}^{45}C_{4}-{}^{25}C_{4}-{}^{20}C_{4}$ **(D)** $\left({}^{25}C_{1}+{}^{20}C_{3}\right)\times\left({}^{25}C_{2}+{}^{20}C_{2}\right)\times\left({}^{25}C_{3}+{}^{20}C_{1}\right)$

Figura 13: Questões da unidade Contagem do primeiro teste do 2.º período



4. Um código de cinco algarismos começa com um algarismo superior a 7 e termina com um algarismo ímpar.

Quantos códigos existem nestas condições?

9. Quantos anagramas diferentes da palavra CONTAGEM podem ser formados se as consoantes ficarem juntas?

(A) 40320 **(B)** 2880

(C) 4320 **(D)** 20880

10. Os alunos do 12.º ano de uma escola vão realizar a viagem de finalistas. Considere que, nessa viagem participarão os alunos de acordo com a informação que consta na Tabela 1.

Tabela 1

Turma A		Turma B		Turma C	
Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas
5	5	2	6	10	2

A comissão organizadora desta viagem solicitou, junto da companhia aérea, que o grupo de alunos ficasse em lugares e filas seguidos. Assim, as primeiras cinco filas do avião (identificadas com os números 1, 2, 3, 4 e 5), com seis lugares cada uma (identificados com as letras A, B, C, D, E e F) foram reservados para o grupo de alunos da escola. A Figura 3 representa os lugares e as filas reservados ao grupo de alunos.

Figura 3

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço de acordo com as informações do enunciado.

Escreva, como resposta, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Durante o *check-in* no aeroporto serão atribuídos bilhetes a cada um dos alunos e cada bilhete será identificado com um código formado por seis algarismos.

Por exemplo, um código possível para um certo bilhete é 012399. ___I___ desses códigos têm exatamente quatro algarismos 3.

Quando todos os alunos entrarem no avião, vão sentar-se nos lugares reservados ao grupo de alunos daquela escola. Uma expressão que representa o número de maneiras diferentes de todos os alunos se sentarem de modo que os alunos da turma C se sentem nas filas com um número par é ___II___. Já o número de maneiras de todos os alunos se sentarem de modo que a Maria e a Sofia, alunas da turma C, fiquem uma ao lado da outra, do mesmo lado do corredor, juntamente com outra rapariga, pode ser dado pela expressão ___III___.

À chegada ao aeroporto de destino, o grupo de alunos daquela escola vai colocar-se em fila para tirar uma fotografia. Uma expressão que representa o número de formas diferentes em que é possível dispor todos os alunos de modo que fiquem agrupados por turma e, no grupo da turma A, fiquem alternados por género, pode ser dada por ___IV___.

I	II	III	IV
a) ${}^{6}C_{4}\times9^{2}$	**a)** ${}^{5}C_{2}\times2!\times8!$	**a)** $11\times2^{5}\times5\times27!$	**a)** $12!\times8!\times2\times(5!)^{2}$
b) ${}^{6}A_{2}\times{}^{5}A_{4}$	**b)** $12!\times18!$	**b)** $11\times3!\times2\times5\times27!$	**b)** $3!\times12!\times8!$
c) ${}^{6}A_{2}\times{}^{6}C_{4}$	**c)** $12!\times2\times18!$	**c)** $11\times2^{5}\times27!$	**c)** $3!\times12!\times8!\times2\times(5!)^{2}$

11. Na Figura 4 encontram-se representadas duas retas paralelas, r e s. Na reta r foram marcados três pontos (A, B e C) e na reta s foram marcados cinco pontos (D, E, F, G e H).

Figura 4

Foram acrescentados n pontos à reta r. O número de triângulos que é possível definir com os $8+n$ pontos é 520. Determine o valor de n.

Figura 14: Questões da unidade Contagem do segundo teste do 2.º período

3.2.3. Considerações sobre a intervenção pedagógica

Apesar dos vários desafios que foram surgindo ao longo da intervenção, considero que de uma forma geral todos foram ultrapassados com sucesso. Neste momento de

retrospetiva consigo perceber que, algumas das decisões que tomei provavelmente seriam diferentes numa segunda tentativa.

Considero que as tarefas que elaborei para cada um dos momentos, tendo em conta os objetivos de cada um, foram adequadas e permitiram que os alunos compreendessem melhor os tópicos abordados. O número de tarefas foi um pouco elevado, mas acho que foi o necessário para que cada tópico tivesse o seu próprio espaço para ser aprendido e praticado, antes de ser avaliado.

Para concluir quero ainda mencionar que com a concretização desta intervenção, gostei muito de ver os alunos a trabalhar nas diferentes tarefas. Todos se mostraram sempre bastante envolvidos, fosse nas tarefas de grupo ou nas individuais. E fico feliz ao saber que no próximo ano, quando estiverem no 12.º ano a rever o tópico da Contagem, provavelmente se lembrarão com maior facilidade destes conceitos.

4. Metodologia de investigação

Tal como foi mencionado na introdução deste trabalho, o objetivo principal deste estudo é **analisar o contributo do ensino através da Resolução de Problemas para a aprendizagem dos conceitos de Contagem**. Dentro desse objetivo geral surgem três objetivos específicos que se relacionam diretamente com as questões orientadoras, apresentados no Quadro 2.

Questão de partida	Questões orientadoras	Objetivos específicos	Objetivo geral
De que modo o ensino através da Resolução de Problemas promove a compreensão dos conceitos de Contagem?	A que representações é que os alunos recorrem na resolução de problemas de contagem?	Analisar as diferentes representações usadas pelos alunos na resolução de problemas de contagem	**Analisar o contributo do ensino através da Resolução de Problemas para a aprendizagem dos conceitos de Contagem**
	Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas de contagem?	Identificar os erros mais frequentes na resolução de problemas de contagem	
		Identificar as dificuldades que dão origem a esses erros	
	De que forma o recurso a estratégias de aprendizagem cooperativa, no ensino através da RP, contribui para a aprendizagem dos conceitos de contagem?	Analisar como é que os alunos trabalham em grupo na resolução de problemas de contagem	

Quadro 2: Cruzamento entre as questões orientadoras e os objetivos específicos (estrutura adaptada de Lima (2020))

Neste capítulo constam todas as opções metodológicas que tomei com o propósito de alcançar o objetivo final do estudo, as questões éticas a ele subjacentes, os métodos de recolha e análise de dados e justificações de certas escolhas como a escolha dos participantes da entrevista ou a escolha da turma que iria ser o meu objeto de estudo.

4.1. Opções metodológicas

Para a realização deste estudo, tendo em conta os seus objetivos específicos e as questões orientadoras da investigação, optei por uma abordagem qualitativa enquadrada num paradigma fenomenológico-interpretativo.

No que toca à abordagem qualitativa, Amado (2013) diz que

> a investigação qualitativa assenta numa visão holística da realidade (ou problema) a investigar, sem a isolar do contexto 'natural' (histórico, socioeconómico e cultural) em que se desenvolve e procurando atingir a sua 'compreensão' através de processos inferenciais e indutivos (construindo hipóteses durante e após a análise dos dados) (p. 41).

A escolha deste tipo de abordagem vem do facto de esta estar alinhada com os objetivos do estudo e as questões às quais pretendo dar resposta. Numa **investigação qualitativa** estão presentes várias características, entre elas destacam-se: a fonte direta de dados é o ambiente natural; o investigador é o instrumento principal; é uma investigação descritiva, ou seja, os dados são recolhidos não na forma de números mas sim palavras ou então imagens; o processo é mais interessante (do ponto de vista do investigador) do que propriamente os resultados; os resultados são analisados de forma indutiva; há um grande interesse pelas perspetivas dos participantes (Bogdan & Biklen,1994).

No caso desta investigação, verificam-se algumas das características anteriormente mencionadas, como por exemplo o facto de o ambiente natural (os alunos em sala de aula) serem a principal fonte dos dados e o interesse pelas perspetivas dos participantes, que é principalmente evidente no momento da entrevista semiestruturada mas esteve sempre presente ao longo de toda a realização do estudo tendo em conta que eu estive presente em todos os diferentes momentos e fiz sempre questão de ir ouvindo as perspetivas e opiniões de todos os alunos.

A escolha do paradigma **fenomenológico-interpretativo** prende-se no facto de este tipo de abordagem (qualitativa) ter como objetivo analisar as perspetivas dos participantes do estudo, os alunos; e de interpretar o próprio fenómeno em estudo, em privilegiando a profundidade em detrimento da abrangência. Como diz Amado (2013):

> o principal interesse do investigador interpretativo é a possibilidade de particularizar, mais do que generalizar; a representatividade das conclusões, longe de ser estatística é social e teórica assente em critérios de compreensão e de pertinência (p. 44)

Bogdan e Biklen (1994) consideram que os investigadores fenomenologistas "tentam compreender o significado que os acontecimentos e interações têm para pessoas vulgares em situações particulares" (p. 53), para além disso "não presumem que conhecem o que as diferentes coisas significam para as pessoas que vão estudadas (Douglas, 1976)" (p. 53).

4.2. Escolha dos participantes

Como mencionado na secção Caracterização da Escola do capítulo da Intervenção Pedagógica, numa fase inicial do estudo, ainda não estava totalmente decidida em relação aos participantes do estudo. Entreguei os consentimentos informados (Apêndice 1) e assentimentos informados (Apêndice 2), nas duas turmas de 11.º ano, uma delas de CT e a outra de SE.

Numa fase inicial optei por fazer a recolha dos dados nas duas turmas, mas, após alguma análise, decidi que seria melhor focar apenas numa delas, devido ao elevado número de tarefas que foram realizadas. Decidi então elaborar um quadro com as vantagens e desvantagens da escolha de cada uma das turmas (Quadro 3), para conseguir escolher qual das turmas queria que fosse a turma-alvo deste estudo.

Turma de CT		Turma de SE	
Vantagens	Desvantagens	Vantagens	Desvantagens
• resultados mais heterogéneos • conheço melhor os alunos desta turma • alunos, de uma forma geral, mais responsáveis (talvez mostrem mais seriedade face ao estudo)	• turma com menos elementos	• turma com mais elementos	• resultados pouco heterogéneos (muito satisfatórios ou muito pouco satisfatórios) • não conheço tão bem os alunos desta turma • alunos, de uma forma geral, menos responsáveis (talvez mostrem pouca seriedade face ao estudo)

Quadro 3: Vantagens e desvantagens da escolha de cada turma

Com a análise do quadro notei que havia consideravelmente mais pontos a favor da escolha da turma de CT, então foi essa a decisão que tomei. No entanto, guardei ainda os documentos recolhidos na outra turma se por acaso mudasse de ideias.

Com o avançar do estudo e o facto de ter decidido fazer uma entrevista, surgiu a necessidade de escolher o grupo de alunos a ser entrevistado. Devido a alguns constrangimentos em termos de tempo não era possível entrevistar todos os alunos da turma (que seria o ideal), então decidi que iria selecionar cinco dos 20 alunos participantes. Para fazer esta escolha, fiz vários quadros de acordo com o desempenho dos alunos nos diferentes momentos da intervenção pedagógica.

Nestes quadros, cujo exemplo pode ser verificado no Quadro 4, que poderão ser vistos com o avançar do relatório, foram utilizadas três cores para representar os diferentes níveis de desempenho dos alunos em cada uma das questões de cada momento da intervenção pedagógica.

Estes quadros mostraram-se indispensável na escolha dos participantes da entrevista pois a utilização das cores permitiu ver de forma rápida a evolução de cada aluno ao longo dos diferentes momentos (e o próprio desempenho dentro de cada momento), possibilitando ter uma visão global e fazer uma escolha adequada.

4.3. Questões éticas

Tendo em conta as características já mencionadas desta investigação, que é baseada numa abordagem qualitativa de paradigma interpretativo, a principal fonte para a recolha de dados são os participantes.

Este estudo não seria possível sem os participantes, portanto, no sentido da sua valorização enquanto parte fundamental da investigação, o estudo foi desenvolvido em conformidade com os princípios éticos presentes na Carta Ética da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (Baptista et al., 2020).

Como os participantes são menores de idade, surgiu a necessidade de elaborar dois documentos, já referidos, o Consentimento Informado (Apêndice 1) e o Assentimento Informado (Apêndice 2).

O consentimento informado foi entregue aos alunos uma semana antes do início da investigação, para ser assinado pelos seus encarregados de educação (EE), visto que os estudantes ainda são menores de idade. Este documento tinha o objetivo de informar os EE de como iria decorrer todo o estudo e como seriam feitas as recolhas de dados em sala de aula. Estava ainda explícito que mesmo após aceitarem que os seus educandos participassem no estudo, a qualquer momento o consentimento poderia ser retirado, sem quaisquer repercussões.

Embora não fosse obrigatório, entreguei ainda aos alunos o assentimento Informado, para que eles sentissem que a opinião deles também é importante para mim e seria sempre respeitada. O Assentimento era para ser assinado pelos próprios alunos e continha as mesmas informações presentes no consentimento, mas escritas com uma linguagem mais informal para que eles compreendessem melhor e devido a já haver uma relação de maior proximidade deles para comigo.

Em ambos os documentos incluí o meu endereço de e-mail para que, se em algum momento surgissem dúvidas, fosse mais simples entrar em contacto comigo para esclarecê-las. Seria através desse endereço que teriam de me contactar para conhecer os resultados da investigação e caso, em algum momento, quisessem retirar o Consentimento e/ou o Assentimento, mas tal não chegou a acontecer.

De forma a manter o anonimato dos participantes, e da própria escola, alguns dos documentos presentes neste relatório encontram-se parcialmente censurados. No caso dos Apêndices 1 e 2 (consentimento e assentimento), foi removido o nome da escola e o meu endereço de e-mail, visto que este permite identificar a escola. Já nos Apêndices 3, 4 e 5 (planos de aula), estão censurados os nomes dos alunos que compõem cada um dos grupos de trabalho.

Relativamente aos nomes que foram utilizados ao longo do relatório, todos eles são fictícios e foram escolhidos pelos próprios alunos.

Dos 21 alunos da turma, 20 optaram por participar no estudo, tendo trazido os documentos devidamente assinados. Um dos alunos optou por não participar, trazendo na mesma os documentos assinados, mas assinalando a opção 'não participar'. Deste modo, embora legalmente pudesse participar por estar autorizado pelo encarregado de educação, optei por respeitar a manifestação de não-participação do aluno. Um dos 20 alunos participantes apenas pôde estar presente nos primeiros três momentos e, portanto, optei por remover os materiais recolhidos deste aluno do estudo.

4.4. Momentos e procedimentos de recolha de dados

Para conseguir dar resposta a estas questões orientadoras e alcançar os objetivos específicos para posteriormente atingir o objetivo final, desenvolvi esta investigação em torno de uma intervenção pedagógica composta por cinco momentos e um momento de entrevista semiestruturada após a intervenção.

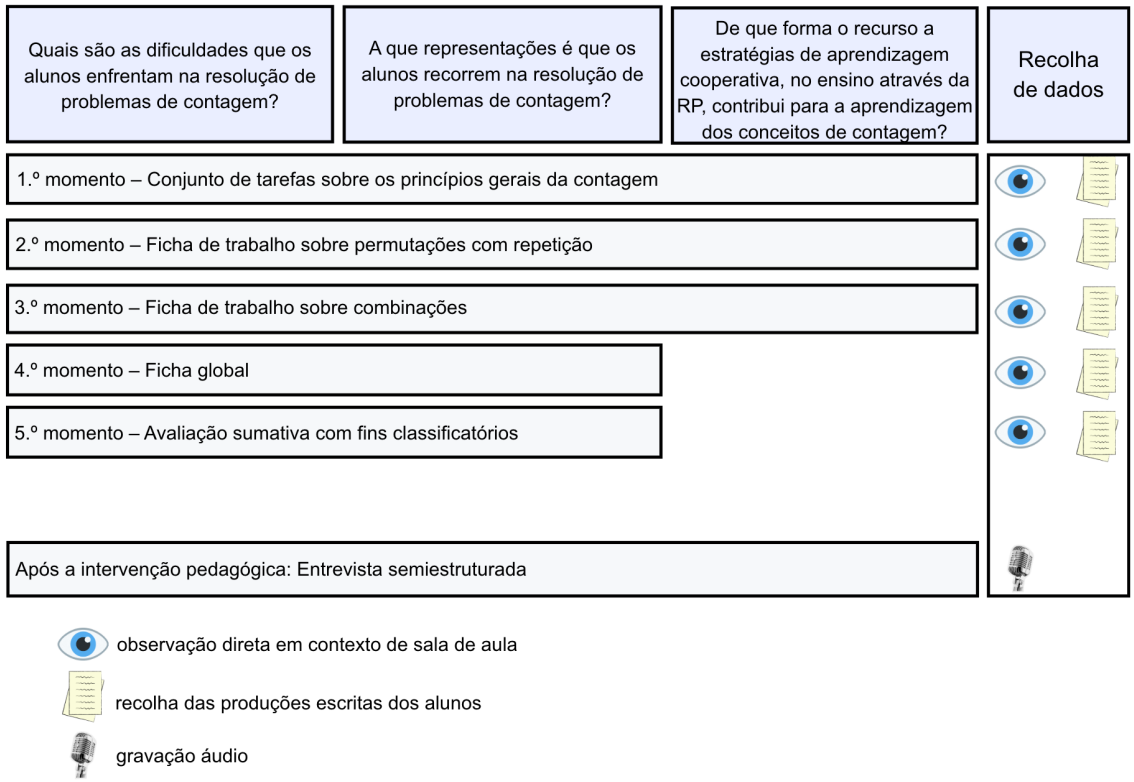


Quadro 4: Momentos da investigação

Após os cinco momentos da intervenção realizei ainda uma entrevista com alguns alunos selecionados para complementar os dados recolhidos ao longo da intervenção. Assim sendo a minha investigação conta com os cinco momentos da intervenção e uma entrevista semiestruturada.

De acordo com Amado (2014) o investigador deve recorrer a um conjunto amplo de métodos de recolha de dados. Assim, com base nos diferentes objetivos específicos deste estudo, escolhi duas fontes predominantes de dados: a **observação direta** em sala de aula e a **recolha documental**. Optei ainda por uma terceira fonte de dados, a **entrevista semiestruturada** como complemento às fontes principais.

No Quadro 5 é possível observar a relação entre as minhas questões orientadoras, os diferentes momentos da investigação e os diferentes métodos de recolha de dados. Constata-se que, nos primeiros cinco momentos, a observação direta em contexto de sala de aula e a recolha das produções escritas foram cruciais e indispensáveis. Após a intervenção pedagógica, na entrevista semiestruturada recorri apenas à gravação áudio pois queria que os alunos sentissem que tinham toda a minha atenção enquanto dialogavam comigo.



Quadro 5: Relação entre as questões de investigação, os diferentes momentos e os métodos de recolha de dados

No caso da **observação direta**, não podemos apenas olhar. Foi necessário estabelecer previamente quais os diferentes aspetos que considerava mais importantes em cada um dos momentos e prestar maior atenção a esses pormenores (Trivinos, 1987).

Para me auxiliar nesta tarefa, visto que é impossível memorizar tudo aquilo que acontece em sala de aula, senti a necessidade de criar uma ferramenta para me auxiliar na recolha de dados (Ponte, 2002). Para esse efeito, criei uma grelha de observação (Figura 15) que usei nos diferentes momentos do estudo, fazendo ligeiras alterações consoante o momento, para poder tomar notas rápidas sobre aquilo que acontecia em sala de aula.

Nomes	Cumprimento de regras	Colaboração com os colegas de grupo	Envolvimento na tarefa	Participação na discussão	Realização das questões de consolidação

Figura 15: Exemplo da grelha de observação elaborada por mim para uso em sala de aula

Passando agora às **produções escritas**, após cada um dos diferentes momentos da intervenção, tudo aquilo que os alunos escreviam era recolhido e digitalizado para posterior análise. Considero importante mencionar que nos três primeiros momentos, em que os alunos realizavam as fichas em grupo, era solicitado que cada um respondesse na sua própria folha de respostas, em vez de ser apenas uma folha por grupo. Isto porque não queria impedir a possibilidade de surgirem resoluções diferentes vindas de elementos do mesmo grupo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as **entrevistas** podem ser usadas de duas formas numa investigação qualitativa, "podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, a análise de documentos, e outras técnicas" (p. 134).

Os tipos de entrevistas qualitativas variam consoante o seu grau de estruturação (Bogdan & Biklen, 1994). Numa entrevista não estruturada o investigador faz as questões que emergem no momento e não tem qualquer tipo de guião. O problema com este tipo de entrevista e que fez com que eu não a escolhesse, é que, por não haver um guião poderia esquecer-me de tocar em determinados assuntos importantes para o estudo ou até mesmo demorar muito tempo até obter o material necessário. Numa entrevista estruturada o investigador segue à risca um guião com todas as questões a colocar, o problema é que não há espaço para questões emergentes, o que poderia restringir demasiado as respostas dos entrevistados.

Decidi então fazer uma entrevista semiestruturada em grupo, que acaba por juntar os pontos fortes das outras duas. Neste tipo de entrevista, o investigador leva um guião no qual inclui perguntas que permitam obter as informações desejadas, feitas com uma ordem lógica (Amado, 2014). Ao mesmo tempo o guião é flexível o suficiente para o caso de surgirem novas questões, abrindo um leque de possibilidades no que toca às respostas dos entrevistados.

Para a recolha do áudio, fiz a gravação recorrendo ao gravador de áudio do meu telemóvel. Para evitar ruídos de fundo e não perturbar os restantes alunos durante a aula, decidi fazer a entrevista num gabinete que se encontrava vazio nesse momento. Posteriormente, as entrevistas foram transcritas.

4.5. Processo de análise de dados

No processo de analisar dados não basta observá-los e perceber o que está lá escrito/dito, implica também compreender o contexto e aquilo que se passa *em segundo plano* (Bardin, 2016). De acordo com esta ideia entende-se que

> pertencem, pois, ao domínio da análise de conteúdo todas as iniciativas que, a partir de um conjunto de técnicas parciais mas complementares, consistam na explicitação e sistematização do conteúdo das mensagens e da expressão deste conteúdo (Bardin, 2016, p. 48).

Bardin (2016) transmite ainda a ideia que a análise de conteúdo não serve para estabelecer o *manual do jogo* mas sim compreender o ponto de vista dos jogadores e o ambiente e condições do jogo num determinado momento. Nesta analogia os jogadores representam os participantes do estudo, que são a parte fundamental da investigação e a principal fonte de dados, as condições do jogo podem referir-se à própria caracterização da turma e da escola, ou até mesmo aos diferentes contextos nos quais decorrem os diferentes momentos.

A primeira etapa do processo de análise dos dados recolhidos incidiu na sua organização, permitindo uma análise mais minuciosa e cautelosa.

Como foi brevemente mencionado na subsecção Escolha dos participantes, um dos métodos que usei para organizar os dados recolhidos através das produções escritas dos alunos foi a construção dos quadros de evolução.

A construção destes quadros foi um processo trabalhoso e consumiu bastante tempo. No entanto, após os quadros estarem prontos, tornou-se muito mais simples compreender o desempenho de cada um dos alunos ao longo de todos os momentos do estudo. No Quadro 6 é possível observar o quadro construído após a realização da primeira ficha, Princípios gerais da contagem.

Princípios gerais da contagem							
1	2	3	4	5	6	7	8
	VI	VI	VI	VI	S		
VE	VI	S	VE				VI
S	VI	VI	VE	S	S	S	S
S	VI	VI		S	S	VI	S
S	VI	S	VE				VI
S	S	S		S	S	VI	VI
S	VE		VE	S			S
S	VI	S	VI	S	S		
S	VI	S	S	S	S		VI
VI	VI	S	S	S	S	S	S
VE	VE	VI	VE	S		S	S
S	VI	VI	VE				VI
S	S	S	VI	S	S		
	VI	VI	VI	S	S	S	S
S	VI	S	VI	S	S		
VE	VI	VI	S	S		VI	S
S	VI		VE	S			VI
VE	VI	S	S	S	S	S	S
S	VI	S		S	S	VI	S

Quadro 6: Quadro de resultados do 1.º momento da intervenção pedagógica (Princípios gerais da contagem)

Em cada um dos quadros, a primeira linha corresponde ao nome do momento e a segunda linha contém os números das questões que compõem essa ficha. As restantes linhas representam cada um dos alunos e são usadas cores e letras para identificar o nível de desempenho e o tipo de representação utilizada em cada questão.

As cores usadas– verde, cor-de-laranja e azul– simbolizam, respetivamente, resposta maioritariamente correta, resposta maioritariamente incorreta e resposta incompleta. Os espaços que não possuem nenhuma cor simbolizam que o aluno deixou essa questão totalmente em branco.

As letras usadas– **S**, **VI**, **VE**, **C** e **F** (nem todas aparecem) – simbolizam, respetivamente, representação simbólica, representação visual, representação verbal, representação contextual e representação física, apoiado no quadro teórico de Lesh et al. (1987).

Juntamente com estes quadros, foi necessário também analisar os dados provenientes da observação direta em sala de aula. Para isso, usei as grelhas de observação que fui preenchendo ao longo das aulas, e que tinham sido construídas com o propósito de facilitar a sua análise. Nestas grelhas constavam informações sobre como os alunos trabalharam em grupo, qual a sua postura, a sua participação ou não na discussão, entre outras informações.

Em último lugar foi necessário proceder à análise dos dados provenientes da gravação de áudio. Foi então necessário fazer transcrição da entrevista que realizei com os alunos. Apesar de o próprio gravador de áudio do meu telemóvel possuir uma transcrição automática, eu reparei que esta transcrição não era totalmente fiel ao que eu ouvia no áudio, assim tive de verificar e corrigir todos os erros até chegar à transcrição final.

Todo o processo de analisar os dados foi feito com os objetivos e as questões orientadoras da investigação em mente. Após esta análise detalhada, sempre com o apoio e a fundamentação do capítulo do Enquadramento Teórico, foi possível retirar algumas conclusões que serão apresentadas no capítulo Conclusões e Recomendações.

5. Análise dos dados

Ao longo deste capítulo será feita uma análise dos dados recolhidos ao longo do estudo, tendo em conta as questões orientadoras e os objetivos principais.

Esta análise foi feita fazendo a junção das informações provenientes das produções escritas dos alunos, das grelhas de observação em sala de aula e da gravação de áudio da entrevista.

Pretendia-se então, de acordo com os objetivos anteriormente discutidos, identificar e analisar: as **dificuldades que os alunos enfrentam** na resolução de problemas de contagem, o **tipo de representações a que os alunos recorrem** na resolução de problemas de contagem e o **contributo da aprendizagem cooperativa** na resolução de problemas de contagem. Embora a análise esteja organizada por momentos da intervenção pedagógica, procurou-se interpretar os dados à luz das quatro dimensões que sustentam este estudo: o desenvolvimento do pensamento combinatório, a resolução de problemas enquanto abordagem metodológica, o recurso a diferentes representações matemáticas e a aprendizagem cooperativa. Assim, em cada momento serão analisadas não apenas as respostas obtidas pelos alunos, mas também os processos de pensamento combinatório, as estratégias de resolução e as interações que contribuíram para a construção dos conceitos de Contagem.

De acordo com o que foi apresentado no Enquadramento Teórico, as representações utilizadas pelos alunos na resolução das questões serão classificadas da seguinte forma: **visual** (VI), **verbal** (VE), **simbólica** (S), **contextual** (C) e **física** (F) (Lesh et al., 1987). Por outro lado, as dificuldades que os alunos manifestam na resolução destas questões serão classificadas tendo em conta os erros típicos que são apresentadas por Batanero et al. (1997):

- → Enumeração não sistemática
- → Uso incorreto do diagrama de árvore
- → Erro de ordem
- → Erro de repetição
- → Confundir o tipo de objeto
- → Interpretar erradamente o tipo de partição requerida

Serão ainda consideradas as dificuldades gerais e os erros típicos associados às diferentes etapas da resolução de problemas (Polya, 1995), nomeadamente:

- → Dificuldades na interpretação do enunciado

→ Dificuldades na compreensão do enunciado

→ Erro de transcrição

Em relação ao contributo a aprendizagem cooperativa, terei em conta as observações que fiz em sala de aula, a comparação do desempenho dos alunos ao trabalhar individualmente com o seu desempenho nas fichas realizadas em grupo e as informações fornecidas pelos próprios alunos na entrevista.

Recordando também que, tal como discutido no capítulo do Enquadramento teórico, um problema é uma **tarefa fechada com grau de dificuldade elevado**, as questões que são realizadas num primeiro momento, são consideradas problemas, segundo Ponte (2005). Isto porque, com aquilo que os alunos sabiam na altura em que fizeram essa tarefa, o grau de dificuldade era elevado. No entanto é necessário ter consciência de que se essas mesmas fichas fossem realizadas nos momentos finais do estudo, já não seriam consideradas como problemas, mas sim como exercícios. Esta é, aliás, uma característica fundamental da aprendizagem baseada na Resolução de Problemas – método utilizado para o desenvolvimento da intervenção pedagógica: o problema como propulsor da aprendizagem.

Como já referido anteriormente, nos primeiros três momentos da intervenção pedagógica os alunos trabalharam em grupos previamente escolhidos por mim. Os grupos (Figura 16) foram escolhidos de forma que os alunos tivessem de trabalhar com colegas que normalmente não estão habituados a trabalhar, e também de forma que ficassem mais heterogéneos. Os grupos permaneceram sempre os mesmos.



Figura 16: Composição dos grupos de trabalho[1]

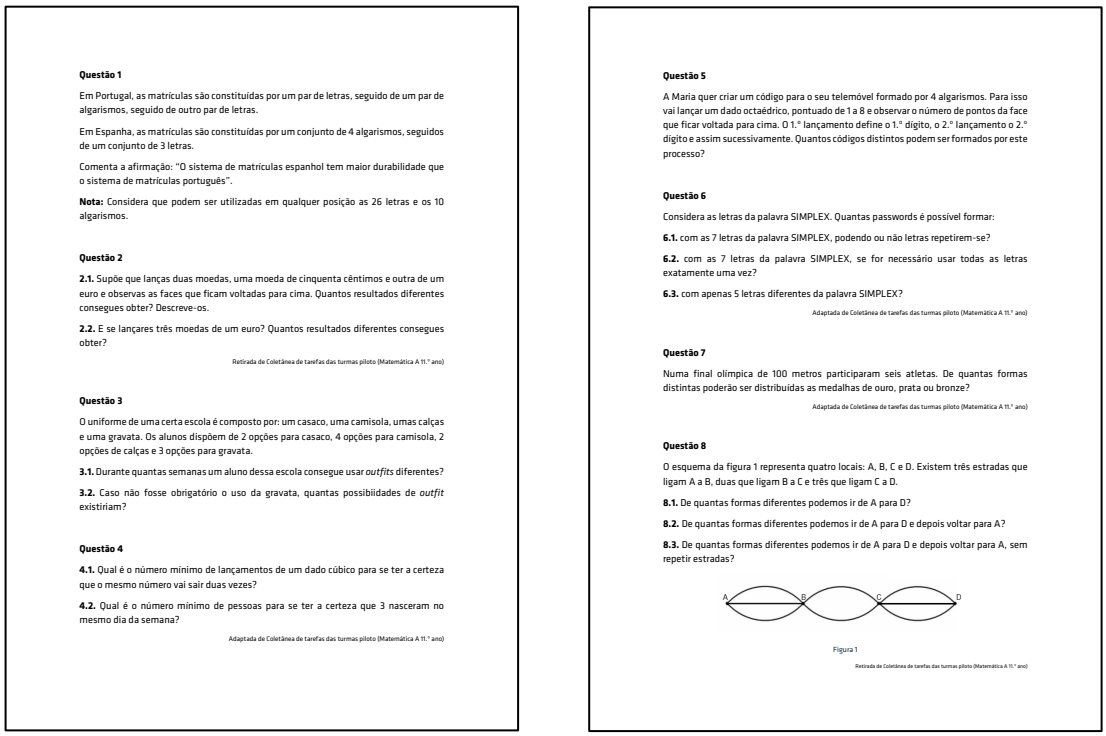
[1] A escolha de realizar esta análise recorrendo à utilização de cores foi inspirada pelo trabalho de Reis (2024)

Como é possível observar na Figura 16, no Grupo 3 está incluído um aluno chamado "Aluno X", esse aluno optou por não participar no estudo e, portanto, os seus documentos não foram recolhidos e não estarão presentes neste estudo. Quanto ao "Aluno Y" que se encontra no Grupo 4, este aluno apenas conseguiu participar nos primeiros três momentos, mas optei por não considerar os seus documentos neste estudo.

Ao longo deste capítulo, quando forem analisadas as resoluções dos alunos nos momentos de trabalho em grupo, estes serão identificados com a cor do grupo a que pertencem (Figura 16). No caso dos momentos de trabalho individuais isso não irá acontecer pois não tem relevância, nesses momentos, saber a que grupo os alunos anteriormente pertenciam.

5.1. 1.º momento – Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem

Como mencionado no capítulo Intervenção Pedagógica, o objetivo desta tarefa, cuja enunciado está recordado na Figura 17 (e Apêndice 6), era que os alunos conseguissem resolver um conjunto de oito questões de forma intuitiva, e, posteriormente, fazer uma formalização dos conceitos: princípio da adição, princípio da multiplicação e princípio do pombal. Tratando-se do primeiro contacto dos alunos com o tema da Contagem, a partir dos princípios da aprendizagem baseada na Resolução de Problemas (Cosme et al., 2021) este momento permitiu observar as estratégias inicialmente mobilizadas para resolver problemas combinatórios, antes da introdução formal dos diferentes conceitos e expressões combinatórias. A análise incidiu, por isso, sobre as representações utilizadas, os processos de enumeração desenvolvidos e as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos, bem como os erros por eles cometidos, procurando compreender de que forma começaram a construir o pensamento combinatório descrito por Lockwood (2013).



Questão 1

Em Portugal, as matrículas são constituídas por um par de letras, seguido de um par de algarismos, seguido de outro par de letras.

Em Espanha, as matrículas são constituídas por um conjunto de 4 algarismos, seguidos de um conjunto de 3 letras.

Comenta a afirmação: "O sistema de matrículas espanhol tem maior durabilidade que o sistema de matrículas português".

Nota: Considera que podem ser utilizadas em qualquer posição as 26 letras e os 10 algarismos.

Questão 2

2.1. Supõe que lanças duas moedas, uma moeda de cinquenta cêntimos e outra de um euro e observas as faces que ficam voltadas para cima. Quantos resultados diferentes consegues obter? Descreve-os.

2.2. E se lançares três moedas de um euro? Quantos resultados diferentes consegues obter?

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 3

O uniforme de uma certa escola é composto por: um casaco, uma camisola, umas calças e uma gravata. Os alunos dispõem de 2 opções para casaco, 4 opções para camisola, 2 opções de calças e 3 opções para gravata.

3.1. Durante quantas semanas um aluno dessa escola consegue usar *outfits* diferentes?

3.2. Caso não fosse obrigatório o uso da gravata, quantas possibilidades de *outfit* existiriam?

Questão 4

4.1. Qual é o número mínimo de lançamentos de um dado cúbico para se ter a certeza que o mesmo número vai sair duas vezes?

4.2. Qual é o número mínimo de pessoas para se ter a certeza que 3 nasceram no mesmo dia da semana?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 5

A Maria quer criar um código para o seu telemóvel formado por 4 algarismos. Para isso vai lançar um dado octaédrico, pontuado de 1 a 8 e observar o número de pontos da face que ficar voltada para cima. O 1.º lançamento define o 1.º dígito, o 2.º lançamento o 2.º dígito e assim sucessivamente. Quantos códigos distintos podem ser formados por este processo?

Questão 6

Considera as letras da palavra SIMPLEX. Quantas passwords é possível formar:

6.1. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, podendo ou não letras repetirem-se?

6.2. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, se for necessário usar todas as letras exatamente uma vez?

6.3. com apenas 5 letras diferentes da palavra SIMPLEX?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 7

Numa final olímpica de 100 metros participaram seis atletas. De quantas formas distintas poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata ou bronze?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 8

O esquema da figura 1 representa quatro locais: A, B, C e D. Existem três estradas que ligam A a B, duas que ligam B a C e três que ligam C a D.

8.1. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D?

8.2. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A?

8.3. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A, sem repetir estradas?

Figura 1

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Figura 17: Conjunto de tarefas sobre os princípios gerais da contagem

Ao longo deste subcapítulo será possível observar alguns gráficos onde se apresentam as distribuições das respostas a cada questão consoante o tipo de representação utilizado pelos alunos. Apenas serão mostrados os gráficos que possuam três ou mais tipos de representações distintas utilizadas, caso isso não aconteça serão mencionadas as percentagens associadas a cada representação.

No caso da primeira questão (Gráfico 1), o tipo de representação privilegiada pelos alunos foi a **simbólica**. No entanto, isto não significa que as respostas apresentadas não possuíssem alguns elementos visuais, de facto, vários alunos recorreram ao uso de traços para compreender a questão e perceber qual o cálculo que deveriam efetuar.

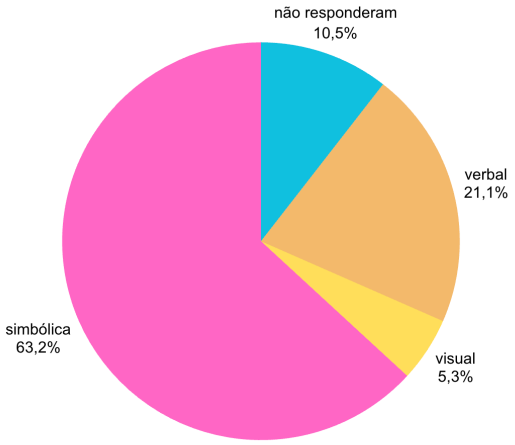


Gráfico 1: Distribuição das respostas à questão 1 consoante o tipo de representação utilizada

Observam-se agora, nas Figuras 18, 19 e 20, as resoluções apresentadas, respetivamente, pelas alunas Francisca, Salete e Marta.

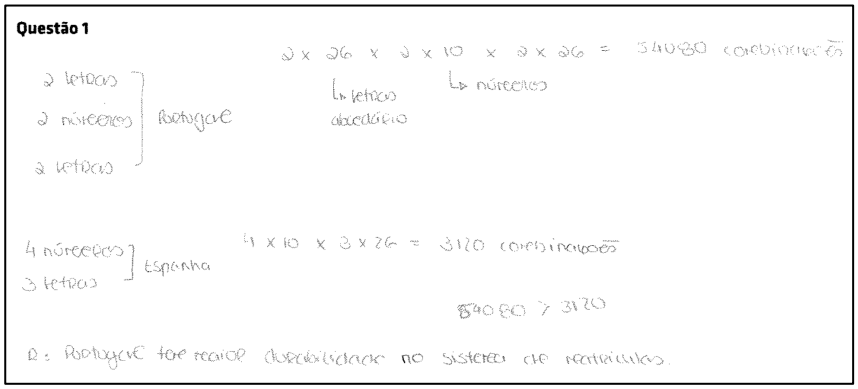


Figura 18: Resolução apresentada pela aluna Francisca à questão 1

Neste exemplo, a Francisca (e o seu grupo) recorreu a uma representação maioritariamente **simbólica**. No entanto, quando calculam o total de possibilidades fazem $2 \times 26 \times 2 \times 10 \times 2 \times 26$ em vez em $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$, o que pode significar que o grupo não conseguiu compreender completamente aquilo que o enunciado pedia.

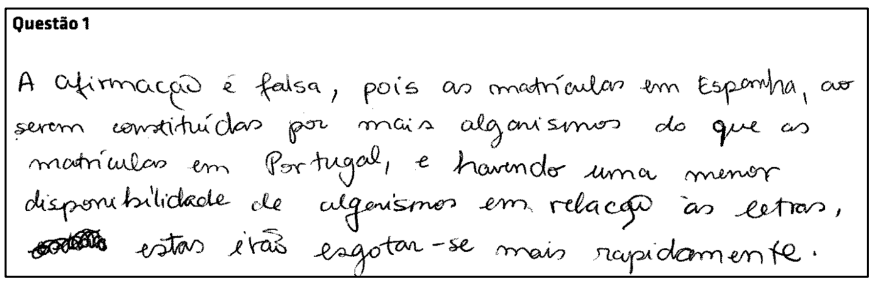


Figura 19: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 1

Neste exemplo, a Salete apresenta uma representação **verbal**. A resposta incorreta pode ser fruto de o grupo não ter efetuado nenhum cálculo, e apenas ter escrito aquilo que a sua intuição os fez pensar que era verdade. A resposta mostra também que o grupo pode não ter percebido completamente o que o enunciado pedia.

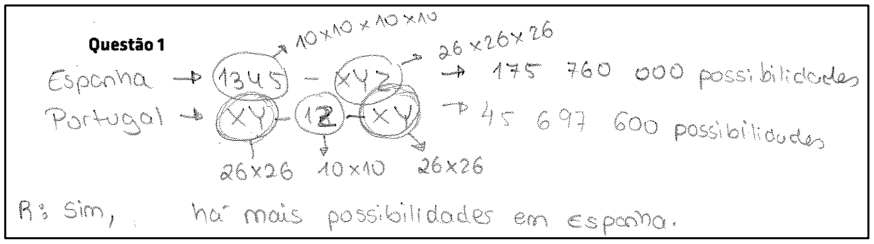


Figura 20: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 1

No caso da Marta, ela usa um exemplo de cada uma das matrículas e a partir daí compreende o cálculo que tem de efetuar para cada caso conseguindo assim, dar resposta ao problema, através de uma representação **simbólica**, sem manifestar grandes dificuldades.

Relativamente à segunda questão (Gráfico 2), vê-se agora que as representações **visuais** foram as preferenciais (78,9%), e que neste caso todos os estudantes apresentaram uma resposta (correta, inclusive). A própria questão, por envolver moedas, objetos que os alunos carregam nos bolsos todos os dias, acabou por favorecer a utilização deste tipo de representação, incitando até alguns alunos a pegar em moedas e observar os resultados dessa forma.

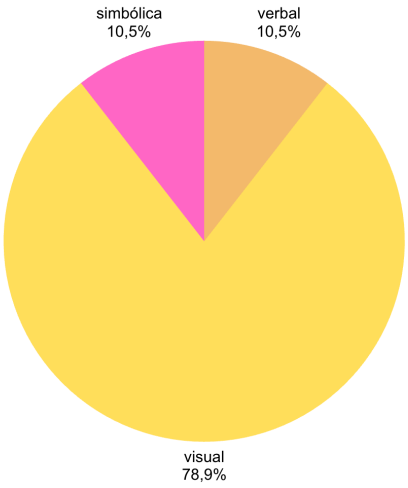


Gráfico 2: Distribuição das respostas à questão 2 consoante o tipo de representação utilizada

Observam-se agora, nas Figuras 21 e 22, as resoluções apresentadas, respetivamente, pelas alunas Filipa e Sílvia.

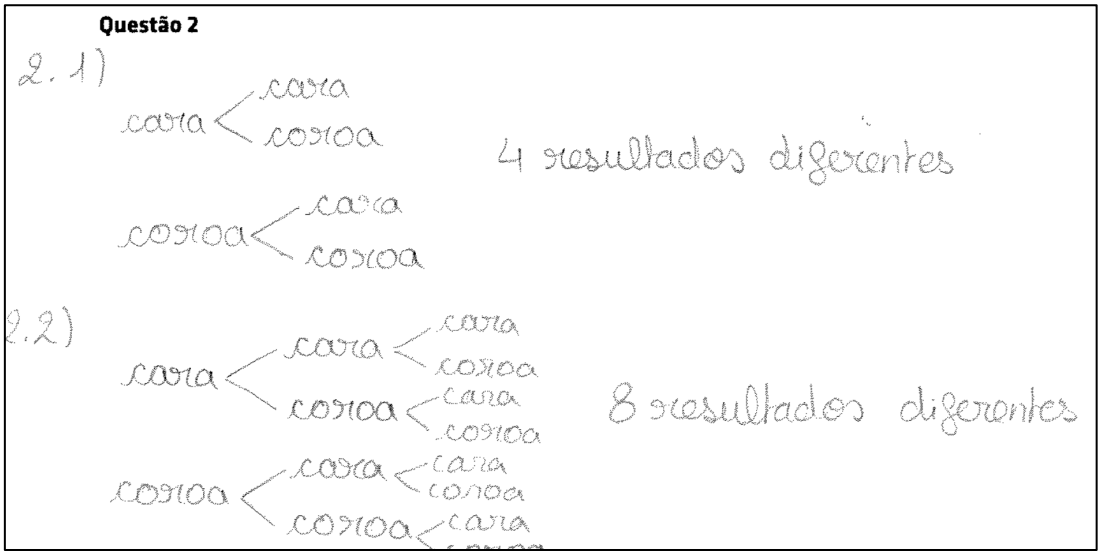


Figura 21: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 2

A aluna Filipa, juntamente com o seu grupo, optou por utilizar um diagrama de árvore (representação **visual**). O uso desta representação mostrou-se muito útil devido ao facto de não haver um número excessivo de possibilidades, e permitiu alcançar facilmente o resultado pretendido.

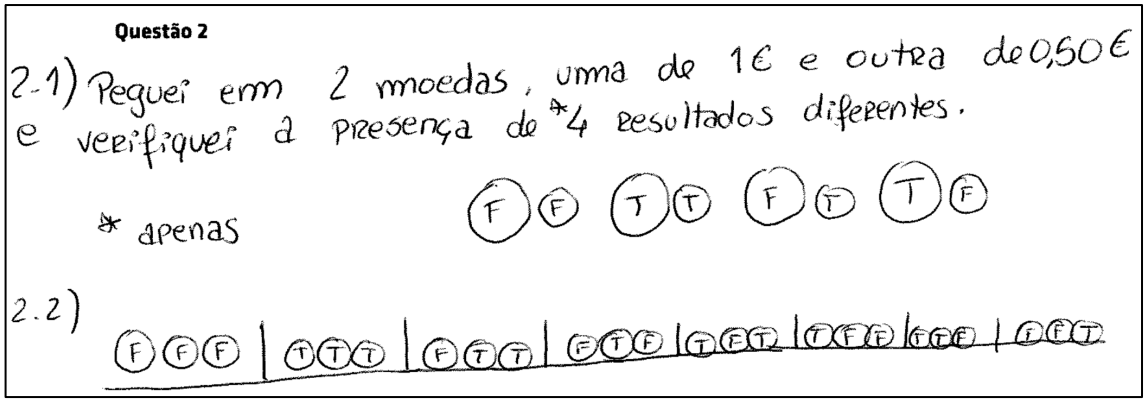


Figura 22: Resolução apresentada pela aluna Sílvia à questão 2

Por outro lado, Sílvia e o seu grupo optaram por utilizar as moedas que tinham consigo (representação **física**) e, no papel, desenharam os resultados que observaram conforme foram girando as moedas. A aluna explicou-me, durante o momento de trabalho autónomo desta tarefa, que a letra F representa a parte da frente da moeda e a letra T representa a parte de trás, mas acabou por não escrever isso na sua resolução.

Relativamente à questão 3, a distribuição das respostas foi a seguinte: 52,6% dos alunos optaram por representações **simbólicas**, 36,8% optaram por representações visuais e os restantes 10,5% não apresentaram resposta.

Nesta questão, os alunos que optaram pelas representações mais visuais viram-se confrontados com algumas dificuldades visto que, comparativamente à questão 2, existia um número muito superior de possibilidades, tornando estas estratégias mais difíceis de levar a cabo. Os alunos que optaram por representações mais simbólicas conseguiram atingir o resultado com maior facilidade, embora também tenham cometido pequenos erros nas suas resoluções.

Observam-se agora, nas Figuras 23 e 24, as resoluções apresentadas, respetivamente, pelos alunos Salvador e Ricardo.

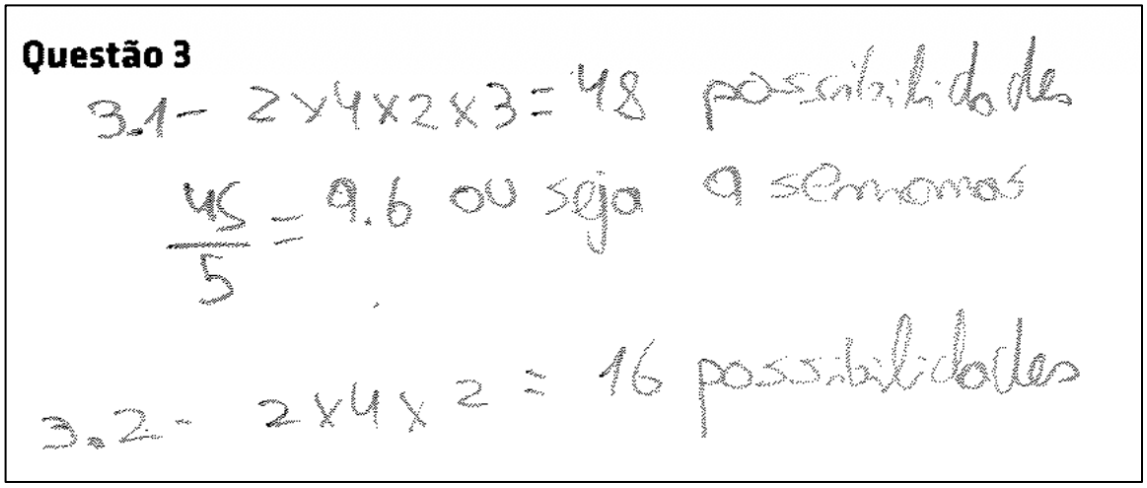


Figura 23: Resolução apresentada pelo aluno Salvador à questão 3

Salvador, recorre ao princípio da multiplicação para dar resposta à questão (embora ainda não saiba da existência deste princípio), e facilmente alcança o resultado pretendido, compreendendo que, como se trata de um uniforme escolar, se tem de considerar semanas de apenas cinco dias. Ainda assim apresenta um erro de transcrição na sua resolução, pois no primeiro cálculo obtém 48 possibilidades, mas depois efetua o cálculo $45 \div 5$.

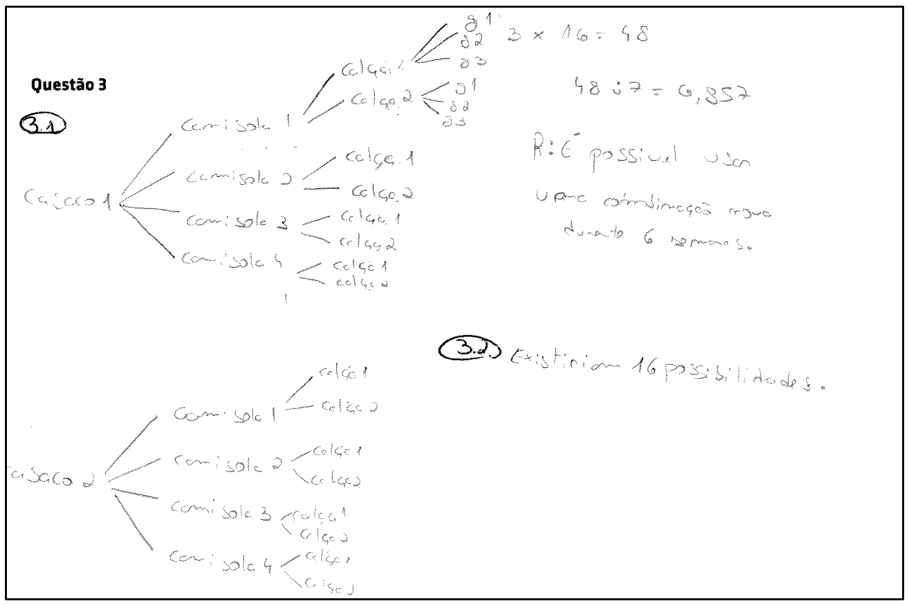


Figura 24: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 3

Ricardo opta por utilizar um diagrama de árvore (representação **visual**), que se mostra bastante trabalhoso, ao ponto de o aluno não terminar de o desenhar. Ainda assim, por ter compreendido o enunciado, alcança o resultado 48 possibilidades, só que considera erradamente a semana de sete dias. Apesar de ter uma resolução parcialmente correta, considero que este grupo evidenciou algumas dificuldades devido ao **uso incorreto do diagrama de árvore** (Batanero et al., 1997).

No Gráfico 3 é apresentada a distribuição das respostas à questão 4. A maioria dos alunos optou por uma representação **verbal** (36,8%). Esta questão estava diretamente relacionada com o princípio do pombal (que os alunos ainda não tinham aprendido), então foi interessante observar as discussões entre os grupos sobre que resposta deveriam dar e como poderiam justificá-la.

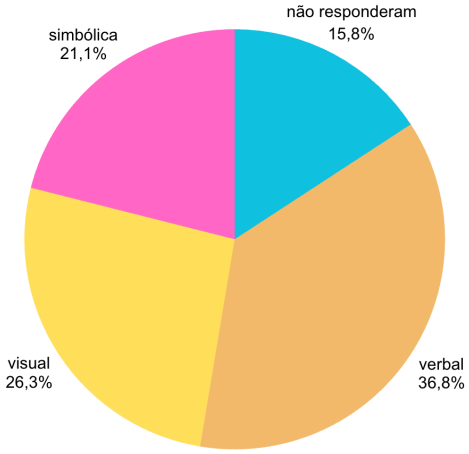


Gráfico 3: Distribuição das respostas à questão 4 consoante o tipo de representação utilizada

Observam-se agora, nas Figuras 25 e 26, as resoluções apresentadas, respetivamente, pelos alunos Juliana e Rogério.

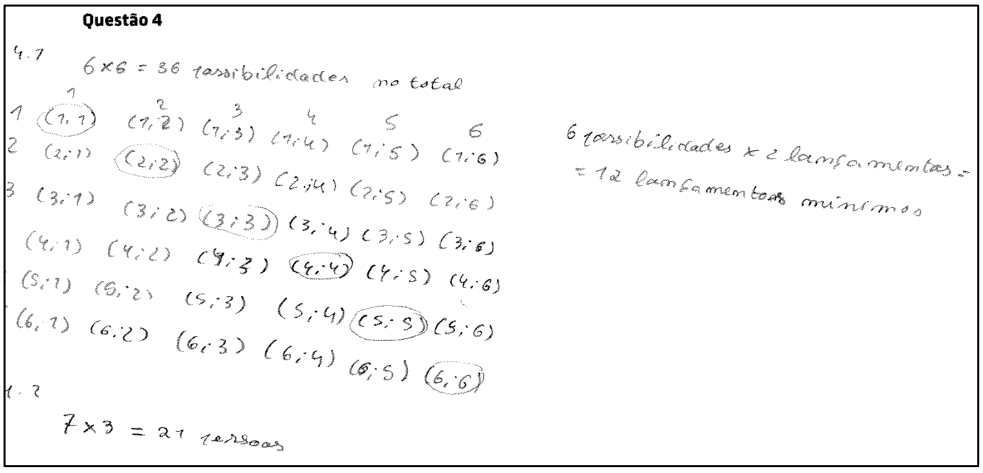


Figura 25: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 4

Juliana, e o seu grupo, manifestaram algumas dificuldades na **interpretação e compreensão do enunciado**, o que os levou ao uso incorreto da tabela de dupla-entrada, que por sua vez fez com que não conseguissem alcançar a solução pretendida.

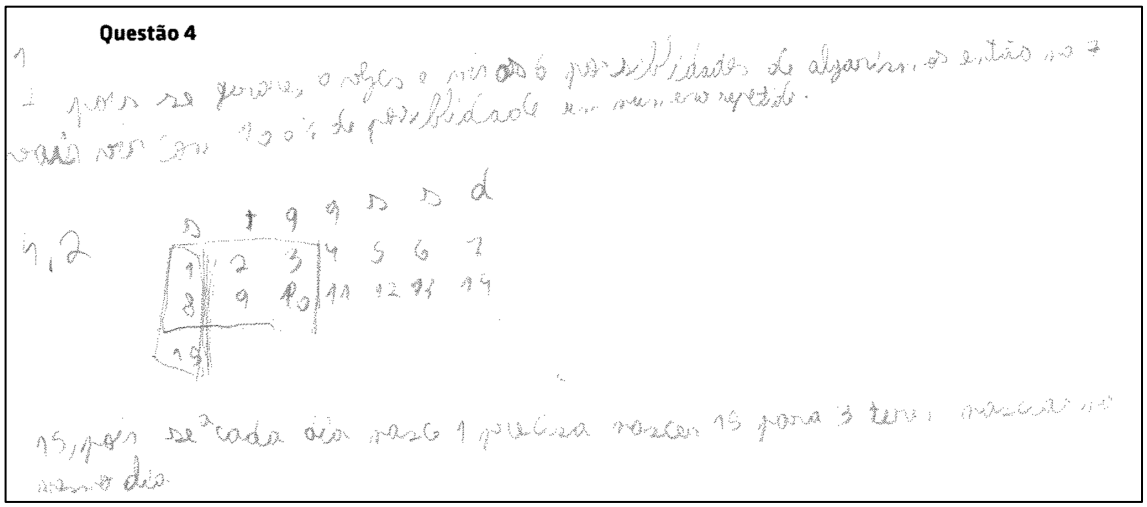


Figura 26: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4

Rogério optou por uma utilizar uma mistura de representações. Numa das alíneas justifica a resposta **verbalmente**, e na outra utiliza um esquema (representação **visual**). Este esquema permite compreender perfeitamente a ideia do grupo, que apesar de não conhecer o princípio do pombal, compreende aquilo que é pedido no problema e como chegar à resposta correta. O esquema construído pelo aluno evidencia que a representação visual desempenhou uma função organizadora do pensamento, permitindo estruturar sistematicamente as diferentes possibilidades e controlar o processo de enumeração (Lesh et al., 1987).

Relativamente à questão 5 a distribuição das respostas foi a seguinte: 78,9% dos alunos optaram por utilizar uma representação **simbólica**, 5,3% optaram por uma representação visual e 15,8% não responderam a esta questão. As respostas analisadas foram todas bastante semelhantes, tendo o resultado pretendido sido alcançado na maioria dos casos.

Observa-se agora, na Figura 27, a resolução apresentada pela aluna Salete.

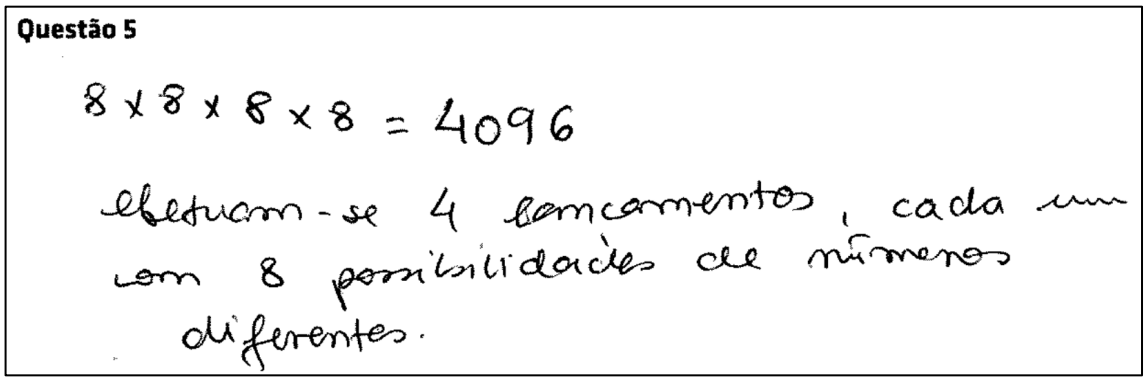


Figura 27: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 5

Salete mostra que compreende que para cada um dos quatro lançamentos existem oito possibilidades, e que tem de multiplicar essas possibilidades. Usa então, sem saber, o princípio da multiplicação, e alcança o resultado pretendido.

Relativamente à questão 6, 36,8% dos alunos não responderam a esta questão, tendo em conta o que observei durante o momento de realização desta tarefa, posso afirmar que isto foi devido à falta de tempo e não necessariamente dificuldades. Todos alunos que responderam optaram por usar uma representação maioritariamente **simbólica**.

Observa-se agora, na Figura 28, a resolução apresentada pela aluna Marta.

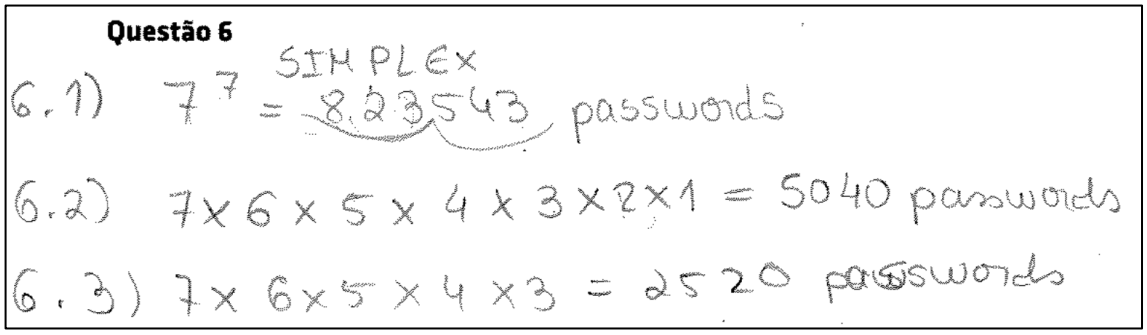


Figura 28: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 6

A aluna Marta e o seu grupo recorrem, nas três alíneas, ao princípio da multiplicação, compreendendo que na primeira podem ser usadas as sete letras nos sete espaços, que na segunda os sete espaços têm de conter sete letras distintas e que na terceira para preencher os cinco espaços dispõem de sete letras, mas que não as podem repetir.

Relativamente à questão 7, 52,7% dos alunos não apresentaram resposta à questão. Daqueles que responderam, 26,3% utilizou representações simbólicas e 21,1% optou por representações visuais. Tal como na questão anterior, o elevado número de alunos

que não apresentou resposta deve-se à falta de tempo, ou má gestão do mesmo, e não às dificuldades dos alunos.

Observam-se agora, nas Figuras 29 e 30, as resoluções apresentadas, respetivamente, pelas alunas Íris e Bianca.

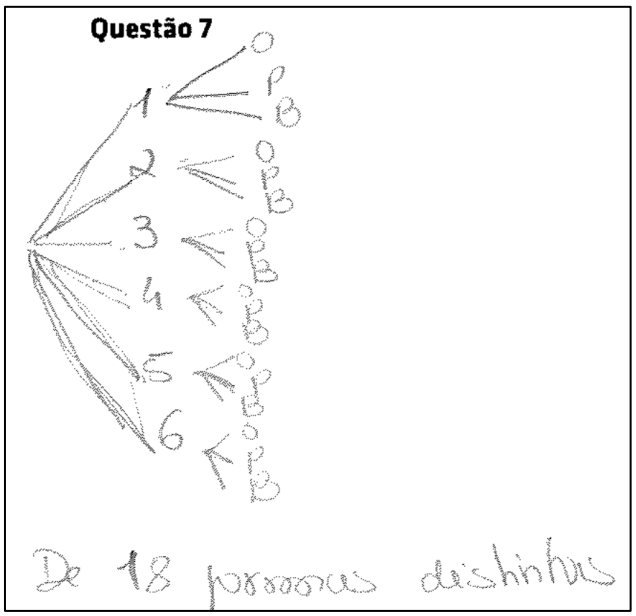


Figura 29: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 7

Nesta resolução a aluna Íris faz um **uso incorreto do diagrama de árvore** (Batanero et al., 1997). Este tipo de representação não permitiu alcançar o resultado correto e acaba por confundir os alunos. Olhando para o diagrama, parece que estamos a escolher qual medalha vamos atribuir a qual atleta, o que poderia originar situações como todos os atletas receberem medalha de ouro, o que não seria possível porque o objetivo é termos um atleta com medalha de ouro, um com medalha de prata, um com medalha de bronze e três atletas não medalhados.



Figura 30: Resolução apresentada pela aluna Bianca à questão 7

Bianca, juntamente com o seu grupo, utilizou o símbolo fatorial (!), que ainda não tinham aprendido, talvez por terem visto no manual ou alguém externo à sala de aula lhes ter ensinado. Ainda assim **não compreenderam totalmente o enunciado** pois apenas é

solicitado o número de maneiras de distribuir os atletas pelos três primeiros lugares, o que corresponderia ao resultado do cálculo $6 \times 5 \times 4$.

Relativamente à questão 8 a distribuição das respostas foi a seguinte: 47,4% dos alunos optaram por utilizar uma representação **simbólica**, 21,1% optou por usar uma representação visual e 31,6% não apresentaram resposta à questão.

Observa-se, na Figura 31, a representação apresentada pela aluna Filipa.

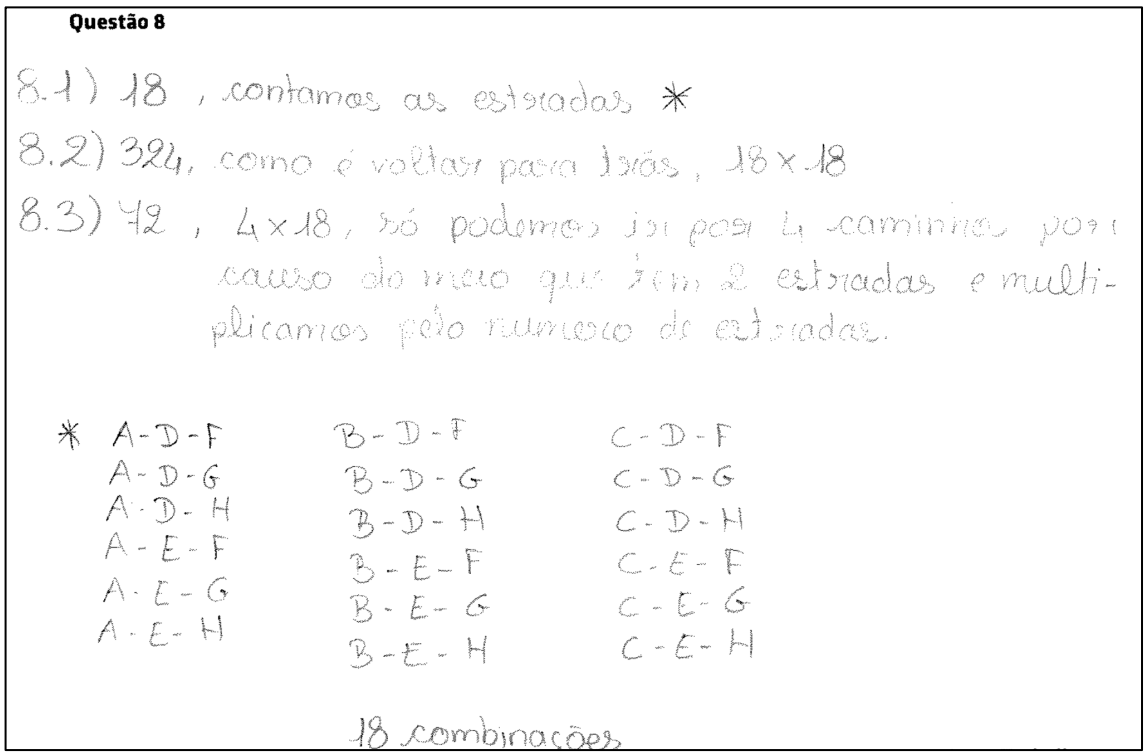


Figura 31: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 8

Filipa, juntamente com o seu grupo optou por, na primeira alínea, enumerar todas as possibilidades de como percorrer as diferentes estradas. A partir dessa representação **visual** inicial, conseguiu recorrer a representações mais simbólicas nas outras alíneas, fazendo uma junção de representações distintas que lhe permitiu responder corretamente às três alíneas.

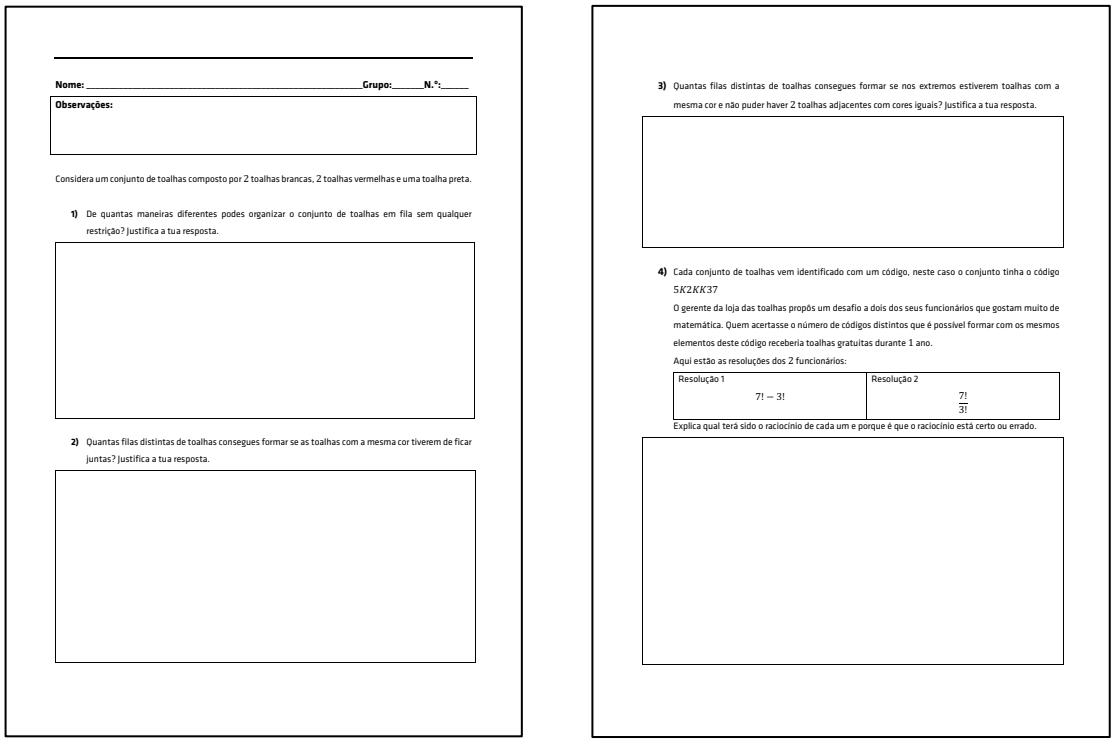
Fiquei muito satisfeita com os resultados deste conjunto de tarefas e bastante surpreendida com a criatividade evidenciada pelos alunos na forma como responderam às questões. O facto de terem trabalhado em grupos sem dúvida teve um contributo significativo e positivo, já que os alunos se mostraram mais participativos em termos de discussão e apresentação das suas ideias. O facto de o trabalho ser do grupo e não do

aluno, acabou por retirar alguma pressão dos alunos no momento em que apresentaram as suas resoluções à turma pois se por acaso estivesse mal não era o erro de uma só pessoa mas sim de um conjunto de pessoas, e acaba por ser mais fácil para os alunos lidar com a vergonha que por vezes sentem nos momentos em que dão uma resposta incorreta perante o resto da turma.

Em **síntese**, esta primeira aula permitiu identificar as estratégias inicialmente mobilizadas pelos alunos perante problemas de Contagem ainda desconhecidos. Observou-se um recurso frequente a representações visuais e verbais para organizar o conjunto de resultados possíveis, enquanto as representações simbólicas surgiram sobretudo nos alunos que já possuíam estratégias de resolução mais estruturadas. As dificuldades evidenciadas relacionaram-se, maioritariamente, com a enumeração sistemática dos casos possíveis e com a interpretação das situações apresentadas, sugerindo que os alunos se encontravam ainda numa fase inicial de desenvolvimento do pensamento combinatório. Estes resultados são consistentes com a perspetiva de Lockwood (2013), segundo a qual a construção do espaço de possibilidades constitui uma etapa essencial na aprendizagem da Combinatória.

5.2. 2.º momento – Ficha de trabalho sobre permutações com repetição

Como abordado no capítulo da Intervenção Pedagógica, o objetivo desta ficha, que relembro o enunciado na Figura 32 (Apêndice 7), que teve lugar após a dedução da fórmula das permutações com repetição, era a aplicação desta em problemas de contexto semirreal. Neste momento, para além de analisar as resoluções apresentadas pelos alunos, procurou-se compreender de que modo estes articulavam os conceitos introduzidos na aula com os problemas propostos. A análise visa compreender como os alunos justificaram a utilização das expressões combinatórias e o papel desempenhado pelas diferentes representações na organização do raciocínio, uma vez que a compreensão conceptual destas relações constitui uma dimensão central do modelo de pensamento combinatório de Lockwood (2013).



Nome: _____ Grupo:_____ N.º:_____

Observações:

Considera um conjunto de toalhas composto por 2 toalhas brancas, 2 toalhas vermelhas e uma toalha preta.

1) De quantas maneiras diferentes podes organizar o conjunto de toalhas em fila sem qualquer restrição? Justifica a tua resposta.

2) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se as toalhas com a mesma cor tiverem de ficar juntas? Justifica a tua resposta.

3) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se nos extremos estiverem toalhas com a mesma cor e não puder haver 2 toalhas adjacentes com cores iguais? Justifica a tua resposta.

4) Cada conjunto de toalhas vem identificado com um código, neste caso o conjunto tinha o código *5K2KK37*

O gerente da loja das toalhas propôs um desafio a dois dos seus funcionários que gostam muito de matemática. Quem acertasse o número de códigos distintos que é possível formar com os mesmos elementos deste código receberia toalhas gratuitas durante 1 ano.

Aqui estão as resoluções dos 2 funcionários:

Resolução 1	Resolução 2
$7! - 3!$	$\frac{7!}{3!}$

Explica qual terá sido o raciocínio de cada um e porque é que o raciocínio está certo ou errado.

Figura 32: Ficha de trabalho sobre as permutações com repetição

Relativamente à questão 1, todos os alunos apresentaram uma resposta, tendo muitos deles recorrido à fórmula das permutações com repetição que foi deduzida momentos antes da resolução da ficha.

Observa-se, na Figura 33, a resolução apresentada pela aluna Íris.

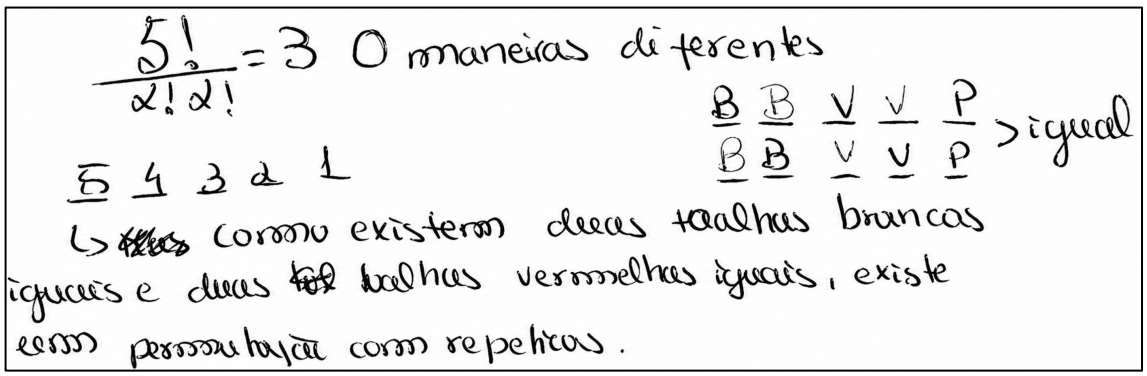


Figura 33: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 1

Nesta resolução Íris recorre à fórmula das permutações com repetição. No entanto, faz uma pequena anotação no lado direito que mostra que a aluna sabe o porquê de ter de usar esta fórmula, e isso faz com que esta resolução se destaque relativamente a outras em que é apenas aplicada a fórmula sem qualquer justificação. Esta resolução evidencia que a aluna compreende a estrutura do problema e estabelece uma relação entre o

contexto apresentado e a expressão utilizada; a partir de uma articulação entre o conjunto de resultados possíveis, os processos de contagem e a expressão combinatória, em consonância com o modelo de pensamento combinatório de Lockwood (2013).

Quanto à questão 2, 5,3% dos alunos não apresentaram resposta à questão. Dos alunos que responderam, 63,2% utilizaram uma representação simbólica e os restantes 31,6% optaram por uma representação visual.

Observam-se nas Figuras 34 e 35, respetivamente, as resoluções dos alunos Rogério e Tobias.

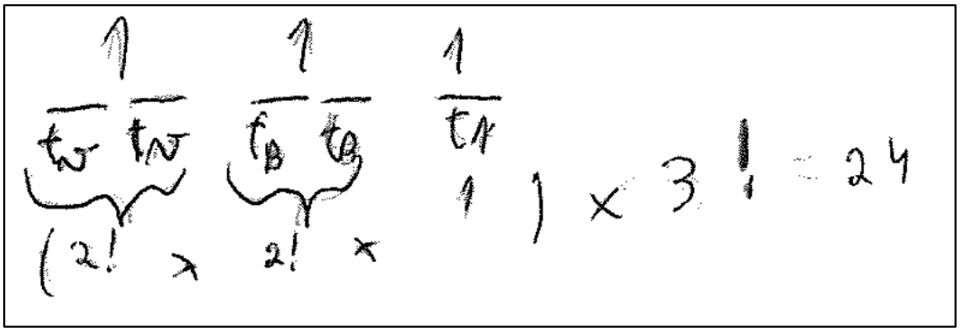


Figura 34: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 2

Nesta resolução Rogério **confunde o tipo de objeto** (Batanero et al., 1997), considerando que as duas toalhas vermelhas são distinguíveis entre si (e o mesmo com as toalhas brancas). Isto mostra que o aluno não conseguiu compreender corretamente aquilo que era pretendido, considerando erradamente as permutações entre estas toalhas na sua resposta.

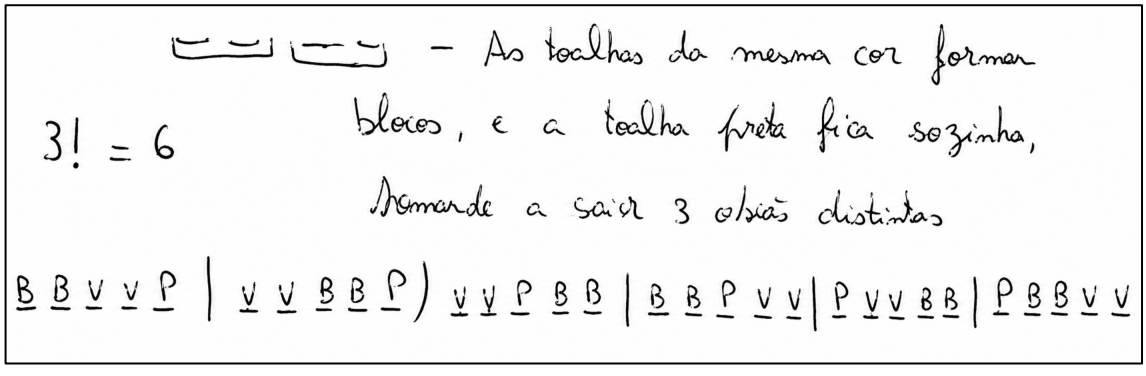


Figura 35: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 2

Por outro lado, Tobias compreende que as trocas entre as toalhas brancas e as trocas entre as toalhas vermelhas não interessam, e faz apenas as permutações entre os três

blocos (bloco das toalhas brancas, bloco das toalhas vermelhas e a toalha preta). Para além disso o aluno apresenta ainda a enumeração de todas as possibilidades para a disposição das toalhas.

Na questão 3, todos os alunos optaram por utilizar uma representação **visual** e ninguém entregou a folha de respostas em branco. A maioria dos alunos compreendeu que havia muito poucos casos que cumpriam os requisitos do enunciado então apenas enumeraram as possibilidades de ordenação das toalhas.

Observa-se na Figura 36, a resolução apresentada pelo aluno Hugo.

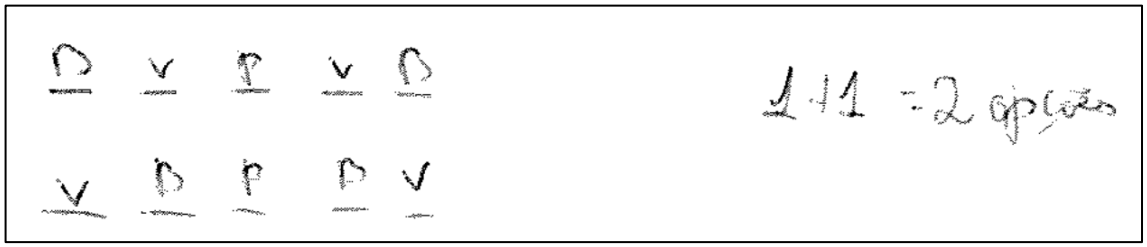


Figura 36: Resolução apresentada pelo aluno Hugo à questão 3

Este é um dos exemplos de resolução desta questão. Hugo representa **visualmente** as duas possibilidades recorrendo ao uso de tracinhos e letras, apresentando depois o resultado.

Relativamente à última questão desta ficha, 5,3% dos alunos não apresentaram resposta. Todos os que responderam usaram uma representação **verbal**. Como foi a primeira vez que os alunos foram confrontados com uma questão em que tivessem de fazer uma composição, alguns alunos mostraram dificuldades em expressar o seu raciocínio através das palavras. Nenhuma resposta apresentada estava totalmente correta, mas todos se esforçaram e deram o seu melhor, algo que é notório pela baixa percentagem de respostas deixadas em branco.

Na Figura 37, encontra-se a resolução apresentada pela aluna Salete.

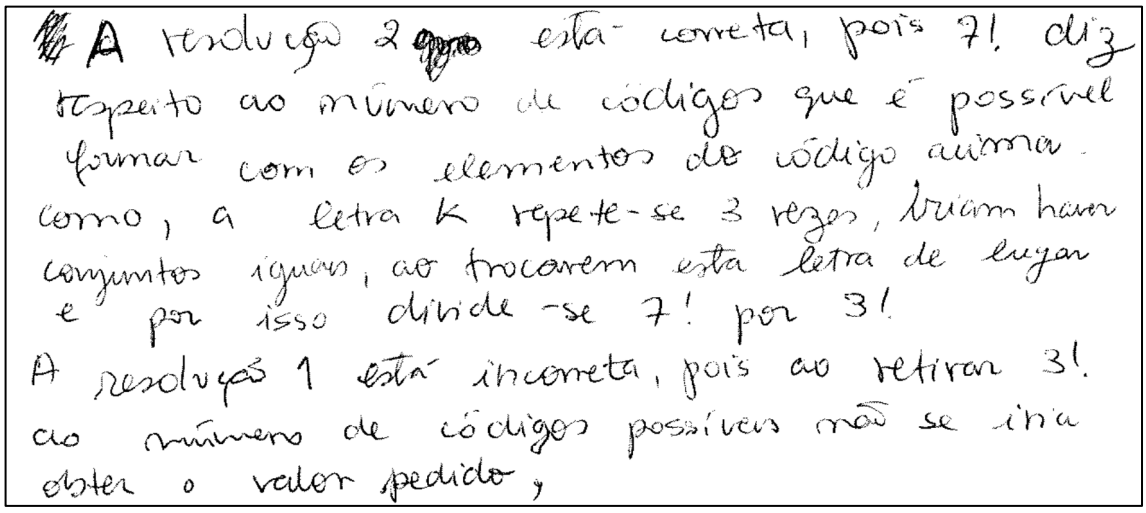


Figura 37: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 4

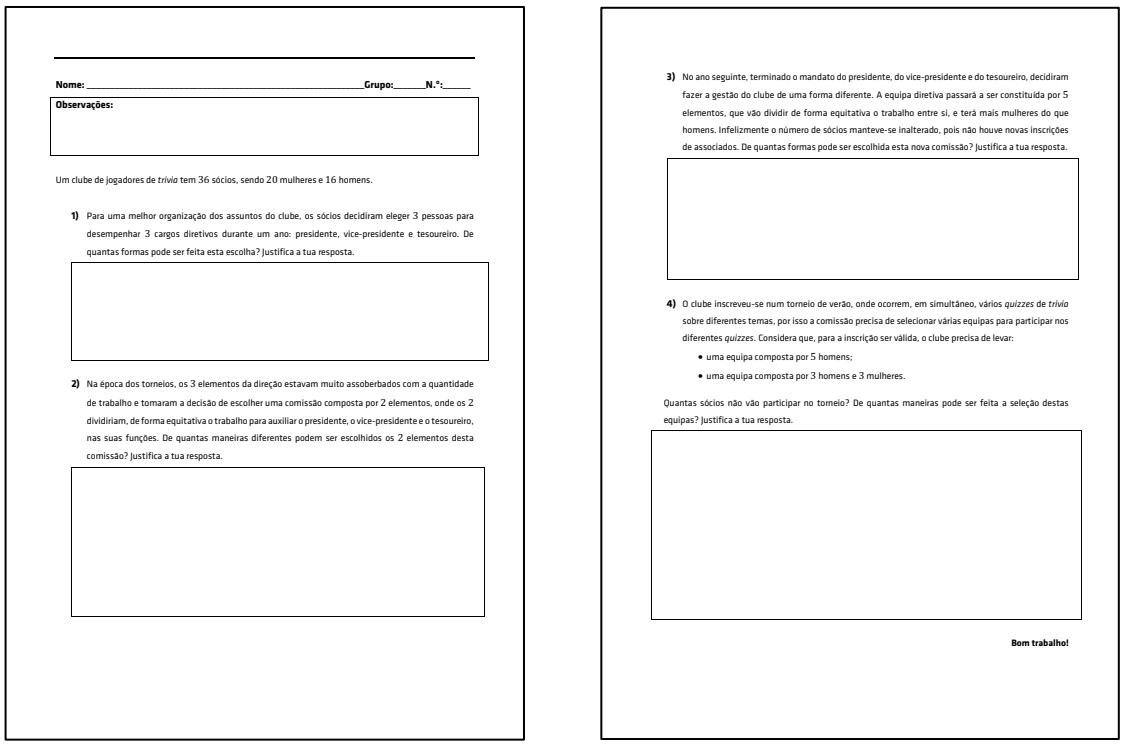
A realização desta ficha permitiu alcançar os objetivos previamente estabelecidos e que agora os alunos têm a capacidade de compreender em que tipo de situações podem recorrer a esta fórmula. Em tarefas futuras, os alunos poderão resolver este tipo de problemas de outra forma, recorrendo às combinações, mas como neste momento ainda não tinham aprendido este conceito, não o fizeram.

Mais uma vez, o trabalho em grupo trouxe um contributo muito positivo, principalmente na construção da composição (questão 4), pois cada aluno trazia o seu ponto de vista e as suas ideias, fazendo com que as respostas ficassem mais interessantes do que seriam se fossem feitas de forma individual. O trabalho em grupo também permitiu aos alunos serem mais autónomos, em vez de estarem sempre a chamar-me para esclarecer dúvidas, perguntavam primeiro aos colegas de grupo e chegavam a um consenso sem ser necessária a minha intervenção.

Em **síntese**, neste momento observou-se uma maior formalização das estratégias utilizadas pelos alunos, refletida no aumento do recurso às representações simbólicas e à utilização das fórmulas combinatórias recentemente estudadas. Contudo, verificou-se que nem todos os alunos compreendiam o significado dessas expressões, sendo frequente a sua aplicação sem uma justificação explícita. Em contraste, os alunos que combinaram o uso das fórmulas com representações complementares ou com explicações verbais evidenciaram uma compreensão mais consistente da estrutura dos problemas. Estes resultados reforçam a importância de promover a compreensão conceptual dos processos de contagem e não apenas a aplicação de fórmulas, conforme defendem Batanero et al. (1997) e Lockwood (2013).

5.3. 3.º momento – Ficha de trabalho sobre combinações

Tal como foi mencionado no capítulo da Intervenção pedagógica, o objetivo com esta ficha, cujo enunciado é reapresentado na Figura 38 (Apêndice 8), era a resolução de problemas de contexto semirreal (Ponte, 2005) podendo usar a fórmula das combinações, deduzida em grande grupo momentos antes da resolução desta tarefa. A introdução de um novo conceito combinatório permitiu analisar se os alunos recorriam mecanicamente às fórmulas recentemente estudadas ou se conseguiam selecionar estratégias de resolução ajustadas às características de cada problema. Assim, procurou-se interpretar os processos de raciocínio evidenciados nas diferentes resoluções e a adequação das representações mobilizadas.



Nome: _____ **Grupo:**_____ **N.º:**_____

Observações:

Um clube de jogadores de *trivia* tem 36 sócios, sendo 20 mulheres e 16 homens.

1) Para uma melhor organização dos assuntos do clube, os sócios decidiram eleger 3 pessoas para desempenhar 3 cargos diretivos durante um ano: presidente, vice-presidente e tesoureiro. De quantas formas pode ser feita esta escolha? Justifica a tua resposta.

2) Na época dos torneios, os 3 elementos da direção estavam muito assoberbados com a quantidade de trabalho e tomaram a decisão de escolher uma comissão composta por 2 elementos, onde os 2 dividiriam, de forma equitativa o trabalho para auxiliar o presidente, o vice-presidente e o tesoureiro, nas suas funções. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 2 elementos desta comissão? Justifica a tua resposta.

3) No ano seguinte, terminado o mandato do presidente, do vice-presidente e do tesoureiro, decidiram fazer a gestão do clube de uma forma diferente. A equipa diretiva passará a ser constituída por 5 elementos, que vão dividir de forma equitativa o trabalho entre si, e terá mais mulheres do que homens. Infelizmente o número de sócios manteve-se inalterado, pois não houve novas inscrições de associados. De quantas formas pode ser escolhida esta nova comissão? Justifica a tua resposta.

4) O clube inscreveu-se num torneio de verão, onde ocorrem, em simultâneo, vários *quizzes de trivia* sobre diferentes temas, por isso a comissão precisa de selecionar várias equipas para participar nos diferentes *quizzes*. Considera que, para a inscrição ser válida, o clube precisa de levar:

- uma equipa composta por 5 homens;
- uma equipa composta por 3 homens e 3 mulheres.

Quantas sócios não vão participar no torneio? De quantas maneiras pode ser feita a seleção destas equipas? Justifica a tua resposta.

Bom trabalho!

Figura 38: Ficha de trabalho sobre combinações

Em relação à primeira questão desta ficha, todos os alunos apresentaram uma resposta. Neste caso todos recorreram a uma representação simbólica, no entanto as respostas não foram todas iguais. Alguns alunos utilizaram diretamente a fórmula dos arranjos simples, outros optaram por utilizar a fórmula das combinações e multiplicaram pelas permutações entre os elementos escolhidos, e outros optaram por usar o princípio da multiplicação.

Nas Figuras 39 e 40, encontram-se as resoluções apresentadas pelos alunos Ricardo e Salete, respetivamente.

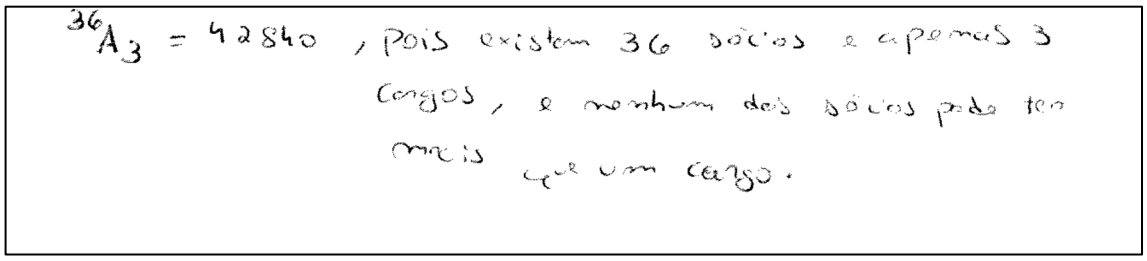


Figura 39: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 1

Nesta resolução, Ricardo recorre aos arranjos simples, pois compreende que se pretende selecionar três pessoas distintas, dos 36 sócios, para desempenhar três cargos distintos. Isto é, estamos perante uma situação na qual a ordem interessa.

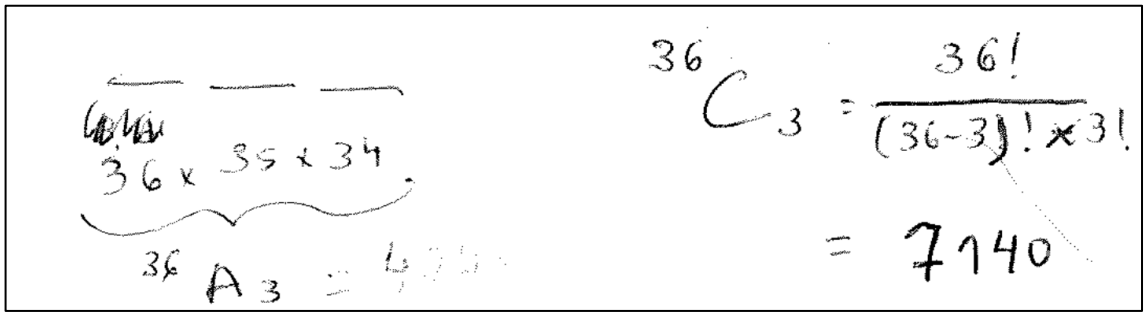


Figura 40: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 1

Salete começa a sua resolução por usar também a fórmula dos arranjos, no entanto apaga esse resultado e utiliza a fórmula das combinações, cometendo um **erro de ordem** (Batanero et al., 1997) visto que não está a considerar que os cargos são distintos e, portanto, a ordem pela qual os membros são eleitos tem importância.

Na segunda questão desta ficha, mais uma vez, todos os alunos apresentaram uma resposta. Todos optaram por representações do mesmo tipo, **simbólicas**, mas, à semelhança da questão anterior, apesar de recorrerem a representações do mesmo tipo, as respostas não foram todas iguais, isto porque alguns escolheram partir da fórmula dos arranjos e outros da fórmula das combinações.

Nas Figura 41 e 42 encontram-se a resoluções apresentadas pelos alunos Alberto e Tobias, respetivamente.

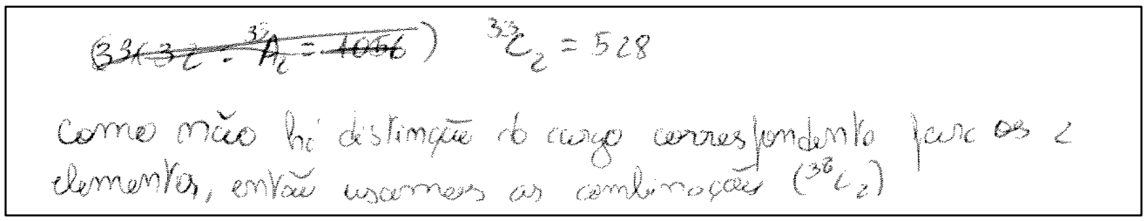


Figura 41: Resolução apresentada pelo aluno Alberto à questão 2

Nesta resolução, Alberto aplica diretamente a fórmula das combinações justificando verbalmente a razão para esta escolha. Mostra assim que compreende que, como não há distinção entre cargos, não faz sentido considerar a ordem, isto é, considerar as permutações entre os elementos selecionados.

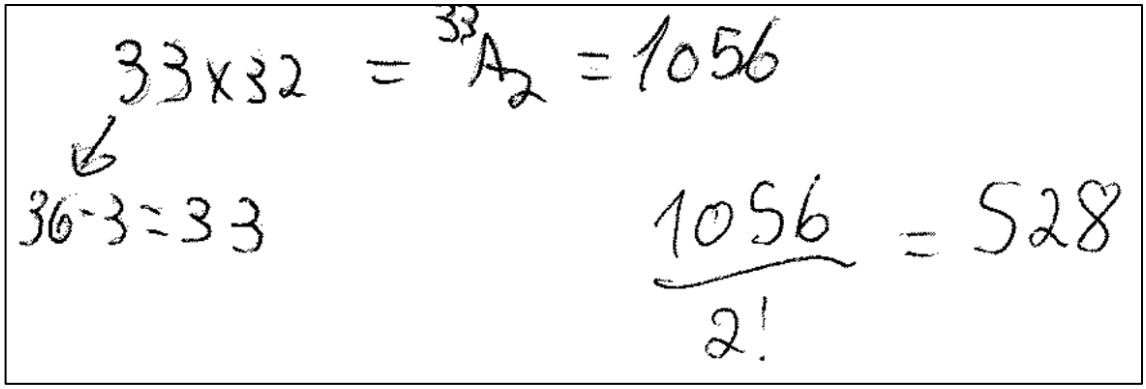


Figura 42: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 2

Por outro lado, nesta resolução, Tobias chega ao mesmo resultado, mas por outro meio. Utiliza primeiramente a fórmula dos arranjos simples e depois calcula o quociente entre o resultado obtido e as permutações entre os dois elementos selecionados, mostrando assim que compreendeu que, por não haver distinção entre cargos, a ordem de seleção dos elementos não tem importância.

Relativamente à questão 3, a distribuição das respostas foi a seguinte: 63,2% dos alunos optaram por uma representação simbólica, enquanto os restantes 36,8% optaram por uma representação visual.

Nas Figuras 43 e 44 apresentam-se as resoluções dos alunos Salvador e Ana, respetivamente.

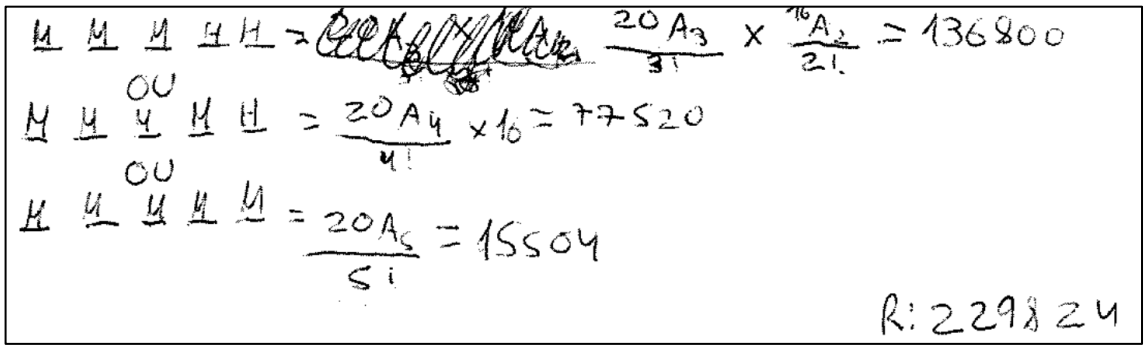


Figura 43: Resolução apresentada pelo aluno Salvador à questão 3

Nesta resolução, Salvador começou por considerar os três casos possíveis em que temos mais mulheres do que homens na comissão. Ao utilizar a palavra *ou*, o aluno compreende que tem de recorrer ao princípio da adição, somando os três resultados obtidos e não ao princípio da multiplicação, chegando assim ao resultado correto. Esta representação mostra uma conjugação perfeita entre uma representação **visual** (as letras e os tracinhos) e uma representação **simbólica**, usando as fórmulas dos arranjos e das permutações.

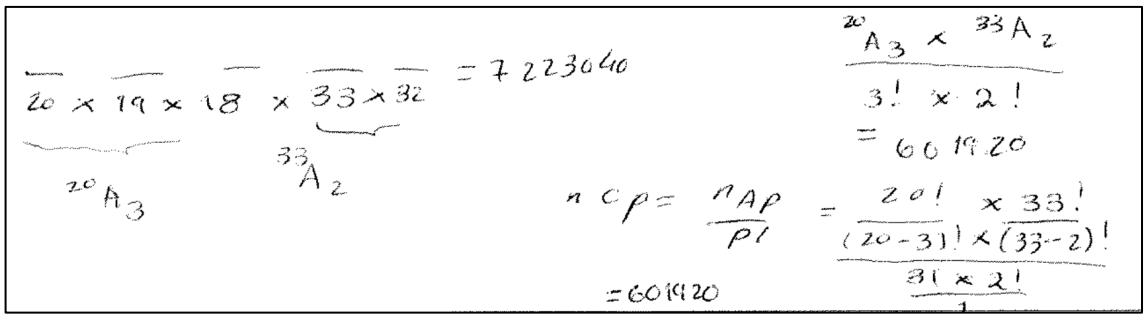


Figura 44: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 3

Aqui Ana, tal como o seu grupo, comete o **erro de repetição** (Batanero et al., 1997). Em vez de calcular separadamente os três casos possíveis, opta por juntar tudo num caso fazendo $^{33}A_2$, o que vai fazer com que certas possibilidades sejam contadas mais do que uma vez, resultando numa resposta bastante superior à resposta correta. Este erro é muito comum pois muitas vezes os alunos tentam seguir pelo caminho menos trabalhoso, e acabam por não se aperceber do erro que cometem até ao momento de discutir e apresentar as resoluções.

Em relação à última questão desta tarefa, 63,2% dos alunos optaram por utilizar uma representação simbólica, enquanto 36,8% tenham escolhido usar uma representação visual.

Nas Figuras 45 e 46 apresentam-se as resoluções das alunas Filipa e Marta, respetivamente.

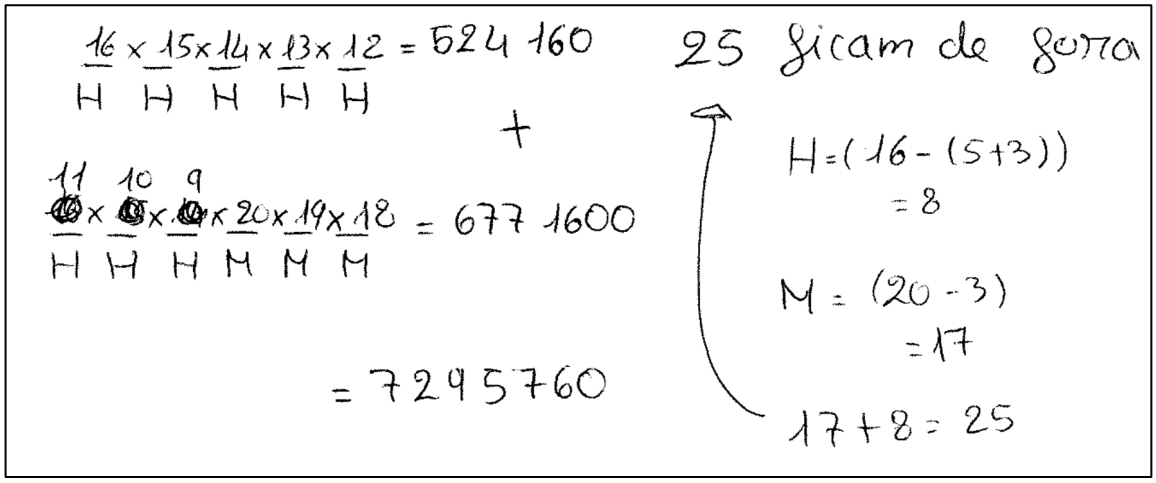


Figura 45: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4

Neste caso, Filipa recorre, incorretamente, ao princípio da adição quando deveria ter utilizado, por exemplo, o princípio da multiplicação. Isto deve-se, possivelmente, a uma **má interpretação e compreensão do enunciado**, pois resolveu a questão como se fosse para escolher um grupo *ou* o outro, em vez de um grupo *e* o outro.

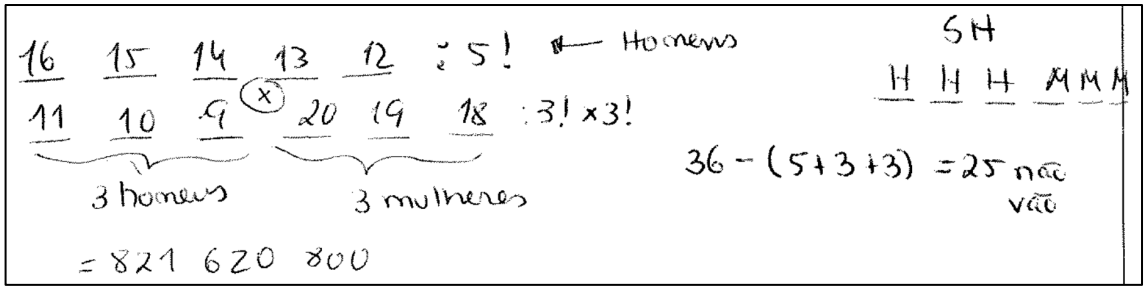


Figura 46: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 4

Marta utiliza uma representação muito semelhante à anterior. No entanto, compreende que tem de calcular o produto entre os dois resultados obtidos em vez de os somar. Assim, através do princípio da multiplicação, consegue alcançar o resultado pretendido.

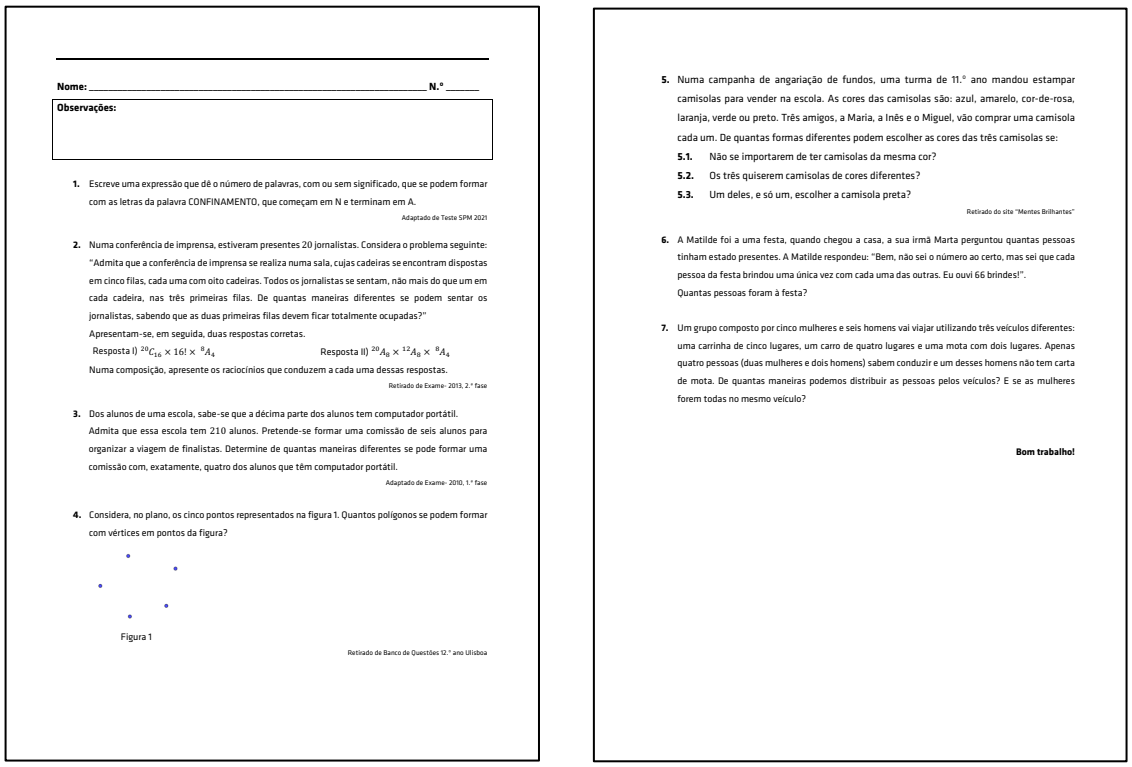
Nesta última tarefa em grupo, mais uma vez, foi notório o contributo positivo deste tipo de dinâmica. A tarefa foi entregue após uma dedução da fórmula das combinações, o que fez com que muitos alunos pensassem que isto significava que em todas as questões teria de ser utilizada esta fórmula (o que não é totalmente verdade). Se calhar se esses alunos estivessem a trabalhar sozinhos teriam cometido esse erro, mas ao estarem a trabalhar com os seus colegas, e ao discutirem as suas diferentes

interpretações das questões, conseguiram compreender que certas questões não precisavam de todo da utilização desta fórmula. Neste entendimento, a discussão entre pares contribuiu para a explicitação das diferentes interpretações do problema e para a discussão e escolha das estratégias de resolução, numa perspetiva de aprendizagem cooperativa, em que a interação entre os alunos favorece a construção partilhada do conhecimento (Johnson & Johnson, 2009; Lopes & Silva, 2009).

Neste momento observou-se uma evolução na capacidade dos alunos para justificar as estratégias utilizadas e relacionar as expressões combinatórias com o contexto dos problemas, revelando uma compreensão mais integrada dos processos de contagem.

5.4. 4.º momento – Ficha global

Assim como foi mencionado no capítulo da Intervenção Pedagógica, o principal objetivo desta ficha, cujo enunciado é relembrado na Figura 47 (e Apêndice 9), era ajudar os alunos a fazer uma revisão de todos os conceitos aprendidos ao longo da unidade, através da realização de tarefas individuais, em vez de separados por temas. Ao integrar, na mesma tarefa, problemas envolvendo diferentes conceitos da Contagem, esta ficha constituiu uma oportunidade para analisar a evolução das estratégias de resolução desenvolvidas ao longo da intervenção. Procurou-se identificar se os alunos selecionavam autonomamente os processos de contagem mais adequados, recorriam a representações pertinentes e justificavam as opções tomadas perante situações que exigiam uma análise mais integrada dos conceitos anteriormente trabalhados.



Nome: _____ **N.º** _____

Observações:

1. Escreve uma expressão que dê o número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra CONFINAMENTO, que começam em N e terminam em A.

Adaptado de Teste SPM 2021

2. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas. Considera o problema seguinte: "Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas. De quantas maneiras diferentes se podem sentar os jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?"
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.
Resposta I) $^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) $^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$
Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

Retirado de Exame- 2013, 2.ª fase

3. Dos alunos de uma escola, sabe-se que a décima parte dos alunos tem computador portátil. Admita que essa escola tem 210 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

Adaptado de Exame- 2010, 1.ª fase

4. Considera, no plano, os cinco pontos representados na figura 1. Quantos polígonos se podem formar com vértices em pontos da figura?

Figura 1

Retirado de Banco de Questões 12.º ano Ulisboa

5. Numa campanha de angariação de fundos, uma turma de 11.º ano mandou estampar camisolas para vender na escola. As cores das camisolas são: azul, amarelo, cor-de-rosa, laranja, verde ou preto. Três amigos, a Maria, a Inês e o Miguel, vão comprar uma camisola cada um. De quantas formas diferentes podem escolher as cores das três camisolas se:
   - **5.1.** Não se importarem de ter camisolas da mesma cor?
   - **5.2.** Os três quiserem camisolas de cores diferentes?
   - **5.3.** Um deles, e só um, escolher a camisola preta?

Retirado do site "Mentes Brilhantes"

6. A Matilde foi a uma festa, quando chegou a casa, a sua irmã Marta perguntou quantas pessoas tinham estado presentes. A Matilde respondeu: "Bem, não sei o número ao certo, mas sei que cada pessoa da festa brindou uma única vez com cada uma das outras. Eu ouvi 66 brindes!".
Quantas pessoas foram à festa?

7. Um grupo composto por cinco mulheres e seis homens vai viajar utilizando três veículos diferentes: uma carrinha de cinco lugares, um carro de quatro lugares e uma mota com dois lugares. Apenas quatro pessoas (duas mulheres e dois homens) sabem conduzir e um desses homens não tem carta de mota. De quantas maneiras podemos distribuir as pessoas pelos veículos? E se as mulheres forem todas no mesmo veículo?

Bom trabalho!

Figura 47: Ficha global

Relativamente à primeira questão da ficha, apenas 5,3% dos alunos recorreram a representações visuais, enquanto os restantes 94,7% optaram por resoluções **simbólicas**.

Nas Figuras 48 e 49 apresentam-se as resoluções das alunas Ana e Filipa, respetivamente.

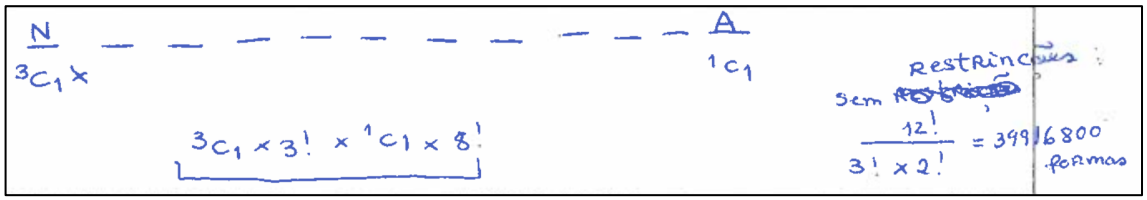


Figura 48: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 1

Nesta resolução vemos que Ana efetua o cálculo $^3C_1$ para escolher o N que ocupa o primeiro lugar na palavra, ora isto mostra que a aluna **confunde o tipo de objeto** (Batanero et al., 1997), ou seja, considera que estes objetos são indistinguíveis, quando na realidade não o são. Para além disso, apresenta o cálculo $\frac{12!}{3! \times 2!}$ ou seja, considera, no denominador, as permutações entre os doze elementos, incluindo aqueles que

deveriam estar fixos (o primeiro e o último), mostrando que não compreendeu totalmente aquilo que é pedido no enunciado.

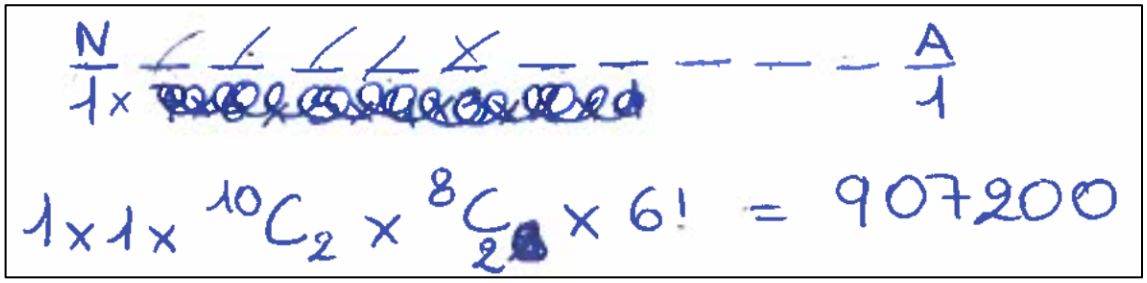


Figura 49: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 1

Por outro lado, Filipa começa por fixar os dois elementos que já estão escolhidos (o primeiro e o último) e depois vai fazendo as seleções para os elementos que são repetidos, recorrendo às combinações para não considerar casos repetidos. Após calcular as possibilidades de posicionar as letras repetidas, posiciona as restantes seis letras usando o fatorial, calculando assim todas as permutações entre esses elementos. Alcança assim o resultado pretendido, através de uma representação simbólica apoiada num pequeno suporte visual (os tracinhos).

Relativamente à segunda questão, a maioria dos alunos, 94,7% recorreu a uma representação **verbal** para dar resposta ao problema, os restantes 5,3% usaram uma representação **simbólica**.

Na Figura 50 encontra-se a resolução da aluna Francisca.

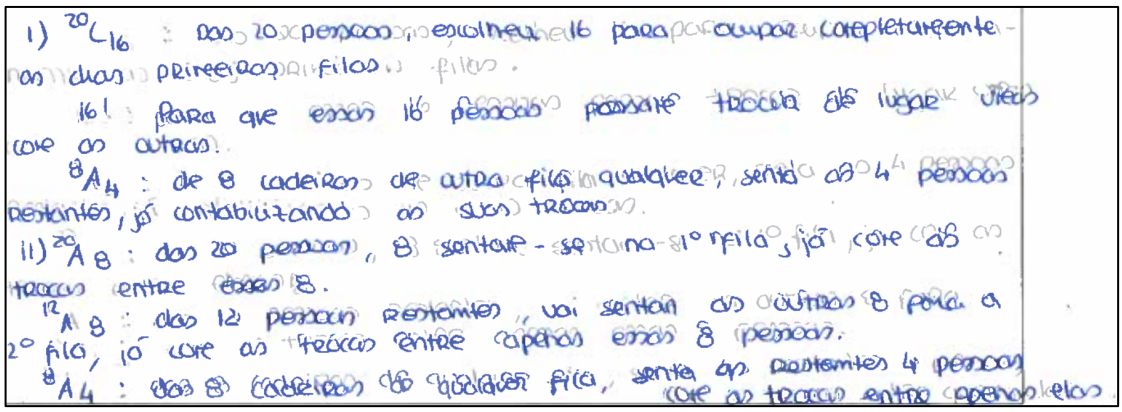


Figura 50: Resolução apresentada pela aluna Francisca à questão 2

Em vez de fazer um texto no qual explica cada uma das expressões como um todo, a aluna opta por explicar individualmente cada parcela de cada uma das expressões. A mensagem que quer transmitir fica clara e demonstra que a aluna compreende a

diferença entre a utilização de combinações e arranjos, mostrando que conseguiu adquirir os conhecimentos da unidade Contagem.

Passando agora para a terceira questão desta ficha, todos os alunos optaram pela utilização de uma representação simbólica.

Na Figura 51 encontra-se a resolução do aluno Ricardo à questão 3.

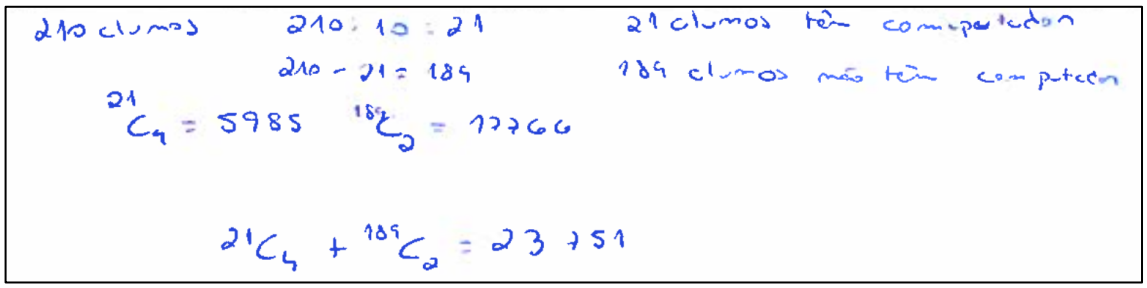


Figura 51: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 3

Nesta resolução, Ricardo calcula corretamente o número de maneiras de selecionar 4 alunos com computador e o número de maneiras de selecionar 2 alunos sem computador. No entanto, soma esses dois resultados em vez de os multiplicar, mostrando uma **interpretação incorreta** daquilo que o enunciado pede e obtendo um resultado que não está certo.

Na questão 4, 19% dos alunos não apresentaram qualquer resposta. Dos 81% que responderam, todos optaram por utilizar uma representação **simbólica**.

Observam-se, nas Figuras 52 e 53 as resoluções dos alunos Ricardo e Filipa.

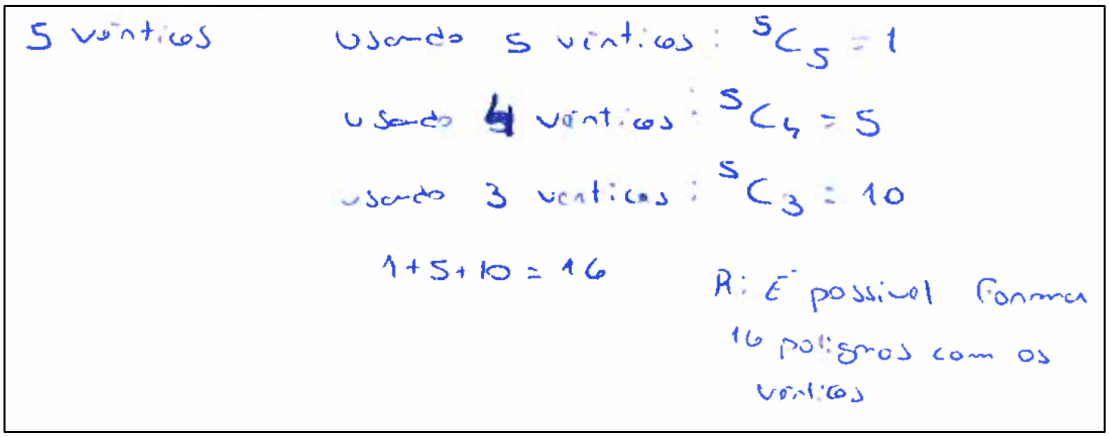


Figura 52: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 4

Nesta resolução, o aluno começa por considerar os três casos possíveis: a formação de polígonos com três vértices, quatro vértices ou cinco vértices. Após efetuar os três

cálculos, percebeu que tinha de somar os três resultados, compreendendo que um polígono não pode ter três vértices e quatro vértices ao mesmo tempo (e, portanto, tem de recorrer ao princípio da adição em vez do princípio da multiplicação. Embora o aluno utilize uma representação predominantemente **simbólica**, é notório que a escrita das três opções (representação **verbal**), o ajudou a estruturar o seu raciocínio e a alcançar a resposta correta.

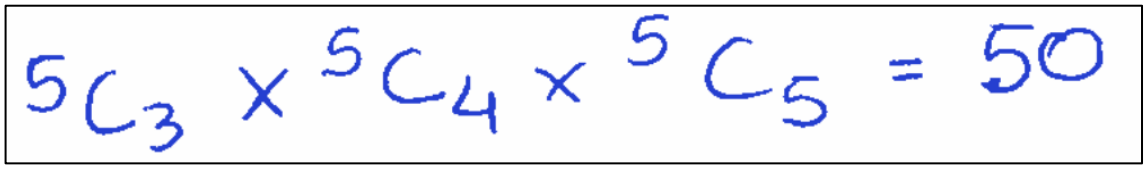


Figura 53: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4

Por outro lado, Filipa parece não compreender que não poderia aplicar o princípio da multiplicação, visto que não é possível o polígono ter três vértices e quatro vértices simultaneamente. O facto de não ter começado por dividir em três casos escrevendo triângulo ou quadrado ou pentágono por exemplo, fez com que a aluna **não conseguisse perceber a operação** que deveria utilizar.

Relativamente à questão 4, toda a turma apresentou alguma resposta. 89,5% dessas respostas recorreram a representações simbólicas e 10,5% recorreram a representações mais visuais.

Nas Figuras 54 e 55, apresentam-se as resoluções dos alunos Ana e Rogério, respetivamente.

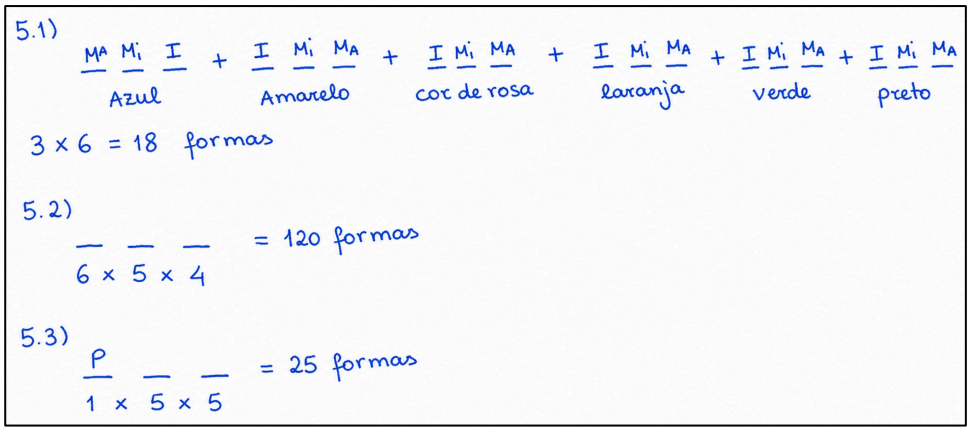


Figura 54: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 5

Com a sua resolução (em que recorreu a uma representação **visual**), esta aluna demonstra algumas dificuldades na **interpretação e compreensão do enunciado**. Na

primeira alínea, em vez de fazer o cálculo 6^3, faz 3×6. Isto está incorreto, pois não é solicitado que se escolha uma pessoa (3) e uma cor de camisola (6), mas sim de quantas formas se podem vestir os amigos com as seis cores de t-shirts disponíveis, sem restrições. Na terceira alínea até tem a ideia correta, de usar o princípio da multiplicação para fazer $1 \times 5 \times 5$, mas não considera a escolha da pessoa que fica com a camisola preta, ou seja, **interpreta erradamente o tipo de partição requerida** (Batanero et al., 1997) já que não considera duas das possibilidades.

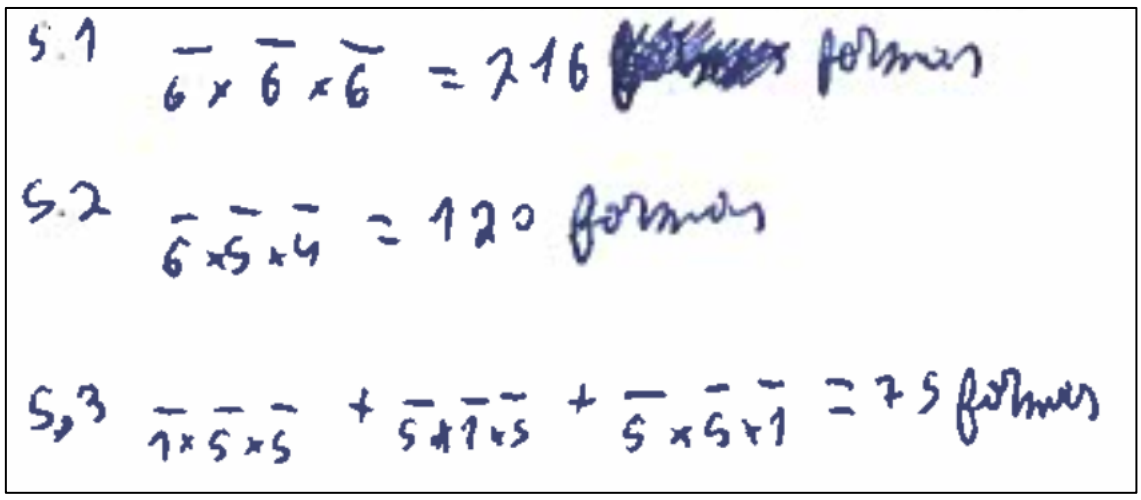


Figura 55: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 5

Por outro lado, este aluno utiliza os tracinhos (representação **visual**) de forma mais eficiente, compreendendo quais fatores tem de multiplicar ou somar em cada uma das alíneas. Na terceira alínea, a sua resolução demonstra que compreendeu a existência de três casos possíveis (pois temos três pessoas que podem utilizar a camisola preta) e que tem de adicionar os três resultados para obter o resultado pretendido.

Na questão 6 a distribuição das respostas foi a seguinte: 84,2% utilizou uma representação **simbólica** e 15,8% dos alunos não responderam.

Nas Figuras 56 e 57 apresentam-se as resoluções das alunas Marta e Juliana, respetivamente.

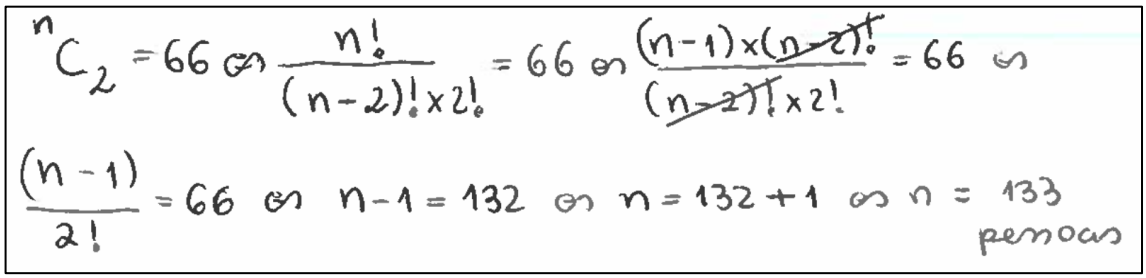


Figura 56: Resolução apresentada pela aluna Marta à questão 6

Nesta resolução, Marta recorre a uma representação totalmente simbólica. No entanto, ao simplificar a expressão $n!$ deveria obter $n(n-1)(n-2)!$, mas apenas escreveu $(n-1)(n-2)!$. Ora isto faz com que fique com uma equação de 1.º grau para resolver quando deveria ter uma equação de 2.º grau, onde rejeitaria depois uma das soluções obtidas.

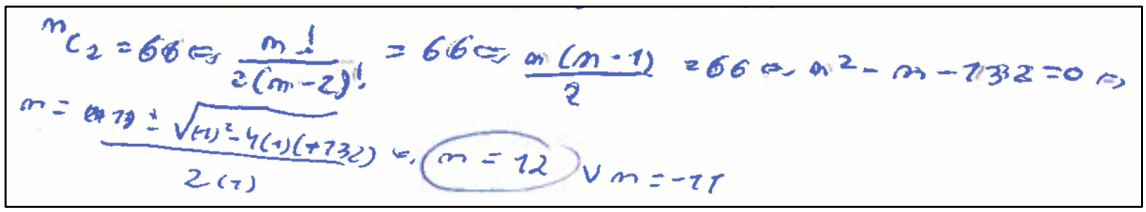


Figura 57: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 6

Por outro lado, Juliana faz a simplificação da forma correta e alcança as duas soluções, rejeitando a solução negativa (embora não tenha justificado), pois n representa o número de pessoas na festa, tendo de ser, portanto, um valor positivo.

Relativamente à questão 7, 47,4% dos alunos optaram por uma representação **visual**, 47,4% optaram por uma representação **simbólica**, e os restantes 5,3% não responderam.

Nas Figuras 58 e 59 encontram-se as resoluções dos alunos Paulo e Ana.

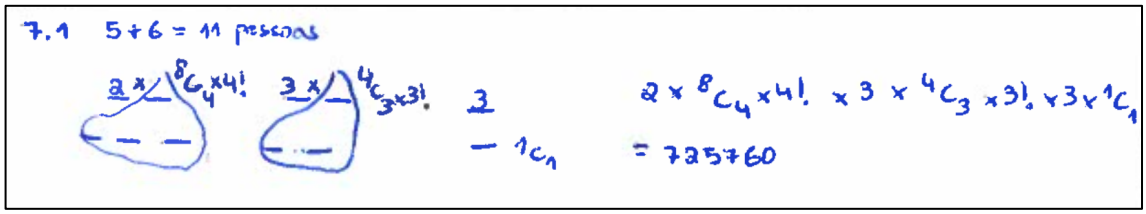


Figura 58: Resolução apresentada pelo aluno Paulo à questão 7

Usando uma representação mista, em que faz a conjugação entre uma parte mais visual e uma partem mais simbólica, este aluno consegue perceber como pode distribuir as 11 pessoas pelos 11 lugares tendo em conta todas as restrições. Apesar de ser algo simples, o uso dos tracinhos mostra ser um forte auxílio na resolução deste problema em específico.

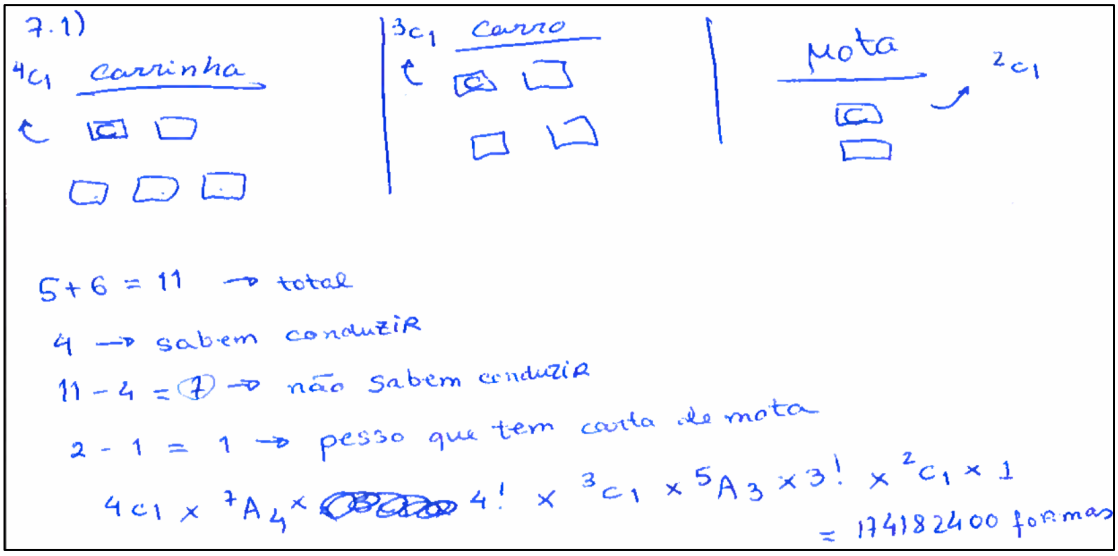


Figura 59: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 7

Ana recorre também a uma representação **visual**, desenhando os lugares dos diferentes veículos. Um dos problemas que a aluna encontra é que começa a distribuir os condutores pela ordem que desenhou os veículos (carrinha-carro-mota), mas a mota é o veículo com maior número de restrições logo deveria ter começado por aí. Outro problema é que a aluna recorre aos arranjos simples para distribuir as restantes pessoas pelo carro, o que estaria correto se depois não multiplicasse ainda pelas permutações entre esses elementos. Assim, como comete um **erro de ordem** (confunde os critérios para utilização das combinações com os dos arranjos) (Batanero et al., 1997), obtém um resultado muito superior ao correto.

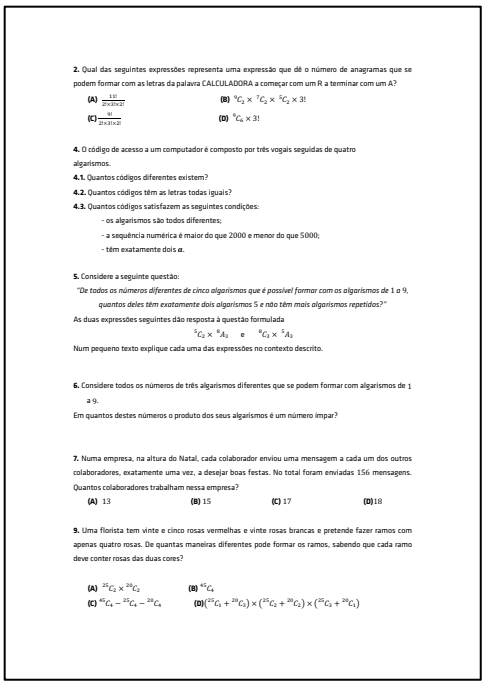
Sendo esta a primeira ficha realizada individualmente, foi notório o impacto que isto causou nos alunos. Em certas questões, como a questão 4, grande parte dos alunos cometeu o mesmo erro, erro esse que poderia ter sido evitado se os alunos dispusessem de um momento para discutir com os seus colegas e compreender o que era pedido. Inclusive vários alunos que em grupo aparentavam não ter grandes dificuldades, falaram comigo no final da aula e disseram que tinha sido muito complicado para eles fazer a ficha sozinhos. Ora, isto foi muito importante para compreender realmente as dificuldades individuais de cada aluno, e para eles próprios perceberem o

tipo de questões ou os conceitos que deveriam praticar mais fora da escola. Apesar de o trabalho de grupo trazer muitos contributos, a realidade é que acaba por camuflar as dificuldades de cada estudante, dificultando um pouco o trabalho do professor em perceber o que é que cada um deles efetivamente sabe ou não sabe, e por isso é necessário também que sejam feitas tarefas (para além dos testes e outros instrumentos de avaliação), em que os alunos possam mostrar os seus conhecimentos e eventualmente expor as suas dúvidas.

Em **síntese**, a resolução de uma ficha integrando diferentes conceitos permitiu observar uma utilização mais autónoma dos conhecimentos desenvolvidos ao longo da intervenção. Verificou-se que muitos alunos passaram a selecionar as estratégias de resolução em função das características de cada problema e não apenas das fórmulas combinatórias anteriormente estudadas. Apesar da predominância das representações simbólicas, vários alunos continuaram a recorrer a representações visuais para organizar os resultados possíveis ou confirmar o pensamento desenvolvido, evidenciando que diferentes formas de representação desempenharam funções complementares na construção do conhecimento matemático.

5.5. 5.º momento – Avaliação sumativa com fins classificatórios

Como já foi referido, o objetivo com estes dois instrumentos de avaliação, cujas perguntas se encontram nas Figuras 60 e 61 (Apêndice 10) era avaliar os conhecimentos dos alunos nesta unidade, para além disso também queria observar as dificuldades que estes manifestam quando trabalham de forma individual. Sendo realizados individualmente e após a conclusão da unidade, estes momentos permitiram analisar em que medida os alunos tinham consolidado os conceitos abordados ao longo das etapas anteriores. Para além da correção das respostas, a análise incidiu sobre as representações utilizadas, a natureza dos erros identificados e os processos de raciocínio mobilizados, procurando compreender quais os aspetos do pensamento combinatório que se encontravam mais consolidados e aqueles que ainda revelavam necessidade de aprofundamento.



2. Qual das seguintes expressões representa uma expressão que dê o número de anagramas que se podem formar com as letras da palavra CALCULADORA a começar com um R a terminar com um A?

(A) $\frac{11!}{2\times3!\times2!}$ **(B)** ${}^{9}C_2 \times {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times 3!$

(C) $\frac{9!}{2\times3!\times2!}$ **(D)** ${}^{9}C_6 \times 3!$

4. O código de acesso a um computador é composto por três vogais seguidas de quatro algarismos.

4.1. Quantos códigos diferentes existem?

4.2. Quantos códigos têm as letras todas iguais?

4.3. Quantos códigos satisfazem as seguintes condições:

- os algarismos são todos diferentes;
- a sequência numérica é maior do que 2000 e menor do que 5000;
- têm exatamente dois *a*.

5. Considere a seguinte questão:

"De todos os números diferentes de cinco algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 *a* 9*, quantos deles têm exatamente dois algarismos* 5 *e não têm mais algarismos repetidos?"*

As duas expressões seguintes dão resposta à questão formulada

${}^{5}C_2 \times {}^{8}A_3$ e ${}^{8}C_3 \times {}^{5}A_3$

Num pequeno texto explique cada uma das expressões no contexto descrito.

6. Considere todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com algarismos de 1 a 9.

Em quantos destes números o produto dos seus algarismos é um número ímpar?

7. Numa empresa, na altura do Natal, cada colaborador enviou uma mensagem a cada um dos outros colaboradores, exatamente uma vez, a desejar boas festas. No total foram enviadas 156 mensagens. Quantos colaboradores trabalham nessa empresa?

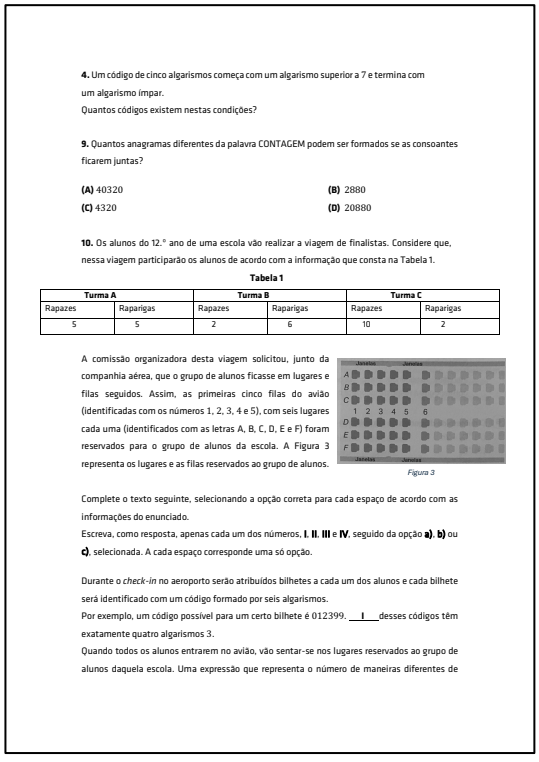
(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 17 **(D)** 18

9. Uma florista tem vinte e cinco rosas vermelhas e vinte rosas brancas e pretende fazer ramos com apenas quatro rosas. De quantas maneiras diferentes pode formar os ramos, sabendo que cada ramo deve conter rosas das duas cores?

(A) ${}^{25}C_2 \times {}^{20}C_2$ **(B)** ${}^{45}C_4$

(C) ${}^{45}C_4 - {}^{25}C_4 - {}^{20}C_4$ **(D)** $({}^{25}C_4 + {}^{20}C_4) \times ({}^{25}C_4 + {}^{20}C_4) \times ({}^{25}C_4 + {}^{20}C_4)$

Figura 60: Questões da unidade Contagem do primeiro teste do 2.º período



4. Um código de cinco algarismos começa com um algarismo superior a 7 e termina com um algarismo ímpar.
Quantos códigos existem nestas condições?

9. Quantos anagramas diferentes da palavra CONTAGEM podem ser formados se as consoantes ficarem juntas?

(A) 40320 **(B)** 2880
(C) 4320 **(D)** 20880

10. Os alunos do 12.º ano de uma escola vão realizar a viagem de finalistas. Considere que, nessa viagem participarão os alunos de acordo com a informação que consta na Tabela 1.

Tabela 1

Turma A		Turma B		Turma C	
Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas
5	5	2	6	10	2

A comissão organizadora desta viagem solicitou, junto da companhia aérea, que o grupo de alunos ficasse em lugares e filas seguidos. Assim, as primeiras cinco filas do avião (identificadas com os números 1, 2, 3, 4 e 5), com seis lugares cada uma (identificados com as letras A, B, C, D, E e F) foram reservados para o grupo de alunos da escola. A Figura 3 representa os lugares e as filas reservados ao grupo de alunos.

Figura 3

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço de acordo com as informações do enunciado.
Escreva, como resposta, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Durante o *check-in* no aeroporto serão atribuídos bilhetes a cada um dos alunos e cada bilhete será identificado com um código formado por seis algarismos.
Por exemplo, um código possível para um certo bilhete é 012399. **I** desses códigos têm exatamente quatro algarismos 3.
Quando todos os alunos entrarem no avião, vão sentar-se nos lugares reservados ao grupo de alunos daquela escola. Uma expressão que representa o número de maneiras diferentes de todos os alunos se sentarem de modo que os alunos da turma C se sentem nas filas com um número par é **II**. Já o número de maneiras de todos os alunos se sentarem de modo que a Maria e a Sofia, alunas da turma C, fiquem uma ao lado da outra, do mesmo lado do corredor, juntamente com outra rapariga, pode ser dado pela expressão **III**.
À chegada ao aeroporto de destino, o grupo de alunos daquela escola vai colocar-se em fila para tirar uma fotografia. Uma expressão que representa o número de formas diferentes em que é possível dispor todos os alunos de modo que fiquem agrupados por turma e, no grupo da turma A, fiquem alternados por género, pode ser dada por **IV**.

I	II	III	IV
a) ${}^{6}C_4 \times 9^2$	**a)** ${}^{5}C_2 \times 2! \times 8!$	**a)** $11 \times 2^3 \times 5 \times 27!$	**a)** $12! \times 8! \times 2 \times (5!)^2$
b) ${}^{5}A_2 \times {}^{6}A_4$	**b)** $12! \times 18!$	**b)** $11 \times 3! \times 2 \times 5 \times 27!$	**b)** $3! \times 12! \times 8!$
c) ${}^{5}A_2 \times {}^{6}C_4$	**c)** $12! \times 2 \times 18!$	**c)** $11 \times 2^3 \times 27!$	**c)** $3! \times 12! \times 8! \times 2 \times (5!)^2$

11. Na Figura 4 encontram-se representadas duas retas paralelas, r e s. Na reta r foram marcados três pontos (A, B e C) e na reta s foram marcados cinco pontos (D, E, F, G e H).

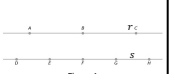


Figura 4

Foram acrescentados n pontos à reta r. O número de triângulos que é possível definir com os $8 + n$ pontos é 520. Determine o valor de n.

Figura 61: Questões da unidade Contagem do segundo teste do 2.º período

Neste primeiro teste do 2.º período os alunos tinham seis itens do tema da Contagem para responder. Alguns dos itens eram questões de escolha múltipla e não serão discutidos nesta secção visto que, a maioria dos alunos, apresenta apenas a letra

correspondente, não sendo possível analisar as suas dificuldades ou mesmo os erros cometidos.

Na questão 4.1. deste teste, 77,8% dos alunos usaram uma representação maioritariamente **simbólica** para dar a sua resposta, 11,1% optaram por uma representação com uma componente visual mais forte, e os restantes 11,1% não apresentaram qualquer resposta.

Nas Figuras 62, 63 e 64, encontram-se as resoluções apresentadas pelas alunas Ana, Filipa e Íris.

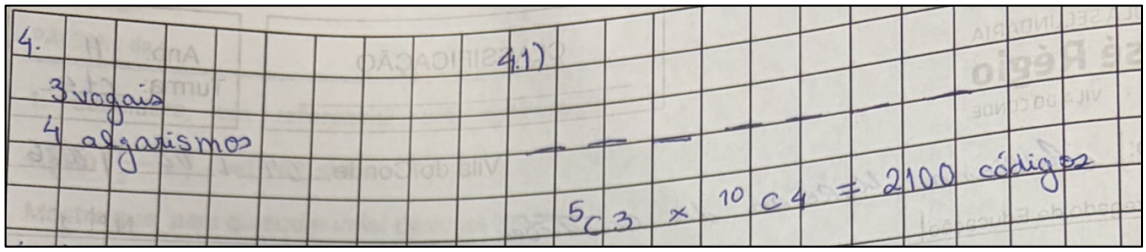


Figura 62: Resolução apresentada pela aluna Ana à questão 4.1. do teste 1

Na sua resolução, Ana utiliza $^5C_3$ para escolher três das cinco vogais para ocuparem esses três lugares, isto mostra que talvez a aluna **não tenha compreendido totalmente o enunciado**, visto que nesta alínea não há exigência de que as vogais sejam distintas. Para além disso, ao usar combinações em vez de arranjos, considera que a ordem não é relevante (**erro de ordem** (Batanero et al.,1997)), quando o é. Por exemplo, apesar de serem compostos por exatamente os mesmos algarismos e as mesmas vogais, aea1021 e eaa1012 são considerados códigos distintos, o que mostra que é indispensável considerar a ordem dos fatores.

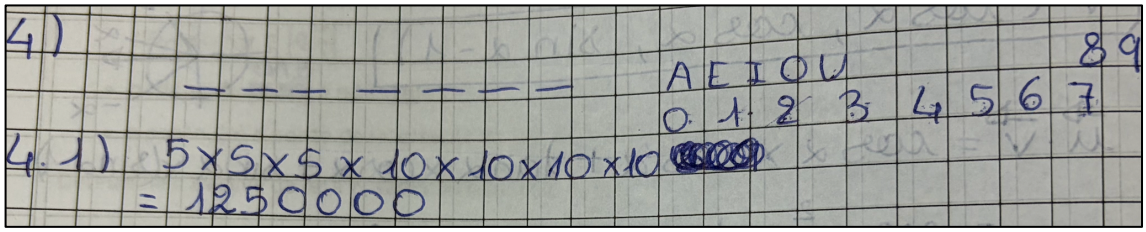


Figura 63: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4.1. do teste 1

Filipa opta por utilizar uma representação muito semelhante à da Ana, no entanto percebe que nesta alínea tanto as vogais como os algarismos podem repetir-se, não cometendo o mesmo erro. Do lado direito vemos que enumerou todas as vogais e algarismos, talvez para confirmar o número de possibilidades que tem para cada um

deles. Alcança facilmente o resultado correto sem necessitar de usar conceitos mais complexos como é o caso das combinações ou dos arranjos.

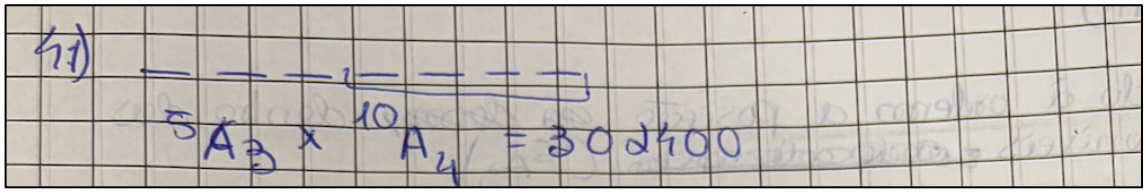


Figura 64: Resolução apresentada pela aluna Íris à questão 4.1. do teste 1

A Íris, ao contrário da Ana, utiliza os arranjos simples em vez das combinações, mostrando que compreende que nesta alínea é necessário considerar a ordem das vogais e dos algarismos. Ainda assim, o facto de usar os arranjos simples e vez dos arranjos completos, mostra que **não compreendeu corretamente o enunciado**, pois considerou que as três vogais têm de ser distintas entre si, e o mesmo no caso dos quatro algarismos.

Passando agora à questão 4.2. 16,7% dos alunos não apresentaram nenhuma resposta. 77,8% optaram por utilizar representações mais **simbólicas** enquanto que 5,6% optaram pelas **visuais**.

Nas Figuras 65 e 66 encontram-se as resoluções apresentadas pelos alunos Rogério e Juliana, respetivamente.

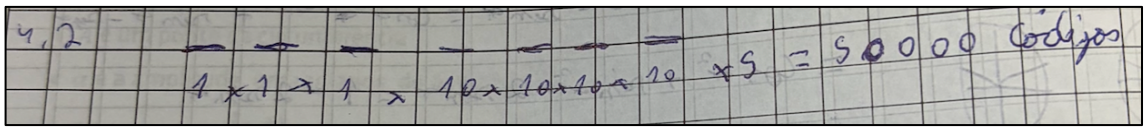


Figura 65: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4.2. do teste 1

Rogério calcula corretamente o número de possibilidades para o código, considerando que, no caso dos algarismos, podemos ter repetições e que para cada um deles temos 10 opções. Em relação à vogal, o aluno considera que só há uma hipótese para cada mas multiplica por cinco o resultado obtido pois temos cinco vogais de entre as quais uma vai ser selecionada.

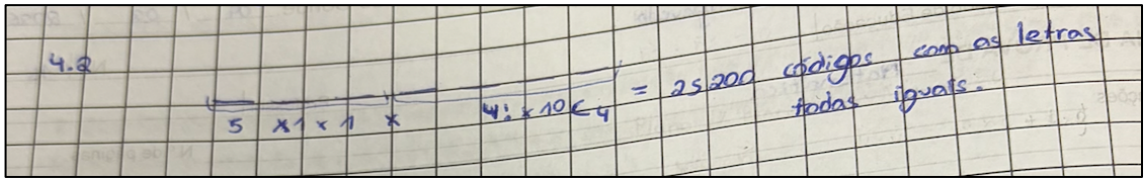


Figura 66: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 4.2. do teste 1

A aluna Joana calcula corretamente as possibilidades para as três vogais (escolhe uma das cinco e as outras duas têm de ser iguais. No entanto utiliza o produto das combinações pelas permutações na parte dos algarismos, fazendo isto a aluna está a assumir que os quatro algarismos têm de ser distintos entre si, o que não é verdade. Isto mostra que a aluna **não compreendeu totalmente aquilo que é pedido no enunciado da questão**.

Quanto à questão 4.3. a distribuição das respostas quanto ao tipo de representação utilizada foi a seguinte: 83,3% dos alunos usaram representações **simbólicas**, 5,6% optaram por representações **visuais** e os restantes 11,1% não responderam a esta questão.

Nas Figuras 67, 68 e 69 encontram-se as resoluções apresentadas pelos alunos Salete, Tobias e Rogério, respetivamente.

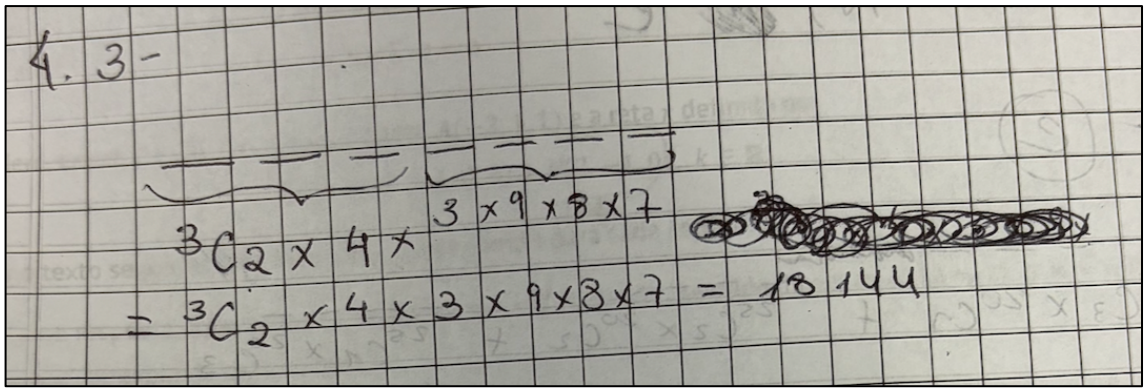


Figura 67: Resolução apresentada pela aluna Salete à questão 4.3. do teste 1

Nesta resolução, Salete começa por calcular o número de possibilidades para distribuir os dois A's pelos três lugares para as vogais, de seguida multiplica esse valor por 4 visto que a terceira vogal tem se ser diferente de A, restando 4 possibilidades. Na parte dos algarismos, a aluna calcula $3 \times 9 \times 8 \times 7$, pois para o primeiro algarismo temos três possibilidades (2, 3 ou 4) e os restantes têm de ser todos diferentes do primeiro e diferentes entre si. Obtém o resultado pretendido através de um cálculo relativamente simples, usando apenas um conceito mais formal, o das combinações.

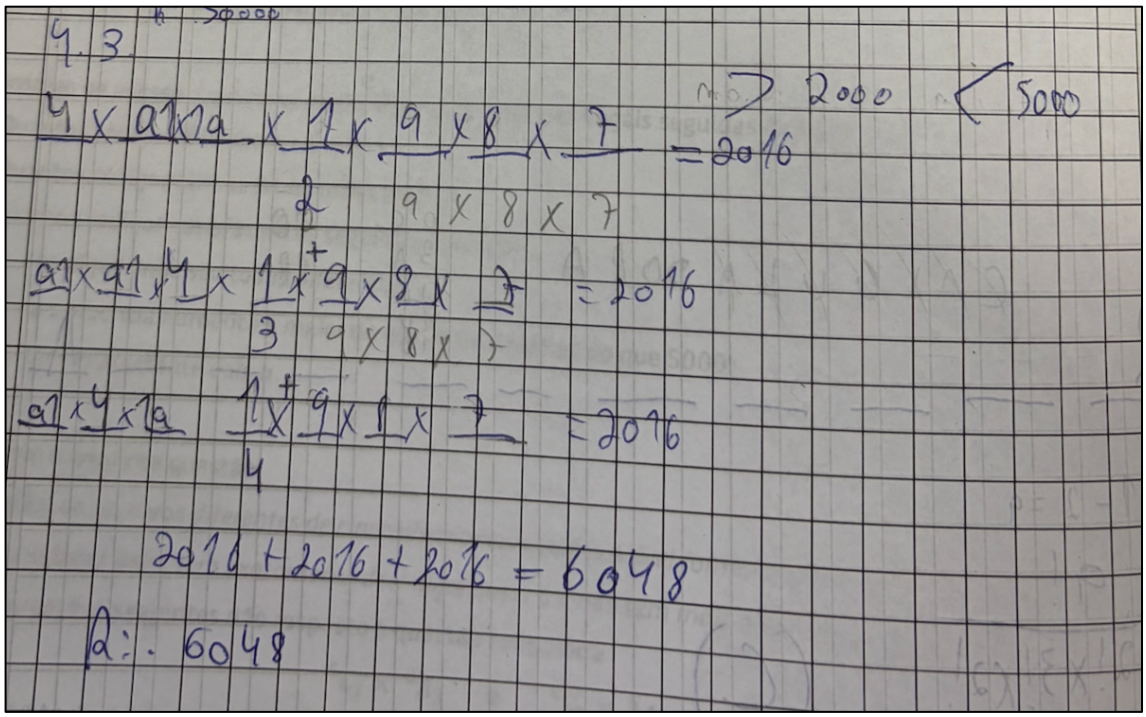


Figura 68: Resolução apresentada pelo aluno Tobias à questão 4.3. do teste 1

Tobias opta por dividir as possibilidades em três casos, uma em que a parte numérica começa com o algarismo 2, outra com o algarismo 3 e a última com o algarismo 4. O problema surge na parte das vogais, o Tobias separa também em três casos, 4AA, AA4, e A4A, onde o 4 representa a vogal distinta de A. Ao fazer desta forma o aluno **não considera todas as partições existentes** (Batanero et al., 1997), ele considera que quando o primeiro algarismo é o 2, as vogais estão na forma 4AA, e quando o primeiro algarismo é o 3, as vogais estão na forma AA4...Isto faz com que sejam excluídas muitas possibilidades como, por exemplo, AEA2043. Para que a resposta ficasse correta, o aluno teria ainda de multiplicar o resultado obtido por 3, ficando com $6048 \times 2 = 18144$.

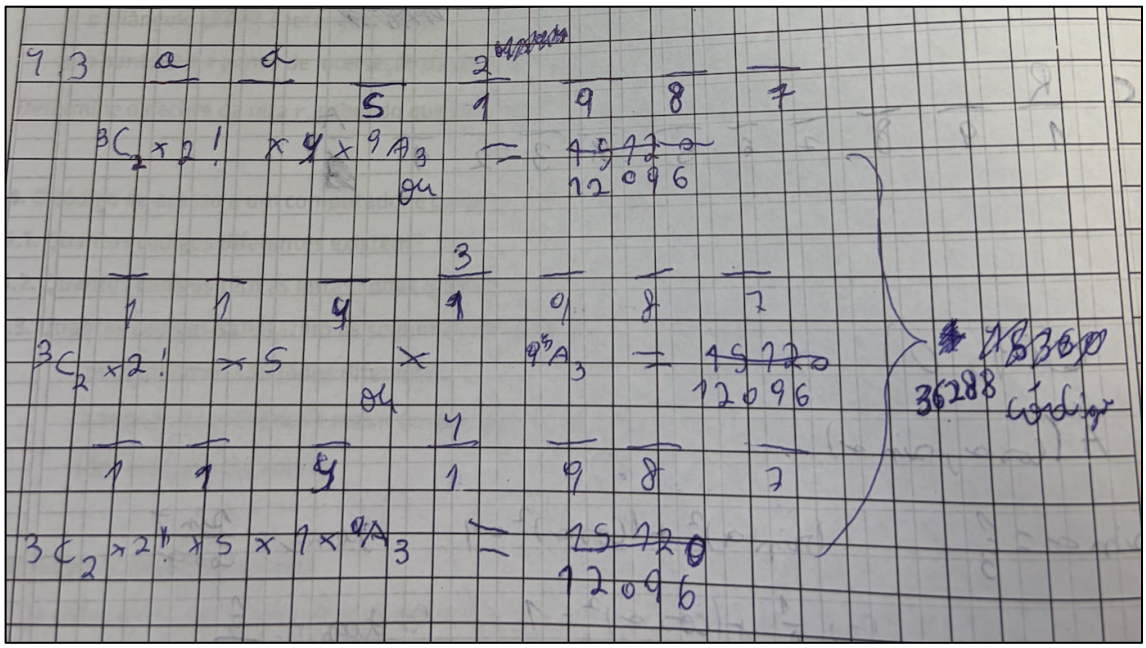


Figura 69: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 4.3. do teste 1

Neste caso, Rogério opta também por dividir as possibilidades em três casos possíveis, cada um relacionado com o primeiro algarismo (2, 3 ou 4). O problema surge quando o aluno calcula o número de maneiras de posicionar os dois A's, fazendo $^{3}C_{2}$, mas multiplica esse resultado pelas permutações desses dois elementos (2!), ora esses dois elementos são indistinguíveis, mas o aluno considera que não são, cometendo um erro do tipo **confundir o tipo de objeto** (Batanero et al., 1997) obtendo assim um número de possibilidades bastante superior ao esperado (o dobro).

Relativamente à questão 5, todos os alunos optaram por utilizar uma representação **verbal**, isto porque a própria natureza da pergunta (escrever uma pequena composição) assim o incentivava.

Nas Figuras 70 e 71, apresentam-se as resoluções dos alunos Ricardo e Juliana, respetivamente.

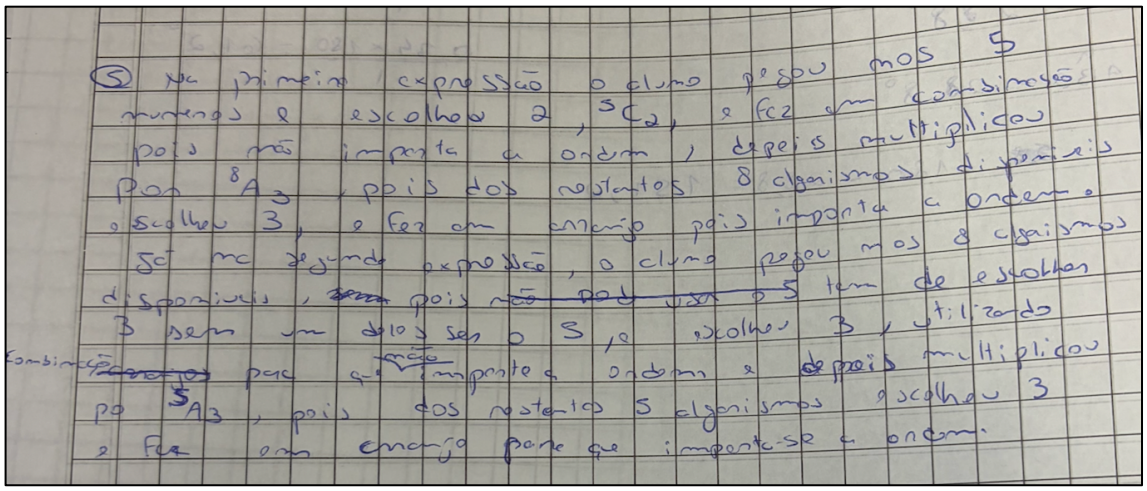


Figura 70: Resolução apresentada pelo aluno Ricardo à questão 5 do teste 1

Nesta resolução, Ricardo não consegue fazer uma interpretação correta da primeira expressão, dizendo que a parcela $^{5}C_{2}$ se refere à escolha de 2 números dos 5, quando na verdade está a ser calculado o número de maneiras em que podemos posicionar dois algarismos 5 tendo disponíveis cinco posições para os colocar.

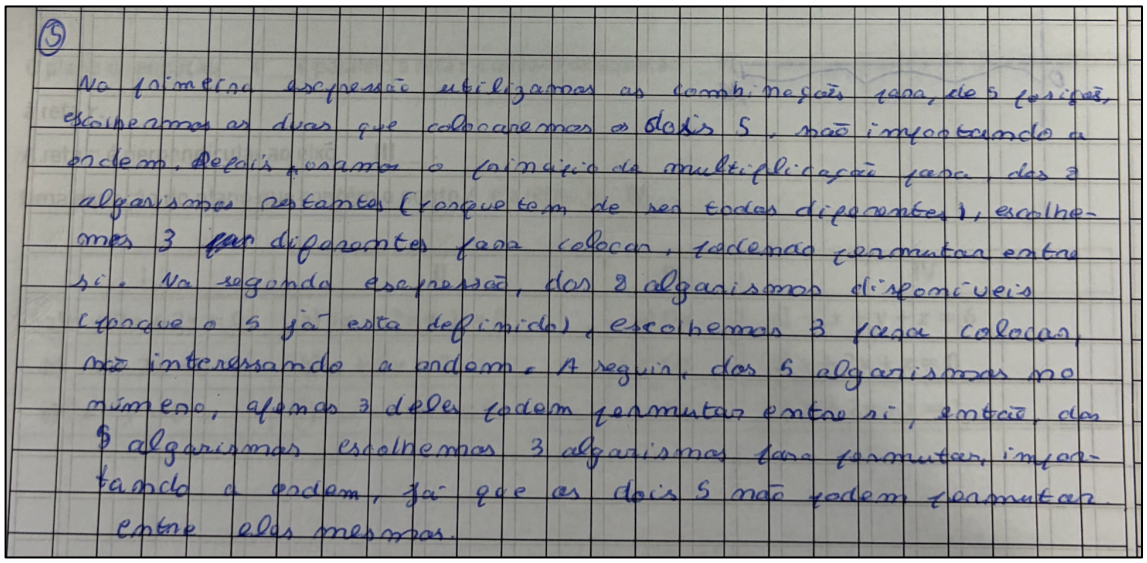


Figura 71: Resolução apresentada pela aluna Juliana à questão 5 do teste 1

Juliana, por outro lado, apresenta uma explicação mais satisfatória embora contenha algumas expressões não muito corretas como “dos 5 algarismos escolhemos 3 algarismos para permutar” – esses algarismos não precisam de ser escolhidos pois sabemos que os dos 5’s não permutam, sendo os restantes os que podem permutar entre si.

Passando para a questão 6, neste caso 72,2% dos alunos recorreram a representações **simbólicas** enquanto 27,8% escolheram usar representações **visuais**.

Nas Figuras 72, 73 e 74 encontram-se as respostas apresentadas pelos alunos Sílvia, Rogério e Zé, respetivamente.

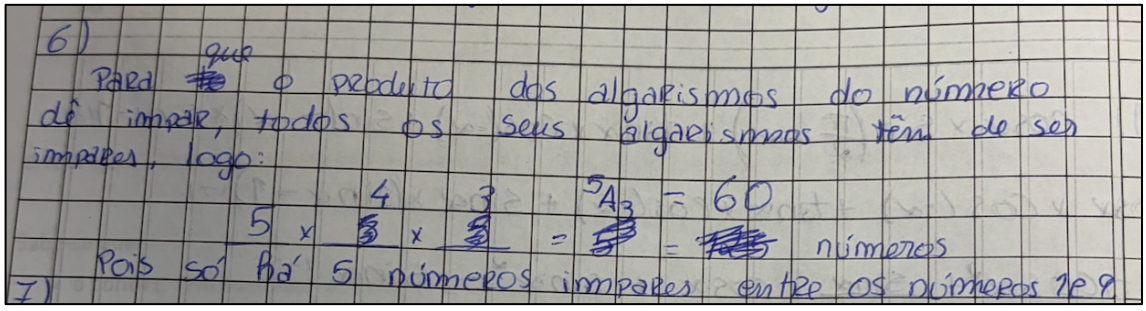


Figura 72: Resolução apresentada pela aluna Sílvia à questão 6 do teste 1

Na sua resolução Sílvia começa por explicar quais são as condições necessárias para que o produto dos três algarismos seja um número ímpar. De seguida, efetua o cálculo tendo em conta que os três algarismos têm de ser diferentes e apresenta a resposta correta.

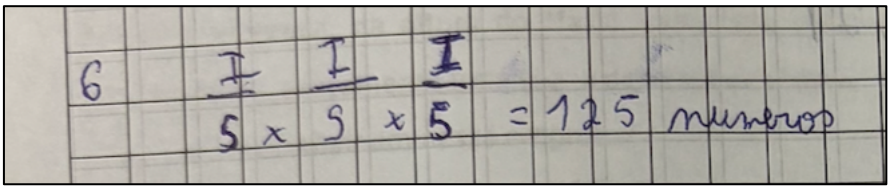


Figura 73: Resolução apresentada pelo aluno Rogério à questão 6 do teste 1

Na sua resolução, Rogério mostra que compreendeu que para o produto ser ímpar temos de ter três algarismos ímpares (que representa através da letra I), no entanto, comete um **erro de repetição**, considerando que os algarismos podem ser iguais quando, na verdade, não podem.

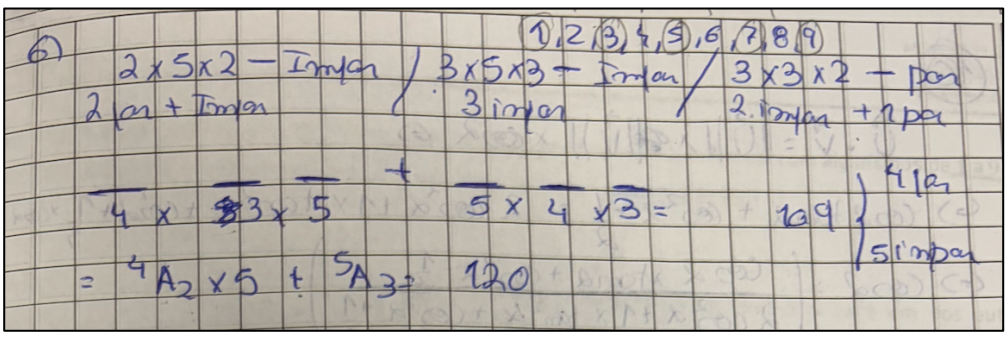


Figura 74: Resolução apresentada pelo aluno Zé à questão 6 do teste 1

Zé começa por testar as diferentes possibilidades: um dos algarismos ser ímpar, dois serem ímpares e serem todos ímpares, no entanto ao fazer $2 \times 5 \times 2$ que dá 20 o aluno escreve ímpar. Ao fazer isto acaba por considerar um caso a mais, apresentando um resultado superior ao esperado.

Passando agora ao segundo teste, neste caso os alunos tinham de responder a quatro itens relacionados com o tema Contagem. Um desses itens era uma questão de escolha múltipla e o outro era um item de associação, esses dois itens não serão discutidos neste relatório pois a maioria dos alunos apenas respondeu com as opções, não sendo possível analisar qual terá sido o seu raciocínio ou as dificuldades que enfrentaram na sua resolução.

Em relação à questão 4, 15,8% dos alunos não responderam, 68,4% usaram uma representação **simbólica** e os restantes 15,8% recorreram a uma representação **visual**.

Nas Figuras 75 e 76 encontram-se as resoluções apresentadas pelas alunas Bianca e Filipa, respetivamente.

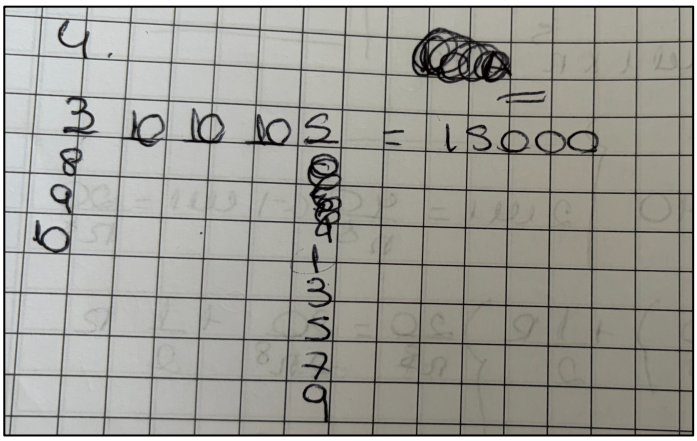


Figura 75: Resolução apresentada pela aluna Bianca à questão 4 do teste 2

Na sua resolução Bianca comete um pequeno erro, mas que compromete toda a resolução. Esse erro foi considerar que 10 é um algarismo, fazendo com que houvesse três opções para o primeiro algarismo, consequentemente obtendo um número de possibilidades mais elevado do que o suposto.

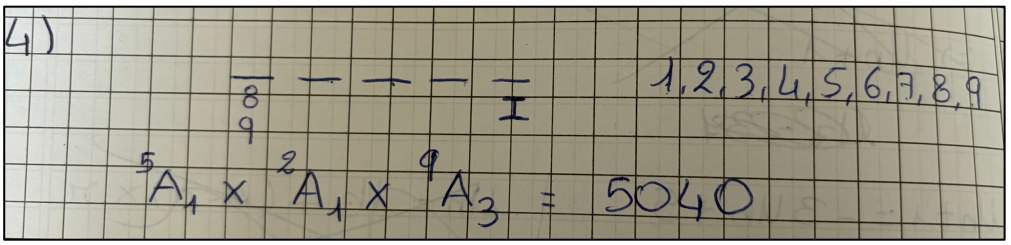


Figura 76: Resolução apresentada pela aluna Filipa à questão 4

No caso da Filipa, a aluna considera erradamente que os restantes três algarismos têm de ser distintos e usa os arranjos simples, fazendo $^9A_3$, quando deveria ter usado os arranjos completos para considerar todas as possibilidades que cumprem os requisitos do enunciado.

No que toca à questão 10, todos os alunos recorreram a uma representação simbólica. Ainda assim, nenhum dos alunos conseguiu alcançar o resultado pretendido, nas Figuras 77, 78 e 79, apresentam-se as resoluções dos alunos Ana (Figura 77 e 78) e Zé (Figura 79), que foram aqueles que estiveram mais perto de conseguir chegar ao resultado pretendido.

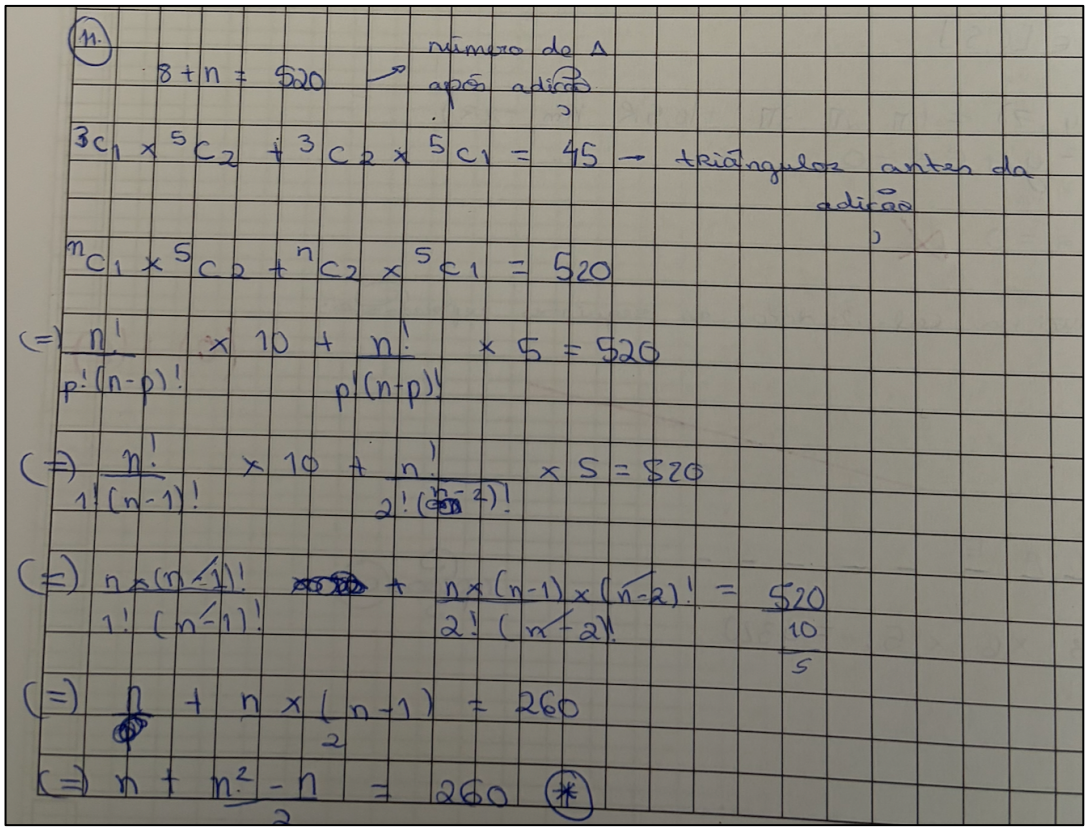


Figura 77: Primeira parte da resolução apresentada pela aluna Ana à questão 11 do teste 2

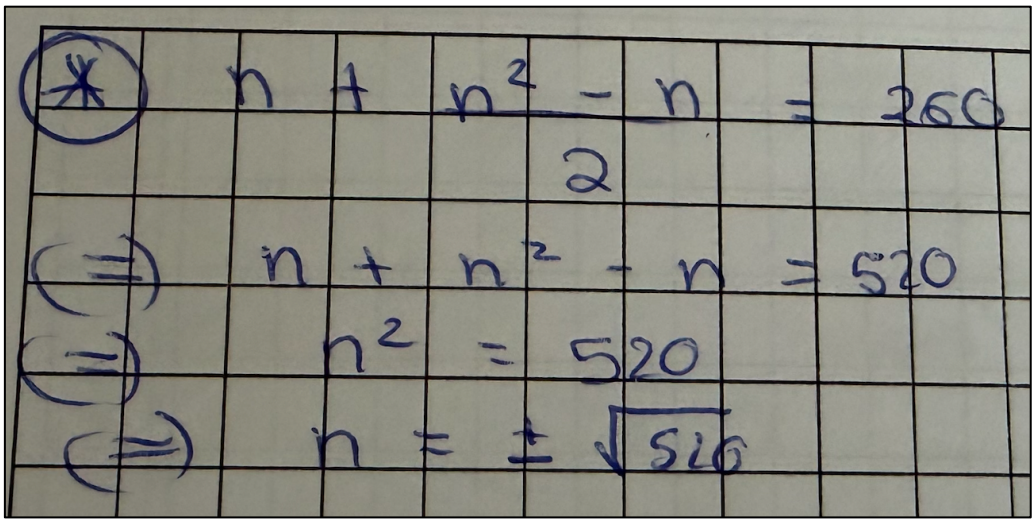


Figura 78: Segunda parte da resolução apresentada pela aluna Ana à questão 11 do teste 2

Olhando para a resolução apresentada pela Ana é possível ver que esta aluna escreve ${}^{n}C_1 \times {}^{5}C_2 + {}^{n}C_2 \times {}^{5}C_1 = 520$, o que não está totalmente correto visto que n é o número de pontos adicionados à reta logo, onde está n deveria estar $n + 3$. No entanto isto não seria impedimento para chegar ao resultado correto pois, caso a aluna não tivesse cometido mais nenhum erro poderia chegar ao final e dizer que o número de triângulos adicionados era $valor\ obtido - 3$. Na Figura 78 é possível observar qual foi o outro erro que a aluna cometeu, não colocou toda a expressão com o mesmo denominador, obtendo $n + n^2 - n = 520$ quando deveria ter obtido $2n + n^2 - n = 520$.

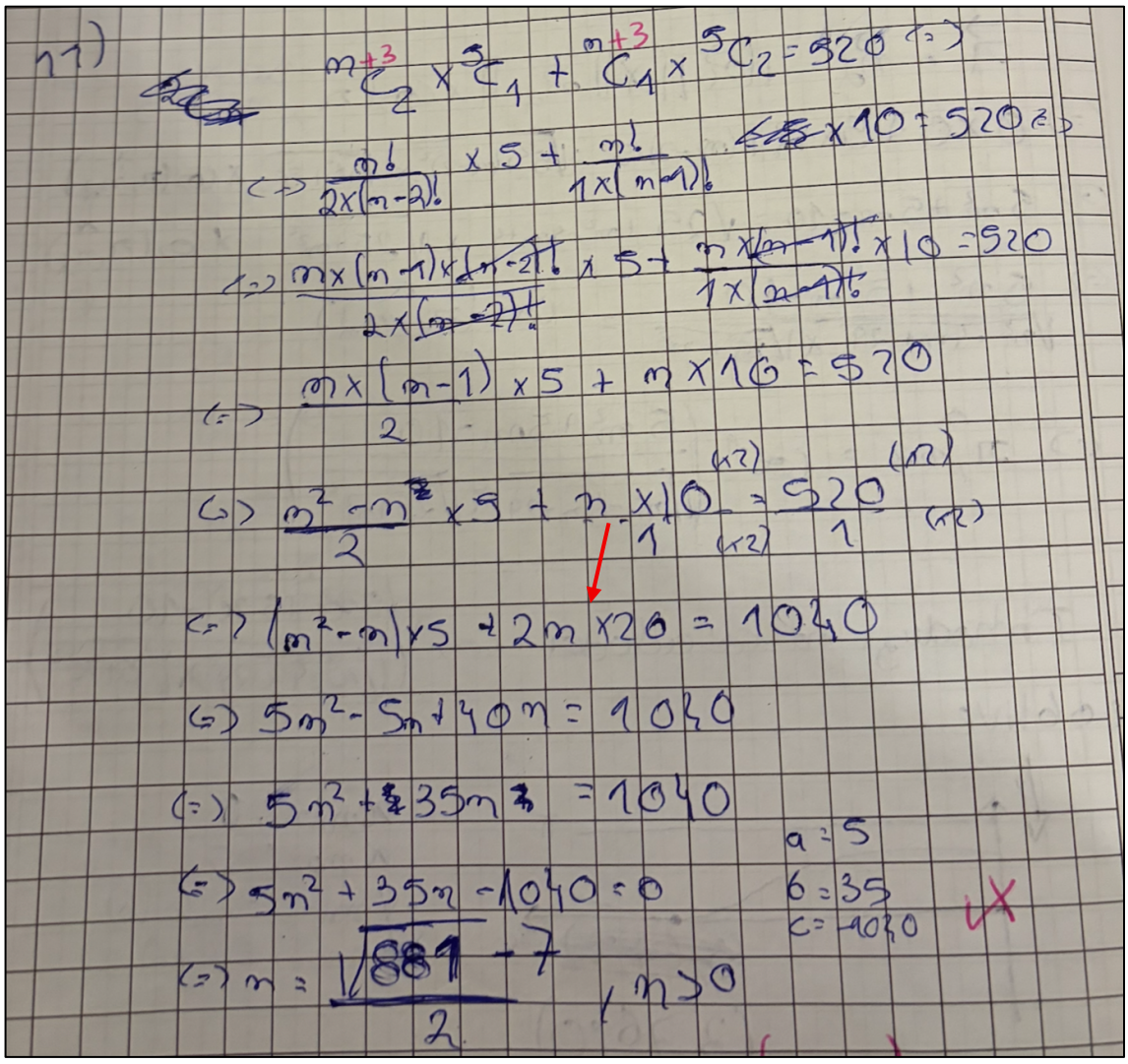


Figura 79: Resolução apresentada pelo aluno Zé à questão 11 do teste 2

Zé comete erros muito semelhantes à aluna Ana, começando logo com a mesma expressão, que como já falei não está correta, mas, se não houvesse mais nenhum erro, permitiria na mesma alcançar o resultado pretendido. Para ser mais fácil compreender qual o erro cometido por este aluno, adicionei uma seta vermelha na Figura 73. Analisando com atenção, é possível perceber que o aluno assume que $n \times 10 \times 2 = 2n \times 20$. Esta igualdade implicaria multiplicar o fator 10 por 2 duas vezes, uma vez ao calcular 10×2 e outra ao substituir $n \times 10 \times 2$ por $2n \times 20$. De facto, $n \times 10 \times 2 = 20n$, enquanto $2n \times 20 = 40n$. Como $20n \neq 40n$, as duas expressões não são equivalentes. O erro parece resultar de uma aplicação incorreta da propriedade distributiva. Importa recordar que a propriedade distributiva estabelece que a multiplicação pode ser distribuída relativamente a uma adição ou subtração e não relativamente a outra multiplicação. Neste caso, todos os fatores já se encontram a ser multiplicados entre si,

pelo que apenas é possível alterar a ordem ou a associação dos fatores (propriedades comutativa e associativa da multiplicação), sem modificar o seu valor. Afinal, a propriedade se chama propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, não em relação à multiplicação. Se não fosse este pequeno erro, o aluno teria alcançado a solução pretendida, teria apenas de retirar 3 ao valor obtido.

À semelhança do 4.º momento, as dificuldades dos alunos ficaram muito mais acentuadas agora que apenas podiam trabalhar de forma individual. Certos erros que surgiram, como considerar que 10 é um algarismo, são erros que provavelmente não teriam acontecido se a sua resolução fosse em grupo pois algum elemento ter-se-ia apercebido e falado sobre. Apesar de tudo, considero que a realização da ficha global antes da realização do primeiro teste foi uma mais-valia pois os alunos conseguiram perceber onde estavam as suas maiores dificuldades e trabalhar para as conseguir colmatar, fazendo de uma forma geral, um melhor trabalho nos testes do que aquele que fizeram na ficha global.

Em **síntese**, os resultados obtidos neste momento sugerem que a maioria dos alunos consolidou os principais conceitos abordados durante a intervenção, embora persistam algumas dificuldades relacionadas com a interpretação de situações combinatórias mais complexas e com a seleção da estratégia de resolução mais adequada. De uma forma geral, observou-se uma evolução na organização dos processos de contagem, na utilização das representações e na justificação das estratégias adotadas, indiciando um desenvolvimento progressivo do pensamento combinatório ao longo da intervenção pedagógica.

5.6. Perceção dos estudantes

Para concluir a intervenção pedagógica, decidi selecionar um grupo de cinco alunos da turma-alvo para responderem a um conjunto de questões que elaborei, com o objetivo de compreender a perspetiva de quem participou na intervenção. Esta entrevista decorreu no dia 7 de maio de 2026.

Gostaria de ter tido a oportunidade de falar com todos os estudantes. No entanto, devido a algumas limitações em termos de *timing* e logística, tive de optar por escolher apenas um pequeno grupo para responder às minhas questões.

A seleção dos alunos a serem entrevistados foi realizada após analisar as resoluções de todas os momentos da intervenção pedagógica. Os alunos foram escolhidos com base no seu desempenho nas diferentes fichas, tendo tido em conta os diferentes níveis de desempenho que constam no Quadro 7, para além disso tive em conta que certos

alunos não gostam de falar em público (embora não fosse um público muito grande), e, portanto, fiz questão de escolher apenas estudantes que sabia que estariam confortáveis em ser entrevistados.

Nível 1	Alunos que evidenciaram um desenvolvimento menos consistente do pensamento combinatório ao longo da intervenção.
Nível 2	Alunos que evidenciaram uma evolução progressiva do pensamento combinatório ao longo da intervenção.
Nível 3	Alunos que evidenciaram um pensamento combinatório consistente ao longo de toda a intervenção.
Nível 4	Alunos que evidenciaram dificuldades persistentes no desenvolvimento do pensamento combinatório.

Quadro 7: Níveis de desempenho dos alunos na intervenção pedagógica

Os alunos selecionados foram: Bianca e Hugo, Filipa, Francisca e Zé.

Foram colocadas quatro questões aos alunos, relacionadas com a sua opinião sobre a unidade, a sua preferência de representações a usar na resolução de problemas de contagem, as suas maiores dificuldades na resolução destes problemas e a sua preferência relativamente ao tipo de trabalho (em grupo ou individual).

A primeira questão foi relacionada com a unidade em si, questionei então os alunos sobre **o que acharam do tópico Contagem**. Quando elaborei as questões pensei que os alunos teriam um feedback positivo em relação a este tópico, já que se mostravam muito mais participativos comparando com outros tópicos lecionados neste ano letivo, por exemplo a Trigonometria. As respostas obtidas foram de acordo com aquilo que imaginei, destaco assim a resposta dada pela aluna Bianca

> *Bianca: Eu achei bastante interessante porque gostaria de saber como se calcula certas coisas como as placas dos automóveis foi uma cena que eu sempre quis saber como...como é que existem assim tantas e serviu para esse tipo de coisas que eu queria saber.*

Após a resposta da Bianca, os restantes alunos entrevistados assentiram com a cabeça, em sinal de concordância. Acho que este tópico é realmente um dos que desperta maior curiosidade dos alunos, até porque muitas das vezes, envolve problemas de contexto real ou mesmo semirreal (Ponte, 2005), que normalmente são aqueles que os alunos preferem.

Na segunda questão, quis saber **se os alunos compreendiam melhor as tarefas e as resolviam com menos dificuldades quando trabalhavam em grupo ou individualmente**. Tendo estado presente nos dois tipos de momentos, os alunos manifestavam consideravelmente menos dificuldades nas tarefas em grupo, e não requeriam tanto a minha ajuda ou as minhas indicações como nas tarefas individuais. Nesta questão os alunos deram respostas bastante semelhantes, mas destaco aqui as respostas dadas pelos alunos Francisca e Hugo.

> *Francisca: Eu acho que o facto de ser em grupo acaba por ter outra dinâmica né porque complementamos as ideias uns dos outros e depois chegamos a um consenso e é uma maneira mais, como é que eu hei de dizer.... dif... é tipo diferente de dar a matéria, acabamos por entender melhor.*

> *Hugo: Eu concordo e queria adicionar que, se houver certas partes que eu não consegui entender, mas que a Bianca que era do meu grupo por exemplo, conseguiu perceber melhor... eu percebi uma parte, ela percebeu a outra dá para a gente complementar as ideias um do outro e dá para fazer o exercício que de outra maneira a gente não conseguia fazer... assim ajuda.*

No caso da resposta da Francisca, a aluna acaba por abordar, sem saber, a aprendizagem através da resolução de problemas, mencionando que é uma forma diferente de dar a matéria e que, desta forma, acabam por entender melhor. Já o Hugo dá um exemplo em que fala da sua colega de grupo, Bianca, e a ideia que passa é que por vezes até tinham dúvidas, mas ao juntar as suas ideias com os outros elementos do grupo acabavam por conseguir resolver as questões.

Relativamente à terceira questão, queria saber **a que tipo de representações é que os alunos preferiam recorrer quando resolviam os problemas** das diferentes tarefas.

> *Zé: A resolver os exercícios eu normalmente fazia aqueles tracinhos, para saber quantas, por exemplo quantas casas ou quantas cadeiras ia precisar de pessoas para sentar-se.*

> *Bianca: Eu acho que é muito melhor imagens porque como o Hugo sabe nós no nosso grupo tentamos fazer diagramas, mas nunca chegamos lá, era muito complicado fazer os diagramas porque nós nem conseguimos perceber o que estamos a fazer. Com a imagem dá para organizar melhor as nossas ideias.*

Estas respostas estão em concordância com aquilo que foi analisado ao longo deste capítulo visto que, mesmo quando os alunos usavam representações mais simbólicas nas suas respostas, os alunos desenhavam na mesma os tracinhos, talvez para os ajudar a visualizar melhor o problema. Relativamente ao que a Bianca refere, o grupo dela tentou várias vezes recorrer a diagramas de árvore, no entanto era quase sempre em situações em que não fazia sentido a sua utilização, ora isto fez com que este grupo ficasse com a impressão de que este tipo de representação é difícil de usar, o que nem sempre é o caso (vimos neste capítulo alguns exemplos de utilizações adequadas destes diagramas).

Agora em relação à última questão, estava interessada em saber **quais as dificuldades que os alunos mais sentiam e ainda sentem na resolução de problemas deste tópico**. Mais uma vez as respostas dos alunos verificaram aquilo que eu tinha reparado e discutido ao longo deste capítulo, destaco então as respostas dadas pelos alunos Zé, Filipa e Hugo.

> *Zé: É por exemplo, uma das maiores dificuldades que tive é quando há casos repetidos e eu esqueço-me de tirar as repetições.*
>
> *Filipa: Eu acho que é a entender o que é que é pedido tipo se é para arranjos, permutações, combinações, essa parte que é mais....*
>
> *Hugo: Pelo menos para mim, é a parte da interpretação do problema... eu já sou mau a interpretar coisas, e então aquilo pede outro nível de interpretação e eu às vezes tou a pensar que tá a pedir uma coisa e tá a pedir outra porque eu interpretei mal o problema.*

Estas três respostas incluem três das principais dificuldades que foram sendo destacadas nas diferentes resoluções dos alunos. O Zé fala na repetição de casos (**erro de repetição**), que acontecia muitas vezes quando os alunos usavam arranjos em questões onde deveriam usar combinações. O Hugo por outro lado fala na dificuldade de **interpretação do problema**, algo que também observamos em diversas resoluções dos alunos. A resposta da Filipa acaba por ir ao encontro à resposta do Zé pois menciona **confundir os diferentes conceitos**, permutações, arranjos e combinações, mas vai também de encontro à resposta do Hugo pois o facto não entender o que deve utilizar numa certa questão pode estar diretamente relacionado com dificuldades na interpretação dos enunciados dos problemas.

Em suma, estas entrevistas com os alunos permitiram perceber as suas perceções relativamente aos diferentes tópicos que eu pretendia estudar com esta investigação.

Mostrou ainda que estes alunos têm consciência do trabalho que desenvolveram ao longo da unidade e são capazes de identificar as dificuldades que sentiram nos diferentes momentos.

5.7. Considerações finais

A análise realizada ao longo deste capítulo permite identificar uma estreita relação entre as quatro dimensões que sustentaram a intervenção pedagógica. A resolução de problemas constituiu o contexto em que os alunos mobilizaram diferentes estratégias de contagem e foi também a abordagem adotada ao longo de toda a intervenção; as representações funcionaram como possibilidade de organização, comunicação e validação do raciocínio; a aprendizagem cooperativa favoreceu a discussão das estratégias e a reformulação das soluções; e a articulação destes elementos criou condições para o desenvolvimento progressivo do pensamento combinatório. Assim, os dados analisados apontam que estas dimensões se influenciaram mutuamente ao longo da intervenção, contribuindo para uma compreensão progressivamente mais estruturada dos conceitos de Contagem.

6. Conclusões e recomendações

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões tendo por base os dados que foram expostos e analisados no capítulo anterior.

Antes de discutir as conclusões retiradas, vou apresentar uma pequena síntese de todo o estudo realizado, incluindo os diversos momentos que compuseram a intervenção pedagógica, e recordar os objetivos que pretendia atingir e as questões às quais pretendia obter uma resposta.

Serão apresentadas três subsecções, cada uma correspondente a uma das questões orientadoras da investigação. Posteriormente será também apresentada uma breve reflexão sobre o estudo, abordando algumas das limitações encontradas durante o seu desenvolvimento e fornecendo algumas recomendações para futuros trabalhos no mesmo tema.

O presente estudo foi baseado numa intervenção pedagógica realizada numa turma de 11.º ano de escolaridade, que decorreu ao longo de cinco momentos. Estes cinco momentos incidiram na resolução de tarefas envolvendo os diferentes conceitos subjacentes ao tópico Contagem. Após a conclusão destes cinco momentos, procedeu-se a uma entrevista semiestruturada com cinco estudantes, com o objetivo de perceber as perceções dos estudantes relativamente ao trabalho desenvolvido.

Este estudo pretendeu alcançar o objetivo geral – analisar o contributo do ensino através da Resolução de Problemas para a aprendizagem dos conceitos de Contagem – começando por dar resposta às três questões orientadoras apresentadas no capítulo Introdução:

1. A que representações é que os alunos recorrem na resolução de problemas de contagem?
2. Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas de contagem?
3. De que forma o recurso a estratégias de aprendizagem cooperativa, no ensino através da resolução de problemas, contribui para a aprendizagem dos conceitos de contagem?

Para dar resposta a estas questões e, consequentemente, ao objetivo geral, utilizei diferentes procedimentos de recolha de dados, nomeadamente a recolha das produções escritas dos alunos, a observação direta em contexto de sala de aula e a gravação de áudio (na entrevista).

De seguida procedi à análise dos dados recolhidos, tendo em conta os objetivos específicos associados a cada uma das questões orientadoras (Quadro 2). Com as produções escritas, pude analisar as diferentes representações usadas pelos alunos, identificar os erros mais frequentes e as dificuldades que dão origem a esses erros (na resolução de problemas de contagem). Para além disso, aliando as produções escritas com a observação direta pude analisar como é que os alunos trabalham em grupo na resolução deste tipo de problemas.

Este estudo foi concebido a partir da articulação de quatro dimensões consideradas complementares: **o ensino através da Resolução de Problemas**, enquanto abordagem metodológica; **as representações matemáticas**, enquanto meios de organização e comunicação do pensamento; **a aprendizagem cooperativa**, enquanto modalidade de organização pedagógica; **e o desenvolvimento do pensamento combinatório**, entendido como objeto central de aprendizagem. Assim, a interpretação dos resultados apresentados nas secções seguintes relativas a cada uma das questões orientadoras procura compreender o modo como a interação entre estas dimensões contribuiu para a aprendizagem dos conceitos de Contagem.

6.1. Representações a que os alunos recorrem

De modo a dar resposta à primeira questão orientadora, *A que representações é que os alunos recorrem na resolução de problemas de Contagem?*, estabeleci apenas um objetivo específico – analisar as diferentes representações usadas pelos alunos na resolução de problemas de contagem. Este processo de análise passou por, numa primeira fase, identificar essas representações e, posteriormente, analisá-las.

Para a identificação dos tipos de representação utilizados pelos alunos, considerei os seguintes tipos: **simbólica**, **visual**, **verbal**, **contextual** e **física** (Lesh et al., 1987).

Relativamente às representações **contextuais**, foram as únicas que não foram utilizadas por nenhum aluno em nenhuma das diferentes tarefas.

No caso das representações **físicas**, alguns alunos recorreram ao uso de objetos para os auxiliar na resposta a determinadas questões, embora tenham sido poucos os casos em que tal aconteceu. Como exemplo desta representação vimos que numa das questões da Tarefa sobre os princípios gerais da contagem, que envolvia moedas, alguns alunos utilizaram moedas que tinham consigo para observar os diferentes casos possíveis, desenhando depois os resultados obtidos. Um motivo para os alunos não recorrerem tanto a este tipo de representação pode ser o facto de, em muitas das

questões, os alunos não terem à sua disposição os objetos que necessitariam para poderem dar resposta à questão.

Passando para as representações **verbais**, estas foram usadas algumas vezes na primeira tarefa, visto que para alguns alunos, foi a única forma que conseguiram arranjar para responder a certas questões. Para além dessas situações, os alunos só recorreram a este tipo de representação quando tal era pedido pelo enunciado, por exemplo nas questões em que era solicitado que fizessem uma pequena composição. Um possível motivo para os alunos não recorrerem mais vezes a este tipo de representação pode ser o facto de alguns deles, sentirem que não conseguem explicar por palavras aquilo em que estão a pensar, preferindo apresentar um cálculo incompleto a um conjunto de duas a três frases a explicitar o seu raciocínio.

Quanto às representações **visuais**, em certos tipos de questões os alunos nem hesitavam e recorriam imediatamente a um diagrama de árvore ou a uma tabela de dupla-entrada, por vezes até erradamente. Este tipo de questões envolvia números mais pequenos, o que fazia com que os alunos se sentissem confiantes para usar este tipo de representações e cometer menos erros. Em muitas resoluções analisadas, estavam presentes elementos visuais (mesmo em resoluções em que o tipo de representação predominante não era o visual), estes elementos eram, normalmente, os tracinhos, usados para representar por exemplo o número de letras de uma palavra ou número de lugares disponíveis para um grupo de pessoas se sentar.

Por fim, falando sobre as representações **simbólicas**, o seu uso foi sem dúvida predominante ao longo da grande maioria das questões. Os alunos sentem uma sensação de conforto na utilização das fórmulas que já conhecem e por vezes esse conforto leva-os pelo caminho errado. Ainda assim posso afirmar que não foram assim tantas as resoluções apresentadas que eram 100% simbólicas, muitas das vezes a simbologia matemática vinha acompanhada de algum tipo de desenho que os ajudasse a compreender o enunciado ou então de uma ou duas frases que justificassem as escolhas tomadas na resolução.

Os resultados sugerem ainda que a escolha das representações por parte dos alunos, esteve relacionada com as características das tarefas propostas e com o seu nível de compreensão dos diferentes conceitos. Nas situações em que o conjunto de resultados possíveis era reduzido, os alunos recorreram com maior frequência a representações visuais e físicas, que lhes permitiram organizar sistematicamente os casos possíveis. À medida que os problemas exigiam processos de contagem mais complexos, verificou-se uma utilização crescente de representações simbólicas, frequentemente articuladas

com esquemas ou pequenas justificações verbais. Estes resultados reforçam a ideia, discutida no enquadramento teórico, de que as representações desempenham uma função cognitiva na organização do pensamento matemático (Duval, 2006), constituindo instrumentos que apoiam a construção do pensamento combinatório.

6.2. As dificuldades que os alunos enfrentam

Para responder à segunda questão orientadora *Quais são as dificuldades que os alunos enfrentam na resolução de problemas de Contagem?*, estabeleci dois objetivos específicos – i) identificar os erros mais frequentes na resolução de problemas de Contagem, ii) identificar as dificuldades que dão origem a esses erros.

Para a identificação dos erros dos alunos e as dificuldades que os provocaram considerei o Quadro 1, onde são apresentadas as dificuldades típicas na resolução de problemas de Contagem, segundo Batanero et al. (1997). Essas dificuldades são: **enumeração não sistemática**, **uso incorreto do diagrama de árvore**, **erro de ordem**, **erro de repetição**, **confundir o tipo de objeto** e **interpretar erradamente o tipo de partição requerida**.

Foram ainda consideradas as dificuldades associadas às diferentes fases da resolução de problemas, embora não sejam exclusivas aos problemas de Contagem: compreender o problema, delinear um plano, executar o plano e verificar (Polya, 1995).

Nas questões mais iniciais, os erros mais comuns envolviam a utilização de certas representações incorretamente, não apenas o diagrama de árvore, mas também a tabela de dupla-entrada foi utilizada numa situação onde tal não fazia sentido.

Com o avançar das aulas e a introdução de novos conceitos, começaram a surgir resoluções com erros diferentes, uso de arranjos quando se deveria usar combinações (erro de ordem), considerar as permutações de elementos indistinguíveis (erro de repetição), ou até mesmo não considerar todas as possibilidades para um certo acontecimento (interpretar erradamente o tipo de partição requerida).

Estas dificuldades, juntamente com os erros que causam, podem ser indicadores de uma interpretação incorreta do enunciado ou que este não foi totalmente compreendido. Podem também indicar que os alunos não compreendem a diferença entre os diferentes conceitos e os motivos que deveriam levar à escolha de realizar um certo cálculo, em detrimento de outro.

Importa salientar que grande parte das dificuldades identificadas não parecem resultar apenas do desconhecimento das fórmulas combinatórias. Em diversos momentos da

intervenção observou-se que os erros estavam associados à interpretação do enunciado, à identificação das restrições impostas pelo problema e à escolha da estratégia de resolução mais adequada. Estes resultados sugerem que o desenvolvimento do pensamento combinatório depende muito da compreensão das relações entre os diferentes resultados possíveis e os processos de contagem mobilizados pelos alunos, mais do que da simples aplicação de expressões combinatórias, o que está de acordo com as perspetivas de Lockwood (2013) e do NCTM (2014), que defendem uma aprendizagem centrada na resolução de problemas, na construção de significados e na compreensão conceptual.

6.3. O contributo da aprendizagem cooperativa

De forma a responder à terceira questão orientadora *Qual é o contributo da aprendizagem cooperativa na resolução de problemas de Contagem?*, estabeleci um objetivo específico – analisar como é que os alunos trabalham em grupo na resolução de problemas de Contagem.

Como já foi referido, os primeiros três momentos desta intervenção pedagógica consistiram na realização de fichas de trabalho em grupos de três estudantes. Estes grupos, escolhidos por mim, permaneceram os mesmos ao longo dos três primeiros momentos da minha intervenção

Para perceber o contributo do trabalho cooperativo resolvi fazer uma comparação entre os momentos em que s alunos trabalharam em grupo (Momentos 1 a 3) e os momentos em que os alunos trabalharam individualmente (Momentos 4 e 5), tendo por base a recolha das produções escritas e as minhas observações na sala de aula.

A minha intenção era observar, não interferindo na dinâmica dos grupos, como é que os alunos trabalhariam uns com os outros, verificar se ocorriam situações de dependência ou de individualismo e como reagiriam em situações de discórdia entre elementos.

Aquilo que observei foi sem dúvida muito positivo. Ainda assim, havia situações em que notava certos alunos a não contribuir da mesma forma (dependência) que os restantes elementos do grupo, nesses casos tomava nota na minha grelha de observação e, se visse que a situação continuava igual, alertava o aluno para os seus deveres para com o grupo (respeito, contribuição, entre outros).

Além disso observei também uma ou outra situação em que dois elementos do grupo discutiam entre eles como resolver certa questão, mas não faziam um esforço para

envolver o terceiro elemento, que geralmente era o elemento do grupo com pior classificação na disciplina. Nesses casos chamei à atenção os alunos e relembrei que o objetivo destas tarefas era que todos os elementos do grupo dessem a sua contribuição, certa ou errada, muita ou pouca.

Fora esses momentos, que foram poucos tendo em conta o panorama geral, fiquei muito satisfeita com o modo como os alunos se auxiliaram uns aos outros, aproveitando os pontos fortes de cada um, para alcançar as respostas às questões.

Comparando então com os momentos de trabalho individuais, foi possível perceber que nesta transição houve um grande aumento nas dificuldades observadas, mas tal seria de esperar pois esta transição coincidiu com o momento em que começou a haver uma maior mistura de conceitos. Foi notório que os alunos sentiram a falta da componente de diálogo que dispunham quando trabalhavam uns com os outros, inclusive os próprios verbalizaram isto em conversa comigo em diversos momentos, incluindo na entrevista realizada após a intervenção pedagógica.

Os dados recolhidos mostram que a aprendizagem cooperativa teve um papel muito importante na forma como os alunos abordaram os problemas de Contagem, indo de encontro à perspetiva de que a resolução de problemas constitui um contexto privilegiado para a construção do conhecimento matemático, sobretudo quando assenta na interação e na discussão entre os alunos (Cai & Lester, 2012; NCTM, 2014). As discussões desenvolvidas no interior dos grupos permitiram confrontar diferentes interpretações do problema, justificar o uso de certos procedimentos e analisar criticamente as estratégias utilizadas, confirmando que a interação e a responsabilidade partilhada favorecem a construção do conhecimento e a aprendizagem entre pares (Johnson & Johnson, 2009; Lopes & Silva, 2009). Este processo revelou-se principalmente importante quando surgiam dificuldades relacionadas com a enumeração dos casos possíveis ou com a escolha da estratégia de resolução, uma vez que o diálogo entre os alunos favoreceu a revisão de raciocínios e a construção de soluções mais consistentes.

Na análise dos dados há ainda um aspeto muito interessante que merece ser valorizado e mencionado: não foi apenas o facto de os alunos trabalharem em grupo que fez a diferença; mas a qualidade das interações matemáticas que se estabeleceram entre eles. Estes resultados são consistentes com a perspetiva de Cosme (2009), segundo a qual a aprendizagem decorre de processos de interlocução qualificada, nos quais o conhecimento se constrói através da mediação, por parte do professor, e da interação entre os participantes. Nesta perspetiva, a aprendizagem cooperativa favoreceu a

construção partilhada de significados matemáticos, permitindo que os alunos explicitassem, confrontassem e reorganizassem os seus raciocínios ao longo da resolução dos problemas, num processo alinhado com princípios da aprendizagem cooperativa descritos no enquadramento teórico. Tal alinha-se ainda com o que orienta o NCTM (2014), quando defende a promoção de ambientes de aprendizagem em que a comunicação matemática, a argumentação e a discussão de estratégias constituem dimensões centrais da aprendizagem da Matemática. Deste modo, o trabalho cooperativo constituiu-se um contexto propício ao desenvolvimento do pensamento combinatório, ao promover a reflexão em grupo sobre os processos de Contagem e as diferentes formas de representar e organizar os resultados possíveis, aspeto que se revela consistente com o modelo de Lockwood (2013), no qual a construção do conjunto de resultados possíveis e a articulação entre representações, processos de contagem e expressões combinatórias constituem dimensões centrais do pensamento combinatório.

6.4. Limitações e recomendações

Entrando agora na última secção deste capítulo, vou abordar algumas das limitações que encontrei durante a resolução do estudo, e algumas que só me apercebi ao refletir após a sua realização. Também irei discutir algumas recomendações para futuros trabalhos que sejam desenvolvidos neste tema.

Tendo em conta que esta é a primeira vez que desenvolvo um trabalho de investigação, houve alguns pormenores que não correram de acordo com aquilo que seria o expectável ou que posteriormente percebi que poderiam ter sido planeados de forma diferente. Estes pormenores podem vir a ser melhorados numa futura investigação ou então implementados na minha prática letiva.

Entrando em mais detalhe posso mencionar que se repetisse agora o estudo, teria optado por ir trocando os grupos nos três primeiros momentos em vez de manter sempre os mesmos. Acho que dessa forma poderiam surgir estratégias mais diversificadas ou até mesmo resoluções inesperadas, fruto do trabalho com colegas diferentes. Isso também faria com que os alunos não pudessem tomar uma atitude mais passiva por já conhecerem a dinâmica do grupo, e tivessem de permanecer ativos e participativos ao longo de todas as aulas.

Considero também que as diferentes questões da tarefa 1 poderiam ter sido mais equilibradas em termos de grau de dificuldade, de forma que os alunos que iniciassem a tarefa com uma questão mais complicada, não se sentissem injustiçados face aos que

iniciaram com uma questão mais simples. Relembro, no entanto, que os alunos poderiam solicitar outra questão a qualquer momento e que poderiam realizá-las pela ordem que quisessem, portanto, o eventual atraso que alguns grupos sofreram não foi unicamente causado pela dificuldade das questões.

Algo que gostaria de acrescentar à minha intervenção, se alguma vez a repetisse, era fazer a gravação (áudio) dos momentos de discussão ou exploração coletiva. Na altura optei por não o fazer por receio de que alguns dos alunos se pudessem sentir intimidados e com vergonha de partilhar as suas opiniões. No entanto, refletindo sobre o assunto, acho que era algo a que eles se habituariam rapidamente e poderia trazer informações muito interessantes sobre aquilo que se passava na sala de aula, complementando as minhas observações.

Relativamente a este tema, existem algumas questões, que considero que seriam muito interessantes para ser respondidas em futuras investigações:

- → De que forma pode o professor influenciar o tipo de representações a que os alunos recorrem na resolução de problemas (de Contagem)?
- → De que forma é que o professor pode garantir que todos os elementos do grupo participam ativamente no processo de elaborar e apresentar uma resposta aos problemas?
- → Que relação existe entre as dificuldades que os alunos sentem na resolução de problemas de Contagem e o tipo de representação que estes optam por usar?

E assim faço aqui uma última reflexão, esta agora sobre a minha experiência ao longo deste ano letivo. Foi um ano muito trabalhoso e com muitos momentos de frustração, mas posso dizer que a conclusão deste trabalho me deixou com uma sensação de dever cumprido como nunca senti antes. Foi um dos melhores anos da minha vida e sou muito grata a todos que fizeram parte deste caminho!

Referências bibliográficas

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

Baptista, I. (Coord.), Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. da C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética* (2ª ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://www.spce.org.pt/assets/files/CARTA-TICA2.EDICAOFINAL-2020-COMPACTADO.pdf

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Implicitmodel.pdf

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio d'Água.

Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? *Boletim GEPEM, 60*, 147-162. https://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.008

Canavarro, A. P., Brunheira, L., Vicente, M., & Brito, S. (2022). O poder das representações múltiplas e suas conexões: Teoria e prática no 3.º ano do novo programa de matemática. *Educação e Matemática, 166,* 7-12. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2828

Carvalho, B. (2009). *O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didático de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória*. [Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho, Braga, Portugal]. Repositório aberto da Universidade do Minho. https://repositorium.uminho.pt/server/api/core/bitstreams/fe5c2e65-f89d-4da9-b828-9c4c854a6c58/content

Carvalho e Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Matemática A, 10.º ano*. Departamento do Ensino Secundário, Ministério de Educação.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho,C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais, Matemática A, 11º ano*. Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_11_-_vf.pdf

Cohen, G., & Lotan, R. (2017). *Planejando o trabalho em grupo: Estratégias para salas de aula heterogéneas*. Penso.

Cosme, A. (2009). *Ser professor: A ação docente como uma ação de interlocução qualificada.* LivPsic.

Cosme, A., Lima, L., Ferreira, D., & Ferreira, N. (2021). *Metodologias, métodos e situações de aprendizagem: Propostas e estratégias de ação.* Porto Editora.

Douglas, J. D. (1976). *Investigative social research: Individual and team field research.* Sage.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. *https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z*

Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *6*(1),15-36. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0601_2

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktitk der Mathematik, 5*, 193-198. https://www.researchgate.net/publication/313479701_The_combinatorial_solving_capacity_in_children_and_adolescents

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). Routledge.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. *Educational Researcher, 38,* 365-379. https://doi.org/10.3102/0013189X09339057

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

Lima, L. S. (2020). *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Intencionalidades, Ações e Reflexões dos Docentes*. [Tese de Doutoramento, Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Porto]. Repositório Aberto da Universidade do Porto. https://hdl.handle.net/10216/128008

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 307-322. https://www.researchgate.net/publication/251311698_Student_connections_among_counting_problems_An_exploration_using_actor-oriented_transfer

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 251-265. https://www.researchgate.net/publication/257239019_A_model_of_students'_combinatorial_thinking

Lopes, J., Silva, H. (2009). *A aprendizagem cooperativa na sala de aula. Um guia prático para o professor*. Lidel.

Lucchesi, I. L., Lima, V. M., & Gessinger, R. (2012). A autonomia de estudantes e o ensino de Matemática. *Repositório Institucional PUCRS, 20*(37), 73-90. http://hdl.handle.net/10923/8837

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática A: 11.º ano.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf

Moran, J. (2018). Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. Penso.

Mota B., & Ferreira R. (2018). Comunicando aprendizagens em análise combinatória. *Educação e Matemática, 149-150,* 39-44. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2525

Mota, B., & Ferreira, R. (2016). A reinvenção guiada na aprendizagem das operações combinatórias. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Livro de*

Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática – Recursos na educação matemática (pp. 273-287). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2016.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2000). *Princípios e normas para a matemática escolar.* APM.

NCTM. (2014). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.

Oliveira Martins, G. (Coord.), Sousa Gomes, C. A., Leitão Brocardo, J. M., Predoso, J. V., Acosta Carrillo, J. L., Ucha Silva, L. M., Guerreiro Alves da Encarnação, M. M., Vale Costa Horta, M. J., Carmo Soares Calçada, M. T., Vieira Nery, R. F., & Cordeiro Valente Rodrigues, S. M. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação/Direcção-Geral da Educação (DGE).https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas – Um novo aspecto do método matemático*. Interciência.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org). *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM

Reis, S. (2024). *As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões.* [Relatório de estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto] https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.pub_view?pi_pub_base_id=703693&__cf_chl_f_tk=DXfrrB6Wi1hmbTG_ChbsAP2NFzVYiTKxpVP1HWUKh.E-1782993225-1.0.1.1-q_tV667pTW.yXQlgplyiqNUFZUGhGtOL39Yps8YVRE0

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton, & A. P. Shulte (Orgs.), *New directions for elementary*

school mathematics (pp. 31-42). NCTM. https://pt.scribd.com/document/483895127/Schroeder-Lester-1989-Developing-Understanding-Mathematics-Problem-Solving

Silva, D., Fernandes, J., & Soares, A. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 61-84. Centro de Investigação em Educação. https://repositorium.uminho.pt/server/api/core/bitstreams/bcc322b8-1dd2-4f46-9d16-adc89a998ac9/content

Skovsmose, O (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática, 14*, 66-91. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022

Sriraman, B., & English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: research into practice. *Mathematics Teacher, 98*(3), 31-37. https://www.researchgate.net/publication/347051442_Connecting_Research_to_Teaching_Combinatorial_Mathematics_Research_into_Practice

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 117-133. https://www.researchgate.net/publication/250725755_Children's_representation_and_structural_development_of_the_counting_sequence_1-100

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445. DOI: 10.5951/MTMS.13.8.0438

Trivinos, A. N. S. (1987). *Introdução à pesquisa em ciências sociais: A pesquisa qualitativa em educação*. Atlas.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa]. APM.

Valadão, M., Amado, N., Ponte, J. P. (2022). O poder das representações matemáticas na resolução de problemas de contagem. *Educação e Matemática, 166,* 79-81. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2840

Velez, I., Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2016). Ações do professor e atividade dos alunos. Trabalhando com representações. In M. H. Martinho., R. A. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 439-453. APM. https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2016_Porto_ATAS_XXVII_SIEM.pdf

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110–113. https://www.researchgate.net/publication/46700368_Beneath_the_Tip_of_the_Iceberg_Using_Representations_to_Support_Student_Understanding

Apêndices

Apêndice 1: Consentimento informado

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Consentimento informado

No âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionado (PES) do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da FCUP, eu, Carolina Neves dos Santos Queirós irei desenvolver um trabalho de investigação sobre as estratégias informais usadas pelos alunos no processo de aprendizagem da contagem, a realizar na escola do(a) seu(sua) educando(a) [redacted].

No decorrer da prática pedagógica poderão ser recolhidos diversos tipos de dados, nomeadamente registos escritos dos alunos, respostas a questionários, observações em aula e/ou registos de áudio em entrevistas. Caso existam eventuais alterações ao protocolo da investigação, receberão essa informação via e-mail.

Todos os dados recolhidos ao longo da prática pedagógica serão usados para fins exclusivamente pedagógicos e de investigação educativa, sendo tratados de forma anónima e confidencial. Não existem quaisquer riscos associados à participação do(a) seu(sua) educando(a) neste trabalho de investigação e nunca serão divulgadas informações que permitam identificar individualmente os participantes.

Apesar de voluntária, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste estudo é fundamental para a concretização e validade deste estudo, contribuindo de forma significativa para a compreensão das diferentes estratégias usadas pelos alunos na aprendizagem da contagem.

Ainda assim, pode não autorizar a participação do(a) seu(sua) educando(a) ou retirar o seu consentimento a qualquer momento, sem qualquer prejuízo para o educando. A recolha e o tratamento de dados cumprem as disposições do Regulamento Europeu de Proteção de dados Pessoais, EU, n.º 2016/678 de 27 abril 2016 e da legislação portuguesa em vigor.

Para questões, esclarecimentos e/ou informações sobre os resultados da investigação pode contactar:

[redacted](Estudante Estagiária Carolina Queirós)

Assinatura da Estudante Estagiária: _____

✂ ----------

Eu,_____, encarregado(a) de educação de_____,n.º____da turma _____, compreendo a informação que me foi fornecida. Declaro que

☐ Autorizo ☐ Não autorizo

a participação do meu educando no estudo.

Data: __/__/__

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação: _____

Apêndice 2: Assentimento informado

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Assentimento informado

No âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionado (PES) do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da FCUP, eu, Carolina Neves dos Santos Queirós estou a desenvolver um trabalho de investigação sobre as estratégias informais usadas pelos alunos no processo de aprendizagem da contagem.

No decorrer da prática pedagógica poderão ser recolhidos alguns materiais como registos escritos, respostas a questionários, gravações áudio de entrevistas e/ou outros momentos de diálogo.

Todos os dados recolhidos ao longo da prática pedagógica serão usados para fins exclusivamente pedagógicos e de investigação educativa garantindo o teu anonimato e confidencialidade. Garanto também que não há qualquer risco ligado à tua participação neste estudo.

A tua participação no estudo é voluntária, no entanto, devo salientar que é fundamental em termos de contributos para a investigação deste tema. Ainda assim, mesmo após assinares o assentimento, se assim o desejares, podes a qualquer momento retirá-lo sem qualquer tipo de prejuízo. A recolha e o tratamento de dados cumprem as disposições do Regulamento Europeu de Proteção de dados Pessoais, EU, n.º 2016/678 de 27 abril 2016 e da legislação portuguesa em vigor.

Para questões, esclarecimentos e/ou informações sobre os resultados da investigação podes contactar:

[redacted](Estudante Estagiária Carolina Queirós)

Assinatura da Estudante Estagiária: _____

✂ ----------

Eu,_____,n.º____ da turma _____, compreendo a informação que me foi fornecida. Declaro que

☐ Participo ☐ Não participo

no estudo.

Data:__/__/__

Assinatura do(a) estudante: _____

Apêndice 3: Plano de aula 1.º momento

PLANO DE AULA (Aulas 84 e 85, 12/01/2026)

TEMA

Matemática discreta

TÓPICOS E SUBTÓPICOS

Contagem

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Conhecer e aplicar os princípios da adição e da multiplicação em problemas de contagem
- Usar diferentes formas de representação, nomeadamente diagramas em árvore e tabelas, em problemas de contagem

IDEIAS CHAVE

- Tarefas e recursos educativos
- Raciocínio e lógica matemática
- História da Matemática



ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DO ALUNO

A - Linguagens e textos
C - Raciocínio e resolução de problemas
D - Pensamento crítico e pensamento criativo
I - Saber científico, técnico e tecnológico



SUMÁRIO

Resolução de uma tarefa: introdução ao tópico "Contagem. Princípios gerais da contagem".
Princípios gerais da contagem: cardinal de um conjunto, princípio da adição e princípio da multiplicação.

RECURSOS

- Manual "Espiral 11" (Volume "Matemática discreta")
- Computador
- Calculadora Gráfica
- Tarefa (distribuída em tiras)

AVALIAÇÃO FORMATIVA

Os alunos serão avaliados ao longo da aula com base nos seguintes parâmetros: cumprimento de regras, colaboração com os colegas de grupo, envolvimento na tarefa, participação na discussão e realização das questões de consolidação (se for possível).

11.º Ano • Matemática A

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Tempo previsto	Etapa da aula
5 minutos	Introdução • Abertura da lição. • Explicação do que será feito ao longo da aula e organização das mesas para trabalhar em grupo
70 minutos	Trabalho autónomo • Distribuição da primeira questão a cada grupo (tentar que grupos próximos não estejam a realizar a mesma tarefa em simultâneo). • Conforme forem terminando as questões, ir atribuindo as próximas.
10 minutos	Discussão sobre as resoluções • Sortear grupos para irem ao quadro explicar as suas resoluções (se não houver voluntários) • Usar as diferentes questões para consolidar conceitos como o Princípio da Adição, Princípio da Multiplicação e Princípio do Pombal. • Concluir esta discussão na próxima aula.
5 minutos	Conclusão • Escrita do sumário.

GRUPOS

Estes são os grupos nos quais os alunos vão trabalhar ao longo das próximas aulas
Grupo 1: [redacted]
Grupo 2: [redacted]
Grupo 3: [redacted]
Grupo 4: [redacted]
Grupo 5: [redacted]
Grupo 6: [redacted]
Grupo 7: [redacted]

RESOLUÇÕES ESPERADAS

Questão 1

Portugal: $26^4 \times 10^2 = 45697600$
Espanha: $10^4 \times 26^3 = 175760000$
Como $175760000 > 45697600$ confirma-se que o sistema de matrículas espanhol tem maior durabilidade que o português.

Questão 2

2.1.

Moeda 1/ Moeda 2	Cara	Coroa
Cara	(Cara, Cara)	(Cara, Coroa)
Coroa	(Cara, Coroa)	(Coroa, Coroa)

É possível obter 4 resultados diferentes.

2.2.
$2 \times 2 \times 2 = 8$
É possível obter 8 acontecimentos diferentes.

Questão 3

3.1.
$2 \times 4 \times 2 \times 3 = 48$
Cada semana de aulas possui 5 dias, ou seja, existem *outfits* suficientes para não ter de repetir durante 9 semanas e 3 dias.

3.2.
Com gravata: $2 \times 4 \times 2 = 16$
Sem gravata: $2 \times 4 \times 2 \times 3 = 48$
Existiriam $16 + 48 = 64$ possibilidades de *outfit*.

RESOLUÇÕES ESPERADAS

Questão 4

4.1.
No pior dos casos, em seis lançamentos sairiam seis números diferentes. Assim sendo, no sétimo lançamento é garantido que saia um número repetido.

4.2.
No pior dos casos, temos 14 pessoas das quais nasceram apenas duas em cada dia da semana (duas na segunda, duas na terça...). Assim sendo, se tivermos 15 pessoas é garantido que três delas tenham nascido no mesmo dia da semana.

Questão 5

$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4096$
Podem ser formados 4096 códigos distintos.

Questão 6

6.1.
$7^7 = 823543$
É possível formar 823543 passwords.

6.2.
$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
É possível formar 5040 passwords.

6.3.
$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$
É possível formar 2520 passwords.

Questão 7

$6 \times 5 \times 4 = 120$
Existem 120 formas diferentes de atribuir as três medalhas.

Questão 8

8.1.
$3 \times 2 \times 3 = 18$
Existem 18 formas distintas de ir de A para D.

8.2.
$3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 = 324$
Existem 324 formas distintas de ir de A para D para A.

8.3.
$3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 72$
Existem 72 formas distintas de ir de A para D para A sem repetir estradas.

DIFICULDADES ESPERADAS

Como esta aula irá ocorrer antes de os alunos aprenderem os conceitos de Princípio da Adição, Princípio da Multiplicação e Princípio do Pombal, poderão surgir algumas dúvidas sobre como responder às questões.
Acredito também que não saberão muito bem como podem justificar as suas respostas nos casos como o lançamento das moedas. Neste caso, incentivar os alunos a fazerem esquemas/ desenhos para explicarem os seus raciocínios, mas sem validar as respostas deles.

Apêndice 4: Plano de aula 2.º momento

PLANO DE AULA (Aulas 93 e 94, 22/01/2026)

TEMA

Matemática discreta

TÓPICOS E SUBTÓPICOS

Contagem: Permutações com repetição

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar permutações com repetição, sendo capaz de distinguir estas das permutações simples, arranjos simples e arranjos completos.

IDEIAS CHAVE

- Tarefas e recursos educativos
- Raciocínio e lógica matemática
- Resolução de problemas, modelação e conexões



ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DO ALUNO

A - Linguagens e textos
C - Raciocínio e resolução de problemas
D - Pensamento crítico e pensamento criativo
I - Saber científico, técnico e tecnológico



SUMÁRIO

Resolução de uma tarefa usando o conceito de "Permutações com repetição".

RECURSOS

- Manual "Espiral 11" (Volume "Matemática discreta")
- Computador
- Calculadora Gráfica
- Tarefa "Permutações com repetição"

GRUPOS

Estes são os grupos nos quais os alunos têm vindo a trabalhar ao longo das últimas aulas.

Grupo 1: [redacted]
Grupo 2: [redacted]
Grupo 3: [redacted]
Grupo 4: [redacted]
Grupo 5: [redacted]
Grupo 6: [redacted]
Grupo 7: [redacted]

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Tempo previsto	Etapa da aula
30 minutos	Introdução/Motivação • Abertura da lição. • Introdução do problema "Quantas palavras com ou sem sentido podemos formar usando as letras da palavra RUI?" • Outros exemplos: ANA, LARA, ARARA... (ou outras sugestões dos alunos) • Deduzir a fórmula das permutações com repetição a partir das contribuições dos alunos.
50 minutos	Trabalho autónomo • Organizar as mesas para o trabalho em grupo. • Distribuir da tarefa pelos grupos. • Circular pela sala e esclarecer dúvidas que possam surgir.
20 minutos	Correção da tarefa • Sortear alunos para irem ao quadro corrigir as diversas questões. • Incentivar que os grupos que tenham resoluções distintas as partilhem também. • Escrever o sumário e arrumar a sala.

RESOLUÇÕES ESPERADAS

Aqui é possível ver as resoluções que acredito que irão surgir e algumas dificuldades que imagino que os alunos possam sentir enquanto realizam a tarefa.

Questão 1

5 toalhas no total
2 vermelhas repetidas
2 brancas repetidas
Por aplicação da fórmula temos: $\frac{5!}{2!\times 2!} = 30$ maneiras diferentes de organizar o conjunto das toalhas.

Nesta questão acredito que não vão surgir dúvidas, alguns alunos até poderão fazer a lista com os 30 casos visto não serem assim tantos, especialmente tendo em conta que estão a resolver em grupos de 3.

Questão 2

Consideramos 3 blocos, o bloco com as toalhas brancas, o bloco com as toalhas vermelhas e o bloco com a toalha preta.
Vamos permutar os 3 blocos entre si e obtemos 3!= 6 maneiras distintas.

Mais uma vez, por serem poucos casos, os alunos que não se lembrem de usar a fórmula podem optar por fazer a enumeração de todos os casos então penso que não surgirão dúvidas.

Questão 3

A partir do momento em que se escolhe a cor dos extremos, tudo o resto fica automaticamente definido, assim sendo temos

Resolução I errada pois usa a subtração.
Resolução II certa pois retira as permutações dividindo-as.
Muitas possibilidades de resposta nesta questão.

Questão 4
Nesta questão imagino que os alunos vão ter bastantes dificuldades em exprimir por palavras suas aquilo que pensam.

Apêndice 5: Plano de aula 3.º momento

PLANO DE AULA (Aulas 96 e 97, 26/01/2026)

TEMA

Matemática discreta

TÓPICOS E SUBTÓPICOS

Contagem: Combinações

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Identificar combinações como forma de saber o número de subconjuntos com p elementos de um dado conjunto com n elementos $(p \leq n)$.

IDEIAS CHAVE

- Tarefas e recursos educativos
- Raciocínio e lógica matemática
- História da Matemática



ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DO ALUNO

A - Linguagens e textos
C - Raciocínio e resolução de problemas
D - Pensamento crítico e pensamento criativo
I - Saber científico, técnico e tecnológico



SUMÁRIO

Introdução ao tópico "Combinações".
Resolução de uma tarefa utilizando o conceito de "Combinação".

RECURSOS

- Manual "Espiral 11" (Volume "Matemática discreta")
- Computador
- Calculadora Gráfica
- Tarefa (em anexo)
- Questões de consolidação

AVALIAÇÃO FORMATIVA

Os alunos serão avaliados ao longo da aula com base nos seguintes parâmetros: cumprimento de regras, colaboração com os colegas de grupo, envolvimento na tarefa, participação na discussão e realização das questões de consolidação (se for possível).

11.º Ano • Matemática A

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Tempo previsto	Etapa da aula
10 minutos	Introdução (Contextualização da aula). • Abertura da lição. • Explicação do que será feito ao longo da aula e como os alunos serão avaliados, mostrar a grelha de observação construída para esta aula.
10 minutos	Motivação (Apresentação de uma situação-problema sobre formação de grupos) • Introduzir o problema: "Existem 5 seguranças diferentes (Ana, Bruno, Carla, David, Eduardo) que trabalham numa discoteca, em cada noite tem de haver 3 seguranças a trabalhar, quantos grupos de trabalho diferentes podemos fazer com os 5 seguranças?". • Sugerir a utilização do ChatGPT para resolver esta questão (eventualmente levar a conversa já pronta para não haver falhas técnicas). Inserir o *PROMPT* inicial "faz uma lista com todas as sequências de 3 letras formadas pelas letras A, B, C, D e E"- deixar que os alunos percebam que este *PROMPT* não nos ajuda a chegar à resposta que queremos, porque vai formar grupos do tipo AAA ou ABA, o que não faz sentido no problema.
15 minutos	Conceito (Explicação do conceito de combinação e comparação com os arranjos simples) • Inserir um segundo *PROMPT* (de preferência com a sugestão dos alunos), no qual pedimos que não haja repetição de letras. Observar a nova lista e esperar que os alunos entendam que vamos ter casos repetidos, por exemplo, ABC e CBA. Se os alunos estiverem com dificuldades e não entenderem que há casos repetidos escrever no quadro "Ana, Bruno e Carla" e "Bruno, Ana e Carla" e questionar se são grupos diferentes. • Projetar a lista com as 60 possibilidades e pedir voluntários para irem riscar as opções repetidas. No fim deste processo teremos 10 opções diferentes.
15 minutos	Fórmula (Dedução e explicação da fórmula das combinações de n elementos p a p) • Deduzir a fórmula das combinações de n elementos, p a p, a partir da fórmula dos arranjos simples de n elementos p a p. Mencionar que as combinações correspondem aos arranjos quando lhes tiramos a ordem (por isso dividimos por $p!$). • Mostrar aos alunos como podemos calcular o número de combinações de n elementos, p a p, usando as calculadoras TI-Nspire e CasiofxCG50. • Pedir aos alunos para organizar as mesas da sala para a realização da tarefa em grupo.
25 minutos	Atividade em grupo (Proposta de problemas contextualizados) • Propor a realização de uma tarefa (em anexo) com questões sobre contagem incluindo o conceito abordado nesta aula. • Entregar a tarefa aos grupos (ver listagem dos grupos na secção GRUPOS) e explicar que terão, no máximo, 25 minutos para a realizar e que posteriormente serão escolhidos alunos para explicar as suas resoluções à turma. • Circular pela sala e esclarecer dúvidas que vão surgindo ao longo da realização da tarefa, tendo o cuidado de não validar as suas respostas e não diminuir o nível cognitivo das questões. • Se algum aluno/grupo terminar a tarefa antes da apresentação sugerir que tentem resolver por outro processo. Nota: Caso algum aluno termine esta tarefa antes do tempo, propor a tarefa de consolidação.
25 minutos	Correção da tarefa em grupo (Correção e discussão das resoluções) • Dar início à apresentação das resoluções dos grupos (tentar que venham resoluções diferentes ao quadro).
-	Tarefa de consolidação • Se sobrar tempo, propor as questões de consolidação para fazerem em contexto de sala de aula. Caso contrário ficará para trabalho extra-aula.

GRUPOS

Estes são os grupos nos quais os alunos têm vindo a trabalhar ao longo das últimas aulas.
Grupo 1: [redacted]
Grupo 2: [redacted]
Grupo 3: [redacted]
Grupo 4: [redacted]
Grupo 5: [redacted]
Grupo 6: [redacted]
Grupo 7: [redacted]

RESOLUÇÕES ESPERADAS

Aqui é possível ver as resoluções que acredito que irão surgir e algumas dificuldades que imagino que os alunos possam sentir enquanto realizam a tarefa.

Questão 1

Presidente e Vice-presidente e Tesoureiro

$$36 \times 35 \times 34 = {}^{36}A_3 = 4284$$

Os cargos não podem ser desempenhados pela mesma pessoa então usamos os arranjos simples para saber o número de formas que podemos eleger 3 pessoas dos 36 sócios.

Acho que nesta primeira questão não surgirão muitas dúvidas pois os alunos já estão bastante familiarizados com o conceito de arranjos simples e conseguem distinguir quais as situações em que os devem usar.

Questão 2

Os 2 elementos têm de ser escolhidas dos 33 sócios restantes. Como o trabalho é dividido equitativamente não importa a ordem em que são escolhidos então usamos combinações.

$${}^{33}C_2 = 528$$

Temos 528 maneiras distintas de escolher os dois elementos da comissão.

Inicialmente os alunos poderão questionar-se se efetivamente estão perante uma situação em que têm de recorrer às combinações visto que conheceram este conceito pela primeira vez nesta aula. Acredito que discutindo as ideias em grupo alcançam o pretendido. Se não o conseguirem fazer, fazer questões do tipo "Existe alguma diferença entre os cargos dos 2 elementos da comissão? A ordem pela qual são escolhidos os elementos tem alguma importância?"

Questão 3

Para esta questão temos de considerar três casos distintos: o caso em que temos 5 mulheres, 4 mulheres e 1 homem e 3 mulheres e 2 homens. Vamos somar o número de possibilidades para cada caso:
${}^{20}C_5 + {}^{20}C_4 \times {}^{16}C_1 + {}^{20}C_3 \times {}^{16}C_2 = 229824$ formas de escolher a comissão.

Aqui o que pesno que pode acontecer é os alunos esquecerem-se de algum caso, ou então interpretarem a questão erradamente e pensarem que é obrigatório ter algum homem, não contabilizando o caso de serem escolhidas 5 mulheres.

Questão 4

Vamos ter apenas 11 pessoas a participar no torneio, o que significa que 25 sócios ficarão de fora.
5 homens ${}^{16}C_5$
3 homens e 3 mulheres ${}^{16-5}C_3 \times {}^{20}C_3$
Então temos ${}^{16}C_5 \times {}^{16-5}C_3 \times {}^{20}C_3 = 821620800$ maneiras de fazer as equipas

Nesta questão antecipo que os alunos vão ter várias dúvidas. A parte de como escolher cada equipa acho que vão entender, podendo eventualmente esquecer-se de ir reduzindo o valor do n nas combinações consoante vão estando escolhidos os sócios. Imagino que também terão alguma dificuldade em perceber que devem fazer o produto de todas as combinações e não a soma.

TAREFA DE CONSOLIDAÇÃO | TRABALHO EXTRA-AULA

Lista de tarefas do manual que será sugerida aos alunos após terminarem a tarefa em grupos:

- Pág. 28: 45 e 46
- Pág. 29: 48
- Pág. 30: 52
- Pág. 31: 53
- Pág. 36: 16 e 19

O que não conseguirem terminar em contexto de sala de aula ficará para realizar em trabalho extra-aula.

Apêndice 6: Conjunto de questões sobre os princípios gerais da Contagem

Questão 1

Em Portugal, as matrículas são constituídas por um par de letras, seguido de um par de algarismos, seguido de outro par de letras.

Em Espanha, as matrículas são constituídas por um conjunto de 4 algarismos, seguidos de um conjunto de 3 letras.

Comenta a afirmação: "O sistema de matrículas espanhol tem maior durabilidade que o sistema de matrículas português".

Nota: Considera que podem ser utilizadas em qualquer posição as 26 letras e os 10 algarismos.

Questão 2

2.1. Supõe que lanças duas moedas, uma moeda de cinquenta cêntimos e outra de um euro e observas as faces que ficam voltadas para cima. Quantos resultados diferentes consegues obter? Descreve-os.

2.2. E se lançares três moedas de um euro? Quantos resultados diferentes consegues obter?

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 3

O uniforme de uma certa escola é composto por: um casaco, uma camisola, umas calças e uma gravata. Os alunos dispõem de 2 opções para casaco, 4 opções para camisola, 2 opções de calças e 3 opções para gravata.

3.1. Durante quantas semanas um aluno dessa escola consegue usar *outfits* diferentes?

3.2. Caso não fosse obrigatório o uso da gravata, quantas possibiidades de *outfit* existiriam?

Questão 4

4.1. Qual é o número mínimo de lançamentos de um dado cúbico para se ter a certeza que o mesmo número vai sair duas vezes?

4.2. Qual é o número mínimo de pessoas para se ter a certeza que 3 nasceram no mesmo dia da semana?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 5

A Maria quer criar um código para o seu telemóvel formado por 4 algarismos. Para isso vai lançar um dado octaédrico, pontuado de 1 a 8 e observar o número de pontos da face que ficar voltada para cima. O 1.º lançamento define o 1.º dígito, o 2.º lançamento o 2.º dígito e assim sucessivamente. Quantos códigos distintos podem ser formados por este processo?

Questão 6

Considera as letras da palavra SIMPLEX. Quantas passwords é possível formar:

6.1. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, podendo ou não letras repetirem-se?

6.2. com as 7 letras da palavra SIMPLEX, se for necessário usar todas as letras exatamente uma vez?

6.3. com apenas 5 letras diferentes da palavra SIMPLEX?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 7

Numa final olímpica de 100 metros participaram seis atletas. De quantas formas distintas poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata ou bronze?

Adaptada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Questão 8

O esquema da figura 1 representa quatro locais: A, B, C e D. Existem três estradas que ligam A a B, duas que ligam B a C e três que ligam C a D.

8.1. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D?

8.2. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A?

8.3. De quantas formas diferentes podemos ir de A para D e depois voltar para A, sem repetir estradas?



Figura 1

Retirada de Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano)

Apêndice 7: Ficha de trabalho sobre as permutações com repetição

Nome: _____**Grupo:**_____**N.º:**_____

Observações:

Considera um conjunto de toalhas composto por 2 toalhas brancas, 2 toalhas vermelhas e uma toalha preta.

1) De quantas maneiras diferentes podes organizar o conjunto de toalhas em fila sem qualquer restrição? Justifica a tua resposta.

2) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se as toalhas com a mesma cor tiverem de ficar juntas? Justifica a tua resposta.

3) Quantas filas distintas de toalhas consegues formar se nos extremos estiverem toalhas com a mesma cor e não puder haver 2 toalhas adjacentes com cores iguais? Justifica a tua resposta.

4) Cada conjunto de toalhas vem identificado com um código, neste caso o conjunto tinha o código $5K2KK37$

O gerente da loja das toalhas propôs um desafio a dois dos seus funcionários que gostam muito de matemática. Quem acertasse o número de códigos distintos que é possível formar com os mesmos elementos deste código receberia toalhas gratuitas durante 1 ano.

Aqui estão as resoluções dos 2 funcionários:

Resolução 1	Resolução 2
$7! - 3!$	$\frac{7!}{3!}$

Explica qual terá sido o raciocínio de cada um e porque é que o raciocínio está certo ou errado.

Apêndice 8: Ficha de trabalho sobre as combinações

Nome: _____**Grupo:**_____**N.º:**_____

Observações:

Um clube de jogadores de *trivia* tem 36 sócios, sendo 20 mulheres e 16 homens.

1) Para uma melhor organização dos assuntos do clube, os sócios decidiram eleger 3 pessoas para desempenhar 3 cargos diretivos durante um ano: presidente, vice-presidente e tesoureiro. De quantas formas pode ser feita esta escolha? Justifica a tua resposta.

2) Na época dos torneios, os 3 elementos da direção estavam muito assoberbados com a quantidade de trabalho e tomaram a decisão de escolher uma comissão composta por 2 elementos, onde os 2 dividiriam, de forma equitativa o trabalho para auxiliar o presidente, o vice-presidente e o tesoureiro, nas suas funções. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 2 elementos desta comissão? Justifica a tua resposta.

3) No ano seguinte, terminado o mandato do presidente, do vice-presidente e do tesoureiro, decidiram fazer a gestão do clube de uma forma diferente. A equipa diretiva passará a ser constituída por 5 elementos, que vão dividir de forma equitativa o trabalho entre si, e terá mais mulheres do que homens. Infelizmente o número de sócios manteve-se inalterado, pois não houve novas inscrições de associados. De quantas formas pode ser escolhida esta nova comissão? Justifica a tua resposta.

4) O clube inscreveu-se num torneio de verão, onde ocorrem, em simultâneo, vários *quizzes* de *trivia* sobre diferentes temas, por isso a comissão precisa de selecionar várias equipas para participar nos diferentes *quizzes*. Considera que, para a inscrição ser válida, o clube precisa de levar:

- uma equipa composta por 5 homens;
- uma equipa composta por 3 homens e 3 mulheres.

Quantas sócios não vão participar no torneio? De quantas maneiras pode ser feita a seleção destas equipas? Justifica a tua resposta.

Bom trabalho!

Apêndice 9: Ficha global

Nome: _____ **N.º** _____

Observações:

1. Escreve uma expressão que dê o número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra CONFINAMENTO, que começam em N e terminam em A.

Adaptado de Teste SPM 2021

2. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas. Considera o problema seguinte: "Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas. De quantas maneiras diferentes se podem sentar os jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?"

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

Resposta I) $^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) $^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$

Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

Retirado de Exame- 2013, 2.ª fase

3. Dos alunos de uma escola, sabe-se que a décima parte dos alunos tem computador portátil.

Admita que essa escola tem 210 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

Adaptado de Exame- 2010, 1.ª fase

4. Considera, no plano, os cinco pontos representados na figura 1. Quantos polígonos se podem formar com vértices em pontos da figura?



Figura 1

Retirado de Banco de Questões 12.º ano Ulisboa

5. Numa campanha de angariação de fundos, uma turma de 11.º ano mandou estampar camisolas para vender na escola. As cores das camisolas são: azul, amarelo, cor-de-rosa, laranja, verde ou preto. Três amigos, a Maria, a Inês e o Miguel, vão comprar uma camisola cada um. De quantas formas diferentes podem escolher as cores das três camisolas se:

5.1. Não se importarem de ter camisolas da mesma cor?

5.2. Os três quiserem camisolas de cores diferentes?

5.3. Um deles, e só um, escolher a camisola preta?

Retirado do site "Mentes Brilhantes"

6. A Matilde foi a uma festa, quando chegou a casa, a sua irmã Marta perguntou quantas pessoas tinham estado presentes. A Matilde respondeu: "Bem, não sei o número ao certo, mas sei que cada pessoa da festa brindou uma única vez com cada uma das outras. Eu ouvi 66 brindes!".
Quantas pessoas foram à festa?

7. Um grupo composto por cinco mulheres e seis homens vai viajar utilizando três veículos diferentes: uma carrinha de cinco lugares, um carro de quatro lugares e uma mota com dois lugares. Apenas quatro pessoas (duas mulheres e dois homens) sabem conduzir e um desses homens não tem carta de mota. De quantas maneiras podemos distribuir as pessoas pelos veículos? E se as mulheres forem todas no mesmo veículo?

Bom trabalho!

Apêndice 10: Avaliação sumativa com fins classificatórios

2. Qual das seguintes expressões representa uma expressão que dê o número de anagramas que se podem formar com as letras da palavra CALCULADORA a começar com um R a terminar com um A?

(A) $\frac{11!}{2!\times3!\times2!}$ **(B)** ${}^{9}C_{2}\times {}^{7}C_{2}\times {}^{5}C_{2}\times 3!$

(C) $\frac{9!}{2!\times3!\times2!}$ **(D)** ${}^{9}C_{6}\times 3!$

4. O código de acesso a um computador é composto por três vogais seguidas de quatro algarismos.

4.1. Quantos códigos diferentes existem?

4.2. Quantos códigos têm as letras todas iguais?

4.3. Quantos códigos satisfazem as seguintes condições:

- os algarismos são todos diferentes;
- a sequência numérica é maior do que 2000 e menor do que 5000;
- têm exatamente dois $\boldsymbol{a}$.

5. Considere a seguinte questão:

"De todos os números diferentes de cinco algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 *a* 9*, quantos deles têm exatamente dois algarismos* 5 *e não têm mais algarismos repetidos?"*

As duas expressões seguintes dão resposta à questão formulada

$${}^{5}C_{2}\times {}^{8}A_{3} \quad \text{e} \quad {}^{8}C_{3}\times {}^{5}A_{3}$$

Num pequeno texto explique cada uma das expressões no contexto descrito.

6. Considere todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com algarismos de 1 a 9.

Em quantos destes números o produto dos seus algarismos é um número ímpar?

7. Numa empresa, na altura do Natal, cada colaborador enviou uma mensagem a cada um dos outros colaboradores, exatamente uma vez, a desejar boas festas. No total foram enviadas 156 mensagens. Quantos colaboradores trabalham nessa empresa?

(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 17 **(D)** 18

9. Uma florista tem vinte e cinco rosas vermelhas e vinte rosas brancas e pretende fazer ramos com apenas quatro rosas. De quantas maneiras diferentes pode formar os ramos, sabendo que cada ramo deve conter rosas das duas cores?

(A) ${}^{25}C_{2}\times {}^{20}C_{2}$ **(B)** ${}^{45}C_{4}$

(C) ${}^{45}C_{4}-{}^{25}C_{4}-{}^{20}C_{4}$ **(D)** $\left({}^{25}C_{1}+{}^{20}C_{3}\right)\times\left({}^{25}C_{2}+{}^{20}C_{2}\right)\times\left({}^{25}C_{3}+{}^{20}C_{1}\right)$

4. Um código de cinco algarismos começa com um algarismo superior a 7 e termina com um algarismo ímpar.
Quantos códigos existem nestas condições?

9. Quantos anagramas diferentes da palavra CONTAGEM podem ser formados se as consoantes ficarem juntas?

(A) 40320 **(B)** 2880
(C) 4320 **(D)** 20880

10. Os alunos do 12.º ano de uma escola vão realizar a viagem de finalistas. Considere que, nessa viagem participarão os alunos de acordo com a informação que consta na Tabela 1.

Tabela 1

Turma A		**Turma B**		**Turma C**	
Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas	Rapazes	Raparigas
5	5	2	6	10	2

A comissão organizadora desta viagem solicitou, junto da companhia aérea, que o grupo de alunos ficasse em lugares e filas seguidos. Assim, as primeiras cinco filas do avião (identificadas com os números 1, 2, 3, 4 e 5), com seis lugares cada uma (identificados com as letras A, B, C, D, E e F) foram reservados para o grupo de alunos da escola. A Figura 3 representa os lugares e as filas reservados ao grupo de alunos.

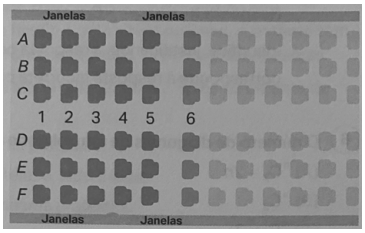


Figura 3

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço de acordo com as informações do enunciado.
Escreva, como resposta, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Durante o *check-in* no aeroporto serão atribuídos bilhetes a cada um dos alunos e cada bilhete será identificado com um código formado por seis algarismos.
Por exemplo, um código possível para um certo bilhete é 012399. ___**I**___ desses códigos têm exatamente quatro algarismos 3.
Quando todos os alunos entrarem no avião, vão sentar-se nos lugares reservados ao grupo de alunos daquela escola. Uma expressão que representa o número de maneiras diferentes de

todos os alunos se sentarem de modo que os alunos da turma C se sentem nas filas com um número par é ___**II**___ . Já o número de maneiras de todos os alunos se sentarem de modo que a Maria e a Sofia, alunas da turma C, fiquem uma ao lado da outra, do mesmo lado do corredor, juntamente com outra rapariga, pode ser dado pela expressão ___**III**___ .

À chegada ao aeroporto de destino, o grupo de alunos daquela escola vai colocar-se em fila para tirar uma fotografia. Uma expressão que representa o número de formas diferentes em que é possível dispor todos os alunos de modo que fiquem agrupados por turma e, no grupo da turma A, fiquem alternados por género, pode ser dada por ___**IV**___.

I	**II**	**III**	**IV**
a) $^{6}C_{4} \times 9^{2}$	**a)** $^{5}C_{2} \times 2! \times 8!$	**a)** $11 \times 2^{3} \times 5 \times 27!$	**a)** $12! \times 8! \times 2 \times (5!)^{2}$
b) $^{9}A_{2} \times {}^{6}A_{4}$	**b)** $12! \times 18!$	**b)** $11 \times 3! \times 2 \times 5 \times 27!$	**b)** $3! \times 12! \times 8!$
c) $^{9}A_{2} \times {}^{6}C_{4}$	**c)** $12! \times 2 \times 18!$	**c)** $11 \times 2^{3} \times 27!$	**c)** $3! \times 12! \times 8! \times 2 \times (5!)^{2}$

11. Na Figura 4 encontram-se representadas duas retas paralelas, r e s. Na reta r foram marcados três pontos (A, B e C) e na reta s foram marcados cinco pontos (D, E, F, G e H).

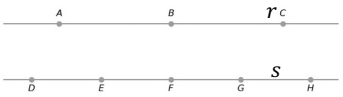


Figura 4

Foram acrescentados n pontos à reta r. O número de triângulos que é possível definir com os $8 + n$ pontos é 520. Determine o valor de n.