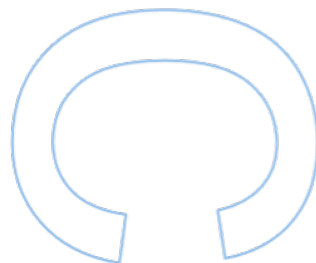
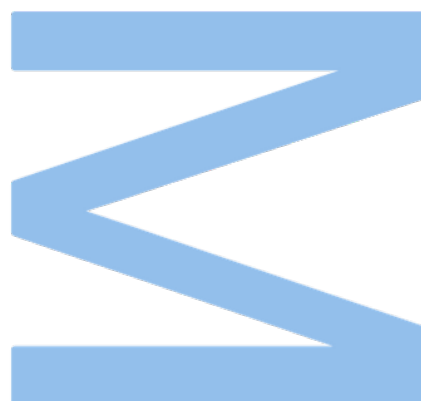


Marketing Mix Modeling: Uma Abordagem de Análítica Avançada para Otimização do Investimento em Marketing



Marta Filipa Lima Alves

Mestrado em Estatística Computacional e Análise de Dados

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026

Marketing Mix Modeling: Uma Abordagem de Analítica Avançada para Otimização do Investimento em Marketing

Marta Filipa Lima Alves

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Estatística Computacional e Análise de Dados

Departamento de Matemática

2026

Orientador

Joaquim Costa, Professor Associado, FCUP

Supervisor externo na Entidade de Acolhimento

André Batista, Head of Data & Analytics, Wise Pirates



Agradecimentos

A realização desta dissertação de estágio não teria sido possível sem o apoio, o incentivo e o contributo de várias pessoas, às quais quero deixar o meu sincero agradecimento.

Ao meu orientador, o Professor Doutor Joaquim Costa, agradeço toda a disponibilidade, orientação e rigor científico ao longo deste trabalho. As suas sugestões e o seu sentido crítico foram determinantes para o resultado final.

Ao meu supervisor, André Batista, agradeço o acompanhamento, a confiança depositada em mim e a constante disponibilidade ao longo de todo o percurso.

Agradeço também à Wise Pirates por me ter acolhido e proporcionado esta oportunidade, pela confiança depositada e por todos os ensinamentos que levo desta experiência.

Aos meus pais, Helena e João, e ao meu irmão, Duarte, agradeço o apoio incondicional, a paciência e o esforço durante todos estes anos para que pudesse ter o melhor percurso académico e pessoal possível. Devo-lhes, em grande parte, a pessoa que sou hoje.

Ao meu namorado, Julián, agradeço a paciência, o apoio constante e o ânimo nos momentos mais exigentes. A confiança nas minhas capacidades foi um suporte essencial ao longo desta etapa.

A todos, o meu mais sincero obrigada.

Resumo

A presente dissertação foi realizada no âmbito do estágio curricular do Mestrado em Estatística Computacional e Análise de Dados (MECAD) da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). O estágio decorreu na Wise Pirates, uma agência de marketing digital, e teve como foco a aplicação de modelos de *Marketing Mix Modeling* (MMM) que permitem quantificar o impacto dos diferentes canais de marketing sobre as vendas, identificar os canais com maior e menor retorno do investimento (ROAS) e apoiar as decisões de alocação do investimento publicitário.

Numa primeira fase, procedeu-se à preparação dos dados de vendas e de investimento em marketing, incluindo a imputação de valores em falta, a análise exploratória das variáveis e o tratamento de multicolinearidade. Seguiu-se a implementação dos modelos em duas ferramentas: o Robyn, desenvolvido pela Meta em R, de abordagem frequentista, e o Meridian, desenvolvido pela Google em Python, de abordagem bayesiana.

A modelação permitiu quantificar o contributo de cada canal e perceber como o ROAS varia consoante a abordagem adotada. No Meridian, a hierarquia de retorno revelou-se robusta às diferentes especificações, com o *Google Ads* a liderar ($\text{ROAS} \approx 3,2$) e a modelação do efeito *halo* a evidenciar que parte relevante do valor do *Meta Ads* decorre das sessões orgânicas que gera. No Robyn, as estimativas de ROAS são estruturalmente mais elevadas, refletindo sobretudo as menores vendas base atribuídas pelo modelo e não necessariamente maior eficiência dos canais, pelo que os valores absolutos das duas ferramentas não são diretamente comparáveis. Em ambas, as estimativas do *offline* mostraram-se as mais sensíveis às escolhas de modelação, dada a sua concentração nos períodos de *Black Friday* e Natal. A análise de otimização revelou que, dentro das restrições operacionais de cada canal, a alocação atual encontra-se próxima do ótimo, com um ganho máximo de apenas 1% de receita incremental sem variação do investimento total. Nesse pico comercial, todos os canais operam em zona de saturação, sendo defensável reduzir o investimento em cerca de 30% com uma perda de apenas 12% de receita incremental.

Este trabalho pretende estimar como a análise de dados e a estatística constituem ferramentas fundamentais no apoio à decisão em contexto real de negócio, permitindo transformar dados de marketing em informação útil. A aplicação de métodos estatísticos possibilita sustentar decisões estratégicas mais informadas e economicamente vantajosas, reforçando o papel da Estatística Computacional e da Análise de Dados como motor de eficiência e competitividade nas organizações.

Palavras-chave: Marketing Mix Modeling, ROAS, Robyn, Meridian, Estimação Bayesiana, Séries Temporais, Otimização do orçamento.

Abstract

This dissertation was carried out within the scope of the curricular internship of the Master's in Computational Statistics and Data Analysis (MECAD) at the Faculty of Sciences of the University of Porto (FCUP). The internship took place at Wise Pirates, a digital marketing agency, and focused on the application of Marketing Mix Modeling (MMM) models, which make it possible to quantify the impact of the different marketing channels on sales, identify the channels with the highest and lowest return on investment (ROAS) and support advertising budget allocation decisions.

In a first stage, the sales and marketing investment data were prepared, including the imputation of missing values, the exploratory analysis of the variables and the treatment of multicollinearity. This was followed by the implementation of the models in two tools: Robyn, developed by Meta in R, with a frequentist approach, and Meridian, developed by Google in Python, with a Bayesian approach.

The modelling made it possible to quantify the contribution of each channel and to understand how ROAS varies according to the approach adopted. In Meridian, the return hierarchy proved robust across the different specifications, with Google Ads leading ($ROAS \approx 3,2$) and the modelling of the halo effect showing that a relevant part of the value of Meta Ads stems from the organic sessions it generates. In Robyn, the ROAS estimates are structurally higher, reflecting above all the lower baseline sales attributed by the model and not necessarily greater channel efficiency, so that the absolute values of the two tools are not directly comparable. In both, the offline estimates proved to be the most sensitive to the modelling choices, given their concentration in the Black Friday and Christmas periods. The optimization analysis revealed that, within each channel's operational constraints, the current allocation is close to optimal, with a maximum gain of only 1% in incremental revenue without any variation in total investment. At this commercial peak, all channels operate in a saturation zone, making it defensible to reduce investment by around 30% with a loss of only 12% in incremental revenue.

This work aims to estimate how data analysis and statistics constitute fundamental tools in supporting decision-making in a real business context, making it possible to transform marketing data into useful information. The application of statistical methods makes it possible to underpin more informed and economically advantageous strategic decisions, reinforcing the role of Computational Statistics and Data Analysis as a driver of efficiency and competitiveness in organizations.

Keywords: Marketing Mix Modeling, ROAS, Robyn, Meridian, Bayesian Estimation, Time Series, Budget Optimization.

Índice

Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	viii
Lista de Abreviaturas	x
1 Introdução	1
2 Fundamentos Teóricos do Marketing Mix Modeling (MMM)	3
2.1 O que é o Marketing Mix Modeling (MMM)?	3
2.2 Triangulação: MMM, Atribuição e Incrementalidade	3
2.3 Transformações de marketing: <i>adstock</i> e saturação	4
2.4 Efeito <i>halo</i>	5
2.5 Abordagem frequentista vs Abordagem bayesiana	5
2.6 Robyn	6
2.6.1 Decomposição da série temporal com Prophet	6
2.6.2 Transformações: <i>adstock</i> e saturação	9
2.6.3 Regressão <i>ridge</i>	11
2.6.4 Otimização de hiperparâmetros e seleção do modelo	13
2.6.5 Calibração	15
2.7 Meridian	16
2.7.1 Especificação do modelo	16
2.7.2 A Função HillAdstock: combinação de <i>adstock</i> e saturação	17
2.7.3 Decomposição da série temporal	20
2.7.4 Inferência bayesiana e Amostragem Monte Carlo via cadeias de Markov	21
3 Preparação dos dados e configuração dos modelos	26
3.1 Descrição dos dados e variáveis em estudo	26
3.2 Preparação dos dados	27
3.3 Análise exploratória dos dados	36
3.4 Especificação e configuração dos modelos	38
3.4.1 Robyn	39
3.4.2 Meridian	41

4	Discussão de resultados	49
4.1	Robyn	49
4.2	Meridian	54
5	Conclusão	72
6	Limitações e Trabalho futuro	74
	Referências Bibliográficas	76
A	Análise exploratória das variáveis	81
B	Curvas de resposta e cenários de otimização de investimento	85

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica das funções de <i>adstock</i> do Robyn: geométrico, <i>Weibull CDF</i> e <i>Weibull PDF</i> . [1]	10
2.2	Curvas de resposta da função de saturação <i>Hill</i> no Robyn. [2]	11
3.1	Evolução diária do volume total de vendas entre 1 de janeiro de 2024 e 10 de maio de 2026.	27
3.2	Mapa de calor da percentagem de valores em falta por variável e por mês, ao longo do tempo.	28
3.3	Janela do período imputado para as vendas <i>offline</i> através do método <i>Seasplit</i> .	34
3.4	Matrizes de correlação de Spearman antes e após a imputação dos dados.	35
3.5	Mapa de calor das vendas semanais por ano, onde a intensidade da cor reflete o volume de vendas de cada semana.	37
3.6	Vendas semanais ao longo do ano sobrepostas para 2024, 2025 e 2026, com a semana do ano no eixo horizontal.	37
3.7	Evolução semanal do investimento por canal pago, em barras empilhadas, sobreposta às vendas totais, com escalas distintas para investimento e vendas.	38
3.8	Densidade dos <i>priors</i> Beta para os Modelos A1 e A2	44
3.9	Densidade dos <i>priors</i> LogNormal sobre o ROAS do Modelo B	46
4.1	Fronteira de Pareto: desempenho multi-objetivo dos 32 000 modelos explorados na especificação R2.	50
4.2	Determinação do número ótimo de clusters.	50
4.3	Decomposição das vendas pelo modelo Prophet nas componentes de tendência, sazonalidade e feriados, na especificação R2.	51
4.4	Gráficos de traço dos coeficientes de ROAS dos quatro canais pagos do modelo M1. Nas figuras geradas pelo Meridian, o ROAS é designado por <i>roi_m</i> , sendo as duas designações equivalentes.	54
A.1	Evolução das variáveis ao longo do período de análise.	81
B.1	Curvas de resposta incremental por canal pago (Modelo M1), com indicação dos cenários de otimização de investimento analisados: investimento atual, cenário neutro, +20%, -15%, limiares de eficiência flexível ($ROAS \geq 1$ e $mROAS \geq 1$) e ponto de eficiência marginal. Nas legendas das curvas de resposta, ROI e mROI correspondem, respetivamente, ao ROAS e ao mROAS utilizados ao longa da dissertação.	85

- B.2 Curvas de resposta incremental por canal pago para o período de novembro e dezembro de 2025 (Modelo M1), com indicação dos cenários de otimização de investimento analisados: investimento atual, cenário neutro, +20%, -15%, limiares de eficiência flexível ($\text{ROAS} \geq 1$ e $\text{mROAS} \geq 1$) e ponto de eficiência marginal. Nas legendas das curvas de resposta, ROI e mROI correspondem, respetivamente, ao ROAS e ao mROAS utilizados ao longo da dissertação. . . . 86

Lista de Tabelas

3.1	Comparação de MAE e RMSE (média $\pm$ desvio-padrão entre repetições) por método e variável.	32
3.2	Comparação de MAPE e Viés relativo por método e variável.	33
3.3	Método de imputação selecionado e respetivas métricas de erro por variável. . .	33
3.4	Comparação dos valores de VIF antes e após imputação.	36
3.5	Investimento por canal e total no período de análise, com o detalhe dos subcanais <i>offline</i>	38
3.6	Especificação dos <i>priors</i> LogNormal sobre o ROAS dos canais pagos (Modelo B). O <i>prior</i> é definido pela média m e pelo desvio-padrão s do ROAS; a mediana e o σ logarítmico são parâmetros derivados.	45
3.7	Restrições de investimento e intervalos resultantes diferenciadas por canal para o cenário neutro.	48
4.1	Especificações estimadas no Robyn.	49
4.2	Resultados dos modelos selecionados por especificação no Robyn.	52
4.3	Qualidade preditiva do modelo B: métricas em treino e em validação e decomposição da receita por canal (% do total), por força de <i>prior</i>	55
4.4	ROAS médio posterior, intervalo de credibilidade a 90% [P5; P95] e desvio padrão relativo (s/μ , %) por canal e por força de <i>prior</i>	58
4.5	ROAS marginal (mROAS) e probabilidade posterior do ROAS exceder a unidade $\Pr(\text{ROAS} > 1)$ por canal, por força de <i>prior</i>	59
4.6	Parâmetros de transformação do marketing do Modelo B, para canais pagos e orgânicos: decaimento <i>adstock</i> (α_m , fração do efeito que transita para a semana seguinte) e ponto de meia-saturação (<i>ec</i>) da curva de Hill, por força de <i>prior</i> . Média $\pm$ desvio padrão posterior. Nos modelos com <i>halo</i> (M1, M3), as séries orgânicas de <i>search</i> e <i>social</i> entram já residualizadas do efeito <i>halo</i>	61
4.7	Coeficientes de resposta posteriores β_m (canais pagos) e β_{om} (orgânicos) do Modelo B - média $\pm$ desvio padrão posterior, por força de <i>prior</i> . Nos modelos com <i>halo</i> (M1, M3) os coeficientes orgânicos referem-se às séries residuais. . .	63
4.8	Efeito <i>halo</i> estimado nos modelos A1 e A2 (modelos M1 e M3), por força de <i>prior</i> . . .	64
4.9	ROAS direto (vendas), ROAS indireto via <i>halo</i> (receita das sessões orgânicas geradas pelo canal) e ROAS total, para os canais com <i>halo</i> estimável (Meta Ads e <i>offline</i>), nos modelos M1 (com variáveis de controlo) e M3 (sem variáveis de controlo), por força de <i>prior</i>	65
4.10	Síntese da otimização de investimento para o período total	66
4.11	Quota de orçamento por canal (%), alocação atual <i>versus</i> alocação ótima em cada cenário (horizonte completo, M1, <i>prior</i> base).	66
4.12	Síntese da otimização de investimento para o período de Natal/ <i>Black Friday</i> . .	68

4.13 Quota de orçamento por canal (%), alocação atual <i>versus</i> alocação ótima em cada cenário (período de Natal/ <i>Black Friday</i> , M1, <i>prior</i> base).	68
4.14 Modelo B com e sem AKS, <i>prior</i> base ($k = 1$, $s = 0.7$). ROAS médio posterior [P5; P95].	69
4.15 Modelo M1 com <i>prior</i> $U(0, 1)$ (base) <i>versus prior</i> Beta informativo sobre α , sob <i>prior</i> base de ROAS ($k = 1$, $s = 0.7$). ROAS médio posterior [P5; P95], ROAS marginal e retenção <i>adstock</i> α_m (média $\pm$ desvio padrão posterior).	70

Lista de Abreviaturas

AIC Critério de Informação de Akaike

AKS Seleção Automática de Nós

CDF Função de Distribuição Acumulada

Decomp RSSD Decomposição da Raiz da Soma dos Quadrados das Distâncias

HMC Monte Carlo Hamiltoniano

KPI Indicador-Chave de Desempenho

MAE Erro Absoluto Médio

MAPE Erro Percentual Absoluto Médio

MCAR Dados em falta completamente ao acaso

MCMC Monte Carlo via Cadeias de Markov

MMM Marketing Mix Modeling

mROAS Retorno Marginal do Investimento em Publicidade

NRMSE Raiz do Erro Quadrático Médio Normalizada

NUTS Amostrador No-U-Turn

OLS Mínimos Quadrados Ordinários

PDF Função Densidade de Probabilidade

RMSE Raiz do Erro Quadrático Médio

ROAS Retorno do Investimento em Publicidade

RSS Soma dos Quadrados dos Resíduos

VIF Fator de Inflação da Variância

wMAPE Erro Percentual Absoluto Médio Ponderado

WSS Soma dos Quadrados Intra-Cluster

1 Introdução

A presente dissertação foi desenvolvida no âmbito do estágio curricular realizado na empresa Wise Pirates, integrado na unidade curricular do último ano do Mestrado em Estatística Computacional e Análise de Dados (MECAD) da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), com duração aproximada de nove meses.

A Wise Pirates é uma empresa que atua no setor do marketing digital num contexto altamente competitivo e em constante evolução, caracterizado pela rápida transformação tecnológica e pela crescente diversidade de canais de comunicação disponíveis. No decorrer do estágio, o trabalho desenvolvido incidiu na aplicação de modelos de *Marketing Mix Modeling* (MMM) com dados de um cliente do setor do retalho. O MMM assume um papel crucial na atualidade, onde o ecossistema de marketing digital enfrenta o fim dos *cookies* de terceiros e restrições severas de privacidade. Em cenários omnicanal de alta volatilidade, as abordagens analíticas tradicionais falham devido à multicolinearidade severa dos investimentos. Assim, este trabalho justifica-se pela necessidade de aplicar técnicas estatísticas avançadas para quantificar o impacto marginal de cada canal de marketing e otimizar o retorno sobre o investimento (ROAS do inglês *Return on Ads Spend*). No entanto, a necessidade de medir o impacto das estratégias de marketing e otimizar o investimento publicitário não é recente, sendo ilustrada pela célebre afirmação de John Wanamaker [3]:

“Half the money I spend on advertising is wasted; the trouble is, I don’t know which half.”

Esta questão, formulada no século XIX, mantém-se atual e constitui a motivação central do trabalho descrito nesta dissertação.

Objetivos do Estágio

O principal objetivo do estágio consistiu na implementação de modelos de MMM, de forma a analisar o impacto dos diferentes canais de marketing sobre as vendas, o indicador-chave de desempenho (KPI do inglês *Key Performance Indicator*) considerado, possibilitando a identificação dos canais que geram maior e menor ROAS de forma a apoiar decisões de alocação do investimento publicitário. De forma complementar, o estágio teve como objetivos o desenvolvimento de competências na preparação e tratamento de dados, incluindo processos de limpeza e transformação de dados temporais, a implementação de modelos estatísticos utilizando ferramentas especializadas em MMM, nomeadamente Robyn e Meridian, e a comparação metodológica entre uma abordagem frequentista e uma abordagem bayesiana, avaliando as vantagens e limitações de cada uma no contexto do caso de estudo.

Estrutura da dissertação

A presente dissertação encontra-se organizada em seis secções. Na secção 2, apresenta-se a fundamentação teórica associada ao MMM, incluindo os principais conceitos, as transformações de *adstock* e saturação, o efeito *halo* e as abordagens frequentista e bayesiana e, por fim, a descrição detalhada das ferramentas Robyn e Meridian. A secção 3 descreve a preparação dos dados, incluindo o tratamento de valores em falta, a análise de multicolinearidade e a análise exploratória, bem como as especificações dos modelos testados em ambas as ferramentas. A secção 4 apresenta e discute os resultados obtidos, comparando o desempenho dos modelos Robyn e Meridian sob diferentes configurações de *adstock*, força de *prior*, inclusão do efeito *halo* e variáveis de controlo sazonais, incluindo ainda a análise de otimização do investimento. A secção 5 sintetiza as principais conclusões do trabalho. Por fim, a secção 6 reflete sobre as limitações do estudo e aponta direções para trabalho futuro.

Justificação da escolha das ferramentas de modelação

A escolha do Robyn e do Meridian resultou de duas razões principais, sugeridas pelo orientador na Wise Pirates. A primeira deve-se à relevância de ambas as ferramentas no panorama atual do MMM, sendo desenvolvidas e mantidas por duas das maiores empresas tecnológicas mundiais, a Meta e a Google, respetivamente. A segunda razão é a complementaridade metodológica dado que o Robyn segue uma abordagem frequentista e o Meridian uma abordagem bayesiana, o que torna a sua comparação academicamente enriquecedora.

A seleção das linguagens de programação decorreu das dependências nativas de cada ferramenta. A linguagem R foi utilizada para a implementação do Robyn e para a análise de dados, visto tratar-se de um pacote desenvolvido nativamente nesse ecossistema. Esta escolha permitiu a integração direta com os pacotes *imputeTS*, aplicado na imputação estatística de valores em falta e *prophet*, usado pelo Robyn na decomposição exógena da série temporal. Em contrapartida, a linguagem Python foi mandatária para a execução do Meridian, ferramenta desenvolvida pela Google inteiramente nessa linguagem. O Meridian baseia-se na biblioteca *TensorFlow Probability* (TFP), indispensável para processar e paralelizar computacionalmente as cadeias de amostragem do algoritmo *No-U-Turn Sampler*.

2 Fundamentos Teóricos do Marketing Mix Modeling (MMM)

A presente secção aborda os principais fundamentos teóricos do MMM, incluindo o seu enquadramento na triangulação, as transformações aplicadas às variáveis na modelação e as duas abordagens estatísticas adotadas neste estudo: frequentista e bayesiana. Por fim, são descritas as ferramentas Robyn e Meridian, bem como as suas metodologias.

2.1 O que é o Marketing Mix Modeling (MMM)?

O MMM é um método econométrico baseado em modelos de regressão aplicados a dados agregados, que permite compreender e quantificar o impacto das atividades de marketing e de fatores externos como preço, distribuição e sazonalidade num KPI do negócio, como vendas ou visitas a um *website*. Desenvolvido a partir dos anos 1970, o MMM tem vindo a ganhar, novamente, relevância no contexto atual, marcado pela perda progressiva dos mecanismos tradicionais de rastreamento individual, nomeadamente a eliminação de *cookies* de terceiros e de identificadores móveis. Por operar sobre dados agregados, em vez de dados ao nível individual dos consumidores, esta abordagem é compatível com as crescentes restrições de privacidade e mantém a sua capacidade de medição independentemente da disponibilidade de sinais digitais individuais. [4]

Para além desta característica, o MMM distingue-se por três características metodológicas fundamentais. Primeiro, permite analisar simultaneamente o impacto de canais digitais e não digitais, capturando tanto os efeitos imediatos como os efeitos diferidos e acumulados do investimento, tópico que será abordado na secção 2.3. Em segundo lugar, adota uma perspetiva holística que possibilita a alocação eficiente do orçamento entre canais, produtos e regiões, com base na estimação explícita do retorno incremental de cada canal. Por fim, é suficientemente flexível para ser adaptado a diferentes setores de atividade e KPIs.

2.2 Triangulação: MMM, Atribuição e Incrementalidade

Apesar da sua robustez, o MMM não é a única técnica disponível para medir o impacto das atividades de marketing. A triangulação descreve a combinação de três métodos complementares: o MMM, os modelos de atribuição e os testes de incrementalidade, cuja aplicação conjunta oferece uma visão mais completa do que qualquer uma das abordagens isolada.

Os modelos de atribuição operam ao nível da jornada individual do utilizador, distribuindo o crédito da conversão pelos vários pontos de contacto, segundo regras como o primeiro ou o último clique. A principal vantagem é a granularidade que permite responder a questões operacionais como avaliar o desempenho de uma campanha concreta ou comparar a eficácia de

diferentes criativos. As limitações são, contudo, relevantes: cobrem apenas canais com sinais rastreáveis, excluindo grande parte do investimento *offline*, dependem de identificadores como *cookies* de terceiros, cuja disponibilidade tem vindo a degradar-se por força das restrições de privacidade e não capturam o verdadeiro efeito incremental, já que a conversão poderia ter ocorrido na ausência dos pontos de contacto registados.

Os testes de incrementalidade situam-se no extremo oposto, uma vez que manipulam deliberadamente a exposição publicitária em regiões de tratamento e comparam os resultados com regiões de controlo equivalentes, permitindo obter estimativas causais quando o desenho experimental é válido. Algumas das limitações são o facto de que cada teste cobre tipicamente um canal num período curto, o custo operacional é elevado e exige perda temporária de eficiência comercial.

O MMM ocupa uma posição intermédia, trabalha ao nível agregado e capta simultaneamente todos os canais e os efeitos de longo prazo, mas depende fortemente da qualidade dos dados e das opções de modelação adotadas.

Em conjunto, estes três métodos complementam-se e compensam as limitações que apresentam quando são aplicados isoladamente.

2.3 Transformações de marketing: *adstock* e saturação

No contexto do MMM, é necessário considerar que o impacto das atividades de marketing não ocorre apenas no momento em que o investimento é realizado, nem cresce de forma proporcional ao aumento do investimento. Para capturar estes dois efeitos são frequentemente utilizados dois conceitos fundamentais: *adstock* e saturação, respetivamente.

O *adstock*, introduzido por Simon Broadbent, nos anos 70, representa o efeito acumulado e persistente da publicidade ao longo do tempo. [5] Na prática, uma campanha publicitária não influencia os consumidores apenas no momento em que é exibida, continua a produzir efeitos nos períodos seguintes, embora com intensidade decrescente. A intensidade e duração destes efeitos podem variar entre canais, sendo geralmente mais prolongadas em meios tradicionais, como televisão ou rádio, e mais imediatas em alguns formatos digitais. Este fenómeno é conhecido como efeito de memória publicitária, sendo modelado através de funções que permitem que parte do impacto de um investimento num determinado período seja transferido para períodos futuros, com uma taxa de decaimento associada. Desta forma, o *adstock* contribui para uma modelação mais realista do impacto do marketing ao longo do tempo. [6]

Além do efeito temporal capturado pelo *adstock*, é também necessário considerar que o aumento do investimento num canal não resulta sempre num aumento proporcional dos resultados. Este comportamento é descrito pelo conceito de saturação, que reflete o fenómeno de rendimentos decrescentes. Após um determinado nível de investimento, cada unidade adicional de investimento tende a gerar um impacto marginal menor do que as unidades anteriores. Isto ocorre porque o público alvo vai sendo progressivamente exposto às campanhas, reduzindo a probabilidade de alcançar novos consumidores ou gerar respostas adicionais com a mesma eficiência. Do ponto de vista estratégico, o aumento do investimento, sem considerar os efeitos de saturação, pode conduzir a uma utilização ineficiente dos recursos, em parti-

cular quando os retornos marginais já se encontram próximos do seu limite máximo. Neste contexto, o objetivo consiste em identificar o nível de investimento a partir do qual os retornos começam a estabilizar, permitindo, posteriormente, a redistribuição do investimento para canais com maior retorno. [6]

2.4 Efeito *halo*

O efeito *halo*, no contexto do MMM, descreve a influência que um canal de marketing pago exerce sobre canais que não envolvem investimento direto como as sessões orgânicas em motores de busca ou em redes sociais. Quando um consumidor é exposto a uma campanha paga, sobretudo em canais com forte componente de notoriedade como a televisão, o *out-door* ou as redes sociais, a campanha não gera apenas conversões diretas como vendas, mas contribui também para tornar a marca mais presente na memória do consumidor, o que se manifesta mais tarde através de pesquisas espontâneas pelo nome da marca no Google, visitas diretas ao *website* ou interações orgânicas nas redes sociais. Parte destes comportamentos orgânicos têm origem no investimento publicitário que os precedeu. [7]

Do ponto de vista da modelação, ignorar este fenómeno conduz a um problema de dupla contagem ou de atribuição incorreta. Se essas sessões orgânicas induzidas por campanhas pagas forem tratadas como uma variável explicativa independente, parte do efeito real dos canais pagos é absorvida pela componente orgânica, subestimando o retorno dos canais pagos. Por outro lado, se essas sessões orgânicas forem omitidas, o modelo pode atribuir incorretamente ao canal pago efeitos que, na realidade, decorrem do comportamento espontâneo dos consumidores. [8]

A identificação empírica do efeito *halo* exige, contudo, que exista variação suficientemente independente entre o investimento nos canais pagos e o tráfego orgânico. Se as sessões orgânicas acompanharem de forma aproximadamente proporcional o investimento pago ao longo de todo o período de observação, as duas séries tornam-se fortemente colineares e o modelo deixa de conseguir separar o efeito direto do canal pago do efeito indireto que este exerce através do tráfego orgânico, resultando em estimativas instáveis e sensíveis à especificação adotada. A capacidade de estimar o efeito *halo* depende, assim, da existência de fontes de variação que afetem as duas séries de forma distinta, tais como interrupções ou arranques de campanhas, alterações no *mix* de canais, variação geográfica do investimento, ou choques exógenos ao tráfego orgânico.

2.5 Abordagem frequentista vs Abordagem bayesiana

No contexto do MMM existem duas abordagens estatísticas principais para estimar os parâmetros dos modelos: a abordagem frequentista e a abordagem bayesiana. Os modelos tradicionais de MMM, baseados numa abordagem frequentista, produzem estimativas pontuais dos parâmetros, ou seja, para cada canal de marketing é obtido um único valor que representa o efeito médio do investimento desse canal sobre as vendas e intervalos de confiança, que permitem avaliar a incerteza associada às estimativas. No entanto, esta abordagem apre-

senta algumas limitações, nomeadamente a necessidade de grandes volumes de dados para garantir estabilidade estatística.

Em contraste, os modelos bayesianos de MMM adotam uma abordagem probabilística baseada no Teorema de *Bayes*, tratando os parâmetros como variáveis aleatórias. Estes modelos requerem a definição de distribuições *a priori* (*priors*) que representam o conhecimento prévio sobre os parâmetros antes da observação dos dados. Após a incorporação dos dados observados, as distribuições *a priori* são atualizadas, originando distribuições *a posteriori*, que refletem o conhecimento atualizado sobre os parâmetros. Em vez de estimar um único valor para cada coeficiente, estes modelos produzem distribuições de probabilidade, permitindo calcular intervalos de credibilidade que indicam os valores mais plausíveis para os parâmetros, tendo em conta os dados disponíveis. [9]

Em suma, os modelos bayesianos tendem a apresentar maior robustez em cenários com dados limitados, uma vez que permitem a incorporação de informação prévia, como resultados de campanhas anteriores ou conhecimento do mercado. Esta incorporação de conhecimento prévio contribui para estimativas mais estáveis e evita resultados irrealistas quando o volume de dados é reduzido. Por outro lado, os modelos frequentistas são geralmente mais simples e computacionalmente menos exigentes. [6]

2.6 Robyn

O Robyn [10] é uma ferramenta de código aberto de MMM desenvolvido pela equipa de Meta. Trata-se de um pacote em R que combina técnicas de *machine learning*, regressão *ridge* e métodos de otimização evolutiva, de forma a reduzir o enviesamento humano e aumentar a robustez da modelação.

2.6.1 Decomposição da série temporal com Prophet

O Robyn integra o modelo Prophet, desenvolvido pela Meta e disponibilizado através do respetivo *package* [11], com o objetivo de decompor a série temporal, $y(t)$, em componentes de tendência, $g(t)$, sazonalidade, $s(t)$, feriados, $h(t)$ e resíduo do modelo, $\varepsilon(t)$, [12, 13], descrito a seguir como a soma destas componentes:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon(t) \quad (2.1)$$

Tendência

A componente de tendência $g(t)$ capta a evolução, não periódica, de longo prazo da variável dependente, sendo independente das flutuações sazonais ou de eventos pontuais. O modelo permite que a inclinação da tendência mude em pontos específicos no tempo (*changepoints*), tornando-a mais flexível e realista. [13] O Prophet utiliza a Equação 2.2 para modelar esta componente:

$$g(t) = (k + a(t)^T \delta) t + (m + a(t)^T \gamma) \quad (2.2)$$

onde:

- k representa a velocidade de crescimento inicial, ou seja, o declive inicial da tendência;
- δ é um vetor de ajustes na taxa de crescimento associados aos momentos dos *change-points* s_j ;
- m representa o nível inicial da tendência, ou seja, o intercepto da reta;
- γ ajusta o intercepto sempre que ocorre um *changepoint*, de forma a evitar quebras abruptas na série e a garantir a continuidade;
- $a(t)$ é um vetor indicador que identifica quais os *changepoints* ativos no instante t , assumindo valor 1 quando o respetivo *changepoint* já ocorreu ($t \geq s_j$) e 0 caso contrário.

O Prophet não estima a localização dos pontos de mudança a partir dos dados, define uma grelha de candidatos igualmente espaçados ao longo do histórico da série. A cada candidato s_j é associado um potencial ajuste na taxa de crescimento, δ_j , regularizado através de uma distribuição de Laplace,

$$\delta_j \sim \text{Laplace}(0, \tau),$$

o que leva a que apenas um subconjunto reduzido de *changepoints* receba ajustes diferentes de zero, permitindo que a tendência se adapte apenas quando ocorrem alterações estruturais significativas, evitando simultaneamente excesso de flexibilidade e sobreajuste. O hiperparâmetro τ controla o grau de flexibilidade do modelo, na medida em que valores elevados permitem respostas mais rápidas a alterações locais, enquanto valores mais reduzidos produzem tendências mais suaves e conservadoras. [13]

Sazonalidade

Os padrões sazonais, representados por $s(t)$, correspondem a flutuações sistemáticas que se repetem em intervalos regulares ao longo do tempo. Num contexto de negócio, é comum observar padrões sazonais associados ao comportamento dos consumidores, como o aumento de vendas ao fim de semana ou em períodos festivos.

Com o objetivo de modelar estes efeitos periódicos, o Prophet utiliza uma abordagem baseada em séries de Fourier, que permitem representar padrões sazonais de forma suave e flexível. Esta abordagem decompõe a sazonalidade numa soma de funções trigonométricas como seno e cosseno, que representam diferentes formas e amplitudes dos ciclos sazonais. Matematicamente, esta componente sazonal $s(t)$ é definida através de uma expansão em séries de Fourier, dada por:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right) \quad (2.3)$$

onde o parâmetro P representa o período do ciclo sazonal, correspondendo à duração de uma repetição completa do padrão sazonal. No caso da sazonalidade semanal observada em séries de vendas diárias, este valor é tipicamente definido como $P = 7$. No caso de sazonalidade anual, o período é definido como $P = 365.25$, permitindo capturar padrões associados a épocas específicas do ano, como o Natal. [14]

É de notar que a expressão anterior descreve uma única componente sazonal de período P . Para capturar múltiplas sazonalidades em simultâneo (por exemplo, semanal e anual), o Prophet soma várias expansões de *Fourier* independentes, cada uma com o seu próprio período P , o seu número de termos N e os respetivos coeficientes, sendo a sazonalidade total $s(t)$ dada pela soma dessas componentes. [15]

O parâmetro N representa o número de termos de *Fourier* incluídos na expansão, controlando o nível de detalhe da representação sazonal. Valores mais elevados de N permitem capturar padrões sazonais mais complexos e variações mais rápidas, ao passo que valores mais reduzidos conduzem a representações mais suaves e estáveis.

Cada termo corresponde a uma harmónica e é composto por duas funções trigonométricas: um seno e um cosseno, pelo que uma expansão de ordem N envolve $2N$ funções e, consequentemente, $2N$ coeficientes a estimar. Estes coeficientes constituem os parâmetros da componente sazonal, $\beta = [a_1, b_1, \dots, a_N, b_N]$, são estimados a partir dos dados e determinam a forma e a intensidade da sazonalidade observada. Cada par de coeficientes (a_n, b_n) contribui para a modelação de uma harmónica específica do ciclo sazonal, permitindo ao modelo ajustar a amplitude e o formato das oscilações periódicas presentes na série.

Ao modelar explicitamente a sazonalidade, evita-se que estas flutuações periódicas sejam incorretamente atribuídas a outros fatores explicativos, contribuindo assim para uma estimativa mais precisa dos efeitos do marketing.

Feriados e eventos

Para além das componentes referidas anteriormente, as vendas são frequentemente influenciadas por eventos pontuais e feriados que provocam variações abruptas e previsíveis. Estes efeitos não seguem, em geral, um padrão periódico regular e, por isso, não são adequadamente capturados por ciclos sazonais. [14]

Para modelar esta componente, o Robyn incorpora o calendário de feriados do Prophet através da componente $h(t)$. Desta forma, os feriados e outros eventos são tratados como variáveis exógenas, que permitem ao modelo capturar explicitamente efeitos associados ao calendário que, de outra forma, poderiam ser incorretamente atribuídos às atividades de marketing.

Considerando um conjunto de L feriados ou eventos, a componente associada aos feriados é definida como

$$h(t) = Z(t)\kappa \quad (2.4)$$

onde $Z(t)$ representa uma matriz de variáveis *dummy* que especifica se o instante temporal t pertence ao conjunto de datas associadas a cada feriado. Para cada feriado i , define-se o conjunto D_i , que inclui todas as datas passadas e futuras associadas a esse evento. Assim,

cada coluna da matriz $Z(t)$ corresponde a uma função indicadora da forma: $Z(t) = [1(t \in D_1), \dots, 1(t \in D_L)]$.

O vetor κ contém os parâmetros associados ao efeito de cada feriado, os quais refletem a variação esperada na série temporal quando o evento ocorre. Estes parâmetros seguem a seguinte distribuição: $\kappa \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Esta formulação reflete a suposição de que os efeitos dos feriados são independentes entre si e que a sua magnitude é determinada pelos dados observados. [16]

No contexto do Robyn, a matriz indicadora $Z(t)$ é construída automaticamente através da ligação aos calendários de feriados de cada país disponíveis no Prophet. Em muitos casos, o impacto de um feriado não se limita ao próprio dia, mas estende-se aos dias anteriores ou posteriores, períodos promocionais, podendo influenciar a procura ao longo de vários dias consecutivos. Para acomodar este comportamento, é possível associar a cada feriado uma janela temporal $W = [w_{lower}, w_{upper}]$, tratando cada dia desse intervalo como um evento independente e permitindo capturar efeitos acumulados ao longo do período relevante. Por defeito, esta janela é definida como $W = [0, 0]$, o que significa que o efeito é aplicado apenas ao dia exato do evento.

Após o ajuste da decomposição temporal, o Robyn extrai as componentes estimadas pelo Prophet, nomeadamente a tendência $g(t)$, a sazonalidade $s(t)$ e os efeitos de feriados $h(t)$. Ao contrário de uma abordagem tradicional de previsão, estas componentes não são utilizadas diretamente como previsões finais nesta fase. Assim, o impacto das variáveis de marketing é estimado com base apenas na variação residual após a remoção dos padrões estruturais da série temporal. [17]

2.6.2 Transformações: *adstock* e saturação

No Robyn, os efeitos de *adstock* e saturação são tratados como transformações aplicadas individualmente a cada variável de marketing paga e, quando relevante, também às variáveis orgânicas, permitindo que cada canal apresente uma dinâmica própria.

Adstock

Relativamente ao *adstock*, o Robyn disponibiliza três alternativas: geométrica, *Weibull CDF* e *Weibull PDF*. Importa salientar que esta escolha é feita ao nível do modelo e não ao nível de cada variável individual. Assim, num mesmo modelo, todas as variáveis transformadas por *adstock* têm de adotar o mesmo tipo de *adstock*, embora os hiperparâmetros associados possam variar de variável para variável. A transformação geométrica corresponde à opção mais simples, sendo parametrizada apenas por θ , uma taxa de decaimento constante ao longo do tempo, que representa a proporção do efeito de marketing que transita de um período para o seguinte. Uma alternativa para interpretar este parâmetro é através do conceito de meia-vida, que corresponde ao número de períodos necessários para que o efeito acumulado de uma atividade de marketing se reduza para metade. A relação entre θ e a meia-vida, dada por $\theta = 0,5^{(1/\text{meia-vida})}$, permite interpretar este parâmetro em função da persistência temporal do

efeito publicitário. [18]

Por outro lado, o *adstock* pode também ser modelado com base na distribuição de *Weibull*, recorrendo quer à função de distribuição acumulada (*CDF*), quer à função densidade de probabilidade (*PDF*). Em ambos os casos, a transformação é parametrizada através de dois hiperparâmetros, *shape* e *scale*, que conferem maior flexibilidade face ao *adstock* geométrico e permitem representar padrões de persistência mais complexos, à custa de uma maior exigência computacional.

No caso da *Weibull CDF*, a principal vantagem consiste em permitir uma taxa de decaimento flexível ao longo do tempo, ao contrário do *adstock* geométrico. O parâmetro *shape* controla a forma da curva de decaimento: valores mais elevados tendem a produzir curvas com formato mais próximo de um "S", enquanto valores mais reduzidos originam curvas mais próximas de um "L". O parâmetro *scale* controla o ponto de inflexão da curva e influencia a persistência temporal do efeito publicitário, podendo aumentar significativamente a meia-vida do *adstock*.

Já a *Weibull PDF*, para além de também utilizar os parâmetros *shape* e *scale* e de permitir uma taxa de decaimento flexível, distingue-se por possibilitar a modelação de efeitos retardados. Isto significa que o impacto máximo da campanha não ocorre necessariamente no momento inicial, podendo surgir apenas alguns períodos depois. Neste caso, a interpretação do parâmetro *shape* torna-se particularmente relevante, sendo utilizados valores de *shape* superiores a 1.

Para complementar a descrição das transformações de *adstock* no Robyn, a Figura 2.1 apresenta representações gráficas das funções geométrica, *Weibull CDF* e *Weibull PDF*, evidenciando diferenças no decaimento, na persistência temporal e na ocorrência de efeitos retardados. [18]

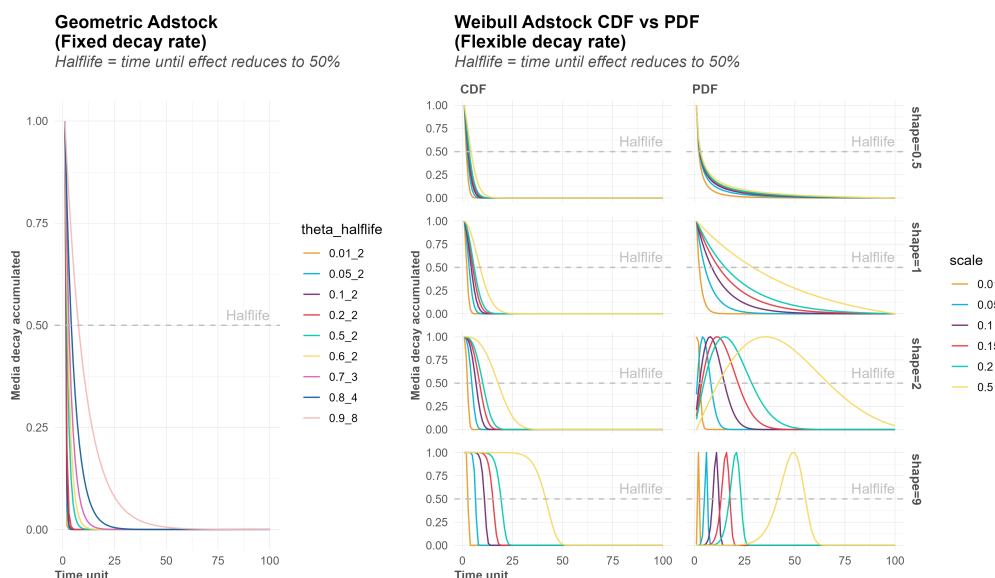


Figura 2.1. Representação gráfica das funções de *adstock* do Robyn: geométrico, *Weibull CDF* e *Weibull PDF*. [1]

Saturação

O Robyn modela a saturação de cada canal de marketing através da função *Hill*, que traduz a relação não linear entre investimento e receita, com retornos marginais decrescentes. Sendo de dois parâmetros, permite à curva assumir forma côncava (em C) ou sigmoide (em S). É dada por:

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{x^\alpha + \gamma'^\alpha}$$

onde x é o investimento no canal (já transformado por *adstock*) e γ' o ponto de inflexão, obtido escalando o hiperparâmetro $\gamma \in [0, 1]$ à gama de valores do canal. O parâmetro α controla a curvatura: valores elevados geram uma curva em S, com um limiar inicial, enquanto valores baixos geram uma curva côncava, com retornos decrescentes desde o início. O parâmetro γ define o ponto de inflexão, ou seja, o nível de investimento em que se atinge metade do efeito máximo: quanto menor o γ , mais precoce a saturação. Na Figura 2.2 observa-se o impacto de α e γ na forma da curva de resposta. [19]

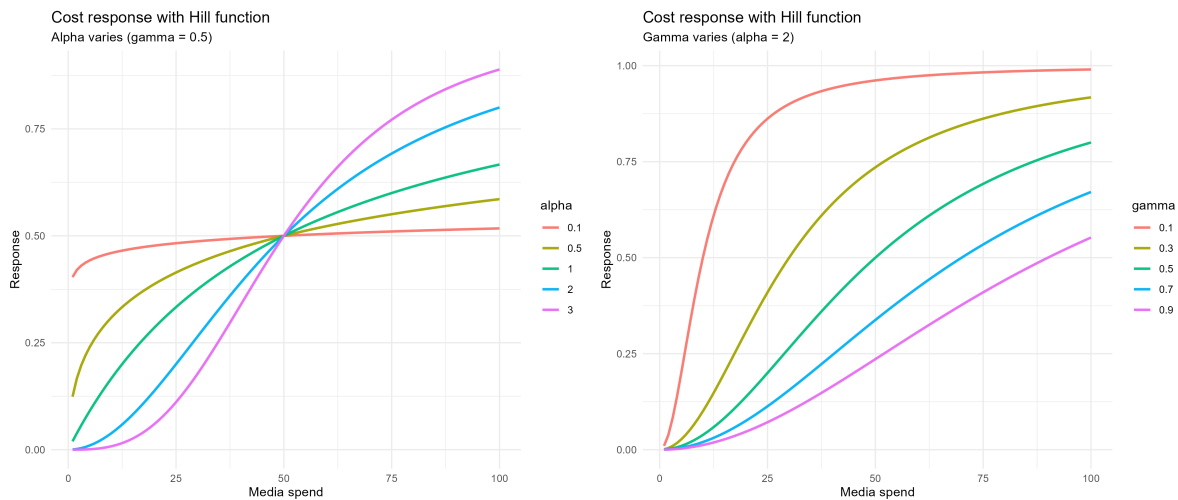


Figura 2.2. Curvas de resposta da função de saturação *Hill* no Robyn. [2]

2.6.3 Regressão *ridge*

O modelo de regressão implementado pelo Robyn incorpora transformações que permitem modelar efeitos de arrasto e saturação dos investimentos em marketing. Assim, o modelo pode ser representado por:

$$KPI_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i f_i(\text{Adstock}(x_{i,t}, \theta_i)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j z_{j,t} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

onde $x_{i,t}$ representa o investimento no canal i no instante t , $\text{Adstock}(\cdot)$ modela o efeito acumulado da publicidade ao longo do tempo, $f_i(\cdot)$ representa a função de saturação que captura os retornos marginais decrescentes, $z_{j,t}$ corresponde às variáveis de controlo no instante t , e β_i e λ_j são os coeficientes associados às variáveis de marketing e variáveis de controlo,

respetivamente.

A regressão utilizada pelo Robyn é a regressão *ridge*, também conhecida como regularização L2, uma técnica de regularização utilizada em regressões lineares que introduz um termo de penalização com o objetivo de introduzir enviesamento para reduzir a variância. Esta penalização é particularmente útil em contextos de forte presença de multicolinearidade entre as variáveis, situação frequente em modelos de MMM, uma vez que os diferentes canais de marketing tendem a apresentar padrões temporais semelhantes e, por isso, correlações elevadas.

Esta abordagem reduz a magnitude dos coeficientes sem eliminar variáveis do modelo, ao contrário da regressão L1 (*Lasso*), que pode forçar alguns coeficientes a zero e excluir variáveis. Dessa forma, o modelo torna-se mais robusto e proporciona estimativas mais fiáveis dos contributos dos canais de marketing, ao mesmo tempo que reduz o risco de sobreajuste. Esta característica é particularmente relevante em modelos de MMM, nos quais a exclusão de um canal de marketing pode comprometer a interpretação dos resultados. [20]

Enquanto a regressão linear tradicional minimiza apenas a soma dos quadrados dos resíduos (RSS) entre os valores previstos e os valores observados, a regressão *ridge* adiciona um parâmetro de penalização (λ) à soma dos quadrados dos coeficientes do modelo. Este parâmetro controla a intensidade da penalização aplicada aos coeficientes, sendo que à medida que λ tende para infinito, aplica-se uma regularização mais forte, e os coeficientes tendem para zero. Caso $\lambda = 0$, o modelo é estimado pelo método dos mínimos quadrados ordinários (OLS). [21]

Dado um vetor resposta $y \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz de preditores $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, a regressão *ridge* estima os coeficientes através da função objetivo dada por:

$$\begin{aligned} & \min_{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\} \\ &= \min_{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\} \\ &= \min_{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T \beta)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\} \\ &= \min_{\beta} \{ \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_2^2 \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\hat{\beta}_{\text{ridge}} = \arg \min_{\beta} \{ \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_2^2 \} \quad (2.7)$$

onde:

- $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = RSS$, mede o ajuste do modelo aos dados;
- β_j é o coeficiente associado à variável explicativa j ;
- λ é o parâmetro de regularização que controla a intensidade da penalização aplicada aos coeficientes, sendo que $\lambda \geq 0$;

- p é o número de variáveis explicativas;
- n é o número de observações.

O Robyn utiliza, por defeito, o valor `lambda.1se`, que corresponde a um valor de λ cujo erro de validação se encontra a um desvio padrão acima do menor erro observado (`lambda.min`). Trata-se de uma escolha mais conservadora, que seleciona um modelo mais penalizado e, por isso, com menor variância. Esta opção não garante, contudo, uma melhor generalização: ao aumentar a penalização, aumenta igualmente o enviesamento das estimativas, podendo conduzir a subajustamento caso a estrutura subjacente aos dados exija maior flexibilidade. No contexto do MMM, este risco é particularmente relevante, uma vez que uma penalização excessiva encolhe de forma desproporcionada os coeficientes associados aos canais de menor investimento, subestimando a sua contribuição. A adequação de `lambda.1se` face a `lambda.min` deve, assim, ser avaliada empiricamente para cada conjunto de dados.

Por esse motivo, o Robyn permite controlar manualmente o grau de penalização através do argumento `lambda_control`, possibilitando a seleção de valores intermédios entre `lambda.min` (menor penalização) e `lambda.1se` (maior penalização), consoante o compromisso entre enviesamento e variância que se pretenda para cada aplicação. [4]

2.6.4 Otimização de hiperparâmetros e seleção do modelo

Para a otimização automática dos hiperparâmetros do modelo, associados às funções de *adstock* e saturação, aos níveis de regularização e às divisões temporais dos dados para validação, o Robyn recorre à biblioteca *Nevergrad*, desenvolvida pela Meta em Python e especializada em métodos evolutivos e sem recurso a gradientes, que permitem explorar de forma eficiente espaços de parâmetros complexos e de elevada dimensionalidade. Através de uma abordagem multiobjetivo, são testadas automaticamente diferentes combinações destes parâmetros, gerando múltiplos modelos candidatos com elevado poder preditivo. Durante este processo, o *Nevergrad* é instruído a otimizar simultaneamente três funções objetivo principais, de modo a garantir um equilíbrio entre a qualidade estatística do modelo e a coerência com a realidade do negócio. [22]

Em primeiro lugar, é minimizado o erro preditivo, medido através do NRMSE que avalia a capacidade do modelo em reproduzir os valores observados do KPI ao longo do tempo. O NRMSE corresponde à raiz do erro quadrático médio normalizado (RMSE) pelo intervalo dos valores observados, permitindo a comparação do desempenho entre modelos com diferentes escalas. A formulação utilizada é dada por:

$$\text{NRMSE} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}}{y_{\max} - y_{\min}} \quad (2.8)$$

onde n representa o número de observações, y_i os valores observados, $\hat{y}_i$ os valores previstos pelo modelo, e $y_{\max}$ e $y_{\min}$ correspondem aos valores máximo e mínimo do conjunto de dados, respetivamente.

De seguida, é minimizada a métrica Decomposição da Raiz da Soma dos Quadrados das

Distâncias (Decomp RSSD), que avalia a diferença entre a proporção do orçamento total de publicidade alocado a cada canal (quota de investimento) e a proporção do efeito total atribuído a um canal (quota de efeito). A métrica é calculada como a raiz quadrada da soma das diferenças ao quadrado de todos os canais com investimento em publicidade. Esta métrica penaliza cenários em que o modelo atribui contribuições muito elevadas a canais com baixos níveis de investimento, ou vice-versa, promovendo assim a plausibilidade das soluções geradas e a coerência com o conhecimento de negócio. Embora estes cenários possam apresentar bom desempenho estatístico, são frequentemente considerados irrealistas do ponto de vista operacional. Desta forma, automatiza-se a incorporação de plausibilidade e conhecimento de domínio no processo de seleção de modelos, reduzindo a probabilidade de aceitar resultados inconsistentes com a realidade. [23] No entanto, alguns autores destacam que esta métrica é considerada controversa, uma vez que pode favorecer soluções que evitam indicar erros significativos nas decisões passadas de investimento em marketing, o que poderá conduzir a resultados discutíveis. [24] Esta métrica pode ser formalmente representada pela seguinte equação:

$$\text{Decomp RSSD} = \sqrt{\sum_{i=1}^C (\text{quota de efeito}_i - \text{quota de investimento}_i)^2} \quad (2.9)$$

onde C é o número total de canais pagos.

Por fim, é minimizado o erro de calibração, medido através do Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE), que avalia a diferença percentual média absoluta entre o efeito causal observado (por exemplo, proveniente de testes de incrementalidade) e o efeito estimado pelo modelo, de modo a assegurar que as previsões estão alinhadas com evidências reais. Este critério é aplicado apenas quando estão disponíveis resultados experimentais provenientes de testes de incrementalidade. O MAPE fornece uma interpretação intuitiva da precisão do modelo, expressando o erro em termos percentuais. A sua formulação é dada por:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i - F_i}{A_i} \right| \cdot 100 \quad (2.10)$$

onde n representa o número total de observações, A_i corresponde aos valores obtidos em estudos ou testes e F_i aos valores previstos pelo modelo.

O processo de otimização é representado através de um gráfico de Pareto, onde cada ponto corresponde a um modelo candidato, posicionado em função de dois objetivos que competem entre si: o erro de ajustamento (NRMSE) e a plausibilidade da decomposição de efeitos por canal (DECOMP.RSSD). A fronteira de Pareto identifica o conjunto de modelos que não podem ser melhorados num dos objetivos sem comprometer o outro. Reduzir um deles implica necessariamente penalizar o outro, pelo que não existe um único modelo ótimo.

Dado que esta fronteira pode conter dezenas de modelos com características muito semelhantes, o Robyn aplica, de seguida, um processo de clusterização aos modelos que se encontram na fronteira de Pareto, recorrendo ao algoritmo *K-means*. [22] O objetivo desta etapa é agrupar soluções semelhantes, tipicamente com base no ROAS estimado para cada canal, em conjuntos homogêneos, reduzindo a complexidade associada à análise comparativa

entre modelos candidatos.

Quando o parâmetro do número de clusters é definido através da configuração padrão, o algoritmo utiliza o método do cotovelo. Para tal, calcula a soma dos quadrados intra-cluster (WSS do inglês *Within-Cluster Sum of Squares*) para diferentes números de clusters, entre 1 e 20. O WSS soma a distância quadrática de cada modelo ao centróide do respetivo cluster, e decresce monotonicamente à medida que o número de clusters aumenta. A seleção do número final baseia-se na análise da variação do WSS, sendo escolhido o menor número de clusters a partir do qual a redução adicional do WSS não ultrapassa aproximadamente 5%, evitando assim a criação de agrupamentos redundantes. Matematicamente, o WSS é definido como:

$$WSS = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{T_k} \|X_n - \bar{X}_k\|_2^2 \quad (2.11)$$

onde K representa o número total de clusters, T_k o número de modelos pertencentes ao cluster k , X_n o vetor de características do n -ésimo modelo desse cluster e $\bar{X}_k$ o respetivo centróide, ou seja, o valor médio (por exemplo, o ROAS médio) dos modelos que o constituem.

Concluída a clusterização, o Robyn seleciona dentro de cada cluster o modelo considerado mais representativo com base nas principais funções objetivo do processo de otimização, nomeadamente o NRMSE e o DECOMP.RSSD, sendo o MAPE incluído apenas quando existem dados de calibração. [25]

A seleção do modelo final é, contudo, realizada ao nível do utilizador, o qual deve possuir conhecimento do negócio para avaliar a coerência dos resultados, de forma a garantir confiança nas conclusões obtidas. [4]

2.6.5 Calibração

A calibração é uma funcionalidade essencial, embora opcional, para aumentar a confiança na seleção do modelo final, especialmente em cenários onde não existe informação prévia detalhada sobre a eficácia e o desempenho dos canais de marketing. O Robyn permite a incorporação de resultados de estudos como testes de controlo para compreender a causalidade do marketing sobre as vendas ou outros KPIs. [18]

O estudo "*Calibrated MMM better predicts true ROAS*", projeto vencedor do *Robyn Hackathon 2022*, apresenta uma avaliação do impacto da calibração na precisão de modelos de MMM, num ambiente de simulação controlado. A avaliação do desempenho dos modelos foi realizada através da comparação entre os valores reais de ROAS e os valores estimados pelos modelos de MMM, recorrendo à métrica MAPE. Os resultados obtidos demonstraram que os modelos calibrados apresentam menor erro de previsão e maior proximidade aos valores reais quando comparados com modelos não calibrados. Observou-se igualmente que a calibração de um maior número de canais conduz a uma redução adicional do erro, evidenciando a importância da incorporação de múltiplas fontes de evidência experimental no processo de estimação. Adicionalmente, foi verificado que quanto maior for o número de estudos experimentais utilizados na calibração, melhor é a precisão das estimativas. Em síntese, os resulta-

dos evidenciam que a calibração baseada em evidência experimental contribui para aumentar a robustez e a precisão preditiva dos modelos de MMM, reduzindo a incerteza associada às estimativas. [26]

2.7 Meridian

O Meridian é uma ferramenta de código aberto de MMM desenvolvida pela Google, escrita em Python e disponibilizada no início de 2025, sucedendo ao anterior *LightweightMMM*. Apesar de o *LightweightMMM* ter representado um passo importante na disponibilização de ferramentas de MMM em código aberto, apresentava limitações que motivaram o desenvolvimento de um sucessor. Entre estas destacam-se a impossibilidade de calibrar o modelo com recurso a experiências (como *geo-tests*) de forma nativa, o que limitava a validação dos resultados com base em evidência experimental, a utilização de um intercepto estático, incapaz de acomodar de forma flexível tendências e sazonalidades ao longo do período em análise e a especificação dos *priors* era exclusiva a coeficientes, o que era menos interpretável do ponto de vista do retorno do investimento. [27] O Meridian surge precisamente como resposta a estas limitações.

Modelação geográfica vs. nacional

O Meridian permite modelar dados ao nível geográfico ou nacional. Na modelação geográfica, os dados são desagregados em várias regiões geográficas, como distritos, cidades ou lojas, e cada região corresponde a um modelo, estando todos ligados por um modelo global que permite analisar tanto o desempenho local como o comportamento geral. Ao modelar várias regiões em conjunto, aumenta-se o número total de observações disponíveis e aproveitam-se as diferenças entre regiões, de forma a obter resultados mais detalhados por região e estimativas globais mais robustas. Como a informação é partilhada entre regiões, estes modelos requerem menos tempo histórico do que os modelos nacionais. [6]

2.7.1 Especificação do modelo

O Meridian é definido como um modelo hierárquico bayesiano que incorpora transformações paramétricas não lineares nas variáveis de marketing. A estrutura hierárquica permite a inclusão de coeficientes que variam por região geográfica, captando a heterogeneidade no impacto dos canais entre diferentes mercados. Este modelo constitui uma extensão de abordagens bayesianas previamente propostas na literatura, nomeadamente por [28] e [29], introduzindo melhorias metodológicas como a incorporação explícita de dados de alcance e frequência e a utilização de interceptos que variam ao longo do tempo para modelar a tendência e a sazonalidade. A equação geral do modelo é a seguinte [30]:

$$\begin{aligned}
y_{g,t} = & \mu_t + \tau_g + \sum_{i=1}^{N_C} \gamma_{g,i}^{[C]} z_{g,t,i} + \sum_{i=1}^{N_N} \gamma_{g,i}^{[N]} x_{g,t,i}^{[N]} \\
& + \sum_{i=1}^{N_M} \beta_{g,i}^{[M]} \text{HillAdstock}\left(\{x_{g,t-s,i}^{[M]}\}_{s=0}^L; \alpha_i^{[M]}, ec_i^{[M]}, \text{slope}_i^{[M]}\right) \\
& + \sum_{i=1}^{N_{OM}} \beta_{g,i}^{[OM]} \text{HillAdstock}\left(\{x_{g,t-s,i}^{[OM]}\}_{s=0}^L; \alpha_i^{[OM]}, ec_i^{[OM]}, \text{slope}_i^{[OM]}\right) + \epsilon_{g,t} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

onde os índices $g = 1, \dots, G$ e $t = 1, \dots, T$ identificam, respetivamente, a unidade geográfica e o período temporal. Os índices N_C , N_N , N_M e N_{OM} denotam, respetivamente, o número de variáveis de controlo, de variáveis não relacionadas com marketing, de canais de marketing pagos e de canais de marketing orgânicos. Cada termo da equação cumpre um papel específico na decomposição da receita:

- $y_{g,t}$ é o KPI observado (por exemplo, volume de vendas) na região g no instante t .
- μ_t é o intercepto temporal, que capta a tendência e a sazonalidade comuns a todas as regiões ao longo do tempo. É modelado por uma *spline* linear com nós, descrita em detalhe na secção 2.7.3.
- τ_g é o efeito fixo geográfico, que capta diferenças estruturais e permanentes entre regiões, como por exemplo, uma região com maior base de clientes apresenta sistematicamente vendas mais elevadas.
- $\gamma_{g,i}^{[C]} z_{g,t,i}$ representa o efeito linear das variáveis de controlo, tais como indicadores macroeconómicos (inflação, crises económicas), comportamento da concorrência, isto é, fatores fora do controlo do vendedor.
- $\gamma_{g,i}^{[N]} x_{g,t,i}^{[N]}$ representa o efeito linear de canais que não estão relacionados com marketing, como alterações de preço ou de distribuição, ou seja, variáveis que podem ser controladas pelo vendedor.
- $\beta_{g,i}^{[M]} \text{HillAdstock}(\cdot)$ representa o efeito dos canais de marketing pagos após aplicação das transformações não lineares de *adstock* e saturação, descritas em detalhe na secção 2.7.2.
- $\beta_{g,i}^{[OM]} \text{HillAdstock}(\cdot)$ representa o efeito dos canais de marketing orgânicos como *newsletters*, notificações *push*, sujeitos às mesmas transformações.
- $\epsilon_{g,t}$ é o termo de erro aleatório.

2.7.2 A Função HillAdstock: combinação de *adstock* e saturação

O impacto de um canal de marketing sobre as vendas não é nem instantâneo nem linear. Dois fenómenos fundamentais, já introduzidos na secção 2.3, precisam de ser capturados em

simultâneo: o *adstock* e a saturação. O Meridian combina ambos numa única transformação composta, denominada HillAdstock, que é aplicada a cada canal antes de este ser introduzido na regressão.

Formalmente, o *adstock* transforma a série temporal de atividade de marketing $\{x_t\}$ numa série acumulada ponderada:

$$\text{Adstock}(\{x_{t-s}\}_{s=0}^L; \alpha) = \frac{\sum_{s=0}^L w(s; \alpha) x_{t-s}}{\sum_{s=0}^L w(s; \alpha)} \quad (2.13)$$

O numerador é uma média ponderada dos valores de atividade de marketing nos $L + 1$ períodos mais recentes (do período atual t até L períodos no passado), em que o peso $w(s; \alpha)$ decresce com o desfasamento s . O denominador normaliza a soma dos pesos para que a transformação não altere a escala dos dados. O parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ controla a velocidade de decaimento: valores próximos de 1 indicam efeitos muito persistentes (a publicidade “dura” muitas semanas), enquanto valores próximos de 0 indicam efeitos quase imediatos, que se dissipam rapidamente. A função de pesos $w(s; \alpha)$ admite duas formas:

Decaimento geométrico

$$w(s; \alpha) = \alpha^s \quad (2.14)$$

Este é o modelo de *adstock* mais simples e intuitivo. O impacto da publicidade é máximo no período de atividade ($s = 0$, com peso $\alpha^0 = 1$) e decresce de forma exponencial a cada período seguinte: na semana seguinte o peso é α , duas semanas depois é α^2 , e assim sucessivamente. A taxa de decaimento é constante ao longo do tempo, o que torna este modelo adequado para canais digitais com resposta imediata. [31]

Decaimento binomial

$$w(s; \alpha) = 1 - \frac{s}{1+L} \alpha^*, \quad \alpha^* = \frac{1}{\alpha} - 1 \quad (2.15)$$

Ao contrário da forma geométrica, este decaimento é linear por troços e desce até zero de forma mais gradual. A transformação $\alpha^* = 1/\alpha - 1$ converte $\alpha \in [0, 1]$ em $\alpha^* \in [0, +\infty)$. A curva resultante é convexa se $\alpha < 0,5$ (decaimento mais rápido no início), linear se $\alpha = 0,5$, e côncava se $\alpha > 0,5$ (decaimento mais lento no início, com maior peso relativo nas semanas finais da janela). Esta forma é mais adequada a canais *offline*, onde o efeito demora a maturar e permanece em proporção significativa durante toda a janela temporal. [31]

A função de saturação capta os rendimentos marginais decrescentes, os quais são modelados pela função Hill:

$$\text{Hill}(q; ec, \text{slope}) = \left(1 + \left(\frac{q}{ec}\right)^{-\text{slope}}\right)^{-1} \quad (2.16)$$

Esta função transforma qualquer valor não negativo de atividade $q > 0$ para o intervalo

$(0, 1)$, assumindo a forma de uma curva em forma de S (sigmoide), cujos dois parâmetros têm as seguintes interpretações:

- $ec > 0$ (*ponto de meia saturação*): é o nível de atividade do canal no qual o efeito atinge exatamente 50% do seu valor máximo. De facto, quando $q = ec$, obtém-se

$$\text{Hill}(ec; ec, \text{slope}) = \left(1 + 1^{-\text{slope}}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

independentemente do valor de slope . Um valor de ec elevado significa que o canal necessita de muito investimento para atingir metade do seu potencial, indicando que ainda opera longe da saturação. Enquanto um valor baixo indica que o ponto de meia-saturação é atingido com pouco investimento.

- $\text{slope} > 0$: controla a rapidez com que a transição entre o regime linear e o regime saturado ocorre. Valores elevados produzem uma curva mais abrupta, onde o efeito sobe rapidamente até ao máximo e depois estabiliza. Valores baixos produzem uma curva mais suave e gradual. Na prática, fixar $\text{slope} = 1$ (valor por defeito do Meridian) é uma escolha conservadora que impõe uma forma monótona côncava sem a inflexão sigmoideal completa, sendo suficiente para capturar os rendimentos decrescentes na maioria dos canais.

Para canais sem métricas de alcance e frequência, o Meridian combina as transformações de *adstock* e saturação numa única função, designada *HillAdstock*. A ordem de aplicação é controlada pelo parâmetro `hill_before_adstock`. Na configuração padrão (`hill_before_adstock = False`), aplica-se primeiro o *adstock* e depois a saturação,

$$\text{HillAdstock}(x) = \text{Hill}\left(\text{Adstock}(x; \alpha); ec, \text{slope}\right). \quad (2.18)$$

Nesta configuração, aplica-se primeiro o *adstock*, isto é, acumula-se o investimento ponderado das semanas anteriores e só depois se aplica a função de saturação ao valor acumulado resultante. A interpretação é a seguinte: o que satura não é o investimento de uma semana isolada, mas o efeito acumulado de várias semanas de publicidade, sendo esta ordem é a mais habitual em MMM. Em alternativa, quando `hill_before_adstock = True`, a ordem é invertida,

$$\text{HillAdstock}(x) = \text{Adstock}\left(\text{Hill}(x; ec, \text{slope}); \alpha\right), \quad (2.19)$$

sendo a saturação aplicada a cada período individualmente e é o efeito já saturado que se propaga para as semanas seguintes. Esta especificação pode ser mais adequada quando a capacidade de impacto de um canal por período é intrinsecamente limitada, como num canal com alcance máximo fixo por semana. Neste caso, satura-se primeiro o efeito de cada semana e só depois esse efeito, já limitado, propaga-se para as semanas seguintes através do *adstock*, refletindo de forma mais fiel a restrição semanal do canal.

O resultado da transformação *HillAdstock* pertence ao intervalo $(0, 1)$ e representa a intensidade do efeito do canal após considerar persistência temporal e rendimentos decrescentes. Este valor é multiplicado pelo coeficiente $\beta_{g,i}^{[M]}$, que corresponde ao efeito máximo do canal so-

bre o KPI quando totalmente saturado. Assim, $\beta_{g,i}^{[M]}$ representa o potencial máximo de contribuição do canal, e não o retorno por unidade de investimento, distinguindo canais com elevado potencial de impacto de canais com elevado retorno (ROAS).

Para além dos canais com métricas de investimento ou impressões, o Meridian suporta ainda canais com métricas explícitas de alcance e frequência, onde a saturação é aplicada à frequência e o *adstock* ao produto alcance $\times$ frequência.

2.7.3 Decomposição da série temporal

Ao contrário do Robyn, que recorre ao Prophet para decompor explicitamente a série em tendência, sazonalidade e feriados e injeta cada componente como variável explicativa (secção 2.6.1), o Meridian não realiza uma decomposição prévia da série. Os efeitos temporais são capturados de forma endógena, durante a própria estimação, através de um intercepto com variação no tempo, μ_t , já introduzido na formulação geral do modelo (secção 2.7.1). Este intercepto absorve, num único termo, as componentes de tendência e a sazonalidade, deixando aos canais de marketing a tarefa de explicar apenas o desvio em torno das vendas base. As vendas base correspondem ao volume de vendas que ocorreria na ausência de atividade publicitária, sendo explicadas por fatores estruturais do negócio, como a tendência de longo prazo, a sazonalidade, a notoriedade da marca e outras influências não diretamente atribuíveis aos canais de marketing. A forma como μ_t é modelado, e em particular o grau de flexibilidade que lhe é concedido, é controlada pelo número e pela localização dos nós (*knots*) de uma *spline* linear. Uma *spline* linear é uma função contínua definida por segmentos de reta que se unem sem quebras nesses nós. A cada nó, a linha pode mudar de declive, mas não sofre saltos abruptos. Os nós funcionam assim como pontos de articulação que conferem flexibilidade local à curva. [32]

Modelar um efeito temporal independente para cada um dos T períodos exigiria T parâmetros, o que se traduz num número elevado de graus de liberdade. Para reduzir esta dimensionalidade, o Meridian representa o vetor de efeitos temporais $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_T]$ como uma combinação linear de um número reduzido de valores de referência, associados aos nós [33]:

$$\mu = Wb, \quad (2.20)$$

onde:

- μ é um vetor $T \times 1$, que contém o efeito temporal de cada período $t = 1, \dots, T$;
- b é um vetor $K \times 1$ de valores do efeito temporal nos nós no Meridian, com $K \leq T$;
- W é a matriz de ponderação, de dimensão $T \times K$, que distribui os valores dos nós pelos restantes períodos.

A inferência bayesiana incide apenas sobre os K valores b , sendo o vetor completo μ reconstruído deterministicamente através da matriz W . O número de nós K é definido pelo utilizador ou determinado automaticamente, como se descreve adiante, enquanto a matriz W é construída a partir da distância L_1 de cada período aos dois nós vizinhos: um período

localizado entre dois nós recebe um valor de μ igual à média ponderada dos valores desses nós, com pesos inversamente proporcionais à distância a cada um.

A escolha do número de nós implica uma compensação entre viés e variância. Com poucos nós, cada estimativa baseia-se em mais períodos vizinhos, reduzindo a variância mas introduzindo viés. Esta consequência não se limita, contudo, a um enviesamento médio das estimativas: ao impor uma evolução demasiado suave ao longo do tempo, uma parametrização com poucos nós reduz de forma acentuada a capacidade do modelo para captar mudanças estruturais, tais como alterações na estratégia de comunicação, mudanças no comportamento do consumidor ou choques de mercado. Nestes casos, a alteração tende a ser diluída entre os períodos anteriores e posteriores à sua ocorrência, ocultando uma mudança de regime que é, muitas vezes, precisamente aquilo que se pretende identificar. Com muitos nós, a estimativa de cada período depende quase exclusivamente dos seus próprios dados, o que diminui o viés mas aumenta a variância. [34]

No caso de se definirem os nós manualmente, deve ter-se em conta a volatilidade da série ao longo do tempo, concentrando os nós nos períodos de variação abrupta, onde o custo do viés é elevado, e mantendo-os dispersos nos períodos estáveis, onde importa sobretudo reduzir a variância. Nos modelos geográficos, sugere-se começar pelo valor por defeito $K = T$ e reduzir o número de nós apenas se se observar sobreajustamento acentuado ou estimativas de efeito de marketing implausíveis, situações que se tornam mais prováveis à medida que diminui o número de regiões observadas em cada período. Nos modelos nacionais, em que existe uma única observação por período, recomenda-se o caminho inverso, começando em $K = 1$ e aumentando gradualmente até que o sobreajustamento se torne excessivo. [35]

Para evitar a dificuldade da escolha manual de K , o Meridian implementa um mecanismo de seleção automática de nós (AKS, do inglês *Automatic Knot Selection*), inspirado na regressão *spline* com seleção automática de nós, com adaptações próprias. O algoritmo parte de um conjunto completo de nós candidatos e remove sequencialmente aqueles cuja eliminação não degrada o ajuste (*backward elimination*), avaliado pelo Critério de Informação de Akaike (AIC, do inglês *Akaike Information Criterion*), que penaliza a complexidade desnecessária. O conjunto final de nós é assim aquele que minimiza o AIC, captando os padrões de tendência e sazonalidade sem sobreajustar. [34]

Além dos nós, o Meridian permite incluir indicadores binários e funções periódicas como variáveis de controlo para modelar efeitos temporais. Um indicador binário assume o valor 1 nos períodos em que uma condição se verifica e 0 nos restantes, estimando um efeito constante ao longo de todos os períodos assinalados. Uma função periódica modela os efeitos temporais como um padrão suave e cíclico no KPI, constituindo uma proposição paramétrica forte sobre a forma da sazonalidade.

2.7.4 Inferência bayesiana e Amostragem Monte Carlo via cadeias de Markov

O Meridian assenta numa abordagem de inferência bayesiana que combina o conhecimento prévio sobre os parâmetros do modelo com a informação contida nos dados observados. O

resultado desta combinação é a distribuição *a posteriori*, que representa o estado de crença atualizado sobre cada parâmetro após a observação dos dados. Trata-se do principal resultado produzido pela estimação e é sobre esta que são calculadas todas as métricas de interesse, como o ROAS, o ROAS marginal e as curvas de resposta de cada canal.

O ponto de partida é o Teorema de Bayes, que relaciona a distribuição *a posteriori* com a verosimilhança e a distribuição *a priori* segundo a equação:

$$P(\theta | \text{dados}) = \frac{P(\text{dados} | \theta) P(\theta)}{\int P(\text{dados} | \theta) P(\theta) d\theta} \quad (2.21)$$

onde θ representa o conjunto de parâmetros não observáveis do modelo, $P(\text{dados} | \theta)$ é a verosimilhança, que formaliza a especificação do modelo de regressão hierárquica descrito na secção 2.7, e $P(\theta)$ é a distribuição *a priori* que representa o conhecimento prévio sobre os parâmetros antes de os dados serem considerados. O denominador da equação, conhecido como evidência marginal, é uma constante de normalização que garante que a distribuição *a posteriori* integra para 1.

A distribuição *a priori* desempenha um papel essencial neste processo. Uma distribuição *a priori* informativa expressa uma crença forte sobre o valor de um parâmetro e requer evidência substancial nos dados para ser alterada. Uma distribuição *a priori* não informativa, pelo contrário, concede maior peso à verosimilhança, deixando que os dados dominem a estimação. O Meridian disponibiliza distribuições *a priori* predefinidas para todos os parâmetros do modelo, mas permite a sua personalização, como descrito na secção 3.4.2 desta dissertação.

Dado que o integral do denominador do Teorema de Bayes não possui solução analítica para modelos com múltiplos parâmetros e transformações não lineares, o Meridian recorre a métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) para gerar amostras da distribuição *a posteriori* [36]. A ideia central do MCMC consiste em construir uma cadeia de Markov cuja distribuição estacionária coincide com a distribuição *a posteriori* pretendida. A cadeia explora o espaço dos parâmetros de forma a que, após um período inicial de aquecimento (*burn-in*), as amostras geradas constituam aproximações da distribuição *a posteriori*, permitindo estimar quantidades de interesse como a média *a posteriori* do ROAS e os respetivos intervalos de credibilidade, sem calcular explicitamente os integrais envolvidos. [37]

Para gerar estas amostras, o Meridian utiliza o algoritmo *No-U-Turn Sampler* (NUTS), uma extensão adaptativa do *Hamiltonian Monte Carlo* (HMC). O HMC parte de uma ideia física que em vez de propor saltos aleatórios no espaço de parâmetros como o Metropolis-Hastings ou o amostrador de Gibbs, interpreta o parâmetro θ como a *posição* de uma partícula numa paisagem e simula o seu movimento segundo as leis da dinâmica Hamiltoniana. A altitude de cada ponto é proporcional ao quão improvável é o conjunto de parâmetros nessa posição, de modo que os vales mais profundos correspondem às zonas de maior probabilidade *a posteriori*. Uma partícula que siga as leis da física vai naturalmente passar mais tempo nos vales, que é exatamente onde queremos amostras. Para formalizar este movimento, o HMC introduz uma variável auxiliar r , chamada *momento*, com a mesma dimensão que θ . O momento representa a velocidade da partícula e é amostrado aleatoriamente no início de cada iteração a partir de uma distribuição normal padrão, $r^0 \sim \mathcal{N}(0, I)$. [38] Definindo a energia potencial como $U(\theta) = -\mathcal{L}(\theta)$, onde $\mathcal{L}(\theta) = \log p(\theta | D)$ é o logaritmo da densidade *a posteriori* e a energia

cinética como $K(r) = \frac{1}{2}r \cdot r$, a função que descreve a posição e a velocidade da partícula ao longo do tempo é a seguinte:

$$H(\theta, r) = U(\theta) + K(r) = -\mathcal{L}(\theta) + \frac{1}{2}r \cdot r \quad (2.22)$$

A propriedade fundamental é o facto da energia total do sistema manter-se constante. Quando a partícula sobe uma colina (zona de baixa probabilidade), perde velocidade e quando desce para um vale (zona de alta probabilidade), acelera. A trajetória da partícula é simulada através do integrador *leapfrog*, cujo nome evoca o jogo da rã: posição e velocidade são atualizadas de forma alternada, nunca os dois em simultâneo. [39] Um ciclo *leapfrog* completo, com tamanho de passo ε , segue sempre a mesma sequência de três operações, descritas pelas três seguintes equações:

$$r^{t+\varepsilon/2} = r^t + \frac{\varepsilon}{2} \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta^t) \quad (2.23)$$

$$\theta^{t+\varepsilon} = \theta^t + \varepsilon r^{t+\varepsilon/2} \quad (2.24)$$

$$r^{t+\varepsilon} = r^{t+\varepsilon/2} + \frac{\varepsilon}{2} \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta^{t+\varepsilon}) \quad (2.25)$$

onde r^t e θ^t referem-se aos valores das variáveis de momento e posição, r e θ , respetivamente, no instante t , e ∇_{θ} denota o gradiente em ordem a θ . A equação (2.23) corresponde a um meio passo de velocidade, onde a partícula olha para a inclinação da paisagem na posição atual ($\nabla_{\theta} \mathcal{L}$, o gradiente do logaritmo da *a posteriori*) e ajusta a sua velocidade, permanecendo a posição fixa. A equação (2.24) corresponde a um passo completo de posição, no qual com a velocidade já atualizada, a partícula avança e a velocidade mantém-se. A equação (2.25) é um segundo meio passo de velocidade na nova posição, completando o ciclo. Este padrão repete-se L vezes para produzir uma trajetória de comprimento $L\varepsilon$. A alternância em meios-passos é o que garante que o integrador é reversível e conserva a energia total, as quais são propriedades essenciais para que as amostras geradas respeitem a distribuição *a posteriori* pretendida. [38]

Após os L passos *leapfrog*, o HMC propõe o novo estado $\tilde{\theta}$ e aceita-o com probabilidade de Metropolis:

$$\alpha = \min \left(1, \frac{\exp\{\mathcal{L}(\tilde{\theta}) - \frac{1}{2}\tilde{r} \cdot \tilde{r}\}}{\exp\{\mathcal{L}(\theta^{m-1}) - \frac{1}{2}r^0 \cdot r^0\}} \right) \quad (2.26)$$

Recordando que a energia do sistema Hamiltoniano é $H(\theta, r) = -\mathcal{L}(\theta) + \frac{1}{2}r \cdot r$, cada exponencial na equação (2.26) é precisamente $\exp\{-H\}$, sendo que o numerador corresponde ao estado proposto, $\exp\{-H(\tilde{\theta}, \tilde{r})\}$, e o denominador ao estado inicial, $\exp\{-H(\theta^{m-1}, r^0)\}$. A razão de aceitação é uma comparação entre a energia total do sistema no fim e no início da trajetória. Se o integrador *leapfrog* simulasse a dinâmica de forma exata, a energia conservar-se-ia ao longo de toda a trajetória, a razão seria igual a 1 e a proposta seria sempre aceite. Na prática, a discretização em passos de tamanho ε introduz um pequeno erro que faz H desviar-se do seu valor inicial, e é exatamente esse desvio que o passo de Metropolis corrige,

assegurando que a cadeia amostra sem enviesamento da distribuição *a posteriori* pretendida.

O resultado deste critério determina o que acontece à cadeia nessa iteração. Se a proposta $\tilde{\theta}$ é aceite, o que ocorre sempre que $\alpha = 1$ e com probabilidade α nos restantes casos, a cadeia avança para o novo estado, $\theta^m \leftarrow \tilde{\theta}$, e o momento é invertido, $r^m \leftarrow -\tilde{r}$. Esta inversão não tem qualquer efeito sobre θ , visto que o momento é reamostrado do zero na iteração seguinte, e serve apenas para garantir a reversibilidade temporal exigida pelo algoritmo [38]. Se a proposta é rejeitada, a cadeia permanece no estado anterior, $\theta^m \leftarrow \theta^{m-1}$, e toda a trajetória *leapfrog* simulada é descartada. Mesmo quando a proposta é rejeitada, o estado repetido $\theta^m = \theta^{m-1}$ é uma amostra válida da cadeia e deve ser contabilizado nas estimativas finais, descartá-lo introduziria um enviesamento na distribuição amostrada.

Este processo constituído por amostrar o momento, simular a trajetória *leapfrog* e aceitar ou rejeitar via Metropolis é repetido M vezes, produzindo uma sequência de amostras $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^M$ que constitui a cadeia de Markov.

O pseudocódigo completo do HMC está descrito no Algoritmo 1. [38]

Algoritmo 1 Monte Carlo Hamiltoniano

Entrada: $\theta^0, \varepsilon, L, M$

```

1: para  $m = 1$  até  $M$  fazer
2:   Amostrar  $r^0 \sim \mathcal{N}(0, I)$ 
3:   Definir  $\tilde{\theta} \leftarrow \theta^{m-1}$ ,  $\tilde{r} \leftarrow r^0$ 
4:   para  $i = 1$  até  $L$  fazer
5:      $(\tilde{\theta}, \tilde{r}) \leftarrow \text{LEAPFROG}(\tilde{\theta}, \tilde{r}, \varepsilon)$ 
6:   fim para
7:   Aceitar com  $\alpha = \min\left(1, \frac{\exp\{\mathcal{L}(\tilde{\theta}) - \frac{1}{2}\tilde{r} \cdot \tilde{r}\}}{\exp\{\mathcal{L}(\theta^{m-1}) - \frac{1}{2}r^0 \cdot r^0\}}\right)$ :
     se aceite,  $\theta^m \leftarrow \tilde{\theta}$ ,  $r^m \leftarrow -\tilde{r}$ ; caso contrário  $\theta^m \leftarrow \theta^{m-1}$ 
8: fim para

9: função LEAPFROG( $\theta, r, \varepsilon$ )
10:    $\tilde{r} \leftarrow r + \frac{\varepsilon}{2} \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta)$ 
11:    $\tilde{\theta} \leftarrow \theta + \varepsilon \tilde{r}$ 
12:    $\tilde{r} \leftarrow \tilde{r} + \frac{\varepsilon}{2} \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\tilde{\theta})$ 
13:   devolver  $\tilde{\theta}, \tilde{r}$ 
14: fim função

```

Contudo, o HMC exige a especificação de dois hiperparâmetros de difícil calibração: o tamanho do passo ε e o número de passos L . A escolha de L é particularmente crítica. Se L for demasiado pequeno, a partícula percorre uma distância curta antes de parar e as amostras consecutivas ficam muito próximas, reduzindo o algoritmo a uma caminhada aleatória. Se L for demasiado grande, a partícula rola tanto que acaba por curvar de volta na direção do ponto de partida, fenómeno conhecido como *U-turn*, desperdiçando toda a computação investida numa trajetória que termina aproximadamente onde começou. [40]

O NUTS elimina este problema construindo a trajetória de forma iterativa, para a frente e para trás no tempo, duplicando o seu comprimento a cada iteração: 1 passo, depois 2, depois 4, e assim sucessivamente. A cada duplicação, verifica automaticamente se ocorreu um *U-*

turn, através da condição:

$$(\theta_{\max} - \theta_{\min}) \cdot r_{\min} < 0 \quad \text{ou} \quad (\theta_{\max} - \theta_{\min}) \cdot r_{\max} < 0 \quad (2.27)$$

onde $\theta_{\min}$ e $\theta_{\max}$ são os extremos da trajetória atual e $r_{\min}, r_{\max}$ os momentos correspondentes. O vetor $(\theta_{\max} - \theta_{\min})$ é a direção do percurso. Se o produto interno com a velocidade num dos extremos for negativo, significa que a partícula inverteu o sentido e está a voltar para trás e continuar seria redundante. Quando esta condição é detetada, a expansão termina e o próximo estado $\theta^{(t+1)}$ é amostrado aleatoriamente a partir do conjunto de estados válidos gerados durante a expansão, de modo a que cada ponto do espaço de parâmetros seja visitado com frequência proporcional à sua probabilidade *a posteriori*, o que assegura que a cadeia converge para a distribuição correta. [40] Desta forma, o NUTS não requer a especificação de L , o comprimento de cada trajetória é determinado automaticamente pelos dados e pela geometria local da distribuição.

O parâmetro ε controla o tamanho de cada passo do integrador *leapfrog* e tem um impacto direto na qualidade das propostas geradas pelo HMC. Se ε for demasiado grande, a discretização introduz erros numéricos elevados, a energia hamiltoniana H desvia-se substancialmente do seu valor inicial e o passo de Metropolis rejeita frequentemente a proposta, desperdiçando toda a trajetória computada. Se ε for demasiado pequeno, a simulação é precisa e a taxa de aceitação aproxima-se de 1, mas a bola avança tão lentamente que amostras consecutivas ficam muito próximas e a cadeia demora muito a explorar o espaço de parâmetros. O algoritmo de *dual averaging* durante a fase de aquecimento, mede continuamente a taxa de aceitação das propostas e ajusta ε iteração após iteração até esta se estabilizar próxima de um valor ótimo, tipicamente $\delta = 0,65$ para o HMC e $\delta = 0,60$ para o NUTS. [38] Após o aquecimento, ε é fixo no valor calibrado e mantém-se durante toda a fase de retenção.

A implementação do NUTS no Meridian é realizada através da biblioteca *TensorFlow Probability (TFP)*, que permite executar as cadeias de forma paralelizada em GPU ou TPU.

3 Preparação dos dados e configuração dos modelos

Esta secção descreve o trabalho que antecede e sustenta a modelação, começando pela apresentação das variáveis em estudo (secção 3.1), seguindo-se a preparação dos dados, que abrange o tratamento de valores em falta e a análise de multicolinearidade (secção 3.2), a análise exploratória que fundamenta as decisões de modelação (secção 3.3) e, por fim, a especificação e configuração dos modelos testados nas ferramentas Robyn e Meridian (secção 3.4).

3.1 Descrição dos dados e variáveis em estudo

A preparação dos dados constitui uma etapa fulcral na construção de um modelo de MMM, uma vez que envolve a recolha, o tratamento e a organização dos dados de forma a garantir a sua consistência e adequação à análise. A qualidade dos dados é determinante uma vez que dados incorretos ou incompletos comprometem a fiabilidade das estimativas e a utilidade dos resultados para o apoio à decisão estratégica. [4] Nesta secção descreve-se todo o trabalho que antecede e sustenta a modelação: a apresentação das variáveis utilizadas, a preparação dos dados, incluindo o tratamento de valores em falta e a análise de multicolinearidade, a análise exploratória que fundamenta as decisões de modelação e, por fim, as especificações dos modelos testados com as ferramentas Robyn e Meridian.

O conjunto de dados utilizado neste trabalho refere-se à atividade comercial de uma empresa do setor do retalho e cujas vendas são realizadas *online* e em loja física (*offline*). O horizonte temporal considerado estende-se por 2 anos e 5 meses, de janeiro de 2024 a maio de 2026, com as variáveis observadas maioritariamente numa base diária, à exceção das referentes aos canais *offline*, que apenas estão disponíveis com frequência mensal.

O KPI corresponde ao volume total de vendas, definido como a soma das vendas *online* e vendas *offline*. Por sua vez, as variáveis explicativas representam as diferentes atividades de marketing desenvolvidas pela empresa e foram agrupadas em três categorias: canais *online*, canais *offline* e variáveis orgânicas. No grupo de canais *online* foram incluídas métricas associadas às plataformas *Google Ads*, *Meta Ads* e *DV360*, nomeadamente o investimento publicitário, o número de impressões e o número de cliques. Relativamente aos canais *offline*, foram consideradas variáveis correspondentes aos investimentos realizados em televisão, rádio e publicidade exterior (*outdoor*). Estes canais *online* e *offline* por terem investimento associado são também denominados de canais pagos. Adicionalmente, foram incorporadas variáveis orgânicas relacionadas com o comportamento dos utilizadores em canais não pagos e, portanto, sem recurso direto a investimento publicitário, de modo a refletir o interesse espontâneo dos consumidores pela marca. Neste contexto, foram consideradas sessões provenientes de

email, sessões orgânicas de motores de busca e sessões orgânicas de redes sociais. Estas variáveis permitem captar a pesquisa gerada de forma natural, frequentemente influenciada pela notoriedade da marca, pela relevância dos conteúdos e pela presença digital da empresa, complementando assim a informação obtida através das campanhas dos canais pagos, quer *online* ou *offline*.

3.2 Preparação dos dados

Na Figura 3.1 é possível observar a evolução das vendas ao longo do período em análise, sendo identificadas oscilações acentuadas associadas a datas específicas do calendário e a eventos relevantes.

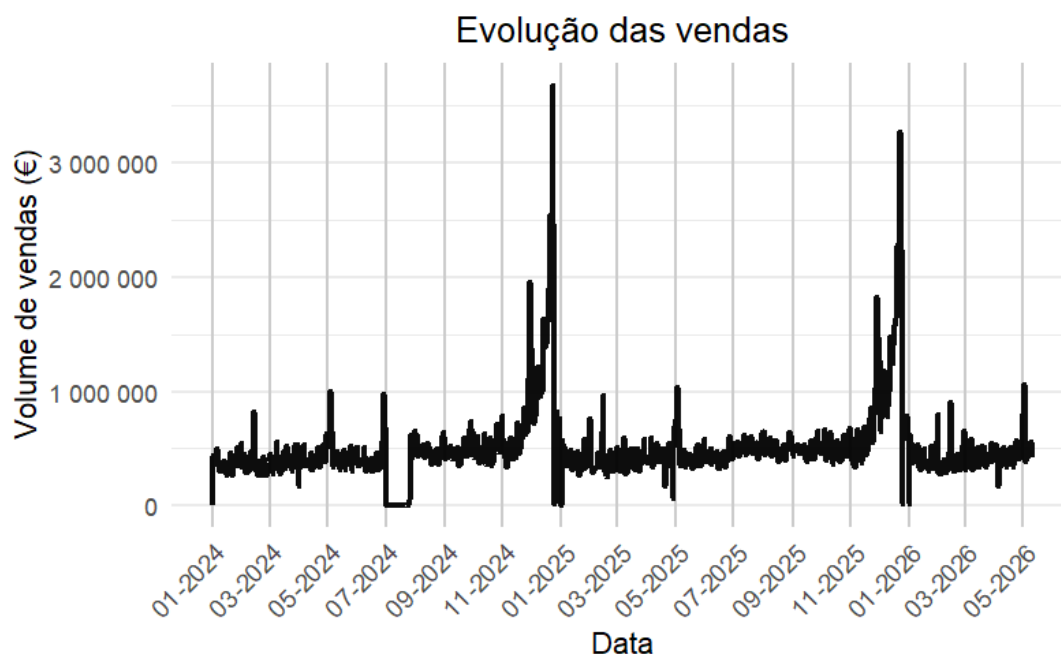


Figura 3.1. Evolução diária do volume total de vendas entre 1 de janeiro de 2024 e 10 de maio de 2026.

Destacam-se aumentos significativos nas vendas em períodos como o dia dos namorados, o dia da mãe, a *Black Friday* e Natal. Por outro lado, verificam-se quebras nas vendas associadas a períodos festivos como a Páscoa, e feriados como o dia 25 de dezembro e 1 de janeiro. Adicionalmente, observa-se uma quebra acentuada no dia 28 de abril de 2025 atribuída a uma falha operacional decorrente de um apagão elétrico, que não permitiu que houvesse vendas. A identificação destas datas permite uma melhor compreensão das oscilações observadas na série temporal e contribui para a correta interpretação dos padrões de consumo ao longo do tempo.

Após a análise exploratória de todas as variáveis, ilustrada no Anexo A, foram identificados alguns períodos com valores atípicos que não se encontram associados a eventos conhecidos. Estes valores foram atribuídos a falhas no processo de recolha de dados, uma vez que o sistema responsável apresentou interrupções em diversos momentos ao longo do período em análise. De seguida, é apresentada a Figura 3.2 na qual podemos observar a distribuição

temporal dos períodos com dados completos e dos períodos com valores em falta ao longo do tempo, para cada variável.

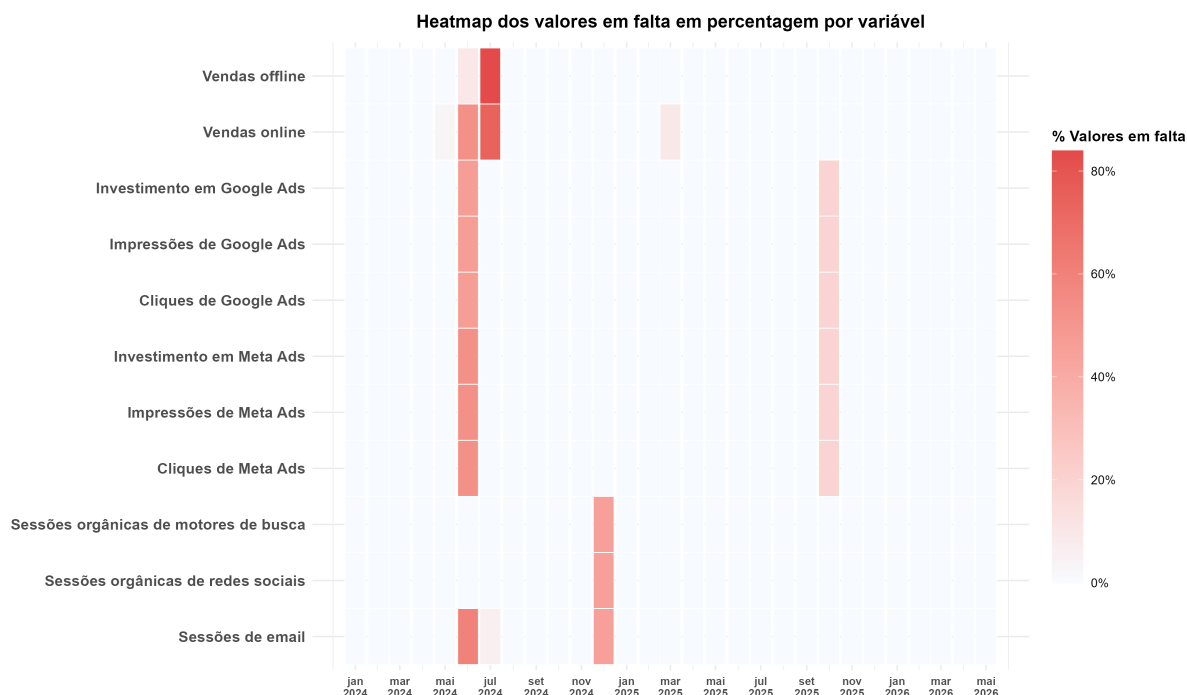


Figura 3.2. Mapa de calor da percentagem de valores em falta por variável e por mês, ao longo do tempo.

Verifica-se a existência de períodos concentrados de valores em falta, principalmente a meio de 2024 e, em menor escala, no final de 2024 e 2025, afetando sobretudo variáveis relacionadas com métricas de canais de marketing *online* e o volume de vendas. Nos restantes períodos, observa-se uma reduzida ocorrência de valores em falta, indicando que a maioria dos dados se encontra completa. O canal DV360 constitui um caso particular. Como ilustrado no Anexo A, as suas métricas de investimento, impressões e cliques exibem um comportamento fortemente esporádico, com longos períodos nulos interrompidos por surtos isolados. Assim, um valor nulo torna-se indistinguível de um valor em falta, e por isso, optou-se por não imputar. As variáveis de investimento em televisão, rádio e *outdoor* também não foram incluídas nesta análise, por serem provenientes de uma fonte de dados independente que não evidenciou falhas no processo de recolha. A variável que reporta o volume de vendas totais por ser a soma das variáveis de vendas *online* e *offline*, não sofreu imputação, tendo sido atualizada após as vendas *online* e *offline* terem sido imputadas.

Imputação

Na sequência da identificação dos períodos com dados em falta, procedeu-se à imputação destes mediante a aplicação de métodos de imputação específicos para séries temporais univariadas, recorrendo ao pacote `imputeTS` do R. [41]

Os dados em falta identificados resultam de falhas no processo de recolha, pelo que a natureza do mecanismo subjacente é classificada como dados em falta completamente ao

acaso (MCAR do inglês *Missing Completely At Random*), ou seja, a ausência dos valores depende de fatores externos, nomeadamente interrupções técnicas das plataformas de recolha, não estando relacionada nem com os valores observados nem com os valores que a variável assumiria nos períodos em falta.

Importa, neste ponto, esclarecer a distinção entre os conceitos de imputação e interpolação, frequentemente confundidos no contexto das séries temporais, apesar de designarem noções distintas. A imputação designa o procedimento geral de atribuir um valor estimado a observações em falta, podendo recorrer a diferentes métodos, desde a substituição pela média ou pela última observação válida até modelos estatísticos como o filtro de Kalman. A interpolação corresponde a uma técnica específica que estima valores entre pontos conhecidos com base na continuidade local da série, traçando, no caso linear, um segmento de reta entre dois pontos observados consecutivos. A interpolação constitui, portanto, um caso particular de imputação, sendo geralmente limitada em séries com forte componente sazonal ou em lacunas de grande dimensão. Esta distinção é particularmente relevante no presente trabalho, uma vez que, dos quatro métodos comparados, a interpolação linear é aplicada de forma direta apenas no método `na.interpolation`, sendo igualmente utilizada como algoritmo subjacente nos métodos `na.seadec` e `na.seasplit`, após uma transformação prévia da série destinada a isolar a componente sazonal.

Seleção do método por variável

Dado que diferentes variáveis apresentam características distintas em termos de tendência, amplitude das oscilações e padrão sazonal, optou-se por seleccionar o método de imputação mais adequado para cada variável de forma independente, em vez de aplicar um único método a todas. Para o efeito, foi implementado um procedimento de validação com dados conhecidos, composto pelas seguintes etapas:

1. Identificou-se um período sem valores em falta, nomeadamente os meses de janeiro a abril e agosto a novembro de 2024, totalizando 243 observações limpas por variável. A escolha dos meses inteiramente livres de valores em falta de 2024 deve-se ao facto de ser neste ano que se concentra a maioria dos períodos em falta reais a imputar, assegurando assim que a validação decorre no mesmo regime temporal, de tendência e de sazonalidade, em que os métodos serão efetivamente aplicados. Este período foi utilizado como base de validação, uma vez que os valores reais são conhecidos e permitem medir o erro de imputação de forma objetiva.
2. Em cada uma de vinte repetições, com sementes aleatórias distintas, foram removidas observações de forma a simular valores em falta neste período, removendo em cada repetição cerca de 15% das observações, repartidas em blocos contíguos cuja dimensão foi calibrada pela maior lacuna real observada em cada variável (entre 7 e 29 dias consecutivos). O limite de 15% destina-se a preservar contexto suficiente em torno de cada bloco, garantindo que a maioria da série permanece intacta para sustentar a imputação. Todas as posições aleatórias dos blocos foram geradas a partir de sementes

fixas, assegurando a reprodutibilidade do procedimento de validação. Em consequência, o número de blocos mascarados por repetição depende da dimensão da lacuna de cada variável: quanto maior o bloco, menor o número de blocos que a mesma proporção de observações mascaradas permite acomodar. Este número varia, assim, entre 1, nas vendas *offline*, cuja lacuna de 29 dias só permite um bloco por repetição sem comprometer o contexto restante, e 5, nas sessões orgânicas, cujos blocos de 7 dias cabem em maior número. Nas variáveis com lacunas mais extensas, em particular as vendas *offline*, a robustez é assegurada sobretudo pela variação aleatória da posição do bloco ao longo das vinte repetições, e não pela existência de múltiplos blocos simultâneos. Nas variáveis com lacunas curtas, cada repetição já contém vários blocos. As posições dos blocos foram, em todos os casos, restringidas ao interior da série, de modo a garantir que cada lacuna artificial dispõe de observações de ambos os lados, condição necessária para uma avaliação justa de métodos como o de Kalman, que apoiam a imputação na informação anterior e posterior a cada bloco.

3. De modo geral, para a maioria das séries temporais, a aplicação dos métodos `na.kalman`, `na.interpolation`, `na.seadec` ou `na.seasplit` tende a produzir resultados adequados na imputação de valores em falta. [41]

- **Interpolação linear** (`na.interpolation`): método de imputação baseado exclusivamente na continuidade local da série. Para cada lacuna, é traçado um segmento de reta entre o último valor observado antes do bloco em falta e o primeiro valor observado após o mesmo, sendo os valores em falta substituídos pelos pontos correspondentes sobre essa reta. [41] Trata-se da abordagem mais simples entre os métodos testados.
- **Kalman** (`na.kalman`): imputação dos valores em falta com base na suavização de Kalman aplicada a um modelo em espaço de estados. Nesta abordagem, a série é representada como a combinação de componentes não observáveis: tendência, sazonalidade e ruído, cujas variâncias são estimadas por máxima verosimilhança através da função `StructTS` da linguagem R. A imputação processa-se em duas fases. Primeiro, o filtro de Kalman percorre a série sequencialmente, estimando o estado do sistema em cada instante a partir das observações passadas. Em seguida, o suavizador de Rauch-Tung-Striebel revisita essas estimativas, incorporando também as observações posteriores a cada lacuna. Ao apoiar cada valor imputado na informação de ambos os lados do intervalo em falta, produzem-se estimativas mais precisas. [42]
- **Decomposição sazonal** (`na.seadec`): decomposição da série temporal nas componentes de tendência, sazonalidade e ruído. A componente sazonal é removida da série original, sendo a imputação realizada por interpolação linear sobre a série dessazonalizada. Após a imputação, a componente sazonal previamente removida é adicionada novamente à série, preservando o seu comportamento sazonal. [43]
- **Divisão sazonal** (`na.seasplit`): divisão da série temporal em subconjuntos sazonais distintos, com base na periodicidade semanal da série. Cada subconjunto

agrupa as observações correspondentes à mesma posição dentro do ciclo semanal. A imputação dos valores em falta é realizada separadamente em cada subconjunto, por interpolação linear, sendo os subconjuntos posteriormente recombinaados para reconstruir a série original. [44]

Importa esclarecer que, para os três métodos que modelam explicitamente a sazonalidade (`na.kalman`, `na.seadec` e `na.seasplit`), as séries foram tratadas com periodicidade semanal. Esta escolha reflete o facto de a sazonalidade identificável à escala das lacunas em causa, de poucos dias a poucas semanas, ser a de natureza intra-semanal.

4. Métricas de erro. Para cada método e cada repetição, calcularam-se quatro métricas de erro relativamente aos valores reais conhecidos [45]:

- Erro Absoluto Médio (MAE): $MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$. O MAE calcula a média das diferenças absolutas entre os valores reais e os valores imputados, sendo equivalente, numa perspetiva geométrica, à norma L_1 (distância de Manhattan). Por não elevar os erros ao quadrado, o MAE é menos sensível a valores discrepantes do que o RMSE, constituindo uma medida robusta e de interpretação direta, uma vez que é expressa nas mesmas unidades da variável em análise.
- Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE): $RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$. O RMSE corresponde ao desvio padrão do erro de imputação e é equivalente, numa perspetiva geométrica, à norma L_2 (distância euclidiana). Por elevar os erros ao quadrado antes de os agregar, penaliza de forma mais acentuada os erros de maior magnitude, tornando-se particularmente adequado para identificar métodos que produzem imputações pontuais muito afastadas dos valores reais. Tal como o MAE, é expresso nas unidades originais da variável, o que facilita a comparação direta entre métodos. Neste trabalho, o RMSE constitui o critério principal de seleção do método de imputação, por ser mais sensível a erros extremos numa série caracterizada por grandes oscilações.
- Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE): $MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100$. O MAPE expressa o erro médio como percentagem do valor real, permitindo comparar a qualidade da imputação entre variáveis com escalas muito distintas, como receitas e cliques. Importa, contudo, notar duas limitações. Em primeiro lugar, o MAPE é estruturalmente sensível a valores reais próximos de zero: como o erro de cada observação é dividido por y_i , denominadores pequenos produzem percentagens muito elevadas, ainda que o erro absoluto seja reduzido. Em segundo lugar, penaliza de forma assimétrica subestimações e sobrestimações. Para um dado valor real, uma sobrestimação não tem limite percentual superior, enquanto uma subestimação está limitada a 100% quando o valor previsto é nulo. Por estas razões, o MAPE é utilizado como métrica complementar ao RMSE, e não como critério de seleção.
- Viés relativo: $Viés (\%) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)}{\bar{y}} \times 100$, em que $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ denota a média dos valores reais nas posições mascaradas. Ao contrário do MAE e do MAPE, o viés preserva o sinal do erro, permitindo distinguir sobrestimação sistemática (viés

> 0) de subestimação sistemática (viés < 0). A divisão por $\bar{y}$, em vez de por cada y_i , confere maior estabilidade numérica em séries com valores próximos de zero, constituindo uma alternativa mais robusta ao erro percentual médio com sinal. Como referência interpretativa, adotou-se o limiar de 5%: consideraram-se aceitáveis os valores de $|\text{Viés}| < 5\%$, indicativos da ausência de distorção sistemática relevante, sinalizando desvios superiores uma tendência de sobrestimação (viés > 0) ou subestimação (viés < 0). [46]

O método de imputação selecionado para cada variável foi aquele que obteve o menor RMSE médio nas vinte repetições por esta métrica penalizar mais fortemente os erros de maior magnitude, característica relevante numa série com grandes oscilações. Para além da média, reporta-se o desvio-padrão entre repetições, que quantifica a sensibilidade da estimativa à posição aleatória do bloco mascarado, aspeto particularmente relevante nas variáveis com um único bloco por repetição.

Resultados da validação

Com o objetivo de fundamentar a seleção do método de imputação para cada variável e avaliar a robustez das escolhas efetuadas, as Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam as métricas de erro obtidas pelos quatro métodos testados em cada variável. Os valores reportados correspondem à média das vinte repetições de validação. A apresentação das quatro métricas permite não só identificar o método com menor RMSE, como também avaliar a consistência do desempenho face às restantes medidas e detetar eventuais padrões de sobrestimação ou subestimação sistemática que possam comprometer a qualidade da imputação. Em cada linha das tabelas, o melhor valor obtido para cada métrica encontra-se assinalado a negrito, correspondendo ao mínimo no caso do MAE, do RMSE e do MAPE, e ao valor mais próximo de zero no caso do viés.

Tabela 3.1. Comparação de MAE e RMSE (média $\pm$ desvio-padrão entre repetições) por método e variável.

Variável	Kalman		Seadec		Seasplit		Interpolação	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Vendas <i>offline</i>	69 519	87 086 $\pm$ 15 986	73 471	92 887 $\pm$ 20 272	61 207	81 317 $\pm$ 17 473	82 810	102 592 $\pm$ 20 896
Vendas <i>online</i>	2 958	3 901 $\pm$ 1 115	2 764	3 526 $\pm$ 923	2 518	3 275 $\pm$ 567	3 007	3 793 $\pm$ 1 021
Investimento em <i>Google Ads</i>	165	210 $\pm$ 78	153	197 $\pm$ 77	182	231 $\pm$ 50	155	201 $\pm$ 77
Impressões de <i>Google Ads</i>	40 010	52 658 $\pm$ 34 374	38 559	51 328 $\pm$ 33 794	49 145	65 452 $\pm$ 34 383	39 006	51 766 $\pm$ 32 807
Cliques de <i>Google Ads</i>	654	819 $\pm$ 335	574	730 $\pm$ 303	805	996 $\pm$ 318	582	739 $\pm$ 298
Investimento em <i>Meta Ads</i>	158	215 $\pm$ 86	158	215 $\pm$ 87	203	260 $\pm$ 72	159	217 $\pm$ 86
Impressões de <i>Meta Ads</i>	94 950	127 093 $\pm$ 40 374	96 229	128 979 $\pm$ 40 373	123 919	156 112 $\pm$ 36 896	98 472	131 828 $\pm$ 38 464
Cliques de <i>Meta Ads</i>	658	882 $\pm$ 344	695	916 $\pm$ 330	794	1 010 $\pm$ 282	721	945 $\pm$ 329
Sessões orgânicas de motores de busca	260	343 $\pm$ 74	264	357 $\pm$ 88	302	400 $\pm$ 73	297	389 $\pm$ 87
Sessões orgânicas de redes sociais	124	193 $\pm$ 57	122	192 $\pm$ 52	191	272 $\pm$ 110	121	191 $\pm$ 56
Sessões de <i>email</i>	379	483 $\pm$ 81	425	529 $\pm$ 227	355	473 $\pm$ 82	437	544 $\pm$ 202

Tabela 3.2. Comparação de MAPE e Viés relativo por método e variável.

Variável	Kalman		Seadec		Seasplit		Interpolação	
	MAPE (%)	Viés (%)	MAPE (%)	Viés (%)	MAPE (%)	Viés (%)	MAPE (%)	Viés (%)
Vendas <i>offline</i>	16.3	+0.83	17.3	+0.18	14.0	-0.75	19.6	+0.21
Vendas <i>online</i>	22.9	-1.29	22.5	+2.51	20.0	+2.46	24.6	+2.77
Investimento em <i>Google Ads</i>	15.4	+2.76	14.3	+2.41	17.4	+3.36	14.5	+2.60
Impressões de <i>Google Ads</i>	15.3	+2.56	14.8	+2.27	19.2	+3.13	15.0	+2.43
Cliques de <i>Google Ads</i>	9.4	+0.77	8.3	+0.42	11.6	+1.36	8.5	+0.54
Investimento em <i>Meta Ads</i>	31.0	+5.82	31.0	+6.14	37.4	+5.44	31.3	+6.38
Impressões de <i>Meta Ads</i>	27.8	+3.88	28.1	+4.46	34.5	+3.54	28.6	+4.43
Cliques de <i>Meta Ads</i>	24.1	+3.80	25.1	+4.21	28.8	+5.01	25.9	+4.18
Sessões orgânicas de motores de busca	9.4	+0.75	9.4	+0.86	11.0	+1.29	10.4	+1.13
Sessões orgânicas de redes sociais	51.6	+7.97	51.2	+8.50	78.7	+5.28	50.4	+8.17
Sessões de <i>email</i>	79.4	+4.08	87.7	+5.79	72.6	+7.04	89.7	+5.30

A análise das Tabelas 3.1 e 3.2 mostra que nenhum método é universalmente superior. Na maioria das variáveis, os quatro métodos são estatisticamente equivalentes, com diferenças de RMSE médio inferiores ao respetivo desvio-padrão. A interpolação linear só se penaliza nas séries de forte componente sazonal. Nas sessões orgânicas de redes sociais, onde essa componente é fraca, a sua simplicidade basta. Quanto ao MAPE, os valores elevados nas sessões orgânicas de redes sociais ($\approx 50\%$) e nas sessões de email (73-90%) não indicam má imputação, refletem a sensibilidade desta métrica a valores reais próximos de zero. Confirma-o o viés relativo normalizado pela média, inferior a 9% em módulo em todas as variáveis, embora mais elevado nas sessões orgânicas de redes sociais e nas sessões de *email*, em linha com os valores elevados observados pelo MAPE. No conjunto, os quatro métodos apresentam viés equilibrado, com poucos valores acima de 5% em módulo e sem tendências sistemáticas de sobrestimação ou subestimação que comprometam as análises subsequentes.

A Tabela 3.3 resume o método selecionado e as métricas de erro por variável.

Tabela 3.3. Método de imputação selecionado e respetivas métricas de erro por variável.

Variável	Método	Dias	MAE	RMSE	MAPE (%)	Viés (%)
Vendas <i>offline</i>	Seasplit	29	61 207	81 317 $\pm$ 17 473	14.0	-0.75
Vendas <i>online</i>	Seasplit	23	2 518	3 275 $\pm$ 567	20.0	+2.46
Investimento em <i>Google Ads</i>	Seadec	14	153	197 $\pm$ 77	14.3	+2.41
Impressões de <i>Google Ads</i>	Seadec	14	38 559	51 328 $\pm$ 33 794	14.8	+2.27
Cliques de <i>Google Ads</i>	Seadec	14	574	730 $\pm$ 303	8.3	+0.42
Investimento em <i>Meta Ads</i>	Kalman	16	158	215 $\pm$ 86	31.0	+5.82
Impressões de <i>Meta Ads</i>	Kalman	16	94 950	127 093 $\pm$ 40 374	27.8	+3.88
Cliques de <i>Meta Ads</i>	Kalman	16	658	882 $\pm$ 344	24.1	+3.80
Sessões orgânicas de motores de busca	Kalman	7	260	343 $\pm$ 74	9.4	+0.75
Sessões orgânicas de redes sociais	Interpolação	7	121	191 $\pm$ 56	50.4	+8.17
Sessões de <i>email</i>	Seasplit	20	355	473 $\pm$ 82	72.6	+7.04

Globalmente, o `na.kalman` foi selecionado em quatro variáveis, o `na.seadec` e o `na.seasplit` em três cada, e a interpolação unicamente nas sessões orgânicas de redes sociais.

Aplicação e validação visual

Após a seleção do método ótimo para cada variável, procedeu-se à imputação sobre o conjunto de dados completo. Os resultados foram inspecionados visualmente para cada variável,

confirmando que os valores imputados seguem a tendência e o padrão sazonal da série sem introduzir descontinuidades ou valores implausíveis. A Figura 3.3 ilustra, a título de exemplo, o resultado da imputação nas vendas *offline*, onde os valores imputados são assinalados a vermelho sobre a série completa a azul.

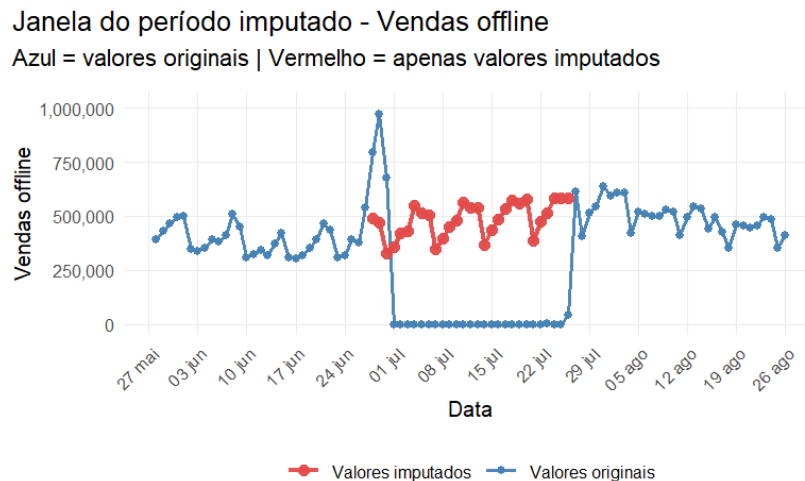
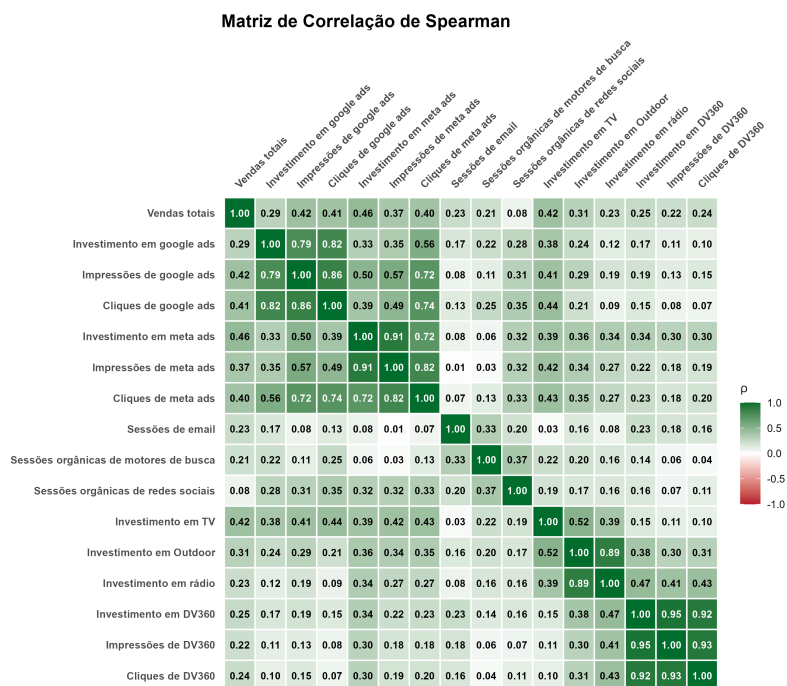


Figura 3.3. Janela do período imputado para as vendas *offline* através do método Seasplit.

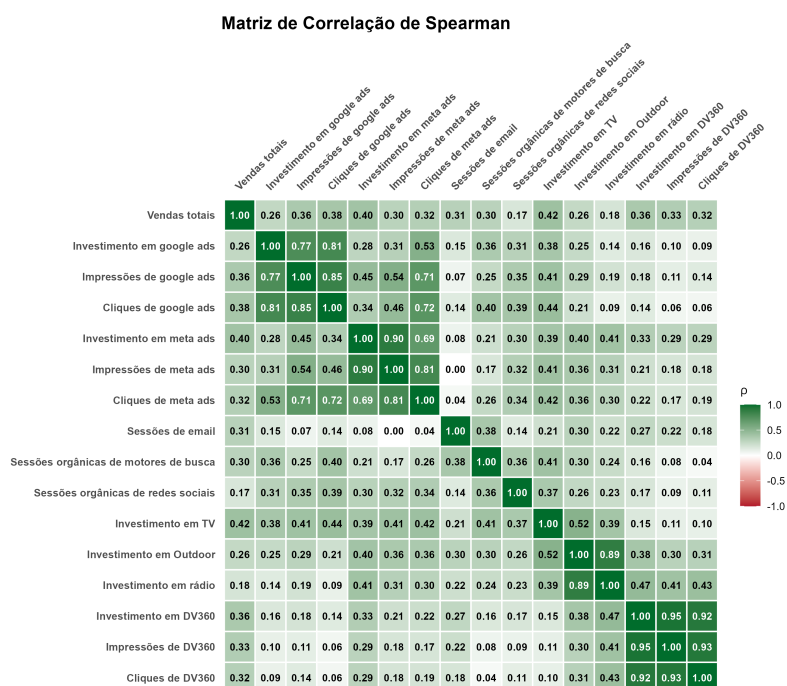
Análise de correlação e multicolinearidade

A análise de multicolinearidade tem como objetivo identificar o grau de correlação entre as variáveis independentes. Quando duas ou mais variáveis evoluem de forma semelhante ao longo do tempo (correlação próxima de 1), o modelo tem dificuldade em distinguir qual delas é responsável pelo efeito observado. Esta situação não impede a estimação do modelo, mas pode tornar os coeficientes menos fiáveis e até contra-intuitivos. Para mitigar este problema podem ser aplicadas várias estratégias complementares. Uma das mais comuns consiste em remover as variáveis redundantes, mantendo apenas a que melhor representa o fenómeno em análise, evitando duplicações de informação. Outra abordagem passa por combinar essas variáveis altamente correlacionadas num só indicador agregado, simplificando o modelo.

As Figuras 3.4a e 3.4b apresentam as matrizes de correlação de Spearman antes e após a imputação dos valores em falta, respetivamente.



(a) Matriz de correlação antes da imputação dos dados.



(b) Matriz de correlação após a imputação dos dados.

Figura 3.4. Matrizes de correlação de Spearman antes e após a imputação dos dados.

A estrutura de correlação mantém-se globalmente estável, indicando que o processo não distorceu as associações entre as variáveis. Verificam-se correlações elevadas entre métricas do mesmo canal, em particular no *Google Ads*, *Meta Ads* e *DV360*, bem como entre os investimentos em *Outdoor* e Rádio. Para reduzir a multicolinearidade entre os canais *offline*,

estes foram agregados numa só variável *Investimentos em offline*, correspondente à soma dos investimentos em televisão, rádio e *outdoor*.

O fator de inflação da variância (VIF do inglês *Variance Inflation Factor*) mede a multicolinearidade de cada variável explicativa, sendo dado por

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}, \quad (3.1)$$

onde R_j^2 resulta da regressão da variável j sobre as restantes. Como regra prática, um VIF ≥ 10 indica multicolinearidade elevada e, em conjuntos de dados pequenos, valores a partir de 5 já são relevantes. Classificou-se assim cada variável como *elevada* (≥ 10), *moderada* (5–10) ou *baixa* (< 5). [21]

Tabela 3.4. Comparação dos valores de VIF antes e após imputação.

Variável	Antes imputação		Após imputação	
	VIF	Interpretação	VIF	Interpretação
Cliques de <i>Google ads</i>	19.80	Elevada	20.00	Elevada
Investimento em <i>Outdoor</i>	11.67	Elevada	11.89	Elevada
Impressões de <i>Google ads</i>	10.26	Elevada	9.59	Moderada
Investimento em rádio	8.01	Moderada	7.95	Moderada
Investimento em <i>Google ads</i>	7.89	Moderada	7.65	Moderada
Investimento em <i>Meta ads</i>	6.66	Moderada	6.46	Moderada
Impressões de <i>Meta ads</i>	5.69	Moderada	5.44	Moderada
Cliques de <i>Meta ads</i>	5.26	Moderada	5.26	Moderada
Investimento em TV	3.17	Baixa	3.01	Baixa
Impressões de DV360	1.73	Baixa	1.73	Baixa
Sessões orgânicas de motores de busca	1.71	Baixa	2.59	Baixa
Sessões de email	1.60	Baixa	1.61	Baixa
Investimento em DV360	1.58	Baixa	1.58	Baixa
Sessões orgânicas de redes sociais	1.51	Baixa	1.44	Baixa
Cliques de DV360	1.29	Baixa	1.30	Baixa

Os valores do VIF, apresentados na Tabela 3.4, antes e após a imputação mantêm-se semelhantes para cada variável, evidenciando que o processo de imputação não introduziu nem agravou dependências entre variáveis. Apenas os cliques e as impressões de *Google Ads* e o investimento em *Outdoor* apresentam VIF elevado, confirmando a multicolinearidade existente entre métricas do mesmo canal. As restantes variáveis situam-se em níveis moderados ou baixos.

3.3 Análise exploratória dos dados

O período de análise deve ser, no mínimo, de 2 a 3 anos para dados diários ou semanais e 4 a 5 anos para dados mensais. [4] Além disso, para garantir a consistência e a fiabilidade da análise, é fundamental que todas as variáveis sejam mensuradas com a mesma periodicidade. A escolha da periodicidade deve equilibrar o nível de detalhe e a estabilidade dos dados. Dados diários fornecem maior granularidade e, por isso, permitem captar variações rápidas nas respostas do mercado, no entanto introduzem mais volatilidade tornando a modelação mais difícil. Os dados semanais ajudam a suavizar o ruído do dia a dia e a reduzir

flutuações aleatórias, oferecendo uma visão mais estável das tendências globais. Os dados mensais apresentam algumas limitações como perda de sensibilidade temporal, ou seja, efeitos de curto prazo dificilmente são detetados, e apresentam maior risco de multicolinearidade, visto que quando os dados são mais agregados, as variáveis podem comportar-se de forma semelhante, dificultando a distinção dos seus efeitos individuais.

Os dados diários foram agregados à granularidade semanal, o que resultou em 123 observações semanais. A granularidade semanal minimiza a desagregação artificial dos canais *offline*, disponíveis apenas mensalmente, reduzindo o ruído introduzido face a uma abordagem diária, garantindo equilíbrio entre granularidade e estabilidade.

A Figura 3.5 evidencia um padrão sazonal consistente ao longo dos anos analisados. As vendas mantêm-se relativamente estáveis durante grande parte do ano, aumentando progressivamente na segunda metade e atingindo os valores mais elevados nas últimas semanas, sobretudo durante os períodos de *Black Friday* e Natal. Este comportamento repete-se em 2024 e 2025, sugerindo uma forte componente sazonal. Embora 2026 contenha apenas algumas observações, o início do ano apresenta uma evolução semelhante à observada nos anos anteriores.

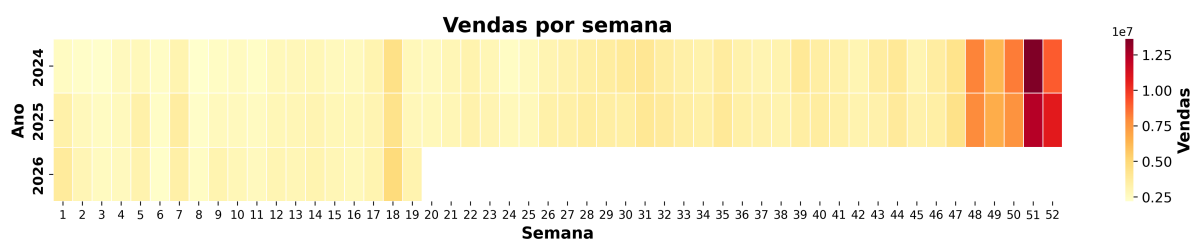


Figura 3.5. Mapa de calor das vendas semanais por ano, onde a intensidade da cor reflete o volume de vendas de cada semana.

A Figura 3.6 complementa esta análise ao apresentar a evolução das vendas por ano, evidenciando dinâmicas temporais semelhantes e reforçando a presença de padrões sazonais anuais.

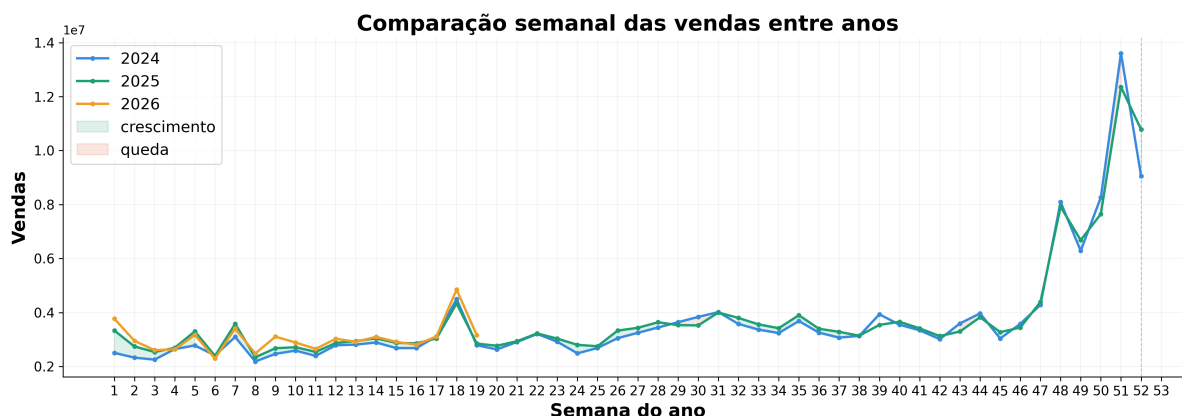


Figura 3.6. Vendas semanais ao longo do ano sobrepostas para 2024, 2025 e 2026, com a semana do ano no eixo horizontal.

Na Figura 3.7, observa-se a evolução do investimento nos canais *Google Ads*, *Meta Ads*, *DV360* e *offline*, juntamente com o volume de vendas. Verifica-se que períodos de maior investimento tendem a coincidir com aumentos nas vendas, particularmente nos períodos finais de

cada ano. Os canais *Google Ads* e *Meta Ads* apresentam presença consistente ao longo do tempo, enquanto DV360 evidencia maior variabilidade. O investimento *offline* ocorre de forma mais pontual, associado a alguns dos maiores picos de investimento.

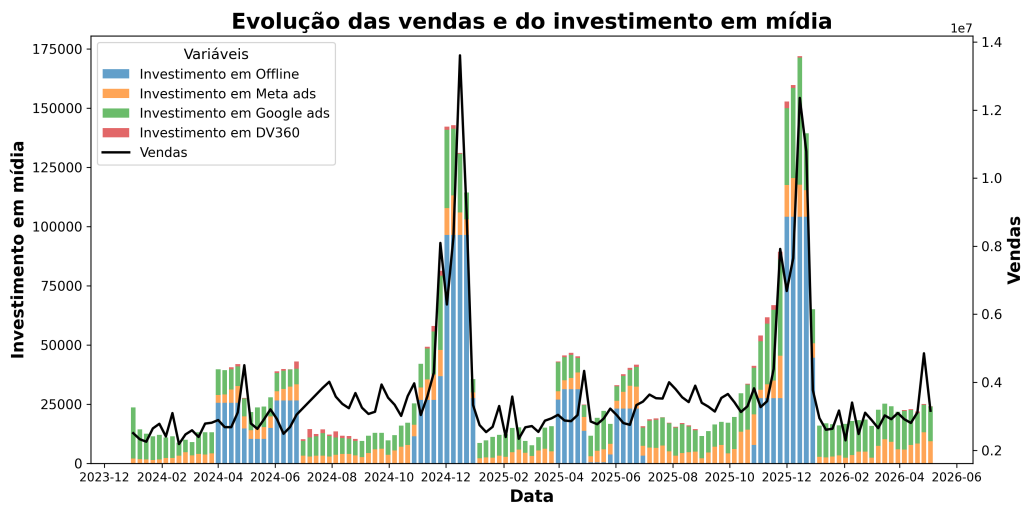


Figura 3.7. Evolução semanal do investimento por canal pago, em barras empilhadas, sobreposta às vendas totais, com escalas distintas para investimento e vendas.

Tabela 3.5. Investimento por canal e total no período de análise, com o detalhe dos subcanais *offline*.

Canal	Investimento (€)	% do investimento total
Google Ads	1 507 953	38,7%
Meta Ads	706 981	18,1%
DV360	56 008	1,4%
Offline	1 628 248	41,8%
Rádio	444 439	11,4%
TV	595 000	15,3%
Outdoor	588 809	15,1%
Total	3 899 190	100,0%

A Tabela 3.5 resume o investimento total e a respetiva distribuição por canal ao longo do período em análise, evidenciando que o *offline* (41,8%) foi o canal com maior peso no investimento total, seguido do *Google Ads* (38,7%), enquanto o DV360 apresentou a menor representatividade, com apenas 1,4% do total investido.

3.4 Especificação e configuração dos modelos

Embora o Robyn e o Meridian assentem em abordagens distintas, procurou-se manter a configuração dos modelos tão comparável quanto possível, fixando as mesmas variáveis de marketing, de controlo e orgânicas e diferenciando apenas os aspetos inerentes a cada abordagem. As subsecções seguintes descrevem, para o Robyn (secção 3.4.1) e para o Meridian (secção 3.4.2), os detalhes da configuração da estimação dos modelos.

Métricas de exposição

Em modelos de MMM, o investimento é a métrica mais utilizada para representar a atividade dos canais de marketing, por ser diretamente observável e comparável entre canais. No entanto, o investimento reflete simultaneamente dois fatores: a exposição gerada e o custo dessa exposição. Nos canais digitais, o custo por impressão varia ao longo do tempo devido à natureza de leilão das plataformas, o que pode levar o modelo a confundir variações de preço com variações de eficácia publicitária, enviesando as estimativas de ROAS.

Para evitar este problema, separou-se a variável de custo da variável de exposição. O investimento é utilizado apenas para o cálculo do ROAS, enquanto as impressões são usadas como métrica de entrada na função de resposta. Esta abordagem foi adotada para os canais *Google Ads*, *Meta Ads* e DV360, tanto no Robyn como no Meridian. No canal *offline*, por não existirem métricas de exposição equivalentes, o investimento foi mantido como variável de entrada.

A utilização de impressões em detrimento de cliques nos canais digitais deve-se ao facto de as impressões representarem de forma mais adequada a exposição dos utilizadores à publicidade. [4] Em particular, a utilização exclusiva de cliques pode conduzir à subestimação do impacto real das campanhas, uma vez que não considera as denominadas *view-through conversions*, isto é, situações em que os utilizadores visualizam um anúncio mas realizam a conversão posteriormente sem interação direta com o mesmo. Assim, as impressões constituem uma métrica mais realista para capturar o efeito da publicidade digital no comportamento dos consumidores.

3.4.1 Robyn

Como componentes temporais, recorreu-se ao Prophet com inclusão de tendência, sazonalidade anual e feriados nacionais, considerando Portugal como país de referência para a calendarização dos mesmos.

Importa ainda registar que o Robyn assinalou uma relação fraca entre o investimento e as impressões nos canais *Google Ads*, *Meta Ads* e DV360, ou seja, o investimento explica mal o número de impressões geradas nestes canais. À primeira vista, isto parece contrariar a matriz de correlação de Spearman, onde estas variáveis surgem fortemente associadas. Mas, na prática, as duas medidas respondem a perguntas diferentes. A correlação de Spearman limita-se a verificar se, quando o investimento sobe, as impressões também sobem, o que se confirma. O diagnóstico do Robyn é mais exigente, pois avalia se o investimento permite prever com rigor quantas impressões se obtêm. Como há semanas com investimento semelhante mas com volumes de impressões muito diferentes, devido à variação do custo por mil impressões, a tendência geral mantém-se mas a conversão exata entre euros e impressões torna-se imprecisa. Esta imprecisão não compromete a estimativa do efeito de cada canal, repercute-se apenas na leitura do ROAS, com particular incidência no DV360.

Variáveis de controlo

As variáveis de controlo são quatro dummy binárias correspondentes a eventos comerciais relevantes: dia dos namorados, dia da mãe, *Black Friday* e Natal. À semelhança da configuração adotada no Meridian, cada variável não se limita a assinalar o dia exato do evento, mas abrange uma janela temporal que inclui um período de antecedência: a própria semana do evento mais uma semana de antecedência para a *Black Friday*, o dia dos namorados e o dia da mãe, e três semanas de antecedência para o Natal. Assim, cada variável assume o valor 1 nos períodos correspondentes à janela de cada evento ao longo do horizonte temporal em análise e 0 nos restantes períodos. Esta definição reflete o facto do impacto destes eventos sobre as vendas não se limitar ao dia em si, estendendo-se ao período que o antecede. Estas variáveis permitem isolar o impacto específico de períodos com forte influência nas vendas, evitando que os seus efeitos sejam incorretamente atribuídos às atividades de marketing.

Hiperparâmetros e estimação

Descrevem-se, em seguida, os intervalos dos hiperparâmetros de *adstock* e saturação adotados em cada especificação e a sua fundamentação. Em todos os casos, em vez de se fixar um valor único, indicou-se um intervalo cabendo à otimização procurar a combinação que melhor ajusta os dados.

Para a saturação, optou-se por intervalos amplos e comuns à generalidade dos canais ($\alpha \in [0,5; 3]$ e $\gamma \in [0,3; 1]$), por não existir conhecimento prévio que justificasse restringir a forma da curva de retornos decrescentes. Deixou-se, assim, que fossem os dados a determinar a curvatura (α) e o ponto de inflexão (γ) de cada canal.

Para o *adstock*, os intervalos traduzem a velocidade esperada de dissipação do efeito de cada canal. No *adstock* geométrico, os canais receberam intervalos estreitos e próximos de zero, $\theta \in [0; 0,4]$, refletindo efeitos que se esgotam em pouco tempo, à exceção do *offline* que recebeu o intervalo mais persistente, $\theta \in [0,3; 0,8]$, cujo limite inferior elevado impede que o canal assuma um efeito puramente imediato, traduzindo a persistência típica dos meios tradicionais.

Nas especificações *Weibull*, controladas por *shape* e *scale*, procurou-se reproduzir esta mesma ordenação de persistência, de modo a que as diferenças observadas decorram da função de *adstock* e não de pressupostos distintos. O *scale*, que regula a duração do efeito, foi mantido em intervalos conservadores e crescentes com a persistência esperada do canal: próximo de zero nos canais de resposta imediata, $[0; 0,05]$ e mais elevado no *offline*, $[0,05; 0,20]$. O *shape* foi definido em função do tipo de decaimento pretendido: na *Weibull CDF* manteve-se o intervalo de referência $[0,0001; 2]$ na generalidade dos canais, forçando-se uma forma em S no *offline* ($shape \in [0,75; 2]$). Na *Weibull PDF*, onde o *shape* governa o efeito desfasado, limitou-se a $[1; 2]$ nos canais de resposta direta, impedindo o desfasamento, e alargou-se para $[2; 6]$ no *offline*, admitindo um efeito cujo impacto máximo ocorre algumas semanas após a exposição.

Por fim, a janela de treino foi definida no intervalo $[0,70; 0,80]$ em todas as especificações, reservando os períodos finais da série para validação e teste.

O processo de otimização foi conduzido com o algoritmo *TwoPointsDE*, através de 8 tentativas e 4 000 iterações. Foi imposto um intercepto não negativo e atribuídos pesos iguais à NRMSE e à DECOMP.RSSD na função objetivo, deixando desativada a componente de calibração externa (MAPE), em coerência com uma modelação não calibrada por estudos experimentais. Esta atribuição igualitária de pesos justifica-se pela necessidade de contrabalançar o ajuste estatístico aos dados com a plausibilidade económica da atribuição de efeitos. Num cenário caracterizado por forte multicolinearidade, onde os principais canais pagos concentram os seus investimentos nos mesmos picos sazonais, nomeadamente na *Black Friday* e no Natal, uma otimização focada exclusivamente na minimização do erro residual (NRMSE) correria o risco de incorrer em sobreajuste. O algoritmo poderia alocar fatias desproporcionais de receita a canais com baixos níveis de investimento. Este equilíbrio aceita um acréscimo controlado no erro estatístico em troca de uma solução estável, robusta e coerente com a realidade económica do negócio.

3.4.2 Meridian

A configuração do Meridian seguiu uma lógica idêntica à do Robyn, mas com particularidades inerentes à abordagem bayesiana. Dado que a empresa opera a nível nacional mas os dados não se encontram desagregados por região geográfica, optou-se pela modelação nacional. Além disso, procedeu-se à inclusão de efeitos *halo*, o que resultou na estimação de três modelos A1, A2 e B. Os modelos A1 e A2 destinam-se a isolar o efeito *halo* dos canais pagos *Meta Ads* e *offline* sobre as sessões orgânicas nos motores de busca e em redes sociais, respetivamente. Foram incluídos apenas esses dois canais dado que são os que, à partida, têm maior capacidade de gerar *halo*, o *Meta Ads*, pelo seu papel na construção de notoriedade e o *offline* pela sua natureza de comunicação com potencial de impulsionar sessões orgânicas subsequentes. O DV360 dirige-se tipicamente a audiências com intenção de compra já parcialmente formada, pelo que o seu potencial de *halo* orgânico é baixo. O *Google Ads*, por sua vez, foi excluído porque a sua atuação direta sobre pesquisa no Google introduziria um problema de endogeneidade com as sessões orgânicas nos motores de busca, dado que ambos os canais respondem aos mesmos estímulos de procura. Os resultados estimados pelo modelo B, como o ROAS, o ROAS marginal, a decomposição da receita e as curvas de resposta de cada canal, têm por base um conjunto de variáveis orgânicas constituído pelos resíduos extraídos dos dois modelos anteriores (A1 e A2) e pelas sessões de *email*.

Configuração da amostragem MCMC

Na configuração adotada neste trabalho, foram executadas quatro cadeias independentes, cada uma com 2 000 iterações de adaptação, 2 000 de aquecimento e 2 000 de retenção, totalizando 8 000 amostras *a posteriori*. A convergência foi avaliada através do diagnóstico $\hat{R}$ de Gelman-Rubin, que compara a variância dentro de cada cadeia com a variância entre cadeias. [47] Se as quatro cadeias independentes, que partem de pontos distintos do espaço, acabam todas por visitar as mesmas zonas com a mesma frequência, é muito provável que

tenham convergido para a distribuição correta. Valores de $\hat{R}$ próximos de 1 confirmam essa convergência. A documentação do Meridian recomenda um limiar de $\hat{R} < 1,2$. [36]

Configuração de *adstock* e saturação

A forma de decaimento foi escolhida em função da dinâmica de cada canal, tendo-se adotado decaimento geométrico para todos os canais com exceção do *offline* que tem decaimento binomial. Enquanto os canais digitais apresentam tipicamente efeitos mais imediatos e de dissipação rápida, os meios *offline* tendem a gerar impactos mais persistentes, justificando a utilização de uma especificação binomial, conforme descrito na secção 2.7.2.

A janela temporal define o número máximo de períodos durante os quais o investimento de uma dada semana continua a produzir efeito sobre as vendas, através do *adstock*. O valor L significa que o efeito de uma campanha se distribui pela semana de exposição e pelas L semanas seguintes, decaindo de acordo com a função de pesos $w(s; \alpha)$ descrita na secção 2.7.2. Importa notar que este parâmetro é definido ao nível do modelo, e não canal a canal, pelo que todos os canais de um mesmo modelo partilham a mesma janela de *adstock*. Assim, foram adotados valores distintos conforme o modelo, nomeadamente uma semana em A1, duas semanas em A2 e três semanas no modelo B, de forma a refletir o compromisso entre captar o efeito mais prolongado do *offline* e mais rápido dos canais digitais.

O *prior* sobre o parâmetro de decaimento α foi mantido não informativo, $\alpha \sim U(0, 1)$, o que constitui a configuração padrão do Meridian. Esta escolha não impõe qualquer preferência prévia quanto à velocidade do decaimento do *adstock*, admitindo com igual probabilidade desde efeitos quase imediatos, com α próximo de 0, até efeitos muito persistentes, com α próximo de 1, e deixando que sejam os dados a determinar a fração do impacto que transita de uma semana para a seguinte. Por fim, o parâmetro de inclinação da função Hill foi fixado no seu valor padrão (`slope = 1`).

Relativamente à ordem das transformações, seguiu-se igualmente a configuração padrão `hill_before_adstock = False`. Desta forma, acumula-se primeiro o investimento ponderado das semanas anteriores e só depois se aplica a função de saturação ao valor acumulado, de modo que o que satura não é o investimento de uma semana isolada, mas o efeito agregado de várias semanas de publicidade. Esta é a ordem mais habitual em MMM, por ser a que melhor traduz a forma como a exposição publicitária se acumula ao longo do tempo.

Decomposição temporal

Ativou-se a opção AKS que permite ao Meridian determinar de forma automática o número e a localização dos nós da função de tendência subjacente, dispensando a afinação manual. Além desta abordagem, os três modelos A1, A2 e B incluem, como variáveis de controlo quatro variáveis *dummy* de sazonalidade: Natal, *Black Friday*, dia dos namorados e dia da mãe, definidas como indicadores binários ao longo da janela de cada evento e não apenas no dia exato, a própria semana do evento mais uma semana de antecedência para a *Black Friday*, o dia dos namorados e o dia da mãe, e as três semanas de antecedência para o Natal.

Neste conjunto de dados marcado por sazonalidade acentuada, o investimento, sobretudo o *offline*, concentra-se nos mesmos períodos comerciais (em particular o Natal e a *Black Friday*). Caso esses picos não sejam capturados pelo AKS e/ou pelos controlos sazonais, o modelo confundirá o efeito sazonal com o do investimento e sobrestimará o ROAS desses canais.

Optou-se por *dummies* em vez de termos de Fourier porque a sazonalidade deste caso de estudo é dominada por picos estreitos e datados, e não por uma oscilação periódica suave.

Especificação de *priors*

A especificação de *priors* envolve a escolha da métrica sobre a qual o *prior* é expresso (ROAS, mROAS, contribuição ou coeficiente) e a escolha da distribuição dessa variável. A documentação do Meridian recomenda explicitamente que se selecione a métrica "que se conhece melhor ou que mais importa ao interpretar os resultados do modelo". [48]

Dado que o KPI dos modelos A1 e A2 é o número de sessões orgânicas, ou seja, uma medida não monetária, optou-se por especificar *priors* de contribuição, em conformidade com a recomendação da documentação do Meridian para resultados que não são receita. [48] A contribuição corresponde à percentagem do total de sessões originadas por cada canal e, portanto, foi adotada uma distribuição Beta para cada canal. A distribuição $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ é uma distribuição contínua sobre $(0, 1)$, com função densidade

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \alpha, \beta > 0,$$

o que a torna uma escolha natural para modelar proporções, já que toma valores exclusivamente no intervalo $(0,1)$. [49] Os seus dois primeiros momentos são

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}.$$

Quanto maior $\alpha + \beta$, menor a variância e portanto as densidades são fortemente concentradas em torno da média, o que reflete uma crença prévia forte e, consequentemente, maior é o peso do *prior* face aos dados na inferência posterior. Por exemplo, $\text{Beta}(15, 85)$ e $\text{Beta}(7.5, 42.5)$ partilham exatamente a mesma média (15%), mas a segunda apresenta um desvio-padrão aproximadamente 40% superior (0,050 contra 0,036), traduzindo uma crença prévia substancialmente menos informativa.

No Modelo A1, foi utilizada a distribuição $\text{Beta}(15, 85)$ para cada canal, traduzindo a expectativa *a priori* de que o investimento conjunto em *offline* e *Meta* explicaria aproximadamente 30% das sessões orgânicas de motores de busca. No Modelo A2 adotou-se $\text{Beta}(5, 95)$ para *offline* e $\text{Beta}(15, 85)$ para *Meta*, refletindo a expectativa de que as sessões orgânicas em redes sociais sejam mais sensíveis ao investimento em redes sociais, dada a mesma plataforma e audiência, do que a estímulos *offline*.

A Figura 3.8 ilustra a sensibilidade destas escolhas à força do *prior* através de um fator multiplicativo k , $\alpha' = k\alpha$ e $\beta' = k\beta$ preservando a média e aumentando a dispersão à medida que k diminui.

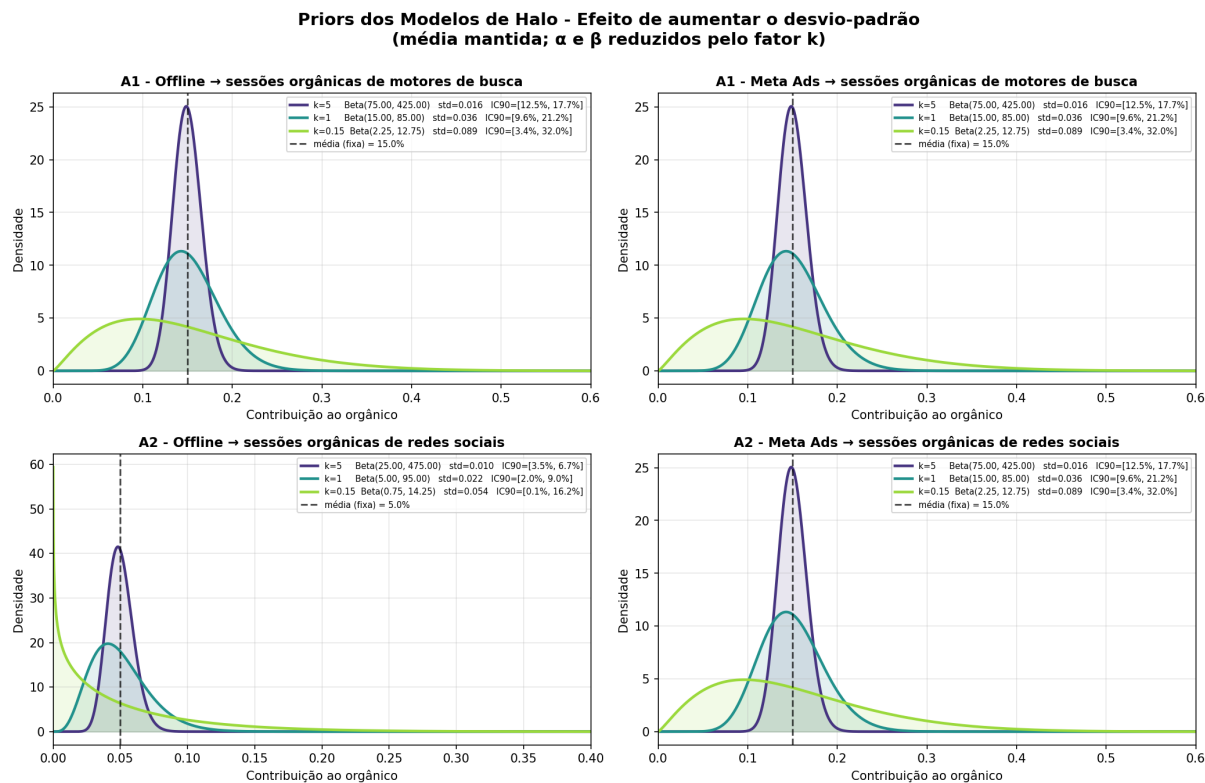


Figura 3.8. Densidade dos *priors* Beta para os Modelos A1 (superior) e A2 (inferior). A média (linha tracejada) mantém-se fixa enquanto o fator multiplicativo k aplicado à concentração total $\alpha + \beta$ controla a informatividade do *prior*.

A Figura 3.8 torna visível este compromisso. No modelo A1, com $k = 5$, a concentração total quintuplica e os *priors* tornam-se fortemente informativos, as densidades concentram-se junto à média, com intervalos de credibilidade a 90% muito estreitos (por exemplo, [12,5%; 17,7%] nos canais de média 15%), o que praticamente impõe o valor central e deixa uma margem escassa para a atualização pelos dados. No extremo oposto, $k = 0.15$ reduz significativamente a concentração e alarga consideravelmente as densidades: o intervalo de credibilidade expande-se para [3,4%; 32,0%] nos mesmos canais e, no Modelo A2, onde a média é de apenas 5%, o ajuste conduz a $\alpha' = 0,75$, fazendo a densidade divergir junto à origem e empurrando o limite inferior do intervalo para 0,1% que representa um *prior* tão difuso que se torna praticamente não informativo. Note-se que, a média (linha tracejada) permanece fixa em todos os casos, sendo apenas a dispersão a variar com k . A configuração base $k = 1$ (curva azul) corresponde a manter α e β inalterados e representa o ponto de equilíbrio adotado, com intervalos moderados que acomodam a incerteza sem dominar a verosimilhança.

Os *priors* no Modelo B foram especificados em termos de ROAS, visto que o KPI é monetário e é a única informação de que dispomos. Os valores médios de ROAS atribuídos a cada canal (Tabela 3.6) foram extraídos com base no conhecimento de domínio da Wise Pirates. Esta crença prévia resulta da experiência acumulada pela agência na gestão das campanhas do cliente e de *benchmarks* setoriais comparáveis. Além disso, os *priors* de ROAS constituem a parametrização recomendada pela documentação do Meridian quando se dispõe de conhecimento prévio expresso em termos de eficiência por euro. [48] A escolha de uma distribuição LogNormal justifica-se pela necessidade de garantir suporte estritamente positivo, em

coerência com o pressuposto de efeitos de marketing não negativos assumido pelo Meridian.

A distribuição $\text{LogNormal}(\mu, \sigma)$ é, por definição, a distribuição de uma variável aleatória X cujo logaritmo segue uma distribuição Normal: $X \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma)$ se e só se $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Os parâmetros μ e σ são, portanto, a média e o desvio-padrão de $\log X$ e não de X . A função densidade de probabilidade tem a forma

$$f_X(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

e está definida apenas para valores estritamente positivos, consistente com o domínio do ROAS. [50] Os momentos relevantes são

$$\text{med}(X) = e^\mu, \quad \mathbb{E}[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad \text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1),$$

os quais permitem traduzir uma crença de ROAS numa especificação dos parâmetros internos da distribuição. [49] A LogNormal é, além disso, assimétrica à direita, propriedade que se acentua com σ e que se revela particularmente adequada à modelação de ROAS, visto que permite acomodar cenários de retorno elevado sem deslocar a massa central da distribuição nem inviabilizar valores mais conservadores.

Embora a densidade acima esteja escrita em termos de μ e σ (média e desvio-padrão de $\log X$), a especificação no Meridian é através da média e do desvio-padrão do próprio ROAS, na sua escala natural, através da função `lognormal_dist_from_mean_std(mean, std)`. Internamente, o Meridian converte estes momentos lineares nos parâmetros logarítmicos:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{s}{m}\right)^2\right)}, \quad \mu = \ln(m) - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

onde m e s denotam a média e o desvio-padrão do ROAS. [48] Esta distinção é relevante porque um mesmo valor corresponde a crenças muito diferentes consoante seja interpretado como desvio-padrão na escala do ROAS ou como σ na escala logarítmica.

Adotou-se, como configuração base, uma média *a priori* de ROAS por canal e um desvio-padrão comum $s = 0.7$, expresso na escala do ROAS. A Tabela 3.6 resume estes valores, bem como a mediana e o σ logarítmico implícitos em cada caso.

Tabela 3.6. Especificação dos *priors* LogNormal sobre o ROAS dos canais pagos (Modelo B). O *prior* é definido pela média m e pelo desvio-padrão s do ROAS; a mediana e o σ logarítmico são parâmetros derivados.

Canal	Média m	Desvio-padrão s	Mediana	σ (log)
Google Ads	3,20	0,7	3,13	0,22
Meta Ads	1,92	0,7	1,80	0,35
Offline	2,56	0,7	2,47	0,27
DV360	1,53	0,7	1,39	0,44

Mediana = $\exp(\mu)$ e $\sigma = \sqrt{\ln(1 + (s/m)^2)}$, com m, s na escala do ROAS.

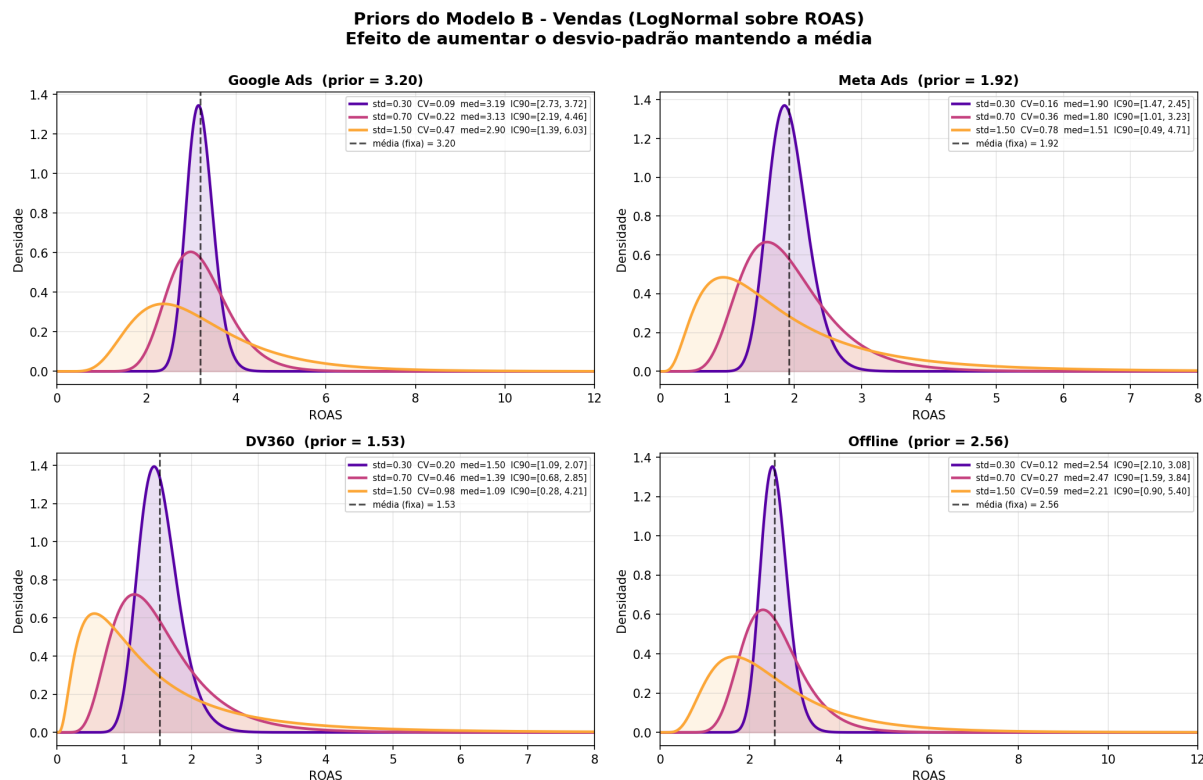


Figura 3.9. Densidade dos *priors* LogNormal sobre o ROAS dos quatro canais pagos do Modelo B, para $s \in \{0.3; 0.7; 1.5\}$. A média (linha tracejada) mantém-se nos valores da Tabela 3.6.

A Figura 3.9 ilustra o efeito do desvio-padrão s sobre as densidades, para $s \in \{0.3; 0.7; 1.5\}$ com médias fixas. Para $s = 0.3$, as curvas surgem fortemente concentradas, com intervalos de credibilidade a 90% estreitos (por exemplo, [2,73; 3,72] no *Google Ads*), o que tornaria o *prior* excessivamente informativo. No extremo oposto, $s = 1.5$ alarga as caudas a ponto de o limite inferior do intervalo descer abaixo de 1 nos canais de menor ROAS, permanecendo apenas o *Google Ads* acima de 1. É ainda visível a deslocação progressiva da mediana para a esquerda à medida que s aumenta: com a média fixa, um maior desvio-padrão implica um σ logarítmico maior e, logo, maior assimetria à direita, fazendo a mediana $m / \exp(\sigma^2/2)$ descer face à média. A configuração base ($s = 0.7$, curva magenta) representa o ponto de equilíbrio adotado.

Importa sublinhar que cada modelo é estimado sob as três forças de *prior*: concentrada ($k = 5$, $s = 0.3$), base ($k = 1$, $s = 0.7$) e difusa ($k = 0.15$, $s = 1.5$), sendo os resultados reportados e comparados entre si, na secção 4. Esta análise permite avaliar em que medida as conclusões dependem da força da crença prévia.

Validação

Para avaliar a qualidade preditiva dos modelos fora da amostra de treino, foi utilizado o argumento `holdout_id` do Meridian, que permite definir um conjunto de semanas de validação cujas observações de KPI são excluídas da verosimilhança durante a amostragem MCMC, sendo mantidas as variáveis de marketing para preservar a continuidade do efeito de *adstock*

nos períodos subsequentes.

De acordo com as recomendações da documentação do Meridian, é desaconselhada a retenção de blocos contíguos no tempo, nomeadamente no final da janela temporal, por comprometer a estimação dos nós da *spline* que modelam a tendência e sazonalidade. [51] Em alternativa, foram selecionadas semanas intercaladas no período de janeiro de 2025 a maio de 2026, reservando o ano de 2024 integralmente para treino. Concretamente, foi retida uma em cada três semanas, perfazendo 26 semanas de validação, o que representa aproximadamente 21% do total de observações. As semanas da *Black Friday* e do Natal foram adicionalmente incluídas no conjunto de validação. Esta opção permite comparar, nos períodos de maior variabilidade comercial, o desempenho dos modelos em relação à capacidade de captar a sazonalidade.

Configuração da otimização de investimento

Vale a pena distribuir o investimento de outra forma? Para responder a esta pergunta, recorreu-se ao *Budget Optimizer* do Meridian, que procura a repartição do orçamento entre canais que melhor satisfaz um dado critério de otimização, sujeito a restrições de continuidade operacional manualmente definidas.

O *Budget Optimizer* aceita dois parâmetros de restrição por canal: `spend_constraint_lower` (l_c) e `spend_constraint_upper` (u_c), os quais definem, respetivamente, a máxima redução e o máximo acréscimo permitidos face à quota de cada canal no orçamento total, apresentada na Tabela 3.5. Formalmente, para um dado cenário com orçamento total B e a quota atual do canal c igual a α_c , os limites de investimento são:

$$\underline{s}_c = (1 - l_c) \times B \times \alpha_c \quad \text{e} \quad \bar{s}_c = (1 + u_c) \times B \times \alpha_c. \quad (3.2)$$

É fundamental referir que o comportamento destes limites muda consoante o modo de orçamento escolhido:

- **No modo de orçamento fixo:** As restrições operam sobre o orçamento do cenário (B). Isto significa que os tetos e pisos absolutos escalam proporcionalmente com o investimento total definido para o cenário. Como consequência, num cenário de expansão (onde B aumenta), o teto de cada canal também aumenta, permitindo que o gasto final ultrapasse a variação percentual nominal (u_c) quando comparado com o histórico.
- **No modo de orçamento flexível:** Como o orçamento final é uma incógnita a determinar pelo otimizador, o parâmetro B na Equação 3.2 passa a fixar-se obrigatoriamente no valor do orçamento histórico de referência. Assim, nos cenários flexíveis, os limites tornam-se barreiras estáticas e intransponíveis baseadas no passado, o que explica a razão pela qual os canais travam exatamente nos +30% ou +20% nominais ao atingirem o teto.

Uma das decisões metodológicas desta análise foi a adoção de restrições diferenciadas por canal, assentes na flexibilidade operacional e real de cada canal. Para os canais *Google Ads*, *Meta Ads* e *offline* foram adotadas restrições simétricas de $\pm 30\%$, valor que preserva a

diversificação do portefólio e os objetivos estratégicos de notoriedade. O DV360 é a exceção, dada a sua presença esporádica e volume de investimento reduzido, o que justifica uma restrição mais apertada de $\pm 20\%$ como salvaguarda que impede o otimizador de explorar incerteza como sinal de eficiência. A Tabela 3.7 sintetiza os parâmetros adotados e os intervalos de gasto resultantes para um qualquer cenário com orçamento igual ao atual.

Tabela 3.7. Restrições de investimento e intervalos resultantes diferenciadas por canal para o cenário neutro.

Canal	α_c	l_c	u_c	Piso (€)	Teto (€)
Google Ads	38,7%	0,30	0,30	1 055 567	1 960 339
Meta Ads	18,1%	0,30	0,30	494 887	919 075
DV360	1,4%	0,20	0,20	44 806	67 210
Offline	41,8%	0,30	0,30	1 139 774	2 116 722

O *Budget Optimizer* do Meridian pode operar em dois modos. No modo de orçamento fixo, o orçamento total B é definido exogenamente e o objetivo consiste em encontrar a distribuição ótima entre canais, mantendo constante o montante investido. Qualquer aumento de receita resulta, assim, exclusivamente de uma alocação mais eficiente do investimento disponível. Neste contexto, foram avaliados três cenários: um cenário neutro, correspondente ao investimento atual (3 899 190€), para avaliar o grau de eficiência da alocação atual; um cenário de expansão, com um aumento de 20% do orçamento (4 679 028€), para analisar de que forma o investimento adicional deveria ser distribuído e até que ponto os rendimentos decrescentes limitam o retorno marginal; e um cenário de contenção, com uma redução de 15% (3 314 311€), destinado a identificar os canais onde os cortes minimizam a perda de receita incremental. No modo de orçamento flexível, o orçamento total deixa de ser imposto externamente e passa a ser determinado pelo próprio otimizador através de parâmetros de paragem. O primeiro cenário baseia-se no ROAS total mínimo, em que o investimento é expandido até que o ROAS agregado do portefólio atinja o limiar de 1, permitindo que alguns canais operem abaixo desse valor desde que o conjunto mantenha rentabilidade positiva. O segundo baseia-se no ROAS marginal mínimo por canal, em que cada canal é expandido individualmente apenas até ao ponto em que o seu ROAS marginal atinge 1, impedindo que a elevada eficiência de alguns canais compense ou subsidie a menor eficiência de outros. Por essa razão, este último critério tende a produzir recomendações de investimento mais conservadoras.

4 Discussão de resultados

Após a construção e preparação do conjunto de dados descrita na secção anterior, procede-se nesta secção à apresentação e análise dos resultados obtidos a partir da modelação do Robyn e do Meridian.

4.1 Robyn

Com o objetivo de avaliar o tipo de transformação de *adstock* e o papel das variáveis de controlo, foram estimadas seis especificações, resultantes do cruzamento de três funções de *adstock* com duas configurações de variáveis de controlo, conforme sintetizado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1. Especificações estimadas no Robyn.

Modelo	<i>Adstock</i>	Var. controlo sazonais
R1	Geométrico	Sim
R2	Geométrico	Não
R3	<i>Weibull CDF</i>	Sim
R4	<i>Weibull CDF</i>	Não
R5	<i>Weibull PDF</i>	Sim
R6	<i>Weibull PDF</i>	Não

Nas especificações sem variáveis de controlo (R2, R4 e R6), a captação dos padrões sazonais fica inteiramente a cargo das componentes do Prophet, o que permite avaliar em que medida a redundância entre ambas as abordagens afeta a qualidade da decomposição e a plausibilidade dos coeficientes estimados.

As três figuras seguintes ilustram o processo de modelação para a especificação R2, tomada como exemplo representativo.

A Figura 4.1 ilustra o gráfico de Pareto onde cada ponto representa um modelo, e a intensidade da cor reflete o número de iterações. A linha vermelha delimita a fronteira de Pareto, composta pelos modelos não dominados, ou seja, os modelos para os quais não existe nenhuma outra solução que seja simultaneamente melhor em ambos os objetivos, não sendo possível reduzir o erro preditivo (NRMSE) sem agravar a discrepância da decomposição (DECOMP.RSSD), e vice-versa.

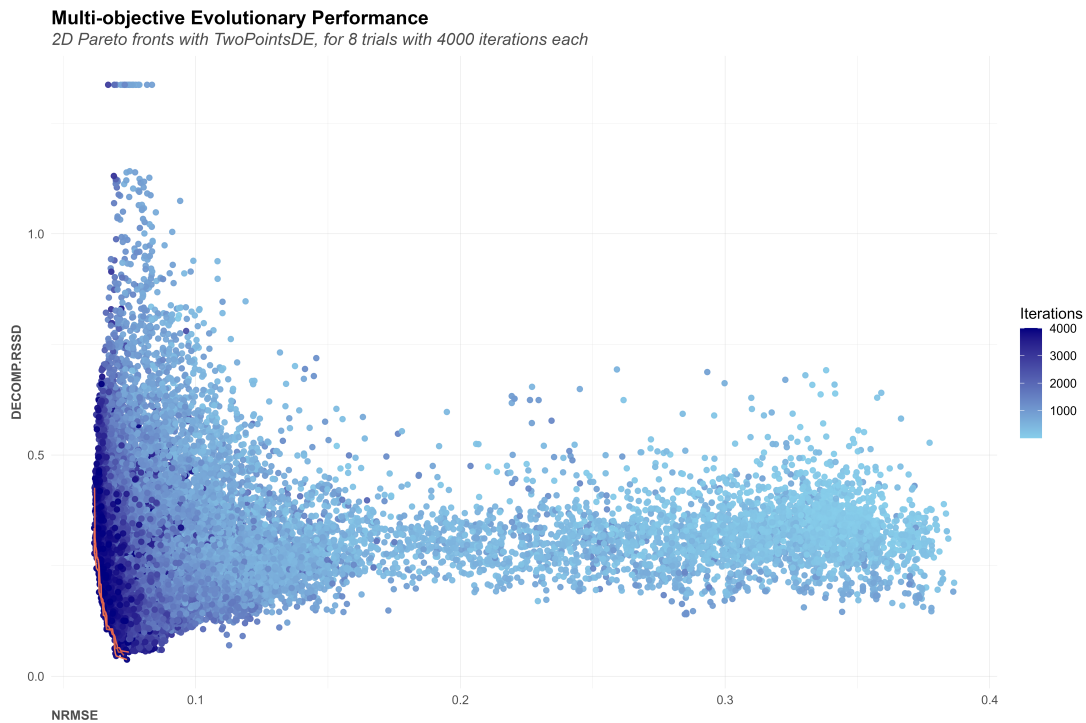


Figura 4.1. Fronteira de Pareto: desempenho multi-objetivo dos 32 000 modelos explorados na especificação R2.

A seleção do modelo final em cada especificação recorreu ao algoritmo de *clustering* k-means aplicado sobre os modelos da fronteira de Pareto, com o número de *clusters* determinado automaticamente pelo critério de variância mínima do WSS. A Figura 4.2 ilustra a curva de WSS em função do número de clusters para a especificação R2, onde o critério selecionou $k = 6$. O cotovelo da curva, assinalado pela linha vermelha, corresponde ao ponto a partir do qual o ganho marginal de homogeneidade intra-cluster deixa de justificar o aumento da complexidade. De cada cluster foi selecionado o modelo com menor NRMSE e DECOMP.

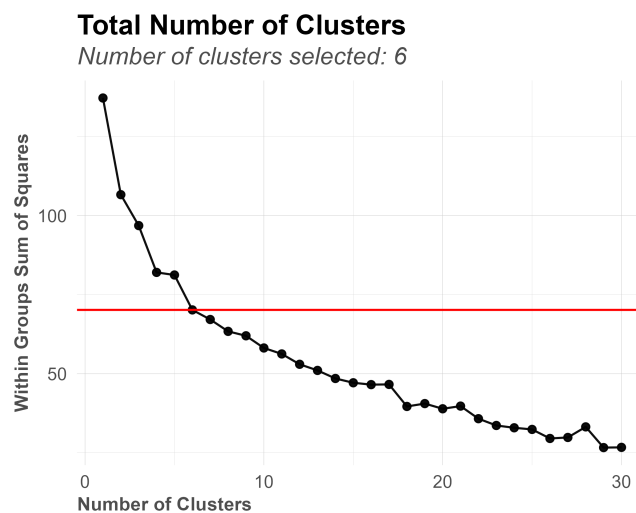


Figura 4.2. Determinação do número ótimo de clusters.

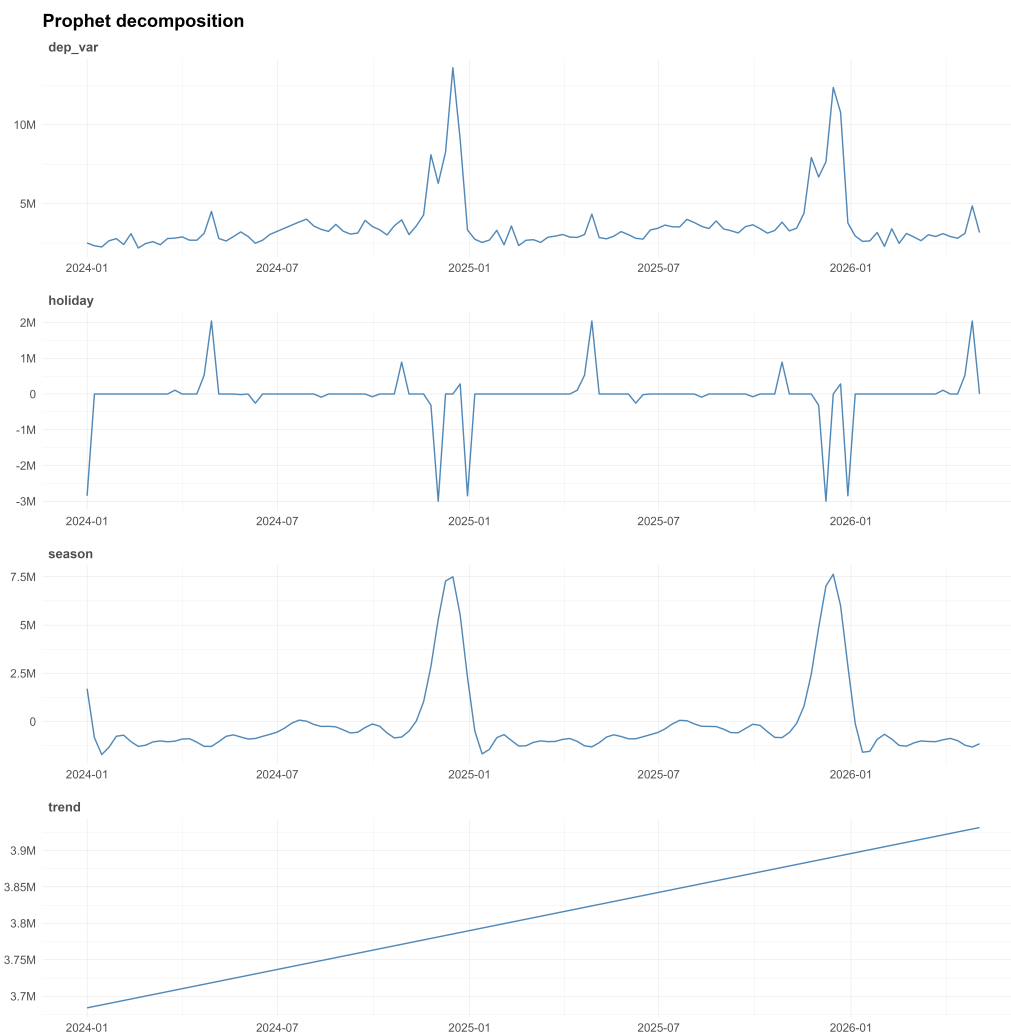


Figura 4.3. Decomposição das vendas pelo modelo Prophet nas componentes de tendência, sazonalidade e feriados, na especificação R2.

A decomposição pelo modelo Prophet revela três componentes distintos que explicam o comportamento das vendas. A tendência apresenta um crescimento linear estável, evoluindo de aproximadamente 3,7M para 3,9M ao longo do período analisado, o que indica uma expansão consistente do negócio independentemente de fatores sazonais. A componente de sazonalidade anual concentra os picos em novembro e dezembro, atingindo cerca de 7,5M acima da média, enquanto o restante do ano registra valores abaixo da média estrutural, comportamento esperado num negócio fortemente orientado pelo período natalício. Por fim, a componente de feriados isola eventos pontuais em datas específicas: regista impactos positivos, como os picos próximos de +2M associados ao dia 25 de abril, mas também valores negativos que chegam a -3M em feriados de fim de ano.

Importa notar que a tendência, a sazonalidade e os feriados são estimados em simultâneo num único ajuste, pelo que a decomposição não deve ser interpretada como uma sequência em que uma componente corrige outra. Os valores negativos observados na componente de feriados não traduzem, por isso, uma quebra estrutural, mas antes a forma como o modelo repartiu o sinal entre as componentes: em dias concretos como o Natal e o Ano Novo, as vendas reais situam-se abaixo do nível que a componente sazonal atribui ao período envolvente,

e esse desvio foi imputado pelo modelo à componente de feriados.

De entre os modelos representativos exportados em cada especificação, um por *cluster*, o modelo apresentado foi o que minimiza o NRMSE e o DECOMP.RSSD, replicando o critério usado pelo Robyn na seleção do representante de cada *cluster*. A Tabela 4.2 reúne os modelos selecionados em cada uma das seis especificações, permitindo comparar o efeito da função de *adstock* (geométrica, *Weibull CDF* e *Weibull PDF*) e da presença de variáveis de controlo sazonais.

Tabela 4.2. Resultados dos modelos selecionados por especificação no Robyn.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
	<i>Geo + ctr</i>	<i>Geo s/ ctr</i>	<i>WCDF + ctr</i>	<i>WCDF s/ ctr</i>	<i>WPDF + ctr</i>	<i>WPDF s/ ctr</i>
<i>Qualidade preditiva</i>						
Adj. R^2 treino	0.848	0.863	0.846	0.837	0.884	0.887
Adj. R^2 validação	0.920	0.929	0.890	0.857	0.944	0.929
Adj. R^2 teste	0.271	0.338	0.351	0.317	0.315	0.608
NRMSE treino	0.049	0.048	0.049	0.050	0.043	0.042
NRMSE validação	0.078	0.074	0.091	0.114	0.064	0.081
NRMSE teste	0.163	0.156	0.155	0.168	0.158	0.132
DECOMP.RSSD	0.052	0.038	0.187	0.206	0.038	0.030
<i>Decomposição da receita (%)</i>						
Intercepto	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	37.6
Tendência	85.1	85.0	84.7	68.1	100.5	56.1
Sazonalidade	-1.4	-1.6	-1.3	-1.2	-3.7	-3.6
Feriados	-0.7	-0.7	-0.7	-0.6	-1.1	-1.1
Google Ads	4.2	4.8	5.8	7.3	0.9	2.2
Meta Ads	1.6	2.1	2.1	2.8	0.4	1.1
Offline	3.9	4.5	3.5	3.9	0.9	2.3
DV360	0.1	0.2	1.4	1.5	0.0	0.2
Sessões orgânicas em motores de busca	4.1	4.4	1.4	15.0	0.0	0.1
Sessões orgânicas em redes sociais	0.0	0.0	0.0	0.9	0.8	0.8
Sessões de email	1.0	1.4	0.8	2.3	0.6	4.3
<i>ROAS</i>						
ROAS total	11.40	13.38	14.82	17.95	2.52	6.59
ROAS Google Ads	12.69	14.25	17.40	21.95	2.68	6.38
ROAS Meta Ads	10.08	13.20	13.70	18.08	2.36	6.80
ROAS Offline	10.9	12.5	9.63	10.73	2.53	6.35
ROAS DV360	7.77	17.90	112.75	121.47	0.00	16.83
<i>ROAS - IC 95%</i>						
Google Ads	[9.8; 13]	[12; 19]	[16; 21]	[22; 27]	[2.3; 4.1]	[2.4; 7.6]
Meta Ads	[0; 5.4]	[0; 25]	[0; 23]	[11; 28]	[0; 5]	[2.7; 7.6]
Offline	[8.2; 12]	[7.7; 16]	[6.8; 10]	[7.5; 11]	[2.4; 3.9]	[2.3; 7.6]
DV360	[12; 67]	[0; 110]	[18; 170]	[56; 130]	[0; 0]	[0; 26]
<i>Quota de efeito vs. Quota de investimento (%)</i>						
Google Ads - Efeito / Investimento	43.0 / 38.7	41.2 / 38.7	45.3 / 38.7	47.2 / 38.7	41.1 / 38.7	37.4 / 38.7
Meta Ads - Efeito / Investimento	16.0 / 18.1	17.9 / 18.1	16.7 / 18.1	18.2 / 18.1	17.0 / 18.1	18.7 / 18.1
Offline - Efeito / Investimento	39.9 / 41.8	39.0 / 41.8	27.1 / 41.8	24.9 / 41.8	41.9 / 41.8	40.2 / 41.8
DV360 - Efeito / Investimento	1.0 / 1.4	1.9 / 1.4	10.9 / 1.4	9.7 / 1.4	0.0 / 1.4	3.7 / 1.4
<i>Efeito de arrasto vs. Imediato (%)</i>						
Google Ads - Efeito de arrasto	0	0	3	3	90	96
Meta Ads - Efeito de arrasto	21	41	17	24	82	31
Offline - Efeito de arrasto	13	13	48	47	100	100
DV360 - Efeito de arrasto	3	6	25	16	0	27
Sessões de email - Efeito de arrasto	0	0	11	14	92	82
Sessões orgânicas em motores de busca - Efeito de arrasto	0	0	67	65	0	68
Sessões orgânicas em redes sociais - Efeito de arrasto	0	0	0	7	5	1

Em treino e validação todas as especificações ajustam bem (R^2 ajustado entre 0,84 e 0,94 e NRMSE entre 0,042 e 0,114), sem que nenhuma família de *adstock* se destaque. A distinção surge fora da amostra, onde o R^2 de teste varia entre 0,271 (R1) e 0,608 (R6) e o NRMSE de teste entre 0,132 (R6) e 0,168 (R4). O melhor desempenho preditivo pertence ao R6, que reúne o maior R^2 de treino e de teste, o menor NRMSE de treino e de teste e o menor DE-

COMP.RSSD. Os melhores valores de todas as métricas concentram-se na família *Weibull PDF* (R5 e R6). Nas famílias geométrica e *Weibull PDF*, os modelos sem controlos (R2 e R6) superam os modelos com controlos em treino e em teste, tanto no R^2 ajustado como no NRMSE e ainda no DECOMP.RSSD. Na *Weibull CDF* sucede-se o oposto, o R3 supera o R4 em todas as métricas.

Na família geométrica e no modelo R3, o intercepto é nulo e a tendência domina as vendas base ($\approx 85\%$). No modelo R4 a tendência recua para 68,1% e parte do base migra para as sessões orgânicas em motores de busca (15%). A *Weibull PDF* concentra os casos extremos, nos quais em R5 a tendência absorve quase todas as vendas base (100,5%, compensada pelas componentes negativas) com intercepto nulo. No modelo R6 a base reparte-se entre tendência (56,1%) e o único intercepto não nulo (37,6%). Em ambos os casos de *adstock Weibull PDF*, a quota dos canais pagos permanece reduzida face às restantes famílias.

Os *adstocks* geométrico e *Weibull CDF* apresentam ROAS claramente superior ao *Weibull PDF*. O ROAS total situa-se entre 11,40 e 17,95 nas duas primeiras famílias e cai para 2,52 (R5) e 6,59 (R6) na última, porque a fração da receita atribuída aos canais pagos é menor nestes dois últimos modelos. O *Google Ads* apresenta intervalos de ROAS estreitos. O *Meta Ads* oscila sem padrão claro, incluindo o zero no limite inferior em R1, R2, R3 e R5. O *offline* apresenta sistematicamente um ROAS superior nos modelos sem controlos. Tal deve-se ao facto de as variáveis de controlo competirem com o *offline* pela explicação dos picos de receita nesses períodos. Quando estes controlos estão presentes, parte do efeito que de outro modo seria atribuído ao *offline* é absorvida pelas dummies, reduzindo o coeficiente do canal e, consequentemente, o seu ROAS. Sem controlos, esse efeito reverte para o *offline*, inflacionando a sua contribuição estimada. O DV360 é o canal mais instável (ROAS entre ≈ 0 em R5 e 121 em R4 e intervalos até [56; 130]), fruto da fraca relação entre investimento e impressões. Este problema agrava-se na *CDF*, onde a sua quota de efeito chega a ser cerca de oito vezes a de investimento, tornando a leitura pouco fiável.

O *Google Ads* e o *Meta Ads* são os canais com quota de efeito vs investimento mais robustos. O *offline* fica sub-representado na *Weibull CDF* (25% a 27% de efeito para 42% de investimento), sinal de sobreinvestimento. O DV360 é sobre-representado na *Weibull CDF* dado o seu ROAS implausível nesta família.

A repartição alinha-se com a intuição de efeito de arrasto mais elevado nos canais construtores de marca do que nos canais de resposta direta. O efeito de arrasto do *offline* cresce monotonamente com a flexibilidade do *adstock*: 13% no geométrico, 47% a 48% na *Weibull CDF* e 100% na *Weibull PDF*, em linha com a persistência esperada dos meios tradicionais e reforçado pelo conhecimento prévio imposto ao canal. No geométrico, os canais de captura de intenção surgem quase integralmente imediatos (*Google Ads* e *email* com 0%). A *Weibull CDF* é a que melhor separa os canais imediatos dos canais com maior persistência. A *Weibull PDF*, pelo contrário, generaliza o efeito de arrasto à maior parte dos canais.

4.2 Meridian

Cruzando a presença do efeito *halo* com a presença de variáveis de controlo, obtêm-se quatro especificações: M1 (com efeito *halo*, com variáveis de controlo), M2 (sem efeito *halo*, com variáveis de controlo), M3 (com efeito *halo*, sem variáveis de controlo) e M4 (sem efeito *halo*, sem variáveis de controlo). Cada especificação foi ainda estimada sob as três forças de *prior* definidas na secção 3.4.2: concentrado ($k = 5$, $s = 0.3$), base ($k = 1$, $s = 0.7$) e difuso ($k = 0.15$, $s = 1.5$), perfazendo doze estimações. Os restantes elementos da configuração mantêm-se fixos, de modo a isolar o efeito das decisões em análise.

Nas doze especificações, o $\hat{R}$ de Gelman-Rubin sobre os parâmetros de ROAS de cada canal manteve-se próximo de 1, com um máximo de apenas 1,0013 no canal DV360 e no modelo M1 sob *prior* concentrado.

O AKS selecionou exatamente os mesmos onze nós nas doze especificações. Todos os nós concentram-se em novembro e dezembro de 2024 e de 2025, ou seja, nas épocas de *Black Friday* e Natal. As vendas base são, assim, mantidas praticamente planas ao longo do ano e só ganham liberdade para mudar de inclinação em torno dos picos comerciais.

A Figura 4.4 apresenta os gráficos de traço dos coeficientes de ROAS dos quatro canais pagos do Modelo M1 sob *prior* base, obtidos a partir das quatro cadeias independentes do amostrador NUTS. Cada cor corresponde a uma cadeia. Na coluna da esquerda encontram-se as densidades *a posteriori* estimadas separadamente para cada cadeia e na coluna da direita o valor amostrado do parâmetro ao longo das 2000 iterações.

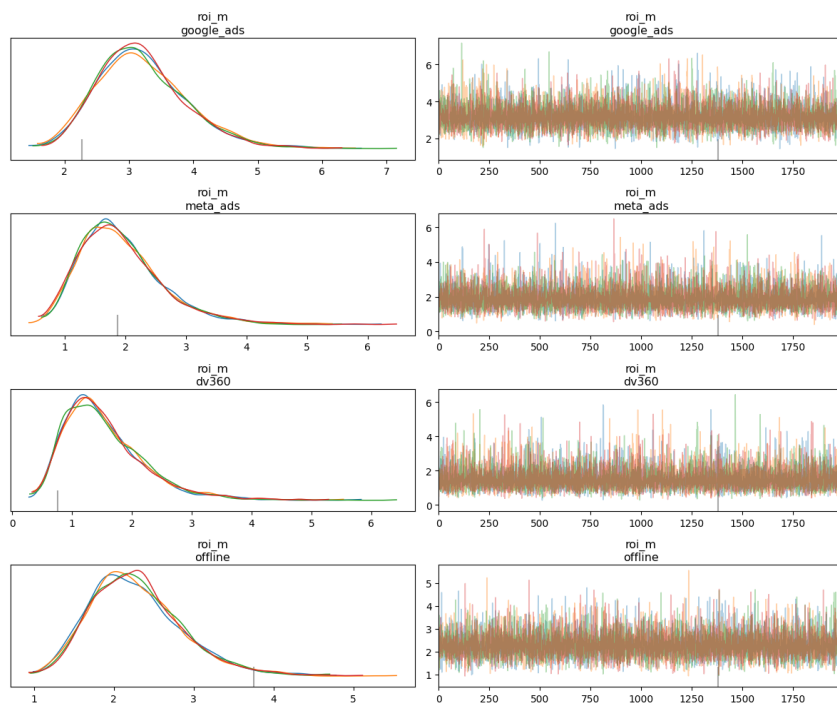


Figura 4.4. Gráficos de traço dos coeficientes de ROAS dos quatro canais pagos do modelo M1. Nas figuras geradas pelo Meridian, o ROAS é designado por *roi_m*, sendo as duas designações equivalentes.

A análise da Figura 4.4 confirma visualmente a convergência já indicada pelo diagnóstico $\hat{R}$. Por um lado, as quatro densidades de cada canal sobrepõem-se quase na perfeição, sinal

de que as cadeias, partindo de pontos distintos do espaço de parâmetros, exploraram a mesma região e descrevem a mesma distribuição *a posteriori*. Por outro lado, os traços apresentam-se estacionários, sem tendência ou zonas de aprisionamento e fortemente misturados entre cadeias. Cada traço oscila em torno do respetivo ROAS *a posteriori*, apresentado na Tabela 4.4. As densidades exibem ainda a assimetria à direita, esperada de um *prior* LogNormal sobre o ROAS.

Qualidade preditiva e decomposição da receita

Tabela 4.3. Qualidade preditiva do modelo B: métricas em treino e em validação e decomposição da receita por canal (% do total), por força de *prior*.

Métrica	Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$)				Prior base ($k = 1, s = 0.7$)				Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$)			
	M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4
R^2 (treino)	0,945	0,945	0,925	0,925	0,945	0,945	0,925	0,925	0,945	0,945	0,925	0,925
R^2 (validação)	0,612	0,601	0,416	0,415	0,616	0,595	0,415	0,420	0,603	0,595	0,416	0,411
MAPE (treino)	0,108	0,107	0,118	0,118	0,107	0,107	0,118	0,118	0,107	0,107	0,118	0,118
MAPE (validação)	0,128	0,128	0,116	0,116	0,128	0,128	0,116	0,115	0,128	0,128	0,116	0,116
wMAPE (treino)	0,093	0,093	0,104	0,104	0,093	0,093	0,104	0,104	0,093	0,093	0,104	0,104
wMAPE (validação)	0,161	0,162	0,157	0,157	0,160	0,162	0,157	0,156	0,162	0,162	0,157	0,157
Vendas base	94,79	94,79	94,36	94,36	94,86	94,86	94,36	94,36	94,98	94,98	94,35	94,35
Canais pagos	2,38	2,38	2,39	2,39	2,32	2,32	2,40	2,40	2,18	2,18	2,41	2,41
Google Ads	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,14	1,14
Meta Ads	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33	0,35	0,35
DV360	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Offline	0,94	0,94	0,95	0,95	0,87	0,87	0,95	0,95	0,71	0,71	0,90	0,90
Canais orgânicos	2,84	2,84	3,24	3,24	2,83	2,83	3,24	3,24	2,85	2,85	3,25	3,25
Sessões de email	1,05	1,05	1,18	1,18	1,04	1,04	1,17	1,17	1,05	1,05	1,19	1,19
Sessões orgânicas em motores de busca	0,99	0,99	1,07	1,07	1,00	1,00	1,08	1,08	1,00	1,00	1,08	1,08
Sessões orgânicas em redes sociais	0,80	0,80	0,99	0,99	0,79	0,79	0,99	0,99	0,80	0,80	0,98	0,98

A Tabela 4.3 reúne, para as três forças de *prior*, as métricas de ajuste do modelo B e a decomposição da receita. O R^2 mede a proporção da variância explicada pelo modelo, o MAPE representa o erro percentual absoluto médio e o wMAPE reflete o MAPE ponderado pelo volume das vendas, sendo mais adequado quando os erros das semanas de maior venda são os que realmente importam.

Os resultados sugerem que os controlos sazonais são os principais responsáveis pela qualidade do ajuste. O conjunto de validação evidencia este efeito, pois o R^2 de validação é $\approx 0,60$ com variáveis de controlo (M1, M2) mas cai para $\approx 0,42$ sem eles (M3, M4), para qualquer força de *prior*. Ao absorverem os picos de Natal e *Black Friday*, as *dummies* sustentam a capacidade de generalização do modelo, enquanto a inclusão de *halo* e a força do *prior* quase não impactam o ajuste. O R^2 de treino mantém-se em 0,945 nos modelos com variáveis de controlo e em 0,925 nos modelos sem variáveis de controlo, para as três forças de *prior*.

Os valores de MAPE e wMAPE são praticamente insensíveis à força do *prior*: para cada modelo, as forças de prior concentrado, base e difuso diferem apenas na terceira casa decimal. As diferenças provêm sobretudo da presença de variáveis de controlo. Em treino, os modelos com controlos (M1, M2) exibem menor erro (MAPE $\approx 0,107$; wMAPE $\approx 0,093$) do que os modelos sem controlos (M3, M4: MAPE $\approx 0,118$; wMAPE $\approx 0,104$). Em validação, porém,

esta ordenação inverte-se, com M3 e M4 a apresentarem valores ligeiramente inferiores. Esta inversão é compatível com a estrutura temporal da partição: o treino contém mais semanas de pico (Natal e *Black Friday*), pelo que a vantagem dos modelos com controlo, que atuam precisamente nessas semanas, tem pouca oportunidade de se manifestar no conjunto de validação. Sendo a diferença ténue, trata-se de uma leitura plausível e não de uma conclusão demonstrada.

A decomposição mostra que as vendas base explicam $\approx 0,95$ da receita em qualquer especificação, sobrando $\approx 2,2$ a $2,4\%$ para os canais pagos e $\approx 2,8$ a $3,3\%$ para os canais orgânicos, o que reflete a consolidação da marca no mercado. A maior parte das vendas é pouco dependente da publicidade do período. As vendas base são ligeiramente mais altas com variáveis de controlo, porque as *dummies* absorvem os picos sazonais que, na sua ausência, são reabsorvidos pelos canais, sobretudo os orgânicos. A contrapartida do acréscimo das vendas base depende do *prior*: sob *priors* concentrados, o ROAS dos canais pagos está ancorado nas médias *a priori* e só a componente flexível (orgânicos) pode ceder à procura sazonal. À medida que o *prior* se difunde, os canais pagos passam a responder às variáveis de controlo. O caso mais nítido é o *offline*, sob *prior* difuso, a sua contribuição recua de $\approx 0,90\%$ sem variáveis de controlo para $\approx 0,71\%$ com variáveis de controlo.

Esta decomposição tem uma implicação central para a leitura do trabalho. Ao explicar $\approx 0,95$ da receita, as vendas base refletem o peso estrutural de uma marca consolidada, cujas vendas dependem maioritariamente de fatores não atribuíveis à publicidade do período. O marketing controla, assim, apenas a margem incremental de aproximadamente 2% das vendas, que corresponde, ainda assim, a cerca de 10M€ no horizonte analisado. Sendo esta a única componente controlável através das decisões de investimento, as recomendações de otimização atuam sobre uma fração limitada da receita total.

Na decomposição por canal, os canais pagos seguem, da maior para a menor contribuição em percentagem das vendas totais, a ordem *Google Ads*, *offline*, *Meta Ads* e DV360. Esta hierarquia resulta da combinação entre o ROAS estimado e o nível de investimento de cada canal. O ROAS do canal i representa o retorno gerado por cada unidade monetária investida nesse canal, podendo ser escrito como:

$$ROAS_i = \frac{R_i}{Investimento_i} \quad (4.1)$$

em que R_i representa a receita atribuída ao canal i e $Investimento_i$ representa o montante investido nesse canal. Reorganizando a expressão anterior, a receita atribuída ao canal i é dada por:

$$R_i = ROAS_i \times Investimento_i \quad (4.2)$$

A contribuição percentual do canal i na receita total é obtida dividindo a receita atribuída a esse canal pela receita total considerada na decomposição:

$$Contribuição_i = \frac{R_i}{R_{total}} \times 100 \quad (4.3)$$

Substituindo R_i pela expressão anterior, obtém-se:

$$\text{Contribuição}_i = \frac{ROAS_i \times \text{Investimento}_i}{R_{\text{total}}} \times 100 \quad (4.4)$$

Assim, o *Google Ads* lidera porque combina um ROAS elevado (Tabela 4.4) com um investimento substancial (Tabela 3.5), o que aumenta a receita atribuída ao canal e, consequentemente, o seu peso na receita total. O *offline* surge em segundo lugar porque a receita atribuída que resulta da combinação entre ROAS e investimento é inferior à do *Google Ads*.

Por fim, o efeito *halo* (M1 e M3) tem efeito marginal sobre estas percentagens, pois apenas substitui as séries orgânicas originais pelas suas componentes residuais, preservando praticamente o peso agregado dos canais.

ROAS posterior e incerteza por canal

Tabela 4.4. ROAS médio posterior, intervalo de credibilidade a 90% [P5; P95] e desvio padrão relativo (s/μ , %) por canal e por força de *prior*.

Canal	M1	M2	M3	M4
Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$)				
<i>ROAS médio posterior</i>				
Google Ads	3,20	3,20	3,20	3,20
Meta Ads	1,93	1,93	1,93	1,93
DV360	1,54	1,54	1,54	1,54
Offline	2,52	2,52	2,56	2,56
<i>IC 90% [P5; P95]</i>				
Google Ads	[2,73; 3,72]	[2,75; 3,71]	[2,74; 3,72]	[2,74; 3,71]
Meta Ads	[1,48; 2,45]	[1,48; 2,46]	[1,48; 2,46]	[1,48; 2,46]
DV360	[1,11; 2,06]	[1,10; 2,06]	[1,10; 2,07]	[1,10; 2,08]
Offline	[2,08; 3,04]	[2,07; 3,02]	[2,09; 3,08]	[2,09; 3,09]
<i>Desvio padrão relativo s/μ (%)</i>				
Google Ads	9,3	9,3	9,4	9,3
Meta Ads	15,4	15,5	15,7	15,7
DV360	19,2	19,3	19,6	19,8
Offline	11,6	11,6	11,8	11,8
Prior base ($k = 1, s = 0.7$)				
<i>ROAS médio posterior</i>				
Google Ads	3,21	3,21	3,22	3,21
Meta Ads	1,94	1,95	1,97	1,96
DV360	1,55	1,55	1,56	1,56
Offline	2,35	2,35	2,54	2,54
<i>IC 90% [P5; P95]</i>				
Google Ads	[2,21; 4,49]	[2,21; 4,49]	[2,20; 4,50]	[2,21; 4,47]
Meta Ads	[1,03; 3,26]	[1,02; 3,27]	[1,04; 3,29]	[1,02; 3,32]
DV360	[0,69; 2,85]	[0,69; 2,88]	[0,69; 2,90]	[0,70; 2,93]
Offline	[1,50; 3,46]	[1,48; 3,45]	[1,58; 3,81]	[1,59; 3,82]
<i>Desvio padrão relativo s/μ (%)</i>				
Google Ads	22,0	21,9	22,1	21,8
Meta Ads	36,3	36,2	36,7	37,1
DV360	45,3	45,4	46,2	46,2
Offline	25,9	25,8	27,1	27,0
Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$)				
<i>ROAS médio posterior</i>				
Google Ads	3,25	3,24	3,30	3,30
Meta Ads	2,04	2,03	2,10	2,13
DV360	1,59	1,59	1,62	1,63
Offline	1,90	1,89	2,43	2,40
<i>IC 90% [P5; P95]</i>				
Google Ads	[1,42; 6,22]	[1,42; 6,08]	[1,40; 6,33]	[1,43; 6,27]
Meta Ads	[0,51; 5,08]	[0,52; 4,98]	[0,52; 5,31]	[0,51; 5,38]
DV360	[0,29; 4,43]	[0,30; 4,37]	[0,29; 4,57]	[0,29; 4,54]
Offline	[0,77; 3,63]	[0,77; 3,60]	[0,91; 4,92]	[0,90; 4,82]
<i>Desvio padrão relativo s/μ (%)</i>				
Google Ads	47,4	47,1	48,2	47,8
Meta Ads	81,0	79,4	82,5	89,0
DV360	97,2	99,7	102,4	100,8
Offline	48,1	47,5	52,2	51,9

A Tabela 4.4 apresenta o ROAS médio posterior, o intervalo de credibilidade a 90% e o desvio padrão relativo, por canal e força de *prior*. A hierarquia entre canais mantém-se praticamente estável nas quatro especificações e nas três forças de *prior*: *Google Ads*, *offline*, *Meta Ads*

e DV360, por ordem decrescente. As estimativas pontuais do *Google Ads* e o *Meta Ads* são notavelmente estáveis entre especificações e forças de *prior*, sugerindo que os sinais destes canais são suficientemente consistentes para não depender fortemente da parametrização escolhida. Já o DV360 surge sistematicamente como o canal com menor ROAS médio posterior e com maior desvio padrão relativo, sobretudo sob o *prior* difuso ($\approx 100\%$). Isto sugere que o modelo encontra menos evidência estatística para identificar com precisão o seu retorno, o que é coerente com o seu peso reduzido no investimento total e com uma contribuição muito pequena na decomposição da receita.

A principal exceção à estabilidade das estimativas é o *offline*. O seu ROAS é claramente superior nos modelos sem variáveis de controlo, diferença que se acentua quando o *prior* se difunde e os dados passam a ter maior peso na *posterior*. Sob o *prior* difuso, por exemplo, o ROAS *offline* situa-se em cerca de 1,90 nos modelos com variáveis de controlo, mas aumenta para cerca de 2,43 nos modelos sem variáveis de controlo. Esta diferença é explicada pela distribuição temporal do investimento *offline*, que se concentra sobretudo nas semanas de Natal e *Black Friday*. Quando as variáveis de controlo sazonais estão presentes, parte do aumento de vendas observado nesses períodos é atribuída às *dummies* sazonais, reduzindo o ROAS atribuído ao *offline*. Quando essas variáveis são removidas, o modelo deixa de ter uma variável específica para absorver os picos sazonais e tende a atribuir uma parte maior desse crescimento ao investimento *offline*, inflacionando o seu ROAS estimado.

Tal como esperado, a amplitude dos intervalos de credibilidade e o desvio padrão relativo aumentam à medida que o *prior* se difunde. Ao retirar peso à crença prévia, a *posteriori* passa a depender mais diretamente do sinal observado nos dados.

ROAS marginal e probabilidade de retorno positivo

Tabela 4.5. ROAS marginal (mROAS) e probabilidade posterior do ROAS exceder a unidade $\Pr(\text{ROAS} > 1)$ por canal, por força de *prior*.

Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$)					Prior base ($k = 1, s = 0.7$)					Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$)				
Canal	M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4		M1	M2	M3	M4	
mROAS					mROAS					mROAS				
Google Ads	1,44	1,44	1,45	1,45	1,44	1,45	1,45	1,46		1,46	1,47	1,49	1,49	
Meta Ads	0,84	0,84	0,85	0,84	0,84	0,85	0,86	0,86		0,89	0,89	0,92	0,94	
DV360	0,73	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	0,75	0,74		0,76	0,76	0,77	0,78	
Offline	1,14	1,14	1,16	1,16	1,06	1,06	1,16	1,16		0,86	0,86	1,11	1,10	
$\Pr(\text{ROAS} > 1)$					$\Pr(\text{ROAS} > 1)$					$\Pr(\text{ROAS} > 1)$				
Google Ads	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00		0,99	0,99	0,99	0,99	
Meta Ads	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,96	0,96	0,96		0,75	0,75	0,75	0,75	
DV360	0,98	0,98	0,98	0,98	0,78	0,78	0,79	0,78		0,57	0,56	0,55	0,56	
Offline	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00		0,87	0,87	0,93	0,92	

A Tabela 4.5 reporta o ROAS marginal (mROAS) e a probabilidade posterior de o ROAS exceder a unidade, $\Pr(\text{ROAS} > 1)$. O mROAS mede o retorno esperado de uma unidade monetária adicional investida, no nível atual de investimento, enquanto $\Pr(\text{ROAS} > 1)$ quantifica a robustez da rentabilidade do canal.

O *Google Ads* apresenta o maior mROAS de todos os canais, e o único superior a 1 em todas as especificações ($\approx 1,44$ a $1,49$), o que sugere que não se encontra numa zona tão próxima do ponto de eficiência marginal como os restantes canais. A probabilidade de $\text{ROAS} > 1$ para este canal é praticamente unitária ($\geq 0,99$), independentemente da força do *prior*, da inclusão de variáveis de controlo ou da presença de *halo*, o que indica que o canal constitui a estimativa mais estável entre os canais analisados, revelando reduzida sensibilidade às diferentes especificações do modelo.

O *offline* ocupa uma posição intermédia, mas é o canal mais dependente da especificação sazonal. Com *priors* concentrado e base, apresenta mROAS superior a 1 e a probabilidade de ROAS ser superior à unidade é 1. Contudo, sob o *prior* difuso, a inclusão de variáveis de controlo sazonais reduz o mROAS de 1,11 para cerca de 0,86 e a probabilidade $\Pr(\text{ROAS} > 1)$ de 0,93 para cerca de 0,87. Esta sensibilidade decorre da forte concentração do investimento *offline* nas semanas de *Black Friday* e Natal. Quando as *dummies* sazonais estão presentes, parte dos picos de vendas é atribuída à sazonalidade, e quando não estão, o modelo tende a imputar uma parte maior desses picos ao *offline*.

Em relação ao *Meta Ads*, a probabilidade de ROAS ser superior a 1 permanece elevada sob os *priors* concentrado e base, mas cai para cerca de 0,75 sob o *prior* difuso. Ao mesmo tempo, o mROAS mantém-se sempre abaixo de 1 ($\approx 0,84$ a $0,94$), indicando que, embora o canal tenha retorno positivo, o investimento adicional no nível atual não apresenta atratividade marginal.

O DV360 é o canal mais frágil. O seu mROAS é o mais baixo entre os canais pagos ($\approx 0,73$ a $0,78$) e a probabilidade posterior de ROAS superior a 1 torna-se pouco conclusiva sob o *prior* difuso ($\approx 0,55$ a $0,57$). Este resultado sugere que, quando o modelo depende mais dos dados e menos da crença prévia, a evidência empírica para a rentabilidade do DV360 é limitada, o que é coerente com o seu reduzido peso no investimento total e com a sua pequena contribuição na decomposição da receita.

Parâmetros de transformação do marketing

Tabela 4.6. Parâmetros de transformação do marketing do Modelo B, para canais pagos e orgânicos: decaimento *adstock* (α_m , fração do efeito que transita para a semana seguinte) e ponto de meia-saturação (ec) da curva de Hill, por força de *prior*. Média $\pm$ desvio padrão posterior. Nos modelos com *halo* (M1, M3), as séries orgânicas de *search* e *social* entram já residualizadas do efeito *halo*.

Canal	M1	M2	M3	M4
Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$)				
<i>Decaimento adstock (α_m)</i>				
Google Ads	0,512 $\pm$ 0,287	0,508 $\pm$ 0,285	0,511 $\pm$ 0,287	0,511 $\pm$ 0,285
Meta Ads	0,502 $\pm$ 0,294	0,504 $\pm$ 0,293	0,500 $\pm$ 0,293	0,501 $\pm$ 0,292
DV360	0,502 $\pm$ 0,287	0,501 $\pm$ 0,286	0,502 $\pm$ 0,288	0,503 $\pm$ 0,288
Offline	0,537 $\pm$ 0,283	0,538 $\pm$ 0,286	0,515 $\pm$ 0,289	0,515 $\pm$ 0,288
Sessões orgânicas em motores de busca	0,502 $\pm$ 0,292	0,501 $\pm$ 0,290	0,494 $\pm$ 0,289	0,501 $\pm$ 0,288
Sessões orgânicas em redes sociais	0,480 $\pm$ 0,293	0,490 $\pm$ 0,292	0,478 $\pm$ 0,289	0,486 $\pm$ 0,291
Sessões de email	0,516 $\pm$ 0,288	0,515 $\pm$ 0,289	0,508 $\pm$ 0,288	0,508 $\pm$ 0,287
<i>Meia-saturação (ec)</i>				
Google Ads	1,077 $\pm$ 0,628	1,069 $\pm$ 0,627	1,081 $\pm$ 0,619	1,080 $\pm$ 0,619
Meta Ads	1,075 $\pm$ 0,606	1,076 $\pm$ 0,604	1,086 $\pm$ 0,597	1,090 $\pm$ 0,610
DV360	1,067 $\pm$ 0,619	1,072 $\pm$ 0,612	1,073 $\pm$ 0,613	1,073 $\pm$ 0,613
Offline	1,085 $\pm$ 0,631	1,084 $\pm$ 0,622	1,089 $\pm$ 0,619	1,093 $\pm$ 0,627
Sessões orgânicas em motores de busca	1,070 $\pm$ 0,625	1,066 $\pm$ 0,633	1,077 $\pm$ 0,619	1,081 $\pm$ 0,621
Sessões orgânicas em redes sociais	1,019 $\pm$ 0,616	1,020 $\pm$ 0,615	1,053 $\pm$ 0,615	1,056 $\pm$ 0,615
Sessões de email	1,077 $\pm$ 0,610	1,078 $\pm$ 0,609	1,107 $\pm$ 0,624	1,101 $\pm$ 0,618
Prior base ($k = 1, s = 0.7$)				
<i>Decaimento adstock (α_m)</i>				
Google Ads	0,505 $\pm$ 0,286	0,512 $\pm$ 0,287	0,512 $\pm$ 0,284	0,510 $\pm$ 0,284
Meta Ads	0,506 $\pm$ 0,294	0,502 $\pm$ 0,297	0,502 $\pm$ 0,292	0,502 $\pm$ 0,292
DV360	0,501 $\pm$ 0,286	0,503 $\pm$ 0,286	0,502 $\pm$ 0,288	0,503 $\pm$ 0,288
Offline	0,536 $\pm$ 0,286	0,533 $\pm$ 0,285	0,514 $\pm$ 0,289	0,514 $\pm$ 0,288
Sessões orgânicas em motores de busca	0,503 $\pm$ 0,290	0,501 $\pm$ 0,290	0,497 $\pm$ 0,290	0,501 $\pm$ 0,289
Sessões orgânicas em redes sociais	0,481 $\pm$ 0,295	0,490 $\pm$ 0,292	0,478 $\pm$ 0,289	0,486 $\pm$ 0,290
Sessões de email	0,510 $\pm$ 0,287	0,512 $\pm$ 0,288	0,507 $\pm$ 0,287	0,508 $\pm$ 0,286
<i>Meia-saturação (ec)</i>				
Google Ads	1,072 $\pm$ 0,622	1,076 $\pm$ 0,622	1,075 $\pm$ 0,623	1,088 $\pm$ 0,615
Meta Ads	1,078 $\pm$ 0,611	1,079 $\pm$ 0,603	1,095 $\pm$ 0,601	1,097 $\pm$ 0,602
DV360	1,072 $\pm$ 0,613	1,066 $\pm$ 0,614	1,073 $\pm$ 0,607	1,076 $\pm$ 0,613
Offline	1,080 $\pm$ 0,630	1,080 $\pm$ 0,626	1,094 $\pm$ 0,624	1,095 $\pm$ 0,625
Sessões orgânicas em motores de busca	1,065 $\pm$ 0,621	1,070 $\pm$ 0,617	1,073 $\pm$ 0,624	1,078 $\pm$ 0,624
Sessões orgânicas em redes sociais	1,017 $\pm$ 0,612	1,023 $\pm$ 0,614	1,047 $\pm$ 0,618	1,055 $\pm$ 0,615
Sessões de email	1,076 $\pm$ 0,608	1,074 $\pm$ 0,616	1,108 $\pm$ 0,621	1,104 $\pm$ 0,625
Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$)				
<i>Decaimento adstock (α_m)</i>				
Google Ads	0,512 $\pm$ 0,285	0,509 $\pm$ 0,285	0,510 $\pm$ 0,285	0,512 $\pm$ 0,286
Meta Ads	0,505 $\pm$ 0,295	0,505 $\pm$ 0,295	0,500 $\pm$ 0,293	0,499 $\pm$ 0,293
DV360	0,500 $\pm$ 0,287	0,504 $\pm$ 0,287	0,502 $\pm$ 0,290	0,502 $\pm$ 0,288
Offline	0,529 $\pm$ 0,286	0,527 $\pm$ 0,285	0,513 $\pm$ 0,287	0,514 $\pm$ 0,288
Sessões orgânicas em motores de busca	0,504 $\pm$ 0,289	0,502 $\pm$ 0,293	0,499 $\pm$ 0,290	0,500 $\pm$ 0,292
Sessões orgânicas em redes sociais	0,487 $\pm$ 0,294	0,491 $\pm$ 0,293	0,480 $\pm$ 0,292	0,486 $\pm$ 0,287
Sessões de email	0,509 $\pm$ 0,288	0,513 $\pm$ 0,286	0,507 $\pm$ 0,287	0,507 $\pm$ 0,286
<i>Meia-saturação (ec)</i>				
Google Ads	1,071 $\pm$ 0,623	1,080 $\pm$ 0,625	1,079 $\pm$ 0,617	1,080 $\pm$ 0,621
Meta Ads	1,079 $\pm$ 0,612	1,083 $\pm$ 0,613	1,095 $\pm$ 0,608	1,094 $\pm$ 0,607
DV360	1,070 $\pm$ 0,609	1,071 $\pm$ 0,605	1,071 $\pm$ 0,619	1,071 $\pm$ 0,608
Offline	1,083 $\pm$ 0,629	1,079 $\pm$ 0,627	1,093 $\pm$ 0,637	1,095 $\pm$ 0,627
Sessões orgânicas em motores de busca	1,057 $\pm$ 0,622	1,062 $\pm$ 0,626	1,078 $\pm$ 0,622	1,082 $\pm$ 0,623
Sessões orgânicas em redes sociais	1,018 $\pm$ 0,612	1,014 $\pm$ 0,614	1,052 $\pm$ 0,614	1,063 $\pm$ 0,623
Sessões de email	1,075 $\pm$ 0,613	1,086 $\pm$ 0,621	1,104 $\pm$ 0,619	1,098 $\pm$ 0,623

A Tabela 4.6 reporta os parâmetros de transformação de marketing: o decaimento de *adstock* (α_m), que controla a velocidade a que o efeito de cada canal se dissipa ao longo das semanas, e o parâmetro de meia-saturação (ec) da curva de Hill.

Nos canais digitais, o decaimento fica em $\alpha_m \approx 0,50 \pm 0,29$ em qualquer combinação, valores que reproduzem quase exatamente os momentos da *a priori* $U(0, 1)$ (média 0,5; desvio $1/\sqrt{12} \approx 0,289$). Neste caso, a *a posteriori* limita-se a devolver a *a priori*, sinal de que os dados nada acrescentaram, ou seja, a série não tem informação suficiente para identificar a velocidade de decaimento destes canais. O *offline* é a única exceção interessante, e por duas razões. Primeiro, o seu decaimento distingue-se consoante a presença de controlos: sobe para $\approx 0,53$ a $0,54$ nos modelos com *dummies* sazonais e recai de forma sistemática para $\approx 0,51$ na sua ausência. Assim, as *dummies*, ao absorverem a sazonalidade, deixam um resíduo mais limpo no qual o arrastamento do *offline* consegue manifestar-se. Segundo, e ao contrário do que sucede nos restantes canais, esse arrastamento é sensível à força da *a priori*, mas apenas quando há controlos. Nos modelos M1 e M2, o α_m desce de forma consistente à medida que a *a priori* se torna mais difusa ($\approx 0,537$ a $0,538$ com *prior* concentrado, $\approx 0,533$ a $0,536$ com *prior* base e $\approx 0,527$ a $0,529$ com *prior* difuso), ao passo que sem controlos permanece praticamente constante em torno de 0,51. O sinal que os controlos libertam para o *offline* é, portanto, ténue o bastante para ser progressivamente diluído quando a *a priori* deixa de o ancorar. O ponto de meia-saturação, por seu lado, é igualmente pouco informativo e quase invariante entre canais, modelos e *priors* ($ec \approx 1,07$ a $1,10$), mostrando que também a curva de saturação dificilmente é identificada a partir dos dados.

Os canais orgânicos confirmam o mesmo diagnóstico. Os seus decaimentos de *adstock* e os pontos de meia-saturação colam-se igualmente aos momentos da *a priori*, com a única nuance de as sessões orgânicas de redes sociais se fixarem de forma consistente um pouco abaixo. Ou seja, também para os canais orgânicos os dados não chegam para identificar nem a velocidade de decaimento nem o ponto de saturação, e a posterior limita-se a devolver a crença prévia. Ainda assim, as estimativas mantêm-se praticamente idênticas às dos modelos sem *halo*.

Coeficientes de resposta

Tabela 4.7. Coeficientes de resposta posteriores β_m (canais pagos) e β_{om} (orgânicos) do Modelo B - média $\pm$ desvio padrão posterior, por força de *prior*. Nos modelos com *halo* (M1, M3) os coeficientes orgânicos referem-se às séries residuais.

Canal	M1	M2	M3	M4
Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$) - Canais pagos (β_m)				
Google Ads	0,0440 $\pm$ 0,0134	0,0439 $\pm$ 0,0134	0,0441 $\pm$ 0,0132	0,0441 $\pm$ 0,0132
Meta Ads	0,0121 $\pm$ 0,0038	0,0121 $\pm$ 0,0038	0,0121 $\pm$ 0,0037	0,0122 $\pm$ 0,0038
DV360	0,0018 $\pm$ 0,0006	0,0018 $\pm$ 0,0006	0,0018 $\pm$ 0,0006	0,0018 $\pm$ 0,0006
Offline	0,0954 $\pm$ 0,0301	0,0952 $\pm$ 0,0298	0,0973 $\pm$ 0,0302	0,0974 $\pm$ 0,0304
Canais orgânicos (β_{om})				
Sessões de email	0,0415 $\pm$ 0,0436	0,0415 $\pm$ 0,0429	0,0487 $\pm$ 0,0513	0,0478 $\pm$ 0,0507
Sessões orgânicas em motores de busca	0,0426 $\pm$ 0,0447	0,0388 $\pm$ 0,0423	0,0437 $\pm$ 0,0466	0,0424 $\pm$ 0,0459
Sessões orgânicas em redes sociais	0,0293 $\pm$ 0,0290	0,0301 $\pm$ 0,0309	0,0380 $\pm$ 0,0381	0,0386 $\pm$ 0,0397
Prior base ($k = 1, s = 0.7$) - Canais pagos (β_m)				
Google Ads	0,0441 $\pm$ 0,0162	0,0442 $\pm$ 0,0163	0,0442 $\pm$ 0,0162	0,0444 $\pm$ 0,0160
Meta Ads	0,0122 $\pm$ 0,0057	0,0122 $\pm$ 0,0057	0,0124 $\pm$ 0,0058	0,0124 $\pm$ 0,0057
DV360	0,0018 $\pm$ 0,0010	0,0018 $\pm$ 0,0010	0,0018 $\pm$ 0,0010	0,0018 $\pm$ 0,0010
Offline	0,0888 $\pm$ 0,0355	0,0886 $\pm$ 0,0350	0,0970 $\pm$ 0,0389	0,0969 $\pm$ 0,0387
Canais orgânicos (β_{om})				
Sessões de email	0,0418 $\pm$ 0,0440	0,0413 $\pm$ 0,0430	0,0480 $\pm$ 0,0511	0,0477 $\pm$ 0,0498
Sessões orgânicas em motores de busca	0,0389 $\pm$ 0,0408	0,0390 $\pm$ 0,0420	0,0421 $\pm$ 0,0449	0,0428 $\pm$ 0,0457
Sessões orgânicas em redes sociais	0,0290 $\pm$ 0,0291	0,0300 $\pm$ 0,0308	0,0380 $\pm$ 0,0383	0,0385 $\pm$ 0,0393
Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$) - Canais pagos (β_m)				
Google Ads	0,0446 $\pm$ 0,0252	0,0448 $\pm$ 0,0259	0,0454 $\pm$ 0,0262	0,0454 $\pm$ 0,0260
Meta Ads	0,0129 $\pm$ 0,0118	0,0128 $\pm$ 0,0114	0,0133 $\pm$ 0,0122	0,0136 $\pm$ 0,0140
DV360	0,0018 $\pm$ 0,0019	0,0018 $\pm$ 0,0020	0,0018 $\pm$ 0,0020	0,0019 $\pm$ 0,0020
Offline	0,0721 $\pm$ 0,0424	0,0717 $\pm$ 0,0415	0,0928 $\pm$ 0,0582	0,0918 $\pm$ 0,0567
Canais orgânicos (β_{om})				
Sessões de email	0,0416 $\pm$ 0,0433	0,0418 $\pm$ 0,0433	0,0481 $\pm$ 0,0524	0,0480 $\pm$ 0,0517
Sessões orgânicas em motores de busca	0,0385 $\pm$ 0,0421	0,0386 $\pm$ 0,0408	0,0418 $\pm$ 0,0451	0,0426 $\pm$ 0,0460
Sessões orgânicas em redes sociais	0,0287 $\pm$ 0,0289	0,0301 $\pm$ 0,0303	0,0377 $\pm$ 0,0375	0,0385 $\pm$ 0,0393

Os coeficientes da Tabela 4.7 mostram o β_m de cada canal, que é o efeito de uma unidade de marketing transformada após *adstock* e saturação sobre o KPI. Como a função Hill comprime a atividade de cada canal para o intervalo $(0, 1)$, quer seja a variável de impressões ou investimento, os β_m são comparáveis entre canais e representam o efeito-teto, o impacto máximo do canal quando saturado. As estimativas centrais são estáveis entre forças de *prior*, já a incerteza cresce à medida que o *prior* se difunde: o desvio padrão relativo do β_m do *Google Ads* passa de $\approx 30\%$ (concentrado) para $\approx 57\%$ (difuso), e ultrapassa 100% no DV360. O *offline* volta a revelar a interação com as variáveis de controlo. Na sua presença, o coeficiente desce de $\approx 0,095$ para $\approx 0,072$ à medida que o *prior* se difunde, mas mantém-se em torno de 0,093 a 0,097 na sua ausência. Esse contraste denuncia colinearidade entre o *offline* e as variáveis de controlo sazonais, que competem por explicar a mesma componente sazonal do KPI. Já os coeficientes orgânicos, apesar de comparáveis em magnitude aos canais pagos, apresentam uma incerteza semelhante à própria média, ou seja, os dados pouco ou nada acrescentam à *a priori* sobre o seu efeito.

Magnitude do efeito *halo*

Tabela 4.8. Efeito *halo* estimado nos modelos A1 e A2 (modelos M1 e M3), por força de *prior*.

Métrica	Prior concentrado ($k = 5, s = 0.3$)		Prior base ($k = 1, s = 0.7$)		Prior difuso ($k = 0.15, s = 1.5$)	
	M1	M3	M1	M3	M1	M3
<i>A1: Halo nas sessões orgânicas de motores de busca</i>						
R^2	0,941	0,923	0,957	0,942	0,961	0,946
wMAPE	0,059	0,065	0,050	0,056	0,049	0,054
Quota de <i>halo</i> (%)	23,1	23,8	18,0	19,2	13,6	16,1
<i>offline</i> (%)	8,4	9,0	4,1	4,5	1,6	1,7
<i>Meta Ads</i> (%)	14,7	14,9	13,9	14,7	12,0	14,4
<i>A2: Halo nas sessões orgânicas de redes sociais</i>						
R^2	0,930	0,927	0,930	0,927	0,930	0,927
wMAPE	0,136	0,141	0,136	0,141	0,137	0,141
Quota de <i>halo</i> (%)	20,0	20,0	20,0	19,9	19,3	19,0
<i>offline</i> (%)	4,9	4,9	4,7	4,6	3,3	3,1
<i>Meta Ads</i> (%)	15,1	15,0	15,3	15,3	16,0	15,9

A Tabela 4.8 compara os modelos de *halo* estimados com variáveis de controlo (M1) e sem (M3). Em todas as configurações o *Meta Ads* é a maior fonte de *halo*, explicando de forma estável 14% a 16% das sessões orgânicas. O *offline*, em contraste, contribui sempre muito menos, mas a sua contribuição não é fixa, depende do *prior* e do modelo. No modelo A1, a contribuição do *offline* reduz-se à medida que o *prior* se difunde: dos $\approx 8\text{-}9\%$ sob *prior* concentrado resta apenas $\approx 2\%$ sob *prior* difuso, em linha com a quebra do *halo* total. Já no modelo A2, mantém-se numa faixa estreita ($\approx 3\text{-}5\%$), tal como o *halo* total, que neste modelo se mantém estável independentemente do *prior*. De qualquer forma, o *offline* pesa muito menos do que o *Meta Ads*, dado que o *Meta Ads* e as sessões orgânicas de redes sociais convivem na mesma plataforma e dirigem-se às mesmas pessoas, pelo que um *post* pago acaba por impulsionar as sessões orgânicas de forma muito mais direta do que um anúncio *offline*.

O modelo A1 exibe uma qualidade de ajustamento superior ($R^2 \approx 0,94$ a $0,96$; wMAPE $\approx 0,05$ a $0,06$) em comparação com o modelo A2 ($R^2 \approx 0,93$; wMAPE $\approx 0,14$). Esta divergência metodológica reflete o forte contraste estrutural entre as duas séries temporais: o padrão sazonal e previsível das pesquisas em motores de busca (A1) opõe-se à natureza altamente volátil e fracamente sazonal das sessões orgânicas de redes sociais (A2), dinâmica esta que pode ser validada visualmente na Figura A.1 do Anexo A. Por fim, a ausência de variáveis de controlo no modelo A1 inflaciona ligeiramente o *halo* estimado, visto que sem as *dummies* que captam a sazonalidade, os picos de procura orgânica que acontecem por si, no Natal ou na *Black Friday*, deixam de ter onde ser explicados e acabam por ser atribuídos ao investimento pago, que sobe nessas mesmas alturas. O modelo confunde, assim, sazonalidade com efeito da publicidade, o que constitui mais uma razão para manter as variáveis de controlo.

ROAS total com efeito *halo*

Tabela 4.9. ROAS direto (vendas), ROAS indireto via *halo* (receita das sessões orgânicas geradas pelo canal) e ROAS total, para os canais com *halo* estimável (Meta Ads e *offline*), nos modelos M1 (com variáveis de controlo) e M3 (sem variáveis de controlo), por força de *prior*.

Componente	M1			M3		
	conc.	base	dif.	conc.	base	dif.
<i>Meta Ads</i>						
ROAS direto	1,93	1,94	2,04	1,93	1,97	2,10
+ indireto (<i>halo</i>)	0,86	0,71	0,53	0,90	0,82	0,73
= ROAS total	2,79	2,66	2,57	2,83	2,79	2,83
<i>Offline</i>						
ROAS direto	2,52	2,35	1,90	2,56	2,54	2,43
+ indireto (<i>halo</i>)	0,21	0,09	0,03	0,24	0,11	0,04
= ROAS total	2,74	2,44	1,93	2,79	2,65	2,47

A modelação de *halo* permite decompor o retorno de cada canal numa ótica de valor total, somando ao ROAS direto de vendas o valor da receita gerada indiretamente através das sessões orgânicas que o canal estimula. O resultado é revelador para o Meta Ads: o seu ROAS direto, de apenas $\approx 1,9$ a $2,0$, é fortemente reforçado pelo efeito indireto ($\approx 0,7$ a $0,9$ sob os *priors* concentrado e base), elevando o ROAS total para $\approx 2,7$ a $2,8$, próximo do *Google Ads* e bem acima do que a análise direta sugeria. Por outras palavras, grande parte do valor do *Meta Ads* não aparece na venda diretamente atribuída, mas nas sessões orgânicas que desencadeia. O *offline*, pelo contrário, gera um *halo* reduzido ($\approx 0,03$ a $0,24$), pelo que o seu ROAS total quase não difere do direto.

Ignorar o *halo* levaria a subavaliar o *Meta Ads* e, eventualmente, a cortar-lhe investimento de forma indevida. Esta valorização mantém, ainda assim, dependência da força do *prior*: o efeito indireto atenua-se em ambos os canais com *halo* estimável, de forma ligeira no Meta Ads (de $\approx 0,86$ no concentrado para $\approx 0,53$) e quase total no *offline* (de $\approx 0,21$ para $\approx 0,03$). Importa, contudo, esclarecer que esta atenuação decorre do facto da difusão do *prior* retirar peso à crença prévia e deixar os dados dominarem a estimação. Assim, o *prior* difuso atribui a cada canal menos sessões orgânicas do que a média *a priori* assumia.

Otimização do investimento

A análise de otimização foi conduzida sobre o modelo M1 (com *halo* e com variáveis de controlo) sob o *prior* base, recorrendo ao *Budget Optimizer* do Meridian. Consideraram-se cinco cenários: três de orçamento fixo neutro (orçamento atual - C1), expansão (+20% - C2) e contenção (-15% - C3), e dois de orçamento flexível, que deixam o valor de investimento total variar até o ROAS total ≥ 1 (C4) ou o ROAS marginal por canal ≥ 1 (C5). O orçamento atual de referência foi de 3899190€, ao qual corresponde uma receita incremental de 10127925€, ou seja, um ROAS médio de $\approx 2,60$ no período completo. Os resultados sintetizados nas tabelas seguintes devem ser lidos em conjunto com as curvas de resposta por canal (Anexo B), que situam cada cenário sobre a relação côncava entre investimento e receita incremental e per-

mitem interpretar a direção e a magnitude dos ajustes recomendados em função do nível de saturação de cada canal. Recorde-se que, conforme a decomposição da receita, a otimização que se segue atua exclusivamente sobre a componente incremental da receita ($\approx 10,1\text{M€}$). Os ganhos percentuais reportados referem-se, portanto, a esta receita incremental, e não às vendas totais da empresa.

A fraca identificabilidade dos parâmetros de transformação tem uma consequência direta para a análise de otimização que é apresentada posteriormente. Uma vez que o ponto de meia-saturação (ec) e o decaimento (α) são pouco informados pelos dados, a forma precisa da curvatura das curvas de resposta é, em larga medida, governada pela distribuição *a priori* e não pela verosimilhança. Por consequência, as recomendações de otimização devem ser interpretadas com cautela.

Tabela 4.10. Síntese da otimização de investimento para o período total (modelo M1, *prior* base).

Atual: investimento e receita observados; *Ótimo*: valores recomendados pelo otimizador; Δ inv.: variação do investimento; Rec. inc.: receita incremental (gerada pelos canais pagos); Δ rec.: variação da receita incremental, em valor absoluto (€) e relativo (%).

Cenário	Canal	Atual (€)	Ótimo (€)	Δ inv. (€)	Δ inv. (%)	Rec. inc. atual (€)	Rec. inc. ótima (€)	Δ rec. (€)	Δ rec. (%)
C1 — Neutro (mesmo investimento)	Google Ads	1 507 953	1 872 953	+365 000	+24,2%	4 838 727	5 312 640	+473 914	+9,8%
	Meta Ads	706 981	502 981	-204 000	-28,9%	1 373 810	1 171 155	-202 654	-14,8%
	DV360	56 008	45 008	-11 000	-19,6%	86 599	77 674	-8 926	-10,3%
	Offline	1 628 248	1 478 248	-150 000	-9,2%	3 828 789	3 661 411	-167 378	-4,4%
	Total	3 899 190	3 899 190	+0	+0,0%	10 127 925	10 222 880	+94 956	+0,9%
C2 — Expansão (+20% orçamento)	Google Ads	1 507 953	2 210 000	+702 047	+46,6%	4 838 727	5 671 690	+832 963	+17,2%
	Meta Ads	706 981	612 000	-94 981	-13,4%	1 373 810	1 287 358	-86 452	-6,3%
	DV360	56 008	54 000	-2 008	-3,6%	86 599	85 096	-1 504	-1,7%
	Offline	1 628 248	1 803 000	+174 752	+10,7%	3 828 789	4 007 460	+178 671	+4,7%
	Total	3 899 190	4 679 000	+779 810	+20,0%	10 127 925	11 051 603	+923 679	+9,1%
C3 — Contenção (-15% orçamento)	Google Ads	1 507 953	1 617 000	+109 047	+7,2%	4 838 727	4 991 306	+152 578	+3,2%
	Meta Ads	706 981	422 000	-284 981	-40,3%	1 373 810	1 069 533	-304 277	-22,1%
	DV360	56 008	38 000	-18 008	-32,2%	86 599	71 007	-15 593	-18,0%
	Offline	1 628 248	1 238 000	-390 248	-24,0%	3 828 789	3 360 370	-468 418	-12,2%
	Total	3 899 190	3 315 000	-584 190	-15,0%	10 127 925	9 492 215	-635 710	-6,3%
C4 — Flexível ROAS ≥ 1	Google Ads	1 507 953	1 960 000	+452 047	+30,0%	4 838 727	5 411 578	+572 851	+11,8%
	Meta Ads	706 981	919 000	+212 019	+30,0%	1 373 810	1 530 756	+156 946	+11,4%
	DV360	56 008	67 000	+10 992	+19,6%	86 599	94 103	+7 503	+8,7%
	Offline	1 628 248	2 116 000	+487 752	+30,0%	3 828 789	4 290 303	+461 514	+12,1%
	Total	3 899 190	5 062 000	+1 162 810	+29,8%	10 127 925	11 326 739	+1 198 814	+11,8%
C5 — Flexível mROAS ≥ 1	Google Ads	1 507 953	1 960 000	+452 047	+30,0%	4 838 727	5 411 578	+572 851	+11,8%
	Meta Ads	706 981	596 000	-110 981	-15,7%	1 373 810	1 271 551	-102 258	-7,4%
	DV360	56 008	45 000	-11 008	-19,7%	86 599	77 674	-8 926	-10,3%
	Offline	1 628 248	1 754 000	+125 752	+7,7%	3 828 789	3 959 078	+130 290	+3,4%
	Total	3 899 190	4 355 000	+455 810	+11,7%	10 127 925	10 719 881	+591 956	+5,8%

Tabela 4.11. Quota de orçamento por canal (%), alocação atual *versus* alocação ótima em cada cenário (horizonte completo, M1, *prior* base).

Canal	Atual	C1	C2	C3	C4	C5
Google Ads	38,7	48,0	47,2	48,8	38,7	45,0
Meta Ads	18,1	12,9	13,1	12,7	18,2	13,7
DV360	1,4	1,2	1,2	1,1	1,3	1,0
Offline	41,8	37,9	38,5	37,3	41,8	40,3

Sob orçamento fixo e neutro (C1), a realocação do mesmo investimento gera um ganho de apenas +0,9% de receita incremental, o que indica que a alocação atual já se encontra próxima do ótimo, dadas as restrições operacionais implementadas. A direção dessa realocação traduz-se no reforço do *Google Ads*, de cerca de 39% para 48% do investimento, retirando investimento aos restantes canais, sendo o *Meta Ads* o mais penalizado.

A comparação entre a expansão de +20% (C2), que rende apenas +9,1% de receita incremental, e a contenção de -15% (C3), que custa apenas -6,3%, revela a assimetria típica de uma curva côncava e confirma que parte relevante do investimento atual opera em rendimentos decrescentes. No cenário C2 só são reforçados os dois canais com mROAS superiores à unidade, sendo os outros dois ligeiramente reduzidos. Nesta expansão, o incremento de +46,6% observado no *Google Ads* decorre do facto de as restrições em orçamento fixo acompanharem proporcionalmente o aumento do orçamento global (B), expandindo o teto absoluto permitido face ao investimento atual. Sob corte de investimento, o *Google Ads* cresce +7,2%, ou seja, o otimizador protege o canal de maior mROAS e financia-o com significativas contrações nos restantes canais.

A comparação entre os dois cenários flexíveis é a conclusão mais relevante. O critério de ROAS total ≥ 1 (C4) expande o orçamento com +11,8% de receita e ROAS total de 2,24, estabelecendo ROAS médios por canal de 2,76 no *Google Ads*, 1,67 no *Meta Ads*, 1,40 no *DV360* e 2,03 no *offline*, reforçando todos os canais até aos seus tetos máximos, sem que o critério de ROAS chegue a ser atingido. A fixação nos limites exatos, observada na coluna de variação de investimento (Δ inv. %), ocorre porque, no modo flexível, as restrições deixam de flutuar com o investimento total do cenário e passam a funcionar como tetos e pisos calculados diretamente sobre o investimento atual. O critério mais exigente de mROAS por canal ≥ 1 (C5) eleva o ROAS total do portefólio para 2,46, cortando investimento ao *Meta Ads* e ao *DV360*, os quais apresentam mROAS inferiores à unidade (fazendo os seus ROAS médios subir para 2,13 e 1,73, respetivamente), e reforça apenas o *Google Ads* (mantendo o ROAS em 2,76) e o *offline* (com um ROAS de 2,26), cujos mROAS > 1 .

Esta leitura é visível nas curvas de resposta (Figura B.1 no Anexo B), onde os canais *Google Ads* e *DV360* não assentam no ponto de eficiência marginal. O *Google Ads* fica retido no teto de gasto de +30% e o *DV360* no piso de -20%, pelo que em nenhum dos casos o otimizador pode ajustar o investimento até ao ponto em que o mROAS igualariam a unidade (ponto de eficiência marginal). Os seus retornos marginais permanecem, assim, respetivamente acima e abaixo de 1 (Figura B.1 no Anexo B).

Replicou-se o exercício restringindo a janela ao pico de Natal/*Black Friday* (Nov-Dez de 2025, oito semanas), período em que o *offline* domina o investimento ($\approx 59\%$ da verba). O orçamento atual de referência neste período foi de 895 762 €, gerando 1 298 967 € de receita incremental, com um ROAS médio implícito de $\approx 1,45$.

Tabela 4.12. Síntese da otimização de investimento para o período de Natal/*Black Friday* (Nov-Dez 2025; modelo M1, *prior base*).

Atual: investimento e receita observados; *Ótimo*: valores recomendados pelo otimizador; Δ inv.: variação do investimento; Rec. inc.: receita incremental (gerada pelos canais pagos); Δ rec.: variação da receita incremental, em valor absoluto (€) e relativo (%).

Cenário	Canal	Atual (€)	Ótimo (€)	Δ inv. (€)	Δ inv. (%)	Rec. inc. atual (€)	Rec. inc. ótima (€)	Δ rec. (€)	Δ rec. (%)
C1 — Neutro (mesmo investimento)	Google Ads	264 691	269 800	+5 109	+1,9%	426 174	428 684	+2 511	+0,6%
	Meta Ads	89 680	78 800	-10 880	-12,1%	111 794	106 887	-4 907	-4,4%
	DV360	14 871	11 900	-2 971	-20,0%	11 599	10 412	-1 187	-10,2%
	Offline	526 520	535 100	+8 580	+1,6%	749 400	753 621	+4 220	+0,6%
	Total	895 762	895 600	-162	-0,0%	1 298 967	1 299 604	+637	+0,0%
C2 — Expansão (+20% orçamento)	Google Ads	264 691	319 000	+54 309	+20,5%	426 174	450 118	+23 945	+5,6%
	Meta Ads	89 680	95 000	+5 320	+5,9%	111 794	113 928	+2 134	+1,9%
	DV360	14 871	14 000	-871	-5,9%	11 599	11 268	-331	-2,9%
	Offline	526 520	648 000	+121 480	+23,1%	749 400	802 820	+53 420	+7,1%
	Total	895 762	1 076 000	+180 238	+20,1%	1 298 967	1 378 134	+79 167	+6,1%
C3 — Contenção (-15% orçamento)	Google Ads	264 691	232 700	-31 991	-12,1%	426 174	408 892	-17 281	-4,1%
	Meta Ads	89 680	66 900	-22 780	-25,4%	111 794	100 543	-11 251	-10,1%
	DV360	14 871	10 100	-4 771	-32,1%	11 599	9 567	-2 032	-17,5%
	Offline	526 520	451 500	-75 020	-14,2%	749 400	709 032	-40 368	-5,4%
	Total	895 762	761 200	-134 562	-15,0%	1 298 967	1 228 035	-70 932	-5,5%
C4 — Flexível ROAS ≥ 1	Google Ads	264 691	344 100	+79 409	+30,0%	426 174	459 425	+33 251	+7,8%
	Meta Ads	89 680	116 600	+26 920	+30,0%	111 794	121 300	+9 506	+8,5%
	DV360	14 871	17 900	+3 029	+20,4%	11 599	12 579	+980	+8,5%
	Offline	526 520	631 800	+105 280	+20,0%	749 400	796 395	+46 995	+6,3%
	Total	895 762	1 110 400	+214 638	+24,0%	1 298 967	1 389 699	+90 732	+7,0%
C5 — Flexível mROAS ≥ 1	Google Ads	264 691	185 300	-79 391	-30,0%	426 174	377 169	-49 005	-11,5%
	Meta Ads	89 680	62 800	-26 880	-30,0%	111 794	98 062	-13 732	-12,3%
	DV360	14 871	11 900	-2 971	-20,0%	11 599	10 412	-1 187	-10,2%
	Offline	526 520	368 600	-157 920	-30,0%	749 400	655 168	-94 232	-12,6%
	Total	895 762	628 600	-267 162	-29,8%	1 298 967	1 140 811	-158 156	-12,2%

Tabela 4.13. Quota de orçamento por canal (%), alocação atual *versus* alocação ótima em cada cenário (período de Natal/*Black Friday*, M1, *prior base*).

Canal	Atual	C1	C2	C3	C4	C5
Google Ads	29,5	30,1	29,6	30,6	31,0	29,5
Meta Ads	10,0	8,8	8,8	8,8	10,5	10,0
DV360	1,7	1,3	1,3	1,3	1,6	1,9
Offline	58,8	59,7	60,2	59,3	56,9	58,6

Em primeiro lugar, a realocação do orçamento fixo (C1) é praticamente nula em ganho (+637€). A Tabela 4.13 confirma esta estabilidade, com quotas ótimas muito próximas das atuais em todos os cenários. Em segundo lugar, e de forma mais relevante, o ROAS marginal de todos os canais é inferior a 1 em todos os cenários, como pode ser observado pela Figura B.2 do Anexo B. Isto confirma que, durante o Natal, o investimento opera muito próximo da zona de saturação das curvas de resposta, onde cada euro adicional rende menos de um euro de receita incremental.

Comparada com a Figura B.1, a Figura B.2 mostra que a posição atual de cada canal aparece deslocada para a região mais plana da curva, ou seja, aumentar ou diminuir o investimento traduz-se em variações de receita pequenas porque a curva já está na fase de saturação. É esta a lógica por detrás dos números da tabela, a expansão de +20% (C2) entrega apenas +6,1% de receita, sendo por isso pouco atrativo, ao passo que a contenção de -15% (C3) custa somente -5,5% de receita.

A análise comparativa dos cenários flexíveis (C4 e C5) durante o pico promocional evidencia, de novo, o forte estado de saturação de todo o portefólio. No cenário C4, onde o critério

de paragem é determinado pelo $\text{ROAS total} \geq 1$, o otimizador expande o investimento global em +24,0%, forçando praticamente todos os canais a atingirem as suas restrições máximas. Isto ocorre porque o ROAS médio implícito do período ($\approx 1,45$) é robusto e concede uma folga agregada ao portefólio, permitindo expandir o gasto global mesmo que os canais individualmente já operem com retornos marginais ineficientes.

Em sentido oposto, o cenário C5 estabelece o contraste mais relevante da análise sazonal. Ao impor o critério rigoroso de $\text{mROAS por canal} \geq 1$, o algoritmo depara-se com retornos marginais que já se encontram integralmente abaixo da unidade no ponto de partida, devido ao elevado volume gasto no Natal. Como o otimizador não encontra nenhum canal capaz de devolver mais do que um euro por cada euro extra investido, a solução passa por cortar a verba de forma generalizada. Todos os canais sem exceção recuam até intercetarem os seus pisos mínimos absolutos, provocando uma contração de $-29,8\%$ no orçamento total.

Neste pico de vendas, a prioridade não está em injetar mais orçamento, mas sim em garantir a execução eficiente do investimento atual. Seria até defensável reduzir a exposição, aceitando cerca de -12% de receita em troca de -30% de custo (C5).

Modelo sem AKS

O AKS selecionou onze nós, todos em novembro e dezembro de 2024 e 2025, coincidindo com os controlos sazonais. Para avaliar se estes, por si só, tornam o AKS redundante, reestimou-se o modelo M1 sem AKS, mantendo *halo*, controlos sazonais, *adstock* e *holdout*. A especificação é, assim, comparável a M1 (variáveis de controlo + AKS) e a M3 (AKS sem variáveis de controlo), diferindo de M1 apenas na ausência do AKS.

Tabela 4.14. Modelo B com e sem AKS, *prior* base ($k = 1$, $s = 0.7$). ROAS médio posterior [P5; P95].

	M1 (contr. + AKS)	M3 (AKS, s/ contr.)	Sem AKS (contr., 1 nó)
N.º de nós	11	11	1
R^2 (treino)	0,945	0,925	0,771
R^2 (validação)	0,616	0,415	0,825
Vendas base (%)	94,9	94,4	94,8
Google Ads	3,21 [2,21; 4,49]	3,22 [2,20; 4,50]	3,21 [2,19; 4,45]
Meta Ads	1,94 [1,03; 3,26]	1,97 [1,04; 3,29]	1,93 [1,03; 3,20]
DV360	1,55 [0,69; 2,85]	1,56 [0,69; 2,90]	1,54 [0,69; 2,82]
Offline	2,35 [1,50; 3,46]	2,54 [1,58; 3,81]	2,52 [1,58; 3,78]

Para o *Google Ads*, o *Meta Ads* e o DV360, desativar o AKS é praticamente indiferente, visto que o ROAS mantém-se indistinguível nos três modelos. A exceção é o *offline*, cujo ROAS no modelo sem AKS (2,52) coincide com M3 (2,54) e se afasta de M1 (2,35). Remover o AKS preservando as *dummies* produz, assim, o mesmo efeito que remover as *dummies* preservando o AKS: parte da subida sazonal regressa ao *offline*. A presença conjunta de ambos os mecanismos retira ao *offline* parte do efeito sazonal, reduzindo o seu ROAS. A convergência dos dois modelos com um único mecanismo (M3 e sem AKS) sugere que o AKS

e as *dummies* desempenham, em parte, o mesmo papel.

Em relação ao ajuste do modelo, o ganho que o AKS traz é apenas em treino, onde o R^2 sobe para 0,945, enquanto na validação, esse ganho desaparece. Já o modelo sem AKS, apesar de um R^2 de treino mais modesto, é o que melhor prevê fora da amostra. A flexibilidade adicional do AKS pode ser considerada sobreajuste.

Modelo com *prior* de *adstock* informativos

Nas especificações anteriores, o *prior* sobre o parâmetro de decaimento foi mantido não informativo, $\alpha \sim U(0, 1)$, para todos os canais, e as posteriores limitaram-se a reproduzir essa *a priori* (Tabela 4.6), sinal de que a série não identifica a velocidade de decaimento. Para avaliar se a incorporação de conhecimento de domínio sobre a dinâmica temporal de cada canal altera as conclusões, reestimou-se o Modelo M1 substituindo o *prior* uniforme por *priors* Beta informativos sobre α , diferenciados por canal, mantendo inalterados todos os restantes elementos da configuração. Aos canais de resposta tipicamente imediata (Google Ads, Meta Ads, DV360 e orgânicos) atribuiu-se uma $Beta(1, 3)$, que concentra a massa perto de zero e favorece um decaimento rápido. Ao canal *offline*, atribuiu-se uma $Beta(3, 1)$, que desloca a massa para perto de um e admite um arrastamento mais prolongado, coerente com a especificação binomial deste canal.

Tabela 4.15. Modelo M1 com *prior* $U(0, 1)$ (base) versus *prior* Beta informativo sobre α , sob *prior* base de ROAS ($k = 1$, $s = 0.7$). ROAS médio posterior [P5; P95], ROAS marginal e retenção *adstock* α_m (média $\pm$ desvio padrão posterior).

	M1 ($\alpha \sim U(0, 1)$)	M1 ($\alpha \sim Beta$)
<i>ROAS médio posterior [P5; P95]</i>		
Google Ads	3,21 [2,21; 4,49]	3,21 [2,22; 4,48]
Meta Ads	1,94 [1,03; 3,26]	1,95 [1,03; 3,29]
DV360	1,55 [0,69; 2,85]	1,56 [0,69; 2,87]
Offline	2,35 [1,50; 3,46]	2,37 [1,53; 3,49]
<i>ROAS marginal (mROAS)</i>		
Google Ads	1,44	1,44
Meta Ads	0,84	0,84
DV360	0,74	0,72
Offline	1,06	1,10
<i>Decaimento adstock α_m</i>		
Google Ads	0,505 $\pm$ 0,286	0,255 $\pm$ 0,195
Meta Ads	0,506 $\pm$ 0,294	0,251 $\pm$ 0,199
DV360	0,501 $\pm$ 0,286	0,249 $\pm$ 0,190
Offline	0,536 $\pm$ 0,286	0,760 $\pm$ 0,190
<i>Ajuste</i>		
R^2 (treino)	0,945	0,945
R^2 (validação)	0,616	0,594
Vendas base (%)	94,9	94,9

O efeito sobre as posteriores de *adstock* foi o esperado. O decaimento dos canais digitais

desceu de $\approx 0,50$ no M1 para $\approx 0,25$, enquanto a do *offline* subiu de $\approx 0,54$ para $\approx 0,76$. Contudo, em ambos os casos *a posteriori* limita-se de novo a reproduzir os momentos da respetiva *a priori*, o que confirma que a série continua a não conter informação sobre a velocidade de decaimento.

O ROAS médio posterior, o ROAS marginal e o ajuste fora da amostra (R^2 de validação de 0,59, praticamente idêntico ao do M1 base) mantêm-se estáveis, e a hierarquia entre canais não se altera. A convergência mantém-se ($\hat{R} \leq 1,001$ nos canais digitais e 1,0006 no *offline*) e o AKS seleciona os mesmos onze nós.

Conclui-se assim que as estimativas de ROAS são robustas à especificação do *adstock*: a forma do decaimento, ainda que totalmente governada pela crença prévia, não é o que determina o retorno estimado de cada canal, que decorre sobretudo do *prior* de ROAS e do sinal de investimento e impressões. Este resultado reforça a fiabilidade da hierarquia de canais já discutida, ao mostrar que se mantém mesmo quando se impõem dinâmicas temporais distintas entre canais.

5 Conclusão

A questão colocada por John Wanamaker na Introdução pode agora ser respondida, ainda que de forma probabilística e com os limites inerentes a qualquer modelo estatístico. Através da estimação dos modelos, foi possível identificar os investimentos com menor e maior retorno económico e quantificar a contribuição de cada canal para as vendas. A funcionalidade de otimização permitiu estimar distribuições de orçamento orientadas para a maximização da receita esperada, em diferentes cenários. O modelo não elimina a incerteza inerente às decisões de marketing, mas converte-a em evidência quantitativa que sustenta decisões mais informadas.

Relativamente aos resultados, quatro conclusões merecem destaque. A hierarquia de retorno dos canais no Meridian revelou-se robusta nas suas posições extremas: o *Google Ads* lidera em todas as especificações e forças de *prior* analisadas, com ROAS de aproximadamente 3,2, enquanto o DV360 permanece sistematicamente o canal menos eficiente e de maior incerteza posterior. De seguida, a modelação explícita do efeito *halo* mostrou que o ROAS total do *Meta Ads* se aproxima do do *Google Ads* ao contabilizar as sessões orgânicas que desencadeia, pelo que ignorá-lo conduziria a cortes de investimento indevidos. Em contraste com a estabilidade dos restantes canais, o *offline* destaca-se como a estimativa mais sensível às escolhas de modelação, sendo fortemente dependente das variáveis de controlo sazonais. Dada a concentração do seu investimento nas semanas de *Black Friday* e Natal, a presença das *dummies* sazonais retira-lhe parte do efeito que, na sua ausência, é reabsorvido pelo canal, inflacionando o seu ROAS. Esta dependência acentua-se à medida que o *prior* se difunde e os dados ganham peso na estimação, pelo que o retorno do *offline* deve ser lido com particular reserva. Por fim, no pico de *Black Friday* e Natal, o ROAS marginal de todos os canais situa-se abaixo da unidade, sinal de que o investimento opera em zona de saturação, sendo defensável reduzir a exposição em cerca de 30% com uma perda de apenas 12% de receita incremental. Estas conclusões devem, contudo, ser lidas com cautela, dado que os parâmetros de dinâmica temporal não são identificados por uma série de apenas 123 observações semanais, o que faz com que as recomendações de otimização valham sobretudo em termos de direção.

A comparação entre as duas ferramentas constitui, em si, um dos contributos do trabalho. A abordagem bayesiana do Meridian revelou-se particularmente vantajosa num contexto de dados limitados, ao permitir incorporar conhecimento prévio, quantificar a incerteza de cada estimativa e modelar explicitamente efeitos como o *halo*. A abordagem frequentista do Robyn ofereceu maior simplicidade computacional e rapidez de estimação, adequada a uma exploração inicial do espaço de modelos. As suas estimativas absolutas de ROAS não são, porém, diretamente comparáveis, uma vez que as vendas base inferiores atribuídas pelo Robyn elevam matematicamente o ROAS calculado sem refletir maior eficiência dos canais. A utilização conjunta das duas ferramentas produziu assim uma visão mais robusta do que qualquer das abordagens isolada.

Considera-se, deste modo, que os objetivos definidos para o estágio foram cumpridos. O estágio permitiu consolidar e aplicar, em contexto profissional real, competências em estatística e análise de dados aplicada ao marketing, modelação bayesiana hierárquica, séries temporais e otimização, bem como aprofundar o domínio de R e Python. A principal dificuldade não foi de natureza estritamente técnica, mas interpretativa, a de traduzir resultados estatísticos em recomendações de negócio. O contacto com a realidade da Wise Pirates evidenciou a importância da qualidade e preparação dos dados e do diálogo constante entre a análise quantitativa e o conhecimento do contexto de negócio.

6 Limitações e Trabalho futuro

A presente secção apresenta as principais limitações do estudo e, sempre que aplicável, as direcções de trabalho futuro que delas decorrem directamente.

A limitação mais relevante diz respeito à dimensão temporal dos dados. Com 123 dados semanais, a estimação dos modelos é mais limitada do que o desejável, um problema comum em MMM, que exige três anos ou mais de histórico para estimativas robustas. O período coberto inclui dois ciclos sazonais completos, mas ainda assim verifica-se uma fraca identificabilidade de alguns parâmetros de *adstock* e saturação reportada na secção 4. À medida que mais histórico é acumulado, a extensão do período de análise permite reduzir a incerteza das estimativas e distinguir com maior fiabilidade os efeitos dos diferentes fatores que influenciam o marketing.

Uma segunda limitação resulta do forte desequilíbrio entre as vendas *online* e *offline*, sendo aproximadamente 96% das vendas geradas *offline*. Ao utilizar as vendas totais como variável dependente, a análise fica fortemente condicionada por esse peso, podendo subestimar o contributo dos canais com efeito preferencial sobre as vendas *online*. Mesmo quando estes canais geram resultados relevantes, o respetivo impacto representa apenas uma fração do total, diluído pelo volume muito superior das vendas *offline*. A modelação separada dos dois tipos de vendas, em complemento à análise realizada, permitiria isolar esse contributo.

Uma terceira limitação decorre do padrão de atividade do canal DV360, caracterizado por investimento concentrado em períodos pontuais e por um elevado número de semanas com valor nulo. Variáveis com escassa variação e muitos zeros oferecem pouco sinal para a estimação do respetivo efeito, conduzindo a coeficientes instáveis e a maior incerteza. Em situações deste tipo, uma alternativa seria tratar o canal como um evento, através de uma variável *dummy* ativa apenas nos períodos de investimento. No presente trabalho optou-se por manter o DV360 como variável contínua, de forma a preservar a estimação direta do seu ROAS, reconhecendo-se contudo que esta opção limita a fiabilidade das estimativas para este canal específico.

Uma outra limitação prende-se com a estimação do efeito *halo* em dois estágios. Os modelos A1 e A2 são estimados separadamente e as respetivas séries residuais das sessões orgânicas são posteriormente introduzidas no Modelo B como dados fixos, isto é, como se fossem observações conhecidas sem incerteza associada. Este procedimento sequencial ignora a incerteza de estimação do primeiro estágio, uma vez que os resíduos são, na realidade, quantidades estimadas e não observadas. Em consequência, a incerteza posterior reportada no Modelo B tende a ser subestimada, por não propagar a incerteza herdada dos modelos A1 e A2.

Do ponto de vista metodológico, o facto de não terem sido realizados testes de incrementalidade no Robyn que permitissem calibrar os modelos limita a robustez causal das conclusões. A literatura recente tem evidenciado que a integração entre MMM e testes experimentais é a forma mais eficaz de estabilizar e fortalecer as estimativas. A realização destes testes e a

sua utilização na calibração dos modelos constituiria o passo mais relevante para reforçar a validade das estimativas.

Por fim, indo além das limitações diretas do presente estudo, seria interessante estender a otimização do investimento aos quatro trimestres de um ano completo, comparando a alocação ótima nas diferentes fases sazonais e avaliando até que ponto a estratégia de investimento deveria adaptar-se ao calendário comercial. Esta extensão responderia a uma limitação do otimizador do Meridian: este determina quanto investir em cada canal numa dada janela temporal, mas não em que momentos desse período esse investimento deveria ser aplicado. Ao dividir o ano em quatro trimestres e otimizar cada um em separado, obter-se-ia, para cada trimestre, uma recomendação de quanto investir. O conjunto destas recomendações daria assim uma indicação temporal: não apenas quanto, mas também quando investir ao longo do ano, algo que a otimização de um único período não permite capturar.

Referências Bibliográficas

- [1] Gufeng Zhou, Bernardo Lares, Igor Skokan, Leonel Sentana, and Meta Platforms, Inc. Adstock helper plot (Robyn: Semi-automated marketing mix modeling). https://github.com/facebookexperimental/Robyn/blob/main/figures/adstock_helper_plot.png, 2025. Consultado em 1 de julho de 2026. (Citado nas páginas vi e 10.)
- [2] Gufeng Zhou, Bernardo Lares, Igor Skokan, Leonel Sentana, and Meta Platforms, Inc. Saturation helper plot (Robyn: Semi-automated marketing mix modeling). https://github.com/facebookexperimental/Robyn/blob/main/figures/saturation_helper_plot.png, 2025. Consultado em 1 de julho de 2026. (Citado nas páginas vi e 11.)
- [3] Pennsylvania Center for the Book. John wanamaker, n.d. Pennsylvania State University. https://pabook.libraries.psu.edu/literary-cultural-heritage-map-pa/bios/wanamaker__john. (Citado na página 1.)
- [4] Meta Marketing Science. An analyst's guide to marketing mix modeling. Meta Robyn Documentation, 2026. (Citado nas páginas 3, 13, 15, 26, 36 e 39.)
- [5] Simon S. Broadbent. One way TV advertisements work. *Journal of the Market Research Society*, 21(3):139–166, 1979. (Citado na página 4.)
- [6] Forvio. Marketing mix modeling guidebook. Forvio, 2025. (Citado nas páginas 4, 5, 6 e 16.)
- [7] Cody Greco. The mystery of advertising halo effects and marketing mix modeling. Forbes Technology Council (Council Post), July 2024. (Citado na página 5.)
- [8] Keends. Halo effect in marketing. [keends.com/blog](https://keends.com/blog/halo-effect-in-marketing/), 2024. <https://keends.com/blog/halo-effect-in-marketing/>. (Citado na página 5.)
- [9] Benjamin Etienne. New-generation marketing mix modelling with meridian. Medium, February 2025. (Citado na página 6.)
- [10] Gufeng Zhou, Bernardo Lares, Igor Skokan, Leonel Sentana, and Meta Platforms, Inc. *Robyn: Semi-Automated Marketing Mix Modeling (MMM) from Meta Marketing Science*. CRAN - Comprehensive R Archive Network, 2025. Versão 3.12.1. <https://CRAN.R-project.org/package=Robyn>. (Citado na página 6.)
- [11] Cuong Duong, Sean Taylor, and Ben Letham. *prophet: Automatic Forecasting Procedure*. CRAN - Comprehensive R Archive Network, 2026. Versão 1.1.7. <https://CRAN.R-project.org/package=prophet>. (Citado na página 6.)

- [12] Andrew C. Harvey and Simon Peters. Estimation procedures for structural time series models. *Journal of Forecasting*, 9(2):89–108, 1990. (Citado na página 6.)
- [13] Sean J. Taylor and Benjamin Letham. Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72(1):37–45, 2018. (Citado nas páginas 6 e 7.)
- [14] Rihab Najem, Ayoub Bannasse, and Mohamed Talea. A hybrid prophet-based framework for multimodal forecasting with market sentiment signals. *Discover Artificial Intelligence*, 6(1):383, 2026. (Citado na página 8.)
- [15] Ramesh Narwal and Himanshu Aggarwal. Arima, prophet, and lstm-based analysis of demographic factors in smartphone usage patterns. *Microsystem Technologies*, 31(3):761–774, 2025. (Citado na página 8.)
- [16] Mohammed Elseidi. A hybrid Facebook Prophet-ARIMA framework for forecasting high-frequency temperature data. *Modeling Earth Systems and Environment*, 10(2):1855–1867, 2024. (Citado na página 9.)
- [17] Meta Open Source. Seasonality, holiday effects, and regressors - Prophet documentation. Prophet Documentation, 2026. https://facebook.github.io/prophet/docs/seasonality,_holiday_effects,_and_regressors.html. (Citado na página 9.)
- [18] Praveen Kumar. Introduction to market mix model using robyn. Analytics Vidhya, June 2023. <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2023/05/introduction-to-market-mix-model-using-robyn/>. (Citado nas páginas 10 e 15.)
- [19] Hakuhodo DY media partners Inc. *Marketing Mix Modeling Guidebook*. Hakuhodo DY media partners Inc., September 2023. Confidential guidebook. (Citado na página 11.)
- [20] A. K. Md. Ehsanes Saleh, Mohammad Arashi, and B. M. Golam Kibria. *Theory of Ridge Regression Estimation with Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2019. (Citado na página 12.)
- [21] NCSS, LLC. Ridge regression. NCSS Statistical Software Documentation, Chapter 335, 2024. <https://www.ncss.com/>. (Citado nas páginas 12 e 36.)
- [22] R. Venkatraman, Ridhima Kumar, Pranav Krishna, and Febin Babu. Only two can tango at the pareto front. Technical report, Aryma Labs Pvt. Ltd, 2024. Preprint. (Citado nas páginas 13 e 14.)
- [23] Mike Taylor. Decomp rssid: Optimizing for politics. Robyn Documentation, March 2022. <https://facebookexperimental.github.io/Robyn/docs/automated-hyperparameter-selection-optimization>. (Citado na página 14.)
- [24] Tom Vladek, Michael Kaminsky, and Mike Taylor. Operationalizing modern mmm for your brand. Recast, 2023. <https://www.recast.com>. (Citado na página 14.)
- [25] José Rodríguez-Sánchez et al. A primer on out-of-the-box ai marketing mix models. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2024. (Citado na página 15.)

- [26] Gufeng Zhou, David Choe, and Pratt Hettrakul. Calibrated mmm better predicts true roas: A simulation-based calibration experiment from the robyn public hackathon 2022. Medium, March 2023. <https://medium.com/@gufengzhou/calibrated-mmm-better-predicts-true-roas-d5adfc8abdc4>. (Citado na página 16.)
- [27] Google. Migrar do LightweightMMM, 2026. (Citado na página 16.)
- [28] Yuxue Jin, Yueqing Wang, Yunting Sun, David Chan, and Jim Koehler. Bayesian methods for media mix modeling with carryover and shape effects. Technical report, Google Inc., 2017. (Citado na página 16.)
- [29] Yunting Sun, Yueqing Wang, Yuxue Jin, David Chan, and Jim Koehler. Geo-level bayesian hierarchical media mix modeling. Technical report, Google Inc., 2017. (Citado na página 16.)
- [30] Google for Developers. Model specification | meridian. Meridian Documentation, 2026. <https://developers.google.com/meridian/docs/advanced-modeling/model-spec>. (Citado na página 16.)
- [31] Google for Developers. Definir o parâmetro adstock_decay_spec. Meridian Documentation, 2026. <https://developers.google.com/meridian/docs/advanced-modeling/set-adstock-decay-spec-parameter>. (Citado na página 18.)
- [32] Lawrence C. Marsh and David R. Cormier. *Spline Regression Models*. Number 137 in Quantitative Applications in the Social Sciences. Sage Publications, Thousand Oaks, CA, 2001. (Citado na página 20.)
- [33] Edwin Ng, Zhishi Wang, and Athena Dai. Bayesian time varying coefficient model with applications to marketing mix modeling. *arXiv preprint arXiv:2106.03322*, 2024. (Citado na página 20.)
- [34] Vivien Goepp, Olivier Bouaziz, and Grégory Nuel. Spline regression with automatic knot selection. *arXiv preprint arXiv:1808.01770*, 2018. (Citado na página 21.)
- [35] Google for Developers. Definir nós. Meridian Documentation, 2026. <https://developers.google.com/meridian/docs/advanced-modeling/setting-knots>. (Citado na página 21.)
- [36] Google for Developers. Inferência bayesiana. Meridian Documentation, 2025. <https://developers.google.com/meridian/docs/causal-inference/bayesian-inference>. (Citado nas páginas 22 e 42.)
- [37] ApX Machine Learning. Hmc mechanics. Bayesian Machine Learning (APXML), Cap. 2, 2026. (Citado na página 22.)
- [38] Matthew D. Hoffman and Andrew Gelman. The no-u-turn sampler: Adaptively setting path lengths in Hamiltonian Monte Carlo. *Journal of Machine Learning Research*, 15:1593–1623, 2014. (Citado nas páginas 22, 23, 24 e 25.)

- [39] Radford M. Neal. MCMC using Hamiltonian dynamics. In Steve Brooks, Andrew Gelman, Galin L. Jones, and Xiao-Li Meng, editors, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, chapter 5, pages 113–162. CRC Press, 2011. Referência de base para a formulação hamiltoniana e o integrador leapfrog (Störmer-Verlet). (Citado na página 23.)
- [40] ApX Machine Learning. The no-u-turn sampler (NUTS). Advanced Bayesian Machine Learning, Chapter 2, Section 2.6, 2026. <https://apxml.com/courses/bayesian-machine-learning/chapter-2-markov-chain-monte-carlo-methods/nuts-sampler>. (Citado nas páginas 24 e 25.)
- [41] Steffen Moritz and Thomas Bartz-Beielstein. imputeTS: Time series missing value imputation in R. *The R Journal*, 9(1):207–218, 2017. (Citado nas páginas 28 e 30.)
- [42] Andrew C. Harvey. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. (Citado na página 30.)
- [43] Steffen Moritz. *na_seadec: Seasonally Decomposed Missing Value Imputation*. CRAN - Comprehensive R Archive Network, 2025. Documentação do pacote R imputeTS. https://rdr.io/cran/imputeTS/man/na_seadec.html. (Citado na página 30.)
- [44] Steffen Moritz. *na_seasplit: Seasonally Splitted Missing Value Imputation*. CRAN - Comprehensive R Archive Network, 2025. Documentação do pacote R imputeTS. https://rdr.io/cran/imputeTS/man/na_seasplit.html. (Citado na página 31.)
- [45] Jonatasv. Metrics evaluation: MSE, RMSE, MAE and MAPE. Medium, 2023. <https://medium.com/@jonatasv/metrics-evaluation-mse-rmse-mae-and-mape-317cab85a26b>. (Citado na página 31.)
- [46] Hakan Demirtas, Sally A. Freels, and Recai M. Yucel. Plausibility of multivariate normality assumption when multiply imputing non-Gaussian continuous outcomes: A simulation assessment. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(1):69–84, 2008. (Citado na página 32.)
- [47] Andrew Gelman and Donald B. Rubin. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7(4):457–472, 1992. (Citado na página 41.)
- [48] Google for Developers. Escolher e configurar tipos de distribuições a priori de tratamento. Meridian Documentation, 2026. <https://developers.google.com/meridian/docs/advanced-modeling/how-to-choose-treatment-prior-types>. (Citado nas páginas 43, 44 e 45.)
- [49] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury / Thomson Learning, Pacific Grove, CA, 2 edition, 2002. (Citado nas páginas 43 e 45.)
- [50] Maria L. Rizzo. *Statistical Computing with R*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. (Citado na página 45.)

- [51] Google for Developers. Holdout observations (train and test split). Meridian Documentation, 2025. <https://developers.google.com/meridian/docs/basics/holdout-observations>. (Citado na página 47.)

A Análise exploratória das variáveis

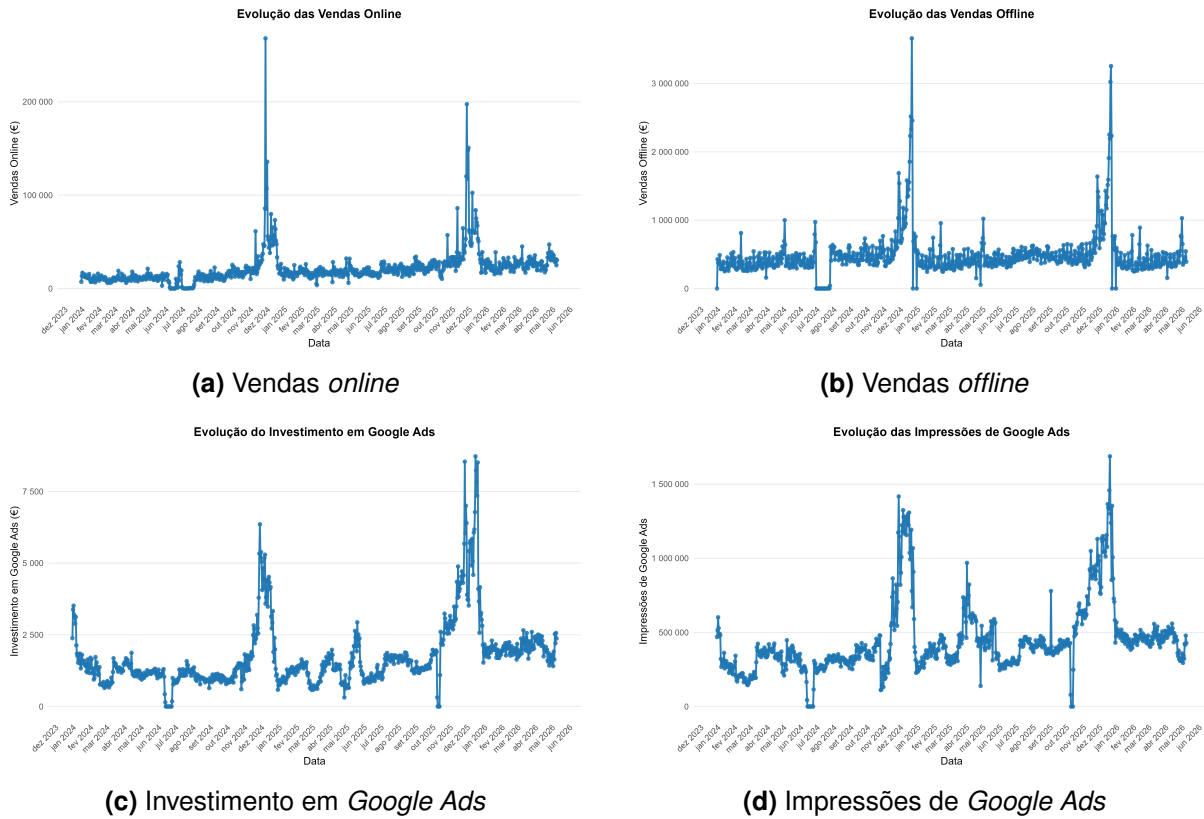
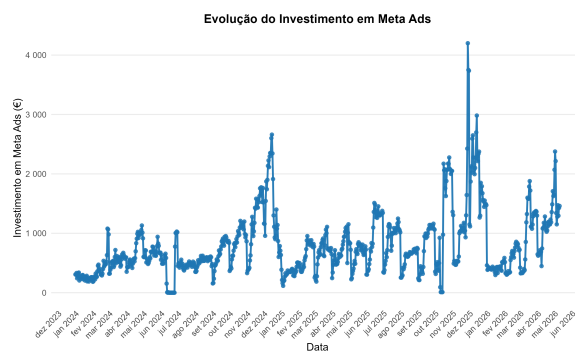


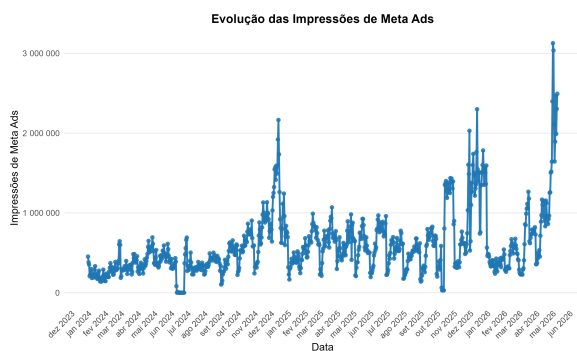
Figura A.1. Evolução das variáveis ao longo do período de análise.



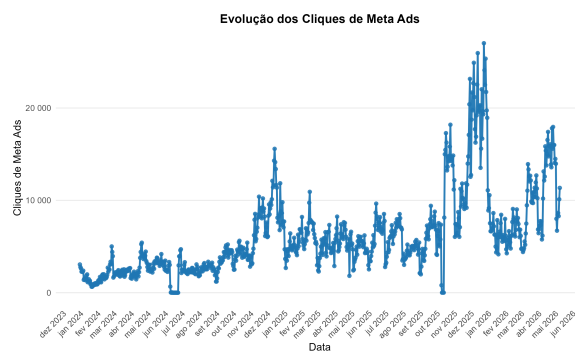
(e) Cliques de *Google Ads*



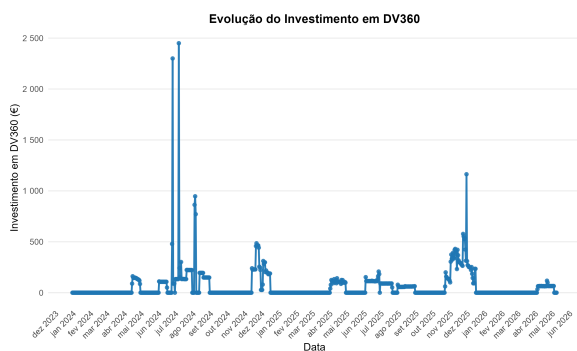
(f) Investimento em *Meta Ads*



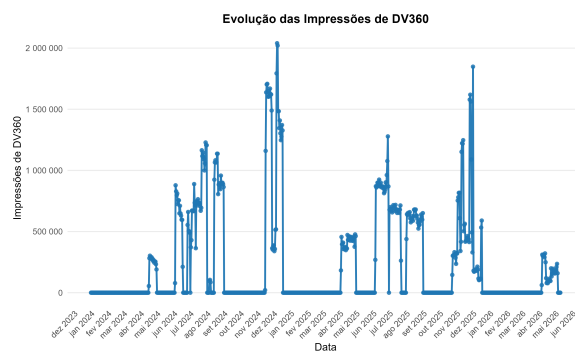
(g) Impressões de *Meta Ads*



(h) Cliques de *Meta Ads*

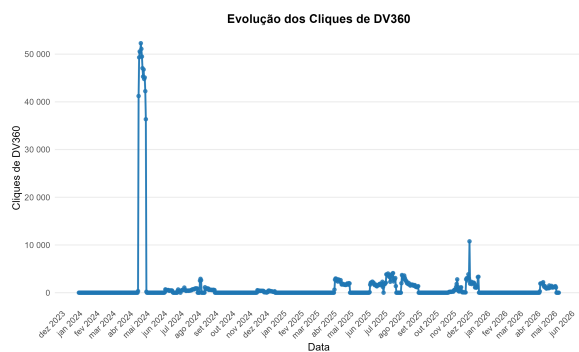
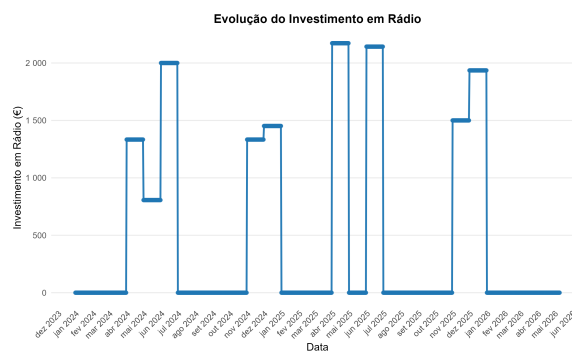
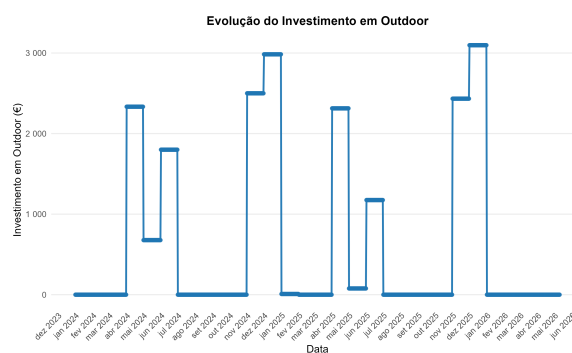
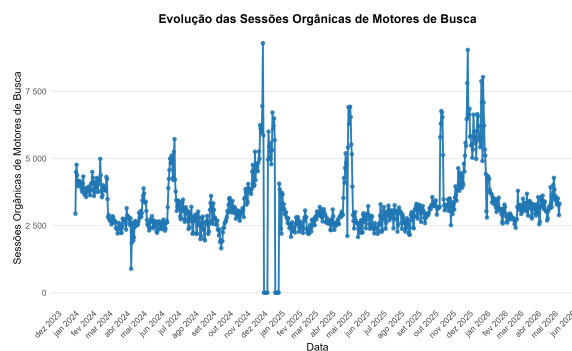


(i) Investimento em DV360



(j) Impressões de DV360

Figura A.1. Evolução das variáveis ao longo do período de análise.

**(k)** Cliques de DV360**(l)** Investimento em rádio**(m)** Investimento em televisão**(n)** Investimento em *outdoor***(o)** Investimento em *offline***(p)** Sessões orgânicas de motores de busca**Figura A.1.** Evolução das variáveis ao longo do período de análise.

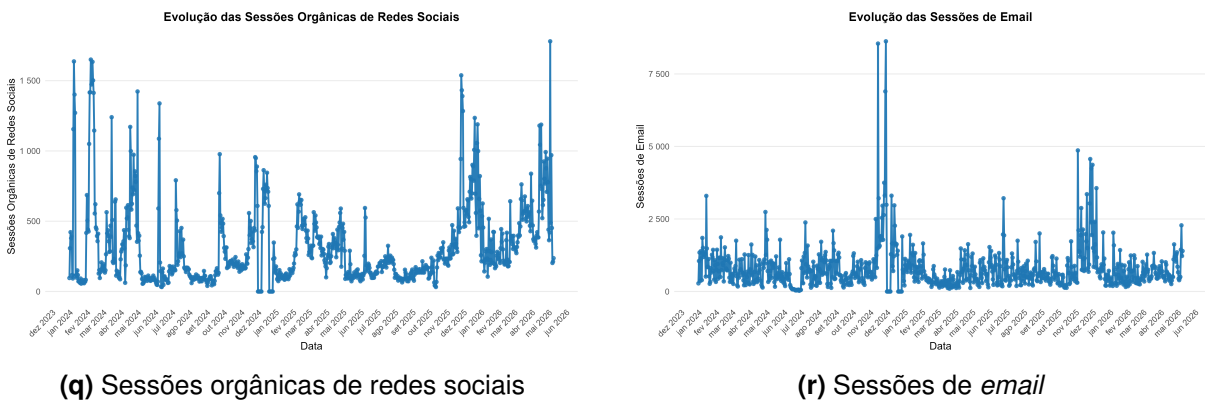


Figura A.1. Evolução das variáveis ao longo do período de análise.

B Curvas de resposta e cenários de otimização de investimento

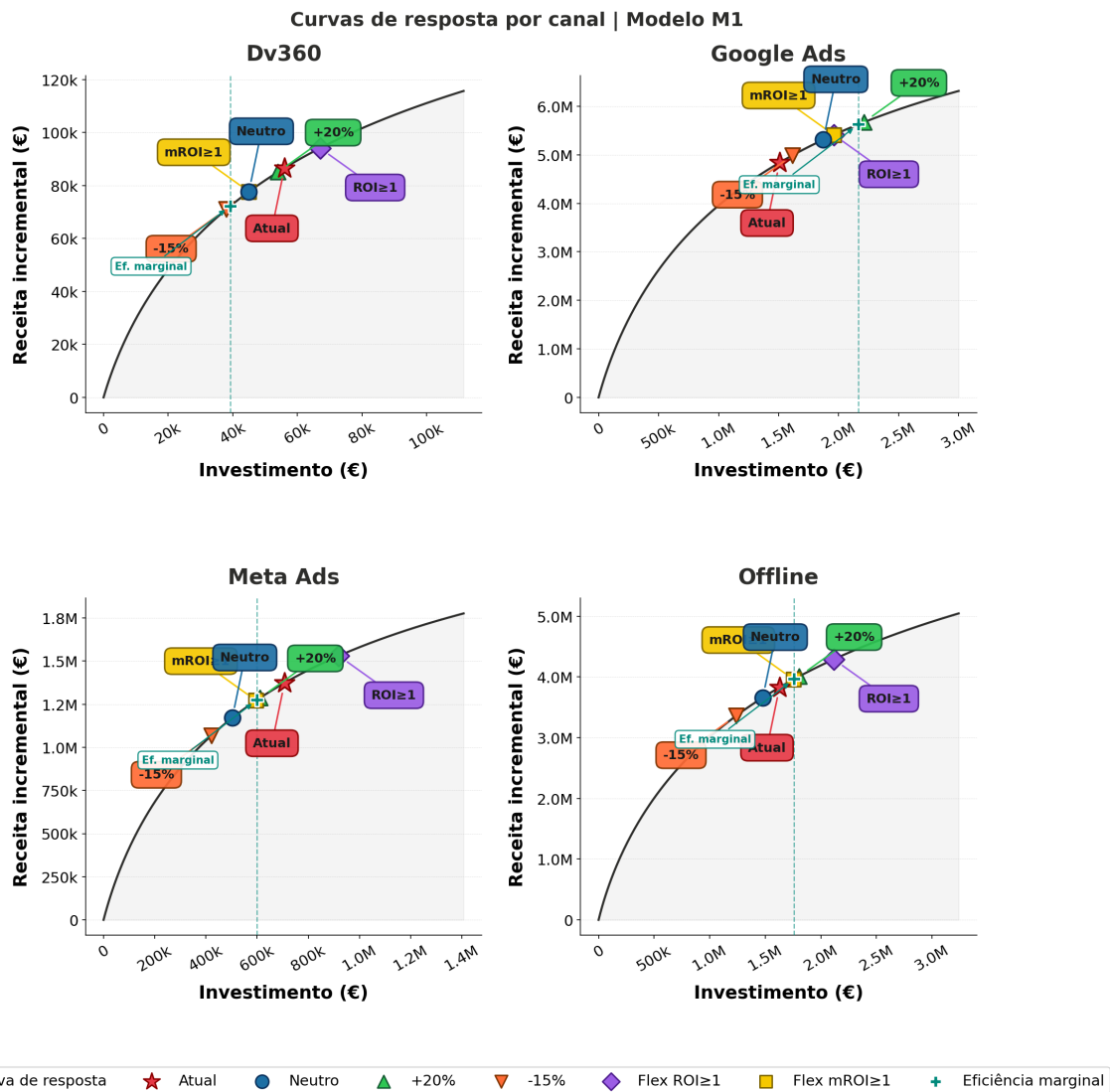


Figura B.1. Curvas de resposta incremental por canal pago (Modelo M1), com indicação dos cenários de otimização de investimento analisados: investimento atual, cenário neutro, +20%, -15%, limiares de eficiência flexível ($ROI \geq 1$ e $mROI \geq 1$) e ponto de eficiência marginal. Nas legendas das curvas de resposta, ROI e mROI correspondem, respetivamente, ao ROAS e ao mROAS utilizados ao longa da dissertação.

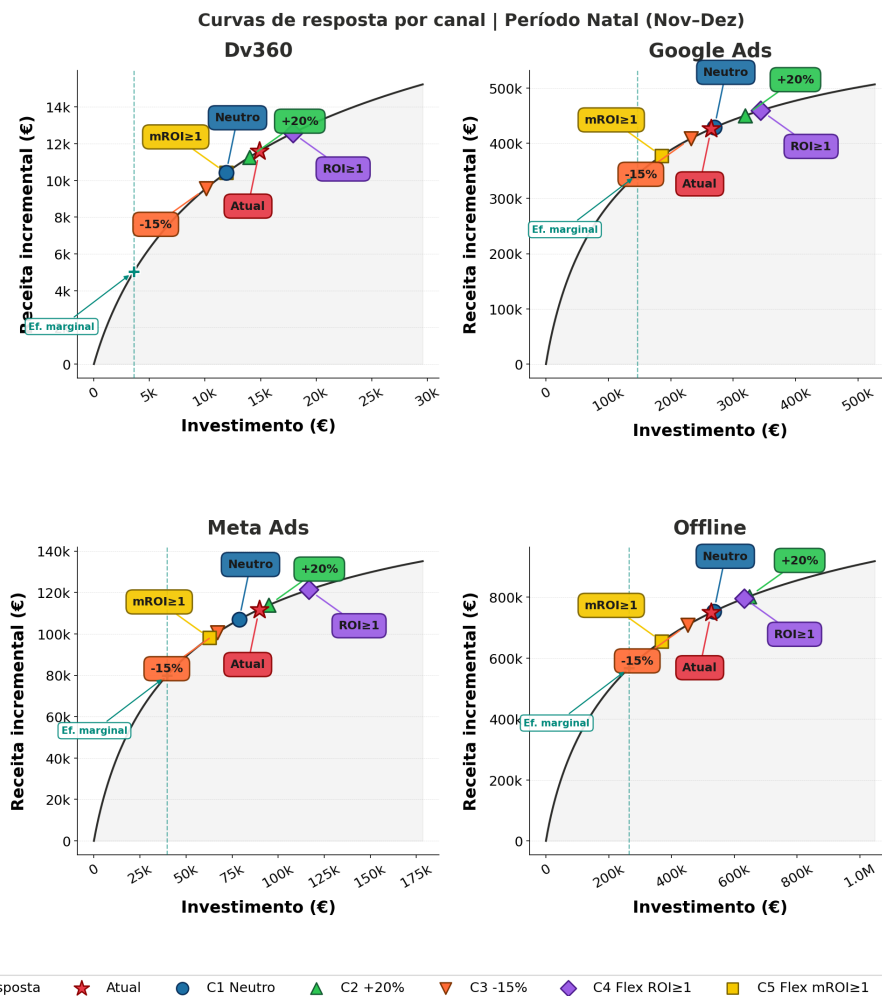


Figura B.2. Curvas de resposta incremental por canal pago para o período de novembro e dezembro de 2025 (Modelo M1), com indicação dos cenários de otimização de investimento analisados: investimento atual, cenário neutro, +20%, -15%, limites de eficiência flexível ($ROAS \geq 1$ e $mROAS \geq 1$) e ponto de eficiência marginal. Nas legendas das curvas de resposta, ROI e mROI correspondem, respetivamente, ao ROAS e ao mROAS utilizados ao longo da dissertação.