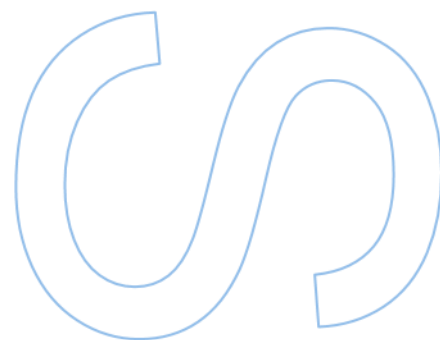
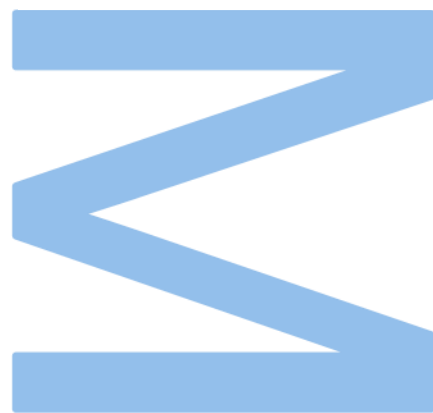


Recorrência em operadores lineares



João Alberto Sobrinho Teixeira Simões

Mestrado em Matemática

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2026

Recorrência em operadores lineares

João Alberto Sobrinho Teixeira Simões

Dissertação realizada no âmbito do Mestrado em

Matemática

Departamento de Matemática

2026

Orientador

Maria Pires de Carvalho, Professora Associada com Agregação,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer duplamente à minha orientadora, Maria Pires de Carvalho. Agradeço pela sua orientação exímia e pela disponibilidade constante durante este ano. Este documento é fruto do nosso trabalho conjunto e sem a sua orientação certamente não teria a mesma qualidade. Agradeço-lhe também pelas aulas de Análise Real 1 no meu primeiro ano de Física. Foi através delas que descobri a minha paixão pela Matemática; o meu percurso e a minha carreira futura provavelmente seriam muito diferentes se não fossem essas aulas.

Quero agradecer aos vários professores dos departamentos de Física e de Matemática com quem tive o privilégio de aprender. Foram eles que me deram os conhecimentos e ferramentas para ser capaz de redigir este documento e me ensinaram a pensar Matemática. Agradeço aos meus colegas e amigos, dentro e fora da Matemática, que ajudaram a suavizar os momentos mais difíceis e a crescer enquanto pessoa.

Gostaria de agradecer à minha família, em particular à minha mãe, ao meu pai e à minha irmã. Com eles aprendi a andar, a falar, a sentir e a viver. Devo-lhes a pessoa que sou hoje e, se não fosse o seu apoio, os ensinamentos e as vivências partilhadas, seria uma pessoa muito diferente.

Por último, quero agradecer à Rafaela pelo carinho com que me tem ajudado a enfrentar as adversidades, pelo apoio que me tem dado nos últimos meses e anos e por escolher acompanhar-me incondicionalmente nos meus diversos projetos. Fazes com que todo o esforço valha a pena. Que venham muitos mais!

Resumo

O objetivo deste trabalho é a descrição de propriedades topológicas do conjunto de vetores com órbita densa (ditos hipercíclicos) por operadores lineares contínuos de espaços de Banach com dimensão infinita. A motivação para este tema é um teorema de N. Bernardes (cf. [5]) sobre o conjunto $\mathcal{D}$ de pontos com órbita densa por uma aplicação contínua num espaço topológico Hausdorff sem pontos isolados e localmente compacto: *$\mathcal{D}$ tem interior vazio ou é todo o espaço.* Naturalmente, para um operador linear num espaço vetorial que não se reduza ao vetor nulo, $\mathcal{D}$ não pode ser todo o espaço; mas conhecem-se exemplos de operadores lineares contínuos em espaços de Banach de dimensão infinita tal que todo o vetor não-nulo tem órbita densa. Ou seja, o teorema de N. Bernardes não admite uma extensão a este contexto linear.

O que se pode afirmar em geral sobre o conjunto $\mathcal{D}$ de um operador linear contínuo num espaço de Banach? Provaremos que, se o espaço de Banach tem dimensão finita, então $\mathcal{D} = \emptyset$; se, pelo contrário, o espaço de Banach tem dimensão infinita e $\mathcal{D} \neq \emptyset$, então é um G_δ denso, conexo e homeomorfo ao espaço de Banach ambiente (propriedade demonstrada por A. Fathi e G. Godefroy). Estas propriedades de $\mathcal{D}$, quando é não-vazio, têm consequências importantes, que analisaremos. Por exemplo, todo o vetor do espaço é soma de dois vetores com órbita densa. E todo o espaço de Hilbert de dimensão infinita admite uma função contínua minimal, contrariamente ao que acontece quando a dimensão é finita (positiva), em que tais dinâmicas não existem.

A existência de operadores lineares contínuos cujo conjunto $\mathcal{D}$ contém todos os vetores não-nulos relaciona-se com um problema antigo em dinâmica de operadores lineares que se mantém em aberto: dado um operador linear contínuo injetivo num espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita, existe um subconjunto invariante fechado não-trivial (isto é, distinto de $\{0\}$ e do espaço ambiente) ? A contribuição mais original deste trabalho é uma resposta afirmativa a esta questão para certas classes de operadores lineares.

Palavras-chave: Transitividade topológica; Operador linear hipercíclico; Operador linear frequentemente hipercíclico; Medidas ergódicas com suporte total; Sistemas dinâmicos minimais.

Abstract

The aim of this work is to describe the topological properties of the set of vectors with a dense orbit (known as hypercyclic vectors) under continuous linear operators on infinite-dimensional Banach spaces. The motivation for this topic is a theorem by N. Bernardes (cf. [5]) which concerns the set $\mathcal{D}$ of points with a dense orbit under a continuous map on a locally compact Hausdorff topological space without isolated points: either $\mathcal{D}$ *has an empty interior or is the whole space*. Naturally, for a linear operator on a vector space that is not reduced to the null vector, $\mathcal{D}$ cannot be the whole space; however, there are known examples of continuous linear operators on infinite-dimensional Banach spaces such that every non-zero vector has a dense orbit. In other words, N. Bernardes' theorem does not admit an extension to this linear context.

What can be stated in general about the set $\mathcal{D}$ of a continuous linear operator on a Banach space? We will prove that, if the Banach space is finite-dimensional, then $\mathcal{D} = \emptyset$. If, on the contrary, the Banach space is infinite-dimensional and $\mathcal{D} \neq \emptyset$, then $\mathcal{D}$ is a connected G_δ dense set which is homeomorphic to the ambient Banach space (a property established by A. Fathi and G. Godefroy). These properties of $\mathcal{D}$, when it is non-empty, have important consequences that we will also discuss. For example, every vector in the space is the sum of two vectors with a dense orbit. Furthermore, every infinite-dimensional Hilbert space admits a minimal continuous function, contrary to what occurs when the dimension is finite (positive), where such dynamics do not exist.

The existence of continuous linear operators whose set $\mathcal{D}$ contains all non-zero vectors is related to an old open problem in Linear Dynamics: given a one-to-one continuous linear operator on an infinite-dimensional reflexive Banach space, does there exist a non-trivial closed invariant subset (i.e., distinct from $\{0\}$ and the ambient space) ? The most original contribution of this work is an affirmative answer to this question for certain classes of linear operators.

Keywords: Topological transitivity; Hypercyclic linear operator; Frequently hypercyclic linear operator; Ergodic measures with full support; Minimal dynamical systems.

Conteúdo

Lista de Figuras.....	xi
Introdução	1
1. Preliminares.....	5
1.1. Topologia.....	5
1.1.1. Espaços topológicos	5
1.1.2. Limites e continuidade	8
1.1.3. Espaços métricos.....	10
1.1.4. Compacidade	13
1.2. Análise Funcional	16
1.2.1. Espaços vetoriais topológicos	16
1.2.2. Séries em espaços vetoriais	18
1.2.3. Espaços de Banach	19
1.2.4. Espaços de Hilbert.....	22
1.2.5. Espaços de Fréchet	24
1.2.6. Operadores lineares	26
1.2.6.1. Operadores adjuntos.....	29
1.2.7. Teoremas fundamentais sobre espaços de Banach	29
1.2.8. Dual e bi-dual	31
1.2.9. As topologias fraca e fraca*	31
1.3. Análise Complexa	34
1.3.1. Funções holomorfas	34
1.3.2. Séries de operadores.....	35
1.4. Teoria da Medida	36
1.4.1. Medidas regulares	37
1.4.2. Integração	37
1.4.3. Representação de funcionais lineares	38
1.4.4. Medidas invariantes	39
1.4.4.1. Medidas ergódicas	39
2. Dinâmica Topológica	41
2.1. Sistemas dinâmicos.....	41
2.1.1. Pontos periódicos e pontos recorrentes	41
2.1.2. Função recorrente.....	43
2.1.3. Pontos não-errantes	46
2.1.4. Teorema de recorrência de Poincaré	47

2.1.5.	Pontos com órbita densa	48
2.1.5.1.	O caso bijetivo	50
2.1.6.	Transitividade topológica	50
2.1.7.	Aplicações <i>mixing</i>	51
2.1.8.	Conjugação entre sistemas dinâmicos	52
2.1.9.	Produto de sistemas dinâmicos	53
2.1.10.	Aplicações <i>weakly mixing</i>	54
2.1.10.1.	Formulações equivalentes da noção <i>weakly mixing</i>	54
2.1.11.	Transitividade topológica vs. existência de órbitas densas.	55
2.1.12.	Caos segundo Devaney	61
2.2.	Como é o conjunto $\mathcal{D}_f$?	63
3.	Dinâmica Linear	69
3.1.	Operadores em espaços de dimensão finita	69
3.1.1.	Exemplos	70
3.2.	Operadores em espaços de dimensão infinita	72
3.2.1.	Exemplos de operadores hipercíclicos	72
3.2.1.1.	Caos em contexto linear	75
3.2.1.2.	Critérios de hiperciclicidade	77
3.2.2.	Aplicação dos critérios anteriores	80
3.2.2.1.	Os operadores de Rolewicz	80
3.2.2.2.	Os operadores de MacLane e de Birkhoff	81
3.2.3.	Generalização dos exemplos anteriores	82
3.2.3.1.	Espaços de sucessões	82
3.2.3.2.	<i>Weighted backward shifts</i>	83
3.2.3.3.	<i>Forward shifts</i>	88
3.2.3.4.	Espaços de sucessões bilaterais	88
3.2.3.5.	A derivada como <i>weighted shift</i>	92
3.2.4.	Operadores frequentemente hipercíclicos	92
3.2.4.1.	Critério de hiperciclicidade frequente	95
3.2.5.	Exemplos	97
3.2.5.1.	<i>Weighted shifts</i> frequentemente hipercíclicos	97
3.2.5.2.	Operador de MacLane	98
4.	Propriedades do conjunto $HC(T)$	99
4.1.	Propriedades lineares e topológicas	99
4.1.1.	Transitividade	99
4.1.2.	Soma de vetores hipercíclicos	99
4.1.3.	Subconjuntos identificáveis de vetores hipercíclicos	100
4.2.	$HC(T) = \emptyset$ ou é homeomorfo a $\mathcal{X}$	104

4.3. Funções minimais em espaços de Hilbert.....	107
5. Propriedades ergódicas dos operadores hipercíclicos.....	111
5.1. Probabilidades invariantes por operadores frequentemente hipercíclicos	113
5.2. Probabilidades ergódicas por operadores frequentemente hipercíclicos.....	118
5.2.1. Exemplos	119
6. Sufficient conditions for $HC(T) \neq X \setminus \{0\}$	121
6.1. Introduction and main results	121
6.1.1. Closed non-trivial invariant subset problem.....	122
6.1.2. Several ways for a vector to be non-hypercyclic	123
6.1.2.1. Uniformly recurrent vectors	123
6.1.2.2. Unimodular eigenvectors	124
6.1.2.3. Shadowing property	125
6.1.2.4. Ergodic operators on reflexive Banach spaces	125
6.2. Definitions	126
6.2.1. Syndetic, thick, piecewise syndetic and IP subsets of $\mathbb{N}$	126
6.2.2. Frequently recurrence.....	127
6.2.3. Uniformly recurrence.....	127
6.2.4. Piecewise-uniform recurrence	127
6.2.5. Topological transitivity	128
6.2.6. Shadowing property	128
6.3. Proof of Theorem A	128
6.4. Proof of Theorem C	129
6.5. Proof of Theorem D	130
Bibliografia	132

Lista de Figuras

2.1. Gráfico da função f	58
----------------------------------	----

Introdução

Em Sistemas Dinâmicos, estudam-se iterados de funções $f: X \rightarrow X$ definidas num espaço X com alguma estrutura adicional. Mais precisamente, como a imagem de f está contida no seu domínio, podemos compor f consigo mesma e associar, a cada $x \in X$, o conjunto dos iterados de x por f , a que se chama *órbita de x por f* , isto é,

$$\text{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : x \in \mathbb{N}_0\}.$$

Em geral, supõe-se que o espaço X tem uma estrutura topológica subjacente ou é um espaço de medida. O propósito de Sistema Dinâmicos é encontrar propriedades topológicas, geométricas e ergódicas das órbitas de f . Apesar de atualmente estar bastante mais desenvolvida, a Dinâmica Topológica restringiu-se durante anos a espaços compactos ou localmente compactos, não contemplando outras estruturas igualmente ricas. Por exemplo, sistemas dinâmicos em contexto linear permaneceram inexplorados durante várias décadas, fruto da simplicidade da dinâmica de operadores lineares contínuos em espaços vetoriais de dimensão finita. Afortunadamente, a estrutura linear extremamente rígida em dimensão finita contrasta com uma variedade dinâmica surpreendente em espaços de dimensão infinita. Esta distinção tornou-se evidente quando G. Birkhoff mostrou, em 1929, que existem operadores lineares contínuos em espaços de Fréchet de dimensão infinita com vetores cuja órbita é densa (dizem-se *hipercíclicos*). Seguiram-se-lhes outros exemplos, como o operador derivação, analisado por G. MacLane em 1952, e os *weighted backward shifts* em espaços de Banach, examinados por S. Rolewicz em 1969; estes operadores são de facto *mixing* e caóticos.

Apesar dos avanços notáveis em Dinâmica Linear obtidos nas últimas décadas, vários problemas resolvidos para espaços de dimensão finita mantêm-se em aberto no contexto de dimensão infinita. Vejamos um exemplo. Um resultado clássico de Álgebra Linear diz-nos que todo o operador linear em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ admite um subconjunto fechado invariante não-trivial (diferente de $\{0\}$ e do espaço ambiente). A questão se o mesmo vale em espaços de Banach de dimensão infinita foi respondida negativamente em 1987 por P. Enflo [17], que construiu um operador linear contínuo num espaço de Banach não-reflexivo tal que a órbita de qualquer vetor não-nulo é densa. Essa construção é tecnicamente muito exigente, podendo ser lida em [35] uma reformulação de C. Read no espaço ℓ^1 . No entanto, o problema mantêm-se em aberto para espaços de Banach reflexivos.

Observe-se que a existência de um subconjunto fechado invariante não-trivial é equivalente à presença de um vetor não-nulo cuja órbita não é densa. A questão revela assim a sua natureza essencialmente dinâmica, sugerindo que se procure esclarecer quão grande pode ser o conjunto de vetores hipercíclicos por operadores lineares contínuos em espaços de Banach com dimensão infinita. O que se sabe sobre o conjunto $\mathcal{D}_f$ de pontos com órbita densa por uma função contínua $f: X \rightarrow X$ num espaço topológico X é o que enuncia o seguinte resultado.

Teorema. [5] [N. Bernardes] *Sejam X um espaço topológico Hausdorff sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua.*

- (a) *Se X é compacto, então $\mathcal{D}_f = X$ ou o interior de $\mathcal{D}_f$ é vazio.*
- (b) *Se X não é compacto mas é localmente compacto, então o interior de $\mathcal{D}_f$ é vazio.*

Em particular, resulta deste teorema que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, não existe uma função contínua $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujas órbitas são todas densas. Ao elaborarmos uma demonstração mais elementar deste teorema no caso especial em que o espaço é métrico, reparámos que o enunciado mais geral pode ser provado sem recorrer a uniformidades, como faz N. Bernardes. É essa prova mais simples, e mais fácil de motivar, que é aqui apresentada.

Embora os espaços de Banach de dimensão infinita sejam espaços topológicos Hausdorff (porque são espaços métricos) sem pontos isolados (porque são espaços vetoriais), nunca são localmente compactos; logo, o teorema anterior não se lhes aplica. Esperar-se-ia que a linearidade do espaço e do operador simplificasse a abordagem deste problema, e isso é verdade em dimensão finita; mas a falta de compacidade local em dimensão infinita é uma fonte de dificuldades. Assim, ao iniciar este trabalho de pesquisa, tínhamos duas questões naturais para resolver:

1. Que propriedades topológicas tem o conjunto de vetores hipercíclicos de um operador linear contínuo num espaço de Banach de dimensão infinita?
2. Que condições podemos impor ao espaço vetorial ou ao operador linear que garantam a existência de um vetor não-nulo que não é hipercíclico?

Uma resposta à primeira pergunta ocupa o capítulo central deste texto, onde se provará uma dicotomia que pode ser interpretada como uma versão do Teorema de N. Bernardes

em contexto linear: *o conjunto de vetores hipercíclicos de um operador linear num espaço de Banach é vazio ou é homeomorfo ao espaço ambiente*. A segunda questão é o tema do último capítulo deste texto, que contém uma contribuição matemática original. Nele se deduzem algumas condições suficientes relevantes para que um operador linear contínuo num espaço de Banach admita um vetor não-nulo que não é hipercíclico.

As propriedades ergódicas de um sistema dinâmico podem dar informação adicional sobre o comportamento das órbitas. Por exemplo, uma transformação mensurável num espaço de medida que preserva uma probabilidade tem pontos recorrentes. Igualmente interessante é o facto de que todo o operador linear contínuo de um espaço de Banach que deixa invariante uma probabilidade (nos borelianos) ergódica com suporte total tem um conjunto G_δ denso de vetores hipercíclicos. Contudo, a existência de uma tal probabilidade não está garantida para todo o operador linear. Por isso, este texto dedica o penúltimo capítulo à apresentação de uma demonstração de que um operador linear contínuo frequentemente hipercíclico num espaço de Banach reflexivo admite uma probabilidade (nos borelianos) invariante com suporte total.

São conhecidos exemplos de operadores lineares contínuos frequentemente hipercíclicos nos espaços c_0 e ℓ^1 que não admitem uma probabilidade ergódica com suporte total. Está, porém, em aberto o problema sobre a existência desse tipo de probabilidades em espaços de Banach reflexivos. O que nos colocou uma nova questão, a que também respondemos no último capítulo deste texto:

3. Que informação, sobre o conjunto de vetores hipercíclicos de um operador linear contínuo num espaço de Banach de dimensão infinita, se pode obter a partir da não-existência de uma probabilidade ergódica com suporte total?

O estudo de dinâmica linear requer alguns conhecimentos matemáticos prévios em diversas áreas. Para permitir uma leitura autónoma deste texto, incluiu-se um capítulo inicial que revisita conceitos e resultados essenciais de Topologia, Análise Funcional, Análise Complexa e Teoria da Medida. Omitem-se várias demonstrações mas, nesse caso, são indicadas obras de referência onde os detalhes podem ser encontrados.

Os primeiros 5 capítulos da dissertação estão escritos em português, na tradição das obras do Projeto Euclides editados com a chancela do IMPA (Rio de Janeiro). Estes são livros de qualidade invulgar, que incluem quase todas as áreas da Matemática (ainda não

a de Dinâmica Linear) e cuja excelência, no conteúdo e na redação, inspira investigadores, docentes, divulgadores e quem escreve Matemática. O último capítulo deste texto foi escrito em inglês e num registo distinto, o de um artigo científico. A experiência de uma descoberta em Matemática e da sua descrição num artigo completam os objetivos previstos para esta dissertação.

1. Preliminares

Este capítulo reúne informação básica, seleccionada porque se usará em capítulos posteriores, sobre espaços topológicos, operadores lineares, funções holomorfas e espaços de medida. Omitiremos, em geral, demonstrações, que podem ser lidas em detalhe nas referências [16], [28], [13], [29], [37] e [38]. O leitor familiarizado com este conteúdo pode avançar para o capítulo seguinte.

No que se segue, denotamos o gráfico de f por $\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$ e a imagem de f por $\text{Im}(f)$. Adotamos a convenção de que o conjunto de números naturais começa em 1. Sempre que for necessário acrescentar-lhe 0, usaremos a notação $\mathbb{N}_0$. Denotamos o cardinal de um conjunto A por $\#A$.

1.1. Topologia

1.1.1 Espaços topológicos

Seja X um conjunto não-vazio, $P(X)$ a família dos subconjuntos de X e $\mathcal{T} \subseteq P(X)$. Diz-se que $\mathcal{T}$ é uma topologia em X se satisfizer as seguintes condições:

- (a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (b) Para toda a família $(A_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{T}$, tem-se $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.
- (c) $\forall A, B \in \mathcal{T}$, tem-se $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Os elementos de $\mathcal{T}$ são os abertos de X , os seus complementares são os fechados. Designamos o par $(X, \mathcal{T})$ por espaço topológico. Se a topologia estiver subentendida, abreviamos a notação para X .

Sejam X um conjunto e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ duas topologias em X . Dizemos que $\mathcal{T}_1$ é mais fina do que $\mathcal{T}_2$ se todo o elemento de $\mathcal{T}_2$ estiver em $\mathcal{T}_1$, isto é, se $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Neste caso, diz-se que $\mathcal{T}_2$ é mais grosseira (ou fraca) do que $\mathcal{T}_1$.

Dado $x \in X$, um subconjunto $V \subseteq X$ tal que $x \in V$ é uma vizinhança de x se existir $U \subseteq X$ aberto tal que $x \in U \subseteq V$. Dizemos que V é vizinhança de um conjunto $A \subseteq X$ se V for vizinhança de todos os elementos de A .

Dado $A \subset X$, a aderência (ou fecho) de A , que denotamos por $\overline{A}$, é o conjunto de pontos $x \in X$ tais que qualquer vizinhança de x intersecta A . O interior de A é o conjunto de

pontos $x \in X$ tais que existe uma vizinhança de x contida em A . Denotaremos o interior de A por $\mathring{A}$ ou $\text{int}(A)$. A fronteira de A é o conjunto $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Dado um subconjunto A e $x \in X$, diz-se que x é um ponto de acumulação de A se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Se $x \in A$ não for ponto de acumulação de A , diz-se que x é isolado em A .

Proposição 1.1.1. *Dados um espaço topológico X e um subconjunto $A \subseteq X$, um ponto $x \in A$ é isolado em A se e só se x admitir uma vizinhança V tal que $V \cap A = \{x\}$. Em particular, x é isolado em X se e só se $\{x\}$ for aberto.*

Demonstração. Se existe uma tal vizinhança V , então V é disjunto de $A \setminus \{x\}$. Logo, x não pertence à aderência de A . Reciprocamente, se x é isolado, então existe uma vizinhança de x disjunta de $A \setminus \{x\}$ e, portanto, $V \cap A = V \cap (A \setminus \{x\} \cup \{x\}) = \{x\}$. A segunda afirmação resulta diretamente da definição de vizinhança. $\square$

Dado um ponto $x \in X$, uma família de vizinhanças $(V_i)_{i \in I}$ de x diz-se um sistema fundamental de vizinhanças de x se, para toda a vizinhança V de x , existir $i \in I$ tal que $V_i \subseteq V$. Seja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$ se todo o elemento de $\mathcal{T}$ for união de elementos de $\mathcal{B}$. A utilidade destas famílias é a seguinte: alguns resultados topológicos podem ser provados recorrendo apenas a sistemas fundamentais de vizinhanças, em vez de todas as vizinhanças, e a uma base da topologia, em vez da topologia inteira.

Todo o subconjunto de um espaço topológico pode ser visto como um espaço topológico definindo os abertos como a interseção dos abertos do espaço ambiente com o subconjunto. Podemos também definir o produto de dois espaços topológicos e, por indução, de um número finito de espaços topológicos, definindo a topologia no espaço produto como a topologia gerada pelo produto de abertos.

Um espaço é Hausdorff se dois pontos distintos puderem ser separados por vizinhanças disjuntas. Num espaço Hausdorff todo o conjunto singular é fechado.

Um espaço topológico diz-se 1-numerável se todo o ponto admitir um sistema fundamental de vizinhanças numerável. Um espaço topológico diz-se 2-numerável se admitir uma base numerável para a topologia. De notar que ser 2-numerável implica ser 1-numerável.

Para verificar isso, basta considerar, para cada ponto x , o sistema fundamental de vizinhanças composto pelos elementos da base que contêm x . Estas propriedades de numerabilidade facilitam demonstrações ao permitir reduzir a cardinalidade de certas construções para a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Por exemplo, num espaço 1-numerável, um ponto x pertence ao fecho de um conjunto A se e só se existe uma sucessão $(x_n)_n$ contida em A convergente para x .

Exemplo 1.1.1. Consideremos o conjunto de números reais $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelas uniões dos intervalos $]a, b[$, sendo $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, juntamente com $\emptyset$. Então $\mathbb{R}$ é Hausdorff pois, dados $x < y \in \mathbb{R}$, os abertos $U =]-\infty, \frac{x+y}{2}[$ e $V =]\frac{x+y}{2}, +\infty[$ são vizinhanças abertas de x e y , respetivamente, e são disjuntas. É também 2-numerável, logo 1-numerável: o conjunto dos intervalos abertos com extremos racionais é uma base numerável da topologia.

Exemplo 1.1.2 (A topologia grosseira). Em todo o conjunto X , podemos definir uma topologia, designada por topologia grosseira, em que $\mathcal{T}$ é composta unicamente pelo vazio e X . Com esta topologia, $(X, \mathcal{T})$ é Hausdorff se e só se tiver apenas um elemento.

Exemplo 1.1.3 (A topologia discreta). Em todo o conjunto X , podemos definir outra topologia, designada por topologia discreta. Trata-se de $\mathcal{T} = P(X)$. Com esta topologia, X é Hausdorff e 1-numerável. É 2-numerável se e só se X for numerável, pois a menor base possível na topologia discreta é a base constituída por todos os singletos, $\mathcal{B} = (\{x\})_{x \in X}$. Em particular, $\mathbb{R}$ munido com a topologia discreta é 1-numerável mas não 2-numerável.

Um espaço topológico X diz-se desconexo se existir $\emptyset \neq A \subsetneq X$ que é simultaneamente aberto e fechado. Ou, equivalentemente, se existirem $A, B \subseteq X$ não-vazios para os quais $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$. O espaço X diz-se conexo se não for desconexo. Um subconjunto A de X diz-se conexo se for conexo como subespaço topológico de X .

Teorema 1.1.2. [16, Theorem 10.1.7] *Seja X um espaço topológico e $A, B \subseteq X$ tais que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Se A é conexo, B também é. Em particular, $\overline{A}$ é conexo se A o for.*

Dado um espaço topológico X , um subconjunto A diz-se denso em X se $\overline{A} = X$ ou, equivalentemente, se A interseccionar qualquer aberto não-vazio. Note-se que um conjunto é denso se e só se o seu complementar tiver interior vazio. Se um espaço topológico admitir um subconjunto numerável denso, dizemos que o espaço é separável. As propriedades seguintes são elementares mas essenciais neste texto.

Proposição 1.1.3. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$ denso em X . Um conjunto $B \subseteq A$ é denso em A se e só se é denso em X .*

Demonstração. Dados $x \in X$ e V uma vizinhança aberta de x , seja $a \in A$ tal que $a \in V$, que existe por A ser denso em X . Como V é um aberto, é também vizinhança de a ; por B ser denso em A , existe $b \in B$ tal que $b \in V$. Logo B é denso em X . $\square$

Proposição 1.1.4. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico Hausdorff sem pontos isolados e A um subconjunto denso de X . Se removermos um número finito de pontos a A , o subconjunto que daí resulta também é denso em X .*

Demonstração. Fixemos $x \in A$ e mostremos que $A \setminus \{x\}$ é denso em X se A o for. Suponhamos que $A \setminus \{x\}$ não é denso. Então, existe um aberto não-vazio U disjunto de $A \setminus \{x\}$. Visto A ser denso, temos $U \cap A \neq \emptyset$. E, portanto, $U \cap A = \{x\}$. Como X não tem pontos isolados, $U \setminus \{x\}$ é não-vazio; e, sendo X Hausdorff, o conjunto $U \setminus \{x\}$ é um aberto, pois é interseção de dois abertos, nomeadamente U e $X \setminus \{x\}$. Então $U \setminus \{x\}$ intersesta A , o que implica que $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, o que é uma contradição. $\square$

Recordamos ainda que as propriedades de ser Hausdorff, 1-numerável, 2-numerável e separável são herdadas pelos subespaços topológicos; e que, se X, Y são espaços Hausdorff, 1-numeráveis, 2-numeráveis, separáveis ou conexos, então $X \times Y$ é Hausdorff, 1-numerável, 2-numerável, separável ou conexo, respetivamente.

1.1.2 Limites e continuidade

Uma noção fundamental em espaços topológicos é a de limite. Há várias formas de a definir; neste texto usaremos o conceito de rede.

Seja A um conjunto não-vazio. Uma relação binária $R \subseteq A \times A$ diz-se uma pré-ordem se for transitiva ($\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$) e reflexiva ($\forall a \in A, aRa$). Denotaremos R por $\leq$ (e a pré-ordem inversa por $\geq$).

Seja A um conjunto e $\leq$ uma pré-ordem em A . Dizemos que $(A, \leq)$ é um conjunto dirigido se todos os elementos $a, b \in A$ admitirem um supremo (isto é, um majorante relativamente à pré-ordem que é o menor dos majorantes). Em particular, todo o subconjunto finito de A admite um supremo. Quando $\leq$ está subentendido, referimo-nos apenas ao conjunto dirigido A .

Definição 1.1.5. Seja X um conjunto e A um conjunto dirigido. Uma rede $(x_a)_{a \in A}$ é uma função $f: A \rightarrow X$.

Claramente, $A = \mathbb{N}$ com a ordem usual entre os naturais é um conjunto dirigido. Quando $\mathbb{N}$ é o conjunto dirigido subjacente, uma rede é uma sucessão.

Definição 1.1.6. Seja X um espaço topológico e $(x_a)_{a \in A}$ uma rede em X . Dizemos que $x_0 \in X$ é limite da rede $(x_a)_{a \in A}$ se, para toda a vizinhança V de x_0 , existir $a \in A$ tal que

$$x_b \in V \quad \forall b \geq a.$$

Diz-se que $x_0 \in X$ é um ponto de acumulação da rede $(x_a)_{a \in A}$ se, para toda a vizinhança V de x_0 e para todo o $a \in A$, existir $b \geq a$ tal que $x_b \in V$.

Proposição 1.1.7. *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Para toda a rede em X , o limite, se existir, é único.*

Demonstração. Seja $(x_a)_{a \in A}$ uma rede e suponhamos que admite limite $x_0 \in X$. Suponhamos que existe $y_0 \neq x_0$ que também é limite de $(x_a)_{a \in A}$. Sejam $U, V \subseteq X$ vizinhanças disjuntas de x_0 e y_0 , que existem por X ser Hausdorff. Sejam $a, b \in A$ tais que

$$c \geq a \Rightarrow x_c \in U \quad \text{e} \quad c \geq b \Rightarrow x_c \in V.$$

Seja d o supremo de $\{a, b\}$. Então,

$$c \geq d \Rightarrow c \geq a, c \geq b \Rightarrow x_c \in U \text{ e } x_c \in V \Rightarrow x_c \in U \cap V = \emptyset$$

o que é impossível. Logo, o limite é único. □

Definição 1.1.8. Sejam X, Y espaços topológicos e $x_0 \in X$. Dizemos que $f: X \rightarrow Y$ é contínua em x_0 se, para toda a rede $(x_a)_{a \in A}$ em X que convirja para x_0 , a rede $(f(x_a))_{a \in A}$ converge para $f(x_0)$. Dizemos que f é contínua se for contínua em todos os pontos de X . Uma função entre espaços topológicos é um homeomorfismo se for contínua, bijetiva e a inversa for contínua. Uma função contínua e injetiva é chamada mergulho.

A seguinte proposição refere algumas das propriedades preservadas por funções contínuas ou pelas suas pré-imagens.

Proposição 1.1.9. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então a pré-imagem por f de um aberto é um aberto e a pré-imagem de um fechado é*

um fechado. Além disso, se $A \subseteq X$ é conexo, então, $f(A)$ é conexo. Se $A \subseteq X$ é denso em X , então $f(A)$ é denso em $f(X)$. Em particular, se f tem imagem densa, então $f(A)$ é denso em Y .

Dizemos que uma aplicação é aberta se a imagem de um aberto é aberto e dizemos que é fechada se a imagem de um fechado for fechado.

1.1.3 Espaços métricos

Um caso particular, e o mais relevante neste texto, de espaço topológico é dado por espaços em que a topologia é determinada por uma métrica.

Seja X um conjunto não-vazio e $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. A função d diz-se uma métrica se satisfizer as seguintes propriedades:

$$(i) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X.$$

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(iii) \quad \forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ao par (X, d) chamamos espaço métrico. Se a métrica d for subentendida do contexto, referimo-nos apenas ao espaço métrico X . Num espaço métrico, podemos definir uma topologia associada à métrica. Dado $x \in X$ e $r > 0$, definimos a bola aberta de centro x e raio r por

$$B(x; r) = \{y \in X: d(y, x) < r\}$$

e a bola fechada de centro x e raio r por

$$B[x; r] = \{y \in X: d(y, x) \leq r\}.$$

A topologia $\mathcal{T}_d$ induzida pela métrica d é a topologia gerada por todas as bolas abertas em X , isto é, pelo conjunto das uniões arbitrárias de bolas em X juntamente com o conjunto vazio.

Exemplo 1.1.4. Se $X = \mathbb{R}$ com a métrica usual dada pelo valor absoluto, $d(x, y) = |x - y|$, então as bolas abertas são precisamente os intervalos abertos e a topologia gerada pela métrica é a topologia do Exemplo 1.1.1.

Exemplo 1.1.5. Toda a topologia discreta num espaço X vem de uma métrica, a chamada métrica discreta, definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Nesta métrica, os singletos são precisamente as bolas abertas de raio menor do que 1.

Dado um espaço métrico (X, d) , o espaço topológico $(X, \mathcal{T}_d)$ tem algumas propriedades impostas pela métrica:

- i) Dado $A \subset X$, um ponto $x \in X$ é interior a A se e só se existir $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq A$.
- ii) $(X, \mathcal{T}_d)$ é Hausdorff: dados $x \neq y \in X$, basta considerar $r = d(x, y)/2$, $U = B(x; r)$ e $V = B(y; r)$. Daqui resulta, por exemplo, que a topologia grosseira não pode vir de uma métrica (a não ser no caso de X ser trivial).
- iii) $(X, \mathcal{T}_d)$ é 1-numerável: para cada $x \in X$, consideremos o sistema fundamental de vizinhanças $(B(x; 1/n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- iv) Se $(X, \mathcal{T}_d)$ for separável, então é 2-numerável: basta tomar como base de abertos as bolas centradas nos elementos do subconjunto numerável denso com raio racional.
- v) Se (X, d) é separável, então todo o subconjunto de X com a métrica induzida é separável. Em particular, se X_0 é um subconjunto denso em X , então podemos encontrar um subconjunto $Y_0 \subseteq X_0$ numerável e denso em X .

O produto de espaços métricos admite algumas métricas naturais, de que a métrica euclidiana no plano $\mathbb{R}^2$ é um caso particular.

Proposição 1.1.10. *Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos. Dado $1 \leq p < +\infty$, as funções $d_p: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definidas por*

$$d_p((x, y), (x', y')) = \sqrt[p]{d_X(x, x')^p + d_Y(y, y')^p}$$

e a função $d_\infty: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$$

são métricas em $X \times Y$, e o espaço topológico $(X \times Y, \mathcal{T}_{d_p})$, para $1 \leq p \leq +\infty$, é o espaço topológico produto $X \times Y$.

As noções de limite e continuidade admitem reformulações mais simples quando a topologia é induzida por uma métrica. Diz-se que uma rede $(x_a)_{a \in A}$ converge para x se, para todo o $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $d(x_b, x) < \varepsilon$ para $b \geq a$. E uma função $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ entre dois espaços métricos é contínua em x_0 se, para todo o $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0; \delta)) \subseteq B(f(x_0); \varepsilon)$.

Num espaço métrico, podemos saber se uma rede converge sem conhecer previamente o limite.

Definição 1.1.11. Seja X, d_X um espaço métrico. Dizemos que uma rede $(x_a)_{a \in A}$ é de Cauchy se, para todo o $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que, se b e c forem tais que $b, c \geq a$, então $d(x_b, x_c) < \varepsilon$.

Note-se que toda a rede convergente é de Cauchy: se x_0 for o limite da rede, então, para cada $\varepsilon > 0$, basta tomar $a \in A$ tal que $d(x_b, x_0) < \varepsilon/2$ para todo $b \geq a$; de facto, para $b, c \geq a$, temos $d(x_b, x_c) \leq d(x_b, x_0) + d(x_c, x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

O recíproco nem sempre é verdade. Consideremos o conjunto de números reais com a métrica usual. Se removermos um ponto, por exemplo 0, obtemos um espaço métrico com a métrica induzida por $\mathbb{R}$. Neste caso, há sucessões de Cauchy que não convergem. Veja-se o exemplo da sucessão $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, que converge para 0 em $\mathbb{R}$, logo é de Cauchy; como a métrica em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a mesma, a sucessão é também de Cauchy em $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$. No entanto, não tem limite neste espaço, pois, se tivesse limite $x_0 \neq 0$, mais uma vez por a métrica ser a mesma teria também como limite x_0 em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. O que é impossível dada a unicidade do limite em espaços métricos.

Definição 1.1.12. Um espaço métrico (X, d_X) diz-se completo se toda a rede de Cauchy em X for convergente em X .

Por exemplo, $\mathbb{R}$ com a métrica usual e os espaços com a métrica discreta são completos. Além disso, se X é um espaço métrico completo e $A \subseteq X$, então A é completo na métrica induzida por X se e só se for fechado em X .

Como todo o espaço métrico é 1-numerável, para mostrar que é completo basta considerar sucessões em vez de redes arbitrárias. Neste contexto, podemos usar as propriedades dos naturais, como, por exemplo, o Princípio de indução finita e o conceito de

sub-sucessão. Em particular, usando qualquer uma das métricas produto definidas na Proposição 1.1.10, o produto de dois espaços métricos completos é completo. Daqui resulta que $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que uma função $f: X \rightarrow Y$ entre espaços métricos é isométrica se

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Toda a função isométrica é contínua e, se f for isométrica e bijetiva, a inversa é contínua. Nesse caso, f chama-se isometria.

Dado um espaço topológico X , dizemos que um subconjunto é magro se o seu fecho tiver interior vazio; e de 1ª categoria se for uma união numerável de conjuntos magros. Um conjunto diz-se de 2ª categoria se não for de 1ª categoria. Se um subconjunto de X for a interseção numerável de abertos não-vazios diz-se que é um G_δ . Por exemplo, em $\mathbb{R}$, os singletos são magros, $\mathbb{Q}$ é de 1ª categoria e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ou qualquer aberto não-vazio, é um G_δ .

Teorema 1.1.13 (Teorema de Baire para espaços métricos completos). *Seja X um espaço métrico completo. A interseção numerável de abertos densos em X é densa.*

Deste teorema resulta, por exemplo, que nenhum espaço métrico completo pode ser de 1ª categoria, isto é, se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ onde cada A_n é fechado, então, pelo menos um dos A_n tem interior não-vazio.

Por fim, recordemos o Lema de Urysohn, que separa conjuntos fechados disjuntos de espaços métricos completos por funções contínuas.

Lema 1.1.14 (Urysohn). *Seja X um espaço métrico completo e $A, B \subseteq X$ fechados não-vazios disjuntos. Então, existe uma função contínua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(a) = 1$ para todo o $a \in A$ e $f(b) = 0$ para todo o $b \in B$.*

1.1.4 Compacidade

Um espaço topológico X diz-se compacto se toda a cobertura aberta admite uma subcobertura finita. Isto é, se uma família de abertos $(U_i)_{i \in I}$ de X é tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_n \in I$ tais que

$$X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}.$$

Um subconjunto A de um espaço topológico diz-se compacto se for compacto como subespaço topológico.

Podemos definir compacidade recorrendo a fechados ao invés de abertos: X é compacto se e só se toda a família de fechados em X com interseção vazia admite uma subfamília finita cuja interseção é também vazia. Um subconjunto Y compacto de X é fechado, e todo o fechado de um compacto é compacto.

Por exemplo, espaços topológicos com a topologia grosseira são compactos. Espaços topológicos com a topologia discreta são compactos se e só se forem finitos. $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana não é compacto (a união dos intervalos $(-n, n]_{n \in \mathbb{N}}$ é $\mathbb{R}$ mas não admite uma sub-cobertura finita), mas os intervalos fechados e limitados são.

Se X e Y são espaços topológicos compactos, então $X \times Y$ é compacto. Daqui resulta que, embora $\mathbb{R}^n$ não seja compacto, todos os subconjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^n$ são compactos. Em particular, as esferas unitárias em $\mathbb{R}^n$, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, são compactas na topologia induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$.

Uma das vantagens dos espaços compactos é a garantia de existência de pontos de acumulação de subconjuntos infinitos e, no caso de sucessões, sub-sucessões convergentes.

Proposição 1.1.15. *Seja X um espaço topológico compacto. Então, toda a rede em X admite pelo menos um ponto de acumulação. Em particular, se X for um espaço métrico compacto, toda a sucessão de elementos de X admite uma sub-sucessão convergente.*

Demonstração. Como X é compacto, para qualquer família $(F_i)_{i \in I}$ de fechados tal que todas as interseções finitas são não-vazias temos $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Seja $(x_a)_{a \in A}$ uma rede em X . Para cada $a \in A$, defina-se

$$F_a = \overline{\{x_b : b \geq a\}}.$$

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_n \in A$, seja a o supremo de $\{a_1, \dots, a_n\}$. Então

$$\begin{aligned} F_{a_1} \cap \dots \cap F_{a_n} &= \overline{\{x_b : b \geq a_1\}} \cap \dots \cap \overline{\{x_b : b \geq a_n\}} \\ &\supseteq \overline{\{x_b : b \geq a_i, 1 \leq i \leq n\}} \\ &= \overline{\{x_b : b \geq a\}} = F_a \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Logo, $F = \bigcap_{a \in A} F_a \neq \emptyset$.

Falta verificar que os elementos de F são pontos de acumulação da rede. Seja $y \in F$. Por construção de F , $y \in F_a$ para todo o $a \in A$. Logo, dada uma vizinhança V de y ,

$$V \cap \{x_b : b \geq a\} \neq \emptyset \quad \forall a \in A.$$

Assim, para toda a vizinhança V de y e todo o $a \in A$, existe um $b \geq a$ tal que $x_b \in V$. E, portanto, y é ponto de acumulação da rede. $\square$

Por fim, recorde-se que a imagem de um compacto por uma função contínua é compacta.

Há uma propriedade menos exigente do que ser compacto que partilha muitas das vantagens da compacidade.

Definição 1.1.16. Um espaço topológico diz-se localmente compacto se todo o ponto admitir uma vizinhança compacta.

Claramente, se X é compacto então é localmente compacto. Há, porém, espaços localmente compactos que não são compactos, como $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana.

Proposição 1.1.17. *Se X é um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff, então cada ponto de X admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Se, além disso, for 1-numerável, todo o ponto admite um sistema fundamental numerável de vizinhanças compactas.*

Apesar de haver espaços localmente compactos que não são compactos, todos eles podem ser compactificados, isto é, mergulhados densamente num espaço compacto.

Definição 1.1.18. Seja X um espaço topológico localmente compacto e não compacto. Consideremos $\omega \notin X$ (por exemplo, $\omega = \{X\}$). O compactificado com um ponto de X , que designamos por $\tilde{X}$, é o espaço $X \cup \{\omega\}$ com a seguinte topologia: os abertos em $\tilde{X}$ são $\tilde{X}$, os abertos de X e os conjuntos $\tilde{X} \setminus C$ onde $C \subseteq X$ é compacto. Ao ponto ω acrescentado a X chamamos ponto no infinito, e representamo-lo por ∞ .

Teorema 1.1.19 (Compactificado com um ponto de Alexandroff). *Um espaço topológico X localmente compacto e não compacto é homeomorfo a um aberto denso de $\tilde{X}$.*

Terminamos com uma propriedade que o compactificado herda do espaço X .

Proposição 1.1.20. *Sejam X um espaço localmente compacto não-compacto e $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ o seu compactificado com um ponto. Se X é Hausdorff, $\tilde{X}$ também é.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \tilde{X}$ distintos. Se ambos pertencem a X , basta considerar duas vizinhanças disjuntas de cada um dos pontos em X que, por hipótese, é Hausdorff. Suponhamos que um deles não está em X . Sem perda de generalidade, podemos supor que $y \notin X$. Então, visto x e y serem distintos e esta compactificação de X só acrescentar um ponto, $x \in X$ e $y = \infty$. Como X é localmente compacto, x admite uma vizinhança U compacta em X . Se $V = \tilde{X} \setminus U$, então V é vizinhança (aberta) de y e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

1.2. Análise Funcional

Sendo o tópico desta dissertação a dinâmica de operadores lineares, justifica-se uma apresentação breve de resultados, e exemplos, sobre espaços de Hilbert, de Banach e de Fréchet, cuja definição se recordará.

1.2.1 Espaços vetoriais topológicos

Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um grupo abeliano $(E, +)$ onde está definida a operação de multiplicação por um escalar

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \bullet u \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

- (i) $(\lambda\gamma) \bullet u = \lambda \bullet (\gamma \bullet u) \quad \forall u \in E, \lambda, \gamma \in \mathbb{K}.$
- (ii) $(\lambda + \gamma) \bullet u = \lambda \bullet u + \gamma \bullet u \quad \forall u \in E, \lambda, \gamma \in \mathbb{K};$
- (iii) $\lambda \bullet (u + v) = \lambda \bullet u + \lambda \bullet v \quad \forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K};$
- (iv) $1 \bullet u = u \quad \forall u \in E.$

Para simplificar a notação, omitiremos o símbolo $\bullet$. Representamos o espaço vetorial por $(E, \mathbb{K}, +, \bullet)$ ou apenas por E se o resto for subentendido. No decorrer do documento, os corpos utilizados serão sempre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, salvo exceções indicadas.

Dizemos que um vetor u é combinação linear dos vetores $u_1, \dots, u_n$ se existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$; e que é combinação convexa dos vetores $u_1, \dots, u_n$ se existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Uma família finita de vetores $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq E$ diz-se uma família linearmente dependente se o vetor nulo for combinação linear de $u_1, \dots, u_n$ (com coeficientes não todos nulos); tais vetores

dizem-se linearmente dependentes. Uma família infinita de vetores $(u_i)_{i \in I} \subseteq E^I$ diz-se linearmente dependente se admitir uma subfamília finita linearmente dependente. Uma família de vetores diz-se linearmente independente se não for linearmente dependente, caso em que os respetivos vetores se dizem linearmente independentes.

Dado um subconjunto $F \subseteq E$, dizemos que F é um subespaço de E se for fechado para as operações da adição e produto por um escalar - isto é, se, dados $u, v \in F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $u + v \in F$ e $\lambda u \in F$. Um conjunto C diz-se convexo se a combinação convexa de dois quaisquer elementos de C estiver em C . Dado um subconjunto A de E , definimos o subespaço gerado por A , denotado por $\text{span}(A)$ ou $\langle A \rangle$, como o menor subespaço que contém A . Note-se que $\text{span}(A)$ é formado pelas combinações lineares finitas de elementos de A , isto é,

$$\text{span}(A) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ e } u_1, \dots, u_n \in A\}.$$

Caso $A = \{u_1, \dots, u_\ell\}$ seja finito, representamos $\text{span}(A)$ por $\text{span}(u_1, \dots, u_\ell)$ ou por $\langle u_1, \dots, u_\ell \rangle$.

Diz-se que um conjunto de vetores A gera E se $\text{span}(A) = E$. E que uma família de vetores $(u_i)_{i \in I}$ forma uma base de E se $(u_i)_{i \in I}$ gerar E e for uma família linearmente independente. A utilidade de bases é que podemos escrever todo o vetor do espaço como combinação linear finita de elementos dessa base e essa combinação é única a menos da ordem dos elementos. Ou seja, dada uma base $(u_i)_{i \in I}$ de E e fixado $u \in E$, existem $(\alpha_i)_{i \in I}$ únicos tais que apenas um número finito deles, $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$, é não nulo, e $u = \alpha_{i_1} u_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n} u_{i_n}$. Se a base for finita, temos que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ e escrevemos que u é representado pelo par ordenado $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Duas quaisquer bases de um espaço vetorial E têm o mesmo cardinal, a que se chama dimensão de E e se denota por $\dim(E)$. Todo o subespaço vetorial de um espaço vetorial tem dimensão igual ou inferior à do espaço ambiente.

Dado um subconjunto $\emptyset \neq A \subseteq E$ e $a \in E$, definimos a soma de a e A como

$$a + A = \{a + v : v \in A\}.$$

Mais geralmente, dados dois conjuntos não-vazios $A, B \subseteq E$, definimos a soma de A com B , que representamos por $A + B$, como o conjunto formado pela soma dos elementos de A e de B , isto é,

$$A + B = \{u + v : u \in A \text{ e } v \in B\}.$$

No caso de dois subespaços vetoriais, $F + G$ é também um subespaço vetorial. Dizemos que E é soma direta de F e G se e só se $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$, e escrevemos $E = F \oplus G$. No caso finito, temos que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Frequentemente, quando consideramos o produto finito de espaços vetoriais, substituímos a notação de produto cartesiano pela de soma direta, $E \oplus F$.

Um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial munido de uma topologia $\mathcal{T}$ compatível com a estrutura de espaço vetorial, isto é, tal que a soma $+: E \times E \rightarrow E$ e o produto por um escalar $\bullet: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ são funções contínuas, considerando-se em $E \times E$ a topologia produto. Representamos o espaço vetorial topológico pelo par $((E, \mathbb{K}, +, \bullet), \mathcal{T})$ ou apenas por $(E, \mathcal{T})$ ou ainda por E . Devido às propriedades de espaços topológicos, é imediato que a função $u \mapsto Tu = u + v_0$, onde $v_0 \in E$ está fixo, é um homeomorfismo; e que a função $u \mapsto Su = \lambda u$, para $\lambda \in \mathbb{K}$ fixo, é contínua, e um homeomorfismo se $\lambda \neq 0$.

1.2.2 Séries em espaços vetoriais

Sejam E um espaço vetorial topológico e $(x_n)_n$ uma sucessão de elementos de E . Definimos as somas parciais da sucessão, representadas por $(S_n)_n$, como os vetores

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

e a série da sucessão $(x_n)_n$ como a expressão formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Se a sucessão $(S_n)_n$ for convergente em E para algum $S \in E$, dizemos que o limite da série é S e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S.$$

Caso contrário, dizemos que diverge.

Uma série $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ convergir em $\mathbb{R}$.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente se, para toda a bijeção $\pi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, se tiver

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Neste caso, podemos falar de somas sobre conjuntos de $\mathbb{N}$ sem fazer referência à ordem. Mais precisamente, se $A \subseteq \mathbb{N}$, podemos definir

$$\sum_{n \in A} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$$

onde $(n_k)_k$ é uma sucessão qualquer tal que $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$.

1.2.3 Espaços de Banach

Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial e $\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função. Diz-se que $\|\cdot\|$ é uma norma se satisfizer as seguintes propriedades:

- (i) $\forall x, y \in \mathcal{X} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$
- (ii) $\forall x \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
- (iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Ao par $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ chamamos espaço vetorial normado.

Todas as normas definem uma métrica de forma natural: dada uma norma $\|\cdot\|$, seja $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. Assim, todo o espaço vetorial normado é um espaço métrico. É fácil verificar que a topologia induzida pela métrica d é compatível com a estrutura vetorial, graças às propriedades (i) e (ii) da norma.

Por exemplo, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre ele próprio e o valor absoluto, $|\cdot|$, define uma norma em $\mathbb{R}$ que lhe dá uma estrutura de espaço vetorial normado.

Como no caso dos espaços métricos, podemos definir o produto de espaços normados, obtendo-se várias normas.

Proposição 1.2.1. *Sejam $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ e $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ espaços vetoriais normados. Para $1 \leq p < +\infty$, as funções $\|\cdot\|_p: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definidas por*

$$\|(x, y)\|_p = \sqrt[p]{\|x\|_{\mathcal{X}}^p + \|y\|_{\mathcal{Y}}^p}$$

e a função $\|\cdot\|_{\infty}: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\|(x, y)\|_{\infty} = \max(\|x\|_{\mathcal{X}}, \|y\|_{\mathcal{Y}})$$

definem normas em $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. O espaço topológico $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{T}_{\|\cdot\|_p})$, para $1 \leq p \leq +\infty$, é o espaço topológico produto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forem completos, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ também é completo em qualquer uma destas normas.

Por exemplo, dado $n \in \mathbb{N}$, as funções

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_p &= \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}$$

definem normas em $\mathbb{R}^n$. Note-se que, para $p = 2$, a norma $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana. Estas funções estendidas a $\mathbb{C}^n$ definem também normas neste espaço.

Nem sempre a topologia de um espaço vetorial com uma métrica é determinada por uma norma. Por exemplo, em todo o espaço vetorial não-trivial, a métrica discreta é compatível com as operações vetoriais. No entanto, tal métrica não pode vir de uma norma, pois, se $x \neq 0$, temos $d(x, 0) = 1$, o que implicaria que $\|x\| = 1$ para todo o $x \neq 0$, o que contradiz a propriedade (ii).

Sejam $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{X}$. Restringindo $\|\cdot\|$ a $\mathcal{Y}$, obtemos em $\mathcal{Y}$ uma estrutura de espaço normado, cujas estruturas de espaço métrico e de espaço topológico coincidem com a estrutura original do subespaço métrico e topológico $\mathcal{Y}$.

Uma vez que os espaços normados são espaços métricos, podemos considerar redes de Cauchy nestes espaços e analisar a sua completude. Um espaço vetorial normado é de Banach se e só se for completo. Pelas propriedades da completude, temos que um subespaço vetorial de um espaço de Banach é de Banach se e só se for fechado.

Por exemplo, sabemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é completo e, pela Proposição 1.2.1, que os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, são espaços de Banach relativamente a qualquer uma das normas consideradas.

Exemplo 1.2.1 (Os espaços ℓ^p ; detalhes em [28]). Dado $1 \leq p < \infty$, o espaço $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ é o conjunto das sucessões unilaterais em $\mathbb{K}$ que são p -somáveis, isto é,

$$\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \xi_n \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \right\}.$$

Sempre que o contexto não suscitar dúvidas, abreviaremos a notação para $\ell^p(\mathbb{N})$, ou $\ell^p(\mathbb{K})$, ou apenas ℓ^p . Estes conjuntos são espaços vetoriais com a soma e o produto por escalares. Além disso, têm dimensão infinita: se, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$, onde δ_{nk} é 1 se e só se $n = k$, e 0 caso contrário, então o conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ constitui uma família linearmente independente de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Dado $p \geq 1$, define-se a

norma em ℓ^p , denotada $\|\cdot\|_p$, da seguinte forma: para cada $x = (\xi_n)_n \in \ell^p$,

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p}.$$

Com esta norma, o espaço ℓ^p é completo.

Exemplo 1.2.2 (O espaço ℓ^∞ ; detalhes em [28]). O espaço ℓ^∞ é o conjunto das sucessões limitadas em $\mathbb{K}$, isto é,

$$\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \xi_n \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| < +\infty \right\}.$$

Sempre que possível, abreviaremos a notação para $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ou ℓ^∞ . Este é um espaço vetorial com a soma e o produto por escalares. De modo análogo ao que acontece com os espaços ℓ^p , a família $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente em ℓ^∞ e, portanto, este espaço tem dimensão infinita. A norma usual em ℓ^∞ , designada norma do supremo e denotada $\|\cdot\|_\infty$, é definida por: dado $x = (\xi_n)_n \in \ell^\infty$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|.$$

O espaço ℓ^∞ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é de Banach.

Sabe-se que os espaços ℓ^p são separáveis, pois os vetores $(e_n)_n$ formam um subconjunto denso. O mesmo não é verdade para o espaço ℓ^∞ . No entanto, podemos considerar em ℓ^∞ um subespaço fechado separável.

Exemplo 1.2.3 (O espaço c_0 ; detalhes em [28]). O espaço $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, cujo nome por vezes abreviaremos para $c_0(\mathbb{N})$, $c_0(\mathbb{K})$ ou c_0 , é o subespaço vetorial das sucessões de ℓ^∞ que convergem para 0. Com a norma do supremo induzida de ℓ^∞ , o espaço c_0 é fechado. Logo, c_0 é de Banach. E o conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em c_0 .

Dizemos que uma família de vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de um espaço normado $\mathcal{X}$ se, para todo o $x \in \mathcal{X}$, existirem escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ únicos tais que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ convergir incondicionalmente para todo o $x \in \mathcal{X}$, dizemos que $(x_n)_n$ é uma base incondicional. A família de vetores $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma base de Schauder incondicional para cada um dos espaços ℓ^p e c_0 . Nestes espaços, o subespaço c_{00} das

sucessões finitas,

$$c_{00} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \exists N \in \mathbb{N}: x_n = 0 \forall n \geq N \right\}$$

é um subconjunto denso.

1.2.4 Espaços de Hilbert

Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma

- bilinear se $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ e $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ para todos os $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- sesquilinear (em $\mathbb{C}$) se $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ e $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$ para todos os $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, onde $\bar{\lambda}$ representa o conjugado complexo de λ ;
- simétrica se $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$;
- hermítica (em $\mathbb{C}$) se $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$;
- definida positiva se $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (respetivamente, $\mathbb{R}$). Uma forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilinear, hermítica e definida positiva (respetivamente, bilinear, simétrica e definida positiva) diz-se um produto interno.

Todo o produto interno dá origem a uma norma, definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. No entanto, nem todas as normas provêm de um produto interno. Por exemplo, a norma do supremo em ℓ^∞ e c_0 não provêm de um produto interno, bem como as normas em ℓ^p , com $p \neq 2$. Para $p = 2$, a norma provém do produto interno $\langle (\xi_n)_n, (\mu_n)_n \rangle = \xi_1 \bar{\mu}_1 + \xi_2 \bar{\mu}_2 + \xi_3 \bar{\mu}_3 + \dots$

Caso um espaço vetorial com um produto interno seja completo relativamente à métrica proveniente do produto interno, diz-se que é um espaço de Hilbert. Por exemplo, $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^n$ são espaços com produto interno dado pela forma

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

A norma que provém deste produto interno é a norma euclidiana. E são ambos espaços de Hilbert.

Podemos considerar o produto de espaços com produto interno, ou de espaços de Hilbert: dados $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, define-se o espaço $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ com o produto

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle_1 + \langle y, y' \rangle_2.$$

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dois vetores $x, y \in \mathcal{H}$ dizem-se ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Um conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ diz-se ortogonal se, para $x, y \in \mathcal{M}$ distintos, se tem $\langle x, y \rangle = 0$. E diz-se ortonormado se for ortogonal e se tiver $\|x\| = 1$ para todo o $x \in \mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um conjunto ortonormado (resp. ortogonal) total se $\mathcal{M}$ for ortonormado (resp. ortogonal) e $\overline{\text{span}(\mathcal{M})} = \mathcal{H}$. O ortogonal do conjunto $\mathcal{M}$, que se designa por $\mathcal{M}^\perp$, é o conjunto de vetores $h \in \mathcal{H}$ tal que $\langle h, x \rangle = 0$ para todo o $x \in \mathcal{M}$.

Proposição 1.2.2. [28] *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$. Então $\text{span}(\mathcal{M})$ é denso se e só se $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$.*

Corolário 1.2.2.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $\mathcal{H}$ é separável, então admite um subconjunto ortonormado total numerável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto numerável denso de $\mathcal{H}$, que pode ser descrito como uma sucessão $\mathcal{M} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Defina-se $\mathcal{M}'$ da seguinte forma:

- Seja $N_1 = \min \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$. Defina-se $\mathcal{M}_1 = \{x_{N_1}\}$.
- Consideramos x_{N_1+1} . Se x_{N_1} e x_{N_1+1} forem linearmente independentes, define-se $\mathcal{M}_2 = \{x_{N_1+1}, x_{N_1}\}$; caso contrário, $\mathcal{M}_2 = \{x_{N_1}\}$.
- Prosseguimos indutivamente: tendo definido $\mathcal{M}_k$, verificamos se $x_{N_1+k} \in \text{span}(\mathcal{M}_k)$ e, se estiver, $\mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{M}_k$; caso contrário, $\mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{M}_k \cup \{x_{N_1+k}\}$.
- Define-se $\mathcal{M}' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$.

Por definição, $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M} \subseteq \text{span}(\mathcal{M}')$. Logo, $\text{span}(\mathcal{M}')$ é denso em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{M}'$ é numerável. Por fim, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, construímos um conjunto $\mathcal{M}''$ ortogonal total. $\square$

Note-se que um conjunto ortogonal total $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Schauder, pois, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, então

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \alpha_j e_j, e_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle$$

e, portanto, os coeficientes $(\alpha_n)_n$ são únicos.

1.2.5 Espaços de Fréchet

Seja $\mathcal{F}$ um espaço vetorial e $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Diz-se que p é uma semi-norma se satisfizer as seguintes propriedades:

- (i) $\forall x, y \in \mathcal{F}, \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y);$
- (ii) $\forall x \in \mathcal{F}, \lambda \in \mathbb{K}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$

Note-se que, se $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, então a semi-norma p é uma norma.

Sejam $\mathcal{F}$ um espaço vetorial e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família numerável de semi-normas em $\mathcal{F}$. Dizemos que:

- (a) $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente se $p_{n+1}(x) \geq p_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{F};$
- (b) $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é separadora se $p_n(x) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ implica que $x = 0$.

De notar que, dada uma família $(p_n)_n$ de semi-normas, podemos associar-lhe uma família crescente de semi-normas $(p'_n)_n$, dada por $p'_n(x) = \max_{1 \leq k \leq n} p_k(x)$.

Teorema 1.2.3. [28] *Sejam $\mathcal{F}$ um espaço vetorial e $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de semi-normas que é crescente e separadora. Defina-se*

$$\begin{aligned} d_p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (x, y) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x - y)). \end{aligned}$$

Então d_p é uma métrica invariante por translações (isto é, $d_p(x + z, y + z) = d_p(x, y)$).

Um espaço de Fréchet é um par $(\mathcal{F}, (p_n)_{n \in \mathbb{N}})$, onde $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial e $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família numerável crescente e separadora de semi-normas em $\mathcal{F}$, tal que o espaço métrico $(\mathcal{F}, d_p)$ é completo. Costuma-se denotar $d_p(x, 0) = \|x\|$, apesar de não ser uma norma.

Naturalmente, todo o espaço de Banach pode ser considerado um espaço de Fréchet, tomando-se como sucessão de semi-normas a sucessão constante, igual à norma do espaço. Desse modo, a métrica do Teorema 1.2.3 define a mesma topologia que a norma.

A utilidade de espaços de Fréchet deve-se ao facto de muitos dos resultados conhecidos para espaços de Banach poderem ser generalizados para espaços de Fréchet, que constituem um universo mais alargado. Vejamos um exemplo. Uma classe de espaços amplamente utilizada em Análise é a dos espaços de funções analíticas (resp. infinitamente diferenciáveis) de um compacto K de $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), denotados $C^\infty(K, \mathbb{C})$ e $C^\infty(K, \mathbb{R})$, respetivamente, com a norma do supremo (ou seja, $\|f\| = \max_{z \in K} |f(z)|$). Trata-se de espaços de Banach. Por vezes, contudo, interessa considerar funções definidas em domínios não compactos, onde nem toda a função analítica é limitada, não se podendo aí definir a norma do supremo. Uma alternativa seria usar o Princípio da continuação analítica (se duas funções analíticas coincidem num aberto então coincidem em $\mathbb{C}$) e considerar a norma do supremo para um compacto com interior não-vazio. Mas $C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ não é completo nessa norma. Considerando uma sucessão adequada de semi-normas, podemos definir uma estrutura de espaço de Fréchet para este espaço.

Exemplo 1.2.4 (O espaço $H(\mathbb{C})$; detalhes em [29]). Consideremos o conjunto $H(\mathbb{C})$ de funções holomorfas em $\mathbb{C}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja p_k a norma do supremo restrita ao disco fechado centrado em 0 de raio k , ou seja,

$$p_k(f) = \sup_{|z| \leq k} |f(z)|.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, o espaço $(H(\mathbb{C}), p_k)$ é normado, mas não é completo. Pelo contrário, se considerarmos a sucessão $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, obtemos uma sucessão crescente e separadora de normas cuja métrica d_p associada confere a $H(\mathbb{C})$ a estrutura de espaço vetorial métrico completo. Neste espaço, os polinómios são densos e os monómios constituem uma base de Schauder.

Listamos de seguida algumas propriedades dos espaços de Fréchet.

Proposição 1.2.4. *Seja $\mathcal{F}$ um espaço de Fréchet.*

(i) *Dados $x \in \mathcal{F}$ e uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}$, tem-se*

$$\lim_n x_n = x \iff \lim_n p_k(x_n - x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(ii) *Uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}$ é de Cauchy se, para todo o $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n, m \geq N_0 \implies p_k(x_n - x_m) < \varepsilon.$$

(iii) *Dados $U \subseteq \mathcal{F}$ e $x \in \mathcal{F}$, um conjunto U é vizinhança de x se e só se existirem $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$B_k(x; \varepsilon) = \{z \in \mathcal{F} : p_k(x - z) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Como a métrica de um espaço de Fréchet é sempre limitada, todos os subconjuntos são limitados relativamente a essa métrica. Assim, para um espaço de Fréchet $\mathcal{F}$, é mais interessante definir que um subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}$ é limitado se e só se $\sup_{x \in A} p_n(x) < \infty$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, toda a sucessão convergente forma um conjunto limitado num espaço de Fréchet.

Teorema 1.2.5. [28] *Seja $\mathcal{F}$ um espaço de Fréchet. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente.*

(ii) *Para todo o $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, para toda a sucessão $(\varepsilon_n)_n$ de 0's e 1's,*
 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *converge e*

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right\| < \varepsilon$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *converge para toda a sucessão limitada $(\alpha_n)_n$.*

1.2.6 Operadores lineares

Dados dois espaços vetoriais E, F sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, uma função $T: E \rightarrow F$ diz-se linear (ou operador linear) se, para todos os vetores $u, v \in E$ e todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiver

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

Neste contexto, adotaremos a notação Tu para indicar a imagem $T(u)$. Se um operador linear é bijetivo, a inversa também é linear, e dizemos que T é um isomorfismo de espaços vetoriais. Ao conjunto das pré-imagens de 0 por T chamamos núcleo do operador T , que representamos por $\ker(T)$; o conjunto das imagens de T é denotado por $\text{Im}(T)$. Tanto $\text{Im}(T)$ como $\ker(T)$ são espaços vetoriais.

Se $F = \mathbb{K}$, diremos que $T: E \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear. Note-se que se tem $T = 0$ ou $T(E) = \mathbb{K}$. De facto, se $u \in E$ é tal que $T(u) \neq 0$, então para todo o $\lambda \in \mathbb{K}$ temos $T\left(\frac{\lambda}{T(u)}u\right) = \frac{\lambda}{T(u)}T(u) = \lambda$.

Claramente, o produto de operadores lineares é ainda linear. Tendo em conta a notação de Álgebra para o produto de espaços vetoriais, denotamos o produto de operadores T, S por $T \oplus S$.

Exemplo 1.2.5. No caso de espaços vetoriais (reais ou complexos) de dimensão finita, as aplicações lineares são convenientemente representáveis por matrizes. Mais precisamente, dados espaços vetoriais E, F sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e m , respetivamente, escolhemos bases $(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m)$ para E e F ; para cada operador linear $T: E \rightarrow F$, definimos a matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$, sendo a entrada a_{ij} a i -ésima coordenada do vetor Te_j . Através desta identificação de operadores com matrizes, é imediato provar que espaços vetoriais de dimensão finita com a mesma dimensão são isomorfos e, em particular, que todo o espaço vetorial de dimensão finita pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$ (no caso de o corpo subjacente ser $\mathbb{R}$) ou $\mathbb{C}^n$ (caso o corpo seja $\mathbb{C}$).

Dado um operador linear $T: E \rightarrow E$ de um espaço vetorial E , define-se o espectro de T , que denotamos por $\sigma(T)$, como o conjunto dos escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que o operador $T - \lambda Id$, onde Id é a identidade de E , não é bijetivo. Diz-se que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de T se existe $v \in E$ diferente de 0 tal que $Tv = \lambda v$; nesse caso, v é um vetor próprio associado ao valor próprio λ . Define-se o espectro pontual de T , que denotamos por $\sigma_p(T)$, como o conjunto dos valores próprios de T . Note-se que λ é valor próprio de T se e só se $T - \lambda Id$ não é injetivo, uma vez que um operador linear é injetivo se e só se o seu núcleo se reduzir a $\{0\}$. Assim, $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$. Define-se o raio espectral de T , que denotamos por $r(T)$, como o supremo das normas dos valores próprios.

Um operador linear é contínuo se e só se for contínuo nalgum ponto. Daqui resulta que a continuidade, apesar de ser um conceito local, não pode existir apenas localmente no contexto linear.

Um operador linear T entre espaços de Banach é limitado se e só se existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo o $x \in \mathcal{X}$. Ao ínfimo de tais M chamamos a norma de T , que denotamos por $\|T\|$. Observe-se que

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

A norma de um operador tem as propriedades usuais de uma norma e, além disso, verifica as seguintes condições:

$$(i) \quad \|ST\| \leq \|S\|\|T\|.$$

$$(ii) \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

$$(iii) \|T\| \geq r(T).$$

Em espaços de Banach, um operador é contínuo se e só se for limitado. No contexto de espaços de Fréchet, a relação entre estes dois conceitos é a seguinte.

Teorema 1.2.6. [28] *Sejam $(\mathcal{F}, (p_n)_n)$ e $(\mathcal{G}, (q_n)_n)$ espaços de Fréchet e $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um operador linear. T é contínuo se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existem $M > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $q_n(Tx) \leq Mp_m(x)$ para todo o $x \in \mathcal{F}$.*

Dizemos que um operador $T: (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ entre espaços de Banach é um isomorfismo de espaços de Banach se T for bijetivo e $\|Tx\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_{\mathcal{X}}$ para todo o $x \in \mathcal{X}$. Um operador $T: (\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \rightarrow (\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ entre espaços de Hilbert diz-se um isomorfismo entre espaços de Hilbert se T for bijetivo e $\langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ para todos os $x, y \in \mathcal{H}_1$. Um operador $T: (\mathcal{F}, d_p) \rightarrow (\mathcal{G}, d_q)$ entre espaços de Fréchet diz-se um isomorfismo de espaços de Fréchet se for linear e uma isometria.

Exemplo 1.2.6. Consideremos o operador derivação. Dado um compacto com interior não-vazio $K \subseteq \mathbb{C}$, podemos definir o operador derivada $D: C^\infty(K, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(K, \mathbb{C})$ que associa a cada função a sua derivada. Pelas propriedades da derivação, D define um operador linear em $C^\infty(K, \mathbb{C})$. No entanto, esse operador não é contínuo: no caso em que $K = B[0; 1] = \mathbb{D}$, as funções $z \rightarrow z^n$, para $n \in \mathbb{N}$, têm norma 1; contudo, $p_K(Dz^n) = p_K(nz^{n-1}) = n$. Se, em vez do espaço de Banach $C^\infty(K, \mathbb{C})$, considerarmos o espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$, o operador derivada $D: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ é contínuo. De facto, pela fórmula integral de Cauchy (Teorema 1.3.1 da Secção 1.3), dada $f \in H(\mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{C}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

onde γ é uma circunferência não degenerada centrada em z . Além disso, para $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(f') = \sup_{|z| \leq k} |f'(z)| = \sup_{|z| \leq k} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right|. \quad (1.1)$$

Se γ tem raio $r = 1/2$, então

$$w \in \gamma \Rightarrow |w| \leq k+1$$

e obtemos

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta} + z)|}{|re^{i\theta}|^2} |rie^{i\theta}| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p_{k+1}(f)}{r} d\theta = \frac{p_{k+1}(f)}{r}.$$

Combinando esta estimativa com (1.1), obtém-se

$$p_k(Df) = p_k(f') = \sup_{|z| \leq k} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \sup_{|z| \leq k} \frac{p_{k+1}(f)}{r} = \frac{p_{k+1}(f)}{r} = 2p_{k+1}(f).$$

E, portanto, D é operador contínuo pelo Teorema 1.2.6.

Para simplificar a notação, por vezes referir-nos-emos a operadores lineares contínuos apenas como operadores. A mesma terminologia simplificada será usada para funcionais lineares contínuos.

1.2.6.1 Operadores adjuntos

Sejam $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot \rangle_1)$ e $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot \rangle_2)$ espaços de Hilbert e $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ um operador linear contínuo. O operador (Hilbert) adjunto de T é o operador linear e contínuo $T^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ tal que, para todos os $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^*y \rangle_1.$$

Uma prova da existência e unicidade deste operador pode ser lida em [28]. O operador adjunto tem as seguintes propriedades:

- (i) $\|T^*\| = \|T\|$.
- (ii) $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$.
- (iii) $(ST)^* = T^*S^*$ para todos os operadores $T: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ e $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.
- (iv) $(T + S)^* = T^* + S^*$ para todos os operadores $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ e $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.
- (v) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ para todo o $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (vi) $(T^*)^* = T$.
- (vii) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.
- (viii) Se T for um isomorfismo, T^* também é um isomorfismo e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

1.2.7 Teoremas fundamentais sobre espaços de Banach

Para uso futuro, incluímos alguns resultados sobre operadores em espaços de Banach ou espaços de Fréchet. Podem ser lidas demonstrações detalhadas em [37].

Teorema 1.2.7 (Hahn-Banach). *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço vetorial e $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função sub-aditiva, isto é, tal que, para $x, y \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$P(x + y) \leq P(x) + P(y) \quad \text{e} \quad P(\lambda x) = |\lambda| P(x).$$

Seja $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear definido num subespaço vetorial $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ tal que $|f(x)| \leq P(x)$ para todo o $x \in \mathcal{Z}$. Então, f admite uma extensão linear $\tilde{f}$ a $\mathcal{X}$ tal que $|\tilde{f}(x)| \leq P(x)$ para todo o $x \in \mathcal{X}$.

Teorema 1.2.8 (Hahn-Banach, para espaços normados). *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço normado e f um funcional linear contínuo definido num subespaço vetorial $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$. Então f admite uma extensão $\tilde{f}$ a $\mathcal{X}$ satisfazendo $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{\mathcal{Z}}$.*

Teorema 1.2.9 (Princípio da limitação uniforme de Banach-Steinhaus). *Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de operadores limitados $T_n: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre espaços de Fréchet $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ tais que $(\|T_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado em $\mathcal{G}$ para todo o $x \in \mathcal{F}$. Então, a sucessão $(T_n)_n$ é equicontínua, isto é, para todo o $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathcal{F}$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(y, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(T_n y, T_n x) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.2.10 (Princípio da limitação uniforme em espaços de Banach). *Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de operadores limitados $T_n: X \rightarrow \mathcal{Y}$ de um espaço de Banach X num espaço normado $\mathcal{Y}$ tais que $(\|T_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada para todo o $x \in X$. Então a sucessão de normas $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Teorema 1.2.11 (Teorema da aplicação aberta). *Seja T um operador linear contínuo sobrejetivo entre dois espaços de Fréchet. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, se T é bijetivo, então é um isomorfismo.*

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, o gráfico de f , que representamos por $\mathcal{G}(f)$, é o conjunto

$$\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a)): a \in A\}$$

Dizemos que uma função entre espaços topológicos tem gráfico fechado se $\mathcal{G}(f)$ for um conjunto fechado em $A \times B$. No contexto de funções em espaços métricos, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.12. *Sejam X, Y espaços métricos, $Z \subseteq X$ e $f: Z \rightarrow Y$ (não necessariamente contínua). A função f tem gráfico fechado se e só se dada uma sucessão $(x_n)_n$ em Z tal que $\lim_n x_n = x \in X$ e existe $y \in Y$ tal que $\lim_n f(x_n) = y$, então $y = f(x)$.*

De notar que ter gráfico fechado não é o mesmo que ser contínua pois pode existir uma sucessão $(x_n)_n$ que converge em X cuja sucessão de imagens $(f(x_n))_n$ não converge.

Teorema 1.2.13 (Teorema do gráfico fechado). *Seja T um operador linear entre espaços de Fréchet. Se T tem gráfico fechado, então T é limitado.*

1.2.8 Dual e bi-dual

Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espaços de Banach. Denotamos o espaço dos operadores limitados de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ por $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Trata-se de um espaço de Banach com a norma $\|T\|$. Quando $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$, o espaço $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ diz-se o dual de $\mathcal{X}$, que designamos por $\mathcal{X}^*$. O dual do dual de $\mathcal{X}$ diz-se o bi-dual de $\mathcal{X}$, que representamos por $\mathcal{X}^{**}$. Tanto o dual como o bi-dual são espaços de Banach.

Dado um espaço de Banach $\mathcal{X}$, podemos mergulhar $\mathcal{X}$ no seu bi-dual através do mergulho canónico, que envia cada $x \in \mathcal{X}$ no operador linear $f_x: \mathcal{X}^* \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $f_x(T) = Tx$. Este mergulho canónico é contínuo e injetivo (cf. [28]), mas nem sempre é sobrejetivo. Quando o mergulho é bijetivo, é um isomorfismo de espaços de Banach e podemos identificar $\mathcal{X}$ com $\mathcal{X}^{**}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{X}$ é reflexivo.

Exemplo 1.2.7. Dois reais $p, q > 1$ dizem-se conjugados se $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, ou seja, $q = \frac{p}{p-1}$. Dado $p > 1$, prova-se que o dual de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ é o espaço $\ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, onde q é conjugado de p . O dual de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ é $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. No caso de c_0 , temos que $c_0^*(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. E, portanto, os espaços ℓ^p são reflexivos para $p > 1$; o espaço c_0 não é reflexivo; como o dual de ℓ^1 é um espaço não-separável, ℓ^1 não é reflexivo.

1.2.9 As topologias fraca e fraca*

Apesar de irmos abordar maioritariamente espaços métricos, existem outras estruturas topológicas em espaços vetoriais que são relevantes tanto em Análise Funcional como em Sistemas Dinâmicos. De especial interesse são as topologias fraca e fraca*, cujas definições relembramos de seguida.

Dados um conjunto não-vazio X e uma família de pares $(Y_i, \varphi_i)_{i \in I}$ formados por espaços topológicos Y_i e funções $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$, se considerarmos em X a topologia discreta então cada uma das funções φ_i é contínua. Podemos definir em X outra topologia $\mathcal{J}$ com as seguintes propriedades:

- (i) φ_i é contínua $\forall i \in I$;

(ii) Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X satisfazendo (i), então $\mathcal{T}$ é mais fina do que $\mathcal{J}$.

A topologia $\mathcal{J}$ chama-se topologia mais grosseira associada a $(\varphi_i)_{i \in I}$. Para construir esta topologia, começa-se com as pré-imagens por φ_i de cada aberto de Y_i e consideramos a topologia gerada por esses conjuntos, isto é, a união arbitrária de interseções finitas desses conjuntos. Desta forma, as interseções finitas das pré-imagens dos abertos formam uma base da topologia. As topologias mais grosseiras associam à noção de convergência uma natureza mais pontual: nesta topologia, uma rede $(x_j)_{j \in J}$ converge para x se e só se as redes $(\varphi_i(x_j))_{j \in J}$ convergirem para $\varphi_i(x)$, para todo o $i \in I$.

As topologias fraca e fraca* são precisamente as topologias mais grosseiras associadas às seguintes famílias de conjuntos.

Definição 1.2.14 (Topologia fraca). A topologia fraca, denotada por $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$, é a topologia mais grosseira (em $\mathcal{X}$) associada a $\mathcal{X}^*$, isto é, à família de funcionais lineares $(f)_{f \in \mathcal{X}^*}$.

Definição 1.2.15 (A topologia fraca*). A topologia fraca*, designada por $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$, corresponde à topologia mais grosseira (em $\mathcal{X}^*$) associada a $\mathcal{X}$, isto é, à família $(\varphi_x)_{x \in X}$, onde $\varphi_x: \mathcal{X}^* \rightarrow \mathbb{K}$ é dada por $\varphi_x(f) = f(x)$ para todo o $f \in \mathcal{X}^*$.

Ambas as topologias $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ e $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ são Hausdorff. Para distinguir os tipos de convergência, dizemos que uma sucessão (ou rede) $(x_n)_n$ converge fortemente para x , e representamos por $x_n \rightarrow x$, se convergir na topologia da norma. Dizemos que converge fracamente (fracamente*) se convergir na topologia fraca (resp. fraca*), e representamos por $x_n \xrightarrow{w} x$ (resp. $x_n \xrightarrow{w^*} x$). Note-se que a convergência forte implica convergência fraca e fraca*. Além disso, através do mergulho canónico de $\mathcal{X}$ em X^{**} , temos que a convergência fraca implica convergência fraca*.

Proposição 1.2.16. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $x \in \mathcal{X}$. Dados $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$ e $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{X}^*$, o conjunto*

$$V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) = \{y \in X: |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i \leq k\}$$

é uma vizinhança de x na topologia fraca. A família

$$\left\{ V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon): k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{X}^* \right\}$$

forma um sistema fundamental de vizinhanças de x . De modo análogo, seja $f \in \mathcal{X}^$. Dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, o conjunto*

$$V(x_1, \dots, x_k; \varepsilon) = \{g \in \mathcal{X}^*: |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i \leq k\}$$

é uma vizinhança de f . A família

$$\left\{ V(x_1, \dots, x_k; \varepsilon) : k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, x_1, \dots, x_k \in X^* \right\}$$

forma um sistema fundamental de vizinhanças de f na topologia fraca.*

Pela natureza das funções consideradas para construir estas topologias (funcionais lineares), temos que os abertos nas topologias fraca e fraca* têm de conter subespaços afins de co-dimensão finita. Daqui resulta que, por exemplo, as bolas abertas da norma não podem ser abertas nas topologias fraca e fraca*.

Teorema 1.2.17. *Seja C um conjunto convexo em $\mathcal{X}$. Então C é fechado (na topologia da norma) se e só se for fechado na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.*

Corolário 1.2.17.1 (Mazur). *Seja $(x_n)_n$ uma sucessão em $\mathcal{X}$. Se $(x_n)_n$ converge para algum x na topologia fraca, então existe uma sucessão $(y_n)_n$ convergente para x na topologia da norma tal que cada y_n é combinação convexa de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Teorema 1.2.18. *Seja $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um operador linear entre espaços de Banach. Então, T é contínuo (com respeito às topologias das normas) se e só se for contínuo nas respectivas topologias fracas.*

Proposição 1.2.19. *Seja $g: \mathcal{X}^* \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo na topologia fraca*. Então existe $x_0 \in X$ tal que $g(f) = f(x_0)$, para todo o $f \in \mathcal{X}^*$.*

Daqui resulta que, se um funcional linear é contínuo na topologia fraca*, então o funcional pode ser identificado com um vetor de $\mathcal{X}$ (corresponde à imagem do vetor pelo mergulho canónico) e é contínuo na norma.

Uma vantagem da topologia fraca* é que possui mais compactos do que a topologia da norma. Apesar de a bola unitária fechada não ser compacta em espaços de Banach de dimensão infinita (cf. [13]), para a topologia fraca* temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.20 (Banach-Alaoglu). *A bola unitária fechada $B[0; 1]$ é compacta na topologia fraca*.*

De notar que todo o compacto na topologia fraca^* é metrizável, pelo que as bolas da norma são metrizáveis na topologia fraca^* .

Em espaços de dimensão finita, as topologias fraca e fraca^* coincidem com a topologia da norma. O mesmo não é válido em geral para espaços de dimensão infinita. No entanto, caso um espaço $\mathcal{X}$ seja reflexivo, podemos identificar $\mathcal{X}^{**}$ com $\mathcal{X}$, e portanto $\mathcal{X}^{***}$ com $\mathcal{X}^*$, pelo que as topologias $\sigma(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^{***})$ e $\sigma(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^*)$ têm os mesmos abertos.

1.3. Análise Complexa

Consideremos o espaço $\mathbb{C}$ dos números complexos com a métrica induzida pelo módulo. Representaremos a bola aberta $B(0; 1) \subset \mathbb{C}$, centrada em 0 e de raio 1, também chamada disco unitário, por $\mathbb{D}$.

1.3.1 Funções holomorfas

Um subconjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ é um domínio se for aberto e conexo. Dado um domínio $U \subseteq \mathbb{C}$, uma função $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se holomorfa se for derivável em todo o ponto. De facto, uma função só é holomorfa se for infinitamente diferenciável. No caso de U ser $\mathbb{C}$, diz-se que f é inteira. Como é usual, representamos as derivadas de f por $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}, \dots$

Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e uma sucessão $(a_n)_n$ em $\mathbb{C}$, uma série de potências centrada em z_0 é uma série formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Recorde-se que, para cada série de potências, existe $0 \leq r \leq +\infty$, chamado raio de convergência da série, tal que a série converge no disco $|z - z_0| < r$ e diverge se z satisfaz $|z - z_0| > r$. Para $|z| = r$ pode convergir ou divergir. Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com raio de convergência $r > 0$, podemos definir uma função $f: B(z_0; r) \rightarrow \mathbb{C}$ na bola aberta de raio r e centrada em z_0 , dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Diz-se que uma função $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ definida num domínio é analítica se for representada por uma série de potências em todo o seu domínio. Toda a função analítica é holomorfa, e reciprocamente. Por exemplo, toda a função inteira é analítica e o raio de convergência da série de potências que a representa é $+\infty$.

Para uso em próximos capítulos, listamos agora alguns resultados relevantes de análise complexa. Em [29], podem ler-se demonstrações cuidadas destes teoremas.

Teorema 1.3.1 (Fórmula integral de Cauchy). *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, tem-se*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

onde γ é uma circunferência centrada em z_0 e contida em U .

Daqui obtemos as estimativas de Cauchy: se f está definida numa bola $B(z_0; r)$ centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ e de raio $r > 0$, então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z - z_0| < r} |f(z)|.$$

Teorema 1.3.2 (Teorema de aproximação de Runge). *Seja $K \subseteq \mathbb{C}$ um compacto e A um conjunto que contém pelo menos um ponto de cada componente conexa de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus K$, onde $\tilde{\mathbb{C}}$ designa o compactificado de Alexandroff de $\mathbb{C}$. Seja f uma função holomorfa definida numa vizinhança de K e $\varepsilon > 0$. Então, existe uma função racional h (quociente de polinómios) cujos polos (zeros do denominador) são elementos de A e tal que*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon.$$

Se Ω é um domínio e A é um subconjunto com elementos de cada componente conexa de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, o conjunto das funções racionais com polos em A forma um subconjunto denso em $H(\Omega)$, o espaço de Fréchet das funções holomorfas em Ω associado à restrição das normas em $H(\mathbb{C})$. Em particular, os polinómios formam um subconjunto denso em $H(\mathbb{C})$.

Teorema 1.3.3 (Teorema da identidade). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um domínio e $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas. Se $\Lambda \subseteq \Omega$ é um subconjunto com um ponto de acumulação em Ω e $f|_{\Lambda} = g|_{\Lambda}$, então $f = g$.*

Teorema 1.3.4 (Teorema da aplicação aberta). *Toda a função inteira não-constante é aberta.*

Teorema 1.3.5 (Casorati-Weierstrass). *Toda a função inteira não-constante tem imagem densa.*

1.3.2 Séries de operadores

Consideremos um operador T num espaço de Banach $\mathcal{X}$ tal que $\|T\| = r$ e uma função holomorfa $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ definida num domínio $U \subset \mathbb{C}$ que contém $B[0; r]$. Escrevendo

$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, o operador

$$\begin{aligned} \varphi(T): \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n x \end{aligned}$$

é linear e contínuo em $\mathcal{X}$, com $\|\varphi(T)\| \leq |\varphi(\|T\|)|$. Em particular, se T é um operador e p é um polinómio em $\mathbb{C}$, $p(T)$ define um operador linear contínuo.

1.4. Teoria da Medida

Seja M um conjunto não-vazio. Uma família de subconjuntos $\mathcal{A} \subseteq P(M)$ diz-se uma σ -álgebra se satisfizer as seguintes propriedades:

- (i) $M \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow M \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Os elementos de $\mathcal{A}$ dizem-se mensuráveis; ao par $(M, \mathcal{A})$ chama-se espaço mensurável.

Por exemplo, o conjunto das partes de um conjunto é um exemplo de uma σ -álgebra. A interseção de σ -álgebras de um conjunto M é uma σ -álgebra. Por isso, existe a menor σ -álgebra que contém uma família dada de conjuntos, denominada a σ -álgebra gerada por essa família. De muito uso é a σ -álgebra gerada pelos abertos de um espaço topológico X , a que se chama a σ -álgebra de Borel, cujos elementos são designados por borelianos.

Definição 1.4.1. Seja M um conjunto não-vazio e $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de M . Seja $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função. Diz-se que μ é:

- (a) σ -aditiva se

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

sempre que $A_n \in \mathcal{A}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo o $i \neq j$.

- (b) Não-negativa se $\mu(A) \geq 0$ para todo o $A \in \mathcal{A}$.

- (c) Finita se $\mu(A) < \infty$ para todo o $A \in \mathcal{A}$.

Se μ satisfaz as condições (a) e (b), diz-se que é uma medida, finita se satisfizer (c). Se, além disso, $\mu(M) = 1$, dizemos que μ é uma probabilidade. Nesse caso, o triplo

$(M, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida (espaço de probabilidade se $\mu(M) = 1$). Diz-se que uma propriedade Γ vale μ -q.t.p $x \in M$ se

$$\mu\left(\left\{x \in M: \Gamma \text{ não vale em } x\right\}\right) = 0.$$

Exemplo 1.4.1. Sejam M um conjunto e $P(M)$ a σ -álgebra das partes de M . Dado $x_0 \in M$ e $r_0 \in \mathbb{R}_0^+$, definimos $\mu_{x_0}: P(M) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$\delta_{x_0, r_0}(A) = \begin{cases} r_0 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quando $r_0 = 1$, escreveremos δ_{x_0} , que denominamos medida de Dirac em x_0 .

Representamos o conjunto de medidas de domínio $\mathcal{A}$ num espaço mensurável $(M, \mathcal{A})$ por $\mathcal{P}(M, \mathcal{A})$. Este conjunto é um convexo: dadas medidas ν_1, ν_2 e $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tais que $\alpha + \beta = 1$, a função $\mu = \alpha\nu_1 + \beta\nu_2$ é uma medida definida na σ -álgebra $\mathcal{A}$. O subconjunto das probabilidades de domínio $\mathcal{A}$ forma um subespaço convexo de $\mathcal{P}(M, \mathcal{A})$.

1.4.1 Medidas regulares

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ a sua σ -álgebra dos borelianos. Uma medida μ em $\mathcal{B}$ é regular se para todo o $B \in \mathcal{B}$ se tem

$$\mu(B) = \inf \left\{ \mu(F): F \text{ é fechado e } F \subseteq B \right\} = \sup \left\{ \mu(G): G \text{ é aberto e } G \supseteq B \right\}.$$

O suporte de uma medida μ , que designamos por $\text{supp}(\mu)$, é o conjunto dos $x \in X$ tais que toda a vizinhança aberta de x tem medida μ positiva. Diz-se que μ tem suporte total se $\mu(U) > 0$ para todo o aberto não-vazio $U \subseteq X$; ou, equivalentemente, se $\text{supp}(\mu) = X$. Num espaço métrico completo, toda a medida é regular (cf. [39]).

1.4.2 Integração

Dados dois espaços mensuráveis $(M, \mathcal{A})$ e $(N, \mathcal{B})$ e uma função $f: N \rightarrow N$, dizemos que f é mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo o $B \in \mathcal{B}$. Funções contínuas entre espaços topológicos são mensuráveis com respeito às respectivas σ -álgebras de Borel.

Em espaços de medida está definido o integral com respeito a μ num mensurável A de uma função real (ou complexa) mensurável, denotado por $\int_A \varphi d\mu$. A construção detalhada deste operador pode ler-se em [38].

O integral relativamente a medidas não comuta com o limite de funções mensuráveis. Contudo:

(a) O Teorema da convergência monótona garante que, se $(\varphi_n: M \rightarrow \mathbb{R}_0^+)_n$ é uma sucessão de funções mensuráveis tal que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo o $x \in M$ e $(\varphi_n)_n$ converge pontualmente para φ , então φ é mensurável e

$$\int \varphi d\mu = \lim_n \int \varphi_n d\mu$$

(b) O Teorema da convergência dominada afirma que, dada uma sucessão de funções mensuráveis $(\varphi_n: M \rightarrow \mathbb{K})_n$ que converge pontualmente para $\varphi: M \rightarrow \mathbb{K}$ e existe $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ integrável tal que $|\varphi_n(x)| \leq \psi(x)$ para todo o $x \in M$, então φ é mensurável, integrável e

$$\lim_n \int |\varphi - \varphi_n| d\mu = 0.$$

Em particular, $\int \varphi d\mu = \lim_n \int \varphi_n d\mu$.

1.4.3 Representação de funcionais lineares

As funções mensuráveis limitadas definidas em espaços de medida finita são integráveis. Em particular, funções contínuas em espaços métricos compactos são integráveis com respeito a medidas finitas nos borelianos. Desta forma, dada uma medida finita μ definida nos borelianos de um espaço métrico compacto X , o integral relativamente a μ define um funcional no espaço de Banach $\mathcal{C}(X)$ das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a norma do supremo. Como o integral é um operador linear, trata-se de facto de um funcional linear e, pelo Teorema da convergência dominada, contínuo. Ou seja, para todo a $\mu \in \mathcal{P}(X, \mathcal{B})$, está bem definido o operador linear $L_\mu \in \mathcal{C}(X)^*$ dado por

$$L_\mu f = \int f d\mu.$$

Reciprocamente, seja $L \in \mathcal{C}(X)^*$ um funcional linear positivo (se $f > 0$, então $Lf > 0$) e unitário ($L\mathbf{1} = 1$, onde $\mathbf{1}$ é a função de domínio X constante igual a 1). Então L é um operador integral relativamente a uma probabilidade.

Teorema 1.4.2 (Teorema da representação de Riesz). *Seja X um espaço métrico compacto. Dado um operador linear $L \in \mathcal{C}(X)^*$ contínuo, positivo e unitário, existe uma probabilidade $\mu \in \mathcal{P}(X, \mathcal{B})$ tal que $L = L_\mu$.*

O conjunto dos operadores lineares, contínuos, positivos e unitários é compacto na topologia fraca* de $\mathcal{C}(X)^*$; e, se X for separável, é também metrizável. Assim, podemos definir em $\mathcal{P}(X, \mathcal{B})$ uma estrutura métrica que o torna compacto.

1.4.4 Medidas invariantes

Dados um espaço de medida $(M, \mathcal{A}, \mu)$ e uma função mensurável $f: M \rightarrow M$, diz-se que μ é f -invariante se

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Representamos o conjunto de medidas f -invariantes por $\mathcal{P}_f(M)$.

1.4.4.1 Medidas ergódicas

Dados um espaço de medida $(M, \mathcal{A}, \mu)$ e uma função mensurável $f: M \rightarrow M$, uma medida $\mu \in \mathcal{P}_f(M)$ é ergódica se

$$f(A) = A \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(M \setminus A) = 0.$$

As medidas invariantes ergódicas com suporte total são particularmente importantes no contexto de Dinâmica Topológica (cf. Capítulo 2). De facto, se X é um espaço topológico e $f: X \rightarrow X$ é uma função mensurável relativamente à σ -álgebra dos borelianos que admite uma medida μ nos borelianos que é f -invariante, ergódica e tem suporte total, então f é topologicamente transitiva (definição e mais informação nas Secções 2.1.6, 2.1.11 e [39]). Além disso, cada medida invariante se decompõe em medidas ergódicas, como nos diz o teorema seguinte.

Uma função mensurável $f: M \rightarrow M$ mensurável de um espaço de medida $(M, \mathcal{A}, \mu)$ é conservativa relativamente a μ se, para todo o $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \cap f^{-n}(A)) > 0$.

Teorema 1.4.3 (Teorema da decomposição ergódica). *Sejam X um espaço métrico separável completo, $f: X \rightarrow X$ uma função mensurável com respeito à σ -álgebra $\mathcal{B}$ dos borelianos de X e μ uma medida finita definida em $\mathcal{B}$ que é f -invariante. Se f é conservativa relativamente a μ , então existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{J}, \lambda)$ e uma família $\{\mu_s: s \in \Omega\}$ de medidas em $(X, \mathcal{B})$ tais que μ_s é f -invariante e ergódica para todo o $s \in \Omega$ e, para todo o $A \in \mathcal{B}$, a função $s \mapsto \mu_s(A)$ é mensurável e*

$$\mu(A) = \int_{\Omega} \mu_s(A) d\lambda(s)$$

2. Dinâmica Topológica

Recordamos nesta secção alguns conceitos e resultados sobre sistemas dinâmicos em espaços topológicos.

2.1. Sistemas dinâmicos

Dados um espaço topológico X e uma aplicação $f: X \rightarrow X$, o sistema dinâmico (discreto) gerado por f é o conjunto de órbitas de f , que são definidas, para cada $x \in X$, por

$$\text{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

onde f^n é obtida recursivamente por

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f \circ f^n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diz-se que $Y \subseteq X$ é invariante por f se $f(Y) \subseteq Y$. Neste caso, $\text{Orb}_f(y) \subseteq Y$ para todo o $y \in Y$. De notar que $\text{Orb}_f(x)$ é f -invariante e que, se f for contínua, então $\overline{\text{Orb}_f(x)}$ também é f -invariante.

O estudo de sistemas dinâmicos tem como objetivo determinar informação geométrica e topológica sobre o comportamento assintótico das órbitas.

2.1.1 Pontos periódicos e pontos recorrentes

Um ponto $x \in X$ diz-se fixo por f se $f(x) = x$, e diz-se periódico de período $p \in \mathbb{N}$ se for fixo por f^p . Ao menor $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = x$ chamamos período mínimo de x . Dizemos que um ponto é pré-periódico de período p e pré-período k se $f^p(f^k(x)) = f^k(x)$. Estes são os pontos com órbita finita.

Designamos o conjunto de pontos periódicos de período p por $\text{Per}_p(f)$; o conjunto de pontos periódicos de período mínimo p por $\text{Per}_p^*(f)$; e o conjunto de todos os pontos periódicos de f por $\text{Per}(f)$.

Exemplo 2.1.1. Sejam $X = [0, 1]$ com a métrica euclidiana induzida de $\mathbb{R}$ e $f(x) = 1 - x$. Tem-se

$$\text{Per}(f) = \text{Per}_1^*(f) \cup \text{Per}_2^*(f) = [0, 1].$$

Dado $x \in X$, o conjunto limite de x por f , que designamos por $\omega(x, f)$, é formado pelos pontos de acumulação da órbita de x por f , isto é, da sucessão $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ou seja,

$$\omega(x, f) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\}}.$$

Um ponto $x \in X$, x diz-se *recorrente* se $x \in \omega(x, f)$. Por exemplo, os pontos periódicos de f são recorrentes. Denotamos o conjunto dos pontos recorrentes de f por $\text{Rec}(f)$.

Exemplo 2.1.2. Sejam $X = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\} = \{e^{2\pi i t} : 0 \leq t < 1\}$ com a distância euclidiana induzida do plano complexo e $f: X \rightarrow X$ uma rotação de ângulo $2\pi\theta$ com $\theta \notin \mathbb{Q}$, definida por $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+\theta)}$. Tem-se $\text{Per}(f) = \emptyset$ e $\text{Rec}(f) = X$.

Exemplo 2.1.3. Seja $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sucessões com alfabeto $\{0, 1\}$ com topologia produto, que é metrizável com a distância

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Consideremos em X a função $\sigma: X \rightarrow X$ definida por $\sigma((a_n)_n) = (a_{n+1})_n$. Para esta dinâmica, tem-se $\overline{\text{Per}(f)} = X$, mas há também pontos que não são recorrentes (como a sucessão $x_1 = 1, x_n = 0$ para $n \geq 2$).

Os conjuntos $\omega(x, f)$ e $\text{Rec}(f)$ podem ser vazios, como acontece com a translação não-trivial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. Contudo, se $f: X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X , então $\text{Rec}(f) \neq \emptyset$ (uma demonstração pode ser lida em [21, Theorem 1.1]) e $\omega(x, f) \neq \emptyset$ para todo o $x \in X$.

Proposição 2.1.1. *Seja (X, f) um sistema dinâmico, sendo X um espaço 1-numerável. Dado $x \in X$, consideremos um sistema fundamental numerável $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças de x . Então x é recorrente se e só se para todo o $N \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}_0$ existir $n \geq k$ tal que $f^n(x) \in V_N$.*

Demonstração. Se $x \in \omega(x, f)$, temos que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\}}$. Logo, para todo o $N \in \mathbb{N}$, a interseção $V_N \cap \bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\} \neq \emptyset$. Existe então algum $n \geq k$ tal que $V_N \cap \{f^n(x)\} \neq \emptyset$. Ou seja, $f^n(x) \in V_N$. Reciprocamente, dados $N \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}_0$, seja $n \geq k$ tal que $f^n(x) \in V_N$. Então

$$V_N \cap \{f^n(x)\} = \{f^n(x)\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad V_N \cap \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\} \right) \neq \emptyset.$$

Como $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças, tem-se que

$$x \in \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\}} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Logo

$$x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{f^n(x)\}} \right) = \omega(x, f)$$

e, portanto, x é recorrente. Ou seja, conseguimos encontrar uma sub-sucessão de iterados de x por f que converge para x . $\square$

2.1.2 Função recorrente

Dizemos que uma função $f: X \rightarrow X$ é recorrente se, para todo o aberto não-vazio $U \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Equivalentemente, f é recorrente se e só se para todo o aberto não vazio $U \subseteq X$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$.

O exemplo seguinte mostra que a existência de pontos recorrentes não é condição suficiente para a função ser recorrente.

Exemplo 2.1.4. Sejam $X = [-1, 1]$ e $f(x) = x^2$. Então

$$\text{Per}(f) = \text{Per}_1(f) = \{0, 1\} = \text{Rec}(f).$$

No entanto, f não é recorrente uma vez que, se $U = [-1, 0[$, então $f^n(U) =]0, 1]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, pelo que $U \cap f^n(U) = \emptyset$.

Em espaços métricos completos, tem-se a seguinte equivalência.

Teorema 2.1.2. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\overline{\text{Rec}(f)} = X$.
- (b) f é recorrente.

Além disso, se f for recorrente, então o conjunto $\text{Rec}(f)$ é um G_δ denso de X .

Resulta deste teorema que as rotações irracionais descritas no Exemplo 2.1.2 são funções recorrentes (em que todos os pontos são recorrentes). Analogamente, concluímos do teorema anterior que a função do Exemplo 2.1.3 é recorrente, embora nem todos os pontos sejam recorrentes.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que $\text{Rec}(f)$ é denso em X . Como o conjunto de todas as bolas abertas em X forma uma base de abertos, basta utilizar estas bolas para provar que f é recorrente. Dados $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, designemos por $B(x_0; \varepsilon)$ a bola aberta centrada em x_0 de raio ε . Como $\overline{\text{Rec}(f)} = X$, existe $y \in \text{Rec}(f)$ tal que $d(y, x_0) < \varepsilon$. Sendo y recorrente por f e tendo em conta que $B(x_0; \varepsilon)$ também é uma vizinhança aberta de y , sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in B(x_0; \varepsilon)$. Logo $f^n(B(x_0; \varepsilon)) \cap B(x_0; \varepsilon) \neq \emptyset$. E, portanto, f é recorrente.

$(b) \Rightarrow (a)$: Suponhamos agora que f é recorrente. Dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, temos de mostrar que existe $y \in \text{Rec}(f)$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$. Como f é recorrente, existem $k_1 \in \mathbb{N}$ e $z_1 \in X$ tais que

$$z_1 \in f^{-k_1}(B(x; \varepsilon)) \cap B(x; \varepsilon).$$

Por continuidade de f , o conjunto $f^{-k_1}(B(x; \varepsilon))$ é aberto e existe $\varepsilon_1 > 0$, que podemos supor menor que $\varepsilon/2$, tal que $B(z_1; \varepsilon_1) \subset f^{-k_1}(B(x; \varepsilon)) \cap B(x; \varepsilon)$. Prosseguimos agora indutivamente: tendo já construído k_n, z_n e ε_n , existem $k_{n+1} > k_n$ e $z_{n+1} \in X$ tais que

$$z_{n+1} \in f^{-k_{n+1}}(B(z_n; \varepsilon_n)) \cap B(z_n; \varepsilon_n).$$

De novo pela continuidade de f , o conjunto $f^{-k_{n+1}}(B(z_n; \varepsilon_n))$ é aberto e existe $\varepsilon_{n+1} > 0$, que podemos supor menor que $\varepsilon_n/2$ ($< \varepsilon/2^{n+1}$), tal que

$$B(z_{n+1}; \varepsilon_{n+1}) \subseteq f^{-k_{n+1}}(B(z_n; \varepsilon_n)) \cap B(z_n; \varepsilon_n).$$

Deste modo, obtemos três sucessões, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem $\varepsilon_n < \varepsilon/2^n$, $k_{n+1} > k_n$ e

$$B(z_{n+1}; \varepsilon_{n+1}) \subseteq f^{-k_{n+1}}(B(z_n; \varepsilon_n)) \cap B(z_n; \varepsilon_n).$$

Daqui resulta que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. De facto, dado $r > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r > \varepsilon/2^{n_0} > \varepsilon_{n_0}$. Para $n, m \geq n_0$, com $n > m$, temos

$$z_n \in B(z_n; \varepsilon) \subseteq B(z_m; \varepsilon_m)$$

e $d(z_n, z_m) < \varepsilon_m < \varepsilon_{n_0} < r$. Pela completude de X , a sucessão $(z_n)_n$ converge para algum $y \in X$.

Note-se que $d(y, z_n) \leq \varepsilon_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $z_m \in B(z_n; \varepsilon_n)$ para $m \geq n$; logo $y \in \overline{B(z_n; \varepsilon_n)}$. E, portanto, por construção, $d(y, x) \leq \varepsilon$. Além disso, fixado $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{k_{n+1}}(y) \in f^{k_{n+1}}\left(\overline{B(z_{n+1}; \varepsilon_{n+1})}\right) \subseteq \overline{f^{k_{n+1}}(B(z_{n+1}; \varepsilon_{n+1}))} \subseteq \overline{B(z_n; \varepsilon_n)}.$$

Consequentemente, $\lim_n f^{k_n}(y) = y$ e, portanto, y é recorrente.

Falta só demonstrar que, se f é recorrente, então o conjunto $\text{Rec}(f)$ é um G_δ denso.

Lema 2.1.3. *Nas hipóteses do Teorema 2.1.2, tem-se:*

$$(i) \text{Rec}(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : d(f^n(x), x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

(ii) Para todo o $k, n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$R_{k,n} = \left\{ x \in X : d(f^n(x), x) < \frac{1}{k} \right\}$$

é aberto de X .

Demonstração. (i) Se $x \in \text{Rec}(f)$, então para todo o $k \in \mathbb{N}$ existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), x) < 1/k$. Reciprocamente, se $x \in X$ é tal que para todo o $k \in \mathbb{N}$ existe um $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d(f^n(x), x) < 1/k$, então, como a família de bolas abertas $(B(x; 1/k))_{k \in \mathbb{N}}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças de x , pela Proposição 2.1.1, o ponto x é recorrente.

(ii) Dados $k, n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in R_{k,n}$, seja $\delta > 0$ tal que

$$d(z, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f^n(z), f^n(x_0)) < \frac{1}{2k} - \frac{d(f^n(x_0), x_0)}{2}$$

(a diferença à direita é positiva por se ter $x_0 \in R_{k,n}$). Então, se z é tal que

$$d(z, x) < \min \left(\frac{1}{2k} - \frac{d(f^n(x_0), x_0)}{2}, \delta \right)$$

tem-se

$$\begin{aligned} d(f^n(z), z) &\leq d(f^n(z), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), x_0) + d(x_0, z) \\ &< \frac{1}{2k} - \frac{d(f^n(x_0), x_0)}{2} + d(f^n(x_0), x_0) + \frac{1}{2k} - \frac{d(f^n(x_0), x_0)}{2} \\ &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

E, portanto, $\text{Rec}(f)$ é interseção numerável de abertos. Além disso, já sabemos que, sendo f recorrente, o conjunto $\text{Rec}(f)$ é denso. Logo é um G_δ denso. $\square$

A demonstração do Teorema 2.1.2 está completa. $\square$

2.1.3 Pontos não-errantes

Há noções mais fracas de recorrência do que as descritas anteriormente. A seguinte constrói um dos conjuntos mais relevantes em Dinâmica.

Um ponto diz-se errante por f se admitir uma vizinhança V e um natural $N \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(V) \cap V = \emptyset$ para todo o $n \geq N$. Um ponto x que não seja errante diz-se não-errante: para toda a vizinhança U de x e todo o $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Designamos o conjunto dos pontos não-errantes de f por $\Omega(f)$.

Note-se que

$$\text{Per}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \Omega(f)$$

mas $\Omega(f)$ pode ser vazio (veja-se o caso da translação de $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$). Contudo, $\Omega(f) \neq \emptyset$ sempre que exista uma órbita com um ponto de acumulação, o que está garantido se o espaço X é compacto.

Proposição 2.1.4. *Seja $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. Então o conjunto $\Omega(f)$ é fechado, f -invariante e $\overline{\text{Rec}(f)} \subseteq \Omega(f)$.*

Demonstração. Mostremos que $X \setminus \Omega(f)$ é aberto. Sejam $z \notin \Omega(f)$, $V \subseteq X$ uma vizinhança aberta de z e $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap V = \emptyset$ para todo o $n \geq N$. Então V é vizinhança de w para todo o $w \in V$, que confirma que w é errante.

Verifiquemos agora que, se $x_0 \in \Omega(f)$, então $f(x_0)$ é não-errante. Seja $U \subseteq X$ uma vizinhança de $f(x_0)$. Por continuidade, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x_0 . Como x_0 é não-errante, para todo o $N \in \mathbb{N}$ existe um $n \geq N$ tal que $f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Ora, se $a \in f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)$, então $f(a) \in U$ e existe $b \in f^{-1}(U)$ tal que $a = f^n(b)$. Logo $f(a) = f(f^n(b)) = f^n(f(b)) \in f^n(U) \cap U$. E, portanto, $f(x_0)$ é não-errante.

Seja $x \in \text{Rec}(f)$. Então, fixada uma vizinhança U de x e $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $f^n(x) \in U$. Consequentemente, $f^n(U) \cap U$ é não-vazio pois contém $f^n(x)$. Logo, x é não-errante. Como $\Omega(f)$ é fechado, $\overline{\text{Rec}(f)} \subseteq \Omega(f)$. $\square$

Do Teorema 2.1.2 e da Proposição 2.1.4 resulta que uma função é recorrente só se $\Omega(f) = X$.

2.1.4 Teorema de recorrência de Poincaré

Já conhecemos exemplos de sistemas dinâmicos sem pontos recorrentes. Nesta secção recordaremos que a existência de uma probabilidade invariante pela dinâmica é uma condição suficiente para que o conjunto de pontos recorrentes seja não-vazio.

Teorema 2.1.5 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Sejam $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f: M \rightarrow M$ uma transformação mensurável. Suponhamos que μ é f -invariante. Então, dado um subconjunto mensurável $E \in \mathcal{A}$ com medida positiva, para μ -q.t.p. $x \in E$ existe uma infinidade de naturais $n \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(x) \in E$.*

Demonstração. Consideremos $E \in \mathcal{A}$ com $\mu(E) > 0$ e o subconjunto dos pontos de E cujas órbitas não retornam a E , isto é, $E_0 = \{x \in E: f^n(x) \notin E, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Temos

$$E_0 = E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(X \setminus E) \right)$$

O conjunto E_0 é mensurável. Além disso, dados $m, n \in \mathbb{N}_0$ distintos, digamos $n < m$, tem-se $f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0) = \emptyset$: caso contrário, se existissem $n < m$ e $x \in f^{-n}(E_0)$ tais que $f^m(x) \in E_0$, então $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x)) \in E$, o que indica que $f^n(x) \notin E_0$, o que é uma contradição. Consequentemente, o conjunto

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0)$$

é união disjunta de conjuntos mensuráveis, todos com a mesma medida por μ ser f -invariante. Como μ é uma medida finita, devemos ter $\mu(E_0) = 0$; ou seja, μ -q.t.p de E retorna a E por algum iterado de f .

Note-se ainda que

$$\{x \in E: f^n(x) \in E \text{ para uma infinidade de inteiros } n \in \mathbb{N}\} = E \setminus F.$$

E , portanto, como μ é uma medida finita,

$$\mu\left(\{x \in E: f^n(x) \in E \text{ para uma infinidade de inteiros } n \in \mathbb{N}\}\right) = \mu(E) - \mu(F) = \mu(E).$$

□

O Teorema de Recorrência de Poincaré admite uma formulação imediata sobre pontos recorrentes quando adaptado à σ -álgebra dos borelianos de um espaço topológico.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Recorrência de Poincaré - II). *Sejam X um espaço métrico 2-numerável, $f: X \rightarrow X$ uma função mensurável relativamente à σ -álgebra dos borelianos de X e μ uma probabilidade f -invariante. Então $\mu(X \setminus \text{Rec}(f)) = 0$.*

Se, além das hipóteses no enunciado do Teorema 2.1.6, supusermos que μ tem suporte total, então concluímos que $\overline{\text{Rec}(f)} = X$. Em particular, f é recorrente e $\Omega(f) = X$.

Exemplo 2.1.5. Sejam $X = \mathbb{R}^+$ a semi-reta real positiva e $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^2$. Tem-se $\text{Rec}(f) = \{1\}$ e, portanto, se μ é uma medida de probabilidade f -invariante devemos ter $\mu(\text{Rec}(f)) = \mu(\{1\}) = 1$. Esta igualdade implica que $\mu(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) = 0$ e, por isso, μ é a medida de Dirac suportada no ponto 1 (que é probabilidade f -invariante uma vez que 1 é fixo por f). Assim, f admite uma única medida de probabilidade f -invariante.

Exemplo 2.1.6. Sejam $X = [0, 1]$ e $f: X \rightarrow X$ dada por $f(x) = x/2$ se $0 < x \leq 1$ e $f(0) = 1$. Tem-se $\text{Rec}(f) = \{0\}$ e, portanto, se μ é uma medida de probabilidade f -invariante então $\mu(\text{Rec}(f)) = \mu(\{0\}) = 1$. Contudo, como μ é f -invariante, devemos ter $\mu(f^{-1}(\{0\})) = \mu(\{0\}) = 1$, o que não é possível uma vez que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. E, portanto, f não admite nenhuma probabilidade f -invariante.

2.1.5 Pontos com órbita densa

Há ainda um outro tipo de órbita cuja natureza precisamos de esclarecer. Trata-se de órbitas densas no espaço onde atua a dinâmica.

Seja (X, f) um sistema dinâmico. Dado $x \in X$, dizemos que x tem órbita densa se $\overline{\text{Orb}_f(x)} = X$. Denotamos o conjunto dos pontos com órbita densa por $\mathcal{D}_f$. Uma função (e o respetivo sistema dinâmico) diz-se minimal se $\mathcal{D}_f = X$.

Note-se que, se X não tem pontos isolados, então $\mathcal{D}_f$ é f -invariante, uma vez que a órbita de x é a união de x com a órbita de $f(x)$. Mas sem esta hipótese, ou outra adequada, sobre o espaço X , um ponto com órbita densa pode até ser errante.

Exemplo 2.1.7. Sejam $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Temos que X é composto por pontos isolados e 0, que é ponto de acumulação de X . Além disso, f é contínua e o ponto 1 tem órbita densa, uma vez que

$$\text{Orb}_f(1) = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = X \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \overline{\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}} = X.$$

No entanto, 1 não é recorrente, pois não pertence à imagem de (f) e é ponto isolado de X . Na verdade, nem sequer é não-errante: para qualquer natural n , temos $f^n(U) \cap U = \emptyset$ se $U = \{1\}$, que é vizinhança aberta de 1. Note-se ainda que $\mathcal{D}_f = \{1\}$, enquanto que $\text{Rec}(f) = \{0\}$.

O problema no exemplo anterior reside na existência de pontos isolados. De facto, num espaço com pontos isolados, uma órbita densa tem de passar por todos os pontos isolados; e, para um ponto isolado x ser recorrente, tem de ser periódico, pois $\{x\}$ é ele próprio uma vizinhança aberta de x . Esta patologia desaparece se considerarmos espaços sem pontos isolados.

Lema 2.1.7. *Seja X um espaço topológico Hausdorff e $f: X \rightarrow X$ contínua. Suponhamos que X não tem pontos isolados.*

- (a) *Se x tem órbita densa, então $f^n(x)$ tem órbita densa para todo o $n \in \mathbb{N}$.*
- (b) *Se x tem órbita densa, então x é recorrente.*

Demonstração. (a) Pela Proposição 1.1.4, sabemos que, se x tem órbita densa, então $\text{Orb}_f(x) \setminus \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ é denso qualquer que seja a quantidade finita n de pontos retirados de $\text{Orb}_f(x)$. Além disso, $\text{Orb}_f(f^n(x)) = \text{Orb}_f(x) \setminus \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$.

(b) Seja x um ponto com órbita densa. Por (a), sabemos que $f(x)$ também tem órbita densa. Dada uma vizinhança aberta V de x , o conjunto $V \setminus \{x\}$ é não-vazio, por X não ter pontos isolados. Logo, a órbita de $f(x)$ intersesta $V \setminus \{x\}$; ou seja, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{n+1}(x) \in V$. Logo x é recorrente.

De facto, a órbita de $f(x)$ visita V infinitas vezes, caso contrário, se visitasse V apenas um número finito k de vezes, digamos pelos iterados $n_1, n_2, \dots, n_k$ de f , teríamos que $U \setminus \{f^{n_1}(x), \dots, f^{n_k}(x)\}$ seria um aberto não vazio, porque X não tem pontos isolados, que a órbita de $f(x)$ não visita. O que contradiria o facto de a órbita de $f(x)$ ser densa. $\square$

Da afirmação (a) do Lema 2.1.7 resulta que, se X for um espaço métrico sem pontos isolados, então dados $x \in \mathcal{D}_f$ e $y \in X$ existe uma sub-sucessão crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de naturais tal que $f^{n_k}(x) \xrightarrow{k} y$.

2.1.5.1 O caso bijetivo

Sejam X um espaço topológico e $f: X \rightarrow X$ um homeomorfismo. A órbita de $x \in X$ por f é o conjunto

$$\text{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

sendo $\text{Orb}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ a órbita positiva. E, portanto, temos de considerar duas noções de órbita densa: ou $\overline{\text{Orb}_f(x)} = X$ ou $\overline{\text{Orb}_f^+(x)} = X$, que nem sempre coincidem (cf. Example (1) in [39, p. 129]. Relacionam-se pelo seguinte resultado.

Teorema 2.1.8. [39, Theorem 5.10] Sejam X um espaço topológico e $f: X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Dado $x \in X$, tem-se $\overline{\text{Orb}_f^+(x)} = X$ se e só se $\overline{\text{Orb}_f(x)} = X$ e $\Omega(f) = X$.

2.1.6 Transitividade topológica

Verificámos na subsecção anterior que os conceitos de ponto recorrente e de função recorrente estão relacionados. Veremos agora que, sob certas condições, a noção de órbita densa tem também uma reformulação em termos das órbitas dos abertos não-vazios do espaço.

Seja (X, f) um sistema dinâmico. Diz-se que f é topologicamente transitiva (ou transitiva) se, para todos os abertos não-vazios U, V de X , existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Note-se que uma função topologicamente transitiva é recorrente.

Dados abertos não-vazios $U, V \subseteq X$, defina-se

$$N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}. \quad (2.1)$$

Assim, uma função é topologicamente transitiva se e só se $N_f(U, V) \neq \emptyset$ quaisquer que sejam os abertos não-vazios U, V de X .

A proposição seguinte, cuja demonstração é imediata, indica que podemos considerar pré-imagens em vez de iterados de abertos quando se define transitividade.

Proposição 2.1.9. *Seja X um espaço topológico Hausdorff e $f: X \rightarrow X$ contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\forall U, V \subseteq X$ *abertos não vazios*, $\exists n \in \mathbb{N}: f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- (ii) $\forall U, V \subseteq X$ *abertos não vazios*, $\exists n \in \mathbb{N}: f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
- (iii) $\forall U \subseteq X$ *aberto não vazio*, $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(U)$ *é denso em X*.
- (iv) $\forall U \subseteq X$ *aberto não vazio*, $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(U)$ *é denso em X*.

Resulta do item (iii) que toda a função topologicamente transitiva tem imagem densa.

Exemplo 2.1.8. Voltemos ao Exemplo 2.1.2 das rotações R_θ da circunferência unitária. A medida de Lebesgue nos borelianos de $X = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ tem suporte total e é invariante por qualquer rotação. E, se a rotação é irracional, então a medida de Lebesgue é ergódica. Da Subsecção 1.4.4.1, concluímos que uma rotação irracional é topologicamente transitiva. Note-se que, pelo contrário, uma rotação não irracional (isto é, com $\theta \in \mathbb{Q}$) só tem órbitas periódicas (todas com igual período mínimo) e a medida de Lebesgue não é ergódica.

Exemplo 2.1.9. No Exemplo 2.1.3, a medida de Bernoulli nos borelianos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ gerada pelo vetor $(1/2, 1/2)$ é σ -invariante, ergódica e tem suporte total. De novo, pela informação da Subsecção 1.4.4.1, concluímos que σ é topologicamente transitiva.

2.1.7 Aplicações *mixing*

Seja (X, f) um sistema dinâmico. Dizemos que f é *mixing* (ou misturadora) se para quaisquer abertos não-vazios $U, V \subseteq X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq N.$$

Ou, equivalentemente, se e só se $N_f(U, V)$ for co-finito (isto é, $\mathbb{N} \setminus N_f(U, V)$ é finito) para todos os abertos não-vazios U, V de X .

Claramente, ser *mixing* implica ser topologicamente transitivo. No entanto, há funções transitivas que não são *mixing*. Por exemplo, uma rotação irracional de ângulo $2\pi\theta$ é transitiva, mas não é *mixing*: se dois arcos de circunferência U, V abertos de comprimento angular $\pi\theta$ verificam $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $f^{n+1}(U) \cap V = \emptyset$, pois o arco de circunferência é rodado um ângulo $2\pi\theta$.

É natural perguntar se existem funções *mixing*. A resposta é positiva: considerando um conjunto constituído por apenas um ponto e a função que envia esse ponto em si próprio. No Capítulo 3 serão apresentados exemplos menos triviais de funções *mixing*.

2.1.8 Conjugação entre sistemas dinâmicos

Uma questão central de Matemática é a de saber se dois objetos distintos podem ser considerados equivalentes sob um dado ponto de vista. Sabemos, por exemplo, que dois espaços vetoriais de igual dimensão finita sobre o mesmo corpo são isomorfos, isto é, existe uma bijeção linear entre ambos. Dois espaços topológicos são considerados equivalentes se houver um homeomorfismo entre eles. E, se um tal homeomorfismo existir, várias propriedades de espaços topológicos (e.g. Hausdorff, 1-numerável, 2-numerável, compacto, conexo, separável, entre outras) são preservadas pelo homeomorfismo e os espaços são indistinguíveis do ponto de vista topológico. Existe uma noção correspondente de equivalência entre sistemas dinâmicos.

Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. Diz-se que g é quase-conjugado a f se existir uma função $\phi: X \rightarrow Y$ contínua com imagem densa em Y tal que $g \circ \phi = \phi \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (2.2)$$

Se ϕ for um homeomorfismo, (X, f) e (Y, g) dizem-se conjugados. De notar que, se f e g são conjugados, então f é quase-conjugado a g e g é quase-conjugado a f .

Uma das vantagens da existência de uma conjugação entre dois sistemas dinâmicos é que algumas propriedades são preservadas por quasi-conjugação. A prova das proposições seguintes requer apenas a manipulação elementar das definições.

Proposição 2.1.10. *Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. Suponhamos que g é quase-conjugado a f por ϕ . Então $\text{Orb}_g(\phi(x)) = \phi(\text{Orb}_f(x))$ para todo o $x \in X$. Além disso, $\text{Rec}(g) \supseteq \phi(\text{Rec}(f))$ e $\mathcal{D}_g \supseteq \phi(\mathcal{D}_f)$. Se (X, f) e (Y, g) forem conjugados, então*

$$\text{Rec}(g) = \phi(\text{Rec}(f)) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_g = \phi(\mathcal{D}_f).$$

De acordo com o resultado anterior, para determinarmos se um sistema dinâmico tem uma dessas propriedades, basta encontrar outro sistema dinâmico que a possua e uma conjugação entre os dois. Resultados de relevo podem ser deduzidos a partir desta equivalência entre sistemas dinâmicos, como se verá, por exemplo, na Secção 3.2.

Proposição 2.1.11. *Ser topologicamente transitivo, mixing ou recorrente são propriedades preservadas por quase-conjugação.*

2.1.9 Produto de sistemas dinâmicos

Uma questão importante é se podemos construir sistemas dinâmicos novos a partir de sistemas já conhecidos, e inferir dessa construção a natureza dinâmica do novo sistema.

Uma forma natural de construir novos objetos a partir de objetos existentes é considerar o seu produto. Podemos definir o produto de espaços vetoriais, de grupos, espaços topológicos, etc.. Podemos também definir o produto de sistemas dinâmicos. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. O produto de (X, f) e (Y, g) é o sistema dinâmico no espaço $X \times Y$ com a topologia produto onde atua a função $f \times g: X \times Y \rightarrow X \times Y$, dada por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$. Note-se que, se conseguirmos provar que $(X \times Y, f \times g)$ possui uma das propriedades aduzidas na Proposição 2.1.11, podemos garantir que ela também vale para os sistemas (X, f) e (Y, g) .

Lema 2.1.12. *Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. Então, (X, f) e (Y, g) são quase-conjugados a $(X \times Y, f \times g)$ através das projeções $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$, respetivamente. Logo, se $f \times g$ é topologicamente transitiva, recorrente ou mixing, então f e g são topologicamente transitivas, recorrentes ou mixing, respetivamente.*

O processo inverso, o de inferir propriedades dinâmicas do sistema produto sabendo que ambos os fatores as possuem, não é em geral tão bem sucedido. Por exemplo, se $X = Y = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ e $g = f$ como no Exemplo 2.1.7, temos que 1 tem órbita densa por f e por g , mas $(1, 1)$ não tem órbita densa por $f \times g$. De facto,

$$\text{Orb}_{f \times g}((1, 1)) = \text{Orb}_{f \times f}((1, 1)) = \{(x, x) : x \in X \setminus \{0\}\}.$$

Há, porém, algumas propriedades que são herdadas pelo produto.

Proposição 2.1.13. [26] *Se f e g são mixing, então $f \times g$ é mixing.*

Pelo contrário, a transitividade topológica não é em geral herdada pelo produto. Consideremos uma rotação R_θ do Exemplo 2.1.8, de ângulo $2\pi\theta$ em que $\theta \in [0, 1[$ é irracional. Sabemos que R_θ é topologicamente transitiva. Verifiquemos que $R_\theta \times R_\theta$ não é topologicamente transitiva. Dados $z_1 = e^{2\pi i x_1}$, $z_2 = e^{2\pi i x_2}$, temos que $R_\theta^n(z_1)/R_\theta^n(z_2) = z_1/z_2$, qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$. Assim, escolhendo U como o arco de circunferência aberto compreendido entre os ângulos 0 e $\pi/2$ a partir de $z = 1$, e V o arco de circunferência compreendido entre os ângulos $\pi/2$ e π , temos que

$$z_1 \in U \quad \text{e} \quad z_2 \in V \quad \Rightarrow \quad z_1/z_2 = e^{2\pi i \alpha} \quad \text{com } \alpha \in]0, 1/2[$$

e

$$\exists n \in \mathbb{N}: R_\theta^n(z_1) \in V \quad \Rightarrow \quad R_\theta^n(z_2) = e^{2\pi i \alpha} R_\theta^n(z_1) = e^{2\pi i(\alpha + x_1 + n\theta)} \notin U$$

porque $\alpha + x_1 + n\theta \in]1/4 + \alpha, 1/2 + \alpha[\subseteq]1/4, 1[$. Concluimos deste modo que $(R_\theta \times R_\theta)^n(U \times V) \cap (V \times U) = \emptyset$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2.1.10 Aplicações *weakly mixing*

Uma função f diz-se *weakly mixing* se $f \times f$ for topologicamente transitiva.

Como os produtos dos abertos de cada espaço formam uma base para a topologia produto, temos que uma função é *weakly mixing* se e só se para todos os abertos não-vazios $U_1, U_2 \subseteq X, V_1, V_2 \subseteq Y$ existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2 \quad (2.3)$$

ou, equivalentemente, se $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para todos os abertos U_1, V_1, U_2, V_2 .

Note-se que, pelo Lema 2.1.12, se f for *weakly mixing* então é transitiva. Além disso, ser *mixing* implica ser transitiva, logo, pela Proposição 2.1.13, ser *mixing* implica ser *weakly mixing*. Em resumo:

$$f \text{ é mixing} \Rightarrow f \text{ é weakly mixing} \Rightarrow f \text{ é transitiva} \Rightarrow f \text{ é recorrente.}$$

Uma questão pertinente é a de saber se, sendo f *weakly mixing*, então o produto $f \times f \times f$ também é. A resposta é afirmativa, dada por H. Furstenberg [20].

Teorema 2.1.14 (Furstenberg). *Se $f: X \rightarrow X$ é weakly mixing, então qualquer produto finito $f \times \dots \times f$ é topologicamente transitivo e, consequentemente, weakly mixing.*

2.1.10.1 Formulações equivalentes da noção *weakly mixing*

Fazemos uma pausa breve para refletir sobre a condição (2.3) para uma função ser *weakly mixing*. É de facto pouco prática de se verificar: é necessário mostrar que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para quatro abertos não-vazios U_1, U_2, V_1, V_2 quaisquer. E é também exagerada se o sistema dinâmico é contínuo: uma tal função é *weakly mixing* se vale uma condição semelhante a (2.3) para três quaisquer abertos, ou até com apenas dois, reduzindo-se consideravelmente o esforço de verificar a definição.

Proposição 2.1.15. [26] *Uma função contínua $f: X \rightarrow X$ é weakly mixing se e só se vale alguma das condições seguintes:*

- (a) $N(U, W) \cap N(W, V) \neq \emptyset$ para três quaisquer abertos não-vazios $U, V, W \subseteq X$.
- (b) $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$ para todos os abertos não-vazios U, V de X .

2.1.11 Transitividade topológica vs. existência de órbitas densas.

Vimos na Secção 2.1.1 que existe uma conexão entre cada função recorrente e o conjunto dos pontos recorrentes dessa função. Os conceitos de órbita densa e de função topologicamente transitiva podem ser entendidos como um refinamento das noções de ponto recorrente e função recorrente. Haverá alguma relação entre a existência de órbita densa e o facto de f ser topologicamente transitiva? Em geral, não. Retornemos ao Exemplo 2.1.7, para o qual $\mathcal{D}_f = \{1\}$. Neste caso, f não é topologicamente transitiva: se $U = \{1/2\}$ e $V = \{1\}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos $f^n(U) = \left\{\frac{1}{n+2}\right\}$, que é disjunto de V . Sob certas condições, porém, transitividade e existência de uma órbita densa são afirmações equivalentes.

Proposição 2.1.16. *Sejam X um espaço métrico completo separável e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. Então f é topologicamente transitiva se e só se $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Além disso, se $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$ então é um G_δ denso.*

Demonstração. Começemos por mostrar que, se $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$, então para todo o aberto não-vazio $A \subseteq X$ tal que $f^{-1}(A) \subseteq A$ temos que A é denso ou $A = \emptyset$. Suponhamos que A é não-vazio e consideremos o fechado $E = X \setminus A \neq X$. Note-se que, como $f^{-1}(A) \subseteq A$, se tem $f(E) \subseteq E$. Suponhamos que E não tem interior vazio, e seja B um subconjunto aberto não-vazio de E . Dado $x_0 \in \mathcal{D}_f$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^N(x_0) \in B \subset E$. Como $f(E) \subseteq E$, temos $f^k(x_0) \in E$ para todo o $k \geq N$. Daqui resulta, por E ser fechado e x_0 ter órbita densa, que

$$X = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{N-1}(x_0)\} \cup E.$$

Aplicando f a esta igualdade obtemos, por f ser sobrejetiva,

$$X = \{f(x_0), \dots, f^{N-1}(x_0)\} \cup E.$$

Repetindo este processo, concluímos que $E = X$, uma contradição. Logo E tem interior vazio, ou seja, A é denso.

Sejam U, V abertos não-vazios de X . Consideremos o conjunto $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$, que é aberto (por f ser contínua), não-vazio (por f ser sobrejetiva) e verifica a condição de inclusão $f^{-1}(W) = \bigcup_{n=2}^{\infty} f^{-n}(U) \subseteq W$. Pelo que foi provado, W é denso. Logo $W \cap V \neq \emptyset$ e, portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-N}(U) \cap V \neq \emptyset$. Está assim provado que f é topologicamente transitiva.

Provemos agora o recíproco e o facto de $\mathcal{D}_f$ ser um G_δ denso. Como X é espaço métrico separável, é 2-numerável. Seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base numerável de abertos de X .

Lema 2.1.17. $\mathcal{D}_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_n)$.

Demonstração. $(\subseteq)$: Seja $x \in \mathcal{D}_f$. Sendo U_n aberto, existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^j(x) \in U_n$. Ou seja, $x \in f^{-j}(U_n)$. Logo, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_n).$$

$(\supseteq)$: Sejam $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_n)$ e $V \subseteq X$ um aberto não-vazio. Como $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de abertos, temos que V é união de elementos da família $(U_n)_n$. Em particular, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} \subseteq V$. Como $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_n)$, em particular temos $x \in \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_{n_0})$. Se $j \in \mathbb{N}_0$ é tal que $x \in f^{-j}(U_{n_0})$, então $f^j(x) \in U_{n_0} \subseteq V$. E, portanto, a órbita de x é densa. $\square$

Suponhamos que f é transitiva. Pela Proposição 2.1.9, sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(U_n)$ é denso em X . Além disso, como cada U_n é aberto e f é contínua, $f^{-j}(U_n)$ é aberto; logo $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(U_n)$ é aberto e denso. Resulta agora do Lema 2.1.17 que $\mathcal{D}_f$ é um G_δ . Tendo em conta que X é um espaço métrico completo, pelo Teorema de Baire $\mathcal{D}_f$ é, de facto, um G_δ denso. Em particular, $\mathcal{D}_f$ é não-vazio. $\square$

A próxima proposição fornece outra condição suficiente para que a transitividade seja equivalente à existência de órbita densa.

Proposição 2.1.18. *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. Se $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$, então f é topologicamente transitiva. Se X for separável e de 2ª categoria, qualquer aplicação topologicamente transitiva tem uma órbita densa.*

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos não-vazios e $x \in \mathcal{D}_f$. Como X é espaço métrico, é Hausdorff; logo, pelo Lema 2.1.7, $f^n(x) \in \mathcal{D}_f$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Sendo

U é aberto não-vazio, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in U$. Como $f^{n_0}(x) \in \mathcal{D}_f$, a órbita de $f^{n_0}(x)$ intersesta V : seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(f^{n_0}(x)) \in V$. Temos então que $f^{n_0+n_1}(x) \in f^{n_1}(U) \cap V \neq \emptyset$, e a primeira afirmação está provada.

Como X é métrico e separável, é 2-numerável. Seja $(U_n)_n$ uma base numerável de abertos. Suponhamos que $\mathcal{D}_f = \emptyset$. Dado $x \in X$, existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin U_{n(x)}$ para todo o $k \in \mathbb{N}_0$. Defina-se

$$V_x = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U_{n(x)}).$$

Temos que V_x é um aberto denso por f ser topologicamente transitiva. Então o conjunto $A_x = X \setminus V_x$ é um fechado com interior vazio (ou seja, magro) que contém x . Por fim, a família $\{A_x: x \in X\}$ é numerável, pois é construída à custa de um número numerável de abertos distintos. Logo $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma união numerável de conjuntos magros, contradizendo a hipótese de X ser de segunda categoria. $\square$

Combinando as duas proposições acima obtemos:

Teorema 2.1.19 (Teorema da transitividade de Birkhoff). *Sejam X um espaço métrico completo, 2-numerável e sem pontos isolados, e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i) f é topologicamente transitiva.
- (ii) f tem uma órbita densa.

Se alguma destas condições se verificar, $\mathcal{D}_f$ é um G_δ denso.

Como exemplos a que se aplica o teorema anterior, considerem-se as funções dos Exemplos 2.1.8 e 2.1.9: ambas são contínuas e topologicamente transitivas em espaços métricos compactos sem pontos isolados, logo têm órbita densa. No caso particular do Exemplo 2.1.8, as órbitas são todas homeomorfas entre si e, portanto, são todas densas. (Se todas as órbitas de um sistema dinâmico (X, f) são densas, diz-se que f é **minimal**.)

O Teorema 2.1.19 é frequentemente usado para mostrar que um dado sistema dinâmico tem uma órbita densa: basta provar que é topologicamente transitivo, o que, em geral, é mais fácil do que exibir um ponto com órbita densa.

Exemplo 2.1.10. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida do seguinte modo: para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 8n + 2 & \text{se } 2n \leq x \leq 2n + 1 \\ 5x - 8n + 2 & \text{se } 2n - 1 \leq x \leq 2n \end{cases}$$

O gráfico da função f está representado na Figura 2.1.

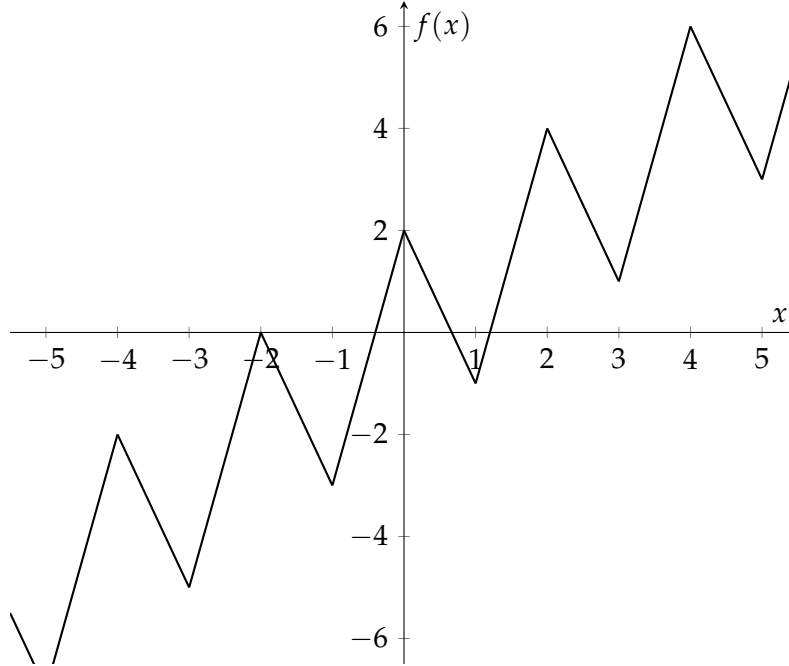


Figura 2.1: Gráfico da função f .

Provemos que f é topologicamente transitiva. Como os intervalos abertos formam uma base da topologia em $\mathbb{R}$, basta provar a condição (iii) da Proposição 2.1.9 para esses conjuntos.

Começemos por mostrar que a órbita do intervalo $]n, n + 1[$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, cobre todo o espaço. Cada intervalo $]n, n + 1[$ pode ser escrito na forma $]2m, 2m + 1[$ ou $]2m - 1, 2m[$, consoante n é par ou ímpar. Fixemos $m \in \mathbb{Z}$. Temos que $f_{|}]2m, 2m + 1[}(x) = -3x + 8m - 2$ e $f_{|}]2m - 1, 2m[}(x) = 5x - 8m - 2$. Logo,

$$f(]2m, 2m + 1[) =]2m - 1, 2m + 2[\quad \text{e} \quad f(]2m - 1, 2m[) =]2m - 3, 2m + 2[.$$

Ou seja, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(]n, n + 1[) &=]n - 1, n + 2[& \text{se } n \text{ é par} \\ f(]n, n + 1[) &=]n - 2, n + 3[& \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

E, portanto, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $f([n, n+1[) \supseteq]n-1, n+2[$. O que implica que $f([n, n+l[) \supseteq]n-1, n+l+1[$ para todo o $n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$. Provemos esta afirmação por indução. O caso $l = 1$ já está provado. Supondo-a válida para um natural fixado l , concluímos que

$$\begin{aligned} f([n, n+l+1[) &= f([n, n+l[\cup \{n+l\} \cup]n+l, n+l+1[) \\ &= f([n, n+l[) \cup \{f(n+l)\} \cup f([n+l, n+l+1[) \\ &\supseteq]n-1, n+l+1[\cup \{f(n+l)\} \cup]n+l-1, n+l+2[\\ &\supseteq]n-1, n+l+2[. \end{aligned}$$

Com a inclusão $f([n, n+l[) \supseteq]n-1, n+l+1[$, mais uma vez por indução se mostra que $f^k([n, n+1[) \supseteq]n-k, n+k+1[$. De facto, o caso $k = 1$ já está provado. Suponhamos que a afirmação é válida para $k \in \mathbb{N}$; então,

$$f^{k+1}([n, n+1[) = f(f^k([n, n+1[)) \supseteq f([n-k, n+k+1[) \supseteq]n-k-1, n+k+2[.$$

Logo, para todo o $n \in \mathbb{Z}$,

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k([n, n+1[) \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty}]n-k, n+k+1[= \mathbb{R}.$$

Seja agora $J =]a, b[$ um intervalo não degenerado contido num dos intervalos em que se divide a definição de f . Mostremos que a órbita de J contém um intervalo da forma $]n, n+1[$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Note-se que, se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n \leq a < b \leq 2n+1$, então

$$f(J) =]-3b+8n+2, -3a+8n+2[;$$

se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n-1 \leq a < b \leq 2n$, então

$$f(J) =]5a-8n+2, 5b-8n+2[.$$

No primeiro caso, $f(J)$ é um intervalo de comprimento $3(b-a)$; no segundo, $f(J)$ é um intervalo de comprimento $5(b-a)$. Assim, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(J)$ contém um intervalo de comprimento pelo menos 3 vezes maior do que o comprimento de J .

Se $f(J)$ contém um intervalo da forma $]m, m+1[$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, a prova está completa. Caso contrário, ou continua contido num intervalo da forma $]m, m+1[$ ou $f(J)$ contém um inteiro N . Em qualquer dos casos, se J' é o maior intervalo entre $f(J) \cap]-\infty, N[$ e $f(J) \cap]N, +\infty[$, então J' tem comprimento mínimo $\frac{3}{2}(b-a)$ e está contido num intervalo

da forma $]m, m + 1[$. Assim, se $f(J)$ não contiver já um intervalo da forma $]m, m + 1[$, então contém um intervalo de comprimento mínimo $\frac{3}{2}(b - a)$ que está contido num intervalo da forma $]m, m + 1[$.

Prosseguindo indutivamente, concluímos que, dado $k \in \mathbb{N}$, ou $f^k(J)$ contém um intervalo da forma $]m, m + 1[$ ou contém um intervalo de comprimento mínimo $(3/2)^k(b - a)$ que está contido num intervalo da forma $]m, m + 1[$. Se supusermos que $f^k(J)$ nunca contém um intervalo da forma $]m, m + 1[$, temos que, para $k > -\log_{3/2}(b - a)/2$, a imagem $f^k(J)$ contém um intervalo de comprimento maior ou igual a $(3/2)^k(b - a)$ que está contido num intervalo da forma $]m, m + 1[$. Contudo, isto é impossível uma vez que

$$(3/2)^k(b - a) > (3/2)^{-\log_{3/2}(b-a)}(b - a) = 2(b - a)/(b - a) = 2.$$

Logo, para algum $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $f^k(J)$ contém um dos intervalos que determinam os ramos de f . Consequentemente, $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} f^{\ell}(J) = \mathbb{R}$.

Para concluirmos que f é topologicamente transitiva, basta agora notar que todo o aberto não-vazio de $\mathbb{R}$ contém um intervalo não degenerado que está contido num intervalo da forma $]m, m + 1[$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Como f é topologicamente transitiva, pelo Teorema 2.1.19 f tem pontos com órbita densa e $\mathcal{D}_f$ é um G_{δ} denso. Mas não se conhece um tal ponto, até porque nenhum número racional tem órbita densa (como se provará no Exemplo 2.2.3).

Vejamos outra aplicação do Teorema 2.1.19. Já sabemos que o produto de duas funções topologicamente transitivas pode não ser transitivo; contudo, se uma delas for *mixing*, então o produto é transitivo.

Proposição 2.1.20. *Sejam X um espaço métrico separável sem pontos isolados e Y um espaço topológico. Se as funções $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ são topologicamente transitiva e mixing, respetivamente, então $f \times g$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Começemos pela seguinte afirmação elementar.

Lema 2.1.21. *Sejam X um espaço métrico separável sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função topologicamente transitiva. Então, $N_f(U, V)$ é infinito para todos os abertos não-vazios U, V de X .*

Demonstração. Como X é um espaço métrico separável sem pontos isolados, se f é topologicamente transitiva então $\mathcal{D}_f$ é um G_{δ} denso. Dados $U, V \subseteq X$ abertos não-vazios

de X , sabemos que $N_f(U, V) \neq \emptyset$. Suponhamos que é finito e seja $N = \max N_f(U, V)$. Então o conjunto $f^{-N}(U) \cap V$ é não-vazio, e aberto por f ser contínua. Logo existe x em $\mathcal{D}_f \cap f^{-N}(U) \cap V$. Seja $y \in U$ tal que $f^N(y) = x$. Como X não tem pontos isolados, pelo Lema 2.1.7 sabemos que $f(x)$ tem órbita densa; logo, esta órbita intersesta V . Seja $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{m+1}(x) \in V$. Então, $f^{N+m+1}(y) \in V$ e, portanto, $f^{-N-m-1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Logo $m + N + 1 \in N_f(U, V)$, o que contraria a maximalidade de N . $\square$

Provemos agora que $f \times g$ é topologicamente transitiva. Sejam $U, V \subseteq X$, $U', V' \subseteq Y$ abertos não-vazios. De acordo com (2.3), há que provar que $N_f(U, V) \cap N_g(U', V') \neq \emptyset$. Por g ser *mixing*, $N_g(U', V')$ é co-finito. Como f é topologicamente transitiva, $N_f(U, V)$ é infinito pelo Lema 2.1.21. Logo, a interseção $N_f(U, V) \cap N_g(U', V')$ é não-vazia. $\square$

2.1.12 Caos segundo Devaney

Ainda antes de o estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos se tornar uma área própria da Matemática, vários matemáticos e físicos se deparavam com um problema fundamental na descrição dos sistemas: a evolução de muitos sistemas físicos é fortemente dependente das condições iniciais. Exemplos clássicos são o pêndulo duplo e o problema dos três corpos, em que o movimento dos corpos é imprevisível e em que pequenas diferenças nas condições iniciais geram comportamentos totalmente diferentes nas respectivas órbitas. Graças a estes exemplos, e outros semelhantes, foi-se construindo a ideia intuitiva de caos: trata-se de sistemas determinísticos tão imprevisíveis que o comportamento das órbitas parece aleatório. Uma formulação rigorosa de caos só surgiu no século XX, com várias versões preliminares evidenciando uma maior ou menor preocupação com certas características. Neste documento adotamos a definição de caos proposta por R. Devaney.

Começamos com a definição de sensibilidade às condições iniciais, que traduz a ideia intuitiva que um sistema pode evoluir de formas muito distintas mesmo começando com condições iniciais próximas.

Definição 2.1.22. Seja X um espaço métrico sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f (ou o sistema dinâmico (X, f)) é sensível às condições iniciais se existir $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existirem $y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(x, y) < \varepsilon$ e $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. A δ chama-se constante de sensibilidade de f .

Exemplo 2.1.11. As funções lineares em $\mathbb{R}$, $f(x) = ax$, com $|a| > 1$ ilustram perfeitamente a sensibilidade às condições iniciais. Dados $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, escolha-se

$y = x + \varepsilon/2$ e $n > \log_{|a|}(2\delta/\varepsilon)$. Então, $|y - x| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ e

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |a^n y - a^n x| = |a^n| |y - x| = |a|^n \frac{\varepsilon}{2} > |a|^{\log_{|a|}(\frac{2\delta}{\varepsilon})} \frac{\varepsilon}{2} = \delta.$$

Podemos agora definir caos segundo Devaney.

Definição 2.1.23. Seja X um espaço métrico sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. Diz-se que f (ou o sistema (X, f)) é caótico (segundo Devaney) se satisfizer as seguintes condições:

- (i) f é sensível às condições iniciais.
- (ii) f é topologicamente transitiva.
- (iii) $\text{Per}(f)$ é denso.

Uma questão importante é a de saber se ser caótico é uma propriedade preservada por conjugação. A transitividade topológica e possuir um conjunto denso de pontos periódicos são preservadas por conjugação. Mas a sensibilidade às condições iniciais não é preservada por conjugação (cf. [26]). No entanto, esta condição é redundante na definição de caos segundo de Devaney.

Teorema 2.1.24 ([26]). *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Se $f: X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva e $\overline{\text{Per}(f)} = X$, então f é sensível às condições iniciais em qualquer métrica que induza a topologia de X .*

E, portanto, nas condições do teorema anterior podemos simplificar a Definição 2.1.23.

Definição 2.1.25. Seja X um espaço métrico sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua. Diz-se que f (ou o sistema (X, f)) é caótico segundo Devaney se satisfizer as seguintes condições:

- (i) f é topologicamente transitiva.
- (ii) $\overline{\text{Per}(f)} = X$.

E, como já vimos, ser caótico segundo Devaney é preservado por quase-conjugação.

A função do Exemplo 2.1.9 é um sistema caótico, enquanto que as do Exemplo 2.1.2 não são. No próximo capítulo discutiremos outros exemplos de sistemas dinâmicos caóticos, analisaremos condições suficientes para uma função ser caótica, e avaliaremos o impacto da natureza caótica do sistema no conjunto das suas órbitas densas.

2.2. Como é o conjunto $\mathcal{D}_f$?

No Exemplo 2.1.7, vimos que $\mathcal{D}_f = \{1\} = \mathring{\mathcal{D}}_f \neq X$. Ou seja, $\mathcal{D}_f$ é um aberto não-vazio mas não denso. Sabemos, porém, pelo Teorema 2.1.19 que, se X for um espaço Hausdorff sem pontos isolados e $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$, então $\mathcal{D}_f$ é um G_δ denso. No entanto, os exemplos seguintes parecem mostrar que, sob estas hipóteses, $\mathcal{D}_f$ exibe uma rigidez que ainda não descrevemos.

Exemplo 2.2.1. No Exemplo 2.1.8, vimos que para rotações racionais todos os pontos são periódicos. Logo, como X não é finito, nenhum ponto admite órbita densa e $\mathcal{D}_{R_\theta} = \emptyset$ para $\theta \in \mathbb{Q}$. O mesmo vale para a função identidade em qualquer espaço com mais do que um elemento. Pelo contrário, as rotações irracionais são minimais, isto é, todo o ponto tem órbita densa e, portanto, $\mathcal{D}_{R_\theta} = X$.

Exemplo 2.2.2. No Exemplo 2.1.3, $\mathcal{D}_\sigma$ é um G_δ denso com interior vazio porque o conjunto de órbitas periódicas é denso.

Exemplo 2.2.3. A função do Exemplo 2.1.10, definida em $\mathbb{R}$, é topologicamente transitiva. Pelo Teorema 2.1.19, sabemos que $\mathcal{D}_f$ é um G_δ denso. Mas nenhum número racional tem órbita densa. De facto, a afirmação é trivial para os inteiros uma vez que, se $n \in \mathbb{Z}$, então $f(n) = n + 2$ se n é par e $f(n) = n - 2$ se n é ímpar, logo $\text{Orb}_f(n) \subseteq \mathbb{Z}$. Seja agora $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, escrito como fração irredutível p/q , sendo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Note-se que a órbita de r por f está contida em $\mathbb{Q}$. E que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, o iterado $f^k(r)$ pode ser escrito como fração $\frac{P_k}{q}$, com $P_k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\text{Orb}_f(r) \subseteq \left\{ \frac{N}{q} : N \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mas, fixado $q \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{N/q : N \in \mathbb{Z}\}$ não é denso em $\mathbb{R}$, uma vez que a distância entre dois elementos distintos deste conjunto é pelo menos $1/q$. Como o conjunto de números racionais é denso em $\mathbb{R}$, concluímos que $\mathcal{D}_f$ tem interior vazio.

Em resumo, nestes exemplos tem-se $\mathcal{D}_f = \emptyset$ ou $\mathcal{D}_f = X$ ou $\mathring{\mathcal{D}}_f = \emptyset$, mas ainda não sabemos que propriedades do espaço X ou da função f determinam estas diferenças. Em particular, não é claro que espaços topológicos admitem sistemas dinâmicos contínuos minimais. Em [31], os autores questionam se existem sistemas dinâmicos contínuos minimais que atuem em $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. A resposta negativa foi dada em [5] como corolário do seguinte resultado.

Teorema 2.2.1 (N. Bernardes). *Sejam X um espaço topológico Hausdorff sem pontos isolados e $f: X \rightarrow X$ uma função contínua.*

(a) *Se X é compacto, então $\mathring{\mathcal{D}}_f = \emptyset$ ou $\mathcal{D}_f = X$.*

(b) *Se X não é compacto mas é localmente compacto, então $\mathring{\mathcal{D}}_f = \emptyset$.*

Pelo facto de $\mathbb{R}^n$ ser localmente compacto mas não compacto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, o teorema anterior tem a seguinte consequência.

Corolário 2.2.1.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, tem-se $\mathring{\mathcal{D}}_f = \emptyset$. Em particular, para todo o $n \in \mathbb{N}$, não há sistemas dinâmicos contínuos minimais em $\mathbb{R}^n$.*

Em [5], a prova do item (b) do Teorema 2.2.1 utiliza o compactificado com um ponto de X e recorre à estrutura uniforme existente em espaços compactos. Neste documento, apresentamos uma variante dessa demonstração, mais elementar pois evita o uso de uniformidades.

Demonstração. A ideia da demonstração é a seguinte: supor que $\mathcal{D}_f$ não é da forma prescrita e, a partir daí, encontrar um ponto com órbita densa cuja imagem por f não tem órbita densa (no caso de X ser compacto) ou é exterior ao espaço X (caso contrário), o que é uma contradição.

(a) Começemos com o caso de X compacto. Suponhamos que $\mathcal{D}_f \neq X$ e $\mathring{\mathcal{D}}_f \neq \emptyset$. Sejam $z \in X \setminus \mathcal{D}_f$ e $x \in \mathring{\mathcal{D}}_f$. Como X é compacto, é localmente compacto. Logo, pelo Lema 1.1.17, todo o ponto de X admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Seja então V uma vizinhança compacta de x tal que $V \subseteq \mathring{\mathcal{D}}_f$.

A família de vizinhanças abertas de z ,

$$\mathcal{U}_z = \{U \subseteq X: z \in U \text{ e } U \text{ é aberto}\}$$

equipada com a relação de ordem parcial

$$U \geq U' \Leftrightarrow U \subseteq U'$$

é um conjunto dirigido. Podemos então construir redes $(r_u)_{u \in \mathcal{U}}$, $(\alpha_u)_{u \in \mathcal{U}}$ e $(\beta_u)_{u \in \mathcal{U}}$ da seguinte forma:

(i) Como $x \in \mathcal{D}_f$, a sua órbita intersesta todos os abertos não-vazios de X . Dado $U \in \mathcal{U}_z$, seja $r_U \geq 1$ o menor natural tal que $f^{r_U}(x) \in U$.

(ii) O conjunto

$$A_U = \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : k < r_U \text{ e } f^k(x) \in \mathring{V} \right\}$$

é não-vazio ($0 \in A_U$) e majorado (por r_U). Logo, tem máximo. Seja α_U o seu máximo.

(iii) Como $x \in \mathcal{D}_f$ e X não tem pontos isolados, $f^n(x) \in \mathcal{D}_f$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Logo, a órbita de $f^{r_U}(x)$ intersesta todos os abertos não-vazios de X . Seja $\beta \geq r_U$ o menor natural tal que $f^\beta(x) \in \mathring{V}$.

As três redes anteriores foram construídas de tal modo que se tem:

$$f^{\alpha_U}(x), f^{\beta_U}(x) \in \mathring{V} \quad \forall U \in \mathcal{U}_z \quad (2.4)$$

$$f^{\alpha_U+1}(x), f^{\alpha_U+2}(x), \dots, f^{\beta_U-1}(x) \notin \mathring{V} \quad (2.5)$$

$$f^{r_U}(x) \in U. \quad (2.6)$$

Pela condição (2.4), a rede $(f^{\alpha_U}(x))_{U \in \mathcal{U}}$ está inteiramente contida no compacto V . Logo, existe um ponto $y_0 \in V$ de acumulação da rede. Além disso, como $y_0 \in V \subseteq \mathcal{D}_f$, a órbita de y_0 por f é densa.

Como X não tem pontos isolados, a órbita $\text{Orb}_f(y_0)$ intersesta todos os abertos não-vazios de X uma infinidade de vezes. Seja $M \geq 1$ o menor natural tal que $f^M(y_0) \in \mathring{V}$. Por continuidade de f , existe um aberto V' tal que $y_0 \in V'$ e

$$v \in V' \quad \Rightarrow \quad f^M(v) \in \mathring{V}.$$

Defina-se

$$\mathcal{W} = \{W \subseteq X : y_0 \in W \text{ e } W \text{ é aberto}\}$$

que é uma família dirigida com a inclusão. Logo, o produto cartesiano $\mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$ é também dirigido com a inclusão. Consideremos agora a seguinte rede indexada por $\mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$:

(iv) Como y_0 é ponto de acumulação da rede $(f^{\alpha_U}(x))_{U \in \mathcal{U}_z}$, para toda a vizinhança aberta W de y_0 e todo o $U \in \mathcal{U}_z$, existe um $U' \subseteq U$ tal que $f^{\alpha_{U'}}(x) \in W$.

(v) Dado $(W, U) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$, seja $U' \subseteq U$ tal que $f^{\alpha_{U'}}(x) \in W$. Definimos

$$y_{(W,U)} = f^{\alpha_{U'}}(x).$$

Dada uma vizinhança aberta W de y_0 e $U \in \mathcal{U}_z$, temos que, para todo o $W' \in \mathcal{W}$,

$$W' \subseteq W \quad \Rightarrow \quad y_{(W',U)} \in W' \subseteq W.$$

Ou seja, y_0 é limite da rede $(y_{(W,U)})_{(W,U) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z}$. Além disso, para todo o $U \in \mathcal{U}_z$ e $W \in \mathcal{W}$,

$$W \subseteq V' \quad \Rightarrow \quad y_{(W,U)} \in V' \quad \text{e} \quad \exists U' \subseteq U: f^M(y_{(W,U)}) = f^{M+\alpha_{U'}}(x) \in \mathring{V}.$$

Então, $f^{\alpha_{U'}}(x)$ e $f^{M+\alpha_{U'}}(x)$ pertencem ambos a $\mathring{V}$. Como, pelas condições (2.4) e (2.5), nenhum iterado entre $\alpha_{U'}$ e $\beta_{U'}$ pode pertencer a $\mathring{V}$, temos

$$0 < r_{U'} - \alpha_{U'} \leq \beta_{U'} - \alpha_{U'} \leq M. \quad (2.7)$$

Lema 2.2.2. *Existe $1 \leq \ell \leq M$ tal que, para todo o $(W_0, U_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$, existe (W, U) tal que*

$$(W, U) \geq (W_0, U_0) \quad \text{e} \quad r_{U'} - \alpha_{U'} = \ell.$$

Demonstração. Suponhamos que não existe um tal ℓ . Então, para cada $1 \leq \ell \leq M$, seja $(W_{0,\ell}, U_{0,\ell}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$ tal que $r_{U'} - \alpha_{U'} \neq \ell$ para todo o $(W, U) \geq (W_{0,\ell}, U_{0,\ell})$, onde U' é tal que $y_{(U,W)} = f^{\alpha_{U'}}(x)$. Definimos

$$W_0 = \bigcap_{\ell=1}^M W_{0,\ell} \cap V' \quad \text{e} \quad U_0 = \bigcap_{\ell=1}^M U_{0,\ell}$$

que pertencem a $\mathcal{W}$ e $\mathcal{U}_z$, respetivamente, por serem a interseção de vizinhanças abertas de y_0 e z , respetivamente. Note-se que, sempre que $(W, U) \geq (W_0, U_0)$, se tem

$$(W, U) \geq (W_0, U_0) \geq (W_{0,\ell}, U_{0,\ell}) \quad \forall 1 \leq \ell \leq M$$

e

$$r_{U'} - \alpha_{U'} \neq \ell.$$

Contudo, $W \subseteq W_0 \subseteq V'$, logo vale a condição (2.7), o que contradiz a afirmação anterior. $\square$

Seja ℓ dado pelo Lema 2.2.2. Como y_0 é limite da rede $(y_{(W,U)})_{(W,U) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z}$ e f é contínua, temos que $f^\ell(y_0)$ é limite da rede $(f^\ell(y_{(W,U)}))_{(W,U) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z}$. Assim, se A for uma vizinhança de $f^\ell(y_0)$, existe $(W_0, U_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$ tal que $f^\ell(y_{(W,U)}) \in A$ para todo o $(W, U) \geq (W_0, U_0)$. Por outro lado, dada uma vizinhança aberta B de z , $B \cap U_0$ é também vizinhança aberta de z . Logo, $B \cap U_0 \in \mathcal{U}_z$ e, portanto, $(W_0, B \cap U_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z$ e existe $(W, U) \geq (W_0, B \cap U_0)$ tal que $r_{U'} - \alpha_{U'} = \ell$. Consequentemente,

$$f^\ell(y_{(W,U)}) = f^\ell(f^{\alpha_{U'}}(x)) = f^{\ell+\alpha_{U'}}(x) = f^{r_{U'}-\alpha_{U'}+\alpha_{U'}}(x) = f^{r_{U'}}(x) \in U' \subseteq B \cap U_0 \subseteq B.$$

Mas então z é ponto de acumulação da rede $\left(f^\ell(y_{(W,U)})\right)_{(W,U) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}_z}$. Como X é Hausdorff, o limite desta rede é único; e, portanto, $f^\ell(y_0) = z$. Logo, por X não ter pontos isolados, z tem órbita densa, o que contradiz a escolha de $z \notin \mathcal{D}_f$. Concluimos este modo que $\mathring{\mathcal{D}}_f = \emptyset$.

(b) No caso em que X é localmente compacto mas não compacto, a prova é análoga à anterior, tendo apenas de recorrer ao compactificado de Alexandroff de X . Seja $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ o compactificado com um ponto de X , que existe por X ser localmente compacto. Pelo Lema 1.1.17, todo o ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças compactas em X . Como acima, suponhamos que $\mathring{\mathcal{D}}_f \neq \emptyset$. Sejam $x \in \mathring{\mathcal{D}}_f$ e $V \subseteq X$ uma vizinhança compacta de x (em X) tal que $V \subseteq \mathcal{D}_f$. Como os abertos de X são abertos em $\tilde{X}$, V é uma vizinhança compacta de x também em $\tilde{X}$. E, como X é denso em $\tilde{X}$, conjuntos densos em X são densos em $\tilde{X}$; em particular, $\text{Orb}_f(x)$ é denso em $\tilde{X}$. Consideremos $z = \infty \in \tilde{X}$ e prossigamos de modo análogo ao caso em que X é compacto. Obtemos um ponto $y_0 \in \mathcal{D}_f$ e $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $f^\ell(y_0) = z = \infty \notin X$, que é impossível pois a imagem de f é um subconjunto de X e $X \neq \tilde{X}$ porque X não é compacto. $\square$

3. Dinâmica Linear

Tendo reunido no capítulo anterior informação essencial sobre sistemas dinâmicos em espaços topológicos, a segunda parte da dissertação é reservada a sistemas dinâmicos em contexto linear. Veremos que, em espaços vetoriais topológicos de dimensão finita, a dinâmica de qualquer operador linear é relativamente simples, nunca havendo, por exemplo, vetores com órbita densa. A situação muda drasticamente em espaços de dimensão infinita, onde serão apresentados exemplos de operadores transitivos, *mixing* e caóticos, contrariando a ideia de que o caos só ocorre em contexto não-linear.

A notação usada em Dinâmica Topológica muda ligeiramente em contexto linear. Como já foi referido, abreviaremos a expressão *função linear contínua* para *operador*, que representaremos por T ao invés de f . Como é tradição em Análise Funcional, escreveremos $T(x)$ na forma Tx . Para o produto de espaços e operadores, seguimos a notação de soma direta e denotamos o produto de espaços vetoriais por $E \oplus F$, e o produto de operadores por $T \oplus S: E \oplus F \rightarrow E \oplus F$.

Dado um operador $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ num espaço vetorial topológico $\mathcal{X}$, a um vetor com órbita densa chamamos *hipercíclico*, e representamos o conjunto dos vetores hipercíclicos por $HC(T)$, em vez de $\mathcal{D}_T$. Se um operador admite um vetor hipercíclico, dizemos que esse operador é hipercíclico. De notar que todo o espaço vetorial métrico e separável se encontra nas condições do Teorema 2.1.19, pelo que, num tal espaço, um operador é hipercíclico se e só se for topologicamente transitivo.

O conteúdo deste e do próximo capítulo baseia-se na referência [26].

3.1. Operadores em espaços de dimensão finita

Nesta secção, os espaços vetoriais têm dimensão finita mas não são degenerados, isto é, não se reduzem ao vetor nulo. Vimos na Secção 2.2 que não há funções contínuas minimais em espaços de dimensão finita. Essa propriedade é ainda mais restritiva no caso de operadores lineares.

Teorema 3.1.1. *Não há operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita.*

Demonstração. Suponhamos que existe um operador $T: \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$ hipercíclico, para algum $N \in \mathbb{N}$. Consideremos $x \in HC(T)$. O conjunto $\{x, Tx, T^2x, \dots, T^{N-1}x\}$ forma

uma família linearmente independente de vetores. Se assim não fosse, existiria algum $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tal que $T^k x \in \text{span}(\{x, Tx, \dots, T^{N-1}x\} \setminus \{T^k x\})$. Logo, pela linearidade de T ,

$$T^n x \in \text{span}(\{x, Tx, \dots, T^{N-1}x\} \setminus \{T^k x\}) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

e, portanto,

$$\text{Orb}_T(x) \subset \text{span}(\{x, Tx, \dots, T^{N-1}x\} \setminus \{T^k x\}).$$

Contudo, este é um subespaço próprio de $\mathbb{K}^N$, o que contradiz a densidade de $\text{Orb}_T(x)$.

Logo, o conjunto $\mathcal{B} = \{x, Tx, T^2x, \dots, T^{N-1}x\}$ é uma base de $\mathbb{K}^N$.

Fixado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por x ser hipercíclico e $\mathbb{K}^N$ não ter pontos isolados, existe uma sucessão estritamente crescente de naturais $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} x = \alpha x$. Então, como T é contínua, tem-se para todo o $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} T^j x = \lim_{k \rightarrow +\infty} T^j T^{n_k} x = T^j \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} x \right) = T^j(\alpha x) = \alpha T^j x.$$

Seja $z \in \mathbb{K}^N$ escrito na base $\mathcal{B}$, digamos,

$$z = \alpha_0 x + \dots + \alpha_{N-1} T^{N-1} x$$

para escalares (únicos) $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq N-1}$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} z &= \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} (\alpha_0 x + \dots + \alpha_{N-1} T^{N-1} x) \\ &= \alpha_0 \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} x + \dots + \alpha_{N-1} \lim_{k \rightarrow +\infty} T^{n_k} T^{N-1} x \\ &= \alpha \alpha_0 x + \dots + \alpha \alpha_{N-1} T^{N-1} x = \alpha z. \end{aligned}$$

Considerando a representação matricial A do operador T relativamente à base canónica de $\mathbb{K}^N$, então $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^{n_k} = \alpha \text{Id}$ na topologia usual de $\mathbb{K}^{N^2}$. Como o determinante é uma função contínua, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A^{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A)^{n_k} = \alpha^N.$$

Contudo, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A)^{n_k}$ é zero se $\det(A) < 1$, ou é 1 se $\det(A) = 1$, ou é $+\infty$ se $\det(A) > 1$. Como a escolha de $\alpha > 0$ é arbitrária, obtemos uma contradição. Assim, T não pode ser hipercíclico. $\square$

3.1.1 Exemplos

Apresentamos agora alguns exemplos que ilustram o comportamento dinâmico de operadores lineares.

Exemplo 3.1.1. Dado $N \in \mathbb{N}$, para a identidade $\text{Id}: \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$ tem-se $\text{Per}_1(\text{Id}) = \text{Rec}(\text{Id}) = \mathbb{K}^N$.

Exemplo 3.1.2. Todos os operadores lineares possuem pelo menos um ponto recorrente, o vetor nulo, que até é um ponto fixo. Há operadores em que o conjunto de pontos recorrentes se reduz a este vetor. Consideremos o operador $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $Tx = ax$, sendo $|a| < 1$. Então, $\text{Rec}(T) = \{0\} = \omega(x, T)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.3. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as rotações $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, representadas pelas matrizes

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta) & -\sin(2\pi\theta) \\ \sin(2\pi\theta) & \cos(2\pi\theta) \end{bmatrix}$$

onde $\theta \in]0, 1[$. Tal como as restrições à circunferência unitária, estudadas no Exemplo 2.1.8, se $\theta = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si, temos que todo o vetor é periódico de período q . Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, a restrição de R_θ à circunferência unitária é minimal, mas a sua extensão como operadores em $\mathbb{R}^2$ não só não admite vetores hipercíclicos como, de facto, $\|R_\theta(x)\| = \|x\|$ para todo o x , o que implica que cada órbita está contida numa circunferência centrada em $(0, 0)$. Note-se, porém, que em ambos os casos todo o vetor é recorrente e que, pelo Teorema 2.1.2, R_θ é recorrente.

Exemplo 3.1.4. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ e em $\mathbb{C}^N$ um operador T com valores próprios de módulo diferente de 1. Se $v \in \mathbb{C}^N$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| < 1$, tem-se $T^n v = \lambda^n v \xrightarrow{n} 0$; se $|\lambda| > 1$, tem-se $\|T^n v\| = \|\lambda^n v\| = |\lambda|^n \|v\| \xrightarrow{n} +\infty$. No primeiro caso, temos que $\omega(x, T) = \{0\}$ e no segundo $\omega(x, T) = \emptyset$. Por exemplo, seja $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ o operador representado na base canónica pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Note-se que $T^4(0, 0, a) = i^4 a = a$ para todo o $a \in \mathbb{C}$; e que $T^n(a, b, 0) = 3^n(a, b, 0)$ para todo o par $a, b \in \mathbb{C}$. Logo, os vetores da forma $(0, 0, a)$, com $a \in \mathbb{C}$, são periódicos, enquanto os restantes não são sequer recorrentes, uma vez que

$$\|T^n(a, b, c)\| = \|3^n(a, b, 0) + i^n(0, 0, c)\| \geq 3^n \sqrt{|a|^2 + |b|^2} + |c| \xrightarrow{n} +\infty.$$

E, portanto, $\text{Rec}(T) = \langle (0, 0, 1) \rangle$, com interior vazio.

3.2. Operadores em espaços de dimensão infinita

Nesta secção construímos vários exemplos de operadores com alguma variedade dinâmica, e discutimos condições suficientes para que um operador seja hipercíclico ou *mixing* ou caótico.

3.2.1 Exemplos de operadores hipercíclicos

Já sabemos que não existem operadores hipercíclicos em espaços vetoriais de dimensão finita, nem em espaços vetoriais de dimensão infinita que não sejam separáveis. Começemos por analisar os primeiros exemplos de que há registo de operadores hipercíclicos em espaços vetoriais de dimensão infinita (respetivamente, ℓ^p e c_0).

Exemplo 3.2.1 (Operadores de Rolewicz). Seja $\mathcal{X}$ um dos espaços $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ou $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ e consideremos o operador *shift*

$$\begin{aligned} B: \quad \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, a aplicação linear $B_\lambda = \lambda B$ é tal que

$$B_\lambda (x_n)_n = (\lambda x_{n+1})_n \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}.$$

Temos ainda que, se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$,

$$\|B_\lambda x\| = \|\lambda (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}\| \leq |\lambda| \|x\|.$$

Logo, B_λ é contínua. Além disso, se $|\lambda| \leq 1$,

$$\|B_\lambda^n x\| \leq |\lambda|^n \|x\| \leq \|x\|$$

e, portanto, B_λ não é hipercíclico. Pelo contrário:

Lema 3.2.1. Se $|\lambda| > 1$, o operador B_λ é hipercíclico.

Demonstração. Como o espaço c_{00} é denso em $\mathcal{X}$, dados abertos não-vazios $U, V \subseteq \mathcal{X}$, existem $x \in U, y \in V$ da forma

$$x = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \quad \text{e} \quad y = (y_1, \dots, y_N, 0, 0, \dots) \neq (0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

para algum $N \in \mathbb{N}$ natural, e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\begin{aligned} B(x; \varepsilon) &= \{z \in \mathcal{X}: \|z - x\| < \varepsilon\} \subseteq U \\ B(y; \varepsilon) &= \{y \in X: \|z - y\| < \varepsilon\} \subseteq V. \end{aligned}$$

Dado $n \geq N$, consideremos o vetor $r_n = (r_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, onde

$$r_k^n = \begin{cases} \lambda^{-n} y_{k-n} & \text{se } n < k \leq N + n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\|r_n\| = |\lambda|^{-n} \|y\|$ e, escolhendo $n > -\log_{|\lambda|}(\varepsilon/\|y\|)$, obtemos

$$\|r_n\| < |\lambda|^{\log_{|\lambda|}(\varepsilon/\|y\|)} \|y\| = \varepsilon$$

e, portanto, $r_n + x \in B(x; \varepsilon)$. Logo, se $z = r_n + x$ então $z \in B(x; \varepsilon) \subseteq U$ e $B_\lambda^n z = y \in V$.

Ou seja, $z \in U \cap B_\lambda^{-n}(V)$, o que confirma que B_λ é hipercíclico. $\square$

Os próximos exemplos, descritos por MacLane e Birkhoff, dizem respeito a funções inteiras, pelo que o espaço onde atuam é $H(\mathbb{C})$, que é de Fréchet.

Exemplo 3.2.2 (Operadores de Birkhoff). Seja $a \in \mathbb{C}$. Consideremos em $H(\mathbb{C})$ a aplicação

$$\begin{aligned} T_a: H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto T_a f \end{aligned}$$

em que $T_a f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $T_a f(z) = f(z + a)$. Para cada a , a função T_a é claramente linear. E é também contínua. De facto, seja $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 \geq |a|$. Temos que $p_{k+K_0}(f) \geq p_k(T_a f)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, uma vez que, definindo $M_k(f) = \{|f(z)|: |z| \leq k\}$, se tem

$$|f(z + a)| \in M_k(T_a f) \quad \text{e} \quad |z| \leq k \quad \Rightarrow \quad |z + a| \leq |z| + |a| \leq k + K_0 \quad \text{e} \quad |f(z + a)| \in M_{k+K_0}(f).$$

Logo, $M_k(T_a f) \subseteq M_{k+K_0}(f)$, o que implica que T_a é contínuo.

Lema 3.2.2. O operador T_a é hipercíclico para qualquer $a \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$ abertos não-vazios, $f \in U$ e $g \in V$. Pelas propriedades dos espaços de Fréchet, temos que existem $\varepsilon_f, \varepsilon_g > 0$ e $K_f, K_g \in \mathbb{N}$ tais que

$$\{h \in H(\mathbb{C}): p_{K_f}(f - h) < \varepsilon_f\} \subseteq U \quad \text{e} \quad \{h \in H(\mathbb{C}): p_{K_g}(g - h) < \varepsilon_g\} \subseteq V.$$

Podemos supor que $\varepsilon_f = \varepsilon_g = \varepsilon$ e $K_f = K_g = K$, tomamos se necessário $\varepsilon = \min(\varepsilon_f, \varepsilon_g)$, $K = \max(K_f, K_g)$ e usando a condição de as semi-normas serem crescentes.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que os discos fechados de raio K e centrados em 0 e na , $B[0; K]$, $B[na; K]$, respetivamente, são disjuntos (basta tomar $n > |a|/2K$). Dadas vizinhanças L_0 e L_{na} de $B[0; K]$ e $B[na; K]$, respetivamente, consideremos a aplicação

$$h: L_0 \cup L_{na} \rightarrow L_0 \cup L_{na}$$

dada por $h(z) = f(z)$ se $z \in L_0$ e $h(z) = g(z - na)$ se $z \in L_{na}$. Como os discos são fechados e disjuntos, h é holomorfa no seu domínio. Logo, pelo Teorema 1.3.2, existe um polinómio q definido em $\mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{|z| \leq K} |f(z) - q(z)| &< \varepsilon \\ \sup_{|z+na| \leq K} |g(z - na) - q(z)| &= \sup_{|z| \leq K} |g(z) - q(z + na)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $p_K(f - q) < \varepsilon$ e $p_K(g - T_a^n q) < \varepsilon$. Então $q \in U \cap T_a^{-n}(V)$, o que confirma que T_a é hipercíclico. $\square$

Exemplo 3.2.3 (Operador de MacLane). Consideramos, mais uma vez, o espaço $H(\mathbb{C})$ das funções holomorfas em $\mathbb{C}$ e seja D o operador derivada

$$\begin{aligned} D: H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto f'. \end{aligned}$$

Sabemos que D é linear e contínuo em $H(\mathbb{C})$ (cf. Exemplo 1.2.6).

Lema 3.2.3. O operador D é hipercíclico.

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$ abertos não-vazios. Como os polinómios formam um subconjunto denso de $H(\mathbb{C})$, sejam $p \in U$ e $q \in V$ polinómios. Suponhamos que p e q são da forma

$$p(z) = \sum_{j=0}^N a_j z^j \quad q(z) = \sum_{j=0}^N b_j z^j$$

em que $a_N \neq 0$ ou $b_N \neq 0$. Sejam $K \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\{h \in H(\mathbb{C}) : p_K(h - p) < \varepsilon\} \subseteq U$. Para cada $n > N$, consideremos

$$r_n(z) = p(z) + \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} b_j z^{n+j}$$

Tem-se, para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$(D^n r_n)(z) = (D^n p)(z) + \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} b_j D^n(z^{j+n}) = 0 + \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} b_j \frac{(n+j)!}{j!} z^j = q(z).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} p_K(r_n - p) &= \sup_{|z| \leq K} |r_n(z) - p(z)| = \sup_{|z| \leq K} \left| \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} b_j z^{n+j} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} |b_j| \sup_{|z| \leq K} |z^{n+j}| \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{j!}{(n+j)!} |b_j| K^{j+n} \xrightarrow{n} 0 \end{aligned}$$

pois a sucessão $\left(\frac{K^{j+n} j!}{(n+j)!} \right)_n$ tem limite zero, qualquer que seja $j \in \mathbb{N}_0$ e $K \in \mathbb{R}$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que podemos supor maior do que N , tal que $p_K(r_{n_0} - p) < \varepsilon$, o que implica que $r_{n_0} \in U$. Como $D^{n_0} r_{n_0} = q \in V$, concluímos que $r_{n_0} \in U \cap D^{-n_0}(V)$. E, portanto, D é hipercíclico. $\square$

3.2.1.1 Caos em contexto linear

Recorde-se que, em espaços métricos completos sem pontos isolados, a sensibilidade às condições iniciais é consequência da transitividade e da existência de um conjunto denso de pontos periódicos (cf. Subsecção 2.1.12). Em contexto linear, a transitividade é condição suficiente para se ter sensibilidade às condições iniciais.

Proposição 3.2.4. Se T é um operador hipercíclico de um espaço de Fréchet $\mathcal{F}$, então T é sensível às condições iniciais relativamente a qualquer métrica invariante por translações em $\mathcal{F}$ (isto é, tal que $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{F}$) que induza a topologia de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Sejam d uma tal métrica (que existe sempre em espaços vetoriais normados), $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $d(x_0, 0) = \delta$ para algum $x_0 \in \mathcal{F}$. Fixemos $x \in \mathcal{F}$ e abertos não-vazios $U_\varepsilon = B(0; \varepsilon)$ e $V_\delta = \mathcal{F} \setminus B[0; \delta]$. Uma vez que T é hipercíclico, sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $z \in U_\varepsilon$ tais que $T^n z \in V_\delta$. Então $x + z - x \in U_\varepsilon$ e $T^n(x + z) - T^n x = T^n z \in V_\delta$. Ou seja: para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathcal{F}$, existem $n \in \mathbb{N}_0$ e $z \in \mathcal{F}$ tais que $d(x, z) < \varepsilon$ e $d(T^n z, T^n x) \geq \delta$. Logo T é sensível às condições iniciais. $\square$

A existência de órbitas periódicas, além do vetor nulo, pode ser caracterizada pelo espectro do operador.

Proposição 3.2.5. O conjunto de vetores periódicos de um operador $T: E \rightarrow E$ num espaço vetorial topológico complexo E é dado por

$$\text{Per}(T) = \text{span} \left\{ v \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[: Tv = e^{2\pi i \alpha} v \right\}.$$

Demonstração. Seja $Y = \text{span} \left\{ v \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[: Tv = e^{2\pi i \alpha} v \right\}$. Começemos por provar que $Y \subseteq \text{Per}(T)$. Seja $x \in Y$. Existem $N \in \mathbb{N}$ e $(\alpha_j \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[)_{1 \leq j \leq N}$ e $(v_j \in E)_{1 \leq j \leq N}$ tais que

$$Tv_j = e^{2\pi i \alpha_j} v_j \quad \text{e} \quad x = v_1 + \dots + v_N,$$

onde usamos o facto de λv_j ser um vetor próprio associado a α_j , $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Cada α_j pode ser escrito como fração irredutível $\frac{p_j}{q_j}$, com $q_j \in \mathbb{N}$, $p_j \in \{0, 1, \dots, q_j - 1\}$. Então, para todo o $1 \leq j \leq N$,

$$T^{q_j} v_j = e^{2\pi i p_j} v_j = v_j.$$

E, se $q = q_1 q_2 \dots q_N$, tem-se $T^q v_j = v_j$ para todo o $1 \leq j \leq N$. Logo,

$$T^q x = T^q (v_1 + \dots + v_N) = v_1 + \dots + v_N = x$$

e, portanto, x é periódico.

Provemos agora que $\text{Per}(T) \subseteq Y$. Seja $x \in E$ tal que $T^n x = x$. O polinómio complexo $p(z) = z^n - 1$ pode ser fatorizado em

$$p(z) = \prod_{j=1}^n (z - \lambda_j)$$

onde $\lambda_j = e^{2\pi i \frac{j}{n}}$, sendo todos distintos. E o conjunto de polinómios

$$p_k(z) = \prod_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq k} (z - \lambda_j),$$

onde $1 \leq k \leq n$, é uma base do espaço dos polinómios complexos de grau menor que n . De facto, este espaço tem dimensão n ; e, se $\beta_1 p_1 + \dots + \beta_n p_n = 0$, então $p_k(\lambda_j) = 1$ se $k = j$ e $p_k(\lambda_j) = 0$ se $k \neq j$, logo

$$\beta_1 p_1(\lambda_k) + \dots + \beta_n p_n(\lambda_k) = \beta_k = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Em particular, existem $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ tais que $1 = \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_n p_n$. Então

$$\text{Id} = \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j(T)$$

e, em particular, $x = \sum_{j=1}^n \gamma_j p_j(T)x$. Consequentemente, se $y_j = p_j(T)x$, $1 \leq j \leq n$, então $(T - \lambda_j)y_j = p(T)x = 0$ e, portanto, y_j é vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda_j = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$. Finalmente, note-se que $y_j \in Y$ para todo o j . $\square$

3.2.1.2 Critérios de hiperciclicidade

Em geral, é difícil provar que um dado operador é hipercíclico, *mixing* ou caótico a partir da definição. Por isso, procuraram-se condições simples de verificar que detetem quando estas propriedades são válidas.

Teorema 3.2.6 (Critério de Godefroy-Shapiro). *Seja T um operador num espaço de Fréchet $\mathcal{F}$. Definam-se*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_0 &= \text{span} \{x \in \mathcal{F} : Tx = \lambda x \text{ para algum } |\lambda| < 1\} \\ \mathcal{Y}_0 &= \text{span} \{x \in \mathcal{F} : Tx = \lambda x \text{ para algum } |\lambda| > 1\} \\ \mathcal{Z}_0 &= \text{span} \left\{x \in \mathcal{F} \mid \exists \alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[: Tx = e^{2\pi i \alpha} x\right\}.\end{aligned}$$

- (a) Se $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ forem densos, então T é *mixing*.
 (b) Se $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{Y}_0$ e $\mathcal{Z}_0$ forem densos, então T é caótico.

Demonstração. (a) Sejam $U, V \subseteq \mathcal{F}$ abertos não-vazios, $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in \mathcal{X}_0 \cap U$ e $y = \sum_{j=1}^l \beta_j y_j \in \mathcal{Y}_0 \cap V$, onde

- $\lambda_i, \gamma_j \in \mathbb{C}$, $|\lambda_i| < 1$ e $|\gamma_j| > 1$, para todo o $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$
- $Tx_i = \lambda_i x_i$, para todo o $1 \leq i \leq k$
- $Ty_j = \gamma_j y_j$, para todo o $1 \leq j \leq l$

que existem por $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ serem densos. Então,

$$T^n x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i^n x_i \xrightarrow{n} 0.$$

Consideremos a sucessão $(u_n)_n$ de termo geral

$$u_n = \sum_{j=1}^l \frac{1}{\gamma_j^n} \beta_j y_j.$$

Note-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ e que $T^n u_n = y$. Logo,

$$x + u_n \xrightarrow{n} x \text{ e } T^n(x + u_n) = T^n x + y \xrightarrow{n} y.$$

Então existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $T^n u_n + x \in U$ para $n \geq N_1$ e $T^n(x + u_n) \in V$ para $n \geq N_2$. Se $n \geq N_0 = \max(N_1, N_2)$, temos

$$T^n(x + u_n) \in T^n(U) \cap V.$$

E, portanto, T é *mixing*.

(b) Por (a) T é *mixing*, logo hipercíclico. Se $\mathcal{Z}_0$ também for denso, pela Proposição 3.2.5 T é caótico. $\square$

É possível enfraquecer as condições do Teorema 3.2.6, recorrendo-se a conjuntos $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ menos exigentes.

Teorema 3.2.7 (Critério de Kitai). *Seja T um operador num espaço de Fréchet $\mathcal{F}$. Se existirem subconjuntos densos $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{F}$ e uma função (não necessariamente contínua) $S: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ tais que, para todo o $x \in \mathcal{X}_0$ e $y \in \mathcal{Y}_0$, se tem*

$$(i) \lim_n T^n x = 0;$$

$$(ii) \lim_n S^n y = 0;$$

$$(iii) TSy = y;$$

então T é *mixing*.

Demonstração. Dados abertos não vazios $U, V \subseteq \mathcal{F}$, sejam $x \in \mathcal{X}_0 \cap U$ e $y \in \mathcal{Y}_0 \cap V$, que existem por $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ serem densos. Consideremos a sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = S^n y$. Note-se que, da hipótese (iii) resulta que $T^n S^n y = y$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por (i), tem-se $\lim_n T^n x = 0$ e por (ii) tem-se $\lim_n u_n = 0$. Assim,

$$x + u_n \xrightarrow{n} x \quad \text{e} \quad T^n(x + u_n) = T^n x + T^n S^n y = T^n x + y \xrightarrow{n} y.$$

Logo, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + u_n \in U$ e $T^n(x + u_n) \in V$ para todo o $n \geq N_0$. E, portanto, para todo o $n \geq N_0$,

$$T^n(x + u_n) \in T^n(U) \cap V.$$

Logo T é *mixing*. $\square$

Se, em vez de se garantir que as sucessões do argumento anterior convergem para 0, se supuser apenas que alguma sub-sucessão converge para 0, a prova anterior não garante que T é *mixing*. Mas mostra que T é *weakly mixing*.

Teorema 3.2.8 (Critério de Gethner-Shapiro). *Seja T um operador num espaço de Fréchet $\mathcal{F}$. Se existirem subconjuntos densos $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{F}$, uma função $S: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ e uma sucessão estritamente crescente de naturais $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que, para quaisquer $x \in \mathcal{X}_0$ e $y \in \mathcal{Y}_0$, se tem:*

$$(i) \lim_k T^{n_k} x = 0;$$

$$(ii) \lim_k S^{n_k} y = 0;$$

$$(iii) TSy = y;$$

então T é weakly mixing.

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq \mathcal{F}$ abertos não-vazios. Temos de provar que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$. Sejam $x_j \in \mathcal{X}_0 \cap U_j$ e $y_j \in \mathcal{Y}_0 \cap V_j$ para $j = 1, 2$. Pelas condições (i) e (ii), temos que $x_j + S_k y_j \xrightarrow{k} x_j$ e $T^{n_k}(x_j + S_k y_j) = T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_k y_j = T^{n_k} x_j + y_j \xrightarrow{k} y_j$, para $j = 1, 2$. Logo, existem $K_1, K_2 \in \mathbb{N}_0$ tais que $x_1 + S^{n_k} y_1 \in U_1$ e $T^{n_k}(x_1 + S^{n_k} y_1) \in V_1$ se $k \geq K_1$, e $x_2 + S^{n_k} y_2 \in U_2$ e $T^{n_k}(x_2 + S^{n_k} y_2) \in V_2$ se $k \geq K_2$. Então, para $k \geq \max(K_1, K_2)$ e $j = 1, 2$, temos

$$T^{n_k}(x_j + S^{n_k} y_j) \in T^{n_k}(U_j) \cap V_j.$$

Logo, $n_k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. E, portanto, T é *weakly mixing*. □

Se, na prova do Teorema 3.2.8, em vez de se utilizar uma função $S: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ e os seus iterados $(S^{n_k})_k$ se considerarem funções S_k independentes, obtemos um critério de hiperciclicidade.

Teorema 3.2.9 (*Hypercyclicity Criterion*). *Seja T um operador sobre um espaço de Fréchet $\mathcal{F}$. Suponhamos que existem conjuntos densos $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{F}$, uma sucessão estritamente crescente de naturais $(n_k)_k$ e funções $S_k: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ tais que, para $x \in \mathcal{X}_0$ e $y \in \mathcal{Y}_0$, se tem:*

$$(i) \lim_k T^{n_k} x = 0;$$

$$(ii) \lim_k S_k y = 0;$$

$$(iii) \lim_k T^{n_k} S_k y = y.$$

Então T é hipercíclico.

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq \mathcal{F}$ abertos não-vazios e $x_j \in \mathcal{X}_0 \cap U_j, y_j \in \mathcal{Y}_0 \cap V_j$, para $j = 1, 2$. Pelas condições (i) e (ii), tem-se $x_j + S_k y_j \xrightarrow{k} x_j$ e $T^{n_k}(x_j + S_k y_j) = T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_k y_j = T^{n_k} x_j + y_j \xrightarrow{k} y_j$, para $j = 1, 2$. Logo, existe $K_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $x_j + S_k y_j \in U_j$ e $T^{n_k}(x_j + S_k y_j) \in V_j$, para $j = 1, 2$, se $k \geq K_0$. Então, para $k \geq K_0$ e $j = 1, 2$,

$$T^{n_k}(x_j + S_k y_j) \in T^{n_k}(U_j) \cap V_j.$$

Logo, $n_k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. E, portanto, T é hipercíclico. $\square$

Da investigação mais recente em Dinâmica Linear (cf. [25]) resulta que nenhum destes critérios é uma condição necessária para que a respetiva propriedade seja válida.

3.2.2 Aplicação dos critérios anteriores

Comecemos por visitar os operadores de Rolewicz, MacLane e Birkhoff (cf. Subsecção 3.2.1) para mostrar que são *mixing* e caóticos.

3.2.2.1 Os operadores de Rolewicz

Vamos usar o critério de Godefroy-Shapiro para provar que os operadores de Rolewicz B_μ , com $|\mu| > 1$, são *mixing* e caóticos. Consideraremos apenas o caso complexo uma vez que o caso real é consequência imediata deste uma vez que a complexificação de $\ell^p(\mathbb{R})$ e de $c_0(\mathbb{R})$ é $\ell^p(\mathbb{C})$ e $c_0(\mathbb{C})$, respetivamente.

Seja $\mathcal{X} = \ell^p(\mathbb{C})$, com $p \geq 1$, ou $\mathcal{X} = c_0(\mathbb{C})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| < 1$, então $e_\lambda = (\lambda^n)_n \in \mathcal{X}$. E tem-se $B_\mu e_\lambda = (\mu \lambda^{n+1})_n = \mu \lambda (\lambda^n)_n$, logo e_λ é vetor próprio de B_μ associado ao valor próprio $\mu \lambda$. Note-se que, os subespaços

$$\text{span} \left\{ e_\lambda : |\lambda| < \frac{1}{|\mu|} \right\} \quad \text{e} \quad \text{span} \left\{ e_\lambda : \frac{1}{|\mu|} < |\lambda| < 1 \right\}$$

são subespaços de $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ (definidos no Teorema 3.2.6), respetivamente. Mostremos que são densos.

Lema 3.2.10. Se $\Lambda \subseteq \mathbb{D}$ for um conjunto com um ponto de acumulação em $\mathbb{D}$, então, o espaço $\text{span} \{ e_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ é denso nos espaços $\ell^p(\mathbb{C})$, com $p \geq 1$, e $c_0(\mathbb{C})$.

Demonstração. Escrevemos $\mathcal{X} = \ell^p(\mathbb{C})$, $p \geq 1$, ou $\mathcal{X} = c_0(\mathbb{C})$. Pelo Teorema 1.2.7, basta mostrar que se um funcional linear $f \in \mathcal{X}^*$ é tal que $f(e_\lambda) = 0$ para todo o $\lambda \in \Lambda$, então $f = 0$.

Como $(\ell^p)^* = \ell^q$ onde $q = \frac{p}{p-1}$ se $p > 1$, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ e $c_0^* = \ell^1$, a função f pode ser representada por um vetor $u = (u_n)_n \in \mathcal{X}^*$ e, nesse caso, $f((x_n)_n) = \sum_{n=1}^\infty x_n u_n$. Em particular, $f(e_\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n u_n$. Então a função $\lambda \in \mathbb{D} \mapsto f(e_\lambda)$ define uma série de potências convergente em $\mathbb{D}$; logo, define uma função holomorfa φ em $\mathbb{D}$. Assim, se $\varphi(\lambda) = 0$ para $\lambda \in \Lambda$, pelo Teorema 1.3.3, $\varphi(\lambda) = 0$ para todo o $\lambda \in \mathbb{D}$. $\square$

Consideremos os conjuntos $\Lambda_1 = \left\{ \lambda: |\lambda| < \frac{1}{|\mu|} \right\}$ e $\Lambda_2 = \left\{ \lambda: \frac{1}{|\mu|} < |\lambda| < 1 \right\}$. Estão contidos em $\mathbb{D}$ uma vez que $|\mu| > 1$; e possuem algum ponto de acumulação (na verdade, Λ_1 é um disco não-vazio contido em $\mathbb{D}$ e Λ_2 é um anel não-vazio). Logo, pelo Lema 3.2.10, os conjuntos $\text{span} \left\{ e_\lambda: |\lambda| < \frac{1}{|\mu|} \right\}$ e $\text{span} \left\{ e_\lambda: \frac{1}{|\mu|} < |\lambda| < 1 \right\}$ são densos. Consequentemente, $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ são densos. E, portanto, pelo Teorema 3.2.6, B_μ é *mixing*.

Finalmente, note-se que $\text{span} \left\{ e_\lambda: |\lambda| = \frac{1}{|\mu|} \text{ e } \lambda\mu \text{ tem ângulo racional} \right\} \subseteq \mathcal{Z}_0$ (sendo $\mathcal{Z}_0$ definido no Teorema 3.2.6). Defina-se $\Lambda_3 = \left\{ \lambda: |\lambda| = \frac{1}{|\mu|} \text{ e } \lambda\mu \text{ tem ângulo racional} \right\}$, cuja aderência é uma circunferência de raio $\frac{1}{|\mu|} < 1$, logo tem pontos de acumulação em $\mathbb{D}$. Do Lema 3.2.10 resulta que $\mathcal{Z}_0$ é denso em $\mathcal{X}$, e portanto B_μ é caótico se $|\mu| > 1$.

3.2.2.2 Os operadores de MacLane e de Birkhoff

Uma prova de que tanto o operador de MacLane como os operadores de Birkhoff são *mixing* e caóticos usando o critério de Godefroy-Shapiro pode ser feita por argumento análogo ao usado na secção anterior.

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos as funções

$$\begin{aligned} e_\lambda: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{\lambda z}. \end{aligned}$$

Tem-se $e_\lambda \in H(\mathbb{C})$ para todo o $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lema 3.2.11. [26, Lemma 2.34] *Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto com um ponto de acumulação. Então, o espaço $\text{span} \{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$.*

Consideremos o operador de MacLane. Sabemos que $D(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$. Ou seja, qualquer que seja o $\lambda \in \mathbb{C}$, a função e_λ é vetor próprio de D associado ao valor próprio λ . Definindo

$$\mathcal{X}_0 = \text{span} \{e_\lambda : |\lambda| < 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Y}_0 = \text{span} \{e_\lambda : |\lambda| > 1\}$$

vemos que os conjuntos $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ e $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ têm pontos de acumulação. Logo, $\mathcal{X}_0$ e $\mathcal{Y}_0$ são densos pelo Lema 3.2.11 e D é *mixing* pelo Teorema 3.2.6. Além disso, o conjunto $\mathcal{S}^1 = \overline{\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \text{ e } \lambda \text{ tem ângulo racional}\}}$ tem pontos de acumulação, pelo que o espaço

$$\mathcal{Z}_0 = \{e_\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \text{ e } \lambda \text{ tem ângulo racional}\}$$

é denso pelo Lema 3.2.11; e, portanto, D é caótico pelo Teorema 3.2.6.

Relativamente aos operadores de Birkhoff, o argumento é semelhante. Fixados $a \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, a função $T_a(e_\lambda)$ é definida por $(T_a e_\lambda)(z) = e^{\lambda(z+a)} = e^{a\lambda} e^{\lambda z} = e^{a\lambda} e_\lambda(z)$. Ou seja, a função e_λ é vetor próprio de T_a associado ao valor próprio $e^{a\lambda}$. Definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \text{span} \{e_\lambda : |e^{a\lambda}| < 1\} \\ \mathcal{Y}_0 &= \text{span} \{e_\lambda : |e^{a\lambda}| > 1\} \\ \mathcal{Z}_0 &= \left\{ e_\lambda : \frac{a\lambda}{2\pi i} \in \mathbb{Q} \right\} \end{aligned}$$

e $\Lambda_1 = e_a^{-1}(\mathbb{D})$, $\Lambda_2 = e_a^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ e $\Lambda_3 = \frac{2\pi i}{a}\mathbb{Q}$, vemos que os conjuntos Λ_1, Λ_2 e Λ_3 têm pontos de acumulação (por as suas imagens por e_a conterem pontos de acumulação). Logo, $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0$ e $\mathcal{Z}_0$ são densos pelo Lema 3.2.11. Então, pelo Teorema 3.2.6, os operadores T_a são *mixing* e caóticos.

3.2.3 Generalização dos exemplos anteriores

Começamos por generalizar os operadores de Rolewicz e considerar *shifts* mais elaborados em espaços mais gerais.

3.2.3.1 Espaços de sucessões

Seja $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ o espaço das sucessões em $\mathbb{K}$. Podemos munir $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ da topologia produto, de tal modo que

$$x_n = (\xi_k^n)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n} x = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \xi_k^n \xrightarrow{n} \xi_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.2.12. Chamamos espaço de sucessões de Banach (resp. de Fréchet) a todo o espaço de Banach (resp. de Fréchet) $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que o mergulho $i: \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é contínuo.

Denotaremos um espaço de sucessões por $\mathcal{X}$, quer seja um espaço de Banach quer seja um espaço de Fréchet. Se $P_j: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}$ é a projecção na j -ésima coordenada, temos pelas propriedades da topologia produto que P_j é contínua. Com esta observação obtem-se o seguinte critério para classificar espaços de sucessões.

Proposição 3.2.13. *Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ um espaço de Banach (resp. de Fréchet). $\mathcal{X}$ é um espaço de sucessões de Banach (de Fréchet) se e só se as funções $P_j \circ i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ forem contínuas para todo o $j \in \mathbb{N}$.*

Por exemplo, os espaços $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, com $1 \leq p \leq \infty$, e $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ são espaços de sucessões.

Tal como no caso dos espaços ℓ^p e c_0 , nos seguintes exemplos adotamos a seguinte notação: para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$e_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

como o elemento que tem todas as entradas nulas excepto a n -ésima, que é 1.

3.2.3.2 Weighted backward shifts

Dada uma sucessão de elementos não nulos $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$, definimos o *weighted shift* associado a w por

$$\begin{aligned} B_w: \quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (w_{n+1}x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Por exemplo, os operadores de Rolewicz são *weighted shifts*, determinados pela sucessão $(\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ com $|\lambda| > 1$.

Proposição 3.2.14. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões de Fréchet e $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um elemento de $(\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. Consideremos o *weighted shift* $B_w: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associado a w . Se $B_w(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$, então $B_w|_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é contínuo na topologia de $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Suponhamos que $B_w(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$. O gráfico de B_w ,

$$\mathcal{G}(B_w) = \{(x, B_w x) : x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$$

é fechado. De facto, seja $((x_n, B_w x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}(B_w)$ uma sucessão convergente para $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(B_w)}$, com $x_n = (\xi_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$, $x = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $y = (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Temos que $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n B_w x_n = y$. Como cada projeção $P_j \circ i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_k^n = \xi_k \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_k \circ i \circ B_w) x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_{k+1} \xi_{k+1}^n = \mu_k$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$. Tendo em conta que $B_w x = (w_{k+1} \xi_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ e que

$$\mu_k = \lim_n w_{k+1} \xi_{k+1}^n = w_{k+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_{k+1}^n = w_{k+1} \xi_{k+1}$$

então $y = B_w x$ e $(x, y) = (x, B_w x) \in \mathcal{G}(B_w)$. Logo, $\mathcal{G}(B_w)$ é fechado pelo Lema 1.2.12. Pelo Teorema 1.2.13, B_w é contínuo como um operador em $\mathcal{X}$. $\square$

No que se segue, descreveremos condições necessárias e suficientes para que um *weighted shift* seja hipercíclico, *weakly mixing* ou *mixing*.

Teorema 3.2.15. [26, Theorem 4.3] *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões (de Banach ou de Fréchet) tal que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base (de Schauder) em $\mathcal{X}$. Seja $B : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ o shift dado por $B(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, que supomos bem definido em $\mathcal{X}$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *B é hipercíclico.*
- (b) *B é weakly mixing.*
- (c) *Existe uma sucessão $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ estritamente crescente de naturais tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e_{n_k} = 0.$$

Com este teorema, conseguimos construir outros exemplos de operadores hipercíclicos em espaços de Banach. Por exemplo, seja $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ uma sucessão de reais positivos. Dado $1 \leq p < \infty$, defina-se

$$\ell_v^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p v_n < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{p,v} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p v_n}.$$

Analogamente, defina-se

$$c_{0,v}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\xi_n| v_n) < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\xi_n| v_n).$$

Se for subentendido do contexto o índice e o corpo, escreveremos apenas ℓ_v^p e $c_{0,v}$.

Note-se que B está bem definido em ℓ_v^p se e só se é contínuo; e B é contínuo se e só se existe $M > 0$ tal que, para todo o $x \in \ell_v^p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{n+1}|^p v_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p v_n. \quad (3.1)$$

Esta condição é equivalente a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty. \quad (3.2)$$

De facto, se aplicarmos (3.1) a $x = e_{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos $v_n \leq M v_{n+1}$; e tem-se

$$v_n \leq M v_{n+1} \Rightarrow \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq M.$$

Por outro lado, se

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq M$$

para algum $M > 0$, então dado $x \in \ell^p(v)$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{n+1}|^p v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{n+1}|^p M v_{n+1} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_{n+1}|^p v_{n+1} = M \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p v_n.$$

Para sucessões $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo a condição (3.2), o Teorema 3.2.15 indica que B é hipercíclico se e só se existe uma sucessão estritamente crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|e_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{n_k} = 0. \quad (3.3)$$

O que é equivalente, uma vez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em $\mathbb{R}^+$, a

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} v_n = 0.$$

Relativamente ao espaço $c_{0,v}$, o operador B está bem definido, e é contínuo se e só se existe algum $M > 0$ tal que, para todo o $x \in c_{0,v}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_{n+1}| v_n \leq M \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n| v_n.$$

Condição que é equivalente a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$. Além disso, B é hipercíclico se e só se

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} v_n = 0.$$

Vejamos como encontrar *weighted backward shifts* hipercíclicos a partir da informação anterior. Seja $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões e B_w um *weighted backward shift* associado a uma sucessão $w = (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. Se definirmos $v = (v_n)_n$ por

$$v_n = \left(\prod_{j=1}^n w_j \right)^{-1}$$

e $\mathcal{X}_v = \{x = (\xi_n)_n : (\xi_n v_n)_n \in \mathcal{X}\}$, que é um espaço de sucessões com a norma (F-norma)

$$\|(\xi_n)_n\|_{\mathcal{X}_v} = \|(\xi_n v_n)_n\|_{\mathcal{X}}$$

então os sistemas dinâmicos $(\mathcal{X}, B_w)$ e $(\mathcal{X}_v, B)$ são topologicamente conjugados pelo isomorfismo de espaços de Banach (ou Fréchet) dado por

$$\begin{aligned} \psi_v: \quad \mathcal{X}_v &\rightarrow \mathcal{X} \\ (\xi_n)_n &\mapsto (\xi_n v_n)_n \end{aligned}$$

De facto, ψ_v está bem definido, pois, se $(\xi_n)_n \in \mathcal{X}_v$, então $\psi_v(\xi_n)_n = (\xi_n v_n)_n \in \mathcal{X}$ por definição de $\mathcal{X}_v$. Além disso, é linear e uma isometria (logo contínuo e injetivo), porque

$$\|\psi_v(\xi_n)_n\|_{\mathcal{X}} = \|(\xi_n v_n)_n\|_{\mathcal{X}} = \|(\xi_n)_n\|_{\mathcal{X}_v}.$$

E ψ_v tem inversa

$$\begin{aligned} \psi_v^{-1}: \quad \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}_v \\ (\xi_n)_n &\mapsto (\xi_n v_n^{-1})_n. \end{aligned}$$

Logo, ψ_v é um isomorfismo de espaços de Banach (de Fréchet).

Por fim, é fácil de verificar que $\psi_v \circ B = B_w \circ \psi_v$. Dado $x = (\xi_n)_n \in \mathcal{X}_v$,

$$\begin{aligned} B_w \psi_v x &= B_w(\xi_n v_n) = B_w \left(\xi_n \prod_{j=1}^n w_j^{-1} \right)_n = \left(w_{n+1} \xi_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} w_j^{-1} \right)_n \\ &= \left(\xi_{n+1} \prod_{j=1}^n w_j^{-1} \right)_n = (\xi_{n+1} v_n)_n = \psi_v(\xi_{n+1})_n = \psi_v Bx. \end{aligned}$$

Temos assim que os sistemas são conjugados e, portanto, B_w é hipercíclico em $\mathcal{X}$ se e

só se B é hipercíclico em $\mathcal{X}_v$. Esta conjugação dá-nos uma forma prática de determinar se um *weighted backward shift* é hipercíclico. Em particular, usando o Teorema 3.2.15, obtemos o seguinte critério.

Teorema 3.2.16. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões em que $(e_n)_n$ é uma base (de Schauder), $w = (w_n)_n \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ uma sucessão de escalares não nulos e $B_w: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ o *weighted shift* associado a w . Suponhamos que B_w está bem definido. B_w é hipercíclico se e só a sucessão*

$$\left(\left(\prod_{j=1}^n w_j^{-1} \right) e_n \right)_n$$

admite uma sub-sucessão convergente para 0.

Em particular, para os espaços ℓ^p e c_0 sobre o corpo $\mathbb{R}$, temos que B_w é topologicamente conjugado a B nos espaços $\ell_{\left(\frac{1}{v_n^{1-p}}\right)_n}^p$ e $c_{0,v}$, respetivamente. Pelo que foi visto:

- Em ℓ^p , com $1 \leq p < \infty$, o operador B_w está bem definido se e só se

$$\sup_n \left(\frac{\prod_{j=1}^{n+1} w_j}{\prod_{j=1}^n w_j} \right)^{1-p} < \infty.$$

Ou seja,

$$\sup_n w_n < \infty. \quad (3.4)$$

- Em c_0 , o operador B_w está bem definido se e só se

$$\sup_n \left(\prod_{j=1}^{n+1} w_j / \prod_{j=1}^n w_j \right) < \infty.$$

Isto é,

$$\sup_n w_n < \infty.$$

- Em ℓ^p , o operador B_w é hipercíclico se e só se

$$\inf_n \left(\prod_{j=1}^n w_j^{-1} \right)^{1-p} = 0. \quad (3.5)$$

- Em c_0 , o operador B_w é hipercíclico se e só se

$$\inf_n \prod_{j=1}^n w_j^{-1} = 0.$$

Em particular, resulta de (3.4) que os operadores de Rolewicz B_λ são contínuos para todo o $\lambda \neq 0$; e de (3.5) concluímos que B_λ é hipercíclico se e só se $|\lambda| > 1$.

3.2.3.3 Forward shifts

Consideramos agora o outro tipo de *shifts* em espaços de sequências - os *shifts* para a direita (ou *forward shifts*). Recorde-se que, dada uma sucessão $w = (w_n)_n$, definimos o *weighted forward shift* $F_w: X \rightarrow X$ por

$$F_w((\xi_n)_n) = (0, w_1\xi_1, w_2\xi_2, w_3\xi_3, \dots).$$

Algumas das propriedades que se deduziram sobre os *weighted backward shifts* são também válidas para *weighted forward shifts*. Por exemplo a seguinte, cuja demonstração é inteiramente análoga à da Proposição 3.2.14.

Proposição 3.2.17. *Sejam X um espaço de sucessões de Fréchet e $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em $(\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. Consideremos o *weighted forward shift* $F_w: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associado a w . Se $F_w(X) \subseteq X$, então $F_w|_X: X \rightarrow X$ é contínuo na topologia de X .*

No entanto, do ponto de vista da dinâmica, há diferenças importantes entre *weighted forward* e *weighted backward shifts*.

Proposição 3.2.18. *Nenhum *weighted forward shift* é hipercíclico.*

A razão é esta: fixado $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$, tem-se para todo o $x = (\xi_n)_n \in X$

$$F_w x = (0, w_1\xi_1, w_2\xi_2, \dots).$$

E, como X é um espaço de sucessões, a projeção na primeira coordenada, dada por $P_1((\xi_n)_n) = \xi_1$, é contínua e tem imagem densa. Se F_w fosse hipercíclico, então $P_1 F_w = 0$ teria imagem densa, o que é obviamente falso.

3.2.3.4 Espaços de sucessões bilaterais

Até agora, consideramos apenas espaços de sucessões indexadas por $\mathbb{N}$, isto é, sucessões unilaterais. Mas podemos considerar $\mathbb{Z}$ como o conjunto dos índices das sucessões. Em termos de estrutura, não há diferença entre os dois espaços pois, usando uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, concluímos que todo o sistema dinâmico num espaço de sucessões indexadas por $\mathbb{Z}$ é topologicamente conjugado a um sistema dinâmico num espaço de

sucessões indexadas por $\mathbb{N}$ através da identificação dos índices dada pela bijeção. No entanto, a dinâmica dos *shifts* em espaços de sucessões indexadas por $\mathbb{Z}$ traz algumas novidades.

Defina-se

$$\mathbb{K}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

munido da topologia produto. Nesta topologia,

$$x_n = (\xi_k^n)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x = (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \Leftrightarrow \xi_k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Chamamos espaço de sucessões sobre $\mathbb{Z}$ de Banach (resp. de Fréchet) a todo o espaço de Banach (resp. de Fréchet) $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ tal que o mergulho $i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ é contínuo. Um espaço de Banach (de Fréchet) $\mathcal{X}$ é um espaço de sucessões sobre $\mathbb{Z}$ se e só se cada uma das funções $P_j \circ i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ for contínua, onde $P_j: \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{K}$ designa a projeção na j -ésima coordenada. Tal como anteriormente, adotamos a seguinte notação: para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$$

como o elemento de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ com todas as entradas nulas exceto a n -ésima, que é 1.

Dado $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{Z}}$, define-se o *weighted backward shift* bilateral, que designamos por $B_w: \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, e o *weighted forward shift* bilateral, $F_w: \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, por

$$B_w((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (w_{n+1} x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{e} \quad F_w((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (w_{n-1} x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Proposição 3.2.19. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ e $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $(\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{Z}}$. Se $B_w(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$, então $B_w|_{\mathcal{X}}$ é um operador linear contínuo na topologia de $\mathcal{X}$.*

Contrariamente ao que acontece com os *weighted backward shifts* unilaterais, cada *weighted backward shift* bilateral é conjugado a um *weighted forward shift* bilateral.

Proposição 3.2.20. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões bilaterais de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $(\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{Z}}$ e F_w o *weighted forward shift* associado a w . Definam-se*

$$\mathcal{X}^{-1} = \{(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} : (\xi_{-n})_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{X}\}$$

e

$$\begin{aligned}\psi: \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}^{-1} \\ (\xi_n)_n &\mapsto (\xi_{-n})_n.\end{aligned}$$

Então a função ψ é linear, bijetiva e contínua; $\mathcal{X}^{-1}$ é um espaço de sucessões bilaterais com a norma induzida por ψ ; e $F_w = \psi^{-1} \circ B_{w_-} \circ \psi$, onde $w_- = (w_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração. Para provar que ψ é bijetiva basta ver que $\psi^{-1}((\xi_n)_n) = (\xi_{-n})_n$ está bem definida. A prova de que é linear é imediata. A norma em $\mathcal{X}^{-1}$ é dada por

$$\|(\xi_n)_n\|_{\mathcal{X}^{-1}} = \|(\xi_{-n})_n\|_{\mathcal{X}}$$

logo ψ é contínua. Além disso, o mergulho $i_-: \mathcal{X}^{-1} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ é contínuo porque a composição do mergulho com as projeções é sempre (isto é, $P_j \circ i_- = P_{-j} \circ i \circ \psi^{-1}$, que é contínua). Por fim,

$$\psi F_w(\xi_n)_n = \psi(w_{n-1} \xi_{n-1})_n = (w_{1-n} \xi_{1-n})_n = B_{w_-}(\xi_{-n})_n = B_{w_-} \psi(\xi_n)_n.$$

E, portanto, F_w e B_{w_-} são (linearmente) conjugados. □

Dizemos que a família $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base de $\mathcal{X}$ se, para todo o $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{X}$, se tem

$$x = \lim_{N, M \rightarrow +\infty} \sum_{n=-M}^N \xi_n e_n.$$

Desse modo, $\text{span}\{e_n: n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathcal{X}$.

Teorema 3.2.21. [26, Theorem 4.12] *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões bilaterais. Suponhamos que o shift B está definido em $\mathcal{X}$ e que $(e_n)_n$ é uma base de $\mathcal{X}$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

- (a) B é hipercíclico;
- (b) B é weakly mixing;
- (c) Existe uma sucessão estritamente crescente de naturais $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e_{j+n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} e_{j-n_k} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Deste Teorema resulta que o *shift* bilateral para a direita pode ser hipercíclico, ao contrário do caso unilateral.

Teorema 3.2.22. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões bilaterais em que $(e_n)_n$ é uma base e $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{Z}}$. Suponhamos que B_w é um operador em $\mathcal{X}$. Então, B_w é hipercíclico se e só se existe uma sucessão estritamente crescente de naturais $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\ell=j+1}^{n_k+j} w_\ell \right)^{-1} e_{j+n_k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\ell=j-n_k+1}^j w_\ell \right) e_{j-n_k} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.2.4. Consideremos o espaço

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \left\{ x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\},$$

com o produto interno definido, para $x = (\xi_n)_n$ e $y = (\mu_n)_n$, por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \overline{\mu_n}.$$

Trata-se de um espaço de Hilbert separável. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > 1$, definimos $w = (w_n)_n$ por $w_n = \lambda$ se $n \geq 0$ e $w_n = \lambda^{-1}$ caso contrário. O *weighted backward shift* bilateral B_w correspondente está bem definido em $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$: dado $x = (\xi_n)_n \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, a n -ésima coordenada de $B_w x$ é dada por $w_{n+1} \xi_{n+1} = \lambda \xi_{n+1}$ se $n \geq -1$ e por $\lambda^{-1} \xi_{n+1}$ caso contrário; logo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |w_{n+1} \xi_{n+1}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |w_n \xi_n|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \max \{ \lambda, \lambda^{-1} \} \xi_n \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 |\xi_n|^2 < \infty.$$

Observe-se que B_w é um homeomorfismo, com inversa $F_{w'}$, onde $w' = (w'_n)_n$ tem termo geral dado por $w'_n = \lambda^{-1}$ se $n \geq 0$ e $w'_n = \lambda$ caso contrário.

Notando que $(e_n)_n$ é uma base ortonormada, tem-se para $j < -2$ (análogo se $j \geq -2$),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\ell=j+1}^{n+j} |w_\ell| \right)^{-1} \|e_{n+j}\| &= |w_{j+1}| \dots |w_{-1}| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\ell=0}^{n+j} |w_\ell| \right)^{-1} \\ &= |\lambda|^{-j} \lim_n |\lambda|^{-(n+j)} = |\lambda|^{-2j} \lim_n |\lambda|^{-n} = 0 \end{aligned}$$

e, para $j \geq 0$ (análogo se $j < 0$),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\ell=j-n+1}^j |w_\ell| \right) \|e_{j-n}\| &= |w_0| \dots |w_j| \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{\ell=j+1-n}^{-1} |w_\ell| \\ &= |\lambda|^{j+1} \lim_n |\lambda|^{j+2-n} \\ &= |\lambda|^{2j+3} \lim_n |\lambda|^{-n} = 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.22, B_w é hipercíclico.

3.2.3.5 A derivada como *weighted shift*

O espaço $H(\mathbb{C})$ pode ser descrito como um espaço de sucessões. Para isso, basta ter em conta que

$$\begin{aligned} H(\mathbb{C}) &= \{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: f \text{ é holomorfa}\} \\ &\cong \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \lim_n |a_n|^{1/n} = 0 \right\} \\ &\cong \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| m^n < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N} \right\} \\ &\cong \left\{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}| m^m < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

onde a penúltima identificação resulta do facto de f ser holomorfa se e só se a sua série de Taylor estiver definida para todo o ponto e, em particular, para todos os inteiros. E, portanto, $H(\mathbb{C})$ é um espaço de sucessões de Fréchet com as normas $p_k(f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| k^n$. Neste espaço, e_n corresponde ao monómio $z \mapsto z^n$; e a família $\{z \mapsto z^n: n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de $H(\mathbb{C})$ porque o conjunto de polinómios é denso em $H(\mathbb{C})$.

Com esta reformulação do espaço $H(\mathbb{C})$, o operador de MacLane D é dado por

$$D((a_n)_n) = ((n+1)a_{n+1})_n.$$

Logo, $D = B_w$ para $w = (n)_n$. Note-se que $\prod_{n=1}^k w_n^{-1} = 1/k!$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_m \left(\left(\prod_{n=1}^k w_n^{-1} \right) e_k \right) = \lim_k \frac{1}{k!} m^m = 0$$

e, pelo Teorema 3.5, tem-se que D é hipercíclico. Esta é uma demonstração alternativa de que o operador de MacLane é hipercíclico.

3.2.4 Operadores frequentemente hipercíclicos

O conceito de vetor hipercíclico por um operador define de forma rigorosa a informação de que uma órbita visita todas as regiões relevantes do espaço infinitas vezes. Mas não indica qual é a frequência dessas visitas. Nesta secção, descreveremos operadores hipercíclicos com vetores de órbita densa cujas visitas a abertos não-vazios são bastante frequentes. Começemos por formalizar o que se entende por uma frequência elevada.

Definição 3.2.23. Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}_0$, definimos a densidade inferior de A como

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{n \in A: n \leq N\}}{N+1}.$$

Definição 3.2.24. Seja $\mathcal{F}$ um espaço de Banach (ou de Fréchet) e $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ um operador linear contínuo. Dado $x \in \mathcal{F}$, para cada aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{F}$, define-se

$$N_T(x, U) = \{n \in \mathbb{N}: T^n x \in U\}.$$

Recorde-se de (2.1) que, dados dois conjuntos U, V , se designa por $N_T(U, V)$ o conjunto dos naturais n tais que $T^n U \cap V \neq \emptyset$.

Definição 3.2.25. Dizemos que x é frequentemente hipercíclico se $N_T(x, U)$ tiver densidade inferior positiva para todo o aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{F}$. Se T admite um vetor frequentemente hipercíclico, então T diz-se frequentemente hipercíclico. Denotamos o conjunto de vetores frequentemente hipercíclicos de T por $FHC(T)$.

Note-se que, como acontece com vetores hipercíclicos, os iterados de um operador frequentemente hipercíclico são frequentemente hipercíclicos. Logo, se $FHC(T) \neq \emptyset$, então é denso.

Existe um modo equivalente de definir conjuntos com densidade inferior positiva. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ e $(n_k)_k$ a sucessão crescente de naturais tal que $A = \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$. Dado $k \in \mathbb{N}$ e N tal que $n_k \leq N < n_{k+1}$, temos

$$\frac{k}{n_k} \leq \frac{\#\{n \in A: n \leq N\}}{N+1} \leq \frac{k}{n_{k+1}} < \frac{k+1}{n_{k+1}}.$$

De facto, $\#\{n \in A: n \leq N\} = k$ se $n_k \leq N < n_{k+1}$. Então, .

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{n_k}.$$

Se A tiver densidade inferior positiva, escreveremos $n_k = O(k)$. Obtemos assim a seguinte formulação equivalente de vetores frequentemente hipercíclicos.

Proposição 3.2.26. Um vetor x é frequentemente hipercíclico se e só se, para todo o aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{F}$, existir uma sucessão crescente de naturais $(n_k)_k$ tal que $n_k = O(k)$ e

$$T^{n_k} x \in U \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tal como as restantes propriedades de recorrência discutidas neste texto, ser frequentemente hipercíclico é também preservado por quase-conjugação.

Proposição 3.2.27. *Se $(\mathcal{G}, S)$ é topologicamente conjugado a $(\mathcal{F}, T)$ por $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, então $\phi(FHC(T)) \subseteq FHC(S)$. Em particular, ser frequentemente hipercíclico é preservado por conjugação.*

Demonstração. Dados $x \in FHC(T)$ e um aberto não-vazio $V \subseteq \mathcal{G}$, a pré-imagem $U = \phi^{-1}(V)$ é um aberto não-vazio de $\mathcal{F}$. Seja $(n_k)_k$ a sucessão crescente tal que $T^{n_k}x \in U$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, onde $n_k = O(k)$. Então, $S^{n_k}\phi(x) = \phi(T^{n_k}x) \in \phi(U) \subseteq V$. Logo, pela Proposição 3.2.26, $\phi(x) \in FHC(S)$. $\square$

Todo o vetor / todo o operador frequentemente hipercíclico é hipercíclico. Como não há operadores hipercíclicos em espaços de dimensão finita, o conceito de operadores frequentemente hipercíclicos é exclusivo de dimensão infinita.

Temos neste momento duas definições de recorrência mais exigentes do que ser hipercíclico: ser frequentemente hipercíclico ou ser *weakly mixing*. Mostraremos que ser frequentemente hipercíclico é uma condição mais forte do que ser *weakly mixing*. E analisaremos exemplos de operadores *weakly mixing* que não são frequentemente hipercíclicos.

Definição 3.2.28. Uma sucessão $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ crescente de naturais diz-se *sindética* se

$$\sup_k |n_{k+1} - n_k| < \infty.$$

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ diz-se *sindético* se a sucessão $(n_k)_k$ dos seus elementos for *sindética*. Ou seja, o complementar de A não admite blocos arbitrariamente grandes de números sucessivos. Podemos estender esta definição a subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ impondo que $B \subseteq \mathbb{N}_0$ é *sindético* se e só se $A = B \setminus \{0\}$ for *sindético*.

Dado um conjunto $A \in \mathbb{N}_0$, definimos a sua diferença $A - A$ como o conjunto das subtrações entre dois quaisquer dos seus elementos, isto é, $A - A = \{m - n : m, n \in A \text{ e } m \geq n\}$.

Teorema 3.2.29. [26, Theorem 9.7][Erdős-Sárközy] *Seja $A \subseteq \mathbb{N}_0$ um conjunto de densidade inferior positiva. Então, $A - A$ é sindético.*

Estamos em condições de provar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.30. *Todo o operador frequentemente hipercíclico é weakly mixing.*

Demonstração. Sejam $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ um operador frequentemente hipercíclico, W uma vizinhança aberta de 0 e $U, V \neq \emptyset$ abertos não-vazios de $\mathcal{F}$. Como T é hipercíclico, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_0}(U) \cap W \neq \emptyset$.

Seja $U_0 = U \cap T^{-n_0}(W) \neq \emptyset$. Então, para qualquer $x \in FHC(T)$, o conjunto $A = N_T(x, U_0)$ tem densidade inferior positiva. Logo, pelo Teorema 3.2.29, $A - A$ é sindético. Assim, dados $m, n \in A$ com $m \geq n$, tem-se

$$T^{m-n+n_0}T^n x = T^{m+n_0}x = T^{n_0}T^m x \in T^{n_0}U_0 \subseteq W.$$

Como $T^n x \in U_0 \subset U$,

$$n_0 + A - A \subseteq N(U, W).$$

Logo, $N(U, W)$ é sindético.

Por outro lado, como $T0 = 0$ e T é contínua, $T^{-k}(W)$ é uma vizinhança aberta de 0 para todo o $k \in \mathbb{N}$. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $W_0 = \bigcap_{k=1}^m T^{-k}(W)$ e $n \in N(W_0, V)$, que podemos supor maior do que m . Consideremos $y \in W_0$ tal que $T^n y \in V$. Então $T^k y \in W$, $T^{n-k}T^k y \in V$ para todo o $k = \{1, \dots, m\}$. Logo $n - k \in N(W, V)$ para todo o $k = \{1, \dots, m\}$. E, portanto, $N(W, V)$ contém blocos de naturais arbitrariamente longos; e intersesta $N(U, W)$, caso contrário, $N(W, V)$ estaria no complementar de $N(U, W)$ e $N(U, W)$ não poderia ser sindético. Recorrendo ao seguinte lema.

Lema 3.2.31. [26, Theorem 2.47] Um operador T é *weakly mixing* se e só se

$$N(U, W) \cap N(W, V) \neq \emptyset$$

para todos os abertos não-vazios U, V e vizinhança aberta W de 0.

Obtemos que T é *weakly mixing*.

□

3.2.4.1 Critério de hiperciclicidade frequente

Demonstrámos na Secção 3.2.1.2 alguns critérios para verificar se um operador é hipercíclico, *mixing* ou caótico. Apresentamos agora uma condição suficiente para um operador ser frequentemente hipercíclico.

Teorema 3.2.32 (Frequently Hypercyclicity Criterion). [26] *Seja $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ um operador num espaço de Fréchet. Suponhamos que existe um conjunto denso $\mathcal{X}_0$ e uma função $S: \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}_0$ tais que, para todo o $x \in \mathcal{X}_0$, se tem*

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ converge incondicionalmente;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ converge incondicionalmente;
- (iii) $TSx = x$.

Então T é frequentemente hipercíclico.

Sabe-se que esta condição suficiente não é necessária, isto é, que existem operadores frequentemente hipercíclicos que não satisfazem às condições (i) – (iii) do teorema anterior (cf. [25]). De facto, este critério é demasiado exigente pois, além de garantir que T é frequentemente hipercíclico, assegura também que T é *mixing* e caótico.

Proposição 3.2.33. *Se T satisfaz as condições (i) – (iii) do Teorema 3.2.32, então T é *mixing* e caótico.*

Demonstração. Se T satisfaz as condições (i) – (iii), então T é *mixing* pelo Teorema 3.2.7.

Falta verificar que T é caótico. Dado $x \in \mathcal{X}_0$ e $N \in \mathbb{N}$, as séries $\sum_{j=1}^{\infty} S^{jN}x$ e $\sum_{j=1}^{\infty} T^{jN}x$ convergem. Defina-se

$$y_{x,N} = \sum_{j=1}^{\infty} S^{jN}x + x + \sum_{j=1}^{\infty} T^{jN}x$$

e aplique-se T^N a este vetor:

$$\begin{aligned} T^N y_{x,N} &= \sum_{j=1}^{\infty} T^N S^{jN}x + T^N x + \sum_{j=1}^{\infty} T^N T^{jN}x = \sum_{j=0}^{\infty} S^{jN}x + T^N x + \sum_{j=2}^{\infty} T^{jN}x \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} S^{jN}x + x + \sum_{j=1}^{\infty} T^{jN}x = y_{x,N}. \end{aligned}$$

Concluimos que $y_{x,N}$ é periódico. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos a sucessão $(\varepsilon_{N,n})_n$ de 0's e 1's dada por $\varepsilon_{N,n} = 1$ se n é múltiplo de N , e 0 caso contrário. Pelas condições (i) – (ii) sobre a convergência incondicional das séries, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{n \geq N_0} \varepsilon_{N,n} S^n x \right\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{n \geq N_0} \varepsilon_{N,n} T^n x \right\| < \varepsilon.$$

para todo o $N \in \mathbb{N}$. Consequentemente, para $N \geq N_0$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} S^{jN} x \right\| = \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_{N,n} S^n x \right\| = \left\| \sum_{n=N_0}^{\infty} \varepsilon_{N,n} S^n x \right\| < \varepsilon$$

e, portanto, $\lim_N \sum_{j=1}^{\infty} S^{jN} x = 0$. De modo análogo se conclui que $\lim_N \sum_{j=1}^{\infty} T^{jN} x = 0$. Logo, $\lim_N y_{x,N} = x$ e o conjunto de pontos periódicos $\{y_{x,N} : x \in \mathcal{X}_0 \text{ e } N \in \mathbb{N}\}$ é denso. Pela Proposição 3.2.5, está confirmado que T é caótico. $\square$

3.2.5 Exemplos

Com este critério podemos provar facilmente que alguns dos operadores que já conhecemos são frequentemente hipercíclicos.

3.2.5.1 *Weighted shifts* frequentemente hipercíclicos

Começemos por revisitar os *weighted shifts*. Cingir-nos-emos aos espaços de sucessões indexados por $\mathbb{N}$. Do critério de hiperciclicidade frequente obtemos uma condição suficiente para um *weighted shift* ser frequentemente hipercíclico.

Teorema 3.2.34. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de sucessões onde $c_{00} = \text{span} \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso e seja $w = (w_n)_n \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. Se w é tal que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{v=1}^n w_v^{-1} \right) e_n$$

converge incondicionalmente, então B_w é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Definimos $S : c_{00} \rightarrow c_{00}$ dado por $S(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1/w_1, \xi_2/w_2, \dots)$, isto é, o *weighted forward shift* determinado por $(w_n^{-1})_n$. É fácil confirmar que se tem $TSx = x$ para todo o $x \in c_{00}$. Além disso, para todo o $x \in c_{00}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = 0$ para $n \geq N$; logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$ converge, e converge incondicionalmente. Por outro lado, dado $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n e_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{k+1} \dots w_{k+n}} e_k = \left(\prod_{j=1}^k w_j \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k+n} w_j^{-1} \right) e_{k+n}$$

série que, por hipótese, converge incondicionalmente. Então, pela linearidade de S , a série $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ converge incondicionalmente para $x \in c_{00}$. Assim, o Teorema 3.2.32 garante que T é frequentemente hipercíclico. $\square$

Em particular, considerando os espaços ℓ^p e c_0 , como as bases (e_n) são bases incondicionais, temos que toda a sucessão converge incondicionalmente se e só se convergir. Então que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} e_n$$

converge incondicionalmente desde que $|\lambda| > 1$. E, portanto, os operadores B_λ são frequentemente hipercíclicos se $|\lambda| > 1$.

3.2.5.2 Operador de MacLane

Consideramos agora o operador de MacLane no espaço $H(\mathbb{C})$. Definimos $\mathcal{X}_0$ como o espaço dos polinómios complexos e $S: \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}_0$ como o operador integral

$$(Sf)(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta.$$

Como a derivada de um polinómio é um polinómio de grau inferior, para todo o polinómio p existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n p = 0$ para $n \geq N$. Em particular,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n z^k = k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} z^{k+n}.$$

Verifiquemos que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, a série anterior converge incondicionalmente.

Dados $K, N \in \mathbb{N}$ e uma sucessão $(\varepsilon_j)_j$ de 0's e 1's, temos

$$\sup_{|z| \leq K} \left| \sum_{n=0}^N \frac{1}{(k+n)!} \varepsilon_n z^{k+n} \right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{(k+n)!} \varepsilon_n K^{k+n} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{(k+n)!} K^{k+n}$$

que converge incondicionalmente por convergir uniformemente. Logo, as duas séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} \varepsilon_n z^{k+n}$ e $k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} \varepsilon_n z^{k+n}$ convergem incondicionalmente. Como S é linear, também a série $\sum_{n=0}^{\infty} S^n p$ converge incondicionalmente, qualquer que seja o polinómio p . Finalmente, é fácil confirmar que $TSf = f$ para toda a função holomorfa. Pelo Teorema 3.2.32, T é frequentemente hipercíclico.

Observação 3.2.35. Os operadores de Birkhoff T_a , com $a \neq 0$, também satisfazem o critério de hiperciclicidade frequente (cf. [4]).

4. Propriedades do conjunto $HC(T)$

Tendo discutido vários exemplos de operadores hipercíclicos e frequentemente hipercíclicos em espaços vetoriais de dimensão infinita, estudamos agora propriedades do conjunto de vetores hipercíclicos. Apesar de não haver em Dinâmica Topológica informação geral sobre o conjunto de pontos com órbita densa, a estrutura linear do espaço e da transformação impõe restrições sobre este conjunto que descreveremos de seguida.

Nesta secção, suporemos que o espaço ambiente é de Banach. No entanto, a maioria dos resultados pode ser estendida a espaços de Fréchet, e até a espaços vetoriais topológicos mais gerais.

No que se segue, $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um operador linear contínuo.

4.1. Propriedades lineares e topológicas

4.1.1 Transitividade

Uma vez que um espaço de Banach que não se reduza ao vetor nulo não tem pontos isolados, $HC(T)$ é T -invariante. Além disso, os espaços de Banach separáveis encontram-se nas condições do Teorema 2.1.19. Consequentemente:

Teorema 4.1.1. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach separável e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo. T é hipercíclico se e só se for topologicamente transitivo. Caso T seja hipercíclico, $HC(T)$ é um G_δ denso.*

4.1.2 Soma de vetores hipercíclicos

No contexto linear, se $\mathcal{X} \neq \{0\}$ então o conjunto $HC(T)$ nunca é todo o espaço pois o vetor nulo é ponto fixo de T . Mas $HC(T)$ pode ser igual a $\mathcal{X} \setminus \{0\}$ (cf. [36]). Nos vários exemplos de operadores lineares contínuos que analisámos no capítulo anterior, o conjunto $HC(T)$ não atinge este tamanho máximo, seja porque o espaço $\mathcal{X}$ tem dimensão finita, seja porque o operador tem vetores não-nulos com órbitas periódicas. Em qualquer caso, se $HC(T) \neq \emptyset$, todo o vetor de $\mathcal{X}$ é soma de dois vetores hipercíclicos.

Proposição 4.1.2. *Seja T um operador hipercíclico num espaço de Banach $\mathcal{X}$. Então $\mathcal{X} = HC(T) + HC(T)$.*

Demonstração. Fixemos $x_0 \in \mathcal{X}$. Como $HC(T)$ é um G_δ denso, temos que $x_0 + HC(T) = \{x_0 + v : v \in HC(T)\}$ é também G_δ denso, pois a função $v \in \mathcal{X} \mapsto x_0 + v$ é um homeomorfismo de $\mathcal{X}$. Logo, pelo Teorema de Baire, $HC(T) \cap (x_0 + HC(T))$ é também G_δ denso. Logo, é não vazio. Sejam $v_0 \in HC(T) \cap (x_0 + HC(T))$ e $u_0 \in HC(T)$ tal que $v_0 = x_0 + u_0$. Então, $x_0 = u_0 - v_0$.

Lema 4.1.3. Se $z \in HC(T)$, então $\lambda z \in HC(T)$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Como a composição de funções lineares é linear, para todo o $x \in \mathcal{X}$ tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad T^n(\lambda x) = \lambda T^n(x).$$

Fixemos $z \in HC(T)$, $\lambda \neq 0$, $y \in \mathcal{X}$ e $\varepsilon > 0$. Como z tem órbita densa e $\lambda \neq 0$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\lambda} y - T^N z \right\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Além disso,

$$\left\| \frac{1}{\lambda} y - T^N z \right\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \quad \Rightarrow \quad \|y - T^N(\lambda z)\| = |\lambda| \left\| \frac{1}{\lambda} y - T^N z \right\| < \varepsilon.$$

E, portanto, λz é hipercíclico. □

Uma vez que $x_0 = u_0 - v_0$, sendo v_0 e u_0 vetores hipercíclicos, pelo lema anterior temos $u_0 - v_0 \in HC(T) + HC(T)$. □

4.1.3 Subconjuntos identificáveis de vetores hipercíclicos

Suponhamos que $\mathcal{X} \neq \{0\}$. Apesar de $HC(T)$ não ser um subespaço vetorial (o vetor nulo não é hipercíclico), um operador hipercíclico admite sempre um subespaço vetorial denso cujos vetores não-nulos são hipercíclicos.

Teorema 4.1.4 (Herrero-Bourdon). Sejam $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo hipercíclico e $x_0 \in HC(T)$. Então, o conjunto

$$\{p(T)(x_0) : p \text{ é um polinómio}\} \setminus \{0\}$$

é um subconjunto de vetores hipercíclicos denso em $\mathcal{X}$. Em particular, T admite um subespaço invariante denso em que todos os elementos à exceção de 0 são hipercíclicos.

Demonstração. No que se segue, dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{X}$, designamos por $\text{span}(A)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{X}$ gerado por A . E, se p é um polinómio, cada parcela αT^j da soma de $p(T)$ representa o produto do escalar α pelo iterado T^j de T .

Seja $x_0 \in HC(T)$. Como $\text{Orb}_T(x_0)$ é denso e

$$\mathcal{M} = \{p(T)(x_0) : p \text{ é um polinómio}\} = \text{span}(\text{Orb}_T(x_0)) \supseteq \text{Orb}_T(x_0)$$

temos que $\mathcal{M}$ é um subespaço vetorial denso em $\mathcal{X}$. Além disso, dado um polinómio $p: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ de grau $N \in \mathbb{N}_0$, definido por $p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ com $a_N \neq 0$, temos que $p(T)(x_0) = \sum_{n=0}^N a_n T^n x_0$ e

$$T(p(T)(x_0)) = T\left(\sum_{n=0}^N a_n T^n x_0\right) = \sum_{n=0}^N a_n T^{n+1} x_0 = q(T)(x_0)$$

onde q é o polinómio dado por $q(z) = z \cdot p(z)$. Logo, $T(p(T)(x_0)) \in \mathcal{M}$ e, portanto, $\mathcal{M}$ é T -invariante. Falta verificar que $\mathcal{M} \setminus \{0\} \subseteq HC(T)$.

Proposição 4.1.5 (Bourdon). *Seja T um operador linear contínuo hipercíclico e $q \neq 0$ um polinómio. Então o operador $q(T): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ tem imagem densa em $\mathcal{X}$.*

Terminemos a prova do Teorema 4.1.4, adiando por momentos a demonstração desta proposição. Consideremos $p(T)(x_0) \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$. A Proposição 4.1.5 garante que $p(T)$ tem imagem densa. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Orb}_T(p(T)(x_0)) &= \{T^n(p(T)(x_0)) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{p(T)(T^n x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= p(T)(\text{Orb}_T(x_0)) \end{aligned}$$

o que significa que $\text{Orb}_T(p(T)(x_0))$ tem órbita densa. Ou seja, $p(T)(x_0) \in HC(T)$.

Demonstração. (da Proposição 4.1.5) O argumento fica mais simples se o dividirmos de acordo com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Caso 1: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Seja $q(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ com $a_N \neq 0$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$q(z) = a_N \prod_{j=1}^N (z - \lambda_j) \quad \text{e} \quad q(T) = a_N \prod_{j=1}^N (T - \lambda_j I).$$

Lema 4.1.6. *Seja T um operador linear hipercíclico num espaço de Banach real $\mathcal{X}$.*

(a) O operador adjunto T^* não tem valores próprios. Equivalentemente, para todo o $\lambda \in \mathbb{K}$, a imagem de $T - \lambda Id$ é densa em $\mathcal{X}$.

(b) O adjunto $\tilde{T}^*$ da complexificação $\tilde{T}$ de T não tem valores próprios. Equivalentemente, o operador $\tilde{T} - \lambda Id$ tem imagem densa em $\tilde{\mathcal{X}}$, para todo o $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demonstração. (a) Fixemos $x_0 \in HC(T)$ e suponhamos, por redução ao absurdo, que T^* tem um valor próprio λ . Seja $f \in \mathcal{X}^*$ um vetor próprio associado a λ , ou seja, tal que $T^*f = \lambda f$. Então $f(T^n x_0) = (T^*)^n f(x_0) = \lambda^n f(x_0)$. Como $f \neq 0$ e $x_0 \in HC(T)$, o conjunto $\{f(T^n x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = f(\text{Orb}_T(x_0))$ é denso em $\mathbb{K}$. Mas a sucessão $(\lambda^n f(x_0))_{n \in \mathbb{N}_0}$ não é densa em $\mathbb{K}$. Logo, T^* não tem valores próprios. Falta confirmar que esta afirmação é equivalente à densidade da imagem de $T - \lambda Id$.

Lema 4.1.7. *Sejam T um operador em $\mathcal{X}$, $T^* : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$ o seu operador adjunto e $\lambda \in \mathbb{K}$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) λ é valor próprio de T^* .

(ii) A imagem do operador $T - \lambda Id$ não é densa em $\mathcal{X}$.

Demonstração. Seja $L = \text{Im}(T - \lambda Id)$. Pelo Teorema 1.2.8, o subespaço L é denso se e só se

$$\forall f \in \mathcal{X}^* \quad [f(L) = \{0\}] \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Mas, por definição de L , tem-se

$$f(L) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad f((T - \lambda Id)(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad (T^*f - \lambda f)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se λ é valor próprio de T^* e $g \in \mathcal{X}^* \setminus \{0\}$ é tal que $T^*g - \lambda g = 0$, então $g(L) = \{0\}$ e, portanto, $T - \lambda Id$ não tem imagem densa.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se λ não é valor próprio de T^* , o único elemento de $\mathcal{X}^*$ tal que $T^*f - \lambda f = 0$ é $f = 0$. Logo, L é denso em $\mathcal{X}$. □

(b) Suponhamos que $\tilde{T}^*$ tem um valor próprio λ com um vetor próprio $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{X}}^* \setminus \{0\}$. Para $n \in \mathbb{N}_0$, tem-se

$$|\tilde{f}(T^n x)| = |\tilde{f}(\tilde{T}^n x)| = |(\tilde{T}^*)^n \tilde{f}(x)| = |\lambda^n| |\tilde{f}(x)|.$$

Como $\tilde{f}(x_1 + ix_2) = \tilde{f}(x_1) + i\tilde{f}(x_2)$ para todo o $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e $\tilde{f} \neq 0$, existe $y \in \mathcal{X}$ tal que $\tilde{f}(y) \neq 0$, caso contrário, $\tilde{f}(x_1 + ix_2) = 0$ para todo o $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. Assim,

$$|\tilde{f}(\mathcal{X})| = \left\{ |\tilde{f}(x)| : x \in \mathcal{X} \right\} = \mathbb{R}_0^+.$$

Como a função $x \rightarrow |\tilde{f}(x)|$ é contínua, dado $x_0 \in HC(T)$, o conjunto $|\tilde{f}(\text{Orb}_T(x_0))|$ é denso em $\mathbb{R}_0^+$. No entanto, o conjunto $\{|\lambda^n||\tilde{f}(x_0)| : n \in \mathbb{N}_0\}$ não é denso em $\mathbb{R}_0^+$, o que é uma contradição. Logo, $\tilde{T}^*$ não pode ter valores próprios. $\square$

Como, pelo Lema 4.1.6, cada parcela da forma $(T - \lambda_j Id)$ tem imagem densa, e a composição de funções contínuas com imagem densa tem imagem densa, concluímos que $q(T)$ tem imagem densa.

Caso 2: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Considerando a complexificação $\tilde{T}$ de T , pelo que já foi provado sabemos que $p(\tilde{T})$ tem imagem densa para todo o polinómio real $p \neq 0$. Tendo em conta que para todo o $x, y \in \mathcal{X}$ se tem $p(\tilde{T})(x + iy) = p(T)x + ip(T)y$, concluímos que $p(T)$ tem imagem densa. De facto, dados $z \in \mathcal{X}$ e $\varepsilon > 0$, seja $x + iy \in \mathcal{X}$ tal que $\|z - p(\tilde{T})(x + iy)\| < \varepsilon$. Então

$$\begin{aligned} \|z - p(T)x\|^2 &\leq \|z - p(T)x\|^2 + \|p(T)y\|^2 = \|z - (p(T)x + ip(T)y)\|^2 \\ &= \|z - p(\tilde{T})(x + iy)\|^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

o que prova que a imagem de $p(T)$ é densa em $\mathcal{X}$. $\square$

A demonstração da Proposição 4.1.5 está completa. $\square$

A seguinte propriedade de $HC(T)$ é uma consequência do Teorema 4.1.4.

Corolário 4.1.7.1. *Seja T um operador linear contínuo de um espaço de Banach $\mathcal{X}$. Então $HC(T)$ é conexo.*

Demonstração. Se $HC(T) = \emptyset$, a afirmação é óbvia. Suponhamos que T é um operador hipercíclico e seja $\mathcal{M}$ como no Teorema 4.1.4. Uma vez que $\mathcal{M}$ é um subespaço vetorial, $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ é conexo. Além disso, como $\mathcal{X}$ não tem pontos isolados e $\mathcal{M}$ é denso em $\mathcal{X}$, temos que $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ é denso em $\mathcal{X}$. Logo,

$$\mathcal{M} \setminus \{0\} \subseteq HC(T) \subseteq \overline{\mathcal{M} \setminus \{0\}} = \mathcal{X}$$

e, portanto, sendo $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ é conexo, concluímos da Proposição 1.1.2 que $HC(T)$ também é conexo. $\square$

Uma consequência do Teorema 4.1.5 é que os iterados de um vetor hipercíclico são linearmente independentes.

Corolário 4.1.7.2. *Seja $\mathcal{X} \neq \{0\}$ um espaço de Banach, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador hipercíclico e $x \in HC(T)$. Então $\text{Orb}_T(x)$ é uma família de vetores linearmente independentes.*

Demonstração. Suponhamos que não, isto é, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x, Tx, \dots, T^n x\}$ não é linearmente independente. Então existem $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, que podemos supor com $\alpha_n \neq 0$, tais que

$$\alpha_0 x + \dots + \alpha_n T^n x = 0.$$

Ou seja, $T^n x = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i T^i x$ é combinação linear dos vetores anteriores na órbita de x . Consideremos o polinómio de grau n definido por

$$p(z) = z^n - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i z^i.$$

Temos que $p(T)(x) = 0$. Pela Proposição 4.1.5, sabemos que $p(T)$ tem imagem densa. Logo o conjunto $p(T)(\text{Orb}_T(x))$ é denso. Contudo,

$$p(T)(\text{Orb}_T(x)) = \{p(T)(T^k x) : k \in \mathbb{N}_0\} = \{T^k(p(T)(x)) : k \in \mathbb{N}_0\} = \{0\}$$

que não é denso em $\mathcal{X}$ porque $\mathcal{X} \neq \{0\}$. $\square$

Corolário 4.1.7.3. *Não existem operadores hipercíclicos em espaços de Banach de dimensão finita positiva.*

De facto, se um tal operador T existisse, concluiríamos, pelo Corolário 4.1.7.2, que a órbita de qualquer $x \in HC(T)$ é uma família infinita linearmente independente. Mas, em espaços de dimensão finita, todo o conjunto de vetores linearmente independentes é finito.

4.2. $HC(T) = \emptyset$ ou é homeomorfo a $\mathcal{X}$.

Como vimos na Secção 2.2, se X é um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto, sem pontos isolados, e $f: X \rightarrow X$ é uma função contínua, então o conjunto $\mathcal{D}_f$ de pontos com órbita densa é X ou tem interior vazio. A afirmação correspondente que se conhece para operadores lineares contínuos de espaços de Banach é a seguinte.

Teorema 4.2.1 (Fathi, Godefroy). *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo. Então $HC(T) = \emptyset$ ou é homeomorfo a $\mathcal{X}$.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. O suporte de f é o fecho do conjunto de elementos de X que satisfazem a condição $f(x) \neq 0$. Uma família $(\phi_i)_{i \in I}$ de funções contínuas $\phi_i: X \rightarrow [0, 1]$ diz-se uma partição da unidade em X se tiver as seguintes propriedades:

- A família $(\text{supp}(\phi_i))_{i \in I}$ é localmente finita (isto é, cada $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que $\phi_i(V) = \{0\}$ exceto para um número finito de valores de $i \in I$).
- $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ para todo o $x \in X$. (Note-se que esta soma está bem definida, pois, em cada ponto, apenas um número finito de funções não se anula.)

Seja $(W_j)_{j \in J}$ uma cobertura aberta de X . Diz-se que uma partição da unidade $(\phi_i)_{i \in I}$ é subordinada a $(W_j)_{j \in J}$ se para todo o $i \in I$ existir um $j \in J$ tal que $\text{supp}(\phi_i) \subseteq W_j$.

Lema 4.2.2. [27] *Sejam K um espaço métrico compacto e $(W_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta de K . Existe $n \in \mathbb{N}$ e uma partição finita da unidade $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$ subordinada a $(W_i)_{i \in I}$.*

Um subconjunto fechado A de um espaço topológico X diz-se um Z -conjunto se, para todo o espaço métrico compacto K , o conjunto $C^0(K, X \setminus A)$ das funções contínuas de K em $X \setminus A$ for denso em $C^0(K, X)$ com a métrica uniforme. Estes conjuntos têm a propriedade seguinte.

Lema 4.2.3. [9] *Seja $A \subseteq X$ uma união numerável de Z -conjuntos. Então existe um homeomorfismo entre X e $X \setminus A$.*

Consideremos agora um espaço de Banach separável $\mathcal{X}$ e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador hipercíclico (caso contrário, $HC(T) = \emptyset$). Seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base numerável de abertos de $\mathcal{X}$. Sabemos que

$$HC(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U_n).$$

Logo,

$$\mathcal{X} \setminus HC(T) = \mathcal{X} \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U_n) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U_n) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{X} \setminus T^{-j}(U_n).$$

E, portanto, se provarmos que $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{X} \setminus T^{-j}(U_n)$ é um Z -conjunto para todo o $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar o Lema 4.2.3 e concluir que $HC(T)$ é homeomorfo a $\mathcal{X}$.

Lema 4.2.4. *Para todo o aberto não-vazio U de $\mathcal{X}$, a interseção $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{X} \setminus T^{-j}(U)$ é um Z -conjunto.*

Demonstração. Fixemos um aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{X}$ e consideremos um espaço métrico compacto K . Temos de mostrar que

$$\overline{C^0\left(K, \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U)\right)} = C^0(K, \mathcal{X}).$$

Sejam $f \in C^0(K, \mathcal{X})$ e $\varepsilon > 0$. Designemos por $B(0; \varepsilon)$ a bola aberta em $\mathcal{X}$ centrada em 0 de raio ε e por $\|\cdot\|_K$ a norma do supremo em $C^0(K, \mathcal{X})$.

Consideremos $x_0 \in HC(T)$. Para cada $t \in K$, seja $m_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^{m_t}x_0 - f(t)\| < \varepsilon.$$

Como a função $t' \mapsto T^{m_t}x_0 - f(t')$ é contínua e $B(0; \varepsilon)$ é aberto, existe, para cada $t \in K$, um aberto $W_t \subseteq K$ contendo t tal que

$$s \in W_t \quad \Rightarrow \quad \|T^{m_t}x_0 - f(s)\| < \varepsilon.$$

Apliquemos o Lema 4.2.2 à família de abertos $(W_t)_{t \in K}$, e seja $(\phi_i: K \rightarrow [0, 1])_{1 \leq i \leq N}$ uma partição finita da unidade subordinada a $(W_t)_{t \in K}$. Escolhendo, para cada $1 \leq i \leq N$, um elemento $t_i \in K$ tal que $\text{supp}(\phi_i) \subseteq W_{t_i}$, definimos $g: K \rightarrow \mathcal{X}$ por

$$g(s) = \sum_{i=1}^N \phi_i(s) T^{m_{t_i}} x_0.$$

A função g é contínua pois é a soma das N funções contínuas $s \mapsto \phi_i(s) T^{m_{t_i}} x_0$. Além disso, $g(K) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U)$. Para ver isso, para cada $t \in K$ definimos a função $P_t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$P_t(z) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) z^{m_{t_i}}$$

A função P_t é um polinómio; logo, pelo Teorema 4.1.4, $P_t(T)x_0 = g(t)$ é hipercíclico. E, portanto, existe um $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^\ell P_t(T)x_0 \in U$, o que implica que $g(t) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U)$.

Fica assim provado que

$$g \in C^0\left(K, \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(U)\right).$$

Falta confirmar que g está ε -perto de f na métrica uniforme. Dado $s \in K$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ tem-se $s \in W_{t_i}$ ou $\phi_i(s) = 0$. Assim, ou $\|T^{m_{t_i}}x_0 - f(s)\| < \varepsilon$ ou $\phi_i(s) = 0$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|g(s) - f(s)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N \phi_i(s) T^{m_i} x_0 - f(s) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^N \phi_i(s) (T^{m_i} x_0 - f(s)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \phi_i(s) \|T^{m_i} x_0 - f(s)\| < \sum_{i=1}^N \phi_i(s) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\|g - f\|_K < \varepsilon$. Está demonstrado que $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathcal{X} \setminus T^{-j}(U)$ é um Z-conjunto. $\square$

Aplicando o Lema 4.2.4 a cada um dos abertos da base numerável $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, concluímos que $\mathcal{X} \setminus HC(T)$ é união numerável de Z-conjuntos. Pelo Lema 4.2.3, $HC(T)$ é homeomorfo a $\mathcal{X}$. $\square$

4.3. Funções minimais em espaços de Hilbert

O Corolário 2.2.1.1 de N.Bernardes mostra que não há funções contínuas minimais em espaços vetoriais de dimensão finita positiva. E em espaços de dimensão infinita? Do Teorema 4.2.1 resulta que uma condição suficiente para que um espaço $\mathcal{X}$ admita um sistema dinâmico contínuo minimal é precisamente a de existir um operador hipercíclico definido em $\mathcal{X}$.

Teorema 4.3.1. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach que admite um operador linear contínuo e hipercíclico. Então existe uma função $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ contínua minimal.*

Demonstração. Seja $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador hipercíclico em $\mathcal{X}$. Pelo Teorema 4.2.1, existe um homeomorfismo $\varphi: HC(T) \rightarrow \mathcal{X}$. Consideremos a função $f = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$. A função f está bem definida, uma vez que $HC(T)$ é T -invariante, é contínua e os sistemas dinâmicos $(HC(T), T)$ e $(\mathcal{X}, f)$ são conjugados por φ . Pela Proposição 2.1.10, sabemos que $\mathcal{D}_f = \varphi(\mathcal{D}_T)$, onde

$$\mathcal{D}_T = \left\{ x \in HC(T) : \overline{\text{Orb}_T(x)} = HC(T) \right\} = HC(T)$$

sendo a última igualdade consequência do facto de $HC(T)$ ser um subconjunto denso de $\mathcal{X}$ a que se aplica a Proposição 1.1.3. Consequentemente, $\mathcal{D}_f = \varphi(HC(T)) = \mathcal{X}$.

Observação 4.3.2. Note-se que, se T é bijetivo, então pelos Teoremas 1.2.11 e 2.1.8 a aplicação f construída na demonstração anterior é um homeomorfismo minimal. $\square$

Este resultado é particularmente útil para espaços de Hilbert porque, ao contrário do que acontece com espaços de Banach, em que existem vários espaços separáveis distintos, existe apenas um espaço de Hilbert separável a menos de isomorfismo.

Lema 4.3.3. [28, Theorem 3.6-4 e Theorem 3.6-5] *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ espaços de Hilbert separáveis sobre o mesmo corpo. Então $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ são isomorfos como espaços de Hilbert.*

Corolário 4.3.3.1. *Todo o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K}$ admite uma função contínua minimal.*

Demonstração. Começemos por mostrar que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ admite uma função contínua minimal. Isso resulta diretamente do facto de o operador de Rolewicz B_2 ser hipercíclico em $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (cf. Subsection 3.2.2.1). Pelo Teorema 4.3.1, existe uma função contínua minimal $f: \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável sobre o corpo $\mathbb{K}$. Pelo Lema 4.3.3, o espaço $\mathcal{H}$ é isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Seja $\psi: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ um isomorfismo entre eles. Então, definindo $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$, temos que $(\mathcal{H}, g)$ e $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), f)$ são conjugados por ψ . Logo, como f é minimal, g também é minimal. □

Tendo em conta a Observação 4.3.2 e a existência de um *weighted backward shift* bilateral no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ que é hipercíclico (veja-se o Exemplo 3.2.4), podemos ainda afirmar o seguinte.

Corolário 4.3.3.2. *Todo o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K}$ admite um homeomorfismo minimal.*

Vemos assim que, relativamente à existência de sistemas dinâmicos transitivos em espaços de Hilbert que não se reduzem ao vetor nulo, a informação depende de modo essencial da dimensão do espaço: em espaços de Hilbert de dimensão finita (positiva) não há nem funções contínuas minimais nem operadores hipercíclicos; em espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita há funções contínuas minimais e operadores hipercíclicos; em espaços de Hilbert não-separáveis não há nem funções contínuas minimais nem operadores hipercíclicos, uma vez que uma órbita densa é um subconjunto numerável denso. Ou seja: em dimensão finita, a estrutura do espaço é demasiado rígida para permitir dinâmica complexa; em espaços não-separáveis, o espaço é demasiado grande

para que a dinâmica possa ter órbitas densas; em espaços de dimensão infinita separáveis, a combinação especial da linearidade e da dimensão permitem dinâmicas mais ricas, inclusivamente lineares.

5. Propriedades ergódicas dos operadores hipercíclicos

Focamo-nos agora nas propriedades ergódicas de operadores lineares com o objetivo de mostrar que todo o operador linear contínuo frequentemente hipercíclico num espaço de Banach reflexivo admite uma probabilidade invariante com suporte total. Apesar de as abordagens topológica e ergódica serem disjuntas em métodos e resultados, há uma interligação interessante entre estas duas áreas. Por exemplo, vimos no Teorema 2.1.6 que, se um sistema admitir uma probabilidade invariante, então é recorrente e o conjunto de pontos recorrentes é denso. Se a dinâmica admitir probabilidades ergódicas com suporte total, podemos afirmar mais: existem órbitas densas.

Começemos por notar que a definição de probabilidade ergódica pode ser reformulada equivalentemente da seguinte forma (cf. [39, Theorem 1.5]): μ é ergódica se, para todos os mensuráveis A, B com medida positiva, existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \cap f^{-n}(B)) > 0$. Ora, esta formulação sugere transitividade topológica. No entanto, a ergodicidade não é suficiente para se ter transitividade topológica porque, se existir algum aberto U com medida nula, a condição de ergodicidade nada nos diz sobre os retornos a U . Mas, se supusermos que μ tem suporte total, então, de facto, f é topologicamente transitiva. Assim, em espaços métricos completos sem pontos isolados, existir uma probabilidade ergódica com suporte total é suficiente para garantir transitividade topológica e, além disso, que $\mathcal{D}_f$ é um G_δ denso.

De facto, a condição de ergodicidade aliada ao suporte total garantem uma propriedade mais forte do que transitividade topológica, pois implicam que a dinâmica é frequentemente hipercíclica. Esta afirmação é uma consequência direta do Teorema ergódico de Birkhoff (cf. [39, Theorem 1.14]):

Teorema 5.0.1 (Teorema ergódico de Birkhoff). *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita, $f: X \rightarrow X$ mensurável e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função μ -integrável. Então, para μ -q.t.p. $x \in X$, o limite*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \varphi(f^n x)$$

existe. Definindo $\varphi^*(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \varphi(f^n x)$ quando o limite existe e $\varphi^*(x) = 0$ quando não existe, temos que φ^* é μ -integrável, f -invariante (isto é, $\varphi^* \circ f = \varphi^*$) e

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi^* d\mu$$

Se μ é ergódica, então $\varphi^*(x) = \frac{\int \varphi d\mu}{\mu(M)}$ em μ -q.t.p. $x \in X$ e, se φ for limitada, então

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \varphi(f^n x) - \varphi^*(x) \right| d\mu(x) = 0.$$

Suponhamos que existe uma medida μ finita, ergódica, com suporte total que é invariante por uma transformação mensurável $f: X \rightarrow X$ num espaço métrico completo e separável X . Podemos supor que μ é uma medida de probabilidade (caso contrário, definimos $\nu = \frac{\mu}{\mu(X)}$). Para cada aberto não-vazio $U \subseteq X$, a função indicatriz $\mathbf{1}_U: X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\mathbf{1}_U(x) = 1$ se $x \in U$ e 0 caso contrário, é mensurável e μ -integrável. Logo, pelo Teorema ergódico de Birkhoff temos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_U(f^n x) = \int \mathbf{1}_U d\mu = \mu(U) > 0 \quad \text{em } \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

Claramente, $\sum_{n=0}^N \mathbf{1}_U(f^n x) = \#N_f(x, U)$. Logo,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} N_f(x, U) > 0 \quad \text{em } \mu\text{-q.t.p. } x \in X.$$

Então

$$\underline{\text{dens}}(N_f(x, U)) = \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} N_f(x, U) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} N_f(x, U) > 0.$$

Consideremos uma base numerável de abertos $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de X . Para cada $k \in \mathbb{N}$, definase

$$A_k = \left\{ x \in X : \underline{\text{dens}}(N_f(x, U_k)) = 0 \right\}.$$

Sabemos que $\mu(A_k) = 0$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ e que $FHC(f) = X \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$. Assim,

$$\mu(FHC(f)) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 1$$

e, portanto, $FHC(f)$ é um conjunto não-vazio. Logo, f é frequentemente hipercíclico. Em particular, no contexto linear, se existir uma medida ergódica com suporte total, o operador é frequentemente hipercíclico.

E, reciprocamente, todo o operador linear contínuo frequentemente hipercíclico admite uma probabilidade ergódica com suporte total? Uma resposta negativa foi dada em [23, Teorema 1.7], cujos autores construíram um *weighted shift* bilateral no espaço $c_0(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

que é frequentemente hipercíclico mas não admite nenhuma probabilidade ergódica com suporte total. E quanto a probabilidades invariantes com suporte total? Veremos na próxima secção que, em espaços de Banach reflexivos, todo o operador linear contínuo frequentemente hipercíclico possui uma probabilidade invariante com suporte total.

5.1. Probabilidades invariantes por operadores frequentemente hipercíclicos

Um resultado clássico de Teoria Ergódica afirma que qualquer transformação contínua $f: X \rightarrow X$ de um espaço métrico compacto X tem uma probabilidade invariante definida na σ -álgebra dos borelianos de X . Pode ler-se uma demonstração em [39, §6.2] que recorre ao Teorema de Representação de Riesz. Se, além disso, supusermos que f é frequentemente hipercíclica, podemos garantir que existe uma tal probabilidade invariante com suporte total.

Teorema 5.1.1. [23] *Sejam X um espaço métrico separável compacto e $f: X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Se f for frequentemente hipercíclica, então existe uma probabilidade definida nos borelianos de X que é f -invariante e tem suporte total.*

Para ser estendido a operadores lineares em espaços de Banach que não se reduzam ao vetor nulo, o resultado anterior precisa de ser adaptado para lidar com a falta de compacidade. Como veremos, isso é possível em espaços reflexivos.

Teorema 5.1.2. [23] *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach reflexivo e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo frequentemente hipercíclico. Então existe uma probabilidade nos borelianos de X que é T -invariante e tem suporte total.*

Demonstração. Diz-se que um funcional linear m no espaço ℓ^∞ das sucessões limitadas de números reais é uma *média invariante* se

- m é positivo, isto é, $\xi_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m((\xi_n)_n) \geq 0$;
- $m((1)_n) = 1$;
- $m((\xi_{n+j})_n) = m((\xi_n)_n)$ para todo o $j \in \mathbb{N}$.

Resulta do Teorema de Hahn-Banach que existe uma média invariante tal que

$$m((\xi_n)_n) \geq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n \quad \forall (\xi_n)_n \in \ell^\infty.$$

Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach reflexivo e $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo frequentemente hipercíclico. Começemos por notar que, para todo o $x \in \mathcal{X}$ e $r > 0$, a bola fechada $B[x; r]$ é um compacto metrizável na topologia fraca. Logo todo o ponto do espaço $\mathcal{X}$ admite um sistema fundamental de vizinhanças (para a topologia da norma) composto por conjuntos compactos metrizáveis na topologia fraca.

Lema 5.1.3. *Os borelianos de $\mathcal{X}$ para a topologia da norma e para a topologia fraca são os mesmos.*

Demonstração. Dado um aberto U da norma, escolha-se para cada $x \in U$ uma bola na norma e de raio $r_x > 0$ tal que $B[x; r_x] \subseteq U$. Desse modo, temos $U = \bigcup_{x \in U} B[x; r_x]$. Como $\mathcal{X}$ é 2-numerável, podemos extrair desta união uma sub-cobertura numerável, pelo que existe uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de U tal que

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B[x_n; r_{x_n}].$$

Logo todo o aberto na topologia da norma é um boreliano da topologia fraca, pelo que todo o boreliano da norma é boreliano da topologia fraca. Como todo o aberto da topologia fraca é também aberto da norma, concluímos que os borelianos relativos às duas topologias coincidem, e os compactos na topologia fraca geram os borelianos de $\mathcal{X}$. $\square$

Lema 5.1.4. *O operador T é contínuo se em $\mathcal{X}$ consideramos a topologia fraca.*

Demonstração. Esta afirmação é consequência do teorema 1.2.18 e de T ser contínuo na norma. $\square$

Sejam $x_0 \in FHC(T)$ e $\mathcal{K} = \{K \subseteq \mathcal{X} : K \text{ é compacto na topologia fraca}\}$. Note-se que, como as bolas fechadas na norma são compactas na topologia fraca, o conjunto $\mathcal{K}$ é não-vazio. Fixemos $K \in \mathcal{K}$. Os borelianos de K correspondem precisamente aos conjuntos $A \cap K$ tais que A é um boreliano em $\mathcal{X}$. Considerando o espaço $\mathcal{C}(K)$ das funções contínuas de K (com a topologia fraca) em $\mathbb{R}$, defina-se $S: \mathcal{C}(K) \rightarrow \ell^\infty$ por

$$S(\varphi) = \left((\mathbf{1}_K \cdot \varphi)(T^n x_0) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

O operador S está bem definido pois o domínio de $\mathbf{1}_K \cdot \varphi$ é $\mathcal{X}$ e $S\varphi \in \ell^\infty$, uma vez que

$$\|S(\varphi)\|_\infty = \left\| (\mathbf{1}_K \cdot \varphi)(T^n x_0) \right\|_\infty = \sup_n |(\mathbf{1}_K \cdot \varphi)(T^n x_0)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| = \|\varphi\|.$$

Além disso, S é linear pois, dados $\varphi, \psi \in C(K)$ e escalares α, β ,

$$S(\alpha\varphi + \beta\psi) = \left(\left(\mathbf{1}_K \cdot (\alpha\varphi + \beta\psi) \right) (T^n x_0) \right)_n = \alpha S(\varphi) + \beta S(\psi).$$

Logo, S é um operador linear contínuo com $\|S\| \leq 1$. Defina-se o funcional linear

$$L_K = m \circ S: C(K) \rightarrow \mathbb{R}$$

onde m é a média invariante referida acima. Note-se que L_K é positivo já que, se $\varphi \geq 0$, então $S(\varphi)$ é uma sucessão de termos não-negativos e, por isso, $m(S(\varphi)) \geq 0$.

Aplicando a L_K o Teorema de Representação de Riesz, obtemos uma única medida μ_K^* definida nos borelianos de K tal que

$$L_K(\varphi) = \int \varphi d\mu_K^* \quad \forall \varphi \in C(K).$$

Em particular, se $\mathbf{1} \in C(K)$ é a função constante igual a 1, tem-se $L_K(\mathbf{1}) \leq m((1)_n) = 1$; logo, $0 \leq \mu_K^*(K) \leq 1$. Além disso, se K tiver interior não-vazio na topologia da norma,

$$\mu_K^*(K) = L_K(\mathbf{1}) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_K(T^j(x_0)) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\tilde{K}}(T^j(x_0)) > 0$$

porque x_0 é frequentemente hipercíclico de T .

Estendemos agora μ_K^* aos borelianos de $\mathcal{X}$, definindo

$$\mu_K(A) = \mu_K^*(A \cap K) \quad \forall \text{ boreliano } A \text{ de } \mathcal{X}.$$

Deste modo, obtemos uma família $\{\mu_K: K \in \mathcal{K}\}$ de medidas positivas nos borelianos de $\mathcal{X}$, cujas imagens estão contidas em $[0, 1]$, e que são regulares uma vez que $\mathcal{X}$ é um espaço métrico completo e separável (pois a órbita por T de x_0 é densa.) Além disso, esta família tem a seguinte propriedade.

Lema 5.1.5. Se $K \subseteq K'$ são compactos de $\mathcal{K}$, então $\mu_K \leq \mu_{K'}$.

Demonstração. Basta confirmar que $\mu_K(E) \leq \mu_{K'}(E)$ para todo o compacto E de $\mathcal{X}$ na topologia da norma. E, como os compactos na norma são compactos na topologia fraca, a afirmação fica demonstrada se a mostrarmos para os compactos na topologia fraca.

Seja A um compacto de $\mathcal{X}$ na topologia fraca. Como $K \cap A$ é um compacto na topologia fraca, podemos prosseguir o argumento com $K \cap A$ em vez de A , ou seja, podemos supor que $A \subseteq K$. Como K' é um espaço métrico compacto com a topologia fraca, para cada natural n o conjunto $B_n = \left\{ x \in K': d(x, A) \geq \frac{1}{n} \right\}$ é fechado, sendo d a métrica da

topologia fraca. Logo, pelo Lema 1.1.14, existem funções $f_n \in \mathcal{C}(K')$ cuja imagem está contida em $[0, 1]$ e verificam $f_n(x) = 0$ se $x \in B_n$ e $f_n(x) = 1$ se $x \in A$. A sucessão $(f_n)_n$ converge pontualmente para $\mathbf{1}_A$, logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} \mu_K(A) &= \int_K \mathbf{1}_A d\mu_K = \lim_n \int_K f_n d\mu_K = \lim_n m \left((\mathbf{1}_K \cdot f_n) (T^j x_0)_j \right) \\ &\leq \lim_n m \left((\mathbf{1}_{K'} \cdot f_n) (T^j x_0)_j \right) = \lim_n \int_{K'} f_n d\mu_{K'} = \int_{K'} \mathbf{1}_A d\mu_{K'} = \mu_{K'}(A). \end{aligned}$$

Tendo em conta que os fechados geram os borelianos, concluímos que $\mu_K \leq \mu_{K'}$. $\square$

Definimos agora, para cada boreliano $A \subseteq \mathcal{X}$,

$$\mu(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(A).$$

Lema 5.1.6. *A medida μ é positiva, T -invariante e tem suporte total.*

Demonstração. Por construção, $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(A) \geq 0$ para todo o boreliano A . Dados borelianos A, B disjuntos,

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(A \cup B) = \sup_{K \in \mathcal{K}} (\mu_K(A) + \mu_K(B)) \\ &\leq \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(A) + \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(B) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $K, K' \in \mathcal{K}$, tem-se $K' \cup K \in \mathcal{K}$ e

$$\mu_K(A) + \mu_{K'}(B) \leq \mu_{K \cup K'}(A) + \mu_{K \cup K'}(B) = \mu_{K \cup K'}(A \cup B) \leq \mu(A \cup B).$$

Consequentemente,

$$\mu(A) + \mu(B) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(A) + \sup_{K' \in \mathcal{K}} \mu_{K'}(B) \leq \mu(A \cup B)$$

e $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Finalmente, se $(A_n)_n$ é uma sucessão crescente de borelianos, temos $\mu(A_{n+1}) \geq \mu(A_n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ por μ ser aditiva e positiva. E, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) &= \sup_n \mu(A_n) = \sup_n \sup_K \mu_K(A_n) = \sup_K \sup_n \mu_K(A_n) = \sup_K \lim_n \mu_K(A_n) \\ &= \sup_K \mu_K \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right). \end{aligned}$$

Vejamos agora que μ é T -invariante. Há que mostrar que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo o boreliano A . Começemos por provar que $\mu(T^{-1}(E)) \leq \mu(E)$ para E fechado na topologia fraca.

Como T é contínuo na topologia fraca, se $K \in \mathcal{K}$ então $T(K) \in \mathcal{K}$. Logo existem funções $\varphi_n \in \mathcal{C}(T(K))$ tais que $(\varphi_n)_n$ converge pontualmente para $\mathbf{1}_{T(K) \cap E}$ e tem-se

$$\begin{aligned} \mu_{T(K)}(E) &= \lim_n \int_{T(K)} \varphi_n d\mu_{T(K)} = \lim_n L_{T(K)}(\varphi_n) = \lim_n m\left(\left(\mathbf{1}_{T(K)} \cdot \varphi_n\right)\left(T^j x_0\right)_j\right) \\ &= \lim_n m\left(\left(\mathbf{1}_{T(K)} \cdot \varphi_n\right)\left(T^{j+1} x_0\right)_j\right) = \lim_n m\left(\mathbf{1}_{T(K)}\left(T^{j+1} x_0\right)_j \cdot \varphi_n\left(T^{j+1} x_0\right)_j\right) \\ &\geq \lim_n m\left(\left(\mathbf{1}_K\left(T^j x_0\right)_j \cdot \varphi_n\left(T^{j+1} x_0\right)_j\right)\right) = \lim_n m\left(\left(\mathbf{1}_K \cdot \varphi_n \circ T\right)\left(T^j x_0\right)_j\right) \\ &= \lim_n \int_K \varphi_n \circ T d\mu_K \end{aligned}$$

sendo a quarta igualdade consequência de m ser uma média invariante, e a desigualdade do facto de $\mathbf{1}_K \leq \mathbf{1}_{T^{-1}(T(K))} = \mathbf{1}_{T(K)} \circ T$. Como $\varphi_n \circ T \in \mathcal{C}(K)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $(\varphi_n \circ T)_n$ converge pontualmente para $\mathbf{1}_{T(K) \cap E} \circ T = \mathbf{1}_{T^{-1}(T(K) \cap E)} = \mathbf{1}_{T^{-1}(E) \cap T^{-1}(T(K))}$, obtemos

$$\mu_{T(K)}(E) \geq \lim_n \int_K \varphi_n \circ T d\mu_K = \mu_K\left(T^{-1}(T(K)) \cap T^{-1}(E)\right) = \mu_K(T^{-1}(E)).$$

Consideremos agora um aberto não-vazio U na topologia da norma. Como vimos, U é união numerável de uma família crescente de compactos. Logo, $\mu_K(T^{-1}(U)) \leq \mu_{T(K)}(U)$ para todo o $K \in \mathcal{K}$. E, portanto,

$$\mu(U) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_{T(K)}(U) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}} \mu_K(T^{-1}(U)) = \mu(T^{-1}(U)).$$

Além disso, como todas as medidas nos borelianos de $\mathcal{X}$ são regulares e, para qualquer boreliano A , sabemos que se $A \subseteq U$ então $T^{-1}(A) \subseteq T^{-1}(U)$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf_U \{\mu(U) : A \subseteq U \text{ e } U \text{ é aberto}\} \geq \inf \{\mu(T^{-1}(U)) : A \subseteq U \text{ e } U \text{ é aberto}\} \\ &\geq \inf \{\mu(U) : T^{-1}(A) \subseteq U \text{ e } U \text{ é aberto}\} = \mu(T^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Para obtermos a desigualdade contrária, basta ter em conta que $\mathcal{X} \setminus A$ é um boreliano e μ é medida finita, logo

$$\mu(\mathcal{X}) - \mu(A) = \mu(\mathcal{X} \setminus A) \geq \mu(T^{-1}(\mathcal{X} \setminus A)) \geq \mu(\mathcal{X} \setminus T^{-1}(A)) = \mu(\mathcal{X}) - \mu(T^{-1}(A)).$$

Para mostrarmos que μ tem suporte total, consideremos um aberto na norma não-vazio

U . O aberto U contém uma bola fechada $K \in \mathcal{K}$, que tem interior não-vazio na norma. Logo, $\mu(U) \geq \mu_K(U) > 0$. □

Note-se que μ não é necessariamente uma probabilidade. No entanto, por construção, temos $0 < \mu(\mathcal{X}) \leq 1$. Logo podemos considerar a probabilidade $\nu = \frac{\mu}{\mu(\mathcal{X})}$, que é equivalente a μ (isto é, $\mu(A) = 0$ se e só se $\nu(A) = 0$). Obtemos desse modo uma probabilidade T -invariante com suporte total. □

Observação 5.1.7. A reflexividade do espaço de Banach $\mathcal{X}$ não é essencial na demonstração anterior. Na verdade, foi apenas usado o facto de as bolas na topologia da norma serem compactas e metrizáveis na topologia fraca. Por isso, basta supor que $\mathcal{X}$ é isomorfo a um espaço dual $\mathcal{Y}^*$ separável e que $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o adjunto $S^*: \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{Y}^*$ de um operador linear contínuo $S: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$. Em particular, o Teorema 5.1.2 é válido para operadores adjuntos frequentemente hipercíclicos no espaço ℓ^1 , que é o dual de c_0 e separável.

5.2. Probabilidades ergódicas por operadores frequentemente hipercíclicos

A medida de Dirac suportada em 0 é uma probabilidade ergódica para todo o operador linear. Mas, como já referimos, nem sempre existem medidas ergódicas com suporte total, ainda que o operador seja frequentemente hipercíclico. Contudo, concluímos do Teorema 5.1.2 a propriedade seguinte.

Corolário 5.2.0.1. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach reflexivo, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um operador linear contínuo frequentemente hipercíclico e $U \subseteq \mathcal{X}$ um aberto não vazio. Então existe uma probabilidade ergódica μ nos borelianos de $\mathcal{X}$ tal que $\mu(U) > 0$.*

O corolário anterior é um caso particular da afirmação seguinte.

Proposição 5.2.1. *Sejam X um espaço métrico completo separável, $f: X \rightarrow X$ uma transformação contínua e ν uma probabilidade nos borelianos de X que é f -invariante e tem suporte total. Então, para qualquer boreliano A de X com $\nu(A) > 0$, existe uma componente ergódica ν_s de ν tal que $\nu_s(A) > 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.3, existe um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{J}, \lambda)$ e uma família $(\nu_t)_{t \in \Omega}$ de probabilidades f -invariantes e ergódicas tais que, para todo o

boreliano A , a função $t \mapsto \nu_t(A)$ é mensurável, λ -integrável e

$$m(A) = \int_{\Omega} \nu_t(A) d\lambda(t).$$

Seja $A \subset X$ um boreliano com $\nu(A) > 0$. Como $0 < \nu(A) = \int_{\Omega} \nu_t(U) d\lambda(t)$, existe $s \in \Omega$ tal que $\nu_s(A) > 0$. $\square$

5.2.1 Exemplos

Iremos agora revisitar vários dos exemplos descritos anteriormente, verificando a quais deles podemos aplicar o Teorema 1.4.3.

Consideremos os *weighted shifts* em espaços de sucessões. Pelo Teorema 3.2.34, em todo o espaço de sucessões $\mathcal{X}$ onde c_{00} seja denso, um operador B_w é frequentemente hipercíclico sempre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{\nu=1}^n w_{\nu}^{-1} \right) e_n$$

convergir incondicionalmente. Se, além disso, $\mathcal{X}$ for reflexivo, então $(\mathcal{X}, B_w)$ admite uma probabilidade invariante com suporte total. Em particular, os operadores de Rolewicz em ℓ^p , $1 < p < +\infty$, admitem probabilidades invariantes com suporte total.

Como os espaços ℓ^1 e c_0 não são reflexivos, o Teorema 5.1.2 não se lhes aplica. No entanto, ℓ^1 é o dual de c_0 e, portanto, se provarmos, por exemplo, que um *weighted shift* frequentemente hipercíclico $B_w: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ é o adjunto de um operador linear contínuo em c_0 , podemos garantir a existência de uma probabilidade invariante com suporte total (recorde-se a Observação 5.1.7). E, de facto, $B_w = F_w^*$, pois se $x = (\xi_n)_n \in \ell^1 = c_0^*$ e $y = (\eta_n)_n \in c_0$, temos

$$\begin{aligned} \langle y, B_w(x) \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n w_{n+1} \xi_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} w_n \eta_{n-1} \xi_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} w_n \eta_{n-1} \xi_n + 0 \cdot \xi_1 = \langle F_w(y), x \rangle. \end{aligned}$$

Logo os operadores de Rolewicz em ℓ^1 têm probabilidades invariantes com suporte total.

Observação 5.2.2. Apesar de termos provado o Teorema 5.1.2 para espaços de Banach, o resultado é extensível a espaços de Fréchet, pelo que espaços de sucessões de Fréchet reflexivos nas condições do Teorema 3.2.34 admitem também probabilidades invariantes com suporte total.

6. Sufficient conditions for $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$

Abstract. We show that, if $X \neq \{0\}$ is a separable Banach space and $T: X \rightarrow X$ is a linear continuous operator, then T has a non-zero vector which is not hypercyclic whenever any one of the following conditions holds: (a) T is invertible and has the shadowing property; (b) X is reflexive, T is frequently hypercyclic and does not admit a Borel invariant ergodic probability measure with full support. We also discuss several examples which comply with these conditions.

6.1. Introduction and main results

Let $X \neq \{0\}$ be a Banach space. Given a subset $A \subset X$, we denote by $\bar{A}$ its closure in the topology induced by the norm in X and by $\mathring{A}$ its interior. Let $T: X \rightarrow X$ be a continuous linear operator. A vector $x_0 \in X$ is called hypercyclic if its orbit by T

$$\mathcal{O}_T(x_0) = \left\{ T^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

is a dense subset of X ; and x_0 is said to be frequently hypercyclic if, for any non-empty open subset U of X , the set

$$\mathcal{N}_T(x_0, U) = \left\{ n \geq 0 : T^n(x_0) \in U \right\}$$

has positive lower density, that is,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j \in \{1, \dots, k\} : T^j(x_0) \in U\}}{k} > 0.$$

The linear operator T is said to be hypercyclic (respectively, frequently hypercyclic) whenever it has a hypercyclic (respectively, frequently hypercyclic) vector. We denote by $\text{HC}(T)$ the set of hypercyclic vectors of T in X .

It is known that, if $X \neq \{0\}$ has finite dimension, then T has no dense orbits. Moreover, if the space X is not separable, then surely T has no hypercyclic vectors. In both cases T admits a non-trivial invariant closed subset, given by the closure of the orbit by T of any non-zero vector. That is why we will assume in what follows that X is infinite-dimensional and separable.

6.1.1 Closed non-trivial invariant subset problem

Given a hypercyclic continuous linear operator T on an infinite-dimensional separable Banach space X , it is known that $HC(T)$ is a G_δ dense subset of X , connected and, in fact, homeomorphic to X (cf. [26]). The initial version of the *closed invariant subset problem* asked, for a given Banach space $X \neq \{0\}$, whether every continuous linear operator $T: X \rightarrow X$ admits a closed set $E \subset X$ with $E \neq \{0\}$, $E \neq X$ and $T(E) \subset E$ (or, equivalently, whether $HC(T) \neq X \setminus \{0\}$). Clearly, if $T \neq 0$ and is not injective, then its kernel is a non-trivial closed invariant subset; thus, this problem is of importance only when $X \neq \{0\}$ and T is an injective operator. It was solved in the negative by Read in [36], who constructed an operator on the space $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ with $HC(T) = X \setminus \{0\}$. Further examples of such operators on $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ were presented in [24]. Yet, no examples are known on reflexive Banach spaces and, so far, it remains unclear what role the reflexivity of the space plays in this problem. To shed some light on this issue, the question we address here is to what extent the following result on topological dynamics may suggest interesting conditions under which one has $HC(T) \neq X \setminus \{0\}$.

Theorem 6.1.1 ([5]). *Let $f: Y \rightarrow Y$ be a continuous map on a Hausdorff topological space Y without isolated points. Denote by D_f the subset of points of Y whose orbits by f are dense in Y , and by $\mathring{D}_f$ its interior in Y .*

- (a) *If Y is compact, then $\mathring{D}_f = \emptyset$ or $D_f = X$.*
- (b) *If Y is not compact but is locally compact, then $\mathring{D}_f = \emptyset$.*

Needless to say, Theorem 6.1.1 cannot be applied to T if X is an infinite-dimensional Banach space, since X is neither compact nor locally compact in the topology induced by the norm. Yet, the system (X, T) has a dynamical compactification (C, J) , where C is a compact metric space, $J: C \rightarrow C$ is a continuous map, X is embedded in C as a G_δ dense subset, and $J|_X = T$ (see [15]). Applying Theorem 6.1.1 to J , one gets $\mathring{D}_J = \emptyset$, since $J(0) = 0$ prevents D_J from being the whole space C . However, in general, X is not open in C , so no further immediate conclusion can be drawn from this direct approach. If, in addition, we assume that $X \neq \{0\}$ is a reflexive Banach space and T is a hypercyclic operator with the positive shadowing property, then the map J is transitive, its non-wandering set is C and J has the positive shadowing property due to the fact that X is dense in C (cf. [18, Lemma 3.1] and [7, Theorem 1]). These properties ensure (cf. [32, Theorem 2.5]) that there is a non-zero vector in X that has a bounded T -orbit; so $HC(T) \neq X \setminus \{0\}$.

6.1.2 Several ways for a vector to be non-hypercyclic

The main steps of Bernardes' proof of Theorem 6.1.1 rely on three major properties, namely: (i) the existence of a fundamental system of compact neighborhoods for any point in Y ; (ii) the possibility of taking accumulation points of any sequence inside these compact neighborhoods. (iii) the existence of a subsequence with bounded gaps made of first returns of a dense orbit by f to a fixed compact neighborhood $V \subset D_f$. In trying to adapt this proof to the linear setting, the main difficulties appear in overcoming the absence of compact neighborhoods and controlling the gaps of the returns to a fixed neighborhood of a hypercyclic vector. If X is reflexive (for example, if X is a Hilbert space), then the closed balls in X are compact in the weak topology (cf. [13, Theorem 3.17]), and we may consider an accumulation point in the weak topology inside any closed ball. This temporary switch to the weak topology works nicely, since the open sets for the weak topology are open on the norm as well. For instance, if we endow X with the weak topology, then X is also Hausdorff and without isolated points, and T is also continuous and hypercyclic. (See [13, Chapter 3] for proofs of these assertions.) However, the weak topology has strictly less open sets whenever X has infinite dimension, and this prevents us from extending to this setting Bernardes' reasoning in what concerns the bounded gaps.

This explains why we were compelled to assume some conditions on the frequency of returns of orbits to suitable sets. As we will explain further on, under those assumptions we were able to show that the operator has a non-zero vector whose orbit is bounded. It should be noted, though, that this is a very particular method of ensuring that a non-zero vector is not hypercyclic; there are many other possible reasons that prevent a vector from being hypercyclic.

6.1.2.1 Uniformly recurrent vectors

Let $T: X \rightarrow X$ be a continuous linear operator on a Banach space $X \neq \{0\}$. Suppose that T has a non-zero uniformly recurrent vector (see the precise definition in Section 6.2). It is known that the closure of the orbit of a uniformly recurrent vector is a minimal subset of X , that is, it does not contain any proper non-empty closed invariant subset (cf. [21, Theorem 1.17]). Therefore, unless it is periodic, the closure of the orbit of a uniformly recurrent vector cannot contain a periodic point. In particular, the null vector in X cannot be an accumulation point of the orbit of a non-zero uniformly recurrent vector. So, a

uniformly recurrent vector is never hypercyclic if $X \neq \{0\}$. Thus, if T has a non-zero uniformly recurrent vector, then $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.

We note that every unilateral weighted backward shift B_w on $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ or $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, where $1 \leq p < +\infty$, has a dense set of points with finite orbit. Thus, in this setting one always has $\text{HC}^\circ(B_w) = \emptyset$, so $\text{HC}(B_w) \neq X \setminus \{0\}$. Moreover, if B_w is a unilateral or bilateral weighted backward shift on c_0 or ℓ^p , then B_w has a non-zero uniformly recurrent vector if and only if B_w is chaotic (cf. [25, Remark 5.21] and [12]). Thus, the mere existence of a non-zero uniformly recurrent vector grants a dense set of periodic orbits by B_w , which yields $\text{HC}^\circ(B_w) = \emptyset$.

On the contrary, the example on [3, Theorem 3.1] of a chaotic operator T on a separable Hilbert space such that $\lambda_0 T$ is not chaotic for some unimodular complex number λ_0 provides an example of a hypercyclic operator on a Hilbert space, namely $\lambda_0 T$, which has a dense set of uniformly recurrent vectors but no non-zero periodic points, since, by construction, the point spectrum of $\lambda_0 T$ contains no root of unity (cf. [26, Proposition 2.33] and [11, Corollary 4.7] for more details).

If we assume that the Banach space is reflexive, then it is enough to find a non-zero piecewise-uniformly recurrent vector (we refer the reader to Section 6.2 for the definition).

Theorem A. *Let $X \neq \{0\}$ be a reflexive Banach space and $T: X \rightarrow X$ be a continuous linear operator. Assume that T has a non-zero piecewise-uniformly recurrent vector. Then $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.*

6.1.2.2 Unimodular eigenvectors

It is known that any unimodular eigenvector (that is, an eigenvector whose associated eigenvalue has modulus 1) of a continuous linear operator on a complex Banach space is uniformly recurrent (see [25, Example 5.17]). Moreover, if the span of the set of unimodular eigenvectors is dense in X , then T has a dense set of uniformly recurrent vectors (cf. [25, Lemma 5.6]), and so $\text{HC}^\circ(T) = \emptyset$. When the underlying space X is a complex separable Hilbert space, we know more: the closure of the set of uniformly recurrent vectors of any continuous linear operator on X coincides with the closure of the span of its set of unimodular eigenvectors (cf. [22, Theorems 1.7]).

Obviously, if T has a dense set of uniformly recurrent points, then $\text{HC}^\circ(T) = \emptyset$, otherwise, $\text{HC}(T)$ and $\mathcal{UR}(T)$ would have a common non-zero vector. So, the following is a straightforward consequence of Theorem A.

Corollary B. *Let $X \neq \{0\}$ be a complex Banach space and $T: X \rightarrow X$ be a continuous linear operator. Assume that the span of the unimodular eigenvectors is dense in X . Then $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.*

In [19], it was shown that a continuous linear operator T on a complex separable Hilbert space $X \neq \{0\}$ has a Borel invariant probability measure with full support and of integrable square norm if and only if the eigenvectors of T with unimodular eigenvalues span the space. In this case, Corollary B guarantees that $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.

6.1.2.3 Shadowing property

Given a Banach space, the set of invertible linear continuous operators with the shadowing property (definition in Section 6.2) is open and nonempty in the space of invertible operators (cf. [14, Corollary 5]).

Theorem C. *Let $X \neq \{0\}$ be a Banach space and $T: X \rightarrow X$ be a continuous linear operator. If T is invertible and has the shadowing property, then $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.*

We recall that every invertible linear hyperbolic operator has the shadowing property. Yet, since $X \neq \{0\}$, if T is a hyperbolic operator then $\text{HC}(T) = \emptyset$; actually, its non-wandering set is just $\{0\}$ (cf. [30, Theorem 3]). On the other hand, there are invertible linear continuous operators with the shadowing property which are not hyperbolic (see [8, Theorem B]). This is why the previous result is interesting.

6.1.2.4 Ergodic operators on reflexive Banach spaces

It is not known whether there is a frequently hypercyclic operator on a Hilbert space which does not have a non-trivial closed invariant subset. The next result implies that, if such an example exists, then it must admit a Borel ergodic probability measure with full support.

Theorem D. *Let $X \neq \{0\}$ be a reflexive Banach space and $T: X \rightarrow X$ be a frequently hypercyclic continuous linear operator such that $\text{HC}^\circ(T) \neq \emptyset$. Then T admits a Borel ergodic probability measure with full support.*

Since $X \setminus \{0\}$ is an open non-empty subset of $X \neq \{0\}$, Theorem D may be rephrased to provide a sufficient condition for the existence of a non-trivial closed T -invariant subset of X : If $X \neq \{0\}$ is a reflexive Banach space and $T: X \rightarrow X$ is a frequently hypercyclic continuous linear operator which does not admit a Borel ergodic probability measure with full support, then $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.

We note that a frequently hypercyclic bilateral weighted shift on $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ is chaotic if $1 < p < +\infty$ (cf. [6]). Therefore, it has a dense subset of periodic orbits and the interior of its set of hypercyclic vectors is empty. In [23, Theorem 1.7], we find an example of a frequently hypercyclic bilateral weighted shift on the (not reflexive) space $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ that does not admit a Borel ergodic probability measure with full support. Moreover, [25, Chapter 7] describes several examples of frequently hypercyclic operators on the (reflexive) spaces $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, that are chaotic and do not admit a Borel ergodic probability measure with full support. These examples are not weighted shifts since, for these systems, frequent hypercyclicity is a necessary and sufficient condition for the existence of a Borel ergodic probability measure with full support [33].

According to [23, Proposition 2.11], an operator on a reflexive Banach space admits a Borel invariant probability measure with full support if and only if it is frequently recurrent. There exists also a characterization of the frequently hypercyclic invertible operators on reflexive Banach spaces that have a Borel ergodic probability measure with full support: see [23, Proposition 2.9].

The paper is organized as follows. In Section 6.2, we gather the main definitions and refer to useful information regarding these concepts. Sections 6.3, 6.4 and 6.5 are devoted to the proofs of the results.

6.2. Definitions

Let Y be a metric space and $f: Y \rightarrow Y$ be a continuous map.

6.2.1 Syndetic, thick, piecewise syndetic and IP subsets of $\mathbb{N}$

A set $A \subset \mathbb{N}$ is *syndetic* if there exists $p \in \mathbb{N}$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$, one has

$$\{n, n+1, \dots, n+p\} \cap A \neq \emptyset.$$

A set $A \subset \mathbb{N}$ is said to be *thick* if it contains arbitrarily large finite blocks of consecutive integers (equivalently, if $\mathbb{N} \setminus A$ is not syndetic). A set $A \subset \mathbb{N}$ is *piecewise syndetic* if there are a syndetic set $A_1 \subset \mathbb{N}$ and a thick set $A_2 \subset \mathbb{N}$ such that $A_1 \cap A_2 \subset A$. It is known [10] that, if A is piecewise syndetic, then there is a syndetic set $\{s_1 < s_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ and a sequence $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of positive integers such that $n_k + s_j \in A$ for every $k \in \mathbb{N}$ and every $0 \leq j \leq k$, where $s_0 = 0$.

A set A is an *IP-set* if there is an increasing sequence $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ such that

$$\left\{ \sum_{n \in F} b_n : F \subset \mathbb{N} \text{ is finite} \right\} \subset A.$$

Following [10, Definition 2], a set A is said to *contain a broken IP-set* if there is a sequence $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of positive integers such that, for every $k \in \mathbb{N}$, there exists $n_k \in \mathbb{N}$ satisfying

$$n_k + \left\{ \sum_{j=1}^r b_{i_j} : r \in \mathbb{N}, i_1 < i_2 < \dots < i_r < k \right\} \subset A.$$

It is known [10, Remark 2] that if a set $A \subset \mathbb{N}$ has positive upper density, then it contains a broken IP-set.

6.2.2 Frequently recurrence

The map f is said to be *frequently recurrent* if the set of vectors $y \in Y$ such that, for any neighborhood U of y in Y , the return set $\mathcal{N}_f(y, U) = \{n \geq 0 : f^n(y) \in U\}$ has positive lower density, is dense in Y .

6.2.3 Uniformly recurrence

A point $y \in Y$ is said to be *uniformly recurrent* if, for every open neighborhood U of y in Y , the set

$$\mathcal{N}_f(y, U) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(y) \in U\}$$

is syndetic (that is, $\mathcal{N}_f(y, U)$ has bounded gaps). More precisely, for every open neighborhood U of y in Y there exists $p \in \mathbb{N}$ such that, for every $n \in \mathbb{N}$, one has

$$\{n, n+1, \dots, n+p\} \cap \mathcal{N}_f(y, U) \neq \emptyset.$$

For example, periodic points are uniformly recurrent. In what follows, we will denote by $\mathcal{UR}(f)$ the set of uniformly recurrent vectors of f in Y . The map f is uniformly recurrent if $\mathcal{UR}(f)$ is dense in Y .

6.2.4 Piecewise-uniform recurrence

A point $y \in Y$ is said to be *piecewise-uniformly recurrent* if there exists a closed ball $B = B(y, r)$ centered at y with radius $r > 0$ such that $0 \notin B$ and $\mathcal{N}_f(y, B)$ is piecewise syndetic.

6.2.5 Topological transitivity

One says that f is *transitive* if for every non-empty open sets U and V of Y there is $n \in \mathbb{N}$ such that $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. It is well-known that if Y is a separable complete metric space without isolated points, or a second countable Baire space without isolated points, then f is transitive if and only if there exists some $y \in Y$ whose orbit by f is dense in Y (see [1, Theorem 1.4]) or [26, Theorem 1.16]). Moreover, under these conditions on the space Y , the set of points in Y with dense orbit is a dense G_δ -set.

6.2.6 Shadowing property

Given $\delta > 0$, a δ -pseudo trajectory in Y is a finite or infinite sequence $(x_n)_{N_1 < n < N_2}$ of points in Y , where $-\infty \leq N_1 < N_2 \leq +\infty$ and $N_2 - N_1 \geq 3$, such that for every integer $N_1 < n < N_2$, the distance between $f(x_n)$ and x_{n+1} is less than δ . Given $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$, a δ -pseudo trajectory is said to be ε -shadowed if there is an orbit in Y whose points track the pseudo trajectory within a distance of ε . More precisely, there exists $y \in Y$ such that the distance between x_n and $f^n(y)$ is less than ε for every $N_1 < n < N_2$.

An invertible map f has the *shadowing property* if, for every $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that any δ -pseudo trajectory $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ is ε -shadowed. In case only finite pseudo trajectories are shadowed, we say that f has the *finite shadowing property*. We define the notion of *positive shadowing* by simply replacing the set $\mathbb{Z}$ by the set $\mathbb{N} \cup \{0\}$ in the definition of shadowing.

If Y is a compact metric space, then f has the shadowing property if and only if f has the finite shadowing property (cf. [34, Lemma 1.1.1] or [2, Remark 1]). The equivalence between shadowing, positive shadowing and finite shadowing also holds for continuous linear invertible (that is, injective and surjective) operators on a Banach space (cf. [7, Theorem 1]).

6.3. Proof of Theorem A

Assume that $X \neq \{0\}$ is a reflexive Banach space and T admits a vector $x_0 \in X$ and a closed ball $B = B(x_0, r)$ centered at x_0 with radius $r > 0$ such that $0 \notin B$ and the return set $\mathcal{N}_T(x_0, B)$ is piecewise syndetic. Then (see Subsection 6.2.1) there exist a syndetic set $\{s_1 < s_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ and a sequence $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of positive integers such that $n_k + s_j \in \mathcal{N}_T(x_0, B)$ for every $k \in \mathbb{N}$ and every $0 \leq j \leq k$, where $s_0 = 0$. For each $k \in \mathbb{N}$, define $B_k = \bigcap_{j=0}^k T^{-s_j}(B)$.

Lemma 6.3.1. *The sequence $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ has the following properties:*

(i) For every $k \in \mathbb{N}$, $B_k \neq \emptyset$.

(ii) $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is decreasing.

(iii) $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k \neq \emptyset$.

Proof.

(i) Since $s_0 = 0$, one has $T^{n_k}(x_0) \in B_k$ for every $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Clearly $\bigcap_{j=0}^{k+1} T^{-s_j}(B) \subset \bigcap_{j=0}^k T^{-s_j}(B)$.

(iii) As the Banach space X is reflexive, B is compact in the weak topology. Moreover, since T is continuous if we endow X with the weak topology, the set B_k is a weak closed subset of B , hence it is also weak compact. In addition, the weak topology is metrizable in B (hence Hausdorff) because X is separable and the weak open sets are open in the topology induced by the norm. Therefore, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k \neq \emptyset$. $\square$

Take $x_1 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{j=0}^k T^{-s_j}(B)$. Then, $x_1 \neq 0$, because $0 \notin B$; and

$$\{s_1 < s_2 < \dots\} \subset \mathcal{N}_T(x_1, B).$$

Lemma 6.3.2. *The T -orbit of x_1 is bounded. Thus, $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$.*

Proof. Since $\{s_1 < s_2 < \dots\}$ is syndetic, let $L \in \mathbb{N}$ be an upper bound of its gaps. Consider $R > 0$ such that $B \subset B(0, R)$ and $M = \max \{\|T^\ell(x_1)\| : 0 \leq \ell < s_1\}$. Then:

- For every $j \in \mathbb{N}$, one has $T^{s_j}(x_1) \in B$, so $\|T^{s_j}(x_1)\| \leq R$.
- Given $n \in \mathbb{N}$ and $j \in \mathbb{N}$ such that $s_j < n < s_{j+1}$, one has $n - s_j < s_{j+1} - s_j \leq L$ and

$$\|T^n(x_1)\| = \|T^{n-s_j}(T^{s_j}(x_1))\| \leq \|T\|^L \|T^{s_j}(x_1)\| \leq \|T\|^L R.$$

Therefore, for every $m \in \mathbb{N}$ one has

$$\|T^m(x_1)\| \leq \max \{M, \|T\|^L R\}.$$

$\square$

6.4. Proof of Theorem C

Let X be a Banach space and $T: X \rightarrow X$ be an invertible linear continuous operator. We may assume that T is hypercyclic and X is separable; otherwise, there is nothing to prove.

The operator T is said to be *hyperbolic* if its spectrum does not intersect the unit circle in the complex plane; T is *expansive* if for each $x \in X$ with $\|x\| = 1$ there exists some non-zero integer n with $\|T^n(x)\| \geq 2$; T is *uniformly expansive* if there exists some positive integer n such that if $x \in X$ has $\|x\| = 1$ then $\|T^n(x)\| \geq 2$ or $\|T^{-n}(x)\| \geq 2$.

It is known that an invertible operator on a Banach space is hyperbolic if and only if it is expansive and has the shadowing property (cf. [6, Theorem 1]). Moreover, if $T: X \rightarrow X$ has the shadowing property, then T is expansive if and only if T is uniformly expansive (cf. [14, Theorem 9]).

Since $X \neq \{0\}$, if T is a hyperbolic operator then $\text{HC}(T) = \emptyset$; actually, its non-wandering set is just $\{0\}$ (cf. [30, Theorem 3]). Assume now that T is an invertible operator with the shadowing property which is not hyperbolic. Therefore, T is not uniformly expansive. Thus, for every $\varepsilon > 0$ there is $x_\varepsilon \in X$ such that (cf. [6, pages 6 & 7])

$$1 - \varepsilon < \|T^n(x_\varepsilon)\| < 1 + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

In particular, if $0 < \varepsilon < 1/2$, then $x_\varepsilon \neq 0$, and so T has a non-zero vector with a bounded orbit. Consequently, $\text{HC}(T) \neq X \setminus \{0\}$. □

6.5. Proof of Theorem D

Every frequently hypercyclic operator T on a reflexive Banach space X has a Borel invariant probability measure with full support ([23, Theorem 1.3]). Actually, an operator T on a separable reflexive Banach space X admits a Borel invariant probability measure with full support if and only if it is frequently recurrent (cf. [22, Theorem 1.3]). We will show that, assuming the existence of an interior point in $\text{HC}(T)$, we also obtain such a probability measure.

Let $T: X \rightarrow X$ be a frequently hypercyclic operator of a reflexive Banach space $X \neq \{0\}$.

Claim 6.5.1. *If there is an open non-empty set $H \subset X$ contained in $\text{HC}(T)$, then*

$$\text{HC}(T) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(H).$$

Proof. Given $x \in \text{HC}(T)$, there exists $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that $T^N(x) \in H$, since the orbit of x by T is dense. So $x \in T^{-N}(H) \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(H)$. Conversely, given $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(H)$, take $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that $T^k(x) \in H$. Since $H \subset \text{HC}(T)$, the orbit of $T^k(x)$ by T is dense. Thus, as X has no isolated points, x has a dense orbit as well. Hence, $x \in \text{HC}(T)$. □

Consequently, $\text{HC}(T)$ is an open dense subset of X to which we may apply the next result.

Lemma 6.5.2. *[23, Corollary 1.4]. If Z is a reflexive Banach space and $B \subset Z$ is a non-empty open set, then any frequently hypercyclic continuous linear operator $S: Z \rightarrow Z$ has a Borel ergodic probability measure μ such that $\mu(B) > 0$.*

If we consider $Z = X$, $S = T$ and $B = \text{HC}(T)$, then there is a Borel T -invariant ergodic probability measure μ such that $\mu(\text{HC}(T)) > 0$. From Claim 6.5.1, we also have $\mu(\text{HC}(T)) = 1$ because $\text{HC}(T)$ is T -invariant, $\mu(\text{HC}(T)) > 0$ and μ is ergodic. This implies that, for any non-empty open set U in X , one has $\mu(U) > 0$; otherwise, we would obtain $\mu(\text{HC}(T)) = 0$, since μ is T -invariant and $\text{HC}(T) \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(U)$. Thus, μ has full support. $\square$

Remark 6.5.3. It follows from Birkhoff's pointwise ergodic theorem that, if $X \neq \{0\}$ is a separable Banach space and a bounded linear operator $T: X \rightarrow X$ admits an ergodic Borel probability measure μ with full support, then T is frequently hypercyclic and the set of frequently hypercyclic vectors has full μ measure. In particular, $\mu(\text{HC}(T)) = 1$. Conversely, to obtain a Borel ergodic T -invariant probability measure with full support, it is enough to find a Borel T -invariant probability measure ν such that $\nu(\text{HC}(T)) > 0$. Indeed, by the Ergodic Decomposition theorem (see [39, page 153]) there is a Borel ergodic T -invariant probability measure μ such that $\mu(\text{HC}(T)) > 0$. Since $\text{HC}(T)$ is T -invariant and has positive μ measure, then $\mu(\text{HC}(T)) = 1$. Moreover, μ has full support because $\text{HC}(T) \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(V)$ for every non-empty open set $V \subset X$.

Bibliografia

- [1] E. Akin and J. D. Carlson. Conceptions of topological transitivity. *Topology and its Applications*, 159:2815–2830, 2012. [Cited on page 128.]
- [2] A. D. Barwell, C. Good, P. Oprocha, and B. E. Raines. Characterizations of ω -limit sets in topologically hyperbolic systems. *DCDS*, 33(5):1819–1833, 2012. [Cited on page 128.]
- [3] F. Bayart and T. Bermúdez. Semigroups of chaotic operators. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(5):823–830, 2009. [Cited on page 124.]
- [4] F. Bayart and S. Grivaux. Frequently hypercyclic operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 538(11):5083–5117, 2006. [Cited on page 98.]
- [5] N. Bernardes. On the set of points with a dense orbit. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(11):3421–3423, 2000. [Cited on pages iii, v, 2, 63, 64, and 122.]
- [6] N. C. Bernardes and A. Messaoudi. Shadowing and structural stability for operators. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 41(4):961–980, 2021. [Cited on pages 126 and 130.]
- [7] N. C. Bernardes and A. Peris. On shadowing and chain recurrence in linear dynamics. *Advances in Mathematics*, 441, 2024. [Cited on pages 122 and 128.]
- [8] N. C. Bernardes, P. R. Cirilo, U. B. Darji, A. Messaoudi, and E. R. Pujals. Expansivity and shadowing in linear dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(1):796–816, 2018. [Cited on page 125.]
- [9] C. Bessaga and A. Pełczyński. *Selected Topics in Infinite-dimensional Topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, 1975. [Cited on page 105.]
- [10] A. Blokh and A. Fieldsteel. Sets That Force Recurrence. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(12):3571–3578, 2002. [Cited on pages 126 and 127.]
- [11] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, A. López-Martínez, and A. Peris. Frequently recurrent operators. *Journal of Functional Analysis*, 283(12), 2022. [Cited on page 124.]

- [12] A. Bonilla, R. Cardeccia, K.-G. Grosse-Erdmann, and S. Muro. Zero-one law of orbital limit points for weighted shifts. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 68(3):945–978, 2025. [Cited on page 124.]
- [13] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, NY, 2011. [Cited on pages 5, 33, and 123.]
- [14] P. Cirilo, B. Gollobit, and E. Pujals. Dynamics of generalized hyperbolic linear operators. *Advances in Mathematics*, 387, 2021. [Cited on pages 125 and 130.]
- [15] Y. Dayan and E. Glasner. Hypercyclic operators, Gauss measures and Polish dynamical systems. *Israel Journal of Mathematics*, 208(1):79–99, 2015. [Cited on page 122.]
- [16] J. Dixmier. *General Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1984. [Cited on pages 5 and 7.]
- [17] P. Enflo. On the invariant subspace problem for Banach spaces. *Acta Mathematica*, 158(1):213–313, 1987. [Cited on page 1.]
- [18] L. Fernández and C. Good. Shadowing for induced maps of hyperspaces. *Fund. Math.*, 235(3):277–286, 2016. [Cited on page 122.]
- [19] E. Flytzanis. Unimodular eigenvalues and invariant measures for linear operators. *Monatshefte für Mathematik*, 119(4):267–273, 1995. [Cited on page 125.]
- [20] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Mathematical systems theory*, 1(1):1–49, 1967. [Cited on page 54.]
- [21] H. Furstenberg. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton University Press, 1981. [Cited on pages 42 and 123.]
- [22] S. Grivaux and A. López-Martínez. Recurrence properties for linear dynamical systems: An approach via invariant measures. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 169:155–188, 2023. [Cited on pages 124 and 130.]
- [23] S. Grivaux and É. Matheron. Invariant measures for frequently hypercyclic operators. *Advances in Mathematics*, 265:371–427, 2014. [Cited on pages 112, 113, 126, 130, and 131.]

- [24] S. Grivaux and M. Roginskaya. A general approach to Read's type constructions of operators without non-trivial invariant closed subspaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 109(3):596–652, 2014. [Cited on page 122.]
- [25] S. Grivaux, É. Matheron, and Q. Menet. Linear dynamical systems on Hilbert spaces: typical properties and explicit examples. *Memoirs of the AMS*, 269(1315), 2021. [Cited on pages 80, 96, 124, and 126.]
- [26] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris. *Linear Chaos*. Universitext. Springer London, London, 2011. [Cited on pages 53, 55, 62, 69, 81, 84, 90, 94, 95, 96, 122, 124, and 128.]
- [27] J. Kelley. *General Topology*. 1975. [Cited on page 105.]
- [28] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley, New York, 1st ed edition, 1989. [Cited on pages 5, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 29, 31, and 108.]
- [29] S. Lang. *Complex Analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1999. [Cited on pages 5, 25, and 34.]
- [30] K. Lee and C. A. Morales. Equicontinuity, Expansivity, and Shadowing for Linear Operators. *Axioms*, 7(4), 2018. [Cited on pages 125 and 130.]
- [31] J. v. Mill and G. M. Reed. *Open problems in topology*. North-Holland, Amsterdam ; Oxford, 1990. [Cited on page 63.]
- [32] T. K. S. Moothathu. Orbital and spectral aspects of hypercyclic operators and semi-groups. *Indagationes Mathematicae*, 30(6):1006–1022, 2019. [Cited on page 122.]
- [33] M. Murillo-Arcila and A. Peris. Strong mixing measures for linear operators and frequent hypercyclicity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 398(2): 462–465, 2013. [Cited on page 126.]
- [34] S. Pilyugin. *Shadowing in Dynamical Systems*, volume 1706 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 1999. [Cited on page 128.]
- [35] C. J. Read. A solution to the invariant subspace problem on the space L_1 . *Bulletin of the London Mathematical Society*, 17(4):305–317, 1985. [Cited on page 1.]
- [36] C. J. Read. The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: Hypercyclic operators. *Israel Journal of Mathematics*, 63(1):1–40, 1988. [Cited on pages 99 and 122.]

- [37] W. Rudin. *Functional analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York, 2nd ed edition, 1991. [Cited on pages 5 and 29.]
- [38] J. C. Taylor. *An Introduction to Measure and Probability*. Springer, New York, NY, 1997. [Cited on pages 5 and 37.]
- [39] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1st ed edition, 2000. [Cited on pages 37, 39, 50, 111, 113, and 131.]