

Caracterização de uma competição matemática: O exemplo de um projeto num agrupamento

Pedro Ferreira Quaresma

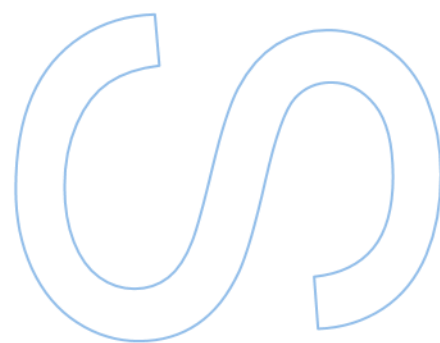
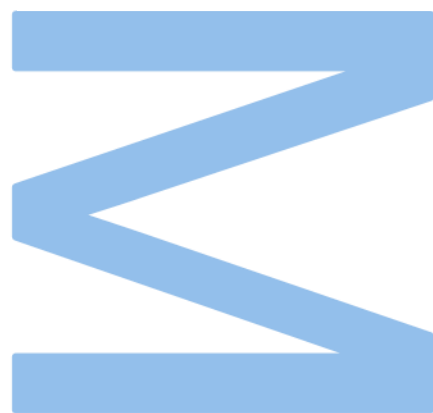
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino

Básico e no Ensino Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025



Caracterização de uma competição matemática: O exemplo de um projeto num agrupamento

Pedro Ferreira Quaresma

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientadora

Louise dos Santos Lima, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Resumo

Esta investigação foi desenvolvida no ano letivo 2023/2024, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, integrada no mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Neste sentido, considerou-se uma iniciativa escolar de competição matemática inspirada no projeto Delfos. Nessa competição são propostas tarefas de elevado potencial cognitivo que pretendem promover o desenvolvimento de várias capacidades transversais, tais como a resolução de problemas, o trabalho colaborativo e a comunicação matemática, desenhadas para maximizar o interesse e o desenvolvimento dos alunos em matemática. Assim, o objetivo desta investigação é caracterizar essa competição e refletir sobre como pode contribuir para a aprendizagem matemática dos alunos.

Esta investigação baseia-se numa abordagem qualitativa. A recolha de dados assentou na análise das tarefas propostas, do regulamento e da descrição da competição, das classificações obtidas pelos alunos e através de questionários e entrevistas a alunos do 7.º ano aleatoriamente escolhidos. As questões éticas foram garantidas pela participação voluntária, expressa no consentimento dos encarregados de educação dos alunos e do diretor da escola, bem como no assentimento dos alunos.

Os resultados indicam que a competição em causa contribui positivamente para a aprendizagem matemática dos alunos ao propor tarefas desafiantes e colaborativas que desenvolvem o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação matemática. As provas analisadas revelaram diversidade e intencionalidade pedagógica, e os alunos demonstraram motivação e interesse acrescidos pela matemática, valorizando o caráter competitivo e o trabalho em equipa. A competição promoveu autonomia, reflexão e argumentação, afirmando-se como uma estratégia eficaz para integrar desafios matemáticos e aprendizagem significativa para além da sala de aula.

Palavras-chave: Competições matemáticas, resolução de problemas, aprendizagem matemática

Abstract

This research was developed in the 2023/2024 academic year, within the scope of Supervised Teaching Practice, integrated into the Master's degree in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education, at the Faculty of Sciences of the University of Porto. In this sense, a school initiative of mathematical competition inspired by the Delfos project was considered. In this competition, tasks with high cognitive potential are proposed that aim to promote the development of several transversal skills, such as problem solving, collaborative work and mathematical communication, designed to maximize students' interest and development in mathematics. Thus, the objective of this research is to characterize this competition and reflect on how it can contribute to students' mathematical learning.

This research is based on a qualitative approach. Data collection was based on the analysis of the proposed tasks, the regulations and description of the competition, the grades obtained by the students and through questionnaires and interviews with randomly selected 7th grade students. Ethical considerations were ensured by voluntary participation, expressed in the consent of the students' guardians and the school principal, as well as the students' assent.

The results indicate that the competition in question contributes positively to students' mathematical learning by proposing challenging and collaborative tasks that develop reasoning, problem-solving, and mathematical communication. The tests analyzed revealed diversity and pedagogical intentionality, and the students demonstrated increased motivation and interest in mathematics, valuing the competitive nature and teamwork. The competition promoted autonomy, reflection, and argumentation, establishing itself as an effective strategy for integrating mathematical challenges and meaningful learning beyond the classroom.

Keywords: Mathematics competitions, problem solving, mathematics learning

Índice

Lista de Tabelas	v
Lista de Gráficos.....	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Abreviaturas	viii
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento teórico	3
2.1. Resolução de Problemas no Ensino da Matemática	3
2.2. Competições Matemáticas	7
2.2.1. Conceitos e objetivos	7
2.2.2. Natureza dos problemas presentes nas competições matemáticas	9
2.2.3. Contributos para a aprendizagem	10
2.3. Síntese	11
3. Intervenção Pedagógica.....	13
3.1. +MAT.....	14
3.2. Concurso de matemática Pangea	14
3.3. As provas MAT	15
3.4. Intervenção no Projeto MAT	39
4. Metodologia	40
4.1. Introdução	40
4.2. Enquadramento	40
4.3. Recolha e tratamento dos dados	43
4.4. Participantes do estudo	45
Escola.....	45
Projeto MAT	46
5. Apresentação e discussão de resultados	47
5.1. Caracterização e classificação das tarefas propostas pelo Projeto MAT	47

5.1.1 Classificação das tarefas da primeira prova	48
5.1.2. Classificação das tarefas da segunda prova	49
5.1.3. Classificação das tarefas da terceira prova	50
5.1.3. Classificação das tarefas: Síntese intermédia	51
5.2 Análise das estratégias utilizadas pelos alunos nas tarefas do Projeto MAT	52
5.3. Análise da adesão dos alunos ao Projeto MAT	58
5.4. Perceções dos alunos sobre a relação entre as tarefas propostas no Projeto MAT e o seu interesse pela matemática.	60
6. Conclusão	66
Referências Bibliográficas	68
Apêndice 1 Consentimentos direccionados aos Encarregados de Educação	72
Apêndice 2 Assentimentos direccionados aos alunos	73

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Contributo da escola nos desafios da primeira prova	19
Tabela 2 – Contributo da escola nos desafios da segunda prova	22
Tabela 3 – Contributo da escola nos desafios da terceira prova	24
Tabela 4 – Análise Prova 1, Liga II	29
Tabela 5 – Análise Prova 2, Liga II	34
Tabela 6 – Análise Prova 3, Liga II	38
Tabela 7 – Linhas orientadoras da investigação	40
Tabela 8 – Conexão estabelecida entre os objetivos específicos e os dados recolhidos	43
Tabela 9 – Resumo dos objetivos pedagógicos a atingir pelas tarefas propostas	52
Tabela 10 – Adesão ao Projeto	59
Tabela 11 – Impacto do Projeto na avaliação sumativa da disciplina de matemática dos alunos envolvidos	59

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Questionário	62
--------------------------------	----

Lista de Figuras

Figura 1 – Prova 1, Liga II	26
Figura 2 – Prova 2, Liga II	30
Figura 3 – Prova 3, Liga II	35
Figura 4 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 1, Liga II	53
Figura 5 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 1, Liga II	53
Figura 6 – Exemplos de resolução do terceiro exercício da Prova 1, Liga II	54
Figura 7 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 1, Liga II	54
Figura 8 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 2, Liga II	55
Figura 9 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 2, Liga II	55
Figura 10 – Exemplos de resolução do terceiro exercício da Prova 2, Liga II	56
Figura 11 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 2, Liga II	56
Figura 12 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 3, Liga II	56
Figura 13 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 3, Liga II	57
Figura 14 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 3, Liga II	57
Figura 15 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 3, Liga II	58
Figura 16 – Respostas por questionário sobre o motivo da participação no Projeto MAT	64
Figura 17 – Respostas por questionário sobre a influência do Projeto MAT no desempenho	65

Lista de Abreviaturas

AE	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS
ASEDA	ASSOCIAÇÃO DA EDUCAÇÃO ACADÉMICA
C	COMBINATÓRIA
CA	CÁLCULO DE ÁREAS
CG	CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS
CM	COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA
EM	ESTATÍSTICA E MEDIDA
F	FUNÇÕES
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
G	GEOMETRIA
GIS	GABINETE DE INTERVENÇÃO SOCIAL
ID	INTERPRETAÇÃO DE DADOS
IG	INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS
ISEP	INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO
MA	MATEMÁTICA APLICADA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
RA	RACIOCÍNIO ALGÉBRICO
SPO	SERVIÇOS DE PSICOLOGIA E ORIENTAÇÃO
VDR	VALOR DIÁRIO RECOMENDADO

1. Introdução

A aprendizagem da matemática tem sido um dos principais focos de investigação no campo da Educação Matemática, especialmente no que concerne ao desenvolvimento de capacidades, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a comunicação matemática. De acordo com Corbalán (2002), a matemática constitui a única disciplina que marca presença em todos os níveis de ensino de todos os países do mundo e se supõe um pilar básico do ensino em todos eles. Tal importância, no contexto atual, obriga a promoção de uma educação matemática de qualidade, que vá além dos limites da sala de aula, já que é vista como essencial para preparar os alunos para os desafios que enfrentarão na sua vida pós-escolar.

Neste contexto, a minha investigação, no âmbito da componente de Iniciação à Prática de Ensino Supervisionada, está direcionada para o estudo de uma iniciativa, em particular, que tem por objetivo promover o interesse e o desempenho dos alunos em matemática através da competição. De acordo com Morrisv e Hiebert (2009), a competição matemática pode ser uma ferramenta motivadora, pois estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico, a resolução de problemas e a comunicação matemática, ao desafiar os alunos a mobilizarem os seus conhecimentos em contextos que exigem criatividade e rigor. No âmbito deste estudo, optei por investigar um projeto desenvolvido num Agrupamento de Escolas localizado na Área Metropolitana do Porto, onde realizei o meu estágio e que se destaca por organizar tarefas desafiantes que fomentam o envolvimento ativo dos estudantes, promovendo um ambiente em que a competição saudável funciona como motor para a aprendizagem e para o interesse pela matemática.

A literatura sublinha a importância de conectar a matemática a situações do quotidiano, permitindo que os alunos compreendam a relevância da disciplina para além da sala de aula (Corbalán, 2002; Morris & Hiebert, 2009). Esta perspetiva reforça a ideia de que contextos práticos e desafiantes, como os proporcionados em competições matemáticas, podem potenciar o interesse e o envolvimento dos estudantes.

Na minha experiência direta com alunos durante o estágio, observei a contribuição que as atividades matemáticas desafiantes numa competição podem ter na motivação e no desempenho dos alunos. Verifiquei como alguns estudantes, que demonstravam interesse pela disciplina, mas que não recebiam estímulos suficientes nas aulas regulares para se motivarem pelas tarefas, reagiam de forma mais entusiasta e participativa quando expostos a tarefas com significado e aplicabilidade fora do contexto

tradicional da sala de aula. Esta experiência reforçou o meu interesse em aprofundar a compreensão de práticas que promovem a aprendizagem da matemática de forma mais envolvente. O contacto com o projeto desenvolvido neste Agrupamento, que ao longo deste relatório será designado por Projeto MAT para a garantia do seu anonimato, despertou o meu interesse, não só pelo seu cariz inovador e pela articulação entre teoria e prática, mas também pelo seu potencial de transformar a forma como os alunos se relacionam com a própria matemática.

Deste modo, o presente estudo tem como propósito compreender de que modo o Projeto MAT contribui para a aprendizagem matemática dos alunos. Para isso, a investigação analisa as tarefas propostas, procurando compreender a sua tipologia, o modo como promovem o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática, bem como as perceções dos alunos sobre a relevância e o impacto dessas tarefas. Pretende-se, ainda, esclarecer a relação entre as características das tarefas e o interesse dos alunos pela disciplina, de modo a contribuir para um entendimento mais aprofundado de práticas educativas eficazes neste domínio.

A relevância deste estudo reside na análise de uma iniciativa concreta e na sua potencial contribuição para a reflexão sobre as competições no domínio da matemática.

Tendo em consideração o objetivo proposto, este Relatório está dividido em cinco capítulos. Assim, este texto corresponde ao primeiro capítulo, onde se apresentam aspetos introdutórios do trabalho desenvolvido. No segundo capítulo, desenvolve-se o Enquadramento Teórico, sustentando a investigação no âmbito da educação matemática. No terceiro capítulo, a Intervenção Pedagógica, é feita uma descrição detalhada sobre o que é o Projeto MAT, fornecendo o contexto necessário para compreender a sua implementação e objetivos. O quarto capítulo é dedicado à Metodologia, onde se apresenta a metodologia utilizada e questões éticas e se detalha os procedimentos e abordagens adotadas para a recolha e análise de dados. No quinto capítulo apresentam-se os resultados alcançados com a implementação do questionário e da entrevista aos alunos, bem como a sua análise, com o foco na resposta aos objetivos específicos definidos, acompanhada de uma análise crítica dos resultados obtidos. Por fim, o sexto capítulo, integra considerações finais, procurando oferecer uma visão abrangente sobre os contributos do projeto para a aprendizagem matemática dos alunos.

2. Enquadramento teórico

Este capítulo organiza-se em duas áreas. Inicialmente, aborda-se a resolução de problemas no ensino da matemática, explorando o seu enquadramento teórico, a sua dimensão cognitiva e didática, e ainda o contributo que exerce na motivação e no envolvimento dos alunos. Posteriormente, discute-se as competições matemáticas enquanto estratégia educativa, a partir do seu conceito e objetivos, da natureza específica dos problemas que propõem e os contributos que oferecem para a aprendizagem.

2.1. Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

A resolução de problemas é um pilar do ensino e da aprendizagem da matemática: mais do que aplicação de técnicas, é um contexto para desenvolver raciocínio lógico, pensamento crítico e criatividade, bem como para articular conhecimento concetual e procedimental (Freudenthal, 2002; Polya, 1945). Segundo Polya, um problema não é um exercício rotineiro com algoritmo conhecido, mas uma situação em que o caminho para a solução não é imediato e exige exploração, conjectura, decisão e justificação. Esta distinção é crucial para a planificação didática e para a avaliação do que os alunos realmente aprendem quando resolvem problemas.

O modelo heurístico clássico de Polya – compreender o problema; planejar; executar; rever – continua a oferecer uma forma de ação útil para alunos e professores. Não deve, porém, ser encarado como uma sequência rígida, mas como um processo recursivo e metacognitivo: as decisões em cada etapa informam e reconfiguram as seguintes, incluindo reler o enunciado, reformulação de objetivos e controlo de erros. Esta perspetiva liga a resolução de problemas ao desenvolvimento de estratégias (por exemplo, desenhar um esquema ou considerar casos simples) e de atitudes como a perseverança e a autorregulação (Polya, 1945; Freudenthal, 2002).

É importante definir com rigor o que chamamos problema. Para além da oposição clássica entre problemas de rotina (aplicação de procedimentos já conhecidos) e problemas não rotineiros, é útil distinguir tarefas fechadas de tarefas abertas. Seguindo Ponte (2005), entende-se por tarefa a proposta que organiza a atividade matemática dos alunos e cujo potencial matemático e didático depende do enunciado, do grau de desafio, do contexto e do espaço de decisão concedido ao aluno. As tarefas fechadas são tipicamente convergentes, com procedimentos implícitos ou explicitamente prescritos, deixando pouca margem para escolhas estratégicas; adequam-se à

consolidação de técnicas e ao treino dirigido. As tarefas abertas introduzem abertura ao nível dos dados, dos processos ou dos resultados, promovendo exploração, conjectura e justificação. Esta abertura não se reduz a uma mera divisão: ou é fechada, ou é aberta. Isto é, existe uma gradação com vários níveis intermédios – desde tarefas muito fechadas, passando por parcialmente abertas, até tarefas claramente de investigação. Tal enquadramento reforça que a distinção não é apenas taxonómica: traduz-se em diferenças substantivas na natureza do raciocínio esperado, na qualidade das justificações e na avaliação, que deve atender não só ao produto final, mas também à adequação das estratégias, à coerência dos argumentos e à reflexão sobre os caminhos tentados (Ponte, 2005).

Tarefas abertas e não rotineiras podem implicar justificações, comparações de estratégias, generalizações e reflexão sobre erros, promovendo raciocínio relacional e não apenas instrumental (Polya, 1945; Freudenthal, 2002). De acordo com Freudenthal, acrescenta-se a categoria de situações de modelação – tarefas enraizadas em contextos significativos nas quais o aluno precisa de estruturar um problema real com ferramentas matemáticas – que ampliam a necessidade de selecionar representações, explicitar pressupostos e validar soluções (Freudenthal, 2002). Em termos nacionais, esta leitura é coerente com Veloso (1993) sobre problemas e tarefas em geometria, que evidencia como o tipo de tarefa condiciona oportunidades de argumentar, justificar e organizar o trabalho individual e em grupo.

Dado este quadro, a distinção entre exercício e problema não é apenas semântica. Um exercício de rotina, mesmo com números diferentes, não se torna um problema se a via de resolução for conhecida à partida. Esta precisão concetual evita dois equívocos comuns no ensino: transformar problemas em meros exercícios de treino algorítmico, reduzindo as oportunidades de exploração e justificação; ou, pelo contrário, propor tarefas excessivamente vagas, que dificultam a definição de critérios claros para avaliar a qualidade do trabalho matemático. O equilíbrio didático passa por um exercício ser acessível (vários pontos de partida) e de elevado potencial cognitivo (exigência de raciocínio, explicação e prova), mantendo um padrão público de qualidade das soluções (Polya, 1945; Veloso, 1993).

A resolução de problemas é também, intrinsecamente, um processo social de aprendizagem. Em perspetiva sociocultural, o desenvolvimento do pensamento matemático decorre da atividade mediada por linguagem, ferramentas e outros participantes: o que o aluno consegue fazer com os outros é um motor para o que passará a conseguir fazer sozinho (Vygotsky, 1978). Em sala de aula, arranjos

colaborativos e estruturados proporcionam negociação de significados, teste de conjecturas e refinamento de argumentos. A investigação evidencia este ponto: Carvalho (2001) mostra como interações entre pares promovem desenvolvimento lógico e desempenho estatístico; César (2009) evidencia ganhos em turmas multiculturais quando o trabalho colaborativo legitima vozes diversas; Damiani (2008) sintetiza benefícios do trabalho colaborativo; enquanto Machado e César (2012) sublinham o contributo do trabalho em díade para a qualidade do raciocínio e da comunicação. Em convergência, Veloso (1993) defende o trabalho de grupo como motor de argumentação, crítica entre pares e organização do trabalho.

Este carácter social remete para o papel do professor enquanto orquestrador do trabalho matemático. Não basta propor boas tarefas: é decisivo regular tempos, dirigir o olhar para representações úteis, formular perguntas que não antecipem a solução, selecionar produções de alunos para discussão plenária e institucionalizar ideias-chave a partir do trabalho exploratório. Esta visão é consistente com a literatura sobre conhecimento profissional do professor de matemática – conhecimento do conteúdo, da tarefa e dos processos de aprendizagem dos alunos – e com estudos sobre construção da identidade profissional docente (Ponte & Oliveira, 2002). Ao nível dos documentos curriculares em vigor em Portugal, o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017) reforça esta orientação: espera-se que as práticas letivas promovam o pensamento crítico, a criatividade, a comunicação e a colaboração, articulando conhecimentos, valores e atitudes em situações complexas. Em termos operacionais, isto implica critérios de avaliação que valorizem processos (estratégias, representações, explicações, revisão de erros) e não apenas resultados.

Nesta perspetiva, entende-se por estratégias de resolução o conjunto de procedimentos e decisões táticas que o aluno mobiliza para avançar num problema quando o caminho direto não é evidente. De acordo com Polya (1945), estas estratégias incluem, entre outras, desenhar uma figura, reformular o problema, considerar casos particulares, estabelecer analogias, introduzir elementos auxiliares e trabalhar para trás. Diferenciam-se dos procedimentos algorítmicos (aplicação de regras conhecidas) porque operam num espaço de incerteza, orientando a procura de uma via de solução e apoiando a construção e a verificação do argumento. Assim, a estratégia articula-se com o plano global de resolução (as quatro fases já referidas) e com processos metacognitivos de monitorização e revisão.

Importa, ainda, reconhecer que as estratégias são também socialmente apropriadas: explicitam-se, discutem-se e refinam-se nas interações em sala de aula, pela

observação do trabalho dos pares e pela discussão pública de diferentes vias de solução. Esta dimensão social, já assinalada, ajuda a explicar porque é que a diversidade de estratégias disponíveis se expande quando os alunos comparam e justificam procedimentos alternativos em contexto colaborativo.

Finalmente, a natureza das tarefas e a organização social da aula podem ter implicações diretas no desenvolvimento de disposições matemáticas desejáveis – perseverança, tolerância ao erro, curiosidade e sentido de prova. Tarefas fora da caixa com grau de abertura controlado e apoios graduados ajustados à zona de desenvolvimento proximal favorecem que o desafio seja percebido como atingível, preservando a exigência sem sacrificar a autonomia. A ênfase na explicação pública de raciocínios, na comparação de estratégias e na validação coletiva de soluções cria uma cultura de aula onde fazer matemática significa raciocinar, justificar e comunicar – não apenas responder corretamente (Carvalho, 2001; César, 2009).

A resolução de problemas em matemática constitui, em simultâneo, um processo cognitivo complexo e uma oportunidade didática de elevado potencial. Do ponto de vista cognitivo, como já referido, não se limita à aplicação de algoritmos já conhecidos; exige análise, síntese, generalização, avaliação e, sobretudo, um movimento contínuo entre compreender, planear, executar e rever. O modelo clássico de Polya (1945), já mencionado anteriormente, permanece uma referência incontornável, mas não deve ser interpretado como uma sequência linear. A sua relevância atual reside na forma como inspira abordagens recursivas e metacognitivas, permitindo que os alunos regressem ao enunciado, reformulem objetivos, abandonem estratégias ineficazes e experimentem novas vias, desenvolvendo pensamento crítico e autonomia. Esta dimensão relaciona-se diretamente com a metacognição, entendida como o conhecimento e a regulação dos próprios processos cognitivos – planear, monitorizar e avaliar – (Flavell, 1979; Monteiro, 2019). Monteiro reforça que os alunos que desenvolvem metacognição conseguem lidar melhor com problemas complexos porque controlam mais eficazmente os seus processos de raciocínio.

Outro aspeto essencial é o papel das representações múltiplas, enquanto capacidade matemática prevista nas Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática – referenciais curriculares homologados para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário – que salientam o uso e a articulação de diferentes representações (verbal, numérica, simbólica, gráfica) e a conversão entre elas (Canavarro et al., 2021; DGE, 2023). Resolver problemas implica articular números, símbolos, gráficos, figuras, linguagem verbal e até gestos. A mobilidade entre estas representações favorece a flexibilidade

cognitiva e a construção de inferências mais sofisticadas. Como sublinha Bigotte (2014), a utilização intencional de diferentes formas de representação enriquece a compreensão e abre caminho a conexões mais profundas entre conceitos dispersos. Associada a esta dimensão está a importância do discurso matemático: explicar, justificar, contra-argumentar e alterar significados são práticas que, além de revelarem o pensamento, o estruturam e consolidam.

Embora o caráter social da aprendizagem tenha sido já evidenciado, merece aqui uma breve nota complementar: práticas colaborativas não apenas apoiam a resolução de problemas como potenciam o desenvolvimento da comunicação. Num estudo recente, o trabalho em díade mostrou favorecer a explicitação de raciocínios e a construção de soluções mais elaboradas (Machado & César, 2012). Estas práticas dependem, contudo, de uma gestão criteriosa do professor. Ensinar através da resolução de problemas implica mais do que propor tarefas desafiantes; exige orquestrar representações, organizar tempos, valorizar produções dos alunos e institucionalizar conceitos emergentes (Ponte & Oliveira, 2002).

2.2. Competições Matemáticas

2.2.1. Conceitos e objetivos

As competições matemáticas constituem, desde o final do século XIX, uma estratégia singular de promoção da aprendizagem e da valorização da disciplina. Representam um ecossistema educativo que envolve escolas, professores, alunos, universidades, associações científicas e até famílias (Kenderov, 2022). Nesse sentido, não são apenas eventos pontuais, mas sim espaços estruturados de socialização matemática, onde os estudantes se confrontam com problemas que exigem criatividade, raciocínio lógico e perseverança.

Um dos objetivos centrais das competições é estimular o gosto pela matemática através de desafios que transcendem os exercícios rotineiros. Como já sublinhado no enquadramento da resolução de problemas, esta distinção entre exercícios de rotina e problemas não rotineiros é essencial para compreender o potencial educativo destas iniciativas. A competição, neste contexto, não visa apenas classificar, mas sobretudo oferecer experiências de envolvimento intenso com tarefas de elevado valor cognitivo.

Outro objetivo relevante é a identificação e o desenvolvimento de talento matemático. Neste trabalho, entende-se por talento matemático uma combinação de desempenho atual e potencial de desenvolvimento, evidenciada por indicadores como originalidade

e qualidade, flexibilidade representacional, rapidez com precisão quando apropriado, sensibilidade para padrões e estruturas, e competência de demonstração e comunicação rigorosa. Trata-se de uma noção dinâmica e contextual – mais próxima de potencial cultivável do que de traço fixo – cuja identificação depende das oportunidades de mediação e desafio, do desenho das tarefas e do clima motivacional. Assim, a deteção precoce em competições deve articular-se com percursos de desenvolvimento que ampliem oportunidades e não apenas com processos seletivos (Kenderov, 2022; Pólya, 1945; Vygotsky, 1978; Martins et al., 2017).

Kenderov (2022) mostra como, ao longo de mais de um século, as competições evoluíram de eventos locais para uma rede global que contribui para a deteção precoce de capacidades excecionais. No entanto, limitar a sua função à seleção de alunos talentosos seria redutor. Amado et al. (2016) demonstram que a participação em competições por parte de jovens não necessariamente considerados talentosos gera oportunidades de aprendizagem ricas, promovendo confiança e sentido de pertença. Assim, a competição pode ser entendida como um ambiente inclusivo de aprendizagem, ainda que diferenciado, em que todos os participantes têm a possibilidade de expandir os seus horizontes matemáticos.

Além disso, as competições matemáticas desempenham uma função sociocultural e motivacional. Ao proporcionar reconhecimento público – através de prémios, classificações e rankings – legitimam o esforço dos estudantes e dão visibilidade social à matemática. Deve ser cuidadosamente enquadrada para evitar efeitos contraproducentes. Em vez de uma comparação exclusivamente normativa (rankings), importa privilegiar referências ipsativas e criteriosais – valorizando o progresso individual face ao desempenho anterior e a qualidade do raciocínio face a critérios explícitos. Esta opção alinha-se com a promoção de autonomia, competência e pertença (Deci & Ryan, 1985), atenua a pressão hierárquica dos resultados e fomenta um clima de competição saudável, no qual os alunos competem com e não apenas contra os pares. Como já referido, a explicitação pública de estratégias e a discussão coletiva de soluções contribuem para transformar a competição num espaço de aprendizagem partilhada (Vygotsky, 1978; Machado & César, 2012), enquanto o desenho docente – critérios transparentes, feedback formativo e reconhecimento do processo, não só do produto – está associado a ganhos de motivação e de práticas mais exigentes em sala de aula (Akveld et al., 2022). Também a literatura sobre competições inclusivas sublinha que o reforço do esforço, da criatividade e do fair play alarga a participação e o sentimento de pertença (Amado et al., 2016).

Como refere Akveld et al. (2022), muitos professores relatam que a preparação e participação em competições transforma o ambiente de sala de aula, fomentando entusiasmo e colaboração entre os alunos. Esse impacto ultrapassa o âmbito individual, porque as competições influenciam também as práticas docentes, ao incentivar professores a procurar e propor tarefas de natureza mais aberta e desafiante.

2.2.2. Natureza dos problemas presentes nas competições matemáticas

Os problemas propostos em competições matemáticas distinguem-se de forma clara daqueles que constituem o currículo regular. Como já salientado, um problema difere de um exercício rotineiro porque exige procura ativa de estratégias, formulação de conjecturas e justificação de raciocínios. Nas competições, este princípio é levado ao limite: os enunciados são desenhados para estimular criatividade e pensamento independente, frequentemente em contextos pouco familiares para os alunos (Kenderov, 2022).

Uma característica recorrente destes problemas é a ausência de procedimentos diretos. O participante precisa de explorar casos particulares, construir representações auxiliares, procurar padrões ou estabelecer analogias antes de alcançar a generalização. Essa natureza aberta aproxima os problemas de uma pequena investigação, na qual os estudantes se confrontam com a incerteza e com a necessidade de validar os próprios argumentos. Tal como Freudenthal (2002) defende para a educação matemática em geral, as competições convocam o aluno a matematizar situações, isto é, a estruturar contextos com ferramentas conceituais e procedimentos formais.

Outra dimensão a destacar é o equilíbrio entre acessibilidade e profundidade. Os problemas são geralmente formulados de modo simples, sem recorrer a linguagem técnica excessiva, mas encerram raciocínios de elevada exigência. Como observa Corbalán (2002), esta aparente simplicidade do enunciado esconde uma complexidade conceitual que convida a várias abordagens. Por isso, os problemas competitivos não são apenas tarefas de avaliação; mas constituem, em si mesmos, oportunidades de aprendizagem, mesmo para quem não atinge a solução final.

Por fim, os problemas em competições distinguem-se pela ênfase na demonstração. Não basta obter um resultado numérico, é necessário justificar a solução de forma rigorosa. Esta exigência aproxima a experiência dos alunos da prática matemática

autêntica e valoriza competências de argumentação e comunicação, aspetos já sublinhados quando se discutiu a resolução de problemas como prática social.

2.2.3. Contributos para a aprendizagem

A literatura tem sublinhado que a participação em competições matemáticas vai muito além da obtenção de prémios ou classificações. Vários estudos (Kenderov, 2022; Akveld et al., 2022; Amado et al., 2016) documentam o contributo destas iniciativas na aprendizagem, na motivação e no desenvolvimento de competências transversais. Como já referido, os alunos são desafiados a mobilizar estratégias criativas, a persistir perante a incerteza e a justificar publicamente as suas soluções. As competições constituem, assim, um contexto privilegiado para ampliar essas práticas.

Kenderov (2022) identifica nas competições uma dupla função: por um lado, a deteção e promoção de talento matemático; por outro, a criação de oportunidades educativas que beneficiam todos os participantes. Esta segunda dimensão é particularmente relevante, porque contraria a visão elitista que tende a associar estas iniciativas apenas à seleção dos mais aptos. Na mesma linha, Amado et al. (2016) mostram que jovens com perfis distintos encontram nas competições espaço para desenvolver confiança, autonomia e prazer em lidar com problemas matemáticos.

Os contributos não se esgotam na dimensão cognitiva. Estudos, como os de Akveld et al. (2022), relatam que a preparação para competições influencia as práticas docentes, levando professores a incorporar nas suas aulas tarefas mais abertas e desafiantes. Esse efeito alarga o alcance pedagógico da competição, podendo transformá-la num catalisador de inovação curricular e metodológica.

Outro contributo diz respeito à motivação e ao envolvimento dos alunos. Como discutido anteriormente, a motivação é alimentada pela perceção de autonomia, competência e pertença. As competições reforçam estas dimensões: oferecem um contexto em que os estudantes escolhem estratégias próprias, enfrentam tarefas exigentes, mas atingíveis, e partilham experiências com pares que valorizam o esforço coletivo. Além disso, a visibilidade social associada à competição – rankings, diplomas, reconhecimento público – contribui para legitimar o esforço investido, aumentando o sentimento de realização.

As competições também promovem aprendizagens sociais e comunicativas. A exigência de explicitar raciocínios e de escrever demonstrações rigorosas coloca os alunos perante a necessidade de comunicar de forma clara e estruturada. Como já

mencionado na discussão sobre práticas colaborativas, esta dimensão comunicativa é essencial para transformar a resolução de problemas em conhecimento partilhado e validado pela comunidade. Deste modo, os contributos das competições matemáticas para a aprendizagem podem estender-se da esfera cognitiva à motivacional e social, influenciando não apenas os estudantes, mas também os professores e as próprias culturas escolares em que estão inseridos.

2.3. Síntese

O enquadramento teórico desenvolvido neste trabalho centrou-se em duas dimensões complementares da Educação Matemática: a resolução de problemas e as competições matemáticas.

No primeiro eixo, a resolução de problemas foi discutida enquanto prática estruturante da aprendizagem matemática. A distinção entre exercícios rotineiros e problemas genuínos revelou-se essencial, sublinhando a necessidade de tarefas que exijam exploração, formulação de conjecturas, escolha de estratégias e comunicação de raciocínios. O modelo heurístico de Polya (1945), entendido de forma recursiva e não linear, continua a ser referência central, articulando-se com perspetivas mais recentes sobre metacognição (Monteiro, 2019) e autorregulação. A importância das representações múltiplas (Bigotte, 2014) e do discurso matemático foi também destacada, na medida em que a explicitação, a argumentação e a contra-argumentação constituem processos de construção de conhecimento. A aprendizagem em contexto social e colaborativo, já enfatizada por Vygotsky (1978) e aprofundada por autores como Carvalho (2001), César (2009) e Machado e César (2012), evidencia que o desenvolvimento cognitivo se dá através da mediação, da partilha e da validação coletiva das soluções. Este quadro implica um papel exigente para o professor, que deve orquestrar tarefas, gerir tempos e interações e institucionalizar os conceitos emergentes, em consonância com orientações curriculares que valorizam o pensamento crítico, a criatividade, a comunicação e a colaboração (Martins et al., 2017).

No segundo eixo, as competições matemáticas foram discutidas como espaços educativos com objetivos múltiplos. Para além da função tradicional de identificação de talento matemático (Kenderov, 2022), as competições oferecem oportunidades de aprendizagem acessíveis a uma grande diversidade de alunos (Amado et al., 2016). Os problemas propostos distinguem-se pela abertura, pela necessidade de criatividade e pelo equilíbrio entre simplicidade de enunciado e profundidade concetual (Corbalán,

2002). Ao integrar diferentes áreas da matemática e ao exigir justificação rigorosa, estes problemas aproximam os estudantes da prática matemática autêntica e favorecem competências de argumentação e comunicação. Estudos recentes mostram ainda que a preparação para competições influencia positivamente as práticas dos professores, levando-os a propor tarefas mais desafiantes e a repensar as suas abordagens didáticas (Akveld et al., 2022).

Deste modo, o enquadramento teórico articula duas perspetivas que se reforçam mutuamente: a resolução de problemas como prática didática central e as competições matemáticas como contexto específico que amplia e intensifica essa prática, potenciando não só o desenvolvimento cognitivo, mas também a motivação, a perseverança e o envolvimento dos alunos na matemática.

3. Intervenção Pedagógica

No agrupamento de escolas onde iniciei a iniciação à prática de ensino supervisionada, situado numa localidade da Área Metropolitana do Porto, é realizado o Projeto MAT. Este projeto iniciou no ano letivo 2017/2018 tendo, na altura, uma parceria com a Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que foi preponderante na validação das provas de desafios. O projeto estende-se até ao ano atual, sob a coordenação de uma equipa de docentes de matemática do agrupamento.

Teve origem e inspiração do projeto Delfos. A sede do agrupamento de escolas mencionado fazia parte do projeto Delfos, com provas adaptadas, coordenado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, até 2017, ano em que o referido departamento lança um desafio à escola: criar um projeto próprio e único, uma vez que a escola tinha revelado maturidade e autonomia necessários para o fazer. Delfos surge em 2001 com a missão de preparar as equipas portuguesas para as competições internacionais de matemática. Mas mais do que isso, a escola Delfos, como é denominada numa perspetiva de escola de matemática para jovens, é uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior com excecional aptidão e gosto pela Matemática; uma escola que funciona de modo informal, movida pelo gosto na resolução de questões complexas e interessantes, visando explorar as competências dos jovens até aos limites naturais de cada um.

Aproximadamente a cada duas semanas, o Delfos organiza um fim-de-semana de atividades lúdico-didáticas dedicadas ao enriquecimento curricular em matemática, no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Nos termos do Delfos, essas atividades são designadas por Estágios Delfos.

O Projeto MAT tem um objetivo idêntico. Este projeto apresenta três ramos, sendo-lhes atribuídas diferentes designações por questões de anonimato: o +MAT, o concurso de matemática Pangea e as provas MAT.

3.1. +MAT

Em relação ao +MAT, a sua implementação está dependente da existência de crédito horário na escola que permita destacar professores de matemática. Funciona junto à hora de almoço, no final do turno da manhã ou no início do turno da tarde, numa sala, com jogos de estratégia, desafios com cartas, material manipulável, jogos de engenho e outros, ou simplesmente, apoiar na consolidação de conceitos e no esclarecimento de dúvidas a alunos de excelência a matemática. No ano letivo em que realizei a iniciação da prática de ensino supervisionada não houve possibilidade de o implementar.

3.2. Concurso de matemática Pangea

O concurso de matemática Pangea é organizado pela Associação de Educação Académica (ASEDA), uma associação sem fins lucrativos e com sede em Lisboa, cujo lema é Matemática para todos e pretende unir estudantes de diferentes locais, estratos sociais e níveis de ensino, e torná-los entusiastas da matemática. Os jovens terão a possibilidade de partilhar as suas experiências e a alegria que encontram na matemática e realiza-se desde 2013. Este concurso é organizado em outros onze países europeus: Alemanha, Áustria, Dinamarca, Eslováquia, Eslovénia, Espanha, Hungria, Itália, Polónia, República Checa e Suíça. O principal objetivo do Projeto MAT, na inserção deste concurso no projeto, foi possibilitar que cada aluno pudesse testar os seus conhecimentos efetivos e conhecer a posição do seu desempenho matemático a nível nacional. Ao permitir que os alunos possam testar os seus conhecimentos de forma individual e autónoma, permite aos indivíduos isolarem-se, temporariamente, para procederem a reflexões como refere Santos (2000), pois, segundo salienta Hargreaves (1993), há necessidade de respeitar aqueles que trabalham melhor sozinhos, já que este tipo de trabalho evita dispersões e distrações, perda de tempo, bem como o choque de liderança que resulta em conflito. Por isso, o Projeto MAT considerou ser necessário proporcionar a cada aluno tempo de assimilação e reflexão, o que em muitos casos apenas se consegue através de trabalho individual. O resultado foi que, quanto maior foi o enriquecimento individual, mais se notou a melhoria coletiva, dado o intercâmbio ocorrido em cada equipa.

Cada aluno inscrito no projeto está automaticamente inscrito no concurso, pelo que terá de realizar, pelo menos, uma prova escrita individual em suporte digital. Os alunos participantes nesta prova serão ordenados por ordem decrescente da classificação obtida, desde que não nula, sendo apurados para a segunda fase do concurso os

primeiros 100 alunos de cada ano de escolaridade a nível nacional, com a implicação de que têm de obter uma pontuação igual ou superior a 30 pontos. Os alunos participantes na segunda fase do concurso serão ordenados por ordem decrescente da classificação obtida, desde que não nula, sendo considerados vencedores os primeiros 10 alunos de cada ano de escolaridade a nível nacional, cujos resultados são disponibilizados na plataforma do professor responsável a nível do agrupamento e publicados na página web do concurso. Os três primeiros alunos classificados de cada ano, a nível nacional, recebem medalhas e prémios em dinheiro ou jogos educativos, conforme está estabelecido no website do concurso, e os restantes sete melhores alunos receberão medalha de participação. No presente ano, o Agrupamento em que realizei o meu estágio, foi representado na segunda fase com 19 alunos (4.º ano: três; 5.º ano: um; 6.º ano: três; 7.º ano: um; 8.º ano: seis; 9.º ano: cinco); na segunda fase todos estes alunos ficaram entre os 100 melhores a nível nacional, mas nenhum ficou nos dez melhores.

3.3. As provas MAT

O terceiro ramo reside no trabalho de grupo e colaborativo entre docentes e alunos. Saliente-se que é no trabalho de grupo que se labutam e produzem aspetos essenciais da comunicação matemática, promovendo as interações sociais, a intuição, explorar e partilhar situações da vida real, e a aprendizagem sobre raciocinar (Machado & César, 2012). Nesta mesma perspetiva Veloso (1993) entende que o “trabalho de grupo deverá ocupar um lugar de relevo na aprendizagem da Matemática” (p. 11), pois

ajuda a desenvolver capacidades fundamentais, do ponto de vista da Educação Matemática, como por exemplo, de argumentar, de construir uma justificação para os próprios pontos de vista, de criticar as opiniões dos colegas, de ouvir, compreender e aproveitar as ideias dos outros, e de organizar o trabalho. (Veloso, 1993, p. 11).

Já o trabalho colaborativo entre alunos apresenta vantagens que muitos autores (Damiani, 2008; Machado & César, 2012) as evidenciam como positivas, para a superação de dificuldades relativas à resolução de problemas, uma vez que contribuem para um decréscimo dessas dificuldades a partir da discussão com os seus colegas. Outros autores consideram que as práticas colaborativas, aplicadas em sala de aula (educação formal) quer noutros cenários de aprendizagem (educação não-formal ou mesmo informal), preconizam, de alguma forma a mediação poderosa na mudança ou

manutenção, de representações sociais dos alunos sobre a matemática, no acesso ao sucesso escolar nesta disciplina e ainda, ao desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas) essenciais no exercício de uma cidadania crítica e participativa (Carvalho, 2001; César, 2009; César & Santos, 2006; Stith & Roth, 2008; Ventura, Branco et al., 2002).

É neste contexto que o Projeto MAT tem um papel preponderante, e agregado, pois permite “criar oportunidades de aprendizagem onde os estudantes possam aprender a trabalhar e a aprender juntos, preparando-se para uma aprendizagem autêntica e autodirigida, ao longo do seu ciclo de vida e nos mais variados contextos da sua existência” (Custódio et al., 2010, p. 28), propiciando a alunos que obtiveram nível cinco na avaliação sumativa com fins classificatórios da disciplina de matemática primeiramente e numa segunda fase, convida a integrar no projeto alguns alunos cujo nível obtido no ano anterior tenha sido quatro e que revelam interesse em participar no projeto, sendo-lhes solicitado a produção de um texto argumentativo com propostas relevantes onde fica expresso as vantagens do projeto com a sua participação e as razões pelas quais pretende integrar o projeto. É deste modo que se consegue encontrar o perfil do aluno que integra o projeto, que deverá ser independente do seu nível de classificação. O aluno, para além de ter um gosto especial pela disciplina de matemática, tem de revelar um desempenho interessante e significativo à disciplina; ser persistente e gostar de partilhar experiências; gostar e conseguir trabalhar em grupo de forma colaborativa; deve ser curioso e gostar de se desafiar.

Os alunos testam os seus conhecimentos em três provas escritas presenciais, ajustadas ao nível etário a quem se destinam, motivadoras, apelativas e desafiantes com a intenção de desenvolver o raciocínio matemático, a comunicação matemática e o gosto pela matemática através da resolução de problemas. As provas são criadas pela equipa do Projeto MAT, procurando diversificar os temas abordados, uma vez que os alunos que integram o projeto começam no 4.º ano, acompanhando-o até ao 9.º ano. Tais provas destinam-se aos alunos com mais potencialidade para a disciplina em causa, é uma prova por cada uma das ligas.

As provas são realizadas em equipas. Os alunos são separados em duas ligas: Liga I e Liga II. Cada equipa inclui alunos de diversos anos de escolaridade, sendo a Liga I formada por equipas de alunos do 4.º ao 6.º ano e a Liga II agrega as equipas de alunos do 7.º ao 9.º ano. Cada equipa é criada de forma aleatória, respeitando a condição de incluir, em cada uma, pelo menos um aluno de cada ano de escolaridade da liga específica e, preferencialmente, todos de turmas diferentes, cada uma contém entre

cinco e seis alunos. As equipas permanecem inalteradas até final do ano, o que permite criar vínculos e dinâmicas de grupo estáveis. As equipas realizam, em média, três provas por ano, em horário extra-horário, e para que os elementos que integram o projeto não sejam excluídos, cada aluno tem de obrigatoriamente realizar pelo menos duas provas, como consta do regulamento do projeto.

Ao longo dos anos, houve sempre a preocupação, por parte da equipa do Projeto MAT, de escolher um tema (Geometria, Resolução de Problemas, Estatística, Números, Funções, ...) único para as provas de cada uma das ligas e, todos os desafios que incluíam a prova abordavam esse tema aglutinador. Em particular, o último desafio da prova da Liga I foi sempre o primeiro da prova da Liga II. Habitualmente, as provas têm entre quatro e cinco desafios, cujo grau de dificuldade é crescente e superior ao ano de escolaridade a que se destina. Este ano, a equipa decidiu aproveitar as inúmeras provas do concurso de matemática Pangea, organizada pelo Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

No ano letivo em que iniciei a prática ao ensino supervisionada, nomeadamente 2023/2024, foram realizadas três provas: a primeira prova envolveu problemas matemáticos, a segunda foi sobre funções no dia a dia e a terceira foi sobre geometria. Como de seguida se apresenta, na Tabela 1, a construção da primeira prova teve em conta os conteúdos de cada um dos anos de escolaridade dos alunos envolvidos, permitindo que todos fizessem parte do processo de resolução e da partilha de conhecimento.

Contributo de cada ano de escolaridade na realização dos desafios				
	Tema	Liga I	Tema	Liga II
Resolução de Problemas	Organização de Dados	4.º ano: <u>Representação gráfica</u> – diagrama de caule e folhas (duplos) com dados quantitativos discretos, gráficos de barras duplas (justapostas com frequência absoluta), análise crítica de gráficos. 5.º ano: <u>Representação gráfica</u> – gráficos circulares, e gráficos de barras de frequências relativas, gráficos de barras justapostas com frequências absolutas e relativas (de conjunto de dados qualitativos e/ou quantitativos), análise crítica de gráficos. 6.º ano: <u>Representação gráfica</u> – gráficos de linhas, histogramas, análise crítica de gráficos.	Organização de Dados	7.º ano: <u>Representação gráfica</u> – gráficos de linhas (com dados bivariados, em que uma das variáveis é o tempo), gráficos de barras sobrepostas, análise crítica de gráficos; <u>Análise de dados</u> – mediana e amplitude; <u>Probabilidade</u> – Explorar modelos de probabilidades para o cálculo da probabilidade de acontecimentos constituídos por mais de um resultado. 8.º ano: <u>Representação gráfica</u> - Diagramas de extremos e quartis, análise crítica de gráficos; <u>Análise de dados</u> – quartis, amplitude interquartil; <u>Probabilidade</u> – Explorar modelos de probabilidades dados para o cálculo da probabilidade de acontecimentos constituídos por mais de um resultado. 9.º ano: <u>Tratamento de dados</u> – recolha, organização e representação de dados recorrendo a diferentes representações (incluindo histograma), medidas estatísticas; <u>Probabilidade</u> – conceito de probabilidade de um acontecimento (regra de Laplace), probabilidade de um acontecimento associado a uma experiência aleatória.
	Geometria e Medida	4.º ano: <u>Sólidos: planificações de prisma e de pirâmides</u> <u>capacidade</u> – medida e unidades de medida (1l, 50cl, 33cl, 200ml), medição e unidades de medida (1, cl, ml). 5.º ano: <u>Figuras planas</u> – áreas de triângulo (a partir do paralelogramo); <u>Figuras no espaço</u> – propriedades de poliedros (pares de faces paralelas e pares de faces perpendiculares em prismas, classificação hierárquica entre prismas retos, paralelepípedos retângulos e cubos), planificações de poliedros. 6.º ano: <u>Figuras planas</u> – polígonos regulares e irregulares, perímetro e áreas do círculo; <u>Figuras no espaço</u> – unidade de medida de volume (metro cúbico e centímetro cúbico, correspondência entre o decímetro cúbico e o litro), volume de paralelepípedo, do cubo e do cilindro.	Sequências	7.º ano: <u>Regularidades, sequências e sucessões</u> – leis de formação. 8.º ano: <u>Regularidades, sequências e sucessões</u> – reconhecer regularidades, determinar uma lei de formação, determinar termos de uma sequência ou sucessão, comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência ou sucessão. 9.º ano: <u>Sequências e regularidades</u> – Lei de formação de uma sequência de números racionais e uma expressão algébrica (incluindo do 2.º grau).

Resolução de Problemas	4.º ano: <u>Números naturais</u> – uso dos números naturais, pelo menos, até 1 000 000, arredondar às dezenas, às centenas ou unidades, dezenas ou dezenas de milhar mais próxima; <u>Operações</u> – algoritmos para a adição e subtração envolvendo decimais com número até quatro algarismos, algoritmo da multiplicação com números até três algarismos no multiplicando e dois algarismos no multiplicador, algoritmo da divisão com números até três algarismos no dividendo e dois algarismos no divisor. 5.º ano: <u>Números naturais</u> – múltiplos e divisores, números primos até 100, potências de base e expoente natural; <u>Operações</u> – adição e subtração de frações e ordenação. 6.º ano: <u>Números naturais</u> – decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, multiplicação e divisão de potências com a mesma base ou o mesmo expoente; <u>Frações</u> – frações irredutíveis, adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, inverso de um número, potências do tipo $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ e expressões numéricas.	Números	7.º ano: <u>Expressões numéricas</u> – escrever, simplificar e calcular expressões numéricas que envolvam parênteses e resolver problemas que envolvam números inteiros negativos, em diversos contextos. 8.º ano: <u>Expressões numéricas</u> – resolver problemas que envolvam percentagens no contexto do quotidiano dos alunos. 9.º ano: <u>Números reais</u> – comparar números reais. Valores exatos e aproximados, propriedades das operações em $\mathbb{R}$.
------------------------	--	---------	---

Tabela 1 – Contributo da escola nos desafios da primeira prova
Fonte: Canavarro et al. (2021)

No que concerne à segunda prova, a equipa optou pelo tema funções e entorno deste foram construídos desafios. Também aqui, os conhecimentos dos alunos de cada um dos anos de escolaridade sobre o tema, permitiu o trabalho colaborativo na resolução da prova, como se mostra de seguida na Tabela 2.

Contributo de cada ano de escolaridade na realização dos desafios				
	Tema	Liga I	Tema	Liga II
Funções do dia a dia	Números	4.º ano: <u>Números naturais</u> – uso dos números naturais, pelo menos, até 1 000 000, arredondar às dezenas, às centenas ou unidades, dezenas ou dezenas de milhar mais próxima; <u>Relações numéricas</u> – composição e decomposição de números naturais até ao 1 000 000, factos básicos da adição e sua relação com a divisão (quociente de um número natural por 10, 100 e 1000); <u>Operações</u> – algoritmos para a adição e subtração envolvendo decimais com número até quatro algarismos, algoritmo da multiplicação com números até três algarismos no multiplicando e dois algarismos no multiplicador, algoritmo da divisão com números até três algarismos no dividendo e dois algarismos no divisor; <u>Sistema de numeração decimal</u> – valor posicional de algarismos no sistema de numeração decimal e interpretação da ordem de grandeza de um número, identificando as classes e respetivas ordens. 5.º ano: <u>Números naturais</u> – múltiplos e divisores, números primos até 100, potências de base e expoente natural; <u>Operações</u> – adição e subtração de frações e ordenação; <u>Frações, números decimais e percentagens</u> – frações equivalentes, comparação, ordenação e representação na reta numérica, valores aproximados (por defeito e por excesso, até às centésimas), adição e subtração de frações (em casos em que um denominador é múltiplo do outro), multiplicação entre naturais e frações, multiplicação com números decimais (até às centésimas), divisão com números decimais (até às centésimas). 6.º ano: <u>Números naturais</u> – decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, multiplicação e divisão de potências com a mesma base ou o mesmo expoente; <u>Frações</u> – frações irredutíveis, adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, inverso de um número, potências do tipo $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ e expressões numéricas.	Números	7.º ano: <u>Números inteiros</u> - número inteiro (positivo ou negativo) e representação na reta numérica, simétrico e valor absoluto de um número inteiro, comparação e ordenação de números inteiros, conjuntos dos números inteiros, adição e subtração de números inteiros, comutatividade e a associatividade da adição, expressões numéricas que envolvem parênteses, problemas que envolvem números inteiros negativos, relações entre números inteiros; <u>Números racionais</u> - número racional (positivo ou negativo), conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, representação e ordenação na reta numérica, comparação e ordenação de números racionais, adição e subtração de números racionais, percentagem a partir do todo e vice-versa, números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro positivo). 8.º ano: <u>Números Racionais</u> – representações de um número racional (como uma dízima finita ou infinita periódica), valores aproximados e valores exatos, multiplicação e divisão de números racionais (e propriedades), potências de base racional e expoente inteiro, expressões numéricas, raiz quadrada (enquadramento, cálculo de raízes quadradas de quadrados perfeitos até 144, valores aproximados), raiz cúbica (cálculo de raízes cúbicas de cubos perfeitos, valores aproximados), números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro). 9.º ano: <u>Números reais</u> – Comparação de números reais (com e sem recurso à reta real), valores exatos e aproximados, propriedades das operações em $\mathbb{R}$.

Funções do dia a dia	Álgebra	4.º ano: <u>Regularidades em sequências</u> – sequências de crescimento, regra de formação, regularidades, correspondência entre a ordem do termo de uma sequência e o termo, previsão de um termo não visível de uma sequência pictórica de crescimento, descrição em linguagem natural da regra de formação de uma sequência de crescimento; <u>Relações numéricas e algébricas</u> – variação de quantidades ou grandezas, resolver problemas associados usando representações múltiplas, em particular letras; <u>Propriedades das operações</u> – algoritmos alternativos. 5.º ano: <u>Regularidades em sequências</u> – de crescimento, leis de formação; <u>Relações numéricas e algébricas</u> – expressões algébricas com letras, expressões algébricas equivalentes. 6.º ano: <u>Regularidades em sequências</u> – de decrescimento, leis de formação; <u>Relações numéricas e algébricas</u> – operações com frações e números naturais, representação das propriedades das operações através de uma expressão algébrica, situações de proporcionalidade direta através de uma expressão algébrica.	Álgebra	7.º ano: <u>Expressões algébricas e equações</u> – equações do 1.º grau a uma incógnita, termos com incógnita e termos independentes, resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores), equivalência de duas equações; <u>Funções</u> – função como uma correspondência unívoca de um conjunto num outro, representações de funções, função de proporcionalidade direta. 8.º ano: <u>Expressões algébricas e equações</u> – monómios e polinómios, operações com polinómios (soma e multiplicação), resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores e parênteses), equações literais (resolução de equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas), sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas; <u>Funções</u> – funções afins (gráfico, expressão algébrica, tabela), funções lineares como funções de proporcionalidade direta. 9.º ano: Sequências e regularidades – lei de formação de uma sequência de números racionais e uma expressão algébrica (incluindo as de 2.º grau); <u>Equações</u> – equações do 1.º e 2.º grau a uma incógnita; <u>Funções</u> – proporcionalidade direta, representação e interpretação gráfica de uma função (incluindo a de proporcionalidade inversa e a do tipo $y = ax^2$).
		4.º ano: <u>Operações com figuras</u> – simetria de reflexão e eixos de simetria, simetria de rotação (90° ou 180°); <u>Capacidade</u> – medição e unidades de medida (11, 50 cl, 33 cl, 200 ml), medição e unidades de medida (l, cl, ml). 6.º ano: <u>Operações com figuras</u> – construção de imagens de figuras (triângulos ou quadriláteros) por rotação, simetrias de rotação e de reflexão de rosáceas.		8.º ano: <u>Operações com figuras</u> – vetores e adição de vetores, translação associada a um vetor, composição de translações e adição de vetores, reflexão deslizante, simetria de uma figura, frisos.
	Geometria e Medida		Geometria e Medida	

Funções do dia a dia	Organização de Dados	4.º ano: <u>Questões estatísticas, análise, recolha e organização de dados</u> – questões sobre características qualitativas e quantitativas discretas, recolha e organização de dados (fontes primárias e secundárias e métodos). 5.º ano: <u>Questões estatísticas, análise, recolha e organização de dados</u> – características qualitativas e quantitativas discretas, fontes e métodos de recolha de dados, construção de questionários simples, tabelas de frequências absolutas e relativas (em percentagem). 6.º ano: <u>Questões estatísticas, análise, recolha e organização de dados</u> – características quantitativas contínuas, fontes e métodos de recolha dos dados, classes, tabela de frequências absolutas e relativas organizadas em classes; <u>Representações gráficas</u> – gráficos de linha, histogramas, análise crítica de gráficos.	Organização de Dados	7.º ano: <u>Questões estatísticas, análise, recolha e organização de dados</u> – questões estatísticas sobre variáveis qualitativas e quantitativas, classificação de variáveis quanto à sua natureza: qualitativas (nominais versus ordinais) e quantitativas (discretas versus contínuas), população e amostra, fontes e métodos de recolha de dados, agrupamento de dados discretos em classes, organização de dados (tabela de frequências com dados discretos agrupados em classes); <u>Representações gráficas</u> – gráficos de linha (com dados bivariados, em que uma das variáveis é o tempo), gráfico de barras sobrepostas, análise crítica de gráficos. 8.º ano: <u>Questões estatísticas, análise, recolha e organização de dados</u> – questões estatísticas sobre variáveis qualitativas e quantitativas, fontes e métodos de recolha de dados, organização de dados (tabela de frequências com dados discretos agrupados em classes e não agrupados em classes); <u>Representações gráficas</u> – diagrama de extremos e quartis, análise crítica de gráficos. 9.º ano: <u>Tratamento de dados</u> – recolha, organização e representação de dados recorrendo a diferentes representações (incluindo o histograma), medidas estatísticas.
----------------------	----------------------	---	----------------------	---

Tabela 2 – Contributo da escola nos desafios da segunda prova
 Fonte: Canavarro et al. (2021)

Na última prova, a estrutura utilizada foi semelhante ao da segunda prova. Nesta terceira, o tema escolhido foi a geometria e, uma vez mais, a Tabela 3 permite-nos verificar que os alunos dos diferentes anos de escolaridade podiam mobilizar os seus conhecimentos para resolver cada um dos desafios.

Contributo de cada ano de escolaridade na realização dos desafios			
	Tema		Tema
Geometria	Números	4.º ano: <u>Números naturais</u> – usos dos números naturais, pelo menos, até 1 000 000, arredondar à dezena, centena ou unidade, dezena ou centena de milhar mais próxima; <u>Sistema de numeração decimal</u> – valor posicional de um algarismo no sistema de numeração decimal e interpretação da ordem de grandeza de um número, identificando as classes e respetivas ordens; <u>Frações e decimais</u> – comparar e ordenar frações com o mesmo numerador, numeral decimal, relações entre decimais, relações entre representações; <u>Operações</u> – algoritmo para a adição e subtração envolvendo decimais com números até quatro algarismos, algoritmo da multiplicação com números até três algarismos no multiplicando e dois algarismos no multiplicador, algoritmo da divisão com números até três algarismos no dividendo e dois algarismos no divisor.	7.º ano: <u>Números inteiros</u> – número inteiro (positivo ou negativo) e representação na reta numérica, simétrico e valor absoluto de um número inteiro, comparação e ordenação de números inteiros, conjunto dos números inteiros, adição e subtração de números inteiros, comutatividade e a associatividade da adição, expressões numéricas que envolvem parênteses, problemas que envolvem números inteiros negativos, relações entre números inteiros; <u>Números racionais</u> – número racional (positivo ou negativo), conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, representação e ordenação na reta numérica, comparação e ordenação de números racionais, adição e subtração de números racionais, percentagem a partir do todo e vice-versa, números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro positivo).
		5.º ano: <u>Números naturais</u> – múltiplos e divisores, números primos (menores que 100), potências (base e expoente naturais); <u>Frações, decimais e percentagens</u> – frações equivalentes, comparação, ordenação e representação na reta numérica, valores aproximados (por defeito e por excesso, até às centésimas), adição e subtração de frações (em casos em que um denominador é múltiplo do outro), multiplicação entre naturais e frações, multiplicação com decimais (até às centésimas), divisão com decimais (até às centésimas).	8.º ano: <u>Números Racionais</u> – representações de um número racional (como uma dízima finita ou infinita periódica), valores aproximados e valores exatos, multiplicação e divisão de números racionais (e propriedades), potências de base racional e expoente inteiro, expressões numéricas, raiz quadrada (enquadramento, cálculo de raízes quadradas de quadrados perfeitos até 144, valores aproximados), raiz cúbica (cálculo de raízes cúbicas de cubos perfeitos, valores aproximados), números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro).
		6.º ano: <u>Números naturais</u> – decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, multiplicação e divisão de potências (com a mesma base ou o mesmo expoente); <u>Frações</u> – frações irredutíveis, adição e subtração de frações, multiplicação de frações, inverso de um número, divisão de frações, potências do tipo $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, expressões numéricas, cálculo mental.	9.º ano: <u>Números reais</u> – Comparação de números reais (com e sem recurso à reta real), valores exatos e aproximados, propriedades das operações em $\mathbb{R}$

	Álgebra		7.º ano: <u>Expressões algébricas e equações</u> – equações do 1.º grau a uma incógnita, termos com incógnita e termos independentes, resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores), equivalência de duas equações. 8.º ano: <u>Expressões algébricas e equações</u> – monómios e polinómios, operações com polinómios (soma e multiplicação), resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores e parênteses), equações literais (resolução de equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas), sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. 9.º ano: <u>Equações</u> – equações do 1.º e 2.º grau a uma incógnita.
--	---------	--	--

Tabela 3 – Contributo da escola nos desafios da terceira prova
Fonte: Canavarro et al. (2021)

É expectável que a equipa de alunos, de qualquer uma das ligas, reconheça e aplique as etapas do processo de resolução de problemas e que consiga mobilizar conhecimento de modo a aplicar e adaptar estratégias diversas para chegar à solução do desafio em diversos contextos e reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias de resolução de problemas.

No que concerne ao raciocínio matemático, é esperado que os alunos formulem, testem e validem conjecturas a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, classifiquem objetos atendendo às suas características, justificando a veracidade ou não, as conjecturas com recurso à linguagem simbólica. Saliente-se que reconhecer e utilizar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas e compreender a matemática enquanto ciência coerente e articulada contribui para aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas em contextos diferentes, nomeadamente de outras áreas do saber, realidades ou profissões, o que possibilita interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados e ainda, reconhecer a utilidade e o poder da matemática na previsão e intervenção nessas situações.

Já no caso da comunicação matemática é fundamental que os alunos identifiquem a presença da matemática em contextos externos e que compreendam o seu papel na criação e construção da realidade, assim como consigam descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito. Outro aspeto

importante no trabalho das equipas é ouvir os outros, questionando e discutindo as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos com vista à resolução dos desafios. Ora, esta resolução deve ser realizada, sempre que oportuno, com recurso à representação matemática, pois, objetiva e clarifica a leitura e interpretação das ideias e dos processos matemáticos expressos, nas representações diversas. Na utilização da linguagem simbólica matemática, reconhecendo o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão, permite representações múltiplas para compreender, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e escrita, melhorando a compreensão no processo de resolução dos problemas.

No final de cada sessão de trabalho (60 minutos), as provas de cada equipa são recolhidas e classificadas segundo o sistema de pontos: a primeira prova tem o peso de um; segunda de dois terços; e terceira de quatro terços. Depois de classificadas as provas, os resultados por equipa e por liga são afixados. Os rankings vão sendo publicados no boletim da escola, afixado na escola e divulgados no site do agrupamento, bem como a prova com uma proposta de resolução. Deste modo, cada equipa conhece a sua posição e avalia o seu desempenho. No fim do ano, as equipas de cada liga com maior pontuação são premiadas. É também no final do ano que os alunos testam alguns desafios que foram realizando em prova numa visita de estudo temática. Se algumas visitas realizadas tinham o propósito de testar os desafios realizados, outras permitiram preparar os alunos para os desafios do ano seguinte.

Em conformidade com as Aprendizagens Essenciais de matemática (Canavarro et al, 2021), apresento as provas direccionadas das quais os meus alunos do 7.º ano das turmas em que desenvolvi a prática de ensino supervisionada realizaram e, para cada uma delas, um quadro com uma resolução expectável.

Prova 1 – Nível II (7.º, 8.º e 9.º anos) – 8 de janeiro de 2024
Duração: 75 minutos

Problemas da matemática

Organização de Dados

O Godofredo tem várias t-shirts, calções e cuecas de 5 cores. No entanto, quando se veste, o Godofredo só usa duas cores: por exemplo, cuecas azuis e t-shirt e calções verdes. De quantas maneiras diferentes pode o Godofredo vestir uma t-shirt, uns calções e umas cuecas, usando duas das 5 cores disponíveis.

Adaptado do Pangea, 1ª fase, ano 2023

Sequências

Na figura a seguir, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência, que segue a lei de formação sugerida.



Existe um termo da sequência com total de 333 😊. Quantos ☹ tem?

Adaptado do Pangea, 2ª fase. ano 2022

Números

Há 10 anos, a idade do Tolentino era igual à Idade atual da Suzy. Daqui a 10 anos, a idade do Tolentino será igual ao dobro da idade atual da Susy.

Qual é, atualmente, a soma das idades do Tolentino e da Susy?

Adaptado do Pangea, 1ª fase, ano 2023

Estatística

O gráfico de barras fornece alguma informação sobre o número de atletas de uma equipa de andebol e as suas alturas, em cm. Sabe-se que:



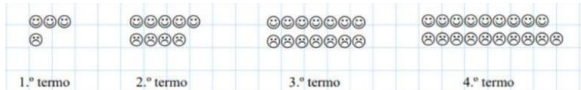
- a equipa tem 20 jogadores;
 - o número de jogadores que medem 176 cm é o dobro do número de jogadores com 175 cm;
 - o número de jogadores que medem 177 cm é o dobro do número de jogadores com 176 cm;
 - o número de jogadores que medem, no máximo, 177 cm de altura, corresponde a 70% da equipa.
- 
- | Altura (cm) | Número de jogadores |
|-------------|---------------------|
| 175 | 2 |
| 176 | 4 |
| 177 | 8 |
| 178 | 10 |

Qual é a frequência relativa do número de jogadores que medem 176 cm?

Adaptado do Pangea, 2ª fase, ano 2021

FIM

Figura 1 – Prova 1, Liga II

Prova 1 Liga II	Análise da resolução
Primeiro desafio	<u>Organização de Dados</u> O Godofredo tem várias t-shirts, calções e cuecas de 5 cores. No entanto, quando se veste, o Godofredo só usa duas cores: por exemplo, cuecas azuis e t-shirt e calções verdes. De quantas maneiras diferentes pode o Godofredo vestir uma t-shirt, uns calções e umas cuecas, usando duas cores das 5 cores disponíveis?
Aprendizagens essenciais	<u>7.º e 8.º anos</u> Probabilidade – explorar modelos de probabilidades para o cálculo da probabilidade de acontecimentos constituídos por mais de um resultado. <u>9.º ano</u> Probabilidade – conceito de probabilidade de um acontecimento (regra de Laplace), probabilidade de um acontecimento associado a uma experiência aleatória.
Resolução expectável	O Godofredo tem 5 cores diferentes. Em cada conjunto (t-shirt, calções e cuecas) ele usa exatamente duas cores. Primeiro, descobrimos o número de pares de cores que para o conjunto de roupa: Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 as 5 possíveis cores. Podemos formar pares de cores da seguinte forma: $C_1, C_2; C_1, C_3; C_1, C_4; C_1, C_5; C_2, C_3$ $C_2, C_4; C_2, C_5; C_3, C_4; C_3, C_5; C_4, C_5$ Há 10 pares de cores possíveis. Depois, calculamos o número de possibilidades ao distribuir as duas cores pelas 3 peças. Com um par fixo (por exemplo, azul (A) e verde (V)), calculamos o número de grupos possíveis: t-shirt A, calções A, cuecas V ; t-shirt A, calções A, cuecas V ; t-shirt A, calções V, cuecas A ; t-shirt A, calções V, cuecas A ; t-shirt V, calções A, cuecas A ; t-shirt V, calções A, cuecas A ; Há 6 combinações possíveis para um par de cores. Por fim, multiplicamos as opções do passo anterior pelo número de pares para obter o número final de combinações: $6 \times 10 = 60$ Resposta: O Godofredo pode vestir-se de 60 maneiras diferentes.
Segundo desafio	<u>Sequências</u> Na figura a seguir, estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência, que segue a lei de formação sugerida.  1.º termo 2.º termo 3.º termo 4.º termo Existe um termo da sequência com total de 30 . . . Quantos tem?
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Regularidades, sequências e sucessões – leis de formação. <u>8.º ano</u> Regularidades, sequências e sucessões – reconhecer regularidades, determinar uma lei de formação, determinar termos de uma sequência ou sucessão, comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência ou sucessão. <u>9.º ano</u> Sequências e regularidades – lei de formação de uma sequência de números racionais e uma expressão algébrica (incluindo do 2.º grau).

Resolução expectável	A partir da imagem, verificamos que: 1.º termo: 3 :) e 1 :(2.º termo: 5 :) e 4 :(3.º termo: 7 :) e 7 :(4.º termo: 9 :) e 10 :(Concluimos que de termo a termo são adicionados 2 :) e 3 :(. Assim, as sucessões geradoras do número de :) e de :(são, respetivamente: $a_n = 2n + 1$ $b_n = 3n - 2, \text{ onde } n \text{ é um número natural representativo da ordem do termo.}$ Se um termo tem 333 :) então: $333 = 2n + 1 \Leftrightarrow 332 = 2n \Leftrightarrow 166 = n$ $b_{166} = 3 \times 166 - 2 \Leftrightarrow b_{166} = 496$ Resposta: O termo de 333 :) tem 496 :(.
Terceiro desafio	<u>Números</u> Há 10 anos, a idade do Tolentino era igual à idade atual da Suzy. Daqui a 10 anos, a idade do Tolentino será igual ao dobro da idade atual da Suzy. Qual é, atualmente, a soma das idades do Tolentino e da Suzy?
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Expressões numéricas - escrever, simplificar e calcular expressões numéricas que envolvam parênteses e resolver problemas que envolvam números inteiros negativos, em diversos contextos. <u>8.º ano</u> Expressões numéricas - resolver problemas que envolvam percentagens no contexto do quotidiano dos alunos. <u>9.º ano</u> Números reais – comparar números reais. Valores exatos e aproximados, propriedades das operações.
Resolução expectável	Seja t e s as idades atuais do Tolentino e da Suzy, respetivamente. O problema pode ser descrito através do seguinte sistema de equações: $\begin{cases} t - 10 = s \\ t + 10 = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 10 = s \\ t + 10 = 2(t - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 10 = s \\ t + 10 = 2t - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 10 = s \\ 10 + 20 = 2t - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 10 = s \\ 30 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 = s \\ 30 = t \end{cases}$ Assim, as idades do Tolentino e da Suzy são, respetivamente, 30 e 20 anos. A soma das suas idades atuais são: $s + t = 20 + 30 = 50 \text{ anos}$.
Quarto desafio	<u>Estatística</u> O gráfico de barras fornece alguma informação sobre o número de atletas de uma equipa de andebol e as suas alturas, em cm. Sabe-se que: - a equipa tem 20 jogadores; - o número de jogadores que medem 176 cm é o dobro do número de jogadores com 175 cm; - o número de jogadores que medem 177 cm é o dobro do número de jogadores com 176 cm; - o número de jogadores que mede, no máximo, 177 cm de altura corresponde a 70% da equipa. Qual é a frequência relativa do número de jogadores que medem 176 cm? 

Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Representação gráfica – gráficos de linhas (com dados bivariados, em que uma das variáveis é o tempo), gráficos de barras sobrepostas, análise crítica de gráficos; Análise de dados – mediana e amplitude. <u>8.º ano</u> Representação gráfica – Diagramas de extremos e quartis, análise crítica de gráficos; Análise de dados – quartis, amplitude interquartil. <u>9.º ano</u> Tratamento de dados – recolha, organização e representação de dados recorrendo a diferentes representações (incluindo histograma), medidas estatísticas.								
Resolução expectável	Sejam a, b e c o número de jogadores que medem 175 cm, 176 cm, 177 cm, respetivamente. Sabe-se que o número total de jogadores é 20 e, dada a última informação do enunciado, os jogadores que medem 177 cm ou menos correspondem a 70% da equipa. O seguinte sistema de equações traduz o problema: $\begin{cases} b = 2a \\ c = 2b \\ a + b + c = 70\% \times 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2 \times 2a \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2 \times 2a \\ a + 2a + 4a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 4a \\ 7a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 8 \\ a = 2 \end{cases}$ Através de uma regra três-simples, determinamos a percentagem de alunos que medem 176 cm: <table><tr><td>20</td><td>–</td><td>100%</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>–</td><td>x</td><td>$x = \frac{4 \times 100}{20} = 20\%$</td></tr></table> Resposta: O número de jogadores que medem 176 cm corresponde a 20% do número total de jogadores.	20	–	100%		4	–	x	$x = \frac{4 \times 100}{20} = 20\%$
20	–	100%							
4	–	x	$x = \frac{4 \times 100}{20} = 20\%$						

Tabela 4 – Análise Prova 1, Liga II

Prova 2 – Nível II (7.º, 8.º e 9.º anos) – 6 de março de 2024

Duração: 75 minutos

As Funções no dia a dia

Composição de um refrigerante

Nos pacotes de refrigerantes constam informações nutricionais, tal como se exemplifica de seguida.



- O valor diário recomendado (VDR) de kilocalorias é 2000. Se uma pessoa beber um copo de 200 ml deste refrigerante, que percentagem do VDR está a ingerir?
- Determina o número de calorias e a quantidade de açúcar num pacote de 1,5l deste refrigerante.

O passeio de três amigas

A Ana, a Inês e a Joana vivem na cidade de Vila Nova de Gaia. Foram ao Porto e regressaram a casa. Os gráficos seguintes dão a informação do passeio de cada uma delas, considerando que d se refere à distância percorrida em relação ao ponto de partida e t o tempo gasto durante o percurso.



Cria uma história do passeio de uma das três amigas.

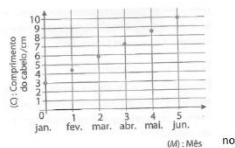
O passeio da Mónica

Após concluir os trabalhos de casa, a Mónica foi andar de bicicleta com o Diogo. Salu às 16h00 de casa e dirigiu-se à casa do seu amigo Filipe, que fica a 900 metros de distância; chegou lá às 16h20. Estiveram a lanchar durante 15 minutos e foram para o parque de jogos, onde chegaram às 17h00, tendo andado mais 600 metros. Ali estiveram a jogar à bola durante 45 minutos. Depois foram juntos para a casa da Mónica, pelo mesmo caminho, onde chegaram às 18h10. É de notar que a Mónica manteve sempre a mesma velocidade em todo o percurso.

Constrói o gráfico correspondente à distância percorrida pela Mónica de bicicleta

Crescimento de cabelo

No dia 2 de janeiro de 2018, o Rodrigo, depois de ter vindo do barbeiro, decidiu estudar o crescimento do seu cabelo, registando no segundo dia de cada mês a sua medida. O gráfico representa o crescimento do cabelo do Rodrigo, desde o mês de janeiro (mês 0) até ao mês de junho desse ano (mês 5).



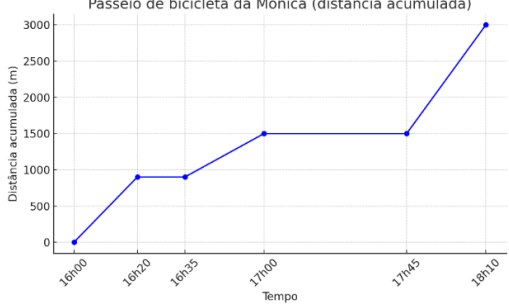
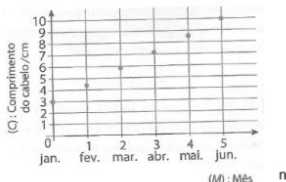
- Completa a tabela seguinte de acordo com os dados representados no gráfico.

Mês (M)	Jan. 0	Fev. 1	Mar. 2	Abr. 3	Mai. 4	Jun. 5
Comprimento (C) do cabelo (cm)	...	4,4	5,8	7,2	8,6	...
- Em cada mês quantos centímetros cresceu o cabelo do Rodrigo?
- Escreve uma expressão que representa o comprimento, em cm, do cabelo do Rodrigo em cada um dos primeiros seis meses desse ano.
- Admite que o cabelo do Rodrigo mantém o mesmo crescimento e que ele não cortou o cabelo. Em que mês e ano o comprimento do cabelo do Rodrigo atingirá 21,48 cm?
- O João foi cortar o cabelo no mesmo dia que o Rodrigo, mas o seu cabelo ficou mais curto, com apenas 2 cm. Constrói o gráfico que representa o crescimento do cabelo do João desde janeiro a maio, supondo que cresce 1,5 cm em cada mês.

Figura 2 – Prova 2, Liga II

Prova 2 Liga II	Análise da resolução
Primeiro desafio	<u>Composição de um refrigerante</u> Nos pacotes de refrigerantes constam informações nutricionais, tal como se exemplifica de seguida.  1. O valor diário recomendado (VDR) de quilocalorias é 2000. Se uma pessoa beber um copo de 200 ml deste refrigerante, que percentagem do VDR está a ingerir? 2. Determina o número de calorias e a quantidade de açúcar num pacote de 1,5 l deste refrigerante.
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Números inteiros - número inteiro (positivo ou negativo) e representação na reta numérica, simétrico e valor absoluto de um número inteiro, comparação e ordenação de números inteiros, conjunto dos números inteiros, adição e subtração de números inteiros, comutatividade e a associatividade da adição, expressões numéricas que envolvem parênteses, problemas que envolvem números inteiros negativos, relações entre números inteiros; Números racionais - número racional (positivo ou negativo), conjunto dos números racionais, representação e ordenação na reta numérica, comparação e ordenação de números racionais, adição e subtração de números racionais, percentagem a partir do todo e vice-versa, números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro positivo). <u>8.º ano</u> Números racionais - representações de um número racional (como uma dízima finita ou infinita periódica), valores aproximados e valores exatos, multiplicação e divisão de números racionais (e propriedades), potências de base racional e expoente inteiro, expressões numéricas, raiz quadrada (enquadramento, cálculo de raízes quadradas de quadrados perfeitos até 144, valores aproximados), raiz cúbica (cálculo de raízes cúbicas de cubos perfeitos, valores aproximados), números racionais positivos em notação científica (com potência de base 10 e expoente inteiro). <u>9.º ano</u> Números reais - Comparação de números reais (com e sem recurso à reta real), valores exatos e aproximados, propriedades das operações.
Resolução expectável	1. Cada pacote de refrigerante de 200 ml tem 42 kcal. O VDR de quilocalorias é 2000. Calculamos a percentagem de kcal do pacote em relação ao VDR $\begin{array}{lcl} 42 \text{ kcal} & - & x \\ 2000 \text{ kcal} & - & 100\% \end{array} \quad x = \frac{42 \times 100}{2000} = 2,1\%$ Resposta: A cada pacote de refrigerante de 200 ml, uma pessoa ingere 2,1% do VDR. 2. Cada pacote de refrigerante de 200 ml tem 10,6 g de açúcar. Existe relação de proporcionalidade direta entre o volume e o peso do açúcar. $\begin{array}{lcl} 200 \text{ ml} & = & 0,2 \text{ l} \\ 0,2 \text{ l} & - & 10,6 \text{ g} \\ 1,5 \text{ l} & - & x \end{array} \quad x = \frac{1,5 \times 10,6}{0,2} = 79,5 \text{ g}$ Resposta: Num pacote de 1,5 l existe 79,5 g de açúcar.

Segundo desafio	O passeio de três amigas A Ana, a Inês e a Joana vivem na cidade de Vila Nova de Gaia. Foram ao Porto e regressaram a casa. Os gráficos seguintes dão a informação do passeio de cada uma delas, considerando que d se refere à distância percorrida em relação ao ponto de partida e t o tempo gasto durante o percurso.  Cria uma história do passeio de uma das três amigas.
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Expressões algébricas e equações - equações do 1.º grau a uma incógnita, termos com incógnita e termos independentes, resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores), equivalência de duas equações; Funções - função como uma correspondência unívoca de um conjunto num outro, representações de funções, função de proporcionalidade direta. <u>8.º ano</u> Expressões algébricas e equações - monómios e polinómios, operações com polinómios (soma e multiplicação), resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores e parênteses), equações literais (resolução de equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas), sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas; Funções - funções afins (gráfico, expressão algébrica, tabela), funções lineares como funções de proporcionalidade direta. <u>9.º ano</u> Sequências e regularidades - lei de formação de uma sequência de números racionais e uma expressão algébrica (incluindo as de 2.º grau).
Resolução expectável	História da Ana A Ana saiu de casa e foi até à padaria comprar pão. Na viagem em direção à padaria, parou para cumprimentar uma amiga. Depois de se despedir da amiga, continuou a caminhar até à padaria. Na padaria comprou pão para o pequeno-almoço do dia seguinte e no fim dirigiu-se a casa. ...
Terceiro desafio	<u>O passeio da Mónica</u> Após concluir os trabalhos de casa, a Mónica foi andar de bicicleta com o Diogo. Saiu às 16h00 de casa e dirigiu-se à casa do seu amigo Filipe, que fica a 900 metros de distância; chegou lá às 16h20. Estiveram a lanchar durante 15 minutos e foram para o parque de jogos, onde chegaram às 17h00, tendo andado mais 600 metros. Aí estiveram a jogar à bola durante 45 minutos. Depois foram juntos para a casa da Mónica, pelo mesmo caminho, onde chegaram às 18h10. É de notar que a Mónica manteve sempre a velocidade. Constrói o gráfico correspondente à distância percorrida pela Mónica de bicicleta.
Aprendizagens essenciais	<u>8.º ano</u> Operações com figuras - vetores e adição de vetores, translação associada a um vetor, composição de translações e adição de vetores, reflexão deslizante, simetria de uma figura, frisos.

Resolução expectável	Passeio de bicicleta da Mónica (distância acumulada) 																					
Quarto desafio	<u>Crescimento de cabelo</u> No dia 2 de janeiro de 2018, o Rodrigo, depois de ter vindo do barbeiro, decidiu estudar o crescimento do seu cabelo, registando no segundo dia de cada mês a sua medida. O gráfico representa o crescimento do cabelo do Rodrigo, desde o mês de janeiro (mês 0) até ao mês de junho desse ano (mês 5). 																					
	a) Completa a tabela seguinte de acordo com os dados representados no gráfico. <table><tr><td>Mês (M)</td><td>Jan.</td><td>Fev</td><td>Mar.</td><td>Abr.</td><td>Mai.</td><td>Jun.</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Comprimento (C) do cabelo (cm)</td><td>...</td><td>4,4</td><td>5,8</td><td>7,2</td><td>8,6</td><td>...</td></tr></table> b) Em cada mês quantos centímetros cresceu o cabelo do Rodrigo? c) Escreve uma expressão que representa o comprimento, em cm, do cabelo do Rodrigo em cada um dos primeiros seis meses desse ano. d) Admite que o cabelo do Rodrigo mantém o crescimento e que ele não cortou o cabelo. Em que mês e ano o comprimento do cabelo do Rodrigo atingirá 21,48 cm? e) O João foi cortar o cabelo no mesmo dia que o Rodrigo, mas o seu cabelo ficou mais curto, com apenas 2 cm. Constrói o gráfico que representa o crescimento do cabelo do João desde janeiro a maio, supondo que cresce 1,5 cm em cada mês.	Mês (M)	Jan.	Fev	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.		0	1	2	3	4	5	Comprimento (C) do cabelo (cm)	...	4,4	5,8	7,2	8,6	...
Mês (M)	Jan.	Fev	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.																
	0	1	2	3	4	5																
Comprimento (C) do cabelo (cm)	...	4,4	5,8	7,2	8,6	...																
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Questões estatísticas, recolha e organização de dados - análise de dados, questões estatísticas sobre variáveis qualitativas e quantitativas, classificação de variáveis quanto à sua natureza: qualitativas (nominais versus ordinais) e quantitativas (discretas versus contínuas), população e amostra, fontes e métodos de recolha de dados, agrupamento de dados discretos em classes, organização de dados (tabela de frequências com dados discretos agrupados em classes); Representações gráficas - gráficos de linha (com dados bivariados, em que uma das variáveis é o tempo), gráfico de barras sobrepostas, análise crítica de gráficos. <u>8.º ano</u> Questões estatísticas, recolha e organização de dados – análise de dados, questões estatísticas sobre variáveis qualitativas e quantitativas, fontes e métodos de recolha de dados, organização de dados (tabela de frequências com dados discretos agrupados em classes e não agrupados em classes); Representações gráficas - diagrama de extremos e quartis, análise crítica de gráficos. <u>9.º ano</u> Tratamento de dados - recolha, organização e representação de dados recorrendo a diferentes representações (incluindo o histograma), medidas estatísticas.																					

Resolução expectável	a) A partir do gráfico, podemos completar a tabela: Jan. : 3 cm ; jun. : 10 cm b) $5,6 - 4,4 = 1,4 \text{ cm}$ Em cada mês, o cabelo cresce 1,4 cm. c) O gráfico do crescimento do cabelo do Rodrigo sugere que o crescimento é proporcional ao tempo. Como o cabelo cresce 1,4 cm a cada mês e no mês 0 o cabelo mede 3 cm, a expressão do comprimento do cabelo é: $c = 1,4m + 3$, onde c representa o comprimento do cabelo e m o número do mês. ...
--	---

Tabela 5 – Análise Prova 2, Liga II

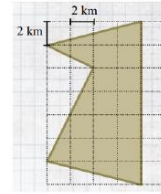
Prova 3 – Nível II (7.º, 8.º e 9.º anos) – 7 de maio de 2024
Duração: 75 minutos

Geometria

A piscina

Observa a figura, onde o lado de cada quadrícula mede 2 km . Esta figura representa, vista de um drone, uma piscina que foi construída junto à praia.

Qual é a área, em km^2 , do polígono colorido?



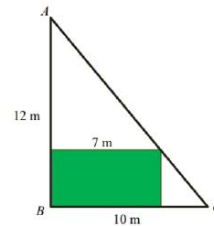
Adaptado de Pangea - 5º ano, 1ª fase, 2023

O jardim

Num triângulo $[ABC]$, retângulo em B , vai ser construído um jardim retangular, em que um dos lados mede 7 m . De acordo com a figura, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 12\text{ m}$;
- $\overline{BC} = 10\text{ m}$.

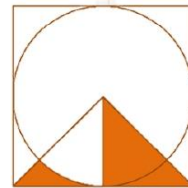
Qual é, em m^2 , a área do jardim retangular?



Adaptado de Pangea - 9º ano, 1ª fase, 2024

A área

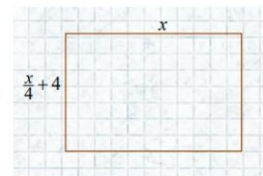
Considere, na figura, o quadrado de lado 8 cm , a circunferência de centro C inscrita nele e o triângulo isósceles de base coincidente com um dos lados do quadrado. Qual é, em cm^2 , o valor exato da área colorida?



Adaptado de Pangea - 8º ano, 1ª fase, 2023

O menor valor

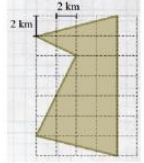
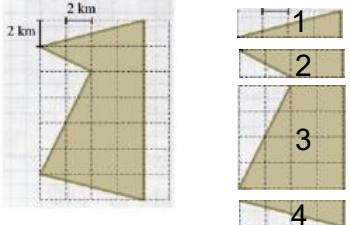
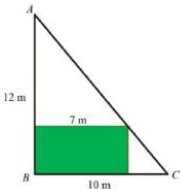
Na figura, está representado um retângulo com um lado que mede x unidades e o outro com 4 unidades a mais que a quarta parte de x . Sabe-se que, o perímetro do retângulo não é inferior a 58 unidades de medida. Qual é o menor valor que x pode tomar, na unidade de medida considerada?



Adaptado de Pangea – 9.º ano, 2ª fase, 2019

FIM

Figura 3 – Prova 3, Liga II

Prova 3 Liga II	Análise da resolução
Primeiro desafio	<u>A piscina</u> Observa a figura, onde o lado de cada quadrícula mede 2 km. Esta figura representa, vista de um drone, uma piscina que foi construída junto à praia. Qual é a área, em km^2, do polígono colorido? 
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Figuras planas - ângulos internos e externos de um polígono convexo, soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos, propriedades das diagonais de um quadrilátero, segunda fase classificação hierárquica dos quadriláteros (trapézio e papagaio), áreas do trapézio, losango e papagaio; Operações com figuras - polígonos semelhantes e razão de semelhança (ampliação e redução), homotetia, critérios de semelhança de triângulos, relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes. <u>8.º ano</u> Figuras planas - teorema de Pitágoras, área de polígonos regulares. <u>9.º ano</u> Figuras geométricas - circunferência, círculo, esfera, relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes, lugares geométricos (circunferência, círculo, mediatriz e bissetriz), polígonos; Áreas e Volumes - áreas da superfície e de volumes de sólidos (incluindo a esfera).
Resolução expectável	Podemos decompor a figura da seguinte forma:  Assim, a área total da figura será a soma das áreas das figuras 1, 2, 3 e 4. Como o lado de cada quadrícula corresponde a 2 km, as áreas das figuras são: $A_1 = \frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ km}^2 ; \quad A_2 = \frac{2+4}{2} \times 1 = 3 \text{ km}^2 ; \quad A_3 = \frac{2+4}{2} \times 4 = 12 \text{ km}^2 ; \quad A_4 = \frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ km}^2$ $A_{\text{Total}} = 2 + 3 + 12 + 2 = 20 \text{ km}^2$ Resposta: A área da figura é 20 km^2.
Segundo desafio	<u>O jardim</u> Num triângulo $[ABC]$, retângulo em B, vai ser construído um jardim retangular, em que um dos lados mede 7 m. De acordo com a figura, sabe-se que: $\overline{AB} = 12\text{m}$ $\overline{BC} = 10\text{m}$ Qual é, em m^2, a área do jardim retangular? 

Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Figuras planas - ângulos internos e externos de um polígono convexo, soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos, propriedades das diagonais de um quadrilátero, segunda fase classificação hierárquica dos quadriláteros (trapézio e papagaio), áreas do trapézio, losango e papagaio; Operações com figuras - polígonos semelhantes e razão de semelhança (ampliação e redução), homotetia, critérios de semelhança de triângulos, relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes. <u>8.º ano</u> Figuras planas - teorema de Pitágoras, área de polígonos regulares. <u>9.º ano</u> Figuras geométricas - circunferência, círculo, esfera, relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes, lugares geométricos (circunferência, círculo, mediatriz e bissetriz), polígonos; Áreas e Volumes - áreas da superfície e de volumes de sólidos (incluindo a esfera).
Resolução expectável	Sejam os pontos D e E os pontos de contacto do jardim com o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{AC}$. Os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes pelo critério AA, visto que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são paralelos, e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos e, por isso, os triângulos são ambos retângulos em B e em E, e os ângulos $\widehat{BCA}$ e $\widehat{DEA}$ são iguais. Como os triângulos são semelhantes: $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{DE} \Leftrightarrow \frac{12}{AE} = \frac{10}{7} \Leftrightarrow \frac{12 \times 7}{10} = AE \Leftrightarrow AE = 8,4 \text{ m}$ Calculamos a largura do jardim da seguinte forma: $\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE} = 12 - 8,4 = 3,6 \text{ m}$. Por fim, calcula-se a área do jardim: $A_{\text{jardim}} = 3,6 \times 7 = 25,2 \text{ m}^2$ Resposta: A área do jardim é $25,2 \text{ m}^2$.
Terceiro desafio	<u>A área</u> Considera, na figura, o quadrado de lado 8 cm, a circunferência de centro C inscrita nele e o triângulo isósceles de base coincidente com um dos lados do quadrado. Qual é, em cm^2, o valor exato da área colorida? 
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Figuras planas - ângulos internos e externos de um polígono convexo, soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos, propriedades das diagonais de um quadrilátero, segunda fase classificação hierárquica dos quadriláteros (trapézio e papagaio), áreas do trapézio, losango e papagaio; Operações com figuras - polígonos semelhantes e razão de semelhança (ampliação e redução), homotetia, critérios de semelhança de triângulos, relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes. <u>8.º ano</u> Figuras planas - teorema de Pitágoras, área de polígonos regulares. <u>9.º ano</u> Figuras geométricas - circunferência, círculo, esfera, relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes, lugares geométricos (circunferência, círculo, mediatriz e bissetriz), polígonos; Áreas e Volumes - áreas da superfície e de volumes de sólidos (incluindo a esfera).

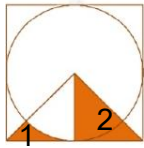
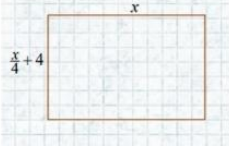
Resolução expectável	A área colorida total pode ser subdividida em duas secções, como a figura seguinte sugere:  Como a circunferência está inscrita no quadrado, o seu raio é igual à metade do lado. O triângulo corresponde a um quarto da área do quadrado, visto que um dos seus vértices é o centro do quadrado e os outros dois coincidem com dois vértices consecutivos do quadrado. E, por isso, metade do triângulo corresponde a um oitavo da área do quadrado. Calculamos a área do quadrado e do círculo da seguinte forma: $A_Q = 8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2 ; A_C = 4^2 \times \pi = 16\pi \text{ cm}^2$ A área 1 corresponde a um oitavo da área do quadrado subtraída à área do círculo. A área 2 corresponde a um oitavo da área do quadrado. $A_1 = \frac{64 - 16\pi}{8} = 8 - 2\pi \text{ cm}^2 ; A_2 = \frac{64}{8} = 8 \text{ cm}^2$ Assim, a área colorida corresponde à soma das áreas 1 e 2: $A_1 + A_2 = 8 - 2\pi + 8 = 16 - 2\pi \text{ cm}^2$ Resposta: A área colorida mede $16 - 2\pi \text{ cm}^2$
Quarto desafio	<u>O menor valor</u> Na figura, está representado um retângulo com um lado que mede x unidades e o outro com 4 unidades a mais que a quarta parte de x. Sabe-se que, o perímetro do retângulo não é inferior a 58 unidades de medida. Qual é o menor valor que x pode tomar, na unidade de medida considerada? 
Aprendizagens essenciais	<u>7.º ano</u> Figuras planas - ângulos internos e externos de um polígono convexo, soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos, propriedades das diagonais de um quadrilátero, segunda fase classificação hierárquica dos quadriláteros (trapézio e papagaio), áreas do trapézio, losango e papagaio; Operações com figuras - polígonos semelhantes e razão de semelhança (ampliação e redução), homotetia, critérios de semelhança de triângulos, relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes. <u>8.º ano</u> Figuras planas - teorema de Pitágoras, área de polígonos regulares. <u>9.º ano</u> Figuras geométricas - circunferência, círculo, esfera, relação entre a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes, lugares geométricos (circunferência, círculo, mediatriz e bissetriz), polígonos; Áreas e Volumes - áreas da superfície e de volumes de sólidos (incluindo a esfera).
Resolução expectável	A expressão do perímetro do retângulo é dada por: $2x + 2\left(\frac{x}{4} + 4\right) = 2x + \frac{x}{2} + 8 = \frac{5x}{2} + 8$ Como o perímetro do retângulo é maior ou igual a 58, o problema pode ser solucionado pela seguinte inequação: $\frac{5x}{2} + 8 \geq 58 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} \geq 50 \Leftrightarrow x \geq 20$ Resposta: 20 unidades é o menor valor que x pode tomar.

Tabela 6 – Análise Prova 3, Liga II

3.4. Intervenção no Projeto MAT

Durante a prática de ensino supervisionada realizada no ano letivo 2023/2024, no âmbito do Projeto MAT, a minha intervenção pedagógica distribuiu-se por quatro momentos principais.

Planificação e preparação didática: participei na análise das Aprendizagens Essenciais pertinentes para as provas e na seleção/adaptação de desafios para as seis provas do projeto, assegurando o alinhamento entre objetivos, enunciados e critérios de correção previamente definidos pela equipa. Colaborei na elaboração das resoluções expectáveis, já apresentadas, que serviram de referência para a correção e para a análise posterior.

Implementação em contexto de prova: vigiei parte das sessões presenciais de 60 minutos, garantindo a constituição e estabilidade das equipas, a gestão do tempo e o cumprimento das regras de prova. Apoiei a mediação das interações dentro das equipas (esclarecimento de enunciados e incentivo à explicitação de estratégias), sem fornecer soluções.

Recolha sistemática de dados do estudo: recolhi as provas escritas dos alunos e documentos do projeto. Todos os dados foram anonimizados em conformidade com os procedimentos éticos.

4. Metodologia

4.1. Introdução

Este capítulo apresenta o desenho metodológico do estudo, enquadrando o seu paradigma e justificando as opções de técnicas e instrumentos de recolha de dados. Procede-se a uma breve caracterização da escola onde o estudo foi realizado, dos participantes, e descreve-se o papel do investigador, a sua intervenção e o processo de recolha. Explicitam-se a seleção e a validação dos instrumentos, bem como os materiais analisados. Apresentam-se ainda os procedimentos de análise de dados, as estratégias de qualidade e as considerações éticas e de proteção de dados, assegurando o anonimato das pessoas e instituições.

4.2. Enquadramento

Questões de partida	Questões orientadoras	Objetivos específicos	Objetivo geral
Como a aprendizagem matemática dos alunos pode ser potenciada pelo Projeto MAT?	De que modo a realização de tarefas desafiantes fora da sala de aula promove o interesse dos alunos pela matemática?	Identificar o tipo de tarefas propostas no Projeto MAT.	Compreender de que modo o Projeto MAT contribui para a aprendizagem matemática dos alunos.
		Compreender as perceções dos alunos sobre a relação entre as tarefas propostas no Projeto MAT e o seu interesse pela matemática.	
	Que aspetos do Projeto MAT são promotores das capacidades matemáticas nos alunos?	Analisar os modos de promoção do Raciocínio matemático, da Resolução de Problemas e da Comunicação matemática através das tarefas do Projeto MAT.	

Tabela 7 – Linhas orientadoras da investigação

A investigação em causa insere-se numa perspetiva qualitativa e interpretativa. A investigação qualitativa envolve uma abordagem interpretativa e naturalística do estudo efetuado, num ambiente natural, interpretando os fenómenos ocorridos, de acordo com

os significados atribuídos pelos participantes (Denzin & Lincoln, 2008). Neste tipo de abordagem, segundo os mesmos autores, podem ocorrer abordagens multimetodológicas, destacando-se entre eles a utilização de narrativas, histórias de vida, documentos históricos, entrevistas, observações diretas, entre outras fontes de dados. Por outro lado, realça a particularidade de ser utilizada em contexto natural, entendido aqui como sendo o espaço onde as pessoas desenvolvem as suas atividades quotidianas, com o foco na valorização do significado e sentido dos objetos de estudo, tendo em conta os participantes e as suas perspetivas sobre os objetos (Denzin & Lincoln, 2008). Já Minayo (2014) entende a metodologia qualitativa como sendo aquela que incorpora a intencionalidade do ato e a questão do significado como intrínsecos aos atos realizados, às relações estabelecidas, e também às estruturas sociais, que aqui são referidas como sendo estas últimas vistas tanto como princípios transformadores, como construções humanas significativas. Esta autora realça o facto de a pesquisa qualitativa se focar no universo de significados, tais como os motivos, as aspirações, as crenças, os valores e as atitudes, procurando deste modo dar respostas ao universo mais profundo das relações, dos processos e dos fenómenos, cuja operacionalização de variáveis é impossível de ser efetuada (Minayo, 2014). Entenda-se aqui a palavra significado como sendo o ponto-chave dentro da abordagem qualitativa, uma vez que é através da sua interpretação que se compreende o participante da pesquisa, as suas vivências e as suas relações interpessoais (Denzin & Lincoln, 2008).

A investigação qualitativa apresenta quatro características: 1) a fonte direta dos dados enquanto ambiente natural, onde o investigador é o principal agente da sua recolha, 2) a recolha de dados é essencialmente de carácter descritivo, 3) a preocupação do investigador é tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências e, 4) a análise dos dados é feita de forma indutiva.

Refira-se que, na primeira característica que o ambiente e o contexto onde cada um dos indivíduos vive habitualmente, particularmente a escola, e a forma como exercem as suas ações e vivências, têm neste estudo importância essencial para que se possa compreender os significados das suas atividades. Já o meio confere ao indivíduo que nele vive, traços peculiares que são despertados de acordo com a compreensão dos significados construídos por si próprio (Denzin & Lincoln, 2008). De outro modo, compreender o indivíduo fora do seu contexto natural, poderia criar situações fabricadas, o que poderia levar a interpretações enganadoras. O papel do investigador, enquanto elemento presente no ambiente do estudo, torna-se vital para a pesquisa, pois este sofre a ação direta desse ambiente, levando o fenómeno estudado a ser

interpretado e compreendido de forma mais inclusiva (Bogdan & Biklen, 2010). Na perspetiva destes autores, o investigador deve manter-se no ambiente de estudo o tempo necessário à sua realização, de modo a proporcionar áreas intencionais para o surgimento de conteúdos e também de perceber situações imprevisíveis antecipadamente. Neste ambiente natural, o investigador poderá servir como “instrumento” através do qual os dados são recolhidos (Turato, 2013).

Na segunda característica, os dados são recolhidos e apresentados, principalmente, na forma de texto ou imagens; podem incluir transcrições de entrevistas, anotações de campo, fotografias, produções pessoais, depoimentos ou outras formas de documentos, devendo para este efeito o investigador tentar interpretá-los em toda a sua riqueza, recorrendo sempre que adequado a citações ou pequenas transcrição recolhidas, por forma a ilustrar uma situação ou esclarecer uma afirmação (Triviños, 2017).

A terceira característica é focada no investigador que tem por interesse tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. Centra-se na ênfase que cada indivíduo coloca na sua forma de vida, nas relações que estabelece no seu quotidiano, bem como o que significam quer quando ocorrem mudanças, quer quando se mantêm determinados costumes ou crenças. É importante o foco no significado ou sentido que os indivíduos atribuem aos fenómenos experienciados, pois é aqui que reside o foco da pesquisa qualitativa. É, pois, a maneira como os participantes vivenciam e comunicam essa experiência que tem um papel singular e relevante para o estudo, já que o foco dos dados recolhidos reside nos significados que cada participante atribui (Triviños, 2017).

Por fim, a quarta característica, referente à análise dos dados, cuja indução é aqui apontada como sendo um método mental a partir do qual se infere uma conclusão geral ou universal, tendo como ponto de partida a singularidade dos dados, razoavelmente verificados, que não estavam contidos no que foi examinado. Refira-se que, o objetivo dos argumentos indutivos é apresentar resultados com conteúdo mais dilatado do que as premissas que serviram de base (Lüdke & André, 2013). Segundo Bogdan e Biklen (2010), é através da inter-relação dos dados que vão sendo recolhidos que o investigador qualitativo vai construindo as suas conclusões e teorias. Tal construção (a do resultado do estudo) vai ganhando forma à medida que os dados vão sendo analisados, uma vez que não se conhece de antemão qual será a sua forma ou conteúdo. Deste modo, no âmbito da investigação qualitativa, existem vários métodos de pesquisa que podem ser utilizados, tais como: a etnografia, a fenomenologia, a teoria baseada em dados, o estudo de caso qualitativo, a interação simbólica e a pesquisa em

ação (Triviños, 2017). Assim, o método escolhido em cada investigação tem em conta amostras pequenas e não padronizadas, quando comparados com os estudos quantitativos, sendo, por isso, a composição da amostra muitas vezes realizada intencionalmente, implicando que os investigadores qualitativos procuram propositadamente aqueles indivíduos que, por observação ou pela vivência prévia do campo de estudo, possibilitam fornecer dados relevantes e mensuráveis sobre um determinado fenómeno, o que contribuí, deste modo, para que os objetivos da pesquisa sejam atingidos (Onocko-Campos, 2011).

4.3. Recolha e tratamento dos dados

A recolha de dados é feita através da análise das provas, da regulação e descrição do Projeto MAT, da classificação obtida pelas equipas dos alunos e pela análise das suas prestações em aula e momentos de avaliação, e através de entrevistas e questionários. Para isto, é assegurado que a participação dos alunos é totalmente voluntária e pode ser interrompida quando pretendido, tendo sido entregue previamente um documento de consentimento aos encarregados de educação e ao diretor da escola, e ainda, um documento de assentimento aos respetivos alunos, tendo sido atribuídos pseudónimos aos participantes das entrevistas. A Tabela 8 apresenta a conexão entre os objetivos específicos e os dados recolhidos.

Objetivos específicos	Análise das tarefas	Documentos do projeto	Questionários	Entrevista
Identificar o tipo de tarefas propostas no Projeto MAT.	✓	✓		
Compreender as perceções dos alunos sobre a relação entre as tarefas propostas no Projeto MAT e o seu interesse pela matemática.			✓	✓
Analisar os modos de promoção do Raciocínio matemático, da Resolução de Problemas e da Comunicação matemática através das tarefas do Projeto MAT.	✓	✓		

Tabela 8 – Conexão estabelecida entre os objetivos específicos e os dados recolhidos

A recolha decorreu entre setembro de 2023 e junho de 2024, na escola onde realizei o meu estágio, envolvendo 3 sessões do Projeto MAT, 5 entrevistas e 17 aplicações de questionário. As entrevistas e questionários foram realizados no tempo extra-horário e depois do período de realização das provas do Projeto MAT. As entrevistas decorreram presencialmente, na mesma escola, com duração média de 10 minutos. Adotou-se amostragem intencional por critérios, sendo realizadas com 5 alunos do 7.º ano selecionados aleatoriamente, presencialmente e individualmente, sendo o áudio gravado para se realizar a transcrição do mesmo, posteriormente. Os questionários foram realizados através de um formulário virtual com a participação de 17 alunos do 7.º ano.

Antes de terminar este ponto, importa refletir sobre as principais técnicas utilizadas na recolha de dados qualitativos. Um questionário é um instrumento rigorosamente estandardizado tanto em texto das questões, como na sua ordem que nos permitem garantir a comparabilidade das respostas e obter informação sobre aspetos não observáveis. Estão indicados em situações em que se pretende obter informação de um conjunto de pessoas e existem condicionantes de tempo para o recurso à entrevista.

A entrevista é uma das técnicas mais utilizadas na recolha de dados, em pesquisa qualitativa, como sendo um encontro entre duas pessoas, com a finalidade de que uma delas obtenha informações a respeito de determinado assunto, mediante uma conversação de natureza profissional (Minayo, 2012). Segundo Lüdke e André (2013), existem vantagens na aplicação desta técnica, pois resulta a captação imediata e corrente de informações desejadas, em qualquer tipo de informante e sobre os mais variados assuntos, para além da oportunidade de aprofundar o tópico em estudo, apontando-se para uma entrevista de carácter semiestruturado, para permitir o encadeamento das perguntas das entrevistas, apoiadas pelos pressupostos e teorias que interessam à pesquisa e, com especial incidência no fruto de novos pressupostos que possam surgir ao longo da entrevista.

Uma outra técnica é a observação participante. Tal técnica permite o contacto direto entre investigador e o fenómeno observado, para se conseguir informações sobre a realidade dos participantes em contexto natural, já que complementa os dados recolhidos pela entrevista, uma vez que permite observar uma variedade de situações ou fenómenos que possibilitam o acesso à imponderabilidade da vida real. O recurso aos focos em grupo é uma técnica de obtenção de dados qualitativos eficaz para esclarecer as normas sociais de um subgrupo, bem como a série de perspetivas que existem dentro deste, sobre fenómeno (Mack, Woodsong, Guest et al., 2005), que

procura aclarar a opinião do grupo, permitindo o acesso a múltiplos pontos de vista sobre o fenómeno em estudo. Esta técnica permite produzir grandes quantidades de informações num curto espaço de tempo, estimulando a dinâmica do grupo. Os mesmos autores referem que a sensibilização dos participantes, a organização e composição do grupo, são pontos pertinentes para a correta utilização desta técnica. No que concerne à análise de dados na pesquisa qualitativa é uma análise qualitativa confiável, embora na perspetiva de Minayo (2012) é essencial incluir os verbos compreender e interpretar e os substantivos experiência e vivência. Para que o método de análise em pesquisa qualitativa dê credibilidade à pesquisa, o investigador deve dominar a técnica, percorrendo as fases com transparência e apresentando cada passo de modo claro.

Em pesquisas qualitativas, o método mais utilizado para o tratamento dos dados é a análise de conteúdo, permitindo inferências válidas e replicáveis sobre dados de um determinado contexto, por meio de procedimentos especializados e científicos (Minayo, 2014). Segundo a autora na análise temática, tal como o nome indica, o tema em estudo está ligado a determinado assunto, podendo, por isso, ser representado por uma palavra apenas ou uma frase ou uma súmula; ao analisar o discurso, o foco principal é o sentido de uma palavra, expressão ou uma proposição que não existe em si mesmo. Os dados da investigação foram submetidos a análise de conteúdo.

4.4. Participantes do estudo

Escola

Este estudo foi realizado na escola onde estagiei. O trabalho teve por base uma intervenção no âmbito da minha a Prática de Ensino Supervisionada (PES) que decorreu numa escola na Área Metropolitana do Porto, fundada em 1988. Está inserida num agrupamento de escolas que integra 9 escolas do Ensino Básico, com alunos do Jardim de Infância, 1.º, 2.º e 3.º ciclos.

Na sede do agrupamento de escolas, funcionando o 2.º e o 3.º ciclo e local de realização da investigação, é constituída por três blocos, um pavilhão gimnodesportivo e uma cantina. Tem também Serviços Especializados de Apoio Educativo, do qual fazem parte Serviços de Psicologia e Orientação (SPO) e uma equipa do Gabinete de Intervenção Social (GIS) e possui ainda Biblioteca Escolar. Dispõe também de espaços pedagógicos, como por exemplo, o Clube de Ciência Viva, o Canto da Matemática, Clube de Teatro, entre outros. Nestes espaços procura-se proporcionar experiências significativas, promover a troca de saberes e motivar os alunos para aprendizagem. Esta

instituição promove diversas atividades, tais como, o Desporto Escolar, o Projeto MAT, o Projeto Estilos de Aprendizagem, etc. Enquanto elemento do grupo 500, verifiquei que é composto por 8 docentes.

Ao longo do ano letivo 2023/2024, tive oportunidade de trabalhar com três turmas de 7.º ano e uma turma de 9.º ano de escolaridade. Nesta última prestei assessoria. Todas as turmas onde lecionei tinham alunos do Projeto MAT. Este projeto só existe neste agrupamento e destina-se aos alunos de excelência, cuja classificação à disciplina de Matemática no final do ano letivo anterior é de 5. Este projeto teve início no ano letivo 2017/2018 e estende-se até ao ano atual, sob a coordenação de uma professora de matemática da escola onde se realiza. Este é o ambiente escolhido para a presente investigação.

Projeto MAT

O Projeto MAT destina-se sobretudo a alunos com nível 5, admitindo excecionalmente alunos com nível 4 que apresentem relatório a evidenciar as mais-valias da sua integração; assim, a maioria dos participantes é de nível 5, com apenas alguns de nível 4 que cumprem esse critério.

Os alunos testam os seus conhecimentos em três provas escritas presenciais apelativas, desafiantes e motivadoras, com a intenção de desenvolver o raciocínio matemático, a comunicação matemática e o gosto pela matemática através da resolução de problemas, resolvidos em grupo. Os alunos são separados em duas ligas, Liga I e Liga II, das quais fazem parte os alunos do 4.º ao 6.º ano, e os alunos do 7.º ao 9.º ano, respetivamente. Em cada liga, os alunos trabalham em equipas, fixas até ao final do ano, de 5 ou 6 elementos, havendo sempre a obrigatoriedade de cada equipa ter pelo menos um aluno de cada ano de escolaridade da liga em específico. A conceção das provas articula com os desafios das provas do concurso de Matemática Pangea, organizada pelo Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), destinadas a alunos do 4.º ao 9.º ano de escolaridade. Os participantes são alunos do 4.º ao 9.º ano de escolaridade do agrupamento de escolas que integram o Projeto MAT.

Com esta investigação, pretendo perceber de que modo é que o Projeto MAT pode potenciar a aprendizagem dos alunos, mais especificamente, aqueles que participaram no Projeto MAT das 3 turmas do 7.º ano de escolaridade com que trabalhei durante o meu estágio.

5. Apresentação e discussão de resultados

O presente capítulo tem como objetivo analisar e discutir os resultados obtidos no âmbito do Projeto MAT, incidindo sobre três dimensões fundamentais, articuladas com os objetivos específicos apresentados no capítulo referente à metodologia: (i) identificar o tipo de tarefas propostas no Projeto MAT, (ii) analisar as estratégias utilizadas pelos alunos nas tarefas do Projeto MAT, e (iii) compreender as perceções dos alunos sobre a relação entre as tarefas propostas no Projeto MAT e o seu interesse pela matemática.

A análise e discussão que se seguem incidem integralmente sobre a liga II (7.º ano).

Num primeiro momento, procede-se à identificação e categorização dos desafios das três provas realizadas, considerando a sua natureza (tarefas de exploração de conceitos ou de resolução de problemas), a complexidade envolvida, o tempo estimado de execução e a articulação com os objetivos pedagógicos. Em seguida, analisam-se resoluções concretas dos alunos, contrastando o que se esperava que fosse mobilizado com as estratégias e representações efetivamente utilizadas. Este contraste permite avaliar o rigor matemático, a clareza da comunicação e a profundidade do raciocínio.

Posteriormente, apresenta-se uma análise quantitativa da participação e do contributo do projeto, incluindo taxas de adesão, evolução do desempenho académico e resultados obtidos em atividades complementares, como a Pangea. Por fim, são exploradas as perceções dos alunos recolhidas por entrevistas e questionários, que permitem compreender de que modo o Projeto MAT influenciou o interesse, a motivação e a aprendizagem em matemática.

Deste modo, a análise conjuga a descrição das tarefas com a discussão crítica das práticas de resolução e das perceções dos alunos, proporcionando uma visão abrangente sobre o contributo do Projeto MAT para o desenvolvimento matemático no 3.º ciclo.

5.1. Caracterização e classificação das tarefas propostas pelo Projeto MAT

Nesta secção são analisadas as tarefas presentes nas provas do Projeto MAT. Partimos da ideia central de que aquilo que os alunos aprendem depende, em larga medida, da atividade que realizam e da qualidade das tarefas que a desencadeiam; por isso, importa caracterizar cada tarefa antes de discutir desempenhos e perceções. Seguimos

a tipologia proposta por Ponte (2005), distinguindo entre problemas, exercícios/explorações, investigações e projetos, e atendendo ao seu grau de abertura, ao tipo de raciocínio que convocam e ao potencial para produzir atividade matematicamente rica na aula.

Com base nesse quadro teórico, cada tarefa foi categorizada quanto à sua natureza: tarefas de resolução de problemas – em que o caminho não é conhecido à partida, exigindo compreensão do enunciado, planificação, execução e revisão – e tarefas de exploração de conceitos, geralmente mais acessíveis, focalizadas na mobilização de ideias e procedimentos de referência. A leitura de Pólya (1945) é útil aqui para delimitar problemas e para orientar o olhar sobre processos (entender, planejar, executar, rever), que serão depois analisados nas resoluções dos alunos.

Em seguida, a complexidade de cada tarefa foi categorizada segundo três dimensões operatórias: nível de dificuldade, etapas envolvidas e tempo necessário, uma grelha que permite estimar o potencial cognitivo e o tipo de raciocínio esperado. Esta leitura articula-se com a discussão de Ponte (2005) sobre como diferentes tipos de tarefas – mais fechadas ou mais abertas – sustentam distintos modos de pensar matemático e diferentes oportunidades de participação.

5.1.1 Classificação das tarefas da primeira prova

A primeira prova, apresentada na Figura 1, propõe quatro tarefas alinhadas com os objetivos do 3.º ciclo, abrangendo domínios distintos: organização de dados, sequências, números e estatística. Por exemplo, a tarefa de organização de dados é relevante para o estudo de combinatória (C), a tarefa de sequências e a de números são cruciais para o desenvolvimento do raciocínio algébrico (RA), e a tarefa de estatística é essencial para a compreensão de gráficos (CG) e interpretação de dados (ID).

Embora o título da Prova mencione problemas de matemática, a partir da definição discutida no capítulo 2 - Referencial Teórico assente no trabalho de Ponte (2005), verifica-se que no que diz respeito à organização dos dados, esta tarefa pode ser classificada como um *problema*, pois requer a aplicação de combinatória para determinar as diferentes formas de combinação das roupas. É uma tarefa que implica raciocínio lógico e aplicação de um conceito específico de organização de dados. Já no que se refere a sequências, a natureza é sobretudo de exploração de conceitos: o aluno reconhece regularidades, formula e valida uma lei de formação (por recorrência ou por

expressão explícita) e verifica-a em exemplos adicionais. A tarefa de números volta a enquadrar-se como resolução de problemas, pois exige modelar a situação (declaração de incógnitas e relações) e selecionar representações adequadas (expressões/equações) que sustentem a justificação do resultado. Por fim, a tarefa de Estatística assume o papel de exploração de conceitos, centrada na leitura de um gráfico e no cálculo/justificação de frequências relativas, reforçando literacia estatística e comunicação matemática. Esta leitura é coerente com a perspetiva de Ponte sobre como uma mesma questão pode tomar natureza distinta consoante o desafio cognitivo e a gestão da aula, e sobre a utilidade de articular tarefas de problema com tarefas de exploração no desenho curricular.

No plano da complexidade, as quatro tarefas são adequadas do 7.º ao 9.º ano, mas distribuem o nível de exigência: sequências e números tendem a ser mais desafiadoras para alunos dos anos iniciais do ciclo, por requererem maior formalização (lei de formação; equações/modelação). No entanto, organização de dados e estatística são mais acessíveis como ponto de entrada, embora preservem potencial cognitivo se se exigir justificação e explicitação de estratégias. Em termos processuais, a prova envolve várias etapas (analisar dados do enunciado, estruturar relações, executar cálculos/representações e comunicar a solução), e cada tarefa situa-se tipicamente entre 10 e 20 minutos, dependendo do domínio prévio e do grau de explicitação solicitada no registo final.

5.1.2. Classificação das tarefas da segunda prova

A prova 2, apresentada na Figura 2, propõe tarefas acerca de funções e representações em contextos do quotidiano. Em *Composição de um refrigerante*, mobiliza-se matemática aplicada (MA) com percentagens e proporcionalidade; nos passeios e no *Crescimento de cabelo*, enfatizam-se interpretação gráfica (IG) e funções (F); no crescimento do cabelo, acrescenta-se raciocínio algébrico (RA) e expressões matemáticas (EM). Em todos os casos, há espaço para comunicação matemática (CM) – desde justificar cálculos a narrar percursos a partir de gráficos.

Seguindo a definição apresentada por Ponte (2005), a tarefa *Composição de um refrigerante* configura-se como exploração de conceitos: leitura de rótulos, percentagens e proporcionalidade direta, explicitando unidades e a relação *quantidade e energia/açúcar*. Neste mesmo entendimento, a tarefa *O passeio de três amigas* é também exploração de conceitos: a tarefa é interpretar três gráficos distância–tempo e

produzir uma narrativa coerente (segmentos com velocidade constante, patamares nas paragens, sem descidas porque a distância é acumulada desde o ponto de partida). O *passeio da Mónica* enquadra-se como resolução de problemas: a partir de um texto descritivo, o aluno deve construir o gráfico distância-tempo, decidir escalas, marcar tempos de paragem e desenhar segmentos nos diversos intervalos. A tarefa *Crescimento de cabelo* articula exploração de conceitos com momentos de resolução de problemas.

Quanto ao nível de dificuldade, estas tarefas foram claramente desenhadas para alunos do 7.º ao 9.º ano, com uma variedade de níveis de dificuldade. As tarefas que envolvem cálculos percentuais e proporções (como a do refrigerante) são apropriadas para o 7.º ano, enquanto a construção de gráficos e a criação de expressões algébricas (como nas tarefas sobre *O passeio da Mónica* e o *Crescimento de cabelo*) são mais desafiadoras e indicadas para alunos do 8.º e 9.º ano. Muitas das tarefas exigem várias etapas de resolução. Por exemplo, na tarefa do refrigerante, os alunos devem calcular percentagens e, em seguida, aplicar o conceito a um volume maior (1,5 litros). A tarefa do crescimento do cabelo também requer múltiplos passos, desde a leitura de gráficos até a criação de expressões matemáticas. Estima-se que estas tarefas, devido à sua natureza multietapas e envolvimento de conceitos como percentagens, gráficos e funções, possam demorar entre 10 a 20 minutos cada. As tarefas gráficas (como a do passeio da Mónica e do crescimento do cabelo) podem demandar mais tempo pela necessidade de desenhar os gráficos e interpretar os dados com precisão.

5.1.3. Classificação das tarefas da terceira prova

Por fim, a prova 3, apresentada na Figura 3, aborda conteúdos de geometria (G) e cálculo de áreas (CA), com leitura rigorosa de figuras e raciocínio espacial. Em *A Piscina* e *O Jardim*, mobilizam-se propriedades geométricas elementares e fórmulas de área; em *A Área* e *O Menor Valor*, acrescenta-se raciocínio algébrico (RA) e análise de condições. Em todas as tarefas há espaço para comunicação matemática (CM).

Mais uma vez, de acordo com a definição apresentada por Ponte (2005), a tarefa *A Piscina* configura-se como exploração de conceitos: trabalhar áreas, decompor a figura em partes simples e somar áreas, mantendo coerência de unidades. *O Jardim* é também exploração de conceitos: a partir de um triângulo retângulo, usar relações métricas para determinar dimensões e calcular a área do retângulo associado. *A Área* enquadra-se como resolução de problemas: requer planificação da figura composta, escolha de uma estratégia e justificação do valor exato obtido. *O Menor Valor* é igualmente resolução de

problemas: modelar o perímetro do retângulo com as condições impostas, analisar casos admissíveis e fundamentar o mínimo no domínio considerado.

Sobre a complexidade, as tarefas são adequadas para alunos do 7.º ao 9.º ano, com níveis variados de dificuldade. As primeiras duas tarefas (*A Piscina* e *O Jardim*) são mais diretas, exigindo a aplicação de fórmulas conhecidas, enquanto as últimas (*A Área* e *O Menor Valor*) envolvem um nível mais elevado de raciocínio e resolução de problemas. A maioria das tarefas requer múltiplas etapas, como a identificação de áreas e o uso de fórmulas geométricas, especialmente nas tarefas mais complexas de *A Área* e *O Menor Valor*. Estima-se que cada tarefa demore entre 10 a 20 minutos, dependendo da complexidade e do domínio que os alunos têm sobre os conceitos geométricos e de otimização.

5.1.3. Classificação das tarefas: Síntese intermédia

Em termos gerais, da análise efetuada, pode observar-se que na Categorização de Tarefas foram propostas tantas “Tarefas exploratórias de conceitos” (50%) como “Resolução de problemas” (50%), nas provas em análise. No que concerne à categoria de Complexidade das Tarefas verifica-se que todas as tarefas foram claramente desenhadas para alunos do 7.º ao 9.º ano, com uma variedade de níveis de dificuldade, salientando-se que apenas 47% delas apresentam um grau mais elevado de dificuldade, embora dependam do conhecimento consolidado dos alunos que as resolvam. Relativamente às fases de resolução envolvidas na resolução das tarefas, a maioria (67%) requer múltiplas etapas desde análise de dados, aplicação de fórmulas, interpretação e análise de resultados no contexto da tarefa. No caso do tempo de execução de cada tarefa, o tempo estimado é de 10 a 20 minutos, dependendo da consolidação dos conceitos abordados que os alunos têm.

Quanto aos objetivos pedagógicos, de modo geral, as tarefas estão bem alinhadas com os objetivos de aprendizagem dos diversos anos de escolaridade. De seguida apresenta-se um quadro resumo onde se pode observar os objetivos pedagógicos que se pretende atingir com cada uma das tarefas.

Prova	Tarefas	Objetivos Pedagógicos										
		C	RA	CG	ID	MA	IG	F	EM	CM	G	CA
1	Organização de dados	x										
	Sequências		x									
	Números		x									
	Estatística			x	x							
2	Composição de um Refrigerante					x						
	O Passeio de Três Amigas					x	x	x		x		
	O Passeio da Mónica					x	x	x				
	Crescimento do Cabelo		x			x			x			
3	A Piscina					x	x				x	x
	O Jardim					x	x				x	x
	A Área					x	x				x	x
	O Menor Valor					x	x	x			x	x

Tabela 9 – Resumo dos objetivos pedagógicos a atingir pelas tarefas propostas

Legenda: C – combinatória; RA – raciocínio algébrico; CG – construção de gráficos; ID – interpretação de dados; MA – matemática aplicada; IG – interpretação de gráficos; F – funções; EM – estimativa e medida; CM – comunicação matemática; G – geometria; CA – cálculo de áreas.

Da análise do quadro constata-se que 33% das tarefas propostas foram idealizadas para atingirem apenas a um objetivo pedagógico e que na sua maioria se encontram na primeira prova. As restantes tarefas foram idealizadas para atingirem mais de um objetivo pedagógico.

5.2 Análise das estratégias utilizadas pelos alunos nas tarefas do Projeto MAT

Nesta secção explico o critério de análise das estratégias dos alunos nas tarefas do Projeto MAT. Para cada desafio, observo como os alunos compreendem o enunciado, planeiam, executam e reverificam a resolução (fases heurísticas de Pólya, 1945), identificando escolhas estratégicas como recurso a representações (desenhos, tabelas,

gráficos, expressões), argumentação/justificação e generalizações. A leitura das produções é articulada com a natureza da tarefa (exploração vs. problema) e com a sua complexidade (nível de dificuldade, número de etapas, tempo), segundo a tipologia e a gestão de tarefas propostas por Ponte (2005), e considera o papel do trabalho colaborativo e da mediação social na construção de significado (Vygotsky, 1978). Em cada caso, descrevo o que foi feito, por que foi feito e como, relacionando as estratégias evidenciadas com os objetivos pedagógicos previstos. As resoluções selecionadas servem de exemplos ilustrativos, sendo comentadas de forma crítica e sucinta, para explicitar forças, dificuldades típicas e implicações didáticas.

Prova 1

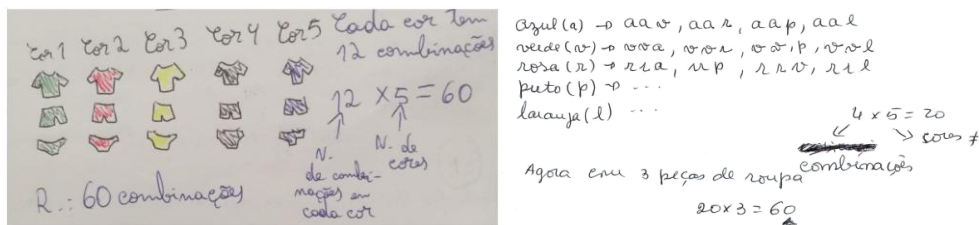


Figura 4 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 1, Liga II

Deste exemplo de resolução do primeiro desafio, à esquerda, constata-se que os alunos de 12 grupos (85%) optaram por uma resolução do problema com recurso a um raciocínio ligado à imagem real e concreta dos dados do problema. Estiveram longe de aplicar a linguagem matemática expectável a nível do 3.º ciclo. Os restantes alunos, pertencentes a dois grupos (15%), à direita, utilizaram a mesma estratégia, mas sem recorrer ao desenho. Salienta-se que este desafio era comum às duas ligas e ambas resolveram do mesmo modo

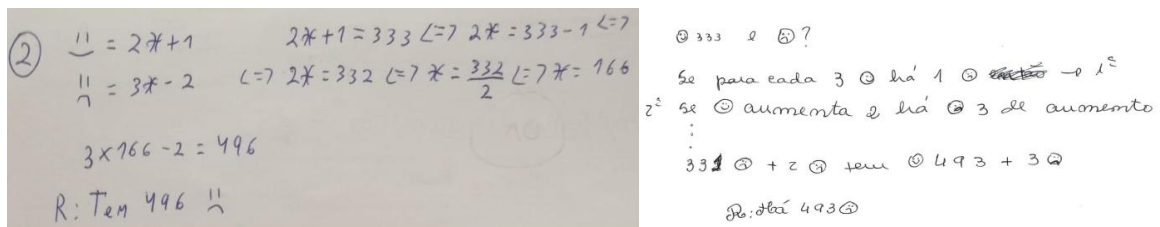


Figura 5 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 1, Liga II

Quanto ao segundo desafio, na resolução do problema, à esquerda, foi apresentado por 10 grupos (71%) um raciocínio matemático a nível do 3.º ciclo, contudo a linguagem utilizada foi pouco rigorosa, faltando também a explicação das decisões tomadas na resolução. Já na resolução da direita, realizada por um grupo (7%) vê-se uma tentativa

se explicar uma estratégia de resolução, mas com pouca clareza de raciocínio, concluindo-o de forma abrupta. A resposta dos restantes alunos foi apenas a resposta correta sem qualquer explicação. Em todos os casos, a comunicação matemática foi pouco clara.

Handwritten mathematical solutions for a system of equations and a logic puzzle.

Left side (System of Equations):

$$\begin{cases} x-10=5 \\ x+10=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+10=2(x-10) \\ x+10=2x-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+10=2x-20 \\ 30-10=5 \\ 30-20=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=30 \end{cases}$$

Right side (Logic Puzzle):

	P	P	F
T	$a-10$	a	$a+10$
S	$b-10$	b	$b+10$

$a+b=?$
 $a>10$ e $b>10$
 $a-10=b$ e $a+10=2b$
 Para $a=20$, $b=30$
 Para $a=30$, $b=20$
 $a+b=50$

Figura 6 – Exemplos de resolução do terceiro exercício da Prova 1, Liga II

Relativamente ao terceiro desafio, os alunos de 8 grupos (51%) resolveram-no com recurso ao sistema de duas equações a duas incógnitas, como se apresenta à esquerda. Esta resolução estuda-se a nível do 8.º ano. No caso da imagem da direita, 4 grupos (29%), todos da mesma sala, socorrem-se de uma tabela de dupla entrada, para explicarem o seu raciocínio e por tentativa erro obtiveram um valor, sem o explicarem de forma clara. Uma vez mais faltou clarificar o significado das incógnitas e clarificar a tomada de decisões ao longo do raciocínio matemático aplicado na resolução de problemas. A comunicação matemática foi pouco clara, mais uma vez.

Handwritten mathematical solutions for a percentage problem.

Left side (Percentage Problem):

$$\frac{30}{100} = 0,3, \quad 0,3 \times 20 = 14 \text{ (176 cm)}$$

$$20 - 14 = 6 \quad 4 \text{ (176 cm)}$$

Há 4 jogadores em 20, logo são 20%;
 com 176cm, 2 com 175cm e 8 com 176cm.
 10% 40%

Right side (Percentage Problem):

	75 = 75%	75 = 75%	75 = 75%
175 = 75%	100%	20	75 = 75%
176 = 25%	70%	75 = 75%	25 = 25%
177 = 45%	70%	75 = 75%	25 = 25%

$\frac{4}{20} = 0,2, \quad 0,2 \times 100 = 20\%$
 R: Os jogadores com 176 cm são 20% da equipa.
 A frequência relativa é de 20%.

Figura 7 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 1, Liga II

Por último, a resolução do problema do quarto desafio da primeira prova carece de rigor na leitura dos dados, na clarificação das tomadas de decisão ao longo do raciocínio matemático aplicado e a linguagem matemática apresenta-se pouco rigorosa e pouco clara. Para 9 grupos (64%) a resposta “pela leitura do gráfico 20% de jogadores tem 176 cm” foi óbvia, por isso, não apresentaram mais explicação adicional. Já para 3 grupos (21%), resposta à esquerda, construíram a sua resposta de “20%” com a determinação

desses dados, embora com pouca clareza. Para 2 grupos (15%), imagem à direita, uma tentativa de evidenciar os dados recolhidos, no entanto nada é referido sobre o significado de “x”. Nestas duas imagens são apresentados um conjunto de operações pouco claras não registando o que é pretendido com cada uma delas.

Prova 2

1)
$$\begin{array}{l} 2000 \text{ kcal} \text{ --- } 100\% \\ 42 \text{ kcal} \text{ --- } x \end{array}$$

$$x = \frac{42 \times 100}{2000} = 2,1\%$$
R: 2,1%

2)
$$200 \text{ ml} \times 7,5 = 1,5 \text{ l}$$

$$1,5 \text{ l} \text{ --- kcal} = 42 \text{ kcal} \times 7,5 = 315 \text{ kcal}$$

$$1,5 \text{ l} \text{ --- açúcar} = 10,6 \text{ g} \times 7,5 = 79,5 \text{ g}$$

Figura 8 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 2, Liga II

Quanto ao primeiro desafio, na primeira alínea, a resolução utiliza a regra três-simples e apresenta o resultado correto, mas não apresenta uma resposta completa. Na segunda alínea, os alunos não sugerem a proporcionalidade entre o volume e o açúcar e a resolução carece de comunicação matemática para explicar o raciocínio utilizado.

A Ana foi com o João ao shopping, saiu de casa às 15h. chegou à estação das devotas às 15:10, tendo percorrido 180 m. Esperou durante 5 minutos pelo comboio, tendo chegado ao ponto às 16h e percorrido mais 400 m. Quando chegou ao ponto, encontrou-se logo com o João e às 16:05 recebeu uma mensagem a dizer que tinha ocorrido um imprevisto. Foi imediatamente para casa de carro, percorrendo 550 m em apenas 15 m.

Figura 9 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 2, Liga II

No segundo desafio, foi notável, durante a execução das provas, que os alunos se divertiram neste género de exercícios onde puseram inventar uma história original. Na resolução dos alunos observa-se que inventaram uma narrativa que lhes é, provavelmente, familiar e ao mesmo tempo cumpriram o objetivo do desafio.

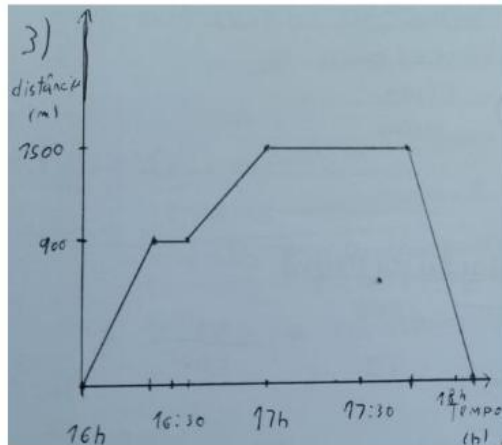


Figura 10 – Exemplos de resolução do terceiro exercício da Prova 2, Liga II

Quanto ao terceiro desafio, os alunos desenharam o trajeto em vez do gráfico distância–tempo e não colocaram um título para o gráfico. Isto mostra falta de atenção e falta de interpretação matemática. Apesar disso, legendaram corretamente os eixos e colocaram neles os dados de forma coerente.

4) a) Jan - 3 cm
Jun. - 10 cm

b) 1,4 cm

c) $1,4n + 3$

Figura 11 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 2, Liga II

Neste último desafio, os alunos apresentaram o resultado correto nas 3 alíneas. Na alínea b) escreveram apenas o resultado sem mostrar o cálculo que leva a esse valor. Na alínea c) apresentaram a expressão, mas não explicaram a origem dos números nem identificaram as variáveis.

Prova 3

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{8 \times 2}{2} = 8 \text{ m}^2$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ m}^2$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = 16 \text{ m}^2$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ m}^2$$

$$A_{\square} = c \times l = 10 \times 4 = 40 \text{ m}^2$$

$$A_{\Delta} + A_{\Delta} + A_{\Delta} + A_{\Delta} + A_{\square} =$$

$$= 8 + 4 + 16 + 3 + 40 = 76 \text{ m}^2$$

R: A área da piscina é de 76 m^2

Figura 12 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 3, Liga II

No primeiro desafio, os alunos tentaram calcular a área através da contagem de quadrados, mas os cálculos não foram organizados nem coerentes com a figura. Os valores apresentados não correspondem ao que o enunciado pedia e resultaram numa área incorreta. Além disso, faltou uma estratégia de decomposição ou justificação clara para os cálculos, o que mostra dificuldades em relacionar a grelha com as medidas reais.

Handwritten student work for Figure 13:

$$\begin{array}{l} 10 \text{ --- } 3 \\ 12 \text{ --- } x \end{array} \quad x = \frac{12 \times 3}{10} \Rightarrow x = \frac{36}{10} \Rightarrow x = 3,6$$

$A \square = 3,6 \times 7 \Rightarrow A \square = 25,2 \text{ m}^2$

R: A área do jardim retangular é de $25,2 \text{ m}^2$.

Figura 13 – Exemplos de resolução do segundo exercício da Prova 3, Liga II

Na resolução dos alunos no segundo desafio percebe-se que tentaram aplicar a semelhança de triângulos, utilizando proporções entre os lados. No entanto, a apresentação está pouco organizada: faltam explicações escritas que justifiquem cada passo e o uso da semelhança de triângulos. Apesar disso, chegaram ao valor correto da largura do jardim e, conseqüentemente, calcularam a área. Isto mostra que existe problemas na comunicação matemática.

Handwritten student work for Figure 14:

$$\begin{aligned} A_{\square} &= 4 \times 4 = 16 \\ A_{\Delta} &= \frac{\pi y^2}{8} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi \\ A_{\text{preenchida}} &= 16 - 2\pi \\ \text{R: A área colorida é de } 16 - 2\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Figura 14 – Exemplos de resolução do primeiro exercício da Prova 3, Liga II

Na resolução do terceiro desafio, o quadrado e o círculo foram identificados corretamente. No entanto, a resolução está incompleta: não explicaram a decomposição da figura em partes equivalentes, não apresentaram os cálculos intermédios da área do quadrado e do círculo, e limitaram-se a escrever expressões sem clarificar a sua origem. Além disso, a área do quadrado está errada.

$$4) \quad x + x + \frac{x}{4} + 4 + \frac{x}{4} + 4 \geq 58 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 0,5x + 8 \geq 58 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,5x + 8 \geq 58 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,5x \geq 58 - 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,5x \geq 50 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{50}{2,5} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 20$$

R. O valor mínimo de x é de 20 unidades de medida

Figura 15 – Exemplos de resolução do quarto exercício da Prova 3, Liga II

Por último, neste desafio, os alunos conseguiram identificar corretamente a expressão do perímetro e traduzir a condição dada no problema numa inequação. Os cálculos apresentados conduziram ao resultado esperado a resposta final foi indicada de forma correta. É visível que compreenderam o essencial do problema e aplicaram bem o raciocínio algébrico.

5.3. Análise da adesão dos alunos ao Projeto MAT

De acordo com o relatório de final de ano do Projeto MAT, este contou com a participação de 245 alunos distribuídos por 42 equipas no ano letivo 2023/2024: 27 da liga I e 15 da liga II. A análise de resultados é aqui feita de um modo global, envolvendo as duas ligas, embora o presente estudo recaia sob a liga II. Nesta liga foram convidados, inicialmente 106 alunos o que corresponde a uma adesão ao projeto de 76% dos alunos do 3.º ciclo. Nas duas ligas foram convidados 303 alunos e a taxa de adesão foi de 80%, como se pode observar na Tabela 10 abaixo, onde se compara a adesão entre os anos letivos de 2022/23 e 2023/24 nas duas ligas.

2022/23				2023/24		
Alunos	Convidados	Aderentes	Taxa de adesão	Convidados	Aderentes	Taxa de adesão
4.º ano	9	9	100%	59	57	97%
5.º ano	47	44	94%	55	46	84%
6.º ano	69	62	90%	85	65	76%
7.º ano	23	23	100%	53	38	72%
8.º ano	21	15	71%	32	24	75%
9.º ano	17	13	76%	21	15	71%
Total	186	166	89%	305	245	80%

Tabela 10 – Adesão ao Projeto

Da análise dos resultados plasmados na Tabela 10, verifica-se que houve um aumento significativo de alunos convidados e aderentes do ano 2022/23 para o ano 2023/24. No entanto, numa análise mais fina, é no 4.º ano onde se registou um aumento mais significativo, embora tenha existido um maior número de alunos a aderirem ao projeto em todos os anos de escolaridade, pelo que, comparativamente ao ano 2022/23 o projeto teve mais 32% de adesão por parte dos alunos.

Quanto à qualidade da influência do Projeto MAT no desempenho escolar individual dos alunos, verifica-se que a maioria dos alunos manteve o nível inicial relativo à sua classificação, isto é, o nível com que aderiu ao projeto, como se pode constatar na Tabela 11.

2023/2024					
Início da adesão ao projeto			Fim do ano do projeto		
Alunos	Nível 4	Nível 5	Nível 3	Nível 4	Nível 5
4.º ano	a)	a)	0 (0%)	0 (0%)	57 (100%)
5.º ano	a)	a)	4(9%)	30 (65%)	12 (26%)
6.º ano	25 (38%)	40 (62%)	2 (3%)	19 (29%)	44 (68%)
7.º ano	20 (53%)	18 (47%)	0 (0%)	25 (66%)	13 (34%)
8.º ano	7 (29%)	17(71%)	2 (8%)	7 (29%)	15 (63%)
9.º ano	0 (0%)	15 (100%)	0 (0%)	2 (13%)	13 (87%)
Total	52	90	8	65	172

Tabela 11 – Impacto do Projeto na avaliação sumativa da disciplina de matemática dos alunos envolvidos
a) Alunos convidados pelo professor titular de turma no início do ano (não tendo em conta os níveis)

Comparando o início do ano letivo 2023/2024 com o seu final, constata-se que no terceiro ciclo o sucesso e a qualidade deste se mantiveram, embora haja a registar uma diminuição ligeira, em cada um dos anos de escolaridade, dos níveis 5 e se registre um aumento dos níveis 4. Estes são casos muito esporádicos. Já no 6.º ano houve um aumento do número de níveis 5 em 6%. No 5.º ano não é possível quantificar, uma vez que os alunos no início do ano foram propostos pelo docente de matemática, não tendo em conta os níveis obtidos. De qualquer forma, os dados parecem indicar que 65% dos alunos propostos no 5.º ano obtiveram nível 5.

Em relação ao 3.º ciclo, constata-se que houve um decréscimo entre o número de alunos que tinham nível 5 no início do ano e aqueles que o obtiveram no final do ano letivo em cerca de 13% no 7.º e no 9.º ano e 8% no 8.º ano. Já a atividade Pangea, na primeira fase, aquando da realização da primeira prova de seriação dos alunos, contou com a participação dos 245 alunos (80% do total de alunos da escola), sendo a prova realizada em formato digital, na escola. Aqui houve alguns constrangimentos com a internet, o que fez com que alguns alunos não conseguissem concluir ou submeter o seu trabalho. No entanto 19 alunos da escola passaram à segunda fase. Estes realizaram a prova no ISEP em formato papel. Destes, nenhum ficou apurado a receber o prémio final.

No que diz respeito à visita de estudo, foi feito o relatório de avaliação da mesma com muito bom. Todos os alunos foram unânimes em referir ter gostado da experiência de aprofundar os seus conhecimentos sobre a cidade que visitaram e acima de tudo do convívio proporcionado. As equipas vencedoras do Projeto MAT, foram as que obtiveram melhor pontuação no *Ranking* de todas as provas e é de salientar que a equipa da liga II que obteve a pontuação máxima em todas as provas, o que mostra que o diálogo, a discussão de estratégias e a comunicação matemática, nesta equipa foi excelente e dela faziam parte dois alunos das turmas de 7.º ano onde lecionei.

5.4. Perceções dos alunos sobre a relação entre as tarefas propostas no Projeto MAT e o seu interesse pela matemática.

Para responder ao segundo objetivo recorri a entrevista e questionário, alinhados com a perspetiva sociocultural de que a aprendizagem se apoia na mediação social e na linguagem enquanto ferramentas de desenvolvimento (Vygotsky, 1978). Começando por referir as questões pertinentes à obtenção de uma reflexão sobre a relação entre a participação dos alunos no Projeto MAT, as suas perceções sobre as tarefas realizadas e o seu interesse pela matemática; o trabalho desenvolvido no projeto e o impacto no

seu aproveitamento. No que concerne à entrevista, foram cinco os alunos respondentes, que por questões de anonimato, as respostas de cada aluno serão codificadas com R1, R2, R3, R4 e R5.

Todos os alunos afirmaram ter conhecimento sobre a existência do Projeto MAT em anos anteriores e, destes, 70,6% referiram já ter participado anteriormente. Quanto ao ingresso no projeto, 23,5% dos alunos indicaram ter-se voluntariado, sendo os restantes convidados a participar. Relativamente à prova preferida, a maioria (52,9%) elegeu a primeira prova (Problemas de Matemática). A prova de Geometria foi a menos apreciada (11,8%), enquanto a prova sobre Funções reuniu 35,3% das preferências.

Os motivos relatados combinam interesse intrínseco pela disciplina e incentivos extrínsecos (possibilidade de viajar), coerentes com estudos que mostram como competições sustentadas no tempo “puxam” pelo esforço e consolidam conhecimento e pertença a uma comunidade de prática (Kenderov, 2022). A dimensão social (trabalho em grupo, convívio) reforça o papel da mediação e do contexto cultural na participação e no desenvolvimento (Vygotsky, 1978).

Em articulação com a secção anterior, onde se observou que uma parte substancial dos alunos já tinha experiência prévia no Projeto MAT e que uma fração relevante entrou por iniciativa própria, os dados de intenção de continuidade apontam para tendência de fidelização: entre os respondentes a esta questão, 87,5% manifestaram vontade de voltar no próximo ano e 12,5% responderam “talvez”; nenhum indicou querer abandonar. Considerando que o foco deste estudo é a Liga II (7.º ano), estes resultados sugerem que a combinação de experiência prévia e de entrada voluntária se associa a maior probabilidade de permanência, em linha com a literatura que relaciona competições regulares com envolvimento sustentado (Kenderov, 2022) e com a relevância do grupo/pertencimento na manutenção da participação (Vygotsky, 1978).

Relativamente ao trabalho com colegas de outros anos, a maioria dos alunos afirmou ter apreciado a experiência: 94,1% concordaram ou concordaram totalmente, e apenas 5,9% se mostraram indecisos. Esta valorização do contacto entre anos sugere efeitos positivos de interação entre pares e aprendizagem colaborativa no contexto da liga II. Quanto ao papel desempenhado na equipa, 88,2% consideraram ter tido um papel ativo e importante, indicando uma agência elevada; 5,9% discordaram e 5,9% mantiveram-se neutros/indecisos indicando que existe uma minoria que não se reconhece nesse papel.

Sobre o interesse pela matemática, as respostas apontam para um efeito motivacional positivo na maioria, dado que 70,6% referiram que o projeto aumentou o interesse; e 17,6% disseram que não influenciou e 11,8% assinalaram que nem aumentou nem diminuiu.

Esta é uma dimensão que também foi abordada nas entrevistas realizadas. Neste sentido, a análise das perspetivas dos alunos sobre a influência do Projeto MAT no seu gosto pela matemática, indica o reconhecimento de contributos claros, relacionando o projeto com o desenvolvimento do raciocínio matemático, a melhoria do desempenho académico e o reforço de competências relacionados com o relacionamento interpessoal. Estas respostas sublinham que as tarefas, por serem distintas das realizadas nas aulas regulares, podem ter o potencial de estimular os alunos, o que pode favorecer tanto a motivação como a aprendizagem. Outro aluno (R3) mostra uma posição mais ambivalente, reconhecendo que a competição e o esforço associado trouxeram benefícios, mas relativizando o seu efeito direto no gosto pela matemática. Por fim, há também vozes que não identificam influência (R5), o que reforça a ideia de que o impacto do projeto não é homogéneo e depende da forma como cada estudante se envolve nas atividades. De modo global, sobressaem aspetos como a valorização da novidade e da exigência cognitiva, a perceção de progresso individual e a importância do trabalho colaborativo, mas também a necessidade de reconhecer a diversidade de experiências dos participantes.

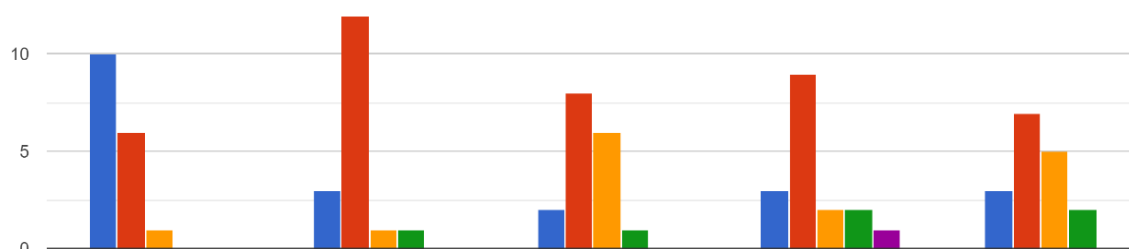


Gráfico 1 – Questionário

Legenda: Respostas a “Gostei de trabalhar com colegas de outros anos e foi uma experiência enriquecedora”; “Enquanto membro da minha equipa, tive um papel ativo e importante”; “O Projeto MAT melhorou o meu desempenho em sala de aula”; “O Projeto MAT fez-me interessar mais por matemática”; “O Projeto MAT melhorou a minha aprendizagem matemática”, respetivamente.

Azul: Concordo totalmente; vermelho: concordo; amarelo: não concordo nem discordo; verde: discordo; roxo: discordo totalmente.

A maioria reconhece ganhos no raciocínio e no gosto, associando-os a tarefas *diferentes das da aula* e ao trabalho colaborativo. Esta leitura é consistente com a ideia de que tarefas de maior abertura e bem conduzidas potenciam atividade matematicamente rica (Ponte, 2005) e com a valorização do processo heurístico na resolução de problemas (Pólya, 1945). O papel do grupo/diálogo na construção de significado alinha com a mediação social destacada pela perspectiva sociocultural (Vygotsky, 1978).

No que concerne aos motivos da participação dos 17 alunos respondentes ao inquérito, as respostas são diversas, sugere que a maioria dos alunos escolhe integrar o Projeto MAT por motivos ligados à disciplina de matemática (45,9%), outros (25%) pela forma como se desenvolve o trabalho no Projeto MAT e, ainda outros, que corresponde a um número significativo de alunos (29,1%) fazem-no pela viagem no final do ano; conforme se pode observar na Figura 16.

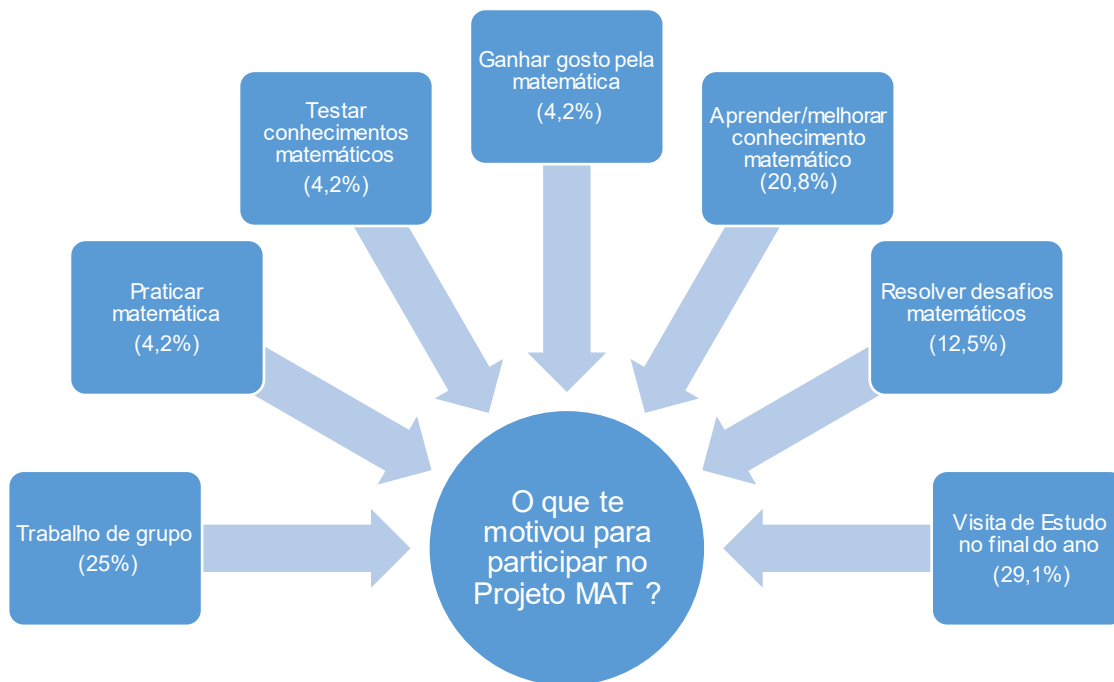


Figura 16 – Respostas por questionário sobre o motivo da participação no Projeto MAT

Tal cruza-se com as respostas obtidas na entrevista. A entrevista aos alunos sobre os motivos para a adesão ao Projeto MAT revela que tal se relaciona com o gosto pela Matemática e no valor atribuído ao desafio cognitivo, articulada com expectativas de aprendizagem e reforço do conhecimento. Em paralelo, surgem aspetos extrínsecos, como a recomendação da diretora de turma e a possibilidade de viajar, bem como a perceção de exigência das “provas difíceis” (R5). A dimensão socio relacional é igualmente mencionada: o trabalho colaborativo, o convívio e a interação com pares de diferentes idades são valorizados. A participação ao longo de vários anos reforça a fidelização e indica utilidade percebida e satisfação com a experiência.

No que respeita ao desempenho em sala de aula, 58,8% reconheceram influência positiva do Projeto MAT; 35,3% não sabem se houve impacto e 5,9% entendem que não contribuiu. No entanto, relativamente à aprendizagem em matemática, 47,1% consideraram que o projeto melhorou a sua aprendizagem; 41,2% mantiveram uma posição neutra e 11,8% entenderam que não melhorou.

Em relação aos aspetos que influenciaram a sua aprendizagem e a consequente melhoria de desempenho à disciplina de matemática, a maioria dos alunos (65%) reconhece que o Projeto MAT influenciou positivamente no seu desempenho à disciplina de matemática, no entanto, há um número significativo de alunos (35%) que não

responde (20%) ou não sabe responder (5%) ou não vislumbrar benefícios do projeto no seu desempenho matemático (10%), conforme síntese apresentada na Figura 17.

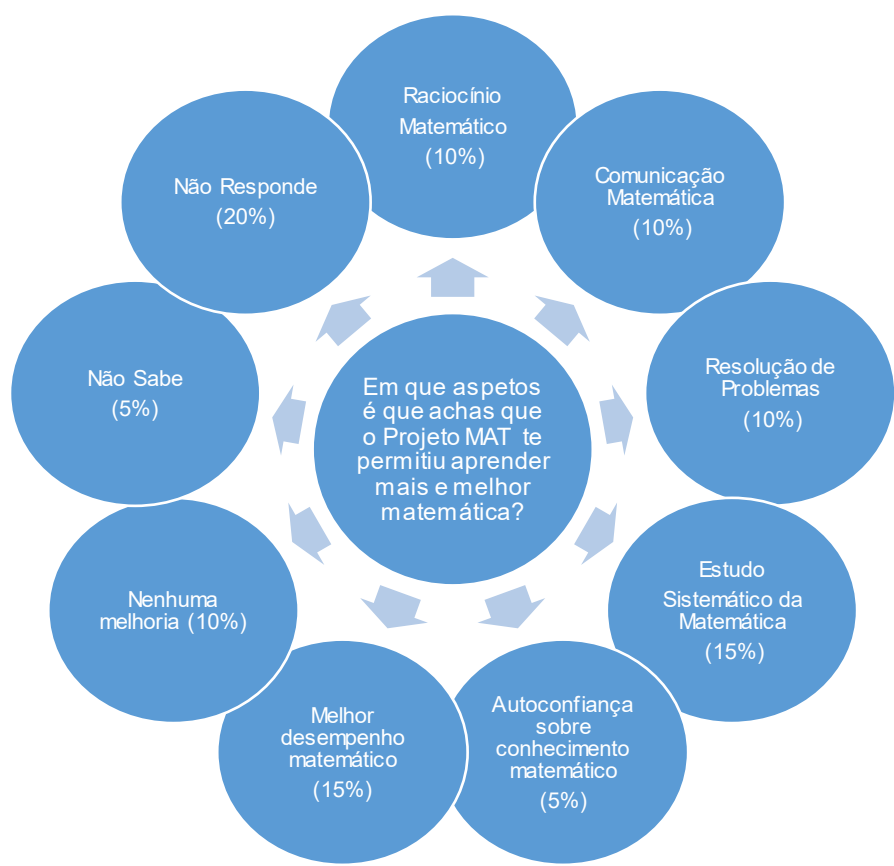


Figura 17 – Respostas por questionário sobre a influência do Projeto MAT no desempenho

6. Conclusão

A presente investigação teve como objetivo central compreender de que modo o Projeto MAT contribui para a aprendizagem matemática dos alunos, analisando as tarefas propostas, as perceções dos alunos e a promoção de competências matemáticas fundamentais, como o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação matemática. No seu conjunto, os dados recolhidos permitem identificar um contributo positivo do Projeto MAT, ainda que com intensidade variável entre alunos e momentos de trabalho, o que aprofunda o entendimento sobre o papel de atividades extracurriculares focadas em desafios matemáticos e colaborativos.

No âmbito do Objetivo 1, foi possível identificar uma vasta gama de tarefas, desde problemas de geometria, organização de dados, estatística e álgebra, que incentivam o raciocínio lógico e a aplicação de conceitos teóricos em situações práticas. A análise detalhada de provas do projeto demonstrou que estas tarefas são cuidadosamente desenhadas para desafiar os alunos, promovendo a aprendizagem por meio da exploração e resolução de problemas matemáticos.

Relativamente ao Objetivo 2, a investigação revelou que as perceções dos alunos sobre as tarefas do Projeto MAT são, em geral, muito positivas. Os alunos reconhecem o valor das atividades em fomentar o seu interesse pela matemática, especialmente pela oportunidade de aplicar conhecimentos em contextos desafiadores e diversificados. As tarefas, ao serem aplicadas em diferentes formatos, permitem que os alunos explorem o seu potencial individual e também aprendam a trabalhar em equipa, promovendo o desenvolvimento de competências colaborativas e reflexivas.

No que concerne ao Objetivo 3, verificou-se que o Projeto MAT promove efetivamente o desenvolvimento do raciocínio matemático, da resolução de problemas e da comunicação matemática. As tarefas são desenhadas de modo a incentivar a formulação de hipóteses, o teste de conjeturas e a validação de soluções, promovendo uma abordagem mais autónoma e crítica dos alunos face aos problemas matemáticos. Através do trabalho colaborativo, os alunos são expostos a diferentes perspetivas e estratégias de resolução, o que enriquece a aprendizagem coletiva e fortalece a capacidade de comunicação e argumentação matemática.

Ao longo da análise, ficou evidente que o Projeto MAT desempenha um papel preponderante na formação de alunos com capacidades matemáticas avançadas, preparando-os para enfrentar os desafios académicos e profissionais com uma base sólida de raciocínio lógico e resolução de problemas. A integração de diferentes áreas

da matemática em tarefas interdisciplinares permite aos alunos aplicarem o conhecimento de forma transversal, reconhecendo a relevância da matemática no mundo real.

Por fim, a investigação evidencia que iniciativas como o Projeto MAT são fundamentais para transformar o ensino e a aprendizagem da matemática, indo além da sala de aula e proporcionando um ambiente de aprendizagem estimulante e enriquecedor.

Referências Bibliográficas

Akveld, M., Cáceres, L., Crawford, D., & Henao, F. (2022). The perceived impact of mathematics competitions on teachers and their classrooms in Puerto Rico, Switzerland and the UK. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 1009–1025.

<https://eric.ed.gov/?id=EJ1348505&utm>

Alonso, L., Barros, G., Castro, J. M., Imaginário, L., Magalhães, J., Osório, A., & Sequeira, F. (2002). *Referencial de competências-chave: Educação e formação de adultos*. BIS.

Amado, N., Carreira, S., & Tomás Ferreira, R. (2016). *Afeto em competições matemáticas inclusivas: A relação dos jovens e suas famílias com a resolução de problemas*. Autêntica Editora.

Balzan, N. C. (2000). Indissociabilidade ensino-pesquisa como princípio metodológico. In I. P. A. Veiga & M. E. L. M. Catanho (Orgs.), *Pedagogia universitária: A aula em foco* (pp. 115–136). Papirus.

Bender, W. N. (2014). *Aprendizagem baseada em projetos: Educação diferenciada para o século XXI*. Penso Editora.

Bigotte, M. E., & Fidalgo, C. (2014). O ensino da matemática nas licenciaturas de engenharia: Centro de Apoio à Matemática. *Cadernos de Pedagogia no Ensino Superior*, 29, 1–25.

[https://www.researchgate.net/profile/Emilia-](https://www.researchgate.net/profile/Emilia-Bigotte/publication/273203753_O_ensino_da_Matematica_nas_licenciaturas_de_Engenharia_Centro_de_Apoio_a_Matematica/links/54fb5e770cf20700c5e70c17/O-ensino-da-Matematica-nas-licenciaturas-de-Engenharia-Centro-de-Apoio-a-Matematica.pdf?utm)

[Bigotte/publication/273203753 O ensino da Matematica nas licenciaturas de Engenharia Centro de Apoio a Matematica/links/54fb5e770cf20700c5e70c17/O-ensino-da-Matematica-nas-licenciaturas-de-Engenharia-Centro-de-Apoio-a-Matematica.pdf?utm](https://www.researchgate.net/profile/Emilia-Bigotte/publication/273203753_O_ensino_da_Matematica_nas_licenciaturas_de_Engenharia_Centro_de_Apoio_a_Matematica/links/54fb5e770cf20700c5e70c17/O-ensino-da-Matematica-nas-licenciaturas-de-Engenharia-Centro-de-Apoio-a-Matematica.pdf?utm)

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2010). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7.º ano de escolaridade* [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências]. Repositório da Universidade de Lisboa.

<https://repositorio.ulisboa.pt/entities/publication/67fcc02c-ef3c-47ee-8650-78d8c9cb779e>

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classrooms. In K. Kumpulainen & M. César (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203–233). Sense Publishers.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Editorial Síntesis.

Coutinho, C., & Lisboa, E. (2011). Sociedade da informação, do conhecimento e da aprendizagem: Desafios para educação no século XXI. *Revista de Educação*, 18(1), 5–22.

https://inovacao.ufrj.br/images/artigo/Coutinho_e_Lisboa_Sociedade_do_Conhecimento_1.pdf?utm

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Springer.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2008). *The SAGE handbook of qualitative research* (4th ed.). Sage.

Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar*, 31, 213–230.

<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155014216012>

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer.

Inácio, M. (2007). *Manual do formando: O processo de aprendizagem*. Delta Consultores.

Kenderov, P. S. (2022). Mathematics competitions: An integral part of the educational process. *ZDM – Mathematics Education*, 54(5), 983–996.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01348-4>

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2013). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas* (2.^a ed.). EPU.

Machado, R., & César, M. (2012). Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção do sucesso escolar em matemática. *Interacções*, 20, 98–140.

<https://repositorio.ulisboa.pt/entities/publication/5ccabe06-9072-4d75-a488-251a28f79617>

Mack, N., Woodson, C., MacQueen, K. M., Guest, G., & Namey, E. (2005). Focus group. In Family Health International (Ed.), *Qualitative research methods: A data collector's field guide* (pp. 51–81). Family Health International.

Martins, G. O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilho, J., Silva, L. U., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação.

Minayo, M. C. S. (2014). *O desafio do conhecimento: Pesquisa qualitativa em saúde* (14.^a ed.). Hucitec.

Monteiro, M. I. B. (2019). *Aprendizagem 2.0: Neuroeducação e metacognição na aprendizagem na valência do pré-escolar – Revisão da literatura* [Dissertação de mestrado, Instituto Superior de Educação e Ciências]. ISEC Lisboa.

<https://comum.rcaap.pt/entities/publication/ba02d7f7-eca3-41d2-9b48-61934bb83235>

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145–163. https://www.oasisbr.ibict.br/vufind/Record/RCAP_886f21f70e3d155949b94bc77b1a072a?utm

Ribeiro, L. R. C. (2005). *A aprendizagem baseada em problemas (PBL): Uma implementação na educação em engenharia na voz dos atores* [Tese de doutoramento, Universidade Federal de São Carlos]. Repositório UFSCar. <https://www.rcaap.pt/detail.jsp?id=oai:repositorio.ufscar.br:ufscar%2F2353&utm>

Sacristán, J., & Gómez, A. (1998). Compreender o ensino na escola: Modelos metodológicos de investigação. In J. Sacristán & A. Gómez (Orgs.), *Compreender e transformar o ensino* (pp. 100–117). Artmed.

Santos, A. M. (2024). Aprendizagem baseada em projetos como estratégia pedagógica nas aulas de matemática. *Revista Científica FESA*, 3(14), 14–25. <https://revistafesa.com/index.php/fesa/article/view/366>

Triviños, A. N. S. (2017). *Introdução à pesquisa em ciências sociais: A pesquisa qualitativa em educação* (1.^a ed.). Atlas.

Turato, E. R. (2013). *Tratado da metodologia da pesquisa clínico-qualitativa* (6.^a ed.). Vozes.

Veloso, J. P. (1993). *Problemas e tarefas em geometria elementar*. APM.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Apêndice 1

Consentimentos direcionados aos Encarregados de Educação



Caro Encarregado de Educação, [REDACTED], fevereiro de 2024

Sou professor estagiário de Matemática na Escola [REDACTED] e gostaria de convidar o seu educando a colaborar num projeto de investigação para a minha Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Este projeto tem por objetivo compreender de que modo a aprendizagem matemática dos alunos pode ser potenciada pelo Projeto [REDACTED].

Em que consiste a participação do seu educando?

De modo a poder realizar a parte empírica deste estudo de investigação, irei fotografar as produções dos alunos que participam no projeto [REDACTED] e poderei ter a necessidade de pedir ao seu educando para realizar inquéritos, através de questionários e/ou entrevistas que serão gravadas através de áudio e, posteriormente, transcritas.

O seu educando tem de participar?

A participação neste projeto de investigação é fundamental para conseguir uma dissertação mais rica e inclusiva, dado que envolve todos os alunos participantes no projeto [REDACTED] no geral. Contudo, é totalmente voluntária e, se optar por não participar, não terá qualquer consequência para o seu educando. O aluno poderá optar por desistir da sua colaboração neste estudo de investigação em qualquer momento sem qualquer prejuízo.

A participação do seu educando será mantida em sigilo?

O seu educando não será identificado no relatório escrito que resultar deste estudo de investigação, pois os nomes que nele figurarem serão fictícios para assegurar total anonimidade.

Neste sentido, venho solicitar a autorização do Encarregado de Educação para a colaboração do seu educando no estudo de investigação que descrevi.

Por favor, não hesite em contactar-me (e-mail up201805118@fc.up.pt) caso tenha qualquer questão a colocar em relação a este trabalho. Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevo-me, com os melhores cumprimentos,

Pedro Ferreira Quaresma

Nome do EE: _____

Assinatura: _____

Aceito:	Não Aceito:
---------	-------------



Apêndice 2

Assentimentos direcionados aos alunos



Caro Aluno(a),

██████████, fevereiro de 2024

Sou professor estagiário de Matemática na Escola ██████████ e gostaria de convidar-te a colaborar num projeto de investigação para a minha Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Este projeto tem por objetivo compreender de que modo a aprendizagem matemática dos alunos pode ser potenciada pelo Projeto ██████████.

Em que consiste a tua participação?

De modo a poder realizar a parte empírica deste estudo de investigação, irei fotografar as produções dos alunos que participam no projeto ██████████ e poderei ter a necessidade de pedir que estes realizem inquéritos, através de questionários e/ou entrevistas que serão gravadas através de áudio e, posteriormente, transcritas.

És obrigado(a) a participar?

A participação neste projeto de investigação é fundamental para conseguir uma dissertação mais rica e inclusiva, dado que envolve todos os alunos participantes no projeto ██████████ no geral. Contudo, é totalmente voluntária e, se optares por não participar, não terás qualquer. Poderás optar por desistir da tua colaboração neste estudo de investigação em qualquer momento sem qualquer prejuízo, se assim o entenderes.

A tua participação será mantida em sigilo?

Não serás identificado no relatório escrito que resultar deste estudo de investigação, pois os nomes que nele figurarem serão fictícios para assegurar total anonimidade.

Neste sentido, venho solicitar a tua autorização a colaboração no estudo de investigação que descrevi.

Por favor, não hesites em contactar-me (e-mail up201805118@fc.up.pt) caso tenhas qualquer questão a colocar em relação a este trabalho. Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevo-me, com os melhores cumprimentos,

Pedro Ferreira Quaresma

Nome do(a) Aluno(a): _____

Assinatura: _____

Aceito:		Não Aceito:	
---------	--	-------------	--

