GeoGebra enquanto ferramenta de *feedback* para professores: Implicações para as práticas de ensino

Susana Patrícia da Silva Faria

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025

GeoGebra enquanto ferramenta de *feedback* para professores: Implicações para as práticas de ensino

Susana Patrícia da Silva Faria

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientador
Louise dos Santos Lima, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Louise Lima, pela sua disponibilidade, paciência e dedicação constantes. Obrigada por nunca me deixar sozinha neste processo, por todas as sugestões e melhorias e por me transmitir confiança e positivismo mesmo nos momentos mais difíceis. A sua orientação tornou este percurso mais leve e inspirador, encorajando-me sempre a dar o meu melhor e a acreditar em mim mesma.

À minha orientadora cooperante, por todo o acolhimento, simpatia e generosidade. Obrigada por me ensinar tanto sobre a prática docente, por me transmitir confiança e palavras de incentivo quando mais precisei e por me inspirar a crescer como professora e como pessoa.

Aos alunos das turmas do meu estágio, que tornaram esta experiência inesquecível. Cada momento convosco foi uma aprendizagem, não só sobre como ensinar, mas sobre escuta, paciência e empatia. O vosso entusiasmo e dedicação mostraram-me a verdadeira essência da sala de aula e deram vida e sentido a este estudo.

À minha família, pelo apoio incondicional, amor e confiança que me transmitiram ao longo de toda a minha vida académica. Pais, irmãos e restante família, cada palavra de incentivo, cada gesto de cuidado e cada demonstração de confiança fizeram com que eu acreditasse sempre nas minhas capacidades e continuasse a avançar, mesmo quando os desafios pareciam maiores do que eu. Sem vocês, nada disto seria possível.

Ao meu namorado, Miguel, por ser o meu porto seguro, o meu companheiro de todas as horas e o meu maior apoio emocional. Pela paciência infinita, pelas palavras certas nos momentos de dúvida e dificuldade, por ouvir as minhas frustrações e celebrar comigo cada vitória. Por estar sempre presente e me encorajar a seguir em frente com confiança. A tua presença tornou este percurso mais leve, feliz e cheio de significado. Este relatório é, de certa forma, também um reflexo do amor, dedicação e apoio que me dás todos os dias.

Aos meus amigos, que foram o equilíbrio perfeito entre diversão e apoio, pelos momentos de descontração, pelas opiniões sinceras e pelo incentivo constante. A vossa amizade tornou cada desafio mais fácil de enfrentar e cada conquista ainda mais especial.

Resumo

Este relatório é o resultado da prática de ensino supervisionada no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, e tem como objetivo compreender de que forma é que o uso do *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos em conteúdos relacionados com a Geometria. Para o alcançar, defini duas questões de investigação: (i) Quais são as principais dificuldades dos alunos em Geometria na utilização do *GeoGebra*?; e (ii) Como é que o *feedback* fornecido pelo *GeoGebra* pode contribuir para a tomada de decisões pedagógicas pelo professor?.

A intervenção pedagógica, de natureza qualitativa, decorreu numa turma do 10.º ano do curso de Ciências e Tecnologias, no ano letivo 2024/2025, e desenvolveu-se em dois momentos principais: uma tarefa centrada na Geometria Analítica no Plano e uma tarefa no Espaço, complementadas pela aplicação de um questionário final. Para a recolha de dados, recorri à observação participante, às produções escritas dos alunos, a gravações de áudio e de ecrã e às respostas dos alunos ao questionário.

Com a análise dos dados concluí que, na Geometria Analítica no Plano, as dificuldades dos alunos relacionaram-se sobretudo com a interpretação de enunciados, a utilização do vocabulário matemático e a simbolização algébrica. Já na Geometria Analítica no Espaço, as dificuldades foram mais significativas, incidindo na compreensão do sistema de coordenadas, na identificação de planos e projeções ortogonais e na formalização de condições algébricas. Perante estes obstáculos, o *GeoGebra* revelou-se um recurso pedagógico valioso tanto para os alunos como para mim, pois ao proporcionar visualização, experimentação e *feedback* imediato ajudou-os a ultrapassar algumas dificuldades e, ao mesmo tempo, deu-me a possibilidade de observar em tempo real os seus raciocínios e interações, o que me permitiu ajustar as minhas intervenções pedagógicas às suas necessidades.

O estudo permitiu compreender que o *GeoGebra* é uma ferramenta com muito potencial e que deve ser integrada no ensino, aprendizagem e avaliação em Geometria, desde que utilizado com base numa orientação pedagógica estruturada e com tarefas que favoreçam a reflexão.

Palavras-chave: *GeoGebra*, *feedback*, ensino da geometria, dificuldades dos alunos, mediação pedagógica

Abstract

This report is the result of a supervised teaching practicum carried out as part of the Master's Degree in Mathematics Teaching for the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education, and its main objective is to understand how the use of *GeoGebra* can provide teachers with *feedback* on students' mathematical learning in geometry-related topics. To this end, I formulated two research questions: (i) In which geometry topics do students face the greatest difficulties when using *GeoGebra*? and (ii) How can the *feedback* provided by *GeoGebra* inform teachers' pedagogical decision-making?

The pedagogical intervention, which was qualitative in nature, was implemented in a 10th-grade Science and Technology class during the 2024/2025 school year. It was developed in two main stages: one task focused on Analytic Geometry in the Plane and another on Analytic Geometry in Space, complemented by a final questionnaire. Data were collected through participant observation, students' written work, audio and screen recordings, and students' questionnaire responses.

Based on my data analysis, I concluded that, on Analytic Geometry in the Plane, students' main difficulties were related to interpreting problem statements, using mathematical vocabulary, and algebraic symbolization. On Analytic Geometry in Space, the difficulties were more significant, focusing on understanding the coordinate system, identifying planes and orthogonal projections, and formalizing algebraic conditions. Faced with these challenges, *GeoGebra* proved to be a valuable pedagogical resource for both students and me, as it provided visualization, experimentation, and immediate *feedback*. This helped students overcome some of their difficulties, and at the same time, enabled me to observe their reasoning and interactions in real time, allowing me to adapt my teaching interventions to their needs.

The study demonstrated that *GeoGebra* is a promising tool that should be integrated into the teaching, learning, and assessment of geometry, provided that its use is guided by a structured pedagogical framework and supported by tasks that foster reflection and collaborative work.

Keywords: *GeoGebra*, *feedback*, geometry teaching, students' difficulties, pedagogical mediation

Índice

Lista de Quadros vi

Lista de Gráficos vii

Lista de Figuras viii

Lista de Abreviaturas x

1. Introdução 1

2. Enquadramento teórico 3

2.1. Geometria Analítica no Plano e no Espaço: Perspetivas de Ensino e Aprendizagem 3

2.1.1. Aprender Geometria 4

2.1.2. Ensinar Geometria 7

2.2. Uma estratégia para ensinar e aprender Geometria: avaliação pedagógica e o papel do *feedback* 10

2.2.1. Avaliação pedagógica 10

2.2.2. *Feedback* no processo de ensino-aprendizagem-avaliação 13

2.2.3. Ensinar e aprender com recurso à tecnologia 15

2.2.4. Um recurso tecnológico para aprender (também) Geometria: O *GeoGebra* 16

3. Contexto e Organização das Aulas 19

3.1. Caracterização da Escola 19

3.2. Caracterização da Turma 20

3.3. Organização da Intervenção Pedagógica 22

3.3.1. Tarefa 1: A Construção da Joana 23

3.3.2. Tarefa 2: O Prisma Quadrangular 24

3.4. Descrição da Intervenção Pedagógica 26

4. Métodos de recolha de dados 27

4.1. Opções metodológicas 27

4.2. Contexto, participantes do estudo e questões éticas 29

4.3. Processos de recolha de dados 30
4.4. Análise de dados 33
5. Análise de dados 36
5.1. Análise da Tarefa 1: A Construção da Joana 36
5.1.1. Dificuldades identificadas 37
5.1.2. Estratégias dos alunos para superar dificuldades 44
5.1.3. *Feedback* recolhido pelo professor 48
5.2. Análise da Tarefa 2: O Prisma Quadrangular 53
5.2.1. Dificuldades identificadas 54
5.2.2. Estratégias utilizadas 66
5.2.3. *Feedback* recolhido pelo professor 71
5.3. Perceções dos alunos relativamente ao uso do *GeoGebra* 76
5.4. Síntese global da análise 79
6. Conclusões e Recomendações 81
6.1. Conclusões do estudo 82
6.1.1. Quais são as principais dificuldades dos alunos em Geometria na utilização do *GeoGebra*? 82
6.1.2. Como é que o *feedback* fornecido pelo *GeoGebra* pode contribuir para a tomada de decisões pedagógicas pelo professor? 82
6.2. Reflexão sobre o estudo 83
6.3. Recomendações e Perspetivas de Investigação Futura 84
Referências Bibliográficas 86
Apêndices 92
Apêndice I – Tarefa 1: A Construção da Joana 92
Apêndice II – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular 93
Apêndice III – Assentimento entregue aos alunos 94
Apêndice IV – Consentimento entregue aos encarregados de educação 95
Apêndice V – Questionário 96

Lista de Quadros

Quadro 1 – Pergunta de partida, questões orientadoras, objetivos específicos e objetivo geral (Estrutura adaptada de Lima, 2020). 28
Quadro 2 – Técnicas de recolha de dados relacionados com os objetivos específicos (Estrutura adaptada de Lima, 2020). 31
Quadro 3 – Dificuldades identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*. 44
Quadro 4 – Dificuldades e estratégias identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*. 47
Quadro 5 – Dificuldades, estratégias e implicações pedagógicas identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*. 52
Quadro 6 – Dificuldades identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*. 66
Quadro 7 – Dificuldades e estratégias identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*. 70
Quadro 8 – Dificuldades, estratégias e implicações pedagógicas identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*. 75
Quadro 9 – Articulação entre Tarefas, Estratégias e Perceções dos Alunos. 80

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Classificações dos alunos a Matemática no 1.º Período. 22
Gráfico 2 – Respostas à questão “O *GeoGebra* ajudou-me a visualizar melhor os objetos no espaço”. 77

Lista de Figuras

Figura 1 – Modelo de Van Hiele (1999) relativamente aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. 5
Figura 2 – Relação entre ensinar, aprender e avaliar (Ferreira et al., 2021, p. 43)..... 13
Figura 3 – Momentos de intervenção. 23
Figura 4 – Tarefa 1: A Construção da Joana (Adaptado de Pimenta et al., 2025). 24
Figura 5 – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular (Adaptado de Almeida et al., 2025)..... 25
Figura 6 – Reformulação da questão 1.3 da tarefa 1. 26
Figura 7 – Reformulação do enunciado da tarefa 2. 26
Figura 8 – Tarefa 1: A Construção da Joana (Adaptado de Pimenta et al., 2025). 37
Figura 9 – Construção da bissetriz pelo grupo constituído por Pitágoras e Galileu Galilei. 38
Figura 10 – Resolução errada pelo grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides. 41
Figura 11 – Condição (errada) dada como resposta à questão 1.3 pelo grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides. 41
Figura 12 – Tentativas de chegar à condição correta pelo grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether. 43
Figura 13 – Construção errada da circunferência vs. correção, após visualizarem que estava errado. 45
Figura 14 – Resolução da alínea 1.3 pelo grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether, com rasuras devido à evolução do pensamento relativamente à condição... 49
Figura 15 – Evolução da construção pelo grupo de Isaac Newton e Hypatia, que alteraram a equação após perceberem o que tinham desenhado estava errado. 50
Figura 16 – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular (Adaptado de Almeida et al., 2025). 53
Figura 17 – Resposta à alínea 1.1 pelo grupo de Cláudio Ptolomeu e Arquimedes. ... 57
Figura 18 – Resposta à alínea 1.1 pelo grupo de Pedro Hispano e John Playfair. 57
Figura 19 – Resposta à alínea 1.2 pelos grupos de Pedro Hispano e John Playfair, de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether e de Pitágoras e Galileu Galilei, respetivamente. 59
Figura 20 – Resposta à questão 2 pelos grupos de Arquimedes e Cláudio Ptolomeu, de Pitágoras e Galileu Galilei e de Pedro Hispano e John Playfair, respetivamente. 60
Figura 21 – Representação da semirreta pelo grupo de Pedro Hispano e John Playfair. 60

Figura 22 – Resoluções pelos grupos de Carl Gauss e Ada Lovelace e de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether, respetivamente. 61
Figura 23 – Tentativa de visualizar a condição pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace. 62
Figura 24 – Visualização do ponto H pelo grupo de Emmy Noether e Leonardo Fibonacci. 64
Figura 25 – Resoluções pelos grupos de René Descartes e Nathan Jacob Fine e de Pedro Hispano e John Playfair, respetivamente. 64
Figura 26 – Resolução pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace. 67
Figura 27 – Resolução pelo grupo de Ada Lovelace e Carl Gauss. 67
Figura 28 – Representação da semirreta BG pelo grupo de René Descartes e Nathan Jacob Fine para visualizar a semirreta e conseguir escrever a equação. 68
Figura 29 – Representação do plano OBH pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace para verificar qual a equação do plano. 68
Figura 30 – Correção das coordenadas do ponto H após visualização no *GeoGebra* pelo grupo de Emmy Noether e Leonardo Fibonacci. 69

Lista de Abreviaturas

AGD	AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
GD	GEOMETRIA DINÂMICA
TIC	TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

1. Introdução

A Matemática desempenha um papel central na formação dos alunos, pois desenvolve competências de raciocínio lógico, resolução de problemas e pensamento crítico, essenciais para a participação ativa na sociedade (Carvalho e Silva et al., 2023).

Ao longo do meu estágio pedagógico, pude verificar que a Geometria Analítica, tanto no plano como no espaço, é um dos domínios da Matemática que mais suscita dúvidas nos alunos do Ensino Secundário. A transição do espaço bidimensional para o tridimensional, a formalização de condições algébricas e a utilização de linguagem matemática rigorosa são obstáculos recorrentes que afetam a compreensão dos conceitos e a própria resolução de problemas (Jones & Tzekaki, 2016; Junqueira, 1994). Estas dificuldades, amplamente referidas na literatura, levaram-me a refletir sobre a necessidade de os professores desenvolverem estratégias de ensino que tornem visíveis os raciocínios dos alunos e que favoreçam uma aprendizagem ativa e significativa da Geometria.

Neste contexto, o recurso a ferramentas digitais, como o *GeoGebra,* apresenta-se como uma via promissora para potenciar as aprendizagens (Bobko & Rocha, 2024). O NCTM (2014) defende que a tecnologia deve ser uma característica indispensável da sala de aula de Matemática, permitindo explorar ideias complexas e promover o raciocínio. Da mesma forma, Cadavez et al. (2013) referem que os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) auxiliam os alunos na construção do conhecimento, enquanto permitem ao professor observar e analisar o pensamento dos alunos.

Assim sendo, este relatório surge da minha necessidade de compreender de que forma o *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens dos alunos em conteúdos de Geometria. Para dar resposta a esta questão, defini o objetivo geral: Compreender de que forma é que o uso do *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos em conteúdos relacionados com a Geometria.

A minha intervenção pedagógica foi desenvolvida numa turma de 10.º ano de Matemática A ao longo do ano letivo 2024/2025 e envolveu dois momentos de trabalho com o *GeoGebra*, uma tarefa no plano e uma tarefa no espaço, complementados por um questionário final aplicado aos alunos de forma anónima. Através da observação direta, das gravações de ecrã e áudio, das produções escritas e das respostas ao questionário, consegui triangular os dados e construir uma análise fundamentada sobre

a forma como os alunos aprenderam, onde encontraram dificuldades e como mobilizaram estratégias para as superar.

Os resultados que obtive mostraram que o *GeoGebra* tornou visíveis raciocínios, erros e estratégias dos alunos, favorecendo momentos de experimentação, validação e revisão. Confirmei dificuldades na interpretação de enunciados, no uso da linguagem matemática e na formalização de condições algébricas, especialmente na transição do plano para o espaço. Verifiquei ainda que, quando acompanhado de mediação docente e de oportunidades para discussão estruturada, o *GeoGebra* pode ser um recurso decisivo para apoiar a tomada de decisões pedagógicas em tempo real.

Decidi organizar este relatório em seis capítulos, de forma a facilitar a sua leitura e compreensão. Neste primeiro capítulo apresento o enquadramento e a motivação para o estudo. No segundo, desenvolvo o enquadramento teórico que serviu de base para o seu desenvolvimento, abordando o ensino e aprendizagem da Geometria, o papel do *feedback* e o potencial da tecnologia, em particular do *GeoGebra*. No terceiro capítulo descrevo a minha intervenção pedagógica, onde caracterizo o contexto escolar, a turma e as tarefas implementadas. No quarto capítulo explicito a metodologia de recolha e análise de dados. No quinto capítulo apresento e analiso os resultados obtidos. Por fim, no sexto capítulo sintetizo as principais conclusões, reflito criticamente sobre o estudo e apresento recomendações para a prática pedagógica e para futuras investigações.

Em termos práticos, este estudo pretende contribuir para uma reflexão sobre o papel do professor como promotor da aprendizagem, mostrando como o uso de tecnologias como o *GeoGebra* pode apoiar a planificação de aulas, a identificação de dificuldades e a promoção de um ensino mais exploratório e inclusivo. Acredito que ao tornar visíveis os raciocínios dos alunos, esta ferramenta pode oferecer dados valiosos para a tomada de decisões pedagógicas e para a criação de ambientes de aprendizagem que favoreçam a autonomia, o pensamento crítico e a participação ativa de todos os alunos, alinhando-se com a perspetiva de que “o *feedback* deve ser um episódio de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor” (Brookhart, 2017, p. 63), funcionando como um elemento regulador do processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

2. Enquadramento teórico

Neste capítulo, apresento o enquadramento teórico que sustenta a minha intervenção pedagógica, centrada na utilização do *GeoGebra* como ferramenta de apoio ao ensino e aprendizagem da Geometria Analítica.

Para contextualizar a minha intervenção e investigação, começo por abordar os conteúdos curriculares de Geometria Analítica no Plano e no Espaço, bem como as dificuldades enfrentadas habitualmente pelos alunos e algumas estratégias pedagógicas que podem apoiar a sua superação. Em seguida, exploro o papel do *feedback* no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, valorizando a sua função reguladora e formativa. Por fim, reflito sobre o potencial da tecnologia, em especial o *GeoGebra*, na promoção de aprendizagens significativas e na mediação entre os alunos e o conhecimento matemático. Esta abordagem permite-me articular os diferentes pontos do estudo, reunindo fundamentos curriculares, didáticos e tecnológicos que orientaram as minhas opções enquanto professora-investigadora.

2.1. Geometria Analítica no Plano e no Espaço: Perspetivas de Ensino e Aprendizagem

Na disciplina de Matemática A do 10.º ano do Ensino Secundário, turma onde desenvolvi a minha intervenção pedagógica que sustenta este estudo, a Geometria Analítica no Plano e no Espaço desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de competências de visualização espacial, raciocínio lógico e resolução de problemas. De acordo com as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A* (Carvalho e Silva et al., 2023), o seu estudo estrutura-se em três tópicos principais: geometria analítica no plano, geometria analítica no espaço e vetores no plano e no espaço.

Na geometria analítica no plano, os alunos utilizam referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos para identificar e representar pontos por coordenadas. Além disso, trabalham no reconhecimento, análise e aplicação na resolução de problemas transformados de pontos, por uma reflexão de eixo vertical ou horizontal, ou por uma meia-volta de centro na origem; coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; fórmula da distância entre dois pontos; condições que definem conjuntos de pontos, nomeadamente equações de retas verticais e não verticais, semiplanos, mediatriz de um segmento de reta, circunferência e círculo e outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções, em casos simples (Carvalho e Silva et al., 2023).

No espaço, a geometria analítica estende-se à identificação e à representação tridimensional de pontos por coordenadas e exploração de representações tridimensionais, incluindo planos paralelos aos planos coordenados, planos mediadores e superfícies esféricas. Para facilitar a visualização e manipulação, recomenda-se o uso do *GeoGebra* 3D para visualizar, explorar e estabelecer conjeturas, envolvendo geometria no espaço (Carvalho e Silva et al., 2023).

Desta forma, a Geometria Analítica pode ser entendida como a "definição e representação de formas geométricas de modo numérico e à extração de informação numérica dessa representação" (Guimarães, 2014, p. 51). Esta característica evidencia a grande ligação entre o pensamento algébrico e geométrico, já que neste domínio ambos estão associados (Guimarães, 2014).

2.1.1. Aprender Geometria

A Geometria, enquanto ramo fundamental da Matemática, releva ser desafiante para os alunos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Segundo Guimarães (2014), para se compreender a Geometria é necessário articular o raciocínio espacial com o conteúdo específico, ou seja, articular a forma como os alunos pensam e raciocinam relativamente aos conceitos geométricos e o conjunto de conhecimentos formais, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim, "para o correto desenvolvimento do pensamento geométrico, é fundamental propor consistentemente, e ao longo dos vários anos de ensino, experiências geométricas ricas em formas e que permitam estabelecer relações espaciais" (Guimarães, 2014, p. 7).

A evolução do pensamento geométrico dos alunos pode ser compreendida pelo modelo de Van Hiele (1999), que descreve cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, sintetizados na Figura 1. No primeiro nível, designado visual, as figuras são reconhecidas pela sua aparência global, sendo identificadas pela forma como se veem e não pelas suas propriedades. No segundo nível, o descritivo ou analítico, as figuras começam a ser caracterizadas pelas suas propriedades, embora estas ainda não estejam relacionadas logicamente entre si. No terceiro nível, a dedução informal, os alunos já conseguem organizar as propriedades de forma lógica, justificando definições e estabelecendo relações entre diferentes figuras. Segue-se o nível da dedução formal, em que se entende a estrutura axiomática da matemática e se constroem demonstrações rigorosas, típicas da geometria euclidiana. Por último, no nível do rigor, alcançado sobretudo em contextos de ensino superior, torna-se possível comparar

diferentes sistemas axiomáticos e estudar estruturas matemáticas de forma abstrata (Van Hiele, 1999).

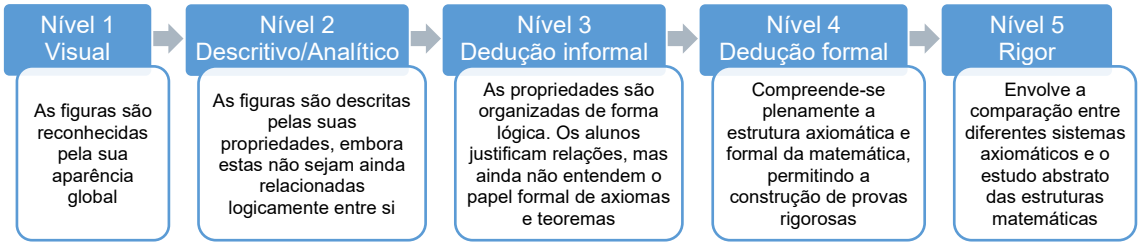


Figura 1 – Modelo de Van Hiele (1999) relativamente aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Como afirma Battista (2007), "apesar da importância da geometria na teoria e aplicação matemática, os alunos continuam a ter dificuldade em aprendê-la com genuína profundidade" (p. 903). Estas dificuldades são sobretudo evidentes ao nível da visualização e representação de objetos, ideia reforçada por Junqueira (1994) quando refere que os principais obstáculos identificados no seu estudo eram de natureza visual.

Outro desafio prende-se na transição entre representações planas e espaciais, onde os alunos tendem a restringir a sua compreensão geométrica a exemplos prototípicos das figuras, o que dificulta o reconhecimento das propriedades noutros contextos (Junqueira, 1994). Esta dificuldade é justificada pelas limitações ao nível do raciocínio dedutivo, já que muitos alunos apresentam "dificuldades em produzir ou mesmo acompanhar raciocínios dedutivos" (Junqueira, 1994, p. 57).

Algumas investigações revelam que estas limitações estão presentes em diferentes níveis de escolaridade, uma vez que "muitos estudantes no final da educação básica não apresentam indicadores de desenvolvimento do seu raciocínio geométrico inerentes ao terceiro nível, e muitas vezes nem sequer inerentes ao segundo" (Loureiro, 2021, p. 18). Jones e Tzekaki (2016) corroboram esta perspetiva, afirmando que "de modo geral, a pesquisa concorda com a existência de limites para a cognição visual e com a existência de obstáculos visuais em diferentes processos de reconhecimento, tanto para alunos quanto para professores" (p. 116). Para estes autores, a cognição visual corresponde à forma como cada pessoa interpreta e organiza a informação que recebe pela visão e envolve ações como observar, identificar ou reter informações visuais do meio envolvente (Jones & Tzekaki, 2016). Esta definição ajuda a compreender que muitas das dificuldades em geometria decorrem precisamente da forma como os alunos

lidam com a informação visual, o que justifica os obstáculos encontrados no reconhecimento e na interpretação de figuras geométricas.

Perante estes desafios, as estratégias de resolução de problemas matemáticos tornam-se fundamentais para o desenvolvimento de capacidades cognitivas e de raciocínio, indo além da aplicação de técnicas rotineiras. De facto, um problema surge "quando a situação não pode ser resolvida pelo recurso imediato a processos conhecidos e estandardizados" (Alvarenga & Vale, 2007, p. 29), exigindo que os alunos mobilizem estratégias mais ligadas "à criatividade e à curiosidade, que à aplicação rotineira de um conjunto de técnicas sem significado" (p. 29).

Neste processo, o conhecimento matemático deve ser visto não só como um conjunto de conteúdos formais, mas como a capacidade de manipular, transformar e relacionar ideias de modo a dar-lhes significado (Amado, 2022). É precisamente aqui que o uso de múltiplas representações, sendo elas verbais, gráficas, algébricas e numéricas, se revela essencial não só para a compreensão dos conceitos, mas também para a criação de conexões que sustentem o raciocínio e superem obstáculos visuais (Amado, 2022).

A articulação entre os desafios cognitivos na aprendizagem da Geometria e as estratégias de resolução de problemas evidencia que o desenvolvimento do pensamento geométrico exige mais do que a simples memorização. A utilização de diferentes representações, aliada à incorporação de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) como o *GeoGebra*, constitui uma via promissora, pois estas ferramentas possibilitam representações dinâmicas e interativas, permitindo que os alunos raciocinem e verifiquem as suas conjeturas, "observando os efeitos das suas interações com as representações em termos do que muda e do que não muda" (Amado, 2022, p. 4).

Esta abordagem vai ao encontro das orientações descritas nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*, que recomendam o contacto sistemático com os AGD, incluindo folhas de cálculo e aplicações digitais, com recurso a tecnologias como o computador, smartphones ou mesmo a calculadora gráfica (Carvalho e Silva et al., 2023). Esta ideia concorda com Jones e Tzekaki (2016) quando afirmam que "tarefas espaciais que combinam figuras geométricas 2D e 3D apoiadas por ferramentas tecnológicas relevantes provavelmente promoverão o desenvolvimento do conhecimento espacial e melhorarão o raciocínio espacial dos alunos" (p. 114).

Desta forma, a relação entre as estratégias de resolução de problemas e a diversidade de representações, permite que os alunos avancem do nível exploratório para a

generalização e a justificação, elementos fundamentais do pensamento matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2012), sendo levados a "formular conjeturas relativas a classes alargadas de objetos (generalização) e procurar validá-las usando propriedades e definições matemáticas (justificação)" (Ponte et al., 2013, p. 58).

Neste contexto, é essencial não só reconhecer as dificuldades, mas também destacar as potencialidades de aprender Geometria, pela sua importância para analisar ambientes espaciais, funcionando como uma teia complexa de "conceitos, formas de raciocínio e sistemas de representação" (Battista, 2007, p. 843). Assim, este conhecimento está diretamente relacionado com o raciocínio espacial, definido como "a capacidade de 'ver', inspecionar e refletir sobre objetos, imagens, relações e transformações espaciais" (Battista, 2007, p. 843). Este tipo de raciocínio constitui uma ferramenta cognitiva importante para análises mais complexas, servindo de base para o pensamento geométrico formal (Battista, 2007).

O desenvolvimento deste raciocínio pode ser promovido pela manipulação de imagens dinâmicas e pela criação de representações mentais flexíveis. Segundo Clements e Sarama (2014), as crianças podem evoluir de um *pensamento visual* mais limitado e superficial, para um *pensamento espacial flexível*, à medida que enriquecem o seu repertório de imagens mentais e conectam o conhecimento espacial ao verbal e analítico. Além disso, os atos criativos de pensamento matemático por parte dos alunos, podem ser um meio eficaz para desenvolver conceitos, habilidades e capacidade de resolução de problemas interligados (Clements & Sarama, 2014).

Em síntese, aprender Geometria permite que os alunos desenvolvam competências de visualização, pensamento lógico-dedutivo e raciocínio espacial, essenciais não só para o sucesso escolar em Matemática, mas também para a compreensão e análise do mundo que os rodeia. Integrar abordagens que estimulem o seu pensamento através de ferramentas dinâmicas e múltiplas representações, constitui um caminho essencial para uma aprendizagem significativa.

2.1.2. Ensinar Geometria

O conhecimento matemático assume um papel central na formação de cidadãos capazes de enfrentar desafios, proporcionando-lhes ferramentas para pensar criticamente, resolver problemas e tomar decisões informadas em múltiplos contextos da vida pessoal, social e profissional (Carvalho e Silva et al., 2023). Neste sentido, o

desenvolvimento do currículo deve ser inclusivo e ajustado às necessidades de cada aluno, promovendo experiências matemáticas ricas e acessíveis, com níveis de formalismo e abstração adequados à respetiva etapa de escolaridade.

A planificação de aulas é um processo fulcral na prática docente, pois envolve não só a seleção dos conteúdos a abordar, mas também as estratégias de ensino, as tarefas, os recursos a utilizar e a forma como o professor irá conduzir a comunicação em sala de aula, garantindo a participação de todos os alunos (Serrazina, 2017). Esta antecipação das ações a serem desenvolvidas no decorrer das aulas permite ao professor selecionar e adaptar as tarefas de acordo com o nível cognitivo exigido e antecipar possíveis reações dos alunos, influenciando o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Deve, por isso, contemplar diferentes formas de representação adequadas à faixa etária dos alunos, exigindo rigor e clareza na apresentação de expressões matemáticas (Serrazina, 2017). Para tal, é importante privilegiar tarefas diversificadas e desafiantes, que despertem a curiosidade e a motivação dos alunos, promovendo o prazer da descoberta e o gosto pelo desafio (Carvalho e Silva et al., 2023). Estas tarefas devem assumir diversas formas, desde problemas e questões exploratórias até projetos e pesquisas, devendo sempre envolver matemática relevante, permitir diferentes estratégias de resolução e criar oportunidades para aplicar e aprofundar conhecimentos (Carvalho e Silva et al., 2023).

Neste contexto, a planificação de aulas não se limita à definição de conteúdos e recursos, mas concretiza-se também na escolha de metodologias adequadas que promovam a participação ativa dos alunos e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Uma dessas abordagens é o ensino exploratório, que segue, geralmente, quatro fases nas quais o professor assume diferentes papeis, de acordo com o objetivo de cada uma delas (Oliveira et al., 2013). A primeira fase corresponde à “apresentação da tarefa e da metodologia de trabalho” (Oliveira et al., 2013, p. 37), que prepara os alunos para a realização autónoma da tarefa. Segue-se a fase de exploração, normalmente feita em pequenos grupos e durante a qual “o professor acompanha e apoia os alunos no seu trabalho autónomo tendo em vista a realização da tarefa” (Oliveira et al., 2013, p. 31). Por fim, ocorre a discussão coletiva, em que as soluções são partilhadas e debatidas, culminando numa síntese final das aprendizagens. Apesar de existirem variações na terminologia utilizada para estas fases, o seu sentido subjacente mantém-se (Oliveira et al., 2013).

Durante a aula, o professor orienta as discussões matemáticas com ações que incluem “antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre respostas

dos alunos" (Ponte et al., 2013, p. 56). É fundamental que os alunos formulem generalizações e as validem através da utilização de "representações matemáticas apropriadas" (Ponte et al., 2013, p. 57), promovendo a construção de significados e conexões matemáticas. Durante estas discussões, "apoiar/guiar, desafiar e informar/sugerir" (Ponte et al., 2013, p. 58) são ações suporte e a atividade do professor (Stein & Smith, 2018) deve ter como objetivo principal promover a aprendizagem de determinados conceitos, aproveitando para reforçar aprendizagens anteriores e desenvolver competências transversais, como o raciocínio, a generalização e a justificação matemática (Ponte et al., 2013).

Para além de orientar as discussões, compete ainda ao professor incentivar os alunos a avançarem com novas interpretações e validações. É essencial que estes sejam levados a formular conjeturas sobre conjuntos mais alargados de objetos matemáticos e a validá-las com base em propriedades e definições. "A principal estratégia da professora é procurar que os alunos introduzam novas ideias matemáticas, aprofundem ideias em discussão ou avaliem ideias apresentadas" (Ponte et al., 2013, p. 78). Ao desafiar os alunos a explorar diferentes representações, interpretar enunciados e estabelecer conexões, o professor cria oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio, da argumentação e da avaliação autónoma por partes dos alunos (Ponte et al., 2013).

Complementarmente, a criação de um ambiente de aprendizagem colaborativo, que valorize o trabalho em pares ou pequenos grupos, constitui uma estratégia importante na construção conjunta do conhecimento. Estas dinâmicas promovem a comunicação matemática, a escuta ativa e a construção de significados, favorecendo a inclusão e o envolvimento dos alunos.

A incorporação criteriosa de tecnologia, bem como outros recursos, como laboratórios, espaços exteriores à sala de aula e museus de ciência, devem ser integrados de forma criteriosa, de forma a enriquecer as experiências de aprendizagem, e possibilitar visualizações dinâmicas e explorações inovadoras (Carvalho e Silva et al., 2023). Também Cruz e Holanda Filho (2023) destacam que o uso de *softwares*, da história da matemática, de práticas variadas e da interdisciplinaridade aproxima a matemática ao mundo real dos alunos, contribuindo para a sua aprendizagem. Na verdade, "a plataforma da tecnologia é menos importante do que a funcionalidade que ela oferece" (NCTM, 2014, p. 78), permitindo aos alunos produzir materiais diversos.

Ao proporcionar experiências matemáticas estimulantes e ajustadas às necessidades dos alunos, desenvolve-se não só o conhecimento matemático, como também competências importantes como a criatividade, o pensamento crítico, a autoconfiança e a capacidade de comunicar matematicamente. Desta forma, a matemática torna-se um contributo fundamental para a formação integral dos jovens, preparando-os para participar ativamente numa sociedade em constante transformação (Carvalho e Silva et al., 2023; NCTM, 2014).

2.2. Uma estratégia para ensinar e aprender Geometria: avaliação pedagógica e o papel do *feedback*

A avaliação e o *feedback* constituem componentes centrais no processo de ensino e aprendizagem, desempenhando um papel fundamental na melhoria das aprendizagens dos alunos. Num contexto educativo, estes conceitos ultrapassam a simples atribuição de notas ou classificações, servindo antes como ferramentas de diagnóstico, monitorização e regulação contínua do percurso formativo.

Como afirma Fernandes (2006), "a avaliação é um processo desenvolvido por e com seres humanos para seres humanos, que envolve valores morais e éticos, juízos de valor e problemas de natureza sociocognitiva, sociocultural, antropológica, psicológica e também política" (p. 36), pelo que ensinar, aprender e avaliar são dimensões indissociáveis (Ferreira, 2024). Leitão (2014) reforça que "avaliar é proceder a uma análise daquilo que foi feito e considerar aquilo que pode ser feito para melhorar ou alterar o rumo de alguma coisa" (p. 5).

Nesta secção abordo a avaliação pedagógica, distinguindo os seus principais tipos, e exploro a importância do *feedback* no processo educativo, destacando também o papel das tecnologias digitais, em particular o *GeoGebra*, como facilitadores do ensino e da aprendizagem da matemática.

2.2.1. Avaliação pedagógica

A avaliação pedagógica constitui uma dimensão essencial do processo educativo, articulando-se de forma indissociável com o ensino e a aprendizagem, pelo que não pode ser vista como um momento isolado ou como mera atribuição de classificações, mas sim como uma prática que acompanha continuamente o percurso dos alunos.

Como salienta Fernandes (2021c), é um "processo eminentemente pedagógico, que obriga a ter em conta questões de natureza ética, política e didática e que deve servir para ajudar os alunos a aprender" (p. 40). Nesse sentido, a avaliação funciona como instrumento de regulação, ajudando professores e alunos a compreender não só o que já foi alcançado, mas também o que ainda precisa de ser trabalhado.

Essa compreensão de avaliação integrada é particularmente relevante no ensino da Geometria, onde o desenvolvimento do pensamento geométrico não ocorre de forma linear nem se limita a resultados. Como apontam Lima et al. (2021), "a avaliação pedagógica não pode estar dissociada das práticas de ensino-aprendizagem" (p. 9).

Avaliar, neste contexto, exige atenção aos processos de raciocínio, à capacidade de estabelecer relações espaciais, de interpretar representações e de mobilizar diferentes formas de argumentação. Desta forma, a avaliação passa a ser uma forma de acompanhar como os alunos pensam geometricamente e como progridem na compreensão de conceitos e propriedades, reforçando que "ensinar, aprender e avaliar estão organicamente associados e não poderão ser pensados em separado como se de partes distintas da nossa ação pedagógica se tratasse" (Ferreira et al., 2021, p. 47).

Nesta perspetiva, a avaliação formativa assume um papel central. Realizada de forma contínua, permite compreender as estratégias de raciocínio dos alunos e apoiar o desenvolvimento progressivo das suas competências, já que o seu objetivo principal é promover a aprendizagem e não apenas atribuir uma classificação (Fernandes, 2021a). Essa dimensão é especialmente importante em Geometria, onde o progresso raramente se traduz em respostas corretas ou incorretas, manifestando-se em aproximações sucessivas, tentativas de representação, explicações de construções e clareza na descrição de relações espaciais. Looney (2011) destaca que a avaliação formativa "abrange interações em sala de aula, questionamentos, atividades estruturadas e *feedback* com o objetivo de ajudar os alunos a preencher lacunas de aprendizagem" (p. 7). Assim, o *feedback* contínuo torna-se um elemento-chave, permitindo que cada aluno perceba como pensa e encontre caminhos para melhorar os seus raciocínios. Assim sendo, a avaliação formativa é essencial, já que "é o próprio ensino" (Leitão, 2014, p. 12). Trata-se de um processo que acompanha o percurso do aluno e o apoia na consecução dos objetivos de aprendizagem.

A avaliação sumativa, por sua vez, ocorre em momentos específicos e tem como objetivo sintetizar os conhecimentos desenvolvidos. Segundo Fernandes (2021b), trata-se de um processo realizado em momentos pré-definidos para "elaborar um balanço, ou

um ponto de situação, acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer no final de uma unidade didática ou após ter decorrido um certo período" (p. 129). Em Geometria, essa síntese vai além da memorização de definições ou da aplicação mecânica de procedimentos, procurando compreender o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, a articulação de conceitos e a capacidade de justificar conclusões. Mesmo quando associada a classificações, a avaliação sumativa também pode constituir um momento de reflexão, permitindo ao professor identificar tendências do grupo e ao aluno reconhecer os avanços já alcançados – numa perspetiva formativa.

Assim, a avaliação sumativa cumpre a função de certificar, funcionando como "avaliação retrospetiva e terminal" (Leitão, 2014, p. 13) e, apesar de poder ter um carácter classificativo, pode também ser usada para promover reflexão e síntese.

Desta forma, fica evidente que tanto a avaliação formativa como a sumativa são indispensáveis e complementares, já que a primeira acompanha e orienta continuamente a aprendizagem, enquanto a segunda sintetiza e dá visibilidade aos progressos. Quando utilizadas de forma integrada, permitem compreender o desenvolvimento gradual do pensamento dos alunos, apoiando uma aprendizagem que vai além das técnicas, centrando-se na compreensão, visualização e argumentação.

Para que essa articulação seja efetiva, é necessário compreender a avaliação como parte de uma tríade inseparável: ensino-aprendizagem-avaliação. Como defendem Lima et al. (2022), "para o desenvolvimento de uma avaliação com cariz eminentemente pedagógico: precisamos de uma tríade-ação indissociável, composta por ensino-aprendizagem-avaliação, em que cada um desses momentos está subordinado a uma mesma racionalidade" (p. 9). Esta articulação é evidente no ensino da Geometria, em que cada tarefa proposta pode ser, simultaneamente, um momento de ensino, de aprendizagem e de avaliação. A avaliação informa o professor sobre o modo como os alunos constroem os seus raciocínios, o ensino cria oportunidades para novas aprendizagens e a aprendizagem devolve elementos que reconfiguram tanto o ensino como a avaliação. Essa dinâmica circular garante maior profundidade e consistência às aprendizagens matemáticas, como ilustrado na Figura 2.

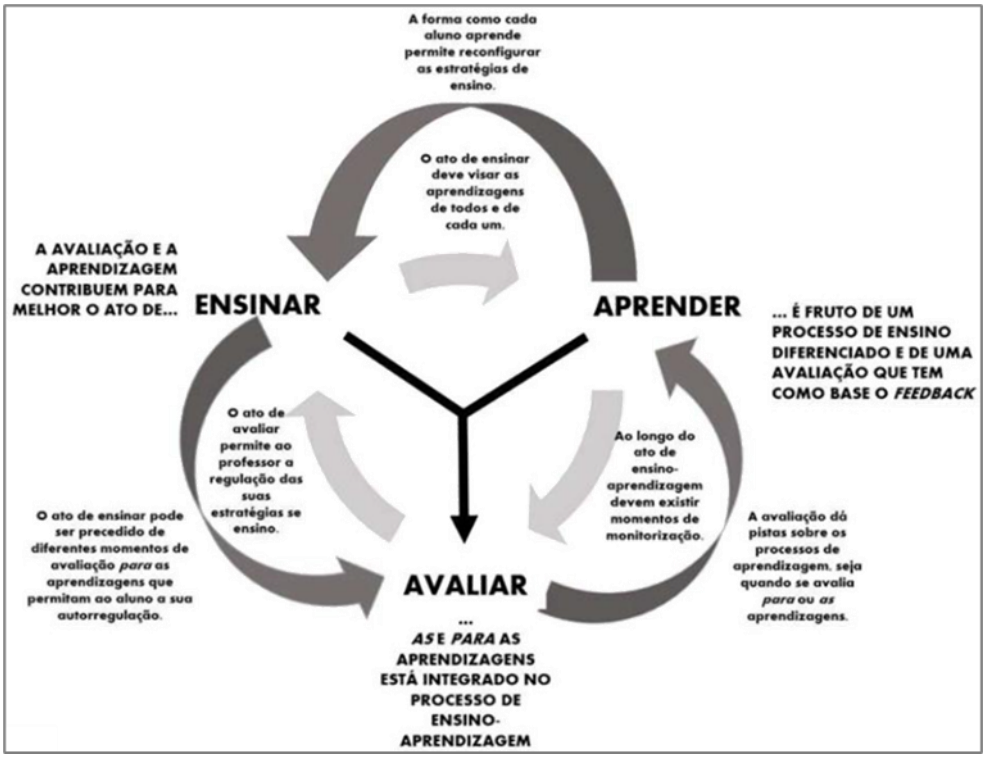


Figura 2 – Relação entre ensinar, aprender e avaliar (Ferreira et al., 2021, p. 43).

2.2.2. *Feedback* no processo de ensino-aprendizagem-avaliação

O *feedback* é uma ferramenta fundamental no processo educativo, especialmente no âmbito da avaliação formativa. Segundo Brookhart (2017), trata-se de "um componente importante do processo de avaliação formativa" (p. 1) que fornece informações relevantes relativamente ao progresso dos alunos na aprendizagem. Mais do que uma mera correção, o *feedback* deve ser parte integrante e contínua do processo de aprendizagem, acompanhando o aluno na construção do conhecimento (Brookhart, 2017).

Assim, o *feedback* assume um papel regulador no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, funcionando como uma fonte essencial de informação para que tanto professores como alunos possam monitorizar a aprendizagem. Neste sentido, os professores ao observarem atentamente as produções dos alunos podem compreender as formas de pensar que estas revelam, ajustando as estratégias de ensino e apoiando o processo de aprendizagem dos alunos, ajustando às necessidades de cada um (Brookhart, 2017). Assim, este processo "deve ser um episódio de aprendizagem tanto

para o aluno quanto para o professor" (Brookhart, 2017, p. 63), pois cria um ambiente de reflexão e ajuste contínuo das estratégias pedagógicas.

É nesta linha que Pollock (2011) acrescenta que "à medida que os alunos se envolvem mais nas atividades de aprendizagem, as suas ações e autoavaliações fornecem *feedback* aos professores, que, por sua vez, tomam decisões conscientes para ajustar o ensino" (p. 23). Deste modo, o *feedback* é um processo cíclico e que deve ser incutido no processo de aprendizagem de forma que o progresso dos alunos e a prática docente se influenciem mutuamente.

Esta visão ultrapassa a ideia tradicional de *feedback* como um ato unidirecional do professor para o aluno, porque conforme destaca Hattie (2009), "o *feedback* é mais poderoso quando é do aluno para o professor" (p. 173), criando uma interação recíproca que beneficia ambos. Também Pollock (2011) reforça que o *feedback* gera uma "tensão produtiva entre aluno e professor" (p. 37), permitindo o envolvimento ativo dos alunos e que o docente ajuste a sua prática pedagógica às necessidades reais de cada um.

Outro fator importante no *feedback* é que promove a autorregulação dos alunos, ajudando-os a perceber o seu progresso, corrigirem erros e ajustarem estratégias para alcançarem uma aprendizagem mais eficaz e personalizada (Brookhart, 2017). Assim, o *feedback* deve "fornecer uma informação útil ao aluno de forma que possa usar para melhorar a aprendizagem" (Ferreira, 2024, p. 47).

Por último, é importante destacar que os professores também precisam de *feedback* para conseguirem ajustar os seus métodos de ensino, com objetivo de aumentar o envolvimento e sucesso dos alunos (Pollock, 2011).

Neste contexto, Ferreira (2012) reforça que, quando o *feedback* ocorre em ambientes mediados pela tecnologia, o seu impacto pode ser ainda mais significativo: "a importância do *feedback* pode ser explicada de forma holística, pois verificámos que é só quando os alunos tentam explicar as ideias ou justificar as ações perante o surgimento de *feedback* de outros alunos ou do computador, que a sua compreensão é verdadeiramente testada e interiorizada" (p. 112). Este carácter interativo mostra como a tecnologia não só pode facilitar a comunicação como também pode favorecer a aprendizagem.

2.2.3. Ensinar e aprender com recurso à tecnologia

A inclusão da tecnologia nas aulas de Matemática tem vindo a transformar as práticas pedagógicas, uma vez que oferece a hipótese de novas abordagens para a construção do conhecimento. Como destaca o NCTM (2014), "a tecnologia é um facto inescapável da vida no mundo em que vivemos e deve ser adotada como uma ferramenta poderosa para fazer matemática" (p. 82). Também Rocha e Rocha (2018) reforçam que "os *software*s educativos podem ser uma alternativa às 'aulas tradicionais'" (p. 97), proporcionando oportunidades únicas de aprendizagem. Esta possibilidade é particularmente evidente no caso do *GeoGebra*, *software* de geometria dinâmica que se destaca pela sua versatilidade e potencial educativo (Bobko & Rocha, 2024).

Esta visão da tecnologia enquanto ferramenta de mediação da aprendizagem vai ao encontro da perspetiva de que "as TIC podem desempenhar um papel de mediador no processo de ensino e aprendizagem, auxiliando o aluno na construção do saber" (Cadavez et al., 2013, p. 3). Contudo, a forma como os materiais tecnológicos são selecionados e integrados pelo professor, afeta a sua eficácia, pelo que o professor deve proporcionar "situações favoráveis ao processo de ensino e aprendizagem e à superação das dificuldades dos alunos" (Cadavez et al., 2013, p. 3).

A utilização de tecnologias no ensino da Matemática não deve ser apenas esporádica ou acessória. Conforme as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*, a sua integração deve ocorrer de forma sistemática, promovendo experimentação, visualização, representação e simulação de conceitos e o uso de ferramentas como AGD, folhas de cálculo e aplicações digitais em computadores, tablets ou smartphones é essencial para desenvolver competências algorítmicas, pensamento estruturado, raciocínio lógico e pensamento computacional (Carvalho e Silva et al., 2023).

Adicionalmente, as tecnologias podem ser exploradas sob uma perspetiva em que "os alunos constroem, exploram e reconstroem, criando novos significados" (Oliveira & Moreno, 2017, p. 1). No ensino da Matemática, as ferramentas de geometria dinâmica permitem a manipulação de objetos geométricos mantendo os vínculos estabelecidos durante a construção. Como enfatizam Cadavez et al. (2013), "a designação de Geometria Dinâmica (GD) é utilizada para especificar a Geometria implementada em computador, permitindo a movimentação de objetos mantendo todos os vínculos estabelecidos aquando da construção" (p. 3).

De acordo com o NCTM (2014), "para uma aprendizagem significativa de matemática, as ferramentas e a tecnologia devem ser características indispensáveis da sala de aula"

(p. 78). A tecnologia não muda apenas a forma como se ensina, mas também o que pode ser ensinado, uma vez que facilita a investigação de ideias matemáticas complexas e promove o raciocínio e a resolução de problemas, pois permite que os alunos explorem ideias que seriam muito difíceis ou demoradas de outra forma (NCTM, 2014).

2.2.4. Um recurso tecnológico para aprender (também) Geometria: O *GeoGebra*

O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica desenvolvido para todos os níveis de ensino. Trata-se de uma plataforma que integra ferramentas de diversas áreas da matemática, como geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo (*GeoGebra*, 2025). Desenvolvido por Markus Hohenwarter (Rocha & Rocha, 2018), este AGD apresenta três características fundamentais: integração dinâmica entre representações algébricas e geométricas, ambiente colaborativo com recursos compartilháveis e acessibilidade multiplataforma gratuita para fins educativos. Apesar da sua ampla aplicação, neste estudo foco-me especificamente nas potencialidades do *GeoGebra* enquanto AGD, explorando como permite construir, manipular e analisar objetos geométricos de maneira interativa.

O *software* inclui diversas versões especializadas, como a *Classic*, a Calculadora Científica, Geometria, Suíte, Calculadora 3D e CAS. A possibilidade de manipulação permite que o utilizador explore conceitos matemáticos alterando variáveis e da observação das consequências dessas alterações, estimulando uma aprendizagem ativa e interativa. Além disso, disponibiliza mais de um milhão de recursos interativos criados por uma comunidade multilíngue, que podem ser utilizados diretamente em sala de aula ou adaptados conforme os objetivos pedagógicos do professor.

O *GeoGebra* é considerado um dos principais fornecedores mundiais de *software* de matemática dinâmica, utilizado em centenas de países para apoiar o ensino das disciplinas STEM — ciência, tecnologia, engenharia e matemática. Desde 2021, integra o grupo BYJU'S, mantendo a sua missão de oferecer recursos educacionais gratuitos e acessíveis e operando de forma independente sob a liderança dos seus fundadores (*GeoGebra*, 2025).

Uma das suas grandes vantagens é que como é bastante intuitivo, utilizadores sem experiência prévia podem usufruir dos recursos disponíveis na plataforma, o que o torna acessível e funcional em contextos escolares diversos (Bobko & Rocha, 2024). Na

verdade, “os alunos assumem que se sentem mais motivados para aprender sozinhos, melhoram o desempenho escolar e sentem mais interesse pela disciplina” (Cadavez et al., 2013, p. 9).

Neste sentido, o *GeoGebra* tem demonstrado ser uma ferramenta eficaz no ensino da Geometria. Ao proporcionar um ambiente dinâmico de construção, permite que os alunos visualizem e explorem propriedades geométricas de forma mais clara e interativa. Rocha e Rocha (2018) salientam que o *software* “liberta-nos de tarefas mecânicas e rotineiras” (p. 86), permitindo focar nos aspetos conceptuais. Já Araújo Silva et al. (2012) reforçam que os alunos compreendem melhor os conteúdos ligados à Geometria com o uso do *GeoGebra*, inclusive visualizando conceitos abstratos de forma mais concreta.

No seu estudo, Iranzo e Fortuny (2011) concluíram que a sua utilização “ajudou os alunos a construir múltiplas representações de conceitos geométricos e os ajudou a evitar obstáculos algébricos para se concentrarem na compreensão geométrica” (p. 102). De forma mais ampla, ajudou-os “a aprimorar sua compreensão matemática, possibilitando caminhos alternativos para a resolução de problemas e, em alguns casos, auxiliando no diagnóstico de suas dificuldades de aprendizagem” (Iranzo & Fortuny, 2011, p. 91).

Este *software* pode favorecer o desenvolvimento de diversas competências, pois permite que os alunos construam, experimentem e formulem conjeturas, facilitando a resolução de problemas matemáticos (Araújo Silva et al., 2012; Cruz & Holanda Filho, 2023). Recorrendo ao *GeoGebra*, práticas mais demoradas em papel são agilizadas, permitindo uma perspetiva construtiva, baseada numa abordagem mais prática e eficaz do estudo da Geometria, onde o professor atua como mediador e o aluno como protagonista da sua aprendizagem (Cruz & Holanda Filho, 2023; Rocha & Rocha, 2018).

Assim, o *GeoGebra* contribui significativamente para o desenvolvimento da argumentação e da dedução matemática, elementos essenciais no processo de aquisição e transmissão do conhecimento (Araújo Silva et al., 2012). Dessa forma, contribui positivamente para as estratégias de resolução dos alunos e do seu pensamento pedagógico (Iranzo & Fortuny, 2011).

Paralelamente, o uso deste AGD pode potenciar características específicas do *feedback* que reforçam o seu papel formativo, especialmente num contexto em que se valoriza a autonomia do aluno, a exploração ativa e a construção significativa do conhecimento.

Uma das suas principais funcionalidades é a oferta de uma visualização imediata e contínua, ao permitir que o aluno receba informação em tempo real sobre as ações que realiza, o que facilita a correção rápida e promove uma reflexão ativa. Esta característica alinha-se com a ideia de que o *feedback* deve funcionar como um mecanismo regulador da aprendizagem (Brookhart, 2017).

Além disso, este AGD favorece a observação e análise do pensamento do aluno por parte do professor, uma vez que possibilita a recolha de evidências concretas do raciocínio desenvolvido. Este acesso ao pensamento do aluno promove um *feedback* mais personalizado e adaptado às suas necessidades, facilitando o ajuste do ensino com base no progresso observado. Pollock (2011) refere que, ao tomarem consciência da forma como os alunos estão a aprender durante a aula, os professores ficam mais aptos a adaptar as suas estratégias pedagógicas e planificações, conseguindo, por isso, responder de forma mais eficaz às necessidades específicas do grupo com que trabalham.

Assim, o uso sistemático do *GeoGebra* não só apoia o desenvolvimento de competências matemáticas, como também potencializa o *feedback* enquanto instrumento regulador de aprendizagem, tornando-o mais imediato e interativo. Este recurso promove, simultaneamente, um maior envolvimento por parte dos alunos e uma maior capacidade do professor para ajustar as suas práticas de acordo com as necessidades detetadas.

3. Contexto e Organização das Aulas

Iniciamos este capítulo com uma caracterização da escola cujos dados foram retirados do Projeto Educativo do ano letivo 2024-2025 e do *site* oficial da escola, que por questões de anonimato não irão constar nas referências.

Posteriormente, caracterizamos a turma participante neste estudo e apresentamos uma descrição detalhada da intervenção, justificando as decisões tomadas relativamente à sua organização ao longo do tempo e à constituição dos pares de trabalho. Expomos, ainda, as tarefas propostas, os recursos utilizados e os objetivos de aprendizagem definidos, bem como os constrangimentos que marcaram o decorrer do processo.

Por fim, elaboramos um balanço final relativamente à intervenção, refletindo sobre as tarefas aplicadas, a nossa ação, o envolvimento dos alunos e o impacto das estratégias adotadas.

3.1. Caracterização da Escola[1]

A Escola Pública na qual realizamos a nossa intervenção pedagógica situa-se num dos concelhos da Área Metropolitana do Porto, foi fundada em 1924 e a sua população escolar é de cerca de um milhar e meio de discentes, residentes em várias freguesias de dentro e fora do concelho. Esta escola não agrupada conta com cursos diurnos e noturnos. Os cursos diurnos incluem o ensino Básico, com 12 turmas, e Secundário, com 31 turmas de Cursos Científico-Humanísticos e 18 turmas de Cursos Profissionais. Os cursos noturnos estão divididos em ensino recorrente e Cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA). Dispõe ainda do Centro Qualifica que atende uma média de 447 adultos, anualmente, e atua na orientação, reconhecimento e validação de competências de adultos. A oferta formativa da escola, no ano letivo 2024/2025, está apresentada no esquema abaixo.

A escola conta com 162 docentes, dos quais 15% são contratados, duas psicólogas, uma formadora de teatro e uma educadora social. Em relação a pessoal não docente, há 48 assistentes operacionais e 13 assistentes técnicos. Participam ainda na comunidade educativa, a associação de estudantes e a associação de pais. Atualmente, a escola apoia 365 alunos (25% do total dos alunos) através do SASE e acolhe 145 alunos (10%) de 21 nacionalidades diferentes.

[1] Esta secção foi construída em conjunto com a minha colega de estágio.

A escola está envolvida em diversos projetos e atividades que promovem a qualidade e diversidade na formação dos alunos, oferecendo experiências multifacetadas. No entanto, nem todos estarão ativos no ano letivo 2024/2025. Entre os projetos destacam-se o Desporto Escolar, os Projetos Europeus (ERASMUS+ e Estágio Internacional), a Revista, o Clube Ciência Viva, o Clube de Xadrez, o Grupo de Teatro, o Clube de Arte, o Clube de Robótica, a Rádio Escolar, o Grupo Coral, o Grupo de Dança, Programa de Educação para a Saúde, entre outros.

O uso de ferramentas *on-line*, como o *Microsoft Teams*, o Inovar e o *e-mail* institucional, facilita a comunicação e interação entre professores e alunos. A escola dispõe de mais algumas ferramentas online que facilitam a gestão escolar, como o serviço de impressão, o *kiosk,* uma plataforma que pode ser acedida online ou fisicamente na escola e onde os alunos e professores podem consultar o saldo ou os movimentos da conta corrente, adquirir alimentos e material, entre outros, e, por fim, a escola dispõe ainda de um *website* que engloba todos os documentos que os professores podem precisar, nomeadamente um modelo para os testes, planificações anuais, entre outros.

A Escola Secundária não agrupada na qual foi realizada a nossa intervenção pedagógica está certificada com o Selo de Conformidade EQAVET, que garante que a escola cumpre os critérios definidos pelo Quadro Europeu de Garantia da Qualidade para a Educação e Formação Profissional.

3.2. Caracterização da Turma[2]

No ano letivo de 2024/2025, lecionamos as disciplinas de Matemática numa turma de 7.º ano do Ensino Básico e de Matemática A em duas turmas do 10.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. Para a elaboração deste Relatório de Estágio, foram recolhidos dados numa das turmas do 10.º ano, uma vez que se trata da turma com o maior número de alunos de entre as que acompanhamos. Além disso, esta turma distingue-se pela heterogeneidade dos alunos, apresentando uma diversidade de formas de pensamento, níveis de desempenho e ritmos de aprendizagem.

A turma em questão é composta por 26 alunos, sendo 15 do sexo masculino e 11 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 14 e os 16 anos. Os alunos provêm tanto do concelho local, quanto de concelhos vizinhos. Dois alunos da turma estão a frequentar o ano de escolaridade pela segunda vez e três ingressaram na turma no final

[2] Esta secção foi construída em conjunto com a minha colega de estágio.

do 1.º período, transferidos de outra escola secundária do concelho para o mesmo curso. A maioria dos alunos tem nacionalidade portuguesa, uma aluna é do Bangladesh e outra de Angola. No entanto, apenas uma aluna frequenta a disciplina de Português como Língua Não Materna. Além disso, desde o início do ano letivo, saíram seis alunos da turma: quatro para outros cursos na mesma escola, uma aluna foi transferida para uma escola privada e, em relação a um outro aluno, não obtivemos informação sobre a razão da transferência. Todos os alunos têm acesso a computadores fornecidos pela escola ou, alternativamente, os docentes podem disponibilizar tablets mediante requisição prévia.

De acordo com a caracterização da turma obtida através da plataforma Inovar, a nível educacional, cerca de 34,6% dos alunos sente que aprende melhor com um explicador, 26,9% nas aulas, 15,4% sozinho e 11,5% em grupo. A comunicação em casa sobre a escola é frequente para 69,2% dos alunos, enquanto 19,2% afirmam que é raramente abordada. Além disso, de entre as disciplinas favoritas, a que se encontra em maior destaque é Educação Física, escolhida por 34,6% dos alunos, enquanto a menos preferida é Físico-Química, com apenas 3,8% a indicar esta como a sua preferida. Matemática é a disciplina preferida por apenas 2 alunos, representando 7,7% da turma. No que diz respeito às disciplinas menos preferidas, Português ocupa o primeiro lugar, com 46,2% dos alunos a indicarem que é a disciplina de que menos gostam. Apenas 3,8% indicam que a disciplina de que menos gostam é Educação Física e 11,5% indicam que é Matemática, o que corresponde a 3 alunos. Em termos de hábitos de estudo, 13 alunos estudam diariamente, 7 apenas na véspera de testes, e 1 aluno raramente estuda. Quanto à autoavaliação, 2 alunos (cerca de 7,7%) consideram-se bons alunos, enquanto 11 alunos (aproximadamente 42,3%) consideram-se de nível médio. Quanto à progressão nos estudos, 18 alunos pretendem ingressar no ensino superior e 5 alunos apenas pretendem concluir o Ensino Secundário. Dos restantes, não obtivemos informação.

Em relação às notas obtidas no 1.º período à disciplina de Matemática A, a média da turma é de 13,2 valores, sendo que três alunos têm notas entre 1 e 7 valores, cinco entre 8 e 9 valores, quatro entre 10 e 13 valores, onze entre 14 e 17 valores e dois alunos têm notas entre 18 e 20 valores. Essa informação é apresentada no Gráfico 1.

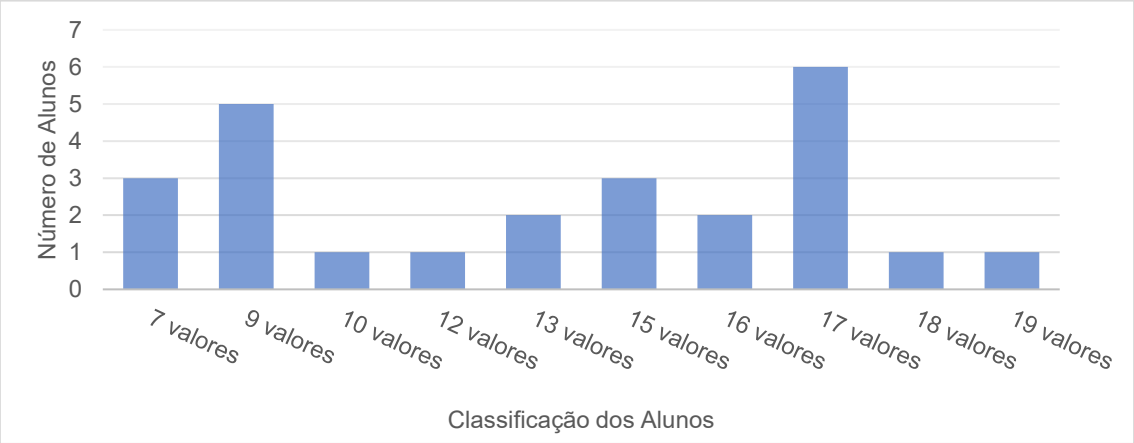


Gráfico 1 – Classificações dos alunos a Matemática no 1.º Período.

Relativamente ao envolvimento dos alunos nas aulas de Matemática A, consideramos que a turma é heterogénea, com um grupo de alunos que participam ativamente, enquanto outro grupo se mostra menos envolvido em cooperar com o professor e com os colegas na realização de tarefas de aprendizagem. Alguns alunos da turma ainda têm de melhorar a comunicação, uma vez que apresentam dificuldades de fluência de discurso e em articular as suas ideias, enquanto outros possuem um discurso mais desenvolvido. Por vezes, alguns elementos da turma perdem o foco e dispersam com os colegas, tornando o ambiente da aula mais agitado.

3.3. Organização da Intervenção Pedagógica[3]

Para a realização das tarefas organizamos a turma em dez pares e dois trios, sendo que um destes trios é composto pelos alunos que não autorizaram a sua participação no estudo e, por isso, não terão os dados incluídos nesta investigação. A formação dos pares foi realizada por mim e pela minha colega de estágio, tendo em consideração dois critérios principais: garantir a heterogeneidade a nível dos conhecimentos em Geometria, e manter, sempre que possível, a disposição habitual da sala de aula. Esta última opção surgiu pelo facto de a primeira tarefa ter sido aplicada na fase final da aula, momento em que alterações significativas na disposição da sala poderiam gerar desorganização entre os alunos ou comprometer a gestão do tempo disponível. Nos restantes momentos em que as tarefas foram aplicadas, a constituição dos grupos manteve-se inalterada, exceto nos dias em que houve faltas de presença, sendo os alunos sem grupo integrados nos restantes.

[3] Esta secção foi construída em conjunto com a minha colega de estágio.

Aplicamos duas tarefas na turma de 10.º ano, sendo que a primeira se concretizou nos dias 25 e 27 de março de 2025 e a segunda no dia 22 de abril de 2025. A primeira tarefa foi aplicada em duas aulas diferentes, uma vez que devido à planificação da aula, no primeiro momento apenas dispúnhamos de 20 minutos para a realização da tarefa e o tempo previsto para a sua resolução era de 45 minutos. Devido ao diminuto recurso a este AGD, os alunos ainda não tinham tido a oportunidade de contactar com o respetivo *software*. Por esse motivo, optamos por realizar uma breve introdução, na qual apresentamos os comandos mais utilizados e orientamos os alunos no processo de alteração das propriedades dos objetos.

Na Figura 3 encontra-se um esquema dos diferentes momentos da intervenção.

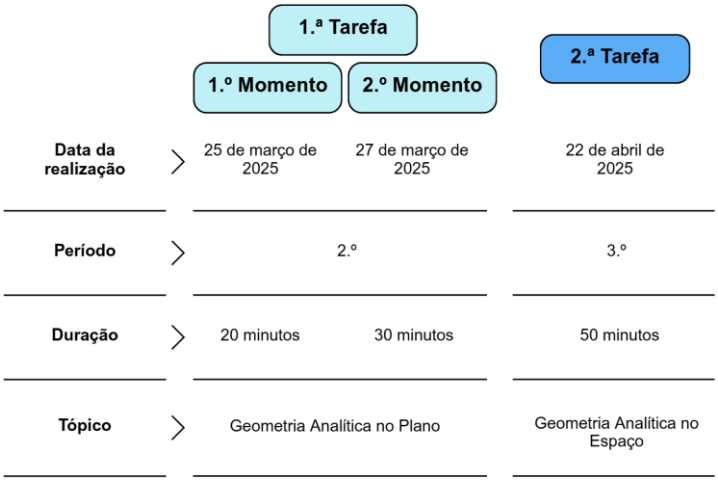


Figura 3 – Momentos de intervenção.

3.3.1. Tarefa 1: A Construção da Joana

No momento da aplicação da primeira tarefa (Apêndice I – Tarefa 1: A Construção da Joana), os alunos ainda não possuíam computador próprio sendo, por isso, necessário requisitar tablets para os alunos utilizarem. Esta situação levou a dificuldades não previstas, como a gestão do próprio tempo destinado à tarefa, já que a utilização do *GeoGebra* num dispositivo android não foi tão intuitiva quando comparada com a utilização em computadores. No segundo momento – ainda da primeira tarefa –, como não foi possível requisitar os tablets atempadamente, mudamos o local da aula para uma sala equipada com computadores, os quais não possuíam microfones integrados. Para solucionar este problema, gravamos o áudio com os nossos tablets e computadores pessoais. Ainda assim, não foi possível obter gravações de todos os grupos, o que constitui uma limitação no que respeita à recolha dos dados relativos a

essa parte da tarefa – e que será aprofundada no capítulo dedicado à metodologia de investigação.

A primeira tarefa (Figura 4) aborda conceitos de Geometria Analítica no Plano. Pretendia-se que, recorrendo ao *GeoGebra*, os alunos fossem capazes de reproduzir uma construção com base em algumas informações e, de seguida, conseguissem resolver determinadas questões relativas a essa construção.

1. A Joana fez uma construção no *GeoGebra*.

   Na sua construção, estava representado:

   - A circunferência c, centrada no ponto A e cuja equação é $x^2+6x+y^2-4y-4=0$;
   - O ponto B pertencente à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares;
   - A reta r que passa nos pontos A e B e nenhum dos seus pontos pertence ao 3º quadrante;
   - A reta s que corresponde à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
   - O ponto D pertencente ao eixo Ox e com a mesma abcissa de B.
   - O ponto E pertencente ao semieixo negativo Ox que dista 4 unidades de D.

   1.1. Reproduz a construção que a Joana pode ter feito.

   1.2. Indica as coordenadas de A e B e o raio da circunferência.

   1.3. Escreve uma condição que defina a região limitada pela circunferência e pelas retas r e s, incluindo a fronteira, tal que os pontos $(-3,\ 0)$ e $(0,\ 2)$ pertença à região.

   1.4. Determina a área do trapézio $[ABDE]$.

Figura 4 – Tarefa 1: A Construção da Joana (Adaptado de Pimenta et al., 2025).

Em geral, os alunos mostraram-se envolvidos na realização desta tarefa, demonstrando interesse e empenho na resolução das questões propostas. Porém, a maioria dos grupos mostrou algumas dificuldades, que foram ultrapassadas através da comunicação entre eles, sem necessidade da nossa intervenção direta, o que demonstra o potencial da avaliação entre pares. Apesar dos constrangimentos técnicos, o desenvolvimento da tarefa decorreu de forma globalmente positiva.

3.3.2. Tarefa 2: O Prisma Quadrangular

Durante a realização da segunda tarefa (Apêndice II – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular), os alunos já possuíam computadores próprios, porém enfrentámos algumas dificuldades técnicas, nomeadamente, alguns computadores não tinham permissão para gravar o ecrã e outros para gravar o áudio. No entanto, ainda conseguimos recolher dados de alguns grupos com problemas, emprestando os nossos computador e tablet e, noutros, gravando apenas o ecrã ou apenas o áudio. Ainda assim, houve grupos em que não ficámos com nenhum material para analisar.

Tal como na primeira tarefa, na segunda tarefa (Figura 5) pretendia-se que, recorrendo ao *GeoGebra*, os alunos fossem capazes de reproduzir uma construção com base em algumas informações e, posteriormente, resolvessem questões relativas à mesma. A principal diferença para esta tarefa reside no facto de abordar conceitos de Geometria Analítica no Espaço.

1. Considera o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$. Sabe-se que:
   - O é a origem do referencial.
   - $[OA]$ e $[OC]$ são arestas de uma das bases do prisma.
   - O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, o ponto C ao semieixo positivo Oy.
   - O ponto E pertence ao semieixo positivo Oz e ao plano de equação $z = 8$.
   - O volume do prisma é 128.
   - O ponto B pertence ao plano $z = 0$.
   - O ponto D é a projeção ortogonal do ponto A no plano $z = 8$.
   - O ponto F pertence ao plano de equação $y = 4$ e tem menor abcissa do que o ponto G.

   Constrói este prisma.

   1.1. Como é que determinaste as coordenadas do ponto A? E do ponto F?
   1.2. Porque é que a figura construída pode ser considerada um prisma quadrangular?
2. Escreve uma condição que defina a semirreta $\dot{BG}$;

   Justifica porque é que a condição determinada representa a semirreta.
3. Identifica, usando as letras da figura, o conjunto de pontos definidos pela condição $0 \leq y \leq 4 \wedge x = 4 \wedge 0 \leq z \leq 8$.

   Justifica a tua resposta.
4. Considera o ponto H resultante da projeção ortogonal do ponto $(2,\ 2,\ -1)$ no plano $z = 6$. Assinala o ponto H na tua construção do *GeoGebra* e determina uma equação que defina o plano OBH.

Figura 5 – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular (Adaptado de Almeida et al., 2025).

Tal como na primeira tarefa, os alunos mostraram-se envolvidos, embora tenham sentido maiores dificuldades. Estas dificuldades centraram-se, sobretudo, na compreensão do que era pretendido a partir das informações fornecidas no enunciado, o que levou a que recorressem mais frequentemente à nossa ajuda para dar continuidade à resolução.

Apesar dos alunos se mostrarem mais familiarizados com a utilização do *GeoGebra*, a introdução da "Vista 3D" trouxe-lhes novos desafios, nomeadamente na representação e construção de objetos no espaço. Ainda assim, os grupos conseguiram terminar a tarefa, revelando persistência na superação dos obstáculos.

3.4. Descrição da Intervenção Pedagógica[4]

As tarefas utilizadas nesta investigação foram estruturadas tendo em conta a tipologia habitualmente realizadas em aula, para que os alunos estivessem familiarizados. Considerando os nossos objetivos, não mudaríamos a nossa ação durante a realização das tarefas, uma vez que tínhamos interesse em captar as dificuldades emergentes e as aprendizagens resultantes da discussão em grupo.

No entanto, alterávamos o enunciado da questão 1.3 da tarefa 1, pois gerou alguma incompreensão. Ao percorrer os lugares, percebemos que alguns alunos não conseguiram compreender que região deviam definir por não terem os pontos assinalados no referencial, e o intuito da questão não era esse. Também na tarefa 2, alterávamos a base do prisma quadrangular para um retângulo, para os alunos perceberem que um prisma quadrangular não tem necessariamente de ter uma base quadrada. Na Figura 6 e na Figura 7, apresentamos as propostas de reformulações destas duas questões.

1.3. Assinala os pontos $(-3,\ 0)$ e $(0,\ 2)$ e escreve uma condição que defina a região limitada pela circunferência e pelas retas r e s, incluindo a fronteira, tal que os pontos assinalados pertença à região.

Figura 6 – Reformulação da questão 1.3 da tarefa 1.

1. Considera o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$. Sabe-se que:
   - O é a origem do referencial.
   - $[OA]$ e $[OC]$ são arestas de uma das bases do prisma.
   - O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, o ponto C ao semieixo positivo Oy.
   - O ponto E pertence ao semieixo positivo Oz e ao plano de equação $z = 8$.
   - O volume do prisma é 128.
   - O ponto B pertence ao plano $z = 0$.
   - O ponto D é a projeção ortogonal do ponto A no plano $z = 8$.
   - O ponto F pertence ao plano de equação $y = 2$ e tem menor abcissa do que o ponto G.

Constrói este prisma.

Figura 7 – Reformulação do enunciado da tarefa 2.

Observamos, ainda, que as tarefas estimularam momentos de discussão de estratégias e ideias, contribuindo para o desenvolvimento de competências colaborativas nos alunos.

[4] Esta secção foi construída em conjunto com a minha colega de estágio.

4. Métodos de recolha de dados

Neste capítulo, serão explicitadas e fundamentadas as decisões metodológicas adotadas para a recolha e análise dos dados, bem como as justificações dos procedimentos, técnicas e instrumentos utilizados ao longo de todo o processo. Assim, pretendo oferecer uma visão clara e objetiva de como a investigação foi pensada, desde o planeamento inicial até à implementação das tarefas, assegurando a coerência entre os objetivos previamente definidos e as ações efetivamente desenvolvidas no âmbito da prática letiva, considerando sempre os princípios éticos inerentes ao contexto educativo.

4.1. Opções metodológicas

O estudo foi desenvolvido no âmbito da minha prática letiva supervisionada e cujo objetivo principal é *compreender de que forma o uso do GeoGebra pode fornecer feedback ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos, nomeadamente no que diz respeito aos conteúdos de Geometria*.

De forma a alcançar este objetivo e a orientar a intervenção de forma clara, estabeleci ainda uma pergunta de partida e um conjunto de objetivos específicos, bem como questões orientadoras articuladas a esses objetivos, que sustentaram tanto o desenho das tarefas como a definição dos instrumentos de recolha de dados e a análise subsequente da informação recolhida. Por este motivo, considerei que uma abordagem qualitativa, de natureza interpretativa (Amado, 2017), seria a mais adequada para alcançar os propósitos do meu estudo.

Com o intuito de garantir uma coerência metodológica entre os elementos estruturantes do estudo, apresento o Quadro 1 adaptado de Lima (2020), que sintetiza a pergunta de partida, as questões orientadoras, os objetivos específicos e o objetivo geral da investigação.

Pergunta de Partida	Questões orientadoras	Objetivos específicos	Objetivo geral
Como é que o *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente aos conhecimentos matemáticos adquiridos por parte dos alunos em Geometria?	Quais são as principais dificuldades dos alunos em Geometria na utilização do *GeoGebra*?	Identificar as principais dificuldades dos alunos em tarefas de Geometria.	Compreender de que forma é que o uso do *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos em conteúdos relacionados com a Geometria.
		Analisar de que forma a utilização do *GeoGebra* evidencia as dificuldades dos alunos.	
	Como é que o *feedback* fornecido pelo *GeoGebra* pode contribuir para a tomada de decisões pedagógicas pelo professor?	Compreender de que forma o uso do *GeoGebra* permite identificar as diferentes estratégias utilizadas dos alunos.	

Quadro 1 – Pergunta de partida, questões orientadoras, objetivos específicos e objetivo geral (Estrutura adaptada de Lima, 2020).

A definição dos objetivos apresentados no quadro 1 reflete a minha intenção de perceber quais as dificuldades, estratégias e raciocínios dos alunos na resolução de tarefas com recurso ao *GeoGebra*.

Segundo Amado (2017), o paradigma fenomenológico-interpretativo centra-se na compreensão das intenções, significados e perceções dos sujeitos nas suas próprias ações, valorizando o contexto e a experiência individual como fontes legítimas de conhecimento. Como o mesmo autor refere, interessa compreender "o *que*, na realidade, faz sentido e *como* faz sentido para os sujeitos investigados" (p. 43), o que se alinha diretamente com a minha análise de como os alunos interpretam, resolvem e representam problemas de Geometria através do uso do *GeoGebra*.

Igualmente, o foco da investigação qualitativa está em "investigar o que está ´por trás´ de certos comportamentos, atitudes ou convicções" (Fernandes, 1991, p.3). Assim, optei por uma abordagem qualitativa e procurei compreender a dimensão processual e contextual da aprendizagem, de forma a melhor analisar os modos como os alunos

expressam as suas dificuldades e mobilizam estratégias, tanto através da linguagem matemática como da interação com a ferramenta digital, no caso o *GeoGebra*.

Ao longo do estudo, desempenhei um duplo papel de professora e de investigadora, o que me permitiu fazer uma observação contínua e próxima dos alunos no seu ambiente habitual de aprendizagem, situação que reforça a pertinência de uma abordagem *emic* ou *idiográfica* (contextualizada na vida quotidiana), centrada na compreensão situada dos fenómenos educativos (Amado, 2017).

Neste sentido, a minha investigação assenta numa visão holística e indutiva da realidade, sem a isolar do contexto "natural" em que se desenvolve e procurando construir interpretações a partir da análise dos dados recolhidos no terreno (Amado, 2017). Através da análise das interações dos alunos com o *GeoGebra*, procurei perceber como aprendem, onde encontram dificuldades e de que forma expressam as suas estratégias, contribuindo assim para a construção de uma abordagem mais ajustada por parte do professor.

4.2. Contexto, participantes do estudo e questões éticas

Este estudo contou com a participação ativa de 22 dos 26 alunos da turma do 10.º ano, já descrita anteriormente, no contexto de uma Escola Secundária no ano letivo de 2024/2025.

Para a realização das tarefas, os alunos foram divididos em pares, pensados previamente em colaboração com a minha colega de estágio, de forma a criar grupos heterogéneos e para que alunos com mais dificuldades pudessem beneficiar do apoio dos colegas com mais facilidade nos conceitos. As tarefas propostas foram integradas nas aulas de Matemática A, incidindo sobre conteúdos de Geometria, com a utilização do *GeoGebra* como ferramenta digital de apoio à aprendizagem.

Todo o processo foi desenvolvido em conformidade com os princípios éticos adotados na Carta Ética da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação (Baptista et al., 2020). Informei e esclareci todos os alunos sobre o processo da sua participação na investigação, bem como sobre o objetivo, natureza e metodologia desta. Para isso, foi-lhes entregue um assentimento (Apêndice III – Assentimento entregue aos alunos) e um consentimento (Apêndice IV – Consentimento entregue aos encarregados de educação), para que também os encarregados de educação ficassem cientes de todo o processo e implicações do mesmo, de forma a fornecerem uma autorização informada.

Estes documentos garantiram, entre outros aspetos, o direito à privacidade, ao anonimato e à possibilidade de desistência em qualquer momento, sem necessidade de justificação. Ao longo de todo o processo, salvaguardei a identidade dos participantes, utilizando nomes fictícios nos registos e na apresentação dos dados. O respeito pela integridade e bem-estar dos alunos foi uma preocupação central em todas as fases da minha intervenção.

4.3. Processos de recolha de dados

Com o objetivo de responder à pergunta de investigação e às questões orientadoras, defini um conjunto de procedimentos de recolha de dados, articulados com os objetivos específicos em estudo. A utilização de diferentes fontes e técnicas permitiu uma análise mais sólida, através da triangulação.

A recolha de dados ocorreu em duas sessões previamente planeadas e integradas na prática letiva e realizadas entre março e abril de 2025, durante as quais os alunos, organizados em pares, realizaram tarefas com recurso ao *GeoGebra*. Durante a aplicação das tarefas, os dados foram recolhidos de forma contínua, através da observação direta do desempenho dos alunos; das produções escritas, incluindo as respostas escritas e as gravações do ecrã; da aplicação de inquéritos por questionário, que permitiram recolher perceções sobre dificuldades sentidas e o uso do *GeoGebra* em Geometria; e dos registos áudio das interações verbais entre os pares.

O Quadro 2 é adaptado de Lima (2020) e sintetiza a relação entre as técnicas de recolha de dados utilizados e os objetivos a atingir.

<table>
<tr><td colspan="4">Objetivo geral: Compreender de que forma é que o uso do GeoGebra pode fornecer feedback ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos em conteúdos relacionados com a Geometria.</td></tr>
<tr><td>Objetivos específicos</td><td colspan="3">Técnica de recolha de dados</td></tr>
<tr><td>Identificar as principais dificuldades dos alunos em tarefas de Geometria.</td><td rowspan="3">Produções escritas dos alunos e gravações de ecrã</td><td rowspan="3">Questionários</td><td>Registos de áudio</td></tr>
<tr><td>Analisar de que forma a utilização do GeoGebra evidencia as dificuldades dos alunos</td><td></td></tr>
<tr><td>Compreender de que forma o uso do GeoGebra permite identificar as diferentes estratégias utilizadas dos alunos</td><td>Registos de áudio</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Técnicas de recolha de dados relacionados com os objetivos específicos (Estrutura adaptada de Lima, 2020).

De seguida, justifico as técnicas de recolha de dados utilizadas, tendo em conta os objetivos do estudo e o enquadramento metodológico adotado.

As produções escritas dos alunos (registos das tarefas resolvidas) e as gravações de ecrã das construções no *GeoGebra* permitiram-me identificar erros e dificuldades relacionados com conteúdos de Geometria e as diferentes estratégias matemáticas utilizadas pelos alunos. Estes procedimentos de recolha tiveram bastante relevância, uma vez que permitiram observar todo o processo realizado pelos alunos. Tal como refere Amado (2017), "através da observação e da análise do vídeo, procura-se apreender o processo reflexivo do ator na situação" (p. 238), pelo que me permitiu obter informações relativas às dificuldades e estratégias dos alunos, bem como a influência do *GeoGebra* durante o desenvolvimento das tarefas.

As gravações de ecrã, contribuíram para a minha compreensão do dinamismo e da complexidade do trabalho dos alunos com o *software*. Sadalla e Larocca (2004) reforçam o poder desta recolha, afirmando que

> fenómenos complexos formados pela interferência de múltiplas variáveis, muitas das quais atuam simultaneamente, como a prática pedagógica, por exemplo, são carregados de vivacidade e dinamismo. Para serem melhor

> compreendidos, necessitam de uma metodologia capaz de conservar essas características. Desse modo, a videogravação permite registar, até mesmo, acontecimentos fugazes e não-repetíveis que muito provavelmente escapariam a uma observação direta. (p. 423)

Os registos áudio das interações entre os pares durante a resolução das tarefas, complementaram as produções escritas e as gravações de ecrã, permitindo captar os raciocínios, as dúvidas e as estratégias utilizadas pelos alunos em contexto real. Estes registos revelaram-se importantes para compreender os processos cognitivos e formas de comunicação dos alunos. Como refere Angelides (2001), pequenos acontecimentos do quotidiano escolar podem adquirir especial relevância no contexto investigativo e pedagógico, uma vez que "a sua criticidade depende da justificação, importância e significado que lhes são atribuídos" (p. 431).

A observação direta do desempenho dos alunos ao longo das sessões, permitiu-me recolher dados de forma contínua e contextualizada, no ambiente real da sala de aula. Esta técnica foi essencial para complementar as restantes fontes de dados, pois permitiu captar posturas e interações dos alunos e, dessa forma, perceber melhor os seus métodos e respostas, bem como compreender como o *GeoGebra* evidencia as suas dificuldades e influencia as suas estratégias.

O questionário aplicado, permitiu-me perceber as ideias dos participantes e compreender os significados que atribuem às suas ações e experiências, principalmente relativas ao uso do *GeoGebra* e às aprendizagens sobre Geometria, contribuindo para todos os objetivos pretendidos. De acordo com Carmo e Ferreira (2008), os inquéritos consistem em "processos de recolha sistematizada, no terreno, de dados suscetíveis de poder ser comparados" (p. 139), sendo o inquérito por questionário uma das formas mais comuns de aplicar esta técnica. Os mesmos autores alertam para o facto de que, "a interação indireta constitui o problema-chave" (Carmo & Ferreira, 2008, p. 153) dos questionários, pelo que a sua aplicação exige que tenha o cuidado de formular perguntas claras, pertinentes e concisas. Para o conseguir, construí um questionário (Apêndice V – Questionário) com questões fechadas, abertas e itens em escala de *Likert*.

As questões fechadas permitiram-me recolher dados objetivos e facilmente sistematizáveis para identificar padrões nas respostas dos alunos. As questões abertas deram a oportunidade de os alunos expressarem livremente as suas experiências, opiniões e interpretações sobre o uso do *GeoGebra*, permitindo-me detetar perceções,

experiências subjetivas e representações associadas ao tema em estudo (Amado, 2017). Os itens em escala de *Likert*, tipo de escala caracterizada pela apresentação de várias proposições, em relação às quais o inquirido deve selecionar uma de cinco posições possíveis (Carmo & Ferreira, 2008), possibilitaram-me avaliar o grau de concordância dos alunos relativamente a diferentes afirmações.

A combinação destas técnicas permitiu-me triangular os dados e construir uma compreensão profunda, situada e coerente com os objetivos da minha investigação, respeitando os princípios fundamentais da investigação qualitativa.

4.4. Análise de dados

A análise de dados é um processo sistemático de procura, organização e interpretação de transcrições, notas e outros materiais, com o objetivo de aumentar a compreensão desses mesmos materiais e apresentar resultados claros e fundamentados (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, antes de começar este processo, considerei essencial organizar as informações recolhidas, de forma a garantir uma melhor perceção do material. Importa salientar que, durante toda a análise, os dados da primeira e da segunda partes da primeira tarefa foram considerados como um todo, pois, caso contrário, ficariam compartimentados e incompletos.

Para interpretar os dados provenientes dos registos áudio, das produções escritas, das gravações de ecrã e das respostas ao questionário, recorri principalmente à análise de conteúdo (Amado, 2017). Esta técnica permite organizar e interpretar os dados de forma sistemática, possibilitando a construção de inferências interpretativas a partir dos conteúdos expressos, desmembrando-os em categorias à luz das circunstâncias em que foram produzidos. A sua flexibilidade adapta-se bem à diversidade de fontes e orientações analíticas presentes neste estudo, favorecendo uma compreensão aprofundada dos fenómenos investigados (Amado, 2017).

Relativamente aos registos áudio, procedi à transcrição em conjunto com a minha colega de estágio, dividindo equitativamente as gravações, enquanto procuramos que quem transcreveu determinado grupo na primeira tarefa não o fizesse na segunda, salvo pequenas exceções, assegurando uma divisão justa de trabalho e equilibrada em termos de tempo. De seguida, organizei as transcrições por tarefa e por grupo, o que permitiu analisar as interações entre os grupos e identificar diferentes estratégias, dúvidas e raciocínios presentes. Como refere Amado (2017), após a transcrição dos

dados relevantes, realiza-se a análise de conteúdo, que teve em conta os objetivos da investigação.

Como algumas alíneas das tarefas eram resolvidas exclusivamente no *GeoGebra*, considerei que as produções escritas englobavam tanto os registos em papel quanto as respostas finais registadas no AGD. Uma vez que o foco da minha análise foi a identificação de estratégias, erros, justificações e procedimentos matemáticos adotados pelos alunos, a análise de conteúdo revelou-se uma técnica adaptável, permitindo separar os dados em categorias interpretativas que facilitam a explicação e compreensão dos fenómenos observados (Amado, 2017; Carmo & Ferreira, 2008).

As gravações de ecrã constituíram uma fonte valiosa de informação sobre as ações dos alunos no *GeoGebra*, evidenciando erros, hesitações, estratégias de organização e reflexão durante a execução das tarefas. Estas observações permitiram perceber de que forma a visualização em tempo real influenciava o pensamento dos alunos e os ajudava em momentos de indecisão, além de servirem de complemento e validação para as informações já recolhidas através dos outros instrumentos utilizados.

Para a análise dos questionários, dividi as questões em duas vertentes, consoante o tipo de resposta esperada: para captar experiências, perceções e opiniões dos alunos, submeti as questões abertas à análise de conteúdo; já as questões fechadas e os itens em escala de *Likert* foram analisados através de estatísticas descritivas, recorrendo ao cálculo de frequências e à elaboração de gráficos. As escalas de *Likert* utilizadas eram compostas por cinco pontos e tinham como propósito avaliar o grau de dificuldade sentido pelos alunos relativamente às suas capacidades de visualizar e representar figuras no plano e no espaço, com e sem recurso ao *GeoGebra*. Esta abordagem permitiu uma compreensão mais rica das tendências e perceções dos participantes, reforçando a credibilidade interpretativa dos resultados (Amado, 2017).

A triangulação de múltiplas fontes de dados é fundamental para construir uma compreensão profunda e contextualizada do fenómeno em estudo, uma vez que cada procedimento de recolha revela diferentes aspetos da realidade empírica (Carmo & Ferreira, 2008; Denzin & Lincoln, 2003, citados por Amado, 2017).

Neste sentido, e com o intuito de compreender de forma mais detalhada as interações e ideias dos alunos durante a resolução das tarefas, triangulei os dados das transcrições dos ficheiros áudio com as respetivas produções escritas e gravações de ecrã. Esta articulação permitiu uma análise mais holística e enriquecida das estratégias e dificuldades evidenciadas em Geometria, mediadas pelo *GeoGebra*.

Efetivamente, a triangulação dos dados revelou-se essencial para validar e aprofundar a compreensão dos fenómenos observados pelos alunos, reforçando a credibilidade dos resultados (Amado, 2017). Este procedimento fortaleceu a confiança nas conclusões que obtive e proporcionou uma visão mais rigorosa e fundamentada relativamente à utilização do *GeoGebra*.

A abordagem analítica que segui permitiu-me compreender melhor os dados recolhidos, respeitar os princípios metodológicos definidos e articular de forma coerente as diversas fontes de informação com os objetivos específicos do estudo.

No capítulo seguinte, irei apresentar os resultados desta análise, evidenciando de que forma a utilização do *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens dos alunos.

5. Análise de dados

Neste capítulo, apresento a análise dos dados recolhidos ao longo da minha intervenção pedagógica realizada com a turma do 10.º ano caracterizada no capítulo 3. A análise encontra-se organizada em três secções principais: a primeira corresponde à Tarefa 1: A Construção da Joana, a segunda à Tarefa 2: O Prisma Quadrangular, e, por fim, abordo a perceção dos alunos relativamente ao uso do *GeoGebra*, com base nas respostas ao questionário aplicado no final da intervenção.

Em cada tarefa, optei por começar a análise por identificar as dificuldades e só depois as estratégias, por considerar que identificar em primeiro lugar as dificuldades permite compreender melhor as estratégias que surgiram como resposta. Do ponto de vista pedagógico, esta decisão tem suporte na avaliação formativa (Fernandes, 2021a), que valoriza o diagnóstico de obstáculos como ponto de partida para promover aprendizagens. Além disso, considero que esta estrutura permite evidenciar como o *feedback* (Brookhart, 2017) e a ação docente foram construídos face às dificuldades identificadas.

Por fim, para cada tarefa apresento um quadro de síntese, que completei em cada secção, de modo a tornar mais percetível a evolução da análise. Além disso, optei por destacar as estratégias a negrito para facilitar a leitura e a comparação com as dificuldades descritas, destacando o seu papel na resolução da tarefa.

5.1. Análise da Tarefa 1: A Construção da Joana

A Tarefa 1, que apresento novamente o seu enunciado na Figura 8, teve como objetivo mobilizar conceitos de Geometria Analítica no Plano, desafiando os alunos a reproduzirem uma construção geométrica com base em informações parciais, utilizando o *GeoGebra*.

1. A Joana fez uma construção no *GeoGebra*.

   Na sua construção, estava representado:

   - A circunferência c, centrada no ponto A e cuja equação é $x^2+6x+y^2-4y-4=0$;
   - O ponto B pertencente à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares;
   - A reta r que passa nos pontos A e B e nenhum dos seus pontos pertence ao 3º quadrante;
   - A reta s que corresponde à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
   - O ponto D pertencente ao eixo Ox e com a mesma abcissa de B.
   - O ponto E pertencente ao semieixo negativo Ox que dista 4 unidades de D.

   1.1. Reproduz a construção que a Joana pode ter feito.

   1.2. Indica as coordenadas de A e B e o raio da circunferência.

   1.3. Escreve uma condição que defina a região limitada pela circunferência e pelas retas r e s, incluindo a fronteira, tal que os pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$ pertença à região.

   1.4. Determina a área do trapézio $[ABDE]$.

Figura 8 – Tarefa 1: A Construção da Joana (Adaptado de Pimenta et al., 2025).

Através da observação e análise dos registos áudio, das gravações de ecrã e das produções escritas, identifiquei diversas dificuldades, mas também estratégias e formas de pensamento relevantes por parte dos alunos, que serão discutidas nas próximas secções.

5.1.1. Dificuldades identificadas

Uma das primeiras dificuldades surgiu na primeira alínea e era relacionada com a identificação da bissetriz dos quadrantes ímpares. Alguns alunos não conheciam o conceito de bissetriz; outros, embora o conhecessem, tinham dificuldade em identificar a equação correta ($y = x$ ou $y = -x$), revelando desconhecimento sobre quadrantes ou a sua numeração.

No diálogo seguinte, verifica-se que os alunos sabiam o que são quadrantes, mas não sabiam a que quadrante cada numeração se referia.

> **René Descartes:** Ya, mas está bom assim. Pertence à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares.
>
> **René Descartes:** Os quadrantes ímpares, ei não sei de cor.
>
> **Nathan Jacob Fine:** Os quadrantes ímpares.

Outro exemplo, em que os alunos sabiam as equações das bissetrizes, mas não sabiam qual a correta é:

John Playfair: Não, vamos ver o que pergunta primeiro. Reproduz a construção que a Joana pode ter feito. O ponto pertence à circunferência e à bissetriz dos quadrados ímpares. Qual é a bissetriz dos quadrados ímpares?

Bernhard Riemann: Era...

John Playfair: Alguém tem o caderno? Eu não trouxe.

Bernhard Riemann: Era o $y = x$ ou era o $y = -x$? Eu acho que era assim.

Outro grupo, mesmo utilizando o comando de bissetriz no *GeoGebra*, acabou por selecionar a reta errada (Figura 9), o que evidenciou um uso instrumental da ferramenta sem compreensão do conceito subjacente, o que mostra que a simples utilização de um *software* não garante, por si só, aprendizagens significativas, sobretudo quando a tecnologia é usada de forma mecânica, sem articulação com o raciocínio geométrico que lhe está subjacente (Amado, 2022; Guimarães, 2014).

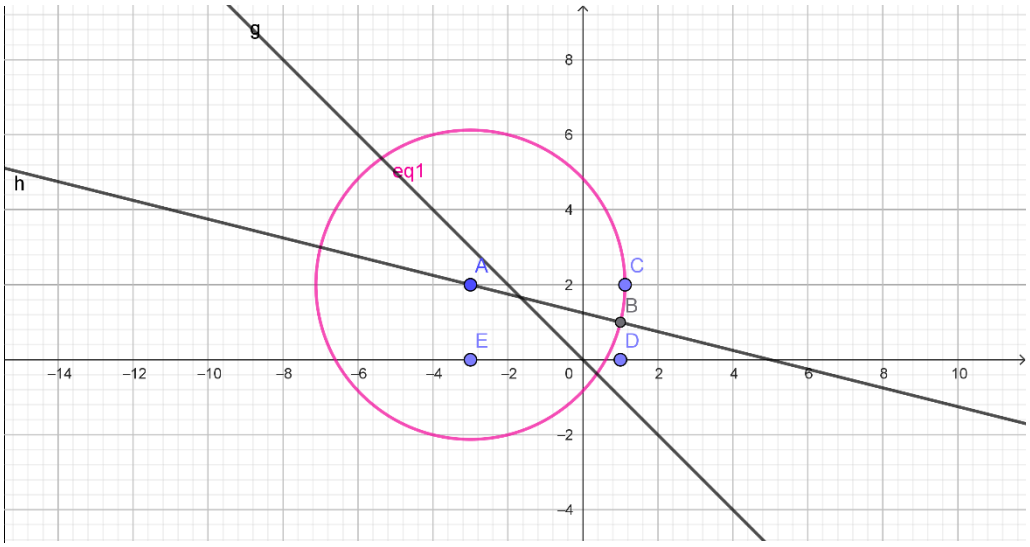


Figura 9 – Construção da bissetriz pelo grupo constituído por Pitágoras e Galileu Galilei.

Também foi recorrente a dificuldade em recordar ou aplicar corretamente a equação da mediatriz, mostrando uma não apropriação deste conhecimento. Vários alunos admitiram que se tinham esquecido da definição ou de como se determina a equação, como mostra o seguinte diálogo:

Joseph-Louis Lagrange: Como é que se faz a mediatriz? Eu esqueci-me. Esqueci-me.

David Hilbert: Olha, como é que sabemos a mediatriz de um lado ao outro? Temos de saber as coordenadas dos pontos.

Joseph-Louis Lagrange: Nós temos as coordenadas aqui.

Euclides: Yha.

David Hilbert: Então mete as coordenadas dos pontos, já.

Joseph-Louis Lagrange: Onde é que diz a mediatriz? Tu não andas a passar tudo, meu. Onde é que está a mediatriz?

David Hilbert: Não dá para saber o meio entre o A e o B?

Verificaram-se ainda dificuldades relacionadas com linguagem matemática, como o significado de "semieixo" ou "dista". Alguns alunos não compreendiam o significado das expressões usadas no enunciado e pediram ajuda entre pares para os interpretar.

Hypatia: O ponto já está feito. O ponto pertence ao semieixo. Calma, o que é isto?

Isaac Newton: Semieixo? O que é o semieixo?

Hypatia: Semieixo negativo Ox, que dista quatro unidades de B Semieixo.

Isaac Newton: Que dista? O que é dista?

Um outro exemplo relativo a dificuldade de conhecimento de linguagem é:

Pitágoras: O ponto E pertence ao semieixo negativo de Ox que dista 4 unidades de B.

Galileu Galilei: Pertence?

Pitágoras: Eu gostava que isto aqui...

Galileu Galilei: O que é semieixo?

Pitágoras: Mete isto para traduzir. É que eles aqui não estão a falar português de certeza. Estão a dizer semieixo.

Galileu Galilei: Não. Então... O negativo... Semieixo é isto aqui.

Pitágoras: Semieixo. Isto aqui é que é um semieixo?

Galileu Galilei: Aqui, negativo.

Na segunda alínea da tarefa 1, as dificuldades foram pontuais e centraram-se na interpretação incorreta do raio de uma circunferência, que alguns alunos consideraram ser 0 ou como sendo a abcissa do centro, sem se aperceberem que se tratava de um valor negativo, o que é impossível dado se tratar de uma medida de comprimento.

Cláudio Ptolomeu: Então, o raio... Como é que sabemos?

Arquimedes: O raio é -3.

Cláudio Ptolomeu: Não, isso é o centro.

Arquimedes: Está bem, desculpa.

Cláudio Ptolomeu: Substituímos aqui isto e descobrimos. Agora sim, podemos substituir, porque aqui o y e o x, ahm... as coisas estão complicadas.

Cláudio Ptolomeu: Acho eu, mas deixa-me só pôr aqui.

Cláudio Ptolomeu: O raio deu 0... Não, espera lá. Exato, o raio é 0.

A terceira alínea da tarefa 1 revelou-se ser a mais exigente. A maior parte dos grupos mostrou dificuldades em compreender a expressão "região limitada pela circunferência e pelas retas r e s, incluindo a fronteira, tal que os pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$ pertençam à região".

Leonard Euler: O que é para fazer? No 1.3. Mano, não sei o que é para fazer. Ai mano, isso é tão complicado.

Tales de Mileto: A circunferência…

Um outro exemplo é do grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides (Figura 10 e Figura 11), que ao invés de definir a região que continha os pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$, definiram a região entre as retas r e s que continha o ponto D.

Esta situação pode ser interpretada de duas formas. Por um lado, pode ter sido resultado de uma leitura impulsiva do enunciado, em que os alunos se prenderam ao que já estava representado graficamente, sem refletirem sobre o que era solicitado. Por outro, pode revelar também uma dificuldade de interpretação e atribuição de sentido à linguagem matemática presente no problema, marcada por um raciocínio ainda predominantemente visual, em consonância com os níveis iniciais descritos por Van Hiele (1999).

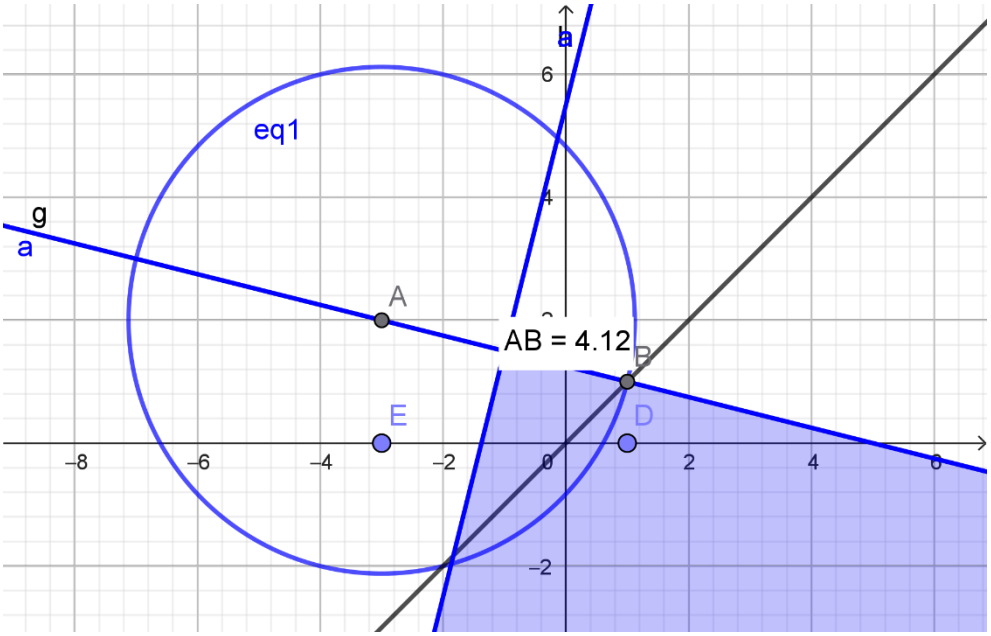


Figura 10 – Resolução errada pelo grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides.

$$y \leq 4x + 5.5 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x + 1.25$$

Figura 11 – Condição (errada) dada como resposta à questão 1.3 pelo grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides.

Outro aspeto crítico foi a orientação das desigualdades. Muitos alunos não conseguiam decidir corretamente se a inequação deveria usar "maior do que" ou "menor do que", consoante a posição relativa da reta, o que evidencia dificuldades na apropriação da linguagem matemática.

> **Ada Lovelace:** Ainda temos que colocar que y é maior que $x + 4$.
>
> **Carl Gauss:** Não, y é menor.
>
> **Ada Lovelace:** Não, y é maior que assim é basicamente... Eu não sei, acho que é maior.
>
> **Carl Gauss:** Oh stora, aqui para este aqui é menor do que esta reta?

Além disso, surgiu frequentemente confusão entre utilizar interseção ou união de regiões. Os alunos nem sempre perceberam se deviam usar "e" (∩) ou "ou" (∪), o que resultou em construções com regiões incompletas ou excessivas, revelando fragilidades na comunicação matemática escrita.

Nathan Jacob Fine: Então, a interseção entre as duas, entre a circunferência e as duas retas.

René Descartes: Interseção ou união? Eu não sei.

Nathan Jacob Fine: Interseção. Interseção é quando tem a parte.... Deve estar para aí.

Também aconteceram situações dos alunos chegarem à conclusão que era interseção, mas utilizarem o símbolo de união, indicando uma lacuna na comunicação matemática escrita – embora com conhecimento conceptual.

John Playfair: Interseção ou união? Interseção.

Bernhard Riemann: É assim.

John Playfair: É para baixo ou para cima?

Bernhard Riemann: Acho que é para cima.

John Playfair: Assim?

Bernhard Riemann: Sim, arrisca.

Alguns grupos experimentaram várias tentativas até chegarem à condição correta (Figura 12). O *GeoGebra* foi, nestes casos, fundamental para testar hipóteses e visualizar os efeitos das alterações nas condições impostas. Ao permitir que os alunos observassem em tempo real o que mudava nas suas construções, o *GeoGebra* reforçou o papel dos ambientes de geometria dinâmica na formulação e validação de conjeturas, indo ao encontro do que defende Amado (2022), tornando-se potenciador de exploração e generalização matemática (Ponte et al., 2013).

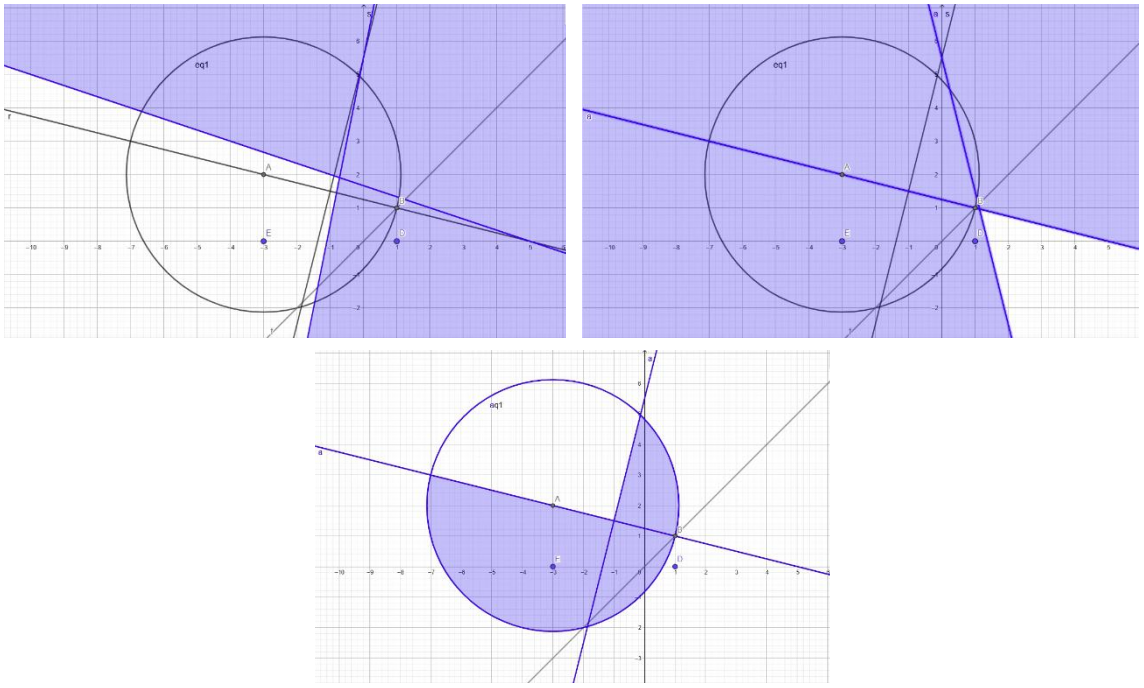


Figura 12 – Tentativas de chegar à condição correta pelo grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether.

Este processo de tentativa-erro, visível nas gravações de ecrã, revelou não só as dificuldades dos alunos, mas também a importância do *GeoGebra* como ferramenta de exploração e autoavaliação, uma vez que em papel os alunos não iam perceber que as condições que estavam a escrever estavam erradas.

A última alínea foi, de forma geral, superada com sucesso. Todos os grupos utilizaram o *GeoGebra* para medir distâncias e determinar bases e alturas, sem dificuldades significativas.

Em geral, a Tarefa 1 revelou diversas dificuldades sentidas pelos alunos, que no geral revelam fragilidades na comunicação matemática escrita e indicam situações com necessidade de intervenção pedagógica mais direcionada, o que confirma os obstáculos visuais e de cognição espacial já descritos por Junqueira (1994) e Jones e Tzekaki (2016), bem como limitações nos níveis de pensamento geométrico apresentados por Van Hiele (1999). Além disso, a comunicação matemática desempenha um papel central na aprendizagem, pelo que é importante promover múltiplas representações e explorar ambientes dinâmicos como o *GeoGebra* (Amado, 2022; Ponte et al., 2013).

O Quadro 3 sintetiza todas as dificuldades identificadas durante a resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*, servindo como referência para a análise subsequente das estratégias e do *feedback* observado.

Dificuldades observadas
Identificação da bissetriz dos quadrantes ímpares
Desconhecimento sobre quadrantes ou a sua numeração
Falhas na apropriação da mediatriz (esquecimento da definição e da determinação da equação)
Linguagem matemática (não compreensão de significados de determinadas palavras)
Interpretação incorreta de parâmetros geométricos (confusão entre raio e coordenadas do centro; raio nulo ou negativo)
Formulação de condições com inequações (representar regiões com várias restrições)
Erros na orientação de desigualdades (uso incorreto de maior/menor)
Confusão ligada à linguagem matemática sobre o uso de interseção e união (∩/∪)
Fragilidades na comunicação matemática escrita (rasuras, uso incorreto de símbolos)
Interpretação errada de enunciados complexos com várias restrições

Quadro 3 – Dificuldades identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*.

5.1.2. Estratégias dos alunos para superar dificuldades

Apesar dos desafios, observei que os alunos mobilizaram estratégias interessantes e reveladoras de um pensamento matemático ativo. A mais comum foi a **validação visual no *GeoGebra*** (Figura 13), estratégia que, como refere Amado (2022), potencia a formulação e a validação de conjeturas em AGD. A possibilidade de visualizar a construção em tempo real permitiu verificar erros, testar desigualdades e condições e ajustar sinais ou valores, em consonância com as ideias de Jones e Tzekaki (2016) sobre o papel da tecnologia no raciocínio geométrico.

René Descartes: Ei... Não está bem o círculo.

Nathan Jacob Fine: É isto, mas está certo.

René Descartes: Mexeste antes? Meteste como estava antes?

Nathan Jacob Fine: Ya, ya.

René Descartes: Então, mas assim não está um círculo.

René Descartes: Volta atrás, volta atrás.

Nathan Jacob Fine: Se voltares atrás vais tirar os pontos.

René Descartes: Não, não.

Nathan Jacob Fine: Está, está, está, acho que está.

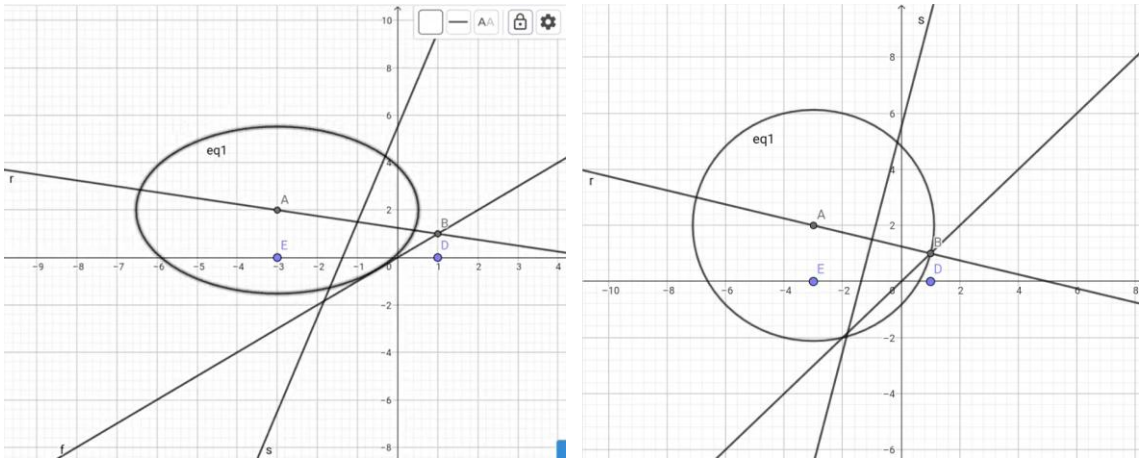


Figura 13 – Construção errada da circunferência vs. correção, após visualizarem que estava errado.

Os alunos visualizaram que a construção que tinham feito estava errada e, com isso, conseguiram corrigir. Esta estratégia de ***verificar* com o *GeoGebra*** esteve muito presente na resolução da tarefa. Ao permitir identificar erros e corrigi-los em tempo real, o *software* responde também ao que Jones e Tzekaki (2016) defendem acerca do valor das tarefas espaciais mediadas pela tecnologia no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Um outro exemplo é do grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether, já referido anteriormente (Figura 12), relativo à escrita das condições, onde alguns grupos utilizaram a estratégia de **tentativa-erro**, testando diferentes condições para representar corretamente a região pedida, até encontrarem aquela que correspondia ao esperado. Esta abordagem reflete a importância do *feedback* e da exploração ativa na aprendizagem matemática, permitindo aos alunos testar hipóteses, observar resultados em tempo real e ajustar estratégias, o que se alinha com o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da generalização (Amado, 2022; Brookhart, 2017; Ponte et al., 2013).

Além disso, a **colaboração entre pares** foi uma constante. Os alunos discutiram conceitos, partilharam raciocínios e tomaram decisões em conjunto. Essa dinâmica coletiva favoreceu não só o apoio mútuo, como também a construção partilhada do conhecimento, conforme defendem Carvalho e Silva et al. (2023) e Ponte et al. (2013) sobre a importância das dinâmicas colaborativas na aprendizagem matemática. Seguem-se três exemplos da colaboração entre pares.

> **Nathan Jacob Fine:** Não queres marcar primeiro o segmento de reta e depois fazemos a mediatriz do segmento de reta?
>
> **René Descartes:** O segmento de reta?
>
> **Nathan Jacob Fine:** Marcamos um segmento de reta.
>
> _____
>
> **Cláudio Ptolomeu:** Ok, acho que nós vamos ter que usar a pista para ver as coisas aqui...
>
> **Cláudio Ptolomeu:** Vamos lá seguir os passos... A circunferência, vamos escrever... Circunferência…
>
> **Arquimedes:** Eu faço isto e tu escreves que tens a letra melhor que eu, eu...
>
> **Cláudio Ptolomeu:** É para escrever numa folha à parte? Não, isto é para fazer aí!
>
> **Arquimedes:** Ok, relaxa...
>
> _____
>
> **Ada Lovelace:** “Tens esta área toda... que é o l”
>
> **Carl Gauss:** “Qual é a equação da reta?”
>
> **Ada Lovelace:** “Tá aqui, x+3 ao quadrado…”
>
> **Carl Gauss:** “Sim.”
>
> **Ada Lovelace:** “Igual a 16. E...”
>
> **Carl Gauss:** “O ‘e’ é para baixo, não é?”

Estas interações indicam que o *GeoGebra*, aliado ao trabalho em grupo, fomenta uma articulação entre o pensamento algébrico, visual e lógico, promovendo múltiplas representações e aprendizagem significativa (Amado, 2022; Guimarães, 2014). Além disso, o trabalho colaborativo reforça a comunicação matemática e a construção

partilhada do conhecimento, conforme enfatizam Carvalho e Silva et al. (2023) e Ponte et al. (2013).

Em geral, os alunos utilizaram várias estratégias para superar as dificuldades que foram surgindo, sendo elas: a validação visual no *GeoGebra* para testar e corrigir construções, a tentativa-erro para encontrar condições corretas, a colaboração entre pares, incluindo a negociação e a leitura partilhada, e os pedidos de ajuda entre colegas. Uma vez que surgiram diversas estratégias, fica claro que os alunos exploraram ativamente a ferramenta, ajustando as suas resoluções com base na interação com o *software* e com os colegas.

O Quadro 4 apresenta uma síntese das dificuldades observadas apresentadas na secção anterior e das estratégias utilizadas pelos alunos, permitindo perceber como cada desafio foi enfrentado durante a resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*.

Dificuldades observadas	**Estratégias utilizadas pelos alunos**
Identificação da bissetriz dos quadrantes ímpares	Discussão em pares
Desconhecimento sobre quadrantes ou a sua numeração	Discussão em pares (recordar a numeração dos quadrantes)
Falhas na apropriação da mediatriz (esquecimento da definição e da determinação da equação)	Colaboração entre pares (pedidos de ajuda e discussão sobre como calcular a mediatriz)
Linguagem matemática (não compreensão de significados de determinadas palavras)	Colaboração entre pares (perguntas sobre termos como “semieixo” e “dista”; negociação para interpretar o enunciado)
Interpretação incorreta de parâmetros geométricos (confusão entre raio e coordenadas do centro; raio nulo ou negativo)	“Verificar” com o *GeoGebra*; Colaboração entre pares (observação de que o círculo ficava errado e correção)
Formulação de condições com inequações (representar regiões com várias restrições)	Tentativa-erro (testes sucessivos de inequações no *GeoGebra* até chegar à condição correta)
Erros na orientação de desigualdades (uso incorreto de maior/menor)	Validação visual no *GeoGebra* (testes alterando o sinal da desigualdade)
Confusão ligada à linguagem matemática sobre o uso de interseção e união (∩/∪)	Tentativa-erro; validação visual no *GeoGebra* (discussão sobre “e” / “ou”)
Fragilidades na comunicação matemática escrita (rasuras, uso incorreto de símbolos)	“Verificar” com o *GeoGebra* (confronto das condições escritas com a representação gráfica)
Interpretação errada de enunciados complexos com várias restrições	Colaboração entre pares (discussão do enunciado)

Quadro 4 – Dificuldades e estratégias identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*.

5.1.3. *Feedback* recolhido pelo professor

O trabalho dos alunos nesta tarefa ofereceu-me, enquanto professora-investigadora, um *feedback* muito claro sobre o estágio das aprendizagens dos alunos. A construção dinâmica no *GeoGebra*, os erros visuais produzidos e as justificações verbais permitiram identificar lacunas conceptuais e formas de pensar dos alunos, constituindo-se uma excelente oportunidade para que eu pudesse pensar sobre a minha própria prática pedagógica e em como apoiar os alunos, realizando os ajustes necessários.

Por exemplo, quando os alunos não sabiam que região deveriam definir por uma condição, questionaram no sentido conseguirem chegar a uma conclusão. Estas situações permitiram-me ajustar as minhas intervenções pedagógicas, oferecendo *feedback* formativo e orientado nos momentos em que os alunos demonstravam bloqueios conceptuais, dando pistas e colocando questões que levassem os alunos à resolução. Esta abordagem evidenciou como a interação continua entre professor e aluno promove a reflexão e o ajuste das estratégias pedagógicas, destacando o papel do *feedback* como mecanismo regulador de aprendizagem. (Brookhart, 2017; Pollock, 2011). Amado (2022) complementa esta ideia ao destacar que a utilização de tecnologia como o *GeoGebra* potencia este tipo de *feedback*, permitindo intervenções mais conscientes do progresso do aluno.

Ada Lovelace: Não sabemos fazer a última.

Professora: Então, escreve a condição que define a região limitada pela circunferência. Isso quer dizer o quê, que é a parte de dentro ou a parte de fora?

Carl Gauss: De dentro.

Professora: De dentro.. e depois, falta-vos coisas aí. E pelas retas r e s. Quais são os bocados que vocês têm ali limitados pelas retas r e s?

Carl Gauss: Este e este.

Professora: Ou este ou este, certo?

Carl Gauss: Sim, mas nós não sabemos se é para cima da reta.

Professora: Pronto, por isso é que aqui diz tal que os pontos pertençam. Este ponto está onde? Está em que bocado?

Ada Lovelace: Ah?

Professora: Este ponto está onde? Em que parte da circunferência?

Ada Lovelace: Hm.. É neste.

Professora: Pronto, então queremos esse bocado e este?

Ada Lovelace: Este esta aqui.

Professora: Pronto, então queremos este e este.

Ada Lovelace: E como é que escrevemos isso?

Professora: Isso é o que vocês têm de pensar.

Ao analisar este diálogo, compreendemos que a dificuldade não residia na escrita da inequação, mas sim na compreensão da relação entre o enunciado e a representação geométrica, o que reforça a importância da discussão entre os alunos, de onde surgem diversas ideias e de fazer a leitura e interpretação de enunciados em conjunto.

Através das correções feitas, das rasuras nos registos (Figura 14) e da evolução das construções (Figura 12, Figura 13 e Figura 15), foi possível acompanhar a progressão do pensamento matemático dos alunos. Também neste contexto, o *GeoGebra* revelou-se uma ferramenta essencial para aceder ao raciocínio dos alunos de forma visível e concreta, apoiando a observação do seu pensamento em tempo real e a identificação de bloqueios, além da articulação entre diferentes formas de representação matemática. Tal contribuiu para a criação de intervenções pedagógicas mais eficazes (Amado, 2022; Brookhart, 2017; Jones & Tzekaki, 2016).

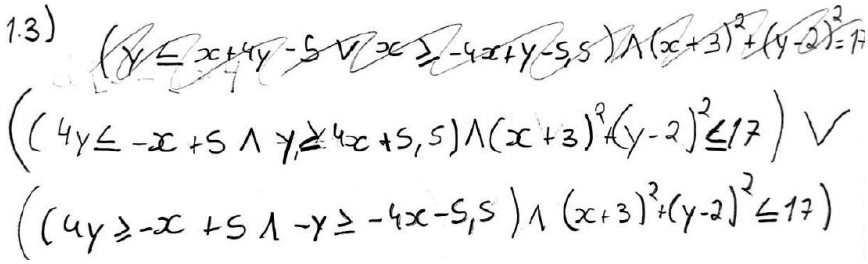


Figura 14 – Resolução da alínea 1.3 pelo grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether, com rasuras devido à evolução do pensamento relativamente à condição.

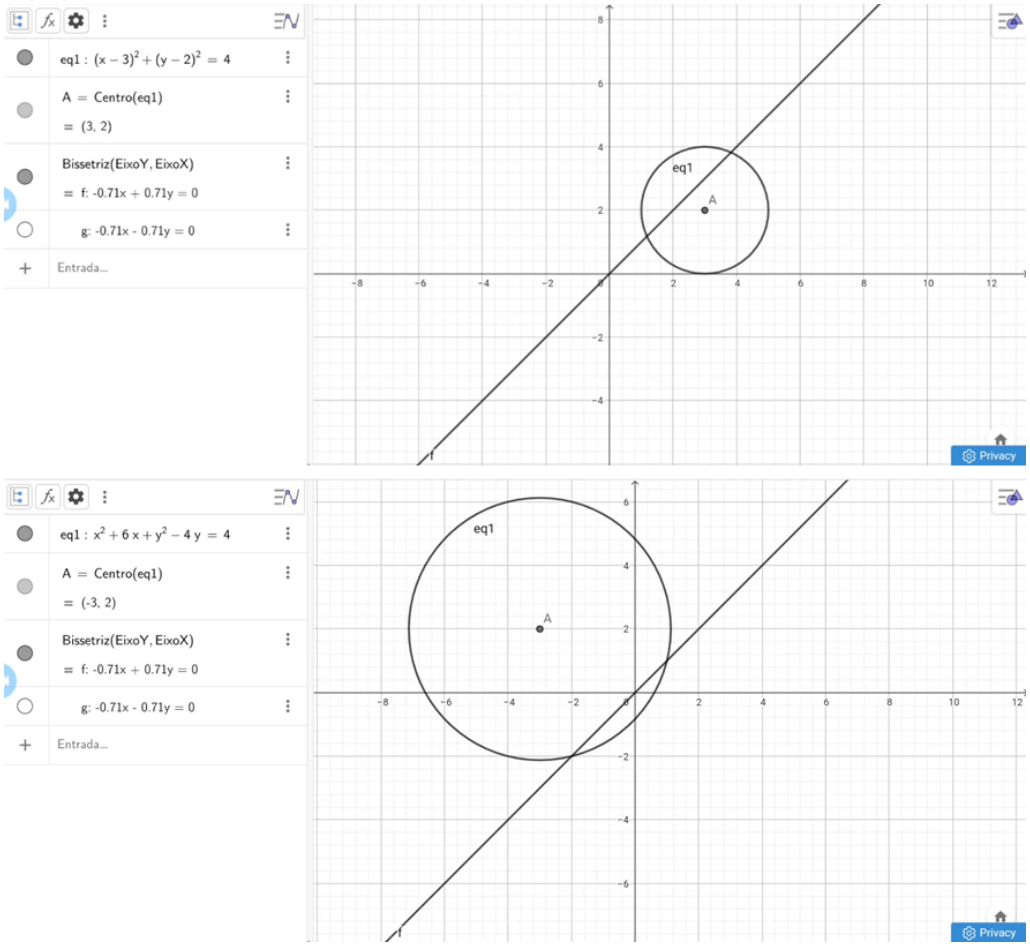


Figura 15 – Evolução da construção pelo grupo de Isaac Newton e Hypatia, que alteraram a equação após perceberem o que tinham desenhado estava errado.

Estes exemplos revelam um padrão bastante comum nas diferentes estratégias dos vários grupos: a evolução do pensamento a partir de erros iniciais para formas mais elaboradas e corretas de representação.

No caso do grupo de René Descartes e Nathan Jacob Fine (Figura 13), a correção da circunferência após perceberem o erro na construção evidenciou a importância de poder visualizar em tempo real o que está a ser feito para a compreensão por parte dos alunos. Já no grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether (Figura 14), as rasuras nos registos escritos revelaram uma sucessão de tentativas que, embora marcadas por incerteza, foram fundamentais para a construção de conhecimento. Por sua vez, no grupo de Isaac Newton e Hypatia (Figura 15), a alteração da equação resultou diretamente da constatação de que o que tinham desenhado não correspondia ao esperado, traduzindo um processo de autoavaliação e regulação.

Desta forma, verificou-se que o *GeoGebra* proporcionou *feedback* imediato e visível, o que levou os alunos a testar hipóteses e a reformular as suas construções de forma

autónoma, criando oportunidades de aprendizagem mais ricas. Neste contexto, percebi que em situações como esta devo apenas orientar a reflexão sem retirar a autonomia dos alunos.

Além disso, o *feedback* recolhido permitiu-me perceber que muitas das dificuldades observadas não se limitavam a erros pontuais, mas sim a lacunas conceptuais mais profundas. Dois exemplos disso são o grupo de Pitágoras e Galileu Galilei (Figura 9) que apresentou dificuldades na identificação da bissetriz correta e utilizou o comando sem grande compreensão e o grupo de Joseph-Louis Lagrange, David Hilbert e Euclides (Figura 10 e Figura 11) que evidenciou lacunas na interpretação da condição do enunciado, focando-se apenas em elementos visuais como retas r e s ou ponto D, em vez dos pontos explicitamente indicados no enunciado.

Os exemplos do grupo de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether (Figura 12) que utilizou a estratégia de tentativa-erro no *GeoGebra* para alcançar a condição correta e do grupo de René Descartes e Nathan Jacob Fine (Figura 13) que mostrou que a validação visual no *GeoGebra* permitiu corrigir construções incorretas em tempo real, fizeram-me ter mais noção de como a colaboração em pares e a leitura partilhada são fundamentais para os alunos ultrapassarem bloqueios.

Estes momentos mostraram como o *GeoGebra* funciona não só como ferramenta de construção, mas como um meio privilegiado de recolha de *feedback* sobre o raciocínio matemático dos alunos. Através dele, foi possível aceder tanto às dificuldades como às estratégias mobilizadas, permitindo compreender melhor em que aspetos era necessário intervir pedagogicamente.

Durante a minha análise da Tarefa 1, ficou claro que os alunos demonstraram dificuldades consistentes em diversos aspetos da Geometria Analítica e na comunicação matemática escrita, o que evidenciou a importância de reforçar conceitos fundamentais (como mediatriz e bissetriz), clarificar o vocabulário utilizado em diferentes situações, apoiar na interpretação de enunciados, explorar de forma mais intencional a ligação entre Geometria e Álgebra ou outras áreas da Matemática e, sobretudo, valorizar o processo de construção das respostas e não só o produto final.

Para uma visualização integrada das aprendizagens e ações pedagógicas necessárias para apoiar os alunos a superar os problemas detetados na resolução da tarefa, sintetizei as dificuldades detetadas, estratégias utilizadas e as implicações pedagógicas, isto é, sugestões de ações para ultrapassar as dificuldades, no Quadro 5.

Dificuldades observadas	Estratégias utilizadas pelos alunos	Implicações pedagógicas
Identificação da bissetriz dos quadrantes ímpares	Discussão em pares	Reforçar o conceito de bissetriz com exemplos
Desconhecimento sobre quadrantes ou a sua numeração	Discussão em pares (recordar a numeração dos quadrantes)	Relembrar a numeração dos quadrantes de forma sistemática
Falhas na apropriação da mediatriz (esquecimento da definição e da determinação da equação)	Colaboração entre pares (pedidos de ajuda e discussão sobre como calcular a mediatriz)	Reforçar o conceito de mediatriz com diferentes abordagens, valorizando a compreensão do procedimento e não a aplicação mecânica
Linguagem matemática (não compreensão de significados de determinadas palavras)	Colaboração entre pares (perguntas sobre termos como "semieixo" e "dista"; negociação para interpretar o enunciado)	Trabalhar o vocabulário matemático em diferentes contextos, explicando os termos em linguagem simples
Interpretação incorreta de parâmetros geométricos (confusão entre raio e coordenadas do centro; raio nulo ou negativo)	"Verificar" com o *GeoGebra*; Colaboração entre pares (observação de que o círculo ficava errado e correção)	Promover tarefas exploratórias que relacionem definições geométricas com propriedades algébricas
Formulação de condições com inequações (representar regiões com várias restrições)	Tentativa-erro (testes sucessivos de inequações no *GeoGebra* até chegar à condição correta)	Desenvolver atividades progressivas de tradução de enunciados para inequações
Erros na orientação de desigualdades (uso incorreto de maior/menor)	Validação visual no *GeoGebra* (testes alterando o sinal da desigualdade)	Reforçar a interpretação geométrica de desigualdades
Confusão ligada à linguagem matemática sobre o uso de interseção e união (∩/∪)	Tentativa-erro; validação visual no *GeoGebra* (discussão sobre "e" / "ou")	Trabalhar de forma explícita a diferença entre interseção e união, tanto em contexto geométrico como em conjuntos
Fragilidades na comunicação matemática escrita (rasuras, uso incorreto de símbolos)	"Verificar" com o *GeoGebra* (confronto das condições escritas com a representação gráfica)	Incentivar a escrita matemática cuidada e articulada com a representação gráfica
Interpretação errada de enunciados complexos com várias restrições	Colaboração entre pares (discussão do enunciado)	Trabalhar estratégias de decomposição de problemas em partes menores.

Quadro 5 – Dificuldades, estratégias e implicações pedagógicas identificadas na resolução da Tarefa 1 com recurso ao *GeoGebra*.

5.2. Análise da Tarefa 2: O Prisma Quadrangular

A Tarefa 2, que apresento novamente o seu enunciado na Figura 16, teve como objetivo trabalhar com conceitos da Geometria no Espaço, desafiando os alunos a construir um prisma quadrangular a partir de pistas, utilizando o ambiente tridimensional do *GeoGebra*. A atividade implicava a mobilização de conhecimentos sobre coordenadas, planos, projeções ortogonais, semirretas e simetrias, bem como a articulação entre representação visual, linguagem simbólica e descrição verbal.

1. Considera o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$. Sabe-se que:
   - O é a origem do referencial.
   - $[OA]$ e $[OC]$ são arestas de uma das bases do prisma.
   - O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, o ponto C ao semieixo positivo Oy.
   - O ponto E pertence ao semieixo positivo Oz e ao plano de equação $z = 8$.
   - O volume do prisma é 128.
   - O ponto B pertence ao plano $z = 0$.
   - O ponto D é a projeção ortogonal do ponto A no plano $z = 8$.
   - O ponto F pertence ao plano de equação $y = 4$ e tem menor abcissa do que o ponto G.

   Constrói este prisma.

   1.1. Como é que determinaste as coordenadas do ponto A? E do ponto F?
   1.2. Porque é que a figura construída pode ser considerada um prisma quadrangular?
2. Escreve uma condição que defina a semirreta $\dot{BG}$;

   Justifica porque é que a condição determinada representa a semirreta.
3. Identifica, usando as letras da figura, o conjunto de pontos definidos pela condição $0 \leq y \leq 4 \wedge x = 4 \wedge 0 \leq z \leq 8$.

   Justifica a tua resposta.
4. Considera o ponto H resultante da projeção ortogonal do ponto $(2,\ 2,\ -1)$ no plano $z = 6$. Assinala o ponto H na tua construção do *GeoGebra* e determina uma equação que defina o plano OBH.

Figura 16 – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular (Adaptado de Almeida et al., 2025).

Ao analisar os registos de ecrã, as interações verbais entre os alunos e as produções no *GeoGebra*, identifiquei dificuldades significativas, mas também estratégias matemáticas relevantes, o que permitiu observar como o *GeoGebra* funcionou como ferramenta de *feedback* para os próprios alunos e para mim, enquanto professora.

É de notar que devido a questões técnicas, parte das gravações ecrã não foram guardadas, pelo que os exemplos no *GeoGebra* serão poucos e a análise será baseada essencialmente nas gravações áudio e nas respostas dadas pelos grupos.

5.2.1. Dificuldades identificadas

A primeira dificuldade detetada na primeira alínea foi a aplicação da fórmula do volume. Embora os alunos soubessem que o volume do prisma era 128 e que a altura era 8, vários demonstraram insegurança quanto à forma de utilizar esta informação para deduzir a área da base ou o comprimento dos lados. Alguns confundiram volume com altura ou tentaram multiplicar por dois, revelando fragilidade na compreensão da fórmula. Além disso, houve casos em que os alunos não sabiam qual era a fórmula do volume de um prisma, o que impediu qualquer tentativa de resolução inicial.

> **David Hilbert:** O volume do prisma é 128.
>
> **Joseph-Louis Lagrange:** Como é que se faz o volume?
>
> […]
>
> **Joseph-Louis Lagrange:** Como é que fazes o volume do prisma?
>
> **David Hilbert:** Professora, como é que é o volume do prisma? A fórmula.

Outra dificuldade associada a esta questão era relacionada com o conceito de *prisma quadrangular*. Vários grupos assumiram automaticamente que, por ser quadrangular, a base teria de ser um quadrado. Essa generalização levou alguns alunos a imporem essa condição mesmo sem uma justificação geométrica clara, desconsiderando que um prisma quadrangular pode ter uma base retangular com lados de comprimentos diferentes.

> **John Playfair:** Então temos aqui área da base vezes 8 é igual a 128. Então quer dizer que 128 a dividir por 8 é igual à área da base.
>
> **Pedro Hispano:** Sixteen.
>
> **John Playfair:** Sixteen? A área da base é 16. Portanto, a área da base é lado vezes lado, portanto, 16 é igual a lado vezes lado.
>
> **Pedro Hispano:** Então é 4.
>
> **John Playfair:** Quadrangular é um quadrado.

Outro exemplo desta dificuldade é:

> **Cláudio Ptolomeu:** Ok, hum… vamos ver, 3 vezes 3… ok, tem que ser 4. Ou seja, o A vai estar no 4 e o…. Calma, exato.

Arquimedes: De onde é que tiraste isto?

Cláudio Ptolomeu: Hã?

Arquimedes: De onde tiraste que tinha de ser 4? Aqui nunca diz….

Cláudio Ptolomeu: Então, se a altura é 8... tens que testar os números para dar 128.

Arquimedes: Está bem, mas quem é que disse que o $[AO]$ e o $[OC]$ são idênticos?

Cláudio Ptolomeu: Eu não sei. Tu sabes que as bases são o A e o C e depois diz que o A é o semieixo positivo de Ox e o C é o semieixo positivo de Oy. Para mim é um quadrado, certo? Ou seja, lado é igual ao outro.

Arquimedes: Quadrado?

Cláudio Ptolomeu: A área da base, se é um prisma quadrangular, é um quadrado. Está bem, mas...

Arquimedes: Não, está certo.

Numa situação particular, um aluno assumiu o prisma quadrangular como um cubo, assumindo implicitamente que todas as arestas teriam a mesma medida, o que comprometeu a sua construção.

Carl Gauss: Agora a 1.2. Porque é que a figura construída pode ser considerada um prisma quadrangular? Tu escreves?

Carl Gauss: Para ser considerado um prisma quadrangular é necessário que todas as arestas do prisma tenham o mesmo comprimento, o que conseguimos verificar na figura obtida. Isto já chega, né?

Acresce ainda que, em pelo menos dois casos, houve desconhecimento do próprio conceito de prisma, o que dificultou a compreensão global da tarefa e comprometeu o planeamento da construção desde o início.

David Hilbert: O que é que é um prisma, mano?

[…]

David Hilbert: Ya, é o que estou a dizer. Como é que sabes que é um retângulo? Porque é um prisma. Um prisma, como é que é a base? Eu não sei o que é um prisma... pesquisa aí no google.

Emmy Noether: Porque a figura construída pode ser considerada… o que é que é um prisma?

A determinação do ponto F constituiu ainda outro obstáculo significativo, já que envolvia interpretar múltiplas condições em simultâneo: localização num plano de equação conhecida, pertença a um eixo coordenado e comparação de abcissas com outro ponto.

Professora: F, G. Então, qual é o ponto que falta?

Carl Gauss: O F.

Professora: Mas onde é que vai ser o F então, obrigatoriamente? O y é 4. O x vai ser...

Carl Gauss: zero.

Professora: E o z?

Carl Gauss: zero.

Professora: Zero?

Carl Gauss: O z...

Professora: Onde é que vos falta um ponto, em cima ou em baixo?

Carl Gauss: Em baixo.

Professora: Não, é em cima. Aqui em baixo já tens 4. Em cima é que só tinhas três.

Na alínea 1.1, os alunos conseguiram encontrar as coordenadas dos pontos A e F com base nas condições dadas no enunciado, mas demonstraram dificuldade em justificar formalmente o porquê daquelas coordenadas estarem corretas. Embora tenham conseguido encontrar as coordenadas dos pontos, de acordo com as informações que tinham, não sabiam como estruturar ou explicar o raciocínio que sustentava a sua escolha, evidenciando limitações nos níveis de pensamento geométrico descritos por Van Hiele (1999), em que os alunos podem executar procedimentos sem compreender completamente as propriedades subjacentes. Esta situação vai ainda ao encontro das ideias de Junqueira (1994) e Jones e Tzekaki (2016) que reforçam que obstáculos visuais e limitações na cognição espacial podem comprometer a capacidade de justificar escolhas matemáticas.

No caso do ponto A, a maioria dos grupos apenas apresentou cálculos ou não justificou de todo (Figura 17).

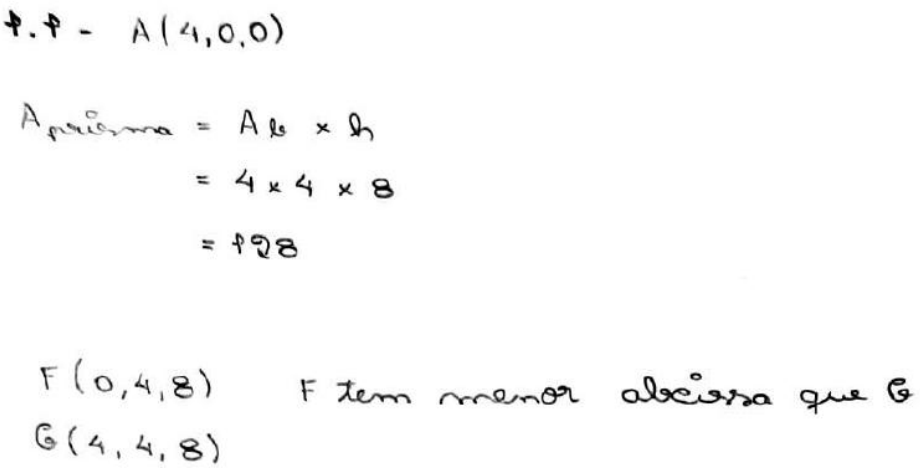


Figura 17 – Resposta à alínea 1.1 pelo grupo de Cláudio Ptolomeu e Arquimedes.

Já no ponto F, a tarefa exigia a integração de várias condições simultâneas — pertença ao plano de equação dada, ao semieixo e comparação de abcissas — e muitos alunos mostraram dificuldade em articular essas informações. A justificação era frequentemente incompleta ou baseada apenas numa das restrições, ignorando as restantes (Figura 18), evidenciando limitações na articulação de conceitos e na generalização do pensamento geométrico (Amado, 2022; Junqueira, 1994; Van Hiele, 1999).

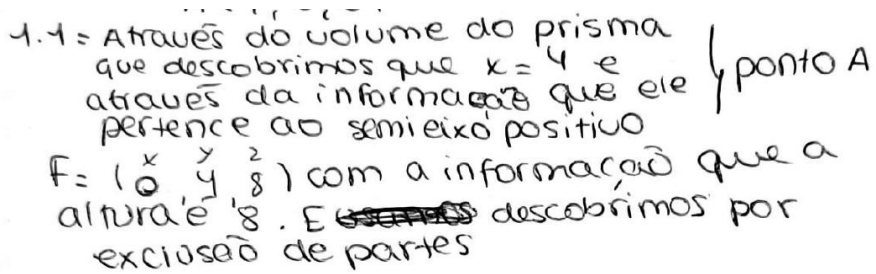


Figura 18 – Resposta à alínea 1.1 pelo grupo de Pedro Hispano e John Playfair.

Surgiu ainda, por parte de um aluno, a interpretação incorreta da orientação no espaço tridimensional, que se referiu ao posicionamento de um ponto em termos de "quadrante", mostrando desconhecimento de que, no espaço, a divisão não é feita em quadrantes (como no plano), mas sim em octantes. Guimarães (2014) sublinha a importância de experiências espaciais consistentes para desenvolver o pensamento

geométrico, evidenciando a necessidade de estratégias pedagógicas que promovam a transição entre plano e espaço.

> **Pierre de Fermat:** Desculpa, Este prisma está aqui, certo? Neste quadrante. Mas ok está neste certo? É o primeiro.
>
> **Hypatia:** Primeiro quê?
>
> **Pierre de Fermat:** Quadrante
>
> **Hypatia:** Sim, sim
>
> **Pierre de Fermat:** Ok, então seria a base aqui neste quadrante.
>
> **Hypatia:** E o B também pertence, ou seja, tem que ser… É isto? É. Está em cima.

Na alínea 1.2, muitos alunos revelaram dificuldade em justificar a classificação de prisma quadrangular com base em propriedades geométricas formais. Em vez de recorrerem a critérios matemáticos, como a existência de duas bases planas, congruentes e paralelas, e de faces laterais retangulares, as justificações apresentadas foram muitas vezes vagas ou baseadas em contagens visuais.

Alguns alunos limitaram-se a afirmar que a figura era um prisma “porque tem quatro vértices” como referiu Pierre de Fermat ou “porque tem duas bases” como referiu Arquimedes, por exemplo, sem explicitar todas as suas características estruturais (Figura 19). Esta abordagem evidencia uma compreensão parcial dos conceitos geométricos, em que os alunos identificam aspetos superficiais sem os relacionar com propriedades mais profundas, conforme descreve Van Hiele (1999) nos níveis iniciais do pensamento geométrico. A ideia de Junqueira (1994) de que muitos alunos apresentam dificuldades em articular propriedades geométricas de forma lógica também reforça estes resultados.

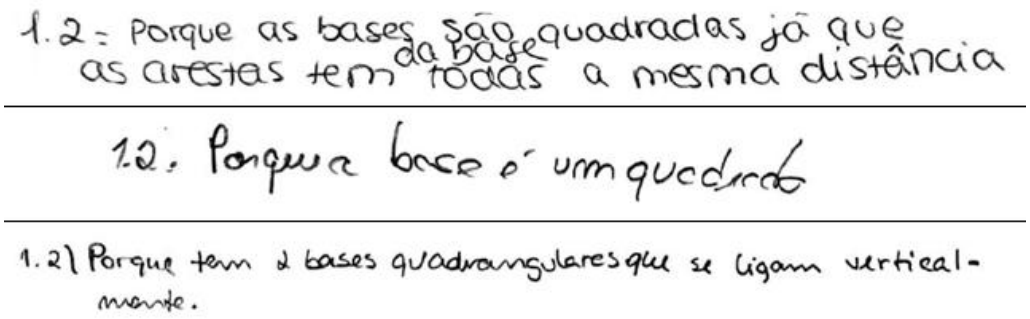


Figura 19 – Resposta à alínea 1.2 pelos grupos de Pedro Hispano e John Playfair, de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether e de Pitágoras e Galileu Galilei, respetivamente.

Estas respostas evidenciam fragilidade na compreensão do conceito de prisma e na articulação entre observação visual e linguagem matemática rigorosa. A tarefa, ao exigir essa justificação, permitiu identificar esta lacuna e reforçou a importância de trabalhar mais diretamente a definição formal das figuras geométricas no espaço, reforçando a importância de trabalhar definições formais e múltiplas representações no desenvolvimento do pensamento geométrico (Amado, 2022; Junqueira, 1994; Van Hiele, 1999).

Na questão 2, surgiram múltiplas dificuldades, tanto conceptuais como formais. Alguns alunos demonstraram dúvidas sobre o que é uma semirreta, confundindo-a com uma reta, um segmento de reta ou uma aresta. Além disso, a maioria dos grupos não justificou porque é que a condição determinada representava a semirreta pedida.

> **Cláudio Ptolomeu:** Os planos é que é em comum. A cena da semirreta…
>
> **Arquimedes:** A distância?
>
> **Cláudio Ptolomeu:** Não, isso é esta aqui. Isto é o quê? Aresta. Pois, isto tem faces… só que eu não sei como é que é a da semirreta.
>
> **Arquimedes:** Isto é uma aresta, uma aresta é uma semirreta.
>
> **Cláudio Ptolomeu:** Pronto, então temos que meter… o $y = 4$, né? E o $z = 4$, hum $x = 4$, não é? Estes dois são 4.
>
> **Arquimedes:** Só o z é que muda.
>
> **Cláudio Ptolomeu:** O z muda de 0 a 8. É isso.

Do ponto de vista algébrico, notou-se insegurança na escrita de condições que definem a semirreta, evidenciando limitações na articulação entre pensamento algébrico e geométrico (Amado, 2022; Guimarães, 2014). Muitos alunos escreveram intervalos

fechados (indicando início e fim) (Figura 20), a semirreta $\dot{G}B$ ao invés de $\dot{B}G$ (Figura 21) ou usaram desigualdades incompatíveis com a noção de direção infinita.

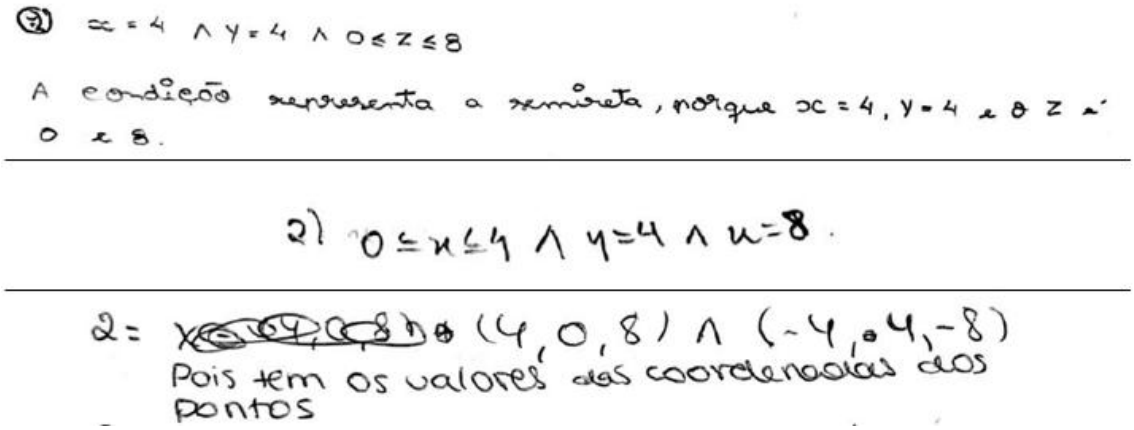


Figura 20 – Resposta à questão 2 pelos grupos de Arquimedes e Cláudio Ptolomeu, de Pitágoras e Galileu Galilei e de Pedro Hispano e John Playfair, respetivamente.

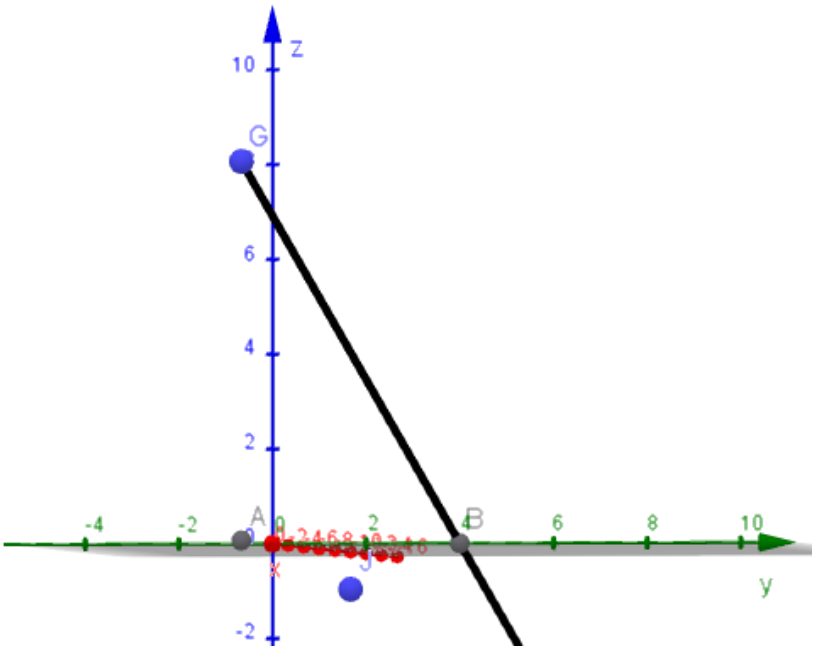


Figura 21 – Representação da semirreta pelo grupo de Pedro Hispano e John Playfair.

A questão 3 revelou dificuldades na leitura e interpretação de condições compostas por múltiplas equações e desigualdades, o que reflete desafios na articulação de diferentes representações e no raciocínio matemático necessário para relacionar conceitos algébricos e geométricos (Amado, 2022; Guimarães, 2014). Muitos alunos não conseguiram distinguir que estavam perante uma descrição algébrica de um subconjunto do espaço tridimensional ou identificar os pontos que obedeciam simultaneamente a todas as condições.

Ao analisar as respostas e as interações entre os alunos, concluí que estas dificuldades parecem estar mais relacionadas com a interpretação do enunciado do que com o domínio conceptual dos conteúdos, uma vez que os alunos conseguiram identificar corretamente pontos que satisfaziam cada condição individualmente, só que não responderam exatamente ao que era pedido (Figura 22).

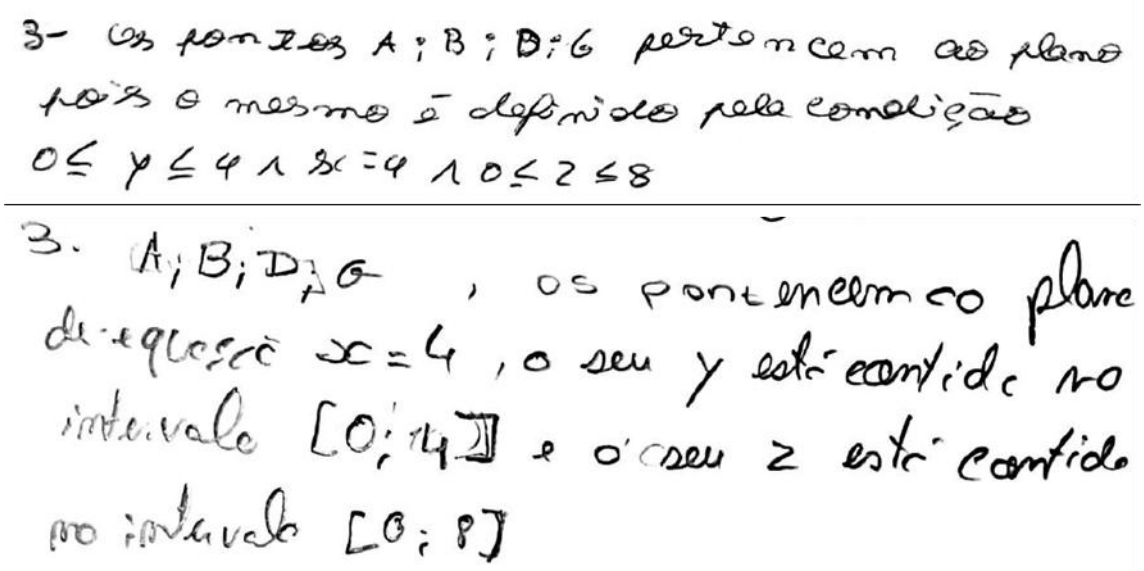


Figura 22 – Resoluções pelos grupos de Carl Gauss e Ada Lovelace e de Leonardo Fibonacci e Emmy Noether, respetivamente.

Alguns tentaram analisar os limites de forma isolada, sem compreender que o uso de conjunção (∧) exige o cruzamento de todas as condições (Figura 23). Verificou-se ainda falta de domínio na identificação de pontos num plano coordenado, o que levou a respostas parciais ou erradas.

David Hilbert: Ou, o 3 já sei qual é a cena, se quiserem pôr.

Euclides: Diz-me que é o B.

David Hilbert: O 3.

David Hilbert: Isto é o x, não é?

Joseph-Louis Lagrange: É.

David Hilbert: 4, pronto. Aqui, olha, tum, tum. Onde é que está o y? Então vai ser este, 4. Este e o z. Então, aqui é 4. Vai ser aqui, aqui, aqui e aqui.

Joseph-Louis Lagrange: Não, tu estás com lag.

Euclides: O quê?

Joseph-Louis Lagrange: Calma aí.

David Hilbert: Está aqui, olha.

Joseph-Louis Lagrange: O y só está entre 0 e 4.

David Hilbert: Eu já te disse. Oh, está aqui. 0, 4. Aqui é 4. E aqui, o outro vai ser de 0 a 8. Tens de pôr esta fase. É daqui. Aqui. Aqui, aqui. É esta parede.

Joseph-Louis Lagrange: Então é...

David Hilbert: Tenho de pôr B, o este, D e F. Porque não consigo ver o outro ponto.

Joseph-Louis Lagrange: yOz.

Euclides: B, C, F, D.

Joseph-Louis Lagrange: É yOz. Não.

David Hilbert: Tens de dizer os pontos, ó filho.

Joseph-Louis Lagrange: Ah, os pontos.

David Hilbert: Só que tens de substituir, não é? C, B, D, F. E vês qual é o do nosso e pões.

David Hilbert: Oh stora, esta juventude, esqueça.

Joseph-Louis Lagrange: C, B, D, F. Já está. Agora falta a 2.

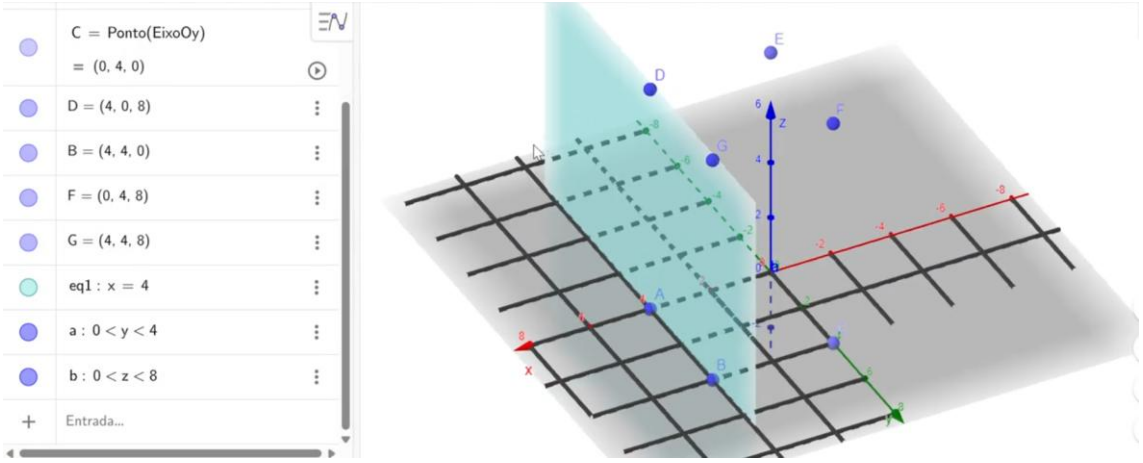


Figura 23 – Tentativa de visualizar a condição pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace.

A última questão exigia a aplicação do conceito de projeção ortogonal sobre um plano, bem como a determinação de uma equação de plano com base em três pontos. Vários alunos mostraram desconhecimento do procedimento para projetar um ponto sobre um plano horizontal, hesitando na identificação da nova coordenada.

Emmy Noether: Ortogonal é o quê?

Leonardo Fibonacci: Prontos, o 4 é o quê? Considera o ponto H resultante da projeção ortogonal. Oh stora…

Professora: Sim.

Leonardo Fibonacci: O que é uma projeção ortogonal? É a projeção do ponto aqui da origem, não é?

Professora: A projeção ortogonal? Depende, onde é que diz. É a projeção ortogonal onde?

Leonardo Fibonacci: Ah, do ponto, do ponto. Ok, desculpe.

Professora: No plano $z = 6$. Então, quer dizer que é como se pegasses no ponto e o subisses para o plano $z = 6$.

Emmy Noether: Ahh.

Leonardo Fibonacci: Não é reflexão?

Professora: Não.

[…]

Leonardo Fibonacci: Fica $(2, 2, 6)$.

No caso do exemplo apresentado na Figura 24, a análise do diálogo, permitiu-me verificar que os alunos compreenderam que as coordenadas do ponto estavam erradas através da visualização no *GeoGebra*.

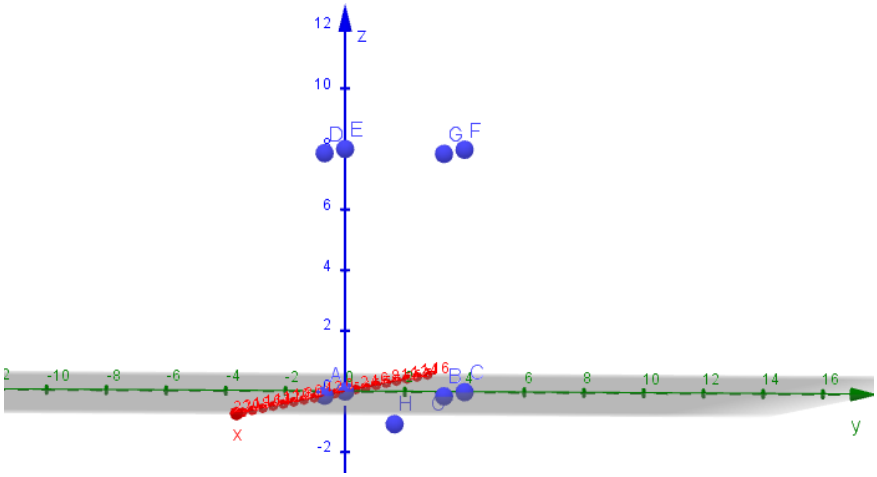


Figura 24 – Visualização do ponto H pelo grupo de Emmy Noether e Leonardo Fibonacci.

Além disso, foi comum a dificuldade em determinar o plano OBH, tanto pela identificação dos pontos como pela construção da equação. Alguns alunos confundiram o conceito de plano com face do prisma, ou usaram equações inadequadas (Figura 25).

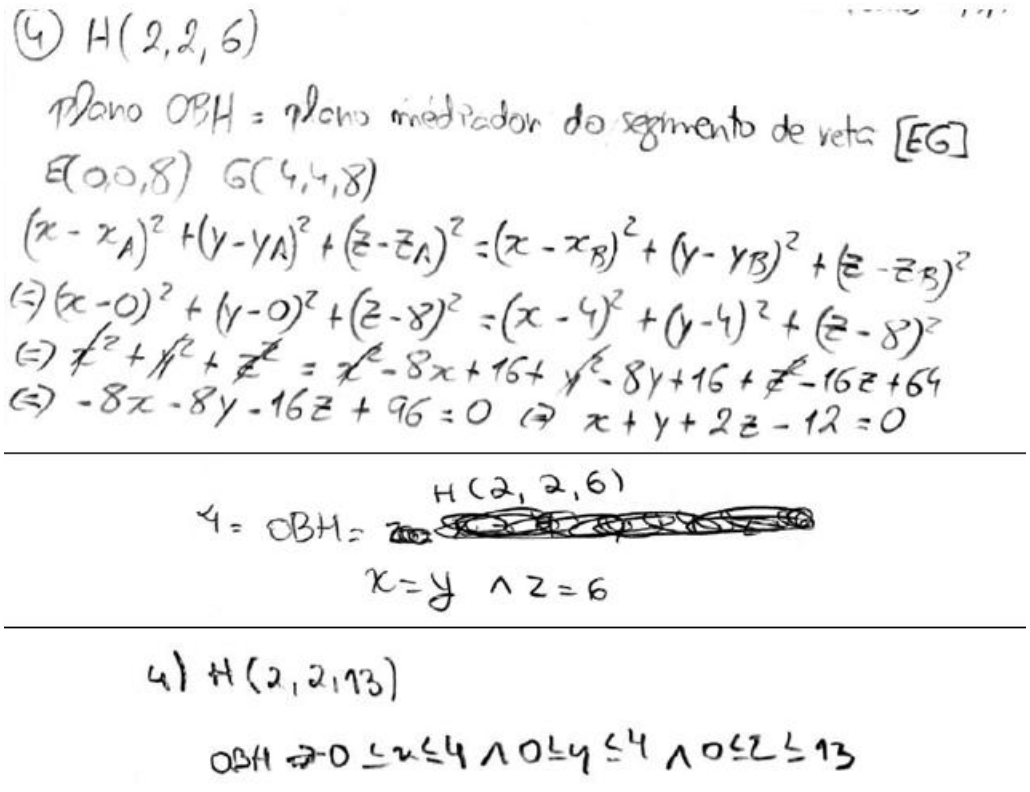


Figura 25 – Resoluções pelos grupos de René Descartes e Nathan Jacob Fine e de Pedro Hispano e John Playfair, respetivamente.

Ada Lovelace: O plano que defina o plano OBH? Não faz sentido, é um triângulo.

Ada Lovelace: É um triângulo, olha aí.

Carl Gauss: Oh stora? O que é a equação definida pelo plano OBH?

Professora: O que é que acham que é?

Carl Gauss: É um triângulo.

Professora: Onde é que está a questão?

Carl Gauss: É a última, a 4.

Professora: É a última, ok. Queres a projeção orto... que defina o plano OBH.

Professora: Plano OBH.

Leonardo Fibonacci: Plano OBH.

Carl Gauss: Ah, ok.

Professora: Percebeste?

Carl Gauss: Percebi.

Esta questão evidenciou lacunas na compreensão de planos no espaço tridimensional e na sua formalização algébrica.

Esta tarefa revelou um conjunto significativo de dificuldades dos alunos no domínio da Geometria Analítica no Espaço, sintetizadas no Quadro 6, com especial incidência na interpretação de condições espaciais, no uso da linguagem algébrica e na construção de objetos geométricos com recurso ao *GeoGebra*. As noções de volume, semirreta, projeção ortogonal, plano e sistema de coordenadas cartesianas no espaço surgiram frequentemente como obstáculos conceptuais. Ainda assim, a tarefa evidenciou também estratégias relevantes e progressos nos raciocínios dos alunos, possibilitados em grande parte pela interação com o ambiente digital.

Dificuldades observadas
Fórmula do volume (Desconhecimento da fórmula do volume de um prisma; Confusão com altura e área da base)
Conceito de *prisma quadrangular* (não saber o que é ou esquecer propriedades)
Interpretação das múltiplas condições em simultâneo
Justificação das coordenadas dos pontos A e F com base nas condições dadas no enunciado
Interpretação incorreta da orientação no espaço tridimensional (referência a "quadrante" em vez de "octante")
Justificação da classificação de prisma quadrangular com base em propriedades geométricas formais
Conceito de semirreta
Insegurança na escrita de condições que definem a semirreta (intervalos fechados, inversão de pontos, desigualdades incorretas)
Leitura e interpretação de condições compostas por múltiplas equações e desigualdades (listar pontos em vez do conjunto pedido)
Identificação de pontos num plano coordenado (definir os intervalos de cada uma das coordenadas dos pontos)
Desconhecimento do procedimento para projetar um ponto sobre um plano horizontal
Determinação do plano OBH (compreensão de planos no espaço tridimensional)

Quadro 6 – Dificuldades identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*.

5.2.2. Estratégias utilizadas

Tal como na Tarefa 1, o uso do *GeoGebra* foi central na validação de ideias, na experimentação e na tomada de decisões. Apesar das dificuldades encontradas, os alunos mobilizaram diversas estratégias que revelaram raciocínios matemáticos relevantes e ajustados à tarefa.

Uma das estratégias mais visíveis foi a **utilização de raciocínio dedutivo a partir de fórmulas conhecidas**. Vários grupos partiram da fórmula do volume de um prisma $(A_{base} \times h)$ para calcular a dimensão lateral do prisma, relacionando o valor do volume fornecido (128) com a altura (8) para deduzir que a área da base seria 16 (Figura 26). A partir daí, alguns alunos conseguiram calcular corretamente o lado da base quadrada.

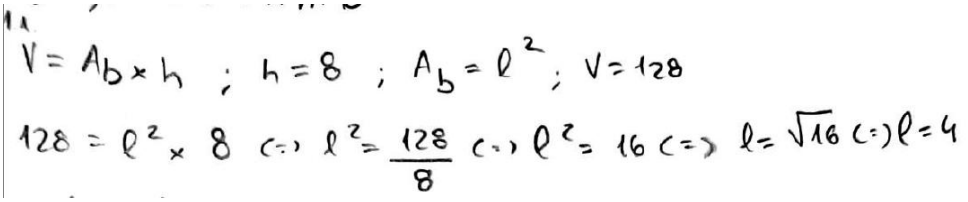


Figura 26 – Resolução pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace.

Outra estratégia recorrente foi o **raciocínio por exclusão de partes**, utilizado sobretudo para identificar coordenadas desconhecidas. Quando apenas faltava localizar um ou dois pontos, os alunos inferiram a sua posição com base nos que já tinham colocado e nas simetrias ou padrões da figura (Figura 27).

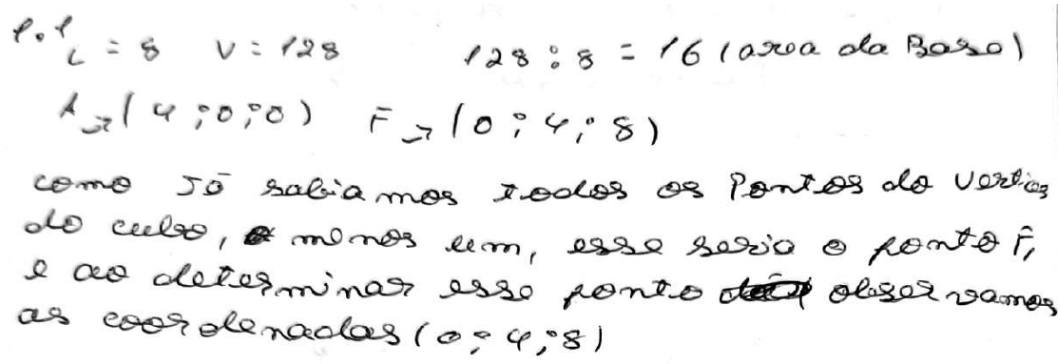


Figura 27 – Resolução pelo grupo de Ada Lovelace e Carl Gauss.

A **verificação visual no *GeoGebra*** foi uma ferramenta constante e poderosa. Os alunos olhavam para a figura em construção e usavam a visualização tridimensional para confirmar se os pontos, planos ou semirretas obedeciam às condições (Figura 28 e Figura 29). Essa observação guiava ajustes imediatos ou reformulações das ideias inicialmente propostas, destacando o papel das ferramentas tecnológicas na promoção do raciocínio espacial e na validação de construções matemáticas através da exploração visual e dinâmica (Amado, 2022; Jones & Tzekaki, 2016).

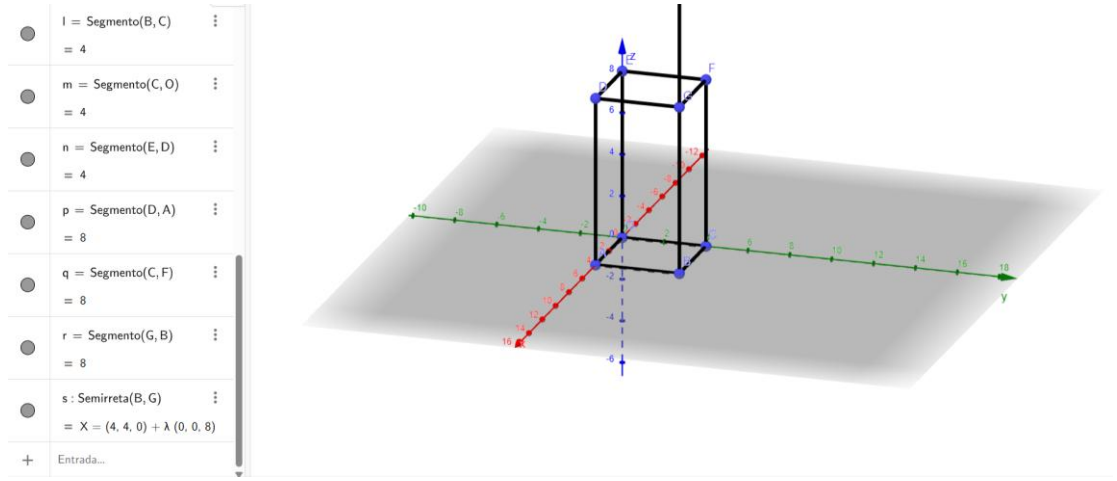


Figura 28 – Representação da semirreta $\dot{BG}$ pelo grupo de René Descartes e Nathan Jacob Fine para visualizar a semirreta e conseguir escrever a equação.

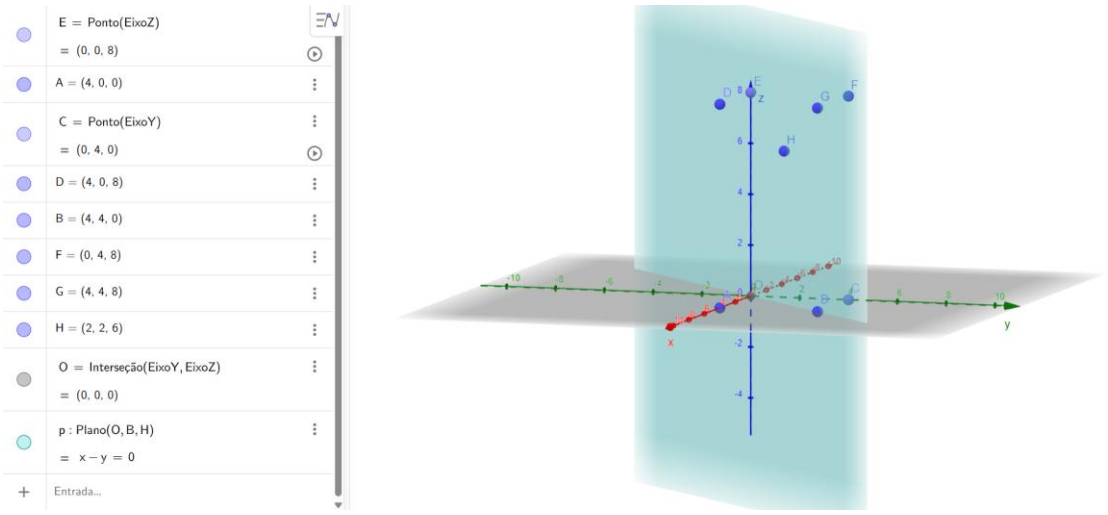


Figura 29 – Representação do plano OBH pelo grupo de Bernhard Riemann e Pierre Simon Laplace para verificar qual a equação do plano.

A **colaboração entre pares** ou em pequenos grupos favoreceu a verbalização dos raciocínios, com alunos a discutirem entre si as decisões a tomar, a partilharem dúvidas ou a sugerirem estratégias. Tal como destaca Amado (2022), estas interações entre alunos promovem a construção partilhada do conhecimento e favorecem a superação de dificuldades conceptuais através da comunicação e da troca de ideias. Essa dinâmica coletiva permitiu uma construção partilhada do conhecimento, ainda que com diferentes níveis de formalização.

> **Pierre de Fermat:** Sim, mas agora tens de escrever. Eu posso escrever, mas tu só tens de falar isso, mas de forma que faça um bocadinho mais sentido.
>
> **Hypatia:** Como o ponto A só pertence ao semieixo positivo?

Pierre de Fermat: Posso escrever?

Por fim, a estratégia de **tentativa-erro** com validação imediata no *GeoGebra* foi central na maioria dos grupos (Figura 30). Muitos alunos testaram coordenadas, condições ou expressões algébricas e ajustaram-nas com base no que observavam no ecrã. Embora nem sempre tenham fundamentado formalmente as suas escolhas, o ambiente digital permitiu-lhes experimentar e avançar progressivamente.

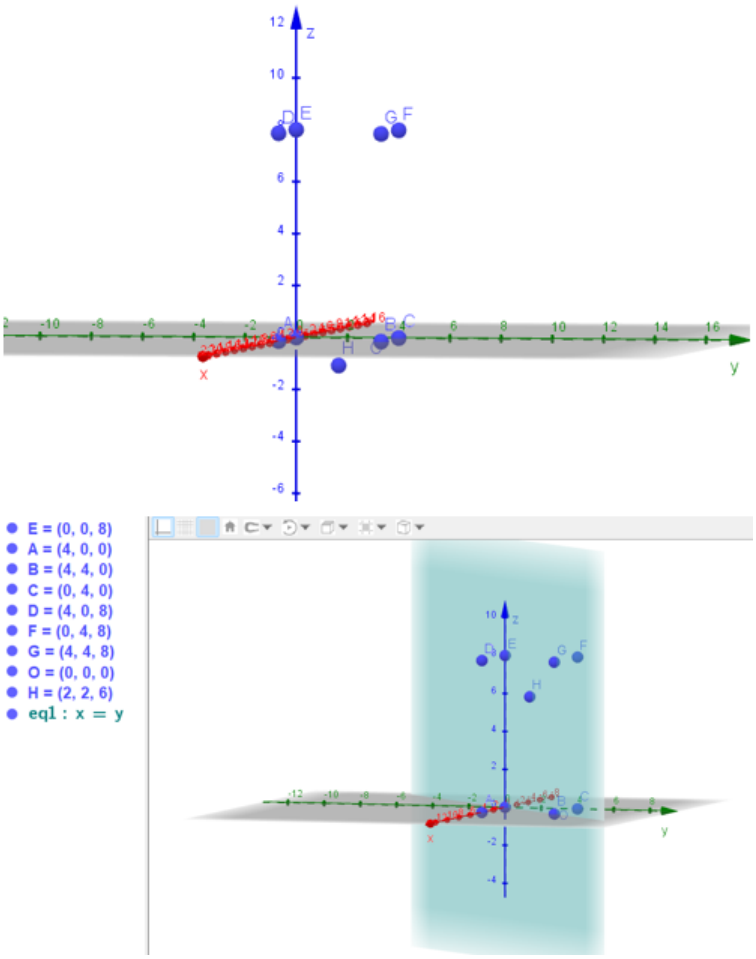


Figura 30 – Correção das coordenadas do ponto H após visualização no *GeoGebra* pelo grupo de Emmy Noether e Leonardo Fibonacci.

Estas estratégias, visíveis nos registos das respostas e nas verbalizações, revelam um envolvimento ativo com a tarefa e mostram como o *GeoGebra* pode potenciar a exploração, a colaboração e a autorregulação do pensamento matemático. A mediação tecnológica permitiu aos alunos explorar, testar e refletir sobre as suas próprias produções, favorecendo processos de autorregulação (Amado, 2022). Do mesmo modo, Jones e Tzekaki (2016) destacam o contributo do *GeoGebra* para a promoção do

raciocínio espacial e para a construção partilhada do conhecimento em contextos colaborativos.

A discussão em pares e o apoio do professor mostraram-se cruciais para transformar o ambiente digital num espaço de aprendizagem. O uso do *GeoGebra* potenciou o diálogo, promoveu o questionamento e incentivou a justificação de estratégias.

O Quadro 7 reúne as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para cada uma das dificuldades observadas.

Dificuldades observadas	**Estratégias utilizadas pelos alunos**
Fórmula do volume (Desconhecimento da fórmula do volume de um prisma; Confusão com altura e área da base)	Colaboração entre pares; raciocínio dedutivo a partir de fórmulas conhecidas
Conceito de *prisma quadrangular* (não saber o que é ou esquecer propriedades)	Colaboração entre pares; verificação visual no *GeoGebra*
Interpretação das múltiplas condições em simultâneo	Raciocínio por exclusão de partes
Justificação das coordenadas dos pontos A e F com base nas condições dadas no enunciado	Discussão em pares (articulação de raciocínios e justificar escolhas)
Interpretação incorreta da orientação no espaço tridimensional (referência a “quadrante” em vez de “octante”)	Colaboração entre pares
Justificação da classificação de prisma quadrangular com base em propriedades geométricas formais	Discussão em pares; verificação visual no *GeoGebra*
Conceito de semirreta	Colaboração entre pares; tentativa-erro
Insegurança na escrita de condições que definem a semirreta (intervalos fechados, inversão de pontos, desigualdades incorretas)	Verificação visual no *GeoGebra*
Leitura e interpretação de condições compostas por múltiplas equações e desigualdades (listar pontos em vez do conjunto pedido)	Discussão em pares
Identificação de pontos num plano coordenado (definir os intervalos de cada uma das coordenadas dos pontos)	Verificação visual no *GeoGebra*
Desconhecimento do procedimento para projetar um ponto sobre um plano horizontal	Tentativa-erro
Determinação do plano OBH (compreensão de planos no espaço tridimensional)	Verificação visual no *GeoGebra*

Quadro 7 – Dificuldades e estratégias identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*.

5.2.3. *Feedback* recolhido pelo professor

A análise das interações dos alunos na resolução da Tarefa 2 permitiu recolher *feedback* valioso para orientar a minha prática pedagógica. As dificuldades conceptuais que emergiram, em articulação com as estratégias utilizadas permitiram-me, enquanto professora, identificar lacunas e ajustar a minha intervenção. Por exemplo, quando os alunos hesitaram na definição de uma semirreta ou expressaram dúvidas quanto à projeção ortogonal, essas dificuldades tornaram-se imediatamente evidentes quando tentavam formalizá-las no *GeoGebra*:

> **Leonardo Fibonacci:** O que é uma projeção ortogonal? É a projeção do ponto aqui da origem, não é?
>
> **Professora:** A projeção ortogonal? Depende, onde é que diz. É a projeção ortogonal onde?
>
> **Leonardo Fibonacci:** Ah, do ponto, do ponto. Ok, desculpe.
>
> **Professora:** No plano $z = 6$. Então, quer dizer que é como se pegasses no ponto e o subisses para o plano $z = 6$.
>
> **Emmy Noether:** Ahh.
>
> **Leonardo Fibonacci:** Não é refle…?

Este episódio, em conjunto com o exemplo do grupo de Emmy Noether e Leonardo Fibonacci que representaram de forma errada o ponto H (Figura 24), por também não terem bem presente o que é uma projeção ortogonal, mostrou-me que os alunos confundem projeção ortogonal com reflexão, pelo que precisam de consolidar conceitos básicos de Geometria. Desta forma, percebi que devo trabalhar mais estes conceitos que assumia como adquiridos.

A interação dos alunos com o ambiente digital revelou tentativas de formalização ainda em desenvolvimento, como o uso incorreto de símbolos algébricos, a escolha inadequada de intervalos ou a construção incompleta de planos, refletindo os níveis de pensamento geométrico descritos por Van Hiele (1999) e os obstáculos visuais apontados por Junqueira (1994). Estes erros, que em papel poderiam passar despercebidos, foram diretamente observáveis na interface do *software*.

Além disso, o *GeoGebra* funcionou como amplificador das hesitações e progressos dos alunos. Através das reformulações sucessivas, da experimentação visual e da validação instantânea, tornou-se possível perceber se os alunos estavam apenas a seguir instruções ou a compreender realmente o que estavam a construir, em consonância com Jones e Tzekaki (2016) e Amado (2022) referem sobre o papel da exploração visual e da validação dinâmica no desenvolvimento do raciocínio. Em muitos casos, a necessidade de justificar construções perante os colegas ou perante a professora levou à verbalização de raciocínios matemáticos mais estruturados:

> **Professora:** Não. Tu tens de justificar porque é que a tua condição representa aquela semirreta.
>
> **Carl Gauss:** Aquela? Ahh...
>
> **Professora:** Sim, porque é que a condição que tu dizes que é, porque é que é essa a condição e não é outra qualquer.
>
> **Carl Gauss:** Porque começa no B e passa no G.
>
> **Professora:** Pronto, é isso que tens de dizer. Não é para explicares porque é que isso é uma semirreta. É porque é que a condição que tu disseste representa isso.

Nesta situação, percebi que preciso de insistir mais na argumentação para justificar escolhas matemáticas e não apenas na identificação correta de pontos, já que os alunos conseguem chegar ao pretendido, mas não sabem como o justificar formalmente. Esta conclusão saiu reforçada nas respostas finais escritas pelos alunos (Figura 17, Figura 18 e Figura 19), onde apenas apresentaram os cálculos ou respostas vagas.

No caso do exemplo já apresentado na secção 5.2.1, em que os alunos Cláudio Ptolomeu e Arquimedes discutiram se a base do prisma quadrangular tinha necessariamente de ser um quadrado, permitiu-me recolher *feedback* sobre as conceções dos alunos:

> **Cláudio Ptolomeu:** Ok, hum… vamos ver, 3 vezes 3… ok, tem que ser 4. Ou seja, o A vai estar no 4 e o…. Calma, exato.
>
> **Arquimedes:** De onde é que tiraste isto?
>
> **Cláudio Ptolomeu:** Hã?
>
> **Arquimedes:** De onde tiraste que tinha de ser 4? Aqui nunca diz….

Cláudio Ptolomeu: Então, se a altura é 8... tens que testar os números para dar 128.

Arquimedes: Está bem, mas quem é que disse que o $[AO]$ e o $[OC]$ são idênticos?

Cláudio Ptolomeu: Eu não sei. Tu sabes que as bases são o A e o C e depois diz que o A é o semieixo positivo de Ox e o C é o semieixo positivo de Oy. Para mim é um quadrado, certo? Ou seja, lado é igual ao outro.

Arquimedes: Quadrado?

Cláudio Ptolomeu: A área da base, se é um prisma quadrangular, é um quadrado. Está bem, mas...

Arquimedes: Não, está certo.

Este diálogo mostrou-me ainda que os alunos assumem frequentemente condições não explicitadas, pelo que seria necessário trabalhar mais a interpretação de problemas e argumentação matemática baseada em justificações formais. Relativamente à interação entre os alunos, foi útil para conseguirem organizar o pensamento para formalizar a escrita, o que me permitiu saber as conceções dos alunos e as lacunas existentes na compreensão geométrica dos mesmos.

O ambiente digital proporcionado pelo *GeoGebra* também facilitou a minha intervenção pedagógica. Ao observar os ecrãs dos alunos, pude intervir de forma pontual e direcionada, formulando questões que ajudassem os alunos a identificar os seus próprios erros e a reformular estratégias. Em vez de fornecer respostas, pude guiar o raciocínio, favorecendo a autonomia e o desenvolvimento do pensamento matemático. Esta abordagem vai ao encontro do que Brookhart (2017) define como *feedback* formativo, orientado para a regulação da aprendizagem, e do que Pollock (2011) defende sobre o papel das questões orientadoras na promoção da reflexão e da autorregulação.

Também o episódio já mencionado na secção 5.2.2, do grupo de Pierre de Fermat e Hypatia, mostrou como a colaboração em pares ajudou a clarificar raciocínios, mesmo quando a linguagem não é totalmente precisa:

Pierre de Fermat: Sim, mas agora tens de escrever. Eu posso escrever, mas tu só tens de falar isso, mas de forma que faça um bocadinho mais sentido.

Hypatia: Como o ponto A só pertence ao semieixo positivo?

Pierre de Fermat: Posso escrever?

Aqui, ficou percetível que a cooperação em pares promoveu a verbalização e o confronto de ideias, mas nem sempre garante precisão conceptual, já que é notória a dificuldade em enunciar corretamente propriedades geométricas, o que reforça a necessidade de trabalhar mais a expressão matemática oral e escrita com os alunos. Também percebi que estas discussões podem ter um papel importante na melhoria da linguagem matemática, uma vez que os próprios alunos perceberam que a forma como estavam a falar não era a mais apropriada como resposta.

Tal como na Tarefa 1, o trabalho dos alunos nesta tarefa revelou-se particularmente útil para efeitos de diagnóstico e intervenção pedagógica, o que enfatiza a importância do *feedback* formativo como regulador da aprendizagem (Brookhart, 2017). O *GeoGebra*, enquanto ferramenta digital de construção geométrica, permitiu tornar visíveis os raciocínios dos alunos em tempo real, tanto através das suas ações no ecrã como das verbalizações associadas ao processo de construção.

Do ponto de vista pedagógico, esta tarefa destacou-se por tornar visível o processo de construção do conhecimento. O *GeoGebra* revelou-se uma ferramenta poderosa ao permitir que os erros fossem detetados visualmente, que as hipóteses fossem testadas em tempo real e que os alunos pudessem experimentar, errar e reformular.

O *GeoGebra* revelou-se, assim, não apenas um instrumento técnico, mas uma verdadeira ferramenta de acesso ao raciocínio, tornando o processo de aprendizagem observável, orientável e, acima de tudo, formativo. Esta perspetiva está de acordo com Brookhart (2017), que sublinha a importância do *feedback* contínuo e regulador, e com Amado (2022), que enfatiza como ferramentas tecnológicas permitem aos alunos explorar, testar e construir conhecimento de forma ativa e reflexiva.

Tal como na Tarefa 1, sintetizei as dificuldades detetadas, estratégias utilizadas e as respetivas implicações pedagógicas no Quadro 8 para permitir uma melhor perceção daquilo que obtive na análise das interações e resoluções dos alunos.

Dificuldades observadas	Estratégias utilizadas pelos alunos	Implicações pedagógicas
Fórmula do volume (Desconhecimento da fórmula do volume de um prisma; Confusão com altura e área da base)	Colaboração entre pares; raciocínio dedutivo a partir de fórmulas conhecidas	Recordar a fórmula do volume de um prisma e a sua aplicação em diferentes contextos
Conceito de *prisma quadrangular* (não saber o que é ou esquecer propriedades)	Colaboração entre pares; verificação visual no *GeoGebra*	Trabalhar a definição de prisma, distinguindo os vários tipos
Interpretação das múltiplas condições em simultâneo	Raciocínio por exclusão de partes	Promover a leitura e interpretação de restrições algébricas e geométricas
Justificação das coordenadas dos pontos A e F com base nas condições dadas no enunciado	Discussão em pares (articulação de raciocínios e justificar escolhas)	Criar tarefas que desenvolvam a argumentação e incentivem a explicitação de raciocínios
Interpretação incorreta da orientação no espaço tridimensional (referência a “quadrante” em vez de “octante”)	Colaboração entre pares	Usar representações visuais que ajudem a fixar a terminologia correta
Justificação da classificação de prisma quadrangular com base em propriedades geométricas formais	Discussão em pares; verificação visual no *GeoGebra*	Reforçar a articulação entre observação visual e linguagem matemática rigorosa
Conceito de semirreta	Colaboração entre pares; tentativa-erro	Reforçar conceitos básicos de Geometria (reta, semirreta, segmento), propondo tarefas que evidenciem as diferenças
Insegurança na escrita de condições que definem a semirreta (intervalos fechados, inversão de pontos, desigualdades incorretas)	Verificação visual no *GeoGebra*	Trabalhar a tradução entre representações gráficas e algébricas
Leitura e interpretação de condições compostas por múltiplas equações e desigualdades (listar pontos em vez do conjunto pedido)	Discussão em pares	Promover a interpretação de sistemas de inequações e visualização dos conjuntos que satisfazem várias condições simultâneas
Identificação de pontos num plano coordenado (definir os intervalos de cada uma das coordenadas dos pontos)	Verificação visual no *GeoGebra*	Reforçar a leitura de condições em linguagem algébrica
Desconhecimento do procedimento para projetar um ponto sobre um plano horizontal	Tentativa-erro	Usar tarefas práticas e visuais para diferenciar projeção de reflexão
Determinação do plano OBH (compreensão de planos no espaço tridimensional)	Verificação visual no *GeoGebra*	Reforçar a determinação de equações de planos a partir de pontos dados

Quadro 8 – Dificuldades, estratégias e implicações pedagógicas identificadas na resolução da Tarefa 2 com recurso ao *GeoGebra*.

5.3. Perceções dos alunos relativamente ao uso do *GeoGebra*

Com o intuito de compreender o contributo da utilização do *GeoGebra* na aprendizagem em Geometria Analítica no Plano e no Espaço, apliquei um questionário (Apêndice V – Questionário) aos alunos após a realização das duas tarefas propostas. As respostas recolhidas permitiram-me analisar quantitativa e qualitativamente as perceções dos alunos, revelando não só os benefícios reconhecidos, mas também as dificuldades e sugestões identificadas ao longo do processo.

De forma geral, os dados obtidos evidenciaram uma perceção positiva quanto à utilização do *GeoGebra*. Cerca de 74% dos alunos assumiram ter dificuldades em Geometria, sendo que destes todos assumiram que as suas dificuldades se centram na Geometria Analítica no Espaço e metade se centram nos dois domínios (plano e espaço). Estes dados refletem diretamente os desafios observados na Tarefa 2, onde surgiram mais dificuldades do que na Tarefa 1, especialmente na interpretação de condições espaciais, construção de objetos tridimensionais e formulação simbólica de equações.

A comparação entre as respostas à afirmação "*Visualizo e represento figuras no plano e no espaço…"*, com e sem a utilização do *GeoGebra*, revela uma diferença significativa na perceção da dificuldade dos alunos. Nos níveis 1 (Muita Dificuldade) e 2 (Dificuldade), apenas 8,7% dos alunos escolheram estas opções com *GeoGebra*, contrastando com 26% no contexto sem esta ferramenta, o que evidencia uma redução nas perceções mais negativas com o uso do *software*. Já nos níveis 4 (Facilidade) e 5 (Muita facilidade), os valores aumentam significativamente com o uso do *GeoGebra*, 78,3% contra 47,8%. Estes resultados confirmam o que foi visível nas tarefas, sobretudo nas estratégias de validação visual que os alunos utilizaram em ambas as tarefas, permitindo-lhes perceber rapidamente se as construções estavam corretas, como ilustrado no Gráfico 2.

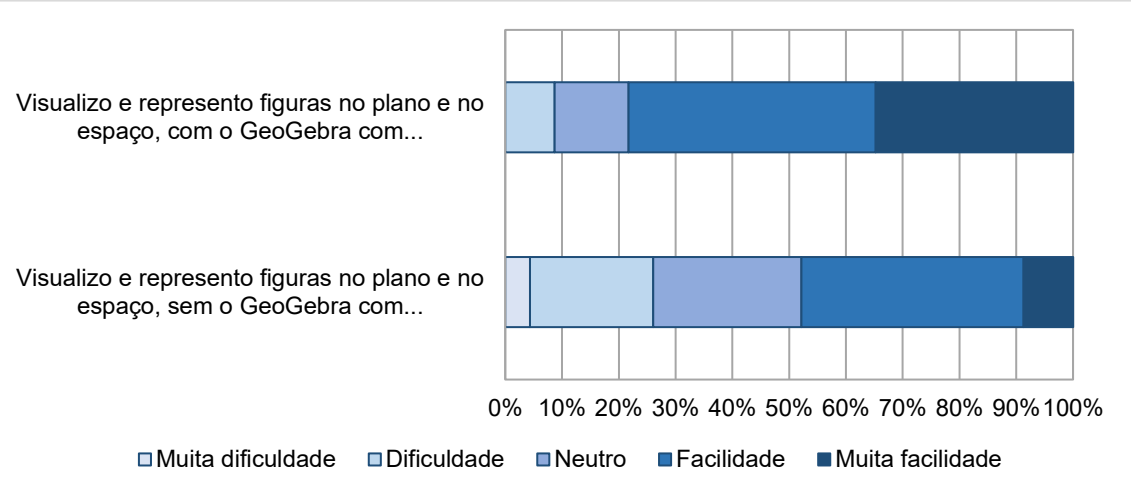


Gráfico 2 – Respostas à questão "O *GeoGebra* ajudou-me a visualizar melhor os objetos no espaço".

A maioria dos alunos reconheceu que o *software* lhes permitiu explorar diferentes formas de resolver o mesmo problema ($86{,}97\%$), acompanhar o seu raciocínio ($78{,}26\%$ "Sim") e compreender melhor conceitos geométricos ($65{,}21\%$). Por outro lado, os resultados mostraram que o programa foi menos eficaz na identificação de erros ou dificuldades nas resoluções, com $73{,}91\%$ dos alunos a responderem negativamente quanto a esse aspeto. Esta conclusão reforça o que foi observado na Tarefa 2, onde muitos alunos corrigiram erros visuais, mas nem sempre souberam justificar formalmente as suas escolhas ou estratégias.

Apenas $21{,}74\%$ dos alunos indicaram ter utilizado estratégias diferentes das habituais em papel, o que aponta para uma manutenção de hábitos anteriores, mesmo num ambiente digital. Isto reforça a importância de, enquanto docente, promover uma integração pedagógica mais estruturada do *GeoGebra*, orientando os alunos para um uso mais exploratório e autorreflexivo da ferramenta.

As respostas às questões relacionadas com a interação entre os alunos e a perceção do professor indicam resultados relativamente equilibrados. Quando questionados sobre se, durante a discussão com o colega, conseguiram identificar formas de pensar ou resolver diferentes das suas, $43{,}48\%$ dos alunos responderam afirmativamente. Este dado pode sugerir que o trabalho colaborativo, tal como foi conduzido, não promoveu de forma suficientemente clara a troca de estratégias ou a reflexão conjunta, indo ao encontro do que Amado (2022) sublinha sobre a necessidade de promover interações que favoreçam a construção partilhada do conhecimento. Já quanto à capacidade de o professor perceber o raciocínio e as dificuldades dos alunos com base naquilo que produziram no *GeoGebra*, $47{,}83\%$ dos alunos consideraram que sim. Estes resultados

mostram uma perceção dividida quanto à eficácia do *GeoGebra* como meio de comunicação pedagógica, o que pode indicar a necessidade de um maior acompanhamento ou de instruções mais explícitas sobre como os alunos devem utilizar a ferramenta para expressar o seu pensamento matemático. Estes resultados salientam que a eficácia das ferramentas tecnológicas depende de uma orientação clara e de tarefas que promovam a expressão e partilha de raciocínios (Amado, 2022).

As respostas abertas do questionário ofereceram uma visão mais aprofunda sobre as perceções dos alunos, complementando os dados quantitativos. Muitos alunos referiram que o *GeoGebra* lhes permitiu ter "melhor visualização das figuras" (A15)[5] ou "Me ajudou a entender como vejo os pontos no espaço" (A16) principalmente na Geometria Analítica no Espaço, o que reforça o papel da visualização dinâmica na consolidação de conceitos geométricos. Destes alunos, $26{,}08\%$ referiram que os ajudou a perceber também se as fórmulas correspondiam aos planos, retas ou espaços pedidos.

Vários alunos destacaram o facto de o *GeoGebra* permitir experimentar livremente, cometer erros e aprender com eles. Referiram, por exemplo que, "Pois, no *GeoGebra* podia criar as figuras e visualizá-las que no papel é diferente pois não tem exatidão, na aplicação através da sua visualização exata é possível ter a certeza dos que se está a fazer sem medos" (A23). Esta capacidade de visualização direta foi identificada como crucial para a compreensão de conteúdos que anteriormente suscitavam dificuldades, em linha com Jones e Tzekaki (2016) afirmam sobre o papel da visualização e da exploração dinâmica na superação de obstáculos conceptuais.

Apesar da avaliação globalmente positiva, também surgiram menções a dificuldades técnicas, sobretudo na introdução de coordenadas ou na navegação no espaço tridimensional. Alguns alunos referiram que o uso do *GeoGebra* exigia mais concentração porque "Não sabia muito bem o que devia e como devia mudar certas coisas dentro do *GeoGebra*" (A21) ou que "Na construção de imagens e figuras é difícil a localização das ferramentas do mesmo para poder resolver o exercício" (A23), o que aponta para a necessidade de maior familiarização com a ferramenta. Como salienta Amado (2022), a apropriação de ferramentas tecnológicas é um processo que exige tempo e prática para que estas deixem de ser apenas instrumentos técnicos e passem a apoiar efetivamente a construção do raciocínio matemático.

[5] Uma vez que o questionário foi respondido de forma anónima, os alunos serão identificados pela ordem a que responderam. Por exemplo, A18 corresponde ao décimo oitavo aluno a responder ao questionário.

Assim, os dados qualitativos evidenciam que os alunos reconheceram no *GeoGebra* um aliado na compreensão da Geometria, especialmente pela possibilidade de testar, visualizar e corrigir em tempo real. As suas vozes reforçam a importância de integrar ambientes digitais na aprendizagem, desde que acompanhados pela intervenção pedagógica adequada, destacando o papel dos AGD e do *feedback* orientado para apoiar o avanço do raciocínio geométrico dos alunos (Brookhart, 2017; Jones & Tzekaki, 2016).

5.4. Síntese global da análise

A análise conjunta das Tarefas 1 e 2, complementada pelas respostas ao questionário final, revelou *que* o *GeoGebra* permitiu tornar visíveis raciocínios, estratégias e erros dos alunos e favoreceu momentos de experimentação, validação e revisão, essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A Tarefa 1, evidenciou dificuldades ligadas à interpretação de enunciados, linguagem matemática e construção de regiões com desigualdades. Enquanto a Tarefa 2 revelou dificuldades mais profundas, relacionadas com a compreensão do sistema de coordenadas tridimensional, identificação de planos, projeções ortogonais e escrita de condições algébricas.

Os dados do questionário mostraram que os alunos valorizam o *GeoGebra* pela sua capacidade de tornar visíveis objetos geométricos e apoiar o raciocínio, em consonância com Jones e Tzekaki (2016) e Guimarães (2019) afirmam sobre o valor da visualização e das representações dinâmicas no pensamento geométrico. No entanto, a sua utilização enquanto instrumento de autoavaliação e formalização mostrou-se limitada, sendo este um ponto a desenvolver em intervenções futuras, o que evidencia a necessidade de acompanhamento pedagógico estruturado e de uma articulação clara entre ensino, aprendizagem e avaliação, como sugerem Lima et al. (2022), que defendem que a avaliação deve integrar-se de forma contínua no processo de aprendizagem para apoiar o desenvolvimento conceptual dos alunos.

De forma a sintetizar a articulação entre as tarefas propostas, as estratégias observadas e as perceções dos alunos, apresento o Quadro 9:

Categoria	Tarefa 1 (Plano)	Tarefa 2 (Espaço)	Perceções dos alunos (questionário)
Visualização geométrica	Validação visual de regiões, círculos e inequações	Exploração de pontos, planos e semirretas no espaço 3D	78,26% disseram ter mais facilidade com o *GeoGebra*; 26,09% referiram ver melhor o que estavam a fazer
Linguagem e vocabulário	Dificuldades com o significado de termos como "semieixo", "dista", "bissetriz", etc.	Confusões com termos como "plano", "projeção ortogonal", "octantes"	Alguns alunos mencionaram dificuldade na identificação de coordenadas e condições algébricas
Simbolização algébrica	Erros em inequações, interseção vs. união	Uso incorreto de desigualdades, equações de plano e definição de semirretas	Apenas 21,74% dos alunos indicaram mudança de estratégia; 73,91% disseram que não identificaram erros sozinhos
Raciocínio colaborativo	Discussão frequente entre pares para resolver e interpretar enunciados	Tentativas de justificação com apoio dos colegas e do professor	Apenas 11,82% alunos referiram ter reconhecido estratégias diferentes nas interações com colegas
Exploração e tentativa-erro	Testes sucessivos de condições com *feedback* visual imediato	Correções com base no que era visível no ecrã (ex.: ponto H)	*GeoGebra* visto como útil para experimentar e perceber "se estavam no bom caminho" (78,26% "sim")

Quadro 9 – Articulação entre Tarefas, Estratégias e Perceções dos Alunos.

Em síntese, os dados recolhidos ao longo da intervenção permitem afirmar que o *GeoGebra* se constitui como uma ferramenta pedagógica com potencial de tornar visível o pensamento dos alunos e de apoiar o professor na identificação de dificuldades e na promoção de aprendizagens mais significativas em Geometria Analítica.

6. Conclusões e Recomendações

Neste capítulo, começo por fazer uma síntese do meu estudo, relembrando as minhas questões orientadoras e os objetivos definidos. De seguida, apresento as principais conclusões que obtive, organizadas de acordo com as duas questões de investigação que estabeleci inicialmente e sempre articuladas com a literatura revista. Posteriormente, desenvolvo uma reflexão global sobre o estudo, incluindo as limitações encontradas ao longo da sua realização. Por fim, apresento recomendações para a prática pedagógica e sugestões para investigações futuras.

O meu estudo surgiu como forma de dar resposta à questão: "Como é que o *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente aos conhecimentos matemáticos adquiridos por parte dos alunos em Geometria?". Para isso, defini como objetivo principal compreender de que forma é que o uso do *GeoGebra* pode fornecer *feedback* ao professor relativamente às aprendizagens matemáticas dos alunos em conteúdos relacionados com a Geometria. Posto isto, defini três objetivos específicos: (i) Identificar as principais dificuldades dos alunos em tarefas de Geometria; (ii) Analisar de que forma a utilização do *GeoGebra* evidencia as dificuldades dos alunos; (iii) Compreender de que forma o uso do *GeoGebra* permite identificar as diferentes estratégias utilizadas dos alunos – e duas questões de investigação orientadoras:

1. Quais são as principais dificuldades dos alunos em Geometria na utilização do *GeoGebra*?
2. Como é que o *feedback* fornecido pelo *GeoGebra* pode contribuir para a tomada de decisões pedagógicas pelo professor?

Dividi a minha intervenção pedagógica em dois momentos principais, correspondentes às tarefas propostas em contexto de sala de aula, complementados pela aplicação de um questionário final para ter melhor noção das perceções dos alunos. Com a análise conjunta destes instrumentos, consegui interpretar o raciocínio dos alunos, as dificuldades que surgiram, as estratégias desenvolvidas e as perceções que partilharam relativamente ao uso do *GeoGebra*.

Tendo por base todas estas informações recolhidas, de seguida apresento as minhas conclusões relativas a este estudo.

6.1. Conclusões do estudo

Nesta secção, apresento as conclusões que dão resposta às minhas questões orientadoras da investigação.

6.1.1. Quais são as principais dificuldades dos alunos em Geometria na utilização do *GeoGebra*?

Na Tarefa 1, relacionada com o tópico Geometria Analítica no Plano, os principais obstáculos foram relacionados com a interpretação de enunciados, o vocabulário matemático e a simbolização algébrica, nomeadamente no uso de inequações e na distinção entre união e interseção de regiões.

Já na Tarefa 2, relacionada com o tópico Geometria Analítica no Espaço, as dificuldades foram mais profundas e incidiram na compreensão do sistema de coordenadas tridimensional, na identificação de planos e projeções ortogonais e na escrita de condições algébricas.

Desta forma, percebi que as maiores dificuldades dos alunos se concentraram na transição entre o plano e o espaço, confirmando a ideia de que a visualização tridimensional continua a constituir um dos desafios mais significativos para os alunos (Jones & Tzekaki, 2016). Além disso, a dificuldade em formalizar condições algébricas, tanto no plano como no espaço, foi recorrente.

As perceções recolhidas através do questionário confirmam estas dificuldades, uma vez que alguns alunos reconheceram limitações no uso técnico do *software*, sobretudo no espaço 3D. Esta constatação ajuda a compreender porque é que, mesmo quando havia validação visual disponível, persistiram erros conceptuais e justificações incompletas, evidenciando a necessidade de familiarização com o ambiente digital antes de tarefas mais complexas (Carvalho & Silva et al., 2023).

6.1.2. Como é que o *feedback* fornecido pelo *GeoGebra* pode contribuir para a tomada de decisões pedagógicas pelo professor?

Nas duas tarefas, o *GeoGebra* potenciou a visualização da construção geométrica, sobretudo quando os alunos o utilizaram para testar hipóteses, explorar condições e corrigir erros a partir da observação direta dos objetos construídos. Este papel de exploração e verificação vai ao encontro do que defendem Jones e Tzekaki (2016),

relativamente ao contributo das ferramentas digitais para o desenvolvimento do raciocínio espacial, e Junqueira (2020), que salienta a importância da experimentação e da reformulação para a consolidação conceptual.

Quanto às perceções dos alunos, os dados do questionário confirmam o reconhecimento da utilidade do *GeoGebra* na clarificação de conceitos e na representação geométrica. Muitos alunos afirmaram que o *software* os ajudou a perceber melhor o que estavam a fazer. Esta perceção está em linha com as estratégias que observei, onde os alunos usaram o *GeoGebra* para confirmar posições de pontos, testar inequações e validar regiões construídas.

Ficou ainda claro que o *feedback* visual e imediato oferecido pelo *software* foi igualmente valorizado, já que surgiram comentários como "conseguia visualizar os pontos, retas, planos etc melhor" (A10) e "ajudou-me a perceber melhor as dúvidas que tinha acerca de planos no espaço" (A17) que evidenciam que o *GeoGebra* promove momentos de autorregulação da aprendizagem (Brookhart, 2017; Pollock, 2011).

Para mim, enquanto professora, o *software* funcionou como uma verdadeira janela para o raciocínio dos alunos. Ao ter a possibilidade de observar em tempo real as suas ações, hesitações e reformulações, consegui intervir de forma mais ajustada, formulando questões que os orientassem verdadeiramente e conduzindo discussões coletivas que promoveram o desenvolvimento de raciocínios. Esta experiência confirma a importância do papel do professor na mediação das aprendizagens, como defendem Ponte et al. (2013), e reforça que o *GeoGebra* pode ser um recurso decisivo para apoiar a tomada de decisões pedagógicas em tempo real.

Estes resultados reforçam ainda que o *GeoGebra* não deve ser usado apenas como ferramenta de visualização, podendo ser um recurso que promove reflexão, justificação e discussão estruturada (Amado, 2022; Cadavez et al., 2013). Desta forma, é essencial que os alunos sejam incentivados a justificar formalmente as construções realizadas e a identificar autonomamente os erros cometidos, aproveitando o *feedback* imediato do *software*.

6.2. Reflexão sobre o estudo

O *GeoGebra* revelou ser um recurso pedagógico com muito potencial, permitindo-me aceder em tempo real a diversas informações relativamente às aprendizagens e

capacidades dos alunos, o que constituiu uma mais-valia para orientar as minhas próprias decisões pedagógicas.

No entanto, tive de contornar algumas limitações, sendo as principais o domínio técnico do *software* que não era homogéneo entre os alunos – o que me mostrou que esta também é uma tarefa do professor ao mobilizar tecnologias – e condicionou a exploração de algumas tarefas, sobretudo no espaço 3D e o tempo disponível para cada intervenção que foi relativamente reduzido e limitou a consolidação das aprendizagens e a exploração de tarefas mais diversificadas.

Em relação aos resultados, admito que o número de participantes e o contexto específico em que decorreu o estudo não permitem a generalização dos resultados, pelo que seria interessante repetir o estudo em outros contextos, para perceber se os resultados são transversais ou se foram influenciados pelo contexto em que estava inserida.

Ainda assim, este estudo trouxe contributos relevantes para a reflexão sobre como a integração de ferramentas digitais no ensino da matemática é importante não só na visualização, experimentação e reflexão formal dos alunos no tema da Geometria em particular, mas também para a melhoria contínua da prática pedagógica, ao apoiar os professores nas decisões sobre as suas abordagens e práticas pedagógicas.

6.3. Recomendações e Perspetivas de Investigação Futura

Com base nos resultados obtidos, surgiram algumas recomendações que considero importantes. Primeiramente, o uso do *GeoGebra* deve ser orientado como ferramenta de reflexão e não apenas de visualização, incentivando os alunos a justificar formalmente as construções e a identificar autonomamente os seus erros, de modo a promover discussões estruturadas entre pares e em grande grupo, para favorecer a troca de estratégias e a explicitação de raciocínios (Carvalho e Silva et al., 2023; Ponte et al., 2013), se trabalhe explicitamente a transição entre diferentes linguagens (natural, geométrica e algébrica), apoiando os alunos na formalização de condições e reduzindo os obstáculos na simbolização algébrica (Amado, 2022) e se assegure que os alunos contactem previamente com o ambiente tecnológico, de forma que se possam centrar apenas nos conceitos matemáticos.

Para futuras investigações, considero pertinente explorar que outras funcionalidades adicionais do *GeoGebra* podem ampliar o *feedback* oferecido ao professor e aos alunos,

como diferentes perfis de alunos respondem ao uso do *software*, conforme tenham mais ou menos familiaridade com o mesmo. Por fim, sugiro um estudo em que haja uma integração sistemática do *GeoGebra* em diferentes unidades curriculares, para perceber como pode potenciar aprendizagens na Matemática em geral.

Referências Bibliográficas

Almeida, M., Barroca, D., Galego, F., Teixeira, S., Terroso, J. C., & Marques, J. J. (2025). *Ficha formativa – M10: Matemática A, 10.º ano*. Areal Editores.

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante, 16*(1), 27-56. https://doi.org/10.48489/quadrante.22813

Amado, J. (2017). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra. http://hdl.handle.net/10316.2/35271

Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, *166*, 2-6. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2826

Angelides, P. (2001). The development of an efficient technique for collecting and analyzing qualitative data: The analysis of critical incidents. *International Journal of Qualitative Studies in Education, 14*(3), 429-442. https://doi.org/10.1080/09518390110029058

Araújo Silva, J. W., Vicente de Oliveira, K., Amaral da Silva, K., Reis Barbosa, M., Silva Lima, M. L., Oliveira Eloy, R. A., da Silva, S. H., & Martins Camelo, S. (2012). O uso do *GeoGebra* no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e de Funções. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 1*(1), clxxx-cxcii. https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/9050

Baptista, I. (Coord.), Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. da C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética* (2.ª ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://www.spce.org.pt/assets/files/CARTA-TICA2.EDICAOFINAL-2020-COMPACTADO.pdf

Battista, M. T. (2007). The development of geometry and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-905). NCTM; Information Age Publishing. https://www.researchgate.net/publication/313572539_The_development_of_geometrical_and_spatial_thinking

Bobko, N., & Rocha, L. de S. (2024). Tutorial virtual de *GeoGebra*: criação de um recurso educacional aberto dinâmico e interativo. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 13*(2), 097-112. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i2p097-112

Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brookhart, S. M. (2017). *How to give effective feedback to your students* (2.ª ed.). ASCD.

Cadavez, C. M. P. F., Morais, C., Cadavez, V., & Miranda, L. (2013). Utilização do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* por alunos do 3.º ciclo do ensino básico. In L. Miranda, P. Alves, & C. Morais (Orgs.), *Aprender, colaborar e innovar a través de las TIC: Atas do iETIC 2013* (pp. 1-11). Instituto Politécnico de Bragança. http://diarium.usal.es/ietic2013/

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para auto-aprendizagem* (2.ª ed.). Universidade Aberta.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Albuquerque, C., Almiro, J., Cruchinho, C., Carreira, S., Correia, P., Domingos, A., Espadeiro, R. G., Filipe, N., Gabriel, L., Martins, H., Martins, M. E. G., Rodrigues, A., & Santos, M. T. (2023). *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino secundário*. Direção-Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/noticias/homologacao-das-novas-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensino-secundario

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math, the learning trajectories approach* (2.ª ed.). Routledge. https://www.researchgate.net/publication/262567199_Learning_and_teaching_early_math_The_learning_trajectories_approach_2nd_ed

Cruz, M. P. M. da, & Holanda Filho, I. de O. (2023). O estudo da geometria analítica com a utilização do *software GeoGebra*. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 12*(1), 43-61. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p043-061

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis*, *18*, 64-66. https://www.yumpu.com/pt/document/read/50426284/notas-sobre-os-paradigmas-da-investigaaao-em-

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação, 19*(2), 21-50. http://scielo.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0871-91872006000200003&lng=pt&tlng=pt

Fernandes, D. (2021a). *Avaliação formativa*. *Folha de apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA).* Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2021-04/Folha1_Avaliac%CC%A7a%CC%83o_Formativa.pdf

Fernandes, D. (2021b). *Avaliação sumativa*. *Folha de apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA).* Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2021-04/Folha%202_Avaliac%CC%A7a%CC%83o_Sumativa.pdf

Fernandes, D. (2021c). *Para uma fundamentação e melhoria das práticas de avaliação pedagógica no âmbito do Projeto MAIA*. *Texto de apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA).* Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2021-04/TextoApoio1_Para%20uma%20Fundamentac%CC%A7a%CC%83o%20e%20Melhoria%20das%20Pra%CC%81ticas%20de%20Avaliac%CC%A7a%CC%83o%20Pedagogo%CC%81gica.pdf

Ferreira, A. J. D. F. (2012). *Avaliação formativa vs. avaliação sumativa: perspetivas de professores e alunos do 3.º ciclo do ensino básico sobre a sua utilização nas aulas de matemática* [Dissertação de mestrado, Universidade do Algarve]. Repositório Sapientia. http://hdl.handle.net/10400.1/3458

Ferreira, D., Lima, L., & Cosme, A. (2021). A avaliação pedagógica e a flexibilidade e autonomia curricular. *Diversidades*, *59*, 42-47. https://www.calameo.com/read/006440681dcd1e28f0ace

Ferreira, M. J. M. (2024). *Avaliação formativa e feedback no ensino da matemática: um estudo no 1.º ciclo do ensino básico* [Dissertação de mestrado, Universidade Aberta]. Repositório Aberto da Universidade Aberta. http://hdl.handle.net/10400.2/15872

GeoGebra (Versão 6.0) [*Software* de computador]. (s.d.). *GeoGebra*. Obtido em 3 de maio de 2025, de https://www.geogebra.org/

Guimarães, R. M. da S. T. (2014). *Geometria analítica no plano: Pensar e ensinar geometria* [Relatório de estágio para obtenção do grau de mestre, Universidade da Beira Interior]. Repositório Institucional da UBI. http://hdl.handle.net/10400.6/5511

Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge. https://doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2011). Influence of *GeoGebra* on problem solving strategies. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 91-103). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_7

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Junqueira, M. (1994). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos – Um estudo no 9º ano de escolaridade* [Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova de Lisboa. http://hdl.handle.net/10362/68

Leitão, I. A. (2014). *Os diferentes tipos de avaliação: avaliação formativa e avaliação sumativa* [Relatório de estágio, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova de Lisboa. http://hdl.handle.net/10362/13803

Lima, L. (2020). *O ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas: intencionalidades, ações e reflexões dos docentes* [Tese de doutoramento, Universidade do Porto]. Repositório da Universidade do Porto. https://hdl.handle.net/10216/128008

Lima, L., Ferreira, D., & Cosme, A. (2022). Mudar a escola, mudar a avaliação: Reflexões sobre o essencial da avaliação pedagógica. *Cadernos da Formação Nova Ágora*, *7*, 5-17. https://novo.cfagora.pt/images/Publicacoes/cadernos/Caderno_7.pdf

Looney, J. (2011). Integrating Formative and Summative Assessment: Progress Toward a Seamless System?. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/5kghx3kbl734-en

Loureiro, C. (2021). O desenvolvimento do raciocínio geométrico: O contributo do *GeoGebra*. *Educação e Matemática*, *155*, 16-21. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2449

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21*(2), 81-110. http://hdl.handle.net/10451/22633

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática* (F. Nunes, Trad.; L. Figueiral, Prefácio da ed. port.). Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, A. N. de, & Moreno, A. L. (2017). Utilização de *software*s no ensino de geometria: Um mapeamento sistemático. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 5*(1), 010550-1-010550-6. https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/1572/1583

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-54. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

Pimenta, P., Andrade, C., & Pereira, J. C. (2025). *Matemática 360 10 – Matemática A: 10.º ano*. Raiz Editora / Lisboa Editora.

Pollock, J. E. (2011). *Feedback: The hinge that joins teaching and learning*. Corwin.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-82. https://doi.org/10.48489/quadrante.22894

Rocha, R. F., & Pires Rocha, S. C. (2018). Sólidos geométricos: área e volume de sólidos geométricos. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 7*(1), 84-98. https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/34777

Sadalla, A. M. F. de A., & Larocca, P. (2004). Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação. *Educação e Pesquisa, 30*(3), 419-433. https://doi.org/10.1590/S1517-97022004000300003

Serrazina, L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). Associação de Professores de Matemática. https://www.researchgate.net/publication/319879388_Planicacao_do_ensino_e_aprendizagem_da_Matematica_1_Lurdes_Serrazina

Stein, M. K. & Smith, M. S. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2ª ed.). National Council of Teachers of Mathematics; Corwin.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310-316. https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310

Apêndices

Apêndice I – Tarefa 1: A Construção da Joana

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

Enunciado

FICHA DE TRABALHO

DISCIPLINA: **Matemática A** | ANO DE ESCOLARIDADE: **10º Ano**

ANO LETIVO: **2024 – 2025**

1. A Joana fez uma construção no *GeoGebra*.

   Na sua construção, estava representado:

   - A circunferência c, centrada no ponto A e cuja equação é $x^2+6x+y^2-4y-4=0$;
   - O ponto B pertencente à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares;
   - A reta r que passa nos pontos A e B e nenhum dos seus pontos pertence ao 3º quadrante;
   - A reta s que corresponde à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
   - O ponto D pertencente ao eixo Ox e com a mesma abcissa de B.
   - O ponto E pertencente ao semieixo negativo Ox que dista 4 unidades de D.

   1.1. Reproduz a construção que a Joana pode ter feito.

   1.2. Indica as coordenadas de A e B e o raio da circunferência.

   1.3. Escreve uma condição que defina a região limitada pela circunferência e pelas retas r e s, incluindo a fronteira, tal que os pontos $(-3,\ 0)$ e $(0,\ 2)$ pertença à região.

   1.4. Determina a área do trapézio $[ABDE]$.

Apêndice II – Tarefa 2: O Prisma Quadrangular

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

Enunciado

FICHA DE TRABALHO

DISCIPLINA: **Matemática A** | ANO DE ESCOLARIDADE: **10º Ano**

ANO LETIVO: **2024 – 2025**

1. Considera o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$. Sabe-se que:
   - O é a origem do referencial.
   - $[OA]$ e $[OC]$ são arestas de uma das bases do prisma.
   - O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, o ponto C ao semieixo positivo Oy.
   - O ponto E pertence ao semieixo positivo Oz e ao plano de equação $z = 8$.
   - O volume do prisma é 128.
   - O ponto B pertence ao plano $z = 0$.
   - O ponto D é a projeção ortogonal do ponto A no plano $z = 8$.
   - O ponto F pertence ao plano de equação $y = 4$ e tem menor abcissa do que o ponto G.

   Constrói este prisma.

   1.1. Como é que determinaste as coordenadas do ponto A? E do ponto F?
   1.2. Porque é que a figura construída pode ser considerada um prisma quadrangular?

2. Escreve uma condição que defina a semirreta $\dot{B}G$;

   Justifica porque é que a condição determinada representa a semirreta.

3. Identifica, usando as letras da figura, o conjunto de pontos definidos pela condição $0 \leq y \leq 4 \wedge x = 4 \wedge 0 \leq z \leq 8$.

   Justifica a tua resposta.

4. Considera o ponto H resultante da projeção ortogonal do ponto $(2,\ 2,\ -1)$ no plano $z = 6$. Assinala o ponto H na tua construção do *GeoGebra* e determina uma equação que defina o plano OBH.

Apêndice III – Assentimento entregue aos alunos

Assentimento

Caros alunos,

Eu, vossa professora estagiária de Matemática, estou a realizar um projeto de investigação no âmbito da prática de ensino supervisionada do Mestrado em ensino da matemática e orientado por uma professora da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, sobre o *feedback* do *GeoGebra* ao professor e como este pode ajudar na abordagem de conceitos matemáticos.

Neste sentido, preciso da vossa colaboração para a realização deste estudo, pelo que irei necessitar de fazer gravações de áudio de algumas aulas e de recolher alguns trabalhos realizados pelos alunos que aceitarem cooperar comigo, que serão fontes importantes do meu trabalho. Também precisarei de gravar o áudio de possíveis entrevistas realizadas com alguns alunos selecionados.

A vossa participação é voluntária e não terá qualquer influência na avaliação final da disciplina. É importante salientar que será sempre mantido o anonimato dos alunos, isto é, os resultados que vão ser publicados não terão qualquer identificação dos vossos nomes nem de qualquer informação que permita identificar-vos. Além disso, podem desistir a qualquer momento, sem ser necessária qualquer justificação. Se não quiserem participar ou acabarem por desistir, não sofrerão qualquer penalização na avaliação final da disciplina.

Nenhum dos alunos é obrigado a aceitar fazer parte deste estudo. No entanto, caso aceitem, estarão a fazer progredir a ciência e, com a vossa ajuda outros professores poderão definir práticas para garantir o sucesso de todos os alunos na disciplina de matemática.

No final da realização do meu trabalho, caso pretendam aceder aos resultados da minha investigação, podem solicitá-los pela plataforma *Teams* ou pelo *e-mail* [redacted]

Assim, venho pedir a vossa colaboração no meu projeto de investigação.

Se tiverem alguma questão, estarei sempre ao vosso dispor.

Com os melhores cumprimentos,

Susana Patrícia da Silva Faria (Professora Estagiária)

[redacted], 04 de fevereiro de 2025

.....

Eu, _____, aluno(a) nº____, da turma ____ do ____ ano da Escola [redacted], **aceito / não aceito** (riscar o que **não** interessa) participar no trabalho de investigação da professora estagiária Susana Faria e autorizo a recolha de tarefas realizadas, gravações de áudio, entrevistas e questionários.

Assinatura do(a) aluno(a):

_____ Data: ____ /____ /2025

Apêndice IV – Consentimento entregue aos encarregados de educação

Consentimento

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

Como deve ser do vosso conhecimento, na disciplina de Matemática do vosso educando(a) há três professoras na disciplina de matemática, sendo eu e a minha colega, professoras estagiárias inscritas no Mestrado em Ensino da Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Em função deste mestrado e como parte dos requisitos de uma das suas cadeiras, preciso de implementar um projeto de intervenção pedagógica no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, orientado pela Professora Doutora Louise Lima.

A concretização deste trabalho de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática assim como a recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha essa que tornará viável a implementação do projeto de investigação em causa. Esta recolha poderá incluir a gravação de áudio de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, trabalhos produzidos pelos alunos, entrevistas e questionários.

A gravação em áudio de aulas/momentos de trabalho dos alunos é crucial para garantir que todas as informações presentes nas interações durante a aula ou em partes dela sejam devidamente registradas, evitando que aspetos importantes para os objetivos da pesquisa se percam. Essas gravações serão transcritas, total ou parcialmente, e serão apagadas assim que o trabalho for concluído.

A recolha das produções escritas dos alunos segue o mesmo procedimento de uma situação de ensino presencial, dado ser uma prática comum recolher essas produções para analisar as principais dificuldades dos estudantes, com o intuito de encontrar estratégias que os ajudem a superá-las. Após a conclusão do trabalho, os materiais escritos coletados serão destruídos.

As entrevistas, a serem realizadas, serão com um número limitado de alunos, em horário a combinar com eles. Durante as entrevistas serão realizadas gravações em áudio, nos mesmos moldes das gravações de aulas/momentos de aula.

De forma a garantir o anonimato no relatório final de estágio, os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola, não serão identificados em caso algum. A participação do(a) seu(sua) educando(a) neste trabalho em nada interfere com a sua avaliação de desempenho na disciplina de Matemática. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é inteiramente voluntária, podendo ele(ela) desistir em qualquer momento, sem qualquer justificação necessária e, nesse caso, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Venho por este meio, solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) no projeto de investigação e qualquer alteração no protocolo de pesquisa será informada ao(à) Encarregado(a) de Educação e ao(à) educando(a) e terão acesso aos resultados da investigação, após o pedido do mesmo. Estou à disposição para qualquer informação adicional, podendo contactar-me através do meu e-mail [redacted]

Agradeço, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas.

Com os melhores cumprimentos,

Susana Patrícia da Silva Faria (Professora Estagiária)

[redacted], 04 de fevereiro de 2025

.....

Eu _____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a):_____ nº____, da turma ____ do ____ ano da Escola [redacted], **autorizo / não autorizo** (riscar o que **não** interessa) o/a meu/minha educando(a) a participar no trabalho de investigação da professora estagiária Susana Faria, a realizar nas instalações da escola. Consciente de que está garantido o anonimato sobre o(a) meu/minha educando(a), autorizo a recolha de tarefas realizadas pelo(a) aluno(a), gravações de áudio, entrevistas e questionários.

Assinatura do(a) Encarregado de Educação:

_____ Data: ____ /____ /2025

Apêndice V – Questionário

Análise da utilização do *GeoGebra* no Ensino da Matemática

Olá! Este questionário faz parte da nossa intervenção pedagógica e tem como objetivo recolher algumas informações que serão utilizadas com o intuito de complementar os dados recolhidos. Todos vocês já assinaram o assentimento informado, por isso sabem que as respostas são confidenciais e usadas apenas para fins académicos.
Obrigada pela vossa colaboração e sinceridade!

Secção 1

No final, não te esqueças de enviar mensagem com um print em como submeteste as respostas.

Obrigada!

Parte 1

1. Enquanto resolveste as questões no *GeoGebra*, a tua estratégia para as resolver: *

- ◯ Manteve-se
- ◯ Pensei de forma diferente

2. Gostarias de continuar a utilizar o *GeoGebra* em sala de aula? *

- ◯ Sim
- ◯ Não

3. Porquê? *

4. Em que momento consideras que o *Geogebra* apoia as aprendizagens e realização das tarefas? *

Seleciona a(s) opção(ões) que considerares verdadeiras

- ☐ Introduzir conteúdos
- ☐ Consolidar conhecimentos

5. O uso do *GeoGebra* motivou-te na resolução das tarefas? *

- ◯ Sim — Ir para 6. De que forma?
- ◯ Não — Ir para 7. Porquê?

6. De que forma? *

Ir para 8. Com que estratégia cons...

7. Porquê? *

8. Com que estratégia conseguiste resolver melhor a atividade? *

- ◯ Analiticamente
- ◯ Com recurso ao *GeoGebra*

9. Qual o teu nível de concordância com a seguinte frase *

	Concordo totalmente	Concordo	Nem concordo nem discordo	Discordo
Senti que com a utilização do *GeoGebra* compreendi melhor os conceitos em aula.	◯	◯	◯	◯

10. Sentiste que com a utilização do *GeoGebra* ultrapassaste alguma dificuldade? *

- ◯ Sim — Ir para 11. Consegues dar um exe...
- ◯ Não — Ir para 12. Achaste mais fácil ident...

11. Consegues dar um exemplo? *

12. Achaste mais fácil identificar e corrigir os teus erros ao utilizar o *GeoGebra*? *

- ◯ Sim — Ir para 13. Porquê?
- ◯ Não — Ir para 13. Porquê?

13. Porquê? *

14. Sentes que o *GeoGebra* contribuiu para: *

- ☐ Visualizar a figura
- ☐ Estabelecer relações entre conceitos
- ☐ Abstrair o pensamento
- ☐ Desenvolver a capacidade de comunicação e argumentação com colegas
- ☐ Outro

Ir para 3. Parte 2

Parte 2

15. Consideras que tens algumas dificuldades em Geometria? *

- ◯ Sim — Ir para 16. As tuas dificuldades ce...
- ◯ Não — Ir para 18. Como avalias a tua cap...

16. As tuas dificuldades centram-se em que tópico da Geometria? *

- ☐ Geometria no Plano
- ☐ Geometria no Espaço

Ir para 17. Quais são, para ti, as tua...

17. Quais são, para ti, as tuas principais dificuldades em Geometria? *

18. Como avalias a tua capacidade para visualizar e representar figuras no plano e no espaço, **sem** o *GeoGebra*? *

	Muita dificuldade	Dificuldade	Neutro	Facilidade
Visualizo e represento figuras no plano e no espaço, **sem** o *GeoGebra* com...	◯	◯	◯	◯

19. Como avalias a tua capacidade para visualizar e representar figuras no plano e no espaço, **com** o *GeoGebra*? *

	Muita dificuldade	Dificuldade	Neutro	Facilidade
Visualizo e represento figuras no plano e no espaço, **com** o *GeoGebra* com...	◯	◯	◯	◯

20. Conseguiste identificar algum erro ou dificuldade na tua resolução ao utilizar o *GeoGebra*? *

- ◯ Sim — Ir para 21. Qual?
- ◯ Não — Ir para 22. Achas que o GeoGebra ...

21. Qual? *

22. Achas que o *GeoGebra* te ajudou a perceber melhor algum conceito? *

- ◯ Sim — Ir para 23. Qual?
- ◯ Não — Ir para 24. O GeoGebra mostrou-t...

23. Qual? *

24. O *GeoGebra* mostrou-te algum erro que, em papel, talvez não notasses? *

- ◯ Sim — Ir para 25. Qual? Explica
- ◯ Não — Ir para 26. O que ias visualizando ...

25. Qual? Explica *

26. O que ias visualizando no *GeoGebra* durante a realização da tarefa ajudou-te a ter ideia se estavas num bom caminho? *

- ◯ Sim — Ir para 27. Explica a tua escolha na...
- ◯ Não — Ir para 28. As estratégias que utiliz...

27. Explica a tua escolha na questão anterior *

28. As estratégias que utilizaste com o *GeoGebra* foram diferentes das que costumas usar em papel? *

- ◯ Sim — Ir para 29. Porquê?
- ◯ Não — Ir para 30. Achas que o GeoGebra ...

29. Porquê? *

30. Achas que o *GeoGebra* te permite explorar diferentes formas de resolver o mesmo problema? *

- ◯ Sim — Ir para 31. De que forma?
- ◯ Não — Ir para 32. Durante a discussão co...

31. De que forma? *

32. Durante a discussão com o teu colega, conseguiste identificar formas de pensar ou resolver diferentes das tuas? *

- ◯ Sim — Ir para 33. Consegues dar algum e...
- ◯ Não — Ir para 34. Achas que, com base n...

33. Consegues dar algum exemplo? *

34. Achas que, com base no que fizeste no *GeoGebra*, o teu professor consegue perceber o teu raciocínio e as tuas dificuldades? *

- ◯ Sim — Ir para 35. De que forma?
- ◯ Não — Ir para Fim do formulário

35. De que forma? *