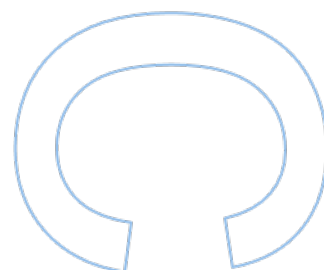
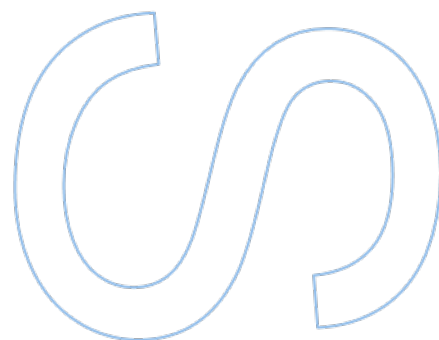
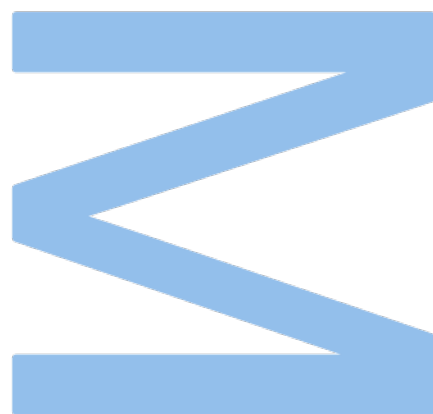


O papel do *feedback* na melhoria da comunicação matemática escrita



Francisca Isabel dos Santos e Pinho

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino

Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025

O papel do *feedback* na melhoria da comunicação matemática escrita

Francisca Isabel dos Santos e Pinho

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no
Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar
Convidada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dedico este trabalho à minha mãe, ao meu pai, ao meu irmão e ao meu namorado

Agradecimentos

Aos meus pais, Isabel e José, que sempre caminharam ao meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis, o meu agradecimento mais profundo. Obrigada por me terem proporcionado a vida que tenho e por serem o alicerce da minha formação acadêmica e pessoal. Nunca me deixaram desistir, mesmo quando tudo parecia demasiado complicado. A vossa força, fé e amor incondicional foram âncoras nos dias mais duros e faróis nos mais incertos. Sei que, sem as vossas palavras de incentivo e presença constante, não teria chegado até aqui. A vocês devo tudo, a vida, os valores e esta conquista.

Ao meu irmão, Pedro, que sempre me olhou com orgulho e me dizia, com convicção, que os meus futuros alunos iam gostar de mim. Obrigada por acreditares que, comigo, a matemática podia tornar-se mais simples e leve, mesmo quando a paciência não era o meu ponto forte. As tuas palavras acompanharam-me em cada aula, sobretudo nas mais desafiantes, e foram sempre um lembrete silencioso de que estava no caminho certo.

Ao meu namorado, Zé, pelo apoio incondicional e paciência inesgotável. Obrigada, por todas as vezes em que te sentaste comigo para eu praticar as aulas antes de ir para a escola. A tua dedicação, a forma como me ouvias e com tanto empenho encarnavas um aluno do básico ou do secundário, é verdadeiramente admirável. Acima de tudo, obrigada por me aturares nos dias em que voltava cansada, sem paciência e de mau humor. O teu amor foi, é e será essencial em qualquer caminhada.

À minha família, em especial às minhas avós, Mané e Lulu, que todos os dias me perguntavam como estava o relatório, o meu mais sincero agradecimento. Obrigada por todo o amor, apoio e preocupação constante ao longo dos anos. São, e sempre serão, a minha maior inspiração.

Aos que já partiram, os meus avôs, José e Pedro, e a minha bisavó, Laura, deixo uma palavra de gratidão eterna. Embora ausentes fisicamente, vivem em mim através daquilo que sou. O exemplo, os valores e o amor que deixaram aos meus pais continuam a ser estrela guia nesta jornada.

À família do meu namorado, Susana, Paulo e Hugo, o meu profundo agradecimento por todo o apoio, compreensão e generosidade ao longo desta etapa tão exigente. Obrigada por me acolherem sempre com tanta paciência, por entenderem as minhas ausências e

por nunca faltarem com uma palavra de incentivo ou um gesto de carinho. Sentir-me parte da vossa família tornou este caminho muito mais leve e especial.

Ao Pantufa, o melhor cão do mundo, agradeço a companhia constante durante as longas sessões de escrita. Estiveste sempre por perto – ora deitado aos meus pés, ora a pedir mimos justamente nos momentos de maior concentração. Foste uma presença fiel, silenciosa (quase sempre) e profundamente reconfortante. E isso, nos dias mais exigentes, fez toda a diferença.

Aos meus amigos, Inês, Ricardo, Ana, Sónia e Margarida, agradeço de coração tudo o que partilhámos ao longo destes anos: as conversas intermináveis, os desesperos divididos, os resumos trocados à última hora e, acima de tudo, a vossa capacidade de me lembrar que, mesmo nos momentos de maior *stress*, havia sempre espaço para rir. Imaginem... é de louvar que está feito ;)

Aos meus primeiros alunos, as minhas primeiras “cobaias”, os primeiros grandes desafios, mas também as primeiras grandes vitórias, agradeço por tudo o que me ensinaram e por terem tornado este ano tão especial. Espero que a matemática vos acompanhe..., mas que não vos persiga nos pesadelos! E lembrem-se: se a vida vos der problemas, resolvam-nos passo a passo, tal como treinámos!

Ao meu colega de estágio, Gustavo, obrigada por teres sido sempre aquele apoio fundamental nos momentos em que o desânimo apertava. Ajudaste-me a ganhar confiança, a levar as coisas com mais leveza e a acreditar mais em mim. A tua companhia fez toda a diferença neste percurso.

À Professora Fátima Delgado, minha orientadora da faculdade, agradeço profundamente toda a disponibilidade e orientação. Cada uma das suas sugestões foi uma oportunidade de crescimento. Espero sinceramente que tenha conseguido reconhecer, nas entrelinhas do meu percurso, uma evolução positiva e genuína.

E, por fim, a mim. Por ter conseguido chegar até aqui sem enlouquecer (ou pelo menos sem dar muito nas vistas). Entre mil páginas abertas no computador, ficheiros espalhados pelo ambiente de trabalho e três crises existenciais por semana, acho que mereço um aplauso... e talvez uma sesta de três dias.

Resumo

A comunicação matemática escrita assume um papel central na aprendizagem da matemática, especialmente em contextos de resolução de problemas que exigem a explicação e organização de pensamentos e a construção de argumentação fundamentada. A resolução de problemas envolve um processo dinâmico que requer a formulação, representação e justificação de ideias, sendo a escrita uma ferramenta privilegiada para esse fim. Escrever sobre matemática não só favorece o desenvolvimento da autonomia dos alunos, como também lhes permite comunicar de forma mais rigorosa e estruturada. Paralelamente, destaca-se o papel do *feedback* como um instrumento fundamental na regulação das aprendizagens, favorecendo a reflexão crítica e promovendo uma melhoria contínua. Neste enquadramento, apresenta-se o presente estudo, com o objetivo de compreender de que forma o *feedback* escrito, fornecido pelo professor, pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos. Para tal, foram formuladas as seguintes questões de investigação: (i) Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita?; (ii) De que forma os alunos integram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita?; (iii) Que significado atribuem os alunos ao *feedback* dado pelo professor?. Esta investigação assentou numa metodologia de natureza qualitativa e de carácter interpretativo e teve por base o desenvolvimento de uma intervenção pedagógica que envolveu alunos do 11.º ano de escolaridade na resolução de problemas em duas fases, sendo-lhes proporcionado *feedback*, atribuído pelo professor, no final de cada fase. Os dados recolhidos integraram: produções escritas dos alunos; o *feedback* escrito dado pela professora e entrevistas aos alunos. A análise destes dados permitiu identificar uma evolução na comunicação matemática escrita dos alunos, evidenciada pelo maior rigor na linguagem utilizada e melhoria na clareza das justificações. Verificou-se, também, que alguns alunos atribuíram valor ao *feedback* recebido, reconhecendo-o como uma ferramenta útil para clarificar ideias, corrigir erros e fortalecer a sua confiança na comunicação matemática.

Palavras-chave: comunicação matemática escrita; dificuldades dos alunos; resolução de problemas; *feedback* do professor; autorregulação; avaliação para a aprendizagem.

Abstract

Written mathematical communication plays a central role in the learning of mathematics, especially in problem-solving contexts that require the explanation and organization of thoughts and the construction of well-founded arguments. Problem solving involves a dynamic process that requires the formulation, representation, and justification of ideas, with writing being a privileged tool for this purpose. Writing about mathematics not only fosters students' autonomy but also enables them to communicate in a more rigorous and structured manner. At the same time, the role of *feedback* stands out as a fundamental instrument in the regulation of learning, encouraging critical reflection and promoting continuous improvement. Within this framework, the present study aims to understand how written *feedback* provided by the teacher can contribute to the development of students' written mathematical communication. To this end, the following research questions were formulated: (i) What difficulties do students face in written mathematical communication? (ii) How do students integrate *feedback* to improve their written mathematical communication? (iii) What meaning do students attribute to the *feedback* given by the teacher?. This research was based on a qualitative methodology of an interpretive nature and involved the development of a pedagogical intervention with 11th-grade students engaged in problem solving in two phases, with *feedback* provided by the teacher at the end of each phase. The data collected included students' written work, the written *feedback* provided by the teacher, and student interviews. The analysis of these data made it possible to identify an evolution in students' written mathematical communication, evidenced by greater rigor in the language used and improved clarity of justifications. It was also found that some students attributed value to the *feedback* received, recognizing it as a useful tool for clarifying ideas, correcting errors, and strengthening their confidence in mathematical communication.

Keywords: mathematical written communication; student difficulties; problem solving; teacher *feedback*; self-regulation; assessment for learning.

Índice

Lista de Tabelas	vii
Lista de Gráficos.....	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviaturas	xi
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento Teórico	4
2.1. Resolução de Problemas	4
2.2. Comunicação matemática escrita	7
2.3. <i>Feedback</i> escrito ao serviço de uma avaliação para a aprendizagem.....	11
3. Intervenção Pedagógica	19
3.1. Caracterização do contexto escolar.....	19
3.2. Caracterização da turma	20
3.3. Descrição da intervenção pedagógica	23
3.3.1. Primeiro momento da intervenção pedagógica	25
3.3.2. Segundo momento da intervenção pedagógica	28
3.3.3. Terceiro momento da intervenção pedagógica	31
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados	34
4.1. Opções metodológicas	34
4.2. Participantes.....	35
4.3. Recolha de Dados	38
4.3.1. Produções escritas dos alunos	38
4.3.2. <i>Feedback</i> dado pelo professor.....	38
4.3.3. Entrevistas.....	39
4.4. Análise de dados	40
4.5. Considerações éticas.....	41
5. Apresentação e discussão de resultados	43
5.1. Primeiro momento da intervenção pedagógica.....	44
5.1.1. Álvaro	44
5.1.2. Beatriz.....	48
5.1.3. Salvador.....	52
5.2. Segundo Momento de Intervenção Pedagógica.....	55

5.2.1.	Álvaro	55
5.2.2.	Beatriz	61
5.2.3.	Salvador.....	64
5.3.	Terceiro Momento de Intervenção Pedagógica	69
5.3.1.	Álvaro	70
5.3.2.	Beatriz	75
5.3.3.	Salvador.....	80
5.4.	Importância do <i>feedback</i> escrito: percepções dos alunos.....	85
6.	Conclusões e recomendações	93
6.1.	Síntese do estudo.....	93
6.2.	Conclusões do estudo	94
6.2.1.	Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita?	94
6.2.2.	De que forma os alunos integram o <i>feedback</i> na melhoria da sua comunicação matemática escrita?	95
6.2.3.	Que significado atribuem os alunos ao <i>feedback</i> dado pelo professor? ...	97
6.3.	Limitações e recomendações	99
	Referências Bibliográficas	102
	Anexos.....	107
	Anexo 1 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no primeiro momento de intervenção	107
	Anexo 2 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no segundo momento de intervenção	109
	Anexo 3 - Guiões das entrevistas realizadas individualmente no fim do segundo momento de intervenção pedagógica	113
	Anexo 4 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no terceiro momento de intervenção	114
	Anexo 5 - Guiões das entrevistas realizadas individualmente no fim do terceiro momento de intervenção pedagógica	116
	Anexo 6 - Guião das entrevistas realizadas individualmente no fim da intervenção pedagógica	117
	Anexo 7 - Documento de consentimento informado	118

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Caracterização dos alunos participantes no estudo.....	37
Tabela 2 - Dimensões para a análise da comunicação matemática escrita	41
Tabela 3 - Evolução da capacidade de comunicação escrita dos alunos ao longo da intervenção	85

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Classificações obtidas no 3.º Período do 10.º ano	21
Gráfico 2 - Classificações obtidas no 1.º Período do 11.º ano	22
Gráfico 3 - Classificações obtidas no 2.º Período do 11.º ano	22

Lista de Figuras

Figura 1 - Relação entre os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 18).....	5
Figura 2 - Resumo das etapas de cada momento da intervenção pedagógica	23
Figura 3 - Organização dos diferentes momentos da intervenção pedagógica	24
Figura 4 - Enunciado do problema da 1. ^a fase (versão 1) / Momento 1	25
Figura 5 - Enunciado do problema da 1. ^a fase (versão 2) / Momento 1	26
Figura 6 - Enunciado do problema da 2. ^a fase (versão 1) / Momento 1	27
Figura 7 - Enunciado do problema da 2. ^a fase (versão 2) / Momento 1	27
Figura 8 - Enunciado do problema da 1. ^a fase (versão 1) / Momento 2	29
Figura 9 - Enunciado do problema da 1. ^a fase (versão 2) / Momento 2	29
Figura 10 - Enunciado do problema da 2. ^a fase (versão 1) / Momento 2	30
Figura 11 - Enunciado do problema da 2. ^a fase (versão 2) / Momento 2	30
Figura 12 - Enunciado do problema da 1. ^a fase / Momento 3	32
Figura 13 - Enunciado do problema da 2. ^a fase / Momento 3	33
Figura 14 - Resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 1).....	44
Figura 15 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 1) ...	46
Figura 16 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 2. ^a Fase (Momento 1) ..	47
Figura 17 - Resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 1).....	48
Figura 18 - <i>Feedback</i> à resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 1) ..	49
Figura 19 - <i>Feedback</i> à resolução da Beatriz do problema na 2. ^a Fase (Momento 1) .	50
Figura 20 - Resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 1).....	52
Figura 21 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 1)53	
Figura 22 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 2. ^a fase (Momento 1)54	
Figura 23 - Resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 2).....	56
Figura 24 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 2) ...	57
Figura 25 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 2. ^a fase (Momento 2) ...	58

Figura 26 - Resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 2).....	61
Figura 27 - <i>Feedback</i> à resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 2) ..	63
Figura 28 - Resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 2).....	64
Figura 29 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 2)	66
Figura 30 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 2. ^a fase (Momento 2)	67
Figura 31 - Resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 3).....	70
Figura 32 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 1. ^a fase (Momento 3) ...	72
Figura 33 - <i>Feedback</i> à resolução do Álvaro do problema na 2. ^a fase (Momento 3) ...	73
Figura 34 - Resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 3).....	75
Figura 35 - <i>Feedback</i> à resolução da Beatriz do problema na 1. ^a fase (Momento 3) ..	76
Figura 36 - <i>Feedback</i> à resolução da Beatriz do problema na 2. ^a fase (Momento 3) ..	78
Figura 37 - Resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 3).....	80
Figura 38 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 1. ^a fase (Momento 3)	81
Figura 39 - <i>Feedback</i> à resolução do Salvador do problema na 2. ^a fase (Momento 3)	82

Lista de Abreviaturas

PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA

1. Introdução

“A linguagem é a roupa do pensamento.”

— Samuel Johnson

Esta citação remete-nos para a importância de expressarmos de forma clara aquilo que pensamos. No ensino e aprendizagem da matemática, esta expressão acontece muitas vezes através da comunicação matemática escrita, permitindo aos alunos organizar o seu pensamento, justificar ideias, construir argumentos e tornar visível o seu pensamento matemático (Yackel & Cobb, 1996). Reconheço que a comunicação é uma forma de aprender matemática e uma capacidade que precisa de ser trabalhada (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Assim, a escrita em matemática não é apenas uma forma de registar respostas, mas uma ferramenta poderosa para pensar, refletir e aprender.

Contudo, muitos alunos sentem dificuldades quando têm de expressar o seu pensamento matemático por escrito, seja por falta de vocabulário matemático adequado, seja pela dificuldade em estruturar o pensamento ou em justificar adequadamente as suas ideias (Costa & Pires, 2016; Martins & Martinho, 2021). Em matemática, a comunicação matemática escrita pode também constituir-se numa ferramenta que apoia a compreensão das ideias matemáticas. É neste contexto que pensei estudar a temática comunicação matemática aliada a processos de avaliação formativa, em particular a práticas de *feedback*, (Santos & Semana, 2015). Por sua vez, o *feedback* escrito, dado pelo professor, pode desempenhar um papel determinante. O *feedback* quando bem compreendido e integrado, permite ao aluno identificar os seus erros, clarificar dúvidas e reformular o seu pensamento, promovendo uma aprendizagem mais profunda e autónoma (Santos & Dias, 2006; Hattie & Timperley, 2007; Wiliam, 1999).

A motivação para este estudo surgiu da prática docente que estava a desenvolver no contexto da minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Lecionar numa turma do 11.º ano de escolaridade permitiu-me observar dificuldades recorrentes na comunicação matemática escrita dos alunos, nomeadamente, na clareza, na justificação dos procedimentos e na forma como estruturavam as suas respostas. Estas observações levaram-me a questionar: será que um *feedback*, dado por mim enquanto

sua professora, às produções escritas dos alunos proporcionaria uma melhoria ao nível da sua comunicação matemática escrita?

Simultaneamente, senti necessidade de ir além da simples análise da eficácia do *feedback*, quis também perceber como é que os alunos o recebem, o interpretam e o usam. Afinal, o impacto do *feedback* não reside apenas na sua forma ou conteúdo, mas também na forma como é compreendido e valorizado por quem o recebe. Com base nestas inquietações, defini como objetivo deste estudo compreender de que forma o *feedback* escrito, fornecido pelo professor, pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos. Para tal, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- (i) Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita?
- (ii) De que forma os alunos integram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita?
- (iii) Que significado atribuem os alunos ao *feedback* dado pelo professor?

Este estudo foi desenvolvido no âmbito da minha PES e teve por base uma intervenção pedagógica que envolveu alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade, na disciplina de matemática A. Esta intervenção centrou-se na resolução de problemas em duas fases, com recurso ao *feedback* escrito atribuído pela professora.

O presente relatório encontra-se estruturado em seis capítulos. No capítulo 1, Introdução, apresento as motivações que me levaram a escolher este tema, bem como a pertinência do estudo no contexto atual do ensino da matemática. São ainda definidos os objetivos da investigação e enunciadas as questões de investigação que orientaram todo o trabalho.

O capítulo 2, Enquadramento Teórico, é dedicado à fundamentação do estudo, reunindo contributos de produções académicas, investigações e documentos curriculares orientadores para a disciplina de matemática. Aprofundo aqui os principais conceitos envolvidos, nomeadamente a comunicação matemática escrita, a importância do *feedback* como apoio à aprendizagem, e a resolução de problemas como estratégia e/ou tarefa essencial no ensino e aprendizagem da matemática.

O capítulo 3, Intervenção Pedagógica, descreve o trabalho realizado em contexto de sala de aula, incluindo uma caracterização da escola e da turma onde decorreu a intervenção. São apresentadas as tarefas propostas, os recursos utilizados, os objetivos que orientaram a prática e o modo como os alunos interagiram com as atividades.

No capítulo 4, Métodos e procedimentos de recolha de dados, explico as opções metodológicas adotadas, de natureza qualitativa e interpretativa. Apresento os participantes no estudo e descrevo os instrumentos e procedimentos usados na recolha e análise dos dados. É também abordada a forma como foram garantidas as questões éticas associadas à investigação.

O capítulo 5, Apresentação e discussão de resultados, expõe a análise dos dados recolhidos ao longo do estudo, tendo por base o seu objetivo, bem com as questões de investigação.

Por fim, o capítulo 6, Conclusões e recomendações, reúne os pontos-chave da investigação, respondendo às questões iniciais e destacando os contributos do estudo para a prática pedagógica. Apresento ainda algumas limitações do trabalho e proponho caminhos para estudos futuros.

Desejo a cada leitor uma leitura atenta, reflexiva e que, tal como os alunos, possa encontrar novas formas de pensar, escrever e comunicar matemática.

2. Enquadramento Teórico

O presente capítulo fundamenta o estudo em três áreas-chave que se interligam: resolução de problemas, comunicação matemática escrita e *feedback* escrito ao serviço de uma avaliação para a aprendizagem. Estes temas foram desenvolvidos à luz de contributos teóricos e orientações curriculares, permitindo construir um quadro coerente de suporte à presente investigação.

2.1. Resolução de Problemas

A resolução de problemas tem vindo a desempenhar um papel importante no ensino e aprendizagem da matemática, em diversos países (Ponte, 2005; Brunheira, 2020), assumindo a centralidade da atividade matemática dos alunos (NCTM, 2007). Atualmente, esta prática é sustentada por um vasto conjunto de orientações curriculares, investigações e propostas metodológicas.

Ao longo de vários anos, muitos autores têm procurado clarificar o que se entende por problema. Entre os nomes fundamentais neste percurso está o de George Pólya. Segundo Pólya (1995), num problema matemático conhecem-se as etapas iniciais e finais, mas o caminho é incerto, ou seja, é necessário encontrar um método que contorne um obstáculo para alcançar o objetivo. Para isso, o autor definiu uma forma organizada e sistemática para orientar o processo de resolução dividida em quatro fases: (i) compreender a situação do problema, (ii) elaborar um plano para resolver o problema, (iii) executar esse plano e (iv) refletir e verificar a solução obtida (Pólya, 1995). Esta sequência simples e poderosa tem atravessado gerações, apoiando professores e alunos a enfrentarem os desafios associados ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. O autor destaca a importância do professor em intervir com perguntas estratégicas em cada fase, reforçando o desenvolvimento metacognitivo. O seu contributo é particularmente relevante ao destacar que resolver um problema não é um ato linear, mas um processo dinâmico de tomada de decisão e revisão contínua.

Em Portugal, João Pedro da Ponte (2005), num trabalho intitulado *Gestão Curricular em Matemática*, defende que a resolução de problemas deve ocupar um lugar estruturante no planeamento do ensino, sendo entendida como uma forma de organizar a prática letiva em torno de tarefas desafiantes e ricas do ponto de vista matemático. Para Ponte (2005), o professor assume o papel de gestor do currículo ao selecionar, adaptar e sequenciar tarefas de acordo com os objetivos de aprendizagem, as características dos

alunos e o contexto específico da sua turma. Uma das ideias centrais que desenvolve é a natureza e o potencial das tarefas matemáticas (Figura 1). O autor distingue claramente entre tarefas com grau de desafio matemático reduzido, geralmente mais rotineiras e que apelam a procedimentos automatizados, e tarefas com grau de desafio elevado, que requerem pensamento, tomada de decisão e reflexão. Esta distinção está diretamente ligada ao ponto de vista do aluno, uma vez que o nível de desafio não é intrínseco à tarefa, mas depende do conhecimento prévio, da experiência e das competências do estudante. A mesma tarefa pode ser desafiante para uns e trivial para outros, e cabe ao professor fazer este juízo no momento da sua seleção.



Figura 1 - Relação entre os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 18)

Além disso, Ponte distingue as tarefas segundo a estrutura do enunciado (Figura 1). Uma tarefa tem estrutura fechada quando define com clareza o que é dado e o que é pedido, conduzindo o aluno para um caminho mais previsível. Pelo contrário, uma estrutura aberta implica algum grau de indeterminação, ou seja, pode não estar completamente definido o que é fornecido, o que é pedido ou ambos. Esta abertura, longe de ser um obstáculo, representa uma oportunidade para o aluno fazer escolhas, justificar decisões e envolver-se mais a fundo no processo de resolução. Ponte (2005) considera estas tarefas abertas especialmente valiosas no ensino exploratório, pois favorecem a investigação matemática, o debate entre pares e a formulação de conjecturas.

A resolução de problemas insere-se, assim, neste modelo como uma forma privilegiada de promover o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos, nomeadamente a capacidade de formular, representar, justificar e comunicar. Para Ponte (2005), o ensino baseado na resolução de problemas exige que o professor crie

condições para que os alunos assumam um papel ativo, enfrentem o erro de forma construtiva e aprendam a lidar com a incerteza, de modo a formar pensadores matemáticos autónomos e críticos. Uma tarefa pode ser um exercício para um aluno e um verdadeiro problema para um aluno com menos domínio do tema. Esta abordagem valoriza o papel do professor enquanto gestor do currículo, que deve conhecer bem os seus alunos e, com base nisso, selecionar e adaptar tarefas em função do seu potencial formativo.

Mas afinal, o que é um problema? As respostas variam, mas há convergência em certos pontos essenciais. O NCTM, em 1991, acrescenta que, para ser considerado um verdadeiro problema, deve ter algum grau de desafio, portanto, não pode ser algo tão simples que se resolva sem esforço, nem tão complexo que se torne inatingível. Através das suas publicações de 1991 e 2007, promove a resolução de problemas como ponto fundamental no currículo desde os primeiros anos até ao ensino secundário. Defende que aprender matemática não se reduz à aplicação de algoritmos, mas passa por enfrentar desafios que exijam formular hipóteses, desenhar representações e justificar escolhas. A sua perspetiva influenciou orientações internacionais e também nacionais, como por exemplo as *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2018), as atuais *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário* (Ministério da Educação, 2018) e as novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023). Estes documentos enfatizam que a resolução de problemas é essencial para uma aprendizagem com significado.

O *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017) destaca também a importância da resolução de problemas, assumindo como a capacidade de “encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões” (p. 23). No mesmo documento, reforça-se que essa competência implica planear investigações, gerir projetos, construir produtos e usar recursos diversificados, nomeadamente tecnológicos, num processo estreitamente ligado ao pensamento crítico e criativo, colaboração e comunicação. Em particular ao nível das orientações curriculares específicas para a disciplina de matemática, nomeadamente para o 11.º ano de escolaridade, reconhece-se que a resolução de problemas deve assumir-se como um tema transversal, no qual os alunos devem mobilizar conhecimentos variados, justificar procedimentos e apresentar argumentos

fundamentados (Ministério da Educação, 2018). Por sua vez, as atuais *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) propõem que a capacidade de resolução de problemas seja proporcionada, aos alunos, de modo a recorrerem “aos seus conhecimentos matemáticos, de diversos tipos e em diversos contextos, confiando na sua capacidade de desenvolver estratégias apropriadas e obter soluções válidas” (p. 3), reforçando que se trata de uma “atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes” (p. 3).

Jacinto et al. (2018) analisaram a forma como os alunos desenvolvem o seu pensamento matemático em contextos de resolução de problemas com apoio da tecnologia, nomeadamente com a utilização do *GeoGebra*. O estudo, conduzido em turmas do ensino básico, teve como foco a explicitação do processo de resolução, ou seja, a verbalização ou registo escrito das estratégias adotadas pelos alunos durante a resolução de problemas (resolver-e-exprimir problemas). As autoras observaram que a simples solicitação para os alunos “explicarem o seu processo” teve efeitos significativos: os alunos começaram a explicar pensamentos, a nomear procedimentos e a justificar escolhas, o que promoveu uma maior clareza na sua organização mental. Este estudo defende, assim, que a resolução de problemas, combinada com práticas de explicação do pensamento (comunicação matemática), contribui para o desenvolvimento da metacognição e da autonomia dos alunos. Ou seja, a compreensão dos conceitos abordados e dos processos utilizados provêm da relação entre as capacidades transversais de resolução de problemas e da comunicação matemática (Jacinto et al., 2018).

2.2. Comunicação matemática escrita

“(...) a comunicação escrita é um processo mais complexo do que a comunicação oral em que, frequentemente, parte da comunicação fica subentendida” (Sá & Zenhas, 2004, p.9)

Sá e Zenhas (2004) defendem que a comunicação escrita, na aula de matemática, não pode ser vista como um simples apêndice do pensamento oral. Pelo contrário, sublinham que a escrita implica um grau superior de elaboração e exige do aluno a capacidade de tornar explícitas ideias que, frequentemente, na oralidade permanecem implícitas. Acresce que, ao contrário da oralidade, a escrita decorre num registo mais

permanente, o que a transforma numa ferramenta poderosa para a organização e clarificação do pensamento matemático. A escrita permite não só comunicar com os outros, mas também com o próprio, promovendo um diálogo interno que favorece a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo. Neste sentido, escrever sobre matemática implica organizar sequencialmente ideias, justificar decisões, e estruturar o pensamento de forma que este se torne compreensível para um leitor externo, ou para o próprio aluno num momento posterior de reflexão. Estes defendem que o professor deve orientar um processo de hábito de escrita nos alunos de modo a garantir que os mesmos compreendam que a escrita lhes dá a oportunidade de autorregular as aprendizagens.

A importância da comunicação também está refletida nos documentos curriculares oficiais. O PASEO (Martins et al., 2017) reconhece a escrita como uma competência transversal fundamental. A comunicação, neste documento, é considerada uma literacia múltipla, permitindo aos alunos uma maior orientação que lhes permite compreender e expressar em diferentes modalidades, sendo uma delas a escrita. Assim, o documento estabelece que as competências na área da comunicação “dizem respeito à seleção, análise, produção e divulgação de produtos, de experiências e de conhecimentos, em diferentes formatos.” (Martins et al., 2017, p.22). Além disso, defende que os alunos devem ser capazes “transformar a informação em conhecimento: colaborar em diferentes contextos comunicativos, de forma adequada e segura” (Martins et al., 2017, p.22).

As Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021) seguem a mesma linha orientadora, sublinhando a importância de desenvolver, nos alunos, a capacidade de comunicar em matemática. A este propósito, destacam que

comunicar de forma clara aos outros requer a organização e consolidação prévia das ideias e processos matemáticos, o que potencia a compreensão matemática e proporciona oportunidade para o uso progressivo de linguagem matemática como estratégia de comunicar com maior precisão. (Canavarro et al., 2021, p. 3)

Já as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário* (Ministério da Educação, 2018) salientam a que deve ser proporcionado, aos alunos, a proposta de tarefas que impliquem a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos, integrando situações e contextos variados, bem como recorrendo a materiais diversificados e a ferramentas tecnológicas.

A comunicação matemática tem sido uma temática desenvolvida por vários autores como Yackel e Cobb (1996), Whitenack e Yackel (2008), Costa e Pires (2016), entre outros. As contribuições de Yackel e Cobb (1996) e de Whitenack e Yackel (2008) revelam-se particularmente relevantes para uma compreensão mais ampla da comunicação matemática escrita, sobretudo na articulação entre a dimensão social da aprendizagem e o desenvolvimento da argumentação formalizada. Yackel e Cobb (1996) introduzem o conceito de normas sociomatemáticas, diferenciando-o das normas sociais gerais da sala de aula. Estas normas específicas da prática matemática dizem respeito, por exemplo, ao que é aceite como uma explicação válida, ao que constitui uma justificação convincente e à clareza exigida nas formas de comunicação. Nesse sentido, a escrita matemática não é entendida apenas como um produto individual, mas como uma prática regulada por padrões coletivos construídos intersubjetivamente no contexto da aula. A qualidade da comunicação escrita dos alunos depende, assim, do ambiente matematicamente normativo que se constrói em sala: quanto mais exigente e partilhado for esse ambiente, mais exigente será também a forma como os alunos estruturam, justificam e registam o seu pensamento por escrito. Os autores defendem que essas normas sociomatemáticas desempenham um papel estruturante na aprendizagem, uma vez que regulam os processos de argumentação e oferecem aos alunos critérios claros sobre o que é esperado numa produção matemática válida. No registo escrito, esta regulação torna-se ainda mais visível: os alunos escrevem não apenas para si, mas para serem compreendidos e aceites pelos seus pares e pelo professor, dentro de um quadro de referência comum. A comunicação matemática escrita, nestes termos, é profundamente influenciada por essas normas, pois é nelas que os alunos encontram o enquadramento para decidir o que escrever, como justificar e com que grau de rigor. Os autores afirmam que a comunicação matemática escrita “tem como propósito clarificar aspetos do pensamento matemático de uma pessoa que pode não ser visível a outros. Por conseguinte, o que é oferecido como uma explicação é relativo às expectativas percebidas por outros” (Yackel & Cobb, 1996, p. 13).

No mesmo enquadramento teórico, Whitenack e Yackel (2008) destacam a importância de distinguir entre explicar e justificar. Enquanto a explicação pode referir-se à descrição dos passos seguidos numa resolução, a justificação envolve a apresentação de razões matematicamente válidas para esses passos. Na prática da escrita matemática, esta distinção ganha especial relevo: muitos alunos conseguem explicar o que fizeram, mas têm mais dificuldade em justificar por que motivo determinada estratégia é válida ou adequada. Os autores alertam para o facto de esta distinção nem sempre ser evidente, e sugerem que mais importante do que a sua separação formal é o desenvolvimento de

práticas que encorajem os alunos a dar sentido às suas produções escritas, articulando pensamento e fundamentação. Por ser uma prática mais exigente do que a oral, a escrita obriga o aluno a organizar o pensamento, explicitar o raciocínio e submeter a sua argumentação a critérios de clareza e rigor. Neste processo, os alunos desenvolvem não só competências linguísticas e matemáticas, mas também uma maior autonomia intelectual, uma vez que aprendem a construir e avaliar as suas próprias ideias à luz de normas partilhadas. Uma das principais características da linguagem matemática é o seu rigor e precisão, não dando espaço para ambiguidades, o que tornam a tarefa de comunicar matematicamente uma tarefa exigente (Boavida et al., 2008).

No estudo de Santos e Semana (2015), realizado com alunos do 8.º ano de escolaridade, são identificadas várias dificuldades ao nível da comunicação matemática escrita. Os autores destacam que, numa fase inicial, muitos alunos apresentavam textos pouco claros, com justificação limitada ou ausente, e tendência para reproduzir regras ou procedimentos sem explicar o raciocínio. Esta fragilidade na organização das ideias e na articulação entre diferentes formas de representação matemática revelava a necessidade de um trabalho mais estruturado no domínio da escrita. Através da implementação de tarefas de escrita, acompanhadas por *feedback* formativo, observou-se uma evolução progressiva na qualidade das produções escritas, com maior atenção à clareza, ao rigor e à fundamentação das respostas.

Por sua vez, Costa e Pires (2016) desenvolvem um estudo com alunos do 5.º ano do ensino básico, focando na comunicação matemática escrita. O objetivo passa por analisar como estes alunos expressam raciocínios matemáticos em tarefas escritas, avaliando aspetos como correção, clareza, coerência e uso adequado de vocabulário e simbologia. Os mesmos realçam que:

É fundamental que, individualmente ou em grupo, os alunos possam resolver tarefas que apelem ao desenvolvimento das suas capacidades de comunicação escrita em matemática, registando as suas ideias de forma, clara, correta e lógica, apelando a diferentes representações, justificando os seus raciocínios e revelando compreensão dos tópicos trabalhados. (Costa & Pires, 2016, p.407)

Faria e Rodrigues (2020) através de um estudo centrado na análise das produções escritas de alunos do 6.º ano de escolaridade, propõem três dimensões fundamentais da comunicação matemática escrita: correção, clareza e argumentação. No entanto, cada uma dessas dimensões é fundamentada em autores da literatura

especializada, nomeadamente nas contribuições de Ponte et al. (2007), Boavida et al. (2008), Cobb et al. (1992) e Yackel (2001), ou seja, não são categorias inventadas de raiz, mas sim operacionalizadas a partir de referências teóricas relevantes. A correção refere-se ao uso apropriado dos símbolos, das fórmulas, vocabulário matemático e adequação das operações aritméticas. A clareza diz respeito à forma como as ideias são organizadas e expressas, de modo a serem compreensíveis por terceiros. A argumentação implica a capacidade de justificar procedimentos, apresentar pensamentos e sustentar conclusões de forma estruturada. As autoras enfatizam que a comunicação matemática escrita não pode ser desligada da forma como os alunos constroem o seu pensamento e interagem com as tarefas propostas. As mesmas realçam que mesmo quando as respostas não são completas ou perfeitas, a escrita permite aceder ao percurso de pensamento do aluno. Sublinha-se, por exemplo, que muitos alunos recorrem à linguagem natural em articulação com a simbólica, como forma de compensar dificuldades na formalização matemática. Este fenómeno, longe de ser uma falha, é interpretado como sinal de esforço, o que reforça a ideia de que a comunicação escrita deve ser acolhida e valorizada em todas as suas formas intermédias.

Por sua vez, Martins e Martinho (2021) realizaram um estudo com alunos do ensino secundário que procurava compreender como os estudantes comunicam matemática por escrito durante a resolução de um problema. Os resultados mostram que muitos alunos organizam a sua resolução através de esquemas visuais e representações não-verbais, mas revelam dificuldades em seleccionar adequadamente a informação relevante do enunciado e em apresentar justificações claras. Embora uma parte significativa das respostas escritas fosse considerada clara, a argumentação formal nem sempre acompanhava essa clareza, o que revela a necessidade de promover práticas que articulem representação, explicação e justificação escrita.

2.3. *Feedback* escrito ao serviço de uma avaliação para a aprendizagem

No atual contexto educativo português, a avaliação pedagógica é compreendida como uma componente essencial do processo de ensino-aprendizagem-avaliação (Lima & Cosme, 2018). Esta conceção é formalmente consagrada no Decreto-Lei n.º 55/2018¹,

¹ Decreto-Lei n.º 55/2018: Diário da República, 1.ª série, n.º 129 (pp. 2928-2943). Ministério da Educação e Ciência.

de 6 de julho, que estabelece as bases do currículo dos ensinos básico e secundário e os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens. Este diploma, reforça que a avaliação deve ser centrada no desenvolvimento integral do aluno, afirmando que “a avaliação das aprendizagens deve assumir um carácter formativo, regulador do ensino e promotor do sucesso educativo” (art.º 23.º do Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho). Nesta mesma linha de ideias, as *Aprendizagens Essenciais de Matemática, quer para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), quer para o Ensino Secundário (Carvalho e Silva et al., 2023) reforçam a importância da avaliação contínua e formativa, enquanto instrumento de regulação das práticas pedagógicas e de apoio ao processo de aprendizagem. Além disso, indicam que a avaliação deve permitir recolher informação sobre o progresso dos alunos, orientar o ensino e apoiar a tomada de decisões que favoreçam a aprendizagem.

Santos (2018), destaca duas modalidades de avaliação: a formativa e a sumativa. A primeira é uma abordagem pedagógica em que o foco está na compreensão dos processos de aprendizagem do aluno e na tomada de decisões para promoverem a melhoria contínua. Trata-se de avaliar para ensinar melhor e aprender de forma mais eficaz, o que exige uma recolha sistemática de evidências, interpretação e utilização das mesmas por parte dos professores e alunos, no sentido de orientar o percurso de aprendizagem. Por sua vez, a avaliação sumativa procura identificar o nível de desempenho do aluno num dado momento, com o intuito de formular um juízo global sobre as aprendizagens realizadas. Esta abordagem foca-se essencialmente nos resultados obtidos, podendo servir de base para a atribuição de classificações, o que torna mais centrada na aferição final do conhecimento (Fernandes, 2021).

Apesar do consenso em torno da sua relevância, a avaliação formativa continua a levantar desafios práticos nas escolas. Neste sentido, Fernandes (2011), afirma que a avaliação formativa deve ser a principal forma de avaliação presente nas salas de aulas. Contudo, deve ser integrada de modo adequado com uma avaliação sumativa (Fernandes, 2011).

Mas então qual é a definição de avaliação formativa? Apesar de não ser possível identificar uma definição consensual, Pinto e Santos (2006) identificaram pontos comuns nas descrições feitas, ao longo dos anos: (i) foco no aluno e na sua aprendizagem; (ii) tomada de consciência do aluno sobre as suas dificuldades e sucessos; (iii) integração no processo de ensino-aprendizagem; (iv) abertura à pluralidade e à singularidade do aluno; (v) ênfase nos processos, não só nos resultados; (vi) ocorrem intervenções pedagógicas sobre o ensino, sobre a aprendizagem ou

ambas; (vii) tenta entender as causas dos erros e dificuldades dos alunos e (viii) apresenta pistas e orientações subtis de correção para o desenvolvimento.

A avaliação formativa destaca-se pelo seu compromisso com as aprendizagens dos alunos, não se limitando à verificação de resultados, mas procurando apoiar e orientar os processos do desenvolvimento cognitivo. Esta perspetiva centra-se na promoção da autorregulação e da consciência que o aluno adquire sobre o seu próprio percurso de aprendizagem. É neste enquadramento que alguns investigadores, como Santos (2017), propõem substituir a designação “avaliação formativa” por “avaliação para as aprendizagens”, sublinhando o seu papel ativo e formador na construção das aprendizagens. Este tipo de avaliação assume uma função essencialmente reguladora. Isto significa que, ao longo do processo de ensino e aprendizagem, a avaliação fornece informações contínuas que permitem ajustar estratégias, superar dificuldades e potenciar progressos. Trata-se de um processo dinâmico de comunicação entre professor e aluno, que pode ocorrer de forma oral, escrita ou através de momentos de reflexão partilhada. Como referem Dias e Santos (2008), uma das ferramentas mais eficazes neste último domínio é o *feedback* escrito, que se revela particularmente poderoso quando transmitido através de orientações claras e específicas, reforçando, assim, os pontos fortes e sinalizando oportunidades de melhoria de forma construtiva. Tendo em conta os objetivos deste estudo, irei privilegiar a escrita avaliativa, mais especificamente, o *feedback* escrito.

A relevância do *feedback* no contexto da educação tem sido amplamente discutida ao longo dos anos, sendo reconhecido como um elo fundamental entre os processos de avaliação e de aprendizagem. Para que a aprendizagem ocorra de forma significativa, é imprescindível que exista uma interligação eficaz entre estes dois domínios. Neste âmbito, o *feedback* assume um papel central como catalisador da regulação da aprendizagem e da promoção da autonomia do aluno. Desta forma, torna-se crucial ao possibilitar a regulação do ensino e da aprendizagem através de tarefas que servem simultaneamente para ensinar, avaliar, aprender e contextualizar a avaliação (Fernandes, 2008, citado por Machado & Pinto, 2014).

Mas afinal o que é o *feedback*? Sadler (1989) define o *feedback* como a informação que visa reduzir a discrepância entre o nível atual de desempenho e o nível pretendido, funcionando como um mecanismo de regulação que orienta o ajustamento necessário para alcançar os critérios de qualidade estabelecidos. De acordo com esta perspetiva, Hattie e Timperley (2007) defendem que a principal função do *feedback* consiste em diminuir a discrepância entre o desempenho atual dos alunos e os objetivos de

aprendizagem previamente definidos. Santos (2018), por sua vez, afirma que o *feedback* corresponde a qualquer informação produzida de forma deliberada com o intuito de apoiar o aluno na melhoria do seu desempenho, ainda que essa melhoria não se concretize de forma imediata ou garantida.

A sua função reguladora depende, contudo, das suas características e do modo como é recebido e utilizado pelos alunos. Hattie e Timperley (2007) propõem que o *feedback* deve responder a três questões fundamentais: “Para onde vou?” (Quais são os objetivos?), “Como estou a ir?” (Que progressos estou a ter?) e “O que fazer a seguir?” (Como posso progredir mais?). Estas questões estruturam o *feedback* como uma orientação contínua que guia o aluno no seu percurso de aprendizagem. Os mesmos autores, defendem que o *feedback* pode incidir em quatro níveis distintos: o aluno (*self*), a tarefa, o processo e a autorregulação (Hattie & Timperley, 2007).

O *feedback* dirigido à pessoa, *self*, ou seja, quando o foco recai sobre o aluno e não necessariamente sobre o desempenho do mesmo, tende a assumir a forma de elogios genéricos. Desta forma, não há ligação direta à tarefa, ao processo ou à aprendizagem em si, e por esse mesmo motivo, é considerado o menos eficaz, uma vez que oferece pouca ou nenhuma orientação concreta para melhorar a aprendizagem e pode, inclusive, desviar o foco do esforço e da progressão. O *feedback* centrado na tarefa fornece informações sobre o grau de correção e qualidade. Este tipo de *feedback* ajuda o aluno a perceber o que está certo ou errado, podendo incluir sugestões para obter dados mais precisos ou aprofundados, sendo, por isso, o mais comum no contexto escolar. O *feedback* orientado para o processo vai além da correção pontual e incide sobre os métodos e estratégias que o aluno utilizou para realizar a tarefa. Este tipo de *feedback* está intimamente ligado ao desenvolvimento de competências de compreensão, organização e resolução, permitindo ajustar ou melhorar o desempenho com base no pensamento subjacente à tarefa. Este tipo de *feedback* ajuda os alunos a identificar erros, a testar hipóteses alternativas ou a desenvolver abordagens mais eficazes, preparando-os, assim, para enfrentar tarefas mais complexas. Já o *feedback* focado na autorregulação diz respeito à forma como os alunos monitorizam e avaliam o próprio desempenho, ajustando as suas ações em função dos objetivos da aprendizagem. Este tipo de *feedback* promove a autonomia, a autorreflexão e a capacidade de tomar decisões informadas sobre a aprendizagem. Este tipo de *feedback* é eficaz no desenvolvimento de competências metacognitivas e incentiva a reflexão crítica e a autoconfiança na aprendizagem.

A eficácia do *feedback* não depende apenas do conteúdo, mas também da forma como este é construído a nível sintático. A escolha da estrutura sintática pode influenciar o modo como o aluno interpreta e reage à informação recebida. Santos (2017) sublinha que, quando o *feedback* é apresentado sob a forma de pergunta, tende a incentivar o aluno a reconsiderar a sua abordagem e a explorar alternativas, favorecendo, deste modo, a autorreflexão. Já uma formulação que combine o registo interrogativo com afirmações orientadoras (forma mista) parece ser especialmente benéfica. Nestes casos, para além de estimular o pensamento crítico, o *feedback* fornece uma base de apoio que reforça a confiança do aluno na sua capacidade de enfrentar a tarefa matemática. Como acrescenta Santos (2018), estas formas, em contraste com formulações puramente afirmativas, demonstram maior potencial para envolver o aluno de forma ativa no processo de revisão e aperfeiçoamento do seu trabalho.

No entanto, como salientam Santos e Dias (2006), a mera existência de *feedback* não é garantia de melhoria. O impacto desta prática pode ser tanto positivo como negativo, dependendo da forma como o *feedback* é concebido e comunicado. A especificidade da informação, a clareza da linguagem e a adequação ao perfil do aluno são determinantes cruciais. O *feedback* deve conter pistas que ajudem o aluno a compreender o que precisa de melhorar, sem, no entanto, fornecer respostas diretas. Esta abordagem é defendida por Santos (2002), que sugere que o *feedback* deve questionar e orientar, estimulando o aluno a encontrar soluções por si mesmo.

Gipps (1999), citado por Santos (2022), distingue dois tipos principais de *feedback*: o avaliativo, de natureza mais subjetiva e centrado em juízos de valor, e o descritivo, que se foca no desempenho do aluno relativamente à tarefa proposta. O primeiro tem um contributo muito reduzido para a aprendizagem, uma vez que quantifica as produções dos alunos e desvaloriza os erros, afirmando que se trata de incompetências por parte do aluno (Machado & Pinto, 2014). Por sua vez, o último, é apontado como o mais eficaz, dado o seu potencial regulador. Para que o *feedback* cumpra a sua função formativa, deve ser descritivo, centrado na tarefa e nas estratégias cognitivas utilizadas, e oferecer sugestões concretas de melhoria.

Apesar de o *feedback* descritivo ter como finalidade apoiar o progresso do aluno, a forma como é implementado pode variar consoante o tipo de relação estabelecida entre professor e aluno. Em contextos mais tradicionais, é o professor que assume exclusivamente a responsabilidade de indicar os conhecimentos e os processos utilizados, delineando ele próprio a evolução do aluno. Contudo, Santos e Dias (2006) alertam para a possibilidade e vantagem pedagógica de promover uma abordagem mais

colaborativa, ou seja, em que o aluno participa ativamente na análise do seu desempenho e na definição dos passos seguintes, contribuindo para uma aprendizagem mais partilhada e autónoma.

Machado e Pinto (2014) destacam que é necessário utilizar-se outras estratégias que promovam uma avaliação formativa mais eficaz, pois apenas o *feedback* não garante por si só uma melhoria na aprendizagem dos alunos. Desta forma, é importante considerar tanto o momento em que o mesmo é fornecido como a quantidade de informação, pois mais *feedback* nem sempre significa melhor *feedback* (William, 1999).

Segundo Santos (2008), o *feedback* escrito deve ser orientado para a promoção da aprendizagem, proporcionando ao aluno informações claras sobre o que já foi bem conseguido e orientações concretas sobre como pode melhorar. No entanto, essas orientações não devem traduzir-se na apresentação direta das soluções nem na simplificação das tarefas, pois isso comprometeria o desenvolvimento das competências cognitivas. O ideal é que o aluno seja incentivado a rever o seu trabalho, a identificar os aspetos que precisam de ser repensados e a procurar, por si, alternativas viáveis e fundamentadas. Um *feedback* eficaz não deve ser formulado de forma acusatória ou culpabilizante, pois isso pode comprometer a sua aceitação por parte do aluno e limitar o seu impacto. Por outro lado, quando o professor reconhece o esforço do aluno e valoriza os seus progressos, promove, desta forma, uma comunicação construtiva.

Outro aspeto fundamental destacado por Santos (2008) diz respeito ao momento em que o *feedback* é fornecido. Quando o *feedback* é dado após a divulgação das respostas corretas, a sua eficácia tende a diminuir, pois o aluno deixa de ter espaço para intervir sobre o seu próprio processo. Por isso, é importante que o *feedback* seja inserido num momento em que a tarefa ainda esteja em aberto, sem que esta tenha sido sujeita a uma avaliação final. Esta abordagem reforça a ideia de que os trabalhos estão em processo e que podem e devem ser revistos, repensados e melhorados com base nas orientações recebidas.

A linguagem utilizada deve ser clara, concreta e acessível, evitando abreviaturas, símbolos pouco explícitos ou comentários descontextualizados. Quando os comentários são demasiado abstratos e vagos, o *feedback* nem sempre é compreendido (Santos e Dias, 2006). Neste sentido, Santos (2008) destaca a importância da personalização do *Feedback*, sublinhando que o mesmo pode provocar efeitos distintos consoante o aluno que a recebe ou mesmo o momento em que a recebe.

Fernandes (2022) chama a atenção para um aspeto frequentemente negligenciado: a forma como os alunos interpretam e se apropriam do *feedback*. Distribuir *feedback* de qualidade implica assegurar que os alunos compreendem a mensagem e a utilizam para orientar as suas ações futuras. A este propósito, Butler e Winne (1995) reforçam que a perceção que os alunos têm sobre o *feedback* é fortemente influenciada por fatores como os seus conhecimentos prévios, experiências escolares anteriores e as suas crenças sobre a escola e o processo de aprendizagem. Esta diversidade de fatores ajuda a explicar porque é que o mesmo *feedback* pode ter efeitos muito diferentes em alunos distintos.

Um dos estudos nesta área foi o de Butler (1987), que investigou o impacto de diferentes formas de *feedback*, nomeadamente comentários escritos, classificações, elogios e a ausência de comentário em alunos do 5.º e 6.º anos, em Israel, na disciplina de matemática. Os resultados mostraram que apenas os comentários escritos promoveram melhorias significativas no desempenho posterior dos alunos. Este dado evidencia que o simples ato de classificar ou elogiar pode não ser suficiente para estimular o progresso académico, sendo os comentários descritivos mais eficazes na orientação para a melhoria.

Em Portugal, o estudo de Santos e Dias (2006) demonstrou de forma clara que o mesmo *feedback* pode ser interpretado de formas distintas por diferentes alunos. A natureza das pistas dadas pelo professor, o grau de especificidade e a forma como o erro é assinalado influenciam diretamente a capacidade de os alunos agirem sobre essa informação. Alunos com melhor desempenho tenderam a procurar apoio adicional e a completar os seus trabalhos com sucesso. Já alunos com desempenho médio revelaram maiores dificuldades em compreender ou aplicar o *feedback*, especialmente quando este era simbólico ou demasiado vago.

O estudo conduzido por Carvalho et al. (2014) permitiu aprofundar a compreensão das perceções dos alunos relativamente ao *feedback* dado pelos professores, evidenciando que esse *feedback* pode assumir formas qualitativamente distintas e ter efeitos diferenciados na aprendizagem. Através da construção e validação de uma escala aplicada a alunos do 6.º, 7.º, 9.º e 10.º anos, os autores identificaram duas dimensões fundamentais: o *feedback* eficaz, que é percebido como claro, respeitador e orientador do processo de melhoria, e o *feedback* não eficaz, caracterizado por comentários genéricos, punitivos ou centrados no aluno e não no seu trabalho. A investigação revelou que o impacto do *feedback* depende fortemente da forma como é comunicado e do modo como os alunos o interpretam, destacando que, para ser útil, o *feedback* tem

de ser compreensível e emocionalmente aceitável. Embora a maioria dos professores acredite estar a fornecer indicações úteis, os dados sugerem que isso nem sempre se traduz numa perceção positiva por parte dos alunos, especialmente quando o *feedback* é pouco específico ou desprovido de utilidade prática. Esta realidade reforça a importância de uma formação docente que promova práticas de *feedback* alinhadas com os princípios de uma avaliação formativa.

Mais recentemente, Lopes (2021) realizou um estudo com alunos do 6.º, 9.º, 10.º e 12.º anos de escolaridade. Neste caso, verificou-se que os alunos apreciam comentários construtivos, que valorizem o esforço e ofereçam pistas concretas para melhorar. Comentários destrutivos, por outro lado, são mal recebidos e comprometem a motivação. Curiosamente, os alunos do ensino profissional mostraram maior valorização por *feedback* centrado na autorregulação, enquanto os do ensino regular privilegiaram mensagens que reforçassem o compromisso e o reconhecimento do trabalho realizado.

Em síntese, a literatura revela que o *feedback* é um instrumento pedagógico valioso, desde que bem concebido, personalizado e trabalhado com os alunos. Mais do que uma simples correção, o *feedback* deve ser encarado como um diálogo contínuo entre professor e aluno, que promova a reflexão, a responsabilização e o desenvolvimento das aprendizagens.

3. Intervenção Pedagógica

Neste capítulo, apresenta-se o contexto escolar onde se desenvolveu a intervenção pedagógica em análise, dando-se a conhecer de forma clara e estruturada as suas diferentes fases. É descrita a organização temporal da intervenção, bem como o tipo de tarefas propostas aos alunos e os recursos didáticos utilizados. Procurou-se igualmente explicar as estratégias de dinamização do trabalho colaborativo em sala de aula e, por fim, expõem-se os procedimentos seguidos para recolher e analisar as evidências que sustentaram a interpretação das aprendizagens alcançadas ao longo do processo.

3.1. Caracterização do contexto escolar²

No âmbito da minha PES, desenvolvi uma intervenção pedagógica numa escola básica e secundária localizada na área metropolitana do Porto. Esta instituição, com raízes que remontam a 1951, iniciou a sua atividade como um liceu feminino, tendo-se tornado mista após a Revolução de Abril de 1974. Está integrada num agrupamento de escolas, desde o ano letivo 2012/2013, acolhendo atualmente alunos dos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário. No que se refere ao ensino secundário, são oferecidos cursos científico-humanísticos, nomeadamente Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades.

As instalações da escola compreendem dois blocos principais, um pavilhão desportivo e uma cantina. Ao longo dos anos, a escola foi alvo de várias remodelações, sendo de destacar a intervenção mais significativa ocorrida em 2008/2009. A escola disponibiliza diversos serviços, como o Centro de Apoio à Aprendizagem, a Biblioteca Escolar, o Gabinete de Informação e Apoio ao Aluno, uma equipa de apoio à Educação Inclusiva e o Serviço de Psicologia e Orientação.

Num esforço contínuo para promover uma formação integral dos seus alunos nas vertentes académica, cultural, ambiental e social a escola dinamiza uma diversidade de projetos e iniciativas extracurriculares. Entre estes, destacam-se o Desporto Escolar, o Projeto Erasmus+, o Projeto Eco-Escolas, o Projeto de Educação para a Saúde, o Parlamento dos Jovens, o Ciência Viva, o Plano Nacional de Cinema, o Projeto

² A caracterização do agrupamento de escolas onde realizei a minha PES foi elaborada em conjunto com outro colega que, nesse mesmo ano, concretizou também a sua PES neste agrupamento. Neste sentido, esta parte do texto é comum aos dois relatórios de estágio: Pinho, F. (2025). *O papel do feedback na melhoria da comunicação matemática escrita* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]; Azevedo, G. (2025). *O papel das representações matemáticas na realização de tarefas: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].

SeguraNet, o Dia da Internet Segura, o Dia dos Direitos Humanos, o Dia Solidário. Além disso, são também promovidas oficinas extracurriculares. A escola conta ainda com a colaboração ativa da Associação de Pais e Encarregados de Educação.

Localizada numa zona bem servida por transportes públicos, incluindo uma paragem de metro próxima da entrada principal, a escola recebe alunos não só da freguesia onde se insere, como também de outras freguesias da cidade e áreas limítrofes, promovendo um ambiente escolar diverso.

3.2. Caracterização da turma

Durante o ano letivo 2024/2025, no qual realizei a minha PES, tive a oportunidade de contactar com duas turmas de 9.º ano de escolaridade e duas turmas de 11.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. Após uma análise cuidada da dinâmica de cada grupo e das suas características, optei por desenvolver a intervenção pedagógica com uma das turmas de 11.º ano, na disciplina de matemática A. Esta decisão surgiu, em parte, da dificuldade inicial que senti em interpretar certas produções escritas dos alunos, nas quais a organização do seu pensamento e a clareza das justificações nem sempre eram evidentes. Além disso, no início do ano letivo, durante as aulas de matemática A, comecei a notar um padrão curioso no comportamento dos alunos desta turma. Era comum solicitarem os professores para procederem ao esclarecimento de dúvidas que surgiam ao longo das tarefas, no entanto, apesar das explicações dadas, os mesmos alunos voltavam a pedir apoio, muitas vezes sobre a mesma situação, recorrendo a outro docente. Esta repetição levou-me a refletir sobre a eficácia do apoio prestado, principalmente no que diz respeito à clareza das orientações fornecidas. Será que as mensagens que transmitíamos eram compreendidas por eles? Esta inquietação tornou-se o ponto de partida para a escolha desta turma, bem como para a seleção do foco do presente estudo. O objetivo passou, então, por compreender de que forma o *feedback* escrito, fornecido pelo professor, pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos.

Descrevendo a turma, esta era composta por vinte e dois alunos, dos quais quinze do sexo masculino e sete do sexo feminino, com idades compreendidas entre os dezasseis e os dezassete anos. Todos os alunos frequentaram a mesma turma, no ano letivo anterior. Os alunos são interessados e empenhados, no entanto, na generalidade essas atitudes não se traduziram em bons resultados. Notava-se que a maioria dos alunos não tinha adquirido na totalidade os conhecimentos abordados em anos anteriores. Esta

turma evidenciava lacunas significativas ao nível dos conhecimentos básicos e fundamentais, fruto de uma base fragilizada, em grande parte devido ao impacto da pandemia de 2020, que comprometeu etapas-chave da sua formação, nomeadamente a transição entre o 2.º e o 3.º ciclo. A nível de comportamento, os alunos revelavam uma postura globalmente tranquila e educada, apesar de haver momentos pontuais de distração e diálogo entre pares.

Relativamente ao aproveitamento da turma, no final do décimo ano, a turma obteve uma média de 12 valores de classificação final. Através dos próximos três gráficos conseguimos analisar mais concretamente as classificações dos alunos na disciplina de matemática A no 3.º Período do 10.º ano de escolaridade (Gráfico 1), no 1.º Período do 11.º ano (Gráfico 2) e no 2.º Período do 11.º ano (Gráfico 3).

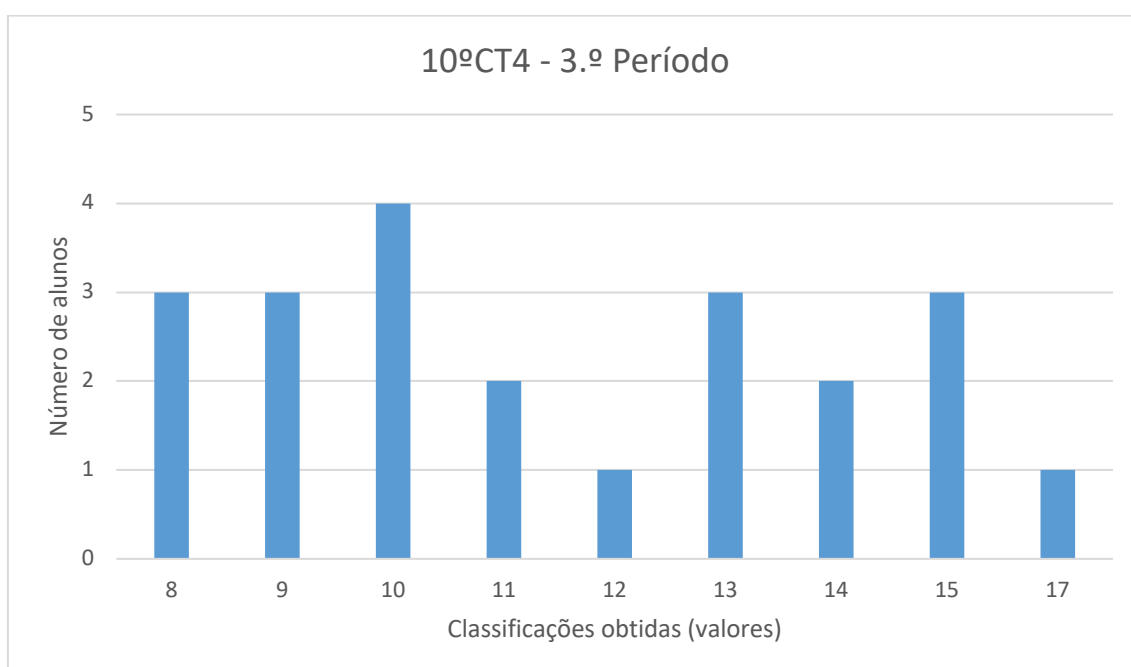


Gráfico 1- Classificações obtidas no 3.º Período do 10.º ano

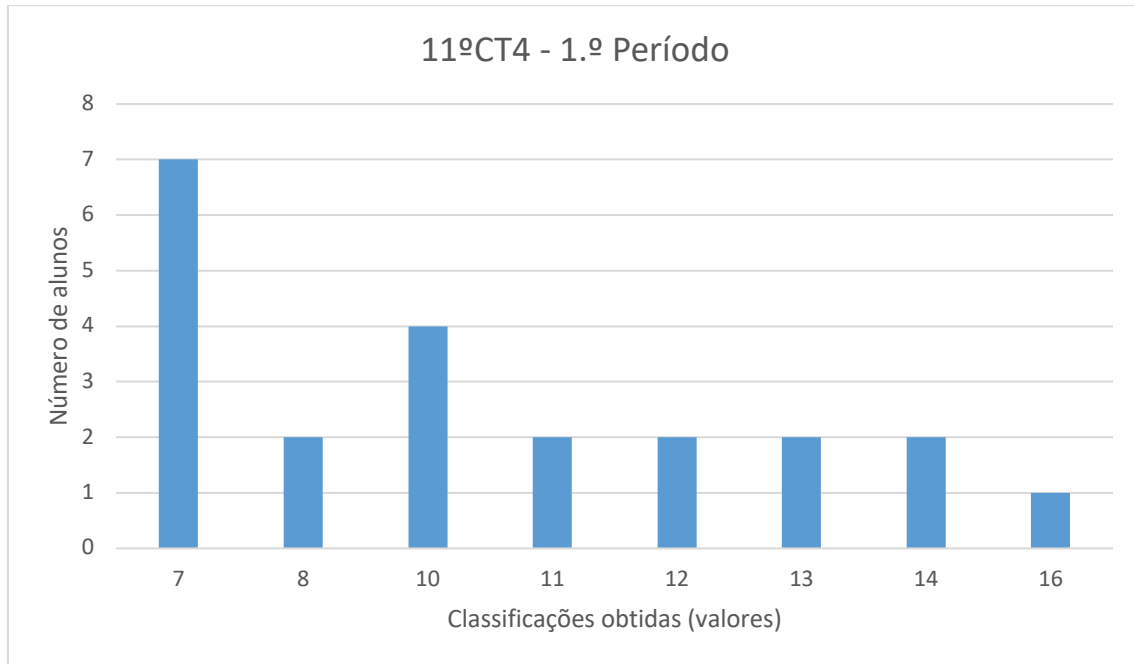


Gráfico 2 - Classificações obtidas no 1.º Período do 11.º ano

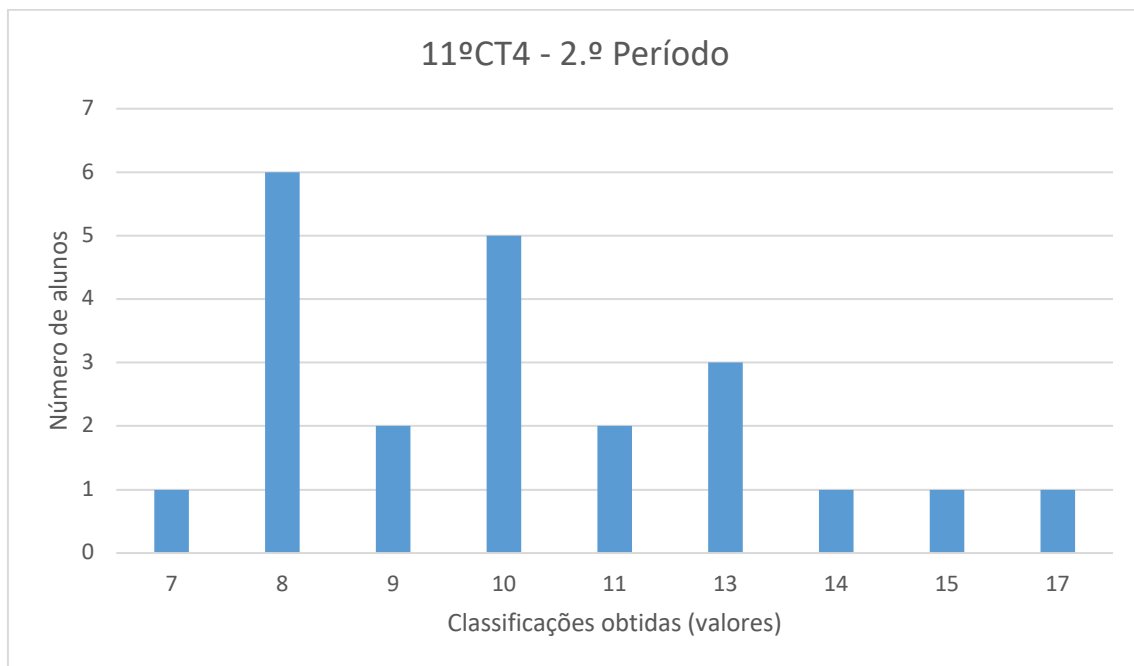


Gráfico 3 - Classificações obtidas no 2.º Período do 11.º ano

Pode destacar-se ainda que a turma tinha um aluno que usufruía de medidas seletivas e adicionais ao abrigo do DL n.º 54/2018, de 6 de julho.

3.3. Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica, na qual incidu esta investigação, foi realizada ao longo do 2.º período e contemplou três momentos em que os alunos foram envolvidos, de forma individual, na resolução de problemas. Cada um desses momentos integrou cinco etapas, como se mostra na Figura 2: (1) os alunos eram convidados a resolver um problema (Problema – 1.ª fase) apresentado, de forma individual e autónoma; (2) a professora atribuía *feedback* a essa produção escrita; (3) os alunos tinham oportunidade de realizar um segundo problema (Problema – 2.ª fase), visando os mesmos objetivos de aprendizagem; (4) novamente, a professora atribuía *feedback* a essa segunda produção escrita; e (5) a professora proporcionava um momento de discussão e análise individual das resoluções apresentadas pelo aluno.

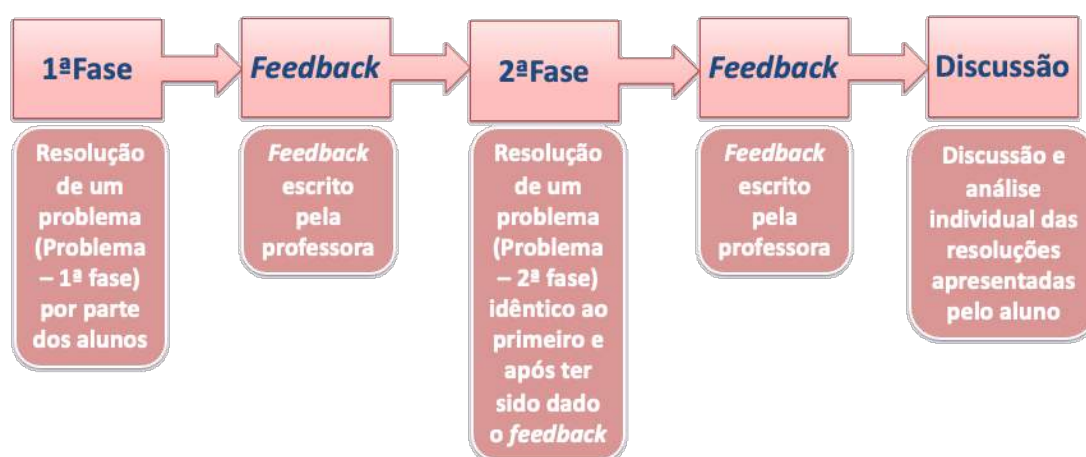


Figura 2 - Resumo das etapas de cada momento da intervenção pedagógica

Com este processo, procurei compreender como é que os alunos interpretavam o *feedback* que lhes era fornecido e, sobretudo, de que forma o utilizavam para rever e aperfeiçoar as suas produções. A proposta de trabalho assentou na exploração da resolução de problemas relacionados com diferentes temáticas curriculares presentes nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A, para o 11.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2018), nomeadamente: geometria analítica no espaço e sucessões, mais concretamente progressões aritméticas.

Importa ainda referir que o primeiro momento da intervenção (Problemas 1.ª e 2.ª fases) foi desenvolvido por todos os alunos da turma, no final de uma aula. Contudo, com o avançar do trabalho apercebi-me que, por uma questão de tempo e de acompanhamento mais individualizado, seria mais adequado restringir o número de participantes. Assim, os dois momentos seguintes da intervenção foram realizados

durante as aulas de apoio, as quais não eram de frequência obrigatória, mas que contavam habitualmente com a presença de cerca de 9 a 13 alunos, ou seja, sensivelmente metade da turma. Esta decisão permitiu um acompanhamento mais próximo e personalizado, favorecendo o diálogo e a reflexão em torno das produções dos alunos, bem como uma gestão mais eficaz do tempo disponível para cada momento da intervenção.

Como já referido, a presente intervenção pedagógica foi desenvolvida ao longo do 2.º período seguindo a calendarização presente na Figura 3.

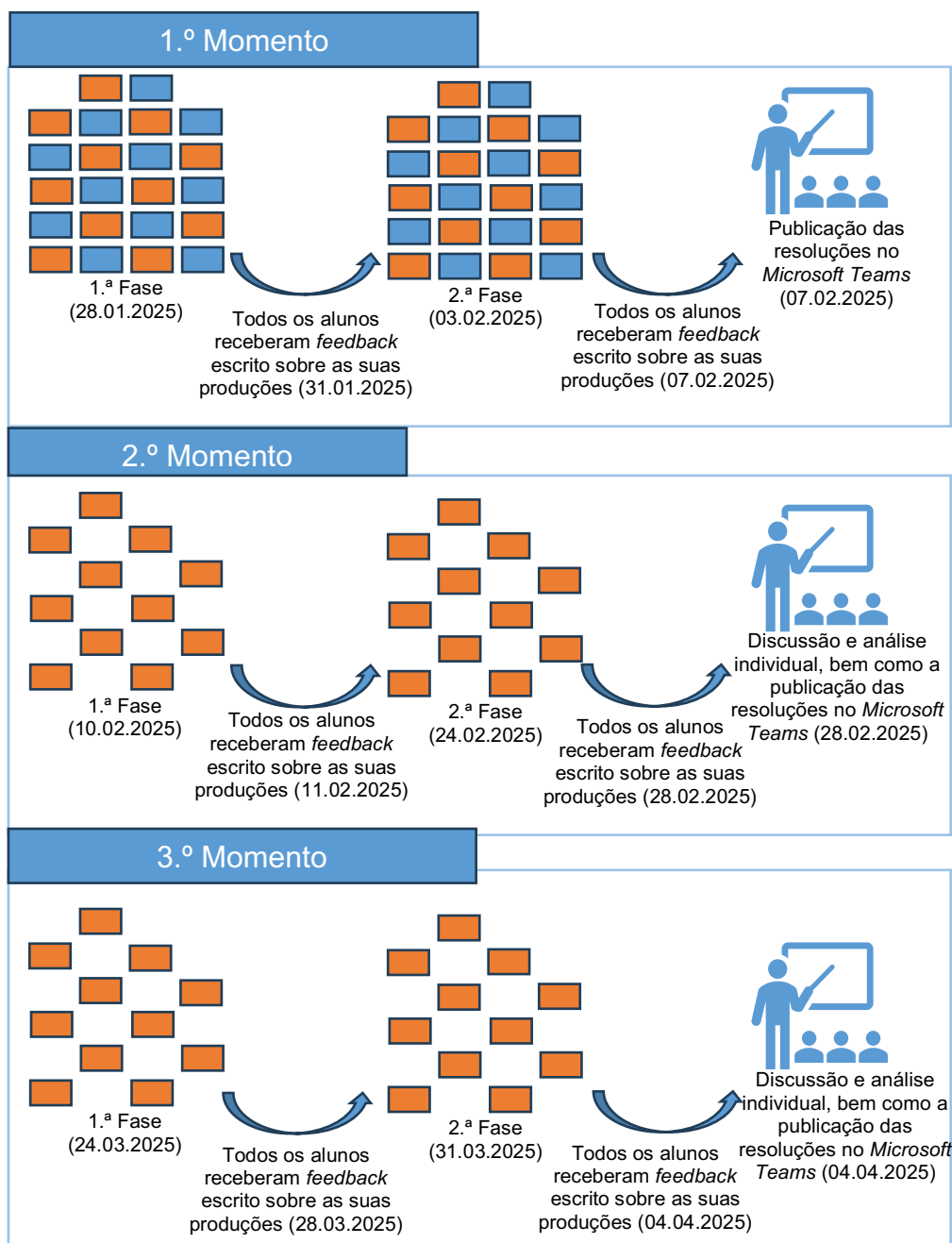


Figura 3 - Organização dos diferentes momentos da intervenção pedagógica

3.3.1. Primeiro momento da intervenção pedagógica

O primeiro momento da intervenção pedagógica foi realizado no dia 28 de janeiro de 2025, a cerca de 20 minutos do fim da aula. Sem um aviso prévio, foi distribuído o enunciado do problema da 1.^a fase, tarefa que os alunos resolveram de forma individual. Após os alunos resolverem, recolhi as folhas e analisei as suas produções, a fim de dar um *feedback* adequado a cada um dos alunos. Antes da realização do problema da 2.^a fase, entreguei, aos alunos, as produções com *feedback* para lerem e refletirem. O *feedback* foi entregue dia 31 de janeiro de 2025 e a segunda fase foi feita dia 3 de fevereiro. Além disso, para além de entregar o *feedback* relativo à segunda fase no dia 7 de fevereiro de 2025, também disponibilizei propostas de resoluções na plataforma *Microsoft Teams*. Contudo, devido a constrangimentos de tempo não foi possível realizar a quinta etapa, ou seja, não houve possibilidade de discussão e análise individual com cada aluno.

O tema abordado no primeiro momento da intervenção pedagógica foi a geometria analítica no espaço. O problema teve como objetivo de aprendizagem “resolver problemas envolvendo retas no plano e retas e planos no espaço, utilizando: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; posição relativa de retas e planos” (Ministério da Educação, 2018, p. 6). Como se trata de uma turma grande recorreu-se ao uso de versões para englobar mais subtemas. Os enunciados dos problemas propostos na 1.^a fase presentes nas Figuras 4 e 5 correspondem à versão 1 e à versão 2, respetivamente.

Planos	Matemática- 11.º Ano	jan25
Nome: _____		N.º: _____
1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(1, 0, 3)$, e o plano α, definido por $3x + 2y - 4 = 0$. Determine a equação cartesiana de um plano β paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A.		

Figura 4 - Enunciado do problema da 1.^a fase (versão 1) / Momento 1

Planos	Matemática- 11.º Ano	jan25
Nome: _____		N.º: _____
1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α, definido por $3x + 2y - 4 = 0$. Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A.		

Figura 5 - Enunciado do problema da 1.ª fase (versão 2) / Momento 1

Nesta fase, embora já se tivesse explorado o tema em questão, durante as aulas, verifiquei que os alunos apresentavam alguma dificuldade em relacionar condições para representar planos e, neste sentido, os problemas propostos tiveram como propósito reforçar as aprendizagens associadas a essa temática. Para esta turma, estas tarefas apresentavam um nível de complexidade considerável, pelo que se constituíram como problemas e não como tarefas rotineiras.

O problema da primeira versão foi retirado do Exame Nacional de Matemática A de 2014 2.ª fase³. Deste modo, para a segunda versão mudei apenas pequenos pormenores, mas que conduziam a situações diferentes. Com isto, troquei a palavra “paralelo” por “perpendicular”.

Por sua vez, para a segunda fase, tentei manter a estrutura, mudando apenas valores. Os enunciados da 2.ª fase presentes nas Figuras 6 e 7 correspondem à versão 1 e à versão 2, respetivamente.

³ https://www.matematica.pt/docs/enunciados/12ano/exame/2014_Fase2_Prova.pdf

Planos – Problema 2.ª fase	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____	
1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (4, 2, 1), e o plano α, definido por $5x + 3y - 7 = 0$. Determine a equação cartesiana de um plano β paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A.	

Figura 6 - Enunciado do problema da 2.ª fase (versão 1) / Momento 1

Planos – Problema 2.ª fase	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____	
1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (4, 2, 1), e o plano α, definido por $5x + 3y - 7 = 0$. Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A.	

Figura 7 - Enunciado do problema da 2.ª fase (versão 2) / Momento 1

No problema da versão 1, tanto da 1.ª como da 2.ª fase, pretendia-se que os alunos determinassem a equação cartesiana de um plano que é paralelo a um plano dado e que passa por um ponto específico. Para isso, deviam reconhecer e justificar que dois planos paralelos têm vetores normais colineares, podendo desta forma serem representados pelo mesmo vetor que se obtém a partir da equação do plano dado ou recorrerem à definição de vetores colineares. Depois, usavam esse vetor e o ponto fornecido para escrever a equação do plano solicitado.

Já no problema da versão 2, das 1.ª e 2.ª fases, era solicitado aos alunos que determinassem a equação cartesiana de um plano que é perpendicular a um plano dado e que passa por um ponto específico. Para isso, tinham de identificar e justificar que dois planos perpendiculares têm vetores normais perpendiculares, pelo que o seu

produto escalar é zero. Depois, usavam esse vetor e o ponto fornecido para escrever a equação do novo plano.

Em anexo, encontra-se uma proposta de resolução para cada problema (Anexo 1).

3.3.2. Segundo momento da intervenção pedagógica

Como já foi dito anteriormente, ao contrário do primeiro momento de intervenção, o segundo não foi aplicado à totalidade da turma. Além disso, foi realizado no horário de apoio ao estudo. Desta forma, no início da sessão de dia 10 fevereiro de 2025, sem um aviso prévio, foi distribuído o enunciado do problema da 1.^a fase, tarefa que os alunos resolveram de forma individual. De seguida, recolhi as folhas e analisei-as, a fim de dar um *feedback* adequado a cada um dos alunos. Entreguei, aos alunos, as produções com *feedback* (11 de fevereiro de 2025) para lerem e refletirem, antes da realização do problema da 2.^a fase (24 de fevereiro de 2025). Neste segundo momento, infelizmente, o distanciamento foi maior, podendo, assim, ser um fator diferenciador. Além disso, no dia de entrega do *feedback* relativo à segunda fase (28 de fevereiro de 2025), para além, das propostas de resolução serem publicadas na plataforma *Microsoft Teams*, também foram realizadas entrevistas individuais breves que proporcionaram um momento de discussão e análise individual.

O tema abordado no segundo momento da intervenção pedagógica foi, novamente, a geometria analítica no espaço. Tal como no momento anterior, os dois problemas propostos tiveram como objetivos de aprendizagem “resolver problemas envolvendo retas no plano e retas e planos no espaço, utilizando: equações vetoriais de retas; equações cartesianas de planos; posição relativa de retas e planos” (Ministério da Educação, 2018, p.6). Esta escolha deveu-se pelo simples facto de os alunos continuarem com bastantes dificuldades neste tema, persistindo com bastantes dúvidas. Os enunciados dos problemas propostos na 1.^a fase presentes nas Figuras 8 e 9 correspondem à versão 1 e à versão 2, respetivamente.

Planos e retas	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____ Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s, de equações vectoriais respetivamente: $(x, y, z) = (1, 2, -2) + k(-1, 2, 2), k \in R \text{ e } (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 4, 4), k \in R.$	

Figura 8 - Enunciado do problema da 1.ª fase (versão 1) / Momento 2

Planos e retas	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____ Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s, de equações vectoriais respetivamente: $(x, y, z) = (-3, 4, 4) + k(-1, 2, 2), k \in R \text{ e } (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 0, 1), k \in R.$	

Figura 9 - Enunciado do problema da 1.ª fase (versão 2) / Momento 2

Nesta fase, embora já se tivesse explorado o tema em questão, durante as aulas e na primeira intervenção pedagógica, verifiquei que os alunos persistiam com algumas dificuldades em relacionar condições para representar planos e, neste sentido, os problemas propostos tiveram como propósito reforçar as aprendizagens associadas a essa temática. Estas tarefas, para esta turma, apresentavam um nível de complexidade considerável, pelo que se constituíram como problemas e não como tarefas rotineiras. O problema da versão 1 foi retirado do Manual dos alunos (Andrade et al., 2024, p. 117)⁴. Assim, para a segunda versão mudei apenas pequenos pormenores, mas que conduziam a situações diferentes. Com isto, a relação entre as retas passou de paralelas para concorrentes. Por sua vez, para a segunda fase, tentei manter a

⁴ Andrade et al., 2024, Novo ÍPSILON 11, VOL. 1

estrutura, mudando apenas valores. Os enunciados da 2.^a fase presentes nas Figuras 10 e 11 correspondem à versão 1 e à versão 2, respetivamente.

Planos e retas – Problema 2.^a fase	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____ Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s, de equações vectoriais respetivamente: $(x, y, z) = (0, -3, 2) + k(1, -1, 2), k \in R \text{ e } (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(3, -3, 6), k \in R.$	

Figura 10 - Enunciado do problema da 2.^a fase (versão 1) / Momento 2

Planos e retas – Problema 2.^a fase	Matemática- 11.º Ano fev25
Nome: _____ N.º: _____ Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s, de equações vectoriais respetivamente: $(x, y, z) = (4, -3, 5) + k(1, -1, 2), k \in R \text{ e } (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(2, -3, 1), k \in R.$	

Figura 11 - Enunciado do problema da 2.^a fase (versão 2) / Momento 2

Na versão 1, quer da 1.^a fase, quer da 2.^a fase, era pedida a equação cartesiana de um plano definido por duas retas, sendo estas representadas pela equação vectorial. Neste caso, primeiro deviam confirmar se as retas são paralelas ou concorrentes, de modo a identificarem as condições necessárias. Para isso, deviam reconhecer a relação entre os vetores diretores de cada reta, e deste modo concluir que no caso de serem colineares significa que as retas são paralelas, caso contrário, as retas são concorrentes. Nesta versão, como as retas são paralelas, então os alunos tinham de identificar um ponto de cada reta e definir um vetor formado pelos mesmos. De seguida, resolvendo as condições que permitiam encontrar as coordenadas de um vetor

genérico, normal ao plano, chegariam a uma família de vetores. Depois apresentavam a equação geral do plano utilizando o vetor normal determinado anteriormente. Por fim, encontravam a equação cartesiana do plano pretendido, reconhecendo que qualquer ponto da reta r ou da reta s é um ponto do plano.

Relativamente, à versão 2, das 1.^a e 2.^a fases, tal como na versão 1, pretendia-se que os alunos encontrassem a equação cartesiana de um plano definido por duas retas, apresentadas através de uma equação vetorial. Nesta versão, como as retas são concorrentes, bastava resolverem as condições que permitem encontrar as coordenadas de um vetor genérico, normal ao plano, chegando, assim, a uma família de vetores. Depois apresentavam a equação geral do plano utilizando o vetor normal determinado anteriormente e um ponto da reta r ou da reta s , uma vez que qualquer um desses pontos pertence ao plano solicitado. Em anexo, encontra-se uma proposta de resolução para cada problema (Anexo 2), bem como o guião da entrevista (Anexo 3).

3.3.3. Terceiro momento da intervenção pedagógica

Tal como no segundo momento de intervenção, ao contrário do primeiro, o terceiro não foi aplicado à totalidade da turma. Além disso, foi realizado no horário de apoio ao estudo. Desta forma, no início da sessão de dia 24 de março de 2025, sem um aviso prévio, foi distribuído o enunciado do problema da 1.^a fase, tarefa que os alunos resolveram de forma individual. Recolhi as folhas, após os alunos resolverem, e analisei as suas produções, a fim de dar um *feedback* adequado a cada um dos alunos. Entreguei, aos alunos, as produções dos mesmos com *feedback* (28 de março de 2025), antes da realização do problema da 2.^a fase (31 de março de 2025), para eles lerem e refletirem. Além disso, aquando da entrega do *feedback* relativo à segunda fase (04 de fevereiro de 2025), para além, das propostas de resolução serem publicadas na plataforma *Microsoft Teams*, também realizei entrevistas individuais breves de modo a discutir e analisar de forma individual as produções feitas pelo aluno.

Neste terceiro e último momento, felizmente, o distanciamento foi menor, podendo, assim, ser um fator diferenciador. Os dois problemas propostos neste momento, tiveram como objetivos de aprendizagem “resolver problemas envolvendo progressões aritméticas (termo geral e soma de n termos consecutivos)” (Ministério da Educação, 2018, p.7). Desta vez, não recorri ao uso de versões. O enunciado do problema proposto na 1.^a fase é apresentado na Figura 12.

Progressão	Matemática- 11.º Ano março25
Nome: _____ N.º: _____	
Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior. O oitavo termo da sequência é 16. Qual dos números seguintes não é termo da sequência? (A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057 Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.	

Figura 12 - Enunciado do problema da 1.ª fase / Momento 3

Nesta fase, embora o tema relativo às progressões aritméticas já tivesse sido abordado em aulas anteriores, verifiquei que persistiam algumas dificuldades por parte dos alunos, sobretudo na identificação do termo geral e na utilização da razão em diferentes contextos. Neste sentido, os problemas propostos tiveram como intuito reforçar as aprendizagens associadas a essa temática. Para esta turma, estas tarefas apresentavam um nível de complexidade considerável, pelo que se constituíram como problemas e não como tarefas rotineiras.

O problema da 1.ª fase foi retirado da ficha de revisão 3 do Manual Máximo 11 (Neves et al., 2016). Por sua vez, para a 2.ª fase, tentei manter a estrutura, mudando apenas valores. Na Figura 13, apresenta-se o enunciado da 2.ª fase.

Progressão – Problema 2ª fase	Matemática- 11.º Ano	março25
Nome: _____ N.º: _____		
Numa sequência de números, com mais de 200 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se subtraindo quatro ao termo anterior. O sétimo termo da sequência é 34. Qual dos números seguintes não é termo da sequência? (A) 18 (B) 2 (C) -98 (D) 77 Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.		

Figura 13 - Enunciado do problema da 2.ª fase / Momento 3

Quer na 1.ª fase, quer na 2.ª fase, pretendia-se que os alunos reconhecessem que a sequência descrita é uma progressão aritmética e conseguissem identificar a sua razão através do enunciado. Sabendo um dos termos e a razão da progressão aritmética, poderiam chegar ao seu termo geral, conseguindo assim descobrir qual dos valores não é termo da sucessão.

Em anexo, encontra-se uma proposta de resolução para cada problema (Anexo 4), bem como o guião da entrevista (Anexo 5).

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, apresento as principais opções metodológicas tomadas no âmbito da investigação realizada, descrevo os participantes no estudo, explico os critérios de seleção e fundamento os métodos e procedimentos de recolha e análise de dados, assim como as medidas adotadas para salvaguardar as questões éticas associadas ao estudo.

4.1. Opções metodológicas

Este estudo seguiu uma metodologia de natureza qualitativa e carácter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008). A opção por uma metodologia qualitativa justifica-se pela necessidade de compreender, de forma aprofundada, os significados atribuídos pelos alunos ao *feedback* recebido, bem como as implicações desse processo na melhoria da comunicação escrita dos mesmos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), um estudo com abordagem qualitativa possui cinco características fundamentais: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal; (ii) os dados são predominantemente descritivos; (iii) o foco da investigação recai sobre o processo, mais do que sobre os resultados ou produtos finais; (iv) a análise é indutiva, sendo que “o processo de análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas” (p. 50); e (v) o significado atribuído pelos participantes à sua experiência é central para a compreensão do fenómeno estudado.

Relativamente ao primeiro ponto, a investigação foi realizada num ambiente escolar, durante as aulas de matemática (e sessões de apoio), o que permitiu observar os comportamentos e produções dos alunos em contexto real. Em relação ao segundo ponto, a natureza descritiva dos dados recolhidos revelou-se fundamental, pois, os investigadores qualitativos não procuram reduzir os dados a números, mas antes compreender o seu significado no contexto educativo. Os dados analisados consistiram, sobretudo, em produções escritas dos alunos elaboradas ao longo da intervenção pedagógica que permitiram interpretar os efeitos do *feedback*. No que diz respeito ao terceiro ponto, este estudo teve como objetivo compreender de que forma o *feedback* escrito fornecido pelo professor pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação

matemática escrita dos alunos, e não apenas em resultados mensuráveis. Quanto ao quarto ponto, a análise dos dados foi conduzida de forma indutiva, ou seja, a partir da observação das produções dos alunos foram sendo construídas inferências, sem partir de hipóteses fechadas. Por fim, a quinta característica prende-se com o valor atribuído à perspetiva dos participantes. A compreensão do fenómeno em estudo, neste caso, de que forma o *feedback* escrito fornecido pelo professor contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos, só se torna significativa se considerarmos a forma como os próprios alunos interpretam o *feedback* e o utilizam nas suas produções.

Importa ainda destacar que, neste trabalho, eu, investigadora, assumi uma posição de dupla pertença, ou seja, atuei simultaneamente como professora e investigadora. Esta condição exige um exercício constante de autorreflexão e ajustamento entre os objetivos pedagógicos e de investigação. Como refere Amado (2014), esta relação próxima entre o investigador e o contexto de investigação é típica da investigação qualitativa em educação, e requer um posicionamento ético e crítico permanente.

4.2. Participantes

Como já referido anteriormente, a intervenção pedagógica teve início com a participação da totalidade da turma, composta por 22 alunos do 11.º ano de escolaridade. Contudo, face à extensa quantidade de dados recolhidos e ao tempo exigido para uma análise aprofundada, tornou-se necessário proceder à seleção criteriosa de um grupo mais restrito de alunos. Para esse efeito, a intervenção passou a decorrer nas aulas de apoio, frequentadas habitualmente por cerca de 9 a 13 alunos. Deste grupo, foram posteriormente selecionados 3 alunos, cuja evolução no processo de *feedback* foi acompanhada de forma mais detalhada e sistemática.

Procurei selecionar alunos com perfis distintos, tendo em consideração o seu nível de desempenho na disciplina de matemática A, bem como as diferentes formas de reagir ao *feedback* fornecido. Assim, foram incluídos no estudo alunos que evidenciaram melhorias significativas entre a primeira e a segunda fase da intervenção, no primeiro momento, bem como alunos que, apesar dessas melhorias, desconsideraram totalmente e parcialmente o *feedback* recebido, não reformulando certos aspetos da sua resolução.

Nesta seleção, o primeiro momento da intervenção pedagógica teve um papel determinante, pois apesar de ter havido uma diminuição de participantes do primeiro para o segundo momento de intervenção, os alunos que causaram mais curiosidade com as suas primeiras resoluções fizeram parte das aulas de apoio. Um destes alunos foi escolhido, pois revelou melhorias significativas da 1.^a para a 2.^a fase, sugerindo que o *feedback* recebido poderá ter contribuído positivamente para a sua comunicação matemática escrita. Em contraste, uma aluna demonstrou uma quebra no desempenho entre as duas fases, o que permitiu analisar um caso em que o *feedback* não teve os efeitos desejados, podendo até ter sido mal interpretado ou desvalorizado. Além disso, foi selecionado outro aluno em que houve uma estagnação, ou seja, não melhorou, mas também não piorou. Neste sentido, os alunos, Álvaro, Beatriz e Salvador foram selecionados para participar neste estudo. Importa referir que os nomes atribuídos aos alunos são fictícios, tendo como objetivo salvaguardar a confidencialidade e o anonimato dos participantes. A Tabela 1 apresenta uma síntese das informações anteriormente descritas, incluindo uma breve caracterização dos alunos envolvidos nesta investigação.

Aluno	Descrição do aluno	Nota final do 1.º Período	1.ª Intervenção Pedagógica
Álvaro	É um aluno empenhado e bastante participativo, no entanto distrai-se facilmente.	14	Manteve-se constante após o <i>feedback</i>
Beatriz	É uma aluna empenhada, não participa, mas não revela desinteresse pela disciplina.	7	Piorou após o <i>feedback</i>

Salvador	É um aluno empenhado, bastante participativo e interessado.	16	Melhorou após o <i>feedback</i>
----------	---	----	---------------------------------

Tabela 1 - Caracterização dos alunos participantes no estudo

O Álvaro é um aluno empenhado e demonstra uma atitude positiva face à aprendizagem. Revela interesse pela disciplina e esforça-se na realização das tarefas propostas. No entanto, apesar da sua motivação, por vezes deixa-se distrair com facilidade, sobretudo em conversas com o colega de carteira, o que poderá ter tido impacto no seu desempenho em sala de aula. Além disso, uma das principais dificuldades do Álvaro prende-se com a abordagem ao estudo da matemática: tende a memorizar procedimentos em vez de compreender os conceitos que lhes estão subjacentes. Esta prática, embora por vezes eficaz a curto prazo, leva frequentemente a erros e limita o desenvolvimento das suas aprendizagens matemáticas.

A Beatriz é uma aluna empenhada, embora seja um pouco reservada no que toca à comunicação em contexto de sala de aula. Lida com episódios de ansiedade, os quais, por vezes, comprometem o seu desempenho em situações de avaliação. Além disso, ao longo do período, enfrentou várias dificuldades na disciplina, nomeadamente na consolidação de conceitos fundamentais e no acompanhamento do ritmo das aulas. No entanto, estas fragilidades não decorrem de falta de interesse ou de trabalho. Pelo contrário, observou-se, em diversos momentos, que a Beatriz foi capaz de atingir com sucesso os objetivos propostos, sempre que beneficiou de estratégias diferenciadas e de um acompanhamento mais próximo. Estes progressos evidenciam que, com o apoio pedagógico adequado, a aluna tem condições para superar os obstáculos e desenvolver o seu verdadeiro potencial.

O Salvador evidenciou um percurso académico muito consistente na disciplina de matemática A. É um aluno responsável, motivado e com uma postura de trabalho exemplar. Demonstrou grande autonomia na realização das tarefas e uma atitude reflexiva perante os desafios propostos. Participou ativamente nas aulas, mantendo-se atento e contribuindo de forma pertinente para o ambiente de aprendizagem. Sempre que surgiam dúvidas, o Salvador não hesitava em colocá-las, revelando curiosidade

intelectual e uma clara vontade de aprofundar o seu conhecimento. Além disso, valoriza o entendimento dos conceitos, o que se reflete na sua capacidade de aplicar os conteúdos de forma fundamentada e rigorosa.

4.3. Recolha de Dados

Para recolher dados, utilizei várias fontes qualitativas, permitindo uma análise mais completa da intervenção pedagógica: produções escritas dos alunos; os *feedbacks* escritos que forneci e entrevistas semiestruturadas realizadas aos alunos.

4.3.1. Produções escritas dos alunos

A recolha das produções escritas dos alunos, realizada em dois momentos diferentes, teve como principal objetivo analisar dificuldades que os alunos apresentam ao nível da comunicação matemática escrita e o modo como compreendem, interpretam e utilizam o *feedback* escrito para melhorar a sua comunicação matemática. Ao comparar a primeira e a segunda fase da resolução de cada problema, pretendo observar se existiu, ou não, uma evolução ao nível da comunicação matemática escrita, identificar progressos, estagnações ou até mesmo retrocessos, e compreender até que ponto os comentários que atribuí foram realmente incorporados nas novas produções. A produção inicial de cada momento da intervenção pedagógica permitiu constatar as dificuldades enfrentadas pelos alunos na comunicação matemática escrita antes do *feedback* escrito, enquanto a segunda mostrou as mudanças que ocorreram após a receção dos comentários escritos. Essa análise comparativa das produções teve como foco compreender em que aspetos os alunos melhoraram, mantiveram ou regrediram, e como interpretaram as mensagens transmitidas pelo professor através do *feedback*. Além disso, o uso de produções escritas como fonte de dados ajudou a superar limitações relacionadas à impossibilidade de observar diretamente todos os momentos de trabalho dos alunos, como destaca Vale (2004).

4.3.2. *Feedback* dado pelo professor

A recolha de dados relacionada com o *feedback* dado pelo professor teve início após a resolução do primeiro problema pelos alunos. Uma vez recolhidas as produções escritas, estas foram cuidadosamente analisadas e posteriormente alvo de *feedback*

individual por parte do professor. Após este trabalho de análise e elaboração do *feedback*, as resoluções foram devolvidas aos alunos, já comentadas, de forma a permitir que os mesmos pudessem tomar contacto com as observações e sugestões indicadas. Foi concedido um tempo de assimilação deste *feedback*, permitindo que os alunos pudessem refletir sobre os aspetos assinalados e rever eventuais dificuldades ou erros cometidos. Passados alguns dias, numa segunda fase, foi então distribuído um novo problema, procurando-se dar continuidade às aprendizagens, tendo em conta as dificuldades previamente detetadas. Assim, procurei refletir sobre a eficácia do *feedback* dado, verificando se ele foi compreendido pelos alunos e se contribuiu, de maneira visível, para o seu progresso. As resoluções deste novo problema foram igualmente recolhidas e sujeitas ao mesmo processo de análise e devolução com *feedback* individualizado.

4.3.3. Entrevistas

Optei também por realizar breves entrevistas. Numa primeira fase, após a entrega do *feedback* relativo ao problema da 2.^a fase, nos dois últimos momentos da intervenção pedagógica, conversava informalmente com cada aluno. Durante estas conversas, efetuei registos escritos dos aspetos mais relevantes do diálogo. Procurava, sobretudo, compreender o que os alunos consideravam ter corrido menos bem, se houve algo que não entenderam no *feedback* escrito, entre outras questões pertinentes. Infelizmente, no primeiro momento de intervenção não foi possível realizar esta entrevista devido a constrangimentos de tempo. Numa segunda fase, após a concretização dos três momentos da intervenção pedagógica, no dia 2 de junho de 2025, realizei entrevistas individuais aos três alunos envolvidos no estudo. Neste caso, o objetivo foi recolher as suas opiniões sobre a minha intervenção pedagógica, nomeadamente, se consideraram que o processo contribuiu, ou não, para uma melhoria da sua comunicação matemática escrita, como viveram a experiência, que importância davam ao *feedback*, entre outros aspetos relevantes. Nesta, segunda optei por obter os dados através da gravação áudio. Além disso, tive como suporte um guião que se apresenta em anexo (Anexo 6).

As entrevistas seguiram um formato semiestruturado, conforme sugerido por Amado (2014), o que permitiu uma combinação entre uma estrutura orientada e a flexibilidade necessária para adaptar as perguntas ao contexto de cada entrevistado. O principal objetivo das entrevistas realizadas foi aceder a informações que não podem ser

observadas diretamente, como sentimentos, interpretações pessoais, intenções e percepções dos alunos sobre a experiência que viveram (Vale, 2004).

4.4. Análise de dados

Neste estudo, utilizei uma variedade de instrumentos para recolher dados, com o objetivo de obter uma compreensão mais profunda dos fenómenos que estava a analisar. A diversidade de fontes permitiu-me cruzar diferentes tipos de informação, o que tornou a interpretação dos resultados mais completa e confiável. Para abordar a primeira questão de investigação — Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita? — analisei as produções escritas realizadas pelos alunos ao longo da intervenção pedagógica. Essa análise foi fundamental para identificar as dificuldades que surgem na forma como os alunos explicam o seu pensamento, organizam o discurso matemático ou justificam as suas respostas.

Quanto à segunda questão de investigação — De que forma os alunos integram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita? — voltei a ter como foco a análise das produções dos alunos, nas duas fases, bem como os dados provenientes das entrevistas individuais (na primeira fase). Além disso, comparei as tarefas ao longo do tempo para ver se houve ou não evolução entre as mesmas. A terceira questão de investigação — Que significado atribuem os alunos ao *feedback* dado pelo professor? — foi explorada através dos dados obtidos a partir das entrevistas realizadas, quer na primeira fase, quer na segunda.

De modo a analisar as produções escritas dos alunos optei por uma tipologia que incluiu as cinco dimensões delineadas na Tabela 2 e definidas por Costa (2023), acompanhadas de uma breve descrição que as possa clarificar.

Dimensão	Descrição
Correção	O aluno apresenta procedimentos matemáticos corretos, com cálculos exatos e conclusões adequadas ao problema proposto. Esta dimensão avalia a precisão dos resultados, a aplicação correta de regras, fórmulas e algoritmos, bem como a ausência de erros matemáticos ao longo da produção escrita.

Organização	O aluno apresenta o pensamento de forma sequencial e estruturada, com os dados, cálculos e conclusões bem organizados. Esta dimensão avalia se a produção escrita segue uma linha de pensamento coerente e bem encadeada, sem saltos abruptos ou desorganização de ideias.
Linguagem	O aluno utiliza linguagem matemática adequada ao contexto, recorrendo a termos técnicos, símbolos, notações e representações formais de forma precisa, consistente e correta ao longo de toda a resposta.
Justificação	O aluno explica e justifica os procedimentos utilizados, apresentando os cálculos e pensamentos de forma clara. As conclusões são fundamentadas em propriedades matemáticas ou estratégias válidas, evidenciando compreensão concetual.
Resposta	O aluno apresenta uma resposta adequada, interpretando o resultado no contexto do problema (quando aplicável), utilizando unidades apropriadas (quando aplicável) e realizando arredondamentos sempre que necessário.

Tabela 2 - Dimensões para a análise da comunicação matemática escrita

4.5. Considerações éticas

Durante todo o processo de investigação, foi dada especial atenção às questões éticas, de forma a proteger os direitos e a integridade dos participantes envolvidos.

Antes de iniciar a recolha de dados, foram entregues autorizações por escrito aos encarregados de educação (Anexo 7), nas quais era explicado o objetivo do estudo e pedida permissão para a participação dos seus educandos. Felizmente, todos os encarregados autorizaram essa participação, pelo que todos os dados dos alunos foram incluídos na investigação.

Importa também referir que para garantir o anonimato, todos os nomes mencionados ao longo do relatório são fictícios. A identidade real dos alunos foi protegida, e os dados recolhidos foram tratados com total confidencialidade. Os participantes foram também informados de que a sua decisão de participar, ou não, no estudo não teria qualquer influência na sua avaliação final.

Estas medidas permitiram assegurar que a investigação decorresse de forma ética, responsável e respeitadora dos princípios de privacidade e consentimento livre e esclarecido.

5. Apresentação e discussão de resultados

Neste capítulo, apresento os resultados do estudo realizado, tendo por base a problemática e as questões de investigação definidas inicialmente. A análise e discussão dos dados têm por base a literatura revista e são sustentadas por evidências recolhidas ao longo do processo de investigação, com o objetivo de justificar as interpretações formuladas.

A apresentação dos resultados será organizada em quatro subcapítulos, três dedicados a cada um dos três momentos que compuseram a intervenção pedagógica. Tal como referido no capítulo três, cada um desses momentos envolveu a proposta de resolução de um problema em duas fases distintas, compreendendo cinco etapas principais: (1) os alunos eram convidados a resolver um problema (Problema – 1.^a fase), de forma individual e autónoma; (2) a professora atribuía *feedback* a essa produção escrita; (3) os alunos tinham oportunidade de realizar um segundo problema (Problema – 2.^a fase), visando os mesmos objetivos de aprendizagem; (4) novamente, a professora atribuía *feedback* a essa segunda produção escrita; e (5) a professora proporcionava um momento de discussão e análise individual das resoluções apresentadas pelo aluno.

Para cada um dos momentos da intervenção pedagógica, apresenta-se a análise aprofundada das produções escritas dos três alunos selecionados como informantes privilegiados – Álvaro, Beatriz e Salvador, com base nos critérios apresentados no quarto capítulo. Para cada um destes alunos, a análise inicia-se com a apreciação das suas produções escritas, sendo estas articuladas, sempre que se vir pertinente, com dados relevantes extraídos das entrevistas. Esta articulação visa permitir uma análise mais consistente dos fenómenos estudados. É de salientar que estas entrevistas foram realizadas apenas no 2.º e 3.º momentos. O quarto subcapítulo traz as perceções dos alunos sobre os significados que atribuem ao *feedback* dado pelo professor.

Ao longo dos três momentos de intervenção, o *feedback* que procurei dar fundamenta-se na perspetiva de autores como Hattie e Timperley (2007), que defendem que o *feedback* eficaz deve ser claro, orientado para a aprendizagem e motivador, reforçando a confiança do aluno nas suas capacidades para melhorar. Tal como defendem os autores Santos (2008) e Hattie e Timperley (2007), o *feedback* eficaz não se limita à correção, mas deve ser orientado para a compreensão e melhoria, ajudando o aluno a construir ligações concetuais mais sólidas. Desta forma, e tendo em conta que este estudo tem como foco a análise da comunicação matemática escrita dos alunos, foi necessário definir dimensões de análise. Como já exposto no capítulo quatro, recorri à

tipologia definida por Costa (2023), assumindo cinco dimensões: correção, organização, linguagem, justificação e resposta.

5.1. Primeiro momento da intervenção pedagógica

O tema abordado no primeiro momento da intervenção pedagógica foi a geometria analítica no espaço. Como se trata de uma turma grande recorreu-se ao uso de versões para englobar mais subtemas. Os problemas propostos, neste momento, solicitam uma equação cartesiana de um plano. Enquanto na versão 1 é pedido aos alunos que determinem a condição de um plano paralelo que passa num determinado ponto, na versão 2, pretende-se que seja um plano perpendicular ao plano já dado e que passe num determinado ponto. É de salientar que por questões de constrangimento a nível de tempo, não foi possível realizar a quinta etapa, neste primeiro momento da intervenção, não sendo realizadas, a cada aluno, as entrevistas no final da atribuição do segundo *feedback*.

5.1.1. Álvaro

No caso do Álvaro, e nesta 1.^a fase, o aluno resolveu a versão 2 do problema, como se apresenta na Figura 14.

1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α , definido por $3x + 2y - 4z = 0$.
Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. *Se o plano β é perpendicular ao plano α , então os seus vetores normais também serão perpendiculares, isto é, $\vec{V} \cdot \vec{m} = 0$*

$A(1, 0, 3)$
 $\alpha: 3x + 2y - 4z = 0$
 $\vec{V}(3, 2, -4)$
 $\vec{m}(x, y, z)$
 $\vec{V} \cdot \vec{m} = 0$
 $(3, 2, -4) \cdot (x, y, z) = 0$
 $3x + 2y - 4z + k = 0$
 $3 + 0 - 12 + k = 0$
 $k = 9$

$\vec{V}$ ← coordenadas do vetor diretor de α
 $\vec{m}$ ← coordenadas do vetor diretor de β
Equação cartesiana de β :
 $3x + 2y - 4z + 9 = 0$

Figura 14 - Resolução do Álvaro do problema na 1.^a fase (Momento 1)

A nível da correção, o aluno comete erros que comprometem a resolução. Por um lado, confunde vetores normais com vetores diretores, o que demonstra uma fragilidade nestes conceitos. Por outro lado, identifica de forma incorreta o vetor normal ao plano α , atribuindo à cota o valor -4 , em vez de zero, interpretando de forma incorreta a equação do plano. Este erro de leitura da equação do plano condiciona o cálculo do vetor normal ao plano procurado, o que faz com que, apesar de a equação final do plano parecer formalmente correta, esteja baseada num vetor errado e, portanto, seja uma resposta incorreta.

Já na dimensão da organização, a resolução apresenta-se relativamente bem estruturada do ponto de vista visual e sequencial. O aluno separa adequadamente os dados iniciais, os cálculos intermédios e a resposta final, o que facilita a sua leitura.

No que diz respeito à linguagem, o aluno recorre a expressões simbólicas apropriadas (como $\vec{n}$, $\vec{v}$, produto escalar, etc.), no entanto, com alguma inconsistência na atribuição da designação correta.

Relativamente à justificação, apesar de o aluno iniciar com uma explicação correta sobre a perpendicularidade entre planos, esse esforço justificativo não se prolonga ao longo da resolução. Não são explicitadas as razões para os passos seguintes, como a introdução da incógnita k , nem esclarece que pretende determinar a equação de um plano com base num ponto e num vetor normal. A substituição das variáveis x , y e z , na equação do plano, pelas coordenadas do ponto A ocorre sem qualquer comentário ou contextualização, o que empobrece a explicação do pensamento e dificulta a perceção da estratégia usada.

Por fim, ao nível da resposta, o aluno conclui com uma equação do plano, o que mostra intenção de apresentar uma resposta completa e pertinente ao que é solicitado. No entanto, como essa equação resulta de um vetor normal incorreto, a resposta final é matematicamente inválida.

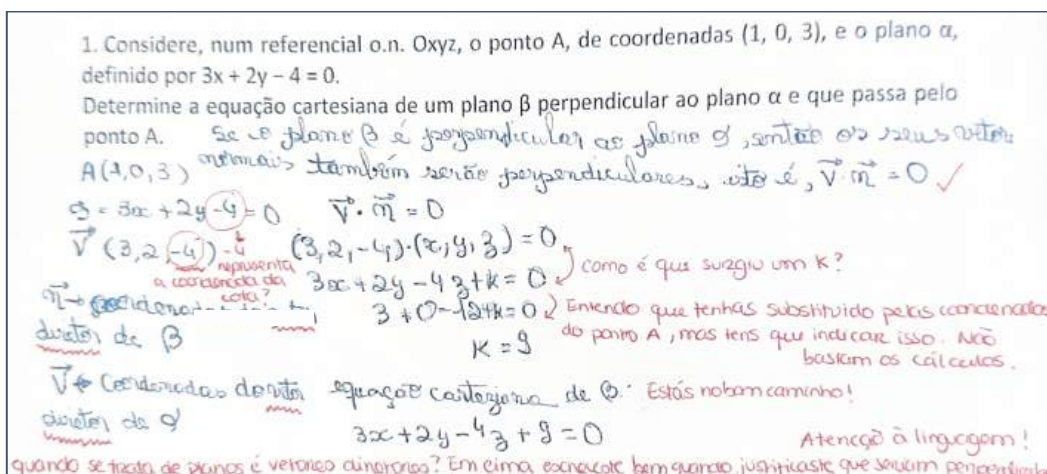


Figura 15 - Feedback à resolução do Álvaro do problema na 1.ª fase (Momento 1)

No momento de fornecer *feedback* ao aluno (Figura 15), optei por utilizar a forma interrogativa, com o intuito de o levar a refletir sobre o seu próprio pensamento e identificar autonomamente as incoerências presentes na sua resolução. Em vez de apontar diretamente o que estava incorreto, procurei fazer perguntas como “-4 representa a cota?” ou “Quando se trata de planos, é vetores diretores?”, incentivando o aluno a reavaliar as suas escolhas. Paralelamente, mantive uma postura encorajadora, dizendo frases como “Estás no bom caminho!”, de forma a valorizar o esforço realizado e reforçar positivamente os aspetos corretos do seu pensamento.

Após entregar o meu *feedback*, o Álvaro questionou-me por que razão tinha feito perguntas em vez de lhe dizer diretamente o que estava errado. Essa questão levou-me a explicar novamente a intenção pedagógica por detrás da minha abordagem, mostrando-lhe que a reflexão ativa o ajudaria a construir conhecimento de forma mais duradoura e significativa.

Na realização do problema, mas agora na segunda fase (Figura 16), não foi notória evolução por parte do Álvaro a nível das cinco dimensões que foram definidas.

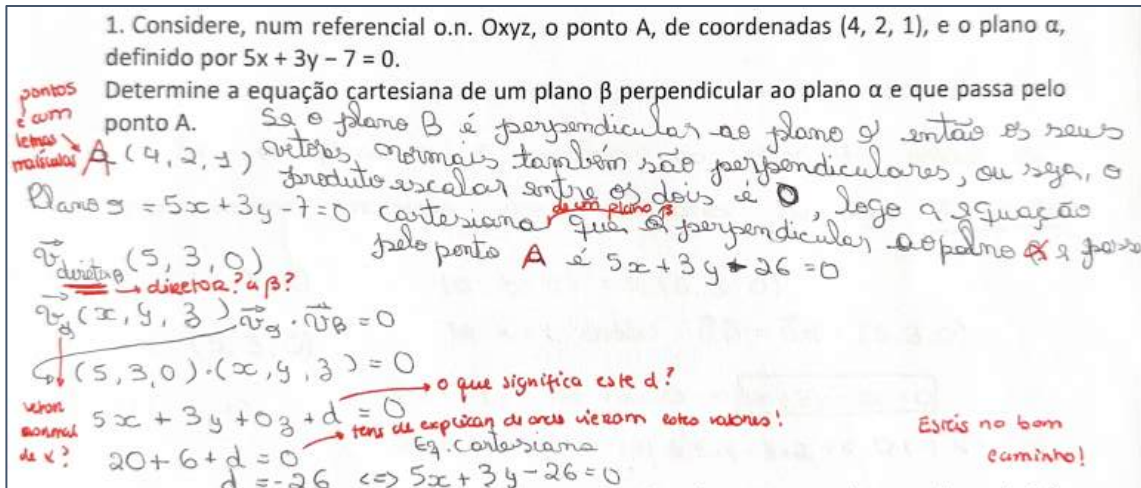


Figura 16 - Feedback à resolução do Álvaro do problema na 2.ª Fase (Momento 1)

Nesta segunda fase, o desempenho do Álvaro revela uma preocupante estagnação e até algum retrocesso face à sua resolução na primeira fase. Apesar de ter corrigido um erro específico (a identificação da cota das coordenadas do vetor normal ao plano α , que agora é corretamente considerada como zero), outros erros persistem, nomeadamente a confusão entre vetor normal e vetor diretor. O Álvaro continua a referir-se incorretamente ao vetor normal ao plano α como sendo o vetor diretor. Além disso, desta vez, afirma que o vetor retirado da equação do plano α é vetor normal ao plano β , o que demonstra que não compreendeu o papel destes vetores na construção da equação de um plano.

A nível da organização, mantém-se uma estrutura relativamente clara, com separação dos dados, dos cálculos e da resposta final. No que respeita à linguagem matemática, observa-se um retrocesso. Além da já referida confusão entre vetor diretor e vetor normal, o Álvaro usa letras de forma menos cuidada do que na primeira fase, o que compromete a clareza e o rigor da comunicação matemática. Por exemplo, refere-se ao ponto A com letra minúscula, algo que na fase anterior estava bem conseguido. A linguagem simbólica continua a surgir, mas a falta de correspondência entre os símbolos utilizados e os conceitos matemáticos corretos evidencia fragilidades no domínio do vocabulário.

Ao nível da justificação, não há evolução. Tal como na primeira fase, o Álvaro não explica a introdução do parâmetro “d” (anteriormente “k”) e não contextualiza a substituição das coordenadas do ponto A na equação do plano.

O aluno continua a apresentar uma resposta, mas a mesma, em função dos erros cometidos, está incorreta.

Em síntese, a segunda fase da resolução do Álvaro revela uma estagnação geral nas dimensões da comunicação matemática escrita, constata-se uma ausência de justificação dos procedimentos e uma regressão na utilização da simbologia matemática. Este caso evidencia a importância de um acompanhamento mais próximo e de intervenções mais explícitas e estruturadas, de modo a garantir que o *feedback* seja verdadeiramente compreendido, promovendo uma evolução efetiva na aprendizagem matemática.

5.1.2. Beatriz

No caso da Beatriz, tal como no Álvaro, a aluna resolveu, na primeira fase, a versão 2 do problema, como se apresenta na Figura 17.

1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α , definido por $3x + 2y - 4 = 0$.
Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. $\rightarrow \alpha \perp \beta$, se $v_\alpha \cdot v_\beta = 0$ $\alpha(3, 2, 0)$ ~~$\beta(1, 0, 3)$~~
 $v_\alpha \cdot v_\beta = 0 \Leftrightarrow (3, 2, 0) \cdot (a, b, c) = 0$ $\Rightarrow (1, 0, 3)$
 $\Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow 3x + 2y - 3 = 0$
 ~~$v_\alpha \cdot v_\beta = 0 \Leftrightarrow (3, 2, 0) \cdot (a, b, c) = 0$~~
 ~~$n \cdot v_\alpha = 0 \wedge n \cdot v_\beta = 0 \Leftrightarrow$~~
 $v_1(x - x_1) + v_2(y - y_2) + v_3(z - z_3) + K = 0$
 $\Leftrightarrow 3(x - 1) + 2(y - 0) + 0(z - 3) = 0$

Figura 17 - Resolução da Beatriz do problema na 1.ª fase (Momento 1)

A nível da correção, a aluna comete um erro que compromete a validade da resposta final. Embora inicie corretamente ao indicar a condição de perpendicularidade entre planos e associando esta ao facto do produto escalar entre os seus vetores normais ser nulo, na parte final da resolução acaba por definir a equação do plano solicitado, utilizando o vetor normal ao plano α . Este erro levou a que a aluna apresentasse uma resposta incorreta. Além disso, apesar de identificar corretamente as coordenadas do vetor normal ao plano $\alpha - (3, 2, 0)$, falha ao procurar um vetor que lhe seja perpendicular (etapa essencial para construir um vetor normal ao plano β). No que diz respeito à organização, a resolução apresenta várias tentativas riscadas e

reformulações, sem desenvolver de forma consistente nenhuma das abordagens escolhidas. A forma como as ideias são dispostas no espaço de resolução é desorganizada e fragmentada. Relativamente à linguagem, a aluna demonstra conhecer alguma simbologia matemática, como o uso da notação do produto escalar e da equação vetorial do plano. No entanto, a anotação “normal” junto ao ponto A, parece revelar confusão entre conceitos vetoriais e posicionais. Esta imprecisão na utilização da linguagem matemática reduz a clareza da comunicação e torna difícil a compreensão das intenções da aluna, mesmo quando recorre a expressões formais. No que se refere à justificação, a aluna não explica os pensamentos que sustentam os cálculos nem as opções tomadas ao longo da resolução. A Beatriz inicia tentativas válidas, mas abandona-as sem comentar ou explicar porquê, e mesmo quando recorre à equação do plano, fá-lo de forma direta, sem justificar a escolha do vetor ou do ponto utilizados. Por fim, no que respeita à resposta, a aluna termina com uma equação de um plano. No entanto, como o vetor normal utilizado é inadequado ao contexto do plano pretendido, a equação final não corresponde à solução correta.

1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α , definido por $3x + 2y - 4 = 0$. Um ponto pode ser um vetor normal de um plano? $\rightarrow$ $\hookrightarrow$ normal

Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. $\alpha(3, 2, 0)$ ~~$\alpha(3, 2, 0)$~~

$\vec{v}_\alpha \perp \beta$, Se $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0$ $\vec{v}_\beta(1, 0, 3)$

$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0 \Leftrightarrow (3, 2, 0) \cdot (a, b, c) = 0$

$\Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \Leftrightarrow$

porque riscaste? $\rightarrow$ Estas a ir no bom caminho!

$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0 \Leftrightarrow (3, 2, 0) \cdot (a, b, c) = 0$

$\vec{v}_\alpha = \vec{0} \wedge \vec{n} \cdot \vec{v}_\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$(x - x_1) + v_2(y - y_2) + v_3(z - z_3) + K = 0$

$3(x - 1) + 2(y - 0) + 0(z - 3) = 0$

2. determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s, de equações α ou β ?

Está a conjugar equação

Esta equação cartesiana do plano utiliza um ponto pertencente ao plano e um vetor normal do mesmo. O vetor (3, 2, 0) é normal.

Figura 18 - Feedback à resolução da Beatriz do problema na 1.ª fase (Momento 1)

No momento de fornecer *feedback* à aluna (Figura 18), optei por uma abordagem predominantemente interrogativa, com o objetivo de estimular a reflexão crítica e a reinterpretação das suas próprias decisões ao longo da resolução. Em vez de indicar diretamente os erros cometidos, formulei perguntas como “O que pretendias com este passo?”, no sentido de encorajar a aluna a assumir um papel ativo na identificação e análise dos seus procedimentos, promovendo um mecanismo de autorregulação. Paralelamente, procurei valorizar os momentos em que a aluna manifestou intuições

Na realização do problema, mas agora na segunda fase (Figura 19), os erros cometidos pela Beatriz intensificaram-se a nível das cinco dimensões.

1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (4, 2, 1), e o plano α , definido por $5x + 3y - 7 = 0$. ($5, 3, 0$)

Determine a equação cartesiana de um plano β perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. $\vec{v}_\alpha (5, 3, 0)$ $\vec{v}_\beta (a, b, c)$ plano $\alpha \perp \beta$ $\Rightarrow \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0$

$\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = 0$ $(5, 3, 0) \cdot (a, b, c) = 0$

($\Rightarrow$) ~~5a + 3b - 7c = 0~~

4 (x

$\uparrow$ Estavas a ir bem o que aconteceu? Porquê não continuas?

($\Rightarrow$) $\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{5}y \\ x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{array} \right.$

de onde veio esta ideia? pode mos misturar pontos com vetores?

($\Rightarrow$) $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{6}{10}y + \frac{5}{10}y = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{1}{10}y \end{array} \right.$ ($\Rightarrow$) $\left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{3}{5}y \\ z = \frac{1}{2}y \end{array} \right.$

Figura 19 - *Feedback* à resolução da Beatriz do problema na 2.^a Fase (Momento 1)

Na dimensão da correção, observa-se uma decadência da resposta da aluna da primeira para a segunda fase. Enquanto na primeira fase, a Beatriz reconhecia corretamente a condição de perpendicularidade entre planos e identificava corretamente o vetor normal ao plano α , embora depois riscasse e aplicasse essa informação de forma incorreta, nesta segunda fase abandona completamente o procedimento correto e recorre ao produto escalar entre um ponto e um vetor. Esta relação revela uma incompreensão conceitual mais profunda, comprometendo a validade de toda a resolução e resultando na ausência de qualquer resposta matematicamente aceitável. No que diz respeito à organização, a primeira fase já apresentava alguma descontinuidade no pensamento, com várias tentativas riscadas e reformuladas, mas ainda assim era possível identificar uma linha de pensamento com início, meio e fim. Na segunda fase, a organização da resolução agrava-se visivelmente. A estrutura torna-se

confusa e dispersa, dificultando a leitura e impedindo a compreensão clara do percurso seguido pela aluna. A resposta deixa de apresentar uma sequência minimamente estruturada.

Ao nível da linguagem, a primeira resolução, apesar de algumas imprecisões, demonstrava um certo domínio da simbologia matemática, nomeadamente na utilização do produto escalar e na referência à equação do plano. No entanto, na segunda fase, verifica-se uma utilização muito mais carente da linguagem matemática, por exemplo, como se observa na tentativa de aplicar produto escalar entre um vetor e um ponto. A clareza comunicativa diminui, tornando difícil distinguir as intenções matemáticas da aluna.

Em relação à justificação, também se nota um retrocesso. Na primeira fase, apesar de limitada e riscada, existia uma tentativa inicial de explicitar a ideia de perpendicularidade e de justificar a construção do vetor normal. Já na segunda fase, a aluna não fundamenta os procedimentos que vai adotando. As operações surgem soltas, sem serem contextualizadas ou acompanhadas por qualquer comentário que ajude a compreender a estratégia seguida. A ausência total de justificação revela que a aluna não só abandonou o procedimento correto, como já não consegue explicar o que faz, nem por que o faz. Por fim, na dimensão da resposta, verifica-se uma diferença clara entre as duas fases. Na primeira, a aluna ainda consegue apresentar uma equação do plano, embora incorreta devido à escolha do vetor normal, o que indica uma intenção de concluir a tarefa e de responder ao que foi pedido. No entanto, na segunda fase, essa intenção desaparece. A aluna não chega a construir qualquer equação final válida. As expressões que surgem ao longo da resolução não são conduzidas a uma conclusão e a resolução não apresenta um produto final coerente. Ou seja, a aluna não formula uma resposta.

Em síntese, a segunda fase da resolução de Beatriz revela um agravamento em todas as dimensões da comunicação matemática escrita. Os erros intensificaram-se, a estrutura da resposta tornou-se mais desorganizada, a linguagem perdeu precisão, as justificações desapareceram e a resposta final deixou de existir. Esta evolução negativa sugere que a aluna não interiorizou os aspetos essenciais abordados no *feedback* anterior. Este caso ilustra a importância de criar oportunidades de acompanhamento mais próximo e de revisão orientada, de forma a garantir que os alunos compreendem e aplicam corretamente os conceitos matemáticos antes de avançarem para novas tentativas de resolução.

5.1.3. Salvador

Por fim, apresenta-se o caso do Salvador que, na primeira fase, resolveu a versão 1 do problema (Figura 20).

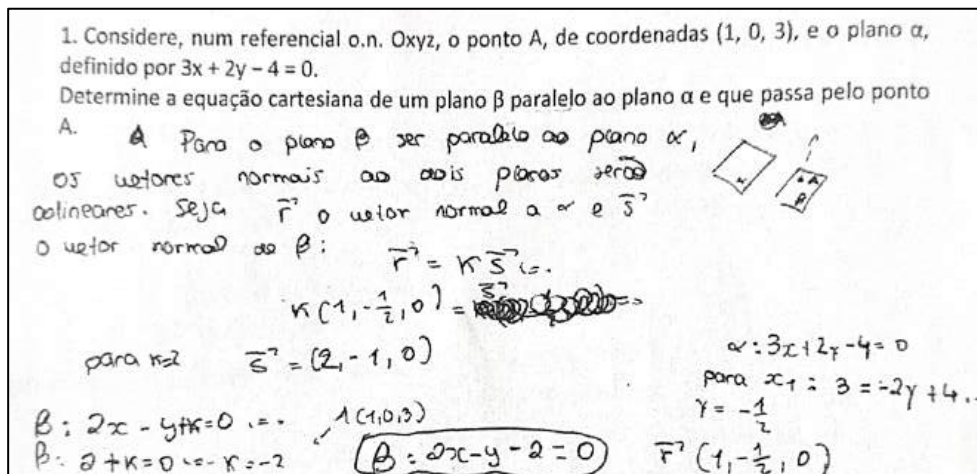


Figura 20 - Resolução do Salvador do problema na 1.ª fase (Momento 1)

Em termos de correção, embora o aluno demonstre alguma familiaridade com a ideia de que a planos paralelos correspondem vetores normais colineares, esta não é corretamente operacionalizada. As coordenadas do vetor normal ao plano α são obtidas de forma incorreta. O processo utilizado pelo aluno, embora com algumas incorreções, passa pela determinação das coordenadas de um ponto do plano α , acabando o aluno por usar estas mesmas coordenadas como as de um vetor normal a esse plano. Esta situação levou a que a equação apresentada para o plano β não garante que este seja de facto paralelo ao plano dado. Como tal, a equação final apresentada não satisfaz os critérios exigidos, o que invalida a resposta.

Do ponto de vista da organização, a produção do aluno revela uma estrutura desordenada e pouco coesa. O encadeamento de ideias não é claro, surgem rabiscos e reformulações ao longo da folha, e não é possível identificar uma resolução sequencial e estruturada. O aluno alterna entre diferentes formas de representação, mas fá-lo sem qualquer articulação entre os registos, o que dificulta o seguimento do pensamento.

Quanto à linguagem, apesar da presença de alguns elementos típicos do discurso matemático, como a utilização de vetores e equações, o uso que é feito desses elementos é impreciso e, por vezes, inadequado. Relativamente à justificação, o Salvador apresenta algumas fragilidades ao longo de toda a resolução. O aluno limita-se a apresentar operações ou expressões matemáticas, sem explicitar o porquê das

escolhas feitas nem as relações entre os elementos utilizados. Não é esclarecido por que motivo se optou por determinados vetores, nem se explica como se chegou à equação final. Esta ausência de fundamentação revela uma abordagem pouco reflexiva, na qual o aluno parece replicar procedimentos memorizados, sem demonstrar compreensão dos mesmos. Por fim, ao nível da resposta, o aluno destaca uma equação do plano, o que demonstra intenção de apresentar uma resposta final e pertinente ao que é solicitado. No entanto, como essa equação resulta de um vetor normal incorreto, a resposta final é matematicamente inválida.

No momento de fornecer *feedback* à resolução apresentada pelo Salvador (Figura 21), optei por uma abordagem interrogativa e orientada para o esclarecimento concetual, uma vez que a produção se revelou bastante confusa, com vários erros, tanto ao nível da formulação como da comunicação matemática. A escolha por um *feedback* centrado na interrogação visou provocar reflexão, levantar dúvidas orientadoras e, consequentemente, promover a revisão autónoma do pensamento seguido. Nesse sentido, foram colocadas perguntas como “Como se determina o vetor normal de um plano a partir da sua equação cartesiana?” e “De onde veio este vetor?” com o intuito de o levar a rever os fundamentos teóricos que sustentam este tipo de problemas.

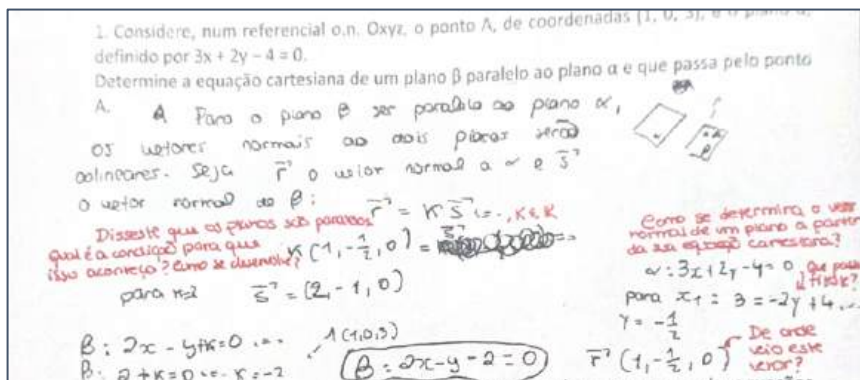


Figura 21 - *Feedback* à resolução do Salvador do problema na 1.ª fase (Momento 1)

No que diz respeito à organização, a resolução está graficamente desordenada e a linguagem matemática, apresenta alguns equívocos, pelo que optei por deixar também apontamentos como “O que representa este vetor?” ou “O que significam estas igualdades?” para o incentivar a verbalizar com maior rigor as suas ideias.

Na realização do problema, mas agora na segunda fase (Figura 22), o Salvador melhorou significativamente.

1. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (4, 2, 1), e o plano α , definido por $5x + 3y - 7 = 0$.
Determine a equação cartesiana de um plano β paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A.

O vetor normal ($\vec{n}^1$) ao plano α tem coordenadas (5, 3, 0).
O plano β paralelo ao plano α tem um vetor normal ($\vec{n}^2$) que por sua vez vai ser colinear com o vetor normal a α ($\vec{n}^1$):

$$\vec{n}^2 = \kappa \vec{n}^1, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$(5, 3, 0) = \kappa (5, 3, 0) \rightarrow \kappa = 1$$

$$\vec{n}^2 = (5, 3, 0)$$

O plano β é definido pela equação: $5x + 3y + b = 0$; como passa no ponto A:
 $5(4) + 3(2) + b = 0 \Rightarrow b = -26$; $\beta: 5x + 3y - 26 = 0$

Bom trabalho! Para o próximo indica a qual eq. é.

Figura 22 - Feedback à resolução do Salvador do problema na 2.ª fase (Momento 1)

A segunda fase da resolução apresentada pelo Salvador evidencia um progresso muito significativo nas cinco dimensões da comunicação matemática escrita, quando comparada com a sua produção inicial. A nível da correção, o aluno revela agora um domínio claro dos procedimentos matemáticos envolvidos. Identifica corretamente o vetor normal ao plano α a partir da sua equação cartesiana, ao contrário da primeira fase, onde seguiu por um processo que revela confusão entre coordenadas de vetores e coordenadas de pontos. A equação final do plano β é construída corretamente, partindo de um vetor normal colinear ao de α e passando pelo ponto indicado no enunciado, o que não acontecia na produção anterior, onde a resposta apresentada era inválida. No que respeita à organização, também se verifica uma melhoria assinalável. Enquanto na fase anterior a produção era desorganizada, com rasuras, mudanças abruptas de estratégia e ausência de uma linha condutora clara, nesta segunda fase a resolução segue uma sequência clara e bem estruturada. Relativamente à linguagem matemática, há uma evolução evidente. O Salvador recorre agora a notações formais adequadas, como a representação vetorial e a expressão da colinearidade entre vetores. O uso de símbolos e convenções matemáticas é mais rigoroso e consistente, ao contrário do que acontecia anteriormente. A linguagem matemática revela, nesta fase, uma maior maturidade e compreensão concetual. Quanto à justificação, uma das dimensões mais frágeis na primeira fase, nota-se uma diferença clara. Se antes os passos eram apresentados sem qualquer explicação ou fundamentação, agora o aluno explica os conceitos em que se baseia, nomeadamente a relação de paralelismo entre os planos através da colinearidade dos vetores normais. Verifica-se uma intenção clara de tornar visível o pensamento subjacente à resolução. Por fim, na dimensão da resposta, o aluno termina com uma equação correta e

destacada, o que facilita a perceção do resultado final. Na fase anterior, a resposta estava incorreta embora estivesse destacada na mesma. Em suma, Salvador apresenta uma evolução notável entre as duas fases, evidenciando um impacto direto do *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita.

5.2. Segundo Momento de Intervenção Pedagógica

O tema abordado no segundo momento da intervenção pedagógica foi a geometria analítica no espaço. Apesar desta intervenção não ter sido feita à turma toda recorreu-se, na mesma, ao uso de versões para englobar mais subtemas. Os problemas propostos, neste momento, solicitam a equação cartesiana de um plano definido por duas retas, sendo estas representadas pela equação vetorial. Enquanto na versão 1 é pedido aos alunos que determinem a condição de um plano definido por duas retas paralelas, na versão 2, pretende-se que seja um plano definido por duas retas concorrentes.

5.2.1. Álvaro

No segundo momento da intervenção, e na primeira fase, o Álvaro resolveu a versão 2 do problema, como se apresenta na Figura 23.

2. Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s , de equações vetoriais respetivamente:

$(x, y, z) = (-3, 4, 4) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (-1, 2, 2) \cdot (-2, 0, 1) = 0$

$2 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow 4 = 0$ ~~$2 + 0 + 2 = 4$~~

$4 = 0$ ~~elas~~ são perpendiculares

Para serem paralelos os seus vetores diretores têm de ser colineares, ou seja

$\vec{v}_r = s \vec{v}_s$

$-1 = -2k \quad 2 = 0k \quad 2k = 1$
 $k = \frac{1}{2} \quad 0 = k \quad k = \frac{1}{2}$

as retas são concorrentes, não perpendiculares logo, o produto escalar entre os vetores diretores da reta é 0, isto é:

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \quad 2x + 2z + k = 0 \quad \text{logo eq. corte.}$
 $2 + k = 0 \quad 2x + 2z - 2 = 0$
 $k = -2$

Figura 23 - Resolução do Álvaro do problema na 1.ª fase (Momento 2)

A nível da correção, a resolução apresentada pelo aluno revela fragilidades relevantes. Apesar de utilizar conceitos fundamentais, como vetores diretores, produto escalar e colinearidade, a aplicação desses conceitos não é consistente nem rigorosa. A dedução de que as retas são concorrentes parte de um pensamento parcialmente correto, mas não sustentado por verificações completas. Além disso, a construção da equação do plano a partir dessa conclusão não é feita com base nos procedimentos matemáticos corretos, como a utilização de um vetor normal adequado. O erro presente no processo de obtenção da equação final compromete diretamente a validade da resposta, tornando-a incorreta. No que diz respeito à organização, o aluno estrutura a resolução de forma sequencial, contudo por vezes não é correta. As correções feitas no meio do texto, não tornam a produção visualmente apelativa, no entanto há uma progressão evidente entre as etapas de resolução, por exemplo, da análise da relação entre as retas à construção do plano.

Quanto à linguagem matemática, verifica-se uma utilização parcial e pouco rigorosa. O aluno emprega símbolos e vocabulário técnico como $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, mas sem definir claramente o que representam. A falta de indicação, nomeadamente a referência à condição $k \in \mathbb{R}$, torna a linguagem pouco precisa. Na dimensão da justificação, o desempenho do aluno é bastante insuficiente. Embora realize operações relevantes, como o produto escalar, não explica o propósito de cada cálculo nem fundamenta as

suas decisões. Por exemplo, não é justificado por que motivo a da condição $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$ elimina a possibilidade de perpendicularidade, nem é explicado por que razão a conclusão de que as retas são concorrentes leva à abordagem que se segue. A construção do plano não é acompanhada de qualquer explicação, revelando uma ausência quase total de fundamentação. Por fim, ao nível da resposta, o Álvaro apresenta uma resposta final adequada, mas de acordo com os erros cometidos, ou seja, não obtendo a resposta final correta.

No momento de fornecer *feedback* ao aluno (Figura 24), optei por utilizar novamente a forma interrogativa, com o intuito de o levar a refletir sobre o seu próprio pensamento e identificar autonomamente as incoerências presentes na sua resolução. Em vez de apontar diretamente o que estava incorreto, procurei fazer perguntas como “O que significa esta condição?”, “k pertence a que conjunto?”, “Como concluíste que as retas são concorrentes?”. Estas questões surgiram com o objetivo de fomentar a autorregulação do pensamento matemático, mantendo o nível cognitivo da tarefa. Paralelamente, tive o cuidado de incluir mensagens de incentivo, como “Tu consegues!”, de modo a reforçar a confiança do aluno nas suas capacidades e a valorizar o esforço demonstrado.

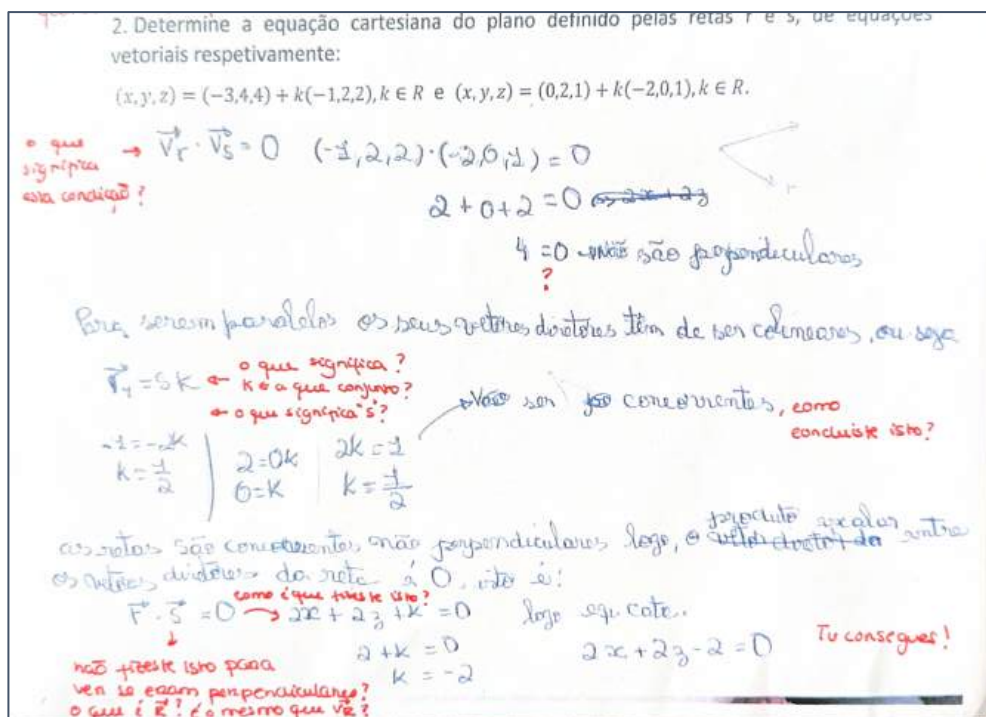


Figura 24 - *Feedback* à resolução do Álvaro do problema na 1.ª fase (Momento 2)

Na realização do problema, mas agora na segunda fase (Figura 25), o Álvaro manteve-se constante.

2. Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s , de equações vectoriais respetivamente:

$$(x, y, z) = (4, -3, 5) + k(1, -1, 2), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(2, -3, 1), k \in \mathbb{R}.$$

Verificar se as retas são colineares
 $1 = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$
 $-1 = -3k \rightarrow k = \frac{1}{3}$
 $2 = k \rightarrow k = 2$
o que é k ?
o que significa? qual é a condição? o que concluíste?

Verificar se as retas são perpendiculares
 $\vec{r} = (1, -1, 2)$
 $\vec{s} = (2, -3, 1)$
 $(1, -1, 2) \cdot (2, -3, 1) = 0$
 $2 + 3 + 2 = 0$
 $7 = 0$
o que é a condição? o que concluíste?
o que é a condição? o que concluíste?

Verificar se os pontos são concorrentes
 $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \wedge \vec{s} \cdot \vec{v} = 0$
quando concluíste isso?
Força! Tu consegues!

Figura 25 - Feedback à resolução do Álvaro do problema na 2.ª fase (Momento 2)

Na segunda fase da resolução do problema, a comunicação matemática escrita do aluno manteve-se globalmente ao mesmo nível da primeira fase, com pequenas variações entre as diferentes dimensões analisadas.

Ao nível da correção, verificou-se que os erros conceituais persistiram, nomeadamente na definição da equação do plano. Embora o aluno revele um maior cuidado na forma como tenta estruturar essa equação, a condição utilizada continua a ser inadequada ao problema proposto, o que compromete a validade do resultado. Assim, tal como na fase anterior, esta dimensão não é conseguida, uma vez que a resposta obtida não está matematicamente correta.

No que respeita à organização, mantém-se uma certa coerência visual e sequencial na apresentação dos dados e nos passos realizados. Tal como na fase anterior, o aluno evidencia alguma tentativa de estruturação do pensamento. No entanto, a ausência de uma separação clara entre as diferentes etapas e a descontinuidade de ideias afetam negativamente a clareza do discurso matemático. Esta dimensão revela, portanto, uma estabilidade, sem melhorias significativas, mas também sem agravamento notório.

Na dimensão da linguagem, observa-se um pequeno retrocesso. O aluno demonstra incorreções conceituais, chegando nesta fase a subtrair vetores diretores e afirmando que o resultado era um novo vetor.

A justificação dos procedimentos regrediu. O número de explicações diminuiu face à produção anterior, sendo esta fase marcada por uma maior economia de palavras e ausência de comentários que permitam ao leitor compreender o pensamento seguido. Se na fase anterior o aluno ainda procurava, mesmo que de forma incompleta, explicar os passos tomados, nesta segunda tentativa essa dimensão ficou praticamente ausente, revelando um recuo nesta área. Por fim, ao nível da resposta, e ao contrário do que aconteceu na primeira fase, constata-se que o aluno não apresenta qualquer resposta final à questão, até porque a sua resolução mostra que não conseguiu chegar a uma equação do plano, como foi solicitado. Em síntese, a segunda fase da resolução do aluno mostra um retrocesso na linguagem matemática e na justificação. Além disso, o aluno mostra uma estagnação da estrutura organizativa, permanecendo as dimensões da correção e da resposta comprometidas.

De forma a clarificar o modo como o aluno integrou o *feedback*, procedeu-se à realização da quinta etapa da intervenção pedagógica, através da condução de uma entrevista. É possível verificar que o aluno não integrou verdadeiramente o *feedback* recebido, o que se confirma tanto pelas suas declarações, como pelo seu desempenho na segunda fase do problema. Logo no início da conversa, o Álvaro admitiu de forma direta que não leu com atenção o *feedback* escrito.

Investigadora: O que aconteceu? Não percebeste o que escrevi na primeira fase?

Álvaro: Oh professora, entendi! Mas a verdade é que não olhei muito para aquilo...aliás, já nem me lembrava de como se fazia. (Entrevista, Fase 1, Álvaro)

Esta afirmação revela claramente uma falta de envolvimento ativo com o *feedback*, contrariando o propósito formativo, que visa promover a autorregulação da aprendizagem, tal como defendem os autores Hattie e Timperley (2007). A ausência de leitura ou de reflexão sobre os comentários recebidos, impede que o aluno reconheça os seus erros e construa novos significados a partir deles.

Quando confrontado com a questão sobre a distinção entre vetores diretores e vetores normais, o Álvaro enunciou uma definição imprecisa:

Investigadora: Já entendeste a diferença entre vetor diretor e vetor normal?

Álvaro: Eu agora já sei! Diretor é para as retas e normal é para os planos!
(Entrevista, Fase 1, Álvaro)

Isto demonstra uma compreensão incompleta ou superficial do conceito. Após a minha intervenção com uma explicação acerca desses conceitos, o Álvaro afirma “Ah já entendi! Pode ditar para eu escrever no caderno, por favor?” (entrevista, Fase 1, Álvaro). Neste âmbito, questionei novamente o aluno para confirmar se tinha de facto compreendido ou se apenas pretendia decorar, mostrando preocupação com o desenvolvimento concetual e não apenas com a memorização.

Outro aspeto importante nesta entrevista é o momento em que o aluno é confrontado com uma expressão matemática – $\vec{rs} = s - r$ – que ele próprio escreveu, mas já não sabe explicar. Esta reação é bastante reveladora, pois mostra que os cálculos feitos não foram acompanhados por uma linha de pensamento clara e consciente. O Álvaro, de forma contida, reconheceu o meu reforço em mostrar-lhe a importância de enriquecermos as repostas com justificações que clarificam e/ou apoiam as estratégias utilizadas. Esta atitude pode indicar uma tomada de consciência inicial, mas ainda sem evidência clara de que tal reflexão venha a traduzir-se numa mudança efetiva.

Contudo, questionei o aluno sobre o facto de o mesmo ter verdadeiramente compreendido ou apenas pretendia decorar, mostrando preocupação com o desenvolvimento concetual e não apenas com a memorização.

Outro aspeto importante nesta entrevista é o momento em que o aluno é confrontado com uma expressão matemática que ele próprio escreveu, mas já não sabe explicar. Esta reação é bastante reveladora, pois mostra que os cálculos feitos não foram acompanhados por uma linha de pensamento clara e consciente.

Em suma, esta entrevista demonstra que, na 1.^a fase, o Álvaro não valorizou nem aproveitou o *feedback* formativo que lhe foi disponibilizado, mostrando desatenção, falta de autorregulação e ausência de compromisso com o processo de revisão. Só no decorrer da conversa, e com apoio, começou a emergir alguma compreensão concetual

mais sólida, ainda que não consolidada. Isto sugere que o aluno necessita de maior acompanhamento e mediação pedagógica direta para conseguir apropriar-se dos *feedbacks* recebidos e transformar os erros em oportunidades reais de aprendizagem.

5.2.2. Beatriz

No caso da Beatriz, e nesta 1.^a fase, a aluna resolveu a versão 2 do problema, como se apresenta na Figura 26.

2. Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s , de equações vectoriais respetivamente:

$(x, y, z) = (-3, 4, 4) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

Handwritten notes: "diretor" (pointing to direction vectors), "normal" (pointing to normal vectors).

Calculations:

$$\vec{r} \cdot \vec{d} = (-3, 4, 4) \cdot (0, 2, 1) = 8 + 4 = 12$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1, 2, 2) \cdot (-2, 0, 1) = 2 + 2 = 4$$

~~$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$~~

$$\vec{r} \cdot \vec{d} = (-1, 2, 2) \cdot (-2, 0, 1) = 2 + 2 = 4$$

$$nr - ns = (1, 2, 1)$$

$$vr - vs = (-3, 2, 3)$$

$$v_1(x - x_1) + v_2(y - y_2) + v_3(z - z_3) = 0$$

$$\Rightarrow 1(x - 3) + 2(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1x + 2y + z + 3 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow x + 2y + z - 4 = 0$$

Other notes: "O vetor (3, 2, 0) é normal", "paralelo", "R.D. = 4x".

Figura 26 - Resolução da Beatriz do problema na 1.^a fase (Momento 2)

A nível da correção, a resolução apresentada pela Beatriz revela sérias dificuldades, conduzindo a um resultado incorreto. A aluna demonstra confusão entre diferentes objetos matemáticos (pontos, vetores diretores, vetores normais) e aplica operações matematicamente inadequadas, como a utilização de vetores construídos de forma arbitrária como vetores normais ao plano. A equação final apresentada, apesar de se assemelhar formalmente à forma cartesiana esperada, não é válida para o plano definido pelas duas retas em causa, o que invalida totalmente a resposta.

Relativamente à organização, a produção é marcada pela ausência de uma estrutura sequencial. Há sobreposição de ideias, múltiplas rasuras e uma apresentação

desordenada dos passos da resolução, sem qualquer separação clara entre momentos fundamentais, como a análise da posição relativa das retas, a construção do vetor normal ao plano ou a aplicação da equação cartesiana. Esta desorganização compromete a leitura do pensamento e impede a reconstrução clara do percurso seguido. Quanto à linguagem matemática, verifica-se o uso impreciso e confuso da terminologia. A aluna não distingue corretamente pontos e vetores, referindo-se, por exemplo, aos pontos de uma reta como vetores diretores, e aos vetores diretores como vetores normais. Além disso, os símbolos matemáticos são usados de forma pouco rigorosa, sem qualquer identificação que contextualizem o seu papel na resolução. Esta linguagem ambígua dificulta a comunicação do pensamento e revela lacunas significativas na apropriação dos conceitos.

Na dimensão da justificação, a produção é praticamente silenciosa. Embora surjam alguns cálculos e testes (como tentativas de uso do produto escalar ou da colinearidade), estes não são acompanhados de qualquer explicação sobre o seu propósito ou pertinência. A aluna parece testar várias abordagens de forma sequencial e desarticulada, sem justificar as escolhas feitas ou relacioná-las com a situação descrita no enunciado. Por fim, ao nível da resposta, embora exista uma equação final destacada, esta não está correta. Devido à escolha dos dados utilizados, tanto do ponto como em relação às coordenadas do vetor normal, a resposta está incorreta.

No momento de fornecer *feedback* à aluna (Figura 37), optei por uma abordagem centrada na interrogação, com o intuito de promover a autorreflexão e encorajar a reorganização do seu pensamento. Evitei apontar diretamente os erros ou fornecer respostas, procurando antes guiá-la através de questões que apelassem à revisão do seu próprio pensamento, como “Estás a subtrair vetores diretores?”, “Estás a subtrair pontos?”, ou “Este vetor é mesmo normal ao plano?”.

2. Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s , de equações ao plano α ou β ?

as retas são definidas com um ponto pertencente à mesma e um vetor diretor.

$(x, y, z) = (-3, 4, 4) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

$\vec{r} = (-3, 4, 4) \cdot (0, 2, 1)$
 $= 8 + 4 = 12$
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1, 2, 2) \cdot (-2, 0, 1)$
 $= 2 + 2 = 4$

$\vec{r} = k \cdot \vec{s}$
 $(-3, 4, 4) = k \cdot (0, 2, 1)$
 $(-3) = 2k = 4 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$
 $k = 4 \Rightarrow k = 4$

O que estamos a tentar verificar aqui? As retas são coincidentes, paralelas ou concorrentes? Como posso verificar?

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-1, 2, 2) \cdot (-2, 0, 1)$
 $= 2 + 2 = 4$

$\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{s}$

$\vec{r} - \vec{s} = (1, 2, 1)$

$v_1(x - x_1) + v_2(y - y_2) + v_3(z - z_3) = 0$
 $1(x + 3) + 2(y - 2) + 1(z - 3) = 0$
 $1x + 2y + z + 3 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow x + 2y + z - 4 = 0$

Força! Tu consegues!

estás a subtrair pontos?

estás a subtrair vetores diretores?

este vetor é mesmo normal ao plano?

começa por verificar a relação entre as retas!

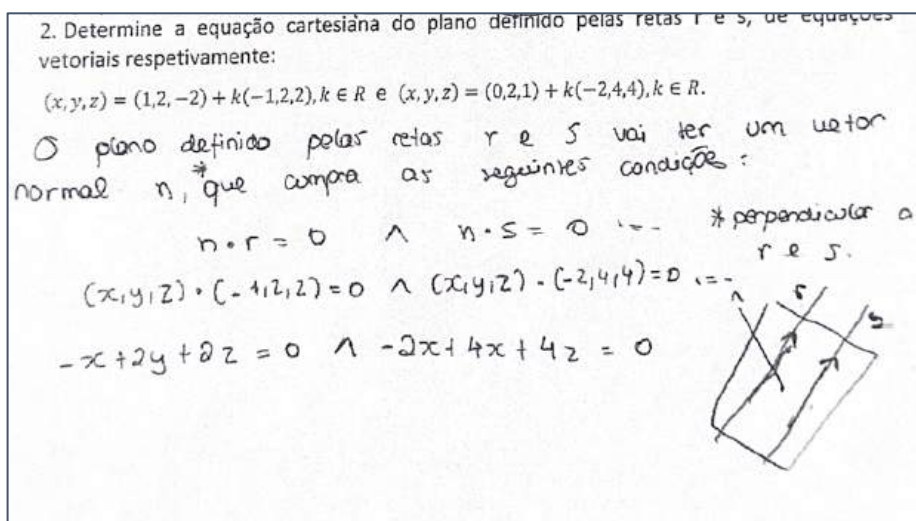
Figura 27 - *Feedback* à resolução da Beatriz do problema na 1.^a fase (Momento 2)

Este tipo de intervenção pretende, acima de tudo, estimular a tomada de consciência sobre as decisões que foi tomando ao longo da resolução, muitas delas marcadas por confusões entre objetos matemáticos, nomeadamente entre pontos, vetores diretores e vetores normais. Nesse sentido, outras perguntas como “Qual é a diferença entre vetor diretor e vetor normal?” e “Não estarás a confundir conceitos?” visam clarificar essas distinções essenciais. Ao mesmo tempo, tentei criar um ambiente de apoio positivo, deixando mensagens como “Força! Tu consegues!” em momentos de maior densidade de confusão, para manter o envolvimento e a confiança da aluna, mesmo diante da dificuldade. O *feedback* interrogativo, ao centrar-se no processo e não apenas no produto, mostrou-se especialmente pertinente nesta situação, uma vez que a aluna pareceu recorrer a várias estratégias em modo de tentativa-erro, sem uma estrutura clara. Perguntas como “O que estavas a tentar verificar aqui? As retas são coincidentes, paralelas ou concorrentes?” permitiram dirigir a atenção da aluna para os objetivos de cada etapa, ajudando-a a reconstruir o seu percurso de forma mais intencional. Além disso, tentei apelar a que a aluna percebesse que o primeiro passo da resolução deveria ser a verificação da relação entre as retas (“Começa por verificar a relação entre as retas!”).

Infelizmente, a Beatriz não esteve presente na aula em que se resolveu a segunda fase do problema, neste segundo momento de intervenção e devido a questões de agenda não foi possível reagendar com a aluna uma nova data. Posto isto, também não foi desenvolvida nenhuma entrevista com a aluna, pois não havia como verificar evolução ou não por parte da mesma.

5.2.3. Salvador

No caso do Salvador, e nesta 1.^a fase, o aluno resolveu a versão 1 do problema, como se apresenta na Figura 28.



2. Determine a equação cartesiã do plano definido pelas retas r e s , de equações vetoriais respetivamente:

$$(x, y, z) = (1, 2, -2) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R} \text{ e } (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 4, 4), k \in \mathbb{R}.$$

O plano definido pelas retas r e s vai ter um vetor normal n , que cumpre as seguintes condições:

$$n \cdot r = 0 \quad \wedge \quad n \cdot s = 0 \quad \text{---} \quad \# \text{ perpendicular a } r \text{ e } s.$$

$$(x, y, z) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \quad \wedge \quad (x, y, z) \cdot (-2, 4, 4) = 0 \quad \text{---}$$

$$-x + 2y + 2z = 0 \quad \wedge \quad -2x + 4y + 4z = 0$$

Figura 28 - Resolução do Salvador do problema na 1.^a fase (Momento 2)

A resolução apresentada pelo Salvador revela fragilidades importantes logo na fase inicial, comprometendo todo o desenvolvimento do problema. A questão propõe a determinação da equação cartesiana de um plano definido por duas retas dadas por equações vetoriais. No entanto, o aluno apesar de partir da suposição que as retas são paralelas (tendo em conta a sua representação visual) utiliza as condições de retas concorrente e, desse modo, desenvolve a resolução de forma errada. Ao nível da correção, o principal erro reside na ausência de verificação da posição relativa entre as duas retas. Dado que os vetores diretores dessas retas são colineares, então trata-se de duas retas paralelas. Esta verificação deveria ter sido o primeiro passo da resolução, sendo fundamental para determinar a estratégia a seguir. Embora o aluno represente visualmente as retas como paralelas, depois não concretiza essa ideia.

Na dimensão da justificação, verifica-se que o aluno apresenta condições matemáticas (produtos escalares nulos, $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$), mas não explica o seu significado no contexto do problema, nem justifica o pensamento seguido. Além disso, não é explicada a construção do vetor necessário para a condição correta: no caso de duas retas paralelas que definem um plano, seria necessário considerar: (1) um vetor diretor $\vec{v}$ de uma das retas (já dado); (2) um vetor construído a partir de dois pontos, um de cada reta; (3) um vetor perpendicular a ambos (vetores definidos em (1) e (2)). Estas condições não aparecem na resolução, o que compromete a coerência do trabalho.

Relativamente à organização, a resolução está visualmente segmentada e os cálculos encontram-se distribuídos de forma legível. Quanto à linguagem, o Salvador recorre à terminologia correta, contudo, apresenta uma incorreção ao nível da simbologia de representação de um vetor.

Finalmente, na dimensão da resposta, o aluno não apresentou qualquer indicação visível e destacada. Isto não permite ao leitor perceber se a tarefa foi encerrada ou não.

No momento de fornecer *feedback* à resolução apresentada pelo Salvador (Figura 29), mantive uma abordagem interrogativa e formativa, procurando, sobretudo, incentivar uma análise crítica e consciente das ideias que o aluno expressou. Embora a apresentação da resolução revele organização e clareza na exposição, as ideias subjacentes assentam numa compreensão incorreta da situação geométrica proposta, o que motivou a formulação de questões orientadas para a verificação e validação concetual do pensamento desenvolvido.

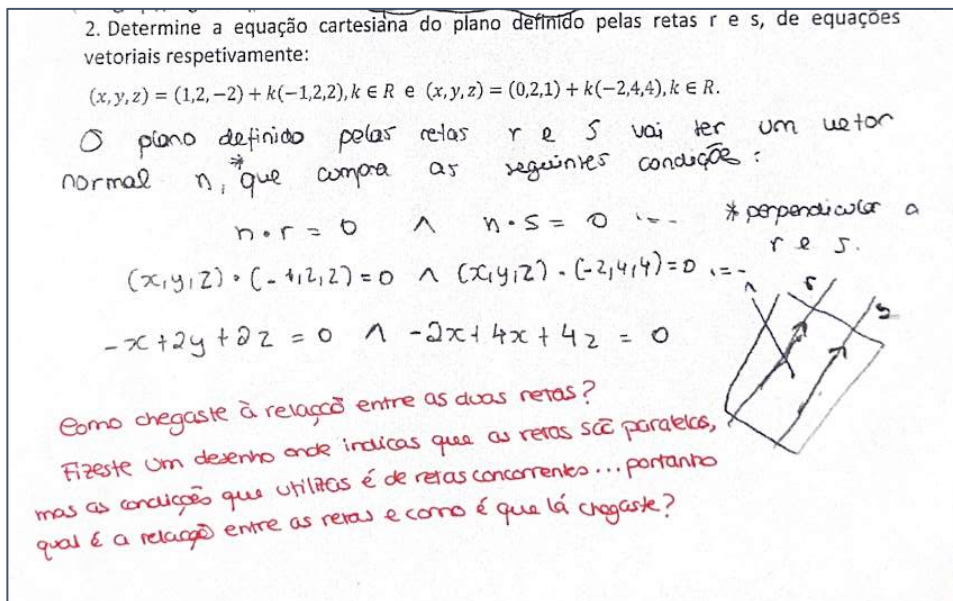


Figura 29 - Feedback à resolução do Salvador do problema na 1.ª fase (Momento 2)

A primeira preocupação refletida no *feedback* foi esclarecer a relação entre as retas r e s , já que esta constitui a base de todo o problema. O Salvador optou por aplicar as condições matemáticas adequadas ao caso de retas concorrentes, quando, na verdade, se trata de duas retas paralelas. Apesar de ter representado graficamente essa relação de paralelismo no desenho, não verificou ou justificou essa escolha de forma explícita. Assim, o *feedback* atribuído foi no sentido de levar o aluno a identificar a incoerência entre as representações simbólicas e visuais que utilizou, promovendo a autorregulação e a correção de conceitos mal aplicados.

Na realização do problema, mas agora na segunda fase (Figura 30), o Salvador melhorou bastante.

2. Determine a equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s , de equações vectoriais respetivamente:

$r: (x, y, z) = (0, -3, 2) + k(1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$ e $s: (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(3, -3, 6), k \in \mathbb{R}$.

O vetor $\vec{r}$ é diretor da reta r com coordenadas $(1, -1, 2)$ e o vetor $\vec{s}$ é diretor da reta s com coordenadas $(3, -3, 6)$.

O plano definido pelas retas r e s tem um vetor normal ao plano que é simultaneamente perpendicular a $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, -1, 2) \cdot (3, -3, 6) = 3 + 4 + 12 = 19$

Como $\vec{r} \cdot \vec{s} \neq 0$, os dois vetores não são perpendiculares e não são colineares.

$\vec{r} = \frac{1}{3}\vec{s}$, portanto as retas são

O vetor $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{r}$ e $\vec{s}$: $\vec{u} = (0, -3, 2) - (2, 0, 4) = (-2, -3, -2)$

$\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ e $\vec{s} \cdot \vec{u} = 0$

O plano definido pelas retas r e s tem um vetor normal $(\vec{n})$ perpendicular simultaneamente a $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ e $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$

(+1,

Bom trabalho!
Vi que entendeste o feedback anterior e estavas a ir no bom caminho!

Figura 30 - Feedback à resolução do Salvador do problema na 2.ª fase (Momento 2)

Durante a realização do segundo problema na segunda fase, a produção do Salvador revelou uma evolução em relação à sua tentativa anterior. O aluno demonstrou ter compreendido o *feedback* previamente fornecido, ao aplicar corretamente as condições adequadas para a determinação da equação cartesiana de um plano definido por duas retas paralelas. Esta melhoria manifesta-se desde o início da resolução, onde identifica com clareza os vetores diretores das retas r e s , e verifica corretamente que os mesmos não são perpendiculares, mas sim colineares, contudo não afirma que as retas são paralelas.

Contrariamente ao que havia feito na primeira fase o Salvador estrutura agora a resolução com base numa fundamentação correta. Determina um vetor diretor de uma das retas e constrói um novo vetor, obtido a partir de dois pontos distintos, um de cada

reta, para em seguida estabelecer que o vetor normal ao plano deve ser perpendicular a ambos. Esta abordagem revela não só um maior rigor, como também uma clara apropriação das sugestões anteriormente indicadas.

No que diz respeito à organização, o aluno estrutura a resolução de forma um pouco desorganizada, apresentando cálculos dispersos. Além disso, as correções feitas no meio do texto, não tornam a produção visualmente apelativa. Neste aspeto, o aluno piorou.

Além disso, a linguagem matemática utilizada revela-se bastante mais precisa e coerente. O aluno recorre corretamente à notação vetorial e utiliza o produto escalar para demonstrar a perpendicularidade entre os vetores. A justificação dos passos é mais clara e o encadeamento lógico da resolução surge agora bem delineado, permitindo seguir o pensamento com facilidade.

Ao nível da comunicação matemática escrita, nota-se ainda um maior cuidado em distinguir os objetos matemáticos utilizados, tanto na forma como os representa como na explicitação do seu significado.

Contudo, a nível da resposta o aluno continua igual, pois mais uma vez não acabou a sua resolução, deixando a meio os seus cálculos e desta forma não apresentando nenhuma resposta.

Desta forma, o *feedback* escrito incidiu num tom de valorização: “Bom trabalho! Vi que entendeste o *feedback* anterior, estavas a ir no bom caminho!”. Este reconhecimento foi deliberado, pois, segundo autores como Hattie e Timperley (2007), o reforço positivo quando associado a progressos concretos promove não só a motivação intrínseca como também a consolidação da aprendizagem.

A fim de compreender como o aluno incorporou o *feedback* fornecido, avançou-se para a quinta etapa da intervenção pedagógica, a qual consistiu na realização de uma entrevista. O Salvador reconhece que iniciou a resolução pela verificação da relação entre as retas, o que não tinha feito na 1.^a fase. Esta mudança demonstrou que o aluno leu, compreendeu e aplicou o *feedback*, ao identificar que a análise dos vetores diretores é um passo fundamental para determinar a posição relativa entre retas. A este propósito, o aluno partilha:

Salvador: Na outra vez não reparei bem, e depois com o que escreveu percebi que devia começar por aí. Mas não tive tempo de acabar...

Investigadora: Não tem mal, eu entendi, no entanto, tens que aprender a gerir melhor o teu tempo. Achas que escrever as justificações ajuda?

Salvador: No início não dava importância, mas agora percebo que se não escrever, às vezes nem eu percebo o que fiz. (Entrevista, Fase 1, Salvador)

Esta reflexão é um forte indicador do desenvolvimento metacognitivo, pois o aluno começou a reconhecer que a escrita e a explicação do pensamento não são meramente formais ou decorativas, mas instrumentos que favorecem a compreensão do próprio pensamento matemático. Esta tomada de consciência revela um progresso profundo, que vai para além da correção de um erro pontual. Apesar de ter referido que não conseguiu concluir o exercício por falta de tempo, essa limitação não anula o progresso observado. Pelo contrário, reconheci esse esforço e aproveitou para reforçar a importância da gestão do tempo, mostrando que o foco está no processo e na aprendizagem, e não apenas no produto final.

Em síntese, salienta-se que o Salvador integrou efetivamente o *feedback* recebido, transformando-o em ações concretas na resolução da 2.^a fase. A sua atitude revela reflexão, apropriação concetual e uma crescente autonomia no desenvolvimento da comunicação matemática escrita. Este caso ilustra como um *feedback* claro, focado na aprendizagem e na construção do pensamento, pode ter um impacto positivo no desempenho do aluno, desde que acompanhado de oportunidades para refletir, errar, ajustar e evoluir.

5.3. Terceiro Momento de Intervenção Pedagógica

O tema abordado no terceiro momento da intervenção pedagógica foram as progressões aritméticas. Desta vez, não se utilizaram versões. Os problemas propostos, neste momento, pretendiam que os alunos reconhecessem que a sequência descrita era uma progressão aritmética e conseguissem identificar a sua razão através do enunciado. Sabendo um dos termos e a razão da progressão aritmética, poderiam chegar ao seu termo geral, conseguindo assim descobrir qual dos valores não é termo da sequência.

5.3.1. Álvaro

No terceiro momento da intervenção, e na primeira fase, o Álvaro resolveu o problema proposto, como se apresenta na Figura 31.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes **não** é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$U_n = U_k + (k - m) \times 3$ $U_2 = U_8 + (k - m) - 3$
 $r = 3 \checkmark$ $U_2 = 16 + (2 - 8) - 3$
 $U_8 = 16 \checkmark$ $U_2 = 16 - 12 - 3$
 $U_2 = -5 \checkmark$

Termo ser múltiplo de 3 $\checkmark$
 Somei três até 3
 na sequência somando 3

$2 \rightarrow 3 \ 4 \ 16$ não se encaixa

Figura 31 - Resolução do Álvaro do problema na 1.ª fase (Momento 3)

Nesta resolução, o aluno identificou corretamente que o número 416 não pertence à sequência, o que demonstra um resultado adequado. No entanto, quando analisada à luz das dimensões propostas, verifica-se que a produção escrita apresenta fragilidades. No que respeita à correção, embora o resultado esteja certo, os procedimentos matemáticos usados são vagos. A fórmula apresentada que relaciona termos não consecutivos de uma progressão aritmética surge com equívocos e a sua aplicação é apresentada também com incorreções, o que impede validar totalmente a correção dos passos realizados. A organização da resposta tem também fragilidades. O aluno apresenta os cálculos de forma solta, com passagens bruscas entre expressões e sem uma linha de pensamento claramente estruturada.

Relativamente à linguagem, o Álvaro recorre a expressões informais, como “somei três até dar um número”, o que revela uma abordagem pouco rigorosa e desadequada ao registo matemático esperado neste nível de ensino. Além disso, na escrita da expressão do termo geral comete incorreções, o que demonstra falta de rigor e conhecimento matemático. A dimensão da justificação também não está conseguida, pois o aluno não apresenta uma explicação clara que fundamente o facto do valor 416 não ser termo da

sequência. O aluno apenas refere que somou 3 até dar um valor, contudo não explica, por exemplo, a que número é que somou 3. Além disso, não justifica através de cálculos que os outros números são termos da sequência, mesmo estando explícito no enunciado “Apresenta todos os cálculos que efetuares”. Por fim, quanto à resposta, a mesma está assinalada e correta.

Apesar de o aluno ter identificado corretamente a razão da progressão aritmética apresentada no problema, a expressão utilizada para relacionar termos não consecutivos apresentou erros de estrutura e notação, o que comprometeu a clareza e rigor da resolução. Deste modo, no momento de fornecer *feedback* à resolução apresentada pelo aluno (Figura 32), procurei intervir com perguntas como “Houve aqui uma troca de letras...consegues detetar o erro?”, “Se estás a multiplicar, por que razão não está indicado?”, ou “Trata-se de uma progressão? Qual?”, desafiando o aluno a tomar consciência do significado das expressões utilizadas e da necessidade da precisão simbólica. Além disso, destaquei incoerências no pensamento, como a passagem de 3 para -3 sem justificação ou a afirmação de que os termos “têm de ser múltiplos de 3” sem explicar o porquê, o que evidencia lacunas na justificação. Assim, formulei questões como “Por que razão têm de ser múltiplos de 3?” ou “Como explicas que nenhum dos valores anteriores seja divisível por 3 e ainda assim pertençam à sequência?”, levando o aluno a reavaliar os critérios utilizados na sua análise.

A nível da linguagem, incentivei o uso de expressões mais rigorosas, perguntando por exemplo “Somaste 3 ao quê?”, de modo a pedir ao aluno que reformulasse a frase para explicar melhor o seu pensamento, promovendo, desta forma, a articulação entre o pensamento matemático e a linguagem escrita. Por fim, procurei valorizar o esforço do aluno e a intenção de justificar o seu pensamento, mesmo que de forma incompleta, com anotações como “Estás no bom caminho!”, reforçando uma perspetiva formativa e motivadora.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Handwritten feedback:

Tem aqui uma troca de letras... consegues detetar o erro?
Trata-se de uma progressão? Qual?
 $U_n = U_k + (k-n) \times 3$
 $r = 3 \checkmark \rightarrow$ razão
 $U_8 = 16 \checkmark$
 $U_2 = U_8 + (k-n) \times 3$
 $U_2 = 16 + (2-8) \times 3$
 $U_2 = 16 - 18 = -2$
 $U_2 = -2 \checkmark$
 $U_3 = -2 + 3 = 1$
 $U_4 = 1 + 3 = 4$
 $U_5 = 4 + 3 = 7$
 $U_6 = 7 + 3 = 10$
 $U_7 = 10 + 3 = 13$
 $U_8 = 13 + 3 = 16$
 $U_9 = 16 + 3 = 19$
 $U_{10} = 19 + 3 = 22$
 $U_{11} = 22 + 3 = 25$
 $U_{12} = 25 + 3 = 28$
 $U_{13} = 28 + 3 = 31$
 $U_{14} = 31 + 3 = 34$
 $U_{15} = 34 + 3 = 37$
 $U_{16} = 37 + 3 = 40$
 $U_{17} = 40 + 3 = 43$
 $U_{18} = 43 + 3 = 46$
 $U_{19} = 46 + 3 = 49$
 $U_{20} = 49 + 3 = 52$
 $U_{21} = 52 + 3 = 55$
 $U_{22} = 55 + 3 = 58$
 $U_{23} = 58 + 3 = 61$
 $U_{24} = 61 + 3 = 64$
 $U_{25} = 64 + 3 = 67$
 $U_{26} = 67 + 3 = 70$
 $U_{27} = 70 + 3 = 73$
 $U_{28} = 73 + 3 = 76$
 $U_{29} = 76 + 3 = 79$
 $U_{30} = 79 + 3 = 82$
 $U_{31} = 82 + 3 = 85$
 $U_{32} = 85 + 3 = 88$
 $U_{33} = 88 + 3 = 91$
 $U_{34} = 91 + 3 = 94$
 $U_{35} = 94 + 3 = 97$
 $U_{36} = 97 + 3 = 100$
 $U_{37} = 100 + 3 = 103$
 $U_{38} = 103 + 3 = 106$
 $U_{39} = 106 + 3 = 109$
 $U_{40} = 109 + 3 = 112$
 $U_{41} = 112 + 3 = 115$
 $U_{42} = 115 + 3 = 118$
 $U_{43} = 118 + 3 = 121$
 $U_{44} = 121 + 3 = 124$
 $U_{45} = 124 + 3 = 127$
 $U_{46} = 127 + 3 = 130$
 $U_{47} = 130 + 3 = 133$
 $U_{48} = 133 + 3 = 136$
 $U_{49} = 136 + 3 = 139$
 $U_{50} = 139 + 3 = 142$
 $U_{51} = 142 + 3 = 145$
 $U_{52} = 145 + 3 = 148$
 $U_{53} = 148 + 3 = 151$
 $U_{54} = 151 + 3 = 154$
 $U_{55} = 154 + 3 = 157$
 $U_{56} = 157 + 3 = 160$
 $U_{57} = 160 + 3 = 163$
 $U_{58} = 163 + 3 = 166$
 $U_{59} = 166 + 3 = 169$
 $U_{60} = 169 + 3 = 172$
 $U_{61} = 172 + 3 = 175$
 $U_{62} = 175 + 3 = 178$
 $U_{63} = 178 + 3 = 181$
 $U_{64} = 181 + 3 = 184$
 $U_{65} = 184 + 3 = 187$
 $U_{66} = 187 + 3 = 190$
 $U_{67} = 190 + 3 = 193$
 $U_{68} = 193 + 3 = 196$
 $U_{69} = 196 + 3 = 199$
 $U_{70} = 199 + 3 = 202$
 $U_{71} = 202 + 3 = 205$
 $U_{72} = 205 + 3 = 208$
 $U_{73} = 208 + 3 = 211$
 $U_{74} = 211 + 3 = 214$
 $U_{75} = 214 + 3 = 217$
 $U_{76} = 217 + 3 = 220$
 $U_{77} = 220 + 3 = 223$
 $U_{78} = 223 + 3 = 226$
 $U_{79} = 226 + 3 = 229$
 $U_{80} = 229 + 3 = 232$
 $U_{81} = 232 + 3 = 235$
 $U_{82} = 235 + 3 = 238$
 $U_{83} = 238 + 3 = 241$
 $U_{84} = 241 + 3 = 244$
 $U_{85} = 244 + 3 = 247$
 $U_{86} = 247 + 3 = 250$
 $U_{87} = 250 + 3 = 253$
 $U_{88} = 253 + 3 = 256$
 $U_{89} = 256 + 3 = 259$
 $U_{90} = 259 + 3 = 262$
 $U_{91} = 262 + 3 = 265$
 $U_{92} = 265 + 3 = 268$
 $U_{93} = 268 + 3 = 271$
 $U_{94} = 271 + 3 = 274$
 $U_{95} = 274 + 3 = 277$
 $U_{96} = 277 + 3 = 280$
 $U_{97} = 280 + 3 = 283$
 $U_{98} = 283 + 3 = 286$
 $U_{99} = 286 + 3 = 289$
 $U_{100} = 289 + 3 = 292$
 $U_{101} = 292 + 3 = 295$
 $U_{102} = 295 + 3 = 298$
 $U_{103} = 298 + 3 = 301$
 $U_{104} = 301 + 3 = 304$
 $U_{105} = 304 + 3 = 307$
 $U_{106} = 307 + 3 = 310$
 $U_{107} = 310 + 3 = 313$
 $U_{108} = 313 + 3 = 316$
 $U_{109} = 316 + 3 = 319$
 $U_{110} = 319 + 3 = 322$
 $U_{111} = 322 + 3 = 325$
 $U_{112} = 325 + 3 = 328$
 $U_{113} = 328 + 3 = 331$
 $U_{114} = 331 + 3 = 334$
 $U_{115} = 334 + 3 = 337$
 $U_{116} = 337 + 3 = 340$
 $U_{117} = 340 + 3 = 343$
 $U_{118} = 343 + 3 = 346$
 $U_{119} = 346 + 3 = 349$
 $U_{120} = 349 + 3 = 352$
 $U_{121} = 352 + 3 = 355$
 $U_{122} = 355 + 3 = 358$
 $U_{123} = 358 + 3 = 361$
 $U_{124} = 361 + 3 = 364$
 $U_{125} = 364 + 3 = 367$
 $U_{126} = 367 + 3 = 370$
 $U_{127} = 370 + 3 = 373$
 $U_{128} = 373 + 3 = 376$
 $U_{129} = 376 + 3 = 379$
 $U_{130} = 379 + 3 = 382$
 $U_{131} = 382 + 3 = 385$
 $U_{132} = 385 + 3 = 388$
 $U_{133} = 388 + 3 = 391$
 $U_{134} = 391 + 3 = 394$
 $U_{135} = 394 + 3 = 397$
 $U_{136} = 397 + 3 = 400$
 $U_{137} = 400 + 3 = 403$
 $U_{138} = 403 + 3 = 406$
 $U_{139} = 406 + 3 = 409$
 $U_{140} = 409 + 3 = 412$
 $U_{141} = 412 + 3 = 415$
 $U_{142} = 415 + 3 = 418$
 $U_{143} = 418 + 3 = 421$
 $U_{144} = 421 + 3 = 424$
 $U_{145} = 424 + 3 = 427$
 $U_{146} = 427 + 3 = 430$
 $U_{147} = 430 + 3 = 433$
 $U_{148} = 433 + 3 = 436$
 $U_{149} = 436 + 3 = 439$
 $U_{150} = 439 + 3 = 442$
 $U_{151} = 442 + 3 = 445$
 $U_{152} = 445 + 3 = 448$
 $U_{153} = 448 + 3 = 451$
 $U_{154} = 451 + 3 = 454$
 $U_{155} = 454 + 3 = 457$
 $U_{156} = 457 + 3 = 460$
 $U_{157} = 460 + 3 = 463$
 $U_{158} = 463 + 3 = 466$
 $U_{159} = 466 + 3 = 469$
 $U_{160} = 469 + 3 = 472$
 $U_{161} = 472 + 3 = 475$
 $U_{162} = 475 + 3 = 478$
 $U_{163} = 478 + 3 = 481$
 $U_{164} = 481 + 3 = 484$
 $U_{165} = 484 + 3 = 487$
 $U_{166} = 487 + 3 = 490$
 $U_{167} = 490 + 3 = 493$
 $U_{168} = 493 + 3 = 496$
 $U_{169} = 496 + 3 = 499$
 $U_{170} = 499 + 3 = 502$
 $U_{171} = 502 + 3 = 505$
 $U_{172} = 505 + 3 = 508$
 $U_{173} = 508 + 3 = 511$
 $U_{174} = 511 + 3 = 514$
 $U_{175} = 514 + 3 = 517$
 $U_{176} = 517 + 3 = 520$
 $U_{177} = 520 + 3 = 523$
 $U_{178} = 523 + 3 = 526$
 $U_{179} = 526 + 3 = 529$
 $U_{180} = 529 + 3 = 532$
 $U_{181} = 532 + 3 = 535$
 $U_{182} = 535 + 3 = 538$
 $U_{183} = 538 + 3 = 541$
 $U_{184} = 541 + 3 = 544$
 $U_{185} = 544 + 3 = 547$
 $U_{186} = 547 + 3 = 550$
 $U_{187} = 550 + 3 = 553$
 $U_{188} = 553 + 3 = 556$
 $U_{189} = 556 + 3 = 559$
 $U_{190} = 559 + 3 = 562$
 $U_{191} = 562 + 3 = 565$
 $U_{192} = 565 + 3 = 568$
 $U_{193} = 568 + 3 = 571$
 $U_{194} = 571 + 3 = 574$
 $U_{195} = 574 + 3 = 577$
 $U_{196} = 577 + 3 = 580$
 $U_{197} = 580 + 3 = 583$
 $U_{198} = 583 + 3 = 586$
 $U_{199} = 586 + 3 = 589$
 $U_{200} = 589 + 3 = 592$
 $U_{201} = 592 + 3 = 595$
 $U_{202} = 595 + 3 = 598$
 $U_{203} = 598 + 3 = 601$
 $U_{204} = 601 + 3 = 604$
 $U_{205} = 604 + 3 = 607$
 $U_{206} = 607 + 3 = 610$
 $U_{207} = 610 + 3 = 613$
 $U_{208} = 613 + 3 = 616$
 $U_{209} = 616 + 3 = 619$
 $U_{210} = 619 + 3 = 622$
 $U_{211} = 622 + 3 = 625$
 $U_{212} = 625 + 3 = 628$
 $U_{213} = 628 + 3 = 631$
 $U_{214} = 631 + 3 = 634$
 $U_{215} = 634 + 3 = 637$
 $U_{216} = 637 + 3 = 640$
 $U_{217} = 640 + 3 = 643$
 $U_{218} = 643 + 3 = 646$
 $U_{219} = 646 + 3 = 649$
 $U_{220} = 649 + 3 = 652$
 $U_{221} = 652 + 3 = 655$
 $U_{222} = 655 + 3 = 658$
 $U_{223} = 658 + 3 = 661$
 $U_{224} = 661 + 3 = 664$
 $U_{225} = 664 + 3 = 667$
 $U_{226} = 667 + 3 = 670$
 $U_{227} = 670 + 3 = 673$
 $U_{228} = 673 + 3 = 676$
 $U_{229} = 676 + 3 = 679$
 $U_{230} = 679 + 3 = 682$
 $U_{231} = 682 + 3 = 685$
 $U_{232} = 685 + 3 = 688$
 $U_{233} = 688 + 3 = 691$
 $U_{234} = 691 + 3 = 694$
 $U_{235} = 694 + 3 = 697$
 $U_{236} = 697 + 3 = 700$
 $U_{237} = 700 + 3 = 703$
 $U_{238} = 703 + 3 = 706$
 $U_{239} = 706 + 3 = 709$
 $U_{240} = 709 + 3 = 712$
 $U_{241} = 712 + 3 = 715$
 $U_{242} = 715 + 3 = 718$
 $U_{243} = 718 + 3 = 721$
 $U_{244} = 721 + 3 = 724$
 $U_{245} = 724 + 3 = 727$
 $U_{246} = 727 + 3 = 730$
 $U_{247} = 730 + 3 = 733$
 $U_{248} = 733 + 3 = 736$
 $U_{249} = 736 + 3 = 739$
 $U_{250} = 739 + 3 = 742$
 $U_{251} = 742 + 3 = 745$
 $U_{252} = 745 + 3 = 748$
 $U_{253} = 748 + 3 = 751$
 $U_{254} = 751 + 3 = 754$
 $U_{255} = 754 + 3 = 757$
 $U_{256} = 757 + 3 = 760$
 $U_{257} = 760 + 3 = 763$
 $U_{258} = 763 + 3 = 766$
 $U_{259} = 766 + 3 = 769$
 $U_{260} = 769 + 3 = 772$
 $U_{261} = 772 + 3 = 775$
 $U_{262} = 775 + 3 = 778$
 $U_{263} = 778 + 3 = 781$
 $U_{264} = 781 + 3 = 784$
 $U_{265} = 784 + 3 = 787$
 $U_{266} = 787 + 3 = 790$
 $U_{267} = 790 + 3 = 793$
 $U_{268} = 793 + 3 = 796$
 $U_{269} = 796 + 3 = 799$
 $U_{270} = 799 + 3 = 802$
 $U_{271} = 802 + 3 = 805$
 $U_{272} = 805 + 3 = 808$
 $U_{273} = 808 + 3 = 811$
 $U_{274} = 811 + 3 = 814$
 $U_{275} = 814 + 3 = 817$
 $U_{276} = 817 + 3 = 820$
 $U_{277} = 820 + 3 = 823$
 $U_{278} = 823 + 3 = 826$
 $U_{279} = 826 + 3 = 829$
 $U_{280} = 829 + 3 = 832$
 $U_{281} = 832 + 3 = 835$
 $U_{282} = 835 + 3 = 838$
 $U_{283} = 838 + 3 = 841$
 $U_{284} = 841 + 3 = 844$
 $U_{285} = 844 + 3 = 847$
 $U_{286} = 847 + 3 = 850$
 $U_{287} = 850 + 3 = 853$
 $U_{288} = 853 + 3 = 856$
 $U_{289} = 856 + 3 = 859$
 $U_{290} = 859 + 3 = 862$
 $U_{291} = 862 + 3 = 865$
 $U_{292} = 865 + 3 = 868$
 $U_{293} = 868 + 3 = 871$
 $U_{294} = 871 + 3 = 874$
 $U_{295} = 874 + 3 = 877$
 $U_{296} = 877 + 3 = 880$
 $U_{297} = 880 + 3 = 883$
 $U_{298} = 883 + 3 = 886$
 $U_{299} = 886 + 3 = 889$
 $U_{300} = 889 + 3 = 892$
 $U_{301} = 892 + 3 = 895$
 $U_{302} = 895 + 3 = 898$
 $U_{303} = 898 + 3 = 901$
 $U_{304} = 901 + 3 = 904$
 $U_{305} = 904 + 3 = 907$
 $U_{306} = 907 + 3 = 910$
 $U_{307} = 910 + 3 = 913$
 $U_{308} = 913 + 3 = 916$
 $U_{309} = 916 + 3 = 919$
 $U_{310} = 919 + 3 = 922$
 $U_{311} = 922 + 3 = 925$
 $U_{312} = 925 + 3 = 928$
 $U_{313} = 928 + 3 = 931$
 $U_{314} = 931 + 3 = 934$
 $U_{315} = 934 + 3 = 937$
 $U_{316} = 937 + 3 = 940$
 $U_{317} = 940 + 3 = 943$
 $U_{318} = 943 + 3 = 946$
 $U_{319} = 946 + 3 = 949$
 $U_{320} = 949 + 3 = 952$
 $U_{321} = 952 + 3 = 955$
 $U_{322} = 955 + 3 = 958$
 $U_{323} = 958 + 3 = 961$
 $U_{324} = 961 + 3 = 964$
 $U_{325} = 964 + 3 = 967$
 $U_{326} = 967 + 3 = 970$
 $U_{327} = 970 + 3 = 973$
 $U_{328} = 973 + 3 = 976$
 $U_{329} = 976 + 3 = 979$
 $U_{330} = 979 + 3 = 982$
 $U_{331} = 982 + 3 = 985$
 $U_{332} = 985 + 3 = 988$
 $U_{333} = 988 + 3 = 991$
 $U_{334} = 991 + 3 = 994$
 $U_{335} = 994 + 3 = 997$
 $U_{336} = 997 + 3 = 1000$
 $U_{337} = 1000 + 3 = 1003$
 $U_{338} = 1003 + 3 = 1006$
 $U_{339} = 1006 + 3 = 1009$
 $U_{340} = 1009 + 3 = 1012$
 $U_{341} = 1012 + 3 = 1015$
 $U_{342} = 1015 + 3 = 1018$
 $U_{343} = 1018 + 3 = 1021$
 $U_{344} = 1021 + 3 = 1024$
 $U_{345} = 1024 + 3 = 1027$
 $U_{346} = 1027 + 3 = 1030$
 $U_{347} = 1030 + 3 = 1033$
 $U_{348} = 1033 + 3 = 1036$
 $U_{349} = 1036 + 3 = 1039$
 $U_{350} = 1039 + 3 = 1042$
 $U_{351} = 1042 + 3 = 1045$
 $U_{352} = 1045 + 3 = 1048$
 $U_{353} = 1048 + 3 = 1051$
 $U_{354} = 1051 + 3 = 1054$
 $U_{355} = 1054 + 3 = 1057$
 $U_{356} = 1057 + 3 = 1060$
 $U_{357} = 1060 + 3 = 1063$
 $U_{358} = 1063 + 3 = 1066$
 $U_{359} = 1066 + 3 = 1069$
 $U_{360} = 1069 + 3 = 1072$
 $U_{361} = 1072 + 3 = 1075$
 $U_{362} = 1075 + 3 = 1078$
 $U_{363} = 1078 + 3 = 1081$
 $U_{364} = 1081 + 3 = 1084$
 $U_{365} = 1084 + 3 = 1087$
 $U_{366} = 1087 + 3 = 1090$
 $U_{367} = 1090 + 3 = 1093$
 $U_{368} = 1093 + 3 = 1096$
 $U_{369} = 1096 + 3 = 1099$
 $U_{370} = 1099 + 3 = 1102$
 $U_{371} = 1102 + 3 = 1105$
 $U_{372} = 1105 + 3 = 1108$
 $U_{373} = 1108 + 3 = 1111$
 $U_{374} = 1111 + 3 = 1114$
 $U_{375} = 1114 + 3 = 1117$
 $U_{376} = 1117 + 3 = 1120$
 $U_{377} = 1120 + 3 = 1123$
 $U_{378} = 1123 + 3 = 1126$
 $U_{379} = 1126 + 3 = 1129$
 $U_{380} = 1129 + 3 = 1132$
 $U_{381} = 1132 + 3 = 1135$
 $U_{382} = 1135 + 3 = 1138$
 $U_{383} = 1138 + 3 = 1141$
 $U_{384} = 1141 + 3 = 1144$
 $U_{385} = 1144 + 3 = 1147$
 $U_{386} = 1147 + 3 = 1150$
 $U_{387} = 1150 + 3 = 1153$
 $U_{388} = 1153 + 3 = 1156$
 $U_{389} = 1156 + 3 = 1159$
 $U_{390} = 1159 + 3 = 1162$
 $U_{391} = 1162 + 3 = 1165$
 $U_{392} = 1165 + 3 = 1168$
 $U_{393} = 1168 + 3 = 1171$
 $U_{394} = 1171 + 3 = 1174$
 $U_{395} = 1174 + 3 = 1177$
 $U_{396} = 1177 + 3 = 1180$
 $U_{397} = 1180 + 3 = 1183$
 $U_{398} = 1183 + 3 = 1186$
 $U_{399} = 1186 + 3 = 1189$
 $U_{400} = 1189 + 3 = 1192$
 $U_{401} = 1192 + 3 = 1195$
 $U_{402} = 1195 + 3 = 1198$
 $U_{403} = 1198 + 3 = 1201$
 $U_{404} = 1201 + 3 = 1204$
 $U_{405} = 1204 + 3 = 1207$
 $U_{406} = 1207 + 3 = 1210$
 $U_{407} = 1210 + 3 = 1213$
 $U_{408} = 1213 + 3 = 1216$
 $U_{409} = 1216 + 3 = 1219$
 $U_{410} = 1219 + 3 = 1222$
 $U_{411} = 1222 + 3 = 1225$
 $U_{412} = 1225 + 3 = 1228$
 $U_{413} = 1228 + 3 = 1231$
 $U_{414} = 1231 + 3 = 1234$
 $U_{415} = 1234 + 3 = 1237$
 $U_{416} = 1237 + 3 = 1240$
 $U_{417} = 1240 + 3 = 1243$
 $U_{418} = 1243 + 3 = 1246$
 $U_{419} = 1246 + 3 = 1249$
 $U_{420} = 1249 + 3 = 1252$
 $U_{421} = 1252 + 3 = 1255$
 $U_{422} = 1255 + 3 = 1258$
 $U_{423} = 1258 + 3 = 1261$
 $U_{424} = 1261 + 3 = 1264$
 $U_{425} = 1264 + 3 = 1267$
 $U_{426} = 1267 + 3 = 1270$
 $U_{427} = 1270 + 3 = 1273$
 $U_{428} = 1273 + 3 = 1276$
 $U_{429} = 1276 + 3 = 1279$
 $U_{430} = 1279 + 3 = 1282$
 $U_{431} = 1282 + 3 = 1285$
 $U_{432} = 1285 + 3 = 1288$
 $U_{433} = 1288 + 3 = 1291$
 $U_{434} = 1291 + 3 = 1294$
 $U_{435} = 1294 + 3 = 1297$
 $U_{436} = 1297 + 3 = 1300$
 $U_{437} = 1300 + 3 = 1303$
 $U_{438} = 1303 + 3 = 1306$
 $U_{439} = 1306 + 3 = 1309$
 $U_{440} = 1309 + 3 = 1312$
 $U_{441} = 1312 + 3 = 1315$
 $U_{442} = 1315 + 3 = 1318$
 $U_{443} = 1318 + 3 = 1321$
 $U_{444} = 1321 + 3 = 1324$
 $U_{445} = 1324 + 3 = 1327$
 $U_{446} = 1327 + 3 = 1330$
 $U_{447} = 1330 + 3 = 1333$
 $U_{448} = 1333 + 3 = 1336$
 $U_{449} = 1336 + 3 = 1339$
 $U_{450} = 1339 + 3 = 1342$
 $U_{451} = 1342 + 3 = 1345$
 $U_{452} = 1345 + 3 = 1348$
 $U_{453} = 1348 + 3 = 1351$
 $U_{454} = 1351 + 3 = 1354$
 $U_{455} = 1354 + 3 = 1357$
 $U_{456} = 1357 + 3 = 1360$
 $U_{457} = 1360 + 3 = 1363$
 $U_{458} = 1363 + 3 = 1366$
 $U_{459} = 1366 + 3 = 1369$
 $U_{460} = 1369 + 3 = 1372$
 $U_{461} = 1372 + 3 = 1375$
 $U_{462} = 1375 + 3$

Numa sequência de números, com mais de 200 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se subtraindo quatro ao termo anterior.
O sétimo termo da sequência é 34.
Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 18 (B) 2 (C) -98 (D) 77

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$u_7 = 34$ $r = -4$ é uma progressão aritmética de razão -4

$u_n = u_k + (k-n) \times r = 4$ $-u_3 = u_7 + (7-3) \times (-4)$

$u_n = u_7 + (7-n) \times (-4)$ $-u_3 = 34 - 3 \times 4$

$u_n = 34 - 28 + 4n$ $-u_3 = 6$

$u_n = 6 + 4n$ Termo geral

Eu achei o termo geral e depois igualei a cada um dos números acima para ver se eram termos da sequência. Se não fosse um número natural, a opção D não usei o primeiro termo para medir, apenas calculei. Foi a opção D que mostrou que $n \in \mathbb{N}$? Está confuso

$18 = 6 + 4n$

$12 = 4n$

$n = 3$

$2 = 6 + 4n$

$-2 = 4n$

$n = -26$ também não é um número natural

$17 = 6 + 4n$

$11 = 4n$

$n = \frac{11}{4} = 2,75$ é um número natural? Qual é a definição de n natural? Estás no bom caminho!

Porque é que das 3 opções escolheste a última? Qual é o conjunto dos números naturais? Números negativos podem ser naturais? Por acaso deu-te a opção correta...

Figura 33 - Feedback à resolução do Álvaro do problema na 2.ª fase (Momento 3)

Durante a realização do problema da segunda fase, o aluno apresentou uma produção escrita mais desenvolvida em termos de estrutura e tentativa de justificar os seus procedimentos, mas continuou a evidenciar dificuldades importantes, algumas já sinalizadas anteriormente, apresentando outros erros conceituais. Embora tenha identificado corretamente que se tratava de uma progressão aritmética e determinado a sua razão, a expressão do termo geral continua a apresentar incoerências a nível da notação. Esta falha compromete a clareza e a correção do processo. Na sua resolução, surgiu uma certa confusão relativamente ao conjunto dos números naturais, nomeadamente ao considerar valores como 17,75 ou -26 como números naturais. Além disso, apesar de o aluno enunciar a estratégia de testar os diferentes valores apresentados nas opções, o modo como justifica a escolha da resposta correta é confuso e inconclusivo. Por isso, no *feedback*, perguntei: “Foi a opção D que mostrou

que $n \in \mathbb{N}$? Está confuso.” e “Porque é que das 3 opções escolheste a última?”, procurando promover maior clareza na comunicação do pensamento.

Com o objetivo de compreender de que forma o aluno integrou o *feedback* recebido, foi realizada uma entrevista individual com o Álvaro, correspondente à quinta etapa da intervenção. Os dados recolhidos demonstram que, apesar de alguma consciencialização inicial, o aluno não integrou o *feedback* de forma efetiva. Desde o início da conversa, ficou evidente a ausência de reflexão sobre os comentários recebidos:

Investigadora: O que aconteceu? Não percebeste o que escrevi na primeira fase?

Álvaro: Mais ou menos, professora.... Lembro-me que era parecido, mas ainda não consegui decorar. (Entrevista, Fase 1, Álvaro)

Esta resposta, ainda que aparentemente honesta, revela uma abordagem centrada na memorização, contrariando os princípios do *feedback* formativo e da autorregulação, tal como definidos por Hattie e Timperley (2007). Ao afirmar que "ainda não consegui decorar", o Álvaro demonstra não ter compreendido que o objetivo do *feedback* é apoiar a construção de conhecimento e o desenvolvimento da compreensão concetual, e não a simples reprodução de procedimentos.

Esta ideia foi reforçada na tentativa de clarificar essa distinção: “O *feedback* serve para te ajudar a rever e perceber melhor os teus erros. É importante voltares a olhar para ele antes de fazeres de novo. Além disso, não é suposto decorares, mas sim entenderes!” (Entrevista, Fase 1, Álvaro). O aluno acaba por responder que deveria ter lido outra vez, pois sente que isso o teria ajudado. Além disso, o mesmo afirma “Oh, a professora sabe que para mim é mais fácil decorar.” (Entrevista, Fase 1, Álvaro). A resposta do aluno mostra uma certa consciência da sua omissão, mas também denota passividade face ao processo de aprendizagem. O reconhecimento de que “devia ter lido outra vez” evidencia a ausência de uma atitude proativa na utilização do *feedback* como instrumento de melhoria, mesmo quando este estava disponível.

Outro momento particularmente revelador ocorre quando questiono o Álvaro sobre um conteúdo específico, o conjunto dos números naturais. A este propósito, o aluno partilhou “... na verdade eu sabia que estava a errar ao dizer aquilo, mas vi que a opção

do meu colega era aquela então só copieei e tentei arranjar uma justificação, mesmo sabendo que aquilo que estava a escrever não tinha lógica nenhuma.” (Entrevista, Fase 1, Álvaro). Este comportamento compromete não apenas a avaliação diagnóstica, mas também impede a identificação das suas verdadeiras dificuldades, anulando a função formativa da tarefa.

Em síntese, a entrevista com o Álvaro confirma que o aluno ainda não integrou de forma significativa o *feedback* recebido, mantendo uma abordagem centrada na memorização e na reprodução de respostas. A sua dificuldade em refletir criticamente sobre os erros, aliada à passividade e à ausência de autorregulação, indicia a necessidade de uma intervenção pedagógica mais estruturada e contínua, centrada no desenvolvimento de competências de análise, compreensão e pensamento crítico. Apesar de alguma abertura para reconhecer os seus erros, a evolução do aluno dependerá fortemente de um acompanhamento próximo que valorize a compreensão profunda em detrimento da execução mecânica, e que promova, desde cedo, uma cultura de responsabilidade e valorização do erro como parte integrante do processo de aprendizagem.

5.3.2. Beatriz

Na Figura 34 está presente a resolução do problema da 1.ª fase feito pela Beatriz.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$r = 3$ ✓
 $a_8 = 16$ ✓

2 3 4 5 6 7 8
 $-3 -3 -3 -3 -3$
 $\downarrow$ 2 1 4 7 10 13
 ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

Figura 34 - Resolução da Beatriz do problema na 1.ª fase (Momento 3)

Nesta resolução, a aluna identificou corretamente a razão da progressão aritmética e utilizou o dado fornecido sobre o oitavo termo da sequência, o que demonstra alguma compreensão do enunciado. No entanto, reconhece-se que a sua produção revela várias fragilidades. No que diz respeito à correção, o resultado não está certo e os

procedimentos matemáticos utilizados não estão claramente explicados e justificados. A aluna apresenta operações parciais (como subtrair 3 entre os termos consecutivos), mas não desenvolve uma expressão geral que descreva a sequência, nem demonstra que 416 não é termo da sequência.

A organização da resposta é limitada. Os cálculos aparecem dispostos de forma um pouco desordenada, sem uma linha de pensamento clara. A sequência dos termos é apenas parcialmente apresentada (do segundo ao oitavo), e os cálculos paralelos à margem (como " $7 \times 3 = 21$ ", " $16 - 21 = -5$ ") surgem desconectados da cadeia principal de pensamento. Quanto à linguagem, observa-se um registo predominantemente informal, sem referência aos elementos formais da progressão aritmética (por exemplo, termos gerais, ordem dos termos). Esta linguagem não favorece a clareza esperada neste tipo de tarefa. A justificação é um dos aspetos mais frágeis desta resposta. Esta ausência de argumentação impede a verificação do pensamento seguido. Por fim, na dimensão da resposta, a aluna seleciona a opção correta.

Em síntese, esta resolução mostra que a aluna é capaz de identificar e aplicar alguns elementos fundamentais do problema, mas carece de estrutura, precisão e justificação.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$r = 3$ ✓
 $a_8 = 16$ ✓

2 3 4 5 6 7 8
 $-3 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \quad -3$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $16 \times 3 = 48$

o que isto te diz?

Porque dizes que 208 não é termo da sequência?
 Trata-se de uma progressão? Qual? Qual é o termo geral?
 Rele as progressões!

Estás no bom caminho! Tu consegues!

Figura 35 - Feedback à resolução da Beatriz do problema na 1.ª fase (Momento 3)

No momento de fornecer *feedback* à resolução apresentada pela aluna (Figura 35), e tendo em conta que além de ter selecionado a opção errada os argumentos fornecidos para justificar essa escolha são insuficientes e mal estruturados, optei por utilizar perguntas como “Por que dizes que 208 não é termo da sequência?” e “Trata-se de uma progressão? Qual? Qual é o termo geral?” para orientar a aluna no sentido de rever as propriedades da progressão aritmética e reconstruir um pensamento mais sólido. Esta forma de *feedback* procura, segundo a perspetiva de Hattie e Timperley (2007), não apenas apontar o erro, mas guiar o aluno na construção de uma resposta mais coerente.

Ao longo da resolução, a aluna apresenta tentativas de verificar os termos da sequência a partir de subtrações sucessivas de 3, o que pode indiciar uma estratégia intuitiva. No entanto, essa estratégia não é acompanhada de uma formalização adequada nem da utilização da expressão do termo geral da progressão aritmética, o que compromete a justificação. Neste sentido, interroguei: “O que isso te diz?” após a expressão “ $16 + 3 \times \dots = 48$ ”, desafiando o aluno a refletir sobre o significado dessa igualdade.

A nível da linguagem e organização, embora a aluna apresente uma estrutura de resposta legível, faltam elementos fundamentais como a definição do termo geral, a verificação explícita das opções do enunciado e uma conclusão final clara. Para incentivar a reformulação e precisão do discurso matemático, inseri sugestões como “Revê as progressões!”. Destaquei ainda em tom positivo e motivador: “Estás no bom caminho! Tu consegues!”, reconhecendo o esforço da aluna e incentivando a sua persistência.

Em síntese, a resolução apresenta algumas ideias corretas, mas carece de desenvolvimento, justificação e precisão. O *feedback* interrogativo aplicado procurou encorajar a aluna a retomar os seus próprios pensamentos, clarificá-los e estruturá-los com maior rigor, promovendo, assim, a aprendizagem ativa e a autorregulação.

Numa sequência de números, com mais de 200 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se subtraindo quatro ao termo anterior.

O sétimo termo da sequência é 34.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 18 (B) 2 (C) -98 (D) 77

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$u_k = u_n + (k - n) \times r$

(A) $18 = 34 + (k - 7) \times (-4)$
 $(=) 18 = 34 - 4k + 28$
 $(=) 4k = 34 + 28 - 18$
 $(=) k = \frac{44}{4}$
 $(=) k = 11$ ✓

(B) $2 = 34 + (k - 7) \times (-4)$
 $(=) 2 = 34 - 4k + 28$
 $(=) 4k = 34 + 28 - 2$
 $(=) 4k = 60$
 $(=) k = \frac{60}{4}$
 $(=) k = 15$ ✓

(C) $-98 = 34 + (k - 7) \times (-4)$
 $(=) -98 = 34 - 4k + 28$
 $(=) 4k = 34 + 28 - 98$
 $(=) k = \frac{160}{4}$
 $(=) k = 40$ ✓

(D) $77 = 34 + (k - 7) \times (-4)$
 $(=) 4k = 34 + 28 - 77$
 $(=) 4k = -15$
 $(=) k = \frac{-15}{4}$ ✓

R: Por ser uma progressão aritmética em ordem a $n \in \mathbb{N}$ o termo da sequência não poderá tomar valores negativos ou decimais. Ao calcular o k chegamos à conclusão que é impossível $k = \frac{-15}{4}$ logo 77 não pertence.
não é termo da progressão

Bom trabalho!
Parabéns 😊

Figura 36 - Feedback à resolução da Beatriz do problema na 2.ª fase (Momento 3)

Na realização do problema da segunda fase (Figura 36), a aluna demonstrou uma evolução significativa em relação à produção anterior, não apenas na clareza dos procedimentos matemáticos como também na estrutura comunicativa da resposta. A resolução apresentada revela uma melhor compreensão do conceito de progressão aritmética e das suas propriedades, nomeadamente no uso da expressão do termo geral da sequência e na aplicação correta da razão, que foi devidamente identificada. Ao contrário da produção anterior, onde se registavam omissões e justificações vagas ou inexistentes, nesta segunda fase a aluna foi capaz de apresentar de forma detalhada os cálculos realizados para cada uma das opções do enunciado. O facto de reconhecer que $k \in \mathbb{N}$, constitui um avanço importante a nível da compreensão do significado da ordem de um termo.

Além da correção matemática, a aluna evidenciou também melhorias notórias nas dimensões de organização e linguagem. A resolução segue uma ordem clara e sequencial, facilitando a compreensão por parte do leitor. A linguagem utilizada é adequada ao contexto matemático e as justificações são formuladas com maior rigor e precisão, culminando numa conclusão correta e bem fundamentada: “Logo, 77 não pertence à sequência”.

O *feedback* dado à aluna foi desta vez totalmente positivo, com observações como “Bom trabalho! Parabéns😊”, precisamente para reconhecer o progresso e reforçar a confiança nas suas capacidades. Em suma, a aluna revelou não só progressos em termos da aprendizagem dos conteúdos abordados, mas também um maior empenho na construção de uma resposta mais completa e rigorosa. A apropriação do *feedback* anterior foi evidente, demonstrando que este foi lido, compreendido e integrado na nova tentativa de resolução, o que confirma o papel central que o *feedback* pode assumir na promoção da aprendizagem e da autorregulação.

Na entrevista, os dados recolhidos permitiram concluir que a Beatriz integrou o *feedback* de forma consciente, profunda e produtiva, evidenciando não apenas uma leitura atenta dos comentários, mas também uma reflexão crítica sobre os seus próprios erros e uma transformação positiva da sua abordagem à resolução do problema. Logo no início da entrevista, ficou claro que a aluna reconheceu o impacto do *feedback* na sua melhoria: “Li tudo com atenção. Eu percebi que na primeira vez não expliquei quase nada do que estava a fazer... E acabei por me enganar porque não pensei bem na condição dos termos da sequência” (Entrevista, Fase 1, Beatriz). A resposta demonstra autoconsciência e capacidade de autorregulação. A Beatriz não só leu o *feedback*, como refletiu sobre o conteúdo matemático e identificou a origem do seu erro, reconhecendo a importância de considerar devidamente a condição dos termos da sequência.

A evolução na sua abordagem à tarefa é visível na resposta seguinte, quando questionada sobre o que mudou: “Desta vez tentei escrever todos os passos com calma. Percebi que tinha de usar a fórmula da progressão e que o número da opção só podia ser termo da sequência se o resultado desse um número natural... Porque senão não faz sentido.” (Entrevista, Fase 1, Beatriz). Esta resposta revela uma mudança significativa na forma como a aluna encara a resolução dos problemas: com maior cuidado, organização e intenção comunicativa. Além disso, demonstra compreensão sólida dos conceitos matemáticos envolvidos. É importante sublinhar que a Beatriz melhorou substancialmente a sua capacidade de justificar e comunicar o pensamento seguido. O facto de ter assumido as suas falhas e adotado uma nova estratégia

evidencia que o *feedback* foi verdadeiramente assimilado como instrumento de aprendizagem, e não apenas como apontamento corretivo.

Em síntese, a entrevista com a Beatriz evidencia uma integração exemplar do *feedback*, sustentada pela identificação dos erros cometidos, reflexão crítica, reestruturação da estratégia e aplicação correta dos conceitos matemáticos. Este caso confirma o potencial transformador do *feedback* quando este é devidamente explorado e valorizado, bem como a importância de fomentar uma cultura de autorregulação, responsabilidade e valorização da aprendizagem como processo contínuo e ativo.

5.3.3. Salvador

Na Figura 37 está presente a resolução do problema da 1.^a fase feito pelo Salvador.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$U_1 = ?$ $U_n = \begin{cases} U_1 = ? \\ U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$ $U_n = U_1 + (n-1) \times 3$
 $U_8 = 16 \checkmark$ $U_1 = U_8 + (1-8) \times 3$
 $U_1 = 16 + (-7 \times 3)$
 $= -5$

Qualquer termo da sequência vai ser múltiplo de 3 e subtraído 5, ou então, se somarmos 5 a cada termo esse número vai ser múltiplo de 3.

A) $7+5 = 12$; $\frac{12}{3} = 4 \Rightarrow$ múltiplo de 3
 B) $208+5 = \frac{213}{3}$; $\frac{213}{3} = 71 \Rightarrow$ múltiplo de 3
 C) $416+5 = 421$; $\frac{421}{3} = 140,3... \Rightarrow$ NÃO É MÚLTIPLO
 OPCÃO C
 D) $1057+5 = 1062$; $\frac{1062}{3} = 354 \Rightarrow$ múltiplo de 3

Figura 37 - Resolução do Salvador do problema na 1.^a fase (Momento 3)

Nesta primeira produção, o Salvador identifica corretamente que se trata de uma progressão aritmética de razão 3 e recorrendo ao oitavo termo (16), determina o primeiro termo da sequência. Através da relação entre um termo qualquer e o primeiro termo de

uma progressão aritmética ($u_k = u_1 + (k - 1) \times r$), consegue verificar qual dos valores não é termo da sequência dada.

Do ponto de vista da organização, a resposta é bem estruturada e a sequência de verificações é clara. O Salvador testa todas as opções de forma sistemática e a resposta final está bem destacada. A linguagem matemática, embora simples, é adequada ao nível de ensino. No entanto, ao nível da justificação, o Salvador poderia fundamentar melhor a sua estratégia, indicando o significado dos valores 4, 71 e 354.

Numa sequência de números, com mais de 400 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se adicionando três ao termo anterior.

O oitavo termo da sequência é 16.

Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 7 (B) 208 (C) 416 (D) 1057

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Trata-se de uma progressão? Qual?

$u_8 = 16$ ✓

$u_n = u_1 + (n-1) \times 3$

$u_8 = u_1 + (8-1) \times 3$

$16 = u_1 + 7 \times 3$

$u_1 = 16 - 21 = -5$

de onde veio? o que representa?

Como é que usando esta expressão consegues verificar se alguma das opções é ou não termo da sequência?

Qualquer termo da sequência vai ser múltiplo de 3 se substituído 5, ou enfão, se somarmos 5 a cada termo este número vai ser múltiplo de 3.

A) $7+5 = 12$; $\frac{12}{3} = 4 \Rightarrow$ múltiplo de 3

B) $208+5 = \frac{213}{3}$; $\frac{213}{3} = 71 \Rightarrow$ múltiplo de 3

C) $416+5 = 421$; $\frac{421}{3} = 140,33 \Rightarrow$ NÃO É MÚLTIPLO

OPÇÃO C

D) $1057+5 = 1062$; $\frac{1062}{3} = 354 \Rightarrow$ múltiplo de 3

A tua resposta está certa, mas será que os teus argumentos também estão corretos? Como podias demonstrá-lo de forma mais rigorosa?

O teu raciocínio é válido, mas será que os valores que te deram são os certos? $u_4 = 7$? $u_{71} = 208$? verifica! Pensa o que significa! Estás no bom caminho!

Figura 38 - Feedback à resolução do Salvador do problema na 1.ª fase (Momento 3)

Reconhecendo agora que no momento de fornecer *feedback* à primeira produção escrita do Salvador (Figura 38), não tinha compreendido a estratégia utilizada pelo aluno, considerando que o mesmo tinha partido de uma expressão errada para representar o termo geral da sequência ($u_n = 3n - 5$, em vez de $u_n = 3n - 8$), o *feedback* atribuído não foi adequado. Ao considerar que tinha partido de um termo geral incorreto, considerei importante questioná-lo e levá-lo a refletir sobre a origem da expressão usada

– “De onde veio? O que representa?”, “Como é que, usando esta expressão, consegues verificar se alguma daquelas opções é ou não termo da sequência?”, com o intuito de o incentivar a articular melhor os seus pensamentos e a alinhar os procedimentos com o enunciado.

Numa sequência de números, com mais de 200 termos, cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se subtraindo quatro ao termo anterior.
O sétimo termo da sequência é 34.
Qual dos números seguintes não é termo da sequência?

(A) 18 (B) 2 (C) -98 (D) 77

Explica como chegaste à tua resposta. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

$U_n = x$
 $U_{n+1} = U_n - 4$
 A razão da sequência aritmética é -4.

$U_7 = 34$
 $U_n = U_7 + (n-7) \times (-4)$
 $U_1 = U_7 + (-6) \times (-4)$
 $U_1 = 34 + 24$
 $= 58$

É uma progressão aritmética em que cada termo é subtraído 4 do anterior.

Se a cada termo da sequência subtrairmos o primeiro termo (58) e depois dividirmos pela razão (-4), se obtivermos um número natural então este termo é da sequência, caso contrário, não é:

A) $18 - 58 = -40$; $\frac{-40}{-4} = 10$
 B) $2 - 58 = -56$; $\frac{-56}{-4} = 14$
 C) $-98 - 58 = -156$; $\frac{-156}{-4} = 39$
 D) $77 - 58 = 19$; $\frac{19}{-4} = -4,75$

Estes valores são os ordens...
 -7. nos quais os valores 18, 2, -98 são termos da sequência.

tens a certeza?
 $U_n = U_7 + (n-7) \times (-4)$
 $\hookrightarrow U_n = 34 - 4n + 28$
 $\hookrightarrow U_n = 62 - 4n$... que mudanças é que origina em relação ao teu pensamento?

A(D) 77 não é termo da sequência porque não há um valor $n \in \mathbb{N}$ cujo resultado seja $58 - 4n = n$, $n \in \mathbb{N}$
 Tu consegues! Força!

Figura 39 - Feedback à resolução do Salvador do problema na 2.ª fase (Momento 3)

Na segunda fase (Figura 39), o Salvador optou por recorrer à mesma estratégia da 1.ª fase – identifica corretamente que se trata de uma progressão aritmética de razão -4 e recorre ao sétimo termo (34) para determinar o primeiro termo da sequência. Do mesmo modo, utiliza a relação entre um termo qualquer e o primeiro termo de uma progressão aritmética ($u_k = u_1 + (k - 1) \times r$) para verificar qual dos valores não é termo da sequência dada. Ao nível da correção, destaca-se o facto de o aluno considerar os valores 10, 14 e 39 como ordens dos termos da sequência, o que não é verdade.

Do ponto de vista da organização, a resposta apresenta uma estrutura coerente e a sequência das verificações é fácil de seguir. O Salvador procede à análise de todas as opções de forma metódica, e a sua conclusão está claramente evidenciada. A linguagem matemática utilizada, embora simples, revela-se apropriada para o nível de escolaridade em causa. Ainda assim, no que respeita à justificação, seria desejável um maior aprofundamento da estratégia adotada, nomeadamente através da explicação do significado dos valores 10, 14, 71 e 39 no contexto da resolução.

Face a esta análise, é evidente que o *feedback* atribuído na 1.^a fase não foi adequado, até porque, como já foi referido, teve por base uma interpretação incorreta da estratégia utilizada pelo aluno. Como tal, esta situação não possibilitou ao aluno o aperfeiçoamento da sua estratégia, uma vez que não favoreceu a compreensão da mesma, nomeadamente ao nível do significado dos valores 10, 14 e 39, que embora não correspondam às ordens dos termos da sequência, possuem uma relação. A vontade de entregar tudo a tempo e horas fez-me debruçar pouco tempo sobre a produção. Tive um método de correção desadequado.

Foi realizada uma entrevista individual no âmbito da quinta etapa da intervenção pedagógica, de modo a explorar como o Salvador interpretou o *feedback*. Logo no início da conversa, quando questionado sobre o *feedback*, o Salvador afirmou: “Li o que estava escrito... percebi que a fórmula estava errada, mas na minha cabeça o que eu fiz fazia sentido, então voltei a fazer parecido, até porque já não me lembrava de como se fazia pela fórmula” (Entrevista, Fase 1, Salvador).

Ao aprofundar-se o pensamento do aluno, este explicou a sua lógica: “Pensei que se subtrair o primeiro termo e dividir pela razão desse um número certo, era porque o número fazia parte da sequência” (Entrevista, Fase 1, Salvador).

O momento mais crítico da entrevista surge quando é discutida a expressão “ $58 - 4n = n$ ”. Tentei, então, clarificar o significado daquilo que foi escrito:

Investigadora: E quando escreveste $58 - 4n = n$, o que estavas a tentar fazer?

Salvador: Nem sei... baralhei-me com os números. (Entrevista, Fase 1, Salvador)

A resposta demonstra insegurança e ausência de domínio sobre o processo algébrico. O aluno não foi capaz de explicar o que pretendia com a expressão, o que sugere não só uma falta de compreensão, mas também uma ausência de verificação ou validação dos seus próprios procedimentos. Esta confusão indica que ainda não dispõe das ferramentas conceituais nem da confiança necessárias para lidar com generalizações algébricas de forma autónoma.

Além disso, a entrevista revela que Salvador não realizou a verificação com base num termo conhecido, como tinha sido sugerido no *feedback* anterior. Questionado sobre a validade de $u_4 = 7$, respondeu:

Investigadora: Verificaste também na 1.^a fase se $u_4 = 7$? O que concluíste?

Salvador: Não era igual ao que me deu... (Entrevista, Fase 1, Salvador)

Apesar de identificar a discrepância, o aluno não retira daí uma conclusão nem ajusta a estratégia. Esta falta de ação perante o erro demonstra uma leitura pouco ativa e nada reflexiva do *feedback*, que foi lido, mas não verdadeiramente consolidado.

No final, reforço a importância de usar o *feedback* como ferramenta de melhoria, incentivando o aluno a reler e a responder aos comentários. Além disso, durante a entrevista apercebi-me do meu erro e reconheci que o método do aluno estava correto, embora afirme que o aluno tenha de verificar a ordem dos termos e pensar no que o mesmo significa. Este encerramento reforça a necessidade de desenvolver uma cultura de autorregulação e pensamento crítico.

Em síntese, de modo a visualizar mais facilmente a evolução dos alunos a nível da comunicação matemática escrita ao longo desta intervenção, apresento a Tabela 3.

Importa salientar que, em muitos casos, apesar de a evolução ser classificada como constante, como sucede na dimensão ‘resposta’, por exemplo, tal deve-se ao facto de esta já se encontrar totalmente correta logo na 1.^a fase. Assim, a manutenção dessa correção ao longo das duas fases justifica a ausência de variação, refletindo uma estabilidade positiva no desempenho.

		Dimensões de análise	Alunos		
			Álvaro	Beatriz	Salvador
Momentos	1.º	Correção	Constante	Piorou	Melhorou
		Organização	Constante	Piorou	Melhorou
		Linguagem	Piorou	Piorou	Melhorou
		Justificação	Constante	Piorou	Melhorou
		Resposta	Constante	Piorou	Melhorou
	2.º	Correção	Constante	---	Melhorou
		Organização	Constante		Piorou
		Linguagem	Piorou		Melhorou
		Justificação	Piorou		Melhorou
		Resposta	Piorou		Constante
	3.º	Correção	Constante	Melhorou	Constante
		Organização	Constante	Melhorou	Constante
		Linguagem	Melhorou	Melhorou	Constante
		Justificação	Melhorou	Melhorou	Constante
		Resposta	Constante	Constante	Constante

Tabela 3 - Evolução da capacidade de comunicação escrita dos alunos ao longo da intervenção

5.4. Importância do *Feedback* escrito: percepções dos alunos

De modo a entender melhor a percepção de cada aluno acerca do *feedback* atribuído pelo professor, no último dia de aulas, fiz uma breve entrevista com cada um (Anexo 6). A este propósito, procurei compreender qual a visão que estes alunos tinham de *feedback*:

Oh professora... sinceramente? Não gostei muito dessa parte. Prefiro quando explicam logo como se faz. Sei que o *feedback* tinha perguntas para eu

pensar, mas eu ficava mais confuso... às vezes nem sabia por onde começar.
(Entrevista, Fase 2, Álvaro)

É uma forma de vermos os nossos erros, mas sem ser com a professora a dar logo a solução. São dicas, perguntas, que nos ajudam a pensar melhor. Gostei disto, fez-me sentir mais responsável. (Entrevista, Fase 2, Beatriz)

É quando recebemos comentários sobre a nossa resolução, para perceber onde errámos ou o que podemos melhorar. Achei interessante porque em vez de me dizer logo a resposta, a professora fez-me pensar com as perguntas.
(Entrevista, Fase 2, Salvador)

O Álvaro revela uma perceção negativa do *feedback* na forma em que lhe foi apresentado. Entende que o mesmo consiste em perguntas, mas mostra-se desconfortável com esse tipo de orientação. Prefere uma explicação direta e objetiva, o que indica resistência ao pensamento autónomo e à reflexão. A sua resposta mostra que, para ele, o *feedback* foi uma fonte de confusão, sugerindo que não se sentiu preparado para lidar com perguntas abertas. A dificuldade em "saber por onde começar" indica falta de estratégias para lidar com o desafio de interpretar e agir sobre o *feedback*. O Álvaro revela uma perceção negativa do *feedback*, o que vai ao encontro do que referem Santos e Dias (2006), ao destacarem que o impacto do *feedback* depende da forma como é recebido e interpretado pelos alunos. Neste caso, a preferência por instruções diretas e a dificuldade em lidar com perguntas abertas sugerem um perfil de aprendizagem mais dependente, pouco preparado para a autorregulação (Hattie & Timperley, 2007). A confusão referida pelo Álvaro poderá estar relacionada com a ausência de experiências prévias com *feedback* de natureza processual ou autorreguladora, conforme definido por estes autores.

Por sua vez, a Beatriz demonstra uma compreensão clara do propósito do *feedback*. Reconhece que não se trata de fornecer soluções, mas de um conjunto de pistas que a ajudam a repensar o seu trabalho. A aluna valoriza esta abordagem, associando-a ao desenvolvimento da sua responsabilidade. A mesma mostra abertura à autorregulação e interpreta o *feedback* como uma ferramenta positiva que a leva a tomar consciência dos seus erros e a assumir um papel mais ativo no seu processo de aprendizagem. A

Beatriz demonstra uma compreensão clara do propósito do *feedback*, aproximando-se da definição de *feedback* eficaz segundo Carvalho et al. (2014), que envolve clareza, orientação e respeito pelo percurso do aluno. A aluna reconhece o papel do *feedback* como instrumento de autorregulação (Hattie & Timperley, 2007), assumindo uma postura ativa e reflexiva que evidencia maturidade metacognitiva.

Por fim, o Salvador apresenta uma visão estruturada do *feedback*. O aluno identifica-o como um conjunto de comentários que o ajudam a identificar erros e áreas de melhoria. Além disso, valoriza especialmente o facto de não receber diretamente a solução, mas sim de ser levado a refletir. O Salvador considera este processo “interessante”, o que revela uma atitude positiva e uma boa adaptação à abordagem adotada. A sua resposta mostra que compreende o objetivo pedagógico do *feedback* baseado em perguntas e reconhece o seu impacto no desenvolvimento do pensamento. A visão do Salvador parece alinhar-se com o modelo de *feedback* processual e autorregulador proposto por Hattie e Timperley (2007), valorizando o papel das perguntas enquanto estímulo ao pensamento crítico, como também salientado por Santos (2017). A sua resposta traduz uma boa apropriação da função formativa do *feedback*, com destaque para o seu impacto no desenvolvimento da autonomia.

Em relação às implicações que o *feedback* possa ter ao nível da melhoria da comunicação matemática escrita, os alunos partilharam:

Talvez um bocadinho. Tentei escrever mais..., mas não é natural para mim. Estou habituado a copiar resoluções e tentar decorar. Eu sei que não é o melhor..., mas é o que me faz sentir mais seguro. (Entrevista, Fase 2, Álvaro)

Sim, sem dúvida. Na primeira tarefa eu nem justificava nada. Depois, comecei a explicar melhor, a usar os termos certos e a organizar mais a resposta. O *feedback* ajudou-me a perceber que a matemática não é só contas, também se explica. (Entrevista, Fase 2, Beatriz)

Sim. Comecei a escrever mais sobre o que estou a fazer, e porque estou a fazer. Percebi que isso ajuda não só a quem lê, mas até a mim próprio.
(Entrevista, Fase 2, Salvador)

O Álvaro admite ter feito um esforço para melhorar a sua comunicação escrita, mas demonstra uma relação ainda frágil e desconfortável com a escrita em matemática. A escrita não lhe é “natural” e recorre a estratégias passivas, como copiar e decorar, por serem mais seguras. A sua resposta revela um modelo de aprendizagem muito centrado na repetição e pouco na confiança em processos mais reflexivos ou construtivos. Há uma consciência crítica (“sei que não é o melhor”), mas ainda não se sente capaz de abandonar por completo os hábitos antigos.

A Beatriz diz notar uma evolução clara e consciente na sua forma de comunicar por escrito. A aluna refere mudanças concretas no seu desempenho, tal como passar da ausência de justificação para uma resposta mais estruturada, com vocabulário matemático adequado. A mesma atribui essa melhoria diretamente ao papel do *feedback*, o que revela consciência metacognitiva sobre o processo de aprendizagem. A Beatriz valoriza a dimensão da justificação da matemática, reconhecendo que o discurso escrito também faz parte do saber. A evolução descrita pela Beatriz reforça os dados de estudos como os de Santos e Semana (2015), que identificaram uma melhoria na clareza e justificação das respostas escritas após a implementação de *feedback* formativo. Tal como sugerido por Faria e Rodrigues (2020), a consciência metacognitiva revelada pela aluna indica progresso nas dimensões de clareza e argumentação da escrita matemática.

O Salvador mostra uma compreensão bastante sofisticada da função da comunicação escrita. O aluno refere não só o aumento da quantidade, mas também da qualidade do que escreve, ao passar a justificar as suas decisões matemáticas, além disso, reconhece que esta prática beneficia tanto o leitor como o próprio autor, o que evidencia uma visão reflexiva da aprendizagem matemática. A resposta do aluno traduz uma boa assimilação do propósito pedagógico da escrita, ou seja, tornar o pensamento visível, compreensível e partilhável. A resposta do Salvador evidencia o tipo de apropriação da escrita que autores como Sá e Zenhas (2004) e Costa e Pires (2016) consideram desejável: escrever para clarificar o pensamento e justificar decisões. A articulação entre o pensamento e a expressão escrita, referida pelo aluno, reflete o papel da escrita como ferramenta cognitiva e não apenas como produto final.

No sentido de aprofundar a experiência vivenciada por cada um destes alunos, questionei se mudariam algo, no caso de voltarem a passar por uma experiência deste género. Neste âmbito, referiram:

Sim, acho que tentaria ser mais mente aberta. (Entrevista, Fase 2, Álvaro)

Talvez ter mais tempo para resolver cada desafio. (Entrevista, Fase 2, Beatriz)

Talvez... mais tempo em sala de aula para revermos os *feedbacks* com a professora. Sei que falamos no fim de cada tema, mas talvez se tivéssemos falado entre a primeira e a segunda fase de cada tarefa eu tivesse tido melhores resultados porque teria um apoio extra e não seria só eu a refletir sobre o *feedback*...se bem que não era esse o objetivo. Além disso, a professora tem a turma toda...se fosse dar um apoio tão individual a cada um nunca mais sairíamos daqui (risos). (Entrevista, Fase 2, Salvador)

O Álvaro é o único aluno que, quando confrontado com a possibilidade de repetir a experiência, não propõe qualquer alteração ao processo ou às tarefas, mas sim a si próprio. Esta resposta é particularmente significativa, pois revela consciência das suas resistências durante a intervenção e reconhece que a sua postura poderá ter condicionado os resultados. A vontade de ser “mais mente aberta” indica uma autocritica construtiva e algum amadurecimento, mostrando que, apesar das dificuldades sentidas, foi capaz de refletir sobre a sua atitude e identificar nela um possível obstáculo à aprendizagem.

A Beatriz sugere como melhoria a atribuição de mais tempo para resolver os desafios. No entanto, tendo em conta o tipo das tarefas propostas, e o facto de cada fase ter sido realizada com 20 minutos disponíveis, esta sugestão parece refletir uma perceção de dificuldade mais associada à gestão do tempo do que à exigência real da tarefa. A experiência revelou que, apesar das limitações, os alunos conseguiram realizar os problemas dentro do tempo estipulado, o que aponta para a importância de desenvolver estratégias de planeamento e autonomia na gestão do tempo, em vez de prolongar os momentos de resolução.

A resposta de Salvador é bastante reveladora. O aluno propõe que teria sido útil um momento intermédio de acompanhamento mais próximo com a professora, entre a entrega do *feedback* relativo ao problema da 1.^a fase e a nova tentativa de resolução (problema da 2.^a fase). O Salvador reconhece, no entanto, que esse não era o propósito da experiência, o que demonstra que entendeu bem o objetivo do trabalho autónomo e da autorregulação. A sua sugestão parece refletir mais uma necessidade de segurança do que uma crítica ao processo em si. A referência ao “apoio extra” mostra que sentiu alguma dificuldade no processo de reflexão, embora mantenha um tom compreensivo e realista, reconhecendo as limitações da gestão de uma turma inteira. A sua resposta mostra um bom equilíbrio entre o que desejaria e o que compreende como possível. A sugestão do Salvador de incorporar um momento intermédio de diálogo sobre o *feedback* vai ao encontro da perspetiva de Fernandes (2011), que defende que a avaliação formativa deve assumir um carácter contínuo e interativo. A sua proposta evidencia uma compreensão da importância da mediação entre o docente para interpretar orientações, especialmente quando estas assumem um registo interrogativo (Santos, 2017).

Ainda acerca da importância do processo vivenciado, questionei se o mesmo teria valido a pena, pelo que apontaram:

Talvez. Mas para mim é difícil mudar de método assim de repente. Eu sei que preciso de compreender e não decorar, como a professora diz, mas ainda não me habituei. (Entrevista, Fase 2, Álvaro)

Sim! Foi das coisas que mais me ajudou até agora a perceber como melhorar. Não é só acertar o resultado. É explicar bem o que se faz. Gostei mesmo. (Entrevista, Fase 2, Beatriz)

Sim, foi uma boa forma de aprender a pensar e a explicar melhor. (Entrevista, Fase 2, Salvador)

A resposta do Álvaro mostra um conflito entre o reconhecimento da utilidade da experiência e a resistência à mudança de hábitos. O aluno demonstra consciência da importância de compreender em vez de decorar, mas admite que ainda não integrou essa mudança na sua forma de aprender. O “talvez” inicial transmite hesitação, o que sugere que, embora a intervenção tenha deixado marca no aluno, a sua adesão ao novo método ainda está em fase inicial. O aluno continua preso a estratégias mais passivas, provavelmente por sentir mais segurança na repetição do que no pensamento autónomo. Esta tensão entre a valorização da compreensão e a dificuldade em abandonar métodos repetitivos foi já discutida por autores como Ponte (2005), ao referir que muitos alunos enfrentam resistência à mudança quando confrontados com tarefas que exigem mais do que uma execução mecânica. A resposta do Álvaro reflete este conflito entre o modelo tradicional de ensino, centrado no produto, e a abordagem mais exploratória e reflexiva sustentada pela resolução de problemas. A Beatriz expressa uma opinião claramente positiva relativamente à utilidade desta intervenção. A aluna considera a experiência extremamente útil e transformadora na forma com que encarou a matemática. A valorização da explicação e não apenas do resultado indica uma mudança de mentalidade significativa, que vai ao encontro dos objetivos da intervenção. O entusiasmo (“gostei mesmo”) reforça a ideia de que a aluna se envolveu ativamente e que retirou benefícios para o seu percurso de aprendizagem. A resposta do Salvador apesar de breve é bastante clara. O aluno reconhece que a experiência teve um duplo impacto, ou seja, para além de ter melhorado a sua capacidade de pensar também melhorou a forma como o mesmo se comunica por escrito. Ao associar “pensar” e “explicar”, o Salvador mostra ter compreendido que a escrita matemática não é apenas uma forma de registar procedimentos, mas também uma ferramenta para organizar e aprofundar o próprio pensamento. Assim, o Salvador, demonstra a integração da dimensão comunicativa da matemática como parte ativa da construção de conhecimento. Esta ideia está de acordo com os estudos de Jacinto et al. (2018), que identificam que na explicação do pensamento uma via para aprofundar a compreensão e desenvolver competências metacognitivas. O Salvador parece ter interiorizado a função pedagógica da escrita matemática, ao reconhecer que esta o ajuda a organizar ideias e consolidar aprendizagens.

A análise das entrevistas evidencia trajetórias distintas de apropriação do *feedback*, refletindo diferentes níveis de desenvolvimento metacognitivo e de integração da comunicação escrita como prática matemática. As percepções dos alunos confirmam o que tem sido amplamente defendido na literatura (Santos, 2018; Hattie & Timperley, 2007): o impacto do *feedback* não reside apenas na sua qualidade intrínseca, mas

também na forma como é interpretado, apropriado e utilizado por cada aluno. Neste sentido, os dados sugerem que o sucesso de intervenções centradas no *feedback* depende, em grande medida, do apoio à construção de uma cultura de autorregulação e da promoção de normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996). A experiência vivida por estes alunos reforça a ideia de que o *feedback* escrito, quando bem orientado, pode funcionar como catalisador da aprendizagem e do desenvolvimento de competências matemáticas de ordem superior, nomeadamente na resolução de problemas e na comunicação escrita.

6. Conclusões e recomendações

Neste capítulo final, procedo à apresentação de uma síntese do estudo, retomando o objetivo e as questões de investigação. A partir da análise dos dados recolhidos, articulada com os contributos teóricos anteriormente explorados, apresento agora as principais conclusões do presente estudo. Procuro refletir criticamente sobre o impacto da intervenção desenvolvida, evidenciando os seus principais efeitos, mas também os seus limites. Esta reflexão abre espaço para considerar as aprendizagens que emergiram deste percurso enquanto futura professora de matemática, bem como para identificar caminhos possíveis para investigações posteriores que possam aprofundar ou alargar o trabalho aqui apresentado.

6.1. Síntese do estudo

O presente trabalho teve como objetivo compreender de que forma o *feedback* escrito fornecido pelo professor pode contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita dos alunos. Para tal, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- (i) Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita?
- (ii) De que forma os alunos integram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita?
- (iii) Que significado atribuem os alunos ao *feedback* dado pelo professor?

O estudo foi realizado numa turma de 11.º ano de escolaridade constituída por 22 alunos. A intervenção decorreu em três momentos distintos, integrando a resolução de problemas em duas fases e aos quais foi atribuído *feedback*, pela professora. O *feedback* foi sempre individualizado e centrado na forma interrogativa, com o objetivo de originar a reflexão e a autorregulação.

Para a recolha de dados, utilizei várias fontes de recolha de dados qualitativos, permitindo uma análise mais completa da intervenção pedagógica. Primeiro, recolhi e analisei as produções escritas dos alunos, relativas às primeiras fases dos três momentos da intervenção pedagógica. Em seguida, levei em conta os *feedbacks* escritos que realizei após a primeira fase de resolução de cada tarefa. Além disso, em cada momento da intervenção, voltei a recolher, analisar e fornecer *feedback* escrito às

produções escritas dos alunos referentes às resoluções dos problemas, numa segunda fase. Para enriquecer estes dados, conduzi breves entrevistas individuais. Numa primeira fase, depois do segundo *feedback*, com o objetivo de entender as suas interpretações ao *feedback* recebido. No final da intervenção pedagógica, procedi, à realização de uma entrevista no sentido de obter as perceções dos alunos sobre a experiência vivida durante todo o processo.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Que dificuldades os alunos enfrentam na comunicação matemática escrita?

Ao longo do percurso desenvolvido com os alunos participantes neste estudo, foi possível identificar um conjunto de dificuldades, sobretudo no que diz respeito a aspetos associados à comunicação matemática escrita. As respostas dos alunos às tarefas propostas revelaram lacunas relevantes nas cinco dimensões analisadas: correção, organização, linguagem, justificação e resposta.

Desde as primeiras tarefas, foi evidente que vários alunos tinham dificuldades não só na aplicação dos conceitos matemáticos, como também na sua compreensão. Por exemplo, na tarefa sobre perpendicularidade entre planos, alguns confundiram pontos com vetores normais ou aplicaram incorretamente a noção de produto escalar, demonstrando que a compreensão dos objetos matemáticos e das suas propriedades era ainda incipiente. Mesmo quando os alunos sabiam qual a condição teórica a aplicar, nem sempre conseguiam operacionalizá-la com rigor, o que evidencia uma dissociação entre o saber teórico e o saber fazer.

Outros exemplos surgem em tarefas associadas a progressões aritméticas. Alguns alunos revelaram desconhecimento do termo geral de uma progressão aritmética ou confundiram o termo com a ordem do termo de uma sucessão. Estes erros comprometeram as conclusões finais e indicam que, embora os procedimentos pudessem por vezes estar bem encaminhados, a ausência de verificação e sentido crítico limitaram a qualidade matemática das resoluções.

Outra dimensão em que surgiram dificuldades foi a organização. Em algumas produções os passos eram apresentados de forma desconexa, sem qualquer transição ou explicação entre etapas. Os alunos saltavam diretamente para o cálculo sem contextualizar a sua origem, o que tornava a sua resolução pouco clara. Este aspeto foi

especialmente visível nas fases iniciais das tarefas, em que predominavam respostas fragmentadas e anotações dispersas.

A linguagem utilizada pelos alunos foi frequentemente marcada por expressões imprecisas, que não se coadunam com a formalidade exigida no discurso matemático. Frases como “vai-se somando três”, “este número não dá certo” ou “dá negativo, logo não pode ser” foram comuns e mostraram uma tendência para o recurso de um vocabulário pouco formal e rigoroso. Além disso, foi possível verificar o uso impreciso e confuso da terminologia através da não distinção entre “vetores diretores”, “vetores normais” e “pontos”. Isto revela lacunas significativas na apropriação de conceitos. Por outro lado, também se constata a utilização correta de expressões como “vetores perpendiculares” ou “razão da progressão aritmética”, revelando um domínio parcial da terminologia. Contudo, a utilização esporádica e por vezes descontextualizada destes termos mostra que ainda não tinham interiorizado plenamente o seu significado.

Os alunos, em certos momentos, não foram capazes de explicar as razões que os levavam a adotar determinadas estratégias. Esta lacuna ao nível da justificação foi transversal na resolução dos diferentes problemas e manteve-se visível, ainda que com algumas melhorias, ao longo de todo o processo. Foi particularmente relevante observar que, após os momentos de *feedback*, alguns alunos passaram a fazer pequenos comentários explicativos nas suas resoluções, ainda que nem sempre com a clareza necessária. Esta evolução, embora tímida, revelou que o trabalho sistemático de revisão e autorreflexão pode ajudar a desenvolver a capacidade de justificar as próprias decisões matemáticas. Finalmente, na dimensão da resposta, os alunos apenas não apresentavam uma conclusão clara quando não terminavam a resolução.

6.2.2. De que forma os alunos integram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita?

Ao longo dos três momentos que constituíram esta intervenção pedagógica, foi possível observar uma evolução significativa, ainda que heterogénea, nas cinco dimensões de análise da comunicação matemática escrita dos alunos. Essa evolução não se manifestou apenas ao nível da correção das resoluções, mas também, e sobretudo, na forma como os alunos passaram a estruturar o seu pensamento, a justificar os procedimentos adotados e a utilizar uma linguagem matemática mais precisa e adequada. Esta melhoria, apesar de gradual, reflete o impacto das estratégias

utilizadas, em particular o recurso ao *feedback* formativo e interrogativo e à valorização da clareza e da explicitação das ideias.

Uma das melhorias observadas ao longo do estudo foi ao nível da organização e encadeamento do pensamento matemático. Muitos alunos, que inicialmente apresentavam respostas fragmentadas, pouco organizadas e sem uma linha de pensamento coerente, começaram progressivamente a estruturar melhor as suas produções. Esta evolução ficou patente, por exemplo, na forma como passaram a enunciar os dados relevantes do problema, a indicar as fórmulas utilizadas e a justificar a pertinência das estratégias adotadas. Com o decorrer das tarefas e com a incorporação do *feedback* fornecido, muitos passaram a construir respostas mais completas e articuladas. Esta melhoria não foi automática, mas sim resultado de uma prática contínua e apoiada, com momentos de análise e reflexão sobre as próprias produções.

Outra dimensão onde se notou progresso foi na linguagem matemática utilizada pelos alunos. No início da intervenção, prevalecia a utilização de simbologia ou de expressões incorretas, do ponto de vista formal. A falta de domínio de terminologia própria comprometeu, em muitos casos, a clareza da comunicação. À medida que as tarefas progrediam e que se solicitava explicitamente a correção da linguagem utilizada, notou-se que os alunos começaram a integrar termos mais apropriados, notando-se também um maior cuidado com a utilização de simbologia. Ainda que estas melhorias não tenham ocorrido de forma linear, o conjunto de produções analisadas mostra uma tendência positiva generalizada na apropriação de uma linguagem matemática mais cuidada e rigorosa.

A dimensão da justificação constituiu-se, desde o início, a maior fragilidade nas produções dos alunos. Os alunos apresentavam as resoluções, sem qualquer explicação sobre as razões que os levavam a tomar determinada decisão ou a utilizar certo procedimento. A intervenção teve precisamente como uma das suas prioridades o desenvolvimento da capacidade de explicar o pensamento matemático, levando os alunos a entender que a matemática não se resume a chegar ao resultado certo, mas a ser capaz de o fundamentar. Com o apoio do *feedback* interrogativo e das entrevistas numa primeira fase, foi possível observar uma mudança, embora ténue, nesta dimensão. Os alunos passaram a inserir explicações nas suas resoluções, mesmo que breves, indicando o que estavam a fazer e o porquê. Esta evolução representa um passo importante no caminho para uma comunicação matemática mais completa e adequada.

Um dos sinais mais relevantes de evolução foi, talvez, a mudança de atitude dos alunos face à escrita matemática. Se inicialmente se mostravam relutantes ou até desvalorizavam a necessidade de explicar e escrever de forma cuidada (“professora, para quê escrever se já está certo?”), com o decorrer da intervenção alguns começaram a demonstrar maior consciência da importância de comunicar bem o seu pensamento. Esse amadurecimento revelou-se tanto na forma como reagiam ao *feedback* como nas entrevistas realizadas. Esta mudança de atitude, ainda que subtil, foi fundamental para o desenvolvimento da capacidade da comunicação matemática escrita destes alunos.

A opção por um *feedback* predominantemente interrogativo, em detrimento de correções diretas, mostrou ser eficaz no estímulo à autorreflexão. As perguntas colocadas convidaram os alunos a questionar os seus próprios raciocínios e a assumir um papel mais ativo na construção do conhecimento. Esta estratégia foi particularmente útil para desenvolver o pensamento crítico e para promover a identificação autónoma de erros, mesmo que nem sempre tenha sido suficiente para garantir uma revisão eficaz em todos os casos. A realização de entrevistas revelou-se um momento-chave para promover a consciencialização dos alunos relativamente às suas dificuldades. A mediação direta do professor permitiu, nalguns casos, transformar a perceção do erro e reforçar a importância de justificar e validar os próprios raciocínios.

Para além das dificuldades específicas nas cinco dimensões analisadas, verificou-se também uma resistência ou desvalorização do *feedback* formativo por parte de alguns alunos. Em várias entrevistas, os alunos admitiram não ter lido ou refletido sobre os comentários recebidos, o que comprometeu a integração das sugestões dadas e limitou a evolução esperada nas fases seguintes. Em algumas situações, ficou patente uma tentativa de decorar procedimentos em vez de compreender os conceitos subjacentes. Esta tendência dificultou a transferência de conhecimento entre tarefas semelhantes, como se observou na resolução de problemas envolvendo vetores ou progressões.

6.2.3. Que significado atribuem os alunos ao *feedback* dado pelo professor?

A análise da forma como os alunos integraram o *feedback* na melhoria da sua comunicação matemática escrita revelou ser, por si só, uma dimensão complexa e em constante evolução ao longo da intervenção. Desde o início do estudo, tornou-se evidente que muitos alunos não estavam familiarizados com práticas de *feedback* que não fossem meramente correções numéricas ou indicações diretas da resolução correta. Deste modo, e de forma mais notória na fase inicial da intervenção pedagógica,

os alunos mostraram alguma resistência ou dificuldade em interpretar e valorizar um tipo de *feedback* que não lhes dissesse exatamente “como se faz”. Esta dificuldade evidenciou-se sobretudo na ausência de resposta à maioria das anotações feitas nos enunciados ou nas produções, especialmente quando essas anotações eram de natureza interrogativa ou orientadas para a autorreflexão.

Nas primeiras entrevistas, os alunos verbalizaram que não sabiam o que fazer com o *feedback* ou que não percebiam por que razão não estava certo se o resultado estava correto. Esta reação é compreensível à luz das práticas a que estavam habituados. Para muitos deles, o *feedback* que não incluía diretamente a resolução do exercício era percebido como incompleto ou até inútil. Esta dificuldade inicial ficou patente também na fraca apropriação das observações feitas, como se o *feedback* fosse um comentário externo, sem relação direta com a aprendizagem.

Para estes alunos, “acertar no resultado” era suficiente, não percebendo que a capacidade de justificar, estruturar e explicar o seu pensamento de forma clara era um aspeto tão relevante quanto a obtenção da resposta correta. Esta visão dificultou, numa fase inicial, a integração do *feedback*, pois os alunos não viam valor nas sugestões que apelavam à explicação ou reformulação dos seus pensamentos.

Contudo, com o decorrer das tarefas e através de momentos de análise e discussão das resoluções, de forma individualizada, foi possível observar uma evolução significativa em alguns casos. A repetição dos momentos de *feedback* e a consistência da sua estrutura (centrada na reflexão, na explicação do pensamento e na valorização de tentativas) permitiram que a maioria dos alunos comesçassem a reconhecer esse *feedback* como parte integrante do processo de aprendizagem. Começaram a surgir reformulações mais cuidadas das resoluções, uma maior atenção à organização, à clareza e à justificação dos passos. Em algumas entrevistas finais, alguns alunos afirmaram que, pela primeira vez, tinham percebido a importância de explicar o que pensam e que “não chega fazer, é preciso mostrar como se chegou lá”. Houve quem referisse expressamente que passou a pensar se “a professora iria perceber” o que escreveu, revelando assim uma mudança na perceção da comunicação matemática escrita como meio de partilha de pensamento e não apenas como produto.

Apesar desta evolução positiva, nem todos os alunos integraram plenamente o *feedback* na sua prática. No caso do Álvaro, por exemplo, verificou-se uma resistência persistente ao estilo de trabalho promovido ao longo da intervenção. Embora em entrevista reconhecesse que talvez tivesse “evoluído um pouquinho”, admitiu continuar a preferir

um ensino com resoluções feitas pelo professor. Esta preferência demonstra que a valorização da comunicação escrita e do *feedback* como instrumento formativo ainda não se consolidou para todos os alunos e que o processo de mudança de paradigma requer mais tempo, continuidade e, possivelmente, outras formas de apoio e mediação.

Em suma, os dados recolhidos permitem afirmar que, no final da intervenção, os alunos atribuíram um valor mais significativo ao *feedback* recebido. Houve uma mudança gradual na forma como o interpretaram e o integraram nas suas resoluções, nomeadamente no que toca à explicação de pensamentos e à maior preocupação com a clareza das ideias apresentadas. A forma como os alunos integraram o *feedback* revelou estar intimamente ligada ao grau de autorregulação que demonstraram ao longo da intervenção. Os que se envolveram ativamente com os comentários recebidos, voltando a lê-los e reformulando conscientemente as suas produções, foram os que mostraram maior progresso. Já os que mantiveram uma postura mais passiva, centrada na memorização ou práticas de reprodução, tiveram mais dificuldade em transformar o *feedback* em aprendizagem efetiva. Este dado reforça a importância de promover, desde cedo, práticas pedagógicas que incentivem a reflexão crítica e o pensamento autónomo.

A intervenção pedagógica revelou, assim, o seu potencial não só para promover melhorias na comunicação matemática escrita, mas também para transformar, progressivamente, a forma como os alunos encaram a aprendizagem da matemática.

6.3. Limitações e recomendações

Apesar do envolvimento ativo dos alunos e da riqueza das interações promovidas ao longo da intervenção pedagógica, é importante reconhecer um conjunto de limitações que condicionaram, em parte, o alcance dos objetivos definidos inicialmente. A identificação destas limitações não tem como finalidade desvalorizar o percurso realizado, mas antes promover uma reflexão crítica sobre o que poderia ter sido diferente e oferecer pistas concretas para investigações futuras ou para a reformulação de práticas pedagógicas semelhantes.

Uma das primeiras limitações prende-se com o tempo disponível entre a realização das diferentes fases da intervenção. A distribuição temporal das tarefas e, especialmente, o espaço alargado entre o momento de entrega do *feedback* e a realização da segunda fase (num dos casos, cerca de duas semanas), contribuiu para que certos alunos se

tivessem esquecido dos comentários recebidos ou perdido o fio condutor do pensamento iniciado na fase anterior. Isto afetou negativamente a evolução, como se verificou com o caso do Álvaro, onde se registaram retrocessos que não haviam sido observados na produção inicial.

Além disso, a ausência de momentos intermédios de partilha coletiva, nos quais os alunos pudessem discutir e comparar as resoluções dos colegas, também se revelou uma limitação. A oportunidade de analisar resoluções diferentes da sua, com base em critérios previamente discutidos, teria potencial para reforçar a compreensão da importância da comunicação matemática escrita, promovendo uma reflexão mais profunda sobre a clareza, a justificação e o rigor na linguagem usada.

Outra limitação observada prendeu-se com o ponto de partida dos alunos, ou seja, com as conceções enraizadas que muitos traziam relativamente ao ensino da matemática. A maioria dos alunos demonstrou, no início da intervenção, uma visão instrumental e procedimental da disciplina, valorizando mais o produto final do que o processo seguido. Esta mentalidade dificultou a aceitação e valorização do *feedback* escrito, sobretudo quando este não indicava diretamente o “erro” ou apresentava uma “resolução modelo”. De certa forma, a resistência à função formativa e interrogativa do *feedback* foi mais acentuada nos primeiros momentos, como se observou em diversas entrevistas. Ainda assim, esta limitação deu origem a uma das principais aprendizagens do estudo, ou seja, a importância de trabalhar a cultura do *feedback* como prática contínua e orientada para a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Importa também reconhecer que, em alguns momentos, o próprio *feedback* por mim fornecido revelou algumas fragilidades. Optei frequentemente por um registo de análise mais global, utilizando uma abordagem interrogativa que visava promover a reflexão dos alunos. No entanto, em determinadas situações, essa opção poderia ter sido complementada com comentários mais específicos, orientados para aspetos concretos da produção, como, por exemplo, a reflexão sobre determinados conceitos matemáticos, a estruturação do pensamento ou a adequação da linguagem utilizada. Ter destacado essas dimensões de forma mais explícita teria, provavelmente, potenciado uma apropriação mais profunda das sugestões e um maior impacto na revisão dos trabalhos.

Em termos metodológicos, importa também referir que a avaliação das produções escritas se centrou em cinco dimensões fundamentais (correção, organização, linguagem, justificação e resposta), mas não foram exploradas outras variáveis

contextuais que poderiam ter influenciado os resultados, como o tempo efetivamente dedicado à tarefa por cada aluno, o apoio externo recebido (nomeadamente de colegas ou familiares) ou as condições individuais de concentração e motivação. Estas variáveis, embora difíceis de controlar, poderiam ter sido objeto de recolha adicional, por exemplo através de diários reflexivos ou formulários anónimos.

No plano das recomendações, este estudo sugere, em primeiro lugar, a integração sistemática de momentos de *feedback* escrito nas práticas letivas, não como elemento pontual ou corretivo, mas como componente regular e estratégica do processo de ensino-aprendizagem. O uso de *feedback* interrogativo, como aqui se procurou promover, demonstrou ter efeitos positivos na ativação do pensamento crítico e na autorregulação dos alunos.

Recomenda-se ainda que práticas deste gênero se constituam como práticas comuns nas aulas de matemática, uma vez que permitem uma monitorização mais contínua da evolução dos alunos e a consolidação progressiva das suas aprendizagens relativas à comunicação matemática escrita. Por exemplo, a possibilidade de se criar portefólios de resoluções, comentadas ao longo do tempo, poderá também contribuir para tornar mais visível a trajetória de cada aluno e valorizar o percurso em vez do resultado.

Finalmente, este estudo aponta para a importância de se promover o desenvolvimento de uma comunicação matemática clara, estruturada e argumentativa, reforçando a ideia de que “pensar bem” e “escrever bem” em matemática são faces complementares da aprendizagem.

Referências Bibliográficas

- Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Ministério da Educação.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Brunheira, L. (2020). Avaliação da resolução de problemas, mais um problema? *Educação e Matemática*, 158, 9–14.
- Butler, D., & Winne, P. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of Educational Research*, 65(3), 245–81.
- Butler, R. (1987). Task-involving and ego-involving properties of evaluation: Effects of different *feedback* conditions on motivational perceptions, interest, and performance. *Journal of Educational Psychology*, 79(4), 474–482.
- Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, 7.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). *Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora*. Instituto Politécnico de Lisboa. <https://repositorio.ipl.pt/bitstreams/2fcfa0ea-3760-4cf0-b81f-ab7d62de5eb7/download>
- Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da investigação – Guia para auto-aprendizagem*. Universidade Aberta.
- Costa, E., & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: Um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 405–419). Associação de Professores de Matemática.
- Costa, P. (2023). Avaliação formativa: as implicações do *feedback* escrito [Relatório de Estágio]. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. <https://hdl.handle.net/10216/156462>

Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros dos alunos? O *feedback* regulador. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 133–143). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Faria, F., & Rodrigues, M. (2020). A comunicação matemática escrita. *Da Investigação às Práticas: Estudos de natureza educacional*, 10(2), 90–116. <https://doi.org/10.25757/invep.v10i2.220>

Fernandes, D. (2011). Avaliar para melhorar as aprendizagens: Análise e discussão de algumas questões essenciais. In I. Fialho & H. Salgueiro (Eds.), *Turma Mais e sucesso escolar: Contributos teóricos e práticos* (pp. 81–107). Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora.

Fernandes, D. (2021). Avaliação Pedagógica, Classificação e Notas: Perspetivas Contemporâneas. Folha de apoio à formação - Projeto de Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica (MAIA). Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Fernandes, D. (2022). *Avaliar e aprender numa cultura de inovação pedagógica*. LeYa Educação.

Fialho, I. (2022). Avaliar para melhorar aprendizagens e resultados. *Revista Diversidades*, 59, 7–11. <https://pt.calameo.com/read/006440681dcd1e28f0ace>

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112.

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). “Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!” Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologia. *Educação e Matemática*, 149-150, 76–80.

Lima, L., & Cosme, A. (2018). Ensinar, aprender e avaliar como processos integrados na produção de saberes numa aula orientada pela Metodologia de Resolução de Problemas. *Revista de Educação, Ciência e Cultura*, 23(2), 123–136. <https://doi.org/10.18316/recc.v23i2.4478>

Lopes, M (2021). *A perceção dos alunos sobre o feedback dos professores* [Tese de doutoramento]. Universidade de Lisboa. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/50366/1/ulsd737098_td_Maria_Lopes.pdf

Machado, H., & Pinto, J. (2014). A coavaliação entre pares e regulação das aprendizagens. In C. Tomás & C. Goncalves (Orgs.), *Atas do VI Encontro CIED – I Encontro Internacional em Estudos Educacionais. Avaliação: desafios e riscos* (pp. 317–331). Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais.

Martins, L. G., & Martinho, M. H. (2021). Strategies, difficulties, and written communication in solving a mathematical problem. *Bolema*, 35(70), 903–936. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a16>

Martins, G. O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilho, J., Silva, L. U., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário, 11.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, 7.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf

Ministério da Educação e Ciência (2018). Decreto-Lei n.º 55/2018: Diário da República, 1a série, no 129, pp. 2928-2943.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Associação de Professores de Matemática e Institute of International Education.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Universidade Aberta.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11–34). Associação de Professores de Matemática.

Sá, A., & Zenhas, M. D. G. (2004). *Como abordar... a comunicação escrita na aula de matemática*. Areal Editores.

Sadler, D. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18, 119–144.

Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: Algumas notas. *Educação e Matemática*, 144-145, 53–58.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de Matemática?. In C. Lopes & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11–34). Mercado Letras.

Santos, L. (2018). O *feedback*: Algumas notas. In F. Veiga (Coord.), *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503–539). Climepsi.

Santos, L. (2002). *Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como?*. Ministério da Educação / Departamento do Ensino Básico. <http://hdl.handle.net/10451/4884>

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11–35). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, L., & Dias, S. (2006) Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do *feedback*. *ProfMat2006*. Associação de Professores de Matemática.

Santos, L., & Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49–56). Thessaloniki, Greece: PME. <https://www.researchgate.net/publication/281367141>

Santos, L., & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 65–87. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9557-z>

Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., &

Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário, 10.º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_vf.pdf

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171–202.

William, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8–11.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, 100, 85–88.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

Anexos

Anexo 1 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no primeiro momento de intervenção

Resolução do Problema da 1ª Fase

Versão 1

$\alpha: 3x + 2y - 4 = 0 \longrightarrow$ vetor normal a $\alpha: \vec{n}_\alpha (3,2,0)$

Como os planos α e β são paralelos, os seus vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares, ou seja,

$$\vec{n}_\beta = k \times \vec{n}_\alpha, k \in \mathbb{R}$$

Seja $k = 2$, por exemplo, temos que

$$\vec{n}_\beta = 2 \times (3,2,0)$$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_\beta = (6,4,0)$$

Assim,

$$\beta: 6x + 4y + d = 0$$

Uma vez que o ponto $A (1,0,3) \in$ plano β

$$6(1) + 4(0) + d = 0$$

$$d = -6$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 6x + 4y - 6 = 0$$

Versão 2

$\alpha: 3x + 2y - 4 = 0 \longrightarrow$ vetor normal a $\alpha: \vec{n}_\alpha (3,2,0)$

Como os planos α e β são perpendiculares, os seus vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são também perpendiculares, ou seja,

$$\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\alpha = 0$$

Seja $\vec{n}_\beta = (a, b, c)$

$$(a, b, c) \cdot (3,2,0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a = -2b$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{2b}{3}$$

Desta forma,

$$\vec{n}_\beta = (a, b, c) = \left(-\frac{2b}{3}, b, c\right)$$

Seja $b = 3$ e $c = 1$, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (-2,3,1)$$

Assim,

$$\beta: -2x + 3y + z + d = 0$$

Uma vez que o ponto $A (1,0,3) \in$ plano β

$$-2(1) + 3(0) + 3 + d = 0$$

$$d = -1$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: -2x + 3y + z - 1 = 0$$

Resolução do Problema da 2.ª Fase

Versão 1

$$\alpha: 5x + 3y - 7 = 0 \longrightarrow \text{vetor normal a } \alpha: \vec{n}_\alpha (5, -3, 0)$$

Como os planos α e β são paralelos, os seus vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são colineares, ou seja,

$$\vec{n}_\beta = k \times \vec{n}_\alpha, k \in \mathbb{R}$$

Seja $k = 1$, por exemplo, temos que

$$\vec{n}_\beta = 1 \times (5, -3, 0)$$

$$\Leftrightarrow \vec{n}_\beta = (5, -3, 0)$$

Assim,

$$\beta: 5x - 3y + d = 0$$

Uma vez que o ponto $A(4, 2, 1) \in \text{plano } \beta$

$$5(4) - 3(2) + d = 0$$

$$d = -14$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 5x - 3y - 14 = 0$$

Versão 2

$$\alpha: 5x + 3y - 7 = 0 \longrightarrow \text{vetor normal a } \alpha: \vec{n}_\alpha (5, -3, 0)$$

Como os planos α e β são perpendiculares, os seus vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são também perpendiculares, ou seja,

$$\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\alpha = 0$$

Seja $\vec{n}_\beta = (a, b, c)$

$$(a, b, c) \cdot (5, -3, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow 5a = 3b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3b}{5}$$

Desta forma,

$$\vec{n}_\beta = (a, b, c) = \left(\frac{3b}{5}, b, c\right)$$

Seja $b = 5$ e $c = 1$, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (3, 5, 1)$$

Assim,

$$\beta: 3x + 5y + z + d = 0$$

Uma vez que o ponto $A(4, 2, 1) \in \text{plano } \beta$

$$3(4) + 5(2) + 1 + d = 0$$

$$d = -23$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 3x + 5y + z - 23 = 0$$

Anexo 2 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no segundo momento de intervenção

Resolução do Problema da 1.ª Fase

Versão 1

Seja,

$$r: (x, y, z) = (1, 2, -2) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$$

Onde R (1, 2, -2) é um ponto pertencente à reta r e $\vec{r} = (-1, 2, 2)$ o vetor diretor da mesma

E

$$s: (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 4, 4), k \in \mathbb{R}$$

Onde S (0, 2, 1) é um ponto pertencente à reta s e $\vec{s} = (-2, 4, 4)$ o vetor diretor da mesma

Vamos ver se as retas são paralelas ou concorrentes para saber que condições usar

- Se forem paralelas: os vetores diretores das retas são colineares
- Se forem concorrentes: as retas interseitam-se e os seus vetores diretores não são colineares

Se forem colineares, então

$$\begin{aligned} \vec{s} &= k \times \vec{r}, k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (-2, 4, 4) &= k \times (-1, 2, 2), k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = (-1) \times k \\ 4 = 2 \times k \\ 4 = 2 \times k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, os vetores são colineares e por isso as retas são paralelas.

Para determinar a equação do plano, β , definido pelas duas retas paralelas onde o seu vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$ temos de satisfazer as seguintes condições:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{SR} = 0$$

Para isso teremos de calcular

$$\begin{aligned} \vec{SR} &= S - R \\ \Leftrightarrow \vec{SR} &= (0, 2, 1) - (1, 2, -2) \\ \Leftrightarrow \vec{SR} &= (-1, 0, 3) \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{r} &= 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{SR} = 0 \\ \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (-1, 2, 2) &= 0 \wedge (a, b, c) \cdot (-1, 0, 3) = 0 \\ \Leftrightarrow -a + 2b + 2c &= 0 \wedge -a + 3c = 0 \\ \Leftrightarrow -a + 2b + 2c &= 0 \wedge a = 3c \\ \Leftrightarrow -3c + 2b + 2c &= 0 \wedge a = 3c \\ \Leftrightarrow -c + 2b &= 0 \wedge a = 3c \\ \Leftrightarrow b &= \frac{c}{2} \wedge a = 3c \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{n} = (a, b, c) = (3c, \frac{c}{2}, c)$$

Seja c = 2, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (6, 1, 2)$$

Assim,

$$\beta: 6x + y + 2z + d = 0$$

Uma vez que o ponto R (1, 2, -2) $\in$ plano β

$$6(1) + 2 + 2(-2) + d = 0$$

$$d = -4$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 6x + y + 2z - 4 = 0$$

Versão 2

Seja,

$$r: (x, y, z) = (-3, 4, 4) + k(-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$$

Onde R (-3, 4, 4) é um ponto pertencente à reta r e $\vec{r} = (-1, 2, 2)$ o vetor diretor da mesma

E

$$s: (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(-2, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

Onde S (0, 2, 1) é um ponto pertencente à reta s e $\vec{s} = (-2, 0, 1)$ o vetor diretor da mesma

Vamos ver se as retas são paralelas ou concorrentes para saber que condições usar

- Se forem paralelas: os vetores diretores das retas são colineares
- Se forem concorrentes: as retas intersectam-se e os seus vetores diretores não são colineares

Se forem colineares, então

$$\vec{s} = k \times \vec{r}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (-2, 0, 1) = k \times (-1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = (-1) \times k \\ 0 = 2 \times k \\ 1 = 2 \times k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 0 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Uma vez que o k deu diferente, os vetores não são colineares e por isso as retas não são paralelas, acabando por se intersectar e por isso ser concorrentes

Assim, para determinar a equação do plano, β , definido pelas duas retas concorrentes onde o seu vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$ temos de satisfazer as seguintes condições:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

Assim sendo,

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{SR} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (-1, 2, 2) = 0 \wedge (a, b, c) \cdot (-2, 0, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + 2c = 0 \wedge -2a + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + 2c = 0 \wedge c = 2a$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + 2(2a) = 0 \wedge c = 2a$$

$$\Leftrightarrow -a + 2b + 4a = 0 \wedge c = 2a$$

$$\Leftrightarrow 2b = -3a \wedge c = 2a$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{3a}{2} \wedge c = 2a$$

Desta forma,

$$\vec{n} = (a, b, c) = (a, -\frac{3a}{2}, 2a)$$

Seja $a = 2$, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (2, -3, 4)$$

Assim,

$$\beta: 2x - 3y + 4z + d = 0$$

Uma vez que o ponto R (-3, 4, 4) $\in$ plano β

$$2(-3) - 3(4) + 4(4) + d = 0$$

$$d = 2$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 2x - 3y + 4z + 2 = 0$$

Resolução do Problema da 2.ª Fase Versão 1

Seja,

$$r: (x, y, z) = (0, -3, 2) + k(1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Onde R (0, -3, 2) é um ponto pertencente à reta r e $\vec{r} = (1, -1, 2)$ o vetor diretor da mesma

E

$$s: (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(3, -3, 6), k \in \mathbb{R}$$

Onde S (2, 0, 4) é um ponto pertencente à reta s e $\vec{s} = (3, -3, 6)$ o vetor diretor da mesma

Vamos ver se as retas são paralelas ou concorrentes para saber que condições usar

- Se forem paralelas: os vetores diretores das retas são colineares
- Se forem concorrentes: as retas interseccionam-se e os seus vetores diretores não são colineares

Se forem colineares, então

$$\begin{aligned}\vec{s} &= k \times \vec{r}, k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (3, -3, 6) &= k \times (1, -1, 2), k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 \times k \\ -3 = (-1) \times k, k \in \mathbb{R} \\ 6 = 2 \times k \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3, k \in \mathbb{R} \\ k = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, os vetores são colineares e por isso as retas são paralelas.

Para determinar a equação do plano, β , definido pelas duas retas paralelas onde o seu vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$ temos de satisfazer as seguintes condições:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{SR} = 0$$

Para isso teremos de calcular

$$\begin{aligned}\vec{SR} &= S - R \\ \Leftrightarrow \vec{SR} &= (0, -3, 2) - (2, 0, 4) \\ \Leftrightarrow \vec{SR} &= (-2, -3, -2)\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{r} &= 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{SR} = 0 \\ \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) &= 0 \wedge (a, b, c) \cdot (-2, -3, -2) = 0 \\ \Leftrightarrow a - b + 2c &= 0 \wedge -2a - 3b - 2c = 0 \\ \Leftrightarrow a - b - 2c &= 0 \wedge -2(b - 2c) - 3b - 2c = 0 \\ \Leftrightarrow a - b - 2c &= 0 \wedge -2b + 4c - 3b - 2c = 0 \\ \Leftrightarrow a - b - 2c &= 0 \wedge -5b - 2c = 0 \\ \Leftrightarrow a = b + 5b &\wedge -2c = 5b \\ \Leftrightarrow a = 6b &\wedge c = -\frac{5}{2}b\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{n} = (a, b, c) = (6b, b, -\frac{5}{2}b)$$

Seja b = 2, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (12, 2, -5)$$

Assim,

$$\beta: 12x + 2y - 5z + d = 0$$

Uma vez que o ponto R (0, -3, 2) $\in$ plano β

$$12(0) + 2(-3) - 5(2) + d = 0$$

$$d = 16$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: 12x + 2y - 5z + 16 = 0$$

Versão 2

Seja,

$$r: (x, y, z) = (4, -3, 5) + k(1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Onde R (4, -3, 5) é um ponto pertencente à reta r e $\vec{r} = (1, -1, 2)$ o vetor diretor da mesma

E

$$s: (x, y, z) = (2, 0, 4) + k(2, -3, 1), k \in \mathbb{R}$$

Onde S (2, 0, 4) é um ponto pertencente à reta s e $\vec{s} = (2, -3, 1)$ o vetor diretor da mesma

Vamos ver se as retas são paralelas ou concorrentes para saber que condições usar

- Se forem paralelas: os vetores diretores das retas são colineares
- Se forem concorrentes: as retas interseitam-se e os seus vetores diretores não são colineares

Se forem colineares, então

$$\begin{aligned}\vec{s} &= k \times \vec{r}, k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (2, -3, 1) &= k \times (1, -1, 2), k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 \times k \\ -3 = (-1) \times k \\ 1 = 2 \times k \end{cases} & k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 3 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} & k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Uma vez que o k deu diferente, os vetores não são colineares e por isso as retas não são paralelas, acabando por se interseitar e por isso ser concorrentes

Assim, para determinar a equação do plano, β , definido pelas duas retas concorrentes onde o seu vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$ temos de satisfazer as seguintes condições:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{r} &= 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \\ \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) &= 0 \wedge (a, b, c) \cdot (2, -3, 1) = 0 \\ \Leftrightarrow a - b + 2c &= 0 \wedge 2a - 3b + c = 0 \\ \Leftrightarrow a = b - 2c \wedge 2(b - 2c) - 3b + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a = b - 2c \wedge 2b - 4c - 3b + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a = b - 2c \wedge -b - 3c &= 0 \\ \Leftrightarrow a = b - 2c \wedge b &= -3c \\ \Leftrightarrow a = -3c - 2c \wedge b &= -3c \\ \Leftrightarrow a = -5c \wedge b &= -3c\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\vec{n} = (a, b, c) = (-5c, -3c, c)$$

Seja c=1, por exemplo, temos que

$$\vec{n} = (-5, -3, 1)$$

Assim,

$$\beta: -5x - 3y + z + d = 0$$

Uma vez que o ponto R (4, -3, 5) $\in$ plano β

$$-5(4) - 3(-3) + 5 + d = 0$$

$$d = 6$$

Desta forma, obtemos que a equação do plano β é

$$\beta: -5x - 3y + z + 6 = 0$$

Anexo 3 - Guiões das entrevistas realizadas individualmente no fim do segundo momento de intervenção pedagógica

Álvaro:

- O que aconteceu? Não percebeste o que escrevi na primeira fase?
- Já entendeste a diferença entre vetor diretor e vetor normal?
- Percebes-te mesmo ou só vais decorar?
- Que condição é esta " $\vec{rS} = s - r$ "?
- Entendeste que tens de apresentar uma linha de pensamento coerente? Que não basta fazer cálculos soltos, mas é importante indicar o que estás a fazer em cada passo, o que significa cada vetor, cada variável, cada equação que escreves?

Salvador:

- Notei que desta vez começaste por verificar a relação entre as retas. Foi algo em que pensaste depois do último exercício?
- Achas que escrever as justificações ajuda?

Anexo 4 - Proposta de resolução dos problemas apresentados no terceiro momento de intervenção

Proposta de resolução do Problema da 1ª Fase

Trata-se de uma progressão aritmética.

Assim, $u_8 = u_1 + 7r$, onde u_8 e u_1 são o 8º e o 1º termos, respetivamente, e r é a razão.

$r = 3$, uma vez que adiciona-se sempre 3 ao termo anterior

$$16 = u_1 + 7 \times 3 \Leftrightarrow u_1 = 16 - 21 \\ \Leftrightarrow u_1 = -5$$

Portanto:

$$u_n = -5 + (n - 1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = -5 + 3n - 3 \\ \Leftrightarrow u_n = 3n - 8$$

Assim:

- $u_n = 7 \Leftrightarrow 3n - 8 = 7$
 $\Leftrightarrow 3n = 7 + 8$
 $\Leftrightarrow 3n = 15$
 $\Leftrightarrow n = 5$

Logo, 7 é o 5º termo da progressão.

- $u_n = 208 \Leftrightarrow 3n - 8 = 208$
 $\Leftrightarrow 3n = 208 + 8$
 $\Leftrightarrow 3n = 216$
 $\Leftrightarrow n = 72$

Logo, 208 é o 72º termo da progressão.

- $u_n = 416 \Leftrightarrow 3n - 8 = 416$
 $\Leftrightarrow 3n = 416 + 8$
 $\Leftrightarrow 3n = 424$
 $\Leftrightarrow n = \frac{424}{3}$

Como $\frac{424}{3} \notin \mathbb{N}$, então 416 não é termo da progressão.

Para confirmar:

- $u_n = 1057 \Leftrightarrow 3n - 8 = 1057$
 $\Leftrightarrow 3n = 1057 + 8$
 $\Leftrightarrow 3n = 1065$
 $\Leftrightarrow n = 355$

Logo, 1057 é o 355º termo da progressão.

Resposta: Assim, a opção é a (C)

Proposta de resolução do Problema da 2ª Fase

Trata-se de uma progressão aritmética.

Assim, $u_7 = u_1 + 6r$, onde u_7 e u_1 são o 7º e o 1º termos, respetivamente, e r é a razão.

$r = -4$, uma vez que se subtrai sempre 4 ao termo anterior

$$\begin{aligned} 34 &= u_1 + 6 \times (-4) \Leftrightarrow u_1 = 34 + 24 \\ &\Leftrightarrow u_1 = 58 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} u_n &= 58 + (n - 1) \times (-4) \Leftrightarrow u_n = 58 - 4n + 4 \\ &\Leftrightarrow u_n = -4n + 62 \end{aligned}$$

Assim:

- $u_n = 18 \Leftrightarrow -4n + 62 = 18$
 $\Leftrightarrow -4n = 18 - 62$
 $\Leftrightarrow -4n = -44$
 $\Leftrightarrow n = 11$

Logo, 18 é o 11º termo da progressão.

- $u_n = 2 \Leftrightarrow -4n + 62 = 2$
 $\Leftrightarrow -4n = 2 - 62$
 $\Leftrightarrow -4n = 60$
 $\Leftrightarrow n = 15$

Logo, 2 é o 15º termo da progressão.

- $u_n = -98 \Leftrightarrow -4n + 62 = -98$
 $\Leftrightarrow -4n = -98 - 62$
 $\Leftrightarrow -4n = -160$
 $\Leftrightarrow n = \frac{-160}{-4}$
 $\Leftrightarrow n = 40$

Logo, -98 é o 40º termo da progressão.

- $u_n = 77 \Leftrightarrow -4n + 62 = 77$
 $\Leftrightarrow -4n = 77 - 62$
 $\Leftrightarrow -4n = 15$
 $\Leftrightarrow n = \frac{15}{-4}$

Como $\frac{15}{-4} \notin \mathbb{N}$, então 77 não é termo da progressão.

Resposta: Assim, a opção é a (D)

Anexo 5 - Guiões das entrevistas realizadas individualmente no fim do terceiro momento de intervenção pedagógica

Álvaro:

- O que aconteceu? Não percebeste o que escrevi na primeira fase?
- Quanto ao conjunto dos números naturais, ficaste com dúvidas?

Beatriz:

- Leste o *feedback* da primeira fase?
- O que fizeste de diferente agora?

Salvador:

- Não entendeste o *feedback* dado na primeira fase?
- E quando escreveste $58 - 4n = n$, o que estavas a tentar fazer?
- Verificaste na 1ª fase se $u_4 = 7$? O que concluíste?

Anexo 6 - Guião das entrevistas realizadas individualmente no fim da intervenção pedagógica

Álvaro:

Beatriz:

Salvador:

- Agora que chegámos ao fim da intervenção, o que é que tu percebeste que é, afinal, o *feedback*?
- Achas que melhoraste a tua comunicação matemática escrita?
- Se tivesses de repetir esta experiência, mudarias alguma coisa?
- Achaste útil? Sentiste que valeu a pena?

Anexo 7 - Documento de consentimento informado



Ex.mo(a) Encarregado(a) de Educação,

A disciplina de Matemática do(a) seu(sua) educando(a) é orientada por três professores, dos quais dois são professores estagiários que se encontram a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Como parte dos requisitos do estágio, cada um dos professores estagiários terá de implementar um projeto de investigação na área da Educação Matemática.

A concretização de cada um destes trabalhos de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática. A concretização dos trabalhos de investigação envolve também a recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha essa que tornará viável a implementação dos projetos de investigação em causa. Esta recolha de dados inclui a **gravação em áudio** de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, a **recolha de trabalhos escritos** realizados pelos alunos e a **realização de entrevistas** com alguns alunos desta turma.

- A gravação em áudio é essencial para que toda a informação contida nas interações existentes numa aula, ou em parte dela, seja efetivamente recolhida e não se percam aspetos relevantes para os objetivos dos trabalhos de investigação. Estas gravações serão posteriormente **transcritas** (total ou parcialmente) e serão destruídas assim que o trabalho esteja terminado.
- A recolha das produções escritas dos alunos (respostas a tarefas propostas em aula) em nada difere do que seria feito numa situação de ensino regular, uma vez que é prática comum efetuar essa recolha para efeitos de análise das principais dificuldades dos alunos de modo a poder encontrar estratégias que os ajudem a ultrapassá-las. Assim que o trabalho estiver terminado, as produções escritas recolhidas serão destruídas.
- A realização de entrevistas envolve a gravação em áudio das mesmas, nos mesmos moldes que a gravação de aulas/momentos de aula, e é realizada com um número limitado de alunos, em horário extra-aula a combinar com eles, presencialmente ou recorrendo a meios de comunicação à distância (Zoom, Microsoft Teams ou outro).

Em caso algum os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola serão identificados, garantindo-se o **anonimato** no relatório final de estágio. A participação neste trabalho **em nada interfere** com a avaliação de desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é **inteiramente voluntária**, podendo ele(ela) **desistir em qualquer momento**, sem qualquer justificação necessária. No caso de desistência, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Deste modo, venho solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) nestes trabalhos de investigação. Estou à disposição para qualquer informação adicional.

Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevo-me, com os melhores cumprimentos,

Francisca Pinho

Francisca Pinho

07/01/2025

Data

✂

Eu, Encarregado/a de Educação do/a aluno/a

autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) o/a meu/minha educando/a a participar no trabalho de investigação da sua professora estagiária de Matemática, Francisca Pinho.

Assinatura

Data