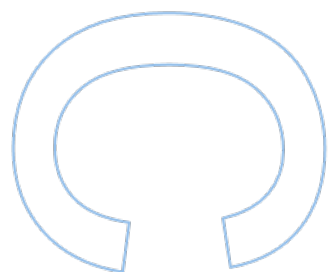
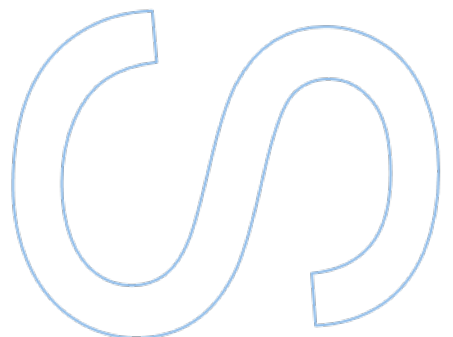
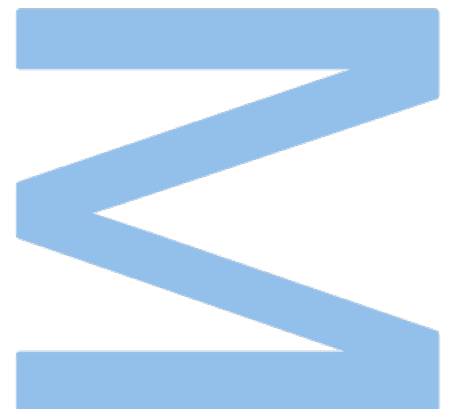


Métodos Espectrais e as suas aplicações à convecção de Rayleigh-Bénard



Sónia Daniela Soares Pereira

Mestrado em Engenharia Matemática

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025

Métodos Espectrais e as suas aplicações à convenção de Rayleigh-Bénard

Sónia Daniela Soares Pereira

Dissertação realizada no âmbito do Mestrado em
Engenharia Matemática
Departamento de Matemática
2025

Orientador

Roman Chertovskikh, Professor Auxiliar, Faculdade de Engenharia
da Universidade do Porto

Coorientador

Sílvio Gama, Professor Associado, Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores, Professor Roman Chertovskikh e Professor Sílvio Gama, pelo apoio, orientação e disponibilidade ao longo deste trabalho, assim como pela paciência e incentivo demonstrados ao longo de todo o percurso.

Aos meus amigos, agradeço a companhia e a compreensão ao longo destes últimos anos.

À minha família, especialmente aos meus pais, deixo um agradecimento profundo pelo apoio incondicional e motivação constante.

Resumo

A Convecção de Rayleigh-Bénard (CRB) constitui um sistema de referência para o estudo de instabilidades hidrodinâmicas, sendo a rotação, quantificada pelo Ta , um fator essencial na dinâmica do escoamento numa camada fluida horizontal.

O objetivo desta tese é analisar de que forma a força de Coriolis afeta a estabilidade e a evolução dos diferentes atratores convectivos. Para tal, recorreu-se a métodos espectrais na resolução das equações do sistema, combinados com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Partindo dos atratores hidrodinâmicos conhecidos para o sistema sem rotação, nomeadamente os Rolos largos (*Large Rolls*) (LR), os Rolos pequenos (*Small Rolls*) (SR) e as Células convectivas quadradas (*Square convective cells*) (S), é estudada, aplicando uma técnica de continuação em parâmetro, a evolução e estabilidade das soluções com o aumento da rotação, considerando um número de Prandtl $P = 6.8$ e número de Rayleigh $R = 1200$.

Os resultados mostram que a rotação desempenha um papel estabilizador, reduzindo a energia cinética do escoamento e quebrando simetrias de reflexão, com diferentes padrões a exibirem sensibilidades distintas ao efeito rotacional.

Keywords: Convecção de Rayleigh-Bénard, força de Coriolis, número de Taylor, número de Prandtl, instabilidades hidrodinâmicas, atratores convectivos, métodos espectrais, Métodos de Runge-Kutta.

Abstract

Rayleigh-Bénard convection serves as a reference system for the study of hydrodynamic instabilities, with rotation, quantified by the Taylor number Ta , playing a key role in the dynamics of the flow within a horizontal fluid layer.

The objective of this thesis is to analyze how the Coriolis force affects the stability and evolution of the different convective attractors. To this end, spectral methods were employed to solve the system of equations, combined with a fourth-order Runge–Kutta method. Starting from the hydrodynamic attractors known for the non-rotating system, namely large rolls LR, small rolls SR, and the square steady state S, the study applies a parameter continuation technique to investigate the evolution and stability of these solutions as rotation increases, considering a Prandtl number $P = 6.8$ and a Rayleigh number $R = 1200$.

The results show that rotation exerts a stabilizing effect, reducing the kinetic energy of the flow and breaking reflection symmetries, with different patterns exhibiting distinct sensitivities to the rotational influence.

Keywords: Rayleigh-Bénard convection, Coriolis force, Taylor number, Prandtl number, hydrodynamic instabilities, convective attractors, spectral methods, Runge–Kutta methods.

Conteúdo

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Abreviações	xi
1 Introdução	1
2 Equações que regem a convecção natural	5
2.1 Modelação matemática e derivação das equações	6
2.1.1 Equações governantes da convecção de Boussinesq com rotação	8
2.1.2 Escoamentos convectivos numa camada plana com rotação	10
2.1.3 Condições fronteira	11
3 Métodos Espetrais	13
3.1 Séries de Fourier	14
3.2 Série de Fourier Discreta	15
3.2.1 Transformações de Seno e Cosseno	17
3.2.2 Tratamento de Termos Não Lineares e o Problema de <i>Aliasing</i>	17
3.3 Aplicação à Convecção de Rayleigh-Bénard	19
3.3.1 Expansões de Fourier para os Campos de Velocidade e Temperatura na Camada Plana	19
3.4 Discretização no tempo	21
3.5 Simetrias	22
4 Atratores do sistema convectivo	27
4.1 Convecção de Rayleigh-Bénard sem rotação	27

4.2	Convecção de Rayleigh-Bénard com rotação	29
5	Conclusão	32
	Bibliografia	34

Lista de Figuras

- 4.1 Energia cinética E_v (eixo vertical) dos atratores hidrodinâmicos para $0 \leq Ta \leq 420$ (eixo horizontal). A denominação dos atratores é explicada no texto (ver também a Tabela 4.1). 30
- 4.2 Trajetórias de partículas nos atratores convectivos LR: $Ta = 0$ (a), $Ta = 30$ (b); SR: $Ta = 0$ (c), $Ta = 180$ (d); TR: $Ta = 0$ (e), $Ta = 300$ (f) e S: $Ta = 0$ (g), $Ta = 20$ (h). As cores correspondem à amplitude da velocidade de movimento na escala de cores “rainbow” (roxo – lento, vermelho – rápido). 31

Lista de Tabelas

3.1	Termos lineares em espaço de Fourier para um campo de velocidade incompressível.	21
4.1	Atratores encontrados numericamente para convecção hidrodinâmica com e sem rotação.	29

Lista de Abreviações

CRB	Convecção de Rayleigh-Bénard
FFT	Transformada Rápida de Fourier
RK4	Método de Runge-Kutta de quarta ordem
SR	Rolos pequenos (<i>Small Rolls</i>)
LR	Rolos largos (<i>Large Rolls</i>)
S	Células convectivas quadradas (<i>Square convective cells</i>)
TR	Rolos muito pequenos (<i>Tiny Rolls</i>)
TW	Onda Viajante (<i>Travelling Wave</i>)
MTW	Onda Viajante Modulada (<i>Modulated Travelling Wave</i>)

Capítulo 1.

Introdução

A dinâmica de fluidos fornece um enquadramento unificador para descrever o movimento de líquidos e gases sob a influência de forças, sujeito às leis da conservação da massa, do momento e da energia. Quando uma camada de fluido é aquecida por baixo e arrefecida por cima, a diferença de densidade resultante pode superar a influência estabilizadora da viscosidade e da difusão térmica, levando ao movimento convectivo. Este processo fundamental de convecção térmica tem sido extensivamente estudado na configuração canónica conhecida como CRB [1], na qual um fluido confinado entre placas paralelas exhibe estruturas de escoamento auto-organizadas como consequência do gradiente de temperatura.

O estudo da convecção está longe de ser um exercício académico, pois está intimamente ligado a problemas em contextos geofísicos [2], astrofísicos [3] e tecnológicos [4]. Em geofísica, por exemplo, a convecção no manto da Terra impulsiona a tectónica de placas, facilitando o transporte de calor do interior para a superfície e moldando a evolução dos continentes e oceanos [5]. A convecção desempenha também um papel central no núcleo externo, onde movimentos induzidos pela flutuação num fluido eletricamente condutor sustentam o geodínamo, responsável pela geração do campo magnético da Terra [6]. Nos oceanos e na atmosfera, a convecção organiza circulações de grande escala que controlam o clima, a variabilidade meteorológica e a redistribuição global de calor [7]. Estes exemplos destacam a ubiquidade dos escoamentos convectivos na determinação da dinâmica do nosso planeta.

Para além dos contextos geofísicos, a convecção é igualmente importante em astrofísica. As estrelas exibem zonas convectivas onde o transporte de calor e a redistribuição de momento angular são dominados por uma vigorosa turbulência convectiva [3]. Em estrelas em rotação, a convecção interage com campos magnéticos e com a rotação diferencial para dar origem a

ciclos magnéticos de grande escala, com profundas consequências para a evolução estelar. Nos interiores estelares e planetários, a convecção controla a dissipação de energia e influencia as propriedades magnéticas e rotacionais observadas [8]. Discos de acreção em torno de objetos compactos podem também desenvolver instabilidades convectivas que modificam o transporte de momento angular na presença de forças gravitacionais e radiativas [9].

Além dos sistemas naturais, a convecção desempenha um papel fundamental em muitas aplicações tecnológicas. Os sistemas de engenharia dependem frequentemente da transferência convectiva controlada de calor e massa, como nos processos de arrefecimento de dispositivos eletrônicos, reatores químicos e sistemas de geração de energia. O design eficiente de isolamento térmico, coletores solares e dispositivos microfluídicos depende da previsão e controlo dos escoamentos convectivos [10]. Processos industriais como o fabrico de vidro, o crescimento de cristais e a fundição metalúrgica são igualmente governados pela convecção a várias escalas [11]. Compreender e prever tal comportamento é, portanto, crucial tanto para a ciência fundamental como para as aplicações práticas.

A convecção de Rayleigh-Bénard, estudada em configurações laboratoriais e numéricas simplificadas, fornece um modelo essencial para desvendar os mecanismos gerais do transporte convectivo. Apesar da idealização, esta captura a essência do movimento impulsionado pela flutuação e proporciona conhecimento sobre a formação de padrões, os limiares de estabilidade [12] e a turbulência não linear [13]. A adição de rotação enriquece ainda mais este cenário, introduzindo anisotropia e dinâmicas ondulatórias devido à força de Coriolis, e servindo como um modelo mínimo para a convecção planetária e estelar. Por estas razões, o estudo cuidadoso da convecção em camadas planas permanece uma pedra angular da investigação em dinâmica de fluidos, ligando a teoria, a computação e as aplicações do mundo real.

Um refinamento essencial do problema clássico de Rayleigh-Bénard é a inclusão da rotação [14]. Quando toda a camada de fluido é submetida a uma rotação de fundo em torno do eixo vertical, a dinâmica é profundamente alterada pela interação entre as forças de flutuação e os efeitos de Coriolis. A força de Coriolis atua para inibir os movimentos verticais e redistribui o momento através de ondas inerciais, resultando em condições de limiar modificadas para o início da convecção, morfologia de escoamento alterada e novas classes de estruturas coerentes

de grande escala. Na convecção com rotação, o número de Rayleigh crítico para a instabilidade depende sensivelmente da velocidade de rotação, e os modos preferenciais no seu início podem passar de padrões de rolos estacionários para instabilidades oscilatórias [12]. Além disso, para uma rotação suficientemente forte, o escoamento tende a organizar-se em vórtices colunares alinhados com o eixo de rotação [15].

A importância da rotação é sublinhada pela vasta ocorrência de convecção com rotação em sistemas naturais. Exemplos incluem a convecção no núcleo externo da Terra, onde impulsiona o geodínamo responsável pelo campo magnético planetário, a convecção térmica no oceano e na atmosfera modulada pela rotação planetária, e as zonas de convecção em estrelas, onde a rotação governa o transporte de momento angular e a geração de campos magnéticos. Em todas estas situações, a rotação introduz anisotropia e modifica a eficiência do transporte de calor por convecção, tornando crucial a compreensão dos seus efeitos em configurações simplificadas antes de abordar a complexidade total dos sistemas naturais.

Neste trabalho, focamo-nos na convecção de Rayleigh-Bénard com rotação numa geometria de camada plana, onde o fluido está confinado entre duas placas horizontais infinitas mantidas a diferentes temperaturas e o sistema roda uniformemente em torno do eixo vertical. São impostas condições de fronteira periódicas nas direções horizontais, permitindo a investigação da dinâmica do escoamento volumico sem os efeitos das paredes laterais. As equações governantes são as equações de Boussinesq com forçamento de Coriolis, expressas em forma adimensional através dos números de Rayleigh, Prandtl e Taylor. Esta formulação proporciona um enquadramento matematicamente tratável, mas fisicamente rico, passível de análise e de simulação numérica de alta resolução.

Esta dissertação foca-se na investigação dos atratores hidrodinâmicos, explorando como os padrões de escoamento convectivo estáveis, como rolos largos (LR), rolos pequenos (SR) e células convectivas quadradas (S), evoluem e perdem estabilidade à medida que a velocidade de rotação do sistema, quantificada pelo número de Taylor (Ta), é aumentada. O objetivo é caracterizar a dinâmica e as simetrias das diferentes soluções convectivas sob a influência da força de Coriolis.

Um estudo semelhante foi realizado em [16]. O estudo identifica e analisa cinco tipos distintos

de atratores convectivos hidrodinâmicos (não magnéticos) que surgem à medida que a taxa de rotação, representada pelo número de Taylor (Ta), é variada. Para os parâmetros fixos da simulação, estes atratores exibem estruturas espaciais relativamente simples devido a um número de Rayleigh que não está muito acima do valor crítico para o início da convecção. Os atratores incluem três famílias de rolos estacionários e bidimensionais: os paralelos aos lados da célula de periodicidade, os paralelos à diagonal da célula, e um segundo conjunto paralelo aos lados, mas com um comprimento de onda menor. Os outros dois atratores não são estacionários: uma onda viajante periódica no tempo e uma estrutura de rolos “ondulados” tridimensionais. O estudo mostra que, à medida que a taxa de rotação aumenta, o sistema transita entre estes estados, com o número de onda dos atratores de rolos estáveis a aumentar geralmente com o Ta . O artigo investiga também a capacidade de cada um destes atratores atuar como um dínamo cinemático.

A abordagem numérica aqui adotada baseia-se em métodos espectrais, que oferecem elevada precisão para soluções suaves e são particularmente adequados para problemas com condições de fronteira periódicas. As discretizações espectrais nas direções horizontais, combinadas com funções de base apropriadas na direção vertical, permitem uma resolução eficiente e precisa das características de pequena escala que emergem na turbulência convectiva. Além disso, os métodos espectrais prestam-se naturalmente ao estudo da estabilidade, da seleção de padrões e da transferência de energia não linear entre modos. O objetivo desta tese é aplicar tais ferramentas numéricas para explorar sistematicamente o efeito da rotação no início da convecção, na saturação não linear e nas propriedades de transporte de calor em sistemas de Rayleigh-Bénard com rotação.

Através desta investigação, pretendemos contribuir para uma compreensão mais profunda da convecção com rotação, fazendo a ponte entre as previsões teóricas e a observação numérica direta, ao mesmo tempo que enfatizamos o papel crucial da rotação na organização e restrição dos escoamentos convectivos.

Capítulo 2.

Equações que regem a convecção natural

Quando um fluido está contido entre duas placas horizontais, sendo a inferior aquecida, observa-se o aparecimento de um movimento convectivo causado pela diferença de temperatura entre as placas. À medida que o fluido junto à placa inferior aquece, expande-se, tornando-se menos denso. Esta diminuição da densidade leva o fluido a subir, durante essa ascensão, o fluido transfere calor arrefecendo progressivamente, o que faz com que a sua densidade aumente novamente e o leva a descer. Este movimento cíclico, induzido pela ação da gravidade, é conhecido como convecção livre. Contudo, a viscosidade do fluido atua como um fator de resistência a esse movimento natural.

O movimento convectivo só se manifesta quando a diferença de temperatura entre as placas excede um determinado valor crítico. Ou seja, apenas quando o gradiente de temperatura ultrapassa um valor mínimo é que ocorre uma instabilidade térmica no sistema, iniciando o movimento. A partir desse ponto, o fluido organiza-se segundo padrões bem definidos no plano horizontal, denominadas células de convecção.

A condição para o aparecimento dessa instabilidade é governada por um parâmetro adimensional denominado número de Rayleigh, que é definido como [17]:

$$R = \frac{\alpha g \delta T d^3}{\nu \kappa},$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica, g a aceleração da gravidade, δT a diferença de temperatura entre as placas, d a distância entre elas, ν a viscosidade cinemática e κ a difusividade térmica do fluido. Quando R ultrapassa um valor crítico R_c , o sistema torna-se instável. Para valores de R ligeiramente acima de R_c , as células de convecção formam padrões hexagonais regulares e tendem a estabilizar, originando padrões estacionários [12]. Para modelar este

fenómeno matematicamente, recorre-se a aproximação de Boussinesq, que permite simplificar o modelo ao considerar o fluido incompressível e manter a variação da densidade apenas onde esta tem impacto significativo, na força de empuxo. Esta abordagem será desenvolvida com maior detalhe na secção seguinte.

2.1 Modelação matemática e derivação das equações

Um fluido é tratado como um meio contínuo, ignorando-se o comportamento individual das suas moléculas e o seu estado é descrito por variáveis macroscópicas como velocidade do fluido $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, densidade de massa $\rho(\mathbf{x}, t)$, pressão $p(\mathbf{x}, t)$ e temperatura $T(\mathbf{x}, t)$. A evolução destas variáveis no tempo e espaço é descrita por um conjunto de equações fundamentais: a equação de Navier-Stokes, que representa a conservação do momento, a equação de continuidade, que assegura a conservação da massa, e equação da energia, que descreve a transferência de calor no sistema.

Antes de apresentar as equações que regem o movimento convectivo é útil introduzir a aproximação de Boussinesq, que se aplica quando há pequenas variações de temperatura e consequentemente uma pequena variação da densidade. Nestes casos, podemos tratar ρ como constante em todos os termos das equações, exceto no termo da força de empuxo. Este contém a aceleração gravítica que é a única força externa considerada. É esta força, resultante da diferença da densidade entre regiões mais quentes e mais frias do fluido, que dá origem ao movimento convectivo.

A aproximação de Boussinesq baseia-se em algumas hipóteses. Em primeiro lugar, assume-se que o fluido é incompressível, ou seja, a densidade não depende da pressão e varia linearmente apenas com a temperatura em torno de uma temperatura de referência T_0 . Essa dependência é dada por

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)),$$

em que ρ_0 representa a densidade à temperatura T_0 e α é o coeficiente de expansão térmica do

fluido, considerado constante. Além disso, supõe-se que as propriedades físicas do fluido, como a viscosidade cinemática (ν) e a difusividade térmica (κ), permanecem constantes [1]

Estamos agora em condições de introduzir as equações fundamentais simplificadas que descrevem o fenómeno da convecção. A equação da continuidade expressa a conservação da massa num fluido e é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

Para um fluido incompressível não há variação da densidade no tempo e no espaço, e a equação de continuidade é reduzida à condição de solenoidalidade.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

A primeira lei da termodinâmica afirma que a energia é conservada, pode ser convertida mas nunca pode ser criada nem destruída. Com base neste princípio escreve-se a equação da energia num sistema é definida como

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' = \kappa \nabla^2 T',$$

Nestas condições a equação do movimento, ou Navier-Stokes, tem a seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \alpha T' \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p',$$

com $T' = (T - T_0)$. Esta é uma expressão matemática da segunda lei de Newton no contexto da dinâmica dos fluidos.

Para simplificar a notação procede-se à eliminação dos apóstrofos nas variáveis e assume-se a forma vetorial da aceleração da gravidade como $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = -g \mathbf{e}_3$. Com estas simplificações, as equações de movimento e energia passam a ter a seguinte forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + g \alpha T \mathbf{e}_3.$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - (\mathbf{v} \cdot \nabla) T.$$

Estas duas últimas equações representam o sistema dimensional que governa a convecção térmica sob a aproximação de Boussinesq.

2.1.1 Equações governantes da convecção de Boussinesq com rotação

Consideremos um fluido condutor em convecção num plano horizontal que gira em torno de um eixo vertical com uma velocidade angular constante Ω , o sistema de equações é derivado da formulação da formulação de Boussinesq, com a inclusão dos efeitos da rotação. Ao adotar um referencial que roda com o fluido, surgem duas forças adicionais que atuam sobre o fluido: a força de Coriolis e a força centrífuga.

Estas são incorporadas na equação de Navier-Stokes, que passa a assumir a seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g\alpha T \mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2,$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade, ν a viscosidade cinemática, g a aceleração da gravidade, α o coeficiente de dilatação térmica, T a temperatura, p a pressão, ρ_0 a densidade de referência, e $\mathbf{e}_3$ o vetor unitário na direção vertical. O termo $2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ representa a força de Coriolis, enquanto o termo $\frac{1}{2} \nabla |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2$ corresponde à força centrífuga.

2.1.1 Adimensionalização das equações

Para facilitar a análise do sistema e reduzir o número de parâmetros, é conveniente reformular as equações num formato adimensional. Para tal, introduzem-se escalas características adequadas ao problema: a altura da camada de fluido como escala de comprimento d , o tempo de difusão térmica vertical como escala temporal, isto é, o tempo característico que a difusividade térmica κ demora para difundir uma variação térmica ao longo da escala de comprimento d e a diferença de temperatura entre as fronteiras como escala de temperatura.

Estas representam-se por:

$$\mathbf{x} = d\mathbf{x}', \quad t = \frac{d^2}{\kappa}t', \quad \mathbf{v} = \frac{\kappa}{d}\mathbf{v}', \quad T = \delta T T', \quad p = \frac{\rho_0 \kappa^2}{d^2}p'.$$

Para simplificar a notação, omitem-se a partir deste ponto os apóstrofes. Utilizando as escalas definidas, obtêm-se assim as seguintes equações:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - (\mathbf{v} \cdot \nabla)T,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + P \text{Re} T \mathbf{e}_3 + P \sqrt{\text{Ta}} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla \left(p - \frac{1}{8} \text{Ta} P^2 |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}|^2 \right).$$

Para além do número de Rayleigh (R), outros parâmetros adimensionais desempenham um papel fundamental na caracterização da convecção térmica em fluidos. Nomeadamente o número de Prandtl (P) e o número de Taylor (Ta) que está relacionado com o número de Ekman (Ek), conforme indicado. Estes são definidos como:

$$P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{Ta} = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}, \quad \text{Ek} = \frac{\nu}{2\Omega d^2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}},$$

onde ν é a viscosidade cinemática e κ a difusividade térmica do fluido. Este número representa a razão entre a difusão de quantidade de movimento e a difusão de calor. Valores baixos de Pr indicam que o calor se difunde mais rapidamente do que o momento, enquanto valores elevados indicam que a difusão do momento é dominante.

Outros parâmetros frequentemente utilizados são o número de Reynolds (Re), Rossby (Ro) and Grasshof (Gr), definidos por:

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu}, \quad \text{Ro} = \sqrt{\frac{R}{P \text{Ta}}}, \quad \text{Gr} = \frac{g \alpha \delta T d^3}{\nu^2} = \frac{R}{P}.$$

A identidade vetorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

permite substituir o termo convectivo não-linear por:

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \left(\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right).$$

O gradiente de $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ pode ser absorvido na pressão, originando a pressão modificada:

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{8} \text{Ta} P^2 |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}|^2.$$

A equação de Navier-Stokes pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P R T \mathbf{e}_3 + P \sqrt{\text{Ta}} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla \tilde{p}.$$

2.1.2 Escoamentos convectivos numa camada plana com rotação

Nas condições anteriormente descritas, considera-se um fluido confinado entre duas placas situadas em $x_3 = 0$ e $x_3 = 1$, de modo que a distância entre elas é $d = 1$. O sistema é uniformemente aquecido pela base e encontra-se em rotação com velocidade angular constante Ω . A força da gravidade atua na direção $-\mathbf{e}_3$. Nessas condições, o movimento do fluido é governado pelas equações de Boussinesq apresentadas acima.

Impõe-se temperaturas constantes nas extremidades e que a temperatura na placa inferior seja superior à da placa superior, podemos por isso escrever

$$T(x, t)|_{x_3=0} = T_1, \quad T(x, t)|_{x_3=1} = T_2, \quad T_1 > T_2.$$

Seja $\theta(\mathbf{x}, t)$ a função auxiliar definida como a diferença entre o campo de temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ e o perfil estacionário puramente difusivo, dado por um gradiente linear entre as temperaturas de fronteira. Assim, $\theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - (T_1 + (T_2 - T_1)x_3)$. A introdução desta variável permite reescrever as equações governantes do movimento e da transferência de calor numa forma equivalente, mas mais conveniente para a análise. A equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P R \theta \mathbf{e}_3 + P \sqrt{\text{Ta}} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 - \nabla p, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta + v_3, \quad (2.2)$$

onde v_3 denota a terceira componente do campo de velocidades incompressível $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Para fins computacionais consideramos o domínio do fluido tridimensional

$$D = [0, L] \times [0, L] \times [0, 1],$$

onde L representa a dimensão horizontal do domínio.

2.1.3 Condições fronteira

Para que as equações que regem o sistema sejam bem definidas é necessário impor condições de fronteira adequadas à velocidade e à temperatura do fluido nas camadas inferior $x_3 = 0$ e superior $x_3 = 1$, sendo por isso d definido anteriormente igual a 1. Estas superfícies são assumidas como rígidas e impermeáveis, não permitindo deformações nem passagem de fluido. As condições de fronteira impostas ao campo de velocidades e temperatura podem assumir diferentes formas, consoante o modelo físico considerado para o sistema. Habitualmente, são adotadas duas condições principais nas fronteiras horizontais:

- **Condição de aderência total (*no-slip*):** impõe que o fluido não deslize ao longo da superfície de fronteira, ou seja, todas as componentes da velocidade devem anular-se nessa região, temos por isso:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{em } x_3 = 0 \text{ e } x_3 = 1.$$

- **Condição de esforço tangencial nulo (*stress-free*):** o fluido pode deslizar livremente ao longo da fronteira, desde que o esforço tangencial seja nulo. Esta condição traduz-se em:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = v_3 = 0, \quad \text{em } x_3 = 0 \text{ e } x_3 = 1.$$

Também se consideram dois tipos principais de condições térmicas nas fronteiras:

- **Fronteiras isotérmicas:** ambas mantidas a temperatura constante:

$$T = \text{constante} \Rightarrow \theta = 0, \quad \text{em } x_3 = 0 \text{ e } x_3 = 1.$$

- **Fronteiras isoladas:** não há fluxo de calor através da fronteira, o que corresponde a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0, \quad \text{em } x_3 = 0 \text{ e } x_3 = 1.$$

Nesta dissertação, assumem-se fronteiras livres *free-free*, isto é, ambas as superfícies horizontais obedecem à condição de esforço tangencial nulo, e isotérmicas com temperaturas fixas e diferentes nos limites superior e inferior, o que cria o gradiente térmico responsável pela convecção. Assume-se periodicidade nas direções horizontais x_1 e x_2 , com período L , ou seja:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{v}(x_1 + mL, x_2 + nL, x_3),$$

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1 + mL, x_2 + nL, x_3),$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Além disso, impõem-se condições de média nula para a velocidade e a temperatura ao longo do domínio D :

$$\int_D \mathbf{v} \, dx = 0, \quad \int_D T \, dx = 0.$$

Capítulo 3.

Métodos Espetrais

A resolução analítica das equações diferenciais associadas à convecção de Rayleigh-Bénard é geralmente bastante complexa. Por isso torna-se necessário recorrer a métodos numéricos, nomeadamente métodos espectrais [18, 19]. A ideia deste método consiste em escrever a solução da equação diferencial como uma soma de funções base previamente definidas. Uma das principais vantagens dos métodos espectrais é a sua elevada precisão. Os métodos espectrais inserem-se numa classe mais geral chamada métodos dos resíduos ponderados [20], as aproximações são feitas através da expansão de uma série truncada de termos o que dá origem a um resíduo que se pretende minimizar. Esta aproximação é feita através do produto escalar que nos garante que o resíduo médio ponderado no domínio que estamos a analisar é minimizado. O principal objetivo da utilização dos métodos espectrais consiste em aproximar uma função real de variável real, $u(x)$, definida no intervalo $[a, b]$. Para tal, procura-se determinar a aproximação $u_N(x)$ da forma

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \varphi_k(x),$$

onde $\{\varphi_k(x)\}$ representa o conjunto de funções base escolhidas, que satisfazem as condições fronteira, e $\hat{u}_k$ são os coeficientes (de Fourier) de aproximação. Pretendemos encontrar a combinação linear que melhor aproxima a função $u(x)$ no intervalo considerado, minimizando o erro de aproximação. Esta minimização pode ser feita através do método de Galerkin que define a média dos resíduos como sendo zero, ou através do método de colocação que define o resíduo como sendo exatamente zero nos pontos de colocação. Dependendo do tipo de equação, das

condições de fronteira e da natureza da base escolhida, podem aplicar-se diferentes estratégias para tratar o resíduo. Nesta dissertação, serão utilizados o método de Galerkin e o método de colocação, por serem os mais adequados às condições e características do modelo.

Método de Galerkin

No método de Galerkin, as funções base utilizadas são escolhidas de forma a satisfazerem as condições de fronteira homogêneas associadas ao problema. Este método minimiza o erro impondo que o resíduo $R_N(x)$ seja ortogonal às funções base $\varphi_j(x)$, para $j = 0, \dots, N$, ou seja,

$$\int_a^b R_N(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, N,$$

onde $R_N(x)$ representa o resíduo entre a solução aproximada e a equação original. No entanto, a aplicação computacional desta abordagem é muitas vezes inviável, por isso utiliza-se uma abordagem discreta, os coeficientes são obtidos a partir da aproximação nos pontos de colocação.

Método da Colocação

No método da colocação, a solução aproximada é construída de forma a anular o resíduo em $N+1$ pontos do intervalo $[a, b]$, designados por pontos de colocação: $R_N(x_j) = 0$, $j = 0, \dots, N$. As funções base são escolhidas de modo a satisfazerem as condições de fronteira impostas.

3.1 Séries de Fourier

Para problemas periódicos com período L , o método de Fourier utiliza uma base de funções trigonométricas, por isso a função $u(x)$ é aproximada através da seguinte série

$$u_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_k e^{ikx},$$

com $i^2 = -1$. Esta expansão contém $2K+1$ coeficientes complexos que têm de ser determinados. Os coeficientes de Fourier são dados pela expressão

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-ikx} dx.$$

No caso da função $u(x)$ ser real, tem-se que os coeficientes de Fourier simétricos $\hat{u}_k$ e $\hat{u}_{-k}$ (associados às exponenciais complexas e^{ikx} e e^{-ikx} , respetivamente) possuem uma relação de conjugação complexa. Isto é, $\hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}_k}$. Esta propriedade é conhecida como simetria Hermítica. Neste caso a série de Fourier é dada por ($\alpha = \frac{2\pi}{L}$):

$$\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(\alpha k x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin(\alpha k x) .$$

Sendo os coeficientes de Fourier $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k \in \mathbb{R}$ dados por:

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) dx \quad (3.1)$$

$$\tilde{a}_k = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \cos(\alpha k x) dx \quad , \quad k > 0 \quad (3.2)$$

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin(\alpha k x) dx, \quad k > 0 \quad (3.3)$$

3.2 Série de Fourier Discreta

Na prática, é necessário truncar a série de Fourier apresentada a um número finito de termos para facilitar a resolução numérica. A série de Fourier truncada consiste em aproximar a função $u(x)$ por uma soma finita de termos, dada por

$$u^N(x) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}_k e^{\alpha i k x} .$$

Associado à série de Fourier truncada temos um erro que será limitado pela magnitude dos módulos truncados, que é dado por:

$$\int_0^L (u - u^N)^2 dx = L \sum_{|k| > N/2} |\hat{u}_k|^2 .$$

O método utilizado para aproximar integrais é a regra dos trapézios composta:

$$\int_0^L f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)] ,$$

onde $x_j = \frac{L}{N}j$, com $j = 0, 1, \dots, N-1$ e $h = \frac{L}{N}$, podemos aproximar os coeficientes de Fourier $\tilde{u}_k$ definidos por

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-ikx} dx.$$

No entanto, no caso periódico, a função é avaliada em pontos equidistantes e sabemos que $f(a) = f(b)$. Nestas condições, podemos escrever a quadratura correspondente como:

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j),$$

a qual é exata para polinómios trigonométricos da forma $f(x) = e^{i\ell x}$, com $|\ell| < N$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Aplicando esta quadratura à integral que define os coeficientes de Fourier, obtemos a seguinte aproximação discreta:

$$\tilde{u}_k \approx \hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k j / N}, \quad u_j = u(x_j).$$

Contudo, esta fórmula não é exata para os modos de alta frequência $k = \pm N/2$, correspondentes à frequência de Nyquist. De facto, para $u(x) = e^{\pm i N x / 2}$, a integral contínua anula-se:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{\pm i N x / 2} dx = 0,$$

mas a soma discreta assume valor diferente de zero:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\pm 2\pi i j / 2} = 1.$$

Assim, o modo $k = \pm N/2$ não pode ser representado corretamente pela fórmula de quadratura.

Para evitar este problema definimos

$$\hat{u}_{\pm \frac{N}{2}} = 0.$$

3.2.1 Transformações de Seno e Cosseno

A expansão de funções em séries trigonométricas é uma ferramenta fundamental na análise espectral e na resolução de equações diferenciais parciais. Dependendo do tipo de condição de fronteira imposta, diferentes bases ortogonais são utilizadas. Para funções que satisfazem condições de Dirichlet homogêneas, isto é, que se anulam nas extremidades do intervalo, $u(0) = u(1) = 0$, a expansão em senos é a mais adequada. A função $u(x)$ definida no intervalo $[0, 1]$ pode então ser expandida como:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \sin(\pi k x), \quad \text{com} \quad \hat{u}_k = 2 \int_0^1 u(x) \sin(\pi k x) dx.$$

Por outro lado, quando as condições de fronteira são do tipo Neumann homogêneo, ou seja, a derivada da função é nula nas extremidades

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0.$$

utiliza-se uma expansão em cossenos, dada por:

$$u(x) = \frac{\tilde{u}_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \cos(\pi k x), \quad \text{com} \quad \tilde{u}_k = 2 \int_0^1 u(x) \cos(\pi k x) dx.$$

Os coeficientes $\hat{u}_k$ são obtidos através da transformada direta de Fourier.

$$\hat{u}_k = \frac{2}{N} \left(\frac{u_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j \cos\left(\frac{\pi k j}{N}\right) + \frac{u_N}{2} (-1)^k \right), \quad k = 0, \dots, N$$

A reconstrução dos valores u_j a partir dos coeficientes $\hat{u}_k$ é feita utilizando a transformada inversa de Fourier discreta:

$$u_j = \frac{1}{2} \hat{u}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{u}_k \cos\left(\frac{\pi k j}{N}\right) + \frac{1}{2} \hat{u}_N (-1)^j, \quad j = 0, \dots, N.$$

3.2.2 Tratamento de Termos Não Lineares e o Problema de *Aliasing*

O *aliasing* é um fenómeno que ocorre quando a frequência de amostragem é muito baixa para representar as variações do sinal, levando a uma representação distorcida. Ou seja, numa

grelha diferentes modos (ou frequências) podem tornar-se indistinguíveis num conjunto finito de pontos discretos, x_j :

$$e^{i(k+Nl)x_j} = e^{ikx_j}, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}.$$

Isto significa que, na prática, não é possível distinguir no espaço discreto um modo de frequência k de outro com frequência $k + Nl$, levando à sobreposição de informação. Os coeficientes espectrais discretos obtidos pela transformada de Fourier discreta contêm então contribuições de vários modos do sinal original:

$$\hat{u}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{k+Nl} = \tilde{u}_k + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \tilde{u}_{k+Nl}.$$

O termo $\tilde{u}_k$ corresponde à frequência que se pretende representar, enquanto a soma dos restantes termos constitui o erro de *aliasing*. Este erro resulta da interferência causada por frequências mais altas que não podem ser distinguidas na grelha e que acabam por aparecer como se fossem frequências mais baixas dentro do intervalo que a grelha consegue representar.

Este fenómeno está relacionado com o teorema da amostragem de *Nyquist-Shannon*, que estabelece que a frequência de amostragem que pode ser representada sem ambiguidade deve ser pelo menos o dobro da componente de frequência mais elevada do sinal, ou seja, numa grelha com N pontos é dada por $k_{\max} = N/2$. Frequências superiores a este valor não podem ser distinguidas das suas correspondentes mais baixas e são projetadas para dentro do intervalo de frequências que a grelha consegue representar, contaminando o espectro. Este fenómeno é especialmente problemático em simulações espectrais, onde a precisão da representação das frequências é essencial.

O problema de *aliasing* torna-se particularmente relevante no contexto de equações diferenciais não-lineares, como aquelas que descrevem fenómenos de convecção. Nestes casos, os termos não-lineares envolvem produtos de funções no domínio físico, como $u(x)v(x)$, que têm

a seguinte representação como uma série discreta de Fourier:

$$u_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} \hat{u}_k e^{\alpha i k x}, \quad v_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} \hat{v}_k e^{\alpha i k x_j}.$$

Assim, os coeficientes de Fourier da função são dados por:

$$s_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| < \frac{N}{2}-1}} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad |k| < \frac{N}{2}.$$

Esta convolução pode produzir modos com números de onda superiores a $k_{\max}$, gerando *aliasing* caso não seja aplicada uma técnica adequada de remoção ou atenuação desse efeito. Para acelerar o cálculo dos coeficientes espectrais, utiliza-se o algoritmo Transformada Rápida de Fourier (FFT), que reduz a complexidade de $\mathcal{O}(N^2)$ para $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, permitindo calcular:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_j e^{-\alpha i k x_j}, \quad |k| \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Contudo, este procedimento pode introduzir *aliasing*, pois não elimina explicitamente as contribuições de modos não representáveis. Para evitar este problema, é comum aplicar técnicas de *dealiasing*, como a regra dos 2/3, onde se anulam os coeficientes de Fourier com $|k| > N/3$ antes da multiplicação, assegurando assim que os produtos não geram componentes fora do intervalo representável.

3.3 Aplicação à Convecção de Rayleigh-Bénard

3.3.1 Expansões de Fourier para os Campos de Velocidade e Temperatura na Camada

Plana

Para a resolução do problema convectivo num sistema em geometria de camada plana procuramos soluções na forma dos campos de velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e temperatura $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, expressas por séries de Fourier tridimensionais truncadas. Esta abordagem permite representar numericamente as variáveis dinâmicas do sistema, respeitando tanto as condições de contorno

como a periodicidade imposta no plano horizontal.

É imposto que a temperatura θ se anula nas fronteiras horizontais (condição de Dirichlet), por isso pode ser expandida em x_3 através de uma série de senos truncada da ordem $k_3 = \frac{N}{2}$:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{k_3=0}^{N/2} \hat{\theta}_{k_3}(x_1, x_2, t) \sin(\pi k_3 x_3).$$

Admitindo que a função θ é periódica nas direções x_1 e x_2 , cada coeficiente $\hat{\theta}_{k_3}(x_1, x_2, t)$ pode ser expandido numa série de Fourier complexa bidimensional. Isso conduz à seguinte representação:

$$\theta(x, t) = \sum_{k_1=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_3=0}^{N/2} \hat{\theta}_{k_1, k_2, k_3}(t) \sin(\pi k_3 x_3) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (3.4)$$

O campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$ descreve o escoamento do fluido na camada plana. É assumido que este satisfaz as condições de fronteira *stress-free* nas fronteiras horizontais.

A expansão adequada para este caso é:

$$\mathbf{v}(x, t) = \sum_{k_1=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_2=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{k_3=0}^{N/2} \begin{pmatrix} \hat{v}_k^1(t) \cos(\pi k_3 x_3) \\ \hat{v}_k^2(t) \cos(\pi k_3 x_3) \\ \hat{v}_k^3(t) \sin(\pi k_3 x_3) \end{pmatrix} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \quad (3.5)$$

com $k = (k_1, k_2, k_3)$ e $\hat{\mathbf{v}}_k = (\hat{v}_k^1(t), \hat{v}_k^2(t), \hat{v}_k^3(t))$.

Operador	Equação em espaço de Fourier	Base em x_3
$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}$	$i\alpha k_1 \hat{\mathbf{v}}_{1k} + i\alpha k_2 \hat{\mathbf{v}}_{2k}$	(cos, cos, sin)
$\nabla^2 \mathbf{v}$	$- \tilde{k} ^2 \hat{\mathbf{v}}_k = -(\alpha^2 k_1^2 + \alpha^2 k_2^2 + \pi^2 k_3^2) \hat{\mathbf{v}}_k$	(cos, cos, sin)
$\nabla \times \mathbf{v}$	$\begin{pmatrix} i\alpha k_2 \hat{\mathbf{v}}_{3k} + \pi k_3 \hat{\mathbf{v}}_{2k} \\ -\pi k_3 \hat{\mathbf{v}}_{1k} - i\alpha k_1 \hat{\mathbf{v}}_{3k} \\ i\alpha k_1 \hat{\mathbf{v}}_{2k} - i\alpha k_2 \hat{\mathbf{v}}_{1k} \end{pmatrix}$	(sin, sin, cos)
$\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3$	$\mathbf{v}_k \times \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{2k} \\ -\hat{\mathbf{v}}_{1k} \\ 0 \end{pmatrix}$	(cos, cos, sin)
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$	$\frac{d\hat{\mathbf{v}}_k}{dt}$	(cos, cos, sin)

Tabela 3.1: Termos lineares em espaço de Fourier para um campo de velocidade incompressível.

3.4 Discretização no tempo

Após a substituição das séries truncadas de Fourier dos campos $\theta(x, t)$ e $\mathbf{v}(x, t)$, dadas pelas expressões (3.4) e (3.5), respetivamente, na equação de Navier–Stokes (2.1), obtém-se o sistema final de equações diferenciais a resolver. A dedução detalhada deste procedimento encontra-se em Chertovskih [21], pelo que aqui se apresenta apenas o resultado final, que servirá de base à discretização temporal e ao estudo numérico subsequente:

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}_k}{dt} = \mathcal{P} \left(-P|\tilde{k}|^2 \hat{\mathbf{v}}_k + PR \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\theta}_k \end{pmatrix} + P\sqrt{Ta} \begin{pmatrix} \hat{v}_k^2 \\ -\hat{v}_k^1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \mathcal{P}(\mathbf{v} \times (\widehat{\nabla \times \mathbf{v}}))_k, \quad (3.6)$$

$$\frac{d\hat{\theta}_k}{dt} = -|\tilde{k}|^2 \hat{\theta}_k - ((\widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla} \theta))_k + \hat{v}_{3,k}. \quad (3.7)$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais resultante da discretização espacial do problema, dado em (3.6) e (3.7), foi utilizado o RK4. Este método, amplamente reconhecido pela sua robustez e precisão, permite calcular valores aproximados das variáveis de estado com um erro global da ordem de $O(h^4)$, onde h representa o passo constante de integração. No caso em

estudo, após a discretização espacial, o sistema obtido não depende explicitamente do tempo, sendo por isso um sistema autónomo de equações diferenciais. Assim, a descrição do método pode ser feita de forma genérica considerando um sistema autónomo da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

O método de Runge–Kutta de quarta ordem [22], utilizado neste trabalho, calcula um valor aproximado y_{n+1} a partir do valor atual y_n , utilizando um passo constante h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n), \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(y_n + h k_3\right), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

3.5 Simetrias

Os atratores do sistema convectivo são classificados com base nas simetrias que possuem. Estas correspondem a transformações, como rotações, reflexões ou translações, que podem ser aplicadas às variáveis do mesmo sem alterar as equações que o descrevem, mantendo assim a validade das soluções. Estas propriedades são fundamentais para compreender, classificar e prever o comportamento das soluções. Deste modo, as simetrias têm um papel crucial na análise do comportamento do sistema. Em particular, a ação do grupo de simetrias dos atratores que perdem estabilidade no ponto de bifurcação sobre o espaço próprio central (associado aos valores próprios que atravessam o eixo imaginário nesse ponto) permite identificar e caracterizar as bifurcações que ocorrem em sistemas hidrodinâmicos.

Como apresentado por Chertovskih [21], seja Γ um grupo de transformações espaciais. Diz-se que Γ é o grupo de simetrias da equação

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = F\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

se, para qualquer solução $\mathbf{y}$ e qualquer simetria $\gamma \in \Gamma$, a função $\gamma\mathbf{y}$ também for solução da equação. Esta condição é equivalente à seguinte condição de equivariância para $\mathcal{F}$:

$$F\gamma\mathbf{y} = \gamma F\mathbf{y}, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

O subgrupo de isotopia para uma solução $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ é definido por

$$\Gamma_{\mathbf{z}} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\mathbf{z} = \mathbf{z}\}.$$

Para a convecção de Boussinesq numa camada plana sem rotação ($Ta = 0$), o grupo de simetrias espaciais do sistema é $D_4 \times T^2 \times \mathbb{Z}_2$. A ação das simetrias sobre a velocidade do fluido é descrita pelas transformações do grupo de 8 elementos da malha quadrada, D_4 , que inclui rotações e reflexões relativamente a planos de simetria e à diagonal da rede, bem como a identidade $S_0 = e$ que deixa o sistema inalterado. As simetrias aqui consideradas são as mesmas do sistema investigado por Podvigina [23].

As rotações do sistema são as seguintes: rotação no sentido horário em torno do eixo vertical num ângulo de $\pi/2$:

$$\begin{aligned} s_1: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_2(x_2, L - x_1, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_1(x_2, L - x_1, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(x_2, L - x_1, x_3). \end{aligned}$$

rotação no sentido horário em torno do eixo vertical num ângulo de π :

$$\begin{aligned} s_2: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_1(L - x_1, L - x_2, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_2(L - x_1, L - x_2, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(L - x_1, L - x_2, x_3). \end{aligned}$$

rotação no sentido horário em torno do eixo vertical num ângulo de $3\pi/2$:

$$\begin{aligned} s_3: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_2(L - x_2, x_1, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_1(L - x_2, x_1, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(L - x_2, x_1, x_3). \end{aligned}$$

As reflexões do sistema incluem:

reflexão relativamente ao plano $x_2 = L/2$:

$$\begin{aligned} s_4: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_1(x_1, L - x_2, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_2(x_1, L - x_2, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(x_1, L - x_2, x_3). \end{aligned}$$

reflexão relativamente ao plano $x_1 = L/2$:

$$\begin{aligned} s_5: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_1(L - x_1, x_2, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_2(L - x_1, x_2, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(L - x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

reflexão relativamente ao plano $x_1 = x_2$:

$$\begin{aligned} s_6: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_2(x_2, x_1, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_1(x_2, x_1, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(x_2, x_1, x_3). \end{aligned}$$

reflexão relativamente ao plano $x_1 + x_2 = L$:

$$\begin{aligned} s_7: \quad v_1(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_2(L - x_2, L - x_1, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3) &\mapsto -v_1(L - x_2, L - x_1, x_3), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_3(L - x_2, L - x_1, x_3). \end{aligned}$$

O grupo T_{x_1} e T_{x_2} corresponde às translações contínuas nas direções x_1 e x_2 , respetivamente.

Estes podem ser definidos por:

$$\gamma_{\alpha}^{x_1} : \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{v}(x_1 + \alpha, x_2, x_3),$$

$$\gamma_{\alpha}^{x_2} : \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{v}(x_1, x_2 + \alpha, x_3).$$

As translações contínuas $\gamma_{\alpha}^{x_1}$ e $\gamma_{\alpha}^{x_2}$ representam deslocamentos do campo de velocidade nas direções x_1 e x_2 , com $0 \leq \alpha < L$. Devido à periodicidade do sistema com período L , uma translação de comprimento $\alpha = L$ corresponde à identidade, ou seja, $\gamma_L^{x_1} = \gamma_L^{x_2} = e$.

O grupo de translações ao longo da diagonal é representado por $T_{x_1 x_2}$:

$$\gamma_{\alpha}^{x_1 x_2} : \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{v}(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, x_3).$$

Por fim, o grupo $\mathbb{Z}_2$ corresponde à reflexão em torno do plano médio horizontal, de modo que:

$$r : v_1(x_1, x_2, x_3) \mapsto v_1(x_1, x_2, 1 - x_3),$$

$$v_2(x_1, x_2, x_3) \mapsto v_2(x_1, x_2, 1 - x_3),$$

$$v_3(x_1, x_2, x_3) \mapsto -v_3(x_1, x_2, 1 - x_3).$$

Quando a rotação está presente no sistema, a força de Coriolis quebra as simetrias de reflexão, reduzindo o grupo de simetrias para $\mathbb{Z}_4 \times T^2 \times \mathbb{Z}_2$. Esta ação provoca uma inclinação ou deformação dos rolos convectivos, que deixam de ser simétricos relativamente aos planos de reflexão, mantendo apenas as simetrias de rotação e as translações periódicas nas direções horizontais.

Para estados estacionários encontrados computacionalmente, a simetria γ é verificada através do critério

$$r_{\gamma}(f) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} |f - \gamma f|^2 d\mathbf{x},$$

considerando que f possui a simetria se $r_{\gamma}(f) < 10^{-16}$. A imposição de simetrias específicas é realizada no espaço físico através da média

$$f_s = \frac{f + \gamma f}{2},$$

assegurando que o campo f_s assim definido possua a simetria γ . Simetrias de ordem superior são impostas de forma análoga, através de combinações adequadas das transformações correspondentes.

Capítulo 4.

Atratores do sistema convectivo

4.1 Convecção de Rayleigh-Bénard sem rotação

O estudo dos atratores do sistema de convecção é importante para compreender a dinâmica não linear e os padrões de escoamento. Neste contexto, Podvigina [24] apresenta uma análise da geração de campo magnético por fluxos conectivos para três números de Prandtl: $P = 0.3, 1$ e 6.8 . Foi considerada a convecção de Rayleigh-Bénard com a aproximação de Boussinesq assumindo condições de fronteira stress-free nas fronteiras horizontais e periodicidade nas direções x e y , sendo utilizada uma células conectiva de dimensão $L = 4$.

Nesta dissertação será considerado o número de Prandtl $P = 6.8$ (correspondente à água) foram identificados os atratores hidrodinâmicos associados ao sistema convectivo e analisada a sua evolução com o aumento do número de Rayleigh. No intervalo $0 \leq R \leq 20000$ foram observados diversos atratores, a seguir, descrevem-se as principais soluções encontradas.

O sistema permanece inicialmente no estado estacionário trivial (S_0), correspondente ao fluido em repouso. Este estado perde estabilidade em $R = 657.5$, dando origem a um atrator de rolos pequenos estacionários (denominados small rolls, SR), com eixos alinhados ao longo das diagonais das células de periodicidade. Estes rolos são periódicos nas direções horizontais com período $2\sqrt{2}$, e mantêm-se estáveis até aproximadamente $R = 2000$.

Para valores superiores de R , podem coexistir dois outros ramos de soluções estacionárias. O primeiro é o ramo dos rolos grandes (large rolls, LR), com eixos paralelos ao eixo x ou y , e período 4 na direção ortogonal ao eixo do rolo. Estes rolos bifurcam de S_0 em $R = 761$ como soluções instáveis, mas tornam-se estáveis para valores mais elevados de R . Em determinado ponto, os LR perdem estabilidade através de uma bifurcação de Hopf, originando uma onda

viajante estável (TW).

O segundo é o ramo do estado estacionário (S_1), este possui o grupo de simetrias do quadrado, o grupo diedral D_4 .

Estado Estacionário (S_1): O segundo tipo de estado estacionário estável coexistente é denominado S_1 . Este estado estacionário possui o grupo de simetria D_4 do quadrado de periodicidade, sendo caracterizado por células de convecção em que o fluido sobe no centro e desce junto às fronteiras. O ramo S_1 aparentemente surge numa bifurcação sela-nó. Quando S_1 perde a estabilidade, uma órbita periódica P_1 surge numa bifurcação de Hopf.

Onda Viajante (*Travelling Wave*) (TW): Emergindo do ramo LR, a forma de TW pode ser descrita como uma deformação sinusoidal dos rolos, que viaja ao longo do eixo do rolo. Este escoamento é periódico no tempo num referencial em repouso e estacionário num referencial em movimento.

Onda Viajante Modulada (*Modulated Travelling Wave*) (MTW): Para os maiores valores de R , os atratores TW dão origem a uma onda viajante modulada (MTW), que tem duas frequências básicas e que permanece estável para $R < 20.000$.

Órbitas Periódicas (P_1, P_2, P_3):

- P_1 emerge de S_1 numa bifurcação de Hopf, possuindo uma simetria de grupo de órbita Z_2 . Um ramo chamado Q_1 , com duas frequências temporais, surge de uma subsequente bifurcação de Hopf de P_1 .
- P_2 bifurca de LR juntamente com TW; inicialmente é instável. No entanto, torna-se estável num pequeno intervalo de R : ($8905 < R < 8915$).
- P_2 subsequentemente bifurca para P_3 , que tem um grupo de simetrias menor. Ambos os escoamentos, P_2 e P_3 , têm a forma de rolos deformados, cuja forma muda periodicamente no tempo.

Resumindo, foi encontrada uma sequência de bifurcações de atratores hidrodinâmicos de estados estacionários simples (rolos e quadrados) para escoamentos mais complexos dependentes do tempo (ondas viajantes, ondas viajantes moduladas e várias órbitas periódicas e quase-periódicas) à medida que o número de Rayleigh aumentava.

Tipo	Intervalo de existência (Ta)	Energia cinética, E_v	Simetrias
LR	0	76.5	$s_4, s_5, \gamma^x, r\gamma_{L/2}^y$
	[1, 30]	75.8–55.0	$s_2, \gamma^x, r\gamma_{L/2}^y$
SR	0	82.0	$s_6, s_7, \gamma^{xy}, r\gamma_{L/2}^x$
	[1, 180]	81.7–25.8	$s_2, \gamma^{xy}, r\gamma_{L/2}^x$
TR	0	47.1	$s_4, s_5, \gamma^x, r\gamma_{L/4}^y$
	[1, 420]	47.0–0.1	$s_2, \gamma^x, r\gamma_{L/4}^y$
S	0	71.0	s_1, s_4
	[1, 20]	70.3–57.5	s_1

Tabela 4.1: Atratores encontrados numericamente para convecção hidrodinâmica com e sem rotação.

4.2 Convecção de Rayleigh-Bénard com rotação

Foram utilizados os atratores para $L = 4$, $P = 6.8$, $R = 1200$, $Ta = 0$ (ou seja, LR, SR e S_1) como condição inicial para as nossas simulações de um sistema em rotação (para números de Taylor de $Ta = 1$ a $Ta = 500$). As regiões de estabilidade (no parâmetro Ta) dos atratores foram exploradas pela técnica de continuação em parâmetro: os cálculos são feitos para condições iniciais que são um ponto (no espaço de fase) no atrator para um Ta próximo. A distância entre valores de Ta próximos eram de 5. Além disso, para alguns valores de Ta , foram realizadas simulações com condições iniciais “aleatórias”, compreendendo campos com coeficientes de Fourier gerados pseudoaleatoriamente e um espectro com decaimento exponencial, com energias cinéticas e térmicas iniciais pequenas ou grandes, a fim de verificar se múltiplos atratores coexistem para o valor do número de Taylor em consideração.

Os cálculos foram realizados com uma resolução espacial de $31 \times 31 \times 16$ harmónicos espaciais com dealiasing (ou seja, a avaliação dos termos não lineares foi realizada numa malha de $48 \times 48 \times 25$ pontos no espaço físico).

Os resultados, resumidos na Figura 4.1 e na Tabela 4.1, demonstram de forma inequívoca que a rotação tem um efeito supressor sobre a convecção; à medida que Ta aumenta, a energia cinética de todos os atratores diminui.

Com base nos resultados numéricos obtidos, foi identificada uma nova família de atratores, designada por Rolos muito pequenos (*Tiny Rolls*) (TR), que se revelou estável num vasto inter-

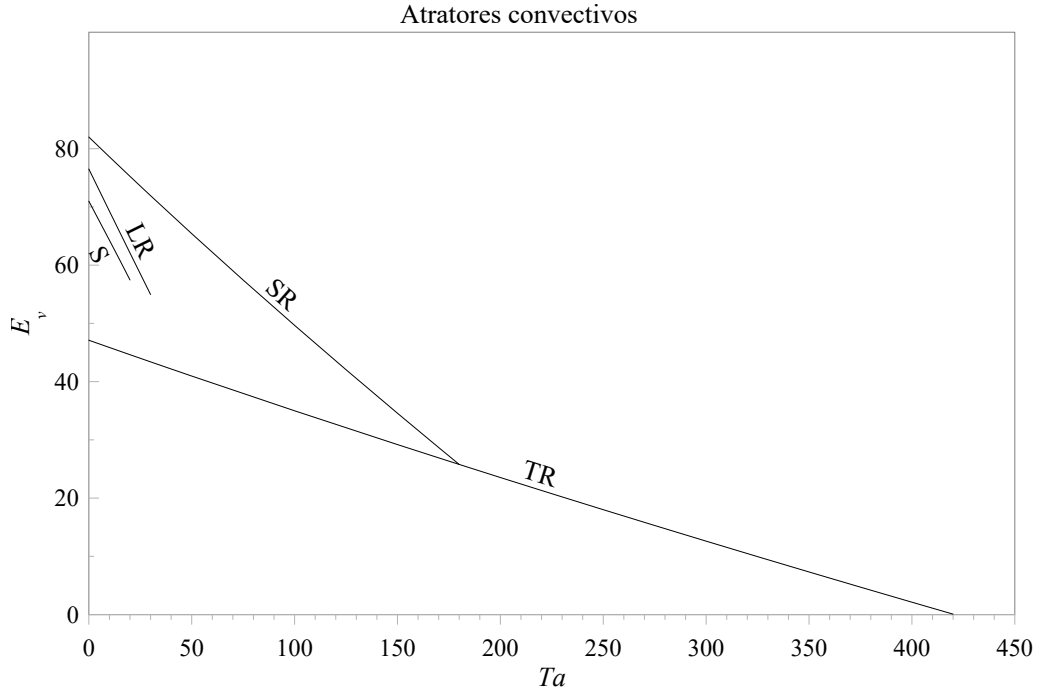


Figura 4.1: Energia cinética E_v (eixo vertical) dos atratores hidrodinâmicos para $0 \leq Ta \leq 420$ (eixo horizontal). A denominação dos atratores é explicada no texto (ver também a Tabela 4.1).

valo de Ta . É de salientar que este ramo de soluções não foi reportado no trabalho de Podvigina [24] para o caso não rotativo, constituindo um dos novos achados desta investigação. A descoberta deste atrator expande o conhecimento sobre a dinâmica do sistema, revelando uma maior complexidade de padrões convectivos possíveis mesmo na ausência de rotação.

Os diferentes atratores exibem sensibilidades distintas à rotação. Os atratores de rolos largos (LR) e quadrados (S) mostraram-se menos robustos, existindo apenas em intervalos estreitos de rotação fraca, até $Ta = 30$ e $Ta = 20$, respetivamente. O atrator de rolos pequenos (SR) revelou-se mais estável, persistindo até $Ta = 180$. Notavelmente, o ramo de rolos TR, também estável no caso não rotativo, demonstrou ser o mais resiliente, mantendo a sua estabilidade até um valor elevado de $Ta = 420$, momento em que a sua energia cinética se torna praticamente nula. Em todos os casos, a força de Coriolis induzida pela rotação quebra as simetrias de reflexão presentes no caso não rotativo, resultando em padrões de escoamento torcidos e inclinados, como ilustrado na Figura 4.2.

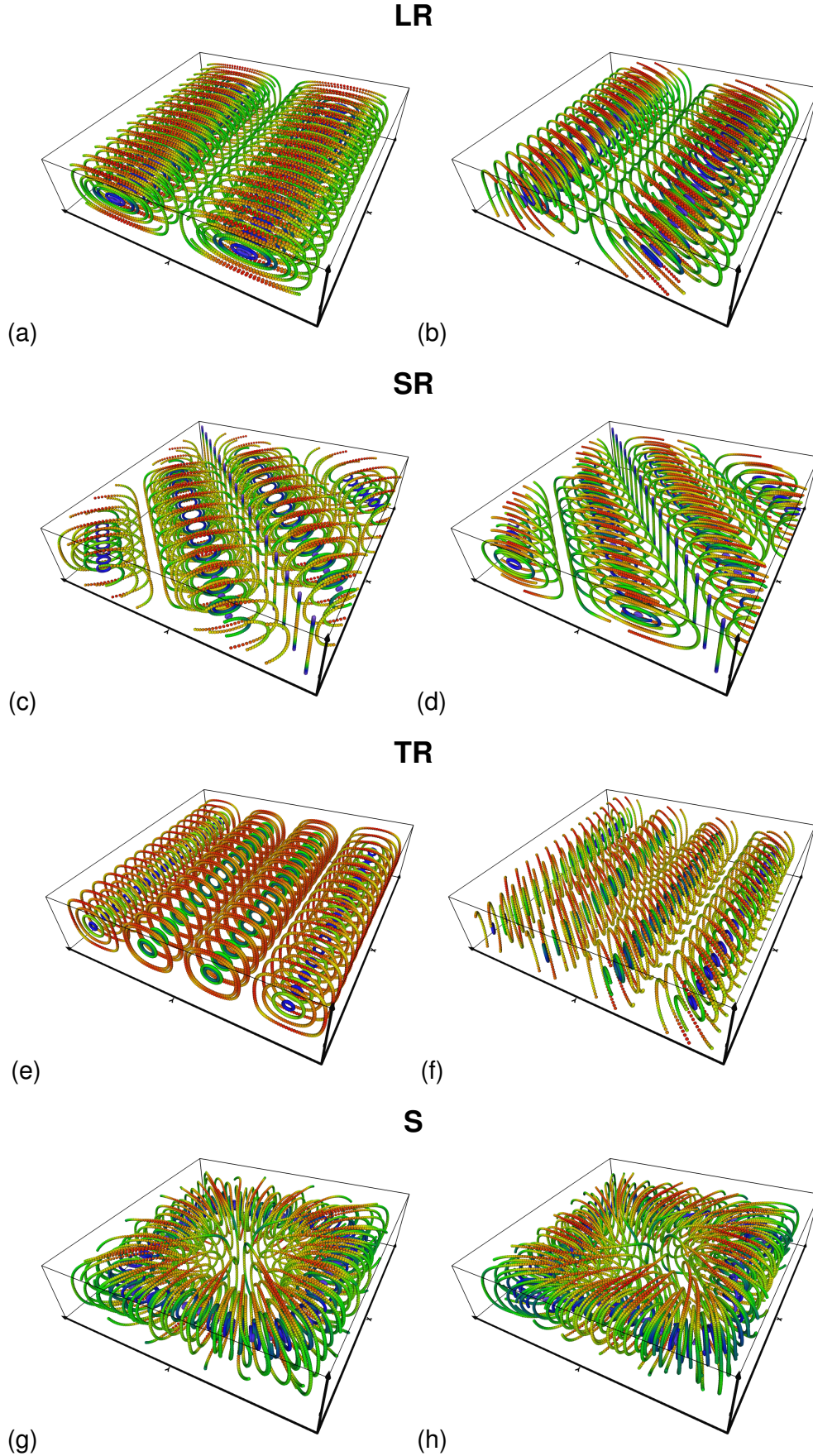


Figura 4.2: Trajetórias de partículas nos atratores convectivos LR: $Ta = 0$ (a), $Ta = 30$ (b); SR: $Ta = 0$ (c), $Ta = 180$ (d); TR: $Ta = 0$ (e), $Ta = 300$ (f) e S: $Ta = 0$ (g), $Ta = 20$ (h). As cores correspondem à amplitude da velocidade de movimento na escala de cores “rainbow” (roxo – lento, vermelho – rápido).

Capítulo 5.

Conclusão

Nesta dissertação, foi realizado um estudo numérico sobre a influência da rotação, quantificada pelo número de Taylor (Ta), na dinâmica da convecção de Rayleigh-Bénard numa camada fluida horizontal. O objetivo principal consistiu em investigar como os atratores convectivos e a sua estabilidade são alterados pela introdução da força de Coriolis. Para tal, recorreu-se a uma abordagem numérica baseada em métodos espectrais, que se revelaram eficazes para a resolução das equações que governam o sistema. A evolução temporal do sistema foi calculada através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

O ponto de partida da análise foram os atratores hidrodinâmicos conhecidos para o caso não rotativo ($Ta = 0$), nomeadamente os rolos grandes (LR), os rolos pequenos (SR) e o estado estacionário com simetria quadrada (S), para um número de Prandtl de $P = 6.8$ e um número de Rayleigh de $R = 1200$. Utilizando estes estados como condições iniciais, aplicou-se uma técnica de continuação em parâmetro para explorar a sua evolução e estabilidade à medida que o número de Taylor era incrementado.

Os resultados obtidos demonstram de forma clara que a rotação exerce um efeito estabilizador sobre o sistema, tendendo a suprimir a intensidade do movimento convectivo, o que se manifesta numa diminuição geral da energia cinética dos atratores com o aumento de Ta . Verificou-se que os diferentes padrões de escoamento exibem sensibilidades distintas à rotação. Os atratores LR e S mostraram-se menos robustos, perdendo a sua estabilidade para valores relativamente baixos de Ta ($Ta \leq 30$). Em contrapartida, o padrão de rolos pequenos (SR) revelou-se mais resiliente, persistindo até $Ta = 180$. O atrator mais estável em regimes de rotação forte foi o de rolos muito pequenos (TR), que se manteve como solução estável até $Ta = 420$. A rotação também quebra as simetrias de reflexão do sistema, resultando em estruturas de escoamento

helicoidais, como visualizado nas trajetórias das partículas.

Este trabalho confirma a importância fundamental da rotação na dinâmica de fluidos e na seleção de padrões em sistemas convectivos, com implicações diretas em fenómenos geofísicos e astrofísicos. Como perspetiva de trabalho futuro, seria interessante aprofundar a análise das bifurcações que marcam os limites de estabilidade dos atratores identificados. Adicionalmente, a exploração de uma gama mais vasta de parâmetros, como números de Rayleigh e Prandtl mais elevados, poderia revelar dinâmicas ainda mais complexas e regimes de escoamento turbulentos, cujo comportamento sob o efeito da rotação permanece uma área de investigação ativa e desafiadora.

Bibliografia

- [1] Alexander V Getling. *Rayleigh-Bénard convection: structures and dynamics*, volume 11. World Scientific, 1998.
- [2] Gerald Schubert, Donald L. Turcotte, and Peter Olson. *Mantle Convection in the Earth and Planets*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. ISBN 978-0521798365.
- [3] Michael J. Thompson and Jørgen Christensen-Dalsgaard, editors. *Stellar Astrophysical Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. ISBN 978-0-521-81809-4.
- [4] John G. Collier and John R. Thome. *Convective Boiling and Condensation*. Oxford University Press, Oxford, 3rd edition, 1994. ISBN 978-0-19-856296-2.
- [5] J.I. Yano. *Geophysical Convection Dynamics*. Elsevier, 2022. ISBN 9780323912136.
- [6] Keith Moffatt and Emmanuel Dormy. *Self-Exciting Fluid Dynamos*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2019.
- [7] Gerald R. North and Stephen P. Walsh. *Earth's Climate: The Ocean-Atmosphere Interaction*. American Geophysical Union, Washington, DC, 2006. ISBN 978-0-87590-991-6.
- [8] Chris A. Jones. Planetary magnetic fields and dynamos. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43:583–614, 2011. doi: 10.1146/annurev-fluid-122109-160707.
- [9] Steven A. Balbus. Instabilities, turbulence, and angular momentum transport in accretion disks. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41(1):555–597, 2003. doi: 10.1146/annurev.astro.41.081401.155207.
- [10] William M. Kays, Alexander L. London, and Ramesh K. Shah. *Compact Heat Exchangers*. Krieger Publishing Company, Malabar, FL, 3rd edition, 2012. ISBN 978-1-57524-232-2.
- [11] Marcello Lappa. *Thermal Convection*. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. ISBN 9780470749982.

- [12] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation, 2013.
- [13] Uriel Frisch. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [14] BM Boubnov and Georgi S Golitsyn. *Convection in rotating fluids*, volume 29. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1987. ISBN 978-0-387-96387-7.
- [16] R. Chertovskih, S.M.A. Gama, O. Podvigina, and V. Zeligovsky. Dependence of magnetic field generation by thermal convection on the rotation rate: A case study. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(13):1188–1209, 2010. ISSN 0167-2789. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.03.008>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278910001028>.
- [17] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2004.
- [18] David Gottlieb and Steven A Orszag. *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*. SIAM, 1977.
- [19] Roger Peyret. *Spectral methods for incompressible viscous flow*, volume 148. Springer, 2002.
- [20] Bruce A Finlayson and Laurence Edward Scriven. The method of weighted residuals—a review. *Appl. Mech. Rev*, 19(9):735–748, 1966.
- [21] Roman Alexandrovich Chertovskih. Thermal convection and magnetic field generation by conducting fluid flows in rotating layer. Doutoramento em matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2010.
- [22] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 10 edition, 2015.

- [23] OM Podvigina. Magnetic field generation by convective flows in a plane layer. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 50(4):639–652, 2006.
- [24] OM Podvigina. Magnetic field generation by convective flows in a plane layer: the dependence on the Prandtl numbers. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 102(4): 409–433, 2008.