Promovendo a capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas: O papel dos critérios de avaliação

Inês Joana Vieira Luís

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025

Promovendo a capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas: O papel dos critérios de avaliação

Inês Joana Vieira Luís

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

2025

Orientadora

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Chegar a este ponto do meu percurso académico é o resultado de muita dedicação, mas também do apoio de várias pessoas que me acompanharam ao longo deste processo.

À minha orientadora, professora doutora Rosa Antónia Ferreira, agradeço a orientação, as críticas construtivas e a paciência. O seu acompanhamento foi essencial para que eu conseguisse organizar ideias, superar dificuldades e crescer como estudante e professora.

À professora cooperante e a todos os docentes que encontrei ao longo da prática de ensino supervisionada, agradeço pela disponibilidade, pelas partilhas e pelo exemplo de dedicação à profissão, que me inspiraram a crescer enquanto professora.

Aos alunos que participaram no estudo, um agradecimento especial: a vossa colaboração, empenho e abertura permitiram-me recolher dados fundamentais e refletir sobre a aprendizagem em contexto real. Cada interação realizada contribuiu para este trabalho e para a minha bagagem enquanto docente.

Aos meus colegas de estágio, obrigada pelo companheirismo, apoio e partilha de experiências ao longo do ano de estágio.

À minha família, namorado e amigos (de infância, da faculdade e da tuna), agradeço o apoio constante, a paciência e o incentivo que me permitiram chegar até aqui. Obrigada por estarem presentes nos momentos mais difíceis, por me ouvirem, animarem e motivarem, e por me ajudarem a acreditar que conseguia concluir este longo e desafiante percurso. Um agradecimento especial à minha psicóloga, pelo trabalho e acompanhamento indispensável na organização e discernimento necessários ao longo deste processo.

Resumo

No contexto da Prática de Ensino Supervisionada (PES), verificou-se que os alunos apresentavam dificuldades em exprimir o pensamento ao resolver problemas de matemática, mesmo quando os sabiam resolver. Além disso, os alunos valorizavam mais os resultados do que o processo para os obter, comprometendo a comunicação escrita, um aspeto central nas orientações curriculares de matemática para o ensino secundário e nas avaliações externas, onde os alunos facilmente perdem pontos na classificação por não exprimirem a forma como pensaram para resolver uma tarefa. Surge, assim, este trabalho, com o objetivo de compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação da resolução de problemas e os integram no desenvolvimento desta capacidade matemática transversal e na melhoria da forma de exprimir o seu pensamento na resolução de problemas. Foram definidas duas questões de investigação: 1) Como é que os alunos se apropriam e utilizam os critérios de avaliação da resolução de problemas para melhorar o seu desempenho e a explicitação do processo de resolução? 2) Que papel desempenhou o feedback dado pela professora na evolução dos alunos na sua capacidade de resolver problemas e de exprimir o processo de resolução? Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, envolveu alunos de duas turmas do 12.º ano, no ano-letivo 2021/2022, no contexto de uma intervenção pedagógica promotora de uma avaliação reguladora das aprendizagens. Esta intervenção baseou-se em: 1) utilização, pelos alunos, de critérios de avaliação no processo de autoavaliação da resolução de três problemas de modelação matemática; e 2) recurso ao feedback escrito da professora para apoiar a melhoria da forma como os alunos exprimem o pensamento ao resolver problemas. Os dados foram recolhidos através das produções escritas dos alunos ao longo da intervenção pedagógica e de entrevistas semiestruturadas a um conjunto restrito de alunos, selecionados por conveniência. Os resultados sugerem que os critérios de avaliação e o feedback escrito contribuíram para uma melhoria na explicitação do pensamento, com evolução mais evidente ao longo dos três problemas propostos nos alunos que se apropriaram dos critérios de avaliação e integraram o feedback na melhoria das suas produções. As entrevistas revelaram diferentes formas de apropriação dos critérios de avaliação, evidenciando o potencial da avaliação reguladora para promover a autorregulação da aprendizagem.

Palavras-chave: Comunicação matemática escrita; resolução de problemas; critérios de avaliação; autoavaliação; *feedback*.

Abstract

During my student teaching practicum, it became evident that many students struggled to express their thinking when solving problems, often communicating poorly even when they knew how to solve them. Moreover, students tended to value the result more than the process used to reach it, which compromises written communication, an important aspect both in the national mathematics curriculum for high school and in external assessments situations, where students often lose marks for not explaining their thinking behind their solutions. This study aims to understand how students appropriate the assessment criteria for problem solving and integrate them in the development of this transversal mathematical competence and in improving the expression of their thinking in problem resolution. Two research questions were defined: (1) How do students appropriate and use assessment criteria for problem-solving to improve their performance and the explicitness of their problem-solving process? (2) What role did the teacher's feedback play in students' development of their problem-solving skills and in expressing their problem-solving process? This qualitative and interpretative study involved students from two 12th grade classes, during the 2021/2022 school year, within the context of a pedagogical intervention designed to promote formative assessment. The intervention was based on: (1) students' use of assessment criteria in the self-evaluation of the resolutions of three mathematical modelling problems; and (2) the use of teacher-written feedback to support the improvement of how students express their thinking when solving problems. Data were collected through the analysis of students' written work and semi-structured interviews with a small convenience sample of students. The results suggest that the use of assessment criteria and written feedback contributed to improving students' ability to explain their thinking. A progression was observed across the three problems, more clearly among students who appropriated the criteria and integrated the feedback provided. The interviews revealed different ways of appropriation of formative assessment practices, showing that some students began revising their work based on the criteria and feedback, while others continued to focus mainly on the final answer. These findings highlight the potential of formative assessment to foster self-regulated learning and to develop transversal mathematical competencies such as the communication of thinking.

Keywords: Written mathematical communication; problem solving; assessment criteria; self-assessment; feedback.

Índice

Lista de Figuras vii

Lista de Abreviaturas x

1. Introdução 1

2. Enquadramento Teórico 6

2.1. Resolução de Problemas 6

2.2. Comunicação matemática escrita focada na expressão do pensamento 14

2.3. Feedback escrito, utilização dos critérios de avaliação e sua apropriação através da autoavaliação 20

3. Intervenção Pedagógica 34

3.1. Contexto de Intervenção Pedagógica 34

3.1.1. Caracterização da Escola 34

3.1.2. Caracterização das Turmas 36

3.2. Descrição da Intervenção Pedagógica 37

4. Metodologia de Investigação 45

4.1. Opções Metodológicas 45

4.2. Procedimentos de Recolha de Dados 46

4.2.1. Observação Participante 46

4.2.2. Recolha Documental 47

4.2.3. Entrevistas 48

4.3. Procedimentos de Análise de Dados 49

4.4. Participantes no Estudo 51

4.5. Procedimentos Éticos 53

5. Apresentação de Resultados 55

5.1. Análise dos resultados das produções escritas 55

5.1.1. *Problema do café* 55

5.1.2. Problema 1 – *Bolsa de valores* 61

5.1.3. Problema 2 – *Problema das marés* 74

5.1.4. Problema 3 – *Problema da canalização* 89
5.2. Análise dos resultados das entrevistas 98
5.2.1. Júlia 99
5.2.2. Joana 106
5.2.3. Cátia 115
6. Conclusões e Recomendações 125
6.1. Síntese do estudo realizado 125
6.2. Apropriação e utilização dos critérios de avaliação na melhoria do desempenho e da expressão do pensamento do processo de resolução 126
6.3. O papel do feedback da professora na evolução da capacidade de resolução de problemas e de expressão do pensamento matemático 131
6.4. Limitações do estudo e implicações para a prática profissional e investigação futura 135
Referências Bibliográficas 140
Anexos 148
Anexo I – *Problema do café* 148
Anexo II – Problema 1 – *Bolsa de valores* 149
Anexo III – Problema 2 – *Problema das marés* 150
Anexo IV – Problema 3 – *Problema da canalização* 151
Anexo V – Guião de Entrevistas 152
Anexo VI – Critérios de avaliação 153

Lista de Figuras

Figura 1 - Categorias e níveis de desempenho para análise da comunicação matemática escrita (Pires et al., 2018, p. 29) 27

Figura 2 - Critérios de avaliação/autoavaliação de relatório escrito com alunos do 3.º ciclo em matemática (Semana & Santos, 2008, anexo 2, pp. 17-18) 29

Figura 3 - Critérios de autoavaliação (Santos & Gomes, 2006, pp. 47-48) 31

Figura 4 - Critérios de avaliação da resolução de problemas (Costa, 2021, p. 21) 33

Figura 5 - Critérios de avaliação usados na intervenção pedagógica 38

Figura 6 - Critérios de Avaliação utilizados na disciplina anteriormente num outro instrumento de avaliação 39

Figura 7 - Esquema ilustrativo do processo implementado, transversal aos problemas 1, 2 e 3. 42

Figura 8 - Esquema temporal da implementação da intervenção pedagógica. 44

Figura 9 - Breve caracterização dos alunos selecionados como informantes privilegiados. 52

Figura 10 - Enunciado do *Problema do café*. 56

Figura 11 - Resolução Exemplo 1 - *Problema do café* 57

Figura 12 - Resolução Exemplo 2 - *Problema do café* 57

Figura 13 - Resolução Exemplo 3 - *Problema do café* 58

Figura 14 - Pontos fortes e pontos fracos das resoluções exemplo da turma 1 59

Figura 15 - Pontos fortes e pontos fracos das resoluções exemplo da turma 2 59

Figura 16 – Enunciado do Problema 1 – *Bolsa de valores* 61

Figura 17 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Marta 62

Figura 18 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Marta 64

Figura 19 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Salvador 65

Figura 20 - Fase 1 do Problema 1 - autoavaliação de Salvador 66

Figura 21 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Salvador 67

Figura 22 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Frederico 68

Figura 23 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Frederico 69

Figura 24 - Fase 1 do Problema 1 – resolução de Simão 70

Figura 25 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Simão 71

Figura 26 – Gráfico de evolução dos alunos - Problema 1 - *Bolsa de valores* 72

Figura 27 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 1 - *Bolsa de valores* 73

Figura 28 - Enunciado Problema 2 – *Problema das marés* 74

Figura 29 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Martim 75

Figura 30 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Martim 78

Figura 31 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Francisca 79

Figura 32 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Francisca 81

Figura 33 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Alice 83

Figura 34 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Alice 85

Figura 35 - Fase 2 do Problema 2 - autoavaliação de Alice 86

Figura 36 – Gráfico de evolução dos alunos – Problema 2 - *Problema das marés* 87

Figura 37 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 2 - *Problema das marés* 88

Figura 38 - Enunciado *Problema da canalização* 89

Figura 39 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Afonso 90

Figura 40 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Afonso 91

Figura 41 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Alexandre 92

Figura 42 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Alexandre 93

Figura 43 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Joaquim 95

Figura 44 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Joaquim 96

Figura 45 - Gráfico de evolução dos alunos – Problema 3 - *Problema da canalização* 97

Figura 46 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 3 - *Problema da canalização* 97

Lista de Abreviaturas

PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
PISA	PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MEC	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
OCDE	ORGANIZAÇÃO PARA A COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÓMICO
UNESCO	UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
GAVE	GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
AE	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS
GTM	GRUPO DE TRABALHO EM MATEMÁTICA
ME-DGIDC	DIREÇÃO-GERAL DE INOVAÇÃO E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

1. Introdução

A arte de resolver problemas fica subestimada quando resumida ao resultado; compreender profundamente o processo e ser capaz de comunicá-lo são igualmente fundamentais. Como salientam Kilpatrick e Guimarães (2014): "… nós compreendemos a matemática melhor quando a vemos nascer, quer seguindo os passos das descobertas históricas, quer envolvendo-nos nós próprios em descobertas" (p. 8). Ao longo da observação e participação em momentos de ensino-aprendizagem, no contexto da minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), notei que os alunos, muitas vezes, têm dificuldade em exprimir o seu pensamento de forma escrita quando resolvem tarefas matemáticas com um maior grau de desafio, como é o caso dos problemas. Por vezes, até sabem como resolvê-los, mas exprimem mal ou de forma incompleta o seu processo de raciocínio. Para além disso, não têm como prioridade a transmissão das suas ideias, dando ênfase apenas aos resultados obtidos na resolução das tarefas, comparando-os, muitas vezes, com os dos colegas ou com as soluções (quando disponíveis). Essa comparação regula apenas a resposta obtida como certa ou errada, o que nem sempre cumpre os critérios de avaliação previamente estabelecidos para a classificação das tarefas. Geralmente estes critérios focam também os passos intermédios do raciocínio e a estratégia realizada, como é o caso dos critérios de avaliação dos exames nacionais.

Entendo, tal como referem Jacinto e outros autores (Jacinto et al., 2018; Kilpatrick & Guimarães, 2014; Onuchic & Allevato, 2011; Pólya, 1995) que resolver um problema engloba não só encontrar a solução como saber exprimir de forma detalhada e clara os processos de resolução: "resolver um problema incorpora tanto a resposta solicitada como o reportar do processo seguido na sua obtenção" (Jacinto et al., 2018, p. 77).

Neste sentido, a resolução de problemas e a comunicação matemática escrita são duas capacidades transversais cujo grau de relação é elevado. Por esse motivo, também acho importante que os critérios de avaliação da resolução de problemas incluam aspetos relacionados com a comunicação matemática, nomeadamente, com o exprimir do processo de resolução (Martins & Martinho, 2023). Os critérios de avaliação são frequentemente usados pelo professor para classificar trabalhos dos alunos (Barney et al., 2023). No entanto, considero que essa forma não é suficiente para ajudar o aluno a valorizar o processo de resolução. Tal como defendido por Santos (2017) e Semana e Santos (2017), penso que a apropriação dos critérios de avaliação por parte dos alunos, bem como o feedback escrito dado pelo professor, promovem a aprendizagem com

compreensão e a autorregulação dos alunos. A autoavaliação promove uma autorregulação mais eficaz, permitindo que os alunos utilizem os critérios de avaliação para percecionar o seu desempenho na resolução das tarefas, nomeadamente através da autocorreção e da autocrítica, com base nesses critérios, o que contribui para melhorar as suas resoluções (Semana & Santos, 2017).

Os *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2017) destacam oito práticas essenciais para o ensino da matemática, das quais três estão relacionadas com a comunicação matemática: promover um discurso matemático significativo, fazer perguntas pertinentes e utilizar representações matemáticas de forma integrada. De modo particular, as representações matemáticas são essenciais para que os alunos possam externalizar a forma como pensam e, portanto, são essenciais para uma boa comunicação matemática escrita. Ao mobilizarem diferentes formas de representação como tabelas, gráficos, esquemas, expressões algébricas ou linguagem natural, os alunos desenvolvem a capacidade de organizar, clarificar e explicar o seu raciocínio. Assim, a comunicação escrita torna-se não apenas um meio de expressão, mas também uma ferramenta de aprendizagem e de construção de significado matemático (Amado, 2022; Martins & Martinho, 2021; Ponte & Quaresma, 2020; Serrazina, 2018).

Nas *Aprendizagens Essenciais 12.º Ano Matemática A - Ensino Secundário* (ME, 2018) que orientaram o ensino da disciplina de Matemática A até ao ano letivo 2023/2024, definiram-se conhecimentos, capacidades e atitudes sobre os quais deve incidir o ensino da matemática. A resolução de problemas aparece como um tema transversal a todos os domínios e ainda, juntamente com o raciocínio e a comunicação matemática, deve ser parte integrante da resolução das tarefas que forem propostas aos alunos. Considero que esta proposta pode ser mais uma evidência de que é essencial valorizar o processo de resolução de problemas, pois devem ser equiparados aos conteúdos segundos as AE (2018):

> Estes objetivos essenciais, definidos em termos de capacidades e de atitudes, devem ser valorizados com igual importância relativamente aos conteúdos e favorecem uma aproximação aos conceitos matemáticos Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. (ME, 2018, p. 2)

Esta afirmação remete-nos para o *Perfil Dos Alunos À Saída Da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017), onde a *Informação e Comunicação* e o *Raciocínio e Resolução de Problemas* são duas das dez áreas de competências

consideradas como sendo de aquisição indispensável no final do Ensino Secundário (escolaridade obrigatória).

Atualmente, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário*, em vigor no 10.º ano a partir de 2024/2025 (Carvalho e Silva et al., 2023), definiram-se nove ideias chave entre as quais, *resolução de problemas, modelação e conexões*, que reforçam a importância de dar sentido à matemática e enfatizar a modelação e as aplicações. A comunicação matemática é outra das ideias chave, com o objetivo de comunicar o pensamento na resolução de tarefas recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado. Outra ideia chave apresentada foca a avaliação para a aprendizagem, pelo que se deve privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem.

A avaliação formativa assume um papel central na promoção da aprendizagem, destacando-se o feedback como uma das suas principais vertentes. O feedback escrito, enquanto estratégia formativa, ajuda os alunos a refletirem sobre as suas produções, a melhorarem-nas e a comunicarem com maior clareza o seu raciocínio (Fernandes, 2006; Santos, 2022; Terroso et al., 2018). A eficácia do feedback depende da sua clareza, pertinência e adequação ao perfil do aluno, devendo ser orientado para o processo e para a autorregulação da aprendizagem (Hattie & Timperley, 2007; Santos, 2018). Quando associado a momentos de reformulação, como tarefas resolvidas em duas fases, o feedback fomenta a autoavaliação e o desenvolvimento da autonomia dos alunos (Semana & Santos, 2008, 2017). Para tal, é fundamental que o aluno compreenda o que se espera numa tarefa e tenha oportunidade para pensar e reformular as suas ideias. Neste sentido, o feedback não só informa o aluno sobre o seu desempenho, mas também constitui um meio privilegiado para desenvolver capacidades autorregulatórias, ao valorizar o erro como ponto de partida para o progresso (Santos & Gomes, 2006).

As atuais orientações curriculares, quer portuguesas quer internacionais, reforçam a comunicação matemática (escrita) associada à resolução de problemas, bem como a avaliação formativa, na qual o feedback escrito associado à apropriação de critérios de avaliação num contexto de autoavaliação, promovem uma aprendizagem crítica e reflexiva (Canavarro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023; NCTM, 2007, 2017). Neste sentido, surge este trabalho, no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

O presente trabalho tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação da resolução de problemas e os integram no desenvolvimento desta capacidade matemática transversal e na melhoria da forma de exprimir o seu pensamento na resolução de problemas. Foi desenvolvida uma intervenção pedagógica com duas turmas do 12.º ano de escolaridade, em 2021/2022, em torno de três problemas de modelação e procurou-se responder às seguintes questões de investigação: 1) Como é que os alunos se apropriam e utilizam os critérios de avaliação da resolução de problemas para melhorar o seu desempenho e a explicitação do processo de resolução? 2) Que papel desempenhou o feedback dado pela professora na evolução dos alunos na sua capacidade de resolver problemas e de exprimir o processo de resolução?

Este trabalho está organizado em seis capítulos. Este primeiro capítulo introdutório, explica as motivações para a realização do trabalho, apresenta o objetivo e as questões de investigação a que se procurou responder ao longo do trabalho. Por fim, expõe a organização do relatório com um breve sumário de cada capítulo.

No segundo capítulo, Enquadramento Teórico, é feita uma breve revisão da literatura sobre os temas em estudo nesta investigação, que se pretende que sustente os capítulos seguintes. Para isso, apresentam-se os seguintes temas: i) resolução de problemas; ii) comunicação matemática escrita focada na expressão do pensamento; e iii) feedback escrito, utilização dos critérios de avaliação e sua apropriação através da autoavaliação.

Na Intervenção Pedagógica, terceiro capítulo, é explicado o contexto em que a investigação decorre, com a caracterização da escola e das turmas que estiveram envolvidas neste trabalho. Também se apresenta e se explica os critérios de avaliação elaborados e utilizados neste trabalho, descreve-se todo o processo da intervenção pedagógica com os alunos e apresenta-se a planificação temporal das aulas lecionadas.

No capítulo da Metodologia de Investigação, quarto capítulo, defende-se as opções metodológicas tomadas, expõe-se os procedimentos utilizados para recolha e análise de dados, apresenta-se os participantes em estudo e explica-se os procedimentos éticos adotados.

O quinto capítulo, Apresentação de Resultados, apresenta os resultados obtidos, que são discutidos com base em evidências diversificadas de produções escritas dos alunos; por fim, analisa as entrevistas efetuadas com três informantes privilegiados.

As Conclusões e Recomendações, capítulo seis, contemplam uma síntese do estudo realizado, detalham as principais conclusões do estudo, orientadas pelas questões de investigação e discutidas tendo em conta o enquadramento teórico efetuado. Este capítulo engloba também uma parte mais reflexiva, que contém limitações do estudo, implicações para a prática profissional e sugestões de investigações que podem dar seguimento a este trabalho.

Por fim, encontram-se as Referências Bibliográficas utilizadas como suporte para a construção deste trabalho, bem como Anexos que englobam documentos de apoio: critérios de avaliação, enunciados dos problemas utilizados, e o guião das entrevistas.

2. Enquadramento Teórico

Este capítulo expõe os temas estudados nesta investigação, de forma a ser um suporte teórico para o estudo efetuado. Os três principais temas abordados são: i) resolução de problemas; ii) comunicação matemática escrita focada na expressão do pensamento; e iii) feedback escrito, utilização dos critérios de avaliação e sua apropriação através da autoavaliação. Este enquadramento teórico inclui também algumas orientações para o ensino da matemática sugeridas pela investigação consultada, até ao momento de realização deste trabalho, na área de estudo em questão.

2.1. Resolução de Problemas

Ao longo da vida, quanto mais forem os estímulos a que estamos expostos, mais serão as oportunidades de aprendizagem. Na matemática, um dos métodos para o incentivo ao apreço por esta disciplina é o desafio e o trabalho em torno de situações intrigantes, que não são simples, tendo em conta as capacidades matemáticas da pessoa (e.g., Fonseca, 2014; Jacinto & Carreira, 2012; Kilpatrick & Guimarães, 2014; Pólya, 1975). Existem vários tipos de tarefas que podem proporcionar aos alunos tais situações intrigantes. Os problemas são uma dessas tarefas.

De acordo com Ponte (2005), um problema é uma tarefa com um grau de desafio matemático considerado elevado (perceção que o aluno tem da dificuldade da tarefa) e com grau de estrutura fechado, isto é, identifica-se de forma clara o que é pedido e o que é dado. No entanto, a definição de problema não pode ser feita de forma igual para todos os alunos: para uns, uma dada tarefa pode ser um mero exercício e, para outros, a mesma tarefa pode ser um problema, dependendo da idade do aluno, dos seus conhecimentos e das capacidades matemáticas trabalhadas ao longo do seu percurso escolar. A complexidade de um problema interfere com a disposição de um aluno para o resolver. Se um problema for demasiado complexo, isso pode desmotivar o aluno e fazê-lo desistir de tentar resolver.

> É de notar que um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem lhe pegar). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema mas sim um exercício. (Ponte, 2005, p. 3)

No que diz respeito à duração de realização de uma tarefa (outra dimensão considerada por Ponte (2005) para a caracterização das tarefas), os problemas, bem como as tarefas

de investigação e até as tarefas de exploração, enquadram-se nas tarefas de média duração (embora esta noção de média duração seja muito flexível). Por seu turno, os exercícios são tarefas de curta duração e os projetos tarefas de longa duração (Ponte, 2005). Quer isto dizer que os problemas não se resolvem de forma rápida (basta pensar que é preciso compreender a situação e encontrar uma estratégia que permita responder ao que é pedido, o que exige algum tempo), mas não são também, tipicamente, tarefas que demorem muito tempo a serem realizadas.

Quanto ao contexto (outra dimensão considerada por Ponte (2005) para a caracterização de tarefas), cada tarefa pode ser formulada num contexto totalmente matemático, numa situação de realidade ou não se encontrar em nenhum desses dois extremos, ficando na dimensão de "semirrealidade". Os problemas podem ser formulados nos diferentes contextos referidos, apesar de ser vulgar que este tipo de tarefas seja apresentado aos alunos com um contexto de "semirrealidade", onde é apresentado ao aluno uma ou várias situações (aparentemente) reais cujas características específicas não são utilizadas ou relevantes para a resolução do problema. Os três contextos possíveis para uma tarefa têm igual relevância para a aprendizagem da matemática, sendo, por isso, importante diversificar ao máximo as tarefas propostas aos alunos, nos seus contextos de formulação, assim como na sua duração, grau de estrutura e nível de exigência cognitiva (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2012; Skovsmose, 2000).

As tarefas de modelação são tarefas com grau de desafio elevado e, dependendo da sua estrutura fechada ou aberta, podem ser problemas ou investigações. As tarefas de modelação têm um certo propósito, sempre com contexto de realidade (Ponte, 2005). Este trabalho não se focou propriamente na resolução de tarefas de modelação, mas as tarefas visadas pela intervenção pedagógica realizada (ver capítulo 3) foram problemas com características próximas de tarefas de modelação (Stein & Smith, 2009).

A resolução de problemas é uma atividade, que segundo Serrazina e Ribeiro (2012), se constitui numa situação de aprendizagem. Nesse momento de aprendizagem, o aluno procura uma solução para o problema proposto, algo que não é de fácil obtenção, o que o leva a refletir, a questionar-se e a relacionar conteúdos em busca de uma ideia para a sua estratégia de resolução (Onuchic & Allevato, 2011; Serrazina & Ribeiro, 2012).

Os problemas ocupam um lugar importante no ensino da matemática, desde os seus primórdios. Mas é com Pólya (1975, 1981) que a resolução de problemas toma uma posição mais central no ensino da matemática (Ponte, 2005). Pólya apresentou um modelo de resolução de problemas que se desenrola em quatro fases.

A primeira fase do modelo de Pólya consiste em compreender o problema. Os alunos devem conseguir interpretar a situação apresentada no problema e retirar todos os dados do problema; devem ainda compreender o que se pretende com o problema, isto é, a que é que têm de dar resposta. Na segunda fase, surge a planificação da estratégia de resolução a adotar. É nesta fase que os alunos relacionam os dados do problema e/ou os seus conhecimentos, de modo a conceber um plano de resolução que seja eficaz. Segue-se a implementação da estratégia planificada – a terceira fase. Um dos desafios desta fase é não perder o foco do que é pedido no problema e é conveniente que se verifique regularmente cada passo do procedimento adotado. Na última fase, deve refletir-se sobre a resolução feita, de modo a ser possível a deteção de erros no processo de resolução e verificar (se possível) a solução, incluindo analisar se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema. Neste processo de análise, os alunos têm oportunidades para consolidar conhecimentos relativos aos conceitos ou processos envolvidos no problema e analisar o que pode ser melhorado na resolução que foi feita, retirando heurísticas para situações futuras (e.g., Jacinto & Carreira, 2012; Pólya, 1995; Ponte, 2005; Pontes, 2019).

O modelo de Pólya não pretende ser uma receita para a resolução de problemas. Não é um método linear, pois as fases não são necessariamente percorridas pela ordem em que estão apresentadas. Muitas vezes, por exemplo, ao conceber um plano de resolução, já se está a executar esse plano, pelo que as fases 2 e 3 são realizadas, em simultâneo. Ao proceder à implementação de um plano de resolução, acontece, frequentemente, chegar a um beco sem saída, ou porque os dados não foram corretamente relacionados, ou porque a estratégia concebida não foi apropriada. E isto obriga a voltar à primeira fase para reler o enunciado e pensar novamente numa estratégia para resolver a situação (e.g., Fonseca, 2014; Kilpatrick & Guimarães, 2014). No entanto, o modelo de Pólya ajuda os alunos a envolverem-se, de forma sistemática, na atividade de resolução de problemas e a tornarem-se melhores resolvedores de problemas (e.g., Kilpatrick & Guimarães, 2014; NCTM, 2007).

A resolução de problemas tem tido, ao longo da história do currículo português, diferentes ênfases. Um primeiro documento que deu importância explícita a esta capacidade foi *A renovação do currículo de matemática* (APM, 1988), que a apresentava como uma de três propostas: “valorizar objectivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática” (Ponte, 2003, p. 31). Este documento (APM, 1988) influenciou o programa de matemática para o ensino básico de 1991 e os programas do

ensino secundário que vigoravam na década de 90 do século passado. Em 1997, houve um reajustamento dos programas de matemática do ensino secundário, em que a capacidade de resolução de problemas foi reforçada, especialmente, em relação com as tecnologias. Em particular, a calculadora gráfica tornou-se obrigatória neste nível de ensino, o que permitiu o trabalho em torno de situações problemáticas mais complexas (Ponte, 2003).

Passados alguns anos, o conhecimento sobre o ensino da matemática foi evoluindo e um novo documento reforma a necessidade de uma visão mais global, de uma melhor interligação entre os três ciclos de ensino, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001). Este documento provoca algumas alterações aos objetivos definidos nos programas anteriores, nomeadamente no sentido de olhar a aprendizagem como o desenvolvimento de competências, isto é, de conhecimentos, capacidades e atitudes interligadas entre si (Guimarães, 2009).

Em 2003, o estudo PISA (Programme for International Student Assessment), desenvolvido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE), revelou que 25% dos alunos portugueses, jovens de 15 anos de idade, não atingem o nível 1 no seu desempenho na resolução de problemas, isto é, não conseguem interpretar os problemas de forma correta, nem procurar uma estratégia que utilize os processos adequados: "a maioria nem sequer pode ser classificada como 'solucionador de problemas básicos' no nível 1, que exige que os alunos realizem processos de resolução de problemas menos complexos" (OCDE, 2003, p. 32, tradução própria). Ora, isto denotou que era preciso mais investimento no desenvolvimento desta capacidade nos alunos. Por outro lado, sendo a resolução de problemas uma capacidade importante para o sucesso no mercado de trabalho e para o ingresso no ensino superior, os resultados do PISA (OCDE, 2003) indicavam que os alunos portugueses falhavam nesse objetivo. O relatório do PISA refere o pouco contacto dos alunos, durante o ensino básico, com problemas que os incentivem a interpretar situações e a procurar estratégias de resolução:

> Para além das competências relacionadas com partes específicas do currículo escolar, os alunos precisam de estar equipados com algumas competências gerais para resolver os desafios da vida. À medida que progridem para a idade adulta, precisam de aprender a ser capazes de completar não só exercícios previamente treinados, mas também de ser capazes de resolver problemas em situações desconhecidas, pensando de forma flexível e pragmática. (p. 30, tradução própria)

Tendo em conta estes resultados do PISA (OCDE, 2003), a evolução do ensino e os resultados do exame de 9.º ano de escolaridade, realizado em Portugal em 2005, o Ministério da Educação promoveu várias sessões de reflexão por parte dos professores, nas quais se analisaram o desempenho dos alunos e se propuseram estratégias de intervenção adequadas ao seu contexto (GAVE, 2006). A análise nacional dessas reflexões revelou que os professores apontaram como áreas prioritárias para melhoria "uma maior incidência na resolução de problemas, em geral (41%), e, em particular, incorporando situações da vida real (20%), e no desenvolvimento do raciocínio, em particular, de raciocínio demonstrativo (27%)" (GAVE, 2006, p. 17); "tecnologias de informação (27%) e de materiais manipuláveis (28%)" (p. 17). Estes resultados sustentam as recomendações para que o ensino da Matemática dê maior ênfase à capacidade matemática de resolução de problemas, incluindo problemas com contexto real e o recurso às tecnologias e a materiais manipuláveis para apoiar a aprendizagem dos conteúdos (e.g., Fonseca, 2014; Guimarães, 2009; Jacinto & Carreira, 2017).

Paralelamente, nasceu o "Plano de Acção para a Matemática" (PAM)[1] (ME, 2006) que teve como principal objetivo melhorar o ensino da matemática através de seis medidas: i) readaptação do programa de matemática do ensino básico; ii) disponibilização de recursos educativos; iii) avaliação dos manuais escolares; iv) equipas para o sucesso; v) reforço de formação contínua de professores; e vi) melhoramento da formação inicial de professores. No novo *Programa de matemática para o ensino básico* (Ponte et al., 2007) deu-se ênfase à comunicação matemática, raciocínio e resolução de problemas, como capacidades transversais com o objetivo de melhorar a aquisição de múltiplos conceitos e a interligação com contextos diversos (e.g., Fonseca, 2014; Guimarães, 2009; Jacinto & Carreira, 2017):

> (…) o programa assume a necessidade de se indicarem, para além dos temas matemáticos, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática – que devem merecer uma atenção permanente no ensino, apresentando-as de forma desenvolvida num espaço próprio, com a explicitação de objectivos gerais e específicos de aprendizagem relativos a cada uma dessas capacidades. (Ponte et al., 2007, p. 1)

Os programas de matemática para o ensino secundário que estavam em vigor, desde 1997, mantiveram-se sem alterações.

[1]Disponível em: https://www.dge.mec.pt/plano-de-acao-para-matematica

O estudo PISA 2012 (OCDE, 2012) realçou a evolução dos alunos portugueses que, pela primeira vez, ficaram acima da média na parte referente à resolução de problemas, sendo um dos países que mais melhorias apresentou entre 2003 e 2012 (e.g., Alvega, 2014; Jacinto & Carreira, 2017). Os resultados deste estudo realizado com alunos de 15 anos de idade enfatizaram a ideia de que, com a evolução rápida da tecnologia, no quotidiano, as tarefas manuais e rotineiras são cada vez menos solicitadas, ao inverso das tarefas que envolvem imprevistos que surgem vulgarmente (OCDE, 2012). Por isso, o ensino deveria procurar adaptar-se a essa realidade, nomeadamente recorrendo à resolução de problemas que invoca um pensamento flexível e criativo na escolha da estratégia a ser utilizada para concretizar a solução do problema, dificilmente previsível. Para além disso, salientou-se que, quando as tarefas têm um contexto de situações reais, tal é mais vantajoso para a evolução da capacidade de resolução de problemas (Alvega, 2014). Ainda assim, estes resultados podiam ser melhorados, para isso sugeriu-se: "desenvolver a perícia e a flexibilidade requeridas por problemas não rotineiros inclui expor os alunos a vários problemas da vida real" (Alvega, 2014, p. 15, referindo-se a OCDE, 2012) e, para sua implementação em sala de aula, recomendou-se incentivar os alunos a:

> refletir nas estratégias quando lidam com problemas relacionados com conteúdos específicos, expandido o seu repertório de princípios gerais; «quando os professores pedem aos alunos para descrever os passos que deram para resolver um problema, estimulam a sua metacognição que por sua vez melhora as capacidades gerais em resolução de problemas (Alvega, 2014, p. 16, referindo-se a OCDE, 2012)

Em 2013, o Ministério da Educação procedeu a uma revisão da organização curricular. Nessa revisão, implementou um novo programa de matemática do ensino básico (MEC, 2013) e, dois anos mais tarde, do ensino secundário (MEC, 2015). Cada um destes programas foi apresentado em simultâneo com um conjunto de metas curriculares que enfatizam a replicação de regras, algoritmos e procedimentos, previamente expostos e demonstrados pelo professor (e.g., Fonseca, 2014; Kilpatrick & Guimarães, 2014):

> A resolução de prolemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a selecção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (MEC, 2013, p. 5)

Apesar da ênfase das metas curriculares em procedimentos e algoritmos, a resolução de problemas requer a mobilização de um conjunto mais alargado de capacidades, nomeadamente a flexibilidade de pensamento e a utilização de representações múltiplas, cuja importância é amplamente reconhecida no desenvolvimento da compreensão matemática (Kilpatrick & Guimarães, 2014).

Este programa (MEC, 2013, 2015) veio contrariar recomendações para o ensino da matemática já de longa data. Silva, em 1965, já argumentava contra os prejuízos para a aprendizagem de uma visão como esta acerca do lugar da resolução de problemas no currículo: "habituando o aluno a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas essencialmente novos, comos os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente" (Silva, 1975, p. 13)

Em 2017, surgiu o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017), um documento que veio dar resposta ao objetivo mundial da UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization) de uma educação para todos. Este documento defende uma educação inclusiva, de sucesso e com qualidade para todos. Para isso, reúne um quadro de competências interdisciplinares que se complementam entre si (entre elas, a Resolução de Problemas) e visam o desenvolvimento de capacidades fundamentais não só para aprender na escola, mas também ao longo da vida. Adiciona, ainda, valores nos quais a cultura escolar deve assentar, e princípios que encaminham a aprendizagem, fundamentando as ações relacionadas com a prática e gestão do currículo.

Com a publicação do PASEO (Martins et al., 2017), surgem inconsistências muito significativas entre este documento base de toda a educação em Portugal e os programas de matemática em vigor para os ensinos básico e secundário (MEC, 2013, 2015). Assim, em 2018, são homologadas as *Aprendizagens essenciais de matemática* (AE) para os ensinos básico e secundário (ME, 2018) que se baseiam nos programas existentes, mas compilam o fundamental para a aprendizagem, à luz do PASEO (Martins et al., 2017). As AE (ME, 2018) não fazem alterações estruturantes ao programa; no entanto, tentam minimizar os impactos negativos que este teve nos alunos, nomeadamente na evolução da aquisição de conhecimentos e gosto pela disciplina. Foi no quadro destas AE para o ensino secundário que foi realizado este trabalho.

Em 2019, o Ministério da Educação constituiu um Grupo de Trabalho em Matemática (GTM) que ficou encarregue de elaborar um conjunto de recomendações para a

melhoria do ensino da matemática, com base num diagnóstico sobre o estado da arte do ensino da matemática no nosso país (Grupo de Trabalho em Matemática [GTM], 2020). Uma das recomendações do GTM foi, precisamente, uma renovação dos programas para o ensino básico e secundário, algo que acabou por acontecer nos anos seguintes.

Em 2021, são publicadas as novas *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino básico* (Canavarro et al., 2021) e, dois anos depois, as *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023). No que toca ao ensino básico, a resolução de problemas volta a ser enfatizada como uma capacidade matemática transversal, entre outras recuperadas do programa de 2007, às quais se juntam as representações matemáticas, as conexões matemáticas e o pensamento computacional. Neste documento, é destacada a abordagem em espiral aos conteúdos, ajustada ao PASEO, os ambientes exploratórios de ensino-aprendizagem, o uso de recursos tecnológicos vários, a ênfase na avaliação formativa e o foco no gosto pela aprendizagem da disciplina. É valorizada a contextualização e aplicação prática e realista dos conteúdos lecionados, bem como a interligação da matemática com outras disciplinas.

As novas AE de matemática para o ensino secundário (Carvalho e Silva et al., 2023), que só começaram a ser implementadas no 10.º ano de escolaridade no ano letivo 2024/2025, seguem os mesmos princípios básicos que as AE para o ensino básico (Canavarro et al., 2021). Em particular, dão ênfase a nove ideias chave, sendo uma delas “Resolução de problemas, modelação e conexões: Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações” (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 5). Nesta ideia chave realça-se a interligação de conceitos da matemática, bem como a conexão com outras disciplinas para a resolução de problemas:

> É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados. (p. 5)

Desta forma, é percetível que a resolução de problemas, embora com diferentes focos, esteve sempre presente no currículo português e atualmente se foca não só na busca da solução, mas em todo o processo que deve contribuir como um todo para a construção de aprendizagens significativas.

2.2. Comunicação matemática escrita focada na expressão do pensamento

Quando exteriorizamos os pensamentos, precisamos de os ter compreendido e interiorizado previamente. A comunicação matemática escrita vem no sentido de permitir expressar os pensamentos e raciocínios, promovendo uma ponderação e reflexão mais acentuadas quando comparada com a comunicação matemática oral (e.g., Guerreiro & Martins, 2018; Martins & Martinho, 2020; Santos, 2018; Serrazina, 2018). Este trabalho foca-se na comunicação matemática escrita porque, logo no início da minha PES, percebi que, embora os alunos soubessem pensar e resolver problemas, revelavam bastantes dificuldades e/ou falta de disposição para expressarem por escrito o seu pensamento na resolução de problemas, limitando-se muitas vezes a apresentar apenas a solução do problema e considerar o problema bem ou mal resolvido com base nesse resultado.

O objetivo da comunicação pode ser contribuir para progredir na obtenção e na compreensão de conhecimentos matemáticos, bem como para facilitar o ensino desses mesmos conhecimentos, integrando-se no processo de lecionação da disciplina (Martinho & Rocha, 2010; NCTM, 2007; Pires et al., 2018; Serrazina, 2018). Aprender a comunicar matematicamente é um processo semelhante à aprendizagem de qualquer outro tipo de escrita, por isso, deve ser um processo orientado, evoluindo de pequenos esquemas à composição de argumentos matemáticos, que englobam os pormenores, regras e significados específicos da linguagem matemática (NCTM, 2007).

A comunicação matemática escrita é determinante na construção individual de significados válidos de conhecimento matemático, apoiando a partilha desses mesmos conhecimentos, promovendo a construção de ideias individuais, ao invés da replicação de procedimentos, desenvolvendo-se uma aprendizagem com compreensão (e.g., Pires et al., 2018; Santos, 2018; Serrazina, 2018; Serrazina & Ribeiro, 2012):

> A comunicação matemática está, portanto, ao serviço da aquisição de conhecimentos, mas também é parte integrante dessa mesma

> aprendizagem. Sai reforçada a ideia que, mais do que trocar informações, a comunicação se traduz na partilha e negociação de significados entre os interlocutores. (Serrazina & Ribeiro, 2012, p. 1370)

A organização do pensamento deve ser clara para que seja percetível e de fácil entendimento pelo outro, de forma a comunicar eficazmente ideias. É essencial a explicação do raciocínio matemático e a justificação com detalhe dos procedimentos realizados (Martins & Martinho, 2020; Pires et al., 2018; Santos, 2018):

> De facto, o cerne desta atividade reside na abordagem desenvolvida para obter a solução, e não apenas na própria solução pelo que envolve a produção de interpretações que se constroem e se desvendam a partir do pensamento matemático desenvolvido. Contudo, essa abordagem só fica completamente a descoberto mediante uma explicação pormenorizada dos processos seguidos, pelo que encontrar a solução de um problema comporta, igualmente, a necessidade de criar uma explicação para essa solução, ou seja, resolver um problema incorpora tanto a resposta solicitada como o reportar do processo seguido na sua obtenção. (Jacinto et al., 2018, p. 77)

No contexto português, as avaliações escritas imperam sobre qualquer outro tipo de avaliação, pelo que exprimir as ideias de forma rigorosa, específica (isto é, abordando os conceitos relacionados com a questão colocada), com uma argumentação válida que consiga relacionar as propriedades matemáticas, revela-se fundamental para o sucesso escolar (Martinho & Rocha, 2010; NCTM, 2007). Por exemplo, no final do ensino secundário realizam-se os exames nacionais, momento ao qual os alunos dedicam grande atenção, em que uma boa capacidade de exprimir o pensamento matemático contribui fortemente para os alunos terem uma boa prestação e, consequentemente, obterem uma boa classificação.

As capacidades matemáticas transversais estão interligadas, especialmente, a resolução de problemas e a comunicação matemática. A ideia de “resolver-e-exprimir problemas de matemática” (Jacinto et al., 2018) exprime bem essa relação. Aquando da busca pela solução de um problema, concebem-se diversas interpretações, a partir do pensamento matemático, e só se obtém essa mesma solução se for apresentada uma explicação pormenorizada para a solução. Assim, a atividade de resolução de problemas não se resume à obtenção de uma solução, matematicamente correta ou incorreta; é fundamental exprimir o pensamento de forma clara e completa, de forma a tornar visível como se pensou para alcançar a resolução do problema (Jacinto et al.,

2018). A expressão "resolver-e-exprimir problemas de matemática" faz jus à complexidade da resolução de problemas e toda a atividade desenvolvida por parte dos alunos na mesma. Neste sentido, a comunicação matemática escrita desenvolve-se na resolução de problemas e uma boa comunicação matemática escrita coopera com a resolução de problemas, melhorando-a (Martinho & Rocha, 2010; Pugalee, 2004).

Os *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática* (NCTM, 2017) expõem oito práticas essenciais para o ensino da matemática, sendo que três delas dizem respeito à comunicação matemática: i) favorecer um discurso matemático significativo; ii) colocar questões pertinentes; e iii) usar e relacionar representações matemáticas (Serrazina, 2018). No caso de "favorecer um discurso matemático significativo" (NCTM, 2017, p. 29), pretende-se que todos os alunos tenham igual oportunidade de exprimir as suas ideias na sala de aula, quer seja oralmente, visualmente ou através da escrita, pois permite um desenvolvimento mais aprofundado dos saberes (Pires et al., 2018; Serrazina, 2018). Serrazina (2018) enfatiza esta ideia quando escreve: "Nele [em NCTM (2017)] se afirma que os alunos que aprendem a articular e a justificar as suas ideias matemáticas, raciocinam com base nas suas ideias e nas dos outros e desenvolvem uma compreensão profunda fundamental para o seu sucesso futuro em Matemática" (Serrazina, 2018, p. 14). Esta ideia de comunicação matemática está associada a um discurso em sala de aula que apoia uma aprendizagem com compreensão

A segunda ideia referida é "colocar questões pertinentes" (NCTM, 2017, p. 35), quer seja o próprio aluno, os colegas ou o professor. O propósito das questões pode ser diverso, nomeadamente, fomentar o raciocínio, as ideias e conexões pensadas pelos alunos, levando-os também a refletir sobre a sua própria atividade matemática, o que promove a autorregulação e o desenvolvimento de estratégias mais eficazes. No entanto, esse questionamento deve ser distinto, tendo em conta o seu propósito (Serrazina, 2018). Estas duas ideias referidas apresentam pontos de convergência, contribuindo para o desenvolvimento de aprendizagens matemáticas mais profundas e significativas. A comunicação matemática, enquanto capacidade transversal, constitui uma dimensão distinta, mas cujo desenvolvimento é fortemente potenciado pela concretização das práticas referidas nos *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática* (NCTM, 2017).

Por último, "usar e relacionar representações matemáticas" (NCTM, 2017, p. 24) é a prática de ensino que alerta para a necessidade de comunicar de forma diversa, isto é, utilizar representação simbólica e visual, por exemplo, de forma a comunicar de modo

favorável à evolução de todos os alunos (Pires et al., 2018; Serrazina, 2018). Esta ideia surge também no PASEO (Martins et al., 2017), numa das dez áreas de competências definidas: *Informação e Comunicação*, onde se pretende que os alunos sejam capazes de "colaborar em diferentes contextos comunicativos, de forma adequada e segura, utilizando diferentes tipos de ferramentas (analógicas e digitais), com base nas regras de conduta próprias de cada ambiente" (Martins et al., 2017, p. 22). As tarefas de modelação são um exemplo de tarefas propícias à utilização de diversas representações e recursos (diagramas, tabelas de dados, relatórios escritos, entre outros) para informar e explicar o modelo utilizado, bem como os raciocínios para obtenção da solução da tarefa, pelo que também promovem a comunicação matemática escrita (Carvalho e Silva, 2018).

Ao longo da história do ensino da matemática em Portugal, os vários documentos curriculares (e.g., MEC, 2015; ME, 2018; Ponte et al., 2007; NCTM, 2007) orientam para que se encoraje os alunos a comunicar o seu pensamento matemático, a utilizar progressivamente a linguagem matemática para exprimir as suas ideias e o seu pensamento e a compreender a linguagem utilizada pelos colegas. A comunicação matemática integra os objetivos definidos para a disciplina de matemática no *Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário* (MEC, 2015), sendo evidenciada nos desempenhos fundamentais que os alunos devem manifestar ao longo do percurso escolar, onde se refere que:

> Os alunos devem, pois, ser incentivados a expor as suas ideias de modo claro, conciso e coerente, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. […] devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara […]. (p. 7)

As AE (ME, 2018), que se subordinavam ainda àquele programa (MEC, 2015), documento que regulava a disciplina de Matemática A aquando da concretização deste trabalho, continuam a reforçar a comunicação matemática como objetivo essencial, presente nos conhecimentos, capacidades e atitudes transversais a qualquer tema, em pé de igualdade de relevância face aos conteúdos (ME, 2018):

> Os estudantes devem ter oportunidades de descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática. Para isso é fundamental que os estudantes se envolvam em discussões e atividades estimulantes e que não se

> sobrevalorizem as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes. (p. 3)

Atualmente, as indicações para o ensino da matemática (Canavarro et al., 2021; Carvalho e Silva et al., 2023) seguem a mesma linha, no que diz respeito à comunicação matemática, onde, tal como já em 2007, para além de considerarem a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem, é uma das nove ideias chave de orientação metodológica: ”Comunicação Matemática: Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado” (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 8), onde se relaciona comunicação matemática com o raciocínio e o pensamento crítico. Desta forma, pretende-se que os alunos comuniquem de forma diversificada, desde que adequada e com conexões válidas e interligadas:

> A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 8)

A comunicação vem também em destaque no PISA (Programme for International Student Assessment, OCDE, 2012), no que se refere ao quadro conceptual para a avaliação da literacia matemática: assume-se como uma capacidade matemática fundamental entre as sete consideradas nesse relatório. A capacidade de comunicação matemática está presente quando os alunos se exprimem matematicamente nas diferentes maneiras possíveis e quando apreendem a informação dos outros, independentemente de como comunicaram (Carvalho e Silva, 2018).

A tarefa de comunicar matematicamente de forma clara e objetiva não é simples para os alunos. Em particular, diversas dificuldades surgem durante a resolução de problemas, comprometendo a expressão escrita do pensamento matemático. Entre elas, destaca-se o uso inadequado da linguagem matemática, em que os termos são por vezes imprecisos ou demasiado informais, dificultando a clareza e o rigor da comunicação (Costa & Pires, 2016). Muitos alunos tendem a focar-se excessivamente em aspetos visuais das figuras ou representações, sem recorrer às propriedades

matemáticas fundamentais para fundamentar as suas respostas, o que pode conduzir a erros e incompreensões (Velez et al., 2016).

A explicitação do pensamento constitui outro desafio importante, já que os alunos frequentemente apresentam explicações vagas ou incompletas, dificultando a compreensão do seu processo de pensamento (Martins & Martinho, 2018). Além disso, a confusão entre conceitos matemáticos, como ocorre em figuras geométricas ou propriedades matemáticas básicas, compromete a articulação clara e coerente das ideias (Velez et al., 2016). Também se observa uma dependência significativa do professor ou dos colegas para avançar na resolução dos problemas, indicando uma falta de autonomia na comunicação e na construção do conhecimento matemático (Costa & Pires, 2016).

Problemas de organização e clareza na escrita prejudicam a ligação lógica entre as ideias, resultando em comunicações fragmentadas e pouco eficazes (Martins & Martinho, 2018). O medo de errar ou a baixa confiança nas próprias capacidades pode inibir a expressão matemática dos alunos, limitando a sua participação ativa e a sua capacidade de argumentar (Velez et al., 2016). Por fim, a utilização limitada de representações matemáticas, como gráficos, tabelas e diagramas, reduz as possibilidades de exprimir o pensamento de forma mais completa e rigorosa (Costa & Pires, 2016; Velez et al., 2016).

Para além destas dificuldades, é comum a existência de obstáculos relacionados com a seleção e interpretação dos dados do problema, levando à inclusão de informações irrelevantes ou à formulação de respostas incompletas (Kingwell, 2022; Martins & Martinho, 2021; Rocha et al., 2024; Simões, 2025). Os alunos revelam ainda dificuldades na escolha das estratégias mais adequadas para resolver o problema e na explicitação do seu pensamento, o que dificulta a comunicação eficaz das suas ideias (Martins & Martinho, 2018). As respostas tendem a ser superficiais e, muitas vezes, pouco fundamentadas, sem argumentos claros e consistentes (Martins & Martinho, 2018, 2021). Além disso, as diversas representações matemáticas nem sempre são integradas com coerência no texto, comprometendo a organização da resolução (Martins & Martinho, 2021).

Outro aspeto relevante prende-se com a dificuldade dos alunos em relacionar o problema com o contexto real quando este existe, o que pode levar à adoção de estratégias baseadas em procedimentos mecânicos e pouco reflexivos, limitando a profundidade da resolução e a clareza da comunicação escrita (Rocha et al., 2024; Simões, 2025).

Face a estes desafios, torna-se imprescindível a implementação de estratégias pedagógicas que promovam o uso correto da linguagem matemática, incentivem a reflexão e a fundamentação detalhada das respostas, estimulem a autonomia dos alunos e valorizem a comunicação matemática escrita como uma competência fundamental para a aprendizagem e a resolução eficaz de problemas (Black et al., 2004; Fernandes, 2020; NCTM, 2010).

Efetivamente, observa-se vulgarmente resoluções de tarefas onde os alunos comunicam de forma vaga e pouco rigorosa. Uma vez que um dos objetivos do currículo português permanece em comunicar bem matematicamente, é necessário praticar frequentemente, de forma que os alunos possam ter oportunidade de errar, refletir nos seus próprios erros e evoluir na sua aprendizagem. Não só é benéfico para o aluno comunicar de forma eficiente, como para o professor, dado que permite que este entenda melhor o raciocínio efetuado pelo aluno na resolução duma tarefa (Martinho & Rocha, 2010; Santos, 2018).

2.3. Feedback escrito, utilização dos critérios de avaliação e sua apropriação através da autoavaliação

A avaliação formativa, ou avaliação reguladora ou avaliação para a aprendizagem (neste trabalho não faço distinção entre estes termos), é a avaliação executada com a intenção de promover a aprendizagem com compreensão dos alunos, favorecendo a comunicação entre o professor e o aluno no dia-a-dia da sala de aula e a autorregulação dos alunos (Fernandes, 2006; Guerreiro & Martins, 2018; Santos, 2018, 2022; Semana & Santos, 2008; Sousa & Santos, 2022).

Após a concretização de uma tarefa, é necessário fazer um balanço da sua realização para que seja possível progredir na aprendizagem e execução de tarefas similares e progressivamente mais exigentes. Com este objetivo, o feedback promove o espírito crítico dos alunos acerca dos seus conhecimentos matemáticos e motiva-os a trabalharem para os melhorar. O feedback é uma vertente da avaliação reguladora, que pode ser escrito ou oral; neste trabalho, recorreu-se ao feedback escrito (Fernandes, 2006; Santos, 2022). O feedback escrito consiste na apresentação de um comentário escrito ao trabalho do aluno, com o intuito de o incentivar a refletir sobre o que fez, de lhe dar uma oportunidade para melhorar o que fez, de o levar a comunicar melhor as suas ideias, de sugerir melhorias e de questionar o aluno sobre o que fez (sobretudo quando o professor não consegue compreender bem como o aluno pensou), sempre

com o propósito da evolução das aprendizagens. O aluno necessita de, primeiramente, ter conhecimento da tarefa e de ter ocasião para pensar e operacionalizar as suas ideias; só assim o feedback assume a sua importância e utilidade. Através da análise realizada à produção do aluno, o feedback dado pelo professor e a posterior reformulação feita pelo aluno, é possível ter uma noção realista do que o aluno aprendeu e das suas capacidades naquele momento (Fernandes, 2006; Guerreiro & Martins, 2018; Rocco, 2020; Santos, 2018, 2022; Semana & Santos, 2017; Terroso et al., 2018).

Segundo Hattie e Timperley (2007), quando o feedback incide sobre uma versão preliminar de uma tarefa e é recebido de forma ativa pelo aluno, pode tornar-se uma oportunidade valiosa de aprendizagem, dependendo tanto da forma como é formulado como do modo como o aluno o interpreta e utiliza. As características do feedback dado influenciam a sua eficácia, para além da recetividade por parte do aluno. Um bom feedback deve fomentar uma aprendizagem duradoura, incentivando o aluno a refletir sobre o que fez, através de comentários que ofereçam pistas sobre como desenvolver as suas ideias e agir em situações futuras. Este feedback não se deve reduzir à correção do erro nem se restringir a uma informação isolada, mas antes abrir espaço para promover a reflexão e orientar o progresso da aprendizagem. Para além disso, deve ser claro e curto, de acessível compreensão, recorrer maioritariamente a questões e comentários construtivos, ser orientado para o processo e para a autorregulação. Neste campo (autorregulação) deve incentivar o aluno a refletir na sua resposta e reanalisá-la. O feedback deve também destacar aspetos positivos da resolução para contribuir para a autoestima e autoconfiança do aluno e validar os conceitos e procedimentos adquiridos com a resolução em questão (Hattie & Timperley, 2007; Santos, 2018; Semana & Santos, 2008; Terroso et al., 2018).

Neste trabalho, dei atenção ao feedback escrito sobre as produções escritas dos alunos na resolução de problemas. É um processo moroso e complexo para o professor, pelo que devem ser escolhidos momentos produtivos à sua utilização, tendo em conta, por exemplo, a natureza da tarefa: “devem ser escolhidas tarefas que levam os alunos a explicar a forma como pensaram, pois só assim o professor poderá dispor de informação suficiente para poder dar feedback adequado” (Terroso et al., 2018, pp. 62-63). A resolução de tarefas em duas fases proporciona momentos privilegiados para a aplicação do feedback escrito, com intenção de regular as aprendizagens e promover a evolução na capacidade de autoavaliação dos alunos. Efetivamente, na segunda fase de resolução, é dada a oportunidade aos alunos de melhorarem o que fizeram anteriormente, tendo em conta o feedback dado pelo professor. Os alunos são convidados a refletir sobre as suas resoluções, a perceber o que fizeram corretamente

e a aperfeiçoar o que fizeram menos bem. A resolução de tarefas em duas fases permite tornar o feedback mais significativo, uma vez que os alunos lhe podem dar uso imediato, o que potencia o seu impacto na aprendizagem (Santos, 2022; Terroso et al., 2018). Além disso, a possibilidade de uma segunda fase promove a autorregulação, ao implicar que os alunos revisitem os seus processos de pensamento, comparem-nos com os critérios definidos e mobilizem estratégias de melhoria (Semana & Santos, 2017). Esta prática apoia o desenvolvimento da capacidade dos alunos para refletirem sobre o seu próprio processo de aprendizagem e participarem ativamente nele, contribuindo para uma cultura de avaliação com função reguladora. De salientar que, em nenhum momento, deve o feedback ser associado a qualquer tipo de classificação antes de os alunos terem, pelo menos, uma segunda oportunidade de melhorar a sua produção, uma vez que transparece para o aluno a sensação de desfecho e não de continuidade e progresso como se pretende (Santos, 2022; Semana & Santos, 2008; Terroso et al., 2018).

O feedback tem de ser personalizado para cada produção do aluno, por isso outra dificuldade da utilização do feedback, por parte do professor, prende-se com o facto de resoluções semelhantes requererem um feedback diferente, indo ao encontro do perfil académico do aluno, para que os objetivos evolutivos sejam potenciados e a comunicação seja fluente e eficaz. Neste sentido, o feedback deve ser personalizado e elaborado em função de cada tarefa proposta e seus objetivos. A utilização frequente deste processo comunicativo de avaliação reguladora melhora "as aprendizagens dos alunos e as suas capacidades de identificação e autocorreção de erros" (Terroso et al., 2018, p. 62). Neste caso, melhora não só o exprimir do processo de resolução por parte do aluno, mas também as características de qualidade e potencialidade do feedback dado pelo professor, mais adequadas ao aluno. A par disso, é indispensável que ocorra a desmitificação do erro ser algo grave, alvo de punição, para passar a ser uma fonte rica de informação, algo a que devemos dar especial atenção, olhar com cuidado para melhorar numa próxima vez e progredir na aprendizagem. Verifica-se frequentemente progressos e recaídas na aprendizagem, sendo, portanto, essencial a compreensão, quer do aluno, quer do professor, deste processo de avanços e recuos, com um acompanhamento presente, gerindo expectativas (Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008; Terroso et al., 2018).

O feedback é externo, por parte de outro agente, pelo que surge a necessidade de procurarmos ferramentas de autorregulação da aprendizagem por parte dos alunos. Para a autorregulação da aprendizagem é necessário a fixação de objetivos a atingir, bem como a orientação durante o processo para atingir os objetivos definidos,

nomeadamente através de feedback escrito. Considera-se imprescindível a leitura atenta e a compreensão das orientações dadas no feedback escrito, de modo a aproveitar ao máximo a fase seguinte, fazendo as alterações e ajustes necessários ao caminho anteriormente delineado. Embora a autorregulação seja uma capacidade inerente aos alunos, considera-se essencial a sua promoção em contexto de sala de aula, com um processo de aprendizagem orientado e apoiado pelo professor, por exemplo, através da autoavaliação (Semana, 2018; Semana & Santos, 2008, 2017).

A autoavaliação assume uma posição notável no que toca à autorregulação, uma vez que se concretiza individualmente, pelo próprio aluno, com um grau de autonomia mais ou menos independente; subordinado à orientação facultada no momento, o aluno reflete sobre a sua prestação e toma consciência dos seus saberes (Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008, 2017). Referindo-se a vários autores, Semana e Santos (2017) enfatizam que:

> Os efeitos positivos da autoavaliação para os alunos são amplamente reconhecidos pela investigação e tendem a ser mais significativos quando esta não se limita a uma simples autoclassificação, mas recorre antes a critérios de avaliação, com foco num conceito de qualidade partilhado. (p. 3)

De facto, a regulação interna, realizada pelo próprio aluno, assume cada vez mais um papel importante na melhoria das aprendizagens dos alunos e, consequentemente, na melhoria da capacidade de comunicação matemática clara e correta. Para isso, a autoavaliação exige um nível de consciência crítica e refletida, levando o aluno a percecionar o seu desempenho aquando da execução das tarefas (Rocco, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2017).

Para que a autoavaliação seja uma capacidade com a qual os alunos estejam ambientados, é necessário utilizar estratégias e propor situações favoráveis a esse desenvolvimento, nomeadamente, o tratamento do erro como algo positivo, a utilização de feedback escrito, a implementação de critérios de avaliação com oportunidade de negociação, e a utilização de instrumentos de avaliação alternativos aos tradicionais. O processo de autoavaliação contempla duas fases, a apropriação de critérios e a organização do funcionamento da própria autoavaliação (Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008). Em particular, no caso do feedback escrito, sob a forma de comentário com sugestões de melhoria ou questões reflexivas, para que seja favorável ao desenvolvimento da capacidade de autoavaliação, é essencial que se realize com

alguma frequência e influencie o autoquestionamento dos alunos, sem julgamentos pela sua prestação na tarefa (Semana & Santos, 2008).

A autoavaliação realizada pelos próprios alunos deve ser distinguida da atribuição de classificações. O principal propósito da autoavaliação é o fortalecimento da autorregulação, por isso precisa de ter um carácter formativo e criar um ambiente de confiança e promoção da aprendizagem. Para alcançar esses objetivos, devem ser utilizadas tarefas diversificadas de autoavaliação, que estimulem diferentes níveis de autorregulação, sejam adaptadas às necessidades e evolutivas. Em particular, as tarefas que envolvem reflexões escritas assumem um papel fundamental, pois exigem níveis mais elevados de autorregulação, promovendo a capacidade dos alunos para uma análise crítica e consciente do seu percurso de aprendizagem (Fernandes, 2006; Semana & Santos, 2017).

No que diz respeito aos critérios de avaliação, estes assumem-se imprescindíveis na orientação dos alunos para a realização da autoavaliação e regulação das suas aprendizagens. A autoavaliação surge a partir da reflexão do aluno sobre o seu trabalho, acompanhada de um guia que lhe permite analisar a sua resposta em face do que é pretendido e, caso sinta pertinente, melhorar as suas produções, de forma a obter sucesso na aprendizagem. Esse guia ou padrão orientador é, na maioria das vezes, um conjunto de critérios de avaliação que são construídos pelo professor. Este, primeiramente, deve refletir nos critérios que irá valorizar na avaliação da tarefa e, em seguida, deve partilhá-los com os alunos, para que estes possam apropriar-se dos critérios e utilizá-los de forma consciente no desenvolvimento do seu trabalho. Para que o processo de apropriação de critérios seja eficaz, estes devem ser formulados numa linguagem acessível à sua compreensão. Na apropriação dos critérios de avaliação, os alunos devem ter a oportunidade de intervir, num processo de negociação, com vista à melhoria e completude dos critérios. Isto ajuda a tomarem melhor consciência dos próprios critérios, do seu papel, e a ficar claro o que se espera das suas resoluções (Fernandes, 2020; E. L. Santos, 2020; Santos, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008).

A partilha explícita dos critérios de avaliação contribui para a regulação da aprendizagem. Quando os alunos compreendem antecipadamente os descritores ou níveis de desempenho associados a uma tarefa, percecionam melhor as expectativas que lhes são colocadas e as metas a atingir. Segundo Domingos Fernandes (2020):

> Quando os critérios são claramente explicitados, os alunos ficam mais conscientes acerca do que se espera do seu desempenho nas tarefas que

> lhes são propostas e os professores em melhores condições para distribuírem feedback de elevada qualidade. Assim, quando os alunos conhecem e compreendem antecipadamente os descritores, indicadores ou níveis de consecução dos critérios definidos e os níveis de desempenho que lhes correspondem numa dada escala, ficam bem mais cientes acerca do que têm de aprender e de saber fazer e de como o seu trabalho será avaliado. Os níveis de desempenho são igualmente importantes pois contribuem para ajudar a compreender e a fundamentar as classificações aos alunos, aos pais e a todos os interessados no processo. (pp. 164-165)

Esta clareza promove não só a autoavaliação, como também uma maior consciencialização acerca da própria aprendizagem por parte dos alunos, geralmente acompanhada por melhorias nas suas produções (Fernandes, 2020; E. L. Santos, 2020).

No entanto, os critérios de avaliação não são igualmente percecionados por todos os alunos. De facto, o ponto de vista do aluno quanto à avaliação, disciplina e ensino da mesma influenciam o aluno na apropriação dos critérios de avaliação. Frequentemente, observa-se nos alunos com melhor aproveitamento escolar uma maior identificação e perceção dos critérios de avaliação. Neste sentido, é importante reconhecer e valorizar a capacidade de autorregulação e, para isso, realizar regularmente e ao longo do tempo experiências que promovam a explicitação e apropriação de critérios de avaliação, a fim de proporcionar a todos a oportunidade de aprimorar essas capacidades. A melhoria destas capacidades implica tomar consciência das próprias ações e do que é entendido como uma boa prestação, bem diferente de apenas fazer e certificar com o professor se o que fez está ou não correto. Os problemas e as tarefas com exigência cognitiva elevada concedem aos alunos a oportunidade para a reflexão sobre a sua resolução e, aquando da sua autoavaliação, permite-lhes ultrapassar obstáculos e serem melhores a cada dia (Gomes, 2008; E. L. Santos, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2013).

A avaliação formativa surge também com destaque nas AE que entraram em vigor no ano 2024/2025 no 10.º ano (Carvalho e Silva et al., 2023), em que a última ideia chave apresentada se foca na “Avaliação para a aprendizagem: Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem“ (pp. 8-9). As indicações são para a avaliação fazer parte da monitorização da aquisição de conhecimentos, mas também ela própria ser servidora da aprendizagem e da superação de dificuldades:

> A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. (pp. 8-9)

Esta valorização crescente da avaliação formativa levou a que esta fosse mesmo explicitada nas orientações curriculares, com o objetivo de ser vista pelos professores como fundamental a uma aprendizagem significativa.

A comunicação matemática escrita pode ser analisada tendo em conta diferentes categorias e níveis de desempenho. Um instrumento de análise utilizado num trabalho desenvolvido com a alunos do 5.º ano de escolaridade proposto por Pires e colaboradores (2018), apresenta quatro dimensões de análise: clareza, fundamentação, lógica e profundidade, para as quais os autores atentam em três níveis de desempenho: baixo, médio e elevado. A capacidade de o aluno exprimir as suas ideias recorrendo a vocabulário diverso e formas de representação apropriadas é analisada pela dimensão *clareza*. A *fundamentação*, outra dimensão, diz respeito à capacidade de o aluno defender e justificar os seus raciocínios ou processos de resolução de maneira sólida. De modo a verificar a coerência e conexão do raciocínio do aluno nos processos desenvolvidos, surge a *lógica*. A *profundidade* relaciona-se com o nível de conhecimento e domínio demonstrado pelo aluno no que diz respeito aos tópicos matemáticos envolvidos na situação (Pires et al., 2018). A figura 1 resume este instrumento de análise, que foi usado com o objetivo de facilitar e melhorar a análise da comunicação escrita dos alunos na área da matemática:

Clareza		
O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas.		
Nível baixo: o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas.	Nível médio: o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas.	Nível elevado: o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas
Fundamentação		
O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.		
Nível baixo: o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa.	Nível médio: o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias.	Nível elevado: o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias.
Lógica		
O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.		
Nível baixo: o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias.	Nível médio: o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.	Nível elevado: o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.
Profundidade		
O aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.		
Nível baixo: o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto.	Nível médio: o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto	Nível elevado: o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Figura 1 - Categorias e níveis de desempenho para análise da comunicação matemática escrita (Pires et al., 2018, p. 29)

Este trabalho de Pires e seus colaboradores (2018) teve como principais conclusões as dimensões onde os alunos tiveram mais dificuldade: fundamentação e lógica, em oposição à dimensão clareza, onde os alunos conseguiram atingir o previsto. Para além disso, os autores concluíram que o investimento na melhoria da capacidade de comunicação matemática escrita, em todas as suas dimensões, promove uma aprendizagem mais consistente e com mais sentido, que resulta em raciocínios claros, corretos e coerentes.

Numa outra perspetiva, Semana e Santos (2008) apresentam critérios de avaliação/autoavaliação, num estudo que teve como objetivo entender que função tem o relatório escrito como instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens de alunos do 3.º ciclo em matemática, em particular, no que respeita ao raciocínio matemático. Nesse estudo, os alunos realizaram um relatório escrito, com um guião, apropriaram-se dos critérios de avaliação que foram negociados e receberam feedback maioritariamente escrito, mas por vezes complementado com feedback oral. Os critérios de avaliação/autoavaliação, neste caso, foram organizados separadamente, uns critérios para o trabalho realizado em grupo e um específico para a reflexão individual. Ambos estão organizados em quatro níveis de desempenho. Os critérios para o grupo têm em conta as dimensões da *apresentação do relatório*, das *estratégias e processos utilizados*, da *articulação de informação e conhecimentos*, *descrição e explicação* da atividade desenvolvida e *linguagem matemática escrita*. O critério específico para a reflexão individual tem uma só dimensão: *reflexão crítica* sobre a atividade desenvolvida. A figura 2 apresenta esse conjunto de critérios de avaliação:

O grupo...

	0	1	2	3
Apresentação do Relatório	...não respeita a estrutura proposta. ...comete muitos erros ortográficos e/ou apresenta uma construção frásica muito deficiente, dificultando a compreensão do que está escrito. ...apresenta o relatório muito rasurado e sujo.	...não respeita grande parte da estrutura proposta. ...comete erros ortográficos e, por vezes, apresenta uma construção frásica incorrecta, mas a compreensão do que está escrito não é dificultada. ...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	...respeita em grande parte a estrutura proposta. ...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. ...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	...respeita completamente a estrutura proposta. ...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. ...apresenta o relatório limpo e sem rasuras.

	0	1	2	3
Recurso a Estratégias e Processo de Exploração	...não apresenta estratégias apropriadas. ...não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração metódico e completo.

	0	1	2	3
Mobilização de informação/ conhecimentos	...não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.	...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mas não os aplica adequadamente.	...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os correctamente, em grande parte.	...reconhece e aplica adequadamente informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.

	0	1	2	3
Descrição e Explicação da Actividade Desenvolvida (Comunicação)	...não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram. ...não descreve nem explica as conclusões obtidas.	...descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, e explica-as na totalidade.

	0	1	2	3
Linguagem Matemática Escrita	...não utiliza linguagem matemática.	...utiliza linguagem matemática com imprecisões.	...utiliza linguagem matemática, com pequenas imprecisões.	...utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

Eu, individualmente,...

	0	1	2	3
Reflexão Crítica Sobre a Actividade Desenvolvida	...não saliento as ideias centrais da actividade e/ou referi ideias não relacionadas com a actividade. ...não dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento ideias relacionadas com a actividade, mas não destaco as essenciais. ...dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida, mas não a justifico. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento as ideias centrais da actividade. …comento a actividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo e explicando as principais dificuldades que senti.	...resumo as ideias centrais da actividade, de forma clara. ...comento a actividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo, explicando as principais dificuldades que senti e identificando aspectos a melhorar.

Figura 2 - Critérios de avaliação/autoavaliação de relatório escrito com alunos do 3.º ciclo em matemática (Semana & Santos, 2008, anexo 2, pp. 17-18)

As principais conclusões deste trabalho (Semana & Santos, 2008) indicam que o facto de os alunos disporem do guião de relatório e dos critérios de avaliação permite, de forma gradual, o constante reavivar da memória acerca dos objetivos a atingir, o que leva à melhoria do desempenho ao longo do trabalho. A adequação e apropriação dos critérios utilizados leva a que os alunos autoavaliem o seu trabalho e definam estratégias

de melhoria. O feedback, neste caso, promoveu a capacidade de raciocínio matemático, possibilitando a consciencialização do que já estava bem pensado e executado e do que ainda podia ser melhorado para obter uma versão melhorada da versão inicial entregue.

Santos e Gomes (2006) apresentaram, num artigo sobre o desenvolvimento da autoavaliação na elaboração de relatórios escritos em matemática, com alunos do 7.º ano de escolaridade, os critérios de autoavaliação utilizados. O trabalho reportado neste artigo tinha como objetivo compreender a evolução da capacidade de autoavaliação dos alunos na resolução de problemas, em atividades de investigação e na redação de relatórios, num contexto em que o professor dedica tempo de sala de aula à apropriação de critérios de avaliação por parte dos alunos.

A figura 3 sumaria esses critérios de avaliação que são divididos em cinco descritores, cada um deles com quatro níveis: i) Apresentação do Relatório; ii) Estratégias de Resolução do Problema Proposto; iii) Explicação da Forma como Pensaram; iv) Reflexão sobre as Estratégias e Soluções; e v) Linguagem Matemática Escrita.

Critérios de auto-avaliação

	1	2	3	4
Apresentação do Relatório	Não respeitei a estrutura proposta para o relatório. Fiz uma capa. Além disso: Não utilizei correctamente a língua portuguesa. Não usei cores diferentes ou outras representações para destacar o essencial.	Não respeitei grande parte da estrutura proposta para o relatório. Fiz uma capa Além disso: Não utilizei correctamente a língua portuguesa. Não usei cores diferentes ou outras representações para destacar o essencial.	Respeitei em grande parte a estrutura proposta para o relatório. Fiz uma capa Além disso: Utilizei correctamente a língua portuguesa. Usei cores diferentes ou outras representações, mas não me preocupei em destacar o essencial.	Respeitei completamente a estrutura proposta para o relatório. Fiz uma capa Além disso: Utilizei correctamente a língua portuguesa. Usei cores diferentes ou outras representações para destacar o essencial.
Estratégias de Resolução do Problema Proposto	Efectuei algumas tentativas, mas estas não constam na parte escrita.	Apresentei algumas estratégias, mas de uma forma incompleta.	Apresentei as estratégias, de uma forma completa.	Apresentei as estratégias, de uma forma completa e fácil de compreender.
Explicação da Forma como Pensaram	Não expliquei como pensei.	Expliquei parcialmente a forma como pensei.	Expliquei de forma completa a forma como pensei.	Expliquei a forma como pensei, recorrendo a uma sequência lógica de ideias, e fui criativo na forma como a apresentei.
Reflexão sobre as Estratégias e Soluções	Não mostrei nenhuma reflexão sobre as tentativas.	Não mostrei ter feito nenhuma reflexão sobre as estratégias utilizadas e soluções obtidas.	Mostrei ter feito alguma reflexão sobre as estratégias utilizadas e soluções obtidas.	Mostrei ter reflectido sobre as estratégias utilizadas e soluções obtidas.
Linguagem Matemática Escrita	Não recorri a ela.	Recorri à linguagem cometendo algumas imprecisões.	Utilizei adequadamente a linguagem matemática.	Utilizei adequadamente a linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

Figura 3 - Critérios de autoavaliação (Santos & Gomes, 2006, pp. 47-48)

Com este estudo, Santos e Gomes (2006) concluíram que, independentemente do aproveitamento escolar do aluno, conhecer os critérios de avaliação não é indicativo direto de evolução do seu desempenho. Os alunos necessitam de tempo de apropriação, para constatarem as diferenças entre a sua conceção e o pretendido nos critérios de avaliação. Ao longo desse período, o que os autores consideraram mais importante neste estudo foram as coavaliações dentro do grupo, os feedbacks da professora, o discutido pessoalmente em sala de aula, as versões atualizadas e melhoradas dos relatórios e as autoavaliações dos alunos. Os alunos-caso neste estudo melhoraram o rigor no registo da comunicação das suas ideias na resolução da tarefa, na organização e diversificação dos exemplos, na justificação do que estavam a apresentar com provas ou indicação do que não tinham conseguido realizar.

José Costa (2021) utilizou os critérios de avaliação[2] da figura 4 numa experiência realizada com alunos do 2.º ciclo que incluiu a apropriação de critérios de avaliação seguidos de feedback escrito e resolução de uma segunda fase, tendo em conta esse feedback. Nessa experiência o objetivo era reconhecer o papel do feedback escrito na aquisição de conhecimentos dos alunos e, no caso dos formandos participantes no estudo, empoderar as capacidades profissionais para tornar a escrita avaliativa mais eficaz.

Os critérios de avaliação apresentados na figura 4 consideram os seguintes aspetos essenciais: a compreensão do problema, a estratégia de resolução adotada e a solução proposta. Para cada critério, são identificados indicadores, que remetem para momentos ou processos específicos da resolução de problemas; por sua vez, cada indicador é descrito em função de cada nível de desempenho (três níveis no total), clarificando e especificando o que se espera em cada um deles.

[2] Este conjunto de critérios foi utilizado no âmbito do acompanhamento do Plano da Matemática II e Novo Programa do Ensino Básico, de 2010 a 2012, e partilhado com os professores pela Comissão Nacional de Acompanhamento

Avaliação da resolução de problemas				
Critérios de avaliação	**Indicadores**	**Descritores**		
		Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
Apropriação (relativo à compreensão)	Seleção pertinente de dados	Não seleciona os dados necessários para a resolução do problema	Seleciona parte dos dados necessários para a resolução do problema	Seleciona todos os dados necessários para a resolução do problema
Eficiência (relativo ao processo-estratégia)	Seleção da estratégia	Não apresenta estratégia ou usa estratégia inadequada	Apresenta estratégia adequada	Apresenta estratégia adequada e poderosa
	Execução da estratégia	Comete erros na execução e não conclui	Comete erros na execução ou não conclui	Não comete erros na execução e conclui
Eficácia (relativo ao produto-solução)	Correção e completude da solução	Apresenta solução incorreta ou não apresenta solução	Apresenta solução parcialmente correta ou incompleta; ou solução coerente com a estratégia desenvolvida	Apresenta solução correta e total

Figura 4 - Critérios de avaliação da resolução de problemas (Costa, 2021, p. 21)

No que diz respeito aos alunos, Costa (2021) concluiu que os alunos com mais dificuldades melhoraram várias das suas capacidades, nomeadamente o conhecimento dos conteúdos, procedimentos matemáticos e resolução de problemas. Este estudo apontou o feedback escrito como principal contributo para essa melhoria. No entanto, alguns alunos tiveram dificuldade em analisar o feedback recebido, pelo que se considera fundamental ser trabalhado em sala de aula com frequência.

3. Intervenção Pedagógica

Este estudo baseia-se numa intervenção pedagógica que foi levada a cabo no contexto da minha PES, realizada numa escola pública da região metropolitana do Porto, no ano letivo 2021/2022. No âmbito da PES, lecionei uma turma de 8.º ano, duas turmas de 12.º ano de Matemática A e, ainda, algumas aulas em duas turmas de 11.º ano, também de Matemática A. Neste capítulo, faz-se uma caracterização do meio escolar e das duas turmas de 12.º ano onde a intervenção pedagógica foi implementada. Descreve-se, brevemente, o contexto dos conteúdos curriculares versados na intervenção pedagógica. Segue-se a explicação e justificação dos critérios de avaliação utilizados na concretização da intervenção pedagógica. Por fim, apresenta-se a planificação da intervenção pedagógica realizada, juntamente com a explicação detalhada das tarefas, estratégias, recursos e interações com os alunos.

3.1. Contexto de Intervenção Pedagógica

3.1.1. Caracterização da Escola

Este trabalho de investigação foi desenvolvido numa escola de 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, não agrupada, situada na região norte, em meio urbano, na área metropolitana do Porto, no contexto da PES que realizei neste local. A escola foi remodelada recentemente, tendo, por isso, boas condições físicas e todas as salas dispõem de tecnologia recente, apesar de serem de pequenas dimensões, com lotação máxima de 28 alunos.

A boa localização geográfica da escola, acessível por transportes públicos e numa freguesia com bastante população, leva à heterogeneidade da comunidade escolar, proveniente tanto dessa freguesia como de outras zonas da cidade, abrangendo alunos maioritariamente da classe social média-alta, mas com uma pequena parte oriunda de bairros sociais. Na generalidade, os pais dos cerca de 1200 alunos inscritos na escola possuem formação académica de nível superior. A Associação de Pais e Encarregados de Educação dos alunos da escola, fundada há vários anos, tem um papel ativo na comunidade escolar, nomeadamente na divulgação das atividades e informações gerais aos encarregados de educação. Esta está sempre atenta ao bem-estar dos alunos, aos seus direitos e às suas aprendizagens. Os alunos estão também organizados numa Associação de Estudantes, com algumas décadas de existência, que organiza e

promove atividades para os alunos, com objetivos cívicos, ambientais, desportivos e culturais.

O site online da escola é atualizado com as informações documentais estruturantes, como o projeto educativo e o regulamento internos, o calendário escolar, projetos e avisos, o que facilita a comunicação entre a comunidade educativa interna e promove a divulgação para quem deseja conhecer a escola.

A oferta formativa é diurna, contempla o 3.º ciclo do ensino básico e o ensino secundário. Neste último, a escola oferece os cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas, Línguas e Humanidades, Artes Visuais e o curso profissional Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos. O corpo docente da escola é composto por cerca de 100 professores, com média de idades que ultrapassa os 52 anos. Dentro dos Serviços Especializados de Apoio Educativo, existe o Gabinete de Educação Especial e o Gabinete de Psicologia e Orientação. O núcleo de pessoal não docente é constituído por 28 Assistentes Técnicos e Operacionais, oito pessoas dos Serviços Administrativos Escolar e dez pessoas dos Serviços Auxiliares.

A nível de Projetos e Atividades de Enriquecimento Curricular, a escola desenvolve vários, uns propostos pela escola, outros propostos por instituições parceiras. No ano letivo em que realizei a PES, estiveram em funcionamento diversos projetos, entre os quais: Desporto Escolar, Rádio Escolar, Sistema de Escolas Associadas da UNESCO, ERASMUS+, Eco Escolas, Parlamento dos Jovens, Clube de Ciência Viva, Grupo de Teatro, Corta-mato Escolar e Educação para a Saúde.

A Biblioteca Escolar, um espaço que também é de ocupação de tempos livres, prioriza o apoio ao desenvolvimento curricular, à leitura e literacias da informação, às atividades livres, extracurriculares e de enriquecimento curricular. Os alunos e professores dispõem de um espaço com 14 computadores, que podem requisitar para aulas, trabalhos de grupo e individuais. É possível, também, requisitar calculadoras gráficas e científicas para uso diário. Estão disponíveis livros de acordo com o plano nacional de leitura e manuais de apoio escolar que podem ser requisitados. A Biblioteca possui uma professora bibliotecária que dinamiza atividades e orienta os alunos que pretendam frequentar os três espaços privados da biblioteca.

3.1.2. Caracterização das Turmas

Participaram nesta investigação duas turmas do 12.º ano de escolaridade, do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A. A turma 1 é constituída por 22 alunos: 20 do sexo masculino e dois do sexo feminino. Estes alunos têm uma média de idades de 17 anos e dois deles estão sinalizados com Relatório Técnico-Pedagógico, pois estão diagnosticados com uma perturbação do espectro do autismo. Na sua maioria, os alunos apresentam historial de muito boas classificações, revelando interesse e empenho nas tarefas propostas em sala de aula. Existem também alguns alunos com dificuldades ao nível do cálculo e do raciocínio lógico-matemático, tendo sido, para dois deles, adotadas medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão, para as quais foram aplicadas medidas universais na disciplina de Matemática A, de acordo com a lei n.º 116/2019, 1.ª alteração ao DL n.º 54/2018.

Da turma 2 fazem parte 25 alunos: 13 do sexo masculino e 12 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 17 e 19 anos. Os alunos desta turma caracterizam-se por serem um pouco imaturos para a idade e por se desconcentrarem facilmente com conversas cujo tema não é propício à aprendizagem da matemática, o que se reflete nos resultados um pouco abaixo das capacidades dos alunos. Durante as atividades de aula, os alunos são participativos e entreajudam-se na melhoria da compreensão e aquisição dos conhecimentos. No final do 1.º período letivo foram sinalizados dez alunos com medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão, para as quais foram aplicadas medidas universais na disciplina de Matemática A, de acordo com a lei n.º 116/2019, 1.ª alteração ao DL n.º 54/2018.

Ambas as turmas revelam alguma falta de autonomia e de hábitos de trabalho disciplinado. Este último ponto poderá estar inflacionado pelas interrupções e pela oscilação entre ensino à distância e ensino presencial, ocorridas desde os dois anos letivos transatos e derivadas das medidas de contenção pandémica da COVID-19. No que diz respeito à intervenção pedagógica sobre a qual se baseou este trabalho de investigação, por ser enquadrada no decorrer do normal funcionamento das aulas, os alunos das duas turmas participaram ativamente e com entusiasmo na realização das atividades propostas.

3.2. Descrição da Intervenção Pedagógica

Os conteúdos curriculares abrangidos pela intervenção pedagógica implementada centram-se nas capacidades matemáticas transversais de resolução de problemas e comunicação matemática (escrita), a partir da resolução de tarefas que envolvem modelação matemática, descritos no documento atualmente em vigor para orientação do currículo da disciplina de Matemática A do 12.º ano (ME, 2018). A intervenção pedagógica organizou-se em torno de quatro problemas, que abrangem os domínios curriculares: i) Derivadas, monotonia e concavidades; ii) Funções exponenciais e logarítmicas; e iii) Funções trigonométricas.

Os critérios gerais de avaliação da disciplina foram apresentados aos alunos, pela orientadora cooperante, no início do ano letivo, sendo adaptados para cada período, de acordo com a diversidade de instrumentos de avaliação utilizados e os seus respetivos pesos na avaliação sumativa. Para cada instrumento de avaliação, quer seja formativo ou sumativo, foram definidos critérios de avaliação específicos de acordo com o trabalho pretendido e os objetivos curriculares envolvidos. Portanto, esta intervenção, pela sua natureza em articulação com a PES, seguiu essas condições, tendo sido definidos critérios de avaliação específicos para a realização dos problemas da intervenção pedagógica.

Os critérios definidos tiveram como base os já utilizados noutros momentos na disciplina, figura 6, sendo adaptados de forma a permitirem uma valorização da resolução e da forma como os alunos exprimem o seu pensamento. A sua formulação foi também inspirada em modelos presentes na literatura revista (ver Capítulo 2) sobre avaliação formativa, nomeadamente, Pires et al. (2018), Semana e Santos (2008), Santos e Gomes (2006), e Costa (2021). Estes estudos ofereceram linhas orientadoras que, apesar de não terem sido replicadas integralmente, estiveram presentes nas opções tomadas para a definição dos descritores e dimensões avaliadas.

O modelo de Pires et al. (2018) valoriza a existência de critérios bem definidos, que permitam discriminar níveis de desempenho distintos, com foco na progressão da aprendizagem. Esta perspetiva está refletida na adoção de três níveis descritivos nos critérios aplicados na intervenção pedagógica que realizei. Já Semana e Santos (2008), bem como Santos e Gomes (2006), sublinham a importância de critérios que favoreçam a compreensão profunda da tarefa, a explicitação do raciocínio e o envolvimento do aluno no processo avaliativo. Estes contributos fundamentam a minha escolha de critérios como *Interpretação e compreensão da tarefa* e *Completude do processo de*

resolução, que procuram captar não apenas o produto final, mas o processo e a intencionalidade subjacente à resolução. Costa (2021), por sua vez, reforça a necessidade de valorizar a organização e apresentação do trabalho enquanto expressão do pensamento matemático estruturado e comunicável, o que justificou a inclusão do critério *Organização/Apresentação*, ao lado da avaliação da *Correção da resposta à tarefa*.

Deste modo, embora os critérios aplicados neste estudo não correspondam diretamente aos dos modelos teóricos referidos, resultam de uma adaptação fundamentada nas ideias centrais desses contributos. Esta opção permitiu uma avaliação formativa mais próxima das práticas vividas em contexto de sala de aula, integrando diferentes dimensões da competência matemática e promovendo o desenvolvimento progressivo da aprendizagem dos alunos, algo defendido por Fernandes (2020).

Na figura 5, apresento os critérios de avaliação definidos para os problemas realizados ao longo da intervenção pedagógica, e respetivos descritores dos níveis de desempenho.

	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
Interpretação e compreensão da tarefa	Reconheci os dados, suas relações no contexto da tarefa, demonstrei pouca ou nenhuma compreensão.	Reconheci os dados e interpretei a relação entre os mesmos, demonstrei uma compreensão razoável da tarefa.	Analisei, reconheci e interpretei perfeitamente os dados, identificando com clareza o que é necessário, demonstrei absoluta compreensão.
Completude do processo de resolução	Efetuei algumas tentativas, mas estas não constam na parte escrita. Não expliquei como pensei.	Apresentei algumas estratégias, mas de forma incompleta. Expliquei parcialmente a forma como pensei.	Apresentei as estratégias, de uma forma completa e fácil de compreender. Expliquei na totalidade a minha forma de pensar.
Organização/ Apresentação	O meu trabalho está desorganizado.	O meu trabalho está mais ou menos organizado.	O meu trabalho está muito bem organizado.
Correção da resposta à tarefa	A minha resposta está incorreta ou não consegui responder à tarefa.	A minha resposta está correta, mas ainda está incompleta.	A minha resposta está correta e completa.

Figura 5 - Critérios de avaliação usados na intervenção pedagógica

Estes critérios de avaliação dividem-se em três níveis diferentes, uma vez que os estipulados na escola e na disciplina, figura 6, estavam também divididos em três níveis. Deste modo, os critérios de avaliação não constituíram uma novidade para os alunos, pois estavam habituados a este tipo de divisão. Para além disso, este conjunto de critérios de avaliação permite que os alunos se enquadrem no que é espectável ser feito (nível 3), se estão muito longe e têm de melhorar bastante (nível 1), ou se já estão perto de atingir o nível esperado (nível 2). No que diz respeito aos critérios propriamente ditos, foram organizados numa ordem que segue a ordem frequente dos acontecimentos a que os alunos prestam atenção na resolução de uma tarefa. Desta forma, os alunos podem acompanhar a sua resolução com os critérios, facilitando a sua apropriação e usando-os como uma ferramenta que os orienta na resolução da própria tarefa.

Conhecimento e Resolução de Problemas			
Organização / Apresentação	Muito bem organizado Coerente Claro e eficaz	Trabalho organizado e coerente, mas pouco eficaz	Trabalho desorganizado
Compreensão do problema	Analisa, reconhece e interpreta perfeitamente os dados, identificando com clareza o que se procura, demonstrando absoluta compreensão.	Reconhece os dados e interpreta a relação entre os mesmos, demonstrando uma compreensão razoável do problema.	Não reconhece os dados, suas relações no contexto do problema, demonstrando pouca ou nenhuma compreensão.
Estratégia	Utiliza estratégias efetivas e eficientes, construindo modelo matemático com as informações obtidas	Algumas vezes utiliza estratégias, mas falta clareza, consistência e coerência.	Não utiliza estratégias de resolução.
Resolução do problema	Apresenta de maneira ordenada os passos necessários para chegar à solução do problema.	Apresenta de maneira ordenada poucos passos necessários para chegar à solução do problema.	Não apresenta de maneira ordenada os passos necessários para chegar à solução do problema.
Conteúdo Conclusões	Conclusões corretas e completas	Conclusões corretas, mas incompletas	Apresenta conclusões incorretas

Figura 6 - Critérios de avaliação utilizados na disciplina anteriormente num outro instrumento de avaliação

Como primeiro critério defini a *Interpretação e compreensão da tarefa*. Atualizou-se a terminologia do critério já existente – *Compreensão do problema* – pois engloba não só a compreensão literal do enunciado, mas também a interpretação, a capacidade de o aluno realizar uma leitura crítica e contextualizada da tarefa, atribuindo significado e identificando os conteúdos que se relacionam em específico com a tarefa proposta. Assim, o novo termo procura englobar de forma mais completa o processo cognitivo envolvido na análise inicial do problema.

O segundo critério apresentado, *Completude do processo de resolução*, enfatiza a explicação do processo de resolução e apresentação das estratégias utilizadas, ao invés da apresentação exclusiva do resultado. Segue-se a *Organização/Apresentação* para que o aluno apresente uma resolução percetível por outras pessoas, colegas e

professores, um critério já anteriormente definido nos critérios de avaliação da disciplina no domínio de conhecimento e resolução de problemas. Por fim, depois da tarefa terminada, importava que o aluno refletisse na sua resolução, concluísse o problema de forma correta e apresentasse uma solução ao que era pedido, por isso, surge o critério *Correção da resposta à tarefa*.

Para cada um dos três níveis dos critérios de avaliação, é descrito o que o aluno deve cumprir, o que o ajuda a regular-se no cumprimento da tarefa. Os descritores, ao contrário dos previamente utilizados na disciplina, foram escritos na primeira pessoa, na visão do aluno, uma vez que o intuito principal consistia em facilitar a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, ao longo das resoluções dos vários problemas, e promover a utilização dos critérios de avaliação como ferramentas de orientação do trabalho e consequente melhoria das produções escritas dos alunos.

Um dos objetivos da minha intervenção pedagógica é a valorização e utilização dos critérios de avaliação, por parte dos alunos, como elementos reguladores do seu trabalho. Por isso, numa primeira aula, comecei por exemplificar como gostaria que os alunos utilizassem os critérios de avaliação. Para tal, recorri a um problema anteriormente trabalhado em sala de aula, *Problema do café* (Anexo I). Este problema envolve funções exponenciais num contexto de modelação matemática, onde os alunos necessitam de interpretar os resultados, no contexto do problema, e compreender as questões colocadas, no sentido de mobilizar os conteúdos necessários para encontrarem uma estratégia de resolução. O *Problema do café* (Anexo I) encontra-se no manual adotado para a disciplina (Viegas & Valente, 2017, p. 176), numa secção dedicada a problemas sobre modelos exponenciais. Aquando da sua resolução em sala de aula, recolhi as resoluções dos alunos. Destas, escolhi três resoluções variadas e exemplificativas de bons e maus desempenhos.

A aula introdutória da intervenção pedagógica decorreu no final do mês de março na turma 1 e no início do mês de abril na turma 2, um mês depois da aula em que os alunos resolveram o *Problema do café*. Nesta aula introdutória, pretendia que os alunos, com a ajuda dos critérios de avaliação, percebessem as diferenças entre as resoluções e tomassem consciência do que deveriam fazer para ter uma boa resolução. Para isso, foram distribuídos aos alunos os critérios de avaliação dos problemas (figura 5), previamente definidos, juntamente com o enunciado do *Problema do café* e as três resoluções escolhidas. Promovi, primeiramente, uma reflexão individual sobre as resoluções, recorrendo aos critérios de avaliação, para encontrar os seus pontos fortes e pontos fracos. De modo a sintetizar ideias, discuti em grupo turma as ideias dos

alunos, e resumi no quadro as suas reflexões e conclusões, para que tomassem consciência do que era esperado na resolução de problemas, com a ajuda daqueles critérios de avaliação, nomeadamente na promoção da capacidade de resolver-e-exprimir problemas (Jacinto et al., 2018).

Depois de compreenderem como poderia ser uma boa resolução do *Problema do café*, segundo os critérios de avaliação definidos, nessa mesma aula, propus o Problema 1 – *Bolsa de valores* (Anexo II) para que os alunos realizassem a primeira fase de resolução deste problema. O Problema 1 é um problema do manual dos alunos adotado pela escola para este ano de escolaridade (Viegas & Valente, 2017, p. 142). Este problema engloba os conteúdos de funções logarítmicas, suas derivadas aplicadas ao estudo da monotonia e cálculo de limites, mais uma vez, num contexto de modelação matemática.

Os alunos resolveram o problema como habitualmente, debatendo ideias com os colegas que estão sentados mais próximo deles, sendo que, no final, entregariam uma resolução individual do problema. Além da resolução, eu pretendia que os alunos refletissem sobre o que tinham feito. Para isso, pedi-lhes que, recorrendo aos critérios de avaliação, se enquadrassem num dos níveis e escrevessem pelo menos uma frase explicitando os pontos fortes, pontos fracos e dificuldades da sua resolução. Deste modo, pretendia que registassem por escrito a sua autoavaliação individual. No final da aula, foram recolhidas as produções escritas dos alunos (resolução do problema e autoavaliação). Este momento constituiu a primeira fase de resolução, realizada em sala de aula.

Numa outra aula, na semana seguinte, entreguei aos alunos as suas produções na primeira fase de resolução do Problema 1, acompanhadas de feedback escrito que elaborei a cada uma das resoluções e à respetiva autoavaliação. Com o feedback escrito que os alunos receberam, pretendia que conseguissem evoluir na resolução do problema e na sua capacidade de exprimir a forma como pensaram para o resolver. Não esperava propriamente que isso acontecesse logo nesta primeira experiência, mas, esperava, pelo menos, que ficassem alertados para dar atenção a essas capacidades matemáticas e encorajados a melhorá-las. Dessa forma, nessa mesma aula, pedi aos alunos que realizassem a segunda fase de resolução, melhorando as produções escritas elaboradas na primeira fase, tendo em conta o feedback recebido. Desta segunda fase, surgiram produções escritas (uma resolução melhorada do Problema 1 e uma autoavaliação incidindo agora sobre esta resolução melhorada). Estas produções foram recolhidas e alvo de novo feedback escrito, desta vez sem a intenção de proporcionar uma terceira ronda de melhoria (fosse ao nível da resolução do problema,

fosse ao nível da autoavaliação), mas sempre com o objetivo de comunicar ao aluno os seus pontos fortes e os seus pontos menos fortes e, assim, o ajudar a melhorar o seu desempenho em novas situações problemáticas.

Esta forma de trabalhar com os alunos, ilustrada na figura 7, foi transversal a todos os problemas desta intervenção pedagógica (Problemas 1, 2 e 3).



Figura 7 - Esquema ilustrativo do processo implementado, transversal aos problemas 1, 2 e 3.

Os alunos resolviam o problema numa primeira aula – e a resolução é sempre entendida como envolvendo uma comunicação capaz do processo seguido – e elaboravam a respetiva autoavaliação; eu recolhia as produções e fornecia feedback escrito a cada uma delas, incidindo essencialmente no processo e na autorregulação (Hattie & Timperley, 2007); numa aula seguinte, os alunos tinham oportunidade de melhorar as suas produções beneficiando do feedback escrito que receberam; e eu, recolhendo novamente as suas produções, fornecia feedback escrito a cada uma delas, incidindo ainda no processo, mas sem intenção de os alunos realizarem uma terceira fase de resolução.

Os restantes problemas da intervenção pedagógica foram o Problema 2 – *Problema das marés* e o Problema 3 – *Problema da canalização* (Anexos III e IV). O Problema 2 envolve os conteúdos programáticos de funções trigonométricas, suas derivadas e equações trigonométricas. Este problema, adaptado de um problema disponível numa página web[3], apresenta um contexto real, procurando que os alunos o relacionem com os temas da disciplina. O problema original apresenta a profundidade da água, em

[3]https://mathspace.co/textbooks/syllabuses/Syllabus-826/topics/Topic-18352/subtopics/Subtopic-249837/

metros, num cais, expressa em função do tempo, de forma genérica e sem contextualização específica. Na adaptação, para além de ter sido feita a tradução para português, definiu-se o início da medição às 10 horas da manhã, tornando o problema mais concreto e facilitando a sua relação com situações reais pelos alunos. As questões foram organizadas numa sequência lógica que acompanha o processo de compreensão da função: identificação das marés alta e baixa, cálculo dos tempos em que a profundidade atinge níveis intermédios, determinação do intervalo entre marés e do número de ciclos num dia, além da interpretação gráfica e aplicação prática numa situação de segurança. Esta reformulação pretende promover uma maior aproximação dos alunos ao problema, estimulando o raciocínio matemático e a capacidade de aplicar conceitos a contextos reais.

O Problema 3 – *Problema da canalização* repete alguns conteúdos do Problema 2, nomeadamente funções trigonométricas, embora seja bastante diferente, sendo necessária a utilização da trigonometria e das relações entre as razões trigonométricas. Este problema foi retirado de um exame nacional (GAVE, 1998), evidenciando a sua relevância e adequação para a avaliação das competências matemáticas dos alunos.

Todos os problemas selecionados para esta intervenção pedagógica vão ao encontro das recomendações curriculares em vigor à data de realização deste trabalho (ME, 2018), nomeadamente no que toca a práticas essenciais de aprendizagem, que incluem aspetos como: i) “Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens, em contextos matemáticos e de outras disciplinas, nomeadamente Física e Economia” (p. 6); ii) “Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões” (p. 6); e iii) “Avaliar o próprio trabalho e identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem” (p. 7), tidas em conta aquando da planificação da intervenção pedagógica.

Para uma melhor perceção da planificação desta intervenção pedagógica, esquematizo-a na figura 8, indicando o número de aulas em que decorreu a intervenção propriamente dita, as datas respetivas e a descrição sumária da atividade realizada em cada aula.

Aula	*Data*	*Atividade realizada*
1	21/2/2022	Resolução do *Problema do café*;
2	31/3/2022 (turma 1) 4/4/2022 (turma 2)	Entrega dos critérios de avaliação e das resoluções exemplificativas de boas e más resoluções do *Problema do café*; Discussão em grupo turma de pontos fortes e pontos fracos das resoluções; Primeira fase de resolução do Problema 1;
3	7/4/2022	Entrega do feedback à primeira fase do Problema 1; Segunda fase de resolução do Problema 1;
4	13/5/2022 (turma 1) 19/5/2022 (turma 2)	Entrega do feedback à segunda fase do Problema 1; Primeira fase de resolução do Problema 2;
5	23/5/2022	Entrega do feedback à primeira fase do Problema 2; Segunda fase de resolução do Problema 2;
6	30/5/2022	Entrega do feedback à segunda fase do Problema 2; Primeira fase de resolução do Problema 3;
7	31/5/2022 (turma 2) 2/6/2022 (turma 1)	Entrega do feedback à primeira fase do Problema 3 Segunda fase de resolução do Problema 3;
8	3/6/2022	Entrega do feedback à segunda fase do Problema 3;

Figura 8 - Esquema temporal da implementação da intervenção pedagógica.

4. Metodologia de Investigação

Este capítulo inicia com as opções metodológicas adotadas neste trabalho de investigação e seus fundamentos teóricos, passando para a apresentação dos participantes no estudo e opções tomadas para a seleção desses participantes. Segue-se a explicação das técnicas utilizadas para a recolha de dados e a descrição dos procedimentos de análise dos dados recolhidos. Por fim, apresenta-se os procedimentos relativos aos cuidados éticos que foram considerados na realização deste trabalho.

4.1. Opções Metodológicas

Este estudo segue uma abordagem de carácter qualitativo e interpretativo (Carmo & Ferreira, 2008; Vale, 2004). Como o objetivo deste trabalho reside em compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação da resolução de problemas e os utilizam no desenvolvimento desta capacidade matemática transversal e na melhoria da forma de exprimir o seu pensamento na resolução de problemas, é importante que a investigadora faça um acompanhamento próximo do trabalho dos alunos, na sala de aula. Desta forma, a investigadora consegue ter uma visão de *insider* acerca dos dados no local de estudo, isto é, no local em que os recolhe. Este é um dos cinco aspetos defendidos por Bogdan e Biklen (1994) como características da investigação qualitativa. Neste estudo, a investigadora é, em simultâneo, a professora dos alunos. Por esse motivo, tem a oportunidade de realizar observações diretas do trabalho dos alunos em tempo real, no local em que eles resolvem os problemas, exprimem o seu pensamento e recorrem aos critérios de avaliação para apoiar estes processos, no âmbito da intervenção pedagógica, desenhada e implementada em sala de aula. Esta aproximação está em consonância com a orientação interpretativa da investigação qualitativa, que não pretende testar hipóteses, mas sim compreender, descrever e interpretar processos e dinâmicas à medida que estes se desenrolam em contextos reais (Amado, 2017). A escolha desta abordagem é ainda sustentada pela natureza dos dados recolhidos, predominantemente descritivos, que exigem uma análise compreensiva e situada (Vale, 2004). Assim, a investigação desenvolve-se numa lógica de aproximação interpretativa ao objeto de estudo, valorizando a complexidade das práticas educativas e a sua ligação com os significados construídos pelos próprios participantes.

A recolha de dados foi realizada utilizando diversas técnicas: observação participante do trabalho realizado em sala de aula pelos alunos ao longo da intervenção pedagógica, recolha documental das produções escritas dos alunos nos três problemas que foram objeto de atenção neste estudo, e entrevistas semiestruturadas individuais aos informantes privilegiados (alunos selecionados com base em critérios definidos) com registo em áudio. De seguida, detalham-se as técnicas de recolha de dados e a forma como foram aplicadas neste estudo.

4.2. Procedimentos de Recolha de Dados

4.2.1. Observação Participante

A observação, uma das técnicas de recolha de dados utilizada neste estudo, permite fazer uma comparação entre o que é ou não falado e o que surge realizado como produto final (Vale, 2004). Para além disso, a observação possibilita apreender os acontecimentos no momento sem qualquer filtro adicionado. Esta técnica é, segundo Vale (2004), a melhor técnica de recolha de dados na investigação qualitativa pois a investigadora geralmente não tem o poder de controlar o que ocorre, observando o que acontece no momento como membro invisível das ações. No caso deste estudo, a observação é participante, ou seja, a investigadora assume um papel dinamizador, fazendo parte das atividades que estão, ao mesmo tempo, a ser observadas, como professora. Um dos pontos fracos da observação participante é o facto de a investigadora poder ser influenciada pela sua perspetiva dos acontecimentos, contrariamente ao suposto, quando procura estudar as visões dos observados, pelo que a investigadora deve estar constantemente atenta à sua autorregulação nesse campo (Carmo & Ferreira, 2008; Vale, 2004).

Inicialmente, foram observadas aulas, durante os meses de setembro e outubro, no âmbito da PES. Esta observação revelou-se crucial para a definição da problemática deste estudo, uma vez que foram identificadas dificuldades dos alunos em explicitar, de forma clara e estruturada, os seus processos de pensamento matemático na resolução de problemas, assim como em compreender o papel dos critérios de avaliação na regulação da sua aprendizagem. Em particular, nessas aulas observou-se o comportamento dos alunos na resolução de problemas, evidenciando-se uma desvalorização dos processos envolvidos na resolução, em detrimento do foco exclusivo na resposta final. Todas as aulas em que a intervenção pedagógica foi posta em prática (incluindo as aulas em que foi trabalhado o *Problema do café*), realizadas durante os

meses de março, abril e maio de 2022, num total de oito aulas de 50 minutos cada, foram alvo de observação participante pela investigadora e professora dos alunos. O registo dos dados recolhidos realizou-se através da elaboração de notas de campo, onde foram registados os eventos principais ocorridos em cada aula durante a implementação da intervenção pedagógica.

4.2.2. Recolha Documental

Na investigação qualitativa, os dados devem ser recolhidos de forma diversificada <. Nesse sentido, surge a recolha documental, em que a investigadora recolhe dados já existentes, produzidos pelos alunos. Ao contrário de outros instrumentos de recolha de dados, neste caso, a investigadora não tem qualquer interferência nos dados, pois são os alunos que os produzem nas suas atividades de aprendizagem habituais. As produções escritas dos alunos incluem-se na recolha documental e são utilizadas como evidências do pensamento dos alunos (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). Os dados provenientes das produções escritas dos alunos devem ser tratados a par com os recolhidos através de outros métodos, complementando, por exemplo, o que a investigadora não observa diretamente (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). No entanto, a recolha documental pode ser a fonte primordial de dados numa investigação, como foi o caso deste estudo.

Nesta investigação, foram recolhidas as produções escritas de todos os alunos, primeiras e segundas fases das resoluções dos três problemas que fizeram parte da intervenção pedagógica, através de fotos dessas resoluções. Logo no início da recolha de dados para este trabalho de investigação, foram recolhidas as produções escritas dos alunos numa tarefa exemplo que lhes foi proposta, denominada *Problema do café* e observadas as reações dos alunos a essa tarefa. Como explicado no capítulo anterior, a intenção com esta recolha de produções dos alunos foi dupla: por um lado, tinha como objetivo que eles compreendessem quais eram os critérios de avaliação para a resolução de problemas e como esses mesmos critérios os poderiam ajudar não só no processo de resolução do problema, mas acima de tudo, na explicação do pensamento subjacente a essa resolução; por outro lado, tinha como objetivo que os alunos compreendessem o papel do feedback escrito a uma primeira resolução do problema (1ª fase), percebendo que a intenção desse feedback era que, sendo ele também baseado nos critérios de avaliação para a resolução de problemas, servisse de apoio à melhoria da primeira resolução do problema, ou seja, servisse de apoio à 2ª fase de resolução.

4.2.3. Entrevistas

A entrevista, um momento de conversa entre a investigadora e um aluno, surge como complemento das restantes técnicas de recolha de dados. A entrevista tem como objetivo recolher informação diretamente do aluno, permitindo aceder à sua visão e opinião sobre os assuntos ou acontecimentos (J. Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008; Vale, 2004). O grau de estruturação de uma entrevista pode variar. A entrevista pode ser não estruturada, totalmente estruturada ou situar-se num nível intermédio de estruturação. Neste último caso, designam-se por entrevistas semiestruturadas, frequentemente utilizadas em investigação qualitativa (Amado, 2017; Carmo & Ferreira, 2008).

A entrevista estruturada caracteriza-se por um guião fixo, com perguntas formuladas de antemão e colocadas de forma idêntica a todos os participantes, sem espaço para questões que possam surgir no decorrer da própria entrevista. Esta abordagem favorece a uniformização e facilita a comparação das respostas, mas limita a possibilidade de aprofundar aspetos emergentes ou inesperados (Carmo & Ferreira, 2008).

Na entrevista não estruturada, pelo contrário, privilegia-se uma conversação livre, guiada pelas intervenções do entrevistado, o que permite aceder a perspetivas subjetivas e mais espontâneas, revelando a complexidade das experiências vividas. No entanto, esta flexibilidade torna mais difícil a sistematização e análise dos dados, sobretudo em estudos com vários participantes (Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1994).

Na entrevista semiestruturada, a investigadora assume o papel de liderar a entrevista de acordo com um guião previamente elaborado, mas tem a liberdade de adaptar as questões conforme o decorrer da entrevista para compreender melhor as opiniões, crenças e comportamentos dos entrevistados (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). Na investigação qualitativa, este é o grau de estruturação da entrevista que apresenta mais vantagens, permitindo uma melhor organização e análise de resultados (Vale, 2004). De notar que o guião deve abranger os variados tópicos que permitem responder às questões de investigação. Devem ser evitadas perguntas com resposta fixa de “sim” ou “não” (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). Assim, pretende-se que a conversa tenha um carácter mais informal e o entrevistado se sinta num ambiente confortável para se exprimir num diálogo fluido com o entrevistador.

As entrevistas semiestruturadas surgem nesta investigação com o objetivo de obter informação sobre a experiência dos alunos na resolução dos problemas com o apoio dos critérios de avaliação e do feedback escrito, sobre as suas dificuldades, e de perceber a sua perspetiva quanto à valorização do recurso aos critérios de avaliação da

resolução de problemas para melhorar o seu desempenho e a expressão do seu pensamento. Estas entrevistas complementaram a informação recolhida por via documental e através de observação participante. No final da intervenção pedagógica, em junho, foram realizadas entrevistas semiestruturadas a três alunos, que foram selecionados como informantes privilegiados. Na secção dos participantes no estudo, mais à frente, são descritos os critérios de seleção destes alunos. A plataforma *TEAMS* da Microsoft Office 365 foi utilizada na escola para comunicação online com a comunidade escolar e foi também o meio estabelecido para o decorrer das entrevistas por ser um recurso já conhecido dos alunos e prático para o pretendido. Esta plataforma permitiu gravar as entrevistas, das quais se utilizou apenas o áudio para análise. As entrevistas tiveram uma duração entre 30 e 40 minutos. Ao longo das entrevistas, foram partilhadas através da partilha de ecrã, as produções escritas efetuadas pelas alunas nos três problemas da intervenção pedagógica, acompanhadas do feedback escrito dado pela professora. Foram parcialmente transcritas e analisadas tendo em vista o objetivo e as questões de investigação. Estas entrevistas seguiram um guião (Anexo V), que abordava como os alunos utilizavam os critérios de avaliação na resolução de problemas para melhorar o seu desempenho e a expressão do pensamento. As entrevistas também tiveram como objetivo aceder à perspetiva dos alunos acerca dos critérios de avaliação, nomeadamente como os valorizavam e como os relacionavam com o feedback escrito dado pela professora.

4.3. Procedimentos de Análise de Dados

Uma das características da investigação qualitativa, referidas por Bogdan e Biklen (1994), diz respeito à descrição e análise dos dados recolhidos. Na investigação qualitativa, todos os dados são analisados minuciosamente, de forma aprofundada sem desprezo de qualquer um:

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de número. (…) Na busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos. (p. 48)

Neste estudo, foi feita uma análise detalhada das produções escritas dos alunos das duas turmas do 12.º ano caracterizadas no capítulo anterior – Intervenção Pedagógica.

O resultado dessa análise é apresentado, no próximo capítulo, problema a problema, na sequência cronológica em que foram propostos aos alunos. Para cada problema, são consideradas a primeira resolução, o feedback escrito dado pela professora e a segunda resolução, procurando compreender como o feedback e os critérios de avaliação apoiam a melhoria do desempenho dos alunos, nomeadamente na resolução do problema propriamente dito e na expressão dos processos de pensamento seguidos nessa resolução. Os dados provenientes das entrevistas, parcialmente transcritas, foram também analisados de forma indutiva, procurando identificar padrões relativos aos temas centrais dessas entrevistas.

Desta forma, os dados recolhidos foram analisados em profundidade e de forma indutiva, sempre do particular para o geral, produzindo um quadro de análise a partir do reconhecimento de padrões nos dados recolhidos. Pode, assim, assumir-se que, neste estudo, a quarta característica apresentada por Bogdan e Biklen (1994) da investigação qualitativa foi respeitada (cf., Carmo & Ferreira, 2008).

Esta investigação centra-se no papel dos critérios de avaliação para a melhoria da capacidade matemática de resolver problemas e exprimir o pensamento matemático subjacente na resolução dos mesmos. Para esse efeito, procurou-se perceber como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação para melhorar essas capacidades e compreender como é que o feedback escrito dado aos alunos pela professora contribui para esse processo. Deste modo, todo o trabalho de investigação realizado foi orientado para o processo e para a descoberta, não para a obtenção de qualquer resultado eventualmente previsto (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008), o que reforça o carácter qualitativo deste trabalho.

O último aspeto referido por Bogdan e Biklen (1994) como característico da investigação qualitativa centra-se no facto de que os investigadores qualitativos devem considerar sempre as diferentes perspetivas dos participantes. Neste estudo, as variadas visões dos participantes são investigadas, nomeadamente através das entrevistas efetuadas, mas também das produções escritas recolhidas. Além disso, para a construção do capítulo seguinte – Apresentação de Resultados – foram selecionadas resoluções de alunos com diferentes evoluções no seu desempenho (na resolução de problemas e na expressão escrita do seu pensamento), problema a problema, e com opiniões distintas sobre o trabalho efetuado no âmbito da intervenção pedagógica (feedback escrito e critérios de avaliação) que espelham os resultados obtidos de todos os alunos envolvidos na intervenção pedagógica, de modo a aceder a diferentes visões e ao significado que os participantes atribuem aos fenómenos educativos em estudo. Neste

sentido, assume-se uma realidade dinâmica, à mercê dos dados recolhidos (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008).

Para além de se tratar de uma investigação de natureza qualitativa, este trabalho também tem uma abordagem interpretativa. Toda a investigação é feita em torno da atividade de resolução de problemas em sala de aula, envolvendo a apropriação de critérios de avaliação e a sua utilização para desenvolver a capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas de matemática (mais até do que a própria capacidade de resolução de problemas). Portanto, pretende-se compreender como é que este processo decorre, com o apoio do feedback escrito fornecido pela professora, de modo que os alunos possam melhorar as suas produções iniciais na resolução de problemas e na expressão do pensamento. Tudo isto vai ao encontro do que refere Vale (2004):

> A tarefa da investigação interpretativa na sala de aula é descobrir como é que as escolhas e acções de todos os membros constituem um currículo realizado e um ambiente de aprendizagem cuja construção é largamente, mas não exclusivamente, da responsabilidade do professor. (p. 7)

4.4. Participantes no Estudo

Participaram neste estudo, conforme detalhado no capítulo anterior, duas turmas do 12.º ano de escolaridade da disciplina de Matemática A, das quais fui professora no âmbito da PES. A intervenção pedagógica que serve de base a este trabalho foi realizada com todos os alunos referidos, todos aqueles cujos encarregados de educação autorizaram a sua participação, conforme explicado na secção sobre procedimentos éticos adotados.

Na sua generalidade, os alunos das duas turmas tiveram uma evolução positiva ao longo da intervenção pedagógica realizada, melhorando na sua capacidade de explicação do pensamento na resolução dos três problemas propostos. Na análise dos resultados, foram consideradas as produções escritas de todos os alunos das duas turmas cujos encarregados de educação autorizaram a sua participação neste estudo. Após a recolha de dados, houve a necessidade de selecionar um conjunto mais restrito de alunos, informantes privilegiados, para realizar entrevistas individuais. Para proceder à seleção dos informantes privilegiados, começou-se por agrupar os alunos tendo em conta a sua prestação e evolução ao longo da realização dos três problemas.

A maioria dos alunos progrediu a cada problema proposto, apresentando resoluções muito boas, tendo em conta os critérios de avaliação, sobretudo no último problema. Devido a esse facto, no grupo dos alunos que evoluíram ao longo dos três problemas, escolheram-se três alunas com diferentes níveis de desempenho na disciplina de Matemática A. Tendo em conta também a reação dos alunos ao feedback fornecido, surgiram quatro grupos distintos de alunos em termos da sua evolução ao longo da intervenção pedagógica: 1) alguns alunos que começaram com muitas dificuldades em exprimir o seu pensamento, mas progrediram a cada resolução, acabando por atingir o pretendido no último problema; 2) uma aluna que melhorou sempre após receber feedback na 1ª fase de resolução, mas que não evoluiu significativamente ao longo da intervenção pedagógica; 3) dois alunos que no Problema 1 – *Bolsa de valores* regrediram da 1ª para a 2ª fase de resolução; e 4) um aluno que teve uma melhoria significativa no segundo problema, mas não manteve a sua performance no terceiro problema.

Com o objetivo de assegurar a heterogeneidade do desempenho dos alunos na disciplina de Matemática A, incluíram-se também nos critérios de seleção as classificações obtidas no ano letivo em que foi realizado este estudo, na disciplina de Matemática A, em cada um dos três períodos letivos. Na figura 9, pode ser observado um esquema dos alunos selecionados para a entrevista, destacando as diferenças na sua evolução ao longo da intervenção pedagógica (incluindo a reação ao feedback escrito fornecido pela professora) e no seu desempenho geral na disciplina de Matemática A no final do ano letivo (olhando para as classificações obtidas):

Nome	**Evolução dos Alunos**	**Desempenho Matemática A**
Júlia	Evoluiu ao longo dos três problemas	Suficiente (11-12-13)
Cátia	Evoluiu ao longo dos três problemas	Bom (14-15-17)
Joana	Evoluiu ao longo dos três problemas	Suficiente (10-11-12)
Matilde	Melhorou da 1ª para a 2ª fase, mas não progrediu ao longo dos três problemas	Bom (12-13-14)
Lourenço	No Problema 1 – *Bolsa de valores* regrediu da 1ª para a 2ª fase	Muito Bom (16-18-19)
Simão	No Problema 1 – *Bolsa de valores* regrediu da 1ª para a 2ª fase	Excelente (19-20-20)
Afonso	Melhorou do 1º para o 2º problema e piorou do 2º para o 3º problema	Suficiente (15-13-13)

Figura 9 - Breve caracterização dos alunos selecionados como informantes privilegiados.

Os alunos Afonso e Simão pertencem à turma 1 e os alunos Júlia, Cátia, Joana, Matilde e Lourenço pertencem à turma 2. A escolha dos informantes privilegiados implicou uma análise dos dados recolhidos de todos os alunos participantes, incidindo sobre as minhas notas de campo das observações realizadas e sobre as produções escritas recolhidas, o que demorou mais tempo que o esperado. Por esse motivo, a calendarização pensada anteriormente para a realização das entrevistas aos alunos informantes privilegiados atrasou-se. Deste modo, as entrevistas decorreram já em período de férias escolares, o que não facilitou o processo de contacto com os alunos. Após várias tentativas de contacto, por diferentes meios de comunicação, não foi possível agendar entrevista com mais do que três alunos, dos sete que foram selecionados. Os nomes dos alunos que foram entrevistados encontram-se sublinhados na figura 9, pertencem os três à mesma turma (turma 2) e ao mesmo grupo de alunos que, apesar das muitas dificuldades iniciais, evoluíram notoriamente, concluindo o terceiro problema com uma boa resolução no que diz respeito ao exprimir do pensamento. Importa ainda sublinhar que os informantes privilegiados selecionados não correspondem à totalidade dos alunos participantes no estudo e cujas produções foram analisadas na apresentação de resultados, mas constituem um grupo intencionalmente escolhido com base em critérios definidos, com o objetivo de permitir ouvir e analisar a perspetiva desses alunos sobre esta intervenção pedagógica.

4.5. Procedimentos Éticos

No ano letivo de 2020/21, tinham já sido pedidas autorizações aos encarregados de educação destes alunos (de ambas as turmas) para a realização de intervenções pedagógicas semelhantes àquela que serviu de base a este trabalho de investigação, e já lhes tinha sido explicado o intuito e funcionamento desse tipo de intervenções – estando contempladas no quadro das aulas previstas e no enquadramento curricular em vigor, pretendia-se proceder à recolha de alguns dados empíricos que permitissem a realização de um trabalho de investigação com vista à elaboração de um relatório de estágio por parte de cada um dos professores estagiários do grupo que realizasse a sua PES na escola em que decorreu o estudo e nas turmas da orientadora cooperante.

No início do ano letivo de 2021/22, os encarregados de educação foram relembrados dessas autorizações e questionados se estas se mantinham ou se havia alterações. Nas autorizações constavam o consentimento para a gravação de aulas em áudio, recolha de produções escritas e realização de entrevistas individuais com registo em áudio. Nem

todos os encarregados de educação permitiram a participação dos seus educandos no estudo (quatro alunos no total das duas turmas não participaram), pelo que, apenas os alunos autorizados foram considerados neste trabalho, quer a nível das produções escritas, quer a nível das entrevistas realizadas. No entanto, todos participaram nas tarefas propostas (resolução dos problemas e autoavaliação) e receberam feedback das suas resoluções, uma vez que toda a intervenção pedagógica se integrava na planificação das atividades de ensino da disciplina de Matemática A.

Ainda dentro das questões éticas, a confidencialidade dos dados recolhidos foi assegurada, uma vez que apenas eu, a minha orientadora cooperante e a minha orientadora da FCUP tiveram acesso a eles. A anonimidade de todos os participantes no estudo foi assegurada, bem como o local exato da sua implementação, pois recorreu-se sempre a nomes fictícios, diferentes de todos os nomes dos alunos das duas turmas, para a identificação dos participantes na investigação.

5. Apresentação de Resultados

Neste capítulo, são apresentados e analisados os dados recolhidos de acordo com o objetivo e questões de investigação definidas para este trabalho. Essa análise tem em conta o quadro teórico apresentado no capítulo 2 - Enquadramento Teórico, bem como as opções metodológicas tomadas, em particular os procedimentos de recolha de dados. Este capítulo divide-se em duas partes: a análise dos resultados das produções escritas e a análise dos resultados das entrevistas. Inicialmente é analisada a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos através do *Problema do café*. De seguida, é feita uma descrição geral da evolução da turma ao longo da resolução dos três problemas em que se baseou a intervenção pedagógica, com uma análise problema a problema, recorrendo a evidências empíricas que espelham a heterogeneidade dos dados recolhidos; estes dados são analisados com base na resolução e evolução dos alunos na capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas e no feedback dado pela professora. Por último é feita uma análise com recurso a excertos das três entrevistas efetuadas, com o objetivo de perceber a perceção destas alunas sobre a intervenção pedagógica realizada.

5.1. Análise dos resultados das produções escritas

5.1.1. *Problema do café*

O *Problema do café*, escolhido para promover a apropriação de critérios de avaliação foi previamente resolvido pelos alunos sem qualquer orientação específica, de onde se recolheram dados sobre o estado inicial das resoluções dos alunos. A figura 10 apresenta o enunciado desse problema, que envolve funções exponenciais num contexto de modelação matemática.

Suponhamos que, na pastelaria Café Douro, a temperatura ambiente se mantém constante. Numa altura de pouco movimento, o António, empregado dessa pastelaria, decidiu que merecia uma pausa no trabalho e pediu à Maria para lhe «tirar um café».



Acontece que o seu pedido coincidiu precisamente com a chegada à pastelaria de uma excursão. O café foi servido e ficou esquecido sobre o balcão por muito, muito tempo!

Admite que a temperatura do café, t minutos depois de ser servido, é dada, em graus Celsius, por $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$.

f) Determina a temperatura do café no instante em que é servido.

g) O António gosta de beber o café bem quente, sempre a mais de 60°C. Será que um quarto de hora depois de ter sido servido, o café ainda estaria ao gosto do António?

h) Um cliente que goste do café a uma temperatura inferior a 50°C, quantos minutos tem de deixar passar depois de o café ser servido?

i) Quando o António se lembrou do café que tinha pedido, a diferença entre a temperatura do café e a temperatura ambiente era de apenas 10°C. A que temperatura se encontrava o café e há quanto tempo tinha sido servido? Apresenta a resposta em minutos, arredondados às unidades.

j) Em relação à lei do arrefecimento de Newton, definida por $T(t) = a + be^{-kt}, k > 0$, interpreta o significado das constantes a e b.

(Retirado de: Viegas & Valente, 2017, p. 176)

Figura 10 - Enunciado do *Problema do café*.

Das resoluções recolhidas nas duas turmas, pode-se aferir que na sua maioria continham apenas o resultado final, sem especificarem resposta no contexto do enunciado. Alguns dos alunos apresentavam também os cálculos efetuados. O ponto de situação inicial das turmas motivou a implementação da intervenção pedagógica que suporta esta investigação. Para isso, como já referido no capítulo 3, escolheram-se três resoluções que representavam a diversidade de respostas obtidas nas duas turmas, com o intuito de os alunos tomarem nota das suas diferenças e perceberem o que se pretendia com uma resolução de um problema, ou seja, como seria uma boa resolução. As três resoluções foram copiadas para novas folhas de resolução respeitando tudo o que estava escrito – local, estrutura, apresentação – com o objetivo de manter tudo exatamente igual, apenas modificar o tipo de letra por questões de anonimato dos alunos que tinham elaborado as resoluções, uma vez que iriam ser discutidas e

distribuidas por todos os alunos das duas turmas. De seguida, analisar-se-á cada uma das três resoluções escolhidas.

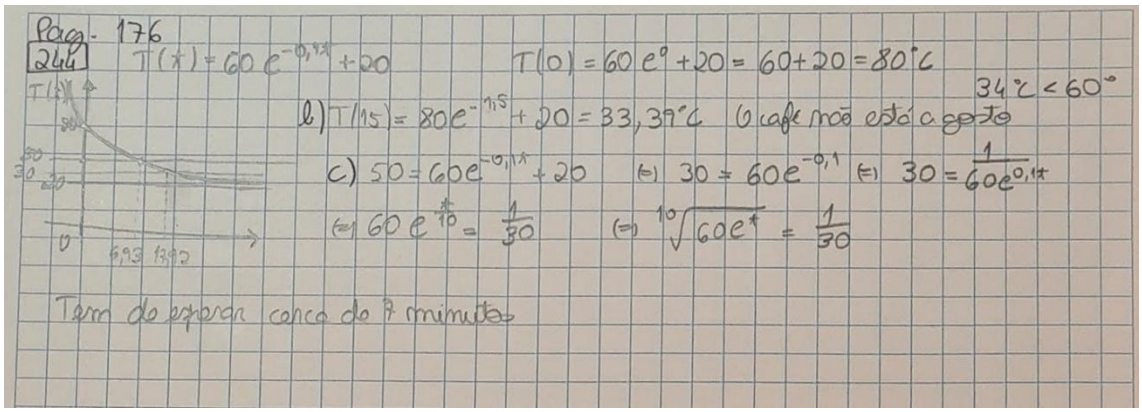


Figura 11 - Resolução Exemplo 1 - *Problema do café*

A resolução apresentada na figura 11 contém respostas incompletas; em algumas alíneas, não está presente uma resposta no contexto do problema, e está bastante desorganizada, com uma representação gráfica em estilo rascunho, onde é difícil compreender o que está representado. Para além disso, a estratégia utilizada foi adequada para a resolução do problema.

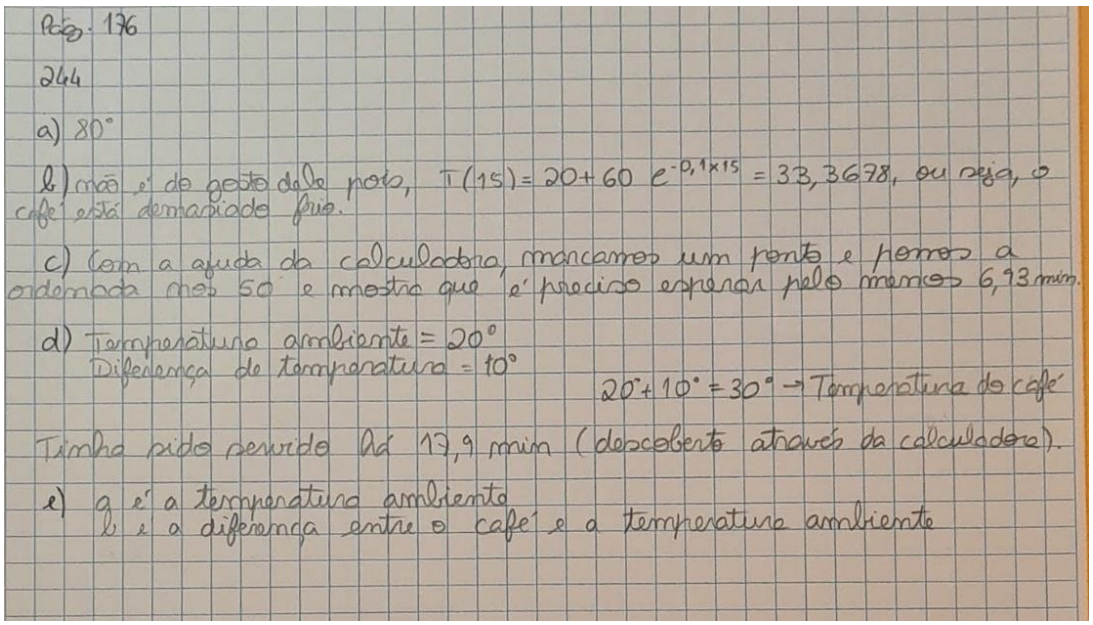


Figura 12 - Resolução Exemplo 2 - *Problema do café*

Na resolução apresentada na figura 12, na maioria das alíneas não é explicado o processo de resolução. Não é apresentado o gráfico visualizado na calculadora que auxilia a resposta à alínea d). A resolução apresentada chega ao resultado pretendido, apesar de muito incompleta, pois não apresenta as estratégias utilizadas. A indicação dos arredondamentos a serem efetuados não foi tida em conta.

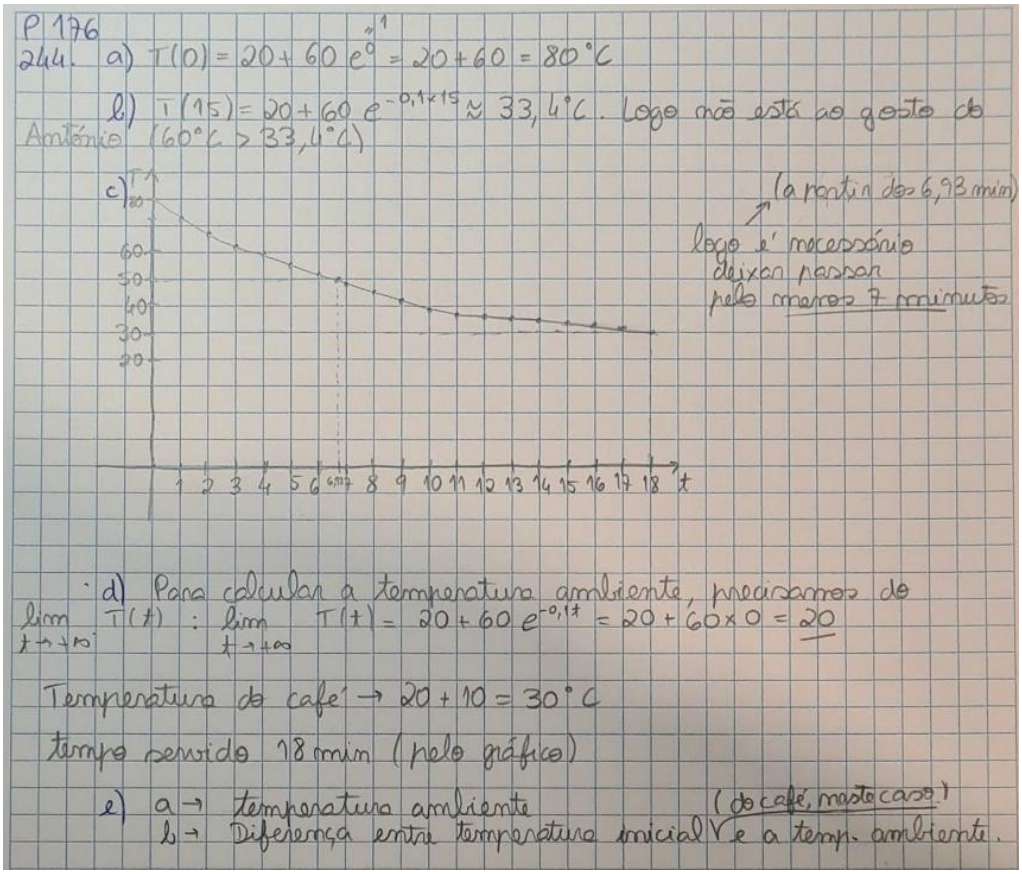


Figura 13 - Resolução Exemplo 3 - *Problema do café*

A resolução que surge na figura 13 apresenta uma melhor organização que a primeira (figura 10), aceitável de acordo com o esperado. Na primeira alínea, não apresenta resposta no contexto do problema. A representação gráfica está percetível. O problema foi interpretado corretamente e as estratégias utilizadas foram adequadas.

Estas resoluções (figuras 11, 12 e 13) foram analisadas em sala de aula, aquando da apresentação dos critérios de avaliação, conforme descrito no capítulo 3 - Intervenção Pedagógica. Depois de algum tempo de reflexão individual, discutiu-se em grande grupo os pontos fortes e pontos fracos das resoluções, tendo em conta os critérios de avaliação. Dessa análise global por parte dos alunos, resultaram os seguintes aspetos resumidos no quadro da sala de aula (figuras 14 e 15).

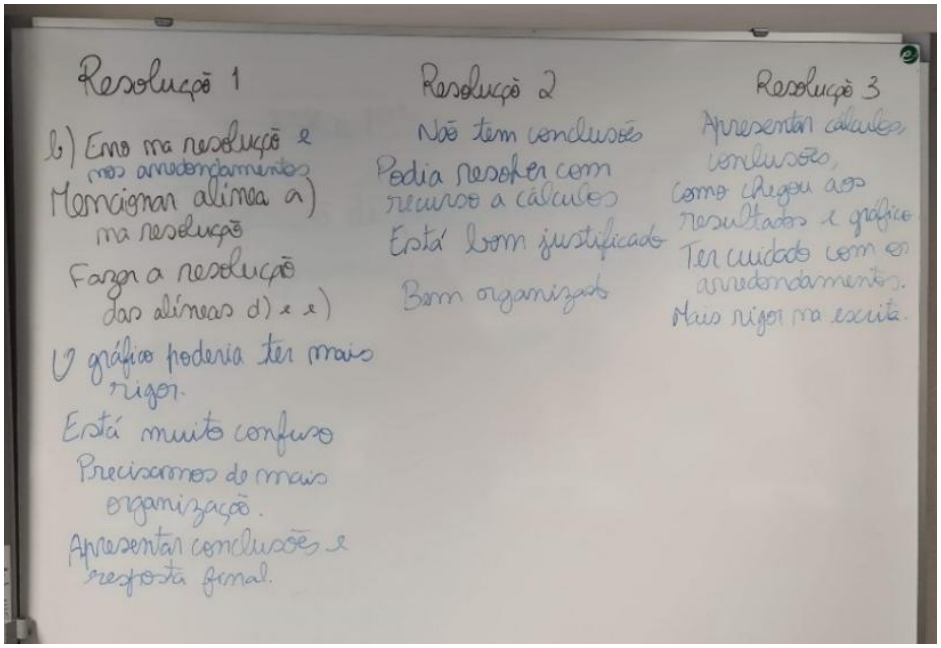


Figura 14 - Pontos fortes e pontos fracos das resoluções exemplo da turma 1

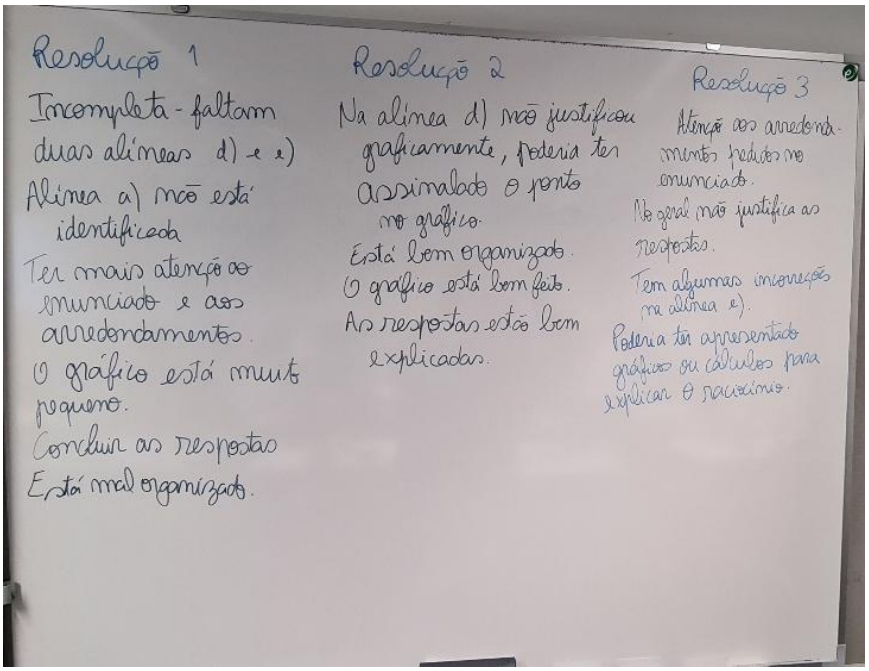


Figura 15 - Pontos fortes e pontos fracos das resoluções exemplo da turma 2

Pode observar-se que os alunos conseguiram perceber os pontos fortes e pontos fracos de cada resolução para os quais os critérios de avaliação (Anexo VI) foram fundamentais. Os alunos depararam-se com dificuldades, na resolução de problemas, nomeadamente no exprimir do seu pensamento matemático e das estratégias utilizadas, bem como na organização das suas respostas. A apropriação dos critérios de avaliação decorreu da leitura e análise dos mesmos, em conjunto com a reflexão sobre as resoluções escolhidas do *Problema do café*. Inicialmente, os alunos não revelaram

muito interesse nos critérios de avaliação, uma vez que não estavam habituados à sua utilização no decorrer da resolução de problemas ou de outras tarefas. De notar que alguns alunos tinham por hábito a sua consulta no final da resolução, mas a maioria não tinha como costume a leitura detalhada e reflexão sobre os critérios de avaliação, quer da disciplina, quer dos trabalhos previamente realizados.

O *Problema do café* permitiu ainda aferir as principais dificuldades existentes nos alunos na capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas. Podemos observá-las nas resoluções exemplo escolhidas e apresentadas anteriormente (figuras 11, 12 e 13), mas as dificuldades eram generalizadas nas duas turmas. Em ambas, muitos alunos conseguiram obter os valores pretendidos, apesar de não explicarem como pensaram para os obter. Por este motivo, um pequeno erro de cálculo, por exemplo, pode tornar a resolução completamente errada. Esta situação não aconteceria caso o aluno explicasse como pensou para obter os seus resultados. Para além disso, no caso de os critérios de avaliação terem em conta os passos dados e a estratégia utilizada, como é o caso dos critérios de classificação dos exames nacionais, os alunos não têm uma boa resolução, apesar de terem conhecimentos e aprendizagens necessárias para tal. O mesmo acontece nos critérios de avaliação existentes na disciplina para a resolução de problemas e nos adotados para esta intervenção pedagógica (Anexo VI).

5.1.2. Problema 1 – *Bolsa de valores*

Neste estudo, conforme explicado no capítulo 3, o primeiro problema posto em prática em sala de aula envolve modelação matemática no tema funções, em particular a aplicação da primeira derivada e dos limites de funções na resolução de problemas em contextos reais. Requer a capacidade de interpretação da situação apresentada e de relação entre conteúdos e o quotidiano dos alunos. A figura 16 mostra o enunciado do Problema 1 – *Bolsa de valores*:

As ações de uma SAD foram hoje aceites na Bolsa de Valores de Lisboa. As previsões apontam para que o valor de cada ação, daqui a t meses, seja dado, em euros, por:

$$v(t) = 5 - \frac{3\ln(t+1)}{t+1}$$

a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determina a altura ideal para comprar estas ações. Apresenta a resposta com a aproximação que achares adequada.

b) Passados anos, um acionista gaba-se de ter negociado 1000 ações e ter ganho 1150 euros. Comenta a afirmação deste acionista, apresentando os argumentos em que baseias a tua resposta.

(Retirado de: Viegas & Valente, 2017, p. 142)

Figura 16 – Enunciado do Problema 1 – *Bolsa de valores*

O feedback dado a cada aluno teve em conta o seu ponto de partida, sempre na perspetiva de proporcionar condições para que o aluno melhorasse a sua prestação na segunda fase de resolução, considerando os critérios de avaliação definidos (Anexo VI). Esta abordagem está alinhada com as perspetivas de Hattie e Timperley (2007), que salientam a importância de um feedback personalizado, orientado para o processo de aprendizagem e para a autorregulação, que promova uma reflexão ativa por parte do aluno sobre o seu desempenho. O feedback eficaz não deve corrigir erros, mas sobretudo fornecer pistas construtivas que orientem melhorias futuras, tendo em conta o nível e as necessidades específicas de cada aluno (Santos, 2018; Semana & Santos, 2008). Ao adaptar o feedback ao ponto de partida individual, pretende-se potenciar a evolução de cada aluno, oferecendo suporte adequado para que possa progredir para níveis de compreensão e desempenho mais avançados, promovendo assim uma aprendizagem significativa (Terroso et al., 2018).

Na sua maioria, os alunos entenderam o contexto do problema e definiram uma estratégia adequada à sua resolução. Cerca de metade não conseguiu apresentar, na

primeira fase de resolução, uma resposta de acordo com o pretendido, por não explicar o seu processo de resolução ou por faltar organização na escrita, tendo recorrido em exclusivo ao uso de cálculos sem explicação e sem conclusão no contexto do problema. A Marta e o Salvador pertencem a esse grupo de alunos, como se pode verificar através das suas produções escritas.

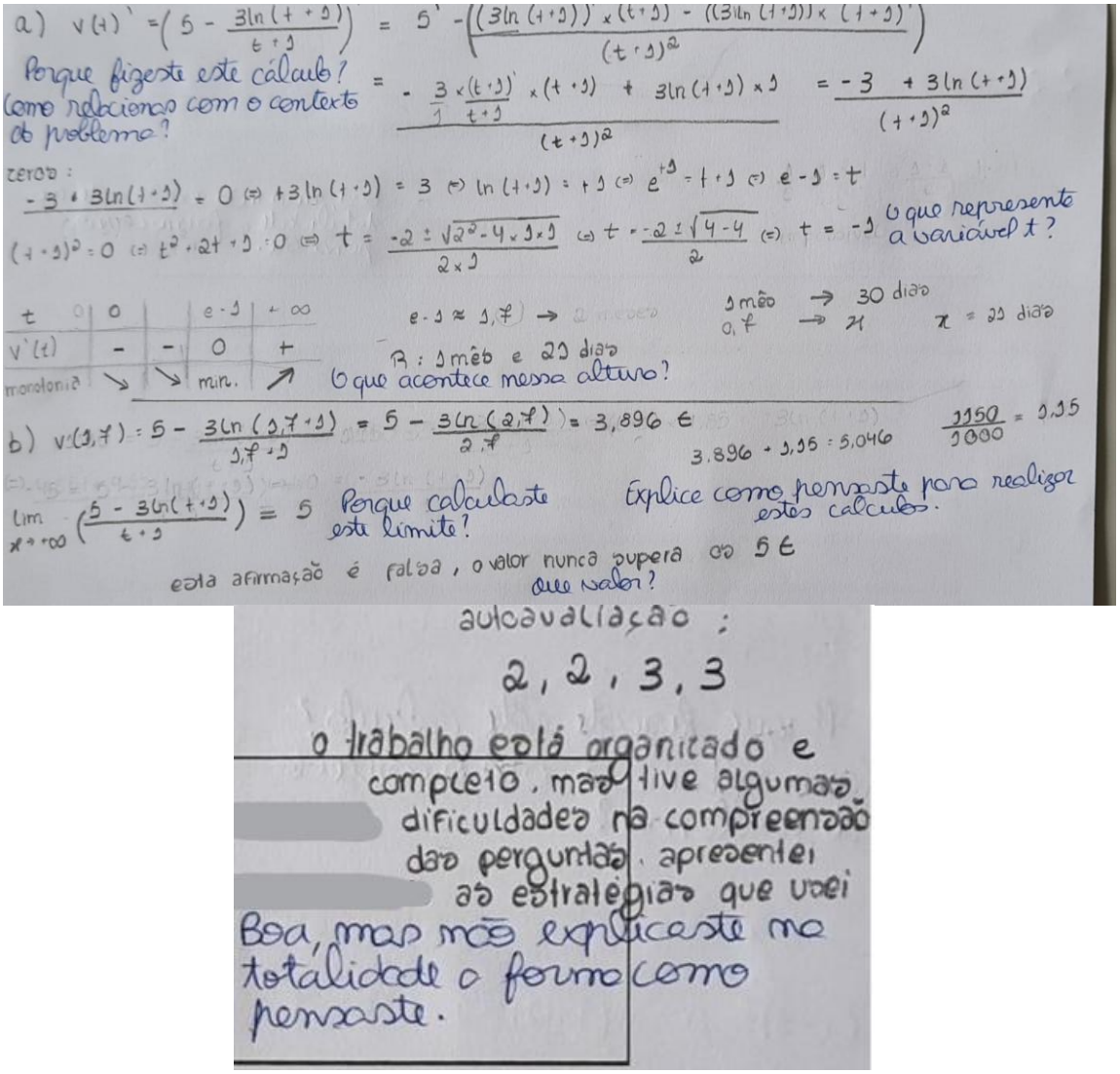
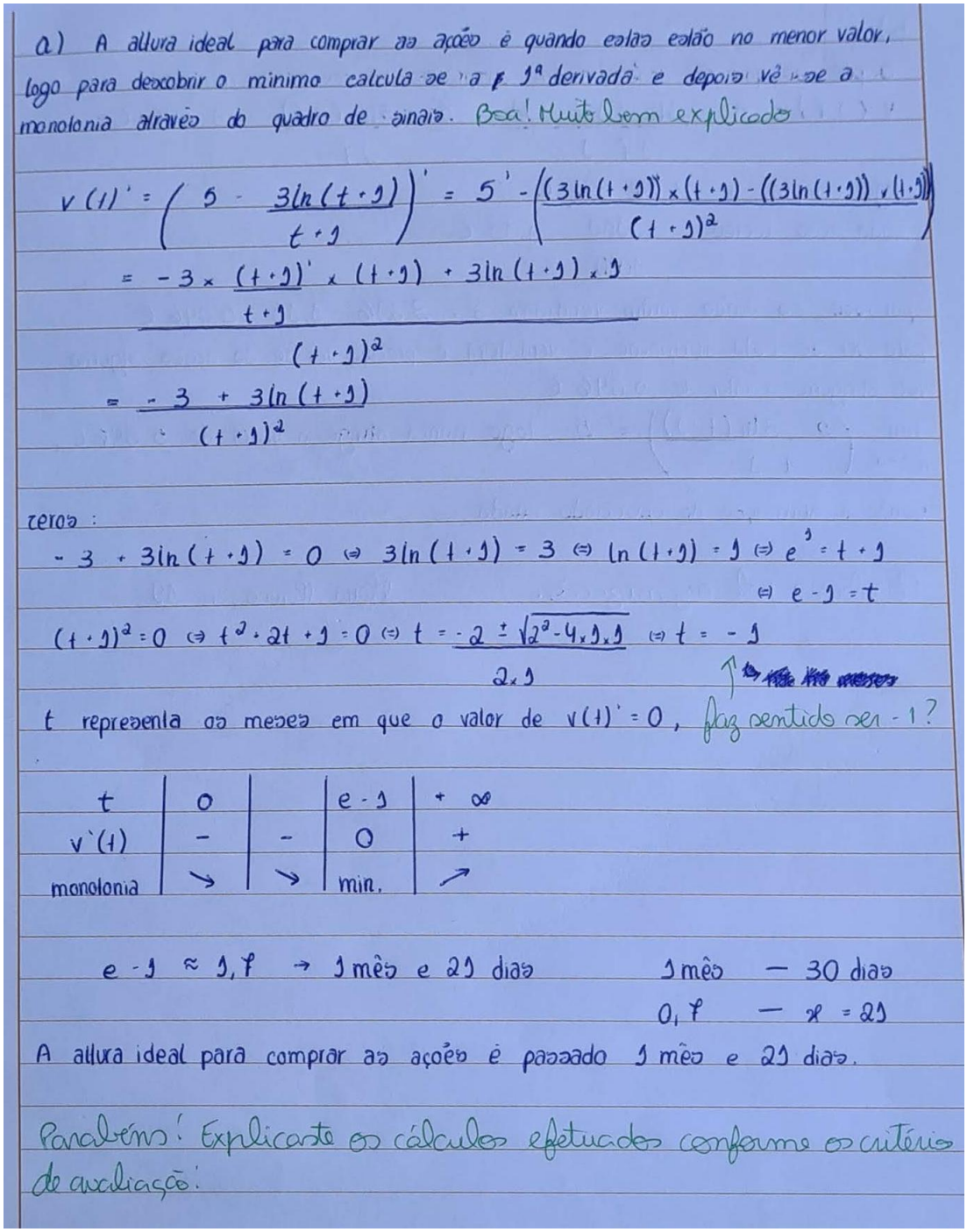


Figura 17 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Marta

A resolução de Marta, fase 1 do Problema 1 - *Bolsa de valores* (figura 17) permite observar que a aluna efetuou os cálculos de forma correta, mas não explicou, no contexto do problema, a razão pela qual efetuou esses mesmos cálculos. Na autoavaliação, Marta utilizou os critérios de avaliação para analisar o seu trabalho. No entanto, não referiu o facto de que não explicou de forma completa o seu pensamento, no contexto do problema. Dessa forma, o feedback dado teve como objetivo alertar a aluna para a necessidade de aprofundar a explicação do seu pensamento,

reconhecendo que os cálculos são importantes, mas insuficientes para a compreensão completa da resolução. Foram colocadas perguntas que orientaram a aluna a refletir sobre o seu processo de resolução e a contextualizar os cálculos efetuados em relação à situação apresentada no problema. No que diz respeito aos conteúdos matemáticos necessários para a resolução de problemas, Marta não apresentou qualquer dificuldade.



a) A altura ideal para comprar as ações é quando estas estão no menor valor, logo para descobrir o mínimo calcula-se a 1ª derivada e depois vê-se a monotonia através do quadro de sinais. Boa! Muito bem explicado

$$v(t)' = \left(5 - \frac{3\ln(t+1)}{t+1}\right)' = 5' - \left(\frac{(3\ln(t+1)) \times (t+1) - ((3\ln(t+1)) \times (t+1)}{(t+1)^2}\right)$$

$$= \frac{-3 \times \frac{(t+1)'}{t+1} \times (t+1) + 3\ln(t+1) \times 1}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{-3 + 3\ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

zeros:

$$-3 + 3\ln(t+1) = 0 \Leftrightarrow 3\ln(t+1) = 3 \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow e^1 = t+1 \Leftrightarrow e-1 = t$$

$$(t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow t = -1$$

t representa os meses em que o valor de $v(t)' = 0$, faz sentido ser -1?

t	0		e-1	+ ∞
v'(t)	-	-	0	+
monotonia	↘	↘	min.	↗

e-1 ≈ 1,7 → 1 mês e 21 dias

1 mês — 30 dias
0,7 — x = 21

A altura ideal para comprar as ações é passado 1 mês e 21 dias.

Parabéns! Explicaste os cálculos efetuados conforme os critérios de avaliação!

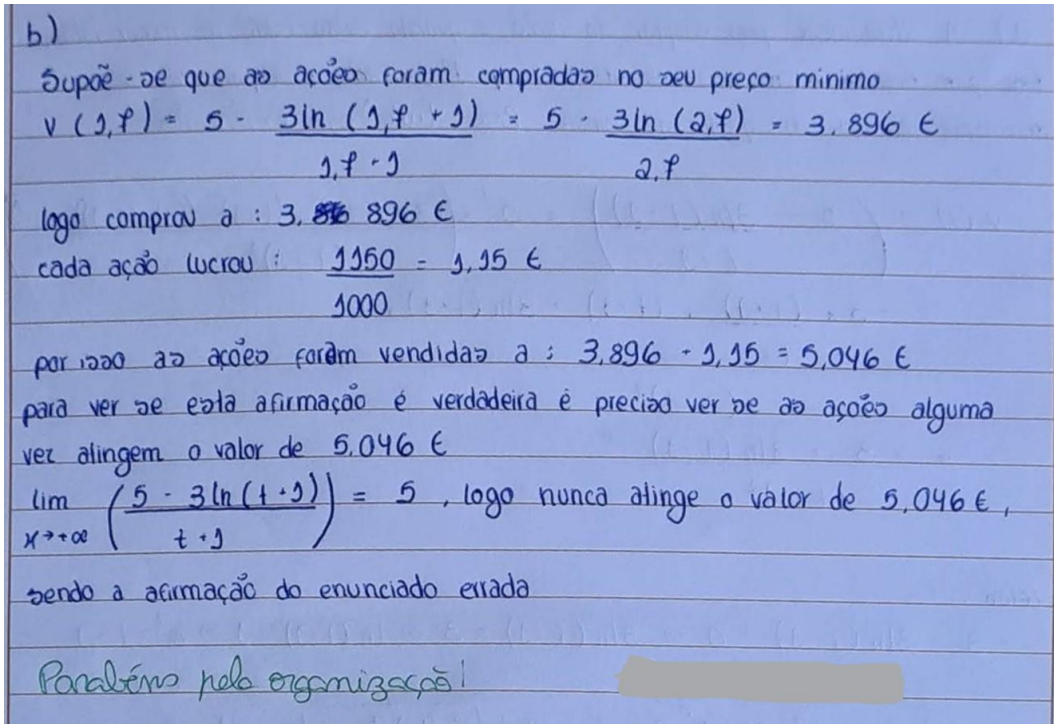


Figura 18 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Marta

Depois de ter recebido feedback, Marta, bem como todos os alunos, realizaram pela segunda vez o problema, corrigindo e melhorando os aspetos que consideravam relevantes, tendo em conta os critérios de avaliação e o feedback recebido. Esta revisão orientada pelo feedback exemplifica a aprendizagem autorregulada, em que o aluno reflete sobre o seu desempenho e ajusta a sua abordagem para alcançar melhores resultados (Semana & Santos, 2008). Na segunda fase de resolução de Marta (figura 18), pode observar-se claramente que a aluna compreendeu o feedback dado pela professora, evidenciado pela melhoria do seu trabalho. Verifica-se, na resolução da segunda fase, que a aluna acrescentou uma explicação dos cálculos efetuados, respondendo às questões colocadas pela professora, o que indica um avanço na expressão do seu pensamento e uma maior capacidade de monitorizar e regular o próprio pensamento (Hattie & Timperley, 2007). Além disso, a aluna reformulou o final da sua resolução, contextualizando adequadamente o resultado obtido no contexto do problema. De salientar que, no comentário onde se questionava o significado da variável t, pretendia-se que a aluna refletisse sobre o facto dessa variável não poder tomar valores negativos, pelo que o valor -1 não era adequado no contexto do problema. Marta explicou corretamente o significado da variável t: no quadro de sinais teve em conta o contexto do problema apresentando o intervalo correto para a variável; no entanto, não explicitou que a raiz calculada não pertencia ao domínio da função. No geral, a evolução de Marta na capacidade de exprimir o pensamento foi muito positiva,

o que justifica a melhoria da sua resolução e o feedback favorável dado pela professora nesta segunda fase.

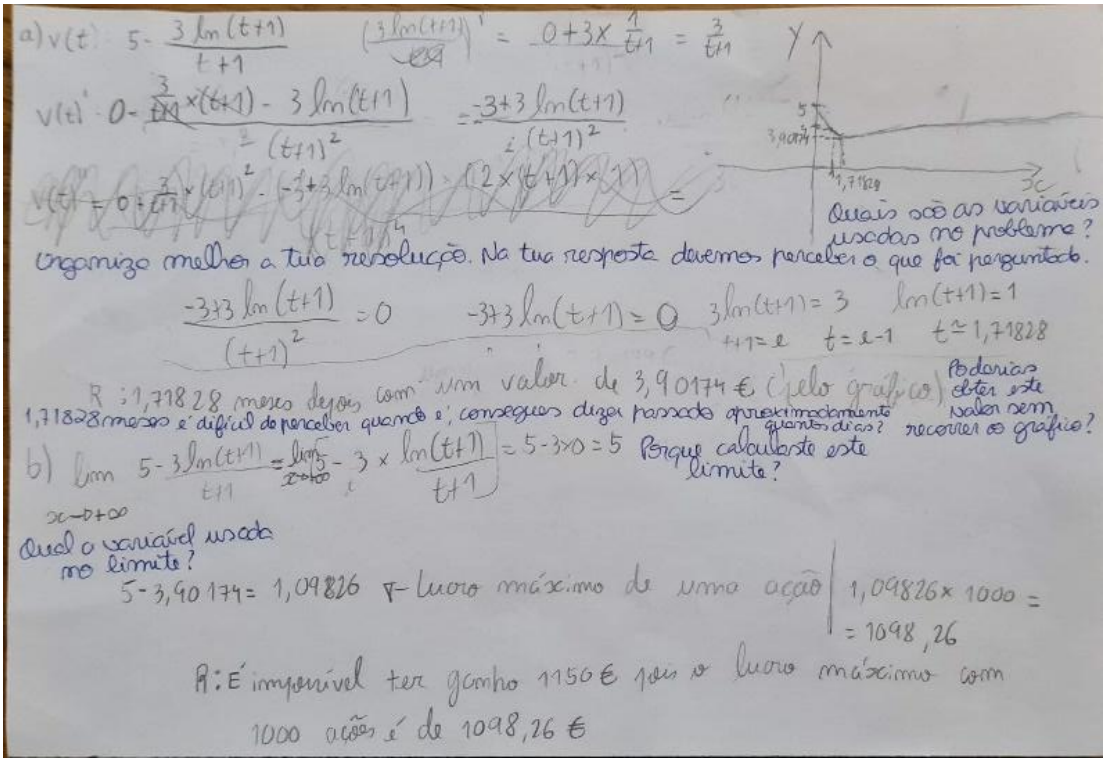


Figura 19 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Salvador

A resolução de Salvador na primeira fase de resolução (figura 19) caracteriza-se por uma apresentação muito desorganizada. Na representação gráfica, feita em modo de rascunho, o aluno utilizou variáveis diferentes das que usou na restante resolução, sem se acompanhar por qualquer explicação ou referência a essa alteração. Para além disso, ainda na alínea a), o Salvador apresentou uma aproximação numérica com muitas casas decimais, o que não é o mais aconselhado no contexto do problema. Por esse motivo, o feedback fornecido procurou fazer com que o aluno apresentasse a sua resposta em dias e meses, de forma mais clara e ajustada ao enunciado. Na alínea b), inicialmente, o aluno não explicou o limite calculado. Por isso, foram colocadas duas questões ao aluno com o objetivo de o aluno explicitar os cálculos realizados e refletir sobre a utilização de diferentes variáveis para representar a mesma incógnita, sem que isso seja explicitado na sua resolução. Apesar desses aspetos a melhorar, a resolução de Salvador revelou uma estratégia adequada e eficaz, permitindo-lhe chegar à resposta correta. A sua forma de pensar foi, no essencial, bem expressa, ainda que a apresentação e a clareza pudessem beneficiar de reformulações. Este exemplo evidencia a importância de um feedback que ajude o aluno a compreender as suas escolhas e a melhorar a comunicação do seu pensamento matemático.

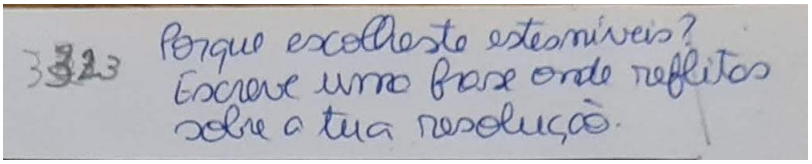
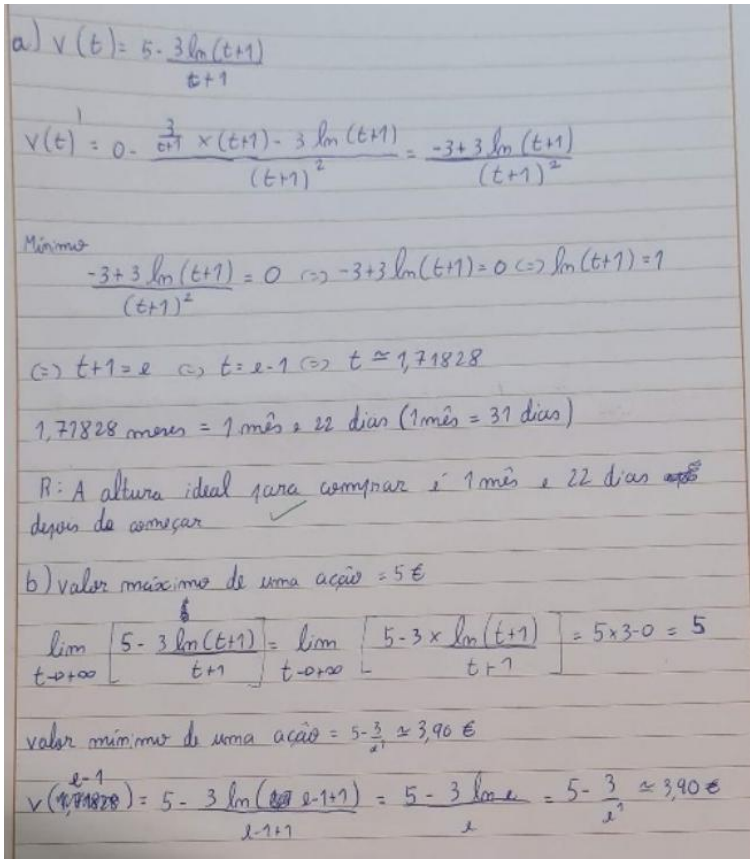


Figura 20 - Fase 1 do Problema 1 - autoavaliação de Salvador

Na autoavaliação de Salvador (figura 20), o aluno teve em conta os critérios de avaliação para escrever a sua autoavaliação, mas optou por classificar-se segundo os três níveis dos critérios de avaliação, não explicando o porquê de escolher esses níveis. O aluno poderia ter usado, por exemplo, os descritores de cada nível para o ajudar a escrever pontos fortes e pontos fracos da sua resolução, tal como tinha sido até exemplificado em aula. Esta autoavaliação classificada, frequente nos alunos que realizaram autoavaliação, poderá ser derivada do facto dos alunos nunca terem previamente realizado uma autoavaliação descritiva e reflexiva acerca das suas resoluções e habitualmente realizarem uma autoavaliação apenas no final de cada período a todas as disciplinas, onde se classificam dentro dos critérios e atribuem uma nota final. O feedback dado pela professora surgiu no sentido de questionar o aluno sobre o motivo da escolha dos níveis apresentados e de obter uma reflexão escrita acerca do trabalho do aluno, de modo que ele mesmo tomasse consciência do seu desempenho.



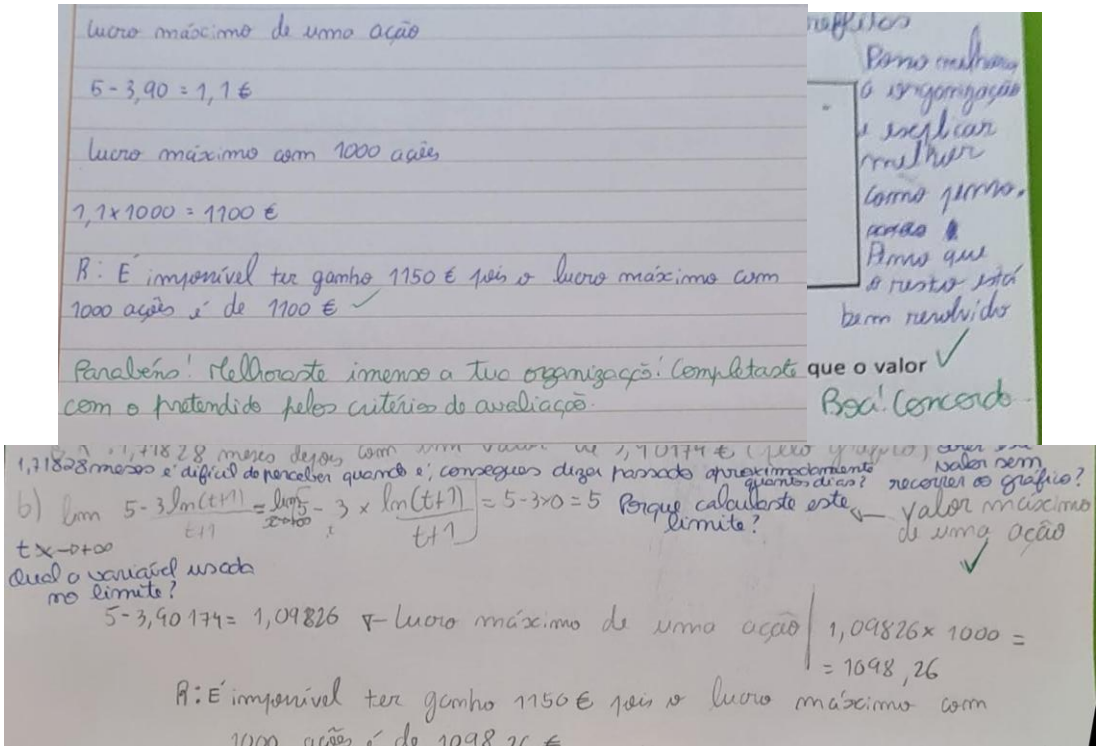


Figura 21 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Salvador

O primeiro aspeto a salientar na resolução de segunda fase do Salvador (figura 21) é a organização, que foi melhorada significativamente. Para além disso, o aluno atentou a todos os comentários efetuados pela professora e corrigiu todos os aspetos pretendidos, demonstrando uma clara evolução na sua resolução. A capacidade de exprimir o pensamento foi substancialmente melhorada, tornando a resolução mais clara e compreensível. Quanto à autoavaliação, o aluno completou os níveis atribuídos, refletiu sobre a sua resolução e constatou os aspetos em que poderia melhorar numa próxima vez. De facto, o feedback escrito aliado à autoavaliação e aos critérios de avaliação permitiram que o aluno tivesse uma evolução notória.

Um terço dos alunos, para além destes aspetos, revelou dificuldades de interpretação do problema, o que não lhe permitiu apresentar uma resolução correta, cometendo alguns erros. De seguida, apresenta-se a resolução do Frederico (figura 22) que pertence a este grupo de alunos, de modo a exemplificar estas dificuldades.

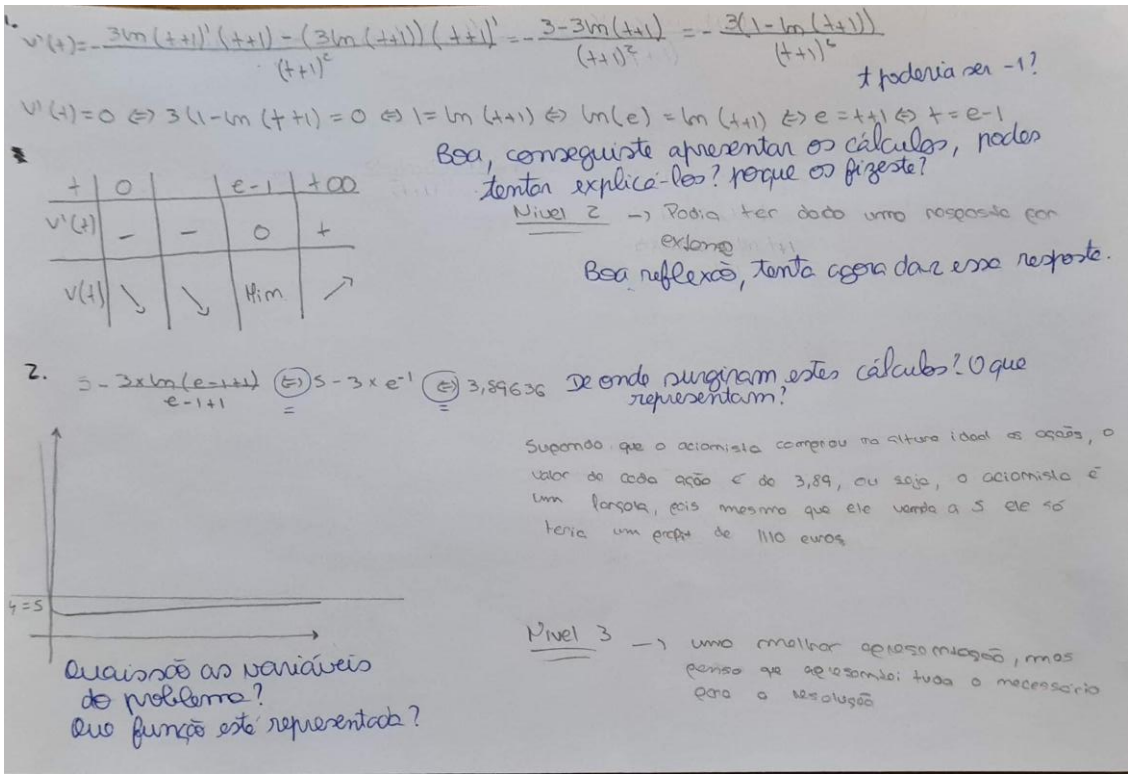


Figura 22 - Fase 1 do Problema 1 - resolução de Frederico

Frederico apresentou uma resolução com algumas imperfeições ao nível da linguagem matemática utilizada. Pode ser observado na figura 22 que o aluno revela ideias corretas, embora nem sempre completamente desenvolvidas. O feedback dado ao Frederico pretendeu valorizar os pontos fortes da resolução do aluno, sendo acompanhado de questões orientadoras que visavam fazer o aluno refletir na sua resolução de modo a explicitar o seu pensamento e melhorar os aspetos necessários na segunda fase de resolução. De salientar que o aluno elaborou a sua autoavaliação com base nos critérios de avaliação, reconhecendo que poderia completar a alínea a) com uma resposta no contexto do problema e que poderia melhorar a apresentação da alínea b), embora apresentasse o necessário. Esta autoavaliação revela que o aluno, mesmo que não tivesse oportunidade de receber comentários à sua resolução, já tomou consciência, de forma autónoma, de aspetos a melhorar, o que demonstra uma atitude autorregulada face à aprendizagem.

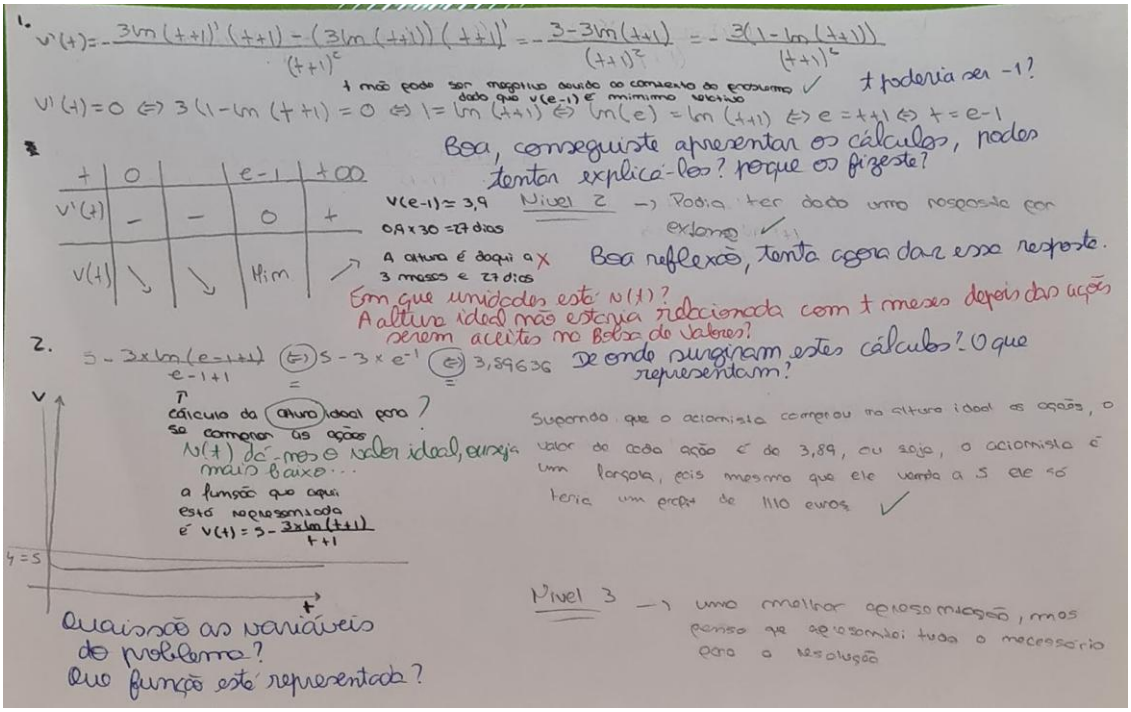


Figura 23 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Frederico

Na segunda fase de resolução de Frederico (figura 23), observa-se que completou a resolução anterior com explicações do seu processo de resolução, respondendo às perguntas colocadas pela professora no feedback escrito. No entanto, da resposta no contexto do problema da alínea a), conclui-se que o aluno, apesar de apresentar os cálculos corretos, na sua conclusão/resposta final, fez uma troca do significado das variáveis, o que comprometeu a interpretação correta do resultado e impediu a evolução pretendida. O aluno completou a representação gráfica com as variáveis em falta de forma correta, mas não conseguiu explicar corretamente os cálculos efetuados na alínea b), apesar de ter já anteriormente concluído a resposta de forma correta. Por esse motivo, nesta segunda fase de resolução foi-lhe dado novo feedback (a vermelho na figura 23), com uma pergunta orientadora relativa às unidades de $v(t)$ em que foi apresentada a resposta, com o objetivo de o aluno perceber que estas correspondem ao valor de cada ação, em euros, e não ao tempo decorrido. Essa questão foi acompanhada de outra pergunta, que remete o aluno para o facto de a altura ideal para comprar a ação se relacionar com a variável t, ou seja, o tempo decorrido, em meses, após as ações serem aceites na *Bolsa de valores*. Apesar do feedback, da autoavaliação e dos critérios de avaliação disponíveis, o aluno continuou a apresentar algumas dificuldades em expressar o seu pensamento matemático, não conseguiu ainda ultrapassar esta sua dificuldade. A expectativa, no final das duas fases de resolução do Problema 1, era que Frederico evoluísse nas próximas experiências de

resolução de problemas da intervenção pedagógica, uma vez que já tinha tomado consciência de alguns aspetos que necessitava melhorar.

Os restantes alunos (um quinto da turma) obtiveram, já na primeira fase de resolução, uma resposta correta e completa, de acordo com o esperado para a resolução deste problema, isto é, foram capazes de exprimir o pensamento no Problema 1 - *Bolsa de valores*.

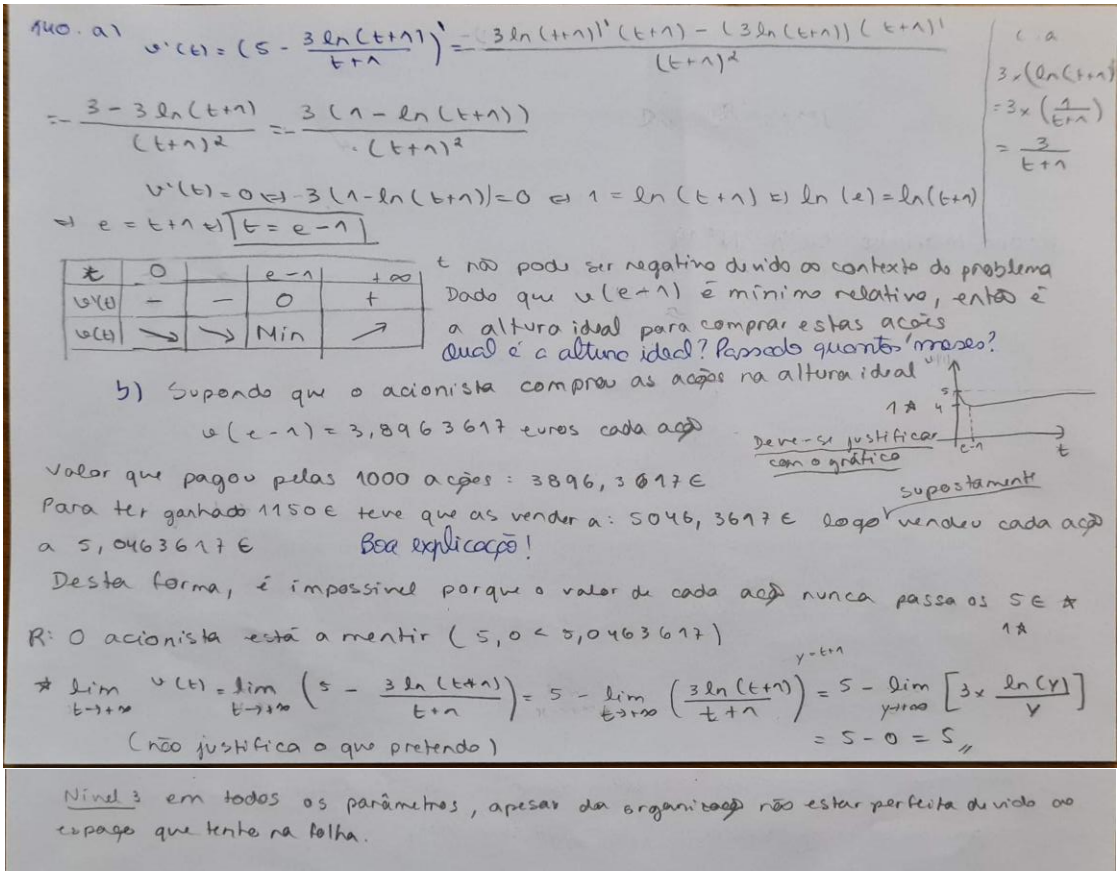


Figura 24 - Fase 1 do Problema 1 – resolução de Simão

Na resolução do Simão (figura 24), é possível observar que o aluno entendeu o problema proposto, apresentou uma estratégia adequada e conseguiu concretizá-la de maneira correta. O aluno explicou como pensou, apesar de, na primeira alínea, apresentar o mínimo da função não calculado. O feedback por parte da professora teve o intuito de o aluno elaborar os cálculos necessários, traduzir a sua resposta fazendo o cálculo, apresentando-a em dias e meses. Na pergunta que lhe foi feita no feedback, era deixado ao critério do aluno a aproximação que achasse mais adequada. Na alínea b), os comentários feitos foram positivos, pois estava tudo correto, bem explicado e de acordo com o esperado para a resolução do problema. Na autoavaliação do aluno

(figura 24), notou-se a sua preocupação com a organização da resolução, um aspeto considerado nos critérios de avaliação, que, de facto, podia ser melhorado.

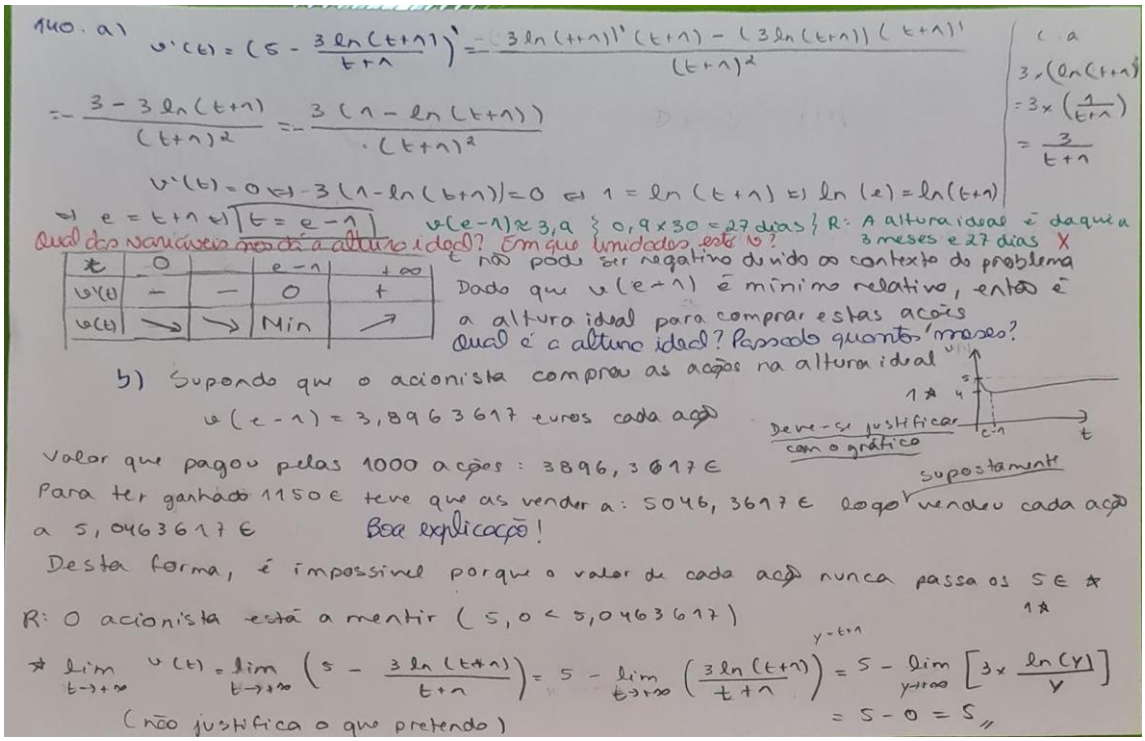


Figura 25 - Fase 2 do Problema 1 - resolução de Simão

Na segunda fase de resolução de Simão (figura 25), consegue observar-se, a verde, que o aluno completou o seu raciocínio, de acordo com a questão colocada pela professora no feedback anterior. Este dado sugere que o feedback foi eficaz, permitindo ao aluno identificar o que estava em falta e agir nesse sentido. No entanto, as conclusões apresentadas pelo aluno estão incorretas, pois Simão calculou o preço mínimo a que se pode comprar as ações e não a altura ideal para comprar as ações, como pedido no enunciado. O aluno fez uma troca do significado das variáveis no final da sua resolução, o que levou a que chegasse a um resultado incorreto. Nesta resolução, apesar do seu erro matemático, Simão exprimiu o seu pensamento matemático de forma completa, o que representa um aspeto positivo a valorizar.

A evolução dos alunos na segunda fase de resolução, em geral, foi positiva. Uma parte dos alunos, cerca de 20%, não melhorou significativamente a sua resolução. Apesar de terem apresentado pequenas melhorias, essas não se mostraram suficientes para uma evolução significativa, tendo em conta o esperado. Desses alunos, uma pequena minoria não entendeu o feedback recebido; outros, apesar de, numa primeira fase, apresentarem os cálculos corretos, a explicação completada na segunda fase não estava correta; outros, talvez por já terem resolvido o problema uma vez, não se

esforçaram por melhorar o que já estava feito. O gráfico da figura 26 resume a evolução geral da turma, mostrando evoluções distintas no que diz respeito à capacidade de exprimir o pensamento matemático.

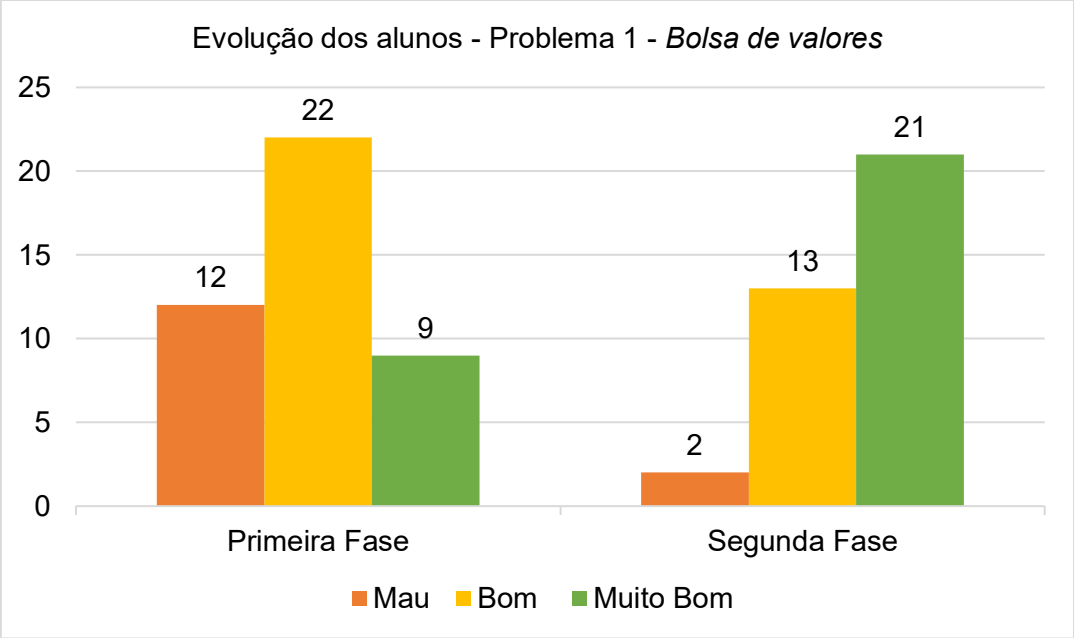


Figura 26 – Gráfico de evolução dos alunos - Problema 1 - *Bolsa de valores*

Na observação do gráfico da figura 26, percebe-se que uma parte dos alunos não consta na segunda fase de resolução: sete alunos faltaram na aula em que foi entregue a primeira fase de resolução e elaborada a resolução da segunda fase. De notar que, na aula seguinte, foi entregue, a esses alunos, a primeira fase de resolução para que tivessem a oportunidade de fazerem em casa, mas os alunos não se interessaram e não chegaram a entregar a sua segunda resolução. Para além disso, é visível uma diminuição da coluna a laranja, que representa os alunos com uma má resolução, bem como da amarela, correspondente a alunos com uma resolução boa, e um aumento da coluna verde, que representa uma resolução muito boa. Estas designações (“mau”, “bom” e “muito bom”) foram utilizadas para organizar os dados quanto à qualidade das produções dos alunos, com base nos critérios de avaliação previamente definidos, níveis 1, 2 e 3, tendo em conta a forma como exprimem o pensamento. Considerou-se que uma resolução era de menor qualidade quando o aluno revelava dificuldades na compreensão da tarefa, estratégias pouco claras ou ausentes, falta de organização e respostas incorretas ou incompletas. As resoluções de qualidade boa evidenciavam uma interpretação razoável, estratégias parcialmente descritas e algum grau de organização e correção. As resoluções de melhor qualidade revelavam uma compreensão plena da tarefa, estratégias completas e bem explicadas, uma

apresentação organizada e respostas corretas e completas. A evolução observada nestas colunas reflete, assim, uma melhoria geral no desempenho dos alunos na resolução deste problema.

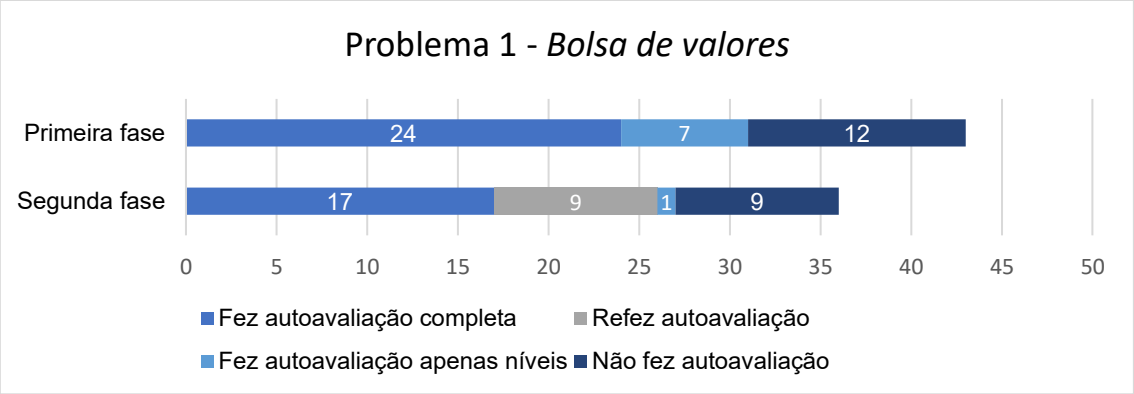


Figura 27 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 1 - *Bolsa de valores*

No que diz respeito à autoavaliação, é possível observar na figura 27 que, numa primeira fase de resolução, 31 alunos, de um total de 43 realizaram autoavaliação, ou seja, 12 não realizaram autoavaliação. De salientar que sete desses 31, registaram apenas o nível de entre os três definidos nos critérios de avaliação, no qual achavam que se enquadravam. Esses sete alunos refletiram sobre a sua resolução, o que já é um ponto positivo, mesmo que não tenham escrito uma frase sobre a sua resolução. Na segunda fase de resolução, muitos alunos limitaram-se a melhorar a primeira fase e completar informação, tendo em conta o feedback recebido. Como tinham realizado autoavaliação na primeira fase, o feedback que receberam sobre a autoavaliação foi positivo, ou a comentar o que escreveram, pelo que os alunos não sentiram necessidade de realizar uma segunda autoavaliação. Ainda assim, 12 alunos realizaram autoavaliação na segunda fase de resolução: três deles não tinham escrito autoavaliação na primeira fase de resolução, realizaram-na na segunda fase pela primeira vez e nove melhoraram ou refizeram a autoavaliação anterior, tendo em conta o feedback recebido.

5.1.3. Problema 2 – *Problema das marés*

Depois da resolução e entrega do Problema 1 – *Bolsa de valores*, seguiu-se uma fase de reflexão individual, na qual os alunos analisaram o feedback recebido na segunda fase do Problema 1. Após essa etapa, passou-se à resolução do Problema 2 – *Problema das marés*, cujo enunciado se encontra na figura 28. O *Problema das marés*, conforme descrito no capítulo 3 – Intervenção Pedagógica, envolve funções trigonométricas num contexto real sobre as marés da água do mar.

A profundidade da água do mar, em metros, num certo cais de uma marina, é dada por:

$$d(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

onde t é o número de horas após as 10 horas da manhã.

a) Qual será a profundidade da água do mar na maré alta? E na maré baixa?

b) A água atinge o nível médio de profundidade exatamente a meio entre a profundidade na maré baixa e a profundidade na maré alta. Partindo das 10 horas da manhã, a que horas ocorrem os dois primeiros momentos a que a profundidade da água atinge o nível médio?

c) Qual é o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas?

d) Ao longo de um dia, quantos ciclos de marés podemos ter?

e) Faz um esboço do gráfico da profundidade da água do mar em função do tempo, t.

f) Perto do cais há uma plataforma rochosa que só é seguro visitar quando a profundidade da água do mar é menor ou igual a $1{,}75m$. Se uma pessoa quiser visitar a plataforma rochosa ao final do dia, entre que horas é seguro fazê-lo?

(Adaptado de: Mathspace, 2020)

Figura 28 - Enunciado Problema 2 – *Problema das marés*

Para um melhor entendimento da evolução geral das duas turmas, seguem-se exemplos ilustrativos de resoluções de alunos e suas evoluções nas duas fases de resolução. A resolução do Martim (figura 29) é um desses exemplos.

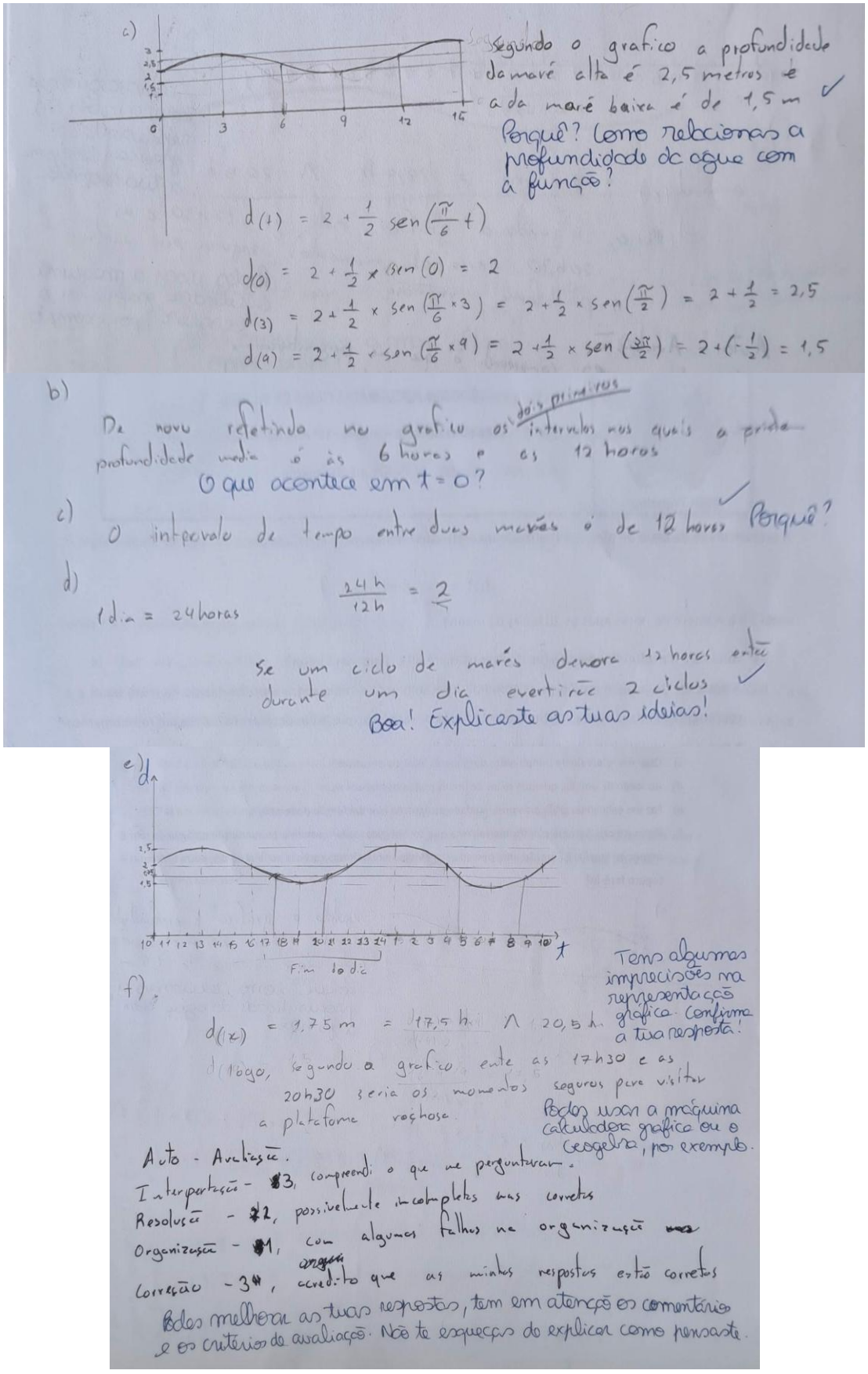
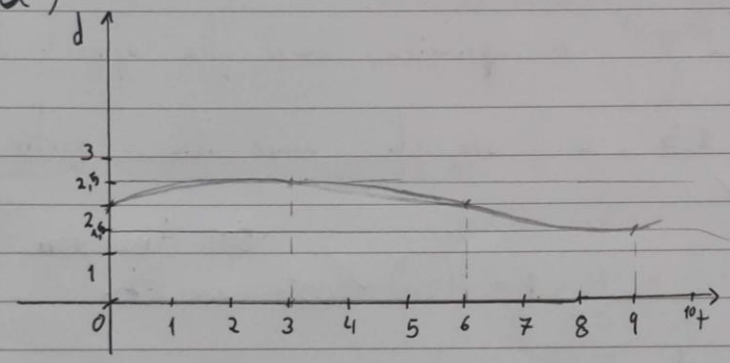


Figura 29 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Martim

Na primeira fase de resolução de Martim (figura 29), pode observar-se que o aluno apresenta uma resolução aceitável, mas com vários pontos a melhorar, abrangidos pelo feedback da professora. Na primeira alínea, o aluno apresentou vários cálculos corretos e pertinentes na resolução do problema que lhe permitiram fazer uma representação gráfica da função que relaciona o tempo com a profundidade da água do mar, algo que era pedido na alínea e). Isto evidencia que a estruturação do pensamento é muito variada e que nem sempre seguir a ordem das questões é favorável ao aluno. No primeiro comentário feito pela professora, pretendia-se que o aluno relacionasse a sua ideia intuitiva ou observada na representação gráfica com os conteúdos lecionados, nomeadamente máximo e mínimo da função. O aluno até podia ter pensado e não ter explicitado o que pensou, uma vez que não era explicitamente questionado para tal. Na alínea b), o aluno foi questionado sobre o que acontece quando a variável $t = 0$, pois Martim tinha identificado dois tempos em que a profundidade era média, mas não teve em conta o contexto do problema para tomar uma decisão. Dessa forma, pretendia-se que o aluno refletisse que, apesar de acontecer quando $t = 6$ e $t = 12$, tal correspondia às 16 horas e 22 horas, tendo em conta que a contagem se tinha iniciado às 10 horas. Seguindo a resolução de Martim, na alínea c), o aluno não explicitou o seu pensamento para chegar à conclusão, que está correta. Optou-se por questionar o aluno apenas o porquê da conclusão a que chegou e por valorizar, na questão seguinte, a explicitação do pensamento. Nas seguintes alíneas, o feedback seguiu a ideia de sugestões de melhoria da representação gráfica e do benefício do uso da tecnologia na resolução deste problema. O Martim fez a sua autoavaliação no final da resolução do problema, tendo em conta os critérios de avaliação, atribuindo o nível que considerava estar enquadrado em cada critério definido e uma frase que justificava a sua escolha. De facto, a autoavaliação foi ao encontro do que o aluno realizou, demonstrando um grande poder de reflexão sobre o seu trabalho, permitindo ao aluno ter a noção da sua prestação e do que pode melhorar na resolução deste problema, retirando ainda estratégias para futuras resoluções. Neste caso, penso que teria sido benéfico ter fornecido um feedback positivo ao aluno sobre a sua autoavaliação junto com o comentário final resumo acerca da sua resolução e do que podia melhorar.

a)



Segundo o grafico a profundidade da maré alta é 2,5 metros e a da maré baixa 1,5, pois ? Corresponde aos máximo e mínimo da função, respetivamente.

$d(t) = 2 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} t\right)$

b)

De novo refletindo no grafico os dois primeiros intervalos nos quais a profundidade é média é as 10h e as 16h Boa!

Porque alteraste a tua resposta?

c)

$d(3) = 2,5$, a primeira maré alta a partir do grafico ✓

$d(15) = 2,5$, a segunda maré alta a partir do gráfico ✓

$\Delta t = t_f - t_i = 15 - 3 = (12h)$ ✓ Boa. Agora sim está completo.

O intervalo de tempo entre as marés é de 12h ✓

d)

1 dia = 24 horas $\quad \frac{24h}{12h} = 2$

Se um ciclo de marés demora 12 horas então durante um dia existirão 2 ciclos.

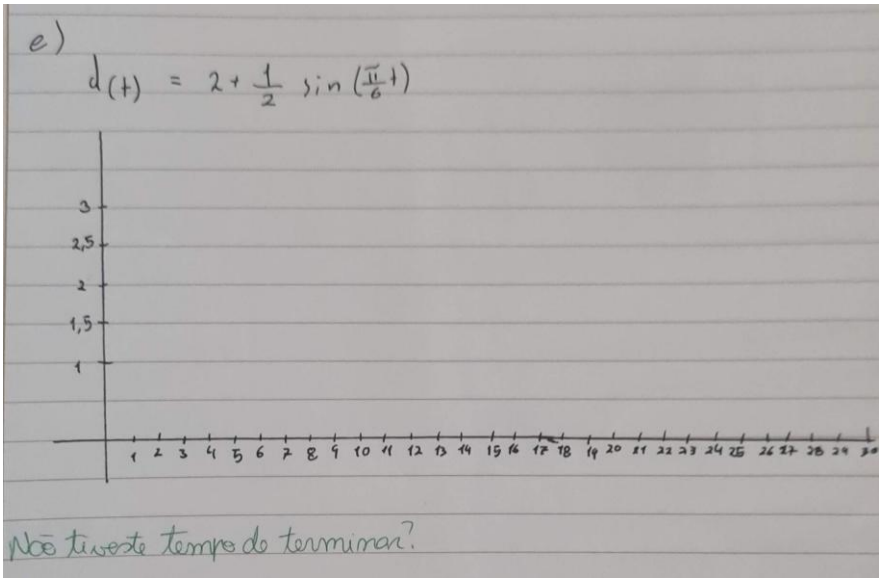


Figura 30 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Martim

Na segunda fase de resolução de Martim (figura 30), observa-se uma evolução na explicitação do pensamento e na completude do processo de resolução em relação à primeira fase de resolução. Depreende-se que o aluno tentou melhorar a sua resolução e responder ao feedback que recebeu, mas possivelmente não terá entendido na sua totalidade o que lhe foi questionado na primeira alínea. Apesar da tentativa, Martim não conseguiu completar as suas ideias com o que era esperado, isto é, relacionar com os conteúdos lecionados. Nas alíneas b) e c), os comentários ou a reflexão do aluno na sua primeira fase de resolução pode ter contribuído para a evolução notória do aluno; de facto completou a sua resposta de forma correta e completa, demonstrando apropriação dos critérios de avaliação previamente estabelecidos. Talvez por falta de tempo, o aluno não conseguiu, nesta fase de resolução, melhorar a alínea e), apesar de ter iniciado a sua resolução com bastante pormenor. Em suma, o aluno melhorou significativamente duas das alíneas sobre as quais recebeu feedback e ficou por melhorar a alínea e) e justificar a alínea a). Nesta segunda fase o aluno não realizou autoavaliação.

Francisca, numa primeira fase, apenas respondeu à alínea a); contudo a resposta que deu revelou um domínio claro dos conteúdos, clareza na comunicação e boa capacidade de exprimir o seu pensamento (figura 31).

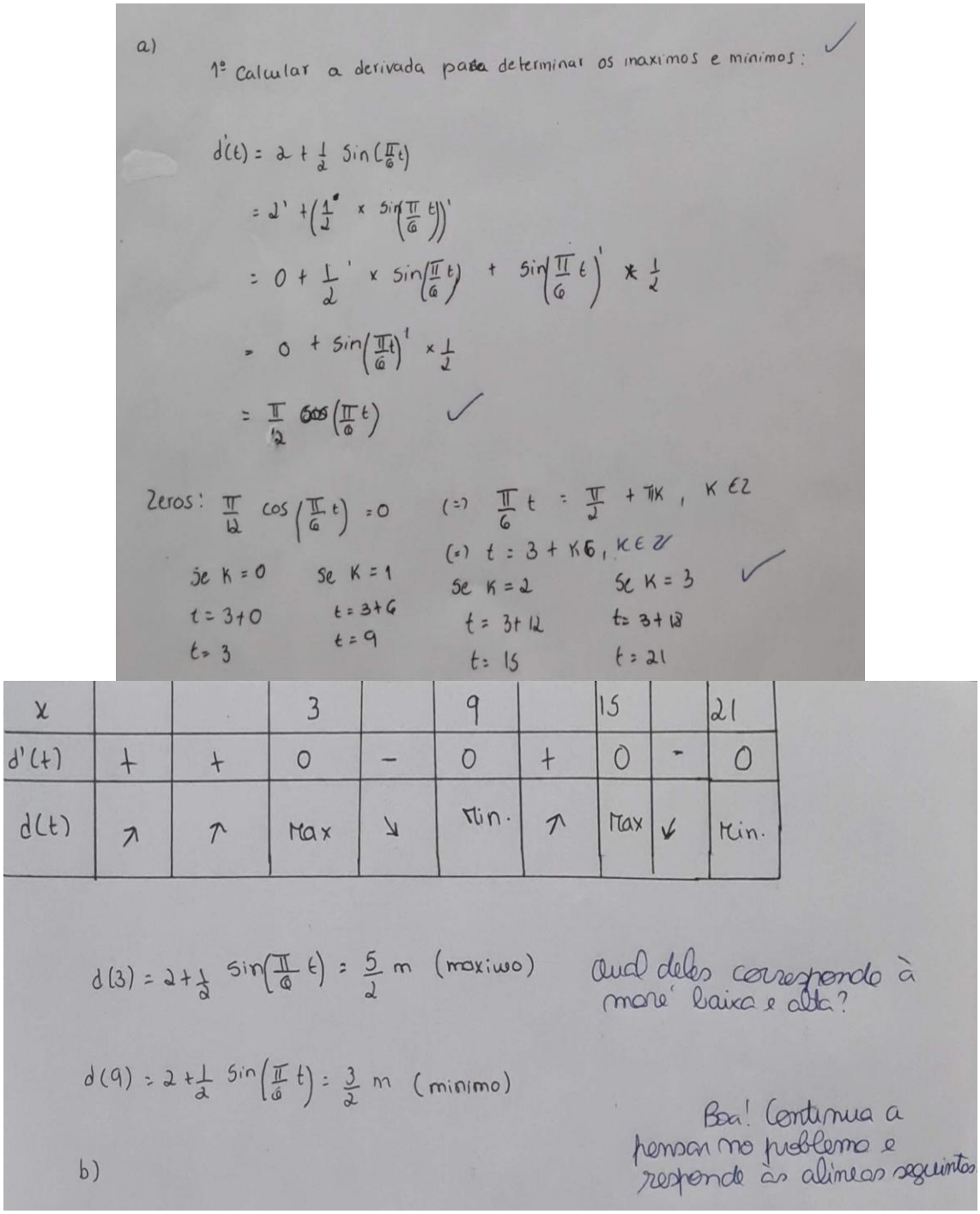
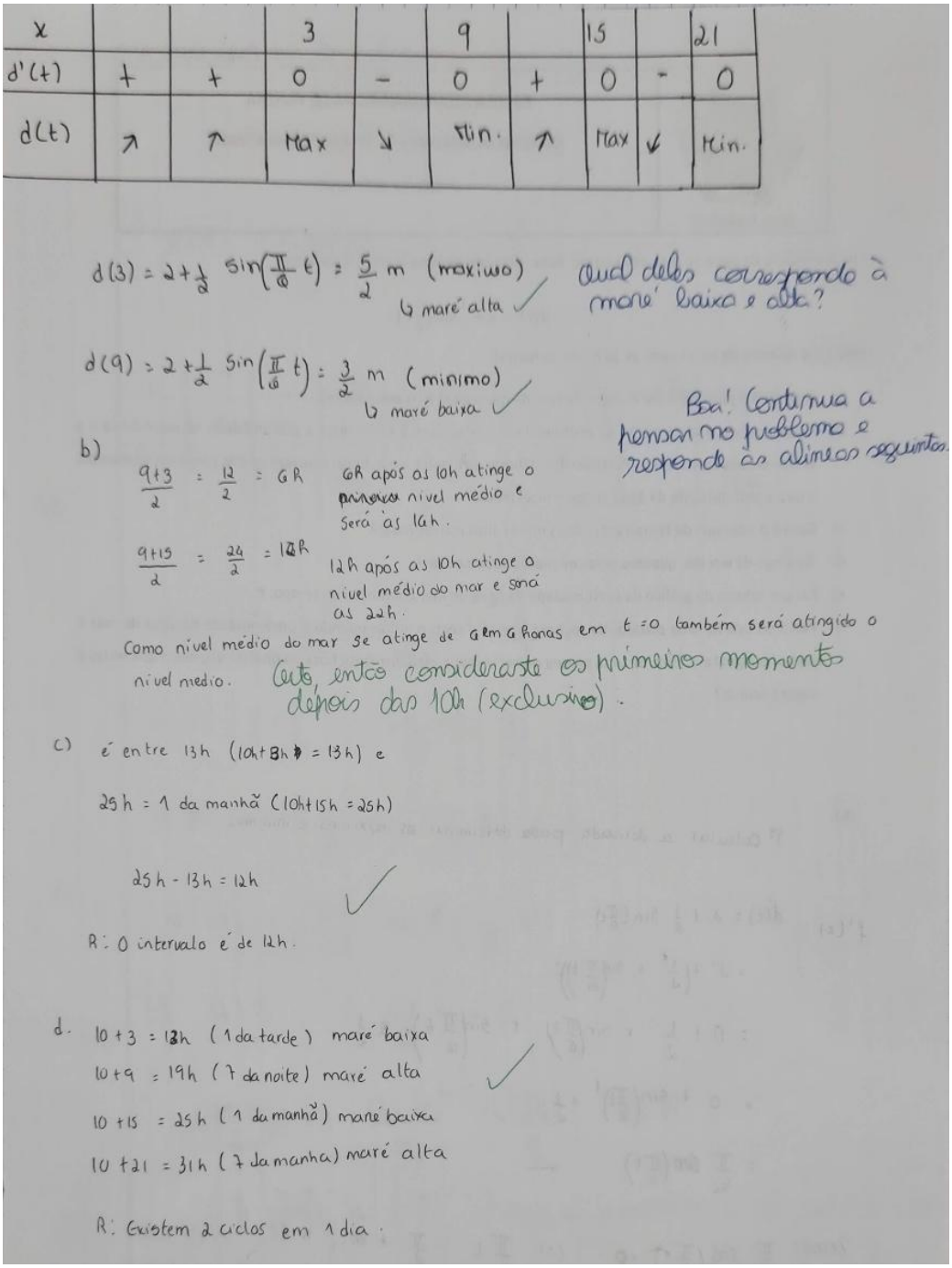


Figura 31 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Francisca

Na sua resolução, observa-se que a Francisca estruturou o seu pensamento de forma a apresentar uma resolução organizada e clara que explicite como pensou. O feedback que recebeu foi no sentido de apresentar uma conclusão, no contexto do problema. Apesar de a aluna ter incluído a justificação da realização destes cálculos, no final, não evidenciou a sua relação com o contexto do problema. O facto de o feedback ter sido dado sob a forma de sugestões ou questões que incentivavam a reflexão poderá ter contribuído para que a aluna clarificasse o seu pensamento e desenvolvesse a sua

capacidade de autoavaliação, favorecendo a melhoria da sua resolução. O último comentário fornecido valorizou o bom trabalho da aluna na resolução da alínea a) e promoveu a continuação do seu bom trabalho na segunda fase de resolução, através da resolução das restantes alíneas seguindo a mesma estruturação de pensamento. Provavelmente a Francisca não teve tempo suficiente para pensar nas restantes alíneas de forma pormenorizada de modo a conseguir explicitar o seu pensamento e obter uma boa resposta. De seguida, na figura 32, apresenta-se a segunda fase de resolução da aluna a este problema.



x			3		9		15		21
d'(t)	+	+	0	-	0	+	0	-	0
d(t)	↗	↗	Max	↘	Min.	↗	Max	↙	Min.

$d(3) = 2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{5}{2}$ m (maximo) ↳ maré alta ✓

Qual deles corresponde à maré baixa e alta?

$d(9) = 2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{3}{2}$ m (mínimo) ↳ maré baixa ✓

Boa! Continua a pensar no problema e responde às alíneas seguintes.

b)

$\frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ h — 6h após as 10h atinge o primeiro nível médio e será às 16h.

$\frac{9+15}{2} = \frac{24}{2} = 12$ h — 12h após as 10h atinge o nível médio do mar e será as 22h.

Como nível médio do mar se atinge de 6 em 6 horas em $t = 0$ também será atingido o nível medio.

Certo, então consideraste os primeiros momentos depois das 10h (exclusivo).

c) é entre 13h (10h + 3h = 13h) e

25h = 1 da manhã (10h + 15h = 25h)

25h - 13h = 12h ✓

R: O intervalo é de 12h.

d. 10 + 3 = 13h (1 da tarde) maré baixa

10 + 9 = 19h (7 da noite) maré alta

10 + 15 = 25h (1 da manhã) maré baixa

10 + 21 = 31h (7 da manha) maré alta ✓

R: Existem 2 ciclos em 1 dia.

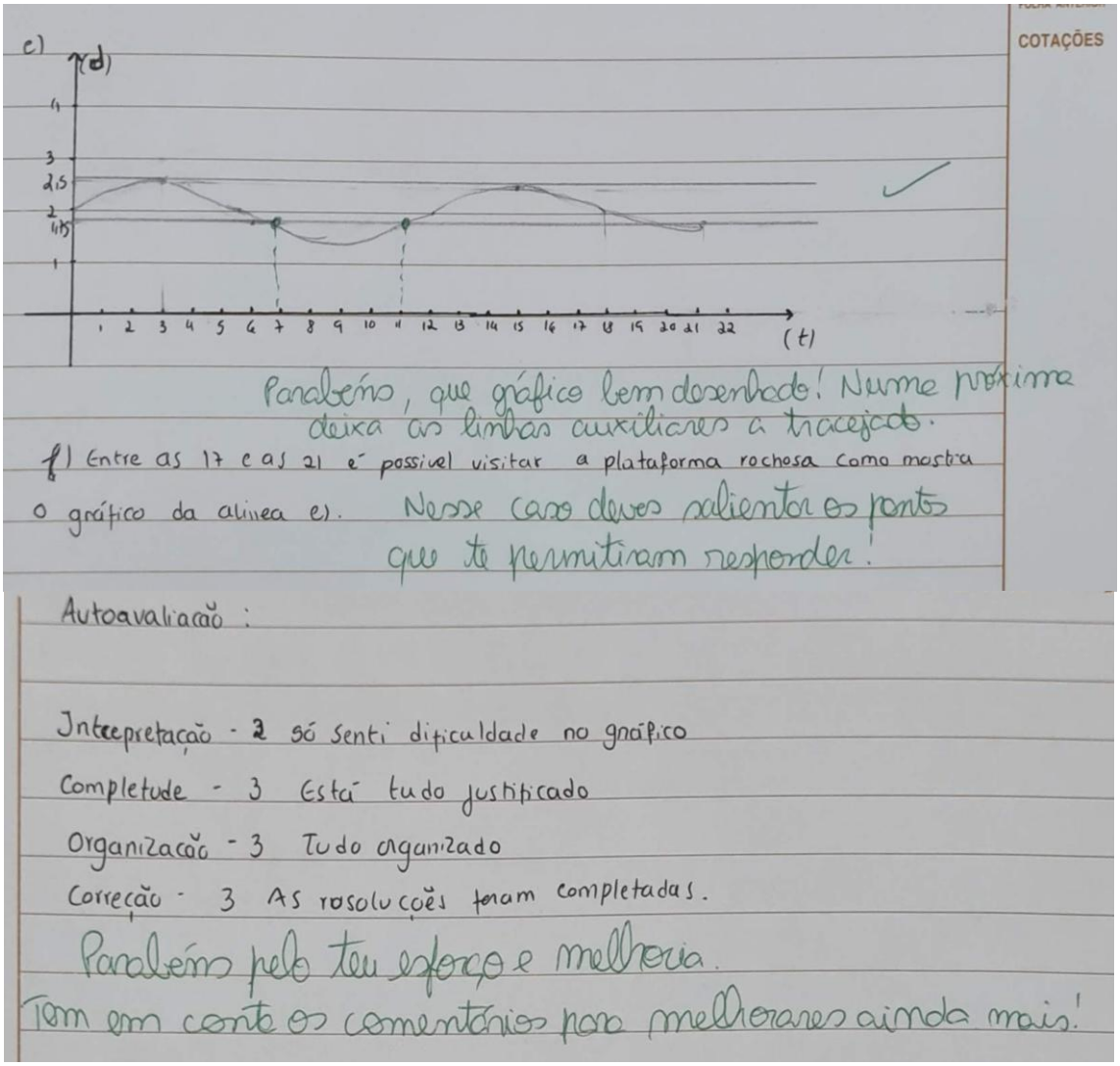
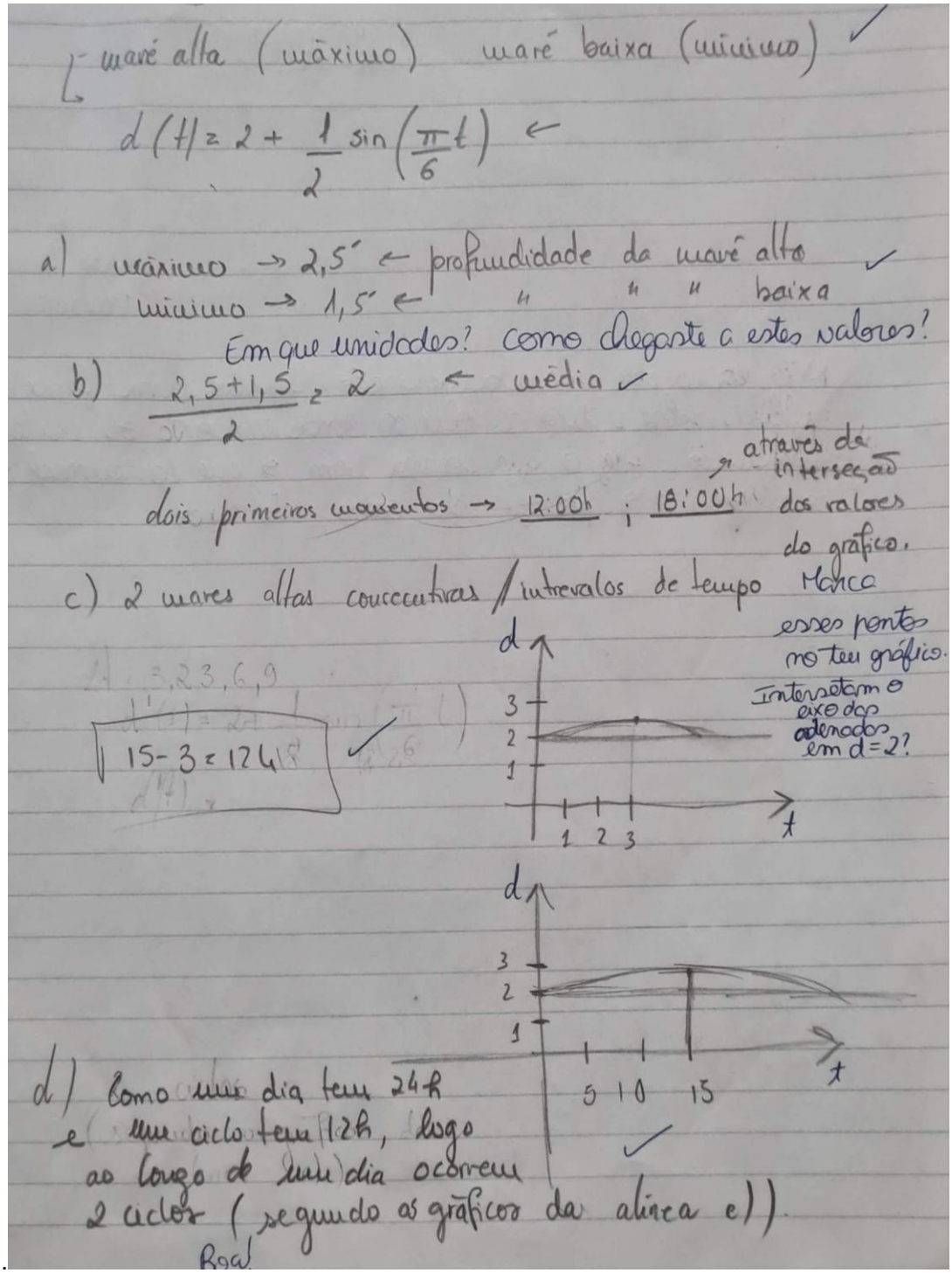


Figura 32 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Francisca

A Francisca demonstrou ter compreendido o feedback recebido em relação à alínea resolvida na primeira fase de resolução, tendo completado a sua resposta com o contexto do problema conforme lhe foi sugerido. Nesta segunda fase de resolução, a aluna teve o tempo necessário para concluir a resolução de todas as alíneas e ainda fazer a autoavaliação da sua resolução, em que refletiu sobre o seu desempenho de forma consciente. A sua explicitação do pensamento seguiu a linha do que já tinha realizado na primeira fase de resolução, sendo clara e organizada. Nesse sentido, o feedback dado nesta segunda fase de resolução foi maioritariamente positivo, com sugestões de pequenas melhorias, reforçando a função da avaliação como apoio à regulação das aprendizagens da aluna. A autoavaliação realizada pela aluna, com base nos critérios de avaliação previamente definidos, pode ter contribuído para uma tomada de consciência do seu desempenho e para a identificação de aspetos a melhorar, o que pode ter fortalecido a sua capacidade de autorregulação da aprendizagem.

Habitualmente, a Francisca apresentava dificuldades na interpretação de enunciados e resolução de problemas, pelo que foi uma surpresa positiva o seu desempenho na resolução deste problema.

A figura 33 ilustra a resolução da Alice, na primeira fase, do *Problema das marés*.



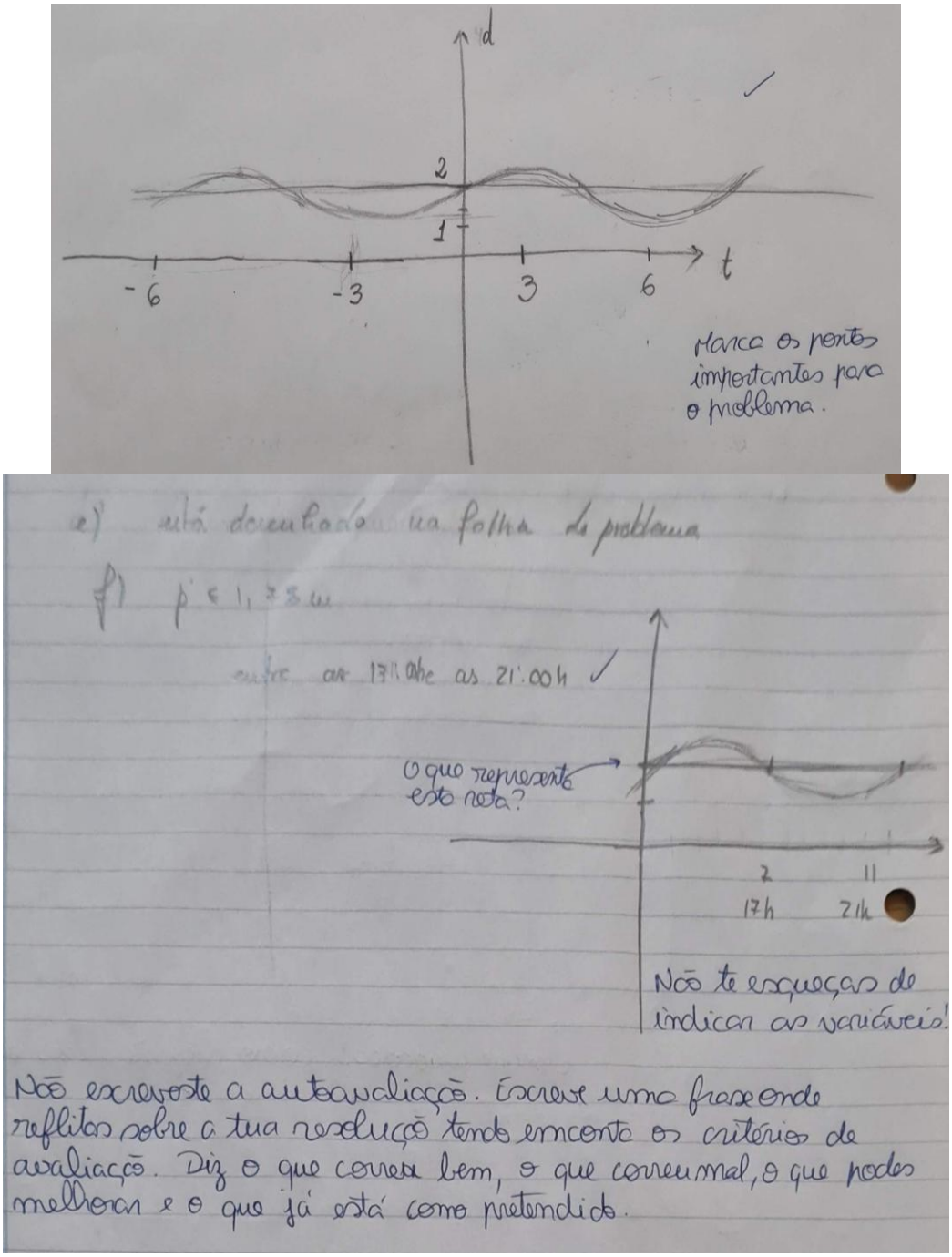
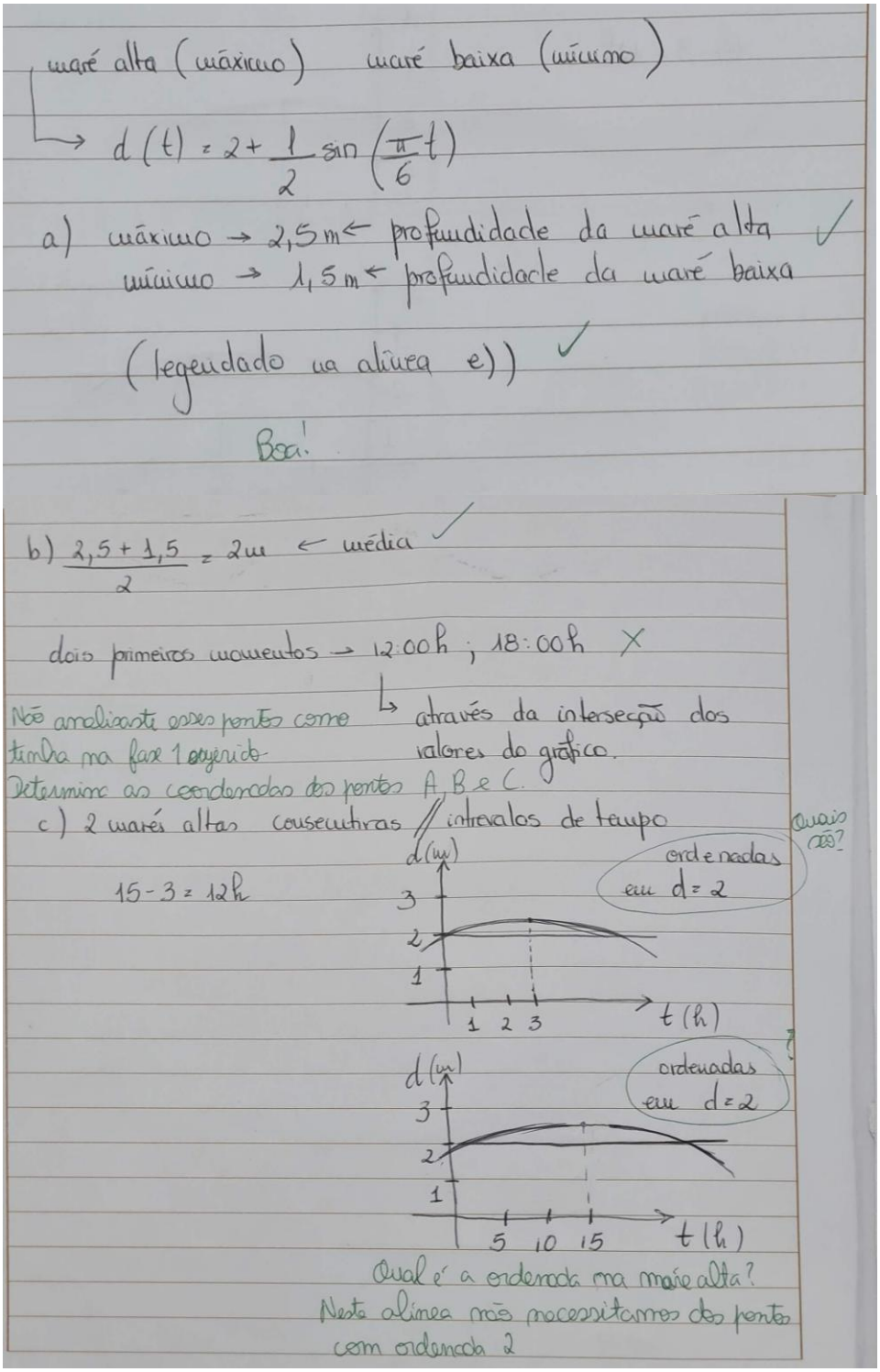


Figura 33 - Fase 1 do Problema 2 - resolução de Alice

Na resolução da Alice, observa-se que, na sua maioria, optou por apresentar apenas os resultados ou os cálculos finais, sem uma explicação prévia, o que poderá ter resultado do uso da calculadora gráfica. O primeiro feedback dado questionou a explicitação do pensamento e indicação das unidades de medida, uma vez que a aluna apresentou a resposta em minutos e, neste caso, seria a profundidade do mar em metros. Na segunda alínea, a aluna já referiu que visualizou no gráfico os valores mencionados, pelo que o feedback alertou para a indicação no próprio gráfico dos pontos referidos, importantes para a resolução do problema. Nas alíneas c) e d), a Alice explicou como relacionou o

contexto do problema com o gráfico apresentado e qual foi o seu pensamento para obter a resposta através de um texto. A Alice não realizou autoavaliação, o que lhe poderia ter sido útil para uma reflexão crítica sobre a sua resolução e apropriação dos critérios de avaliação. Por isso, sugeriu-se explicitamente que a aluna fizesse a autoavaliação na segunda fase de resolução, remetendo para os critérios definidos.



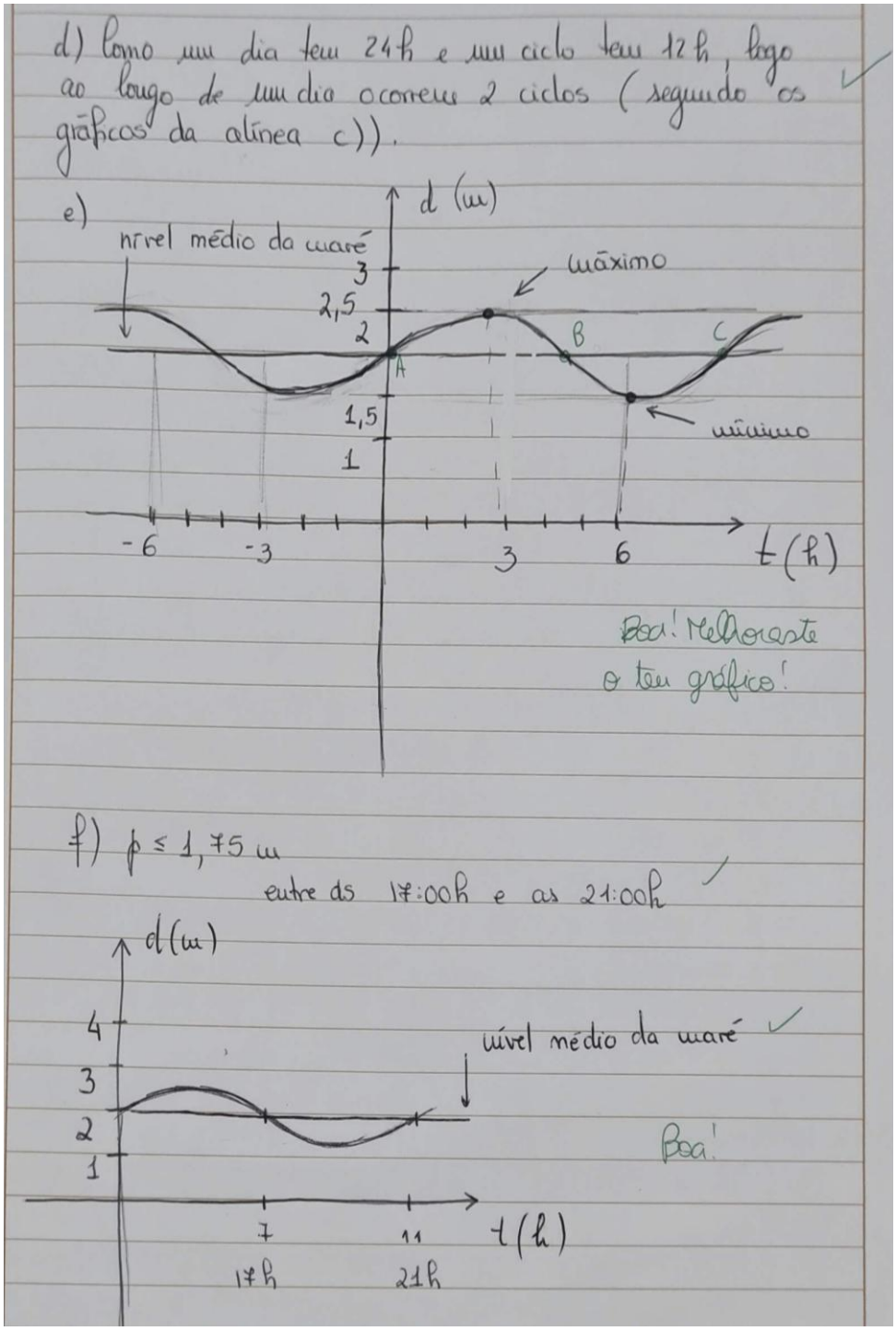


Figura 34 - Fase 2 do Problema 2 - resolução de Alice

Analisando a segunda fase de resolução da Alice, a aluna melhorou a primeira alínea, corrigindo as unidades no contexto do problema e explicando como pensou para obter a resposta (através da visualização gráfica que indicou na alínea e)). Este progresso sugere que a aluna soube interpretar e responder às sugestões de melhoria que lhe foram apresentadas. Por outro lado, na alínea b), a Alice poderá não ter entendido o feedback recebido, dado que não melhorou a sua resposta, pois não explicitou como

fez a relação entre as coordenadas obtidas no gráfico e as horas que indicou na sua resposta. Na alínea c), a aluna apresentou praticamente a mesma resolução, acrescentando uma referência às ordenadas em $d = 2$, o que revela a importância de posicionar o feedback próximo da alínea pretendida, evitando ambiguidades com outras alíneas. Efetivamente, esta alínea já tinha uma resposta correta e completa na primeira fase de resolução, a alínea que necessitava de mais atenção era a anterior. Nesta segunda fase, o feedback já foi escrito com o cuidado de estar próximo da resolução da alínea correta para que fosse percetível à aluna. Acerca das restantes alíneas, apesar de já estarem bastante boas na primeira fase de resolução, a Alice deve ter entendido o feedback recebido, pois melhorou todos os pormenores referidos.

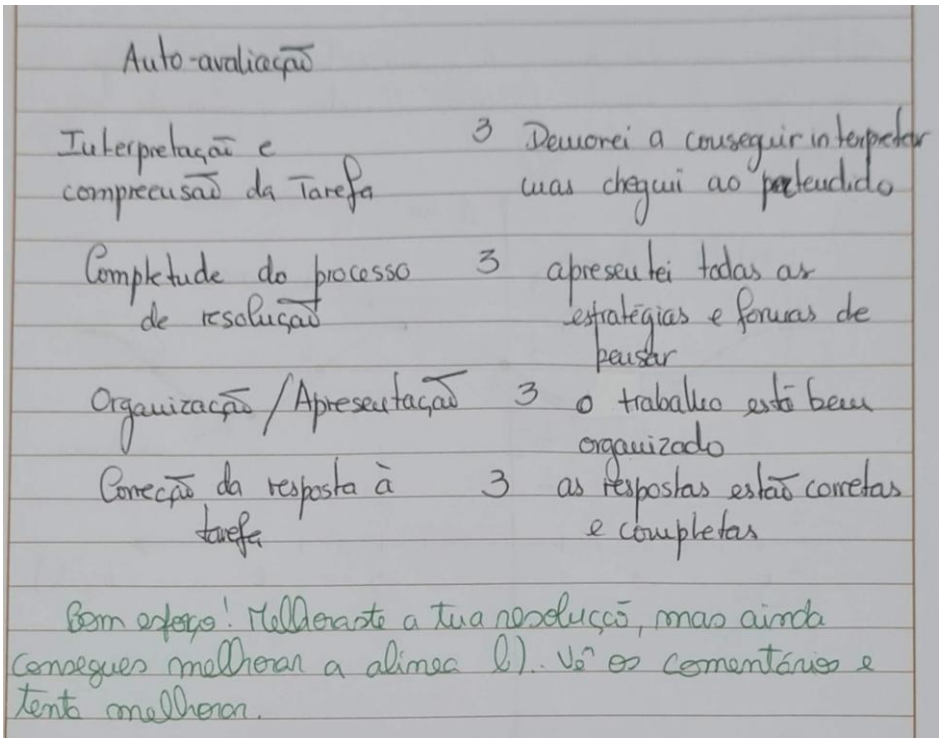


Figura 35 - Fase 2 do Problema 2 - autoavaliação de Alice

Depois do feedback deixado à Alice na primeira fase de resolução deste problema sobre a autoavaliação, a aluna, na segunda fase de resolução, refletiu sobre a sua resolução, fazendo a sua autoavaliação (figura 35) tendo em conta os critérios de avaliação. A aluna referiu, para cada critério, o nível em qual se enquadrava e uma frase que justificava a sua escolha. O feedback escrito parece ter contribuído para a aluna identificar o que podia melhorar e como o fazer. Efetivamente, com os comentários recebidos e com a sua reflexão com autoavaliação e utilização dos critérios de avaliação, a Alice melhorou significativamente a sua resolução deste problema, da

primeira para a segunda fase de resolução, havendo, porém, sempre espaço para pequenas melhorias.

A evolução dos alunos no *Problema das marés* até agora descrita está esquematizada num gráfico (figura 36), onde se pode verificar a qualidade das resoluções, tendo em conta os critérios de avaliação definidos para esta intervenção pedagógica.

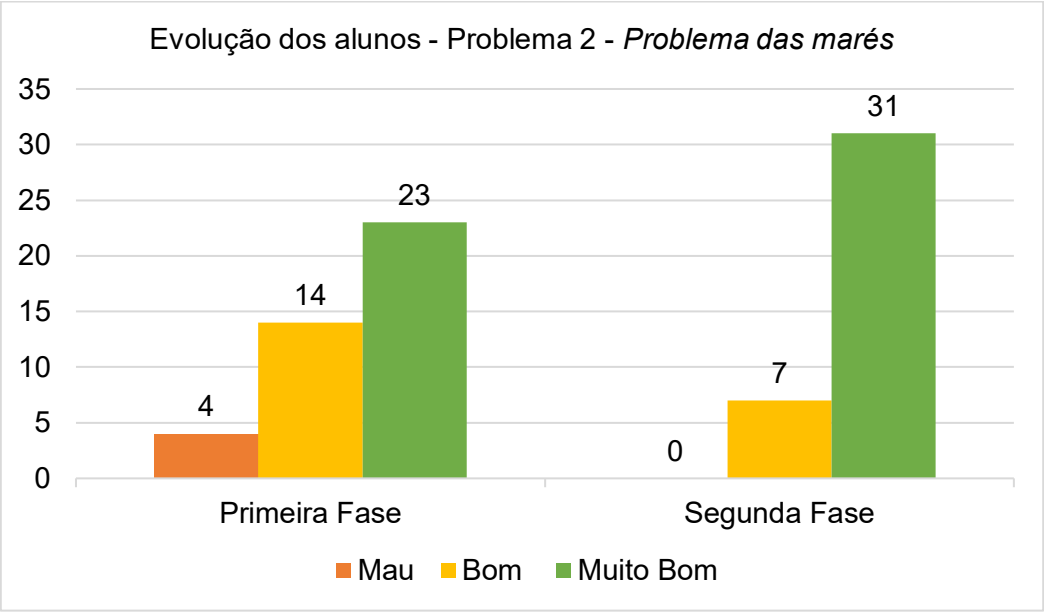


Figura 36 – Gráfico de evolução dos alunos – Problema 2 - *Problema das marés*

Na segunda fase de resolução, observa-se uma evolução muito positiva nas produções escritas dos alunos, que compreenderam o feedback recebido e melhoraram as suas resoluções tendo em consideração esse mesmo feedback. Os alunos que não tinham completado as suas resoluções pelas características do problema, nomeadamente ter um grau de exigência superior ao anterior e necessitar de uma interpretação mais demorada, conseguiram, agora na segunda fase de resolução, analisar o feedback recebido e melhorar as resoluções do problema.

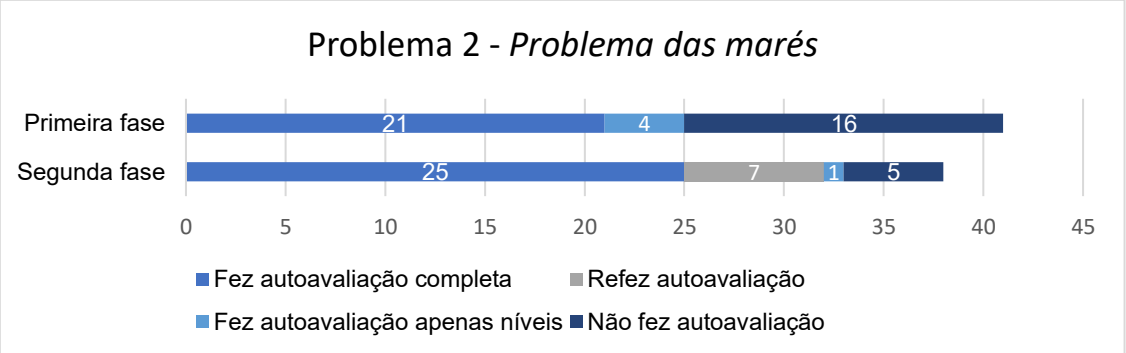


Figura 37 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 2 - *Problema das marés*

Neste problema, foram menos os alunos a realizar autoavaliação na primeira fase de resolução, como se pode observar na figura 37 que apresenta o número de alunos que realizaram a autoavaliação nas duas fases de resolução deste problema. Ainda que com insistência por parte da professora para a relevância da autoavaliação, muitos alunos acabaram por se empenhar na resolução do problema e exprimir o seu pensamento, terminaram a resolução do problema no final do tempo disponível e, talvez porque a reflexão não é algo a que estejam tão habituados a fazer, a autoavaliação foi mais desvalorizada na primeira fase de resolução. Conseguiu-se que mais 12 alunos fizessem a sua autoavaliação na segunda-fase de resolução e sete alunos refizessem a autoavaliação já feita na primeira fase, o que foi positivo, tendo em conta que no final do Problema 2 apenas cinco alunos não realizaram autoavaliação em nenhuma das fases, um número inferior ao do Problema 1 (nove alunos).

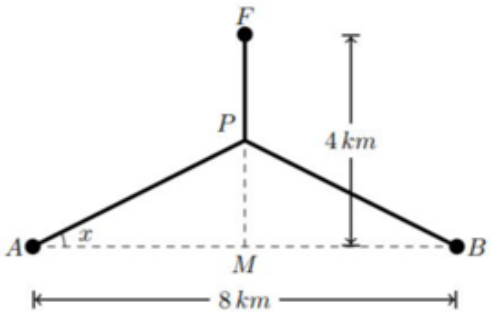
No geral, os alunos necessitaram de mais tempo para a resolução deste problema do que dos anteriores, tendo uma interpretação mais demorada e complexa. Alguns alunos deixaram alíneas incompletas nas suas resoluções. Ainda assim, tendo em conta o panorama geral da primeira fase de resolução do Problema 1 – *Bolsa de valores*, os alunos, nesta primeira fase de resolução do Problema 2 – *Problema das marés*, apresentaram bastantes melhorias no que diz respeito à capacidade de exprimir o pensamento, notando-se um especial cuidado no uso dos critérios de avaliação, de modo a cumprir com o necessário para obterem uma boa resposta.

5.1.4. Problema 3 – *Problema da canalização*

O terceiro problema resolvido com os alunos, seguindo os mesmos procedimentos dos anteriores, foi o *Problema da canalização* (figura 38). Este problema envolve geometria e trigonometria, trata-se de uma situação específica que promove o desenvolvimento do pensamento e que requer um raciocínio mais abstrato para a sua resolução.

Duas povoações A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.



Tem-se ainda que:

- O ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F;
- x é amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

a) Tomando para unidade o quilómetro, mostra que o comprimento total da canalização é dado por

$$4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

(Sugestão: Começa por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\,tg\,x$)

b) Calcula o comprimento total da canalização para $x = 0$ e interpreta o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

(Retirado de: GAVE, 1998)

Figura 38 - Enunciado *Problema da canalização*

De seguida, apresenta-se a resolução do Afonso (figura 39), um exemplo ilustrativo das resoluções dos alunos das duas turmas.

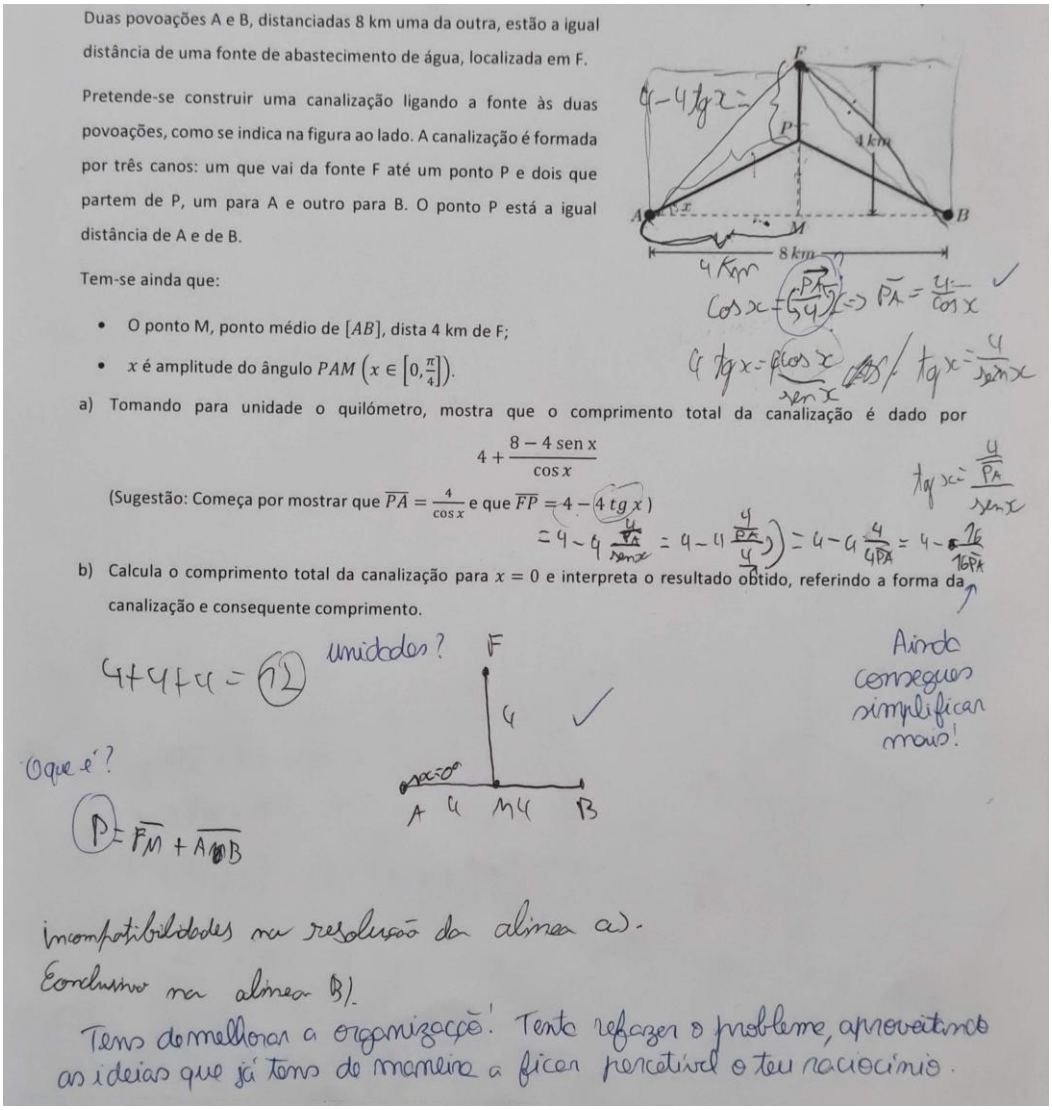


Figura 39 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Afonso

A resolução do Afonso está bastante confusa, quase como se se tratasse de um papel de rascunho, o que torna difícil perceber como pensou. Ainda assim, percebe-se que o aluno elaborou o seu pensamento com base na imagem apresentada no enunciado do problema e relacionou os conteúdos de aprendizagem necessários. Entre setas, desenhos e riscos, na primeira alínea, o aluno precisava de ter simplificado mais os seus cálculos, não conseguiu concluir a demonstração que iniciou de modo a chegar ao comprimento total da canalização como pedido. Já na segunda alínea, o Afonso apresentou as ideias sem grande indicação de como pensou nelas, mas estão corretas, apesar de algumas imprecisões que podem ser melhoradas. Nesse sentido, o feedback dado ao Afonso foi direcionado para completar os cálculos efetuados na primeira alínea, com perguntas curtas para o aluno não desmotivar e completar a sua resposta na segunda fase de resolução, bem como para organizar as suas ideias de forma a ficar percetível a explicitação do seu pensamento. O Afonso, no final da sua resolução,

apresentou duas frases que evidenciam a reflexão que fez sobre a sua resolução, indicando algumas dificuldades na resolução da primeira alínea, um primeiro passo no processo de autoavaliação, essencial ao desenvolvimento da autorregulação. Na figura 40, está a segunda fase de resolução do Afonso a este problema.

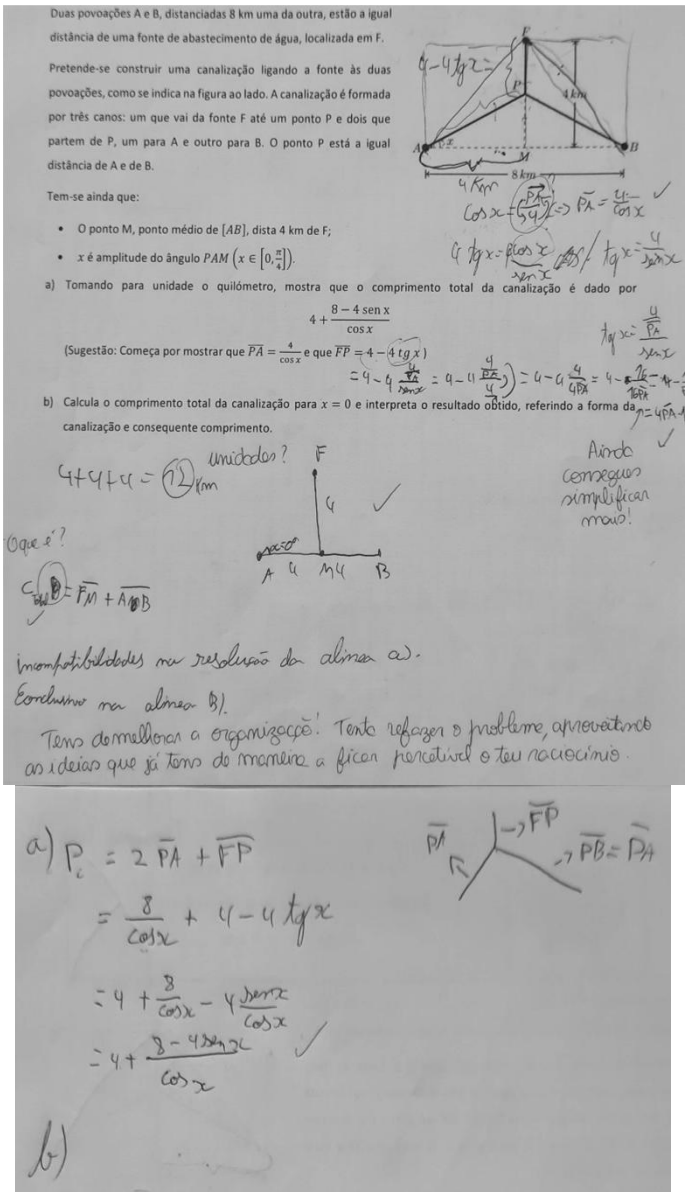


Figura 40 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Afonso

Nesta segunda fase, o Afonso reformulou a sua resolução melhorando alguns pontos, tendo em consideração o feedback recebido, melhorou a organização da primeira alínea, explicitando através de cálculos o que pensou de forma percetível. Entre as suas evoluções estão o completar os cálculos efetuados na alínea a), completar as unidades em falta na alínea b) e indicar o que representa o comprimento final da canalização, ou seja, o aluno respondeu a todas as perguntas/comentários recebidos. Estas melhorias

sugerem uma apropriação das sugestões feitas no feedback fornecido, pelo que este terá conseguido desempenhar uma função reguladora da aprendizagem. Pode observar-se que o aluno melhorou um pouco a sua resolução, ainda que a reformulação da segunda alínea pudesse ter sido mais clara. A sua resposta às questões colocadas parece refletir um envolvimento com o processo de aprendizagem e uma progressiva mobilização de competências autorregulatórias.

Um outro caso, diferente deste, é a resolução do Alexandre (figura 41), que será analisada de seguida.

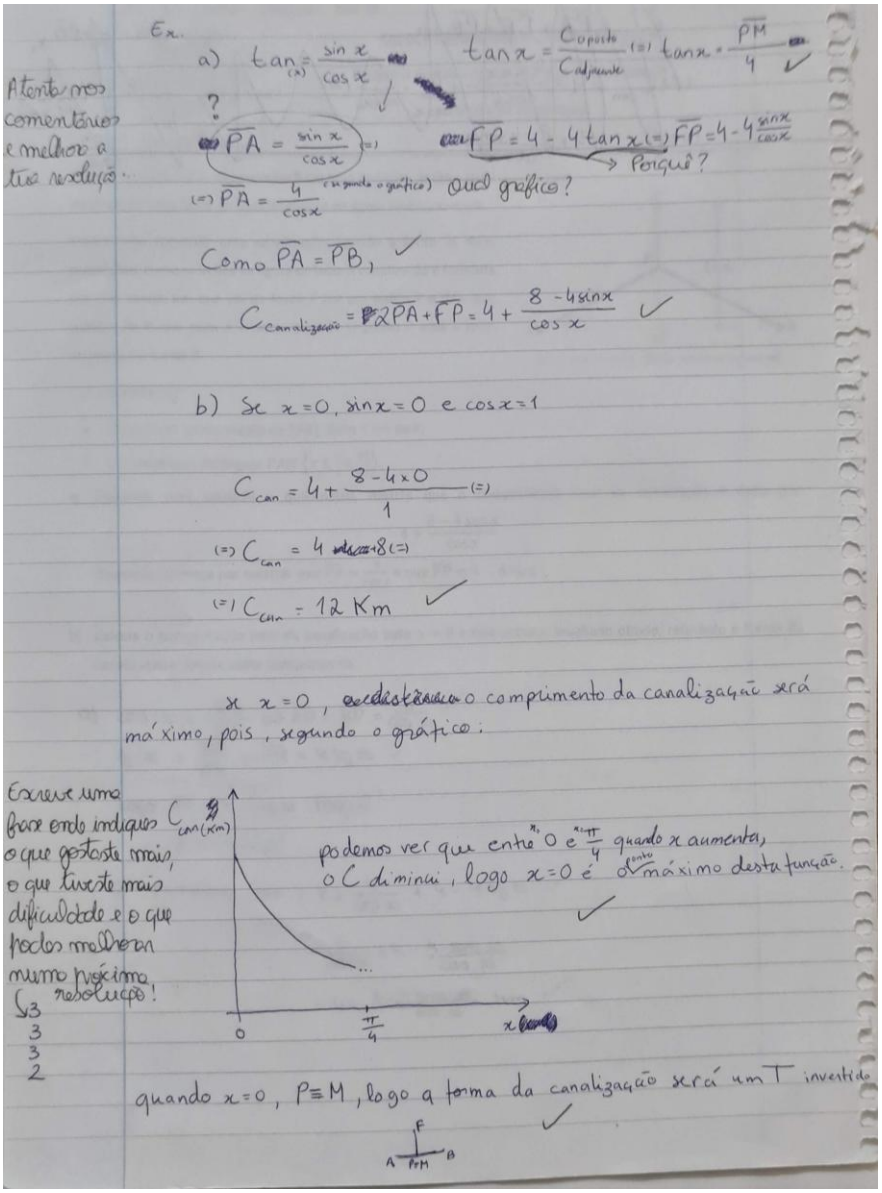


Figura 41 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Alexandre

Na primeira fase de resolução do Alexandre, o aluno interpretou e compreendeu bem a tarefa, e explicou as suas ideias e pensamentos de forma organizada; no entanto,

depreendeu alguns dos seus dados sem explicar de forma completa onde percebeu essa informação. Por isso, na primeira alínea, foram deixadas duas perguntas simples e diretas a questionar o aluno sobre de onde tinha retirado essas informações e, no final, um comentário mais longo para prestar atenção aos comentários curtos e melhorar a sua resposta. Na segunda alínea, o Alexandre fez um trabalho excelente, apresentando uma resolução detalhada, onde explicitou tudo o que pensou e justificou as suas escolhas. Dessa forma, não foi dado feedback ao aluno relativamente à segunda alínea, com o objetivo de, na segunda fase de resolução, ele se concentrar apenas em melhorar o necessário na primeira alínea. O Alexandre fez ainda a sua autoavaliação. Ainda que pobre, pois indicou somente os níveis em que se encontrava em cada um dos critérios de avaliação definidos, denotou que refletiu um pouco sobre a sua resolução tendo em conta os critérios de avaliação. Apesar de o mesmo já ter acontecido nos problemas anteriores e o aluno ter melhorado a sua autoavaliação na segunda fase de resolução, ainda não lhe era intrínseco deixar um comentário com a sua autoavaliação. Este exercício, mesmo limitado, revela indícios de autorregulação em desenvolvimento. Por isso, foi-lhe pedido no feedback para acompanhar os níveis de desempenho identificados com a sua opinião e reflexão acerca da sua resolução, das suas dificuldades e do que mais lhe tinha despertado interesse aquando da resolução do problema.

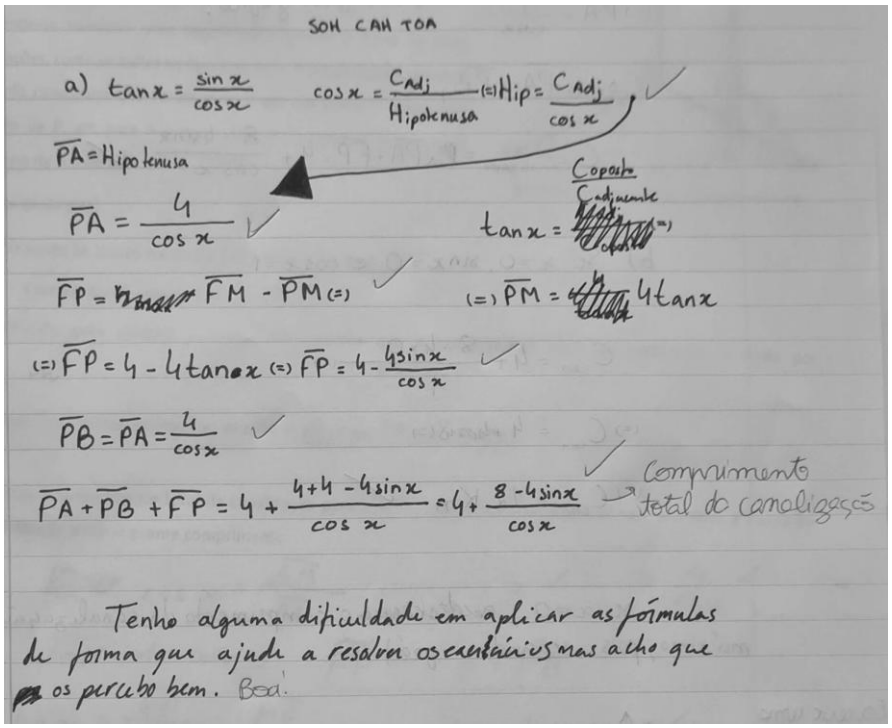
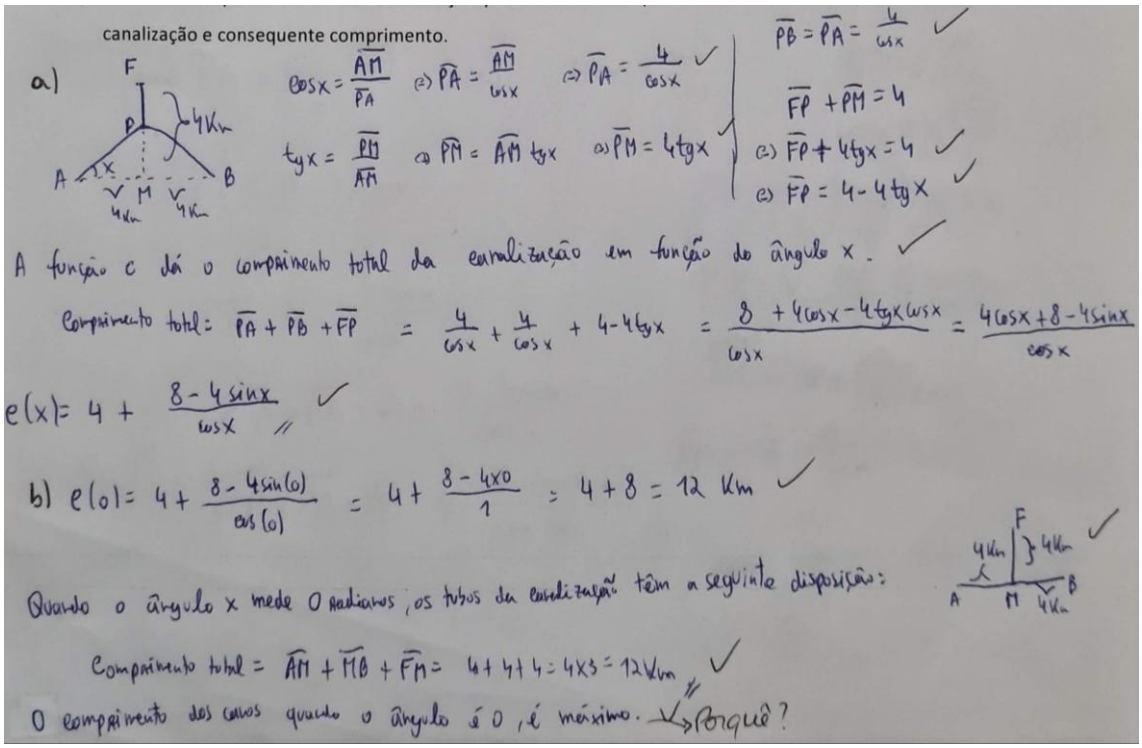


Figura 42 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Alexandre

O Alexandre, na segunda fase de resolução (figura 42), teve em conta todo o feedback recebido, entendeu-o e melhorou significativamente a sua resolução da primeira alínea onde exprimiu o seu pensamento de forma organizada, correta e completa, revelando apropriação das sugestões feitas. De facto, o aluno identificou corretamente o que significava $\overline{PA}$ e melhorou a descrição do seu pensamento para obter os resultados, apresentou os cálculos efetuados na sua demonstração, o que permitiu seguir o seu raciocínio. Nesta segunda fase de resolução, o aluno deu atenção apenas à primeira alínea, uma vez que a segunda já tinha sido resolvida de forma correta e completa na primeira fase de resolução. Salienta-se ainda que o aluno refletiu sobre a sua resolução, conforme pedido no feedback dado à primeira fase de resolução. Desta forma, o aluno escreveu uma frase onde explica que as suas principais dificuldades são utilizar fórmulas que lhe permitam resolver os problemas e realça que percebe bem o que se pretende no problema, o que evidencia progressos na autorregulação e no uso dos critérios de avaliação como suporte reflexivo. A evolução do Alexandre foi notória, melhorando todos os aspetos possíveis de melhoramento, o que reflete um progresso na aprendizagem sustentado pela utilização eficaz do feedback e da autoavaliação.

Para último exemplo, apresenta-se a resolução do Joaquim (figura 43), que contribui para uma visão mais alargada das diferentes resoluções dos alunos das duas turmas.



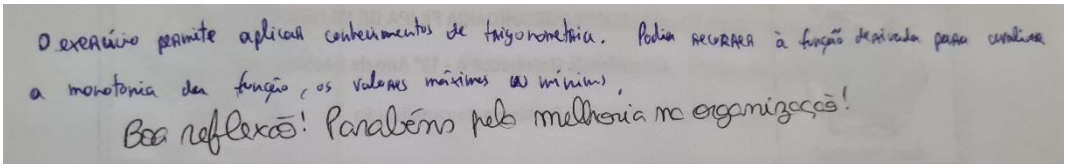


Figura 43 - Fase 1 do Problema 3 - resolução de Joaquim

O Joaquim, na primeira fase de resolução, apresentou uma resolução exemplar, correta, completa e com tudo o que se considera necessário para resolver o problema e explicar a sua resolução. A demonstração da primeira alínea está feita através de cálculos; no entanto, o aluno utilizou um esquema que o auxiliou na visualização para obter alguns dos resultados, acompanhou também os seus cálculos com explicações do seu pensamento e legenda das variáveis que usou na sua resolução. Na segunda alínea, o Joaquim continuou o raciocínio iniciado na alínea anterior, nomeadamente a função utilizada que aplicou para obter o comprimento total da canalização e, dessa forma, responder à questão colocada. O Joaquim apresentou também, conforme pedido, uma representação da canalização quando o ângulo da sua função mede 0º e a explicação do significado dessa imagem no contexto do problema. Para além disso, o aluno identificou uma informação importante e relacionou os conteúdos anteriormente lecionados com o questionado, pelo que lhe foi dado feedback no sentido de continuar o seu raciocínio e ir mais além do pedido, na segunda fase de resolução. Por fim, o aluno apresentou a sua autoavaliação onde referiu precisamente uma diferente forma de resolver o problema relacionando com os outros conteúdos previamente lecionados. Nesse sentido, o feedback que o Joaquim recebeu procurou valorizar os pontos fortes da sua resolução, reconhecendo a forma como o aluno articulou os conhecimentos mobilizados e referiu um ponto que, na resolução dos anteriores problemas, o aluno tinha tido dificuldade: a organização da sua resolução. De seguida, apresenta-se a segunda fase de resolução deste problema do Joaquim (figura 44).

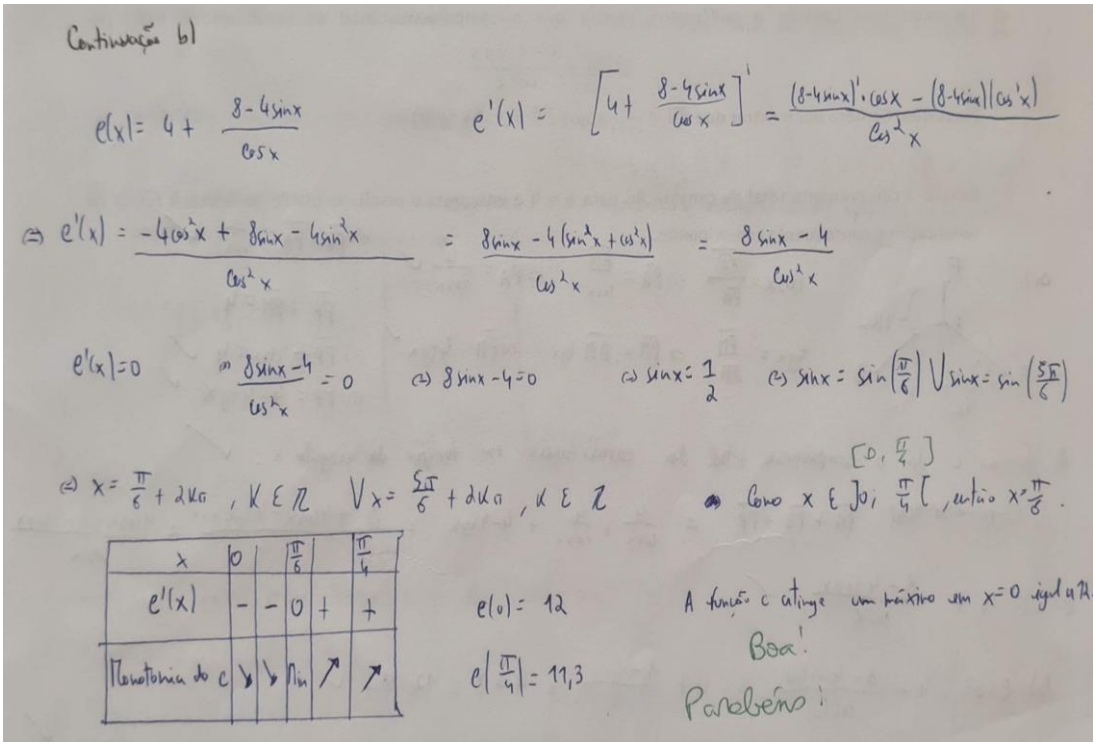


Figura 44 - Fase 2 do Problema 3 - resolução de Joaquim

Na segunda fase de resolução, o Joaquim, conforme pedido, uma vez que a primeira fase de resolução já estava correta e completa, apresentou uma outra estratégia de resolução que lhe permitiu provar a sua ideia inicial de que o comprimento máximo da canalização se obtém quando o ângulo da canalização tem amplitude 0º. A resolução do aluno está completa e correta, à exceção do intervalo indicado para os valores do ângulo que não correspondia ao escrito na tabela, pois deveria considerar os extremos como parte do intervalo. O feedback deixado ao Joaquim nesta segunda fase reconheceu o mérito da abordagem do aluno, ainda que com esse reparo. Esta pergunta extra (“Porquê?”), que veio ao encontro do pensamento do aluno, na primeira fase de resolução, foi também colocada a outros alunos que, tal como o Joaquim, na primeira fase de resolução apresentaram uma resolução que evidenciou um elevado desempenho segundo os critérios de avaliação definidos. Apesar de estarem em minoria, houve alunos que necessitavam da segunda fase de resolução; também por uma questão organizacional da estrutura da resolução destes problemas, os alunos sabiam que lhes ia ser dada a oportunidade de melhoria da sua resolução na segunda fase de resolução, pelo que foi a solução encontrada para que todos estivessem incluídos na melhoria das suas respostas.

Em geral, os alunos tiveram menos dificuldades na resolução deste problema, interpretaram corretamente a situação, talvez como fruto do trabalho já desenvolvido

nos dois problemas anteriormente resolvidos. É possível observar-se isso no gráfico de evolução dos alunos neste problema (figura 45).

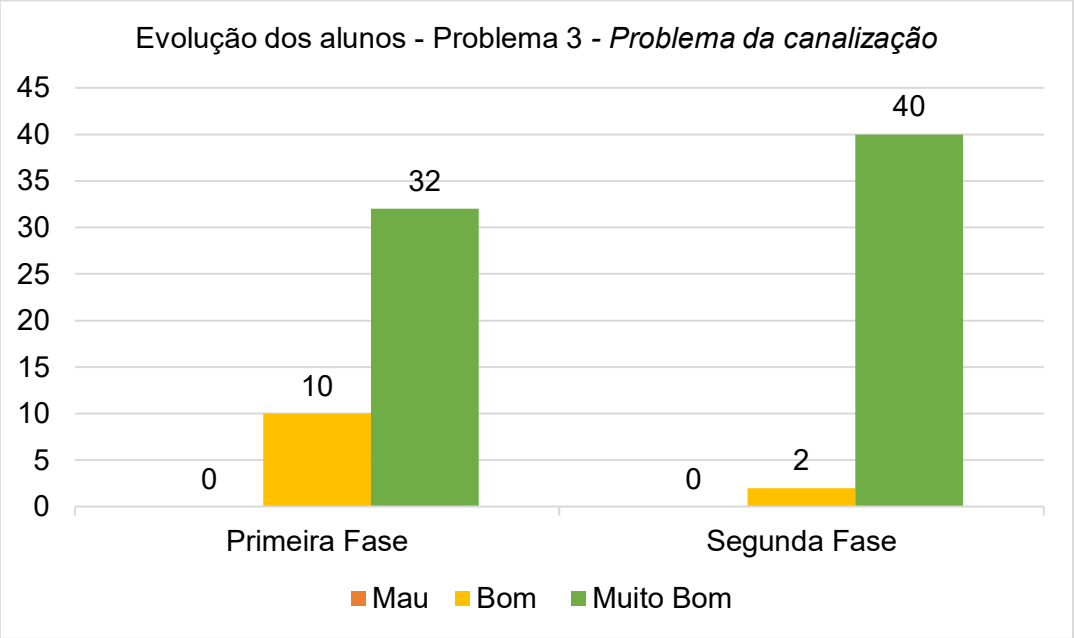


Figura 45 - Gráfico de evolução dos alunos – Problema 3 - *Problema da canalização*

De facto, nenhum aluno realizou um mau trabalho na primeira fase de resolução. A maioria dos alunos apresentou, logo na primeira fase de resolução, uma resolução correta, completa, organizada, onde exprimiu o seu pensamento de forma clara. Alguns alunos tinham uma resolução que poderia ser melhorada (dez alunos); apesar disso, utilizaram a segunda fase de resolução como uma oportunidade de melhoria, tendo apenas dois deles não evoluído de forma significativa, apesar de terem realizado pequenas melhorias.

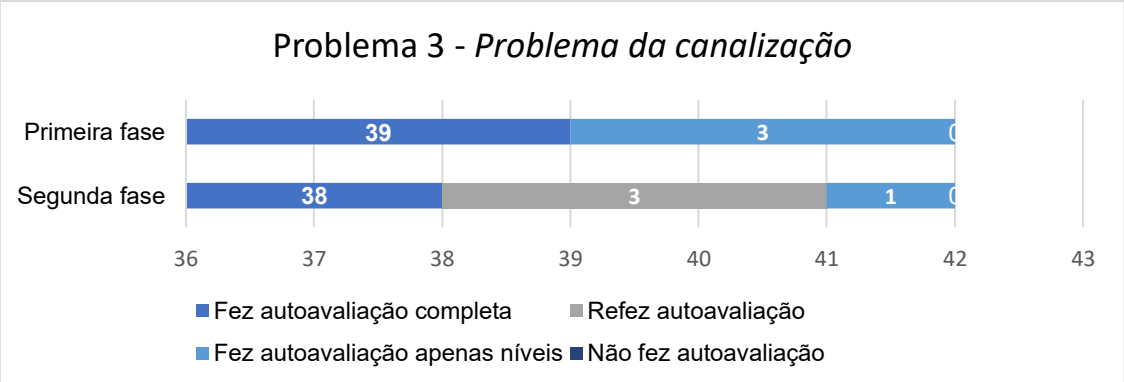


Figura 46 - Gráfico de número de alunos que realizaram a autoavaliação em cada uma das fases do Problema 3 - *Problema da canalização*

Neste problema, o número de alunos a realizar autoavaliação foi muito superior ao dos problemas anteriores. No final da primeira fase de resolução, todos os alunos realizaram

a autoavaliação, apesar de que, três deles realizaram autoavaliação apenas com os níveis nos quais se enquadravam nos critérios de avaliação, o que parece demonstrar uma reflexão da resolução à luz dos critérios de avaliação por parte de todos os alunos.

Observando e comparando com as resoluções dos alunos no Problema 1 – *Bolsa de valores*, a evolução dos alunos ao longo dos três problemas foi notória. Em cada problema, observa-se uma melhoria significativa pela oportunidade da realização da segunda fase de resolução com a utilização do feedback recebido como suporte à evolução. Os alunos foram melhorando a cada problema, chegando ao Problema 3 – *Problema da canalização* com um conhecimento adquirido na resolução de problemas ao perceberem os erros individuais que cometiam nas restantes resoluções, apropriando-se cada vez mais dos critérios de avaliação, permitindo o aperfeiçoamento das estratégias utilizadas para a resolução de problemas, bem como do uso da autoavaliação como autorregulação das suas aprendizagens. O desempenho mais positivo dos alunos no Problema 3 – *Problema da Canalização* pode ser compreendido como resultado da acumulação de aprendizagens e práticas ao longo da intervenção pedagógica. Os dois problemas anteriores, acompanhados de critérios de avaliação claros, feedback escrito e momentos de autoavaliação, possibilitaram aos alunos consolidar estratégias de resolução e melhorar a forma de explicitar o seu pensamento. Para além disso, o interesse dos alunos pelo conteúdo deste problema e o seu empenho acrescido poderão ter contribuído para uma maior motivação e envolvimento na tarefa, enquanto o próprio problema poderá ter apresentado um grau de dificuldade ligeiramente inferior em relação aos anteriores, facilitando a articulação entre as estratégias mobilizadas e os critérios de avaliação. Estas condições favoreceram uma demonstração mais evidente da compreensão e da capacidade de comunicar matematicamente, evidenciando a progressão gradual proporcionada por uma intervenção orientada por critérios claros e feedback regulador.

5.2. Análise dos resultados das entrevistas

A recolha documental permitiu analisar bastantes aspetos que, através da observação, não seria possível fazer pois passariam despercebidos devido ao elevado número de alunos participantes no estudo e ao facto de eu ser simultaneamente a professora e a investigadora. No entanto, a voz dos alunos e os seus pensamentos sobre o impacto desta intervenção pedagógica são pontos também importantes para análise nesta

investigação. Nesse sentido, procurei conduzir entrevistas semiestruturadas individuais com os informantes privilegiados, previamente selecionados conforme descrito no capítulo 4 – Metodologia de Investigação, cujo guião pode ser consultado no Anexo V. Dos sete informantes privilegiados, foi possível entrevistar três alunas, conforme explicado no capítulo 4, na secção dos Participantes no Estudo: a Júlia, a Joana e a Cátia, tal como explicado no capítulo 4. Nesta secção, é feita uma análise das entrevistas efetuadas, a partir da transcrição das partes consideradas importantes para análise, seguida de uma reflexão global acerca dos resultados provenientes das entrevistas efetuadas.

5.2.1. Júlia

A primeira aluna a ser entrevistada foi a Júlia que iniciou a intervenção pedagógica com muitas dificuldades. Foi evoluindo a cada fase de resolução, tendo em conta o feedback recebido nas fases anteriores, chegando ao último problema com uma muito boa resolução, considerando os critérios de avaliação definidos. No Problema 1 – *Bolsa de valores*, Júlia conseguiu melhorar a primeira alínea na segunda fase de resolução, embora não tenha conseguido concluir satisfatoriamente a segunda. Demonstrou capacidade de explicitar os cálculos realizados e o seu pensamento. No Problema 2 – *Problema das marés*, tendo faltado à primeira fase, conseguiu realizar uma boa resolução na segunda fase de resolução, ainda que com possíveis melhorias a realizar, evidenciando algumas dificuldades na interpretação das perguntas. No Problema 3 – *Problema da canalização*, a Júlia revelou um muito bom desempenho logo na primeira fase de resolução. Contudo, não compreendeu totalmente a pergunta extra, respondendo apenas à alínea b). Em relação ao feedback escrito, Júlia utilizou-o para melhorar parcialmente a resolução do Problema 1, enquanto no Problema 3 o seu desempenho manteve-se estável. Quanto à autoavaliação, a aluna realizou-a de forma completa em todos os problemas, evidenciando envolvimento reflexivo, embora nem sempre esse processo tenha conduzido a alterações significativas nas respostas. As principais dificuldades da Júlia parecem estar relacionadas com a conclusão de respostas mais complexas, a interpretação de enunciados e a compreensão de perguntas adicionais, sendo que a capacidade de explicitar o pensamento aparenta evolução, tornando-se mais clara ao longo da intervenção pedagógica.

Ao longo da entrevista é possível perceber a opinião da aluna quanto a esta intervenção pedagógica, o que sentiu ao longo da mesma, em que é que se baseou a sua evolução e as implicações que poderá ter no seu futuro. Foi referida a posição da aluna quanto

aos problemas escolhidos, feedback recebido, apropriação dos critérios de avaliação e autoavaliação.

A Júlia começou por dar a sua opinião quanto à intervenção pedagógica como um todo. No excerto seguinte, pode verificar-se que teve bastante interesse e empenho em todo o processo:

> **Júlia -** Eu gostei de fazer os problemas, dava-nos várias formas diferentes de pensar no exercício[4] e na matéria que nós estávamos a fazer e também o feedback era bom porque nos ajudava a perceber, com os próprios erros o resto, e também pela reflexão a seguir. Porque fazíamos a ficha, depois corrigíamos outra vez a ficha, o que permitia ver o que podíamos melhorar naquele exercício, depois ajuda a também fazer esse tipo de exercícios nos testes.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A aluna partilhou também que já gostava de resolver problemas, mas não tinha a prática suficiente para que a sua prestação fosse boa. Referiu as suas dificuldades e as alterações que foi fazendo para as ultrapassar ao longo da intervenção pedagógica:

> **Júlia –** […] Fazer isso nas aulas, para mim isso fez com que melhorasse a prestação, estava tranquila, estava com atenção.
> **Inês -** Ok, e onde é que tu tinhas mais dificuldades a resolver os problemas? Encontrar a estratégia? A começar?
> **Júlia -** Sim, a ler direitinho desde o início. É muita informação e perdemos informação a meio, então comecei a ganhar o hábito de sublinhar o mais importante, dados importantes, e também registar no caderno o que interessava para depois ser mais fácil. […]
> **Inês -** Ok. Depois de interpretares, era fácil para ti encontrar a estratégia adequada, era difícil?
> **Júlia -** […] Pelo menos, ajuda a pensar e a estruturar em vez de ir fazer uma coisa e depois outra e ficarmos perdidos ali pelo meio. Assim com tudo direitinho no papel é muito mais fácil de resolver o problema. […]
> **Inês –** Ok e a nível da explicação do teu raciocínio? Achas fácil, consegues explicar bem?

[4] A Júlia usa o termo exercício para se referir a problemas, não distinguindo estes dois tipos de tarefa, o que é expectável por ser uma aluna do ensino secundário e pelo uso tão enraizado do termo exercício para qualquer tarefa matemática que se proponha aos alunos.

> **Júlia –** […] A única coisa que eu achei foi que sou mais rápida nesse processo [da explicação do pensamento]. Antes eu olhava e não sabia que fazer, agora às vezes desenho um esquema que me ajuda a perceber melhor e para garantir que os outros percebem o que eu estou a pensar.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A capacidade de resolução de problemas de Júlia melhorou com esta intervenção pedagógica permitindo-lhe encontrar uma forma sistemática de resolver problemas de forma mais eficaz, de modo que encara os problemas de uma nova maneira, com mais confiança, sem ter medo de realizar a interpretação passo a passo e pensar que conteúdos pode usar para o resolver.

Para além disso, a Júlia valorizou a explicação do pensamento, o exprimir-se de forma clara, na resolução de problemas e apontou várias razões para essa valorização: transmitir o seu pensamento aos professores de maneira que, mesmo que tenha algum erro de cálculo, consiga ter os passos intermédios corretos; mais tarde se voltar à mesma tarefa perceber como pensou para a sua realização:

> **Inês –** […] Consideras importante explicar de forma clara a maneira como resolves um problema ou achas que a solução é suficiente? O que é que tens a dizer sobre isso?
> **Júlia -** Para mim, acho importante nós explicarmos à pessoa que vai corrigir o exercício o que pensamos. Porque muitas vezes o resultado está errado porque nos enganamos num mais ou num menos, isso acontece muito e se tivermos explicado o raciocínio e estiver certo acabamos por conseguir aproveitar pelo menos o início. […] Mas ao menos para mim, é tudo muito melhor se explicarmos o que vamos pensando ao longo do exercício. Porque noutra altura podemos olhar para o exercício e perceber como pensamos naquele momento, por exemplo.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

No que diz respeito ao feedback recebido, depois de analisar e relembrar alguns deles, a Júlia disse que, no caso do Problema 1 - *Bolsa de valores*, o feedback a tinha ajudado a melhorar e a entender melhor o problema**:** "Então como eu não entendi muito bem o exercício não consegui explicar tudo aquilo que consegui fazer. Acho que o feedback me ajudou a entender o exercício porque eu acho que depois fiz na segunda volta bem" (Entrevista, Júlia, 27/07/2022).

Quando questionada sobre se algum do feedback não tinha sido percetível, Júlia lembrou-se de um exemplo específico, em que percebeu que o feedback não era igual para todos os alunos; no contexto de uma discussão em pequeno grupo, percebeu melhor o feedback e este ajudou-a na resolução do problema:

> **Júlia –** Eu entendi. Depois acho que foi na conversa com uma colega, que nós estivemos a discutir porque ela teve um feedback diferente, mas nós tínhamos chegado quase à mesma conclusão na resolução do problema. Então foi aí que nós estivemos a discutir o que era pedido ou não.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

Júlia, com esta intervenção pedagógica, alterou a forma como usa os critérios de avaliação. Previamente, Júlia acedia aos critérios de avaliação quando recebia a correção do problema e, ao longo desta intervenção pedagógica, apropriou-se dos critérios de avaliação, consultando-os no fim de resolver cada problema e, se considerasse necessário, alterava ou acrescentava informação na sua resolução de modo a ir ao encontro dos critérios de avaliação e, dessa forma, ter uma melhor resolução:

> **Inês –** […] Quanto aos critérios de avaliação? Antes destes problemas, o que costumavas fazer?
> **Júlia -** O que eu costumava fazer antes destes problemas, era eu fazia a resolução dos problemas todos, entregava e depois de ver a nota é que via os critérios, o porquê de ter sido corrigido assim. Mas depois com estes problemas não, eu fazia os problemas e depois na autoavaliação e antes fazer a autoavaliação via os critérios, melhorava certos aspetos que eu pensei para mim está certo, mas pode gerar um problema nos critérios. Então eu melhorava a escrita ou a forma de eu pensar depois fazia a minha autoavaliação com base nesses critérios que iam ser avaliados.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A opinião de Júlia quanto à adequação dos critérios de avaliação prende-se com o rigor necessário para o nível de escolaridade em que se encontrava:

> **Inês –** […] Sentiste que os critérios [de avaliação] eram adequados? Poderiam ser alterados em alguma coisa?
> **Júlia -** Sim, eu acho que foram adequados para o tipo de exercício que era. Isto é a minha opinião, eu acho que foram bem adequados para aquilo

> que nós estávamos a fazer nos exercícios. Eram exigentes, mas nós estamos no 12.º ano, nós vamos ter exame e nós temos de estar preparados para os critérios que nós vamos ter no exame. Isso fez com que as pessoas que vão fazer exame, por exemplo, se fosse obrigatório eu ia fazer o exame. Fez com que eu estivesse preparada para chegar ao exame e perceber o porquê de ter tido aquele tipo de nota, são os critérios de avaliação. Então fez com que nós já estivéssemos habituados a um critério rigoroso e que nos ajudasse a ver o que nós poderíamos melhorar ou não.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A importância dada à avaliação sumativa no percurso escolar destes alunos, muitas vezes é superior à dada à avaliação formativa, pelo que foi importante perceber a perspetiva dos alunos nesse sentido. A Júlia não sentiu que fosse importante ter uma classificação neste trabalho. Percebeu o intuito da avaliação formativa, ou seja, promover a aprendizagem, favorecendo a comunicação professor-aluno e a autorregulação dos alunos:

> **Júlia -** Eu acho que não, porque nem tudo tem de ter nota, eu acho. Mas que não foi assim muito porque nós vamos querer melhorar aquilo. E como eu já fiz a minha autoavaliação, já basicamente sabia o que eu iria ter. Eu acho que até a nota não era muito preciso. Eu acho que o que nos ajudava mais, a mim, foi ter estes feedbacks, para no futuro, num teste, se sair um exercício igual ou parecido, eu já sabia o que tinha de fazer ou o que tinha de melhorar.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

Quando questionada sobre o que contribuiu mais para a sua evolução, Júlia referiu que o feedback em conjunto com os critérios de avaliação a tinham ajudado a melhorar e a ter mais rigor nas suas resoluções, o que se refletiu também num melhor desempenho nas avaliações sumativas:

> **Júlia -** Por exemplo, há certas coisas que eu fazia e não pensava, porque era automático para mim, mas quando a professora escrevia: olha melhora isto; eu não entendi muito isto tenta-me explicar. Eu pensava tenho de explicar todo o meu raciocínio para ter a pontuação, os critérios todos certos e isso também me ajudou muito nos testes, por exemplo, nos meus testes eu sei que muitas vezes eu fazia o exercício e que não era bem

explicado, então muitas vezes eu não tinha a pontuação toda, então eu comecei a fazer mais isso: a explicar o exercício todo, para os critérios todos serem cumpridos. […]

Inês – […] onde é que sentistes que estes problemas te ajudaram mais?

Júlia - Totalmente nos testes, eu acho, porque os testes têm este tipo de problemas, porque é a matéria que nós damos nas aulas, e fez com que eu olhasse para o teste e que eu esteja segura a fazer o problema e de eu saber resolver de uma forma correta com os critérios todos bem, eu acho, e também conseguir explicar ao professor que eu entendo a matéria e que entendi o problema e que consegui resolvê-lo.

(Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

Júlia explicou ainda que considera estes problemas com um grau de desafio superior aos dos manuais, que são mais guiados, muitas vezes com exemplos resolvidos parecidos, e associados aos conteúdos que estão a ser tratados:

Júlia - Eu acho que evoluí mais porque nós nos exercícios, o exercício do livro muitas vezes diz o que é que nós temos de fazer, então nós fazemos o que o exercício do livro diz. […] Estes problemas fazem com que nós pensássemos e víssemos qual é a melhor forma, a matéria adaptada para fazer o exercício. Eu acho que ajudou muito o meu próprio raciocínio para ser mais rápida para entender matéria.

(Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A aluna gostou mais do Problema 2 - *Problema das marés*, por sentir que era mais exigente e fez com que evoluísse mais na aquisição de conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos:

Inês - O que sentiste dos problemas em geral? Houve algum que gostastes mais? Houve algum que gostaste menos? Ainda te lembras de todos?

Júlia - Eu acho o exercício das marés, eu gostei mais do exercício das marés. Era o mais exigente para mim foi o mais exigente, mas eu gostei mais de fazer porque fez com que eu pensasse muito mais e metesse muito mais matéria e foi um exercício que para mim foi exigente.

(Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

Acrescentou também que a cada problema recordava os feedbacks recebidos nos anteriores, o que lhe permitia não repetir os mesmos erros, estar mais atenta nesse sentido e melhorar:

> **Júlia –** Lá está, acho que foram muito bem pensados os problemas e foram muito bem vistos para aquela matéria que nós estamos a aprender e também acho que os feedbacks foram essenciais, para mim o feedback foi essencial para eu melhorar. E acho que num último exercício já não tive muitos feedbacks como no primeiro, acho que foi reduzindo aos poucos os feedbacks porque eu consegui já. Por exemplo, coisas que eu fazia era no problema anterior eu lia os feedbacks todos, resolvia o problema e depois na resolução do segundo problema voltava a ler os feedbacks anteriores, às vezes não te esqueças disto ou não te esqueças daquilo.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A autoavaliação que os alunos estavam habituados a fazer decorria apenas no final de cada período, sempre tendo em conta as classificações obtidas, bem como outros aspetos; no fundo, era mais uma autoavaliação com propósitos sumativos. Não incidia sobre o trabalho realizado numa tarefa, por exemplo, pois era sempre um balanço global do período. Nesse sentido, foi questionada a visão da aluna sobre esta forma diferente e nova para estes alunos de uso da autoavaliação. Júlia considerou que contribuiu para uma autocrítica mais realista, o que, por sua vez, contribuiu para refletir mais sobre as suas resoluções e melhorá-las:

> **Inês -** O que é que tu achaste desta experiência nova de fazer a tua autoavaliação assim da tua prestação e não uma autoavaliação classificativa?
> **Júlia -** Eu gostei muito porque fez com que eu fosse crítica comigo mesma, por exemplo, nós os estudantes não somos muito críticos, nós achamos que fazemos tudo perfeito e muita das vezes julgamos os professores, ah, mas eu fiz isto direito! Mas não está bem explicado, então sendo eu a minha própria professora para me autoavaliar acho que me ajudou de saber o porquê de nos testes anteriores aquilo não estar bem perfeito, fez com que eu fosse muito mais exigente comigo mesma.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

Em jeito de conclusão da entrevista, questionou-se a aluna sobre para que é que esta intervenção pedagógica poderia contribuir futuramente, o que tinha retirado deste

processo. Júlia realçou a importância de não deixar de tentar resolver, mesmo que não esteja totalmente correto, e ir melhorando aos poucos até que fique bem.

> **Inês -** O que que tu achas que vais levar, assim para o futuro desta experiência sem ser tão académica? O que é que achas que vais recordar?
> **Júlia -** Eu acho que vou levar que nós muitas das vezes se nós trabalhamos naquilo e tentarmos melhorar, vamos chegar a algum lado. E foi isso que eu tentei fazer nos exercícios, foi melhorar cada vez, dizer eu não sei e depois melhorar. Por isso na vida, tentar ver o que nós erramos e depois tentarmos melhorar, eu acho que é isso.
>
> (Entrevista, Júlia, 27/07/2022)

A entrevista da Júlia permitiu compreender que a aluna valorizou a intervenção pedagógica, considerando que a ajudou a melhorar a forma como resolvia problemas. Referiu que, inicialmente, só consultava os critérios de avaliação depois da correção do professor, mas que passou a utilizá-los no final da sua própria resolução, acrescentando ou corrigindo aspetos que considerava necessários. Reconheceu ainda a importância do feedback recebido, que a orientou na revisão do seu trabalho, e destacou que a autoavaliação lhe permitiu refletir sobre os seus desempenhos e identificar pontos de melhoria. Apesar de continuar a evidenciar algumas dificuldades no domínio de determinados conteúdos matemáticos, Júlia mostrou-se empenhada em superar essas fragilidades e em aplicar as orientações fornecidas. A sua atitude face à disciplina revelou-se positiva e aberta à aprendizagem, o que contribuiu para que conseguisse evoluir ao longo da intervenção pedagógica e reconhecer valor nas estratégias propostas.

5.2.2. Joana

A Joana, uma aluna que evoluiu ao longo dos três problemas, apesar das suas dificuldades na disciplina de Matemática A, fez também parte dos alunos selecionados para entrevistas. Ao longo da intervenção pedagógica revelou progressos sobretudo na organização e clareza das suas resoluções, embora algumas dificuldades parecem continuar a persistir. No Problema 1 – *Bolsa de valores*, melhorou significativamente a explicação e organização dos cálculos na segunda fase de resolução, passando de uma resolução má para uma boa, ainda que não tenha conseguido compreender totalmente a segunda alínea. Realizou a autoavaliação completa nas duas fases de resolução, evidenciando empenho em rever o seu trabalho à luz dos critérios de avaliação. No

Problema 2 – *Problema das marés*, não conseguiu integrar o feedback recebido, mantendo a alínea b) incompleta e a alínea f) incorreta, embora a sua resolução global tenha sido considerada boa em ambas as fases. Realizou a autoavaliação completa na primeira fase. No Problema 3 – *Problema da canalização*, melhorou alguns aspetos com base no feedback, mas não conseguiu exprimir o significado no contexto do problema de uma igualdade pretendida e respondeu de forma incompleta à pergunta extra que lhe foi colocada. Apesar disso, manteve uma resolução globalmente muito boa desde a primeira fase. No que respeita ao feedback escrito, Joana conseguiu utilizá-lo em alguns momentos para melhorar a clareza e a estrutura das suas resoluções (como no Problema 1), mas noutros (como no Problema 2) não conseguiu apropriar-se das sugestões recebidas. Quanto à autoavaliação, mostrou empenho em todas as fases em que foi solicitada, completando-a de forma cuidada e articulando-a com os critérios de avaliação, ainda que esse processo nem sempre se tenha refletido em alterações significativas das resoluções. As principais dificuldades da Joana parecem estar relacionadas com a compreensão de determinadas questões (como no Problema 2) e a elaboração de respostas completas em perguntas adicionais. Apesar disso, a maior organização e clareza no exprimir do pensamento ao longo da intervenção pedagógica ostenta a sua evolução.

Foi perguntado à Joana se, em geral, gostava de resolver problemas em matemática. A aluna referiu que, para si, uns problemas são mais fáceis do que outros, gostando mais dos que são mais fáceis para si. No decorrer da conversa, percebeu-se que estes problemas de que a aluna gosta têm um contexto real ou próximo da realidade:

> **Inês –** […] Gostas de resolver problemas em matemática ou não, sem ter em conta esta experiência?
> **Joana –** Depende do problema, professora, por exemplo, os problemas que as professoras disseram para a gente resolver em aulas, eu gostei desses problemas.
> **Inês -** Então, de que tipo é que não gostas?
> **Joana -** Ah, eu nem sei explicar, há vários tipos de problemas, por exemplo, há alguns que têm uma certa história, por exemplo a do café, tinha uma história e depois tem um problema ou há aqueles só problemas, sem a parte de trás.
> **Inês** – […] Se calhar estás-te a referir a problemas com contexto ou sem contexto.
> **Joana –** É isso, eu prefiro problemas com contexto.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Depois de identificar quais os problemas onde a Joana tinha mais dificuldades, foi importante perceber o porquê dessas dificuldades e em que parte da resolução de problemas se encontravam. A fase de interpretação dos problemas era a que mais dificuldades colocava à Joana:

> **Joana -** É mesmo entender, muitas vezes entender o que é que me estão a perguntar. O que é que pede. Eu não sei agora assim decore, mas houve algumas perguntas que eu até chamei várias vezes os professores, porque eu não estava a entender o que é que queriam com aquela pergunta.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

A perspetiva da Joana no que respeita à valorização do processo de resolução de problemas foi que, quando exprimia no papel o que pensava passo a passo, isso a ajudava a perceber melhor o que era questionado no problema:

> **Inês -** O que é que tu achas que valorizas mais o resultado ou mais as notas que tens ou o que aprendes ao explicar de forma completa o que fazes, o que é que tu achas que é mais importante?
> **Joana -** Eu acho que é o entender nas aulas e praticar nas aulas e também explicar o meu raciocínio, porque muitas vezes eu nos testes e tudo eu escrevia sempre ao lado o que era aquele resultado, de onde é que vinha porque muitas das vezes os professores não sabem de onde é que nós tiramos aqueles resultados, então.
> **Inês –** Ok, e o que achas que isso te ajuda, o explicar direitinho? Achas que isso te ajuda em alguma coisa?
> **Joana -** Entender o exercício [sic], porque imagine-se é um exercício [sic] que tem bastantes passos, bastantes dados, eu vou escrevendo ao lado o que é que cada alínea pergunta e eu acho que é mais fácil de eu conseguir entender o que nos pedem.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

No que diz respeito ao feedback recebido, Joana referiu que teve dificuldades em entender alguns feedbacks recebidos, tendo necessidade de questionar os professores sobre eles, apontando o feedback oral como uma mais-valia para que entendesse o feedback escrito recebido. No entanto, quando questionada sobre como esse feedback poderia ser alterado de forma que não tivesse a necessidade de recorrer ao feedback oral para perceber o que estava a ser comentado, Joana não conseguiu apontar aspetos concretos:

> **Joana –** […] Quando eu fazia uma alínea com um cálculo sem texto, sem explicar o que é que eu fiz, […] preguntavam, explica como é que tu chegaste a isso […] Eu não entendia bem o que é que queriam com isso porque como eu já tinha apresentado os cálculos todos, não sabia o que é que as professoras queriam que eu fizesse a mais.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Este excerto ilustra a dificuldade da Joana no exprimir do pensamento, o cálculo por si só bastava, sem necessidade de acrescentar mais informação. Questionada sobre o Problema 1 – *Bolsa de valores*, Joana reconhece que não apresentou a resposta situada no contexto:

> **Inês –** […] Por exemplo, aqui [no Problema 1 - Bolsa de valores] fizeste os cálculos e não deste nenhuma resposta no contexto do problema, o que é que tu achas disso?
> **Joana -** Sim, eu por exemplo nessa alínea eu não entendi totalmente o que é que a professora queria dizer, então eu fiz os cálculos, cheguei ao resultado, só que provavelmente não terminei.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Sobre o Problema 3 – Problema da c*analização*, Joana recorda ter precisado de ajuda para interpretar um feedback relativo à construção de um esboço, aliando feedback oral ao feedback escrito recebido:

> **Inês -** E esse tipo de feedback gostaste, não gostaste, sentiste que compreendeste melhor o problema [da canalização] com o feedback?
> **Joana -** Sim, eu entendi bem esse problema com o feedback, só que havia aí um feedback que eu até tive de perguntar à professora, porque eu não entendia o que a professora queria que eu fizesse. […]
> **Joana –** Ah sim, foi um que nós tínhamos de fazer um esboço, foi na b).
> **Inês -** É o último sim, exatamente, onde diz, podemos construir uma canalização nas condições do enunciado maior do que esta? Era isto?
> **Joana –** Sim.
> **Inês –** Ok. E como é que percebeste este feedback? Perguntando oralmente à professora? Com a resposta percebeste logo?
> **Joana -** Sim, eu percebi, depois conseguir chegar a essa conclusão. Então nessa aí eu acho que só tenha respondido que não dava para construir uma canalização. […]
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Apesar disso, Joana não identificou alterações que pudesse sugerir no modo como o feedback foi dado:

> **Inês -** E o que que achas que poderíamos ter feito de maneira diferente para que o primeiro feedback fosse logo suficiente sem precisares da parte oral?
> **Joana -** Eu acho que não foi o problema da professora, foi mesmo o meu problema de não ter entendido.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Joana referiu também que, no geral, o feedback escrito a tinha ajudado a melhorar pequenas partes das suas respostas, ainda que, por vezes, o achasse desnecessário ou em exagero, especialmente quando sentiu que a sua resolução já estava correta. Esta perceção poderá dever-se ao facto de, para Joana, nem todos os comentários parecerem contribuir para a melhoria da resposta, mas sim confirmar o conhecimento adquirido ou a capacidade de resolver o problema. Joana valorizou principalmente o feedback que esclareceu dúvidas ou corrigiu erros evidentes, não estando claro se reconheceu totalmente a função de sugestões que promovem reflexão ou aprofundamento da resolução:

> **Joana -** Sim, acho que me ajudou um pouco, num digo que ajudou muito, houve uns que sim, de exercícios [sic] que eu não tinha entendido e com o feedback consegui resolvê-los. Mas outros que eu simplesmente não sei, às vezes eu achei um bocado desnecessários, porque eu já tinha escrito lá as coisas e pela correção estavam corretas, então não entendi muito bem porque é que a professora tinha escrito lá aquilo. Talvez para a professora ter a certeza de que nós sabíamos resolver aquilo e não tinha sido o nosso colega do lado a fazer.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Quando questionada sobre o que mais tinha contribuído para a melhoria do seu desempenho, se os critérios de avaliação ou o feedback escrito ou oral que recebeu, Joana realçou o feedback oral. Como a aluna tinha bastantes dificuldades de interpretação, o que estava escrito acabava por ser insuficiente. Paralelamente, a falta de domínio de conteúdos poderá ter sido um fator impeditivo quer de resolver o problema quer de entender melhor o feedback dado pela professora, uma vez que Joana diz ter necessitado, muitas vezes, de rever conteúdos anteriores. Quando recebia feedback oral, a professora percebia as dificuldades e acabava por, através do

questionamento, fazer a aluna refletir e aprender ou relembrar esses conteúdos anteriores, o que lhe permitia entender melhor a resolução do problema:

> **Joana -** Sim, especialmente o feedback oral, porque, por exemplo, eu, na minha opinião, feedback escrito é ótimo e até que ajudou, só que feedback oral é sempre diferente, porque temos a professora ao nosso lado a dar dicas e algumas ideias de como resolvemos aquilo. E também, muitas vezes fazem-nos perguntas de matérias anteriores para a gente conseguir entender as mais recentes, então estamos a fazer uma revisão da matéria e a entender ao mesmo tempo o problema, por isso eu acho que é mais produtivo.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

O problema que Joana mais gostou de resolver foi o Problema 3 – *Problema da canalização*, devido ao seu maior interesse e gosto pelos conteúdos envolvidos:

> **Inês -** Qual é que tu gostaste mais? […]
> **Joana –** Talvez o da canalização, sim. […] De todos pareceu o que eu entendi mais à primeira. E também, não sei se era esse que tinha também trigonometria envolvido.
> **Inês –** Tinha sim.
> **Joana –** Pronto, eu acho que sim, e eu gostei bastante dessa matéria de trigonometria e isso, então.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Joana não tinha prática de consultar os critérios de avaliação e não via a sua importância. A apropriação dos critérios de avaliação, promovida fortemente na intervenção pedagógica realizada, foi um processo difícil e demorado para esta aluna:

> **Joana -** Enfim, professora, eu demorei imenso tempo a entender os critérios de avaliação.
> **Inês -** Tinhas por hábito quando fazes um trabalho ir ver, enquanto fazes os critérios de avaliação?
> **Joana -** Eu acho que não.
> **Inês -** Ok, e quando recebes a nota, por exemplo, costumas ir confirmar os critérios ou não?

> **Joana –** Não, porque eu confio no que os professores escrevem, então eu nunca fui, ainda por isso eram vários professores, então nunca tive a necessidade de ir ver os critérios de avaliação de qualquer problema.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Joana explicou que começou por perceber o critério da organização e apresentação, mas que teve muita dificuldade em compreender o critério relativo à correção da resposta à tarefa. A aluna não revelava grande capacidade de autorregulação, sentia que esse trabalho era para o professor realizar e que não lhe cabia a si ter uma opinião sobre o seu trabalho, talvez pela sua insegurança acerca do que está ou não correto:

> **Inês -** Ok, mas entendeste em algum ponto da situação ou chegaste até ao fim sem entender?
> **Joana –** Não, houve alguns aspetos que eu entendi, por exemplo o da organização e apresentação, sim. Mas por exemplo, o último aspeto correção da resposta à tarefa, eu não sabia o que é que eu ia responder a isso, porque eu não tinha a correção para saber se aquilo estava certo ou errado. Por exemplo, a minha resposta está correta, mas apresenta alguns aspetos incorretos. Eu não sei se a minha resposta está correta, eu acho que está, mas… A completude do processo de resolução eu também não sabia o que é que era.
> **Inês –** Ok. E quando é que tu sentiste que foi esse ponto de viragem, ou seja, que passaste a compreender, foi aos poucos, foi assim de um momento para o outro?
> **Joana –** Não, foi aos poucos, foi, por exemplo, no primeiro problema não entendi muito bem, especialmente ali o quarto ponto. E depois eu fui perguntar ao colega da frente o que é que era cada ponto, porque eu não tinha entendido e depois conseguir entender e fazer.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Contudo, no final de cada um destes problemas, a aluna refletia sobre a sua resolução tendo em conta os critérios de avaliação: “Os critérios, eu no final, eu ia ver as coisas que tinha feito, os exercícios [sic] e no geral eu avaliava no geral” (Entrevista, Joana, 28/07/2022).

Quanto à autoavaliação, Joana não viu resultados nem pontos positivos na elaboração da autoavaliação. Embora Joana cumprisse a autoavaliação, não foi claro que a tenha utilizado na sua função de autorregulação, no sentido de melhorar a sua resolução;

transpareceu que, ao refletir e escrever, estava a cumprir mais uma tarefa necessária da intervenção pedagógica sem a usar para o seu próprio benefício, daí a não valorização da autoavaliação:

> **Inês –** Gostaste, não gostaste, sentiste alguma melhoria na tua resolução por causa da autoavaliação, sentiste que ficou tudo igual?
> **Joana –** Eu não gostei nem desgostei, acho que foi normal e eu não senti nenhuma melhoria assim ao fazer a autoavaliação, não senti muita diferença.
> **Inês -** Ok, pronto, tudo bem. Sentiste que com autoavaliação tinhas mais consciência do que foste fazendo ao longo do problema ou nem por isso?
> **Joana -** Acho que não, acho que foi a mesma coisa. Quando eu ia resolvendo as coisas eu tinha mais ou menos a consciência do que fazia. Não foi por fazer a autoavaliação que eu…
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Joana acrescentou que achou muito benéfico o facto de ter uma segunda fase de resolução destes problemas, pois permitia aperfeiçoar o que já tinha sido anteriormente feito. Com o feedback recebido e estudo autónomo, acabava por ter mais confiança e melhorar:

> **Joana –** […] Porque, por exemplo, nós fazemos o primeiro problema uma vez, um problema novo e alguns exercícios [sic] a gente não tinha bem a certeza como é que se fazia ou pensávamos que estava certo e estava errado. Quando os professores nos dão uma segunda oportunidade para desenvolvermos esse problema, eu acho que nós temos a obrigação de já conseguirmos fazer algumas questões que tenhamos mais dúvidas, mas não é sempre assim! […] É um bocado diferente, porque na primeira fase, como eu já tinha dito, a gente ainda não sabe, ainda está a aprender que matéria é que vai calhar naquele problema e podemos estar mais inseguros. Na segunda fase, a gente já sabe qual é a matéria, então entre a primeira e a segunda fase a gente foi para casa estudar essa matéria que sentiu mais dificuldade, então na segunda fase, a gente está mais confiante para fazer aquilo, porque já tirou as dúvidas com os professores, então eu acho que fazer pela segunda vez o mesmo problema, eu acho que é mais fácil.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Ao longo dos três problemas, observou-se uma evolução das resoluções da Joana, pelo que lhe foi questionado o que considerava ter sido mais importante para essa evolução. Joana apontou como principal fator o domínio e interesse dos conteúdos matemáticos envolvidos na resolução do problema:

> **Joana -** Sim, eu senti uma evolução, mas eu acho que essa evolução não foi bem na matemática em geral. Por exemplo, houve aí problemas em que eu senti mais dificuldade, porque eu sentia mais dificuldades na matéria, porque eu não entendia muito bem a matéria e esses problemas foram mais difíceis. Os mais recentes foram mais fáceis para mim porque eu entendia a matéria e eu gostava da matéria e gostava de estudar aquilo, então acho que tive uma melhoria não foi da matemática, foi mais… eu não sei explicar.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Para Joana, estes problemas foram adequados às suas capacidades, mas sentiu que eram de um nível de dificuldade baixa em comparação com os que constam nas avaliações sumativas e nas avaliações externas finais. Na resolução destes problemas, Joana teve um acompanhamento mais personalizado com o feedback individual e foi dedicado tempo de aula para a resolução em duas fases, o que permitiu à aluna sentir-se mais segura na resolução destes problemas. Talvez por isso Joana tinha a sensação de que os problemas das avaliações têm um grau de dificuldade mais elevado do que os que foram resolvidos ao longo da intervenção pedagógica:

> **Joana –** Eu acho que estou um bocado segura [na resolução de problemas], mas ao mesmo tempo não estou, porque, por exemplo professora, na minha opinião, os problemas que nos iam colocando nas aulas eram muito mais fáceis assim ao nível da temática, do que os problemas que nos vão colocar no exame ou num teste. Por isso eu acho que os problemas eram bons para início do treino, mas para um estudo mais aprofundado, acho não eram assim tão bons. […] Por exemplo, eu aprendia mais a matéria com os problemas que estavam no manual porque eram mais difíceis, então requeria que nós estudássemos mais, entendêssemos e fossemos buscar coisas ao manual, do que propriamente os problemas que nos eram colocados nas aulas, nas fichas. Porque como eu já tinha dito eram problemas mais fáceis e eram mais fáceis de entender. Os do manual não eram tão fáceis de entender, então era um pouco melhor. […] para mim os problemas que foram colocados

> nas aulas estavam ótimos para aquilo que eu sei e para aquilo que eu vou saber, mas para as pessoas que vão fazer exame acho que devia ser um bocado mais difícil.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Joana referiu também que pensava que não ia necessitar de matemática tão avançada no seu futuro, pelo que, na sua opinião, não retirou nada em específico desta experiência na intervenção pedagógica:

> **Joana –** Mas eu acho que não é só nos problemas, eu acho que é em geral, da matemática em geral. Eu acho que não vai fazer assim grandes diferenças no futuro, porque eu como não vou para matemática nem para engenharias, nem nada, matemática é assim uma coisa, eu acho que vou saber as coisas básicas para o dia a dia, porque podem ser úteis, mas, por exemplo, trigonometria ou números complexos eu acho que eu nunca vou usar isso na minha vida, vou usar no dia a dia coisas práticas.
>
> (Entrevista, Joana, 28/07/2022)

Com a entrevista feita a Joana, foi possível perceber que, apesar da sua evolução, alcançada ao longo da intervenção pedagógica, a aluna não valorizou plenamente o trabalho desenvolvido. Alterou alguns dos seus hábitos na resolução de problemas, nomeadamente ao passar a utilizar os critérios de avaliação e a realizar a autoavaliação, mas não sentiu que essas estratégias tivessem impacto direto na melhoria do seu desempenho. Foi sobretudo o feedback que valorizou mais e a que deu mais ênfase, em particular quando foi acompanhado por feedback oral, ainda que, por vezes, não o compreendesse totalmente ou achasse excessivo. Ficou igualmente evidente que o domínio dos conteúdos matemáticos não era consistente, o que condicionava a sua confiança e a qualidade das resoluções. Para além disso, a própria valorização da disciplina de Matemática por parte da Joana mostrou-se reduzida, o que ajuda a compreender a menor apropriação das estratégias propostas e a dificuldade em reconhecer nelas um contributo efetivo para a sua aprendizagem.

5.2.3. Cátia

Cátia, a última aluna a ser entrevistada, apresentou uma evolução positiva ao longo da resolução dos três problemas. Apesar de não evidenciar grandes dificuldades na disciplina de Matemática A e de manifestar gosto pela disciplina, o seu percurso durante

a intervenção pedagógica mostra como foi capaz de utilizar os critérios de avaliação, o feedback escrito e a autoavaliação de forma construtiva. No Problema 1 – *Bolsa de valores*, conseguiu melhorar de forma clara a primeira alínea na reformulação, evoluindo de uma resposta má para uma resposta boa (de acordo com os critérios de avaliação), ainda que não tenha alcançado uma resposta final como pretendido. Esse progresso resultou de um esforço de organização e de explicitação mais cuidada, apoiado pelo feedback recebido. O Problema 2 - *Problema das marés*, confirmou a sua solidez: a resolução inicial já apresentava qualidade elevada. A aluna demonstrou compreender todos os comentários feitos, realizando pequenas correções que lhe permitiram manter o nível muito bom. Nesse caso, a autoavaliação realizada na primeira fase de resolução evidenciou consciência crítica e validou a pertinência das melhorias introduzidas. Quanto ao Problema 3 - *Problema da canalização*, a Cátia voltou a apresentar uma resolução muito boa logo de início, mas com alguns erros de comunicação matemática escrita. Após o feedback, foi capaz de corrigir essas falhas, embora a resposta à questão extra revelasse uma interpretação limitada, por a ter associado às condições da alínea b). Ainda assim, manteve o rigor global da resolução e realizou a autoavaliação completa, refletindo sobre os aspetos em que poderia melhorar. De forma geral, o percurso da Cátia caracteriza-se por uma apropriação eficaz dos critérios de avaliação, pelo uso atento do feedback escrito e pela consistência das autoavaliações. Embora já partisse de um desempenho sólido, conseguiu introduzir melhorias pontuais, sobretudo ao nível da completude do processo de resolução e da correção da resposta à tarefa, revelando um envolvimento constante no processo de aprendizagem.

A aluna, quando questionada sobre o seu ponto de vista acerca da intervenção pedagógica realizada, considerou que foi muito prolongada no tempo, principalmente tendo em conta que se encontravam em ano de final de ciclo com avaliação externa no final do ano letivo:

> **Cátia -** Eu acho que foram uteis, até um certo ponto, porque era bom nós resolvermos e corrigimos, mas acho que a parte de andarmos com os critérios para um lado e para o outro e de estarmos sempre a repetir o mesmo exercício [sic], acho que era um bocadinho desperdício de tempo, principalmente para as pessoas que tinham exame, porque estávamos a perder 3 horas, 4 horas ou mais de aulas só com um problema e acho que essa parte já não era tão boa para nós.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Cátia afirmou que a intervenção era pertinente, contudo deveria ter sido efetuada num ano de escolaridade anterior, como, por exemplo, o 9.º ou 10.º ano. Ainda assim, a aluna pensava que a tinha ajudado a aprender e consolidar conteúdos:

> **Cátia -** Eu acho que para o ano em que nós estávamos, eu acho que trabalhar dessa forma com alunos de oitavo, nono, até décimo, eu acho que vale a pena. Mas na situação em que nós estávamos que era segundo e terceiro período, eu acho que nós estávamos já muito acelerados e muito focados no exame. […] Poderia ser na mesma no 12.º ano, mas no primeiro período, talvez. Experimentar com uma determinada turma e dependendo da atenção e da valorização que esses alunos são, adaptar depois para o segundo e para o terceiro e acho que no terceiro já não fazia tanto sentido ter tantas horas de aula para o problema.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

A pressão social/familiar e o peso da classificação da avaliação externa na sua ambição em ingressar no ensino superior marcaram bastante a posição de Cátia sobre esta intervenção pedagógica. Causava-lhe alguma ansiedade o facto de despender tempo de aula para as duas fases de resolução, análise individual de feedback e ainda autoavaliação:

> **Cátia -** Acho que no mesmo que eu disse antes, se estivéssemos noutro ano letivo, noutro período, se calhar teria dado bastante jeito e acho que é um bom método a adotar. Alunos que começaram, por exemplo, o secundário que têm de perceber o peso que é a nota e têm de perceber o que é que se devem focar, para onde devem dirigir a sua atenção. Para nós ajudou, claro que sim, tudo o que fizemos ajuda sempre, mas acho que não era o momento.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Acerca da contribuição da intervenção pedagógica para a evolução da capacidade de resolução de problemas, Cátia afirmou que os problemas desta investigação eram diferentes dos realizados anteriormente. Dessa forma, permitiu-lhe raciocinar sob diferentes perspetivas e melhorar a capacidade de resolução de problemas, com uma maior experiência nesse campo:

> **Inês –** Já disseste que ajudou e achas que melhoraste a tua capacidade de resolução de problemas por fazer esses problemas? Sentes que se

> fossem outros quaisquer também tinhas evoluído? Achas que já tinhas essa capacidade bem evoluída e então isto foi só mais um treino? Qual é assim a tua perspetiva?
>
> **Cátia -** Eu acho que deu para treinar as matérias e para consolidar os conhecimentos e deu jeito porque no manual não temos problemas tão do mesmo estilo e género dos que fizemos, por isso era uma maneira de abranger todo o tipo de exercícios [sic] que poderia sair em exame, por exemplo.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Cátia desvalorizou parte do feedback recebido, pois sentia que não faria diferença em relação ao facto da resposta estar certa ou errada, estranhando que alguns comentários se centrassem em aspetos de encorajamento ou de reconhecimento do que já estava bom na sua resolução. Este posicionamento ajuda a compreender uma tendência mais alargada observada na turma: os alunos da turma de Cátia, em geral, pareciam não estar habituados a receber comentários deste género e mostravam pouca disponibilidade para discutir formas de melhorar as suas resoluções ou refletir sobre o trabalho realizado. Assim, quando alcançavam o resultado correto, tendiam a considerar a tarefa concluída, sem atribuir grande relevância a eventuais melhorias no processo de resolução.

> **Cátia** – […] E eram assim algumas coisas que nos escreviam para nós corrigimos eram assim um bocadinho, não sei. Eu acho que não ia importar se íamos ter uma correção ([cotação]) máxima, por exemplo, era apenas para termos alguma coisa lá escrita, porque muita gente tinha os problemas corretos e tinham umas notas para corrigir que eram só dicas construtivas e não um erro. […]
>
> **Inês -** Ok, e então o feedback que tu recebeste sentes que não te ajudou grande coisa.
>
> **Cátia** – Ajudou-me a perceber que tinha compreendido o problema e que estava correto, lembro-me disso.
>
> **Inês –** No caso de teres alguma coisa incorreta também te ajudava ou nem por isso?
>
> **Cátia -** Sim.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Este excerto da entrevista de Cátia evidencia a postura da aluna, centrada sobretudo na correção do resultado, o que ilustra um desafio central da intervenção pedagógica: promover a valorização do processo de resolução, da organização e da explicitação do pensamento, para além da simples obtenção de uma resposta correta. O seu caso ilustra como alguns alunos tendem a considerar o trabalho concluído quando alcançam o resultado certo, mostrando a importância de estratégias que incentivem a reflexão sobre o próprio desempenho e a apropriação dos critérios de avaliação.

Quanto às dificuldades sentidas ao longo da resolução dos problemas, Cátia afirmou que alguns problemas foram simples e outros mais complexos, mas que tinha conseguido sempre superar as suas dificuldades. A aluna indicou que, para superar as dificuldades, consultava apontamentos no caderno diário, nomeadamente tarefas anteriormente resolvidas com os mesmos conteúdos; caso não conseguisse ultrapassar as dificuldades dessa forma, questionava os professores:

> **Cátia –** É assim eu não era a melhor aluna a matemática, mas isso não tinha só a ver com os problemas. Havia problemas que eram fáceis para mim e outros que pronto, já tinha mais dificuldades, mas quase sempre era só preciso uma ajuda inicial e depois corria tudo bem. […] Dependendo, por exemplo, certas matérias, ou umas vezes era não perceber bem o que o problema estava a pedir ou outras vezes era lembrar-me, por exemplo, das fórmulas, lembrar-me do processo, mas não conseguir adaptar a esse problema, por exemplo.
> **Inês -** Ok, e o que é fazias para combater essas dificuldades? Tinhas assim alguma estratégia ou dependia de problema para problema?
> **Cátia –** Às vezes ia ao caderno, a aulas anteriores e via exercícios [sic] que fossem semelhantes ou exercícios [sic] dessa matéria, ou então notas que a professora tinha dado na aula e depois tentava adaptar, se não desse, pedia ajuda.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Cátia considerava importante explicitar o processo de resolução do problema, para que, caso errasse algo, conseguir perceber onde e corrigir mais facilmente:

> **Cátia –** Perceber o problema, ir fazendo passo a passo direitinho, para não me enganar e não perder nada porque depois se no fim eu errar, não tenho de apagar tudo, tenho tudo estruturado e é só tentar descobrir onde está o erro.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

No entanto, para Cátia, a autoavaliação não foi importante, pois se sentia confiante na sua resolução e não via necessidade de refletir sobre ela no final. A aluna achou desadequado o tempo despendido na realização da autoavaliação. Na sua opinião, esse tempo fazia falta para continuar a resolver mais problemas. Contudo, resolver tarefas em série, sem refletir no que se está a fazer, leva a uma aprendizagem mais mecanizada e menos significativa, que esta aluna valoriza mais ou não consegue perceber ainda que não lhe traz benefícios.

> **Inês -** Ok, então e no teu caso particular, por exemplo, a autoavaliação não te ajudava a perceber o que tinhas feito bem, o que é que tinhas feito mal, o que poderias melhorar na próxima?
> **Cátia -** A mim eu acho que [a autoavaliação] não me ajudou muito porque eu estava confiante que o exercício [sic] estava correto, por isso não, o que eu disse apenas era que não tinha tido dificuldade e que tinha percebido, que tinha estruturado bem. E às vezes estarmos a perder uns 20 minutos para fazer uma autoavaliação, acho que se calhar não era o mais adequado. Claro que se a professora perguntasse no fim, o que é que nós achamos, qual era o nosso feedback sobre os problemas e tudo, acho que isso não teria mal, mas nos 3 problemas ou mais que fizemos, estarmos a dedicar esse tempo à autoavaliação, acho que era com boas intenções como é óbvio, mas se calhar esse tempo devia ter sido dedicado a outra coisa, ou a mais problemas, ou dúvidas ou a matérias anteriores, por exemplo.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

No que respeita aos critérios de avaliação, Cátia, mesmo antes da intervenção pedagógica, tinha por hábito consultar os critérios de avaliação por ter como objetivo cumprir com os critérios para ter a melhor resposta possível:

> **Cátia -** Eu lembro-me dos critérios. […] Fomos ver os critérios [em situações anteriores]. Mas como dividimos as tarefas, pronto. […]
> **Inês** – Sim, pronto e em que é que isso te ajuda, ou seja, em que é que valorizas esses critérios de avaliação?
> **Cátia -** Porque antes de fazer o trabalho, apresentação, seja o que for, eu vou ter uns pontos em que tenho de dar o máximo que eu conseguir e poder fazer, porque se é isso que conta então têm de estar todos no máximo possível.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Quando questionada sobre o que mais valorizava entre feedback, critérios de avaliação e autoavaliação, Cátia apontou os critérios de avaliação, por funcionarem como guia para o que devem dar mais importância na resposta a uma tarefa:

> **Cátia -** Os critérios.
> **Inês -** Ok, e porquê?
> **Cátia –** No meu caso, o feedback, pronto era quase sempre que o problema estava correto e alguns pontos a corrigir, por isso não foi de mais valor, foi uma confirmação. A autoavaliação, não sei, na minha opinião não acho que seja útil, neste caso, neste tipo de problemas.
> **Inês –** Ok.
> **Cátia –** E os critérios foi como eu disse, dá para nos orientarmos, para dirigirmos a atenção para o que é importante.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Para Cátia, a sua evolução ao longo dos três problemas foi constante, refletida na capacidade de realizar as resoluções aos problemas propostos, corrigir erros identificados e integrar algumas sugestões do feedback recebido. Atribuiu as dificuldades de alguns colegas à falta de esforço e valorizou a presença de vários professores na sala como fator de apoio, mostrando-se satisfeita com a forma como foi conduzida a intervenção pedagógica:

> **Cátia -** Eu acho que foi constante. […] É assim houve muitos alunos da turma que acho que tal como eu conseguiram compreender todos os problemas desde o início e não tivemos dificuldades a resolvê-los. Eu acho que houve mais pessoas a ter os problemas incorretos ou a não perceber, mas foi por falta de esforço e falta de vontade e não por não saber fazer, apenas não queriam fazer. Por isso acho que estava tudo correto, o enunciado e isso tudo, havia vários professores na sala, por isso quem tivesse dúvidas não podia ficar calado, acho que o método está bom.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

A aluna sugeriu ainda que, caso a intervenção pedagógica fosse aplicada novamente no 12.º ano, devia ser iniciada no primeiro período e, caso os alunos estivessem recetivos, continuar no segundo período, mas não se devia prolongar no terceiro período:

> **Cátia –** Poderia ser na mesma no 12.º ano, mas no primeiro período, talvez. Experimentar com uma determinada turma e dependendo da atenção e da valorização que esses alunos são, adaptar depois para o segundo e para o terceiro e acho que no terceiro já não fazia tanto sentido ter tantas horas de aula para o problema.
>
> (Entrevista, Cátia, 01/09/2022)

Esta opinião parece indicar que, para Cátia, a intervenção seria importante sobretudo como apoio imediato, sem estabelecer ligação clara com a aprendizagem mais consolidada nem com a preparação para avaliações externas. Mostra-se, assim, centrada no acompanhamento do momento da tarefa, mantendo a postura de valorização do resultado imediato em vez de reconhecer o papel da intervenção na melhoria sustentada das suas competências matemáticas.

Através da entrevista, percebe-se que Cátia participou ativamente na intervenção pedagógica e apresentou uma evolução consistente ao longo dos três problemas, corrigindo erros e melhorando a clareza da comunicação matemática escrita. Apesar disso, manteve a tendência de se centrar no resultado correto, valorizando o feedback corretivo e considerando a autoavaliação pouco relevante para a melhoria das respostas. Reconheceu a pertinência dos critérios de avaliação, mas não evidenciou uma apropriação que contribuísse para a progressão sustentada das suas competências. Na sua perceção, a intervenção seria mais eficaz se aplicada em anos anteriores, uma vez que, no final do ciclo, considerava que o tempo necessário para reflexão e consolidação não seria rentabilizado de forma eficiente.

Em resumo, as três entrevistas realizadas apresentam diferentes perspetivas sobre a intervenção pedagógica. Júlia valorizou a intervenção, considerando-a importante para melhorar a capacidade de resolução de problemas, passando a utilizar os critérios de avaliação de forma mais consciente e reconhecendo a utilidade do feedback e da autoavaliação para refletir sobre o seu desempenho. Por outro lado, Joana atribuiu menos valor à intervenção, centrando-se sobretudo no feedback focado no erro e considerando a autoavaliação pouco relevante para a melhoria das suas respostas. Cátia, embora tenha participado ativamente e apresentado evolução nos problemas, valorizou principalmente o apoio imediato e o resultado correto, desconsiderando comentários construtivos e a autoavaliação, e sugeriu que a intervenção teria sido mais eficaz se aplicada em anos anteriores, dado o tempo que considerava necessário para consolidar aprendizagens.

As três alunas consideraram importante desenvolver a capacidade de exprimir o pensamento na resolução de problemas, embora por motivos distintos. Júlia entendia que, se a resolução estivesse bem explicada, mesmo que o resultado estivesse errado, podia obter pontuação próxima à máxima, refletindo a valorização do processo e a compreensão dos critérios de avaliação. Joana considerava que explicar o pensamento a ajudava a compreender melhor a pergunta dos problemas, facilitando a interpretação e compreensão da tarefa. Cátia, por sua vez, via a expressão do pensamento como útil para identificar e corrigir erros, ligando esta capacidade diretamente à cotação das respostas; valorizava principalmente o impacto no resultado e nas pontuações obtidas, sem perceber claramente a relação com a aprendizagem sustentada ou com a preparação global para avaliações externas.

No que respeita ao feedback, as alunas referiram este ajudou a melhorar as suas resoluções. Para Joana, o feedback dado nem sempre foi percetível; para Cátia e Joana, por vezes, foi considerado exagerado. Cátia estranhou o facto de alguns comentários serem apenas construtivos, sem indicar erros ou sugestões concretas, centrando-se mais em reconhecimento ou encorajamento. O feedback dado de forma encorajadora dificultou a compreensão da utilidade do feedback, uma vez que a aluna estava centrada no resultado correto e esperava comentários que a ajudassem a corrigir falhas que afetassem diretamente a cotação das respostas.

Antes da intervenção pedagógica, a experiência com critérios de avaliação era diferente para as três alunas. Joana não consultava os critérios de avaliação em nenhuma altura, Júlia tinha por hábito consultar os critérios quando recebia a resolução e/ou classificação dos trabalhos, fichas ou testes, e Cátia analisava sempre os critérios de avaliação aquando da realização das tarefas. Apesar destas diferenças, as alunas consideraram que os critérios de avaliação desta intervenção pedagógica eram claros e faziam sentido face às exigências das tarefas propostas, embora, para Joana, tenha sido difícil a sua apropriação.

Nenhuma das alunas tinha experiência prévia de autoavaliação em modo semelhante à que foi promovida nesta intervenção pedagógica, isto é, com foco formativo e não classificativo, ainda que existissem na mesma três níveis de desempenho. Para Júlia, a realização da autoavaliação incentivou a que fosse mais crítica consigo mesma antes de dar a tarefa como concluída. Cátia e Joana não valorizaram a autoavaliação, não sentiram que a reflexão final impactasse significativamente a sua prestação.

Considerando três aspetos que caracterizaram a intervenção pedagógica – feedback, critérios de avaliação e autoavaliação – as opiniões sobre o que foi mais impactante e

importante para a melhoria do desempenho das alunas foram diferentes. Júlia não conseguiu escolher apenas um, pois, na sua opinião, o feedback recebido em conjunto com os critérios de avaliação foram ambos importantes para as melhorias observadas. Joana considerou o feedback determinante; já Cátia apresentou os critérios de avaliação como aspeto mais relevante.

Apesar de as três alunas estarem inicialmente no mesmo grupo de informantes privilegiados (alunos que evoluíram ao longo da resolução dos três problemas) e pertencerem à mesma turma (turma 2), podemos verificar que apresentam perspetivas diversificadas em relação aos variados assuntos abordados nas entrevistas. Esta diversidade revela a importância de recolher diferentes perceções sobre a intervenção pedagógica, ainda que não tenha sido possível entrevistar alunos com outros perfis e da outra turma, foi importante ter a perceção destas alunas acerca desta intervenção pedagógica.

6. Conclusões e Recomendações

Neste capítulo, é feita uma síntese do estudo realizado, são explicitadas as suas principais conclusões relacionando os resultados obtidos com os temas explorados no enquadramento teórico, procurando responder às questões de investigação elaboradas, e é feita uma reflexão final, onde se referem limitações que decorreram ao longo da investigação e implicações para a prática profissional futura, e se sugerem ainda investigações a serem realizadas futuramente neste tema.

6.1. Síntese do estudo realizado

Esta investigação foi realizada com base numa intervenção pedagógica envolvendo duas turmas do 12.º ano na disciplina de Matemática A, no ano letivo 2021/2022, ano em que realizei a minha PES. A principal motivação para a realização da intervenção pedagógica foi promover a capacidade dos alunos de exprimir o pensamento na resolução de problemas, já que manifestavam várias lacunas a este nível. Para isso, teve-se como objetivo de investigação compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação da resolução de problemas e os integram no desenvolvimento desta capacidade matemática transversal e na melhoria da forma de exprimir o seu pensamento na resolução de problemas. Tendo em conta este objetivo da investigação, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: 1) Como é que os alunos se apropriam e utilizam os critérios de avaliação da resolução de problemas para melhorar o seu desempenho e a explicitação do processo de resolução? 2) Que papel desempenhou o feedback dado pela professora na evolução dos alunos na sua capacidade de resolver problemas e de exprimir o processo de resolução?

A intervenção pedagógica iniciou-se com a apresentação de um conjunto de critérios de avaliação para a resolução de problemas, contemplando a expressão do pensamento como um requisito para uma resolução correta e completa. Estes critérios (Anexo VI) foram trabalhados com os alunos a partir de três resoluções selecionadas a um problema anteriormente trabalhado em sala de aula pelos alunos, para que estes se apropriassem dos critérios de avaliação e tivessem consciência do que seria uma boa resolução, uma resolução incompleta e uma má resolução. De seguida, os alunos resolveram três problemas, todos com duas fases de resolução, recebendo feedback escrito dado pela professora no final de cada uma das duas fases. Da primeira para a segunda fase, o feedback fornecido tinha um carácter marcadamente formativo; no final da segunda fase, o feedback fornecido tinha apenas como intenção informar os alunos sobre o que tinham conseguido alcançar. Juntamente com a resolução de cada

problema, era pedido também que os alunos realizassem uma autoavaliação da sua resolução com base nos critérios de avaliação. Esta autoavaliação era também sujeita a feedback escrito dado pela professora com a mesma natureza do feedback que incidia na resolução dos problemas e na expressão do processo de resolução.

O estudo seguiu uma metodologia de carácter qualitativo e interpretativo. A recolha de dados foi realizada através de recolha documental e entrevistas: i) resoluções do problema inicial; ii) todas as resoluções dos alunos relativas aos problemas nas primeira e segunda fases, acompanhadas do feedback escrito que receberam; e iii) entrevistas semiestruturadas a três alunas selecionadas por conveniência.

6.2. Apropriação e utilização dos critérios de avaliação na melhoria do desempenho e da expressão do pensamento do processo de resolução

A análise das produções escritas dos alunos e das entrevistas evidencia uma compreensão inicial limitada dos critérios de avaliação por parte de alguns alunos. Esta limitação manifesta-se numa leitura redutora desses critérios de avaliação, centrada sobretudo no resultado e na apresentação formal da resolução, com menor atenção a aspetos como a completude do processo de resolução, a coerência na organização do pensamento e a comunicação matemática escrita.

Alguns alunos, como Marta e Frederico, nas primeiras tarefas ainda não explicitam com clareza o seu pensamento matemático. Marta limita-se a apresentar os cálculos finais, sem explicitar adequadamente as suas escolhas, enquanto Frederico apresenta uma resolução essencialmente baseada em cálculos, com alguns erros e dificuldades de interpretação e compreensão da tarefa, e sem exprimir o seu pensamento. Estes exemplos revelam uma visão centrada na obtenção do resultado. Esta abordagem confirma a dificuldade na apropriação da função reguladora da avaliação quando não há um trabalho sistemático e orientado sobre os critérios de avaliação, essencial para que estes passem a integrar o processo natural de apropriação por parte dos alunos e se tornem instrumentos de autorregulação (Fernandes, 2020; Santos, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008). Como defendem Gomes (2008) e Santos e Gomes (2006), é fundamental que os critérios de avaliação sejam compreendidos como ferramentas de aprendizagem e não apenas como instrumentos de classificação.

Apesar dos critérios de avaliação terem sido apresentados e utilizados ao longo das tarefas, nem todos os alunos os apropriam de forma autónoma e funcional. Alguns alunos revelam uma apropriação fragmentada, com atenção seletiva a critérios de avaliação mais facilmente observáveis (como a correção da resposta à tarefa) e a desvalorização de critérios de avaliação relacionados com a organização/apresentação e com a completude do processo de resolução, onde a explicitação do pensamento se inclui. Estes dados estão em linha com os resultados de Martins e Martinho (2018, 2021), que observaram dificuldades semelhantes em alunos do ensino secundário.

Embora nem todos os alunos tenham permanecido no estádio inicial de apropriação dos critérios de avaliação, a análise das suas produções evidenciou uma tendência geral de progressiva apropriação dos critérios de avaliação ao longo da intervenção, evidenciada por uma maior atenção à organização do pensamento e à apresentação das estratégias utilizadas nas resoluções. Salvador é um exemplo dessa evolução: se, na primeira fase, a sua resolução era sintética e pouco estruturada, na segunda fase demonstrava uma comunicação mais clara e estruturada, com um maior cuidado na explicitação do pensamento, indicando uma apropriação funcional e consciente dos critérios de avaliação. Esta evolução confirma a importância da utilização recorrente e refletida dos critérios de avaliação em contexto formativo. Estes resultados estão alinhados com a literatura sobre avaliação formativa e autorregulação, que enfatiza a necessidade de tempo e reflexão para a apropriação dos critérios de avaliação, assim como a importância do feedback escrito e da autoavaliação para promover melhorias significativas nas aprendizagens (Costa, 2021; Fernandes, 2006, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008, 2017). A progressão observada reforça que o acompanhamento sistemático, a possibilidade de revisão das tarefas e a utilização de feedback de qualidade constituem elementos essenciais para a transição do estádio inicial de apropriação, permitindo que os alunos integrem gradualmente os critérios na organização do seu pensamento e na expressão escrita das estratégias de resolução.

Para compreender melhor estas diferentes formas de apropriação, importa considerar os dados recolhidos nas entrevistas semiestruturadas realizadas a algumas alunas. Júlia, por exemplo, demonstrou apropriação dos critérios de avaliação, pois evidenciou uma mudança significativa na forma como utilizava os critérios de avaliação: se inicialmente só os consultava após a correção da tarefa, ao longo da intervenção passou a utilizá-los autonomamente no final da resolução, reformulando ou completando a sua resposta de modo a ir ao encontro dos critérios e a melhorar a qualidade do seu trabalho. A sua evolução evidencia uma apropriação efetiva dos critérios de avaliação como guias de autoavaliação e melhoria, reforçando o seu papel regulador no processo de

aprendizagem. Estes resultados corroboram a literatura sobre feedback escrito, apropriação de critérios e autoavaliação, evidenciando que a utilização consciente destes instrumentos contribui de forma significativa para a autorregulação e para a melhoria do desempenho dos alunos, ao possibilitar-lhes refletir sobre as suas respostas, identificar estratégias eficazes e ajustar os seus processos de resolução (Costa, 2021; Fernandes, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008, 2017).

Cátia, já antes da intervenção tinha o hábito de consultar os critérios de avaliação com o objetivo de os cumprir e, assim, garantir uma melhor resolução. A sua postura manteve-se consistente, orientada para a obtenção de um bom desempenho através da conformidade com os critérios estabelecidos, tendo, ainda assim, evoluído positivamente ao longo da intervenção pedagógica.

Já no caso de Joana, observa-se um percurso distinto e mais desafiante. Joana não valorizava os critérios de avaliação nem os consultava. A sua apropriação foi difícil e lenta, mas, ao longo da intervenção, começou a usá-los para refletir sobre o seu desempenho, revelando um início de mudança na sua postura de autorregulação. Estes resultados reforçam o que Martinho e Rocha (2010) identificaram como uma conceção tradicional da avaliação por parte dos alunos, centrada na verificação do produto e não na valorização do processo.

Os resultados deste trabalho corroboram os de Martins e Martinho (2021), ao evidenciar uma variação significativa no grau de apropriação dos critérios de avaliação, relacionada com a forma como os alunos percecionam a avaliação: quando a veem apenas como controlo externo, a apropriação tende a ser menor; quando a percebem como suporte para a melhoria, a apropriação é mais consistente. Esta evidência reforça a importância das conceções dos alunos sobre a avaliação na autorregulação e na utilização dos critérios, conforme também apontado por Guerreiro e Martins (2018), Rocco (2020) e Terroso et al. (2018), que destacam que a forma como os alunos interpretam e utilizam os critérios de avaliação e refletem sobre o seu processo de aprendizagem.

A análise dos dados recolhidos permite concluir que a utilização dos critérios de avaliação contribuiu, em muitos casos, para a melhoria do desempenho dos alunos e da sua capacidade de expressar o pensamento matemático por escrito na resolução de problemas.

A investigação de Costa e Pires (2016) reforça a importância da explicitação dos critérios de avaliação enquanto instrumentos reguladores da aprendizagem, mostrando

que os alunos tendem a melhorar o desempenho quando compreendem o que é esperado e como lá chegar. Contudo, tal como os resultados do presente estudo sugerem, este processo é mais eficaz quando associado a momentos de feedback escrito e de reflexão orientada, como também apontam Santos e Gomes (2006).

Ao longo deste estudo, verificou-se que a explicitação e a utilização sistemática dos critérios de avaliação da resolução de problemas tiveram impacto na forma como os alunos abordaram os problemas e comunicaram o seu raciocínio por escrito. Esta utilização não foi homogénea entre os alunos, mas observou-se, em vários casos, uma apropriação progressiva dos critérios como instrumentos reguladores do trabalho.

Francisca constitui um exemplo paradigmático deste processo. Na primeira fase da resolução do Problema 2 – *Problema das marés*, a aluna apresentou uma resolução organizada e clara, mas sem explicitar a relação entre os cálculos realizados e o contexto do problema. Na primeira fase, a aluna não realizou autoavaliação formal, concentrando-se apenas na resolução da tarefa. Após receber feedback, foi capaz de completar a sua resposta estabelecendo essa ligação, demonstrando ter compreendido e utilizado os critérios de avaliação para aperfeiçoar a sua comunicação matemática escrita. Além disso, realizou uma autoavaliação consciente e fundamentada com base nos critérios de avaliação, o que, segundo Santos e Gomes (2006), é essencial para promover a autorregulação da aprendizagem.

Também Joaquim mostra evolução neste domínio. Na primeira fase de resolução do Problema 3 – *Problema da canalização*, apresentou uma resposta desorganizada e sem explicitar o que pensou. No entanto, na segunda fase de resolução, revelou progressos significativos no critério da completude do processo de resolução, ao apresentar uma resolução com mais detalhe, melhor organizada, com estratégias completas e onde tornou explícito o pensamento seguido. Esta mudança reflete uma apropriação funcional dos critérios de avaliação e uma crescente consciência sobre a importância de comunicar o pensamento matemático. Estes resultados vão ao encontro do que referem Martins e Martinho (2018, 2021), ao sublinharem que o contacto regular com tarefas desafiantes, aliado à utilização de critérios de avaliação claros, favorece melhorias na comunicação escrita dos alunos.

Ao contrário do início da intervenção, em que apenas consultava os critérios de avaliação após a correção, Júlia passou a utilizá-los autonomamente como referência para rever a sua própria resolução antes de a considerar finalizada, sinal de progressiva interiorização. Esta prática demonstra que os critérios de avaliação deixaram de ser meros instrumentos avaliativos externos para se tornarem orientadores internos do seu

processo de resolução. Em contrapartida, Cátia, apesar de consultar os critérios de avaliação desde o início, manteve uma utilização predominantemente instrumental, centrada no cumprimento formal, sem aprofundar o seu potencial formativo. Joana, por seu lado, enfrentou maiores dificuldades em compreender e aplicar os critérios de avaliação, principalmente os relativos à explicitação do pensamento, embora, no final da intervenção, tenha começado a usá-los como referência para refletir sobre o seu desempenho.

Os resultados deste estudo sugerem que, embora alguns alunos tenham começado a mobilizar os critérios de avaliação na autoavaliação e revisão das suas resoluções, esta utilização foi maioritariamente desencadeada pelos incentivos da professora, quer através de instruções explícitas aquando da resolução dos problemas em sala de aula, quer de sugestões presentes no feedback escrito, e não tanto por iniciativa própria. Ainda que tenham sido criadas oportunidades para usar os critérios de forma formativa, a maioria dos alunos recorreu a eles de forma pontual, não integrando plenamente esse recurso no seu processo de resolução. Este fenómeno foi observado também por Fernandes (2020), que refere que a utilização formativa dos critérios requer tempo, prática e apoio por parte do professor. Na mesma linha, Santos e Gomes (2006) e Semana e Santos (2008, 2017) sublinham que a apropriação dos critérios não é imediata, mas resulta de um processo gradual que depende de orientação e de oportunidades de prática continuada. De forma convergente, as novas AE (Carvalho e Silva et al., 2023) destacam que a mobilização efetiva destes instrumentos requer uma mediação intencional do professor, o que explica por que, também neste estudo, muitos alunos passaram a utilizar os critérios por instruções ou feedback.

Em síntese, a utilização dos critérios de avaliação contribuiu para a melhoria da qualidade das resoluções de vários alunos, especialmente no que respeita à comunicação escrita do pensamento matemático dos alunos na resolução de problemas. Embora, na maioria dos casos, esta mobilização não tenha ocorrido de forma totalmente autónoma, mas tenha sido impulsionada pela intervenção da professora, nomeadamente através de instruções e feedback, acabou por favorecer uma crescente apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos. Este processo verificou-se mesmo nos casos em que as conceções iniciais dos alunos acerca da avaliação e do seu papel nas aprendizagens não favoreciam um uso funcional desses instrumentos. Estes resultados confirmam a importância de práticas pedagógicas que promovam o uso frequente, consciente e reflexivo dos critérios como instrumentos de autorregulação (Fernandes, 2020; Gomes, 2008; Santos & Gomes, 2006), permitindo aos alunos orientar o seu trabalho com maior autonomia e clareza.

Assim, conclui-se que a utilização dos critérios de avaliação funcionou, para a maioria dos alunos, como uma ferramenta de melhoria do desempenho na resolução de problemas, sobretudo na explicitação do pensamento matemático. Ao refletirem sobre o seu próprio processo de resolução e identificarem aspetos a aperfeiçoar, os alunos foram progressivamente orientados para uma utilização mais consciente e regulada destes instrumentos, em linha com as evidências apresentadas por Fernandes (2006, 2020), Santos (2018, 2022) e Gomes (2008). De forma convergente, Semana e Santos (2008, 2017) e Costa (2021) salientam que a apropriação funcional dos critérios depende de prática continuada, mediação do professor e feedback, mostrando que mesmo alunos com conceções iniciais mais resistentes podem beneficiar deste processo de forma significativa.

Em suma, a apropriação dos critérios de avaliação não se constrói de forma linear nem automática; quando bem mediada, torna-se um instrumento essencial para orientar o trabalho dos alunos e promover a comunicação matemática escrita, em particular na resolução de problemas, competência transversal valorizada nas orientações curriculares e em contextos de avaliação externa. O feedback escrito e a orientação da professora desempenharam um papel determinante, permitindo aos alunos reestruturar e clarificar as suas resoluções, evidenciando melhorias significativas na autorregulação da aprendizagem.

6.3. O papel do feedback da professora na evolução da capacidade de resolução de problemas e de expressão do pensamento matemático

Ao longo da intervenção pedagógica, a evolução na capacidade dos alunos de resolução de problemas e na expressão do pensamento matemático foi, em termos globais, positiva, embora marcada por alguma heterogeneidade entre os alunos. À medida que os alunos foram resolvendo os problemas propostos, verificou-se um maior cuidado na organização do pensamento matemático, maior clareza na comunicação escrita e um esforço crescente para tornar visível o processo de resolução a terceiros. Esta evolução foi particularmente evidente na análise comparativa entre a primeira e a segunda fase das resoluções, onde se observaram produções mais detalhadas, coerentes e com explicitação mais clara do pensamento. O feedback escrito da professora assumiu um papel central neste progresso, ao orientar os alunos na revisão e clarificação das suas respostas. Já a autoavaliação, embora tenha sido realizada por

um número crescente de alunos na segunda fase, não foi objeto de análise aprofundada no presente estudo que permita estabelecer relações diretas com a evolução do desempenho.

Estes dados vão ao encontro do que defendem Martins e Martinho (2018, 2021), ao destacarem que os alunos tendem a evoluir na comunicação escrita das ideias matemáticas quando expostos de forma sistemática a tarefas de resolução de problemas acompanhadas de momentos de análise crítica e de feedback. De forma convergente, Fernandes (2020) e Santos (2018) sublinham que a continuidade destas práticas, associada a oportunidades de revisão, potencia progressos significativos na comunicação matemática. A estrutura em duas fases adotada neste estudo aproxima-se igualmente do que referem Black et al. (2004), ao salientarem que o feedback só se torna verdadeiramente formativo quando os alunos têm a possibilidade de o mobilizar de imediato para melhorar o seu desempenho. Também Costa (2021) reforça esta ideia, ao evidenciar que a revisão e reflexão orientada sobre as produções dos alunos é fundamental para a apropriação funcional dos critérios de avaliação.

Os resultados confirmam ainda o desenvolvimento articulado das competências de resolução de problemas e de comunicação matemática escrita. Tal como defende o NCTM (2017), o desenvolvimento do pensamento matemático está intimamente ligado à capacidade de expressar ideias de forma clara e estruturada. Neste estudo, foi possível observar progressos em alguns alunos ao nível da organização e da completude das suas resoluções, aspetos que se revelaram determinantes para tornar o pensamento matemático mais percetível e rigoroso. Esta evolução parece ter sido apoiada pela articulação entre os critérios de avaliação e a prática das tarefas, bem como pelos momentos de feedback escrito e de reflexão proporcionados pela professora, que permitiram aos alunos refletir sobre o seu desempenho e ajustar as suas estratégias.

O feedback fornecido aos alunos ao longo da intervenção teve, assim, um papel determinante na melhoria do desempenho dos alunos, incidindo predominantemente sobre o processo de resolução e a autorregulação, e não apenas sobre o resultado. Ao receber orientações explícitas e sugestões de melhoria, os alunos puderam identificar aspetos do pensamento que necessitavam de clarificação ou aprofundamento, reforçando a função reguladora do feedback na aprendizagem (Fernandes, 2006; Hattie & Timperley, 2007; Semana & Santos, 2008). Complementarmente, a autoavaliação orientada pelos critérios de avaliação constituiu um mecanismo importante de autorregulação. Embora nem todos os alunos tenham realizado este processo de forma

sistemática, quando o fizeram, puderam comparar o seu desempenho com padrões de qualidade previamente estabelecidos, refletir sobre as suas escolhas e planear ajustes no processo de resolução (Fernandes, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2017). A conjugação do feedback com oportunidades de autoavaliação favoreceu, assim, o desenvolvimento de competências de reflexão crítica e de autonomia.

No geral, os dados indicam que a articulação entre feedback, critérios de avaliação e revisão das tarefas contribuiu para progressos na completude e organização das resoluções, bem como na clareza da comunicação matemática escrita. Este efeito não se manifestou de forma homogénea, mas permitiu, mesmo nos casos em que as conceções iniciais sobre avaliação eram menos favoráveis, uma apropriação gradual dos critérios de avaliação como instrumentos de regulação e melhoria contínua (Costa, 2021; Hattie & Timperley, 2007; Santos, 2018). Verificou-se também uma evolução na clareza e organização com que os alunos exprimem o seu pensamento, tornando mais percetíveis as estratégias mobilizadas. Esta evolução foi particularmente evidente nos alunos que utilizaram os critérios de avaliação como instrumentos de orientação e nos que integraram o feedback recebido no aperfeiçoamento das suas produções. Tal como destacam Santos e Gomes (2006), a apropriação de critérios de avaliação claros constitui um suporte essencial para que os alunos consigam monitorizar o seu desempenho e regular as suas produções. Do mesmo modo, Fernandes (2006) reforça que o feedback, quando assumido como regulador da aprendizagem, contribui para o desenvolvimento de práticas de autorregulação, permitindo aos alunos rever e melhorar progressivamente o seu trabalho.

Os dados revelam ainda que alguns alunos, que inicialmente apresentaram dificuldades na interpretação do enunciado e na explicitação do seu raciocínio, evidenciaram progressos significativos quando tiveram oportunidade de mobilizar os critérios de avaliação e integrar o feedback recebido. Alexandre é um exemplo: na primeira fase do Problema 3 – *Problema da canalização*, apresentou uma resolução pouco clara e com erros de interpretação, mas, após contacto com os critérios de avaliação e com o feedback, a sua segunda resolução revelou uma melhoria significativa na explicitação do pensamento. Este tipo de progresso reforça o potencial dos momentos de avaliação formativa com recurso a feedback focado no processo (Black et al., 2004; Fernandes, 2020). Também as entrevistas ilustram esta evolução: Júlia referiu ter começado a planear com mais cuidado e a rever a sua resolução antes de considerar a tarefa concluída, revelando sinais de um processo de autorregulação em desenvolvimento, tal como sublinham Black e colaboradores (2004) ao defenderem a importância da autonomia dos alunos na monitorização do seu próprio desempenho.

Contudo, nem todos os alunos evidenciaram esta evolução. No caso de Joana, apesar de algumas melhorais, manteve-se a dificuldade em explicitar de forma clara o pensamento, privilegiando a verificação do resultado em detrimento da comunicação do processo. Esta tendência confirma que o desenvolvimento da competência de comunicar o pensamento matemático requer tempo, práticas intencionais e acompanhamento sistemático por parte do professor (Fernandes, 2020).

Em síntese, os dados recolhidos sugerem que a intervenção pedagógica contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da expressão do pensamento matemático da maioria dos alunos. A apropriação progressiva dos critérios de avaliação, associada à prática regular da autoavaliação e, sobretudo, à integração do feedback escrito na segunda fase de resolução, favoreceu não só a melhoria das produções escritas, como também o desenvolvimento de competências essenciais à aprendizagem da matemática. Esta evolução evidencia o potencial da avaliação reguladora para promover aprendizagens mais profundas, críticas e autónomas (Fernandes, 2006, 2020; Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2008).

De forma geral, os dados obtidos corroboram os estudos de Fernandes (2020), Santos e Gomes (2006) e Martins e Martinho (2018), ao demonstrarem que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e de expressar o pensamento matemático requer práticas pedagógicas consistentes, assente na valorização da explicitação do pensamento, na comunicação escrita clara e completa e no feedback com intenção formativa. A apropriação progressiva dos critérios de avaliação, o seu uso como guias orientadores, a integração do feedback escrito na melhoria das produções e a promoção da reflexão através da autoavaliação revelaram-se elementos-chave para o progresso observado. Em termos globais, este estudo confirma que a promoção de uma cultura de avaliação formativa, centrada na apropriação dos critérios de avaliação e no feedback escrito, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento das competências de resolução de problemas e de comunicação matemática escrita dos alunos. Porém, a apropriação dos critérios de avaliação por parte dos alunos é um processo exigente, que requer continuidade, intencionalidade pedagógica e uma mediação docente consistente. A evolução, embora desigual, mostrou que, quando envolvidos em práticas regulares de autoavaliação, revisão e reflexão, os alunos tendem a desenvolver um olhar mais crítico e consciente sobre o próprio processo de resolução. Estes resultados reforçam, assim, o papel central da avaliação reguladora na promoção da aprendizagem e da autorregulação (Black et al., 2004; Fernandes, 2006, 2020; Santos & Gomes, 2006).

6.4. Limitações do estudo e implicações para a prática profissional e investigação futura

Este estudo, apesar de ter permitido recolher dados significativos sobre a apropriação e utilização dos critérios de avaliação pelos alunos no contexto da resolução de problemas e da expressão do pensamento nesse processo, apresenta algumas limitações. A principal limitação prende-se com a impossibilidade de realizar entrevistas com todos os sete alunos previamente selecionados como informantes privilegiados. A seleção desses alunos baseou-se numa análise cuidadosa das produções escritas e das notas de campo recolhidas ao longo da intervenção pedagógica, procurando garantir diversidade de perfis. No entanto, a análise demorou mais tempo do que o previsto, o que levou ao adiamento da calendarização das entrevistas. Como consequência, estas só puderam ser realizadas já em período de férias escolares, altura em que se revelou particularmente difícil estabelecer contacto com os alunos. Apesar de várias tentativas, por diferentes meios de comunicação, apenas foi possível entrevistar três dos sete alunos inicialmente previstos.

Importa referir que os três alunos entrevistados pertencem ao mesmo grupo – aquele que evidenciou uma evolução significativa ao longo das três tarefas desenvolvidas. Esta limitação, que escapou em parte ao controlo da investigadora, reduziu a diversidade de perfis incluídos na recolha qualitativa final e poderia ter restringido a possibilidade de recolher perceções diferenciadas sobre a apropriação dos critérios de avaliação e o papel do feedback escrito na melhoria da capacidade de resolução de problemas e de expressão do pensamento nesse processo. Apesar disso, as entrevistas revelaram diferentes perspetivas sobre a forma como cada aluna se apropriou dos critérios de avaliação e integrou o feedback escrito na revisão das suas produções. Ainda assim, futuras investigações beneficiariam da inclusão de alunos com diferentes níveis de evolução na capacidade de resolver problemas e de comunicar o pensamento matemático por escrito, bem como com diferentes formas de envolvimento nas práticas de autoavaliação e de utilização do feedback, para alargar a compreensão do processo.

Outra limitação relevante prende-se com o facto de os alunos participantes pertencerem ao 12.º ano de escolaridade. Por um lado, estes alunos já apresentam competências bastante desenvolvidas no seu percurso escolar; por outro lado, por se tratar do último ano do ensino obrigatório, inviabiliza-se o acompanhamento longitudinal do seu percurso nos anos seguintes. Assim, não será possível estudar de forma aprofundada o impacto sustentado da intervenção pedagógica na autorregulação da aprendizagem e na comunicação matemática escrita a médio ou longo prazo. Do mesmo modo,

também não será possível dar continuidade às práticas chave da intervenção pedagógica com estes alunos para perceber melhor a sua evolução. Acresce ainda a limitação decorrente da curta duração da própria intervenção, consequência natural do enquadramento da PES, mas que se sabe ser insuficiente para produzir efeitos mais consistentes e duradouros. A limitação da experiência da investigadora também condiciona algumas opções metodológicas e a própria gestão da intervenção. A experiência vivida neste estudo evidencia que a calendarização de etapas como a seleção de informantes e a realização de entrevistas deve ser cuidadosamente ajustada ao calendário escolar, de modo a evitar períodos menos propícios à comunicação com os alunos. A inexperiência como investigadora levou a subestimar o tempo necessário para análise dos dados de modo a escolher alunos para as entrevistas. Estudos que acompanhem os alunos ao longo de períodos mais alargados (sempre que possível) permitiriam analisar com maior profundidade os efeitos duradouros de intervenções pedagógicas semelhantes na capacidade de autorregulação da aprendizagem. Também seria relevante incluir, nas entrevistas, alunos com perfis de evolução mais variados, permitindo obter uma visão mais abrangente sobre os obstáculos, resistências e estratégias utilizadas pelos alunos em processos de avaliação reguladora.

Os resultados obtidos permitem retirar algumas implicações relevantes para a prática docente, nomeadamente no que diz respeito à importância da promoção da avaliação formativa. A utilização sistemática dos critérios de avaliação, aliada a momentos de feedback escrito e de autoavaliação orientada, revelou-se eficaz na melhoria da capacidade dos alunos para resolver problemas e explicitar o seu pensamento matemático por escrito. Esta evidência reforça a necessidade de integrar estes mecanismos de forma sistemática e intencional na prática letiva, não como instrumentos de classificação, mas como ferramentas pedagógicas de apoio à aprendizagem e à autorregulação. Além disso, destaca-se a importância de investir na formação contínua de professores, de modo que possam compreender, aplicar e disseminar estas práticas no seu contexto profissional. A partilha de experiências entre docentes e o desenvolvimento de projetos colaborativos podem ser caminhos profícuos para consolidar uma cultura de avaliação formativa nas escolas. Neste sentido, torna-se essencial que o ensino da matemática integre sistematicamente momentos de análise criteriosa das resoluções, com espaço para feedback orientador, para discussão metacognitiva e para reelaboração das respostas.

A investigação reforça ainda a importância de criar tempo e espaço, em sala de aula, para que os alunos possam refletir sobre o seu próprio desempenho, rever as suas resoluções com base em critérios de avaliação explícitos e compreender o feedback

recebido. Para tal, é essencial que o professor assuma um papel de mediador, promovendo momentos de diálogo e reflexão, e que valorize a explicitação do pensamento matemático, quer através da formulação de tarefas que incentivem os alunos a comunicar os seus pensamentos de forma clara e completa, quer através de interações que estimulem a clarificação e partilha das estratégias utilizadas.

Importa também referir que este estudo se centrou na resolução de problemas como veículo para explorar a utilização dos critérios de avaliação e do feedback escrito. Futuras investigações poderão alargar este âmbito, explorando como tais práticas podem ser mobilizadas em tarefas de elevado nível de exigência cognitiva de outra natureza, igualmente propícias à explicitação do pensamento matemático e ao desenvolvimento de processos de autorregulação.

O presente estudo abre espaço para novas investigações que possam aprofundar aspetos complementares e colmatar limitações identificadas. Por exemplo, seria pertinente investigar o impacto de diferentes formas de feedback (escrito, oral, ambos, entre pares) na apropriação dos critérios de avaliação e no desenvolvimento da comunicação matemática, tanto escrita como oral. A experiência desenvolvida mostrou que, por vezes, foi necessário recorrer ao feedback oral para clarificar aspetos do feedback escrito, o que sugere que a integração de diferentes formatos pode potenciar a compreensão e a utilização efetiva da informação pelos alunos. Investigações futuras poderiam explorar em maior profundidade como estas modalidades se interligam, como se reforçam mutuamente e de que modo favorecem a apropriação dos critérios de avaliação e o desenvolvimento da comunicação matemática, tanto escrita como oral. Outra ideia será a possibilidade de alargar a utilização dos critérios de avaliação a contextos de trabalho colaborativo. No presente estudo, a apropriação dos critérios de avaliação ocorreu sobretudo de forma individual, mas seria relevante perceber como estes podem ser mobilizados em interações entre pares ou pequenos grupos, quer como ferramenta de autoavaliação partilhada, quer como referência comum para a discussão e validação de estratégias de resolução. A literatura aponta que a explicitação do pensamento em contextos colaborativos contribui para aprendizagens mais consistentes e para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente (Santos & Gomes, 2006; Semana & Santos, 2017), pelo que investigações futuras poderiam enriquecer a compreensão sobre o potencial dos critérios de avaliação enquanto instrumentos de mediação da aprendizagem em ambientes coletivos.

Neste trabalho, por limitações de tempo, não foi possível fazer uma análise aprofundada das representações matemáticas usadas pelos alunos na resolução dos problemas e

na expressão desse processo. Apesar de vários autores, por exemplo, (Martins & Martinho, 2018, 2021; Semana & Santos, 2008) reforçarem a importância de atender a este aspeto, não foi objeto de análise na investigação que realizei. Assim, investigações futuras poderão explorar a relação entre a utilização de diferentes tipos de representações (gráficas, esquemáticas, simbólicas) e a clareza de expressão do pensamento matemático por escrito. Esta vertente poderá contribuir para entender de que forma as representações matemáticas podem contribuir para desenvolver a capacidade de explicitar o pensamento e comunicar matematicamente com rigor.

O percurso de realização deste trabalho revelou-se exigente e, por vezes, desafiante, levando-me a questionar a minha capacidade de conduzir todas as etapas da investigação e sobretudo no que diz respeito à escrita e à articulação das ideias de forma coerente e fundamentada. Muitas vezes senti que não conseguiria organizar e expressar de forma adequada toda a informação recolhida. Este processo exigiu persistência, reorganização constante e reflexão profunda sobre cada escolha feita, proporcionando uma aprendizagem intensa sobre como estruturar, comunicar e fundamentar a escrita científica. Contudo, essas dificuldades foram também oportunidades de aprendizagem, permitindo-me desenvolver competências de planeamento, análise crítica e tomada de decisão que se revelaram essenciais para o meu crescimento como professora. Ao longo deste processo, aprendi a valorizar a importância da perseverança, da reflexão sobre a prática e da adaptação face a imprevistos, experiências que tenho procurado aplicar na minha atuação docente nos últimos dois anos letivos, reforçando a minha capacidade de orientar os alunos e promover aprendizagens significativas. A experiência de conduzir toda a investigação – desde a seleção dos alunos, recolha e análise dos dados, até à reflexão sobre as implicações pedagógicas – contribuiu para uma maior consciência sobre a complexidade do ensino da matemática e sobre o papel central do professor enquanto mediador da aprendizagem.

Através do contacto direto com as produções dos alunos e com os momentos de feedback, foi percetível de forma mais concreta a importância de critérios de avaliação claros, escritos em linguagem familiar para os alunos, da explicitação do pensamento matemático e da promoção de práticas de autoavaliação sistemática. Estas aprendizagens não ficaram restritas ao plano da investigação, mas influenciaram diretamente a minha prática docente que passou a integrar, de forma mais intencional e estruturada, momentos de reflexão, revisão e discussão das estratégias utilizadas pelos alunos, privilegiando a clarificação do pensamento e o acompanhamento individualizado do progresso.

Além disso, a análise detalhada das resoluções e das respostas dos alunos permitiu compreender melhor como diferentes perfis de estudantes se apropriam do feedback e dos critérios de avaliação, reforçando a necessidade de diversificação das estratégias pedagógicas e de adaptação às necessidades de cada aluno. Esta perceção aprofundada do comportamento dos alunos perante a avaliação reguladora contribuiu para uma abordagem mais sensível e consciente na condução da prática pedagógica, valorizando não apenas o resultado, mas o processo de aprendizagem e a construção do pensamento matemático.

A experiência adquirida ao longo deste trabalho também permitiu refletir sobre os próprios limites enquanto professora e investigadora, reconhecendo a importância de planificar cuidadosamente cada etapa da intervenção, de gerir o tempo de forma realista e de adaptar estratégias pedagógicas em função das respostas dos alunos. Ao longo dos últimos dois anos letivos algumas das práticas exploradas neste estudo continuaram a ser implementadas, como a utilização estruturada de critérios de avaliação, o feedback formativo orientador e a promoção de momentos de autoavaliação, evidenciando o impacto duradouro do estudo na prática profissional. Foi ainda possível verificar que quando os alunos se envolvem em processos de heteroavaliação, fazendo uso de critérios de avaliação, poderá levar a uma melhor apropriação e a um maior envolvimento na autorregulação da aprendizagem, pelo que seria interessante investigar esta vertente sentida na prática profissional.

Por fim, a experiência reforçou a convicção de que o desenvolvimento de competências de autorregulação e de comunicação matemática exige consistência, intencionalidade e reflexividade, tanto do ponto de vista do aluno como do professor. Este trabalho permitiu consolidar uma abordagem centrada no aluno, fundamentada em evidências e orientada para a promoção de aprendizagens críticas, autónomas e profundas, que continuam a informar e a guiar a prática docente (Carvalho e Silva et al., 2023).

Referências Bibliográficas

Alvega, P. (2014). Pisa-papéis: Um olhar sobre a avaliação da resolução de problemas no PISA 2012. *Educação e Matemática*, *130*, 10–16.

Amado, J. (2017). *Manual de investigação qualitativa em educação* (3ª Edição). Imprensa da Universidade de Coimbra. https://doi.org/https://doi.org/10.14195 /978 -989-26-1390-1

Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, *166*, 2–6.

APM. (1988). *A renovação do currículo de matemática*. APM.

Barney, S., Khurum, M., Petersen, K., Unterkalmsteiner, M., & Jabangwe, R. (2023). *Supporting students improve with rubric-based self-assessment and oral feedback*. https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.12849

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. *Phi Delta Kappan, 86*(1), 8–21. https://doi.org/10.1177/003172170408600 105

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens essenciais de Matemática 7.º ano – 3.º Ciclo do Ensino Básico*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.º_ano.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação – Guia para auto-aprendizagem* (2ª Edição). Universidade Aberta.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens essenciais de Matemática A 10.º ano – Ensino Secundário.* https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Costa, E., & Pires, M. (2016). Comunicar por escrito em matemática: um estudo com alunos do 5.o ano. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 405–419). APM.

Costa, J. (2021). Avaliação formativa, feedback escrito e resolução de problemas nas aulas de matemática: Uma experiência com alunos do 2.º ciclo. *Educação e Matemática*, *160*, 20–23.

Fernandes, D. (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação*, *19*(2), 21–50.

Fernandes, D. (2020). Avaliar para melhorar as aprendizagens. *Projeto MAIA (Projeto de Monitorização Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica)*. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/2023-07/Avaliar%20para%20melhorar%20 as%20aprendizagens.pdf

Fonseca, L. (2014). Resolução de problemas de Matemática: Regresso ao passado. *Educação e Matemática*, *130*(17–21).

GAVE. (1998). *Exame Nacional Matemática A*. 1ª fase – 1ª chamada (Cód. 135). https://iave.pt/wp-content/uploads/2020/04/matematica135_pef1c1_98.pdf

GAVE. (2006). *Reflexão dos docentes do 3.º ciclo sobre os resultados do exame do 9.º ano: 2005; 1ª chamada*. GAVE. http://id.bnportugal.gov.pt/bib/bib nacional/1677265

Gomes, A. (2008). Auto-avaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios de avaliação. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 101–116). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

GTM. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Estudos_Relato rios/ gtm_27_03_2020_relatorio_final.pdf

Guerreiro, A., & Martins, C. (2018). Avaliação e comunicação: Da e para a aprendizagem. *Educação e Matemática 149-150*, 49–52.

Guimarães, H. (2009). O novo programa de Matemática para o Ensino Básico: Propostas e Perspectivas. *Educação e Matemática*, *104*, 3–7.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81–112.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Estratégias de resolução de problemas de matemática: Que lugar no desenvolvimento do currículo? In *Atas do XIX Colóquio da secção portuguesa da AFIRSE - Revisitar os estudos curriculares: Onde estamos e para onde vamos?* (pp. 2183–2197). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). *A atividade de resolução de problemas de Matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI* [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. http://hdl.handle.net/10451/29860

Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução" - Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas. *Educação e Matemática, 149-150*, 76–80.

Kilpatrick, J., & Guimarães, H. (2014). Como vamos de resolução de problemas? *Educação e Matemática*, *130*, 3–9.

Kingwell, A. B. R. (2022). *Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas* [Relatório de Estágio]. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2010). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, *149–150*, 34–38.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Martins, L., & Martinho, H. (2020). *Comunicação escrita na resolução de um problema matemático: Um estudo com alunos do 11.º ano*. 1–14.

Martins, L., & Martinho, M. (2018). Estratégias, dificuldades e comunicação escrita de uma turma de 11.º ano na resolução de um problema matemático. In A. Rodrigues, A. Barbosa, A. Santiago, A. Domingos, C. Carvalho, C. Ventura, C. Costa, H. Rocha, J. M. Matos, L. Serrazina, M. Almeida, P. Teixeira, R. Carvalho, R. Carvalho, & S. Carreira (Eds.), *Livro de atas do EIEM 2018: A aula de matemática,* (pp. 305-320). SPIEM.

Martins, L., & Martinho, M. (2021). Comunicação escrita na resolução de um problema matemático: Um estudo com alunos do 11.º ano. In N. Branco, S. Colaço, L. Serrazina, R. A. Tomás Ferreira, R. Santos, & A. P. Canavarro (Eds.), *Atas do EIEM 2021: Capacidades matemáticas transversais*, *(*pp. 108-122). SPIEM.

Martins, L., & Martinho, M. (2023). Como os alunos comunicam por escrito a resolução de um problema matemático? Um estudo com alunos do 11.º ano. In A. Gomes, A. Barbosa, E. Cunha, F. Fernandes, H. Martinho, H. Pinto, J. Pinto, & N. Ferreira (Eds.), *Atas do SIEM 2023*, (pp. 127–141). APM.

Mathspace. (2020). *2.04 Problem solving with trigonometric functions*. NSW Mathematics Advanced. https://mathspace.co/textbooks/syllabuses/Syllabus-826/topics/Topic-18352/subtopics/Subtopic-249837/

ME. (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. https://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/wp-content/uploads/2010/09/Curriculo_Nacional1CEB.pdf

ME. (2006). *Plano de acção para a Matemática*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Documentos/planoaccaomatematica.pdf

ME. (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática A 12.º ano – Ensino Secundário*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/12_matematica_a.pdf

MEC. (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática - Ensino Básico*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

MEC. (2015). *Programa e metas curriculares de Matemática A - Ensino Secundário*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar* (Tradução do documento publicado em 2000). APM.

NCTM. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? *Problem Solving - Research Brief*. https://inquiringmindsinbermuda.files.wordpress.com/2016/09/why-is-teaching-with-problem-solving-important.pdf

NCTM. (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática* (Tradução do documento publicado em 2014). APM.

OCDE. (2003). *First results from PISA 2003 executive summary*. https://www.selgipes.com/uploads/1/2/3/3/12332890/first_results_from_pisa_2003_executive_summary.pdf

OCDE. (2012). *PISA 2012 Results in focus*. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/programmes/edu/pisa/publications/national-reports/pisa-2012/pisa-2012-in-focus/pisa-2012-results-overview.pdf

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, *25*(41), 73–98.

Pires, M., Costa, E., & Leite, C. (2018). Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos. *Educação e Matemática*, *149–150*, 28–32.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Interciência.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery*. Wiley.

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático*. Interciência.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? *Atas do Seminário "O Ensino Da Matemática: Situação e Perspetivas,"* 21–56.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, *22*, 196–216. http://www.eses.pt/interaccoes

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2020). Exploratory mathematics teaching and the development of students' use of representations and reasoning processes: An illustration with rational numbers. In L. Leite, E. Oldham, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. H. Martinho (Eds.), *Science and mathematics education for 21st century citizens: Challenges and ways forwards* (pp. 131–148). Nova Science Publishers. https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/45680/1/Ponte%2c%20Quaresma%20Cap%20Laurinda.pdf

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. https://www.dge.mec. pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/programamatematica_2007.pdf

Pontes, E. (2019). Método de Pólya para resolução de problemas matemáticos: Uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica. *Holos*, *3*, 1–9. https://doi.org/10.15628/holos.2019.6703

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1/3), 27–47. https://doi.org/10.1023/B

Rocco, S. P. L. S. (2020). *O uso do feedback na competência escrita: Possibilidade para promoção da autorregulação da aprendizagem* [Dissertação de Mestrado, Universidade

Estadual de Londrina]. https://repositorio.uel.br/srv-c0003-s01/api/core/bitstreams/59c2862d-c85a-4d43-a1f2-aa535a79ee3d/content

Rocha, H., Viseu, F., & Matos, S. (2024). Problem-solving in a real-life context: An approach during the learning of inequalities. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 21–37. https://doi.org/10.30935/scimath/13828

Santos, E. L. (2020). *Regular o ensino com tarefas que usam tecnologia acompanhadas de uma avaliação reguladora da aprendizagem* [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. https://www.researchgate.net/publication/ 353668558

Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: Algumas notas. *Educação e Matemática*, *144–145*, 53–58.

Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de Matemática? In C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Eds.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11–34). Mercado das Letras.

Santos, L. (2020). Não há mais tempo a perder! *Educação e Matemática*, *158*, 1. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2651/2696

Santos, L. (2022). O feedback como uma poderosa ferramenta para a aprendizagem matemática: Uma meta-análise de estudos portugueses. *Revemop*, *4*(e202210), 1–23. https://doi.org/10.33532/revemop.e202210

Santos, L., & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, *40*(3), 11–48. https://doi.org/10.14195/1647-8614_40-3_1

Semana, S. (2018). A comunicação oral na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática. *Educação e Matemática*, *149–150*, 9–12.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*, *100*, 51–60.

Semana, S., & Santos, L. (2013). Teaching practices to enhance students' self-assessment in mathematics: Planning a focused intervention. *Proceedings of CERME* (pp. 3257-3266). ERME. https://www.researchgate.net/publication/26 1214643

Semana, S., & Santos, L. (2017). Desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática: Possibilidades e desafios para a prática do professor. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares, & H. Pinto (Eds.), *Atas do SIEM XXVIII* (pp. 1–16). APM. https://doi.org/10.6009/jjrt.KJ00003534360

Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática 149-150*, 13–16.

Serrazina, L., & Ribeiro, D. (2012). As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no Ensino Básico. *Bolema*, *26*(44), 1367–1393. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400012

Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática: Vol. 1* (GEP). ME. https://ciencias.ulisboa.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/obras_selecionadas/sebastiao_e_silva/compendios_de_matematica/GuiaparaUtilizacaodoCompendiodaMatematica1Volume-fev13.pdf

Silva, J. (2018). Comunicação matemática, uma das 7 competências matemáticas fundamentais no PISA. *Educação e Matemática*, *149–150*, 45–48.

Simões, T. M. (2025). *Dificuldades na interpretação de enunciados de problemas matemáticos: Um estudo com alunos de 11.º ano de Matemática A* [Relatório de Estágio]. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 13*(14), 66-91.

Sousa, M., & Santos, L. (2022). Avaliar para aprender em ciências experimentais. *Revista Portuguesa de Educação*, *35*(2), 189–210. https://doi.org/10.21814/rpe. 21275

Stein, M. H., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo publicado em 1998). *Educação e Matemática*, *105*, 22–28.

Terroso, J., Dias, J., & Machado, F. (2018). O feedback escrito como elemento regulador na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, *149–150*, 62–66.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em Educação Matemática — O estudo de caso. *Revista da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*, *5*, 171–202.

Velez, I., Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2016). Ações do professor e atividade dos alunos: Trabalhando com representações. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 439–453). APM.

Viegas, C., & Valente, S. (2017). *Mat 12 - Volume 2 Matemática A - 12.º Ano* (1ª Edição). Texto Editores, Lda.

Anexos

Anexo I – *Problema do café*



Suponhamos que, na pastelaria Café Douro, a temperatura ambiente se mantém constante. Numa altura de pouco movimento, o António, empregado dessa pastelaria, decidiu que merecia uma pausa no trabalho e pediu à Maria para lhe «tirar um café».

Acontece que o seu pedido coincidiu precisamente com a chegada à pastelaria de uma excursão. O café foi servido e ficou esquecido sobre o balcão por muito, muito tempo!

Admite que a temperatura do café t minutos depois de ser servido, é dada, em graus Celsius, por $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$.

a) Determina a temperatura do café no instante em que é servido.

b) O António gosta de beber o café bem quente, sempre a mais de $60℃$. Será que um quarto de hora depois de ter sido servido, o café ainda estaria ao gosto do António?

c) Um cliente que goste do café a uma temperatura inferior a $50℃$, quantos minutos tem de deixar passar depois de o café ser servido?

d) Quando o António se lembrou do café que tinha pedido, a diferença entre a temperatura do café e a temperatura ambiente era de apenas $10℃$. A que temperatura se encontrava o café e há quanto tempo tinha sido servido? Apresenta a resposta em minutos, arredondados às unidades.

e) Em relação à lei do arrefecimento de Newton, definida por $T(t) = a + be^{-kt}, k > 0$, interpreta o significado das constantes a e b.

(Retirado de: Viegas & Valente, 2017, p. 176)

Anexo II – Problema 1 – *Bolsa de valores*

As ações de uma SAD foram hoje aceites na Bolsa de Valores de Lisboa. As previsões apontam para que o valor de cada ação, daqui a t meses, seja dado, em euros, por:

$$v(t) = 5 - \frac{3\ln(t+1)}{t+1}$$

a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determina a altura ideal para comprar estas ações. Apresenta a resposta com a aproximação que achares adequada.

b) Passados anos, um acionista gaba-se de ter negociado 1000 ações e ter ganho 1150 euros. Comenta a afirmação deste acionista, apresentando os argumentos em que baseias a tua resposta.

(Retirado de: Viegas & Valente, 2017, p. 142)

Anexo III – Problema 2 – *Problema das marés*

A profundidade da água do mar, em metros, num certo cais de uma marina, é dada por:

$$d(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

onde t é o número de horas após as 10 horas da manhã.

a) Qual será a profundidade da água do mar na maré alta? E na maré baixa?

b) A água atinge o nível médio de profundidade exatamente a meio entre a profundidade na maré baixa e a profundidade na maré alta. Partindo das 10 horas da manhã, a que horas ocorrem os dois primeiros momentos a que a profundidade da água atinge o nível médio?

c) Qual é o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas?

d) Ao longo de um dia, quantos ciclos de marés podemos ter?

e) Faz um esboço do gráfico da profundidade da água do mar em função do tempo, t.

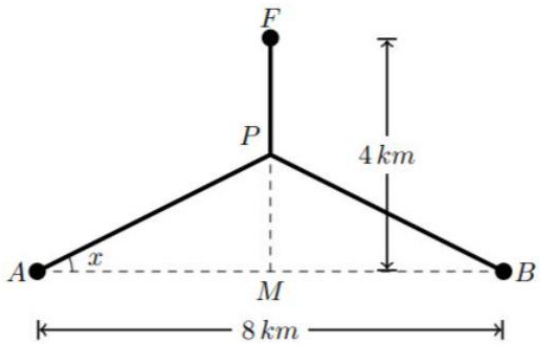
f) Perto do cais há uma plataforma rochosa que só é seguro visitar quando a profundidade da água do mar é menor ou igual a $1{,}75m$. Se uma pessoa quiser visitar a plataforma rochosa ao final do dia, entre que horas é seguro fazê-lo?

(Adaptado de: Mathspace, 2020)

Anexo IV – Problema 3 – *Problema da canalização*

Duas povoações A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.



Tem-se ainda que:

- O ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F;
- x é amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

a) Tomando para unidade o quilómetro, mostra que o comprimento total da canalização é dado por

$$4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

(Sugestão: Começa por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\ tg\ x$)

b) Calcula o comprimento total da canalização para $x = 0$ e interpreta o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

(Retirado de: GAVE, 1998)

Anexo V – Guião de Entrevistas

1. Gostas de resolver problemas em matemática? Porquê?
2. Onde tens mais dificuldades, a encontrar uma estratégia adequada ao problema ou na explicação da tua resolução?
3. O que fazes para combater essas dificuldades?
4. Consideras importante explicar de forma clara a maneira como resolves um problema? Porquê?

(Mostrar as resoluções de cada problema)

5. O que entendeste do feedback recebido? Percebeste, não percebeste? Ajudou-te a melhorar? Como?

(Perguntar com exemplos concretos)

6. Compreendeste os critérios de avaliação? Tinhas por hábito consultar os critérios de avaliação antes e durante a realização de problemas? Sentes que a tua resolução ficou diferente por teres em conta os critérios de avaliação?
7. O que sentiste que foi mais benéfico? Os critérios de avaliação ou o feedback recebido?
8. Consideras que a resolução destes problemas de modelação matemática contribuiu para evoluíres nessa capacidade matemática? Em que é que ajudou?
9. Tens alguma sugestão ou outras ideias de como é que os professores de matemática poderiam fazer para te ajudar a melhorar a tua capacidade de resolver problemas e de exprimir a forma como pensaste?

Anexo VI – Critérios de avaliação

	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
Interpretação e Compreensão da Tarefa	Reconheci os dados, suas relações no contexto da tarefa, demonstrei pouca ou nenhuma compreensão.	Reconheci os dados e interpretei a relação entre os mesmos, demonstrei uma compreensão razoável da tarefa.	Analisei, reconheci e interpretei perfeitamente os dados, identificando com clareza o que é necessário, demonstrei absoluta compreensão.
Completude do processo de resolução	Efetuei algumas tentativas, mas estas não constam na parte escrita. Não expliquei como pensei.	Apresentei algumas estratégias, mas de forma incompleta. Expliquei parcialmente a forma como pensei.	Apresentei as estratégias, de uma forma completa e fácil de compreender. Expliquei na totalidade a minha forma de pensar.
Organização/ Apresentação	O meu trabalho está desorganizado.	O meu trabalho está mais ou menos organizado.	O meu trabalho está muito bem organizado.
Correção da resposta à tarefa	A minha resposta está incorreta ou não consegui responder à tarefa.	A minha resposta está correta, mas ainda está incompleta.	A minha resposta está correta e completa.