

O papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita na resolução de problemas: Um estudo com alunos do 11.º ano

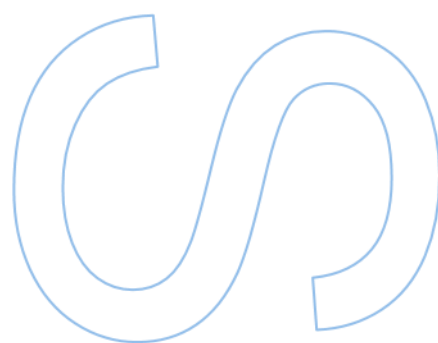
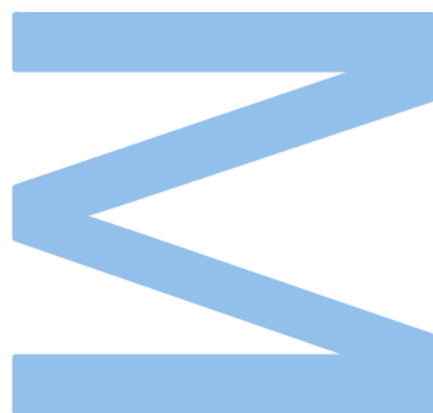
Ana Rita Perez Mendes

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025



O papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita na resolução de problemas: Um estudo com alunos do 11.º ano

Ana Rita Perez Mendes

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientador

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Para a avó Rosa, um obrigado especial

Agradecimentos

Em primeiro quero agradecer a quem contribuiu diretamente para a realização deste estudo. A todos os meus alunos por fazerem parte da minha formação como professora e em especial aos alunos participantes desta investigação por participarem com vontade, dedicação e mostrarem-se sempre disponíveis para toda a intervenção pedagógica.

Quero agradecer à professora, Rosa Ferreira, por me ter guiado neste caminho difícil e cheio de dúvidas. Por me acalmar em momentos de maior preocupação e transmitir-me os seus conhecimentos mais valiosos. Aprendi muito consigo!

À minha professora cooperante por partilhar a sua sala de aula comigo, por disponibilizar o seu tempo para me ensinar e contribuir para o meu crescimento pessoal. Obrigada por ser uma pessoa preocupada em me tornar a melhor professora para os meus futuros alunos.

Não fazia sentido escrever estes agradecimentos, sem agradecer à minha colega, amiga e parceira de estágio Tatiana Simões. Foi a minha companheira nesta aventura, apoiou-me nos momentos mais difíceis e festejou comigo as minhas conquistas. A Tatiana foi a minha inspiração ao longo deste ano e espero no futuro ter um bocadinho da força de vontade e empenho que ela tem.

À minha família emprestada, Eugénia, Victor, Rita e Duarte por me terem acolhido neste ano e ouvirem as minhas frustrações ao longo do ano, que foram muitas!

Aos meus amigos do Anasecadote por serem os meus parceiros de mestrado, por ouvirem os meus desabafos e partilharem as minhas alegrias. Este relatório também é um bocadinho vosso.

Um obrigado ao meu namorado Joel por ter estado sempre ao meu lado e tentar ajudar-me em todos os momentos. Obrigada por tornares tudo mais leve e mais fácil, obrigada por todo o apoio incondicional, sem ti era impossível.

Também devo um agradecimento à família do meu namorado por me acolher como parte da família deles e apoiar-me ao longo deste percurso. Um obrigado especial à avó Rosa por ter sido a minha avó emprestada e por todo carinho ao longo dos anos. Apesar de já não estar presente nesta vida, carrego-a no meu coração todos os dias.

À minha melhor amiga desde infância, Aidinha, por me ver crescer e sempre incentivar-me a ser melhor. Por brincar comigo às “professoras” e tornar esta paixão mais viva ao longo dos anos.

Por fim, mas não menos importante, um obrigado à minha família, aos meus pais, José e Cecília, à minha irmã, Marta e o seu apêndice, Gil e aos meus avós. Obrigada por me terem criado e acompanhado todo o meu crescimento não só nesta fase, mas em todas as outras fases da minha vida. Sem vocês não estaria onde estou!

Um obrigada a todos os que contribuíram para me tornar a pessoa que sou e acompanharem o meu percurso sempre ao meu lado!

Resumo

A resolução de problemas está no coração do processo de ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, a comunicação matemática é também uma capacidade crucial em todas as atividades matemáticas, oferecendo aos professores um caminho para aceder ao pensamento dos alunos. Considerando estas capacidades como os dois lados interligados da mesma moeda, a resolução de um problema matemático só é conseguida se o pensamento de quem o resolve for adequadamente comunicado. Esta investigação tem como objetivo compreender como os alunos de uma turma do 11.º ano se apropriam e integram os critérios de avaliação para melhorar a sua capacidade de comunicação matemática escrita ao resolver problemas matemáticos. Para além disso, pretende compreender como os alunos percecionam o papel desses critérios na melhoria das suas aprendizagens. Assim, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: (i) Como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas? (ii) Como os integram na melhoria da capacidade da comunicação matemática escrita na resolução de problemas? e (iii) Quais as perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria das suas aprendizagens? Seguindo uma abordagem qualitativa e interpretativa, este estudo assenta numa intervenção pedagógica (IP) em torno de três problemas que os alunos resolveram em duas fases. Na primeira fase, além da resolução do problema, aplicaram um conjunto de critérios de avaliação, focados em aspetos relevantes da comunicação matemática escrita na resolução de problemas. Após receberem feedback da professora, focado na comunicação matemática escrita e na autoavaliação realizada, na segunda fase, os alunos melhoram as suas produções. No final, receberam feedback sobre todo o processo. Os dados foram recolhidos através de notas de campo de observação participante em sala de aula e de produções escritas, feedback e entrevistas com três alunos selecionados, com base no seu progresso ao longo da IP. Os resultados mostraram que a utilização de critérios de avaliação pode contribuir para melhorar as capacidades de comunicação matemática escrita na resolução de problemas; no entanto, essa utilização parece ser mais eficaz se acompanhada pelo feedback da professora. Os alunos utilizaram os critérios de avaliação como guia para a sua resolução e como estratégia para a verificação e correção dos seus trabalhos. Por fim, os alunos reconheceram a importância desta prática para a melhoria das suas aprendizagens, salientando que conseguem agora identificar alguns erros específicos nas suas resoluções e melhorá-las.

Palavras-chave: comunicação matemática escrita, resolução de problemas, critérios de avaliação, autoavaliação, avaliação reguladora das aprendizagens, feedback.

Abstract

Problem solving is at the heart of the mathematics teaching and learning process. Yet, mathematical communication is also a crucial skill in all mathematical activity, offering teachers a pathway to access students' thinking. Considering these skills as the two intertwined sides of the same coin, solving a mathematical problem is only achieved if the solver's thinking is adequately communicated. This research aims to understand how 11th grade students appropriate and integrate assessment criteria to improve their written mathematical communication skills when solving mathematical problems. Furthermore, it aims to understand how students perceive the role of these criteria in improving their learning. The study aims to answer the following research questions: (i) How do students appropriate the self-assessment criteria focused on the ability of written mathematical communication in problem-solving?; (ii) How do you integrate them into improving the ability of written mathematical communication in problem solving? (iii) What are students' perceptions regarding the role of assessment criteria in improving their learning?

Following a qualitative and interpretative approach, this study is based on a pedagogical intervention (PI) around three problems that the students solve in two phases. In the first one, they solve the problem and apply a set of assessment criteria, focused on relevant aspects of mathematical communication in problem solving. After receiving feedback from the teacher – focused on written mathematical communication and their self-assessment – students improved their work in the second phase. At the end, they received feedback on the entire process. Data were collected through field notes from participant classroom observation, written student work, feedback, and interviews with three selected students, chosen based on their progress throughout the PI. The results showed that the use of assessment criteria can contribute to improving written mathematical communication skills in problem-solving; however, this use seems more effective when accompanied by teacher feedback. Students used the assessment criteria as a guide for solving problems and as a strategy for reviewing and correcting their work. Finally, students recognized the importance of this practice for improving their learning, highlighting that they are now able to identify specific errors in their solutions and improve them.

Keywords: written mathematical communication, problem solving, assessment criteria, self-assessment, assessment for learning, feedback.

Índice

Lista de Tabelas	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas	xiv
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento Teórico	6
2.1. Resolução de Problemas.....	6
2.2. Comunicação matemática escrita	13
2.3. Apropriação de critérios e autoavaliação	20
3. Intervenção Pedagógica	30
3.1. Caracterização do contexto escolar.....	30
3.2. Momentos da intervenção pedagógica	31
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	47
5. Apresentação e discussão de resultados.....	52
5.1. Problema 1 da intervenção pedagógica.....	52
5.2. Problema 2 da intervenção pedagógica.....	64
5.3. Problema 3 da intervenção pedagógica.....	83
5.4. Perceções dos alunos acerca do papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita.....	96
6. Conclusões e implicações do estudo	104
6.1 Critérios de avaliação: apropriação e integração	105
6.2 Perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita	108
6.3 Considerações finais e implicações	110
Referências Bibliográficas.....	115
Anexos.....	124
Anexo 1 - Documento de consentimento informado.....	124
Anexo 2 - Problema 1	125

Anexo 3 - Problema 2	126
Anexo 4 - Problema 3	127
Anexo 5 - Guião das entrevistas	128

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Critérios gerais de avaliação da comunicação matemática escrita	37
Tabela 2 – Critérios gerais de avaliação da comunicação matemática escrita atualizados	39
Tabela 3 – Quadro usado na análise da comunicação matemática escrita na resolução de problemas	49
Tabela 4 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 1 (1ª fase)	53
Tabela 5 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 1 (2ª fase)	56
Tabela 6 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 1 (1ª fase)	57
Tabela 7 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 1 (2ª fase)	60
Tabela 8 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 1 (1ª fase)	61
Tabela 9 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 1 (2ª fase)	64
Tabela 10 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 2 (1ª fase)	66
Tabela 11 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 2 (2ª fase)	69
Tabela 12 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 2 (1ª fase)	71
Tabela 13 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 2 (2ª fase)	77
Tabela 14 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 2 (1ª fase)	79
Tabela 15 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 2 (2ª fase)	82
Tabela 16 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 3 (1ª fase)	85
Tabela 17 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 3 (2ª fase)	87

Tabela 18 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 3 (1ª fase)	89
Tabela 19 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 3 (2ª fase)	90
Tabela 20 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 3 (1ª fase)	92
Tabela 21 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 3 (2ª fase)	94
Tabela 22 – Análise da comunicação matemática escrita dos alunos selecionados na intervenção pedagógica	95

Lista de Figuras

Figura 1 – Sistema de categorias para a análise da comunicação matemática escrita na resolução de problemas (Martins & Martinho, 2023, p. 58)	20
Figura 2 – Fases do processo de avaliação (adaptada de Pinto, 2020)	21
Figura 3 – Modelo concetual da eficácia do feedback (Santos, 2022, p. 17)	25
Figura 4 – Caraterísticas Fundamentais a Considerar na Elaboração de Critérios (Fernandes, 2020c, p. 7).....	29
Figura 5 – Tarefa inicial (Neves et al, 2024, p. 179).....	33
Figura 6 – Resoluções para a análise da comunicação matemática escrita.....	35
Figura 7 – Problema 1	39
Figura 8 – Problema 2 (adaptado de Costa & Rodrigues, 2024, p. 89)	41
Figura 9 – Problema inspirador do problema 2 da intervenção pedagógica (Costa & Rodrigues, 2024, p. 89)	42
Figura 10 – Problema 3 (adaptado de Neves et al, 2024, p. 136)	43
Figura 11 – Problema inspirador do problema 3 da intervenção pedagógica (Neves et al, 2024, p. 136).....	44
Figura 12 – Organização da intervenção pedagógica	46
Figura 13 – Resolução da Rosa do problema 1 (1ª fase)	53
Figura 14 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 1 (1ª fase).....	54
Figura 15 – Autoavaliação da Rosa do problema 1.....	55
Figura 16 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 2 (1ª fase).....	55
Figura 17 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 3 (1ª fase).....	55
Figura 18 – Resolução da Rosa do problema 1 (2ª fase)	56
Figura 19 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 (2ª fase)	56
Figura 20 – Resolução do Miguel do problema 1 (1ª fase).....	57
Figura 21 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 – Parte 1 (1ª fase)	58
Figura 22 – Autoavaliação do Miguel do problema 1.....	58
Figura 23 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 – Parte 2 (1ª fase)	59
Figura 24 – Resolução do Miguel do problema 1 (2ª fase).....	59
Figura 25 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 (2ª fase).....	60
Figura 26 – Resolução do André do problema 1 (1ª fase).....	60
Figura 27 – Feedback à resolução do André do problema 1 – Parte 1 (1ª fase)	61
Figura 28 – Autoavaliação do André do problema 1.....	62
Figura 29 – Feedback à resolução do André do problema 1 – Parte 2 (1ª fase)	62
Figura 30 – Resolução do André do problema 1 (2ª fase).....	62

Figura 31 – Feedback à resolução do André do problema 1 (2ª fase).....	64
Figura 32 – Resolução da Rosa do problema 2 (1ª fase)	65
Figura 33 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 – Parte 1 (1ª fase).....	67
Figura 34 – Autoavaliação da Rosa do problema 2.....	67
Figura 35 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 – Parte 2 (1ª fase).....	68
Figura 36 – Resolução da Rosa do problema 2 (2ª fase)	68
Figura 37 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 (2ª fase)	69
Figura 38 – Resolução do Miguel do problema 2- Pergunta 1 (1ª fase)	70
Figura 39 – Resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase).....	71
Figura 40 – Feedback à resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase)..	72
Figura 41 – Feedback à resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)..	73
Figura 42 – Autoavaliação do Miguel do problema 2.....	73
Figura 43 – Feedback à autoavaliação do Miguel do problema 2 (1ª fase)	74
Figura 44 – Resolução do Miguel do problema 2 (2ª fase).....	75
Figura 45 – Feedback da resolução do Miguel do problema 2 (2ª fase).....	77
Figura 46 – Resolução do André do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase).....	78
Figura 47 – Resolução do André do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase).....	78
Figura 48 – Feedback à resolução do André do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase)...	79
Figura 49 – Feedback à resolução do André do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)...	79
Figura 50 – Autoavaliação do André do problema 2.....	80
Figura 51 – Feedback à resolução do André do problema 2 (1ª fase).....	81
Figura 52 – Resolução do André do problema 2 (2ª fase).....	82
Figura 53 – Feedback à resolução do André do problema 2 (2ª fase).....	83
Figura 54 – Resolução da Rosa do problema 3 (1ª fase)	85
Figura 55 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 – Parte 1 (1ª fase).....	86
Figura 56 – Autoavaliação da Rosa à resolução do problema 3.....	86
Figura 57 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 – Parte 2 (1ª fase).....	86
Figura 58 – Resolução da Rosa do problema 3 (2ª fase)	87
Figura 59 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 (2ª fase)	87
Figura 60 – Resolução do Miguel do problema 3 (1ª fase).....	88
Figura 61 – Feedback à resolução do Miguel do problema 3 (1ª fase).....	89
Figura 62 – Autoavaliação do Miguel à resolução do problema 3 (1ª fase)	89
Figura 63 – Feedback à autoavaliação do Miguel da resolução do problema 3 (1ª fase)	
.....	90
Figura 64 – Resolução do Miguel do problema 3 (2ª fase).....	90
Figura 65 – Feedback à resolução do Miguel do problema 3 (2ª fase).....	91

Figura 66 – Resolução do André do problema 3 - Parte 1 (1ª fase)	91
Figura 67 – Resolução do André do problema 3 - Parte 2 (1ª fase)	92
Figura 68 – Autoavaliação do André à resolução do problema 3 (1ª fase)	93
Figura 69 – Feedback à resolução do André do problema 3 (1ª fase).....	93
Figura 70 – Resolução do André do problema 3 (2ª fase).....	94
Figura 71 – Feedback à resolução do André do problema 3 (2ª fase).....	95

Lista de Abreviaturas

NCSM	NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
APM	ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
AE	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS
GTM	GRUPO DE TRABALHO EM MATEMÁTICA
DGEBS	DIREÇÃO GERAL DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MEC	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
TEIP	TERRITÓRIO EDUCATIVO DE INTERVENÇÃO PRIORITÁRIA
PISA	PROGRAMA INTERNACIONAL DE AVALIAÇÃO DE ALUNOS

1. Introdução

“a verdadeira magia acontece quando todos aprendem juntos e
somos simultaneamente professor e aluno”
(Judkins, 2016, citado em Guerreiro e Martins, 2020, p. 51)

Ao longo de toda a vida, o ser humano sempre se deparou com problemas e procurou formas de o resolver. No dia-a-dia, enfrenta diversos problemas que se tornam no seu pensamento central e, da mesma forma, a resolução de problemas assume esse papel no ensino da matemática (Pólya, 2014). Tendo em conta que estamos em constante interação, a comunicação também é um fator fundamental na vida do ser humano (Martins & Martinho, 2023). O destaque para a comunicação escrita é identicamente notório uma vez que a escrita pode ser um recurso para comunicar, registar informação, escrever sobre sentimentos e pensamentos pessoais, assim como, várias atividades no trabalho (Graham, 2020).

No *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017), a comunicação é considerada como uma capacidade fundamental a desenvolver, destacando que

os alunos usam linguagens verbais e não-verbais para significar e comunicar, recorrendo a gestos, sons, palavras, números e imagens. Usam-nas para construir conhecimento, partilhar sentidos nas diferentes áreas do saber e exprimir mundividências... Compreendem, interpretam e expressam factos, opiniões, conceitos, pensamentos e sentimentos, quer oralmente, quer por escrito, quer através de outras codificações. (p. 21)

Este documento curricular dá igualmente ênfase à resolução de problemas, salientando que

os alunos colocam e analisam questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir. Definem e executam estratégias adequadas para investigar e responder às questões iniciais. Analisam criticamente as conclusões a que chegam, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas. (Martins et al., 2017, p. 23)

Estas orientações do PASEO estão de acordo com o quadro de competências fundamentais para o cidadão do século XXI estabelecido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE, 2014).

No que diz respeito à resolução de problemas, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) defende que “um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas” (2017, p. 17). Na mesma perspetiva, a OCDE destaca a importância da resolução de problemas em detrimento dos processos de memorização de factos, regras e algoritmos (2014). Saber resolver um problema não significa apenas saber quais estratégias seguir, mas também envolve saber clarificar como é que o problema foi resolvido (Carreira et al. 2018; Onuchic & Allevato, 2011). Em particular, a resolução de problemas exige que o aluno exprima a forma como pensou de forma clara e completa (Jacinto et al., 2018) e, portanto, consiste num bom instrumento para desenvolver a capacidade da comunicação matemática escrita (NCTM, 2017).

NCTM (2017) estabelece um conjunto de oito práticas de ensino da Matemática essenciais para o sucesso na disciplina de matemática. Em algumas destas práticas é evidente a presença da comunicação matemática, em particular quando é recomendado que o professor deve favorecer um discurso matemático significativo, colocar questões pertinentes, e usar e relacionar representações matemáticas. Percebe-se a importância da vertente escrita da comunicação matemática na menção explícita ao uso de representações matemáticas e à conexão entre elas.

No ensino da matemática, tanto a capacidade de resolução de problemas como de comunicação matemática assumem um lugar de destaque. Esta importância é evidente nos documentos curriculares mais recentes em Portugal, constituindo duas das nove ideias-chaves definidas para o ensino desta disciplina nas novas *Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática para o Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023), mas também duas das seis capacidades matemáticas transversais enfatizadas nas novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021). Para além das capacidades matemáticas, estes dois documentos curriculares salientam também o recurso à avaliação formativa como meio para regular as aprendizagens dos alunos, sendo que esta deve ser “um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la” (Carvalho e Silva, 2023, p. 8). As decisões relativas à avaliação podem ser tomadas pelo aluno, pelo professor ou até mesmo por outros membros da escola que fazem sentido no contexto da avaliação. Como o objetivo da avaliação formativa é regular as aprendizagens, não

é obrigatório o professor ser o avaliador, podendo também ser o próprio aluno a assumir essa responsabilidade (Santos, 2003).

Neste âmbito, destaca-se a autoavaliação, baseada em critérios de avaliação, como uma forma de operacionalizar a avaliação formativa. Permitir que os alunos tenham acesso a critérios de avaliação ou que os construam conjuntamente com o professor ajuda-os a tomar conhecimento do que é importante e valorizado no currículo, orientam o trabalho dos mesmos e reduz o grau de incerteza sobre o que é esperado pelo professor. Este método é muito útil para a prática avaliativa formativa pois permite que se recolham informações tanto para o uso do professor como para uso do aluno (Pinto, 2020).

Tendo em mente todos estes fatores, iniciei a minha Prática de Ensino Supervisionada (PES) com a intenção de garantir que os alunos desenvolviam estas capacidades. Ao verificar que os alunos apresentavam bastantes lacunas na sua comunicação matemática, principalmente dificuldades em expressar os seus pensamentos na resolução de problemas, decidi que tinha de fazer alguma coisa para mudar isso. Para além disso, quando existia alguma chamada de atenção sobre a comunicação escrita, os alunos preocupavam-se mais com a cotação que poderiam perder nas avaliações do que com a melhoria das suas produções. Assim, decidi aproveitar esta preocupação deles com a classificação numa oportunidade para promover uma avaliação reguladora das suas aprendizagens através da utilização de critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas.

O presente estudo pretende compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas e como os integram na melhoria das suas produções. É meu objetivo também compreender como os alunos percecionam o papel desses critérios na melhoria das suas aprendizagens. Desta forma, elaborei as seguintes questões de investigação:

- Como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas?
- Como os integram na melhoria da capacidade da comunicação matemática escrita na resolução de problemas?
- Quais as perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria das suas aprendizagens?

O relatório organiza-se em seis capítulos. O primeiro capítulo corresponde a esta introdução e nele é apresentado o objetivo da investigação, as respetivas questões de investigação e as minhas motivações para desenvolver este estudo. Para além disso, é descrita a organização e estrutura deste relatório.

O segundo capítulo, Enquadramento Teórico, aborda aspetos de natureza teórica relevantes para este estudo, em particular, a resolução de problemas, a comunicação matemática escrita e a apropriação de critérios e autoavaliação.

O terceiro capítulo corresponde à Intervenção Pedagógica, onde apresento a caracterização do contexto escolar onde realizei este estudo e os momentos da intervenção pedagógica que o sustentam. Relativamente aos momentos da intervenção pedagógica, é descrita a organização da intervenção ao longo do tempo, as tarefas utilizadas e de que forma foram aplicadas, incluindo como os critérios de avaliação foram apresentados aos alunos

O quarto capítulo refere-se aos Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados e tem como objetivo apresentar, assim como justificar, as opções metodológicas deste estudo. São apresentados os instrumentos de recolha de dados, os participantes selecionados para a recolha de dados e as razões pelas quais foram escolhidos, e os procedimentos seguidos na recolha de dados. Também é detalhado de que forma os dados foram analisados, tal como são esclarecidas as questões de ética associadas a esta investigação.

No quinto capítulo, destinado para a Apresentação e Discussão de Resultados, são apresentados os resultados deste estudo provenientes da análise dos dados recolhidos. São exibidas evidências que sustentam as interpretações que faço dos dados recolhidos, à luz do enquadramento teórico elaborado, tendo em vista responder às questões de investigação e ao objetivo do estudo.

O sexto capítulo, designado por Conclusões e implicações do estudo, destina-se a fazer um resumo dos resultados obtidos de forma a responder a cada uma das questões de investigação, fazendo sempre uma articulação com os aspetos teóricos apresentados no enquadramento teórico. São feitas considerações sobre as limitações que esta investigação teve e que podem ter interferido com os resultados, sugerindo-se algumas possíveis investigações futuras que podem ser interessantes dentro desta temática. É feita também uma reflexão sobre a forma como vejo este estudo a contribuir para a minha prática futura e para o meu desenvolvimento profissional.

No final deste relatório, apresento as referências utilizadas para a escrita do mesmo e os anexos necessários para a leitura deste estudo.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo, são abordados aspetos de natureza teórica relacionados com a investigação apresentada. Em particular, dá-se destaque à resolução de problemas, à comunicação matemática escrita e à apropriação de critérios e autoavaliação.

2.1. Resolução de Problemas

Desde a Antiguidade, os problemas ocupam uma posição consolidada no ensino da Matemática (Onuchic, 1999) e, ao longo dos anos, foram surgindo várias definições para problema. A Associação de Professores de Matemática (APM, 1988) adota a conceção de problema como uma situação na qual o aluno não tem conhecimento prévio de um processo ou algoritmo para chegar à solução. Nos anos 2000, surgiram outras definições semelhantes, como a apresentada por Dante (2003), que define um problema matemático como uma situação que exige do aluno não apenas pensar para resolvê-lo, mas também aplicar os seus conhecimentos para encontrar a solução.

Embora haja diversas definições, é possível identificar dois pontos em comum em todas elas: a ausência de um caminho previamente conhecido para alcançar um determinado objetivo e a existência de um objetivo previamente definido sem apresentar ambiguidades. O conceito de problema adotado neste estudo é o apresentado por Ponte (2005). Este autor considera duas dimensões fundamentais para classificar os diferentes tipos de tarefas - o grau do desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático varia entre “reduzido” e “elevado” e consiste na graduação da dificuldade das tarefas na perspetiva dos alunos. O grau de estrutura varia entre em “aberto” e “fechado” e refere-se ao grau de indeterminação do que é pedido e/ou dado no enunciado da tarefa. Neste sentido, Ponte (2005) define um problema como uma tarefa fechada, mas com um grau de desafio elevado.

O conceito de problema é facilmente confundido com o conceito de exercício, sendo esta distinção vista como um desafio significativo na prática docente (Maia et al, 2016). Apesar dos dois tipos de tarefas serem consideradas por Ponte (2005) tarefas com um grau de estrutura fechado, um problema apresenta um grau de dificuldade elevado, enquanto um exercício apresenta um grau de dificuldade reduzido. Deste modo, para Vale, Pimentel e Barbosa (2015) um problema tal como é definido por Ponte (2005), pode facilmente transformar-se num exercício por efeito do ensino, à medida que os alunos passam a conhecer um caminho ou um procedimento necessário para resolvê-

lo. Ponte também chama a atenção para o carácter relativo das tarefas. Em particular, uma mesma tarefa fechada pode ser um problema para um aluno e um mero exercício para outro, dependendo da experiência matemática de cada um.

Da mesma forma que é importante definir o conceito de problema, também é importante caracterizar em que é que consiste a resolução de problemas. Esta pode ser perspectivada como um processo matemático central, um objetivo curricular, uma capacidade transversal nos currículos atuais e/ou uma metodologia de trabalho com os alunos. Para Pólya (1980), resolver um problema é procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível. A resolução de problemas corresponde a uma extensa diversidade de processos, atividades e experiências intelectuais (APM, 1988).

Não existe uma estratégia para resolver ou para ensinar a resolver problemas. No entanto, é possível ajudar os alunos a serem cada vez melhores resolvedores de problemas (NCTM, 2007). Pólya (1995) divide a resolução de problemas em quatro fases essenciais: (i) compreender o problema; (ii) delinear um plano; (iii) executar um plano e (iv) verificar. A primeira fase é o início do processo e consiste na identificação dos dados necessários para a resolução do problema, sendo necessário que o aluno interprete corretamente o enunciado e queira seguir para a sua resolução. A segunda fase é destinada para a escolha da estratégia que parece mais eficaz para a resolução do problema, exigindo uma análise dos dados recolhidos e das suas relações. Após escolhida a estratégia, segue-se para a terceira fase que envolve a aplicação do plano delineado, justificando e verificando cada passo. Por fim, a última fase tem como objetivo validar o resultado, verificando-se se os passos dados foram coerentes ao longo do processo de resolução e se a solução encontrada faz sentido no contexto da situação do problema.

Estas quatro fases podem não ocorrer necessariamente pela ordem apresentada nem como fases separadas. A segunda e a terceira fases do método de Pólya podem ocorrer em simultâneo, por exemplo, uma vez que, ao construir um plano de resolução já se pode estar também a executá-lo. Também, ao executar esse mesmo plano de resolução, pode não ser possível encontrar a solução por diversos motivos, como a escolha de uma estratégia não apropriada ou a interpretação incorreta dos dados. Isto obriga ao regresso à primeira fase do método de Pólya (Fonseca, 2014; Kilpatrick & Guimarães, 2014). Assim, o método de Pólya não é uma receita para a resolução de problemas, mas sim para ajudar os alunos a trabalhar de forma regular esta capacidade

tornando-se progressivamente mais eficazes na mesma (Kilpatrick & Guimarães, 2014; NCTM, 2007).

Associadas à resolução de problemas, advêm várias dificuldades dos alunos e, portanto, é necessário identificar as razões pelas quais estas surgem. Lester (1994) identifica tanto fatores correspondentes à tarefa como às características do resolvidor de problemas, dando uma maior importância para os fatores correspondentes ao aluno. No que diz respeito à tarefa em si, “as variáveis de conteúdo e contexto, as variáveis de estrutura, as variáveis de sintaxe e as variáveis de comportamento heurístico” (p. 664, tradução própria) podem influenciar o desempenho do aluno. Já no que corresponde às características do aluno, “os traços (por exemplo, capacidade de visualização espacial, capacidade de atentar para características estruturais dos problemas), as disposições (crenças e atitudes) e o histórico experiencial (por exemplo, histórico de ensino, familiaridade com tipos de problemas)” (p. 664-665, tradução própria) podem ser fatores que levam às dificuldades na resolução de problemas.

Diante disso, o desenvolvimento dessa capacidade é um processo lento, tornando imprescindível que os alunos tenham contacto com problemas desde o início da sua aprendizagem:

O desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, sejam eles quais forem, é lento e por isso os alunos necessitam desde cedo de poder contactar com situações desafiadoras que melhorem não só a capacidade de resolução de problemas, mas também a sua autoconfiança. (Fonseca, 2014, p. 19)

Para que essa aprendizagem seja eficiente, é essencial estimular certos aspetos fundamentais no ensino. São os trabalhos de George Pólya (1975, 1981) que orientam o potencial educativo da resolução de problemas. Para Pólya (2014), o professor deve proporcionar aos seus alunos desafios por meio da resolução de problemas para que os alunos se possam sentir estimulados a desenvolver as suas capacidades matemáticas e assim despertar o interesse pela descoberta. Para o autor, essa prática é indispensável para que os alunos compreendam a verdadeira natureza da matemática e desenvolvam o seu gosto por esta disciplina. Estas ideias exercem uma forte influência nos currículos atuais, tanto que, hoje em dia, a resolução de problemas em matemática constitui um pilar central das diretrizes curriculares de todos os níveis escolares, desde o 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior.

Dependendo da forma como a resolução de problemas é entendida e aplicada no ensino, estabelecem-se diferentes designações. O ensino *acerca* da resolução de problemas (Hatfield, 1978) valoriza a resolução de problemas como um conteúdo curricular, sendo desenvolvida da mesma forma que um tema matemático (Vale et. al, 2015). O ensino *para* a resolução de problemas vê a resolução de problemas como uma finalidade do ensino da matemática e o professor deve preparar os alunos para resolver eficazmente problemas (Vale et al., 2015). O ensino *através* da resolução de problemas perspetiva o recurso à resolução de problemas como um método de instrução (Vale et. al, 2015). Nesta perspetiva, a resolução de problemas é vista como uma parte fundamental da aprendizagem da matemática, sendo integrada de forma transversal ao currículo e utilizada como um meio para promover a compreensão de ideias e o desenvolvimento de competências matemáticas (Cai & Lester, 2010). Esta ideia também já se encontrava presente nos anos 90, quando o NCTM (1991) afirmava que “A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas” (p. 29). O ensino *com* resolução de problemas entende que a resolução de problemas deve ser articulada com o currículo e a prática de sala de aula, trabalhando de forma paralela com as outras tarefas de carácter mais procedimental, desenvolvendo a compreensão dos conceitos e estratégias úteis e aplicáveis noutros contextos de aprendizagem (Vale et al., 2015).

A resolução de problemas tem estado presente, mesmo que implicitamente, nos programas oficiais portugueses ao longo dos anos. Apesar da importância que a resolução de problemas tem no ensino não ser questionada ao longo das décadas, a perceção sobre a forma de integrá-la no currículo tem sofrido alterações face às diferentes políticas educativas sob as orientações curriculares para o ensino da matemática. Assim, em cada revisão curricular para o ensino da matemática, podemos encontrar (ou não) perspetivas diferentes sobre o ensino da matemática no currículo (Vale et al., 2015).

Um dos primeiros documentos a reconhecer formalmente a importância da resolução de problemas foi publicado em 1977 pelo National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) dos Estados Unidos que destacava que “aprender a resolver os problemas é a principal razão para estudar matemática” (p. 1). A mesma ideia foi reforçada em 1980 pelo NCTM, na publicação *Agenda para a ação* (1980) que defendia que “A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de matemática” (p. 1).

Em Portugal, o interesse pela resolução de problemas foi registado pela APM, em 1988, na publicação *A renovação do currículo de matemática* que propunha privilegiar “actividades de exploração, conjecturação e provas matemáticas, bem como as aplicações de Matemática e a resolução de problemas” (p. 23). A resolução de problemas é assim considerada como um elemento integrador e gerador de significado. O documento da APM (1988) tornou-se uma influência para a elaboração do programa de matemática do ensino básico de 1991 e dos programas do ensino secundário dos anos 90 do século XX. A partir desse momento, a resolução de problemas ganhou maior destaque nos programas escolares (Direção-Geral do Ensino Básico e Secundário [DGEBS], 1991) e foi posteriormente reconhecida como uma capacidade transversal com igual relevância à do raciocínio matemático e da comunicação matemática (ME, 1997; Ponte et al., 2007).

Em 2001, foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (Departamento da Educação Básica, 2001) onde a noção de competências é muito vincada e a resolução de problemas está bem demarcada. Logo a seguir, foi atualizado o programa de matemática para o ensino secundário (Carvalho e Silva et al., 2001, 2002a, 2002b), que segue a mesma linha dos programas anteriores sobre o papel da resolução de problemas no ensino. Este último propõe, através de experiências de aprendizagem, o desenvolvimento desta capacidade de forma transversal de acordo com a maturidade dos alunos. Neste programa, é evidente um destaque significativo das estratégias gerais “constituindo uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema” (Carvalho e Silva et al., 2001, p. 6). No âmbito do programa atualizado para o ensino secundário (Carvalho e Silva et al., 2001, 2002a, 2002b), os denominados temas transversais deixam de ocupar uma posição secundária, como sucedia em propostas curriculares anteriores, para assumirem um papel estruturado e visível. Esta integração revela uma clara intenção de os afirmar como componentes essenciais do processo educativo. Para além disso, é reconhecida a especificidade destes temas, sublinhando que, embora apresentem desafios em termos de avaliação quantitativa, a sua relevância pedagógica é equiparada à dos conteúdos matemáticos convencionais.

Até este momento, os currículos tinham subjacente uma perspetiva do ensino *através* da resolução de problemas (Vale et. al, 2015), uma vez que, a resolução de problemas é descrita como transversal, integrada no currículo, utilizada como meio de aprendizagem e desenvolvimento de competências, tal como definido por Cai e Lester (2010) e pelo NCTM (1989). Fonseca (2014) resume o caminho percorrido até esta

altura: mudámos de problemas de passos que exigiam apenas a aplicação imediata dos conteúdos ensinados em aula, muitas vezes identificados por palavras-chave nos enunciados, para problemas mais exigentes, que necessitavam de uma maior concentração, melhor compreensão dos textos, integração de diferentes conhecimentos, construção de argumentos para justificar as escolhas feitas e a definição de limites quando as situações são mais indefinidas. Estes tipos de problemas passaram a refletir uma realidade mais fidedigna dos alunos atuais, que vivem numa sociedade em constante mudança, onde os problemas do futuro ainda são desconhecidos (Fonseca, 2014).

Em 2013, foi implementado um novo programa de matemática para o ensino básico (Ministério da Educação e Ciência (MEC), 2013), que trouxe uma conceção diferente sobre o papel da resolução de problemas na aprendizagem. Esta capacidade passou a ser entendida como um processo de aplicação de regras e procedimentos previamente estudados, o que significou um regresso ao foco nos procedimentos e uma desvalorização da resolução de problemas como eixo fundamental no ensino. No seguimento, em 2015, foi publicado o programa correspondente ao ensino secundário (MEC, 2015) onde abordava a resolução de problemas na mesma perspetiva:

A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (p. 7)

Com estes novos programas, a perspetiva acerca do lugar da resolução de problemas no currículo passou a ser a de um ensino *para* a resolução de problemas (Vale et al., 2015), dado que a resolução de problemas é tratada como aplicação de regras e procedimentos previamente estudados, com foco no treino e na eficácia. Uma tal perspetiva conduz ao enfoque na preparação dos alunos para resolver problemas eficazmente, ainda que de forma limitada e procedimental.

Em 2017, com o surgimento do PASEO (Martins et al., 2017), houve uma nova alteração no foco das aprendizagens. Este documento tem uma natureza completamente diferente dos programas disciplinares. É um documento base do currículo nacional para toda a escolaridade obrigatória, de natureza humanista e que elenca competências, valores e atitudes que os jovens devem desenvolver ao longo da escolaridade

obrigatória e para os quais todas as áreas disciplinares devem contribuir de forma integrada. Desta maneira, o PASEO consiste no apelo a uma educação inclusiva e significativa para todos focando-se em quatro pontos: Princípios, Visão, Valores, e Áreas de Competências. Estas áreas de competências estão subdivididas em dez competências que se complementam, onde é possível encontrar o destaque, novamente, para a resolução de problemas.

O PASEO (Martins et al., 2017) estabeleceu-se como um documento de referência para a organização do sistema educativo português, o que levou ao surgimento de várias incongruências em relação aos programas de matemática em vigor para o ensino básico e secundário (MEC, 2013, 2015). Para resolver estas discrepâncias, foram aprovadas as *Aprendizagens Essenciais de Matemática* (AE) para ambos os níveis de ensino (ME, 2018). As AE foram escritas com uma lógica anual, ou seja, para cada ano de escolaridade (na mesma linha dos programas de 2013 e 2015), e procuravam articular os programas de matemática em vigor com os fundamentos para a aprendizagem do PASEO (Martins et al., 2017). No caso particular da disciplina de Matemática A, referem que:

As AE aprofundam as Orientações de Gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, publicadas na página da Direção-Geral da Educação em agosto de 2016, com as quais são totalmente compatíveis, enquadradas e articuladas com a orientação do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PA), assim como a experiência de três anos de lecionação do programa e metas. (ME, 2018, p. 1)

Embora a citação anterior refira a compatibilidade total entre os programas em vigor e as AE, o certo é que os pressupostos base são muito diferentes e, portanto, a compatibilidade expressada, na realidade, não existia.

O insucesso na matemática escolar continuava a ser um problema recorrente em Portugal. Para enfrentar essa situação, o Ministério da Educação criou um Grupo de Trabalho em Matemática (GTM), que elaborou um relatório muito completo sobre o currículo de matemática português ao longo dos tempos e um conjunto de recomendações para melhorar as aprendizagens dos alunos e os programas curriculares da disciplina (GTM, 2020). Entre essas recomendações, destacou-se a necessidade de atualizar o programa de matemática, em ambos os níveis de ensino – básico e secundário. Como resultado, em 2021 foram publicadas as novas

Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al.) e, em 2023, as novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al.)

A resolução de problemas retoma um papel de destaque, sendo novamente reconhecida como uma capacidade matemática transversal, ao lado das representações matemáticas, das conexões matemáticas e do pensamento computacional. Este enfoque é evidente tanto no ensino básico (Canavarro et al., 2021), quanto no ensino secundário (Carvalho e Silva et al., 2023). No caso específico do ensino secundário, são identificadas nove ideias chave, destacando-se em primeiro lugar a “Resolução de problemas, modelação e conexões: Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações” (Carvalho e Silva et al., p. 5). Esta ideia sublinha a importância da interligação de conceitos da matemática e da sua conexão com outras disciplinas para a resolução de problemas: “É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas” (p. 5). Estes novos programas vieram trazer de novo a conceção do ensino *através* da resolução de problemas (Vale et al., 2015), tendo em conta que se retoma a ideia da resolução de problemas como capacidade transversal e fundamental, articulada com outras competências.

2.2. Comunicação matemática escrita

A comunicação é um fator fundamental na vida do ser humano, uma vez que estamos em constante interação levando a que grande parte do nosso dia a dia envolva comunicação (Menezes et al., 2013). Transmitir uma ideia ou um raciocínio a outra pessoa de forma clara exige uma grande organização e consciencialização do que queremos comunicar. Esta necessidade proporciona, no momento de comunicar tanto oralmente como escrito, uma oportunidade para a clarificação das nossas ideias (Boavida et al., 2008).

Se comunicar oralmente as nossas ideias a outros requer uma capacidade de organização do próprio pensamento, convertê-las em escrita é ainda mais exigente. Além disso, praticar o ato de escrever exige uma maior reflexão sobre as próprias produções escritas e a clarificação das ideias a desenvolver, proporcionando uma maior profundidade na consciencialização dos pensamentos (Boavida et al., 2008; Martinho & Rocha, 2018). Graham (2020) reforça esta ideia destacando em específico a

importância da comunicação escrita, tendo em conta que os registos escritos são utilizados para comunicar, registar informação, exprimir os próprios sentimentos, desenvolver a imaginação e até mesmo em tarefas do trabalho.

A formulação de ideias ou de argumentos para debater com os outros integra uma parte fundamental da aprendizagem, nomeadamente, uma compreensão mais profunda da Matemática (Boavida, 2005). Adicionalmente, quando estas ideias são sujeitas a críticas construtivas, de modo geral, são melhoradas e aperfeiçoadas (Borasi 1992, citada em NCTM, 2007; Moschkovich, 1998). No que diz respeito à comunicação por escrito, esta também é essencial para que os alunos consolidem e reflitam sobre os seus conhecimentos. O desenvolvimento desta capacidade proporciona um conhecimento mais significativo dos conteúdos matemáticos sobre os quais os alunos partilham, ouvem, leem e registam (NCTM, 2007).

Sob esta perspetiva, a comunicação desempenha um papel fundamental na garantia de uma aprendizagem significativa da matemática. Esta capacidade possibilita aos alunos uma melhor perceção da matemática e aos professores fornece informações sobre a aprendizagem dos alunos (Pugalee, 2004; Martinho & Rocha, 2018). Para além disso, auxilia na compreensão e apropriação dos conteúdos envolvidos, na inclusão de estratégias diversificadas de resolução e na criação de conhecimentos a longo prazo (Martinho & Rocha). Promover a partilha de ideias dos alunos na sala de aula permite ao professor observar conceções erradas, corrigir o uso desadequado da linguagem matemática e idealizar novos desafios para os alunos (Boavida et al., 2008; Pugalee, 2010):

Na verdade, falar, desenhar ou escrever sobre raciocínios matemáticos oferece oportunidades para justificar pensamentos, sintetizar ideias e tomar consciência de intuições. Os registos escritos, sejam eles textos, esquemas ou mesmo desenhos, não se perdem. É sempre possível voltar a eles e retomar as ideias que traduzem, no momento em que adquiram um novo sentido, em que contribuam para a compreensão de outra situação ou conceito ou em que o aluno esteja em condições de estabelecer conexões que possibilitem um entendimento mais profundo.

(p. 68)

Assim, dar destaque à comunicação escrita representa reconhecer a matemática como uma atividade humana, criativa e social, cuja aprendizagem se constrói através da interação entre todos os presentes na sala de aula: professor e alunos. Neste

enquadramento, entende-se a comunicação como um meio para construir mais e melhores compreensões, isto é, comunicar para aprender (Boavida et al., 2008). Dentro desta ideia, a escrita para aprender corresponde a utilizar a escrita como meio para potenciar e consolidar conhecimento, como por exemplo, pedir aos alunos que escrevam e expliquem a forma como pensaram para resolver um problema matemático (Graham, 2020).

A importância da comunicação matemática também pode ser reconhecida em vários documentos curriculares desenvolvidos ao longo do tempo (ME, 2018; NCTM, 2007; Carvalho e Silva et al., 2023). O programa de matemática para o 11.º ano atualmente ainda em vigor evidencia que um professor do Ensino Secundário deve orientar a sua prática de forma a garantir que os alunos tenham a oportunidade de “comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões” (ME, 2018, p. 5).

Nas novas AE (Carvalho e Silva et al., 2023), a comunicação matemática é identificada como uma das nove ideias-chave, sublinhando que a comunicação escrita ocorre quando “Os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos” (p. 8). Estes documentos curriculares evidenciam que a comunicação matemática escrita está intimamente ligada às representações utilizadas na resolução de tarefas. Por isso, a análise da comunicação matemática implica também a análise das representações, uma vez que estas externalizam o pensamento do aluno em registos escritos (Serrazina, 2018; NCTM, 2007).

As novas AE para o ensino básico destacam como um dos objetivos a “desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática” (Canavarro et al., 2021, p. 3). Este objetivo está igualmente presente nas AE de matemática para o ensino secundário (Carvalho e Silva et al, 2023); contudo, dado que os conceitos matemáticos abordados são diferentes, a concretização desse mesmo objetivo assume formas distintas.

Entre as diversas classificações possíveis para as representações, uma das mais utilizadas é a de Bruner (1999), que distingue três tipos: (i) as representações ativas; (ii) as representações icónicas; e (iii) as representações simbólicas. As representações ativas são todo o tipo de representações que envolvam ação, isto é, a manipulação de objetos ou a simulação de situações. As representações icónicas são essencialmente

representações visuais, ou seja, desenhos, esquemas ou diagramas. As representações simbólicas consistem na tradução do conhecimento em linguagem simbólica, tanto com recurso à simbologia matemática quanto à linguagem oral e escrita (Santos et al., 2022). É importante destacar que o uso destas representações não ocorre, necessariamente, de forma isolada, podendo o aluno, numa mesma resolução, recorrer aos três tipos de representações (Boavida et al., 2008). No entanto, é fundamental garantir que o uso destas representações é sempre feito de maneira adequada e apropriada na resolução apresentada. Os alunos utilizam de forma adequada as diferentes representações matemáticas quando representam efetivamente o que pretendem representar de forma completa e sem criar falsas conceções sobre o que querem transmitir (Carvalho e Silva, 2022). Existem outros modelos de análise das representações matemáticas, realçando a importância das representações múltiplas para a aprendizagem da matemática (e.g., Lesh et al., 1987, citado em Canavarro et al., 2022; Barbosa & Vale, 2022); contudo, uma análise das representações usadas na comunicação matemática escrita não era um objetivo deste trabalho, pelo que este tema não é aqui mais aprofundado.

No contexto da resolução de problemas, espera-se que “os estudantes devem ser capazes de analisar o problema, encontrar o método mais apropriado para o resolver e saber comunicar as etapas envolvidas no passo anterior aos colegas e professor” (Winchelt, 2009, p. 1, tradução própria). Quando o aluno é capaz de registar, por escrito, as diferentes etapas do processo de resolução de um problema, constrói um suporte que lhe permite retomar e refletir sobre a forma como pensou, avaliando a sua resolução sempre que necessário (Freitag, 1997). Para além disso, a escrita contribui para a organização e clarificação do pensamento de forma a torná-lo acessível para todos, e facilita a articulação entre conhecimentos previamente adquiridos e novas aprendizagens (Jacinto et al., 2018; Pugalee, 2010; Pires et al., 2018; Santos, 2018).

Desenvolver a comunicação matemática escrita em sala de aula passa por estabelecer a prática da escrita como uma parte necessária para o trabalho das tarefas apresentadas. A ideia é procurar incentivar os alunos a não só escrever os cálculos e os resultados obtidos como também a descrever as estratégias utilizadas e os raciocínios desenvolvidos ao longo do processo (Boavida et al., 2008). A descrição informal do pensamento, utilizando linguagem corrente e esboços, pode ser pertinente para algumas finalidades e para os primeiros anos letivos; no entanto, os alunos devem gradualmente passar a comunicar de uma maneira mais formal (NCTM, 2007; ME, 2018; Carvalho e Silva et al., 2023). Em síntese, foca-se em iniciar, desde cedo, a preparação

dos alunos que lhes permita serem capazes de elaborar argumentos matemáticos bem estruturados, válidos e com vocabulário formal (Boavida et al., 2008).

Conseguir estes objetivos depende, essencialmente, de dois fatores. É necessário o professor fazer previamente uma escolha criteriosa das tarefas que proporcionem a discussão de tópicos importantes e interessantes, e proporcionar um ambiente em sala de aula que permita interações adequadas entre todos (Boavida et al., 2008; Costa & Pires, 2016).

No entanto, apesar de criar o hábito da escrita, através da Matemática e sobre a Matemática, ser importante, não é uma tarefa fácil (Boavida et al., 2008). Nesta medida, os professores devem apoiar os alunos nesse processo, ajudando-os a transmitir e aperfeiçoar as suas ideias, assim como a formalizar e tornar mais precisa a escrita matemática dos mesmos. Os professores podem propor com frequência problemas que requerem explicações criando posteriormente uma discussão com a turma para comparar e analisar as diversas explicações, podendo também funcionar com um bom instrumento de avaliação (NCTM, 2007).

Este tipo de oportunidades pode ser criado através do que tipicamente se identifica como ensino exploratório (Oliveira et al., 2013). Este difere do ensino direto pelos papéis assumidos pelo professor e pelos alunos na sala de aula, pelo tipo de tarefas propostas e pela forma como são trabalhadas, bem como pela comunicação (no sentido de discurso) estabelecida em aula (Ponte, 2005). Numa abordagem de ensino exploratório, o aluno assume um papel ativo na sua aprendizagem, podendo negociar significados e conceitos em conjunto com o professor e os seus colegas (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

Uma aula de ensino exploratório divide-se, essencialmente, em três fases, podendo a última ser subdividida em duas: (i) o lançamento da tarefa; (ii) a exploração pelos alunos; e (iii) a discussão e sistematização. O primeiro momento centra-se na apresentação da tarefa à turma, que geralmente consiste num problema ou numa investigação, isto é, uma tarefa com algum grau de exigência cognitiva (Stein & Smith, 2009). Na segunda fase, os alunos realizam autonomamente a tarefa, sendo da responsabilidade do professor garantir o envolvimento ativo de todos, monitorizar o trabalho dos alunos, selecionar as resoluções que são importantes levar a uma discussão coletiva (na fase seguinte) e sequenciá-las de modo a que potenciem as aprendizagens (Smith & Stein, 2018). A última fase é dedicada à discussão coletiva das resoluções selecionadas e ao estabelecimento de conexões entre elas, fazendo emergir conhecimento (novo). Esta

fase exige dos alunos o desenvolvimento da capacidade de argumentar as suas conclusões e, conseqüentemente, o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática (Oliveira et al., 2013).

Para além disso, ter o conhecimento prévio das dificuldades dos alunos permite ao professor ajudar de uma forma mais eficaz o aluno a ultrapassar as mesmas sem remover a autonomia do aluno na resolução da tarefa (Stein et al., 1996). Os erros dos alunos podem servir como “um trampolim para a aprendizagem em Matemática” (Borasi, 1985, citada em Vaz, 2022, p. 6) e o professor deve ter uma visão do erro como algo natural e parte do processo de ensino-aprendizagem utilizando o mesmo para potenciar o conhecimento dos alunos (Cury, 2007, citada em Vaz, 2022). Portanto, é importante prever antecipadamente as dificuldades que podem surgir, transformando os erros e as dificuldades numa componente fundamental para o desenvolvimento da comunicação escrita (Martins & Martinho, 2023).

A dificuldade dos alunos em passar para escrito as suas ideias nas resoluções pode não estar unicamente ligada à falta de conhecimento matemático, mas também ao pouco desenvolvimento da capacidade da comunicação escrita matemática (Martinho & Rocha, 2018). Martinho e Rocha (2018) apresentam algumas dificuldades específicas relativas à comunicação matemática escrita, tais como dificuldade na conversão do raciocínio para a escrita, em saber como exprimir as suas ideias e em estruturar a resolução de forma a torná-la coerente e com as ideias encadeadas. Morgan et al. (2014) também já apresentavam essas dificuldades, mencionando também outras dificuldades correspondentes a outras fases que envolvem o uso da comunicação matemática escrita, nomeadamente a fase de pensar em como transmitir e conectar as suas ideias e o processo todo de escrita. Portanto, os autores apontam dificuldades relacionadas como vocabulário e a notação algébrica, assim como, a nível da extensão dos textos.

Para identificar as dificuldades na comunicação matemática escrita, é necessário ser capaz de analisar a comunicação matemática escrita dos alunos e, para isso, é importante criar um sistema de categorias que orientem o professor nesse processo. Nesse sentido, Santos e Semana (2014) criaram três categorias para caracterizar a comunicação matemática escrita, nomeadamente, a *interpretação do objetivo da tarefa*, as *justificações apresentadas* e as *representações utilizadas*. Para além disso, dividem a interpretação do objetivo da tarefa em dois domínios: o enunciado do objetivo (“goal statement”) e a linguagem utilizada. O *enunciado do objetivo* relaciona-se com a identificação do objetivo da tarefa e com a análise das informações dadas. A *linguagem*

utilizada reporta-se à verificação de como o registo do objetivo é escrito, se por palavras próprias ou se copiado, e da correção da linguagem utilizada. Já a justificação divide-se no *tipo de justificação apresentada* podendo ser: vaga (justificação pouco clara ou completa), regra (justificação que utiliza regras, algoritmos ou definições), processual (justificação que é feita durante a resolução, mas sem mostrar que a etapa é válida), e relacional (justificação que a resolução é válida podendo incluir ou não a justificação de cada etapa); e na *correção e exaustividade*. Finalmente, a categoria das representações utilizadas corresponde aos tipos de representação utilizados, dividindo-as em três categorias: *linguagem verbal* (linguagem corrente e com terminologia matemática), *representação icónica* (utilização de esquemas ou desenhos) e *representação simbólica* (utilização de símbolos numéricos e/ou algébricos); e à sua precisão e completude.

Martinho e Rocha (2017) fazem algumas modificações a este modelo modificando a categoria *interpretação do objetivo da tarefa* para *compreensão do problema*. A compreensão do problema passa por perceber se o aluno entendeu o que é pedido no enunciado, se analisou corretamente e de forma completa as informações dadas e se escreveu o objetivo por palavras próprias ou transcreveu do enunciado. Tanto a categoria correspondente à *justificação* como das *representações utilizadas* são semelhantes ao modelo de Santos e Semana (2014).

Martins e Martinho (2023) eliminam o tema da compreensão do problema dos modelos de Santos e Semana (2014) e de Martinho e Rocha (2017), e criam um novo sistema de categorias de análise da comunicação escrita matemática especificamente na resolução de problemas (Figura 1).

Comunicação escrita			
Subcategorias			Descrição
Correção	Correta	-	Quando a solução apresentada é considerada correta
	Parcialmente correta	Concluída	Quando a solução apresentada não está correta, mas a resolução tem partes significativas corretas
		Não concluída	Quando a resolução não está concluída, mas o que está resolvido tem uma parte significativa correta
	Incorreta	-	Quando a solução apresentada é considerada incorreta e não tem partes significativas corretas ao longo da resolução
Compleitude	Nível de justificação	Alto	Apresenta todas as justificações necessárias
		Médio	Apresenta quase todas as justificações necessárias, mas não as suficientes
		Baixo	Apresenta poucas justificações
		Nulo	Não apresenta qualquer justificação para a resposta apresentada, ou apresenta justificações vagas ou pouco claras
	Tipo de justificação	Relacional	Justifica a validade de uma etapa, dando espaço a que haja um entendimento relacional
		Procedimental	Justifica o que é feito em determinada etapa
		Experimentação	Justifica com base na experimentação
		Regras	Justifica etapas exclusivamente com base em regras, algoritmos e/ou definições
		Vaga	Justifica de forma pouco clara ou pouco informativa
	Resposta final	Explícita	Apresenta uma resposta explícita para o problema
		Implícita	Não apresenta uma resposta explícita para o problema, mas é possível subentender qual é a resposta
		Ausente	Não apresenta uma resposta explícita nem implícita, ou apresenta mais do que uma resposta
Representações	Linguagem verbal		Linguagem verbal do dia a dia com possível terminologia matemática
	Representação icónica		Recurso a esquema ou desenhos
	Representação simbólica		Recurso a símbolos algébricos
Organização	Organizada		A resolução está bem organizada, tendo um fio condutor que permite o leitor seguir a resolução do princípio ao fim sem problemas
	Parcialmente organizada		A resolução não está totalmente organizada, havendo partes que exigem ao leitor fazer ligações entre as diferentes etapas para perceber quais devem ser lidas primeiro
	Desorganizada		A resolução está desorganizada, não permitindo ao leitor seguir devidamente a resolução apresentada

Figura 1 – Sistema de categorias para a análise da comunicação matemática escrita na resolução de problemas (Martins & Martinho, 2023, p. 58)

2.3. Apropriação de critérios e autoavaliação

A avaliação constitui, fundamentalmente, um processo de comunicação intencional e caracterizado por uma interação entre os intervenientes e os objetos de avaliação (Leal, 1992; Pinto, 2002; Santos, 2002). Desta forma, a avaliação pode ser entendida como um processo de tomada de decisão em que tanto os alunos como o professor têm um papel ativo (Santos & Pinto, 2018).

A avaliação envolve várias etapas (Santos, 2020): uma planificação do que se pretende fazer, recolha de informação e consequentemente interpretação da mesma, e, por fim, uma atuação consequente à análise efetuada (Figura 2).

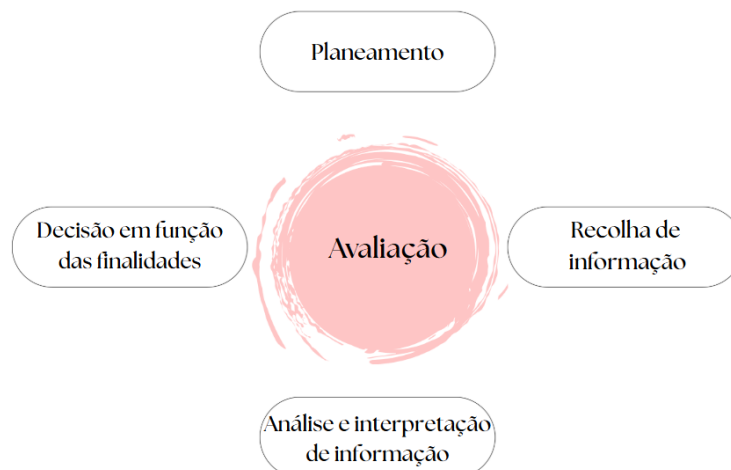


Figura 2 – Fases do processo de avaliação (adaptada de Pinto, 2020)

A fase do planeamento é essencial para que todas as outras fases resultem de acordo com o pretendido. Caso esta seja dispensada, a intencionalidade do processo perde-se, uma característica de qualquer avaliação. Ao analisar cada etapa do processo avaliativo, é possível perceber o porquê de haver um entendimento redutor da avaliação (Santos, 2020; Menezes & Santos, 2008). O método de avaliação mais comum aplicado nas salas de aulas passa por avaliação através de testes, este resume-se simplesmente a uma recolha de informação. Apesar desta etapa ser indispensável, a avaliação não consiste apenas nisso. Já quando pensamos em avaliação como um juízo de valor, esta passa por ser apenas a etapa da fase de interpretação da informação recolhida. Mais uma vez, apesar desta etapa ser essencial no processo avaliativo esta não é única. A interpretação da avaliação como apenas sendo a última etapa da avaliação passa por entender a avaliação como a classificação final de um período letivo ou de um trabalho produzido. Apesar desta ser importante, apenas é uma parte de todo o processo de avaliação (Santos, 2020).

Deste modo, a avaliação trata-se de um processo que envolve várias atividades, que se interligam e nem sempre seguem a mesma ordem, uma vez que é preciso adaptar a avaliação às situações com que nos deparamos. Por exemplo, poderá suceder que a informação recolhida não seja suficientemente clara ou completa para permitir uma interpretação adequada. Nesse caso, torna-se necessário proceder à recolha de dados adicionais antes de dar continuidade ao processo (Santos, 2016).

Segundo o Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho, os tipos de avaliação consideradas são a formativa e a sumativa, mas é o propósito da avaliação que define se a avaliação se encontra num registo formativo ou sumativo:

Qualquer avaliação é meramente um meio de recolher evidência sobre a aprendizagem. É o uso dado a essa evidência que distingue o formativo do sumativo, embora naturalmente os métodos usados e as interpretações dos resultados possam diferir de acordo com os usos pretendidos. (Black, 2013, p.170)

As avaliações formativa e sumativa distinguem-se na forma como é usada a informação recolhida e interpretada (Jacinto et al., 2020). O instrumento de avaliação utilizado, o momento em que é aplicado ou o agente que o implementa (o professor ou o aluno) não são o que definem o tipo de avaliação aplicada. Por exemplo, podemos ter o mesmo instrumento de avaliação utilizado, uma questão-aula, em que dois professores recolhem as produções escritas dos alunos. O primeiro professor utiliza este instrumento para incluir a respetiva classificação como um elemento com vista à nota no final do período. Já o segundo professor utiliza este instrumento para proporcionar aos alunos feedback escrito, comentando as suas produções de forma a que eles possam melhorar essas produções ou produções futuras a partir desses comentários. A avaliação do primeiro professor tem propósito sumativo, enquanto a avaliação do segundo professor se enquadra numa perspetiva formativa (Santos, 2020).

Desta forma, se a avaliação naquele momento se resumir a reportar, informar, distinguir desempenhos e orientar decisões conforme critérios normativos, recorrendo, por exemplo, à hierarquização e seleção de alunos, estamos numa situação de avaliação sumativa. Por outras palavras, a avaliação sumativa é utilizada para obter uma análise geral do desempenho do aluno e das aprendizagens adquiridas (Jacinto et al., 2020). Por outro lado, caso se tenha como objetivo regular as aprendizagens, envolver os alunos na compreensão dos seus erros e usá-los como trampolim para aprender, estamos numa situação de avaliação formativa. De maneira a ser clara a relação entre a intenção da avaliação e o tipo de avaliação em que se enquadra, vários autores nomearam a avaliação sumativa como avaliação *das* aprendizagens e a avaliação formativa como avaliação *para* as aprendizagens (Black et al., 2003). Assim, a avaliação *das* aprendizagens tem como objetivo verificar as aprendizagens e obter informações sobre o progresso do aluno sem qualquer ação consequente. Todo este processo de avaliação é desenvolvido e planeado pelo professor sem envolver diretamente os alunos (Siarova et al., 2017, citados em Jacinto et al., 2020). Já a avaliação *para* as aprendizagens pretende obter informações sobre os conhecimentos e dificuldades do aluno para poder definir a etapa seguinte do processo de ensino-aprendizagem. Neste

processo de avaliação, tanto o professor como o aluno têm um papel ativo (Jacinto et al., 2020).

Na perspetiva de uma avaliação reguladora, isto é, uma avaliação para as aprendizagens, esta é entendida como “todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem” (Santos, 2002, p. 77). As práticas avaliativas formativas podem ser bastante variadas, como por exemplo, fornecer comentários oralmente e escrito aos alunos, utilizar instrumentos de avaliação que permitam o aluno evoluir posteriormente, promover a coavaliação e a autorregulação, apoiada em critérios de avaliação (Santos, 2020). Através destas práticas, é possível reunir informações acerca das dificuldades e dos progressos dos alunos para, posteriormente interpretá-las de forma a planear as ações a seguir para garantir uma melhoria das aprendizagens (Santos & Gomes, 2006). Deste modo, a avaliação formativa serve como objeto de reflexão tanto para os professores como para os alunos sobre a avaliação, garantido um aprofundamento dos conhecimentos e da capacidade de autorregulação (Silva, 2004; Fernandes, 2020a).

A autorregulação consiste numa regulação realizada pelo próprio aluno. Esta consiste num conjunto de decisões tomadas pelo próprio com o objetivo de mudar o estado atual dos acontecimentos por estes divergirem dos objetivos pretendidos ou por intencionar iniciar novas atividades (Silva & Sá, 2003). Na mesma perspetiva, a autoavaliação é um “processo de metacognição, entendido como um processo mental interno através do qual o próprio toma consciência dos diferentes momentos e aspectos da sua actividade cognitiva” (Santos, 2002, p. 79). Consequentemente, a autorregulação permite ao aluno regular os seus processos de pensamento e de aprendizagem (Nunziati, 1990, citada em Santos e Gomes, 2006).

A autoavaliação exige um autocontrolo do interveniente, assim como, ter bem desenvolvido aspetos como a capacidade de ser crítico, consciente e reflexivo sobre todo o seu trabalho (Hadji, 1994, citado em Santos e Gomes, 2006; Santos, 2002). A autoavaliação envolve um processo metacognitivo que implica a reflexão crítica sobre as ações a executar na realização de uma tarefa, em confronto com os critérios definidos para o seu cumprimento (Jorro, 2000, citada em Santos e Gomes, 2006). É importante destacar que a autoavaliação não deve ocorrer com a finalidade de envolver os alunos nas tarefas, mas sim como um meio para aprender (Pinto, 2002).

O feedback constitui um elemento central da avaliação para a aprendizagem e é uma boa estratégia para a promoção da autoavaliação. A partilha de feedback permite ajudar os alunos a identificar as suas dificuldades, assim como, ultrapassá-las (Black & Wiliam, 2006; Fernandes 2020a).

Contudo, o feedback não é necessariamente eficaz e nem sempre garante os objetivos pretendidos. “Para que o seu efeito seja poderoso, deve existir um contexto de aprendizagem ao qual o feedback se dirige” (Hattie & Timperley, 2007, p. 82, tradução própria) e deve ser fornecido apenas após o aluno responder a uma tarefa inicial. Para analisar a eficácia do feedback, Hattie e Timperley propõem um modelo que se foca essencialmente em três questões: (i) Para onde vou? (ii) Como estou a ir? e (iii) O que fazer a seguir? Utilizando este modelo, um feedback eficaz é um feedback que ajuda a compreender a distância entre a primeira e segunda questão, ou seja, entre onde o aluno se encontra e onde se pretende que chegue, e ajuda o aluno a responder à terceira pergunta, isto é, fornece dicas para os passos seguintes.

Estes autores também identificam quatro possíveis focos do feedback: (i) o *self*; (ii) a tarefa; (iii) o processo; e (iv) a autorregulação (Hattie & Timperley, 2007). O feedback com foco no *self* é normalmente veiculado através de comentários com pouca informação e geralmente é pouco eficaz pois não cria nenhum estímulo ou compromisso com o trabalho a desenvolver a seguir pelo aluno; o feedback dirigido à *tarefa* corresponde aos aspetos da resolução da tarefa, como a correção e a clareza. Este pode ser eficaz se a informação fornecida promover uma maior compreensão dos conteúdos e, por consequência, uma melhoria do processo de resolução e a promoção da autorregulação do aluno; o feedback tanto focado no processo como na autorregulação é essencial para assegurar o progresso do aluno na tarefa. O feedback dirigido ao *processo* privilegia aspetos relacionados com o processamento de informações ou processos de aprendizagem que envolvam a compreensão ou resolução da tarefa. O feedback com foco na *autorregulação* diz respeito aos processos de autorregulação, isto é, à forma como os alunos regulam as suas ações e decisões tendo em conta os seus objetivos. Assim, os feedbacks focados na tarefa, no processo e autorregulação contribuem para a aprendizagem do aluno acabando por se interligarem (Hattie & Timperley, 2007).

O feedback deve transmitir o que os alunos fizeram bem no seu trabalho, apontar os aspetos que o aluno precisa de melhorar e algumas evidências que mostrem essa necessidade de melhoria, assim como, fornecer estratégias para utilizar nessa melhoria (Sadler, 2010; Santos & Pinto, 2018). Para além disso, é essencial que o feedback seja

adequado e personalizado a cada aluno, tendo em conta as suas características e dificuldades específicas (Hattie & Timperley, 2007; Santos, 2022; Santos & Dias, 2007).. A eficácia do feedback depende de diversos fatores. Partindo do trabalho de Santos e Pinto (2018), Santos (2022) destaca quatro domínios fundamentais: (i) características do feedback; (ii) variáveis associadas aos alunos; (iii) variáveis do contexto; e (iv) conhecimento profissional do professor (Figura 3).



Figura 3 – Modelo conceitual da eficácia do feedback (Santos, 2022, p. 17)

As características do feedback abrangem dimensões como o tipo de feedback (avaliativo, descritivo, recorrendo a simbologia,...), a dimensão do feedback (curto, médio e longo) e a forma sintática (afirmação e interrogação) (Santos & Dias, 2006). No que diz respeito ao tipo de feedback, quando o professor recorre ao uso de simbologia, este é mais eficaz se for fornecido a alunos com um bom desempenho a matemática; os alunos com um desempenho inferior necessitam de um feedback mais descrito, sendo a simbologia insuficiente. Relativamente à dimensão do feedback, os feedbacks curtos são o que parecem ser mais eficazes para compreensão dos alunos (Santos & Pinto, 2009). Já no que corresponde à forma sintática, o feedback colocado na forma de questão é o que parece trazer mais resultados; contudo, o uso desta forma de feedback pode fazer com que o aluno apenas se foque em responder às perguntas, removendo o principal objetivo do feedback: a reflexão do aluno sobre toda a resolução (Santos & Pinto, 2009).

Os fatores associados aos alunos referem-se ao desempenho dos alunos na disciplina de matemática. Os alunos com um baixo desempenho académico tendem a não procurar ajuda quando não conseguem melhorar o seu trabalho apenas com o feedback dado, acabando por cometer os mesmos erros novamente, mesmo sabendo que estão

mal; já os alunos com um bom desempenho a matemática tendem a questionar o professor quando não compreendem o feedback (Santos & Dias, 2006).

As variáveis do contexto focam-se em aspetos como a natureza das tarefas e a cultura de avaliação estabelecida na sala de aula. Relativamente à natureza das tarefas, o tipo de tarefa apresentada influencia as características do feedback fornecido. Quanto à cultura de avaliação da sala de aula, o feedback será mais eficaz se os alunos estiverem conscientes de que têm sempre a oportunidade de melhorar as suas produções escritas e que cometer erros faz parte do processo de aprendizagem (Dias & Santos, 2008).

O conhecimento profissional do professor refere-se à sua capacidade de fornecer um feedback eficaz. Garantir essa eficácia exige que o professor não só domine os aspetos didáticos em questão, mas também possua um conhecimento aprofundado dos alunos e das suas características (Santos, 2022).

Para a prática da autoavaliação, é necessário adequar a sala de aula a um contexto específico, garantindo uma cultura positiva do erro, uma apropriação de critérios de avaliação e uma utilização de tarefas cognitivamente desafiantes e enriquecedoras. Quando se adota uma cultura do erro, garantimos que obtemos realmente uma fonte fidedigna de informação sobre o que o aluno está a pensar sendo assim possível ajudar o aluno a melhorar as suas aprendizagens. É importante considerar o erro como um processo inerente da aprendizagem e não como uma punição (Vaz, 2022). Da mesma forma, é indispensável a criação de critérios de avaliação para os alunos conseguirem identificar o que o professor espera que façam e como devem fazer para o atingir (Pinto, 2020). No entanto, estes critérios só são verdadeiramente eficazes se os alunos conseguirem de facto apropriar-se dos mesmos. Também, a aplicação de tarefas cognitivamente desafiantes e enriquecedoras garantem um maior aproveitamento desta prática de avaliação (Santos, 2020). De acordo com a definição de problema proposta por Ponte (2005), os problemas são tarefas que desafiam cognitivamente os alunos e incentivam a comunicação sobre os seus processos de pensamento. Dessa forma, os problemas funcionam como exemplos de tarefas adequadas a uma avaliação reguladora.

Os critérios caracterizam-se como sendo a base da autoavaliação, sendo utilizados como guia para a atividade a desempenhar. Servem também como estratégia de verificação e correção dessa mesma atividade (Pinto 2020; Fernandes, 2020b; Silva, 2004).

Os critérios tornam explícito para os alunos o que é muitas vezes implícito no discurso do professor, ou seja, o que é expectável que eles façam para demonstrar a aquisição de uma aprendizagem e os aspetos que o professor terá em consideração ao fazer o julgamento sobre o produto realizado, ou sobre o desempenho do aluno. (p. 16)

Assim, os critérios constituem um referente para a autoavaliação e são uma das suas condições necessárias (Hadji, 1994, citado em Santos & Gomes, 2006). Segundo Sá (2004), um referente de todo o processo de autorregulação é “a existência de um objectivo, padrão, critério ou valor de referência que pode servir de bitola para avaliar a acção (...) e orientar os processos de regulação” (p. 67). A definição dos critérios pode ser feita pelo professor, pelos alunos ou por ambos, num processo de negociação. Normalmente, é este último que dá mais frutos pois os alunos têm agência na construção dos critérios, mas também é tanto mais eficaz quanto mais os alunos estão habituados a fazer isso. Portanto, numa primeira abordagem, o importante é os alunos se apropriarem bem dos critérios definidos (pelo professor ou por este e com a participação dos alunos) (Fernandes, 2020a).

Tendo em conta que os critérios permitem explicitar um conjunto de características a considerar no desempenho do aluno num determinado conteúdo a trabalhar, constituem uma ferramenta fundamental para a construção do feedback por parte do professor (Pinto, 2020; Fernandes, 2020b). Este, com base nos critérios previamente definidos, pode questionar o aluno sobre o seu desempenho e fornecer orientações que o ajudem a ultrapassar as dificuldades identificadas. Já na perspetiva do aluno, o feedback dado pelo professor funciona como um guia que o auxilia a verificar se está a fazer uma apropriação correta dos critérios de avaliação, assim como em que nível de desempenho se encontra e que ações deve tomar para alcançar o nível de desempenho esperado, promovendo, assim, o progresso na aprendizagem (Pinto, 2020).

O feedback consiste em toda a comunicação escrita ou oral que o professor fornece propositadamente ao aluno com o objetivo de partilhar orientações que permitam o aluno modificar ou melhorar a maneira como pensa, ou as suas concepções sobre um determinado conteúdo que se reflete nas suas respostas em contextos avaliativos (Machado & Pinto, 2014). Desta forma, o uso de critérios consiste numa referência para os alunos verificarem se estão no caminho certo, tornando-os mais responsáveis e autónomos na construção do seu conhecimento (Pinto, 2020).

No entanto, este trabalho em volta dos critérios de avaliação é bastante complexo e exige um objetivo previamente e cuidadosamente planeado pelos professores. Os critérios de avaliação devem ser coerentes com os objetivos de aprendizagem e, por outro lado, ao elaborar critérios de avaliação para serem usados pelos alunos em processos de autoavaliação, é importante que o professor adeque a linguagem dos critérios em função dos alunos, sob pena de a prática de autoavaliação, orientada pelos critérios definidos, perder eficácia (Fernandes, 2020c). Neste sentido, para utilizar os critérios de avaliação como ferramenta de trabalho é necessário clarificar quais são os objetivos, os critérios concretos de avaliação e os níveis de desempenho que os alunos podem atingir (Sadler, 1987, citado em Pinto, 2020). Os objetivos de aprendizagem são usualmente transmitidos de uma forma generalizada, envolvendo todo o programa. Os critérios de avaliação concretizam os aspetos das aprendizagens que vão ser avaliados. Os níveis de desempenho especificam as características de cada aspeto avaliado, não sendo suficiente resumi-los em apenas uma palavra como “bom” ou “muito bom” (Pinto, 2020). É de salientar que, apesar dos critérios de avaliação terem de estar sempre em sintonia com o programa em vigor, não devem ser confundidos com o currículo. Fernandes (2020b) diferencia estes dois conceitos afirmando que:

Os critérios são, num certo sentido, interpretações, que se pretendem inteligentes, do currículo. Ou seja, é através dos critérios que se define uma espécie de referencial, que nos diz o que é importante avaliar e, consequentemente, o que é importante aprender. (p. 13)

Para além disso, “os critérios devem ser em número reduzido e cada um deles pode e deve integrar várias AE e, obviamente, ser consistente com um ou mais elementos do PASEO” (Fernandes, 2020b, p. 16), isto é, devem ser de fácil compreensão e garantir a sua utilidade e valor pedagógico. Os critérios devem constituir um elemento que possibilite uma melhor aprendizagem, um melhor ensino e uma boa avaliação. O quadro seguinte resume assim todas as características fundamentais a ter em consideração na elaboração dos critérios:

Características	Descrição
Adequação	Cada critério representa um aspeto relevante do que se espera que os alunos aprendam em relação a um domínio ou a um tema de uma dada disciplina, tal como definido no currículo (e.g., objetivo, finalidade).
Clareza	Cada critério é passível de ser claramente compreendido por professores e alunos; o seu significado e os seus limites devem poder descrever-se e explicar-se sem dificuldades.
Observável	Cada critério deve permitir descrever um nível (uma qualidade) de desempenho do aluno que possa ser identificável por qualquer pessoa para além do próprio aluno.
Independência	Cada critério identifica um e um só aspeto da aprendizagem evidenciado pelo desempenho que se pretende avaliar.
Compleitude	Os critérios, no seu conjunto, descrevem todas as aprendizagens relevantes que o desempenho dos alunos deve permitir avaliar.
Devem permitir descrever níveis de desempenho	Para cada critério é possível considerar-se um dado número de níveis de desempenho que representa um continuum de qualidade.

Figura 4 – Características Fundamentais a Considerar na Elaboração de Critérios (Fernandes, 2020c, p. 7)

No entanto, apenas o uso dos critérios de forma isolada não garante um desempenho mais eficaz, isto é, não é suficiente os alunos terem conhecimento dos critérios, mesmo que sejam alunos com um bom desempenho académico (Santos & Pinto, 2018). Este depende do envolvimento do aluno na aceitação e interiorização dos critérios (Sá, 2004). Desta forma, é importante criar várias oportunidades para os alunos poderem desenvolver esta capacidade, assim como promover um trabalho regular e sequencial sobre a clarificação e apropriação dos critérios de avaliação (Montalvo & Torres, 2004; Semana, 2016). Assim, ao longo do tempo, os alunos vão ser capazes de distinguir entre as suas considerações sobre os critérios e o que realmente estes propõem. Situações como coavaliações entre colegas, feedbacks do professor, discussões em grande grupo e possibilidade de melhorar os seus trabalhos e as suas próprias autoavaliações, contribuem para a apropriação dos critérios (Santos & Gomes, 2006).

Além do feedback e dos critérios de avaliação, criar oportunidades para os alunos resolverem tarefas em duas fases, permitindo que progridam entre fases, também constitui uma estratégia de avaliação eficaz para promover a aprendizagem (Santos, 2002). A resolução de tarefas em duas fases só faz sentido, num quadro de avaliação reguladora das aprendizagens, se associada ao feedback à resolução feita na primeira fase, para que os alunos, a partir dele, possam melhorar as suas produções na segunda fase.

3. Intervenção Pedagógica

Este capítulo contempla uma caracterização do contexto escolar onde foi desenvolvida esta intervenção pedagógica e uma descrição detalhada da mesma, incluindo a sua estruturação. Para além disso, contém os diferentes problemas propostos aos alunos e os seus respetivos objetivos de aprendizagem, os recursos utilizados e como se organizou o trabalho dos alunos.

3.1. Caracterização do contexto escolar

A intervenção pedagógica que serviu de base ao estudo reportado neste relatório decorreu no âmbito da minha PES numa escola básica e secundária da área metropolitana do Porto. Esta escola com 2.º e 3.º Ciclos do Ensino básico e Ensino Secundário em funcionamento é sede de um Agrupamento constituído por 10 estabelecimentos de ensino. A escola sede acolhe cerca de 2000 alunos, em que aproximadamente 200 alunos são estrangeiros e 150 beneficiam de medidas de suporte à aprendizagem e inclusão ao abrigo do Decreto-Lei nº54/2018, de 6 de julho.

O agrupamento localiza-se num território económica e socialmente desfavorecido em que 37% dos alunos dependem de apoio da ação social escolar, pelo que se insere no projeto TEIP (território educativo de intervenção prioritária). O último Relatório TEIP evidencia uma melhoria nos vários indicadores do programa, nomeadamente na resposta aos problemas do insucesso escolar, do abandono escolar e da indisciplina, mantendo-se, contudo, a necessidade de melhoria em alguns indicadores cujas metas ainda não foram alcançadas, em particular, o absentismo.

Durante este ano letivo (2024/2025), tive a oportunidade de trabalhar com uma turma de 7.º ano de escolaridade e duas turmas de 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências e Tecnologias. Escolhi desenvolver este estudo numa das turmas de 11.º ano, na disciplina de Matemática A. Decidi optar pelo 11.º ano porque neste nível de ensino já é exigido um maior rigor na comunicação escrita matemática em relação ao 7.º ano. A escolha da turma (uma vez que trabalhei em duas turmas do 11.º ano na minha PES) foi guiada por ser uma turma com uma maior diversidade de alunos tanto nos resultados escolares como nas dificuldades evidenciadas na disciplina. Para além disso, os alunos desta turma eram bastante comunicativos, o que facilitaria a recolha de dados no estudo a realizar.

A turma selecionada é constituída por 18 alunos, cujas idades se encontram entre os 16 e os 18 anos, sendo nove alunos do sexo feminino e nove do sexo masculino. Salienta-

se ainda que a turma tem um aluno com histórico de reprovações e um aluno que usufrui de medidas seletivas, ou seja, beneficia de medidas de suporte à aprendizagem e inclusão ao abrigo do Decreto-Lei nº54/2018. De um modo geral, é uma turma empenhada, participativa e com vontade de aprender; no entanto, tem algumas dificuldades em termos de comportamento. Em relação ao aproveitamento, é uma turma bastante heterogénea, em que as classificações no ano letivo anterior foram entre 8 e 20 valores, sendo que três alunos obtiveram uma classificação inferior a 10 valores em Matemática A. No que diz respeito, às atitudes e ao comportamento, a turma é inquieta e bastante faladora, sendo que, na maior parte das aulas, é necessário intervir em função do comportamento da turma. No entanto, durante as várias etapas da intervenção pedagógica, mostraram-se interessados em participar e em realizar as tarefas propostas.

3.2. Momentos da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica teve início no dia 27 de janeiro de 2025 e fim no dia 28 de abril de 2025. Para iniciar esta intervenção, foi proposta aos alunos a resolução de um problema como tarefa inicial. Esta tarefa foi usada para analisar com a turma a comunicação matemática escrita das produções escritas e permitir que os alunos se apropriassem dos critérios de avaliação. Posteriormente, foi solicitada aos alunos a resolução individual de três problemas com a aplicação dos critérios de avaliação. Cada problema foi resolvido em duas fases: numa primeira fase, os alunos resolviam o problema e aplicavam os critérios de avaliação; posteriormente, recebiam feedback escrito dado por mim sobre o aspeto da comunicação matemática escrita na resolução do problema e sobre a autoavaliação que cada um tinha realizado, para que, numa segunda fase, pudessem melhorar as suas resoluções iniciais e aferir a sua autoavaliação. Por fim, os alunos recebiam feedback sobre a evolução das suas produções escritas, tanto ao nível da resolução de problemas como da comunicação matemática escrita e da autoavaliação realizada. É importante salientar que o feedback fornecido na primeira fase tinha um carácter regulador e formativo, incentivando a melhoria na fase seguinte. Já o feedback dado na segunda fase, embora também tivesse um carácter regulador, assumia uma função mais informativa, orientando para experiências futuras.

Nesta intervenção pedagógica, houve duas práticas avaliativas em destaque: o recurso aos critérios de avaliação para orientar o processo de autoavaliação dos alunos e a

utilização do feedback escrito, dado pela professora, às produções dos alunos. A escolha destas práticas de avaliação formativa tinha como objetivo garantir que os alunos se autoavaliavam de uma forma consciente e orientada, de maneira a compreender os contributos destas práticas para uma melhoria na comunicação matemática escrita dos alunos no contexto da resolução de problemas.

Decidi não dedicar nenhum momento da intervenção pedagógica à apresentação de exemplos de resoluções após a finalização de cada problema, pois não quis que os alunos tivessem a ideia que existe apenas uma estratégia de resolução ou que uma estratégia é melhor que a outra. Também não queria condicionar a forma como expressam as suas ideias, uma vez que a turma tinha uma tendência para replicar o que era feito no quadro ou dito pelo professor sem a devida compreensão, verificando-se uma aprendizagem sem significado. Como tal, os alunos não desenvolviam a sua capacidade de adaptar os seus conhecimentos relativos à comunicação matemática escrita a novas situações apresentadas nos problemas.

A intervenção pedagógica esteve ancorada na importância de trabalhar na disciplina de Matemática A as capacidades matemáticas transversais de resolução de problemas e comunicação matemática escrita, descritas nos documentos orientadores do currículo da disciplina (ME, 2018), atualmente em vigor, e que permanecem com uma igual importância no programa que vigorará a partir do próximo ano letivo (Carvalho e Silva et al., 2023). Todos os problemas selecionados para esta intervenção pedagógica foram cuidadosamente escolhidos para servirem os propósitos da investigação que pretendia realizar, mas também de modo a serem facilmente integrados na planificação das aulas, sem causar disrupções, ou perturbações. Por conseguinte, cada problema aborda tópicos ou subtópicos das AE de Matemática A do 11.º ano (ME, 2018) e foi escolhido em função dos conteúdos que foram lecionados nas aulas em que foram propostos aos alunos. Os problemas abordam o tema Funções, mais em específico as progressões geométricas, as sucessões e funções racionais. Em seguida apresento as tarefas usadas na intervenção pedagógica, assim como os seus objetivos e como foram implementadas em sala de aula.

3.2.1. Tarefa inicial – O que é a comunicação matemática escrita?

A intervenção pedagógica começou no dia 27 de janeiro com uma tarefa inicial, cujas produções escritas de cada aluno recolhi de forma a analisar a comunicação matemática escrita dos alunos na aula seguinte. Escolhi iniciar a intervenção pedagógica com uma

aula em que pretendia deixar claro o que significava a capacidade de comunicação matemática escrita assim como os critérios de avaliação dessa capacidade na resolução de problemas. Tal como vários autores referem (Sá, 2004; Santos & Pinto, 2018; Montalvo & Torres, 2004), o uso dos critérios não é eficaz se não existe um momento de interiorização e aceitação dos mesmos. Uma boa forma de trabalhar a apropriação desses critérios é criar momentos em sala de aula que possibilitem a interação entre alunos e discussões em grande grupo, permitindo que os alunos partilhem os seus entendimentos sobre os critérios e construam um entendimento partilhado entre todos e o professor (Santos & Gomes, 2006).

Neste sentido, durante uma aula, pedi aos alunos para resolverem um problema do seu manual (Figura 5). Os alunos não tinham conhecimento de que esta atividade seria a primeira fase da intervenção pedagógica pois pretendia que os alunos resolvessem o problema tal como o faziam habitualmente, sem eventualmente se sentirem condicionados ao saberem que estava a ser focada de modo particular a sua comunicação matemática escrita.



Figura 5 – Tarefa inicial (Neves et al, 2024, p. 179)

O problema aborda o tópico sucessões, mais especificamente as progressões geométricas, termo geral e a soma de n termos consecutivos. Este problema vai naturalmente ao encontro do programa atualmente em vigor (ME, 2018), mas também se adequa os seguintes objetivos estabelecidos nas novas aprendizagens essenciais: “reconhecer progressões geométricas, saber definir progressões geométricas através do 1.º termo e da razão e determinar a soma de n termos consecutivos de uma

progressão geométrica” (Carvalho e Silva et al., 2023, pp. 18-19). O problema retrata uma situação de uma mentira espalhada, em que cada pessoa conta a mentira a outras três pessoas, de 10 em 10 minutos, e pretende-se saber quantas pessoas já sabem a mentira ao fim de uma hora, contando a partir do momento em que quatro pessoas já a sabem.

Esta tarefa classifica-se como um problema (Ponte, 2005), uma vez que os alunos não conheciam de imediato o caminho pelo qual tinham de seguir para encontrar uma resposta e existia um objetivo definido. Para além disso, trata-se de uma tarefa fechada e de grau de dificuldade elevado, uma vez que não existe ambiguidade no enunciado e os alunos ainda estavam a consolidar os conhecimentos sobre progressões geométricas, não tendo feito nenhum problema deste tipo.

Após a recolha das produções escritas dos alunos, elaborei um documento onde incluí quatro resoluções diferentes adaptadas de resoluções dos alunos (Figura 6) para que, na aula seguinte, no dia 29 de janeiro, os alunos avaliassem a comunicação matemática escrita evidenciada em cada resolução, identificando os pontos fortes, fracos e aspetos a melhorar de cada resolução.

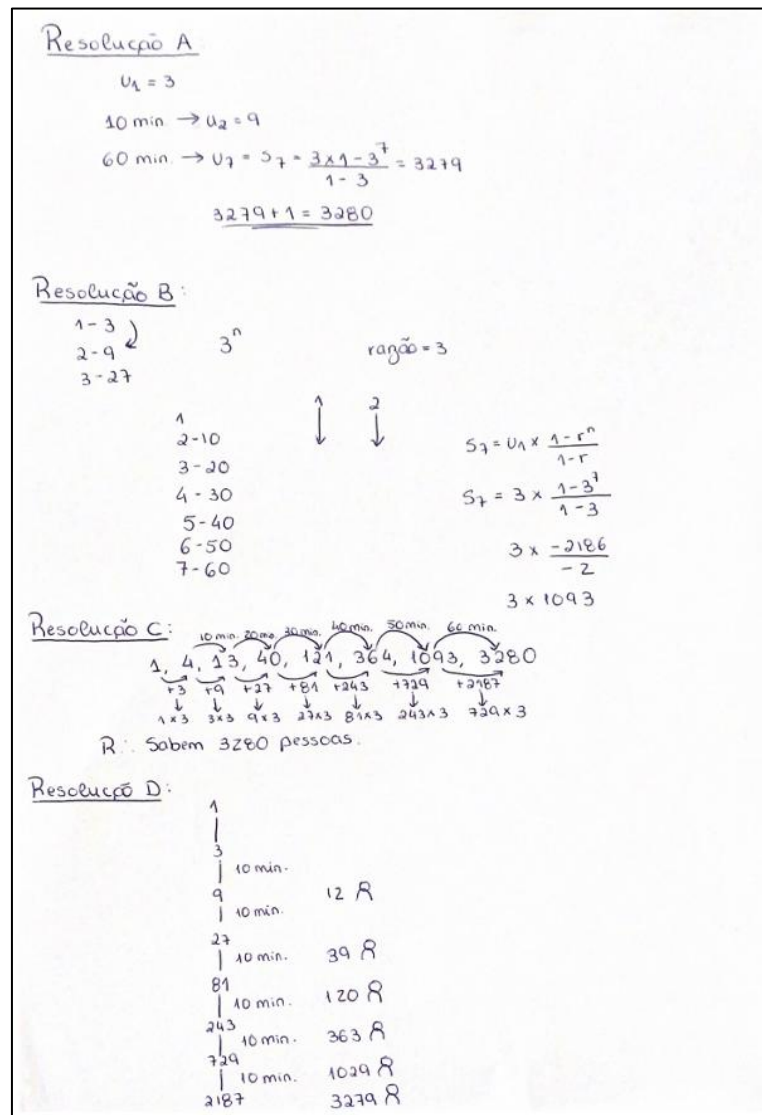


Figura 6 – Resoluções para a análise da comunicação matemática escrita

Escolhi estas quatro resoluções porque me serviram de exemplo para os aspetos que pretendia destacar relativamente à comunicação matemática escrita na resolução de problemas e que pretendia associar depois aos critérios de avaliação. Reescrevi eu mesma as resoluções que escolhi para que os alunos não fossem identificados pelos colegas através da sua caligrafia.

A primeira resolução está bem organizada; no entanto, o aluno não explica todos os seus passos, não utiliza sempre a notação correta e apresenta uma resposta ao problema de forma implícita. A segunda resolução está desorganizada e o aluno nem sequer acaba de resolver o problema; é difícil perceber o encadeamento de ideias e o aluno utiliza as representações de forma pouco adequada porque é difícil perceber o que estas representam na sua resolução. A terceira resolução corresponde a uma resolução organizada, completa, com uso de representações adequadas e uma

resposta explícita ao problema. Por fim, na quarta resolução, apesar de ser uma resolução organizada, a escolha das representações pode não ter sido a mais indicada porque gera algumas dúvidas sobre o que representa cada símbolo; além disso, o aluno apresenta uma resposta errada.

Como o conceito de comunicação matemática escrita é algo que os alunos podem desconhecer, comecei por esclarecer em que é que consiste e qual a sua importância para a aprendizagem da matemática. Para isso, pedi inicialmente a participação dos alunos para perceber o que entendiam por comunicação matemática escrita, articulando as suas ideias intuitivas com a definição desta capacidade matemática transversal. Os alunos reconheceram que uma boa comunicação matemática escrita implica apresentar uma resolução organizada e com todos os passos devidamente explicados. No entanto, não pareceram compreender a importância da utilização de representações adequadas nem da apresentação de uma resposta final. Estes aspetos foram introduzidos por mim através da formulação de questões orientadoras, com o objetivo de os levar à construção dos conceitos.

Após ter dado tempo aos alunos para realizar o que lhes tinha pedido, discuti em grande grupo os pontos fortes e fracos, e os aspetos a melhorar em cada uma das resoluções. De um modo geral, os alunos foram capazes de identificar as características essenciais de cada resolução, nomeadamente os aspetos que anteriormente destaquei. A principal dificuldade consistiu em compreender que, sempre que não conseguiam entender uma parte da resolução, isso indicava que determinados passos deveriam ter sido melhor explicados. Nessas situações, tendiam a solicitar a minha explicação, em vez de assinalarem essa ausência de justificação. Além disso, não foram capazes de identificar erros nas representações matemáticas utilizadas.

Posteriormente, distribui por todos os alunos uma folha com critérios gerais de autoavaliação da comunicação matemática escrita (Tabela 1), de forma a poderem aplicar os mesmos a cada uma das resoluções, colocando-se eles próprios na pele do autor de cada resolução.

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Organização	O meu trabalho está desorganizado.	O meu trabalho está mais ou menos organizado.	O meu trabalho está muito bem organizado.
Compleitude do processo de resolução	Não expliquei como pensei.	Expliquei parcialmente a forma como pensei.	Expliquei na totalidade a minha forma de pensar.
Representações matemáticas	Utilizei representações matemáticas desadequadas	Utilizei representações matemáticas adequadas, mas cometi algumas imprecisões	Utilizei adequadamente representações matemáticas
Apresentação da resposta	Não apresento resposta	Apresento a resposta de forma implícita	Apresento resposta de forma explícita
Correção da resposta à tarefa	A minha resposta está incorreta ou não consegui responder à tarefa.	A minha resposta está parcialmente correta.	A minha resposta está correta.

Tabela 1 – Critérios gerais de avaliação da comunicação matemática escrita

Para a construção dos critérios de avaliação, utilizei o quadro criado por Fernandes (2020c) (Figura 4) como guia e, como base, recorri a vários autores referidos no enquadramento teórico. Primeiro, foi necessário que os critérios de avaliação tivessem uma linguagem adequada aos alunos (Clareza) e que estivessem em concordância com o objetivo pretendido (Adequação) (Sadler, 1987, citado em Pinto, 2020; Fernandes, 2020c). Neste caso, como o objetivo era melhorar a comunicação matemática escrita dos alunos, foi importante identificar os aspetos centrais que esta capacidade envolve e sobre os quais se queria que os alunos melhorassem (Compleitude) (Fernandes, 2020c). Desta forma, decidi adaptar o quadro (Figura 1) utilizado por Martins e Martinho (2023) para caracterizar a comunicação matemática escrita, de forma aos alunos identificarem quais são as categorias em que o professor pretende que evoluam (Independência) (Fernandes, 2020c). Escolhi as categorias da correção, do nível de justificação, da resposta final e da organização (Martins & Martinho, 2023) porque me pareceu que estas categorias correspondem aos aspetos em que os alunos se podem focar para melhorar a comunicação matemática escrita, uma vez que os restantes se focam mais na caracterização da comunicação escrita em si. À categoria do nível de justificação de Martins e Martinho (2023), chamei Compleitude do processo de resolução, porque me pareceu que seria um termo mais perceptível aos alunos. Para além disso, adicionei a categoria das representações na perspetiva de serem utilizadas de uma forma adequada ou desadequada, tendo em conta que estas também influenciam numa boa comunicação do aluno (Carvalho e Silva et al., 2023). Vários

autores (Serrazina, 2018; NCTM, 2007; Carvalho e Silva, 2022) sublinham esta relação estreita entre as representações utilizadas na resolução de tarefas e a comunicação matemática escrita. Tendo em conta que, as representações são a forma de externalizar como os alunos pensam e permitem ao professor aceder a essa informação, para uma análise da comunicação matemática é implicativo também fazer uma análise das representações.

Após ter selecionado e definido as categorias que caracterizam a comunicação matemática escrita na resolução de problemas, olhei para elas na perspetiva de se constituírem nos critérios de avaliação que pretendia trabalhar com os alunos. Assim, foi necessário definir os níveis de desempenho de cada critério (Observável (Fernandes, 2020c)) dando uma descrição detalhada do que cada nível corresponde (Devem permitir descrever níveis de desempenho) utilizando uma linguagem simples e clara (Pinto, 2020; Fernandes, 2020b; Sadler, 1987, citado em Pinto, 2020). Assim, atribuí três níveis a cada critério, descrevendo o que é necessário para o aluno se enquadrar em cada nível.

Esta primeira aula da intervenção pedagógica foi planeada para os alunos se consciencializarem da importância da comunicação matemática escrita na resolução de problemas, assim como se apropriarem dos critérios de avaliação que usariam futuramente a par da resolução dos problemas seguintes da intervenção pedagógica. Durante a aula, observei que existia uma maior preocupação por parte dos alunos com a correção da resposta do que com a análise da comunicação matemática escrita. Se observassem que a resposta estava incorreta, classificavam a resolução com o nível mais baixo em todos os critérios não tendo em atenção a que correspondia cada um. Nesse sentido, decidi modificar os critérios de avaliação eliminando o que correspondia à correção da resposta. Para além disso, acrescentei uma pergunta aberta sobre aspetos que deveriam melhorar na comunicação matemática escrita, tendo em conta que esta intervenção pedagógica tinha como objetivo proporcionar momentos de avaliação reguladora das aprendizagens, obrigando os alunos a refletir sobre os aspetos que precisam melhorar e a tomar consciência sobre eles. Para a restante intervenção pedagógica, os critérios utilizados pelos alunos foram os que constam na Tabela 2.

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Organização	O meu trabalho está desorganizado.	O meu trabalho está mais ou menos organizado.	O meu trabalho está muito bem organizado.
Completo do processo de resolução	Não expliquei como pensei.	Expliquei parcialmente a forma como pensei.	Expliquei na totalidade a minha forma de pensar.
Representações matemáticas	Utilizei representações matemáticas desadequadas	Utilizei representações matemáticas adequadas, mas cometi algumas imprecisões	Utilizei adequadamente representações matemáticas
Apresentação da resposta	Não apresento resposta	Apresento a resposta de forma implícita	Apresento resposta de forma explícita
Aspetos a melhorar relativamente à comunicação matemática escrita (aspetos a melhorar na forma como explico por escrito como pensei para resolver o problema):			

Tabela 2 – Critérios gerais de avaliação da comunicação matemática escrita atualizados

3.2.2. Problema 1

Nos dias 17 e 19 de fevereiro apliquei o meu primeiro problema para ser resolvido em duas fases. Na primeira data os alunos receberam uma folha com o primeiro problema (Figura 7) para resolverem e os novos critérios de avaliação com as modificações já feitas e indicadas na Tabela 2.

Problema 1 - O jardim da Mariana

A Mariana recebeu uma planta no seu 15º aniversário e plantou-a no seu jardim.

A partir dessa data, a planta cresce todos os anos, ficando com uma altura 1,2 vezes superior à do ano anterior.

Sabendo que a planta, no ano em que a Mariana fez 18 anos, tinha uma altura de 34,5cm, determine a altura da planta no seu 24º aniversário.

Apresente o resultado em centímetros, com aproximação às unidades.



Figura 7 – Problema 1

Como os alunos tinham introduzido há pouco tempo as progressões geométricas, queria encontrar um problema que não tivesse um grau de exigência alto, que não

impossibilitasse os alunos de começar a sua resolução. Dessa forma, após várias pesquisas, verifiquei que muitos problemas de progressões geométricas envolviam o trabalho com percentagens. Ora, as percentagens, pelo que tinha observado nos meus alunos, colocavam-lhes grandes dificuldades, pelo que não quis que a inclusão das percentagens fosse um fator decisivo para os alunos conseguirem ou não resolver o problema. Pretendia que fossem capazes de, pelo menos, começar a sua resolução para assim ser possível analisar a comunicação matemática escrita. Deste modo, decidi criar um problema que abordasse o subtópico progressões geométricas, mas que não exigisse o cálculo de percentagens. Escolhi o tema do jardim por se encontrar dentro do tema do plano anual de atividades da escola, a sustentabilidade.

Este problema ia ao encontro do objetivo de aprendizagem “resolver problemas envolvendo progressões geométricas (termo geral)” do programa em vigor (ME, 2018, p. 7), mas também é compatível com os objetivos de aprendizagem relativos a progressões geométricas presentes nas novas AE relativamente ao 11.º ano (Carvalho e Silva et al., 2023). Este problema retrata a situação do crescimento de uma planta ao longo dos anos, sendo o seu crescimento modelado por uma progressão geométrica, e pretende-se saber a altura da planta num determinado ano.

Esta tarefa classifica-se como um problema (Ponte, 2005) dado que os alunos precisavam de primeiro reconhecer que se trata de uma progressão geométrica, não sendo conhecido de início o caminho para chegar a uma resposta, o que dá à tarefa um grau de dificuldade elevado. Para além disso, está definido no enunciado qual é o objetivo, portanto, trata-se de um enunciado em ambiguidade no seu enunciado.

Foram dados cerca de 30 minutos para os alunos resolverem o problema de forma a garantir que o tempo não seria um fator que conduzisse ao insucesso na resolução do problema. Para facilitar a resolução do problema, decidi relembrar como identificávamos uma progressão aritmética e uma progressão geométrica criando uma pequena discussão em sala de aula. Pedi aos alunos para definir cada uma das progressões com o meu auxílio na construção desses conceitos. Para esclarecer a dúvida relativa ao primeiro termo ser o 15.º aniversário decidi não ter nenhuma intervenção pois podia influenciar a forma como os alunos escreviam a sua resolução e assim afetar os resultados. Após a conclusão da sua resolução, pedi aos alunos para se autoavaliarem utilizando os critérios de avaliação da Tabela 2.

Na segunda data distribuí aos alunos as suas produções escritas com feedback escrito, dado por mim, sobre a comunicação matemática escrita e sobre a autoavaliação

realizada. Pedi aos alunos para resolverem de novo o problema melhorando os aspetos que os mesmos tinham destacado na autoavaliação e os aspetos que eu tinha destacado através do meu feedback. Para garantir que o feedback era compreendido, circulei pelos lugares esclarecendo dúvidas sobre o meu feedback, mas sem interferir na forma como os alunos deveriam melhorar a sua comunicação matemática escrita. Para esta segunda fase dei cerca de 20 minutos aos alunos, uma vez que já tinham tido contacto com o problema e tinha apenas o objetivo de melhorarem a comunicação matemática escrita.

3.2.3. Problema 2

A aplicação do segundo problema (Figura 8) em duas fases realizou-se nos dias 10 e 12 de março. No dia 10 de março, pedi aos alunos para resolverem o segundo problema da intervenção pedagógica tendo estabelecido 30 minutos para a resolução do mesmo.

Problema 2 – Laboratório de bactérias

Num teste laboratorial, são feitas contagens do número de bactérias, em milhares, de duas colónias A e B; na n -ésima contagem após o início da experiência, esses números são dados, respetivamente, por:

$$A(n) = \frac{20}{n+1} \text{ e } B(n) = \frac{20n-5}{n}$$

1. O que podes concluir sobre o crescimento da colónia A? E o da colónia B?
2. Se o teste laboratorial se prolongasse por tempo indefinido, e admitindo que as expressões A_n e B_n continuavam válidas, o que aconteceria à população de cada uma das colónias?



Figura 8 – Problema 2 (adaptado de Costa & Rodrigues, 2024, p. 89)

Este problema foi adaptado de um problema (Figura 9) do manual de matemática A do 11.º ano *Novo Espaço*. O manual em questão não é o manual adotado da escola; no entanto, era o que apresentava problemas mais ricos e com contextos mais diversificados acerca deste conteúdo. Como o problema original tinha muitas alíneas, decidi remover a segunda e terceira alíneas por serem as menos interessantes para analisar a comunicação matemática escrita e não envolverem os conteúdos que os alunos estavam a trabalhar naquele momento. Para além disso, modifiquei a primeira alínea de forma a aumentar ligeiramente o grau de dificuldade.

PROPOSTA 82 Num teste laboratorial, são feitas contagens do número de bactérias, em milhares, de duas colónias A e B ; na n -ésima contagem após o início da experiência, esses números são dados, respetivamente, por:

$$A_n = \frac{20}{n+1} \text{ e } B_n = \frac{20n-5}{n}$$

82.1. Mostra que, no decorrer do teste, a população da colónia A foi diminuindo e a da colónia B foi aumentando.

82.2. Determina, em percentagem, a redução do número de bactérias da colónia A da 1.ª para a 2.ª contagem.

82.3. Calcula $\frac{B_2}{B_1}$, com aproximação às milésimas, e interpreta o resultado no contexto da situação descrita.

82.4. Se o teste laboratorial se prolongasse por tempo indefinido, e admitindo que as expressões para A_n e B_n continuavam válidas, o que aconteceria à população de cada uma das colónias?



Figura 9 – Problema inspirador do problema 2 da intervenção pedagógica (Costa & Rodrigues, 2024, p. 89)

O problema 2 da intervenção pedagógica insere-se no subtópico sucessões do programa em vigor (ME, 2018), trabalhando sucessões monótonas e o conceito de limite de uma sucessão (casos de convergência). Nas novas AE (Carvalho e Silva et al., 2023), este problema pode ser aplicado apelando ao recurso da tecnologia para o resolver, possibilitando que os alunos compreendam graficamente o comportamento de sucessões. O problema retrata uma situação relativa ao estudo do crescimento de duas colónias de bactérias e pretende-se verificar se as colónicas apresentam algum crescimento e se, ao longo do tempo, se aproximariam de algum valor.

Esta tarefa é um problema (Ponte, 2005) pois os alunos têm acesso claro aos dados e ao objetivo da tarefa, não sendo evidente a estratégia que devem escolher para a resolver. Para além disso, os alunos têm dificuldade em associar as propriedades das sucessões às situações dos enunciados e, portanto, trata-se de uma tarefa com grau elevado de dificuldade.

No fim da resolução, pedi aos alunos para aplicarem os critérios de avaliação às duas questões em conjunto e não a cada uma em separado. Se pedisse a autoavaliação isoladamente de cada pergunta corria o risco dos alunos se autoavaliarem de forma pouco consciente para serem mais rápidos. Desta forma, pude transmitir aos alunos que a comunicação matemática escrita é uma capacidade transversal a todo o problema e não deve ser analisada isoladamente em cada alínea.

No dia 12 de março devolvi aos alunos as suas produções escritas com o meu feedback escrito sobre a comunicação matemática escrita e a autoavaliação realizada. Dei aos alunos 20 minutos para melhorarem as suas resoluções com o apoio do meu feedback.

3.2.4. Problema 3

A primeira fase do terceiro e último problema (Figura 10) da minha intervenção pedagógica foi aplicada no dia 26 de março e a segunda fase no dia 31 de março.

Problema 3 – A nova fórmula de Manuel

Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio eletrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às 8:00 e sair às 12:00. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois das 12:00.

Sempre que um trabalhador chega t minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia que ele tem de permanecer na empresa, é dado por:

$$C(t) = \frac{t^2 + 36t}{t + 1}$$

Ao sair da empresa, o Manuel pensou “Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar mais de meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.”

Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à Administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 60% desse tempo.

Verifica se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor.



Figura 10 – Problema 3 (adaptado de Neves et al, 2024, p. 136)

O terceiro problema foi um problema adaptado de um problema (Figura 11) do manual de preparação para o exame final nacional de matemática B do 11.º ano. O problema original exigia muito tempo para a sua resolução e, portanto, decidi escolher apenas a terceira alínea, que envolvia resolução de inequações de funções irracionais, algo que os alunos estavam a trabalhar naquele momento. Para além disso, alterei o enunciado, removendo os passos que os alunos deviam seguir de forma a não limitar os alunos a uma única estratégia e aumentando o grau de dificuldade da tarefa. Oralmente, alertei os alunos que tanto podiam resolver analiticamente como recorrendo à calculadora gráfica.

13. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio eletrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às 8:00 e sair às 12:00. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois das 12:00. Sempre que um trabalhador chega t minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia que ele tem de permanecer na empresa, é dado por:

$$c(t) = \frac{t^2 + 36t}{t + 1} \quad (t \geq 0)$$

13.1. Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às 9:15. A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato? Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

13.2. Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12:36. Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

13.3. Ao sair da empresa, o Manuel pensou: “Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar mais de meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.” Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à Administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 60% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 min seria compensado com 16 min de trabalho depois do meio-dia). Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:

- justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa quando se atrasa t minutos, é dado por $p(t) = 1,6t$;
- refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;
- considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:
 - o atraso;
 - o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora para comparar os gráficos das duas funções (c e p); transcreva para o seu caderno esses gráficos e assinale os pontos relevantes que lhe permitem responder às questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.

Figura 11 – Problema inspirador do problema 3 da intervenção pedagógica (Neves et al, 2024, p. 136)

Tendo em conta o programa curricular atualmente em vigor (ME, 2018), este problema enquadra-se no subtópico funções de variável real e tem como objetivo os alunos “reconhecerem, interpretar e representarem graficamente funções racionais ... na resolução de problemas e em contextos de modelação” (p. 7). Nas novas AE (Carvalho e Silva et al., 2023), este problema pode ser aplicado com o objetivo de os alunos serem capazes de resolver problemas “envolvendo funções racionais em contextos de modelação” (p. 27). O problema apresenta uma situação em que os alunos têm de avaliar duas propostas para a compensação dos tempos de atraso dos trabalhadores de uma empresa, escolhendo a que é sempre mais favorável para os trabalhadores.

Esta tarefa é um problema (Ponte, 2005), uma vez que exige aos alunos criar uma expressão para a segunda proposta, identificar que precisavam de resolver uma inequação para responder ao problema e verificar a solução apenas no domínio da situação apresentada. Portanto, o caminho a adotar não é facilmente encontrado e o grau de dificuldade da tarefa é elevado. O enunciado apresentado é também claro e identifica-se facilmente o que é dado e o que é pedido. Como o grau de dificuldade deste problema era mais elevado que os restantes problemas da minha intervenção

pedagógica, dei mais 10 minutos aos alunos, isto é, 40 minutos para o resolverem, para posteriormente aplicarem os critérios de avaliação.

Ao circular pelos lugares verifiquei que a frase dita pelo Manuel no enunciado para dar contexto à criação da sua proposta gerou algumas dúvidas e os alunos não eram capazes de identificar que apenas se tratava de contexto e que não era essencial para a resolução do problema. Após reflexão, podia ter eliminado essa frase do enunciado, uma vez que não é necessária para a resolução da tarefa; no entanto, também é importante que os alunos tenham contacto com tarefas em que há informação a mais, caso contrário, desenvolvem a ideia de que toda a informação que precisam está no enunciado e que toda deve ser usada. Na segunda fase do problema, distribuí aos alunos as suas produções escritas com os respetivos feedbacks, de forma a resolverem de novo o problema com as correções necessárias.

Para sumarizar a organização ao longo do tempo desta intervenção pedagógica, elaborei o esquema apresentado na figura 12. Este esquema pretende mostrar quando se realizaram as primeiras e segundas fases de cada problema, assim como quando foi dado feedback aos alunos e com que propósitos.

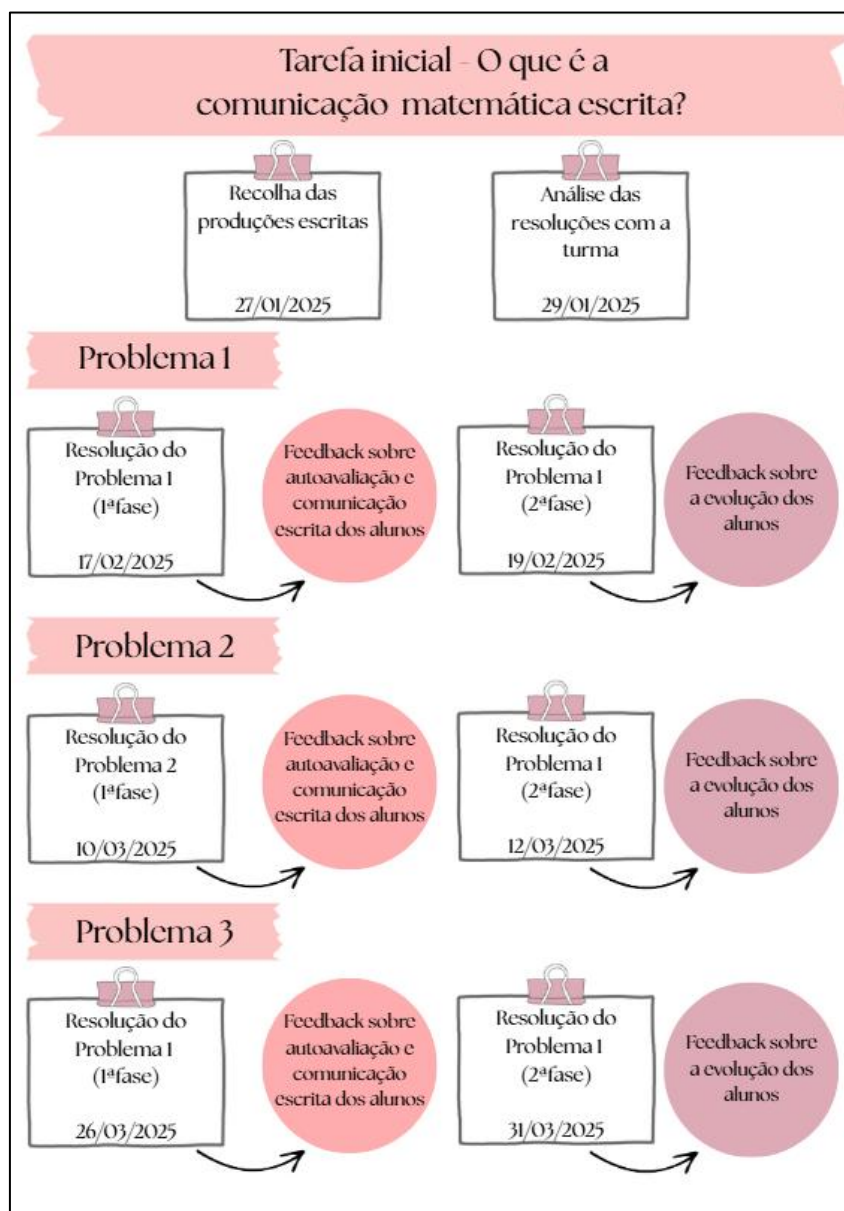


Figura 12 – Organização da intervenção pedagógica

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, apresento e justifico as escolhas metodológicas feitas para este estudo. Caracterizo os participantes nesta investigação e as razões para a sua seleção. Para além disso, descrevo os métodos e procedimentos de recolha de dados utilizados nesta investigação e a forma como estes foram analisados. Por fim, esclareço as questões de natureza ética relativas ao estudo em questão.

Esta investigação seguiu uma metodologia de natureza qualitativa e carácter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008) com o objetivo de compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas e como os integram na melhoria das suas produções; foi também minha intenção compreender como os alunos percecionam o papel desses critérios na melhoria das suas aprendizagens. Assumindo um papel de professora-investigadora, recolhi dados de natureza qualitativa com vista a responder às minhas questões de investigação. Com este trabalho não pretendi fazer uma generalização dos resultados obtidos, mas sim uma análise dos dados relativos aos alunos que participaram neste estudo num ambiente específico, sendo evidente o seu carácter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008).

Apesar de ter realizado a minha intervenção pedagógica numa turma do 11.º ano em que todos os elementos participaram, num total de 18 alunos, para a recolha e análise dos dados tive a necessidade de selecionar um grupo mais pequeno de alunos, três no total, dado o objetivo final de realização desta investigação: a elaboração do meu Relatório de Estágio. Neste sentido, a seleção destes três alunos como participantes no estudo teve por base o seu desempenho ao longo da intervenção pedagógica, de forma a garantir uma maior diversidade e uma visão o mais geral possível da turma. Assim, selecionei um aluno que, em todos os momentos da intervenção pedagógica, apresentou uma melhoria significativa entre a primeira e a segunda fases e outros dois alunos que, apesar de demonstrarem algumas melhorias, não o demonstram em todos os aspetos da comunicação matemática escrita que analisei. Para existir uma maior heterogeneidade dos dados, dentro dos alunos que nem sempre melhoraram na totalidade as suas resoluções, selecionei um aluno que tem um bom desempenho académico e outro que tem um desempenho académico suficiente. Não foi possível selecionar os alunos também pela capacidade de se autoavaliarem pois não existiu

nenhum aluno que se destacasse nesse aspeto e todos os alunos sem exceção melhoraram em alguns aspetos da comunicação matemática escrita, isto é, não houve nenhum aluno que não tenha melhorado as suas produções escritas da primeira para a segunda fase.

Para a recolha de dados decidi utilizar: (i) a recolha das produções escritas dos alunos relativas às resoluções dos três problemas realizadas em duas fases; (ii) o feedback escrito fornecido por mim após cada fase; (iii) entrevistas semiestruturadas aos alunos no final da intervenção pedagógica; e (iv) notas de campo recolhidas através das observações realizadas por mim tanto no papel de professora como no de investigadora.

A recolha das *produções escritas dos alunos* nas duas fases de resolução dos problemas permitiu recolher dados para responder à questão de como os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas e como os integram na melhoria das suas produções. Com a análise das resoluções dos alunos é possível verificar se os alunos evoluíram entre as duas fases. Em específico, as respostas à primeira fase permitem verificar se os alunos são capazes de utilizar os critérios de avaliação para se autoavaliarem e de que forma se apropriam dos mesmos. Já as respostas à segunda fase são essenciais para identificar se existiram progressos nas suas resoluções e de que forma os alunos utilizaram os critérios para melhorar as suas resoluções. De forma a ser mais simples, para analisar a comunicação matemática escrita dos alunos, adaptei os critérios de avaliação utilizados pelos alunos para uso na perspetiva do investigador (Tabela 3), tendo por base o quadro de caracterização da comunicação matemática escrita de Martins e Martinho (2023):

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Organização	A resolução está desorganizada, não permitindo ao leitor seguir devidamente a resolução apresentada	A resolução não está totalmente organizada, havendo partes que exigem ao leitor fazer ligações entre as diferentes etapas para perceber quais devem ser lidas primeiro	A resolução está bem organizada, tendo um fio condutor que permite o leitor seguir a resolução do princípio ao fim sem problemas
Completo do processo de resolução	Não apresenta qualquer justificação para a resposta apresentada, ou apresenta justificações vagas ou pouco claras	Apresenta quase todas as justificações necessárias, mas não as suficientes	Apresenta todas as justificações necessárias
Representações matemáticas	Utiliza representações matemáticas desadequadas	Utiliza representações matemáticas adequadas, mas comete algumas imprecisões	Utiliza adequadamente representações matemáticas
Apresentação da resposta	Não apresenta uma resposta explícita nem implícita	Não apresenta uma resposta explícita para o problema, mas é possível subentender qual é a resposta ou apresenta uma resposta incompleta	Apresenta uma resposta explícita para o problema e completa

Tabela 3 – Quadro usado na análise da comunicação matemática escrita na resolução de problemas

Estes dados de natureza documental foram fulcrais para ter acesso a informação que não podemos encontrar usando outros instrumentos de recolha de dados e que através da observação não fui capaz de perceber (Carmo & Ferreira, 2018).

O *feedback escrito* fornecido por mim aos alunos entre fases foi recolhido com o objetivo de complementar os dados, uma vez que este teve uma influência na evolução dos alunos entre as duas fases. A análise do feedback fornecido também ajuda a dar resposta às duas primeiras questões da investigação: (i) Como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas? e (ii) Como os integram na melhoria da capacidade da comunicação matemática escrita na resolução de problemas? Para além disso, a análise do feedback por mim fornecido (em particular acerca da sua eficácia) também me ajuda a refletir sobre a própria intervenção pedagógica e sobre a minha capacidade de contribuir, com este modo de operacionalizar a avaliação reguladora, para a melhoria da capacidade de comunicação matemática escrita dos alunos.

As *entrevistas* foram realizadas no final da intervenção pedagógica com o objetivo de esclarecer algumas questões que surgiram ao longo da análise dos dados recolhidos através dos outros instrumentos usados. Para além disso, foram importantes para poder

responder à última questão de investigação deste estudo: Quais as perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria das suas aprendizagens? Como era importante captar os pensamentos pessoais e as sensações dos alunos, de forma a compreender a sua perspetiva sobre os critérios de avaliação na melhoria das aprendizagens, recorri à realização de entrevistas, uma vez que este instrumento permite aceder a essas mesmas informações (Vale, 2004). Além disso, permite aceder à perspetiva do entrevistado sobre um determinado tema, neste caso, ao papel dos critérios de avaliação na melhoria das suas aprendizagens. Como o objetivo era esclarecer algumas ambiguidades que foram surgindo ao longo da análise dos dados recolhidos, assim como ouvir as opiniões dos alunos acerca da sua experiência, escolhi realizar entrevistas semiestruturadas (Amado, 2014). Desta forma, as questões colocadas tiveram por base um guião previamente elaborado; no entanto, permiti-me alterar a ordem das mesmas quando necessário ou colocar outras questões pertinentes que surgiram com as respostas dos alunos. Assim, uma entrevista semiestruturada possibilita uma conversa mais fluida, num registo mais informal, onde os alunos se sentem à vontade para responder, captando as informações de uma forma imediata e de acordo com o pretendido (Amado, 2014). As entrevistas foram realizadas online, de forma a não obrigar os alunos a deslocarem-se à escola, através da plataforma Zoom, e tiveram uma duração de cerca de 20 minutos cada uma. Tirando partido das funcionalidades da plataforma utilizada, as entrevistas foram gravadas em áudio. Foi deixado ao critério dos alunos terem a câmara oculta ou não. Para análise das entrevistas, transcrevi-as parcialmente de acordo com o que seria útil para a apresentação dos resultados.

Por fim, as *notas de campo* foram recolhidas ao longo de toda a intervenção pedagógica através de observações enquanto os alunos realizavam as duas fases dos três problemas. Este instrumento é importante para completar as informações recolhidas através dos restantes instrumentos (Amado, 2014).

Em relação às questões éticas relativas a este estudo, foram enviados em papel, a cada encarregado de educação, os pedidos de autorização, por escrito, para a participação dos seus educandos na investigação. O documento enviado solicitava tanto o consentimento informado dos encarregados de educação como o assentimento informado dos alunos para a participação no estudo, ficando claro que a sua participação ou não participação não tinha nenhum efeito na classificação da disciplina de Matemática A, e que podiam desistir a qualquer momento, sem necessidade de qualquer justificação. Dos 18 alunos que compunham a turma, todos participaram na

intervenção pedagógica, uma vez que esta estava inserida no âmbito das práticas letivas. No entanto, apenas 13 alunos consentiram formalmente a participação na investigação. Neste estudo, participaram estes 13 alunos, mas, de acordo com os critérios descritos anteriormente, foram selecionados três deles como informantes privilegiados. Assim, as evidências que são apresentadas aquando da análise e discussão de resultados deste estudo, no próximo capítulo, provêm desses três alunos, nomeadamente, as suas produções escritas (primeira e segunda fases de resolução dos problemas da intervenção pedagógica, que incluíam uma autoavaliação), e as suas respostas às entrevistas realizadas. Para além disso, todos os dados que foram recolhidos mantiveram-se confidenciais e foi assegurado o anonimato de todos os participantes envolvidos na investigação através da utilização de nomes fictícios: Rosa, Miguel e André.

5. Apresentação e discussão de resultados

Neste capítulo, são apresentados e analisados os resultados tendo em conta as questões de investigação a responder e o objetivo global do estudo. A apresentação e discussão dos resultados serão divididas de acordo com os três momentos centrais da intervenção pedagógica, cada um associado a cada problema trabalhado em duas fases com os alunos. Os resultados serão apresentados com base em evidências provenientes dos vários instrumentos usados para recolha de informação, em particular as produções escritas relativas à primeira fase, à segunda fase e ao meu feedback em cada um destes momentos. Algumas notas de campo, assim como excertos das entrevistas serão apresentados ao longo de todo este capítulo quando for útil para o contexto e para retirar informações mais fidedignas.

Os resultados apresentados correspondem apenas ao progresso dos três alunos selecionados de acordo com os critérios já explicitados no capítulo anterior, assim como pelos motivos apresentados previamente. Desta forma, em cada problema serão apresentados os progressos de cada aluno ao longo das duas fases. Para isso, é importante fazer uma caracterização mais pormenorizada dos alunos participantes.

A Rosa é uma aluna com um bom desempenho académico na disciplina de matemática tendo uma classificação de 17 valores, destacando-se a sua vontade de melhorar e o seu trabalho em sala de aula. O Miguel apresenta bons resultados na disciplina de matemática, tendo uma classificação de 17 valores, mas é notória a sua distração nas aulas e a presença contínua de conversas paralelas; no entanto, também é visível a sua vontade de fazer melhor. O André tem um desempenho suficiente na disciplina de matemática, tendo uma classificação de 12 valores; revela distração na sala de aula e, por vezes, falta de vontade de trabalhar; contudo, quando se interessa, esforça-se para fazer melhor.

5.1. Problema 1 da intervenção pedagógica

O primeiro problema (Anexo 2) apresentado na intervenção pedagógica abordava conteúdos relativos às progressões geométricas e exigia conhecimentos como a definição de progressão geométrica e o termo geral da mesma. Ao longo da resolução desta tarefa surgiram algumas dúvidas, primeiro em identificar que se tratava de uma progressão geométrica e depois em verificar que o 15.º aniversário da Mariana correspondia ao primeiro termo da sucessão. Nas secções seguintes, analiso de modo

detalhado as resoluções dos alunos selecionados, recorrendo ao quadro apresentado na Tabela 3 para guiar a análise a minha interpretação dos dados recolhidos.

Analisando em particular a resolução dos alunos selecionados:

5.1.1. Resolução da Rosa

Na primeira fase do problema, Rosa apresenta uma resolução organizada e em que explica totalmente como pensou (Figura 13). No entanto, utiliza um símbolo para apresentar a resposta que não é adequado e apenas apresenta o resultado sem escrever uma resposta que o relacione com o contexto da situação apresentada. Desta forma, nem as representações matemáticas nem a apresentação de resposta se encontram no nível 3 da tabela criada para analisar a comunicação matemática escrita dos alunos na resolução de problemas (Tabela 3).

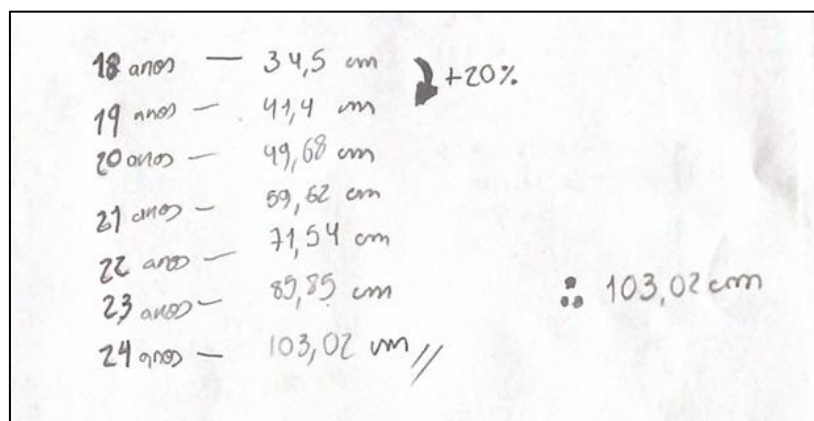


Figura 13 – Resolução da Rosa do problema 1 (1ª fase)

A tabela 4 reúne os níveis atribuídos por mim em cada critério de avaliação da comunicação matemática escrita atribuída à resolução da Rosa.

Organização	Compleitude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 2

Tabela 4 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 1 (1ª fase)

O meu feedback dado à resolução da Rosa foi orientado precisamente para a notação (o uso do símbolo $\therefore$ para apresentar resposta) que a aluna utilizou (Figura 14). Decidi explicar o significado da mesma pois entendi que a aluna não sabia o que significava e usava este símbolo de forma generalizada, sem o significado devido. A aluna utilizou este símbolo ($\therefore$), muito provavelmente por tê-lo observado num professor ao apresentar

uma resposta. Tal como já referi no Capítulo 3, os alunos desta turma tendem a replicar o que é apresentado no quadro, sem procurarem compreender o seu significado ou o contexto em que deve ser utilizado. É possível que a aluna tenha visto esse símbolo no quadro e, a partir daí, o tenha passado a utilizar nas suas próprias respostas. Para além disso, como a aluna não escreveu uma frase na resposta inserindo o resultado no contexto do problema, decidi alertar para essa necessidade.

Analisando o meu feedback dado neste momento tendo em conta o que Hattie e Timperley (2007) propõem para um feedback eficaz, penso que, em vez de ter fornecido dicas para a Rosa conseguir responder à pergunta “O que fazer a seguir?”, acabei por lhe dar a resposta e condicioná-la a um único tipo de representação para a apresentação da resposta. Após esta reflexão, acredito que poderia apenas ter indicado o significado do símbolo que a aluna estava a usar e permitir-lhe descobrir autonomamente que outra representação poderia usar.

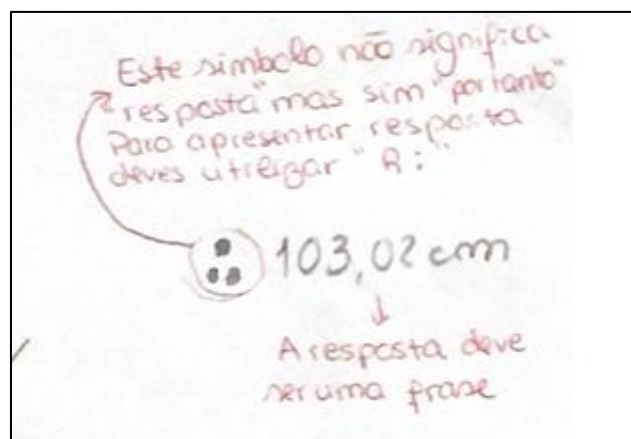


Figura 14 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 1 (1ª fase)

Ao analisar a autoavaliação da Rosa, apoiada nos critérios de avaliação, é possível notar que a aluna se avalia num nível 2 nas representações matemáticas (Figura 15). Com esta autoavaliação, seria de esperar que ela tivesse noção que cometera algumas imprecisões na utilização das representações. No entanto, após ler a sua frase relativa aos aspetos que deveria melhorar, ela destaca que deveria usar mais representações matemáticas e não corrigir as representações que usou. Assim, ao analisarmos a sua autoavaliação só olhando para os níveis atribuídos em cada critério de avaliação da comunicação matemática escrita, até encontramos uma autoavaliação bastante consciente; contudo, ao incluirmos a frase escrita na sua autoavaliação, conseguimos perceber que a Rosa não se conseguiu autoavaliar corretamente. Como tive a sensação

de que a aluna pensava que quanto mais representações usasse, melhor ficava a sua resolução, decidi fornecer feedback focando-me nessa ideia (Figura 16).

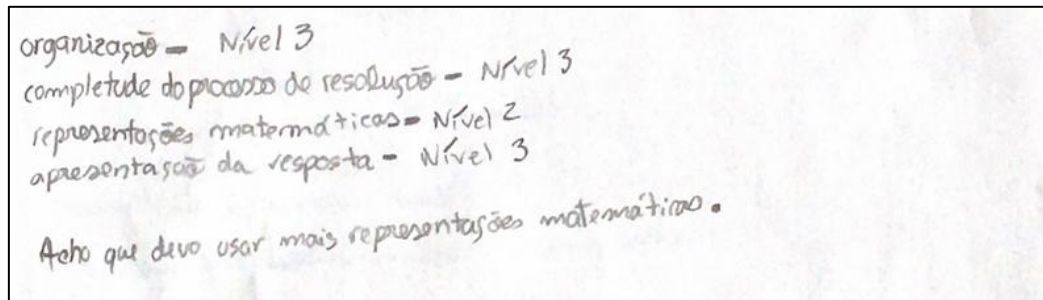


Figura 15 – Autoavaliação da Rosa do problema 1

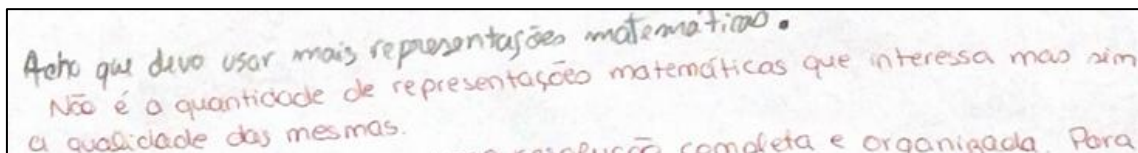


Figura 16 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 2 (1ª fase)

A aluna autoavalia-se corretamente nos critérios da organização e completude do processo de resolução. Mas não verifica que não apresenta uma resposta completa ao problema. Tal como Sadler (2010) e Santos e Pinto (2018) defendem, o feedback que forneci (Figura 17) teve como objetivo não apenas destacar os aspetos que a aluna ainda precisava de melhorar, mas também reforçar e valorizar os elementos da sua resolução que já estavam bem conseguidos.

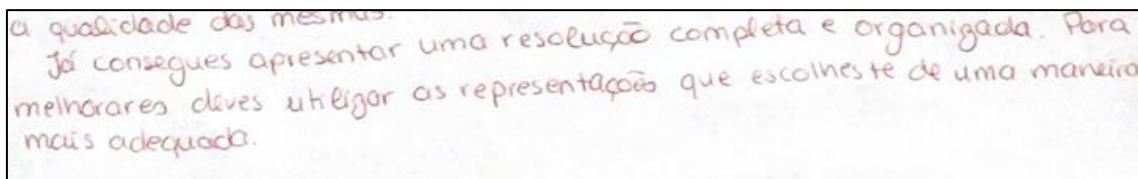


Figura 17 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 – Parte 3 (1ª fase)

Na segunda fase da resolução do problema, a Rosa apresenta uma resolução (Figura 18) completa e organizada e em que melhora todos os aspetos assinalados. Portanto, considero que a aluna progrediu em todos os aspetos.

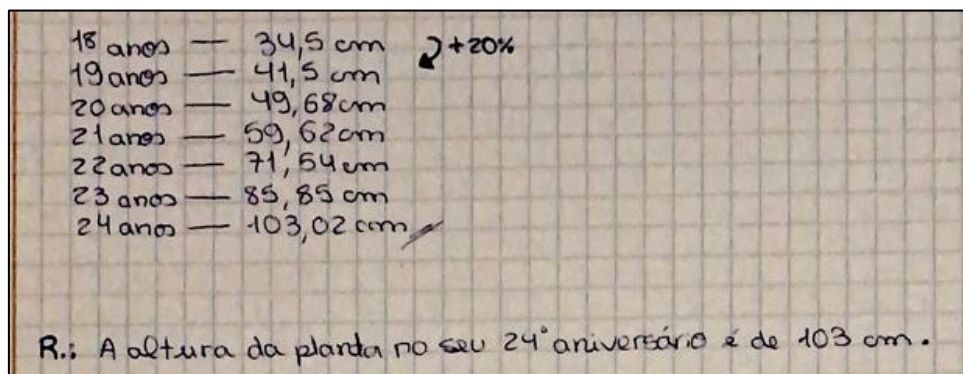


Figura 18 – Resolução da Rosa do problema 1 (2ª fase)

A tabela 5 apresenta os níveis obtidos em cada critério da comunicação matemática escrita da Rosa em que foquei a minha análise, na segunda fase da resolução do problema 1.

Organização	Compleitude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 5 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 1 (2ª fase)

Através da autoavaliação realizada pela aluna na primeira fase da resolução do problema, é possível verificar que esta não conseguiu utilizar os critérios de forma eficaz para identificar o que precisava de corrigir na sua resposta. No entanto, tendo em conta que a Rosa melhorou significativamente a sua resolução, pode presumir-se que recorreu ao feedback que lhe foi fornecido, baseado nesses mesmos critérios, para realizar as melhorias.

O objetivo do meu feedback depois desta segunda fase foi ser mais informativa sobre o progresso da aluna e não faria sentido que fosse tão detalhado como o anterior. Como a aluna melhorou em todas as categorias de análise da comunicação matemática escrita em que precisava melhorar, destaquei precisamente isso como forma de incentivo a continuar este bom trabalho (Figura 19).

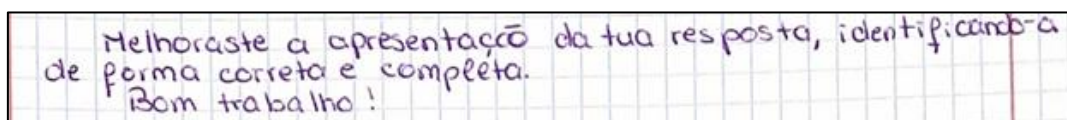


Figura 19 – Feedback à resolução da Rosa do problema 1 (2ª fase)

5.1.2. Resolução do Miguel

O Miguel, na primeira fase da resolução do primeiro problema, apresenta uma resolução em que todos os aspetos relativos à comunicação matemática escrita precisavam de ser melhorados (Figura 20).

Handwritten work showing calculations for a problem. The work is messy and lacks organization. It includes calculations for area and perimeter of a rectangle, with some corrections and a final answer boxed.

$$\begin{aligned}
 & 345 \times 12 = 4140 \\
 & 4140 \times 12 = 49680 \\
 & 49680 \times 12 = 596160 \\
 & 596160 \times 12 = 7153920 \\
 & 7153920 \times 12 = 85847040 \\
 & 85847040 \times 12 = 1030164480 \\
 & h = 103,01 \text{ cm} \\
 & R.: R = 103 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Figura 20 – Resolução do Miguel do problema 1 (1ª fase)

Esta resolução é pouco organizada e parece ter sido feita à pressa, pois não existe um fio condutor ao longo de toda a resolução. O aluno apresenta os cálculos que o levaram à resposta, mas não explica o que estes significam, deixando ao leitor tentar perceber que cada operação efetuada corresponde a um aniversário da Mariana. Apresenta a letra h , mas não explica o que esta significa, ficando subentendido que corresponde à altura da planta e, portanto, não recorre a uma representação totalmente adequada. Por fim, na resposta apenas apresenta o valor obtido sem escrever uma frase que interprete esse resultado no contexto da situação apresentada. Na tabela 6, encontra-se a análise resumida da resolução do Miguel do primeiro problema na primeira fase.

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 2

Tabela 6 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 1 (1ª fase)

O feedback que utilizei para alertar o Miguel para estes aspetos importantes a melhorar foi maioritariamente colocado de forma interrogativa, com o objetivo de fazer o aluno questionar e refletir sobre a sua resolução sem dar diretamente a solução para melhorar. Também decidi utilizar estas questões de forma a transparecer para o aluno aquilo que

o professor se questiona ao analisar a sua resolução, dando-lhe ferramentas para analisar resoluções futuras (Figura 21). É verdade que, quando se usa questões direcionadas para pontos específicos da resolução, os alunos têm tendência a focar-se em responder apenas a essas questões perdendo, muitas vezes, uma visão global da resolução (Santos & Pinto, 2009). No entanto, como complemento, forneço no final um feedback abrangente sobre toda a resolução, que, em articulação com as questões colocadas, serve para evidenciar de forma clara os aspetos que o aluno deve melhorar (Sadler, 2010).

Handwritten student work for problem 1, showing calculations and feedback annotations. The work includes the following:

- Initial calculation: $139,5 \times 1,2 = 41,4$
- Series of calculations: $34,5 \times 1,2 = 41,4 \text{ km}$, $41,4 \times 1,2 = 49,68 \text{ km}$, $49,68 \times 1,2 = 59,62 \text{ km}$, $59,62 \times 1,2 = 71,54 \text{ km}$, $71,54 \times 1,2 = 85,85 \text{ km}$, $85,85 \times 1,2 = 103,02 \text{ km}$
- Final answer: $R.: h = 103 \text{ km}$
- Feedback annotations in red:
 - "O que significa h?" (What does h mean?) with an arrow pointing to the variable h.
 - "O que significam estes cálculos?" (What do these calculations mean?) with an arrow pointing to the sequence of calculations.
 - "A resposta deve ser uma frase" (The answer should be a sentence) with an arrow pointing to the final answer.
- Other notes: "1º anúncio →", "66%", "130° - 24°", "demonstração 46 100j."

Figura 21 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 – Parte 1 (1ª fase)

Ao analisar a autoavaliação do Miguel (Figura 22), é possível verificar que o aluno tem noção que a sua organização podia estar melhor; no entanto, não destaca no que escreve aspetos a melhorar. Apesar de também avaliar as suas representações matemáticas num nível 2, ao ler a frase que escreveu sobre os aspetos a melhorar não me transmite que o aluno sabe especificamente o que tem de melhorar no uso das representações matemáticas, podendo apenas ter escrito o que escreveu sem significado.

Handwritten student self-evaluation for problem 1. The text includes the following:

- Organização → 2
- Completação do processo de resolução → 3
- Representação matemática → 2
- Apresentação da resposta → 3
- Deveria melhorar a representação matemática.

Figura 22 – Autoavaliação do Miguel do problema 1

Assim, o meu feedback destinado a aspetos da autoavaliação do Miguel reforça os aspetos que o aluno reconheceu que precisa melhorar, assim como os aspetos que ele não reconheceu, de maneira a garantir que é perceptível tudo o que é necessário aperfeiçoar (Figura 23).

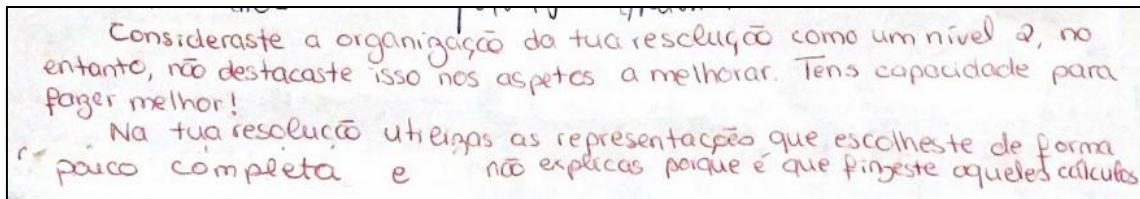


Figura 23 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 – Parte 2 (1ª fase)

Já na segunda fase da resolução do problema 1, o Miguel aproveitou a oportunidade para melhorar a sua resolução, corrigindo todos os aspetos identificados tanto na sua autoavaliação como no feedback que lhe foi fornecido (Figura 24). A melhoria observada evidencia que o aluno recorreu de forma articulada ao feedback fornecido por mim e à reflexão feita na sua própria autoavaliação.

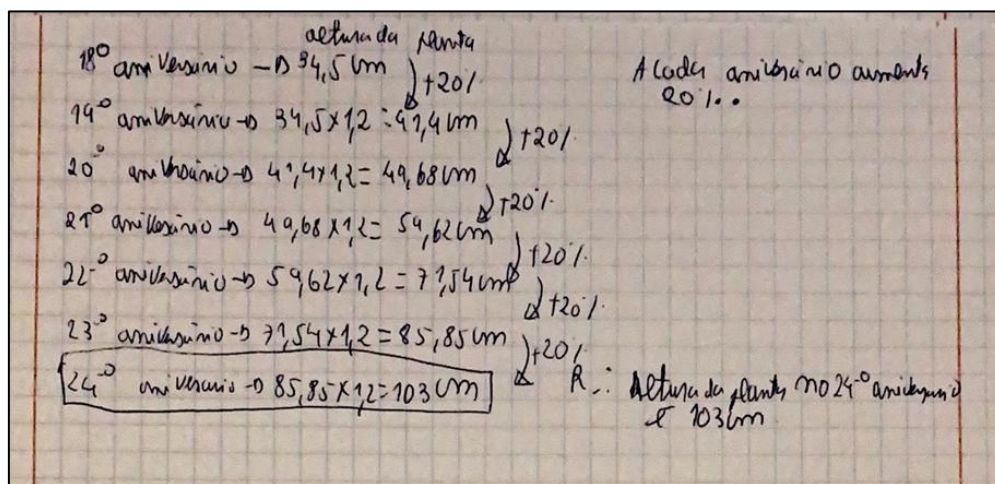


Figura 24 – Resolução do Miguel do problema 1 (2ª fase)

Nesta segunda fase, é evidente a preocupação do Miguel em apresentar uma resolução organizada. Nota-se igualmente o cuidado em explicar todos os cálculos realizados e em redigir uma resposta completa ao problema. A tabela 7 sintetiza a minha análise da comunicação matemática escrita do Miguel nesta fase da resolução do Problema 1:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 7 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 1 (2ª fase)

Portanto, o meu feedback à resolução do Miguel nesta segunda fase destaca a grande evolução que o aluno apresenta, salientando todas as categorias de análise da comunicação matemática escrita em que o aluno melhorou (Figura 25).

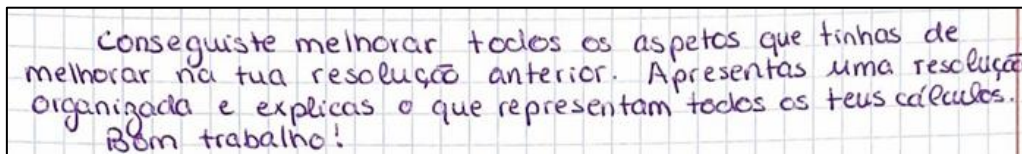


Figura 25 – Feedback à resolução do Miguel do problema 1 (2ª fase)

5.1.3. Resolução do André

Analisando a resolução do André na primeira fase de resolução do problema 1, observa-se que é uma resolução organizada, mas que falha nos aspetos relativos à completude do processo de resolução e às representações matemáticas (Figura 26).

15°
 $10^\circ U_1 =$
 $10^\circ U_2 =$
 $10^\circ U_3 =$
 $10^\circ U_4 = 34,5 \text{ cm}$
 $r = 1,2$
 $U_n = U_k \times r^{n-k}$
 $U_n = U_4 \times r^{n-4}$
 $U_n = 34,5 \times 1,2^{n-4}$
 $U_{10} = 34,5 \times 1,2^{10-4}$
 $U_{10} = 103 \text{ cm}$
 R: no seu 24º aniversário a planta terá 103 cm

Figura 26 – Resolução do André do problema 1 (1ª fase)

O aluno inicia a resolução escrevendo alguns termos da sucessão, indicando cada um deles com um traço à frente, como se fosse preencher o valor correspondente. No entanto, ele não chega a completar a representação, deixando os espaços em branco após os traços. Assim, as representações dos termos ficam incompletas e sem os valores indicados. Para além disso, começa por apresentar todos os termos da

sucessão até ao 4.º e salta logo para o 10.º termo sem explicar a razão, deixando para o leitor descobrir que se trata do 24.º aniversário da Mariana. Na tabela 8, apresento a minha análise à comunicação matemática escrita do aluno na resolução do problema 1, na primeira fase:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 2	Nível 2	Nível 3

Tabela 8 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 1 (1ª fase)

O feedback utilizado (Figura 27) tinha a intenção de lhe chamar a atenção para a falta de justificação dos cálculos e foi colocado como forma de pergunta, de modo a promover a reflexão do aluno sobre a sua resolução. Para além disso, a resposta a estas questões pode constituir-se numa estratégia útil para analisar as suas resoluções futuras questionando-se a partir das mesmas perguntas. Já relativamente ao facto de o aluno recorrer a representações incompletas decidi dar um feedback mais informativo e direto para garantir que o aluno compreendia o erro cometido.

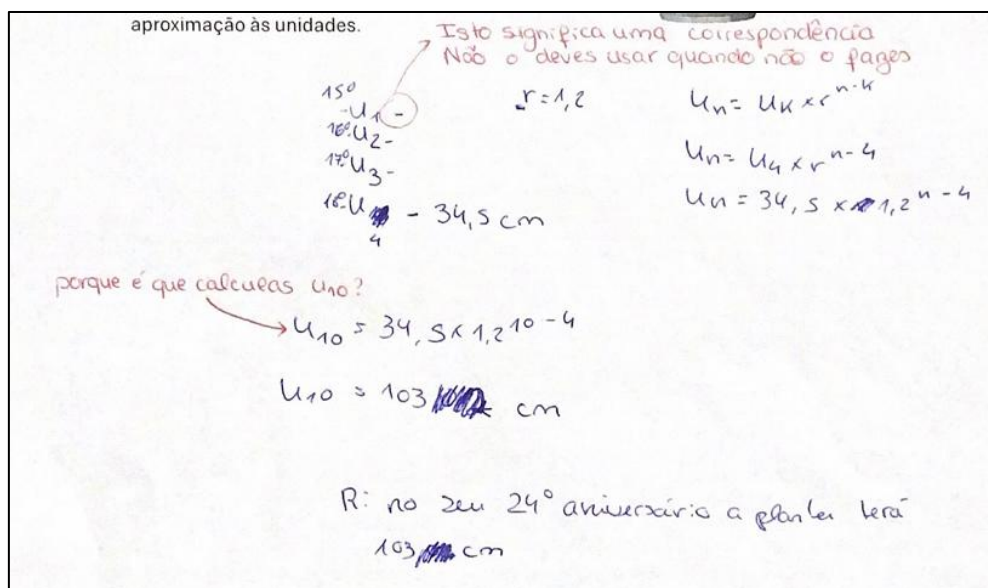


Figura 27 – Feedback à resolução do André do problema 1 – Parte 1 (1ª fase)

No que diz respeito à sua autoavaliação (Figura 28), o aluno não foi capaz de encontrar os aspetos que precisava melhorar destacando que “está bem explícito” e, portanto, não há nada a melhorar. Com esta justificação, é possível que o aluno não tenha tido o cuidado de analisar detalhadamente a sua resolução, verificando cada critério de avaliação. Transparece que apenas teve o cuidado em verificar se a resolução estava

organizada e com os cálculos bem identificados, em vez de também verificar se as suas representações utilizadas estavam adequadas e todos os passos estavam explicados.

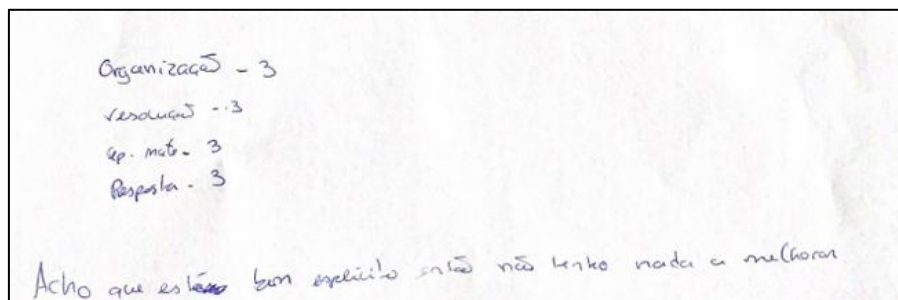


Figura 28 – Autoavaliação do André do problema 1

Desta maneira, o meu feedback (Figura 29) focou-se em destacar os aspetos que já estavam bem, mas também os aspetos que o aluno precisava melhorar. A minha intenção em referir explicitamente os nomes dos critérios era que o aluno começasse a apropriar-se melhor dos critérios sabendo a que cada um correspondia na sua resolução.

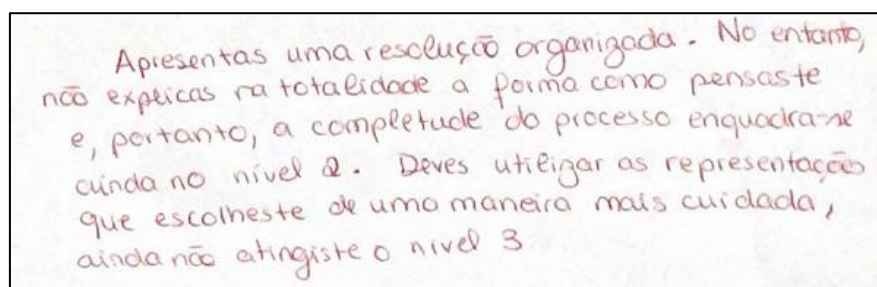


Figura 29 – Feedback à resolução do André do problema 1 – Parte 2 (1ª fase)

Na segunda fase da resolução do problema 1, o André mostrou um progresso na sua resolução (Figura 30).

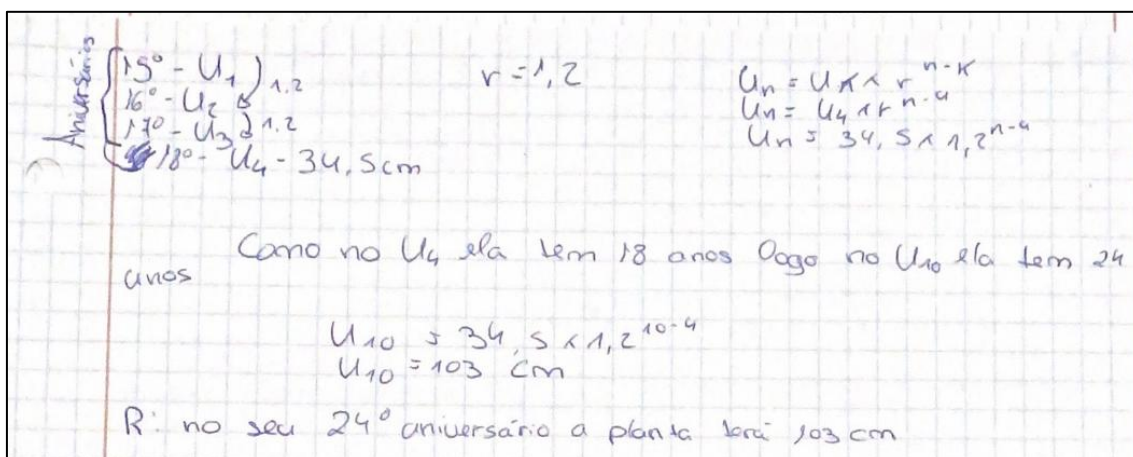


Figura 30 – Resolução do André do problema 1 (2ª fase)

O aluno demonstrou ter corrigido o erro previamente identificado, ao evitar o uso de representações incompletas. Em vez de escrever os primeiros termos da sucessão seguidos de um traço sem valor, optou por não os apresentar dessa forma. Acrescentou ainda uma frase justificativa do cálculo do 10.º termo, revelando compreensão do padrão da sucessão. Explicou que cada termo resulta da multiplicação do anterior por 1,2 - o que corresponde à definição de uma progressão geométrica.

É também de destacar que o aluno não se limitou a corrigir apenas os aspetos diretamente indicados no feedback anterior, parecendo revelar uma visão global da resolução. Verifica-se, assim, que embora os feedbacks em forma de pergunta possam, por vezes, levar os alunos a centrar-se apenas nas questões colocadas, isso nem sempre acontece. Neste caso, o aluno foi capaz de olhar para o conjunto do seu trabalho e melhorar o que considerou necessário, realizando uma revisão mais alargada por iniciativa própria.

Desta forma, observa-se que o aluno foi capaz de refletir sozinho sobre a necessidade de justificar os cálculos todos sem utilizar (apenas) o meu feedback, mas também se apoiou nele para melhorar outros aspetos. Na aula em que realizou a segunda fase, o aluno chamou-me para questionar como é que explicava o modo como calculava o 10.º termo. Não lhe respondi à pergunta diretamente, mas retribui-lhe a pergunta:

Investigadora: Então porque é que escolheste calcular o 10.º termo?

André: Porque queremos a altura da planta no 24.º aniversário e corresponde ao 10.º termo da progressão

Investigadora: Já tens a tua resposta

(Notas de campo, 19/02/2025)

Observa-se que o aluno sentiu dificuldades em encontrar uma maneira de explicar todos os passos, mesmo com a ajuda dos critérios e do feedback dado. Este sentiu a necessidade de procurar uma validação para a sua justificação e, mesmo sabendo a justificação, não foi capaz autonomamente de a elaborar.

A Tabela 9 corresponde à análise da comunicação escrita do André na segunda fase da resolução do problema:

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 9 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 1 (2ª fase)

Como o aluno melhorou em todas as categorias de análise da comunicação matemática escrita, o meu feedback à resolução feita na segunda fase foi focado nesse progresso e nos aspetos que conseguiu melhorar (Figura 31).

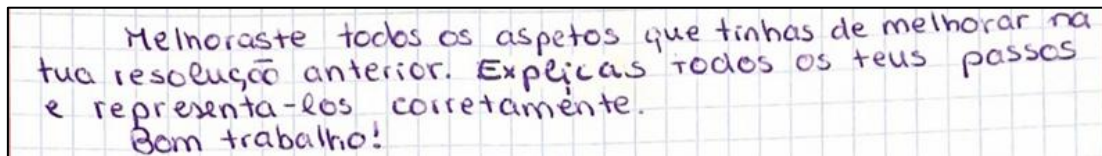


Figura 31 – Feedback à resolução do André do problema 1 (2ª fase)

Em suma, os três alunos apresentaram um progresso significativo nas suas produções escritas entre a primeira e segunda fases da resolução do problema 1. No entanto, apesar de se encontrarem em diferentes níveis, revelaram uma dificuldade em se autoavaliar e em analisar com detalhe a sua resolução. Apesar dessa dificuldade em utilizar os critérios para se autoavaliarem ou em serem críticos com as suas resoluções, com o apoio no meu feedback escrito, foram capazes de melhorar a sua comunicação matemática escrita na resolução do problema. No fim deste primeiro problema, apesar de todos terem melhorado, senti a necessidade de mudar o meu feedback para uma linguagem mais adequada e próxima dos alunos para garantir que todos compreendiam as chamadas de atenção que estava a fazer e o significado de cada critério de avaliação.

5.2. Problema 2 da intervenção pedagógica

O segundo problema da intervenção pedagógica (Anexo 3) insere-se no tema das sucessões e exige o conhecimento dos conceitos relativos à monotonia de uma sucessão e limite de uma sucessão, e sua interpretação em contextos da vida real. A resolução deste problema podia gerar algumas dúvidas pois exigia que os alunos aplicassem os conhecimentos sobre as sucessões numa situação da vida real. Desta forma, era necessário que os alunos fossem capazes de identificar que, para a primeira pergunta, tinham de verificar a monotonia das sucessões e, para a segunda pergunta, o limite das mesmas. Para além disso, tinham de interpretar o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

De forma a ser mais fácil aplicar os critérios de avaliação, pedi aos alunos para fazerem uma autoavaliação da resolução das duas perguntas em conjunto e não individualmente, tal como referi no Capítulo 3. Nas secções seguintes, analiso o progresso de cada um dos três alunos selecionados na resolução do problema 2, em duas fases.

5.2.1. Resolução da Rosa

Na resolução do segundo problema (Figura 32), a Rosa evidencia mais erros relativos à comunicação matemática escrita em comparação com a resolução do primeiro problema.

1. $A_{m+1} - A_m = \frac{20}{m+2} - \frac{20}{m+1} = \frac{20m+20 - 20m - 40}{(m+2)(m+1)} = -\frac{20}{(m+2)(m+1)}$
 $-\frac{20}{(m+2)(m+1)} < 0$, então a sucessão é decrescente

$B_{m+1} - B_m = \frac{20m+20-5}{m+1} - \frac{20m-5}{m} = \frac{20m^2+15m-20m^2+5m-20m+20}{(m+1)(m)} = \frac{5}{(m+1)(m)}$
 $= \frac{5}{(m+1)(m)} > 0$, então a sucessão é crescente

R.: A colónia A vai decrescendo e a colónia B vai crescendo.

2. R.: População A diminuiria, aproximando de 0 mas nunca chegando a 0. Já a população B vai sempre crescer, aproximando de 20 mas nunca chegando a 20.

$\frac{20m-5}{m} \sim \frac{20}{1} = 20$
 $\frac{20m-5}{m} = 20 - \frac{5}{m}$
 20 é majorante

Figura 32 – Resolução da Rosa do problema 2 (1ª fase)

Apesar de existir um fio condutor durante toda a resolução, os cálculos são escritos de forma descuidada quando não cabe tudo na mesma linha, e, portanto, a resolução não está totalmente organizada. Na segunda pergunta, apresenta poucas justificações para as conclusões que retirou, não explicando como sabe que a população A se aproximaria de 0. Para além disso, não utiliza as unidades de medida corretas, apenas identificando que a população B iria aproximar-se de 20 e não de 20 mil bactérias.

Na entrevista que realizei com a Rosa, procurei entender porque é que a aluna tinha piorado a sua comunicação matemática escrita no segundo problema:

Investigadora: No segundo problema cometeste mais erros na comunicação matemática escrita [do que] em relação ao primeiro problema. Qual achas que foi o motivo?

Rosa: O problema das bactérias era um bocado difícil e o enunciado era um bocado confuso. Da primeira vez que fiz esse exercício, eu lembro-me que achei que era complicado, mas depois da segunda vez quando a professora entregou para refazermos e melhorarmos, eu lembro-me que já tinha percebido e já não tive dificuldades.

(Entrevista, Rosa, 02/05/2025)

A falta de conhecimento dos conteúdos exigidos para resolver o problema parece ter sido um fator influenciador na sua comunicação matemática escrita e o motivo pelo qual a Rosa acabou por piorar a sua resolução em vez de mostrar alguma evolução. Contudo, não lhe perguntei por que achava o problema complicado ou confuso, pelo que podia também ser uma questão de falta de compreensão do enunciado, da situação em si, e não da estrutura matemática que estava por trás da situação do problema.

Na tabela 10, reúno a análise que fiz da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 2:

Organização	Compleitude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 3

Tabela 10 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 2 (1ª fase)

Como a Rosa é uma aluna com vontade de melhorar e se empenha em todas as tarefas realizadas, pensei que esta falta de organização foi uma situação momentânea e, portanto, apenas decidi dar um feedback informativo para a aluna evitar a apresentação dos cálculos daquela forma. Já relativamente à falta de justificações de algumas conclusões e à utilização das unidades incorretas decidi dar um feedback, na forma de pergunta, de forma a promover a reflexão e autonomia da aluna na segunda fase da resolução do problema (Figura 33). Ao analisar agora o meu feedback relativamente à utilização incorreta das unidades, reconheço que a forma como o formulei pode não ter sido a mais adequada para promover a autonomia da aluna. Ao perguntar diretamente quais eram as unidades, acabei por orientar o seu pensamento no sentido da resposta, retirando-lhe a oportunidade de refletir sobre o significado do valor apresentado e de chegar por si mesma à conclusão correta. Embora, na altura, me tenha parecido o tipo

de feedback mais indicado, percebo agora que poderia ter adotado uma abordagem mais exploratória, por exemplo, perguntando o que significava o valor 20, o que teria potencialmente estimulado uma análise mais profunda e autónoma por parte da aluna.

1. $A_{m+1} - A_m = \frac{20}{m+2} - \frac{20}{m+1} = \frac{20m+20 - 20m - 40}{(m+2)(m+1)} = -\frac{20}{(m+2)(m+1)}$

$-\frac{20}{(m+2)(m+1)} < 0$, então a sucessão é decrescente

$B_{m+1} - B_m = \frac{20m+20-5}{m+1} - \frac{20m-5}{m} = \frac{20m^2+15m-20m^2+5m-20m+20}{(m+1)m} = \frac{5}{(m+1)m}$

$\frac{5}{(m+1)m} > 0$, então a sucessão é crescente

R: A colónia A vai decrescendo e a colónia B vai crescendo.

2. R: População A diminuiria, aproximando de 0 mas nunca chegando a 0. Já a população B vai sempre crescer, aproximando-se de 20 mas nunca chegando a 20. quais são as unidades?

Figura 33 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 – Parte 1 (1ª fase)

Relativamente à autoavaliação da Rosa (Figura 34), esta não foi capaz de identificar o que precisava de melhorar, classificando-se com nível máximo em todos os critérios. À pergunta sobre aspetos que precisava de melhorar, escreveu que não precisava de melhorar nada, pois estava “tudo devidamente correto e bem apresentado”. Aqui ainda parece refletir-se a ideia de que uma resolução está bem desde que esteja correta, não sendo visível uma análise detalhada utilizando todos critérios de avaliação.

Organização – Nível 3
 Completude do processo de resolução – Nível 3
 Representação matemática – Nível 3
 Apresentação da resposta – Nível 3

Percebo que está tudo devidamente correto e bem apresentado.

Figura 34 – Autoavaliação da Rosa do problema 2

Desta forma, o meu feedback relativo à sua autoavaliação (Figura 35) não é focado nos níveis em que se encontra, mas sim nos aspetos que precisa de melhorar. Utilizando uma linguagem mais próxima dos alunos, forneci uma descrição do nível onde a aluna se encontrava e não da classificação em si.

Deves organizar a tua resolução de uma melhor forma, assim como, ter atenção aos termos que utilizas na tua resposta. Não explicas na totalidade como tiraste algumas conclusões que apresentas, deves melhorar esse aspeto

Figura 35 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 – Parte 2 (1ª fase)

Já na segunda fase da resolução do problema 2 (Figura 36), a Rosa apresenta uma resolução completa, organizada e com representações matemáticas adequadas.

1. $A_{m+1} - A_m = \frac{20}{m+2} - \frac{20}{m+1} = \frac{20m+20-20m-40}{(m+2)(m+1)} = -\frac{20}{(m+2)(m+1)}$
 $-\frac{20}{(m+2)(m+1)} < 0, \forall m \in \mathbb{N}$, então a sucessão é decrescente.

$B_{m+1} - B_m = \frac{20m+20-5}{m+1} - \frac{20m-5}{m} = \frac{20m^2+15m-20m^2+5m-20m+5}{(m+1)(m)}$
 $= \frac{5}{(m+1)(m)} > 0, \forall m \in \mathbb{N}$, então a sucessão é crescente.

R.: A colónia A vai decrescendo e a colónia B vai crescendo.

2. $\frac{20m-5}{-20m-5} \quad \frac{m}{20}$ $B_m = \left(20 - \frac{5}{m}\right)$
 20 é majorante, como a sucessão B é crescente, sabemos que vai aumentar nunca chegando a 20 mil bactérias.

$A_m = \left(0 + \frac{20}{m+1}\right)$
 0 é minorante, como a sucessão A é decrescente, sabemos que vai diminuir mas nunca chegando a 0 bactérias.

R.: A população A diminuirá, aproximando-se de 0 bactérias mas nunca chegando a 0. Já a população B vai sempre crescer, aproximando-se de 20 mil bactérias mas nunca chegando a 20 mil.

Figura 36 – Resolução da Rosa do problema 2 (2ª fase)

Todos os cálculos são organizados cuidadosamente e apresenta as justificações necessárias para tirar as conclusões na pergunta 2. É notória uma preocupação em explicar detalhadamente todos os passos após a chamada de atenção para a falta de explicação de alguns passos. Para além disso, a Rosa já utiliza as unidades adequadas ao contexto da situação. Como a sua autoavaliação não refletiu a verdadeira avaliação da sua comunicação matemática escrita, para este progresso, a Rosa ter-se-á apoiado fundamentalmente no meu feedback. No entanto, a aluna foi capaz de corrigir

autonomamente o que era necessário para apresentar uma resolução completa. Desta forma, o quadro de análise da comunicação escrita da Rosa é o seguinte (Tabela 11):

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 11 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 2 (2ª fase)

O feedback à sua segunda resolução (Figura 37) foi feito com o objetivo de ser um feedback mais informativo e motivador à continuação de um bom trabalho, destacando os aspetos que a Rosa conseguiu melhorar.

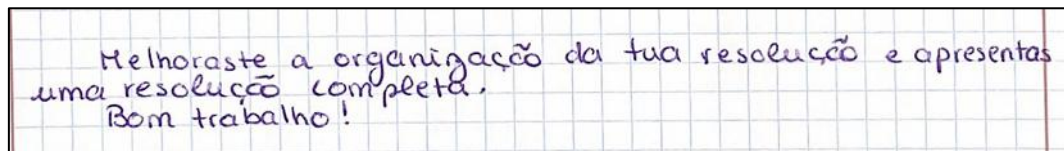


Figura 37 – Feedback à resolução da Rosa do problema 2 (2ª fase)

5.2.2. Resolução do Miguel

No segundo problema, o Miguel revela uma pequena melhoria na sua comunicação matemática escrita relativamente ao primeiro problema, passando a explicar todos os passos da resolução (Figura 38). Ao analisarmos isoladamente a comunicação matemática escrita na pergunta 1 e na pergunta 2, é possível verificar algumas diferenças.

1- $A_{m+1} - A_m$

$$\frac{20}{m+1} - \frac{20}{m}$$

$$\frac{20(m+1) - 20(m)}{(m+1)(m)}$$

$$\frac{20}{(m+1)(m)}$$

2- $B_{m+1} - B_m$

$$\frac{20(m+1) - 20m}{(m+1)(m)}$$

$$\frac{20}{(m+1)(m)}$$

Logo a colónia A diminui e a colónia B aumenta.

Figura 38 – Resolução do Miguel do problema 2- Pergunta 1 (1ª fase)

Na pergunta 1 o aluno apresenta uma resolução quase perfeita ao nível da comunicação matemática, em que explica todos os passos e organiza com cuidado essas justificações. Contudo, é possível observar-se uma falta de rigor na escrita dos traços de fração, que não são devidamente prolongados por toda a expressão, e em identificar que as proposições apresentadas são válidas para todo o n pertencente ao conjunto dos números naturais. Também ao longo da resolução, o aluno não utiliza o símbolo de igual nos cálculos.

Já na pergunta 2, o Miguel apresenta uma resolução mais desorganizada, com um uso incorreto da notação e de linguagem (Figura 39). Por exemplo, o aluno utiliza o símbolo de igual quando atribui o valor 1 ao n , acabando por indicar 1 é igual ao valor da sucessão $B(n)$ quando n é 1, o que não é verdade pois $B(1) = 15$. Também não adequa a linguagem ao contexto da situação utilizando termos como “tende para zero” quando fala do comportamento das colónias em vez de utilizar termos como “aproxima-se de zero”. É importante que o aluno saiba traduzir os resultados obtidos no contexto matemático para o contexto concreto da situação apresentada. Para isso, é essencial que o aluno evite usar os mesmos termos para descrever o comportamento da sucessão e a evolução das colónias de bactérias, distinguindo claramente as duas realidades. Para além disso, não dá uma resposta completa à pergunta porque não diz exatamente o que aconteceria à população da colónia A, apenas afirmando que esta crescerá sempre.

(2) A colónia A se prolonga por tempo indefinido tendo para zero quando a colónia B atinge o zero.
 Sempre: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{20}{m+1} = \frac{20}{\infty+1} = 0$
 $A(m) = \frac{20}{m+1}$
 $B(m) = \frac{20m-5}{m} = \frac{(20-0)m}{1} = 20$
 $m=1: \frac{20}{2} = 10$
 $m=2: \frac{20}{3} = 6.66$
 $m=3: \frac{20}{4} = 5$
 $m=1: \frac{20 \times 1 - 5}{1} = 15$
 $m=2: \frac{20 \times 2 - 5}{2} = 17.5$
 $m=3: \frac{20 \times 3 - 5}{3} = 18.33$
 organização - 2

Figura 39 – Resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)

Como notei uma diferença grande de uma pergunta para a outra, decidi perguntar ao aluno na aula seguinte o porquê desta diferença.

O Miguel respondeu-me que não sabia bem aquela matéria e, portanto, teve dificuldade em escrever uma resposta à pergunta. Sobre a falta de organização, disse que sentiu preguiça de escrever tanto e, portanto, começou a ser mais desleixado.

(Notas de Campo, 12/03/2025)

Aqui podemos ver que, por vezes, fatores como a falta de conhecimento dos conteúdos e de vontade de trabalhar dos alunos também podem influenciar a comunicação matemática escrita dos alunos.

Relativamente a uma avaliação global da comunicação matemática escrita do Miguel na resolução do problema 2, a tabela 12 faz um resumo:

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 2

Tabela 12 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 2 (1ª fase)

O meu feedback à primeira pergunta foi apenas um conjunto de chamadas de atenção para alguns detalhes que o Miguel poderia melhorar na sua resolução (Figura 40).

1- $A_{n+1} - A_n$

$A_n = \frac{20}{n}$

$= \frac{20}{n+1} - \frac{20}{n}$

$= \frac{20n(20) - (20n+40)}{(n+1)(n)} = \frac{20-40}{(n+1)(n)} = \frac{-20}{(n+1)(n)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

2- $B_{n+1} - B_n$

$B_n = \frac{20n+15}{n}$

$= \frac{20n+15}{n+1} - \frac{20n+5}{n}$

$= \frac{20n^2+15n - (20n^2+20n-5n-5)}{(n+1)(n)} = \frac{5n-5}{(n+1)(n)}$

$= \frac{5(n-1)}{(n+1)(n)}$

$\rightarrow$ o traço de fração deve ser prolongado por todo o denominador

Logo a sequência A diminui e a sequência B aumenta.

Figura 40 – Feedback à resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase)

No que diz respeito ao meu feedback à pergunta 2 (Figura 41), já tentei que este fosse um feedback que promovesse a reflexão sobre a sua resolução e o levasse a fazer as alterações necessárias. Não queria indicar a maneira como o aluno tinha de corrigir a sua resposta, mas dar algumas dicas na construção dessa correção. Relativamente ao uso inadequado de representações decidi escrever mais pormenorizadamente sobre este erro para garantir que o Miguel compreendia a diferença entre a linguagem matemática e a linguagem corrente.

→ As sucessões tendem para um valor, enquanto que as colónias aproximam-se desse valor

② A Colónia A se prolonga por tempo indefinido
 tende para zero

o que isso significa no contexto da situação? *quando a colónia B estabiliza*

Se o $\lim(b_n) = 20$ a colónia B não estabiliza em nenhum número de bactérias?

Simple: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{n} = \frac{20}{\infty} = 0$

$A(n) = \frac{20}{n+1}$

$n=1 \quad \frac{20}{2} = 10$

$n=2 \quad \frac{20-6.66}{3} = 0.666$

$n=3 \quad \frac{20-5}{4}$

$B(n) = \frac{20n-5}{n} = \frac{20-0}{1} = 20$

$n=1 \Rightarrow \frac{20 \times 1 - 5}{1} = 15$

$n=2 \Rightarrow \frac{20 \times 2 - 5}{2} = 17.5$

$n=3 \Rightarrow \frac{20 \times 3 - 5}{3} = 19.33$

Figura 41 – Feedback à resolução do Miguel do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)

Na autoavaliação do Miguel (Figura 42), é possível verificar que o aluno reconhece que a sua organização pode ser melhorada. Essa perceção também é reforçada quando escreve, no fim da autoavaliação, que deve melhorar a sua apresentação. O Miguel atribui também nível 2 na completude do processo de resolução; no entanto, não menciona nada sobre este assunto na frase relativa aos aspetos a melhorar. Na verdade, o aluno apresenta uma resolução completa, em que explica todos os passos que fez.

organização - 2

completude do processo - 2

representação matemática - 3

apresentação da resposta - 3

Devo melhorar a minha apresentação.

3

$\Rightarrow \frac{55}{3}$

Figura 42 – Autoavaliação do Miguel do problema 2

Para esclarecer o porquê do aluno ter atribuído a classificação de nível 2 na completude do processo na sua autoavaliação, na aula da segunda fase, perguntei ao Miguel porque é que se tinha avaliado daquela forma.

O Miguel disse-me que atribuiu o nível 2 ao critério de completude do processo de resolução pois tinha reconhecido que a sua resposta não estava totalmente correta. Embora não conseguisse identificar exatamente o que estava em falta, percebia que algo não estava bem. Confessou ter sentido dificuldades ao resolver o problema e, embora não conseguisse explicar exatamente o que estava errado, pensava que algo tinha de estar mal na sua comunicação matemática escrita.

(Notas de Campo, 12/03/2025)

Ao ouvir o Miguel, percebi que ele ainda não tinha uma boa apropriação dos critérios de avaliação e encontrava dificuldade em distinguir claramente entre as várias categorias de análise da comunicação matemática escrita. Além disso, devido às dificuldades que teve na resolução do problema, acreditava que não poderia ter a resposta correta e, portanto, a sua comunicação matemática escrita também não poderia estar correta - uma ideia interessante para reflexão. Embora o critério de correção da resposta já ter sido eliminado do conjunto dos critérios de avaliação utilizado neste estudo, o Miguel ainda parece ser influenciado por essa noção, ao pensar que, se tivesse errado na resolução, a sua comunicação matemática escrita também teria necessariamente falhas.

No meu feedback sobre a sua autoavaliação (Figura 43) destaco todos os aspetos que ele ainda precisava melhorar, mas também faço referência à avaliação que faz incorretamente na minha perspetiva sobre a completude do processo. Para garantir uma melhor compreensão dos critérios, explico por palavras o que significa ter um nível 3 nesse critério.

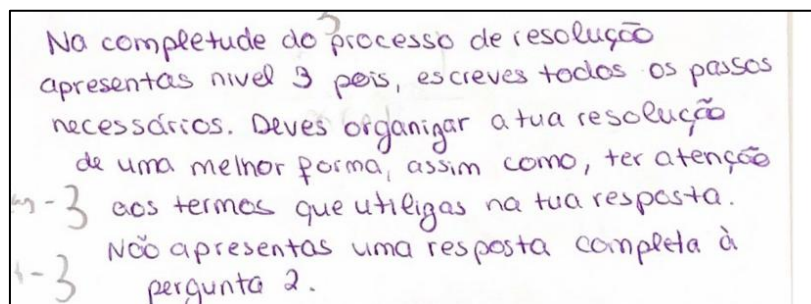


Figura 43 – Feedback à autoavaliação do Miguel do problema 2 (1ª fase)

Analisando o progresso do Miguel na segunda fase de resolução do problema 2 (Figura 44), o Miguel conseguiu melhorar grande parte da sua resolução, mas não alcançou o nível 3 em todas as categorias de análise da comunicação matemática escrita.

①

$$1 - A_{m+1} - A_m$$

$$= \frac{20}{m+2} - \frac{20}{m+1}$$

$$= \frac{20m+20-20m-40}{(m+2)(m+1)}$$

$$= \frac{-20}{(m+2)(m+1)}$$

$C_0, \forall m \in \mathbb{N}$, logo é monótona decrescente

$C.A:$

$$A_{m+1} = \frac{20}{m+2}$$

$$2 - B_{m+1} - B_m$$

$$= \frac{20m+15}{m+1} - \frac{20m-5}{m}$$

$$= \frac{20m^2+15m-20m^2-20m+5m+5}{(m+1)m}$$

$$= \frac{5}{(m+1)m} > 0 \forall m \in \mathbb{N}$$

logo é monótona crescente

$C.A:$

$$B_{m+1} = \frac{20m+15}{m+1}$$

∴ A sucessão $A(m)$ é decrescente e a sucessão $B(m)$ é crescente logo a colónia A diminui e a colónia B aumenta.

② A colónia A e a colónia B de prolejam sempre portanto indefinido, a colónia A tende para zero o que quer dizer que o número de bactérias $A(m)$ vai estabilizar em zero desatando, enquanto a colónia B(m) vai tender para 20 milhões o que significa que vai estabilizar em 20 milhões de bactérias.

$$A(m) = \frac{20}{m+1}$$

$$B(m) = \frac{20m-5}{m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{20}{m+1} = \frac{20}{\infty} = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{20m-5}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(20-\frac{5}{m})}{m(1)} = \frac{20-0}{1} = 20$$

$A(m)$ tende para zero.

Figura 44 – Resolução do Miguel do problema 2 (2ª fase)

O aluno mostra um cuidado em organizar a sua resolução e em corrigir as chamadas de atenção destacadas na pergunta 1. Também é de destacar que o aluno parece ter utilizado o meu feedback mais interrogativo e de incitação à reflexão para completar a sua resposta à pergunta 2. Assim, o aluno identificou corretamente o comportamento das colónias e utilizou a linguagem correta para o explicar. No entanto, ainda é notória uma dificuldade em usar a linguagem adequada ao contexto da situação apresentada. O aluno volta a insistir no uso do termo “tende para...” quando fala do comportamento da colónia e utiliza o nome “colónia A(n)” e “colónia B(n)” em vez dos nomes dados no enunciado - colónia A e colónia B; e acaba por misturar os conceitos de sucessões com a situação de vida real. Esta mistura de conceitos é, até certo ponto, expectável, uma vez que corresponde ao que acontece numa situação de modelação. Passa-se do contexto real para um modelo matemático, resolve-se a situação no contexto matemático e, por fim, é preciso regressar ao contexto real. É precisamente nesta última etapa - a transição do contexto matemático para o real; que a resposta do aluno revela algumas fragilidades. Para além de interpretar o resultado, é também necessário fazer a conversão da linguagem matemática para uma linguagem compreensível e adequada ao contexto real, o que não parece ter sido plenamente conseguido.

Quando verifiquei que o aluno tinha voltado a cometer o mesmo erro, pensei que este tinha ignorado o meu feedback ou não tinha reparado; decidi então voltar a chamar a atenção da mesma maneira. Após algum tempo de reflexão, percebi que o meu feedback também podia ter sido um fator pelo qual o aluno não conseguiu melhorar e talvez fosse necessário mudar a linguagem de forma a o aluno perceber o que eu queria transmitir. Na entrevista, decidi colocar essa questão ao Miguel para esclarecer as minhas dúvidas:

Investigadora: Porque é que não conseguiste melhorar a tua resolução no segundo problema que fizemos?

Miguel: Penso que foi tanto o dia em que fizemos o problema e também o problema em si.

Investigadora: O conteúdo do problema?

Miguel: Sim... oh stôra eu não percebia nada desta matéria.

Investigadora: E o meu feedback? Achas que foi suficiente ou causou-te dúvidas?

Miguel: O feedback foi bom, eu não consegui melhorar por não saber mais.

(Entrevista, Miguel, 02/05/2025)

Neste excerto, parece transparecer que o principal fator que dificultou a melhoria do Miguel foi a sua falta de domínio dos conteúdos do problema. Como o aluno apresentava dificuldades nesta matéria, mesmo após o feedback que lhe dei, não conseguiu encontrar uma forma eficaz de melhorar a sua resolução. Além disso, o facto de a segunda fase do problema ter sido realizada no dia seguinte a um teste de outra disciplina poderá ter aumentado a ansiedade associada à avaliação, influenciando também o seu progresso. Para minimizar o impacto da falta de conhecimento sobre os conteúdos na evolução do aluno, talvez tivesse sido importante fornecer um feedback mais detalhado e informativo, complementado com uma explicação oral dos conteúdos, de modo a facilitar a sua compreensão e melhoria.

Na tabela 13, reúno a minha análise relativa à comunicação matemática escrita do Miguel na segunda fase da resolução do problema:

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 3

Tabela 13 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 2 (2ª fase)

Como já mencionado anteriormente, apesar do meu feedback nesta fase ter o objetivo de ser um feedback mais informativo do progresso do aluno, decidi voltar a destacar o uso desadequado da linguagem na resolução da pergunta 2, pois não existiu qualquer evolução nesse sentido. Para além disso, reforcei os aspetos que o aluno conseguiu melhorar (Figura 45).

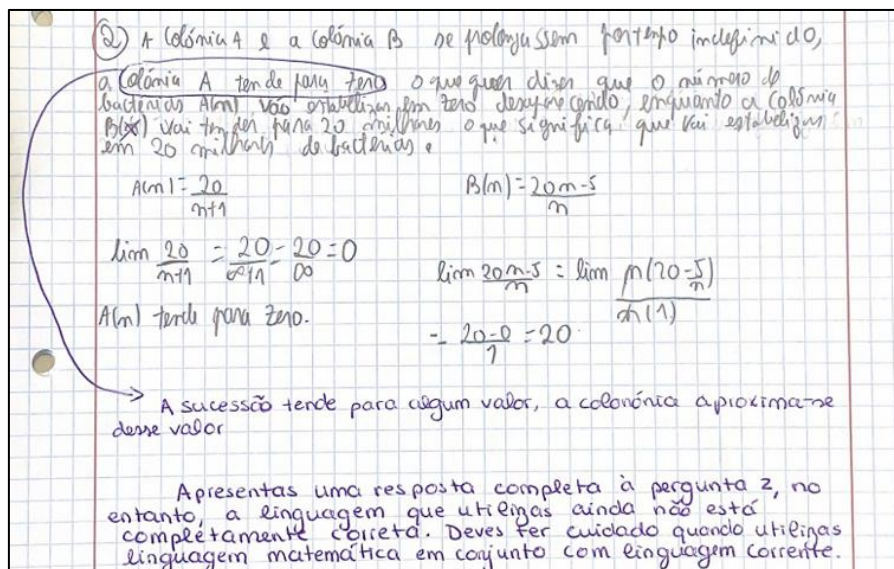


Figura 45 – Feedback da resolução do Miguel do problema 2 (2ª fase)

Na altura em que escrevi este feedback, pensei que o Miguel não tinha conseguido melhorar porque não leu o meu comentário com a devida atenção, e não por falha no meu feedback. Porém, é possível que o meu feedback tenha sido pouco claro ou difícil de compreender para ele. Como Santos (2022) refere, o conhecimento profissional do professor é um fator determinante na eficácia do feedback. Sendo eu ainda relativamente inexperiente, posso não ter tido a competência necessária para fornecer um feedback suficientemente claro e eficaz.

5.2.3. Resolução do André

No segundo problema, o André comete novamente alguns erros na sua comunicação matemática escrita. Apresenta uma resolução mais completa relativa à resolução do problema 1, mas com um nível mais baixo nos outros critérios (Figuras 46 e 47).

Handwritten mathematical work for Figure 46:

A(n) - A(n)

$$\frac{20}{n+1} - \frac{20}{n+2} = \frac{20}{n+2} - \frac{20}{n+1}$$

$$= \frac{20(n+1) - (20(n+2))}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{20n + 20 - (20n + 40)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-20}{(n+2)(n+1)}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ a função $A(n)$ é decrescente.

B(n) - B(n)

$$\frac{20(n+1) - 5}{n+1} - \frac{20n - 5}{n}$$

$$= \frac{20n + 20 - 5}{n+1} - \frac{20n - 5}{n}$$

$$= \frac{20n + 15}{n+1} - \frac{20n - 5}{n}$$

$$= \frac{(20n + 15)n - (20n - 5)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{20n^2 + 15n - (20n^2 + 20n - 5n - 5)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{20n^2 + 15n - 20n^2 - 15n + 5}{n(n+1)}$$

$$= \frac{5}{n(n+1)}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ a função $B(n)$ é crescente.

Figura 46 – Resolução do André do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase)

Handwritten mathematical work for Figure 47:

2. $\lim(A_n)$

$$\lim \left(\frac{20}{n+1} \right) = 0$$

$$\lim \left(\frac{20n - 5}{n} \right) = 20$$

A população A vai acabar porque a função vai tender para 0 e a população B vai tender para 20 e então a população vai para 20 mil ou 20000.

Figura 47 – Resolução do André do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)

Ao contrário da resolução do Miguel, o André é consistente na comunicação matemática escrita das duas perguntas. Em ambas as perguntas, a resolução está pouco organizada; este aluno resolveu o problema 2 usando lápis e, quando se enganava, em vez de usar uma borracha, riscava o que achava não estar correto, o que pode sugerir que ele resolveu o problema de forma demasiado rápida e sem cuidado na escrita. O aluno não apresenta nenhuma resposta à pergunta 1, apenas analisa a monotonia das sucessões, mas sem interpretar o significado no contexto da situação apresentada. Já na pergunta 2, apesar de apresentar uma resposta ao problema, nem sempre utiliza a linguagem adequada cometendo o mesmo erro que o Miguel ao usar termos como “tende para” quando fala do comportamento das colónias. A tabela 14 resume a minha análise da comunicação matemática escrita do André no segundo problema:

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 2

Tabela 14 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 2 (1ª fase)

O meu feedback focou-se essencialmente em alertar para a falta de resposta à pergunta 1 e para o uso desadequado de linguagem no contexto da situação apresentada (Figuras 48 e 49).

Handwritten work for Figure 48:

$A(n) = \frac{20}{n+1} - \frac{20}{n+2}$

$A(n+1) = \frac{20}{n+2} - \frac{20}{n+3}$

$A(n) - A(n+1) = \frac{20(n+1) - (20(n+2))}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{20n + 20 - (20n + 40)}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{-20}{(n+1)(n+2)}$

Deves interpretar o significado de $A(n)$ é decrescente da sucessão ser crescente ou decrescente ao contexto da situação

$B(n) = \frac{20(n+1) - 5}{n+1}$

$B(n+1) = \frac{20(n+2) - 5}{n+2}$

$B(n+1) - B(n) = \frac{20(n+2) - 5}{n+2} - \frac{20(n+1) - 5}{n+1}$

$= \frac{(20n+40-5)(n+1) - (20n+20-5)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{20n^2 + 35n + 35 - (20n^2 + 40n - 10)}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{-5n + 45}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{-5(n-9)}{(n+1)(n+2)}$

> 0 como $n < 9$ a sucessão é crescente

Figura 48 – Feedback à resolução do André do problema 2 – Pergunta 1 (1ª fase)

Handwritten work for Figure 49:

2. $\lim(A_n)$

$\lim \left(\frac{20}{n+1} \right) = 0$

$\lim \left(\frac{20n-5}{n} \right) = 20$

A população A vai acabar porque a função vai tender para 0 e a sucessão $B(n)$ vai tender para 20 mil ou 20000

Organização - 2

As sucessões tendem para um valor, enquanto que as populações aproximam-se desse valor

Figura 49 – Feedback à resolução do André do problema 2 – Pergunta 2 (1ª fase)

Tal como a sua resolução, penso que a sua autoavaliação (Figura 50) foi feita de maneira descuidada e sem grande reflexão sobre o assunto.

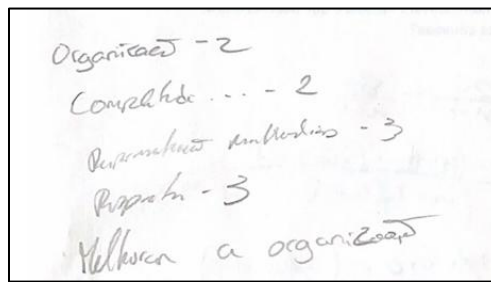


Figura 50 – Autoavaliação do André do problema 2

O André verifica que a organização da sua resolução precisa de ser melhorada e destaca esse aspeto na frase relativa aos aspetos a melhorar na comunicação matemática escrita. Por outro lado, atribui o nível 2 na completude do processo de resolução, mas nada menciona posteriormente. Isto leva-me a considerar dois motivos possíveis: o aluno não perdeu muito tempo a fazer a sua autoavaliação e atribuiu um valor mais baixo neste critério porque sabia que alguma coisa da sua resolução falhava, ou o aluno não soube identificar o que significava cada critério. Para esclarecer esta questão, na aula seguinte fui falar com o André:

O André reconheceu que fez a autoavaliação de forma apressada. Disse-me que embora soubesse que o seu trabalho estava desorganizado, não tinha uma razão clara para justificar a escolha desse nível na completude. Admitiu que, nesse aspeto, a decisão foi um pouco aleatória.

(Notas de campo, 12/03/2025)

Tal como esperado, o André admitiu ter feito a sua autoavaliação de forma apressada, sem pensar muito sobre o assunto. Por esse motivo, não posso concluir que o aluno desconhecia os critérios de avaliação, uma vez que nem chegou a refletir de forma efetiva sobre a sua própria resolução. A classificação desadequada no critério da completude do processo de resolução poderá, por isso, refletir apenas a superficialidade com que a autoavaliação foi realizada, e não necessariamente uma incompreensão dos critérios.

Como antes de dar o feedback não conhecia o motivo pelo qual o aluno se tinha autoavaliado incorretamente na minha perspetiva, decidi identificar que a sua resolução, no que diz respeito à completude do processo de resolução, já se encontrava no nível máximo, descrevendo o que esse nível de desempenho engloba. Para além disso, destaquei os aspetos em que o aluno se devia focar para melhorar (Figura 51).

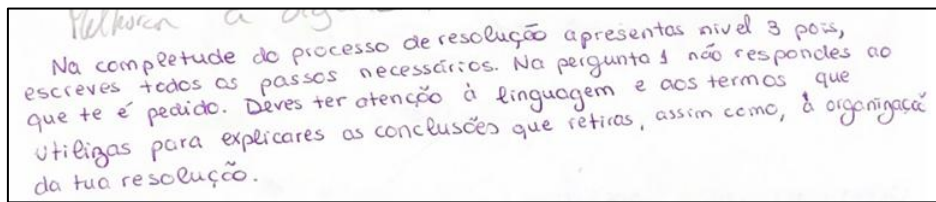


Figura 51 – Feedback à resolução do André do problema 2 (1ª fase)

Na segunda oportunidade para resolver este problema (Figura 52), o André melhorou quase toda a sua resolução. Conseguiu adequar a sua linguagem ao contexto da situação diferenciando a linguagem corrente da linguagem matemática e respondeu ao que era pedido na pergunta 1. Contudo, a organização da resolução ainda não se encontrava num nível 3. Com isto, o aluno parece não ter recorrido aos critérios de avaliação para melhorar a sua resolução, visto que o único aspeto em que se autoavaliou corretamente foi a organização e esse continuou igual na sua segunda tentativa. No entanto, suponho que foi capaz de corrigir a sua resolução nas restantes categorias de análise da comunicação matemática escrita apoiando-se no meu feedback.

1. $A(n+1) - A(n)$

$$= \frac{20}{n+2} - \frac{20}{n+1}$$

$$= \frac{20(n+1) - (20)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{20n+20 - (20n+40)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-20}{(n+2)(n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo a colónia A decresce.

$B(n+1) - B(n)$

$$= \frac{20n+15}{n+1} - \frac{20n-5}{n}$$

$$= \frac{(20n+15)n - (20n-5)(n+1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{20n^2 + 15n - (20n^2 + 20n - 5n - 5)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{20n^2 + 15n - 20n^2 - 20n + 5n + 5}{(n+1)n}$$

$$= \frac{-5n + 5}{(n+1)n} = \frac{5(1-n)}{(n+1)n}$$

Logo a colónia B cresce.

2. $\lim(A_n) = \lim\left(\frac{20}{n+1}\right) = 0$

$\lim(B_n) = \lim\left(\frac{20n-5}{n}\right) = 20$

A sucessão A_n tende para zero logo a população vai se aproximar de zero parando de acastigar, já que a colónia B vai se aproximar de 20 mil porque a sucessão B_n tende para 20.

Figura 52 – Resolução do André do problema 2 (2ª fase)

Assim, o quadro de análise respetivo à comunicação matemática escrita da resolução da segunda fase do problema 2 do André é o seguinte (Tabela 15):

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 15 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 2 (2ª fase)

Para compreender porque é que o André não tinha conseguido progredir em todas as categorias de análise da comunicação matemática escrita, em entrevista, coloquei-lhe algumas questões:

Investigadora: Porque é que não conseguiste melhorar a tua resolução no segundo problema que fizemos?

André: Devo ter feito mais à pressa.

Investigadora: Não achas que não foi o meu feedback? Achas que o meu feedback foi suficiente?

André: Não sei, eu tentei melhorar com o que a professora me disse.

Investigadora: O que não melhoraste foi a tua organização.

(Mostro a sua resolução)

André: Oh, mas isso a organização é sempre. Para mim pode estar organizado... Mas dá para perceber que não está.

Investigadora: Então foi feito à pressa? Não foi o meu feedback?

André: O seu feedback eu percebi, professora, eu fiz à pressa.

(Entrevista, André, 02/05/2025)

Com a entrevista foi possível confirmar a minha suposição acerca do motivo de o André não ter melhorado. O André admitiu ter resolvido o problema à pressa e, portanto, acabou por não melhorar a sua resolução. Quando o questioneei sobre a sua falta de organização, foi perceptível uma tentativa de defender o que fez dizendo que, para ele, a resolução podia estar organizada. Mas rapidamente, após analisar a sua resolução, o André verificou que a resolução, de facto, não estava organizada e que não a organizou por a ter feito à pressa.

Por fim, o meu feedback à evolução do André destacou tanto os aspetos que melhorou como a sua falta de organização ainda presente (Figura 53).

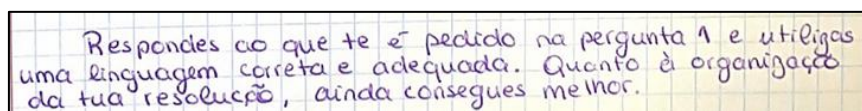


Figura 53 – Feedback à resolução do André do problema 2 (2ª fase)

5.3. Problema 3 da intervenção pedagógica

O problema 3 da intervenção pedagógica (Anexo 4) aborda conteúdos relativos às funções racionais. Para resolver esta tarefa, os alunos deviam saber interpretar o enunciado mobilizando os seus conhecimentos sobre funções, nomeadamente, definir

uma expressão para a proposta do Manuel, determinar a inequação que descreve o problema e resolver essa inequação. Neste problema, dei a possibilidade de os alunos resolverem tanto analiticamente como através da calculadora gráfica; no entanto, todos quiseram resolver analiticamente.

As dificuldades que os alunos encontraram na resolução deste problema foram várias. Primeiro, não conseguiram perceber que tinham de definir uma expressão para a proposta do Manuel. Depois, não conseguiam transcrever para uma inequação a situação apresentada, nem interpretar os resultados obtidos posteriormente. Para além disso, como já mencionei no capítulo da Intervenção Pedagógica, o enunciado era bastante longo e tinha frases para dar algum contexto que acabaram por confundir os alunos. De forma a não comprometer os resultados obtidos, apenas ajudei a ultrapassar essas dificuldades com algumas sugestões e questões para orientar o pensamento como, por exemplo, “Conseguem traduzir o que diz o problema para um modelo matemático? Tentem começar por aí”; “O resultado que obtiveste, o que significa no contexto da situação apresentada? O que é que essa inequação traduzia da situação?”. Nesse momento da intervenção pedagógica, tive de circular mais pelos lugares para esclarecer essas dúvidas e garantir que pelo menos conseguiam iniciar a resolução do problema. No entanto, procurei não dar feedback que influenciasse a forma como eles escreviam afetando os resultados do estudo. Nas secções seguintes analiso em detalhe as resoluções dos três alunos selecionados.

5.3.1. Resolução da Rosa

No último problema da intervenção pedagógica, a nível da comunicação matemática escrita, a Rosa apresenta uma resolução (Figura 54) melhor que a do segundo problema, mas bastante equivalente à sua resolução do problema 1, mudando apenas o critério em que não atinge nível 3.

$$\frac{t^2 + 36t}{t + 1} > t + 0.6t \quad | \quad (-)$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 + 36t}{t + 1} - \frac{1.6t^2 + 1.6t}{t + 1} > 0 \quad | \quad (-)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-0.6t^2 + 34.4t}{t + 1} > 0$$

→ zeros numerador
 $-0.6t^2 + 34.4t = 0$
 $t(0.6t + 34.4) = 0$
 $t = 0 \vee 0.6t + 34.4 = 0$
 $t = 0 \vee t = -57.333$

→ zeros do denominador
 $t + 1 = 0$
 $t = -1$

	$-\infty$	-1		0	57.333	$+\infty$
$-0.6t^2 + 34.4t$	-	-	-	0	+	+
$t + 1$	-	0	+	+	+	+
$\frac{-0.6t^2 + 34.4t}{t + 1}$	+	ND	-	0	+	-

$C.S. =]-\infty; -1[\cup]0; 57.333[$

R.: (como o tempo não pode ter valores negativos no contexto do problema o C.S. é: $]0; 57.333[$, ou seja, se chegarem atrasados menos de 57,3 minutos a proposta é favorável, mas se chegarem atrasados mais que 57,3 minutos a proposta do Manuel já não favorecerá o trabalhador.

Figura 54 – Resolução da Rosa do problema 3 (1ª fase)

A Rosa apresenta uma resolução organizada, escreve com bastante detalhe e com uma linguagem adequada a resposta ao problema e não comete nenhum erro no uso das representações matemáticas. Contudo, não identifica qual é a proposta do Manuel quando a define, apesar de a utilizar. Por esta expressão aparecer sem vir acompanhada de nenhuma explicação do que representa, a aluna não consegue obter o nível 3 no critério da completude do processo de resolução. Desta maneira, a tabela que reúne as classificações em cada um dos critérios de avaliação da comunicação matemática escrita da Rosa na resolução do problema 3, na primeira fase, é apresentada na tabela 16:

Organização	Completude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 3

Tabela 16 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 3 (1ª fase)

O meu feedback foi curto e direto ao assunto que a aluna ainda precisa melhorar (Figura 55). Dei o feedback em forma de pergunta para que a Rosa se aperceba das dúvidas que pode gerar quando o leitor lê a sua resolução.

crítica se a proposta do Manuel e, ou não, sempre mais...
contrato em vigor.

$$\frac{t^2 + 36t}{t + 1} > (t + 0,6t) (=)$$

O que isto representa?

Figura 55 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 – Parte 1 (1ª fase)

Relativamente à autoavaliação da Rosa (Figura 56), a aluna até conseguiu ser crítica sobre a sua resolução identificando que a sua organização podia ser melhor. Apesar de haver sempre margem para melhorar, considero que a resolução da Rosa já estava organizada sendo claro o fio condutor da resolução. Por outro lado, não verificou que podia ter explicado com mais detalhe alguns dos seus passos, nomeadamente no que diz respeito à definição da proposta do Manuel.

organização: Nível 2
 completude do processo de resolução: Nível 3
 representações matemáticas: Nível 3
 apresentação da resposta: Nível 3
 Penso que melhorar um pouco a organização melhoraria a resposta

Figura 56 – Autoavaliação da Rosa à resolução do problema 3

No feedback (Figura 57), salientei que considero que a resolução da Rosa já é uma resolução organizada; no entanto, existe um aspeto a melhorar, em particular, identificar qual é a proposta do Manuel definida por ela.

Já apresentas uma resolução organizada. Quando escreves uma expressão para a proposta do Manuel deves indicar que se trata da proposta do Manuel

Figura 57 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 – Parte 2 (1ª fase)

Na segunda fase da resolução do problema 3 (Figura 58), a Rosa apresenta uma resolução com uma comunicação matemática escrita exemplar. Mesmo referindo no feedback que considerava que a sua resolução já se encontrava organizada, nota-se que a Rosa tem a intenção de apresentar uma resolução mais clara e fácil de leitura. Esta intenção reflete uma verdadeira apropriação dos critérios de avaliação e uma reflexão crítica e consciente sobre a sua resolução. Para além disso, parece apoiar-se no meu feedback para completar a sua resolução, acabando por ser até mais detalhada na sua justificação do que eu esperava. A Rosa foi capaz de utilizar o feedback para

refletir sobre a sua resolução, analisando onde faltavam algumas explicações que facilitariam a compreensão da resolução.

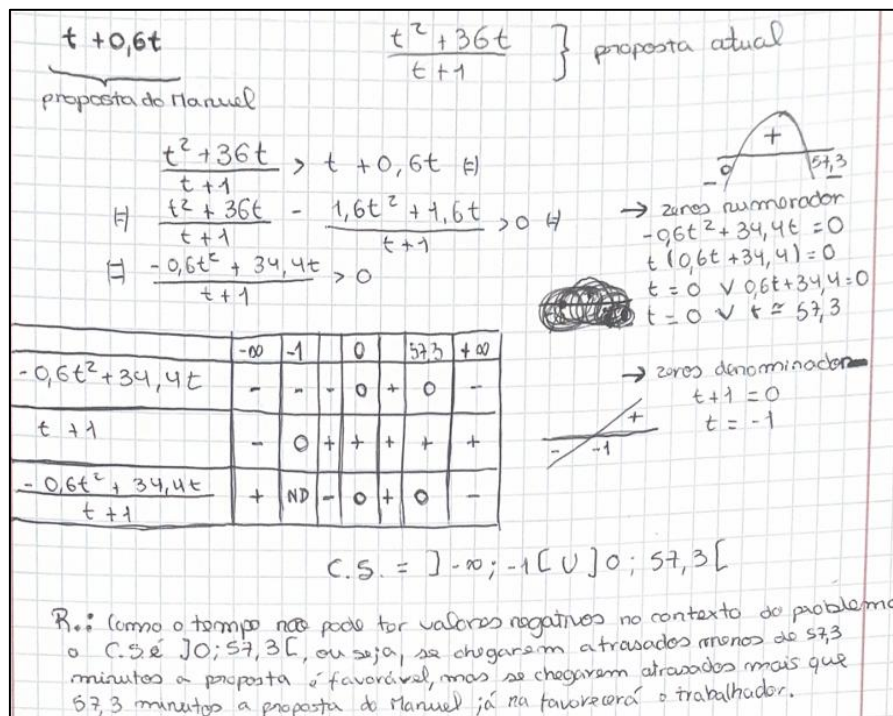


Figura 58 – Resolução da Rosa do problema 3 (2ª fase)

Na tabela 17, sintetizo a análise que fiz da comunicação matemática escrita da Rosa na segunda fase de resolução do problema 3:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 17 – Análise da comunicação matemática escrita da Rosa no problema 3 (2ª fase)

No que diz respeito ao feedback a esta segunda resolução (Figura 59), este foi utilizado apenas para reconhecer que a Rosa melhorou a sua resolução.

Identificas a expressão da proposta do Manuel. Bom trabalho!

Figura 59 – Feedback à resolução da Rosa do problema 3 (2ª fase)

após o meio-dia passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de uma hora do dia.

Verifica se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor.

$C(t) = t^2 + 36t$

$m(t) = 1,6t$ Como existe um aumento de 60%.

$t+1$

$t^2 + 36t > 1,6t$

$t^2 + 36t - 1,6t > 0$

$-0,6t^2 + 34,4t > 0$

$t(-0,6t + 34,4) > 0$

$t=0 \vee -0,6t = -34,4$

$t=0 \vee t=57,3$

races do denominador:

$t+1 > 0$

$t-1 < 0$

$t+1 > 0$

$t-1 < 0$

R.: A Proposta do Manuel é mais favorável dos 0 a 57,3 e a partir deste intervalo deixa de ser favorável.

O Miguel apresenta uma resolução pouco organizada e de difícil leitura, sendo complicado acompanhar o fio condutor do seu pensamento. Apesar de atribuir um nome para a função que representa a proposta do Manuel, não a identifica de forma clara deixando para o leitor ser ele a identificar isso. Na resposta ao problema, o aluno não adequa a linguagem ao contexto da situação apresentada. Embora tenha determinado corretamente, no contexto matemático, o intervalo de tempo em que a proposta do Manuel é favorável, limita-se a apresentar esse intervalo tal como o escreveu na resolução, sem o adaptar ou interpretar no contexto da situação. Desta forma, não realiza a tradução necessária entre o modelo matemático e o enunciado, o que compromete a clareza e a adequação da resposta final. Apesar disso, a resposta está escrita de forma explícita e completa. Deste modo, a análise relativa à comunicação matemática escrita do Miguel no problema 3, na primeira fase, está sumariada na tabela 18:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 3

Tabela 18 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 3 (1ª fase)

Após entregar o feedback à resolução ao Miguel (Figura 61), apercebi-me que existiam algumas coisas na sua resolução que faltavam ser justificadas e acabei por ter de dar esse feedback oralmente. Portanto, no feedback escrito à resolução do Miguel, chamei à atenção do aluno para utilizar uma linguagem adequada ao contexto da situação; oralmente, destaquei que o aluno precisava de identificar que se tratava da proposta do Manuel quando a define.

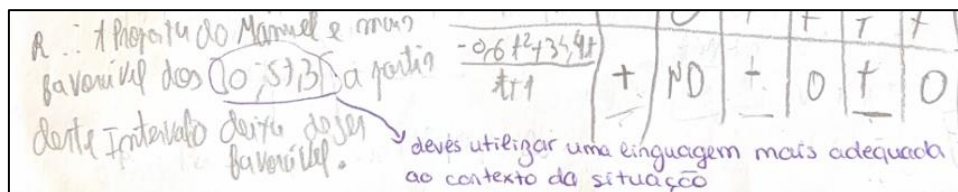


Figura 61 – Feedback à resolução do Miguel do problema 3 (1ª fase)

No que corresponde à autoavaliação do Miguel (Figura 62), este identifica corretamente a sua falta de organização na resolução atribuindo o nível 2 nesse critério e destacando esse aspeto na frase final da sua autoavaliação. Por outro lado, não é capaz de refletir sobre o uso das suas representações matemáticas e da completude do processo da sua resolução. De facto, o aluno em todos os problemas referiu que a sua resolução não estava bem organizada, mas em nenhum dos momentos apresentou uma tentativa de escrever uma resolução com uma melhor organização na primeira fase.

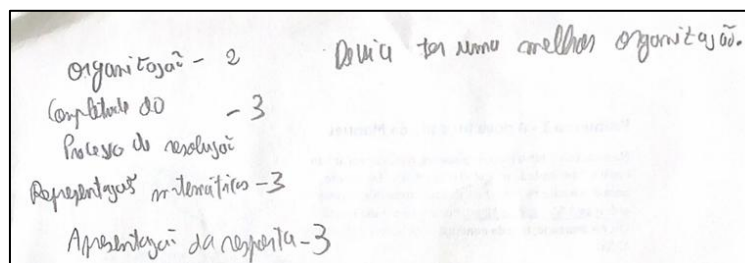


Figura 62 – Autoavaliação do Miguel à resolução do problema 3 (1ª fase)

Tal como já mencionei anteriormente, por lapso meu, tive de fornecer oralmente o feedback relativo à falta de apresentação de algumas justificações. Portanto, o meu feedback (Figura 63) apenas alerta para a necessidade de adequar a linguagem ao

contexto da situação e também é realçada a autoavaliação correta do Miguel sobre a sua organização.

Tens noção que podes apresentar uma resolução mais organizada. Para além disso, deves adequar a tua linguagem ao contexto da situação apresentada.

Figura 63 – Feedback à autoavaliação do Miguel da resolução do problema 3 (1ª fase)

Na segunda fase da resolução do problema 3, o Miguel apenas não conseguiu completar a sua resolução (Figura 64). Apresentou uma resolução bem organizada e adequou a linguagem ao contexto da situação.

$C(t) = \frac{t^2 + 36t}{t+1}$ $m(t) = 1,6t \rightarrow$ como existe um aumento de 60%.
 termos do numerador:
 $t^2 + 36t > 1,6t$
 $t^2 + 36t - 1,6t > 0$
 $t^2 + 34,4t > 0$
 $-0,6t^2 + 34,4t > 0$
 $t+1 \neq 0$
 $t-1$

termos do denominador:
 $t+1 > 0$
 $t-1$

Sign chart for $-0,6t^2 + 34,4t$:

	$-\infty$	-1	0	$57,3$	10
$-0,6t^2 + 34,4t$	-	-	0	+	-
$t+1$	-	0	+	+	+
$-0,6t^2 + 34,4t$	+	ND	0	+	-

R.: A proporção do Manuel é mais favorável até aos 57,3 a partir deste tempo deixa de ser favorável.

Figura 64 – Resolução do Miguel do problema 3 (2ª fase)

Assim, a análise correspondente à comunicação matemática escrita da resolução, na segunda fase do terceiro problema, do Miguel é apresentada na tabela 19:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 3

Tabela 19 – Análise da comunicação matemática escrita do Miguel no problema 3 (2ª fase)

Para melhorar a organização, o Miguel pode ter-se apoiado tanto na sua autoavaliação como no meu feedback. Já para corrigir a linguagem utilizada precisou de recorrer ao meu feedback. Como o meu feedback sobre a necessidade de identificar que a expressão que o Miguel definiu correspondia à proposta do Manuel foi feito apenas oralmente, este pode ter tido uma influência no progresso da sua resolução. Talvez este feedback não tenha sido tão eficaz para o aluno conseguir utilizá-lo apoiando-se nos critérios para melhorar a sua resolução. Outra possibilidade é que, por ter sido dado oralmente, o aluno se tenha simplesmente esquecido do que lhe foi dito no momento de resolver outra vez o problema. Decidi, assim, assinalar essa chamada de atenção nesta segunda resolução. Para além disso, destaquei os aspetos em que o Miguel conseguiu progredir nesta nova resolução, como se pode observar na figura 65.

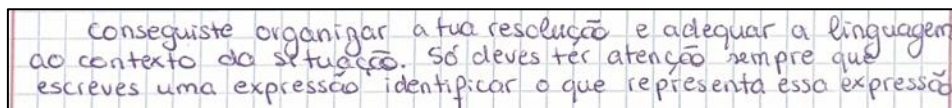


Figura 65 – Feedback à resolução do Miguel do problema 3 (2ª fase)

5.3.3. Resolução do André

No último problema da intervenção pedagógica, o André consegue apresentar uma resolução completa, com um uso adequado das representações matemáticas e com uma resposta completa e explícita. Contudo, ainda não é capaz de organizar a sua resolução de forma clara e de fácil leitura.

Proposta de M. $1,6t < \frac{t^2 + 36t}{t+1}$, para a proposta de Manuel seja mais favorável

$t \in (0, 60 \pm 5), 6t$

Proposta de Emp. $\frac{t^2 + 36t}{t+1}$

$(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t}{t+1} - 1,6t > 0$

$(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t}{t+1} - \frac{1,6t(t+1)}{t+1} > 0$

$(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t}{t+1} - \frac{1,6t^2 + 1,6t}{t+1} > 0$

$(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t - 1,6t^2 - 1,6t}{t+1} > 0$

$(\Rightarrow) \frac{0,4t^2 + 34,4t}{t+1} > 0$

Zeros do numerador $t(-0,4t + 34,4) = 0$

$t = 0 \vee -0,4t = -34,4$

$t = 0 \vee t = 86,0$

Zeros do denominador $t+1 = 0$

$t = -1$

Figura 66 – Resolução do André do problema 3 - Parte 1 (1ª fase)

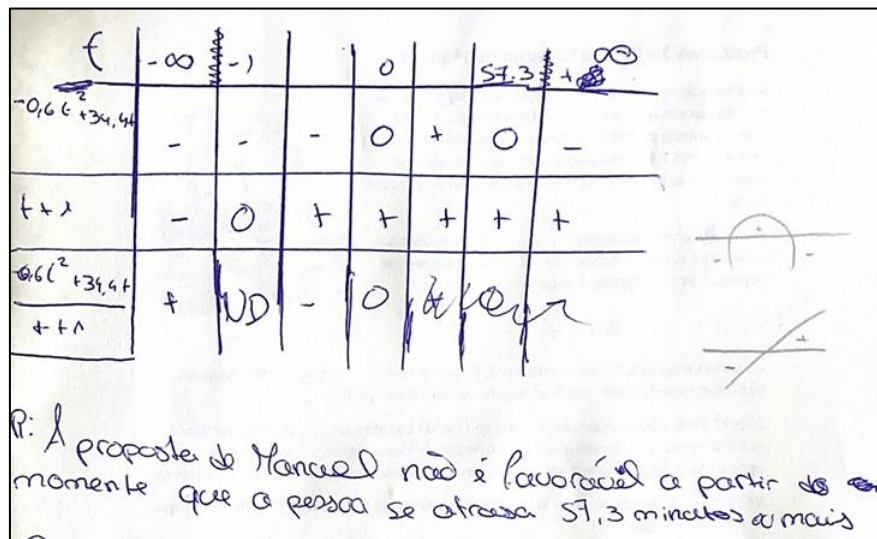


Figura 67 – Resolução do André do problema 3 - Parte 2 (1ª fase)

Nas figuras 66 e 67 parece que o André teve alguma pressa em realizar os cálculos e, portanto, poderá não ter tido tão cuidado em apresentá-los. Acaba por se enganar às vezes e, em vez de riscar e refazer, tenta remendar por cima, dificultando a leitura da sua resolução. Por outro lado, apresenta uma resposta à pergunta completa e adequada a sua linguagem ao contexto da situação apresentada. Também identifica corretamente a expressão que definiu para a proposta do Manuel e tem o cuidado de detalhar todos os seus passos ao longo da resolução. Quando o André resolveu a inequação, assinala o conjunto-solução apenas sublinhando-o na tabela, de forma pouco explícita, sem o escrever de forma clara. Assim, não apresentou diretamente o conjunto-solução, deixando implícito que o leitor deverá interpretá-lo a partir da tabela apresentada na resolução. A tabela 20 correspondente à minha análise da comunicação matemática escrita do André na primeira fase do problema 3:

Organização	Completo do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3

Tabela 20 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 3 (1ª fase)

Como os únicos aspetos que o André tinha de melhorar na sua resolução eram a sua organização e a apresentação do conjunto-solução, reuni essas informações todas num feedback, abrangendo ao mesmo tempo a comunicação matemática escrita na resolução do problema e a autoavaliação do aluno. Relativamente à autoavaliação do André (Figura 68), fez uma autoavaliação bastante consciente mostrando uma maior reflexão após a resolução da tarefa.

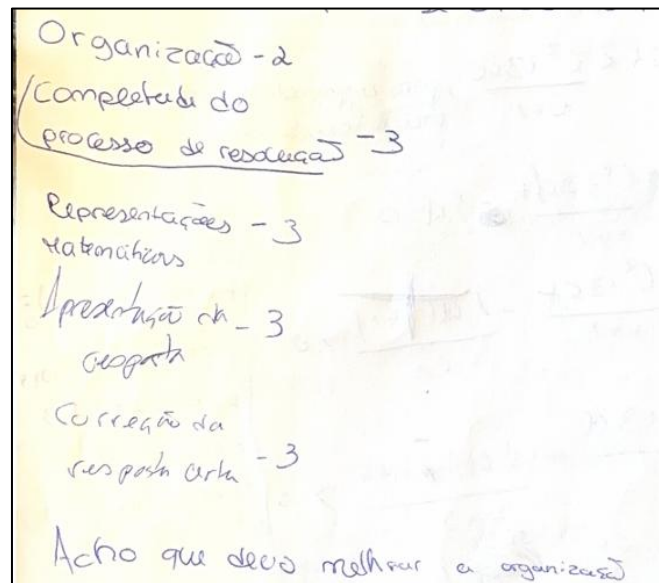


Figura 68 – Autoavaliação do André à resolução do problema 3 (1ª fase)

O André identificou a necessidade de apresentar uma resolução mais organizada, destacando esse aspeto tanto na classificação atribuída nesse critério como na frase relativa a aspetos a melhorar na comunicação matemática escrita. Ao longo dos três problemas é possível observar uma atitude do André mais crítica e consciente face à sua autoavaliação.

Assim, o meu feedback (Figura 69) realça os aspetos que o André já consegue cumprir na sua resolução como a explicação de todos os passos e o uso de uma linguagem adequada ao contexto da situação, assim como a necessidade de apresentar uma melhor organização e o conjunto-solução.

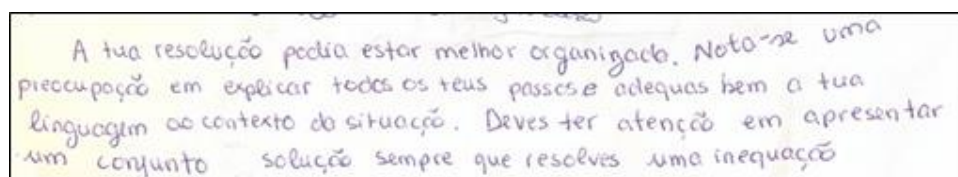


Figura 69 – Feedback à resolução do André do problema 3 (1ª fase)

Na segunda vez que o André resolveu este problema (Figura 70), manteve todos os aspetos que já estavam bem da sua comunicação matemática escrita na primeira resolução e melhorou a sua organização. Também, após resolver a inequação do problema, o André já apresentou o conjunto-solução correspondente.

Proposta de Manuel $1,6t < \frac{t^2 + 36t}{t+1}$ para que proposta de Manuel seja mais favorável

$t + 0,6t = 1,6t$

Proposta da Empresa $(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t}{t+1} - 1,6t > 0$

$(\Rightarrow) \frac{t^2 + 36t - 1,6t^2 - 1,6t}{t+1} > 0$

$(\Rightarrow) \frac{-0,6t^2 + 34,4t}{t+1} > 0$

Zeros do numerador

$\downarrow (-0,6t + 34,4) = 0$

$t = 0 \vee -0,6t = -34,4$

$t = 0 \vee t = 57,3$

Zeros do denominador

$t + 1 = 0$

$t = -1$

t	$-\infty$	-1		0	57,3	$+\infty$
$-0,6t^2 + 34,4t$	-	-	-	0	+	0
$t+1$	-	0	+	+	+	+
$\frac{-0,6t^2 + 34,4t}{t+1}$	+	ND	-	0	+	-

C.S. =]0, 57,3[

R: A proposta de Manuel não é favorável a partir do momento que a pessoa se atrasa 57,3 minutos ou mais

Figura 70 – Resolução do André do problema 3 (2ª fase)

A análise relativa à comunicação matemática escrita do André na segunda fase de resolução do problema 3 está resumida na tabela 21:

Organização	Compleitude do processo de resolução	Representações matemáticas	Apresentação da resposta
Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 21 – Análise da comunicação matemática escrita do André no problema 3 (2ª fase)

Retirando a presença do conjunto-solução, o André conseguiu melhorar a sua resolução recorrendo à sua autoavaliação e apoiando-se nos critérios de avaliação. Aqui é possível observar uma apropriação dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita. O meu feedback à segunda resolução do André

(Figura 71) foi apenas para confirmar ao aluno que tinha uma resolução organizada e completa e, portanto, com uma boa comunicação matemática.

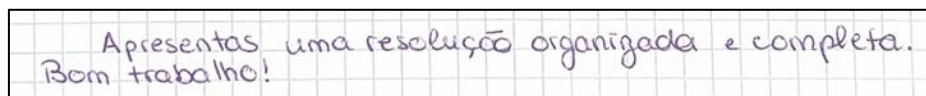


Figura 71 – Feedback à resolução do André do problema 3 (2ª fase)

De forma a ter uma perspetiva mais geral dos resultados desta intervenção pedagógica elaborei uma tabela resumo (Tabela 22) com os três problemas e os níveis que cada aluno alcançou em cada critério de avaliação da comunicação matemática escrita em cada uma das fases. Assim, é possível verificar as diferentes evoluções que existiram em cada aluno e o progresso dos mesmos ao longo de toda a intervenção pedagógica.

Comunicação matemática escrita		Organização		Completo do processo de resolução		Representações matemáticas		Apresentação da resposta	
		1ª fase	2ª fase	1ª fase	2ª fase	1ª fase	2ª fase	1ª fase	2ª fase
Problema 1	Rosa	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3
	Miguel	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3
	André	Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3
Problema 2	Rosa	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3
	Miguel	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 3
	André	Nível 2	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 3
Problema 3	Rosa	Nível 3	Nível 3	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3
	Miguel	Nível 2	Nível 3	Nível 2	Nível 2	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3
	André	Nível 2	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3	Nível 3

Tabela 22 – Análise da comunicação matemática escrita dos alunos selecionados na intervenção pedagógica

5.4. Perceções dos alunos acerca do papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita

As entrevistas foram realizadas com o objetivo de compreender as perceções dos alunos sobre o papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita e, caso necessário, esclarecer algumas dúvidas sobre as suas resoluções e autoavaliações relativas aos três problemas da intervenção pedagógica.

As questões elaboradas (Anexo 5) foram previamente pensadas para perceber quais são as perspetivas dos alunos relativas à sua comunicação matemática escrita, assim como se esta intervenção teria contribuído para o desenvolvimento desta capacidade. Nesta secção, analiso as respostas que cada um dos três alunos selecionados deu a cada questão colocada.

A primeira pergunta da entrevista teve como objetivo compreender o que os alunos pensavam sobre a sua comunicação matemática escrita e se a consideravam nas suas resoluções. Tanto a Rosa como o André revelaram que, de forma geral, não se preocupavam com esta vertente, valorizando sobretudo a obtenção do resultado final. No entanto, a resposta da Rosa demonstra que, apesar de a sua principal preocupação ser chegar ao resultado, já existia uma atenção à organização da resolução, uma das categorias de análise da comunicação matemática escrita: “Não é que não ligasse muito, apenas pensava que tinha de resolver de forma organizada, mas a minha preocupação maior era chegar ao resultado” (Entrevista, Rosa, 02/05/2025).

Por outro lado, o André acredita que a sua comunicação matemática escrita só apresentava falhas porque não pensava nesse assunto quando resolvia uma tarefa. É possível que a comunicação não tenha sido um tema discutido ou valorizado no seu percurso escolar, o que, consequentemente, pode ter contribuído para que o André não desenvolvesse uma preocupação com a comunicação matemática escrita na resolução das tarefas:

André: Ah, eu acho que... eu tipo, eu sabia que ia ser, mas eu não me importava, não é não me importava, tipo eu não prestava atenção, mas eu achava que era boa... Era boa, se eu quisesse.

Investigadora: Ah, mas então, se tu quiseses a tua comunicação era a boa, mas não era?

André: Sim, mas é porque eu, eu tipo, eu não

Investigadora: Não te preocupavas com isso?

André: Sim

(Entrevista, André, 02/05/2025)

Pretendia também entender se os alunos tinham alguma noção do que é que envolvia ter uma boa comunicação matemática escrita, de forma a compreender se esta perceção foi alterada com esta intervenção pedagógica. Tanto a Rosa como o Miguel não sabiam em que consistia a comunicação matemática escrita, nem todas as categorias que podiam ser consideradas para a caracterizar. Quando resolviam uma tarefa apenas tinham em mente que o resultado tinha de dar certo: “Eu não sabia que existiam tantos critérios, apenas fazia e o objetivo era dar certo” (Entrevista, Rosa, 02/05/2025). Miguel reforçou que “Não sabia ... não tinha ideia de que a comunicação matemática escrita envolvia tantos parâmetros. Nós nunca tivemos a visão das coisas assim, tipo não sabia o que era exatamente” (Entrevista, Miguel, 02/05/2025).

Por outro lado, o André afirmou que sabia o que era necessário para apresentar uma boa comunicação matemática na resolução de uma tarefa. No entanto, ao longo do diálogo, tornou-se perceptível que essa afirmação não correspondia inteiramente à realidade, revelando-se uma forte influência a sua preocupação em obter apenas uma resposta correta e organizada:

André: Eu sabia.

Investigadora: Mas então o que para ti era uma boa comunicação matemática escrita?

André: Oh stôra, tipo, sabia que tinha de ter tudo direitinho

Investigadora: Só isso?

André: Ah... a resposta tinha de estar certa.

(Entrevista, André, 02/05/2025)

Todos os alunos identificaram dificuldades nas categorias de análise da comunicação matemática escrita, embora diferentes de aluno para aluno. No que diz respeito às dificuldades apresentadas pela Rosa, esta destaca que tinha dificuldades tanto na completude do processo de resolução como na apresentação de resposta. É interessante verificar que a preocupação com a apresentação de resposta foi diminuindo

ao longo dos anos de escolaridade, possivelmente pela diminuição de exigência dos professores que teve:

Rosa: Não justificar tudo. Às vezes eu apresentava respostas ou chegava a números e não dizia como chegava lá, então pronto... dificultava-me um bocado a vida e se calhar as que não sabia também tinha de justificar isso.

Investigação: Mais nenhuma categoria?

Rosa: Eu, às vezes não apresentava resposta. Quando era mais nova tinha essa preocupação, mas depois deixei de fazer isso. Só este ano é que voltei a fazer. Mas penso que a minha maior dificuldade era não justificar tudo, eu apresentava respostas ou chegava a números e não dizia como chegava lá.

(Entrevista, Rosa, 02/05/2025)

O Miguel realçou que a sua maior dificuldade era na organização da resolução. Além disso, revelou que, inicialmente, não associava a organização da resolução à comunicação matemática escrita. Para ele, a organização dizia respeito apenas à apresentação visual - tudo "direitinho no papel", sem perceber que essa categoria era, na verdade, um elemento essencial da comunicação matemática escrita.

Miguel: Não, eu não sabia, eu só sabia que tinha que melhorar a organização.

Investigadora: E sabias que a organização fazia parte da comunicação matemática?

Miguel: Não, pensava que a organização ia estar tudo direitinho, no papel.

Investigadora: E pensavas que isso não fazia parte da comunicação escrita, que não tinha nada a ver?

Miguel: Sim

(Entrevista, Miguel, 02/05/2025)

Já o André referiu que o aspeto que mais falhava era na apresentação de resposta e que só apresentava resposta nos problemas. Perante esta informação, decidi esclarecer o que o André entendia por problemas para compreender o que o levava a apresentar a resposta a este tipo de tarefa. Na verdade, se o André via um enunciado longo assumia que era necessário apresentar resposta; já quando isso não acontecia, o aluno apenas resolvia a questão sem apresentar resposta final:

André: Eu não apresentava resposta, só quando era problemas.

Investigadora: O que é problema para ti?

André: As perguntas grandes. Que era mais ou menos desse tipo. Para mim, é tipo problema. Os outros, não.

(Entrevista, André, 02/05/2025)

Todos os alunos responderam de forma positiva aos resultados que observaram na sua comunicação matemática escrita, fruto da contribuição dos critérios de avaliação. No caso particular do Miguel, na resposta do aluno é possível verificar que este sente um desenvolvimento desta capacidade nas suas resoluções. Também é curioso o Miguel perceber que, se tiver uma boa comunicação, facilita a compreensão do seu pensamento tanto por parte do professor como pela sua, algo que é fortemente destacado na literatura (Martinho & Rocha, 2018; Pugalee, 2004): “Eu acho que melhorei a minha comunicação. Agora é mais fácil para mim, eu entendo mais o que estou a fazer e professora também entende mais o que eu estou a fazer” (Entrevista, Miguel, 02/05/2025).

A capacidade de autoavaliação dos alunos foi um fator importante que influenciou os resultados desta intervenção. O Miguel afirmou que desenvolveu esta capacidade ao longo da intervenção, tornando-se mais crítico à medida que compreendeu melhor o significado de cada critério:

Miguel: Um bocadinho mais crítico.

Investigadora: Achas que agora consegues olhar para uma resolução tua e identificar o que tens de melhorar na tua comunicação?

Miguel: Sim, agora também sei mais sobre os critérios, o que cada critério significa.

(Entrevista, Miguel, 02/05/2025)

No mesmo sentido, o André também referiu que conseguiu ser mais crítico após reconhecer o que significava cada critério. Outro aspeto importante a salientar é o facto de o André ter reconhecido que a aula inicial da intervenção pedagógica, dedicada à análise da comunicação matemática escrita das resoluções, foi importante para tomar consciência dos aspetos que precisava de melhorar: “Se calhar depois, quando tivemos aquela aula, eu comecei a prestar mais atenção nas coisas, porque eu antes era

sempre... estava tudo bem. E depois é que quando tivemos aquela aula, é que eu percebi que estava um bocado mal” (Entrevista, André, 02/05/2025).

Já a Rosa não respondeu com a mesma certeza quanto ao desenvolvimento dessa capacidade. Apesar de assumir que já conseguia compreender alguns dos pontos que perde no teste, reconheceu que é mais fácil avaliar as resoluções dos outros do que as suas. Quando tinha de avaliar a sua própria resolução, acabava por adotar uma posição de negação, o que dificultava a identificação dos aspetos que precisava de melhorar. Esta dificuldade que a Rosa revelou na autoavaliação é um sinal claro de como este processo pode ser desafiante, sobretudo quando envolve um olhar crítico sobre o próprio desempenho. Ao admitir que era mais fácil avaliar as resoluções dos colegas do que as suas, Rosa mostrou que o distanciamento em relação ao trabalho dos outros facilita a identificação de erros e pontos a melhorar. No entanto, quando se tratava da sua própria produção escrita, tendia a adotar uma postura de negação, o que dificultava o reconhecimento de falhas e limitava o seu progresso. Tal como Santos (2002) afirma, verifica-se que a autoavaliação é uma prática que exige que o aluno tenha bem desenvolvida a sua capacidade de ser crítico sobre o seu trabalho.

Rosa: Sim, acho que quando recebemos um teste agora é um bocado diferente a nossa olhar para um exercício e depois lembrar daquela aula em que nós vimos isto. Já consigo perceber alguns pontos que perdi.

Investigadora: E consegues agora pegar numa resolução tua a ver aquilo que podes melhorar na tua comunicação?

Rosa: Sim, melhor, mas quando somos nós, é um bocado mais difícil. Fomos ver o do outro, o do outro, se calhar, pronto, já encontramos mais facilmente. Quando somos nós entramos sempre um bocado em negação, está tudo certo, pronto.

(Entrevista, Rosa, 02/05/2025)

Todos os alunos começaram a utilizar os critérios de avaliação da comunicação matemática escrita para melhorar a sua comunicação nos testes. Por outro lado, durante as aulas, fora dos momentos de avaliação sumativa, já não os levava a aplicar os critérios por quererem ser mais rápidos. Apesar de todos responderem que utilizavam esta ferramenta para os testes, todos a usavam de forma diferente. Com esta intervenção pedagógica, Rosa percebeu que precisava de apresentar mais justificações dos seus cálculos, e acabou por ter mais atenção a isso na resolução dos testes.

Embora a Rosa afirmasse que não pensava diretamente nos critérios durante a resolução, notou-se que ela os integrou no seu pensamento. Isso revela uma apropriação parcial dos critérios, onde apesar de não serem aplicados de forma consciente, acabavam por ter uma influência nas suas escolhas ao longo da resolução. Além disso, a Rosa afirmou que passou a rever as suas resoluções com base em perguntas como “apresentei a resposta?”, “justifiquei?”. Este comportamento indica o desenvolvimento da capacidade de reflexão e autoquestionamento, que contribui para a melhoria da sua comunicação matemática escrita. É importante destacar que a Rosa já refletia uma mudança da sua ideia inicial sobre a importância de apresentar o resultado correto. Após a intervenção pedagógica, reconhecia que a apresentação de todos os passos e justificações que conduzem ao resultado era de igual ou até maior importância do que chegar à resposta certa. Penso que a eliminação do critério da correção da resposta, após a discussão da tarefa inicial, pode ter contribuído para essa mudança, permitindo que a aluna deixasse de lhe atribuir tanta importância:

Rosa: Sim. E eu pensava que tinha que fazer aquilo para ter os pontos todos, a cotação toda, em justificar tudo, em apresentar a resposta, em utilizar a linguagem necessária, pronto, acho que depois começamos a pensar mais nisso e o que, para além de apresentar não só o resultado certo, que é o mais importante, acho que chegar a isso, mas também apresentar todos os passos porque pode ser tão importante ou mais até, por isso, acho que sim.

Investigadora: Mas no teste tu pensas nos critérios para rever a tua resolução?

Rosa: Não era bem pensar nos critérios, mas agora já sei que tenho que completar muito mais a resposta do que eu completava antes.

Investigadora: Mas utilizavas para rever a resolução ou já fazias a resolução a pensar nisso?

Rosa: Eu olho para a resolução e olho assim, ok, apresento resposta, ok, justifico porque é que isto acontece...

(Entrevista, Rosa, 02/05/2025)

O Miguel utiliza os critérios para rever a sua resolução e corrigir ou completar o que achar necessário. Portanto, é notória uma intenção clara em utilizar os critérios como uma ferramenta de revisão da sua resolução. Contudo, este instrumento deixava de ser

utilizado quando o aluno não tinha tempo para o fazer. Desta forma, fatores como a gestão limitada do tempo, podem ter influência se o aluno usa ou não os critérios de avaliação numa análise crítica das suas resoluções.

Miguel: Eu penso mais no teste... Mas nem sempre dá tempo, quando estou no fim e sob pressão, não consigo pensar nos critérios

Investigadora: Pensas para rever as resoluções?

Miguel: Sim... se tenho resposta...

(Entrevista, Miguel, 02/05/2025)

Por outro lado, o André tinha os critérios em mente enquanto resolvia o problema, mas não os utilizava para rever a sua resolução; em vez disso, procurava cumprir cada um deles ao longo do processo. Esta abordagem mostra que os critérios fazem parte do seu processo de resolução desde o início, funcionando como uma espécie de “guião” para a sua resolução. No entanto, também evidencia uma limitação quando não utiliza os critérios como instrumento de autoavaliação ou de verificação final, o que pode comprometer a identificação de erros na sua resolução final. Além disso, o facto de o André referir que não utilizava os critérios na aula para tentar ser mais rápido sugere que, em contextos que não de avaliação sumativa, acabava por desvalorizar a aplicação dos critérios. Isto sugere que, embora os critérios estejam presentes na construção das suas resoluções, a sua aplicação ainda depende do contexto onde é realizada a tarefa, nomeadamente se num contexto de avaliação formativa (integrada nas aulas) ou de avaliação sumativa (como num teste):

André: Mais lá nos testes, mas... Na sala de aula é mais para ser mais rápido.

Investigadora: Por exemplo, fazes o teste, estás a rever o teste, analisas a resolução a pensar nos critérios?

André: Não, eu acho que ao rever eu não penso nisso, eu penso só a fazer. Eu penso quando estou a fazer.

(Entrevista, André, 02/05/2025)

Para perceber de que forma os alunos utilizavam os critérios de avaliação na melhoria da sua comunicação matemática escrita, questionei-os sobre a que instrumentos recorriam para melhorar as suas resoluções. As respostas dos três alunos foram bastante semelhantes. Todos referiram que, embora ao longo do tempo tivessem

conseguido recorrer à autoavaliação para melhorar as suas resoluções, sentiam sempre a necessidade do meu feedback para identificar e corrigir os aspetos menos conseguidos. No caso particular da Rosa, a aluna evidenciou essa necessidade de feedback, mas, como este se baseava nos critérios de comunicação matemática escrita, foi-se tornando, com o tempo, mais capaz de identificar por si própria o que precisava de melhorar. Ainda assim, reconheceu que, para futuras resoluções, continuaria a precisar do meu feedback para conseguir evoluir:

Investigadora: Com a aplicação dos critérios de avaliação foste capaz de verificar logo o que tinhas de melhorar ou foi necessário ver também o meu feedback?

Rosa: Era um bocado necessário o feedback da professora. No início pensava que estava sempre tudo certo. Quando a professora foi mostrando as coisas erradas e o que podíamos melhorar comecei a perceber melhor como tinha de me corrigir.

Investigadora: Mas achas que ainda precisavas do meu feedback?

Rosa: Eu acho que ainda preciso do feedback da stôra.

(Entrevista, Rosa, 02/05/2025)

6. Conclusões e implicações do estudo

Neste capítulo é feita uma breve síntese de toda a investigação, relembrando o seu objetivo e as respetivas questões de investigação, assim como a metodologia adotada. São apresentadas as conclusões obtidas através dos resultados analisados, orientados pelas questões de investigação, e tendo em conta a literatura revista. Para além disso, é feita uma reflexão sobre as limitações da investigação, implicações deste estudo para o futuro e são sugeridas possíveis próximas investigações decorrentes deste trabalho.

Esta investigação foi realizada numa turma de 11.º ano, na disciplina de Matemática A, e tinha como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas e como os integram na melhoria das suas produções. Também pretendia compreender como os alunos percecionam o papel desses critérios na melhoria das suas aprendizagens. Desta forma, foram elaboradas as seguintes questões de investigação: (i) Como é que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação focados na capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas? (ii) Como é que os alunos integram os critérios de avaliação na melhoria da capacidade da comunicação matemática escrita na resolução de problemas? e (iii) Quais as perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios na melhoria das suas aprendizagens?

Para responder a essas questões foi adotada uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008) e os dados recolhidos, no contexto de uma intervenção pedagógica em torno da resolução de três problemas (na aceção de Ponte, 2005), em duas fases, incluíram: (i) produções escritas dos três alunos selecionados; (ii) feedback escrito por mim nas duas fases de resolução dos problemas; (iii) entrevistas semiestruturadas aos alunos selecionados; e (iv) notas de campo. Os critérios de avaliação fornecidos aos alunos foram construídos com base no quadro de categorias para a análise da comunicação matemática escrita na resolução de problemas de Martins e Martinho (2023), tendo procedido a algumas adaptações que foram consideradas relevantes tendo em conta o contexto em que foi realizado este estudo.

Como as primeiras duas questões de investigação se interligam e dependem uma da outra, irei responder em conjunto a estas duas questões de investigação e a terceira será respondida à parte.

6.1 Critérios de avaliação: apropriação e integração

Entre a primeira e a segunda fases da resolução dos problemas, todos os alunos apresentaram melhorias nas suas respostas, embora em diferentes níveis de evolução. Enquanto alguns conseguiram melhorar integralmente as suas resoluções, outros registaram progressos menos significativos. No problema 1, verificou-se uma evolução positiva geral, com todos os alunos a melhorarem totalmente as suas respostas. Já nos problemas 2 e 3, essa melhoria foi menos evidente, dado que nem todos foram capazes de apresentar, na segunda fase, uma comunicação matemática escrita de qualidade.

Nos casos em que a melhoria não foi total, isso pode ter resultado tanto de dificuldades na apropriação dos critérios de avaliação quanto nas dificuldades em compreender e utilizar o feedback para melhorar as produções. Fatores como a falta de conhecimento dos conteúdos abordados no problema, bem como o desinteresse ou baixo envolvimento, podem ter influenciado negativamente o progresso dos alunos. Como defendem Santos e Pinto (2018), o mero conhecimento dos critérios, mesmo entre alunos com bons resultados escolares, não garante, por si só, um desempenho mais eficaz. Este depende também do grau de envolvimento do aluno na apropriação desses critérios. Além disso, os resultados mostraram que a falta de conhecimento dos conteúdos pode comprometer a qualidade da comunicação matemática dos alunos.

Outro aspeto importante que se destacou foi a dificuldade que os alunos enfrentam ao autoavaliar-se. Como alguns autores salientam (Hadji, 1997, citado em Santos e Gomes, 2006; Santos, 2002), a prática da autoavaliação exige que o aluno possua competências desenvolvidas de pensamento crítico, consciência e reflexão sobre o seu trabalho. Os resultados revelam também que os alunos sentem maior facilidade em avaliar as produções dos colegas do que as suas próprias. Isto pode ser explicado pela distância que têm em relação ao trabalho do outro, o que facilita a identificação de erros e pontos a melhorar. Por outro lado, quando se trata da autoavaliação, esse distanciamento é mais difícil de alcançar, e surgem obstáculos como a resistência à crítica, a negação de falhas ou a dificuldade em reconhecer limitações do seu trabalho. Estes resultados vão ao encontro das conclusões de Santos e Gomes (2006) e Santos (2002). Neste estudo, apesar de todos os alunos terem evoluído mais ou menos significativamente nas suas resoluções, foi necessário terem acesso ao meu feedback para o conseguirem fazer. Isto sugere que, por si só, os alunos ainda não conseguem utilizar os critérios de avaliação de forma autónoma e consistente. Contudo, estes

alunos tinham poucos hábitos de reflexão, em particular em contextos de autoavaliação, e a duração da intervenção pedagógica foi curta, o que pode justificar a sua dificuldade na apropriação e utilização consequente e autónoma dos critérios de avaliação, indo ao encontro do que referem Montalvo e Torres (2004), Semana (2016) e Santos e Gomes (2006), por exemplo.

Os critérios fornecidos aos alunos foram essenciais para a construção do meu feedback: pude apoiar-me nos critérios para questionar cada aluno sobre o seu desempenho e fornecer orientações para ultrapassar as suas dificuldades (Pinto, 2020; Fernandes, 2020b). Entre os vários critérios de avaliação, os alunos demonstraram maior facilidade em identificar se as suas resoluções estavam organizadas, conseguindo melhorar este aspeto autonomamente.

Embora a dificuldade na autoavaliação fosse evidente, ao longo do tempo observou-se uma progressiva melhoria na compreensão de alguns critérios. No entanto, as oportunidades criadas para desenvolver esta capacidade não foram suficientes para que os alunos se apropriassem dos critérios de avaliação, dada a duração da intervenção pedagógica. Isto corrobora o que afirmam Montalvo e Torres (2004): proporcionar diversas oportunidades para os alunos trabalharem esta competência permite-lhes diferenciar entre a perceção que têm do seu desempenho e o que é efetivamente valorizado nos critérios de avaliação. Dado que as oportunidades criadas foram apenas três, podem ter sido poucas tendo em conta a complexidade de alguns critérios. Contudo, a organização foi um dos aspetos em que os alunos, com o tempo, foram capazes de se autoavaliar de forma independente, possivelmente por ser algo simples e próximo dos alunos. Tal como vários autores consideram (Pinto, 2020; Fernandes, 2020b, 2020c), o uso de linguagem mais próxima dos alunos e acessível aos alunos ajuda na compreensão dos critérios de avaliação.

O feedback que forneci constituiu ainda uma estratégia eficaz para promover essa apropriação, funcionando como um guia que permite ao aluno verificar se está a aplicar corretamente os critérios, identificar o seu nível de desempenho e compreender as ações necessárias para alcançar o patamar desejado (Pinto, 2020). Desta forma, o feedback assume um papel mediador e facilitador, essencial para que os alunos ultrapassem os obstáculos da autoavaliação e desenvolvam a capacidade de autorregulação (Black & Wiliam, 2006; Santos, 2022; Santos et al., 2024).

Por fim, tendo em conta que a capacidade de autoavaliação dos alunos estava pouco desenvolvida, a aplicação dos critérios na melhoria da comunicação matemática escrita

funcionou mais como um guia orientador do que como um instrumento para a autorregulação das aprendizagens. Estes critérios funcionaram como uma referência que permitiu aos alunos confirmar se estavam a seguir o percurso esperado e identificar os aspetos valorizados na avaliação da comunicação matemática (Pinto, 2020; Fernandes, 2020b; Silva, 2004). As entrevistas vieram reforçar esta minha perceção, já que as respostas dos alunos evidenciam que os critérios foram utilizados como uma ferramenta de orientação; contudo, alguns parecem ter começado a usar os critérios como ferramenta de reflexão, quer durante a resolução das tarefas, quer no momento de revisão das suas produções.

Em suma, os alunos não conseguiram apropriar-se dos critérios na totalidade. Tendo em conta que a capacidade de autoavaliação estava pouco desenvolvida, era de esperar que apenas três momentos para os alunos desenvolverem esta capacidade e se apropriarem dos critérios fosse pouco. A literatura revista evidencia a autoavaliação como um processo de elevada dificuldade e que exige bastante reflexão do aluno (Santos & Gomes, 2006; Santos, 2002). Desta forma, é necessário criar várias oportunidades para os alunos conseguirem desenvolver esta capacidade sendo cada vez menos precisa a ajuda do professor para essa regulação (Semana, 2016). Assim, o progresso dos alunos foi sobretudo devido ao apoio do feedback, que os alunos utilizaram para integrar os critérios como ferramentas para melhorar diversos aspetos da comunicação matemática escrita, tais como organização da resolução, apresentação dos passos e justificações, uso de representações adequadas, linguagem e notação corretas, bem como a formulação de respostas explícitas e completas. Contudo, nem todos responderam de igual forma à autoavaliação e ao feedback, mostrando reações distintas ao longo do tempo. Considerando que os critérios são os mesmos para todos, destaca-se a importância de um feedback adaptado a cada aluno, que reconheça e responda às suas necessidades individuais (Hattie & Timperley, 2007; Santos, 2022; Santos & Dias, 2007). Além disso, realça-se a necessidade de múltiplas oportunidades para o desenvolvimento da capacidade de autoavaliação, sendo o feedback uma das estratégias mais eficazes para promover a apropriação dos critérios (Santos & Gomes, 2006). Relativamente à melhoria da comunicação matemática escrita, os alunos nem sempre melhoraram na totalidade as suas produções, mas todos mostraram uma evolução mais ou menos significativa. Os resultados sugerem que a falta de conhecimento dos conteúdos abordados nos problemas ou a falta de empenho e vontade de melhorar podem ter influenciado o progresso dos mesmos. Como Santos e

Pinto (2018) referem, o uso dos critérios por si só não garantem um melhor desempenho do aluno estando dependente de outros fatores.

6.2 Perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita

No que diz respeito às perceções dos alunos relativamente ao papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita, todos consideraram que a intervenção pedagógica realizada lhes permitiu melhorar a sua capacidade de comunicação matemática escrita na resolução de problemas e que foi importante para o desempenho na disciplina. Verifica-se assim o que Fernandes (2020a) defende: a avaliação formativa, neste caso particular, a autoavaliação, pode desempenhar um papel essencial na aquisição de aprendizagens.

Além disso, admitiram que, antes de participarem neste estudo, não tinham grande preocupação com a sua comunicação matemática escrita e que o importante era chegar ao resultado correto. No fim, conseguem perceber que o processo de resolução e a forma como o apresentam é tão ou mais importante do que chegar ao resultado correto. Inicialmente, existiam cinco critérios de avaliação, um dos quais dizendo respeito à correção da resposta final. No entanto, observou-se que os alunos tendiam a concentrar-se mais nesse critério, em detrimento dos restantes. Para contrariar essa tendência e promover uma valorização maior do processo de resolução, optei por remover o critério relativo à correção da resposta. Considero que essa alteração foi positiva, na medida em que contribuiu para eliminar essa conceção inicial dos alunos, embora não na totalidade.

Para além disso é de destacar que os alunos reconhecem a importância da aula destinada para analisar as resoluções para se apropriarem dos critérios, como vários autores defendem (Santos & Gomes, 2006; Semana, 2016; Montalvo & Torres (2004). Permitir que os alunos interajam uns com os outros sobre as resoluções, utilizando como referência os critérios para essa avaliação, garante um melhor conhecimento dos mesmos.

Já no que concerne à capacidade de autoavaliação dos alunos, estes consideraram que melhoraram, mas também reconheceram que ainda existiam dificuldades em identificar

o que é necessário melhorar nas suas resoluções. Apesar disso, já se sentiam capazes de analisar uma resolução com os critérios utilizados, sentindo mais facilidade na análise das resoluções dos colegas do que das suas. Portanto, os alunos desenvolveram também a capacidade de analisar e avaliar as estratégias e o raciocínio matemático apresentados por outros, uma competência que o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) identifica como fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático. Esse progresso também está alinhado com as orientações das novas AE de matemática para o ensino secundário (Carvalho e Silva et al., 2023), que destacam a importância de os alunos serem capazes de criticar explicações e argumentos matemáticos, utilizando simbologia adequada e construindo encadeamentos lógicos na comunicação matemática escrita.

No que diz respeito ao meu feedback, os alunos destacaram que foi importante para conseguir evoluir ao longo das resoluções e identificar os seus erros. Também sentiram a necessidade do meu feedback ao longo de toda a intervenção pedagógica para terem uma orientação sobre os seus progressos. Verificou-se, assim, a importância que o feedback tem no processo de autoavaliação, servindo como um guia que ajuda os alunos a identificarem as suas dificuldades e ultrapassá-las e a verificarem se estão a fazer uma correta apropriação de critérios, promovendo, por sua vez, o progresso na aprendizagem (Black & Wiliam, 2006; Pinto, 2020; Fernandes 2020a; Santos et al. 2024).

Os critérios de avaliação começaram a ser utilizados noutros momentos das aulas, em particular nas avaliações sumativas. Os critérios passaram assim a assumir um duplo papel: por um lado, como instrumento de verificação e correção das próprias resoluções; por outro, como guia de orientação para a elaboração dos seus trabalhos. Esta apropriação dos critérios confirma a perspetiva de Silva (2004), segundo a qual os critérios de avaliação são simultaneamente um guia para a atividade a desempenhar uma estratégia de verificação e correção da mesma. Contudo, nenhum dos alunos voltou a usar este instrumento em situações que não estivessem associadas a momentos de avaliação sumativa, o que levanta algumas questões sobre se terão efetivamente compreendido o seu valor para a melhoria da comunicação matemática escrita e da resolução de problemas também. Uma futura investigação poderá averiguar os motivos pelos quais os alunos não mais recorreram aos critérios de avaliação exceto em momentos de avaliação sumativa, parecendo não valorizar este instrumento num quadro de avaliação formativa.

Em síntese, os alunos participantes neste estudo reconheceram a importância do papel dos critérios de avaliação na melhoria da comunicação matemática escrita. A autoavaliação apoiada em critérios é um exemplo de uma prática avaliativa formativa (Santos, 2020; Fernandes 2020a;) e constitui-se como um objeto de reflexão tanto para os professores como para os alunos, promovendo aprendizagens significativas e o desenvolvimento da capacidade de autorregulação (Silva, 2004; Santos & Pinto, 2018). Isto é, este estudo acentua a importância da autoavaliação com o recurso a critérios de avaliação, evidenciando-a como uma estratégia eficaz para melhorar as aprendizagens dos alunos, em particular na comunicação matemática escrita na resolução de problemas.

6.3 Considerações finais e implicações

No final desta investigação, também é necessário refletir sobre alguns aspetos que podem não ter corrido tão bem. Apesar deste estudo ter sido cuidadosamente planeado e apoiado em toda a literatura revista, observei que algumas mudanças podiam ter sido feitas para obter resultados melhores.

Como os problemas foram aplicados durante as aulas e os conteúdos escolhidos dependiam do que estava a ser lecionado naquele momento, penso que o grau de exigência dos problemas 2 e 3, para o conhecimento dos alunos na altura, ainda era elevado para conseguir fazer uma intervenção pedagógica sem ter de intervir de alguma forma. Tornou-se difícil ajudar os alunos a progredir nas suas resoluções sem afetar os resultados influenciando a forma como os alunos resolviam o problema. No entanto, foi necessário fornecer alguma ajuda para conseguir recolher resultados suficientes para analisar. Para além disso, o enunciado do problema 3 era muito extenso e exigiu que os alunos gastassem mais tempo a resolvê-lo. Isto pode ter originado uma falta de empenho dos alunos em apresentar uma resolução com uma boa comunicação matemática.

Como estou no início da minha prática profissional, em alguns momentos cometi erros como esquecer-me de assinalar alguns aspetos das resoluções que precisavam de ser melhoradas. Para corrigir isso tive de fornecer esse feedback oralmente, o que poderá ter influenciado negativamente os resultados obtidos, na medida em que o aluno pode não ter conseguido progredir por não ter tido acesso a um feedback escrito que lhe permitisse retomar e refletir durante a melhoria da sua produção. Do mesmo modo, apesar de tentar fornecer feedback adequado a cada aluno e com base em toda a literatura revista, este pode não ter sido sempre eficaz.

Ao longo da intervenção pedagógica, muitos alunos chamavam-me para confirmar se agora já tinham feito bem ou a perguntar como é que deviam escrever melhor. Isso leva-me a pensar que o feedback pode não ter sido totalmente eficaz porque eles não sabiam como melhorar. Tentei dar feedback que não lhes dissesse diretamente como tinham de fazer para melhorar as suas produções, mas sim para os provocar e para se questionarem acerca de como tinham de fazer para progredir. Dar a “receita” para resolver não é a solução. Além disso, após a resolução do problema 1, decidi alterar a forma como fornecia feedback, detalhando os detalhes relativos a cada critério em que o aluno precisava melhorar, em vez de apenas mencionar qual o critério correspondente, de forma a tornar a linguagem mais clara e promover uma melhor compreensão dos critérios. Ainda relativamente ao meu feedback, tendo em conta que o conhecimento profissional do professor é uma das variáveis que influenciam a eficácia do feedback (Santos, 2022), a minha falta de experiência a fornecer feedback pode-se ter refletido na eficácia do meu feedback.

Tal como Montalvo e Torres (2004) defendem, a apropriação dos critérios é um processo lento e é necessário criar várias oportunidades para os alunos praticarem esta atividade. Como esta investigação foi feita no contexto da minha PES, acabei por ficar restrita no número de oportunidades que poderia proporcionar aos alunos. Apesar dos resultados desta intervenção terem sido positivos, fica a dúvida se esta prática aplicada mais vezes e durante mais tempo proporcionaria ainda melhores resultados e se os alunos conseguiriam utilizar os critérios mais autonomamente, sem depender tanto do meu feedback.

Quando planeei esta intervenção pedagógica, tinha em mente que os alunos utilizassem os critérios para se autoavaliarem e melhorarem as suas resoluções, sendo o meu feedback apenas um apoio para esse processo. No entanto, verifiquei a capacidade de autoavaliação dos alunos estava pouco desenvolvida e foi necessário tornar o meu feedback o aspeto mais importante na evolução dos alunos. Tive de modificar a minha ideia inicial e utilizar o feedback como ferramenta para os alunos lentamente começarem a ser mais autónomos e tornar os critérios como o seu instrumento principal na melhoria das aprendizagens. Como questão para investigação futura deixo: numa turma onde esta capacidade está bem desenvolvida, será que os alunos se iriam apropriar e integrar os critérios de outra forma para melhorar a sua comunicação matemática escrita?

Este estudo foi realizado numa turma de 11.º ano em que a professora responsável não valorizava tão explicitamente a importância da comunicação escrita na resolução de problemas. Tornou-se difícil exigir aos alunos uma comunicação matemática mais

rigorosa, uma vez que os alunos não estavam habituados a dar relevância à comunicação escrita do seu pensamento aquando da resolução de problemas. Também os alunos não utilizavam sempre representações adequadas, cometendo alguns erros de notação e falta de rigor, porque nem sempre lhes eram apontados nas aulas.

Uma vez que a comunicação matemática e a resolução de problemas estão interligadas, dado que, a resolução de problemas exige que o aluno exprima a forma como pensou de forma clara e completa (Jacinto et al., 2018), foi difícil fazer essa separação ao analisar as resoluções. As dificuldades aliadas à resolução de problemas acabavam por afetar diretamente a comunicação matemática do aluno tendo uma influência nos resultados obtidos. Da mesma maneira, dentro da comunicação matemática escrita, foi difícil avaliar individualmente cada categoria de análise da comunicação matemática escrita, por exemplo, se o aluno apresentava um esquema incompleto este utilizava as representações matemáticas de forma adequada; por outro lado, como o esquema não estava completo acabava por não explicar todos os passos interferindo na completude do processo de resolução.

Por falta de tempo, optei por realizar apenas as entrevistas no final e aproveitei para esclarecer algumas dúvidas que tive na análise das resoluções dos três alunos que selecionei para este estudo. Como já tinha passado algum tempo desde que os alunos realizaram os problemas, a memória dessas tarefas já não era muito grande e os alunos nem sempre se lembravam da razão que os levou a fazer a resolução daquela maneira. Desta forma, as respostas a essas questões podem não ter sido muito precisas. Se tivesse mais tempo para esta intervenção pedagógica, teria optado por fazer uma entrevista no final de cada problema a cada aluno selecionado. Além disso, outra limitação do estudo foi o facto de se ter restringido a apenas três alunos. Embora, na seleção dos alunos, tenha procurado garantir alguma diversidade, o número reduzido de participantes pode ter limitado a riqueza dos resultados. A inclusão de mais alunos poderia certamente ter enriquecido o estudo e proporcionado uma compreensão mais abrangente do impacto dos critérios de avaliação na comunicação matemática escrita.

Por fim, nesta investigação assumi tanto o papel de professora como o papel de investigadora o que pode ter sido uma limitação para a mesma por vários motivos. Por exemplo, quando recolhia as notas de campo também era a professora na sala, o que pode ter levado a uma perda de informação importante por não conseguir registar na hora. Também, nas entrevistas, quando questionei os alunos sobre se o meu feedback tinha sido eficaz ou se em algum momento podia ter feito alguma coisa de forma diferente, todos os alunos responderam que tinham percebido o feedback. Esta resposta

pode ter sido realmente a verdade ou pode ter sido apenas para não me criticar, ou uma resposta politicamente correta. Adicionalmente, os alunos por vezes mostraram alguma vergonha em falar nas entrevistas e nem sempre consegui obter respostas mais desenvolvidas às minhas questões. Talvez se tivesse feito um questionário anónimo, poderia obter informações mais sinceras sobre o que os alunos realmente pensaram do meu papel na intervenção.

Para investigações futuras, recomenda-se analisar os efeitos de os alunos desenvolverem os seus próprios critérios de avaliação para a comunicação matemática escrita. Tal como Fernandes (2020a) afirma, os alunos devem ter um papel ativo na sua avaliação e, consequentemente, ser os principais promotores da sua aprendizagem. Considerando que, neste estudo, os critérios foram criados por mim, sem qualquer contributo dos alunos, poderá vir a ser interessante investigar como a participação ativa dos alunos na definição desses critérios pode contribuir para uma melhor qualidade da comunicação matemática escrita na resolução de problemas e para uma maior facilidade na utilização dos critérios como ferramenta reguladora das aprendizagens. Além disso, tendo em conta que a apropriação dos critérios exige uma linguagem clara e acessível para os alunos (Pinto 2020; Fernandes, 2020b, 2020c), o facto de serem os próprios alunos a escrever os seus critérios pode favorecer uma maior consciência sobre os mesmos e facilitar a sua apropriação.

Esta investigação permitiu-me reconhecer como os alunos se apropriam e integram os critérios de avaliação na melhoria da sua comunicação matemática escrita na resolução de resoluções. Para além disso, consegui perceber qual é a opinião dos alunos sobre esta prática e a influência que teve no desempenho deles na disciplina de matemática. Pretendia que este estudo fosse muito mais que uma recolha e análise de informação, mas sim uma possibilidade de os alunos participarem numa avaliação reguladora das aprendizagens, assumissem uma postura crítica e se tornassem mais autónomos na construção das suas aprendizagens. Para o meu futuro profissional aprendi que práticas como estas são importantes para garantir aprendizagens significativas nos alunos sem retirar a autonomia dos mesmos. Os alunos devem assumir o papel principal na sua aprendizagem e os professores devem orientar os alunos nesse caminho.

Acabo este relatório como comecei, de volta à frase – “a verdadeira magia acontece quando todos aprendem juntos e somos simultaneamente professor e aluno” (Judkins, 2016, citado em Guerreiro e Martins, 2018, p. 51). Posso dizer que esta frase faz ainda mais sentido agora, no final deste percurso. Apesar de ter pensado neste estudo como uma forma de ajudar os alunos a melhorarem a sua comunicação matemática, também

eu fui crescendo com eles. Aprendi muito ao observar as suas evoluções, as suas dificuldades, e a forma como se envolveram neste processo. Cresci como professora e como investigadora. Por isso, posso mesmo dizer que... a verdadeira magia aconteceu!

Referências Bibliográficas

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

APM. (1988). *A renovação do currículo de matemática*. APM.

Barbosa, A., & Vale, I. (2022). As representações: Escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, 166, 19-24.

Black, P., & Wiliam, D. (2006) Developing a theory of formative assessment. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning* (pp. 81-100). Sage

Black, P. (2013). Formative and summative aspects of assessment: Theoretical and research foundations in the context of pedagogy. In J. McMillan (Ed.), *Handbook of research on classroom assessment* (pp. 167-178). SAGE Publications Inc.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice*. Open University Press.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/3140>

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. Research Briefs – Problem solving. NCTM. <https://www.washoeschools.net/cms/lib/NV01912265/Centricity/Domain/253/Math%20K-6/NCTM%20research%20brief.pdf>

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11–17.

Canavarro, A. P., Brunheira, L., Vicente, M., & Brito, S. (2022). O poder das representações múltiplas e suas conexões: Teoria e prática no 3.º ano do novo programa de matemática. *Educação e Matemática*, 166, 7-12.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para a autoaprendizagem*. Universidade Aberta.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Cruchinho, C., & Lopes, I. (2001). *Programa de Matemática A – 10.º ano: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Cruchinho, C., & Lopes, I. (2002a). *Programa de Matemática A – 11.º ano: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Cruchinho, C., & Lopes, I. (2002b). *Programa de Matemática A – 12.º ano: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Carvalho e Silva, J. (Org.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais, Matemática A, 11.º ano*. Ministério da Educação, Direção Geral de Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_11_vf.pdf

Costa, E., Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: Um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 405-419). APM.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2024). *Novo Espaço – Matemática A – 11.º ano* (5.ª ed.). Porto Editora.

Dante, L. R. (2003). *Didática da resolução de problemas de matemática*. Editora Ática.

DEB. (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. DEB, ME. https://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/wp-content/uploads/2010/09/Curriculo_Nacional1CEB.pdf

DGEBS. (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos, Organização Curricular e Programas*. DGEBS, ME.

Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O feedback regulador. In L. Menezes, L. Santos, H Gomes,

- & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 133-143). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação
- Fernandes, D. (2020a). *Avaliação Formativa*. DGE, ME. https://afc.dge.mec.pt/sites/default/files/202104/Folha1_Avaliac%CC%A7a%CC%83o_Formaliva.pdf
- Fernandes, D. (2020b). *Texto de apoio: Critérios de avaliação*. DGE, ME. <https://www.researchgate.net/publication/339956319>
- Fernandes, D. (2020c). *Critérios de avaliação* [DGE, ME. <https://www.researchgate.net/publication/339956041>
- Fonseca, L. (2014). Resolução de problemas de Matemática: Regresso ao passado. *Educação e Matemática*, 130, 17–21.
- Freitag, M. (1997). Reading and writing in the mathematics classroom. *The Mathematics Educator*, 8(1), 16-21.
- Graham, S. (2020). The effects of writing on learning in science, social studies, and mathematics: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 90(2), 179-226. <https://doi.org/10.3102/0034654320914744>
- GTM. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf
- Guerreiro, A. & Martins, C. Avaliação e comunicação: da e para a aprendizagem, *Educação e Matemática*, 149-150, 49-52
- Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In L. Hatfield, & A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 21–42). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81-112
- Jacinto, H., Carreira, S., & Amado, N. (2018). “Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!” Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática*, 149-150, 76-80.

Jacinto, H., Santos, E., & Silvestre, A. I. (2020). Que instrumentos de avaliação da aprendizagem matemática são usados com maior frequência pelos professores em Portugal? Um quarteto (in)esperado. *Educação e Matemática*, 158, 73-76

Leal, L. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). APM.

Lester, F. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Orgs.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-31). Instituto de Inovação Educacional.

Machado, H., & Pinto, J. (2014). Os contributos da coavaliação entre pares, através do feedback, na regulação das aprendizagens. *Atas do VI encontro do CIED – I Encontro internacional de estudos educacionais. Avaliação desafios e riscos* (pp. 317 -332).

Maia, É. J., & Proença, M. C. (2016). A resolução de problemas no ensino da geometria: Dificuldades e limites de graduandos de um curso de pedagogia. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 11(2), 402-417.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2017). A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de licenciatura em educação básica. *Livro de atas do EIEM 2017, Encontro de Investigação em Educação Matemática: O ensino e a aprendizagem da geometria*, 163–177.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação, DGE. <https://www.dge.mec.pt/perfil-dos-alunos>

Martins, L. G., & Martinho, M. H. (2023). Dificuldades na resolução de problemas e na comunicação escrita em matemática: Um estudo com alunos do 11.º ano. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática EIEM 2023: Resolução de problemas* (pp. 49-63). SPIEM.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus-Journal of Education*, 1(3), 44-75. <https://doi.org/10.25749/sis.3706>

ME. (1997). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. ME, Departamento do Ensino Secundário.

ME. (2018). *Aprendizagens essenciais. 11.º ano, Matemática*. ME. <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

MEC. (2015). *Programa e Metas Curriculares Matemática A - Ensino Secundário*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf

Montalvo, F. T., & Torres, M. C. G (2004). Self-regulated learning: Current directions. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 2(1), 1-34. https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/671/Art_3_27_eng.pdf?sequence

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education*, 46, 843-853. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9>

Moschkovich, J. N. (1998). Resources for refining mathematical conceptions: Case studies in learning about linear functions. *The Journal of the Learning Sciences*, 7(2), 209-237.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Pinto Silva, A. (2024). *Máximo 11 – Matemática A*. Porto Editora.

Neves, M. A. F., Silva, M. C., & Guerreiro, L. (2024). *Preparação para o Exame Final Nacional – Matemática B – 11.º ano* (8.ª edição/reimpressão). Porto Editora.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving - Students' skills in tackling real-life problems* (Volume V). https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2012-results-skills-for-life-volume-v_9789264208070-en.html. OECD

- Onuchic, L. de la R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Conceções e perspectivas* (pp. 199-218). UNESP.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 30-53.
- Pinto, J. (2002). *A avaliação formal no 1.º ciclo do ensino básico: Uma construção social*. (Tese de doutoramento, Universidade do Minho). <http://hdl.handle.net/10400.12/1675>
- Pinto, J. (2020). A importância dos critérios na avaliação das aprendizagens. *Educação e Matemática*, 158, 15-19.
- Pires, M. V., Costa, E., & Leite, C. (2018). Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos. *Educação e Matemática*, 149-150, 28-32.
- Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Editora Interciência.
- Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 1-2). NCTM.
- Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático*. Editora Interciência.
- Pólya, G. (2014). Ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, 130, 45–50.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1–3), 27–47. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017666.11367.c7>
- Pugalee, D. K. (2010). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School, Science and Mathematics*, 101(5), 236-245.
- Sá, I. (2004). Os componentes motivacionais da aprendizagem auto-regulada. In A. L. Silva, A. M. Duarte, I. Sá, & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante* (pp.55-75). Porto Editora.

- Sadler, R. (2010). Beyond feedback: Developing student capability in complex appraisal. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 35(5), 535–550. <https://doi.org/10.1080/02602930903541015>
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In P. Abrantes, & F. Araújo (Orgs.), *Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75 84). ME, DEB.
- Santos, L. (2016). A articulação entre a avaliação somativa e a formativa na prática pedagógica: Uma impossibilidade ou um desafio? *Revista Ensaio*, 24(92), 637-669. <https://doi.org/10.1590/S0104-40362016000300006>
- Santos, L. (2018). Ler e escrever nas aulas de matemática? In C. Lopes, & A. Nacarato (Orgs.), *Orquestrando a oralidade, a leitura e a escrita na educação matemática* (pp. 11-34). Mercado Letras.
- Santos, L. (2020). A avaliação pedagógica em matemática: Um desafio e uma inevitabilidade? *Educação e Matemática*, 158, 3-8.
- Santos, L. (2022). *O feedback como uma poderosa ferramenta para a aprendizagem matemática: uma meta-análise de estudos portugueses*. Revemop, e202210. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202210>
- Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Profmat 2006*. APM.
- Santos, L., & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, 40(3), 11-48.
- Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49-56). PME.
- Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503–539). Climepsi Editores. <https://www.researchgate.net/publication/323704109>
- Santos, L., Raposo, S., & Cardoso, A. (2024). O feedback: Uma prática de avaliação formativa incontornável. *Educação e Matemática*, 171, 2-6.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 8(1), 65-87.

Silva, A. L. (2004). A auto-regulação na aprendizagem. In A. L. Silva, A. M. Duarte, I. Sá, & A. M. V. Simão (Ed.) *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante* (pp. 17-39). Porto Editora.

Semana, S. M. S. (2016). *Prática avaliativa de uma professora na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/26330/1/ulsd730271_td_Silvia_Semana.pdf

Serrazina, I. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, 149-150, 13–16.

Silva, J. C. (2022). Boas representações para uma boa comunicação. *Educação e Matemática*, 166, 25-28.

Smith, M.S., & Stein, M.K. (2018). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. NCTM.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, 22-28

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171–202.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39-60.

Vaz, R. F. N. (2022). Por que errar ainda é tão errado? Algumas reflexões sobre o papel do erro no ensino e na avaliação de matemática. *Revemop*, 4, e202215 <https://doi.org/10.33532/revemop.e202215>

Winchelt, L. (2009). Communication: A vital skill of mathematics. *Action Research Projects*, 18. <https://digitalcommons.unl.edu/mathmidactionresearch/18/>

Legislação

Decreto-Lei n.º 54/2018: Ministério da Educação e Ciência. (2018) Diário da República: 1.ª Série, nº 129/2018, de 6 de julho, pp. 2918-2928

Decreto-Lei n.º 55/2018: Ministério da Educação e Ciência. (2018) Diário da República: 1.ª Série, nº 129/2018, de 6 de julho, pp. 2912–291

Anexos

Anexo 1 - Documento de consentimento informado



U. PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Participação em estudo de investigação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo e Secundário, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, nós, Ana Rita Perez Mendes e Tatiana Moreira Simões, professoras estagiárias de Matemática, pretendemos desenvolver projetos de investigação na área do ensino da Matemática. Estes projetos fazem parte integrante do estágio que estamos a realizar e, com eles, pretendemos analisar as dificuldades dos alunos na comunicação matemática e na interpretação de enunciados de problemas. Assim, para além de professoras estagiárias, teremos também o papel de investigadoras na turma do seu educando.

Para levar a cabo os nossos projetos de investigação, precisamos de recolher alguns dados: as produções escritas do seu educando e a gravação áudio de entrevistas. Os dados que viermos a recolher nunca serão divulgados e serão destruídos após a realização dos nossos trabalhos. As entrevistas serão realizadas fora do período das aulas, em horário a combinar com o seu educando, mas nas instalações da escola. Nestas entrevistas, vamos convidar o seu educando a realizar tarefas de forma individual e a conversar sobre o que vão fazendo, quer nessas tarefas, quer em algumas produções escritas que serão recolhidas em aula. Os alunos não serão nunca identificados no relatório que apresenta as conclusões destes estudos, sendo referidos por nomes fictícios para garantir total anonimato. Apenas nós e a nossa orientadora, a Professora Doutora Rosa Ferreira, teremos acesso às gravações, garantindo assim a confidencialidade dos dados.

A participação dos alunos nestes estudos é muito importante para que estes se possam concretizar pois os dados recolhidos acima referidos são essenciais para a construção do relatório de estágio. Contudo, essa participação é voluntária e, como tal, os alunos podem escolher não participar ou, escolhendo participar, desistir da sua colaboração em qualquer momento sem qualquer prejuízo. É importante também assegurar que a participação do seu educando nestes estudos não terá interferência na sua avaliação de desempenho na disciplina de Matemática, mas sim na avaliação das professoras estagiárias. Os resultados das investigações que iremos realizar serão dados a conhecer aos participantes e respetivos encarregados de educação.

Se tiver alguma questão sobre estes estudos, pode contactar-nos:

- Rita Mendes: número 911577387 ou email ritamendes@██████████;
- Tatiana Simões: número 936550190 ou email tatianasimoes@██████████;
- Rosa Tomás Ferreira: número 966074963 ou email rferreir@fc.up.pt.

10 de janeiro de 2025

Eu e o meu educando, _____, estamos/não estamos (riscar o que não interessa) de acordo com a sua participação nestes estudos, em particular, a gravação áudio de entrevistas e a recolha de produções escritas.

Encarregado de Educação: _____

Anexo 2 - Problema 1

Problema 1 - O jardim da Mariana

A Mariana recebeu uma planta no seu 15º aniversário e plantou-a no seu jardim.

A partir dessa data, a planta cresce todos os anos, ficando com uma altura 1,2 vezes superior à do ano anterior.

Sabendo que a planta, no ano em que a Mariana fez 18 anos, tinha uma altura de 34,5cm, determine a altura da planta no seu 24º aniversário.

Apresente o resultado em centímetros, com aproximação às unidades.



Anexo 3 - Problema 2

Problema 2 – Laboratório de bactérias

Num teste laboratorial, são feitas contagens do número de bactérias, em milhares, de duas colónias A e B; na n -ésima contagem após o início da experiência, esses números são dados, respetivamente, por:

$$A(n) = \frac{20}{n+1} \text{ e } B(n) = \frac{20n-5}{n}$$

1. O que podes concluir sobre o crescimento da colónia A? E o da colónia B?
2. Se o teste laboratorial se prolongasse por tempo indefinido, e admitindo que as expressões A_n e B_n continuavam válidas, o que aconteceria à população de cada uma das colónias?



Anexo 4 - Problema 3

Problema 3 – A nova fórmula de Manuel

Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio eletrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às 8:00 e sair às 12:00. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois das 12:00.

Sempre que um trabalhador chega t minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia que ele tem de permanecer na empresa, é dado por:

$$C(t) = \frac{t^2 + 36t}{t + 1}$$

Ao sair da empresa, o Manuel pensou “Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar mais de meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.”

Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à Administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 60% desse tempo.

Verifica se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor.



Anexo 5 - Guião das entrevistas

Guião entrevista

1. Antes de realizares os problemas com os critérios de autoavaliação o que achavas da tua comunicação escrita matemática? Ou nem sequer pensavas nisso?
2. Antes de analisarmos os critérios de autoavaliação tinhas noção o que envolvia ter uma boa comunicação matemática?
3. Dos parâmetros dos critérios da autoavaliação quais eram os que mais tinhas dificuldade em cumprir?
4. Sentiste que a realização dos problemas com critérios de autoavaliação foi útil para melhorar a tua comunicação matemática escrita?
5. Após a aplicação destes critérios em várias resoluções tuas sentes que melhoraste a tua capacidade de te autoavaliar e verificar o que é preciso melhorar na tua comunicação?
6. Começaste a utilizar os parâmetros para analisar todas as tuas resoluções por exemplo em testes, durante as aulas?
7. Com a aplicação dos critérios de autoavaliação foste capaz de verificar logo o que tinhas de melhorar ou foi necessário ver também o meu feedback?

Perguntas para a Rosa

1. No segundo problema cometeste mais erros na comunicação matemática escrita em relação ao primeiro problema. Qual achas que foi o motivo?

Perguntas para Miguel e André:

1. Porque é que não conseguiste melhorar a tua resolução no segundo problema que fizemos?