

O papel das representações matemáticas na realização de tarefas: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade

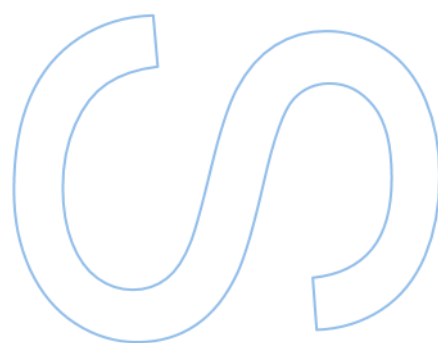
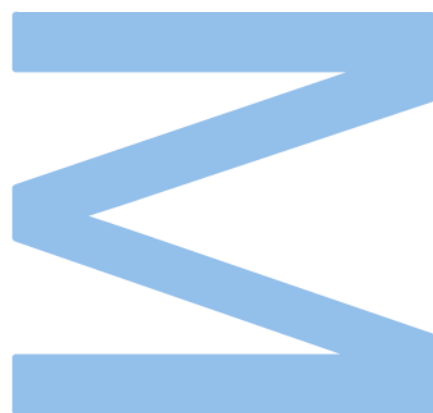
Gustavo Jorge Ormonde Borges de Azevedo

Mestrado em Ensino de matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025



O papel das representações matemáticas na realização de tarefas: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade

**Gustavo Jorge Ormonde Borges de
Azevedo**

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino de matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Aos meus, por todo o tempo que não estivemos juntos.

Agradecimentos

Se há coisa que eu deva fazer no começo deste trabalho é agradecer. Agradecer a todos os que, do início ao fim, direta ou indiretamente, no Porto ou na Terceira, me ajudaram e incentivaram a concluir esta fase.

Obrigado, professora Fátima Delgado, por toda a orientação prestada ao longo deste estágio e paciência na revisão deste trabalho. Obrigado por acreditar nesta investigação e estar sempre presente para ajudar. Sem a sua ajuda seria impossível concluir este relatório e atingir metas que nem imaginava alcançar!

Obrigado à professora cooperante, por todo o apoio prestado, oportunidades oferecidas e pelos feedbacks assertivos que me ajudaram a evoluir como professor. Por tudo o que me ensinou e pelo ambiente de estágio incrível que proporcionou, agradeço-lhe imenso.

À minha colega de estágio, Francisca, agradeço por sempre me incentivar a usar a minha imaginação e tornar este ano de estágio extraordinário. Companheira nas dificuldades e nos momentos bons, superamos mais esta etapa, que venha a próxima!

Aos professores do agrupamento onde realizei a PES, que tão bem nos acolheram e integraram e fizeram sempre questão de nos incluir nas conversas, atividades e reuniões, muito obrigado por me ensinarem o que é um bom ambiente de trabalho.

Aos meus alunos, os meus primeiros meninos, que autorizaram e pretenderam participar deste estudo, muito obrigado pela cooperação e envolvimento nas minhas atividades. A todas as turmas que acompanhei neste ano de estágio, agradeço por me terem ensinado o que é ser professor. Espero que a matemática vos acompanhe, mas não vos assombre.

A todos os meus colegas e amigos, da licenciatura ao mestrado, muito obrigado por toda a ajuda nesta etapa que teria sido muito mais complicada sem vós, e por tornarem desta cidade a minha segunda casa. Ao meu grupo de mestrado, o Anasecadote, um obrigado especial por todos os momentos partilhados e por tornarem este curso mais fácil.

Um agradecimento redobrado às terceirenses que o Porto juntou num só apartamento comigo. Catarina, a pessoa mais especial que o Porto me trouxe, obrigado por toda a ajuda e histórias que ficarão para ser contadas. Joana, a que me deu abrigo (literalmente), obrigado por me aturares nestes cinco anos e me permitires partilhá-los contigo. Esta jornada não tinha sido a mesma sem vocês.

Ao meu grupinho, o Acampamento, agradeço por todos estes anos de amizade, pelos momentos divertidos que me proporcionaram nestes anos e por estarem sempre lá quando precisava. Há quem diga que amizades destas não são comuns... Mas enquanto houver Salga, lá estaremos!

A todos as pessoas a quem tive a honra de chamar de professor, o meu mais profundo obrigado por me mostrarem a beleza desta profissão. Um agradecimento especial à professora Telma, minha professora de matemática do ensino secundário, por me inspirar a seguir esta carreira. Se não fosse seu aluno, com certeza o meu destino seria outro.

Por último, e o mais especial, obrigadíssimo a toda a minha família. Por todo o apoio e incentivo, todos os momentos e visitas, por todas as experiências e aprendizagens que me permitiram tornar quem sou hoje. Aos que já cá não estão e não tiveram a oportunidade de ver esta conquista, um obrigado. Avôs, avós, tio Jorge, Madalena, Isabelinha, a vossa memória vive nesta família.

As saudades compensaram, os estudos acabaram.

Resumo

Representações são todas as ferramentas usadas pelos alunos para expressar as suas ideias e justificá-las. A utilização de diferentes representações permite uma melhor compreensão da matemática, ajuda na resolução de problemas e no desenvolvimento da motivação e gosto pela matemática. Tendo por base estas ideias, esta investigação tem como objetivo compreender o papel das representações matemáticas na realização de tarefas, tanto nas resoluções feitas pelos alunos, quanto nos enunciados das tarefas, procurando responder a duas questões de investigação: 1) Que papéis desempenham as representações utilizadas pelos alunos nas suas resoluções? 2) De que forma o enunciado da tarefa influencia a escolha das representações utilizadas pelos alunos?. Para tal, desenvolvi uma intervenção pedagógica que envolveu uma turma de matemática A do 11.º ano de escolaridade, com o objetivo de proporcionar a estes alunos um trabalho em torno de diferentes representações matemáticas. Seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa, os dados recolhidos integraram produções escritas dos alunos, bem como registos fotográficos e gravações áudio de momentos de trabalho dos alunos em aula. Os resultados da investigação evidenciam que os alunos recorreram a representações físicas, simbólicas, visuais, verbais e contextuais, no entanto, prevalece o recurso a representações simbólicas e visuais. Os dados mostram também que o recurso a determinadas representações está associado a diferentes propósitos – interpretar e compreender a situação; traduzir/visualizar informação do enunciado; explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta; explicar/justificar o processo de resolução; apresentar resposta; confirmar resultados. Contudo, salientam que cada representação se revela especialmente útil para determinados propósitos. Também foi possível concluir que não há uma relação direta entre a forma como o enunciado é apresentado e a escolha representacional dos alunos, havendo sim algumas tendências e preferências a notar.

Palavras-chave: Representações matemáticas, resolução de tarefas, tarefas matemáticas, galeria matemática, exposições matemáticas.

Abstract

Representations are all the tools used by students to express their ideas and justify them. The use of different representations allows for a better understanding of mathematics, helps with problem solving and developing motivation and a fondness for mathematics. Based on these ideas, this investigation aims to understand the role of the representations used by students when carrying out mathematical tasks and whether the choice of representations they use is influenced by the statements of the tasks themselves, seeking an answer to two research questions: 1) What roles do the representations used by students play in their resolutions? 2) How does the task statement influence the choice of representations used by students?. To do so, I implemented a pedagogical intervention in an 11th grade class, with the goal of providing these students an opportunity to work with different mathematical representations. Following a qualitative and interpretative methodology, data was collected through written students' productions, photographic records and audio recordings of students' class work moments. The results of the research show that students used physical, symbolic, visual, verbal and contextual representations, however, the use of symbolic and visual representations prevails. The data also show that the use of certain representations is associated with different purposes – interpreting and understanding the situation; translating/visualizing information from the statement; exploring and defining a strategy to find the answer; explaining/justifying the resolution process; presenting the answer; confirming results. However, they emphasize that each representation proves to be especially useful for certain purposes. It was also possible to conclude that there is no direct relation between the way the statement is presented and the students' representational choice, but there are some tendencies and preferences to note.

Keywords: Mathematical representations, task solving, mathematical tasks, mathematical gallery, mathematical exhibitions

Índice

Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Abreviaturas	xi
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento teórico.....	5
2.1. Representações matemáticas	5
2.1.1. Tipos de representações matemáticas	8
2.2. Múltiplas representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática	10
2.2.1. O papel do professor no trabalho com múltiplas representações.....	15
2.2.2. Papéis, preferências e a utilização de representações pelos alunos	18
3. Intervenção pedagógica.....	20
3.1. Caracterização do contexto escolar.....	20
3.2. Descrição da intervenção pedagógica	23
3.2.1. I Exposição na <i>Galeria 45² – Uma sucessão de tarefas</i>	26
3.2.2. II Exposição na <i>Galeria 45² – Limite, progressão, ação!</i>	31
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	38
5. Apresentação e discussão dos resultados	44
5.1. Exposição <i>Uma sucessão de tarefas</i>	44
5.1.1. <i>É de queimar os neurónios...</i>	44
5.1.2. <i>Pontos e linhas</i>	52
5.1.3. <i>A dobrar é que a gente se entende!</i>	60
5.2. Exposição <i>Limite, progressão, ação!</i>	67
5.2.1. <i>Mentira espalhada, escola fechada</i>	67
5.2.2. <i>A cavalo dado não se olha o dente</i>	76
5.2.3. <i>Não percas o fio à meada!</i>	82
6. Conclusões e recomendações.....	91

6.1.	As representações utilizadas pelos alunos e os seus propósitos.....	91
6.2.	A influência do enunciado na escolha representacional dos alunos	94
6.3.	Reflexão e recomendações	96
	Referências Bibliográficas	99
	Anexos	104
	Anexo 1 – Documento de consentimento informado	104
	Anexo 2 – Proposta de resolução da obra <i>É de queimar os neurónios</i>	105
	Anexo 3 – Proposta de resolução da obra <i>Pontos e linhas</i>	106
	Anexo 4 – Proposta de resolução da obra <i>A dobrar é que a gente se entende!</i>	107
	Anexo 5 – Proposta de resolução da obra <i>Mentira espalhada, escola fechada</i>	108
	Anexo 6 – Proposta de resolução da obra <i>A cavalo dado não se olha o dente</i>	109
	Anexo 7 – Proposta de resolução da obra <i>Não percas o fio à meada!</i>	110
	Anexo 8 – Organização da sala de aula para a exposição <i>Uma sucessão de tarefas</i>	111
	Anexo 9 – Organização da sala de aula para a exposição <i>Limite, progressão, ação!</i>	112

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Classificações a matemática no 1.º período	22
---	----

Lista de Figuras

Figura 1 - Representações matemáticas e suas conexões (Lesh et al., 1987).....	10
Figura 2 - Dinâmica da Galeria 45 ²	25
Figura 3 - Imagem projetada no quadro na primeira exposição	27
Figura 4 - Apresentação da obra <i>É de queimar os neurónios</i>	27
Figura 5 - Enunciado e etiqueta da obra <i>É de queimar os neurónios</i>	28
Figura 6 - Apresentação da obra <i>Pontos e linhas</i>	28
Figura 7 - Enunciado e etiqueta da obra <i>Pontos e linhas</i>	29
Figura 8 - Apresentação da obra <i>A dobrar é que a gente se entende!</i>	29
Figura 9 – Enunciado e etiqueta da obra <i>A dobrar é que a gente se entende!</i>	30
Figura 10 - Apresentação da obra <i>WWW</i>	30
Figura 11 - Enunciado e etiqueta da obra <i>WWW</i>	31
Figura 12 – Imagem projetada no quadro na segunda exposição	32
Figura 13 - Apresentação da obra <i>Mentira espalhada, escola fechada</i>	33
Figura 14 - Enunciado e etiqueta da obra <i>Mentira espalhada, escola fechada</i>	33
Figura 15 – Apresentação da obra <i>A cavalo dado não se olha o dente</i>	34
Figura 16 - Enunciado e etiqueta da obra <i>A cavalo dado não se olha o dente</i>	35
Figura 17 - Apresentação da obra <i>Não percas o fio à meada!</i>	35
Figura 18 - Enunciado e etiqueta da obra <i>Não percas o fio à meada!</i>	36
Figura 19 - Apresentação da obra <i>Código QR</i>	36
Figura 20 – Enunciado e etiqueta da obra <i>Código QR</i>	36
Figura 21 - Perguntas da tarefa	37
Figura 22 - Enunciado da obra <i>É de queimar os neurónios</i>	44
Figura 23 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à primeira alínea	45
Figura 24 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras às segunda e terceira alíneas	45
Figura 25 - Resolução do grupo Babilónia	46
Figura 26 - Resposta do grupo Babilónia à terceira alínea.....	48
Figura 27 - Resolução do grupo π à primeira alínea	49
Figura 28 - Resolução do grupo π	49
Figura 29 - Resolução do grupo α	50
Figura 30 - Uso dos fósforos pelo grupo α	51
Figura 31 - Enunciado da obra <i>Pontos e linhas</i>	52
Figura 32 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras	53
Figura 33 - Uso dos fósforos pelo grupo Casa do Pitágoras	54
Figura 34 - Uso das representações simbólicas e visuais pelo grupo Babilónia.....	55

Figura 35 - Resolução do grupo Babilónia	56
Figura 36 - Resolução do grupo π à primeira alínea	57
Figura 37 - Resolução do grupo π à segunda alínea.....	57
Figura 38 - Resolução do grupo π à terceira alínea	58
Figura 39 - Conclusão da resolução do grupo π	59
Figura 40 - Resolução do grupo α	59
Figura 41 - Enunciado da obra <i>A dobrar é que a gente se entende!</i>	61
Figura 42 – Uso de representações físicas pelo grupo Casa do Pitágoras	62
Figura 43 - Uso de representações físicas pelo grupo Babilónia.....	62
Figura 44 - Resolução do grupo Babilónia	63
Figura 45 - Uso de representações visuais pelo grupo Babilónia	64
Figura 46 - Resolução do grupo π	64
Figura 47 - Uso de representações físicas pelo grupo α	65
Figura 48 - Enunciado da obra <i>Mentira espalhada, escola fechada</i>	67
Figura 49 - Rascunho do grupo Casa do Pitágoras	68
Figura 50 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à primeira alínea	69
Figura 51 - Rascunho do grupo Casa do Pitágoras	69
Figura 52 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à segunda alínea.....	70
Figura 53 - Resposta do grupo Babilónia à primeira alínea.....	71
Figura 54 - Rascunho do grupo Babilónia	71
Figura 55 - Resposta do grupo Babilónia à segunda alínea	72
Figura 56 - Resolução do grupo π à primeira alínea	72
Figura 57 - Resolução do grupo π à segunda alínea.....	73
Figura 58 - Rascunho do grupo α	74
Figura 59 - Resolução do grupo α à primeira alínea	75
Figura 60 - Resolução do grupo α à segunda alínea	76
Figura 61 - Enunciado da obra <i>A cavalo dado não se olha o dente</i>	77
Figura 62 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras.....	78
Figura 63 - Resolução do grupo Babilónia à primeira alínea	78
Figura 64 - Resolução do grupo Babilónia à segunda alínea	79
Figura 65 - Resolução do grupo π à primeira alínea	80
Figura 66 - Resolução do grupo π à segunda alínea.....	80
Figura 67 - Resolução do grupo α	81
Figura 68 - Enunciado da obra <i>Não percas o fio à meada!</i>	82
Figura 69 - Fio integrado na obra <i>Não percas o fio à meada!</i>	82
Figura 70 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras às primeiras duas alíneas.....	83

Figura 71 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à terceira alínea	83
Figura 72 - Resolução do grupo Babilónia às primeiras duas alíneas	84
Figura 73 - Utilização de representações físicas pelo grupo Babilónia.....	85
Figura 74 - Resolução do grupo Babilónia à terceira alínea	86
Figura 75 - Resolução do grupo π à terceira alínea	86
Figura 76 - Resolução do grupo π às primeiras duas alíneas	87
Figura 77 - Resolução do grupo α à primeira alínea	88
Figura 78 - Resposta do grupo α à segunda alínea	89
Figura 79 - Resolução do grupo α à terceira alínea	90

Lista de Abreviaturas

PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
MEC	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

1. Introdução

Uma das características mais marcantes da linguagem matemática é a sua precisão. A precisão e o rigor que ela espelha têm que ser interiorizados pouco a pouco, a partir da linguagem natural (...). Os alunos precisam de reconhecer o valor de definições precisas e o papel dos termos convencionais da Matemática a partir de um trabalho de envolvimento com os conceitos matemáticos que lhes permita comunicá-los pelas suas próprias palavras.

(Boavida et al., 2008, p. 76)

Representar é uma palavra que tem diversos significados, dependendo do contexto em que é utilizada. A definição de representações matemáticas admite também vários significados e interpretações, sendo comumente associadas a formas de se expressar uma ideia matemática. As representações matemáticas são um conceito inerente a outras capacidades matemáticas transversais, sendo vistas “como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática” (Canavarro et al., 2021, p. 3).

A citação que introduz este trabalho, traduz uma ideia que ratifico e acredito ser a forma mais adequada de ensinar matemática. Na disciplina de matemática, o formalismo e rigor são aspetos relevantes, já que é essencial que os alunos compreendam os diversos conceitos matemáticos e os consigam exprimir com a linguagem adequada e própria intrínseca a esta área. No entanto, introduzir os vários temas e novos conceitos tendo como ponto de partida algo concreto e familiar aos alunos é uma estratégia que pode evitar a má compreensão das ideias e o insucesso dos estudantes (Boavida et al., 2008). Fazendo isso, estamos a apostar numa formalização gradual dos conceitos, fazendo evoluir não só o raciocínio dos alunos, como também o seu rigor e poder de abstração. Atualmente, muitas editoras têm vindo a adotar esta prática nos seus manuais escolares e a favorecer o desenvolvimento de competências, incluindo o contacto e uso de diferentes representações, ao invés de se focarem exclusivamente na formalização de conceitos, de forma complexa e descontextualizada. Por vezes, começar um novo tema com um exemplo que o ligue à realidade dos alunos ou os permita conjecturar algo a partir de conceitos que já aprenderam, pode não só facilitar a compreensão dos próximos conteúdos, como também despertar o interesse e motivação pela matemática.

Trabalhar com múltiplas representações não é uma tarefa fácil, exigindo muita preparação por parte do professor, tanto na escolha de tarefas adequadas, como na capacidade de conduzir a aula de modo a beneficiar deste tipo de trabalho. Para além disso, é preciso que a sala de aula deixe de ser um espaço de comunicação unidirecional, do professor para o aluno, e se proporcione um ambiente onde haja lugar para interações apropriadas, de modo a “permitir que os alunos de forma organizada, livre e não constrangedora, partilhem as suas ideias e raciocínios” (Boavida et al., 2008, p. 78). O desenvolvimento da capacidade de trabalhar com diferentes representações é visto como algo relevante nos primeiros anos de escolaridade, parecendo perder o seu mérito à medida que os alunos avançam nos anos escolares. No Perfil dos Alunos à Saída do Ensino Obrigatório (Martins et al., 2017), a importância do recurso a diferentes representações não é realçada, pelo menos de forma direta, no entanto, apresenta-se camuflada quando se refere ao desenvolvimento de outras competências como o raciocínio, resolução de problemas e as competências na área de linguagens e textos. Encontram-se menções ao uso de várias representações no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente na explicação da área de competência relativa ao raciocínio e resolução de problemas, onde é apontado que os alunos devem ser capazes de “desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados” (Martins et al., 2017, p. 23). Para além desta alusão, nos descritores operativos associados a esta competência, dá-se valor a que os alunos generalizem “as conclusões de uma pesquisa, criando modelos e produtos para representar situações hipotéticas ou da vida real” (Martins et al., 2017, p. 23). Já na área das linguagens e textos, menciona-se que desenvolver estas competências resulta numa “utilização eficaz dos códigos que permitem exprimir e representar conhecimento em várias áreas do saber, conduzindo a produtos linguísticos, musicais, artísticos, tecnológicos, matemáticos e científico” (Martins et al., 2017, p. 21). Nos descritores operativos associados a estas aptidões, encontram-se, também, menções não explícitas do recurso a várias representações, como por exemplo quando se pretende que os alunos usem “linguagens verbais e não-verbais para significar e comunicar” (Martins et al., 2017, p. 21) e que reconheçam e usem “linguagens simbólicas como elementos representativos do real e do imaginário, essenciais aos processos de expressão e comunicação em diferentes situações” (Martins et al., 2017, p. 21).

A capacidade de usar múltiplas representações em matemática é algo que tem vindo a ser valorizado desde o início do século XXI (NCTM, 2000), não só por parte dos alunos,

mas também pelos professores. Reforçando a ideia da utilização de diferentes representações de forma complementar, não independentes ou auxiliares umas das outras, as Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico referem que “as ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação, e a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação” (Canavarro et al., 2021, p. 3). Assim, destaca-se também a importância de dar aos alunos oportunidades de contactar com diferentes representações, tanto para terem opções de escolha e desenvolverem a capacidade de eleger a representação mais adequada consoante a situação (Nistal et al., 2009), como para conseguirem compreender os aspetos de cada representação e usá-las polivalentemente (Amado et al., 2010).

A motivação para a realização deste estudo adveio da tendência dos alunos para o uso exclusivo de cálculos nas suas resoluções de tarefas, associada à sua dificuldade em expressar o seu pensamento por outros meios. Pareciam considerar que para uma resposta estar correta bastava apresentar uns números e uns cálculos, manifestando dificuldades em completar o seu processo de resolução com justificações das ideias apresentadas. Presenciar isto, fez-me voltar aos meus tempos de escola, onde fazia de tudo para entender os conceitos e explicar o meu pensamento. Apoiava-me nas figuras que eram fornecidas, criava desenhos e construía gráficos, o que fosse necessário para compreender as ideias abordadas e encontrar uma estratégia para resolver as tarefas que me eram propostas. Não ver esta atitude nos alunos, incomodou-me e fez-me refletir sobre a importância das diferentes representações no ensino e aprendizagem da matemática. Para além disso, ver que a maioria dos estudos em torno desta temática se focavam em alunos de turmas do ensino básico, suscitou-me curiosidade em avançar com um estudo no âmbito desta temática, mas com estudantes do ensino secundário.

Deste modo, surgiu a vontade de conduzir este estudo com o objetivo de compreender o papel das representações matemáticas na realização de tarefas, tanto na sua presença no enunciado como nas resoluções dos alunos. A concretização desta investigação procurou responder a duas questões relacionadas com as representações matemáticas e o modo como os alunos as utilizam:

- 1) Que papéis desempenham as representações utilizadas pelos alunos nas suas resoluções?
- 2) De que forma o enunciado da tarefa influencia a escolha das representações utilizadas pelos alunos?

Este relatório foi produzido com o intuito de apresentar o trabalho de investigação desenvolvido por mim, no âmbito da minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), componente final do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário. O trabalho que aqui se apresenta, está dividido em 6 capítulos. Começando pelo capítulo da introdução, apresento a motivação e relevância do estudo, bem como o objetivo e as questões de investigação. Neste, expõe-se também a estrutura do presente trabalho.

No segundo capítulo – enquadramento teórico, contextualizo o tema desta investigação, as representações matemáticas, explorando o conceito, descrevendo alguns tipos de representações e apresentando as suas potencialidades nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Com o terceiro capítulo pretende-se apresentar e descrever a intervenção pedagógica na qual assenta esta investigação. No início do capítulo, faz-se uma caracterização do contexto onde este estudo foi conduzido, particularmente da escola e da turma escolhida para participar na presente investigação. Numa segunda parte deste capítulo, descreve-se e ilustra-se a intervenção pedagógica levada a cabo, nomeadamente, da forma como surgiram as ideias envolvidas, a planificação das atividades propostas e a dinâmica desenvolvida, bem como a sua organização ao longo do tempo.

No quarto capítulo deste trabalho apresentam-se os métodos e procedimentos utilizados na recolha e análise dos dados. Caracteriza-se a natureza da investigação, apresentam-se os participantes deste estudo e esclarecem-se as formas como foram recolhidos e analisados os dados. Descreve-se o processo de análise dos dados e finaliza-se com a explicação da forma como foram acauteladas as questões de natureza ética relevantes a este estudo.

O quinto e maior capítulo, apresentação e discussão dos resultados, expõe os resultados desta investigação, tendo por base a problemática e as questões de investigação definidas. Apresenta-se também uma discussão fundamentada destes dados com base na literatura revista no capítulo 2.

O capítulo 6, conclusões e recomendações, começa por resumir o estudo realizado e apresentar as principais conclusões dele provenientes. Termina-se o capítulo com uma reflexão final, contemplando o impacto desta investigação na minha prática profissional enquanto docente e apresentando algumas ideias e sugestões para futuras investigações. O trabalho termina com as referências bibliográficas que serviram de base para o estudo, bem como um conjunto de anexos que ilustram o trabalho realizado.

2. Enquadramento teórico

Neste capítulo, debruço-me sobre a temática das representações matemáticas e como a utilização de vários tipos de representações pode ser vantajoso para o ensino e aprendizagem da matemática.

2.1. Representações matemáticas

Definir o conceito de representações matemáticas não é tão simples como pode parecer. A dificuldade em obter uma definição advém deste termo não designar algo concreto, mas sim um processo dinâmico que está associado ao processo de pensamento matemático (Mainali, 2021). Duval (2006) define o conceito de representação como sendo algo que simboliza outra coisa. O termo representação pode descrever uma variedade de elementos, desde materiais manipuláveis, desenhos, esquemas, gráficos. São todas as ferramentas usadas para expressar ideias e justificá-las (Amado, 2022b). No entanto, o termo representações não alude apenas às produções tangíveis e observáveis criadas por alguém, como pode, também, ser usado para fazer referência aos processos mentais de construção de conhecimento. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) aponta que uma representação não se refere apenas ao produto, mas também ao processo de captar ideias matemáticas numa determinada forma e atribuir-lhes significado. Nesta linha de ideias, Tripathi (2008) reforça a ideia de que representações matemáticas são todas as formas de imaginar e exprimir aspetos de um conceito matemático, para além de serem também as diversas maneiras que arranjamos para interpretar e expressar ideias e discuti-las com outros. Já Goldin (2014) refere-se a tais representações como internas, que incluem os processos cognitivos e imagens mentais criadas por um sujeito sobre um conteúdo específico, enquanto o outro tipo, as representações externas, correspondem a todas as formas utilizadas para traduzir e representar essas ideias. As representações externas materializam as internas, tornando-as observáveis para outros indivíduos e passíveis de apresentação e discussão.

No campo das representações internas, alguns géneros deste tipo de representações são: as verbais/sintáticas que descrevem as capacidades linguísticas inatas de cada indivíduo, utilizando vocabulário matemático ou não matemático; as imagéticas, que incluem as imagens mentais criadas, bem como movimentos feitos com as mãos ou

com o corpo que permitam entender e captar o que se está a estudar; os sistemas formais notacionais, quando o aluno manipula mentalmente os números e expressões; os processos estratégicos e heurísticos, que envolvem o desenvolvimento gradual de estruturação de métodos de resolução de tarefas; e o sistema afetivo, que tem a ver com a relação com a matemática, nomeadamente, o que os alunos acreditam ser ou não capazes de fazer e alcançar na disciplina (Goldin & Shteingold, 2001).

Dada a natureza deste estudo, o principal foco serão as representações matemáticas externas, temática que será mais aprofundada no próximo item. Assim, daqui em diante, sempre que se fizer referência a representações matemáticas, estar-se-á a aludir às externas.

Em Portugal, os documentos curriculares que têm orientado a disciplina de matemática, têm vindo a reconhecer a importância das representações matemáticas e de trabalhar com diferentes representações. O desenvolvimento desta capacidade matemática transversal tem vindo a ganhar destaque com o evoluir das orientações, embora este destaque se dê mais a nível do ensino básico do que do ensino secundário. O Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), embora não legitime o trabalho com diversas representações como uma das principais finalidades do ensino da matemática, este aparece associado à capacidade de resolver problemas. Em particular, dá-se relevância ao trabalho com representações formais e convencionais, defendendo-se que “embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados” (MEC, 2013, p. 5). A nível do ensino secundário, no Programa e Metas Curriculares – Matemática A (MEC, 2015), a referência a representações aparece de forma esporádica inserida em outras capacidades tais como a resolução de problemas e, sobretudo, na utilização da tecnologia, reconhecendo-se que “os alunos devem «aplicar conhecimentos de factos matemáticos, capacidades, procedimentos e conceitos para criar representações e resolver problemas»” (p. 7). Para além disso, dá-se importância ao trabalho com vários tipos de representações aliado ao uso da tecnologia, nomeadamente à visualização das representações gráficas de funções, paralelamente ao trabalho com abordagens analíticas, o que “permite atribuir o devido significado a essas representações” (MEC, 2015, p. 28).

Em 2018, quando foram revistas e atualizadas as orientações curriculares para a disciplina de matemática, sendo homologadas as Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2018), continua-

se a dar importância à utilização de representações e notação própria da matemática para exprimir ideias. Esta capacidade continua a estar inserida na capacidade de resolução de problemas, embora se ligue esta competência à de raciocínio e comunicação matemática. É previsto e esperado que

os alunos desenvolvam a capacidade de comunicar em matemática, oralmente e por escrito, com a utilização da notação e simbologia matemáticas próprias dos diversos conteúdos estudados, e progridam na fluência e no rigor com que representam, exprimem e discutem as suas ideias, procedimentos e raciocínios. (Ministério da Educação, 2018, p. 5)

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário (Ministério da Educação, 2018), orientações atuais para o 11.º ano de escolaridade, as representações matemáticas escassamente são abordadas, sendo apenas referenciadas quando se menciona o trabalho com funções e a sua representação gráfica.

Nas Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico (Canavarro et al., 2021), a utilização de múltiplas representações matemáticas é vista como um de oito objetivos que todos os alunos devem conseguir atingir, para além de ser vista como uma de seis capacidades matemáticas transversais consideradas no Ensino Básico. Para além disso, neste documento “promove-se o uso de múltiplas representações, com reforço das simbólicas, e a conversão entre elas, enriquecendo a comunicação matemática” (Canavarro et al., 2021, p. 9). A importância desta capacidade é fundamentada pelo seguinte excerto deste documento:

Desenvolver a capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática, e como possibilidade de apropriação da informação veiculada nos diversos meios de comunicação, nomeadamente digitais, onde surge em formatos em constante evolução. As ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação, e a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação. A tecnologia desempenha um papel especialmente relevante por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos. (Canavarro et al., 2021, pp. 3-4)

Já nas Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário (Carvalho e Silva et al., 2023), que entraram em vigor neste ano letivo de 2024/2025, para o 10.º ano de escolaridade, apresentam-se nove ideias chave para a aprendizagem da matemática e, embora as representações matemáticas não apareçam como uma delas, surgem aliadas à comunicação matemática, considerando-se importante “comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado” (p. 8). Também é destacado o recurso sistemático à tecnologia e a sua integração no processo de ensino, sendo “considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico” (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 6).

Em todos os documentos curriculares referidos anteriormente, nos objetivos e práticas essenciais de aprendizagem, faz-se referência à representação de diversos aspetos matemáticos de diferentes formas, como números, dados, conjuntos e figuras geométricas.

2.1.1. Tipos de representações matemáticas

Vários autores têm procurado categorizar diferentes tipos de representações externas. Um nome incontornável neste tópico é Bruner que, em 1966, apresentou uma classificação tripartida das representações na sua obra *Toward a Theory of Instruction*. Bruner (1999)¹ classifica-as como: ativas; icónicas; e simbólicas.

As representações ativas envolvem, como o próprio nome diz, a ação, o movimento. A utilização de materiais manipuláveis e o ato de manuseá-los é uma atividade que pode ser profícua em situações em que é difícil explicar através de imagens ou palavras. O contacto físico com conceitos matemáticos é algo muito estimulante, principalmente nos primeiros anos de escolaridade.

As representações icónicas remetem a todos os tipos de representação que se apoiam no visual e na imagética. Diagramas, desenhos, esquemas, imagens, são exemplos de representações icónicas que podem aproximar a matemática dos alunos e favorecer a sua compreensão. As imagens são concebidas por Bruner (1999) como um recurso que permite sintetizar a execução, permitindo ao aluno conceber mentalmente o que

¹ Tradução da obra original Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

posteriormente só conseguiam visualizar fisicamente. Por outro lado, este tipo de representação poderá não ser o mais adequado em certos casos, podendo complicar a situação ou gerar percepções erróneas. A importância da visualização na aprendizagem é uma ideia fundamentada por muitos autores dada a importância de representações visuais na compreensão e apropriação de conceitos matemáticos (Arcavi, 2003; Duval, 1999; Tripathi, 2008). Este tipo de representação permite-nos ver o que não pode ser visto (Arcavi, 2003) e, apesar de não ser a resposta para todos os problemas, pode servir de apoio em muitas situações.

As representações simbólicas são as palavras e tudo o que envolve a linguagem e é a partir deste sistema que o aluno faz a tradução da experiência para a linguagem. Bruner (1999) considera que as palavras também são símbolos, daí este termo estar associado às palavras e à notação própria da matemática. Este é o sistema representacional mais vantajoso, visto que “qualquer sistema de símbolos tem regras para a formação e transformação de frases que podem virar a realidade do avesso para além do que é possível através de atos ou imagens” (Bruner, 1999, pp. 28-29). Este sistema permite-nos traduzir e codificar a realidade e tem uma característica relevante, a hipótese de condensação. A matemática beneficia muito do sistema simbólico, em parte porque foram criadas regras e convenções que permitem reduzir e compactar o nosso raciocínio, bem como o modo como o expressamos.

Apoiando-nos na análise do artigo de Canavarro et al. (2022), reconhecemos que Lesh et al. (1987) identificam, de forma semelhante a Bruner (1966), as representações ativas e as representações icónicas, porém intitulando-as de representações físicas e representações visuais, respetivamente. Lesh et al. (1987) deixam de considerar as palavras como símbolos e destacam a sua utilização numa nova categoria de representações: as representações verbais. Estas são todas as que envolvem o uso de palavras e frases, seja em discurso oral ou em discurso escrito. Embora as palavras nem sempre sejam a forma mais adequada para explicar algo, a representação verbal é útil aos alunos na troca de ideias para mostrar os seus pontos de vista, uma vez que “uma das potencialidades desta representação é a expressão das ideias através de palavras próprias, a que cada um poderá dar sentido, podendo ser admissíveis formulações distintas que façam uso de outros conceitos ou ideias” (Canavarro et al., 2002, pp. 7-8). Assim, e de acordo com o que apresentam Canavarro et al. (2022), para Lesh et al. (1987), as representações simbólicas passam a integrar apenas o uso de notação própria da matemática, como variáveis, números e sinais. Estes autores avançam ainda com as representações contextuais, em que se inserem os casos onde

a matemática alia-se à realidade e ao contexto do aluno. O seu uso é benéfico para ajudar a relacionar os conceitos matemáticos com as suas aplicações e evidenciar o uso da matemática no quotidiano. É costume este tipo de representação ser evidenciado na resolução de problemas, o que pode causar algum constrangimento aos alunos que não estejam familiarizados com o contexto.

Neste relatório, sigo a classificação de representações matemáticas apresentada por Lesh et al. (1987) para proceder à análise dos dados proveniente da intervenção pedagógica, que será feita posteriormente neste trabalho.

2.2. Múltiplas representações no processo de ensino e aprendizagem da matemática

Como referimos anteriormente, Lesh et al. (1987) avançam com uma categorização no sentido de classificar diferentes tipos de representações matemáticas. Com o intuito de reforçarem que as diferentes representações matemáticas estão conectadas entre si, apresentam o esquema ilustrado pela Figura 1.

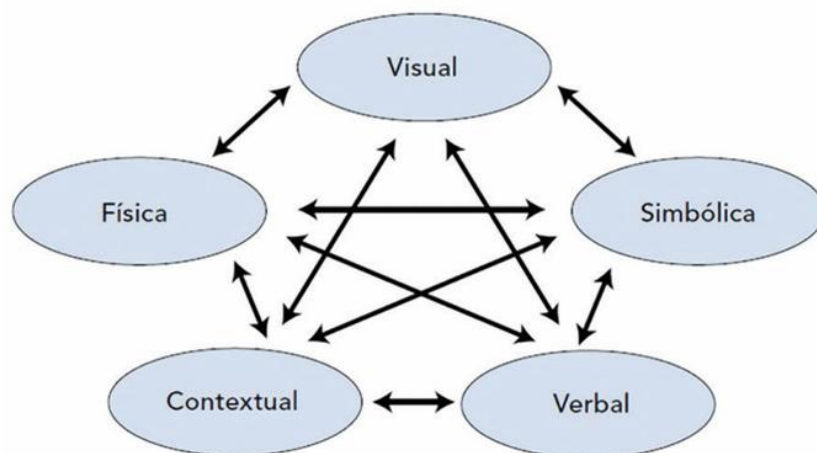


Figura 1 - Representações matemáticas e suas conexões (Lesh et al., 1987)²

Esta ideia de conexão entre múltiplas representações é apoiada por muitos investigadores, dado as suas potencialidades na aprendizagem (Amado, 2022a; Boavida et al., 2008; Canavarró et al., 2022; Friedlander & Tabach, 2001). A utilização de múltiplas representações por parte dos alunos, permite ao professor ter acesso ao

² Figura retirada de Canavarró et al. (2022, p. 7).

seu pensamento e é essencial para envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem (Amado, 2022a).

Nesta linha de ideias, em particular no que se refere à transferência de uma representação para outra, Duval (1999) distingue dois processos cognitivos: processar e converter. Processar é toda a mudança e organização que se faz dentro do mesmo sistema representacional. Como por exemplo na manipulação algébrica, aritmética e, no campo visual, a transformação de figuras noutras mais simples e que tornem a situação mais acessível. O ato de converter envolve transitar de uma representação para a outra, apresentando o mesmo objeto através de representações diferentes. A título de exemplo, quando representamos uma função através da sua representação gráfica e da sua expressão algébrica.

A habilidade de converter representações é crucial no processo de aprendizagem da matemática, especificamente na resolução de tarefas onde poderá ser conveniente trabalhar com uma determinada representação, ou trabalhar e relacionar várias representações. Duval (1999) reforça a importância de os alunos desenvolverem a capacidade de articular diferentes representações, sustentando que “de um ponto de vista didático, apenas estudantes que conseguem executar mudanças de sistema representacional não confundem um objeto matemático com a sua representação e conseguem transferir o seu conhecimento matemático para outros contextos diferentes do que estão a aprender” (p. 5).

A este propósito, Ainsworth (1999) realça três papéis que as múltiplas representações podem desempenhar na aprendizagem: serem complementares; terem a capacidade de restrição; e permitirem a construção de uma perceção mais aprofundada do que se está a aprender. Ao nível da exploração de conteúdos a complementaridade das representações permite aos alunos visualizarem e estudarem conceitos através de perspetivas diferentes, o que pode favorecer uma melhor compreensão dos mesmos. Esta noção é fundamentada pelo NCTM (2000) ao referirem que diferentes representações evidenciam diferentes aspetos de um mesmo conceito. A matemática é, por natureza, uma área com uma grande variedade de conceções complexas e interligadas, pelo que o recurso a diferentes representações oferece ao aluno uma visão mais rica e uma perceção mais aprofundada do que está a estudar (Tripathi, 2008). As várias representações também são complementares quanto à sua eficiência representacional, pelo que a habilidade de saber representar uma ideia em diferentes formatos é importante para garantir uma boa aprendizagem dos conceitos. Nas palavras de van der Meij e de Jong (2003), “diferentes tipos de representações podem ser úteis

para diferentes propósitos” (p. 2) e saber avaliar a situação e decidir que tipo de representação usar, bem como conseguir identificar momentos onde é necessário trocar de representação para uma mais adequada e que facilite o processo, é uma competência poderosa para incrementar as aprendizagens dos alunos. O poder de restrição do uso de múltiplas representações prende-se com a ideia de que é possível usar uma representação para limitar a interpretação de outra e, deste modo, é possível beneficiar de uma representação para perceber melhor outras não tão familiares e mais abstratas (Ainsworth, 1999). Por fim, a utilização de múltiplas representações é vista como favorecedora de uma compreensão mais aprofundada dos conteúdos, permitindo relacionar ideias, potenciando o poder de abstração e estendendo o conhecimento de representações conhecidas para desconhecidas (Ainsworth, 1999).

A utilização de diversas representações pode servir também como ferramenta para aperfeiçoar as estratégias de resolução de problemas. Para resolver um problema, os alunos devem saber decidir a melhor estratégia a seguir e a melhor representação a utilizar. Para tal, é importante que os alunos tenham oportunidades de contactar com diversas representações, para absorver e compreender os seus significados e, também, testar a eficácia de cada uma, a fim de aprenderem a usá-las habilmente (Amado et al., 2010).

O NCTM (2000) refere que é importante que os alunos tenham oportunidades de criar as suas próprias representações, mesmo que não sejam muito convencionais. Se um aluno é capaz de expressar o que está a pensar e expor o seu raciocínio, seja de que forma for, está a mostrar que percebeu o que era necessário e que consegue apresentar e discutir o seu pensamento. Estas representações criadas pelos alunos servem dois propósitos: por um lado, concedem ao professor uma oportunidade de aceder aos processos mentais desenvolvidos pelos alunos e a maneira como interpretam e pensam; e, por outro lado, são uma ponte para representações mais convencionais, que podem ser ferramentas para auxiliar o aluno na aprendizagem da matemática (NCTM, 2000).

Para Amado (2022a), o envolvimento com diferentes representações é importante para o desenvolvimento de várias capacidades, nomeadamente, da resolução de problemas, raciocínio matemático e abstração, como também o é para fomentar a motivação e o gosto pela matemática. A mesma autora defende que o processo de envolver os alunos no trabalho com múltiplas representações deve ser iniciado desde os primeiros anos de escolaridade, pois não só permite uma melhor compreensão da matemática, como serve de auxílio para se expressarem e para melhorar a comunicação matemática.

Porém, apesar de a utilização de múltiplas representações ser uma prática que traz imensos benefícios para a aprendizagem da matemática, é, também, um processo muito exigente para quem aprende. Grande parte dos estudos realizados à volta desta temática mostram que o uso de múltiplas representações é benéfico para a aprendizagem (Aidos, 2020; Ozgun-Koca, 1998; Pape & Tchoshanov, 2001; São Bento & Martinho, 2022), porém, existem também estudos que destacam o facto do recurso a múltiplas representações nem sempre ser benéfico para a aprendizagem, podendo ser desafiador e dificultar o processo de aprendizagem (Bennett et al., 2019; Chandler & Sweller, 1992). O estudo de Bennet et al. (2019) pretendia verificar se a natureza das representações fornecidas a crianças para que aprendessem representações simbólicas de números tinha algum impacto na sua aprendizagem. Com enfoque na análise de representações internas, o objetivo era compreender se seria mais eficaz representar grandezas “usando múltiplas representações concretas (cinco peixes, cinco pizzas, dez carros, dez ovelhas, etc.), representações concretas singulares (cinco peixes, cinco peixes, dez peixes, dez peixes, etc.) ou representações abstratas (cinco pontos, cinco pontos, dez pontos, dez pontos, etc.)” (Bennet et al., 2019, p. 847). O estudo dividiu-se em três experiências com objetivos distintos, seguindo sempre crianças britânicas com idades compreendidas entre os 6 e os 10 anos. As experiências conduzidas permitiram reparar que as crianças que aprenderam o significado de número através de conjuntos de pontos (representações abstratas) conceberam melhor o conceito do que as que aprenderam através de múltiplas representações concretas ou uma combinação entre múltiplas representações concretas e abstratas, ganhando vantagem em termos simbólicos. Com isto, Bennet et al. (2019) concluíram que usar múltiplas representações nem sempre é a melhor abordagem a seguir no ensino da matemática. Já o estudo de Chandler e Sweller (1992) pretendia investigar o *split-attention effect*, um desafio cognitivo que é provocado pela necessidade de compreender informação vinda de várias fontes, de forma separada, que deveria ser compreendida em conjunto, obrigando quem aprende a combinar essa informação mentalmente. Este estudo foi baseado em duas experiências diferentes, porém com o mesmo tipo de abordagem, a apresentação de duas situações com várias representações, por um lado de forma individual, por outro de forma interligada. Desta investigação participaram trabalhadores de uma companhia de Sydney, bem como estudantes de psicologia da Universidade de Nova Gales do Sul. Chandler e Sweller (1992) concluíram que saíram sempre favorecidos os grupos de participantes que trabalhavam as representações conectadas entre si, reconhecendo que os seus resultados tinham implicações importantes para a prática pedagógica. Em ocasiões

onde as representações são tidas como isoladas umas das outras e não apresentadas e trabalhadas como interligadas, podem surgir dificuldades no desenvolvimento e compreensão de noções, para além de dificultar o trabalho dos alunos que podem achar difícil relacionar informação vinda de várias fontes (Ainsworth, 2006).

Apropriando-me dos pareceres de van der Meij e de Jong (2003) e Ainsworth (2006), listo alguns desafios e processos cognitivos necessários para garantir aprendizagem a partir de várias representações. Um primeiro aspeto está associado à compreensão das particularidades de cada representação. Nesta dimensão, destaca-se a importância de saber como a informação é reunida e apresentada em cada representação, bem como conhecer elementos característicos de cada representação. Por exemplo, quando é pedido para analisar um gráfico, devem procurar-se aspetos que forneçam informação útil para o problema que se pretende resolver, tais como declives de retas, máximos, mínimos, concavidades ou pontos de interseção. A nossa intuição pode levar-nos a equívocos e este conhecimento evita o uso inapropriado destes elementos para interpretar uma representação diferente. Um segundo aspeto a destacar é a compreensão da relação entre representação e a temática. Para se compreender integralmente uma representação é preciso entender a relação que esta tem com o assunto que representa. Esta é uma atividade especialmente difícil na aprendizagem, visto estarmos a construir saber sobre domínios que não estão totalmente aprendidos e assimilados. Os alunos devem desenvolver a capacidade de determinar os melhores métodos e delinear as estratégias mais favoráveis para extrair informação relevante, adequada a cada situação. Saber selecionar e construir uma representação apropriada é o terceiro aspeto que se destaca. É importante a seleção apropriada da representação a utilizar, dependendo dos dados fornecidos, da situação e até das preferências de cada um. Noutros casos é necessário construir uma representação adequada e, durante este processo, podem aparecer representações erradas a simbolizar ideias corretas e vice-versa. Dar liberdade aos alunos para eleger a representação a utilizar pode resultar num melhor entendimento da temática. O último aspeto prende-se com a capacidade de relacionar várias representações e transformar umas nas outras. Um dos maiores problemas existentes no trabalho com múltiplas representações é estabelecer a relação entre as diferentes representações, reconhecendo a sua conexão, para além de ser capaz de estabelecer articulações com ideias trabalhadas numa fase anterior, bem como com situações da vida real.

Segundo van der Meij e de Jong (2003), a particular dificuldade no processo de aprender com múltiplas representações é, de facto, compreender e concretizar a transformação

entre diferentes representações e “para tornar a aprendizagem com múltiplas representações um sucesso, os alunos precisam receber apoio nessa tradução” (p. 4)

2.2.1. O papel do professor no trabalho com múltiplas representações

Ao longo do seu percurso escolar, os alunos vão contactando com diferentes tipos de representações matemáticas e, à medida que o seu repertório vai aumentando, é importante que adquiram a capacidade de escolher a melhor representação para os ajudar em cada situação e tornar o seu trabalho produtivo (NCTM, 2000). Para garantir que os alunos entrem em contacto com diferentes representações e trabalhem-nas de forma vantajosa, é necessário a intervenção por parte do professor (Gafanhoto & Canavarro, 2012). Neste âmbito, o papel do professor deve ser propor, aos alunos, situações que apresentem e/ou impulsionem o trabalho com diferentes representações matemáticas e, neste processo, apoiá-los na sua utilização, começando por conectá-las às ideias e imagens mentais criadas pelos próprios alunos (NCTM, 2000). O professor deve, também, analisar diferentes representações e a informação que transmitem sobre determinados conceitos, de modo a enfatizar a importância de selecionar bem o tipo de representação a utilizar para determinadas tarefas. É importante infundir diferentes representações nas aulas, proporcionando oportunidades de os estudantes construírem conhecimentos a partir de diferentes representações e oferecendo espaço para que cada aluno possa eleger as suas estratégias e representações numa dada situação (Mainali, 2021).

O professor deve dominar confiantemente as diferentes representações matemáticas, para garantir que os seus alunos aprendam firmemente os conteúdos abordados (Shulman, 1986). As representações utilizadas pelos professores tomam um papel muito importante na perceção de conceitos por parte dos alunos e influenciam o que estes conseguem fazer e compreender (Santos, 2015), já que são estas a porta de entrada para o aluno conhecer diversas formas de explicitar o seu raciocínio. Restringir uma abordagem a uma só representação é limitar o seu pensamento e interpretação da matemática.

A propósito do trabalho assente em representações múltiplas, Kozma (2003) sugere três modos de incentivar conexões entre representações e promover um maior entendimento por parte dos alunos:

- 1) Fornecer pelo menos um sistema representacional que tenha características que correspondem explicitamente ao que está a ser tratado;
- 2) Pôr os alunos a utilizar representações múltiplas e interligadas em contextos reais e de cooperação;
- 3) Envolver os alunos em atividades colaborativas, onde tenham de gerar e trabalhar com representações a fim de confirmar e explicar os resultados das suas investigações;

A seleção de tarefas a trabalhar na sala de aula é um aspeto que merece também algum cuidado e atenção por parte do professor, uma vez que, neste âmbito, pretende-se que sejam adequadas a um tipo de exploração que envolva o uso de múltiplas representações. Gafanhoto e Canavarro (2012) apresentam duas estratégias para incentivar a utilização de várias representações: usar diferentes representações para expor e analisar a situação-problema e auxiliar-se da tecnologia. Em relação à primeira estratégia, o professor, ao explorar a situação-problema com diferentes representações, está a mostrar aos alunos vários tipos de representações, estimulando a flexibilidade na escolha das representações a utilizar para resolver a tarefa e validando o seu uso no futuro (Gafanhoto & Canavarro, 2012). De acordo com Friedlander e Tabach (2001), seguida da exposição da situação-problema, está a apresentação de algumas perguntas que encaminhem os alunos nas suas investigações. Estes autores sugerem que, há três tipos de perguntas a serem usadas para assegurar que o aluno é estimulado a usar múltiplas representações:

- 1) Familiarização com a representação inicial: numa primeira fase, pôr os alunos em contacto com a representação inicial para a examinarem e perceberem os seus propósitos, podendo até já conjecturar algumas conclusões;
- 2) Pedido explícito de transformação entre representações: como os alunos podem hesitar em utilizar outros tipos de representação, é importante numa segunda fase pedir-lhes explicitamente que o façam;
- 3) Questões exploratórias: finalmente, confrontar os alunos com questões mais abertas e complexas, a fim de serem eles a escolher e aplicar os métodos de resolução e representações que acharem adequados.

A segunda estratégia envolve recorrer à tecnologia para beneficiar das suas potencialidades na exploração com múltiplas representações. Auxiliar-se da tecnologia para explorar tarefas que beneficiem do uso de múltiplas representações é uma forma de rentabilizar o trabalho em situações que podem ser rápida e facilmente exploradas com estes recursos, especialmente em tarefas onde o objetivo não é prolongar a atividade com cálculos supérfluos ou desenhos desnecessários (Ponte et al., 2007).

A tecnologia toma um papel importante no âmbito das representações. O uso de novos instrumentos, tais como computadores e calculadoras, mudam a forma como os alunos trabalham com representações já conhecidas, dão a oportunidade aos alunos de explorarem mais aprofundadamente os conteúdos e proporcionam o contacto com diferentes representações de maneira mais rápida e com resultados imediatos (NCTM, 2000). Os computadores permitem que se veja e aceda a várias representações simultaneamente e o processo de criação de gráficos pode ser facilitado pelo uso da tecnologia (Ozgun-Koca, 1998). Os novos recursos que a tecnologia nos proporciona, permitem retirar às representações a sua estaticidade, tornando-as dinâmicas de tal forma que permite aos alunos verem a informação a mudar ao longo da sua exploração (van der Meij & de Jong, 2003). A criação e utilização destas representações interativas, dá ao trabalho de sala de aula outro funcionamento, permitindo, aos próprios alunos, a sua manipulação e, deste modo, a oportunidade de formularem e verificarem “as suas conjecturas observando os efeitos das suas interações com as representações em termos do que muda e do que não muda” (Amado, 2022a, p. 4).

Fey (1989) lista algumas razões que tornam o ensino com recurso a ambientes tecnológicos único e estimulante para a aprendizagem:

- 1) Permite apresentar representações dinâmicas que seriam impossíveis em texto ou desenho no quadro;
- 2) Fornece a cada aluno um ambiente flexível, mas, simultaneamente, delimitado para se prover *feedback* adequado;
- 3) Ajuda os alunos a progredirem de um pensamento concreto para um pensamento mais abstrato;
- 4) Detém grande versatilidade na computação gráfica, possibilitando a criação de novas e modernas representações, bem como a sua utilização na sala de aula por cada aluno e pelo professor;
- 5) A precisão das máquinas, nomeadamente na criação de gráficos e realização de cálculos, faz com que tais representações forneçam já respostas para efetivamente resolver questões.

2.2.2. Papéis, preferências e a utilização de representações pelos alunos

A resolução de tarefas é uma atividade que pode envolver a utilização de várias representações matemáticas e, neste processo, estas representações podem tomar várias funções. Stylianou (2010) categoriza quatro tipos de papéis que o uso de diferentes representações pode tomar para facilitar vários subprocessos do processo de resolver tarefas e, adicionalmente, algumas utilidades e intuítos que cada uma destas funções podem adotar na resolução de tarefas.

- a) “Como um meio para compreender a informação fornecida e definir objetivos” (Stylianou, 2010, p. 328). Quando se utilizam representações como uma ferramenta para ajudar a combinar diferentes aspetos da tarefa e melhor apreender e conceber as restrições e possibilidades associadas à tarefa, bem como a interação entre elas. Nem sempre todos os elementos de um problema são imediatamente perceptíveis para quem o tenta resolver, logo esta é uma função importante.
- b) “Como ferramentas de registo” (Stylianou, 2010, p. 328). Quando as representações assumem um papel de registo, combinando e transcrevendo a informação fornecida. Há representações que podem tomar este papel e ser vantajosas, provendo a quem as usa um modo compacto e competente de registar as suas ideias.
- c) “Como ferramentas que facilitam a exploração de conceitos ou problemas em questão” (Stylianou, 2010, p. 328). A utilização de representações como um instrumento flexível que permite facilitar a exploração dos conceitos e problemas a resolver. Adicionalmente, possibilita a revelação de informação ulterior e implicações da situação apresentada.
- d) “Como instrumentos de monitorização e apreciação, para avaliar o progresso na resolução do problema” (Stylianou, 2010, p. 328). Neste caso, usam-se as representações numa perspetiva de controlar o progresso na resolução da tarefa e fazer decisões ponderadas para atingir a meta pretendida, bem como determinar se o caminho escolhido foi o melhor ou se deverá ser repensado.

Suplementarmente, a autora sintetizou esta informação numa tabela, fazendo corresponder a cada um dos papéis referidos anteriormente a forma como as representações podem ajudar e quando é que são úteis. Assim, quanto à categoria a), refere-se que estas representações ajudam a organizar toda a informação dada e são úteis nas fases iniciais da resolução de tarefas. As representações que se enquadram

na categoria b) auxiliam a reduzir a carga cognitiva durante todo o processo de resolução. Já as representações associadas com a categoria c) permitem manipular a informação dada durante fases exploratórias e de análise da tarefa. Finalmente, relativamente às representações que se encaixam na categoria d), permitem detetar abordagens erróneas durante períodos de autoavaliação.

Asli Ozgun-Koca (1998), num estudo acerca do uso de representações por estudantes universitários de uma turma de matemática dos Estados Unidos da América, sintetiza algumas razões para preferências representacionais dos alunos, focando-se apenas na distinção entre representações externas e internas. Relativamente às representações internas, pode influenciar na escolha da representação a utilizar: as preferências pessoais; experiências e conhecimentos passados; crenças acerca da matemática; e a insistência em memorizar por repetição. Em relação às representações externas: a apresentação do problema ou o problema em si; a ordem pela qual os temas são abordados; a predominância das representações algébricas no ensino; e a utilidade das tecnologias.

No que toca à utilização de representações pelos alunos, Valério (2005), no seu estudo acerca da construção/evolução de representações de alunos do 1.º ciclo na realização de problemas matemáticos, em Portugal, afirma que as representações visuais são as prediletas para começar a resolução de uma tarefa, ilustrando e possibilitando uma melhor visualização da situação. Com estes elementos icónicos os alunos pretendiam criar algo que os auxiliasse em contagens, ligar o problema à realidade, interpretar o problema verbal de forma visual ou confirmar resultados. Na sua investigação, Valério (2005) abrange também a utilização de representações informais e a sua transição para representações formais. Estas representações informais servem para garantir um bom entendimento da tarefa e, apesar de por vezes dominarem algoritmos e outras representações formais, nota-se uma propensão para o uso de esquemas informais numa fase inicial de resolução das tarefas (Valério, 2005). Os alunos têm a tendência de reutilizar representações que já usaram em situações anteriores semelhantes, adequando-as a cada caso, no entanto não o fazem com tanta constância com representações que não as próprias, isto é, “os métodos que os alunos desenvolvem e dominam são utilizados sempre que lhes permite atingir um resultado em detrimento de outro que lhes é «imposto»” (Valério, 2005, p. 59).

Nesta linha de ideias, e sobretudo a pensar nos alunos e na sua relação com representações matemáticas, concebeu-se e desenvolveu-se a intervenção pedagógica que serve de alicerce para este estudo e é apresentada no próximo capítulo.

3. Intervenção pedagógica

Este capítulo começa por fazer uma caracterização do contexto onde este estudo foi conduzido, particularmente da escola e da turma escolhida para participar na presente investigação. De seguida apresenta-se e descreve-se a intervenção pedagógica levada a cabo no âmbito desta investigação, nomeadamente, da forma como surgiram as ideias envolvidas, a planificação das atividades propostas e a dinâmica desenvolvida, bem como a sua organização ao longo do tempo.

3.1. Caracterização do contexto escolar³

No ano letivo 2024/2025 realizei a minha PES numa escola básica e secundária situada na área metropolitana do Porto, cuja fundação remonta ao ano de 1951. Era inicialmente um liceu exclusivamente feminino, tendo-se tornado numa escola mista na sequência da Revolução de abril de 1974. Esta escola, que desde o ano letivo 2012/2013 constitui a sede de um Agrupamento de Escolas, acolhe alunos do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, bem como do Ensino Secundário. Em relação a este último, a escola oferece cursos científico-humanísticos, tais como, os cursos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades.

A sua infraestrutura compreende dois blocos principais, um pavilhão desportivo e uma cantina. Ao longo do tempo, foi alvo de variadas remodelações, destacando-se a intervenção realizada no período de 2008/2009. A instituição dispõe de diversos serviços pedagógicos tais como um Centro de Apoio à Aprendizagem, uma Biblioteca Escolar, um Gabinete de Informação e Apoio ao Aluno, uma equipa de apoio à Educação Inclusiva e um serviço de Psicologia e Orientação. Com vista a proporcionar uma formação integral dos alunos – nas vertentes cultural, ambiental e humanista – o agrupamento promove o desenvolvimento de múltiplos projetos e atividades extracurriculares, tais como o Desporto Escolar, o Projeto Erasmus +, o Projeto de Educação para a Saúde, o Projeto Eco- Escolas, o Ciência Viva, o Parlamento de Jovens, o Plano Nacional de Cinema, Projeto SeguraNet, Dia Solidário, Dia dos Direitos

³ A caracterização do agrupamento de escolas onde realizei a minha PES foi elaborada em conjunto com outro colega que, nesse mesmo ano, concretizou também a sua PES neste agrupamento. Neste sentido, esta parte do texto é comum aos dois relatórios de estágio: Azevedo, G. (2025). *O papel das representações matemáticas na realização de tarefas: Um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]; Pinho, F. (2025). *O papel do feedback na melhoria da comunicação matemática escrita* [Relatório de Estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].

Humanos, Dia da Internet Segura, entre outros. Paralelamente, oferece também diversas oficinas extracurriculares. Importa ainda referir que o Agrupamento conta com a colaboração ativa de uma Associação de Pais e Encarregados de Educação.

Localizada numa zona bem servida por transportes públicos, nomeadamente com uma paragem de metro em frente às imediações, esta escola recebe não apenas alunos da freguesia onde se insere, mas também estudantes provenientes de outras freguesias da cidade e das áreas limítrofes.

Durante esta PES, estive em contacto com turmas do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário na disciplina de matemática A. Foram quatro as turmas que tive a oportunidade de conhecer, embora só acompanhasse regularmente três, por motivos de limitação de horário. Duas das turmas eram do 11.º ano de escolaridade, enquanto as outras duas eram do 9.º ano e foi uma destas últimas turmas que só acompanhava esporadicamente. Decidi desenvolver a intervenção pedagógica, da qual resultou este relatório, numa das turmas de 11.º ano. Escolhi esta turma após reparar na sua relutância em fazer desenhos e esquemas que os apoiassem, por exemplo, a compreender o enunciado de uma tarefa, ou a estruturar o seu pensamento ou ainda que fosse a encontrar uma estratégia possível para a resolução de uma dada tarefa. Em particular, em temas como a trigonometria ou geometria analítica, a turma mostrava alguma resistência em recorrer a desenhos/esquemas para encontrar estratégias possíveis de resolução e justificar o seu raciocínio, apesar de ser uma prática dos seus professores. Era uma turma muito preocupada em chegar às soluções de uma dada questão, no entanto, desvalorizavam a apresentação de resoluções com ideias devidamente justificadas. Incomodava-me olhar para os seus cadernos e ver apenas números, letras e cálculos, sem qualquer justificação, sem desenhos, nem esboços, situação que por vezes lhes conduzia à apresentação de resoluções incompletas, ou até mesmo à impossibilidade de encontrarem uma estratégia de resolução. Várias vezes partia dos professores o recurso a desenhos/esquemas ou até de objetos manipuláveis para explicar aos alunos o que era pretendido, mas não parecia ser algo que efetivamente absorvessem e aplicassem futuramente no seu trabalho. A sensação que ficava era que o nosso esforço para tentar com que visualizassem as ideias matemáticas que estavam a ser abordadas era em vão, revelando apenas interesse na confirmação do seu resultado através do conhecimento da resposta final. Acredito que a parte visual toma uma grande importância na compreensão de conceitos e na explicação do pensamento e, como tal, decidi estudar a forma como a turma utilizava diferentes

representações na resolução de tarefas, enquanto, simultaneamente, os incentivava a usar várias representações.

No início do ano letivo, esta turma era constituída por 19 alunos, porém, no final do primeiro período, a turma passou a integrar apenas 15 alunos, uma vez que 4 foram transferidos para outros cursos e/ou escolas. No início do segundo período, entrou uma nova aluna que, embora tenha chegado a meio do ano, integrou-se rapidamente na turma. Deste modo, iniciei a intervenção pedagógica com 16 alunos, cujas idades eram entre os 16 e os 18 anos, sendo 9 alunos do género feminino e 7 do género masculino. De um modo geral, era uma turma empenhada e participativa, embora, ocasionalmente, pudessem assumir também uma atitude passiva nas aulas, limitando-se a aceitar determinadas ideias que estavam a ser discutidas, não levantando qualquer questão, nem mesmo mostrando curiosidade sobre o assunto em questão. O maior constrangimento nesta turma era a falta de conhecimentos básicos e elementares que não foram bem consolidados nos anos anteriores devido, em parte, à pandemia do ano de 2020, que afetou o final do 2.º ciclo e início do 3.º ciclo. No que diz respeito ao comportamento, era uma turma calma e respeitosa que, embora por vezes se perdesse em conversas paralelas, sabia diferenciar os momentos de trabalho dos momentos de descontração. Quanto ao aproveitamento em matemática A, era uma turma mediana cujos resultados no primeiro período variaram entre 7 e 16. A seguinte tabela sintetiza as classificações obtidas no 1.º período pelos 15 alunos que compunham a turma (Tabela 1). A aluna que ingressou na turma no 2.º período, obteve classificação positiva a matemática no ano letivo anterior.

Classificações	Número de alunos
7	2
8	1
9	3
11	1
12	3
13	2
14	1
16	2

Tabela 2 – Classificações a matemática no 1.º período

A média da turma rondava os 11 valores. Dos 16 elementos que compunham a turma, destacavam-se duas alunas empenhadas que viam o seu trabalho recompensado nos momentos de avaliação. Apesar de ser uma turma interessada e trabalhadora em contexto de sala de aula, eram alunos com muitas dúvidas e que raramente resolviam uma tarefa de forma autónoma. As classificações dos testes e questões aula aliadas às persistentes dúvidas colocadas pelos alunos permitia, aos professores, concluir que havia falta de trabalho e de um estudo regular fora da escola.

3.2. Descrição da intervenção pedagógica

Ao longo do ano, enquanto procurava tarefas para elaborar testes ou fichas de trabalho, encontrei várias questões cujo nível de dificuldade parecia depender do facto de o enunciado ter, ou não, uma figura. Deparei-me muitas vezes com tarefas onde pensava “Se esta imagem não estivesse no enunciado, isto era bem mais difícil...” ou “Esta é mais complexa, talvez uma figura facilitasse”. Para além disso, questionava-me também sobre o uso que os meus alunos dariam à informação dada num enunciado através de uma imagem. Quando os dados não estavam na imagem e somente no texto, acrescentariam essa informação à imagem? Se não houvesse qualquer figura e a existência de uma tornasse tudo mais fácil, desenhá-la-iam? Pelo trabalho que fui desenvolvendo com a turma, transparecia a ideia de que os alunos não tinham por hábito utilizar representações visuais e não reconheciam vantagens do seu recurso, como por exemplo, o facto de poderem favorecer um melhor entendimento do enunciado, bem como apoiar na expressão do seu pensamento. Isto, aliado às razões descritas no subcapítulo anterior, despertou-me curiosidade e foi uma das razões que me fez conduzir este estudo com foco no tema das representações matemáticas.

Neste sentido, apossei-me da missão de mostrar aos meus alunos a importância de várias representações na matemática e do valor que elas tomam na explicitação do nosso pensamento. Inicialmente, e depois de definir o objetivo e as questões de investigação, decidi realizar uma intervenção pedagógica com base na proposta de fichas de trabalho onde os alunos teriam de resolver um conjunto de tarefas e, através da recolha das suas produções, poderia analisar as representações matemáticas a que recorriam. No entanto, pretendia criar uma dinâmica diferente daquelas que os alunos já conheciam das aulas de matemática. Demorei algum tempo a ter uma ideia do que fazer e, nestes momentos de reflexão, uma questão persistia na minha mente – “Como

é que posso esperar que eles me apresentem diferentes representações, se raramente contactam com outras que não as simbólicas?”. E foi aí que surgiu a ideia de realizar a Galeria 45². O nome desta atividade é uma menção ao ano em que foi criada e desenvolvida, o ano de 2025, ano quadrado perfeito, pois 45 ao quadrado é 2025. Para além deste nome, cada uma das exposições realizadas na galeria tinha também um nome específico associado ao tema em foco nas tarefas apresentadas, que neste contexto representariam as obras de arte.

A Galeria 45² foi uma atividade criada por mim, visando a reestruturação da sala de aula e envolvimento dos alunos numa dinâmica, onde cada aluno tinha a oportunidade de contactar com diferentes representações matemáticas e aplicá-las nas suas resoluções. Deste modo, a intervenção pedagógica realizada passou pela criação de uma galeria onde foram apresentadas exposições com diferentes temáticas, em que as obras eram tarefas matemáticas para as quais os alunos visitantes teriam de apresentar um processo de resolução. Para tal, a sala de aula era organizada como se fosse uma galeria num museu, dispondo-se quatro mesas, uma em cada canto da sala, com uma tarefa matemática (Anexos 8 e 9).

Na seleção das tarefas tive em conta a presença nos seus enunciados de diferentes tipos de representações matemáticas, bem como a sua presença em possíveis processos de resolução. Esta opção deveu-se ao facto de pretender estudar os papéis com que os alunos usavam determinadas representações, além de intentar averiguar a influência das representações presentes nos enunciados das tarefas nas escolhas das representações utilizadas pelos alunos nas suas resoluções. Para identificar os tipos de representações matemáticas presentes nas tarefas, recorri à classificação avançada por Lesh et al. (1987), temática explorada no enquadramento teórico deste trabalho. Ainda em relação às tarefas, cada uma delas estava acompanhada de uma etiqueta de identificação, à semelhança das obras em museus, onde podia ler-se o título da obra, o nome do autor, o ano e o tipo de arte. Os títulos das obras, para além de refletirem o contexto da tarefa e a informação apresentada, incorporavam elementos de humor e jogos de palavras. Adicionalmente, os autores das tarefas foram designados com nomes fictícios inspirados em conceitos matemáticos; o ano era sempre o de 2025, ano em que a atividade foi realizada; e o tipo de arte dependia do formato em que era apresentada a tarefa e dos materiais de apoio. Para além disso, a sala tinha também uma grande mesa no centro com diversos materiais disponíveis que os alunos poderiam utilizar, por exemplo, folhas de papel A4 para os alunos utilizarem como rascunho e também para

escreverem as suas respostas, réguas para medições, compassos para construções, fósforos para fazer figuras, entre outros.

Previamente à realização da intervenção pedagógica, foi explicado à turma o que iriam realizar. Como a turma já tinha sido acompanhada por estagiários, no ano letivo anterior, já estavam familiarizados com a necessidade de se realizar um estudo de investigação. Para explicar o que pretendia concretizar com a minha investigação, informei apenas a turma que iriam resolver tarefas, em grupos, mas numa dinâmica diferente, apresentando a dinâmica, que pode ser vista na Figura 2. Os grupos teriam de escolher uma mesa onde começar e resolver a tarefa exposta, depois trocavam de mesa e resolviam a próxima tarefa e assim sucessivamente, rodando por todas as paragens e resolvendo as quatro tarefas.



Figura 2 - Dinâmica da Galeria 45²

Esta intervenção pedagógica passou pela criação de uma galeria que contou com a concretização de duas exposições realizadas no 2.º período. Para proporcionar, aos alunos, a exploração de cada exposição, precisaria de uma aula de 50+50 minutos, o que não causou qualquer constrangimento no normal funcionamento das aulas, dado que esta atividade facilmente se integrou em aulas destinadas à consolidação e/ou

reforço de tópicos já abordados. Deste modo, acabei por recolher dados de oito tarefas diferentes, mas decidi apenas analisar seis delas, selecionando apenas três tarefas de cada exposição. Esta seleção derivou de dois motivos: da análise dos dados e do enunciado das tarefas. Ao analisar os dados, percebi que havia tarefas cujas resoluções produziram dados repetitivos e que iriam resultar numa análise repetitiva e redundante. Para além disso, teve-se também em conta o enunciado apresentado, excluindo-se as duas tarefas que menos desafio proporcionavam, isto é, alinhadas com a maioria das tarefas que eram propostos e resolvidos nas aulas, simples e com pouco espaço para diferentes tipos de resolução. A indicação das tarefas que foram excluídas da análise é feita no fim de cada item seguinte, que apresenta as tarefas de cada exposição da galeria.

No final de cada exposição, fez-se uma apuração de percepções dos alunos acerca da atividade e, depois de alguns dias e de uma sumária análise das produções feitas pelos alunos, fizeram-se algumas correções, evidenciando erros comuns, esclarecendo dúvidas e mostrando vários processos de resolução para as tarefas propostas. Segue-se a apresentação das tarefas que compuseram as duas exposições realizadas na Galeria 45².

3.2.1. I Exposição na *Galeria 45²* – *Uma sucessão de tarefas*

A primeira exposição ocorreu a 20 de fevereiro de 2025 e teve por base o tema das sucessões, que era o tema que estava a ser desenvolvido no momento da intervenção. Para uma melhor contextualização, é de referir que esta exposição foi realizada numa aula anterior à realização do teste, pelo que serviu como aula de reforço para esse momento de avaliação.

A primeira exposição, intitulada de *Galeria 45²: Uma sucessão de tarefas* (Figura 3), envolveu os visitantes numa exploração sobre o conceito de sucessões matemáticas, destacando generalidades inerentes a essas funções. A escolha das tarefas baseou-se

no tipo de representações que o seu enunciado oferecia e/ou na possibilidade que tinham em ser reformuladas e deste modo exibir representações diferentes.

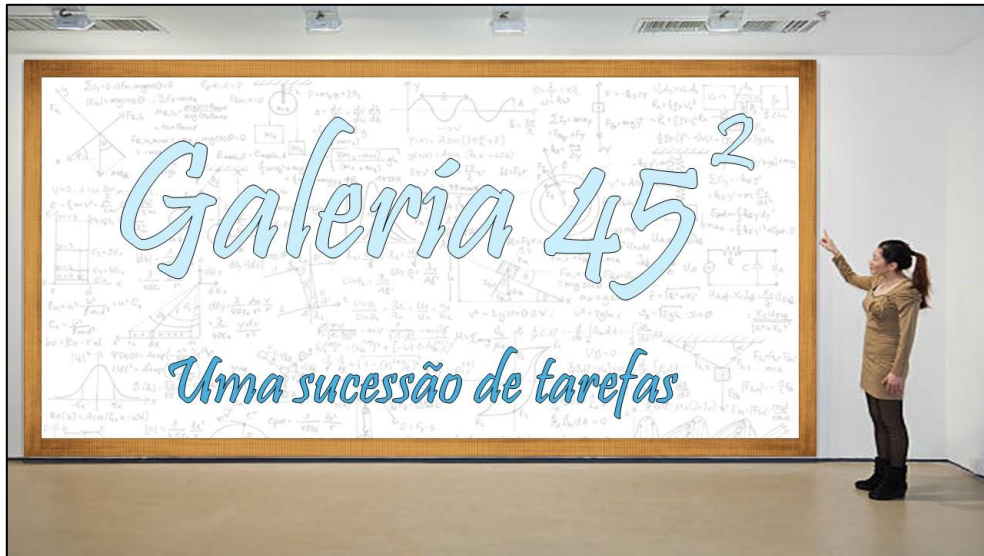


Figura 3 - Imagem projetada no quadro na primeira exposição

Como já foi referido, cada exposição integrou quatro obras de arte, ou seja, proporcionou, aos alunos, a exploração e resolução de quatro tarefas. Segue-se a apresentação das tarefas que integraram a *Galeria 45²: Uma sucessão de tarefas*.

Tarefa 1 – É de queimar os neurónios...

Nesta paragem, para além do enunciado e etiqueta (Figura 5), os visitantes tiveram a oportunidade de interagir com uma sequência formada por fósforos e contactarem com representações físicas e simbólicas (Figura 4).

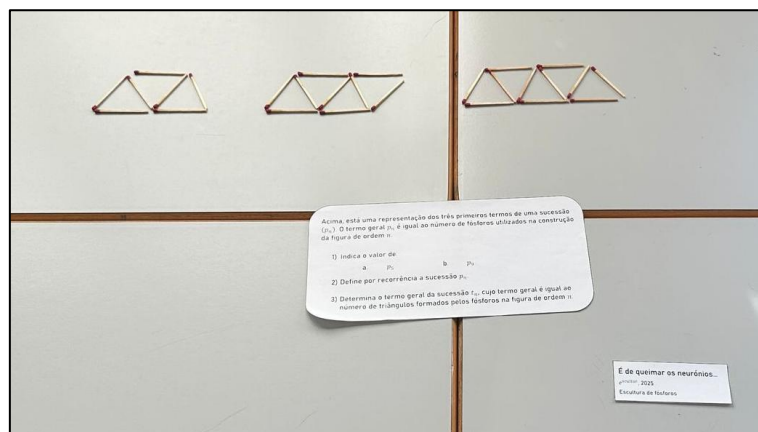


Figura 4 - Apresentação da obra *É de queimar os neurónios...*

Acima, está uma representação dos três primeiros termos de uma sucessão (p_n) . O termo geral p_n é igual ao número de fósforos utilizados na construção da figura de ordem n .

- 1) Indica o valor de:
a. p_5
b. p_9
- 2) Define por recorrência a sucessão p_n .
- 3) Determina o termo geral da sucessão t_n , cujo termo geral é igual ao número de triângulos formados pelos fósforos na figura de ordem n .

É de queimar os neurónios...

e^{scultor}, 2025

Escultura de fósforos

Figura 5 - Enunciado e etiqueta da obra *É de queimar os neurónios...*

Tarefa 2 – Pontos e linhas

Nesta paragem, o enunciado da tarefa era complementado por quatro figuras geométricas (quadrado, pentágono, hexágono e heptágono) onde estavam assinaladas as suas respetivas diagonais (Figura 6). Assim, para além das representações simbólicas presentes no enunciado (Figura 7), os alunos puderam contactar com representações visuais.

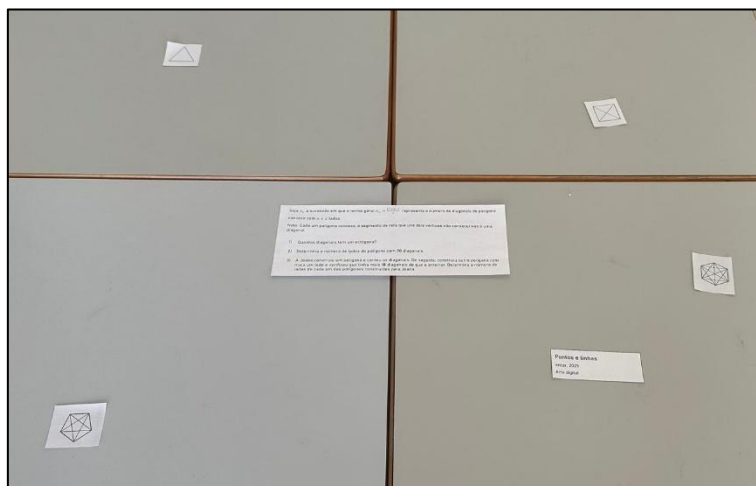
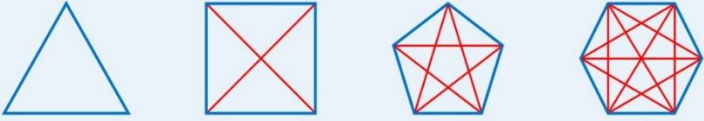


Figura 6 - Apresentação da obra *Pontos e linhas*



Seja d_n a sucessão em que o termo geral $d_n = \frac{n^2+n-2}{2}$ representa o número de diagonais do polígono convexo com $n + 2$ lados.

Nota: Dado um polígono convexo, o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos é uma diagonal.

- 1) Quantas diagonais tem um octógono?
- 2) Determina o número de lados do polígono com 90 diagonais.
- 3) A Joana construiu um polígono e contou as diagonais. De seguida, construiu outro polígono com mais um lado e verificou que tinha mais 18 diagonais do que o anterior. Determina o número de lados de cada um dos polígonos construídos pela Joana.

Pontos e linhas
 πntor, 2025
 Arte digital

Figura 7 - Enunciado e etiqueta da obra *Pontos e linhas*

Tarefa 3 – A dobrar é que a gente se entende

Nesta paragem, os alunos deparavam-se com uma folha A4 dobrada a meio (Figura 8), o enunciado da tarefa integrava um texto que descrevia uma sequência, contendo apenas representações verbais (Figura 9).

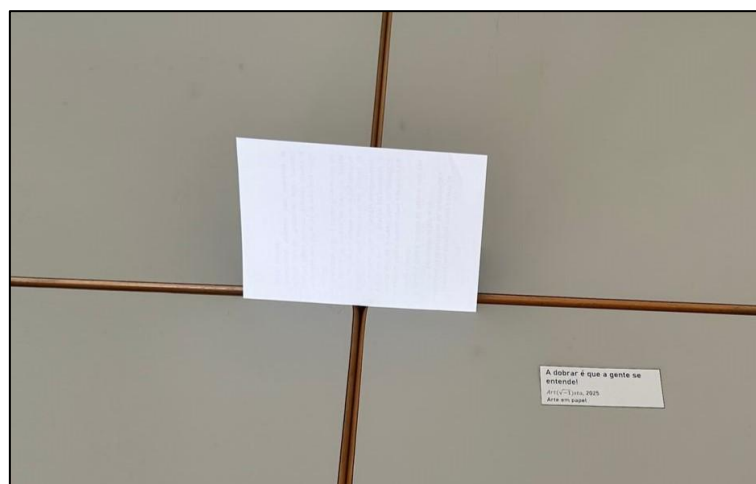


Figura 8 - Apresentação da obra *A dobrar é que a gente se entende!*

Considera uma sucessão criada a partir de dobragens de várias folhas A4, obedecendo à seguinte lei de formação:

- A primeira folha é dividida ao meio e uma das metades é pintada.
- A segunda folha é dividida como a primeira e a metade que na primeira folha foi pintada, é dividida ao meio na direção perpendicular à última divisão. Pinta-se uma das novas metades.
- Na terceira folha repetem-se as divisões da folha anterior e a metade que na segunda folha foi pintada, é dividida ao meio na direção perpendicular à última divisão. Pinta-se uma das metades.
- Para cada nova folha, faz-se mais uma divisão que na figura anterior, seguindo sempre o mesmo padrão. Repete-se este processo infinitamente, formando uma sequência de figuras coloridas.

Designa por a_n a sucessão das áreas da superfície colorida, sendo a_n a área da superfície colorida na figura de ordem n .

- 1) Representa e determina os quatro primeiros termos desta sucessão.
- 2) Define a sucessão a_n por recorrência.
- 3) Escreve o termo geral da sucessão a_n .
- 4) A sucessão é limitada? Justifica por dois processos diferentes.

A dobrar é que a gente se entende!

Art($\sqrt{-1}$)sta, 2025
Arte em papel

Figura 9 – Enunciado e etiqueta da obra A dobrar é que a gente se entende!

Tarefa 4 – WWW

Nesta última paragem, apenas o enunciado era exposto, sem nenhum outro elemento de auxílio (Figura 10). O enunciado apresentava uma sucessão e três questões referentes ao seu estudo, nomeadamente para verificar se um número era termo da sucessão, averiguar se a sucessão era limitada e estudá-la quanto à sua monotonia (Figura 11).

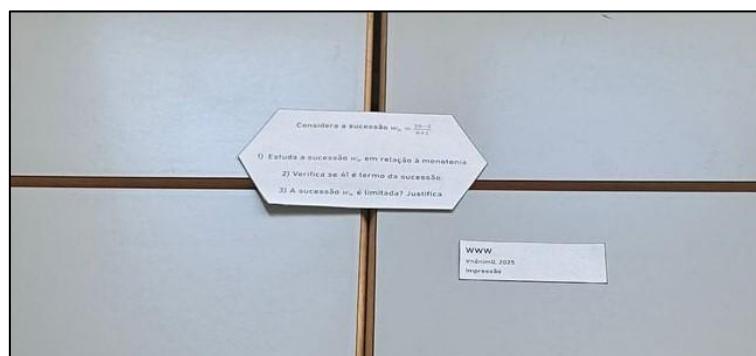


Figura 10 - Apresentação da obra WWW

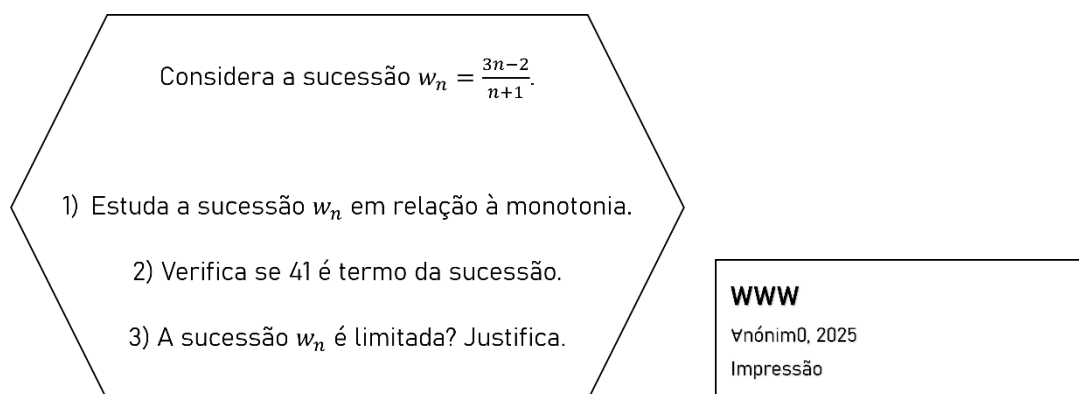


Figura 11 - Enunciado e etiqueta da obra *WWW*

Depois da concretização da galeria e alguma reflexão, o critério de seleção utilizado não pareceu ser o melhor, já que desta maneira estava-se, de certa forma, a conduzir os alunos a usar uma representação específica. Assim, para a concretização da segunda exposição na galeria houve uma preocupação em melhorar a seleção e adequação das tarefas.

Desta exposição, e para o presente estudo, irei apresentar a análise dos dados provenientes apenas das primeiras três tarefas, tendo dispensado a análise da tarefa 4, a obra *WWW*. Esta tarefa oferecia pouco espaço para diferentes resoluções e as perguntas eram familiares aos alunos, tendo as suas resoluções mostrado processos demasiado mecanizados para resolver este tipo de questões. Ademais, todos os grupos fizeram resoluções semelhantes e com recurso a representações já usadas nas outras tarefas.

3.2.2. II Exposição na Galeria 45² – *Limite, progressão, ação!*

A segunda exposição designada por *Galeria 45²: Limite, progressão, ação!* (Figura 12), teve também as sucessões como temática, uma vez que no momento da sua realização era ainda o tema em estudo. Contudo, a exposição oferecia, agora, através das suas obras de arte, questões relacionadas com progressões aritméticas, progressões geométricas e com limites de sucessões. Foi realizada a 3 de abril de 2025, ou seja, no último dia de aulas do 2.º período, uma aula que estava reservada à entrega e correção dos testes e autoavaliação, pelo que o tempo de aula teve de ser distribuído entre essas tarefas e a exposição.



Figura 12 – Imagem projetada no quadro na segunda exposição

A dinâmica deste segundo momento foi semelhante à da exposição anterior, porém sofreu algumas modificações. A principal alteração foi o tempo dado aos grupos para resolverem cada tarefa. Enquanto na primeira exposição, tiveram 20 minutos para resolver cada tarefa, nesta segunda, usufruíram apenas de 15 minutos, uma vez que, como já foi referido, esta aula contou também com o desenvolvimento de outras atividades. Como o tempo destinado à resolução de tarefas foi menor, optei por reduzir o número de questões por tarefa. Enquanto na primeira galeria cada tarefa tinha três ou quatro alíneas, nesta segunda, as tarefas tinham entre duas a três questões. Para além desta alteração, requisitou-se aos alunos que organizassem melhor os seus registos, escrevendo a lápis apenas os seus rascunhos e a caneta todas as suas resoluções e respostas finais.

Passo a apresentar as quatro tarefas escolhidas para esta exposição.

Tarefa 1 – Mentira espalhada, escola fechada

Nesta obra, o enunciado não tinha qualquer elemento de apoio (Figura 13). O enunciado da tarefa 1 continha representações verbais, uma vez que integrava um texto descrevendo uma situação que pode ser traduzida por uma progressão geométrica (Figura 14). Ademais, as representações contextuais também surgiam, pelo facto de envolver uma situação do quotidiano.

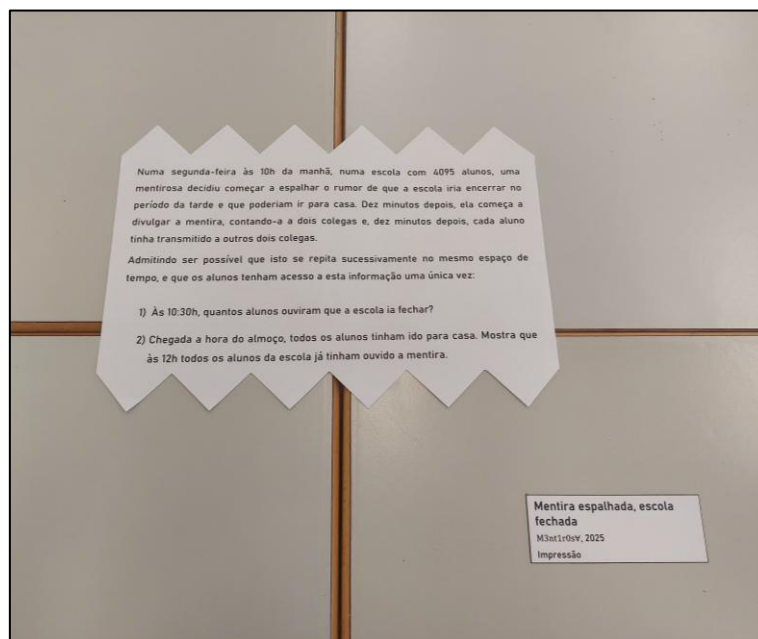


Figura 13 - Apresentação da obra *Mentira espalhada, escola fechada*

Numa segunda-feira às 10h da manhã, numa escola com 4095 alunos, uma mentirosa decidiu começar a espalhar o rumor de que a escola iria encerrar no período da tarde e que poderiam ir para casa. Dez minutos depois, ela começa a divulgar a mentira, contando-a a dois colegas e, dez minutos depois, cada aluno tinha transmitido a outros dois colegas.

Admitindo ser possível que isto se repita sucessivamente no mesmo espaço de tempo, e que os alunos tenham acesso a esta informação uma única vez:

- 1) Às 10:30h, quantos alunos ouviram que a escola ia fechar?
- 2) Chegada a hora do almoço, todos os alunos tinham ido para casa. Mostra que às 12h todos os alunos da escola já tinham ouvido a mentira.



Figura 14 - Enunciado e etiqueta da obra *Mentira espalhada, escola fechada*

Tarefa 2 – A cavalo dado não se olha o dente

Esta obra não continha qualquer elemento complementar à tarefa (Figura 15). O enunciado desta tarefa continha maioritariamente representações verbais, um texto descritivo de uma situação (Figura 16). Para além disso, também estavam presentes as

representações contextuais, uma vez que contempla uma situação da vida real que é necessário ter em conta para ser resolver a tarefa.



Figura 15 – Apresentação da obra *A cavalo dado não se olha o dente*

Numa feira de agricultura, o Sr. Pedro, negociante de cavalos, pedia por um cavalo puro-sangue a quantia de 4 000 000 euros. O Sr. João estava muito interessado em comprar o cavalo, mas considerava o preço muito elevado.

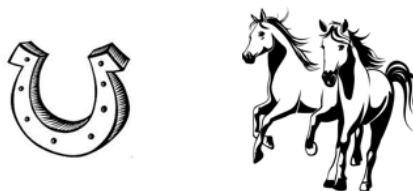
O Sr. Pedro propôs-lhe, então, o seguinte negócio:

«O cavalo tem 4 ferraduras, e cada uma delas tem 8 cravos. O Sr. João dá-me **um cêntimo** pelo primeiro cravo da ferradura da pata dianteira esquerda; dois cêntimos pelo segundo cravo da mesma ferradura, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até ao oitavo cravo dessa ferradura, pelo qual me dá 1,28 euros.

Repare: pelos oito cravos da ferradura desta pata, o Sr. João paga-me 2,55 euros. Barata a feira!

Continuemos para os outros cravos. Pelo primeiro cravo da pata dianteira direita, o Sr. João dá-me 2,56 euros, isto é, o dobro do valor do oitavo cravo da pata dianteira esquerda, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até se terem esgotado os 32 cravos das ferraduras do cavalo.

O Sr. João aceita pagar-me, por este cavalo, a quantia total do valor dos cravos das ferraduras?»



- 1) Verifica que o valor total dos cravos da ferradura da pata dianteira esquerda é de 2,55 euros, tal como o Sr. Pedro refere.
- 2) Ajuda o Sr. João a decidir se deve pagar o valor pedido inicialmente ou se deve aceitar a proposta feita pelo Sr. Pedro.

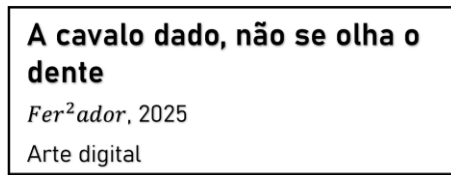


Figura 16 - Enunciado e etiqueta da obra *A cavalo dado não se olha o dente*

Tarefa 3 – Não percas o fio à meada!

Nesta paragem, para além do enunciado e da etiqueta, na mesa estava um papel com um fio verde que representava uma linha poligonal, construída segundo o que constava no enunciado (Figura 17). Este enunciado continha representações simbólicas e ativas (Figura 18).

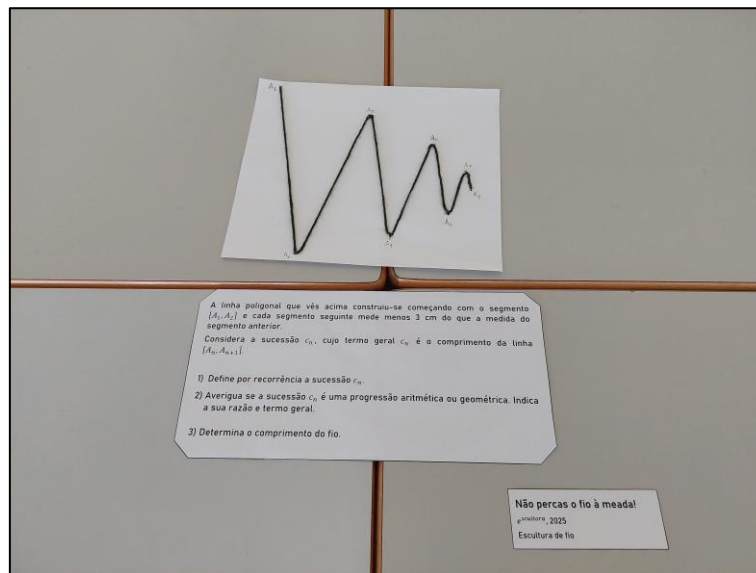


Figura 17 - Apresentação da obra *Não percas o fio à meada!*

A linha poligonal que vê's acima construiu-se começando com o segmento $[A_1, A_2]$ e cada segmento seguinte mede menos 3 cm do que a medida do segmento anterior.
 Considera a sucessão c_n , cujo termo geral c_n é o comprimento da linha $[A_n, A_{n+1}]$.

- 1) Define por recorrência a sucessão c_n .
- 2) Averigua se a sucessão c_n é uma progressão aritmética ou geométrica. Indica a sua razão e termo geral.
- 3) Determina o comprimento do fio.

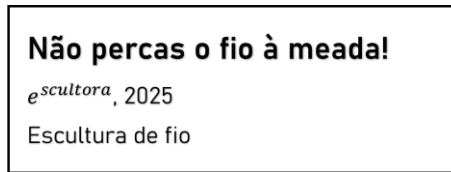


Figura 18 - Enunciado e etiqueta da obra *Não percas o fio à meada!*

Tarefa 4 – Código QR

Nesta paragem, os alunos deparavam-se com o enunciado da tarefa, mas com nenhuma pergunta (Figura 19). O enunciado desta obra continha representações simbólicas (Figura 20) e, para acederem e responderem às perguntas, teriam de digitalizar um código QR que os direcionava para um formulário criado para o efeito (Figura 21).

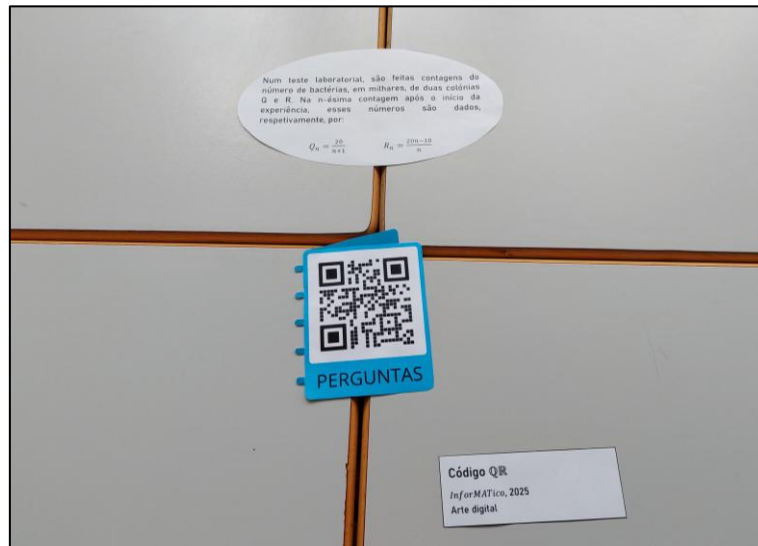


Figura 19 - Apresentação da obra *Código QR*

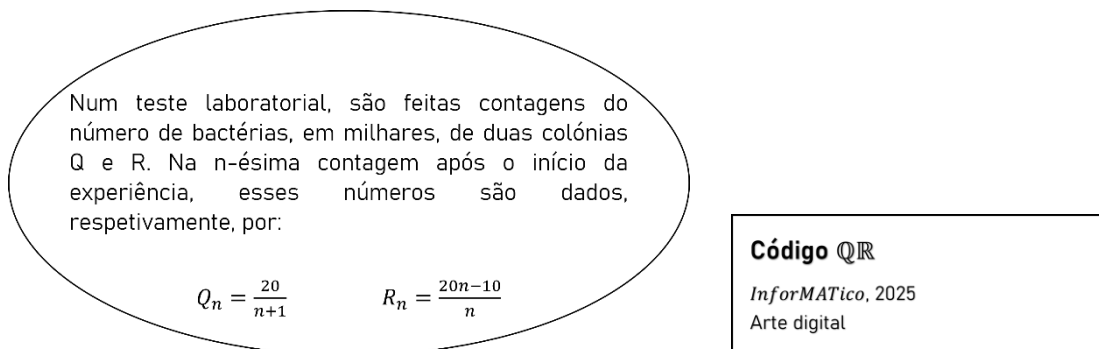


Figura 20 – Enunciado e etiqueta da obra *Código QR*

No decorrer do teste, o número de bactérias de cada colónia foi aumentando ou diminuindo? *
Justifica a tua resposta.

Texto de resposta longa

Há alguma contagem onde o número de bactérias da colónia Q seja igual ao número de bactérias da colónia R? Se sim, indica qual. *

Texto de resposta longa

Se o teste laboratorial se prolongasse por tempo indefinido, e admitindo que as expressões para Q_n e R_n continuavam válidas, o que aconteceria à população de cada uma das colónias? *

Texto de resposta longa

Figura 21 - Perguntas da tarefa

Desta vez a escolha destas tarefas sofreu uma melhoria, já que agora as tarefas não foram escolhidas exclusivamente pelo tipo de representação que apresentavam no enunciado, mas também por poderem ser resolvidas por vários caminhos e com a utilização de várias representações. A seleção de tarefas para a segunda exposição pareceu mais acertada e adequada ao objetivo da investigação.

No caso desta exposição, optei por não trazer a análise da tarefa 4, obra *Código QR*. À semelhança da outra tarefa que não foi considerada para análise, também esta não trouxe dados diferentes das primeiras tarefas, evitando-se assim a repetição de ideias.

No final deste relatório, nos Anexos 2, 3, 4, 5, 6 e 7, encontra-se uma proposta de resolução para cada uma das tarefas que integraram a galeria e trago para análise.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo apresentam-se os processos de recolha e análise dos dados. Começando por caracterizar a natureza da investigação, descrevem-se os participantes deste estudo e esclarecem-se as opções tomadas para a dinâmica de trabalho. Indicam-se, justificando, os métodos e procedimentos de recolha de dados, passando por uma apresentação e fundamentação dos instrumentos utilizados para fazer essa recolha. É descrito o processo de análise dos dados e finaliza-se com a explicação da forma como foram acauteladas as questões de natureza ética associadas a este estudo.

Este estudo segue uma metodologia qualitativa interpretativa (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008), adequada ao objetivo do mesmo, visto que o foco da investigação é compreender o papel das representações matemáticas na realização de tarefas, tanto na sua presença no enunciado como nas resoluções dos alunos. É um trabalho que não tem como objetivo confirmar conjecturas previamente definidas, sendo orientado para a descoberta, estudo e análise de dados recolhidos para tirar conclusões (Carmo & Ferreira, 2008). Durante a intervenção pedagógica previamente detalhada, recolhi dados de natureza qualitativa, não com o objetivo de avaliar o conhecimento matemático dos alunos, mas sim verificar a utilidade que dão às diferentes representações matemáticas e a influência que a sua presença nos enunciados pode assumir, ou não, nos seus processos de resolução.

No que toca aos participantes deste estudo, todos os 16 elementos da turma do 11.º ano de escolaridade, onde decidi desenvolver a minha intervenção pedagógica concordaram em colaborar. Deste modo, a turma foi dividida em quatro grupos de quatro elementos, deixando a sua formação ao critério dos alunos. Decidi não ser eu a fazer os grupos e deixá-los ter essa liberdade para que houvesse um bom ambiente em cada grupo e pudessem ficar com quem achassem que trabalhavam melhor. Como o principal objetivo desta investigação não é analisar a resolução de tarefas numa perspetiva de averiguar a sua validade e se as respostas estão corretas, achei por bem deixá-los escolher os parceiros de grupo para que pudessem estar à vontade para debater, apresentar e explicar o seu pensamento. Ter uma boa relação com quem trabalhamos é o ponto de partida para se ter um ambiente onde pode haver troca de ideias e construção de conhecimentos em conjunto, daí ter priorizado um bom ambiente entre o grupo, em detrimento da preocupação em formar grupos heterogéneos. Que se note

que, não me ter preocupado com a formação dos grupos não implica que os grupos tenham ficado desequilibrados. Além disso, deviam também dar um nome ao seu grupo, de preferência com relação à matemática. Assim, surgiram os quatro grupos participantes desta investigação: Grupo Casa do Pitágoras (CP); Grupo α (α); Grupo π (π); e Grupo Babilónia (B).

O Grupo Casa do Pitágoras era formado por três rapazes e uma rapariga (CP1, CP2, CP3, CP4). A nível de aproveitamento, eram um grupo de alunos bons/medianos, que de um modo geral assumiam uma postura de curiosidade, esforço e persistência para os desafios que lhes eram propostos. O Grupo α era formado por duas raparigas e dois rapazes ($\alpha1$, $\alpha2$, $\alpha3$, $\alpha4$). A nível de aproveitamento, eram alunos fracos/medianos, porém não desinteressados e que procuravam resolver as tarefas propostas, revelando interesse em compreender os processos que permitem chegar às respostas. O Grupo π , formado por três raparigas e um rapaz ($\pi1$, $\pi2$, $\pi3$, $\pi4$), era no geral um grupo fraco, destacando-se apenas uma das alunas por ter um bom aproveitamento e ser mais empenhada, colocando as suas dúvidas e justificando tudo o que faz. Por fim, o Grupo Babilónia era formado por três raparigas e um rapaz (B1, B2, B3, B4). Neste caso, duas das raparigas eram alunas de muito bom aproveitamento, a outra apresentava bom aproveitamento e o rapaz era um aluno fraco. Apesar disto, os quatro elementos eram interessados e esforçados, mostrando uma atitude positiva face à matemática.

A recolha de dados foi um processo que envolveu mais do que um instrumento para esse efeito, visando a minimização da perda de informações e a garantia de uma maior abrangência de dados (Carmo & Ferreira, 2008). Dada a natureza qualitativa deste estudo, o seu objetivo em questão, bem como as suas questões de investigação, e a dinâmica da intervenção pedagógica, não era adequado recolher apenas os produtos finais para análise, neste caso, recolher apenas as produções escritas dos alunos, era também imprescindível observar e recolher momentos e interações dos alunos, para uma subsequente análise mais aprofundada (Sá et al., 2021). As produções escritas dos alunos são “fontes de férteis descrições de como as pessoas que produziram os materiais pensam” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 176), mas nem sempre são suficientes para uma análise aprofundada. Portanto, foram também empregues registos fotográficos, com o objetivo de “lembrar e estudar detalhes que poderiam ser descurados se uma imagem fotográfica não estivesse disponível para os refletir” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 189). A recolha das produções escritas dos alunos é um dos pilares deste estudo qualitativo podendo servir como substituto de registos que o investigador não pôde fazer (Vale, 2001). Os registos fotográficos, embora benéficos,

acarretam riscos que podem comprometer os resultados, como, por exemplo, provocar uma mudança no normal comportamento dos participantes do estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Para além destas duas fontes de dados, foram também realizadas gravações em áudio, de forma a facilitar o trabalho de recolha de dados (Amado, 2014). Embora este tipo de método de recolha de dados esteja comumente associado a entrevistas, também pode ser usado fora delas e, apesar de ser uma fonte de dados confiáveis e precisos, pode tornar o trabalho de análise moroso, implicando a escuta e transcrição de grandes ficheiros áudio, para além de não adquirir informação não verbal que pode ser importante (Sá et al., 2021). Deste modo, ao longo das duas galerias foram recolhidos dados a partir de três instrumentos: produções escritas dos alunos; gravações em áudio das interações dos alunos por grupo; e registos fotográficos de momentos em aula.

A observação foi também um método de recolha de dados importante neste estudo, sendo algo inerente ao duplo papel de professor-investigador que tomei ao conduzir este estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Apesar de não apresentar neste relatório evidências explícitas deste método, foi a observação e o contacto com os alunos que me permitiram perceber quando deveria intervir e ajudá-los no que fosse necessário. Não senti necessidade de fazer notas de campo, visto que o registo das interações entre os alunos estava garantido pelas gravações em áudio.

A recolha das produções escritas dos alunos ocorreu no final de cada momento da intervenção pedagógica e foi reunido tudo o que construíram para apresentar uma resolução e resposta a cada tarefa. Os registos fotográficos foram efetuados durante a realização de cada galeria, por mim próprio. Já as gravações em áudio, ocorreram durante a concretização das tarefas, gravando as interações entre os membros de cada grupo. Foi pedido a cada grupo que colocasse um telemóvel a gravar, em formato áudio, todos os momentos em que estivessem a trabalhar, para posteriormente me enviarem. Recorreu-se à notação (Aula, CP), (Aula, α), (Aula, π) e (Aula, B) para identificar os discursos dos alunos dos diferentes grupos que foram obtidos, através de gravações áudio, ao longo das várias aulas.

De modo a verificar que papéis tomavam as representações utilizadas pelos alunos e se a escolha dessas representações era influenciada pelo enunciado da tarefa, recolhi e analisei o seu trabalho escrito, isto é, as resoluções das tarefas que foram propostas. Com a recolha destas produções, esperava-se observar e analisar as escolhas tomadas pelos alunos a nível representacional, procedendo a uma identificação das representações utilizadas e posterior análise da sua finalidade. Para além disso, com

este tipo de registos já se esperava ser possível tirar algumas conclusões acerca da influência que as representações presentes no enunciado têm na escolha das representações a utilizar na resolução das tarefas. Analisar as produções dos alunos iria permitir recolher alguns dados para tirar conclusões acerca das duas questões de investigação, contudo aliou-se a este tipo de dados as gravações em áudio dos diálogos dos alunos.

Através das gravações em áudio, foi-me facilitado o processo de compreensão dos papéis desempenhados pelas representações utilizadas pelos alunos, tendo sido essenciais para conseguir ter uma compreensão mais aprofundada do que ocorreu em cada grupo, já que seria impossível estar presente nos quatro grupos constante e simultaneamente. Posteriormente, e referente a ambas as galerias, estes áudios foram-me enviados, para que pudesse ouvi-los e tirar a informação relevante para este estudo. A utilização deste tipo de instrumento de recolha foi essencial para conseguir realmente entender as intenções e objetivos dos alunos na escolha e utilização das representações adotadas, para além de ter produzido dados mais fiéis e verdadeiros, evitando o enviesamento ou omissão de dados que poderia acontecer, por exemplo, se tivesse optado por recorrer exclusivamente a notas de campo (Carmo & Ferreira, 2008).

Os registos fotográficos serviram para ilustrar cada momento da intervenção pedagógica, bem como a utilização de representações por parte dos alunos. Este tipo de instrumento de recolha mostrou-se útil para evidenciar o trabalho dos alunos e fornecer uma representação visual do que foi feito por eles, enriquecendo e corroborando a informação transmitida pelas gravações em áudio.

Para ambas as questões de investigação, a análise dos dados passava por primeiro identificar o tipo de representações usadas pelos alunos nas suas resoluções. Assim, a classificação das representações seguiu o modelo apresentado no capítulo 2 deste trabalho, de Lesh et al. (1987), tendo sido consideradas as: representações verbais; representações visuais; representações físicas; representações contextuais; e representações simbólicas. Para as representações verbais, considerou-se tudo o que envolvia o uso de palavras e frases. Nas representações visuais, procuraram-se imagens, figuras, esquemas, desenhos e gráficos. Já as representações físicas, englobavam os casos em que havia manipulação de objetos. As representações contextuais referem-se ao uso da realidade e da articulação entre a matemática e o quotidiano para explicar ou interpretar uma situação. Por fim, as representações simbólicas envolviam os casos onde aparecia notação e simbologia própria da matemática.

No caso da primeira questão de investigação, procedi a uma categorização dos papéis que as representações tomam nas resoluções dos alunos. Neste processo, efetuei uma análise dos dados recolhidos e inspirado nas ideias avançadas por Stylianou (2010), quando apresenta quatro papéis que as diferentes representações podem assumir para facilitar o processo de resolução de tarefas, defini as 6 categorias que passo a apresentar: (i) interpretar e compreender a situação; (ii) traduzir/visualizar informação do enunciado; (iii) explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta; (iv) explicar/justificar o processo de resolução; (v) apresentar resposta; (vi) confirmar resultados.

Quanto à segunda questão de investigação, pretendia-se analisar se havia alguma relação entre as representações presentes no enunciado com as representações utilizadas pelos alunos. Para tal, verificou-se as representações que cada tarefa apresentava e procurou-se alguma relação entre essas e as utilizadas pelos alunos nas suas resoluções, nomeadamente, se a presença de uma figura no enunciado tinha algum efeito nas representações que surgiam na resolução, ou se a disponibilidade de representações ativas fazia com que os alunos se apropriassem delas.

Analisar os dados foi um processo desenvolvido em várias fases e de forma indutiva, “o que significa que as categorias, temas e padrões surgem a partir dos dados” (Vale, 2001, p. 14). Numa primeira fase, imediatamente após cada galeria, analisaram-se as produções escritas dos alunos numa perspetiva de enumerar as representações utilizadas. Numa fase posterior a ambas as galerias, quando todos os dados já haviam sido reunidos, analisaram-se as produções escritas numa perspetiva de entender as funcionalidades de cada representação na resolução. Para tornar esta análise mais completa, ouviram-se os áudios de cada grupo para apurar a utilização de outras representações que possa não ter ficado explícita nos registos entregues, como também para fazer a transcrição de diálogos relevantes. Por fim, compararam-se todos os resultados analisados com os enunciados das tarefas e as representações nelas presentes, para verificar se havia alguma relação e, assim, dar resposta à segunda questão de investigação.

Previamente ao início deste estudo, foi solicitado aos encarregados de educação dos alunos da turma em questão que permitissem a participação dos seus educandos nesta investigação, bem como autorizassem a recolha de dados referente ao trabalho desenvolvido por eles. Para tal, foi enviado um consentimento informado (Anexo 1) onde estava enfatizada a importância do aluno neste estudo e esclarecido que a sua participação seria voluntária, anónima, passível de desistência e em nada interferiria

com a sua avaliação na disciplina de matemática A. Felizmente, toda a turma teve autorização para participar deste trabalho e, assim, todos os 16 alunos colaboraram nesta intervenção pedagógica.

5. Apresentação e discussão dos resultados

Neste quinto capítulo, apresentam-se os resultados desta investigação, que permitirão responder às questões de investigação inicialmente propostas. Estes resultados são interpretados e discutidos tendo por base as ideias apresentadas no enquadramento teórico deste relatório. Este capítulo está bipartido, estando reservado um item para cada um dos momentos de intervenção pedagógica, isto é, cada uma das exposições realizadas, cada uma também dividida em quatro itens, um para cada obra de arte.

5.1. Exposição *Uma sucessão de tarefas*

5.1.1. *É de queimar os neurónios...*

Nesta paragem, a tarefa proposta (Figura 22) integrou a temática sucessões e teve como objetivos de aprendizagem reforçar a resolução de problemas envolvendo sucessões, promovendo especialmente a modelação de situações em sucessões. (Ministério da Educação, 2018).

Acima, está uma representação dos três primeiros termos de uma sucessão (p_n). O termo geral p_n é igual ao número de fósforos utilizados na construção da figura de ordem n .

1) Indica o valor de:

a. p_5 b. p_9

2) Define por recorrência a sucessão p_n .

3) Determina o termo geral da sucessão t_n , cujo termo geral é igual ao número de triângulos formados pelos fósforos na figura de ordem n .

Figura 22 - Enunciado da obra *É de queimar os neurónios...*

Na tarefa em questão, para além de uma série de questões, os alunos eram confrontados também com várias figuras feitas de fósforos. Estas figuras seguiam uma certa lei de formação, e a tarefa girava em torno da sucessão cujo termo geral era igual ao número de fósforos utilizados na construção de cada figura. A primeira alínea pedia que indicassem os 5.º e 9.º termos da sucessão, a segunda alínea que definissem esta

sucessão por recorrência e a última alínea solicitava que encontrassem o termo geral de uma outra sucessão, cujo termo geral traduziria o número de triângulos formados pelos fósforos em cada figura.

“Esta é fácil, adicionas sempre mais 2” (Aula, CP3), assim começou a resolução do grupo Casa do Pitágoras. Por observação das construções que lhes eram apresentadas, conseguiram compreender o comportamento da sucessão. Na resolução da primeira alínea desta tarefa (Figura 23), o grupo começou por escrever todos os termos da sucessão até ao 9.º termo, para encontrar os termos pedidos na questão, utilizando uma representação visual que os permitiu identificar e sinalizar o 5.º e 9.º termo da sucessão, mostrando o seu processo de resolução. Para além disso apresentaram a resposta a esta alínea utilizando notação própria da matemática que indicava o valor de ambos os termos pedidos, usufruindo das representações simbólicas.

Figura 23 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à primeira alínea

Na segunda alínea, o grupo apenas apresentou a sua resposta final, sem justificação, definindo corretamente a sucessão p_n por recorrência (Figura 24), com recurso a representações simbólicas que, para além de servirem para apresentar a resposta final, também foram úteis para confirmar se a resposta à primeira alínea estava correta, já que se ouve um dos membros do grupo dizer “faz isso no termo 1,2 e 3 para ver se está certo” (Aula, CP2).

Figura 24 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras às segunda e terceira alíneas

Na última alínea, apresentam o termo geral da sucessão pedida utilizando representações simbólicas e recorrem também a representações verbais para explicar que nesta sucessão cada termo era obtido somando 1 ao termo anterior. Este tipo de representação serviu este grupo na justificação do seu processo de resolução.

É de se notar que o grupo Casa do Pitágoras considerou a tarefa mais fácil, devido à presença das construções, mas não parece ter havido um grande proveito dessas representações físicas, isto é, se ao invés das construções fosse apresentada apenas uma imagem que retratasse essa situação, provavelmente não haveria grandes diferenças nas resoluções deste grupo.

Nos registos elaborados pelo grupo Babilónia encontram-se representações simbólicas e verbais. Na primeira alínea reconheceram que a sucessão se formava recursivamente somando sempre 2 aos termos para encontrar o termo seguinte e fizeram o cálculo dos 9 primeiros termos da sucessão, tendo este grupo usufruído das representações simbólicas para explorar uma estratégia para encontrar a resposta e apresentá-la através de notação própria (Figura 25).

Babilónia

É de queimar os neurónios

① $\begin{cases} p_1 = 5 \\ p_{n+1} = p_n + 2 \end{cases}$

$p_2 = 5 + 2 = 7$
 $p_3 = 7 + 2 = 9$
 $p_4 = 9 + 2 = 11$
 $p_5 = 11 + 2 = 13$
 $p_6 = 13 + 2 = 15$
 $p_7 = 15 + 2 = 17$
 $p_8 = 17 + 2 = 19$
 $p_9 = 19 + 2 = 21$

a) $p_5 = 13$
b) p_9

② $\begin{cases} p_1 = 5 \\ p_{n+1} = p_n + 2 \end{cases}$

Figura 25 - Resolução do grupo Babilónia

Este grupo apoiou-se maioritariamente nas representações simbólicas, tendo imediatamente procurado uma expressão que traduzisse a lei de formação das figuras:

B3 – [a ler o enunciado] Representação dos primeiros três termos. São os primeiros três termos, conta aí quantos tem cada um.

B1 – 5... 6... 7! 7 palitos no primeiro.

B4 – 7,9,11. 7,9, 11!

B3 – É a [sucessão] dos números ímpares.

B4 – Sim. (Aula, Babilónia)

Esta abordagem meramente analítica, levou os elementos B3 e B4 a considerar que a sucessão pretendida era a sucessão de termo geral $2n - 1$, ou seja, a sucessão dos números ímpares, não tendo em conta que o primeiro termo não era 1, mas sim 7 que era o número de fósforos da primeira figura. Enquanto isto acontecia, o aluno B1 calculava, individualmente, cada termo da sucessão:

B1 – Pronto, está aqui já.

B3 – [a calcular o 5.º termo da sucessão] É 9 o quinto [termo da sucessão]?

B4 – Sim, 9.

B3 – Como é que é 9?

B1 – Oh B4 aqui...

B4 – 2 vezes 5...

B3 – Sim, mas como é que é 9? Porque aqui [nas figuras de fósforos] é 5, 7, 9.

B4 – Então não é monótona!

B3 – Não monótona, pois...

B1 – Não é 11?

B4 – Pode ser não monótona, pode repetir-se. (Aula, Babilónia)

Neste diálogo, o aluno B1 já mostrava estar a pensar corretamente, embora não tivesse sido ouvido pelas restantes colegas do grupo. As alunas B3 e B4 continuaram a insistir na hipótese de que a sucessão não era monótona:

B1 – O quinto termo vai ser 15.

B4 – Não.

B1 – Sim! Vai de dois em dois.

B4 – Não é crescente nem decrescente. Pode ser não monótona, então repete os números.

B1 – Mas porque isto é 7,9,11, 13, 15...

B4 – Não tens a certeza, porque tens de achar a sucessão geral.

B1 – Ah ok! Já percebo o que queres dizer. (Aula, Babilónia)

O aluno B1 não conseguiu convencer as suas colegas, apesar de estar correto, tendo até mudado de ideias e acabando por aceitar o que lhe foi dito. O uso exclusivo de representações simbólicas parece ter levado o grupo por uma resolução errada e talvez a questão da monotonia da sucessão se tenha imposto pelo enunciado não estar claro

e não indicar que existia uma lei de formação. Tanto na primeira como na segunda alínea, as representações simbólicas são evidentes quando o grupo define a sucessão descrita no enunciado por recorrência, embora não esteja completamente correto, sendo este tipo de representação utilizado para traduzir informação do enunciado, o comportamento da sucessão, e, no caso da segunda alínea, apresentar a resposta.

Na última alínea, para além das representações simbólicas utilizadas para apresentar o termo geral da sucessão pedida, o grupo também aplica representações verbais na sua resolução quando clarifica que $2n + 3$ significa 3 triângulos mais dois fósforos e explica que $2n - 1$ é o termo geral da sucessão dos números ímpares (Figura 26). Apesar de a resolução e consequente resposta estarem incorretas, as representações verbais serviram o propósito de justificar o processo de resolução.

③ $p_n = 2n + 3$

n: 3 triângulos mais 2 fósforos

$2n-1$ é o termo geral dos n -és ímpares (e nesta só são ímpares)

$2n+1$ não é possível porque $n_1=3$

$2n+2$ não é possível porque $n_2=6$, que não é ímpar

$2n+3$ é o termo geral da sucessão

Figura 26 - Resposta do grupo Babilónia à terceira alínea

No trabalho apresentado pelo grupo π aparecem representações visuais, simbólicas e verbais. Na primeira alínea (Figura 27), este grupo começa por descrever os primeiros três termos da sucessão descrita no enunciado, através de notação própria da matemática. De seguida, descobrem também o termo geral desta sucessão e escrevem-na, para então dar resposta à pergunta e determinar os termos de ordem 5 e 9. Assim, as representações simbólicas tomam um papel importante nesta resolução, servindo para traduzir a informação do enunciado, definir uma estratégia para encontrar a resposta e apresentar a resposta. Para além disso, as representações visuais aparecem de forma muito subtil nesta resolução, quando assinalam que cada termo da sucessão é obtido somando 2 ao termo anterior, complementando as representações simbólicas utilizadas para identificar os primeiros três termos da sucessão e ajudando na interpretação da situação. Esta informação é reiterada através de representações verbais, descrevendo o comportamento da sucessão e a variação dos fósforos nas construções.

1) P_n

$P_1 = 7$

$P_2 = 9$ $\nearrow +2$

$P_3 = 11$ $\nearrow +2$

$P_n = 5 + 2n$

a) $P_5 = 5 + 2 \times 5 = 15$

b) $P_9 = 5 + 2 \times 9 = 23$

Primeiro vimos o número de fósforos em cada termo

E reparamos que do primeiro para o segundo adicionou-se 2 fósforos e do segundo para o terceiro também se adicionou 2 fósforos.

E obtivemos a expressão $P_n = 5 + 2n$ e com isso calculamos P_5 e P_9 .

Figura 27 - Resolução do grupo π à primeira alínea

Na segunda alínea apenas representações simbólicas são apresentadas quando definem a sucessão por recorrência, ainda que de forma incorreta. Já na terceira alínea voltam a ser utilizadas representações simbólicas e verbais de forma semelhante ao que foi feito na primeira alínea, embora nesta não surjam representações visuais (Figura 28).

2) $\begin{cases} P_1 = 7 \\ P_{n+1} = 5 + 2n \end{cases}$

3) t_n

$t_1 = 3$

$t_2 = 4$

$t_3 = 5$

$t_n = 2 + n$

Com a expressão que obtivemos definimos por recorrência a sucessão P_n .

Vimos o número de triângulos de cada termo e vimos que do primeiro termo para o segundo aumentou 1 triângulo e do segundo para o terceiro também aumentou 1.

E chegamos a expressão $t_n = 2 + n$.

Figura 28 - Resolução do grupo π

Um aspeto curioso na resolução deste grupo é a acentuada utilização de frases para explicar o seu processo de resolução, que pode estar associada à minha intervenção:

$\pi 1$ – Professor, já acabámos.

Investigador – Está tudo justificado, com respostas, tudo direitinho?

$\pi 1$ – É melhor escrever mais, não é?

Investigador – Quero que me identifiquem o grupo, qual é a tarefa e quero que expliquem como é que fizeram tudo, ok? Como é que pensaram, o que é que fizeram para chegar aí.

$\pi 1$ – Ok. (Aula, π)

Apesar de não lhes ter indicado exatamente para escreverem frases que explicassem o seu pensamento, a minha insistência fez com que decidissem fazê-lo deste modo.

Também o grupo α usufruiu das representações visuais, simbólicas e verbais (Figura 29). À semelhança do que aconteceu no grupo anterior, as representações visuais permitiram-lhes visualizar e interpretar a informação do enunciado, conseguindo concluir, na alínea 1, que cada termo da sucessão obter-se-ia somando 2 ao termo anterior e, na alínea 3, somando 1. As representações simbólicas aparecem para apresentar resposta às três alíneas; apenas na última alínea recorreram a representações verbais para explicar o comportamento da sucessão que definiram, explicando o pensamento e o processo de resolução.

group α

3. É de queimar os neurónios

7 9 11
2 2

1) $p_5 = 15$
 $p_9 = 23$

2) $\begin{cases} p_1 = 7 \\ p_n = p_{n-1} + 2 \end{cases}$

3) 3 4 5
1 1
 $n + 2$

a sucessão tn aumenta de um a um e o primeiro termo tem 3 triângulos. O termo seguinte vai ter mais do que o termo anterior e cada triângulo aumenta mais 2 fósforos.

Figura 29 - Resolução do grupo α

Adicionalmente, foram utilizadas representações físicas, na manipulação de fósforos para interpretar a situação, criar figuras e explorar uma estratégia para encontrar a resposta: “Nós precisamos de ir buscar os fósforos, eu tenho a certeza que vai sempre aumentado de 1 em 1” (Aula, $\alpha 2$). Esta aluna optou por ir buscar os fósforos e começar a construir a próxima figura desta sucessão para tentar compreender a relação existente, concluindo que ia aumentando um triângulo em cada figura. A utilização deste

material físico, permitiu também a essa mesma aluna compreender toda a tarefa e explicar aos seus colegas uma possível resolução para a tarefa apresentada:

$\alpha 2$ – Para cada termo aumenta um triângulo. Também porque vai aumentando 2 coisas [fósforos] e só precisas de dois... [a mexer com os fósforos nas figuras] Se tu vires agora, se eu adicionar agora este aqui, se eu só adicionar dois que é o que aumenta a sucessão, formas um coiso [triângulo], o que faz sentido!

$\alpha 3$ – [concorda] Hmhm

$\alpha 2$ – A cada dois fósforos, adicionas um triângulo.

$\alpha 3$ – Sim!

$\alpha 2$ – Faz sentido porque a sucessão anterior era...

$\alpha 3$ – Mais 2. (Aula, α)

Quando vi este grupo a utilizar os fósforos (Figura 30), fui à paragem onde se encontravam para tentar compreender o porquê de o estarem a fazer:

Investigador – O que é que estavas a fazer com os fósforos?

$\alpha 2$ – Estava só a confirmar porque agora para a terceira é de acordo com os triângulos.

$\alpha 1$ – Cada dois fósforos formam mais um triângulo.

$\alpha 2$ – Portanto a sucessão aumenta de 1 a 1. (Aula, α)

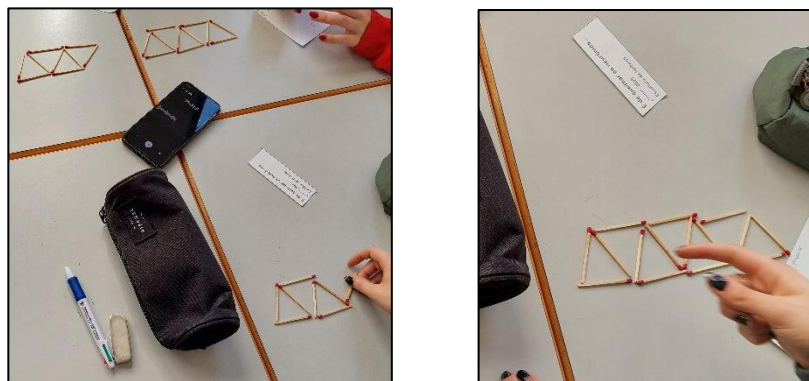
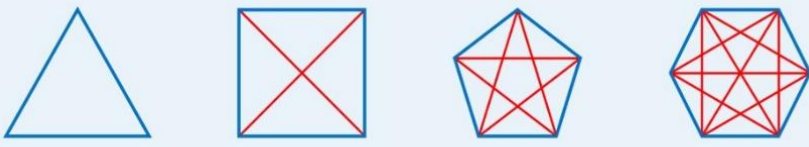


Figura 30 - Uso dos fósforos pelo grupo α

Nesta obra, a utilização de representações físicas foi desconsiderada por todos os grupos, à exceção do grupo α que aproveitou a presença dos fósforos na mesa para confirmar e explicar as suas ideias, permitindo-lhes encontrar um processo de resolução para a tarefa proposta.

5.1.2. Pontos e linhas

Nesta paragem, a tarefa proposta (Figura 31) integrou a temática sucessões e perspetivava reforçar a resolução de problemas envolvendo sucessões. (Ministério da Educação, 2018).



Seja d_n a sucessão em que o termo geral $d_n = \frac{n^2+n-2}{2}$ representa o número de diagonais do polígono convexo com $n + 2$ lados.

Nota: Dado um polígono convexo, o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos é uma diagonal.

- 1) Quantas diagonais tem um octógono?
- 2) Determina o número de lados do polígono com 90 diagonais.
- 3) A Joana construiu um polígono e contou as diagonais. De seguida, construiu outro polígono com mais um lado e verificou que tinha mais 18 diagonais do que o anterior. Determina o número de lados de cada um dos polígonos construídos pela Joana.

Figura 31 - Enunciado da obra *Pontos e linhas*

Nesta paragem, os alunos deveriam responder a três questões, tendo várias figuras disponíveis que acompanhavam o enunciado, que mostravam 4 polígonos com as suas diagonais. Na primeira alínea, pedia-se que indicassem o número de diagonais de um octógono; a segunda alínea desafiava os alunos a encontrar um polígono com 90 diagonais; já a terceira alínea, pedia-lhes que encontrassem o número de lados de dois polígonos, sabendo que um tem mais 18 diagonais do que o outro.

O único grupo a apresentar uma resposta em forma de desenho foi o grupo Casa do Pitágoras que, recorrendo à representação visual das diagonais de um octógono descobriu a resposta à primeira questão (Figura 32), defendendo que “um desenho é uma justificação” (Aula, CP1).

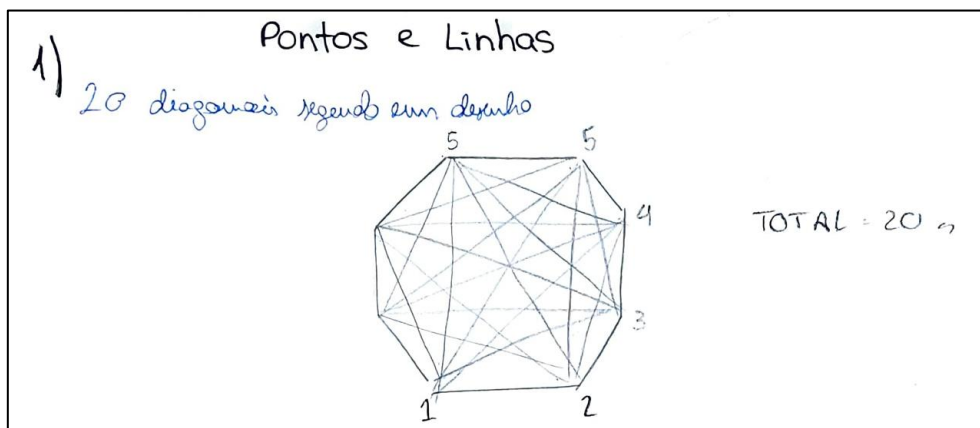


Figura 32 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras

De facto, as representações visuais tomaram um papel fundamental na resolução deste grupo. A abordagem visual não foi imediata, tendo um dos elementos do grupo se queixado da falta de um octógono no enunciado. Ao analisar as diferentes figuras que o enunciado apresentava, chegaram à conclusão de que nenhuma tinha oito lados, ao que o aluno CP1 reage com, “mas precisamos de um octógono!” (Aula, CP1) e é rapidamente incentivado por CP3 a desenhá-lo. Para além disso, é possível entender pela gravação de áudio que as representações visuais que foram disponibilizadas aos alunos junto com o enunciado da tarefa, permitiram ao grupo relembrar o que era uma diagonal de um polígono.

Primeiramente, depois de desenhar um octógono, decidiram que o número de diagonais seria o número de possíveis conexões de cada vértice do octógono com outro vértice, exceto os casos em que essas conexões fossem arestas do polígono. Assim, concluíram que a resposta seria 5 vezes 8, pois cada vértice teria 5 ligações possíveis e são 8 os vértices. Porém, com a ajuda do desenho realizado, o CP1 foi capaz de reconhecer: “há diagonais que já foram feitas, ou seja, não podemos contar outra vez” (Aula, CP1). Após este impasse, decidiram analisar melhor o enunciado da tarefa e repararam na restante informação:

CP2 – Não temos de fazer com o $n + 2$?

CP3 – É suposto usarmos esta expressão?

CP4 – Pelos vistos...

CP2 – Calma...

CP3 – Vê se consegues entender o que está aí. (Aula, Casa do Pitágoras)

Começaram a procurar compreender as representações simbólicas apresentadas no enunciado e, durante este diálogo, o aluno CP1 estava a tentar alcançar a resposta,

insistindo nas representações visuais. Ao fim de pouco tempo descobriu: “20, tem 20 diagonais!” (Aula, CP1) e os seus colegas, procurando uma maneira de apresentar o seu pensamento questionaram-no, “e como é que justificas, com o desenho?” (Aula, CP4). Esta relutância em utilizar o desenho como justificação, aliada à tentativa de desmistificação da sucessão apresentada no enunciado, levou a que o grupo tentasse resolver a tarefa utilizando o termo geral da sucessão. Fizeram alguma confusão no trabalho com as representações simbólicas, ou seja, numa tentativa de trabalhar com o termo geral da sucessão, não conseguindo obter uma resposta a partir delas, porém estas serviram para explorar e tentar definir uma estratégia para encontrar uma resposta. Na impossibilidade de conseguir achar a resposta analiticamente, tornaram a recorrer ao desenho e concluíram que “desenhando dá 20 diagonais” (Aula, CP4).

Adicionalmente, utilizaram representações físicas ao construir um octógono com fósforos e representar as suas diagonais que, embora não tenha funcionado nem sido útil para a resolução da tarefa, também cumpriu o objetivo de explorar uma estratégia para encontrar a resposta certa (Figura 33).

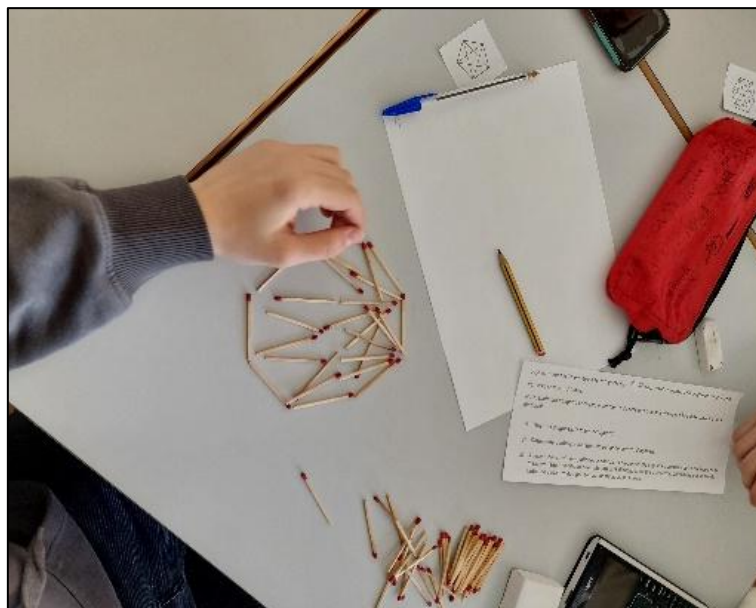


Figura 33 - Uso dos fósforos pelo grupo Casa do Pitágoras

Os 20 minutos propostos para a realização desta tarefa não foram suficientes para que este grupo conseguisse completá-la, tendo utilizado todo o tempo a tentar resolver a primeira alínea de outra forma e apenas apresentado resposta a essa pergunta.

O grupo Babilónia começou também por desenhar um octógono, assinalar as suas diagonais e contá-las, utilizando as representações visuais para definir uma estratégia de resolução, obtendo, contudo, uma resposta errada. Durante o processo de resolução

da primeira alínea, embora não o tivessem escrito na folha de resposta, utilizaram corretamente as representações simbólicas para encontrar o número de diagonais de um octógono, procurando confirmar este resultado a partir de representações visuais (Figura 34).

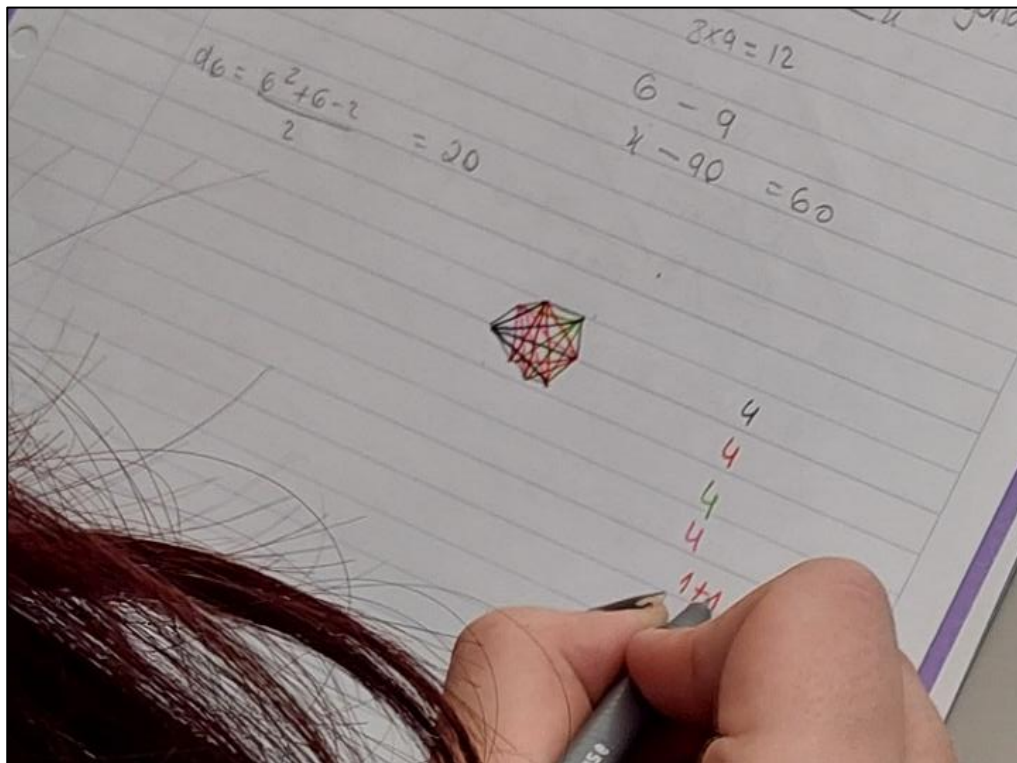


Figura 34 - Uso das representações simbólicas e visuais pelo grupo Babilónia

A Figura 35 mostra a resolução desta tarefa feita por este grupo. Na sua resposta à primeira alínea, apenas apresentaram uma resposta final, sem qualquer tipo de justificação. Já na segunda e terceira alíneas, foram utilizadas representações simbólicas tanto para justificar o processo de resolução, como para apresentar a resposta, tendo o grupo utilizado regras de 3 simples, uma estratégia inadequada e que não lhes permitiu responder, de forma correta, às questões apresentadas.

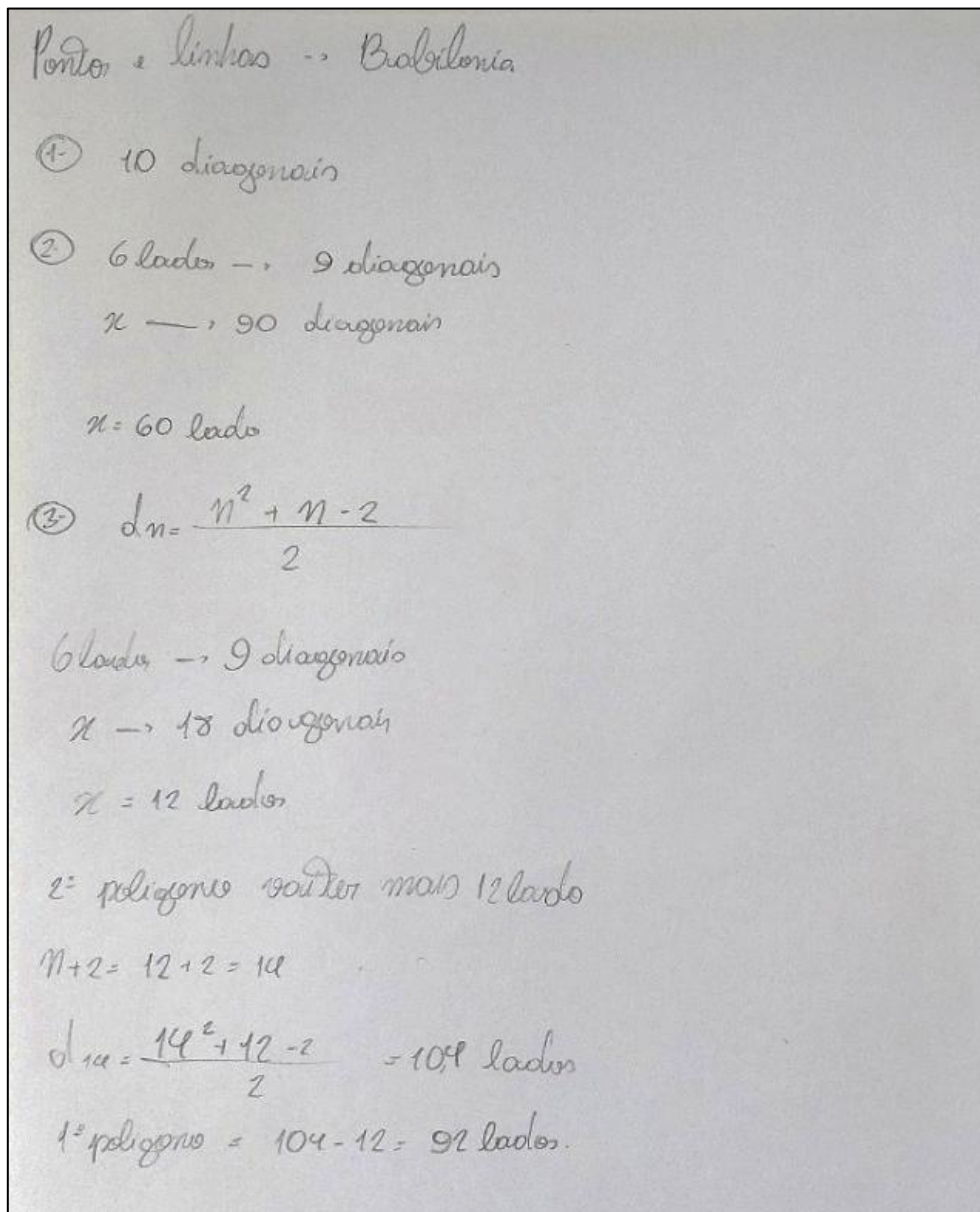
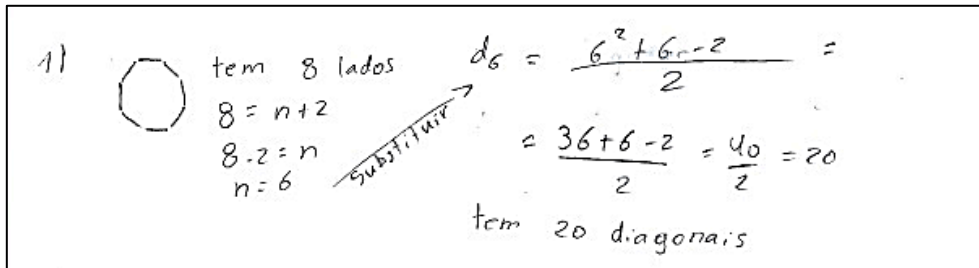


Figura 35 - Resolução do grupo Babilônia

O grupo π utilizou nas três alíneas, as representações simbólicas para apresentar o processo de resolução e trabalhar em torno da sucessão apresentada no enunciado. Optaram por começar a sua resolução com um desenho de um octógono, mas chegaram a uma conclusão errada devido a uma má interpretação do que era uma diagonal do octógono. Quando ficou esclarecido, escolheram calcular o sexto termo da sucessão apresentada no enunciado e concluíram que esta figura tinha 20 diagonais, usando assim representações simbólicas para definir uma estratégia para encontrar a resposta e justificar o processo de resolução. Ainda na primeira alínea, aparece desenhado um octógono (representações visuais), para, em conjunto com

representações simbólicas, explicar a parte inicial da resolução, o porquê de n ser 6 (Figura 36).



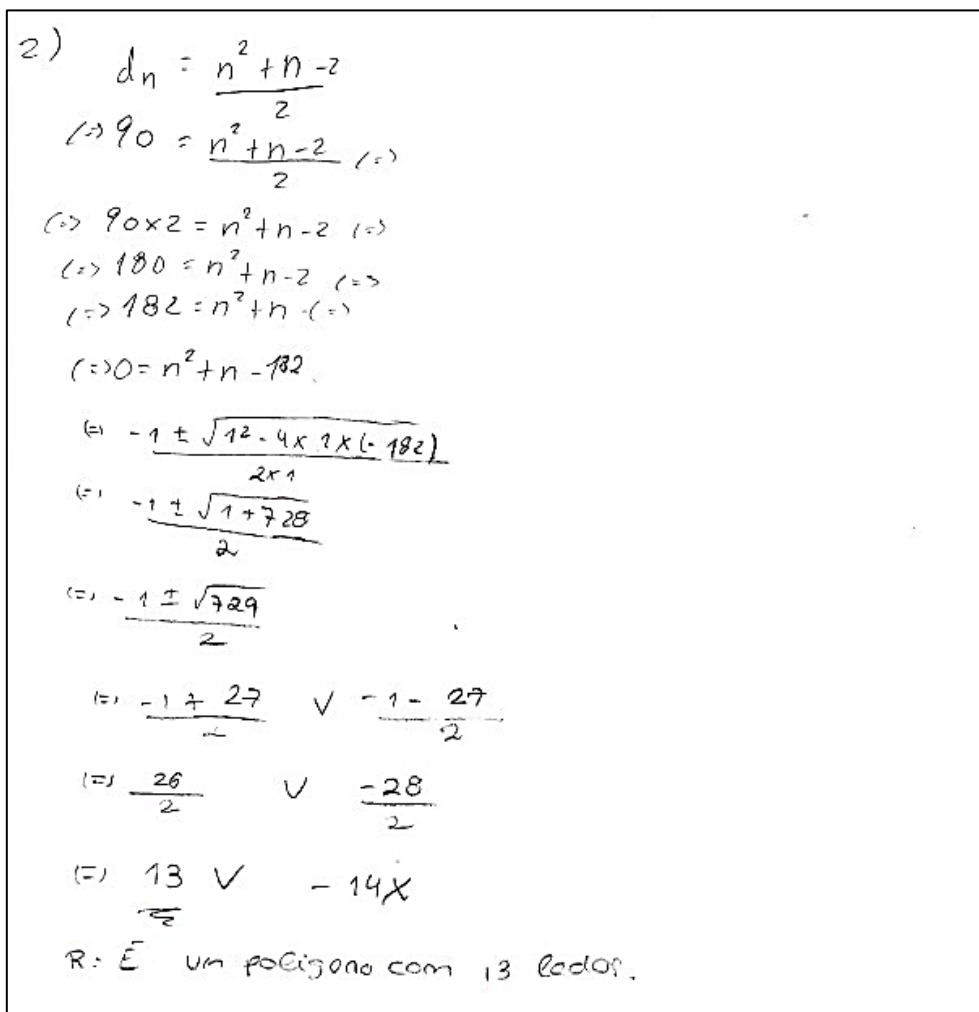
1)  tem 8 lados
 $8 = n + 2$
 $8 - 2 = n$
 $n = 6$

Substituir $d_6 = \frac{6^2 + 6 - 2}{2} = \frac{36 + 6 - 2}{2} = \frac{40}{2} = 20$

tem 20 diagonais

Figura 36 - Resolução do grupo π à primeira alínea

Já na segunda alínea, apenas representações simbólicas são empregues, tendo o grupo identificado imediatamente que a sucessão do enunciado traduzia o número de diagonais de um polígono, então bastava igualar essa expressão a 90 e fazer os cálculos (Figura 37).



2) $d_n = \frac{n^2 + n - 2}{2}$

$\Rightarrow 90 = \frac{n^2 + n - 2}{2} \quad (\Rightarrow)$

$\Rightarrow 90 \times 2 = n^2 + n - 2 \quad (\Rightarrow)$

$\Rightarrow 180 = n^2 + n - 2 \quad (\Rightarrow)$

$\Rightarrow 182 = n^2 + n \quad (\Rightarrow)$

$\Rightarrow 0 = n^2 + n - 182$

$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-182)}}{2 \times 1}$

$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 728}}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1 + 27}{2} \quad \vee \quad \frac{-1 - 27}{2}$

$\Rightarrow \frac{26}{2} \quad \vee \quad \frac{-28}{2}$

$\Rightarrow 13 \quad \vee \quad -14$

$\underline{13}$

R: É um polígono com 13 lados.

Figura 37 - Resolução do grupo π à segunda alínea

Na terceira alínea, foram aplicadas representações simbólicas para traduzir a informação do enunciado, atribuindo à variável x o número de lados de um polígono e à variável y o respetivo número de diagonais (Figura 38). Após estas definições o grupo avançou com a resolução da tarefa, resolvendo um sistema e assim usando representações simbólicas.

3) 1º polígono x lados y diagonais
 2º polígono $x+1$ lados $y+18$ diagonais

$$\begin{cases} x = y \\ x+1 = y+18 \end{cases} \quad \begin{cases} n = \frac{n^2+n-2}{2} \\ n+1 = \frac{(n+1)^2+n+1-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = \\ n+1 = \frac{n^2+2n+1^2+n-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n^2+3n}{2} - \left(\frac{n^2+n-2}{2}\right) = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = \\ n+1 = \frac{n^2+3n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n^2+3n - n^2 - n + 2}{2} = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n^2+n-2}{2} = y \\ \frac{n^2+3n}{2} = y+18 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2n+2}{2} = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} + 18 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 18 \end{cases}$$

Figura 38 - Resolução do grupo π à terceira alínea

Conseguiram concluir os cálculos e determinaram a resposta correta e, apesar de não terem tido tempo para completar as suas ideias, parecem ter usado as representações simbólicas para confirmar o resultado, como pode ser visto na Figura 39. Depois de chegarem à conclusão que o valor de n tinha de ser 18, parece que iriam substituir esse valor na expressão para confirmar a sua resposta.

$$\begin{aligned}
 n+2 &= \text{lados} \\
 18+2 &= 20 \text{ lados} \\
 \frac{n^2 + n - 2}{2} &= ? \\
 \frac{18^2 + 18 - 2}{2} &=
 \end{aligned}$$

Figura 39 - Conclusão da resolução do grupo π

O grupo α apenas apresentou resolução às primeiras duas alíneas, nas quais empregou representações simbólicas (Figura 40). Começou a sua resolução com a ideia de construir um octógono utilizando fósforos, empregando assim as representações físicas para explorar uma estratégia para encontrar a resposta, porém rapidamente desistiu. Depois, prosseguiram com uma análise mais detalhada do enunciado, contando o número de diagonais de cada polígono apresentado, apropriando-se assim das representações visuais do enunciado para tentar encontrar um padrão e explorar uma estratégia para encontrar a resposta. Na primeira alínea, apenas a resposta final foi apresentada e, embora o processo tenha sido ocultado, foi feito a partir de representações visuais, à semelhança dos grupos anteriores. Já na segunda alínea, reconheceram que tinham “a sucessão, porque são as diagonais” (Aula, $\alpha 1$) e, então, as representações simbólicas permitiram aos alunos traduzir o que estava a ser pedido em linguagem matemática e justificar o seu processo de resolução.

grupo α pontos e linhas

$$\begin{aligned}
 1) & \text{ tem 20 diagonais} \\
 2) & \frac{n^2 + n - 2}{2} = 90 \quad \Rightarrow \quad n^2 + n - 2 = 180 \\
 & \quad \Rightarrow \quad n^2 + n - 182 \\
 & \quad = \frac{-1 \pm \sqrt{12 - 4 \times 1 \times (-182)}}{2 \times 1} \\
 & \quad = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} \\
 & \quad = \frac{-1 \pm 27}{2} \\
 & \quad \Rightarrow \quad n = -14 \quad \text{ou} \quad n = 13 \\
 & n + 2 \\
 & \Rightarrow 13 + 2 = 15 \quad \text{O polígono com 90 diagonais tem 15 lados}
 \end{aligned}$$

Figura 40 - Resolução do grupo α

Na terceira alínea, apesar de não terem apresentado nada na folha de resposta, é possível constatar, a partir das gravações de áudio, que foram utilizadas representações simbólicas para traduzir a informação do enunciado:

$\alpha 3$ – Escreve, ao invés de estares a pensar, escreve.

$\alpha 2$ – Ou seja um lado igual a mais 18 diagonais?

$\alpha 4$ – Mete x igual a..., sei lá, ponto de interrogação. (...)

$\alpha 2$ – Tem de ser um polígono com mais de 18 diagonais. É que ainda por cima aqui está a dizer que tem mais 18 diagonais do que o anterior, o que significa que 1 lado adiciona 18 diagonais

$\alpha 1$ – Não!

$\alpha 2$ – Tem mais 18 diagonais do que tinha o anterior...

$\alpha 1$ – Fogo...

$\alpha 2$ – Sim... A não ser que eu esteja a interpretar esta frase completamente errada...

$\alpha 4$ – É um polígono com x diagonais, [a ler o enunciado] construiu outro polígono que tem mais 1 lado e mais 8 diagonais que x . Então esse polígono vai ser $x + 18$, só temos de descobrir o x . (...)

$\alpha 2$ – Mas a cena é que o segundo polígono não tem 18 diagonais!

$\alpha 4$ – É $x + 18$! (Aula, α)

Nesta obra, as representações visuais eram evidentes, através das figuras que o enunciado apresentava e parecem ter sido aproveitadas por todos os grupos. Para além disso, foi consensual a representação visual de um octógono para realizar a tarefa, embora com diferentes propósitos.

5.1.3. *A dobrar é que a gente se entende!*

A Figura 41 apresenta a tarefa proposta na terceira paragem desta exposição, cuja temática abordada foi novamente sucessões, tendo como objetivos de aprendizagem a modelação matemática de situações reais, para além de reforçar o trabalho com sucessões limitadas, definidas pelo termo geral e/ou recorrência (Ministério da Educação, 2018).

Considera uma sucessão criada a partir de dobragens de várias folhas A4, obedecendo à seguinte lei de formação: - A primeira folha é dividida ao meio e uma das metades é pintada. - A segunda folha é dividida como a primeira e a metade que na primeira folha foi pintada, é dividida ao meio na direção perpendicular à última divisão. Pinta-se uma das novas metades. - Na terceira folha repetem-se as divisões da folha anterior e a metade que na segunda folha foi pintada, é dividida ao meio na direção perpendicular à última divisão. Pinta-se uma das metades. - Para cada nova folha, faz-se mais uma divisão que na figura anterior, seguindo sempre o mesmo padrão. Repete-se este processo infinitamente, formando uma sequência de figuras coloridas.	Designa por a_n a sucessão das áreas da superfície colorida, sendo a_n a área da superfície colorida na figura de ordem n. 1) Representa e determina os quatro primeiros termos desta sucessão. 2) Define a sucessão a_n por recorrência. 3) Escreve o termo geral da sucessão a_n. 4) A sucessão é limitada? Justifica por dois processos diferentes.
---	---

Figura 41 - Enunciado da obra *A dobrar é que a gente se entende!*

Esta tarefa descrevia uma sucessão criada a partir de dobragens de várias folhas A4, obedecendo a uma certa lei de formação, que os alunos deveriam definir para responder às questões. Na primeira alínea, deveriam representar e determinar os quatro primeiros termos da sucessão, na segunda e terceira alíneas definir a sucessão por recorrência e determinar o termo geral e na última justificar se a sucessão era limitada por dois processos diferentes. A distinção entre esta obra e a *É de queimar os neurónios...* está no tipo de informação e representações que o enunciado oferece.

Nesta tarefa, o grupo Casa do Pitágoras recorreu a representações físicas e contextuais, apesar de não terem apresentado qualquer resposta. As representações contextuais mostraram-se úteis para interpretar a situação e dar significado ao que estava a ser descrito no enunciado, permitindo-lhes concluir que podiam traduzir o que era apresentado no enunciado recorrendo a uma sucessão: “Está sempre tipo a diminuir por 2, estás sempre a dobrar ao meio” (Aula, CP3), diz um membro do grupo; “isto é tipo origami, é ir sempre dobrando” (Aula, CP4), diz outro. Trabalhar com um contexto não puramente matemático, ajudou a compreender o comportamento da sucessão e quais seriam os seus termos, o que fica explícito quando um dos elementos do grupo afirma que “o termo [de ordem] 1 é 1” (Aula, CP1) e outro questiona-o: “tens uma folha A4 toda pintada?” (Aula, CP3).

A utilização de representações físicas ajudou este grupo a visualizar as informações do enunciado (Figura 42).

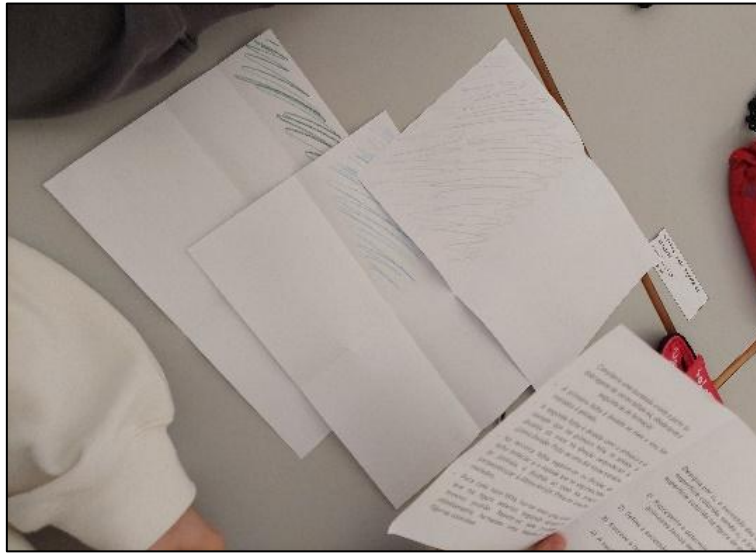


Figura 42 – Uso de representações físicas pelo grupo Casa do Pitágoras

Imediatamente após a leitura do enunciado, um dos elementos do grupo vai buscar folhas de papel e o grupo começa a concretizar o que está descrito no enunciado. Também foi importante este manuseamento com as folhas para conseguirem explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta. Embora não tenham conseguido chegar a nenhuma conclusão, nem apresentarem nenhuma resposta, as representações utilizadas eram promissoras.

Este grupo não conseguiu concluir nada, tendo passado os 20 minutos disponíveis para resolver a tarefa a tentar dar sentido ao enunciado e a entender como iriam proceder para responder às perguntas.

Para a resolução desta tarefa, o grupo Babilónia usufruiu de todos os tipos de representação. As representações físicas foram utilizadas para interpretar a informação no enunciado e visualizar as informações dadas, já que utilizaram folhas de papel para recriar o que estava a ser descrito no enunciado (Figura 43).

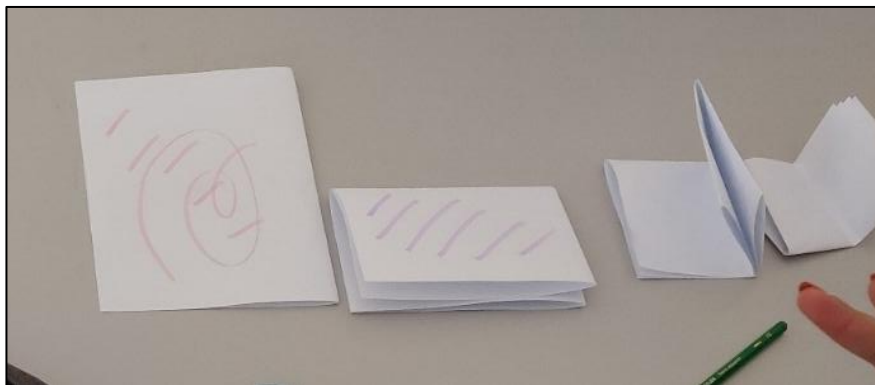


Figura 43 - Uso de representações físicas pelo grupo Babilónia

Além disso, estas representações serviram também para confirmar os seus resultados e garantir que estavam a pensar corretamente. Isto fica explícito num momento em que estão a contar o número de retângulos criados por cada dobra do papel e um dos membros diz a outro: “vê quantos tem cada um (...) o primeiro tem 2, o segundo tem 4 (...), mas verifica” (Aula, B3).

Na Figura 44, constata-se que as representações simbólicas, foram utilizadas para registarem as suas ideias e conclusões nas primeiras três alíneas. Já na quarta alínea houve uma ligação entre as representações verbais e contextuais, já que a resposta apresentada consiste na descrição de uma ideia conjecturada a partir da situação que analisaram.

Handwritten work by the Babilónia group:

- ① $a_1 = 2$
 $a_2 = 4$
 $a_3 = 8$
 $a_4 = 16$
- Babilónia
- A dobrar é que a gente se entende
- ② $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2^{n-1} \end{cases}$
- ③ $a_n = 2^n$
- ④ Não é limitada pois não tem um majorante, podemos continuar a dobrar a folha até ao infinito
- $2 \leq a_n < +\infty$

Figura 44 - Resolução do grupo Babilónia

Acontece que o grupo considerou que a sucessão em estudo traduzia o número de dobragens feitas na folha, e não as medidas das áreas das figuras coloridas, então, apesar de estar incorreto, o contexto de se estar a trabalhar com uma folha de papel permitiu ao grupo concluir que a sucessão em estudo não seria limitada, porque a folha poderia ser dobrada infinitamente. As representações visuais apareceram brevemente no processo de definir uma estratégia para encontrar a resposta certa, tentando perceber qual seria a regra de formação da sucessão, como pode ser visto na Figura 45.

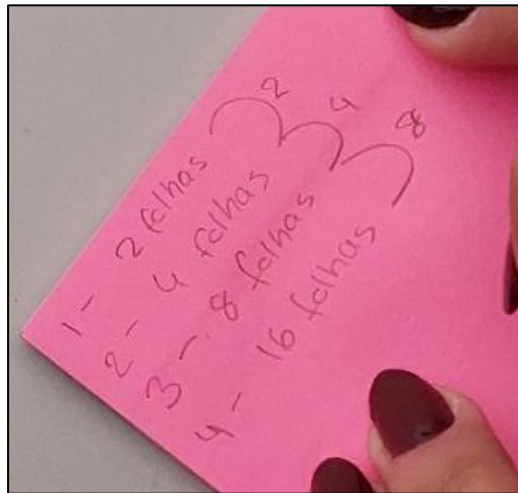


Figura 45 - Uso de representações visuais pelo grupo Babilónia

O único grupo que não se apropriou das representações físicas, nesta tarefa, foi o grupo π (Figura 46). Ao contrário dos outros grupos, a resposta à primeira alínea foi dada a partir de desenhos, ou seja, utilizando representações visuais, que serviram também para compreender e visualizar a informação do enunciado. Complementando estes desenhos, as representações verbais explicaram o comportamento da sucessão e permitiram a este grupo descobrir a resposta à alínea 1, embora não estivesse completamente correta.

1) Grupo π

Primeira fizemos o desenho de 3 folhas e umas outras partes estavam pintadas.

O denominador está sempre a multiplicar por 2.

$a_1 = \frac{1}{2}$
 $a_2 = \frac{1}{4}$
 $a_3 = \frac{1}{8}$
 $a_4 = \frac{1}{16}$

2) $a_1 = \frac{1}{2}$
 $a_{n+1} = \frac{1}{2^n}$

$2^1 = 2$
 $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$
 $2^4 = 16$

3) $a_n = \frac{1}{2^n}$

4) $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$ O majorante é $\frac{1}{2}$ logo é limitada.
 O minorante é 0

Figura 46 - Resolução do grupo π

Em todas as alíneas, as representações simbólicas foram utilizadas para apresentar a resposta e, na segunda alínea, estas representações foram utilizadas para verificar que a resposta estava correta.

O grupo α teve dificuldades nesta tarefa e não apresentou qualquer resposta. Porém, usufruíram das representações físicas para interpretar a situação e tentar compreender o que estava a ser descrito no enunciado, através de folhas de papel pintadas (Figura 47).



Figura 47 - Uso de representações físicas pelo grupo α

À semelhança dos outros grupos, revelaram dificuldades em reconhecer que os termos da sucessão correspondiam à medida da área da parte colorida de cada uma das folhas e não ao número de dobragens, o que os levou a tirar conclusões erradas. Depois de alguma discussão e troca de ideias para tentar compreender como definir a sucessão e responder às questões do enunciado, é possível constatar, pelas gravações de áudio, que utilizaram as representações simbólicas para registar os primeiros quatro termos da sucessão, mas depois apagaram.

Após algum tempo, um dos elementos do grupo teve uma ideia diferente:

$\alpha 2$ – Será que tem uma fração?

$\alpha 3$ – Pode ser também!

$\alpha 4$ – [a ler o enunciado] A sucessão das áreas coloridas... A área da superfície colorida, de ordem n .

$\alpha 2$ – Calma! Porque a área supostamente diminui, eu acho que tem uma fração esta sucessão.

$\alpha 1$ – É decrescente.

$\alpha 4$ – Porque tu divides a folha em 2.

$\alpha 2$ – Esta sucessão definitivamente é uma fração, agora temos de saber qual. (Aula, α)

Assim, o grupo já começou a encaminhar-se para o raciocínio correto, mas ainda não sabia bem como definir a sucessão descrita no enunciado e aproveitou que estava a passar por eles para tentar esclarecer as suas dúvidas:

Investigador – A sucessão é o número de dobragens?

$\alpha 4$ – Não é? [a ler do enunciado] Defina por a_n a sucessão das áreas da superfície colorida.

$\alpha 3$ – Não é as dobragens, deve ser esta área, esta área é maior...

$\alpha 2$ – Isto é $\frac{1}{2}$, isto aqui é $\frac{1}{4}$, isto aqui é $\frac{1}{8}$, é isso?

Investigador – A área disto é $\frac{1}{2}$?

$\alpha 2$ – A área colorida...

$\alpha 3$ – É 1 disto, é 1 de 2.

Investigador – Isto não é a área...

$\alpha 1$ – Como assim não é a área? Não sei quanto é que isto mede...

Investigador – E não podes saber?

$\alpha 1$ – Pela régua que tem ali? (Aula, α)

Depois desta conversa, perceberam finalmente o comportamento da sucessão e como deveriam proceder para encontrar a resposta, procedendo, então, à medição das dimensões da folha para encontrar as medidas das áreas pretendidas.

As representações contextuais também tiveram a sua importância na resolução deste grupo, tendo ajudado a interpretar a situação e, deste modo, conseguirem defini-la através de uma sucessão, o que fica claro quando o aluno $\alpha 4$ explica aos seus colegas como podem definir a sucessão:

$\alpha 1$ – Só se for a área colorida sobre a área total da folha!

$\alpha 4$ – Amigos, podem pensar comigo? [com as folhas que pintaram na mão]

A área colorida é esta parte, se forem dividindo isto por 2, que é o que acontece sempre, é só fazer esta área a dividir por 2, porque isto é igual a isto a dividir por 2, estão a entender a minha lógica? (...) Se a_n é esta área, esta área vai ser a metade desta área, porque estás a dividir a folha a metade! (Aula, α)

Apesar de ter havido estes momentos de discussão e trocas de ideias corretas, o grupo não foi capaz de apresentar qualquer resposta devido à falta de tempo.

Nesta obra, estavam destacadas as representações físicas, que foram utilizadas por todos os grupos à exceção do grupo π . A presença exclusiva de representações verbais no enunciado parece ter suscitado a criação de materiais que permitissem visualizar melhor as informações do enunciado.

5.2. Exposição *Limite, progressão, ação!*

5.2.1. *Mentira espalhada, escola fechada*

A tarefa apresentada nesta paragem (Figura 48), foi proposta no âmbito da temática sucessões e teve como objetivos de aprendizagem o reforço do trabalho com progressões geométricas, nomeadamente na modelação de situações reais em linguagem matemática e na soma de n termos consecutivos (Ministério da Educação, 2018).

Numa segunda-feira às 10h da manhã, numa escola com 4095 alunos, uma mentirosa decidiu começar a espalhar o rumor de que a escola iria encerrar no período da tarde e que poderiam ir para casa. Dez minutos depois, ela começa a divulgar a mentira, contando-a a dois colegas e, dez minutos depois, cada aluno tinha transmitido a outros dois colegas.

Admitindo ser possível que isto se repita sucessivamente no mesmo espaço de tempo, e que os alunos tenham acesso a esta informação uma única vez:

- 1) Às 10:30h, quantos alunos ouviram que a escola ia fechar?
- 2) Chegada a hora do almoço, todos os alunos tinham ido para casa. Mostra que às 12h todos os alunos da escola já tinham ouvido a mentira.

Figura 48 - Enunciado da obra *Mentira espalhada, escola fechada*

Nesta tarefa, os alunos eram confrontados apenas com um enunciado, sem nenhuma figura, ou material de apoio. Este enunciado descrevia uma situação que poderia ser traduzida por uma sucessão, mais especificamente uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1. Na primeira alínea era esperado que os alunos

conseguissem definir o termo geral da progressão geométrica que traduziria a situação e encontrassem o 4.º termo da mesma. Já na segunda alínea, era esperado que calculassem a soma dos 13 primeiros termos consecutivos da progressão e concluíssem que, como o resultado obtido era superior ao número de alunos da escola, então estava mostrado o que era pedido na questão.

O grupo Casa de Pitágoras apoiou-se em representações visuais para interpretar e visualizar esta situação, tendo feito um desenho que esquematizava a divulgação da mentira (Figura 49). Complementando esta representação, usufruíram também das representações simbólicas para identificar os primeiros 4 termos da sucessão, que já haviam descoberto pelo desenho.

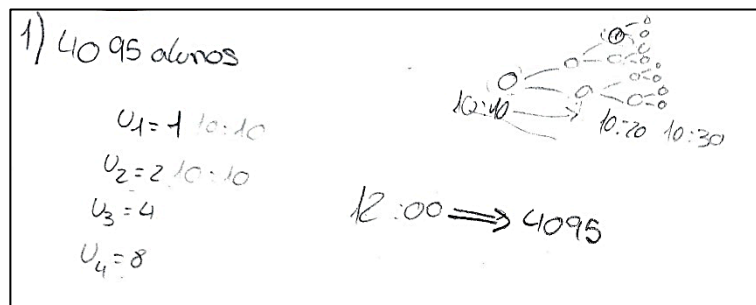


Figura 49 - Rascunho do grupo Casa do Pitágoras

A representação visual utilizada foi essencial para interpretar o enunciado e visualizar as suas informações, bem como para explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta, já que, com este desenho, foi possível ao grupo contar o número de pessoas que tinham ouvido a mentira às 10:30h. Apesar de terem entendido o enunciado e pensado bem, conseguindo definir uma estratégia de resolução, a conclusão a que chegaram não estava totalmente correta e isto deveu-se a uma má interpretação do enunciado. Na primeira questão pergunta-se quantos alunos ouviram a mentira exatamente às 10:30h, porém o grupo interpretou como sendo quantas pessoas já tinham ouvido a mentira até essa hora, ou seja, no total quantas pessoas já haviam ouvido a mentira. Isso levou a que ao invés de terem respondido 8, respondessem 15, conclusão a que chegaram após contar todas os círculos feitos no desenho.

Para apresentar resposta à primeira questão, os alunos pareciam ainda muito relutantes a fazer o desenho que realizaram no rascunho para apresentar a forma como pensaram:

CP1 – Às 10:30h sabiam 15 pessoas

CP2 – Sim, 15. Agora como é que nós vamos provar isso?

CP3 – Como é que tu provas isso?

CP4 – Com o desenho!

CP1 – Está aqui o desenho.

CP4 – Da última vez também fizemos isso!

CP2 – Ah então sim, mete, então é isso! (Aula, Casa do Pitágoras)

Apesar de se terem apoiado maioritariamente nas representações visuais, decidiram apresentar a sua resposta utilizando exclusivamente representações simbólicas, aplicando o que conheciam sobre progressões geométricas e a soma dos seus termos (Figura 50).

Mentira espalhada, escola fechada

1) $u_1 = 1$
 $u_2 = 2$
 $u_3 = 4$
 $u_4 = 8$

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \Leftrightarrow S_n = 1 \times \frac{1 - 2^4}{1 - 2} \Leftrightarrow S_n = 15$$

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1} \times 2 \end{cases}$$

Figura 50 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à primeira alínea

Na segunda alínea, o grupo apoiou-se em parte no esquema realizado na última alínea, porém a sua resolução baseia-se em representações simbólicas. Começaram por identificar que a situação em questão poderia ser traduzida por uma progressão geométrica, reconhecendo que cada termo obtinha-se multiplicando o termo anterior por 2. Com isto, apesar de terem reconhecido que se tratava de uma progressão geométrica, definiram a sucessão por recorrência e tentaram encontrar o 12.º termo que, para eles, seria a resposta à pergunta, utilizando representações simbólicas (Figura 51).

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1} \times 2 \end{cases}$$

$$u_{12} = u_4 \times 2^8$$

$$= 8 \times 2^8$$

$$= 2048$$

Figura 51 - Rascunho do grupo Casa do Pitágoras

Após este cálculo, chegaram a um impasse, visto que a resposta não deu 4095, como seria de esperar. Isso levou a que duvidassem da forma como a sucessão estava definida, até que surgiu uma nova ideia:

CP2 – É u_{12} .

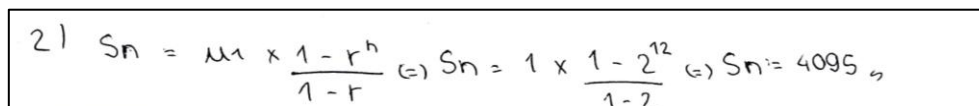
CP3 – Estou-te a dizer o termo geral não é assim!

CP2 – É, é, está certo! Porque é o anterior vezes 2.

CP1 – Nós temos de fazer a soma! Temos de fazer a soma de todos os termos. Ah já percebi! Nós temos de fazer a soma de todos os termos porque isso é o termo 12, ou seja, temos de somar do termo 1 até ao termo 12!

CP2 – Ah!! (Aula, Casa do Pitágoras)

A partir daqui, concluíram que teriam de fazer a soma dos 12 primeiros termos consecutivos da sucessão, pensando que estariam a determinar o número total de pessoas que sabia a mentira às 12h. Para tal, utilizaram representações simbólicas para apresentar o seu processo de resolução e resposta que, apesar de seguir o raciocínio correto, poderia estar mais completa se justificassem que o número que obtiveram era o número de pessoas que sabiam da mentira às 11:50h, concluindo que então às 12h toda a escola sabia. (Figura 52).



$$2) S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Leftrightarrow S_n = 1 \times \frac{1-2^{12}}{1-2} \Leftrightarrow S_n = 4095$$

Figura 52 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à segunda alínea

Concluída a resolução desta paragem, afirmaram ter sido uma tarefa fácil, em parte pela utilização das representações que escolheram:

CP1 – Já está.

CP2 – Foi fácil!

CP1 – O desenho ajudou-nos um bocado!

CP2 – Sim ajudou muito.

CP3 – Pois foi. (Aula, Casa do Pitágoras)

Também o grupo Babilónia usufruiu das representações visuais para conseguir compreender esta situação, traduzindo a informação do enunciado através de um esquema e definindo uma estratégia para encontrar a resposta (Figura 53).

2) Das 10h às 12h, vão 2 horas

2h = 120min, ou seja, a mentira espalhou-se 12 vezes.

$n_1 = 1$

$n_{12} = n_1 \times r^{11} \Rightarrow n_{12} = 1 \times 2^{12} = 4096$ alunas,

mas a mentirosa não era aluna, então $4096 - 1 = 4095$.
Então toda a escola sabia ao meio-dia.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$

$\Rightarrow \frac{u_1 + 1}{1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$. $\Rightarrow r = 2$

Figura 55 - Resposta do grupo Babilónia à segunda alínea

O processo de resolução apresentado por este grupo também estava incorreto e, embora não tenham conseguido encontrar a resposta correta, apresentaram uma resposta com representações simbólicas a justificar o seu processo de resolução e representações verbais que permitiram ao grupo explicar o porquê da sua resposta não ser o número que obtiveram nos seus cálculos.

O grupo π optou por não fazer um desenho que esquematizasse o problema, embora tenha feito um outro tipo de esquema que apenas associava o número de pessoas que descobriam a mentira ao tempo que passava (Figura 56).

Mentira espalhada, escola fechada

10h manhã

4095 alunos

11h.

10min $\rightarrow$ 2 colegas

Cada 10min 2 colegas

10min 2

10min 4

10min 8

A contar com ela às 10:30 9 alunos sabem

Grupo π

10:30

12:

Figura 56 - Resolução do grupo π à primeira alínea

A falta de uma representação visual mais concreta, como as que foram feitas pelos grupos anteriores, levou a que não percebessem completamente a situação, resultando numa conclusão errada. Também este grupo achou que a resposta era o número total de pessoas que ouviu a mentira até às 10:30h, mas, ao contrário dos outros grupos, estes alunos acharam que os valores que encontraram (2,4,8) eram o número total de pessoas que tinha ouvido a mentira até aquele momento, isto é, pensaram que ao fim de 30 minutos, no total 8 pessoas tinham ouvido a mentira. Assim, concluíram que às 10:30h já 9 pessoas sabiam da mentira, contando com a mentirosa.

Para a segunda alínea, começaram por, imediatamente, traduzir a situação do enunciado através de uma sucessão definida por recorrência, aplicando assim as representações simbólicas na sua resolução. O processo de resolução foi semelhante ao do grupo Babilónia, tendo este grupo também apenas calculado o 12.º termo da sucessão e concluído que como o valor era superior ao número de alunos, então todos os alunos já sabiam a mentira. Apesar de não o terem mostrado nas suas folhas, o cálculo do 12.º termo foi feito com ajuda da calculadora, pegando no primeiro termo e multiplicando por 2 onze vezes, o que é possível perceber pelas gravações em áudio e pela nota que o grupo deixa na sua resposta (Figura 57).

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n \times 2 \end{cases}$$

calculamos de um em um
 até ao 12º termo.

pq? → Preguiça

$U_{12} = 4096$

Como as 12 supostamente 4096 alunos já sabiam
 da mentira e a escola só tem 4095 então todos os alunos
 sabem.

Não nos matem ♥

Figura 57 - Resolução do grupo π à segunda alínea

O grupo α usufruiu das representações contextuais para interpretar e compreender a situação descrita no enunciado:

$\alpha 2$ – Por exemplo, eu conto a duas pessoas, conto tipo a vocês os dois. 10 minutos depois vocês os dois contam cada um a mais duas pessoas.

$\alpha 3$ – É 2 elevado a 2, 4. É alguma coisa elevada a 2. Depois esses 4 elevado a dois, é...

$\alpha 2$ – Mas é que não são [frustrada]... Porque vocês os dois não contam a mais ninguém?

$\alpha 4$ – Exato.

$\alpha 2$ – Depois dos primeiros 10 minutos vocês já não voltam a contar a mais ninguém?

$\alpha 4$ – Sê mais específica.

$\alpha 2$ – Ok, porque depois vocês são 2 vai para 4 pessoas a contar, 8 pessoas...

$\alpha 3$ – Não é 8, é 16. Porque é elevado a 2, vai ser elevado a 2 de certeza.

$\alpha 2$ – Não, é 8. 2,4,6,8! (Aula, α)

Daqui, concluíram que estariam sempre a multiplicar por 2, e não a elevar a 2 e, apesar de já terem compreendido o enunciado, decidiram recorrer a uma representação visual (Figura 58). Nas palavras da aluna $\alpha 2$: “vamos fazer aqui uma árvore, que assim faz sentido” (Aula, $\alpha 2$).

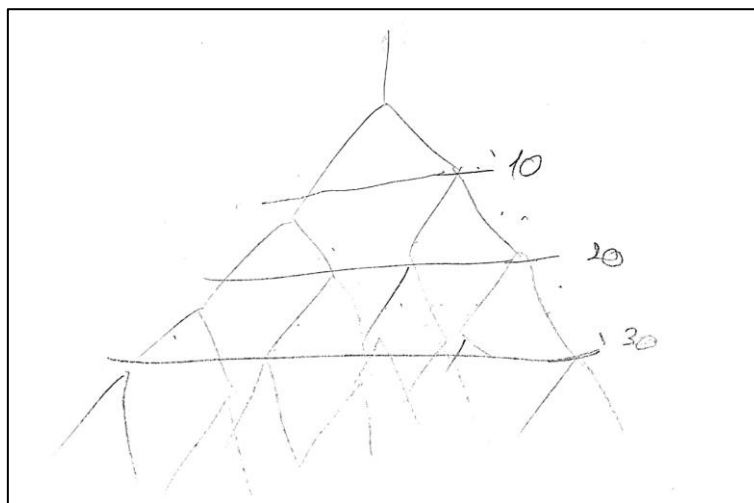


Figura 58 - Rascunho do grupo α

Esta representação visual ajudou o grupo a visualizar as informações do enunciado e a chegar à resposta correta, para além de ter servido também para explicar o processo de resolução. Ainda que já tivessem resolvido a questão, outra preocupação surgiu:

$\alpha 2$ – Ok, sabemos que às 10:30h oito pessoas sabiam, mas como é que pomos isto, tipo, em termos matemáticos...?

$\alpha 3$ – Então, $2n$. $2n$ por cada 10 minutos.

$\alpha 2$ – Como é que pões isso numa expressão?

$\alpha 4$ – Então $2n$... Por 10 minutos [ri-se]

$\alpha 3$ – É vezes o termo anterior. (Aula, α)

Neste diálogo, é notável a preocupação dos alunos em apresentar as suas resoluções através de linguagem matemática, isto é, através de representações simbólicas. A aluna $\alpha 2$ preocupou-se em apresentar algo mais do que o desenho e o aluno $\alpha 3$ instruiu a que escrevesse a sucessão definida por recorrência. Assim, na sua resposta, o grupo α empregou representações simbólicas e visuais (Figura 59).

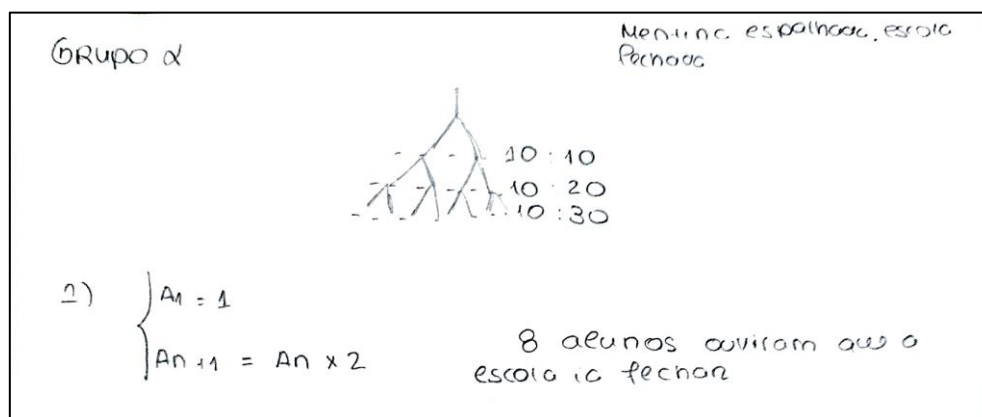


Figura 59 - Resolução do grupo α à primeira alínea

Para a segunda alínea o grupo começou imediatamente a pensar de forma analítica podendo ouvir-se nas gravações em áudio “não é igualar o termo a...” (Aula, $\alpha 4$) e “temos de fazer a soma” (Aula, $\alpha 3$):

$\alpha 2$ – Das 10h às 12h quantos 10 minutos é que passam?

$\alpha 4$ – Doze 10 minutos.

$\alpha 2$ – Ok! Então temos de provar que depois de 120 minutos vai dar 4095.

$\alpha 3$ – Olha põe aí, 4095 igual a 1 menos r elevado a n, que nós não sabemos o n. E agora sobre 1 menos r. Ou seja, nós sabemos o r...

$\alpha 2$ – Qual é que é o r?

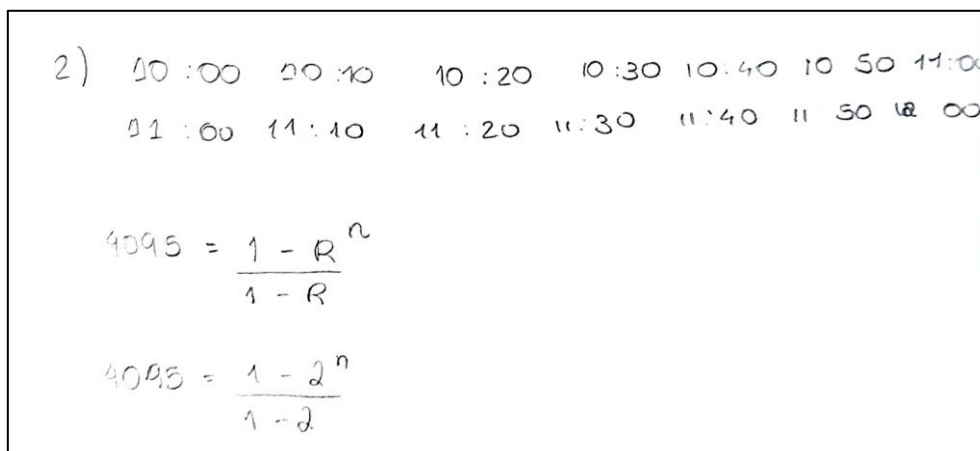
$\alpha 3$ – O r não é 2? Não é vezes 2? Isso é uma aritmética? Não...

$\alpha 1$ – Não, é geométrica. (Aula, α)

A partir deste diálogo, é possível perceber que o objetivo do grupo era calcular a soma de alguns primeiros termos da progressão geométrica utilizando a fórmula aprendida, recorrendo a representações simbólicas, porém não o conseguiram fazer e o tempo estipulado para estarem nesta estação acabou antes de conseguirem concluir a sua resolução.

Para além das representações simbólicas utilizadas na segunda alínea desta tarefa, o grupo α também empregou representações visuais na criação de um esquema para conseguir visualizar e confirmar que havia 12 intervalos de 10 minutos entre as 10h e

as 12h (Figura 60). Segundo a aluna $\alpha 1$: “precisamos confirmar tudo o que pensamos, não é?”



$$2) \quad 10:00 \quad 10:10 \quad 10:20 \quad 10:30 \quad 10:40 \quad 10:50 \quad 11:00$$

$$11:00 \quad 11:10 \quad 11:20 \quad 11:30 \quad 11:40 \quad 11:50 \quad 12:00$$

$$4095 = \frac{1 - R^n}{1 - R}$$

$$4095 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

Figura 60 - Resolução do grupo α à segunda alínea

Nesta obra as representações que se destacavam eram as verbais e contextuais, tendo todos os grupos realizado algum tipo de representação visual para visualizarem o que era descrito no enunciado. Além disso, sendo a tarefa baseada numa situação de vida real, permitiu que os alunos se apropriassem de representações contextuais para interpretar a situação.

Nesta tarefa, o insucesso na descoberta das respostas certas não está relacionado apenas com as dificuldades dos alunos, mas também com o próprio enunciado. É um enunciado confuso e com uma linguagem ambígua que pode induzir em erro ou suscitar várias interpretações.

5.2.2. *A cavalo dado não se olha o dente*

Nesta paragem, a tarefa proposta (Figura 61) integrou a temática sucessões e tinha objetivos de aprendizagens semelhantes à tarefa anterior. Apesar de ser uma tarefa mais extensa, pretendia-se reforçar o trabalho com progressões geométricas, nomeadamente na modelação de situações reais em linguagem matemática e na soma de n termos consecutivos. (Ministério da Educação, 2018).

Numa feira de agricultura, o Sr. Pedro, negociante de cavalos, pedia por um cavalo puro-sangue a quantia de 4 000 000 euros. O Sr. João estava muito interessado em comprar o cavalo, mas considerava o preço muito elevado.

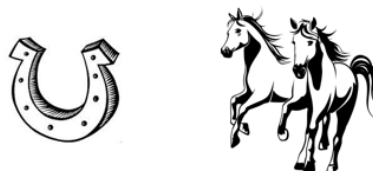
O Sr. Pedro propôs-lhe, então, o seguinte negócio:

«O cavalo tem 4 ferraduras, e cada uma delas tem 8 cravos. O Sr. João dá-me **um cêntimo** pelo primeiro cravo da ferradura da pata dianteira esquerda; dois cêntimos pelo segundo cravo da mesma ferradura, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até ao oitavo cravo dessa ferradura, pelo qual me dá 1,28 euros.

Repare: pelos oito cravos da ferradura desta pata, o Sr. João paga-me 2,55 euros. Barata a feira!

Continuemos para os outros cravos. Pelo primeiro cravo da pata dianteira direita, o Sr. João dá-me 2,56 euros, isto é, o dobro do valor do oitavo cravo da pata dianteira esquerda, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até se terem esgotado os 32 cravos das ferraduras do cavalo.

O Sr. João aceita pagar-me, por este cavalo, a quantia total do valor dos cravos das ferraduras?»



- 1) Verifica que o valor total dos cravos da ferradura da pata dianteira esquerda é de 2,55 euros, tal como o Sr. Pedro refere.
- 2) Ajuda o Sr. João a decidir se deve pagar o valor pedido inicialmente ou se deve aceitar a proposta feita pelo Sr. Pedro.

Figura 61 - Enunciado da obra *A cavalo dado não se olha o dente*

À semelhança da tarefa anterior, os alunos eram confrontados apenas com um enunciado sem material de apoio, mas neste caso havia duas imagens, meramente ilustrativas. Este enunciado descrevia uma situação que poderia ser traduzida por uma sucessão, mais especificamente uma progressão geométrica. Nesta tarefa, em ambas as alíneas, era pretendido que se usasse a soma de termos de uma progressão geométrica.

O grupo Casa do Pitágoras começou por calcular exaustivamente o preço de cada cravo, até ao 8.º, reconhecendo que o preço ia sempre duplicando (Figura 62). Perceberam que a resposta à primeira questão era apenas somar os oito valores obtidos e fizeram-no recorrendo à calculadora. Porém sentiram necessidade em apresentar cálculos que de algum modo se relacionassem com a matéria em estudo e, então, calcularam esta soma utilizando a fórmula da soma dos oito primeiros termos consecutivos desta sucessão, que era uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 0,01. Na segunda alínea seguiram o mesmo raciocínio da primeira, aplicando a

fórmula da soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão geométrica, mas agora dos primeiros 32 termos. De um modo geral, na resolução deste grupo a esta tarefa, sobressaíram a utilização de representações simbólicas, tanto para traduzir informação do enunciado, como para justificar o processo de resolução.

A cavação dado, não se olha o dente

1) cravo 1 = 0,01
 cravo 2 = 0,02
 cravo 3 = 0,04
 cravo 4 = 0,08
 cravo 5 = 0,16
 cravo 6 = 0,32
 cravo 7 = 0,64
 cravo 8 = 1,28

S_n 8 cravos = 2,55

$$0,01 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2,55$$

2) $u_n = u_k \times r^{n-k}$
 $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$ $\Rightarrow S_n = 0,01 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2}$
 $\Rightarrow S_n = 42949672,95$

R.: Devia aceitar a proposta inicial.

Figura 62 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras

O grupo Babilónia fez uma resolução semelhante à do grupo Casa do Pitágoras, embora tenham acrescentado mais alguma informação (Figura 63).

1) cravo p.s. - 4.000 €

2ª fase - 3 cravos

1.º Valor total é igual a soma do valor de cada cravo, dado que o 1.º é 0,01€ e o seguinte é 0,02€, e continua duplicando até o 3.º, $\left. \begin{array}{l} u_1 = 0,01 \\ u_{n+1} = n \times 2 \end{array} \right\}$

norma de 2500

$u_1 = 0,01$
 $u_2 = 0,02$
 $u_3 = 0,04$
 $u_4 = 0,08$
 $u_5 = 0,16$
 $u_6 = 0,32$
 $u_7 = 0,64$
 $u_8 = 1,28$

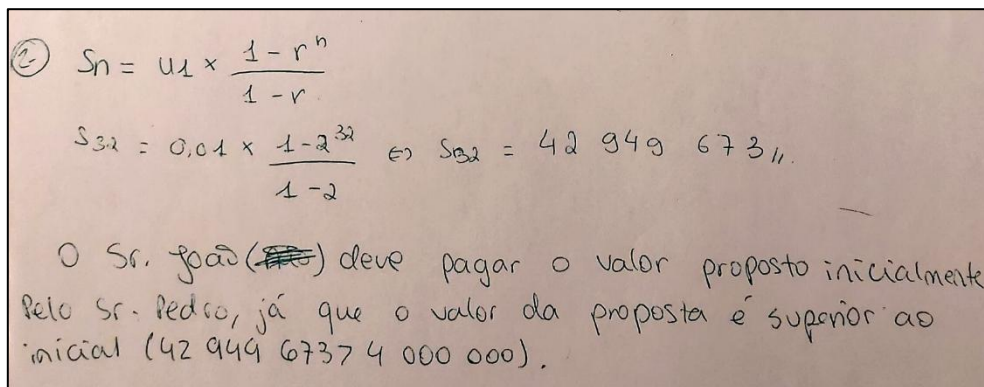
2,55€

Figura 63 - Resolução do grupo Babilónia à primeira alínea

Na primeira alínea, também calcularam o preço dos 8 cravos, somando estes valores na calculadora para comprovar que de facto o valor era 2,55€, mas, ao contrário do que fez o grupo anterior, muniram-se de representações verbais para explicar o seu

processo de resolução. Utilizaram também representações simbólicas na definição de uma sucessão por recorrência que traduzia a situação.

Para a segunda alínea utilizaram representações simbólicas para calcular a soma dos oito primeiros termos consecutivos da progressão geométrica e assim explicar o seu processo de resolução. Para apresentar a sua resposta final, fizeram-no utilizando representações verbais, afirmando que a nova proposta era superior à proposta inicial, complementando esta informação com representações simbólicas (Figura 64).



$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$S_{32} = 0,01 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} \Rightarrow S_{32} = 42\,949\,673,11$$

O Sr. João (~~del~~) deve pagar o valor proposto inicialmente pelo Sr. Pedro, já que o valor da proposta é superior ao inicial (42 949 673 74 000 000).

Figura 64 - Resolução do grupo Babilónia à segunda alínea

Algo a apontar na resolução deste grupo e que pôde ser deduzido das gravações em áudio, é a importância que a representação visual presente no enunciado teve:

B3 – [a ler o enunciado] Pelos 8 cravos da ferradura desta pata o Sr João paga-me 2.55€... pelos 8 cravos da ferradura desta pata?

B1 – [confuso] O quê?

B3 – [a olhar e apontar para a figura do enunciado] Ah sim, porque é este, mais este, mais este, mais este...

B1 – Ahh, pois é! (Aula, Babilónia)

Apesar de ser uma simples ilustração, a imagem da ferradura com os oito cravos serviu para que o grupo compreendesse a forma como o preço de cada cravo era definido e a proposta do Sr. Pedro.

Também o grupo π calculou os preços dos 8 cravos e fez a sua soma pela calculadora, utilizando representações simbólicas numa descrição dos termos de forma recursiva e na apresentação dos seus valores (Figura 65).

Handwritten student work for Figure 65. On the left, it says $u_1 = 0,01$ and $u_8 = 1,28€$. On the right, a list of terms is written: $u_{n+1} = u_n \times 2$, $u_1 = 0,01$, $u_2 = 0,01 \times 2 = 0,02$, $u_3 = 0,02 \times 2 = 0,04$, $u_4 = 0,04 \times 2 = 0,08$, $u_5 = 0,08 \times 2 = 0,16$, $u_6 = 0,16 \times 2 = 0,32$, $u_7 = 0,32 \times 2 = 0,64$, $u_8 = 0,64 \times 2 = 1,28$. At the bottom right, a sum is calculated: $+ = 2,55€$.

Figura 65 - Resolução do grupo π à primeira alínea

Para a segunda alínea, reconheceram que seria muito demorado calcular 32 termos e decidiram aplicar a fórmula que conheciam para a soma dos n primeiros termos consecutivos de uma progressão. Infelizmente, identificaram a progressão em questão como sendo aritmética e aplicaram a fórmula errada. Como para aplicar esta fórmula precisariam do 32.º termo, acabaram por calculá-lo com a ajuda da calculadora (Figura 66).

Handwritten student work for Figure 66. It shows the formula $S_n = \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2}$. Below it, $S_n = \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) \times n$. Then, $S_{32} = \frac{(u_1 + u_{32}) \times 32}{2}$. The next line shows a calculation: $S_{32} = \left(0,01 + \frac{21474836,48}{2} \right) \times 32 = 343597383,8$. A note with an arrow pointing to the calculation says: "sim nós calculamos até ao 32 com a calculadora". At the bottom right, it says "é melhor a inicial."

Figura 66 - Resolução do grupo π à segunda alínea

O grupo α começou o seu trabalho nesta paragem com várias leituras do enunciado, revelando dificuldades na compreensão do enunciado. Quando passei por lá, aproveitaram para me perguntar se estariam a pensar bem:

$\alpha 1$ – São 8 cravos, uma ferradura tem 8 cravos.

Investigador – Certo.

$\alpha 1$ – E cada um o preço vai aumentado.

Investigador – Certo.

$\alpha 1$ – Portanto... desenha 8 pontos

$\alpha 3$ – [desenha os pontos] 1,2,3,4,5,6,7,8.

$\alpha 1$ – De um para o outro é vezes 2

$\alpha 3$ – Vezes 2.

$\alpha 1$ – Pronto, é isso! (Aula, α)

A utilização das representações visuais para traduzir a informação do enunciado, fez com que percebessem melhor a situação e conseguissem definir uma estratégia para encontrar a resposta. Apesar de terem o esquema desenhado e os valores necessários e corretos para encontrar a resposta, tentaram utilizar a fórmula da soma dos oito primeiros termos consecutivos da progressão geométrica para encontrar o valor pretendido, dando uso a representações simbólicas na sua resolução. Fizeram-no de uma maneira diferente do comum. Supondo que de facto a soma de 8 termos era 2,55, determinaram o primeiro termo da progressão, verificando que era 0,01 (Figura 67).

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, a sequence of numbers is written: 0,01, 0,02, 0,04, 0,08, 0,16, 0,32, 0,64, 1,28. Below these numbers, arrows indicate a multiplication by 2 (x2) between each consecutive term. Below the sequence, the formula for the sum of a geometric progression is written: $S_n = U_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$. This is followed by an equals sign and another formula: $S_n = U_n \frac{1 - r^8}{1 - r}$. The value 2,55 is written under the 1,28, and the final result is $U_1 = 0,01$ with a checkmark.

Figura 67 - Resolução do grupo α

A segunda alínea ficou sem resposta, pois o grupo não teve tempo suficiente para a resolver.

À semelhança da obra anterior, esta tarefa evidenciava representações verbais e contextuais o que também levou os vários grupos a recorrer a representações visuais para melhor visualizarem e interpretarem o enunciado. Neste caso, o contexto parece ter sido irrelevante para o sucesso das resoluções dos alunos.

5.2.3. Não percas o fio à meada!

Ainda na temática sucessões, a tarefa da Figura 68 constitui a obra desta paragem. Esta teve como objetivos de aprendizagem reforçar a resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas, promovendo a modelação, definição de termo geral e o cálculo da soma de termos consecutivos (Ministério da Educação, 2018).

A linha poligonal que vês acima construiu-se começando com o segmento $[A_1, A_2]$ e cada segmento seguinte mede menos 3 cm do que a medida do segmento anterior.

Considera a sucessão c_n , cujo termo geral c_n é o comprimento da linha $[A_n, A_{n+1}]$.

- 1) Define por recorrência a sucessão c_n .
- 2) Averigua se a sucessão c_n é uma progressão aritmética ou geométrica. Indica a sua razão e termo geral.
- 3) Determina o comprimento do fio.

Figura 68 - Enunciado da obra *Não percas o fio à meada!*

Para além do enunciado, nesta paragem estava também um fio que representava a linha poligonal descrita (Figura 69).

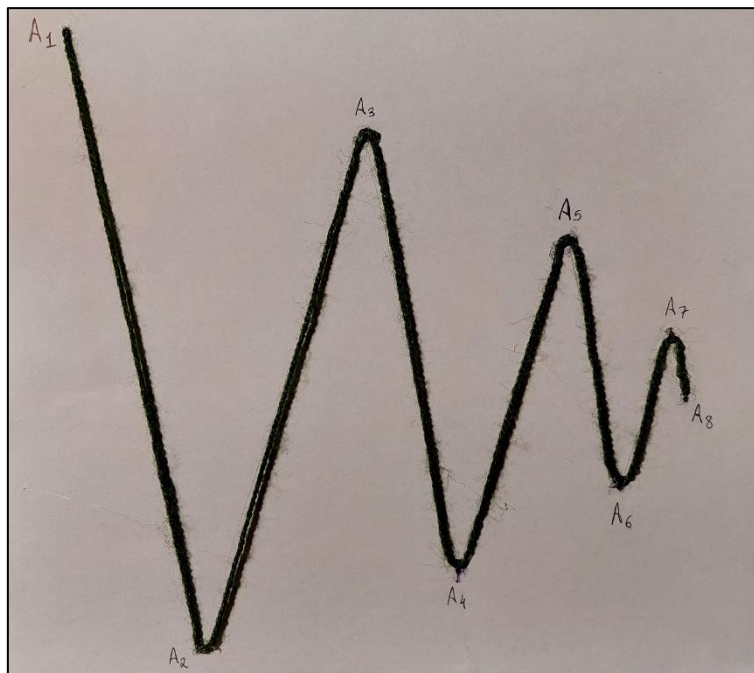


Figura 69 - Fio integrado na obra *Não percas o fio à meada!*

Assim, era esperado que os alunos entendessem o comportamento da sucessão explicada e conseguissem defini-la por recorrência, averiguassem se era progressão aritmética ou geométrica, indicando o seu termo geral e razão, bem como determinar a medida do comprimento do fio, isto é, calcular a soma dos primeiros 7 termos da sucessão. A utilização de representações físicas foi transversal a todos os grupos, pois nenhuma medida estava expressa no enunciado ou na figura, assim, todos os grupos tiveram de, pelo menos, medir o primeiro segmento da linha poligonal para conseguir resolver a tarefa.

O grupo Casa do Pitágoras começa a sua resolução por imediatamente identificar que a situação descrita é uma sucessão onde cada termo é obtido subtraindo 3 ao termo anterior. Nas primeiras duas alíneas, utilizam somente representações simbólicas na sua resposta, definindo a sucessão por recorrência e apresentando o seu termo geral, considerando, sem qualquer verificação, que se tratava de uma progressão aritmética (Figura 70). Estas representações serviram para apresentar a resposta e justificar o processo de resolução.

Não percas o fio à medida!

1) $C_n = \begin{cases} u_1 = 20 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

2) $u_n = u_1 + (n-1) \times r$
 $u_n = 20 - 3n + 3 \Rightarrow u_n = 23 - 3n$

Figura 70 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras às primeiras duas alíneas

De forma a traduzir e visualizar informação do enunciado, o aluno CP1 decidiu escrever as medidas dos comprimentos de cada segmento que construía a linha, utilizando uma representação visual, que associava a cada segmento do fio a sua medida de comprimento (Figura 71).

3) $\left. \begin{array}{l} A_1 - A_2 = 20 \\ A_2 - A_3 = 17 \\ A_3 - A_4 = 14 \\ A_4 - A_5 = 11 \\ A_5 - A_6 = 8 \\ A_6 - A_7 = 5 \\ A_7 - A_8 = 2 \end{array} \right\} = 77 \text{ cm} = \text{comprimento do fio}$

Figura 71 - Resolução do grupo Casa do Pitágoras à terceira alínea

Apesar de terem este esquema feito e o resultado determinado pela soma dos valores descritos, utilizaram também representações simbólicas numa tentativa de apresentar a resposta de forma mais formal, através da fórmula da soma de termos consecutivos

de uma progressão aritmética. O resultado obtido com a fórmula não correspondia ao valor que obtiveram quando somaram as 7 medidas dos comprimentos dos segmentos, mas a figura presente no enunciado, ajudou o grupo a perceber o seu erro:

CP1 – Está a dar diferente...

CP2 – Como assim está a dar diferente?

CP1 – Se fizer vezes 7 já dá!

CP2 – [a contar o número de segmentos no fio] Porque isto é 1,2,3,4,5,6,7, tecnicamente.

CP1 – Ok. (Aula, Casa do Pitágoras)

Deste modo, conseguiram dar resposta à pergunta de ambas as formas, mas decidiram não apresentar a resposta com representações simbólicas. Este tipo de representação, neste contexto, serviu para explorar outra estratégia para encontrar a resposta.

O grupo Babilónia também respondeu às duas primeiras alíneas com recurso a representações simbólicas (Figura 72), mas, ao contrário do grupo anterior, apresentaram a forma como provaram que a sucessão era uma progressão aritmética, embora não esteja completamente correta.

Babilónia

Não percas o fio a medida

1) $\begin{cases} C_1 = 11 \overline{A_1, A_2} \\ C_{n+1} = n-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 20 \\ C_{n+1} = n-3 \end{cases}$ (nós medimos o comprimento com a régua)

2) $U_{n+1} - U_n = r$
 $\cancel{11} - 3 - \cancel{11} = r$
 $-3 = r$

Figura 72 - Resolução do grupo Babilónia às primeiras duas alíneas

Para a terceira alínea, após a leitura do que era pedido, rapidamente o aluno B1 exclama: “eu faço, onde está a régua?” (Aula, B1). Assim, avançou com a medição de cada segmento do fio, somando-os a todos e descobrindo a resposta (Figura 73). As representações físicas tiveram, então, a função de definir uma estratégia para encontrar a resposta.

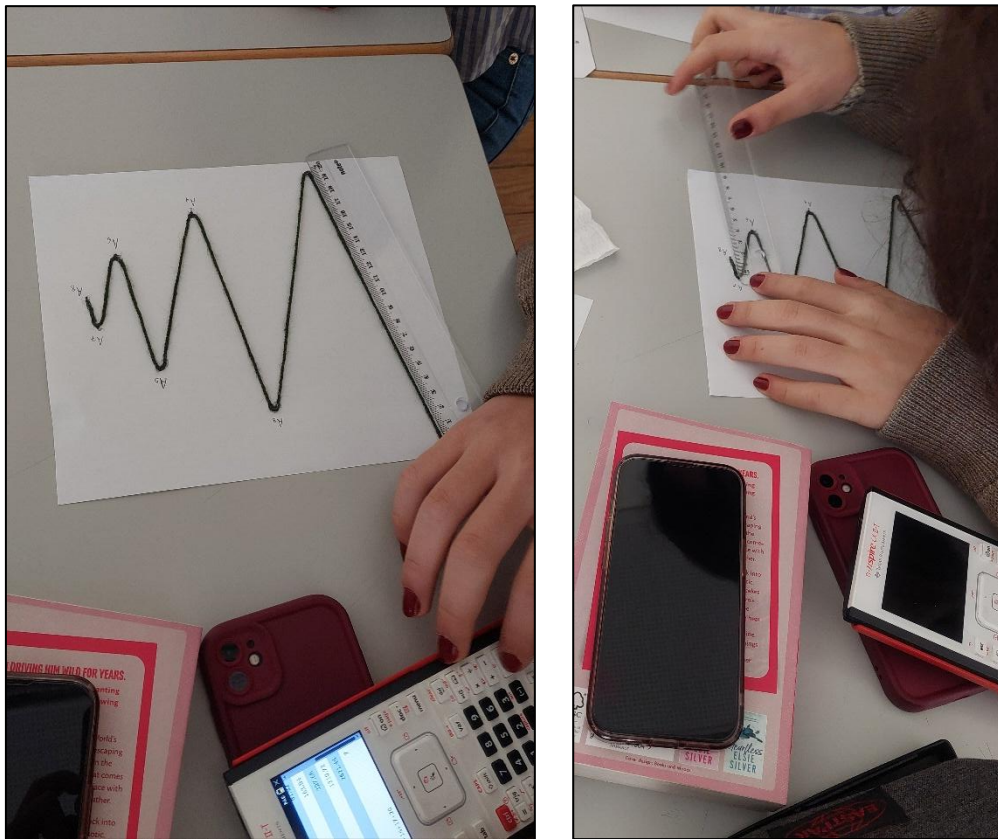


Figura 73 - Utilização de representações físicas pelo grupo Babilónia

Apesar de já terem a resposta, a aluna B4 quis ainda resolver a terceira alínea utilizando a fórmula da soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética, aplicando representações simbólicas na sua resolução. À semelhança do que aconteceu com o grupo anterior, a resposta obtida utilizando as representações simbólicas não foi a mesma que a obtida com as representações físicas:

B4 – 88

B1 – Não, é 77...

B4 – Oh, porque aqui temos de subtrair...

B3 – [a contar o número de segmentos do fio] 1,2,3,4,5,6,7, são 7 não 8.

B4 – Oh ok, então é 77.

(...)

B1 – Eu contei na régua, dá 77 que eu sei! (Aula, Babilónia)

Também aqui foram usadas as representações simbólicas para explorar outra estratégia para encontrar a resposta certa. Além disso, foram estas representações as escolhidas para apresentar a resposta (Figura 74).

$$\begin{aligned}
 3) \quad S_n &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{u_1 + u_7}{2} \times 7 \\
 S_n &= \frac{20 + 2}{2} \times 7 \\
 S_n &= 77 \text{ cm} \\
 \text{O comprimento do fio é } 77 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Figura 74 - Resolução do grupo Babilónia à terceira alínea

O grupo π começou a sua resolução pela terceira alínea, medindo o primeiro segmento da linha poligonal e reconhecendo que os próximos teriam menos 3 cm que os imediatamente anteriores. Assim, apresentaram a resposta com representações simbólicas, apresentando a soma dos valores e a resposta final, auxiliando-se de representações visuais para explicar como chegaram a cada valor (Figura 75).

$$\begin{aligned}
 3) \quad F_{10} &= 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\
 &= 77 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Medimos com a régua e são -3cm no próximo.

Figura 75 - Resolução do grupo π à terceira alínea

Nas produções escritas às primeiras duas alíneas apenas representações simbólicas foram utilizadas, com a funcionalidade de apresentar a resposta. Por um breve momento é possível ouvir, nas gravações em áudio, a aluna $\pi 1$ a explicar ao grupo como determinar a razão pretendida, empregando representações verbais para compreender a situação, embora que pouco formais:

$\pi 2$ – Não é assim que se faz a razão, sabes disso?

$\pi 1$ – Eu sei! Mas a razão... A razão é o número que vai de um para o outro, certo? O número que vai de um para o outro é -3. (Aula, π)

É possível perceber que a aluna tinha a ideia certa, porém os colegas pretendiam apresentar algo mais formal e enquadrado com o que era feito nas aulas, isto é, descobrir a razão através da diferença entre dois termos consecutivos da progressão. De facto, de uma maneira muito rebuscada, foi isso que apresentaram, usufruindo novamente das representações simbólicas para justificar o seu processo de resolução (Figura 76).

Handwritten work by group π identifying an arithmetic progression:

$$1) \quad C_{n+1} = C_n - 3 =$$

$$A_1 = 20$$

$$A_{n+1} = A_n - 3$$

$$2) \quad \text{aritmética}$$

$$C_{n+1} = C_n - 3$$

$$\text{razão} = -3$$

$$A_n - A_{n-1} = r$$

$$A_3 - A_2 = 14 - 17 = -3$$

Figura 76 - Resolução do grupo π às primeiras duas alíneas

O grupo α começou o seu trabalho nesta paragem pela leitura do enunciado e o aluno $\alpha 3$ imediatamente percebeu que a sucessão descrita no enunciado era “uma [progressão] aritmética, que é sempre a diminuir” (Aula, $\alpha 3$), demonstrando que as representações verbais presentes no enunciado foram suficientes para que interpretasse e compreendesse a situação. Apesar de ter constatado imediatamente que a sucessão era uma progressão aritmética, o mesmo aluno usou a régua para medir cada uma das medidas de comprimento dos segmentos, empregando representações físicas na sua resolução com o intuito de visualizar a informação no enunciado, isto é, verificar os termos da sucessão descrita.

Para responder à primeira questão, o grupo começou por tentar perceber a diferença entre os dois tipos de progressão:

$\alpha 1$ – [a ler o enunciado] Averigua se a sucessão é uma progressão aritmética ou geométrica.

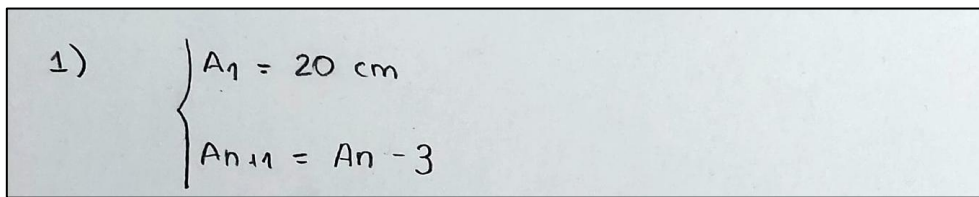
$\alpha 4$ – Aritmética. Não! Qual é que era...

$\alpha 2$ – Qual é a diferença entre elas?

$\alpha 4$ – Uma está a multiplicar e a outra está a somar [um valor constante].

$\alpha 3$ – É a aritmética, é a somar. (Aula, α)

Neste diálogo é possível perceber que os alunos apenas partindo de representações verbais, descrição do comportamento de ambas as progressões, conseguiram deduzir e concluir que a sucessão em estudo era uma progressão aritmética, dado que cada termo era obtido somando um valor constante ao termo anterior. Na sua resposta, o grupo apenas apresenta a sucessão definida por recorrência, utilizando representações simbólicas (Figura 77).



Handwritten work in a box:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 20 \text{ cm} \\ A_{n+1} = A_n - 3 \end{array} \right.$$

Figura 77 - Resolução do grupo α à primeira alínea

As representações verbais foram também utilizadas na segunda alínea pelo aluno $\alpha 3$ para explicar ao colega $\alpha 4$ o conceito de razão:

$\alpha 4$ – Sabem a definição de r [razão de uma progressão]?

$\alpha 3$ – É o número que tu acrescentas ou diminuis, ou multiplicas ou divides.

É o número que te vai fazer variar o a_n .

$\alpha 4$ – 3

$\alpha 3$ – -3. A razão é -3, é só isso. (Aula, α)

Apesar de não utilizar os termos mais adequados, as representações verbais serviram para explicar ao seu colega este conceito e fazê-lo compreender a situação. Apesar de já terem concluído que a razão era -3, só isso não parecia ser justificação suficiente:

$\alpha 3$ – A razão é -3.

$\alpha 1$ – A razão nós tínhamos de fazer uma fórmula!

$\alpha 3$ – Pois é...

(...)

$\alpha 1$ – A razão é $a_{n+1} - a_n = r$. (Aula, α)

Neste diálogo, fica explícito a importância que as representações simbólicas têm para os alunos. Apesar de saberem que a razão é -3, tirando essa conclusão quando perceberam que nesta sucessão cada termo era obtido subtraindo 3 ao termo anterior, sentiram a necessidade de aplicar a fórmula aprendida nas aulas para calcular a razão e, apesar desta parte não estar nas produções escritas deste grupo (Figura 78), foi possível deduzir-se a utilização de representações simbólicas para explicar o processo de resolução.

2) É uma progressão aritmética. A razão é (-3).
 $A_n = A_1 + (n-1) \times r \Rightarrow A_n = 20 + (n-1) \times (-3) \Rightarrow A_n = 20 - 3n + 3$
 $A_n = 23 - 3n$ — Termo geral.

Figura 78 - Resposta do grupo α à segunda alínea

Ainda nesta alínea, a determinação do termo geral foi feita com recurso exclusivo a representações simbólicas, servindo para justificar o processo de resolução e obtenção do termo geral. Para além disso, o grupo confirmou o termo geral obtido, substituindo n por 1 e 2 e verificando que correspondia às medidas dos comprimentos encontrados anteriormente, fazendo uma coligação entre as representações simbólicas e físicas para confirmar os seus resultados.

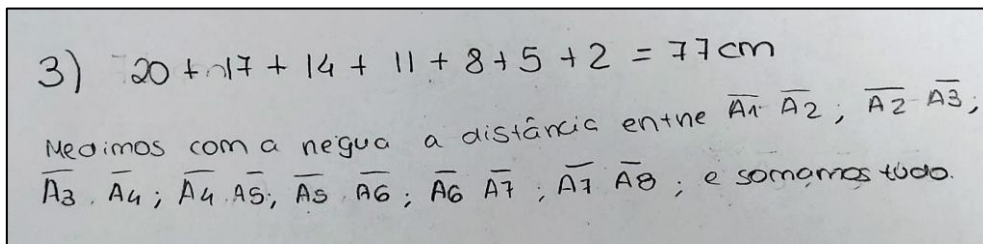
Para a resolução da última alínea o grupo apropriou-se das representações físicas:

$\alpha 2$ – O comprimento do fio vai ser 77 cm. A última pergunta é determina o comprimento do fio, tenho a certeza que é para usar isto [a figura]. É só somar...

$\alpha 3$ – É somar todos... é usar aquela fórmula que é a soma dos... é assim, nós podemos só somar [os valores obtidos com a régua], mas eu acho que devíamos pôr aí, que é o que eles querem, a [fórmula da] soma dos oito primeiros termos [da progressão aritmética], de certeza. (Aula, α)

O diálogo acima ilustra, novamente, a importância dada às representações simbólicas formais aprendidas nas aulas, para a justificação dos processos de resolução. Mesmo já tendo a medida do comprimento do fio, ou seja, a resposta à pergunta, acharam necessário apresentar na sua resposta um cálculo mais formal, a partir da fórmula da soma dos primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética, embora não o tenham feito.

Finalizada a sua resolução, quando reforcei que tinham de justificar tudo o que fizessem, decidiram acrescentar na sua resposta uma frase que explicava o seu processo de resolução, aplicando representações verbais e simbólicas, quando tentam escrever com notação própria da matemática, embora incorreta, a distância entre dois pontos (Figura 79).



3) $20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 = 77 \text{ cm}$
 Medimos com a régua a distância entre $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$,
 $\overline{A_3 A_4}$, $\overline{A_4 A_5}$, $\overline{A_5 A_6}$, $\overline{A_6 A_7}$, $\overline{A_7 A_8}$; e somamos tudo.

Figura 79 - Resolução do grupo α à terceira alínea

Nesta obra, as representações físicas eram as mais salientadas, tendo todos os grupos usufruído delas, não só quando era mesmo necessário, mas também para encontrar a medida do comprimento de todo o fio, processo que poderia ser realizado de outras formas e utilizando outras representações.

6. Conclusões e recomendações

Neste último capítulo, começa-se por expor uma síntese do estudo realizado, seguindo-se a apresentação das suas principais conclusões, articuladas com a literatura revista no capítulo 2. Para isso, dividiu-se o capítulo em 3 itens, procurando responder-se a cada uma das questões de investigação, nos dois primeiros itens, e terminando-se o capítulo com uma reflexão final, contemplando o impacto desta investigação na minha prática profissional enquanto docente e apresentando algumas ideias e sugestões para futuras investigações.

O estudo que aqui se apresentou tinha como objetivo compreender o papel das representações matemáticas na realização de tarefas, tanto na sua presença no enunciado como nas resoluções dos alunos. Assim, recorrendo a uma metodologia qualitativa, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: (i) Que papéis desempenham as representações utilizadas pelos alunos nas suas resoluções?; (ii) De que forma o enunciado da tarefa influencia a escolha das representações utilizadas pelos alunos?. Esta investigação assentou numa intervenção pedagógica realizada na disciplina de matemática A, numa turma do 11.º ano de escolaridade, que se baseava na realização de tarefas matemáticas, em grupo, numa dinâmica diferente da habitual.

6.1. As representações utilizadas pelos alunos e os seus propósitos

Na concretização desta atividade, a Galeria 45², para além de constituir o objeto desta investigação, tinha como objetivo apresentar aos alunos diferentes representações. Alinhado com as ideias de Amado et al. (2010), Mainali (2021) e o NCTM (2000), criei este espaço onde os alunos poderiam livremente contactar com diferentes representações e, deste modo, observar a que tipos de representações recorrem e compreender com que finalidade as utilizam. Felizmente a atividade foi bem recebida pela turma participante e os dados analisados produziram resultados interessantes.

Todos os tipos de representações categorizadas por Lesh et al. (1987) foram utilizadas pelos alunos nas suas resoluções – representações simbólicas; representações físicas; representações visuais; representações verbais; e representações contextuais. Quanto aos papéis com que foram usadas, poder dizer-se que, neste estudo, encontraram-se situações diversificadas. Na resolução das tarefas propostas, os alunos recorreram a

diferentes representações no sentido de: interpretar e compreender a situação; traduzir/visualizar informação do enunciado; explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta; explicar/justificar o processo de resolução; apresentar resposta; e confirmar resultados.

As representações que mais apareceram nas resoluções dos alunos foram as simbólicas. Este tipo de representação é o predileto para apresentar as respostas e os processos de resolução, sendo utilizado mesmo quando os alunos conseguem encontrar a resposta de outra forma. As representações simbólicas foram utilizadas com diferentes propósitos, nomeadamente, para traduzir/visualizar informação do enunciado, explorar e definir uma estratégia para encontrar a resposta, explicar/justificar o processo de resolução, apresentar uma resposta e confirmar resultados. Contudo, os alunos utilizaram-nas mais para justificar o processo de resolução e apresentar uma resposta final. A ampla utilização deste sistema representacional pode estar associada ao tipo de trabalho de sala de aula e, como aponta Ozgun-Koca (1998), à predominância das representações algébricas no ensino. Neste estudo, é possível notar-se uma preocupação generalizada em apresentar os seus resultados de forma formal com recurso a representações simbólicas, mesmo em casos onde os grupos conseguiram descobrir a resposta correta por outros processos.

As representações visuais foram as únicas utilizadas com todos os propósitos acima mencionados. O seu uso pelos alunos tinha como principal objetivo visualizar ou traduzir informação do enunciado, para conseguirem melhor compreender a tarefa e definir uma estratégia de resolução. À semelhança do conclui Valério (2005), também neste estudo se parece constatar que as representações visuais são as prediletas para iniciar as resoluções, sendo apresentados esquemas, desenhos e representações informais com este intuito. Embora raramente sejam selecionadas para aparecer nas resoluções apresentadas. Os alunos mostram ainda relutância em apropriar-se deste tipo de representação para justificar o seu pensamento e apresentar os seus esquemas ou desenhos na resposta, procurando explicar em termos analíticos o que descobriram por elementos visuais. Nesta investigação, os alunos mostraram saber empregar este tipo de representação quando lhes era proveitoso, reiterando a mais-valia da complementaridade de múltiplas representações, apoiada por Ainsworth (1999) e van der Meij e de Jong (2003). Ao trabalharem com a obra *Pontos e linhas*, houve uma tendência em determinar o número de diagonais de um octógono a partir do desenho, porém, para encontrar o polígono com 90 diagonais já não seria tão fácil de o fazer de

forma visual e decidiram utilizar outros métodos de resolução, empregando outras representações.

Apesar de ser o tipo de representação com que os alunos menos contactam, as representações físicas também tiveram a sua importância nas resoluções das tarefas. De entre os seis propósitos mencionados, o uso de materiais manipuláveis só não serviu para justificar o processo de resolução, até porque seria pouco prático transmitir essas ideias neste tipo de atividade. Acredito que a disponibilidade dos diversos materiais que deixei na mesa no centro da sala foi um fator que estimulou o seu uso. Os alunos mostraram interesse em utilizar os materiais disponibilizados, até quando não era muito adequado, por exemplo na obra *Pontos e Linhas*, em que dois grupos queriam construir um octógono a partir de fósforos.

A utilização de representações verbais mostrou-se útil aos vários grupos para justificar alguns processos de resolução e apresentação de uma resposta final. Foi também utilizada pelos alunos para compreender a situação ou explicá-la aos seus colegas. Este tipo de representação foi bastante usado no discurso oral e discussão entre os grupos, porém nem sempre foi transmitida no discurso escrito. Apesar da minha insistência em que apresentassem o seu pensamento também por palavras, a ideia de que a matemática são apenas cálculos e números prevalece e os alunos não sentem necessidade de o fazer.

Por fim, as representações contextuais aparecem associadas a dois propósitos, ao de interpretar e compreender as situações e de justificar o processo de resolução, embora pareçam ser mais relevantes e utilizadas com o objetivo de interpretar e compreender a situação.

Reforçando a ideia de Ainsworth (1999), esta atividade gerou uma compreensão mais aprofundada dos conceitos associados a sucessões, permitindo aos alunos trabalhar e relacionar várias representações. Para além disso, foi também uma experiência que não impôs uma forma correta para os alunos apresentarem a sua resposta ou estruturarem o seu pensamento, dando-lhes liberdade em se exprimir como preferissem. Assim, proporcionou-se um espaço para os alunos que impulsionou a construção das suas próprias representações, permitindo-me aceder à forma como pensam, ideia também fundamentada pelo NCTM (2000).

6.2. A influência do enunciado na escolha representacional dos alunos

No que diz respeito ao enunciado e à influência que este possa ter, ou não, nas decisões que os alunos tomam ao nível de representações utilizadas, há um aspeto essencial a considerar: os tipos de representações mais evidenciados no enunciado. Como Ozgun-Koca (1998) concluiu, um fator que influencia a escolha representacional dos alunos é a apresentação do problema ou o problema em si. Nas seis tarefas que analisei e apresentei, três delas evidenciavam maioritariamente representações verbais, duas delas representações físicas e a última representações visuais.

Nas três tarefas cujas representações mais manifestas eram as verbais, os alunos deram uso a representações visuais e físicas, quando possível, para visualizar o que estava descrito e assim ter uma melhor perceção da situação. A presença exclusiva de palavras e frases parece ter incitado a criação de instrumentos visuais que os ajudasse a compreender o que lhes era apresentado e, apesar de nem sempre este tipo de representações os ter ajudado, foi um excelente ponto de partida para as suas resoluções. Um aspeto particular do meu estudo foi que nestas três tarefas estavam também encobertas representações contextuais, tendo as três tarefas descrito situações baseadas na realidade ou cuja associação com a realidade poderia facilitar a sua resolução. A presença deste tipo de representações, apesar de não ter sido sempre aproveitada, parece ter sido útil em determinados casos, permitindo uma boa compreensão dos enunciados.

Já nas duas tarefas onde as representações físicas resplandeciam, parece ter havido tendência em utilizar as representações verbais para explicar o que foi feito fisicamente. Na impossibilidade de apresentar o que foi manipulado, os alunos recorriam a frases que, para além de explicar as suas ações com os materiais manipuláveis, esclareciam as ideias matemáticas inerentes ao seu processo de resolução. Em nenhum caso usufruíram de representações visuais para reproduzir o que era apresentado no enunciado. A presença de representações físicas no enunciado das tarefas, apesar de ser pouco comum, foi um elemento que pode ter alterado o processo de resolução de alguns grupos. Por exemplo, na obra *É de queimar os neurónios...* as construções com fósforos poderiam facilmente ser substituídas por uma imagem e as resoluções não iriam sofrer grandes alterações. Porém, na obra *Não percas o fio à meada!*, a existência do fio, associada à explicação do comportamento da sucessão por palavras, levou os

alunos a usufruir das representações físicas para descobrir o comprimento do fio. Se ao invés desta construção tivesse apresentado o termo geral da sucessão acompanhado de uma figura, provavelmente as resoluções iriam consistir em representações simbólicas.

Na presença de representações visuais, os alunos tendem a aproveitar-se delas, caso o que é pedido seja de fácil realização (como o caso do desenho do octógono e suas diagonais), mas recorrem a outro tipo de representações, nomeadamente as simbólicas, quando se torna demasiado complicado ou trabalhoso recorrer a este tipo de representação. A presença deste tipo de representação no enunciado é altamente valorizada pelos alunos e a sua ausência pode elevar a perceção dos alunos quanto ao nível de dificuldade da tarefa, dependendo do contexto. Na tarefa onde estavam em destaque as representações visuais, estas, para além de apoiar os alunos nas suas resoluções, serviram também para dar significado ao conceito de diagonal de um polígono que, apesar de estar descrito e explícito numa nota, não ficou bem compreendido por alguns deles. Esta ideia de que uma representação pode ser útil para compreender outra é descrita por Ainsworth (1999), quando refere que um dos papéis que as múltiplas representações podem tomar no processo de aprendizagem é a capacidade de restrição, ao beneficiar de uma representação para compreender melhor outras mais abstratas.

Com esta investigação, conclui-se que não há uma relação direta entre a forma como o enunciado de uma tarefa é apresentado e as representações escolhidas pelos alunos para resolverem as questões. É importante destacar que, embora os enunciados das tarefas apresentem determinadas representações matemáticas, tal presença não implica automaticamente a adoção das mesmas representações por parte dos vários alunos nas suas resoluções. A análise dos dados revelou uma diversidade de estratégias representacionais utilizadas, mesmo perante o mesmo enunciado e enunciados semelhantes. Por exemplo, na obra *A dobrar é que a gente se entende!*, apesar de a maioria dos grupos ter representado os quatro primeiros termos da sucessão com recurso a representações físicas, folhas de papel pintadas, houve um grupo que optou por fazê-lo com um desenho, utilizando representações visuais. Assim, embora o enunciado possa exercer alguma influência inicial, a escolha das representações a utilizar no processo de resolução mostra-se muitas vezes estratégica e pessoal.

6.3. Reflexão e recomendações

Conduzir esta investigação fez-me entender a relevância da investigação no ensino da matemática e a importância e implicações que ela tem na prática pedagógica. A elaboração de um estudo desta natureza revelou-se exigente, sobretudo no desafio de me libertar da expectativa de confirmar hipóteses, e de adotar uma abordagem mais aberta e exploratória. Esta mudança de perspetiva é, pessoalmente, algo desconfortável, pois contrariou tudo o que eu considerava ser uma investigação.

Estudar as representações matemáticas na sua relação com o trabalho dos alunos foi vantajoso para a minha prática pedagógica, pois permitiu-me reconhecer com maior clareza a importância das representações matemáticas utilizadas em sala de aula. Mais do que simples apoios visuais ou técnicos, passei a vê-las como extensões do pensamento dos alunos, refletindo os seus raciocínios, dúvidas e formas de compreender os conceitos. Esta perceção reforçou em mim a necessidade de valorizar e estimular o uso diversificado de representações, de modo a potenciar a aprendizagem e o desenvolvimento da comunicação e raciocínio matemáticos de forma mais rica e significativa.

A atividade desenvolvida revelou-se bem conseguida, com resultados bastante positivos no envolvimento e participação dos alunos. No entanto, como em qualquer proposta pedagógica, há sempre espaço para ajustes e melhorias. Trata-se de uma atividade com grande potencial de adaptação e replicação em outras situações e contextos educativos, o que reforça a sua utilidade e versatilidade. Embora tenha sido aplicada no âmbito do tema das sucessões, acredito que este tipo de atividade ganharia ainda mais impacto em outros temas, como a geometria, a trigonometria ou o estudo de funções, onde a exploração visual e espacial pode ser mais estimulante e significativa. Uma melhoria que considero pertinente seria solicitar que cada grupo deixasse as suas resoluções em cada paragem, ou que as entregassem logo a seguir à sua realização. Deste modo, evitava-se que os alunos continuassem a resolver tarefas de uma paragem em outra, o que aconteceu por vezes nesta atividade e poderia comprometer a sua estrutura sequencial.

Originalmente, estava prevista uma etapa final na intervenção pedagógica, em que os alunos apresentariam e discutiriam as suas resoluções com toda a turma. Esta partilha teria como objetivo promover o confronto de estratégias, o uso diversificado de representações e a valorização dos diferentes processos de resolução. No entanto, por

questões de tempo e para não comprometer o cumprimento do plano de trabalho da turma, decidi não incluir essa fase nesta implementação.

No que toca aos dados recolhidos e a sua análise, considero que os instrumentos de recolha utilizados foram bem empregues. Porém, o estudo poderia ter sido ainda mais enriquecido se tivesse incluído entrevistas no final das exposições, o que teria permitido uma recolha mais profunda de dados e uma análise mais detalhada de aspetos como a forma como pensam os alunos, o porquê de escolherem as representações que aplicam ou a sua perceção sobre esta atividade. A análise dos dados de áudio foi particularmente trabalhosa e repetitiva, especialmente na tentativa de transcrever diálogos. Além disso, a sobreposição de vozes em alguns momentos dificultou a compreensão do conteúdo, o que poderia ter comprometido a extração de informação fidedigna. Apesar destes constrangimentos, trata-se de uma atividade que, sem dúvida, estimula e desperta a criatividade dos alunos, oferecendo-lhes um espaço para explorar e construir conhecimento de forma ativa.

Para futuros estudos que tenham um objetivo semelhante ao deste e/ou pretendam estudar as representações matemáticas, sugiro que expandam esta investigação, ou repliquem a intervenção pedagógica aqui apresentada, de forma a envolver e tentar perceber de que forma este tipo de atividade e contacto com diferentes representações pode ajudar no desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos.

Ao nível da prática docente, gostaria de reforçar a importância da utilização de múltiplas representações no trabalho de sala de aula, pelo que cabe ao professor proporcionar esse tipo de trabalho. Não podemos esperar que os alunos se expressem através de representações que não conhecem ou que são pouco usadas na aula de matemática. Com isto, desafio todos os interessados a aplicar a atividade da Galeria 45² numa perspetiva de conhecer os seus alunos e a forma como pensam e expressam as suas ideias. Não retiro a importância dos alunos, à medida que vão avançando no seu percurso escolar, recorrerem a uma linguagem matemática cada vez mais complexa e formal, mas acredito que pode ser uma atividade envolvente para mostrar aos alunos que nem sempre a resolução de tarefas se revela mais competente quando assente exclusivamente em fórmulas e variáveis e que há espaço para que expressem as suas ideias como pretendem, havendo até a oportunidade de, como sugere o NCTM (2000), fazer uma ponte entre as representações dos alunos e representações mais formais.

A Galeria 45² não só permitiu aos alunos explorar conceitos matemáticos de forma mais ativa e visual, como também promoveu o diálogo, a colaboração e o envolvimento em

sala de aula. Esta intervenção mostrou-me outra faceta dos alunos com quem trabalhei e a sua reação foi extremamente positiva. Mostraram-se curiosos, motivados e envolvidos ao longo de toda a atividade, atitude que sempre lhes incentivei a ter face à matemática. No último período deste ano letivo, foram várias as vezes em que me perguntaram quando iríamos fazer de novo a galeria. Com isto, quero terminar este relatório com um apelo à dinamização da sala de aula. Transformemos este espaço, odiado por muitos, num ambiente mais interativo, animado e desafiador, para que os alunos vejam e sintam o que é fazer matemática!

Referências Bibliográficas

- Aidos, F. (2020). *Diferentes representações matemáticas no estudo de limites: um estudo com alunos do 11º ano do Ensino Secundário* [Dissertação de Mestrado]. Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/49124>
- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33, 131-152.
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A Conceptual Framework For Considering Learning with Multiple Representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198.
- Amado, J. (Coord.) (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Amado, N. (2022a). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e matemática*, 166, 2-6.
- Amado, N. (2022b). Representações múltiplas numa perspetiva de matemática para todos. *Educação e matemática*, 166, 1.
- Amado, N., Carreira, S., Nobre, S., & Ponte, J. P. (2010). Representations in solving a word problem: The informal development of formal methods. In M. Pinto, & T. K. Kawasaki (Orgs.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 137-144). PME. <http://hdl.handle.net/10451/4478>
- Anscombe, F. (1973). Graphs in statistical analysis. *American Statistician*, 27, 17-21.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Bennett, A., Inglis, M., & Gilmore, C. (2019). The cost of multiple representations: Learning number symbols with abstract and concrete representations. *Journal of Educational Psychology*, 111(5), 847-860.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto Editora.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Bruner, J. S. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio d'Água.
- Canavarro, A., Brunheira, L., Vicente, M., & Brito, S. (2022). O poder das representações múltiplas e suas conexões: Teoria e prática no 3.º ano do novo programa de matemática. *Educação e matemática*, 166, 7-12.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens Essenciais de matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, 7.º ano*.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf
- Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação - Guia para Auto-Aprendizagem*. Universidade Aberta.
https://www.academia.edu/17585183/Metodologia_da_Investig%C3%A7%C3%A3o
- Carvalho e Silva, J. , Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de matemática A, 10.º ano*.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf
- Chandler, P., & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology*, 62(2), 233-246.
- Cox, R., & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 6(2-3), 239-302.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). PME.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham, *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.
- Fey, J. T. (1989). Technology and mathematic education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 237-272.
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In A. Cuoco, *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 173-185). NCTM.
- Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2012). A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira, *Práticas de ensino da matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação matemática* (pp. 121-134). SPIEM.
- Goldin, G. (2014). Mathematical representations. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 409-413). Springer.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. Em A. Cuoco, & F. R. Curcio, *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). NCTM.
- Kozma, R. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction*, 13(2), 205-226.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.
- Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 9(1), 1-21.
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à*

- Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação (DGE).
https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidad_e/perfil_dos_alunos.pdf
- MEC (2015). *Programa e Metas Curriculares – matemática A – Ensino Secundário*. MEC.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais de matemática A do Ensino Secundário*, 10.º ano.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/10_matematica_a.pdf
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico*, 7.º ano.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf
- National Council of Teachers in Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- Nistal, A. A., Dooren, W. V., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM*, 41(5), 627-636.
- Ozgun-Koca, S. A. (1998, October 31-November 2). *Students' use of representations in mathematics education* [Paper presentation]. Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC, United States.
- Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, 40(2), 118-127.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. ME-DGIDC.
- Santos, L. (2015). Representações matemáticas. In Pires, M. V., Ferreira, R. T., Domingos, A., Martins, C., Martinho, H., Vale, I., Amado, N., Carreira, S., Pimentel, T., Santos, L. (2015), *Investigação em educação matemática 2015*:

representações matemáticas (pp. 3-5). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação matemática.

São Bento, J., & Martinho, M. H. (2022). *As representações semióticas na aprendizagem da matemática: Experiência com uma turma de 10.º ano*. UMinho Editora. <https://hdl.handle.net/1822/89686>

Sá, P., Costa, A. P., Moreira, A. (Orgs.) (2021). *Reflexões em torno de metodologias de investigação: Recolha de dados*. Universidade de Aveiro.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4-14.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre a investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171–202.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 37-66.

Van der Meij, J., & de Jong, T. (2003, August 26). *Learning with multiple representations: Supporting students' translation between representations in a simulation-based learning environment* [Paper presentation]. 10th Biennial Conference of the European Association for Research in Learning and Instruction (EARLI). Padova, Italy.

Anexos

Anexo 1 – Documento de consentimento informado



Ex.mo(a) Encarregado(a) de Educação,

A disciplina de Matemática do(a) seu(sua) educando(a) é orientada por três professores, dos quais dois são professores estagiários que se encontram a frequentar o Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Como parte dos requisitos do estágio, cada um dos professores estagiários terá de implementar um projeto de investigação na área da Educação Matemática.

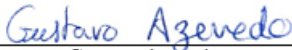
A concretização de cada um destes trabalhos de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática. A realização dos trabalhos de investigação depende da recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha esta que inclui a **gravação em áudio** de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, a recolha de **trabalhos escritos** realizados pelos alunos e a **realização de entrevistas** com alguns alunos desta turma.

- A gravação em áudio é essencial para que toda a informação contida nas interações existentes numa aula, ou em parte dela, seja efetivamente recolhida e não se percam aspetos relevantes para os objetivos dos trabalhos de investigação. Estas gravações serão posteriormente **transcritas** (total ou parcialmente) e serão destruídas assim que o trabalho esteja terminado.
- A recolha das produções escritas dos alunos (respostas a tarefas propostas em aula) em nada difere do que seria feito numa situação de ensino regular, uma vez que é prática comum efetuar essa recolha para efeitos de análise das principais dificuldades dos alunos de modo a poder encontrar estratégias que os ajudem a ultrapassá-las. Assim que o trabalho estiver terminado, as produções escritas recolhidas serão destruídas.
- A realização de entrevistas envolve a gravação em áudio das mesmas, nos mesmos moldes que a gravação de aulas/momentos de aula, e é realizada com um número limitado de alunos, em horário extra-aula a combinar com eles, presencialmente ou recorrendo a meios de comunicação à distância (Zoom, Microsoft Teams ou outro).

Em caso algum os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola serão identificados, garantindo-se o **anonimato** no relatório final de estágio. A participação neste trabalho **em nada interfere** com a avaliação de desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é **inteiramente voluntária**, podendo ele(ela) desistir em qualquer momento, sem qualquer justificação necessária. No caso de desistência, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Venho por este meio solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) nestes trabalhos de investigação, que é de extrema importância. Estou à disposição para qualquer informação adicional.

Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevo-me, com os melhores cumprimentos,


Gustavo Azevedo

06/02/2025
Data

Contacto: [REDACTED]

✉

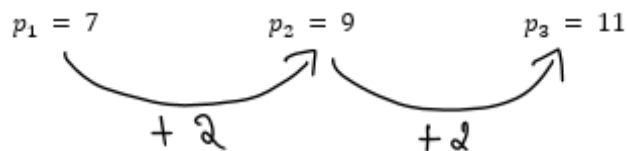
Eu, Encarregado/a de Educação do/a aluno/a autorizo / não autorizo
(riscar o que não interessa) o/a meu/minha educando/a a participar no trabalho de investigação do seu professor estagiário de Matemática Gustavo Azevedo.

Assinatura

Data

Anexo 2 – Proposta de resolução da obra *É de queimar os neurónios...*

- 1) Observando as figuras expostas, os primeiros termos da sucessão são:

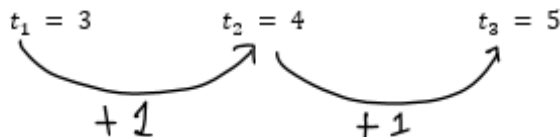


Assim, é possível perceber que cada termo da sucessão obtém-se somando 2 ao anterior, então $p_5 = 11 + 2 + 2 = 15$ e $p_9 = 15 + 2 + 2 + 2 + 2 = 23$.

- 2) p_n forma-se acrescentando dois fósforos à figura anterior. A primeira figura tem 7 fósforos, então:

$$p_n = \begin{cases} p_1 = 7 \\ p_{n+1} = p_n + 2 \end{cases}$$

- 3) A primeira figura tem 3 triângulos, a segunda 4 e a terceira 5, isto é



Então esta sucessão obtém-se somando 1 ao termo anterior.

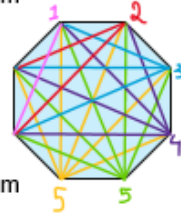
$t_n = n$ é a sucessão dos números naturais, 1,2,3... Para termos $t_1 = 3$, há que somar 2 a t_n . Logo $t_n = n + 2$.

Assim, os valores de t_1 , t_2 e t_3 estão corretos.

Anexo 3 – Proposta de resolução da obra *Pontos e linhas*

- 1) Um octógono tem 8 lados, assim $n + 2 = 8 \Leftrightarrow n = 6$. O número de diagonais de um octógono pode ser dado por d_6 .

$$d_6 = \frac{6^2 + 6 - 2}{2} = \frac{40}{2} = 20$$



Então, um octógono tem 20 diagonais. Pode confirmar-se este resultado com um desenho.

- 2) $d_n = 90$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{n^2 + n - 2}{2} &= 90 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 2 &= 180 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 182 &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-182)}}{2} \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-1 \pm 27}{2} \\ \Leftrightarrow n &= -14 \vee n = 13 \end{aligned}$$

Então $n + 2 = -12$ ou $n + 2 = 13$, mas como $n + 2$ é o número de lados de um polígono, deve ser um número positivo. Assim, $n = 15$ é o número de lados de um polígono com 90 diagonais.

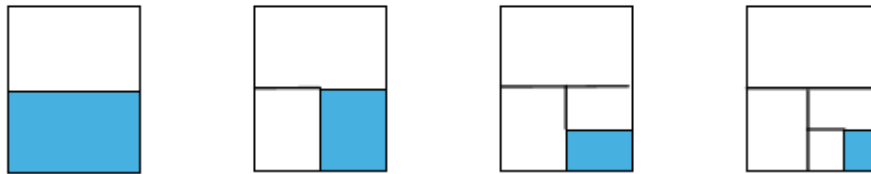
- 3) $d_{n+1} = 18 + d_n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 + n + 1 - 2}{2} &= 18 + \frac{n^2 + n - 2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 2}{2} &= 18 + \frac{n^2 + n - 2}{2} \\ \Leftrightarrow n^2 + 3n &= 36 + n^2 + n - 2 \\ \Leftrightarrow 2n &= 34 \\ \Leftrightarrow n &= 17 \end{aligned}$$

Assim $n + 2 = 17$ e $n = 19$, logo o primeiro polígono que a Joana construiu tinha 19 lados e o segundo tinha 20 lados (mais um do que o outro).

Anexo 4 – Proposta de resolução da obra *A dobrar é que a gente se entende!*

- 1) Uma folha A4 tem de dimensões 21 cm x 29,7 cm. Assim, a área de metade de uma folha é $\frac{21 \times 29,7}{2} = 311,85 \text{ cm}^2$. A partir disto, os restantes termos obtêm-se dividindo o anterior por 2.

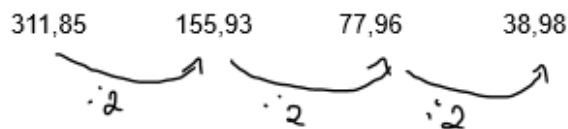


Logo, $a_1 = 311,85$, $a_2 = 155,93$, $a_3 = 77,96$, $a_4 = 38,98$.

- 2) Esta sucessão tem como primeiro termo a área de metade de uma folha A4, $311,85 \text{ cm}^2$, e qualquer outro termo (exceto o 1º) obtém-se dividindo o termo anterior por 2.

$$\text{Logo } a_n = \begin{cases} a_1 = 311,85 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 3) Os primeiros quatro termos desta sucessão são:



Ou seja: $\frac{311,85}{2^0}, \frac{311,85}{2^1}, \frac{311,85}{2^2}, \frac{311,85}{2^3}$.

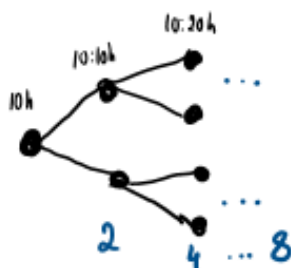
Assim, o termo geral desta sucessão é $a_n = \frac{311,85}{2^{n-1}}$.

- 4) $a_n = \frac{311,85}{2^{n-1}} = \frac{623,7}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$ é uma sucessão limitada e decrescente, majorada pelo seu primeiro termo, $\frac{1}{2}$, e com nenhum termo negativo. Isto é, $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{623,7}{2^n} \leq \frac{623,7}{2} \Leftrightarrow 0 < a_n \leq 311,85$. Assim, a_n é limitada entre 0 e 311,85.

Outra forma de justificar que a sucessão é limitada é reparando no que ela traduz. Os termos da sucessão são áreas de retângulo. A primeira área, e maior, é a área de metade de uma folha A4, 311,85, e à medida que se vai dobrando a folha, os retângulos vão ficando menores. Assim esta sucessão é decrescente majorada pelo valor 311,85 e, por mais que se dobre a folha, nunca haverá uma área negativa. Portanto a_n é limitada entre 0 e 311,85.

Anexo 5 – Proposta de resolução da obra *Mentira espalhada, escola fechada*

1)



Seja m_n a sucessão cujos termos são o número de pessoas que conhecem a mentira em períodos de 10 minutos, tal que $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$ e assim sucessivamente. De início ($n=1$) apenas a mentirosa sabe, ao fim de 10 minutos ($n=2$) duas pessoas ficam a saber. Ao fim de 20 minutos ($n=3$) mais quatro pessoas descobrem. Ao fim de 30 minutos ($n=4$) mais 8 pessoas descobrem. Assim, às 10:30h, 8 alunos ouviram que a escola ia fechar.

- 2) Esta situação pode ser descrita por uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2, isto é, $m_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$. Ao 12h, já haviam passados 120 minutos e o número de pessoas que ouviu a mentira ao fim de 120 minutos pode ser descoberto calculando a soma dos 13 primeiros termos da sucessão m_n . Assim:

$$S_{13} = 1 \times \frac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 8193$$

Como $4095 < 8193$, ao 12h, todos os 4095 alunos da escola já sabiam a mentira.

Anexo 6 – Proposta de resolução da obra *A cavalo dado não se olha o dente*

- 1) Seja f_n a sucessão que descreve o preço dos cravos das ferraduras, isto é, f_1 é o preço do primeiro cravo, f_2 o preço do segundo e por aí em diante. Esta sucessão é uma progressão geométrica de primeiro termo 0,01 e razão 2, logo pode ser definida por $f_n = 0,01 \times 2^{n-1}$.

O valor total dos cravos da ferradura da pata dianteira esquerda é a soma dos 8 primeiros termos desta progressão, isto é $S_8 = 0,01 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 0,01 \times 255 = 2,55$.

Então, tal como o Sr. Pedro refere, o valor total dos cravos da ferradura da pata dianteira esquerda era 2,55€.

- 2) Segundo a proposta do Sr. Pedro, o preço a pagar será a soma dos primeiros 32 termos da sucessão definida na alínea anterior, isto é, a soma dos preços de cada cravo das ferraduras do cavalo.

$$S_{32} = 0,01 \times \frac{1 - 2^{32}}{1 - 2} = 0,01 \times 4294967295 = 42949672,95$$

Assim, se aceitar a proposta feita pelo Sr. Pedro, o Sr. João irá pagar pelo cavalo 42 949 672,95€. Dado que a proposta inicial era de 4 milhões de euros, e a nova proposta iria resultar num pagamento de 42 milhões, o Sr. João deve recusar a proposta do Sr. Pedro e pagar o valor pedido inicialmente.

Anexo 7 – Proposta de resolução da obra *Não percas o fio à meada!*

- 1) Esta sucessão tem como primeiro termo o comprimento do segmento $[A1,A2]$ que, através de medição com uma régua, sabemos que é 20 cm. Assim, visto que cada termo é obtido subtraindo 3 cm ao anterior, a sucessão é definida por:

$$c_n = \begin{cases} c_1 = 20 \\ c_{n+1} = c_n - 3 \end{cases}$$

- 2) Como $c_{n+1} - c_n = -3$, a sucessão c_n é uma progressão aritmética de razão -3 e primeiro termo 20. Então, o termo geral desta sucessão é $c_n = 20 + (n - 1) \times (-3) = 20 - 3n + 3 = 23 - 3n$.

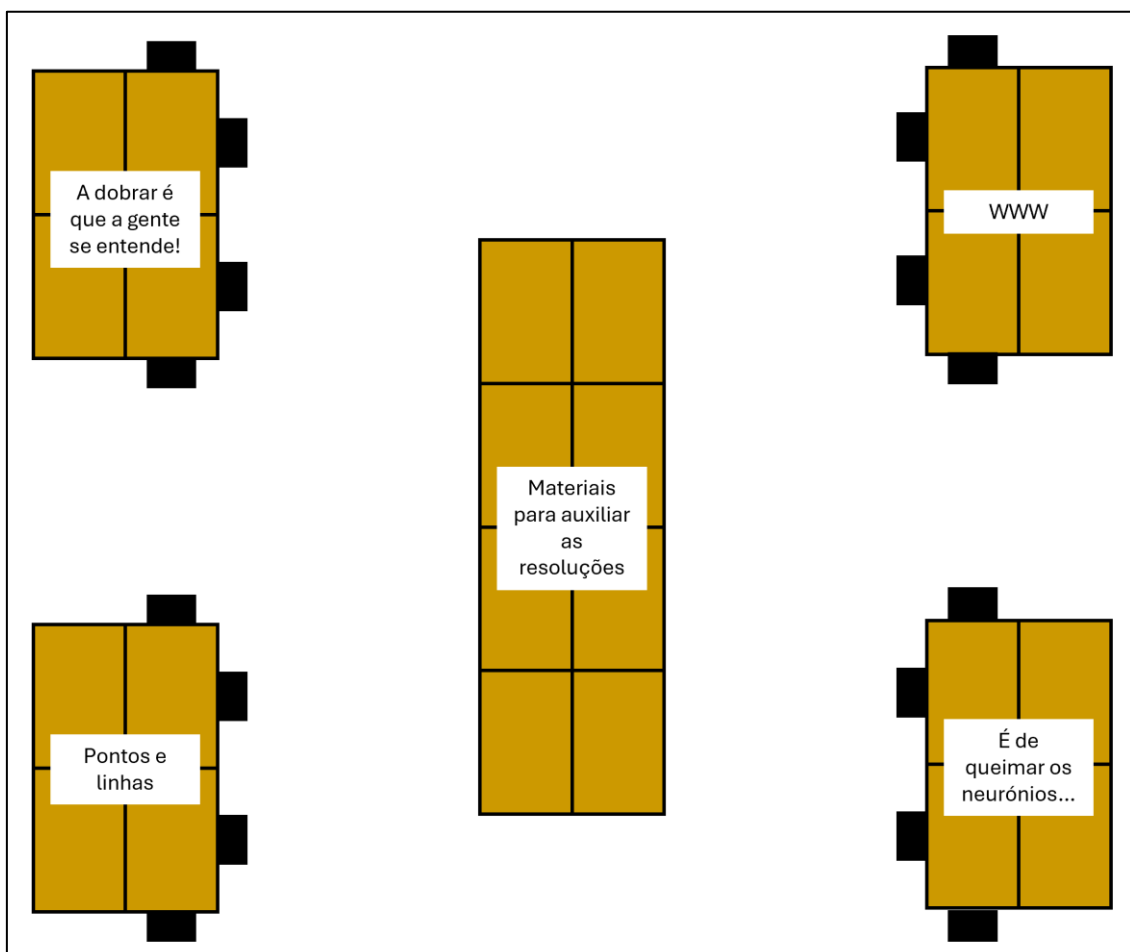
- 3) O comprimento do fio pode ser obtido medindo cada um dos 7 segmentos do fio e somando, ou então, aproveitando a progressão aritmética definida anteriormente e calculando a soma dos seus 7 primeiros termos.

$c_1 = 20$ e $c_7 = 2$, então:

$$S_7 = \frac{20 + 2}{2} \times 7 = 11 \times 7 = 77$$

Logo, o fio tem 77 cm de comprimento.

Anexo 8 – Organização da sala de aula para a exposição *Uma sucessão de tarefas*



Anexo 9 – Organização da sala de aula para a exposição *Limite, progressão, ação!*

