

Dificuldades na interpretação de enunciados de problemas matemáticos: Um estudo com alunos de 11.º ano de Matemática A

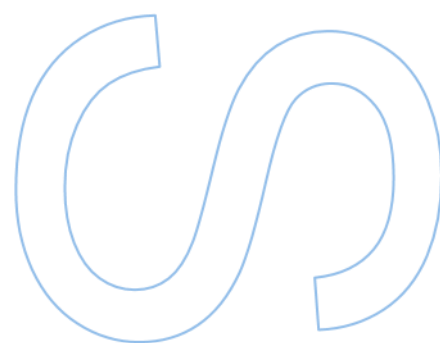
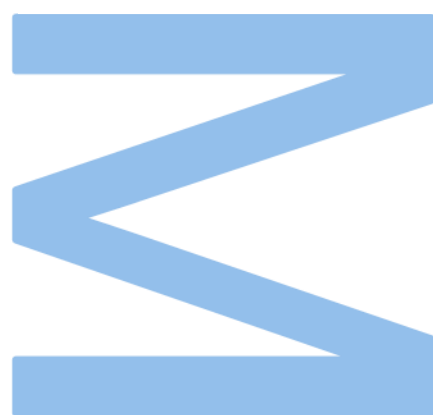
Tatiana Moreira Simões

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2025



Dificuldades na interpretação de enunciados de problemas matemáticos: Um estudo com alunos de 11.º ano de Matemática A

Tatiana Moreira Simões

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2025

Orientadora

Rosa Tomás Ferreira, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Este relatório marca o final do meu percurso académico (dois cursos depois, finalmente!) e foram várias as pessoas que contribuíram para que me lembre para sempre deste último ano.

Às professoras Cristina Cardoso e Gabriela Ferreira e ao professor Horácio Rego, por me inspirarem e por me terem ajudado a ser uma pessoa e uma aluna melhor. Sempre ouvi dizer que “todos os professores tiveram um professor que os inspirou a serem professores” e estes são os exemplos que quero seguir.

À minha orientadora, a professora doutora Rosa Ferreira, por todo o conhecimento que me transmitiu ao longo destes dois anos, por esclarecer as minhas dúvidas e pelas críticas construtivas na elaboração deste relatório.

À professora cooperante, pela partilha da sua experiência e pela disponibilidade para nos ajudar e ensinar durante este ano letivo, e a todos os professores da escola que nos fizeram sentir bem-vindas e garantiram sempre que a nossa experiência estava a ser positiva.

Aos alunos que tive a oportunidade de conhecer e ensinar durante este ano letivo. Foram os meus primeiros alunos e sempre me ajudaram a ser melhor professora, dizendo-me em que aspetos ainda podia melhorar. Fizeram-me crescer pessoal e profissionalmente e nunca vou esquecer os momentos que vivi convosco. Um especial agradecimento aos seis participantes do meu estudo, que tiraram um bocadinho do seu tempo para me permitir recolher os dados para este relatório. Sem vocês, isto não teria sido possível!

Às minhas amigas, Margarida, Matilde, Joana, Marta e Beatriz, que me acompanharam durante a licenciatura e o mestrado, por estarem sempre presentes, por ouvirem os meus desabafos e por me fazerem acreditar que era capaz de fazer sempre melhor. Obrigada por todos os momentos em que estivemos juntas e por tudo o que aprendi convosco.

Aos meus amigos do Anasecadote, Rita, Gustavo, Joana e Sofia. Quando entrei no mestrado, pensava que ia passar dois anos sozinha, mas vocês apareceram e tornaram-se super importantes para mim. Desde as nossas conversas disparatadas até aos momentos de estudo intensivo, vou guardar estas memórias para o resto da minha vida e espero que sejamos amigos até sermos velhinhos (se tiverem paciência para me aturar até lá...). Em especial, à minha colega de estágio, Rita, por tudo o que vivemos

juntas durante este ano, não só os bons momentos, mas também aqueles que nos fizeram questionar tudo e que superamos juntas. Obrigada por me fazeres acreditar que sou capaz.

À minha família, em especial aos meus pais, à minha irmã e ao meu sobrinho, por estarem sempre presentes e disponíveis para me ouvir e ajudar. Obrigada por me terem apoiado quando decidi mudar de curso e por me ajudarem a perceber que era a melhor escolha para ser feliz, por me aturarem dia após dia, por me ouvirem a contar as aventuras do mestrado e do estágio e por atenuarem os momentos de maior ansiedade. Sem vocês, nunca teria conseguido chegar até aqui.

A todos vocês, muito obrigada!

Resumo

A resolução de problemas é uma capacidade transversal com grande destaque nas orientações curriculares para a disciplina de Matemática no ensino secundário, mas deve ser desenvolvida pelos alunos durante a escolaridade obrigatória. Uma boa interpretação dos enunciados dos problemas é essencial para desenvolver esta capacidade, mas depende de vários fatores, incluindo os contextos em que os problemas são formulados. Assim, este estudo tem como objetivo perceber quais são as dificuldades manifestadas por alunos do 11.º ano de escolaridade na interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos e quais as suas causas, procurando responder às seguintes questões de investigação: i) Quais são as principais dificuldades dos alunos na interpretação dos enunciados de problemas? ii) Quais são as suas causas? e iii) Qual a influência do contexto nas dificuldades de interpretação de enunciados de problemas? Seguiu-se uma abordagem qualitativa e interpretativa, e selecionaram-se seis alunos, com diferentes desempenhos na disciplina e facilidade de comunicação. Os dados recolhidos incluem: i) gravações áudio de três entrevistas com tarefas individuais, baseadas em problemas formulados com diferentes contextos; ii) gravações áudio de uma entrevista final a pares; e iii) as produções escritas durante as entrevistas realizadas. As principais dificuldades verificaram-se na recolha e organização da informação do enunciado e na interpretação dos resultados em função do enunciado, após a resolução dos problemas. Estas dificuldades podem dever-se a vários fatores, incluindo a memorização de conceitos e mecanização de procedimentos, a falta de domínio da língua portuguesa e a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado. Os contextos dos problemas influenciaram as dificuldades demonstradas pelos alunos: verificaram-se mais dificuldades nas tarefas com contextos reais e semirreais, devido à falta de hábito dos alunos na resolução de tarefas com contextos para além da matemática pura. Os resultados deste estudo sugerem que a interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos deve ser uma preocupação no ensino da Matemática para que os alunos sejam capazes de resolver qualquer problema que lhes seja proposto.

Palavras-chave: resolução de problemas, dificuldades, interpretação, contextos, ensino secundário, progressões aritméticas e geométricas

Abstract

Problem solving is a transversal skill highly emphasized in the curriculum guidelines for secondary school mathematics, and it must be developed by students throughout their mandatory education. A good interpretation of the problem statements is essential towards developing this skill, but it depends on several factors, including the contexts in which the problems are formulated. This study aims to understand the difficulties 11th grade students have in interpreting problem statements with different contexts and their causes, trying to answer the following questions: i) What are the main difficulties students have in interpreting problem statements? ii) What are their causes? and iii) What influence does context have in these difficulties? This study follows a qualitative and interpretative approach, involving six students with different grade achievements and ease of communication. The data include: i) audio recordings of three individual task-based interviews, with problems formulated in different contexts; ii) audio recordings of a final group interview; and iii) the collection of students' written productions during the interviews. The main difficulties were found in the process of collecting and organizing the information of the problem statement and in interpreting the results based on the statement, after solving the problems. They seem to be due to several factors, including the memorization of concepts and mechanization of procedures, the lack of command of the Portuguese language, and the quick and ill-detailed reading of the problem statement. The contexts of the problems influenced the difficulties shown by students: there were more difficulties in tasks with real and semi-real contexts, due to the lack of practice in solving tasks with contexts beyond pure mathematics. The results of this study suggest that the interpretation of problem statements with different contexts should be a concern in mathematics teaching, in order to help students become better equipped to tackle all problems they are faced with.

Keywords: problem solving, difficulties, interpretation, contexts, secondary school, arithmetic and geometric progressions

Índice

Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Abreviaturas	x
1. Introdução	1
2. Enquadramento Teórico	5
2.1. Problemas e Resolução de Problemas	5
2.2. Contexto das tarefas	12
2.3. Dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas	16
3. Métodos e procedimentos de recolha de dados	25
3.1. Caracterização do contexto escolar	25
3.2. Aulas sobre progressões aritméticas e geométricas	26
3.3. Instrumentos e processos de recolha de dados	34
3.3.1. Escolha dos participantes	34
3.3.2. Entrevistas com tarefas	35
3.3.2.1. Problema da entrevista 1	37
3.3.2.2. Problema da entrevista 2	39
3.3.2.3. Problema da entrevista 3	41
3.3.3. Entrevista final	42
3.3.4. Questões de natureza ética	44
4. Apresentação e discussão de resultados	45
4.1. Problema 1	45
4.2. Problema 2	54
4.3. Problema 3	64
4.4. Perceções dos alunos sobre as dificuldades de interpretação sentidas	71
4.4.1. Dificuldades de interpretação do enunciado de problemas e respetivas causas	71
4.4.2. Influência do contexto nas dificuldades de interpretação	73

5. Conclusões e recomendações	78
5.1. Considerações finais.....	83
Referências Bibliográficas	87
Anexos	92
Anexo 1 – Plano de aula (introdução às progressões aritméticas)	92
Anexo 2 – Plano de aula (consolidação das progressões aritméticas)	96
Anexo 3 – Plano de aula (introdução às progressões geométricas)	100
Anexo 4 – Plano de aula (consolidação das progressões geométricas)	104
Anexo 5 – Problema 1	108
Anexo 6 – Problema 2	109
Anexo 7 – Problema 3	112
Anexo 8 – Guião das Entrevistas a pares	113
Anexo 9 – Documento de consentimento informado	114

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Dificuldades de interpretação de tarefas e suas causas (Kingwell, 2022, pp. 89-91).....	22
Tabela 2 – Organização das aulas sobre progressões aritméticas e geométricas	26
Tabela 3 – Dificuldades de interpretação manifestadas pelos alunos e respetivas causas	79

Lista de Figuras

Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18).....	5
Figura 2 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p. 21).....	12
Figura 3 – Questão 11 do Exame Nacional de Matemática de 2023, 9.º ano, 2ª fase .	14
Figura 4 – Tarefa de introdução às progressões aritméticas da aula de 15 de janeiro	28
Figura 5 – Primeiro problema proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro	29
Figura 6 – Segundo problema proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 179)	29
Figura 7 – Problema com contexto semirreal proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 181).....	30
Figura 8 – Tarefa de introdução às progressões geométricas da aula de 22 de janeiro	31
Figura 9 – Primeiro problema proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro	32
Figura 10 – Segundo problema proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 178)	32
Figura 11 – Problema com contexto semirreal proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 179).....	33
Figura 12 – Enunciado do Problema 1	37
Figura 13 – Enunciado do Problema 2	39
Figura 14 – Enunciado do Problema 3	41
Figura 15 – Organização temporal do processo de recolha de dados.....	44
Figura 16 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 1)	45
Figura 17 – Organização dos dados da pergunta 1a (Problema 1 – Andreia)	47
Figura 18 – Parte da resolução da pergunta 1a (Problema 1 – Andreia).....	49
Figura 19 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 1)	50
Figura 20 – Organização dos dados da pergunta 1b (Problema 1 – Lúcia).....	51
Figura 21 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 2)	55
Figura 22 – Enunciados sublinhados da pergunta 1a (Problema 2 – António e Catarina)	55
Figura 23 – Resolução da pergunta 1a (Problema 2 – Lúcia).....	58
Figura 24 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 2)	59
Figura 25 – Primeira parte da resolução da pergunta 1b (Problema 2 – Andreia)	60
Figura 26 – Segunda parte da resolução da pergunta 1b (Problema 2 – Andreia)	61
Figura 27 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 3)	64

Figura 28 – Parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Duarte)	65
Figura 29 – Primeira parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Lúcia).....	66
Figura 30 – Segunda parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Lúcia).....	67
Figura 31 – Resolução da pergunta 1a (Problema 3 - Francisco)	69
Figura 32 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 3)	69

Lista de Abreviaturas

DES	DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO
DGEBS	DIREÇÃO GERAL DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MEC	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
OCDE	ORGANIZAÇÃO PARA A COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÓMICO
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
TEIP	TERRITÓRIOS EDUCATIVOS DE INTERVENÇÃO PRIORITÁRIA

1. Introdução

Na nossa sociedade, está muito interiorizado o pensamento de que uma pessoa tem mais tendência para ter sucesso numa área. Quantas vezes ouvimos dizer que alguém é “mais das letras” ou “mais das ciências”? Até ao final do ensino básico, acreditava que era assim que o mundo funcionava: não se pode ser bom a tudo e, como a matemática era a minha disciplina favorita, nunca seria excelente a português.

No ensino secundário, tive uma professora de português que me fez ver que a sua disciplina era mais do que as orações e as classes de palavras e que me incutiu o gosto pela leitura e pela escrita. À medida que lia mais livros e que escrevia as minhas próprias histórias, fui-me apercebendo que tinha mais facilidade em comunicar as minhas ideias em todas as disciplinas, incluindo em matemática, e que conseguia ser mais criativa, principalmente quando não sabia a resposta e não queria deixar a pergunta por fazer.

Este percurso levou-me a perceber que ambas as disciplinas estão interligadas e, como tal, devem andar de mãos dadas. Desta forma, os alunos desenvolvem capacidades como a argumentação, a criatividade e o espírito crítico em relação ao que os rodeia, conseguindo aplicá-las aos problemas matemáticos que vão surgindo ao longo do seu percurso.

No ano letivo 2024/2025, tive a oportunidade de realizar a minha Prática de Ensino Supervisionada (PES) no âmbito do Mestrado de Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário e contactei com duas turmas de 11.º ano e com uma turma de 7.º ano. Na minha experiência durante a PES, foi claro desde o início que os alunos tinham alguma tendência para desistir de um problema quando o enunciado era mais extenso. Nestas situações, partiam de imediato para a resolução da tarefa, acabando por ter dificuldades na sua realização por não saberem todos os dados do problema.

No primeiro momento de avaliação sumativa de uma das turmas de 11.º ano, um dos problemas era bastante semelhante a outro que tinha sido feito numa das aulas e discutido em conjunto. Contudo, dos 18 alunos da turma, apenas oito tentaram resolver o problema e, desses, só três alunos conseguiram chegar à resposta correta. Quando questionados sobre a razão para deixarem o problema por fazer, a maioria respondeu que era uma questão difícil e, por isso, deixaram para o final do teste, acabando por não ter tempo para a fazer. Nesse momento, apercebi-me que a resolução de problemas era uma capacidade que os alunos não tinham desenvolvido da forma esperada e, como

tal, teria de existir uma maior insistência no seu desenvolvimento ao longo do ano, para que os alunos não desistissem tão facilmente de uma tarefa que certamente conseguiriam resolver.

No momento de avaliação sumativa seguinte, uma das alunas da mesma turma chamou-me ao lugar e perguntou-me como iria descobrir o comprimento de um segmento [AE] num dos problemas. No enunciado da tarefa, estavam elencadas as informações que seriam necessárias para a resolução do problema, entre elas o comprimento de um segmento [AB] e a informação de que o ponto E era o ponto médio desse segmento. Percebi nesse momento que, por nervosismo ou por falta de atenção, a aluna não sabia todos os dados do problema e perguntei-lhe se não conseguia encontrar nenhuma informação no enunciado que a pudesse ajudar. Assim que leu o enunciado com calma, apercebeu-se de que tinha toda a informação que precisava e conseguiu continuar a resolução da tarefa.

Estas situações, aliadas à ideia de que a resolução de problemas era algo em que os alunos mostravam algumas dificuldades, levaram-me a querer investigar acerca das dificuldades dos alunos na interpretação dos enunciados de problemas. De facto, tanto a interpretação de textos como a resolução de problemas são áreas de competências visadas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017). Relativamente à resolução de problemas, este documento curricular refere que:

As competências na área de Resolução de problemas dizem respeito aos processos de encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão, à construção e uso de estratégias e à eventual formulação de novas questões. (p. 23)

Na descrição desta competência, é ainda referida a importância de “interpretar informação, planear e conduzir pesquisas” de forma a “gerir informações e tomar decisões” e “desenvolver processos conducentes à construção de produtos e conhecimento, usando recursos diversificados”, realçando a importância da interpretação para uma boa compreensão dos problemas e escolha de estratégias adequadas (Martins et al., 2017, p. 23).

Para além do PASEO, as *Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário* (ME, 2018), orientações em vigor nas turmas de 11.º ano em que realizei a PES, abordam também a importância das capacidades matemáticas transversais, onde se inclui a resolução de

problemas, e referem a relevância da mobilização de competências em diversos contextos:

A aquisição e o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, e a sua mobilização em contextos matemáticos e não matemáticos são objetivos essenciais associados aos conteúdos de aprendizagem de cada tema matemático. Estes objetivos essenciais, definidos em termos de capacidades e de atitudes, devem ser valorizados com igual importância relativamente aos conteúdos e favorecem uma aproximação aos conceitos matemáticos. (p. 2)

Assim, os alunos devem “resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos” e estas tarefas devem recorrer a “situações e contextos variados” (ME, 2018, p. 5).

As *Novas Aprendizagens Essenciais de Matemática A para o Ensino Secundário* (Carvalho e Silva et al., 2023) dão continuidade a este destaque dado à resolução de problemas, defendendo que esta permite “uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática” de forma que “a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão” (p. 5). Para além disso, referem que é necessário “desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos” (p. 2), mantendo a importância da utilização de vários contextos na aprendizagem da matemática.

A nível internacional, a OCDE (1999) também refere a importância da resolução de problemas na literacia matemática dos jovens, dando destaque aos contextos utilizados nos problemas: os alunos devem ser capazes de “resolver problemas matemáticos numa variedade de contextos” (p. 50), onde se incluem contextos relacionados com as suas experiências e práticas reais.

Para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, tal como é referido no PASEO (Martins et al., 2017), é essencial uma boa interpretação dos enunciados (Schroeder & Lester, 1989; Costa & Fonseca, 2009). Se os alunos conseguirem interpretar o enunciado, terão mais facilidade em perceber que conhecimentos devem mobilizar e quais as estratégias eficazes para a sua resolução.

Assim, este estudo tem como objetivo perceber quais são as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos e quais as suas causas. Para concretizar este objetivo, foram formuladas três questões de investigação:

- i) Quais são as principais dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas?
- ii) Quais são as suas causas?
- iii) Qual a influência do contexto nas dificuldades de interpretação de enunciados de problemas?

Este relatório está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo, “Introdução”, apresenta o objetivo do estudo e as correspondentes questões de investigação, bem como a relevância do mesmo e as motivações pessoais para a sua realização. Inclui também uma breve descrição da estrutura do documento.

O segundo capítulo, “Enquadramento Teórico”, inclui a base teórica para fundamentar este estudo, permitindo conhecer e perceber melhor a temática que será abordada neste.

No capítulo seguinte, “Métodos e procedimentos de recolha de dados”, são justificadas as principais opções metodológicas e apresentado o contexto onde foi realizado o estudo, bem como os critérios de seleção dos participantes do estudo. Para além disso, são descritos os problemas utilizados e a organização do processo de recolha de dados ao longo do tempo e são indicados os instrumentos e procedimentos de recolha de dados.

No quarto capítulo, “Apresentação e discussão de resultados”, é feita a análise dos dados recolhidos com base nas questões de investigação, tendo por base a literatura apresentada no segundo capítulo.

Por fim, no capítulo “Conclusões e recomendações” são apresentadas as respostas às questões de investigação formuladas no início deste relatório e é feita uma breve reflexão acerca do trabalho realizado, analisando as implicações deste para a prática profissional e perspetivando possíveis trabalhos de investigação futuros.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo, apresentam-se os aspetos teóricos que estão relacionadas com a temática do estudo realizado. Uma vez que o objetivo deste relatório é identificar quais as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos e quais as suas causas, o enquadramento teórico divide-se em três subcapítulos: i) Problemas e resolução de problemas; ii) Contexto das tarefas; e iii) Dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas.

2.1. Problemas e Resolução de Problemas

Ponte (2005) classifica as tarefas matemáticas segundo quatro dimensões, sendo duas delas o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O primeiro diz respeito à perceção da dificuldade de uma questão, podendo variar entre reduzido e elevado, enquanto o segundo varia entre aberto e fechado – uma tarefa aberta é caracterizada por um grau de indeterminação considerável no que é dado e/ou no que é pedido; numa tarefa fechada, o que é dado e o que é pedido estão bem definidos. Define, então, quatro tipos básicos de tarefas, em função destas duas dimensões, e representa-as em quatro quadrantes, como na Figura 1, onde cada um corresponde a um tipo de tarefa: exercícios, problemas, explorações e investigações.

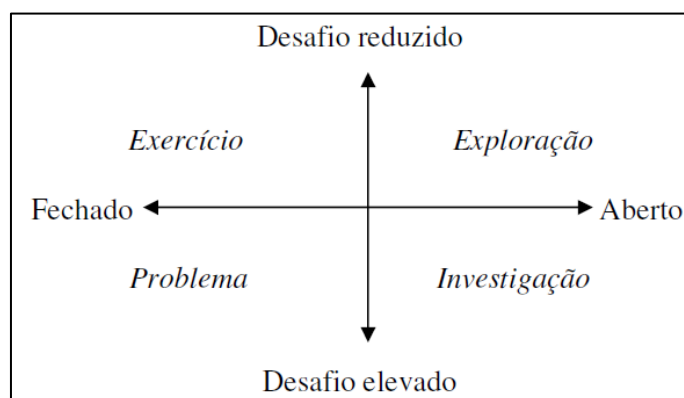


Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)

Este autor caracteriza também as tarefas relativamente ao seu contexto, que será abordado na seguinte secção, e à sua duração: uma tarefa pode ter uma duração curta, média ou longa, de acordo com o tempo necessário para a sua realização, desde alguns minutos a alguns dias ou semanas. A realização de um problema exige algum tempo para se pensar numa estratégia e executá-la uma vez que este não pode ser resolvido

com a aplicação imediata de um algoritmo ou regra. Com base nesta classificação, um problema é uma tarefa fechada com um elevado grau de desafio e duração média (Ponte, 2005).

Contudo, uma mesma tarefa pode ser um problema para um aluno e um exercício para outro, ou seja, é a relação entre o aluno e a tarefa que determina se esta é um problema, tal como refere Vale (1983):

A dificuldade de definir este termo é que problema é um conceito relativo. As mesmas tarefas que exigem esforços significativos a alguns alunos podem muito bem ser exercícios rotineiros para outros, pois resolvê-los pode ser uma questão de recordar alguns factos matemáticos. (p. 15)

De facto, diversos autores apresentaram uma definição para este conceito, tendo sempre em mente duas ideias em comum: a existência de um objetivo a atingir e o facto de um indivíduo não o conseguir atingir de forma imediata (Lester, 2013).

Dunker (1945) definiu um problema como algo que surge quando uma pessoa tem um objetivo, mas não sabe como o pode atingir. Na mesma linha de pensamento, Newell e Simon (1972) defendem que “uma pessoa é confrontada com um problema quando quer algo e não sabe imediatamente que ações deve realizar para o obter” (p. 72).

Na década de 1980, foram várias as propostas de definição de problema. Kantowski (1981) definiu um problema como “uma questão que não pode ser respondida ou uma situação que não pode ser resolvida com o conhecimento imediatamente disponível” (p. 113) da pessoa que está a resolver o problema. Refere, também, que o que distingue um problema de um exercício é o facto de o indivíduo não conhecer um procedimento ou um algoritmo que lhe permite resolver essa tarefa, ideia partilhada por Charles (1982, citado por Vale, 1993), quando define um problema matemático como “uma situação na qual o indivíduo ou um grupo é chamado a desempenhar uma tarefa para a qual (...) não tem um procedimento disponível para determinar uma solução” (Vale, 1993, p. 17). Mayer (1985, citado por Vale, 1993) apresenta uma definição semelhante, indicando que “um problema ocorre quando se é confrontado com uma situação inicial e se pretende chegar a uma situação final, sem se conhecer previamente o caminho óbvio para a atingir” (Vale, 1993, p. 16).

Conhecidas algumas propostas de definição de problema, neste relatório, é adotada a definição proposta por Ponte (2005), por estar mais familiarizada com ela. Para além de definir o que é um problema, é possível distinguir diferentes tipos de problemas. Polya

(1995) apresenta cinco tipos de problemas: problema auxiliar, problema rotineiro, problema de determinação, problema de demonstração e problema prático.

Um *problema auxiliar* é um problema cuja resolução permite ao indivíduo resolver outro problema – “aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro” (Polya, 1995, p. 119). Um *problema rotineiro* é, na verdade, um exercício (na aceção de Ponte, 2005) na medida em que apenas requer a utilização de procedimentos já conhecidos sem usar o pensamento para definir uma estratégia, como por exemplo “resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” (Polya, 1995, p. 124) caso a fórmula resolvente já tenha sido introduzida aos alunos. Um *problema de determinação* é resolvido com o intuito de encontrar uma incógnita, sendo para isso necessário conhecer a incógnita a determinar, os dados do problema e as condições impostas no enunciado. Os problemas rotineiros e de determinação, segundo Polya, foram muito comuns no contexto da minha PES, com um forte apoio do manual escolar adotado na escola (Neves et al., 2024). Um *problema de demonstração* tem como objetivo mostrar qual o valor lógico de uma afirmação presente no enunciado, isto é, “temos de responder à pergunta: esta afirmação é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa” (p. 124). Um *problema prático* diz respeito a situações reais como a construção de barragens ou o desenho de mapas geográficos, em que as incógnitas e os dados do problema são mais complexos; neste tipo de problemas, é possível fazer aproximações sem comprometer a precisão de forma a simplificar a sua resolução.

Charles e Lester (1986, citados por Vale e Pimentel, 2004) apresentam uma tipologia de problemas adequada para o 1.º ciclo de ensino básico, em que os tipos de problemas são mais simples do que aqueles que são considerados no ensino secundário. Referem a existência de cinco tipos de problemas: problema de um passo, problema de dois ou mais passos, problema de processo, problema de aplicação e problema tipo puzzle.

Os problemas de um passo e de dois ou mais passos caracterizam-se de acordo com o número de aplicações diretas das operações básicas da aritmética: um *problema de um passo* pode ser resolvido aplicando diretamente uma dessas quatro operações, enquanto um *problema de dois ou mais passos* utiliza duas ou mais dessas operações. Um *problema de processo* implica a utilização de uma ou várias estratégias de resolução, não sendo possível resolvê-lo através de processos mecanizados. Este tipo de problema, na aceção de Charles e Lester (1986, citados por Vale e Pimentel, 2004), foi aquele que mais se aproximou do tipo de problemas tipicamente propostos aos alunos das minhas turmas de secundário da PES. Os *problemas de aplicação*

geralmente envolvem a recolha de dados reais e a tomada de decisões, baseada numa ou mais estratégias de resolução, aproximando-se da ideia de investigação matemática, na aceção de Ponte (2005). Nos *problemas tipo puzzle*, é necessário um “flash” para encontrar a solução e habitua o aluno a analisar os problemas sob vários pontos de vista (Charles & Lester, 1986, citados por Vale e Pimentel, 2004).

Vale e Pimentel (2004) apresentam também a tipologia de problemas definida pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas (constituído por Domingos Fernandes, António Borralho, Ana Leitão, Helena Fernandes, Isabel Cabrita, Isabel Vale, Lina Fonseca e Pedro Palhares), que define quatro tipos de problemas: problema de processo, problema de conteúdo, problema de aplicação e problema de aparato experimental. Nesta tipologia, um mesmo problema pode pertencer a um ou mais tipos em simultâneo.

A definição de *problema de processo* é semelhante à apresentada por Charles e Lester (1986), isto é, este tipo de problemas não pode ser resolvido pela aplicação direta de um algoritmo, sendo necessário utilizar uma ou mais estratégias de resolução. Estes problemas podem não exigir a aplicação dos conteúdos do programa da disciplina. Por outro lado, para resolver um *problema de conteúdo* é necessária a utilização desses conteúdos programáticos, bem como de técnicas matemáticas. Os *problemas de aplicação* também são referidos nesta tipologia, apresentando-se como problemas que utilizam dados reais e necessitam da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. Para além disso, podem ter mais do que uma solução e a sua resolução pode demorar horas ou dias. Um *problema de aparato experimental* exige, tal como o nome indica, a utilização de um aparato experimental, sendo difícil resolvê-lo sem a utilização deste recurso. Em geral, está relacionado com as ciências experimentais. Nas minhas turmas de 11.º ano da PES, a maioria dos problemas propostos aos alunos inseriu-se nos dois primeiros tipos do modelo de Vale e Pimentel (2004): problemas de processo ou de conteúdo.

De forma a garantir que os alunos conseguem solucionar qualquer tipo de problema, estes devem desenvolver a capacidade matemática transversal de *resolução de problemas*. A resolução de problemas é considerada um processo em que os alunos aplicam os seus conhecimentos e desenvolvem novas aprendizagens matemáticas para encontrar uma solução (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Schoenfeld (1982) descreve o processo de resolução de problemas como um diálogo entre o conhecimento anterior, as tentativas e o pensamento de um indivíduo ao longo do processo.

Para que a resolução de problemas promova aprendizagens significativas, o professor deve escolher tarefas matemáticas adequadas, isto é, que tenham potencial para desafiar os alunos e melhorar o seu desenvolvimento matemático. Para além disso, os alunos devem ter um papel ativo na sua própria aprendizagem (NCTM, 2014). Por isso, o currículo da matemática deve permitir que os alunos construam o seu conhecimento matemático através da resolução de problemas, aplicando e adaptando diferentes estratégias e refletindo sobre estas ao longo do processo (NCTM, 2000).

De facto, a resolução de problemas está presente nos programas curriculares portugueses há vários anos. Em 1991, foi publicado pela Direção Geral do Ensino Básico e Secundário o *Programa de Matemática e Métodos Quantitativos para o Ensino Secundário* (DGEBS, 1991), apontando como objetivo a concretizar durante este ciclo de ensino o desenvolvimento de capacidades como a resolução de problemas, que podem envolver situações da vida real – “analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução” (p. 27). O *Programa Ajustado de Matemática* publicado pelo Departamento do Ensino Secundário em 1997 (DES, 1997) apenas surgiu para esclarecer alguns pontos que não ficaram claros no programa de 1991, não alterando os objetivos gerais, ou seja, com a publicação deste programa, a resolução de problemas continuou a ter um papel muito importante na disciplina de matemática.

O *programa de Matemática A*, publicado em 2001 (Carvalho e Silva et al., 2001), mantém o destaque dado à resolução de problemas, referindo que os alunos devem ser capazes de aplicar os conhecimentos matemáticos a situações da vida real e de formular e resolver problemas. Para além disso, os autores classificam a resolução de problemas como um tema transversal a ser desenvolvido durante todo o ciclo de ensino já que constitui “uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua atividade matemática independentemente do tema” e que, por isso, “atravessam o programa de forma transversal” (p. 6).

Embora a resolução de problemas seja incluída no *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*, publicado pelo Ministério da Educação e Ciência em 2015 (MEC, 2015), este documento curricular caracteriza-a de uma forma bastante diferente do programa anterior. No novo documento, a resolução de problemas envolve “essencialmente a capacidade de selecionar e aplicar procedimentos previamente estudados” (p. 7) e, como tal, os alunos devem “aplicar conhecimentos de factos matemáticos, capacidades, procedimentos e conceitos para criar representações e resolver problemas” (p. 7), ou

seja, a resolução de problemas passa a ser vista apenas como uma aplicação de conceitos e procedimentos, dando grande importância à memorização de regras.

As *Aprendizagens Essenciais de 2018* (ME, 2018) e de 2023 (Carvalho e Silva et al., 2023) recuperaram as ideias do *Programa de Matemática A* de 2001 (Carvalho e Silva et al., 2001), voltando a considerar a resolução de problemas como um tema transversal (ME, 2018), que serve de “contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber” (Carvalho e Silva et al., 2023, p. 5) e que permite “uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática” (p. 5). Para além disso, os dois documentos curriculares reforçam a ideia de que esta capacidade não se deve limitar à memorização de conceitos e procedimentos sem a devida compreensão. A resolução de problemas deve garantir aprendizagens significativas para os alunos, para que estes consigam aplicar os conhecimentos a problemas de diversos contextos:

Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. (p. 5)

A resolução de problemas (na matemática escolar) pode ser perspectivada de três formas diferentes, sendo que pode existir uma sobreposição de mais do que uma delas (Schroeder & Lester, 1989): o ensino *sobre* a resolução de problemas, o ensino *para* a resolução de problemas e o ensino *através* da resolução de problemas.

No ensino *sobre* a resolução de problemas, os alunos aprendem as fases da resolução de problemas, bem como algumas estratégias que podem utilizar em determinados tipos de problemas. Esta perspetiva dá importância ao modelo de Polya (1995), constituído por quatro fases, que serve como guia na organização da resolução de problemas. A primeira fase é a compreensão do problema, em que o aluno deve ser capaz de identificar o que é dado, o que é necessário e como os dados estão relacionados. De seguida, deve-se estabelecer um plano (segunda fase) e executá-lo (terceira fase), podendo ser necessário voltar à segunda fase se o plano escolhido não for adequado para a resolução do problema. Por fim, o aluno deve verificar a solução, confirmando que está de acordo com o enunciado do problema. Esta análise do resultado e da

estratégia que permitiu atingi-lo possibilita a consolidação dos conhecimentos e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Contudo, o ensino *sobre* resolução de problemas considera a resolução de problemas como um tema matemático e isola-a dos conceitos lecionados. Pelo contrário, a resolução de problemas é uma capacidade que deve ser desenvolvida em conexão com os temas abordados, dado que não existem evidências que mostrem que a capacidade de resolução de problemas é melhor quando isolada dos conceitos e procedimentos (Cai & Lester, 2010).

O ensino *para* a resolução de problemas vê esta capacidade como um fim, isto é, o principal objetivo de aprender os conteúdos matemáticos é aplicá-los na resolução de problemas. Nesta perspetiva, a resolução de problemas nunca surge na introdução de novos conceitos, sendo apenas utilizada como forma de os alunos aplicarem os conhecimentos adquiridos (Schroeder & Lester, 1989).

No entanto, a resolução de problemas não deve ser vista apenas como um objetivo na aprendizagem, mas como uma forma de construir conhecimento. O processo de resolução de problemas deve conferir ao aluno novas formas de enfrentar um problema matemático, promovendo a persistência e a confiança dos alunos em situações em que não conseguem encontrar uma solução de forma imediata (NCTM, 2000), o que não acontece quando os problemas são utilizados apenas como fim da aprendizagem.

Por fim, o ensino *através* da resolução de problemas considera que os problemas são a principal forma de aprender matemática, podendo ser utilizados para a introdução de novos conteúdos (Schroeder & Lester, 1989). As orientações curriculares atuais em Portugal para o ensino secundário (ME, 2018; Carvalho e Silva et al., 2023) defendem esta forma de perspetivar o lugar da resolução de problemas no ensino.

No ensino *através* da resolução de problemas, o aluno é parte integrante do seu processo de aprendizagem, não se limitando a ouvir e interiorizar o que o professor ensina (Melo & Justulin, 2019). Os alunos têm um papel ativo na sua aprendizagem na medida em que constroem os próprios conhecimentos, percebendo como podem mobilizar os conhecimentos e as experiências anteriores para aprender novos assuntos (Schroeder & Lester, 1989). Assim, o ensino *através* da resolução de problemas motiva os alunos para aprender matemática, uma vez que lhes permite trabalhar em grupo, expondo as suas ideias e ouvindo as dos colegas, contactar com tarefas desafiantes e ter mais autonomia para construir conhecimento de forma ativa (Melo & Justulin, 2019).

2.2. Contexto das tarefas

Tal como foi referido na secção anterior, Ponte (2005) caracterizou as tarefas, onde se incluem os problemas, de acordo com o seu contexto. O contexto é o “universo experiencial associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana em que o aluno tem maior ou menor experiência pessoal, ou remeter para o universo matemático” (Ponte & Quaresma, 2012, p. 1) e tem um papel fundamental em todos os temas da matemática (Ponte & Quaresma, 2012). Existem três contextos distintos que podem ser encontrados nos problemas: a matemática pura, a realidade e a semirrealidade (Figura 2).

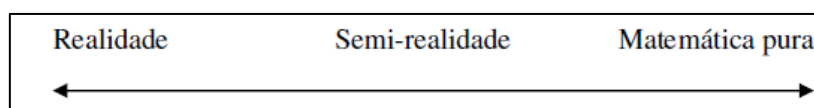


Figura 2 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p. 21)

O contexto de matemática pura está relacionado com o universo matemático, isto é, os problemas com este tipo de contexto são formulados em termos puramente matemáticos (Ponte, 2005). Nos exames nacionais, é possível encontrar várias tarefas com este tipo de contexto, como, por exemplo, a seguinte questão apresentada no Exame Nacional de Matemática A de 2022 (1ª Fase)¹:

A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ é 211. Determine o quinto termo desta progressão.

O contexto é puramente matemático, não sendo feita qualquer referência a situações reais ou próximas da realidade. Já o contexto da realidade enquadra os problemas em situações da vida real, fazendo a ligação com as experiências e vivências dos alunos (Ponte, 2005). Um exemplo de tarefa com contexto real é apresentado abaixo:

Uma pizaria serve duas pizzas redondas de dois tamanhos diferentes, mas com a mesma espessura. A mais pequena tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 euros. A maior tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 euros. Qual das duas pizzas tem um preço mais vantajoso? Explique o seu raciocínio. (OCDE, 1999)

Nesta questão, é apresentado um contexto com que a maioria dos alunos está familiarizada: a comparação de preços é algo que os alunos fazem com regularidade no seu dia-a-dia, quer relativamente ao dinheiro no cartão da escola quer fora deste

¹ https://iave.pt/wp-content/uploads/2022/06/EX-MatA635-F1-2022_net.pdf

contexto. Este tipo de tarefas com alto grau de representatividade, isto é, tarefas que descrevem contextos próximos dos alunos e com os quais estes se conseguem identificar, motivam os alunos, levando-os a envolverem-se na realização das tarefas (Ponte & Quaresma, 2012) e a refletir sobre a presença da matemática na vida real (Skovsmose, 2000). Os problemas de contexto real desenvolvem, assim, o espírito crítico dos alunos e promovem aprendizagens significativas devido à proximidade dos alunos com o que estão a aprender.

Entre estes dois contextos, a matemática pura e a realidade, Skovsmose (2000) sugere um terceiro: a semirrealidade. A semirrealidade “não se trata de uma realidade que ‘de fato’ observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de matemática” (p. 8), isto é, este contexto diz respeito a situações que aparentam ser reais, mas que são distantes da realidade dos alunos. Este tipo de contexto é muito frequente nas tarefas presentes nos manuais escolares (Ponte & Quaresma, 2012). Skovsmose (2000) apresenta um exercício (na aceção de Ponte (2005)), que ilustra este tipo de contexto:

Um feirante A vende maçãs a \$0,85 o kg. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por \$1,00.
 (a) Qual feirante vende mais barato?
 (b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs? (pp. 8-9)

Este exemplo demonstra como a semirrealidade pode ser quase tão abstrata como a matemática pura, visto que a maioria dos alunos nunca viu um feirante a vender maçãs e não é habitual vender 15 kg de maçãs ao quilo – essas quantidades são vendidas em embalagens fechadas, cujo preço difere do preço de 1 kg (Ponte & Quaresma, 2012). Skovsmose (2000) descreve, ainda, a semirrealidade como “um mundo sem impressões dos sentidos (perguntar pelo gosto das maçãs está fora de questão)”, onde “somente as quantidades mensuradas são relevantes” (p. 9).

Para além de problemas que apresentam situações distantes da realidade dos alunos, a semirrealidade pode surgir de uma outra forma: algumas tarefas apresentam uma situação real que é totalmente irrelevante para a sua resolução, tal como a tarefa apresentada na Figura 3. A primeira frase do enunciado e a bicicleta apresentam uma situação aparentemente real, mas que não tem qualquer relevância na resolução da tarefa. Sem estas, a tarefa continuaria a poder ser resolvida pelos alunos e passaria a ser uma tarefa de contexto puramente matemático.

11. A Rita quer comprar uma bicicleta de montanha para praticar desporto ao ar livre.

Na Figura 5, estão representados uma bicicleta e o triângulo $[ABC]$.



Figura 5

Sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B ;
- $\overline{BC} = 432 \text{ mm}$ e $\overline{AB} = 565 \text{ mm}$.

A figura não está desenhada à escala.

Calcula a amplitude do ângulo BAC .

Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, quatro casas decimais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Figura 3 – Questão 11 do Exame Nacional de Matemática de 2023, 9.º ano, 2ª fase²

Durante o processo de aprendizagem na disciplina de matemática, os alunos devem ter contacto com problemas formulados em diferentes contextos, de forma a aplicar os seus conhecimentos em qualquer situação (Ponte & Quaresma, 2012; Skovsmose, 2000). A escolha do contexto das tarefas é importante para a aprendizagem dos alunos e, por isso, o professor deve fazer esta escolha tendo em conta os estudantes e em que fase do percurso de aprendizagem estes se encontram (Ponte & Quaresma, 2012):

Por isso, é uma ideia errada pensar que todas as questões matemáticas têm de ser necessariamente formuladas em termos de realidade extra-matemática. As questões formuladas em contextos de realidade têm o seu papel, mas as questões formuladas em contextos de semi-realidade e em contextos matemáticos têm também um importante papel a desempenhar. Cabe ao professor, decidir qual a natureza das tarefas a propor aos seus alunos, em função do que verifica ser mais aconselhável em cada momento do seu percurso de aprendizagem. (p. 215)

A utilização de diferentes contextos na construção das tarefas matemáticas ganhou visibilidade com o projeto internacional PISA (OCDE, 1999), que salientou a importância da aplicação da matemática em diversas situações (Ponte & Quaresma, 2012). Nestas situações incluem-se a vida pessoal, escolar ou profissional, a comunidade local e a sociedade – “O PISA pressupõe que os alunos precisam ser capazes de lidar com toda a gama de situações, tanto próximas como distantes da sua vida diária” (p. 205),

² https://iave.pt/wp-content/uploads/2023/07/PF-Mat92-F2-2023_net.pdf

aplicando os seus conhecimentos matemáticos em contextos autênticos, isto é, em contextos baseados em experiências e práticas reais (Ponte & Quaresma, 2012).

Também o NCTM (2000) defende que os documentos curriculares de todos os anos de escolaridade, desde o pré-escolar até ao ensino secundário, devem proporcionar aos alunos a resolução de problemas que surgem quer na matemática quer noutros contextos. Desta forma, desenvolvem-se conexões entre as áreas da matemática, entre a matemática e outras áreas do saber e entre a matemática e a vida real (NCTM, 2014).

Ponte e Quaresma (2012) analisaram o papel do contexto em tarefas propostas no âmbito do estudo de Quaresma (2010, citado por Ponte e Quaresma, 2012) com alunos de 5.º ano, cujo objetivo era perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de número racional e equivalência de frações. Verificaram que as tarefas com contexto real trouxeram um maior envolvimento nas mesmas, embora se tenham verificado mais dificuldades de interpretação dos enunciados.

Luzita (2018), na sua investigação cujo objetivo era estudar os fatores que influenciam as atitudes dos alunos do 2.º Ciclo em relação à matemática, constatou que um dos fatores positivos que os alunos identificam para melhorar a sua visão relativamente à matemática é a utilização de contextos para além da matemática pura, uma vez que permitem estabelecer uma ligação entre a disciplina e as situações da vida quotidiana dos alunos.

Kingwell (2022) analisou a influência dos contextos das tarefas nas dificuldades de interpretação de alunos de 11.º ano e verificou que alguns alunos se sentem mais à vontade na interpretação de tarefas de contexto puramente matemático por “compreenderem, quase de forma automática, a que se referiam as palavras e expressões presentes nos enunciados, não revelando tantas dificuldades em enquadrar os conceitos matemáticos nas tarefas” (p. 92). Por outro lado, as tarefas com contexto real ou semirreal provocaram mais dificuldades a estes alunos visto que tinham de “descobrir que conceitos/conteúdos matemáticos teriam que mobilizar” (p. 94) para resolver a tarefa. Contudo, esta ideia não foi consensual, existindo alunos que revelaram ter mais dificuldades em tarefas com contexto puramente matemático por estas “serem abstratas e não terem ligação com a realidade” (p. 92). Estes alunos mostraram-se mais motivados quando confrontados com tarefas de contexto real ou semirreal por estarem

relacionadas com as suas vidas, levando-os a compreender melhor alguns conceitos matemáticos que ainda não dominavam totalmente.

No ano seguinte, Romeiras (2023) desenvolveu um estudo com alunos do mesmo ano de escolaridade que tinha como objetivo estudar as potencialidades das tarefas com contexto da realidade no ensino da matemática. O estudo revelou que os alunos se mostram mais interessados e envolvidos na resolução de problemas com contexto real, por serem mais próximos da sua realidade. Estes problemas geram discussões coletivas mais ricas, em que os alunos se sentem mais dispostos para colocar as suas dúvidas e conseguem fazer conexões com o mundo real. Esta ideia vai ao encontro das conclusões do estudo de Ulandari et al. (2019) sobre a utilização de problemas matemáticos baseados em contextos reais. Os autores defendem que a utilização de problemas baseados neste tipo de contexto melhora a capacidade de resolução de problemas dos alunos e, portanto, deve ser considerada pelos professores no processo de aprendizagem dos alunos.

Rocha et al. (2024) desenvolveram um estudo com alunos do 9.º ano no qual, entre outros aspetos, procuraram compreender o impacto do contexto real dos problemas nas resoluções dos alunos. Os autores concluíram que o contexto real potenciou a compreensão dos conceitos matemáticos, uma vez que permitiu aos alunos dar significado às expressões algébricas e às técnicas aprendidas na aula acerca de inequações. Consideraram ainda que a utilização de problemas com contexto real permite desenvolver o conhecimento matemático com a devida compreensão e evitar a mecanização de procedimentos.

2.3. Dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas

O sucesso dos alunos na resolução de problemas está relacionado com a compreensão da informação dos enunciados dos problemas com que se deparam. A compreensão do enunciado ajuda os alunos de diferentes formas neste processo, na medida em que aumenta a variedade de representações que estes são capazes de utilizar para traduzir a informação presente no enunciado, ajuda na escolha e execução de estratégias de resolução, permite verificar a razoabilidade dos resultados e promove a transferência de conhecimento para outros problemas semelhantes (Schroeder & Lester, 1989).

De facto, a interpretação de enunciados é essencial para a resolução de problemas dado que, quando confrontados com um problema, os alunos devem, em primeiro lugar, compreender o seu enunciado e recolher as informações presentes neste. Desta forma, são capazes de escolher uma estratégia adequada e executá-la para encontrar a solução do problema (Polya, 1995).

Costa e Fonseca (2009) estudaram o desempenho matemático de alunos de 4.º ano na resolução de problemas, comparando-o ao desempenho dos mesmos na área de língua portuguesa. Neste estudo, deparam-se com uma clara relação entre os desempenhos dos alunos nas duas disciplinas, concluindo que “a leitura e interpretação atentas dos enunciados são aspetos indispensáveis na compreensão e resolução dos exercícios e problemas matemáticos” (p. 10). Os alunos com maior facilidade na leitura e que apresentavam um vocabulário mais rico apresentaram um melhor desempenho na resolução de problemas, enquanto o desempenho dos alunos com maiores dificuldades na língua portuguesa e com menor vocabulário foi inferior. A falta de atenção na leitura também foi um fator que influenciou a capacidade de interpretação dos alunos. As autoras refletem sobre a falta de promoção de hábitos de leitura de crianças e jovens, que resulta numa maior dificuldade de interpretação da sua parte:

A educação em Língua Portuguesa, nomeadamente quanto a hábitos de leitura, é insuficiente. Isto pode significar que, na maioria das vezes, os alunos não dedicam tempo suficiente à leitura, seja ela recreativa ou instrutiva, simplesmente porque não possuem hábitos enraizados relativamente a esta atividade. (p. 9)

Uma maior promoção dos hábitos de leitura pode levar a uma evolução dos alunos na interpretação, aumentando a persistência dos alunos, enriquecendo o seu vocabulário e desenvolvendo a comunicação escrita e oral, o que influencia a interpretação de enunciados de tarefas matemáticas.

Também Mesquita (2013) e Nunes (2017) realizaram estudos com alunos de 4.º e 5.º ano, respetivamente, para compreender as dificuldades dos alunos na leitura de textos instrucionais, tendo em vista a resolução de problemas matemáticos. A primeira deparou-se com três estratégias de interpretação distintas: (i) sublinhar todos os dados presentes no enunciado e apresentar os dados, (ii) sublinhar todo o texto e (iii) sublinhar apenas os dados de escrita fonográfica e logográfica e organizar numa caixa, sendo a primeira a mais eficaz uma vez que o facto de os dados estarem destacados permite aos alunos ler mais facilmente. As restantes estratégias revelaram-se pouco eficazes: a segunda estratégia mostra uma falta de interpretação “adequada e sistematizada” (p.

82), que resulta na resolução incorreta dos problemas e, mesmo quando sente dificuldades, o aluno não tem a iniciativa de reler o enunciado, enquanto a terceira estratégia revelou que a aluna não desenvolveu a capacidade de interpretação e de reflexão. A autora destaca ainda que o sucesso da primeira estratégia não é garantido pois “depende do nível de desenvolvimento da capacidade de leitura e de interpretação do aluno” (p. 84). Já a segunda autora concluiu que o desempenho dos alunos em Matemática depende não só das competências específicas desta área, mas também do domínio da língua portuguesa, já que a interpretação de enunciados exige conhecimento da língua, e que existem outros fatores que influenciam o processo de interpretação de enunciados matemáticos, como o excesso de confiança, a distração ou o nervosismo.

Enquanto os estudos das autoras supracitadas envolveram alunos, Pearce et al. (2013) decidiu questionar os professores do ensino básico (do 2.º ao 5.º ano de escolaridade, nos Estados Unidos da América) para identificar as dificuldades que os alunos demonstravam na resolução de problemas e as respetivas causas, assim como perceber quais as estratégias que os professores usavam para superar estas dificuldades. Uma parte significativa dos docentes que participaram neste estudo apontou a dificuldade de leitura e compreensão de problemas como uma das principais dificuldades demonstrada pelos alunos. Para combater esta dificuldade, a maioria dos professores apresenta como estratégia ensinar os alunos a identificar palavras-chave no enunciado, rodeando, sublinhando ou destacando os dados fornecidos, algo que Mesquita (2013) também apresentou como uma possível estratégia de interpretação.

O estudo de Phonapichat et al. (2014) teve como objetivo analisar as dificuldades na resolução de problemas matemáticos em alunos do 5.º e 6.º anos tailandeses. Os autores concluíram que os alunos têm dificuldades ao nível da interpretação e da seleção de informação dos enunciados de problemas. Para além disso, constataram que os alunos têm tendência a tentar adivinhar a resposta quando são confrontados com problemas que não percebem e não gostam de ler problemas longos. Tal como Costa e Fonseca (2009), referem que existe uma relação entre o desempenho em matemática e a capacidade de leitura, ou seja, os alunos com melhores capacidades de leitura apresentam um melhor desempenho na compreensão de enunciados de problemas matemáticos.

Também Hadi et al. (2018) partilham a ideia de que os alunos têm dificuldades na compreensão do enunciado do problema e na seleção de informação presente neste. Os alunos que apresentam estas dificuldades cometem erros ao nível da escrita dos

dados fornecidos e do que é pedido, não sendo depois capazes de estabelecer uma estratégia para encontrar a solução do problema.

O estudo de Ponte et al. (2012), com alunos de 5.º e 7.º ano, mostrou que uma das dificuldades mais significativas apresentadas pelos alunos estava relacionada com a compreensão do enunciado das questões, principalmente quando se deparam com conceitos cujo significado não lhes é familiar. Prates et al. (2011) analisaram as estratégias utilizadas por alunos de 10.º ano no estudo das funções e as dificuldades manifestadas na sua resolução, verificando que as principais dificuldades surgem ligadas à compreensão, nomeadamente na utilização da informação dada e na interpretação das soluções obtidas.

Menina (2009) analisou o processo de resolução de problemas de alunos do 9.º ano, de forma a perceber em que momentos deste processo ocorrem as dificuldades dos alunos e como estas se evidenciam. Verificou que as primeiras dificuldades surgem na interpretação do enunciado do problema e que se devem a dois fatores. O primeiro relaciona-se com o contexto do problema, sendo que os alunos apresentam mais dificuldades quando a situação apresentada não lhes é familiar. O segundo fator diz respeito ao texto linguístico, isto é, os termos apresentados e a utilização de uma linguagem matemática.

Para além disso, constatou, também, que os alunos não verificam a solução obtida no final da resolução do problema e que esta situação ocorre devido a uma má compreensão do seu enunciado. A autora defende que a falta de hábitos de leitura é um dos fatores que afeta a compreensão dos enunciados por parte dos estudantes e que alunos com maior experiência de leitura têm maior capacidade de interpretação:

A primeira fase diz respeito à compreensão do problema e consequentemente à interpretação do enunciado. Nesta fase é perceptível a falta de aposta dos alunos na leitura e releitura e nas verbalizações oral e escrita. O aluno com maior capacidade de verbalização e maior experiência de leitura terá um maior conhecimento de factos e de ideias mais abstratas e estará mais confiante com qualquer tipo de enunciado. (Menina, 2009, p. 208)

Assim, independentemente dos conhecimentos matemáticos do aluno, o enunciado do problema pode constituir um obstáculo para aqueles que não são capazes de o interpretar. Uma má interpretação do enunciado pode levar ao registo de dados incorretos e esta dificuldade pode dever-se ao contexto do problema:

Ao ler e processar um enunciado, o aluno elabora o seu próprio registo do que é pedido. Mas ao fazê-lo, perde, por vezes, informações relevantes e noutros casos confunde os dados do problema com o propósito do mesmo. Os enunciados dos problemas contêm descrições, afirmações, pressupostos, informação, números, esquemas, todo um conjunto de elementos que têm de ser interpretados. O registo em que um problema (de palavras) é normalmente formulado não é idêntico ao de uma pergunta direta e puramente matemática, levantando, portanto, um obstáculo que não estará necessariamente relacionado com os conhecimentos matemáticos do aluno. (Menina, 2009, p. 214)

As dificuldades de interpretação de enunciados de problemas por parte de alunos de 9º ano foram a motivação para o estudo de Alves (2020), que tinha como objetivo “apresentar propostas interventivas interdisciplinares, mas sem perder de vista as causas estruturais para essa dificuldade de compreensão de situações-problemas apresentada pelos discentes” (p. 2). A autora entrevistou uma professora de português e um professor de matemática de forma a perceber quais as dificuldades de interpretação manifestadas pelos seus alunos e como as superam. Nesta entrevista, o professor de matemática referiu que um dos fatores que permite aos alunos resolver com sucesso os problemas propostos é a tradução da língua materna para linguagem matemática, o que implica o domínio de ambas as linguagens.

De forma a aproximar as disciplinas e, consequentemente, melhorar o desempenho dos alunos na interpretação de enunciados de problemas, a autora sugere algumas práticas interdisciplinares (Alves, 2020). Uma das propostas é a criação de um projeto focado na leitura e na interpretação de textos que incluam dados matemáticos, envolvendo os professores de ambas as disciplinas. Este tipo de iniciativa, para além de ajudar os alunos a melhorar o seu desempenho, ajuda-os a compreender que as disciplinas de matemática e de português estão relacionadas, não sendo totalmente independentes entre si como sugere a estrutura curricular atual.

Também Cagliari (2010) refere a importância do trabalho interdisciplinar entre os professores de português e matemática. O autor defende que deve existir uma maior conexão entre os professores destas duas disciplinas para que os alunos desenvolvam as suas capacidades de interpretação e, consequentemente, melhorem o seu desempenho na disciplina de matemática, nomeadamente na resolução de problemas:

O aluno muitas vezes não resolve o problema de matemática, não porque não saiba matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema. Ele sabe somar, dividir etc., mas ao ler um problema não sabe o que fazer com os números e a relação destes com a realidade a que se referem. Não

adianta dizer que o aluno não sabe nem sequer somar ou dividir números que não apresentam dificuldades, que ele não entende matemática... Porque de facto ele não entende mesmo é o português que lê. Não foi treinado para ler números, relações quantitativas, problemas de matemática. (p. 130)

Kingwell (2022) realizou um estudo cujo objetivo era conhecer quais as dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas de alunos de 11.º ano e quais as suas causas e verificou que estas dificuldades surgem inicialmente na compreensão dos dados e das informações presentes no enunciado e na forma como se articulam com os conhecimentos matemáticos dos alunos. Na Tabela 1, está a síntese apresentada pelo autor relativamente às dificuldades de interpretação sentidas pelos alunos e as suas causas. Apontou como maiores dificuldades a compreensão textual e linguística, a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e suas conexões, a recolha e organização de informação, o enquadramento real e temporal da tarefa e a interpretação dos resultados obtidos. Estas dificuldades surgiram devido a diversos fatores, em que se incluem a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado ou a procura imediata da solução. Para além disso, a falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos “impediu que os alunos interpretassem muitas das palavras e expressões que surgiam, dando origem a que os dados e informações não fossem recolhidos da melhor forma” (p. 91). A falta de domínio da língua portuguesa por parte dos alunos bem como a extensão dos enunciados e a forma como estes estavam escritos, nomeadamente as palavras e expressões utilizadas, resultaram em dificuldades de interpretação dos enunciados que lhes eram apresentados:

Também o domínio da língua portuguesa se revelou um entrave na leitura dos enunciados. Em diversas situações, os alunos não compreendiam a que se referia uma informação ou um dado, simplesmente por não interpretarem bem o sentido das frases. Outras, devia-se ao facto de estarem presentes enunciados extensos, o que implicou dificuldades ao nível da seleção de informação. Tornaram-se evidentes dificuldades dos alunos, não tanto na matemática, mas, sim, no domínio da língua materna (...) (pp. 91-92)

Dificuldades	Causas
Compreensão textual/ linguística	• Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado; • Falta de concentração; • Estrutura e extensão do enunciado; • Falta de domínio da língua portuguesa; • Construção frásica do enunciado; • Compreensão da situação real da tarefa; • Procura imediata da solução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.
Compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos	• Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos.
Recolha e organização de informação	• Leitura rápida e pouco detalhada da tarefa, desprezando informações e dados relevantes; • Falta de concentração; • Estrutura e extensão do enunciado; • Compreensão da situação real da tarefa; • Procura imediata da solução; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Falta de prática na recolha e organização de dados.
Conexões de conceitos e conteúdos matemáticos	• Leitura rápida e pouco detalhada das tarefas; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução.
Compreensão do enquadramento real da tarefa	• Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.
Compreensão do enquadramento temporal da tarefa	• Compreensão da situação real da tarefa; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.
Interpretação do resultado obtido	• Compreensão da situação real da tarefa; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na verificação de resultados.

Tabela 1 – Dificuldades de interpretação de tarefas e suas causas (Kingwell, 2022, pp. 89-91)

Face às dificuldades dos alunos observadas, Kingwell (2022) refere a importância de promover “intervenções, em sala de aula, que permitam dar resposta a essas dificuldades e contrariar esta situação vivenciada por vários alunos” (p. 96). O autor defende que estas intervenções podem melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas uma vez que a “influência da interpretação numa tarefa é muito significativa na sua resolução” (p. 96), isto é, uma maior capacidade de interpretação permite aos alunos compreender melhor o que é dado e o que é pedido no enunciado da tarefa, de forma a escolher uma estratégia que lhe permita chegar à solução da tarefa.

Martins e Martinho (2023) e Romeiras (2023) conduziram estudos com alunos de 11.º ano, com diferentes objetivos: no primeiro, as autoras pretendiam perceber quais as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e na comunicação escrita, enquanto, no segundo, a autora tinha como objetivo estudar as potencialidades das tarefas com contexto da realidade no ensino da matemática. Apesar de a interpretação de enunciados não ser o foco de nenhum dos estudos, ambos revelaram dificuldades dos alunos a este nível, o que influenciou o seu desempenho na resolução dos problemas.

No estudo de Martins e Martinho (2023), alguns dos grupos participantes não conseguiram resolver o problema e apresentar a solução do mesmo devido a dificuldades de interpretação do enunciado. Na visão das autoras, estas dificuldades podem ter surgido devido à extensão do enunciado do problema, algo também referido por Phonapichat (2014). Para superar esta dificuldade, referem que os professores devem encorajar os alunos a fazer uma leitura cuidada do enunciado, restringindo-se aos dados que são apresentados sem a necessidade de inventar dados que não existem.

De facto, num estudo com um objetivo semelhante ao de Martins e Martinho (2023), Tambychic e Meerah (2010) já tinham verificado a existência desta dificuldade na resolução de problemas. Apesar de apresentarem outras dificuldades observadas, como a dificuldade sobre conhecimentos matemáticos ou de visualização espacial, a dificuldade de interpretação foi a mais crítica: “embora os alunos tivessem outras capacidades matemáticas, sem a capacidade de interpretar a informação, não eram capazes de perceber e fazer conexões entre as informações do problema” (p. 150). Isto significa que as dificuldades de interpretação do enunciado podem levar os alunos a não conseguir dar sentido à informação do enunciado e, consequentemente, não conseguir escolher uma estratégia para resolver o problema.

A análise da literatura acerca da resolução de problemas, do contexto das tarefas e das dificuldades de interpretação permitiu-me conhecer e perceber melhor estas temáticas, algo essencial para realizar este estudo. Para além disso, constatei que as dificuldades de interpretação podem surgir nos diferentes níveis de ensino, desde o primeiro ciclo do ensino básico ao ensino secundário, o que demonstra a importância deste assunto e da criação de estratégias para mitigar as referidas dificuldades.

3. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, é feita uma caracterização do contexto escolar onde foi desenvolvido este estudo e uma descrição das aulas sobre progressões aritméticas e geométricas lecionadas por mim. De seguida, são apresentados os participantes deste estudo e os instrumentos e procedimentos de recolha de dados e é explicado como foram acauteladas as questões de natureza ética relativas a este estudo.

3.1. Caracterização do contexto escolar

Este estudo ocorreu no âmbito da minha PES numa Escola Básica e Secundária da Área Metropolitana do Porto. A escola é sede de um agrupamento constituído por dez estabelecimentos de ensino de dois concelhos do distrito do Porto, sendo eles um jardim de infância, oito escolas de 1.º ciclo do Ensino Básico e a escola sede, cuja oferta educativa inclui o 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e o Ensino Secundário (cursos científico-humanísticos e cursos profissionais).

A população estudantil do agrupamento ronda os 2000 alunos, distribuídos pelos dez estabelecimentos de ensino. Neste agrupamento, cerca de 10% dos alunos têm nacionalidade estrangeira (três em cada 20 desses alunos frequentam a disciplina de Português Língua Não Materna) e aproximadamente 7% dos alunos beneficiam de medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão do tipo seletivo e adicional, de acordo com o Decreto-Lei nº 54/2018 de 6 de julho.

O agrupamento situa-se num território económica e socialmente desfavorecido, pelo que está incluído no programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP). Segundo a informação que pude consultar no último relatório TEIP deste agrupamento, ao longo dos últimos anos, verificou-se uma evolução positiva do desempenho dos alunos devido a este programa.

Durante a minha PES, tive a oportunidade de assistir e dar aulas a três turmas: duas turmas do 11.º ano de Ciências e Tecnologias e uma turma do 7.º ano. Uma vez que a professora cooperante não era a professora titular desta última turma e apenas fazíamos coadjuvação em dois dos cinco tempos semanais nesta turma, considerei que não seria fácil desenvolver um estudo com os alunos do 7.º ano. Relativamente às turmas do 11.º ano, enquanto os alunos de uma delas eram muito reservados e pouco participativos,

os alunos da outra turma eram exatamente o oposto: a maioria era bastante comunicativa e participativa, estando à vontade para expor as suas dúvidas.

Tendo em conta o tipo de dados que seriam necessários recolher para responder às minhas questões de investigação (entrevistas com tarefas), a comunicação oral dos alunos era algo fundamental e, como tal, optei por escolher como participantes no meu estudo alguns alunos da segunda turma referida. A turma selecionada é, então, uma turma do 11.º ano de Ciências e Tecnologias constituída por 18 alunos (9 elementos do sexo masculino e 9 elementos do sexo feminino), sendo que há um elemento da turma com histórico de reprovações e um aluno que beneficia de medidas de suporte à aprendizagem do tipo seletivo, de acordo com o Decreto-Lei nº 54/2018 de 6 de julho. Em geral, é uma turma bastante empenhada, envolvendo-se nas tarefas propostas e participando nas discussões coletivas associadas, embora existam momentos de dispersão e conversa paralela, em que as professoras têm a necessidade de chamar os alunos à atenção.

No que diz respeito ao desempenho na disciplina de matemática, esta turma é bastante heterogénea, tendo-se registado classificações entre oito e vinte valores no ano letivo anterior. Apesar disso, é visível a entreajuda entre alunos com classificações muito diferentes, o que dá alguma confiança aos alunos com pior desempenho para resolver as tarefas que lhes são propostas e participar nas discussões coletivas.

3.2. Aulas sobre progressões aritméticas e geométricas

As aulas dedicadas às progressões aritméticas e geométricas ocorreram entre 15 e 27 de janeiro de 2025. Assumi as quatro aulas de 50 minutos destinadas a este assunto, sendo que as duas primeiras foram dedicadas às progressões aritméticas e as restantes às progressões geométricas (Tabela 2) e os alunos tiveram um momento de avaliação sumativa entre estas aulas no dia 21 de janeiro.

Data	Duração	Subtópico
15 de janeiro	50 minutos	Progressões aritméticas (introdução)
20 de janeiro	50 minutos	Progressões aritméticas (consolidação)
22 de janeiro	50 minutos	Progressões geométricas (introdução)
27 de janeiro	50 minutos	Progressões geométricas (consolidação)

Tabela 2 – Organização das aulas sobre progressões aritméticas e geométricas

As aulas de introdução às progressões foram planeadas de acordo com os fundamentos do ensino exploratório, uma abordagem de ensino em que a aprendizagem dos alunos ocorre através do trabalho com tarefas matemáticas ricas e da partilha de ideias com os colegas e o professor (Oliveira et al., 2013). Assim, os alunos conseguem dar significado às suas aprendizagens e desenvolvem capacidades matemáticas transversais, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011).

Uma aula de ensino exploratório está dividida tipicamente em quatro fases: *lançamento* da tarefa, *exploração* pelos alunos, *discussão* e *synetização*, sendo que as duas últimas podem ocorrer em simultâneo e pode também dar-se o caso de ser necessário orientar uma discussão durante a fase de exploração da tarefa pelos alunos. Na primeira fase, é apresentada uma tarefa matemática com alguma exigência cognitiva (Stein & Smith, 2009) aos alunos, geralmente um problema ou uma investigação (na aceção de Ponte, 2005), e o professor deve garantir a compreensão do objetivo da tarefa por parte dos alunos e a existência dos recursos necessários para a sua resolução (Oliveira et al., 2013). A escolha de uma tarefa adequada por parte do professor é fundamental para que se cumpram os objetivos da aula exploratória, sendo também necessário ter em conta as orientações curriculares em vigor (Canavarro, 2011).

Na segunda fase, os alunos resolvem de forma autónoma a tarefa proposta, individualmente ou em pequenos grupos, e o professor deve garantir o envolvimento ativo de todos os alunos. Neste momento da aula, as intervenções do professor não devem reduzir o nível de exigência cognitiva das tarefas (Stein & Smith, 2009) e não devem “uniformizar as estratégias de resolução dos diversos grupos” (Oliveira et al., 2013, p. 31), o que inviabilizaria a discussão da fase seguinte. Durante esta fase, o professor deve selecionar diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos e sequenciá-las, isto é, definir a ordem pela qual serão apresentadas à turma (Stein et al., 2008; Smith & Stein, 2018).

A fase de discussão é um momento partilhado por toda a turma, em que os alunos apresentam e explicam as suas resoluções e em que todos devem participar de forma ativa. O papel do professor é criar um ambiente propício à apresentação e discussão das várias estratégias, garantindo que as explicações apresentadas são matematicamente corretas, e gerir as interações entre os alunos, incentivando-os a perceber as diferenças das estratégias e a sua eficácia matemática (Stein et al., 2008; Smith & Stein, 2018). Na fase final da aula, o professor deve auxiliar os alunos a reconhecer os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos no decorrer da aula

e a estabelecer conexões com aprendizagens anteriores, ou seja, esta fase serve como uma sistematização em conjunto com os alunos das aprendizagens resultantes da aula (Oliveira et al., 2013).

As aulas sobre progressões aritméticas aconteceram nos dias 15 e 20 de janeiro. Na primeira aula (Anexo 1), foi proposta aos alunos uma tarefa introdutória criada por mim sobre estas progressões de forma a explicar o que é uma progressão aritmética e introduzir o termo geral, a definição da progressão por recorrência e a soma dos n primeiros termos da progressão (Figura 4).

Considera a seguinte progressão aritmética:

1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

- 1.** Qual a razão desta progressão?
- 2.** Indica o termo geral desta progressão.
- 3.** Qual a soma dos:
 - 3.1.** 5 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.2.** 8 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.3.** 10 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.4.** 15 primeiros termos da progressão aritmética?

Figura 4 – Tarefa de introdução às progressões aritméticas da aula de 15 de janeiro

Em geral, os alunos trabalharam bem, resolvendo a tarefa proposta e participando na discussão coletiva sobre a mesma. Os alunos conseguiram rapidamente encontrar a expressão do termo geral da progressão visada nesta tarefa e foi também com facilidade que deduziram a expressão do termo geral de qualquer progressão aritmética. Durante esta fase da aula, enquanto tentava selecionar as estratégias no cálculo da soma para serem apresentadas na fase de discussão, percebi que não existiam muitas estratégias diferentes, sendo que a maioria dos alunos apenas registou no caderno o resultado de cada soma, sem apresentar os cálculos, o que me dificultou esta escolha dos alunos. Depois de apresentados os resultados das somas no quadro, pedi aos alunos que calculassem a soma do primeiro com o n -ésimo termo para cada caso (5.º, 8.º, 10.º e 15.º termos, respetivamente). Com base nesses valores, os alunos conseguiram deduzir a expressão do cálculo da soma dos n primeiros termos. A aula terminou com uma síntese sobre todos os conceitos introduzidos, que os alunos registaram no caderno.

A segunda aula (Anexo 2) foi dedicada à consolidação deste assunto. Comecei por propor alguns exercícios, em que era pedida a soma de n termos ou o termo geral de uma progressão aritmética, para que os alunos pudessem consolidar os seus conhecimentos sobre as progressões aritméticas e, posteriormente, propus a resolução de três problemas. No primeiro problema proposto (Figura 5), cujo contexto era puramente matemático, os alunos tiveram alguma dificuldade em perceber como iam relacionar os três termos consecutivos de forma a determinar o valor de x e, consequentemente, identificar os três termos. Como tal, questionei-os sobre qual a relação entre dois termos consecutivos de uma progressão aritmética e os alunos conseguiram indicar que a diferença entre ambos correspondia à razão da progressão. Depois de registarem essa informação, conseguiram escrever a razão como duas diferenças distintas, igualando-as e resolvendo a equação de segundo grau para determinar os valores de x . Alguns alunos não perceberam que teriam de determinar os três termos consecutivos para cada valor de x obtido, pelo que tive de realçar esse facto, mas, após a minha intervenção, conseguiram determinar esses termos e a razão da progressão.

9. Três termos consecutivos de uma progressão aritmética são dados, para um determinado valor de x , respetivamente, por $2x + 1$, $x^2 + 1$ e $5x - 2$. Determine esses três termos.

Figura 5 – Primeiro problema proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro

De seguida, propus a resolução de um problema do manual (Figura 6). Este problema tinha novamente um contexto puramente matemático.

58 Três números estão em progressão aritmética (isto é, são termos consecutivos de uma progressão aritmética), sendo que a sua soma é 3 e o seu produto -3.
Quais são os números?

Figura 6 – Segundo problema proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 179)

Neste problema, as dificuldades surgiram na atribuição de significado dos dados apresentados, isto é, os alunos identificaram os três termos consecutivos como x , y e z ou a , b e c , não conseguindo utilizar a informação de que eram termos consecutivos. Para esclarecer esta dúvida, escrevi no quadro um exemplo, apresentando o valor de um termo (5) e da razão (2) da progressão aritmética e questionei-os qual seria o termo seguinte. Os alunos responderam rapidamente que o valor desse termo seria 7 pois tinham de somar a razão ao termo conhecido. Voltei, então, ao problema e questionei

qual seria, sendo x um termo, o termo seguinte. Nessa altura, os alunos perceberam que os termos a considerar seriam x , $x + r$ e $x + r + r$ (que depois reescreveram como $x + 2r$) ou a , $a + r$ e $a + 2r$ e construíram o sistema de duas equações a duas incógnitas com as informações da soma e do produto dos três termos consecutivos, resolvendo-o e determinando os números pedidos.

Por fim, propus a realização um problema com contexto semirreal (Figura 7), cujo objetivo era perceber como os alunos reagiam a problemas com contextos para além da matemática pura, sendo que este último era o tipo de contexto mais frequente na maioria dos problemas propostos pela professora cooperante nas aulas.

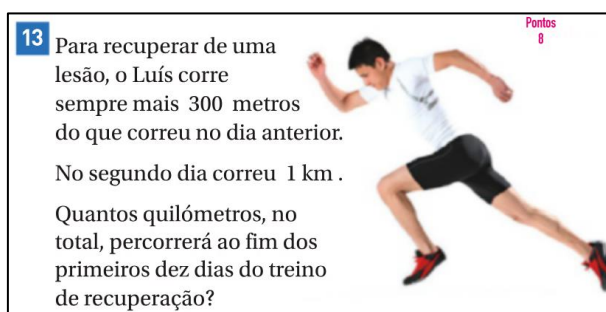


Figura 7 – Problema com contexto semirreal proposto aos alunos na aula de 20 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 181)

Pedi a um aluno que lesse o enunciado em voz alta e, depois de o fazer, perguntei à turma quais os dados apresentados no enunciado e o que era pedido. Um dos alunos com melhor desempenho na disciplina de matemática respondeu rapidamente à minha pergunta, traduzindo para linguagem matemática os dados do problema. Depois de os dados estarem traduzidos, os alunos não tiveram dúvidas e conseguiram encontrar a solução. Apercebi-me, nessa altura, que tinha diminuído o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 2009) e tornado o problema num exercício quando o aluno apresentou os dados em linguagem matemática, não lhes dando a oportunidade de interpretar o enunciado e recolher as informações do mesmo. A falta de experiência não me permitiu antecipar esta possibilidade, mas percebi que não podia voltar a repetir este erro em aulas futuras.

As aulas sobre progressões geométricas ocorreram nos dias 22 e 27 de janeiro, sendo a sua organização semelhante à apresentada para as progressões aritméticas (Anexos 3 e 4). A tarefa introdutória proposta (Figura 8), criada por mim, foi bastante semelhante à tarefa introdutória das progressões aritméticas e tinha os mesmos objetivos desta.

Considera a seguinte progressão geométrica:

$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$

1. Qual a razão desta progressão?
2. Indica o termo geral desta progressão.
3. Qual a soma dos:
 - 3.1. 4 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.2. 9 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.3. 12 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.4. 15 primeiros termos da progressão geométrica?

Figura 8 – Tarefa de introdução às progressões geométricas da aula de 22 de janeiro

A atitude dos alunos perante esta tarefa foi semelhante à revelada na primeira aula, tendo-se mostrado interessados e envolvidos na tarefa. Uma vez que já conheciam a expressão da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética, alguns alunos pensaram que podiam utilizar essa expressão nas progressões geométricas, pelo que foi necessário explicar-lhes que ainda não conheciam a expressão da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica e que esta era distinta da que os alunos estavam a usar, pelo que não podiam utilizar a expressão relativa às progressões aritméticas. Nesta aula, como verifiquei que não havia diferentes estratégias no cálculo das somas pedidas e que os alunos estavam a demorar muito tempo a calculá-las, decidi alterar o que tinha planeado, abdicando do ambiente exploratório e iniciando a correção da tarefa até à questão 3.2. De seguida, apresentei a expressão da soma de n termos consecutivos da progressão geométrica em causa e pedi não só que verificassem as somas que já tinham calculado, mas também que calculassem as restantes. Como um dos pares já tinha calculado as quatro somas pedidas sem o apoio da expressão, aproveitei para lhes perguntar se tinham obtido os mesmos valores, mostrando à turma que a expressão apresentada permite calcular de uma forma mais rápida a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica. Tal como na aula anterior, foi feita uma síntese sobre todos os conceitos introduzidos, que os alunos registaram no caderno.

Na última aula dedicada às progressões, propus a resolução de alguns exercícios e problemas sobre as progressões geométricas (Anexo 4). Depois de os alunos resolverem os quatro exercícios propostos, em que era pedida a soma de n termos ou o termo geral de uma progressão geométrica, propus três problemas.

O primeiro problema proposto (Figura 9) apresentava uma progressão geométrica de razão positiva em que só eram conhecidos o terceiro e o nono termos. Neste problema, a maioria dos alunos conseguiu escrever o nono termo como $u_9 = u_3 \times r^6$, sendo r a razão da progressão, mas alguns alunos confundiram as duas progressões, somando a razão multiplicada por 6. Questionei os alunos sobre a relação entre dois termos consecutivos numa progressão geométrica, levando-os a perceber o erro cometido e a corrigi-lo.

12. Considere uma sucessão (u_n) tal que:
- (u_n) é uma progressão geométrica de razão positiva;
 - $u_3 = 8$ e $u_9 = 64$
- Qual é a soma dos 10 primeiros termos desta sucessão?
- (A) $124(1 + \sqrt{2})$ (B) $120(1 + \sqrt{2})$
 (C) $66(1 + \sqrt{2})$ (D) $248(1 + \sqrt{2})$

Figura 9 – Primeiro problema proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro

Depois de calcularem os dois valores da razão obtidos através da equação apresentada acima, os alunos voltaram a apresentar dificuldades na seleção do valor. Convidei-os a reler o enunciado, o que lhes permitiu ler a informação sobre o sinal da razão e continuar a sua resolução. O cálculo da soma dos 10 primeiros termos não originou dificuldades e os alunos conseguiram encontrar a solução do problema.

No segundo problema (Figura 10), de contexto puramente matemático, os alunos recordaram o que tinham feito num dos problemas das aulas de progressões aritméticas que incluía três termos consecutivos e conseguiram escrevê-los recorrendo à razão.

- 51 A soma de três termos consecutivos de uma progressão geométrica é 52.
- Se adicionarmos 8 ao termo intermédio, os três números passam a ser termos consecutivos de uma progressão aritmética.
- Quais são os números?

Figura 10 – Segundo problema proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 178)

Contudo, verificaram-se algumas dificuldades em traduzir a segunda frase para uma equação matemática. Pedi aos alunos que comesçassem por escrever os novos termos, dado que o segundo seria alterado, e perguntei qual a relação entre dois termos consecutivos de uma progressão aritmética, o que os levou a perceber que a diferença entre o segundo e o primeiro termos era igual à diferença entre o terceiro e o segundo

termos. Posteriormente, os alunos manifestaram algumas dificuldades na resolução do sistema de duas equações, mas, após superar essas dificuldades, conseguiram identificar os três números pedidos.

O último problema proposto foi um problema com contexto semirreal (Figura 11). Desta vez, pedi a um aluno que lesse o enunciado em voz alta, mas deixei que o interpretassem e resolvessem de forma autónoma, de forma a não cometer novamente o erro que tinha cometido na segunda aula. Neste problema, os alunos tiveram muitas dificuldades em interpretar as informações dadas no enunciado, mas, como a minha colega de estágio ia analisar as suas resoluções a este problema no âmbito da sua intervenção pedagógica, não pude intervir antes destas serem recolhidas.



Figura 11 – Problema com contexto semirreal proposto aos alunos na aula de 27 de janeiro (Neves et al., 2024, p. 179)

Assim que as resoluções foram recolhidas, criei um pequeno momento de discussão em que dois alunos apresentaram resoluções distintas: a primeira aluna considerou o primeiro termo da progressão $u_1 = 3$ e calculou a soma dos 7 primeiros termos, somando, depois, o mentiroso; o segundo aluno considerou o mentiroso como o termo inicial, isto é, $u_1 = 1$, e calculou a soma dos 8 primeiros termos. A apresentação das duas resoluções permitiu mostrar aos alunos que não existe apenas uma resolução correta e relacionar as duas estratégias utilizadas, mostrando que a primeira resolução considerava os termos de ordem 2 a 8 da segunda resolução. No final da aula, os alunos admitiram que sentiram algumas dificuldades em recolher os dados do problema devido à extensão do enunciado, algo que coincide com o que Phonapichat (2014) concluiu no seu estudo.

3.3. Instrumentos e processos de recolha de dados

Este estudo tem como objetivo perceber quais são as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos e quais as suas causas. Dado que este objetivo procura compreender os fenómenos na sua complexidade, foi realizado um estudo seguindo uma abordagem de natureza qualitativa e carácter interpretativo (Bogdan & Bicklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008).

A investigação qualitativa é descritiva e indutiva, isto é, os dados são recolhidos “em forma de palavras ou imagens e não de números” (Bogdan & Bicklen, 1994, p. 48) e a análise destes dados não tem como objetivo confirmar hipóteses definidas previamente. Neste tipo de investigação existe um maior interesse pelo processo do que pelos resultados (Carmo & Ferreira, 2008), o que se verifica neste estudo dado que o meu objetivo é perceber quais são as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas e não saber se conseguem ou não encontrar a solução dos problemas.

Na investigação qualitativa, as conclusões são construídas à medida que os dados recolhidos são analisados. Para além disso, os resultados obtidos não devem ser generalizados, refletindo apenas sobre as conclusões do estudo no ambiente onde este se desenvolveu. Neste estudo, assumi o papel de investigadora, que constitui o principal instrumento de recolha de dados, e estes foram recolhidos no ambiente natural dos participantes, a escola, através do contacto direto entre os alunos e a investigadora (Bogdan & Bicklen, 1994). Os dados foram recolhidos através de diferentes instrumentos de recolha de dados: entrevistas com tarefas, recolha de produções escritas e uma entrevista final, como descreverei mais à frente.

3.3.1. Escolha dos participantes

Para este estudo, foram selecionados seis alunos da turma referida na secção 3.1, com diferentes níveis de desempenho, sendo este grupo composto por três alunos de cada género. Estes alunos obtiveram classificações finais da disciplina de matemática no 10.º ano entre nove e dezassete valores e classificações entre onze e dezasseis nesta disciplina no 1.º período do ano letivo 2024/2025.

Os alunos escolhidos são comunicativos, conseguindo expressar o seu pensamento e as estratégias utilizadas na resolução das tarefas e estão à vontade para expor as suas dificuldades. Estas características são bastante importantes para que as entrevistas com tarefas sejam bem-sucedidas e justificam a escolha destes alunos.

3.3.2. Entrevistas com tarefas

Uma vez que pretendia identificar as dificuldades dos alunos ao nível da interpretação de enunciados de problemas, era necessário ter acesso ao seu pensamento e, para isso, optei por entrevistas com tarefas, que foram o principal instrumento de recolha de dados. Para além disso, a leitura de estudos semelhantes a este (e.g., Nunes, 2017; Kingwell, 2022) influenciaram a escolha deste método de recolha de dados.

Estas entrevistas são semiestruturadas, isto é, baseiam-se num guião elaborado previamente, em que o investigador define “numa ordem lógica (...), o essencial do que se pretende obter” (Amado, 2014, p. 208). Contudo, no momento da interação com o entrevistado, o entrevistador tem uma grande liberdade para explorar outros temas que possam surgir no decorrer da conversa. Assim, não existe uma rigidez na ordem das questões nem uma limitação nas questões a colocar, permitindo ao investigador escolher o que é mais relevante em cada momento, tendo em conta as respostas dadas pelo entrevistado (Amado, 2014).

As entrevistas com tarefas baseiam-se em tarefas matemáticas previamente selecionadas, envolvendo um sujeito, que resolve os problemas (neste caso, os alunos), e um entrevistador, que interagem relativamente à tarefa proposta pelo segundo (Goldin, 2020). Esta técnica foca-se na verbalização do pensamento dos alunos e é essencial quando é necessário “captar e estudar os processos de pensamento dos atores em ação e interação” (Amado, 2014, p. 235), tal como era pretendido neste estudo.

A recolha das produções escritas dos alunos resultantes das entrevistas baseadas em tarefas também foi um dos métodos de recolha de dados utilizado neste estudo. Optei por recolher as produções escritas dos alunos uma vez que, em conjunto com os dados recolhidos através da gravação áudio das entrevistas com tarefas, me permitia analisar melhor o fenómeno em estudo e, conseqüentemente, dar resposta às questões de investigação definidas. Para além disso, os alunos nem sempre são capazes de expressar oralmente todo o seu pensamento, principalmente quando não se sentem seguros relativamente às suas ideias, pelo que as produções escritas poderiam colmatar esta limitação. De facto, Cohen et al. (2007) referem que as informações obtidas através da recolha documental (no caso deste estudo, as produções escritas durante as entrevistas com tarefas) são essenciais para a compreensão do tema em estudo uma vez que permitem superar as limitações da observação, particularmente ao nível do registo e da interpretação dos dados.

Neste estudo, foram realizadas três entrevistas com tarefas com os seis alunos selecionados numa sala da escola que se encontrava livre no período definido para a sua realização. Depois de conversar com os alunos e ouvir as suas preferências, ficou decidido que as entrevistas com tarefas seriam realizadas durante a tarde de quinta-feira em três semanas distintas, tendo em atenção os momentos de avaliação marcados para o período em que iam ocorrer as entrevistas.

Assim, as entrevistas com tarefas foram marcadas para os dias 6, 20 e 27 de fevereiro, uma vez que os alunos tinham teste no dia 14 de fevereiro e não seria ideal que os alunos se deslocassem à escola na tarde anterior, perdendo tempo de estudo. Cada aluno escolheu o horário que lhe era mais conveniente, sendo-lhe atribuído um período de 20 a 30 minutos para a resolução de cada problema de forma individual.

Cada entrevista foi baseada num só problema e cada problema tinha um tipo de contexto distinto de modo a abranger os três tipos de contexto considerados: o primeiro problema proposto foi um problema de contexto semirreal, seguido por um problema de contexto real e a última entrevista foi dedicada à resolução de um problema de contexto de matemática pura (Skovsmose, 2000). Ao longo das entrevistas, os alunos resolviam o problema proposto, enquanto me transmitiam os seus pensamentos e as suas dificuldades decorrentes do mesmo. O meu papel passava por pedir alguns esclarecimentos acerca do pensamento dos alunos quando estes não verbalizavam o que estavam a pensar e questioná-los caso estes cometessem erros na sua interpretação, de forma que se apercebessem do erro cometido e o corrigissem. Não construí um guião para estas entrevistas com tarefas, mas, decorrente da minha análise acerca das dificuldades que poderiam surgir, pensei em questões diversas que poderia colocar aos alunos de modo a ajudá-los a tomar consciência das suas dificuldades e a ultrapassá-las sozinhos. Em todas as entrevistas, tentei que as minhas intervenções não diminuíssem o nível de exigência cognitiva (Stein & Smith, 2009) inicial dos problemas.

As entrevistas com tarefas foram gravadas integralmente em áudio, utilizando o gravador de voz do meu computador ou telemóvel, e parcialmente transcritas para posterior análise. Considerei que não seria necessário a gravação de vídeo pois seria mais invasiva e deixaria os alunos mais constrangidos durante a entrevista. Dado que a gravação estava a ser feita num dos aparelhos eletrónicos que costumam estar presentes no seu dia-a-dia (telemóvel e computador), os alunos não lhes davam qualquer importância, acabando por se esquecer que estava a ser feito o registo áudio da entrevista. Sem a gravação de vídeo, foi necessário ter uma maior preocupação em

esclarecer alguns momentos quando os alunos apontavam para partes das suas produções escritas, pedindo-lhes que indicassem oralmente ao que se referiam.

Todos os problemas propostos inserem-se no tema lecionado nas aulas descritas, as progressões aritméticas e geométricas. Estes são apresentados de seguida, acompanhados dos seus objetivos de aprendizagem quando aplicados e discutidos nas aulas.

3.3.2.1. Problema da entrevista 1

A primeira entrevista foi realizada na tarde de 6 de fevereiro e visou um problema (Figura 12) com contexto semirreal (Ponte, 2005) já que uma audição de música não representa uma situação próxima da realidade destes alunos e os dados do problema são pouco realistas, isto é, uma pessoa que se esteja a preparar para uma audição para uma orquestra não ensaia só uma ou duas semanas, nem começa por ensaiar apenas 10 minutos no primeiro dia. Para além disso, apesar de poder aumentar o tempo de treino à medida que a audição se aproxima, o período de treino geralmente não segue uma progressão aritmética ou geométrica.

PROBLEMA 1

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

a) Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 1330 minutos no total dos m dias.

Quantos dias praticou a Constança?

b) O Miguel também vai realizar uma audição de violino, mas começou a ensaiar uma semana mais tarde do que a Constança. Como tal, adotou uma estratégia diferente: em cada dia, exceto no primeiro, praticou o dobro do tempo do dia anterior. Ainda assim, praticou menos uma hora do que a Constança.

Quanto tempo praticou o Miguel no primeiro dia?

Figura 12 – Enunciado do Problema 1

O problema é constituído por duas alíneas: a primeira alínea é adaptada da questão 2.3 do Exame Nacional de Matemática A de 2024 (1ª Fase)³ e diz respeito às progressões

³ https://iave.pt/wp-content/uploads/2024/06/EX-MatA635-F1-2024_net.pdf

aritméticas, enquanto a segunda alínea foi criada por mim, de forma a incluir uma progressão geométrica. A adaptação feita na primeira alínea relativamente ao problema original foi a alteração da última frase: no exame, a pergunta era “Determine o valor de m ” e eu alterei para “Quantos dias praticou a Constança?”, para que os alunos tivessem de interpretar o valor de m obtido.

A primeira alínea apresenta os dados organizados por pontos, onde cada ponto dá uma informação para a resolução do problema. Já na segunda alínea a informação está disponibilizada num só parágrafo, o que pode dificultar a extração dos dados do enunciado por parte dos alunos. Esta organização dos dados foi propositada de forma a perceber se a forma como os dados são apresentados altera a capacidade de os alunos recolherem a informação disponível.

Caso este problema fosse proposto em aula e devidamente discutido com a turma, poderia cumprir os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas e progressões geométricas (termo geral e soma de n termos consecutivos);
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 6-7)

Para a resolução deste problema, antecipei algumas dificuldades e possíveis sugestões para as ultrapassar. Na primeira alínea, os alunos podiam manifestar alguma dificuldade em perceber que se tratava de uma progressão aritmética de razão 10. No caso de isso ocorrer, pensei em questionar os alunos “O que acontece ao tempo de treino de um dia para o outro?”, de forma que verificassem que a diferença entre dois termos consecutivos da progressão era constante e igual a 10 minutos. Para além disso, poderiam surgir dificuldades na interpretação do terceiro ponto, confundindo a soma dos m dias com o m -ésimo termo. Nesse caso, poderia questionar os alunos se a Constança tinha treinado 1330 minutos no último dia ou durante os vários dias que dedicou para ensaiar, levando-os a distinguir os conceitos de termo e soma.

No caso da segunda alínea, antevia possíveis dificuldades na recolha de dados, que esperava ajudar a ultrapassar pedindo aos alunos que lessem uma frase de cada vez e me dissessem a informação nela presente pelas suas próprias palavras. Desta forma, os alunos seriam capazes de dar significado aos dados e recolhê-los de forma correta.

Ainda nesta alínea e dado que a anterior apresenta uma progressão aritmética, os alunos podiam não considerar que se tratava de uma progressão geométrica e resolver o problema assumindo que era uma progressão aritmética. Nesse caso, também poderia perguntar “O que acontece ao tempo de treino de um dia para o outro?”, levando-os a perceber que um termo era obtido do anterior multiplicando-o por 2 e, por isso, estavam perante uma progressão geométrica.

3.3.2.2. Problema da entrevista 2

A segunda entrevista foi realizada na tarde de 20 de fevereiro e o problema proposto, criado por mim, tinha um contexto real (Ponte, 2005), baseado nos interesses dos alunos, que pude conhecer através da observação dos seus comportamentos e das suas conversas durante as aulas em que estive presente durante a PES. Na Figura 13, é apresentado o enunciado do problema da entrevista 2 proposto ao António. Para cada aluno, foi elaborado um enunciado com o seu nome e com um evento em que os alunos mostraram interesse: para o António, o Duarte, o Francisco e a Lúcia, o problema referia um torneio em Barcelona da modalidade desportiva que praticavam, enquanto para a Andreia e a Catarina era apresentada uma viagem à mesma cidade (Anexo 6). Os dados fornecidos e o que era pedido em cada questão eram idênticos nos enunciados apresentados a todos os alunos.

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. O clube de futebol do António foi convidado para participar num torneio em Barcelona no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia, de acordo com o escalão em que joga.

Os atletas dos juvenis e dos juniores vão pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
- Em 2025, o António pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar o António?

b) A participação dos atletas no torneio só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes do início do torneio. Qual é a data do início do torneio?

Figura 13 – Enunciado do Problema 2

Este problema é constituído por duas alíneas, sendo que todos os dados necessários para a primeira alínea se encontram organizados por pontos. Para a resolução da segunda alínea, é necessário ter em conta os dados apresentados nesta, bem como a resposta à primeira alínea e a informação de que o pagamento começa em abril e é feito ao dia 5 de cada mês (informação do primeiro ponto).

Caso este problema fosse proposto em aula e devidamente discutido com a turma, poderia cumprir os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas e progressões geométricas (termo geral e soma de n termos consecutivos);
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 6-7)

Neste problema, antecipei três dificuldades e pensei em estratégias para ajudar os alunos a ultrapassá-las. Em primeiro lugar, os alunos podiam manifestar dificuldades em perceber que os valores apresentados nos dois últimos pontos do enunciado correspondiam a somas de vários termos e não apenas a um termo. Caso isso acontecesse, poderia questionar os alunos se o valor correspondia ao que tinham pago nesse mês ou até esse mês, por exemplo, “Pagaste 105€ em setembro ou até setembro?”.

Em segundo lugar, podiam surgir dificuldades relativamente ao tipo de progressão apresentada, isto é, os alunos podiam não ser capazes de perceber que se tratava de uma progressão aritmética. Nesse caso, podia fazer a seguinte pergunta “o que acontece ao pagamento de um mês para o outro?”, para que os alunos verificassem que o pagamento aumentava sempre no mesmo valor, o que corresponde a uma progressão aritmética. Por fim, na segunda alínea, depois de determinarem o dia do último pagamento, existia a possibilidade de os alunos considerarem dois meses antes dessa data em vez de dois meses depois. Perante este erro, poderia questioná-los sobre o mês em que terminaram o pagamento e se o mês indicado para o evento era posterior ao fim do pagamento.

3.3.2.3. Problema da entrevista 3

A terceira e última entrevista foi realizada na tarde de 27 de fevereiro e visou um problema (Figura 14) com contexto de matemática pura (Ponte, 2005), visto que é formulado em termos puramente matemáticos.

PROBLEMA 3

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. Seja x um número inteiro. Sabe-se que:

- x , $x + 4$ e $6x + 6$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) ;
- a soma dos seis primeiros termos é igual a 728.

a) Determina o primeiro termo da progressão.

b) Seja (b_n) uma progressão aritmética cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo de (a_n) e a razão é o dobro desse valor. Qual é o décimo termo de (b_n) ?

Figura 14 – Enunciado do Problema 3

Este problema é constituído por duas alíneas, sendo que a primeira alínea é adaptada da questão 6 do Caderno 1 do Exame Nacional de Matemática A de 2018 (1ª Fase)⁴ e a segunda foi criada por mim. No problema original, os três termos consecutivos são a , $a + 6$ e $a + 18$. Contudo, estes três termos foram utilizados pela professora cooperante num problema (distinto deste) proposto numa aula, pelo que considerei que seria melhor alterar os termos para que os alunos não pensassem que era a mesma tarefa e não houvesse o risco de não lerem o enunciado devidamente. Para além disso, dado que queria identificar a progressão geométrica com a letra a , optei por usar outra letra para a incógnita, substituindo por x .

Os dados da alínea a) estão organizados por pontos e cada ponto dá uma informação para a resolução do problema. A alínea b) pode ser considerada um exercício (na aceção de Ponte (2005)) visto que só é preciso usar o termo geral para descobrir o décimo termo. Contudo, decidi incluí-la, uma vez que os dados não são apresentados da forma direta como os alunos estão habituados, para perceber se a forma como os dados são apresentados revela mais ou menos dificuldades de interpretação.

Caso este problema fosse proposto em aula e devidamente discutido com a turma, poderia cumprir os seguintes objetivos de aprendizagem:

⁴ <https://www.examesnacionais.com.pt/exames-nacionais/12ano/2018-1fase/Matematica-A.pdf>

- Resolver problemas envolvendo sucessões monótonas, sucessões limitadas, sucessões definidas por recorrência, progressões aritméticas e progressões geométricas (termo geral e soma de n termos consecutivos);
- Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões;
- Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. (ME, 2018, pp. 6-7)

As dificuldades antecipadas neste problema foram as seguintes: em primeiro lugar, os alunos podiam não conseguir relacionar os três termos consecutivos, tal como aconteceu num dos problemas de progressões aritméticas proposto por mim na segunda aula sobre este assunto. Nesse caso, a estratégia para ultrapassar esta dificuldade seria semelhante à que utilizei nessa altura: perguntar qual a relação entre dois termos consecutivos de uma progressão geométrica, para que os alunos recordassem que a razão é o quociente entre dois termos consecutivos e conseguissem construir uma equação para determinar o valor de x .

Para além disso, depois de resolver a equação e determinar o valor de x , os alunos podiam considerar que o problema estava concluído, sem completarem a resolução do mesmo. Caso isso acontecesse, deveria questioná-los sobre se a resposta era o valor dessa incógnita, levando-os a perceber que ainda deviam continuar a resolução do problema. Por fim, na segunda alínea, antecipava possíveis dificuldades na recolha de dados, que poderiam ser ultrapassadas caso os alunos lessem uma frase de cada vez e dissessem a informação presente nesta por palavras suas, dando significado aos dados e recolhendo-os de forma correta.

3.3.3. Entrevista final

Com o objetivo de conhecer as perceções dos alunos relativamente às dificuldades de interpretação sentidas e à possível influência do contexto nessas dificuldades, realizei uma entrevista semiestruturada (Amado, 2014) no final das entrevistas com tarefas. O guião que elaborei para esta entrevista pode ser consultado no Anexo 8.

Esta entrevista final foi realizada a pares, escolhidos pelos alunos, no dia 13 de março via TEAMS, plataforma usada habitualmente pelos alunos, para que não se tivessem de deslocar à escola só para este efeito. Optei por não fazer entrevistas individuais dado que as restantes já o tinham sido e, apesar de os alunos selecionados serem

comunicativos nas aulas, alguns tinham-se mostrado bastante tímidos durante as entrevistas com tarefas, talvez por se verem confrontados com uma situação em que se sentiam mais expostos. Desta forma, e para promover alguma discussão entre os alunos acerca das suas opiniões sobre a experiência no estudo, propus a realização de entrevistas a pares. A realização da entrevista com os seis alunos em simultâneo não foi considerada devido à disponibilidade dos alunos.

Cada entrevista durou cerca de 15 minutos e, tal como aconteceu nas entrevistas com tarefas, esta entrevista final foi gravada integralmente em áudio e parcialmente transcrita para posterior análise. Para esta entrevista, a gravação de vídeo era irrelevante para a análise de dados, pelo que apenas foi gravado o áudio e permiti que os alunos escolhessem se queriam ter a sua câmara ligada ou não na videochamada, tendo em conta como se sentiam mais à vontade. Nesta entrevista, os alunos foram convidados a analisar a sua participação no estudo, respondendo a perguntas relacionadas com as questões de investigação. Decidi que este último momento deveria ser uma conversa oral em vez de um questionário escrito pois os alunos têm mais à vontade para falar do que para escrever e, por isso, conseguiria obter mais informações acerca da sua experiência do que se lhes pedisse para preencher um questionário. Para além disso, o facto de ser uma conversa, permitir-me-ia interpelar os alunos, pedindo esclarecimentos sobre as suas respostas, algo que não seria possível com um questionário.

Na Figura 15, é apresentado um esquema com a organização do processo de recolha de dados. Neste esquema, incluem-se as diferentes entrevistas realizadas e as respetivas datas de concretização.

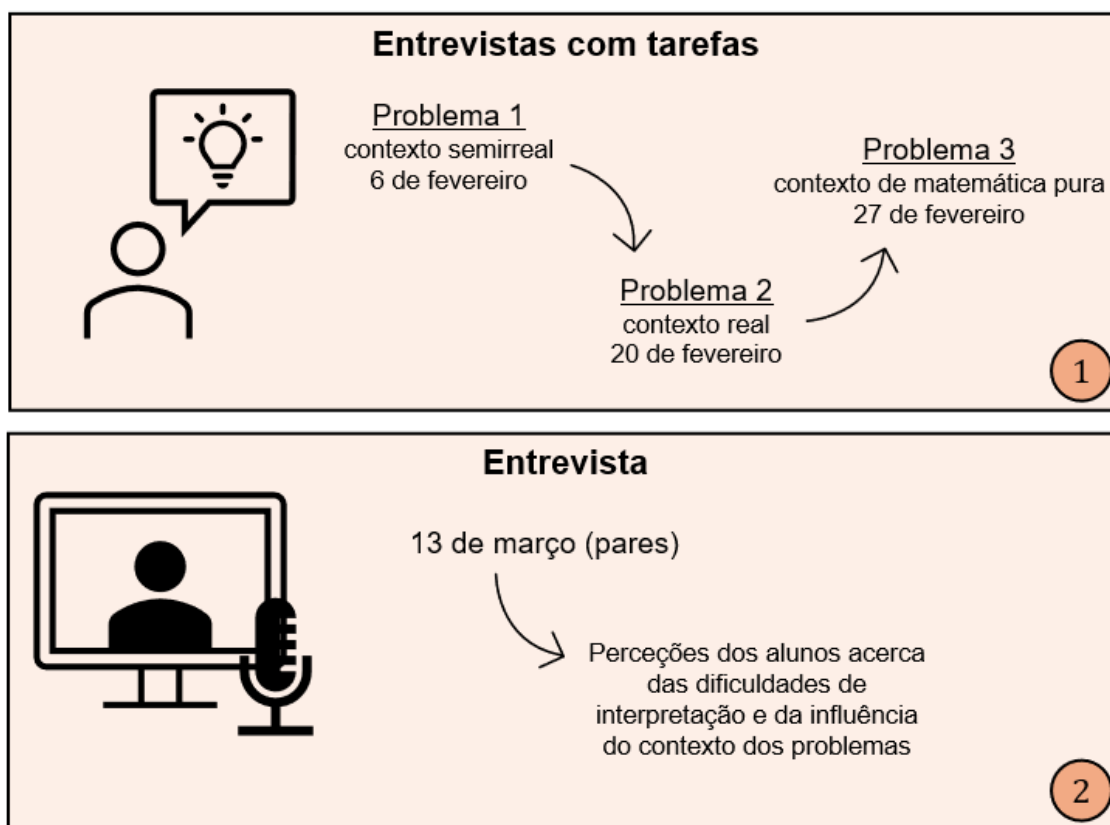


Figura 15 – Organização temporal do processo de recolha de dados

3.3.4. Questões de natureza ética

Relativamente às questões éticas, construí, em conjunto com a minha colega de estágio, um termo de autorização, que pode ser consultado no Anexo 9, entregue em papel a cada aluno, para que estes e os seus encarregados de educação expressassem a sua decisão relativamente à participação do estudo. Os alunos foram informados de que a sua participação (ou não participação) neste estudo não teria influência na classificação na disciplina de Matemática A.

Dos dezoito alunos da turma, treze concordaram com a participação no estudo e, desses, selecionei apenas seis alunos para as entrevistas com tarefas, com diferentes níveis de desempenho na disciplina de Matemática A. Durante este estudo, mantive a confidencialidade de todos os dados recolhidos, sendo que apenas eu e a minha orientadora tivemos acesso às gravações áudio das entrevistas e às produções escritas dos alunos. Para além disso, garantiu-se o anonimato dos participantes do estudo, identificando os alunos com nomes fictícios: Andreia, António, Catarina, Duarte, Francisco e Lúcia.

4. Apresentação e discussão de resultados

Os dados recolhidos são analisados neste capítulo com o objetivo de identificar as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas e quais as suas causas. Em cada alínea dos problemas usados nas entrevistas com tarefas, foram analisadas as dificuldades de interpretação manifestadas pelos seis alunos e, posteriormente, selecionados três alunos cujas dificuldades permitem ilustrar as dificuldades apresentadas por todos os participantes. Para identificar as dificuldades e as respetivas causas, utilizei o quadro apresentado por Kingwell (2022) (Tabela 1), sendo que adicionei uma nova causa, que emergiu dos resultados obtidos e da realidade dos alunos participantes: a falta de hábito na realização de tarefas com contextos para além da matemática pura. Para além do objetivo de investigação enunciado acima, pretendia perceber qual o papel do contexto do problema nas dificuldades de interpretação identificadas. Como tal, são analisadas as perceções dos alunos sobre este assunto.

4.1. Problema 1

O primeiro problema apresentado aos alunos no âmbito deste estudo foi um problema de contexto semirreal (Skovsmose, 2000) e a primeira alínea é apresentada na Figura 16. Aquando da leitura da primeira frase do enunciado, o Duarte e a Catarina cometeram erros de leitura, lendo “instrumentais” em vez de “instrumentistas”, continuando a ler sem se aperceberem do erro cometido. Esta dificuldade sentida por estes alunos pode resultar da falta de hábitos de leitura, que reduz significativamente o seu vocabulário e leva os alunos a ler sem compreender o que está escrito, ou de uma leitura rápida e pouco cuidada, por estarem preocupados em encontrar informação numérica e não propriamente em interpretar o enunciado do problema.

- 1.** Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.
- a)** Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.
- Sabe-se que a Constança praticou:
- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
 - 60 minutos no quarto dia;
 - 1330 minutos no total dos m dias.
- Quantos dias praticou a Constança?

Figura 16 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 1)

Enquanto liam o enunciado, metade dos alunos (António, Catarina e Duarte) sublinharam informações do enunciado, sem as traduzirem para linguagem matemática, enquanto a outra metade não sublinhou qualquer informação. A Catarina sublinhou os dois primeiros pontos na íntegra e não sublinhou qualquer palavra ou número do último ponto, o António sublinhou apenas “ m dias” e o Duarte sublinhou uma palavra e dois números: “primeiro”, 60 e 1330.

Isto sugere que os alunos que sublinharam informações no enunciado, fizeram-no de uma forma pouco sistemática, destacando apenas algumas das informações presentes no mesmo. Dado que a professora titular de Matemática A da turma costuma incentivar os alunos a sublinhar os dados do enunciado, não registando de imediato as informações recolhidas, os alunos poderão sublinhar sem critério e sem dar significado a estes valores, o que se revela uma estratégia ineficaz.

Ainda na leitura do enunciado, uma das alunas teve dificuldades em perceber a informação dada pelo primeiro ponto. Assim, e apesar de ter conseguido perceber que a Constança treinaria 50 minutos no terceiro dia e 40 minutos no segundo dia, pensou que não podia aplicar o mesmo processo na passagem do segundo para o primeiro dia:

Catarina – Só que agora no primeiro dia... não foi mais dez minutos... ah, não sei.

Investigadora – Lê a frase outra vez.

Catarina [depois de ler a frase] – Ah, ok, o primeiro termo é 40 menos 10.

(Entrevista, Catarina)

Depois de ler a frase novamente, percebeu que podia utilizar a mesma estratégia que tinha usado para determinar o número de minutos de treino nos segundo e terceiro dias, conseguindo continuar a resolução do problema. Esta dificuldade na interpretação das informações fornecidas parece ter sido causada por uma leitura rápida e pouco detalhada, uma vez que, depois de ler o enunciado novamente, a aluna dar significado aos dados apresentados no primeiro ponto.

Ainda na recolha da informação presente no enunciado, o Francisco conseguiu perceber que o tempo de treino da Constança nos primeiros três dias foi 30, 40 e 50 minutos, respetivamente, utilizando implicitamente a razão da progressão fornecida no enunciado. No entanto, quando necessitou de escrever o termo geral da progressão, mostrou alguma dificuldade em determinar esta razão:

Francisco – Eu para descobrir a razão tenho de fazer aquilo do u de $n... u$ de n mais um mais um... é u de... não, é u de n menos u de n mais 1. É isso?

Investigadora – Sim, ao contrário, u de $n+1$ menos u de n .

Francisco – Mas isso tem de se descobrir a... Não.

Investigadora – O que acontece de um termo para o outro?

Francisco – Soma 10. Ah, a razão é 10, exato.

(Entrevista, Francisco)

Esta dificuldade manifestada pelo Francisco sugere a mecanização de procedimentos sem a devida compreensão por parte dos alunos. Apesar de ter utilizado a informação de que a razão da progressão era 10 quando calculou os três primeiros termos desta, não foi capaz de identificar o conceito de razão na situação apresentada e procurou utilizar estratégias que já tinham sido usadas em aula, como o cálculo da diferença entre dois termos consecutivos. Esta dificuldade foi superada quando questionei o aluno sobre o que se alterava de um termo para o seguinte. Nesse momento, o aluno compreendeu que já tinha usado a razão para calcular vários termos da progressão e conseguiu continuar a sua resolução.

As dificuldades de interpretação não surgiram apenas na leitura do enunciado. A Andreia leu o enunciado com cuidado e conseguiu traduzir todos os dados para linguagem matemática, como se pode ver na Figura 17. Contudo, as suas dificuldades surgiram numa fase posterior da resolução.

$$\begin{aligned}
 r &= 10 \\
 u_{m+1} &= u_m + 10 \\
 u_4 &= 60 \\
 u_3 &= 50 \\
 u_2 &= 40 \\
 u_1 &= 30
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 1330 &= \frac{30 + u_m}{2} \times N \\
 u_m &= 30 + (m-1) \times 10 \\
 &= 30 + 10m - 10 \\
 &= 20 + 10m
 \end{aligned}$$

Figura 17 – Organização dos dados da pergunta 1a (Problema 1 – Andreia)

Ao substituir os dados que conhecia na expressão da soma de N termos consecutivos, substituiu u_N por u_m visto que o objetivo era descobrir o número de dias de treino (m), mas manteve a incógnita N , obtendo uma equação com duas incógnitas distintas, como se pode observar na equação presente no canto superior direito da Figura 17. Esta

situação sugere que os alunos têm alguma dificuldade em perceber o que representam os vários termos de uma equação ou expressão e quando os devem substituir pelos dados já conhecidos. Quando questionada sobre o que representavam as duas incógnitas presentes na equação, N e m , começou por afirmar que diziam respeito a duas variáveis distintas, apercebendo-se, depois, de que ambas representavam o número de dias de treino:

Investigadora – Neste momento tens duas incógnitas aí [na equação] diferentes. Tens o N e o m .

Andreia – Sim.

Investigadora – O que é o N ?

Andreia – É o número de dias.

Investigadora – Também é o ... então tens duas incógnitas que me estás a dizer que são a mesma coisa.

Andreia – Não, este aqui [o m] é o número de dias.

Investigadora – Sim.

Andreia – E este [o N] é... é a... ah, também é.

(Entrevista, Andreia)

Esta dificuldade é provavelmente devida a que os alunos mecanizam procedimentos sem os compreenderem e não são capazes de interpretar o que cada termo de uma fórmula significa: neste caso, na fórmula $S_N = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$, a aluna substituiu corretamente S_N pelo valor de S_m e u_N por u_m , mas não substituiu N por m , o que a impediu de continuar a sua resolução, já que tinha duas incógnitas distintas e apenas uma equação. Nesse momento, a aluna não foi capaz de interpretar o que cada incógnita representava, de forma a perceber como devia proceder. Caso o tivesse feito, ter-se-ia apercebido de que ambas as incógnitas representavam o número de dias de treino e, desta forma, podia escrever a equação apenas com a incógnita m , o que acabou por acontecer depois do diálogo acima apresentado (Figura 18).

$$1330 = \frac{30 + 20 + 10m}{2} \times m$$

$$1330 = (15 + 10 + 5m) \times m$$

$$1330 = 15m + 10m + 5m^2$$

$$1330 = 25m + 5m^2$$

$$5m^2 + 25m - 1330 = 0$$

$$m = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 5 \times (-1330)}}{2 \times 5}$$

$$m = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 26600}}{10}$$

$$m = \frac{-25 \pm 165}{10}$$

$$m = 14 \vee m = -19$$

Figura 18 – Parte da resolução da pergunta 1a (Problema 1 – Andreia)

Depois de resolver a equação de segundo grau, todos os alunos conseguiram identificar o valor positivo como o número de dias que a Constança tinha praticado. Para a Catarina, a dificuldade surgiu no momento de apresentar uma resposta ao problema:

Investigadora – Falta só a resposta. Quantos dias praticou a Constança?

Catarina – 15

Investigadora – Porquê 15?

Catarina – Porque é 14, está aqui escrito [aponta para o valor de m] mais este um dia [aponta para os 30 minutos na expressão da soma].

Investigadora – Ok, quantos dias estavas a somar aqui [em S_m]? O 1330 era o quê?

Catarina – Os minutos.

Investigadora – O que representava o 1330?

Catarina – O número total dos minutos.

Investigadora – Então quantos dias é que a Constança praticou?

Catarina – Os 14 mais este [o primeiro dia]. Não é?

Investigadora – Porque é que somas esse?

Catarina – Oh, não sei.

Investigadora – Aqui diz “1330 minutos no total dos m dias”.

Catarina – Ah ok, então treinou 14 dias.

(Entrevista, Catarina)

Apesar de ter calculado corretamente o valor de m , não conseguiu compreender que esse valor indicava o número total de dias que a Constança tinha praticado. Isto parece

sugerir que os conceitos matemáticos não estão devidamente consolidados, visto que a aluna somou o primeiro dia, embora este já fosse considerado na soma apresentada, dado que a expressão da soma dos m primeiros termos inclui a soma entre o primeiro e o m -ésimo termos.

Para além disso, a falta de hábito na realização de tarefas com contextos reais ou semirreais (Skovsmose, 2000) pode ser uma das causas para esta dificuldade na interpretação do resultado obtido, pois a maioria das tarefas propostas pela professora cooperante nas aulas tinha contexto puramente matemático e não exigia a interpretação do valor obtido. Esta dificuldade sentida pela Catarina sugere que a construção frásica do enunciado pode influenciar a compreensão dos alunos, principalmente se implicar a interpretação dos resultados obtidos na situação apresentada.

A segunda alínea do problema da primeira entrevista com tarefas é apresentada na Figura 19.

b) O Miguel também vai realizar uma audição de violino, mas começou a ensaiar uma semana mais tarde do que a Constança. Como tal, adotou uma estratégia diferente: em cada dia, exceto no primeiro, praticou o dobro do tempo do dia anterior. Ainda assim, praticou menos uma hora do que a Constança.
Quanto tempo praticou o Miguel no primeiro dia?

Figura 19 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 1)

Nesta alínea, houve uma maior dificuldade em encontrar a informação fornecida no enunciado pela forma como esta estava apresentada. No momento da leitura, alguns alunos referiram essa dificuldade. Por exemplo, Andreia exprimiu o seguinte: “Ah, não sei nenhum número aqui”. Contudo, assim que lhe sugeri que lesse apenas uma frase e desse significado àquilo que tinha lido, a aluna conseguiu recolher os dados fornecidos no enunciado do problema.

Ainda na recolha de informação do problema, surgiram algumas dificuldades devido à construção frásica do enunciado. Neste, não estava suficientemente claro que a audição de ambos os instrumentistas era no mesmo dia, levando a algumas questões sobre quanto tempo tinha praticado o Miguel. No caso da Lúcia, esta aluna conseguiu recolher todos os dados presentes no enunciado (Figura 20), manifestando apenas dificuldades em determinar o tempo de treino do Miguel. Esta dificuldade foi superada assim que a aluna percebeu que a audição do Miguel seria no mesmo dia que a audição da Constança:

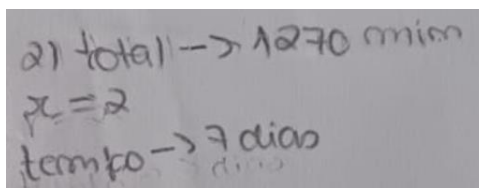


Figura 20 – Organização dos dados da pergunta 1b (Problema 1 – Lúcia)

Lúcia – Uma hora tem 60 minutos, portanto ele praticou ao todo mil trezentos e... não, mil duzentos e setenta minutos. Ele praticou todos os dias o dobro, portanto a razão é $2n$.

Investigadora – A razão é...

Lúcia – É 2. A razão é 2. E ele começou uma semana mais tarde... Mas ele estudou o mesmo tempo que ela?

Investigadora – A audição era no mesmo dia.

Lúcia – Ah, eles estudaram até à audição.

Investigadora – Sim.

Lúcia – Então ele só estudou 7 dias.

(Entrevista, Lúcia)

Esta dificuldade surgiu também na entrevista do Francisco. O aluno começou por referir que o tempo de treino do Miguel não era referido no enunciado, questionando se teria de considerar o período de treino da Constança. Quando esclareci que a audição de ambos iria acontecer no mesmo dia, o Francisco conseguiu indicar rapidamente o tempo de treino do Miguel:

Francisco – Eu posso... eu tenho de chamar m outra vez?

Investigadora – Quantos dias é que o Miguel praticou?

Francisco – Não sei, não diz... ou diz? Não diz.

Investigadora – Lê outra vez o enunciado.

Francisco – Ah, se praticou... Mas ele praticou o mesmo que ela só que uma semana depois? Ou não?

Investigadora – Acabaram no mesmo dia, a audição era no mesmo dia.

Francisco – Então praticou só uma semana.

(Entrevista, Francisco)

Estes dois excertos ilustram dificuldades ao nível da recolha da informação cuja causa é a construção frásica do enunciado. Caso fosse referido no enunciado que a audição

da Constança e do Miguel estava marcada para o mesmo dia, esta dificuldade manifestada por todos os alunos na recolha da informação provavelmente não se teria verificado, conseguindo registar os dados fornecidos de forma autónoma.

As dificuldades relativas à recolha de informação surgiram noutros momentos da resolução deste problema, como revelado na entrevista do António. Devido a uma leitura rápida e pouco detalhada por parte do aluno, que pode ter sido causada pela falta de concentração e pela procura imediata da solução, o António retirou uma unidade aos 1330 minutos praticados pela Constança, sendo que era referido no enunciado que o Miguel tinha treinado menos uma hora do que ela. Não se apercebendo do erro, o aluno ia continuar a sua resolução quando o alertei para o seu erro:

Investigadora – Porque é que escreveste 1329?

António – Porque ele no final dos 14 dias que a Constança praticou, ele tinha uma hora de prática a menos. Ele começou uma semana, ou seja, ele em 7 dias tocou 1329 minutos.

Investigadora – Minutos.

António – Minutos.

Investigadora – Tinha praticado menos quanto... que a Constança?

António – Uma hora.

Investigadora – Menos uma hora.

António – Sim.

Investigadora – Tu consideraste menos uma hora?

António – Ah [risos], considereei menos um minuto.

Investigadora – Tens de ter cuidado com as unidades.

(Entrevista, António)

Também surgiram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos na resolução desta segunda alínea do problema da primeira entrevista com tarefas. Por exemplo, apesar de ter escrito, tal como mostra a Figura 20, que o tempo total de treino era 1270 minutos, a Lúcia teve algumas dificuldades em identificar o que representava este valor, confundindo a soma dos sete primeiros termos com o sétimo termo:

Lúcia – Agora tenho de relacionar isto [1270 minutos] com isto [7 dias] e cada dia aumenta o dobro. Eu podia dividir os minutos por dois 7 vezes.

Investigadora – Mas isto aqui [1270 minutos] é o u_7 ou a S_7 ?

Lúcia – É a soma dos 7. Pois é, isto não é o que ele praticou no sétimo dia.

E não vão ser todos iguais por isso não posso dividir por 7.

(Entrevista, Lúcia)

Esta confusão entre conceitos matemáticos pode dever-se à falta de domínio destes ou à mecanização de procedimentos sem a devida compreensão. Uma vez que os alunos não estão habituados a resolver exercícios e problemas em que os dados não estão apresentados em linguagem matemática, a mecanização de procedimentos e a falta de domínio dos conceitos matemáticos pode impedi-los de interpretar corretamente os dados fornecidos. Para além da Lúcia, também o António manifestou a mesma dificuldade:

Investigadora [depois do António escrever que o valor do sétimo termo é 1270] – O que representa o 1270?

António – O número de minutos que ele praticou no total.

Investigadora – No total. [António calcula o sexto termo como metade de 1270 e o quinto termo como metade do sexto termo.] No total.

António – Ah?

Investigadora – No total.

António – No total.

Investigadora – Ao fim de sete dias...

António – Ele tocou isto.

Investigadora – Sim.

António – Sim.

Investigadora – Mas não foi...

António [interrompendo] – Ah, a soma disto tudo [os primeiros 7 termos] é 1270.

(Entrevista, António)

Em resumo, as dificuldades manifestadas pelos alunos na interpretação deste primeiro problema verificaram-se ao nível da compreensão do enunciado e dos conceitos matemáticos, na recolha e organização da informação presente no enunciado e na interpretação do resultado obtido. Diversos fatores podem explicar estas dificuldades.

No que diz respeito à compreensão do enunciado, as dificuldades sentidas pelos alunos podem ser explicadas pela falta de domínio da língua portuguesa, por uma leitura rápida

e pouco detalhada do enunciado e pela construção frásica do mesmo. Estes dois últimos fatores também parecem ter originado dificuldades ao nível da recolha e organização dos dados, sendo que estas dificuldades também podem ser explicadas pela falta de concentração ou pela procura imediata da solução.

A falta de domínio de conceitos matemáticos pode ter provocado dificuldades ao nível da compreensão do significado dos mesmos e da interpretação do resultado obtido. A mecanização de procedimentos também parece ter contribuído para a existência de dificuldades de compreensão dos conceitos matemáticos.

4.2. Problema 2

O segundo problema apresentado aos alunos foi um problema de contexto real (Skovsmose, 2000), adaptado aos interesses e preferências de cada um. Nem todos os alunos reagiram ao facto de o seu nome estar no enunciado e de a situação apresentada ser próxima da sua realidade, mas aqueles que reagiram, mostraram-se contentes por o problema lhes ser próximo.

O Duarte referiu que “com o meu nome é que é fixe” e a Lúcia, assim que se apercebeu que o enunciado se referia a ela, sorriu e disse “Oh, sou eu!”, comentando depois que o torneio “está caro, stora”. O Francisco quis saber se todos tinham tido um enunciado adaptado a eles:

Francisco – O enunciado de todos dizia Francisco ou todos tinham o nome deles?

Investigadora – Todos tinham o nome deles.

Francisco – Que fixe! E eram todos do clube de futebol?

(Entrevista, Francisco)

Apesar de os enunciados serem diferentes para cada aluno (Anexo 6), o grau de dificuldade era igual, pelo que apenas se apresenta a primeira alínea de uma das situações na Figura 21.

1. A Andreia vai participar na viagem a Barcelona, organizada pela escola, no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia.
- Cada aluno vai pagar a mesma quantia. Sabe-se que:
- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
 - Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
 - No final do verão, cada aluno já terá pago 105 €;
 - Em 2025, a Andreia pagará um total de 198 €.
- a) Em abril, quanto vai pagar a Andreia?

Figura 21 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 2)

Durante a leitura do enunciado, apenas os três alunos que tinham sublinhado informações no primeiro problema (António, Catarina e Duarte) sublinharam os dados apresentados neste problema. Enquanto o Duarte sublinhou apenas “o pagamento vai começar no mês de abril”, os restantes sublinharam mais informações: o António destacou quase todos os dados apresentados e a Catarina sublinhou os dados dos dois primeiros pontos e escreveu os meses correspondentes ao final do verão e de 2025 junto aos respetivos pontos, tal como mostra a Figura 22.

1. O clube de futebol do António foi convidado para participar num torneio em Barcelona no próximo ano e, para poder ir, o António tem de pagar uma determinada quantia, de acordo com o escalão em que joga.
- Os atletas dos juvenis e dos juniores vão pagar a mesma quantia. Sabe-se que:
- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
 - Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
 - No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
 - Em 2025, o António pagará um total de 198 €.
1. A Catarina vai participar na viagem a Barcelona, organizada pela escola, no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia.
- Cada aluno vai pagar a mesma quantia. Sabe-se que:
- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
 - Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
 - No final do verão, cada aluno já terá pago 105 €; setembro
 - Em 2025, a Catarina pagará um total de 198 €. dezembro

Figura 22 – Enunciados sublinhados da pergunta 1a (Problema 2 – António e Catarina)

Apesar de sublinhar os dados, a Catarina teve dificuldades em compreender o que era dito no enunciado. O seguinte diálogo mostra esta dificuldade e a conversa que permitiu superá-la:

Catarina – Mas como assim todos os meses aumenta o montante pago?

Investigadora – Se este mês pagares x , no seguinte vais pagar x mais qualquer coisa.

Catarina – Ah ok, aumenta sempre a mesma quantia.

(Entrevista, Catarina)

Na primeira leitura, a aluna não foi capaz de compreender o que significava o segundo ponto. Quando comecei a explicar o que estava escrito, a Catarina percebeu e conseguiu dizer a informação por palavras suas, prosseguindo a sua resolução. Verificaram-se, então, dificuldades de compreensão textual que podem ter sido causadas pela falta de domínio da língua portuguesa.

A mesma aluna voltou a manifestar dificuldades ao traduzir a informação do terceiro ponto, “no final do verão, cada aluno já terá pago 105€”. Em vez de considerar esse valor como a soma dos seis primeiros meses, identificou-o como o sexto termo, u_6 :

Investigadora – Os 105 euros, tu disseste-me que é o total dos seis primeiros meses. Então é o quê na progressão?

Catarina – O u_6 .

Investigadora – É o sexto termo?

Catarina – Sim.

Investigadora – É o que pagas em setembro ou o que pagas até setembro?

Catarina – Até setembro.

Investigadora – Até setembro. Isso é o quê?

Catarina – A soma dos seis primeiros termos.

(Entrevista, Catarina)

Esta dificuldade na recolha e organização da informação presente no enunciado pode dever-se ao facto de os alunos não estarem habituados a realizar tarefas com contextos reais (Skovsmose, 2000). Neste caso, os dados indicados pela aluna ($u_6 = 105$ e $u_9 = 198$) não traduziam a situação apresentada no enunciado e resultariam numa resposta incorreta ao problema. Quando questionada sobre se o valor que considerou ser o sexto termo era o valor pago em setembro ou até setembro, a aluna apercebeu-se do erro que tinha cometido e corrigiu-o, conseguindo prosseguir a resolução. Esta dificuldade também surgiu durante a resolução da Lúcia:

Investigadora – O que representa os 105 euros?

Lúcia – Representa uma parte... representa o sexto termo. Não?

Investigadora – É o que vais pagar em setembro?

Lúcia – Sim.

Investigadora – Ou o que vais pagar até setembro?

Lúcia – Então... até setembro já terá pago.

Investigadora – Então até setembro é o sexto termo?

Lúcia – Como não? Abril, maio, junho, julho, agosto, setembro [conta pelas mãos].

Investigadora – Não estamos a falar sobre se é o sexto termo, se é o quinto termo. O que te estou a perguntar é se 105 euros é o que vais pagar em setembro ou até setembro?

Lúcia – Eu vou pagar até setembro. Aqui diz no final do verão cada atleta terá pago 105 euros.

Investigadora – Então?

Lúcia – Claro, é a soma disto tudo. S_6 !

(Entrevista, Lúcia)

Para a Lúcia a dificuldade não foi ultrapassada da mesma forma que no caso da Catarina, visto que a primeira não conseguiu perceber a diferença entre “em setembro” e “até setembro” quando a questioneei inicialmente. Face à minha pergunta, a aluna percebeu que eu lhe estava a dizer que o erro estava na ordem do termo que indicou. Quando esclareci que não era essa a questão, mas sim a diferença entre as proposições utilizadas, a Lúcia conseguiu corrigir o seu erro e traduziu corretamente a informação apresentada.

A Lúcia apresentou novas dificuldades de interpretação ao nível da recolha e organização da informação no momento seguinte da resolução, que, desta vez, podem ter sido causadas por falta de concentração e por uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado. Devido a estes fatores, a Lúcia esqueceu-se do que era pedido no enunciado e não soube como prosseguir a resolução por não perceber o que devia fazer:

Lúcia – Posso descobrir o primeiro termo com o S_6 . Mas preciso? É essa a pergunta.

Investigadora – Precisas do quê?

Lúcia – Do u_1 .

Investigadora – O que é pedido na pergunta?

Lúcia – Ah exato, preciso porque é em abril quanto é que vai pagar. Claro que preciso. Nem sequer estava a pensar na pergunta.

(Entrevista, Lúcia)

A falta de concentração voltou a ser a possível causa de dificuldades manifestadas pela mesma aluna no final da resolução (Figura 23). Neste caso, as dificuldades surgiram na interpretação do resultado obtido, uma vez que a aluna, depois de determinar o primeiro termo e a razão, queria “descobrir” o primeiro termo, sem se aperceber que já o tinha calculado. Quando a alertei para este facto, a aluna percebeu que já tinha determinado o valor pedido e conseguiu responder à pergunta, tal como mostra o seguinte excerto:

Handwritten solution showing the calculation of the first term u_1 and the common difference x for an arithmetic sequence. The student uses the sum formula $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)x)$ for $n=6$ and $n=9$ to set up a system of equations. The final result is $u_1 = 10$ and $x = 3$.

total = 198€
 $S_6 = 105€$
 $105 = \frac{u_1 + u_6}{2} \times 6$
 $35 = u_1 + u_6$
 $u_6 = u_1 + (6-1)x$
 $u_6 = u_1 + 5x$
 $35 = u_1 + u_1 + 5x$
 $35 = 2u_1 + 5x$
 $\begin{cases} 35 = 2u_1 + 5x \\ 44 = 2u_1 + 8x \end{cases} \quad (*)$
 $\begin{cases} u_1 = 10 \\ x = 3 \end{cases}$
 R: Em abril a **Lúcia** vai pagar 10 €.

Figura 23 – Resolução da pergunta 1a (Problema 2 – Lúcia)

Lúcia – Então, eu sei que u_1 é 10 e a razão é 3.

Investigadora – Ok.

Lúcia – Então... então, se eu sei que a razão é 3, é só ir tirar o 3.

Investigadora – O que é que queres saber?

Lúcia – O primeiro. Ah, eu posso descobrir u_1 com isso.

Investigadora – Precisas de descobrir u_1 ?

Lúcia – Não, está aqui. É 10 [risos].

(Entrevista, Lúcia)

De facto, a falta de concentração pode criar dificuldades de interpretação em diferentes momentos da resolução, tal como aconteceu com a Lúcia: a aluna esqueceu-se tanto o que tinha lido como o que tinha escrito em dois momentos distintos da entrevista, que afetaram o seu desempenho na resolução deste problema.

O Francisco manifestou dificuldades em determinar em que mês começava o pagamento. Apesar de ter lido o enunciado no início da entrevista, não se recordava dessa informação e optou por não reler o enunciado, questionando-me sobre quando se iniciava o pagamento:

Francisco – Mas eu não sei quando é que eles começam a pagar... é em 2025, mas quando?

Investigadora – Lê o primeiro ponto.

Francisco – Diz que o pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês.

Investigadora – Então quando vai começar?

Francisco – Abril de 2025.

Investigadora – Afinal sabes quando começa.

(Entrevista, Francisco)

Esta dificuldade ao nível da recolha e organização da informação presente no enunciado deveu-se provavelmente a uma leitura rápida e pouco detalhada do mesmo. Assim que o aluno releu o ponto onde se encontrava a informação, conseguiu identificar o mês de início do pagamento.

A segunda alínea do problema 2 (Figura 24) apresenta novos dados, que devem ser complementados com os dados da primeira alínea para encontrar a solução. Uma vez que já tinham determinado o primeiro termo e a razão, os alunos eram capazes de descobrir o número de meses de pagamento, de forma a encontrar a data de início do evento (torneio ou viagem).

b) A participação dos alunos na viagem só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes da viagem para Barcelona. Qual é a data de início da viagem?

Figura 24 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 2)

Após concluírem a primeira alínea, os alunos conheciam o primeiro termo e a razão, a soma dos seis primeiros termos e a soma dos nove primeiros termos. Com base nestes

dados, a Andreia decidiu descobrir quantos meses ainda ia ter de pagar, mas confundiu a razão com a prestação, somando apenas 3 euros (razão) para descobrir a soma dos dez primeiros termos:

Andreia – Em janeiro já pagou 201.

Investigadora – Como obtiveste o valor 201?

Andreia – Os 198 euros que tinha pago em 2025 mais 3 euros.

Investigadora – Então em janeiro só pagaste 3 euros?

Andreia – Ah pois, eu não sei quanto é que paguei em dezembro.

(Entrevista, Andreia)

Esta dificuldade manifestada pela Andreia surge associada à compreensão dos conceitos matemáticos no contexto do problema. Após perceber que devia calcular a prestação de dezembro, conseguiu calcular os termos seguintes e as respetivas somas, até obter uma soma igual a 275 euros (Figura 25).

Handwritten work showing the calculation of terms and sums of an arithmetic sequence:

$$b) \quad 275 - 198 = 77$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{array} \right\}$$

$$u_9 = u_1 + 8 \times 3 \quad u_{10} = 34 + 3 \quad u_{11} = 40$$

$$u_9 = 10 + 24 \quad u_{10} = 37 \quad \text{Jan. } 275 \text{ €}$$

$$u_9 = 34 \quad \text{Jorn. } 235$$

Figura 25 – Primeira parte da resolução da pergunta 1b (Problema 2 – Andreia)

Porém, depois de superar esta dificuldade, a Andreia deparou-se com uma nova dificuldade, neste caso ao nível da recolha dos dados. Uma vez que o pagamento terminava em fevereiro, a aluna considerou que a data do último pagamento era 28 de fevereiro, sendo necessário sugerir-lhe que lesse novamente o enunciado:

Investigadora – Então em que dia acabaste de pagar?

Andreia – 28 de fevereiro.

Investigadora – Lê o enunciado.

Andreia – Será pago ao dia 5... ah, cinco.

(Entrevista, Andreia)

Esta dificuldade de recolha dos dados do enunciado pode ter sido causada por uma leitura rápida e pouco detalhada do mesmo no início da resolução ou pela falta de concentração durante este processo. Após ultrapassar estas duas dificuldades, a

Andreia conseguiu determinar a data de início da viagem, explicando como a encontrou a partir do dia do último pagamento, tal como mostra a Figura 26.

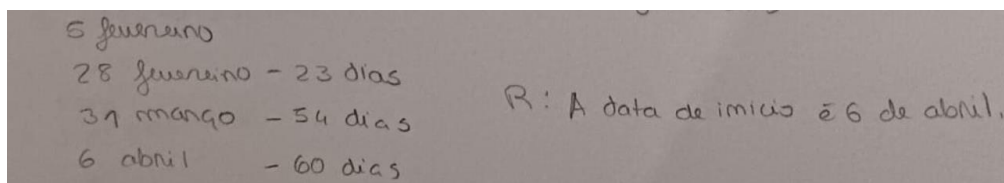


Figura 26 – Segunda parte da resolução da pergunta 1b (Problema 2 – Andreia)

A Catarina voltou a confundir o termo com a soma, considerando novamente a soma dos pagamentos como um dos termos da progressão. Tal como aconteceu na primeira alínea, a aluna pensou em igualar o valor total a pagar ao termo geral da sucessão, de forma a encontrar a ordem do termo:

Catarina – Posso calcular... descobrir o termo geral?

Investigadora – Sim.

Catarina – Então eu posso fazer... o dia de pagamento para saber?

Investigadora – Diz-me o que estás a pensar fazer.

Catarina – Ver o termo geral a ver se chego a isto [275 euros] ou não.

Investigadora – 275 é um termo da sucessão? É o que vais pagar num mês?

Catarina – Ah, é a soma.

(Entrevista, Catarina)

A dificuldade manifestada pela Catarina ao nível da compreensão da situação real do problema pode dever-se ao facto de, nas aulas de matemática dadas pela professora cooperante, quase nunca serem apresentadas tarefas com contextos reais ou semirreais (Skovsmose, 2000). Desta forma, quando os alunos são confrontados com um problema com contexto real ou semirreal, têm dificuldade em dar significado aos valores que são dados no enunciado ou obtidos ao longo da resolução.

O Francisco manifestou dificuldades na recolha dos dados do enunciado depois de determinar a data do último pagamento. Inicialmente considerou que o torneio começava no dia do último pagamento e, depois de reler a questão, considerou que a data de início do torneio era dois meses antes da última prestação. Com uma nova leitura, conseguiu perceber o seu erro e corrigi-lo:

Francisco – O u_{11} é fevereiro. Então é isso, o torneio começa em fevereiro.

Investigadora – O que é que é em fevereiro?

Francisco – A data de início do torneio é em fevereiro.

Investigadora – Ora lê outra vez a pergunta para ver se não tem mais nada.

Francisco – Ah, são dois meses antes, então é janeiro... não, dois meses antes, é dezembro.

Investigadora – Em que mês acabaste de pagar?

Francisco – Ah, é isso, é dois meses depois de fevereiro.

Investigadora – Mas é 60 dias, não é dois meses.

Francisco – Não é bem dois meses, é quase... Mas fica dois meses depois?

Investigadora – Tens de ver em que dia é. Quando foi paga a última prestação?

Francisco – Fevereiro... ah, dia cinco.

Investigadora – Dia cinco de fevereiro.

Francisco – Pois, mas tenho de fazer tudo direitinho, 5, depois 5 mais 60...

Investigadora – Até ao fim de fevereiro quantos dias vão passar?

Francisco – Não sei se é 28 ou 29...

Investigadora – Em que ano... é fevereiro de que ano?

Francisco – De 2026.

Investigadora – Exato.

Francisco – Mas eu não sei se é bissexto.

Investigadora – 2026 é um ano comum.

Francisco – Então é 28.

(Entrevista, Francisco)

Esta dificuldade surgiu uma vez que o aluno parece não ter lido o enunciado com cuidado, tendo sido necessárias várias leituras para conseguir determinar a data do início do torneio. Para além disso, surgiu uma dificuldade que não tinha antecipado: a maioria dos alunos não conseguiu indicar se 2026 era um ano comum ou bissexto, o que os impediu de saber o número de dias do mês de fevereiro. No caso do Francisco, assim que lhe disse que era um ano comum, foi capaz de determinar que fevereiro teria 28 dias, mas o mesmo não aconteceu com a Catarina:

Catarina – Fevereiro tem quantos dias?

Investigadora – Fevereiro de que ano?

Catarina – 2025.

Investigadora – 2025 começaste a pagar, em que ano acabaste?

Catarina – Ah, ah, ok. Em 2026.

Investigadora – 2026 é um ano comum ou bissexto?

Catarina – Não sei.

Investigadora – É um ano comum. Quantos dias tem fevereiro num ano comum?

Catarina – Sei lá [risos].

(Entrevista, Catarina)

A Catarina não só teve dificuldade em determinar o ano em que terminava o pagamento, o que revela dificuldades ao nível da recolha e organização de dados do enunciado possivelmente causados pela leitura rápida e pouco detalhada do mesmo e pela falta de concentração durante a resolução do problema, como não conseguiu identificar se 2026 é um ano comum ou bissexto e quantos dias tem fevereiro num ano comum. Apesar destes conceitos surgirem no primeiro ciclo do ensino básico, estas dificuldades sugerem a importância de lembrá-los ao longo da escolaridade obrigatória, uma vez que são informações relevantes no nosso dia-a-dia e todas as pessoas os devem saber. Em resumo, tal como no Problema 1, surgiram dificuldades de interpretação ao nível da compreensão do enunciado e dos conceitos matemáticos, na recolha e organização da informação presente no enunciado e na interpretação do resultado obtido. Para além disso, os alunos manifestaram dificuldades de interpretação relativas à compreensão do enquadramento real do problema.

No que diz respeito à compreensão do enunciado, as dificuldades sentidas pelos alunos podem dever-se à falta de domínio da língua portuguesa, enquanto a falta de domínio de conceitos matemáticos pode ser a causa das dificuldades na compreensão do seu significado na situação apresentada. As dificuldades de compreensão do enquadramento real do problema parecem ter sido causadas pela falta de hábito na realização de tarefas com contextos reais. Por fim, a falta de concentração e a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado resultou em dificuldades na recolha e organização da informação presente no enunciado e na interpretação do resultado obtido.

4.3. Problema 3

O último problema proposto foi um problema com contexto puramente matemático (Skovsmose, 2000). Visto que a maioria dos exercícios e problemas propostos pela professora cooperante nas aulas tem este tipo de contexto, os alunos já estavam familiarizados com este contexto. Para além disso, dado que o problema não apresentava uma situação real ou semirreal, não se exigia a interpretação de uma situação e a atribuição de significado aos dados do enunciado, pelo que os alunos se mostraram mais à vontade no processo de resolução. O enunciado da primeira alínea é apresentado na Figura 27.

PROBLEMA 3

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. Seja x um número inteiro. Sabe-se que:

- x , $x + 4$ e $6x + 6$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) ;
- a soma dos seis primeiros termos é igual a 728.

a) Determina o primeiro termo da progressão.

Figura 27 – Enunciado da pergunta 1a (Problema 3)

Nenhum dos alunos destacou dados no enunciado, fazendo, em primeiro lugar, uma leitura rápida e, depois, lendo com cuidado cada ponto e traduzindo-o para linguagem matemática. Pareceu haver uma maior atenção na leitura do enunciado face às entrevistas anteriores e os alunos foram capazes de interpretar a maioria dos dados apresentados.

O Duarte conseguiu traduzir para linguagem matemática os dados apresentados e escreveu que se tratava de uma progressão geométrica no início da sua resolução (Figura 28). Contudo, quando substituiu o valor da soma dos seis primeiros termos pela fórmula da soma, considerou uma progressão aritmética:

a) Progressão geométrica (an)

$$S_6 = 128$$

$$S_6 = u_1 \times \frac{1 - r^6}{1 - r}$$

$$= 128 \times \frac{1 - r^6}{1 - r}$$

$$x \rightarrow x+4 \rightarrow 6x+6$$

$$x \times r = x+4 \quad \left| \quad (x+4) \times r = 6x+6 \right.$$

$$\Rightarrow r = \frac{x+4}{x} \quad \left| \quad r = \frac{6x+6}{x+4} \right.$$

$$\frac{x+4}{x} = \frac{6x+6}{x+4} \Rightarrow x = 1,6 \vee x = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$$

Figura 28 – Parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Duarte)

Duarte – A soma vai ser igual... u_1 mais u_n sobre 2.

Investigadora – Que tipo de progressão tens?

Duarte – Geométrica [apaga a expressão que tinha escrito].

(Entrevista, Duarte)

Este excerto mostra a dificuldade manifestada pelo Duarte, possivelmente causada pela falta de concentração, dado que tinha escrito “progressão geométrica” e sabia as fórmulas das somas de ambas as progressões, mas acabou por confundi-las. Na fase seguinte da resolução, o Duarte não conseguiu justificar corretamente porque escolheu o valor de x que pertencia ao conjunto dos números inteiros. Inicialmente, confundiu a variável x com a razão da progressão e, para além disso, considerou que a razão não podia ser um número não inteiro:

Duarte – x igual a $-1,6$ ou x igual a 2. Vai ser x igual a 2 porque pertence aos... inteiros? Sim.

Investigadora – Porque é que tem de pertencer aos inteiros?

Duarte – Porque a razão... não vai ser número decimal.

Investigadora – Pode ser.

Duarte – Ai pode?

Investigadora – E o que representa o x ?

Duarte – Ah sim, o x vai ser... substituir aqui $\left[r = \frac{x+4}{x} \right]$ e descobrir a razão.

Investigadora – Sim. E o que é que diz no enunciado? Logo no início?

Duarte – x é um número inteiro... x pertence a $\mathbb{Z}$, logo é 2.

(Entrevista, Duarte)

Neste momento da resolução, o aluno manifestou diferentes dificuldades. Em primeiro lugar, o facto de considerar que a razão tinha de ser um número inteiro, apesar de terem sido resolvidas tarefas nas aulas em que a razão era um número fracionário ou um radical, sugere a existência de dificuldades ao nível dos conceitos matemáticos, uma vez que assumiu como verdadeira uma propriedade que não existia. Para além disso, surgiram dificuldades na recolha e organização da informação presente no enunciado, já que o aluno não voltou a ler o enunciado para procurar a informação de que x era um número inteiro. Por fim, ao interpretar o valor da variável x obtido, considerou-o como a razão da progressão, o que sugere dificuldades de interpretação do resultado devido à mecanização de procedimentos: provavelmente por ter considerado a razão no cálculo de x , assumiu que o valor obtido dizia respeito a este conceito.

A Lúcia, apesar de ter resolvido corretamente a equação de segundo grau (Figura 29), também revelou dificuldades na escolha do valor de x . Quando lhe sugeri que relese o enunciado, a aluna conseguiu encontrar a informação dada acerca desta variável:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{6x+6}{x+4}$$

$$(x+4)^2 = (6x+6)x$$

$$1x^2 + 8x + 16 = 6x^2 + 6x$$

$$(-5x^2 + 2x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1,6 \vee x = 2 \rightarrow \text{um número inteiro}$$

Figura 29 – Primeira parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Lúcia)

Lúcia – x vai ser igual a 1,6 ou x vai ser igual a 2. E agora, como é que eu sei qual é que é? Se é 1,6 ou 2?

Investigadora – Então começa a ler o enunciado do início.

Lúcia – Um número inteiro, exatamente, é 2 porque é um número inteiro.

(Entrevista, Lúcia)

Dado que a aluna conseguiu compreender a informação quando voltou a ler o enunciado com mais cuidado, é provável que esta dificuldade na recolha e organização da informação se tenha devido a uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado aliada à falta de concentração durante este processo.

Tal como aconteceu com o Duarte, a Lúcia considerou que a variável x era a razão da progressão. Para além disso, confundiu a soma dos seis primeiros termos com o sexto

termo, tal como tinha acontecido no Problema 2, referindo que bastava dividir o valor da soma pela razão e repetir este processo até encontrar o primeiro termo:

Lúcia – Como a soma dos seis primeiros termos é 728, é só ir dividindo por dois até ao coiso... Não havia uma forma mais matemática de o fazer?

Investigadora – O 2 é o quê?

Lúcia – Mentira, então aqui vai ser... 2 mais 4, seis, 6 vezes 2, 12, com 6, 18... então a razão é 3. Isto fez aqui uma reviravolta... então é só fazer isto [728] a dividir por 3. Não, porque é... é, não é?

Investigadora – Isso é um termo da progressão?

Lúcia – Não, é a soma..., mas posso descobrir o primeiro termo com isso.

(Entrevista, Lúcia)

As dificuldades manifestadas pela Lúcia ao nível dos conceitos matemáticos e da interpretação do resultado nesta fase da resolução podem ter sido causadas pela falta de domínio dos conceitos matemáticos, uma vez que não conseguiu diferenciar a soma dos seis primeiros termos do sexto termo, e pela mecanização de procedimentos, já que assumiu que o valor obtido no cálculo de x dizia respeito à razão. Depois de perceber que estratégia ia seguir para descobrir o primeiro termo da progressão, a aluna conseguiu completar a sua resolução do problema (Figura 30), dando resposta à primeira alínea.

$$\begin{aligned}
 & 2, 6, 18 \\
 & r = 3 \\
 & 728 = u_1 \times \frac{1-3^6}{1-3} \\
 & 728 = u_1 \times \frac{-728}{-2} \\
 & \frac{728}{364} = u_1 \\
 & 2 = u_1 \\
 & R: \text{O primeiro termo da progressão é } 2
 \end{aligned}$$

Figura 30 – Segunda parte da resolução da pergunta 1a (Problema 3 – Lúcia)

O Francisco manifestou dificuldades na recolha e organização da informação presente no enunciado devido a uma leitura rápida e pouco detalhada do mesmo. Apesar de não ser dito no enunciado, o aluno assumiu que os três termos dados, x , $x + 4$ e $6x + 6$,

eram os três primeiros termos da progressão, o que implicava que “o primeiro termo é x ” (Entrevista, Francisco).

Depois de o questionar se os três termos apresentados eram os primeiros três termos, o aluno percebeu que calcular o valor de x não era suficiente para determinar o primeiro termo da progressão. Contudo, uma vez que não tinha registado a informação presente no segundo ponto do enunciado, depois de calcular o valor de x , já não se recordava que tinha o valor da soma dos seis primeiros termos. Quando voltou a ler o enunciado com atenção, conseguiu perceber que existia uma informação que ainda não tinha utilizado, mas não sabia como a poderia utilizar:

Francisco – Agora posso fazer... descobrir com a forma. O termo geral.

Investigadora – Mas já sabes a razão?

Francisco – Posso fazer 2 mais 4, dá 6, a dividir por 2, dá 3. A razão é três.

Investigadora – Exato.

Francisco – Mas eu não sei... como é que eu faço, porque eu não sei o número [ordem] destes aqui [os três termos consecutivos].

Investigadora – Mas há mais alguma coisa no enunciado?

Francisco – Os seis primeiros termos é 728.

Investigadora – E essa informação ajuda-te?

Francisco – Não sei, porque eu não sei se estes [os três termos consecutivos] estão nos seis primeiros termos.

Investigadora – O que é que sabes neste momento?

Francisco – A soma, a razão e o x .

Investigadora – E o que queres saber?

Francisco – O primeiro termo. Ah, já sei, tenho de usar a soma.

(Entrevista, Francisco)

Para além das dificuldades na recolha da informação possivelmente causadas por uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado e por não registar os dados fornecidos durante essa leitura, o Francisco manifestou dificuldades ao nível da compreensão dos conceitos matemáticos: neste caso, o aluno não sabia como utilizar a informação da soma dos seis primeiros termos pois pensava que só a poderia utilizar se os três termos já conhecidos pertencessem aos seis primeiros termos da progressão.

Uma dificuldade manifestada por todos os alunos entrevistados surgiu na recolha de informação do enunciado: os alunos não se aperceberam da letra associada à

progressão apresentada (a_n) e escreveram u_1 em vez de a_1 quando escreveram a expressão da soma dos seis primeiros termos. Esta dificuldade sugere que existe mecanização de procedimentos matemáticos por parte dos alunos, uma vez que a maioria dos exercícios e problemas propostos nas aulas apresentam uma sucessão (u_n) e, nesse caso, o primeiro termo é designado por u_1 . Os alunos só se aperceberam do seu erro na resolução da alínea b, escrevendo corretamente na resolução dessa questão. Por exemplo, na Figura 30, é possível verificar que a Lúcia escreveu u_1 para se referir ao primeiro termo da progressão.

O Francisco, apesar de ter cometido o mesmo erro, decidiu corrigi-lo quando se apercebeu do mesmo durante a resolução da segunda alínea. Contudo, tal como mostra a Figura 31, apenas alterou a resposta à pergunta (do lado direito), mantendo a letra u nos cálculos efetuados (do lado esquerdo).

Handwritten work for problem 1a. The left side shows calculations for r using the sum of a geometric progression formula, leading to $r=3$. The right side shows calculations for u using the sum of an arithmetic progression formula, leading to $u=2$. The final answer is $R: a_n = 2$.

Figura 31 – Resolução da pergunta 1a (Problema 3 - Francisco)

A segunda alínea (Figura 32) apresentava um nível de desafio inferior à questão anterior, mas exigia uma leitura cuidadosa do enunciado para retirar todos os dados presentes neste. Todos os alunos fizeram uma leitura rápida do enunciado numa primeira fase, voltando a ler uma segunda vez para registar os dados fornecidos. Dos seis alunos entrevistados, quatro (Andreia, António, Francisco e Lúcia) não tiveram qualquer dificuldade, registando corretamente os dados e encontrando a resposta.

b) Seja (b_n) uma progressão aritmética cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo de (a_n) e a razão é o dobro desse valor. Qual é o décimo termo de (b_n) ?

Figura 32 – Enunciado da pergunta 1b (Problema 3)

Aquando da leitura dos dados do problema, a Catarina não leu na totalidade o primeiro ponto, isto é, terminou a frase na palavra "geométrica" e ignorou a designação da progressão (a_n) . Como tal, quando leu a alínea b, desconhecia qual era a progressão geométrica (a_n) :

Catarina – a_n ? Mas qual é a (a_n) ?

Investigadora – Lê o primeiro ponto do enunciado.

Catarina – Ah, é esta.

(Entrevista, Catarina)

Esta aluna manifestou, então, dificuldades ao nível da recolha e organização da informação, possivelmente causada pela leitura rápida e pouco detalhada dos dados fornecidos. O facto de não ter lido toda a informação presente no enunciado levou a aluna a não ver essa informação e a apresentar dificuldades na interpretação dos novos dados, fornecidos na segunda alínea.

O Duarte voltou a cometer o mesmo erro da primeira alínea, sendo que, desta vez, considerou uma progressão geométrica apesar de indicar no enunciado que se tratava de uma progressão aritmética. Não obstante ter sido alertado relativamente à confusão entre as duas progressões na resolução da primeira alínea, o aluno manifestou a mesma dificuldade:

Duarte – Posso calcular a partir daqui [termo geral da progressão geométrica].

Investigadora – Que tipo de progressão tens?

Duarte – Aritmética! [apaga a expressão que tinha escrito]

(Entrevista, Duarte)

O aluno percebeu que poderia escrever o termo geral para encontrar o décimo termo, mas considerou a expressão do termo geral de uma progressão geométrica. Quando o questioneei sobre o tipo de progressão apresentada no enunciado, o Duarte percebeu de imediato o seu erro, corrigindo a expressão do termo geral, e conseguiu resolver a questão sem apresentar outras dificuldades. Assim, a única dificuldade manifestada por este aluno na segunda alínea diz respeito à recolha da informação presente no enunciado, que pode ter sido causada pela falta de concentração.

As dificuldades manifestadas neste problema ocorreram na recolha e organização da informação do enunciado, na compreensão de conceitos matemáticos e na interpretação do resultado obtido. A primeira dificuldade pode ter surgido devido a diferentes fatores como a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado, a falta de concentração e a mecanização de procedimentos. Já as restantes dificuldades deveram-se à falta de domínio dos conceitos matemáticos e à mecanização de procedimentos, respetivamente.

4.4. Perceções dos alunos sobre as dificuldades de interpretação sentidas

Depois de realizadas as entrevistas com tarefas, realizou-se uma entrevista a pares onde os alunos foram estimulados a refletir sobre a sua experiência neste estudo, desde as dificuldades sentidas e as suas possíveis causas até à influência que o contexto dos problemas poderia ter nessas dificuldades.

4.4.1. Dificuldades de interpretação do enunciado de problemas e respetivas causas

Quando questionados acerca das dificuldades sentidas na interpretação dos problemas propostos, os alunos referiram essencialmente o que os levou a ter dificuldades, ou seja, as causas, sem identificarem em concreto as dificuldades que tinham sentido (gerais ou particulares de um dos problemas).

A Lúcia referiu que sentiu dificuldades ao nível dos conceitos matemáticos, dizendo que era capaz de recolher os dados, mas que confundia alguns conceitos matemáticos, como a soma e o termo, embora tenha manifestado dificuldades na recolha e organização da informação, muitas vezes devida à falta de concentração e à leitura rápida e pouco detalhada do enunciado:

Lúcia – Senti [dificuldades] porque eu não sabia interpretar. Não sabia, imagine eu olhava para aquilo e não sabia... eu sabia utilizar os dados que me dava, mas imagine trocava as somas com termos. Não sabia bem o que fazer com aquilo que ali estava, entendia o que tinha de fazer, mas não sabia muito bem como.

(Entrevista, Lúcia e Francisco)

Esta aluna apontou como causa das dificuldades sentidas a falta da diversificação de contextos dos problemas propostos nas aulas, defendendo que a sua capacidade de interpretação seria desenvolvida caso lhe fossem propostos mais problemas com diferentes contextos e, dessa forma, seria capaz de resolver qualquer problema: “Imagine, porque se eu fizesse mais problemas assim, se calhar olhava para eles e já os sabia interpretar melhor e já era mais fácil para mim. Só que, como não fazia assim tantos, tive dificuldades” (Entrevista, Lúcia e Francisco).

Tanto a Andreia como a Catarina não conseguiram apontar as dificuldades sentidas na resolução destes três problemas quando as questioneei sobre isso. No entanto, em resposta à segunda pergunta, acerca das causas das dificuldades que tinham manifestado, a Andreia referiu a importância da recolha e organização dos dados, assumindo implicitamente que tinha sentido dificuldades nesta etapa da resolução dos problemas e ambas as alunas indicaram ter sentido dificuldades devido a uma leitura rápida do enunciado e à falta de concentração:

Andreia – Às vezes sentia que... lia o problema ou demasiado rápido ou às vezes não prestava atenção e então depois não tinha atenção aos detalhes do enunciado que depois fazem diferença a resolver o problema.

Catarina – Eu não lia... lia, mas muito rápido e não conseguia perceber logo à primeira o enunciado e... depois eu não conseguia começar logo o problema então tinha de pedir ajuda.

(Entrevista, Andreia e Catarina)

Na entrevista do António e do Duarte, os dois alunos referiram que uma leitura pouco cuidada do enunciado os tinha levado a sentir dificuldades de interpretação na resolução dos três problemas propostos. Para além desse fator, o António enunciou outros como, por exemplo, a falta de concentração:

António – Não ler bem o enunciado, distração, brincadeira, não estar concentrado... stress.

Duarte – Se não conseguisse ler bem o enunciado, não conseguia fazer muito bem o problema, então ler o enunciado era se calhar a coisa mais difícil da tarefa, mas ao querer fazer aquilo o mais rápido possível, às

vezes não conseguimos ler bem o que... temos de ler várias vezes até perceber.

(Entrevista, António e Duarte)

Depois de concordar que a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado tinha originado dificuldades ao nível da interpretação, o Duarte completou a sua intervenção dizendo que uma leitura adequada do enunciado é muito importante para recolher os dados presentes neste e resolver corretamente o problema. Para este aluno, esta etapa da resolução é “a coisa mais difícil da tarefa” (Entrevista, António e Duarte), visto que condiciona toda a resolução.

De facto, os alunos referem algumas das principais causas que podem explicar as dificuldades manifestadas, como a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado, a falta de concentração e a falta de tarefas com contextos variados nas aulas. No que diz respeito às dificuldades sentidas, os alunos não conseguiram referir em que momento da resolução surgiram as dificuldades e de que forma afetaram a mesma. Ainda assim, a Andreia apontou a dificuldade na recolha e organização dos dados e a Lúcia referiu que sentiu dificuldades ao nível dos conceitos matemáticos, quando confundiu soma com termo, que vão ao encontro dos resultados relativos às entrevistas com tarefas.

Para além das dificuldades e respetivas causas apontadas pelos alunos, verificaram-se outras que não foram referidas pelos alunos, tal como a dificuldade na compreensão linguística do enunciado e na interpretação da solução e causas como a falta de domínio da língua portuguesa e a memorização de conceitos e mecanização de procedimentos. Isto indica que os alunos ainda têm alguma dificuldade em perceber o que condicionou a resolução dos problemas, uma vez que não estão habituados a refletir sobre estes assuntos.

4.4.2. Influência do contexto nas dificuldades de interpretação

De modo a perceber melhor de que modo os alunos associavam os diferentes contextos dos problemas às dificuldades de interpretação sentidas, decidi questioná-los sobre qual tinha sido o problema mais fácil, qual o problema mais difícil e se a situação do problema tinha influenciado as suas dificuldades sentidas. Utilizei o termo situação em vez de contexto dado que os alunos estão mais familiarizados com o termo situação do que contexto, pelo que o termo situação seria mais simples para eles.

A maioria dos alunos substituiu esta palavra por “história”, considerando que os Problemas 1 e 2 com contextos semirreal e real (Skovsmose, 2000), respetivamente, tinham uma história, enquanto o último problema com contexto de matemática pura não apresentava qualquer história.

Quando questionados sobre o problema mais fácil, todos referiram o Problema 3 (contexto de matemática pura), embora apresentem diferentes razões para o selecionar como o problema mais acessível. A Lúcia disse que o último problema proposto apenas exigia que aplicassem conhecimentos matemáticos, sem necessidade de interpretar uma situação, enquanto o segundo problema (contexto real) envolvia mais compreensão do que aplicação de procedimentos já conhecidos. O Francisco referiu que tinha sido mais fácil interpretar este problema uma vez que o enunciado era menos extenso:

Lúcia – As coisas estavam ali e era só fazer mesmo. Os outros eram tipo... não sei, era muita coisa e o segundo tinha aquilo de ser pago ao quinto dia e depois andamos ali a contar. O terceiro era mesmo só matemática, era aplicar e estava lá, o segundo era mais compreensão.

Francisco – Não tinha tanta coisa, foi só... não sei, foi mais fácil interpretar o enunciado.

(Entrevista, Lúcia e Francisco)

Este excerto sugere que, para a Lúcia, a matemática é mais fácil quando se memorizam os conceitos e se mecanizam determinados procedimentos que depois se usam sem a devida compreensão. O facto de a aluna considerar que o último problema foi mais fácil porque era “mesmo só matemática” (Entrevista, Lúcia e Francisco) revela a falta de hábito dos alunos na resolução de problemas com diferentes contextos, o que origina mais dificuldades quando os alunos são confrontados com problemas com contextos reais e semirreais.

Para o António e o Duarte, o Problema 3 apresentava um enunciado “mais direto”, isto é, as informações fornecidas sobre o que era dado e o que era pedido estavam apresentadas com a linguagem que os alunos estão habituados a ver (por exemplo, “a soma dos seis primeiros termos é igual a 728” ou o facto de indicar o tipo de progressão que estava a ser considerado), ao contrário dos dois primeiros problemas, onde os alunos tinham de dar significado aos dados do enunciado, algo que não estão habituados a fazer:

Duarte – [O Problema 3] era mais direto.

António – Direto, simples de fazer, tudo.

Investigadora – Mas direto em que aspeto? É que as perguntas eram parecidas com as dos outros.

António – Não, não era. Era mais simples. Primeiro era mais rápido de fazer, depois tipo da maneira tipo foi direto era dizer logo tens aqui isto, é para fazer isto.

Investigadora – Ah ok, os dados é que eram mais diretos, é isso?

António e Duarte [em simultâneo] – Sim.

Duarte – O que nos dava era mais direto e também o enunciado não precisava de tanto raciocínio, tanta descoberta e tentar perceber o que estava a dizer, era mais fácil de perceber. E também tivemos mais... era o último, então tínhamos mais treino do primeiro e do segundo.

(Entrevista, António e Duarte)

Para além disso, o António referiu que um dos fatores que o levou a considerar o último problema como o mais fácil foi o facto de ser rápido de resolver. Já o Duarte indicou que o facto de este ser o último problema e de já terem sido capazes de resolver os Problemas 1 e 2 permitiu que consolidassem os conhecimentos sobre progressões aritméticas e geométricas. Assim, as dificuldades ao nível do conhecimento matemático eram menores, o que os levou a resolver o problema com maior facilidade.

O problema mais difícil na opinião dos alunos foi o Problema 2, com contextos reais e próximos das suas realidades. Embora alguns alunos tenham referido que esta dificuldade surgiu no processo de resolução por exigir uma resolução maior do que os outros, alguns alunos também argumentaram que, neste problema, “para perceber o enunciado era um bocado mais difícil” (Entrevista, António e Duarte), uma vez que era mais extenso e era necessário dar significado aos dados do enunciado.

Quanto ao papel do contexto nas dificuldades sentidas, a Catarina referiu que os problemas com contextos real e semirreal originaram mais dificuldades do que o Problema 3 “porque os exercícios que eu costumo fazer parecem-se mais com o terceiro” (Entrevista, Andreia e Catarina). Esta intervenção da Catarina reforça a ideia de que os alunos não estão habituados a resolver problemas com contextos para além da matemática pura e, por isso, sentem mais dificuldades na interpretação dos enunciados de problemas com contextos reais ou semirreais.

Na entrevista do Francisco e da Lúcia, ambos os alunos referiram que “ter uma história” resultou num aumento das dificuldades porque o enunciado não é tão “direto” como os problemas de matemática pura, ou seja, os dados não estão apresentados na forma que eles estão habituados:

Francisco – Dificulta um bocado, trocar um bocado as palavras, em vez de ser mais direto. Se for história, dizer os números de outra maneira, acho que se torna mais complicado.

Lúcia – Eu acho que ter uma história complicou porque não é aquela cena de estar a dizer... imagine, fazem a pergunta direta e é só fazer, está feito. Tínhamos de ter atenção que aquele dinheiro era a soma de tudo, não era só um bocado.

Investigadora – E o que gostavam que houvesse mais nas aulas de matemática? Mais problemas parecidos com o último ou problemas mais parecidos com o primeiro e o segundo?

Lúcia – Mais problemas parecidos com o primeiro e o segundo.

Francisco – Sim.

Investigadora – Porquê?

Lúcia – O problema 3... não é simples, é mais simples e aquilo é olhar para lá e está literalmente a perguntar o que é que é e é só aplicar as coisas; o primeiro e o segundo dão mais que pensar e acho que é isso que é preciso, que é para nós... se nós soubermos fazer o difícil, também vamos conseguir fazer o mais fácil.

(Entrevista, Lúcia e Francisco)

Contudo, apesar de considerarem os dois primeiros problemas mais difíceis, os alunos concordam que problemas como estes, de contextos reais e semirreais, deveriam ser incluídos com maior frequência nas aulas de matemática pois exigem que os alunos compreendam os dados e determinem estratégias para o resolver, em vez de aplicarem procedimentos mecanizados sem a compreensão dos conceitos.

Na entrevista do Duarte e do António, o primeiro considerou que o contexto dos problemas teve influência nas suas dificuldades, dado que achou os problemas com uma “história” (Problemas 1 e 2) mais confusos devido à extensão do enunciado e à necessidade de dar significado à informação dada. O António começou por referir que o contexto não tinha tido qualquer influência nas suas dificuldades, o que não

corresponde à realidade observada nas três entrevistas com tarefas, mas, após ouvir a opinião do colega, acabou por admitir que a maior extensão do enunciado e a quantidade de palavras que este continha lhe causaram alguma confusão e, consequentemente, mais dificuldades de interpretação:

Investigadora – Acham que o contexto do problema, a situação que tinha, teve influência?

Duarte – Sim.

António – Acho que isso não faz diferença nenhuma.

Duarte – A mim fez. Ter uma história por trás e ser um bocado mais confuso.

António – Tem mais palavras, baralhamo-nos mais, não é direto.

Duarte – Se o enunciado fosse mais prolongado, tivesse mais informação e fosse fundamental para resolver o problema... era mais difícil.

António – Concordo.

(...)

Investigadora – Então isso quer dizer que vocês preferem problemas como o último?

Duarte – Sim, são mais rápidos de resolver, mas o primeiro e o segundo são mais interessantes porque leva a pensar.

António – É o que ele disse, a matemática também é tipo dar-nos alguns desafios.

(Entrevista, António e Duarte)

Tal como o Francisco e a Lúcia, estes alunos expressaram as suas preferências relativamente ao tipo de contextos que gostariam de ver presentes nas aulas de matemática. Embora tenham referido que preferiam problemas de matemática pura por serem mais simples e rápidos de resolver, argumentaram que os problemas com contextos para além da matemática pura são mais interessantes e constituem um desafio que deve existir nas aulas da disciplina, para que consigam compreender os conteúdos e sejam capazes de os aplicar em diferentes problemas.

5. Conclusões e recomendações

Este estudo teve como objetivo perceber quais são as dificuldades dos alunos na interpretação de enunciados de problemas com diferentes contextos e quais as suas causas, procurando dar resposta a três questões de investigação: i) Quais são as principais dificuldades dos alunos na interpretação dos enunciados de problemas? ii) Quais são as suas causas? iii) Qual a influência do contexto nas dificuldades de interpretação de enunciados de problemas dos alunos?

Para isso, selecionei seis alunos de 11.º ano de uma das minhas turmas da escola onde realizei a PES e que tinham Matemática A. Esses alunos participaram em três entrevistas com tarefas, realizadas individualmente, e baseadas em problemas com diferentes contextos: matemática pura, semirrealidade e realidade (Skovsmose, 2000). Nessas entrevistas, os alunos verbalizavam o seu pensamento ao longo do processo de resolução dos problemas, o que me permitiria identificar onde surgiam as suas dificuldades de interpretação e quais seriam as suas causas. No final destas entrevistas com tarefas, realizei uma entrevista final a pares, em que os alunos refletiram sobre a sua participação no estudo, revelando as suas perceções sobre as dificuldades de interpretação sentidas e as suas possíveis causas, bem como a sua opinião sobre o papel do contexto nestas dificuldades.

Durante as entrevistas com tarefas, foram identificadas diversas dificuldades manifestadas pelos alunos relativas à interpretação. As dificuldades surgiram ao nível da compreensão do enunciado e dos conceitos matemáticos, da recolha e organização da informação, da compreensão do enquadramento real da tarefa e da interpretação do resultado obtido. Estas dificuldades parecem ter sido originadas, entre outros fatores, pela falta de domínio dos conteúdos matemáticos, pela falta de concentração, por uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado e pela falta de hábito na realização de problemas formulados em contextos para além da matemática pura. A Tabela 3 apresenta um resumo das dificuldades encontradas neste estudo e das possíveis causas.

Dificuldades	Causas
Compreensão textual do enunciado	• Falta de domínio da língua portuguesa • Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado • Construção frásica do enunciado
Compreensão dos conceitos matemáticos	• Falta de domínio de conceitos matemáticos • Memorização de conceitos e mecanização de procedimentos
Recolha e organização da informação	• Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado • Construção frásica do enunciado • Falta de concentração • Procura imediata da solução • Falta de compreensão da situação real apresentada • Memorização de conceitos e mecanização de procedimentos
Compreensão do enquadramento real do problema	• Falta de hábito na realização de tarefas com contextos para além da matemática pura
Interpretação do resultado obtido	• Falta de domínio de conceitos matemáticos • Falta de compreensão da situação real apresentada • Memorização de conceitos e mecanização de procedimentos

Tabela 3 – Dificuldades de interpretação manifestadas pelos alunos e respetivas causas

A primeira dificuldade de interpretação manifestada pelos alunos na resolução dos problemas propostos verificou-se na *compreensão textual do enunciado*. Nesta fase inicial da resolução dos problemas, existiram erros na leitura em voz alta de determinadas palavras (por exemplo, a palavra “instrumentistas”) e dificuldades em compreender o que certas expressões significavam.

Por vezes, essas dificuldades foram causadas por uma leitura rápida e pouco detalhada das frases que constituíam o enunciado, tal como referiu Kingwell (2022). Contudo, surgem outras causas associadas à dificuldade de compreensão textual do enunciado: a construção frásica do enunciado e a falta de domínio da língua portuguesa. Por vezes, os alunos manifestaram algumas dificuldades em interpretar o enunciado dos problemas propostos devido à existência de palavras ou expressões que não conseguiam descodificar e traduzir para linguagem matemática, ideia partilhada por Menina (2009).

No que diz respeito à segunda causa referida, vários autores (Nunes, 2017; Costa & Fonseca, 2009) apontam o mau domínio da língua portuguesa como uma das principais causas das dificuldades de interpretação dos alunos, uma vez que alguns destes possuem um vocabulário muito restrito e não conseguem compreender o significado de

algumas frases. De facto, Nunes (2017) destaca a “transversalidade da língua portuguesa na aprendizagem de outras matérias” (p. 60), como a matemática, já que os alunos tendem a compreender melhor os enunciados se possuírem um maior domínio da língua.

Estas dificuldades causadas pela falta de domínio da língua portuguesa sugerem que deve existir um trabalho contínuo entre os professores de matemática e de português, também referido por Cagliari (2010), de forma a desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos de todos os anos de escolaridade e, consequentemente, melhorar o seu desempenho na disciplina de matemática, incluindo na resolução de problemas. Para além disso, tal como referem Costa e Fonseca (2009), deve-se promover a existência de hábitos de leitura por parte dos estudantes, para que estes desenvolvam uma atitude mais persistente relativamente à leitura, não desistindo da mesma se o enunciado for mais extenso, e alarguem o seu vocabulário quer oral quer escrito. Desta forma, serão capazes de resolver problemas matemáticos, sem que a interpretação do enunciado seja um obstáculo.

Relativamente às dificuldades de *compreensão dos conceitos matemáticos*, a falta de domínio dos mesmos por parte dos alunos resultou em vários erros, uma vez que confundiam os conceitos relacionados com as progressões aritméticas e geométricas por não os terem consolidado devidamente. As dificuldades associadas à compreensão dos conceitos matemáticos surgiram também devido à memorização de conceitos e mecanização de procedimentos, algo que os alunos estão habituados a fazer. A memorização e mecanização sem qualquer compreensão fez com que os alunos cometessem erros no processo de resolução dos problemas propostos.

A maioria das dificuldades surgiram ao nível da *recolha e organização da informação*, isto é, na identificação dos dados presentes no enunciado e na atribuição de significado aos mesmos. Esta dificuldade surgiu devido à memorização de conceitos e mecanização de procedimentos que, tal como refere Kingwell (2022), impede os alunos de interpretar as palavras e expressões do enunciado e, consequentemente, leva-os a recolher os dados de forma errada.

As restantes causas relativas às dificuldades na recolha e organização da informação foram a leitura rápida e pouco detalhada do enunciado e a sua construção frásica, fatores que também originaram dificuldades de compreensão textual do enunciado, bem como a falta de concentração, a procura imediata da solução e a falta de compreensão da situação real apresentada, no caso do Problema 2. Costa e Fonseca (2009) referem

que a falta de concentração associada a enunciados mais extensos aumenta as dificuldades de interpretação, já que impede os alunos de conseguirem interpretar e recolher todas as informações presentes no enunciado.

A procura imediata da solução, tal como a falta de concentração, afetou a recolha e organização dos dados, visto que os alunos tentavam adivinhar a resposta ou passar à frente determinados passos da resolução para terminar o problema o mais depressa possível, o que vai ao encontro das conclusões apresentadas por Phonapichat et al. (2014). No seu estudo, estes autores verificaram que os alunos têm tendência a tentar adivinhar a resposta quando confrontados com problemas que não entendem ou que têm enunciados muito extensos. No caso dos problemas com contextos real ou semirreal, também se verificaram dificuldades na recolha e organização da informação do enunciado devido à falta de compreensão da situação real apresentada.

No que diz respeito às dificuldades de *compreensão do enquadramento real do problema*, apesar destas dificuldades terem surgido no estudo de Kingwell (2022), surgiram associadas a outras causas (mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos e de procedimentos de resolução, e falta de prática na realização de tarefas desafiantes). Essas causas não foram visíveis nos dados recolhidos neste estudo, surgindo uma nova causa para a dificuldade acima referida: a falta de hábito na realização de tarefas com contextos para além da matemática pura. Esta falta de familiaridade dos alunos com problemas com contextos para além da matemática pura deve-se à realidade dos alunos nas aulas de matemática: a maioria das tarefas do manual adotado pela escola e de fichas de trabalho propostas pela professora tinham um contexto puramente matemático e, desta forma, os alunos limitavam-se a mecanizar procedimentos sem compreenderem realmente os conteúdos. Assim, o hábito de realizar apenas problemas com este contexto representa um obstáculo para os alunos quando lhes são propostos problemas com contextos real ou semirreal.

De facto, e dando resposta à última questão de investigação, o contexto dos problemas parece ter tido influência nas dificuldades de interpretação manifestadas pelos alunos: os dois primeiros problemas (semirrealidade e realidade, respetivamente) originaram mais dificuldades de interpretação e todos os alunos referiram que consideravam o problema puramente matemático como o mais fácil. Como tal, pode-se considerar que o contexto foi uma das causas das dificuldades de interpretação, na medida em que influenciou a compreensão do enunciado, a recolha dos dados do mesmo e a interpretação do resultado obtido. Ao contrário do que observou Kingwell (2022), neste estudo não houve uma divisão de opiniões sobre quais os contextos em que os alunos

se sentiam mais confiantes. No caso dos seis alunos selecionados, todos disseram preferir problemas com contexto puramente matemático por já compreenderem a que conceitos se referem as palavras utilizadas. O mesmo não aconteceu nos problemas de contextos real e semirreal, apesar de considerarem esses problemas mais interessantes e desafiantes. Esta opinião dos alunos revela que os alunos veem de forma positiva o trabalho em torno destes problemas mais desafiantes, algo que Ulandari et al. (2019) considera essencial no ensino da disciplina por melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos e que lhes permite compreender a utilidade da matemática no seu dia-a-dia. Contudo, não são apenas os problemas com contextos real ou semirreal que devem fazer parte das experiências de aprendizagem em matemática. De facto, Ponte e Quaresma (2012) indicam que os alunos devem saber trabalhar com diversos contextos e que cada um tem um papel importante na aprendizagem dos alunos, sendo que o professor deve decidir aquele que melhor se adequa a cada momento de aprendizagem. Esta ideia é corroborada pelos documentos curriculares orientadores do ensino da matemática no secundário, quer os que vigoravam à data de realização deste estudo, quer os mais recentes do nosso país (ME, 2018; Carvalho e Silva et al., 2023) e por vários autores (e.g. Skovsmose, 2000; Ponte, 2005), que realçam a importância da utilização de diversos contextos no processo de aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática.

Por fim, a última dificuldade manifestada pelos alunos ocorreu na *interpretação do resultado obtido*, algo que Prates et al. (2011) também observaram no seu estudo. Esta dificuldade surgiu devido a três fatores que causaram outras dificuldades de interpretação aos alunos participantes deste estudo: a memorização de conceitos e a mecanização de procedimentos, a falta de domínio de conceitos matemáticos e a falta de compreensão da situação real apresentada.

Em suma, este estudo permitiu analisar as dificuldades de interpretação de seis alunos distintos e, tal como referem alguns autores (Mesquita, 2013; Nunes, 2017), as dificuldades surgiram nas várias fases da resolução do modelo de Polya (1995) e não apenas na primeira, que diz respeito à compreensão do problema. Assim, a interpretação é uma capacidade que deve ser desenvolvida pelos alunos de forma a serem capazes de resolver os problemas que lhes são propostos, independentemente do contexto destes.

5.1. Considerações finais

A realização deste estudo trouxe alguns desafios, mas também muitas aprendizagens e reflexão sobre as suas limitações e implicações. Relativamente às aprendizagens que a construção deste relatório me trouxe, a principal foi a oportunidade de realizar uma investigação em educação matemática e pôr em prática os conhecimentos adquiridos ao longo do mestrado num estudo sobre uma temática que considerava importante, dada a minha experiência da PES.

Assim, consegui conhecer de uma forma mais aprofundada quais as dificuldades de interpretação manifestadas pelos alunos na resolução de problemas e perceber como posso ajudar os alunos neste aspeto, na medida em que este estudo me fez pensar em formas de mitigar estas dificuldades e estratégias que podem ajudar os alunos a compreender os enunciados de problemas matemáticos. Para além disso, tive a experiência de selecionar e adaptar ou criar problemas sobre progressões aritméticas e geométricas e posteriormente apresentá-las a alguns alunos, percebendo quais as tarefas que podem ter mais impacto na sua aprendizagem e desenvolvendo a minha capacidade de antecipar dificuldades. Por exemplo, na segunda alínea do Problema 1, não imaginava que pudessem surgir dificuldades relativas ao dia da audição do Miguel, sendo claro para mim, que criei a pergunta, que seria no mesmo dia da audição da Constança, mas foi algo que não foi perceptível para alguns alunos. Como tal, seria um aspeto que alteraria numa aplicação futura deste problema, alterado a primeira frase do enunciado da segunda alínea para “O Miguel também vai realizar uma audição de violino no mesmo dia que a Constança, mas começou a ensaiar uma semana mais tarde do que ela”. Relativamente ao Problema 2, não antecipava dificuldades na identificação dos anos bissextos e do número de dias de cada mês e a realização das entrevistas baseadas neste problema refletiram a necessidade de consolidar estes conhecimentos durante o primeiro ciclo do ensino básico visto que é algo que todas as pessoas devem saber.

Por outro lado, surgiram alguns desafios: em primeiro lugar, apesar de ter selecionado seis alunos que eram bastante comunicativos nas aulas de matemática, alguns destes alunos ficaram mais tímidos nas entrevistas, mostrando-se mais envergonhados quando se encontraram numa situação que não estavam habituados. Desta forma, nas entrevistas individuais, estes alunos tiveram mais dificuldade em expressar o seu pensamento e penso que o nervosismo originou mais dificuldades de interpretação. Por esta razão, decidi realizar as entrevistas finais a pares e os alunos estiveram mais à vontade neste último momento.

Contudo, não foram só os alunos que ficaram nervosos. Para mim, também foi uma situação diferente, que tinha grandes implicações para este estudo, e isso provocou-me algum receio de não ser capaz de fazer o meu papel de entrevistadora de forma correta e de não conseguir recolher os dados necessários. Creio que, enquanto entrevistadora, tive algumas falhas devidas à falta de experiência. Nas entrevistas com tarefas, por vezes, assumi o papel de professora em vez de investigadora, ajudando os alunos ao longo da resolução dos problemas, mas penso que evoluí ao longo do estudo e que, apesar de ainda poder melhorar muito, acabei por conseguir recolher um bom conjunto de dados e de os analisar de forma eficaz. Penso que o facto de ouvir as entrevistas com tarefas relativas a um problema antes de realizar as entrevistas do problema seguinte ajudou-me a perceber em que aspetos devia melhorar enquanto entrevistadora, de forma a garantir que não influenciava o desempenho dos alunos, e deu-me confiança para realizar as entrevistas seguintes, incluindo a entrevista final. Na entrevista final, o maior desafio foi o facto de eu e os alunos não estarmos no mesmo local fisicamente: nem sempre a conexão da internet era a melhor e alguns alunos mantiveram a câmara desligada durante a entrevista, não conseguindo perceber as suas reações.

Este estudo teve algumas limitações, como a falta de experiência e o tempo disponível. Relativamente à primeira, dada a minha falta de experiência, tanto enquanto professora como enquanto investigadora, tomei decisões ao longo deste estudo que agora considero que deveriam ter sido diferentes. Se voltasse a fazer este relatório, alterava dois aspetos: em primeiro lugar, optaria por introduzir as progressões aritméticas e geométricas com uma tarefa com contexto real ou semirreal, em vez das tarefas puramente matemáticas que propus aos alunos. Apesar de os alunos não estarem habituados a realizar tarefas com contextos para além da matemática pura, uma tarefa com uma situação real e próxima deles poderia ter facilitado a sua compreensão sobre estes conteúdos e a interpretação de enunciados semelhantes e permitiria que os alunos se apercebessem das conexões da matemática com a vida real. O segundo aspeto que alterava diz respeito aos problemas propostos nas entrevistas com tarefas individuais. Se voltasse a realizar este estudo, teria selecionado ou criado três problemas em que as duas questões pedissem exatamente o mesmo (por exemplo, todas as primeiras alíneas pediam o primeiro termo), mudando apenas o contexto dos problemas. Esta possível alteração deve-se ao facto de o terceiro problema conter uma questão muito mais simples do que as restantes apresentadas aos alunos, o que pode

ter influenciado a opinião dos alunos no que toca aos problemas mais simples e mais difíceis.

Para além desta limitação, apesar de ter tentado recolher os dados o mais cedo possível, não os consegui analisar a tempo de pensar e executar uma intervenção pedagógica baseada nas dificuldades encontradas que pudesse implementar tanto na turma dos alunos selecionados como nas outras turmas que acompanhei neste ano letivo, de forma a contribuir para o melhor desempenho dos alunos na interpretação de enunciados de problemas matemáticos.

Uma possível intervenção pedagógica a ser realizada com o objetivo de diminuir as dificuldades de interpretação dos alunos é a criação de um momento semanal nas aulas de matemática, de cerca de quinze minutos, onde os alunos são convidados a interpretar frases de enunciados de problemas e a dar significado a esses dados. Esta ideia é baseada numa iniciativa da professora de Português da turma de sétimo ano onde dei aulas: devido ao elevado número de classificações negativas na sua disciplina, esta professora criou um momento semanal, os “15 minutos a ler”, em que os alunos devem ler um livro, de forma a aumentarem o seu vocabulário e a criarem hábitos de leitura. Na disciplina de matemática, podem ser implementados os “15 minutos a interpretar”, para que os alunos desenvolvam a capacidade de interpretação. Numa primeira fase, esta atividade deve ser realizada em turma, discutindo as ideias de todos. Posteriormente, pode passar a ser um trabalho mais autónomo à medida que os alunos desenvolvem a capacidade de compreender os enunciados e traduzir as informações fornecidas para linguagem matemática.

Nesta abordagem, é importante fazer uma leitura em voz alta do enunciado na sua íntegra, passando depois para a leitura de cada frase e a atribuição de significado das informações fornecidas em conjunto com os alunos. Os professores devem criar discussões com os alunos sobre o significado matemático de cada frase e devem incentivar os alunos a dizer por palavras suas o que acabaram de ler, de forma a garantir que estes compreendem os enunciados dos problemas. Este trabalho deve ser realizado não só durante o momento semanal dedicado ao desenvolvimento da capacidade de interpretação, mas também em todos os problemas que sejam propostos aos alunos: uma leitura em voz alta e a tradução por outras palavras do que leem são dois aspetos que podem ajudar os alunos a diminuir as dificuldades de interpretação.

Simultaneamente, a utilização de exercícios e problemas com diferentes contextos deve ser uma preocupação dos professores de matemática ao longo da escolaridade

obrigatória. Desta forma, os alunos são capazes de compreender e resolver os vários problemas que vão surgindo na sua formação matemática, enquanto se apercebem das conexões entre a matemática e outras áreas de conhecimento ou entre a matemática e a vida real.

Este estudo tornou evidente a necessidade de desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos, visto ser algo que influencia o seu desempenho em todas as disciplinas e que é muito importante na nossa vida para que possamos compreender aquilo que as outras pessoas nos querem transmitir. Por isso, os professores devem fazer um trabalho intencional no desenvolvimento desta capacidade para que os alunos sejam capazes de resolver os problemas que lhes são propostos sem serem condicionados pela interpretação. No futuro, será interessante repetir este estudo com alunos de diferentes anos de escolaridade, desde o primeiro ciclo do ensino básico até ao Ensino Secundário. Isto pode permitir perceber em que fase da escolaridade obrigatória as dificuldades de interpretação se tornam mais evidentes.

Realizar este relatório de estágio permitiu-me aprender muito sobre a investigação e o ensino da matemática e os desafios associados a estes e a experiência da PES fez-me olhar para o papel do professor na aprendizagem dos alunos de uma forma totalmente diferente. No início do mestrado, fomos convidados a comparar um professor com uma outra profissão, sendo que nos eram dadas algumas opções: jardineiro, missionário, maestro, treinador, entre outras. Ainda sem qualquer conhecimento sobre o ensino da matemática, respondi que a profissão que mais se assemelhava a um professor era a de jardineiro, justificando que “pensando nos alunos como plantas ou flores, todos são diferentes, vêm de contextos (solos) diferentes e o papel do professor é fazer o possível para que os alunos evoluam (as plantas cresçam), adaptando os seus métodos às necessidades de cada um, assim como o jardineiro trata das plantas, regando ou podando conforme as suas condições”.

Embora na altura tenha visto a profissão apenas da perspetiva do que o professor pode dar aos alunos, estes dois anos ensinaram-me que os professores têm muito a aprender com os alunos e que estes alimentam o professor com experiência e com novas ideias, tal como as plantas fornecem o oxigénio necessário para o jardineiro respirar, isto é, sem alunos, não existiriam professores. É este o tipo de professora que quero ser: alguém que se consegue adaptar à realidade dos alunos, encontrando as melhores estratégias para que estes possam aprender, e que aprende todos os dias com eles. Este estudo e os alunos que tive o privilégio de conhecer ensinaram-me muito e o que mais quero é levar estas aprendizagens para a minha vida profissional!

Referências Bibliográficas

Alves, D. S. (2020). Dificuldades de interpretação de problemas matemáticos no 9.º ano: Causas e soluções. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 01(05), 26-41.

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Cagliari, L. C. (2010). *Alfabetização e linguística*. Scipione.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *Research Briefs – Problem solving*. NCTM. <https://www.washoeschools.net/cms/lib/NV01912265/Centricity/Domain/253/Math%20K-6/NCTM%20research%20brief.pdf>

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação - Guia para auto-aprendizagem* (2ª ed.). Universidade Aberta.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, G., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Matemática A, 10.º ano*. Departamento do Ensino Secundário, Ministério de Educação.

Carvalho e Silva, J. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais, Matemática A, 11º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_11_vf.pdf

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge Falmer.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da língua portuguesa e da matemática. In C. Costa, E. Mamede, & F. Guimarães (Eds.), *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-19). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Departamento do Ensino Secundário (1997). *Matemática — Programas 10.º, 11.º e 12.º anos*. Departamento do Ensino Secundário, Ministério de Educação.

Direção Geral do Ensino Básico e Secundário (1991). *Matemática e Métodos Quantitativos, Organização curricular e programas*. Direção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação.

Duncker, K. (1945) On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(5), 1-113.

Goldin, G. (2020). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Hadi, S., Retnawati, H., Munadi, S., Apino, E., & Wulandari, N. F. (2018). The difficulties of high school students in solving higher-order thinking skills problems. *Problems of Education in the 21st Century*, 76(4), 520-532.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's* (pp.111–126). NCTM.

Kingwell, A. (2022). *Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas*. [Relatório de estágio, FCUP]. https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.pub_view?pi_pub_base_id=572642

Lester, F. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *Mathematics Enthusiast*, 10, 245-278.

Luzita, J. M. C. (2018). *Atitudes em relação à Matemática: um estudo no 2.º Ciclo* [Relatório de Estágio, Escola Superior de Educação de Lisboa]. <http://hdl.handle.net/10400.21/9572>.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Martins, L. G., & Martinho, M. H. (2023). Dificuldades na resolução de problemas e na comunicação escrita em Matemática: Um estudo com alunos do 11.º ano. In A. P. Canavarro, I. Cabrita, N. Branco, R. Tomás Ferreira, & T. Neto (Eds.), *Atas do Encontro*

de *Investigação em Educação Matemática EIEM 2023: Resolução de problemas*, (pp. 49-63). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Menina, F. M. (2009). *Compreensão e interpretação em matemática: Dificuldades de alunos do 9.º ano na resolução de problemas* [Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve]. <https://sapientia.ualg.pt/entities/publication/c5a5e93e-a3a0-4186-a6b2-bd33a0eb0982>

Mesquita, M. S. B. V. (2013). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade*. [Relatório do Projeto de Investigação, Instituto Politécnico de Setúbal]. <https://comum.rcaap.pt/entities/publication/a0207d45-147b-45c8-a412-f69442d3930b>

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A, 11º ano*. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_a.pdf

Ministério da Educação e Ciência (2015). *Programa e metas curriculares de Matemática A. Ensino Secundário*. MEC.

Melo, M., & Justulin, A. (2019). Resolução de problemas: Um caminho para o ensino da matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista (Londrina)*, 3(1), 112-128. <https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/10052>

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Silva, A. P. (2024). *Máximo - Matemática A 11º Ano*. Porto Editora.

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Prentice Hall.

Nunes, M. M. A. (2017). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas*. [Relatório do Projeto de Investigação, Instituto Politécnico de Setúbal]. <https://comum.rcaap.pt/entities/publication/2c60ddca-9bdb-4827-88c6-6c29baffd523>

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29–54.

OCDE (1999). *Measuring student knowledge and skills*. OCDE. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2000/04/measuring-student-knowledge-and-skills_g1gh267b/9789264181564-en.pdf

Pearce, D. L., Bruun, F., Skinner, K., & Lopez-Mohler, C. (2013). What teachers say about student difficulties solving mathematical word problems in grades 2-5. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(1), 3-19.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169-3174.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas – Um novo aspecto do método matemático*. Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel dos contextos nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 8(22), 196-216.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9-29.

Prates, A., Tavares, C., Dias, R. P., & Nunes, C. C. (2011). O pensamento algébrico no estudo das funções no 10.º ano de escolaridade. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 163-178). APM.

Rocha, H., Viseu, F., & Matos, S. (2024). Problem-solving in a real-life context: An approach during the learning of inequalities. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 21-37. <https://doi.org/10.30935/scimath/13828>

Romeiras, M. F. (2023). *Resolução de tarefas com problemas em contextos reais: Um estudo numa turma de 11.º ano* [Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, IEUL]. <https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/64984>

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton, & A. P. Shulte (Orgs.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1982). Some thoughts on problem solving research and mathematics education. In F. K. Lester, & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research* (pp. 27-37). Franklin Institute Press.

Skovsmose, O (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 14, 66-91.

Smith, M.S., & Stein, M.K. (2018). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. NCTM.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, 22-28.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.

Tambychik, T., & Meerah, T. S. (2010). Students' difficulties in mathematics problem-solving: What do they say? *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 142-151.

Ulandari, L., Amry, Z., & Saragih, S. (2019). Development of learning materials based on realistic mathematics education approach to improve students' mathematical problem solving ability and self-efficacy. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(2), 375-383.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa]. APM.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lidel.

Legislação

Decreto-lei n.º 54/2018: Ministério da Educação e Ciência. (2018) Diário da República: 1.ª Série, n.º 129/2018, de 6 de julho, pp. 2918–2928.

Anexos

Anexo 1 – Plano de aula (introdução às progressões aritméticas)

Plano de Aula

Data: 15 de janeiro

Tempo: 50 minutos

Tema: Funções

Tópico: Sucessões

Subtópico: Progressões Aritméticas e Geométricas

Sumário:

Progressões aritméticas: termo geral e soma de N termos consecutivos.

Objetivos da aula:

- Introduzir as progressões aritméticas, definindo-a por recorrência, identificando o termo geral e a soma de N termos consecutivos;
- Promover a comunicação matemática e o raciocínio matemático.

Recursos:

- Caderno, lápis e borracha;
- Calculadora;
- Ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula

I: Apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho (10 minutos)

A aula inicia-se com uma breve revisão sobre as sequências aritméticas, estudadas no 7º ano, passando para as progressões aritméticas. Tendo os alunos reconhecido que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante, r , pode-se definir as progressões aritméticas por recorrência.

De seguida, a tarefa, apresentada na Figura 1, é lida em voz alta por um aluno, esclarecendo-se possíveis dúvidas de linguagem. Nesta fase, a professora deve pedir aos alunos que sublinhem as informações importantes do enunciado e, em cada pergunta, o que é pedido. O trabalho será realizado em grupos de 3 ou 4 elementos e são dados 15 minutos aos alunos para realizar a tarefa, discutindo as suas ideias e preparando uma possível apresentação das conclusões aos colegas.

Progressões Aritméticas

Considera a seguinte progressão aritmética:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

1. Qual a razão desta progressão?
2. Indica o termo geral desta progressão.
3. Qual a soma dos:
 - 3.1. 5 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.2. 8 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.3. 10 primeiros termos da progressão aritmética?
 - 3.4. 15 primeiros termos da progressão aritmética?

Figura 1 – Tarefa dada aos alunos

II: Realização da tarefa (15 minutos)

Uma vez que as sequências aritméticas já foram abordadas no 7º ano e a progressão aritmética foi definida por recorrência no início da aula, espera-se que os alunos não tenham dúvidas na resolução das duas primeiras perguntas da tarefa. O seu objetivo é destacar dados ou expressões que podem facilitar a resolução das questões seguintes.

Na pergunta 3, podem surgir algumas dificuldades, visto que os alunos não conhecem a expressão da soma dos N primeiros termos da progressão aritmética à partida. Os alunos podem optar por diferentes caminhos para calcular a soma dos primeiros N termos da progressão ($N = 5, 8, 10, 15$).

A estratégia que se espera que alguns alunos utilizem consiste em escrever os N primeiros termos no caderno e utilizar a calculadora para determinar a sua soma. Contudo, esta estratégia pode levar a erros, por exemplo, na passagem do caderno para a calculadora, resultando num valor incorreto. A professora deve verificar o progresso dos alunos, para garantir que estes erros são corrigidos e não interferem na continuação da resolução da tarefa. Para além disso, podem perder a motivação para realizar a tarefa por terem de determinar e somar muitos termos. Nesse caso, a professora deve incentivá-los a continuar o processo e a tentar encontrar uma forma mais eficiente para chegar ao objetivo.

Os alunos podem optar por outra estratégia: utilizar a folha de cálculo da calculadora, onde escrevem o primeiro termo e definem os restantes adicionando 3 ao termo imediatamente anterior. Esta estratégia, embora mais eficiente, pode tornar-se mais demorada pois os alunos não estão habituados a utilizar a folha de cálculo e, como tal, podem cometer erros na definição das fórmulas. A professora deve verificar o progresso dos alunos e promover a continuação da utilização da calculadora.

Uma dificuldade que pode surgir em ambas as estratégias é a interpretação incorreta do que é pedido, levando os alunos a indicar apenas o valor do 5º, 8º, 10º ou 15º termo. Caso isto aconteça, a professora deve pedir aos alunos que voltem a ler o enunciado e que digam por palavras suas o que é pedido, de forma a perceberem que a sua resposta não é a desejada.

III: Discussão da tarefa e apresentação das conclusões (15 minutos)

Nesta fase da aula, são discutidas em turma as respostas obtidas pelos alunos, de forma a reunir dados para deduzir a expressão da soma dos primeiros N termos.

Para iniciar a discussão, a primeira questão será respondida pelos alunos oralmente e escrita pela professora no quadro. De seguida, um aluno é escolhido pela professora para ir ao quadro responder à segunda pergunta, justificando adequadamente aos colegas a sua resposta. Por fim, para a discussão da última pergunta, são chamados ao quadro quatro alunos (um de cada vez), sendo que cada um escreve a sua resolução e explica oralmente aos colegas o que fez. Para esta questão, será interessante incluir estratégias diferentes para que os alunos percebam que não existe apenas uma resolução certa, introduzindo-as segundo um grau crescente de complexidade.

Para a apresentação no quadro, espera-se que os alunos sejam capazes de escrever, de forma limpa e clara, as suas conclusões e que consigam explicar à turma todos o seu pensamento. Enquanto esta apresentação decorre, a professora pode perguntar a um aluno se tem alguma questão ou pedir que explique por palavras suas aquilo que os colegas estão a apresentar, de forma a garantir o envolvimento de todos nesta etapa de grande importância.

IV: Síntese (10 minutos)

Depois de concluída a discussão coletiva, é possível introduzir a expressão da soma dos N primeiros termos de uma progressão aritmética.

Com as respostas à última pergunta no quadro, a professora deve pedir aos alunos que indiquem o valor da soma $u_1 + u_N$ sendo u_N o último termo de cada soma. De seguida, pede-lhes que encontrem a relação entre esse valor e a soma obtida, de forma que os alunos consigam perceber que a expressão da soma dos N primeiros termos depende da soma do primeiro e do último termos e do número de termos a considerar.

Depois de os alunos encontrarem a expressão da soma dos N primeiros termos, é feito um resumo acerca das progressões aritméticas no quadro, com a sua colaboração. Estes devem registar o resumo no seu caderno à medida que a professora o escreve no quadro. A informação a registar será a apresentada abaixo.

A **Progressão Aritmética** de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é a sucessão definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Se $r > 0$, a progressão é crescente;
- Se $r < 0$, a progressão é decrescente;
- Se $r = 0$, a progressão é constante;

O termo geral da progressão aritmética é dado por $u_n = a + (n - 1) \times r$.

$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

A soma dos N primeiros termos da progressão aritmética, S_N , é dada por $S_N = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$

Avaliação:

Durante a aula, a avaliação será realizada através de:

- observação direta (interesse, empenho, interação com os colegas);
- diálogo entre professor e alunos (qualidade da participação);
- realização da tarefa proposta.

Capacidades transversais que se pretende desenvolver nos alunos:

- **Raciocínio matemático** – esta tarefa possibilita a formulação e testagem de conjecturas e generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns na soma de N termos consecutivos;
- **Comunicação matemática** – a aula apresentada proporciona o desenvolvimento da capacidade de expressar as suas ideias, quer por escrito quer oralmente, bem como a capacidade de discutir ideias, expressar os seus argumentos e ouvir os dos colegas;
- **Representações matemáticas** – esta aula permite aos alunos conhecer a definição da progressão aritmética por recorrência e pelo termo geral, reconhecendo diferentes representações deste tipo de progressões.

Anexo 2 – Plano de aula (consolidação das progressões aritméticas)

Plano de Aula

Data: 20 de janeiro

Tempo: 50 minutos

Tema: Funções

Tópico: Sucessões

Subtópico: Progressões Aritméticas e Geométricas

Sumário:

Resolução de exercícios e problemas sobre progressões aritméticas.

Objetivos da aula:

- Consolidar os conhecimentos adquiridos na aula anterior acerca das progressões aritméticas;
- Promover a comunicação matemática e a resolução de problemas.

Recursos:

- Caderno, lápis e borracha;
- Manual Máximo 11 (Parte I);
- Ficha de trabalho nº 14.

Desenvolvimento da aula

Esta aula tem como objetivo consolidar os conteúdos lecionados na aula anterior acerca das progressões aritméticas. Para isso, são propostos aos alunos exercícios e problemas sobre este assunto, previamente selecionados pela professora.

A aula decorre da seguinte forma: são propostas as primeiras três tarefas (da Ficha de Trabalho nº 14) e é dado tempo aos alunos para as resolverem individualmente ou a pares, sendo escolhido um aluno para resolver cada tarefa no quadro, promovendo a discussão da sua resolução com a turma. De seguida, são indicados os exercícios e problemas propostos do Manual e segue-se a mesma dinâmica já referida.

Ao longo da aula, antecipam-se algumas dificuldades em cada tarefa e possíveis sugestões para as superar:

- A questão 8 (FT14) é composta por 4 alíneas, sendo que os alunos podem ter algumas dificuldades nas alíneas b) e c) uma vez que apresentam algumas dificuldades em perguntas de justificação; para isso, a professora deve pedir aos alunos que tentem explicar oralmente o que pensam, para que lhes seja mais fácil organizar as ideias e escrever a sua justificação;
- A tarefa 9 (FT14) é um problema: os alunos podem sentir dificuldades em encontrar uma estratégia para determinar os termos por não se lembrarem que a diferença entre dois termos consecutivos é constante; para isso, a professora pode perguntar o que caracteriza as progressões aritméticas, de forma a relembrar esta relação e permitir que os alunos continuem a resolução da tarefa;

- Na tarefa 10 (FT14), não devem surgir dúvidas nas duas primeiras alíneas pois são dados o primeiro termo e a razão e, portanto, a determinação do termo geral é direta; as duas alíneas seguintes exigem que os alunos escrevam a diferença dos dois termos em função da razão da progressão, ainda que se tratem de exercícios; caso os alunos não consigam determinar a razão da progressão, a professora pode pedir para escrever o termo seguinte ao termo de menor ordem dado, para que os alunos percebam que podem escrever o termo de maior ordem dado em função deste e da razão;
- A tarefa 25 da página 169 (Manual) é composta por duas alíneas: os alunos não devem ter dificuldade na primeira alínea visto que já resolveram uma pergunta semelhante; a segunda alínea é um problema e antecipam-se algumas dificuldades ao longo da sua resolução:
 - os alunos não conseguem traduzir a informação dada para linguagem matemática; neste caso, a professora deve pedir aos alunos que releiam a pergunta e expliquem por palavras suas o que é pedido;
 - os alunos podem cometer erros na resolução da inequação, por isso, a professora deve ir verificando o progresso dos alunos para que, caso haja um erro, possa intervir;
 - depois de resolver a inequação, dado que os valores inferior e superior não são inteiros, os alunos podem ter dificuldade em determinar quais os valores de n que são solução da inequação; caso isto ocorra, a professora pode sugerir a construção de uma reta numérica, para que seja mais simples visualizar e, consequentemente, determinar as soluções inteiras da inequação.
- No exercício 50 da página 178 (Manual) não se antecipam dúvidas por parte dos alunos; contudo, este exercício foi selecionado para garantir que nenhum aluno calcula os dez primeiros termos para depois os somar, dado que já conhecem a expressão para calcular a soma dos N primeiros termos; caso algum aluno o faça, a professora deve mostrar que, caso fosse pedido um número muito elevado de termos, seria muito trabalhoso calcular a soma através desta estratégia, pelo que é mais eficiente utilizar a expressão da soma;
- Na resolução do problema 58 da página 179 (Manual) antecipam-se algumas dúvidas na tradução da informação do enunciado para linguagem matemática; a professora deve perguntar aos alunos se conseguem escrever os três termos e relacioná-los, de forma a perceberem que devem escrever os termos em função de um desses termos e da razão da progressão; depois desta etapa, espera-se que os alunos determinem corretamente os valores das incógnitas, mas podem ter dificuldades em interpretar os valores obtidos, não dando resposta ao problema; neste caso, a professora deve sugerir aos alunos que voltem a ler o enunciado, para perceber o que é pedido;
- O problema 13 da página 181 (Manual) tem como objetivo introduzir problemas com contextos distintos da matemática pura, de forma a mostrar como este assunto se pode enquadrar na vida real; tal como o problema anterior, os alunos podem ter dificuldades na tradução da informação do enunciado para linguagem matemática; a professora deve pedir aos alunos que digam por palavras suas as informações dadas no enunciado e o que é pedido, de forma que os alunos consigam fazer essa tradução.

8. Considere a sucessão (a_n) definida, por recorrência, por:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Calcule os quatro primeiros termos da sucessão.
- Justifique que (a_n) é uma progressão aritmética.
- Mostre que $a_n = 7n - 2$.
- Calcule a_{50} .

Figura 1 – Tarefa 8 (Ficha de Trabalho nº 14)

9. Três termos consecutivos de uma progressão aritmética são dados, para um determinado valor de x , respetivamente, por $2x + 1$, $x^2 + 1$ e $5x - 2$. Determine esses três termos.

Figura 2 – Tarefa 9 (Ficha de Trabalho nº 14)

10. Determine o termo geral de uma progressão aritmética (a_n) e classifique-a quanto à monotonia sabendo que:

- $a_1 = 13$ e $r = -3$
- $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$
- $a_6 = 12$ e $a_{14} = 28$
- $a_2 = 25$ e $a_7 = -15$

Figura 3 – Tarefa 10 (Ficha de Trabalho nº 14)

25. Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral é:

$$u_n = \frac{2n+1}{3}$$

25.1. Prove que (u_n) é uma progressão aritmética.

25.2. Determine quantos termos da sucessão estão entre 100 e 120.

Figura 4 – Tarefa 25 (página 169 do Manual)

50. Seja a sucessão (a_n) definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

Calcule a soma dos dez primeiros termos de (a_n) .

Figura 5 – Exercício 50 (página 178 do Manual)

58. Três números estão em progressão aritmética (isto é, são termos consecutivos de uma progressão aritmética), sendo que a sua soma é 3 e o seu produto -3. Quais são os números?

Figura 6 – Problema 58 (página 179 do Manual)

13. Para recuperar de uma lesão, o Luís corre sempre mais 300 metros do que correu no dia anterior. No segundo dia correu 1 km. Quantos quilómetros, no total, percorrerá ao fim dos primeiros dez dias do treino de recuperação?



Figura 7 – Problema 13 (página 181 do Manual)

Avaliação:

Durante a aula, a avaliação será realizada através de:

- observação direta (interesse, empenho, interação com os colegas);
- diálogo entre professor e alunos (qualidade da participação);
- realização da tarefa proposta.

Capacidades transversais que se pretende desenvolver nos alunos:

- **Comunicação matemática** – a aula apresentada proporciona o desenvolvimento da capacidade de expressar as suas ideias, quer por escrito quer oralmente, bem como a capacidade de discutir ideias, expressar os seus argumentos e ouvir os dos colegas;
- **Resolução de problemas** – algumas das tarefas realizadas são tarefas de tipo problema, em que os alunos devem reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas e aplicar diferentes estratégias para os resolver.

Anexo 3 – Plano de aula (introdução às progressões geométricas)

Plano de Aula

Data: 22 de janeiro

Tempo: 50 minutos

Tema: Funções

Tópico: Sucessões

Subtópico: Progressões Aritméticas e Geométricas

Sumário:

Progressões geométricas: termo geral e soma de N termos consecutivos.

Objetivos da aula:

- Introduzir as progressões geométricas, definindo-a por recorrência, identificando o termo geral e a soma de N termos consecutivos;
- Promover a comunicação matemática e o raciocínio matemático.

Recursos:

- Caderno, lápis e borracha;
- Calculadora;
- Ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula

Esta aula segue uma organização idêntica à da aula de introdução das progressões aritméticas, tendo por base uma tarefa muito semelhante.

I: Apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho (10 minutos)

A aula inicia-se com uma breve revisão sobre as progressões aritméticas, estudadas nas aulas anteriores, passando para as progressões geométricas. Tendo os alunos reconhecido que a razão entre dois termos consecutivos é sempre constante, r , pode-se definir as progressões geométricas por recorrência.

De seguida, a tarefa, apresentada na Figura 1, é lida em voz alta por um aluno, esclarecendo-se possíveis dúvidas de linguagem. Nesta fase, a professora deve pedir aos alunos que sublinhem as informações importantes do enunciado e, em cada pergunta, o que é pedido. O trabalho será realizado em grupos de 3 ou 4 elementos e são dados 15 minutos aos alunos para realizar a tarefa, discutindo as suas ideias e preparando uma possível apresentação das conclusões aos colegas.

Progressões Geométricas

Considera a seguinte progressão geométrica:

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

1. Qual a razão desta progressão?
2. Indica o termo geral desta progressão.
3. Qual a soma dos:
 - 3.1. 4 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.2. 9 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.3. 12 primeiros termos da progressão geométrica?
 - 3.4. 15 primeiros termos da progressão geométrica?

Figura 1 – Tarefa dada aos alunos

II: Realização da tarefa (15 minutos)

Uma vez que a progressão geométrica foi definida por recorrência no início da aula, espera-se que os alunos não tenham dúvidas na resolução da primeira pergunta da tarefa.

Na segunda pergunta, podem surgir algumas dúvidas na definição do termo geral. Se isto acontecer, a professora deve pedir aos alunos que fatorizem cada um dos termos apresentados, de forma a encontrar regularidades na construção de cada termo e, conseqüentemente, definir o termo geral da progressão.

Na pergunta 3, podem surgir algumas dificuldades, visto que os alunos não conhecem a expressão da soma dos N primeiros termos da progressão geométrica à partida. Os alunos podem optar por diferentes caminhos para calcular a soma dos primeiros N termos da progressão ($N = 4, 9, 12, 15$).

A estratégia que se espera que alguns alunos utilizem consiste em escrever os N primeiros termos no caderno e utilizar a calculadora para determinar a sua soma. Contudo, esta estratégia pode levar a erros, por exemplo, na passagem do caderno para a calculadora, resultando num valor incorreto. A professora deve verificar o progresso dos alunos, para garantir que estes erros são corrigidos e não interferem na continuação da resolução da tarefa. Para além disso, podem perder a motivação para realizar a tarefa por terem de determinar e somar muitos termos. Nesse caso, a professora deve incentivá-los a continuar o processo e a tentar encontrar uma forma mais eficiente para chegar ao objetivo.

Os alunos podem optar por outra estratégia: utilizar a folha de cálculo da calculadora, onde escrevem o primeiro termo e definem os restantes adicionando 3 ao termo imediatamente anterior. Esta estratégia, embora mais eficiente, pode tornar-se mais demorada pois os alunos não estão habituados a utilizar a folha de cálculo e, como tal, podem cometer erros na definição das fórmulas. A professora deve verificar o progresso dos alunos e promover a continuação da utilização da calculadora.

Uma dificuldade que pode surgir em ambas as estratégias é a interpretação incorreta do que é pedido, levando os alunos a indicar apenas o valor do 4.º, 9.º, 12.º ou 15.º termo. Caso isto aconteça, a professora deve pedir aos alunos que voltem a ler o enunciado e que digam por palavras suas o que é pedido, de forma a perceberem que a sua resposta não é a desejada.

III: Discussão da tarefa e apresentação das conclusões (15 minutos)

Nesta fase da aula, são discutidas em turma as respostas obtidas pelos alunos, de forma a reunir dados para deduzir a expressão da soma dos primeiros N termos.

Para iniciar a discussão, a primeira questão será respondida pelos alunos oralmente e escrita pela professora no quadro. De seguida, um aluno é escolhido pela professora para ir ao quadro responder à segunda pergunta, justificando adequadamente aos colegas a sua resposta. Por fim, para a discussão da última pergunta, são chamados ao quadro quatro alunos (um de cada vez), sendo que cada um escreve a sua resolução e explica oralmente aos colegas o que fez. Para esta questão, será interessante incluir estratégias diferentes para que os alunos percebam que não existe apenas uma resolução certa, introduzindo-as segundo um grau crescente de complexidade.

Para a apresentação no quadro, espera-se que os alunos sejam capazes de escrever, de forma limpa e clara, as suas conclusões e que consigam explicar à turma todos o seu pensamento. Enquanto esta apresentação decorre, a professora pode perguntar a um aluno se tem alguma questão ou pedir que explique por palavras suas aquilo que os colegas estão a apresentar, de forma a garantir o envolvimento de todos nesta etapa de grande importância.

IV: Síntese (10 minutos)

Depois de concluída a discussão coletiva, é possível introduzir a expressão da soma dos N primeiros termos de uma progressão geométrica.

Com as respostas à última pergunta no quadro, a professora deve passar para a definição da expressão da soma dos N primeiros termos de uma progressão geométrica. Visto que esta expressão não é tão simples como a expressão da soma dos N primeiros termos de uma progressão aritmética, não se espera que os alunos consigam determiná-la com facilidade. Por isso, a professora deve apresentar a expressão da soma dos N primeiros termos e explicar que depende do primeiro termo e da razão da progressão.

Depois de apresentada a expressão da soma dos N primeiros termos, é feito um resumo acerca das progressões geométricas no quadro, com a sua colaboração. Estes devem registar o resumo no seu caderno à medida que a professora o escreve no quadro. A informação a registar será a apresentada abaixo.

A **Progressão Geométrica** de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é a sucessão definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

	$a < 0$	$a > 0$
$r > 1$	decrescente	crescente
$r = 1$	constante	
$0 < r < 1$	crescente	decrescente
$r < 0$	não monótona	

O termo geral da progressão geométrica é dado por $u_n = a \times r^{n-1}$

$$u_n = u_k \times r^{n-k}$$

A soma dos N primeiros termos da progressão geométrica, S_N , é dada por $S_N = u_1 \times \frac{1-r^N}{1-r}$

Avaliação:

Durante a aula, a avaliação será realizada através de:

- observação direta (interesse, empenho, interação com os colegas);
- diálogo entre professor e alunos (qualidade da participação);
- realização da tarefa proposta.

Capacidades transversais que se pretende desenvolver nos alunos:

- **Raciocínio matemático** – esta tarefa possibilita a formulação e testagem de conjecturas e generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns na soma de N termos consecutivos;
- **Comunicação matemática** – a aula apresentada proporciona o desenvolvimento da capacidade de expressar as suas ideias, quer por escrito quer oralmente, bem como a capacidade de discutir ideias, expressar os seus argumentos e ouvir os dos colegas;
- **Representações matemáticas** – esta aula permite aos alunos conhecer a definição da progressão geométrica por recorrência e pelo termo geral, reconhecendo diferentes representações deste tipo de progressões.

Anexo 4 – Plano de aula (consolidação das progressões geométricas)

Plano de Aula

Data: 27 de janeiro

Tempo: 50 minutos

Tema: Funções

Tópico: Sucessões

Subtópico: Progressões Aritméticas e Geométricas

Sumário:

Resolução de exercícios e problemas sobre progressões geométricas.

Objetivos da aula:

- Consolidar os conhecimentos adquiridos na aula anterior acerca das progressões geométricas;
- Promover a comunicação matemática e a resolução de problemas.

Recursos:

- Caderno, lápis e borracha;
- Manual Máximo 11 (Parte I);
- Ficha de trabalho nº 14.

Desenvolvimento da aula

Esta aula tem como objetivo consolidar os conteúdos lecionados na aula anterior acerca das progressões geométricas. Para isso, são propostos aos alunos exercícios e problemas sobre este assunto, previamente selecionados pela professora.

A aula decorre da seguinte forma: são propostas as primeiras três tarefas (da Ficha de Trabalho nº 14) e é dado tempo aos alunos para as resolverem individualmente ou a pares, sendo escolhido um aluno para resolver cada tarefa no quadro, promovendo a discussão da sua resolução com a turma. De seguida, são indicados os exercícios e problemas propostos do Manual e segue-se a mesma dinâmica já referida.

Ao longo da aula, antecipam-se algumas dificuldades em cada tarefa e possíveis sugestões para as superar:

- O exercício 13 (FT14) tem como objetivo iniciar a consolidação destes e os alunos devem aplicar os conceitos estudados na aula anterior de forma direta, pelo que as dificuldades dos alunos podem passar por erros de cálculo;
- Na tarefa 12 (FT14), antecipam-se dificuldades na determinação da razão e do primeiro termo, necessários para o cálculo da soma dos 10 primeiros termos; caso isto aconteça, a professora pode pedir para escrever o termo seguinte ao termo de menor ordem dado, para que os alunos percebam que podem escrever o termo de maior ordem dado em função deste e da razão, determinando, assim, a razão;

- A tarefa 14 (FT14) apresenta o termo geral e pede duas somas de termos consecutivos distintas; contudo, o termo geral não é dado na forma $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, pelo que os alunos podem ter dificuldades a determinar o primeiro termo e a razão; os alunos podem optar por substituir n por 1 para determinar o primeiro termo e calcular o segundo termo para conhecer a razão da progressão ou podem tentar escrever o termo geral na forma $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ de forma a identificar o primeiro termo e a razão; depois de conhecido o primeiro termo e a razão, a primeira alínea permite a aplicação direta da expressão da soma dos 14 primeiros termos, enquanto na segunda alínea os alunos podem ter dificuldade em perceber como calcular a soma sem determinar cada termo; caso isso ocorra, a professora pode perguntar se a primeira alínea pode ser útil, levando os alunos a perceber que devem subtrair a esta a soma dos 8 primeiros termos;
- A tarefa 28 da página 171 (Manual) é constituída por duas alíneas do tipo exercício, semelhantes ao exercício 13 da Ficha de Trabalho nº 14, e uma alínea que pode ser considerada um problema e, por isso, pode provocar algumas dúvidas: os alunos podem ter dificuldade em determinar os termos de sexta e sétima ordem e, posteriormente, o primeiro termo da progressão; neste caso, a professora deve pedir aos alunos que escrevam o sétimo termo em função do sexto termo, para que estes se apercebam da relação entre ambos e os consigam determinar;
- O exercício 49 da página 178 (Manual) é uma tarefa de escolha múltipla que foi selecionada para que os alunos se apercebam que a progressão não tem de ser necessariamente crescente se se verifica $u_{n+2} > u_n$; o objetivo deste exercício é, então, apresentar uma progressão que pode ser não monótona, visto que a razão pode ser positiva ou negativa;
- No problema 51 da página 178 (Manual), podem surgir dúvidas na tradução da informação para linguagem matemática; nesta situação, a professora deve pedir aos alunos que expliquem por palavras suas o que é dado em cada frase, podendo questionar os alunos para os ajudar (por exemplo, “Se o primeiro dos três termos for a , de que forma são os restantes dois?” (primeira frase) ou “Qual é a relação entre dois termos consecutivos de uma progressão aritmética?” (segunda frase));
- O problema 60 da página 179 (Manual) tem como objetivo introduzir problemas com contextos distintos da matemática pura, de forma a mostrar como este assunto se pode enquadrar na vida real; tal como o problema anterior, os alunos podem ter dificuldades na tradução da informação do enunciado para linguagem matemática; a professora deve pedir aos alunos que digam por palavras suas as informações dadas no enunciado e o que é pedido, de forma que os alunos consigam fazer essa tradução, podendo sugerir a construção de um esquema com o tempo e o número de pessoas que conhecem a mentira a cada instante;

13. Considere a progressão geométrica (u_n) , em que $u_1 = 5$ e $r = 4$. Determine:
- a) um termo geral de (u_n) ;
 - b) a soma dos primeiros oito termos.

Figura 1 – Tarefa 13 (Ficha de Trabalho nº 14)

12. Considere uma sucessão (u_n) tal que:
- (u_n) é uma progressão geométrica de razão positiva;
 - $u_2 = 8$ e $u_9 = 64$
- Qual é a soma dos 10 primeiros termos desta sucessão?
- (A) $124(1 + \sqrt{2})$ (B) $120(1 + \sqrt{2})$
 (C) $66(1 + \sqrt{2})$ (D) $248(1 + \sqrt{2})$

Figura 2 – Tarefa 12 (Ficha de Trabalho n.º 14)

14. Considere a sucessão (u_n) , definida por $u_n = 3^{\frac{n}{2}-1}$. Calcule o valor exato:
- a) da soma dos 14 primeiros termos;
 b) $u_9 + \dots + u_{14}$

Figura 3 – Tarefa 14 (Ficha de Trabalho n.º 14)

28. Escreva uma expressão do termo geral da progressão geométrica (u_n) , sabendo que:
- 28.1. $u_1 = -4$ e a razão é 2;
 28.2. $u_2 = \frac{1}{2}$ e a razão é 2;
 28.3. $u_7 + u_8 = -36$ e a razão é 3.

Figura 4 – Tarefa 28 (página 171 do Manual)

49. Sabendo que 6, x e 8,64 são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, x é igual a:
- (A) $\pm 7,2$ (B) 6 (C) ± 5 (D) $\pm 4,2$

Figura 5 – Exercício 49 (página 178 do Manual)

51. A soma de três termos consecutivos de uma progressão geométrica é 52.
- Se adicionarmos 8 ao termo intermédio, os três números passam a ser termos consecutivos de uma progressão aritmética.
- Quais são os números?

Figura 6 – Problema 51 (página 178 do Manual)



60. Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três que, por sua vez, a contam, em 10 minutos, a outros três (cada um) nunca se repetindo as pessoas. Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora a contar do momento em que os três amigos a começam a espalhar?

Figura 7 – Problema 60 (página 179 do Manual)

Avaliação:

Durante a aula, a avaliação será realizada através de:

- observação direta (interesse, empenho, interação com os colegas);
- diálogo entre professor e alunos (qualidade da participação);
- realização da tarefa proposta.

Capacidades transversais que se pretende desenvolver nos alunos:

- **Comunicação matemática** – a aula apresentada proporciona o desenvolvimento da capacidade de expressar as suas ideias, quer por escrito quer oralmente, bem como a capacidade de discutir ideias, expressar os seus argumentos e ouvir os dos colegas;

- **Resolução de problemas** – algumas das tarefas realizadas são tarefas de tipo problema, em que os alunos devem reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas e aplicar diferentes estratégias para os resolver.

Anexo 5 – Problema 1

PROBLEMA 1

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

a) Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 1330 minutos no total dos m dias.

Quantos dias praticou a Constança?

b) O Miguel também vai realizar uma audição de violino, mas começou a ensaiar uma semana mais tarde do que a Constança. Como tal, adotou uma estratégia diferente: em cada dia, exceto no primeiro, praticou o dobro do tempo do dia anterior. Ainda assim, praticou menos uma hora do que a Constança.

Quanto tempo praticou o Miguel no primeiro dia?

Anexo 6 – Problema 2

Andreia

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. A Andreia vai participar na viagem a Barcelona, organizada pela escola, no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia.

Cada aluno vai pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada aluno já terá pago 105 €;
- Em 2025, a Andreia pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar a Andreia?

b) A participação dos alunos na viagem só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes da viagem para Barcelona. Qual é a data de início da viagem?

António

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. O clube de futebol do António foi convidado para participar num torneio em Barcelona no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia, de acordo com o escalão em que joga.

Os atletas dos juvenis e dos juniores vão pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
- Em 2025, o António pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar o António?

b) A participação dos atletas no torneio só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes do início do torneio. Qual é a data do início do torneio?

Catarina

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. A Catarina vai participar na viagem a Barcelona, organizada pela escola, no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia.

Cada aluno vai pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada aluno já terá pago 105 €;
- Em 2025, a Catarina pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar a Catarina?

b) A participação dos alunos na viagem só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes da viagem para Barcelona. Qual é a data de início da viagem?

Duarte

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. O clube de futebol do Duarte foi convidado para participar num torneio em Barcelona no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia, de acordo com o escalão em que joga.

Os atletas dos juvenis e dos juniores vão pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
- Em 2025, o Duarte pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar o Duarte?

b) A participação dos atletas no torneio só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes do início do torneio. Qual é a data do início do torneio?

Francisco

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. O clube de futebol do Francisco foi convidado para participar num torneio em Barcelona no próximo ano e, para poder ir, tem de pagar uma determinada quantia, de acordo com o escalão em que joga.

Os atletas dos juvenis e dos juniores vão pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
- Em 2025, o Francisco pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar o Francisco?

b) A participação dos atletas no torneio só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes do início do torneio. Qual é a data do início do torneio?

Lúcia

PROBLEMA 2

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. O clube de andebol da Lúcia vai participar numa competição em Barcelona no próximo ano e, para que isso seja possível, todos os atletas têm de pagar uma determinada quantia.

Cada atleta vai pagar a mesma quantia. Sabe-se que:

- O pagamento vai começar no mês de abril e será pago ao dia 5 de cada mês;
- Todos os meses aumenta o montante pago no mesmo valor em euros;
- No final do verão, cada atleta já terá pago 105 €;
- Em 2025, a Lúcia pagará um total de 198 €.

a) Em abril, quanto vai pagar a Lúcia?

b) A participação dos atletas só é confirmada após a finalização do pagamento de 275 € e a última prestação será paga 60 dias antes do início do torneio. Qual é a data do início do torneio?

Anexo 7 – Problema 3

PROBLEMA 3

Lê o enunciado com cuidado e justifica todas as etapas da tua resolução.

1. Seja x um número inteiro. Sabe-se que:

- x , $x + 4$ e $6x + 6$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) ;
- a soma dos seis primeiros termos é igual a 728.

a) Determina o primeiro termo da progressão.

b) Seja (b_n) uma progressão aritmética cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo de (a_n) e a razão é o dobro desse valor. Qual é o décimo termo de (b_n) ?

Anexo 8 – Guião das Entrevistas a pares

1. Quais as principais dificuldades que sentiste na interpretação dos problemas propostos?
2. Por que motivos achas que essas dificuldades surgiram?
3. Qual o problema que consideraste mais fácil? E o mais difícil? Achas que a situação do problema influenciou as dificuldades que sentiste?

Anexo 9 – Documento de consentimento informado



Participação em estudo de investigação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo e Secundário, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, nós, Ana Rita Perez Mendes e Tatiana Moreira Simões, professoras estagiárias de Matemática, pretendemos desenvolver projetos de investigação na área do ensino da Matemática. Estes projetos fazem parte integrante do estágio que estamos a realizar e, com eles, pretendemos analisar as dificuldades dos alunos na comunicação matemática e na interpretação de enunciados de problemas. Assim, para além de professoras estagiárias, teremos também o papel de investigadoras na turma do seu educando.

Para levar a cabo os nossos projetos de investigação, precisamos de recolher alguns dados: as produções escritas do seu educando e a gravação áudio de entrevistas. Os dados que viermos a recolher nunca serão divulgados e serão destruídos após a realização dos nossos trabalhos. As entrevistas serão realizadas fora do período das aulas, em horário a combinar com o seu educando, mas nas instalações da escola. Nestas entrevistas, vamos convidar o seu educando a realizar tarefas de forma individual e a conversar sobre o que vão fazendo, quer nessas tarefas, quer em algumas produções escritas que serão recolhidas em aula. Os alunos não serão nunca identificados no relatório que apresenta as conclusões destes estudos, sendo referidos por nomes fictícios para garantir total anonimato. Apenas nós e a nossa orientadora, a Professora Doutora Rosa Ferreira, teremos acesso às gravações, garantindo assim a confidencialidade dos dados.

A participação dos alunos nestes estudos é muito importante para que estes se possam concretizar pois os dados recolhidos acima referidos são essenciais para a construção do relatório de estágio. Contudo, essa participação é voluntária e, como tal, os alunos podem escolher não participar ou, escolhendo participar, desistir da sua colaboração em qualquer momento sem qualquer prejuízo. É importante também assegurar que a participação do seu educando nestes estudos não terá interferência na sua avaliação de desempenho na disciplina de Matemática, mas sim na avaliação das professoras estagiárias. Os resultados das investigações que iremos realizar serão dados a conhecer aos participantes e respetivos encarregados de educação.

Se tiver alguma questão sobre estes estudos, pode contactar-nos:

- Rita Mendes: número 911577387 ou email ritamendes@██████████;

- Tatiana Simões: número 936550190 ou email tatianasimoes@██████████;

- Rosa Tomás Ferreira: número 966074963 ou email rferreir@fc.up.pt.

10 de janeiro de 2025

Eu e o meu educando, _____, estamos/não estamos (riscar o que não interessa) de acordo com a sua participação nestes estudos, em particular, a gravação áudio de entrevistas e a recolha de produções escritas.

Encarregado de Educação: _____