

Processos estocásticos não estacionários

1 Introdução

Nos capítulos anteriores, focamos o nosso estudo em processos estocásticos estacionários. No entanto, no mundo real, a estacionaridade é mais uma exceção do que a regra. A maioria dos processos não é estacionária, apresentando características estatísticas como média, variância ou covariância que variam ao longo do tempo. Além disso, muitos desses processos exibem padrões periódicos, conhecidos como **sazonalidade**. Este capítulo aborda as principais propriedades dos processos não estacionários, os modelos que os descrevem e os métodos para avaliar tanto a sua estacionaridade como a sua sazonalidade.

2 Definição de Não Estacionaridade

Um processo estocástico é classificado como não estacionário quando a sua distribuição varia ao longo do tempo. Contudo, se a média e a variância forem constantes e a sequência de covariância depender apenas do desfasamento temporal entre as amostras, o processo pode ser tratado como estacionário (em sentido lato), permitindo a aplicação de técnicas típicas de análise de processos estacionários. Assim, um processo é não estacionário se:

- A sua **média** variar ao longo do tempo;
- A sua **variância** não se mantiver constante;
- A sua **covariância** depender do tempo e não apenas do desfasamento temporal.

Estas propriedades tornam a análise de processos não estacionários mais complexa, exigindo abordagens específicas. A seguir, descrevem-se os principais tipos de não estacionaridade.

3 Tipos de Não Estacionaridade

A não estacionaridade em séries temporais refere-se à variação das suas propriedades estatísticas ao longo do tempo, como a média, a variância e a covariância. Essa característica é comum em muitos processos reais, dificultando a análise e modelagem das séries, já que muitos métodos pressupõem estacionaridade. Para melhor compreender este fenómeno, identificamos os seguintes tipos de não estacionaridade:

1. **Não Estacionaridade devido à Tendência:** Este tipo ocorre quando a média da série muda ao longo do tempo. A tendência pode ser:
 - **Determinística:** Representada por uma função linear ou polinomial do tempo, como um crescimento ou decréscimo constante.

- **Estocástica:** Onde a média varia de forma aleatória, geralmente associada à presença de uma raiz unitária (efeito integrador).

Exemplo: Variação do PIB.

2. **Não Estacionaridade devido Oscilações da Variância:** Neste caso, a variância da série muda ao longo do tempo, resultando em períodos alternados de alta e baixa volatilidade.

Exemplo: Flutuações no mercado financeiro durante períodos de crise ou estabilidade.

3. **Não Estacionaridade devido à Sazonalidade:** A série apresenta padrões periódicos que se repetem ao longo do tempo, como ciclos diários, semanais ou anuais. Esses ciclos podem estar associados a fatores naturais, sociais ou econômicos.

Exemplo: Consumo de energia elétrica com picos diários ou sazonais.

4. **Não Estacionaridade devido a Mudanças Estruturais:** Alterações abruptas nas características da série, causadas por eventos externos ou internos, podem introduzir não estacionaridade.

Exemplo: O impacto de uma pandemia nas vendas de um setor específico.

5. **Não Estacionaridade devido à Integração:** Uma série integrada requer diferenciação para se tornar estacionária. Um processo com raiz unitária é um exemplo clássico, onde o valor atual é fortemente dependente do valor anterior.

Exemplo: Passeios aleatórios, como os preços de ações.

A correta identificação do tipo de não estacionaridade é um passo crucial para a análise da série. Após essa identificação, podem ser aplicadas as técnicas adequadas para estacionarizar a série, como diferenciação, remoção de tendência ou ajuste de sazonalidade.

4 Identificação e Diagnóstico da Não Estacionaridade

Para modelar um processo, é necessário determinar se ele apresenta características de não estacionaridade. Isso pode ser feito através de:

1. Análise visual:

- Traçar a série no domínio do tempo para identificar tendências ou variações na média e variância.
- Inspeccionar gráficos de autocorrelação (ACF) para detectar padrões não estacionários.

A análise da ACF em processos não estacionários é desafiadora, pois a autocorrelação não depende apenas do desfasamento (τ), mas também do instante de tempo (t). Para contornar essa dificuldade, podem ser utilizadas as seguintes estratégias:

- **Segmentação da série temporal:** Dividindo os dados em segmentos suficientemente curtos, pode-se assumir estacionaridade local em cada intervalo, permitindo a estimativa da ACF.

- **Janela móvel:** Com esta técnica, a ACF é calculada continuamente ao longo do tempo, fornecendo uma visão dinâmica das variações no processo.
2. **Testes de estacionaridade:** Para complementar a análise visual, é recomendável aplicar testes estatísticos, como:
 - **Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF):** Avalia a presença de integradores na série, o que indica não estacionaridade.
 - **Teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS):** Verifica a existência de estacionaridade em torno de uma média constante ou de uma tendência linear.
 - Teste de Kruskal-Wallis é aplicado para detetar **sazonalidade**, avaliando se os valores da série variam em uma variação periódica (e.g., meses).
 3. **Análise do espectro:** A análise da densidade espectral fornece informações adicionais, identificando componentes de baixa frequência associadas a tendências (efeito de integração) e componentes periódicas relacionadas à sazonalidade.

5 Transformações para a Estacionaridade

Muitas técnicas de análise de processos estocásticos foram desenvolvidas com o objetivo de estudar processos estacionários. Por conseguinte, quando confrontados com processos que não cumprem este requisito, torna-se indispensável aplicar transformações que estabilizem as suas propriedades estatísticas, tais como a média, a variância e a covariância. A escolha da transformação adequada depende essencialmente do tipo de não estacionaridade presente na série. Nesta secção, exploram-se os métodos mais utilizados para transformar séries não estacionárias em séries apropriadas para análise

5.1 Remoção de Tendências

Quando a não estacionaridade se deve à presença de uma tendência, seja ela determinística ou estocástica, a solução consiste em remover essa tendência da série.

Diferenciação

A diferenciação é usada para remover **tendências estocásticas**, que são variações sistemáticas no comportamento do processo causadas pela acumulação de choques aleatórios ao longo do tempo. Essas tendências induzem um **efeito integrador**, dando origem a modelos com raiz unitária. Nesse contexto, o valor atual da série é uma soma cumulativa de valores passados, como ocorre em passeios aleatórios ($y(t) = y(t-1) + e(t)$).

Para uma série $y(t)$, a primeira diferença é calculada como:

$$\Delta y(t) = y(t) - y(t-1)$$

Caso a série apresente tendências estocásticas de ordem superior (e.g., variações cumulativas de um passeio aleatório), pode ser necessário aplicar diferenciações adicionais:

$$\Delta^d y(t) = (1 - q^{-1})^d y(t)$$

Onde d é o número de diferenciações necessárias para alcançar estacionaridade. Por exemplo:

- Um processo $I(1)$ requer uma única diferenciação ($d = 1$).
- Um processo $I(2)$, onde os valores acumulam as diferenças de um passeio aleatório, requer duas diferenciações ($d = 2$).

Remoção de Tendência Determinística

Quando a série apresenta uma tendência determinística, como um crescimento ou decréscimo constante, esta pode ser removida ajustando-se um modelo determinístico. Por exemplo, ajusta-se uma regressão linear da forma:

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + e(t)$$

Após ajustar o modelo, a tendência estimada é subtraída da série original:

$$\tilde{y}(t) = y(t) - (\beta_0 + \beta_1 t)$$

Este método é eficaz em séries com padrões previsíveis, como crescimento populacional ou vendas anuais.

5.2 Estabilização da Variância

Quando a não estacionaridade resulta de flutuações na variância, é necessário aplicar transformações que estabilizem a dispersão dos valores ao longo do tempo.

Transformação Logarítmica

Para séries onde a amplitude dos valores aumenta exponencialmente, a transformação logarítmica reduz o impacto de grandes variações :

$$y_{tr}(t) = \log(y(t) + c), \quad c \leq 0$$

A constante c evita que o argumento da função logaritmo seja negativo.

Transformação por Raiz Quadrada

Quando a série apresenta valores pequenos ou positivos, a transformação por raiz quadrada pode ser uma alternativa ao logaritmo:

$$y_{tr}(t) = \sqrt{y(t)}$$

Transformação Box-Cox

A transformação Box-Cox é uma abordagem mais geral para estabilizar a variância:

$$y_{tr}(t) = \begin{cases} \frac{y^\lambda(t) - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(y(t)), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

O parâmetro λ é ajustado para garantir a estabilização da variância, minimizando a soma dos quadrados dos resíduos

$$SSE(\lambda) = \sum_{t=1}^N (y_{tr} - \bar{y}_{tr})^2 \quad (1)$$

onde

- $y_{tr}(t)$ são os valores transformados
- $\bar{y}_{tr}$ é a média dos valores transformados

5.3 Remoção de Sazonalidade

Quando a série apresenta padrões periódicos (sazonais), é necessário remover ou ajustar esses componentes.

Diferenciação Sazonal

Para remover sazonalidade, pode ser suficiente subtrair valores separados por um período sazonal s , sendo s o número de intervalos por ciclo:

$$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s}$$

Decomposição da Série

A decomposição clássica ou métodos mais avançados, como o STL (*Seasonal and Trend decomposition using Loess*), podem ser usados para separar os componentes sazonais, de tendência e de ruído. Após a remoção dos componentes sazonais, a série residual pode ser analisada como estacionária.

5.4 Tratamento de Mudanças Estruturais

Quando a série apresenta alterações abruptas no seu comportamento, como mudanças de nível ou padrão, é necessário tratar essas quebras estruturais.

Divisão em Segmentos

Separar a série em segmentos antes e após a mudança estrutural permite analisar cada período como uma série estacionária distinta.

Modelos com Quebras Estruturais

As mudanças estruturais podem ser incorporadas diretamente nos modelos, utilizando variáveis indicadoras ou métodos específicos, como os de Bai-Perron.

5.5 Combinação de Métodos

Em muitos casos, a série apresenta múltiplos tipos de não estacionaridade, exigindo uma combinação de técnicas. Por exemplo, pode ser necessário aplicar uma diferenciação sazonal para remover padrões periódicos e, em seguida, uma diferenciação simples para estabilizar uma tendência estocástica.

6 Modelos de Processos Estocásticos Não Estacionários

Nesta secção, apresentamos os principais modelos para representar processos não estacionários, com destaque para os modelos baseados em integração, sazonalidade e tendências.

6.1 Modelos com Integração ($I(d)$)

Os modelos integrados são amplamente utilizados para descrever séries temporais que apresentam tendências estocásticas. Um processo integrado de ordem d , representado como $I(d)$, requer d diferenciações para se tornar estacionário.

Definição

Um processo $y(t)$ é considerado $I(d)$ se a d -ésima diferença ($\Delta^d y(t)$) for estacionária. A diferenciação é definida como:

$$\Delta^d y(t) = (1 - q^{-1})^d y(t).$$

Aplicações

- Séries financeiras como preços de acções são tipicamente modeladas como processos $I(1)$ (uma única diferenciação necessária).
- alguns dados económicos de longo prazo são modelados como processos $I(2)$.

Modelos ARIMA

Os modelos ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) combinam componentes autorregressivos (AR), integrados (I) e de média móvel (MA). São descritos pela seguinte equação geral:

$$A(q^{-1}) \Delta^d y(t) = C(q^{-1}) e(t)$$

Onde:

- $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$ é o polinómio autorregressivo.
- $C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_m q^{-m}$ é o polinómio de média móvel.
- $e(t)$ é um termo de erro branco com média nula e variância σ^2 .
- Δ^d representa a diferenciação de ordem d

Exemplo 1 - Processo ARIMA(1,1,1)

Neste exemplo consideramos um processo ARIMA(1,1,1) onde todas as componentes são de primeira ordem. A sua equação é:

$$A(q^{-1})(1 - q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t). \quad (2)$$

com:

- $A(q^{-1}) = 1 - 0.7q^{-1}$ é o polinómio autorregressivo.
- $C(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ é o polinómio de média móvel.
- $d = 1$ representa uma diferenciação de ordem 1.
- ε_t é o termo de erro branco com média zero e variância $\sigma^2 = 1$.

Aqui consideramos um processo com

$$A(q^{-1}) = (1 - 0.7q^{-1})(1 - q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \quad (3)$$

o $y(t)$ pode ser descrito pela equação às diferenças:

$$y(t) - 1.7y(t-1) + 0.7y(t-2) = e(t) + 0.5e(t-1) \quad (4)$$

A Figura 1 apresenta três realizações distintas do processo ARIMA(1,1,1), enquanto a Figura 2 exibe as sequências de autocorrelação estimadas para essas realizações. Devido ao cresci-

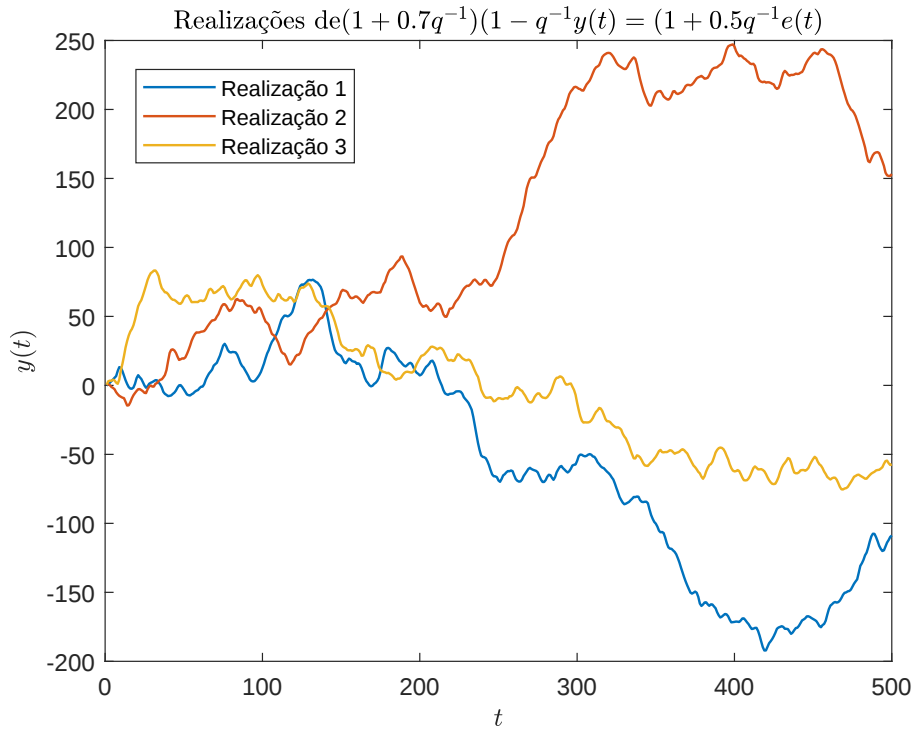


Figura 1: Três realizações distintas do processo ARIMA(1,1,1)

mento ilimitado da variância ao longo do tempo, típico nos processos com integrador ($d = 1$), as realizações podem diferir significativamente. Apesar disso, as sequências de autocorrelação estimadas a partir das realizações são aproximadamente constantes. Contudo, este comportamento não reflete a autocorrelação teórica, que deveria aumentar progressivamente ao longo do tempo, como consequência do termo integrador. $\square$

6.2 Modelos com Sazonalidade

Os processos não estacionários com padrões periódicos requerem modelos que incorporem componentes sazonais.

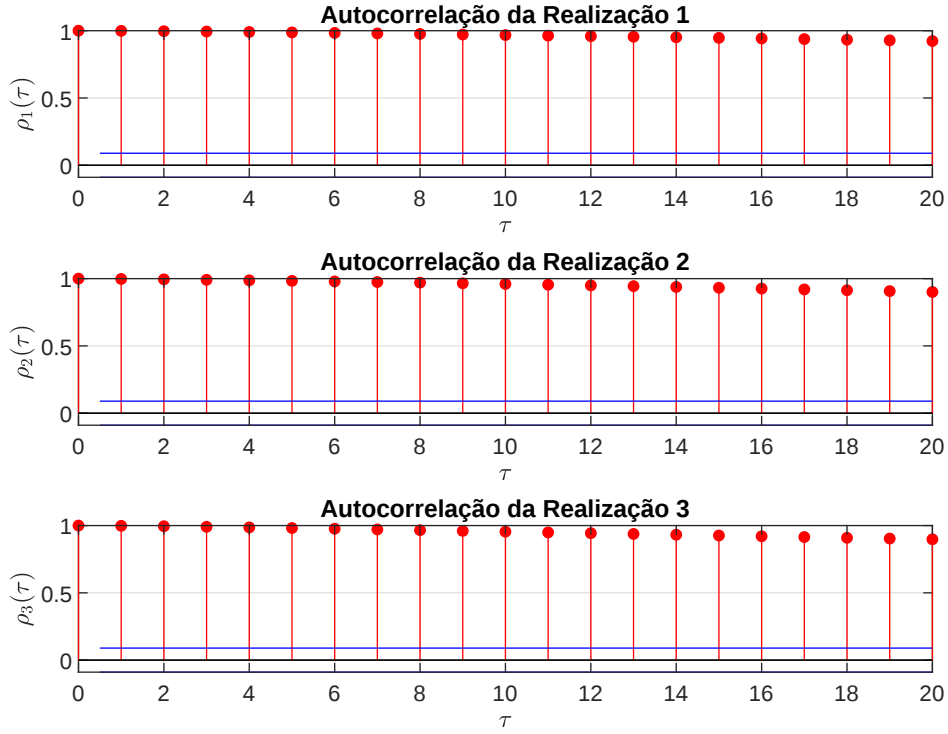


Figura 2: Três realizações distintas do processo ARIMA(1,1,1)

Modelos SARIMA

Os processos SARIMA (*Seasonal ARIMA*) são uma extensão dos processos ARIMA, que incluem diferenciação e componentes autorregressivos e de média móvel sazonais:

$$A(q^{-1}) A_s(q^{-s}) \Delta^d \Delta_s^D y(t) = C(q^{-1}) C_s(q^{-s}) e(t)$$

Onde:

- Δ_s^D representa a diferenciação sazonal de ordem D .
- $A_s(q^{-s})$ e $C_s(q^{-s})$ são os polinômios sazonais autorregressivo e de média móvel.

Aplicações

- Consumo de energia elétrica com picos diários ou sazonais.
- Dados de vendas com padrões anuais (ex.: vendas no Natal).

Exemplo 2 - Processo SARIMA(1, 0, 1)(1, 1, 1)₁₂

Como exemplo, consideremos um processo SARIMA(1, 0, 1)(1, 1, 1)₁₂. Este processo não inclui diferenciação não sazonal mas apresenta uma diferenciação sazonal ordem 1. Além disso, todos os polinômios, tanto os autorregressivos como os de média móvel, são de ordem 1 nas componentes não sazonais e sazonais. A equação geral para este processo é dada por:

$$A(q^{-1}) A_s(q^{-s})(1 - q^{-1})^d (1 - q^{-s})^D y(t) = C(q^{-1}) C_s(q^{-s}) e(t)$$

com:

- $A(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$ é o polinómio autorregressivo não sazonal.
- $A_s(q^{-s}) = 1 - 0.3q^{-12}$ é o polinómio autorregressivo sazonal.
- $C(q^{-1}) = 1 + 0.4q^{-1}$ é o polinómio de média móvel não sazonal.
- $C_s(q^{-s}) = 1 + 0.2q^{-12}$ é o polinómio de média móvel sazonal.
- $d = 0$ e $D = 1$ representam uma diferenciação sazonal com $s = 12$.

A equação às diferenças é representada por:

$$(1 - 0.5q^{-1})(1 - 0.3q^{-12})(1 - q^{-12})y(t) = (1 + 0.4q^{-1})(1 + 0.2q^{-12})e(t)$$

Este processo pode ser visto como a saída de um sistema formado por três subsistemas em série com funções de transferência

$$H_1(q) = \frac{1}{1 - q^{-12}} \quad (5)$$

$$H_2(q) = \frac{C_s(q^{-12})}{B_s(q^{-12})} = \frac{1 + 0.2q^{-12}}{1 - 0.3q^{-12}} \quad (6)$$

$$H_3(q) = \frac{C(q^{-1})}{B(q^{-1})} = \frac{1 + 0.4q^{-1}}{1 - 0.5q^{-1}} \quad (7)$$

e excitado por ruído branco (ver Figura 3. A Figura 4 mostra uma realização deste processo

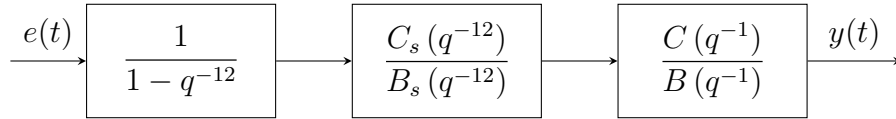


Figura 3: Representação do modelo SARIMA

onde se pode observar a sazonalidade que pode ser confirmada na observação na sequência de autocorrelação exibida na Figura 5. □

6.3 Modelos com Tendência Determinística

Quando a não estacionaridade é causada por uma tendência determinística, os modelos ajustam diretamente essa componente.

Modelos de Regressão com Tendência

Estes modelos representam a série como a soma de uma tendência determinística e um termo estacionário:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

Onde:

- β_0 é o intercepto.
- β_1 é a inclinação da tendência.
- ε_t é o termo estacionário.

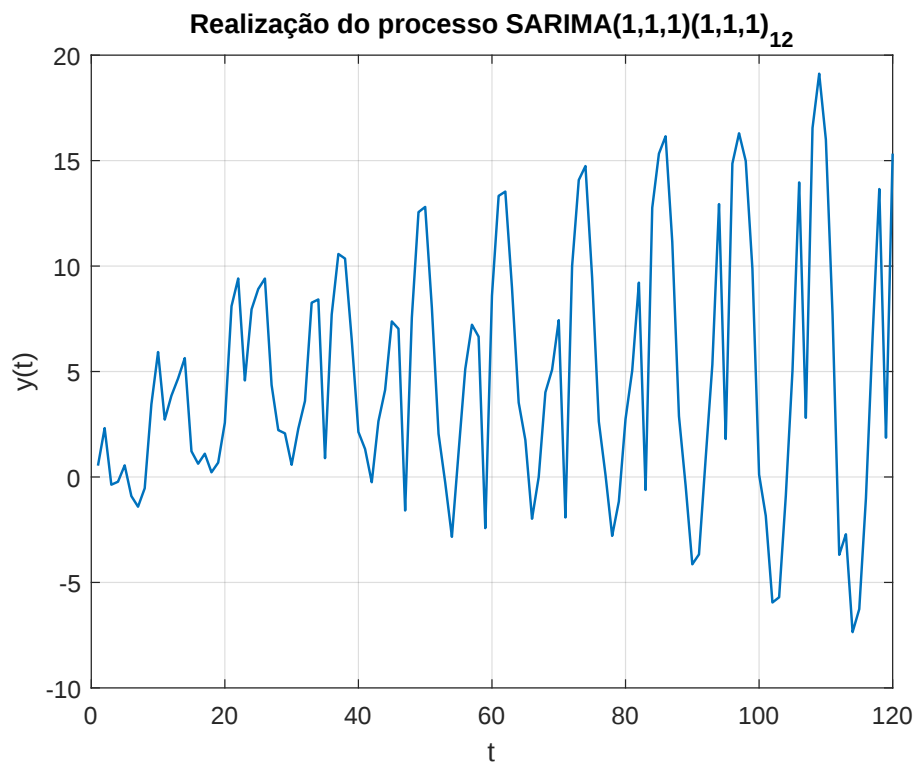


Figura 4: Realização do processo $SARIMA(1, 0, 1)(1, 1, 1)_{12}$.

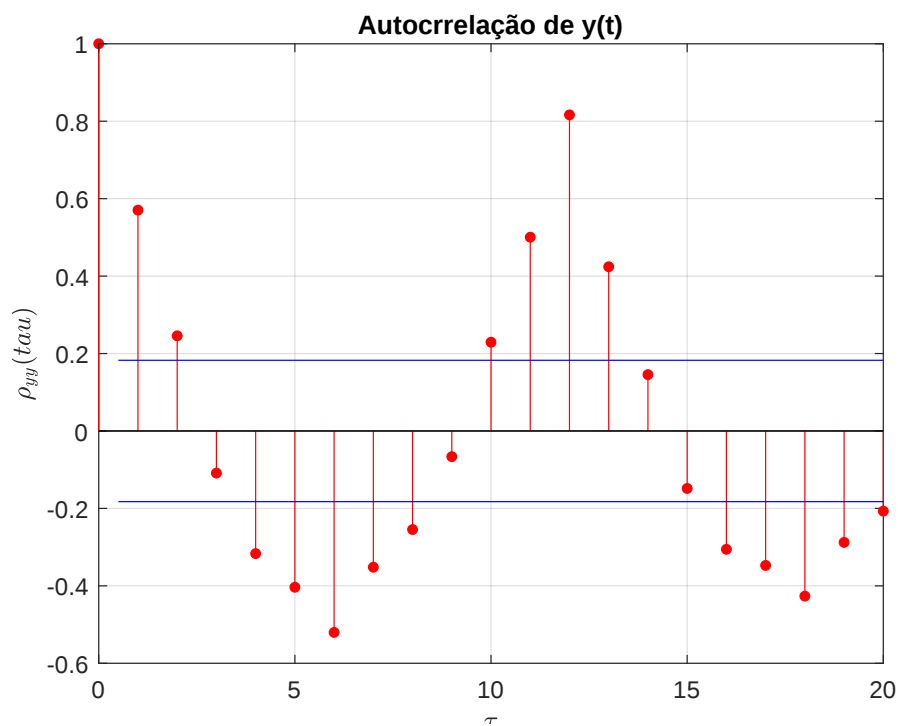


Figura 5: Autocorrelação da do processo $SARIMA(1, 0, 1)(1, 1, 1)_{12}$ estimada a partir da sua realização.

Aplicações

- Crescimento populacional ao longo do tempo.
- Produção económica com tendência de crescimento.

6.4 Modelos com Mudanças Estruturais

Mudanças abruptas nos dados podem ser representadas por modelos que incorporam quebras estruturais.

Modelos de Quebra Estrutural

Estes modelos introduzem variáveis indicadoras (*dummy variables*) para capturar alterações nos parâmetros do processo:

$$y_t = \begin{cases} H_1(q^{-1})\varepsilon_t & \text{se } t < T_c, \\ H_2(q^{-1})\varepsilon_t & \text{se } t \geq T_c, \end{cases}$$

Onde T_c representa o instante da quebra estrutural.

7 Estimação de Modelos ARIMA

A estimação de modelos ARIMA baseia-se na transformação de séries temporais não estacionárias em séries estacionárias por meio de um número de diferenciações adequado. Após essa transformação, os polinómios autorregressivo $A(q^{-1})$ e de média móvel $C(q^{-1})$ são ajustados utilizando métodos apropriados para processos estacionários, como os estudados no capítulo anterior.

Passos para Estimação de Modelos ARIMA

1. **Diferenciação da Série:** Para lidar com a não estacionaridade da série, aplica-se uma diferenciação de ordem d :

$$\Delta^d y(t) = (1 - q^{-1})^d y(t),$$

até que a série resultante seja aproximadamente estacionária.

2. **Identificação da Ordem dos Polinómios:** Após a transformação, pode-se utilizar a função de autocorrelação (ACF) e a função de autocorrelação parcial (PACF) para identificar as ordens n e m , correspondentes aos polinómios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$.
3. **Estimativa dos Parâmetros:** Com a série transformada em estacionária, os parâmetros dos polinómios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ são ajustados utilizando métodos apropriados para processos estacionários.

8 Estimação de Modelos SARIMA

Para modelos SARIMA (*Seasonal ARIMA*), a transformação inicial consiste isolar o modelo sazonal através da separação em sub-séries estacionárias. Depois é efectuada diferenciação sazonal e os parâmetros sazonais podem ser ajustados utilizando simultaneamente todas as sub-séries estacionárias.

Estimação de Modelos SARIMA

1. **Diferenciação Sazonal:** Remove-se a componente sazonal aplicando uma diferenciação sazonal de ordem D :

$$\Delta_s^D y(t) = (1 - q^{-s})^D y(t),$$

onde s é o período sazonal.

2. **Separação em Sub-Séries:** Reorganizar $y(t)$ em s sub-séries, onde cada sub-série representa uma fase do ciclo sazonal:

$$y_1(k) = y(ks), \quad y_2(k) = y(ks + 1), \quad \dots, \quad y_s(k) = y(ks + (s - 1)).$$

Cada sub-série é estacionária e segue o mesmo modelo sazonal.

3. **Estimativa dos Parâmetros Sazonais:** Com as sub-séries estacionárias, estima-se os parâmetros dos polinômios sazonais $A_s(q^{-1})$ e $C_s(q^{-1})$, utilizando simultaneamente todas as sub-séries. Este processo aproveita ao máximo a periodicidade dos dados para melhorar a precisão da estimativa.
4. **Cálculo dos Resíduos:** Após ajustar o modelo sazonal, os resíduos de cada sub-série são combinados numa única série estacionária:

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t),$$

onde $\hat{y}(t)$ é a parte ajustada pelo modelo sazonal.

5. **Modelação Não Sazonal:** A série residual é utilizada para ajustar os polinômios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$, aplicando os métodos descritos na secção anterior.

Exemplo Numérico: Estimação de um Polinómio Sazonal

Considere uma série $y(t)$ com periodicidade $s = 3$, onde a componente sazonal é descrita por um modelo AR(1):

$$A_s(q) = 1 + a_s q^{-3}$$

1. **Separação em Sub-Séries:** A série é dividida em três sub-séries: $y_1(k)$, $y_2(k)$, e $y_3(k)$:

$$y_1(t) = y(3t - 2), \quad t = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

$$y_2(t) = y(3t - 1), \quad t = 1 \dots, \text{int}(N/3)$$

$$y_3(t) = y(3t), \quad t = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

2. **Construção dos Regressores e Observações:** O regressor Φ e o vetor de observações Y são definidos como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_1(1) \\ -y_2(1) \\ -y_3(1) \\ -y_1(2) \\ -y_2(2) \\ -y_3(2) \\ \vdots \\ -y_1(\text{int}(N/3) - 1) \\ -y_2(\text{int}(N/3) - 1) \\ -y_3(\text{int}(N/3) - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) \\ -y(2) \\ -y(3) \\ -y(4) \\ -y(5) \\ -y(6) \\ \vdots \\ -y(N-5) \\ -y(N-4) \\ -y(N-3) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \\ y_3(2) \\ y_1(3) \\ y_2(3) \\ y_3(3) \\ \vdots \\ y_1(\text{int}(N/3)) \\ y_2(\text{int}(N/3)) \\ y_3(\text{int}(N/3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(4) \\ y(5) \\ y(6) \\ y(7) \\ y(8) \\ y(9) \\ \vdots \\ y(N-2) \\ y(N-1) \\ y(N) \end{bmatrix}$$

3. **Estimativa dos Parâmetros:** Utilizando os mínimos quadrados, o parâmetro sazonal a_{s1} do polinómio $A_s(q^{-1}) = 1 + a_{s1}q^{-1}$ é ajustado como:

$$\hat{a}_{s1} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

4. **Cálculo dos Resíduos:** Os resíduos $e_i(k)$ são calculados para cada sub-série e combinados numa única série:

$$e(kT + i - 1) = e_i(k) = y_i(k) + \hat{a}_{s1}y_i(k - 1), \quad i = 1, 2, 3, k = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

5. **Modelação Não Sazonal:** A série combinada dos resíduos é utilizada para ajustar os polinómios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$.

Este processo demonstra como as componentes sazonais e não sazonais podem ser modeladas de forma sequencial, aproveitando as características específicas de cada parte da série.

9 Testes de Estacionaridade

9.1 Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

O teste ADF é amplamente utilizado para avaliar a presença de integração raiz unitária) em séries temporais, o que indica não estacionaridade.

Hipóteses

- H_0 : A série possui raiz unitária, ou seja, é **não estacionária**.
- H_1 : A série é **estacionária**.

Equação Autorregressiva Aumentada

A equação usada no teste é:

$$\Delta y(t) = \alpha + \beta t + \gamma y(t - 1) + \sum_{i=1}^p a_i \Delta y(t - i) + e(t) \quad (8)$$

Onde:

- $\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1) = (1 - q^{-1})y(t)$: Primeira diferença da série.
- α : Termo constante.
- βt : Termo de tendência determinística (opcional).
- γ : Coeficiente que avalia a raiz unitária.
- a_i : Coeficientes das diferenças passadas ($\Delta y(t - i)$).
- $e(t)$: Termo de erro ruído branco.

Estatística de Teste

A estatística de teste é baseada no coeficiente γ :

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{\text{Desvio Padrão}(\hat{\gamma})} \quad (9)$$

Onde:

- $\hat{\gamma}$: Estimativa do coeficiente γ .

Como a equação Autorregressiva Aumentada (8) é linear nos parâmetros, estes podem ser calculados através do estimador de mínimos quadrados:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (10)$$

com

- $\theta = [\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad a_1 \quad \dots \quad a_p]^T$
- $\Phi = [\varphi(1) \quad \dots \quad \varphi(N)]$
- $\varphi(t) = [1 \quad t \quad y(t-1) \quad \Delta y(t-1) \quad \dots \quad \Delta y(t-p)]$
- $Y = [\Delta y(1) \quad \dots \quad \Delta y(N)]$

$\hat{\gamma}$ é o terceiro elemento de θ (ou o primeiro ou segundo, caso não se considere o termo de tendência α ou os termos constante, α e de tendência β). Por outro lado, dado que a covariância de $\hat{\theta}$ é $P = (\Phi^T \Phi)^{-1} \sigma^2$ em que σ^2 é a variância de $e(t)$, o desvio padrão de $\hat{\gamma}$ é a raiz quadrada do elemento da diagonal principal de P correspondente à entrada de γ no vector de parâmetros. Como a variância de $e(t)$ é desconhecida esta tem que ser estimada a partir dos dados:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}). \quad (11)$$

Distribuição da Estatística

Sob a hipótese nula (H_0), a estatística τ segue uma distribuição não padrão pois, devido ao efeito da integração a variância de $y(t)$ cresce linearmente com o número de observações, acontecendo o mesmo a variância dos resíduos. Por isso os valores críticos foram determinados por simulações de Monte Carlo são fornecidos em tabelas específicas para o teste ADF, dependendo do tamanho da amostra e da presença de termos de tendência (βt) ou constante (α).

9.2 Procedimento do Teste ADF

1. **Especificação do Modelo:** Decidir se o modelo incluirá termos de constante (α) ou tendência determinística (βt).
2. **Estimativa dos Parâmetros:** Ajustar o modelo autorregressivo aumentado por regressão linear.
3. **Cálculo da Estatística de Teste:** Utilizar o coeficiente estimado $\hat{\gamma}$ para calcular a estatística τ .

4. **Comparação com Valores Críticos:** Comparar τ com os valores críticos da tabela do teste ADF.

5. **Decisão:**

- Se τ for menor que o valor crítico, rejeitar H_0 , indicando estacionaridade.
- Caso contrário, não rejeitar H_0 , indicando não estacionaridade.

9.2.1 Valores Críticos do Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

As tabelas do teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) fornecem os valores críticos para diferentes tamanhos de amostra e níveis de significância (α), como 1%, 5% e 10%. Esses valores dependem do tipo de modelo ajustado:

1. **Sem constante nem tendência.**
2. **Com constante, mas sem tendência.**
3. **Com constante e tendência.**

Segue a tabela com os valores críticos típicos para o teste ADF:

Tabela 1: Valores Críticos do Teste ADF para Diferentes Modelos e Tamanhos de Amostra

Tamanho da Amostra (N)	Sem constante nem tendência	Com constante	Com constante e tendência
	1%, 5%, 10%	1%, 5%, 10%	1%, 5%, 10%
25	-2.62, -1.95, -1.61	-3.75, -3.00, -2.63	-4.38, -3.60, -3.24
50	-2.60, -1.95, -1.61	-3.58, -2.93, -2.60	-4.15, -3.50, -3.18
100	-2.58, -1.95, -1.61	-3.51, -2.89, -2.58	-4.04, -3.45, -3.15
$N \rightarrow \infty$	-2.57, -1.95, -1.61	-3.43, -2.86, -2.57	-3.96, -3.41, -3.12

Os valores críticos são baseados na distribuição assintótica.

- **Tamanhos de Amostra Finitos:** Para N menor que os valores listados, pode ser necessário interpolar ou usar valores empíricos simulados.
- **Modelos Considerados:** A inclusão de constantes e tendências afeta os valores críticos devido ao ajuste adicional.
- **Interpretação:** Comparar a estatística de teste τ calculada com o valor crítico para o modelo e nível de significância escolhido. Rejeitar H_0 se $\tau < \text{valor crítico}$.

9.3 Teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

O teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) é um método estatístico utilizado para avaliar a estacionaridade de uma série temporal em torno de uma média constante ou de uma tendência linear. Diferentemente de outros testes de estacionaridade, como o teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), o KPSS tem como hipótese nula que a série é estacionária. A hipótese alternativa sugere que a série não é estacionária.

Hipóteses do Teste KPSS

- **Hipótese nula** (H_0): A série é estacionária em torno de uma média constante ou de uma tendência linear.
- **Hipótese alternativa** (H_1): A série não é estacionária.

Modelo do Teste KPSS

O teste KPSS considera a seguinte decomposição para uma série $y(t)$ estacionária em torno duma constante:

$$y(t) = \beta_0 + \mu(t) + \varepsilon(t), \quad (12)$$

ou:

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon(t), \quad (13)$$

se a estacionaridade é em torno duma tendência linear onde:

- β_0 é o termo constante.
- $\beta_1 t$ é a tendência linear.
- $e(t)$ é o termo de ruído branco, com média zero e variância constante.

Estatística do Teste

A estatística do teste KPSS é calculada como:

$$\eta = \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N S^2(t) / \hat{\sigma}^2,$$

onde:

- $S(t) = \sum_{i=1}^t \hat{e}(k)$ é a soma cumulativa dos resíduos $\hat{e}(k)$
- $\hat{\sigma}^2$ é uma estimativa da variância de longo prazo do termo de erro $e(t)$, calculada com base na densidade espectral em frequência zero, ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\Phi}_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j0}) = \hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(0) + \sum_{\tau=1}^{\tau_{Max}} \omega(\tau, \tau_{Max}) \hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(\tau) \quad (14)$$

em que a função de ponderação $\omega(\tau, \tau_{Max})$ é a função triangular de Bartlett

$$\omega(\tau, \tau_{Max}) = 1 - \frac{\tau}{\tau_{Max} + 1}, \quad (15)$$

$\hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(\tau)$ a estimativa (enviezada) da autocovariância amostral dos resíduos:

$$\hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=\tau+1}^N \hat{e}(t) \hat{e}(t - \tau) \quad (16)$$

e $\hat{\Phi}_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega})$ a densidade espectral dos resíduos.

- N é o tamanho da amostra.

$\hat{\sigma}^2$ não é a a variância amostral porque esta assume que os resíduos são independentes e não correlacionados, o que raramente é o caso em séries temporais. Ao fazer $\hat{\sigma}^2 = \hat{\Phi}_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j0})$, tomamos em conta possíveis autocorrelações nos resíduos, tornando a estimativa mais robusta e adequada para o teste KPSS.

Interpretação do Teste

A estatística calculada do teste KPSS é comparada com valores críticos tabelados. A interpretação é a seguinte:

- Se o valor da estatística η for menor que o valor crítico, não rejeitamos a hipótese nula (H_0), concluindo que a série é estacionária.
- Se o valor da estatística η for maior que o valor crítico, rejeitamos a hipótese nula (H_0), indicando que a série não é estacionária.

Valores Críticos do Teste KPSS

Os valores críticos do teste KPSS dependem do nível de significância escolhido e do tipo de teste realizado (para estacionaridade em torno de uma média ou em torno de uma tendência linear). Eles são determinados empiricamente e não possuem uma fórmula analítica exata. As tabelas a seguir apresentam os valores críticos comuns para diferentes níveis de significância.

Para Estacionaridade em Torno de uma Média

Nível de Significância	Valor Crítico
10%	0.347
5%	0.463
2.5%	0.574
1%	0.739

Tabela 2: Valores críticos para estacionaridade em torno de uma média no teste KPSS.

Para Estacionaridade em Torno de uma Tendência Linear

Nível de Significância	Valor Crítico
10%	0.119
5%	0.146
2.5%	0.176
1%	0.216

Tabela 3: Valores críticos para estacionaridade em torno de uma tendência linear no teste KPSS.

Notas Importantes

- Estes valores críticos foram calculados originalmente por Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (1992) com base em simulações.
- Muitos softwares estatísticos, como R e Python, incluem estes valores críticos automaticamente ao reportar os resultados do teste KPSS.

10 Teste de Sazonalidade

10.1 Teste de Kruskal-Wallis

O teste de Kruskal-Wallis é um teste não paramétrico utilizado para verificar se as medianas de vários grupos são iguais. No contexto de séries temporais, é aplicado para detetar **sazonalidade**, avaliando se os valores da série variam de forma consistente entre diferentes períodos (e.g., meses).

Hipóteses

- H_0 : Não há diferenças significativas entre os períodos; a série não apresenta sazonalidade.
- H_1 : Há diferenças significativas entre os períodos; a série apresenta sazonalidade.

Estatística de Teste

A estatística de teste H é calculada com base nos postos (ranks) dos valores observados, atribuídos a todas as observações globalmente:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2$$

Onde:

- N : Número total de observações.
- k : Número de períodos (grupos).
- n_i : Número de observações no período i .
- $\bar{R}_i$: Média dos postos no período i .
- $\bar{R}$: Média global dos postos.

Distribuição da Estatística

Sob a hipótese nula (H_0), a estatística H segue aproximadamente uma distribuição qui-quadrado (χ^2) com $k - 1$ graus de liberdade.

5.2 Procedimento do Teste de Kruskal-Wallis

1. **Organização dos Dados:** Dividir a série temporal em k grupos com base nos períodos (e.g., meses do ano ou dias da semana).
2. **Ordenação e Postos:** Ordenar todas as observações y_t globalmente e atribuir postos a cada valor.
3. **Cálculo das Médias dos Postos por Grupo:** Para cada grupo i , calcular a média dos postos:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum R_i}{n_i}$$

4. **Cálculo da Estatística H :** Substituir as médias dos postos na fórmula para H .
5. **Comparação com a Distribuição Qui-Quadrado:** Comparar H com o valor crítico da distribuição χ^2 com $k - 1$ graus de liberdade.
6. **Decisão:** Rejeitar H_0 se H exceder o valor crítico, indicando sazonalidade.

5.3 Exemplo Prático no MATLAB

```
% Dados de exemplo: consumo energético mensal em 3 anos
data = [100, 120, 110, 130, 125, 140, 150, 160, 155, 140, 130, 120, ...
        105, 125, 115, 135, 130, 145, 155, 165, 160, 145, 135, 125, ...
        110, 130, 120, 140, 135, 150, 160, 170, 165, 150, 140, 130];

% Grupos correspondentes aos meses
months = repmat(1:12, 1, 3)';

% Teste de Kruskal-Wallis
[p, tbl, stats] = kruskalwallis(data, months);

% Resultados
disp('Valor-p:');
disp(p);
disp('Estatística de Teste:');
disp(tbl{2, 5}); % O valor de H está na tabela
```

Interpretação dos Resultados

- Se $p < 0,05$: Rejeitamos H_0 , indicando que há diferenças significativas entre os períodos, evidência de sazonalidade.
- Caso contrário: Não há evidência estatística de sazonalidade.

6. Conclusão

O teste de Kruskal-Wallis é uma ferramenta eficiente para detetar sazonalidade em séries temporais. O seu carácter não paramétrico o torna ideal para dados que não seguem uma distribuição normal ou apresentam variância desigual entre períodos. Quando combinado com outros métodos de análise de séries temporais, este teste fornece uma visão robusta da estrutura da série.