

Processos Estocásticos Não Estacionários

Paulo Lopes dos Santos
T-P Azevedo Perdicoulis

Objectivo: Apresentar métodos de identificação,
transformação e modelação de séries temporais não
estacionárias

Processamento Estatístico de Sinal, 2024
DEEC, FEUP

Índice

- 1 Definição de Não Estacionaridade
- 2 Tipos de Não Estacionaridade
- 3 Diagnóstico de Não Estacionaridade
- 4 Transformações para Estacionaridade
- 5 Modelos de Processos Estocásticos Não Estacionários
- 6 Estimação de Modelos ARIMA
- 7 Estimação de Modelos SARIMA
- 8 Testes de Estacionaridade
 - Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)
 - Teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)
 - Teste de Kruskal-Wallis

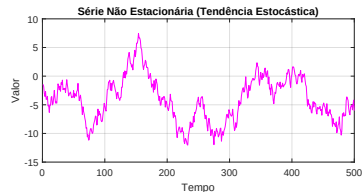
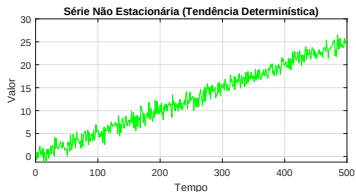
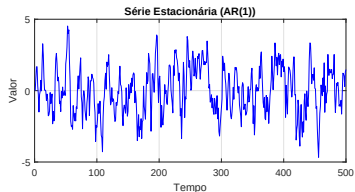
Definição de não Estacionaridade

Um processo estocástico é não estacionário quando:

- A sua **média** variaa ao longo do tempo;
- A sua **variância** não se mantém constante;
- A sua **covariância** depende do tempo e não apenas do desfasamento temporal.

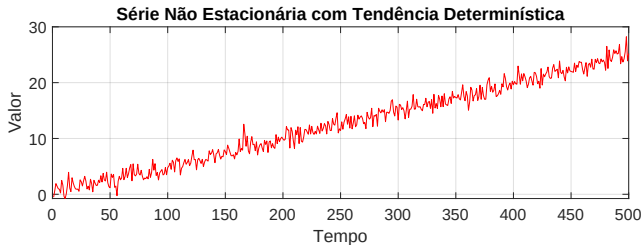
Definição de não Estacionaridade

Comparação de Séries Estacionárias e Não Estacionárias

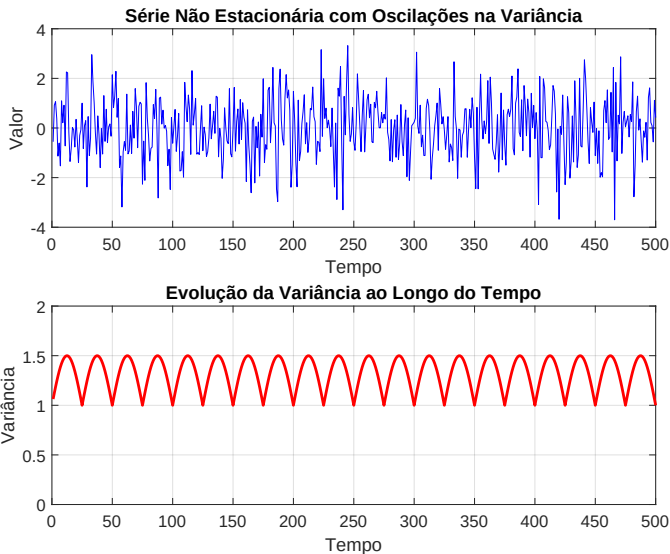


Tendência

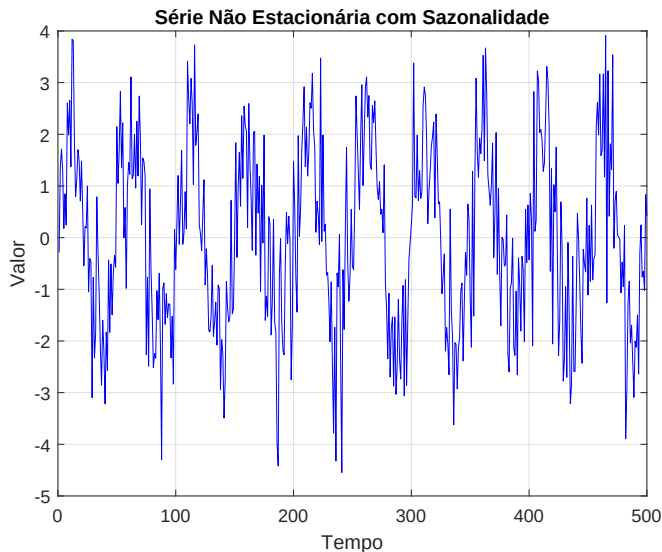
Séries Não Estacionárias com Diferentes Tendências



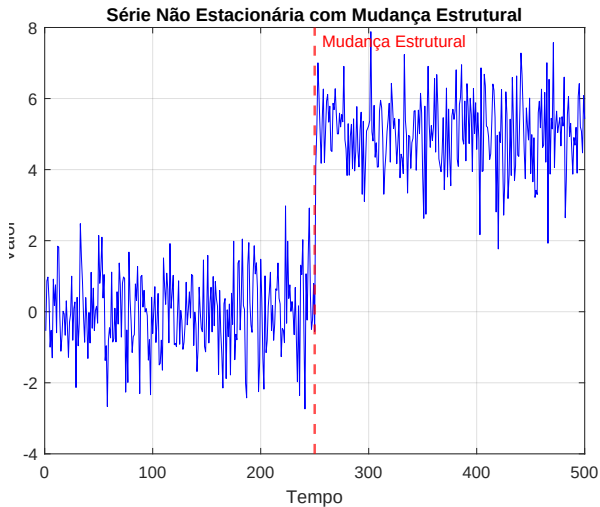
Oscilações da Variância



Sazonalidade



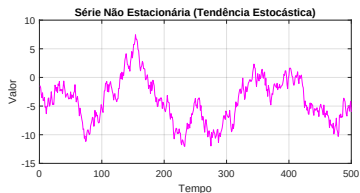
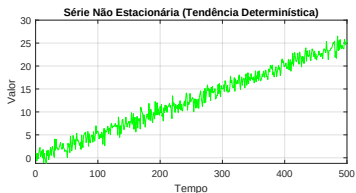
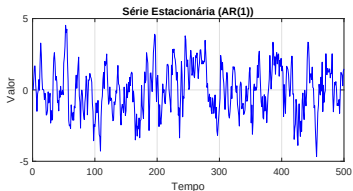
Mudanças Estruturais



Diagnóstico Visual de Não Estacionaridade

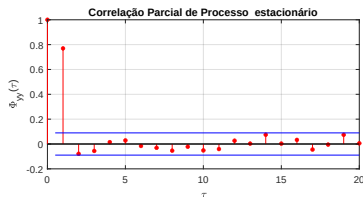
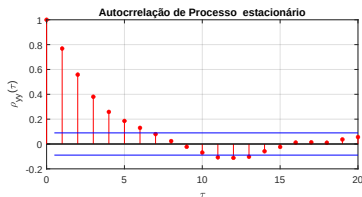
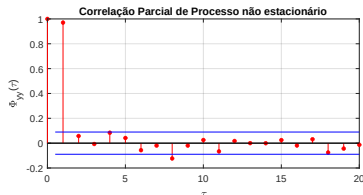
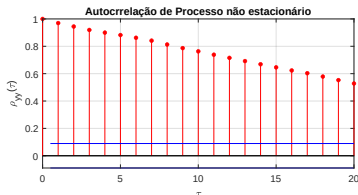
Gráficos no domínio do tempo:

Comparação de Séries Estacionárias e Não Estacionárias



Diagnóstico Visual de Não Estacionaridade

Gráficos de autocorrelação e correlação parcial:



Testes estatísticos

- Teste ADF (*Augmented Dickey-Fuller*)
- Teste KPSS (*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin*)
- Têm abordagens complementares:
 - O ADF avalia a presença de raiz unitária (integrador no modelo).
 - O KPSS testa a estacionaridade em torno de uma média ou tendência determinística.

Remoção de tendências

Diferenciação:

- A diferenciação é uma técnica utilizada para transformar séries não estacionárias em estacionárias.
- É especialmente útil para remover tendências estocásticas ou determinísticas.
- Para uma série $y(t)$, a diferenciação de primeira ordem é definida como:

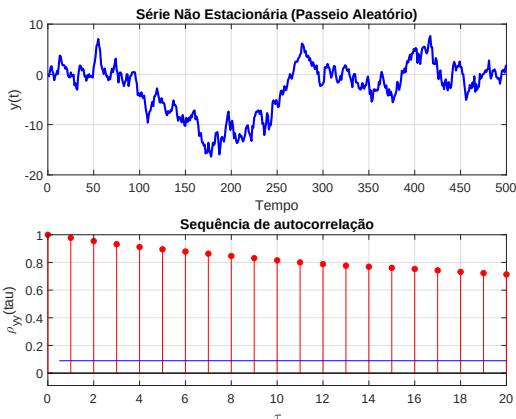
$$\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1)$$

- Após a diferenciação, a série residual deve ser analisada para verificar se se tornou estacionária.

Exemplo: Série Não Estacionária

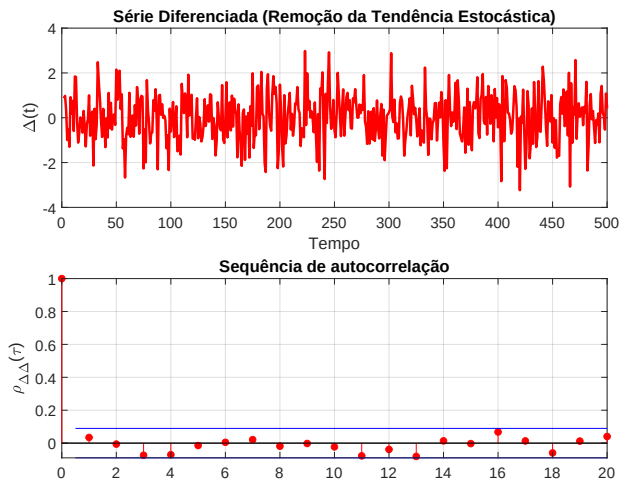
Série original com tendência estocástica:

$$y(t) = y(t-1) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \sim N(0, 1)$$



Diferenciação

Série diferenciada: $\Delta(t) = y(t) - y(t - 1)$



Estabilização da variância

- **Transformação Logarítmica:** Reduz o impacto de grandes variações.

$$y_{tr}(t) = \log(y(t) + c)$$

- **Transformação por Raiz Quadrada:** alternativa ao logaritmo (séries com valores pequenos e positivos):

$$y_{tr}(t) = \sqrt{y(t)}$$

- **Transformação de Box-Cox:** abordagem mais geral para estabilizar a variância:

$$y_{tr}(t) = \begin{cases} \frac{y^\lambda(t) - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(y(t)), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

Transformação de Box-Cox

λ maximiza a função

$$SSE(\lambda) = \sum_{t=1}^N (y_{tr} - \bar{y}_{tr})^2$$

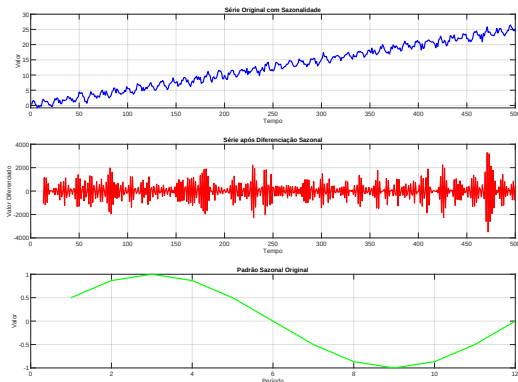
onde

- $y_{tr}(t)$ são os valores transformados
- $\bar{y}_{tr}$ é a média dos valores transformados

Remoção da sazonalidade

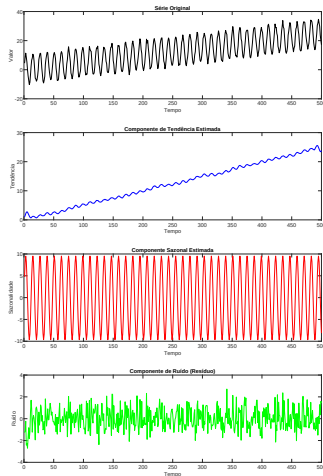
- Subtrair os valores separados por um período sazonal s , sendo s o número de intervalos por ciclo:

$$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s}$$



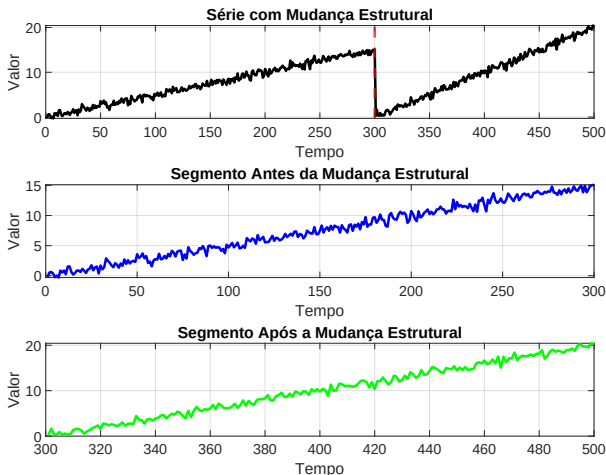
Remoção da sazonalidade

- STL (*Seasonal and Trend decomposition using Loess*)



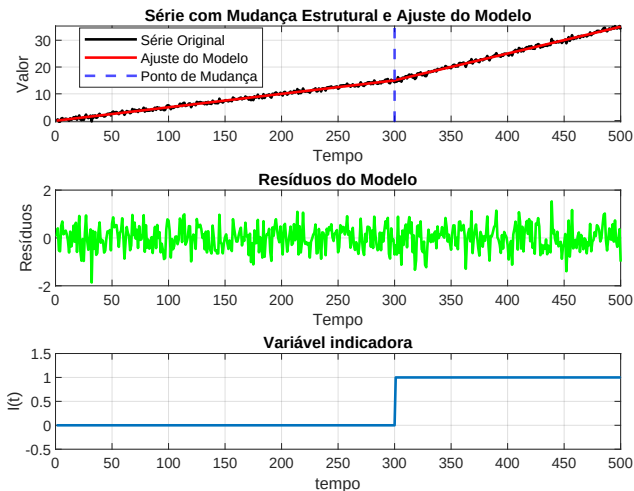
Tratamento de Mudanças Estruturais

- Divisão em Segmentos



Tratamento de Mudanças Estruturais

- Utilização de variáveis indicadoras:



Modelos com Integração $I(d)$

$$\Delta^d y(t) = (1 - q^{-1})^d y(t)$$

- $\Delta^d y(t)$ significa diferenciar $y(t)$ d vezes.
- Diferenciar $y(t)$ é calcular $\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1)$

Processo $I(d)$

Um processo $y(t)$ é considerado $I(d)$ se $\Delta^d y(t)$ for um processo estacionário.

Aplicações

- Preços de acções (modelos $I(1)$)
- alguns dados económicos de longo prazo (modelos $I(2)$).

Modelos ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*)

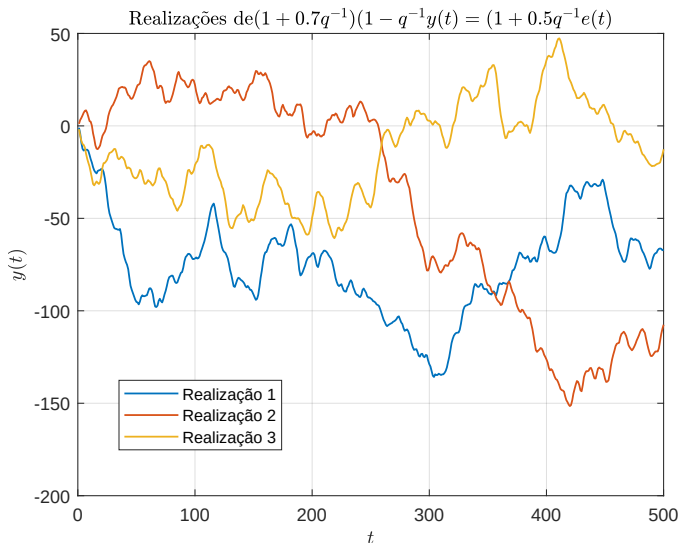
- Equação geral:

$$A(q^{-1}) \Delta^d y(t) = C(q^{-1}) e(t)$$

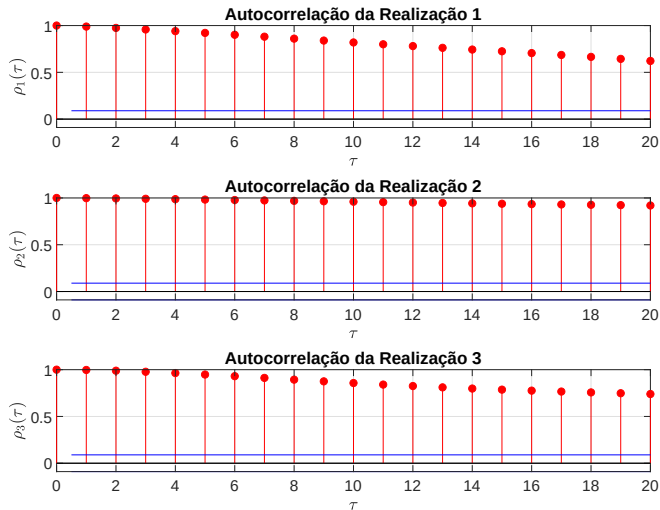
Onde:

- $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$ é o polinómio autorregressivo.
- $C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_m q^{-m}$ é o polinómio de média móvel.
- $e(t)$ é um termo de erro branco com média nula e variância σ^2 .
- Δ^d representa a diferenciação de ordem d

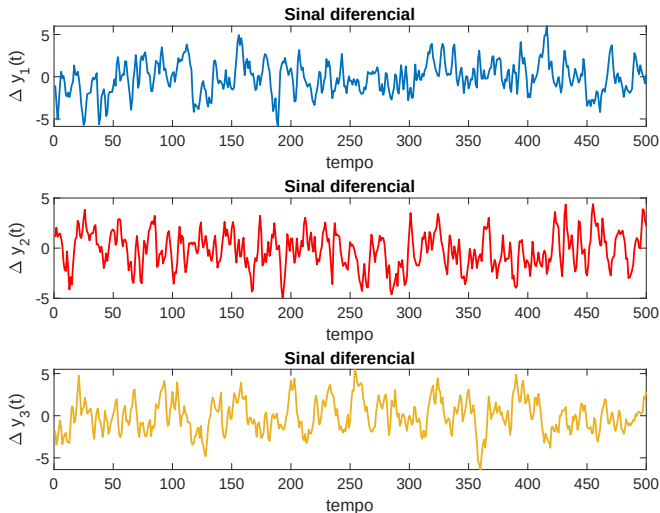
Exemplo dum Processo ARIMA



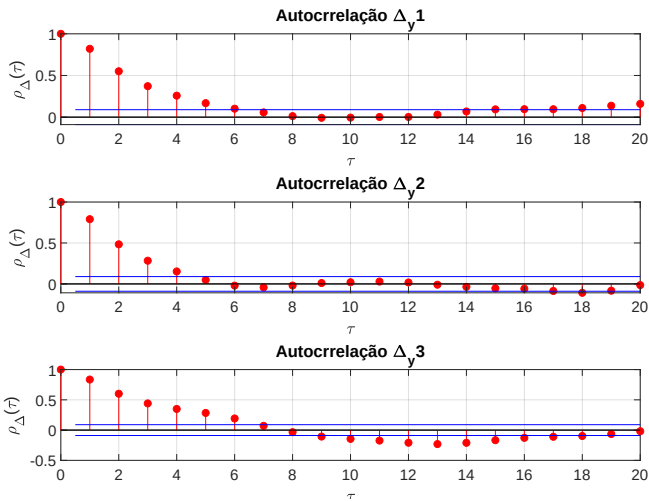
Exemplo dum Processo ARIMA



Exemplo dum Processo ARIMA



Exemplo dum Processo ARIMA



Modelos com Sazonalidade

Os processos estacionários com padrões periódicos requerem modelos que incorporem componentes sazonais.

Modelos SARIMA

- Equação geral:

$$A(q^{-1}) A_s(q^{-s}) \Delta^d \Delta_s^D y(t) = C(q^{-1}) C_s(q^{-s}) e(t)$$

- Δ_s^D : diferenciação sazonal de ordem D .
- $A_s(q^{-s})$ e $C_s(q^{-s})$: polinómios sazonais autorregressivo e de média móvel.

Aplicações:

- Consumo de energia elétrica
- Dados de vendas com padrões anuais (ex.: vendas no Natal).

Exemplo dum processo SARIMA

- $A(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$
- $A_s(q^{-s}) = 1 - 0.3q^{-12}$
- $C(q^{-1}) = 1 + 0.4q^{-1}$
- $C_s(q^{-s}) = 1 + 0.2q^{-12}$
- $d = e$ $D = 1$: Diferenciação sazonal com $s = 12$.

A equação às diferenças:

$$(1 - 0.5q^{-1})(1 - 0.3q^{-12})(1 - q^{-12})y(t) = (1 + 0.4q^{-1})(1 + 0.2q^{-12})e(t)$$

Exemplo dum processo SARIMA

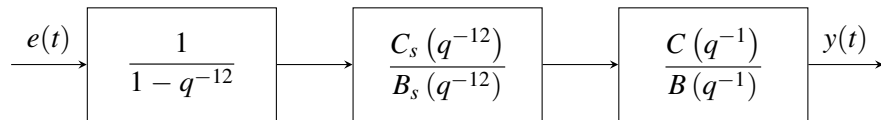
$y(t)$ - Saída de um sistema com 3 subsistemas em série com funções de transferência:

$$\bullet H_1(q) = \frac{1}{1 - q^{-12}}$$

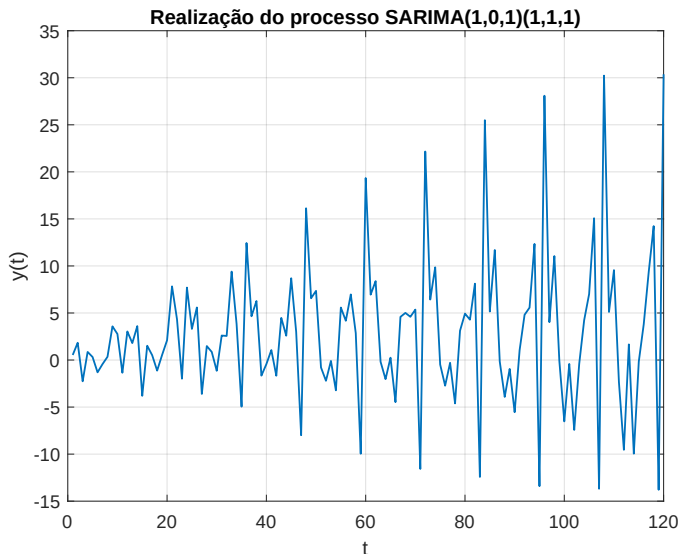
$$\bullet H_2(q) = \frac{C_s(q^{-12})}{B_s(q^{-12})} = \frac{1 + 0.2q^{-12}}{1 - 0.3q^{-12}}$$

$$\bullet H_3(q) = \frac{C(q^{-1})}{B(q^{-1})} = \frac{1 + 0.4q^{-1}}{1 - 0.5q^{-1}}$$

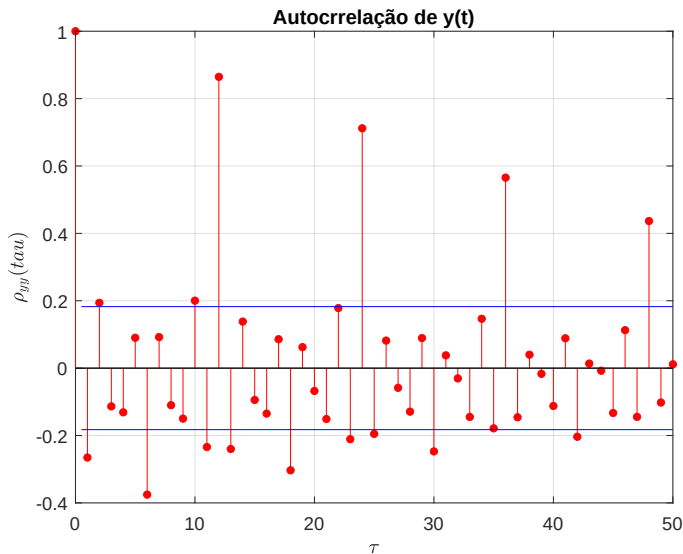
excitado por ruído branco:



Realização processo SARIMA



Autocorrelação da Realização processo SARIMA



Estimação de modelos ARIMA

1 Diferenciação da Série:

$$\Delta^d y(t) = (1 - q^{-1})^d y(t),$$

até que a série resultante seja aproximadamente estacionária.

2 Identificação da Ordem dos Polinómios:

3 Estimativa dos Parâmetros: com métodos apropriados para processos estacionários.

Estimação de Modelos SARIMA

1 Diferenciação Sazonal:

$$\Delta_s^D y(t) = (1 - q^{-s})^D y(t),$$

onde s é o período sazonal.

2 Separação em Sub-Séries: Reorganizar $y(t)$ em s sub-séries, onde cada sub-série representa uma fase do ciclo sazonal:

$$y_1(k) = y(ks), \quad y_2(k) = y(ks+1), \quad \dots, \quad y_s(k) = y(ks+(s-1)).$$

Cada sub-série é estacionária e segue o mesmo modelo sazonal.

3 Estimativa dos Parâmetros Sazonais: Com as sub-séries estacionárias, estima-se os parâmetros dos polinómios sazonais $A_s(q^{-1})$ e $C_s(q^{-1})$, utilizando simultaneamente todas as sub-séries.

Estimação de Modelos SARIMA

- 4 **Cálculo dos Resíduos:** $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, onde $\hat{y}(t)$ é a parte ajustada pelo modelo sazonal.
- 5 **Modelação Não Sazonal:** Ajustar os polinómios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$ aos resíduos, aplicando os métodos descritos na secção anterior.

Exemplo Numérico: Estimação de um Polinómio Sazonal

Série $y(t)$ com periodicidade $s = 3$, onde a componente sazonal é descrita por um modelo AR(1):

$$A_s(q) = 1 + a_{s1}q^{-3}$$

- ➊ Dividir a série em três sub-séries: $y_1(k)$, $y_2(k)$, e $y_3(k)$:

$$y_1(t) = y(3t - 2), \quad t = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

$$y_2(t) = y(3t - 1), \quad t = 1 \dots, \text{int}(N/3)$$

$$y_3(t) = y(3t), \quad t = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

Exemplo Numérico: Estimação de um Polinómio Sazonal

2 Construção dos Regressores:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_1(1) \\ -y_2(1) \\ -y_3(1) \\ -y_1(2) \\ -y_2(2) \\ -y_3(2) \\ \vdots \\ -y_1(\text{int}(N/3) - 1) \\ -y_2(\text{int}(N/3) - 1) \\ -y_3(\text{int}(N/3) - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) \\ -y(2) \\ -y(3) \\ -y(4) \\ -y(5) \\ -y(6) \\ \vdots \\ -y(N-5) \\ -y(N-4) \\ -y(N-3) \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico: Estimação de um Polinómio Sazonal

3 Construção das Observações:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \\ y_3(2) \\ y_1(3) \\ y_2(3) \\ y_3(3) \\ \vdots \\ y_1(\text{int}(N)/3) \\ y_2(\text{int}(N)/3) \\ y_3(\text{int}(N)/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(4) \\ y(5) \\ y(6) \\ y(7) \\ y(8) \\ y(9) \\ \vdots \\ y(N-2) \\ y(N-1) \\ y(N) \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico: Estimação de um Polinómio Sazonal

- 4 Estimar os parâmetros:

$$\hat{a}_{s1} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

- 5 **Cálculo Resíduos:** Os resíduos $e_i(k)$ são calculados para cada sub-série e combinados numa única série:

$$e(3t + i - 3) = e_i(t) = y_i(t) + \hat{a}_{s1} y_i(t - 1),$$

$$i = 1, 2, 3, i = 1, \dots, \text{int}(N/3)$$

- 6 **Estimar os polinómios não sazonais:** A série combinada dos resíduos é utilizada para ajustar os polinómios $A(q^{-1})$ e $C(q^{-1})$.

Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

- **Objectivo:** Avaliar a presença de integração (raiz unitária) em séries temporais.
- **Hipóteses:**
 - H_0 : A série é **não estacionária** (possui raiz unitária).
 - H_1 : A série é **estacionária**.
- **Procedimento:** Estimar os parâmetros da equação autorregressiva aumentada:

$$\Delta y(t) = \alpha + \beta t + \gamma y(t-1) + \sum_{i=1}^p a_i \Delta y(t-i) + e(t)$$

- γ : Coeficiente que avalia a raiz unitária.

Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

- Sinais relacionados pela Equação Autorregressiva Aumentada:
 - $\Delta y(t) = y(t) - y(t-1) = (1 - q^{-1})y(t)$: Primeira diferença da série.
 - $y(t-1)$: Valor anterior da série
 - $e(t)$: Ruído branco.
- Outros parâmetros Equação Autorregressiva Aumentada:
 - α : Termo constante da primeira diferença.
 - βt : Termo de tendência determinística da primeira diferença (opcional).
 - a_i : Coeficientes das diferenças passadas $\Delta y(t-i)$.

Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

Para que a série seja não estacionária, $\gamma = 0$

- **Estatística de teste:**

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{\text{Desvio Padrão}(\hat{\gamma})}$$

- $\hat{\gamma}$ é estimativa de mínimos quadrados de γ .
- Determinação de $\hat{\gamma}$:

- 1 Definir $\theta = [\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_p]^T$

- 2 Calcular $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$ com

- $\Phi = [\varphi(1) \quad \dots \quad \varphi(N)]$

- $\varphi(t) = [1 \quad t \quad y(t-1) \quad \Delta y(t-1) \quad \dots \quad \Delta y(t-p)]$

- $Y = [\Delta y(1) \quad \dots \quad \Delta y(N)]$

Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

- Determinação do **desvio padrão de $\hat{\gamma}$** :

1 Calcular $P = cov(\hat{\theta}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \hat{\sigma}^2$

● $\hat{\sigma}^2 = \frac{(T - \Phi \hat{\theta})^T (T - \Phi \hat{\theta})}{N}$, isto, $\hat{\sigma}^2$ é a variância dos resíduos.

2 Desvio Padrão($\hat{\gamma}$) = $\sqrt{P_{\gamma, \gamma}}$

- **Distribuição de τ** sob a hipótese nula H_0 :
 - Não é uma distribuição padrão devido à não estacionaridade de $y(t)$
 - Os valores críticos foram determinados por simulações de Monte Carlo são fornecidos em tabelas específicas para o teste ADF

Procedimento do teste ADF

- 1 **Especificação do Modelo:** Decidir se o modelo incluirá termos de constante (α) ou tendência determinística (βt).
- 2 **Estimativa dos Parâmetros:** Ajustar o modelo autorregressivo aumentado por regressão linear.
- 3 **Cálculo da Estatística de Teste:** Utilizar o coeficiente estimado $\hat{\gamma}$ para calcular a estatística τ .
- 4 **Comparação com Valores Críticos:** Comparar τ com os valores críticos da tabela do teste ADF.
- 5 **Decisão:**
 - Se τ for menor que o valor crítico, rejeitar H_0 , indicando estacionaridade.
 - Caso contrário, não rejeitar H_0 , indicando não estacionaridade.

Valores Críticos do teste ADF

Tamanho Amostra (N)	Sem constante nem tendência	Com constante	Com constante e tendência
	1%, 5%, 10%	1%, 5%, 10%	1%, 5%, 10%
25	-2.62, -1.95, -1.61	-3.75, -3.00, -2.63	-4.38, -3.60, -3.24
50	-2.60, -1.95, -1.61	-3.58, -2.93, -2.60	-4.15, -3.50, -3.18
100	-2.58, -1.95, -1.61	-3.51, -2.89, -2.58	-4.04, -3.45, -3.15
$N \rightarrow \infty$	-2.57, -1.95, -1.61	-3.43, -2.86, -2.57	-3.96, -3.41, -3.12

Estes valores foram obtidos por simulações de Monte Carlo

Teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

- **Hipótese nula (H_0):** A série é estacionária em torno de uma média constante ou de uma tendência linear.
- **Hipótese alternativa (H_1):** A série não é estacionária.

O teste KPSS considera a seguinte decomposição para uma série $y(t)$ estacionária em torno de uma média:

$$y(t) = \beta_0 + \varepsilon(t),$$

ou

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon(t),$$

onde:

- β_0 é o termo constante.
- $\beta_1 t$ é a tendência linear.
- $\varepsilon(t)$ ruído branco, com média nula e variância σ^2 .

Teste de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)

- Estatística: $\eta = \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N S^2(t) / \hat{\sigma}^2$
- $S(t) = \sum_{k=1}^t \hat{e}(k)$ (soma cumulativa dos resíduos)
- $\hat{\sigma}^2 = \hat{\Phi}_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j0}) = \hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(0) + \sum_{\tau=1}^{\tau_{Max}} \omega(\tau, \tau_{Max}) \hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(\tau)$
- $\omega(\tau, \tau_{Max}) = 1 - \frac{\tau}{\tau_{Max} + 1}$
- $\hat{\lambda}_{\hat{e}\hat{e}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=\tau+1}^N \hat{e}(t) \hat{e}(t - \tau)$
- $\hat{\Phi}_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega})$ a densidade espectral dos resíduos.

Interpretação do Teste

- Se o valor da estatística η for menor que o valor crítico, não rejeitamos a hipótese nula (H_0), concluindo que a série é estacionária.
- Se o valor da estatística η for maior que o valor crítico, rejeitamos a hipótese nula (H_0)

Valores Críticos:

Nível de Significância	Valor Crítico	
	Média	Tendência Linear
10%	0.347	0.119
5%	0.463	0.146
2.5%	0.574	0.176
1%	0.739	0.216

Teste de Kruskal-Wallis

Detecta **sazonalidade**, avaliando se os valores da série variam de forma consistente entre diferentes períodos (e.g., meses)

- **Hipótese nula (H_0):** Não há diferenças significativas entre os períodos; a série não apresenta sazonalidade.
- **Hipótese alternativa (H_1):** Há diferenças significativas entre os períodos; a série apresenta sazonalidade.

Teste de Kruskal-Wallis

- **Estatística:**

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2$$

- N : Número total de observações.
 - k : Número de períodos (grupos).
 - n_i : Número de observações no período i .
 - $\bar{R}_i$: Média dos postos no período i .
 - $\bar{R}$: Média global dos postos.
-
- **Distribuição da Estatística sob H_0 :** $\chi^2(k-1)$

Procedimento do Teste de Kruskal-Wallis

- 1 **Organização dos Dados:** Dividir a série temporal em k grupos com base nos períodos (e.g., meses do ano ou dias da semana).
- 2 **Ordenação e Postos:** Ordenar todas as observações y_t globalmente e atribuir postos a cada valor.
- 3 **Cálculo das Médias dos Postos por Grupo:** Para cada grupo i , calcular a média dos postos:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum R_i}{n_i}$$

- 4 **Cálculo da Estatística H :** Substituir as médias dos postos na fórmula para H .

Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo de Média Móvel (ARMA)

- 5 **Comparação com a Distribuição Qui-Quadrado:**
Comparar H com o valor crítico da distribuição χ^2 com $k - 1$ graus de liberdade.
- 6 **Decisão:** Rejeitar H_0 se H exceder o valor crítico, indicando sazonalidade.