

Estimação da densidade espectral

Paulo Lopes dos Santos

Processamento Estatístico de Sinal, 2022

DEEC, FEUP

Resumo

- 1 Métodos não paramétricos
 - Introdução
 - Periodograma
 - Média de Periodogramas

Estimação não paramétrica

Densidade espectral dum sinal estocástico estacionário:

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\lambda_{xx}[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{xx}[k] e^{-j\omega k}$$

em que $j = \sqrt{-1}$ e

$$\lambda_{xx}[k] = \mathbf{E}\{x[n]x[n-k]\} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^L x[n]x[n-k]$$

Problema:

Estimar $P_{xx}(e^{j\omega})$ a partir dum conjunto de dados $x[n]$, $n = 0, \dots, L-1$.

Periodograma - Definição

Na prática, só se consegue medir $x[n]$ em intervalos finitos. Logo $P_{xx}(e^{j\omega})$ pode ser estimado através de

$$\hat{P}_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} \hat{\lambda}_{xx}[k] e^{-j\omega k}$$

em que $\hat{\lambda}_{xx}[k]$ é a estimativa da sequência de auto-covariância

$$\hat{\lambda}_{xx}[k] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1-k} x[n+k]x[n] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x_L[n+k]x_L[n]$$

onde

$$x_L[n] = x[n]w_L[n]$$

sendo $w_L[n]$ a janela retangular de comprimento L :

$$w_L[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \dots, L-1 \\ 0, & n < 0 \text{ ou } n \geq L \end{cases}$$

Periodograma - Definição

Como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{L-1-k} x[n+k]x[n] &= \sum_{n=0}^{L-1-k} x[n]x[n+k] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n]x_L[n+k] = x_L[k] * x_L[-k] \end{aligned}$$

onde $*$ é o operador *convolução*, então,

$$\mathcal{F} \{x_L[k] * x_L[-k]\} = X_L(e^{j\omega}) X_L(e^{j\omega})^* = |X_L(e^{j\omega})|^2,$$

em que

$$X_L(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega n} = \mathcal{F} \{x_L[n]\}$$

Periodograma - Definição

Logo

$$\hat{P}_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} |X_L(e^{j\omega})|^2$$

$\hat{P}_{xx}(e^{j\omega})$ é o Periodograma

Periodograma - Valor esperado

Valor esperado do Periodograma:

$$E \left\{ \hat{P}_{xx} (e^{j\omega}) \right\} = \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} E \left\{ \hat{\lambda}_{xx}[k] \right\} e^{-j\omega k}$$

com

$$E \left\{ \hat{\lambda}_{xx}[k] \right\} = \sum_{n=0}^{L-1} E \{ x_L[n+k] x_L[n] \}$$

Como

$$x_L[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \dots, L-1 \\ 0, & n < 0 \text{ ou } n > L-1, \end{cases}$$

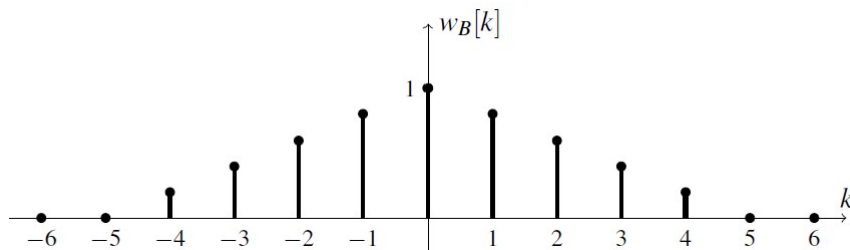
então

$$E \left\{ \hat{\lambda}_{xx}[k] \right\} = \sum_{n=0}^{L-1-|k|} E \{ x[n+k] x[n] \} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-|k|-1} \lambda_{xx}[k] = \frac{L-|k|}{L} \lambda_{xx}[k].$$

Periodograma - Valor esperado

Janela triangular de Bartlett de largura $2L+1$:

$$w_B[k] = \begin{cases} \frac{L - |k|}{L}, & |k| \leq L \\ 0, & |k| > L \end{cases}$$



Janela de Bartlett de largura 11 ($L=5$)

Periodograma - Valor esperado

então

$$E \left\{ \hat{\lambda}_{xx}[k] \right\} = w_{B_L}[k] \lambda_{xx}[k] = \lambda_{xx}[k] w_B[k].$$

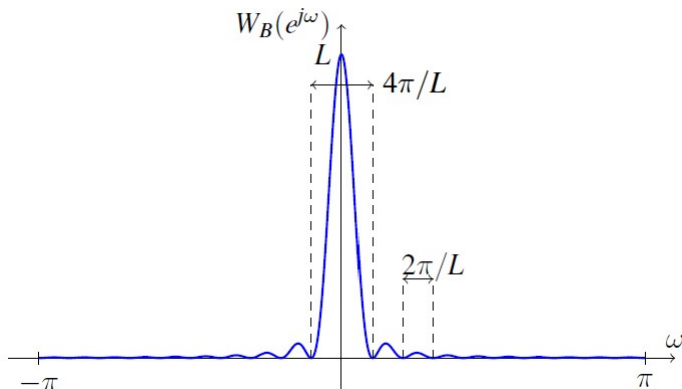
Pelo teorema da convolução:

$$\begin{aligned} E \left\{ \hat{P}_{xx} (e^{j\omega}) \right\} &= \mathcal{F} \{ \lambda_{xx}[k] w_B[k] \} = \frac{1}{2\pi} P_{xx} (e^{j\omega}) * W_B (e^{j\omega}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} P_{xx} (e^{j\theta}) W_B (e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} P_{xx} (e^{j\omega}) &= \mathcal{F} \{ \lambda_{xx}[k] \} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{xx}[k] e^{-j\omega k} \\ W_B (e^{j\omega}) &= \frac{1}{L} \left[\frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} \right]^2. \end{aligned}$$

Periodograma - Valor esperado



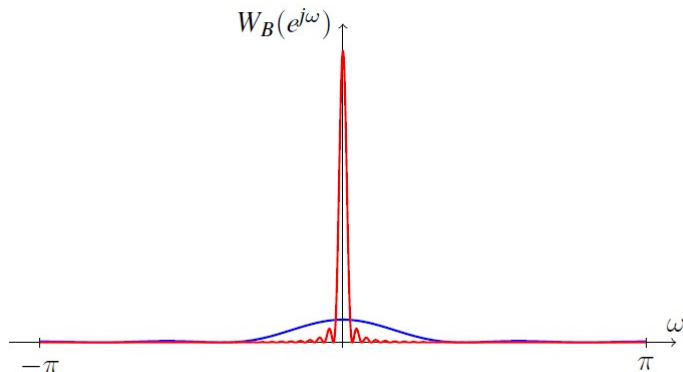
$W_B(e^{j\omega})$, transformada de Fourier de $w_B[k]$ para $L = 20$.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W_B(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{P}_{xx}(e^{j\omega}) \right\} = \frac{2\pi}{2\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) * \delta(\omega) = P_{xx}(e^{j\omega}).$$

Periodograma - Valor esperado

O Periodograma $\hat{P}_{xx}(e^{j\omega})$ é um estimador assintoticamente não enviesado de $P_{xx}(e^{j\omega})$:



Transformadas de Fourier de Janelas de Bartlett com $L=5$ (curva azul) e $L=64$ (curva vermelha).

Periodograma - Variância

- A variância de $\hat{P}_{xx}(e^{j\omega})$ depende de momentos de $x[n]$ de ordem superior à segunda.
- Por este motivo, depende da distribuição de $x[n]$.
- No entanto, pode-se provar que, qualquer que seja a distribuição,

$$\text{var} \left\{ \hat{P}_{xx}(e^{j\omega}) \right\} \approx P_{xx}(e^{j\omega})^2.$$

- $\text{var} \left\{ \hat{P}_{xx}(e^{j\omega}) \right\}$ mantém-se aproximadamente constante qualquer que seja o número de pontos do periodograma.

O Periodograma $\hat{P}_{xx}(e^{j\omega})$ não é um estimador consistente de $P_{xx}(e^{j\omega})$ porque não converge (num sentido probabilístico) para $P_{xx}(e^{j\omega})$.

Média de Periodogramas

- Pode-se reduzir a variância da estimativa do espectro fazendo a média de vários periodogramas.
- O sinal $x[n]$ é dividido em K segmentos com L amostras cada.
- Para cada segmento é calculado o periodograma $\hat{P}_{xx}^{(r)}(e^{j\omega})$, $r = 1, \dots, K - 1$.
- O espectro $P_{xx}(e^{j\omega})$ é estimado através de

$$\bar{P}_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{r=1}^K \hat{P}_{xx}^{(r)}(e^{j\omega}).$$

Média de Periodogramas

- $E \{ \bar{P}_{xx} (e^{j\omega}) \} = \frac{1}{2\pi} P_{xx} (e^{j\omega}) * W_B (e^{j\omega}) .$
- $\text{var} \{ \bar{P}_{xx} (e^{j\omega}) \} = \frac{1}{K} P_{xx} (e^{j\omega})^2$
- Sobrepondo os periodogramas em cerca de 50% consegue-se diminuir a variância de $P_{xx} (e^{j\omega})$ para cerca de metade (conseguem-se o dobro dos periodogramas).