

Processos Estocásticos e Filtro de Kalman - Introdução

Paulo Lopes dos Santos

Identificação e Estimação de Sistemas, 2010, revisto em 2013
DEEC, FEUP

- 1 - Introdução
- 2 - Observadores determinísticos
- 3 - Sistemas com perturbações
- 4 - Perturbações determinísticas
- 5 - Rejeição de perturbações determinísticas
- 6 - Modelos de perturbações determinísticas
- 7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos
- 8 - Modelos de estado de processos determinístico-estocásticos
- 9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos

1 - Introdução

Sistema discreto linear e invariante no tempo descrito pelo modelo de estado:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ - Saída.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ - Entrada
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ - Vector das variáveis de estado.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ - Parâmetros do sistema

PROBLEMA: Determinar $x(t)$ a partir da observação de $y(t)$



SOLUÇÃO: Observador de Estado

- **O que é?**

- Modelo do sistema que, a partir dos sinais de entrada e saída, fornece estimativas do estado

- **Para que serve?**

- Estabilização de Sistemas utilizando a realimentação de estado.
 - Monitorização de Sistemas.
 - *Soft sensor* para substituir sensores de custo elevado.
 - Detecção de avarias.
 - etc.

2 - Observadores determinísticos

Abordagem 1 -Observador com modelo igual ao sistema

- Observador:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Erro do observador:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

- Dinâmica do erro do observador

$$\begin{aligned}x(t+1) - \hat{x}(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t) \\ &= A[x(t) - \hat{x}(t)]\end{aligned}$$

Substituindo $x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ por $\tilde{x}(\cdot)$:

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t)$$

2 - Observadores determinísticos

Dinâmica do erro do observador

- Sistema autónomo linear
- Matriz de estado igual à do sistema
- O erro anula-se se e só se o sistema for estável
- Não consegue observar sistemas instáveis
- Dinâmica de anulação do erro é imposta pelo sistema (não pode ser alterada)

2 - Observadores determinísticos

Exemplo 1

Sistema (ex: Motor eléctrico).

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.9x_2(t) + 10u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

x_1 — Posição

x_2 — Velocidade

$y = x_1$ — Posição

u — Tensão de entrada

2 - Observadores determinísticos

Equação Matricial:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.\end{aligned}$$

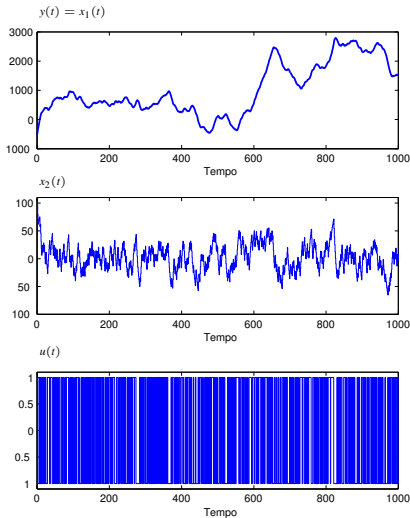
Valores próprios de A

$$\lambda_{A1} = 1, \quad \lambda_{A2} = 0.9$$

Dinâmica do erro é descrita por um sistema instável $\Rightarrow$
Observador não converge (não funciona)

2 - Observadores determinísticos

Sinais do sistema



2 - Observadores determinísticos

Observador (abordagem 1)

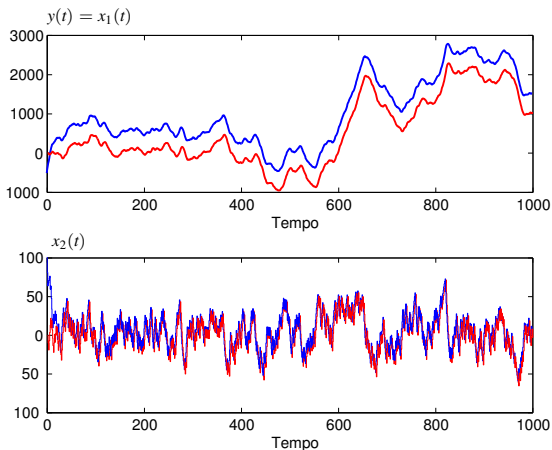
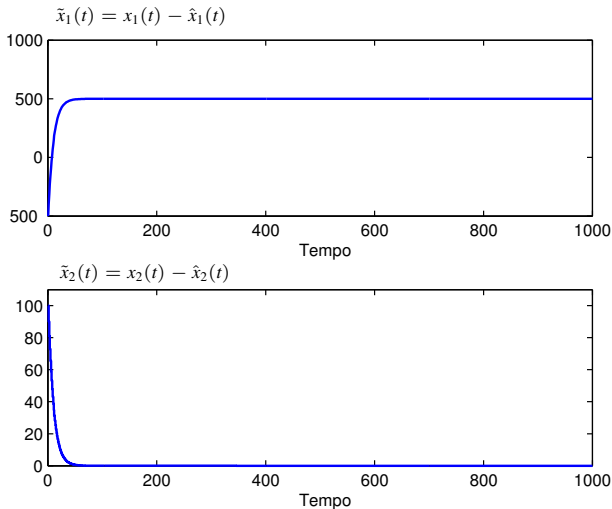


Figura: Estimativas do observador estão a vermelho.

2 - Observadores determinísticos

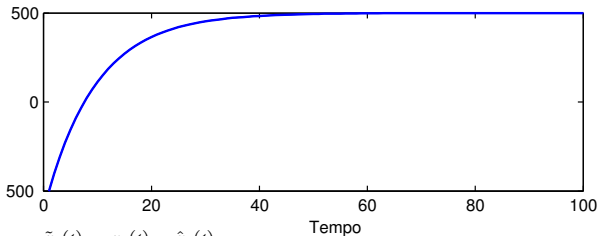
Erro do observador (abordagem 1)



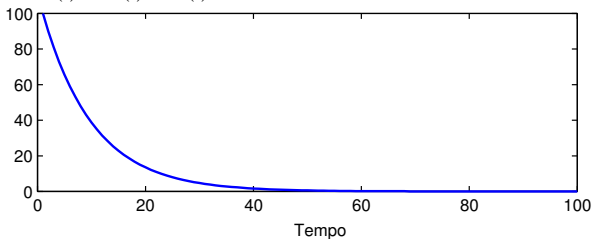
2 - Observadores determinísticos

Erro do observador (abordagem 1)

$$\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$$



$$\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$$



2 - Observadores determinísticos

Abordagem 2 - Observador de Luenberger

- Observador:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)]$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$$

- Erro do observador:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

- Dinâmica do erro do observador

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &\quad - L[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)] \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t) - L[Cx(t) + Du(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)] \\ &= A \underbrace{[x(t) - \hat{x}(t)]}_{\tilde{x}(t)} - LC \underbrace{[x(t) - \hat{x}(t)]}_{\tilde{x}(t)} = (A - LC) \tilde{x}(t)\end{aligned}$$

2 - Observadores determinísticos

Dinâmica do erro do observador

- Sistema autónomo linear.
- Matriz de estado diferente da do sistema.
- Se o par (A, C) for observável os valores próprios podem ser alocados arbitrariamente (dinâmica não é imposta pelo sistema).
- O erro anula-se mesmo que o sistema seja instável (desde que os modos instáveis sejam observáveis).
- Consegue observar sistemas instáveis (desde que os modos instáveis sejam observáveis).

2 - Observadores determinísticos

Exemplo 2

Novamente o sistema:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.9x_2(t) + 10u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Na forma matricial:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

2 - Observadores determinísticos

- Pretende-se que λ_1 e λ_2 sejam os valores próprios de $A - LC$ (λ_1^t e λ_2^t modos da dinâmica do observador)
- equação característica de $A - LC$:

$$\begin{aligned}A_o(\lambda) &= \det[\lambda I_2 - (A - LC)] = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.\end{aligned}$$

- Cálculo de $L = [\ell_1 \quad \ell_2]^T$

$$\bullet A - LC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \ell_1 & 1 \\ -\ell_2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

2 - Observadores determinísticos



$$\begin{aligned}A_0(\lambda) &= \det [\lambda I_2 - (A - LC)] = \det \begin{bmatrix} \lambda - (1 - \ell_1) & -1 \\ \ell_2 & \lambda - 0.9 \end{bmatrix} \\&= [\lambda_1 - (1 - \ell_1)] (\lambda - 0.9) + \ell_2 \\&= \lambda^2 - (1.9 - \ell_1) \lambda + (1 - \ell_1) 0.9 + \ell_2\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \lambda^2 - (1.9 - \ell_1) \lambda + (1 - \ell_1) 0.9 + \ell_2 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda + \lambda_1 \lambda_2$$

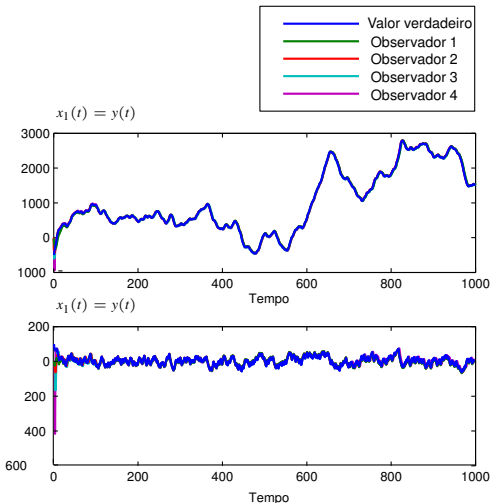
$$\bullet \quad \begin{cases} 1.9 - \ell_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ (1 - \ell_1) 0.9 + \ell_2 = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = 1.9 - (\lambda_1 + \lambda_2) \\ \ell_2 = 0.81 - 0.9(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

2 - Observadores determinísticos

	λ_1	λ_2	ℓ_1	ℓ_2
Observador 1	0.8100	0.8100	0.2800	0.0081
Observador 2	0.6000	0.6000	0.7000	0.0900
Observador 3	0.3500	0.3500	1.2000	0.3025
Observador 4	0.0000	0.0000	1.9000	0.8100

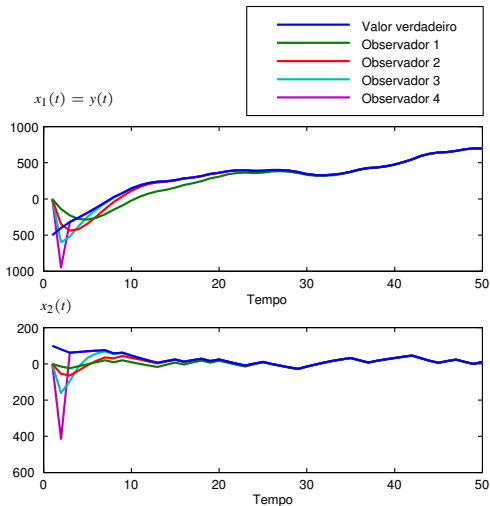
2 - Observadores determinísticos

Observador (abordagem 2)



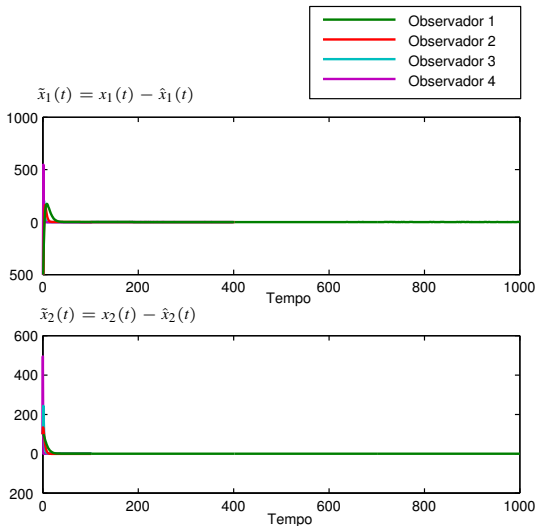
2 - Observadores determinísticos

Observador (abordagem 2)



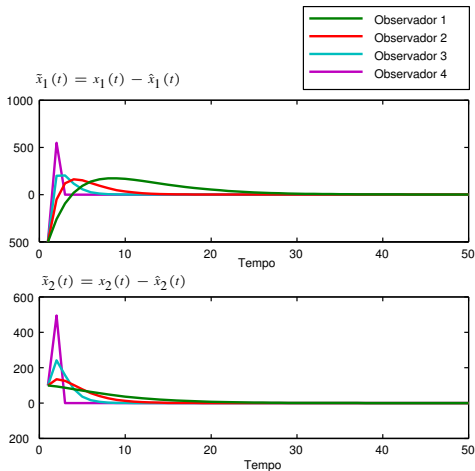
2 - Observadores determinísticos

Erro do observador (abordagem 2)



2 - Observadores determinísticos

Erro do observador (abordagem 2)



2 - Observadores determinísticos

Qual o melhor observador?

- Todos os observadores apresentam um erro nulo em regime permanente
- Observador 1 tem a resposta mais lenta
- Observador 4 tem a resposta mais rápida
- o erro é maior nos observadores mais rápidos

A selecção do observador deve ser o compromisso entre a velocidade e o erro na resposta a perturbações

Será que se consegue definir um critério mais preciso na selecção do observador?

- **A resposta é afirmativa desde que se restrinja o tipo de perturbações.**

3 - Sistemas com perturbações I

Sistema com perturbações:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + q(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + r(t)\end{aligned}$$

- $q(t)$ e $r(t)$ são perturbações
- As perturbações são sinais desconhecidos e, consequentemente, afectam o desempenho do observador

Dinâmica do erro dum observador dum sistema com perturbações:

$$\tilde{x}(t+1) = (A - LC)\tilde{x}(t) + q(t) - Lr(t)$$

3 - Sistemas com perturbações II

- O observador é bom se o erro $\tilde{x}(t)$ for *pequeno*
- O projecto do observador pode ser reduzido ao da minimização dum critério do erro, como por exemplo

$$V = \sum_{t=1}^N \|\tilde{x}\|_2^2 = \sum_{t=1}^N \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t)$$

- A solução deste problema depende do tipo de perturbações considerado

4 - Perturbações determinísticas I

Exemplo 3

Novamente o motor que temos a vindo considerar mas com uma perturbação no binário:

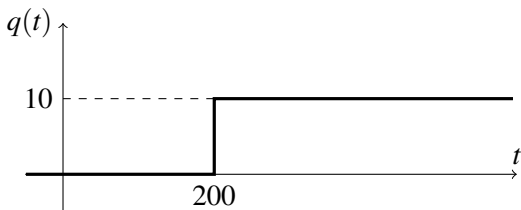
$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) \\x_2(t+1) &= 0.9x_2(t) + 10u(t) + q(t) \\y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Observador (um valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.81$):

$$\hat{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.0081 \end{bmatrix} (y(t) - [1 \quad 0] \hat{x}(t))$$

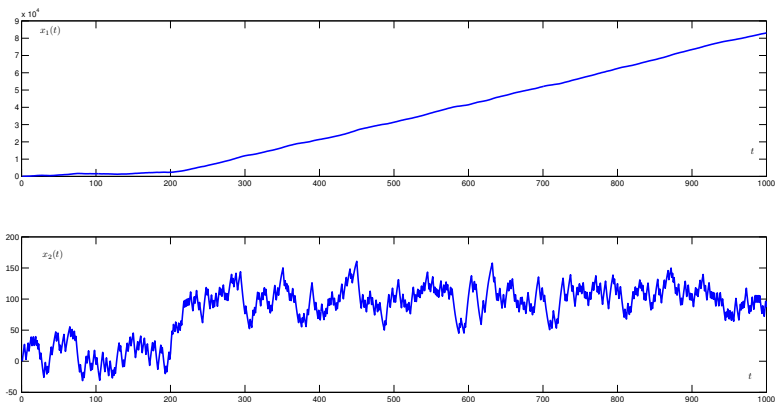
4 - Perturbações determinísticas II

Perturbação: Degrau de amplitude 10 em $t=200$



4 - Perturbações determinísticas III

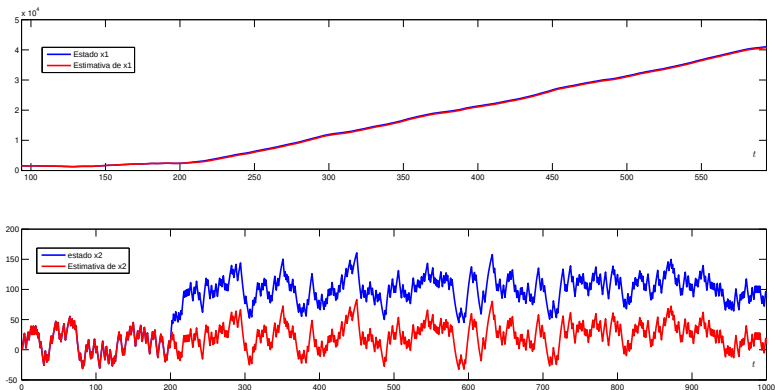
Variáveis de Estado do Sistema:



Comparação entre as estimativas do observador e as

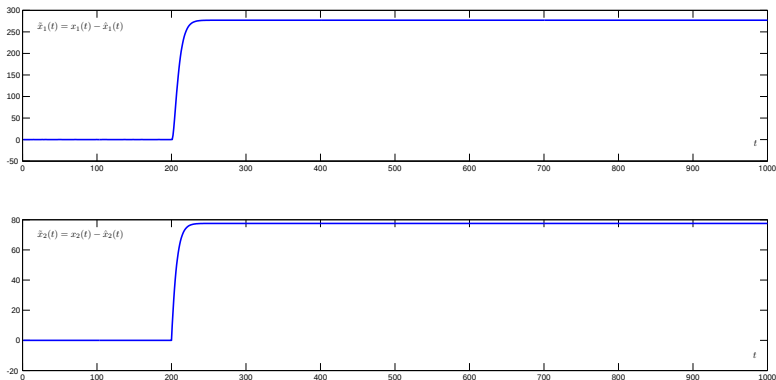
4 - Perturbações determinísticas IV

variáveis de estado:



Erros do observador:

4 - Perturbações determinísticas V

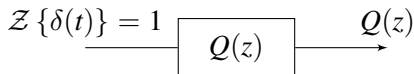


4 - Perturbações determinísticas VI

COMO REJEITAR PERTURBAÇÕES DETERMINÍSTICAS?

5 - Rejeição de perturbações determinísticas I

- Encarar uma perturbação determinística como a saída dum sistema excitado por um impulso de Dirac (princípio do modelo interno):



- Se $(A_q, B_q, C_q, D_q = 0)$ for uma realização de $Q(z)$ no espaço de estados, isto é, se

$$Q(z) = C_q (zI_{n_q} - A_q)^{-1} B_q$$

então $q(t)$

$$\begin{aligned} x_q(t+1) &= A_q x_q(t) \\ q(t) &= C_q x_q(t) \end{aligned}$$

5 - Rejeição de perturbações determinísticas II

- O sistema é autónomo porque efeito do impulso de Dirac é alterar o estado inicial do sistema e, por isso, pode-se considerar que, em regime permanente, a entrada é nula.
- No caso determinístico só se anulam as perturbações em regime permanente e, por isso, só tem sentido considerar perturbações com função de transferência $Q(z)$ instável.
- De forma idêntica, considera-se $r(t)$ a saída do sistema

$$\begin{aligned}x_r(t+1) &= A_r x_r(t) \\ r(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}$$

5 - Rejeição de perturbações determinísticas III

- O sistema com perturbações

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + q(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + r(t)\end{aligned}$$

pode ser descrito pelo modelo alargado

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_q(t+1) \\ x_r(t+1) \\ x(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_q & 0_{n_q \times n_r} & 0_{n_q \times n} \\ 0_{n_r \times n_q} & A_r & 0_{n_r \times n} \\ C_q & 0_{n \times n_r} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x_r(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n_q \times m} \\ 0_{n_r \times m} \\ B \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0_{\ell \times n_q} & C_r & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x_r(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + Du(t)\end{aligned}$$

6 - Modelos de perturbações determinísticas I

- Degrau (integral do impulso de Dirac)

$$\begin{cases} x_q(t+1) &= x_q(t) \\ q(t) &= x_q(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_q &= 1 \\ C_q &= 1 \end{cases}$$

- Rampa (integral duplo do impulso de Dirac)

$$\begin{cases} x_{q1}(t+1) &= x_{q1}(t) \\ x_{q2}(t+1) &= x_{q1}(t) + x_{q2}(t) \\ q(t) &= x_{q2}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ C_q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

6 - Modelos de perturbações determinísticas II

- Sinusoide com frequência ω_0 (valores próprios em $e^{\pm j\omega_0} = \cos \omega_0 \pm j \sin \omega_0$):

$$\begin{cases} x_{q1}(t+1) &= \cos(\omega_0)x_{q1}(t) + \sin(\omega_0)x_{q2}(t) \\ x_{q2}(t+1) &= -\sin(\omega_0)x_{q1}(t) + \cos(\omega_0)x_{q2}(t) \\ q(t) &= x_{q1}(t) + x_{q2}(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_q &= \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & \sin \omega_0 \\ -\sin \omega_0 & \cos \omega_0 \end{bmatrix} \\ C_q &= [1 \quad 1] \end{cases}$$

6 - Modelos de perturbações determinísticas III

Exemplo 4

Projecto dum observador capaz de rejeitar a perturbação do exemplo 3:

- Modelo alargado do sistema:

$$x_q(t+1) = x_q(t)$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = \underbrace{x_q(t)}_{q(t)} + 0.9x_2(t) + 10u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

6 - Modelos de perturbações determinísticas IV

- Modelo alargado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_q(t+1) \\ x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

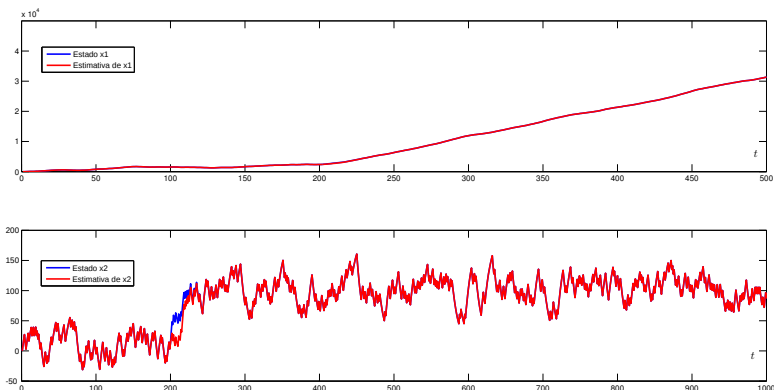
6 - Modelos de perturbações determinísticas V

- Observador ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.81$):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q(t+1) \\ \hat{x}_1(t+1) \\ \hat{x}_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.006859 \\ 0.47 \\ 0.0613 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right)$$

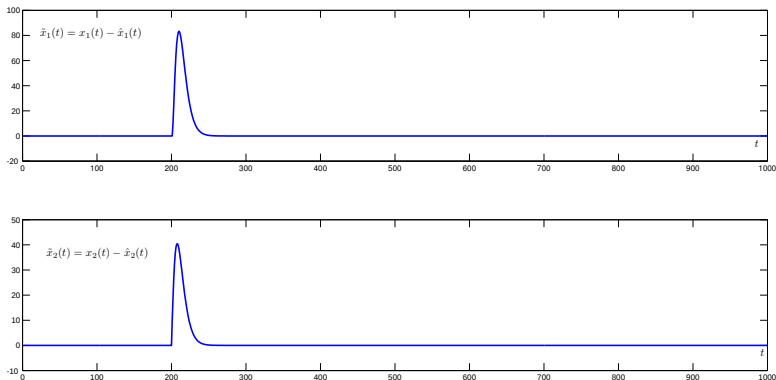
6 - Modelos de perturbações determinísticas VI

Comparação entre as estimativas do observador e as variáveis de estado:



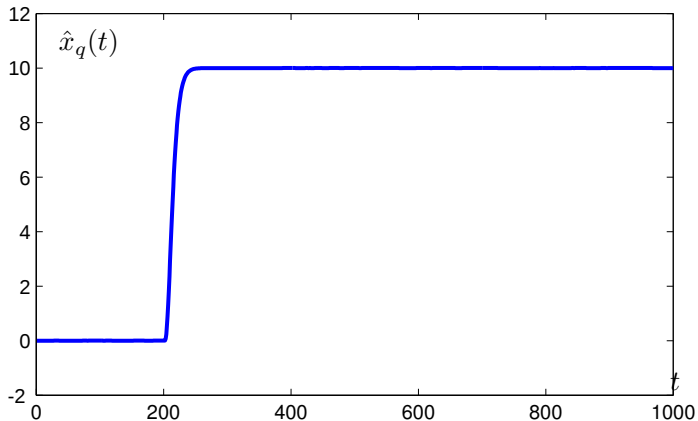
Erros do observador:

6 - Modelos de perturbações determinísticas VII



Estimativa da perturbação:

6 - Modelos de perturbações determinísticas VIII



7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos I

É frequente considerar-se que as perturbações são aleatórias:
Neste caso são modelizadas como

Processos estocásticos ergódicos

Processos estocásticos:

- Funções aleatórias
- Um processo estocástico v é função de dois argumentos:
 - t , habitualmente o tempo.
 - ω , evento num espaço amostral

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos II

- v é designado por $v(t, \omega)$
- $v(., \omega)$ é uma variável aleatória (instante t é fixo).
- $v(t, .)$ é uma realização de v , ou seja, uma função do tempo t (num determinado evento ω)
- Normalmente o argumento ω é descartado na designação dum processo estocástico, representando-se v por $v(t)$ e não por $v(t, \omega)$ (as variáveis aleatórias também não se costumam representar como função de ω).

Caracterização de processos estocásticos:

- Distribuição

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos III

- Média:

$$\begin{aligned}\mu_v(t) &= \mathbf{E} \{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{v(t)} [v(t)] dv(t) \\ p_{v(t)} &- \text{densidade de probabilidade de } v(t).\end{aligned}$$

- Função de (auto)-covariância

$$\begin{aligned}\lambda_{vv}(t, s) &= \mathbf{E} \{[v(t) - \mu_v(t)] [v(s) - \mu_v(s)]\} \\ &= \mathbf{E} \{v(t)v^T(s)\} - \mu_v(t)\mu_v(s)\end{aligned}$$

Processo estocástico estacionário: Processo cujas propriedades estatísticas não mudam com o tempo.
Se $v(t)$ for um processo estocástico estacionário, então:

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos IV

- Média:

$$\mu_v(t) = \mu_v, \quad \text{não é função do tempo.}$$

- Função de (auto)-covariância

$$\lambda_{vv}(t, s) = \lambda_{vv}(t - s) = \lambda_{vv}(\tau), \quad \tau = t - s$$

Só depende do espaçamento entre os instantes de tempo.

Processo estocástico estacionário ergódico: Os valores esperados são iguais aos limites das médias temporais quando o intervalo de tempo tende para infinito.

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos V

- Média:

$$\mu_v = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N v(t)$$

- Função de (auto)-covariância:

$$\lambda_{vv}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N [v(t+\tau) - \mu_v] [v(t) - \mu_v]^T$$

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos VI

DENSIDADE ESPECTRAL DUM PROCESSO ESTOCÁSTICO ESTACIONÁRIO

$$\Phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda_{vv}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

- A densidade espectral é a transformada de Fourier da função de covariância.
- A função de covariância é a transformada inversa de Fourier da densidade espectral

$$\lambda_{vv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{vv}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1)$$

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos VII

- Para $\tau = 0$ e $v(t)$ escalar ($v(t) \in \mathbb{R}$), $\lambda_{vv}(\tau)$ é a variância de $v(t)$ que pode ser calculada através de

$$\sigma_v^2 = \lambda_{vv}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{vv}(\omega) d\omega.$$

- Se o sinal for ergódico e de média nula a sua variância também é dada por

$$\sigma_v^2 = \lambda_{vv}(0) = \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N v^2(t)$$

ou seja, a variância de $v(t)$ é a potência do sinal.

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos VIII

- Podemos, então afirmar, que a densidade de espectral dum processo estocástico (estacionário) é uma representação da distribuição da sua potência pelas diferentes frequências.

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos IX

Ruído branco

Um processo estocástico $v(t)$ é designado como ruído branco se



$$\mathbf{E} \{v(t)\} = \mu_v$$

- $v(t)$ e $v(s)$ forem independentes para qualquer $t \neq s$

O ruído branco é um sinal fracamente estacionário (média e covariância estacionárias) e ergódico

Ruído branco $v(t) \in \mathbb{R}^n$ com média nula

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos X

$$\mathbf{E} \{v(t)\} = \mathbf{0}_n$$

$$\lambda_{vv}(\tau) = \mathbf{E} \{v(t+\tau)v^T(t)\} = \mathbf{E} \{v(t)v^T(t-\tau)\} = \begin{cases} V, & \tau = 0 \\ \mathbf{0}_{n \times n}, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

$\delta(\tau)$ – Impulso de Dirac.

Densidade espectral do ruído branco:

$$\Phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda_{vv}(\tau) e^{-j\omega\tau} = V$$

O espectro do ruído branco é plano. A sua energia distribui-se igualmente por todas as frequências (tal como o espectro da luz branca e daí o nome de ruído branco).

O ruído branco é um sinal *imprevisível* pois o seu valor num dado instante é independente de todo o passado e futuro.

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos XI

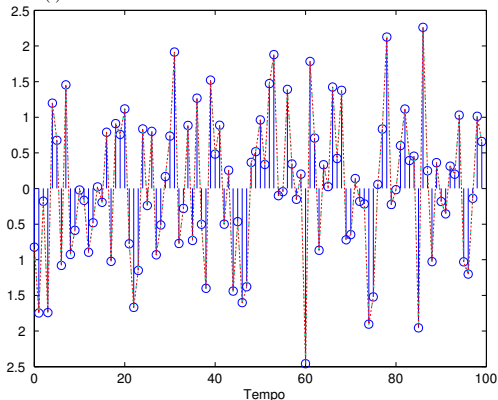


Figura: Ruído branco gaussiano de média nula.

7 - Modelização de perturbações como processos estocásticos ergódicos XII

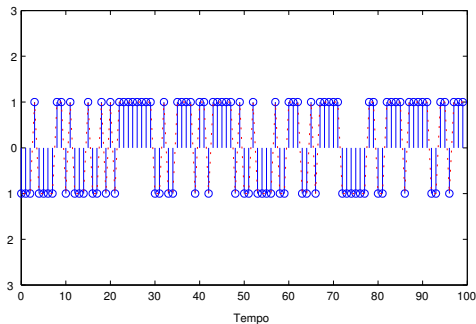


Figura: Ruído branco binário de média nula.

8 - Modelos de estado de processos determinístico-estocásticos I

Considera-se que as perturbações $q(t)$ e $r(t)$ são ruído branco:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + q(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + r(t)$$

$$\mathbf{E}\{q(t)\} = 0_n, \quad \mathbf{E}\{r(t)\} = 0_\ell$$

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^T(t-\tau) & r^T(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{q(t)q^T(t-\tau)\} & \mathbf{E}\{q(t)r^T(t-\tau)\} \\ \mathbf{E}\{r(t)q^T(t-\tau)\} & \mathbf{E}\{r(t)r^T(t-\tau)\} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}, & \tau = 0 \\ 0_{(n+\ell) \times (n+\ell)}, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

- $q(t)$ — ruído do processo
- $r(t)$ — ruído de medição

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos I

Os ruídos $q(t)$ e $r(t)$ vão afectar o desempenho dos observadores pois o erro da estimativa de estado passa a ser

$$\tilde{x}(t+1) = (A - LC)\tilde{x}(t) + q(t) - Lr(t)$$

Exemplo 5

Novamente o sistema do exemplo 1 mas perturbado por ruído de processo e de observação:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) \\x_2(t+1) &= 0.9x_2(t) + 10u(t) + q_1(t) \\y(t) &= x_1(t) + r(t)\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos II

$$q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \mathbf{E} \{q(t)q^T(t)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \{q_1^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

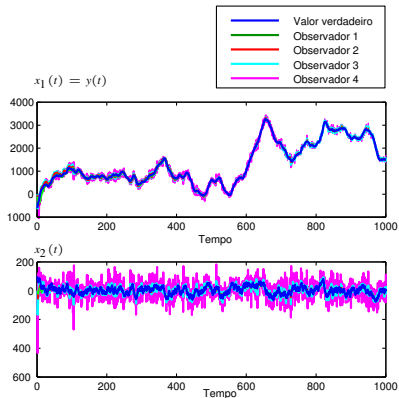
$$R = \mathbf{E} \{r^2(t)\} = \sigma_r^2 = 2500 \Rightarrow \sigma_r = 50$$

Observadores

	λ_1	λ_2	ℓ_1	ℓ_2
Observador 1	0.8100	0.8100	0.2800	0.0081
Observador 2	0.6000	0.6000	0.7000	0.0900
Observador 3	0.3500	0.3500	1.2000	0.3025
Observador 4	0.0000	0.0000	1.9000	0.8100

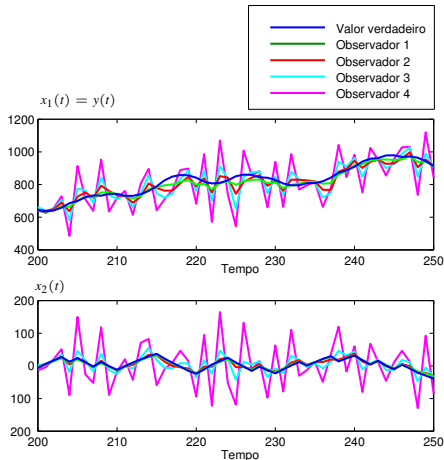
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos III

Estimativas de estado



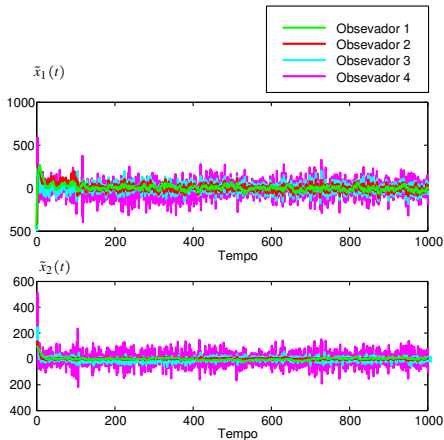
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos IV

Estimativas de estado (continuação)



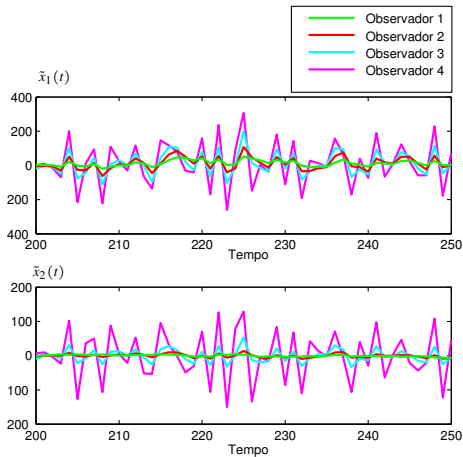
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos V

Erros das estimativas



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VI

Erros das estimativas



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VII

Sejam

$$x_d(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y_d(t) = Cx_d(t) + Du(t)$$

e

$$x_s(t+1) = Ax_s(t) + q(t)$$

$$y_s(t) = Cx_s(t) + r(t)$$

- Se soubermos (A, B, C, D) , $x_d(t)$ e $y_d(t)$ podem ser **completamente conhecidos**
- $y_s(t)$ e $x_s(t)$ nunca podem ser **completamente conhecidos** mesmo que saibamos (A, B, C, D) (são processos estocásticos pois são sinais dum sistema excitado por outros processos estocásticos).

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VIII

Somando as equações dos dois sistemas:

$$\begin{aligned}x_d(t+1) + x_s(t+1) &= A[x_d(t) + x_s(t)] + Bu(t) + q(t) \\ y_d(t) + y_s(t) &= C[x_d(t) + x_s(t)] + Du(t) + r(t)\end{aligned}$$

Se definirmos

$$\begin{aligned}x(t) &= x_d(t) + x_s(t) \\ y(t) &= y_d(t) + y_s(t)\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + q(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + r(t)\end{aligned}$$

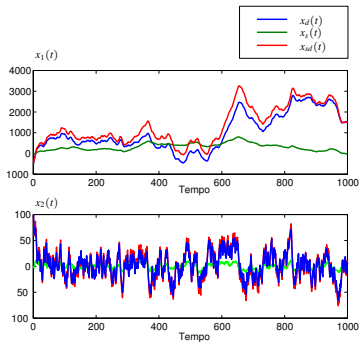
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos IX

- Chama-se a este sistema, **Sistema Determinístico-Estocástico**
- O estado pode ser decomposto numa componente determinística $x_d(t)$ e noutra estocástica $x_s(t)$
- A componente determinística do estado pode ser completamente determinada por um observador estável
- A componente estocástica nunca pode ser completamente determinada
- O que se afirmou para o estado também é válido para a saída

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos X

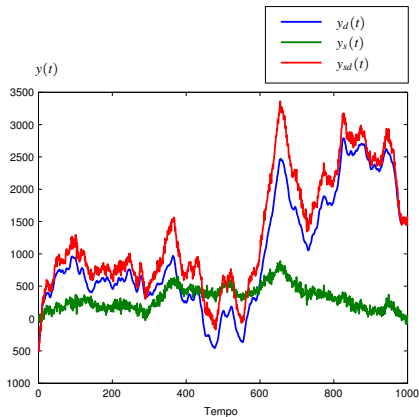
Exemplo 6

Componentes do estado e da saída do sistema apresentado no exemplo 5



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XI

Exemplo 6 (continuação)



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XII

Suponhamos que conseguimos medir $y_d(t)$ sem qualquer erro. Podemos estimar $x_d(t)$ através do observador (estável)

$$\begin{aligned}\hat{x}_d(t+1) &= A\hat{x}_d(t) + Bu(t) + L[y_d(t) - C\hat{x}_d(t) - Du(t)] \\ \hat{y}_d(t) &= C\hat{x}_d(t) + Du(t)\end{aligned}$$

cujo erro terá uma dinâmica descrita por

$$\tilde{x}_d(t+1) = (A - LC)\tilde{x}_d(t)$$

Se o observador for estável

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_d(t) = 0_n.$$

Sem perturbações o erro é nulo em regime permanente

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XIII

Utilizemos o mesmo observador para estimar a componente estocástica de $x(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_s(t+1) &= A\hat{x}_s(t) + L[y_s(t) - C\hat{x}_s(t)] \\ \hat{y}_s(t) &= C\hat{x}_s(t)\end{aligned}$$

A dinâmica do erro é descrita por

$$\tilde{x}_s(t+1) = (A - LC)\tilde{x}_s(t) + q(t) - Lr(t)$$

O erro $\tilde{x}_s(t)$ não se anula por causa das perturbações

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XIV

Estimação dos estados do modelo determinístico-estocástico:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_d(t) + \hat{x}_s(t).$$

Erro de estimação:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) - \hat{x}(t) = [x_d(t) + x_s(t)] - [\hat{x}_d(t) + \hat{x}_s(t)] = \\ &= \underbrace{x_d(t) - \hat{x}_d(t)}_{\tilde{x}_d(t)} + \underbrace{x_s(t) - \hat{x}_s(t)}_{\tilde{x}_s(t)} = \tilde{x}_d(t) + \tilde{x}_s(t)\end{aligned}$$

Se o observador for estável:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{x}(t) \rightarrow \tilde{x}_s(t) \text{ pois } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_d(t) = 0_n$$

Em regime permanente, o erro do observador é igual à sua componente estocástica

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XV

FILTRO DE KALMAN

- Minimizar a covariância do erro das estimativas do estado, ou seja, um ganho L tal que a variância de $\tilde{x}(t)$ seja mínima.
- Designaremos o ganho do observador que minimiza a variância do erro por K .

Como a componente determinística de $\tilde{x}(t)$ é nula podemos determinar K através da minimização da covariância da sua componente estocástica.

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XVI

Em que é que consiste a minimização duma matriz?

RESPOSTA: Na minimização duma norma pré-definida.

Normas mais comuns de matrizes reais

- induzidas: $\|A\|_p = \max \left\{ \|Ax\|_p : \|x\|_p = 1 \right\}$
- Norma max: $\|A\|_{\max} = \max \left\{ |a_{ij}| \right\}$
- Norma de Frobenius: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = \text{traço}(A^T A)$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XVII

Função traço:

$$\text{traço}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i_i}$$

Soma de todos os elementos da diagonal principal.

$\left\{ \begin{array}{l} A^T A - \text{Matriz definida positiva} \\ \|A\|_F = \text{traço}(A^T A) \end{array} \right\} \Rightarrow$ Se M for semidefinida positiva então $\text{traço}(M)$ é uma norma de M .

Norma minimizada pelo filtro de Kalman pode ser

$$\text{traço} \left(\mathbf{E} \left\{ \tilde{x}_s(t) \tilde{x}_s^T(t) \right\} \right)$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XVIII

Definições de matrizes (semi)definidas positivas e negativas

- Uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **definida positiva** e designa-se esse facto por $M > 0_{n \times n}$ ou $M \succ 0_{n \times n}$, se e só

$$z^T M z > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } z \neq 0_n$$

- Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **semidefinida positiva** e designa-se esse facto por $M \geq 0_{n \times n}$ ou $M \succeq 0_{n \times n}$, se e só

$$z^T M z \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } z \neq 0_n$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XIX

- Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **definida negativa** e designa-se esse facto por $M < 0_{n \times n}$ ou $M \prec 0_{n \times n}$, se e só

$$z^T M z < 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0_n$$

- Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **semidefinida negativa** e designa-se esse facto por $M \leq 0_{n \times n}$ ou $M \preceq 0_{n \times n}$, se e só

$$z^T M z \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0_n$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XX

Algumas Propriedades das matrizes (semi)definidas positivas e negativas

- Uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva (negativa) se e só se todos os seus valores próprios forem positivos (negativos).
- Uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semidefinida positiva (negativa) se e só se tiver, pelo menos, um valor próprio nulo e todos os outros não negativos (não positivos).
- As matrizes definidas positivas (negativas) são **não singulares** ($M \succ 0_{n \times n}$ ou $M \prec 0_{n \times n} \Rightarrow \det(M) \neq 0$)

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXI

- As matrizes semidefinidas positivas (negativas) são **singulares** ($M \succeq 0_{n \times n}$ ou $M \preceq 0_{n \times n} \Rightarrow \det(M) = 0$)
- Se $M_1 \succ 0_{n \times n}$ e $M_2 \succeq 0_{n \times n}$ então $M_1 + M_2 \succ 0_{n \times n}$

Demonstração:

$$z^T (M_1 + M_2) z = z^T M_1 z + z^T M_2 z > 0$$

pois $M_1 \succ 0_{n \times n}$ e $M_2 \succeq 0_{n \times n}$ e, consequentemente $z^T M_1 z > 0$ e $z^T M_2 z \geq 0$ para todo $z \neq 0_n$.

- Se $M_1 \succeq 0_{n \times n}$ e $M_2 \succeq 0_{n \times n}$ então $M_1 + M_2 \succ 0_{n \times n}$ ou $M_1 + M_2 \succeq 0_{n \times n}$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXII

Definição: Dadas duas matrizes simétricas M_1 e $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diz-se que M_1 é **maior** (ou **maior ou igual**) do que M_2 , designando-se esse facto por $M_1 \succ M_2$ (ou $M_1 \succeq M_2$), se e só se $M_1 - M_2 \succ 0_{n \times n}$ ($M_1 - M_2 \succeq 0_{n \times n}$), ou seja, se e só se $M_1 - M_2$ for uma matriz (semi) definida positiva.

Facto. Se M_1 e M_2 forem matrizes definidas positivas e $M_1 \succ M_2$ (ou $M_1 \succeq M_2$) então $\|M_1\| > \|M_2\|$ (ou $\|M_1\| \geq \|M_2\|$).

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXIII

Problema: Determinar o ganho K do observador

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t) [y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)]$$

Que minimize a covariância do erro $\tilde{P}(t) = \mathbf{E} \{ \tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t) \}$.

Como, em regime permanente, $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_s(t)$, o ganho óptimo do observador do sistema determinístico-estocástico é o mesmo do observador do sistema estocástico

$$\hat{x}_s(t+1) = A\hat{x}_s(t) + K(t) [y(t) - C\hat{x}_s(t)]$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXIV

Cálculo de $\tilde{P}(t)$:

- Erro da estimativa:

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t) + q(t) - K(t)\tilde{y}_s(t)$$

$$\tilde{y}_s(t) = \tilde{y}(t) = y(t) - C\hat{x}_s(t)$$

- Variáveis auxiliares

$$\Lambda_0(t) = \mathbf{E} \{ \tilde{y}_s(t) \tilde{y}_s^T(t) \} = \mathbf{E} \{ \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t) \} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$$

$$G(t) = \mathbf{E} \{ [A\tilde{x}(t) + q(t)] \tilde{y}^T(t) \} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$$

- Cálculo do produto $\tilde{x}(t+1)\tilde{x}^T(t+1)$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1)\tilde{x}^T(t+1) &= [A\tilde{x}(t) + q(t) - K(t)\tilde{y}(t)] [A\tilde{x}(t) + q(t) - K(t)\tilde{y}(t)]^T \\ &= [A\tilde{x}(t) + q(t)] [A\tilde{x}(t) + q(t)]^T - [A\tilde{x}(t) + q(t)] \tilde{y}^T(t) K^T(t) \\ &\quad - K(t) \tilde{y}(t) [A\tilde{x}(t) + q(t)]^T + K(t) \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t) K(t)^T \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXV

- Cálculo de $\tilde{P}(t+1)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(t+1) &= \mathbf{E} \{ \tilde{x}(t+1) \tilde{x}^T(t+1) \} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ [A\tilde{x}(t) + q(t)] [A\tilde{x}(t) + q(t)]^T \right\} - \underbrace{\mathbf{E} \{ [A\tilde{x}(t) + q(t)] \tilde{y}^T(t) \}}_{G(t)} K^T(t) \\
 &\quad - K(t) \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{y}(t) [A\tilde{x}(t) + q(t)]^T \}}_{G^T(t)} + K(t) \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t) \}}_{\Lambda_0(t)} K^T(t) \\
 &= A \underbrace{\mathbf{E} [\tilde{x}(t) \tilde{x}^T(t)]}_{\tilde{P}(t)} A^T + A \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t) q^T(t) \}}_{0_{n \times n}} + \underbrace{\mathbf{E} \{ q(t) \tilde{x}^T(t) \}}_{0_{n \times n}} A^T + \underbrace{\mathbf{E} \{ q(t) q^T(t) \}}_Q \\
 &\quad - G(t) K^T(t) - K(t) G^T(t) + K(t) \Lambda_0(t) K^T(t) = \\
 &= A \tilde{P}(t) A^T + Q - [G(t) K^T(t) + K(t) G^T(t)] + K(t) \Lambda_0(t) K^T(t)
 \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXVI

- Definir

$$\psi(K, t) = -\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t+1) \tilde{y}(t) \} = K(t) \Lambda_0(t) - G(t) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$$

- Calcular:

$$\begin{aligned} \psi(K, t) \Lambda_0^{-1}(t) \psi^T(K, t) &= [K(t) \Lambda_0(t) - G(t)] \Lambda_0^{-1}(t) [K(t) \Lambda_0(t) - G(t)]^T \\ &= \left[K(t) - G(t) \Lambda_0^{-1}(t) \right] [K(t) \Lambda_0(t) - G(t)]^T \\ &= K(t) \Lambda_0(t) K^T(t) - K(t) G^T(t) - G(t) K^T(t) + G(t) \Lambda_0^{-1}(t) G^T(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G(t) K^T(t) + K(t) G^T(t) &= \\ &= -\psi(K, t) \Lambda_0^{-1}(t) \psi^T(K, t) + K(t) \Lambda_0(t) K^T(t) + G(t) \Lambda_0^{-1}(t) G^T(t) \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXVII

- Rescrever a equação de $\tilde{P}(t+1)$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t+1) &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - [G(t)K^T(t) + K(t)G^T(t)] + K(t)\Lambda_0(t)K^T(t) \\ &= A\tilde{P}(t)A^T + Q + \psi(K, t)\Lambda_0^{-1}(t)\psi^T(K, t) - \cancel{K(t)\Lambda_0(t)K^T(t)} \\ &\quad - G(t)\Lambda_0^{-1}(t)G^T(t) + \cancel{K(t)\Lambda_0(t)K^T(t)}\end{aligned}$$

- Minimizar $\|\tilde{P}(t+1)\|$

$$\tilde{P}(t+1) = A\tilde{P}(t)A^T + Q + \psi(K, t)\Lambda_0^{-1}(t)\psi^T(K, t) - G(t)\Lambda_0^{-1}(t)G^T(t)$$

Como $\psi(K, t)\Lambda_0^{-1}(t)\psi^T(K, t) \succeq 0_{n \times n}$ então

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t+1) &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - G(t)\Lambda_0^{-1}(t)G^T(t) + \psi(K, t)\Lambda_0^{-1}(t)\psi^T(K, t) \\ &\succeq A\tilde{P}(t)A^T + Q - G(t)\Lambda_0^{-1}(t)G^T(t).\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXVIII

Logo

$$\min_K [\tilde{P}(t+1)] = A\tilde{P}(t)A^T + Q - G(t)\Lambda_0^{-1}(t)G^T(t)$$

e

$$\begin{aligned}\psi(K, t) &= 0_{n \times \ell} \Rightarrow K(t)\Lambda_0(t) - G(t) = 0_{n \times \ell} \Leftrightarrow \\ K(t) &= G(t)\Lambda_0^{-1}(t)\end{aligned}$$

O erro de previsão de $x(t+1)$ no instante t , $\tilde{x}(t+1)$, é mínimo quando

$$\psi(K, T) = 0_{n \times \ell} \Rightarrow \mathbf{E} \{ \tilde{x}(t+1) \tilde{y}(t) \} = 0_{n \times \ell}. \quad (2)$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXIX

Calculemos $\Lambda_0(t)$:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0(t) &= \mathbf{E} \left\{ \underbrace{\tilde{\mathbf{y}}(t)}_{\mathbf{y}_s(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t)} \underbrace{\tilde{\mathbf{y}}^T(t)}_{\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t) + \mathbf{r}(t)} \right\} = \mathbf{E} \left\{ [\mathbf{y}_s(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t)] [\mathbf{y}_s(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t)]^T \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ [\mathbf{C}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t)] [\mathbf{C}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_s(t)]^T \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ \left[\mathbf{C} \underbrace{(\mathbf{x}_s(t) - \hat{\mathbf{x}}_s(t))}_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} + \mathbf{r}(t) \right] [\mathbf{C}(\mathbf{x}_s(t) - \hat{\mathbf{x}}_s(t)) + \mathbf{r}(t)]^T \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ [\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{r}(t)] [\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{r}(t)]^T \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{r}^T(t) + \mathbf{r}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{r}(t)\mathbf{r}^T(t) \right\} \\
 &= \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t) \right\} \mathbf{C}^T}_{\tilde{\mathbf{P}}(t)} + \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{r}^T(t) \right\}}_{\mathbf{0}_{n \times \ell}} + \underbrace{\mathbf{E} \left\{ \mathbf{r}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t) \right\} \mathbf{C}^T}_{\mathbf{0}_{\ell \times n}} \\
 &\quad + \underbrace{\mathbf{E} \left\{ \mathbf{r}(t)\mathbf{r}^T(t) \right\}}_{\mathbf{R}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXX

Calculemos $G(t)$:

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \mathbf{E}\{[A\tilde{x}(t) + q(t)] \underbrace{\tilde{y}^T(t)}_{[y_s(t) - C\hat{x}_s(t)]^T}\} = \mathbf{E}\{[A\tilde{x}(t) + q(t)] \underbrace{[y_s(t) - C\hat{x}_s(t)]^T}_{C x_s(t) + r(t)}\} = \\
 &= \mathbf{E}\left\{[A\tilde{x}(t) + q(t)] [C x_s(t) + r(t) - C\hat{x}_s(t)]^T\right\} = \\
 &= \mathbf{E}\{[A\tilde{x}(t) + q(t)] \left[C \underbrace{(x_s(t) - \hat{x}_s(t))}_{\tilde{x}(t)} + r(t)\right]^T\} = \\
 &= \mathbf{E}\left\{[A\tilde{x}(t) + q(t)] [C\tilde{x}(t) + r(t)]^T\right\} = \\
 &= \mathbf{E}\{A\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)C^T + A\tilde{x}(t)r^T(t) + q(t)\tilde{x}^T(t)C^T + q(t)r^T(t)\} \\
 &= A \underbrace{\mathbf{E}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}}_{\tilde{P}(t)} C^T + A \underbrace{\mathbf{E}\{\tilde{x}(t)r^T(t)\}}_{0_{n \times \ell}} + \underbrace{\mathbf{E}\{q(t)\tilde{x}^T(t)\}}_{0_{n \times n}} C^T \\
 &\quad + \underbrace{\mathbf{E}\{q(t)r^T(t)\}}_{S} = A\tilde{P}(t)C^T + S
 \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXI

$$K(t) = G(t)\Lambda_0^{-1}(t) = [A\tilde{P}(t)C^T + S] [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1}$$

Para calcular $K(t)$ temos que determinar $\tilde{P}(t)$. Sabemos que $K(t)$ minimiza $\tilde{P}(t+1)$ e que, consequentemente:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t+1) &= \min_K [\tilde{P}(t+1)] = A\tilde{P}(t)A^T + Q - G(t)\Lambda_0^{-1}G^T(t) = \\ &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - \underbrace{[A\tilde{P}(t)C^T + S] [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1} [A\tilde{P}(t)C^T + S]^T}_{K(t)} = \\ &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - K(t) [A\tilde{P}(t)C^T + S]^T\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXII

ALGORITMO: - Previsor de Kalman

1 - Inicialização:

1.1 - $\hat{x}(0) = \mu_x = \mathbf{E} \{x(0)\}$

1.2 - $\tilde{P}(0) = \Pi(0) = \mathbf{E} \left\{ [\hat{x}(0) - \mu_x] [\hat{x}(0) - \mu_x]^T \right\}$

2 - Para $t = 0, 1, \dots$

2.1 - Calcular o ganho do previsor de Kalman:

$$K(t) = [A\tilde{P}(t)C^T + S] [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1}$$

2.2 - Calcular $\hat{x}(t+1)$ e $\tilde{P}(t+1)$ e a previsão da saída $\hat{y}(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t) [y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)] \\ \tilde{P}(t+1) &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - K(t) [A\tilde{P}(t)C^T + S]^T \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXIII

OBSERVAÇÕES:

- **Entradas do algoritmo:**

- $u(t)$ - Entrada do sistema
- $y(t)$ - Saída do sistema.
- μ_x - Estimativa do estado inicial
- $\Pi(0)$ - Covariância do erro da estimativa do estado inicial.
- $Q = \mathbf{E} \{q(t)q^T(t)\}.$
- $S = \mathbf{E} \{q(t)r^T(t)\}.$
- $R = \mathbf{E} \{r(t)r^T(t)\}.$
- (A, B, C, D) - Parâmetros dos sistema.

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXIV

- **Saídas do algoritmo:**

- $\hat{x}(t)$ - Previsão do estado $x(t)$ no instante $t - 1$.
 - $\hat{y}(t)$ - Previsão da saída $y(t)$ no instante $t - 1$.
 - $K(t)$ - Ganho do previsor de Kalman.
 - $\tilde{P}(t)$ - Covariância do erro do previsor de Kalman
- Chama-se **Previsor de Kalman** porque a estimativa de $x(t)$ é efectuada no instante $t - 1$.

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXV

Exemplo 7

Novamente o sistema do exemplo 1 perturbado com os mesmos ruídos de processo e de observação:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.9x_2(t) + 10u(t) + q_1(t)$$

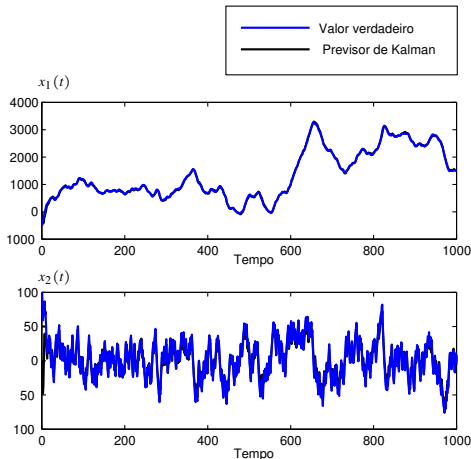
$$y(t) = x_1(t) + r(t)$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \mathbf{E} \{q(t)q^T(t)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \{q_1^2\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R = \mathbf{E} \{r^2(t)\} = \sigma_r^2 = 2500 \Rightarrow \sigma_r = 50$$

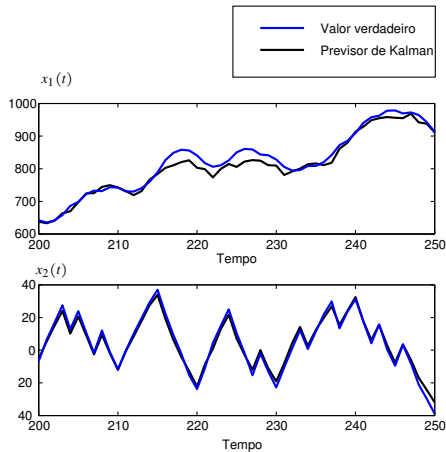
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXVI

Previsor de Kalman



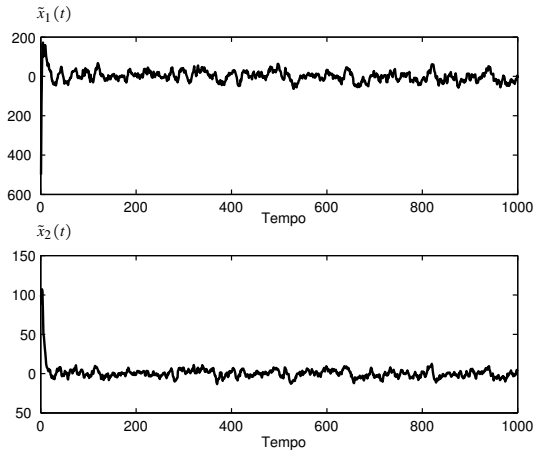
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXVII

Previsor de Kalman



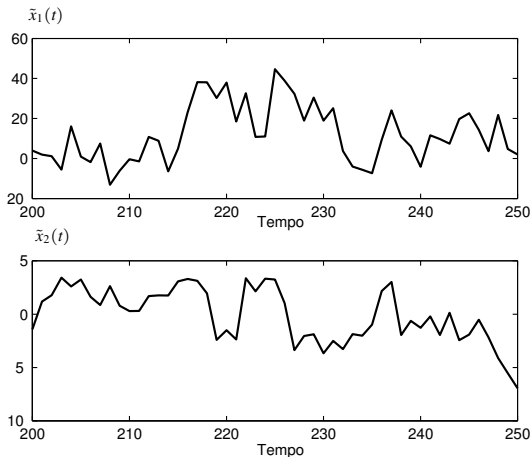
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXVIII

Erro das estimativas do Previsor de Kalman



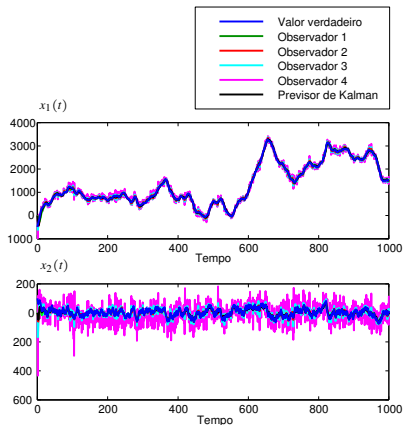
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XXXIX

Erro das estimativas do Previsor de Kalman



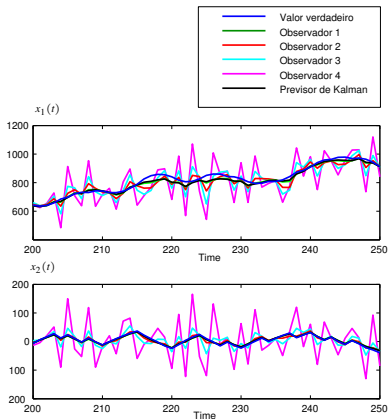
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XL

Comparação do Previsor de Kalman com os observadores determinísticos



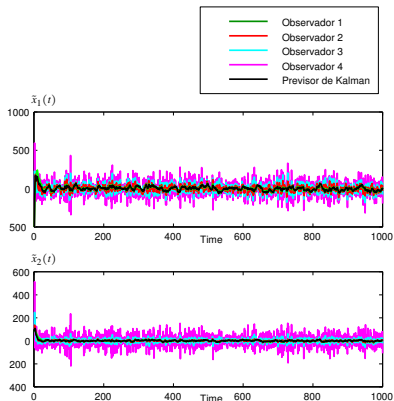
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLI

Comparação do Previsor de Kalman com os observadores determinísticos



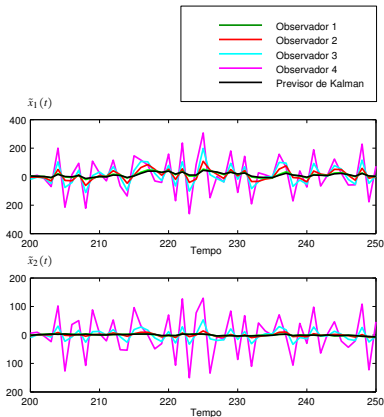
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLII

Comparação do erro do Previsor de Kalman com os observadores determinísticos



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLIII

Comparação do erro do Previsor de Kalman com os observadores determinísticos



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLIV

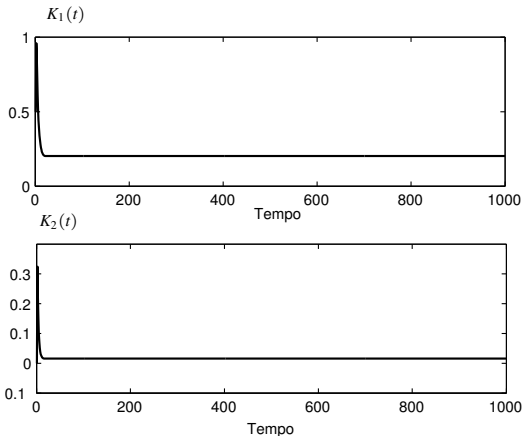
Valores eficazes dos error das estimativas

$$\tilde{x}_{i_{rms}} = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \tilde{x}_i^2(t)}, \quad i = 1, 2.$$

	Prev. Kalman	Obs. 1	Obs. 2	Obs. 3	Obs. 4
$\tilde{x}_{1_{rms}}$	32.40	36.36	42.53	62.99	110.55
$\tilde{x}_{2_{rms}}$	8.59	9.08	10.36	19.89	61.45

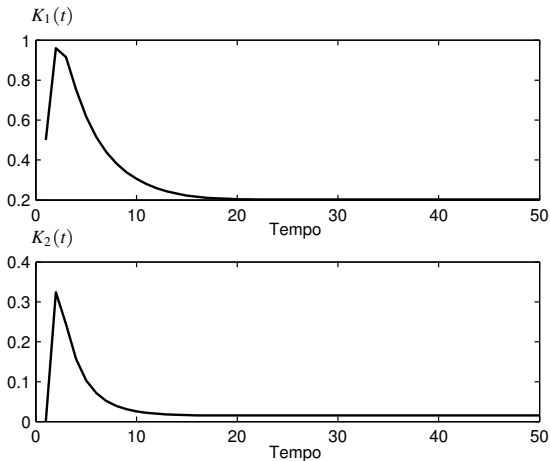
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLV

O Ganho do predictor



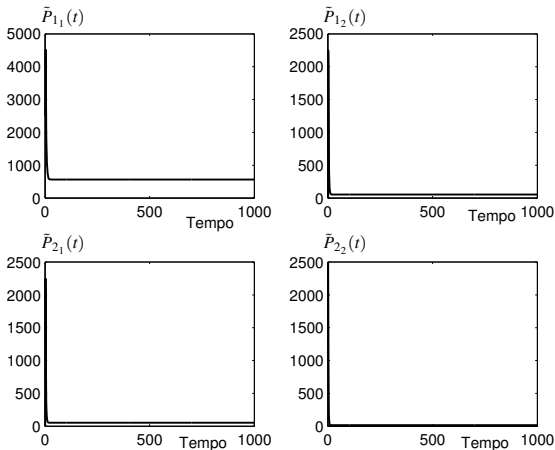
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLVI

O Ganho do previsor



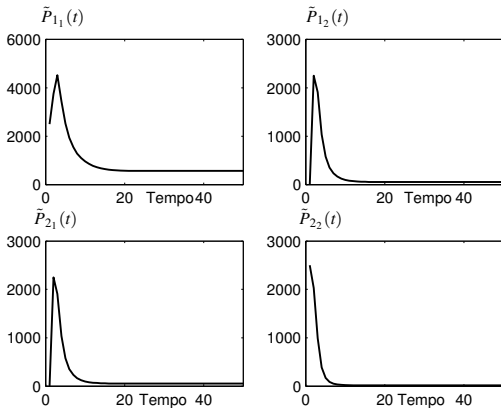
9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLVII

Matriz Covariância do erro $\tilde{P}(t)$



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLVIII

Matriz Covariância do erro $\tilde{P}(t)$



9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XLIX

- Nos sistemas LTI perturbados por ruído branco o erro do previsor de Kalman é um processo estacionário.
- A matriz de covariância estabiliza ao fim de algum tempo e é a solução da equação de Riccati:

$$\tilde{P} = A\tilde{P}A^T + Q - (A\tilde{P}C^T + S) (C\tilde{P}C^T + R)^{-1} (A\tilde{P}C^T + S)^T$$

- Existem vários métodos para encontrar a solução desta equação
- Embora não seja o mais eficiente o método de Jacobi onde, na iteração $k + 1$ $\tilde{P}(k)$ é actualizado através de

$$\begin{aligned}\tilde{P}(k + 1) = & A\tilde{P}(k)A^T + Q \\ & - (A\tilde{P}(k)C^T + S) (C\tilde{P}(k)C^T + R)^{-1} (A\tilde{P}(k)C^T + S)^T\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos L

- Este método converge quase sempre.
- As equações deste método são idênticas às de actualização do previsor não estacionário.
- No previsor não estacionário os valores de $\tilde{P}(t)$ podem ser calculados *offline* pois não dependem de $u(t)$ e $y(t)$ (só dependem da matriz de covariância de $\begin{bmatrix} q^T(t) & r^T(t) \end{bmatrix}^T$).
- Como consequência da estabilização de $\tilde{P}$, o Ganho do Previsor de Kalman também estabiliza nos sistemas LTI no valor

$$K = (A\tilde{P}C^T + S) (C\tilde{P}C^T + R)^{-1}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LI

- O sistema LTI determinístico-estocástico também pode ser descrito pelo modelo

$$\begin{aligned}x_p(t+1) &= Ax_p(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx_p(t) + Du(t) + e(t)\end{aligned}$$

- K é o ganho estacionário do filtro de Kalman
- Este modelo é conhecido como modelo de inovação (*innovation model*)
- Apesar de a parte determinística ser igual $x_p(t)$ e $x(t)$ são diferentes.
- No instante t a quantidade de informação é superior à que possuíamos no instante $t - 1$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LII

- A estimativa de $x(t)$ no instante t tem um erro menor (em média) do que a estimativa no instante $t - 1$, $\hat{x}(t)$.
- Designaremos a estimativa de $x(t)$ no instante t por $\hat{x}(t|t)$.
- $\hat{x}(t|t)$ óptima, na medida em que a covariância do erro $\tilde{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$ é mínima é produzida pelo **Filtro de Kalman**.

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LIII

FILTRO DE KALMAN

Equação de actualização de $\hat{x}(t|t)$:

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t) + K_f(t)\tilde{y}(t)$$

onde:

- $\hat{x}(t)$ – Estimativa de $x(t)$ produzida pelo previsor de Kalman
- $K_f(t)$ – Ganho do filtro de Kalman.
- $\tilde{y}(t) = [y_s(t) - C\hat{x}(t)]$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LIV

CÁLCULO DO GANHO DO FILTRO DE KALMAN

- Recordar a variável auxiliar

$$\Lambda_0(t) = \mathbf{E} \{ \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t) \}$$

e definir

$$G_f(t) = \mathbf{E} \{ \tilde{x}(t) \tilde{y}^T(t) \}$$

- Calcular o erro $\tilde{x}(t|t)$:

$$\tilde{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t) = \underbrace{x(t) - \hat{x}(t)}_{\tilde{x}(t)} - K_f(t) \tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) - K_f(t) \tilde{y}(t)$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LV

- Calcular o produto $\tilde{x}(t|t)\tilde{x}^T(t|t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t|t)\tilde{x}^T(t|t) &= [\tilde{x}(t) - K_f(t)\tilde{y}(t)] [\tilde{x}(t) - K_f(t)\tilde{y}(t)]^T = \\ &= \tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t) - \tilde{x}(t)\tilde{y}^T(t)K_f^T(t) - K_f(t)\tilde{y}(t)\tilde{x}^T(t) + K_f(t)\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)K_f^T(t)\end{aligned}$$

- Calcular $\tilde{P}(t|t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t|t) &= \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t) \}}_{\tilde{P}(t)} - \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t)\tilde{y}^T(t) \}}_{G_f(t)} K_f^T(t) - K_f(t) \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{y}(t)\tilde{x}^T(t) \}}_{G_f^T(t)} \\ &\quad + K_f(t) \underbrace{\mathbf{E} \{ \tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t) \}}_{\Lambda_0(t)} K_f^T(t) = \\ &= \tilde{P}(t) - G_f(t)K_f^T(t) - K_f(t)G_f^T(t) + K_f(t)\Lambda_0(t)K_f^T(t) = \\ &= \tilde{P}(t) - \left[G_f(t)K_f^T(t) + K_f(t)G_f^T(t) \right] + K_f(t)\Lambda_0(t)K_f^T(t)\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LVI

- Definir

$$\Psi_f(K_f, t) = -\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t|t) \tilde{y}^T \} = K_f \Lambda_0(t) - G_f(t).$$

- Calcular

$$\begin{aligned} \Psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \Psi_f^T(K_f, t) &= [K_f(t) \Lambda_0(t) - G_f(t)] \Lambda_0^{-1}(t) [K_f(t) \Lambda_0(t) - G_f(t)]^T \\ &= [K_f(t) - G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t)] [K_f(t) \Lambda_0(t) - G_f(t)]^T \\ &= K_f \Lambda_0(t) K_f^T(t) - K_f(t) G_f^T(t) - G_f(t) K_f^T(t) + \\ &\quad + G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_f(t) K_f^T(t) + K_f(t) G_f^T(t) &= -\Psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \Psi_f^T(K_f, t) + K_f(t) \Lambda_0(t) K_f^T(t) \\ &\quad + G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t) \end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LVII

- Reescrever a equação de $\tilde{P}(t|t)$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t|t) &= \tilde{P}(t) - \left[G_f(t) K_f^T(t) + K_f(t) G_f^T(t) \right] + K_f(t) \Lambda_0(t) K_f^T(t) = \\ &= \tilde{P}(t) + \Psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \Psi_f^T(K_f, t) - \cancel{K_f \Lambda_0(t) K_f^T(t)} - G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t) \\ &\quad + \cancel{K_f(t) \Lambda_0(t) K_f^T(t)}\end{aligned}$$

- Minimizar $\|\tilde{P}(t|t)\|$

$$\tilde{P}(t|t) = \tilde{P}(t) + \psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \psi_f^T(K_f, t) - G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t)$$

Como $\psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \psi_f^T(K_f, t) \succeq 0_{n \times n}$ então

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t|t) &= \tilde{P}(t) - G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t) + \psi_f(K_f, t) \Lambda_0^{-1}(t) \psi_f^T(K_f, t) \\ &\succeq \tilde{P}(t) - G_f(t) \Lambda_0^{-1}(t) G_f^T(t).\end{aligned}$$

9 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos LVIII

Logo

$$\min_{K_f} [\tilde{P}(t|t)] = \tilde{P}(t) - G_f(t)\Lambda_0^{-1}(t)G_f^T(t)$$

e

$$\psi_f(K_f, t) = 0_{n \times \ell} \Rightarrow K_f(t)\Lambda_0(t) - G_f(t) = 0_{n \times \ell} \Leftrightarrow$$

$$K_f(t) = G_f(t)\Lambda_0^{-1}(t)$$

O erro de estimação de $x(t)$ no instante t , $\tilde{x}(t|t)$, é mínimo quando

$$\mathbf{E} \{ \tilde{x}(t|t) \tilde{y}^T(t) \} = 0$$

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos I

Vimos, anteriormente que

$$\Lambda_0(t) = C\tilde{P}(t)C^T + R.$$

Calculemos $G_f(t)$:

$$\begin{aligned} G_f(t) &= \mathbf{E}\{\tilde{x}(t)\underbrace{\tilde{y}^T(t)}_{[y_s(t)-C\hat{x}_s(t)]^T}\} = \mathbf{E}\{\tilde{x}(t)\underbrace{[y_s(t) - C\hat{x}_s(t)]^T}_{Cx_s(t)+r(t)}\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\tilde{x}(t) [Cx_s(t) + r(t) - C\hat{x}_s(t)]^T\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\tilde{x}(t) \left[C(\underbrace{x_s(t) - \hat{x}_s(t)}_{\tilde{x}(t)}) + r(t)\right]^T\right\} = \mathbf{E}\left\{\tilde{x}(t) [C\tilde{x}(t) + r(t)]^T\right\} \\ &= \underbrace{\mathbf{E}\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}}_{\tilde{P}(t)} C^T + \underbrace{\mathbf{E}\{\tilde{x}(t)r^T(t)\}}_{0_{n \times \ell}} = \tilde{P}(t)C^T \end{aligned}$$

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos II

$$K_f(t) = G_f(t)\Lambda_0^{-1}(t) = \tilde{P}(t)C^T [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1}$$

A covariância do erro $\tilde{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$ é

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t|t) &= \tilde{P}(t) - G_f(t)\Lambda_0^{-1}G_f^T(t) = \\ &= \tilde{P}(t) - \tilde{P}(t)C^T [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1} C\tilde{P}(t)\end{aligned}$$

Como $\tilde{P}(t)C^T [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1} C\tilde{P}(t) \succeq 0_{n \times n}$ então

$$\tilde{P}(t|t) \preceq \tilde{P}(t)$$

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos III

ALGORITMO: - Filtro de Kalman

1 - Inicialização:

1.1 - $\hat{x}(0) = \mu_x = \mathbf{E} \{x(0)\}$

1.2 - $\tilde{P}(0) = \Pi(0) = \mathbf{E} \left\{ [\hat{x}(0) - \mu] [\hat{x}(0) - \mu]^T \right\}$

2 - Para $t = 0, 1, \dots$

2.1 - Calcular os ganho do previsor e do filtro de Kalman:

$$K(t) = [A\tilde{P}(t)C^T + S] [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1}$$

$$K_f(t) = \tilde{P}(t)C^T [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1}$$

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos IV

2.2 - Calcular $\hat{x}(t+1)$, $\hat{x}(t|t)$, $\tilde{P}(t+1)$, $\tilde{P}(t|t)$, $\hat{y}(t)$ e $\hat{y}(t|t)$:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t) [y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)]$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t) + K_f(t) [y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)]$$

$$\tilde{P}(t+1) = A\tilde{P}(t)A^T + Q - K(t) [A\tilde{P}(t)C^T + S]^T$$

$$\tilde{P}(t|t) = \tilde{P}(t) - \tilde{P}(t)C^T [C\tilde{P}(t)C^T + R]^{-1} C\tilde{P}(t)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$$

$$\hat{y}(t|t) = C\hat{x}(t|t) + Du(t)$$

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos V

OBSERVAÇÕES:

- **Entradas do algoritmo:**

- $u(t)$ - Entrada do sistema.
- $y(t)$ - Saída do sistema.
- μ_x - Estimativa do estado inicial.
- $\Pi(0)$ - Covariância do erro da estimativa dos estado inicial.
- $Q = \mathbf{E} \{q(t)q^T(t)\}.$
- $S = \mathbf{E} \{q(t)r^T(t)\}.$
- $R = \mathbf{E} \{r(t)r^T(t)\}.$
- (A, B, C, D) - Parâmetros dos sistema.

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VI

- **Saídas do algoritmo:**

- $\hat{x}(t)$ - Previsão do estado $x(t)$ no instante $t - 1$.
- $\hat{x}(t|t)$ - Estimativa do estado $x(t)$ no instante t .
- $\hat{y}(t)$ - Previsão da saída $y(t)$ no instante $t - 1$.
- $\hat{y}(t|t)$ - Estimativa da saída $y(t)$ no instante t .
- $K(t)$ - Ganho do previsor de Kalman.
- $K_f(t)$ - Ganho do filtro de Kalman.
- $\tilde{P}(t)$ - Covariância do erro do previsor de Kalman.
- $\tilde{P}(t|t)$ - Covariância do erro do filtro de Kalman.
- Na dedução do previsor e filtro de Kalman não foi feita nenhuma restrição relativa à estabilidade do sistema

5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VII

Exemplo 8

Novamente o sistema do exemplo 1 perturbado com os mesmos ruídos de processo e de observação:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

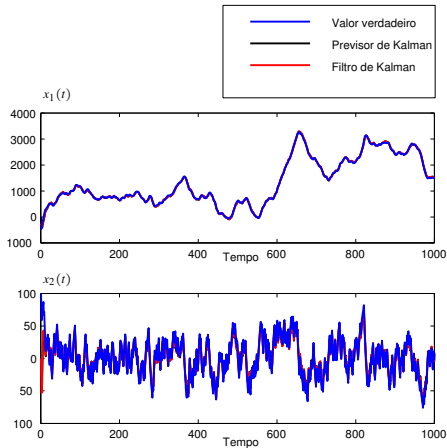
$$x_2(t+1) = 0.9x_2(t) + 10u(t) + q_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + r(t)$$

$$q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \mathbf{E} \{q(t)q^T(t)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \{q_1^2\} \end{bmatrix} =$$
$$R = \mathbf{E} \{r^2(t)\} = \sigma_r^2 = 2500 \Rightarrow \sigma_r = 50$$

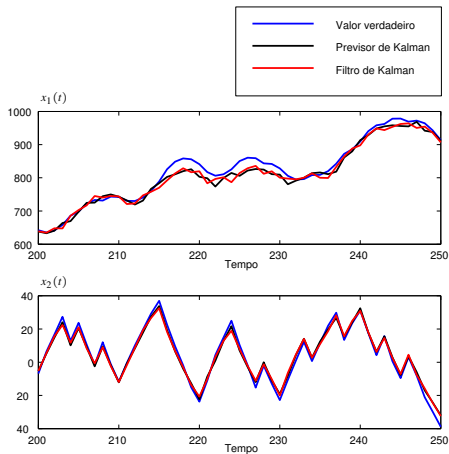
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos VIII

Comparação entre o Filtro e o Previsor de Kalman



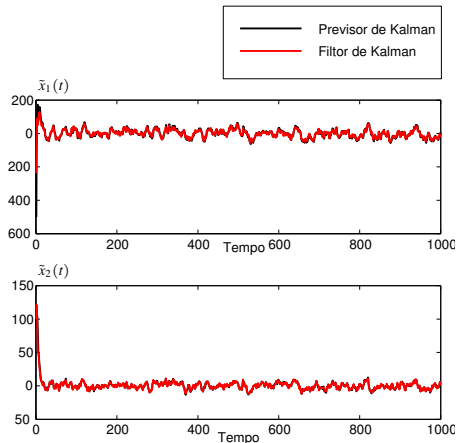
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos IX

Comparação entre o Filtro e o Previsor de Kalman



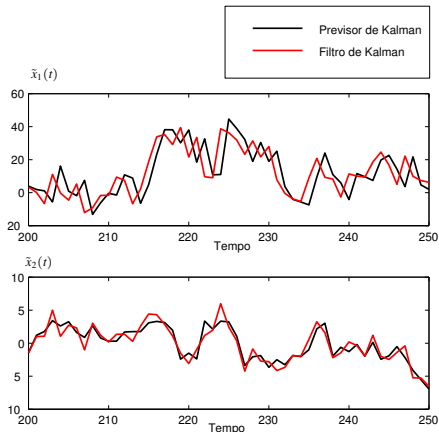
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos X

Comparação entre o Filtro e o Previsor de Kalman



5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XI

Comparação entre o Filtro e o Previsor de Kalman



5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XII

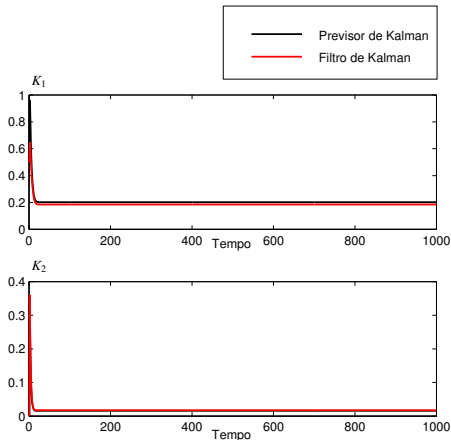
Valores eficazes dos error das estimativas

$$\tilde{x}_{i_{rms}} = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \tilde{x}_i^2(t)}, \quad i = 1, 2.$$

	F. Kalman	P. Kalman	Obs. 1	Ob. 2	Obs. 3	Obs. 4
$\tilde{x}_{1_{rms}}$	25.05	32.40	36.36	42.53	62.99	110.55
$\tilde{x}_{2_{rms}}$	8.46	8.59	9.08	10.36	19.89	61.45

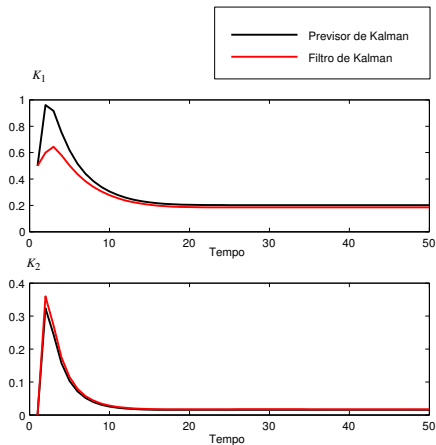
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XIII

O Ganhos do Previsor e do Filtro de Kalman



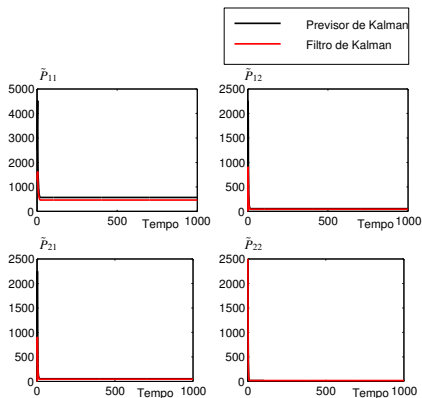
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XIV

O Ganhos do Previsor e do Filtro de Kalman



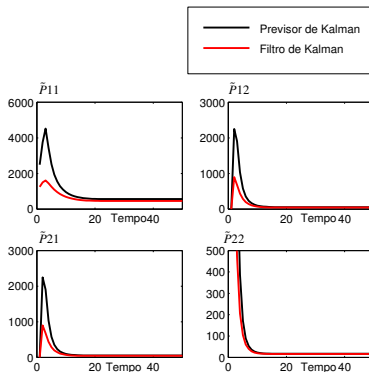
5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XV

Matrizes Covariância do erro do Previsor e do Filtro de Kalman $\tilde{P}(t)$ e $\tilde{P}(t|t)$



5 - Estimação de estado em processos estocásticos e determinístico-estocásticos XVI

Matrizes Covariância do erro do Previsor e do Filtro de Kalman $\tilde{P}(t)$ e $\tilde{P}(t|t)$



10 - Conclusões I

- Observadores são modelos de sistema que, a partir dos sinais de entrada e saída, fornecem estimativas do estado.
- Os Observadores que simplesmente repetem o modelo do sistema, sem realimentação do erro da saída, têm uma dinâmica de anulação do erro idêntica à do sistema que estão a observar, não conseguindo, por isso, estimar o estado de sistemas instáveis.
- Ao realimentação erro da saída nos observadores de Luemberger permite alterar a dinâmica de anulação do erro.
- Se o sistema for observável existe liberdade total na alocação dos valores próprios do observador.

10 - Conclusões II

- Estes observadores permitem estimar o estado de sistemas instáveis desde que os modos instáveis sejam observáveis.
- O desempenho dos observadores é afectado pelas perturbações do sistema.
- Em geral, os observadores muito rápidos apresentam uma fraca rejeição às perturbações.
- As perturbações podem ser ruído de processo ou ruído de medição: O ruído de processo é um sinal que perturba o estado (*entra* na equação de estado) e o de medição perturba unicamente o sinal de saída (*entra* na equação de saída).

10 - Conclusões III

- Desde que se conheçam as características das perturbações o projecto de observadores pode ser encarado como um problema de optimização.
- Os processos estocásticos são modelos realistas de muitas perturbações.
- O Filtro e o Previsor de Kalman são observadores de estado que minimizam a covariância do erro da estimativa do estado quando os ruídos de processo e de medição são ruído branco de média nula.
- O Previsor de Kalman faz estimativas (previsões) do estado $x(t)$, $t = 1, 2, \dots$ nos instantes $t - 1$.
- O Filtro de Kalman faz estimativas do estado $x(t)$ no próprio instante t .

10 - Conclusões IV

- Como seria de esperar o erro das estimativas do Filtro de Kalman é inferior ao das previsões.