

Interpretação de enunciados de tarefas matemáticas: Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade

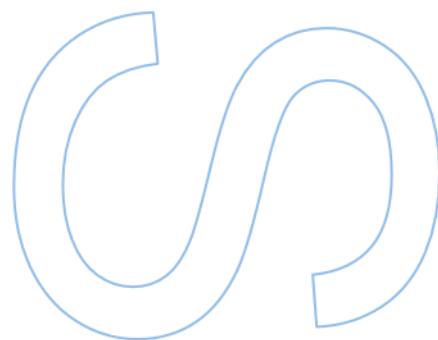
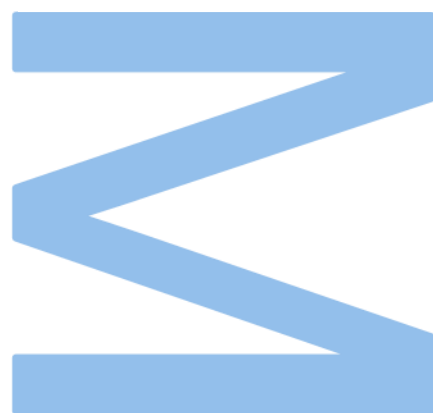
Ricardo José Carlos da Costa

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2024



Interpretação de enunciados de tarefas matemáticas: Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade

Ricardo José Carlos da Costa

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2024

Orientadora

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

“Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar.” – Esopo (séc. VII a.C. – séc.VI a.C.)

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha orientadora, a Professora Maria de Fátima Delgado, pela sua colaboração no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, por todas as sugestões e correções sempre comunicadas construtivamente e no sentido de aprimorarem o rigor e qualidade deste texto, pela compreensão de todas as minhas dúvidas e pelo constante incentivo e apoio.

Agradeço à diretora do Mestrado, a Professora Rosa Antónia Ferreira, pela sua parcialidade em meu favor e dos meus colegas de Mestrado, procurando sempre assegurar-nos o contacto com as teorias mais inovadoras e a vivência de experiências enriquecedoras para potenciar o nosso crescimento profissional.

Agradeço à minha orientadora-cooperante pela sua disponibilidade para me orientar e ao meu colega de estágio, pela sua paciência nos momentos em que procurou fazer-nos notar os nossos hábitos mais desacertados e por todos os seus ensinamentos, transmitidos tanto como conselhos como através do seu exemplo paradigmático.

Agradeço à escola que me acolheu e ao meu colega de estágio neste ano letivo e, especialmente, ao seu corpo docente, que nos recebeu com estima e companheirismo, fazendo-nos sentir efetivamente parte do mesmo.

Agradeço aos alunos que participaram neste projeto e a todos os restantes com os quais trabalhei pela sua prontidão em colaborar comigo e pela sua amizade.

Agradeço ao Francisco, o meu colega de estágio e camarada de todas as horas, por ter sido o meu apoiante e confidente mais íntimo ao longo do Mestrado, partilhando comigo todos os momentos mais triunfantes e confortando-me nos mais difíceis.

Agradeço aos meus restantes colegas de Mestrado e aos meus amigos de outros contextos por também acompanharem e animarem o meu progresso.

Agradeço à minha família pela sua perene e incondicional presença, mantendo-se sempre como o alicerce sobre o qual construo o meu ser.

Agradeço, por fim, a todos os Professores que contactei desde o Ensino Básico ao Superior por me terem feito entender que caminho me estava destinado.

Resumo

O estudo descrito neste trabalho tem como objetivo identificar dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas matemáticas, assim como as respetivas causas. No sentido de concretizar esse fim, definiram-se as seguintes questões de investigação: 1) Quais são as dificuldades de interpretação de enunciados? 2) Quais são as causas que estão associadas a essas dificuldades?

Durante a intervenção pedagógica, implementaram-se quatro tarefas de características diversas, tendo duas sido realizadas em situação de aula com uma turma do 7.º ano de escolaridade e as restantes em entrevistas com três alunos dessa mesma turma, selecionados pela heterogeneidade dos seus níveis de desempenho e pelas suas capacidades de interpretação, raciocínio matemático e comunicação. Dada a natureza do objetivo e do âmbito do estudo, adotou-se uma metodologia de investigação de cariz qualitativo. Recorreu-se a notas de campo das observações concretizadas ao longo da intervenção pedagógica, a produções escritas dos alunos e a gravações áudio e seguintes transcrições das entrevistas como instrumentos de recolha de dados.

A análise dos dados agregados revelou que os alunos participantes manifestaram dificuldades em várias dimensões da interpretação das tarefas propostas, tendo sido mais recorrentes as da recolha e organização de dados e da compreensão textual e linguística. Leituras rápidas e pouco detalhadas dos enunciados, desatenção e ímpetos de procurar de imediato as soluções das questões foram notadas como as causas mais comuns dessas dificuldades, evidenciando-se a falta de hábitos de leitura desejáveis. A construção frásica e a estrutura do enunciado também foram causas frequentes das mesmas.

Palavras-chave: Tarefas matemáticas, Dificuldades, Interpretação de tarefas, Representações matemáticas, Contexto de tarefas, Ensino Básico.

Abstract

The study described in this paper aims to identify difficulties in interpreting the question papers of mathematical tasks, as well as their causes. In order to achieve this, the following research questions were defined: 1) Which are the difficulties in interpreting question papers? 2) Which are the causes associated with those difficulties?

During the pedagogical intervention, four tasks with different characteristics were implemented, two of which were carried out in a classroom situation with a 7.th grade class and the others in interviews with three students from the same class, selected for the heterogeneity of their performance levels and their interpretation, mathematical reasoning and communication skills. Given the nature of the aim and field of the study, a qualitative research methodology was adopted. Field notes from the observations made during the pedagogical intervention, written productions by the students and audio recordings and subsequent transcriptions of the interviews were used as data collection tools.

The analysis of the aggregate data revealed that the participating students had difficulties in various areas of interpreting the proposed tasks, with the most recurrent ones being data collection and organisation and textual and linguistic comprehension. Reading the question papers quickly and with little detail, inattentiveness and the urge to immediately seek solutions to the questions were noted as the most common causes of these difficulties, highlighting the lack of desirable reading habits. The sentence construction and structure of the question papers were also frequent causes.

Keywords: Mathematical tasks, Difficulties, Task interpretation, Mathematical representations, Task context, Basic education.

Índice

Lista de Figuras	vi
Lista de Abreviaturas	viii
1. Introdução.....	1
1.1. Objetivos do estudo e questões de investigação	1
1.2. Relevância do estudo e motivações para o seu desenvolvimento	1
1.3. Estrutura do documento	2
2. Enquadramento Teórico	4
2.1. Tarefas matemáticas	4
2.2. Tipologia de problemas e modelos de resolução de problemas	8
2.3. Representações matemáticas: tipologia e contributos para a resolução de tarefas 15	
2.4. Interpretação de enunciados de tarefas matemáticas.....	19
2.5. Considerações sobre a literatura revista.....	23
3. Intervenção Pedagógica	25
3.1. Caraterização do contexto escolar	25
3.2. Descrição dos momentos da intervenção pedagógica.....	26
3.2.1. Tarefa 1 – Referencial cartesiano	28
3.2.2. Tarefa 2 – Relações entre perímetros e áreas de figuras semelhantes	31
3.2.3. Tarefa 3 – Expressões algébricas e equações	34
3.2.4. Tarefa 4 – Função de proporcionalidade direta / Semelhança de figuras	36
3.3. Breve reflexão sobre a intervenção	39
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	41
4.1. Opções metodológicas	41
4.2. Processo de recolha de dados	43
4.2.1. Observação participante	43
4.2.2. Entrevistas com tarefa	45

4.2.3.	Recolha de produções escritas dos alunos.....	47
4.3.	Participantes e questões éticas	47
4.4.	Processo de análise de dados.....	49
5.	Apresentação e discussão de resultados.....	51
5.1.	Tarefa 1.....	51
5.2.	Tarefa 2.....	56
5.3.	Tarefa 3.....	61
5.4.	Tarefa 4.....	71
6.	Conclusões e recomendações.....	76
6.1.	Breve síntese do estudo.....	76
6.2.	Conclusões do estudo	76
6.3.	Considerações finais	79
	Referências Bibliográficas	83
	Anexos	86
	Anexo 1 – Consentimento informado	86
	Anexo 2 – Tarefa 1 – Referencial cartesiano	88
	Anexo 3 – Tarefa 2 – Relações entre perímetros e áreas de figuras semelhantes.....	90
	Anexo 4 – Tarefa 3 – Expressões algébricas e equações.....	91
	Anexo 5 – Tarefa 4 – Função de proporcionalidade direta / Semelhança de figuras...	92
	Anexo 6 – Guião de observação	93

Lista de Figuras

Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)	5
Figura 2 – Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p. 20)	6
Figura 3 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005 p. 21)	7
Figura 4 – Relações entre os diferentes tipos de problemas (Vale & Pimentel, 2004, p. 21)	10
Figura 5 – A fase de análise do processo (Schoenfeld, 1985, p. 111).....	14
Figura 6 – Modos de representação (Boavida et al., 2008, p. 72)	17
Figura 7 – Dificuldades manifestadas na interpretação de tarefas e suas causas (adaptado de Kingwell, 2022)	22
Figura 8 – Tarefa 1	29
Figura 9 – Tarefa 2	31
Figura 10 – Tarefa 3	34
Figura 11 – Tarefa 4	36
Figura 12 – Caracterização das tarefas propostas.....	39
Figura 13 – Métodos de recolha de dados	47
Figura 14 – Questões 1 e 2 da Tarefa 1	52
Figura 15 – Traçados de dois alunos na grelha da Tarefa 1	53
Figura 16 – Questão 3 da Tarefa 1	55
Figura 17 – Questão 4 da Tarefa 1	55
Figura 18 – Questões 1.a. e 1.b. da Tarefa 2.....	57
Figura 19 – Resolução das questões 1.a e 1.b. do quarto grupo referenciado.....	58
Figura 20 – Resolução da questão 1.b. da aluna Vega.....	59
Figura 21 – Questão 1.c. da Tarefa 2	60
Figura 22 – Primeira questão da Tarefa 3.....	61
Figura 23 – Dados registados e anotações escritas no enunciado da Tarefa 3 pelo aluno Arcturus	62
Figura 24 – Última questão da Tarefa 3.....	66
Figura 25 – Primeiras expressões formuladas, da esquerda para a direita, por Arcturus e Sirius	67
Figura 26 – Segunda equação formulada por Sirius	68
Figura 27 – Segunda equação formulada por Arcturus.....	68
Figura 28 – Segunda equação formulada por Vega.....	68

Figura 29 – Resoluções das equações, da esquerda para a direita, por Arcturus, Vega e Sirius	69
Figura 30 – Primeira questão da Tarefa 4.....	72
Figura 31 – Dados registados pela aluna Vega.....	72
Figura 32 – Primeira resposta da aluna Vega à primeira subálnea	73
Figura 33 – Segunda e primeira respostas da aluna Vega à primeira (esquerda) e segunda (direita) subálneas, respetivamente.....	73
Figura 34 – Respostas finais da aluna Vega à primeira (esquerda) e segunda (direita) subálneas	74

Lista de Abreviaturas

DGES	DIREÇÃO GERAL DO ENSINO SUPERIOR
FCT	FUNDAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A TECNOLOGIA
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
UP	UNIVERSIDADE DO PORTO
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

1. Introdução

1.1. Objetivos do estudo e questões de investigação

No presente documento, desenvolve-se um estudo enquadrado no âmbito de investigação em Didática da Matemática, cujo objetivo é o de identificar dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas matemáticas, assim como as respetivas causas. No sentido de se concretizar esse propósito, definiram-se as subseqüentes questões de investigação:

- Quais são as dificuldades de interpretação de enunciados?
- Quais são as causas que estão associadas a essas dificuldades?

1.2. Relevância do estudo e motivações para o seu desenvolvimento

Segundo as orientações curriculares atuais para a Matemática (Canavarro et al., 2021) e o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), a resolução de tarefas toma um lugar central na aprendizagem matemática. De facto, a partir desse exercício, os alunos adquirem novas “formas de pensamento, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança em situações não-familiares que lhes servirão além da sala de aula de Matemática” (NCTM, 2000, p. 52). Não obstante, de acordo com vários autores (Polya, 1995; Schoenfeld, 1985; Lester, 1980, citado por Baptista, 2018; Boavida et al., 2008), a leitura e interpretação do enunciado das tarefas ocupa uma posição primordial na sua resolução, influenciando, portanto, todo esse processo. Como tal, é apreciável a importância da interpretação na resolução de tarefas e, conseqüentemente, na aprendizagem matemática. O *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* reforça essa noção, expandindo-a para o desenvolvimento transversal extra-matemático dos alunos. Efetivamente, entre as áreas de competência discriminadas por esse documento, contam-se as de *Linguagens e textos* e *Raciocínio e resolução de problemas*, as quais implicam, em especial, que os alunos sejam capazes de “dominar capacidades nucleares de compreensão e de expressão nas modalidades oral, escrita, visual e multimodal” (Martins et al., 2017, p. 21) e “interpretar informação” (Martins et al., 2017, p. 23), respetivamente. Assim sendo, é salientada a relevância da investigação sobre esta temática, sobre a qual assenta o estudo que descrevo neste texto.

Esse caráter fundamental e transversal da interpretação de enunciados foi um dos motivos que me inspiraram o desejo de aprofundar os meus conhecimentos e enriquecer a minha experiência enquanto docente sobre esse tema. Primeiramente, sendo uma componente crucial da resolução de tarefas, acredito que a investigação sobre o assunto é sempre do interesse da comunidade científica e docente. Em segundo lugar, pela mesma razão, compreendi que o contacto com lapsos nos raciocínios de alunos devido a falhas na interpretação do enunciado seria inevitável no meu percurso como professor. Com efeito, durante o meu estágio, no qual se inseriu este estudo, testemunhei em várias instâncias que os alunos com quem trabalhei se debatiam frequentemente com obstáculos provenientes de leituras desatentas e insuficientes dos enunciados que muitas vezes se traduziam em desconsiderações de dados ou condições relevantes para a resolução das tarefas propostas. Desse modo, as minhas vivências ao longo do estágio contribuíram igualmente para o despertar da minha curiosidade sobre o tópico, incentivando-me a melhorar a minha perceção e atuação sobre essas dificuldades no sentido de me constituir como um profissional mais completo e capaz de apoiar os seus alunos na superação dessas suas limitações.

1.3. Estrutura do documento

Este texto foi estruturado em 6 capítulos principais, ordenados da seguinte forma: *Introdução*, *Enquadramento Teórico*, *Intervenção Pedagógica*, *Métodos e procedimentos de recolha de dados*, *Apresentação e discussão de resultados* e *Conclusões e recomendações*.

Conforme apresentado, no capítulo *Introdução*, assinalam-se o objetivo do estudo e as respetivas questões de investigação, além de se firmar a relevância da temática de investigação e o que me motivou a concretizar o estudo. Também se assinala a estrutura do presente relatório.

No segundo capítulo, elabora-se um *Enquadramento Teórico* do estudo, o qual se baseia numa revisão de literatura referente a diversos tópicos relacionados com o tema do mesmo, ampliando o entendimento dessas matérias e servindo como fundamento dos procedimentos metodológicos adotados.

O capítulo *Intervenção Pedagógica* contextualiza este estudo, caracterizando-se a escola e a turma com as quais o trabalho foi desenvolvido. Também se indica a ancoragem

curricular e a organização temporal da intervenção, além de se retratarem as tarefas propostas no seu âmbito.

No capítulo *Métodos e procedimentos de recolha de dados*, descreve-se a metodologia de investigação, apontando-se os participantes do estudo e enumerando-se os instrumentos e procedimentos de recolha de dados utilizados. Refere-se, ainda, o processo de análise de dados.

O capítulo *Apresentação e discussão de resultados* compõe uma análise dos dados recolhidos, a partir da qual se efetuam inferências que alicerçam as asseverações da secção ulterior.

No capítulo final, agregam-se as *Conclusões e recomendações* do estudo, as quais foram tecidas no sentido de responder às questões de investigação e, assim, cumprir o propósito do estudo.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo, edificam-se os alicerces teóricos que possibilitam um entendimento mais amplo da problemática da investigação. Reafirmando-se o objetivo do estudo de identificar dificuldades na interpretação de enunciados de tarefas matemáticas e as causas respetivas, salienta-se a necessidade de se diferenciar os diversos fatores que influenciam o desempenho dos alunos aquando da resolução de tarefas matemáticas – especificamente, os diferentes tipos de tarefas e, em particular, de problemas, o seu contexto e duração e as diferentes classes das representações matemáticas –, de se entender esse mesmo processo de resolução de tarefas e de se avaliar como se concretiza a compreensão de enunciados e as dificuldades de interpretação já apontadas noutros projetos de investigação.

Nesse sentido, abordar-se-ão os subseqüentes tópicos teóricos:

- Tarefas matemáticas;
- Tipologia de problemas e modelos de resolução de problemas;
- Representações matemáticas: tipologia e contributos para a resolução de tarefas;
- Interpretação de enunciados de tarefas matemáticas.

2.1. Tarefas matemáticas

As tarefas representam o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática dos alunos, pois a sua aprendizagem advém da realização das tarefas propostas pelo professor e da reflexão que efetuam sobre as mesmas (Ponte, 2005). Esta visão está também presente nas *Aprendizagens Essenciais* de Matemática do 7.º ano de escolaridade, quando apontam que a “experiência matemática dos alunos [se] desenrola a partir de tarefas, sendo essencial que estas sejam poderosas e desafiantes, com vista a cativar os alunos e impulsionar as suas aprendizagens” (Canavarro et al., 2021, p. 6).

Ponte (2005) salienta a variabilidade da gestão de uma atividade baseada na resolução e reflexão de uma tarefa, nomeadamente no que toca à sua génese, referindo que a tarefa “pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno” (p. 11), e à sua apresentação aos alunos, podendo “ser enunciada explicitamente logo no início do

trabalho ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que este vai decorrendo” (p. 11).

Tendo presente que a atividade dos alunos depende do tipo de tarefa proposta, vários académicos (Ponte, 2005; Costa & Fonseca, 2009), assim como as atuais orientações curriculares para a disciplina de Matemática (Canavarro et al., 2021) têm defendido a importância da diversificação de tarefas, uma vez que estas permitem desenvolver diferentes aprendizagens.

Neste âmbito, Ponte (2005) discrimina quatro dimensões que caracterizam uma tarefa matemática: o grau de desafio, o grau de estrutura, a duração e o contexto. O grau de desafio relaciona-se com o grau de dificuldade da tarefa, sendo que varia entre os polos de desafio reduzido e elevado. O grau de estrutura varia entre os polos aberto e fechado; numa tarefa fechada é “claramente dito o que é dado e o que é pedido”, enquanto uma tarefa aberta “comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, pp. 17–18).

Cruzando estas duas dimensões, Ponte (2005) traça quatro quadrantes, tal como se apresenta na Figura 1.

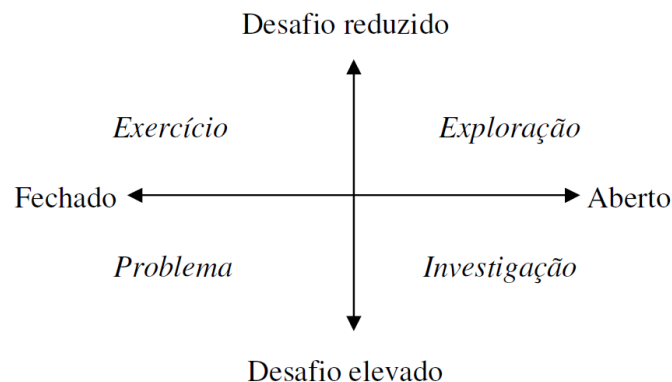


Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 18)

Cada quadrante delimita um tipo específico de tarefa matemática; particularmente:

- O 1.º quadrante localiza a tarefa de *exploração*, a qual se destaca por um nível de desafio reduzido e um grau aberto de estrutura;
- O 2.º quadrante situa o *exercício*, uma classe de tarefa que se distingue por um nível de desafio reduzido e um grau fechado de estrutura;
- O 3.º quadrante incorpora o *problema*, um tipo de tarefa diferenciado por um nível de desafio elevado e um grau fechado de estrutura;

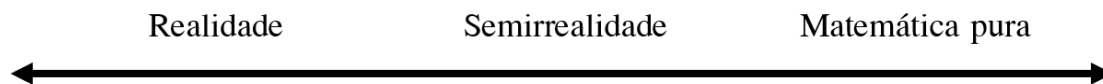


Figura 3 – Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005 p. 21)

Perspetivando-se a diversidade da tipologia de tarefas apresentada, denota-se a necessidade de se enquadrar as diferentes classes de tarefa em dinâmicas de trabalho apropriadas às mesmas, concretizando-se, assim, a afirmação supracitada das atuais orientações curriculares para a disciplina de Matemática (Canavarro et al., 2021) relativa ao dever do professor de diversificar tarefas mediante os objetivos a materializar. Com efeito, Ponte (2005) atribui diferentes propósitos a tarefas demarcadas, particularmente, por cada um dos quatro domínios que diferencia (o grau de desafio, o grau de estrutura, a duração e o contexto).

Exemplificando, Ponte (2005) considera que as tarefas mais acessíveis – os exercícios e as explorações – estimulam a autoconfiança dos alunos, pois viabilizam uma elevada taxa de sucesso na sua resolução. Não obstante, o autor mantém que as mais desafiantes – os problemas e as investigações – são igualmente indispensáveis para o desenvolvimento dos alunos, possibilitando, nomeadamente, que usufruam de uma experiência matemática mais efetiva.

Ainda segundo o mesmo autor, a realização de tarefas enquadradas em contextos matemáticos também permite que os alunos contactem com atividades matemáticas mais autênticas e, como tal, próximas da realidade dos matemáticos profissionais. Sem embargo, as tarefas formuladas em contextos de realidade – por exemplo, as de aplicação e de modelação – são fundamentais “para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos” (Ponte, 2005, p. 28).

Conforme apresentado nos exemplos dispostos nos dois últimos parágrafos, as características de uma tarefa dependem de vários fatores intrínsecos às mesmas. No entanto, os atributos de uma tarefa também se devem sustentar em condições extrínsecas às mesmas, como, em particular, os conhecimentos do aluno.

Assim, entende-se que as características de uma tarefa não são absolutas, mas relativas à pessoa que a realiza. Tal facto salienta a necessidade de o professor conhecer as especificidades dos alunos das suas turmas, para que desta forma proceda a uma seleção de tarefas não só diversificada, mas também adequada, quer às características dos seus alunos, quer aos objetivos de aprendizagem que pretende que desenvolvam.

2.2. Tipologia de problemas e modelos de resolução de problemas

A resolução de tarefas – especificamente, de problemas – tem detido considerável atenção nas recomendações para a disciplina de Matemática. Com efeito, NCTM (2000) assevera que “a resolução de problemas é uma parte integral de toda a aprendizagem matemática, e então não deve ser uma parte isolada do programa de matemática” (p. 52). As orientações curriculares nacionais atuais para a Matemática suportam esta posição apontando o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas como um dos objetivos fulcrais da aprendizagem dos alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico:

Desenvolver a capacidade de resolver problemas recorrendo aos seus conhecimentos matemáticos, de diversos tipos e em diversos contextos, confiando na sua capacidade de desenvolver estratégias apropriadas e obter soluções válidas. A resolução de problemas é uma atividade central da Matemática, na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes. (Canavarro et al., 2021, p. 3)

Assim sendo, revela-se indispensável aprimorar o entendimento das idiosincrasias dessa atividade matemática. Nesse sentido, exploram-se, nesta subsecção, algumas das tipologias de classificação de problemas e modelos de resolução de problemas construídos por certos autores.

Segundo a caracterização supramencionada de Ponte (2005), um problema pode ser descrito como uma tarefa de grau de desafio elevado e fechado de estrutura. Outros autores, porém, adotam definições mais profundas que frequentemente ecoam a de Polya (1981), que declara que resolver um problema significa “buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível” (p. 117). Similarmente, NCTM (2000) afirma que a “resolução de problemas significa empreender numa tarefa para a qual o método de solucionamento não é conhecido previamente” (p. 52).

Não obstante, vários autores, inclusive o próprio Polya, aprofundam ainda mais o retrato do problema matemático ao elaborarem tipologias de problemas. Neste texto, apresentam-se as tipologias de problemas avançadas por Polya (1995), Charles e Lester (1986, citado por Vale & Pimentel, 2004), pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas (Vale, 2002, citado por Vale & Pimentel, 2004) e Boavida et al. (2008).

Polya (1995) identifica cinco subclasses distintas de problemas – os problemas auxiliares, os rotineiros, os de determinação, os de demonstração e os práticos – descrevendo-os do seguinte modo:

- *Problema auxiliar*: “é aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro” (p. 119), ou seja, é um problema que se insere no contexto de um outro problema dado como original e cujo solucionamento serve como intermédio para a resolução desse;
- *Problema rotineiro*: é aquele que pode “ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido” (p. 124);
- *Problema de determinação*: é aquele que tem como objetivo “encontrar um certo objeto, a incógnita do problema” (p. 124);
- *Problema de demonstração*: é aquele que detém como fim “mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa” (p. 124);
- *Problema prático*: é aquele para o qual não “é necessário qualquer conhecimento especial para compreendê-lo” (p. 126) ou, talvez mais precisamente, em que incógnitas, dados, condicionantes, conhecimentos preliminares necessários, tudo é mais complexo e menos nítido ... do que nos [problemas] puramente matemáticos” (p. 128); o autor admite a construção de uma barragem e o desenho de mapas geográficos como exemplos deste tipo de problemas.

Charles e Lester, conforme apresentado por Vale e Pimentel (2004), também propõem uma tipologia que classifica cinco classes de problemas: os de um passo, os de dois ou mais passos, os de processo, os de aplicação e os tipo puzzle.

- *Problemas de um passo*: “são os que podem ser resolvidos através da aplicação direta de uma das quatro operações básicas da aritmética” (p. 18);
- *Problemas de dois ou mais passos*: “são os que podem ser resolvidos através da aplicação direta de duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética, respetivamente” (p. 18);
- *Problemas de processo*: “são os que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução ... [e] que não utilizam processos mecanizados ou standardizados” (p. 18);
- *Problemas de aplicação*: “são os que normalmente requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões” (p. 18);
- *Problemas tipo puzzle*: “são problemas que necessitam como que um “flash” para chegar à solução” (p. 19), implicando frequentemente que se analise os mesmos segundo pontos de vista não convencionais.

Vale e Pimentel (2004) também descrevem a tipologia composta pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, na qual se abarcam quatro diferentes ordens de problemas: os de processo, os de conteúdo, os de aplicação, e os de aparato experimental.

- *Problemas de processo*: “um problema deste tipo não se resolve, geralmente, pela aplicação direta de um algoritmo, isto é, dificilmente se resolverá sem a utilização de estratégias de resolução de problemas” (p. 19);
- *Problemas de conteúdo*: “um problema deste tipo requer a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas” (p. 19);
- *Problemas de aplicação*: “um problema deste tipo utiliza dados da vida real, apresentados ao solucionador ou por ele recolhidos” (p. 20);
- *Problemas de aparato experimental*: “um problema deste tipo requer a utilização de um aparato experimental, sobre o qual o solucionador deve exercer as suas ações ... [suscitando] a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais” (p. 20).

Nesta tipologia, é salientado que “um mesmo problema pode inserir-se em mais do que um dos tipos apresentados” (p. 21). Essas relações entre as quatro ordens de problemas são ilustradas na Figura 4.

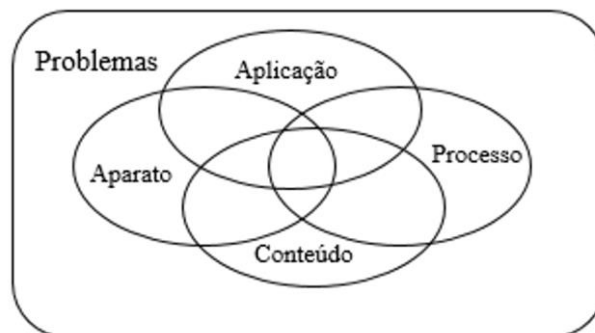


Figura 4 – Relações entre os diferentes tipos de problemas (Vale & Pimentel, 2004, p. 21)

Por fim, Boavida et al. (2008) adotam uma tipologia simplificada e, como tal, mais adequada à realidade do 1.º ciclo do Ensino Básico. Os problemas de cálculo, os de processo e os abertos, determinados pelas definições dispostas de seguida, constituem as três classes desse quadro classificatório.

- *Problemas de cálculo*: estes problemas “requerem decisões quanto à operação ou operações a aplicar aos dados apresentados” (p. 17), devendo essa escolha ser apropriada aos mesmos;

- *Problemas de processo*: contrariamente aos anteriores, estes problemas “não podem ser resolvidos apenas por seleção da(s) operação(ões) apropriada(s) ... [estando,] geralmente, embutidos em contextos mais complexos” (p. 19) que exigem um maior esforço por parte do aluno para compreender os conceitos envolvidos e o uso de estratégias de resolução mais criativas;
- *Problemas abertos*: também designados por *investigações*, estes problemas “podem ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correta” (p. 20), podendo envolver a exploração no sentido de se desvendarem regularidades e a formulação de conjecturas.

Tendo-se examinado as diferentes tipologias de classificação de problemas no sentido de se interiorizar a multiplicidade dessa classe de tarefas, inspecionam-se, agora, alguns modelos de resolução de problemas para se aprofundar como esse processo se desenvolve, dando-se especial foco às etapas que envolvem a interpretação do enunciado. Especificamente, analisar-se-ão os modelos de Polya (1995), Schoenfeld (1985), Lester (1980, citado por Baptista, 2018) e Boavida et al. (2008).

Polya (1995) construiu um modelo de resolução de problemas composto por quatro fases:

1. *Compreensão do problema*: esta fase materializa-se pela necessidade do aluno de compreender o problema, devendo “estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante” (p. 4);
2. *Estabelecimento de um plano*: nesta etapa, o aluno procura definir uma estratégia de resolução, devendo conhecer, “pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita” (p. 6);
3. *Execução do plano*: sucedendo no estágio anterior, o aluno prossegue com a efetivação do plano concebido, devendo certificar-se “da correção de cada passo” (p. 9);
4. *Retrospecto*: neste momento, o aluno reconsidera e reexamina “o resultado final e o caminho que levou até este” (p. 10), propiciando, dessa forma, a consolidação dos seus conhecimentos e o aperfeiçoamento da sua capacidade de resolver problemas.

A interpretação de enunciados insere-se na 1.ª fase deste modelo. Com efeito, Polya (1995) afirma que, em primeiro lugar, é necessário entender devidamente o enunciado verbal do problema. Posteriormente, o aluno poderá complementar essa leitura

considerando os constituintes principais do mesmo sob múltiplas perspetivas; exemplificando, “se houver uma figura relacionada ao problema, [o aluno] deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados” (Polya, 1995, p. 4).

Polya (1995) procede ainda a uma divisão da etapa de compreensão do problema nas subfases de familiarização e aperfeiçoamento da compreensão. Para cada uma delas, o autor responde às questões “Por onde começar?”, “Que posso fazer?” e “Qual a vantagem em assim proceder?”, tal como se dispõe de seguida:

1. Familiarização

- *Por onde começar?* Comece pelo enunciado do problema.
- *Que posso fazer?* Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível.
- *Qual a vantagem em assim proceder?* É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes.

2. Aperfeiçoamento da compreensão

- *Por onde começar?* Comece de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo.
- *Que posso fazer?*... Verifique as partes principais do seu problema, considere-as uma a uma, em seguida examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes e cada um destes com a totalidade do problema.
- *Qual a vantagem em assim proceder?* Deve-se preparar e clarificar os detalhes que mais tarde terão uma função a desempenhar. (p. 25)

O modelo de Polya é um dos mais influentes, tendo servido como fundamento para outros autores na conceção dos seus próprios modelos; como tal, é possível notar-se a existência de algumas semelhanças entre os mesmos.

O modelo de Schoenfeld (1985) compõe cinco fases, dispostas abaixo.

1. *Análise*: neste estágio inicial, procura-se entender os seguintes elementos do problema:

o que é dado, o que é pedido (os objetivos), porque é que os “dados” estão lá e se os objetivos aparentam ser plausíveis, que princípios ou mecanismos principais aparentam ser relevantes ou apropriados para se mobilizarem, que contexto matemático o problema se enquadra, e por aí adiante. (p. 108)

2. *Desenho*: neste momento, que “impregna todo o processo de solucionamento”, começa-se por se “traçar uma solução do problema num nível rudimentar e qualitativo e depois elabora-se a mesma em detalhe conforme o processo de solucionamento procede” (p. 108);

3. *Exploração*: nesta fase, tenta-se superar dificuldades sentidas durante o desenho, sendo que se se fizer “progresso substancial nalgum momento deste processo, ... [pode-se] retornar ao desenho para se planejar o balanço da solução, ou ... [pode-se] decidir reentrar a análise” (p. 110);
4. *Implementação*: este estágio consiste na execução passo a passo do plano projetado;
5. *Verificação*: esta etapa final abrange a reapreciação do procedimento resolutivo, tanto a um nível local, no qual se identificam erros específicos, como global, através do qual se pode “encontrar soluções alternativas, descobrir conexões com outra matéria subjacente, e, em ocasião, tornar conscientemente ciente de aspetos úteis da solução do problema que ... [se podem] usar noutros locais e que ... podem ajudar a tornar um melhor solucionador de problemas” (p. 111).

A análise, correspondente à compreensão do problema do modelo de Polya, é a que engloba a interpretação de enunciados. Schoenfeld (1985) compõe um conjunto de heurísticas que suportam essa fase, as quais se organizam na Figura 5.

Preliminares: Transcreve o problema taquigraficamente, desenhando um diagrama ou fazendo um esboço grosseiro se puderes. Se alguém retirasse o enunciado original do problema, terias o suficiente para trabalhar? Identificaste realmente toda a informação essencial no enunciado do problema?

1. Certifica-te que *compreendes o enunciado* do problema!
 - a. *Examina as condições* do problema – o que te é dado e o que queres alcançar.
 - b. *Observa alguns exemplos*, para teres uma “sensação” do que o problema realmente te pede.
 - c. *Procura por consistência*. Tens informação suficiente? O resultado aparenta ser plausível? Razoável? Tens demasiada informação?
2. *Tenta simplificar o problema!* Procura maneiras de tornar o problema mais fácil, antes de te imergires nos detalhes. Dependendo do problema, podes recorrer a:
 - a. *simetria*,
 - b. dimensionamento (isto pode reduzir o número de variáveis que podes ter de considerar),
 - c. argumentos “*sem perda de generalidade*”, onde o todo do problema é reduzido a um caso especial.

3. *Reformula o problema no modo mais conveniente possível.* Agora que tens uma compreensão sólida do que o problema te pede, queres expressar o problema numa forma matemática concisa e conveniente que possa ser manipulada confortavelmente.
 - a. *Escolhe a perspetiva* que usarás. Solicitado a provar que duas retas têm o mesmo comprimento, podes optar por usar a Geometria Euclidiana (mostrando que são partes de triângulos congruentes), Trigonometria (expressando-as em termos de quantidades conhecidas como lados e ângulos), ou talvez a fórmula de distância.
 - b. *Escolhe o teu foco.* Decide quais são as quantidades ou sistemas mais importantes.
 - c. *Reescreve os problemas.* Usa uma notação que seja consistente com a perspetiva que escolheste. Certifica-te de que quantidades importantes estejam claramente rotuladas. Usa *diagramas* se possível.

Figura 5 – A fase de análise do processo (Schoenfeld, 1985, p. 111)

Lester (1980, citado por Baptista, 2018) desenvolveu um modelo estruturado pelas subsequentes seis fases:

1. *Consciencialização*: corresponde ao momento em que “o problema é colocado ao aluno e este analisa e toma consciência de que a situação apresentada não pode ser resolvida imediatamente” (p. 20);
2. *Compreensão*: estágio no qual “o aluno atribui sentido ao problema, formando uma representação interna do problema” (p. 20);
3. *Análise dos objetivos*: nesta fase, que pode ser vista como um episódio de reformulação do problema na qual o aluno utiliza técnicas e estratégias diversificadas, “o aluno identifica as partes integrantes do problema, ou seja, a informação dada, a inter-relação da informação e as operações a utilizar” (p. 20);
4. *Desenvolvimento do plano*: etapa na qual se concebe “um plano para resolver o problema” (p. 20);
5. *Implementação do plano*: neste instante, “o aluno põe em ação o plano que delineou” (p. 20);
6. *Avaliação dos procedimentos e da solução*: este período incorpora “uma avaliação sistemática das deliberações dos alunos durante todo o processo de resolução” (p. 20).

Aponta-se que a fase de compreensão do problema do modelo de Polya (1995) se pode associar às três primeiras do de Lester (1980, citado por Baptista, 2018), isto é, às de consciencialização, compreensão e análise dos objetivos. Dessa forma, entende-se que a interpretação de enunciados permeia esses três momentos.

Finalmente, inspeciona-se o modelo de Boavida et al. (2008), que resultou de uma simplificação do de Polya (1995) numa tentativa de o adaptar aos currículos do 1.º ciclo do Ensino Básico. Em específico, Boavida et al. (2008), argumentando que “nem sempre é fácil distinguir a segunda da terceira fase” (p. 22) do modelo de Polya, correspondentes ao estabelecimento e à execução de um plano, respetivamente, uniram as mesmas numa só. Por esse motivo, o seu modelo contém apenas as ulteriores três fases:

1. *Ler e compreender o problema;*
2. *Fazer e executar um plano;*
3. *Verificar a resposta.*

É nítido que a interpretação de enunciados é abarcada pela primeira fase, que implica a leitura do enunciado e, seguidamente, o processamento da informação extraída.

Boavida et al. (2008) listam um conjunto de estratégias de apoio à resolução de problemas e, em particular, à interpretação. Em particular, referem o uso de “diferentes representações como sejam *Fazer um desenho ou esquema* ou *Usar uma tabela*” (p. 23).

2.3. Representações matemáticas: tipologia e contributos para a resolução de tarefas

Em seguimento dessas sugestões, estuda-se, nesta subsecção, a tipologia de representações matemáticas e aprofundam-se os seus contributos para a resolução de tarefas.

Bruner (1966), embora se tivesse focado em representações do conhecimento em geral e não especificamente nas matemáticas, distingue três tipos de diferentes de representações:

- *Ativas*: “são baseadas ... numa aprendizagem de resposta e formas de habituação” (Bruner, 1966, p. 11), que abrangem “a manipulação direta e

adequada de objetos ... e a simulação de situações” (Boavida et al., 2008, p. 71);

- *Icónicas*: estas representações dependem “de organização visual ou outra sensorial e do uso de imagens sintetizantes” (Bruner, 1966, pp. 10–11), baseando-se, portanto, “no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles” (Boavida et al., 2008, p. 71);
- *Simbólicas*: representações desta classe identificam-se como “um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é governado por regras ou leis para a formação e transformação de proposições” (Bruner, 1966, p. 45), isto é, “consistem na tradução da experiência em termos da linguagem simbólica” (Boavida et al., 2008, p. 71).

Goldin (1998) toma uma abordagem mais ampla, perspetivando as representações matemáticas como externas ou internas.

De acordo com NCTM (2000), “o termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao produto – por outras palavras, ao ato de capturar um conceito ou relação matemática nalguma forma e à forma em si” (p. 67). Goldin (2014) suporta esta descrição de representação matemática, caracterizando-as como:

produções visíveis ou tangíveis – tais como diagramas, linhas numéricas, gráficos, arranjos de objetos concretos ou manipuláveis, modelos físicos, expressões matemáticas, fórmulas e equações, ou imagens no ecrã de um computador ou calculadora – que codificam, representam ou incorporam ideias ou relações matemáticas. (p. 409)

No entanto, associa esta definição apenas à categoria de *representação externa*, pois implica uma referência a um elemento externo ao indivíduo que produziu a representação, sendo, então, “acessíveis a outros para observação, discussão, interpretação e/ou manipulação” (Goldin, 2014, p. 409).

As *representações internas*, por outro lado, aludem às “construções, conceitos ou configurações mentais ou cognitivas de uma pessoa” (Goldin, 2014, p. 409). Goldin (2002) subdivide esta ordem de representações em cinco sistemas:

- *Sistemas verbais/sintáticos*: “incluem capacidades naturais de linguagem – competências lexicográficas, associação verbal, assim como gramática e sintaxe” (pp. 211–212);
- *Sistemas imagísticos*: envolvem “codificação visual-espacial, tátil-cinestética e auditiva-rítmica” (p. 212);

- *Sistemas de notação formal*: incorporam “configurações internas correspondentes a sistemas simbólicos de matemática convencionais aprendidos (numeração, notação algébrica, etc.) e regras para a sua manipulação” (p. 212);
- *Sistemas de planeamento, monitorização e controlo executivo*: integram o “pensamento estratégico, heurísticas, e muito do que é frequentemente referido como capacidades *metacognitivas*” (p. 212);
- *Sistemas afetivo*: compreendem “não só a afeição “global” associada a crenças e atitudes relativamente estáveis, mas também os estados mutáveis de sentimento “locais” à medida que ocorrem durante a aprendizagem matemática e a resolução de problemas” (p. 212).

Boavida et al. (2008) alertam que as “diferentes possibilidades de representação não devem ser entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras”, podendo antes ser “usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que estão presentes ao longo de toda a vida” (p. 71). A relação entre os tipos de representação da tipologia de Bruner (1966) é ilustrada por Boavida et al. (2008) por meio do esquema presente na Figura 6.

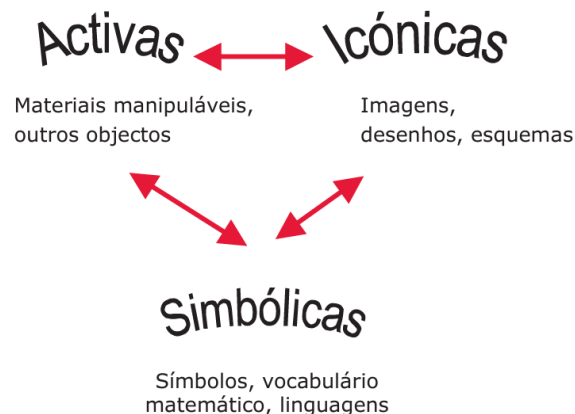


Figura 6 – Modos de representação (Boavida et al., 2008, p. 72)

Estando assente a classificação tipológica das representações matemáticas, procede-se com a discussão do papel das mesmas na resolução de tarefas, em geral, e na interpretação de enunciados, em particular.

NCTM (2000) defende que:

as representações deveriam ser tratadas como elementos essenciais ao suporte à compreensão dos alunos dos conceitos e relações matemáticas; à comunicação de abordagens, argumentos e entendimentos matemáticos para si

mesmo e para os outros; no reconhecimento de conexões entre conceitos matemáticos relacionados; e na aplicação da matemática em situações problemáticas realistas através da modelação. (p. 67)

Com efeito, quando acedem a representações matemáticas e às ideias que as mesmas representam, os alunos adquirem um “conjunto de ferramentas que expandem significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (NCTM, 2000, p. 67), pois as “ideias matemáticas são especialmente clarificadas pela conjugação de diferentes tipos de representação” (Canavarro et al., 2021, p. 3).

Assim sendo, identicamente ao defendido em relação à resolução de problemas, nas *Aprendizagens Essenciais* de Matemática do 7.º ano de escolaridade é assinalado o desenvolvimento da capacidade de manipulação de representações como um dos objetivos centrais da aprendizagem matemática dos alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico, indicando a sua função “como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática” (Canavarro et al., 2021, p. 3).

Em especial, as representações matemáticas facilitam a interpretação de enunciados. Num estudo concretizado por Pinto e Canavarro (2012) com alunos do 1.º ano de escolaridade, as investigadoras constataram que:

Uma das funções iniciais ao nível da resolução dos problemas propostos foi o de possibilitar aos alunos transpor para o papel a informação ouvida no decorrer da leitura dos enunciados dos problemas. Neste caso, as representações apoiaram a compreensão do enunciado do problema, a interpretação do mesmo, bem como das relações existentes entre os dados do problema. (p. 13)

Todavia, as orientações curriculares nacionais atuais para a Matemática acentuam que “a compreensão plena depende da familiaridade e fluência que os alunos têm com as várias formas de representação” (Canavarro et al., 2021, p. 3). De facto, muitas vezes, um aluno pode compreender e interpretar uma determinada representação, mas não conseguir identificar e aplicar o mesmo conceito noutra representação do mesmo (Goldin & Shteingold, 2001, citado por Velez, 2020).

Além disso, Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020) “alertam para o facto de alunos que aplicam com sucesso regras e definições matemáticas poderem estar apenas a aplicá-las mecanicamente sem compreenderem ou interpretarem o que representam” (p. 17).

Não obstante, Pinto e Canavarro (2012) notaram durante a sua investigação que, “mesmo quando os alunos não determinaram a solução correta do problema proposto, as representações revelaram se o aluno em questão tinha ou não compreendido e interpretado corretamente o problema” (p. 14). Desse modo, compreende-se que as

representações podem ser úteis ao professor como ferramentas que permitem entrever o raciocínio dos alunos e, especialmente, como os mesmos interpretam as tarefas propostas.

Assim, reforça-se o dever do professor de incutir a partilha e discussão de ideias e representações, não só para que os alunos possam usufruir dos seus benefícios para a sua aprendizagem, mas também para que o professor consiga “obter informações valiosas sobre a forma como os alunos interpretam e pensam sobre matemática ao observar as suas representações” (NCTM, 2000, p. 68), possibilitando, assim, que possa diagnosticar e atuar sobre casos como os aludidos por Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020).

2.4. Interpretação de enunciados de tarefas matemáticas

Finalmente, foca-se a interpretação de enunciados, apreciando-se, nomeadamente, os desafios impostos por essa dimensão à aprendizagem matemática dos alunos.

Como se visionou aquando da análise dos modelos de resolução de problemas, a interpretação predomina nos momentos iniciais desse processo, o que reforça que a compreensão escrita é tão elementar para a resolução de problemas quanto as aptidões matemáticas. Nesse sentido, revela-se importante aprofundar as características dessa habilidade linguística, o que se efetua seguidamente.

Para Sim-Sim (1998, citado por Mesquita, 2013) a compreensão de um enunciado implica não só o conhecer o significado das palavras que o compõem, mas também aceder aos padrões de constituição da estrutura sintática da língua. Efetivamente, são “as regras sintáticas que sustentam a arquitetura frásica e sem o seu domínio as cadeias fónicas aparecem-nos como listas de palavras em que é impossível estabelecer relações” (Sim-Sim, 1998, citado por Mesquita, 2013, p. 21). Como tal, para se poder compreender e compor estruturas frásicas, “é necessário ser capaz de estabelecer a relação entre palavras ou agrupamentos naturais de palavras que se organizam numa estrutura hierárquica” (Sim-Sim, 1998, citado por Mesquita, 2013, p. 22). Ainda segundo a mesma autora, a interpretação de enunciados “requer uma utilização do conhecimento implícito da língua, ... o que exige que o aluno recorra constantemente à informação guardada na memória acerca do sistema linguístico em presença e acerca do real representado na formulação linguística” (Sim-Sim, 1998, citado por Mesquita, 2013, p. 22), que inclui tanto os itens lexicais como as regras sintáticas. Tal conhecimento

permite reestruturar rápida e automaticamente o significado do enunciado enquanto se o lê ou ouve (Sim-Sim, 1998, citado por Mesquita, 2013).

Assim sendo, reitera-se que o entendimento dos alunos dos vários aspetos linguísticos dos enunciados é determinante para a sua correta interpretação. De facto, Costa e Fonseca (2009) constataram, num projeto de investigação com alunos do 4.º ano de escolaridade, que as limitações do vocabulário expressas pelos alunos envolvidos no mesmo impossibilitaram uma interpretação e compreensão adequadas, impedindo o estabelecimento, a nível semântico, de “relações de significado que lhes permitissem descobrir o sentido global do texto matemático” (p. 9) e “a manifestação de várias competências matemáticas, quer na seleção e utilização das estratégias de resolução, quer no domínio de conceitos envolvidos na sua resolução” (p. 8). Além disso, a comunicação oral e escrita dos raciocínios empregues foi também limitada, pois “a gama restrita de vocabulário dos alunos impediu o confronto, a partilha de ideias entre si, a discussão e a comunicação aos outros das suas descobertas” (Costa & Fonseca, 2009, p. 9).

No desenvolvimento do seu estudo, Costa e Fonseca (2009) verificaram que uma “crescente persistência na leitura dos enunciados e uma maior atenção e concentração nas tarefas”, por parte dos alunos, estiveram na base não só da superação de algumas das dificuldades exteriorizadas como de uma “mudança de atitudes e comportamentos relativamente ao trabalho conjunto” – nomeadamente, “uma crescente autonomia no trabalho proposto e uma maior confiança nas suas capacidades” – além de uma melhoria na comunicação entre pares, tendo-se observado “maior capacidade de confronto, discussão e partilha de ideias” (p. 9).

Infere-se, por conseguinte, que a criação de hábitos de leitura proporciona “atitudes de persistência no trabalho de leitura, no conhecimento de uma gama mais diversificada de vocabulário no desenvolvimento da comunicação oral e escrita, bem como na interpretação/compreensão de enunciados matemáticos” (Costa & Fonseca, 2009, p. 9). As mesmas investigadoras salientam ainda a importância do contacto dos alunos com tipos diversificados de problemas, o que foi igualmente crucial para a ultrapassagem das dificuldades manifestadas (Costa & Fonseca, 2009). Tal remete para a situação descrita por Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020) quando apontam a necessidade dos alunos de se familiarizarem com um leque de representações o mais diversificadas possível no sentido de promover uma interpretação desejável.

Não obstante, Nunes (2017) declara, em sequência do desenvolvimento de um projeto de investigação com alunos do 5.º ano de escolaridade, que “há fatores externos que influenciam e dificultam a interpretação dos enunciados matemáticos, como sejam, o excesso de confiança, a distração ou o nervosismo” (p. 58). Exemplificando, por vezes, “o aluno confia demasiado no seu raciocínio e não sente necessidade de reler a resolução do enunciado” (Nunes, 2017, p. 56).

Sintetizando os dados agregados na investigação que concretizou e que envolveu alunos do 11.º ano de escolaridade, Kingwell (2022) lista as dificuldades de interpretação que identificou, assim como as causas que lhes estiveram associadas. Na seguinte figura, reúnem-se algumas dessas dificuldades e causas detetadas:

Dificuldades	Causas
Compreensão textual/linguística	• Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado; • Falta de concentração / atenção; • Estrutura e extensão do enunciado; • Falta de domínio da língua portuguesa; • Construção frásica do enunciado; • Procura imediata da solução; • Falta de prática na realização de tarefas desafiantes.
Compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos	• Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos.
Recolha e organização de informação	• Leitura rápida e pouco detalhada da tarefa, desprezando informações e dados relevantes; • Falta de concentração / atenção; • Estrutura e extensão do enunciado; • Procura imediata da solução; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Falta de prática na recolha e organização de dados.
Conexões entre conceitos e conteúdos matemáticos	• Leitura rápida e pouco detalhada das tarefas; • Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos;

	• Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução.
Interpretação do resultado obtido	• Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos; • Mecanização de procedimentos de resolução; • Falta de prática na verificação de resultados.

Figura 7 – Dificuldades manifestadas na interpretação de tarefas e suas causas (adaptado de Kingwell, 2022)

Kingwell (2022) refere que bastantes alunos demonstraram dificuldades na leitura do enunciado, causadas sobretudo “pela forma como o mesmo estava escrito, nomeadamente, as palavras e expressões utilizadas” (p. 91). Do mesmo modo, “um mau domínio dos conceitos matemáticos impediu que os alunos interpretassem muitas das palavras e expressões que surgiam, dando origem a que os dados e informações não fossem recolhidos da melhor forma” (Kingwell, 2022, p. 91). Convergindo com as conclusões de Costa e Fonseca (2009), o domínio da língua portuguesa igualmente se revelou um entrave na leitura dos enunciados:

Em diversas situações, os alunos não compreendiam a que se referia uma informação ou um dado, simplesmente por não interpretarem bem o sentido das frases. Outras, devia-se ao facto de estarem presentes enunciados extensos, o que implicou dificuldades ao nível da seleção de informação. (Kingwell, 2022, p. 91)

Tais evidências denotam o cuidado que o professor deverá ter ao selecionar, adaptar e/ou formular tarefas, particularmente ao nível textual, linguístico e até estrutural dos enunciados, procurando integrar, de forma gradual, tarefas com um enunciado cada vez mais longo e mais complexo.

Entre as causas das dificuldades de interpretação listadas na Figura 7, realçam-se a mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos e a de procedimentos. A verificação dessas causas concilia-se com a situação discriminada por Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020) relativa ao uso mecânico e irrefletido de regras e definições matemáticas que, mesmo quando bem-sucedidos, sublinha falta de compreensão dessas noções. Como Kingwell (2022) assevera, “o conforto em realizar tarefas rotineiras e de mecanização pode tornar-se um obstáculo para os alunos” (p. 94), pois tal pode representar um atrofiamiento do seu espírito crítico, autonomia e

perseverança, o que se traduzirá numa redução do seu envolvimento nas suas aprendizagens. Desse modo, justifica-se, mais uma vez, o papel preponderante da diversificação de tarefas como promotora do desenvolvimento dos alunos (Canavarro et al., 2021; Costa & Fonseca, 2009; Ponte, 2005).

Kingwell (2022) explora ainda o impacto dos diferentes tipos de contexto categorizados por Ponte (2005) e Skovsmose (2000) na interpretação de enunciados. Alguns dos alunos que participaram no estudo mostraram-se mais à vontade aquando da interpretação de tarefas de contexto matemático. Esse contexto permitiu-os “fazer conexões quase diretas e fazer uma recolha dos dados do enunciado mais eficaz” (Kingwell, 2022, p. 92). No entanto, uma das dificuldades mais notáveis desses alunos na resolução dessas tarefas foi a estrutura linguística dos seus enunciados, que condicionou a sua correta interpretação (Kingwell, 2022). Face a tarefas de contexto real e semirreal, que, pela sua natureza, continham bastante informação para interpretar, esses alunos perderam o interesse em resolver as tarefas, não entendendo como deveriam utilizar os conceitos matemáticos que conheciam (Kingwell, 2022).

Outros alunos, por sua vez, sentiram que as tarefas de contextos matemáticos foram as que suscitaram mais dificuldades:

Quando olhavam para o enunciado, por norma, não sabiam o que fazer, pois não compreendiam de que forma teriam de fazer ligações entre os dados fornecidos pela tarefa e ideias matemáticas que já conheciam [sic], de modo a permitir-lhes traçar um processo de resolução. (Kingwell, 2022, pp. 92–93)

Por outro lado, os conceitos e conteúdos matemáticos foram interiorizados com mais naturalidade por esses alunos quando os mesmos trabalhavam com tarefas contextualizadas em situações mais quotidianas e conectadas com os seus interesses, interpretando-as com muito mais detalhe (Kingwell, 2022).

2.5. Considerações sobre a literatura revista

A revisão teórica efetuada neste capítulo beneficiou significativamente todo o desenvolvimento do estudo que realizei, não só no aprofundamento dos meus conhecimentos dos tópicos tratados, mas também no planeamento e realização da recolha e análise de dados.

Efetivamente, a minha consciencialização das quatro dimensões básicas das tarefas matemáticas distinguidas por Ponte (2005) – o grau de desafio, o grau de estrutura, a duração e o contexto – e das várias tipologias de problemas e de representações

matemáticas norteou a seleção, adaptação e elaboração de tarefas diversificadas e, portanto, favoráveis à concretização do objetivo desta investigação.

Os diversos modelos de resolução de problemas apresentados e a exploração das posições de numerosos investigadores a respeito da compreensão de enunciados expandiram o meu entendimento sobre como se desenvolve o processo de resolução de tarefas e, especialmente, a sua interpretação, sensibilizando-me, ainda, para as dificuldades dos alunos respetivas a essa capacidade detetadas até então pela investigação. Nesse sentido, os documentos estudados orientaram a minha recolha de dados e aprimoraram a minha análise dos mesmos, além de enriquecerem as conclusões alcançadas através do confronto com as dos estudos consultados.

3. Intervenção Pedagógica

Neste capítulo, efetua-se uma caracterização do contexto escolar no qual se desenvolveu a intervenção pedagógica. Essa descrição inclui, nomeadamente, a escola e a turma que participou no estudo. Também se refere como foram recolhidas evidências das aprendizagens dos alunos e como as interações com os alunos se sucederam. Indica-se, ainda, a ancoragem curricular e a organização temporal da intervenção, além de se retratarem as tarefas propostas durante o seu decurso, explicitando-se, em particular, os seus objetivos de aprendizagem. Por fim, procede-se a uma breve reflexão sobre a adequabilidade e possíveis reformulações da intervenção para uso futuro, justificando-se, ainda, as opções tomadas.

3.1. Caracterização do contexto escolar

A investigação realizada decorreu no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada (PES) proporcionada pelo Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto no ano letivo 2023/24, tendo atuado, conjuntamente com um colega da turma do mestrado, como professor estagiário.

Localizada numa das freguesias mais populosas do concelho do Porto, a escola situa-se numa área de elevada concentração habitacional, nomeadamente, em termos de estrutura socioeconómica das populações residentes (Projeto Educativo). Estas características refletem-se na composição da população escolar, que inclui alunos provenientes tanto de bairros camarários quanto de áreas residenciais de classe média-alta (Projeto Educativo). Além dos estudantes dessa freguesia, pela localização acessível, a escola também recebe alunos de outras freguesias da cidade e dos seus arredores (Projeto Educativo). A população estudantil é marcada ainda pela sua diversidade cultural e étnica (Projeto Educativo).

A escola abrange uma oferta educativa do 3.º ciclo do Ensino Básico ao Ensino Secundário. Assim sendo, como foram atribuídas à minha orientadora cooperante uma turma do 7.º ano de escolaridade e outra do 10.º ano do curso científico-humanístico de Ciências e Tecnologias, foi-me dada a oportunidade de lecionar quer no 3.º ciclo do Ensino Básico, quer no Ensino Secundário. Os alunos de ambas as turmas apresentavam um aproveitamento heterogéneo e confirmavam a diversidade socioeconómica, cultural e étnica da população discente supramencionada.

A turma de 10.º ano foi eleita como turma-piloto das novas *Aprendizagens Essenciais de Matemática* homologadas em janeiro de 2023; como tal, todas as atividades letivas desenvolvidas nessa turma conectavam-se intrinsecamente a esse projeto de experimentação curricular. Procurando minimizar a minha interferência no mesmo e evitar empreender em processos burocráticos que entorpecessem a realização da investigação, optei por desenvolver a intervenção pedagógica na turma de 7.º ano.

A turma de 7.º ano era constituída por 28 alunos (11 do sexo masculino e 17 do feminino), com idades entre os 11 e 14 anos; continha um elemento com duas retenções. Conforme supramencionado, os alunos da turma comportavam um desempenho heterogéneo; era uma turma empenhada e bastante participativa nas atividades letivas, fossem tarefas propostas em sala de aula ou outras. Não obstante, durante a PES notei que diversos alunos, inclusive os de melhor desempenho, manifestavam dificuldades na interpretação de enunciados, o que, tal como expresso no capítulo introdutório, despertou a minha curiosidade para explorar tais ocorrências e as suas causas no estudo que descrevo no presente relatório.

Para a realização do mesmo, concretizei uma intervenção pedagógica para a qual selecionei, adaptei e elaborei quatro tarefas, duas delas propostas em aula e que envolveram toda a turma e as restantes em situação de entrevista individual a três alunos. No capítulo seguinte, referente aos métodos e procedimentos de recolha de dados, proceder-se-á a uma caracterização mais aprofundada desses alunos que participaram nessas entrevistas, assim como dos critérios de seleção.

3.2. Descrição dos momentos da intervenção pedagógica

Como já exposto, a intervenção pedagógica da qual resulta este relatório integrou a proposta de quatro tarefas. As duas primeiras foram propostas em aula, sendo realizadas por todos os alunos da turma e seguindo a dinâmica que já era comum, ou seja, uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratório. É de realçar que essa dinâmica incluiu um trabalho colaborativo entre três professores – a professora titular que assumiu o papel de professora orientadora cooperante, eu e o meu colega de estágio. Em particular, no que se refere à recolha de dados, esta ocorreu essencialmente nos momentos de trabalho autónomo dos alunos em que estes procuravam realizar as tarefas atribuídas.

A resolução das tarefas em aula ocasiona uma pesquisa mais ampla, isto é, na qual se contacta com um número considerável de alunos, possibilitando-se o registo de dados

associados a situações variadas. Contudo, como enquanto professor procurei circular pela sala de aula de modo a seguir e apoiar o raciocínio do maior número possível de alunos, admito que essa recolha pode ter algumas limitações ao ficar restrita apenas a momentos pontuais do seu processo de resolução – principalmente, durante o esclarecimento das suas dúvidas – e, como tal, não é tão aprofundada. Por esse motivo, complementei esses momentos de recolha de dados ao acompanhar a realização das duas restantes tarefas de entrevista, ou seja, pretendeu-se com essa nova dinâmica concretizar um processo de recolha de dados que passasse pela realização de entrevistas com tarefas (Goldin, 2020), as quais proporcionam uma sondagem contínua e, dessa forma, mais pormenorizada do trabalho dos alunos entrevistados, embora, como se promove o contacto com um grupo reduzido de alunos, seja menos ampla.

Nesse sentido, nessas entrevistas, que envolveram três alunos da turma e que se propuseram num contexto extra-aula, solicitou-se aos alunos participantes que resolvessem as tarefas apresentadas. Enquanto assim procediam, o investigador observava o seu progresso e, sempre que considerasse necessário, interpelava-os no sentido de compreender o seu pensamento e, deste modo, identificar e esclarecer as suas dúvidas. No início de cada um desses episódios, o investigador recordou ao aluno entrevistado a informação que lhes havia sido previamente comunicada de que as suas resoluções apenas serviam para fins de pesquisa académica e não se tomariam como referências para a sua avaliação.

O agendamento das entrevistas foi acordado com os alunos (pessoalmente e por meio da aplicação *Microsoft Teams*, que utilizavam para fins escolares), tendo-se indagado por horários que lhes fossem favoráveis, ou seja, que não se sobrepusesse aos de atividades letivas e que não lhes exigisse uma deslocação à escola unicamente para o efeito de realizar a entrevista. De modo a se possibilitar a gravação de áudio e conferir aos alunos as melhores condições possíveis para a realização das tarefas, as entrevistas efetuaram-se em salas da escola que se encontravam livres nos horários estabelecidos. Em média, cada uma das entrevistas durou 30 a 40 minutos.

Seguidamente, detalha-se a caracterização das tarefas implementadas no domínio da intervenção pedagógica. Especificamente, explicitam-se os objetivos de aprendizagem visados em cada uma e classificam-se as mesmas quanto à sua tipologia, assim como o contexto e as representações que incorporam.

3.2.1. Tarefa 1 – Referencial cartesiano

A Tarefa 1, apresentada na Figura 8, foi concretizada numa aula de 100 minutos de duração no dia 11 de março de 2024.

No esquema seguinte, apresenta-se o mapa de um jardim zoológico.



No esquema, estão assinalados a entrada, a fonte da praça central, o bar e os recintos dos diferentes animais numa grelha. Considera-se uma unidade como sendo a medida do lado de uma quadrícula.

1. Supõe que te encontras no bar. Que caminho percorrerias para te deslocares até ao recinto da tartaruga? Descreve esse caminho recorrendo à grelha.
2. Um visitante realizou o seguinte trajeto, partindo da entrada:
 - duas unidades para a esquerda;
 - uma unidade para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, três para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, duas para baixo e outra para a direita.
 Que animais observou esse visitante?

3. Indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando:
- (A) O cavalo está mais próximo do hipopótamo que do macaco.
 - (B) O tigre está à mesma distância do leão e do crocodilo.
 - (C) O flamingo está mais próximo do elefante que a cobra do macaco.
4. Em que posição está o recinto do rinoceronte em relação à fonte? E o do hipopótamo?

Figura 8 – Tarefa 1

Integrada no tema *Álgebra*, tópico *Funções* e subtópico *Representações de funções*, o seu propósito foi o de introduzir o referencial cartesiano e a noção de coordenada de um ponto no plano. Não obstante, pretendeu-se também desenvolver as capacidades matemáticas transversais de *Raciocínio matemático*, *Comunicação matemática* e *Representações matemáticas*, nomeadamente:

- Justificar que uma conjectura/generalização é verdadeira ou falsa;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito;
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas;
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas. (Canavarro et al., 2021, pp. 14–16)

A tarefa é da minha autoria, não tendo utilizado, portanto, nenhuma referência para a sua elaboração. Permitiu-se a resolução da tarefa em díade.

A tarefa incorpora uma grelha quadriculada sobreposta a um esquema de um mapa de um jardim zoológico sobre os quais assentam os desafios propostos nas suas alíneas. Desse modo, pode afirmar-se que a mesma se baseia num contexto de semirrealidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) – já que o esquema constitui uma simplificação de uma situação real – suportado por uma representação do tipo icónico (Bruner, 1966).

A tarefa não apresenta um elevado grau de desafio e o seu grau de estrutura é fechado. Na verdade, não implica a mobilização de conceitos e conteúdos previamente lecionados, exigindo-se apenas uma interpretação correta dos seus elementos, nomeadamente do texto, do esquema e do contexto que a tarefa envolve, sendo este último aspeto o que poderá constituir o seu maior obstáculo; como tal, a proposta da tarefa em aula, revelou-se favorável para a efetivação de um momento de recolha de dados. Considerando-se as características apontadas e a destreza que os alunos

demonstraram ao resolvê-la, classifica-se a tarefa como um exercício (Ponte, 2005). Nota-se, no entanto, que a sua problemática se aproxima da de um problema prático (Polya, 1995).

3.2.2. Tarefa 2 – Relações entre perímetros e áreas de figuras semelhantes

Expõe-se o enunciado da segunda tarefa:

1. Vamos construir quadrados utilizando quadradinhos de esponja. Considera para unidade de comprimento o lado de um quadradinho.

a. Constrói quadrados de lado 2, de lado 3 e de lado 4.

Estes novos quadrados são semelhantes ao quadradinho de lado 1?

Justifica a tua resposta, indicando a razão de semelhança.

b. Preenche a tabela abaixo em que:

- **R** é a razão de semelhança quando partimos do quadradinho de lado 1 e o ampliamos para encontrar os restantes.

- **N** é o número de quadradinhos de lado 1 usados em cada figura.

Quadrados	R	Perímetro	N	Área
de lado 1				
de lado 2				
de lado 3				
de lado 4				
de lado 5				
de lado 10				
de lado 20				
de lado n				

c. Consegues estabelecer alguma relação entre as razões de semelhança e os perímetros dos vários quadrados? E entre as razões de semelhança e as suas áreas?

Figura 9 – Tarefa 2

A Tarefa 2 foi realizada numa aula de 100 minutos de duração no dia 13 de maio de 2024. Os objetivos de aprendizagem da tarefa enquadram-se no subtópico *Relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes* do tópico *Operações com figuras*, tema *Geometria*, e passam por:

- Conhecer a razão entre as medidas dos perímetros de duas figuras semelhantes;
- Conhecer a razão entre as medidas das áreas de duas figuras semelhantes. (Canavarro et al., 2021, p. 41)

Sem embargo, procurou-se também abranger as capacidade matemáticas *Raciocínio matemático* e *Representações matemáticas*, tendo-se presente os seguintes objetivos:

- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas;
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas;
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão. (Canavarro et al., 2021, pp. 13, 16, 17)

A tarefa adveio de uma modificação da *Tarefa 4 – Razões de semelhança – perímetros, áreas e volumes* da *Proposta de sequência de tarefas* do tema *Semelhanças* do *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* divulgada em dezembro de 2009 pela Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular¹. A tarefa original aborda as relações entre os volumes de poliedros semelhantes; seguindo o intento de responder aos objetivos de aprendizagem no quais alicerçar-se-ia a aula, removi as alíneas concernentes à semelhança entre poliedros, dando mais ênfase a questões respeitantes às relações entre os perímetros e entre as áreas de figuras semelhantes.

A tarefa foi proposta como forma de promover a exploração de relações matemáticas desconhecidas dos alunos – as relações entre áreas e perímetros de figuras semelhantes. Tendo por base um contexto matemático (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000), optou-se por recorrer a áreas e perímetros de quadrados, de modo a facilitar a sua exploração dessas mesmas relações. Também no sentido de favorecer a interpretação dos conceitos envolvidos, instaurou-se o uso de material manipulável e propôs-se o preenchimento de uma tabela para se organizarem os dados e, deste modo, apoiar os alunos a chegar às conclusões pretendidas; como tal, a tarefa compreende representações ativas e icónicas (Bruner, 1966). Como ainda se requer a formulação de expressões matemáticas que generalizem certas regularidades, igualmente se integram representações simbólicas (Bruner, 1966) na sua resolução.

¹ Esta coletânea de tarefas é acessível através do link:

https://area.dge.mec.pt/materiais_NPMEB/032_Sequencia_Semelhancas_TP_3c.pdf

Como evidenciado no enunciado da tarefa (Figura 9), o material manipulável recorrido consistiu em quadradinhos de esponja, a partir dos quais se construiriam quadrados maiores. Assim sendo, a resolução da tarefa exige um elevado número desses materiais. Devido à quantidade limitada de quadradinhos de esponja disponíveis, condicionou-se a resolução da tarefa em grupos de 4 ou 5 elementos.

Dado que os alunos estavam familiarizados com os conteúdos a mobilizar – nomeadamente, a área e o perímetro de um quadrado e a noção de semelhança entre figuras planas, e a prática de formular uma expressão geral de um conjunto de dados, que se trabalhara recorrentemente durante o estudo das sequências – considera-se que a tarefa não apresenta um elevado grau de desafio; com exceção da primeira alínea, o seu grau de estrutura é aberto. Os seus maiores obstáculos são o contexto, que, por ser puramente matemático, é mais abstrato, e o seu cariz mais exploratório. Considerando essas particularidades da tarefa, o recurso a material manipulável e a dinâmica de trabalho em grupo, classifica-se a tarefa como uma exploração (Ponte, 2005).

Pelas suas características distintas – particularmente, o contexto matemático, a multiplicidade de representações e o carácter exploratório – considerou-se que esta tarefa seria benéfica para a investigação.

3.2.3. Tarefa 3 – Expressões algébricas e equações

A Tarefa 3² (Figura 10) foi implementada em situações extra-aula e proposta apenas a três alunos, sendo a sua realização efetuada de forma individual e acompanhada de entrevista. Esses três momentos decorreram nos dias 5, 6 e 13 de junho de 2024.

2 Dos sete amigos que estão a participar num jogo *online*, sabe-se que o dobro do número de rapazes é igual ao número de raparigas.
Designa por r o número de rapazes.

2.1 Indica, no contexto, o significado da expressão:
a) $2r$
b) $7 - r$

2.2 Quantos rapazes estão a participar no jogo *online*?
 Escreve uma equação que traduza o problema, resolve-a e interpreta a solução no contexto.



Figura 10 – Tarefa 3

A presente tarefa foi proposta no âmbito do tema *Álgebra* e do tópico *Expressões algébricas e equações* e com ela pretendeu-se dar conta dos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Traduzir situações em contextos matemáticos e não matemáticos por meio de uma equação do 1.º grau e vice-versa;
- Resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e denominadores);
- Resolver problemas que envolvam equações do 1.º grau a uma incógnita, nomeadamente do quotidiano dos alunos, analisando a adequação da solução obtida no contexto do problema. (Canavarro et al., 2021, pp. 25–26)

Em relação às capacidades matemáticas transversais, pretendeu-se também instigar o desenvolvimento da *Resolução de problemas*, *Pensamento computacional*, *Representações matemáticas* e das *Conexões matemáticas*, de modo particular:

- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Extrair a informação essencial de um problema;
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas;
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos;
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos;

² Tarefa retirada do volume 1 do manual *Espiral 7* (Costa et al., 2022, p. 134).

- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão;
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões);
- Interpretar matematicamente situações do mundo real, construir modelos matemáticos adequados, e reconhecer a utilidade e poder da Matemática na previsão e intervenção nessas situações. (Canavarro et al., 2021, pp. 12, 14, 16, 17, 18)

A tarefa aplica uma situação dada num contexto de realidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) para estimular as capacidades de tradução de informação de linguagem corrente para matemática e vice-versa, o que implica a utilização de representações simbólicas (Bruner, 1966), e de interpretação dos resultados obtidos no contexto.

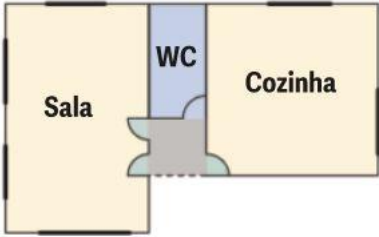
Apesar de se terem estudado os conceitos implicados em aula, os mesmos foram abordados durante os meses de janeiro e fevereiro, o que pode ter condicionado o desábito no trabalho com os mesmos. Além disso, durante o estudo do capítulo em causa, nunca se trataram tarefas que envolvessem as capacidades supracitadas, cuja falta de desenvolvimento, por isso, pode ter representado o maior obstáculo à resolução da tarefa. Assim sendo, afirma-se que o grau de desafio da tarefa é elevado; como o seu grau de estrutura é fechado, classifica-se a mesma como problema (Ponte, 2005). Como o fim da tarefa é o de calcular o valor de uma incógnita, pode-se especificar essa classificação como sendo um problema de determinação (Polya, 1995).

Selecionou-se esta tarefa para o efeito de recolha de dados pelos exercícios exigidos de se traduzir informação dada em linguagem corrente para simbologia matemática e vice-versa e de se enquadrar a solução alcançada no contexto, que se fundamentam na capacidade de interpretação.

3.2.4. Tarefa 4 – Função de proporcionalidade direta / Semelhança de figuras

Finalmente, apresenta-se o enunciado da quarta e última tarefa (Figura 11).

13 Observa parte de uma planta de uma casa feita à escala 1 : 150 .



13.1. Na planta, a cozinha é um quadrado com 9 cm^2 de área e o WC um retângulo de 1 cm por 2 cm .

Determina:

- a) as dimensões reais da cozinha;
- b) a área real do WC .

13.2. A medida na planta é representada por x e $f(x)$ é a medida real correspondente.

- a) Determina a expressão de $f(x)$.
- b) Calcula $f(6,5)$ e indica o significado.
- c) Resolve a equação $f(x) = 600$ e indica o significado da solução.

Figura 11 – Tarefa 4

Similarmente à Tarefa 3, a Tarefa 4³ foi também implementada em contexto extra-aula, tendo sido realizada por uma aluna e acompanhada de entrevista. Este momento decorreu no dia 6 de junho de 2024. Embora a presente tarefa seja constituída por duas alíneas, devido a questões de gestão do tempo disponível, apenas se conseguiu abordar a sua primeira alínea.

Na tarefa, destinada ao subtópico *Função de proporcionalidade direta*, integrado no tópico *Funções*, tema *Álgebra*, a sua primeira alínea pode ser classificada como problema auxiliar (Polya, 1995), uma vez que a sua resolução serve de suporte para a resolução da alínea posterior, na qual se solicita que se defina uma expressão algébrica

³ Tarefa retirada do volume 1 do manual *Espiral 7* (Costa et al., 2022, p. 183).

da função que converte as medidas na planta de uma casa nas suas medidas reais e se determine os valores de algumas expressões matemáticas que incluem a função mencionada, explicitando-se, ainda, qual o seu significado no contexto. Devido à necessidade predominante de se interpretar a informação dos enunciados de ambas alíneas, a tarefa tinha sido tomada como benéfica para a investigação; apesar da omissão da segunda alínea, mantém-se essa convicção.

Como se desconectou da sequente, a primeira alínea não implica necessariamente a aplicação dos conceitos da função de proporcionalidade direta. De facto, a aluna que resolveu a alínea optou por empregar conteúdos e procedimentos característicos do subtópico *Polígonos semelhantes e razão de semelhança* do tópico *Operações com figuras* do tema *Geometria*, que haviam sido lecionados mais recentemente e com os quais, por isso, detinha mais destreza. Dessa maneira, a tarefa pode ser associada aos seguintes objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer figuras semelhantes como figuras que têm a mesma forma, obtidas uma da outra por ampliação ou redução;
- Reconhecer a semelhança em mapas com diferentes escalas, estabelecendo conexões matemáticas com outras áreas do saber. (Canavarro et al., 2021, p. 40)

Além disso, intencionou-se estimular a *Resolução de problemas*, o *Pensamento Computacional* e as *Conexões matemáticas*, particularmente:

- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas;
- Extrair a informação essencial de um problema;
- Aplicar ideias matemáticas na resolução de problemas de contextos diversos (outras áreas do saber, realidade, profissões). (Canavarro et al., 2021, pp. 12, 14, 17, 18)

A tarefa foca-se num contexto de realidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000), uma vez que associa as medidas de uma planta de uma casa com as medidas reais correspondentes. Contrariamente ao esquema da Tarefa 1 e a tabela da Tarefa 2, o esquema atribuído, que se categoriza como uma representação icónica (Bruner, 1966), não é essencial para a resolução da tarefa, servindo apenas como suporte à interpretação da situação descrita.

Embora o grau de estrutura da tarefa seja fechado, não se entrevê de imediato uma estratégia que permita alcançar a solução solicitada, o que remete para a classificação de problema (NCTM, 2000). Assim sendo, pode-se asseverar que o seu grau de desafio é significativo, considerando-se a mesma como um problema (Ponte, 2005). Como se

pede que se calcule os valores de certos objetos, pode-se particularizar essa classificação como sendo um problema de determinação (Polya, 1995).

Na Figura 12, sintetizam-se as características salientadas das quatro tarefas:

Tarefa	1	2	3	4
Data	11 de março de 2024	13 de maio de 2024	5, 6 e 13 de junho de 2024	6 de junho de 2024
Dinâmica de trabalho	Aula	Aula	Entrevista com tarefa	Entrevista com tarefa
Tópico	Funções	Operações com figuras	Expressões algébricas e equações	Funções / Operações com figuras
Tipo de tarefa	Exercício	Exploração	Problema	Problema
Representações	Ícónicas	Ativas, icónicas e simbólicas	Simbólicas	Ícónicas
Contexto	Semirreal	Matemático	Real	Real

Figura 12 – Caracterização das tarefas propostas

3.3. Breve reflexão sobre a intervenção

Pondero que as quatro tarefas, pelas suas qualidades, são deveras potenciadoras da aprendizagem não só dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também de capacidades matemáticas, sendo, portanto, adequadas para o uso futuro em aulas do 7.º ano de escolaridade.

Com efeito, todas as tarefas requerem uma leitura cuidada dos seus enunciados de modo a se interiorizar as suas problemáticas e a se extrair e organizar os dados necessários para as suas resoluções, o que estimula significativamente as capacidades de interpretação dos alunos; a Tarefa 3, em especial, solicita ainda que se atribua significado à solução obtida no contexto que integra. Nesse sentido, as tarefas propiciam sobretudo o desenvolvimento da capacidade de interpretação dos alunos e a assimilação de uma atitude mais atenta e ponderada na resolução de tarefas, o que, por sua vez, favorece a priorização da compreensão dos conteúdos matemáticos aplicados ao invés da sua mera mecanização.

A variedade de contextos e representações incluídas nas tarefas, assim como as suas diversas tipologias, também elevam o seu valor educativo, pois possibilitam que os

alunos usufruam dos benefícios desses vários aspetos. Exemplificando, a Tarefa 2, pelo seu cunho mais aberto, exige uma maior autonomia e perseverança no decorrer da sua resolução, enquanto as Tarefas 3 e 4, por retratarem uma situação real, podem motivar a apreciação dos alunos pela área da Matemática.

Sem embargo, as mesmas poderão ser submetidas a alguma adaptação no seu emprego futuro, principalmente no sentido de se ajustar o seu enquadramento às especificidades de diferentes turmas. Ilustrando, o contexto da Tarefa 1, referente a um mapa de um jardim zoológico, pode ser substituído por outro que seja mais próximo do quotidiano dos alunos e com o qual, assim sendo, se identifiquem mais, como, por exemplo, o mapa de uma pequena cidade que contenha locais que lhes sejam familiares, como escolas, supermercados, restaurantes, cinemas, entre outros.

Por fim, justifico as opções tomadas na intervenção pedagógica. Primeiramente, a multiplicidade dos atributos das tarefas viabiliza a análise de cenários variados, uma vez que os alunos reagiriam distintamente a cada tarefa, o que enriquece a investigação. Em segundo lugar, creio que a diversidade de dinâmicas de trabalho implementadas – o trabalho em aula e em entrevista – contribuíram equitativamente para o engrandecimento deste estudo. Conforme defendido previamente, a recolha de dados efetuada em cada dinâmica complementa a outra; a primeira dinâmica possibilita uma pesquisa mais expansiva, se bem que mais superficial, enquanto a segunda permite aprofundar a investigação, embora a mesma seja mais estrita.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Nesta secção, enunciam-se as principais opções que constituem a metodologia deste estudo, justificando-se todas as escolhas efetuadas; especificamente, explicitam-se quais foram os participantes e os instrumentos e procedimentos de recolha de dados utilizados. Também se descrevem o processo de análise de dados e como foram acauteladas as questões de natureza ética relevantes para a concretização da investigação.

4.1. Opções metodológicas

Considerando o objetivo do estudo de identificar dificuldades de interpretação de enunciados e as causas respetivas, que exige uma análise de caráter mais interpretativo, adotou-se uma metodologia de investigação de cariz qualitativo. Bogdan e Biklen (1994) e Carmo e Ferreira (2008) atribuem às investigações de cunho qualitativo um conjunto de características, as quais se apresentam de seguida.

“A fonte direta de dados é o ambiente natural” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47), ou seja, os métodos qualitativos são naturalistas (Carmo & Ferreira, 2008). Reconhecendo que “o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48) e, como tal, os atos, as palavras e os gestos só podem ser compreendidos no mesmo (Carmo & Ferreira, 2008), os investigadores qualitativos – que são, portanto, “sensíveis ao contexto” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 198) – procuram deslocar-se, sempre que possível, ao local de estudo (Bogdan & Biklen, 1994), tentando “misturar-se” com os sujeitos de investigação até compreenderem uma determinada situação, mas simultaneamente procurando minimizar ou controlar os efeitos que neles provocam (Carmo & Ferreira, 2008). O investigador constitui o instrumento principal da recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008) e, por isso, “a validade e a fiabilidade dos dados depende muito da sua sensibilidade, conhecimento e experiência” (Carmo & Ferreira, 2008, pp. 198–199).

A investigação qualitativa é descritiva (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008). Dá-se “uma grande importância à validade do trabalho realizado” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 199), pelo que “a descrição dos dados deve ser rigorosa e resultar diretamente dos dados recolhidos” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 198), respeitando-se a forma

segundo a qual foram registados ou transcritos (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008), que deverá corresponder a um formato “de palavras ou imagens e não de números” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48).

Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo de investigação do que simplesmente pelos resultados ou produtos que dela decorrem (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008). Tendem “a analisar os seus dados de forma indutiva” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50), desenvolvendo conceitos e chegando à compreensão dos fenómenos “a partir de padrões provenientes da recolha de dados” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 197).

Numa abordagem qualitativa, o significado assume uma importância vital. Neste âmbito, os “investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (Bogdan & Biklen, 1994, pp. 50–51). Por outras palavras, “os métodos qualitativos são “humanísticos”, pois, quando estudam os sujeitos de investigação qualitativamente, os investigadores “tentam conhecê-los como pessoas e experimentar o que eles experimentam na sua vida diária” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 198), despersonalizando-se das suas próprias perspetivas e convicções.

Pode dizer-se também que os métodos qualitativos são holísticos, uma vez que “os indivíduos, os grupos e as situações não são reduzidos a variáveis, mas são vistos como um todo, sendo estudado o passado e o presente dos sujeitos de investigação” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 198). Numa investigação qualitativa, o “plano de investigação é flexível” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 198) e a principal preocupação “não é a de saber se os resultados são suscetíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 66).

As opções metodológicas deste estudo enquadram-se neste paradigma de investigação qualitativa, com o qual partilha várias das suas particularidades. Em primeiro lugar, os dados foram recolhidos através do contacto direto com alunos de uma escola situada no Porto, ou seja, privilegiou-se o ambiente natural como fonte primária dos dados a extrair. Tendo sido exigidas múltiplas deslocações ao estabelecimento educativo, assegura-se que o investigador se apresentou como agente principal desse processo de recolha de dados.

De forma a conseguir inferir apropriadamente quais eram as dificuldades sentidas pelos alunos e o que as causou, o investigador utilizou meios de recolha de dados que permitissem minimizar a sua influência no comportamento dos alunos participantes e,

desse modo, registar o seu pensamento, os seus atos e as suas palavras o mais autenticamente possível. Assim sendo, percebe-se a primazia de um retrato das atitudes e ações dos sujeitos de investigação acordante com a sua própria experiência em detrimento de uma examinação das mesmas segundo a perspectiva alheia do investigador.

Dado que se procurou desvendar não só as mais proeminentes dificuldades de interpretação, mas também as suas causas, depreende-se que o foco do investigador se centrou mais no processo do que nas evidências em si, o que implicou uma abordagem interpretativa e indutiva de análise.

A análise dos dados compreende uma descrição minuciosa das experiências registadas e fiel ao formato dos dados recolhidos, que se compuseram essencialmente como palavras e imagens e não como símbolos numerais.

4.2. Processo de recolha de dados

Enquanto procedimentos de recolha de dados, recorreu-se à observação participante, a entrevistas que envolveram a resolução de tarefas e a recolha de produções escritas dos alunos. Seguidamente, descrevem-se mais pormenorizadamente cada um desses métodos e justifica-se a sua implementação.

4.2.1. Observação participante

Coutinho (2011, citado por Baptista, 2018) define a observação como um método de recolha de dados em que se “observa em direto e presencialmente o fenómeno em estudo” (p. 43).

Quivy e Campenhoudt (1998) distinguem dois tipos de observação: a observação direta e a indireta. A primeira é “aquela em que o próprio investigador procede diretamente à recolha das informações, sem se dirigir aos sujeitos interessados” (Quivy & Campenhoudt, 1998, p. 164) e apelando diretamente ao seu sentido de observação. Na segunda, “o instrumento de observação é um questionário ou um guião de entrevista” (Quivy & Campenhoudt, 1998, p. 164). Os mesmos autores salientam três vantagens da observação direta:

- A apreensão dos comportamentos e dos acontecimentos no próprio momento em que se produzem.

- A recolha de um material de análise não suscitado pelo investigador e, portanto, relativamente espontâneo.
- A autenticidade relativa dos acontecimentos em comparação com as palavras e com os escritos. É mais fácil mentir com a boca que com o corpo. (Quivy & Campenhoudt, 1998, p. 199)

Esses benefícios da observação direta concretizam o cariz naturalista da investigação qualitativa, pois obriga ao contacto direto com os alunos e com o seu contexto mais ordinário.

Carmo e Ferreira (2008), por outro lado, ponderam três tipos de observação, tendo em conta o envolvimento do observador: a observação não participante, na qual não ocorre nenhuma forma de interação com o objeto de estudo; a observação participante despercebida pelos observados, em que a comunicação entre o investigador e a população observada, embora efetiva, é ainda ténue; e a observação participante propriamente dita, em cujas situações o observador assume o seu papel de estudioso perante os sujeitos de investigação, desempenhando outros papéis sociais que favoreçam a sua observação.

A observação empregue neste projeto de investigação associa-se à observação direta da categorização de Quivy e Campenhoudt (1998) e à participante propriamente dita da de Carmo e Ferreira (2008).

Comummente, a observação requer a utilização de meios que facilitem a anotação dos dados. Nesse sentido, destacam-se, entre esses, um guião de observação (Anexo 6) e as notas de campo, que foram os aplicados neste estudo.

Bogdan e Biklen (1994) designam as notas de campo como “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (p. 150). Os autores consideram que as notas de campo compreendem duas vertentes: uma descritiva, “em que a preocupação é a de captar uma imagem por palavras do local, pessoas, ações e conversas observadas” (p. 152); e outra reflexiva, na qual se “apreende mais o ponto de vista do observador, as suas ideias e preocupações” (p. 152).

Carmo e Ferreira (2008) alertam que é “extremamente importante que o investigador não vá desarmado para o campo” (p. 117) de modo a evitar a recolha de informações inúteis e a perda de outras que seriam pertinentes. Nesse sentido, revela-se indispensável o uso de instrumentos como o guião de observação, que deverá incluir “um conjunto de indicadores necessário para retratar o objeto de estudo, mas não excessivamente abundante de modo a poder criar uma situação de sobre-informação”

(Carmo & Ferreira, 2008, p. 117). Apesar de permitirem uma melhor organização da informação apreendida, Quivy e Campenhoudt (1998) advertem que a utilização de tais instrumentos de registo demasiado formalizados pode comprometer a qualidade da observação, que se arrisca a ser “relativamente superficial e mecânica perante a riqueza e a complexidade dos processos estudados” (p. 199). Assim sendo, o investigador não se deverá apegar a esses instrumentos, devendo incluir nos mesmos, por exemplo, alguma secção destinada à anotação de fenómenos não previstos.

Tal como descrito no capítulo anterior, a observação participante cumpriu-se aquando da implementação das Tarefas 1 e 2, que se realizaram em situação de aula.

4.2.2. Entrevistas com tarefa

De acordo com Morgan (1988, citado por Bogdan & Biklen, 1994), uma entrevista “consiste numa conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, embora por vezes possa envolver mais pessoas” (p. 134), dirigida por um dos intervenientes – o entrevistador. O seu objetivo é o de obter informações sobre um dado indivíduo (Bogdan & Biklen, 1994) – o entrevistado. Nesse diálogo, os participantes são incentivados a partilhar e “discutir as suas interpretações do mundo em que vivem, e a expressar como apreciam situações do seu ponto de vista” (Cohen et al., 2007, p. 349).

Bogdan e Biklen (1994) afirmam que as entrevistas de cariz qualitativo diferem quanto ao grau de estruturação, podendo ser estruturadas ou não estruturadas. As da primeira categoria “centram-se em tópicos determinados ou podem ser guiadas por questões gerais” (Merton & Kendall, 1946, citado por Bogdan & Biklen, 1994, p. 135). Não obstante, essas entrevistas permitem que o entrevistador efetue um levantamento de uma série de tópicos considerável, cujo conteúdo pode ser moldado pelo entrevistado (Merton & Kendall, 1946, citado por Bogdan & Biklen, 1994). Nas da segunda ordem, o entrevistado é encorajado a falar sobre uma área de interesse pelo entrevistador, ao qual se apresenta uma oportunidade para a aprofundar, “retomando os tópicos e os temas que o respondente iniciou” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 135). Subentende-se, portanto, que o entrevistado “desempenha um papel crucial na definição do conteúdo da entrevista e na condução do estudo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 135).

As entrevistas com tarefa são aquelas em que “um sujeito ou um grupo de sujeitos falam enquanto trabalham sobre uma tarefa matemática ou um conjunto de tarefas” (Maher & Sigley, 2014, p. 579). Ou seja, nestas entrevistas, o entrevistado interage não só com o

entrevistador, mas também com os “ambientes de tarefa” (Goldin, 2000, p. 519). Na investigação em educação matemática, estas entrevistas são usualmente realizadas para obter informação “sobre os conhecimentos matemáticos existentes ou em desenvolvimento e os comportamentos de resolução de problemas de um indivíduo ou de um grupo de estudantes” (Maher & Sigley, 2014, p. 579). Todavia, Goldin (2000) denota que o seu foco não é o de identificar “resultados facilmente definidos como padrões de respostas corretas e incorretas pelos sujeitos”; em vez disso, o investigador deve tentar “observar, registar, e interpretar comportamentos complexos e padrões de comportamentos, incluindo as palavras verbalizadas, interjeições, movimentos, escritos, desenhos, ações sobre e com materiais externos, gestos, expressões faciais dos sujeitos, e assim por diante” (p. 527).

Quando se antecipa que as entrevistas possam ser extensas, vários autores (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 2008) recomendam a sua gravação em áudio ou vídeo de forma que as mesmas sejam integralmente captadas, evitando-se, dessa maneira, a perda de elementos valiosos e viabilizando-se uma análise mais detalhada (Maher & Sigley, 2014).

Dado o objetivo do estudo e no sentido de aprofundar os dados recolhidos durante a observação participante, procedi à realização de entrevistas alicerçadas na resolução de tarefas. Além disso, essas entrevistas foram aplicadas num molde não-estruturado de modo a aceder a eventuais reações espontâneas dos alunos, bem como a raciocínios e estratégias empregues pelos mesmos. Dessa forma, concedeu-se uma maior liberdade aos entrevistados durante o seu trabalho, simulando-se uma situação de trabalho mais natural aos mesmos, o que confere uma maior autenticidade aos dados recolhidos.

As entrevistas foram realizadas individualmente com três alunos, tendo-se recorrido aos itens que integraram o guião de observação (Anexo 6) como forma de nortear o registo dos dados. Prevendo que seriam longas, as entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas. Como expresso no capítulo antecessor, aplicaram-se as Tarefas 3 e 4 nestas entrevistas, através das quais se procurou atentar aos aspetos comportamentais da atividade dos estudantes entrevistados demarcados por Goldin (2000).

4.2.3. Recolha de produções escritas dos alunos

Neste estudo, optou-se também pela recolha de produções escritas dos alunos. Esse procedimento fundamenta-se numa análise metódica de amostras de trabalho dos alunos, a partir da qual o investigador procura compreender “como é que as crianças processam a informação, resolvem problemas e lidam com tópicos e questões complexas” (Máximo-Esteves, 2008, citado por Nunes, 2017, p. 27). Segundo Máximo-Esteves (2008, citado por Nunes, 2017), a recolha e sequente análise documental “é indispensável quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos” (p. 27). Dado que o objetivo deste estudo respeita uma dimensão da aprendizagem matemática, depreende-se que este instrumento se apropria à recolha e análise de dados a efetivar.

Durante a ocorrência da observação participante e das entrevistas, fotografaram-se e recolheram-se produções escritas dos alunos envolvidos para posterior análise e como suporte à dos dados reunidos através dos restantes métodos.

A Figura 13 agrupa os principais métodos de recolha de dados implementados, apontando-se, para cada um, os participantes e os meios de registo.

Métodos de recolha de dados	Participantes	Meios de registo
Observação participante	18 alunos	Notas de campo
Entrevistas com tarefa	3 alunos	Gravação áudio e transcrição das entrevistas Notas de campo
Recolha das produções dos alunos	18 alunos	Produções dos alunos

Figura 13 – Métodos de recolha de dados

4.3. Participantes e questões éticas

Tal como foi indicado no capítulo precedente, a investigação foi desenvolvida no contexto da PES, a partir da qual se proporcionou a respetiva recolha de dados. Entre as turmas contactadas, selecionou-se a turma de 7.º ano pelos motivos então discriminados. Procurando respeitar os direitos universais dos intervenientes no estudo,

seguí escrupulosamente os princípios e linhas orientadoras decretados pela Carta Ética da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (Baptista et al., 2020).

Para confirmar a participação dos alunos desta turma, solicitei o consentimento informado escrito (Anexo 1) dos seus encarregados de educação, em cujo documento se expuseram os métodos e fins da investigação, além de se garantir o anonimato dos seus educandos e a destruição dos dados recolhidos após a conclusão da redação deste relatório. Os estudantes também foram notificados acerca dessas informações, firmando-se ainda o seu direito de desistência de participação a qualquer momento da intervenção pedagógica.

Por razões de proteção de dados e de identidade, os alunos que contribuíram para este estudo, quando referenciados neste documento, são nomeados através de nomes fictícios.

Dos 28 que constituíam a turma, obtive o consentimento dos encarregados de educação de 18 alunos. Como tal, apesar dos dois momentos destinados à observação participante terem envolvido todos os alunos da turma, apenas se registaram dados e se procederam a recolhas de produções dos alunos cuja participação havia sido autorizada pelos respetivos encarregados de educação e com a permissão dos próprios.

Além desses momentos de observação participante, efetuaram-se entrevistas com tarefa unicamente a três estudantes, dois alunos apelidados de Arcturus e Sirius e uma aluna alcunhada de Vega. Esses alunos foram selecionados pela heterogeneidade dos seus níveis de desempenho na disciplina de Matemática – Arcturus, Sirius e Vega são alunos de nível de desempenho 3, 4 e 5, respetivamente – e pelas suas características mais particulares que havia sondado durante a PES, especialmente as respeitantes às suas competências de interpretação, resolução de problemas e comunicação. Arcturus apresentou-se como um aluno empenhado, embora se tenham notado dificuldades na interpretação de enunciados e na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos; apesar disso, manifestou ser capaz de elaborar procedimentos de resolução de tarefas deveras peculiares. Sirius revelou uma capacidade de solucionamento de tarefas desenvolvida; no entanto, as suas leituras de enunciados de tarefas e as respetivas resoluções indiciaram ser frequentemente apressadas e descuidadas. Vega, por sua vez, pautou-se por um desempenho matemático excelente, quer na interpretação de enunciados quer na resolução de tarefas; sem embargo, a aluna destacou-se de outros estudantes com o mesmo aproveitamento na disciplina pelo seu pensamento matemático distinto, confeccionando estratégias resolutivas singulares, similarmemente a

Arcturus. Ao nível da comunicação, os três alunos demonstraram ser expansivos, o que potenciaria a verbalização e, desse modo, o registo áudio das suas ideias e raciocínios.

4.4. Processo de análise de dados

Após a recolha de dados, sucedeu-se a respetiva análise, a qual Bogdan e Biklen (1994) definem como:

o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a ... compreensão [do investigador] desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (p. 205)

De acordo com esses autores, o investigador qualitativo procura transmitir ao leitor não só a informação que recolheu, mas também as evidências que suportam as suas inferências:

A tarefa implica decidir quais as provas que devem ser utilizadas para ilustrar a sua opinião; é um ato de balanceamento entre o particular e o geral. O que [o investigador] escreveu deve claramente ilustrar o fundamento das suas generalizações (de facto, os sumários daquilo que viu), ou seja, aquilo que viu (os detalhes que, no seu conjunto, constituem a generalização). (p. 251)

O processo de análise concretizou-se em três fases: a primeira enfatizou a ação, a segunda o tratamento e o estudo dos dados e a última o seu registo escrito.

A etapa inicial decorreu paralelamente à recolha de dados. Durante a mesma, recolhi produções dos alunos, redigi as notas de campo e apreciei ligeiramente a informação agregada e as reações dos alunos às tarefas propostas, além de ter realizado as três entrevistas supramencionadas e procedido à transcrição das suas gravações de áudio. Como ocorreu ainda durante o âmbito do estágio, os dados obtidos permitiram essencialmente adequar as atividades a desenvolver pelos alunos em contexto de sala de aula, sendo a principal preocupação a sua aprendizagem.

No momento seguinte, atentei mais cuidadosamente às notas de campo e às produções dos alunos. Em relação ao primeiro procedimento indicado, foquei-me nos registos relativos aos hábitos de leitura e organização de dados dos alunos, às suas respostas aos diferentes contextos e representações incorporadas em cada tarefa e às dificuldades de interpretação identificadas e as suas respetivas causas. Quanto ao segundo, inspecionei as estratégias resolutivas empregues pelos alunos, dando particular relevo à efetuação (ou não) de uma organização dos dados atribuídos nos enunciados. Destaco que as transcrições das entrevistas possibilitaram um melhor

retrato das situações de resolução das Tarefas 3 e 4 pelos alunos entrevistados, o que facilitou o acesso aos seus raciocínios. De modo a responder às questões de investigação, cruzei as informações reunidas no sentido de nomear quais foram as dificuldades de interpretação que mais frequentemente se manifestaram, apontando ainda as suas principais causas.

Por fim, na última fase, procedi à composição do quinto capítulo deste documento, referente à apresentação e análise de dados. No mesmo, procurei aprofundar a caracterização dos episódios constituintes da intervenção pedagógica e descrever os dados recolhidos, justificando as deduções apresentadas com evidências empíricas pertinentes.

5. Apresentação e discussão de resultados

Neste capítulo, apresenta-se a análise dos dados recolhidos através dos métodos e procedimentos apontados na secção anterior. A partir da sua análise, inferem-se e discutem-se resultados no sentido de se responder à problemática em estudo e às respetivas questões de investigação, fundamentando-se essa análise em evidências apropriadas e na literatura revista.

5.1. Tarefa 1

A Tarefa 1 – classificada como um exercício (Ponte, 2005) enquadrado num contexto de semirrealidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) e detentor de representações icónicas (Bruner, 1966) – foi abordada numa aula consagrada à introdução do referencial cartesiano do tópico de *Funções* (Canavarro et al., 2021).

No esquema seguinte, apresenta-se o mapa de um jardim zoológico.



No esquema, estão assinalados a entrada, a fonte da praça central, o bar e os recintos dos diferentes animais numa grelha. Considera-se uma unidade como sendo a medida do lado de uma quadrícula.

1. Supõe que te encontras no bar. Que caminho percorrerias para te deslocares até ao recinto da tartaruga? Descreve esse caminho recorrendo à grelha.
2. Um visitante realizou o seguinte trajeto, partindo da entrada:
 - duas unidades para a esquerda;
 - uma unidade para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, três para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, duas para baixo e outra para a direita.
 Que animais observou esse visitante?

Figura 14 – Questões 1 e 2 da Tarefa 1

Durante o momento de trabalho autónomo dos alunos, notou-se que vários deles suportaram a leitura das questões propostas no esquema atribuído; utilizando a grelha quadriculada, alguns traçaram os trajetos descritos, como se pode observar na Figura 15, e outros seguiram-nos apontando-os com o lápis.

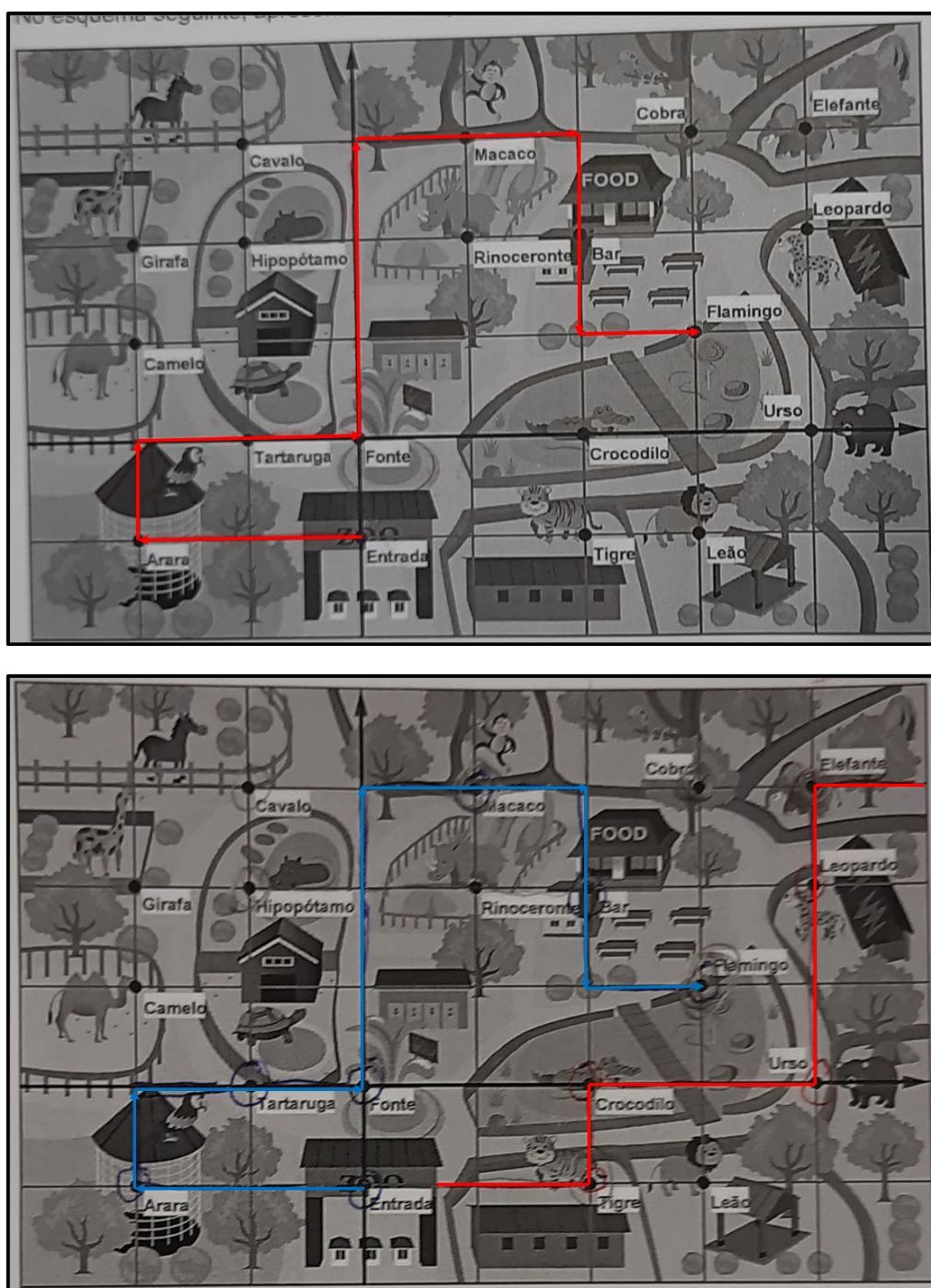


Figura 15 – Traçados de dois alunos na grelha da Tarefa 1

Apesar desses cuidados, foram identificadas algumas dificuldades de interpretação, as quais se salientam de seguida. Alguns alunos não conseguiram resolver a primeira e segunda alíneas. O aluno Pólux não atentou à indicação na primeira alínea de que era para se usar a grelha na descrição do caminho pedido nessa questão, não conseguindo, portanto, avançar na sua resolução:

Pólux: (referindo-se à questão 1) Professor, como é que eu faço esta questão?

Investigador: Atentemos de novo ao enunciado. Nele é-te dada uma indicação. (lendo o enunciado) “Descreve esse caminho recorrendo à grelha”.

Pólux: Ah! Ok. (Notas de campo, 11/03/2024)

Relativamente à questão 2, e no caso de Polaris, a aluna não soube como proceder dado que não reparara na assinalação de que o percurso retratado se iniciava na entrada do zoo:

Polaris: Aonde é que começa o trajeto do visitante?

Investigador: (indicando a expressão respetiva do enunciado) No enunciado, diz para se começar na entrada.

Polaris: Oh! (Notas de campo, 11/03/2024)

Em ambos os casos, as dúvidas foram esclarecidas simplesmente indicando aos alunos as expressões do enunciado que haviam ignorado; assim sendo, deduz-se que as dificuldades manifestadas se deveram a uma leitura rápida e pouco detalhada dos enunciados das questões associada a uma procura imediata da solução e falta de atenção, o que resultou numa recolha insuficiente da informação necessária para a resolução das mesmas.

Também a aluna Capella expressou dificuldade na compreensão textual da segunda questão. Especificamente, não compreendeu se era suposto iniciar cada um dos quatro troços descritos sempre na entrada do zoo ou se apenas deveria proceder desse modo com o primeiro, sendo que o segundo continuaria esse caminho desde o último local atingido e assim sucessivamente:

Capella: (referindo-se à questão 2) É suposto começar-se sempre na entrada em cada um destes caminhos ou começa-se aí apenas no primeiro e depois continua-se a partir de onde se ficou antes?

Investigador: É suposto começares inicialmente na entrada e depois continuares em cada ponto desde onde ficas no final do ponto anterior.

Capella: Ok. (Notas de campo, 11/03/2024)

Notando através da exposição da sua dúvida que a aluna havia ponderado toda a informação disposta nessa alínea, o que indica que a sua dificuldade não se originou por falta de atenção ou por uma leitura apressada, deduzi que a mesma foi causada pela própria estrutura do enunciado; com efeito, cada um dos quatro troços compreende vários movimentos, o que pode sugerir uma desconexão entre os mesmos, o que talvez não se suporia se, por exemplo, não se apresentasse o trajeto dividido em tais segmentos.

3. Indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando:
- (A) O cavalo está mais próximo do hipopótamo que do macaco.
 - (B) O tigre está à mesma distância do leão e do crocodilo.
 - (C) O flamingo está mais próximo do elefante que a cobra do macaco.

Figura 16 – Questão 3 da Tarefa 1

No que diz respeito à questão 3, observei que o aluno Arcturus se equivocou na resolução da alínea (C) por ter ignorado a referência ao recinto do macaco e, por isso, ter conectado tanto o do elefante como o da cobra ao do flamingo. Na subsequente nota de campo, reproduz-se a resposta inicial desse estudante:

“Não, porque o elefante está a 2 quadrículas para cima e 1 quadrícula para a direita do flamingo, enquanto a cobra está mais perto, estando somente a 2 quadrículas para cima.” (Notas de campo, 11/03/2024)

Embora esse lapso na recolha e organização de dados se poder dever a falta de atenção e a uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado, também pode ter sido induzido devido à estrutura do enunciado dado que as duas subalíneas anteriores pediam somente para considerar três recintos diferentes e não quatro, como é o caso desta.

4. Em que posição está o recinto do rinoceronte em relação à fonte? E o do hipopótamo?

Figura 17 – Questão 4 da Tarefa 1

A questão 4 também suscitou algumas dúvidas. O seu objetivo era o de apontar quantas unidades horizontais e verticais, referindo ainda a direção, os dois recintos indicados se encontravam deslocados em relação à fonte, definindo, desse modo, a sua posição relativa a esse local; uma resposta possível à primeira parte da questão seria, por exemplo: "O recinto do rinoceronte encontra-se posicionado duas unidades para a direita e duas para cima em relação à fonte". Embora a sua formulação seja distinta, a sua problemática é semelhante à da questão 1, mas, contrariamente ao disposto nessa, não é sugerida a aplicação da grelha para a sua resolução, o que confere uma maior abertura. Tal foi propositado para que o seu grau de desafio fosse ampliado e se direcionasse a discussão da tarefa, a partir da qual se introduziria formalmente o referencial cartesiano e a noção de coordenada de um ponto no plano. Assim sendo, vários alunos, inclusive alguns de bom aproveitamento na disciplina, debateram-se para compreender o que era solicitado. Ou seja, essas dificuldades na compreensão textual

do enunciado foram geradas pela construção frásica do mesmo, que, sendo mais aberta, foi pouco elucidativa.

Os dados registados aquando da concretização deste momento da intervenção pedagógica apontam para uma certa prevalência de dificuldades de interpretação respeitantes à recolha e organização de informação e à compreensão textual e linguística. A primeira categoria de dificuldades foi motivada essencialmente por leituras rápidas e descuidadas, falta de atenção e o impulso de procurar a solução das questões de imediato, estando essas causas frequentemente correlacionadas. Essas constatações denotam uma carência de hábitos de leitura dos alunos, o que, por sua vez, salienta como o devido enraizamento de tais práticas poderia prevenir o surgimento de tais embaraços, convergindo-se, assim, com as conclusões de Costa e Fonseca (2009). A segunda ordem de dificuldades, por outro lado, foi causada principalmente pela construção frásica e estrutura dos enunciados, demarcando-se a importância de uma seleção, adaptação ou elaboração de tarefas cautelosa por parte do professor, particularmente no que concerne à formulação do próprio enunciado de modo que a sua interpretação não seja despropositadamente dificultada.

5.2. Tarefa 2

Classificada como uma exploração (Ponte, 2005) inserida num contexto matemático (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) e que integra representações ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1966), a Tarefa 2 foi implementada numa aula dedicada à aprendizagem das relações entre as áreas e entre os perímetros de figuras semelhantes do tópico de *Operações com figuras* (Canavarro et al., 2021).

1. Vamos construir quadrados utilizando quadrinhos de esponja. Considera para unidade de comprimento o lado de um quadrinho.

a. Constrói quadrados de lado 2, de lado 3 e de lado 4.

Estes novos quadrados são semelhantes ao quadrinho de lado 1?

Justifica a tua resposta, indicando a razão de semelhança.

b. Preenche a tabela abaixo em que:

- **R** é a razão de semelhança quando partimos do quadrinho de lado 1 e o ampliamos para encontrar os restantes.

- **N** é o número de quadrinhos de lado 1 usados em cada figura.

Quadrados	R	Perímetro	N	Área
de lado 1				
de lado 2				
de lado 3				
de lado 4				
de lado 5				
de lado 10				
de lado 20				
de lado n				

Figura 18 – Questões 1.a. e 1.b. da Tarefa 2

Recorda-se que foi dinamizado o trabalho em grupos de 4 ou 5 elementos para a sua resolução.

Como previsto, o material manipulável (quadrinhos de esponja) incorporado na tarefa e a tabela disposta na alínea 1.b. revelaram ser um ótimo suporte para a resolução da tarefa e para o estabelecimento de relações entre as grandezas representadas. A familiaridade dos alunos com os conteúdos tratados – áreas e perímetros de polígonos simples (no caso, o quadrado) e a semelhança de figuras – também contribuiu para um melhor entendimento dos desafios propostos. Não obstante, tal como durante o episódio anterior, registaram-se diversas ocasiões em que os alunos demonstram dificuldades na resolução da tarefa, entre as quais se enfatizam as de interpretação.

Três grupos expressaram que não conseguiam iniciar a resolução da tarefa por não saberem que unidade de medida deveriam adotar, o que salienta que não haviam atentado à indicação no segmento introdutório de que a unidade de medida correspondia à medida do comprimento do lado de um quadradinho de esponja. Similarmente a casos analisados na subseção anterior, essa dificuldade na recolha de informação foi ocasionada por uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado relacionada com uma procura imediata da solução e falta de atenção.

Ainda em referência a essa primeira alínea, um quarto grupo considerou a razão de semelhança R entre os quadrados construídos e o quadradinho de lado 1 igual ao número N de quadradinhos de lado 1 usados na construção dos maiores, segundo me explicaram quando interpelei os membros desse grupo. Também de acordo com o que se pode visionar na Figura 19, esse erro estava a ser transposto para a alínea 1.b. quando foi identificado. Dado que o conceito de semelhança havia sido lecionado recentemente, atribuem-se estas dificuldades a falta de domínio dos conceitos e conteúdos matemáticos envolvidos na tarefa.

1. Vamos construir quadrados utilizando quadradinhos de esponja. Considera para unidade de comprimento o lado de um quadradinho.

a. Constrói quadrados de lado 2, de lado 3 e de lado 4. ✓

Estes novos quadrados são semelhantes ao quadradinho de lado 1? *sim.*

Justifica a tua resposta, indicando a razão de semelhança. *a razão de semelhança para o quadrado de lado 2 é 2 e para o de lado 3 é 3 e para o de lado 4 é 4*

b. Preenche a tabela abaixo em que:

- R é a razão de semelhança quando partimos do quadradinho de lado 1 e o ampliamos para encontrar os restantes.
- N é o número de quadradinhos de lado 1 usados em cada figura.

Quadrados	R	Perímetro	N	Área
de lado 1	1	4	1	1
de lado 2	2	8	4	4
de lado 3				
de lado 4				
de lado 5				
de lado 10				
de lado 20				
de lado n				

Figura 19 – Resolução das questões 1.a e 1.b. do quarto grupo referenciado

A respeito da segunda questão, enquanto circulava pela sala de aula, constatei que duas alunas de grupos diferentes – Bellatrix e Vega – estabeleceram a relação incorreta

de que o número N de quadradinhos de lado 1 utilizados na construção dos quadrados maiores equivale ao dobro da medida n do respetivo lado, ou seja, $N = n \times 2$ (Figura 20). Esse equívoco originou-se visto que essa relação é verdadeira para o caso do quadrado de lado 2, a partir do qual as alunas afirmaram que estabeleceram a relação descrita, preenchendo as entradas posteriores da tabela recorrendo unicamente à mesma. Assim sendo, alia-se essa dificuldade na definição de conexões entre as grandezas tratadas a uma mecanização dos procedimentos implicados motivada por uma procura imediata da solução, além de, possivelmente, falta de prática na recolha, organização e tratamento de dados, pois, conforme referido, o estabelecimento dessa relação incorreta surge na análise do 2.º caso quando a quantidade de dados ainda é reduzida e, como tal, não se deve proceder prontamente com a formulação de tais conjecturas.

b. Preenche a tabela abaixo em que:

- R é a razão de semelhança quando partimos do quadradinho de lado 1 e o ampliamos para encontrar os restantes.
- N é o número de quadradinhos de lado 1 usados em cada figura.

Quadrados	R	Perímetro	$N \times 2$	Área
de lado 1	1	$1 \times 4 = 4$	1	$1 \times 1 = 1$
de lado 2	2	$2 \times 4 = 8$	4	$2 \times 2 = 4$
de lado 3	3	$3 \times 4 = 12$	9	$3 \times 3 = 9$
de lado 4	4	$4 \times 4 = 16$	8	$4 \times 4 = 16$
de lado 5	5	$5 \times 4 = 20$	10	$5 \times 5 = 25$
de lado 10	10	$10 \times 4 = 40$	20	$10 \times 10 = 100$
de lado 20	20	$20 \times 4 = 80$	40	$20 \times 20 = 400$
de lado n	n	$n \times 4$	$n \times 2$	$n \times n$

Figura 20 – Resolução da questão 1.b. da aluna Vega⁴

Resta descrever as dificuldades de interpretação anotadas relativas à última alínea.

⁴ Quando se fotografou esta resolução, a dúvida já havia sido esclarecida e a aluna já tinha iniciado a respetiva correção. Por esse motivo, a entrada da tabela respeitante ao número N de quadradinhos de lado 1 que constituem o de lado 3 está já corrigida, indicando o valor correto, 9, em vez do incorreto, 6.

c. Consegues estabelecer alguma relação entre as razões de semelhança e os perímetros dos vários quadrados? E entre as razões de semelhança e as suas áreas?

Figura 21 – Questão 1.c. da Tarefa 2

Nessa questão, notei que as alunas Canopeia e Vega assumiram que era exigido que se procurassem as razões entre as razões de semelhança R e os perímetros, assim como as razões entre as razões de semelhança R e as áreas respectivas. A título ilustrativo, reproduzem-se as respostas dessas alunas na seguinte nota de campo:

$$\frac{R}{\text{Perímetro}} = \frac{n}{n \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{R}{\text{Área}} = \frac{n}{n \times n} = \frac{1}{n}$$

(Notas de campo, 13/05/2024)

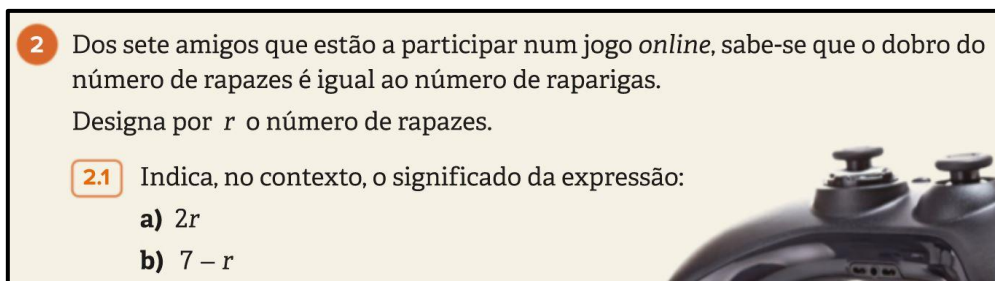
Tal incorreção na determinação das conexões entre os conceitos matemáticos demarcados pode ter-se devido a várias causas. Em primeiro lugar, pode ter-se ocasionado como consequência de uma mecanização dos conceitos matemáticos subjacentes dado que as alíneas anteriores exigiram uma manipulação dos mesmos análoga à efetuada pelas alunas neste momento. Essa automatização de conteúdos também pode ter sido influenciada por uma leitura rápida e pouco detalhada do enunciado associada a uma procura imediata da solução. Por outro lado, a construção frásica da questão, que era mais aberta, conjuntamente com a estrutura da tarefa em si, na qual se incutiu ininterruptamente o cálculo de razões de semelhança, poder ter sido igualmente um fator na interpretação desta alínea pelas duas alunas.

Esta segunda componente da intervenção pedagógica reforçou as observações da antecedente. Especificamente, evidenciaram-se dificuldades respeitantes à recolha e organização de dados despoletadas por leituras breves e superficiais dos enunciados e por buscas por uma solução rápida às questões tratadas; além disso, apreciou-se novamente o impacto que a forma do enunciado exerce sobre a interpretação dos alunos. Sem embargo, assinalaram-se novas situações neste episódio. Entre essas, destacam-se as dificuldades no domínio de conceitos matemáticos e no estabelecimento de conexões entre os mesmos, sendo as da segunda classe frequentemente advindas de mecanizações de conteúdos e procedimentos relacionadas com uma indagação por uma resposta instantânea aos desafios propostos. Salienta-se que as representações matemáticas incorporadas na tarefa – em especial,

as do tipo ativo – foram cruciais na superação dessas dificuldades, o que confirma o papel essencial das representações como suporte à atividade matemática e, em particular, à interpretação defendido por vários autores (Canavarro et al., 2021; NCTM, 2000).

5.3. Tarefa 3

Descrita como um problema (Ponte, 2005) de determinação (Polya, 1995) inserido num contexto de realidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) que envolve representações simbólicas (Bruner, 1966), a Tarefa 3 foi o cerne do trabalho desenvolvido nas entrevistas realizadas com os alunos Arcturus, Sirius e Vega, cujo nível de desempenho na disciplina de Matemática era 3, 4 e 5, respetivamente. O propósito da tarefa era o de incutir as capacidades de tradução de informação de linguagem corrente para matemática e vice-versa e de resolução de problemas que envolvam equações do 1.º grau a uma incógnita, analisando ainda a adequação da solução obtida no contexto do problema; assim sendo, a tarefa compreende conteúdos de aprendizagem do tópico *Expressões algébricas e equações* (Canavarro et al., 2021).



2 Dos sete amigos que estão a participar num jogo *online*, sabe-se que o dobro do número de rapazes é igual ao número de raparigas.
Designa por r o número de rapazes.

2.1 Indica, no contexto, o significado da expressão:

a) $2r$
b) $7 - r$

Figura 22 – Primeira questão da Tarefa 3

Contrariamente aos das duas antecedentes, o enunciado desta tarefa é suportado unicamente por um formato textual, o que obriga a que a sua interpretação se baseie unicamente na sua leitura.

Arcturus leu o enunciado com algum cuidado e fez menção de registar a informação dada; no entanto, apenas registou os valores dados, desprezando as incógnitas apresentadas (Figura 23). Além disso, enquanto explicava o seu raciocínio, foi apontando com o lápis os elementos do enunciado que ia referindo e escrevendo algumas anotações no enunciado.

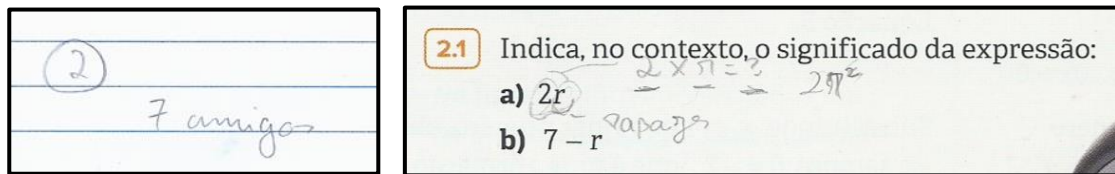


Figura 23 – Dados registados e anotações escritas no enunciado da Tarefa 3 pelo aluno Arcturus

A aluna Vega atentou ao enunciado com algum cuidado, apesar de não ter anotado os dados atribuídos. O aluno Sirius, por outro lado, leu o enunciado com pouco zelo, não registou a informação dada nem a destacou no enunciado. Naturalmente, esses hábitos de proceder a uma leitura breve e de abstenção de organização de dados deveu-se muito provavelmente a ímpetos como procurar imediatamente a solução da tarefa. Sendo alunos de bom aproveitamento na disciplina, essas atitudes comportadas pelos alunos podem ter sido igualmente potenciadas por excesso de confiança nas suas próprias capacidades, o que coincide com as observações de Nunes (2017) a respeito da influência na interpretação de fatores externos à atividade matemática.

Os alunos Sirius e Vega não demonstraram qualquer dificuldade na resolução da primeira subálnea da tarefa, tendo interpretado e respondido acertadamente à alínea com facilidade, como se pode notar no subsequente excerto:

Sirius – Então, professor, no a), o contexto do $2r$, como o dobro do número de rapazes é o número de raparigas, significa que... Aqui diz que r é o número de rapazes, então duas vezes o número de rapazes, como aqui diz, é o número de raparigas. Então, no contexto, significa que é o número de raparigas. (Entrevista, Sirius, 13/06/2024)

O aluno Arcturus, contudo, manifestou mais dificuldades no mesmo momento. Em primeiro lugar, afirmou que não podia saber qual é o valor das expressões porque não é atribuído o número de rapazes, não notando que a alínea não exige que se proceda ao cálculo desse valor; em vez disso, pretende-se que se explicita meramente o significado das expressões no contexto da tarefa.

Arcturus – Isto podia ser 2 vezes o número de rapazes.

Investigador – Certo. E 2 vezes...

Arcturus – Só que nós não sabemos o número de rapazes.

Investigador – Exato. E o que pede a questão, então? (começando a ler o enunciado) “Indica, no contexto”... O quê?

Arcturus – (lendo o enunciado) “Indica, no contexto, o significado da expressão”.

Investigador – Então, pede o significado dessa expressão, ou seja, o que essa expressão representa nesta situação.

Arcturus – Ah! Então, está aqui. 2 vezes o número de rapazes. (Entrevista, Arcturus, 5/06/2024)

Além disso, não reteve inicialmente que o número de raparigas é o dobro do de rapazes, tendo demorado, por isso, a estabelecer essa conexão entre os números de rapazes e raparigas.

Investigador – E a que é que equivale o dobro do número de rapazes?

Arcturus – O dobro de rapazes é igual a $2r$. Ou r ... sim, $2r$.

Investigador – Sim, $2r$. O r representa o número de rapazes e isto, então, é duas vezes o r , isto é, é o dobro de r , não é?

Arcturus – Sim.

Investigador – Dobro do número de rapazes. Pronto. No contexto, o que é que ele [o enunciado] te diz que é igual a isso?

...

Investigador – Nós aqui não estamos à procura de um número. Temos apenas este contextozinho, não é? Esta história. Nesta história, o que é que esta expressão quer dizer?

Arcturus – Quer dizer, o... o 2... 2... porquê 2? Ah! Por causa do dobro... Nós sabemos que os rapazes são o dobro das raparigas. (relendo brevemente o enunciado) “Sabe-se que o dobro dos”... “o dobro dos rapazes é igual ao número de raparigas”. Sendo assim, o 2... geralmente, é para fazer contas para multiplicar...

Investigador – Exato.

Arcturus – Sendo assim... isto é o dobro e isto são os rapazes... o resultado desta conta dar-nos-ia o número de raparigas. (Entrevista, Arcturus, 5/06/2024)

Embora, tal como declarado, o aluno tivesse lido o enunciado cuidadosamente e superado ambas as dúvidas após ter relido o mesmo, estas dificuldades na recolha dos dados do enunciado denotam que a sua leitura inicial foi demarcada por falta de atenção correlacionada com uma antecipação expectante do que este tipo de tarefas problematiza, induzindo-se uma procura imediata da solução.

No entanto, após compreender o que a alínea solicitava, o aluno Arcturus resolveu a subalínea posterior com correção e destreza, como se pode constatar no excerto seguinte:

Arcturus – Então, agora, b). b) é 7, que é o total de amigos, menos o número de rapazes.

Investigador – Certo. Ficas, então, com o quê?

Arcturus – Hum... o significado da expressão é para separar os rapazes dos 7 amigos para ver quantas raparigas no total temos no jogo. (Entrevista, Arcturus, 5/06/2024)

Curiosamente, os outros dois alunos exteriorizaram uma situação recíproca, pois, embora resolvessem a primeira subálnea com facilidade, debateram-se com o solucionamento da segunda.

Similarmente ao lapso de Arcturus na questão anterior de não reter a informação assinalada no enunciado, o aluno Sirius não reconheceu que se tinha concedido ao número 7 um significado no contexto da tarefa – o valor do total de amigos no grupo – tal como se pode averiguar no excerto subsequente:

Investigador – E, agora, $7 - r$, o que é que tu achas?

Sirius – Basicamente, eu teria de... subtrair 7 ao número de rapazes. Seria isso o significado?

Investigador – Então, a 7 estamos a tirar o r . O r é o número de rapazes, certo?

Sirius – Sim.

Investigador – 7 era o quê?

Sirius – Aqui não diz.

Investigador – Não sabemos o que é que é o 7? Tentamos reler o enunciado? (o aluno relê o enunciado)

...

Sirius – Eu não estou a entender. Este é só um número ou...?

Investigador – É um número, sim. Agora, esse 7... É dito aqui nalgum sítio de onde vem o 7?

Sirius – Não. (o aluno volta a reler o enunciado) Ah!

Investigador – É dos 7 amigos, não é?

Sirius – Sim. (Entrevista, Sirius, 13/06/2024)

Naturalmente, estas falhas na recolha e organização de dados foi certamente o resultado da leitura desatenta de Sirius que se observou previamente.

Todavia, notou-se uma dúvida comum a Sirius e a Vega; especificamente, os alunos assumiram que o grupo de amigos é composto por 7 rapazes além de um número indefinido de raparigas, o que não é o pressuposto na tarefa. Ambos alunos sustentaram a sua suposição com o facto de que, se o número de rapazes e o de raparigas reunissem um grupo constituído no total por 7 elementos, a situação descrita no enunciado seria implausível. Se bem que essa observação era verdadeira (a qual se intencionava que fosse apontada apenas na alínea seguinte), os alunos desviaram-se do propósito da questão de interpretar o significado das expressões apresentadas no contexto da tarefa,

apegando-se aos valores que presumiram que as mesmas deveriam deter. Efetivamente, o excerto seguinte ilustra a situação referente ao caso de Vega:

Vega – $[7 - r]$ Significa que os... é o número 7 mais... menos... são 7 os rapazes, por isso...

Investigador – (repetindo o que a aluna disse) São 7 os rapazes. E o...

Vega – Porque está a dizer... O número de raparigas, se seguisse a minha lógica, eram 14, porque 7 e 7 são 14, e 14 menos 7 é igual ao número de rapazes. Porque, se dividíssemos 7, não dava um número inteiro e não podemos ter meios-rapazes, certo?

Investigador – Pois. Estás, então, a dizer que há 7 rapazes e as raparigas, como são o dobro, têm de ser 14.

Vega – Sim.

Investigador – Ok, entendo a tua lógica. (Entrevista, Vega, 6/06/2024)

Analogamente, dispõe-se de seguida o segmento respetivo da entrevista a Sirius:

Sirius – Os 7 amigos rapazes, certo?

...

Investigador – O que é que tu dizes? Achas que se refere aos dois [rapazes e raparigas] ou só aos rapazes?

Sirius – Eu acho que se refere só aos rapazes, porque se eu dividir 7 por 2... se eu dividir 7 por 2... Não, não, calma. Não, calma. Então...

...

Investigador – Então, achas que os 7 incluem as raparigas ou não?

Sirius – Então, só se fosse... Mas, assim, como é que eu... como é que eu faço isso? Porque 7 é um número ímpar.

Investigador – Pois.

Sirius – Então, imagine, se há 4 raparigas, depois tem de haver 3 rapazes, mas 3 vezes 2 não dá 4. (Entrevista, Sirius, 13/06/2024)

Como se pode entrever nos dois excertos, estes lapsos surgiram devido à presença do termo 7 na expressão disposta. Tendo sido alertados para o significado desse elemento da expressão no contexto da tarefa, Vega e Sirius intuíram que a mesma era impossível, passando, então, a formular oralmente estratégias resolutivas e, assim, a confirmar as suas suspeitas. Contudo, os alunos confundiram a implausibilidade numérica da tarefa no seu contexto com a impossibilidade de atribuir um significado à expressão atribuída, ou seja, de resolver a subálnea em causa. Assim sendo, estas dificuldades podem ter sido causadas pelo facto de os alunos não estarem acostumados a trabalhar com tarefas com desafios semelhantes ao desta subálnea, que exigia, particularmente, a abstração da informação irrelevante para o seu solucionamento. Esse desábito e falta

de poder abstrativo, com certeza, condicionaram o seu entendimento e, consequentemente, o seu desempenho na sua resolução.

Sem embargo, a construção frásica do texto introdutório da tarefa pode ter sugestionado aos dois alunos a sua posição. Com efeito, a palavra «amigos», aplicada na referência ao grupo de 7 tais indivíduos, é do género masculino, o que pode desorientar um leitor fazendo-o crer que esse grupo contém 7 rapazes e um número indeterminado de raparigas. Nesse caso, as suas falhas demarcam-se por dificuldades na compreensão linguística do enunciado.

Trata-se, agora, o desempenho destes três alunos na última questão da tarefa, a qual se exhibe na Figura 24.

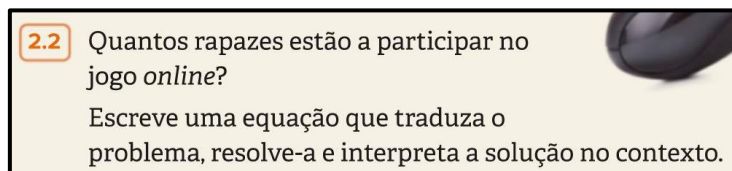


Figura 24 – Última questão da Tarefa 3

Nota-se que as duas expressões apresentadas na primeira alínea da tarefa são dadas como apoio à construção da equação pedida nesta alínea, visto que detêm o mesmo significado no seu contexto e, como tal, representam quantidades equivalentes. Também se aponta que a solução que se alcança nesta alínea ressalta a impossibilidade da situação descrita na tarefa, pois implica a existência de 2,333... rapazes no grupo de amigos, o que, dado que não se trata de um valor natural, é absurdo.

Relembra-se que os conceitos matemáticos abordados nesta tarefa, que concernem conteúdos do tópico *Expressões algébricas e equações* (Canavarro et al., 2021), haviam sido estudados meses antes da concretização das entrevistas. Além disso, não se incutira o trabalho com tarefas com problemáticas semelhantes à desta. Por esse motivo, previu-se que o desábito no tratamento com essas matérias condicionaria o domínio dos alunos das mesmas e, consequentemente, o seu desempenho na resolução da tarefa. Efetivamente, tal verificou-se em todas as entrevistas, em particular, aquando da resolução desta última questão. Os três alunos necessitaram que se procedesse a uma revisão do que constitui uma equação do 1.º grau a uma incógnita e dos princípios de equivalência de equações do 1.º grau a uma incógnita.

Essa dificuldade no entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa é ainda mais evidente pelo facto de os três alunos terem percecionado cedo nos seus processos de resolução a implausibilidade da situação descrita no contexto, tendo cada um elaborado por alto estratégias como a de tentativa e erro que comprovam esse facto, como se pode entrever nos ulteriores excertos:

Arcturus – Temos 7 amigos... 7 amigos... o dobro [do número de rapazes] é [o número de] raparigas... Mas é impossível calcular o dobro [do número de rapazes] em 7 amigos. Tendo 7 amigos e, por exemplo, 2 rapazes; [2] vezes 2 é igual a 4. 3 vezes 2 é igual a 6. 4 vezes 2 é igual a 8. Nós temos 7 [amigos]. É impossível, tecnicamente, conseguir o número de rapazes ou de raparigas. (Entrevista, Arcturus, 5/06/2024)

Vega – Por exemplo, hmm... se eu quisesse sab... tentar várias possibilidades, mas, já que temos de saber o dobro, hmm... nós nunca conseguiríamos dividir aquilo certinho, porque 7 não dá para dividir, tipo, de várias formas. (Entrevista, Vega, 6/06/2024)

Sirius – Então, se o dobro de rapazes é igual ao número de raparigas... Para começar, temos de dividir 7 em partes, acho eu. Por exemplo, eu tenho... Porque assim não dá certo, porque se eu tiver 3 rapazes na festa, o dobro de rapazes seria igual ao número de raparigas, mas o dobro de 3 é 6 e só sobriam 4 espaços. (Entrevista, Sirius, 13/06/2024)

Nos casos de Arcturus e Sirius, os alunos utilizaram estes argumentos para justificar que não era possível resolver a equação pedida no contexto, o que, mais uma vez, é verdade no sentido de que a sua solução não pode ser um número natural. Por outro lado, a aluna Vega recorreu de imediato a este raciocínio para resolver a questão, ignorando a indicação de que se deveria compor uma equação que se enquadrasse na situação descrita, o que indica que a leitura efetuada por essa aluna desta alínea foi precipitada por uma procura direta pela solução.

Nas suas primeiras tentativas na formulação de uma equação que traduzisse o problema, nenhum dos alunos fez menção de empregar ambas as expressões da alínea inicial na sua equação, as quais, conforme referido e pretendido, deveriam servir como suporte a essa construção. De facto, como se pode observar na Figura 25, os alunos Arcturus e Sirius conceberam até uma nova incógnita – ra e x , respetivamente – para representar o número de raparigas, a qual igualaram a uma das expressões anteriormente trabalhadas, desprezando a restante.



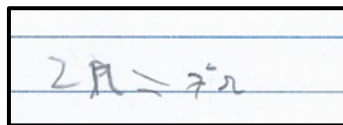
$ra = r \times 2$

$7 - r = x$

Figura 25 – Primeiras expressões formuladas, da esquerda para a direita, por Arcturus e Sirius

Naturalmente, estas expressões primárias revelaram-se insuficientes e, conseqüentemente, inconclusivas para o solucionamento da questão. A sua formulação aponta uma falta de prática dos alunos na resolução de tarefas que, semelhantes à em evidência, implicam a tradução de situações reais para simbologia matemática.

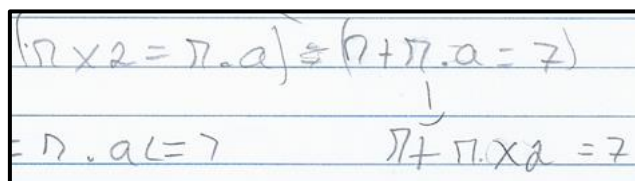
Mesmo após se aludir que se poderia fazer uso das expressões da alínea antecessora, apenas Sirius compreendeu que as poderia igualar, construindo, assim, a equação esperada (Figura 26).



$$2r = 7r$$

Figura 26 – Segunda equação formulada por Sirius

O aluno Arcturus, embora compreendesse que possuíam o mesmo significado, não depreendeu que essas expressões detinham o mesmo valor no contexto da tarefa, o que demarca uma prática escassa na lida com tais representações. Não obstante, conseguiu traduzir por meio de uma equação que o total de rapazes e raparigas é igual a 7, escrevendo a equação $r + ra = 7$, que ainda faz uso da incógnita que acrescentara previamente. Recorrendo à igualdade do seu primeiro ensaio, entendeu que poderia substituir essa incógnita pela expressão $r \times 2$, o que permitiu solucionar a alínea (Figura 27).

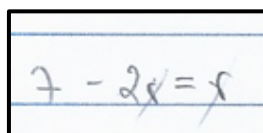


$$(r \times 2 = r.a) \Rightarrow (r + r.a = 7)$$

$$r.a = 7 \quad r + r \times 2 = 7$$

Figura 27 – Segunda equação formulada por Arcturus

A aluna Vega, por outro lado, construiu uma outra equação autonomamente (Figura 28).



$$7 - 2x = x$$

Figura 28 – Segunda equação formulada por Vega

Com o apoio do investigador, nomeadamente na revisão dos princípios de equivalência de equações, os três alunos conseguiram resolver as suas equações e atingir o valor da incógnita r , como se pode constatar na Figura 29.

Handwritten work for three students:

- Arcturus:** $7r + 2r = 7$
 $\left(\frac{30}{3} = \frac{7}{3} = \right)$
 $7 = 2,3...$
- Vega:** $7 = r + 2r$
 $2 = 3r$
 $r = 2,333...$
- Sírius:** $7 - r + r = 2r + 2$
 $2,3 = 3r : 3$
 $2,3 = r$

Figura 29 – Resoluções das equações, da esquerda para a direita, por Arcturus, Vega e Sírius

Resolvidas as equações, restava interpretar a solução obtida no contexto, concluindo-se que, sendo a mesma um valor não natural, a situação descrita na tarefa é irreal. Como se pode visualizar nos excertos seguintes, Arcturus e Vega interpretaram devidamente o resultado que alcançaram, percebendo rapidamente que não se apropria ao contexto real da tarefa.

Investigador – Portanto, nós termos 2 rapazes ou 3 não estava a fazer com que esta situação tivesse muito sentido, não é? Mas faria sentido se tivéssemos 2,3333... rapazes.

Arcturus – Só que os rapazes não são divididos. Tipo, não os podemos cortar ao meio.

Investigador – Exato. Portanto, que é que podes dizer desta situação? Faz sentido?

Arcturus – Não. (Entrevista, Arcturus, 5/06/2024)

Investigador – O que é que achas disso de termos 2,333... rapazes?

Vega – Não é possível.

Investigador – (repetindo o que a aluna disse) Não é possível.

Vega – (repetindo) Não é possível. É uma solução não determinada.

Investigador – Pronto, então, neste caso... Esta situação que é descrita, termos...

Vega – Isto está errado!

Investigador – ...um certo número de rapazes, as raparigas serem o dobro [dos rapazes] e no total serem 7.

Vega – Mas não dá para ser 7.

Investigador – (repetindo e confirmando o que a aluna disse) Não dá. Então, a situação que está aqui a ser descrita é possível?

Vega – Não! (Entrevista, Vega, 6/06/2024)

Sirius, no entanto, satisfizera-se inicialmente com valores arredondados da solução, respeitante ao número de rapazes, e do número de raparigas, os quais (2 e 5, respetivamente) não respeitam a condição de que o total de raparigas é o dobro do de rapazes. Essa ação incorreta pode ter advindo do desejo do aluno de ajustar os valores determinados à situação apontada no enunciado ou da falta de prática no trabalho com tais problemáticas – em específico o tratamento com valores exatos independentemente de serem naturais ou não – ou de uma mera mecanização de procedimentos condicionados. Em todo o caso, o aluno ignorou a condição referenciada ao proceder ao arredondamento dos resultados, o que distingue uma certa desatenção e falta de retenção da informação dada no enunciado. Sem embargo, depois de ter sido indicado pelo investigador que deveria considerar os valores exatos, o aluno reconheceu sem dificuldade que a solução não se enquadra no contexto da tarefa, tal como se denota no excerto seguinte:

Investigador – Interpretando no contexto, o que é que quer dizer o r ser igual a 2,3?

Sirius – O r ser igual a 2,3 quer dizer que o número de rapazes é 2, tecnicamente. E o de raparigas é 5, arredondado.

Investigador – Arredondado, não é? (indicando o número 2,3 na folha de resposta do aluno) Mas o valor exato é este.

Sirius – (confirmando) É 2,3.

Investigador – O valor exato é este, não é? Que é o 2,33333... Ok. Estamos a falar de rapazes e raparigas, certo? Ao bocado, estavas-me a dizer que não fazia muito sentido ter 2,5 rapazes, não é?

Sirius – Sim.

Investigador – E 2,3, faz sentido?

Sirius – Não!

Investigador – (repetindo e confirmando o que o aluno disse) Não. Concordo. Então, achas que faz sentido esta situação de haver 7 amigos e as raparigas serem o dobro dos rapazes?

Sirius – Não. (Entrevista, Sirius, 13/06/2024)

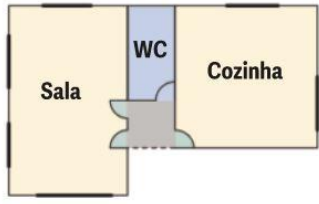
Em suma, nesta terceira instância da intervenção pedagógica reafirmaram-se algumas das evidências anotadas anteriormente e registaram-se outras não observadas até então. Redescobriram-se dificuldades e causas respetivas como falhas na recolha e organização de informação e na compreensão textual devidas a leituras desatentas e

fugazes fundadas, por sua vez, por procuras apressadas pelas soluções das questões, por mecanizações de procedimentos ou por obstáculos impostos pela própria construção frásica do enunciado. Entre as novas situações identificadas, destacam-se a perda do hábito no domínio dos conceitos e conteúdos matemáticos envolvidos, que forçou, em particular, a sua revisão, e a falta de prática na realização de tarefas similares à proposta, principalmente no que concerne a compreensão e manipulação das representações implementadas. Com efeito, apesar de, em geral, terem tratado positivamente com o contexto de realidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000) apresentado, os alunos manifestaram bastantes dificuldades na adaptação às representações simbólicas (Bruner, 1966) dispostas, nomeadamente aquando da tradução de certos elementos do enunciado de linguagem corrente para simbólica e vice-versa. Essas ocorrências corroboram com as orientações curriculares atuais da disciplina de Matemática (Canavarro et al., 2021) e as declarações de Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020) de que a interpretação de determinadas representações depende da familiaridade e destreza dos alunos com as mesmas.

5.4. Tarefa 4

Por fim, analisam-se os dados agregados durante a resolução da Tarefa 4. Igualmente à antecedente, esta tarefa é classificada como um problema (Ponte, 2005) de determinação (Polya, 1995) que retrata um contexto de realidade (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000), mas que inclui uma representação icónica ao invés de uma simbólica (Bruner, 1966). Conforme referido no terceiro capítulo, pretendia-se implementar a Tarefa 4 nas três entrevistas realizadas; todavia, por razões relacionadas com a gestão do tempo disponível, somente a aluna Vega se debruçou sobre a mesma. Também se recorda que, embora o objetivo da tarefa fosse o de estimular a resolução de problemas que envolvem a definição e uso de funções de proporcionalidade direta, como não se atingiu a segunda alínea, que era a que implicava a mobilização de tais conceitos, a aluna aplicou conteúdos respeitantes ao tópico de *Operações com figuras* (Canavarro et al., 2021).

13 Observa parte de uma planta de uma casa feita à escala 1 : 150 .



13.1. Na planta, a cozinha é um quadrado com 9 cm^2 de área e o WC um retângulo de 1 cm por 2 cm .

Determina:

- as dimensões reais da cozinha;
- a área real do WC .

Figura 30 – Primeira questão da Tarefa 4

Desta vez, contrariamente à sua atuação durante a leitura do enunciado da Tarefa 3, Vega não só leu atentamente o enunciado, como anotou na sua folha de respostas a informação cedida, recorrendo até a um esquema simples para a organização dos dados referentes às dimensões do WC na planta da casa (Figura 31). O emprego dessa representação como suporte à interpretação compatibiliza-se com as observações efetuadas por Pinto e Canavarro (2012) no desenvolvimento do seu estudo, no qual os alunos participantes atuaram de modo similar.

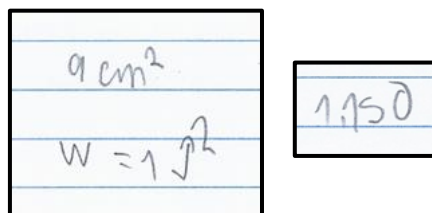
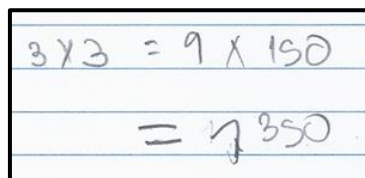


Figura 31 – Dados registados pela aluna Vega

Essa alteração na sua atitude na recolha de informação pode ser devida à experiência prévia com a Tarefa 3, que se realizara durante a mesma entrevista, tendo tomado uma postura mais cautelosa por isso. Acordando com as asseverações de Costa e Fonseca (2009), tal observação, conjuntamente com as dificuldades relativas à desabituação no trabalho com determinados desafios previamente registadas, realça a importância do treino com tarefas diversificadas como promotor do aprimoramento da capacidade de interpretação.

Similarmente ao sucedido na Tarefa 3, Vega revelou falta de compreensão dos conceitos matemáticos. Especificamente, na subálínea inicial, a aluna aplicou a escala a valores de área enquanto a mesma se refere a medidas de comprimento, como se nota na Figura 32; além disso, não se recordou do que se referem as dimensões de um polígono. Como anteriormente, o investigador reviu esses conteúdos de modo a apoiar a entrevistada na superação dessas dificuldades.



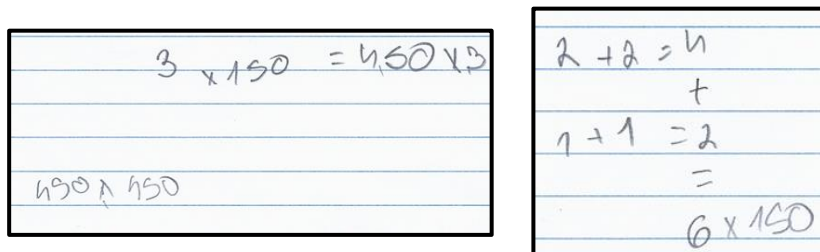
$$3 \times 3 = 9 \times 150$$

$$= 1350$$

Figura 32 – Primeira resposta da aluna Vega à primeira subálínea

Essas dificuldades no domínio desses conceitos podem ter sido motivadas pelo facto dos mesmos terem sido abordados pouco tempo antes e, por essa razão, Vega podia ainda não ter desenvolvido plenamente a sua dexteridade na operação com os mesmos. Tal como apontado a respeito da sua melhoria na organização dos dados, essa possibilidade reforça a declaração acerca da relevância de uma prática regular com tarefas de naturezas diversas e que englobam, em especial, conteúdos matemáticos distintos.

Como se pode visionar na Figura 33, na primeira subálínea, a aluna determinou a área real da cozinha e, na segunda, calculou o perímetro real do WC embora se solicitassem, respetivamente, as dimensões e a área reais dessas divisões. Considera-se que tal lapso tenha decorrido devido a uma leitura rápida do enunciado e desatenção, além de possivelmente uma indagação imediata pelas soluções.



$$3 \times 150 = 450 \times 3$$

$$450 \times 450$$

$$2 + 2 = 4$$

$$+$$

$$1 + 1 = 2$$

$$=$$

$$6 \times 150$$

Figura 33 – Segunda e primeira respostas da aluna Vega à primeira (esquerda) e segunda (direita) subálíneas, respetivamente

Em relação à primeira subálínea, esse erro também se pode dever ao facto de se atribuir no enunciado a área da cozinha e as dimensões do WC na planta e se pedir o inverso

na realidade, isto é, as dimensões e área reais da cozinha e do WC, respetivamente, o que pode ter gerado confusão à aluna. Nesse caso, evidencia-se a estrutura do enunciado como potencial causa desse equívoco.

Não obstante, Vega interiorizou os conteúdos revistos e, após ser alertada, entendeu os seus lapsos com facilidade, desenvolvendo autonomamente novas estratégias que lhe permitiram resolver as questões com correção. Na Figura 34, expõem-se essas produções.

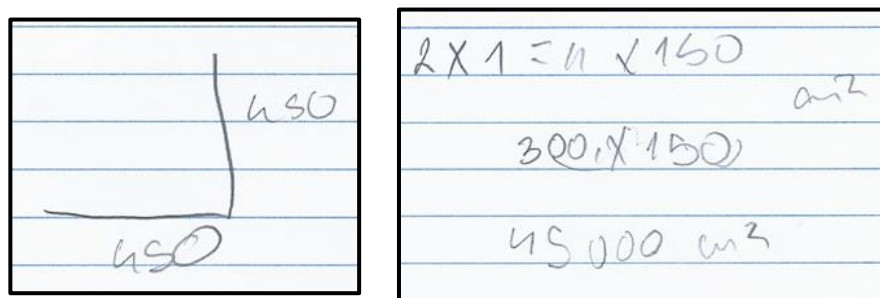


Figura 34 – Respostas finais da aluna Vega à primeira (esquerda) e segunda (direita) subálneas

Evidenciando-se mais claramente uma dessas situações, exibe-se, de seguida, um excerto relativo à correção da resolução da segunda subálnea:

Vega – E a área do WC seria, basicamente... se sabemos as dimensões... isto é um retângulo... (enquanto regista o seu raciocínio) Teríamos 2 mais 2 igual a 4. 1 mais 1 igual a 2. 2 mais 4 igual a 6. 6 vezes 150. E ia dar o resultado.

Investigador – Isso seria o perímetro, certo?

Vega – Sim.

Investigador – Ok. Ele [o enunciado] pede a área.

Vega – Oh!

Investigador – Estarias a pensar bem, mas ele [o enunciado] pede a área. Se fosse o perímetro, estaria certíssimo.

Vega – Ok. Então, é 5... A área do retângulo é base vezes altura, certo?

Investigador – Sim.

Vega – Ok. (registando o seu raciocínio) Então, seria 2 vezes 1 [na planta], que é igual a x vezes 150 [na realidade]. E depois podemos pôr centímetros quadrados no final.

...

Vega – Ou seja, este valor [x] vai ser igual a... A área do WC vai ser igual a esse valor [x] vezes 150. (Entrevista, Vega, 6/06/2024)

Os dados perscrutados nesta subsecção fortalecem as análises concretizadas nas antecedentes. Novamente se notaram momentos em que a aluna demonstrou falhas na recolha de informação, apesar do seu maior cuidado nesse aspeto, o que indicia uma leitura do enunciado não tão atenta e a frequente busca imediata pelos resultados das questões, embora também se tenha indicado que, como em casos anteriores, a estrutura do enunciado pode ter sido igualmente um fator na incidência desses lapsos. Observaram-se, ainda, dúvidas na compreensão dos conceitos e conteúdos matemáticos implicados.

Denota-se que, distintamente do seu desempenho aquando da resolução da Tarefa 3, Vega não revelou dificuldades no tratamento com as representações atribuídas, que eram do tipo icónico e não do simbólico (Bruner, 1966), como era o caso da tarefa anterior. De facto, em todos os momentos da intervenção pedagógica, os alunos transpareceram menos aptidão no trabalho com representações simbólicas que com as restantes. Essa peculiaridade pode ser um indicador da maturidade matemática dos alunos, dado que é apenas no 3.º ciclo do Ensino Básico, do qual o 7.º ano de escolaridade é o inicial, que se começa a recorrer “à abstração e ao formalismo a níveis progressivamente mais elevados” (Canavarro et al., 2021, p. 9).

6. Conclusões e recomendações

Este capítulo final inicia-se com uma breve síntese do estudo, na qual se inclui o objetivo e as questões de investigação e se faz referência à respetiva metodologia. Seguidamente, apresentam-se e discutem-se, confrontando com a literatura revista, as principais conclusões do estudo, procurando-se responder às questões de investigação. Por último, compõe-se uma reflexão final, na qual se contemplam as implicações deste trabalho para o meu desenvolvimento profissional, ponderam as suas limitações e perspetivam investigações futuras que possam decorrer do trabalho realizado.

6.1. Breve síntese do estudo

O objetivo deste estudo foi o de identificar dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas matemáticas, assim como as respetivas causas, tendo-se definido as seguintes questões de forma a orientar a investigação a desenvolver:

- Quais são as dificuldades de interpretação de enunciados?
- Quais são as causas que estão associadas a essas dificuldades?

No sentido de se concretizar esse fim, elaboraram-se quatro tarefas, cada uma detentora de características singulares que possibilitassem a emergência de uma gama de dificuldades de interpretação o mais ampla possível. Duas dessas tarefas foram aplicadas em aulas distintas de uma turma de 7.º ano da escola que integrei no âmbito da PES. Por meio dessas dinâmicas, intencionou-se expandir o contacto com o maior número possível de alunos, pois cada um comporta capacidades e dificuldades únicas. Não obstante, de modo a aprofundar a pesquisa concretizada nesses primeiros momentos, as duas restantes tarefas foram propostas em entrevistas a três alunos, que haviam sido selecionados pelas suas peculiares qualidades, as quais se consideraram que seriam propícias à investigação então em curso.

6.2. Conclusões do estudo

No decorrer da intervenção pedagógica, identificaram-se numerosas dificuldades de interpretação, as quais se enquadraram nas subseqüentes categorias: recolha e organização de dados, compreensão textual e linguística, compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, conexões entre conceitos e conteúdos matemáticos e

interpretação do resultado obtido. O impacto do contexto e das representações empregues nas tarefas na sua interpretação também foi apreciado.

Entre essas, as que se observaram com mais frequência foram as respeitantes à recolha e organização de dados e à compreensão textual e linguística dos enunciados. Com efeito, essas dificuldades foram prevaletentes em todos os momentos da intervenção pedagógica (excetuando o referente à Tarefa 4 no caso das dificuldades na compreensão textual e linguística), tendo sido causadas por fatores muitas vezes relacionados com leituras rápidas e pouco detalhadas dos enunciados, desatenção, procura imediatas pelas soluções das questões, a falta de prática em recolher e organizar informação e em resolver tarefas desafiantes e a estrutura e construção frásica dos enunciados.

Os três primeiros, que correspondem às causas mais comuns destas dificuldades, indiciam que os hábitos de leitura dos alunos e as suas atitudes perante as atividades matemáticas são deveras precoces, o que, de modo semelhante ao descrito por Costa e Fonseca (2009) a respeito do seu estudo, afetou a sua interpretação e, conseqüentemente, a manifestação das suas competências matemáticas.

A carência de treino na recolha e tratamento de dados e na resolução de tarefas desafiantes – notadas, por exemplo, nos processos resolutivos das alunas Bellatrix e Vega da alínea 1.b. da Tarefa 2 – converge com os resultados e pontos de vista de vários académicos (Ponte, 2005; Costa e Fonseca, 2009) e com as orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática (Canavarro et al., 2021), pois evidencia a relevância do contacto com tarefas com características diversificadas para a superação deste tipo de dificuldades.

A estrutura e a construção frásica do enunciado também influenciaram o entendimento e extração de informação pelos alunos com notável recorrência, sendo o caso da aluna Capella, quando a mesma atentou à questão 2 da Tarefa 1, um dos mais notáveis. O impacto no trabalho dos alunos da forma como é construído o enunciado de uma tarefa matemática denota a responsabilidade do professor na adaptação e redação da componente textual das tarefas no sentido de não dificultar despropositadamente a sua interpretação e sublinha como a compreensão de um enunciado requer o domínio de tanto os significados das palavras como dos padrões de estruturação sintática contidos no mesmo (Sim-Sim, 1998, citado por Mesquita, 2013). Esta situação corrobora as ideias de Costa e Fonseca (2009) que defendem a instigação de bons hábitos de leitura como prática essencial à superação dessas dificuldades.

Além das causas supramencionadas, o excesso de confiança foi igualmente um fator que fragilizou as capacidades de organização de informação, tal como inferido pelos comportamentos de Vega e Sirius no começo do seu trabalho respeitante à Tarefa 3, o que, conforme aludido na análise dessa situação, apoia as afirmações de Nunes (2017).

As dificuldades na compreensão e no estabelecimento de conexões entre conceitos e conteúdos matemáticos também foram registadas com frequência considerável. As suas fontes mais proeminentes foram a simples falta de fluência com os conceitos e conteúdos explicitados nas tarefas – como expresso, por exemplo, pelos três alunos entrevistados enquanto se debruçavam sobre a segunda questão da Tarefa 3, que exigiu a revisão dos tópicos matemáticos envolvidos –, a mecanização dos mesmos e a de procedimentos de resolução. Nota-se que, como verificado aquando das resoluções da alínea 1.c. da Tarefa 2 pelas alunas Canopeia e Vega, as duas últimas causas enumeradas se associaram regularmente com algumas das mencionadas nos parágrafos anteriores – nomeadamente, a leitura desatenta e breve dos enunciados, a busca imediata por uma solução às questões propostas, a construção frásica da questão e a estrutura do enunciado.

Na entrevista com o aluno Sirius, apontou-se uma dificuldade na interpretação do resultado obtido, tendo a mesma se ocasionado por vontade de harmonizar a solução ao contexto da Tarefa 3, o que denota uma falta de prática nesse tipo de exercícios e uma possível mecanização de procedimentos. Esse lapso implicou a desconsideração das condições impostas pela tarefa, o que exacerbou as suas fragilidades na recolha de dados.

Em referência à influência dos diferentes tipos de contexto na compreensão de enunciados, presume-se que, em geral, os alunos interpretaram com maior destreza as tarefas que se enquadravam em contextos de realidade e semirrealidade que em matemáticos (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000). Esse resultado diverge dos de Kingwell (2022), os quais salientam que alunos distintos revelam disposições diversas perante as várias classes de contexto. No entanto, o estudo desse autor foi empreendido com alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade cuja maturidade matemática é mais desenvolvida, o que possibilita a incidência dessa multiplicidade de situações. Comparavelmente, as aptidões matemáticas dos alunos com quem contactei ao longo deste projeto de investigação, que frequentavam o 7.º ano de escolaridade, são menores. Efetivamente, como decretado pelas orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática, é apenas no 3.º ciclo do Ensino Básico que se começam a tratar com mais ênfase tópicos mais formais que incutem o desenvolvimento de

competências como a abstração (Canavarro et al., 2021), o que justifica a preferência dos alunos participantes por contextos mais próximos do seu dia-a-dia que, como tal, interiorizam com mais facilidade.

Com certeza pelo mesmo motivo, considera-se que, na interpretação das tarefas, as representações dos tipos ativo e icónico foram mais acessíveis que as simbólicas (Bruner, 1966). De facto, conforme o imposto nas orientações curriculares, os alunos trabalharam com representações ativas e icónicas com maior regularidade durante o 2.º ciclo do Ensino Básico, dando menor expressão às simbólicas, cujo uso apenas é reforçado no 3.º ciclo (Canavarro et al., 2021). Desse modo, como se visionou nos momentos de resolução da Tarefa 3 das três entrevistas concretizadas, os alunos debateram-se para compreender o significado das expressões algébricas apresentadas no contexto da tarefa e para modelarem a situação descrita através de uma equação (embora, no segundo caso, a dificuldade também se relacione com o desábito no trabalho com os conteúdos matemáticos inerentes).

Sem embargo, numa perspetiva mais geral, conclui-se que a interpretação foi melhor concretizada em tarefas cujos contextos e representações eram mais familiares aos alunos e com os quais os mesmos detinham maior fluência, o que se conforma com o argumentado nas orientações curriculares atuais (Canavarro et al., 2021) e por Goldin e Shteingold (2001, citado por Velez, 2020).

6.3. Considerações finais

Como outros estudos desenvolvidos sobre a mesma temática, a investigação realizada ressalta a importância da interpretação na atividade e, consequentemente, na aprendizagem matemática dos alunos. Efetivamente, ao longo da intervenção pedagógica, a resolução de tarefas pelos alunos foi recorrentemente dificultada e até impedida por interpretações insuficientes e indevidas. Nesse sentido, espero que este projeto alerte eventuais professores leitores para a necessidade de se implementarem medidas de reação em sala de aula que respondam às dificuldades dos seus alunos respeitantes a essa capacidade linguística.

Tendo sido o primeiro trabalho que elaborei de elevada extensão e como contributo científico, acentuo que a experiência foi, naturalmente, laboriosa, mas significativamente engrandecedora e influente no meu crescimento enquanto docente. A literatura consultada permitiu-me aprofundar e, assim, enriquecer os meus conhecimentos sobre

as especificidades das tarefas, da resolução de problemas, das representações matemáticas e da interpretação e compreensão de enunciados, sendo todos esses aspetos fundamentais para o exercício da função de docente da disciplina de Matemática. A recolha de dados foi igualmente benéfica para o meu desenvolvimento profissional, tendo sido propícia para o refinamento da minha sensibilidade às dificuldades e raciocínios dos alunos, nomeadamente no que concerne a sua interpretação, e como oportunidade para experimentar e observar na prática os vários resultados dos textos estudados durante a revisão literária.

Não obstante, a investigação cumprida detém algumas limitações, principalmente em relação a questões de planeamento da intervenção pedagógica e a gestão do tempo disponível para a sua execução.

Em primeiro lugar, foi-me difícil gerir o planeamento da recolha de dados com os diversos afazeres que o normal decurso do estágio exigiu. Tentando conciliar a investigação com as imposições da PES e no intento de minimizar a interferência na aprendizagem dos alunos participantes, insisti em enquadrar os dois primeiros momentos da intervenção pedagógica no natural fluir das atividades letivas da turma. Nesse sentido, foi implicada a seleção de tópicos matemáticos sobre os quais seria possível construir tarefas que fossem favoráveis não só à lecionação desses conteúdos, mas também à pesquisa a cumprir. Esse trabalho demonstrou ser bastante complexo, o que, sem dúvida, contribuiu para a irregularidade do agendamento das várias instâncias da intervenção pedagógica.

Além disso, refiro que orientei as aulas em que se efetuaram os dois primeiros episódios da recolha de dados. Assim sendo, é presumível que a mesma tenha sido condicionada por essa opção, visto que, a par da sua realização, tive de atentar à condução das aulas em si. Embora tivesse intencionado prosseguir com a implementação de momentos da intervenção pedagógica em aulas que fossem dinamizadas pela orientadora-cooperante, o que me permitiria focar mais na recolha dos dados, as obrigações da PES impossibilitaram que os preparasse em tempo útil para que a orientadora-cooperante pudesse preparar devidamente essas aulas. Por esse motivo, que foi igualmente um condicionante para a infrequência mencionada da intervenção pedagógica, optei por concretizá-la em aulas dinamizadas por mim, cuja planificação revelou ser mais fácil, apesar da sua condução ser mais dificultada.

Em relação às entrevistas, já foi aludido que pretendia que os três alunos entrevistados resolvessem integralmente as Tarefas 3 e 4 durante as mesmas. No entanto, devido a

tanto atrasos dos alunos em comparecerem às entrevistas como ao seu avanço lento na resolução da primeira tarefa, além de que, como foram concretizadas nas semanas finais do ano letivo, não foi possível agendar uma continuação desses encontros, apenas foi possível alcançar a resolução da alínea inicial da Tarefa 4 na entrevista da aluna Vega, o que restringiu a respetiva recolha de dados. Não obstante, assevera-se que a problemática da segunda alínea dessa tarefa era similar à da Tarefa 3, diferenciando unicamente nos conceitos matemáticos envolvidos, os quais, similarmente aos da terceira tarefa, haviam sido lecionados meses antes da efetuação das entrevistas; como tal, os eventuais dados que se poderiam agregar apenas serviriam para reforçar os resultados já então alcançados.

As arduidades na gestão do tempo para a efetivação da intervenção pedagógica anularam a concretização de planos que havia projetado para uma segunda fase deste estudo. Especificamente, essa parte da investigação englobaria a elaboração de tarefas cujos enunciados incluíam adaptações confeccionadas no sentido de colmatar as dificuldades de interpretação dos alunos previamente identificadas, analisando-se posteriormente o seu efeito. Embora esses planos provassem ser demasiado ambiciosos, afirma-se que os mesmos podem ser tomados como linhas orientadoras para o desenvolvimento de um futuro projeto de investigação, o qual poderá servir como referência para a atuação de professores sobre as dificuldades de interpretação dos seus alunos.

O retardamento da concretização da intervenção pedagógica impediu ainda a recolha de testemunhos reflexivos dos alunos acerca das suas dificuldades de interpretação, fosse através de entrevistas ou de questionários. Essas reflexões forneceria uma ótica singular sobre os desempenhos analisados que possibilitaria a perceção de como os próprios alunos perspetivam a sua aprendizagem e, em particular, as suas idoneidades de compreensão dos enunciados, o que elevaria os resultados almejados. Além disso, a autorreflexão é sinónima de autorregulação, que é uma das capacidades e atitudes gerais a estimular apontadas nas *Aprendizagens Essenciais* de Matemática (Canavarro et al., 2021) que decorrem das áreas de competência previstas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017), especificamente, neste caso, da de *Desenvolvimento pessoal e autonomia*. Assim, esse exercício teria sido ainda proveitoso e estimulante para a aprendizagem dos alunos. Por esses motivos, recomendo que, na ocasião da realização de estudos baseados neste, se efetue pelo menos um destes momentos na respetiva intervenção pedagógica.

Por último, sugiro que, em continuidade a este, se adapte e aplique este projeto de investigação a outros anos de escolaridade. Com efeito, no decorrer dos anos letivos, os conceitos e conteúdos matemáticos são progressivamente complexificados e, como tal, as respetivas tarefas matemáticas também se tornam mais exigentes. Nesse sentido, acredito que seria relevante comparar-se a prevalência das dificuldades de interpretação ao longo do percurso escolar e, assim, aprofundar o desenvolvimento dessa competência nos alunos.

Referências Bibliográficas

- Baptista, A. C. M. (2018). *Representações usadas na resolução de problemas: Um estudo no 3.º ano de escolaridade* [Relatório de estágio, Instituto Politécnico de Setúbal]. <http://hdl.handle.net/10400.26/22504>
- Baptista, I., Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética* (2.º Ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. <https://www.spce.org.pt/assets/files/CARTA-TICA2.EDICAOFINAL-2020-COMPACTADO.pdf>
- Boavida, A. M. R. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Ministério da Educação: Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Bogdan, R. C. & Biklen S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Havard University Press.
- Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais | Articulação com o perfil dos alunos: 7.º ano | 3.º ciclo do ensino básico*. Direção Geral da Educação. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf
- Carmo, H. & Ferreira, M. M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para auto-aprendizagem* (2.ª Ed.). Universidade Aberta.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6.ª Ed.). Routledge.
- Costa, A. M. & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da língua portuguesa e da matemática. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.), *Actas do XIX encontro de investigação em educação matemática*. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2009.pdf

- Costa, B., Rodrigues, E., & Rodrigues, L. M. (2022). *Espiral 7*. Porto Editora.
- Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 137–165.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197–218). Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G. A. (2014). Mathematical representations. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 409–413). Springer Reference.
- Kingwell, A. B. R. (2022). *Dificuldades dos alunos na interpretação de tarefas matemáticas* [Relatório de estágio, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto].
https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.pub_view?pi_pub_base_id=572642
- Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 579–582). Springer Reference.
- Martins, G. O., Gomes, C. A. S., Brocardo, J. M. L., Pedroso, J. V., Carrillo, J. L. A., Silva, L. M. U., Encarnação, M. M. G. A., Horta, M. J. V. C., Calçada, M. T. C. S., Nery, R. F. V., & Rodrigues, S. M. C. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção Geral da Educação.
- Mesquita, M. S. B. V. (2013). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade* [Relatório do projeto de investigação, Instituto Politécnico de Setúbal].
<http://hdl.handle.net/10400.26/6576>
- Ministério da Educação (2009). *Semelhança: Proposta de sequência de tarefas para o 3.º ciclo*. Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
https://area.dge.mec.pt/materiais_NPMEB/032_Sequencia_Semelhancas_TP_3c.pdf

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nunes, M. M. A. (2017). *A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas* [Relatório do projeto de investigação, Instituto Politécnico de Setúbal]. <http://hdl.handle.net/10400.26/20870>
- Palhares, P. (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lidel.
- Pinto, E. & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: Um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Práticas de investigação em Educação*. Departamento de Pedagogia e Educação. <http://hdl.handle.net/10174/8001>
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving – Combined edition*. Library of Congress Catalog. http://www.tlu.ee/~tonu/modesimu/George_Polya_Mathematical_discovery.pdf
- Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas – Um novo aspecto do método matemático*. Interciência.
- Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Associação de Professores de Matemática.
- Quivy, R. & Campenhoudt, L. V. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais* (2.ª Ed.). Gradiva.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press, Inc.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 13(14), 66–91. <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>
- Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do ensino básico* (pp. 7–51). Lidel.
- Velez, I. M. P. (2020). *Tarefas na sala de aula: Prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas* [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. <http://hdl.handle.net/10451/42865>

Anexos

Anexo 1 – Consentimento informado

Porto, 16 de fevereiro de 2024

Exmo(a) Encarregado(a) de Educação,

Como acreditamos ser do seu conhecimento, a disciplina de Matemática do(a) seu(sua) educando(a) é orientada por três professores, dos quais dois são professores estagiários inscritos no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Assim sendo, nas aulas de Matemática do presente ano letivo, o(a) seu(sua) educando(a) conta sempre com esta colaboração acrescida. Como parte dos requisitos do estágio, cada um dos professores estagiários terá de implementar um projeto de investigação em Didática da Matemática, orientado pela professora Maria de Fátima Duarte Delgado, professora auxiliar convidada da FCUP.

A concretização de cada um destes trabalhos de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática. A concretização dos trabalhos de investigação envolve também a recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha essa que tornará viável a implementação dos projetos de investigação em causa. Esta recolha de dados inclui a gravação em áudio de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, a recolha de trabalhos escritos realizados pelos alunos e a realização de entrevistas com alguns alunos desta turma.

- A gravação em áudio é essencial para que toda a informação contida nas interações existentes numa aula ou em parte dela seja efetivamente recolhida e não se percam aspetos relevantes para os objetivos dos trabalhos de investigação. Estas gravações serão posteriormente transcritas (total ou parcialmente) e serão destruídas assim que o trabalho esteja terminado.
- A recolha das produções escritas dos alunos (respostas a tarefas propostas em aula) em nada difere do que seria feito numa situação de ensino regular, uma vez que é prática comum efetuar essa recolha para efeitos de análise das principais dificuldades dos alunos de modo a poder encontrar estratégias que os ajudem a ultrapassá-las. Assim que o trabalho estiver terminado, as produções escritas recolhidas serão destruídas.
- A realização de entrevistas envolve a gravação em áudio das mesmas, nos mesmos moldes que a gravação de aulas/momentos de aula, e é realizada com um número limitado de alunos, em horário extra-aula a combinar com eles, presencialmente ou recorrendo a meios de comunicação à distância (Zoom, Microsoft Teams ou outro).

Em caso algum os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola serão identificados, garantindo-se o anonimato no relatório final de estágio. A participação neste trabalho em nada interfere com a avaliação de desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação e terá implicações na avaliação dos professores estagiários para a conclusão do seu curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é inteiramente voluntária, podendo ele(ela) desistir em qualquer momento, sem qualquer justificação necessária. No caso de desistência, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Esta missiva tem como objetivo solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) nos projetos de investigação. Estamos à disposição para qualquer informação adicional.

Agradecendo, desde já, toda a atenção e compreensão dispensadas, subscrevemo-nos, com os melhores cumprimentos,

(Francisco Castro)

(Ricardo Costa)

✂ _____

Eu, Encarregado/a de Educação do/a aluno/a

☐ riscar o que não interessa autorizo/não autorizo o/a meu/minha educando/a a participar no trabalho de investigação dos seus professores estagiários de Matemática Francisco Castro e Ricardo Costa.

Assinatura

Data

Anexo 2 – Tarefa 1 – Referencial cartesiano

No esquema seguinte, apresenta-se o mapa de um jardim zoológico.



No esquema, estão assinalados a entrada, a fonte da praça central, o bar e os recintos dos diferentes animais numa grelha. Considera-se uma unidade como sendo a medida do lado de uma quadrícula.

1. Supõe que te encontras no bar. Que caminho percorrerias para te deslocares até ao recinto da tartaruga? Descreve esse caminho recorrendo à grelha.
2. Um visitante realizou o seguinte trajeto, partindo da entrada:
 - duas unidades para a esquerda;
 - uma unidade para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, três para cima e outra para a direita;
 - uma unidade para a direita, duas para baixo e outra para a direita.
 Que animais observou esse visitante?

3. Indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando:
 - (A) O cavalo está mais próximo do hipopótamo que do macaco.
 - (B) O tigre está à mesma distância do leão e do crocodilo.
 - (C) O flamingo está mais próximo do elefante que a cobra do macaco.
4. Em que posição está o recinto do rinoceronte em relação à fonte? E o do hipopótamo?

Anexo 3 – Tarefa 2 – Relações entre perímetros e áreas de figuras semelhantes

1. Vamos construir quadrados utilizando quadradinhos de esponja. Considera para unidade de comprimento o lado de um quadradinho.

a. Constrói quadrados de lado 2, de lado 3 e de lado 4.

Estes novos quadrados são semelhantes ao quadradinho de lado 1?

Justifica a tua resposta, indicando a razão de semelhança.

b. Preenche a tabela abaixo em que:

- **R** é a razão de semelhança quando partimos do quadradinho de lado 1 e o ampliamos para encontrar os restantes.

- **N** é o número de quadradinhos de lado 1 usados em cada figura.

Quadrados	R	Perímetro	N	Área
de lado 1				
de lado 2				
de lado 3				
de lado 4				
de lado 5				
de lado 10				
de lado 20				
de lado n				

c. Consegues estabelecer alguma relação entre as razões de semelhança e os perímetros dos vários quadrados? E entre as razões de semelhança e as suas áreas?

Anexo 4 – Tarefa 3 – Expressões algébricas e equações

- 2** Dos sete amigos que estão a participar num jogo *online*, sabe-se que o dobro do número de rapazes é igual ao número de raparigas.

Designa por r o número de rapazes.

- 2.1** Indica, no contexto, o significado da expressão:

- a)** $2r$
- b)** $7 - r$

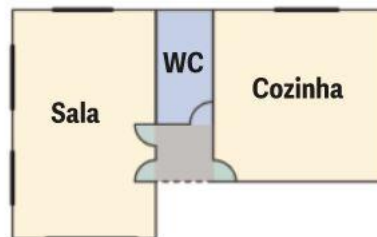
- 2.2** Quantos rapazes estão a participar no jogo *online*?

Escreve uma equação que traduza o problema, resolve-a e interpreta a solução no contexto.



Anexo 5 – Tarefa 4 – Função de proporcionalidade direta / Semelhança de figuras

13 Observa parte de uma planta de uma casa feita à escala 1 : 150 .



13.1. Na planta, a cozinha é um quadrado com 9 cm^2 de área e o WC um retângulo de 1 cm por 2 cm .

Determina:

- a) as dimensões reais da cozinha;
- b) a área real do WC .

13.2. A medida na planta é representada por x e $f(x)$ é a medida real correspondente.

- a) Determina a expressão de $f(x)$.
- b) Calcula $f(6,5)$ e indica o significado.
- c) Resolve a equação $f(x) = 600$ e indica o significado da solução.

Anexo 6 – Guião de observação

Guião de observação:

Tarefa X

Data: DD/MM/AA

Objetivo: Identificar dificuldades de interpretação de enunciados de tarefas matemáticas, assim como as respetivas causas.

Questões de investigação: Quais são as dificuldades de interpretação de enunciados? Quais são as causas que estão associadas a essas dificuldades?

Aspetos associados ao trabalho dos alunos

- Revelaram uma interpretação cuidada do enunciado (sublinhando ou destacando de outra forma o enunciado, registando os dados no caderno/folha de rascunho de forma organizada, preenchendo esquemas com a informação referente aos mesmos, etc.)?
- Revelaram (ou não) compreender o que estava a ser trabalhado?
- Outros aspetos

Dificuldades de interpretação identificadas (●) e respetivas causas (○):

- Compreensão textual / linguística
 - Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado
 - Falta de concentração / atenção
 - Estrutura e extensão do enunciado
 - Falta de domínio da língua portuguesa
 - Construção frásica do enunciado
 - Procura imediata da solução
 - Falta de prática na realização de tarefas desafiantes
- Compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos

- Recolha e organização de informação
 - Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado, desprezando informações e dados relevantes
 - Falta de concentração / atenção
 - Estrutura e extensão do enunciado
 - Procura imediata da solução
 - Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Falta de prática na recolha e organização de dados
- Conexões entre conceitos e conteúdos matemáticos
 - Leitura rápida e pouco detalhada do enunciado
 - Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Mecanização de procedimentos de resolução
- Interpretação do resultado obtido
 - Falta de domínio de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Mecanização de conceitos e conteúdos matemáticos
 - Mecanização de procedimentos de resolução
 - Falta de prática na verificação de resultados
- Outras

Considerações gerais sobre a realização da recolha de dados