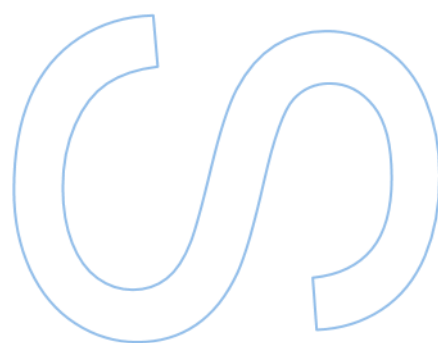
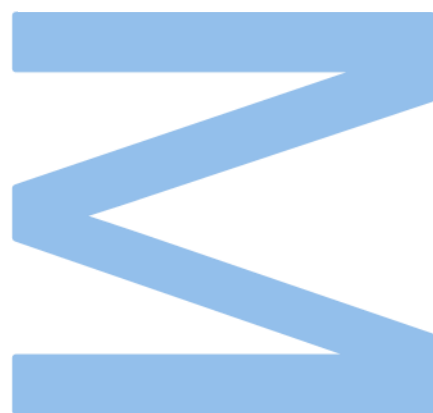


As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões

Sofia Baldaia Reis

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário
Unidade de Ensino das Ciências
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2024



As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões

Sofia Baldaia Reis

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2024

Orientadora

Louise dos Santos Lima, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Todo o caminho percorrido até aqui só foi possível com o apoio de várias pessoas que contribuíram de forma bastante positiva para que tal acontecesse, em particular, para a concretização deste trabalho.

Desde já, e em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha orientadora, Louise Lima, por toda a paciência que teve comigo ao longo destes meses, por toda a disponibilidade para responder a qualquer dúvida a qualquer dia e a qualquer hora. Toda a ajuda e orientação foram imprescindíveis para o sucesso deste presente trabalho.

Devo também um especial agradecimento à professora Rosa que se mostrou sempre disponível para qualquer inquietação que tive durante todo este ano.

Um agradecimento também à minha orientadora cooperante que teve um papel fundamental no meu crescimento como futura docente, partilhando e ensinando experiências e conhecimentos.

Devo também um obrigado às duas turmas do 7.º ano em que tive a oportunidade de lecionar, por terem tornado este meu percurso como professora-estagiária mais leve, risonho e marcante. Em especial, agradeço a todos os alunos que participaram neste meu estudo, por todo o empenho, interesse e entusiasmo que sempre demonstraram ao longo da minha intervenção pedagógica.

Não poderia deixar de agradecer à minha colega de estágio e mais que isso, uma das minhas melhores amigas, Gabriela Rodrigues. A ela agradeço por todos estes anos juntas e, principalmente, por este último ano, por termos tido a oportunidade de experienciar e partilhar coisas novas juntas.

À minha família, às minhas melhores amigas e ao Du agradeço também pelo incentivo em não desistir e por ouvirem sempre as minhas histórias de frustração, mas também de alegria durante este longo ano.

Por último, mas não menos importante, só tenho de agradecer aos meus pais por todo o apoio que me deram, pelo ombro que me ofereceram sempre que chorava, pela coragem que sempre me deram quando estava prestes a desistir e, principalmente, por todo o amor que sempre me demonstraram! Isto é por vocês e para vocês! Obrigada!

Resumo

Este trabalho de investigação que integra o Relatório de Estágio é resultado da prática letiva supervisionada do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, realizada no ano letivo 2023/2024. O estudo tem como objetivo compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos em tarefas matemáticas que envolvem a exploração de padrões.

Para dar resposta ao objetivo geral, foi realizada uma intervenção pedagógica, assente numa abordagem de ensino exploratório, numa turma do 7.º ano de escolaridade, que contou com três momentos distintos destinados à resolução e discussão de três tarefas que envolviam a exploração de padrões. Este estudo assenta numa metodologia de natureza qualitativa e interpretativa. Para recolher os dados, recorreu-se à observação direta em sala de aula, à análise das produções escritas de cada grupo e das gravações de áudio das discussões de cada grupo no processo de resolução e das discussões coletivas no processo de apresentação dos resultados.

Este estudo permitiu identificar diversos tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, destacando-se a estratégia **recursiva** e as estratégias **explícita natural** e **algébrica**. Consequentemente, foi possível perceber a forma como os mesmos conseguem argumentar e justificar as suas respostas, sendo esta uma dimensão na qual os alunos revelaram dificuldades, para além da transposição da sua argumentação oral para escrita. Ademais, analisou-se a influência do trabalho de grupo na resolução das tarefas, através das respostas dadas pelos alunos a um questionário no *Google Forms*.

Constatou-se que os alunos, depois de terem discutido todas as estratégias em grupo, optaram por chegar a um consenso sobre qual utilizar na resposta final, optando pela resolução mais simples. Foi notória a preferência dos alunos em realizar as tarefas em grupo, uma vez que permitiu a partilha de uma variedade de estratégias, para além de terem visto as suas dúvidas esclarecidas pelos colegas e não pela professora.

Na última tarefa, foi notório que os alunos optaram por a resolver utilizando linguagem matemática, evidenciando um progresso dos alunos na comunicação matemática.

Palavras-chave: estratégias de generalização, sequências, regularidades, pensamento algébrico, raciocínio matemático

Abstract

This research work is the result of the supervised teaching practice of the Master in Mathematics Teacher Education for Middle and Secondary Schools, carried out in the academic year 2023/2024. The study aims to understand the different strategies used by students in mathematical tasks that involve the exploration of patterns.

In order to meet this aim, a pedagogical intervention was performed, based on an exploratory teaching approach, in a 7th grade class, which had three distinct moments aimed at solving and discussing three tasks that involved the exploration of patterns. The research is based on a qualitative and interpretative methodology. The data was collected using direct observation in the classroom, analysis of the written productions of each group and audio recordings of the discussions of each group in the resolution process and the collective discussions in the process of presenting the results.

This study allowed the identification of several types of strategies used by the students, especially the **recursive** strategy and both the **natural** and the **algebraic explicit** strategies. Consequently, it was possible to understand how they can argue and justify their answers, this being a dimension in which the students revealed difficulties, in addition to the transposition of their argumentation from oral to written. Additionally, the influence of group work on the resolution of the tasks was analysed, through the answers given by the students to a questionnaire on Google Forms.

It was found that the students, after having discussed all the strategies within the group, chose to reach a consensus on which one to use in the final answer, opting for the simplest strategies. The students' preference to perform mathematical tasks in groups was notorious, since it allowed the sharing of a variety of strategies, in addition to having had their questions answered by their classmates and not the teacher.

In the last task, it was notorious that the students chose to solve it using mathematical language, displaying the students' progress in mathematical communication.

Keywords: generalization strategies, sequences, regularities, algebraic thinking, mathematical reasoning

Índice

Lista de Quadros	vi
Lista de Gráficos.....	vii
Lista de Figuras	viii
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento teórico.....	6
2.1. A importância dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático	6
2.2. As sequências na aprendizagem matemática.....	10
2.2.1. Tipos de sequências.....	10
2.2.2. Estratégias e dificuldades na exploração de sequências e na sua generalização	13
2.2.2.1. Estratégias de generalização.....	14
2.2.2.2. Dificuldades na exploração e generalização de sequências	22
2.3. Possibilidades de abordagens de ensino promotoras do desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático	25
2.3.1. O ensino exploratório.....	25
2.3.2. A escolha de tarefas e a promoção de um ambiente propício à comunicação.....	26
2.4. Exercício de síntese	28
3. Intervenção Pedagógica	30
3.1. Contexto escolar.....	30
3.2. A minha intervenção pedagógica.....	31
3.2.1. A turma alvo	32
3.2.2. Dinâmica nos momentos da intervenção pedagógica	33
3.2.3. Momentos da intervenção pedagógica	35
3.2.4. Tarefas realizadas	39
3.2.4.1. Tarefa I – “O voo das andorinhas”	39
3.2.4.2. Tarefa II – “Os azulejos”	41

3.2.4.3. Tarefa III – “A festa de aniversário da Rita”	43
3.3. Considerações sobre a intervenção.....	45
4. Metodologia de investigação.....	47
4.1. Opções metodológicas	48
4.2. Participantes do estudo e questões de natureza ética.....	49
4.3. Método e processo de recolha de dados	51
4.4. Processo de análise de dados.....	55
5. Análise dos dados.....	57
5.1. Análise dos processos de resolução da Tarefa I.....	60
5.2. Análise dos processos de resolução da Tarefa II.....	80
5.3. Análise dos processos de resolução da Tarefa III.....	98
5.4. Perceções dos alunos sobre o trabalho de grupo	110
6. Conclusões e recomendações	118
6.1. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas.....	119
6.2. As dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas	123
6.3. A perceção dos alunos em relação ao trabalho de grupo	126
6.4. Limitações e recomendações	128
Referências Bibliográficas	132
Apêndices.....	137
Apêndice 1 – Folha de respostas do Grupo Verde	137
Apêndice 2 – Plano de aula do dia 16/02 (1ª aula da intervenção pedagógica).....	138
Apêndice 3 – Plano de aula do dia 20/02 (2ª aula da intervenção pedagógica).....	145
Apêndice 4 – Plano de aula do dia 23/ 02 (3ª aula da intervenção pedagógica)....	153
Apêndice 5 – Plano de aula do dia 27/02 (4ª aula da intervenção pedagógica).....	159
Apêndice 6 – Termo de Consentimento Livre e Informado	162
Apêndice 7 – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido	163
Apêndice 8 – Questionário sobre a influência do trabalho de grupo	164

Lista de Quadros

Quadro 1 – Cruzamento do objetivo geral com os objetivos específicos – articulados com questões de partida e norteadoras (Estrutura adaptada de Lima (2020))	47
Quadro 2 – Estratégia de recolha de dados interlaçado com os objetivos específicos	54
Quadro 3 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa I	80
Quadro 4 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa II	97
Quadro 5 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa III	109

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Dinâmica do grupo no processo de resolução das tarefas.....	112
Gráfico 2 – Nível de concordância sobre a dinâmica do grupo no momento da resolução das tarefas.....	114
Gráfico 3 – Características das resoluções utilizadas nas respostas finais de cada tarefa	116

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo de uma sequência pictórica crescente (Ponte et al., 2009a).....	12
Figura 2 – Esquema síntese das estratégias de generalização dos vários autores mencionados	21
Figura 3 – Materiais do kit estratégico (sem os enunciados e folhas brancas)	34
Figura 4 – Materiais disponíveis para cada grupo (1. ^a aula).....	35
Figura 5 – Esquematização cronológica dos momentos da intervenção pedagógica..	36
Figura 6 – Enunciado da Tarefa I: O voo das andorinhas	40
Figura 7 – Enunciado da Tarefa II: Os azulejos	41
Figura 8 – Enunciado da Tarefa III: A festa de aniversário da Rita.....	43
Figura 9 – Constituição dos grupos.....	51
Figura 10 – Recorte da grelha de observação do trabalho de grupo.....	52
Figura 11 – Esquematização cronológica do processo de recolha de dados	54
Figura 12 – Categorização das estratégias de generalização	58
Figura 13 – Categorização das dificuldades	59
Figura 14 – Enunciado da Tarefa I: O voo das andorinhas	61
Figura 15 – Resposta do Grupo Preto à questão 1 da Tarefa I	62
Figura 16 – Resposta do Grupo Bordô à questão 1 da Tarefa I	62
Figura 17 – Resposta do Grupo Verde à questão 2 da Tarefa I	63
Figura 18 – Resposta do Grupo Verde à questão 5 da Tarefa I	64
Figura 19 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa I	67
Figura 20 – Resposta do Grupo Preto à questão 6 da Tarefa I	67
Figura 21 – Primeira estratégia do Grupo Bordô para a questão 2 da Tarefa I	68
Figura 22 – Resposta do Grupo Bordô à Questão 2 da Tarefa I	72
Figura 23 – Resposta do Grupo Bordô à questão 4 da Tarefa I	73
Figura 24 – Resposta do Grupo Bordô à questão 5 da Tarefa I	73
Figura 25 – Resposta do Grupo Azul à questão 2 da Tarefa I.....	75
Figura 26 – Resposta do Grupo Azul à questão 4 da Tarefa I.....	76
Figura 27 – Resposta do Grupo Azul à questão 6 da Tarefa I.....	77
Figura 28 – Segunda resposta do Grupo Verde à questão 3 da Tarefa I	79
Figura 29 – Enunciado da Tarefa II: Os azulejos	81
Figura 30 – Esquema feito pelo Grupo Bordô para organizar os dados da Tarefa II ...	82
Figura 31 – Tabela feita pelo Grupo Preto para organizar os dados da Tarefa II	82
Figura 32 – Resposta do Grupo Azul à questão 1 da Tarefa II.....	83
Figura 33 – Resposta do Grupo Verde à questão 1 da Tarefa II	84
Figura 34 – Resposta do Grupo Bordô à questão 2 da Tarefa II	86

Figura 35 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa II	87
Figura 36 – Resposta do Grupo Verde à questão 3 da Tarefa II	92
Figura 37 – Resposta do Grupo Preto à questão 3 da Tarefa II	93
Figura 38 – Resposta do Grupo Preto à questão 4 da Tarefa II	93
Figura 39 – Resposta do Grupo Bordô à questão 3 da Tarefa II	94
Figura 40 – Resposta do Grupo Bordô à questão 4 da Tarefa II	95
Figura 41 – Enunciado da Tarefa III: A festa de aniversário da Rita.....	98
Figura 42 – Esquema feito pelo Grupo Verde para encontrar o termo geral da sequência presente na Tarefa III.....	100
Figura 43 – Resposta do Grupo Verde à questão 1 da Tarefa III	100
Figura 44 – Esquema feito pelo Grupo Preto para encontrar o termo geral da sequência presente na Tarefa III.....	103
Figura 45 – Resposta do Grupo Preto à questão 1 da Tarefa III	103
Figura 46 – Resposta do Grupo Bordô à questão 1 da Tarefa III	105
Figura 47 – Resposta do Grupo Azul à questão 1 da Tarefa III.....	106
Figura 48 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa III	108
Figura 49 – Resposta do Grupo Verde à questão 2 da Tarefa III	108

1. Introdução

A escolha do tema da investigação que integra o meu Relatório de Estágio passou por várias fases até chegar ao tema final.

Inicialmente, o meu foco incidiu sobre os mapas mentais, um tema que me cativou bastante tendo em conta a postura dos alunos perante o mesmo. No início do ano letivo, foi proposto que os alunos fizessem um mapa mental - esquema com algumas informações relativas ao conteúdo que estavam a aprender, como se fosse um *pequeno resumo* - sobre o capítulo dos *Números*. Esta tarefa foi proposta com o objetivo de que, ao longo do ano, no final de cada capítulo, os alunos pudessem fazer um *pequeno resumo* daquilo que aprenderam. Ao deparar-me com essa ideia, achei que seria interessante compreender as potencialidades dos mapas mentais na aprendizagem dos alunos, e também, investigar sobre a maneira como os mesmos exprimem os seus raciocínios e pensamentos no papel.

Com o passar dos tempos, percebi que investigar os mapas mentais exigiria analisar o trabalho dos alunos ao longo de todos os capítulos, analisando a sua evolução. Tal implicaria que a investigação, e consequentemente, a recolha dos dados, decorresse ao longo de todo o ano letivo, dando pouco tempo para a análise dos dados e escrita do relatório. Entendi que este tema poderia não ser a minha melhor escolha neste momento. No entanto, considero importante realçar que tal não invalida o meu interesse para uma investigação sobre esse tema, num futuro próximo.

Contudo, ainda nesta atividade dos mapas mentais comecei a notar que os alunos apenas se limitavam a copiar o que tinham no caderno e até mesmo os exemplos, sem terem algo escrito por eles. Isto refletiu-se também na resolução de exercícios e problemas, onde muitas das vezes, os alunos tendiam a memorizar as estratégias e os processos que lhes eram dados, sem entenderem verdadeiramente o significado deles. Os alunos não pensavam por si próprios e nem tentavam encontrar um outro processo de resolver os exercícios sem ser aquele que lhes foi *fornecido*.

Ao longo deste meu percurso, fui percebendo que essa ação de memorização de processos e procedimentos resultou do tipo de ensino que foi privilegiado durante o percurso escolar dos alunos. Digo isto porque os alunos das turmas em que fui estagiária seguiam as regras e aplicavam-nas muito por causa do ensino tradicional que permeou os percursos destes jovens. Em geral, identifiquei a prática recorrente do ensino através da realização de exemplos usando uma determinada estratégia, para

que os alunos, de seguida, resolvessem exercícios exatamente iguais, onde apenas aplicavam essa mesma estratégia, sem muitas vezes entenderem o porquê.

Acredito que ao longo do seu percurso, os alunos não tiveram muitas tarefas que estimulassem a que pudessem pensar por si próprios, ou que pudessem tentar encontrar outras formas de resolução. Isto fez-me refletir sobre o lugar que o desenvolvimento do raciocínio matemático e do pensamento algébrico teve no percurso desses alunos.

Por esta razão e seguindo a ideia de Ponte et al. (2009a) que o objetivo da Álgebra passa pelo desenvolvimento do pensamento algébrico, este presente estudo incide sobre esse mesmo tema, dando especial atenção ao tópico das *Sequências*.

Considero importante destacar que a visão sobre a Álgebra e o pensamento algébrico vai muito para além daquela ideia de que este tema está limitado a um mero trabalho de manipulação com símbolos. Em contexto de sala de aula, Kaput (1999) afirma que é muitas vezes posta em prática uma abordagem baseada na simplificação de expressões algébricas, na resolução de equações e na aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos. Deste modo, perde-se aquele que é o objetivo principal da Álgebra – desenvolver o pensamento algébrico (Ponte et al., 2009a; Ponte, 2005; Kaput, 1999). Isto porque os alunos são estimulados a aplicar propriedades e a memorizarem regras e procedimentos, que muitas vezes são refletidos na prática repetitiva de exercícios, quase sempre idênticos.

É necessário que os alunos compreendam os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias diante de determinadas situações (NCTM, 2000). Assim, compete ao professor procurar integrar na sua prática letiva estratégias de ensino que tenham em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, proporcionando aos mesmos momentos para desenvolverem o raciocínio matemático solicitando, de forma explícita, processos como conjecturar, generalizar e justificar (Canavarro et al., 2021).

Para além disso, no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), documento curricular que orienta as aprendizagens a serem realizadas em matemática pelos alunos em escolas portuguesas, é ainda referido que os professores devem apoiar os alunos na procura e reconhecimento de regularidades em objetos em estudo. Esta ação estratégica vem ao

encontro com o que Ponte et al. (2009a) defendem sobre o estudo das regularidades ser uma das vias mais privilegiadas para promover o pensamento algébrico.

Neste sentido, o estudo dos padrões permite aos alunos desenvolver a capacidade de i) estabelecer generalizações e ii) de fazer representações, quer através de diagramas, tabelas, esquemas ou até mesmo usando linguagem algébrica (Ponte et al., 2009b). Este segundo ponto é um aspeto importante a ter em conta quando é abordado o tópico das *Sequências*, uma vez que os alunos podem optar por inúmeras representações e/ou estratégias para justificarem o seu raciocínio.

Deste modo, dentro daqueles que seriam os objetivos na aplicação dos mapas mentais e tendo em conta a minha observação em sala de aula, pareceu-me que seria um aspeto relevante compreender as diferentes estratégias adotadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvessem a generalização de padrões, bem como o processo para chegar até a essa mesma estratégia.

Para tal, achei que seria importante proporcionar momentos, em sala de aula, para que os alunos pudessem desenvolver o raciocínio matemático, formulando conjecturas ou generalizações, sem um conhecimento prévio de estratégias ou regras que pudessem ser aplicadas. Desta forma, os alunos tinham de elaborar um processo de resolução.

Com esse objetivo em vista, implementei uma abordagem exploratória, onde foram aplicadas três tarefas, numa turma do 7.º ano de escolaridade, como forma de introduzir o tema das *Sequências*. Ou seja, as tarefas foram o ponto de partida para a construção dos conceitos e dos objetivos previstos para o tema das *Sequências*.

Deste modo, e tendo em conta o facto de os alunos não terem um método de resolução imediato para resolver as tarefas – para as resolver tiveram de construir as suas próprias estratégias, discutindo e partilhando ideias entre os elementos do grupo, – desejei compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvem a generalização de padrões – que é o objetivo geral desta investigação.

Neste sentido, para dar resposta ao objetivo geral do meu estudo, defini três questões norteadoras:

1. De que modo é que os alunos resolvem uma tarefa que envolve a generalização de padrões?
2. Que dificuldades é que os alunos demonstram na resolução destas tarefas?
3. De que modo é que o trabalho em grupo influencia a resolução destas tarefas?

Para cada uma das questões norteadoras foram estabelecidos um ou dois objetivos específicos, para que se torne mais claro o objetivo de cada questão e o que se pretende investigar com a mesma. Tal estará descrito no Capítulo 4, referente à Metodologia de investigação.

Este relatório pretende descrever o estudo apresentado acima, dando respostas ao objetivo geral da investigação, bem como às questões norteadoras estabelecidas. Para tal, foram necessárias várias etapas para o desenvolvimento deste estudo.

Deste modo, este relatório encontra-se dividido em seis capítulos. No primeiro capítulo, esta Introdução, são apresentadas as motivações pessoais, os objetivos e as questões de investigação que guiaram este estudo e a estrutura do relatório.

Posteriormente, segue o capítulo do Enquadramento Teórico, onde é apresentada uma revisão de literatura, que aborda alguns temas essenciais para o estudo, como: os padrões e as sequências no desenvolvimento do raciocínio matemático e do pensamento algébrico, as estratégias e as dificuldades empregues na exploração e generalização das sequências. São também apresentados alguns aspetos teóricos sobre práticas de ensino que podem ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio dos alunos.

No terceiro capítulo, Intervenção Pedagógica, é feita uma caracterização do contexto escolar onde decorreu este Relatório de Estágio, salientando alguns aspetos importantes da intervenção. São descritos os diferentes momentos que fizeram parte da minha intervenção e também as tarefas realizadas ao longo da mesma.

No capítulo da Metodologia (quarto capítulo) são expostas e devidamente justificadas as opções metodológicas tomadas para a investigação. São também apresentados os participantes que fizeram parte da investigação, bem como os documentos de assentimento e consentimento, que tiveram por base as questões éticas relevantes em função do estudo realizado. Para além disso, são descritos os métodos e procedimentos de recolha de dados e o processo de análise dos dados, sempre fundamentando as opções tomadas.

O quinto capítulo diz respeito à Apresentação e discussão de resultados, onde tal como o nome indica, são apresentados os resultados da investigação, fazendo uma análise criteriosa e cuidada dos mesmos, para poder dar uma resposta concreta ao objetivo do estudo. Foram selecionadas diferentes evidências, para que houvesse uma variedade de análises e discussões, que creio que foram importantes para o desenvolvimento das conclusões.

No último capítulo, Conclusões e recomendações, é feita uma pequena síntese do estudo realizado e, posteriormente, são apresentadas as principais conclusões do estudo, obtidas através da análise criteriosa e refletida dos dados. As conclusões procuram dar resposta às questões de investigação estabelecidas inicialmente, relacionando-as com a literatura revista. Para além disso, são expostas algumas limitações que foram sendo manifestadas por mim enquanto professora e investigadora, ao longo deste trabalho. Depois de refletir sobre todo este intenso estudo, são também apresentadas algumas perspetivas futuras que considero importantes ter em conta.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas que foram sendo mencionadas ao longo trabalho e um conjunto de apêndices que considero essenciais para uma melhor compreensão e seguimento do estudo. Encontram-se, por exemplo, planos de aula que fizeram parte da minha intervenção pedagógica, os documentos de consentimento e assentimento e o questionário realizado para os alunos.

2. Enquadramento teórico

Face à necessidade de uma investigação requerer uma base teórica onde se apoiar, com informação previamente estudada, surge este capítulo. Aqui serão abordados alguns aspetos teóricos relacionados com a problemática de investigação.

Neste sentido, os temas principais apresentados neste capítulo são: a importância dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico, as sequências na aprendizagem matemática, as estratégias e as dificuldades empregues na exploração e generalização das sequências. Por fim, e porque é um dos temas a ter em conta, visto que se trata de uma investigação que decorreu de uma intervenção pedagógica, são referidos alguns aspetos sobre práticas de ensino que podem promover o pensamento algébrico e o raciocínio dos alunos.

Este capítulo surge como um apoio para a posterior análise de dados, tornando-a ajustada, mais consistente e coerente com as perspetivas dos diversos autores e resultados de investigações que aqui são discutidos e refletidos. Esta opção garantirá uma análise rigorosa e alinhada com o conhecimento existente, permitindo uma discussão mais profunda, articulada e relevante.

2.1. A importância dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático

O uso de padrões é uma parte fundamental da atividade matemática, tal como consta no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), principalmente no estudo do tema da Álgebra. Neste sentido, a identificação de padrões surge como um aspeto crucial para conjecturar e generalizar (Vale & Pimentel, 2005), estando presente ao longo de todos os ciclos de ensino. Não é por acaso que vários autores consideram a Matemática como a *ciência dos padrões* (Devlin, 2002).

O termo *padrão* surge inúmeras vezes em vários estudos como algo muito abrangente, podendo tomar vários sentidos e significados. Na verdade, apesar desses variados significados e das inúmeras referências, Barbosa (2009) afirma que não é possível encontrar uma definição concreta de padrão e por esse motivo têm vindo a existir definições mais simples que são feitas consoante a utilização dada.

Na área de matemática, apesar dos diferentes significados propostos por vários autores, é comum definir o conceito de padrão como a procura de regularidade (Barbosa, 2009). Tal segue em concordância com Vale (2009), que afirma que a ideia de padrão pode

estar associada a vários termos como: sequência, regularidade, ordem, generalização, estrutura, regra, entre outros.

Neste sentido, entende-se que o termo padrão se associa a regularidades, sendo esse o termo que mais se destaca quando se fala de padrões, implicando uma ideia de sequência. Neste caso, os padrões, em matemática, podem ser escritos através de uma regra geral, quer seja ela em linguagem natural ou matemática.

Para o desenvolvimento da investigação que integra este Relatório de Estágio, que se centra no tópico das *Sequências*, ao termo padrão estão associados os termos *sequência* e *regularidade*, sendo ambos referentes a um tópico que é abrangido pelo tema Álgebra, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, referentes ao 7.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021c). Deste modo, e de acordo com Vale e Pimentel (2005), o estudo das sequências e a identificação de regularidades permitem a exploração de problemas com padrões.

Existem outros tantos autores que sentiram a necessidade de definir o conceito de sequência e de regularidade. Neste presente estudo surge também essa necessidade, para que seja possível perceber a relação que existe entre esses dois conceitos e entre o termo padrão.

Deste modo, será considerada que uma sequência é um conjunto de elementos, sejam eles números, figuras, ou outros, que estão ordenadas segundo uma regra (Vale et al., 2006). Em tais sequências é possível identificar uma regularidade, que diz respeito à relação existente entre os diversos elementos (Ponte et al., 2009a). Assim sendo, pode-se afirmar que o trabalho com sequências passa pela identificação de regularidades (Morais, 2012).

Segundo o documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021c), referentes ao 7.º ano de escolaridade, no estudo do tópico das *Sequências e Regularidades*, os alunos devem ser capazes de:

- reconhecer regularidades em sequências e determinar uma lei de formação, expressando-a em linguagem natural ou simbólica;
- determinar termos de uma sequência de ordens variadas, inferior ou superior aos dos termos apresentados, quando conhecida sua a lei de formação;
- comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência. (p. 24)

Assim, a partir da análise de sequências, os alunos devem desenvolver a capacidade de observar, identificar e descrever sequências e regularidades (Branco, 2008).

Para além disso, o estudo das sequências permite que os alunos sejam capazes de estabelecer generalizações e, para isso, fazer-se uso de algumas representações matemáticas como esquemas, tabelas ou desenhos (Vale & Pimentel, 2009; Ponte et al., 2009b). Ponte et al. (2009b) afirmam que os alunos devem desenvolver essas capacidades, bem como fazer uso da linguagem algébrica para expressar generalizações, nomeadamente para representar o termo geral de uma sequência. Vale e Pimentel (2009) reforçam que os alunos podem recorrer a uma linguagem verbal para expressar tal generalização, para além da mais formal, a linguagem matemática.

Os alunos à medida que exploram as sequências e descobrem a sua regra de formação, formulando uma lei geral, quer em linguagem natural quer em linguagem matemática, chegam assim à ideia de generalização de uma sequência, sendo esta um aspeto fundamental do raciocínio matemático (Ponte et al., 2009a) e do pensamento algébrico (Vale & Pimentel, 2009).

Deste modo, tal como Vale e Pimentel (2005) e Barbosa et al. (2011) afirmam, o trabalho com as sequências e regularidades promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico e de algumas capacidades matemáticas transversais presentes no currículo da matemática, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Neste sentido, surge a necessidade de se refletir sobre a importância da exploração de padrões e do estudo de sequências e regularidades no desenvolvimento do raciocínio matemático, bem como do pensamento algébrico.

Tanto para Ponte (2005) como para Kaput (1999), o grande objetivo da Álgebra, ao nível escolar, passa pelo desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Tal visão assume um papel bastante importante, uma vez que reforça a ideia de que o tema em questão não se reduz apenas à manipulação de símbolos, mas “pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações” (Ponte et al., 2008, p.90). Neste sentido, é conveniente que o estudo da Álgebra se inicie nos primeiros anos de escolaridade, desenvolvendo assim desde cedo o pensamento algébrico (Vale & Barbosa, 2019).

Nesta perspetiva, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) há uma clara valorização do pensamento algébrico. Esse documento curricular apresenta diferentes objetivos para cada ciclo, no que toca aos diferentes temas.

Nos documentos que dizem respeito aos anos de escolaridade do 1.º ciclo, é referida a necessidade de que

os alunos desenvolvam desde cedo e progressivamente o pensamento algébrico, denotando compreensão da variação em situações diversas e desenvolvendo a capacidade de conjecturar, reconhecer e exprimir relações e generalizações, numéricas e algébricas, (...), sendo de especial relevância neste tema o uso de diagramas e tabelas. (Canavarro et al., 2021a, p.10)

No 2.º ciclo dá-se continuidade a todo o desenvolvimento feito no ciclo anterior, surgindo pela primeira vez a escrita de expressões algébricas. Já em relação ao 3.º ciclo, é também valorizada a continuidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, onde os alunos devem ser capazes de estabelecer relações algébricas entre quantidades desconhecidas, expressar a generalidade por representações adequadas e usar o processo de modelar para descrever e fazer previsões (Canavarro et al., 2021c).

Concordo com o apresentado no livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, do NCTM (2007), quando refere que o desenvolvimento do pensamento algébrico implica: “compreender padrões, relações e funções”; “representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos”; “usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas”, e “analisar a variação em diversos contextos” (p. 262).

Neste presente estudo, tendo em conta as problemáticas levantadas e os objetivos da investigação que o integra, dá-se especial atenção ao primeiro ponto defendido pelo NCTM (2007) - compreender padrões, relações e funções.

O tipo de trabalho referente à compreensão de padrões, relações e funções, passa pela proposta de um conjunto de experiências que permitam a identificação de padrões, a formulação de conjecturas e generalizações, pensando no particular e no geral (Vale & Barbosa, 2019). É neste sentido, que Vale e Pimentel (2005) e Ponte et al. (2009a) afirmam que a exploração de padrões é uma boa forma de se estimular o desenvolvimento do raciocínio matemático e do estabelecimento de conexões nos diferentes temas. Assim, existe a possibilidade de os alunos praticarem três dos processos que fazem parte do pensamento algébrico - conjecturar, generalizar e justificar (Ponte et al., 2020).

Estes processos dizem também respeito ao desenvolvimento de uma outra capacidade matemática transversal, expressa nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*: o raciocínio matemático. No entanto, nesse mesmo documento os dois

primeiros processos – conjecturar e generalizar – são agrupados num só, e, para além do processo de justificar é complementado um outro processo: classificar.

Deste modo, conjecturar, generalizar e justificar são componentes do pensamento algébrico que vêm ao encontro do que consta no NCTM (2007), em que o raciocínio deve ser promovido à medida que os alunos analisam padrões e identificam regularidades; formulam generalizações e conjecturas sobre as regularidades observadas; validam essas mesmas conjecturas; e constroem e avaliam argumentos válidos.

Também no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* é referido que o raciocínio matemático “inclui a formulação de conjecturas, a justificação da sua validade ou refutação e a análise crítica de raciocínios produzidos por outros” (Canavarro et al., 2021c, p.3). Para o desenvolvimento desse raciocínio surge a capacidade de os alunos usarem representações múltiplas, com reforço das representações simbólicas.

De facto, a compreensão de um conceito, em Matemática, envolve perceber o modo como o mesmo se relaciona com outros, como pode ser utilizado e como pode ser interpretado (NCTM, 2007). Assim, desenvolver a capacidade do raciocínio matemático, tal como a do pensamento algébrico, vai muito além da memorização e aplicação de regras e procedimentos (Ponte et al., 2008).

O raciocínio assume assim um papel igualmente importante no ensino da Álgebra, como também no ensino de outros temas, principalmente, na exploração de padrões e na resolução de problemas envolvendo esse tema.

2.2. As sequências na aprendizagem matemática

2.2.1. Tipos de sequências

As sequências propostas aos alunos para a exploração de generalizações variam consoante o tipo de elementos que as constituem e consoante o tipo de relação que existe entre esses mesmos elementos. Cada elemento numa sequência é designado por *termo* e a sua posição na mesma é apelidado de *ordem*. Já a expressão algébrica que permite relacionar o termo e a sua ordem é chamado de *termo geral*.

Quanto ao tipo de elementos que constituem uma sequência, Ponte et al. (2009a) referem dois tipos de sequências: **pictóricas**¹, em que os termos são figuras e **numéricas**, onde os elementos são números.

Na análise de uma sequência **pictórica**, destaca-se a identificação de regularidades, tendo por base as características locais e globais das figuras que a compõem. Por vezes, também é oportuno identificar a sequência numérica que lhe está associada diretamente, podendo a partir desta fazer-se também generalizações. Contudo, nem sempre é possível fazer-se uma generalização correta a partir da sequência numérica, porque muitas das vezes os alunos tendem a relacionar os números da sequência de forma errada.

Quanto às sequências **numéricas**, cada termo depende do anterior e também da sua posição na sequência. De acordo com Barbosa et al. (2011), as sequências numéricas podem ser lineares ou não lineares, dependendo se a linguagem algébrica pode ser expressa ou não por uma expressão polinomial de 1.º grau, do tipo $an + b$.

Além de se classificar uma sequência tendo em conta o tipo de elementos que a constitui, podemos classificá-la tendo em conta a relação dos termos, como é o caso das sequências **repetitivas** e de sequências **crescentes** ou **decrecentes**.

Uma sequência **repetitiva** é uma sequência na qual existe uma parte (composta por diversos elementos) que se repete de forma cíclica indefinidamente (Vale & Pimentel, 2009; Ponte et al., 2009a).

Seja a_n um termo de uma sequência e a_{n+1} o seu sucessor, tem-se que, se a diferença entre a_{n+1} e a_n for positiva, então trata-se de uma sequência **crescente**, isto é, cada termo é sempre menor que o seu sucessor. Caso essa diferença seja negativa trata-se de uma sequência **decrecente**, onde cada termo é maior que o seu sucessor.

Estes tipos de sequências estão associados às relações existentes entre os elementos da sequência, sejam eles figuras ou números (Ponte et al., 2009a). Assim sendo, é possível, por exemplo, existirem sequências numéricas crescentes ou sequências pictóricas crescentes.

No presente estudo, dá-se particular atenção à exploração das **sequências pictóricas crescentes**, que dizem respeito a uma sequência formada por figuras onde, consoante a posição de cada elemento, existem características nas figuras que vão mudando (Ponte

¹ Os destaques feitos ao longo do Relatório de Estágio estarão a negrito

et al., 2009a). Neste caso, vão adicionando características de posição para posição (de elemento para elemento). Eis um exemplo de uma sequência deste tipo:



Figura 1 – Exemplo de uma sequência pictórica crescente (Ponte et al., 2009a)

Na Figura 1, surge uma **sequência pictórica**, sendo os seus elementos formados por triângulos, e **crescente**, visto que de termo para termo é-lhe sempre adicionado um elemento pictórico. Neste caso, cada elemento depende sempre do anterior. No entanto, também é possível relacionar cada termo com a sua posição (ou ordem).

À sequência **pictórica** apresentada na Figura 1 está associada uma **sequência numérica crescente**, por exemplo, referente ao número de segmentos presentes em cada termo: 3, 7, 11, 15, ...

Na exploração deste tipo de sequências, a primeira fase pelo qual o aluno passa é a de *ver*, implicando uma interpretação e compreensão por parte dos mesmos sobre os elementos que constituem a sequência.

Vale e Pimentel (2005) apresentam dois exemplos de sequências distintas mostrando que o processo de visualização é diferente se se tratar de uma **sequência numérica** e de uma **sequência pictórica**. Uma **sequência pictórica** requer mais atenção aos pormenores das figuras e à diferença que existe de elemento para elemento, enquanto na **numérica** apenas se atenta na diferença entre os termos.

Neste sentido, para além de haver essa diferença, a maneira de visualizar uma determinada sequência constituída por figuras pode ser diferente, dependendo da forma como o aluno vê e interpreta as figuras. Por exemplo, quando lhe é pedido para indicarem uma relação entre a ordem de um termo e a sua constituição, o aluno pode seguir diferentes abordagens (Ponte et al., 2009a). Assim, existem diferentes possibilidades para se continuar uma sequência, uma vez que, os alunos podem interpretar os termos apresentados de modos alternativos.

A verdade é que, a forma de ver de cada aluno “pode conduzir a modos diferentes, mas equivalentes” (Vale & Pimentel, 2005, p.15), uma vez que a visualização dos elementos e das suas características podem ter perspetivas diferentes de aluno para aluno e até mesmo de aluno para professor, mas que no final irá dar sempre ao mesmo resultado. Posto isto, é importante que os alunos possam perceber que existem diferentes

abordagens para uma mesma sequência, compreendendo que, no final, as regras são equivalentes.

Estas diferentes abordagens são consideradas por Rivera e Becker (2008) como algo que tende a ser comum por parte dos alunos: em ver as sequências de formas diversas, o que pode originar diferentes generalizações para a mesma sequência.

Assim sendo, existem diversos modos para se obter generalizações, que podem integrar variadas representações e, por isso, é importante promover a partilha de raciocínios e das justificações dos alunos em relação às suas opções (Ponte et al., 2009b).

2.2.2. Estratégias e dificuldades na exploração de sequências e na sua generalização

Existem alguns aspetos importantes a ter em conta quando se está perante o estudo de sequências, em particular, na sua generalização, que pode muitas vezes ser representada usando palavras em linguagem natural ou expressões algébricas, recorrendo a diferentes tipos de representações matemáticas.

As representações matemáticas são categorizadas por Amado (2022) em quatro tipos: verbal, gráfico, algébrico e numérico. Os diferentes tipos podem ser utilizados isoladamente ou em conjunto, complementando-se uns aos outros. A utilização em conjunto é fundamental para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, uma vez que existe a possibilidade de estabelecer conexões entre os vários modos (Amado, 2022).

O uso de representações matemáticas, como as referidas anteriormente, surge no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) como uma das capacidades matemáticas transversais. No entanto, não podemos discutir as representações matemáticas, sem considerar as estratégias de resolução: processos mentais e escritos que ajudam a chegar a uma solução, “quando se está perante um problema em que a situação pedida não pode ser resolvida pelo recurso imediato a processos conhecidos e standardizados” (Alvarenga & Vale, 2007, p. 29). Estas autoras ainda se referem às estratégias de resolução como sendo processos que “estão mais associados à criatividade e à curiosidade, que à aplicação rotineira de um conjunto de técnicas sem significado” (Alvarenga & Vale, 2007, p. 29). É sobre a definição dada por estas autoras que a investigação desenvolvida neste Relatório de Estágio se centra em relação às estratégias de resolução, em particular, às estratégias de generalização.

De facto, o uso de estratégias de resolução é algo crucial no estudo de padrões e regularidades, surgindo como uma percepção de como os alunos raciocinam e visualizam os padrões. Independentemente das tarefas propostas e da abordagem adotada, existe sempre a possibilidade de se recorrer a uma diversidade de estratégias na tentativa de generalizar um padrão, tal como já foi mencionado anteriormente.

É certo que os tipos de estratégias utilizadas diferem consoante o tipo de sequências propostas, mas também consoante os alunos. Ou seja, é comum e expectável que em tarefas matemáticas, os alunos ao estarem perante a mesma informação, pensem de maneira diferente. Neste sentido, surgem os diferentes tipos de pensamento e também de resolução, uma vez que existem alunos que mostram preferência, por exemplo, por métodos analíticos enquanto outros tendem a raciocinar visualmente.

A forma como os alunos raciocinam e constroem as suas estratégias, muitas vezes, também são consequência das questões que lhes são colocadas e do tipo de generalização que têm de encontrar para responder a essas mesmas questões. Neste sentido, Stacey (1989) usa dois termos referentes ao tipo de abordagem adotado numa resolução: a **generalização próxima** e a **generalização distante**.

A primeira abordagem – generalização próxima – diz respeito a questões que podem ser resolvidas de uma forma rápida e eficaz, recorrendo, por exemplo, a desenhos ou cálculos. Já na segunda – generalização distante – entende-se que não é possível determinar-se um termo da sequência utilizando a estratégia anterior, sendo necessário a compreensão e descoberta de uma regra geral.

Para além das duas abordagens anteriores, Stacey (1989) faz ainda referência a uma outra, a **generalização global**, que corresponde à utilização da mesma estratégia tanto para questões de generalização próxima como de generalização distante.

2.2.2.1. Estratégias de generalização

Como já referido, a estratégia adotada depende do contexto em que os alunos estão envolvidos, dos alunos (nível de escolaridade, por exemplo), e também do tipo de sequências com que estão a lidar (numérica, pictórica, crescente, por exemplo). Existem vários estudos realizados por diferentes autores com o objetivo de compreender e também categorizar as estratégias utilizadas por alunos de diferentes níveis na resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões.

Assim, surge a necessidade de se apresentar diferentes visões dos vários autores sobre as estratégias da generalização de padrões. Tal poderá constituir uma base teórica bem estruturada e completa para uma posterior análise de dados bem fundamentada.

Stacey (1989) realizou uma investigação assente na generalização de padrões lineares pictóricos e organizou as diferentes formas abordadas pelos alunos na realização das tarefas em quatro métodos: “*Counting Method*” (estratégia da **contagem**²), “*Difference method*” (estratégia da **diferença**), “*whole-object*” (estratégia do **objeto-inteiro**) e “*Linear Method*” (estratégia **linear**).

Na **contagem**, a abordagem utilizada foi, tal como o próprio nome indica, contar o número de elementos de cada figura da sequência até descobrir o termo solicitado. Já na estratégia da **diferença**, recorre-se aos múltiplos da diferença entre termos consecutivos para determinar outros termos. Por exemplo, para determinar o termo de ordem 20, o aluno multiplicou a diferença entre dois termos (que resultou em 4) por 20, ou seja, o termo solicitado seria 4×20 (Stacey, 1989).

Na **estratégia objeto-inteiro**, é fixado um termo da sequência como sendo considerado a “unidade” ($S(n)$, com n correspondente à ordem do termo) e recorre-se a múltiplos dessa unidade para se determinar o que é pedido, como um termo de ordem superior, ou seja, $S(m \times n) = m \times S(n)$ (Pereira, 2013). Ou seja, por exemplo, assumindo como unidade o termo de ordem 2 igual a 7, para determinar o termo de ordem 20 multiplicou 7 por 10, considerando $S(20) = S(10 \times 2) = 10 \times S(2)$. Ao ser aplicada esta estratégia, assume-se que o problema se insere num contexto de proporcionalidade direta. Por vezes, à conta de se assumir tal coisa, não é estabelecida uma relação entre o termo e a sua ordem, implicando uma não generalização.

A **estratégia linear** envolve a utilização de uma expressão algébrica do tipo $an + b$, como sendo o termo de ordem n .

As estratégias propostas por Stacey (1989) serviram como base para outros estudos e investigações que foram feitas por outros autores, entre eles, Becker e Rivera (2005); Lannin et al. (2006); Barbosa et al. (2008); Barbosa (2009); Ponte et al. (2009); Lannin (2005); e Barbosa e Vale (2015).

Lannin et al. (2006) categorizaram as estratégias em quatro tipos: **recursiva**, **partição**, **termo unidade** e **explícita**. No que diz respeito à **estratégia recursiva**, o aluno descreve a relação que existe entre termos consecutivos e utiliza essa mesma relação para determinar termos superiores. A **estratégia partição** e a **termo unidade** incidem sobre o mesmo propósito que as estratégias **diferença** e **objeto-inteiro**, respetivamente, que Stacey (1989) apresentou. Lannin et al. (2006) consideram que a **estratégia partição** está relacionada com o raciocínio recursivo, mas de uma forma

² Neste estudo optou-se pela tradução dos métodos apresentados por Stacey (1989) feita por Pereira (2013).

mais eficiente, em que os alunos em vez de usarem um raciocínio termo a termo, fazem-no através de um termo e de outro mais distante, utilizando múltiplos da diferença entre termos consecutivos.

A utilização da última estratégia, **explícita**, implica a procura e construção de uma regra geral que permita efetuar o cálculo imediato de qualquer termo (Lannin et al., 2006).

Num dos estudos realizados por Barbosa et al. (2008), no qual um dos objetivos era encontrar as estratégias que alunos do 6º ano apresentaram na resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões, consideraram quatro grandes grupos tendo em conta o estudo de Stacey (1989): **contagem**, **objeto-inteiro**, **recursiva** e **linear**. No entanto, perante a análise de dados, Barbosa et al. (2008) sentiram a necessidade de criar algumas subcategorias dentro desses quatro grupos.

Assim, Barbosa et al. (2008) identificaram que muitos alunos recorriam à diferença entre termos para resolver determinadas questões. Deste modo, categorizaram uma nova estratégia, a **estratégia recursiva** e sentiram a necessidade de diferenciar a aplicação dessa mesma estratégia em duas situações distintas: “extensão da sequência até ao termo pretendido, usando a diferença entre termos consecutivos” (Barbosa et al., 2008, p.6) e “utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos” (Barbosa et al., 2008, p.6). Esta última vem de acordo com a estratégia da **diferença** de Stacey (1989).

Também dividiram a estratégia **objeto-inteiro** em duas categorias, sendo a primeira, quando os alunos faziam uso de múltiplos de um termo da sequência, e outra, do uso de múltiplos de diferentes termos adicionando-os no final.

Além disso, categorizaram a estratégia **linear**, apresentada por Stacey (1989), em 4 processos distintos, tendo em conta o raciocínio dos alunos na resolução dos problemas:

- (i) identificação de uma regra explícita que relaciona a ordem de um determinado termo da sequência com o número de elementos que possui;
- (ii) utilização de múltiplos de um determinado termo da sequência, fazendo um ajuste com base no contexto do problema;
- (iii) utilização de múltiplos de um determinado termo da sequência, fazendo um ajuste baseado em relações numéricas; e
- (iv) utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, fazendo um ajuste com base no contexto do problema. (Barbosa, et al., 2008, p.6)

Ainda no estudo destas autoras (Barbosa et al., 2008) identificaram as **estratégias contagem** e **linear** como sendo das mais utilizadas em questões de **generalização**

próxima e distante, respetivamente. Contudo, houve uma incorreta utilização de outras estratégias e até mesmo das referidas anteriormente, devido à má aplicação da proporcionalidade direta e da utilização dos múltiplos da diferença entre termos.

Barbosa (2009) realizou um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade, com o objetivo de compreender o modo com os alunos resolviam problemas que envolvessem a generalização de padrões. Para tal, analisou e caracterizou as diferentes estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Esta autora destacou ao longo da sua investigação cinco tipos de estratégias: **contagem**, **termo unidade**, **diferença**, **tentativa-erro** e **explícita**.

A **estratégia contagem** era para a autora (Barbosa, 2009) uma estratégia eficaz para questões de generalizações próximas, uma vez que estava relacionada com a contagem dos elementos de cada termo até chegar ao termo pretendido. Para generalizações mais distantes, esta estratégia fica um pouco aquém devido ao processo demoroso.

A segunda estratégia referida por Barbosa (2009) é designada por **termo unidade**³, onde é assumido um termo da sequência como unidade e a partir dos seus múltiplos são determinados outros termos. Dentro desta estratégia a autora distingue aquela que se caracteriza por haver um ajuste do resultado através da subtração de elementos sobrepostos nos termos.

Para além dessa estratégia surge a estratégia **diferença** que está associada à utilização da diferença entre termos consecutivos, podendo haver ajustes no resultado. É também uma estratégia pouco eficaz para fazer generalizações distantes. Dentro desta estratégia, Barbosa (2009) ainda aponta para a **recursiva** como sendo uma outra forma de usar a diferença entre termos consecutivos, da mesma forma que a da estratégia de **contagem** é utilizada.

Por fim, a estratégia **explícita** diz respeito à descoberta de uma regra que permite relacionar diretamente o termo com a sua ordem, tendo por base a interpretação do contexto do problema. Esta estratégia é eficaz tanto nas questões de generalização próxima como distante (Barbosa, 2009).

Um outro estudo relacionado com a generalização de padrões e as diferentes abordagens dos alunos na resolução de tarefas que envolvam esse tema foi realizado por Ponte et al. (2009a). Os autores apresentaram 4 tipos de estratégias que surgiram

³ Tradução feita por Barbosa (2009) à estratégia *whole-object* de Stacey (1989)

com maior frequência no estudo que realizaram: **representação e contagem**, **aditiva**, **objeto inteiro** e **decomposição dos termos**.

Na primeira técnica referida – **representação e contagem**, o aluno apresenta todos os termos da sequência até chegar ao termo de ordem solicitada e, posteriormente, conta o número de elementos que o constitui para determinar o termo. Esta estratégia é útil quando se trata de uma **sequência pictórica**, uma vez que se torna mais fácil fazer a contagem e permite uma visualização mais concreta.

A contagem por detrás da estratégia descrita acima é feita seguindo algum tipo de regra, isto porque o aluno tem de perceber o que acontece de um termo para o outro para poder fazer a contagem dos próximos termos. Ponte et al. (2009a) apontam assim para outro tipo de estratégia, a estratégia **aditiva**, onde o aluno compara termos consecutivos e identifica uma relação entre esses dois termos, permitindo assim chegar a uma generalização (se se tiver em conta o 1º termo da sequência). Esta estratégia tem por base uma abordagem recursiva.

A estratégia do **objeto-inteiro** oferece uma abordagem diferente, em que o aluno determina um termo de uma certa ordem considerando outros termos em que as suas ordens sejam múltiplas desta, multiplicando-os. Para uma melhor compreensão, os autores dão exemplos, o aluno “determina o termo de ordem 36 com base nos termos de ordem 4 e 9, multiplicando-os” (Ponte et al., 2009a, p.45).

Por último, apresentam a estratégia da **decomposição de termos**, como sendo uma eficaz na determinação de termos de ordem distante numa **sequência pictórica**. Nesta, o aluno decompõe um termo em partes, identificando padrões e regularidades que podem ou não ser imediatamente evidentes na sua forma completa. Assim, é possível estabelecer-se relações entre a ordem de um termo e o número de elementos desse, para além de potenciar o aparecimento de diferentes expressões algébricas para generalizar a sequência.

Lannin (2005) num dos seus estudos, e tendo em conta as estratégias encontradas nas resoluções dos alunos em estudo, agrupou-as em duas categorias: aquelas que permitiam o cálculo imediato de um termo sabendo a sua ordem – estratégias **explícitas**, e as que ao adotá-las esse cálculo não era tão rápido – estratégias **não explícitas**.

Antes de se generalizar um padrão, é necessário encontrar uma regularidade desse mesmo padrão. Para tal, pode haver diferentes abordagens para alcançar esse passo. Barbosa e Vale (2015) afirmam que as estratégias na generalização de sequências que

envolvem figuras podem variar entre **visuais** e **analíticas**, dependendo se as figuras desempenham ou não um papel importante na descoberta do invariante.

Por um lado, nas estratégias de **generalização visuais**, as figuras do padrão (os termos) desempenham um papel fundamental na descoberta do invariante. Por outro, se são os números que estão relacionados com as figuras que ganham destaque no desenvolvimento da generalização, então está-se perante uma estratégia **não visual** (Barbosa & Vale, 2015).

As autoras dão alguns exemplos de estratégias que se inserem em cada tipo. Está-se perante uma estratégia de **generalização visual**, se se optar por uma estratégia de **contagem**, de **objeto inteiro**, **recursiva** (estendendo a sequência com base nos termos anteriores, usando as características das figuras) e **explícita** (descobrir uma regra, baseada no contexto do problema). Também as estratégias **recursiva** e **explícita** se inserem nas **não visuais** se a descoberta de termos e regras forem feitas através de relações numéricas. De um modo geral, tal como Barbosa e Vale (2015) afirmam, “a generalização de um padrão envolve a utilização de uma estratégia, porém existe uma grande diversidade de abordagens que permitem aos alunos generalizar” (p. 59).

Ainda sobre as sequências cujos elementos são figuras, Rivera e Becker (2008) apontam para dois tipos de maneiras diferentes de os alunos as analisarem: **generalização construtiva** – quando identificam conjuntos disjuntos de elementos que num todo se combinam para obter a figura inicial; ou **generalização desconstrutiva** – quando identificam conjuntos sobrepostos, contando certos elementos mais do que uma vez, sendo que, posteriormente, são subtraídos. As autoras chegaram à conclusão que os alunos recorriam mais à generalização construtiva do que à desconstrutiva, por esta última ser mais difícil de alcançar.

Num outro estudo, Becker e Rivera (2005) procuraram também saber quais as estratégias que alunos do 9º ano de escolaridade utilizavam para generalizar padrões lineares e identificaram inúmeras estratégias diferentes. Com base na forma como os alunos as utilizaram, agruparam-nas em três tipos de generalização: **numérica**, **figurativa** e **pragmática**.

A **generalização numérica** corresponde a um processo pelo qual o aluno estabelece conclusões a partir da sequência numérica que está associada ao padrão, procurando relações entre os valores. Muitas vezes recorrem à **tentativa-erro**, demonstrando pouca noção sobre os coeficientes de um padrão linear. Em contrapartida, os alunos que utilizaram a **generalização figurativa** chegam a uma generalização a partir de indícios

visuais estabelecidos diretamente a partir da estrutura da figura, podendo-se recorrer à decomposição dos termos.

Existiram também alunos que combinaram ambas as estratégias, reconhecendo simultaneamente propriedades e relações nas sequências numéricas, o que lhes permitiu uma compreensão mais completa e versátil dos padrões. Estes alunos utilizaram uma **generalização pragmática**.

Para além destes 3 tipos de generalizações, Becker e Rivera (2005) ainda encontraram um quarto tipo, que diz respeito aos alunos que não conseguiram encontrar nenhum tipo de generalização. Em relação a esses alunos, os autores perceberam que estes começavam por abordar uma **generalização numérica**, mas não utilizavam diferentes formas de estratégias de generalização, acabando por muitas vezes não conseguirem chegar a uma resposta final.

Na Figura 2 é apresentado um esquema síntese de todas as diferentes estratégias de generalizações que foram mencionadas ao longo desta subsecção: **diferença, decomposição dos termos, linear, recursiva, tentativa-erro, objeto-inteiro, contagem e explícita**. Estes são os oito grandes grupos que foram referidos, sendo que alguns tipos de estratégias se *encaixam* dentro delas, como é o caso, da estratégia **partição** (Lannin et al., 2006) dentro da **recursiva** e **representação e contagem** (Ponte et al., 2009a) dentro da **contagem**. Para guiar o leitor, tais estão representadas a negrito no esquema.

Para cada estratégia foram apresentadas as diferentes definições dadas por cada autor, sendo identificados. Alguns tipos de estratégias que foram mencionadas anteriormente não constam no esquema, por já estarem implícitos em alguns deles. É de realçar que o tipo de generalizações (**numérica, explícita, não explícita, construtiva, figurativa**, entre outros) que foram sendo referidos nesta subsecção não constam como tipo de estratégias, uma vez que, tal diz respeito à forma como os alunos *veem*, analisam e interpretam as sequências. Isto é, trata-se de uma característica da própria estratégia.

A Figura 2, resultado de um esforço de síntese a partir da convergência das perspetivas dos diversos autores, foi desenvolvido com o objetivo de trazer mais consistência à análise de dados, uma vez que, é partir deste esquema que irá ser feita uma categorização das estratégias de generalização.

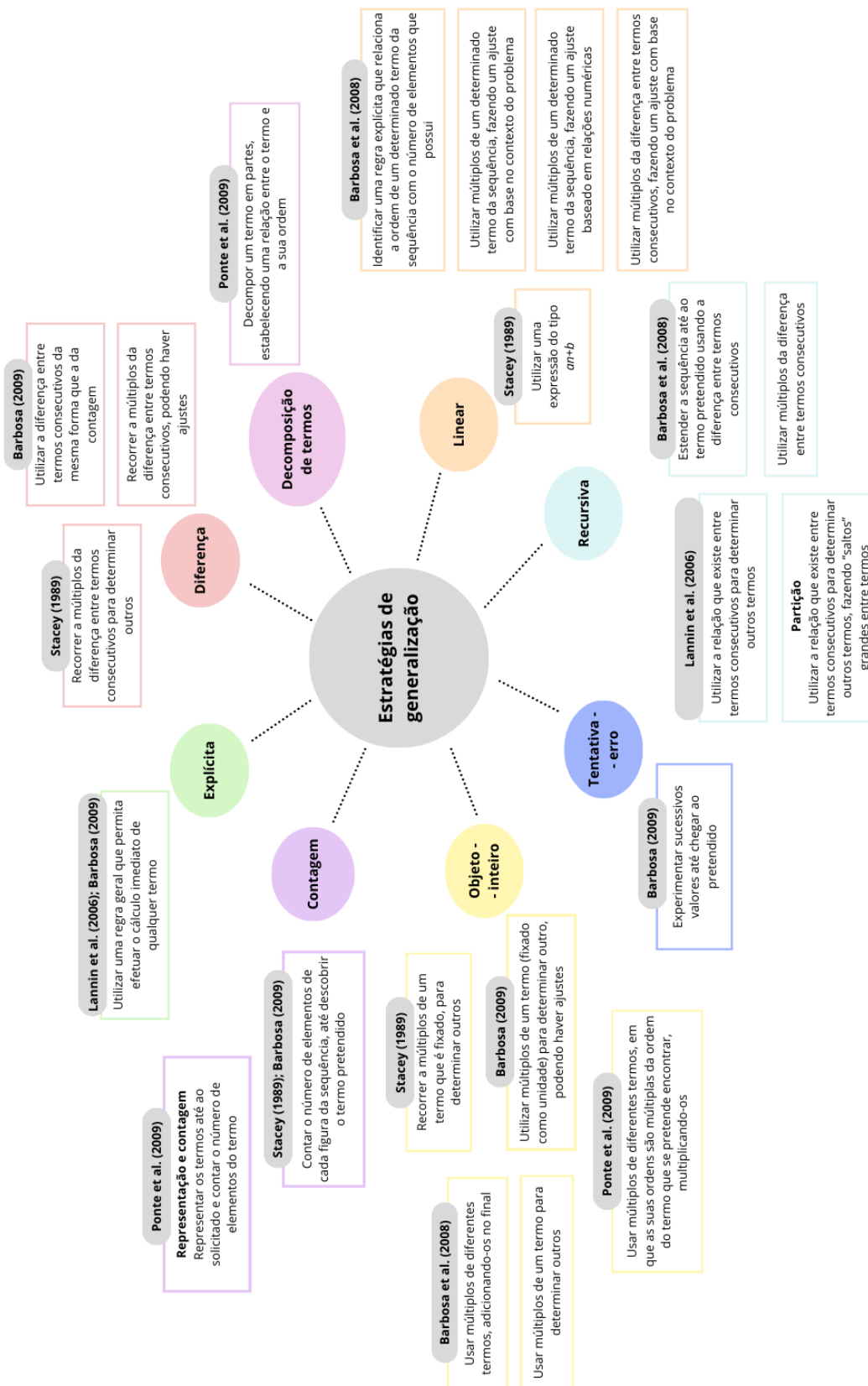


Figura 2 – Esquema síntese das estratégias de generalização dos vários autores mencionados

2.2.2.2. Dificuldades na exploração e generalização de sequências

As dificuldades dos alunos na exploração e generalização de padrões estão inerentes ao tipo de estratégia que utilizam para tal. De facto, se atentarmos às diferentes estratégias descritas na secção anterior, a sua utilização pode causar certos desafios e dificuldades nos alunos, como já foi sendo referido ao longo na mesma.

Um outro aspeto que pode influenciar o surgimento de dificuldades na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões são, as próprias tarefas e o conteúdo delas (Lannin et al., 2006). Por exemplo, se a sequência a trabalhar é do tipo **crescente**, **repetitiva** ou **pictórica**; ou as questões, se são de **generalização próxima** ou **distante**.

Vale e Barbosa (2019) referem que as maiores dificuldades dos alunos neste tipo de exploração surgem em questões de **generalização distante**, influenciadas pelo tipo de estratégia usada.

Os alunos ao trabalharem com questões de **generalização próxima** tendem a recorrer a estratégias do tipo **aditiva**, **recursiva** ou de **contagem** (Lannin, 2003; Lannin et al., 2006; Ponte et al., 2009a). Ao adotarem essas estratégias, limitam-se apenas a identificar a regularidade que está presente na **sequência numérica** associada, apercebendo-se do aumento de termo para termo, mas sem entenderem de facto esse aumento em termos visuais, principalmente em **sequências pictóricas**. Neste sentido, ao estarem apenas preocupados em determinar o termo, sem entender o seu significado, no contexto do problema, surgem algumas dificuldades quando passam de questões de **generalização próxima** para **distante** (Morais, 2012).

A utilização de estratégias como a **recursiva** trazem algumas limitações, uma vez que, tal como Barbosa (2009) afirma, torna-se mais difícil de estabelecer uma relação entre o termo e a sua ordem. Para além disso, a resolução de questões usando tais estratégias torna-se um processo muito demorado, que por muitas vezes dá origem a resultados errados (Barbosa, 2009) e a generalizações incorretas, como é o caso da obtenção de uma expressão algébrica que não representa a generalização da sequência em estudo (Ponte et al., 2009a).

Contudo, ainda Ponte et al. (2009a) referem que a utilização da estratégia **recursiva** ou **aditiva** pode permitir a obtenção de uma generalização correta. Para tal, basta que os alunos percebam que deve-se tomar o primeiro termo da sequência e ter em atenção à diferença entre os termos consecutivos e a partir daí fazer a generalização (Ponte et al., 2009a). Não é por acaso que muitos dos alunos sabem que para determinar o termo geral, basta encontrar a diferença entre termos consecutivos, e que esse valor (a)

corresponde ao número que estará antes do n ($an + b$) e, posteriormente, fazer-se um ajuste tendo em conta o primeiro termo.

Lannin (2003) e Ponte et al. (2009a) referem que a estratégia do **objeto-inteiro** pode trazer dificuldades para os alunos, quando se trata de encontrar uma generalização. Ponte et al. (2009a) ainda acrescentam que tal acontece devido à não observação dos termos, neste caso das figuras, e das suas propriedades.

Na generalização de **sequências pictóricas** os alunos têm tendência a utilizar a **sequência numérica** que lhe está associada para fazer generalizações. No entanto, muitas das vezes as generalizações obtidas não estão corretas ou não foram obtidas da melhor forma, uma vez que se limitam a estabelecer relações numéricas, sem entender a estrutura dos termos.

Lannin et al. (2006) também referem essa dificuldade como recorrente na utilização da estratégia do **objeto-inteiro**, referindo que esses alunos tendem a optar pela estratégia da **tentativa-erro** para encontrarem generalizações, focando o seu raciocínio em relações meramente numéricas.

Ademais, não ver as figuras e a sua constituição, leva a que os alunos não verifiquem o que é comum a todos os termos (Radford, 2010). Tal dificulta a generalização e a determinação de uma regra que relacione o termo e a sua ordem. Se os alunos não identificam o que é comum ou que se repete em cada termo, então também não generalizam (Ponte et al., 2009a). E por esta razão mostram dificuldades quando estão perante questões de generalização distante, uma vez que não conseguem encontrar uma regra válida que permita generalizar a sequência (Morais, 2012).

Para além da dificuldade em verificar o que é comum, os alunos também mostram algumas dificuldades em entender que existem várias formas de se observar os termos da sequência e, conseqüentemente, em encontrar uma regra (Morais, 2012).

Vale e Pimentel (2005) afirmam que os alunos apresentam um maior sucesso na generalização de sequências se o fizerem através das representações figurativas. É importante iniciar a exploração de padrões com alguma conexão figurativa, para que haja um maior desenvolvimento de generalizações por parte dos alunos.

Uma outra dificuldade que foi constatada em alguns estudos foi a linguagem utilizada pelos alunos e a passagem da expressão oral para uma algébrica (Rivera & Becker, 2008; Ponte & Velez, 2011; Lima, 2014). Os alunos mostram dificuldades em passar da comunicação oral para a escrita, ou até mesmo dificuldade na própria comunicação oral

matemática, não apresentando uma descrição coerente que possa traduzir o seu raciocínio matemático.

Agregada a essa dificuldade, surgem aquelas relacionadas à justificação, tanto oral, como por escrito, sendo mais evidenciada a segunda (Morais, 2012). Muitas vezes, os alunos podem não reconhecer quando é que uma justificação se torna válida, sendo que muitas vezes para a validar utilizam exemplos específicos (Lannin, 2003).

Em relação às **sequências pictóricas** crescentes existem algumas dificuldades por parte dos alunos, entre elas: justificar uma regra encontrada que generalize a sequência; reconhecer quais as justificações que são válidas para a generalização; e criar uma regra que permita encontrar qualquer termo de uma sequência (Ponte et al., 2009a; Rivera & Becker, 2008).

Para além de algumas dificuldades que foram sendo mencionadas ao longo desta subsecção pela autora (Morais (2012), esta ainda refere outras no seu estudo, agrupando-as em categorias: dificuldade de comunicação e dificuldade de argumentação.

Tanto a dificuldade de comunicação como a de argumentação vêm ao encontro com o que é dito por Rivera e Becker (2008), em relação às lacunas na comunicação oral e escrita dos alunos, mostrando pouco saber sobre como justificar.

A dificuldade em generalizar (uma outra categoria apresentada por (Morais (2012)) insere-se na dificuldade dos alunos em encontrar uma regra válida que relacione o termo e a ordem, o que faz com que haja dificuldade em generalizar termos mais distantes (Morais, 2012). Muitas das vezes o facto de os alunos não encontrarem uma estratégia adequada, sem ser a recursiva, leva-os a ter dificuldades na generalização da sequência.

De um modo geral, o professor deve ter consciência das possíveis dificuldades que possam surgir na exploração das sequências que são propostas aos alunos. É evidente que por vezes torna-se difícil conhecê-las, mas sempre que possível o professor deve contribuir para ajudar os alunos a enfrentar possíveis desafios e dificuldades.

Os aspetos discutidos leva-nos a refletir sobre as possíveis abordagens de ensino que sejam promotoras tanto do desenvolvimento de uma variedade de estratégias como do desenvolvimento do raciocínio matemático e que se preocupem com ultrapassar dificuldades e obstáculos que possam surgir. Tal será discutido na próxima secção.

2.3. Possibilidades de abordagens de ensino promotoras do desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático

Sabendo que o objetivo principal da Álgebra é promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e, por sua vez, do raciocínio matemático, torna-se necessário saber-se de que forma é que pode o professor promover esse mesmo desenvolvimento em sala de aula. Como é que pode o professor desenvolver os três processos do raciocínio, nomeadamente conjecturar, generalizar e justificar (Ponte et al., 2020)? De que forma é que o professor pode promover o desenvolvimento da generalização? Estes são questionamentos que um professor pode se fazer ao longo da gestão curricular, quer seja no tema da Álgebra ou noutro.

Para além da planificação e concretização das possíveis estratégias de ensino a adotar, é também importante refletir sobre a atividade do aluno nessa opção pedagógica, tendo plena consciência do que é esperado que o aluno faça e aprenda. Neste sentido, na próxima secção refletirei sobre o ensino exploratório enquanto uma das possibilidades pedagógicas para a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático.

2.3.1. O ensino exploratório

Tradicionalmente, as aulas de matemática são desenvolvidas a partir de um ensino mais direto e expositivo, onde o ensino é limitado a “expor a matéria” (Ponte, 2005) e a debitá-la, recorrendo a exemplos e, posteriormente, à resolução de exercícios rotineiros, que tomam lugar fulcral neste tipo de ensino. O professor assume um papel central na aula, enquanto os alunos estão limitados à memorização de processos e regras para resolver exercícios, sem muitas das vezes as entender.

Muitos autores assumem que uma abordagem centrada exclusivamente no ensino expositivo não é, de todo, uma estratégia de ensino favorável para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte et al., 2020; Canavarro, 2011; Canavarro et al., 2012). Como uma das alternativas possíveis, é proposto um ensino de carácter exploratório.

Ponte et al. (2020) referem que pode ser adotado um modelo de aulas, dividido em três fases: lançamento da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva, assente no “ensino-aprendizagem exploratório” (Ponte, 2005). Canavarro et al. (2012) acrescentam a esse modelo uma quarta fase: o momento de sistematização da aprendizagem matemática. Assim sendo, um modelo de aula propício ao desenvolvimento do raciocínio, inserido num ensino exploratório, pode ser composto por

quatro momentos distintos: (i) apresentação da tarefa; (ii) realização da tarefa, implicando um trabalho autónomo dos alunos; (iii) discussão coletiva da tarefa; e (iv) sistematização da aprendizagem matemática.

Esta abordagem de ensino exploratório assume um papel contrário ao ensino expositivo, uma vez que “o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p.13). A proposta não é que os alunos descubram as ideias e os conhecimentos matemáticos que devem aprender, nem que inventem conceitos (Canavarro, 2011), mas que realizem tarefas que façam com que estes cheguem a respostas através de conhecimento já adquirido e desenvolvam novos conhecimentos. Desta forma, os alunos são fortemente envolvidos na construção e sistematização dos conceitos matemáticos, assumindo um “papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução” (Ponte et al., 2020). Para além disso, o ensino exploratório possibilita a apresentação e justificação do raciocínio dos alunos.

É importante realçar que apesar de os alunos terem um papel fundamental neste tipo de ensino, não significa que tudo vá resultar da exploração dos alunos. O professor continua a ter um papel também ele importante e pode haver momentos de exposição e sistematização por parte do mesmo (Ponte, 2005).

Ponte et al. (2020) referem que a abordagem exploratória permite que os alunos a partir da construção de conceitos e da modelação de situações, desenvolvam a capacidade de conjecturar, generalizar e justificar, sendo estes os três processos essenciais do raciocínio matemático. Neste sentido, a abordagem de ensino exploratório permite o desenvolvimento das capacidades matemáticas, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011).

2.3.2. A escolha de tarefas e a promoção de um ambiente propício à comunicação

O ensino exploratório tem por base dois aspetos muito importantes que um professor deve ter em conta:

a escolha de tarefas apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de conjecturas, generalizações e justificações e o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva. (Ponte et al., 2020, p.10)

A primeira etapa é então uma seleção criteriosa das tarefas, por parte do professor, a serem realizadas na sala de aula. Ponte (2005) refere que não basta selecionar tarefas boas, sendo preciso ter em atenção o modo como as mesmas vão ser propostas aos alunos e como irão ser realizadas em sala de aula. É questionável o que pode ser considerada uma *boa* tarefa. Contudo, o que é importante é ter em atenção que as tarefas, num todo, devem proporcionar aos alunos uma aprendizagem coerente que permita o desenvolvimento de capacidades matemáticas e a construção e a compreensão de conceitos (Ponte, 2005).

Para além disso, as tarefas não devem ter um método de resolução imediato, uma vez que, no ensino exploratório, é “mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles (os alunos) descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor” (Ponte, 2005, p.9).

Existem alguns aspetos que o professor deve ter em conta na seleção ou elaboração das tarefas, para além dos seus alunos e da sua turma, como é o caso do grau de desafio, da sua estrutura, da sua duração e do contexto.

O grau de desafio e de estrutura complementam-se entre si, sendo o primeiro dividido em duas categorias, grau de desafio reduzido ou elevado, tendo em conta a dificuldade que se pretende que a tarefa apresente. Sobre o grau de estrutura, pode ser aberta ou fechada, considerando se na questão é claramente dito o que é pedido ou se existe algum tipo de abertura. Estes aspetos são apresentados por Ponte (2005) através de um esquema, designando cada tipo como: problema, exercício, exploração ou investigação.

Um problema e um exercício distinguem-se pelo seu grau de desafio. Caso a questão disponha de um processo imediato, então trata-se de um exercício, caso contrário, de problema. Contudo, Ponte (2005) alerta para o facto de um problema por vezes não ser um problema para alguns alunos, mas um exercício. Ainda o mesmo autor afirma que tarefas de carácter mais fechado são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Ponte et al. (2011) afirmam que os problemas, as investigações e as explorações se assemelham pelo facto de nas duas resoluções não existir uma resolução imediata, possibilitando os alunos para uma formulação de novas estratégias. Em contrapartida, distinguem-se, no seu grau de estrutura. Enquanto um problema assume um carácter fechado, as explorações e investigações surgem como um tipo de tarefas que contêm um tipo de indefinição ou abertura. Estes dois tipos de tarefas assumem assim um papel

de destaque, onde os alunos contruem o seu próprio conhecimento a partir dessas tarefas.

Deste modo, é importante que o professor tenha plena consciência do trabalho que pretende fazer com os alunos e do trabalho que pretende que os alunos tenham quando estão a resolver as tarefas, tendo também em atenção qual o conhecimento que quer que seja retirado da resolução das mesmas.

Assim, para que a exploração das tarefas por parte dos alunos tenha a finalidade pretendida é fundamental que as mesmas possuam um conjunto de características: ter natureza diversa com graus de dificuldade diversos; permitir uma diversidade de estratégias de resolução; suscitar a formulação de conjecturas e generalizações; e solicitar a justificação de respostas ou estratégias (Ponte et al., 2020).

Para além da seleção das tarefas é fundamental criar um espaço propício à comunicação matemática, possibilitando aos alunos momentos de reflexão e discussão sobre as suas estratégias de resolução e sobre os seus raciocínios. É neste sentido que surge, dentro dos quatro momentos do modelo de aula apresentado acima, o momento da discussão coletiva da tarefa.

As discussões coletivas assumem um papel fundamental no ensino exploratório, constituindo-se momento propício para a partilha das estratégias de resolução e para a construção de novo conhecimento, levando os alunos a explicarem os seus raciocínios ou a formular novos (Ponte et al., 2020; Ponte, 2005; Matos et al., 2008).

Para que tal aconteça, são fundamentais o papel e a ação do professor nos quatro momentos distintos da aula, não desvalorizando o papel o professor antes da aplicação das tarefas – o professor deve antecipar as resoluções esperadas pelos alunos e prever os possíveis caminhos (Canavarro, 2011).

2.4. Exercício de síntese

Depois de discutidos e refletidos diferentes temas surge a necessidade de se fazer uma pequena síntese que articule os conceitos que foram abordados.

Neste capítulo teórico foi explorada a importância dos padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático, mostrando, a partir das perspetivas de diversos autores, que esse desenvolvimento vai muito além da manipulação de símbolos. A exploração de padrões e, por sua vez, de sequências e regularidades, é destacada como algo que permite formular conjecturas, generalizar e justificar. Estes três processos são vistos como fundamentais para o desenvolvimento de certas

capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011).

Abordou-se o papel das sequências na aprendizagem matemática, categorizando os diferentes tipos existentes e analisando as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como as dificuldades enfrentadas na exploração e generalização dessas sequências. Tal servirá de referencial para a posterior análise dos dados, discutida no Capítulo 5. Também se discutiu como a escolha de estratégias pode influenciar o sucesso na generalização feita e as possíveis dificuldades em aplicar essas estratégias corretamente. Neste sentido, destaca-se a importância da utilização de diferentes representações matemáticas como esquemas e tabelas, para expressar generalizações.

Além disso, foram discutidas possíveis abordagens pedagógicas que podem ser promotoras do desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático, com ênfase no ensino exploratório e na seleção de tarefas apropriadas dentro de um ambiente de aprendizagem que favoreça a comunicação, valorizando assim as discussões coletivas. Assim, é dada oportunidade aos alunos de poderem discutir e justificar as suas estratégias, contribuindo para a construção do conhecimento matemático de forma colaborativa e aprofundada, desenvolvendo assim uma predisposição positiva para aprender Matemática.

3. Intervenção Pedagógica

Ao longo deste capítulo são apresentados aspetos importantes da minha intervenção pedagógica, iniciando com uma breve descrição do contexto escolar onde se desenvolveu a mesma, dando a conhecer um pouco mais sobre os momentos e as tarefas realizadas.

3.1. Contexto escolar

A minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), tal como a minha intervenção pedagógica, foi realizada numa escola localizada na região norte do Porto, durante o ano letivo 2023/2024.

Este estabelecimento de ensino possui uma biblioteca (Biblioteca Escolar do Agrupamento), uma Sala de Apoio ao Estudo (SAESPA) e ainda um Serviço de Psicologia e Orientação (SPO). Para além disso, dispõe de alguns projetos e clubes como as Turmas Dinâmicas, o Desporto Escolar, a Horta Pedagógica, o Clube de Música, o Clube da Ciência Viva, entre outros. Conta ainda com um Grupo de Educação Inclusiva que engloba uma equipa multidisciplinar de professores, com o objetivo de “contrariar os principais preditores de insucesso, adotando soluções adequadas aos contextos e às necessidades específicas dos seus alunos” (Plano Curricular do Agrupamento⁴, p. 3).

Trata-se de uma escola básica e secundária, com 429 alunos, no total, onde o Ensino Secundário se centra apenas nos cursos profissionais, com duas ofertas disponíveis: técnico de restaurante/bar e técnico cozinha/pastelaria. Estes cursos são constituídos apenas por uma turma de cada ano.

Relativamente ao ensino básico, este engloba o 2.º ciclo que está dividido em quatro turmas do 5.º ano e quatro turmas do 6.º ano; e o 3.º ciclo que se divide em cinco turmas do 7.º ano, quatro turmas do 8.º ano e quatro turmas do 9.º ano.

No que diz respeito aos docentes, são setenta e sete, no total, com uma média de idade de 54 anos.

Durante a minha PES, fiz parte de um núcleo de estágio constituído por mim, pela minha orientadora cooperante e por uma colega de estágio. A minha orientadora tinha a seu encargo quatro turmas do 7.º ano, sendo que eu e a minha colega ficamos corresponsáveis por apenas duas delas. A decisão de termos ficado com duas das

⁴ Este documento não consta nas Referências, garantindo assim o anonimato da escola.

quatro turmas do 7.º ano, foi feita em conjunto com a coordenadora da Iniciação à Prática Profissional (IPP), para que pudéssemos ter oportunidade de estar com outros níveis de ensino, já que a orientadora cooperante apenas lecionava turmas do mesmo ano.

Neste sentido, ao longo deste ano letivo, para além de lecionar em duas turmas do 7.º ano, também fiz assessoria a duas turmas do 9.º ano e ainda a uma turma de Educação Especial. Para além disso, tive a oportunidade de assistir a aulas do Ensino Secundário, em particular, do 12.º ano, numa outra escola, localizada na mesma área.

3.2. A minha intervenção pedagógica

A abordagem pedagógica da minha intervenção assentou no ensino exploratório (Ponte, 2005). Para tanto, baseou-se numa seleção criteriosa de tarefas, que fosse ao encontro do objetivo do meu estudo, e num ambiente propício para discussões em grupo e coletivas, sendo estes dois aspetos importantes para a ação do professor (Ponte et al., 2020).

Optei pelo ensino exploratório ao concordar com Ponte et al. (2020) que esta abordagem “proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático” (p.11). Para além disso, o pressuposto do ensino exploratório passa pela possibilidade de os alunos, ao estarem perante tarefas, possam ver surgir definições e significados, desenvolvendo capacidades matemáticas como o raciocínio matemático (Canavarro, 2011).

De facto, as tarefas que fazem parte da minha intervenção pedagógica seguem aquela que é a finalidade das tarefas integrantes de um ensino exploratório: a de proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas que vão para além da aplicação e manipulação de regras e conceitos, previamente definidos (Canavarro, 2011). Este foi um dos maiores aspetos que tive em conta na seleção e adaptação das tarefas, uma vez que o meu objetivo foi sempre que os alunos resolvessem as mesmas sem terem um conhecimento prévio de resoluções e passos a seguir.

Nas próximas subsecções, referentes ainda à intervenção pedagógica, é feita uma descrição do contexto em que a mesma foi desenvolvida, apresentando a turma alvo, a dinâmica desenvolvida em sala de aula, bem como a organização e os seus momentos ao longo do tempo. Consta ainda uma caracterização das tarefas realizadas, sendo explicitados os seus objetivos e as opções tomadas.

3.2.1. A turma alvo

Um dos primeiros passos que tive em conta para a realização da minha intervenção pedagógica foi a escolha da turma que participaria neste estudo. Para tal, tive de optar entre as duas turmas de 7.º ano que acompanhei na disciplina de Matemática ao longo da minha PES.

Essa escolha foi discutida e decidida em conjunto com a professora cooperante e com a minha colega de estágio, de modo a não sobrecarregar nenhuma turma com o processo de recolha de dados. Isto porque, também a minha colega teria os alunos de uma das duas turmas como participantes para a sua investigação.

Para além da discussão em conjunto, também tive o cuidado de escolher a turma alvo tendo em conta os seguintes critérios: recorrente partilha de ideias entre os colegas; diversidade de respostas e resoluções quando estão perante problemas e exercícios; entusiasmo e empenho nos desafios que lhes são lançados e interesse por dinâmicas diferentes em sala de aula.

Considero importante referir que, das duas turmas, a turma alvo é uma turma que posso considerar homogénea ao nível do conhecimento matemático, dos interesses, do comportamento e das capacidades matemáticas. Tal perceção também é evidenciada pelo desempenho escolar na disciplina de Matemática, relativos ao 2.º período, em que os níveis variam entre 3 a 5, tendo maior frequência absoluta nos níveis 4 e 5.

Para além disso, os alunos desta turma revelaram, desde sempre e de uma forma global, uma predisposição positiva para aprender matemática. Esta atitude é referida no documento das *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) como um elemento preditor do sucesso, possibilitando que os jovens aprendam “matemática usufruindo dela com gosto e acompanhados de um sentimento crescente de autoconfiança na sua capacidade de lidar de modo autónomo com a Matemática” (p.3).

O facto desta turma ter as características mencionadas, deixou-me com algumas inquietações quanto à escolha da mesma. Isto porque, apesar dos alunos poderem ser desafiados por mim com algo mais complexo, os dados retirados poderiam não ser tão diversificados, como eu esperava que fossem. Esta foi uma reflexão que realizei porque nas turmas heterógenas há a oportunidade de uma maior riqueza no processo de aprendizagem, uma vez que as capacidades, interesses e perspetivas são diferentes. Por isso, a partilha de ideias e pensamentos são bastante diversas, podendo os alunos colaborar e aprender uns com os outros.

No entanto, com o passar do tempo, percebi que escolha desta turma foi a mais acertada, pois existiam alunos com uma grande capacidade de pensar *fora da caixa* e tentar encontrar estratégias diferentes, que não as que já estavam habituados. Para além disso, o envolvimento da turma com tarefas feitas em grupo foi bastante positivo, o que poderia não acontecer se tivesse sido a outra turma a escolhida. Tal possibilidade poderia ser igualmente interessante para uma investigação e desafiar-me-ia de outros modos, já que cada experiência e cada aluno são únicos.

Assim sendo, com esta turma foi possível obter uma diversidade de resoluções, estratégias, justificações e representações matemáticas, aspeto bastante pertinente tendo em conta os objetivos.

A turma alvo era formada por 17 alunos, sendo 10 rapazes e 7 raparigas, com média de idades entre 12 e 13 anos. Dois dos alunos desta turma beneficiavam de medidas adicionais (Decreto-Lei n.º 54/2018) e por este motivo não frequentavam as aulas de matemática, tendo um apoio diferenciado, numa turma destinada à Educação Especial.

Assim sendo, para esta investigação fizeram parte 15 alunos, entre eles 8 rapazes e 7 raparigas.

3.2.2. Dinâmica nos momentos da intervenção pedagógica

A dinâmica desenvolvida na minha intervenção pedagógica foi algo bastante importante a ter em conta para proporcionar aos alunos um ambiente adequado para o trabalho em grupo, e posteriores discussões coletivas.

As tarefas foram realizadas em grupos, de maneira a haver uma discussão de estratégias e ideias a seguir para uma resposta final, entre os elementos de cada grupo. Para tal, foi necessário haver uma seleção dos grupos. De modo que não houvesse escolhas tendenciosas por minha parte nem por parte dos alunos, decidi que essa escolha seria feita de forma aleatória.

Na primeira aula da intervenção, os alunos à medida que iam entrando na sala, retiravam de um saco um botão de uma determinada cor – o saco continha quatro botões **bordô**, quatro **azuis**, quatro **pretos** e quatro **verdes**. De seguida, direcionavam-se para a mesa cujo nome que estava escrito numa folha (pousada na mesa) era a cor do botão retirado. Assim, ficaram formados os quatro grupos, tendo em conta as cores dos botões que estavam no saco: *Grupo Azul*, *Grupo Preto*, *Grupo Verde* e *Grupo Bordô*.

Para além da seleção dos grupos, houve outros aspetos a ter em conta para que, tanto os alunos se sentissem interessados e motivados, bem como a recolha de dados corresse como esperado.

Para o primeiro ponto, relativo à motivação e interesse dos alunos, achei que seria mais cativante se houvesse algo diferente para a apresentação das tarefas, algo mais do que apenas um papel com o enunciado e um papel para as respostas. Foi assim que decidi criar o *kit estratégico* (Figura 3), composto por uma capa com vários materiais necessários para a realização das tarefas, entre eles:

- ✓ o enunciado da tarefa a resolver – um enunciado para o grupo e um para cada elemento do grupo, para guardarem no seu dossiê;
- ✓ a folha de respostas do grupo (Apêndice 1), onde deveria constar a resolução final escrita de cada grupo;
- ✓ folhas brancas, tipo rascunho;
- ✓ um medidor de ajuda, constituído por 3 cartões (1 verde, 1 vermelho e 1 amarelo), para pousar em cima da mesa, onde a cor correspondia ao nível de dúvidas/dificuldades que cada grupo ia sentido ao longo das resoluções – o que poderia me orientar no apoio aos grupos;
- ✓ um saco com botões, caso quisessem resolver algumas tarefas com esse recurso;
- ✓ lápis de cor.

Cada um dos *kits* continha também um *cartão de cidadão do grupo*, onde constava o nome do grupo e um espaço a preencher pelos alunos com os seus nomes fictícios, escolhidos pelos próprios.



Figura 3 – Materiais do kit estratégico (sem os enunciados e folhas brancas)

Todos os grupos possuíam o seu *kit*, que esteve acompanhado, em todas as aulas, de um gravador de áudio (Figura 4), ferramenta que apoiou o processo de recolha de dados.

No final de cada aula os alunos entregavam-me os seus *kits* com todo o material, incluindo a folha de grupo com a sua proposta de resolução, para que eu pudesse fazer uma breve análise das resoluções de cada grupo. Tal possibilitou-me antecipar algumas dificuldades que pudessem surgir nas próximas tarefas e planear as posteriores discussões coletivas. Na aula seguinte eu voltava a levar o *kit*, já com um novo enunciado e com uma nova folha de resposta do grupo.

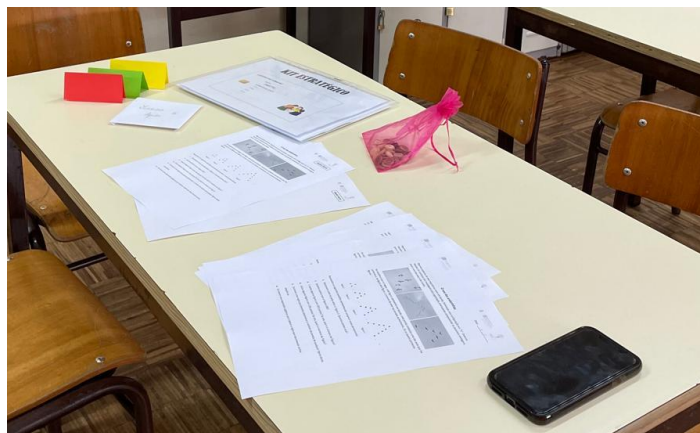


Figura 4 – Materiais disponíveis para cada grupo (1.ª aula)

Um dos aspetos que também tive em conta foi a organização da sala, uma vez que na minha intervenção, os alunos trabalharam sempre em grupo. A minha ideia foi pôr cada grupo em cada canto da sala, para que a partilha entre grupos apenas acontecesse nos momentos de discussão coletiva.

3.2.3. Momentos da intervenção pedagógica

Tendo em vista os objetivos mencionados no capítulo da Introdução, pretendi desenvolver a minha intervenção pedagógica nas aulas previstas para o tópico das *Sequências*, uma vez que o objetivo geral deste estudo é compreender as estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvessem a generalização de padrões.

No Planeamento Curricular (PC) estavam destinadas apenas duas aulas para este tópico, que seriam lecionadas por mim, depois de dado o tópico *Figuras Planas* e antes do tópico *Expressões Algébricas*, tal como constava na ordem do manual adotado. A realidade foi que, como ainda não estavam planificados todos os momentos da minha intervenção, até àquela que era a data prevista para a primeira aula de *Sequências*,

optou-se por lecionar primeiro os tópicos *Expressões Algébricas* e *Equações*. Tal foi discutido e decidido em conjunto com a professora cooperante, de forma a garantir um melhor resultado na minha intervenção.

Assim sendo, e como os alunos já tinham mais algumas bases sobre o que eram expressões e equações, achei que seria interessante aplicar tarefas que tivessem algo relacionado com esses tópicos referidos, aproveitando o conhecimento dos alunos. Deste modo e discutindo com o meu grupo de estágio, a intervenção pedagógica seria desenvolvida ao longo de três aulas, ou seja, uma aula a mais do que estava previsto no PC. Assim, num todo, seriam três aulas para a realização de três tarefas propulsoras para o início do tema das *Sequências*.

No entanto, tendo em conta que o tempo se prolongou um pouco mais do que o pretendido no momento das resoluções de algumas tarefas e também pela necessidade de recolha de mais alguns dados, o número de aulas estendeu-se para quatro. Deste modo, na última aula ainda consegui fazer um pequeno resumo com os alunos, em jeito de síntese, sobre o conteúdo dado nas tarefas.

Após a autorização da participação de todos os estudantes por parte dos Encarregados de Educação (EE), através de um consentimento informado (documento que estará descrito no capítulo seguinte e disponível no Apêndice 6), a intervenção pedagógica iniciou-se a 16 de fevereiro de 2024 prolongando-se até dia 27 de fevereiro de 2024.

Tal baseou-se na resolução de três tarefas, no âmbito do tema das *Sequências*, com o objetivo de compreender as estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvessem a generalização de padrões. Na Figura 5, está representada a cronologia dos vários momentos da minha intervenção pedagógica.

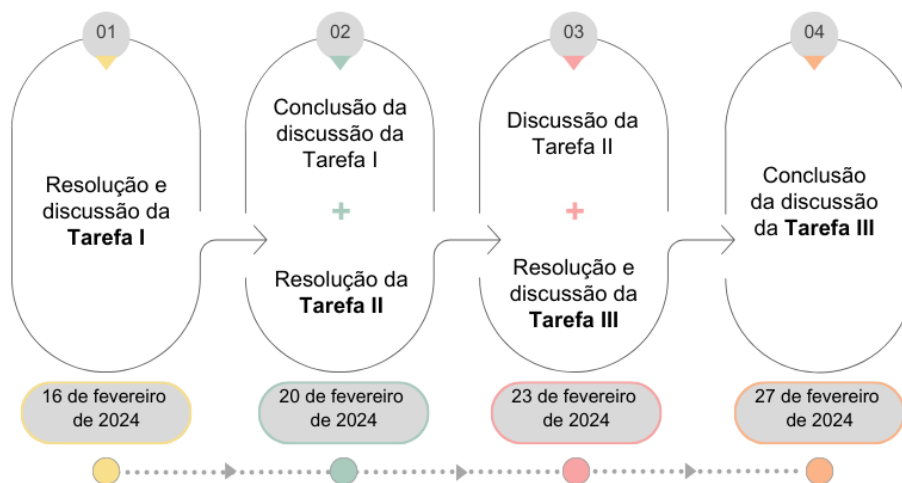


Figura 5 – Esquematização cronológica dos momentos da intervenção pedagógica

Na primeira aula, no dia 16 de fevereiro de 2024, cujo plano de aula se encontra no Apêndice 2, foi feita a seleção dos grupos, como já foi dito anteriormente, e foi apresentada e esclarecida a dinâmica que iria haver nas próximas aulas. Para além disso, foi feita uma exploração do *kit estratégico*, dando a conhecer os materiais que nele continha e de que forma os usar. Dei um destaque especial para a folha de resposta do grupo (Apêndice 1), onde deveria constar a resolução final da tarefa, finalizando com uma breve partilha de ideias coletiva sobre o que seria trabalhar em grupo e o modo como o deveriam fazer. Depois de todos esses aspetos concluídos, deu-se início ao trabalho autónomo dos alunos, onde cada grupo resolveu a Tarefa I.

Tendo em conta os vários assuntos que foram discutidos nesta aula, posteriormente à realização da Tarefa I, optei por discutir apenas as primeiras questões dessa tarefa, não tendo sido possível finalizar as duas últimas, como estava previsto. Assim sendo, e tal como mostra o esquema, a conclusão do momento de discussão da Tarefa I passou para a próxima aula, do dia 20 de fevereiro de 2024.

A discussão coletiva da Tarefa I, na aula do dia 16 de fevereiro de 2024, foi feita pelos alunos, onde para cada questão eu selecionei previamente um grupo para apresentar as suas resoluções. Essa seleção foi feita de acordo com a minha observação enquanto andava pelos grupos, no momento do trabalho autónomo dos alunos.

Enquanto trabalhavam em grupo, fui percebendo as diferentes resoluções e, antes de se dar início à discussão coletiva sequenciei os grupos que iriam apresentar cada questão. No momento da discussão, questionava sempre todos os grupos com vista a identificar modos distintos de resolução, pedindo-lhes que apresentassem a estratégia utilizada. Quando lhes perguntava se havia outras formas, eu já sabia de antemão se existiam diferentes resoluções, mas queria que os próprios grupos refletissem se a resolução deles tinha algo diferente ou não. Quando todos respondiam que não tinham nenhuma diferente, eu própria perguntava diretamente ao grupo que eu, antecipadamente, sabia que tinha diferente.

Na aula seguinte, no dia 20 de fevereiro de 2024, cujo plano de aula se encontra no Apêndice 3, foi concluída a discussão da primeira tarefa e foi feita (e concluída) a resolução da Tarefa II – a sua discussão foi feita na aula seguinte.

A conclusão da discussão da Tarefa I ocorreu da seguinte forma: partilhei um PowerPoint (presente no plano de aula do dia 20 de fevereiro) com algumas resoluções diferentes de cada grupo e fomos discutindo em turma o que cada um tinha feito. As resoluções das primeiras questões que constaram no PowerPoint correspondem às dos

grupos que as apresentaram na aula anterior, no momento de discussão. Ao longo de cada questão fui introduzindo alguns conceitos novos, como o termo, a ordem e o termo geral.

É importante referir que as questões que tinham sido discutidas na aula anterior foram debatidas novamente, mas de uma forma mais rápida. O objetivo era envolver os alunos de novo na tarefa, uma vez que, já se tinham passado quatro dias desde o primeiro contacto com a tarefa.

Na aula do dia 23 de fevereiro de 2024, cujo plano de aula se encontra no Apêndice 4, foi feita a discussão da Tarefa II, seguindo os mesmos moldes que a da Tarefa I. Isto é, a discussão foi feita partilhando um PowerPoint (presente no plano de aula do dia 24 de fevereiro) com algumas resoluções de cada grupo para cada questão, e foram sendo debatidas por mim e também pelos alunos. Esta escolha foi tomada pelo facto de ter havido uma quebra entre o momento da resolução da tarefa e o momento da discussão coletiva, em que os alunos já não lembravam do que tinham pensado e feito. Deste modo, com a apresentação de algumas resoluções e com a minha ajuda os alunos foram recordando tanto a tarefa em si, como as suas respostas. Caso tivesse optado por os alunos apresentarem as suas resoluções à turma, provavelmente não seria uma discussão rica. Creio que os alunos se iriam limitar a ler as suas resoluções, sem entenderem o raciocínio que foi adotado para tal.

Na discussão da Tarefa III, que ocorreu na aula do dia 23 de fevereiro de 2024 (discussão da primeira questão) e na aula do dia 27 de fevereiro de 2024 (discussão da segunda questão) cada grupo apresentou as suas propostas de resolução (tal como aconteceu na primeira discussão da Tarefa I).

Na aula do dia 27 de fevereiro de 2024, tal como consta no plano de aula, no Apêndice 5, para além da conclusão da discussão da Tarefa III, foi feita uma leitura da síntese que foi elaborada na aula do dia 20 de fevereiro, sobre os conceitos do tema das *Sequências*.

Este tipo de discussão coletiva e partilha foi mais enriquecedor do que os outros feitos anteriormente, uma vez que, existiu um envolvimento maior dos alunos neste momento. Os alunos passaram a ser o elemento central da aula, enquanto eu apenas me considerava como uma *moderadora* da própria discussão, colocando questões pertinentes para o movimento desta. Enquanto um grupo estava a apresentar, os outros alunos mostravam-se interessados em perceber as estratégias mobilizadas, percebendo que existiam várias formas de se chegar ao pretendido.

3.2.4. Tarefas realizadas

Um processo bastante desafiador na minha intervenção pedagógica foi encontrar tarefas que fossem ao encontro com o que pretendia: haver mais do que uma estratégia para se resolver as questões e, mais que isso, não haver um método de resolução imediato, para que fossem os alunos a construir as suas próprias estratégias. Neste sentido, considero que as tarefas aplicadas na minha intervenção podem ser consideradas como problemas, uma vez que, tal como Ponte et al. (2011) afirma, são tarefas que envolvem um grau de dificuldade elevado e são de carácter fechado, sendo as suas questões mais direccionadas. Além do mais, os alunos não tinham qualquer tipo de resolução imediata para responderem às questões das tarefas (Pólya, 2014).

Na verdade, sendo estas tarefas de iniciação a um tema, as *Sequências*, não havia muito essa preocupação, de haver já regras e métodos de resolução. No entanto, poderiam começar a surgir à medida que fossem resolvendo as seguintes tarefas. À vista disso, procurei que os alunos não pudessem usar as mesmas estratégias para cada tarefa, forçando-os a procurarem e a discutirem novas ideias e propostas de resolução para cada uma delas.

Nas subsecções seguintes, apresentarei as tarefas que foram realizadas ao longo da minha intervenção, bem como os seus objetivos e algumas considerações que achei pertinentes fazer sobre as mesmas. A discussão sobre a resolução feita pelos alunos é desenvolvida no Capítulo 5, referente à análise dos dados.

3.2.4.1. Tarefa I – “O voo das andorinhas”

A primeira tarefa designada *O voo das andorinhas* (Figura 6), adaptado de Ponte et al. (2009b) foi resolvida na aula do dia 16 de fevereiro de 2024. Esta apresenta um nível de dificuldade baixo, uma vez que, se tratava do primeiro contacto dos alunos com o tema das *Sequências* no ano de escolaridade em que estavam inseridos.

O voo das andorinhas

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em “V”. Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.



Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis as quatro primeiras figuras:

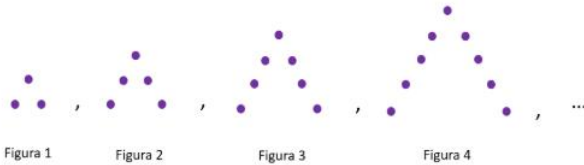


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

Respondam às seguintes questões apresentando sempre o vosso pensamento.

1. Descrevam como se pode obter a Figura 5. Quantos pontos terá?
2. Quantos pontos terá a Figura 100?
3. E existe alguma Figura com 202 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?
4. Existe alguma Figura com 135 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?
5. Escrevam uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
6. Escrevam uma expressão algébrica que traduza a regra que descreveste acima.

Figura 6 – Enunciado da Tarefa I: O voo das andorinhas

Os objetivos espelhados nesta tarefa, assentes nos objetivos específicos do tema das *Sequências das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, referentes ao 7.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021c) e articulados com os pressupostos mencionados por Ponte et al. (2009b) são:

- Completar e continuar sequências numéricas dadas de acordo com uma lei de formação, justificando;
- Saber verificar se um dado número é, ou não, elemento de uma sequência;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência;
- Determinar ordens correspondentes a vários termos;
- Reconhecer regularidades em sequências e determinar uma lei de formação, expressando-a em linguagem natural;
- Determinar uma expressão algébrica que traduza a situação dada.

A tarefa propunha a exploração de padrões e sequências, sem abordar diretamente os conceitos de ordem, termo, lei de formação e termo geral. O objetivo desta tarefa

centrava-se na realização de uma síntese no momento de discussão dos resultados que abordasse os conceitos referidos anteriormente.

Esta tarefa apresenta tanto questões de **generalização próxima**, como é o caso da questão 1, como de **generalização distante**, como é o caso das questões 2 a 5, através de desenhos ou cálculos.

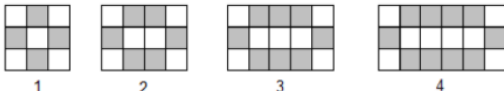
Era de esperar que muitos alunos conseguissem responder de forma correta e sem muitas dificuldades a todas as questões, ainda que tivessem pouco conhecimento sobre este tema das sequências e regularidades. Poderiam surgir algumas dúvidas na passagem da questão 5 para a questão 6, dependendo da generalização e da regra estabelecida na questão 5. Alguns grupos poderiam apresentar uma regra na questão 5 que não fosse possível transformar numa expressão algébrica, por exemplo, se optassem por uma regra que relacionasse os termos da figura, numa forma recursiva, e não o termo com a ordem.

3.2.4.2. Tarefa II – “Os azulejos”

Na segunda aula, realizada no dia 21 de fevereiro de 2024, os alunos resolveram a Tarefa II (Figura 7), designada por *Os azulejos* (adaptado de Ponte et al., 2009b), que dá continuidade ao objetivo da tarefa anterior, em que os alunos continuam a explorar padrões e regularidades.

Os azulejos

A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



1 2 3 4

Respondam às perguntas seguintes, apresentando o vosso pensamento por **palavras, esquemas, tabelas, cálculos** ou **símbolos**. Não se esqueçam que todas as repostas devem estar devidamente justificadas.

Para resolverem esta tarefa, a Sara deixa-vos uma dica:

“Antes de começarem a resolver a tarefa, organizem primeiro os dados que têm. Podem apresentar os dados num esquema, numa tabela ou de qualquer outra forma que achem mais prático. Para vos ajudar na resolução, podem ir acrescentando ao vosso esquema os dados que vão obtendo ao longo da tarefa.”

1. Quantos azulejos tem, no total, a Figura 6?
2. A Figura 51 tem quantos azulejos cinzentos e quantos azulejos brancos?
3. Para construir uma figura da sequência apresentada acima, a Sara precisou de 81 azulejos, no total.
Quantos azulejos cinzentos e brancos a Sara usou?
4. Considerando a sequência acima, indiquem qual é a ordem do termo da sequência que é igual a 294.
Na situação apresentada nesta tarefa, o que representa o valor que obtiveram?

Figura 7 – Enunciado da Tarefa II: Os azulejos

Os objetivos desta tarefa, assentes nos objetivos específicos do tema das *Sequências Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, referentes ao 7.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021c) e articulados com os pressupostos mencionados por Ponte et al. (2009b) incidem sobre:

- Completar e continuar sequências;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência e ordens correspondentes a vários termos;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência;
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência;
- Saber e usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.

Os objetivos desta tarefa parecem ser idênticos ao da Tarefa I. De facto, são, uma vez que, de uma tarefa para a outra o objetivo foi apenas elevar um pouco mais a exigência, mas sem alterar muito o tipo de questões que já tinham resolvido na tarefa anterior. Assim, também me foi possível perceber se, efetivamente, os alunos tendem ou não em decorar regras e métodos para resolverem certas questões.

Neste caso, optei por não incluir no desenvolvimento da tarefa a identificação de uma expressão algébrica nem do termo geral, pois essa poderia ser uma das estratégias que os alunos poderiam usar. Se uma das questões da tarefa solicitasse tal coisa, estaria a direcionar os alunos a resolvê-la com o termo geral e não era de todo o meu objetivo.

Para além disso, e para que o nível de exigência e de raciocínio fosse um pouco maior, optei por introduzir alguns conceitos como ordem e termo, para que os alunos se habituassem a essa linguagem matemática.

Acresce ainda o facto de, mesmo que indiretamente para os alunos, haver três sequências diferentes nesta tarefa: a sequência associada ao número de azulejos brancos, ao número dos azulejos cinzentos e ao número total de azulejos. Por exemplo, na questão 2 os alunos tinham de encontrar as regularidades da sequência dos azulejos brancos e da sequência dos cinzentos. Já na questão 3, os alunos teriam de fazer o processo inverso, ou poderiam até perceber que bastava determinar o número da figura para saberem o número de azulejos brancos e cinzentos. Neste caso, só teriam que, antecipadamente, saber relacionar o número da figura com o número de azulejos. A

questão 4, pode parecer um pouco repetitiva tendo em conta a questão 3, mas o meu objetivo era apenas introduzir os conceitos *termo* e *ordem*, e mostrar aos alunos duas questões diferentes que pedem o mesmo, determinar o número da figura. Poderiam até optar em usar a mesma estratégia que utilizaram na questão anterior.

Considero importante referir que, ao deparar-me com respostas muitas curtas e sem justificações na resolução da primeira tarefa, na tarefa *Os azulejos*, em particular, decidi pedir aos alunos para organizarem os seus dados de forma que fosse mais fácil observar os padrões.

3.2.4.3. Tarefa III – “A festa de aniversário da Rita”

A última tarefa da minha intervenção pedagógica, realizada na aula do dia 23 de fevereiro de 2024, foi a Tarefa III, designada por *A festa de aniversário da Rita* (Figura 8).

A festa de aniversário da Rita

A Rita está a organizar a sua festa de aniversário e escolheu o restaurante “SS – Sequências Saborosas” para celebrar os seus 22 anos.

Todas as mesas do restaurante têm a forma de hexágonos regulares. A disposição das mesas e das cadeiras segue o padrão apresentado abaixo.

O Sr. Paulo, dono do restaurante, organiza as mesas de acordo com o número de convidados. Por exemplo, para 10 convidados, junta duas mesas, em vez de ficarem em mesas separadas.

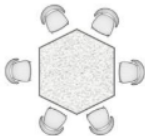


Figura 1

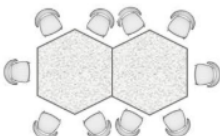


Figura 2

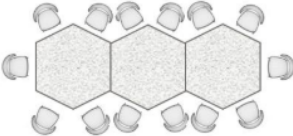


Figura 3

1. A Rita ligou para o restaurante e informou o Sr. Paulo que seriam 99 convidados para a sua festa. Dois dias depois, a Rita recebeu mais confirmações, passando a ser 103 convidados.
Sabendo que a disposição das mesas e dos lugares segue o padrão das figuras acima, será que o Sr. Paulo vai precisar de mais mesas do que aquelas que já tinha colocado para sentar os 99 convidados? Se sim, quantas mesas, no mínimo, vai precisar a mais? Sobram lugares?
Expliquem o vosso pensamento.
2. A Rita, para tentar ajudar o Sr. Paulo a descobrir o número de cadeiras, descobriu que esse número poderia ser determinado por $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$, onde m representaria o número de mesas.
Concordam com a Rita? Justifiquem.
Conseguem explicar como é que a Rita chegou a essa expressão algébrica?

Figura 8 – Enunciado da Tarefa III: A festa de aniversário da Rita

De uma forma global, e tendo em conta os objetivos de aprendizagem que constam nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, referentes ao 7.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021c), os objetivos específicos desta tarefa passam por:

- Analisar as relações entre os termos de uma sequência;
- Reforçar a compreensão da noção de termo geral de uma sequência;
- Determinar termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
- Ser capazes de identificar expressões algébricas equivalentes;
- Determinar uma expressão algébrica que traduza a situação dada;
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência.

Esta tarefa apresenta um grau de dificuldade bastante mais elevado em comparação com as outras duas tarefas propostas anteriormente, deixando de haver questões de **generalização próxima**. As questões colocadas deixam de ser tão diretas como as colocadas nas outras tarefas, desenvolvendo assim a capacidade de os alunos pensarem além da regularidade presente na sequência. Mesmo que os alunos conseguissem determinar um termo geral para responderem à primeira questão, estes tinham de desenvolver o pensamento crítico para conseguir perceber se as soluções e respostas dadas faziam sentido tendo em conta a situação descrita no problema.

A questão 2 desta tarefa foi escolhida propositalmente para estar na última tarefa realizada. Ao longo das três tarefas era de esperar que os alunos conseguissem perceber que existe mais que um método de resolução para se chegar à resposta. De facto, isso é verdade e muitas vezes tem a ver com a maneira como cada um *olha* para a sequência e para os seus termos. Com esta questão eu pretendia que os alunos entendessem que o facto de haver diferentes interpretações das figuras da sequência, resulta de expressões algébricas diferentes, chamadas de *expressões equivalentes*, que já tinham sido abordadas no tópico das *Expressões Algébricas*.

Para além disso, era também o meu objetivo não só perceberem que existem diferentes formas de ver os elementos, mas que estes pudessem ver essas diferentes formas, abrindo os seus horizontes.

3.3. Considerações sobre a intervenção

Em geral, considero que a minha intervenção pedagógica foi repleta de desafios, ao longo de cada aula, ao longo de cada minuto, mas que foram sendo ultrapassados da melhor forma, pelo menos para mim. É claro que houve certas decisões que tomei que não voltaria a tomar caso repetisse esta investigação, que discutirei a seguir. Mas no final consegui superar o meu objetivo e retirar dos alunos várias ideias e raciocínios diversos e diferenciados.

Creio que as tarefas foram bem concebidas para aquele que era o seu objetivo final, permitindo que os alunos desenvolvessem o pensamento algébrico e algumas capacidades transversais como o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Para além disso, possibilitaram uma variedade de estratégias e múltiplas resoluções, explorando diferentes pontos de vista, que deram origem a algumas discussões nos diferentes grupos. Essa partilha de ideias fez com que os alunos discutissem entre eles e pudessem chegar a um consenso sobre a estratégia a usar.

As discussões coletivas foram muito enriquecedoras, dando a perceber aos alunos as diferentes resoluções possíveis numa só tarefa, permitindo que os mesmos partilhassem os seus pensamentos e raciocínios.

Acredito que o tipo de discussão feita na primeira e segunda tarefa não foi o mais adequado tendo em conta a abordagem de ensino adotada – nomeadamente o ensino exploratório. No entanto, na altura, foi o que me pareceu mais correto. A realidade é que ambas as discussões não foram feitas na aula em que foram resolvidas as tarefas e, por isso, houve uma *quebra* entre o momento da resolução e o momento da discussão. Isso foi um dos aspetos que mais me entristeceu no percurso da minha intervenção, pois a essência da discussão coletiva ficou perdida. Era previsível que os alunos não iam conseguir lembrar-se nem da tarefa, quanto mais da sua resolução. E, refletindo sobre o que eu poderia fazer a partir desta situação inquietante, optei por levar algumas respostas de cada grupo e fomos debatendo em conjunto.

De um modo geral, mesmo tendo passado por várias situações que me levaram a agir de uma outra forma, que não a que estava prevista, creio que consegui recolher dados muito variados e ricos. Considero que alguns dos imprevistos que aconteceram se deveram ao facto de, logo na primeira aula, não ter sido possível discutir a Tarefa I, o que atrasou o resto dos momentos da intervenção.

Apesar desses pequenos imprevistos, que aconteceram e que vão me acompanhar ao longo da minha futura jornada profissional (não somente estes, claro, mas outros

tantos), foi interessante ver a partilha dos alunos e os diferentes pensamentos, principalmente, na visualização dos padrões e a forma como os descrevem. No capítulo 5, dedicado à análise dos dados será mais fácil de perceber o porquê de eu dizer isto. Por enquanto, ficam com a curiosidade.

4. Metodologia de investigação

O presente estudo, tal como já foi referido no capítulo da Introdução, tem como objetivo compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a exploração de padrões. Pretendo, para isso, compreender o processo de resolução que os alunos adotaram, visto que estes não tiveram qualquer *regra* ou estratégia dada previamente e, conseqüentemente, poder analisar as justificações que os alunos constroem em tarefas que envolvem a generalização de padrões. Por fim, e como este estudo foi desenvolvido a partir de três tarefas que incidem no tópico das *Sequências*, achei que seria relevante identificar a evolução dos alunos no que toca às suas estratégias de generalização, percebendo assim se realmente os alunos tendem a memorizar processos.

Para alcançar o meu objetivo geral, direcionei a minha atenção para as questões norteadoras que se entrelaçam com os meus objetivos específicos, tal como está apresentado no Quadro 1.

Questão de partida	Questões norteadoras	Objetivos específicos	Objetivo geral
Que estratégias são utilizadas pelos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões?	De que modo é que os alunos resolvem uma tarefa que envolve a exploração de padrões?	Compreender o processo de resolução da tarefa tendo em conta a estratégia adotada	Compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos em tarefas matemáticas que envolvem a generalização de padrões
		Analisar as justificações e argumentações dadas pelos alunos na resolução das tarefas	
	Que dificuldades é que os alunos demonstram na resolução destas tarefas?	Identificar as dificuldades dos alunos no processo de resolução das tarefas	
	De que modo é que o trabalho em grupo influencia a resolução destas tarefas?	Analisar os aspetos do trabalho em grupo que afetam as escolhas das estratégias de resolução e a própria resolução	
		Analisar de que modo é que os alunos interagem na construção coletiva de estratégias	

Quadro 1 – Cruzamento do objetivo geral com os objetivos específicos – articulados com questões de partida e norteadoras (Estrutura adaptada de Lima (2020))

Compreendo que uma abordagem rigorosa e estratégica se mostra essencial para fornecer uma resposta abrangente ao propósito fundamental estabelecido para esta investigação. Dessa forma, concentrar-me nas questões orientadoras proporcionou-me uma orientação para dar resposta aos objetivos específicos, permitindo abordar de maneira detalhada cada aspeto relevante para atingir o objetivo geral.

Ao longo deste capítulo apresento as opções metodológicas que tomei para alcançar o objetivo desta investigação, bem como os procedimentos adotados relativos ao método e recolha de dados, incluindo a escolha dos instrumentos, dos participantes e o processo da análise dos dados, justificando sempre que necessário as escolhas realizadas.

4.1. Opções metodológicas

Neste estudo foi usada uma metodologia a partir de uma abordagem qualitativa, enquadrando-se num paradigma interpretativo, adotando o método de estudo de caso.

Todas estas escolhas têm por base o objetivo e as questões que este estudo envolve. A escolha de uma **abordagem qualitativa** prende-se pelas ideias que Bodgan e Biklen (1994) afirmam sobre a mesma. Estes entendem que uma investigação qualitativa deve contemplar cinco características, entre as quais quatro dessas se interseitam com as opções tomadas no contexto desta investigação: o investigador ser o instrumento principal; os dados recolhidos serem de carácter descritivo, isto é, “descrição de pessoas, situações, acontecimentos, inclui transcrições de entrevistas ou depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos” (Ludke & André, 1986, p.12) e a análise de dados ser conduzida de forma indutiva. Uma outra característica desta abordagem é o facto de o foco do estudo passar, essencialmente, por compreender a perspetiva dos próprios alunos em relação à forma como os mesmos encaram as questões que lhes são colocadas.

As quatro características mencionadas estão evidenciadas neste estudo, uma vez que, os participantes contribuem para a investigação a partir dos seus pontos de vista. Além disso, o investigador é o principal instrumento de recolha de dados. Esta última destaca-se, uma vez que, para além da diversidade do processo de recolha de dados, que recorreu a gravações de áudio, análise de documentos e aplicação de questionários, eu, como investigadora e professora estagiária, estive presente em todos os momentos da recolha, observando diretamente as ações dos alunos no seu contexto natural. Daí um dos processos de recolha de dados ser também a observação direta, uma opção ajustada à metodologia empregue neste estudo.

Ao longo do trabalho, foram recolhidos dados de natureza qualitativa através de um processo diversificado que incluiu, para além dos elementos mencionados acima, os diálogos e as produções escritas dos alunos correspondentes às resoluções das tarefas. Ambos os dados referidos, complementam-se, permitindo que possam ser interpretados e analisados conforme foram produzidos, garantindo a triangulação.

Tal como referido anteriormente, a forma de analisar os dados foi feita indutivamente, dado que este estudo não tem como finalidade refutar ou comprovar hipóteses ou teses já construídas previamente. De facto, os dados recolhidos, produzidos maioritariamente pelos alunos, foram tidos como ponto de partida e, a partir deles, foi-se contruindo “um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam por partes” (Bodgan & Biklen, 1994, p.50) os dados.

A escolha do **paradigma de investigação interpretativo** vem de acordo com os pressupostos de uma abordagem qualitativa. Com vista a explorar e a interpretar as experiências dos alunos a partir da sua perspetiva, oferecendo uma compreensão rica e detalhada das suas perceções e significações em “relação aos contextos em que e com que se interagem” (Amado, 2013, p.41), este estudo segue uma abordagem interpretativa e fenomenológica. De facto, tal como Amado (2013) refere, pretende-se procurar e analisar os “fenómenos tal como são percebidos e manifestados pela linguagem” (p.41).

A par com os objetivos específicos e de forma a dar resposta aquele que é o objetivo geral, indicado no Quadro 1, tem-se as questões norteadoras, também apresentadas no mesmo quadro, que se centram, essencialmente, pelas questões *como?* e *porquê?*. Isto vem ao encontro do que Yin (2008) afirma como sendo questões exploratórias que levam ao uso do **método de estudo de caso**. N

Para além disso, e porque a abordagem deste estudo é qualitativa, a recolha de dados passa, principalmente, pela observação e pela experiência direta sem depender de teorias já determinadas (Yin, 2008).

4.2. Participantes do estudo e questões de natureza ética

Dada a natureza desta investigação ser qualitativa, caracterizada por ser uma investigação descritiva, com recurso ao método de estudo de caso, uma das suas características é, tal como já foi dito, que os participantes são a principal fonte de dados. Afinal são eles que permitem ter uma diversidade de dados, um aspeto bastante importante numa investigação que incide sobre o estudo de caso (Yin, 1993).

Neste sentido, pela valorização dos sujeitos que participaram nesta investigação, é de salientar que este estudo foi desenvolvido em conformidade com os princípios éticos adotados na Carta Ética da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação (Baptista et al., 2020). Desde o primeiro momento, os alunos foram informados e esclarecidos sobre todo o processo da sua participação na investigação, bem como sobre o objetivo, natureza e metodologia desta.

Uma vez que a investigação é feita com alunos menores de idade, foi preciso haver um consentimento por parte dos Encarregados de Educação de forma a garantir que os mesmos estivessem a par de todo o processo que iria acontecer em sala de aula. Duas semanas antes de começar a primeira aula para esta investigação, entreguei um documento a cada aluno, Termo de Consentimento Livre e Informado (Apêndice 6), a ser preenchido pelos EE. Neste documento foi explicitado “de forma clara e rigorosa, os direitos e os compromissos assumidos entre as partes, designadamente no que se refere à garantia de sigilo e privacidade dos participantes” (Baptista et al., 2020, p.11).

Tendo já o consentimento de todos os Encarregados de Educação, e como forma de garantir que os próprios alunos estariam interessados e com vontade de participar na investigação, achei, ainda que não fosse obrigatório, que seria interessante envolver os alunos e dar um sentido de responsabilidade, pedindo um assentimento. Esse assentimento foi obtido por meio de um documento, Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Apêndice 7), onde os alunos foram novamente esclarecidos sobre a natureza da investigação, os seus objetivos, métodos, benefícios previstos e o incômodo que esta lhes possa causar, numa linguagem bastante acessível.

No mesmo é também referido que têm sempre direito a manifestar dúvidas relativamente ao seu contributo, com motivo ou sem motivo expresso e que podem sempre desistir a qualquer momento, sendo que essa decisão será sempre respeitada.

Para além disso, é importante referir que ao longo desta investigação nenhum aluno foi identificado pelo seu nome verdadeiro, devido à proteção dos dados, tal como consta nos documentos entregues. São usados nomes fictícios que foram escolhidos pelos próprios alunos, no primeiro dia da intervenção.

Após garantidos todos os aspetos éticos, esta investigação envolveu os alunos todos da turma alvo escolhida, do 7.º ano, ou seja, quinze alunos, divididos em grupos, tal como mencionado no Capítulo 3 referente à Intervenção Pedagógica: três grupos com quatro elementos e um grupo com três elementos.

Na Figura 9, está apresentada a composição de cada grupo, identificando os seus respetivos elementos com os seus nomes fictícios. Estes grupos mantiveram-se os mesmos até ao final da intervenção.

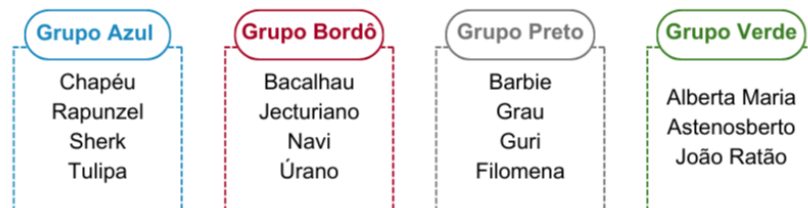


Figura 9 – Constituição dos grupos

Optei por analisar os dados de todos os grupos, uma vez que, a possibilidade de haver um maior número de estratégias diferenciadas era grande.

Considero importante referir que na primeira aula, Filomena, do Grupo Preto e Rapunzel, do Grupo Azul, não estiveram presentes, por estarem a participar num concurso que estaria a decorrer na escola. Apenas participaram nas seguintes aulas e por consequência, nas Tarefas II e III. Creio que não houve qualquer impedimento desses alunos em iniciarem apenas na Tarefa II, uma vez que também estiveram presentes na conclusão da discussão da Tarefa I e conseguiram acompanhar sem dificuldades.

4.3. Método e processo de recolha de dados

Tendo em conta os objetivos desta investigação, recorri a duas das técnicas de recolhas de dados que são, para Ponte (2002), as mais usuais quando se está perante uma abordagem qualitativa: a observação em sala de aula e a recolha documental.

A **observação em sala de aula** é uma das técnicas que considero quase que inevitável, uma vez que, um professor está sempre em constante observação, mesmo não estando como papel de investigador. No entanto, é preciso destacar para o facto de que “observar não é apenas olhar” (Trivinos, 1987, p.153), mas sim o destacar de um conjunto de características, objetos, pessoas, de algo específico. Neste caso, algo que nos interesse observar, como por exemplo, a postura e o comportamento dos alunos.

Visto que esta investigação contou com a resolução de tarefas em grupo, e sendo um dos meus objetivos analisar o modo como o trabalho em grupo influência a resolução das tarefas, a observação foi imprescindível para a recolha e, posteriormente, para permitir maior riqueza na análise de dados.

Ponte (2002) refere que as técnicas de recolha de dados podem requerer de instrumentos auxiliares. Por esse motivo, como forma de apoio à observação direta em sala de aula, e porque se torna um pouco difícil um professor-investigador lembrar-se de tudo o que acontece em sala de aula, recorri a uma **grelha de observação** (Figura 10) em todas as aulas, elaborada por mim. Esta grelha engloba alguns aspetos que eu considere cruciais tendo em conta a minha observação pelos grupos, como por exemplo, a postura dos elementos de cada grupo, a envolvência nas tarefas, entre outros.

Aulas		Aula nº1 - 16/02				Aula nº2 - 20/02			
Competências avaliadas	Grupos	Grupo Verde	Grupo Azul	Grupo Preto	Grupo Bordô	Grupo Verde	Grupo Azul	Grupo Preto	Grupo Bordô
Momento da resolução da tarefa	Procuram superar as dificuldades entre o grupo								
	Questionam a professora								
	Interação do grupo (relação entre os elementos)								
	Cooperação do grupo (ideias,...)								
	Partilham ideias entre o grupo								
	Discutem sobre as ideias								
	Acabam no tempo indicado								
	Comportamento do grupo								
	Empenho na realização da tarefa								
	Tomam iniciativa para algo novo								
	Organização do grupo								
Momento de discussão coletiva	Participaram ativamente								
	Fizeram questões								
	Explicaram a resolução corretamente								
	Comportamento do grupo								
	Tomaram iniciativa de partilha uma resolução diferente								

Figura 10 – Recorte da grelha de observação do trabalho de grupo

Um outro elemento do processo de recolha de dados utilizado neste estudo foi a recolha das **produções escritas** dos alunos, que considero ser de demasiada importância tendo em vista aquele que é o objetivo da investigação.

Cada grupo possuía uma folha de respostas do grupo (Apêndice 1), onde os alunos escreviam a resolução final da tarefa, e folhas de rascunho, uma para cada elemento, dando a liberdade de cada aluno poder resolver a tarefa nessas folhas e depois escreverem uma resposta final na folha do grupo. É importante referir que não era obrigatório os alunos usarem a folha de rascunho – até poderia utilizar só um elemento.

No final da primeira aula, todos os grupos entregaram as suas folhas com a resolução da tarefa. Depois dessa aula e de ter analisado as produções escritas, entendi que seria mais vantajoso para mim se os alunos entregassem também as folhas de rascunho,

porque pela observação direta na sala, percebi que muitas das vezes os alunos apresentavam nas suas folhas de rascunho diferentes estratégias e pensamentos.

Assim sendo, a recolha documental passou pela recolha das produções escritas de cada grupo (folha do grupo) e as produções escritas de cada elemento do grupo (folhas de rascunho de cada aluno).

Para complementar a observação em sala de aula e a recolha documental, recorri também a **gravações de áudio**, das discussões entre os elementos do grupo no momento da resolução das tarefas e das discussões coletivas feitas posteriormente às resoluções.

Por fim, e mais direcionado para os objetivos específico ligados à influência do trabalho de grupo, os alunos responderam a um **questionário** feito no *Google Forms*, que contou com perguntas abertas e fechadas (Apêndice 8). Este procedimento foi utilizado também para complementar as gravações de áudio no sentido de perceber as escolhas dos alunos e a visão que cada elemento tinha sobre o seu grupo.

Deste modo, a escolha dos elementos do processo de recolha de dados foi feita tendo em conta os objetivos desta investigação. Para isso, foi fundamental desenvolver, de antemão, um plano de trabalho a realizar, prevendo a finalidade de cada instrumento. Tal como Ponte (2002) afirma, o mais importante não é recolher muitos dados, mas recolher os adequados para que sejam merecedores de confiança. Para a recolha desses mesmos dados, recorri a uma estratégia que considero ter sido crucial para poder dar resposta aos objetivos pretendidos, sem que haja qualquer desvio daquilo que é importante. Essa estratégia consistiu em organizar as escolhas realizadas no âmbito do processo de recolha de dados num quadro (Quadro 2), onde estão representados todos os objetivos específicos deste estudo e o respetivo método de recolha de dados que dará resposta a esses, depois de analisados. Tal quadro permitiu-me garantir que as escolhas feitas possibilitaram a triangulação dos dados, tendo em conta a variedade de instrumentos e as diversas técnicas de recolha.

Objetivos específicos	Compreender o processo de resolução da tarefa tendo em conta a estratégia adotada	Analisar as justificações e argumentações dadas pelos alunos na resolução da tarefa	Identificar as dificuldades dos alunos no processo de resolução das tarefas	Analisar os aspetos do trabalho em grupo que afetam as escolhas das estratégias de resolução e a própria resolução	Analisar de que modo é que os alunos interagem na construção coletiva de estratégias
Processo de recolha de dados			Observação direta		
	Produções escritas dos alunos				
	Gravações de áudio				
				Questionário	

Quadro 2 – Estratégia de recolha de dados interlaçado com os objetivos específicos

Para iniciar o processo de recolha de dados, procedeu-se primeiro à entrega do Termo de Consentimento Livre, no dia 21 de janeiro de 2024, a ser preenchido pelos EE até dia 2 de fevereiro de 2024. O Termo de Assentimento Livre e Esclarecido foi entregue no primeiro dia de recolha de dados.

O processo da recolha de dados incidiu sobre dois momentos diferentes: na resolução e discussão das tarefas, e na resposta ao questionário. Assim sendo, esse processo teve início no primeiro dia da intervenção pedagógica, dia 16 de fevereiro de 2024 prolongando-se até dia 19 de março de 2024, dia em que se realizou o questionário (Figura 11).



Figura 11 – Esquematisação cronológica do processo de recolha de dados

De realçar que, tendo em conta o esquema, compreende-se que a recolha das produções escritas e das gravações de áudio, ocorreu nas quatro primeiras aulas, onde foram resolvidas e discutidas as tarefas.

O questionário só foi respondido pelos alunos no dia 19 de março de 2024, uma vez que, este foi elaborado tendo em conta a minha análise prévia das resoluções dos alunos e das gravações de áudio. Assim, garanti ter no questionário apenas questões às quais ou não consegui obter resposta ou que as respostas eram ainda incertas ou escassas. As respostas ao questionário foram recolhidas não só no dia 19 de março de 2024, mas também ao longo das férias escolares dos alunos (22 de março a 8 de abril de 2024), para que pudessem responder com calma.

4.4. Processo de análise de dados

Para dar resposta às questões do estudo foi essencial organizar os dados de modo que a análise dos mesmos fosse feita da melhor forma, envolvendo assim uma cuidadosa revisão dos dados e uma reflexão sobre todo o contexto onde tais foram recolhidos.

Uma das fontes para a recolha de dados foram as gravações de áudio captadas nos momentos de resolução das tarefas e nos momentos de discussão coletiva. Para a sua análise, procedi à transcrição de todos os áudios de cada grupo, referentes à discussão feita no momento da resolução de cada tarefa e às discussões coletivas realizadas depois de resolvida cada tarefa. No final, foram transcritas, no total, 12 horas, 10 minutos e 4 segundos de áudio.

As folhas do grupo foram um dos recursos usados para a recolha de dados e, para a sua análise foram consideradas as produções escritas do grupo, a considerar a análise do seu conteúdo e tendo em conta os objetivos específicos considerados no estudo, como por exemplo, a análise das estratégias usadas pelos alunos, bem como as suas justificações.

Assim sendo, com a transcrição de áudio foi-me possível fazer uma análise ao seu conteúdo, fazendo uma ligação com as produções escritas dos alunos, podendo assim ter uma análise mais completa.

Em relação à análise das respostas dadas ao questionário feito no final da intervenção, esta conta com duas fases diferenciadas, tendo em vista as duas diferentes tipologias de questões feitas: abertas e fechadas.

Para as questões abertas atuei da mesma forma que o fiz para as produções escritas, analisando o seu conteúdo e, também fazendo uma análise comparativa.

Por outro lado, para as questões fechadas, entendi que a melhor forma de analisar as suas repostas era através da análise estatística, representando-as em gráficos, para que fosse de fácil visualização e compreensão, para, no final, poder dar uma resposta mais objetiva e precisa àquilo que pretendo.

Relativamente aos procedimentos utilizados para a análise e compreensão das estratégias, estarão descritos no próximo capítulo, referente à análise dos dados.

5. Análise dos dados

Neste capítulo é feita uma apresentação e análise detalhada dos dados obtidos, tendo em vista os objetivos e a problemática desta investigação. Tal teve por base os aspetos teóricos apresentados e discutidos no capítulo do Enquadramento Teórico, no que toca, principalmente, às estratégias de generalização bem como às dificuldades empregues na exploração de padrões.

A análise destes dados foi feita conjugando as informações das produções escritas dos alunos, bem como as gravações de áudio tanto das discussões em grupo como das discussões coletivas. A ligação entre estes dados foi crucial, em certas ocasiões, para esclarecer certos raciocínios e pensamentos que os alunos tinham no desenvolvimento das estratégias, que muitas das vezes eram feitos apenas oralmente.

A partir desta análise, procurei identificar aspetos que considero relevantes para responder às questões de investigação organizando-os em categorias de análise. Neste sentido, surgem 3 aspetos importantes a ter em conta para a análise dos dados relativos às três primeiras subsecções: as estratégias de generalização, as dificuldades/desafios e as justificações dadas.

Para a análise das estratégias de generalização, recorri a diferentes categorias para as poder classificar. Na Figura 12, está presente a categorização utilizada, onde consta o nome de cada tipo de estratégia com a sua respetiva definição. Importa referir que, é também tida em conta um outro tipo de estratégia, designada por *Outro*, onde estão incluídas as estratégias que não se enquadram em nenhuma das que estão presentes na categorização abaixo.

Recordo que no capítulo referente ao Enquadramento Teórico foi apresentado um quadro síntese das estratégias referidas pelos diversos autores mobilizados (Figura 2). No entanto, no esquema abaixo estão apenas aquelas que foram evidenciadas ao longo do presente estudo. Para além disso, com vista a concretizar o esquema presente na Figura 12, algumas estratégias foram agrupadas, tendo em conta as suas definições. Neste sentido, para a estratégia **diferença** optei por subdividir em dois casos, onde os alunos estendem a sequência até ao termo pretendido através da diferença entre termos consecutivos – **recursiva** (Barbosa et al., 2008) ou utilizam os múltiplos dessa diferença para encontrar outros termos, mas sem estender a sequência (Stacey, 1989). Também a estratégia **explícita** se subdivide em duas categorias, como é explicado mais à frente.

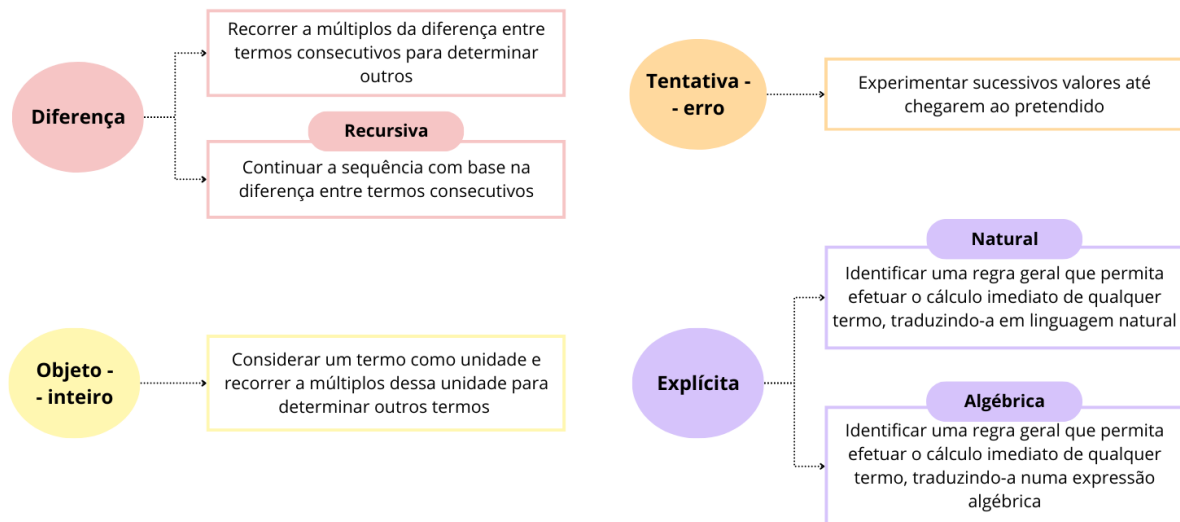


Figura 12 – Categorização das estratégias de generalização

Tanto a estratégia da diferença, a estratégia do **objeto-inteiro**, a estratégia **explícita** e a **tentativa-erro** são estratégias de generalização referidas por Ponte et al. (2009a); Barbosa, Vale e Palhares (2008); Stacey (1989); Barbosa (2009).

Considero importante referir que poderia haver subcategorias no que diz respeito tanto à estratégia do objeto-inteiro como da diferença: sem ajuste (que é o que está implícito nas estratégias presentes na Figura 12) e com ajuste. De facto, tal como é referido na literatura (Barbosa, 2009), em ambas as estratégias, pode haver ajustes no resultado. No entanto, não foi feita essa subdivisão na categorização para a análise dos dados, porque em nenhum momento os participantes deste estudo fizeram ajustes no resultado, tendo sido apenas utilizadas ambas as estratégias sem ajuste. Neste sentido, surgem apenas as estratégias diferença e objeto-inteiro (sem ajuste).

No caso da estratégia **explícita**, e tendo em conta os resultados obtidos na minha investigação, achei pertinente subdividir essa estratégia. Esta divisão foi feita de acordo com o tipo de recurso que os alunos utilizam para expressar a relação entre o termo e a sua ordem, quer seja em linguagem **algébrica** ou em linguagem **natural**. Neste sentido, estas duas subdivisões da estratégia explícita emergem dos resultados obtidos. Tal estratégia de generalização é tida como uma estratégia explícita, uma vez que adotadas ambas as subcategorias, os alunos encontram uma regra que os permite obter o cálculo imediato de qualquer termo (Lannin, 2005).

Para além do tipo de estratégias, foi também identificado o tipo de generalização a que os alunos recorrem, **numérica** ou **figurativa** (Becker & Rivera, 2005). Ambas diferem

em relação à forma como os alunos generalizam a sequência, se pela sequência numérica que está associada à sequência pictórica, se pela sequência pictórica.

Se o fizerem pelo segundo processo – generalização figurativa –, uma das estratégias que podem utilizar é a **decomposição de termos**. Isto é, o aluno decompõe a figura em partes, permitindo estabelecer uma relação entre essas partes e a ordem dessa figura (Ponte et al., 2009a). Este é um dos métodos que pode ser utilizado para encontrar uma regra (quer em linguagem natural ou matemática) que traduza a regularidade presente na sequência, estando assim perante a estratégia explícita.

À medida que são analisados os raciocínios e os processos usados pelos alunos na resolução das tarefas, são também identificadas algumas dificuldades que foram sendo manifestadas quer diretamente como indiretamente pelos alunos.

À medida que são analisados os raciocínios e os processos usados pelos alunos na resolução das tarefas, são também identificadas algumas dificuldades que foram sendo manifestadas quer diretamente como indiretamente pelos alunos. Para tal, recorri também a uma categorização de dificuldades, presente na Figura 13, que vão ao encontro das apresentadas por Morais (2012), Rivera e Becker (2008), Lannin (2003) e Ponte et al. (2009b).

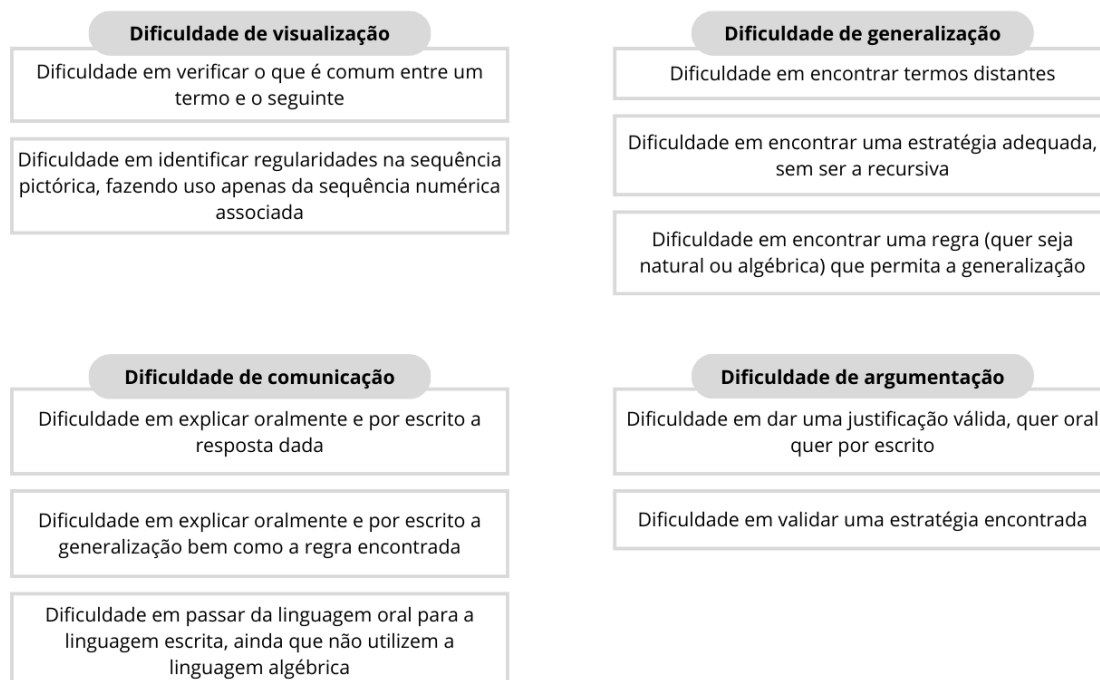


Figura 13 – Categorização das dificuldades

Para mais fácil compreensão e interpretação na análise, este capítulo encontra-se dividido em quatro subsecções: (i) análise dos processos de resolução da Tarefa I; (ii) análise dos processos de resolução da Tarefa II; (iii) análise dos processos de resolução da Tarefa III; e (iv) percepção dos alunos sobre o trabalho de grupo. As primeiras três correspondem à apresentação e análise dos dados relativos às estratégias usadas pelos alunos na exploração dos padrões, bem como as dificuldades manifestadas pelos mesmos, em cada uma das tarefas.

Na última subsecção são apresentadas e analisadas as respostas dadas pelos alunos no questionário feito sobre a influência que o trabalho de grupo tem na realização de tarefas.

Considero importante referir que a análise da Tarefa I, presente na primeira subsecção, toma uma estrutura um pouco diferente da análise feita da Tarefa II e III. Tal deve-se ao facto de, na primeira tarefa, os alunos mostrarem mais dificuldade em seguir com os seus raciocínios, o que me fez querer analisar grupo por grupo. Assim, foi-me possível explorar todo o processo de resolução desde a primeira questão à última. Já na apresentação e análise das Tarefas II e III optei por apresentar os resultados questão por questão, visto que, os alunos mostraram ter os raciocínios mais organizados e mais bem fundamentados. Creio que esta opção foi a mais ajustada para que a análise se tornasse mais fluída e para que fosse de maior compreensão para o leitor.

Ao longo da análise, os grupos e os respetivos elementos estão destacados com a sua cor correspondente: Grupo Azul, Grupo Bordô, Grupo Preto e Grupo Verde. Tanto as estratégias de generalização como os desafios/dificuldades que foram identificados serão destacados a negrito, evidenciando a categoria das dificuldades entre parênteses.

5.1. Análise dos processos de resolução da Tarefa I

Para uma melhor compreensão e fluidez da análise do conteúdo referente à Tarefa I, represento o enunciado da mesma (Figura 14).

O voo das andorinhas

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.



Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis as quatro primeiras figuras:

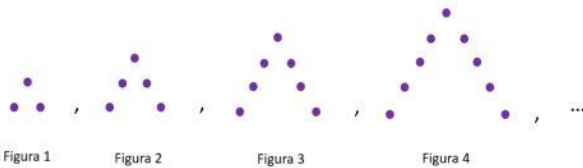


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

Respondam às seguintes questões apresentando sempre o vosso pensamento.

1. Descrevam como se pode obter a Figura 5. Quantos pontos terá?
2. Quantos pontos terá a Figura 100?
3. E existe alguma Figura com 202 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?
4. Existe alguma Figura com 135 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?
5. Escrevam uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
6. Escrevam uma expressão algébrica que traduza a regra que descreveste acima.

Figura 14 – Enunciado da Tarefa I: O voo das andorinhas

No primeiro contacto com a Tarefa I, os alunos responderam de forma rápida e correta à questão 1. Todos os grupos, sem exceção, recorreram à **estratégia da diferença recursiva**, justificando a sua resposta com a relação existente entre termos consecutivos (de figura para figura adiciona-se sempre 2 pontos).

Alguns grupos mostraram alguma dificuldade em justificar por escrito (dificuldade de **argumentação**) a sua resposta e em perceber o que se pretendia com a palavra *descrever*. O Grupo Preto foi um desses grupos, que enquanto escrevia a sua resposta debateu-se com a dúvida sobre como descrever a figura de ordem⁵ 5, tal como consta no diálogo abaixo.

Barbie: Então se a figura 4 tem 9 pontos, acrescentamos dois à figura 5 e fica com...

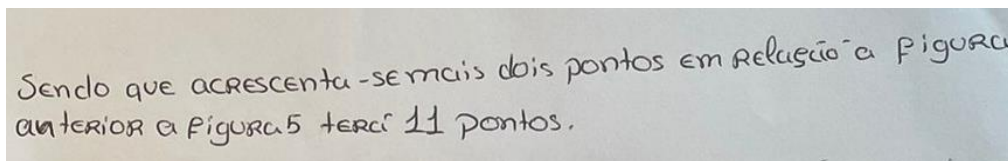
Guri: Na figura 5 terá 11 pontos. Mas como descrevemos?

⁵ Sempre que é mencionado *figura de ordem* refere-se às figuras das sequências, ou seja, aos termos. Quando é mencionado *Figura* refere-se às figuras presentes no trabalho.

Grau: Sendo que se acrescenta 2 pontos à última figura, a figura 5 vai ficar com 11 pontos

Barbie: Exato. Até podemos escrever, sendo que se acrescenta dois pontos à figura anterior

Este grupo entendeu que descrever a figura de ordem 5 seria indicar o processo para obter o número de pontos dessa mesma figura. E, de facto, essa era uma forma de se descrever algo. Assim, o Grupo Preto optou por responder à questão 1 de uma forma **textual** explicando o processo que fizeram para obter o número de pontos da figura de ordem 5, tal como consta na Figura 15.



Sendo que acrescenta-se mais dois pontos em relação a figura anterior a figura 5 terá 11 pontos.

Figura 15 – Resposta do Grupo Preto à questão 1 da Tarefa I

Todos os grupos à exceção do **Grupo Bordô** responderam à questão 1 utilizando a mesma estratégia e a mesma justificação que a do Grupo Preto.

O **Grupo Bordô** distinguiu-se por apresentar uma resolução através de um desenho, tal como mostra a Figura 16. No entanto, a justificação oral para chegarem à resposta, de a figura de ordem 5 ter 11 pontos, passou pelo mesmo raciocínio dos outros grupos, o **recursivo**. Apenas optaram por a descrever através de um desenho. Para desenhar a figura perceberam que todos os termos da sequência eram compostos pela figura anterior adicionando um ponto de cada lado. Tal foi discutido pelos elementos do grupo no momento da discussão, quando apresentaram a sua resolução.

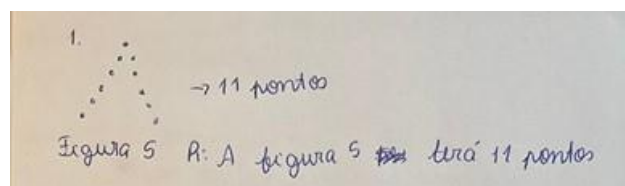


Figura 16 – Resposta do Grupo Bordô à questão 1 da Tarefa I

Já na questão 2, surgiram bastantes dúvidas e dificuldades, pois a questão já não era de generalização próxima, mas sim distante. Todos os grupos responderam corretamente a esta questão, no entanto, para chegarem a essa resposta, alguns deles passaram por vários processos de raciocínio. Todos estes processos foram pensados e comunicados oralmente entre os elementos, sem haver qualquer registo escrito. Neste

sentido, analisei primeiro os diálogos de cada grupo até chegarem à resposta final que apresentaram na folha de respostas.

Apenas o **Grupo Verde** conseguiu, logo de início, chegar a um raciocínio que lhes permitiu responder de forma rápida e correta à questão, conforme apresentado no diálogo que se segue.

Maria Albertina: Olha, olha. 4 mais 4 dá 8 mais um dá nove, ou seja, 3 mais 3 dá 6 e aqui dá 7, 2 mais 2 dá 4 e aqui dá 5.

Astenosberto: Estamos a sugerir que é 100 mais 100 mais 1, é isso?

João Ratão: 100 mais 100 mais 1?

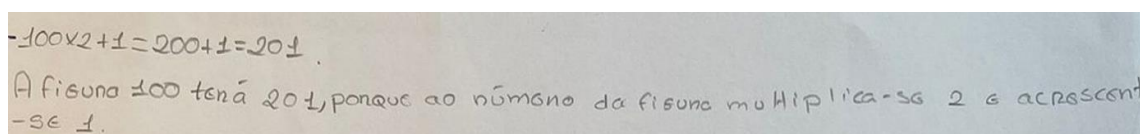
Maria Albertina: Porque na figura 4 tens 4 mais 4 que vai dar 8 e depois tens um ponto em cima que vai dar 9

João Ratão: E 201 está na tabuada do 2?

Maria Albertina: Isto é ... mais 2, não vezes dois. Não tem de estar na tabuada

João Ratão: Ah pois...

Este grupo recorreu à **decomposição de termos** para obter uma regra geral. **Maria Albertina** percebeu que em cada figura da sequência o número de pontos que tinha em cada lado correspondia ao número da figura (ou à ordem) e todas elas tinham um ponto em cima. Ou seja, foi feita uma decomposição da figura em três partes, sendo que duas delas seriam iguais, estabelecendo uma relação entre essas mesmas partes e a ordem. Assim sendo, conseguiram chegar a uma generalização podendo com ela determinar qualquer termo através da sua ordem. Para tal, recorreram à estratégia **explícita natural**, onde explicitaram por palavras a regra encontrada. Na sua resposta final concluíram a que a figura de ordem 100 teria $2 \times 100 + 1$ pontos (Figura 17).

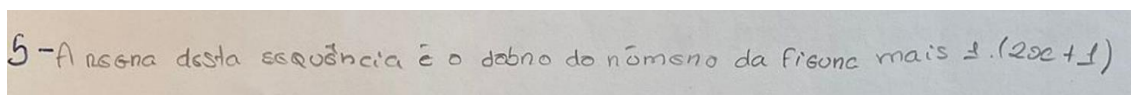


$100 \times 2 + 1 = 200 + 1 = 201$
A figura 100 terá 201, porque ao número da figura multiplica-se 2 e acrescenta-se 1.

Figura 17 – Resposta do **Grupo Verde** à questão 2 da Tarefa I

No diálogo anterior, **João Ratão** mostrou-se um pouco confuso, porque estava a pensar numa estratégia do tipo **diferença**, onde cada termo seria obtido através de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, daí ter mencionado que o número de pontos da figura teria de pertencer à tabuada do 2. No entanto, não percebeu que a sequência era composta apenas por números ímpares, e por esse motivo descartaria de imediato esse raciocínio.

Este grupo utilizou a relação entre a ordem da figura e o número de pontos, que indicaram na questão 2 (rever Figura 17), para responder à questão 5 (Figura 18). Com essa relação, e porque esta relaciona cada termo com a sua ordem, conseguiram responder à questão 6, sem qualquer dificuldade. Apresentaram uma expressão algébrica (presente na Figura 18) que traduziu corretamente a regra apresentada na questão 5.



5 - A regra desta sequência é o dobro do número da figura mais 1. $(200 + 1)$

Figura 18 – Resposta do Grupo Verde à questão 5 da Tarefa I

Já os outros três grupos, perante a questão 2, começaram o seu raciocínio utilizando a estratégia do **objeto inteiro**, considerando um termo da sequência como unidade e usando múltiplos dessa unidade.

Tanto o Grupo Preto como o Grupo Bordô, assumiram o termo de ordem 1 da sequência como unidade e supuseram que $S(100) = S(1 \times 100) = 100 \times S(1) = 100 \times 3 = 300$, conforme apresentado no diálogo abaixo entre os integrantes do Grupo Preto.

Barbie: Se na figura 1 tem 3

Guri: tem 300

Grau: O que? Impossível.

Barbie: mas é vezes dois

Guri: Se a figura 1 tem 3, então temos de multiplicar 3 por 100.

Barbie: mas acrescenta-se dois. Não pode ser.

Tanto Barbie como Grau discordaram do que Guri apresentou, mas sem justificarem o porquê de não concordarem (dificuldade de **argumentação**). Este diálogo aconteceu logo no início da resolução da questão 2. Em seguida, chamaram-me, imediatamente, pois estavam com dúvidas sobre como chegar à resposta, embora não tivessem tentado responder à questão usando outras estratégias (dificuldade de **generalização**).

Mal cheguei ao grupo, começaram logo por dizer que sabiam que havia uma fórmula para responderem às questões, só não sabiam qual era. Indicavam que seria $n + 2$, porque somava-se sempre mais dois. Reparei que não sabiam realmente a que é que a fórmula correspondia (dificuldade de **generalização**), então comecei por fazer questões mais básicas, para conseguir perceber de que forma é que eles viram e interpretaram a sequência, conforme ilustrado pelo diálogo que se segue. Para além

disso, quis ver se eles conseguiam chegar a uma outra estratégia mais visual ou se chegavam a outra fórmula sem ser $n + 2$.

Professora: Digam-me uma coisa. Como é que vocês descobriram a figura 5?

Barbie: Sempre mais dois.

Professora: Sempre mais dois, certo. Para a figura 100, será difícil fazermos sempre mais dois mais dois. Vocês não conseguem ver outra regularidade nessas figuras? Olha vamos pensar em voz alta

(começaram a dizer o número de pontos de cada figura)

Guri: (a apontar para a figura 2) Se retirarmos o número da figura, ficam 3 pontos, que é a figura 1

Professora: Mas e se fizeres isso na figura 3? Se tirares 3 pontos o que acontece?

Guri: Ah, não fica a figura 2, pois não

Os elementos do Grupo Preto mostraram dificuldade em responder à questão porque estavam sempre a tentar relacionar cada figura da sequência com a anterior, numa lógica de recorrência (dificuldade de **generalização**). Assim, era-lhes mais difícil de chegar a uma generalização. No entanto, eu queria que eles conseguissem perceber uma relação entre os elementos de cada figura e o seu número, ou seja, entre o termo e a sua ordem e, neste sentido, continuei a insistir em questões que os levassem a pensar dessa forma, tal como mostra o excerto do diálogo que se segue.

Professora: Vamos voltar a dizer: figura 1, 3 pontos, figura 2, 5 pontos, figura 3, 7 pontos.

Guri: É sempre mais um que a figura?

Barbie: Não pode ser. Aqui (aponta para a figura 4) tem 9

Guri: sempre mais dois que a figura?

Professora: Então estás-me a dizer que a figura 4 tem 6 pontos. Se é sempre mais dois que a figura.

Guri: Ah. Não

Barbie: Mais 5?

Guri: Não! Mais 3

Professora: Então a figura 4 ia ter 4 mais 3, que dá quanto?

Barbie: não! Mais 5

Professora: Ok, mais 5. Então e se eu agora vos pedisse a figura 5, vocês diziam o que?

Barbie: Pois, 5 mais 5 ia dar 10

Mais uma vez, os elementos do Grupo Preto, não estavam a olhar para todas as figuras e para os seus pontos, de modo que pudessem encontrar uma relação (dificuldade de

visualização). Focavam-se apenas numa figura e relacionavam a sua ordem com o número de pontos. Por exemplo, a figura de ordem 1 tinha 3 pontos, e concluíam logo que o número de pontos era o número da figura mais dois, sem verificarem se este padrão se mantinha para o resto das figuras. E sempre que eu lhes pedia para verificarem se esse raciocínio funcionava para outra figura, eles reparavam que não dava e pensavam noutro método referente à figura que lhes tinha perguntado. E fizeram isso inúmeras vezes tal como mostra o diálogo anterior. Até que Grau ao pensar que na figura de ordem 5 não dava certo a estratégia de se adicionar 5, percebeu que se teria de adicionar 6, e voltou atrás às outras figuras encontrando uma generalização. Segue a discussão e o pensamento de Guri:

Grau: Mas é 11. Tínhamos que adicionar 6. Ah, espera... (começa a apontar para as figuras) Mais 2 (para a figura 1) mais 3 (para a figura 2) mais 4 (para a figura 3) mais 5 ...

Professora: Ok, então para a figura 10, como é que fazias?

Grau: Era mais 11

Professora: O que é que o Grau encontrou aqui? Que vocês somam ao número da figura quanto?

Barbie: um número maior que o número da figura. É isso. Então é 100 mais 101.

Neste caso, a estratégia adotada pelo Grau corresponde à estratégia **explícita**, de identificação de uma regra que relaciona a ordem de um determinado termo da sequência com o número de elementos que possui. Tal regra foi obtida através das **relações numéricas**, ou seja, decompuseram os termos da sequência numérica associada para encontrarem uma regra (basicamente, encontraram uma conta que relacionasse o número da figura com o número de pontos).

Depois de perceber que já tinham chegado a algo, afastei-me do grupo, mas ao ouvir a gravação de áudio consegui perceber que tiveram alguma dificuldade em escrever uma resposta (dificuldade de **comunicação**), como ilustra a fala do Barbie, integrante do Grupo Preto.

Barbie: Sabendo que à figura acrescenta-se sempre mais para dar o número de ponto ou sabendo que ao número da figura acrescenta-se o número à frente...

No entanto, na resposta escrita (Figura 19) apresentaram uma justificação correta e sucinta, indicando a conta que fizeram para chegar ao resultado.

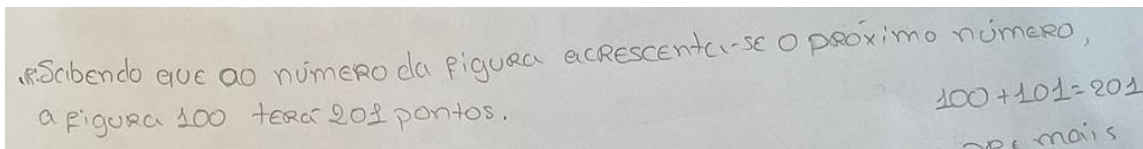


Figura 19 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa I

Este grupo (Preto) utilizou a estratégia **explícita natural**, fazendo uso da regra *ao número da figura acrescenta-se o próximo número*, para responder a todas as questões desta tarefa.

No seguimento desta estratégia, e ao responder à questão 4, Grau concluiu uma outra regra interessante, sem ser a de adicionar ao número da figura o seguinte número.

Grau: Sim, tem de existir (respondendo à questão 4). Todos os números são ímpares. É sempre um par com o seguinte ímpar.

No entanto, a regra mencionada apenas estava correta para quando estamos a tratar de figuras de ordem par. Para figuras de ordem ímpar, a regra seria, *sempre um ímpar com o seguinte par*. Foi uma pena os alunos não explorarem esse raciocínio, pois a discussão teria sido bastante rica. Na verdade, os alunos para a questão 4, chegaram a que a ordem da figura seria a 67, porque $135 = 67 + 68$, por isso, a regra estava implícita. Contudo, para chegarem a esses valores recorreram à **tentativa-erro**.

Como ainda não era do conhecimento dos alunos o *termo geral*, o Grupo Preto optou por utilizar sempre a estratégia de se acrescentar ao número da figura o número seguinte, apresentando-a como uma regra para responder à questão 5. Com essa regra conseguiram facilmente chegar a uma *expressão algébrica*, ainda que não possa ser chamada de expressão algébrica, porque o que o grupo apresentou trata-se de uma equação (Figura 20). Neste sentido, mostraram pouco conhecimento sobre a diferença conceptual entre expressão algébrica e equação, sendo que já tinham dado ambos os conceitos nas aulas anteriores.

Figura 20 – Resposta do Grupo Preto à questão 6 da Tarefa I

O **Grupo Bordô** recorreu, primeiramente, à *regra de três simples*, mostrando pouco conhecimento sobre as sequências (o que seria de esperar), uma vez que, normalmente, não existe uma relação tão linear entre os termos das sequências que

permita usar essa estratégia. Realmente, nas sequências a estratégia da regra de três simples pode funcionar, mas não em todos os casos.

No diálogo que se segue abaixo entre os elementos do **Grupo Bordô**, é perceptível que **Urano** mostra saber que a regra de três simples não é a melhor opção, uma vez que estão perante sequências. Contudo, o aluno não justifica esse pensamento e os restantes elementos seguem em não concordar com o mesmo (dificuldade de **argumentação**).

Jecturiano: *Aqui nos temos várias figuras. Aqui pergunta quantos pontos é que teria a figura 100, ou seja, quantas aves teria, neste caso. Quantos achas que teria? Se a figura 1 tem 3 pontos... é como uma regra de três simples. A figura 1 tem 3 pontos, a figura 100 vai ter quantos?*

Urano: *Não podemos fazer uma regra de 3 simples, porque isto são sequências*

Jecturiano: *Mas podemos sim. Vamos tentar fazer pela regra de 3 simples.*

Enquanto **Jecturiano** partilhava o seu pensamento começa a escrevê-lo na folha de respostas (Figura 21). A resolução está riscada porque, posteriormente, os alunos perceberam que a estratégia adotada não estava correta (resposta dada na folha de rascunho).

The image shows a piece of paper with handwritten text and calculations, all of which are crossed out with a large 'X'. The text reads: '2- Figura 1 — 3', followed by '100' and 'x'. Below this, the calculation $x = \frac{100 \times 3}{1} = 30$ is written, and then $x = 300 \text{ pontos}$.

Figura 21 – Primeira estratégia do **Grupo Bordô** para a questão 2 da Tarefa I

Ao mesmo tempo, **Bacalhau** apresenta outra estratégia ao grupo, descartando a de **Jecturiano**, conforme ilustrado no diálogo abaixo.

Bacalhau: *Olha, nós podemos pegar na figura 4 fazer vezes 25.*

(...)

Bacalhau: *É 4 vezes 25. E depois 9 vezes 25.*

Ou seja, **Bacalhau** usou o mesmo raciocínio que **Jecturiano**, mas sem recorrer à suposta regra de três simples. Está implícito que Bacalhau pensou da seguinte forma: $S(100) = S(4 \times 25) = 25 \times S(4) = 25 \times 9 = 225$, fixando o termo de ordem 4 como sendo a unidade, ou seja, recorrendo à estratégia do **objeto inteiro**.

Este grupo optou por determinar o termo de ordem 100 através dos dois métodos que foram expostos acima. Constataram que o número de pontos deu diferente, numa e noutra estratégia, dando 300, pela regra de três simples e 255, pelo objeto inteiro. Chegados a este ponto, começaram a discutir sobre qual resultado estaria bem e eis que notaram o seguinte:

Bacalhau: *Espera. Se vai de dois em dois. A figura 100 não pode ter 300.*

Jecturiano: *Pois não. Porque vai de dois em dois e só há números ímpares.*

Ou seja, os elementos do **Grupo Bordô** entenderam que os termos da sequência eram apenas números ímpares e, por essa razão, o número total de pontos não poderia ser 300. Assim, assumiram como 225 a resposta certa para a questão 2.

A estratégia adotada pelos alunos na questão 2 (**objeto-inteiro**), dificultou o raciocínio para dar resposta à questão 4. Nas gravações de áudio, percebi que todos os elementos se mostraram bastantes confusos sobre como responder à questão 4 tendo em conta a resposta e a estratégia utilizada na questão 2. Eu própria tive alguma dificuldade em conseguir perceber o raciocínio dos alunos no primeiro momento em que discutiram as ideias para essa questão.

Depois de várias ideias discutidas, sem sucesso, **Bacalhau** encontrou uma estratégia para responder à questão 4, no entanto, essa estratégia dependia do valor que obtiveram na questão 2. Segue abaixo a verbalização do pensamento do **Bacalhau**, num recorte do diálogo com a professora, uma vez que os outros elementos não se mostraram com interesse em ouvir, porque parecia um processo demasiado *difícil*.

Bacalhau: *Os meus cálculos, na minha cabeça fazem sentido, não sei se nas outras faz, mas nós pegamos no número da figura 100 e depois para chegar ao 135, diminuimos, vamos diminuindo. E se 225 é igual a 100, metemos menos 4, menos 4, menos 4. Porque menos 8 equivale a menos 4.*

Este raciocínio pareceu-me bastante interessante, mostrando que o aluno em questão conseguiu utilizar os dados que já tinham sido obtidos para determinar outros, utilizando múltiplos da **diferença** entre termos consecutivos. Ou seja, o aluno sabia que de figura para figura adicionam-se dois pontos, então ao *andar para trás* retirava dois. Como já sabiam que a figura de ordem 100 tinha 225 pontos, então a ordem da figura que procuravam era inferior a 100, pois tinha 135 pontos. A ideia seria ir retirando a 225 múltiplos de 2, até chegarem a 135. Por exemplo, quando retirassem 8, isso significava que tiraram 4 vezes 2, portanto estariam na figura $100 - 4 = 96$, e faziam assim, sucessivamente. Na verdade, bastava fazer a diferença entre 255 e 135, que dava 120, ou seja, retiravam 60 vezes o 2, então correspondia à figura de ordem $100 -$

$60 = 40$. No entanto, todo este raciocínio só faria sentido se a resposta à questão 2 estivesse correta. **Jeturiano** pensou nesse problema e questionou-me:

Jeturiano: *Posso dizer uma coisa? Nós se errarmos este exercício (aponta para o 2) também vamos errar este (o 3).*

No entanto, depois de se aperceber disso, voltou a mencionar fazer-se mais uma vez pela regra de três simples, sendo que na questão 2 já tinham concluído que não daria certo por esse método, mostrando pouca atenção por parte dos elementos em relação às diferentes questões. Era de esperar que percebessem que se na questão 2 descartaram a estratégia da regra de três simples, nesta questão 4 também não iriam obter uma resposta correta utilizando essa estratégia, dado que se tratava da mesma sequência. Para contrapor a ideia de **Jeturiano**, **Bacalhau** usou um argumento interessante, fazendo ver ao grupo que se fosse por esse pensamento, seria impossível chegar-se ao 135, uma vez que o número total de pontos era sempre obtido através da soma de dois números iguais, e não há nenhum número que somado com o mesmo desse 135. Tal discussão é apresentada abaixo.

Jeturiano: *E se fizéssemos pela regra de 3 simples? A figura 4 tem 9 pontos, a figura x vai ter 135 pontos.*

Bacalhau: *Mas esse pensamento está errado. Pensa comigo. Se a figura 5 tem 11, logo a 10 vai ter 22.*

Jeturiano: *Sim.*

Bacalhau: *A 15 vai ter 33 pontos. Nunca vai chegar a 135.*

Jeturiano: *Então não pode ser pela regra de 3 simples.*

Enquanto professora estagiária, eu não queria que o grupo desistisse nem de uma estratégia nem de outra, porque a verdade é que poderiam solucionar a questão de ambas as formas, só tinham era que responder à questão 2 corretamente. O diálogo abaixo ilustra a minha intenção e intervenção.

Professora: *Vocês pensem antes de desistirem das vossas ideias. Se usassem a regra de três simples como estão a usar, e pegassem nos números que têm funcionava?*

Jeturiano: *Não. A figura 1 tem 3 pontos. A figura 3 vai ter x. Dava 9. Mas a figura tem 7. Ah, mas se retirarmos 2 ao resultado vai dar certo.*

Professora: *Agora será que funciona para o próximo?*

Jeturiano: *A figura 1 tem 3 pontos, a figura 4 terá 12. Mas não dá. Aqui retirávamos 3.*

Jeturiano chegou a uma estratégia válida para todos os termos, só era preciso perceber que ao fazer a regra de três simples, tinham que ao resultado retirar a ordem da figura

menos um. No entanto, não seguiram com a estratégia, de forma a não perceber os resultados no contexto do problema, apesar de eu tentar que estes vissem para todos os termos da sequência e ver o que acontecia com cada caso. Neste sentido, sugeri:

Professora: Pensem nas duas estratégias do Jecturiano e do Bacalhau e vejam se resulta primeiro para os números que têm da sequência, porque assim conseguem verificar.

Os alunos ignoraram completamente a minha orientação e continuaram com a regra de três simples. Contudo, depois do intervalo, voltaram a chamar-me. Continuei a insistir que os alunos seguissem a estratégia do **Bacalhau**, mas não mostraram grande interesse. Afastei-me do grupo, dando espaço para eles pensarem e eis que **Bacalhau** encontra uma nova maneira de resolver, encontrando relações entre as ordens e as figuras (dificuldade de **generalização**). Eis o pensamento oral desse elemento do **Grupo Bordô**:

***Bacalhau:** A figura 10 tem 21 pontos. É de 10 em 10. De 5 em 5 figuras, os pontos vão de 10 em 10.*

(...)

***Bacalhau:** Se de 5 me 5 vão 10, então de 10 em 10 vão 20. Se a figura 10 tem 21, então adicionamos 4 vezes 10, por isso temos que ao 21 adicionar 4 vezes 20, que dá 101 pontos. E fazemos o mesmo para a figura 100.*

Bacalhau ao constatar o número de pontos da figura de ordem 5 e da figura de ordem 10 (que foram obtidos **recursivamente**), concluiu que de cinco em cinco figuras se adicionava 10 pontos. Ao determinar o número de pontos da figura de ordem 20, também de forma **recursiva**, percebeu então que de dez em dez figuras, adicionavam-se vinte pontos a essa figura. Com essa estratégia determinou o número de pontos da figura de ordem 50, que seria o adicionar aos vinte e um pontos (da figura 10), 4 vezes 20, uma vez que da figura 10 até à 50, se adicionava 4 vezes 10. A escolha da figura de ordem 50 foi porque seria a *figura do meio*, e posteriormente, seria mais fácil de encontrar o número de pontos da figura de ordem 100.

A resposta final dada pelo grupo à questão 2 foi a que segue abaixo (Figura 22), apresentando uma justificação válida e bem fundamentada, mas notável de algumas dúvidas sobre a forma como apresentar os dados obtidos, principalmente, o uso do símbolo = (dificuldade de **comunicação** e de mobilização da linguagem matemática).

2. $F_5 = 11$
 $F_{10} = 21$
 $F_{50} = 101$
 $F_{100} = 201$
 $F_{141} = 141$
 R: A figura 100 terá 201 pontos.

de 5 em 5 figuras soma-se 10 pontos
 de 10 em 10 figuras soma-se 20 pontos

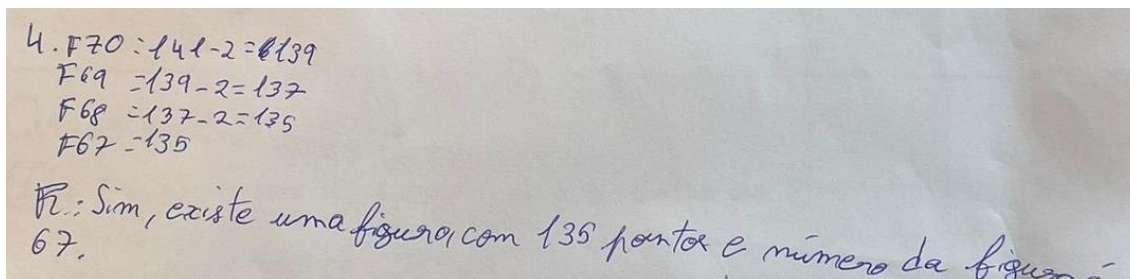
Figura 22 – Resposta do Grupo Bordô à Questão 2 da Tarefa I

Neste ponto, gostaria de lembrar que este Grupo Bordô seguiu três estratégias diferentes para dar resposta à questão 2, sendo que as duas primeiras seguiam o mesmo pensamento, de considerar um termo como unidade: a regra de três simples, onde consideraram o termo de ordem 1 como unidade e obtiveram que na figura de ordem 100 existiriam 300 pontos; o objeto inteiro, considerando o termo de ordem 4 como unidade chegando a uma resposta de 225 pontos. A última estratégia adotada, que foi a que apresentaram na resposta final, contava com uma relação entre os termos e as suas ordens, obtendo 201 como número total de pontos da figura de ordem 100.

Ao analisar todo este processo dos diferentes pensamentos, questionei-me sobre o porquê de os alunos deste grupo terem achado que a resposta à questão 2, de serem 225 pontos no total da figura de ordem 100, estaria errada. A justificação para não serem os 300 foi correta e fez todo o sentido, chegando à conclusão de que a sequência era composta apenas por números ímpares. Mas não houve qualquer justificação para o valor 225 ser ou não uma resposta correta, até porque se tratava de um número ímpar (dificuldade de **argumentação**). Deste modo, questionei-me: *Por que razão os alunos decidiram mudar de estratégia? Como é que perceberam que o 225 não faria sentido?* Pelas gravações de áudio percebi que como a resolução da tarefa tinha ficado a meio, pois houve um intervalo, fez com que este grupo soubesse a resposta que teria de dar na questão 2. Então, chegados à sala, tentaram arranjar outra estratégia que ao chegar à figura de ordem 100, desse os 201 pontos. Apesar de o motivo, pela qual terem percebido que a resposta dada inicialmente estaria errada, não ter sido muito positivo (a partilha de respostas), foi uma mais-valia os elementos terem chegado a uma estratégia bastante diferente de todas as outras, não tirando de todo o mérito dos raciocínios dos alunos. No entanto, é preciso referir que a estratégia adotada por este grupo demonstrou uma clara dificuldade dos elementos em trabalhar com sequências e em generalizá-las (dificuldade de **generalização**).

Depois de convictos que a resposta à questão 2 estaria correta, avançaram para a questão 4, seguindo a estratégia dada anteriormente por Bacalhau, de ir retirando dois

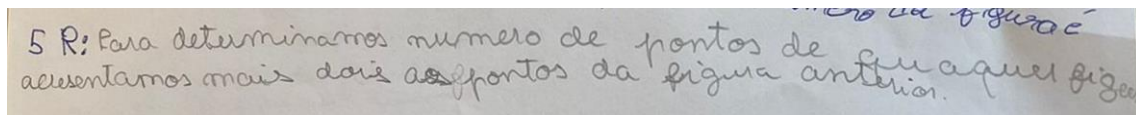
ao número de pontos de uma figura (que tivesse o número de pontos próximo a 135). (Figura 23) – estratégia **recursiva**.



$F_{70} = 141 - 2 = 139$
 $F_{69} = 139 - 2 = 137$
 $F_{68} = 137 - 2 = 135$
 $F_{67} = 135$
 R.: Sim, existe uma figura com 135 pontos e número da figura é 67.

Figura 23 – Resposta do Grupo Bordô à questão 4 da Tarefa I

Em geral, este grupo mostrou bastantes impasses em encontrar uma generalização da sequência, principalmente, relacionando os termos com as suas ordens. Neste sentido, a generalização feita foi muito mais visual, relacionando termos consecutivos ou termos com termos - estratégias utilizadas para responder a todas as questões. Logo, houve uma dificuldade acrescida da passagem da questão 5 para a questão 6 (dificuldade de **generalização**), percebida apenas nas gravações de áudio, uma vez que o grupo mais uma vez optou por uma regra baseada na estratégia recursiva (Figura 24). Este grupo, em particular, não apresentou uma resposta à questão 6.



5 R: Para determinarmos numero de pontos de figura seguinte acrescentamos mais dois pontos da figura anterior.

Figura 24 – Resposta do Grupo Bordô à questão 5 da Tarefa I

Um elemento do Grupo Azul também apresentou a estratégia do **objeto inteiro** assumindo o termo de ordem 5 como unidade, mas logo de seguida, um outro, Shrek, descartou essa hipótese, pensando noutra estratégia.

Chapéu: A figura 5 tem 11 pontos. 20 vezes 5 dá 100, ou seja, a figura 100 vai ter 20 vezes 11, que dá 220 pontos

Shrek: Não pode ser assim. É sempre a somar dois

Chapéu: Mas vais ficar aí a somar até aos 100?

Shrek: já sei. 3 vezes 100, menos 99 (não continuou o raciocínio). Porque olha, três vezes dois dá 6, menos um dá 5; depois 3 vezes 3, 9, menos 2, dá 7; depois 3 vezes 4, 12, menos 3 dá 9.

A estratégia mobilizada pelo grupo incide sobre uma estratégia **explícita**, em que Shrek conseguiu obter uma regra através da relação entre o número da figura e o número de pontos. A verdade é que os alunos não perceberam que os números que obtêm têm

uma relação com o número da figura. Quero com isto dizer que, **Shrek** percebeu que a figura de ordem 2, teria $3 \times 2 - 1$ pontos e que a figura de ordem 3 teria $3 \times 3 - 2$ pontos. Igualmente, identificou que seria multiplicar sempre 3 pelo número da figura. O que não conseguiu compreender depois foi que o número que retirava seria sempre o número da figura menos um (dificuldade de **generalização**), chegando posteriormente ao termo geral $3 \times n - (n - 1)$. Ou seja, a mesma generalização que o **Grupo Bordô** chegaria se optasse pela estratégia da regra de três simples. E foram dúvidas deste género que não deixaram os alunos prosseguir com as suas estratégias, optando por depois pensarem noutras.

Comecei a entender, nas gravações de áudio, que os alunos nunca chegavam a levar uma estratégia até ao fim para perceber se realmente a podiam seguir ou não. Neste caso, não houve qualquer explicação do porquê de não poderem continuar com a estratégia do objeto inteiro, ignorando completamente essa e passando para outra (dificuldade de **argumentação**). Para além disso, a estratégia dada pelo **Shrek** foi também totalmente abandonada pelos outros elementos do grupo. Como não tinham em vista mais nenhuma estratégia e sem sequer entenderem a estratégia sugerida por **Shrek**, chamaram-me e expuseram as suas dúvidas como segue no diálogo abaixo entre mim e os elementos do **Grupo Azul**.

Professora: Como é que fizeram a questão 1?

Grupo: somando 2, deu 11 pontos

Professora: Pois, e agora? Para a figura 100? Se eu vos tivesse pedido a figura 10, o que é que vocês faziam?

Chapéu: Íamos somando sempre 2.

Neste ponto, deu para perceber que realmente os alunos não estavam a olhar para a sequência como um todo, mas apenas para a diferença que havia entre termos consecutivos (dificuldade de **visualização**). Se lhes tivesse pedido a figura de ordem 20, os alunos iriam optar pela estratégia recursiva. E só não o fizeram para a figura de ordem 100 porque “daria muito trabalho” (**Chapéu**, **Grupo Azul**, Tarefa I, gravação de áudio) e a “professora não pediria uma coisa assim para nós andarmos aos saltinhos e demorarmos muito tempo” (**Tulipa**, **Grupo Azul**, Tarefa I, gravação de áudio). Continuei a discutir com os alunos questionando-os sobre se a aplicabilidade de usar o termo anterior seria benéfico.

Professora: Certo. Acham que comparar uma figura com a anterior dá jeito para determinar o número de pontos da figura 100?

Shrek: Não. Senão tínhamos que saber quantos pontos tinha a figura 99.

Professora: E para saber os pontos da figura 99 tinham de saber o que?

Chapéu: Tínhamos que saber o número de pontos da figura 98.

Imediatamente, perceberam que essa estratégia não seria a mais adequada, então começaram a discutir entre eles novos raciocínios, olhando para cada figura. Chegaram a uma generalização semelhante à obtida pelo **Grupo Verde**, da decomposição dos temos em partes. Em contrapartida, este grupo mostrou algumas dificuldades em justificar a sua resposta, tal como é evidenciado no excerto a seguir entre os elementos do **Grupo Azul**.

Chapéu: Como é que vamos explicar?

Shrek: Então se na figura 5, tem-se vezes dois que dá 10, mais um dá 11

Tulipa: Como é que chegaste à logica do 2 mais 1, 4 mais um?

Chapéu: Eu olhei para a figura e o ponto de cima contava sempre mais um

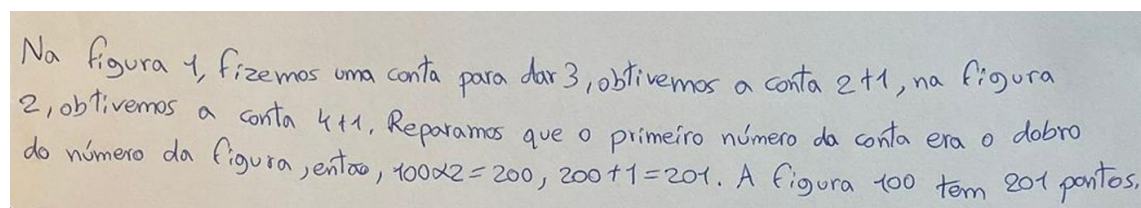
Shrek: Exato, é sempre acrescentando mais um

Shrek: na figura 3 fizemos uma conta, 2 mais um para dar 3. Eu não sei como explicar

Tulipa: Então na figura 1 fizemos uma conta, e na figura 2 também, e reparamos que o primeiro número era sempre o dobro da figura e depois adiciona-se um

Chapéu explica a estratégia que utilizou para chegar à generalização, mas mostra incertezas sobre como escrever essa mesma estratégia na folha de respostas (dificuldade de **comunicação**). **Tulipa** é quem tenta dar uma justificação e todos os elementos aceitam, mas é notório a falta de capacidade de justificar o raciocínio (Figura 25).

Tal como consta na Figura 25, os elementos do **Grupo Azul** limitaram-se a escrever exatamente aquilo que tinham dito oralmente quando estavam a discutir e a partilhar as ideias (dificuldade de **comunicação**). Ao lermos a resposta dada pelo grupo, não se entende o raciocínio que foi utilizado pelo mesmo, uma vez que apenas referiram que fizeram contas, sem mostrar o verdadeiro raciocínio por detrás delas. Neste sentido, as gravações de áudio foram imprescindíveis.



Na figura 1, fizemos uma conta para dar 3, obtivemos a conta $2+1$, na figura 2, obtivemos a conta $4+1$. Reparamos que o primeiro número da conta era o dobro do número da figura, então, $100 \times 2 = 200$, $200 + 1 = 201$. A figura 100 tem 201 pontos.

Figura 25 – Resposta do **Grupo Azul** à questão 2 da Tarefa I

Para a questão 4, mal acabam de ler o enunciado, **Shrek** apresentou de imediato uma resposta aos colegas:

Shrek: Então ao 135 temos de subtrair 1 que dá 134. 134 a dividir por 2 dá quanto?

Tulipa: Dá 67

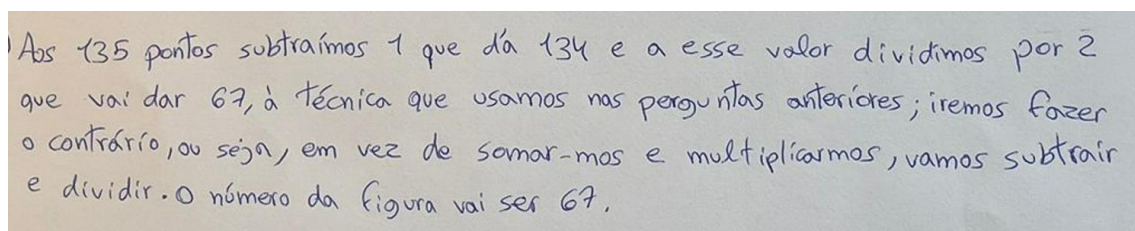
Shrek: Então pronto, o número da figura é 67

Chapéu: Mas podes-me explicar como é que chegaste a isso?

Shrek: A técnica que usamos nas questões anteriores fazemos o contrário para obter o número da figura.

Chapéu: Por isso é que subtraímos 1 e dividimos por 2

O raciocínio do **Shrek** foi pensar no processo contrário ao que utilizaram para a questão 2. Foi bastante interessante terem tido esta discussão, porque deu-me a entender que realmente perceberam o conceito de que ao pedir a figura tendo o número de pontos bastava fazer-se as propriedades inversas daquelas que fizeram para determinar o número de pontos sabendo o número da figura. No entanto, mais uma vez notou-se a dificuldade em justificar o raciocínio (Figura 26), optando por uma justificação mais textual, tal como o fizeram na resposta à questão 2 (dificuldade de **argumentação** e **comunicação**). Neste caso, poderiam ter optado por uma mista, onde apresentariam a conta que fizeram para obter a ordem da figura, 67, e de uma forma mais textual a justificação do porquê dessa conta. Contudo, apresentou ser uma justificação bastante completa e bem fundamentada tocando no ponto essencial de *fazer o contrário*, tal como referem na resposta final.



Aos 135 pontos subtraímos 1 que dá 134 e a esse valor dividimos por 2 que vai dar 67, à técnica que usamos nas perguntas anteriores; iremos fazer o contrário, ou seja, em vez de somar-mos e multiplicarmos, vamos subtrair e dividir. O número da figura vai ser 67.

Figura 26 – Resposta do **Grupo Azul** à questão 4 da Tarefa I

Enquanto estavam a escrever a resposta, eu fui ao lugar e questionei-os sobre a estratégia que tinham encontrado, uma vez que tinham mostrado algumas dúvidas em responder à questão 2. Rapidamente me indicaram que tinham encontrado algo que dava para determinar qualquer número da figura sabendo o número de pontos, fazendo assim uma outra generalização.

Apesar de todo o raciocínio feito pelo **Grupo Azul** sobre a generalização da sequência, quando se depararam com a questão 5, optaram por escrever a regra em que estava

implícita a estratégia **recursiva** (tal como a resposta dada pelo Grupo Bordô – rever Figura 24). Os elementos do **Grupo Azul** não entenderam que o que tinham feito na questão 2 seria também uma regra válida que lhes daria de imediato uma resposta para a questão 6.

Adotada então a regra recursiva na questão 5 e chegados à questão 6 surgiram muitas dúvidas sobre qual seria a expressão algébrica que traduzia essa regra, conforme ilustrado no diálogo que se segue.

Shrek: Já sei. $x+2$

Tulipa: mais dois? É vezes 2

Shrek: Sim, mais dois, porque acrescentamos sempre mais dois. Olha aqui não sabemos o número da figura que é x e acrescentamos mais dois

Shrek: Fica imagina figura 1 mais dois é igual a x . (...) Pode-se não saber o número da figura, x , mais dois

Tulipa: não, não pode ser assim. Quer-se o número de pontos de qualquer figura da sequência. É como fizemos na pergunta 2

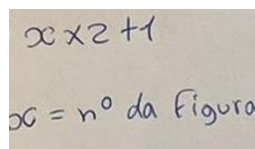
Tulipa sabia que não podiam utilizar a regra que tinham escrito na questão 5 para determinar a expressão algébrica, porque senão tinham sempre de saber o número de pontos da figura anterior. Sem perceber qual regra utilizar para além daquela que tinham escrito, chamaram-me. Depois de algumas questões colocadas, eis que surge uma discussão entre os elementos do **Grupo Azul**.

Shrek: eu acho que é x vezes dois mais um

Chapéu: mas porque vezes dois?

Shrek: A professora disse que só sabíamos o número da figura, então se fizemos como fizemos na questão dois, é multiplicar por 2 e depois somar 1.

Shrek mostrou perceber o que era afinal pedido na questão 6 e optou por seguir a estratégia que fizeram na questão 2, a de multiplicar por dois o número da figura e somar 1. Assim, chegaram a uma resposta final correta, tal como mostra a Figura 27.



$$x \times 2 + 1$$

$$x = n^{\circ} \text{ da Figura}$$

Figura 27 – Resposta do **Grupo Azul** à questão 6 da Tarefa I

Como tinham apresentado certas dúvidas, voltei ao lugar e questionei os alunos sobre a expressão algébrica a que tinham chegado para conseguir perceber se o grupo tinha realmente compreendido a questão. Mostraram-se novamente muito confusos,

principalmente, sobre a variável x e o que ela significava (dificuldade na mobilização da linguagem matemática). A verdade é que os alunos conseguiram chegar a duas estratégias diferentes para determinar diferentes objetos e isso foi bastante positivo, mas na hora de me justificar oralmente pareciam confusos (dificuldade na **comunicação**). Depois de alguma insistência, os alunos conseguiram chegar a uma conclusão, conforme o diálogo que se segue.

Professora: Vocês conseguem-me explicar porque é que é então x vezes dois mais 1? O que é o x ?

Shrek: É o número de pontos

Professora: Ah então nós multiplicamos o número de pontos por 2 e somamos 1, é isso?

Shrek: Acho que sim.

Professora: Então para encontrar o número de pontos da figura 1000, faziam o que?

Shrek: multiplicávamos por 2 e somamos 1

Professora: Então, mas disseste que o x era o número de pontos

Tulipa: Não. O x é o número da figura

Professora: Ok. Então se o x é o número da figura o que é que vocês fazem para encontrar o número de pontos?

Shrek: x a dividir por 2 menos um

Professora: isso era para descobrir o que?

Shrek: o número de pontos

Tulipa: Não. Isso era para descobrir o número da figura. Nós temos é que fazer o que disseste o x vezes dois mais um, para descobrir o número de pontos sabendo o número da figura.

Notou-se que estavam perdidos nas suas próprias estratégias, mas no final conseguiram responder ao pretendido e ainda chegar a algo que nem era pedido, mas que provocou uma discussão coletiva rica.

No seguimento do raciocínio das propriedades inversas, destaca-se também o **Grupo Verde** que fez uso desse mesmo raciocínio e, chegou até a apresentá-lo na sua folha de resposta como *outra estratégia* para responder à questão 3 (Figura 28), complementando ainda com uma expressão algébrica que traduzia a regra encontrada (a das propriedades inversas).

③ fórmula da sequência $2x+1$ fórmula para descobrir o número da figura
 $(202-1):2 = 201:2 = 100,05$
 $(x-1):2$
100,05 não pode ser o número da figura

Figura 28 – Segunda resposta do Grupo Verde à questão 3 da Tarefa I

Como já apresentado anteriormente, o Grupo Verde usou a regra de multiplicar o número da figura por dois e somar um para determinar o número de pontos de qualquer figura e assim, responder a todas as questões. Para responder à questão 3, fizeram uso das propriedades inversas e determinaram uma expressão algébrica, $\frac{x-1}{2}$, que permitiu encontrar o número de qualquer figura sabendo o número de pontos. Ao aplicarem essa fórmula, como eles a chamam, constaram de imediato que não haveria nenhuma figura com 202 pontos, uma vez que o resultado se tratava de um número racional e não inteiro.

A estratégia de usar as propriedades inversas foi usada tanto pelo Grupo Azul como pelo Grupo Verde, sendo que o último grupo referido a utilizou transformando-a numa expressão algébrica.

Esta resolução foi única de entre os quatro grupos, sendo que todos os outros responderam à questão 3 justificando a sua resposta com o facto de a sequência ter apenas números ímpares. Assim sendo, a resolução do Grupo Verde destacou-se das demais. Para além disso, considero importante referir que este grupo, em particular, utilizou essa mesma estratégia para responder à questão 4.

Exercício de síntese

Em jeito de síntese, verificou-se que houve uma maior ocorrência de justificações textuais, explicando a relação entre as ordens das figuras com o número total de pontos. Nas questões de generalização próxima, a maioria dos grupos utilizou a estratégia recursiva, adotando-a para algumas questões de generalização distantes, o que causou muitas dificuldades.

Para uma melhor discussão dos resultados obtidos, apresento um quadro-síntese com as estratégias de generalização que foram utilizadas pelos alunos na Tarefa I, quer nas respostas finais como nos raciocínios que foram tendo até chegarem a estas. No quadro não consta a questão 6, uma vez que a estratégia utilizada na mesma está implícita na

que foi utilizada na questão 5, isto porque a questão 6 apenas pede uma expressão algébrica.

Tarefa I	DR	D	OI	EA	EN	TE	O
Questão 1	X						
Questão 2			X		X		X
Questão 3	X	X		X			X
Questão 4	X			X	X	X	
Questão 5	X				X		

R – Diferença Recursiva; D – Diferença; OI – Objeto-inteiro; EA – Explícita algébrica; EN – Explícita natural; TE – Tentativa-erro, O – Outro

Quadro 3 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa I

Em relação às dificuldades, os alunos demonstraram muitas dificuldades em generalizar a sequência dada, bem como identificar qualquer outra regularidade, a não ser a presente entre termos consecutivos. Tenderam em aplicar a estratégia **recursiva** inúmeras vezes, enunciando-a como regra da sequência. Por esse motivo, sentiram dificuldade em encontrar uma expressão algébrica que traduzisse essa mesma regra.

Para além disso, mostraram algumas dificuldades em passar da linguagem oral para a escrita, quer fosse ela em linguagem matemática como linguagem natural - dificuldade de **comunicação**. Na sua maioria, os alunos optaram pela linguagem natural nas suas respostas, escrevendo textos a explicar o que pensaram (tal e qual como falaram), mostrando pouco à vontade com a linguagem matemática. Neste sentido, as dificuldades de **argumentação** e de comunicação prevaleceram neste momento de resolução e discussão da Tarefa I.

5.2. Análise dos processos de resolução da Tarefa II

Tal como foi feito para a tarefa anterior, reapresento o enunciado da Tarefa II (Figura 29), para uma melhor compreensão e fluidez da análise do conteúdo referente ao processo de resolução da mesma.

Os azulejos

A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:

1 2 3 4

Respondam às perguntas seguintes, apresentando o vosso pensamento por **palavras, esquemas, tabelas, cálculos** ou **símbolos**. Não se esqueçam que todas as repostas devem estar devidamente justificadas.

Para resolverem esta tarefa, a Sara deixa-vos uma dica:

“Antes de começarem a resolver a tarefa, organizem primeiro os dados que têm. Podem apresentar os dados num esquema, numa tabela ou de qualquer outra forma que achem mais prático. Para vos ajudar na resolução, podem ir acrescentando ao vosso esquema os dados que vão obtendo ao longo da tarefa.”

1. Quantos azulejos tem, no total, a Figura 6?
2. A Figura 51 tem quantos azulejos cinzentos e quantos azulejos brancos?
3. Para construir uma figura da sequência apresentada acima, a Sara precisou de 81 azulejos, no total. Quantos azulejos cinzentos e brancos a Sara usou?
4. Considerando a sequência acima, indiquem qual é a ordem do termo da sequência que é igual a 294. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representa o valor que obtiveram?

Figura 29 – Enunciado da Tarefa II: Os azulejos

Tal como já foi mencionado no capítulo da Intervenção Pedagógica, esta segunda tarefa apresenta questões semelhantes à Tarefa I. Isto porque um dos meus objetivos foi tentar perceber se os alunos iriam recorrer às mesmas estratégias que utilizaram na tarefa anterior ou se iriam recorrer a outras, tendo por base a partilha de estratégias que ocorreu no momento da discussão coletiva feita sobre a Tarefa I.

Esta segunda tarefa apresenta algo diferenciado das outras tarefas, ao promover a organização dos dados do problema em forma de esquemas, tabelas ou de qualquer outro modo. Tal necessidade surgiu quando me deparei com a falta de organização apresentada pelos alunos na resolução da Tarefa I e também para que fosse mais fácil a perceção dos diferentes elementos da figura: azulejos cinzentos, azulejos brancos e ambos.

Neste sentido, alguns grupos foram apresentando nas suas resoluções alguns esquemas para justificar os raciocínios utilizados. Outros grupos, como o **Grupo Bordô**

e o Grupo Preto, destacaram-se por apresentarem logo de início um esquema (Figura 30) e uma tabela (Figura 31), respetivamente, com os dados que tinham previamente da sequência dada.

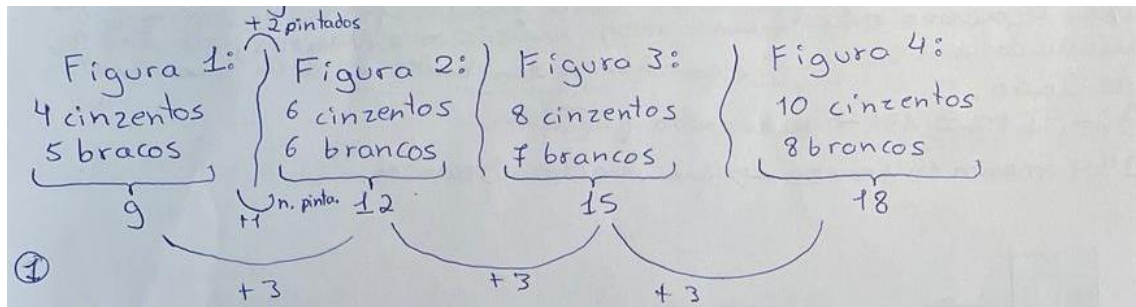


Figura 30 – Esquema feito pelo Grupo Bordô para organizar os dados da Tarefa II

Tabela de orientações

Ordem	Azulejos brancos	Azulejos cinzentos
Fig. 1	5	4
Figura 2	6	6
Fig. 3	7	8
Fig. 4	8	10
Fig. 5	9	12
Fig. 6	10	14

Figura 31 – Tabela feita pelo Grupo Preto para organizar os dados da Tarefa II

O esquema feito pelo Grupo Bordô apresenta os dados apenas referentes às quatro figuras apresentadas na sequência presente no enunciado da tarefa. Já na tabela do Grupo Preto, estão descritos os dados referentes até à figura 6, que faria parte da resposta à questão 1. Em ambos os esquemas estão presentes as duas sequências correspondentes aos azulejos brancos e aos cinzentos, sendo que ainda na Figura 30 é apresentada a sequência do número total de azulejos.

Os elementos do Grupo Bordô, depois de escritos todos os dados de cada figura, descobriram de uma forma **recursiva** a regularidade presente em cada uma das sequências: de figura para figura o número de azulejos brancos aumenta um, o número de azulejos cinzentos aumenta dois e o número total de azulejos aumenta três. O Grupo Preto, recorreu exatamente à mesma estratégia para preencher as linhas referentes à

figura 5 e 6 da tabela. Assim sendo, a utilização da estratégia **recursiva** foi a que esteve mais presente para encontrarem as regularidades, o que trouxe algumas dificuldades acrescidas na resolução de algumas questões da tarefa (dificuldade de **generalização**). No entanto, ambos os grupos recorreram a esta organização para responder à questão 1.

Não só o **Grupo Bordô** e o Grupo Preto recorreram à estratégia **recursiva**, mas também o **Grupo Azul** recorreu à mesma estratégia para responder à questão 1. O que diferenciou as respostas destes três grupos foram apenas as justificações. No entanto, alguns grupos optaram por uma resposta mais textual (como foi o caso Grupo Preto, que através da tabela escreveram um texto a explicar como obtiveram a figura 6) e outros por esquemas ou desenhos (como foi o caso do **Grupo Bordô** e do **Grupo Azul**). Destaco o **Grupo Azul**, que apresentou um esquema (Figura 32) onde se percebe claramente a regularidade encontrada e o processo de recursividade utilizado.

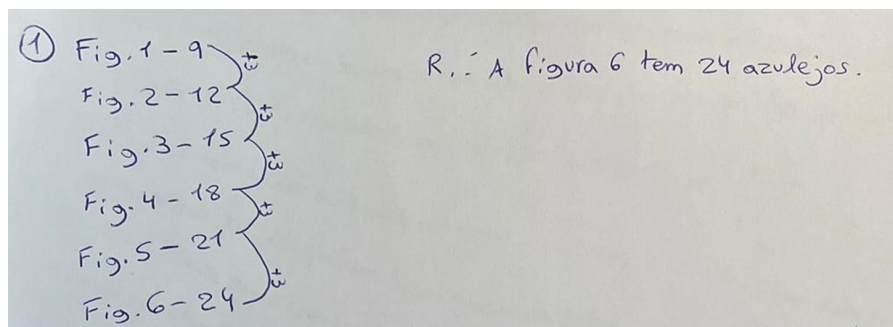


Figura 32 – Resposta do **Grupo Azul** à questão 1 da Tarefa II

Apesar do **Grupo Verde** ter apresentado na sua resposta final uma estratégia diferente, dois dos elementos recorreram à estratégia **recursiva** para responder de imediato à questão, tal como consta no diálogo abaixo.

João Ratão: 9, 12, ... Isto aumenta de 3 em 3

João Ratão: 9, 12, 15, 18, ... pronto é de 3 em 3, portanto 21, 24 ... A figura 6 tem 24 azulejos

(...)

Maria Albertina: A figura 6 vai ter 24 azulejos porque à figura anterior junta-se mais 3

Logo de seguida, **Astenosberto**, apresenta ao grupo uma outra estratégia, indicando uma **expressão algébrica** que traduzia a generalização da sequência. Os restantes elementos mostraram algumas dificuldades em entender como é que **Astenosberto** chegou à expressão apresentada, tal como mostra o diálogo abaixo.

Astenosberto: Eu fiz outra estratégia, que foi $(n + 2) \times 3$.

Maria Albertina: Porquê mais dois?

Astenosberto: Imaginem, o n é o número da figura. Temos 3, $n + 2$ fica 5 vezes 3

João Ratão: $n + 2$ é 5?

Astenosberto: Vamos imaginar que estamos na figura 3. Temos aqui o 3, então vamos substituir por 3. Três mais dois, 5, vezes três, 15 que é o que dá no total.

João Ratão: Realmente

Astenosberto: Para a figura 4, dá 4 mais 2, 6 vezes 3, 18.

Os elementos do grupo parecem ter ficado a perceber, mas ao tentar justificar, *Astenosberto* apenas aplicou a fórmula encontrada às ordens dos termos da sequência e verificar que de facto dava o número total de azulejos (dificuldade de **argumentação**). Na discussão entre os elementos do grupo, não houve qualquer explicação do porquê de somar dois ao número da figura e depois multiplicar por três. Contudo, na resposta dada pelo grupo (Figura 33), entende-se que houve um raciocínio que os fez chegar à construção do termo geral, pela **decomposição da figura**.

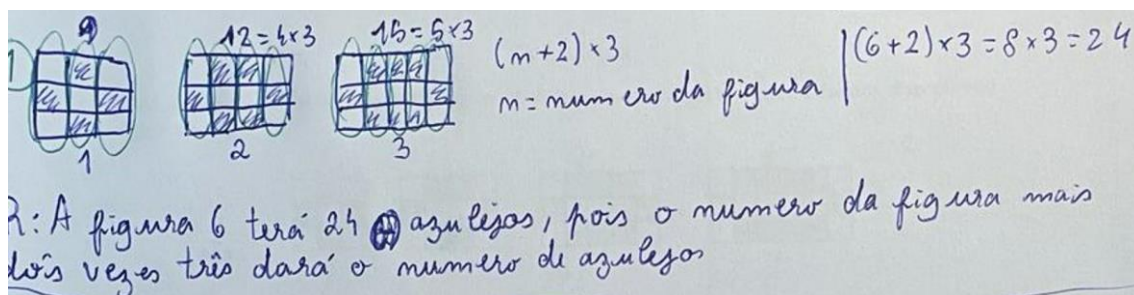


Figura 33 – Resposta do Grupo Verde à questão 1 da Tarefa II

Na discussão coletiva, no momento da partilha das respostas entre grupos, o *Grupo Verde* partilhou com a turma a sua estratégia, explicando de forma bastante clara a maneira como encontraram a fórmula apresentada. Eis um pequeno excerto da explicação de um dos elementos do grupo:

Astenosberto: Como só queríamos saber o número total de azulejos vimos que cada figura tinha sempre três linhas, e depois vimos na figura 1 tem 3 colunas, na figura 2 tem 4 colunas, na figura 3 tem 5 colunas, então o número de colunas era sempre mais dois que o número da figura.

Professora: E depois fizeram o que?

Astenosberto: Nós logo nesta questão usamos uma fórmula. $(n+2)$ vezes três, porque é o número de colunas vezes três.

Portanto, de facto, o grupo recorreu à decomposição das figuras para obter o termo geral da sequência, constatando que cada figura era composta por três linhas e por

colunas, onde o número das colunas correspondia à ordem da figura somado a dois, tal como está ilustrado nos desenhos feitos pelo **Grupo Verde** na Figura 33. Assim, os elementos do **Grupo Verde** conseguiram obter uma generalização da sequência que lhes permitiu obter uma relação entre a ordem da figura e o número de azulejos da mesma. Tal possibilitou-os dar uma resposta imediata à questão 1 e às posteriores questões sem qualquer dificuldade.

Para a questão 2, os alunos tinham de encontrar uma relação entre a figura (a ordem) e o número de azulejos brancos; assim como entre a figura e o número de azulejos cinzentos. Caso contrário, não conseguiram responder à mesma.

Em geral, houve duas estratégias distintas para responder à questão 2: a estratégia **explícita natural** e a **explícita algébrica**, utilizando a decomposição dos termos e/ou a expressões algébricas.

Tanto o **Grupo Azul** como o **Grupo Bordô** optaram pela estratégia explícita natural utilizando a **estratégia da decomposição de termos**, estabelecendo uma relação entre o número de azulejos de cada tipo com a ordem da figura da sequência. Tanto a visualização e decomposição das figuras como a justificação (textual) foram bastantes idênticas. Por esse motivo, apresento apenas a resolução do **Grupo Bordô** (Figura 34).

Enquanto discutiam ideias para a resolução da questão 2, **Jeturiano** avança com o seu raciocínio, descrito no diálogo abaixo, e partilha-o com os seus restantes colegas.

***Jeturiano:** Eu reparei que aqui na figura 1 tem 1 cinzento aqui e aqui (apontando para os das laterais) e outro aqui e aqui (apontando para o de cima e o de baixo), a figura 2 vai ter 2 aqui e aqui (os de cima e os de baixo) e 1 aqui e aqui (em cada lado), a figura 3 vai ter 3 aqui, 3 aqui, mais um aqui e outro ali. Por exemplo, a figura 5 vai ter cinco mais cinco mais um mais um, azulejos cinzentos. Faz sentido?*

Numa primeira instância, **Jeturiano** começa por encontrar uma regularidade dos azulejos cinzentos, percebendo que cada figura é composta por um azulejo cinzento de cada lado e por azulejos cinzentos em cima e em baixo, cujo número desse tipo de azulejos em cima corresponde ao número da figura (igualmente para os de baixo). Assim, tal como o próprio **Jeturiano** refere, a figura 5 teria 5 azulejos cinzentos em baixo, 5 azulejos em cima, e um de cada lado, dando um total de 12 azulejos cinzentos. Logo de seguida, **Jeturiano** conclui o seu raciocínio e acrescenta:

***Jeturiano:** Como queremos a figura 51, vai ter 51 azulejos em cima, e 51 em baixo e um de cada lado, logo 104 azulejos pintados*

Assim, rapidamente encontraram uma relação entre o número de azulejos cinzentos e o número da figura, tendo em vista apenas a visualização da figura como um todo.

Depois da partilha do seu raciocínio, os outros elementos do grupo mostraram-se confusos com a forma como iriam explicar esse pensamento (dificuldade de **argumentação**), sendo que a estratégia encontrada foi apenas ver uma relação entre o número da figura e o número de azulejos cinzentos. De facto, essa dificuldade em justificar foi perceptível na sua resposta final, onde o **Grupo Bordô** apresentou por **palavras** todo o processo pensado (Figura 34). Passaram literalmente da linguagem natural oral para escrita sem sequer tentar passar para a linguagem matemática (dificuldade de **comunicação**). Caso o tivessem feito, teriam encontrado de imediato uma generalização que os permitia rapidamente encontrar um termo geral.

Tal como consta na resposta final (Figura 34), o **Grupo Bordô** fez exatamente o mesmo processo para encontrar o número de azulejos brancos da figura 51, decompor a figura inicial. Assim, perceberam que cada figura era composta por quatro azulejos brancos, um em cada canto da figura, e por azulejos brancos no meio, cujo número desses mesmos azulejos correspondia à ordem da figura.

① Figura 2 → um 2 quadrados em cima, dois quadrados e dois quadrados delado.
 Figura 4 → tem 4 quadrados em cima, 2 quadrados em baixo e dois de lado.
 Figura 51 → tem 51 quadrados em cima, 51 quadrados em baixo e 2 de lado.
 Figura 51 → $51 + 51 + 2 = 102 + 2 = 104$ → quadrados cinzentos.
 Figura 2 → tem 2 quadrados no meio e 4 quadrados à volta.
 Figura 4 → tem 4 quadrados no meio e 4 quadrados à volta.
 " " 51 → tem 51 quadrados no meio e 4 quadrados à volta.
 " " 51 → $51 + 4 = 55$ → quadrados brancos.

Figura 34 – Resposta do **Grupo Bordô** à questão 2 da Tarefa II

A estratégia de utilizar uma **expressão algébrica** foi mobilizada pelo **Grupo Verde** e pelo Grupo Preto. Ambos os grupos encontraram o termo geral tanto da sequência referente ao número de azulejos brancos como da sequência do número de azulejos cinzentos para dar resposta à questão 2.

O **Grupo Verde** apresentou uma resposta semelhante ao Grupo Preto e, pelas gravações de áudio referentes à discussão em grupo, não pareceu haver dúvidas

quanto à estratégia aplicada na resolução desta questão. Por este motivo, e para não repetir resoluções, optei por apresentar apenas o processo de resolução do Grupo Preto, apresentando tanto a resolução como alguns excertos da discussão entre os elementos do grupo, visto que foram surgindo algumas dúvidas, principalmente na elaboração das expressões algébricas, ou seja, dos termos gerais das sequências associadas à questão.

Portanto, tal como já foi mencionado, o Grupo Preto recorreu aos termos gerais das duas sequências associadas tanto dos azulejos cinzentos como dos azulejos brancos e com estes, sabendo o número da figura, determinaram de imediato o número de azulejos de cada tipo (Figura 35). Na verdade, este último processo de determinar o número de azulejos foi feito sem qualquer dificuldade acrescida.

2. Azulejos cinzentos = $2n + 2$
 Azulejos brancos = $4 + n$
 $n = 51$

Figura 51 = $51 \times 2 + 2 = 102 + 2 = 104 \rightarrow$ azulejos cinzentos

$51 + 4 = 55 \rightarrow$ azulejos brancos

Figura 35 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa II

No entanto, este grupo passou por vários obstáculos até encontrarem as expressões algébricas de ambas as sequências, que surgem na resolução do grupo, tal como será analisado a seguir. Mal se depararam com a questão 2, um dos elementos do Grupo Preto afirmou saber uma fórmula para os azulejos cinzentos e partilha com os colegas. Logo de seguida, os restantes elementos procuram a fórmula para os azulejos brancos e surge a seguinte discussão:

Grau: encontrei uma fórmula para descobrir os cinzentos que é 2 vezes a figura mais dois. Olha vê 2 vezes 4 mais dois dá 10 azulejos cinzentos, que dá a figura 4.

Guri: então na figura 51 vai ter 51 vezes dois mais 2 que dá 104.

Filomena: Porque é que é $2n+2$?

Grau: Nós se multiplicarmos o 3 por 2 e somar 2 dá 8. Se formos às outras figuras também vai dar igual.

Filomena: Ok. $2n+2$ então. E os azulejos brancos é $2n + 1$

Guri: Exato

Barbie: exato, mais um, porque aumenta um em cada figura

Filomena: $2n+1$. Então dois vezes dois mais um dá 5. Exato

Filomena: Então a fórmula para o número de azulejos brancos é $2n+1$

De facto, Guri apresenta uma fórmula correta para traduzir a regularidade descrita na sequência dos azulejos cinzentos, no entanto, não houve qualquer explicação sobre como chegou a essa expressão. Quando Filomena questiona Guri, este apenas se limita a substituir a ordem de uma figura e verificar que o número de azulejos cinzentos dá o valor correto (dificuldade de **argumentação**).

Os restantes elementos mostram ter percebido, mas logo de seguida é notório que o facto de não ter havido uma explicação correta de como Guri encontrou a expressão $2n + 2$, fez com que os mesmos entendessem de forma errada a construção do termo geral. Tal acontece quando os restantes elementos afirmam que $2n + 1$ seria a fórmula que correspondia à sequência dos azulejos brancos. O grupo toma esse termo geral como correto, argumentando que se soma mais um ao dobro do número da figura (da ordem) porque de figura para figura o número de azulejos brancos aumenta um. Isto advém de a expressão algébrica, $2n + 2$, por coincidência ou não, apresentar o “+2” e os alunos assumirem que tal corresponde ao facto de a diferença entre termos consecutivos, da sequência dos azulejos cinzentos, ser dois (dificuldade de **generalização**).

Filomena ainda recorreu ao que Guri explicou sobre a fórmula anterior, e foi verificar se a expressão algébrica $2n + 1$ daria certo se fosse pela figura 2. E a verdade é que se Filomena tivesse percebido que o número total de azulejos brancos na figura 2 era seis e não cinco, como afirma ser no diálogo anterior, esta poderia ter descartado de imediato a expressão $2n + 1$.

Deste modo, o Grupo Preto assumiu as duas fórmulas, $2n + 1$ e $2n + 2$, como corretas e determinaram o número total de azulejos brancos utilizando a primeira, $2 \times 51 + 1 = 103$ e o número de azulejos cinzentos, recorrendo à segunda, $2 \times 51 + 2 = 104$. É de realçar que apenas o último cálculo é que está correto, uma vez que o termo geral encontrado para a sequência dos azulejos brancos estaria errado.

Depois de resolvida a questão 2 e a questão 3, começaram a surgir algumas dúvidas e acabaram por me chamar. Depois de os ter esclarecido sobre as suas dúvidas, e porque reparei que tinham optado por responder à questão 2 utilizando os termos gerais, questioneei-os sobre os mesmos e como é que chegaram a esses, tal como consta no diálogo abaixo apresentado.

Professora: Agora gostava que me explicassem como é que chegaram a essas fórmulas. Como chegaram ao $2n + 2$ ser o dos azulejos brancos?

Barbie: porque se acrescenta sempre mais dois

Professora: E porque é que $2n + 2$?

Filomena: duas vezes a figura mais dois para a próxima figura.

Rapidamente deu para perceber que os elementos do Grupo Preto não entendiam o significado da fórmula que tinham encontrado (dificuldade de **generalização**), continuado a insistir que seria por causa da **recursividade**. Tendiam sempre a relacionar termos consecutivos ao invés de relacionar o termo com a sua ordem, o que parece até um pouco contraditório porque quando calcularam o número de azulejos perceberam que o n correspondia ao número da figura.

Posto isto, não fazia sentido eu deixar o grupo sem que entendessem o conceito e a forma como se chega ao termo geral. Por isso, insisti com o grupo e coloquei algumas questões que os fizessem chegar à fórmula, relacionando a figura com o seu número de azulejos, sem lhes dizer diretamente. Abaixo seguem alguns excertos do diálogo que tive com os elementos do Grupo Preto sobre este tópico, primeiramente sobre os azulejos cinzentos.

Professora: Digam-me lá se vocês conseguem achar alguma coisa em comum em todas as figuras.

Guri: Acrescenta-se mais um em cima e em baixo

Filomena: Não! Nos cinzentos acrescenta-se mais um

Guri: Não! Mais dois, um em cima e em baixo

Barbie: E os brancos acrescenta-se mais um no meio

Professora: Certo. Então vamos lá ver existe algo que esteja sempre igual em todas as figuras?

Guri: Sim. Estes dois cinzentos

Professora: Então e os outros cinzentos, como é relacionam com a figura?

Guri: Na figura 2 tem 4, na figura 3 tem 6, então é o dobro da figura.

Filomena: Ah, por isso o $2n$

Professora: Então e o mais dois?

Guri: O mais dois vem daqueles cinzentos de cada lado que tem sempre em todas as figuras.

Com esta discussão os alunos conseguiram rapidamente perceber o porquê de se multiplicar o número da figura por dois e depois somar dois, através da observação da figura e dos seus elementos. Assim, questionei-os sobre os azulejos brancos, para ver se eles percebiam que o que eles tinham chegado não estava correto. Não foi assim tão rápido como eu esperei que fosse para o grupo chegar ao termo geral da sequência dos azulejos brancos, porque focavam-se mais uma vez na estratégia recursiva e o que é

que acontecia de uma figura para a outra (dificuldade de **generalização**). Pedi que relembbrassem como fizemos anteriormente e o que foram vendo em cada figura. Só depois desse alerta é que começaram a olhar para a figura e a perceber o que é que era comum em todas as figuras, percebendo que, tal como consta no diálogo abaixo, existiam 4 azulejos brancos no canto e no meio o número de azulejos brancos correspondia ao número da figura. Assim, puderam obter o termo geral para ambas as sequências, $2n + 2$, correspondente à sequência dos azulejos cinzentos e $4 + n$, da sequência dos azulejos brancos.

Barbie: Os 4 dos cantos estão sempre

Filomena: E soma-se o número da figura, porque na figura 1 tem 1 no meio, na figura 2 tem 2 no meio.

Professora: Então qual é a expressão algébrica?

Filomena: 4 mais n

Antes de me afastar do grupo, pedi que verificassem o porquê de a fórmula $2n + 1$ estar errada e eis que um dos elementos me responde rapidamente afirmando que na figura 4 o número de azulejos brancos são 8, mas pela fórmula dariam 9. Deste modo, conseguiram encontrar os erros e superar as dificuldades e, logo de seguida, voltaram à questão e responderam novamente utilizando as expressões encontradas.

Relativamente à questão 3, todas as respostas dadas pelos grupos estavam corretas e todas elas apresentaram estratégias diferentes. Acredito que tal se deveu pela maneira como os alunos abordaram as primeiras questões, principalmente a questão 2. Para além disso, creio que nesta questão é possível perceber a preferência em trabalhar com sequências: ou de uma forma mais visual, olhando para os elementos da figura e tentando encontrar uma relação entre esses elementos e a ordem da figura ou de uma forma mais algébrica, utilizando fórmulas ou expressões algébricas.

No seguimento da estratégia **explícita algébrica**, destacam-se o **Grupo Verde** e o Grupo Preto, que recorreram a essa mesma estratégia para responder à questão 2. A resposta de ambos distingue-se pela expressão algébrica utilizada.

O **Grupo Verde**, tal como aconteceu na Tarefa I, encontrou uma **expressão algébrica** para determinar o número da figura sabendo o número total de azulejos, utilizando as propriedades inversas daquela que encontraram para determinar o número total de azulejos sabendo o número da figura (Figura 36). Esse raciocínio foi partilhado por um dos elementos do grupo, o **Astenosberto**, que percebeu que teriam de fazer *uma coisa ao contrário* para descobrir o que era pedido. **João Ratão** mostrou saber que antes de se fazer algo deveriam saber o número da figura e que para isso bastava dividir o 81

por 3, isto porque pelo seu raciocínio, saberiam o número de azulejos de cada fila e isso corresponderia à ordem da figura. Neste caso, só teria de se lembrar que o número da figura seria o número de azulejos cinzentos numa das filas (de cima ou de baixo) menos dois (menos os dois brancos na fila de baixo, por exemplo).

Astenosberto: Já fizemos a dois. Eu acho que agora é fazermos uma coisa ao contrário para descobrirmos o resto.

João Ratão: Pensa. A gente para fazer as coisinhas temos que saber o número da figura, não é?

Astenosberto: Sim

João Ratão: Então, se tem 81, fazes 81 a dividir por 3 que ia dar o número da figura.

Astenosberto: Calma. O número da figura vai ser 81 menos 2 a dividir por 3

João Ratão: Menos dois já nos 81? Não. Porque 81 não é o número de lados, é o número de azulejos. Então tínhamos que fazer o número de azulejos a dividir por 3.

Astenosberto: Não. Mas nós temos que ter o menos dois. O menos dois tem que estar ali.

Rapidamente, *Astenosberto* descarta a ideia de *João Ratão* e afirma que para descobrir o número da figura bastava fazer-se o número total de azulejos, retirar dois e dividir por 3. *João Ratão* fica confuso porque não entende o porquê de se retirar dois e de seguida dividir por 3. Para ele tinha de se dividir primeiro por três, porque assim ficariam com o número de azulejos numa fila. De facto, o primeiro a fazer seria dividir por três e só depois retirar 2. *Astenosberto* afirma com toda a certeza que têm de subtrair dois na conta que iriam fazer e depois de alguma insistência por parte do mesmo em seguir a sua ideia, afirmou o seguinte:

Astenosberto: O número de azulejos é $n+2$ vezes 3. Então o número da figura vai ser n a dividir por 3 menos dois.

Portanto, conseguiram encontrar uma fórmula que permitisse determinar qualquer ordem a partir do número total de azulejos. A partir dessa, determinaram o número da figura e, posteriormente o número de azulejos brancos e cinzentos a partir dos termos gerados encontrados na questão anterior (Figura 36).

3) número de azulejos - $(n+2) \times 3$ | número da figura - $n \cdot 3 - 2$
 $n = n^\circ$ da figura | $n^\circ = n^\circ$ de azulejos

83: $3 - 2 = 27 - 2 = 25$
 n° de brancos - $25 + 4 = 29$
 n° de cinzentos - $25 \times 2 + 2 = 52$

R: Na figura que a Sora usou 51 azulejos usou 52 azulejos cinzentos e 29 azulejos brancos, porque o n° de azulejos brancos é $n+4$ e o número de azulejos cinzentos é $n \times 2 + 2$.

Figura 36 – Resposta do Grupo Verde à questão 3 da Tarefa II

Este grupo utilizou a mesma estratégia para responder à questão 4, percebendo que determinar a ordem do termo, seria encontrar o número da figura que tem 294 azulejos no total. Para tal, determinaram a ordem do termo pedido através da fórmula encontrada para determinar o número da figura sabendo o número total de azulejos $\left(\frac{n}{3} - 2\right)$, como consta na resposta da questão 3.

O Grupo Preto, fez também uso de uma **expressão algébrica**, mas, neste caso, essa expressão correspondia ao termo geral da sequência associado ao número total de azulejos. O processo para encontrar essa tal expressão foi realizado através da soma do termo geral da sequência associado aos azulejos brancos com o termo geral da sequência associado aos azulejos cinzentos $(2n + 2 + n + 4)$. Os elementos do grupo perceberam que ao somar essas duas fórmulas, encontrariam o número total de azulejos. Nada os impedia de fazerem o mesmo processo que fizeram para determinar as fórmulas anteriores, para encontrarem o termo geral da sequência.

Esta estratégia distingue-se da do Grupo Verde, uma vez que, o Grupo Preto, recorreu a uma equação para determinar o número da figura, usando o termo geral obtido pela soma dos dois termos gerais das sequências dos dois tipos de azulejos. Depois de determinada a ordem da figura, fizeram uso das fórmulas já encontradas na questão anterior para determinar o número de azulejos brancos e cinzentos (Figura 37).

3.

$$3n + 6 = 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n = 81 - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 75 : 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 25$$

azulejos brancos $= 4 + n$
 $= 4 + 25$
 $= 29$

azulejos cinzentos $= 2n + 2$
 $= 2 \times 25 + 2$
 $= 50 + 2$
 $= 52$

R: Tem 29 azulejos brancos e 52 azulejos cinzentos.

Figura 37 – Resposta do Grupo Preto à questão 3 da Tarefa II

O Grupo Preto ao resolver desta forma mostrou compreensão sobre as fórmulas obtidas e conhecimento sobre tópicos abordados nas aulas anteriores, principalmente, sobre a resolução das equações e da interpretação do resultado no contexto do problema.

Os elementos deste grupo utilizaram exatamente a mesma estratégia para responder à questão 4, percebendo de imediato que ao determinar a figura, através da equação, isso daria o resultado pretendido, referente à ordem (Figura 38).

4 - azulejos totais $= 3n + 6 = 294 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3n = 294 - 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3n = 288 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = 288 : 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 96$

R: A ordem é 96.

Figura 38 – Resposta do Grupo Preto à questão 4 da Tarefa II

No entanto, surge algo inesperado dito por um dos elementos deste grupo, enquanto partilhavam as suas ideias:

Guri: Olha, mas para descobrir o número da figura não é n menos 1 a dividir por 2? Foi o que se fez para descobrir a figura com 135 pontos

Filomena: mas isso eu acho que foi naquele caso. Aqui temos que fazer com o que descobrimos. Temos que fazer para esta sequência aqui, acho eu.

Guri ao perceber que na questão 4 pede para determinar o número da figura, automaticamente, pensa no processo que utilizaram para resolver uma mesma questão na Tarefa I. Este elemento do grupo não percebeu que na questão 3 da Tarefa II já tinham resolvido algo parecido para determinar o número da figura com 81 azulejos.

Perante esta afirmação de Guri, imediatamente Filomena interpela-o e alerta-o para o facto de os processos mudarem quando se está perante uma sequência diferente.

Ainda sobre a questão 3, o **Grupo Bordô** e o **Grupo Azul** apresentam estratégias mais visuais, encontrando relações entre os elementos da figura e a sua ordem, através da **decomposição da figura inicial**.

O **Grupo Bordô** não aparentou ter qualquer dificuldade em resolver a questão 3, pelo que rapidamente perceberam como determinar o número de azulejos brancos e cinzentos através da forma como os diferentes tipos estão distribuídos nas figuras. O diálogo abaixo mostra a partilha de ideias entre os intervenientes do **Grupo Bordô** sobre a estratégia adotada e a forma como *decompuseram* a figura inicial.

Bacalhau: Se ela precisou de 81, fazemos 81 a dividir por 3, para termos o número aqui da figura. 81 dividido por 3 quanto é que dá?

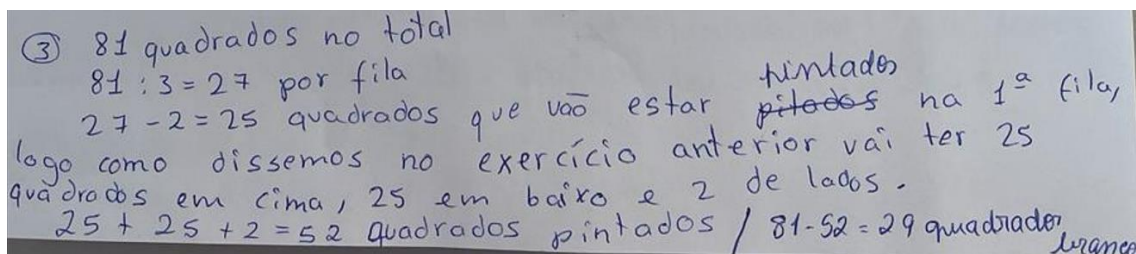
Jecturiano: 27. Mas porquê dividido por 3?

Bacalhau: Ficam 27 quadrados em cada fila. E se tem 27 quadrados numa fila, então vai ter 25 quadrados cinzentos, porque dois dos cantos são brancos

Jecturiano: Pois, e vai ter 25 aqui, 25 aqui e mais 2, ou seja, 52 pintados

Bacalhau: Exato.

Ou seja, o grupo entendeu que todas as figuras eram compostas por 3 filas. Também compreenderam que tanto na fila de cima como na fila de baixo existiam dois quadrados brancos. Portanto, ao retirar esses dois, de cada uma das filas, ficariam com o número de quadrados cinzentos em cima, que seriam 25 e com outros 25 em baixo. A esse número adicionaram mais dois, correspondentes aos dois azulejos cinzentos na fila do meio. Assim, obtiveram $25 + 25 + 2 = 52$ azulejos cinzentos (ou pintados, como o grupo chama). Para determinarem o número de azulejos brancos apenas retiraram ao total de azulejos, os 52 cinzentos, dando 29 brancos, tal como está apresentado na resolução do grupo na Figura 39.



③ 81 quadrados no total
 $81 : 3 = 27$ por fila
 $27 - 2 = 25$ quadrados que vão estar pintados na 1ª fila,
 logo como dissemos no exercício anterior vai ter 25
 quadrados em cima, 25 em baixo e 2 de lados.
 $25 + 25 + 2 = 52$ quadrados pintados / $81 - 52 = 29$ quadrados brancos

Figura 39 – Resposta do **Grupo Bordô** à questão 3 da Tarefa II

A justificação dada pelo Grupo Bordô, tal como consta na resposta final, na Figura 39, passou por uma justificação mista, entre cálculos e texto, onde foi explicado o raciocínio a que recorreram para chegarem aos cálculos apresentados, mencionando o processo utilizado na questão 2 da tarefa (rever Figura 34). Ao contrário do Grupo Preto, este grupo não determinou o número da figura para resolver a questão 3. Na verdade, está implícito pelo processo utilizado que o número da figura seria o 25, e era de esperar que os próprios elementos do Grupo Bordô percebessem isso. O facto de terem justificado que recorreram ao que fizeram na questão 2, fez-me acreditar que de facto entenderam que tinham obtido o número da figura, ainda que na questão 3 não pedisse tal coisa.

Contudo, na passagem da questão 3 para a questão 4, percebeu-se exatamente que os elementos do Grupo Bordô não tinham entendido o processo utilizado anteriormente e que bastava determinarem o número de azulejos cinzentos de uma das filas de baixo ou de cima para saberem o número da figura.

Mostraram-se confusos com o que seria a ordem e o termo, mas depois de algumas discussões entre os elementos, concluíram que o que estavam à procura era da figura que tinha 294 azulejos no total e decidiram utilizar a mesma estratégia da questão 3. No entanto, foi notória a falta de compreensão do que era realmente pedido na questão 4, visto terem apresentado exatamente tudo igual ao que responderam na questão anterior, até mesmo o número de azulejos brancos e cinzentos, que não seria necessário para a questão (Figura 40).

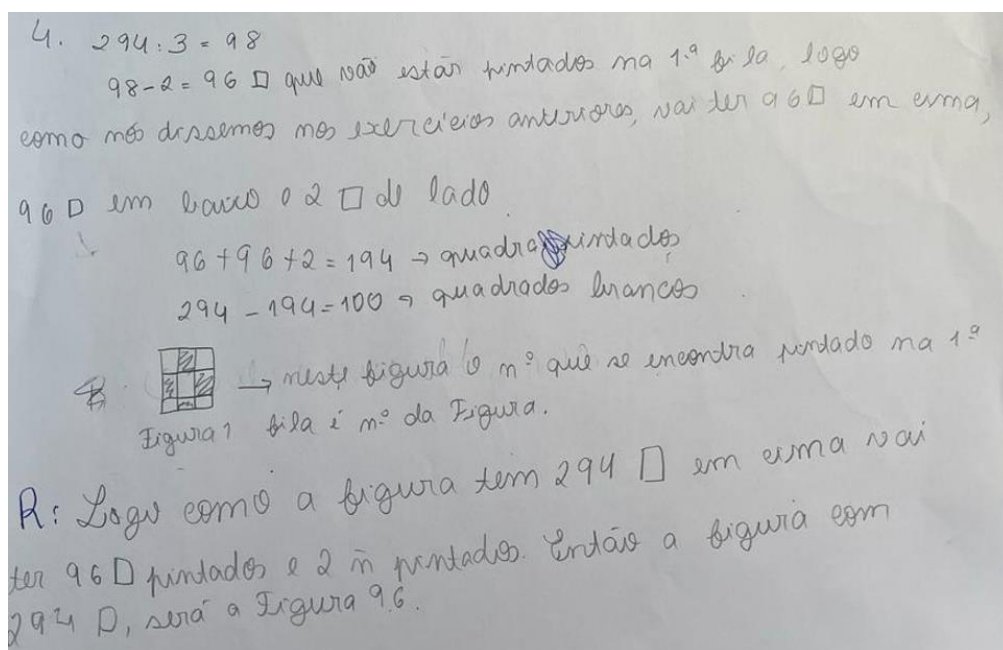


Figura 40 – Resposta do Grupo Bordô à questão 4 da Tarefa II

Na verdade, para responder à questão 4, bastava terem apresentado os dois primeiros cálculos e a justificação que explicasse a passagem dos 96 azulejos cinzentos corresponderem à figura 96. Esta última justificação, que consta na resolução do **Grupo Bordô**, foi um ponto bastante positivo na mesma, porque mais uma vez mostraram a forma como pensaram para chegar à resposta.

Na discussão coletiva desta tarefa, o **Grupo Bordô** foi o escolhido para apresentar a sua resolução da questão 4 ao resto da turma e foi muito interessante o facto de um outro elemento de outro grupo perceber que ao encontrar o valor 96, já estariam a responder à questão. Aproveitei a afirmação desse aluno e questionei o grupo sobre isso e eis que chegaram a uma conclusão que me pareceu que não tinham conseguido constatar quando estavam no momento autónomo da resolução da tarefa.

Guri: Mas ao encontrar o 96 já sabiam a ordem. Não precisavam de fazer mais nada.

Professora: Concordam com o Guri?

Jecturiano: Sim. Porque o 96 é o número da figura então não precisávamos de fazer mais nada.

Mais uma vez, a discussão coletiva mostrou ser algo positivo para a compreensão das estratégias de outros grupos, mas também para a compreensão e aprofundamento das estratégias do próprio grupo que estaria a apresentar.

Ainda na discussão coletiva, também o **Grupo Azul** se mostrou voluntário para apresentar a sua resolução, visto ser bastante semelhante à apresentada pelo **Grupo Bordô**. O que distingue uma resolução da outra foi a justificação escrita, em que o **Grupo Azul** optou por uma justificação ainda que textual, mas de uma forma mais esquemática, explicando a decomposição das figuras por *camadas*. Para além disso, o **Grupo Azul** determinou tanto o número de azulejos brancos como cinzentos através da **decomposição da figura**, enquanto o **Grupo Bordô** utilizou essa estratégia apenas para determinar o número de azulejos cinzentos, determinado os brancos através da diferença do total de azulejos com esses últimos.

Ao contrário do **Grupo Bordô**, o **Grupo Azul**, respondeu à questão 4 sem qualquer dificuldade, apresentado apenas o que era necessário, recorrendo na mesma à estratégia utilizada na questão 3.

Relativamente à questão 4 e tendo em conta as resoluções aqui apresentadas (caso seja necessário, rever a Figura 38 e Figura 40), em geral, todos os grupos mostraram ter percebido o conceito de *ordem* e *termo*, no contexto da tarefa. Mesmo nas gravações

de áudio foi perceptível a associação do termo ao número total de azulejos e da ordem ao número da figura.

No entanto, nenhum grupo respondeu à segunda pergunta que é feita na questão 2 desta tarefa: “Na situação apresentada nesta tarefa, o que representa o valor que obtiveram”. De facto, nem nas gravações de áudio os grupos discutem sequer sobre essa pergunta, o que me fez perceber que os alunos apenas tendem a ler os enunciados e as questões de forma incompleta, deixando por vezes questões por resolver.

Na discussão coletiva, mencionei essa ausência de resposta por parte de todos os grupos, e rapidamente me responderam corretamente referindo que o valor 96 correspondia ao número da figura.

Exercício de síntese

Tal como foi feito para a tarefa anterior, segue um quadro com as categorias das estratégias, onde é apresentada o tipo de estratégia utilizada para cada questão da Tarefa II.

Tarefa II	DR	D	OI	EA	EN	TE	O
Questão 1	X			X			
Questão 2				X	X		
Questão 3				X	X		
Questão 4				X	X		

R – Diferença Recursiva; D – Diferença; OI – Objeto-inteiro; EA – Explícita algébrica; EN – Explícita natural; TE – Tentativa-erro, O – Outro

Quadro 4 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa II

Pode-se verificar que na Tarefa II houve menos estratégias diferenciadas, mas isto mostra a evolução dos alunos nos seus raciocínios. Quero com isto dizer que é notório que os alunos deixaram de utilizar tanto a estratégia do **objeto-inteiro** como a da **diferença**, mostrando que perceberam que essas estratégias (como eles a aplicavam) não resultavam de uma resposta correta.

Houve mais tendência em adotar a estratégia **explícita**, tanto **algébrica** como **natural**, encontrando assim generalizações válidas para a sequência dada. De facto, mais uma vez se nota a evolução dos alunos nesse sentido, uma vez que a dificuldade em **generalizar** esteve muito presente na resolução da Tarefa I.

Nesta presente tarefa, constatou-se as diferentes formas de os alunos chegarem a uma generalização e por sua vez a uma regra geral da sequência e ao termo geral: quer pela decomposição dos termos quer pelas relações numéricas.

As dificuldades evidenciaram-se mais uma vez na passagem da **comunicação** oral para a escrita e também no estabelecimento de uma regra válida da sequência. Desta forma, a dificuldade mais evidente na resolução desta tarefa foi claramente a determinação do termo geral da sequência. Os alunos tendiam a olhar apenas para os números associados a cada termo, encontrando uma *conta* válida para todos os termos, mas sem entenderem verdadeiramente o significado dessa tal *conta*. No entanto, é importante realçar que as dificuldades diminuíram significativamente da Tarefa I para a Tarefa II.

Considero também importante referir, que na resolução desta tarefa foi possível constatar que alguns alunos tendem a memorizar processos e regras aplicando-os da mesma forma num outro contexto. Exemplo disso foi um elemento do Grupo Preto que recorreu ao mesmo processo que utilizou na resolução da Tarefa I para resolver a mesma questão da Tarefa II.

5.3. Análise dos processos de resolução da Tarefa III

Mais uma vez apresento o enunciado da Tarefa III (Figura 41) de forma a apoiar a compreensão da análise.

A festa de aniversário da Rita

A Rita está a organizar a sua festa de aniversário e escolheu o restaurante "SS – Sequências Saborosas" para celebrar os seus 22 anos.

Todas as mesas do restaurante têm a forma de hexágonos regulares. A disposição das mesas e das cadeiras segue o padrão apresentado abaixo.

O Sr. Paulo, dono do restaurante, organiza as mesas de acordo com o número de convidados. Por exemplo, para 10 convidados, junta duas mesas, em vez de ficarem em mesas separadas.



Figura 1

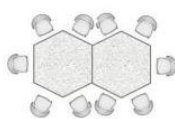


Figura 2

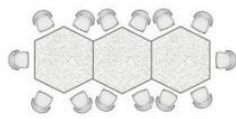


Figura 3

- A Rita ligou para o restaurante e informou o Sr. Paulo que seriam 99 convidados para a sua festa. Dois dias depois, a Rita recebeu mais confirmações, passando a ser 103 convidados. Sabendo que a disposição das mesas e dos lugares segue o padrão das figuras acima, será que o Sr. Paulo vai precisar de mais mesas do que aquelas que já tinha colocado para sentar os 99 convidados? Se sim, quantas mesas, no mínimo, vai precisar a mais? Sobram lugares? Expliquem o vosso pensamento.
- A Rita, para tentar ajudar o Sr. Paulo a descobrir o número de cadeiras, descobriu que esse número poderia ser determinado por $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$, onde m representaria o número de mesas. Concordam com a Rita? Justifiquem. Conseguem explicar como é que a Rita chegou a essa expressão algébrica?

Figura 41 – Enunciado da Tarefa III: A festa de aniversário da Rita

A Tarefa III mostrou ter sido uma tarefa com um grau de dificuldade bastante elevado, talvez pelo facto de apresentar questões muito diferenciadas daquelas que foram colocadas nas tarefas anteriores.

Tanto a questão 1 como a questão 2 da Tarefa III requeriam dos alunos um olhar mais profundo da sequência. Isto é, importava que não olhassem apenas para a sequência numérica associada, como fizeram nas outras tarefas. Agora, era necessário perceber a forma como cada figura estava composta e principalmente, a relação entre as mesas e as cadeiras. Para além disso, era importante perceber que as mesas não tinham de estar obrigatoriamente completas, podendo, por exemplo, numa mesa estar sentado apenas uma pessoa, ou em 3 mesas poderem estar sentados 11 pessoas. É claro que em 3 mesas podem estar sentadas duas pessoas, no entanto, para tal usar-se-ia como é obvio uma mesa. Portanto, estaria também implícito que para cada número de mesas haveria um mínimo e um máximo de pessoas a sentar.

Todos os grupos responderam à questão 1. No entanto, até chegarem a uma resposta final passaram por vários raciocínios e estratégias, que por vezes, ou não eram concluídos ou eram rapidamente descartados.

Na resposta final da primeira questão estiveram presentes duas estratégias distintas: a **explícita algébrica**, fazendo uso de **fórmulas** e a **explícita natural, decompondo as figuras**, em que na segunda estratégia referida as justificações forma maioritariamente textuais.

O Grupo Preto e o **Grupo Verde** optaram por responder à questão 1 utilizando o termo geral (estratégia **explícita algébrica**) da sequência associada ao número de cadeiras de cada figura, $4n + 2$. O processo para chegarem até esse termo geral passou por diferentes fases. Começamos por analisar todo o processo de resolução do **Grupo Verde**.

Sem quaisquer dificuldades, os elementos do **Grupo Verde** encontraram o termo geral da sequência associada ao número de cadeiras, através da **decomposição das figuras**. Isto é, encontraram uma relação entre a ordem da figura e o número de lugares. Para explicar tal processo, apresentaram o esquema apresentado na Figura 42.

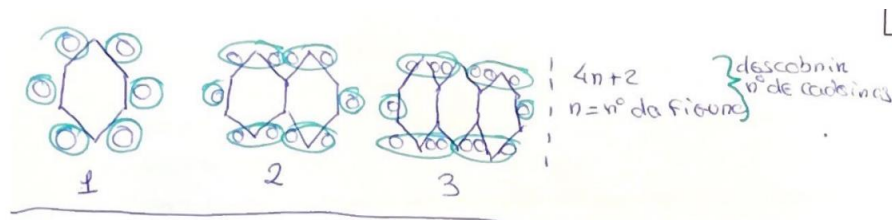


Figura 42 – Esquema feito pelo Grupo Verde para encontrar o termo geral da sequência presente na Tarefa III

Os elementos do Grupo Verde agruparam as cadeiras em blocos, tendo cada bloco o número de cadeiras correspondentes à ordem da figura, ou neste caso, ao número de mesas. Por exemplo, na figura de ordem 2, agruparam quatro blocos com duas cadeiras cada. Já na figura de ordem 3, agruparam quatro blocos com três cadeiras em cada bloco.

Rapidamente, encontraram uma relação, onde para cada figura existiam sempre duas cadeiras em cada canto mais quatro blocos com n cadeiras, sendo esse n a ordem da figura (ou o número de mesas da figura), dando resultado à expressão algébrica $4n + 2$.

Para responder à questão 1, começaram por pensar numa estratégia semelhante à que usaram nas tarefas anteriores, encontrando uma *outra expressão algébrica*, neste caso, para determinar o número da figura sabendo o número de cadeiras, através das propriedades inversas. No entanto, constaram que conseguiam responder à questão utilizando a fórmula que tinham determinado anteriormente, tal como consta na resposta final, na Figura 43.

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} 4n + 2 = 99 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4n = 99 - 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4n = 97 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = \frac{97}{4} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 24,25 \\
 & \text{para 99 pessoas precisa de 25 mesas} \\
 \\
 & 4n + 2 = \text{fórmula para descobrir o n° de cadeiras} \\
 & 4 \times 26 + 2 = 104 + 2 = 106 \\
 & 106 - 99 = 7 \rightarrow \text{n° de cadeiras que sobram} \\
 & \text{R.O. So. Paulo precisa de mais uma mesa do que nos 99 e sobram 7 lugares.}
 \end{aligned}$$

Figura 43 – Resposta do Grupo Verde à questão 1 da Tarefa III

Portanto, os elementos do Grupo Verde, optaram por resolver uma equação para determinarem o número da figura, ou seja, o número de mesas (o grupo já tinha verificado que o número da figura correspondia ao número de mesas). Contudo, ao

resolverem a equação verificaram que o resultado não dava um número inteiro, no que surge uma pequena discussão (segue abaixo), juntamente comigo sobre esse problema.

Astenosberto: n fica igual a 97 a dividir por 4. n dá quanto?

João Ratão: Fica 24 vírgula qualquer coisa. É 24,25

Astenosberto: Então temos que aproximar isto para... sabendo que não pode haver uma mesa 0,25, tem que se arredondar para mais.

Professora: Mas porquê é que se tem que arredondar para mais?

Asternosberto: Porque tem que haver mesas para toda a gente.

Professora: Porque é que não pode ser 24?

João Ratão: Não pode haver meia cadeira.

Astenosberto: Porque pode haver uma ou duas pessoas, não sei, ainda para sentar.

Os elementos deste grupo interpretaram corretamente o resultado que obtiveram da equação, percebendo que, o facto de ter dado um número decimal significava que as 99 pessoas não ficavam sentadas em 24 mesas, mas sim em 25, sobrando alguns lugares. Posto isto, os alunos seguiram com a estratégia adotada e determinaram o número de mesas que seriam precisas para sentar os 103 convidados. Mais uma vez o resultado obtido foi um número decimal, mas rapidamente aproximaram esse valor por excesso, dando o número total de mesas para sentar os 103 convidados, que seriam 26 mesas, tal como consta na resolução do grupo (Figura 43).

Assim, ficaram a saber que para sentar os 103 convidados precisaram de uma mesa a mais. Posto isto depararam-se com a segunda pergunta ainda da questão 1: *Sobram lugares?* Rapidamente responderam utilizando o termo geral da sequência para encontrar o número de cadeiras das 26 mesas.

Relativamente ao Grupo Preto, a forma como os elementos deste grupo utilizaram o termo geral distingue-se da utilizada pelo grupo referido anteriormente. Para além disso, o processo para chegarem à expressão algébrica passou pela **decomposição das figuras**. Contudo, essa decomposição foi feita de outra forma.

A primeira estratégia utilizada pelo Grupo Preto foi a **recursiva**, onde descobriram que a diferença entre duas figuras consecutivas era 4, e que o número da figura correspondia ao número de mesas. Porém, depois de começarem a pensar como iriam resolver a questão 1, perceberam que a estratégia recursiva não era a melhor opção, visto que, o que precisavam de saber primeiro seria o número de mesas.

Assim, um dos elementos do grupo começou a olhar para cada figura e a perceber alguns elementos em comum em cada uma delas, constatando o seguinte a cerca da figura 3:

Filomena: (...) Tem 5 numa ponta e 5 na outra e no meio são 4. Ou seja, temos que fazer 103 menos 10, e o que der a dividir por 4.

Filomena ao olhar para a figura 3, percebeu que as restantes figuras iriam ter sempre duas mesas na ponta com cinco cadeiras cada, e mesas no meio, cada uma com quatro cadeiras. Assim, aos 103 convidados retirou os 10 que ficariam sentados nas mesas das pontas e aos restantes (93) dividia por 4, para obter o número de mesas do meio. Portanto, Filomena rapidamente procurou dar resposta à questão, tentando encontrar o número de mesas precisas para sentar os 103 convidados. No entanto, depois de verificar que o resultado daria 23,25, ou seja, um número decimal, desistiu do seu raciocínio, porque a resposta dada não faria sentido – o que indica uma reflexão sobre a plausibilidade do resultado. No entanto, tendo em conta o contexto do problema, bastava ter percebido que os 23,25 significava que eram precisas 24 mesas para sentar os 93 convidados, pois se fossem apenas 23 mesas, sobriam pessoas para sentar. Assim, para sentar os 103 convidados seriam necessárias as 24 mesas do meio mais as outras duas das pontas, que dariam as 26 mesas. Uma vez que Filomena se deparou com esse pequeno contratempo, não seguiu com o seu raciocínio, tendo sido descartado (dificuldade de **argumentação**).

Concordaram todos tentar encontrar o termo geral para poderem responder à questão mais facilmente e surgiu uma discussão sobre essa descoberta tal como mostra o seguinte diálogo.

Grau: Olhem descobri uma fórmula. É muito parecida com esta (a falar da tarefa anterior). Em vez de ser o número da figura é o dobro. Aqui é 2 aqui é 4 aqui é 6 (referindo-se às cadeiras na parte de cima da figura 1, 2 e 3)

Filomena: Tem 6 cadeiras de cada lado e duas na ponta (referindo-se à figura 3) (...)

Filomena: (...) Espera, eu acho que é n vezes 4 mais dois

Barbie: Porquê vezes 4?

Filomena: Ou seja, 2 vezes 3 mais 4, dá 10. Tem que ser n vezes 4. Olha aqui tem 6 cadeiras de cada lado mais duas nas pontas.

Portanto, os elementos do Grupo Preto através da decomposição das figuras (representada na Figura 44) conseguiram encontrar o termo geral da sequência associada ao número de cadeiras. Os elementos de grupo constataram que o número

de cadeiras na fila de cima correspondia ao dobro do número da figura e que o número de cadeiras na fila de baixo era o mesmo, daí multiplicarem o número da figura por 4, porque seria “o dobro do dobro” (Filomena, Grupo Preto). A esse valor ($4n$) somaram 2, que correspondiam às duas cadeiras que estavam em cada uma das pontas.

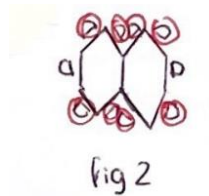


Figura 44 – Esquema feito pelo Grupo Preto para encontrar o termo geral da sequência presente na Tarefa III

Com o termo geral definido já conseguiam determinar o número de cadeiras, sabendo o número de mesas. No entanto, o problema foi exatamente esse: os elementos do Grupo Preto perceberam que não sabiam nem o número da figura nem o número de mesas, por isso, mostraram dificuldades em tentar encontrar qual seria o número de mesas para os 103 convidados.

Na discussão coletiva em turma, enquanto todos os grupos partilhavam as suas resoluções, foi possível perceber que obtiveram esse valor, do número de mesas, através de tentativas.

Filomena: Depois nós tentamos descobrir o número das mesas e fomos por tentativas. Primeiro tentamos com 25 mesas, que deu 102 pessoas, ou seja, não cabem as 103 pessoas. Mas estava muito próximo, então tentamos para 26 mesas, então aí já deu.

Ou seja, utilizaram o termo geral encontrado para saber o número de cadeiras para 25 mesas e para 26, verificando se cabiam ou não os 103 convidados, tal como está escrito na resposta final do grupo (Figura 45).

$25 \times 4 + 2 = 102 \rightarrow$ não cabem todas as pessoas

$26 \times 4 + 2 = 106 \rightarrow$ cabem todas as pessoas e sobram 3 cadeiras.

R: Se fossem 103 pessoas teriam de aumentar uma mesa do que se fossem 99 pessoas, sobrando 3 cadeiras.

Figura 45 – Resposta do Grupo Preto à questão 1 da Tarefa III

Contudo, não mostraram o porquê de na resposta dizerem que foi preciso apenas uma mesa a mais daquelas que foram necessárias para sentar os 99 convidados. De facto, se em 25 mesas se sentam 102 convidados, então os 99 também se sentam em 25 mesas, mas teriam de garantir as mesas mínimas, por isso faltaria concluir que em 24 mesas não cabiam os 99. Tal conclusão deu-se ainda na discussão entre mim e os elementos do Grupo Preto:

Professora: E quantas mesas a mais foram precisas?

Filomena: Mais 1 mesa

Professora: Mas porquê? Como é que souberam que era só uma mesa?

Filomena: Porquê para as 99 precisava de 25 mesas.

Professora: Então e porque é que não dava 24 mesas?

Filomena: Porque para 24 mesas, só davam para sentar 98 pessoas

Assim, o Grupo Preto respondeu corretamente à questão 1, apresentando cálculos que os permitiram chegar à resposta, através da **tentativa-erro**.

Os outros dois grupos, **Grupo Bordô** e o **Grupo Azul**, recorreram apenas à **decomposição das figuras** e a justificações textuais para responderem à questão 1.

O **Grupo Bordô** recorreu à mesma decomposição das figuras que o Grupo Preto utilizou para determinarem o termo geral da sequência associada ao número de cadeiras. Tal se constata no diálogo que se segue entre os elementos do **Grupo Bordô**.

Jecturiano: Nós temos que arranjar alguma coisa aqui. Já sei. Posso dizer? Aqui o dobro disto é as cadeiras que vão estar em cima, é sempre o dobro. 2 vezes dois dá 4, 4 em cima e quatro em baixo, o dobro de 3 é 6, 6 em cima e 6 em baixo

Jecturiano: Exato, é igual ao outro

Bacalhau: Espera, mas não faz sentido. Se nós tirarmos duas dos lados, fica 97. Como é que nós vamos dividir 97 ao meio? É que também não dá para arredondar cadeiras. Como é que vamos dividir uma cadeira ao meio?

Rapidamente encontraram uma generalização da sequência, percebendo que o número de cadeiras em cima e em baixo são iguais e que existem sempre duas cadeiras, uma de cada lado. Assim, ao número total de convidados, 99, retiraram as duas pessoas que estariam nas pontas, sobrando 97, e a essas 97 dividiam-nas em duas partes, dando o número de pessoas de cada fila (em cima e em baixo). No entanto, quando se depararam que era impossível dividir-se 97 ao meio ficaram sem saber o que fazer. Depois de esclarecerem algumas dúvidas comigo, perceberam que bastava arredondar o resultado, tendo isso como consequência, sobrar lugares.

Posto isso, o **Grupo Bordô** decidiu não utilizar os 99 convidados, mas determinar logo as mesas necessárias para os 103 convidados, através das **propriedades inversas** e da **decomposição das figuras** (Figura 46).

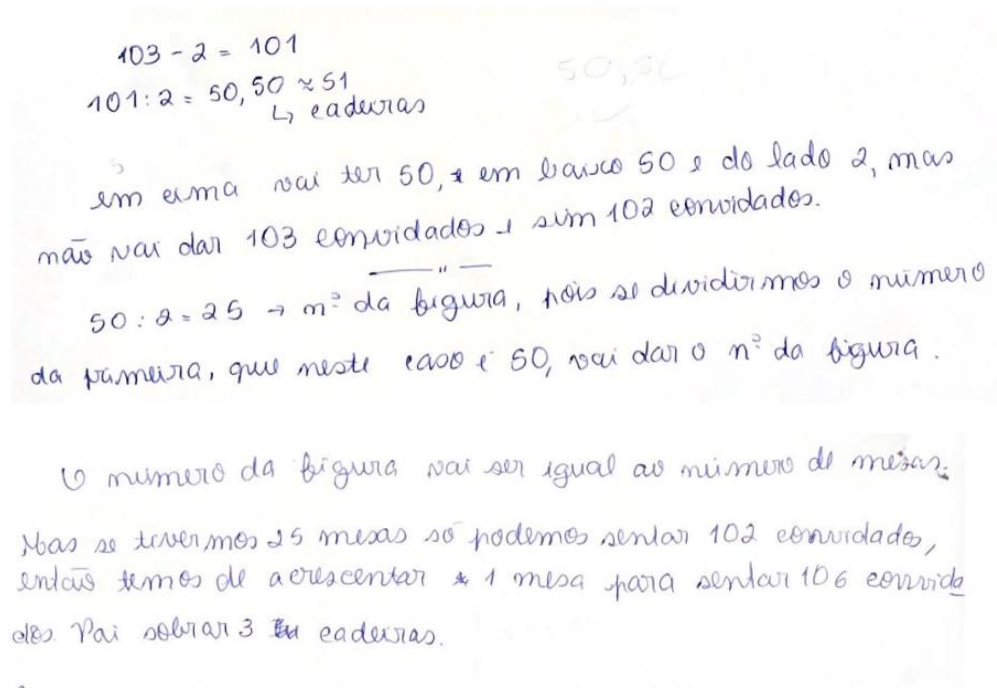


Figura 46 – Resposta do **Grupo Bordô** à questão 1 da Tarefa III

Os elementos do **Grupo Bordô** foram determinar o número de mesas que seriam necessárias para sentar os 103 convidados. Para tal, retiraram aos 103 convidados, 2 que já estariam sentados nas pontas, e a esse valor, 101, dividiram por dois, para saberem quantas pessoas se iriam sentar de cada lado. Ao obterem tal resultado, chegaram a um valor decimal, 50.5, e aproximaram por excesso para 51. À partida, deste resultado deveriam concluir que seriam 51 convidados de cada lado, mais dois das pontas. Contudo, perceberam que seria impossível porque (i) não conseguiam determinar o número da figura porque não dava para dividir por 2, e (ii) era impossível haver 51 pessoas na fila de cima, senão o número total de cadeiras ia ser ímpar. Por esta razão, os alunos assumiram o número 50, como sendo 50 pessoas na fila de cima. Assim, ao determinarem que para estarem 50 pessoas na fila de cima, seriam necessárias 25 mesas, concluíram que para sentar os 103 convidados seria necessária apenas mais uma mesa.

Tal como aconteceu no Grupo Preto, o **Grupo Bordô** não justificou o porquê de ser necessário mais uma mesa quando se altera dos 99 convidados para os 103 convidados.

O **Grupo Azul** demonstrou bastantes dificuldades em responder à questão 1, porque não interpretaram a sequência. Limitavam-se a tentar aplicar as regras e procedimentos feitos nas outras tarefas, tentando determinar o termo geral (dificuldade de **generalização**). Foi notório que esta tarefa foi um desafio para este grupo, em particular. Apenas um dos elementos encontrou uma estratégia plausível para conseguirem responder corretamente à questão 1.

Esse elemento do **Grupo Azul** recorreu exatamente à mesma estratégia do **Grupo Bordô**, optando por determinar o número de mesas necessárias para os 99 convidados. Só depois de determinar esse valor é que concluíram sobre o número de mesas que seriam precisas a mais para sentar os 103 convidados, ou seja, para sentar 4 convidados que restavam sentar (Figura 47).

$$99 - 2 = 97$$

$$\frac{97}{2} = 48,5 \approx 49$$

número de cadeiras dos dois lados da mesa
 número de pessoas de cada lado da mesa

R Se 97 é o número de cadeiras dos dois lados e 48,5 é o número de pessoas de cada lado da mesa, e para fazer todos os convidados nas duas filas foi preciso por 50 lugares dos lados que depois para descobrir o número de mesas dividimos 50 por 2 que dá o número de mesas para 99 pessoas sentarem só dos lados. Mas como acrescenta-se mais 4 pessoas também acrescenta-se mais uma mesa, pois todos os convidados sentam nos lados e nas pontas sobra a 3 cadeiras.

Figura 47 – Resposta do **Grupo Azul** à questão 1 da Tarefa III

Apesar de na resposta do grupo estar escrito que o número de pessoas de cada lado da mesa seria 49, quando este grupo foi apresentar à turma a sua resolução explicaram o seguinte:

Chapéu: Nós fizemos 97 a dividir por 2, que deu 48,5. Mas como não vamos ter uma pessoa a comer de pé, arredondamos para 49. Mas como são sempre números pares, nós dissemos que seriam 50 de cada lado. Ou seja, para as 99 pessoas precisávamos de 25 mesas. Para as 103 íamos precisar de mais uma.

Professora: Então esse 50 é o que?

Rapunzel: É o número de cadeiras na parte de cima.

Professora: Então depois chegaram ao 25. E com 25 mesas sentam-se quantas pessoas?

Turma: 102 pessoas

Chapéu: Mas depois precisamos de mais uma mesa porque precisamos de sentar mais uma pessoa.

Esta conclusão tirada por Chapéu foi interessante e nenhum outro grupo tinha pensado desta forma. Como em 25 mesas estavam sentados 102 convidados, então só era preciso sentar mais um convidado, e por isso, seria necessária mais uma mesa. Como de figura para figura, ou seja, de mesa para mesa, se acrescentam 4 cadeiras, uma delas iria ser ocupada pelo convidado que faltava e sobriam então 3 cadeiras.

A justificação dada na reposta final do Grupo Azul pareceu estar muito aquém daquele que foi o raciocínio dos elementos do mesmo (dificuldade de **comunicação**). Neste sentido, a discussão coletiva foi bastante importante para que os alunos pudessem partilhar o seu raciocínio, ainda que tivesse havido muitas dificuldades em explicar à turma.

Em relação à questão 2, apenas o Grupo Verde e o Grupo Preto apresentaram uma resposta, tendo apenas o primeiro apresentado uma resposta completa. A razão pela qual os outros grupos não apresentaram uma resolução relaciona-se com a gestão do tempo, e por isso, só utilizaram o tempo para responder à questão 1.

Nesta questão os alunos tinham de justificar o porquê de a expressão algébrica $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$ ser válida para descobrir o número total de cadeiras sabendo o número de mesas (m). Para além disso, teriam de explicar de que forma é que a Rita tinha chegado a essa fórmula, e tal deveria ser feito através da decomposição das figuras.

Ambos os grupos referidos acima justificaram devidamente o porquê de a fórmula dada pela Rita estar correta, utilizando a ordem de uma figura para mostrar que de facto o número total de cadeiras estava correto. Tal se verifica em ambas as respostas dadas pelo Grupo Preto, na Figura 48, e pelo Grupo Verde, apresentadas na Figura 49.

O Grupo Preto apresentou na sua resolução apenas o que consta na Figura 48, apresentado apenas uma justificação para a primeira pergunta da questão *Concordam com a Rita?*. Os elementos deste grupo utilizaram a expressão algébrica para verificarem que com 26 mesas o número de cadeiras daria 106, tal como tinham verificado na questão anterior, utilizando o termo geral encontrado pelos próprios ($4n + 2$). Depois de constatado que realmente deu as 106 cadeiras, afirmaram que a Rita estava certa. No entanto, não houve nenhuma discussão entre os elementos do grupo nem nenhuma resposta para a pergunta que questiona a construção da expressão algébrica.

$$\begin{array}{r}
 2 \times 5 + 4 \times (20 - 2) \\
 2 \times 5 + 4 \times (20) \\
 10 + 4 \times 20 \\
 10 + 80 \\
 90
 \end{array}$$

Figura 48 – Resposta do Grupo Preto à questão 2 da Tarefa III

Já o **Grupo Verde**, na sua resposta final (Figura 49) apresenta, tal como já foi referido, uma resposta correta e completa respondendo a ambas as perguntas colocadas na questão 2.

②

Fig. 3
3 mesas
14 cadeiras

$$\begin{aligned}
 2 \times 5 + 4 \times (3 - 2) &= \\
 = 2 \times 5 + 4 \times 1 &= \\
 = 10 + 4 &= \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

Fig. 2
2 mesas
10 cadeiras

$$\begin{aligned}
 2 \times 5 + 4 \times (2 - 2) &= \\
 = 2 \times 5 + 4 \times 0 &= \\
 = 10 + 0 &= \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$$2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$$

n.º de cadeiras da mesa de cadeiras

numero de cadeiras de uma mesa do meio

n.º de cadeiras o quanto temos que multiplicar para dar o numero de cadeiras das mesas do meio

R: Sim, ela tem razão. As justificações estão em cima.

Figura 49 – Resposta do Grupo Verde à questão 2 da Tarefa III

Na primeira parte da resposta, apresentam uma justificação para a primeira pergunta, mostrando que a expressão dada estava correta, indicando dois exemplos da sequência já dada no enunciado: a figura 3 com 14 cadeiras e a figura 2 com 10 cadeiras.

Na segunda parte da resposta, os elementos do **Grupo Verde**, mostram uma explicação bastante explícita, identificando cada parte da expressão. Considero importante referir que apenas um elemento deste grupo é que chegou a uma resolução para a questão 2, sendo ela a que está apresentada na resposta final.

Nesta resposta é notório a dificuldade em justificar algo que foi pensado de uma forma mais visual, principalmente, na justificação do $(m - 2)$, onde o grupo se refere a tal como

sendo o quanto temos que multiplicar para dar o número de cadeiras das mesas do meio (resposta dada na resolução do grupo). De facto, a resposta dada não está errada, no entanto, bastava dizerem que essa parte da expressão correspondia ao número de mesas que iriam estar no meio. No entanto, percebi que os alunos não tinham entendido que o $(m - 2)$ correspondia ao número de mesas do meio e por isso é que justificaram da forma que acharam mais correto. Creio que essa dificuldade surgiu pelas figuras apresentadas na sequência, uma vez que só a partir da figura 3 é que as mesas do meio surgem e, portanto, a visualização passa a ser um pouco mais abstrata.

Como os integrantes do **Grupo Verde** já tinham entendido que $4 \times (m - 2)$ correspondia ao número de cadeiras do meio, poderiam ter desenhado, por exemplo, a figura 4 e verificarem que o $(m - 2)$, na figura 3 resultaria em 1 e na figura 4 resultaria em 2, e por isso, tal correspondia o número de mesas no meio. Este exemplo foi demonstrado por mim na discussão coletiva da Tarefa III, reforçando a ideia que essa parte da expressão correspondia ao número de mesas do meio, uma vez que ao número total de mesas se retirava as mesas do canto, que seriam duas.

Também na discussão da questão 2 foi possível chegar-se à conclusão que a expressão algébrica dada nesta questão seria equivalente à que o **Grupo Verde** e o Grupo Preto apresentaram para responder à questão 1 ($4n + 2$). Os alunos ficaram a perceber que a forma como respondem às questões depende da forma como visualizam a figura. Tal se pôde também constatar na forma como, tanto o Grupo Preto e o **Grupo Verde**, determinaram o termo geral, como foi visto anteriormente.

Exercício de síntese

Em jeito de síntese, apresento uma tabela com as diferentes categorias inerentes às estratégias presentes na resolução da Tarefa III.

Tarefa III	DR	D	OI	EA	EN	TE	O
Questão 1				X	X		
Questão 2					X	X	

R – Diferença Recursiva; D – Diferença; OI – Objeto-inteiro; EA – Explícita algébrica; EN – Explícita natural; TE – Tentativa-erro, O – Outro

Quadro 5 – Quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos nas questões da Tarefa III

Tal como na resolução da Tarefa II, na resolução da Tarefa III, os alunos adotaram as estratégias **explícita algébrica** e **explícita natural** para responderem à questão 1. Visualizaram a sequência num todo e verificaram os elementos comuns em cada termo.

Tiveram a tendência em recorrer à estratégia **recursiva**, tendo sido o primeiro pensamento de todos os grupos, em verificar o que acontecia de termo para termo, mas de imediato perceberam que não seria a melhor estratégia a utilizar. Tal mostra um progresso nos raciocínios tidos pelos alunos e um melhoramento na forma como trabalham com as sequências.

Contudo, foi notório que os grupos que optaram pela estratégia **explícita natural**, fizeram-no por terem dificuldades em encontrar o termo geral da sequência. Os alunos mostraram não perceber que a regra que estes enunciam de uma forma mais textual pode ser traduzida por uma expressão algébrica, facilitando o trabalho com a sequência.

Na resolução da questão 2, alguns grupos mostraram não entender o que seria preciso fazer-se na mesma. O objetivo seria que os alunos percebessem que de facto existiam diferentes formas de se ver uma sequência, e a expressão algébrica presente na questão retratava isso mesmo.

Mais uma vez, surgem dificuldades em perceber o que significa a expressão algébrica dada, e neste caso, o termo geral não simplificado. Apenas um grupo respondeu corretamente a esta questão, tendo sido o grupo com maior capacidade de visualizar a sequência e perceber as diferentes formas de o fazer.

5.4. Perceções dos alunos sobre o trabalho de grupo

Nesta subsecção são apresentadas e analisadas as perceções dos alunos sobre a sua experiência ao longo do desenvolvimento do trabalho em grupo, recolhidas através das respostas ao questionário, cujo guião se encontra no Apêndice 8. Note-se que este questionário foi respondido pelos alunos após a minha análise das respostas dos mesmos às três tarefas e após a dinamização das discussões, tanto de cada grupo e como as coletivas.

A primeira questão feita neste questionário estava relacionada com o contacto ou não dos alunos com trabalhos em grupo nas aulas de matemática. Foi então perguntado aos alunos: *Nos anos letivos anteriores costumavas fazer trabalhos em grupo, nas aulas de Matemática?* Mais de metade da turma (53%) respondeu afirmativamente à questão.

Neste sentido, surge uma questão de escolha múltipla relativamente ao que o aluno considera ser *trabalhar em grupo*, onde as respostas possíveis seriam:

- i. resolver a tarefa sozinho e depois partilhar a tua resolução com o grupo;
- ii. resolver a tarefa juntamente com os outros elementos, todos ao mesmo tempo, partilhando ideias e pensamentos;

- iii. observar e ouvir primeiro os colegas a discutir e a resolver as questões, e só depois partilhar as tuas ideias;
- iv. não partilhar as tuas ideias.

Todos os alunos seleccionaram a segunda opção, exceto dois alunos, do **Grupo Bordô**, que seleccionaram a terceira opção.

No final do questionário foram feitas algumas perguntas sobre terem realizado as tarefas em grupo e sobre se algo mudaria se as tivessem feito sozinhos e se trariam as mesmas vantagens. Todos os alunos, sem exceção, responderam *Sim* à questão *Sentes que teres realizado as tarefas em grupo te trouxe mais vantagens do que se as tivesse feito sozinho?*, o que mostrou uma preferência bastante significativa dos alunos em trabalhar em grupo em tarefas como estas. Para além disso, toda a turma afirmou ter-se sentido mais motivado e interessado em resolver as tarefas pelo facto de as mesmas terem sido realizadas em grupo. Seguem algumas respostas dos alunos sobre a razão pela qual se sentiram mais motivados em resolver tarefas em conjunto:

- “Prefiro trabalhar em grupo porque mais vale duas cabeças a pensar do que uma.” (**Bacalhau, Grupo Bordô**)
- “Pois há mais ideias, e consigo chegar a uma resposta rapidamente e perceber outras maneiras de resolver os problemas.” (**Rapunzel, Grupo Azul**)
- “Porque ao mesmo tempo que estamos em grupo estamos a trabalhar e assim conseguimos fazer as tarefas rápido e é uma forma mais "engraçada" de trabalhar.” (**Barbie, Grupo Preto**)
- “Porque todos conseguem ajudar uns aos outros.” (**Alberta Maria, Grupo Verde**)

Portanto, de um modo geral, a razão pela qual os alunos se sentiram mais interessados e motivados em trabalhar em conjunto deveu-se ao facto de nesse mesmo trabalho haver a possibilidade de ter mais do que uma pessoa a pensar e a partilhar ideias ao mesmo tempo, não tendo de ser apenas um aluno a pensar sozinho. Neste ponto, faz sentido pensar que tal se deveu à natureza da tarefa proposta. O facto de ter sido proposto um problema e não um mero exercício incentiva os alunos a quererem trabalhar em grupo e não sozinhos.

Um outro motivo da preferência do trabalho em grupo advém de um maior interesse de querer aprender conceitos e conhecimentos novos. Acresce a isso, o facto de em grupo os alunos se entenderem melhor entre eles e poderem tirar dúvidas uns com uns outros, sem estarem constantemente a chamar a professora.

Analizadas as perspetivas dos alunos em relação ao trabalho em grupo e como estes se sentem quando estão perante o mesmo nas aulas, daqui em diante serão analisados outros aspetos ainda referentes ao trabalho de grupo, mas divididos em vários tópicos. Esses tópicos dizem respeito a vários momentos que estão implícitos num trabalho de grupo, como é o caso, da dinâmica do grupo, da resposta final dada pelo grupo e da discussão coletiva das ideias e estratégias.

Apesar de ser perceptível nas gravações de áudio e na observação em sala de aula, questionei os alunos sobre a dinâmica do seu grupo nos momentos de resolução das tarefas. A maioria dos alunos afirmou que trabalharam em conjunto (Gráfico 1) onde todos os elementos do grupo ajudaram na partilha de ideias e estratégias. Assim, parece ter havido uma concordância entre aquilo que os alunos consideravam ser trabalhar em grupo (como descrito acima) e aquilo que realmente dinamizaram em grupo.

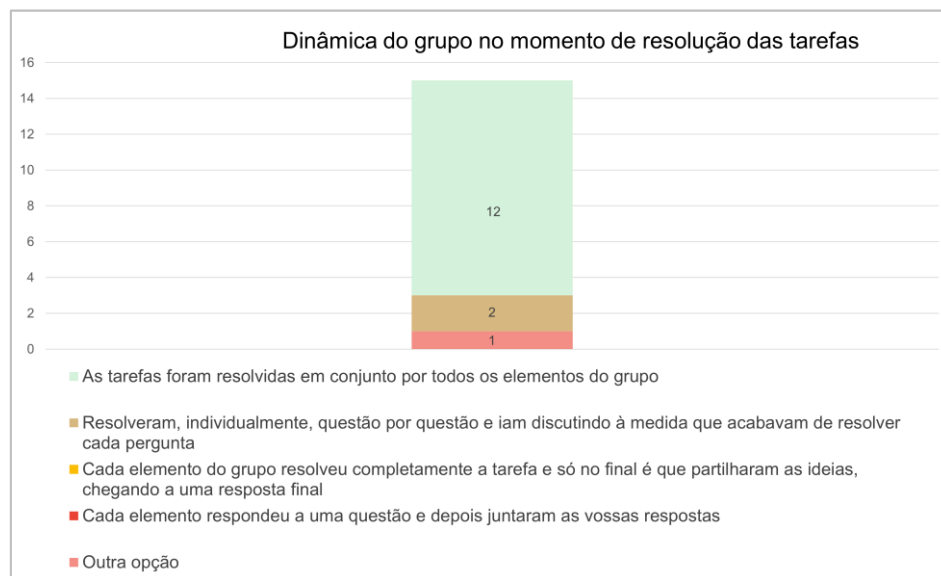


Gráfico 1 – Dinâmica do grupo no processo de resolução das tarefas

No Gráfico 1 é ainda claro que houve apenas um aluno, que selecionou *outra opção*, tendo sido referido que a dinâmica do grupo passou por “Duas pessoas descobriam formas de resolver as questões uma passava para a folha e a última falava sobre a sua vida.” (Bacalhau, Grupo Bordô). De facto, tal aconteceu no Grupo Bordô, constatado pela observação nas aulas e nas gravações de áudio: dos quatro elementos apenas dois estavam focados na resolução das tarefas e na partilha de estratégias.

No seguimento desta questão de escolha múltipla, veio uma outra, de carácter aberto, questionando os alunos sobre a razão pela qual optaram pela dinâmica selecionada na

questão anterior. Eis algumas justificações dadas pelos alunos que selecionaram a opção *As tarefas foram resolvidas em conjunto por todos os elementos do grupo* na questão anterior:

- “Para juntar os pensamentos de cada um e chegar a uma conclusão.” (Tulipa, Grupo Azul)
- “Pois, assim seria mais fácil a realização dos trabalhos, já que podíamos discutir as nossas técnicas ao mesmo tempo e apontar para a folha a técnica que utilizamos a partir de consenso.” (Astenosberto, Grupo Verde)
- “Porque cada um tinha uma forma de pensar e resolver” (Alberta Maria, Grupo Verde)

De um modo geral, todos os grupos que optaram por resolver em conjunto as tarefas, fizeram-no porque afirmam haver uma possibilidade maior de partilhar as estratégias e que seria mais fácil para tentar perceber cada uma delas e no final chegar a uma resposta final, tendo em conta toda a partilha. Isto vem também de acordo com as razões pela qual os alunos dizem preferir realizar as tarefas em grupo do que individualmente.

No entanto, é um pouco contraditório haver três respostas associadas a outra opção que não a resolução das tarefas em conjunto, uma vez todos os grupos optaram essa dinâmica, pelo que eu apreendi pela observação em aula e pelas gravações de áudio.

Ainda sobre o tópico referente à dinâmica do grupo, foram colocadas algumas afirmações para os alunos manifestarem o seu nível de concordância, através de uma escala de Likert, com cada uma delas. No Gráfico 2, estão apresentadas 6 das 10 afirmações que constavam no questionário sobre este aspeto.

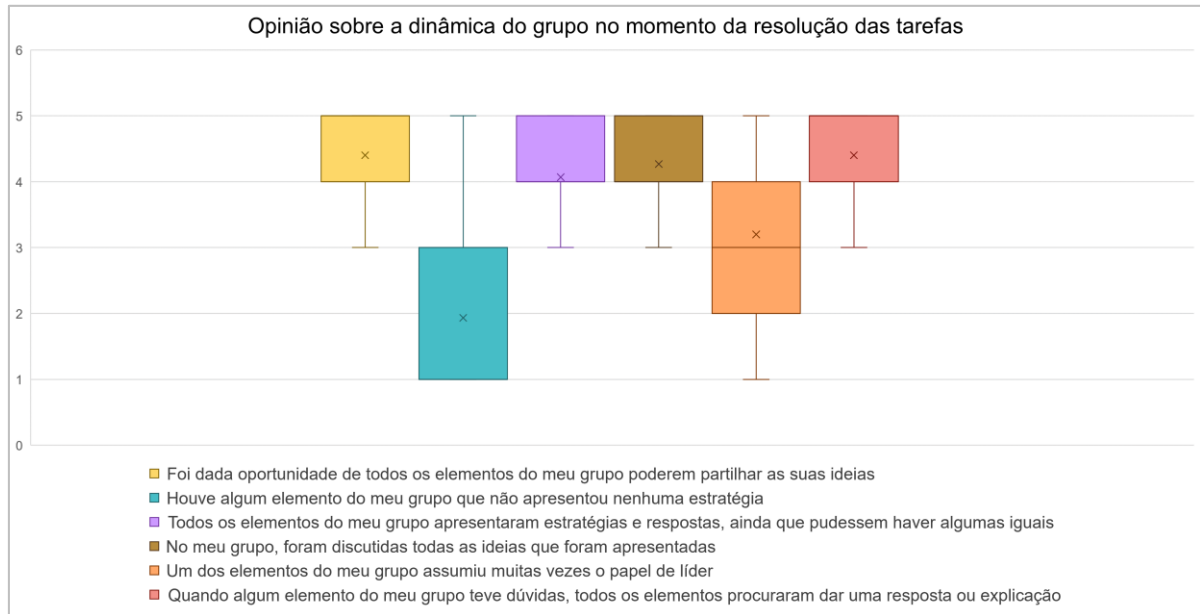


Gráfico 2 – Nível de concordância sobre a dinâmica do grupo no momento da resolução das tarefas

De uma forma unânime, quase todos os alunos afirmaram ter sido **dada oportunidade de todos os elementos do grupo poderem partilhar as suas ideias**.

No seguimento desta afirmação, e porque essa se referia à oportunidade de todos os elementos partilharem as suas estratégias, vem uma outra, destacada a azul no Gráfico 2, que questiona a **partilha ou não de estratégias de todos os elementos do grupo**. Pelo mesmo gráfico é possível constatar-se que, em média, todos discordaram dessa afirmação, e por isso, todos os elementos de cada grupo apresentaram estratégias. Ao analisar mais a fundo o Gráfico 2 e, posteriormente cada resposta dada, foi possível perceber que existiram pelos menos dois elementos do **Grupo Bordô** que concordaram totalmente com essa afirmação, (demonstrando um grande desvio em relação à resposta dada pela maioria dos alunos) dando a entender que no seu grupo existiram elementos que não partilharam resoluções nem ideias. Isto vem ao encontro do que já foi referido anteriormente, de apenas dois elementos deste grupo se terem mostrado ativos e interessados na resolução das tarefas, enquanto o terceiro apenas escrevia as respostas e outro nem atento estava.

Para complementar a afirmação a azul, foi ainda feita uma questão referente ao mesmo tópico, mas de uma outra forma, **representada a lilás** no Gráfico 2, onde como era de esperar e tendo em conta as respostas dadas na afirmação anterior, mais uma vez os alunos concordaram, na sua maioria, que todos os elementos apresentaram estratégias. No entanto, houve três alunos que selecionaram a opção *Nem discordo nem concordo*, tendo sido dois deles os que selecionaram a mesma opção na afirmação anterior e um

outro também do **Grupo Bordô**. De facto, de todos os grupos, o **Grupo Bordô** foi aquele em que menos elementos estiveram a trabalhar ativamente na resolução das tarefas partilhando ideias e estratégias, tal como já foi referido anteriormente.

No seguimento destas duas afirmações, e analisando a que se encontra a verde, *No meu grupo foram discutidas todas as ideias que foram apresentadas*, continua a haver a unanimidade na concordância por parte de todos os alunos.

De uma forma global, os alunos afirmaram que todos os elementos dos seus grupos partilharam as suas ideias e estratégias, havendo sempre um momento oportuno para o fazerem, bem como explicá-las e discuti-las.

Por último, é importante também notar que, pelo Gráfico 2, surge uma discrepância de níveis em relação à afirmação *Um dos elementos do meu grupo assumiu muitas vezes o papel de líder*. Analisando cada resposta dada, foram setes os alunos que concordaram com essa afirmação, cinco que discordaram e os restantes que nem discordaram nem concordaram. Relativamente aos alunos que concordaram com o facto de no seu grupo ter havido um elemento *líder*, destacam-se os alunos que pertenciam ao **Grupo Azul** e ao **Grupo Bordô**, sendo que do último grupo referido, todos os elementos, sem exceção fazem parte desses alunos.

Tendo em conta que todos os elementos de cada grupo partilharam estratégias, resoluções e respostas, era do meu interesse perceber de que forma é que os mesmos optaram pela estratégia que recorreram para dar uma resposta final.

Desse modo, uma das questões do questionário era *Depois de terem partilhado as ideias e resoluções, como é que chegaram a uma resposta final?*, onde foram dadas várias opções como *Por consenso*, *Por votação*, *Algum elemento impôs que a resposta final fosse a dele* e *Outra opção*. A maioria dos alunos (84%) responderam que optaram por uma determinada estratégia por consenso, 8% seleccionaram a opção *Por votação* e outros 8% *Por votação*.

Na verdade, pela discussão entre os elementos de cada grupo, o que se constatou foi que a estratégia adotada para responder às tarefas foi muitas vezes escolhida ou por imposição de algum elemento, ou porque não tinham outra estratégia que desse uma resposta correta ao problema.

O facto de a escolha por uma determinada estratégia ter sido tomada por consenso pode ter trazido algumas discussões sobre qual a melhor estratégia a adotar, podendo haver razões mais positivas e menos positivas sobre cada uma delas. Assim, foi também

questionado aos alunos o seguinte: *Houve algum momento em que o grupo teve dificuldade em chegar a um consenso sobre a melhor abordagem para resolver as tarefas?*, ao qual 40% dos alunos respondeu afirmativamente a essa questão. Tais alunos partilharam que para contornarem esse problema, chamavam a professora para que os ajudasse a perceber qual a melhor estratégia. Ainda houve alunos que mencionaram que quando estavam perante mais do que uma estratégia, apresentavam as duas, ou então, tentavam usar uma numa questão e outra noutra, de forma a utilizar todas as que tinham sido partilhadas.

Era também do meu interesse perceber qual a resolução que o grupo optava, ainda que por consenso, para apresentar como resposta final, depois de partilhadas várias estratégias e resoluções. Neste sentido, foi feita uma questão do tipo Caixa de Verificação, com a seguinte questão *Para a resposta final, escolheram a resolução:*, em que os alunos tinham à sua disposição várias opções podendo selecionar mais que uma. Tanto as diferentes opções dadas no questionário como as respostas dadas pelos alunos estão presentes no Gráfico 3.

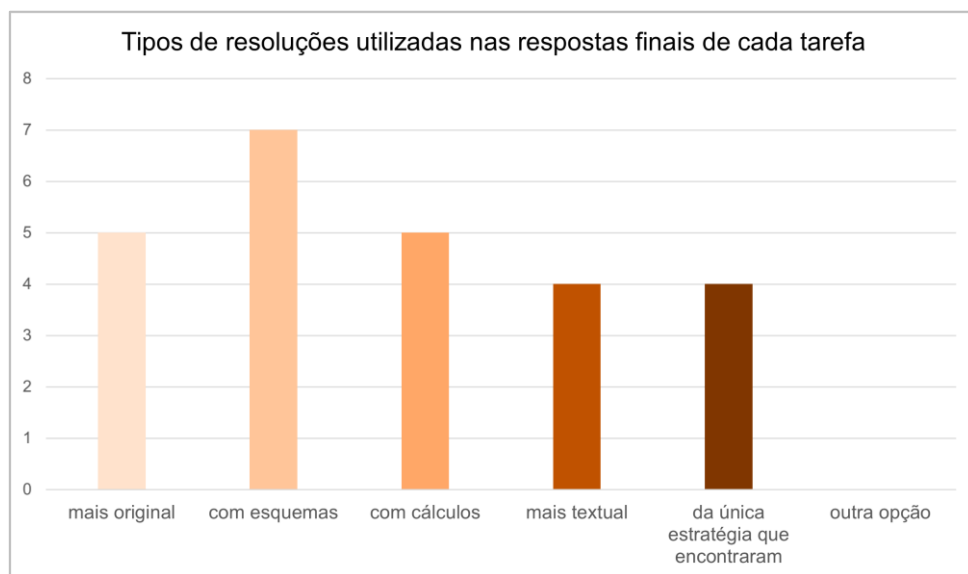


Gráfico 3 – Características das resoluções utilizadas nas respostas finais de cada tarefa

O que se conclui através deste gráfico é que maioria dos alunos optaram por resoluções com esquemas, e também as mais originais ou com cálculo. Contudo, tendo em conta a análise feita às resoluções de cada grupo, o que mais se constatou foram resoluções bem mais textuais.

Tal como já foi mencionado em vários capítulos, existiram diferentes modos de discussão coletiva no final da realização de cada tarefa: discussão onde a professora

tinha um papel central e apresentou um *PowerPoint* com as resoluções dos alunos e discussão coletiva com apresentação de cada grupo das suas resoluções.

À vista disso, foi questionado qual dos dois tipos de discussão os alunos preferiram, ao qual 73% dos alunos respondeu ter preferido a *discussão coletiva, onde a professora apresentou em slides as estratégias de cada grupo*. De seguida, foram colocadas algumas afirmações sobre esses momentos onde os alunos manifestaram o seu nível de concordância com cada uma delas.

Apenas 4 dos 15 alunos afirmaram ter preferido a discussão coletiva que aconteceu a partir da apresentação feita por cada grupo, o que mostra pouco interesse por parte dos alunos na partilha de conhecimentos com a turma. Uma vez que mais, mais de metade da turma preferiu a discussão que ocorreu enquanto eu, professora-estagiária, discutia com os alunos as suas resoluções, sem que eles tivessem de estar em frente à turma a explicar. Tal pode ser consequência de um ensino mais tradicional, onde os alunos não estão habituados a mostrar e a debater os seus raciocínios e pensamentos perante a turma, muitas vezes com medo de falar e errar.

Dos quatro estudantes que selecionaram a opção da apresentação, três deles são elementos do **Grupo Verde**, que por acaso foi o grupo que mais se envolveu e que mais demonstrou conhecimento ao longo da realização das três tarefas. De facto, na discussão deste grupo notou-se o interesse do grupo em estar perante a turma a explicar e a mostrar as estratégias que utilizaram para responder às questões. Mesmo na discussão feita pela professora, este grupo em particular fez questões pertinentes, participando ativamente. Um dos elementos, ainda acrescentou numa das respostas ao questionário uma razão pela qual preferiu a apresentação de cada grupo como promotor para a discussão coletiva: *Gostei muito, pois acho que podemos apresentar melhor como chegamos a uma conclusão da nossa maneira* (**Astenosberto, Grupo Verde**).

No que toca ao momento da discussão e partilha de estratégias e resoluções, independentemente do tipo, de uma forma global, os alunos concordaram com o facto de esses momentos terem contribuído de forma positiva para a sua aprendizagem matemática, principalmente no que toca ao tópico das *Sequências*, aprendendo novos conhecimentos e diferentes maneiras de se resolver as tarefas.

6. Conclusões e recomendações

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões realizadas em consequência da análise dos resultados obtidos da investigação.

Antes de apresentar as conclusões, é feita uma pequena síntese de todo o estudo feito, para recordar os objetivos e as questões da investigação, bem como os momentos da intervenção pedagógica. Posteriormente, são apresentadas três subsecções que vão ao encontro das três questões de investigação estabelecidas inicialmente, relacionando com a literatura revista.

Por fim, é feita uma reflexão sobre o estudo realizado, contemplando as principais limitações encontradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, bem como algumas recomendações que considero pertinentes derivadas dos resultados do estudo.

O presente estudo teve por base uma intervenção pedagógica realizada numa turma do 7.º ano de escolaridade, que se dividiu em três momentos distintos. Tais momentos incidiram sobre a realização e discussão de três tarefas que envolviam a generalizações de padrões. Por fim, tendo em vista os objetivos da investigação, procedeu-se à aplicação de um questionário no *Google Forms*, acerca do trabalho em grupo.

O objetivo deste estudo passa pela compreensão das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões. Para uma melhor compreensão e para dar uma resposta mais precisa ao objetivo foram seguidas algumas questões norteadoras, tal como consta no capítulo da Metodologia, como:

1. De que modo é que os alunos resolvem uma tarefa que envolve padrões?
2. Que dificuldades é que os alunos demonstram na resolução dessas tarefas?
3. De que modo é que o trabalho em grupo influencia a resolução destas tarefas?

Assim, e à luz do referencial teórico descrito, procurei responder ao objetivo central, dando resposta às três questões mencionadas acima. É de realçar que para cada questão, existiram objetivos específicos ao qual eu pretendi ter uma resposta concreta.

Neste sentido, para responder às primeiras duas questões, analisei os processos de resolução dos quatro grupos, ao longo das três tarefas, identificando alguns aspetos pertinentes como as estratégias de generalização e as dificuldades manifestadas pelos alunos. Para tal, recorri a categorias para analisar esses diferentes aspetos, tendo em conta as várias visões dos diferentes autores referidos no Enquadramento Teórico.

Para responder à última questão, analisei as respostas dadas pelos alunos ao questionário, bem como o comportamento e atitudes de cada grupo, ao longo das aulas, através da observação direta e das gravações de áudio.

Nas subsecções que se seguem, são apresentadas as principais conclusões do estudo, dando resposta a cada uma das três questões estabelecidas inicialmente.

6.1. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas

Para poder responder à primeira questão norteadora, *De que modo é que os alunos resolvem uma tarefa que envolvem padrões?*, foram estabelecidos dois objetivos específicos, como: (i) compreender o processo de resolução da tarefa tendo em conta a estratégia *escolhida*; e (ii) analisar as justificações e argumentações dadas pelos alunos na resolução da tarefa. Assim, serão apresentadas conclusões e, conseqüentemente, respostas para cada objetivo específico.

No primeiro contacto com todas as tarefas, foi recorrente a procura da regularidade presente entre termos consecutivos. Os alunos entenderam o que é que se adicionava de um termo para outro, percebendo as alterações em cada termo. Assim, conseguiam determinar o número de elementos de uma figura sabendo o da anterior.

De facto, tanto nas questões de **generalização próxima** da Tarefa I como da Tarefa II, a maioria dos alunos optou pela estratégia **recursiva** para as responder. Contudo, tal aconteceu, uma vez que, apenas eram pedidos termos de ordens pequenas, onde era possível os alunos chegarem à resposta através de *saltos* somando ao termo anterior a diferença entre termos consecutivos.

Para estas respostas, em particular, a maioria dos grupos justificou de forma textual, numa linguagem mais natural, explicando a regularidade que havia de um termo para o outro. Num ou dois grupos também surgiram justificações mais esquemáticas, em que os alunos apresentaram todos os termos que eram dados no enunciado e outros, até chegarem ao termo pretendido, através da recursividade.

No entanto, o facto de encontrarem a diferença entre termos consecutivos não lhes foi favorável quando procuravam saber o número de elementos de um termo de ordem elevada, uma vez que se tornaria um processo demorado. Portanto, o uso da estratégia **recursiva** não possibilitou que os alunos fizessem generalizações sobre as sequências, indo ao encontro do que Ponte et al. (2009a) referem acerca dos obstáculos da adoção da estratégia **recursiva**.

Tal constatou-se quando os alunos passaram para as questões de **generalização distante**, como era o caso da questão 2 das Tarefa I e II, onde os alunos teriam de determinar o termo de uma ordem distante. Neste caso, a estratégia mais utilizada pelos alunos, numa primeira instância, foi a estratégia do **objeto-inteiro** (sem ajuste), em que os alunos assumiam um termo como unidade e usavam múltiplos dessa unidade.

Os alunos tendiam a ter um pensamento do tipo *se na figura 1 tem 3 pontos, então na figura 100 vai ter 300 pontos*, aplicando, ainda que indiretamente, e sem saberem, a regra de três simples. A verdade é que, a estratégia da regra de três simples está inserida na estratégia do **objeto-inteiro** sem ajuste, uma vez que é assumido um termo e a partir dele e da sua ordem são determinados outros.

O **Grupo Bordô** é um desses exemplos em que os seus elementos pensaram em resolver a questão 2 através da regra de três simples, sem entenderem que para que essa estratégia fosse aplicada corretamente, o problema teria de estar inserido num contexto de proporcionalidade. Ou então, no final, teria de haver um ajuste do resultado. Neste grupo, em particular, foi recorrente esse raciocínio, mesmo na resolução das tarefas seguintes, mostrando não terem percebido que quando se está perante sequências, não é o melhor caminho utilizar a regra de três simples em todas as situações.

Apesar dos variados raciocínios que os grupos foram demonstrando ao longo da resolução na discussão entre os elementos, conseguiram todos, sem exceção, encontrar uma estratégia que lhes permitiu estabelecer uma generalização da sequência.

A estratégia mais recorrente nas questões de generalização distante foi a **estratégia explícita**, em que os alunos encontraram uma regra que lhes permitiu relacionar o número da figura com o número de elementos que a constituía. No entanto, nem todos o fizeram através dos elementos da figura, mas sim através da sequência numérica associada à sequência pictórica. Tal vai ao encontro do que Becker e Rivera (2005) referem sobre a forma como os alunos generalizam os padrões, se através de uma **generalização numérica** ou de uma **generalização figurativa**.

De facto, neste estudo, ambas as generalizações tiveram presentes, tendo sido possível constatar que muitas das vezes os alunos recorriam à **generalização numérica** pelo facto de não perceberem, num primeiro momento, o que era comum em todas as figuras, e qual a posição dos elementos que eram adicionados às figuras (Radford, 2010). Assim

sendo, os alunos apenas tendiam a olhar para os números associados aos elementos de cada figura.

Deste modo, tal como foi constatado na análise dos dados, os alunos para encontrarem uma regra que lhes permitisse o cálculo imediato de um termo, sabendo a sua ordem, fizeram-no de duas formas distintas: através da decomposição dos termos (Ponte et al., 2009a) ou através das relações numéricas (Lannin et al., 2006). Posto isso, apresentaram a regra ou em linguagem natural (através de um texto ou esquemas) ou em linguagem matemática, apresentando uma expressão algébrica.

O **Grupo Verde**, na Tarefa I, conseguiu estabelecer uma relação entre os termos e as suas ordens através da decomposição dos termos. Os elementos deste grupo repartiram cada figura, encontrando uma relação entre essas partes e o número da figura. Este grupo em particular, encontrou uma generalização da sequência através da decomposição de termos, e ainda fez uso de uma expressão algébrica que traduziu essa regra.

Já o **Grupo Azul**, encontrou uma regra válida através das relações numéricas, ou seja, os elementos do grupo encontraram uma *conta* (como os próprios dizem na sua resposta), através do número total de pontos de cada figura, que era válida para todos os termos. Isto é, não olharam propriamente para a figura e para a sua constituição, mas apenas para o número que lhe estava associado.

Este processo não foi só utilizado pelo **Grupo Azul**, mas também por outros, em que quase como por tentativas arranjavam uma *conta* que dava o resultado que queriam. Assim, estes alunos mostraram não perceber a que é que correspondia essa *conta* no contexto da sequência.

Depois da discussão coletiva sobre a Tarefa I, foi notório a mudança de estratégias, tendo sido a mais utilizada por todos os grupos a estratégia **explícita**, através da decomposição dos termos. Tal é notório no quadro síntese das estratégias utilizadas pelos alunos na Tarefa II (rever Quadro 4), onde há bem menos variedade de estratégias adotadas, tendo sido privilegiada. No entanto, continuou a haver grupos que optavam por encontrar uma regra, baseada na sequência numérica.

Neste caso, foi evidente tanto a adoção da estratégia **explícita algébrica** como a **natural**, onde uns grupos optaram por resolver a tarefa através de uma expressão algébrica, e outros através de uma regra, em linguagem natural.

O que também foi possível constatar foram os diferentes raciocínios dos alunos para encontrarem o termo geral da sequência. Uns optaram pela decomposição de termos,

como foi o caso do **Grupo Verde**, encontrando uma relação entre essas partes e a ordem, estabelecendo de imediato uma generalização. Outros encontraram a expressão algébrica através das relações numéricas, como foi o caso do **Grupo Preto**.

O que foi interessante perceber na procura das regras explícitas, foram as diferentes formas de os alunos *olharem* para os termos da sequência e para os seus elementos. De facto, a obtenção da regra e a posterior expressão algébrica diferem consoante a forma como os alunos vêm a sequência. Por exemplo, o caso da sequência da Tarefa III, o **Grupo Verde** obteve o termo geral, agrupando as cadeiras em 4 grupos, cada um deles com o número de cadeiras correspondente ao número da figura (rever Figura 42). O **Grupo Preto**, encontrou o termo geral, percebendo que o número de cadeiras na fila de cima e na fila de baixo seria o quadruplo do número da figura (rever Figura 44). No final, ambos os grupos obtiveram uma fórmula igual, mas os processos para chegarem a esta foram distintos. Tal se deveu pela forma como *olharam* para as figuras e as decompuseram.

Em relação à estratégia **explícita natural**, os alunos conseguiram encontrar uma regra que lhes permitiu determinar o número de elementos de uma figura, sabendo o número da figura, através da decomposição dos termos.

As justificações dadas pelos alunos que optaram por esta estratégia foram baseadas em textos (maioritariamente utilizando linguagem natural), onde explicavam a que correspondia cada *número*. Exemplo disso foi o **Grupo Azul**, que na resposta à questão 2 da Tarefa II, explicou por palavras o que significava cada número da conta que fizeram.

Portanto, os alunos que optaram por esta estratégia visualizaram a forma como cada figura estava constituída analisando os seus elementos, tentando encontrar uma relação com o número da figura.

Uma conclusão evidente dos resultados e da análise feita é o facto de os alunos mudarem de estratégia quando a questão passa de uma generalização próxima para uma generalização distante.

Assim, de um modo geral, as estratégias mais predominantes na resolução das três tarefas foram a estratégia **recursiva**, nas questões de **generalização próxima** e as estratégias **explícita algébrica** e a **explícita natural**, nas questões de **generalização distante**. Na aplicação das estratégias **explícitas** (tanto **natural** como **algébrica**), alguns alunos optaram por decompor cada termo, encontrando uma relação entre as partes do termo e a sua ordem, e outros optaram por analisar a sequência numérica associada à sequência pictórica e relacionar o número com a sua posição na sequência.

Além disso, foi notório a evolução dos alunos nos seus raciocínios, dando a entender que os mesmos se mostraram mais capazes em encontrar relações entre as ordens e os termos da sequência e não tanto relações entre termos consecutivos.

6.2. As dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas

A segunda questão desta investigação passa pela identificação das dificuldades dos alunos no processo de resolução destas tarefas. Estas dificuldades foram sendo manifestadas ao longo da realização das tarefas bem como nos momentos de discussão coletiva. A razão pela qual estas ocorreram dependeram de diferentes aspetos.

O primeiro aspeto foi a escolha das estratégias (Morais, 2012). De facto, muitas das dificuldades que foram aparecendo ao longo das tarefas foram devido às estratégias adotadas pelos alunos. Para além disso, essas dificuldades prevaleceram em questões de **generalização distante** (Vale & Barbosa, 2019), uma vez que as estratégias adotadas nas questões de **generalização próxima** não lhes permitia obter uma resposta.

Por exemplo, tal como já foi mencionado anteriormente, a adoção da estratégia **recursiva** originou muitas dificuldades quando os alunos passaram para questões de **generalização distante**, uma vez que, esta estratégia não lhes permitia ter um cálculo imediato de um termo distante ou até mesmo ter uma regra que generalizasse a sequência.

Uma vez que os termos distantes pedidos eram ainda de ordens bastantes elevadas, os alunos sabiam que não seria o caminho mais fácil caso fossem somando ao termo anterior a diferença entre termos consecutivos até chegarem ao termo pretendido.

Nesse sentido, a partir desta estratégia, os alunos foram obrigados a seguir outro caminho e a procurar diferentes estratégias para conseguirem responder às questões. Deste modo, surgiram dificuldades sobre qual estratégia seguir, sem ser a recursiva (Lannin et al., 2006). Isto deveu-se ao facto de os alunos se limitarem a encontrar as regularidades presentes de um termo para o outro, relacionando-as uma com as outras, indo ao encontro mais uma vez da recursividade.

Os alunos não olhavam para a sequência como um todo de forma a tentar relacionar cada figura com a sua ordem. Apenas se limitavam a observar e a constatar o que acontecia de figura para figura, evidenciando assim a dificuldade em **generalizar** a sequência.

Mesmo quando percebiam que seria mais benéfico encontrarem uma regra que permitisse determinar o termo sabendo a sua ordem, mostraram dificuldades em encontrar essa mesma regra. Tal se deveu ao facto de os alunos não olharem para as figuras e para os seus elementos, mas apenas para a sequência numérica que estava associada.

Também o uso da estratégia **objeto-inteiro** trouxe alguns impasses para os alunos que a utilizaram, uma vez que, no contexto do problema, muitas vezes o resultado obtido não fazia sentido. Se os alunos utilizassem essa estratégia e verificassem para os termos já dados da sequência perceberiam que teriam de fazer apenas um ajuste no resultado que obtiveram. No entanto, nenhum grupo chegou a essa conclusão. Os grupos que optaram por essa estratégia também se viram obrigados a encontrar outros caminhos para determinar termos de ordem distante.

O facto de ter sido o primeiro contacto com o tópico da Sequência no ano de escolaridade em que estavam inseridos, pode-os ter levado a ter tais dificuldades, mostrando não saber trabalhar com padrões e regularidades.

Ainda sobre as dificuldades manifestadas tendo em conta a utilização de estratégias adotadas, surge a dificuldade em construir o termo geral da sequência, naqueles alunos que optaram pela utilização de uma expressão algébrica.

Neste sentido, surgiram dois tipos de alunos: aqueles que obtiveram uma regra válida para generalizar a sequência, em linguagem natural, mas mostraram dificuldades em passar para uma linguagem matemática simbólica; e aqueles que obtiveram uma regra que descrevia a sequência, mas não a generalizava e, por esse motivo, não conseguiram encontrar uma expressão algébrica.

Neste último tipo, surge a dificuldade de generalização logo na procura de uma regra em linguagem natural. Tal se deveu mais uma vez, à adoção da estratégia **recursiva**, que impossibilitou os alunos de encontrar uma expressão algébrica que traduzisse a generalização da sequência. Tal foi claramente notório na Tarefa I, na passagem da questão 5 para a questão 6. Em dois dos grupos que indicaram a regra da sequência utilizando a recursividade, existiram dúvidas sobre qual seria a expressão algébrica que traduzisse tal regra. Muitos questionaram-se sobre o que representaria a incógnita, indicando que tal correspondia à figura anterior, e por esse motivo, a expressão algébrica seria $n + 2$, uma vez que a próxima figura teria o número de pontos da figura anterior mais dois.

Neste ponto, é clara a dificuldade dos alunos em entender o verdadeiro significado da fórmula que estariam a encontrar (o termo geral), mostrando também pouco conhecimento sobre o que representa a incógnita. Os alunos para além de não verificarem se a expressão obtida seria válida para o problema, também não percebiam que caso aplicassem a regra teriam de saber sempre de antemão o número de elementos da figura anterior à pretendida. Por exemplo, podiam-se questionar sobre como obteriam o termo de ordem 100, se não sabiam o termo de ordem 99. Isto mostra a falta de pensamento crítico dos alunos, em não verificarem as respostas que obtêm e não verificarem se faz sentido no contexto do problema.

Mais uma vez isto vem ao encontro da não visualização da sequência de outra forma que não a regularidade entre termos consecutivos. Estes deviam perceber que através dessa regra seria impossível determinar-se um termo de ordem distante.

Os alunos que manifestaram essas dificuldades em *ver* a sequência de uma outra forma, encontraram o termo geral da mesma através das relações numéricas, dando apenas atenção aos números que estavam relacionados com o número total de elementos da figura. Ou seja, não deram qualquer importância às figuras da sequência como era de esperar que o fizessem estando perante uma **sequência pictórica** (Vale & Pimentel, 2005).

Todas estas dificuldades mencionadas acima deram origem às dificuldades que os alunos demonstraram em generalizar uma sequência – dificuldade de **generalização**.

Outra dificuldade predominante na resolução das tarefas foi a **comunicação** tanto oral como escrita entre os elementos de cada grupo e, também, entre grupos, no momento da discussão coletiva. Rivera e Becker (2008) referem-se a esta dificuldade como a mais comum quando os alunos estão perante generalizações de padrões.

Através das gravações de áudio foi perceptível a dificuldade dos alunos em se expressarem e explicarem os seus raciocínios oralmente para os restantes elementos do grupo. Agregado a isso, surgiram também alguns impasses no que toca aos elementos que ouviam a explicação, mostrando certas dificuldades em perceber o que o outro tentava dizer e explicar.

Contudo, foi ainda mais notório as dificuldades da passagem da linguagem oral para a linguagem escrita, principalmente para linguagem matemática. Os alunos mostraram bastantes dificuldades em transpor os seus raciocínios para uma linguagem matemática, optando por escrever as suas respostas baseadas em textos com recurso à

linguagem natural. Esses textos retratavam exatamente aquilo que eles pensavam e comunicavam oralmente.

Em relação às dificuldades de **argumentação**, os alunos encontravam uma resposta correta, mas não a sabiam justificar. Para além disso, e neste caso em concreto, com a generalização de padrões, os alunos não justificavam o porquê de a regra ou generalização encontrada ser válida para aquele caso. Muitas das vezes limitaram-se a aplicar essa regra para algumas ordens e verificarem que o resultado é o valor pretendido. Tal vem ao encontro do que Lannin (2003) apresentou num dos seus estudos.

Considero importante referir que todas estas dificuldades que foram sendo mencionadas, foram diminuindo de tarefa para tarefa. Contudo, as dificuldades em generalizar o padrão e principalmente, em justificar as respostas, continuaram a ser evidentes em alguns grupos.

Observou-se que os alunos tinham sido pouco ou nada incentivados durante os anos anteriores na escrita matemática. Não estavam habituados a ter de explicar, tanto verbalmente como por escrito, as suas estratégias e procedimentos matemáticos e por que escolheram essas estratégias e procedimentos. Além disso, os alunos pareciam estar *formatados* num ensino tradicional, em que se privilegia, essencialmente, os procedimentos e as rotinas, o que, ao meu entender, também não contribuiu para melhores desempenhos nos aspetos referidos.

6.3. A perceção dos alunos em relação ao trabalho de grupo

Uma vez que toda a intervenção pedagógica consistiu em trabalhos de grupo, a última questão que foi estabelecida para esta investigação foi: *De que modo é que o trabalho em grupo influencia a resolução destas tarefas?*. Esta questão tem alguma relevância para o estudo, para poder entender se o facto de os alunos terem trabalho em grupo influenciou as suas escolhas das estratégias e o processo de resolução.

Para tal, foram definidos dois objetivos específicos: (i) analisar os aspetos do trabalho em grupo que afetam as escolhas das estratégias de resolução e a própria resolução; e (ii) analisar de que modo é que os alunos interagem na construção coletiva de estratégias.

Relativamente ao primeiro objetivo, constatou-se que existiram alguns aspetos que influenciaram a escolha das estratégias para responder às questões, como foi o caso da dinâmica do grupo e da comunicação entre os elementos. Tal vem ao encontro também do segundo objetivo específico, uma vez que, a interação dos alunos na

construção das estratégias e a forma como o fizeram tem um peso significativo sobre a forma como escolheram a estratégia adotada.

Através das gravações de áudio foi possível perceber que existiram grupos em que apenas um ou dois elementos participavam ativamente na resolução das tarefas, o que levava à partilha de menos estratégias variadas. Nesses casos, muitas das vezes, a partilha das ideias não era feita da melhor forma, fazendo com que os próprios elementos do grupo não conseguissem perceber a ideia que o outro tentava partilhar. Tal fez com que muitas estratégias não fossem levadas até ao fim, ou não fossem validadas para a tarefa em questão.

Mesmo naqueles grupos em que todos os elementos partilhavam estratégias, por vezes, a comunicação entre eles não demonstrava aquilo que os alunos estavam a pensar. Por esse motivo, optavam sempre pela estratégia que lhes parecia mais fácil, ou aquela que lhes dava uma resposta válida (que eles considerassem).

Eram mais as vezes em que os grupos chegavam apenas a uma estratégia válida do que aquelas em que havia mais do que uma estratégia. Contudo, nesses últimos casos, constatou-se, pelas respostas do questionário, que quando tal acontecia a estratégia adotada era escolhida por consenso.

Teria sido interessante se a dinâmica dos grupos tivesse tomado uma forma em que todos os elementos à vez partilhavam uma estratégia, e todos os outros ouviam atentamente e tentavam perceber essa estratégia. A verdade é que o que se constatou, tanto pela observação em aula como pelas gravações das discussões entre os elementos de cada grupo, foi que por vezes eram dados ouvidos apenas a um único elemento. Tal leva-me a questionar sobre qual deverá ser o papel do professor para ultrapassar esses desafios.

De um modo geral, no que toca às perceções dos alunos sobre a importância do grupo na realização de tarefas como as que fizeram, constatou-se que a maioria dos alunos consideram que este se revelou um aspeto bastante importante para a sua aprendizagem. Além disso, os alunos afirmam que o facto de poderem ter realizado em grupo as tarefas os possibilitou ter um *maior leque* de estratégias, dando-lhes a entender que de facto existem inúmeras formas de se resolver as questões.

Um outro aspeto muito importante, que os alunos referiram sobre o grupo foi que este se revelou uma mais-valia, visto que os permitiu ultrapassar dificuldades, podendo debater sobre as dúvidas com os seus colegas e não com a professora.

6.4. Limitações e recomendações

Tendo sido esta a minha primeira investigação, e por sua vez, a primeira intervenção pedagógica feita para uma posterior recolha e análise dos dados, considero que existiram aspetos que não correram como o esperado. Creio que esses aspetos poderiam ser melhorados ou adaptados para uma futura investigação e futuras aulas.

Refletindo sobre os momentos da intervenção pedagógica, creio que o primeiro aspeto que poderia ser alterado seriam os momentos da seleção dos grupos e da discussão com os alunos sobre a dinâmicas das aulas que fariam parte da intervenção. Relembro que estes momentos foram feitos na primeira aula da intervenção, o que fez com que não fosse possível fazer tudo aquilo que estava planeado para essa aula, como era o caso da discussão da Tarefa I.

Para contornar essa situação, esses momentos de iniciação da intervenção poderiam ter sido realizados numa aula anterior às da intervenção pedagógica. Assim, garantia-se que a primeira aula da intervenção contava apenas com a resolução e discussão da Tarefa I, ficando com os 100 minutos livres para tal.

Acredito que este pequeno *atraso* que aconteceu na primeira aula deu origem a que a realização das próximas tarefas e as posteriores discussões também não corressem como esperado. A ideia inicial da intervenção seria uma aula para cada tarefa, onde em cada aula, os alunos resolviam uma tarefa e logo de seguida haveria uma discussão coletiva sobre a mesma.

Sei que o facto de algumas das discussões, principalmente da Tarefa II, ter sido feito na aula seguinte àquela em que foi realizada, impediu que os alunos participassem ativamente na discussão. Por esse motivo, e como já expliquei anteriormente, a discussão dessa tarefa foi feita maioritariamente por mim, tendo sido eu o elemento central. No entanto, não era de todo o meu objetivo que as discussões tivessem ocorrido desta forma, uma vez que o objetivo principal era que fossem os próprios alunos a discutir e a partilhar ideias. Contudo, naquele momento, foi o que me pareceu o mais acertado, visto ter havido uma *quebra* entre a resolução da tarefa e a sua posterior discussão.

Mais uma vez considero que se a primeira aula tivesse sido preparada só para a realização e discussão da Tarefa I, todo o planeamento da restante intervenção pedagógica teria ocorrido como esperado.

Um outro aspeto que penso que também poderia ter sido melhorado foram os tempos dados para a resolução das tarefas. Os alunos desde a primeira aula mostraram-se

pouco interessados com o tempo dado para a resolução das tarefas, sendo que, por vezes, o tempo foi estendido porque muitos dos grupos não tinham finalizado a tarefa. Pensando sobre isso, deveria ter sido mais rigorosa com os tempos que estipulei desde o início. Caso houvesse grupos que não tivessem respondido a todas as questões, penso que poderia avaliar se responder no momento da discussão poderia ser uma opção, por exemplo. Por este motivo, como futura professora, vejo que é essencial melhorar a gestão do tempo, refletindo sobre as necessidades dos alunos e optando pela ação mais ajustada para que eles possam aprender. Este aspeto é algo que será comum no meu percurso enquanto docente, e sei que apenas com experiência e com prática é que conseguirei desenvolver e melhorar tal.

Uma das grandes limitações que julgo ter havido ao longo desta investigação foi o facto de não poder explorar em maior profundidade muitos raciocínios partilhados pelos alunos no momento da discussão entre os elementos de cada grupo. Para mim, as gravações de áudio foram sem dúvida uma base importante para este trabalho, uma vez que me permitiu ter acesso a variadas estratégias.

Considero que esta intervenção poderá ser aplicada futuramente. Tenho alguma curiosidade em perceber as diferenças e os desafios da dinamização das mesmas tarefas em grande grupo, ou seja, em turma. Penso que, por um lado, seria dada a oportunidade de todos os alunos mostrarem as suas ideias e em conjunto tentarmos perceber se a estratégia seria ou não válida e quais as razões. Por outro lado, reconhecendo o potencial do trabalho em grupo, sei que esta opção poderia trazer outros obstáculos, como é o caso de alguns alunos não se sentirem à vontade em partilhar os raciocínios com a turma, e principalmente com a professora. Mas tal poderia ser trabalhado. Além disso, esta opção também não beneficiaria da interação entre pares, que é um aspeto de destaque da minha investigação. No entanto, seria interessante compreender limitações e vantagens de uma outra abordagem.

Relativamente à parte da investigação, considero que tanto o processo de recolha de dados com o processo de análise dos dados correu como esperado. Foi-me possível ter diferentes dados e com eles fazer uma análise precisa e rica em diferentes pontos de vista.

Contudo, depois de analisar todas as resoluções, as gravações de áudio e as respostas dadas pelos alunos no questionário, penso que teria sido uma mais-valia ter realizado uma pequena entrevista com alguns alunos, no final da minha intervenção. Senti falta

de os questionar sobre certas respostas que deram no questionário. Aponto aqui para uma das questões, onde a maioria dos alunos respondeu ter preferido a discussão mobilizada por mim. Quando me deparei com uma percentagem tão grande, senti vontade de os questionar sobre a razão pela qual terem preferido tal discussão.

O questionário realmente deu-me algumas respostas àquilo que pretendia, mas creio que os alunos se sentem pouco motivados e interessados para responder a questionários tão longos, com questões abertas. Acabam sempre por responder o mínimo, e muitas das vezes escrevem apenas aquilo que a professora gostaria de ouvir. Com uma entrevista, talvez conseguiria aprofundar algumas das respostas de forma a haver uma partilha maior sobre a dinâmica de trabalhar em grupo.

Por este motivo, e por tantos outros, creio que uma entrevista posterior ao questionário me daria mais respostas e mais certezas sobre algumas inquietações que me foram surgindo na análise dos dados.

Refletindo sobre todo o meu percurso que deu ênfase a este trabalho e sobre todas as questões e inquietações que estiveram presentes no mesmo, creio que consegui responder àquele que foi o meu objetivo geral.

No entanto, refletindo sobre todo este trabalho, deparei-me com algumas questões que me fizeram pensar: De que forma é que, o facto de os alunos não terem bases suficientes sobre sequências, os influenciou na resolução destas tarefas? Será que, se o tópico das *Sequências* fosse lecionado antes de os alunos resolverem as tarefas, as estratégias teriam sido assim tão variadas? Os raciocínios dos alunos teriam sido diferentes? Será que os alunos tinham a mesma forma de *ver* as sequências?.

Questiono-me sobre isto porque na resolução da Tarefa II alguns grupos tenderam a utilizar os mesmos processos e regras que utilizaram na Tarefa I, sem entenderem que ao trabalharem com diferentes sequências tais regras podem não se aplicar.

Talvez as respostas a estas questões possam vir ao encontro de uma outra questão que coloco: Como é que eu, como professora, lecionaria o tópico da *Sequências*, sem comprometer os raciocínios dos alunos?

É neste sentido que surgem algumas questões para investigações futuras que se debrucem sobre este assunto que é a generalização de padrões e as estratégias usadas pelos alunos:

- De que forma o professor pode interagir com os alunos no momento das resoluções, sem comprometer as estratégias, mas também sem que eles fiquem desorientados?
- De que forma é que o professor pode assegurar que todos os elementos de cada grupo apresentem pelo menos uma estratégia, garantindo que todos trabalham e não apenas alguns?
- Qual é o papel do professor no processo de diversificação das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a generalização de padrões?

Por fim, só me resta registar que este foi um ano cheio de emoções, cheio de trabalho, mas que no final, valeu cada segundo. Aprendi tanto, com os professores, com os alunos, com os não-docentes, com todos. Mas não aprendi tudo. Ainda há tanto para aprender. Mas ser professor é estar em constante aprendizagem, não é verdade?

O último dia definiu-se numa só palavra: recompensa. Dei tanto de mim aos meus alunos e eles deram tanto, ou o que podiam, deles a mim. Foi com um sentimento agri-doce que deixei as minhas turmas e a escola. Mas mais uma vez, ser professor é isto mesmo. Estar preparado para novas aventuras.

Assim, acabo este meu relatório com uma pequena frase que creio que retrata exatamente o que estive por detrás deste trabalho e o que deverá estar sempre presente nos nossos pensamentos, como professores de matemática:

“O conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente”

(Ludke & Andre, 1986, p.18)

Referências Bibliográficas

- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 16(1), 27–56. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22813>
- Amado, J. (2013). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra. <https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1>
- Amado, N. (2022). Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 166, 2–6.
- Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico* [Dissertação de doutoramento, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/10561>
- Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57–70.
- Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Vale, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011). *Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico*. Texto Editores.
- Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2008). A resolução de problemas e a generalização de padrões: estratégias e dificuldades emergentes. Em *Investigación en educación matemática XII*. (pp. 461 – 475). SEIEM.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121 – 128). PME.
- Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. [Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1197>
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Direção-geral da Educação (DGE). Disponível em <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciaisensino-basico>

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021a). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. Matemática, 1.º ano*. Direção-geral da Educação (DGE). Disponível em: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_1.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021b). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. Matemática, 5.º ano*. Direção-geral da Educação (DGE). Disponível em: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_5.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021c). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico. Matemática, 7.º ano*. Direção-geral da Educação (DGE). Disponível em: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Encontro de Investigação em Educação Matemática: Práticas do ensino da matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Decreto-Lei nº 54/2018 da Presidência do Conselho de Ministros. Diário da República: Série I, n.º 129/2018. <https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/54-2018-115652961>

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto Editora.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg, *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342-348.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Lima, L. (2014). *O Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas: Investigando estratégias dos alunos do Ensino Fundamental*. [Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro - Instituto de Matemática].

Lima, L. S. (2020). *O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Intencionalidades, Ações e Reflexões dos Docentes*. [Tese de Doutorado, Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Porto]. Repositório Aberto da Universidade do Porto. <https://hdl.handle.net/10216/128008>

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. Editora Pedagógica e Universitária.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. Em *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505 – 516). SEIEM.

Morais, A. M. L. (2012). *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico*. [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa – Instituição de Educação]. <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7604>

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (Tradução de *Principles Standards and for School Mathematics*). 1ª edição. APM.

Pólya, G. (2014). O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, 130, 44-50.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org). *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). APM.

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, 100, 89–96.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009a). *Álgebra no ensino básico*. ME - DGIDC.
- Ponte, J. P., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. ME – DGIDC.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, 1(1), 9-29.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim Gepem*, 59, 53 – 68.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65 – 82.
- Baptista, I. (Coord.), Caetano, A. P., Amado, J., Azevedo, M. da C., & Pais, S. C. (2020). *Carta ética* (2ª ed.). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.
- Trivinos, A. N. S. (1987). *Introdução à pesquisa em ciências sociais: A pesquisa qualitativa em educação*. Atlas.
- Vale, I. (2009). Mathematics and patterns in elementary schools: perspectives and classroom experiences of students and teachers. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.) *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/ Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 7 - 14). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Projeto Padrões.

Vale, I., & Barbosa, A. (2019). Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(3), 398-418. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418>

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática: Propostas curriculares para o ensino básico*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193 - 213). SPCE.

Yin, R. K. (1993). *Applications of case study research*. Sage Publications, Inc.

Yin, R. K., (2008). *Case study research: design and methods*. (4th ed.). Sage Publications.

Apêndices

Apêndice 1 – Folha de respostas do Grupo Verde



GRUPO VERDE

FOLHA DE RESPOSTAS

Apêndice 2 – Plano de aula do dia 16/02 (1ª aula da intervenção pedagógica)

Aula nº 69 e 70 – 16/02/2024

Sumário: Realização e discussão da tarefa “O voo das andorinhas”.	Alunos a faltar:
Recursos: Do professor: • Dossiê do professor • Gravadores de áudio (telemóveis e tablets) • Tarefa “O voo das andorinhas” – grupo • Tarefa “O voo das andorinhas” – individual (4 enunciados) • “kit estratégico”	Tópicos do manual: <u>Tema 4</u> Sequências. Expressões algébricas e equações.

Tópico: Regularidades, sequências e sucessões

Subtópicos: Lei de formação de uma sequência ou sucessão

Objetivos de aprendizagem:

- Completar e continuar sequências numéricas dadas de acordo com uma lei de formação, justificando;
- Reconhecer regularidades em sequências e determinar uma lei de formação, expressando-a em linguagem natural ou simbólica.
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Saber verificar se um dado número é, ou não, elemento de uma sequência;
- Determinar ordens correspondentes a vários termos;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando as linguagens natural e simbólica;
- Determinar uma expressão algébrica que traduza a situação dada;
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

Práticas/Ações estratégicas essenciais de Aprendizagens Orientadas para o Perfil dos Alunos:

- Incentivar o recurso a textos, esquemas, tabelas e expressões algébricas para descrever leis de formação de sequências ou sucessões, promovendo a perseverança na atividade matemática.
- Promover a comparação de resoluções e a descrição de raciocínios subjacentes, e, eventualmente, evidenciar como expressões algébricas, ainda que equivalentes, podem refletir estratégias de resolução diferentes.
- Durante a apresentação à turma, incentivar a argumentação, proporcionando, sempre que possível, feedback valorativo das ideias e estratégias dos alunos

Ações a desenvolver com os alunos:

- Responder às perguntas do aluno com outras perguntas que o obriguem a pensar um pouco mais.
- Solicitar a explicação e justificação de ideias, processos e resultados matemáticos.
- Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Capacidades transversais:

- Representações Matemáticas
- Comunicação matemática
- Raciocínio Matemático
- Resolução de problemas

Momentos da aula:

1. Organização da sala
2. Entrada dos alunos e criação dos 4 grupos
3. Presenças
4. Explicação do decorrer das próximas 3 aulas
 - 4.1. Relembrar os alunos do documento “Consentimento Livre e Informado”
 - 4.2. Leitura e assinatura do “Termo de Assentimento”
 - 4.3. Metodologia das aulas
 - 4.4. Explicação do “kit estratégico”
5. Iniciar a gravação de áudio
6. Tarefa “O voo das andorinhas”
 - 6.1. Resolução da tarefa
 - 6.2. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo

Desenvolvimento da aula:

1. Organização da sala

Vou optar por ir um pouco mais cedo para sala para poder organizar as mesas de acordo com a dinâmica que vai haver na aula. A dinâmica vai consistir em trabalhos de grupos, neste caso, serão 4 grupos: 3 grupos de 4 elementos e um grupo de 3 elementos. Cada grupo já tem um nome associado: Grupo Verde, Grupo Bordô, Grupo Preto e Grupo Azul.

A ideia é por cada grupo em cada canto da sala, para que a partilha entre grupos apenas aconteça nos momentos de discussão coletiva. O ambiente de trabalho de cada grupo vai ser composto por 2 mesas, onde vou chamar de “ilha”. Cada ilha vai ter em cima um “kit estratégico”, um gravador de áudio (telemóvel, tablet ou computador fornecido por mim) e um documento “Termo de Assentimento” para cada aluno assinar.

O “Termo de Assentimento” é um documento que tem como objetivo dar uma responsabilidade e autonomia aos alunos de poderem, eles próprios, dizer que aceitam participar no meu projeto de investigação.

O “kit estratégico” é uma capa que cada grupo vai ter na sua posse durante as próximas 3 aulas, que contém:

- ✓ Um saco com botões: 22 botões brancos, 15 botões castanhos e 8 botões verdes
- ✓ Lápis de cor
- ✓ Um “medidor de dúvidas”: 3 cartões - 1 verde, 1 vermelho e 1 amarelo, para pousar em cima da mesa, onde a cor corresponde ao nível de dúvidas/dificuldades que cada grupo vai sentido ao longo das resoluções das tarefas
- ✓ Folhas brancas
- ✓ 1 enunciado da tarefa “O voo das andorinhas” para o grupo
- ✓ 4 enunciados da tarefa “O voo das andorinhas”, um para cada elemento (para poderem rascunhar e apresentar ideias)
- ✓ Cartão de cidadão do grupo: folha com o nome do grupo e um espaço a preencher pelos alunos com nomes fictícios.

Optei pelo nome dos alunos ser um nome anónimo, já que na minha investigação vou garantir o anonimato de todos alunos. Assim, também há algum entusiasmo por parte dos alunos de terem que escolher um nome diferente. Para não perder tempo no momento da escolha ou criação dos nomes por parte dos alunos, antecipei esse problema e pus no *Classroom* um aviso, no dia 12/02, a pedir que pensassem num nome que os pudesse identificar, sem eu saber quem eles são.

2. Entrada dos alunos e criação dos 4 grupos

Ao toque, vou posicionar-me na porta da sala com um saco que contem 4 botões bordô, 4 botões azuis, 4 botões verdes e 4 botões pretos (a cor dos botões corresponde a cada grupo).

Os grupos vão ser criados da seguinte forma:

1. Os alunos à medida que vão entrando na sala vão retirar do saco um botão de uma cor
2. Vou pedir que cada um procure a ilha correspondente à cor do seu botão
3. Direciona-se para a ilha e senta-se, colocando o botão que retirou do saco, em cima da mesa (para eu poder confirmar que realmente estão no grupo correto, sem que haja enganar).

3. Presenças

Depois de compostos os grupos e de estarem todos sentados, vou verificar se está alguém a faltar e, se estiver, vou marcar falta no GIAE e escrever essa informação no meu dossiê.

4. Exposição sobre o decorrer das próximas 3 aulas

As aulas vão consistir na resolução de tarefas sobre o tópico “Sequências”

4.1. Relembrar os alunos do documento “Consentimento Livre e Informado” que

levaram para ser assinado pelos pais, explicando-lhes que

- As próximas 3 aulas serão para aplicar o meu projeto de investigação pedagógica
- Os gravadores (tablet/telemóveis) que estão em cima da mesa são para gravar as conversas e partilhas de ideias que vão tendo ao longo das resoluções das tarefas, garantindo sempre o anonimato dos alunos
- Ao longo das 3 aulas haverá registos fotográficos de alguns momentos enquanto trabalham em grupo, sem nunca mostrar o rosto dos alunos.

4.2. Leitura e assinatura do “Termo de Assentimento”

Tendo já o consentimento de todos os encarregados de educação, e como forma de garantir que os próprios alunos estão interessados e com vontade de participar na investigação, vou-lhes pedir que assinem o “Termo de Assentimento”. Antes disso, vou ler juntamente com os alunos o conteúdo do documento.

Vou recolher os papéis apenas quando os alunos comecem a resolver a primeira tarefa.

4.3. Metodologia das aulas

- Trabalho em grupo e discussão de ideias em turma
- Trabalho em grupo:
 - Os elementos de cada grupo devem discutir entre eles sobre as suas ideias
 - Os alunos, em grupo, deverão chegar a um consenso sobre as respostas que querem dar (devem dar apenas uma resposta para cada questão)
 - Não há partilha de respostas nem discussão de ideias entre grupos, apenas no momento indicado para tal.

4.4. Explicação do “kit estratégico”

- Devem preencher o cartão de cidadão do grupo, com os seus nomes fictícios
- Vou-lhes explicar que, dentro do “kit” têm
 - algum material que podem utilizar na resolução das tarefas, sendo que não são obrigados a utilizar
 - 5 enunciados da tarefa: 4 enunciados da tarefa, 1 para cada elemento do grupo, que podem usar para exprimirem as suas ideias e 1 enunciado para o grupo, onde devem apresentar as suas resoluções e repostas finais.
 - Um medidor de ajuda: devem colocar em cima da mesa a cor correspondente ao nível de dúvidas que vão tendo ao longo da realização da tarefa (por exemplo, se estão a ir bem e não têm qualquer dúvida põe o cartão verde em cima da mesa, se

estou com algumas dúvidas colocam o amarelo, se não conseguem mesmo sair daquele exercício ou não estão a perceber nada colocam o vermelho). Assim, eu à medida que vou passando pelos grupos consigo perceber se eles estão a conseguir perceber ou não.

- No final de cada tarefa cada grupo deve ter um único enunciado com as respostas finais. Essas resoluções vão ser recolhidas no final da aula.

5. Iniciar a gravação de áudio

Antes de os grupos começarem a resolver a tarefa, vou pelas mesas e vou dar início às gravações de áudio de cada grupo. Para, posteriormente, poder analisar e perceber quem é que está a falar no áudio, vou pedir a cada elemento do grupo que grave a sua voz a dizer “Eu sou o” e diz o nome anónimo que escolheu. A partir deste momento, os alunos começam o trabalho de grupo com o gravador sempre ligado. O momento de discussão em turma também irá ser gravado.

6. Tarefa “O voo das andorinhas”

Depois de dar a conhecer a todos os grupos os materiais que têm disponíveis, vou pedir que um dos elementos de cada grupo retire do “kit estratégico” os enunciados da tarefa. Vou lembrar os alunos que devem escrever as suas repostas apenas no enunciado que tem no cabeçalho a dizer “Grupo X”.

6.1. Resolução da tarefa

Para esta tarefa, os alunos vão ter, aproximadamente, 45 minutos para resolvê-la.

Neste momento da aula, vou andar pela sala a observar e a ouvir o que os elementos de cada grupo discutem e escrevem, interpelando sempre que haja necessidade para tal.

Antecipação de dificuldades:

✓ Os alunos poderão ter dificuldades:

- Na questão 2, em mostrar como chegaram à resposta. Se forem pela resolução mais extensa, que seria determinar os pontos de cada figura até à 100, vão sentir dificuldade, pois é algo bastante demorado. Devem tentar encontrar uma regularidade para perceberem que a resolução deve ser algo mais intuitiva e fácil. Até porque se começarem por essa resolução posso sempre questionar os alunos se eu pedisse a figura 1000 o que é que eles fariam.

- Na questão 3 e 4, em perceber como chegam ao número da figura. O primeiro pensamento poderá ser por tentativa erro, o que não está errado. Vou incentivar ao máximo os alunos a prosseguirem com qualquer estratégia que escolham.
- Na questão 5, em perceber o que quero dizer com “regra” ou dificuldade em passar o seu pensamento para uma linguagem natural (há alguma dificuldade em passar para o papel o que dizem)
- Na questão 6, em passar de linguagem natural para linguagem matemática.

✓ Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

- Questionar os alunos
- Dar pistas, sem comprometer o pensamento dos alunos
- Outros apoios estão mencionados ao longo da resolução apresentada acima nas fotografias

Devidamente apoiados, é natural que muitos alunos consigam resolver até à questão 5. Além disso, é provável que, pelo menos alguns grupos consigam na pergunta 6 encontrar uma expressão para esta regularidade a partir da generalização expressa na pergunta anterior. No caso de nenhum grupo o conseguir, vou optar por interromper o trabalho dos alunos na pergunta 5, discutir todas as questões até essa e, colocando questões apropriadas, procurar que eles cheguem a uma expressão algébrica a partir da generalização verbal.

Importante: Se algum grupo acabar antes de todos os outros, vou pedir que o mesmo tente encontrar estratégias diferentes daquelas que usaram para responderem às mesmas questões. Será algo bastante importante e interessante no momento de discussão.

6.2. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo

Depois de todos os grupos terem finalizado a resolução da tarefa “O voo das andorinhas”, vou pedir que todos os alunos se posicionem de frente para o quadro para que se possa começar a partilha de ideias e resoluções.

A discussão está prevista demorar o resto da aula.

Vou referir que **não devem corrigir, nem apagar nada do que fizeram**. Se repararem que não obtiveram a resposta certa ou que não fizeram da melhor maneira não haverá qualquer problema. O importante é que participem e que partilhem as suas ideias, ainda que possam estar erradas. Para esta tarefa, a ideia será cada grupo partilhar a estratégia que utilizou para cada questão.

Para a discussão, vou começar por projetar no quadro o PowerPoint com o enunciado e vou pedir a um aluno que leia. De seguida, vou projetar apenas a sequência de pontos e as questões,

uma de cada vez. Para cada questão vou selecionar um grupo para partilhar com a turma a sua resolução. A seleção dos grupos vai depender da minha observação na aula.

O grupo selecionado vai falar para a turma e explicar, em voz alta, a partir da sua “ilha”, qual foi a estratégia que utilizaram para chegarem à resposta. Assim, o meu objetivo é que todos os outros grupos estejam atentos ao que está a ser dito para poderem perceber se utilizaram a mesma estratégia ou não, pois no final da partilha do grupo em questão, vou perguntar à turma se existem outras estratégias diferentes. É de salientar que eu já saberei de antemão se houve ou não grupos com diferentes estratégias quando andei pelos lugares. Caso haja, vou pedir que esse grupo em questão partilhe também a sua estratégia, mostrando que para uma pergunta existem várias maneiras de se resolver.

Se as resoluções foram mais gráficas, tipo esquemas ou tabelas, vou pedir aos grupos que tenham essas resoluções para irem resolver ao quadro.

Nenhum aluno vai passar qualquer tipo de resolução, nem para o caderno, nem para o enunciado que tem na sua posse. No final das 3 aulas eu vou dar a cada aluno todas as tarefas que foram feitas em aula com as resoluções anexadas, resoluções essas que terão mais que uma estratégia apresentada. Para essas resoluções vou usar as que foram feitas pelos alunos, e caso ache necessário, poderei acrescentar outras igualmente importantes, mas diferentes.

Apêndice 3 – Plano de aula do dia 20/02 (2ª aula da intervenção pedagógica)

Aula nº 71 e 72 – 20/02/2024

Sumário: Discussão sobre as resoluções feitas pelos alunos, da tarefa “O voo das andorinhas”. Sequências. Termo geral de uma sequência ou de uma sucessão Realização e discussão da tarefa “Os azulejos”.	Alunos a faltar:
Recursos: Do professor: • Dossiê do professor • Gravadores de áudio (telemóveis e tablets) • Tarefa “Os azulejos” – grupo • Tarefa “Os azulejos” – individual (4 enunciados) • “kit estratégico” • PowerPoint “Aula 71 e 72 – 20-02”	Tópicos do manual: <u>Tema 4</u> Sequências. Expressões algébricas e equações.

Tópico: Regularidades, sequências e sucessões

Subtópicos: Lei de formação de uma sequência ou sucessão

Objetivos de aprendizagem:

- Completar e continuar sequências numéricas dadas de acordo com uma lei de formação, justificando;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Determinar ordens correspondentes a vários termos;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência;
- Determinar uma expressão algébrica que traduza a situação dada;
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

Práticas/Ações estratégicas essenciais de Aprendizagens Orientadas para o Perfil dos Alunos:

- Incentivar o recurso a textos, esquemas, tabelas e expressões algébricas para descrever leis de formação de sequências ou sucessões, promovendo a perseverança na atividade matemática.
- Promover a comparação de resoluções e a descrição de raciocínios subjacentes, e, eventualmente, evidenciar como expressões algébricas, ainda que equivalentes, podem refletir estratégias de resolução diferentes.
- Durante a apresentação à turma, incentivar a argumentação, proporcionando, sempre que possível, feedback valorativo das ideias e estratégias dos alunos

Ações a desenvolver com os alunos:

- Responder às perguntas do aluno com outras perguntas que o obriguem a pensar um pouco mais.
- Solicitar a explicação e justificação de ideias, processos e resultados matemáticos.
- Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Capacidades transversais:

- Comunicação matemática
- Raciocínio Matemático
- Resolução de problemas

Momentos da aula:

1. Entrada dos alunos
2. Presenças
3. Exploração do PowerPoint “Aula 71 e 72 – 20-02” – Discussão da Tarefa I
 - 3.1. Discussão em turma das 4 primeiras questões
 - 3.2. Sequências numérica, termo e ordem
 - 3.3. Discussão da questão 5 e termo geral
 - 3.4. Discussão da questão 6
 - 3.5. Termo geral
4. Iniciar a gravação de áudio
5. Tarefa “Os azulejos”
 - 5.1. Resolução da tarefa
 - 5.2. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo

Slides do PowerPoint usado nesta aula:

O voo das andorinhas

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em “V”. Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.



Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos:

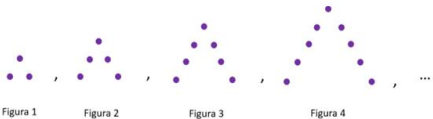


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

20/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 1

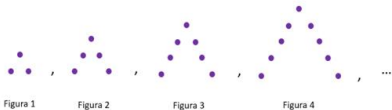
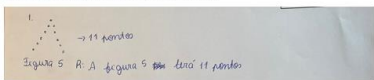


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

Respondam às seguintes questões apresentando sempre o vosso pensamento.

1. Descrevam como se pode obter a Figura 5. Quantos pontos terá?

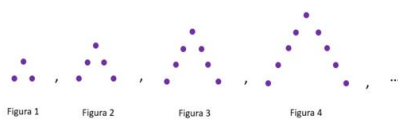


① A figura 5 obtém-se acrescentando 2 pontos em relação à figura 4, e terá 11 pontos.

1. Como a sequência só tem números ímpares o próximo número ímpar é 11.

① A figura 5 tem 11 pontos, pois o dobro de 5 mais 1 dá 11 ($5 \times 2 + 1 = 11$).

20/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 2



2. Quantos pontos terá a Figura 100?

2. Na figura 1, fizemos uma conta para dar 3, obtivemos a conta $2 \cdot 1 + 1$, na figura 2, obtivemos a conta $4 \cdot 1 + 1$. Repetimos que o primeiro número da conta era o dobro do número da figura, então, $100 \cdot 2 = 200$, $200 + 1 = 201$. A figura 100 tem 201 pontos.

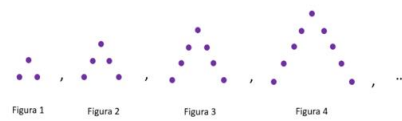
2. Escrevendo que ao número da figura acrescenta-se o próximo número, a figura 100 terá 201 pontos.

2. $F_5 = 11$ de 5 em 5 figuras soma-se 10 pontos
 $F_{10} = 21$ de 10 em 10 figuras soma-se 20 pontos
 $F_{20} = 41$
 $F_{40} = 81$
 $F_{60} = 121$
 $F_{80} = 161$
 $F_{100} = 201$
 A figura 100 terá 201 pontos.

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

3



3. E existe alguma Figura com 202 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?

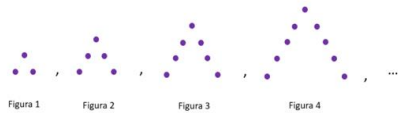
3. Não, porque na figura 100 é 201 pontos e o objetivo é acrescentar sempre mais dois pontos à próxima figura terá 203 pontos, por isso, não existe nenhuma figura com 202 pontos.

3. R: Não existe nenhuma figura com 202 pontos, pois os números dos pontos têm de acabar sempre em números ímpares.

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

4



4. Existe alguma Figura com 135 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?

4. Sim, porque é número ímpar.

4. Os 135 pontos subtraímos 1 que dá 134 e a esse valor dividimos por 2 que vai dar 67, a técnica que usamos nas perguntas anteriores, temos fazer o contrário, ou seja, em vez de somar-mos e multiplicarmos, vamos subtrair e dividir. O número da figura vai ser 67.

4. $F_{67} = 134 - 1 = 133$
 $F_{68} = 133 + 2 = 135$
 $F_{69} = 135 - 2 = 133$
 $F_{70} = 133 + 2 = 135$
 R: Sim, existe uma figura com 135 pontos e número da figura 67.

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

5

SEQUÊNCIAS

Sequência é uma lista ordenada de figuras, números ou outros elementos.

Sequência numérica é uma lista ordenada de números.

Cada número da sequência é chamado de **termo**

A **posição** que esse número ocupa na lista é chamada de **ordem**

A cada termo corresponde uma ordem

Nº da figura

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Termo									

Nº de pontos

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

6

FAZ CORRESPONDER

Quantos pontos terá a Figura 100?

Existe alguma Figura com 202 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?

Existe alguma Figura com 135 pontos? Se sim, qual é o número da Figura?

Existe alguma figura com 202 pontos? Se sim, qual é a ordem que lhe corresponde?

Qual é a ordem a que corresponde o termo 100?

Existe alguma figura com 202 pontos? Se sim, qual é o termo que lhe corresponde?

Existe alguma figura com 135 pontos? Se sim, qual é o termo que lhe corresponde?

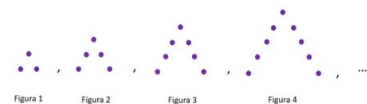
Existe alguma figura com 135 pontos? Se sim, qual é a ordem que lhe corresponde?

Qual é o termo de ordem 100?

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

7



5. Escrevam uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.

5. R: Para determinarmos número de pontos de qualquer figura acrescentamos mais dois pontos da figura anterior.

5. Ao número da figura, acrescenta-se o próximo número, que o resultado é o número de pontos da figura.

5. A regra desta sequência é o dobro do número da figura mais 1.

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

8

SEQUÊNCIAS

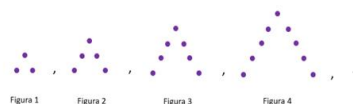
Uma sequência pode-se descrever através de uma lei de formação.

A lei de formação de uma sequência é uma descrição, em linguagem natural, que expressa a relação entre termos da sequência.

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

9



6. Escrevam uma expressão algébrica que traduza a regra que descreveste acima.

⑥ $x \times 2 + 1$
 $x = n^{\circ}$ da Figura

$6 - 2x + 1$

$6 \cdot 2x + 1 = n$

6. $2x + 1 = y$
 $\downarrow$
 m° da figura

⑥ $x + (x + 1)$

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

10

SEQUÊNCIAS

O termo geral de uma sequência numérica é uma expressão algébrica que permite obter cada termo a partir da sua ordem.

O termo geral é o termo de ordem n e representa-se por $a_n, b_n, c_n, \dots$

Para calcular cada um dos termos da sequência, substituímos n pela sua ordem.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
Termo	3	5	7	9	11	13	15	17		

20/02/2024

Professora Estagiária Sofia Reis

11

Desenvolvimento da aula:

1. Entrada dos alunos

A sala vai estar organizada da mesma forma que estava na aula passada. Os alunos vão entrar na sala e vão-se sentar-se no seu respetivo sítio, de acordo com os grupos que foram formados na aula passada.

2. Presenças

Depois de compostos os grupos e de estarem todos sentados, vou verificar se está alguém a faltar e, se estiver, vou marcar falta no GIAE e escrever essa informação no meu dossiê.

3. Exploração do PowerPoint “Aula 71 e 72 – 20-02”

Discussão das resoluções dos alunos da tarefa “O voo das andorinhas”, resolvida na aula passada

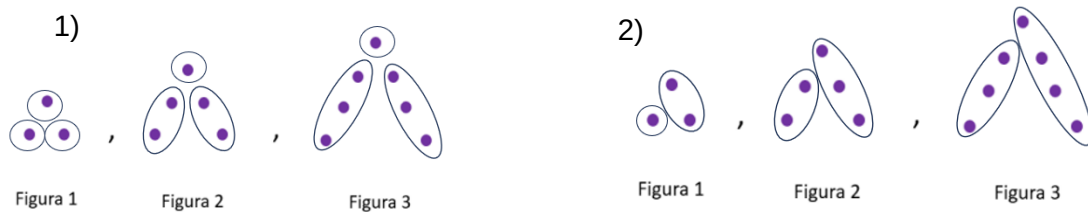
3.1. Discussão em turma das 4 primeiras questões e respetivas resoluções

Para cada questão selecionei todas as resoluções diferentes, para em turma discutirmos sobre a variedade de estratégias que são possíveis haver apenas para uma questão.

O meu objetivo é que percebam que, realmente, não existe uma maneira única e correta de responder.

Alguns pontos importantes para a discussão:

- ✓ Devem apresentar justificações mais completas (cálculos nem sempre justificam tudo)
- ✓ Quando se está perante uma sequência com figuras, que era o caso desta tarefa, deve-se utilizar as mesmas para justificar o pensamento. Por exemplo, usar o facto de cada figura da sequência se obter desenhando um ponto em cima e em cada lado o número de pontos corresponder ao número da figura (1), ou cada figura se obter desenhando o número de pontos correspondente ao número da figura de um lado e do outro o número de pontos corresponder ao número da figura mais um (2).



3.2. Sequência numérica, termo e ordem

Depois de discutidas as primeiras questões, vou questionar os alunos sobre o que entendem por sequência, para poder introduzir o tema. De seguida, vou apresentar o seguinte slide e vou escrever no quadro, com a ajuda dos alunos, o que está sublinhado:

SEQUÊNCIAS

Sequência é uma lista ordenada de figuras, números ou outros elementos.

Sequência numérica é uma lista ordenada de números.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Cada número da sequência é chamado de **termo**
A posição que esse número ocupa na lista é chamada de **ordem**

A cada termo corresponde uma ordem

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Termo	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>11</u>	<u>13</u>	<u>15</u>	<u>17</u>	

Neste ponto, vou explicar aos alunos que não vão passar nada sobre a matéria, pois no final das 3 aulas vou-lhes dar um papel com uma síntese do que foi dado para eles poderem colar no caderno. Apesar de serem aulas um pouco diferentes, continuar a haver matéria e terá que estar registada no caderno. O registo dos sumários também irá ser feito no final das três aulas.

Para perceber se os alunos entenderam bem o conceito de ordem e termo, em conjunto, a turma vai jogar um pequeno jogo de correspondência, onde vão ter que fazer corresponder as questões que estavam na tarefa a outras questões que pedem o mesmo, mas numa linguagem mais

matemática. Por exemplo, a questão “Quantos pontos tem a Figura 100?”, pode ser perguntada de outra forma: “Qual é o termo de ordem 100?”.

Neste ponto, vou questionar os alunos como é que as questões que sobraram poderiam ser feitas, se fossem em linguagem natural.

3.3. Discussão da questão 5 e lei de formação

- Discussão das várias respostas dadas na questão 5 – várias formas de visualizar a sequência.
- Rever o conceito de “lei de formação”

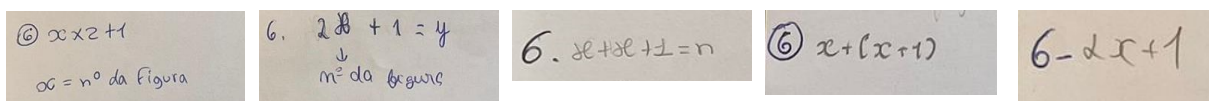
A **lei de formação** de uma sequência é uma descrição, em linguagem natural, que expressa a relação entre termos da sequência.

Alguns pontos importantes para a discussão:

- ✓ A definição de lei de formação diz respeito à relação entre termos da sequência. Assim sendo, vou voltar à questão 5 e às resoluções e questionar os alunos quais das resoluções se encaixava se a questão fosse “Escreve a lei de formação da sequência”. Uma das três resoluções não poderia ser a resposta a essa questão, pois a regra é “o número de pontos é o dobro do número da figura mais um” e essa regra não relaciona os termos da sequência.
- ✓ No entanto, é uma boa regra para se poder encontrar a expressão geral.

3.4. Discussão da questão 6

Para esta questão foram apresentadas diversas respostas, sendo que duas delas não dizem respeito a expressões algébricas. Portanto, neste momento vou pedir aos alunos que recordem o que é uma expressão algébrica e que indiquem quais das respostas que estão apresentadas no PP não estão corretas. (existem duas que dizem respeito a equações)



Alguns pontos importantes para a discussão:

- ✓ Quando estamos perante sequência, normalmente, utiliza-se o n como letra e não o x
- ✓ Deve-se sempre indicar o que representa a letra. Neste caso, n corresponde ao número da figura.

3.5. Termo Geral

Vou projetar uma tabela idêntica à que foi preenchida quando se falou do termo e da ordem e vou perguntar aos alunos o que é que se deve escrever no termo que corresponde à ordem n . Vou relembrar que o termo corresponde ao número de pontos e a ordem ao número da figura,

ou seja, queremos saber quantos pontos tem a figura n . (posso fazer uma ponte com o que aprenderam para determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um n -ágono).

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
Termo	3	5	7	9	11	13	15	17		$2n + 1$

Só depois passo para a definição de termo geral.

4. Iniciar a gravação de áudio

Antes de os grupos começarem a resolver a tarefa, vou pelas mesas e vou dar início às gravações de áudio de cada grupo. A partir deste momento, os alunos começam o trabalho de grupo com o gravador sempre ligado. O momento de discussão em turma também irá ser gravado.

5. Tarefa “Os azulejos”

Vou pedir que um dos elementos de cada grupo retire do “kit estratégico” os enunciados da tarefa. Vou lembrar os alunos que devem escrever as suas respostas apenas no enunciado que tem no cabeçalho a dizer “Grupo X”.

5.1. Resolução da tarefa

Para esta tarefa, os alunos vão ter, aproximadamente, 30 minutos para resolvê-la.

Neste momento da aula, vou andar pela sala a observar e a ouvir o que os elementos de cada grupo discutem e escrevem, interpelando sempre que haja necessidade para tal.

Para esta aula vou optar por dizer aos alunos para seguirem uma estratégia diferente da utilizada na aula passada. Cada elemento do grupo deve pensar numa resolução e escrever no seu enunciado e só depois devem discutir em grupo cada uma delas e chegar a um consenso de qual escrever no enunciado do grupo. As restantes que não forem escolhidas poderão ser escritas no final ou discutidas em turma. Se acharem que devem por mais que uma resposta, poderão fazê-lo.

Nesta aula, vou recolher os enunciados de cada elemento e todas as folhas de rascunho que tiverem sido utilizadas.

Deverá haver um elemento responsável por escrever as respostas, ao invés de todos escreverem.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades:

- ✓ Em perceber qual a regularidade presente na sequência

- ✓ Na questão 2, em determinar o número de azulejos, uma vez que neste caso não podem utilizar o método de recorrência que poderão utilizar para responder à questão 1.
- ✓ Na questão 3, em perceber que devem chegar primeiro ao número da Figura e só depois encontrar o número de azulejos cinzentos e brancos.
- ✓ Na questão 4, em perceber a que corresponde a ordem e o termo da sequência. Para os ajudar devem recorrer a uma tabela, idêntica à que lhes mostrei no PowerPoint, visto no momento da aula anterior.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

- Questionar os alunos
- Dar pistas, sem comprometer o pensamento dos alunos

Importante: Se algum grupo acabar antes de todos os outros, vou pedir que o mesmo tente encontrar estratégias diferentes daquelas que usaram para responderem às mesmas questões. Será algo bastante importante e interessante no momento de discussão.

(a próxima secção encontra-se a cinza porque não aconteceu nesta aula como esta previsto, passando para a próxima)

3.6. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo

Depois de todos os grupos terem finalizado a resolução da tarefa, vou pedir que todos os alunos se posicionem de frente para o quadro para que se possa começar a partilha de ideias e resoluções.

A discussão está prevista demorar o resto da aula.

Pontos importantes para a discussão:

- ✓ Organização dos dados
- ✓ Nesta tarefa existem 3 expressões algébricas importantes, a dos azulejos brancos ($4 + n - 4$ quadrados nos cantos e n quadrados no meio), a dos azulejos cinzentos ($2 + 2n - 2$ quadrados dos lados e 2 linhas com n quadrados) e a dos azulejos no total ($3 \times (n + 2) - 3$ linhas com $n + 2$ colunas)
- ✓ Existem outras tantas expressões equivalentes, dependendo da forma como cada um visualiza e interpreta as figuras
- ✓ Antes de se querer determinar as expressões algébricas de algo, deve-se sempre primeiro tentar entender a sequência e a relação que existe entre termos e a relação que existe entre ordem e termo da sequência.
- ✓ Todas as questões podiam ser resolvidas apenas recorrendo às expressões algébricas, sendo que por vezes, as palavras ou esquemas ajudam a compreender melhor a sequência.

Apêndice 4 – Plano de aula do dia 23/ 02 (3ª aula da intervenção pedagógica)

Aula nº 73 e 74 – 23/02/2024

Sumário: Discussão em turma sobre a tarefa “Os azulejos”. Realização e discussão da tarefa “A festa de aniversário da Rita”.	Alunos a faltar:
Recursos:	
Do professor: • Dossiê do professor • Grelha de observação – trabalho de grupo • Gravadores de áudio (telemóveis e tablets) • Tarefa “A festa de aniversário da Rita” – grupo • “kit estratégico” • PowerPoint “Aula 73 e 74 – 23-02”	Tópicos do manual: <u>Tema 4</u> Sequências. Expressões algébricas e equações.

Tópico: Regularidades, sequências e sucessões

Subtópicos: Lei de formação de uma sequência ou sucessão

Objetivos de aprendizagem:

- Reforçar a sua compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação usando símbolos matemáticos adequados;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência;
- Mostrar que são capazes de determinar o termo geral de uma sequência, bem como termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
- Ser capazes de identificar expressões algébricas equivalentes.
- Determinar uma expressão algébrica que traduza a situação dada;
- Formular e testar conjecturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

Práticas/Ações estratégicas essenciais de Aprendizagens Orientadas para o Perfil dos Alunos:

- Incentivar o recurso a textos, esquemas, tabelas e expressões algébricas para descrever leis de formação de sequências ou sucessões, promovendo a perseverança na atividade matemática.
- Promover a comparação de resoluções e a descrição de raciocínios subjacentes, e, eventualmente, evidenciar como expressões algébricas, ainda que equivalentes, podem refletir estratégias de resolução diferentes.
- Durante a apresentação à turma, incentivar a argumentação, proporcionando, sempre que possível, feedback valorativo das ideias e estratégias dos alunos

Ações a desenvolver com os alunos:

- Responder às perguntas do aluno com outras perguntas que o obriguem a pensar um pouco mais.
- Solicitar a explicação e justificação de ideias, processos e resultados matemáticos.
- Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Capacidades transversais:

- Comunicação matemática
- Raciocínio Matemático
- Resolução de problemas

Momentos da aula:

1. Entrada dos alunos
2. Presenças
3. Discussão da tarefa “Os azulejos”, resolvida na aula passada
4. Iniciar a gravação de áudio
5. Tarefa “A festa de aniversário da Rita”
 - 5.1. Resolução da tarefa
 - 5.2. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo
6. Entrega do “Certificado de Participação”

Slides do PowerPoint usado nesta aula:

Os azulejos

A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



Respondam às perguntas seguintes, apresentando o vosso pensamento por **palavras, esquemas, tabelas, cálculos ou símbolos**. Não se esqueçam que todas as respostas devem estar devidamente justificadas.

Para resolverem esta tarefa, a Sara deixa-vos uma dica:

“Antes de começarem a resolver a tarefa, organizem primeiro os dados que têm. Podem apresentar os dados num esquema, numa tabela ou de qualquer outra forma que achem mais prática. Para vos ajudar na resolução, podem ir acrescentando ao vosso esquema os dados que vão obtendo ao longo da tarefa.”

23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 1

Tabela de observações

Ordem	Azulejos brancos	Azulejos cinzentos
Fig. 1	5	4
Figura 2	6	6
Fig. 3	7	8
Fig. 4	8	10
Fig. 5	9	12
Fig. 6	10	14

Figura 1: 4 cinzentos, 5 brancos
 Figura 2: 6 cinzentos, 6 brancos
 Figura 3: 8 cinzentos, 7 brancos
 Figura 4: 10 cinzentos, 8 brancos

① 9 11 12 15 18
 +3 +3 +3

23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 2

Tabela de observações

Ordem	Azulejos brancos	Azulejos cinzentos
Fig. 1	5	4
Figura 2	6	6
Fig. 3	7	8
Fig. 4	8	10
Fig. 5	9	12
Fig. 6	10	14

Ordem	1	2	3	4	5	6
Azulejos Brancos	5	6	7	8	9	10
Azulejos Cinzentos	4	6	8	10	12	14
Total de Azulejos	9	12	15	18	21	24

23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 3

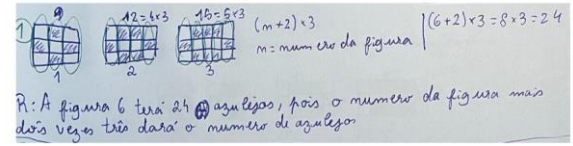


1. Quantos azulejos tem, no total, a Figura 6?
2. A Figura 51 tem quantos azulejos cinzentos e quantos azulejos brancos?
3. Para construir uma figura da sequência apresentada acima, a Sara precisou de 81 azulejos, no total. Quantos azulejos cinzentos e brancos a Sara usou?
4. Considerando a sequência acima, indiquem qual é a ordem do termo da sequência que é igual a 294. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representa o valor que obtiveram?

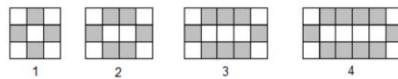
23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 4



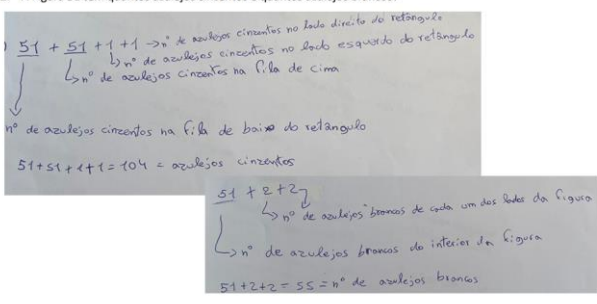
1. Quantos azulejos tem, no total, a Figura 6?



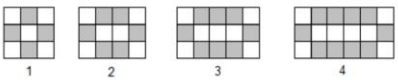
23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 5



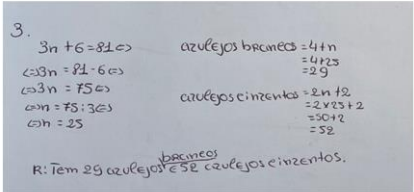
2. A Figura 51 tem quantos azulejos cinzentos e quantos azulejos brancos?



23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 6



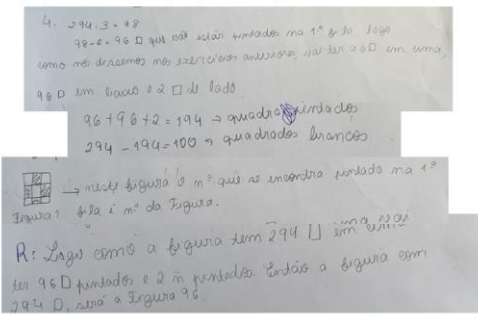
3. Para construir uma figura da sequência apresentada acima, a Sara precisou de 81 azulejos, no total. Quantos azulejos cinzentos e brancos a Sara usou?



23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 7



4. Considerando a sequência acima, indiquem qual é a ordem do termo da sequência que é igual a 294. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representa o valor que obtiveram?



23/02/2024 Professora Estagiária Sofia Reis 8

Desenvolvimento da aula:

1. Entrada dos alunos

A sala vai estar organizada da mesma forma que estava na aula passada. Os alunos vão entrar na sala e vão-se sentar-se no seu respetivo sítio, de acordo com os grupos que foram formados na primeira aula

2. Presenças

Depois de compostos os grupos e de estarem todos sentados, vou verificar se está alguém a faltar e, se estiver, vou marcar falta no GIAE e escrever essa informação no meu dossiê.

3. Discussão da tarefa “Os azulejos”

Para a discussão separei uma resolução de cada grupo.

→ Questão 1: resposta do grupo verde

→ Questão 2: resposta do grupo azul

→ Questão 3: resposta do grupo preto

→ Questão 4: resposta do grupo bordô

Alguns pontos importantes para a discussão:

- ✓ Organização dos dados
- ✓ Nesta tarefa existem 3 expressões algébricas importantes, a dos azulejos brancos ($4 + n$: 4 quadrados nos cantos e n quadrados no meio), a dos azulejos cinzentos ($2 + 2n$: 2 quadrados dos lados e 2 linhas com n quadrados) e a dos azulejos no total ($3 \times (n + 2)$: 3 linhas com $n + 2$ colunas)
- ✓ Existem outras tantas expressões equivalentes, dependendo da forma como cada um visualiza e interpreta as figuras
- ✓ Antes de se querer determinar as expressões algébricas de algo, deve-se sempre primeiro tentar entender a sequência e a relação que existe entre termos e a relação que existe entre ordem e termo da sequência.

4. Iniciar a gravação de áudio

Antes de os grupos começarem a resolver a tarefa, vou pelas mesas e vou dar início às gravações de áudio de cada grupo. A partir deste momento, os alunos começam o trabalho de grupo com o gravador sempre ligado. O momento de discussão em turma também irá ser gravado.

5. Tarefa “A festa de aniversário da Rita”

Vou pedir que um dos elementos de cada grupo retire do “kit estratégico” os enunciados da tarefa. Vou relembrar os alunos que devem escrever as suas respostas apenas no enunciado que tem no cabeçalho a dizer “Grupo X”.

5.1. Resolução da tarefa

Para esta tarefa, os alunos vão ter, aproximadamente, 30 minutos para resolvê-la.

Neste momento da aula, vou andar pela sala a observar e a ouvir o que os elementos de cada grupo discutem e escrevem, interpondo sempre que haja necessidade para tal.

Deverá haver um elemento responsável por escrever as respostas, ao invés de todos escreverem. Cada grupo deve chegar a um consenso sobre quem fica responsável e devem partilhar comigo o nome.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades:

- ✓ Na questão 2, em explicar a expressão algébrica que é apresentada.
- ✓ Em perceber qual é a regra que está expressa.

- ✓ Apenas com as figuras que têm na tarefa podem não conseguir chegar a nenhuma conclusão, pois a figura 1 tem só uma mesa, por isso, não segue a “regra” de ter mesas no meio e na ponta e a figura 2 tem duas mesas, e pela mesma razão é mais difícil de chegarem ao pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

- Questionar os alunos
- Dar pistas, sem comprometer o pensamento dos alunos

Questão 2:

“Essas figuras que estão na tarefa chegam para vocês concluírem alguma coisa? Tentem pensar nos próximos termos da sequência, ou até mesmo desenhá-los”

A minha ideia seria eles desenharem pelo menos as figuras 4 e 5 para perceberem que existem sempre duas mesas nas pontas com 5 cadeiras cada (2×5) e no meio o número de mesas é sempre o número da figura menos 2, e essas mesas têm sempre 4 cadeiras ($4 \times (m - 2)$).

Daí a expressão ser $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$.

- Caso nenhum grupo consiga chegar a uma conclusão na questão 2, avançamos para a discussão da questão 1 e depois discute-se em turma a questão 2.

Importante: Se algum grupo acabar antes de todos os outros, vou pedir que o mesmo tente encontrar estratégias diferentes daquelas que usaram para responderem às mesmas questões. Será algo bastante importante e interessante no momento de discussão. Para além disso, nesta aula vou pedir que se organizem para o momento de discussão, pois cada grupo irá apresentar a sua resolução à turma.

5.2. Discussão em turma sobre as resoluções de cada grupo

Para esta aula vou optar por uma estratégia diferente de discussão. Vou pedir para cada grupo apresentar a sua resolução à turma. Para isso, quando terminarem a resolução da tarefa, vou pedir que se organizem e pensem como vão explicar à turma a resolução que fizeram.

Vou projetar no quadro a sequência das mesas e cadeiras, pois será mais fácil para os grupos seguirem a explicação.

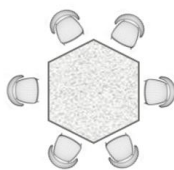


Figura 1

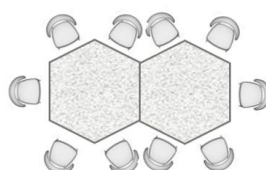


Figura 2

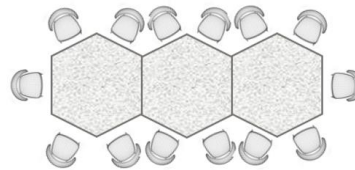


Figura 3

Vou referir que não deve ser uma apresentação de ir ao quadro escrever a resolução e sentar. Podem sim usar o quadro, mas como uma ferramenta de auxílio para a explicação, ou então podem nem usar e optar por explicar apenas oralmente (de maneira que os outros grupos prestem maior atenção).

Terão que explicar à turma a estratégia que utilizaram e como pensaram nela.

No final de cada apresentação, vou incentivar os outros grupos a fazerem questões sobre o que foi apresentado, ou até mesmo a colocarem dúvidas que possam ter ficado pendentes durante a apresentação.

Vou referir que **não devem corrigir, nem apagar nada do que fizeram**. Se repararem que não obtiveram a resposta certa ou que não fizeram da melhor maneira não haverá qualquer problema. O importante é que participem e que partilhem as suas ideias, ainda que possam estar erradas.

Pontos importantes para a discussão:

- ✓ Como explicariam como se determina o número de cadeiras sabendo o número de mesas (para chegarem à expressão algébrica) – este ponto poderá ser discutido pelos próprios grupos, se algum deles usar o termo geral.

- ✓ Para a **questão 2**:

- Se algum grupo chegar a uma justificação sobre a expressão algébrica $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$, mas não faz referência à expressão $4n + 2$, eu vou questionar esse grupo se lhes fosse pedido para escrever a expressão que permitisse determinar o número de cadeiras, se seria a mesma que a Rita apresentou. Se não, vou-lhes pedir que apresentem qual seria.
- se não houver nenhum grupo com uma explicação vou pedir que, antes de pensarmos naquela expressão, me digam qual seria a expressão algébrica a que chegariam se que lhes pedisse o termo geral da sequência. É de esperar que me digam $4n + 2$. A partir disso vou perguntar como chegaram a essa expressão. A resposta deve ser: 2 cadeiras nas pontas e n mesas sempre com 4 cadeiras.

Portanto, se pensaram visualmente para chegarem a essa expressão, vou pedir que tentem visualizar as mesas e cadeiras de uma outra forma, pensar no que é sempre comum em todas e tentar arranjar uma explicação para a expressão $2 \times 5 + 4 \times (m - 2)$.

6. Entrega do “Certificado de Participação”

No final da aula, vou entregar a cada aluno um certificado que refere o sucesso da participação de cada aluno no meu projeto de investigação, de maneira a agradecer o empenho e esforço que demonstraram ao longo do mesmo.

Apêndice 5 – Plano de aula do dia 27/02 (4ª aula da intervenção pedagógica)

Aula nº 75 e 76– 27/02/2024

Sumário: Conclusão da discussão da tarefa “A festa de aniversário da Rita”. Correção do trabalho de casa. Entrega e correção da ficha de avaliação.		Alunos a faltar:
Recursos:		Tópicos do manual: <u>Tema 4</u> Sequências. Expressões algébricas e equações.
Do professor: • Dossiê do professor • Manual MX7 – Parte 2 • Resoluções da tarefa “A festa de aniversário” • Síntese “Equações” • Resoluções das 3 tarefas para entregar aos alunos	Do aluno: • Caderno diário • Manual MX7 – Parte 2	

Tópico: Regularidades, sequências e sucessões

Subtópicos: Lei de formação de uma sequência ou sucessão

Objetivos de aprendizagem:

- Reforçar a sua compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação usando símbolos matemáticos adequados;
- Ser capazes de identificar expressões algébricas equivalentes;
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

Práticas/Ações estratégicas essenciais de Aprendizagens Orientadas para o Perfil dos Alunos:

- Promover a comparação de resoluções e a descrição de raciocínios subjacentes, e, eventualmente, evidenciar como expressões algébricas, ainda que equivalentes, podem refletir estratégias de resolução diferentes.
- Durante a apresentação à turma, incentivar a argumentação, proporcionando, sempre que possível, feedback valorativo das ideias e estratégias dos alunos

Ações a desenvolver com os alunos:

- Responder às perguntas do aluno com outras perguntas que o obriguem a pensar um pouco mais.
- Solicitar a explicação e justificação de ideias, processos e resultados matemáticos.
- Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Capacidades transversais:

- Representações Matemáticas
- Comunicação matemática
- Raciocínio Matemático
- Resolução de problemas

Momentos da aula:

1. Presenças
2. Discussão da questão 2 da tarefa “A festa de aniversário da Rita”
3. Entrega dos enunciados e das resoluções das 3 tarefas feitas ao longo das três últimas aulas
4. Entrega da síntese sobre as sequências

Desenvolvimento da aula:

1. Presenças

Depois de compostos os grupos e de estarem todos sentados, vou verificar se está alguém a faltar e, se estiver, vou marcar falta no GIAE e escrever essa informação no meu dossiê.

2. Discussão da questão 2 da tarefa “A festa de aniversário da Rita”

Na aula passada, no momento de discussão, apenas se discutiu a questão 1, tendo ficado a questão 2 por discutir. Vou perguntar à turma quais dos grupos conseguiram chegar a uma conclusão na questão 2. Sei que dois dos grupos conseguiram chegar a uma resposta, sendo que apenas um deles apresentou uma justificação devidamente correta. Vou escolher esse grupo e um outro, dependendo do que me disserem, se fizeram ou não, para irem apresentar à turma a sua estratégia.

Como nesta aula os alunos já não estão em grupos, vou pedir que escolham um porta-voz para ir apresentar.

Depois dos porta-vozes terem lembrado a resolução do grupo, vou pedir que um a um se posicione em frente ao quadro e que apresente a sua estratégia.

Enquanto isso, vou projetar no quadro o enunciado para que seja mais fácil a turma acompanhar o pensamento do aluno que está a apresentar a resolução.

Segue abaixo a tarefa em questão.

Pontos importante para a discussão:

- Se nenhum grupo fizer referência à expressão $4n + 2$, eu vou questionar esse grupo que se lhes fosse pedido para escrever a expressão que permitisse determinar o número de cadeiras, se seria a mesma que a Rita apresentou. Se não, vou-lhes pedir que apresentem qual seria.

3. Entrega dos enunciados e das resoluções das 3 tarefas feitas ao longo das três últimas aulas

Como já tinha referido nas outras aulas, vou entregar aos alunos as resoluções das 3 tarefas que foram feitas nas aulas (não são as resoluções dos alunos). Os alunos devem guardar esses documentos no portefólio.

4. Entrega da síntese sobre as sequências

Vou também entregar, a todos os alunos, uma síntese sobre sequências (segue abaixo) com toda a informação que foi dada na aula do dia 20 de fevereiro sobre esse tópico.

Sequências

Sequência numérica

Sequência numérica é uma lista ordenada de números.

Cada número da lista é chamado **termo** da sequência, e à posição que cada termo ocupa na sequência chama-se **ordem**.

Exemplo:

3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

- ✓ 5 é o termo de ordem 2.
- ✓ O termo de ordem 7 é 15.
- ✓ A ordem do termo 9 é 4.

Lei de formação de uma sequência

A **lei de formação** de uma sequência é uma descrição, em linguagem natural, que expressa a relação entre termos da sequência.

Exemplo:

3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Uma possível lei de formação poderá ser: O primeiro termo é 3. Cada um dos termos seguintes obtém-se adicionando 2 ao termo anterior.

Se o 7.º termo é 13, então o 7.º termo é $13 + 2$, ou seja, 15.

A uma sequência com uma infinidade de termos chama-se **sucessão**.

Termo geral de uma sequência

O **termo geral** de uma sequência numérica ou de uma sucessão é uma expressão algébrica que permite obter cada termo a partir da sua ordem.

O termo geral é o termo de ordem n e representa-se por $a_n, b_n, c_n, \dots$

n é uma variável que pode representar qualquer número natural positivo.

Exemplo:

3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

O termo geral da sequência é:

$$a_n = 2n + 1$$

Assim, para a sequência apresentada, tem-se, por exemplo:

$$a_{20} = 2 \times 20 + 1 = 40 + 1 = 41 \rightarrow \text{termo de ordem 20 ou 20.º termo}$$

Ordem	1	2	3	4	...	n
Termo	3	5	7	9	...	$2n + 1$
	$a_1 = 3 = 2 \times 1 + 1$	$a_2 = 5 = 2 \times 2 + 1$	$a_3 = 7 = 2 \times 3 + 1$	$a_4 = 9 = 2 \times 4 + 1$	...	$a_n = 2n + 1$

Agora que é conhecido o termo geral da sequência, podemos:

Determinar qualquer termo da sequência a partir da sua ordem:

Por exemplo, o termo de ordem 20 calcula-se substituindo n por 20:

$$2 \times 20 + 1 = 40 + 1 = 41$$

Determinar a ordem de um termo qualquer da sequência:

Por exemplo, a ordem do termo 15 determina-se resolvendo uma equação (o termo geral igualado a 15):

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n &= 15 - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n &= 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= \frac{14}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= 7 \end{aligned}$$

Logo, a ordem do termo 15 é 7.

Apêndice 6 – Termo de Consentimento Livre e Informado

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Como já deve ser do seu conhecimento, as aulas da disciplina de Matemática do(a) seu(sua) educando(a) são lecionadas por três professoras. Duas delas estão inscritas no Mestrado em Ensino de Matemática no Eº ciclo do Ensino Básico e no Secundário, a frequentar Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Neste mestrado, cada uma tem de elaborar um Relatório de Estágio, implementando um projeto de investigação pedagógica, orientado pela professora Louise Lima, docente da FCUP.

A turma do seu(sua) educando(a) vai participar na investigação da professora estagiária Sofia Reis, que pretende compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões.

A recolha de dados é essencial para a concretização deste projeto, pelo que a participação do(a) seu(sua) educando(a) será fundamental. A recolha de produções escritas e de registos de áudio/fotográficos serão importantes para a análise da aplicação do estudo. Salienta-se que a participação neste trabalho em nada interfere com a avaliação do desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática.

Deste modo, solicito a sua autorização para a gravação de áudio e o registo fotográfico, garantindo o anonimato do mesmo, de acordo com as exigências da Comissão Nacional de Proteção de Dados.

Agradeço, desde já, a colaboração e a atenção. Ao dispor para qualquer esclarecimento adicional,

(Sofia Reis)

(Diretor)

23 de janeiro de 2024

----- ✂ -----
Eu, Encarregado(a) de Educação do aluno(a) _____,
n.º ____ da turma do 7.º ano, autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) a recolha de dados em formato de áudio ou fotografia do(a) meu(minha) educando(a) para o desenvolvimento do Relatório de Estágio inserido na Prática de Ensino Supervisionada da professora estagiária Sofia Reis.

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação: _____

Apêndice 7 – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Como já sabes, eu sou professora estagiária e tenho que realizar um trabalho de investigação nas tuas aulas de Matemática. Assim, convido-te a fazeres parte deste meu trabalho. O teu encarregado de educação já permitiu a tua participação. Agora faltas tu.

Com o meu trabalho eu pretendo “compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões”.

Para poder realizar este trabalho, vou lecionar algumas aulas com a tua turma, resolvendo algumas tarefas e, para isso preciso de gravar as nossas aulas, para que não me esqueça de nada e, provavelmente, irei precisar de entrevistar alguns de vocês, desde que queiram colaborar comigo. Se aceitares ser entrevistado, só eu terei acesso às gravações das nossas conversas e tu nunca serás identificado. Nada do que disseres vai ser do conhecimento dos teus professores nem vai interferir com o teu aproveitamento a Matemática.

Os resultados dos estudos vão ser anónimos. Ninguém vai saber se participaste ou não no estudo, nem vão saber nada sobre ti. Não te preocupes.

Podes sempre desistir a qualquer momento, é um direito teu e não haverá nenhum problema se o quiseres fazer, só tens de me informar disso.

Assim, venho-te convidar para colabores comigo neste meu estudo, vais ver que vai ser divertido! Qualquer dúvida que tenhas sobre o que está escrito neste documento, ou qualquer dúvida que tenhas no momento da minha intervenção, não hesites em perguntar.

Obrigada.

Professora Estagiária Sofia Reis

fevereiro de 2024

----- ✂

Eu, _____, aluno(a), nº____, da turma _____ do 7.º ano, **aceito/não aceito** (riscar o que não interessa), participar no trabalho de investigação da professora estagiária Sofia Reis, a realizar nas aulas de Matemática, no âmbito do seu Mestrado.

Percebi que posso desistir, a qualquer momento, de participar no estudo, que ninguém vai ficar chateado comigo.

Assinatura do(a) aluno(a):

Assinatura da professora estagiária:

Apêndice 8 – Questionário sobre a influência do trabalho de grupo

A influência do trabalho de grupo

Este questionário, que te peço que respondas, tem por finalidade conhecer a tua opinião acerca do trabalho de grupo que ocorreu nas aulas dos dias 16, 20 e 23 de fevereiro e da tua aprendizagem no tópico de “Sequências”.

Lê cuidadosamente todas as questões e responde com a tua máxima sinceridade e empenho a todas elas.

Não deixes nenhuma questão por responder.

As tuas respostas ao questionário serão mantidas confidenciais e eu comprometo-me a não divulgar as respostas a não ser para fins do estudo e sem revelar a tua identidade.



Não partilhado

* Indica uma pergunta obrigatória

Nome Anónimo (já utilizado no trabalho em grupo) *

A sua resposta



Nos anos letivos anteriores costumavas fazer trabalhos em grupo, nas aulas de Matemática? *

☐ Sim

☐ Não

O que achaste quando te foi dito que iam haver trabalhos de grupo em algumas aulas de matemática? *

A sua resposta



Num trabalho de grupo, o que achas que faz mais sentido para ti? *

- ☐ Resolver a tarefa sozinho e depois partilhar a tua resolução com o grupo.
- ☐ Resolver a tarefa juntamente com os outros elementos, todos ao mesmo tempo, partilhando ideias e pensamentos.
- ☐ Observar e ouvir primeiro os colegas a discutir e a resolver as questões, e só depois partilhar as tuas ideias.
- ☐ Não partilhar as tuas ideias.
- ☐ Outra:



Atribuição de funções

Antes de começarem a resolver as tarefas, atribuíram funções a cada elemento do grupo? Por exemplo, um elemento ficou responsável pelas respostas na folha do grupo, outro pelo tempo, ... *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Caso respondessem “Sim”:

Atribuição de funções

Porque é que optaram por atribuir funções? *

A sua resposta

Como é que foram decididas as funções de cada elemento do grupo? *

A sua resposta

A dinâmica do teu grupo

Como foi a dinâmica do teu grupo no processo de resolução das tarefas? *

- ☐ As tarefas foram resolvidas em conjunto por todos os elementos do grupo
- ☐ Cada elemento do grupo resolveu completamente a tarefa e só no final é que partilharam as ideias, chegando a uma resposta final
- ☐ Cada elemento respondeu a uma questão e depois juntaram as vossas respostas
- ☐ Resolveram, individualmente, questão por questão e iam discutindo à medida que acabavam de resolver cada pergunta
- ☐ Outra: _____

Porque é que optaram por essa dinâmica? *

A sua resposta _____

Diz em que medida concordas ou discordas com as seguintes afirmações que dizem respeito à **dinâmica do teu grupo**. *

	Discordo totalmente	Discordo	Nem discordo nem concordo	Concordo	Concordo totalmente
O meu grupo esteve focado em todo o processo de realização das tarefas	☐	☐	☐	☐	☐
Foi dada oportunidade de todos os elementos do meu grupo poderem partilhar as suas ideias	☐	☐	☐	☐	☐

Todos os elementos do meu grupo apresentaram estratégias e respostas, ainda que pudessem haver algumas iguais

☐
☐
☐
☐
☐

Um dos elementos do meu grupo assumiu muitas vezes o papel de líder

☐
☐
☐
☐
☐

O meu grupo conseguiu gerir bem o tempo

☐
☐
☐
☐
☐

No meu grupo, foram discutidas todas as ideias que foram apresentadas

☐
☐
☐
☐
☐

Houve algum elemento do meu grupo que não apresentou nenhuma estratégia

☐
☐
☐
☐
☐

Quando algum elemento do meu grupo teve dúvidas, todos os elementos procuraram dar uma resposta ou explicação

☐
☐
☐
☐
☐

Quando algum elemento do meu grupo teve dúvidas, chamamos imediatamente a professora

☐
☐
☐
☐
☐

A comunicação entre os elementos do meu grupo foi boa e importante na partilha e discussão de ideias



A "resposta final" do teu grupo

Sempre que é referido "resposta final", refere-se às respostas que tu e o teu grupo deram na folha de respostas do grupo, que foi entregue à professora.

Depois de terem partilhado as ideias e resoluções, como é que chegaram a uma resposta final? *



Por consenso



Por votação



Algum elemento do grupo impôs que a resposta final fosse a dele



Outra:

Para a resposta final, escolheram a resolução



mais original



com esquemas



com cálculos



mais textual



da única estratégia que encontraram



Outra:

Porque é que optaram por essa estratégia? *

A sua resposta

Houve algum momento em que o grupo teve dificuldade em chegar a um consenso sobre a melhor abordagem para resolver as tarefas? *

☒ Sim

☐ Não

Caso respondessem “Sim”:

A "resposta final" do teu grupo

Como lidaram com o facto de ter havido dificuldade em chegar a um consenso sobre a melhor abordagem para resolver as tarefas? *

A sua resposta _____

A "resposta final" do teu grupo

Conseguiram chegar a uma resposta final em todas as tarefas? *

☒ Sim

☐ Não

Caso respondessem “Não”:

A "resposta final" do teu grupo

Qual foi o **motivo pelo qual o teu grupo não conseguiu chegar a uma resposta final** em alguma questão das tarefas? (Podes selecionar mais do que uma opção, pois o motivo pode ter sido diferente de tarefa para tarefa) *

- ☐ Nenhum elemento conseguiu encontrar uma estratégia
- ☐ Não entenderam o que era pedido na tarefa
- ☐ Não tiveram tempo para encontrar uma estratégia
- ☐ Encontraram uma estratégia, mas não tiveram tempo para a escrever na folha de respostas
- ☐ Com a estratégia que utilizaram não conseguiram chegar a uma resposta que fizesse sentido no contexto da tarefa
- ☐ Outra: _____

O que fizeram quando não conseguiram chegar a uma resposta? *

A sua resposta _____

Discussão das resoluções de cada grupo

As próximas questões estão relacionadas apenas com o momento de discussão e apresentação das resoluções de cada grupo.

Lembra-te que a discussão das tarefas ocorreu da seguinte forma:

- **Tarefa 1:** discussão coletiva, onde a professora selecionou diferentes estratégias para cada questão e foi debatendo com a turma; ao longo desta discussão foi sendo introduzida matéria sobre o tópico "Sequências".
- **Tarefa 2:** discussão coletiva, onde a professora selecionou uma estratégia para cada questão e foi debatendo com a turma.
- **Tarefa 3:** cada grupo foi apresentar as suas estratégias explicando à turma como resolveram a tarefa.

Deixo-te abaixo as três tarefas que realizaste, para te recordares.

Dos diferentes tipos de discussão das tarefas, qual preferiste? *

- ☐ Discussão coletiva, onde a professora apresentou em slides as estratégias de cada grupo
- ☐ Apresentação feita por cada grupo, onde explicavam as estratégias usadas

Discussão feita pelos grupos à turma

Diz em que medida discordas ou concordas com as seguintes afirmações que dizem respeito à **discussão feita pelos grupos à turma**. *

	Discordo totalmente	Discordo	Nem discordo nem concordo	Concordo	Concordo totalmente
A apresentação das resoluções dos outros grupos foi esclarecedora	☐	☐	☐	☐	☐
O facto de terem sido expostas várias resoluções com diferentes estratégias contribuiu para uma compreensão mais abrangente dos conceitos matemáticos empregues no tópico das Sequências	☐	☐	☐	☐	☐

O facto de ter havido uma discussão com os outros grupos permitiu que eu pudesse perceber que existem outras formas de pensar e foi benéfico para as restantes tarefas

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Depois de se ter discutido a primeira tarefa e ter visto diferentes estratégias, fez com que, o meu grupo, na segunda tarefa mudasse de estratégia inspirando-se noutras apresentadas pelos outros grupos

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

A discussão em turma foi uma oportunidade de ver as minhas dúvidas esclarecidas por parte dos meus colegas e não pela professora

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Tens algo mais a acrescentar acerca do momento de discussão da última tarefa? *

A sua resposta

Trabalho de grupo Vs. Trabalho individual

Sentes que teres realizado as tarefas em grupo te trouxe mais vantagens do que se as tivesse feito sozinho? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Sentiste-te mais motivado e com mais interesse em resolver as tarefas por ter sido um trabalho realizado em grupo? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Porque é que achas isso? *

A sua resposta

Preferias ter realizado as tarefas sozinho? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Caso respondessem “Sim”:

Trabalho de grupo Vs. Trabalho individual

Qual o motivo de preferires realizar as tarefas sozinho? *

A sua resposta

Trabalho de grupo Vs. Trabalho individual

Se tivesses feito as tarefas sozinho, achas que as terias conseguido realizar? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

Terias feito da mesma forma? Porquê? *

A sua resposta

Vantagens do trabalho em grupo

O que achas que o trabalho em grupo te ajudou a desenvolver? *

- ☐ Capacidade de argumentar e justificar as tuas escolhas
- ☐ Capacidade de pensar de diferentes formas
- ☐ Entreaajuda entre os colegas
- ☐ Autonomia
- ☐ Responsabilidade
- ☐ Organização
- ☐ Sentido crítico
- ☐ Confiança
- ☐ Gestão de tempo
- ☐ Criatividade
- ☐ Outra: _____

Opinião global

Diz em que medida discordas ou concordas com as seguintes afirmações. *

	Discordo totalmente	Discordo	Nem discordo nem concordo	Concordo	Concordo totalmente
Sinto que aprendi com as tarefas	☐	☐	☐	☐	☐
O facto de ter visto diferentes estratégias de outros grupos influenciou a maneira como o meu grupo resolveu as seguintes tarefas	☐	☐	☐	☐	☐
Senti, que na última tarefa, estava mais confiante na escolha da minha estratégia	☐	☐	☐	☐	☐
O meu grupo utilizou sempre a mesma estratégia para resolver as tarefas	☐	☐	☐	☐	☐
A discussão das tarefas permitiram-me conhecer outras estratégias de resolução	☐	☐	☐	☐	☐
Consigo utilizar as estratégias que aprendi noutras tarefas	☐	☐	☐	☐	☐

Consegui resolver as questões do manual, nas aulas seguintes, com facilidade

☐☐☐☐☐

Senti que a aprendizagem que realizei com as tarefas me ajudou a resolver as questões do manual

☐☐☐☐☐

Chegaste ao fim!!!!

Obrigada por teres respondido ao questionário!
A tua resposta vai ser bastante importante para o meu trabalho! :)

Caso tenhas alguma dúvida sobre o que acabaste de responder ou sobre algo acerca do meu projeto de investigação, podes contactar-me a mim, professora estagiária Sofia Reis, através do meu email:

[Redacted email address]