

Formulação de problemas: Um estudo com alunos do 8.º ano de escolaridade

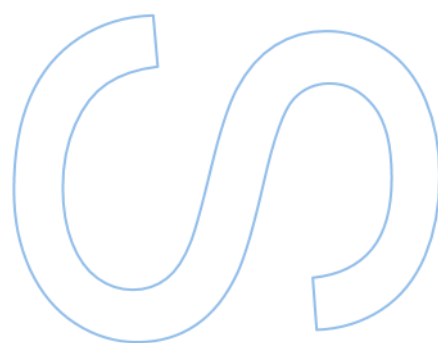
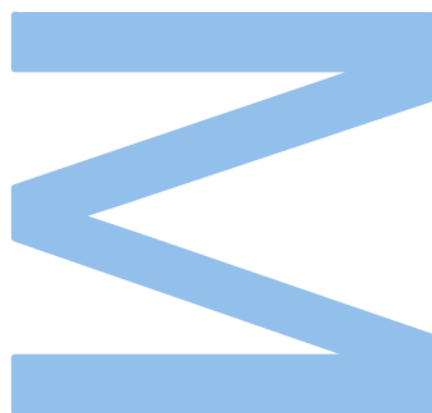
Diana Sofia Gonçalves Ribeiro

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino
Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2024



Formulação de problemas: Um estudo com alunos do 8.º ano de escolaridade

Diana Sofia Gonçalves Ribeiro

Relatório de Estágio realizado no âmbito do Mestrado em
Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no
Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2024

Orientador

Maria de Fátima Duarte Delgado, Professora Auxiliar Convidada,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Agradecimentos

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste relatório de estágio. A colaboração e o apoio que recebi foram fundamentais para este meu percurso.

À professora orientadora, dirijo um agradecimento pela sua disponibilidade, orientação, paciência e pela tranquilidade que me sempre me transmitiu. A partilha da sua sabedoria foi inestimável e muito contribuiu para a concretização deste relatório.

À professora cooperante, expresso o meu reconhecimento pela dedicação e orientação ao longo do meu estágio. A generosidade com que partilhou os seus conhecimentos foi essencial para o meu crescimento e desenvolvimento profissional enquanto futura professora. A sua amizade e constante apoio criaram um ambiente de aprendizagem acolhedor, tornando esta experiência ainda mais enriquecedora.

A todos os alunos envolvidos neste relatório de estágio, um agradecimento especial pela sua participação, que foi fundamental para a recolha de dados que sustenta este trabalho.

À minha amiga e colega de estágio, um especial agradecimento por todos os momentos partilhados ao longo deste ano letivo. Desde as reflexões aos momentos de alegria, a sua amizade e as suas palavras foram essenciais para transformar toda esta experiência numa recordação bonita que levo deste ano letivo.

À pessoa que esteve do meu lado em todos os momentos, que sempre se mostrou disponível para me ajudar, que ouviu todas as histórias que trazia da escola e que leu, vezes sem conta, este relatório de estágio, um agradecimento por todo o seu carinho, paciência, dedicação e por me incentivar todos os dias

Aos meus pais e ao meu irmão, um agradecimento do fundo do coração pelo apoio incansável, por todos os momentos em que me ouviram partilhar angústias e alegrias, pelo incentivo constante, por me incutirem um sentimento de resiliência e por terem sempre uma palavra de conforto nos momentos mais difíceis. Um grande agradecimento também a toda a minha família, que, mesmo distante, esteve sempre ao meu lado, oferecendo apoio e motivação nos momentos em que mais precisei.

Por último, um agradecimento a todos os meus amigos que me acompanharam ao longo desta jornada, foram essenciais na construção do meu percurso ao longo deste ano letivo.

Resumo

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas tem ganho destaque como um tema central na investigação em educação matemática (Vale et al., 2015). Segundo a perspetiva de Silver (1994), é importante que haja a integração da formulação de problemas no desenvolvimento do currículo, mas também na investigação, uma vez que considera que esta atividade é “a natureza do pensamento matemático” (p. 22) e que a mesma constitui um processo central na matemática. Vale e Barbosa (2021) apontam a formulação de problemas como uma atividade benéfica para os alunos, uma vez que promove a consolidação dos seus conhecimentos e capacidades matemáticas. Neste contexto, o objetivo desta investigação foi compreender quais as perceções e dificuldades de alunos face à formulação de problemas.

Enquanto percurso metodológico, foi realizada uma intervenção pedagógica numa turma do 8º ano de escolaridade. Numa primeira fase, procurou-se compreender o significado que os alunos atribuem a um problema matemático, procedendo-se, em seguida, à proposta de três tarefas cujo objetivo passou pela formulação de problemas. Tendo por base uma abordagem qualitativa e interpretativa, os dados integraram: produções escritas dos alunos das tarefas propostas; respostas a entrevistas realizadas em vários momentos da intervenção pedagógica; respostas a um questionário acerca das perceções dos alunos sobre a formulação de problemas; notas de campo das observações realizadas ao longo da intervenção pedagógica.

A análise de dados revelou que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram a falta de compreensão dos conceitos e/ou procedimentos matemáticos que as tarefas de formulação de problemas envolviam, insegurança associada à falta de hábito de trabalho em torno deste tipo de tarefas, expressão de ideias de forma clara, elaboração de problemas com um grau de desafio aceitável para este tipo de tarefas, construção de enunciados que cumprissem determinados requisitos e correção de erro(s) identificado(s) no próprio enunciado do problema criado. Os alunos mostraram, de um modo geral, satisfação em realizar tarefas de formulação de problemas com maior regularidade, uns, porque reconhecem que o trabalho com este tipo de tarefas poderá ajudar a superar as dificuldades que encontraram na sua realização, outros, porque consideraram que é mais fácil formular um problema do que resolvê-lo.

Palavras-chave: problemas, formulação de problemas, capacidades matemáticas, perceções de alunos

Abstract

Along with problem solving, problem formulation has gained prominence as a central theme in mathematics education research (Vale et al., 2015). According to Silver (1994), it is important to integrate problem formulation in the development of the curriculum, but also in research, since he considers that this activity is "the nature of mathematical thinking"(p. 22) and that it is a central process in mathematics. Vale and Barbosa (2021) point to problem formulation as a beneficial activity for students, as it promotes the consolidation of their mathematical knowledge and skills. In this context, the objective of this research was to understand the perceptions and difficulties of students in the formulation of problems.

As a methodological path, a pedagogical intervention was carried out in an 8th grade class. In a first phase, we tried to understand the meaning that students attribute to a mathematical problem, and then proceeded with the proposal of three tasks whose objective was the formulation of problems. Based on a qualitative and interpretative approach, the data included: students written productions of the proposed tasks; answers to interviews conducted at various times of the pedagogical intervention; answers to a questionnaire about students perceptions of problem formulation; field notes of the observations made during the pedagogical intervention.

The data analysis revealed that the main difficulties presented by the students were the lack of understanding of the mathematical concepts and/or procedures that the problem-solving tasks involved, insecurity associated with the lack of work habit around this type of tasks, expression of ideas in a clear way, elaboration of problems with a degree of challenge acceptable for this type of tasks, construction of statements that met certain requirements and correction of error(s) identified in the statement of the problem created. The students showed, in general, satisfaction in carrying out problem-solving tasks more regularly, some because they recognize that working with this type of task can help to overcome the difficulties they encountered in carrying it out, others, because they considered that it is easier to formulate a problem than to solve it.

Keywords: problems, problem formulation, mathematical skills, students perceptions

Índice

Lista de Gráficos.....	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Abreviaturas	ix
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento Teórico.....	5
2.1. Problemas	5
2.2. Resolução de problemas	6
2.3. Formulação de problemas	8
3. Intervenção pedagógica.....	15
3.1. Caraterização do contexto escolar	15
3.2. Descrição da intervenção pedagógica	18
3.3. Intervenção pedagógica no decorrer do tempo.....	23
4. Métodos e procedimentos de recolha de dados	26
4.1. Opções metodológicas	26
4.2. Participantes	27
4.3. Processo de recolha de dados	28
5. Apresentação e discussão dos resultados	32
5.1. Definição de problema – Perceções de alunos.....	32
5.2. Primeira tarefa de formulação de problemas	37
5.3. Segunda tarefa de formulação de problemas	52
5.4. Terceira tarefa de formulação de problemas	70
5.5. Perceções dos alunos face à formulação de problemas.....	81
6. Conclusões e recomendações	86
6.1. Síntese do estudo realizado	86
6.2. Dificuldades dos alunos na formulação de problemas	87
6.3. Perceções dos alunos face à formulação de problemas.....	89
6.4. Limitações do estudo e implicações para a prática e investigação futura	90

Referências Bibliográficas	93
Anexos	97
Anexo 1 – Primeira tarefa de formulação de problemas	97
Anexo 2 – Exemplo de possível resolução da primeira tarefa de formulação de problemas	98
Anexo 3 – Segunda tarefa de formulação de problemas	100
Anexo 4 – Ficha com possíveis problemas nas condições da segunda tarefa de formulação de problemas	101
Anexo 5 – Resolução da ficha com possíveis problemas nas condições da segunda tarefa de formulação de problemas	104
Anexo 6 – Terceira tarefa de formulação de problemas	109
Anexo 7 – Exemplo de possíveis resoluções da terceira tarefa de formulação de problemas	110
Anexo 8 – Definição de Problema Matemático – Perceções de alunos	113
Anexo 9 – Autorização de recolha de dados	114
Anexo 10 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da primeira tarefa de formulação de problemas	115
Anexo 11 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da segunda tarefa de formulação de problemas	117
Anexo 12 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da terceira tarefa de formulação de problemas	119
Anexo 13 – Questionário acerca da formulação de problemas.....	121
Anexo 14 – Guiões das entrevistas realizadas após resposta ao questionário.....	122

Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Distribuição dos níveis de classificação, no 1.º período, da turma selecionada	17
--	----

Lista de Figuras

Figura 1 – Fases da estratégia de formulação de problemas "E se em vez de..." (Brown & Walter, 2005, p. 64)	12
Figura 2 – Cartões: "O que é um problema matemático?"	18
Figura 3 – Primeira tarefa de formulação de problemas.....	19
Figura 4 – Esboço da segunda tarefa de formulação de problemas.....	20
Figura 5 – Segunda tarefa de formulação de problemas.....	21
Figura 6 – Terceira tarefa de formulação de problemas.....	22
Figura 7 – Esquematização da intervenção pedagógica ao longo do tempo.....	25
Figura 8 – Esquematização da realização das entrevistas ao longo do tempo	29
Figura 9 – Definição de problema do Pedro	33
Figura 10 – Definição de problema da Maria	34
Figura 11 – Definição de problema do João.....	34
Figura 12 – Definição de problema da Bruna.....	35
Figura 13 – Definição de problema da Letícia.....	35
Figura 14 – Perceções de alunos sobre problema matemático	36
Figura 15 – Primeira tarefa de formulação de problemas.....	37
Figura 16 – Problema dos lápis e das canetas.....	38
Figura 17 – Resolução da Maria da primeira tarefa de formulação de problemas.....	39
Figura 18 – Resolução da Laura da primeira tarefa de formulação de problemas.....	42
Figura 19 – Segunda tentativa de resolução da Laura da primeira tarefa de formulação de problemas.....	44
Figura 20 – Resolução do Pedro da primeira tarefa de formulação de problemas	46
Figura 21 – Resolução da Filipa da primeira tarefa de formulação de problemas	49
Figura 22 – Segunda tarefa de formulação de problemas.....	52
Figura 23 – Resolução da Vera da segunda tarefa de formulação de problemas	53
Figura 24 – Tarefas de inspiração para a criação do problema retiradas do manual adotado (Conceição & Almeida, p. 122).....	54
Figura 25 – Tarefas retiradas do manual adotado (Conceição & Almeida, pp. 122–123)	56
Figura 26 – Tarefas retiradas do manual adotado (Conceição & Almeida, pp. 126–127)	56
Figura 27 – Tarefa de inspiração para a criação do problema retirada do manual adotado (Conceição & Almeida, p. 127)	59
Figura 28 – Resolução do João da segunda tarefa de formulação de problemas	59

Figura 29 – Tarefa de inspiração para a criação do problema retirada do manual adotado (Conceição & Almeida, p. 127)	60
Figura 30 – Resolução da Bianca da segunda tarefa de formulação de problemas	63
Figura 31 – Exemplificação do triângulo desenhado pela Bianca	64
Figura 32 – Colocação da prateleira no apoio.....	65
Figura 33 – Resolução do Pedro da segunda tarefa de formulação de problemas	67
Figura 34 – Exemplificação do desenho feito pelo Pedro na resolução da segunda tarefa de formulação de problemas.....	67
Figura 35 – Terceira tarefa de formulação de problemas	70
Figura 36 – Resolução da Laura da terceira tarefa de formulação de problemas.....	72
Figura 37 – Resolução do Carlos da terceira tarefa de formulação de problemas	74
Figura 38 – Resolução da Vera da terceira tarefa de formulação de problemas	77
Figura 39 – Resolução da Maria da terceira tarefa de formulação de problemas (parte 1)	78
Figura 40 – Resolução da Maria da terceira tarefa de formulação de problemas (parte 2)	79

Lista de Abreviaturas

APM	ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
NCSM	NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

1. Introdução

“A profissão de Circo é quase como a Matemática.

Uma parte é ciência exata, a outra é criativa.”

(Teresa Ricou, 2013)¹

A citação com a qual decidi iniciar este capítulo destaca a importância de dois aspetos fundamentais nos processos de ensino e aprendizagem da matemática: os saberes específicos desta área, por um lado, e a criatividade e imaginação, por outro. Quero com isto dizer que a par da importância da aprendizagem dos saberes específicos, estão a criatividade e a imaginação como processos mentais essenciais para desenvolver novas abordagens perante situações matemáticas diversificadas e deste modo proporcionar aprendizagens mais significativas. Com esta simples citação, podemos compreender o quão a criatividade é importante na matemática e o porquê de o pensamento criativo ser uma das áreas de competências do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2017). Neste documento, reconhece-se que ao pensamento criativo estão associadas competências que impliquem que os alunos sejam capazes, por exemplo, de “desenvolver novas ideias e soluções, de forma imaginativa e inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal, aplicando-as a diferentes contextos e áreas de aprendizagem” (Martins et al., 2017, p. 21). Deste modo, estimular os alunos a serem criativos e inovadores e a mostrarem desenvoltura e flexibilidade é fundamental para que haja uma boa compreensão da matemática.

Quando iniciei a minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), já tinha em mente um tema que exigiria dos alunos o uso da sua criatividade e o envolvimento ativo na sua aprendizagem. A primeira ideia que me ocorreu foi a criação de um jogo, com o formato do jogo da glória, a ser jogado em sala de aula para promover a consolidação de diferentes conteúdos matemáticos. Este jogo seria desenvolvido pelos alunos que, aquando do final de cada capítulo lecionado, dedicar-se-iam à criação de questões pertinentes relacionadas com o mesmo, em grupo. Penso que a conceção do jogo da glória não só permitiria aos alunos aplicarem os conhecimentos adquiridos de forma criativa, mas também promoveria a sua participação ativa no processo de ensino e aprendizagem. Este jogo poderia também ser jogado com o intuito de reforçar os

¹ Entrevista a Teresa Ricou, conduzida por Carlos Marinho, publicada a 1 de setembro de 2013, no Clube de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática: <https://clubespm.pt/news/2449/>

conteúdos já abordados. Ainda assim, a concretização do mesmo e a compreensão sobre qual o impacto que o mesmo teria na aprendizagem dos alunos não seria algo fácil de investigar, no curto espaço de tempo da PES, pelo que decidi alterar a minha ideia.

O meu objetivo foi sempre desenvolver uma intervenção pedagógica em que envolvesse os alunos na criação de algo que permitisse favorecer a sua própria aprendizagem. Neste âmbito, considerei investigar a formulação e a resolução de problemas, até porque existem alguns estudos que refletem sobre a importância da relação entre estas duas capacidades. No entanto, foi esta mesma constatação que me fez questionar qual seria o propósito de investigar algo que me pareceu tão comumente investigado. Sendo assim, continuei com a ideia de investigar a formulação de problemas e não tão diretamente a resolução dos mesmos.

À medida que fui lendo alguns artigos sobre a formulação de problemas, constatei que na maioria das vezes, o estudo da mesma está associado a alguma capacidade, como a criatividade ou o pensamento crítico, por exemplo. Deste modo, começou a despertar o meu interesse sobre a formulação de problemas, nomeadamente, sobre que dificuldades surgiam da parte dos alunos quando criavam os seus problemas, se os alunos gostavam destas atividades, se os professores deveriam propor mais este tipo de tarefas na sala de aula ou se se trata de tarefas que poderiam gerar desinteresse, por parte dos alunos, nas aulas de matemática.

Um dos aspetos que tem vindo a ser destacado nas orientações curriculares é a formulação de problemas. Surgindo como parte integrante da construção do saber (APM, 1998), aliada à resolução de problemas, a formulação de problemas a partir de situações e contextos diversos é referida nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021) como um objetivo de aprendizagem. Ainda assim, até ao momento de avançar com a minha intervenção pedagógica, notei a ausência deste tipo de atividades nas turmas do 8º ano de escolaridade, atribuídas na PES, e também nos manuais adotados para esse mesmo ano.

Deste modo, considerei que dar a oportunidade aos alunos de participarem em atividades de formulação de problemas poderia ser uma forma de mudar a dinâmica de sala de aula orientada apenas para a resolução de problemas, e, deste modo, permitir-lhes assumir um papel diferente do papel de “resolvedor” de problemas. Tal como defendem Brown e Walter (2005), “a formulação de problemas (...) tem o potencial de

criar uma orientação completamente nova em relação a quem está no comando e ao que tem de ser aprendido” (p. 5).

Foi a junção do meu interesse pela formulação de problemas com a oportunidade de proporcionar momentos de aprendizagem diferenciados em sala de aula, que me permitiu tomar a decisão de desenvolver uma intervenção pedagógica baseada nesta temática. Assim, defini como objetivo deste estudo compreender quais as perceções e dificuldades de alunos face à formulação de problemas, numa turma do 8.º ano de escolaridade.

Sendo assim, a minha investigação foi guiada pelas duas seguintes questões de investigação:

1. Quais as dificuldades encontradas pelos alunos ao formular problemas matemáticos?
2. Quais as perceções dos alunos face à formulação de problemas?

A investigação realizada revela, deste modo, algumas das dificuldades dos alunos face a alguns momentos de formulação de problemas propostos, bem com a perceção dos mesmos acerca desses momentos.

Este relatório de estágio está organizado em seis capítulos. No primeiro capítulo, *Introdução*, são delineados os objetivos da investigação, as questões que a orientam e a relevância do estudo. Além disso, este capítulo oferece uma visão global do relatório de estágio, apresentando a sua estrutura de forma sintética.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico*, são abordados aspetos teóricos relacionados, essencialmente, com três temas essenciais para a minha investigação: problemas, resolução de problemas e formulação de problemas. São também abordados estes temas segundo as orientações curriculares e tendo por base literatura especializada em educação matemática.

No terceiro capítulo, *Intervenção Pedagógica*, é fornecida uma caracterização do contexto escolar e uma descrição da intervenção pedagógica, tal como da sua realização ao longo do tempo. Neste capítulo, há uma descrição das tarefas aplicadas no âmbito da intervenção, dos recursos utilizados e uma breve menção à recolha de evidências produzidas pelos alunos.

No quarto capítulo, *Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados*, são apresentadas e justificadas as opções metodológicas, tais como os métodos e procedimentos de recolha de dados, e é descrito o processo de análise dos dados recolhidos. Além disso, é referido como foram tratadas as questões de natureza ética relevantes para a investigação.

O quinto capítulo, *Análise de Resultados*, é dedicado à apresentação dos resultados com base nos dados e evidências recolhidas e respetiva análise, tendo sempre por base o objetivo e as questões de investigação previamente estabelecidas. São apresentadas também evidências que julgo fundamentais para que se compreendam as minhas interpretações dos dados.

No sexto capítulo, *Conclusões e Recomendações*, é realizada uma síntese do estudo e são apresentadas as principais conclusões tendo em conta as questões de investigação e a literatura revista. É também apresentada uma reflexão sobre a importância deste estudo para o meu desenvolvimento profissional. Acrescento ainda algumas recomendações para futuras investigações, assim como partilho determinados aspetos que considero terem-se constituído como limitações no desenvolvimento deste trabalho.

Por último, são apresentadas as referências utilizadas para a realização deste relatório de estágio e um conjunto de anexos que entendo serem essenciais para uma melhor compreensão do estudo relatado.

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo, são apresentados fundamentos teóricos, que sustentaram a condução da pesquisa realizada, relacionados com três temas associados à problemática da investigação: (i) problemas; (ii) resolução de problemas; (iii) formulação de problemas.

2.1. Problemas

No contexto educacional, a definição do conceito de problema matemático não é totalmente consensual. Na perspetiva de Pólya (1945), os problemas matemáticos destacam-se como uma ferramenta poderosa constituindo uma “grande oportunidade” (p. v) para um professor, perante os seus alunos, “incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente” (p. v). Estar perante um problema significa procurar, de forma consciente, uma ação apropriada para atingir um objetivo claro, mas não atingível de forma imediata (Pólya, 1981). O mesmo autor afirma ainda que “onde não há dificuldade, não há problema” (Pólya, 1981, p. 117), pelo que a presença de dificuldade é algo inerente à noção de problema.

Na visão de Kantowski (1974, como citado em Kantowski, 1981), um problema é uma situação que se diferencia de um exercício, pelo facto de que quem o resolve não possui um procedimento ou algoritmo que, inequivocamente, conduzirá a uma solução. A abordagem de Ponte (2005) adota princípios semelhantes aos de Kantowski e Pólya, sugerindo que a definição de problema não está relacionada exclusivamente com o contexto em que o mesmo é colocado, mas sim com a existência de um processo imediato para resolvê-lo. Ou seja, se um aluno possui um método imediato para abordar uma questão, então, para ele, essa questão não é um problema. No entanto, se tal método não existe, a questão classifica-se como um problema. Além disso, Ponte (2005) salienta a importância de o aluno ter algum conhecimento sobre o contexto do problema.

De acordo com Boavida et al. (2008), a natureza de um problema reside na incapacidade de resolvê-lo, utilizando “processos conhecidos e estandardizados” (p. 15). Um problema, segundo esses autores, envolve a procura de estratégias para alcançar a solução e possui várias características, entre as quais, ser compreensível, apesar de não solucionável imediatamente, ter mais de um processo de resolução e abranger temas diversos.

Também Cai e Lester (2010) mencionam algumas características dos problemas matemáticos. No entanto, segundo a perspetiva dos autores, essas características não têm de ser verificadas em todos os problemas, já que a sua presença depende do

propósito educacional dos mesmos. De entre essas características destacam-se: a incorporação de “ideias matemáticas importantes e úteis”, a posse de um nível cognitivo elevado, a contribuição para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, a apresentação de múltiplas soluções e incentivo à tomada de decisões, a existência de múltiplas estratégias de resolução, a conexão com outros aspetos matemáticos relevantes, o desenvolvimento da capacidade de usar matemática e o envolvimento dos alunos (Cai & Lester, 2010, p. 1).

O conceito de problema adotado neste estudo é fundamentado nas contribuições de diferentes autores (Pólya, 1945, 1981; Ponte, 2005; Boavida et al., 2008) já expostas anteriormente, reconhece um problema matemático como uma situação desafiadora que estimula a procura de estratégias a fim de alcançar um objetivo definido, porém não imediatamente acessível. Esta definição realça a inexistência de um procedimento ou padrão que poderiam garantir uma solução imediata.

2.2. Resolução de problemas

As orientações curriculares, tanto a nível internacional quanto a nível nacional, têm enfatizado a importância da resolução de problemas no processo de aprendizagem da matemática. Um dos impulsos significativos para que lhe fosse atribuída essa importância foi o documento *Position Paper on Basic Mathematical Skill* (NCSM, 1977) que referia que “aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar matemática” (p. 3).

Em 2000, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), refere, no documento *Principles and Standards for School Mathematics*, que “a resolução de problemas é parte integrante de toda a aprendizagem matemática” (p. 52). Deste modo, este mesmo documento sugere que a resolução de problemas “não deve ser uma parte isolada do programa de matemática” (NCTM, 2000, p. 52). De acordo com o NCTM (2000), a resolução de problemas estrategicamente selecionados e cuidadosamente sequenciados é um meio essencial para a aprendizagem matemática. Portanto, segundo o mesmo, o professor deve usar a resolução de problemas como uma ferramenta para envolver os alunos em ideias matemáticas importantes, com o intuito de desenvolver uma compreensão profunda dessas mesmas ideias. Ainda tendo por base a perspetiva presente no texto do NCTM (2000), resolver um problema implica envolver-se na realização de uma tarefa para a qual o método de resolução não é conhecido antecipadamente pelo que, para encontrar uma solução, os alunos devem utilizar os seus conhecimentos existentes e este processo proporcionará, na maioria das vezes, o desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos.

Em Portugal, em 1988, a APM assumiu que a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da matemática em todos os níveis escolares. Nesta linha de ideias, Abrantes (1989) salienta que proporcionar aos alunos oportunidades para resolver, explorar, investigar e discutir problemas, numa ampla variedade de situações, é fundamental para que a aprendizagem da matemática constitua uma experiência positiva e significativa.

A partir da década de 1990, a resolução de problemas foi incorporada nos programas de educação matemática do país sendo considerada um dos aspetos fundamentais da matemática. Em 1990, no programa de matemática do ensino básico para o 3.º ciclo, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas é apontando como “eixo organizador do ensino na matemática”, tendo como objetivo “dotar o aluno de um recurso que o ajude a resolver situações de natureza diversa e a enfrentar com confiança situações novas” (ME, 1990, p. 194).

No ano de 2007, no *Programa de Matemática do Ensino Básico*, a resolução de problemas assume-se, a par com a comunicação matemática e o raciocínio matemático, como uma das “capacidades transversais a toda a aprendizagem matemática” (ME, 2007, p. 1). Este documento perspetiva a resolução de problemas como “uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, aplicarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático.” (ME, 2007, p. 6).

Ainda assim, e depois da constante valorização da capacidade de resolução de problemas na aprendizagem da matemática, a mesma perdeu destaque no *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico* (Bivar et al., 2013), que foi homologado em junho de 2013, já que, neste documento, parece entender-se problemas como exercícios de aplicação (Vale et al., 2015). Não é totalmente claro o significado de resolução dos problemas para o *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, no entanto, sugere essa perspetiva, divergindo da opinião de alguns autores já referidos. Segundo este documento:

A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (Bivar et al., 2013, p. 5)

Nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*, a resolução de problemas é reafirmada como uma atividade central da matemática “na qual todos os alunos devem poder tornar-se, progressivamente, mais eficazes” (Canavarro et al., 2021, p. 3). Conforme este documento, o desenvolvimento desta capacidade envolve a mobilização de conhecimentos matemáticos já existentes, para diversos contextos e situações, estimulando a procura de estratégias apropriadas para alcançar soluções e, consequentemente, promovendo o aumento da autoconfiança. Neste documento, destaca-se a relevância das capacidades matemáticas transversais, tais como a resolução de problemas. Essas capacidades são integradas em todos os anos de escolaridade, sendo que não se pretende que as mesmas sejam trabalhadas de forma isolada, mas como parte integrante de todos os temas do currículo da disciplina de matemática.

A resolução de problemas em matemática pode apresentar diversas dificuldades, conforme apontado por vários autores, entre os quais Phonapichat et al. (2013). Destas dificuldades mencionadas destaca-se a falta de imaginação e experiência, por parte dos alunos, que impede a compreensão do problema na sua totalidade. Do mesmo modo, problemas na leitura e compreensão resultam na incapacidade de identificar os elementos-chave do problema e consequente tradução dos mesmos para a linguagem matemática. Phonapichat et al. (2013) salientam que a desmotivação e a falta de interesse dos alunos provocada pela complexidade e extensão dos problemas também evidenciam uma dificuldade significativa. Além disso, a falta de exposição dos alunos a problemas relacionados com situações do dia-a-dia e a concentração excessiva nos manuais escolares e nos exemplos aí fornecidos, negligenciado uma compreensão mais ampla dos princípios subjacentes a cada problema, são também entraves na resolução de problemas.

2.3. Formulação de problemas

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas tem ganho destaque como um tema central na investigação em educação matemática (Vale et al., 2015). No entanto, segundo vários autores, a investigação sobre formulação de problemas ainda se encontra numa fase inicial (e.g. Cai & Hwang, 2020).

De acordo com Silver (1994), um argumento para focar a atenção curricular e a investigação no processo de formulação de problemas é que a formulação é um processo central na matemática e “é a natureza do pensamento matemático” (p. 22). Numa perspetiva idêntica, Cai et al. (2015) argumentam que se um dos objetivos da

educação é desenvolver as diferentes formas do pensamento dos alunos, então a formulação de problemas deve constituir uma parte importante do currículo. Em conformidade com a abordagem de Vale e Barbosa (2021), formular problemas traz benefícios para os alunos, uma vez que promove a consolidação dos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, como a resolução de problemas. Os processos envolvidos na formulação de problemas podem ser variados tendo em conta o tipo de formulação que se tem em consideração. Sendo assim, a formulação pode envolver diferentes técnicas para reformular problemas existentes ou para criar problemas a partir de situações conhecidas, utilização de heurísticas e exploração da realidade do ponto de vista matemático (Cai et al., 2015).

Várias são as abordagens acerca do significado de formulação de problemas e, por essa razão, Mamona-Downs e Downs (2005) refletem sobre a necessidade de encontrar uma perspetiva mais adequada em relação a esse mesmo conceito, de modo que seja possível estabelecer-se uma definição padrão para esta atividade. Para Silver (1994), a formulação de problemas refere-se quer à criação de novos problemas, quer à reformulação de problemas já existentes, o que significa que a formulação de problemas pode ocorrer, antes, durante ou depois da resolução de um problema. Este mesmo autor argumenta que num processo de ensino e aprendizagem que inclui oportunidades para propor e resolver problemas, os professores podem ajudar os alunos a desenvolver capacidades como flexibilidade e abordagens mais criativas na sua atividade matemática (Silver, 1997). Sendo assim, parece estabelecer-se uma relação entre a resolução e formulação de problemas matemáticos com a criatividade.

Na perspetiva de Koichu e Kontorovich (2013), a formulação de problemas constitui uma verdadeira atividade matemática, sendo que novos problemas podem surgir, de forma autêntica, no processo de ensino e aprendizagem. Também para estes autores, a formulação de problemas pode abranger reformulações de outros ou a criação de novos. Os autores consideram que o “foco na autenticidade de situações e contextos, em que são propostas tarefas de formulação de problemas, pode motivar os alunos a melhorar as suas capacidades nessas atividades” (Koichu & Kontorovich, 2013, p. 84).

As autoras Vale e Barbosa (2021) apresentam também uma conceção sobre a formulação de problemas, considerando-a o processo pelo qual “os alunos constroem interpretações matemáticas de situações concretas, com base nas suas experiências e conhecimentos matemáticos pessoais” (p. 4). A formulação de problemas, segundo Vale e Pimentel (2012), “tem sido uma componente da aula de matemática bastante

negligenciada, mas essencial na aprendizagem da matemática” (p. 348). As mesmas autoras argumentam que espaços de aprendizagem que proporcionem oportunidades para a resolução de problemas matemáticos, utilizando diversas abordagens, e para a formulação de novos problemas, a partir de situações apresentadas, pode envolvê-los em “explorações matemáticas ricas” (Vale & Pimentel, 2012, p. 348). Para além de poderem motivar e estimular os alunos, podem aumentar a sua disposição e interesse pela matemática.

O desenvolvimento da criatividade matemática associado à atividade de formulação de problemas, referido por Silver (1997), é uma ideia avançada também por Vale e Barbosa (2021). Estas autoras afirmam ainda que essa atividade possibilita estabelecer conexões entre o quotidiano e a matemática, o que possibilita aos alunos uma perceção acerca da aplicabilidade da matemática.

Em Portugal, nas orientações curriculares para a disciplina de matemática, a formulação de problemas tem surgido com diferentes destaques. No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), a formulação de problemas surge associada à capacidade transversal de resolução de problemas. A mesma destaca-se como uma atividade a incentivar junto dos alunos, partindo de situações matemáticas ou não matemáticas. Entretanto, em 2013, no *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (Bivar et al.), a par da perda de protagonismo da resolução de problemas, já referida anteriormente, surge também a desvalorização da formulação de problemas que não é considerada neste documento. Mais recentemente, nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico* (Canavarro et al., 2021), novamente associada à resolução de problemas, ressurgiu a formulação de problemas como uma ação estratégica de ensino do professor. Neste documento, é dada mais ênfase à formulação de problemas que nos dois documentos anteriormente referidos, já que é salientada a importância da mesma como promotora de “novas ideias individuais ou resultantes da interação com os outros” (Canavarro et al., 2021, p. 12).

A relação entre a formulação de problemas e a resolução de problemas tem sido amplamente investigada, como destaca Calabrese et al. (2022). Segundo os autores, existem evidências de que a formulação de problemas tem um impacto positivo na capacidade de resolução de problemas e não parece haver evidências substanciais que sugiram que a formulação de problemas tenha um impacto negativo. Silver e Cai (1996), baseando-se na sua investigação, estabelecem uma conexão entre essas duas capacidades, argumentando que, geralmente, bons resolvidores de problemas são

bons formuladores de problemas. Na perspetiva de Mamona-Downs e Downs (2005), “a formulação de problemas é uma parte intrínseca da resolução de problemas” (p. 391). Para estes autores, a resolução e a formulação de problemas estão interligadas e complementam-se, uma vez que não é possível resolver um problema sem que este tenha sido formulado e a resolução de um problema é, muitas vezes, um estímulo para formular novos problemas.

A importância da formulação de problemas, na perspetiva de Boavida et al. (2008), está associada tanto ao facto de permitir a consolidação dos conceitos matemáticos nela envolvidos, quanto a contribuir para a “compreensão dos processos suscitados pela sua resolução” (p. 27). Nesta visão, a formulação de problemas contribui para a resolução dos mesmos. Segundo as autoras, é importante destacar que o papel do professor é distinto em ambas as situações uma vez que, na resolução de problemas, o professor desempenha o papel de criar questões, orientando os alunos para responderem a essas mesmas questões e, na formulação de problemas, os alunos são desafiados a problematizar situações, sendo que essa problematização pode ocorrer de forma solicitada ou espontânea. Desta forma, e reconhecendo, tal como Boavida et al. (2008), que momentos de formulação de problemas são experiências matematicamente ricas, cabe ao professor criar oportunidades para os alunos se envolverem nesse tipo de atividades, ou seja, o professor deve aproveitar as situações de sala de aula, provocadas ou ocasionais, para incentivar a formulação de problemas pelos alunos.

Para se proceder à formulação de problemas podem ser seguidas diferentes estratégias. Neste trabalho, são avançadas as estratégias apresentadas por Brown e Walter (2005) e Sullivan e Liburn (2002). Brown e Walter (2005) defendem que a formulação de problemas pode ser iniciada com quase tudo, isto é, com definições, teoremas, perguntas, afirmações, entre outras situações. Os mesmos autores apresentam duas estratégias: uma que constitui a primeira fase de formulação de problemas, denominada *Aceitando os dados*, e a outra que constitui uma segunda fase, denominada por *E se em vez de...* (Brown & Walter, 2005). A primeira estratégia envolve a formulação de problemas a partir dos dados fornecidos, aceitando-os sem alterações, e partindo deles para formular questões. Neste tipo de estratégia, o formulador é influenciado pela sua própria experiência. De acordo com os autores a que me reporto, após a aquisição dos dados por qualquer método, estes podem ser vistos como tendo uma “vida própria” (Brown & Walter, 2005, p. 26). Trata-se de uma abordagem que permite que o foco esteja nas perguntas que podem ser construídas a partir dos dados e não na recolha de dados em si. Brown e Walter (2005) destacam ainda que, aquando

da formulação de problemas, não só são elaboradas questões, mas também são feitas observações e formuladas conjecturas que, frequentemente, conduzem a novas questões.

A segunda estratégia avançada também por Brown e Walter (2005), inicia-se com a seleção de um ponto de partida, como um material concreto, uma definição ou um teorema, para a formulação de problemas. O passo seguinte consiste em examinar cada condição fornecida no problema e questionar o que aconteceria se tal condição não fosse fornecida ou se fosse fornecida outra no seu lugar. Com base nessas considerações, são formuladas novas questões, explorando assim as alternativas para as condições fornecidas inicialmente. Em seguida, ocorre a análise das novas questões formuladas, acompanhada da tentativa de resposta às mesmas. Brown e Walter (2005) resumem esta estratégia com algumas palavras-chave, como mostra a Figura 1.

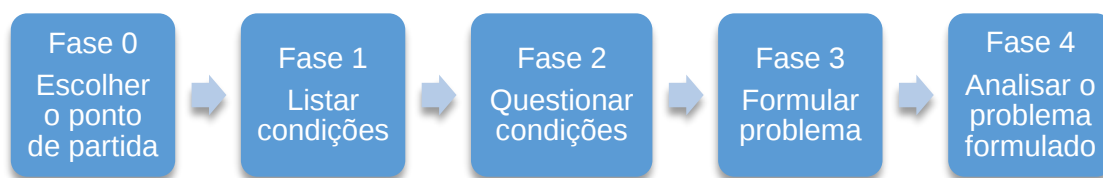


Figura 1 – Fases da estratégia de formulação de problemas *E se em vez de...* (Brown & Walter, 2005, p. 64)

Como resultado desta última estratégia, o problema inicial pode tornar-se num problema mais aberto, aquilo que era conhecido inicialmente pode tornar-se desconhecido e o contexto pode ser alterado, mantendo-se ainda a estrutura do problema original.

Apesar destas estratégias, Brown e Walter (2005) destacam que nem todas as questões necessitam ser claras e facilmente compreensíveis quando são inicialmente apresentadas. Neste sentido, sugerem que pode ser positivo a formulação de problemas ambíguos, dado que pode promover a adoção de uma postura leve no que toca a explorar e, para além disso, o que é ambíguo num contexto pode gerar outros contextos onde a situação se torna mais clara.

Sullivan e Liburn (2002) também abordam estratégias relacionadas com o desenvolvimento de atividades de formulação de problemas. Para estes autores, uma boa questão requer mais do que relembrar um facto ou reproduzir um procedimento; uma boa questão ultrapassa a memorização, devendo ter mais do que uma solução possível. Além disso, salientam que as questões devem proporcionar aprendizagem tanto aos alunos, ao respondê-las, quanto ao professor, ao analisar as tentativas de resposta de cada estudante. Tendo por base esta ideia do que se entende por boa

questão, Sullivan e Liburn (2002) apontam dois métodos para a formulação de questões: *Trabalhar para trás* e *Adaptar uma questão padrão*. Ambos estão delineados em três diferentes etapas. No método *Trabalhar para trás*, são enunciadas as seguintes etapas: i) identificar um tema; ii) pensar numa questão fechada e escrever a sua solução; iii) criar uma questão que inclua a solução. No método *Adaptar uma questão padrão*, as três etapas são: i) identificar um tópico; ii) pensar numa questão padrão; iii) adaptar a questão padrão tornando-a uma boa questão. De acordo com Sullivan e Liburn (2002), quanto mais experiência houver com boas perguntas, mais fácil se tornará a tarefa de criá-las.

Solicitar aos alunos para elaborarem os seus próprios problemas resulta numa atividade interessante que envolve vários processos cognitivos. Segundo Christou et al. (2005), é possível categorizar o pensamento dos alunos durante a formulação de problemas em quatro processos distintos. O primeiro é o processo de *edição* que se refere à modificação de informações. Esta etapa está principalmente associada a tarefas que exigem dos alunos a formulação de um problema com base em dados fornecidos, histórias ou sugestões. Segue-se o processo de *seleção* que está relacionado com tarefas que requerem a formulação de problemas ou questões adequadas a partir de uma resposta fornecida. O terceiro processo é designado *compreensão e organização* e exige dos alunos a compreensão do significado subjacente a um problema e a organização coerente das informações envolvidas. Por último, o quarto processo é a *interpretação* que requer dos alunos a formulação de problemas ou questões apropriadas a partir de gráficos, imagens, diagramas, envolvendo a interpretação de informações.

Bommel et al. (2021) desenvolveram uma investigação no sentido de compreender os sentimentos e as formas como os alunos se sentiam quando eram solicitados a refletir acerca da sua experiência na formulação de problemas. Os alunos expressaram sentimentos positivos quer em relação à resolução como à formulação de problemas. No entanto, também notaram que, na perspetiva dos mesmos, formular uma questão não é suficiente uma vez que para sentirem que o seu trabalho está completo, após a formulação, o problema tem de ser resolvido por alguém.

Relativamente às dificuldades sentidas na formulação de problemas, Gonçalves e Viseu (2013), a partir da sua investigação, afirmam que podem estar associadas sobretudo, à falta de hábito nesta atividade. Segundo os mesmos autores, “a formulação de problemas exige do aluno mais capacidade para dar sentido ao que se aprende do que a resolução de problemas” (p. 4551).

Pinheiro e Vale (2013) também discutem as dificuldades dos alunos na formulação de problemas, destacando a falta de familiaridade dos alunos com tarefas desse tipo. Essa falta de contacto, segundo as autoras, reflete-se nas dificuldades que os alunos enfrentam para resolvê-las. Ainda em relação às dificuldades, Pinheiro e Vale (2013) apontam como desafios na formulação de problemas, por parte dos alunos, a redação dos enunciados de forma clara, sem omissão de dados essenciais para a resolução dos problemas criados, bem como coerência dos dados fornecidos com a situação proposta.

3. Intervenção pedagógica

Neste capítulo, promove-se uma caracterização do contexto escolar no qual se desenvolveu a intervenção pedagógica, proporcionando uma análise geral do contexto educacional. De seguida, procede-se à descrição, em detalhe, dos elementos que constituíram a intervenção pedagógica, destacando-se quais os recursos didáticos utilizados e o tipo de trabalho que foi desenvolvido. Por fim, é descrita a intervenção pedagógica ao longo do tempo, abordando a execução da mesma, as suas diferentes fases e as adaptações realizadas.

3.1. Caracterização do contexto escolar

A intervenção pedagógica, inserida no contexto da minha Prática de Ensino Supervisionada, teve lugar numa escola secundária situada na área metropolitana do Porto, fundada em 1978/1979. Era inicialmente um liceu exclusivamente feminino, tendo-se tornado numa escola mista na sequência da Revolução de abril de 1974. A partir do ano letivo 2012/2013, a escola em questão assumiu o papel de sede de agrupamento. A sua oferta formativa integra o 2.º e 3.º ciclos de ensino básico e o ensino secundário. Em relação a este último, a escola oferece cursos científico-humanísticos, tais como, os cursos de Ciências e Tecnologias, Línguas e Humanidades e Ciências Socioeconómicas.

O estabelecimento de ensino é composto por dois edifícios de três andares, um pavilhão desportivo e uma cantina. Ao longo do tempo, foi alvo de diversas transformações e remodelações, destacando-se a intervenção realizada no período de 2008/2009. A escola dispõe de vários serviços pedagógicos tais como a Biblioteca Escolar, um Centro de Apoio à Aprendizagem, um Gabinete de Informação e Apoio ao Aluno, um serviço de Psicologia e Orientação e uma equipa multidisciplinar de apoio à educação inclusiva. A mesma tem também uma Associação de Pais e Encarregados de Educação.

Esta instituição participa ativamente em diversos projetos e promove uma variedade de atividades, todas elas orientadas para estimular uma cidadania ativa, isto é, um envolvimento proativo e responsável na sociedade. Entre estes projetos e atividades estão o Jornal Escolar, Desporto Escolar, Projeto Erasmus+, Parlamento Jovens, Projeto do Plano Nacional de Cinema, Projeto de Educação para a Saúde, Projeto Ciência Viva, Projeto Eco-Escolas, Projeto SeguraNet, Dia Solidário, Dia da Internet Segura, Dia dos Direitos Humanos, entre outros.

Durante este ano letivo (2023/2024) e no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, tive a oportunidade de interagir com três turmas distintas: duas do 8.º ano de escolaridade e uma do 10.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. Após analisar as dinâmicas e o desempenho dessas turmas, decidi concentrar a minha intervenção numa das turmas do 8.º ano. Essa escolha foi feita tendo em conta a dificuldade que a turma apresentava em pensar de forma criativa e tentar alterar as condições de um problema para resolvê-lo, pois havia uma dependência em relação aos enunciados fornecidos, o que pode constituir uma limitação na aplicação prática dos conhecimentos adquiridos.

A turma de 8.º ano, em que foi desenvolvida a intervenção pedagógica da qual resulta este relatório de estágio, era uma turma que, no início do ano letivo, apresentava um bom relacionamento entre todos os alunos. Contudo, com o passar do tempo, foi apresentando vários conflitos, a nível relacional, situações que tiveram um impacto negativo no ambiente de trabalho da turma. No caso de alguns alunos, esse ambiente gerou receio em levantar questões e solicitar o esclarecimento de dúvidas, uma vez que por vezes surgiam comentários inapropriados por parte de colegas. Esta foi a razão pela qual optei por propor o trabalho individual como forma de organização de trabalho dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas no âmbito da intervenção pedagógica.

A turma, inicialmente composta por vinte e quatro alunos, teve um acréscimo de duas alunas, uma durante o 1.º período e outra no início do 2.º período, totalizando assim vinte e seis alunos ao longo do ano letivo. As idades da turma situavam-se entre os treze e catorze anos, sendo importante notar que dois dos alunos tinham sido retidos no ano anterior. Quanto à distribuição de género, a turma era constituída por nove alunos do género masculino e dezassete do género feminino. Nesta turma, apenas um aluno usufruía de medidas ao abrigo do Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. Nove alunos da turma beneficiavam de Ação Social Escolar, sendo que cinco tinham direito ao escalão A e quatro ao escalão B.

Apesar do contexto anteriormente mencionado, esta turma apresentava de um modo geral um aproveitamento razoável. No 1.º período, nove dos vinte e cinco alunos que constituíam a turma à época obtiveram um nível inferior a três, sendo que a média da turma foi nível três (numa escala de 1 a 5), notando-se, assim, uma diversidade em termos de aproveitamento, assim como se pode verificar no Gráfico 1.

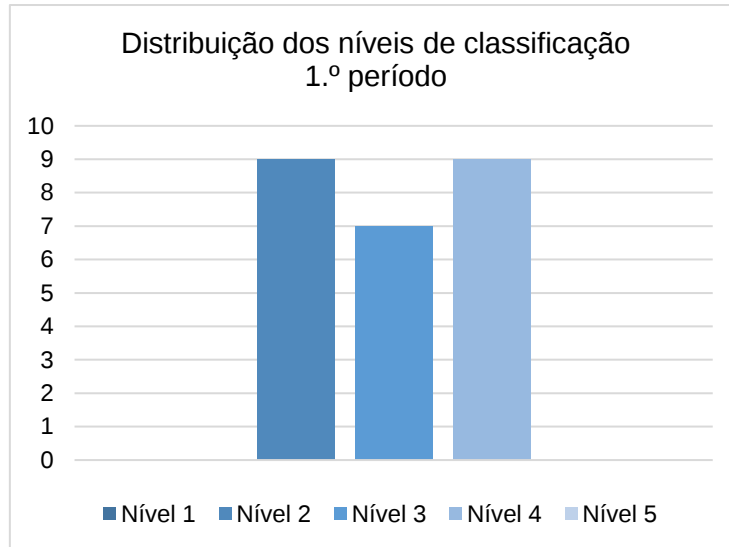


Gráfico 1 – Distribuição dos níveis de classificação, no 1.º período, da turma selecionada

3.2. Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica que desenvolvi teve início no dia 30 de janeiro de 2024 e terminou no dia 10 de abril de 2024. Inicialmente, nesta intervenção, os alunos foram solicitados a escrever o que era, para eles, um problema matemático. Após essa etapa, a definição do termo “problema” foi discutida, em sala de aula. Posteriormente, foram apresentadas aos alunos três tarefas de formulação de problemas com o objetivo de compreender quais as suas perceções e dificuldades face à formulação de problemas.

Ao optar incentivar a formulação de problemas pelos próprios alunos pretendo compreender as dificuldades que a formulação de problemas acarreta e entender quais as perceções dos alunos em relação à formulação de problemas, principalmente se os mesmos entendem que a formulação pode ser uma atividade matemática importante ou não. Sendo assim, a opção de trabalhar a formulação de problemas com esta turma foi guiada pela criação de uma experiência educacional que não priorizasse apenas o desempenho académico, mas também promovesse o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, da autonomia e até mesmo da comunicação, várias áreas de competências consideradas no *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017).

Na etapa inicial, com o intuito de promover a reflexão dos alunos sobre o conceito de problema matemático, optei por questioná-los acerca do que cada um considerava ser um problema. Esta questão foi respondida de forma individual, utilizando pequenos cartões que preparei (Figura 2).



Figura 2 – Cartões: "O que é um problema matemático?"

Essa abordagem foi adotada com o propósito de entender que significado é que os alunos atribuíam a um problema matemático e a opção pelo uso dos cartões foi feita com o propósito de envolver os alunos, estimular a sua participação e evidenciar que este trabalho se distinguia daquilo a que estavam habitualmente acostumados, tentando destacar a singularidade desta atividade.

Após a recolha das perceções dos alunos sobre o conceito de problema, elaborei um esquema que integrava, de uma maneira geral, as ideias partilhadas, individualmente, por todos alunos da turma. A finalidade era desenvolver, nos alunos, a compreensão do conceito de problema, a partir das suas perceções, e deste modo facilitar a concretização das tarefas seguintes que teriam como base a formulação de problemas, pelos próprios alunos.

A primeira tarefa de formulação de problemas (Figura 3), proposta na intervenção pedagógica, abordava o tema Álgebra, especificamente o subtópico Sistema de Duas Equações do 1.º Grau a Duas Incógnitas, do tópico das Expressões Algébricas e Equações, e apresentava um sistema de duas equações de 1.º grau a duas incógnitas, como ponto de partida para a formulação de problemas. Esse sistema era um sistema possível e determinado, tendo como solução um par ordenado com abcissa negativa e ordenada positiva. Em anexo encontram-se a tarefa e uma possível resolução da mesma (respetivamente, Anexo 1 e Anexo 2).

1. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

1.1. Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido por este sistema de equações.
Explica de que forma criaste o problema.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

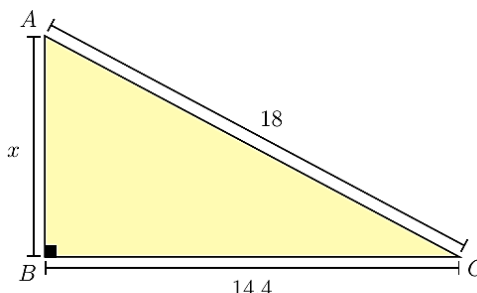
Figura 3 – Primeira tarefa de formulação de problemas

Esta tarefa foi escolhida pelo facto de terem sido abordados, em sala de aula, diversos problemas cuja resolução envolvia a tradução do enunciado num sistema de equações, seguida pela resolução do mesmo para encontrar uma solução adequada ao contexto do problema. Desta forma, o meu objetivo com esta tarefa era compreender em que medida os alunos conseguiam formular problemas a partir de um sistema, invertendo o processo que tinha sido trabalhado em sala de aula. Assim, tentei desafiar os alunos a

aplicar as aprendizagens adquiridas não resolvendo apenas problemas, mas criando os seus próprios problemas que envolvessem sistemas de equações. Outro dos motivos que me levou a propor esta tarefa, neste subtópico em específico, foi o facto de o manual adotado pela escola, para este ano de escolaridade, não apresentar qualquer tarefa de formulação de problemas relacionada com o mesmo, sendo que as orientações curriculares propõem que a formulação de problemas seja abordada.

Para a segunda tarefa de formulação de problemas, foi abordado o subtópico do Teorema de Pitágoras, do tópico das Figuras Planas, do tema da Geometria. Inicialmente, pensei apresentar aos alunos apenas um triângulo a partir do qual teriam de criar um problema (Figura 4), mas, a meu ver, poderia estar a condicionar de forma significativa a atividade dos alunos, pelo facto de apresentar apenas uma situação com medidas de comprimento específicas.

1. Atenta na figura seguinte:



1.1. Cria o enunciado de um problema a partir da figura e dos dados que te são fornecidos.
Explica de que forma criaste o problema.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo fornecido e criar o teu problema a partir daí.

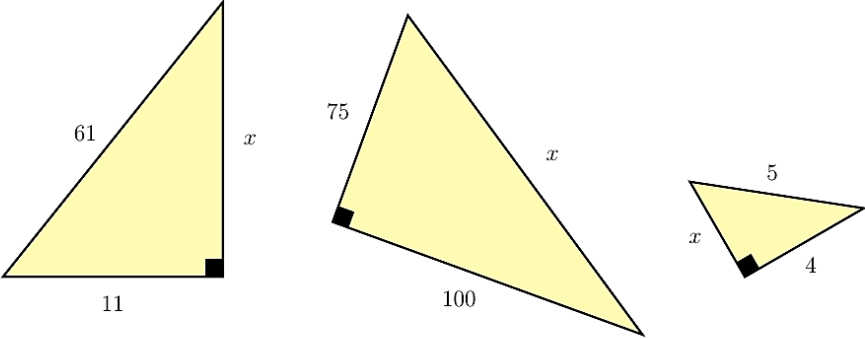
1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 4 – Esboço da segunda tarefa de formulação de problemas

Deste modo, decidi ampliar a tarefa (Figura 5), optando por apresentar três triângulos retângulos, cujo lado com medida de comprimento desconhecido variava, podendo ser um dos catetos ou a hipotenusa. O meu objetivo era, por um lado, que os alunos tivessem a oportunidade de escolher a situação para criar o problema, isto é, selecionar se pretendiam uma situação que pudessem associar à determinação da medida de comprimento da hipotenusa ou de um dos catetos. Por outro, com esta tarefa, pretendia também que os alunos tivessem a oportunidade de escolher um triângulo cujas medidas

de comprimento dos lados se adequassem melhor ao contexto por eles selecionado. Em anexo, encontram-se a tarefa e um exemplo de problema, nas condições da tarefa, para cada um dos triângulos apresentados (respetivamente, Anexo 3 e Anexo 4), exemplos esses a que os alunos tiveram acesso aquando da discussão acerca da segunda tarefa de formulação de problemas. Também a respetiva resolução desses problemas se encontra em anexo (Anexo 5).

1. Atenta na figura seguinte:



1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 5 – Segunda tarefa de formulação de problemas

Como a tarefa foi proposta quando estavam a ser abordadas diferentes situações em que se pode recorrer ao Teorema de Pitágoras, pretendia ainda compreender se os alunos iriam optar por criar problemas em que seria necessária a aplicação do referido teorema para a sua resolução. Por esse motivo e procurando também não reduzir a criatividade dos alunos, decidi não colocar nenhuma indicação, no enunciado da tarefa, sobre o possível recurso ao Teorema de Pitágoras. Sugeri apenas que os alunos desenhasssem uma situação, que tivesse como base o triângulo escolhido e a partir da qual pudessem formular um problema.

Portanto, tal como com a primeira, o objetivo desta segunda tarefa era compreender em que medida os alunos conseguiam formular problemas a partir do triângulo que os próprios escolhessem, dentro das possibilidades fornecidas.

Outra alteração que optei por realizar, foi retirar, do enunciado, a solicitação de explicação do processo de criação do problema, uma vez que na primeira tarefa nenhum dos alunos forneceu essa mesma explicação por escrito. A mesma acabou por me ser dada aquando do contacto direto e individual com cada aluno na discussão da primeira tarefa que tinham realizado, tal como, aquando da entrevista individual aos alunos cujas resoluções decidi selecionar para apresentar nessa primeira tarefa.

Outra razão para a escolha da segunda tarefa neste tema, foi o facto de os alunos desta turma não terem revelado grande envolvimento, comparativamente com os alunos da outra turma de 8.º ano que acompanhei durante o ano letivo. Enquanto a outra turma tinha ficado interessada nas diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras, questionando mesmo a professora cooperante se poderiam realizar um trabalho sobre o mesmo, a turma na qual escolhi desenvolver a minha intervenção pedagógica mostrou-se indiferente ao tema. Sendo assim, considerei que seria pertinente envolvê-los numa tarefa diferente, propondo assim esta tarefa de formulação de problemas.

A terceira e última tarefa (Figura 6), proposta no âmbito da formulação de problemas, integrou o tema Geometria, mais concretamente o tópico das Figuras Planas e o subtópico do Teorema de Pitágoras e da Área de Polígonos Regulares.

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.
2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 6 – Terceira tarefa de formulação de problemas

Concretamente, a finalidade desta tarefa era que os alunos conseguissem criar o seu próprio problema, partindo de uma situação cujos requisitos eram apenas duas condições. Optei por não dar imagens, nem um ponto de partida concreto. De modo particular, pretendia-se que os alunos criassem um problema, recorrendo aos seus conhecimentos associados ao Teorema de Pitágoras e ao cálculo da medida da área de um polígono regular. Em anexo, apresento esta terceira tarefa de formulação de problemas e uma possível resolução da mesma, analisada com os alunos aquando da discussão acerca da mesma (respetivamente, Anexo 6 e Anexo 7).

Contrariamente às outras tarefas de formulação, esta não foi atribuída aos alunos durante a lecionação dos conteúdos que a mesma envolvia. Esse aspeto pôde inibir os alunos na realização da tarefa, uma vez que poderiam não recordar os conhecimentos matemáticos associados a esse tema, no entanto, pôde também motivar o relembrar

desses mesmos conteúdos e o verificar, por parte dos mesmos, se de facto, tinham desenvolvido essas aprendizagens.

3.3. Intervenção pedagógica no decorrer do tempo

A primeira fase da minha intervenção pedagógica, como já referi, consistiu na proposta de uma atividade em que se pretendia questionar os alunos sobre o significado que atribuíam a um problema matemático, tendo sido concretizada na aula do dia 30 de janeiro de 2024. Os alunos realizaram esta fase individualmente, devido aos motivos já expostos anteriormente, durante os últimos dez minutos da aula da disciplina de matemática. A discussão acerca do significado atribuído pelos mesmos a um problema matemático ocorreu no dia 31 de janeiro, no início da primeira aula de matemática desse dia, uma vez que haveria dois tempos consecutivos reservados à disciplina. Esta discussão durou cerca de quinze minutos, acabando por não ter muita participação dos estudantes. Era uma situação que já previa, uma vez que se tratava de uma reação comum destes alunos. No entanto, considerei importante fazê-lo, pois era crucial os alunos compreenderem o conceito de problema matemático, tendo em conta que o objetivo das tarefas que iriam desenvolver, posteriormente, passava pela formulação de problemas. Ora para um aluno criar um problema, é necessário que reconheça esse conceito. Para a discussão fiz um esquema em *PowerPoint*, partindo das ideias dos alunos (Anexo 8). Algumas das mesmas eram incorretas e, embora não as tenha apresentado no esquema referido, fiz questão de as ir mencionando durante a discussão, referindo o porquê das mesmas não configurarem características de um problema matemático, para que os alunos não se envolvessem na formulação de problemas com uma noção errada daquilo que é um problema matemático.

A primeira tarefa de formulação de problemas foi realizada no dia 31 de janeiro, durante cerca de trinta e cinco minutos, no final da segunda aula de matemática desse dia. A minha ideia inicial não era realizar a primeira tarefa de formulação de problemas no mesmo dia em que foi concretizada a discussão coletiva acerca da definição de problema matemático, para os alunos terem mais tempo para refletirem acerca das ideias partilhadas. No entanto, por ser a última aula de matemática da semana e pelo facto de na semana seguinte estar previsto iniciar-se o estudo do subtópico Teorema de Pitágoras, integrado no tema Geometria, decidi propor a primeira nessa mesma aula.

No dia 7 de fevereiro, por haver duas aulas de cinquenta minutos, promovi, junto dos alunos, momentos de discussão individual sobre as suas resoluções em relação à primeira tarefa de formulação. No entanto, houve dificuldade, da minha parte, em gerir o tempo e apesar de ter conseguido discutir com cada um a sua resolução, esclarecendo

as suas dúvidas, sinto que repeti a mesma ideia, um número considerável de vezes, porque havia dúvidas comuns a diferentes alunos.

A segunda tarefa de formulação de problemas foi realizada no dia 19 de fevereiro e teve a duração de cerca de trinta minutos. Foi escolhido este dia para a aplicação da tarefa, uma vez que nas quatro aulas da semana anterior tínhamos abordado o Teorema de Pitágoras e porque, na aula seguinte, seria dado início ao estudo das áreas de polígonos regulares.

Como na semana seguinte, a turma iria realizar um teste e, portanto, as aulas dessa semana estariam destinadas ao esclarecimento de dúvidas, a discussão acerca das resoluções desta segunda tarefa foi realizada apenas no dia 4 de março. Ao contrário do que fiz com a primeira tarefa de formulação, ou seja, uma abordagem individual na discussão e esclarecimento de dúvidas sobre as suas resoluções, nesta segunda tarefa, optei por uma discussão coletiva, com a duração de cerca de vinte minutos. Para a mesma, realizei uma ficha com algumas propostas de resolução, da minha autoria, da tarefa de formulação de problemas para que todos tivessem acesso a exemplos diversificados de problemas que fossem criados a partir das situações indicadas. Procurei, previamente, compreender as dificuldades dos alunos para deste modo responder a todas as dúvidas provenientes da tarefa, tal como apresentar algumas sugestões. Ainda assim, para o caso de os alunos não verem esclarecidas as suas dúvidas, disponibilizei-me para fazê-lo, individualmente, devido ao pouco à vontade sentido por muitos alunos em fazê-lo perante o resto da turma.

A terceira e última tarefa de formulação de problemas foi realizada no dia 12 de março, durante cerca de trinta minutos, e, contrariamente às outras tarefas, esta não foi atribuída aos alunos durante a lecionação dos conteúdos que a mesma envolvia. Tal aconteceu, como já referi, por estar planificado um teste e, deste modo, as aulas dessa semana serem dedicadas ao esclarecimento de dúvidas, pelo que não me foi possível propor a tarefa quando abordámos esses conteúdos.

Após a resolução da tarefa, conduzi uma discussão com os alunos, abordando os erros mais frequentes e indicando algumas sugestões. Optei por não fornecer uma ficha com possíveis resoluções da tarefa, por sentir que essa abordagem, na segunda tarefa de formulação de problemas, foi desvalorizada pelos alunos, uma vez que quando a ficha fornecida era mencionada, os alunos não se recordavam dela. Em vez disso, como após indicar os erros mais comuns e apontar sugestões, os alunos receberam o teste de avaliação e realizaram a sua correção, optei por questionar a turma sobre se alguma das tarefas do teste atendia às condições estabelecidas na terceira tarefa de formulação

e porque acreditavam que isso ocorria. Como os próprios problemas já tinham sido resolvidos, os alunos conseguiram visualizar e compreender facilmente por que é que os problemas que alguns dos alunos foram indicando cumpriam os requisitos indicados na terceira tarefa de formulação de problemas. Esta discussão teve a duração de cerca de vinte minutos e ocorreu no dia 20 de março.

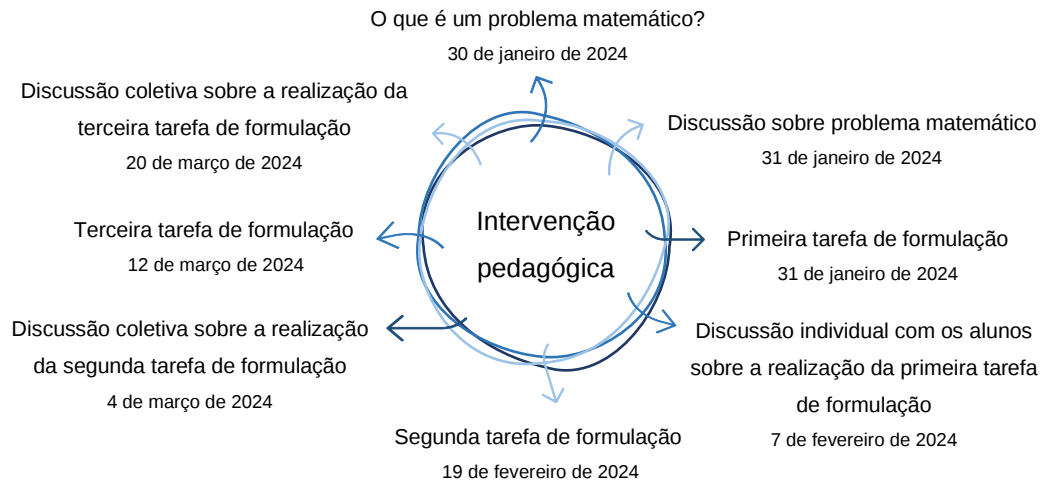


Figura 7 – Esquematização da intervenção pedagógica ao longo do tempo

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, é realizada uma descrição e justificação das principais escolhas no que diz respeito à metodologia, é abordada a escolha dos participantes tais como os critérios de seleção dos mesmos e é dada uma explicação relativa aos métodos e procedimentos de recolha de dados, tal como do processo de análise de dados. São também apresentadas considerações éticas que surgiram ao longo da realização da investigação.

4.1. Opções metodológicas

Este estudo segue uma abordagem metodológica de natureza qualitativa e carácter interpretativo (Amado, 2014; Carmo & Ferreira, 2008) com o objetivo de responder às questões de investigação. Optei por esta abordagem, nomeadamente o carácter interpretativo, uma vez que pretendia compreender quais as dificuldades e quais as perceções dos alunos face à formulação de problemas, realizadas no âmbito das atividades letivas dos mesmos. Segundo Denzin e Lincoln (2005), a pesquisa qualitativa é difícil de definir de forma clara. Os autores interpretam a pesquisa qualitativa como um conjunto de atividades interpretativas que não privilegiam nenhuma prática pedagógica única sobre outra.

Bogdan e Biklen (1994) refletem, no seu trabalho, acerca de cinco características que definem a investigação qualitativa. A primeira dessas características é o ambiente natural ser a fonte direta da recolha de dados e o investigador constituir o instrumento principal da investigação, sendo a compreensão do mesmo acerca dos dados recolhidos um “instrumento-chave da análise” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). Estes dados são obtidos no local, no caso, na escola, e enriquecidos com informações resultantes de contacto direto entre o investigador e os participantes. Outras duas características de magna importância são o carácter descritivo deste tipo de investigação, já que o pretendido com a mesma é a análise dos dados “em toda a sua riqueza” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48), e o maior interesse dos investigadores centrar-se mais no processo do que nos resultados da investigação, o que acontece também neste estudo uma vez que o meu objetivo é compreender as perceções e dificuldades de alunos face à formulação de problemas e não apenas se conseguem ou não realizar esse tipo de tarefas.

Os autores Bogdan e Biklen (1994) destacam que “os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p. 50) e que, apesar de o

investigador aspirar a formular uma teoria sobre um determinado tema, o rumo que essa teoria toma só se torna clara após a recolha de dados e a interação com os participantes, os alunos.

Citando os mesmos autores, “não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50).

Por último, outra característica apontada é a importância do significado, ou seja, esta abordagem privilegia as percepções dos participantes como forma de compreender o fenómeno em estudo. Tal como é proposto por Amado (2014), procurei centrar-me na compreensão das intenções e significados das ações iniciadas pelos participantes – incluindo opiniões, percepções, perspetivas e conceções.

Nesta investigação, desempenhei o papel de investigadora, uma característica inerente à investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), interagindo com os alunos de uma maneira natural e reservada, adotando a técnica de observação participante (Carmo & Ferreira, 2008). Dado o carácter qualitativo da investigação, adaptei o plano de pesquisa sempre que julguei necessário, alinhando-me com a perspetiva de Carmo e Ferreira (2008), que enfatizam a “flexibilidade” do plano neste tipo de investigação (p. 148).

4.2. Participantes

Como já foi apresentado no capítulo anterior, a intervenção pedagógica envolveu todos os alunos de uma turma do 8º ano. Ainda assim, apesar de todos os alunos terem tido a oportunidade de realizar as tarefas propostas, no âmbito desta intervenção, apenas dezoito foram considerados elegíveis para participantes no estudo. A razão para esta restrição prende-se à falta de autorização dos encarregados de educação, aquando da minha solicitação enquanto investigadora, para a recolha de dados. Por outro lado, devido à elevada quantidade de dados recolhidos associados a esses dezoito alunos, bem como o tempo para a sua análise, foi necessária a seleção criteriosa de um grupo específico de alunos. Esta escolha foi feita tendo em conta o desempenho dos alunos nos diferentes momentos da intervenção pedagógica. Em cada um desses momentos, foram selecionados alguns alunos para análise do seu desempenho, sendo essa escolha realizada com base no critério principal de representatividade da turma, visando selecionar aqueles que melhor refletissem as características e diversidade da mesma, de forma a mostrar o desempenho global. É de referir que nenhum dos alunos é identificado neste relatório, usando-se apenas pseudónimos, mantendo-se o anonimato dos mesmos.

4.3. Processo de recolha de dados

Tendo em conta a caracterização da turma e o objetivo delineado, os dados foram recolhidos através de: (i) produções escritas dos alunos relativas ao significado de problema matemático e a cada uma das tarefas de formulação propostas; (ii) entrevistas semiestruturadas realizadas em vários momentos da intervenção pedagógica; (iii) um questionário sobre as perceções dos alunos relativamente à formulação de problemas; (iv) notas de campo das observações que realizei enquanto professora e investigadora.

Todas estas técnicas e instrumentos de recolha de dados foram utilizados com o fim único da elaboração deste relatório, constituindo um suporte à escrita do mesmo.

Relativamente às questões de natureza ética, foi pedido aos encarregados de educação uma autorização, por escrito, da participação dos seus educandos no estudo (Anexo 9). Foi enfatizado de maneira clara que a participação, ou não participação, no estudo não teria impacto na avaliação dos alunos na disciplina. Como já referido, apenas dezoito alunos foram considerados elegíveis e, portanto, apesar de todos os dados terem sido recolhidos, dado o estudo fazer parte das atividades curriculares, apenas os dados dos alunos cujos encarregados de educação permitiram a sua participação no estudo foram analisados e incluídos neste relatório.

Durante a intervenção pedagógica, tendo em conta o ambiente existente nesta turma, onde havia constantemente comentários negativos de colegas para colegas, decidi que todo o tipo de informação recolhida, à exceção das entrevistas semiestruturadas, iria ser por escrito, para que a criatividade inerente à formulação de problemas e o pensamento e autoestima dos alunos não fossem condicionados por fatores externos. Sendo assim, as produções escritas dos alunos constituíram a principal fonte de recolha de dados e as mesmas auxiliaram-me na compreensão do modo como os alunos interpretaram a tarefa, como procederam para resolvê-la e que dificuldades apresentaram (Santos & Buriasco, 2016).

Neste contexto, uma das produções recolhidas consistiu nos cartões, por mim elaborados, para os alunos apresentarem as suas definições de problema matemático, possibilitando compreender quais as suas conceções sobre este tipo de tarefa matemática. Outras produções escritas recolhidas foram as resoluções das tarefas de formulação de problemas concretizadas pelos alunos, que permitiram identificar quais os desafios com que se deparam na formulação de problemas quando lhes foram apresentadas determinadas condições.

As entrevistas realizadas foram semiestruturadas (Amado, 2014) e seguiram um guião previamente elaborado (Anexo 10, Anexo 11, Anexo 12 e Anexo 14). Tive em conta a adaptação da linguagem e da entrevista a cada um dos participantes, variando por vezes a ordem de colocação das perguntas, dependendo daquilo a que o aluno me ia respondendo. O objetivo principal das mesmas foi o esclarecimento de dúvidas provenientes da análise de dados, nomeadamente, qual o ponto de partida e o porquê do contexto escolhido, bem como a compreensão das dificuldades que foram surgindo aos participantes aquando da formulação de problemas. No entanto, as mesmas também constituíram um momento em que os alunos puderam concluir ideias inacabadas e puderam expressar aquilo que sentiram enquanto realizavam as tarefas e quais as suas conceções acerca das tarefas de formulação de problemas.

Estas entrevistas foram realizadas na escola, após os momentos de formulação de problemas e antes da discussão acerca de cada um dos mesmos, de modo que os alunos entrevistados não fossem influenciados pelos momentos de discussão, pelo que foram realizadas em três momentos principais e distintos desta intervenção pedagógica. Também após a aplicação do questionário, aquando da análise das respostas dadas ao mesmo, senti necessidade de esclarecer algumas questões, pelo que optei por realizar entrevistas para as esclarecer. Foram registadas em áudio sendo que, posteriormente, foram transcritas por mim com o propósito único de serem usadas na escrita deste relatório de estágio.

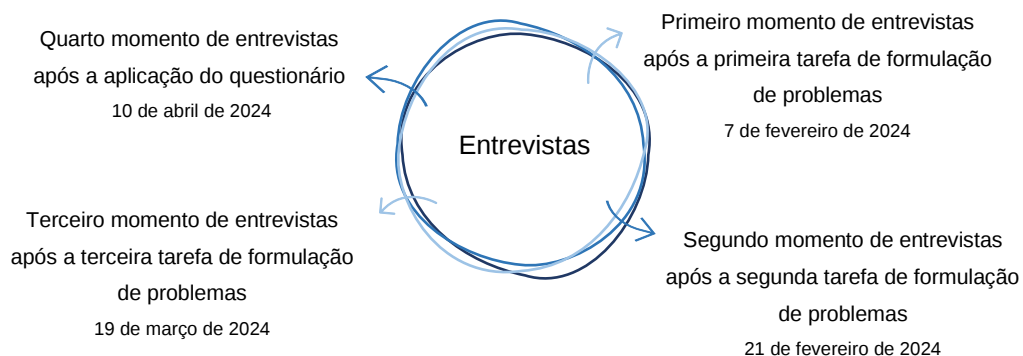


Figura 8 – Esquematização da realização das entrevistas ao longo do tempo

O questionário (Anexo 13) foi aplicado com o intuito de compreender qual a perceção dos alunos face a alguns aspetos da formulação de problemas, “permitindo uma expressão livre das opiniões” (Amado, 2014, p. 271) dos participantes. Tinha também

como objetivo permitir-me compreender quais as perceções e dificuldades de alunos face à formulação de problemas.

O questionário foi proposto no dia 20 de março a todos os alunos durante cerca de trinta minutos da aula de matemática. Não queria que o questionário fosse de respostas simples como “Sim” e “Não”, mas que os alunos apresentassem a sua perspetiva de uma forma mais clara e completa. Por isso, procurei elaborar o mesmo de forma que os alunos não pudessem simplesmente fornecer uma resposta curta e direta, mas impulsionando a sua reflexão sobre determinados aspetos. Sendo assim, na sua construção, incluí essencialmente questões abertas. A opção pelo questionário teve como objetivo todos os alunos darem a sua opinião acerca da formulação de problemas e desta intervenção pedagógica, que é importante considerar na análise de dados.

A recolha de dados através das notas de campo das observações que realizei enquanto professora e investigadora foram sobretudo escritas nos momentos em que os alunos estavam envolvidos nas tarefas de formulação de problemas. Essas notas funcionaram como um auxiliar de memória (Carmo & Ferreira, 2008) e proporcionaram uma visão mais clara e pormenorizada, permitindo-me compreender dados obtidos por meio de outros instrumentos.

Para o processo de análise de dados todos os instrumentos de recolha de dados utilizados foram fundamentais para responder às questões de investigação previamente definidas, embora contribuindo de forma distinta.

Para responder à primeira questão de investigação – Quais as dificuldades encontradas pelos alunos ao formular problemas matemáticos? – analisei as produções escritas acerca da definição de problema matemático, recolhidas antes da primeira tarefa de formulação, as produções escritas que consistiam nas resoluções das tarefas de formulação e as informações provenientes das entrevistas, através das quais fui procurando esclarecer algumas dúvidas que iam surgido a partir da análise dessas produções.

Para responder à segunda questão de investigação – Quais as perceções dos alunos face à formulação de problemas? – utilizei, em primeiro lugar, as notas de campo, isto é, aquilo que escrevi sobre as observações efetuadas nos diferentes momentos da intervenção pedagógica. De seguida, através das entrevistas e do questionário aplicado, tentei compreender a opinião dos alunos acerca dos vários momentos em que estiveram envolvidos nas tarefas de formulação de problemas, nomeadamente, se tinham

gostado, quais as dificuldades sentidas e se preferiam resolver ou formular um problema.

5. Apresentação e discussão dos resultados

Neste capítulo, procede-se à apresentação da análise dos dados recolhidos com base na problemática estabelecida e nas questões de investigação previamente definidas. O presente capítulo está dividido em cinco subcapítulos: i) Definição de problema – Perceções de alunos; ii) Primeira tarefa de formulação de problemas; iii) Segunda tarefa de formulação de problemas; iv) Terceira tarefa de formulação de problemas; v) Perceções de alunos face à formulação de problemas.

Para cada um dos três momentos de formulação de problemas, apresento uma abordagem geral sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos da turma, seguindo-se uma análise mais aprofundada baseada no trabalho de casos específicos de alunos. A seleção destes alunos teve como critério principal a representatividade da turma, isto é, foram selecionados os alunos que refletissem, de forma abrangente, as características e diversidade presentes na turma, de forma a garantir a ilustração do desempenho global da mesma. Para cada um dos alunos selecionados, em cada uma das tarefas de formulação de problemas, analisei as suas produções escritas, complementando estes dados com as informações provenientes das entrevistas, que, a meu ver, foram fundamentais para atingir o objetivo desta investigação.

5.1. Definição de problema – Perceções de alunos

Este subcapítulo destina-se à apresentação da análise dos dados recolhidos na primeira fase da minha intervenção pedagógica, momento que teve como foco a compreensão das perceções dos alunos acerca do que constitui um problema matemático. Este primeiro momento foi crucial, uma vez que as tarefas que iriam ser propostas, posteriormente, aos alunos, teriam como objetivo a formulação de problemas, ou seja, pretendia-se que os próprios alunos criassem problemas a partir de informações/condições fornecidas. Para tal, e como já foi referido, os alunos foram convidados a escrever, num cartão, o que era para eles um problema matemático.

Deste modo, quando questionados sobre o que é um problema matemático, alguns dos alunos acabaram por exemplificar com uma, ou mais, situações que já resolveram e que associam a um problema, como é o caso do Pedro (Figura 9).

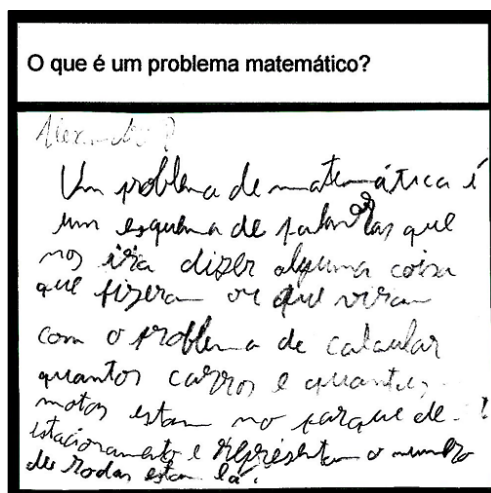


Figura 9 – Definição de problema do Pedro

Este aluno associa problemas matemáticos a situações descritas em texto, onde há necessidade de realizar operações matemáticas para resolver uma determinada situação. Para clarificar a sua conceção, optou por exemplificar com um problema concreto, previamente abordado numa das aulas, em que era pretendido determinar quantas motos e quantos carros estavam estacionados num parque de estacionamento, sabendo o número total de rodas existentes e o número total de veículos. A percepção do Pedro sugere também que um problema só pode ser apresentado recorrendo a texto, não considerando outras possibilidades.

Associado à realização de operações matemáticas como estratégia de resolução de um problema, surgiu também o ponto de vista da Maria (Figura 10). A aluna enfatizou que a resolução de problemas matemáticos implica “fazer várias contas”, ou seja, considerou que aplicação de cálculos é fundamental para encontrar uma solução, o que sugere que, para esta aluna, o recurso a esquemas ou outro tipo de representações não constitui uma prática comum enquanto possíveis estratégias para a resolução de um problema. Outro aspeto importante na resposta da Maria à questão colocada é que a mesma parece destacar a importância dos dados fornecidos, mas também parece referir problemas que envolvam equações e a resolução das mesmas. Sendo assim, parece haver uma referência à resolução de problemas, mas que na conceção da aluna ocorre, sobretudo, a partir de estratégias mais algébricas.

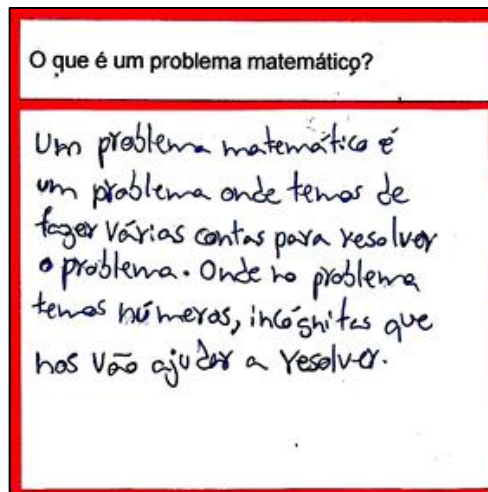


Figura 10 – Definição de problema da Maria

A perspetiva do João (Figura 11) sugere uma perceção dos problemas como questões mais desafiadoras e que exigem informações específicas para serem resolvidas. O aluno destacou a complexidade dos problemas, mencionando que a resolução destes envolve “um monte de contas”, ou seja, tal como o caso da Maria, associou a realização de cálculos como estratégia de resolução de um problema.

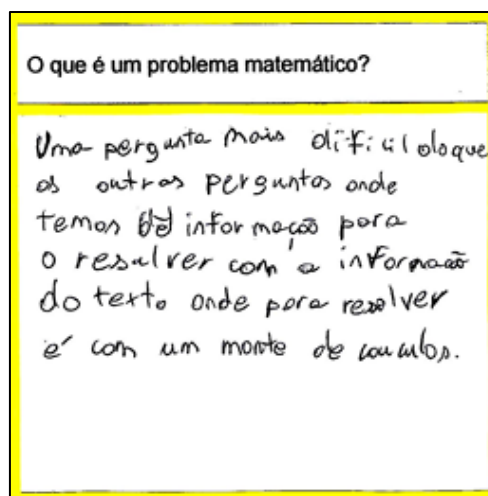


Figura 11 – Definição de problema do João

Outra característica que alguns alunos destacaram acerca dos problemas foi a sua relação com situações do dia-a-dia, como refere explicitamente a Bruna (Figura 12). Além da sua perceção sugerir que a aluna reconhece a importância dos dados fornecidos nos problemas, parece sugerir também que a Bruna reconhece a aplicabilidade dos problemas matemáticos em contextos práticos.

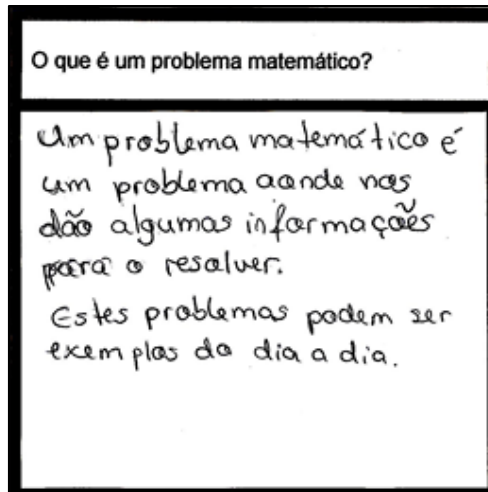


Figura 12 – Definição de problema da Bruna

Na perspetiva da Letícia (Figura 13), tal como na do Pedro, os problemas são apresentados na forma de texto. Destacou como característica comum dos problemas matemáticos o facto de muitas vezes envolverem situações fictícias e determinadas personagens – “João” e “Maria”. A resposta da Letícia à questão parece sugerir que os problemas começam, geralmente, com uma descrição de uma situação do quotidiano, como uma compra, como a mesma refere, e exigem que o aluno resolva uma questão específica acerca dessa situação. Esta perceção da Letícia sugere também que a aluna associou problemas matemáticos a cenários que envolvem situações do dia a dia.

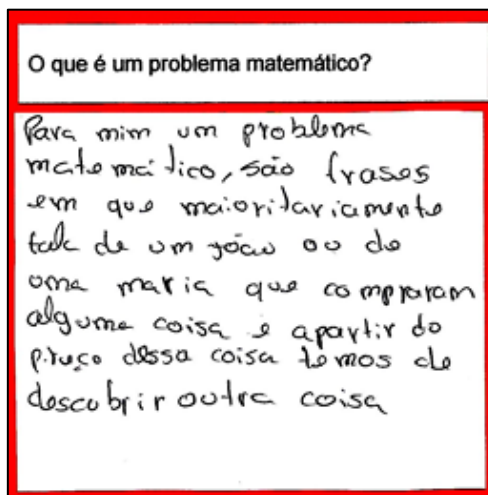


Figura 13 – Definição de problema da Letícia

Portanto, os dados analisados sugerem que vários alunos reconhecem a natureza desafiadora e a aplicabilidade dos problemas matemáticos no quotidiano. No entanto, algumas respostas sugerem também uma possível falta de familiaridade com

estratégias de resolução além do uso de cálculos. Sendo assim, segue-se um esquema que resume as percepções destes alunos acerca do que consideram ser um problema matemático (Figura 14).

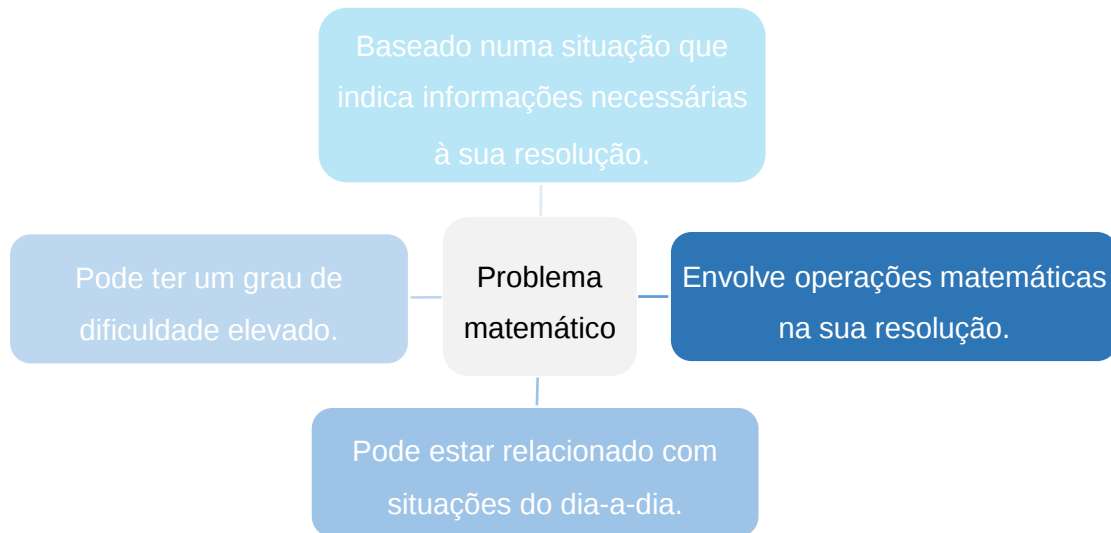


Figura 14 – Percepções de alunos sobre problema matemático

5.2. Primeira tarefa de formulação de problemas

A primeira tarefa de formulação de problemas, proposta aos alunos no âmbito da intervenção pedagógica, teve como tema a Álgebra, mais concretamente o subtópico Sistema de Duas Equações do 1.º Grau a Duas Incógnita, do tópico Expressões Algébricas e Equações, e envolveu sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (Figura 15).

1. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

1.1. Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido por este sistema de equações.
Explica de que forma criaste o problema.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 15 – Primeira tarefa de formulação de problemas

Esta primeira tarefa de formulação de problemas foi proposta na mesma aula em que proporcionei a discussão sobre a definição de problema. Apesar disso, surgiram várias dúvidas sobre o que lhes estava a ser pedido. Ao longo da mesma aula, tínhamos já trabalhado a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau a duas incógnitas pelo método da substituição, abordando diversos problemas nos quais os alunos precisavam de traduzir por um sistema de equações a situação enunciada para proceder à sua resolução. Utilizei esses exemplos para explicar que, naquele momento, o objetivo era que os alunos adotassem uma abordagem inversa, isto é, ao invés de traduzir um enunciado de um problema por um sistema de equações, teriam de criar um problema com base no sistema de equações fornecido.

Houve várias questões tais como “Então o que é que temos de escrever?”, “Mas posso escrever sobre qualquer coisa?”, “Como é que começo?”. Neste sentido, solicitei a atenção dos alunos e sugeri-lhes que pensassem novamente sobre o que é um problema, lembrando um problema resolvido na própria aula – o problema dos lápis e das canetas (Figura 16).

Resolve o seguinte problema:
Três canetas e quatro lápis custam 3,20 € e uma caneta e dois lápis custam 1,24 €. Qual é o custo de uma caneta? E de um lápis?
Mostra como chegaste à tua resposta.

Figura 16 – Problema dos lápis e das canetas

Ainda que muito apreensivos, os alunos acalmaram-se e começaram a tentar realizar a tarefa, questionando-se que contexto é que iriam criar e o que é que queriam saber. De uma forma geral, os alunos mostraram algum desconforto, o que pode estar associado à falta de familiaridade com este tipo de tarefas.

Sobre a minha atuação, ao optar por mencionar o problema dos lápis e canetas, como um exemplo familiar aos alunos, penso que possa ter proporcionado um ponto de partida e um incentivo à formulação de problemas dada a situação apresentada. No entanto, é importante salientar que, ao analisar as produções dos alunos, constatei que alguns alunos selecionaram esse contexto para criar o seu problema. Portanto, não sei em que medida esse exemplo possa ter limitado a criatividade dos alunos e influenciado as suas criações, podendo até ter sido o que os levou a concentrar-se em problemas semelhantes. Por outro lado, também é possível que alguns alunos não tivessem formulado um problema se não lhes tivesse sido fornecido um exemplo familiar. Esta abordagem de ter relacionado o que lhes era pedido com o exemplo em questão, pode também ter sido fundamental para estimular a participação dos alunos e a sua compreensão sobre a tarefa de formulação. Sendo assim, e tendo em conta que era a primeira tarefa que realizavam, penso que procurei encontrar um equilíbrio entre fornecer alguma orientação e evitar que os alunos desistissem da tarefa.

Também a partir da análise das produções dos alunos, observei que, embora alguns alunos tenham formulado um problema com base no sistema de equações dado, nenhum deles reconheceu que o problema que enunciaram não era coerente com a solução do sistema, que era o par ordenado $(-2, 4; 4, 6)$.

O objetivo era que os alunos, além de criarem um problema, fossem capazes de verificar a adequabilidade da solução do sistema, que traduzia esse problema, ao contexto em questão e que pudessem, eventualmente, fazer alterações ao enunciado do problema, modificando o seu contexto, se necessário, para uma situação que envolvesse tanto números positivos quanto números negativos. No entanto, pareceu-me ser uma situação expectável, uma vez que as reações dos alunos no momento de realização da

tarefa, sugeriram que, até ao momento, estes alunos não tenham tido, ou pelo menos com alguma frequência, contacto com a formulação de problemas matemáticos.

Em relação a esta primeira tarefa de formulação de problemas, selecionei os alunos Maria, Laura, Filipa e Pedro, cuja análise e discussão dos resultados passo a apresentar.

A resolução proposta pela Maria (Figura 17) é um dos casos, entre alguns que surgiram, através do qual se procura exemplificar situações em que os alunos não conseguiram, a partir do sistema de equações fornecido, criar um problema.

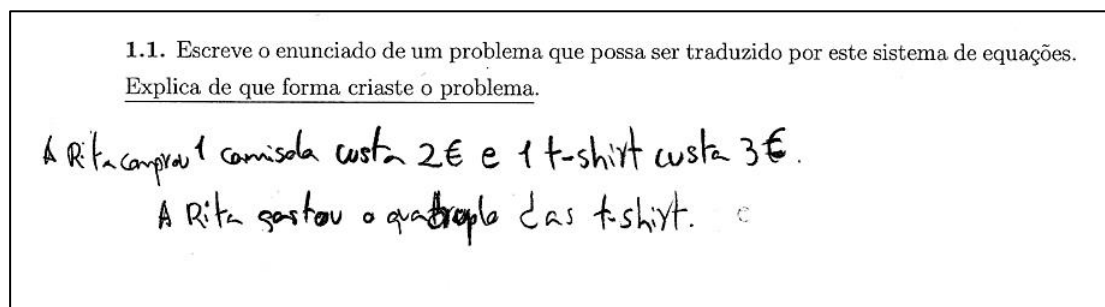


Figura 17 – Resolução da Maria da primeira tarefa de formulação de problemas

Inicialmente, pensei que tal poderia ter sido causado pela falta de tempo, no entanto, na entrevista à Maria, constatei que não foi essa a razão. Apresento, de seguida, um excerto dessa entrevista para ilustrar a situação.

Investigadora: Como é que estavas a fazer [a criação do problema]?
 Como é que estavas a traduzir?

Maria: Uma camisola custava 2 euros... e o x era o número de camisolas que ela podia comprar. E depois, uma t-shirt custava 3 e o y era o número de t-shirts que ela também podia comprar. (...) Depois aqui é que já não fiz. Não consegui. (apontando para a segunda equação do sistema)

Investigadora: Porquê? Qual é a tua dúvida? (...) Por exemplo, imagina que eram duas amigas a ir às compras...

Maria: Então uma amiga levou duas camisolas e a outra levou uma... porque temos $1x$... e deste (apontando para a incógnita y) uma levou três e a outra levou quatro.

Investigadora: E então, qual seria a pergunta final do teu problema? O quê que tu querias descobrir?

Maria: Ahh, o preço da camisola e da t-shirt.

Investigadora: Mas tu não disseste que o preço da camisola era dois (apontando para o que a aluna tinha escrito na folha)?

Maria: Sim.

Investigadora: Então, a tua incógnita...

Maria: (interrompendo a questão que lhe ia colocar) Então quantas camisolas é que elas compraram! Não? Sim!

Investigadora: É?

Maria: Acho que sim.

(...)

Investigadora: Então agora queres saber, sabendo que elas compraram e gastaram este dinheiro, quantas camisolas e quantas t-shirts compraram?

Maria: Sim!

(Entrevista, Maria)

A dificuldade que a Maria sentiu não foi resultado de uma questão de falta de tempo, mas sim de como adaptar a segunda equação do sistema ao problema que ela tinha começado a formular, tendo em consideração o significado já atribuído às incógnitas. É perceptível que a aluna, inicialmente, atribuiu um significado às incógnitas e que ao longo da entrevista foi alterando esse mesmo significado. Por exemplo, relativamente à incógnita x , num primeiro momento, representava o número de camisolas que uma das amigas podia comprar. De seguida, representava o preço da camisola. E, no momento final do excerto da entrevista, já representava o número de camisolas que as duas amigas compraram.

No final deste momento de discussão, dei à Maria a oportunidade de resolver o sistema de equações. Inicialmente, a aluna não se lembrava do procedimento para a sua resolução usando o método de substituição, no entanto, foi suficiente dizer-lhe que um dos primeiros passos seria resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas, para que ela se recordasse de todo o processo de resolução por substituição e conseguisse chegar à solução.

Quando obtive a solução, questioneei-a sobre o que representava a sua incógnita x , ao que a aluna me respondeu que seria o número de camisolas. Perante a situação, perguntei se o valor encontrado fazia sentido no contexto do problema dela, sendo que a aluna respondeu que não, reconhecendo que obtive um número negativo e não inteiro. Neste sentido, procurei reforçar a ideia da importância de após se resolver um sistema de equações, analisar-se a solução obtida no contexto do problema. Neste caso específico, permitir-lhe-ia compreender que o problema a construir teria de ser baseado num contexto em que fizesse sentido números não inteiros, quer negativos, quer positivos. Já que tinha dado oportunidade à aluna de completar o seu problema e resolvê-lo, decidi questioná-la também sobre possíveis contextos que poderia ter usado, caso tivesse resolvido e encontrado a solução. A este propósito, respondeu que ter números negativos poderia significar “não ter dinheiro suficiente para comprar alguma coisa” (Entrevista, Maria), ou seja, ficar com uma dívida, não conseguindo ampliar o contexto que tinha fornecido.

Por fim, coloquei-lhe algumas questões sobre tarefas de formulação de problemas, entre as quais, se já tinha realizado alguma vez tarefas deste tipo e se gostava do trabalho em torno destas tarefas. Segue-se um pequeno excerto da entrevista.

Investigadora: Já tinhas feito este tipo de questões antes? De criar problemas?

Maria: Não.

Investigadora: E gostaste ou nem por isso?

Maria: No início, não estava a perceber como é que eu ia fazer, depois pronto.

Investigadora: E gostavas de fazer outra vez?

Maria: Sim.

Investigadora: Sim? Não sei se acredito! (em tom de brincadeira)

Maria: É assim, eu faria se eu conseguisse. Não sei explicar muito bem... Ter uns valores que fossem mais fáceis.

Investigadora: Ok, então se dessem dois números inteiros e positivos [na solução do sistema] já seria mais fácil?

Maria: Sim!

Investigadora: (...) Gostas mais de resolver ou de criar [problemas]?

Maria: Resolver.

Investigadora: Porquê?

Maria: Porque... não sei.

(Entrevista, Maria)

Com base neste diálogo com a Maria, constatou-se que a aluna, embora sem experiência prévia na realização de tarefas de formulação de problemas, demonstrou disponibilidade para se envolver na sua concretização, afirmando que o faria novamente, sugerindo, no entanto, uma preferência por situações menos complexas. Como é de esperar, por ser a primeira vez a realizar este tipo de tarefas, a aluna reconheceu ter tido algumas dificuldades. Quando questionada sobre se tinha gostado mais de formular o problema ou de o ter resolvido, a Maria referiu que preferia resolver, mas não conseguiu explicar porquê.

Um segundo caso que optei por selecionar foi a Laura. A resolução desta aluna (Figura 18) sugere uma dificuldade na compreensão daquilo que era pedido na tarefa de formulação, que era a criação de um problema que pudesse ser traduzido pelo sistema de equações apresentado. A aluna optou por um contexto que representa uma situação de compra e, apesar de no seu enunciado recorrer a alguns números que até estavam integrados no sistema de equações dado, o problema que construiu não tem uma correspondência com a informação apresentada através desse sistema de equações.

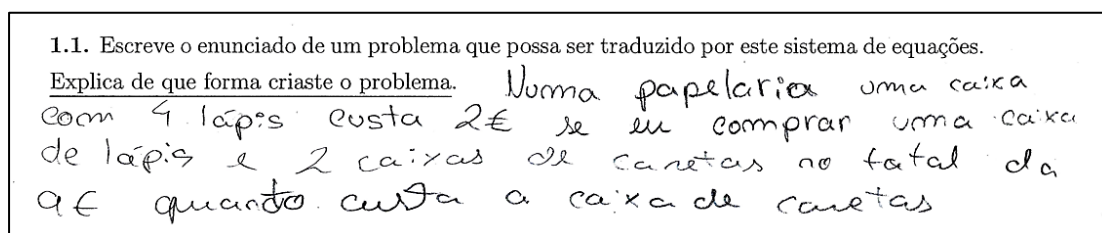


Figura 18 – Resolução da Laura da primeira tarefa de formulação de problemas

Para procurar compreender o pensamento da Laura, abordei esta situação na entrevista. Deste modo, constatei que a escolha do contexto se deveu ao problema dos lápis e das canetas (Figura 16) realizado nessa mesma aula. Quando solicitei à aluna para que me elucidasse sobre como tinha procedido para criar um problema a partir do sistema de equações fornecido, a mesma explicou o que teria de ser feito para resolver o problema que ela própria tinha criado. Nesse momento, compreendi que a aluna não

se tinha baseado no sistema de equações dado, como sugere o excerto da entrevista que se segue:

Investigadora: Então como é que tu fizeste? Como é que pegaste nisto (apontando para o sistema de equações) e traduziste para aqui (apontando para o problema criado)?

(...)

Laura: Eu tenho de fazer quatro mais dois, $4x + 2y$. Depois tenho de fazer $x + 9y$. Eu posso resolver?

Investigadora: Sim, podes resolver.

Laura: Então tinha de resolver $4x + 2y$ e $x + 9y$ e tinha de descobrir o resultado, quanto custam as canetas.

Investigadora: Ou seja, tu fizeste o teu sistema, não traduziste este, certo?

Laura: Certo.

Investigadora: Então, mas uma equação é o quê? Uma igualdade entre dois termos, certo? Portanto, isto aqui é igual a quê? (apontando para a expressão $4x + 2y$)

Laura: Pois, é isso que eu não pensei.

Investigadora: Então tu fizeste o teu sistema de equações, mas não tinhas equações, tinhas só $4x + 2y$ e $x + 9y$.

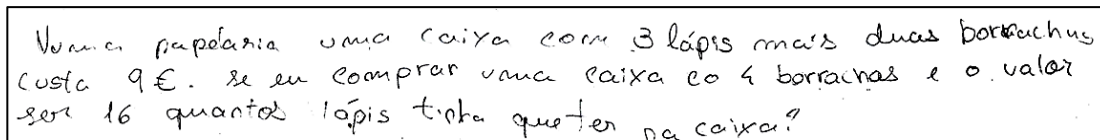
Laura: Certo.

(Entrevista, Laura)

Uma das dificuldades da Laura que este excerto parece sugerir é a compreensão do significado de um sistema de equações, em particular, do significado de equação. A aluna criou um problema, cuja resolução, do ponto de vista da mesma, passava por encontrar a solução de um sistema de equações. Ou seja, a aluna sabe que um sistema tem duas partes, no entanto, parece não reconhecer que essas duas partes são duas equações, uma vez que apresentou duas expressões algébricas.

Aproveitei este momento da entrevista para esclarecer qual o objetivo da tarefa proposta, tendo a aluna partilhado que “não tinha entendido que era para fazer com

estas equações” (Entrevista, Laura), isto é, com as equações do sistema de equações apresentado. Sendo assim, solicitei que procurasse criar um enunciado de um problema tendo por base o sistema de equações dado na tarefa (Figura 19).



Uma papolaria uma caixa com 3 lápis mais duas borrachas custa 9€. Se eu comprar uma caixa com 4 borrachas e o valor ser 16 quantos lápis tinha que ter na caixa?

Figura 19 – Segunda tentativa de resolução da Laura da primeira tarefa de formulação de problemas

Após a leitura do enunciado do problema avançado pela Laura, proporcionei uma breve discussão, com a aluna, sobre qual seria o significado das incógnitas. Li novamente o enunciado, juntamente com a aluna, e questionei o que é que representaria a incógnita y , ao que a aluna respondeu “lápis” (Entrevista, Laura). Retorqui e referi então que a incógnita y representaria o preço de cada lápis, no entanto, a aluna apontou que a incógnita y não poderia representar o preço, porque pretendia dar resposta à questão do seu problema que seria “quantos lápis tinha que ter a caixa?”.

Aqui compreendi que a aluna não estava a conseguir atribuir significado às incógnitas. Para criar o seu problema, a ideia da aluna foi, por exemplo, ao traduzir a expressão algébrica $3y$, manter o valor 3 e substituir y pela palavra “lápis”, ou seja, houve uma associação da incógnita y aos lápis, mas a aluna não conseguiu especificar se representaria o preço de cada lápis ou o número de lápis. Sendo assim, referi que íamos atribuir os seguintes significados às incógnitas: x representaria o preço de cada borracha e y representaria o preço de cada lápis. Dando continuidade à leitura, agora considerando o significado referido para as incógnitas, a aluna rapidamente admitiu ter-se confundido com as incógnitas, trocando o preço de um lápis (y) pelo preço de uma borracha (x) na segunda frase do seu problema. Portanto, apesar da oportunidade de corrigir o enunciado, a aluna demonstrou, novamente, não conseguir realizar uma correspondência coerente entre o seu enunciado e os dados apresentados pelo sistema de equações fornecido.

No entanto, como observei que a aluna já estava a ficar demasiado confusa, procurei esclarecer por que é que, no contexto que a própria aluna tinha sugerido, as duas incógnitas representavam preços e não quantidades. Deste modo, nenhum dos valores

das incógnitas ia dar resposta à questão do seu problema – “quanto lápis tinha que ter a caixa?” (Figura 19).

Apesar do esclarecimento a aluna continuou a afirmar que estava confusa com esta explicação, pelo que lhe apresentei a equação $2x + 3 = 9$ e solicitei que criasse um problema a partir daqui. Segue-se um excerto do momento da entrevista que retratou esta situação.

Investigadora: Imagina que eu só te dava uma equação (enquanto escrevia a equação $2x + 3 = 9$), assim, só com uma incógnita. Consegues fazer um problema utilizando esta equação?

Laura: Consigo, eu acho!

Investigadora: (enquanto sorria) Força, então!

Laura: Oh professora, não sei.

Investigadora: Imagina que desconheces uma coisa. Diz-me uma coisa que não sabes o valor ou a quantidade.

Laura: O preço de cinco folhas.

Investigadora: Ok. Então o x representa o preço de cinco folhas e agora? Tens de resolver [a equação] em ordem a?

Laura: x ? y ?

Investigadora: Então, mas aqui não tem nenhum y . (...) Tu queres saber o preço das cinco folhas certo? Então resolvias em ordem a quê?

Laura: x !

(Entrevista, Laura)

Ainda assim, apenas trabalhando com uma equação, senti que a Laura tinha dificuldades. A entrevista sugere que essas dificuldades foram maioritariamente devido ao conteúdo programático envolvido nesta formulação de problemas, uma vez que a aluna mostrou ter dificuldade em atribuir um significado às incógnitas.

Quando questionada se tinha gostado de realizar este tipo de tarefas de formulação de problemas, a aluna apontou que “por acaso sim” (Entrevista, Laura), afirmando que apenas lhe tinha faltado criatividade para tal, mas que no final já tinha compreendido melhor o que se pretendia. Também questionei a Laura sobre que parte tinha gostado

mais na tarefa, a de criar o enunciado para o problema ou a de tentar resolver o problema, ainda que a aluna não tenha procedido a essa resolução. Prontamente me respondeu que tinha sido criar, porque era mais fácil do que resolver, uma vez que, e passo a citar, “dá trabalho fazer contas” (Entrevista, Laura).

Um terceiro caso que optei por selecionar foi o Pedro. A resolução deste aluno (Figura 20) foi uma das resoluções em que se observou que o aluno conseguiu ir mais longe, comparativamente com os casos apresentados até ao momento. O aluno revelou ser capaz de criar um problema que pode ser traduzido pelo sistema de equações fornecido, optando também pelo contexto dos lápis e canetas, e de resolver esse mesmo sistema de equações. A escolha do contexto, tal como no caso da Laura, deveu-se à resolução do problema dos lápis e das canetas na mesma aula, como confirmado pelo aluno na entrevista.

1.1. Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido por este sistema de equações.
Explica de que forma criaste o problema.

Numa papelaria o João comprou 2 canetas e 3 lápis sabendo que o João pagou 16€ por uma caneta e 2 lápis mas pelos 2 canetas e 3 lápis pagou 9€ qual é o valor de cada caneta e de cada lápis.

Sabendo que as canetas representam por x e os lápis por y

Para facilitar cria um sistema com a informação que te

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} 32 - 8y + 3y = 9 \\ x = 16 - 4y \end{cases}$$

$$\quad (=) \quad \begin{cases} -5y = 9 - 32 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} -5y = -23 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} y = \frac{23}{5} \\ x = 16 - 4y \end{cases}$$

$$\quad (=) \quad \begin{cases} y = \frac{23}{5} \\ x = 16 - \frac{92}{5} \end{cases}$$

Figura 20 – Resolução do Pedro da primeira tarefa de formulação de problemas

É de destacar que existem fragilidades no que diz respeito à linguagem utilizada pelo aluno. O problema criado, tal como ele escreveu, tinha como objetivo descobrir “o valor de cada caneta e o valor de cada lápis”, ou seja, o preço unitário de cada um desses

objetos. No entanto, posteriormente, o aluno refere que “as canetas representam-se por x e os lápis por y ”, não se referindo ao preço unitário quer do lápis, quer da caneta.

No entanto, o aluno não chegou a concluir que a solução do sistema não faria sentido no contexto do seu problema. Deste modo, na entrevista ao aluno, procurei questioná-lo no sentido de clarificar essa situação. Segue-se um excerto desse momento da entrevista.

Investigadora: Agora, tenho uma dúvida, que é: tu fizeste a resolução do teu problema, certo?

Pedro: Não acabei aqui (apontando para o último passo da resolução do sistema de equações).

Investigadora: Ok. Então queres acabar?

Pedro: Dá 4.6 (apontando para a incógnita y).

Investigadora: E quanto é que dá este (apontando para a incógnita x)?

(Depois de alguns erros a fazer o cálculo na calculadora)

Pedro: -2.4 .

Investigadora: E então, faz sentido?

Pedro: Não! (sorrindo)

(Entrevista, Pedro)

Deste modo, reconheceu que teria de reformular o seu enunciado, alterando o contexto do problema para outro onde a solução do sistema de equações que obteve fizesse sentido.

Neste âmbito, solicitei ao Pedro que me desse alguns exemplos de situações que se pudessem adequar à solução obtida, mas ele não conseguiu indicar qualquer situação. Ainda referiu um contexto parecido a um já abordado em sala de aula, onde x e y representavam o número de carros e o número de motos, respetivamente, num parque de estacionamento. No entanto, quando o questioneei sobre qual a solução do sistema de equações dado, o aluno reconheceu logo que também esta situação não seria adequada para a formulação do seu problema. Como identifiquei que o aluno estava com dificuldades em encontrar um contexto adequado, não tendo dado nenhum exemplo, referi que haveria pelo menos um em que faria sentido a utilização de números

positivos e negativos e que era mencionado todos os dias no final do telejornal, e, logo de imediato, o Pedro referiu o contexto das temperaturas.

Para concluir, procurei questionar o aluno sobre a realização deste tipo de tarefas. Segue-se um excerto da entrevista que reflete a opinião do Pedro:

Investigadora: Gostaste de criar um problema?

Pedro: É, foi fixe.

Investigadora: Mas já tinhas feito antes?

Pedro: Não.

Investigadora: E gostarias de realizar mais tarefas deste tipo?

Pedro: Não sei.

Investigadora: Não sabes?

Pedro: Não sei (sorrindo).

(...)

Investigadora: Gostaste mais de criar o problema ou de resolvê-lo?

Pedro: É mais divertido resolver.

Investigadora: É mais divertido resolver?

Pedro: Porque criá-lo não se tem que pensar assim muito, mas resolver tem sempre aquela coisa...

Investigadora: Mas por exemplo, tu aqui para criares (...) acabavas por ter de resolver!

Pedro: Sim, mas não é a mesma coisa.

(Entrevista, Pedro)

O Pedro revelou agrado pela realização da tarefa de formulação de problemas, embora tivesse revelado alguma dificuldade em encontrar um contexto adequado à solução do sistema de equações dado. Partilhou ainda gostar mais de resolver um problema do que criá-lo, pois considera uma atividade divertida, não associando que para criar um problema, como foi o caso, é necessário resolvê-lo e verificar se a solução obtida faz, ou não, sentido no contexto do problema.

A última situação que apresento em relação à primeira tarefa de formulação de problemas é o caso da Filipa. Esta aluna elaborou uma situação que pode ser uma tradução possível do sistema de equações apresentado (Figura 21).

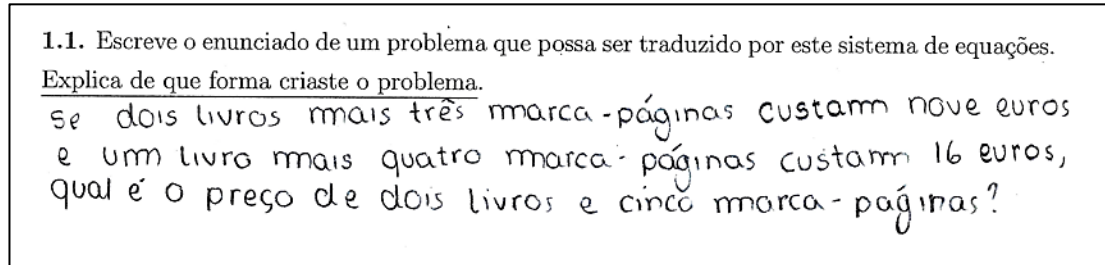


Figura 21 – Resolução da Filipa da primeira tarefa de formulação de problemas

Novamente, o contexto está relacionado com artigos de papelaria, no entanto, a aluna esclareceu, na entrevista realizada posteriormente, que tinha retirado ideias de problemas do manual e optado por colocar no enunciado do seu problema elementos que gostava, como por exemplo, os livros. O problema enunciado pela aluna sugere que a mesma compreendeu o objetivo da tarefa, apresentando uma situação coerente com as informações presentes no sistema de equações fornecido. No entanto, também esta aluna não resolveu o seu problema, o que não lhe permitiu verificar que a solução do sistema de equações não tinha sentido no contexto do seu problema.

Na entrevista realizada à aluna a mesma referiu que não teve tempo de resolver a tarefa e que também não estava a conseguir fazê-lo. Quando questionada se queria tentar resolver o sistema de equações, a resposta da aluna sugeriu que a mesma não sabia resolver sistemas de equações, como mostra o excerto seguinte:

Investigadora: E por que é que não resolveste o teu problema?

Filipa: Porque não deu tempo, primeiro, porque tocou logo. Tocou logo e eu não estava a conseguir resolver.

Investigadora: E queres tentar?

Filipa: Não entendo nada (sorrindo).

Investigadora: Tenta lá e assim já estudas um pouco para o teste.

Filipa: Não entendo nada (enquanto pegava no lápis para escrever).

Investigadora: Entendes, entendes! Anda lá, que eu ajudo-te!

(Entrevista, Filipa)

A aluna resolveu o sistema de equações, ainda que com bastantes dificuldades. É de salientar que a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau a duas incógnitas já tinha sido trabalhada em aula, e enquanto material de apoio, tinha sido entregue uma ficha de trabalho, realizada por mim e pela minha colega de estágio, onde constava uma explicação do método de substituição, bem como as etapas necessárias na aplicação desse mesmo método.

Quando a Filipa encontrou a solução do sistema, questionei se esta fazia sentido tendo em conta o contexto do problema que ela própria tinha elaborado. A aluna respondeu prontamente que não. Portanto, este diálogo sugeriu que a aluna, apesar de não ter resolvido o sistema de equações, por ter algumas dificuldades em fazê-lo, conseguiu compreender que a solução não faria sentido no contexto do seu problema. Deste modo, permanece a dúvida sobre se a aluna, conseguindo resolver o sistema aquando da criação do problema, teria tido a perceção de que a solução não faria sentido no contexto escolhido e teria procedido à alteração do contexto do seu problema. De qualquer forma, na entrevista, quando questionada sobre um contexto possível para reformular o enunciado do problema, a aluna não conseguiu avançar com um exemplo.

De seguida, questionei a aluna sobre quais teriam sido as suas dificuldades na realização desta tarefa e a aluna afirmou que tinha sido a resolução do sistema de equações, reconhecendo que não o sabia fazer. Segue-se um excerto da entrevista, onde a mesma partilhou a sua opinião sobre a tarefa de formulação de problemas:

Investigadora: E gostaste mais de resolver ou de criar?

Filipa: Criar... é mais fácil!

(...)

Investigadora: Queria saber se já tinhas feito este tipo de tarefas, antes de teres feito aqui na sala. Já tinhas feito?

Filipa: Já, no centro de estudos.

Investigadora: Ok. E gostarias de repetir?

Filipa: Não (sorrindo)!

Investigadora: Porquê?

Filipa: Porque é difícil. Não consigo!

Investigadora: Consegues, consegues! Então, tu conseguiste formular um problema! Faltou apenas resolver o sistema e verificar se a solução faria, ou não, sentido para o teu problema!

Filipa: Sim!

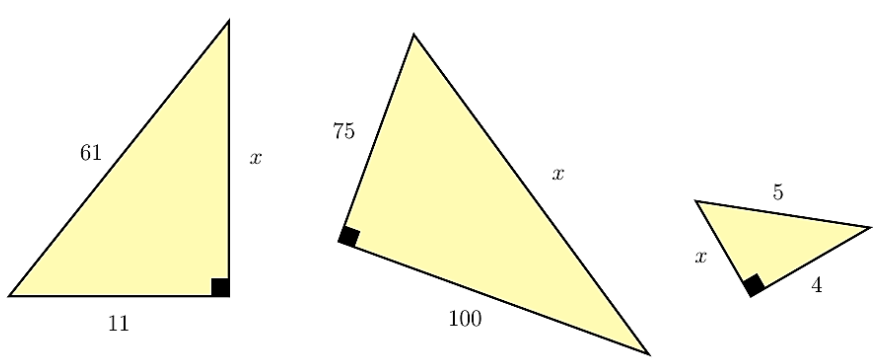
(Entrevista, Filipa)

Portanto, como sugere a entrevista, a aluna não mostrou interesse em repetir a resolução de tarefas de formulação de problemas, porque considerou que não tinha conseguido concluir a tarefa por não ter resolvido o problema criado. A aluna partilhou até que este tipo de tarefas era fácil, no sentido em que considerava fácil criar um problema, mas que, por outro lado, era difícil, pelo facto de envolver a resolução de um sistema de equações, situação que despoletou um sentimento contraditório na aluna.

5.3. Segunda tarefa de formulação de problemas

No desenvolvimento da minha intervenção pedagógica, propus uma segunda tarefa de formulação de problemas, onde o subtópico abordado foi o Teorema de Pitágoras, do tópico das Figuras Planas, do tema da Geometria. Com esta tarefa pretendia-se que a partir da seleção de um triângulo, entre três opções, o aluno formulasse um problema (Figura 22).

1. Atenta na figura seguinte:



1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 22 – Segunda tarefa de formulação de problemas

Desta vez, ao contrário do que aconteceu na primeira tarefa de formulação de problemas, os alunos assim que receberam a tarefa começaram a pensar e a tentar enunciar um problema. Surgiram apenas questões relativas à escolha de um dos triângulos e como teriam de realizar essa mesma escolha. Esclareci-os, afirmando que teriam de escolher apenas um dos triângulos apresentados e que deveriam escolher aquele que consideravam que seria mais adequado ao tipo de problema que queriam criar.

Decidi não avançar com qualquer exemplo acerca de problemas já realizados e que envolviam triângulos, em particular problemas que envolviam a aplicação do Teorema de Pitágoras. Esta opção em não dar exemplos prendeu-se com o facto de, na primeira tarefa de formulação, ter apresentado um exemplo e este poder ter condicionado os

contextos dos problemas criados pelos alunos, limitando a sua criatividade. No entanto, após a recolha e análise das produções escritas dos alunos, nesta segunda tarefa de formulação de problemas, constatei que recorreram à temática que tinha sido abordada mais recentemente, e que envolvia triângulos retângulos, no caso, o Teorema de Pitágoras.

Em relação a esta segunda tarefa de formulação de problemas, selecionei os alunos Vera, João, Bianca e Pedro, cuja análise e discussão de resultados passo a apresentar.

Vários alunos criaram um enunciado, no entanto, a tarefa criada não constituiu um problema, sendo que os enunciados apresentados passavam pela indicação das medidas de comprimento de dois lados do triângulo e à solicitação da descoberta da medida de comprimento do lado desconhecido. Um desses casos, foi o enunciado apresentado pela Vera (Figura 23).

1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

O João desenhou um triângulo cujos os lados medem 61cm, 11cm, respetivamente. Qual o comprimento do cateto, em centímetros, do triângulo desenhado pelo João?



1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$61^2 = 11^2 + x^2$$

$$3721 = 121 + x^2$$

$$3721 - 121 = x^2$$

$$\sqrt{3600} = x$$

$$60 = x$$

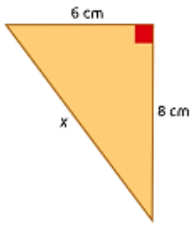
R: O comprimento do cateto do triângulo desenhado pelo João é 60cm

Figura 23 – Resolução da Vera da segunda tarefa de formulação de problemas

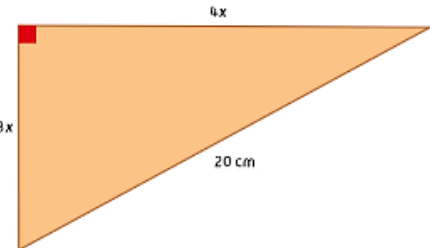
Aquando da formulação de problemas, recorde-me da aluna abrir o manual numa página em que havia tarefas idênticas à tarefa criada pela mesma, mas que, no entanto, não constituíam problemas (Figura 24).

1 Determina o valor de x , em centímetros.

1.1.



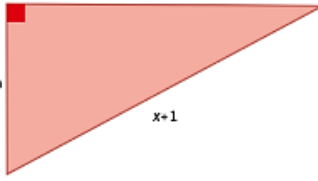
1.2.



1.3.

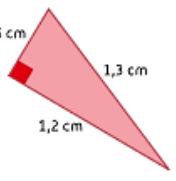


1.4.

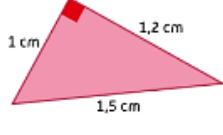


2 Verifica se os triângulos representados são retângulos.

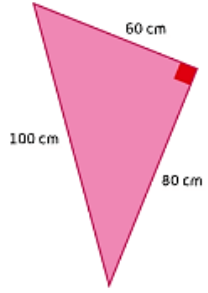
(A)



(B)



(C)



3 Qual é o valor desconhecido, y , no terno pitagórico $(8, y, 17)$?

(A) 14 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 16,2

Figura 24 – Tarefas de inspiração para a criação do problema retiradas do manual adotado
(Conceição & Almeida, p. 122)

Sendo assim, os dados recolhidos sugerem que a aluna se inspirou na primeira tarefa do manual (Figura 24). Com base nessa inspiração, procurou um contexto e adaptou essa tarefa inicial a um dos triângulos fornecidos nesta segunda tarefa de formulação de problemas, alinhando-a com contexto escolhido. Ou seja, esses dados parecem indicar que a aluna se esforçou para garantir que a tarefa criada constituísse um problema, tentando que se verificassem algumas características de um problema matemático, abordadas em sala de aula, como a possibilidade de um problema poder contemplar um contexto do dia-a-dia. No entanto, a tarefa que a aluna criou é uma tarefa de aplicação direta do Teorema de Pitágoras, não sendo necessário outro tipo de procedimento na sua resolução e não assumindo, deste modo, um grau de desafio elevado.

Quando questionei a aluna acerca da escolha do contexto, a mesma mencionou que escolheu o mesmo por “ser mais fácil” (Entrevista, Vera), afirmando logo de seguida que não seria por ser mais fácil, mas mais interessante. Sobre a natureza da tarefa criada pela aluna, apresento, de seguida, um excerto de entrevista onde tento esclarecer algumas questões.

Investigadora: Consideras que o que criaste é um problema?

Vera: Sim!

Investigadora: Sim?

Vera: Sim, tem de se descobrir o x na mesma. Era a mesma coisa que dizer “descobre o x ”.

Investigadora: Tens de descobrir o x . Mas não é muito fácil? Ou seja, o que é um problema para ti?

Vera: Tem de ter alguma coisa por trás.

Investigadora: Tem de ter o quê? Tem de ter um contexto?

Vera: Sim.

Investigadora: E aqui, tens um contexto?

Vera: Tem! Ele desenhou um triângulo.

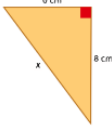
Investigadora: Certo. E mais? O que é que tem de ter mais para ser um problema? Ou seja, das tarefas que nós resolvemos, quais é que tu achas que são problemas?

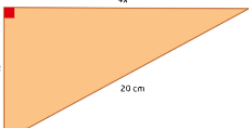
(Entrevista, Vera)

Para facilitar esta discussão, abri o manual em algumas páginas, entre as quais aquela que incluía as tarefas nas quais a Vera se inspirou para criar a sua tarefa (Figura 25 e Figura 26), e, tendo por base estes exemplos, a aluna indicou-me aquelas que considerava problemas.

3.1 Vou aplicar

1 Determina o valor de x , em centímetros.

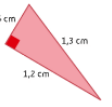
1.1. 

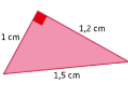
1.2. 

1.3. 

1.4. 

2 Verifica se os triângulos representados são retângulos.

(A) 

(B) 

(C) 

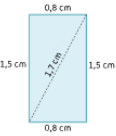
3 Qual é o valor desconhecido, y , no terço pitagórico $(8, y, 17)$?

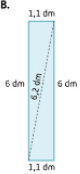
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 16,2

Figuras planas 3

4 Indica três ternos pitagóricos, que sejam lados de triângulos semelhantes ao triângulo retângulo de catetos 15 cm e 20 cm.

5 Um dos dois paralelogramos seguintes não é um retângulo. Descobre qual é. Justifica a tua escolha.

A. 

B. 

6 Na figura, está representado um triângulo retângulo. Em cada lado do triângulo, encontra-se um quadrado com o mesmo comprimento do respetivo lado.

Calcula:

6.1. a área do triângulo, em centímetros quadrados;

6.2. o perímetro do triângulo, em centímetros.

Em cada alínea, apresenta todos os cálculos que efetuares.

7 Na figura, está representado o triângulo equilátero $[ABC]$ cujos lados medem 10 cm.

7.1. Qual é a amplitude do ângulo ABC ? Justifica a tua resposta.

7.2. Determina a altura do triângulo $[ABC]$, em centímetros e arredonda às décimas. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

7.3. Calcula a área do triângulo $[ABC]$, em centímetros quadrados. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Figura 25 – Tarefas retiradas do manual adotado (Conceição & Almeida, pp. 122–123)

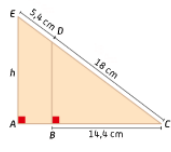
3.2 Vou aplicar

1 O António tem uma escada com 3 metros de comprimento. Se o António encostar a escada à parede e a parte inferior da escada distanciar meio metro da parede, a que altura (do chão) fica o topo da escada?

Mostra como chegaste à tua resposta.

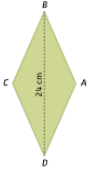
Apresenta a resposta em metros, arredondada às centésimas.

2 Tendo em conta os dados da figura, calcula o comprimento, h , em centímetros.

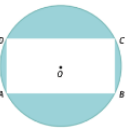


Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3 Na figura, está representado um losango $[ABCD]$, com 60 cm de perímetro e cuja diagonal maior mede 24 cm. Calcula a área do losango, em centímetros quadrados. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

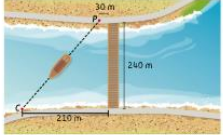


4 Na figura, encontram-se representados uma circunferência, de centro O e diâmetro $[AC]$, e o retângulo $[ABCD]$, inscrito na circunferência, de dimensões 5 m por 12 m. Determina a área, em metros quadrados, da parte sombreada da figura. Apresenta o resultado arredondado às décimas e todos os cálculos que efetuares.

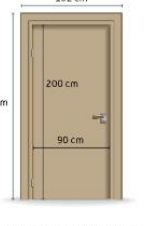


Figuras planas 3

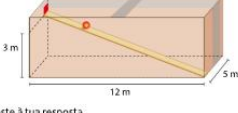
5 Na figura, está representada uma ponte pedonal com 240 metros de comprimento. Um barco parte do ponto P e demora 10 minutos a chegar ao ponto C . Qual é a velocidade média, em quilómetros por hora, atingida pelo barco, nesta travessia? Mostra como chegaste à tua resposta.



6 Na figura, está representada a porta do quarto do Ricardo. O Ricardo comprou um colchão novo para a sua cama. Depois de o comprar, ficou a pensar se o colchão, com 2,5 metros de largura por 2,2 metros de comprimento, passaria na porta do seu quarto. Conseguirá o Ricardo entrar com o colchão pela porta do quarto? Mostra como chegaste à tua resposta.



7 Uma equipa de investigadores vai estudar a influência de um certo ambiente no deslizar de uma esfera por uma rampa. Para tal, a experiência será realizada dentro de uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, em ambiente controlado. Tendo em conta as dimensões da caixa e que a bola é largada no início da rampa a 3 m de altura, qual é o comprimento da rampa utilizada na experiência?



Mostra como chegaste à tua resposta. Apresenta o resultado em metros e arredondado às décimas.

Figura 26 – Tarefas retiradas do manual adotado (Conceição & Almeida, pp. 126–127)

Vera: Estas! (apontando para as tarefas da página 127 do manual adotado (Figura 26))

Investigadora: Mas por que é que esses são problemas?

Vera: Porque temos de descobrir alguma coisa, depois de descobrir o lado.

Investigadora: Pois. Ou seja, depois de aplicares o Teorema de Pitágoras, tens de fazer outra coisa qualquer, certo?

Vera: Sim!

Investigadora: São mais difíceis, porque têm mais etapas na resolução. E então, isto aqui é um problema para ti (apontando para a tarefa formulada pela aluna)?

Vera: Não! Mas foi a primeira coisa que me veio à cabeça!

(Entrevista, Vera)

Estes dados sugerem que a aluna tem alguma perceção sobre a definição de problema e que procurou que a tarefa que criou se enquadrasse na definição de problema. Quando questionada sobre se a tarefa que criou era um problema, a aluna respondeu afirmativamente. No entanto, com a reflexão proporcionada pela entrevista acerca do que se entende por problema, a Vera compreendeu que, de facto, o enunciado que tinha construído não era um problema.

Dando continuidade a esse diálogo, questioneei a aluna se gostaria de efetuar uma nova tentativa e procurar formular um problema. Apesar de inicialmente ter concordado, posteriormente, recusou. Perante esta situação, optei por não insistir. Ainda assim, avancei com a entrevista no sentido de procurar compreender melhor qual a perceção da Vera acerca da experiência com este tipo de atividades. Veja-se o seguinte excerto de entrevista onde é partilhada a sua opinião:

Investigadora: Então, gostaste de criar problemas?

Vera: Mais ou menos!

Investigadora: Mais ou menos, porquê?

Vera: Porque eu não consigo, digamos assim, desenvolver um problema.

Investigadora: Mas por que é que não consegues? Qual é a tua dificuldade? É o contexto?

Vera: É criar um texto ou uma coisa por trás. Mesmo a resolver este tipo de problemas eu não sou boa, imagina a fazê-los.

(...)

Investigadora: E gostavas de repetir?

Vera: Sim.

Investigadora: E gostaste mais de criar ou resolver?

Vera: De resolver!

(...)

Investigadora: Resolver, porquê?

Vera: Porque eu gosto mais de resolver do que ter de pensar no que está por trás.

(Entrevista, Vera)

Apesar da Vera não ter revelado muito agrado por este tipo de atividades, manifestou vontade em repetir a experiência, mostrando preferência por resolver o problema quando comparando com criar esse mesmo problema. Esta preferência, tal como reconheceu a aluna, está associada à dificuldade em criar um contexto para integrar no problema.

Outra resolução que selecionei para esta segunda tarefa de formulação de problemas foi a do João. O enunciado que o aluno criou constituiu um problema e foi uma das resoluções que mais me impressionou, devido à habitual dificuldade de comunicação escrita que o aluno demonstrava, mas que nesta resolução pouco se fez notar. Ao analisar a produção escrita do João, constatei que ele se baseou num problema realizado e discutido numa das aulas anteriores (Figura 27). Esse problema envolvia o cálculo da distância percorrida por um barco num determinado intervalo de tempo, seguida do cálculo da velocidade média atingida pelo mesmo nesse percurso.

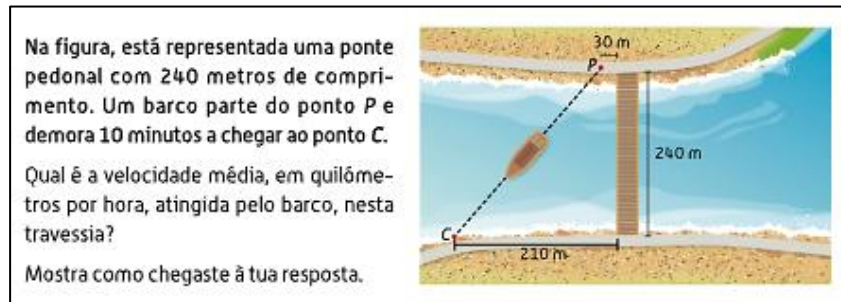


Figura 27 – Tarefa de inspiração para a criação do problema retirada do manual adotado (Conceição & Almeida, p. 127)

No caso do problema do João (Figura 28), um carro percorreu uma determinada distância, num determinado intervalo de tempo, e pretendia-se determinar a sua velocidade média. O aluno não apresentou o triângulo escolhido e, apenas quando o entrevistei, indicou qual teria sido o triângulo utilizado como referência para criar o seu problema.

1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

Um carro está a descer uma rua bem inclinada e demora 5 minutos a descer a rua toda.

Qual era a sua velocidade, que atingia por hora?

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$x^2 = 75^2 + 100^2$$

$$x^2 = 5625 + 10000$$

$$x^2 = 15625$$

$$x = \sqrt{15625}$$

$$x = 125$$

R: Ele ia 125 Km

Figura 28 – Resolução do João da segunda tarefa de formulação de problemas

Quando questioneei o João acerca de qual tinha sido o seu procedimento para criar o problema, o aluno referiu que tinha pensado na inclinação e, posteriormente, pensado no carro. Como suspeitei que haveria relação entre o problema que tinha criado e um

problema que tínhamos realizado do manual, questionei o aluno sobre qual tinha sido a razão para se ter lembrado da velocidade. Nesse momento, o aluno referiu que se tinha baseado em alguns dos problemas do manual. Para além do problema do barco, o aluno tinha encontrado inspiração num outro problema do manual que envolvia o deslizamento de uma bola por uma calha de madeira, colocada dentro de uma caixa (Figura 29). Portanto, houve, da parte do João, uma capacidade de, a partir dos dois problemas que já tinham sido realizados, formular um outro problema que envolvesse um dos triângulos fornecidos no enunciado da tarefa.

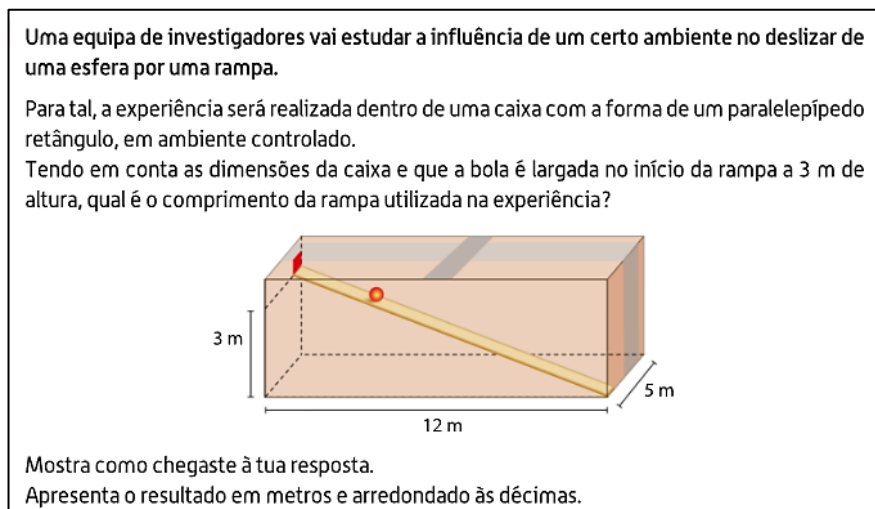


Figura 29 – Tarefa de inspiração para a criação do problema retirada do manual adotado
(Conceição & Almeida, p. 127)

Na entrevista, procurei esclarecer qual foi de facto o objetivo do problema proposto pelo João. Neste sentido, compreendi que o aluno pretendia que se calculasse a velocidade média do carro e que esta fosse dada em quilómetros por hora, tal como podemos confirmar pelo seguinte excerto da entrevista.

Investigadora: Então, o carro está a descer uma rua inclinada e demorou cinco minutos, certo?

João: Sim.

(...)

Investigadora: Mas qual foi a tua pergunta? Qual era a velocidade que atingia. Por hora?

João: (sorrindo) Pois é, tive de dizer assim.

Investigadora: Ou seja, a tua pergunta teria de ser: qual é a sua velocidade...

João: Em quilómetros por hora.

(Entrevista, João)

O aluno recorreu a uma boa estratégia, uma vez que procurou inspiração em dois problemas que já conhecia para proceder à formulação de um novo problema. Constataram-se algumas fragilidades associadas à dificuldade do aluno em comunicar matematicamente. No entanto, no geral, foi um problema consideravelmente bem formulado.

Por outro lado, como constatei que o aluno não tinha sido capaz de resolver o problema por completo, procurei apoiá-lo a melhorar esse aspeto, questionando, novamente, sobre qual era o objetivo do seu problema e sobre o que tinha feito para, de facto, resolvê-lo. Deste modo, o aluno compreendeu que, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo, tinha calculado apenas a distância percorrida pelo carro e, posteriormente, ajudei-o a entender qual seria a distância percorrida numa hora, tendo em conta as condições já conhecidas. O aluno esclareceu ainda que a distância percorrida em 5 minutos era medida em metros, algo que também devia ser claro no enunciado do problema formulado. Acerca das suas dificuldades na tarefa de formulação de problemas, o João afirmou que a maior teria sido resolver o problema dado não ter estado presente na aula quando foi abordado, pela primeira vez, o Teorema de Pitágoras. No entanto, na sua resolução, o João faz uma correta aplicação do mesmo.

Por fim, tentei entender qual a perceção do João acerca da atividade de formulação de problemas, como se apresenta no excerto de entrevista que se segue:

Investigadora: Gostavas de voltar a formular problemas?

João: Mais ou menos.

Investigadora: Mais ou menos? Porquê?

João: Posso cometer o mesmo erro (referindo-se à questão colocada no problema). E eu aqui tive dúvidas a pensar nisto [no enunciado]. Pensei mais rápido para resolver do que para criar um problema...

(...)

Investigadora: Gostaste mais de resolver ou de criar?

João: Resolver!

Investigadora: Porquê?

João: Porque é mais fácil e eu tenho menos criatividade.

Investigadora: Já tinhas feito este tipo de tarefas antes, sem ser na outra aula de matemática em que já tínhamos realizado? Já tinhas criado problemas?

João: Não, só naquela e agora nesta.

Investigadora: E achas que é interessante?

João: Um bocado...

Investigadora: (sorrindo) Só um bocado?

João: Sim, porque eu não sei criar problemas.

(Entrevista, João)

Portanto, apesar do aluno ter demonstrado um bom desempenho na formulação do seu problema, ele assumiu que não sabia criar problemas, o que pode ser um resultado do mesmo não estar habituado a este tipo de tarefas e essa falta de hábito provocar nele uma perceção de incapacidade.

Apresenta-se em seguida o caso da Bianca como exemplo de outra resolução para a segunda tarefa de formulação de problemas. A Bianca escolheu o mesmo triângulo que o João e criou uma tarefa a partir do mesmo (Figura 30). No entanto, a situação que ela criou e o contexto que forneceu acabaram por ser desnecessários, na medida em que em nada contribuíam para a resolução do problema.

1. Atenta na figura seguinte:

(A)

(B)

(C)

1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

~~Descobre o valor da hipotenusa, e o valor de x do triângulo B.~~

Na situação B, é possível ver um apoio feito de madeira para se poder colocar uma tábua em cima. O João quer comprar 4 desses mas não sabe o valor da hipotenusa do triângulo.

Descobre o valor de x.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

B)

$$x^2 = 75^2 + 100^2 = ?$$

$$x^2 = 15625 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{15625} \Leftrightarrow$$

$$x = 125.$$

Figura 30 – Resolução da Bianca da segunda tarefa de formulação de problemas

Na análise do enunciado criado pela Bianca, surgiram vários aspetos que exigiram esclarecimentos. Primeiramente, não compreendi em que posição a aluna imaginou que poderia ser colocado uma tábua, considerando que o triângulo representado seria um apoio de madeira. Além disso, questionei-me sobre a relação entre comprar 4 apoios e querer descobrir a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo. Recorri à entrevista para esclarecer todos estes aspetos e tentar compreender como foi formulada esta tarefa, como pode ser confirmado no seguinte excerto de entrevista:

Investigadora: Por que é que escolheste este contexto?

Bianca: Foi o que me veio à cabeça. (...) Porque eu ia só por o valor de x , mas como pedia um problema...

Investigadora: Mas isso seria um problema?

Bianca: Não.

Investigadora: Primeiro, por que é que escolheste este triângulo?

Bianca: Porque era o mais fácil, mais simples, por causa dos valores.

Investigadora: E porque desconheces a medida da sua hipotenusa, certo? Por isso é só aplicares [o Teorema de Pitágoras].

Bianca: Sim.

Investigadora: Mas eu não percebi o teu problema. (...) O que é que tu disseste?

Bianca: São aqueles triângulos que são colocados para por uma prateleira em cima.

Investigadora: Ok, mas então é ao contrário certo [a posição do triângulo]?

Bianca: Não. Há alguns que são assim.

Investigadora: Ora desenha no teu caderno!

(Entrevista, Bianca)

O triângulo que a Bianca desenhou no seu caderno era semelhante ao triângulo apresentado na tarefa, mas sem qualquer rotação, como exemplificado na Figura 31.

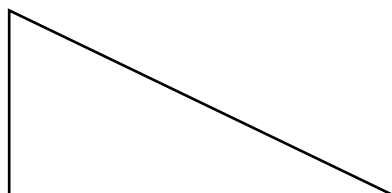


Figura 31 – Exemplificação do triângulo desenhado pela Bianca

Como continuei sem compreender onde seria colocada a referida prateleira, continuei a questionar a Bianca:

Investigadora: Onde é que se coloca a prateleira?

Bianca: Na parede!

Investigadora: Então, mas o triângulo é para quê? Não estou a perceber.

Bianca: Não sei também, mas na minha cabeça estava a fazer sentido.

(Entrevista, Bianca)

Por isso, embora o contexto da prateleira e do apoio da mesma seja interessante, parece faltar à Bianca um pouco de perceção da sua plausibilidade na realidade, porque quando questionada, a aluna compreendeu, numa primeira fase, que não faria sentido apoiar uma prateleira nos vértices do triângulo, paralelamente ao chão, e, numa segunda fase, compreendeu que não faria sentido colocar uma prateleira apoiada nas arestas dos apoios se eles fossem posicionados da forma como a aluna os desenhou (Figura 32).

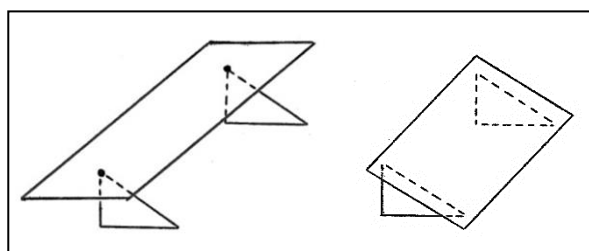


Figura 32 – Colocação da prateleira no apoio

Relativamente à intenção de compra, a aluna não descreveu, especificamente, o porquê de ter referido que o “João” queria a medida de comprimento da hipotenusa, apenas afirmou que lhe tinha feito sentido esse cálculo, porque a prateleira seria apoiada na hipotenusa do apoio triangular.

As dificuldades da aluna foram principalmente relacionadas com o facto de o enunciado criado ter, ou não, sentido na realidade, uma vez que procurou integrar um contexto do dia-a-dia. Embora a ideia por trás do enunciado fosse aceitável, a forma como foi desenvolvida não foi bem conseguida, o que levou à confusão e à falta de clareza. Por outro lado, e talvez devido a essa falta de clareza, o contexto não tinha qualquer implicação na resolução do problema criado, passando esta apenas pela concretização de um procedimento, pelo que não corrobora a ideia de problema.

Na entrevista, a aluna afirmou ter gostado de criar um problema e concordou que as suas dificuldades se tinham prendido, sobretudo, em criar um problema através de uma situação real que fizesse sentido. Além disso, a aluna revelou uma preferência por

resolver problemas em vez de criá-los, argumentando que a resolução seria mais fácil do que a criação. Este aspeto pode estar relacionado com a falta de hábito de resolução de tarefas de formulação de problemas, uma vez que a Bianca referiu nunca o ter feito anteriormente, exceto na última tarefa de formulação por mim proposta.

Apesar de ter demonstrado gosto nesta tarefa de formulação, a aluna referiu que não gostaria de voltar a realizar este tipo de tarefas, como se pode confirmar no seguinte excerto de entrevista:

Investigadora: Queria perguntar se queres repetir... Ou seja, gostavas de voltar a criar problemas? Gostavas de voltar a fazer?

Bianca: Não, dá muito trabalho e é difícil (rindo).

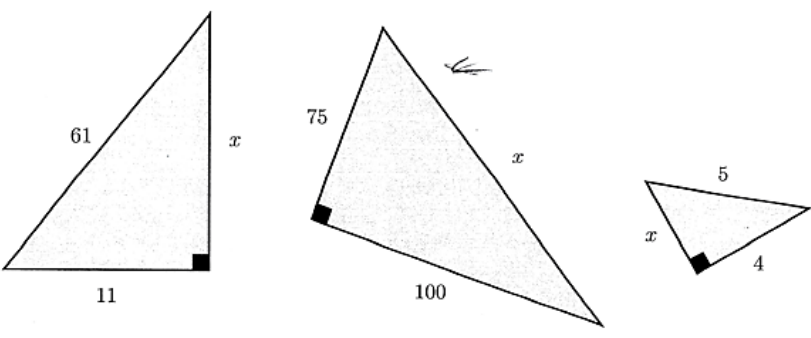
(Entrevista, Bianca)

Portanto, a perceção da Bianca é que, embora tenha gostado de formular o seu próprio problema, não gostaria de repetir o processo no futuro devido à perceção de que é uma tarefa difícil. Esta dificuldade revela-se assim um elemento desencorajador.

O último caso que se apresenta para esta segunda tarefa de formulação de problemas foi o problema construído pelo Pedro (Figura 33). Esta resolução apresentou algumas fragilidades, no sentido em que não era totalmente perceptível o que se pretendia com o problema proposto.

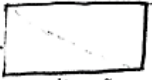
O contexto do Pedro prendia-se com a divisão de um terreno de modo a organizar a plantação de cenouras e batatas. Para isso, o proprietário do terreno pretendia dividir o mesmo na “forma triangular”, como referido pelo Pedro, ainda que pouco legível, na Figura 33. Sendo assim, no problema do Pedro, era solicitado que se ajudasse o proprietário a dividir o terreno em dois triângulos, como exemplificado no seu desenho (Figura 33) e como reproduzi na Figura 34.

1. Atenta na figura seguinte:



1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

75  *100*

O S. Zé comprou um terreno agrícola retangular e quer dividir o terreno em dois para um lado de plantar batatas e no outro cenouras. Ele pensa dividir em for. Triangular. Ajuda o S. Zé a dividir o terreno em dois triângulos iguais. Escreve o resultado arredondado ao décimo.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$h^2 = 75^2 + 100^2$$

$$h^2 = 5625 + 10000$$

$$h^2 = 15625$$

$$h = \sqrt{15625}$$

$$h \approx 125$$

1

Figura 33 – Resolução do Pedro da segunda tarefa de formulação de problemas

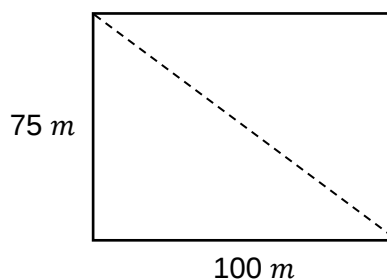


Figura 34 – Exemplificação do desenho feito pelo Pedro na resolução da segunda tarefa de formulação de problemas

O enunciado que o aluno criou foi, no geral, bem formulado. No entanto, o aluno perdeu-se no objetivo do seu problema, não sendo claro o que se pretende determinar. Olhando para a figura desenhada, o terreno já está dividido e, para o desenho, não foi necessária a medida de comprimento da hipotenusa dos triângulos retângulos representados, por isso, não é claro que seja necessário realizar o cálculo apresentado na resolução do Pedro para resolver a tarefa que criou. Sendo assim, considero que a principal dificuldade do Pedro foi escrever, de forma clara, aquilo que queria descobrir com este problema, ou seja, que situação em concreto ele queria resolver. Ou seja, o proprietário do terreno queria dividi-lo, mas em que condições? Como é que essa divisão seria feita? Com uma rede? Com uma cerca de arame? Queria comprar o material para essa divisão? Ou já o tinha e queria saber a quantidade de material necessária? Se o enunciado incluísse alguma dessas questões ficaria clara a necessidade da aplicação do Teorema de Pitágoras, procedimento que o Pedro usou na resolução do seu problema.

Quando entrevistei o Pedro, questionei-o acerca do referido anteriormente e tentei explicar-lhe as alternativas que ele podia ter escolhido para que o seu problema envolvesse na sua resolução aquilo em que o Pedro tinha pensado, isto é, a aplicação do Teorema de Pitágoras. Veja-se o seguinte excerto da entrevista:

Investigadora: Qual é que é a tua pergunta aqui? Ou seja, se tu me desses a mim este problema o quê que tu esperavas que eu te respondesse?

Pedro: Para dividir em dois triângulos é preciso saber a hipotenusa.

Investigadora: Mas achas que se me desses essa pergunta eu iria calcular a hipotenusa? Ou achas que só fazia um desenho, por exemplo?

Pedro: Num teste de matemática não desenho...

Investigadora: Mas o que tu dizes é “ajuda o senhor José a dividir o terreno em dois triângulos iguais”.

Pedro: Sim.

Investigadora: Ou seja, tu tens estas dimensões (enquanto desenhava um retângulo igual ao que o Pedro desenhou) e dividir isto em dois triângulos iguais é fazer isto (enquanto traçava a diagonal do retângulo)

Pedro: Sim.

Investigadora: Não é calcular a medida de comprimento da hipotenusa, pois não?

Pedro: Não.

(...)

Investigadora: O que é que tu achas que podias fazer para, não mudar a pergunta, que a pergunta está bem, mas adicionar alguma coisa para as pessoas terem obrigatoriamente de calcular a hipotenusa? (...) O senhor José podia precisar de quê para fazer essa divisão?

Pedro: De uma rede!

(Entrevista, Pedro)

Com base nos dados recolhidos, parece que houve uma mudança na perceção do aluno em relação à formulação de problemas. Na primeira entrevista, realizada após a primeira tarefa de formulação, o aluno afirmou não saber se gostaria de voltar a realizar tarefas deste tipo, mas nesta entrevista, expressou interesse em fazê-lo novamente. Esta mudança de perceção pode estar relacionada com a preferência do Pedro pela aplicação do Teorema de Pitágoras em relação à resolução de sistemas, partilhada pelo mesmo na entrevista. Quanto às dificuldades sentidas, o mesmo afirmou que não tinham existido.

5.4. Terceira tarefa de formulação de problemas

No âmbito da intervenção pedagógica, foi proposta uma terceira tarefa de formulação de problemas. Esta integrou o tema Geometria e, de um modo particular, envolveu o subtópico do Teorema de Pitágoras e o das Áreas de Polígonos Regulares, do tópico das Figuras Planas (Figura 35).

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.
2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Figura 35 – Terceira tarefa de formulação de problemas

Quando distribuí a tarefa a maioria dos alunos estava reticente, porque afirmou de imediato não saber que problema criar por não estar na posse da primeira parte do manual, que continha os conteúdos em causa na tarefa. Questionei-os se tinham copiado algum problema do manual das últimas vezes que tinham realizado este tipo de tarefas, ao que me responderam negativamente, argumentando que apenas queriam o manual para recordar a matéria.

Posto isso, questionei-os sobre o que é que se lembravam sobre o Teorema de Pitágoras e, quase em coro, responderam corretamente. Sendo assim, desenhei um triângulo retângulo, no quadro, de catetos b e c e hipotenusa a e questionei os alunos sobre como poderia então enunciar o Teorema de Pitágoras com base na informação que tinha colocado no triângulo que desenhei. Prontamente, os alunos partilharam uma resposta correta, a qual transcrevi no quadro.

De seguida, questionei o que tínhamos abordado acerca das áreas dos polígonos regulares. De um modo geral, lembravam-se de termos falado do apótema, mas referiram não recordar a fórmula que tínhamos estudado para o cálculo dessas áreas. Questionei se algum aluno se recordava e, uma aluna, numa tentativa de resposta, respondeu corretamente. Sendo assim, deixei também essa fórmula escrita no quadro.

Optei por colocar estas ideias matemáticas no quadro, através da colaboração dos alunos, porque receei que alguns pudessem não realizar a tarefa de formulação de problemas por não se recordarem dessas ideias que a mesma exigia. Com esta ação, procurei que os alunos não desistissem de realizar a tarefa, no entanto, não dei exemplos concretos para não limitar a sua criatividade.

Apesar desta pequena síntese das ideias matemáticas necessárias à formulação do problema, alguns alunos mostraram não ter compreendido aquilo que foi recordado e, por isso, os problemas que formularam, bem como as respostas dadas a esses mesmos problemas, apresentam ideias que não têm qualquer sentido matemático.

Em relação à terceira tarefa de formulação de problemas, selecionei, para análise e discussão de resultados, os alunos Laura, Carlos, Vera e Maria.

A primeira resolução da terceira tarefa de formulação que apresento foi elaborada pela Laura (Figura 36). A aluna criou um enunciado que se baseava numa situação em que se pretendia vedar um terreno, no entanto, pareceu perder esse foco, pois, em seguida, solicitou diretamente o cálculo da medida do perímetro e da medida da área desse terreno. Para ainda tornar mais confusa a situação, a aluna acabou por fornecer, no enunciado do próprio problema, o valor da medida da área do terreno, o que não faz sentido, uma vez que solicitou que tal fosse calculado, e pediu para se determinar a medida de comprimento do apótema. Ou seja, inicialmente, o enunciado até poderia ter algum sentido, na medida em que ao considerar que se pretendia vedar um terreno, seria necessário determinar o valor da medida do perímetro do mesmo, possivelmente para se conhecer as dimensões de uma vedação. Contudo, o enunciado em questão perdeu o sentido quando, num segundo momento, solicitou o cálculo da medida da área, fornecendo esse mesmo valor, seguindo-se o pedido da medida de comprimento do apótema.

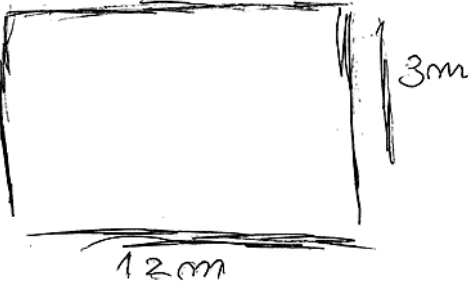
Portanto, a resolução da Laura sugere que a aluna tinha uma ideia inicial, que foi progressivamente esquecendo para ir incorporando, no seu ponto de vista, as condições que eram solicitadas na formulação do problema. A sua resolução sugere também que a aluna calculou a medida da área do retângulo somando a medida de comprimento com a medida de largura do mesmo. Em entrevista, a mesma referiu ter-se enganado, após ter sido questionada sobre como se determinava a medida da área de um retângulo.

A aluna procedeu à resolução do problema que tinha enunciado. Para tal, calculou a medida do perímetro da figura e substituiu, na fórmula² que relaciona a medida da área de um polígono regular com a medida do perímetro e a medida de comprimento do apótema desse mesmo polígono, quer a medida da área calculada, quer a medida do

² $\text{Área de um polígono regular} = \frac{\text{Perímetro}}{2} \times \text{Apótema}$

perímetro, obtendo assim, na sua perspetiva, o valor da medida de comprimento do seu apótema.

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras. O senhor Joaquim quer vender o seu terreno. Calcula o perímetro do terreno, depois calcula a sua área. Sabendo que a área é 15 m^2 descobre a apótema.



$P = 30 \text{ m}^2$

2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

$$15 \text{ m}^2 = \frac{30}{2} \times ap \leftarrow \text{temos que descobrir a ap}$$

$$\frac{15 \text{ m}^2}{15 \text{ m}^2} = 1$$

$$1 \text{ m}^2 = \text{apótema}$$

Figura 36 – Resolução da Laura da terceira tarefa de formulação de problemas

Deste modo, a aluna revelou não reconhecer que não estava perante um polígono regular e que, portanto, não poderia recorrer a essa fórmula. Veja-se o seguinte excerto da entrevista:

Investigadora: Tu utilizaste esta fórmula, que é para descobrir o quê?

Laura: Que é para descobrir o apótema.

Investigadora: Mas esta fórmula aplica-se a quê? Serve para quê? Ou seja, aprendeste esta fórmula em que contexto?

Laura: Do Teorema de Pitágoras.

Investigadora: A seguir ao Teorema de Pitágoras... Mas serve para quê? Para descobrir a medida da área de quê?

Laura: Do cateto. Não! Esqueci-me.

Investigadora: É para descobrir a medida da área de polígonos regulares ou irregulares?

Laura: Regulares...

Investigadora: Regulares, certo. E isto é um polígono regular (apontando para o retângulo desenhado)?

Laura: Eu acho que é...

Investigadora: O que é um polígono regular?

Laura: É quando os lados são todos iguais.

Investigadora: (sorrindo) Então não é regular, pois não?

Laura: Não.

A dificuldade apresentada na formulação do problema, por parte da Laura, foi para além da escrita do enunciado. A aluna demonstrou também algumas lacunas ao nível de conhecimento, uma vez que a acompanhar o enunciado desenhou um retângulo, que não é um polígono regular, e a partir deste recorreu a uma fórmula que tem por base polígonos regulares.

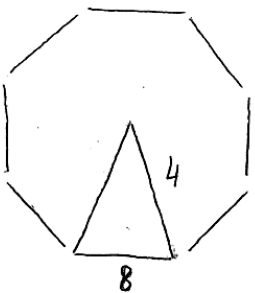
Em relação ao facto de o problema ter de integrar o Teorema de Pitágoras, quando questionada, a aluna reconheceu que o seu problema não envolvia a aplicação do referido teorema. Este aspeto parecia claro aquando da análise da resolução da aluna, contudo, optei por clarificá-lo na entrevista.

A perspetiva da aluna acerca da preferência pela resolução ou formulação de problemas parece ser clara, uma vez que, quando questionada, a aluna afirmou que preferia a formulação de problemas por constituir uma tarefa mais fácil, tal como partilhou quando entrevistada após a primeira tarefa de formulação de problemas. Portanto, a sua opinião manteve-se. No que diz respeito às dificuldades sentidas, a Laura apontou que as mesmas se verificavam na resolução do problema criado. A aluna mostrou também interesse em voltar a realizar esta experiência que tem por objetivo a formulação de problemas, como forma de “melhorar” o seu desempenho neste tipo de tarefas, como afirmou em entrevista.

O segundo caso relativo à resolução da terceira tarefa de formulação de problemas que selecionei foi o Carlos. O enunciado do problema concretizado pelo Carlos (Figura 37) foi também uma situação que não cumpriu os requisitos exigidos pela tarefa proposta e que revelou fragilidades ao nível de conhecimentos matemáticos, o que acabou por constituir um impedimento à formulação de um problema que com sentido.

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.

na figura está representado um espaço com 8 prédios, descobre qual é a área de cada prédio,



2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$h^2 = 8^2 + 4^2$$

$$h^2 = 80$$

$$h^2 = \sqrt{80}$$

$$h \approx 8,9$$

Figura 37 – Resolução do Carlos da terceira tarefa de formulação de problemas

O aluno, para criar o seu problema, desenhóu um octógono, supostamente, regular. Posteriormente, desenhóu um dos oito triângulos iguais em que o octógono pode ser dividido e atribuiu medidas de comprimento aos lados desse triângulo. No entanto, não existe um triângulo cujos lados tenham como medida de comprimento as medidas indicadas, ou seja, como se trata de um triângulo isósceles, as medidas de comprimento dos seus lados são 4, 4 e 8, o que não verifica a propriedade da desigualdade triangular. Portanto, uma das dificuldades consistiu em atribuir medidas de comprimento aos lados do triângulo que fizessem sentido, ou seja, medidas com as quais seja possível construir um triângulo retângulo.

Outra das dificuldades foi criar um problema que incluísse as condições pedidas. Apesar de ser pedido o cálculo de uma medida da área de um polígono regular, no seu enunciado, o aluno pretendia calcular a medida da área de um triângulo isósceles e, portanto, o problema envolvia o cálculo da medida da área de um polígono não regular. Por outro lado, integrava o Teorema de Pitágoras no cálculo da altura do triângulo, necessária para calcular a medida da área do mesmo.

Na resolução do seu problema (Figura 37), o aluno procedeu à aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo que desenhou, que não era um triângulo retângulo. Quando questionei o aluno sobre o que é que pretendia com esse cálculo (apresentado na Figura 37) respondeu-me que era para determinar a medida da área do triângulo que tinha desenhado. Sendo assim, os dados parecem sugerir que o aluno não compreendeu quer em que situações, quer com que objetivo pode ser aplicado o Teorema de Pitágoras e, talvez por estas razões, não tenha conseguido formular um problema que envolvesse esse subtópico.

Relativamente ao cálculo da medida da área de um polígono regular, o aluno, em entrevista, afirmou que o triângulo desenhado era um polígono regular e, sendo assim, na sua perspetiva, o enunciado que apresentou faria sentido. Ou seja, na sua perceção, o aluno tinha um triângulo regular, do qual queria saber a medida da área e esta, por sua vez, poderia ser calculada aplicando o Teorema de Pitágoras. Por isso, do ponto de vista do Carlos, o problema cumpria todos os requisitos que eram pedidos. No entanto, e caso tivessem sido atribuídos, aos lados do triângulo, medidas de comprimento que fizessem sentido, o seu problema apenas verificaria a condição do Teorema de Pitágoras, uma vez que a aplicação do mesmo seria necessária para calcular a medida de comprimento da altura do triângulo sendo esta, por sua vez, necessária para o cálculo da medida da área do mesmo.

Já sobre a perceção do Carlos relativamente à sua experiência na realização deste tipo de tarefas associadas à formulação de problemas, veja-se o seguinte excerto de entrevista:

Investigadora: Gostaste de formular problemas?

Carlos: Sim!

Investigadora: E gostavas de voltar a fazer ou nem por isso?

Carlos: Nem por isso.

Investigadora: Porquê?

Carlos: Porque não sei, sei lá.

Investigadora: Não sabes, porquê?

Carlos: Porque eu não percebo nada de matemática.

(...)

Investigadora: Gostaste mais de criar ou de resolver?

Carlos: Criar, professora, porque de resolver...

Investigadora: Só gostaste de criar, porque não sabias resolver?

Carlos: Não, professora. Eu sabia resolver se fosse um Teorema de Pitágoras! E eu prefiro criar.

Investigadora: Porque é mais fácil?

Carlos: Sim.

(Entrevista, Carlos)

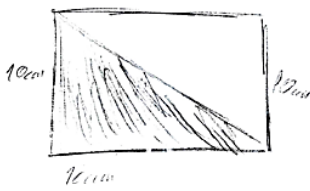
Ou seja, o aluno não pareceu confortável com a formulação de problemas, nem em voltar a realizar este tipo de tarefas, o que pode estar associado ao facto de reconhecer que tem fragilidades nesta disciplina. Partilhou também que gostou mais de criar tarefas do que de resolvê-las, assumindo que se trata de uma tarefa mais fácil. Ainda sobre dificuldades sentidas, o Carlos apontou que foram, essencialmente, na parte da formulação do problema, mas, quando questionado sobre se tinha tido dificuldades na resolução, o aluno respondeu “mais ou menos” (Entrevista, Carlos). Portanto, apesar do aluno ter referido, num primeiro momento, que preferia criar a resolver problemas, por ser mais fácil, num segundo momento, partilhou sentir mais dificuldades em criar problemas.

O terceiro caso que selecionei para esta terceira tarefa de formulação de problemas foi a Vera (Figura 38). A tarefa que a aluna criou consistiu no cálculo da medida da área de um triângulo resultante da divisão de um quadrado pela sua diagonal. Neste âmbito, a aluna apresentou um polígono regular, um quadrado, cujo valor da medida da área era dado e, portanto, o pretendido era calcular a medida da área de um triângulo retângulo, que não é um polígono regular. Sendo assim, a tarefa criada não envolvia o cálculo da medida da área de um polígono regular.

Por outro lado, o problema também não envolvia a aplicação do Teorema de Pitágoras, uma vez que os dados necessários para o cálculo da medida da área do triângulo eram

já fornecidos. Por exemplo, para calcular a medida da área do triângulo, bastava dividir a medida da área do quadrado por dois e, com apenas este cálculo, a situação ficava resolvida.

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.



como está representado na figura temos um polígono regular com 100 m de área. Qual é a área do triângulo sombreado.

2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$100 = 10 \times 10$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$x^2 = 10^2 + 10^2$$

$$x^2 = 100 + 100$$

$$x = \sqrt{200}$$

$$x = 14,1 \text{ cm}$$

Resposta: a área sombreada é 14,1 cm² de área.

Figura 38 – Resolução da Vera da terceira tarefa de formulação de problemas

No entanto, na sua resolução (Figura 38), a Vera aplicou o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo sombreado e afirmou que o resultado obtido, a partir desse cálculo, era a medida da área do mesmo.

Veja-se o seguinte excerto de entrevista, quando procurei esclarecer aspetos relacionados com a resolução:

Investigadora: Tinhas de calcular a medida da área do triângulo sombreado, certo? Tu já tinhas a medida da área do quadrado, certo?

Vera: Sim.

Investigadora: Que era 10×10 , que dava 100 (apontando para esse cálculo na resolução da aluna). E aqui, o que calculaste (apontando para o teorema de Pitágoras)?

Vera: O Teorema de Pitágoras, desnecessariamente.

Investigadora: O que é que tu calculaste com o Teorema de Pitágoras?
Calculaste esta medida, certo (apontando para a hipotenusa do triângulo sombreado)?

Vera: Ah? Não faz sentido.

(Entrevista, Vera)

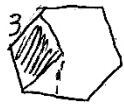
Portanto, a dificuldade da Vera consistiu, sobretudo, em criar um problema que verificasse as condições pedidas, dado que nenhuma delas foi incluída no seu problema. Outra dificuldade foi também a incoerência entre as unidades de medida, uma vez que na figura desenhada a aluna se refere às medidas de comprimento em centímetros e no enunciado escrito se refere às mesmas em metros, no entanto, quando a aluna foi entrevistada, reconheceu de imediato que se tinha enganado. A entrevista sugere que não houve, por parte da aluna, uma leitura atenta do problema criado após a sua criação, nem uma revisão daquilo que seria necessário à sua resolução.

Quando questionada sobre as dificuldades que sentiu nesta experiência, a aluna indicou a criação do problema, acrescentando que tinha gostado mais de resolver o problema do que de criá-lo, porque para criar um problema era necessário “pensar muito” (Entrevista, Vera) e resolver era mais fácil.

Por último, e para esta terceira tarefa de formulação de problemas, apresenta-se o caso da Maria (Figura 39).

1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.

temos um polígono regular com 6 lados.
Cada lado mede 3 e a apótema mede 1,5.
Descobre quanto é a área sombreada.
Se for necessário arredonda às centésimas.



$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Figura 39 – Resolução da Maria da terceira tarefa de formulação de problemas (parte 1)

A tarefa que a aluna criou consistiu em calcular a medida da área de uma região sombreada. A aluna, em entrevista, referiu que se baseou numa tarefa que tinha sido realizado em aula e que, posteriormente, alterou. A tarefa criada era um problema, porém, um dos dados fornecidos não estava correto e é a própria aluna a compreender que, de facto, alguma coisa não está correta no problema que criou, tal como podemos ver escrito no final da sua resolução ao seu próprio problema (Figura 40).

2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

$$A = \frac{18 \times 1,5}{2} \Leftrightarrow$$

$$A = 9 \times 1,5 \Leftrightarrow$$

$$A = 13,5$$

$$ap = 1,5$$

$$3 : 2 = 1,5$$

$$h^2 = 1,5^2 + 1,5^2 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = 2,25 + 2,25 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = 4,5 \Leftrightarrow$$

$$h = \sqrt{4,5} \Leftrightarrow$$

$$h \approx 2,12$$

$$A_{\text{sombreada}} = 13,5 - (2,12 \times 3) \Leftrightarrow$$

$$A = 13,5 - 6,36 \Leftrightarrow$$

$$A = 7,14$$

na área sombreada os lados não são iguais e penso que foi por causa do valor da apótema.

Figura 40 – Resolução da Maria da terceira tarefa de formulação de problemas (parte 2)

A aluna tinha definido que a medida de comprimento do apótema do hexágono regular era “1,5” e que a medida de comprimento do lado do hexágono regular era “3” e, inicialmente, na sua resolução, a aluna aplicou o Teorema de Pitágoras para descobrir a medida de comprimento de um dos lados da sua figura a sombreado, que ela sabia, à partida, que era três, por se tratar de um hexágono regular, logo podendo este ser dividido em seis triângulos equiláteros. No entanto, como o resultado que obteve foi, aproximadamente, “2,12”, reconheceu que tal não estava correto e que isso, provavelmente, se devia ao valor que tinha atribuído à medida de comprimento do apótema. E, de facto, foi isso que aconteceu. Sendo que o lado do hexágono regular tinha como medida de comprimento 3 unidades, então a medida de comprimento do seu apótema devia ser $\sqrt{6,75} \approx 2,6$ unidades.

Um aspeto curioso da resolução da Maria é que, apesar de a mesma indicar que o apótema mediria 1,5 unidades de comprimento, quando calculou a medida da área do

triângulo, referiu que a medida de comprimento da altura do mesmo era de 2,12, o que está incorreto, porque esse valor representa a medida de comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, cuja medida de comprimento dos seus dois catetos é de 1,5 unidades de comprimento.

O problema criado inicialmente só verificaria uma das condições, que era a do cálculo da medida da área de um polígono regular. Ainda assim, caso a medida de comprimento do apótema do hexágono regular não tivesse sido fornecida, seria necessária a aplicação do Teorema de Pitágoras para descobrir o seu valor, já que este era necessário, pelo menos, para o cálculo da medida da área da figura sombreada. Quando questionada sobre se era necessário indicar a medida de comprimento do apótema para que se pudesse resolver o seu problema, a Maria referiu que não, o que parece indicar que a aluna compreendeu que a partir da medida de comprimento do lado do hexágono regular, seria possível obter-se as restantes medidas de comprimento necessárias para a resolução do problema. Portanto, o enunciado proposto pela Maria, apesar de não ter verificado ambas as condições, tinha potencial para ser um bom problema.

Os dados recolhidos parecem indicar que a grande dificuldade da aluna não foi a criação em si, nem a própria resolução, mas sim a correção de uma falha que a aluna tinha identificado, tal como a aluna partilhou em entrevista:

Investigadora: Por que é que tu escreveste este comentário aqui?

Maria: Porque sabia que não tinha dado certo, porque tinham de ser valores iguais, então...

Investigadora: Ok, então tu sabias [que os valores tinham de ser iguais], mas não sabias corrigir?

Maria: Sim.

Além disso, é de notar na resolução da Maria, algumas lacunas, tais como a ausência de unidades de comprimento no enunciado que criou, mas também na sua resolução. A aluna manifestou interesse em voltar a realizar este tipo de tarefas, ao contrário do que aconteceu após a realização da primeira tarefa de formulação, reconhecendo agora que era uma atividade “curiosa” (Entrevista, Maria).

5.5. Percepções dos alunos face à formulação de problemas

Estes dados foram recolhidos através do questionário (Anexo 13) aplicado aos alunos após a resolução das três tarefas de formulação de problemas, para com o mesmo e em articulação com os dados já analisados, compreender a percepção geral da turma em relação à vivência desta experiência em torno de tarefas de formulação de problemas, às dificuldades sentidas pelos alunos e às suas percepções sobre este tipo de tarefas.

Quando questionados sobre a sua preferência em relação às três tarefas de formulação de problemas que tiveram a oportunidade de realizar ao longo desta intervenção pedagógica, a maioria dos alunos indicou a segunda tarefa. Alguns alunos justificaram essa preferência por gostarem mais do conteúdo associado à tarefa, que foi, exclusivamente, o Teorema de Pitágoras, e por considerarem a aplicação do mesmo a algo mais fácil. Já a terceira tarefa foi a que reuniu menor preferência. Estas percepções poderão estar relacionadas com diversos fatores, tais como: a tarefa de formulação de problemas não ser apelativa, o conteúdo que integrou ser de um nível de maior complexidade, comparativamente, com o(s) das outras tarefas e ser, para a maioria dos alunos, a primeira vez que contactaram com este tipo de tarefas.

Houve também alunos que referiram não ter gostado de nenhuma das tarefas propostas, sendo a sua justificação associada, na maioria das vezes, ao facto de não gostarem da disciplina de matemática.

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos na realização de tarefas de formulação de problemas, cerca de sete alunos apontaram que as suas fragilidades foram, sobretudo, na criação dos enunciados das tarefas, argumentando que sentiram não possuir criatividade suficiente para criar problemas. Dois alunos referiram também que a maior dificuldade sentida foi a primeira tarefa de formulação de problemas, justificando essa mesma dificuldade com a não compreensão do conteúdo associado à tarefa, a resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau a duas incógnitas. Um aluno referiu também que a dificuldade na realização de tarefas de formulação de problemas surgiu “porque nunca tinha feito isso antes” (Questionário, Carlos). Cerca de três alunos apontaram que a maior dificuldade se prendeu com a resolução dos problemas criados por eles próprios, já que não conseguiam compreender o que tinham criado e porque, por vezes, os resultados que obtinham na resolução não faziam sentido tendo em conta o contexto do problema, o que aconteceu sobretudo na primeira tarefa de formulação de problemas. Por essa mesma razão, esses alunos indicaram uma

preferência por resolver problemas já criados em relação a resolver problemas criados pelos próprios.

No entanto, não foram apenas estes alunos que partilharam essa preferência. Das dezoito respostas ao questionário: três mostraram uma preferência por criar e resolver os seus próprios problemas, catorze revelaram uma preferência por resolver problemas já criados e uma referiu não ter preferências. Apenas um dos alunos que mostrou preferência pela resolução dos problemas por si criados, justificou essa escolha, afirmando “[prefiro] resolver os meus próprios problemas, porque fui eu que os criei” (Questionário, Carlos). O aluno que referiu não ter preferência, não justificou a sua resposta. Já os restantes, isto é, os alunos que indicaram preferir a resolução de problemas já criados em detrimento da resolução de problemas por si construídos, justificaram essa escolha indicando que consideravam mais fácil a resolução de problemas do que a sua criação. Os alunos referiram também que, por vezes, era difícil encontrar um contexto a partir do qual se pudesse formular um problema.

Em relação a um possível desenvolvimento a nível motivacional para a resolução problemas matemáticos, após a experiência da criação dos seus próprios problemas, sete das dezoito respostas analisadas confirmaram esse aumento de motivação. A Maria afirmou até que a criação de problemas lhe permitiu resolver problemas com mais facilidade, uma vez que a leitura e compreensão dos enunciados, para ela, se tinha tornado mais fácil. A Vera considerou também que a formulação de problemas a “ajudou a pensar mais um bocado no que fazer nos problemas” (Questionário, Vera), isto é, na resolução de problemas, que considera ser a sua maior dificuldade. Ainda assim, onze alunos referiram que não se sentiam mais motivados, sendo que alguns referiram que a pouca motivação estava associada ao facto de não gostarem de matemática.

Neste questionário, os alunos foram também chamados a refletir sobre se consideravam que teriam gostado mais da sua experiência com a formulação de problemas se, ao invés de criarem um problema e, de seguida, resolverem o mesmo, apenas tivessem de o criar. Cerca de onze alunos responderam afirmativamente, referindo que “usar a criatividade é mais divertido” (Questionário, Luana) e que, por vezes, os cálculos realizados na resolução dos próprios problemas não faziam sentido e, sendo assim, preferiam apenas formular e não resolver, o que considero ser contraditório já que a formulação de problemas e a resolução de problemas estão interligadas. Houve também quem mencionasse que, por vezes, não sabia como resolver os próprios problemas e, caso lhes fosse pedida exclusivamente a formulação de um problema, ao invés de dedicar mais tempo à resolução, poderia dedicar mais tempo à formulação. Ainda assim,

cinco alunos referiram preferir a formulação de um problema e a sua subsequente resolução, justificando essa mesma preferência pelo gosto em resolver problemas. Um desses alunos argumentou: “porque para provar que entendemos devemos resolver” (Questionário, Márcio). Ou seja, do ponto de vista deste aluno, só se demonstra que houve uma compreensão da tarefa criada, se se proceder à resolução dessa mesma tarefa.

Quanto ao grau de desafio relativo às tarefas de formulação de problemas, quinze alunos consideraram esta atividade desafiadora, justificando esse aspeto, sobretudo, com a falta de hábito em formular problemas, com a necessidade de ser criativo e do problema criado verificar as condições solicitadas, bem como a(s) sua(s) solução(ões) ter(em) sentido no contexto do problema. Por exemplo, a este propósito, Bianca partilhou: “na minha cabeça fazia sentido, mas, afinal, não estava certo” (Questionário, Bianca).

Com este questionário, tentei compreender também, junto dos alunos, se consideravam que as tarefas de formulação de problemas eram uma forma de aplicar os conceitos aprendidos na sala de aula e de que forma. Das dezoito respostas recolhidas, doze foram positivas. Alguns alunos apontaram apenas que a formulação de problemas permitia aplicar conceitos aprendidos em sala de aula. Contudo, um aluno afirmou que a realização de tarefas de formulação de problemas era uma forma de resumir os conteúdos; outro referiu que era uma forma de consolidar os conceitos aprendidos e, outro ainda, referiu que as tarefas de formulação eram uma forma de “misturar tudo” (Questionário, Bruna), isto devido aos diferentes conteúdos e conceitos que se podem associar a um mesmo problema.

Ainda relativamente à formulação de problemas ser, ou não, uma forma de aplicar os conceitos aprendidos em sala de aula, duas das respostas não foram claras nem justificadas e quatro foram respostas negativas. Destes quatro alunos, um argumentou que os conhecimentos que tinha antes e após a realização das tarefas de formulação de problemas eram os mesmos. Para a Vera, as tarefas de formulação de problemas não são uma forma de promover a aplicação de conceitos já abordados, justificando: “para aplicar os conceitos aprendidos na sala de aula, devíamos fazer exercícios, resolver, não criar” (Questionário, Bianca). Esta resposta sugere que a formulação de problemas não é considerada como uma forma de aplicar os conhecimentos matemáticos já abordados.

A par da ideia de a formulação de problemas ser uma forma de aplicar os conceitos aprendidos na sala de aula, considerei importante que os alunos partilhassem o seu

ponto de vista da formulação de problemas como forma de apoiar a compreensão de conceitos matemáticos. Dos dezoito alunos que responderam à questão, treze responderam afirmativamente, sendo que um dos alunos referiu mesmo que a formulação de problemas permitiu “explorar um lado da matemática que não é comum” (Questionário, Margarida), o que sugere que a aluna reconheceu este tipo de tarefas como uma forma de compreender os conceitos matemáticos, mas de uma outra perspetiva. Outra aluna referiu também que considerava que a formulação dos problemas ajudava na compreensão de conceitos, uma vez que para resolver tarefas de formulação de problemas é necessário “entender esses conceitos” (Questionário, Filipa). Por outro lado, três alunos responderam negativamente. Um desses alunos referiu que não considerava que a formulação de problemas ajudava a compreender os conceitos, já que o foco da tarefa não era resolver o problema. Este ponto de vista foi partilhado por outra aluna: “vai ser a resolver que se aprende” (Questionário, Letícia). Tal como no caso da Bianca, referido anteriormente, os dados sugerem que estes alunos não identificam a formulação de problemas como algo que possa promover o conhecimento e apoiar na compreensão de conceitos.

Tendo em conta que apenas apliquei três tarefas de formulação de problemas à turma, questionei os alunos se deveria, ou não, existir uma maior regularidade na proposta deste tipo de tarefa. Das dezoito respostas ao questionário, dez defenderam uma maior regularidade. Destacaram-se como justificações para esta resposta a de que, porventura, o hábito de formular problemas pudesse contribuir para compreender como resolvê-los e motivar os alunos para as aulas. Também um aluno afirmou que a formulação de problemas é a “maneira mais fácil de aprender a matéria” (Questionário, Pedro), justificando que as tarefas de formulação de problemas que realizaram eram mais fáceis que a resolução de alguns problemas que o manual propunha (Entrevista, Pedro). Este aluno referiu ainda que ao formular um problema estaria constantemente a resolvê-lo para tentar compreender se o mesmo seria possível ou impossível de resolver, o que, segundo o mesmo, constitui uma aprendizagem constante (Entrevista, Pedro). Neste caso, a formulação de problemas além de ter sido considerada uma forma de aplicar conhecimentos matemáticos, foi reconhecida também como meio de aperfeiçoar esse mesmo conhecimento. Também entre os alunos que responderam afirmativamente, uma aluna referiu que apenas considerava que deveria haver uma maior regularidade de aplicação deste tipo de tarefas de formulação de problemas, porque, de seguida, era pedido que se resolvesse o problema criado.

Dos restantes casos, cinco alunos defenderam que não deveria haver uma maior regularidade deste trabalho em torno de tarefas de formulação de problemas, dois alunos referiram que talvez essa regularidade deveria ser maior e um outro aluno referiu ser-lhe indiferente, não apresentando qualquer justificação. Os alunos que responderam negativamente justificaram as suas respostas, afirmando que a formulação de problemas não alterava a sua relação com a matemática e partilhando que não sabiam criar problemas e que, portanto, caso houvesse uma maior regularidade de realização deste tipo de tarefa em sala de aula, os mesmos perderiam interesse nessas aulas.

Como já referido, apesar de alguns alunos reconhecerem que deveria haver uma maior regularidade no que diz respeito à realização de tarefas de formulação de problemas na sala de aula, alguns desses mesmos alunos referem que não gostariam de repetir a experiência. Por exemplo, a Bruna, por um lado, indicou que deveria existir uma maior regularidade na proposta deste tipo de tarefas, porque reconheceu dificuldades na sua realização. Por outro lado, assumiu que não gostaria de voltar a realizar este tipo de tarefas, afirmando: “eu não gosto de criar problemas” (Questionário, Bruna).

Ainda assim, onze alunos expressaram interesse em voltar a realizar este tipo de tarefas, cinco não mostraram esse interesse e dois não se posicionaram em relação a este aspeto. Um dos alunos que respondeu afirmativamente, apontou: “Sim, gostaria, porque acho divertido tentarmos entendermo-nos a nós mesmos, e ajuda a puxar pela cabeça; como também os professores podem entender a nossa maneira de pensar” (Questionário, João).

De facto, este tipo de tarefa traz vantagens, quer para o professor quer para o aluno, e a justificação prende-se exatamente com aquilo que o João referiu. A formulação de problemas é importante para que, enquanto, professora, possa tentar compreender aquilo que os alunos fazem, o seu pensamento e se, de facto, os conceitos estão consolidados ou não.

6. Conclusões e recomendações

Neste capítulo, apresenta-se uma síntese do estudo realizado, de modo a proporcionar uma visão clara e concisa de toda a intervenção pedagógica, destacando-se o objetivo e as questões de investigação, bem como os procedimentos de recolha de dados. Apresentam-se também as conclusões do estudo, procurando dar-se resposta às questões de investigação.

De uma forma geral, este capítulo é uma reflexão crítica onde relaciono os resultados obtidos com o quadro teórico construído, identificando possíveis convergências e divergências, bem como as implicações e limitações do presente estudo. Aponto também algumas sugestões para futuros estudos.

Deste modo, o mesmo está organizado em quatro subcapítulos: i) Síntese do estudo realizado; ii) Dificuldades dos alunos na formulação de problemas; iii) Perceções dos alunos face à formulação de problemas; iv) Limitações do estudo e implicações para a prática e investigação futura.

6.1. Síntese do estudo realizado

Este trabalho teve como objetivo compreender quais as perceções e dificuldades de alunos face à formulação de problemas, numa turma do 8.º ano de escolaridade. Para tal, procurei responder às questões de investigação: (i) Quais as dificuldades encontradas pelos alunos ao formular problemas matemáticos? (ii) Quais as perceções dos alunos face à formulação de problemas?

Este estudo tem por base uma intervenção pedagógica realizada numa turma de 8.º ano de escolaridade, constituída por vinte e seis alunos, assente em três momentos de formulação de problemas, para além de um momento de reflexão acerca do significado de problema matemático. Destes vinte e seis alunos, apenas dezoito foram considerados elegíveis como participantes neste estudo, pois foram aqueles que obtiveram autorização do respetivo encarregado de educação.

Numa abordagem qualitativa e interpretativa, os dados recolhidos incluíram: (i) produções escritas dos alunos relativas ao significado de problema matemático e a cada uma das tarefas de formulação de problemas propostas; (ii) entrevistas semiestruturadas realizadas em vários momentos da intervenção pedagógica, que me permitiram esclarecer dúvidas na análise das produções escritas dos alunos; (iii) respostas a um questionário sobre as perceções dos alunos relativamente à formulação

de problemas; (iv) notas de campo das observações que realizei enquanto professora e investigadora.

6.2. Dificuldades dos alunos na formulação de problemas

As principais dificuldades sentidas pelos alunos na formulação de problemas foram essencialmente relacionadas com a falta de compreensão dos conceitos que as tarefas envolviam. Ou seja, como alguns alunos revelaram dificuldades nos próprios conceitos e/ou procedimentos matemáticos que integraram as tarefas de formulação de problemas, essas fragilidades impossibilitaram a criação de problemas. Por exemplo, se o aluno desconhece, ou não se recorda em que condições pode aplicar o Teorema de Pitágoras, quando se pede que crie um problema que o envolva, mesmo que haja uma tentativa de criar um problema cuja resolução passe pela aplicação do mesmo, essa tentativa constituirá muita dificuldade para quem a está a realizar, tal como foi o caso do Carlos na terceira tarefa de formulação.

Outra dificuldade que identifiquei, sobretudo na primeira tarefa de formulação, foi a insegurança por parte dos alunos na realização deste tipo de tarefas. Esta dificuldade na formulação de problemas parece estar associada, sobretudo à falta de hábito de realização de tarefas de formulação de problemas, como foi partilhado pelos alunos nas entrevistas. Este aspeto vai ao encontro da ideia avançada por Gonçalves e Viseu (2013) quando afirmam que a falta de hábito de realização de tarefas que envolvam a formulação de problemas, pode ser uma causa das dificuldades reveladas pelos alunos quando confrontados com esse tipo de tarefas.

A expressão de ideias de uma forma clara é outra dificuldade que os dados sugerem. Por exemplo, na resolução da segunda tarefa de formulação, o Pedro desenhou um retângulo que pretendia que fosse dividido, pela sua diagonal, em dois triângulos retângulos. No entanto, não conseguiu expressar, de forma clara, o objetivo que tinha delineado inicialmente para o seu problema, isto é, que fosse calculada a medida de comprimento da diagonal do retângulo.

Este aspeto vai ao encontro da perspetiva de Pinheiro e Vale (2013), que afirmaram que os alunos, perante tarefas de formulação de problemas, apresentam “dificuldade em redigir enunciados dos problemas de forma coerente, organizada e esclarecedora” (p. 491).

Uma das dificuldades reveladas também pelos alunos foi o facto de terem de formular problemas com um grau de desafio aceitável para este tipo de tarefas, tendo em conta o nível de escolaridade a que pertencem, bem como apresentarem textos que não

incluem pelo menos uma questão. Esta última situação pode ser observada novamente na resolução do Pedro, à segunda tarefa de formulação, uma vez que no enunciado não apresentou uma questão, indicando apenas “Ajuda o Sr. José a dividir o terreno em dois triângulos iguais”. Embora o aluno pretendia solicitar que se calculasse a medida de comprimento da diagonal do retângulo, não existiam sequer indícios no enunciado desse objetivo.

Os dados recolhidos sugerem também a dificuldade dos alunos em construir enunciados que cumprissem os requisitos indicados nas tarefas e que fizessem sentido, quer em termos matemáticos, quer a nível do contexto real que se está a tentar retratar. Esta dificuldade pode identificar-se na resolução da Bianca, da segunda tarefa de formulação, devido à forma como ela imaginou que a prateleira poderia ser colocada na parede; mas também na resolução do Carlos, da terceira tarefa de formulação, onde o aluno considerou um triângulo retângulo cuja medida de comprimento da hipotenusa era igual à de um dos catetos, não reconhecendo essa incoerência, ou seja, que não existe um triângulo retângulo que verifica essas condições.

Embora tenha acontecido um número reduzido de casos, houve quem identificasse que o problema formulado teria um erro no seu enunciado, sendo este identificado aquando da resolução ou da entrevista. Apesar desse reconhecimento, nenhum dos casos conseguiu corrigir o erro encontrado. Portanto, essa foi também uma dificuldade encontrada – identificaram um erro, mas não conseguiram corrigir. Este aspeto aconteceu no caso da Maria, na resolução da terceira tarefa de formulação de problemas. A aluna criou um problema e atribuiu uma medida de comprimento ao apótema e ao lado do seu hexágono regular. No entanto, a aluna não considerou que a altura do triângulo do qual queria determinar a medida da área era o apótema do seu hexágono regular, mas sim que essa altura era um dos lados do triângulo. Sendo assim, quando a aluna tentou resolver o problema e quis determinar a medida de comprimento do lado do triângulo, que apesar de ser fornecida no enunciado, a aluna decidiu calcular aplicando o Teorema de Pitágoras, teve a perceção de que a medida de comprimento desse lado não coincidia com aquela que tinha inicialmente atribuído. Ainda assim, a aluna não conseguiu corrigir o seu erro, conseguindo apenas apontá-lo.

Sendo assim, as principais dificuldades que os dados recolhidos sugerem são: a falta de compreensão dos conceitos e/ou procedimentos matemáticos que as tarefas de formulação de problemas envolviam; a insegurança associada à falta de hábito de trabalho em torno deste tipo de tarefas; a expressão de ideias de forma clara; a construção de problemas com um grau de desafio aceitável para este tipo de tarefas,

tendo em conta o nível de escolaridade dos alunos e a não formulação de uma questão concreta que se pretende resolver; a construção de enunciados que cumpram determinados requisitos; a correção de erro(s) identificado(s) no próprio enunciado do problema criado.

6.3. Perceções dos alunos face à formulação de problemas

De uma forma geral, os alunos demonstraram uma atitude positiva em relação às tarefas de formulação de problemas. No entanto, a primeira experiência foi mais desafiadora, uma vez que os alunos não compreendiam aquilo que era pedido.

Aquando da realização das entrevistas, fui compreendendo que alguns alunos gostariam de voltar a realizar tarefas de formulação de problemas, por considerarem que se trata de uma atividade motivadora. Por outro lado, outros manifestaram algum desagrado em realizar esse tipo de tarefas, pelo facto de revelarem dificuldades na formulação de problemas ou por considerarem que se trata de uma atividade difícil. Apesar destas perceções, de um modo geral, os alunos mostraram agrado em realizar este tipo de tarefas em sala de aula com uma maior regularidade, partilhando diferentes argumentos. Uns, porque reconheceram as dificuldades na realização de tarefas de formulação de problemas, pelo que uma forma de as superar será desenvolver um trabalho em torno desse mesmo tipo de tarefas. Outros, porque são tarefas que gostaram de realizar e que consideraram ser mais fáceis do que própria resolução de problemas. Outros ainda, por considerarem “ser a melhor forma de aprender matemática”, citando um dos participantes no estudo.

Alguns participantes, admitiram também que, para eles, a realização de tarefas de formulação de problemas não permite a aplicação de conhecimentos matemáticos já abordados, o que diverge do pressuposto de que “a formulação de problemas exige do aluno mais capacidade para dar sentido àquilo que se aprende do que a resolução de problemas” (Gonçalves & Viseu, 2013, p. 4551).

Além disso, o presente estudo permitiu-me corroborar a visão de Silver e Cai (1996), Mamona-Downs e Downs (2005), Calabrese et al. (2022) e Boavida (2008) de que a formulação de problemas está relacionada com a resolução. Por vezes, tive mesmo de recorrer à resolução dos problemas formulados pelos alunos para compreender as suas dificuldades na formulação dos mesmos, o que mostra essa mesma conexão entre ambas.

6.4. Limitações do estudo e implicações para a prática e investigação futura

Quando decidi que a minha intervenção pedagógica iria ser pautada por momentos de formulação de problemas, levantaram-se bastantes questões, para as quais tive de tomar decisões, mas que poderiam ter sido respondidas de outra forma. Uma das questões foi se deveria, ou não, questionar os alunos sobre o significado de problema matemático, o que concluí que, a meu ver, faria sentido, já que o que eu pretendia não era a formulação de uma tarefa qualquer, mas sim de um problema. Outra questão foi se estas tarefas de formulação deveriam ter sido realizadas em díades, ou não. Porém, optei pela segunda opção, dado o ambiente da turma ser pautado por frequentes conflitos e, neste sentido, cada um poderia inventar os seus problemas à vontade, não estando condicionados pelos seus colegas.

Outra questão ainda, prendeu-se com a possibilidade de abordar algumas estratégias de formulação de problemas, após o momento de reflexão e discussão acerca do significado de problema matemático e antes da realização das tarefas de formulação de problemas. Como os alunos não estavam habituados a trabalhar neste tipo de tarefas, talvez o facto de não ter avançado com essas estratégias, possa ter limitado a prestação dos alunos na realização das tarefas de formulação. Sendo assim, penso que esta situação possa ser uma limitação do meu estudo.

Reconheço também como limitação do meu estudo, o facto de só ter proposto aos alunos tarefas de formulação de problemas consideradas como sendo de uma primeira fase de formulação de problemas, denominada por *Aceitando os dados* (Brown & Walter, 2005), em que os alunos tinham de aceitar os dados e a partir deles formular um problema. Se, neste momento, pudesse alterar algo, seria possivelmente a proposta aos alunos de uma tarefa de formulação em que lhes fosse solicitado que alterassem um problema já formulado e não tivessem de criar um problema de raiz, porque para alunos que não têm esse hábito pode ser uma tarefa mais complicada. Sendo assim, não sei se os alunos teriam uma melhor prestação se numa primeira tarefa tivesse optado por propor a formulação de um problema a partir de um outro, mas solicitando a alteração de apenas uma ou duas condições.

Dado que os alunos não tinham o hábito de realizar tarefas de formulação de problemas, poderia também ter proposto, aos alunos, a formulação de uma tarefa, em geral, ou seja, não sendo obrigatório que essa tarefa fosse um problema.

Estas limitações surgiram porque, ao longo da intervenção pedagógica, vim a constatar que os alunos não tinham o tal hábito de realizar tarefas de formulação de problemas, sendo que quase nenhum aluno referiu tê-lo feito antes. Sendo assim, questiono-me também se não deveria ter procurado saber, junto dos alunos e antes de propor as tarefas de formulação de problemas, se os mesmos já tinham realizado, ou não, este tipo de tarefas e assim, acautelar todas estas questões com as quais me fui deparando. Recomenda-se assim que futuras investigações tenham em conta esta informação, logo num momento inicial.

Uma outra limitação que que faz todo o sentido abordar é a realização das entrevistas. A falta de experiência em conduzir entrevistas, nem sempre me possibilitou a melhor abordagem, ou seja, houve momentos em que a forma como coloquei a questão posso ter direcionado o aluno para uma determinada resposta. Esta situação deveu-se ao facto de, por um lado, ter receio que os alunos não me respondessem às perguntas que ia colocando, o que aconteceu em alguns casos, por outro, por prever que alguns alunos, sem questões diretas, não conseguiriam responder àquilo que era questionado e isto associado também à falta de domínio da linguagem matemática. Esta abordagem direcionada fez com que, em alguns casos, apontasse a resposta da própria pergunta, ainda que, por vezes, sem ter consciência de que o estava a fazer, o que se constituiu em uma limitação deste estudo.

Em futuras investigações penso que também seria importante compreender qual a influência do trabalho de grupo no desenvolvimento da capacidade de formulação de problemas. Nesta intervenção pedagógica, pelo ambiente conflituoso que caracteriza esta turma, não considerei que estivessem reunidas as condições para que se pudesse realizar um trabalho de grupo acerca da formulação de problemas, pelo que tive receio que a relação entre os alunos influenciasse os problemas formulados pelos mesmos.

Deste modo, optei por não propor aos alunos um trabalho em grupo, mas penso que seria interessante compreender como ocorre a formulação de problemas em grupo, quais os aspetos positivos e negativos que podem decorrer desse trabalho, que perspectiva é que os alunos têm sobre o mesmo, de que modo é que os alunos formulam um problema sendo que pode haver várias ideias dentro de um mesmo grupo, entre outros.

Em conclusão, a reflexão sobre a minha intervenção pedagógica e a análise dos resultados que da mesma surgiram, abriram um leque de novas interrogações acerca da formulação de problemas que considero importante o investimento na busca de respostas. Essas questões são:

- Quais os aspetos que causam insegurança na realização de tarefas de formulação de problemas?
- Uma melhor comunicação matemática escrita implica que haja uma melhor formulação de problemas?
- Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na formulação de problemas?
- Quais as etapas de formulação de um problema quando a mesma é realizada em grupo?
- Qual a influência do gosto pelo conteúdo envolvido na tarefa de formulação na perceção do aluno em relação a tarefas de formulação?

Enquanto futura professora trabalharei de modo a encontrar respostas a estas questões, tendo consciência de que desse trabalho poderão surgir outras questões, mas reconhecendo também que será a partir desse processo que poderei evoluir e crescer em termos de desenvolvimento profissional.

Deste modo, este estudo vem reforçar a importância de integrar tarefas de formulação de problemas no ensino e aprendizagem da matemática, reconhecendo-se a sua importância no desenvolvimento aprendizagens matemáticas significativas.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7–10, 35.
- Amado, J. (Coord.) (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.
- APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. APM.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.C. (2013). *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*. Ministério da Educação e Ciência: Direção-Geral da Educação (DGE).
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), Ministério da Educação. <http://hdl.handle.net/10400.26/5566>
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Bommel, J., & Pálmer, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society*, 2(1), 1–13.
- Brown, S., & Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1–8.
<https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In F.M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Problem Solving Research Brief. NCTM.

Calabrese, J. L., Capraro, M. M., & Thompson, C. G. (2022). The Relationship Between Problem Posing and Problem Solving: A Systematic Review. *International Education Studies*, 15(4), 1–8. <https://doi.org/10.5539/ies.v15n4p1>

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino básico*. Ministério da Educação e Ciência: Direção-Geral da Educação (DGE). <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>

Carmo, H., & Ferreira, M. (2008). *Metodologia da investigação: Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149–158.

Conceição, A., & Almeida, M. (2023). *MSI 8 – Matemática Sob Investigação 8 - 8.º ano*. Areal Editores. ISBN: 978-989-767-922-3.

Decreto-lei n.º 54/2018 do Ministério da Educação e Ciência. (2018) Diário da República: 1.ª Série, n.º 129/2018, de 6 de julho, pp. 2918–2928.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 1–32). London: Sage Publications.

Gonçalves, M., & Viseu, F. (2013). Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através da resolução de problemas. In *Atas do XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 4537–4552).

Kantowski, M. G. (1981). Problem Solving. In E., Fennema, *Mathematics Education Research: Implications for the 80's* (pp. 111–124). Association for Supervision and Curriculum Development.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED206460.pdf#page=122>

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing. *Educational Studies In Mathematics*, 83(1), 71–86.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematics Behavior*, 24, 385–401.

Martins, G. O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilho, J., Silva, L. U., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017).

Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. <https://www.dge.mec.pt/perfil-dos-alunos>

Ministério da Educação (1990). *Programa de Matemática para o 3º ciclo*. Direção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position paper on basic mathematical skills*. Golden, Colorado: NSCM. <https://eric.ed.gov/?id=ED139654>

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2013). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169–3174.

Pinheiro, S., & Vale, I. (2013). Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática. In Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 481–494). APM & CIED da Universidade do Minho.

Pólya, G. (1945). *A arte de resolver problemas*. (Tradução de *How to Solve It*) (Lisboa de Araújo, H., Trad. e Adap., 1995). Editora Interciência.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (pp. 117–123). John Wiley & Sons, Inc..

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho em Investigação (GTI) (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Santos, E., & Buriasco, R. L. C. (2016). A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação: aspectos de uma caracterização a partir dos trabalhos do GEPEMA. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 9(2), 233–247.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75–80.

Silver, E., & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521–539.

Sullivan, P., & Liburn, P. (2002). *Good questions for math teaching: why ask them and what to ask*. Math Solutions Publications.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp.347–360). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Vale, I. & Barbosa, A. (2021). Fotografia: um recurso para elaborar tarefas matemáticas fora da sala de aula. *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática*, 2, 1–12.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), 39–60. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22923>

Anexos

Anexo 1 – Primeira tarefa de formulação de problemas

1. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

1.1. Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido por este sistema de equações.
Explica de que forma criaste o problema.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Anexo 2 – Exemplo de possível resolução da primeira tarefa de formulação de problemas

Exemplo 1

Dois cientistas estão a realizar um estudo para prever as temperaturas, em graus *Celsius* ($^{\circ}\text{C}$), em duas cidades, uma do norte e outra do sul de França, no dia 31 de dezembro de 2030.

O cientista A concluiu, a partir do seu estudo, que, no dia 31 de dezembro de 2030, a soma do dobro da temperatura prevista para a cidade do norte de França, em $^{\circ}\text{C}$, com o triplo da temperatura prevista para a cidade do sul de França, em $^{\circ}\text{C}$, seria igual a 9°C .

Por sua vez, o cientista B, com base no seu estudo, afirmou que, nesse mesmo dia, a soma da temperatura prevista para a cidade do norte de França, em $^{\circ}\text{C}$, com o quádruplo da temperatura prevista para a cidade do sul de França, em $^{\circ}\text{C}$, seria igual a 16°C .

Sabendo que se verificará o que ambos os cientistas afirmaram, qual é a temperatura prevista, em $^{\circ}\text{C}$, para a cidade do norte e para a cidade do sul de França, no dia 31 de dezembro de 2030?

Resolução

Seja x a temperatura prevista, em $^{\circ}\text{C}$, para a cidade do norte de França, no dia 31 de dezembro de 2030, e y a temperatura prevista, em $^{\circ}\text{C}$, para a cidade do sul de França, no dia 31 de dezembro de 2030.

Então, as afirmações dos cientistas podem ser traduzidas pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

Para determinar a solução do problema é necessário resolver o sistema de equações fornecido:

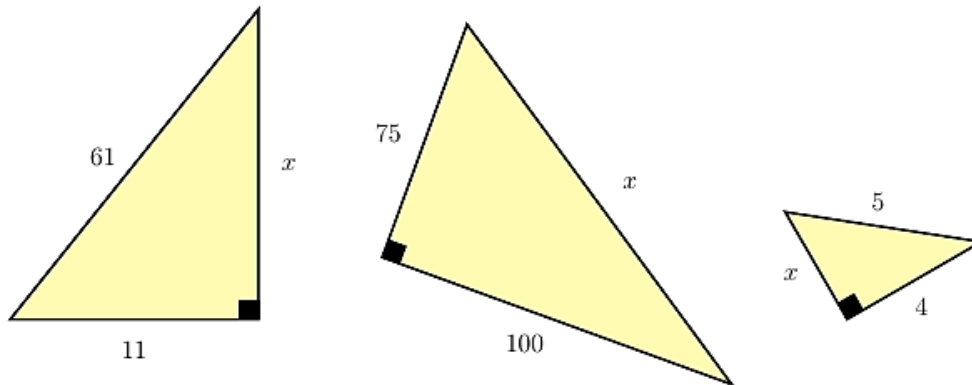
$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(16 - 4y) + 3y = 9 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 8y + 3y = 9 \\ x = 16 - 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -23 \\ x = 16 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{23}{5} \\ x = 16 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4,6 \\ x = 16 - 4 \times \frac{23}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4,6 \\ x = -2,4 \end{cases}$$

Logo, no dia 31 de dezembro de 2030, a temperatura prevista para a cidade do norte de França será $-2,4^{\circ}\text{C}$ e a temperatura prevista para a cidade do sul de França será $4,6^{\circ}\text{C}$.

Anexo 3 – Segunda tarefa de formulação de problemas

1. Atenta na figura seguinte:



1.1. Cria o enunciado de um problema a partir de um dos triângulos fornecidos e das medidas dos seus lados.

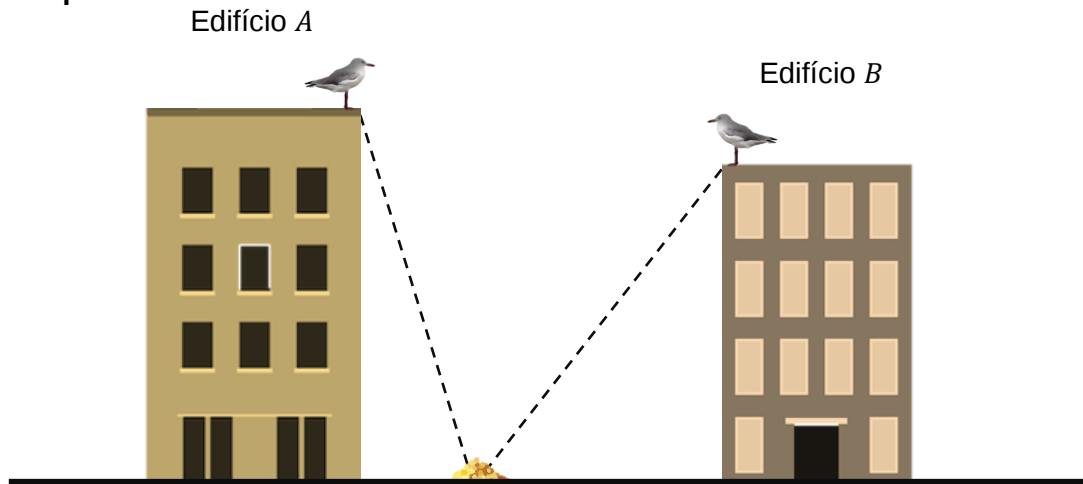
Sugestão: podes desenhar uma situação que envolva o triângulo escolhido e criar o teu problema a partir daí.

1.2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Anexo 4 – Ficha com possíveis problemas nas condições da segunda tarefa de formulação de problemas

Ficha de trabalho

Exemplo 1



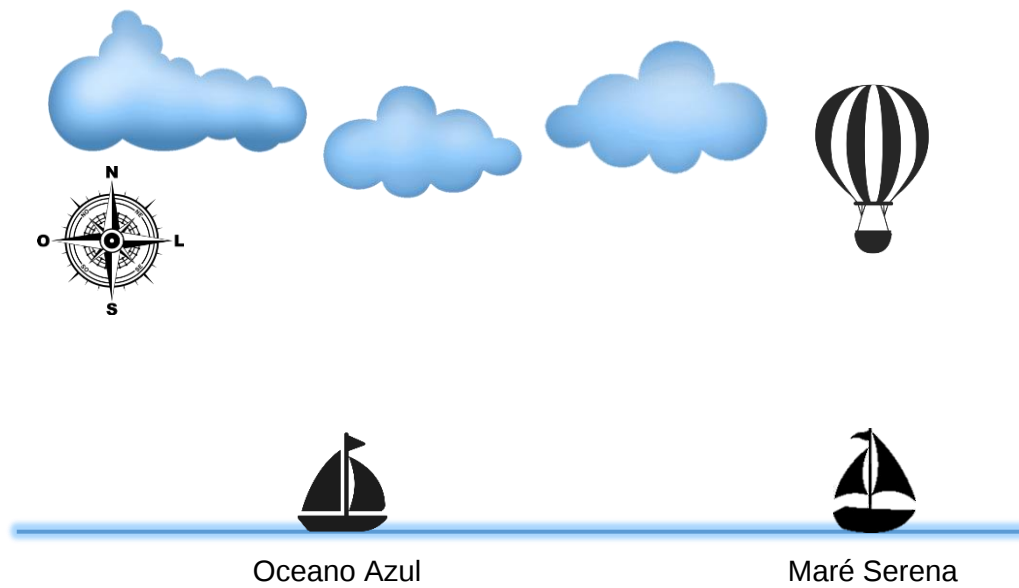
No telhado de dois edifícios encontram-se duas gaivotas. Sabe-se que:

- as duas gaivotas lançam-se sobre o pão à mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo;
- a distância da gaivota que está no edifício *A* ao pão é igual a 61 metros;
- a distância do pão ao edifício *A* é igual a 11 metros;
- a altura do edifício *B* é igual 50 metros.

a) Qual a altura do edifício *A*?

b) A que distância do edifício *B* está o pão? Apresenta o resultado, em metros, arredondado às unidades.

Exemplo 2



Sabe-se que os barcos Oceano Azul e Maré Serena estão a navegar no mar. A distância entre os dois barcos é igual a 100 metros.

a) Sabendo que a distância do barco Maré Serena ao balão de ar quente é igual a 75 metros, qual a distância, em metros, do barco Oceano Azul ao mesmo?

b) Passado uma hora, sabe-se que:

- o balão de ar quente se dirigiu para oeste, seguindo uma trajetória horizontal e parando em cima do barco Oceano Azul;
- o barco Maré Serena se aproximou 25 metros do barco Oceano Azul.

Nesse momento, qual a distância, em metros, do barco Maré Serena ao balão de ar quente? Apresenta o resultado, em metros, arredondado às unidades.

Exemplo 3

Lê o pensamento da Eva e ajuda-a a responder às questões que se seguem.

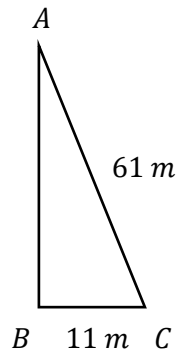


- a) Sabendo que a Eva vai vedar o seu jardim com uma cerca de madeira, quantos metros de cerca necessita para construir essa vedação?
- b) Sabendo que por cada metro quadrado de medida da área do jardim a Eva vai plantar 9 flores, quantas flores vai plantar a Eva no total?

Anexo 5 – Resolução da ficha com possíveis problemas nas condições da segunda tarefa de formulação de problemas

Exemplo 1

a) Para determinar a altura do edifício A considere-se um triângulo retângulo $[ABC]$.



Sabe-se que $\overline{AC} = 61\text{ m}$, $\overline{BC} = 11\text{ m}$, o segmento $[AC]$ é a hipotenusa do triângulo retângulo e $[BC]$ um dos seus catetos. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$61^2 = 11^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB}^2 = 61^2 - 11^2 \Leftrightarrow$$

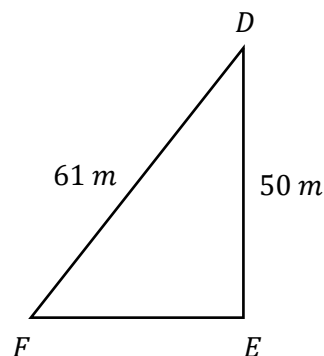
$$\overline{AB}^2 = 3600 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3600} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB} = 60\text{ m}$$

Portanto, a altura do edifício A é igual a 60 metros.

b) Para calcular a distância do pão ao edifício B , considere-se o triângulo retângulo $[DEF]$.



Sabe-se que $\overline{DF} = 61 \text{ m}$, $\overline{DE} = 50 \text{ m}$, o segmento $[DF]$ é a hipotenusa do triângulo retângulo e $[DE]$ um dos seus catetos. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow$$

$$61^2 = 50^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{EF}^2 = 61^2 - 50^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{EF}^2 = 1221 \Leftrightarrow$$

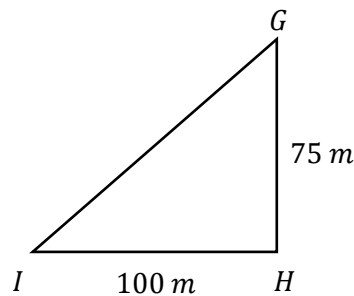
$$\overline{EF} = \sqrt{1221} \Leftrightarrow$$

$$\overline{EF} \approx 35 \text{ m}$$

Logo, a distância do pão ao edifício B , arredondada às unidades, é igual a 35 metros.

Exemplo 2

a) Para determinar a distância do barco Oceano Azul ao balão de ar quente, considere-se o triângulo retângulo $[GHI]$.



Sabe-se que $\overline{GH} = 75 \text{ m}$, $\overline{HI} = 100 \text{ m}$ e os segmentos $[GH]$ e $[HI]$ são os seus catetos. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{GI}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{HI}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{GI}^2 = 75^2 + 100^2 \Leftrightarrow$$

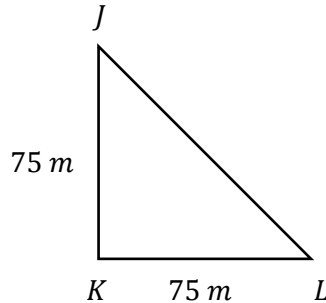
$$\overline{GI}^2 = 15625 \Leftrightarrow$$

$$\overline{GI} = \sqrt{15625} \Leftrightarrow$$

$$\overline{GI} = 125 \text{ m}$$

Logo, a distância do barco Oceano Azul ao balão de ar quente é igual a 125 metros.

b) Para determinar a distância do barco Maré Serena ao balão de ar quente, tendo em conta as condições fornecidas, considere-se o triângulo retângulo $[JKL]$.



Sabe-se que $\overline{JK} = 75\text{ m}$, $\overline{KL} = 75\text{ m}$ e os segmentos $[JK]$ e $[KL]$ são os seus catetos. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{JL}^2 = \overline{JK}^2 + \overline{KL}^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{JL}^2 = 75^2 + 75^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{JL}^2 = 11250 \Leftrightarrow$$

$$\overline{JL} = \sqrt{11250} \Leftrightarrow$$

$$\overline{JL} \approx 106\text{ m}$$

Logo, a distância do barco Maré Serena ao balão de ar quente é aproximadamente igual a 106 metros.

Exemplo 3

a) Para determinar o número total de metros necessários para vedar o jardim com uma cerca de madeira é necessário o cálculo da medida do perímetro do jardim.

Como o jardim é um triângulo retângulo do qual apenas é conhecida a medida de comprimento da hipotenusa e a medida de comprimento de um dos catetos, é necessário calcular a medida de comprimento do outro cateto.

Sejam h a medida de comprimento da hipotenusa, c a medida de comprimento conhecida de um dos catetos e d a medida de comprimento desconhecida do outro cateto. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$h^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow$$

$$5^2 = 4^2 + d^2 \Leftrightarrow$$

$$d^2 = 5^2 - 4^2 \Leftrightarrow$$

$$d^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$d = \sqrt{9} \Leftrightarrow$$

$$d = 3 \text{ m}$$

Portanto, a medida de comprimento desconhecida, de um dos catetos, é igual 3 metros.

De seguida, para determinar a medida do perímetro do jardim, P , é necessário somar as medidas de comprimento de todos os lados desse jardim, isto é:

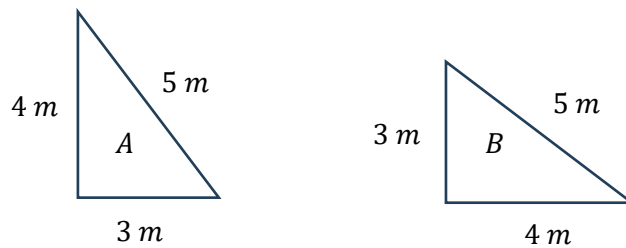
$$P = 3 + 4 + 5 \Leftrightarrow$$

$$P = 12$$

Logo, como a medida do perímetro do jardim é igual a 12 metros, são necessários 12 metros de cerca para vedar o jardim.

b) Pelo enunciado do problema e pela resolução da alínea anterior, sabe-se que a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo é igual a 5 m e que a medida de comprimento dos seus catetos é igual a 3 m e 4 m.

Sendo assim, podem considerar-se dois triângulos retângulos nessas condições:



No entanto, tanto a medida da área do triângulo retângulo A, A_A , como a medida da área do triângulo retângulo B, A_B , são iguais a 6 m²:

$$A_A = \frac{3 \times 4}{2} \Leftrightarrow A_A = \frac{12}{2} \Leftrightarrow A_A = 6 \text{ m}^2$$

$$A_B = \frac{4 \times 3}{2} \Leftrightarrow A_B = \frac{12}{2} \Leftrightarrow A_B = 6 \text{ m}^2$$

Por isso, como a medida da área do jardim é igual a 6 m² e, por cada metro quadrado de medida da área, a Eva planta 9 flores, então, o número de flores que a Eva vai plantar, N_f , determina-se do seguinte modo:

$$N_f = 6 \times 9 \Leftrightarrow$$

$$N_f = 54$$

Portanto, no total, a Eva vai plantar 54 flores.

Anexo 6 – Terceira tarefa de formulação de problemas

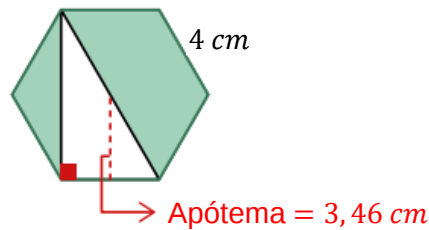
1. Cria um problema que envolva o cálculo da área de um polígono regular e o teorema de Pitágoras.

2. Agora tenta resolver o problema que criaste.

Anexo 7 – Exemplo de possíveis resoluções da terceira tarefa de formulação de problemas

Exemplo 1

Considera o hexágono regular seguinte. Calcula a medida da área da região colorida.



Apresenta todos os cálculos que efetuares e, ainda, o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, duas casa decimais.

Resolução

Uma forma de determinar a medida da área da região colorida, A_C , é determinar a medida da área do hexágono regular, A_H , e a essa medida da área subtrair a medida da área do triângulo retângulo, A_T .

Sendo assim, tem-se:

Cálculo da medida da área do hexágono:

$$A_H = \frac{P_H}{2} \times ap \Leftrightarrow$$

$$A_H = \frac{6 \times 4}{2} \times 3,46 \Leftrightarrow$$

$$A_H = 12 \times 3,46 \Leftrightarrow$$

$$A_H = 41,52 \text{ cm}^2$$

Cálculo da medida da área do triângulo:

$$A_T = \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow$$

$$A_T = \frac{4 \times (3,46 \times 2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$A_T = 13,84 \text{ cm}^2$$

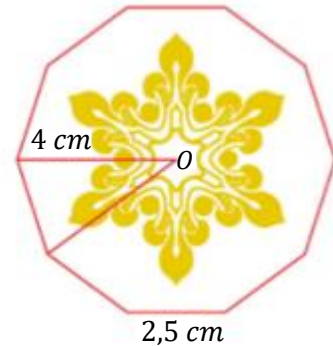
Deste modo, como $A_C = A_H - A_T$ tem-se que:

$$A_C = 41,52 - 13,84 \Leftrightarrow A_C = 27,68 \text{ cm}^2$$

Logo, a medida da área da região colorida é aproximadamente igual a $27,7 \text{ cm}^2$.

Exemplo 2

A Fátima vai oferecer à sua mãe 6 bases para copos feitas em cortiça e decoradas. A forma de casa base é um decágono regular, com centro no ponto O , como se ilustra na figura.



Determina a medida da área de cada base para copos. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, pelo menos, três casas decimais.

Resolução

Para determinar a medida da área da base de copos, por ser um decágono regular, é necessário encontrar a medida de comprimento do apótema desse mesmo polígono, tal como a medida do perímetro do mesmo.

Sendo assim, tem-se:

Cálculo da medida de comprimento do apótema:

$$4^2 = a^2 + (1,25)^2 \Leftrightarrow$$

$$16 = a^2 + 1,563 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = 16 - 1,563 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = 14,437 \Leftrightarrow$$

$$a = \sqrt{14,437} \Leftrightarrow$$

$$a \approx 3,8 \text{ cm}$$

Cálculo da medida do perímetro do polígono:

$$P = 2,5 \times 10 \Leftrightarrow$$

$$P = 25 \text{ cm}$$

Portanto, a medida de comprimento do apótema é aproximadamente igual a 3,8 cm e a medida do perímetro do decágono regular é igual a 25 cm.

Deste modo, utilizando a fórmula que relaciona a medida da área de polígonos regulares com a sua medida de perímetro e a medida de comprimento do seu apótema³, tem-se que:

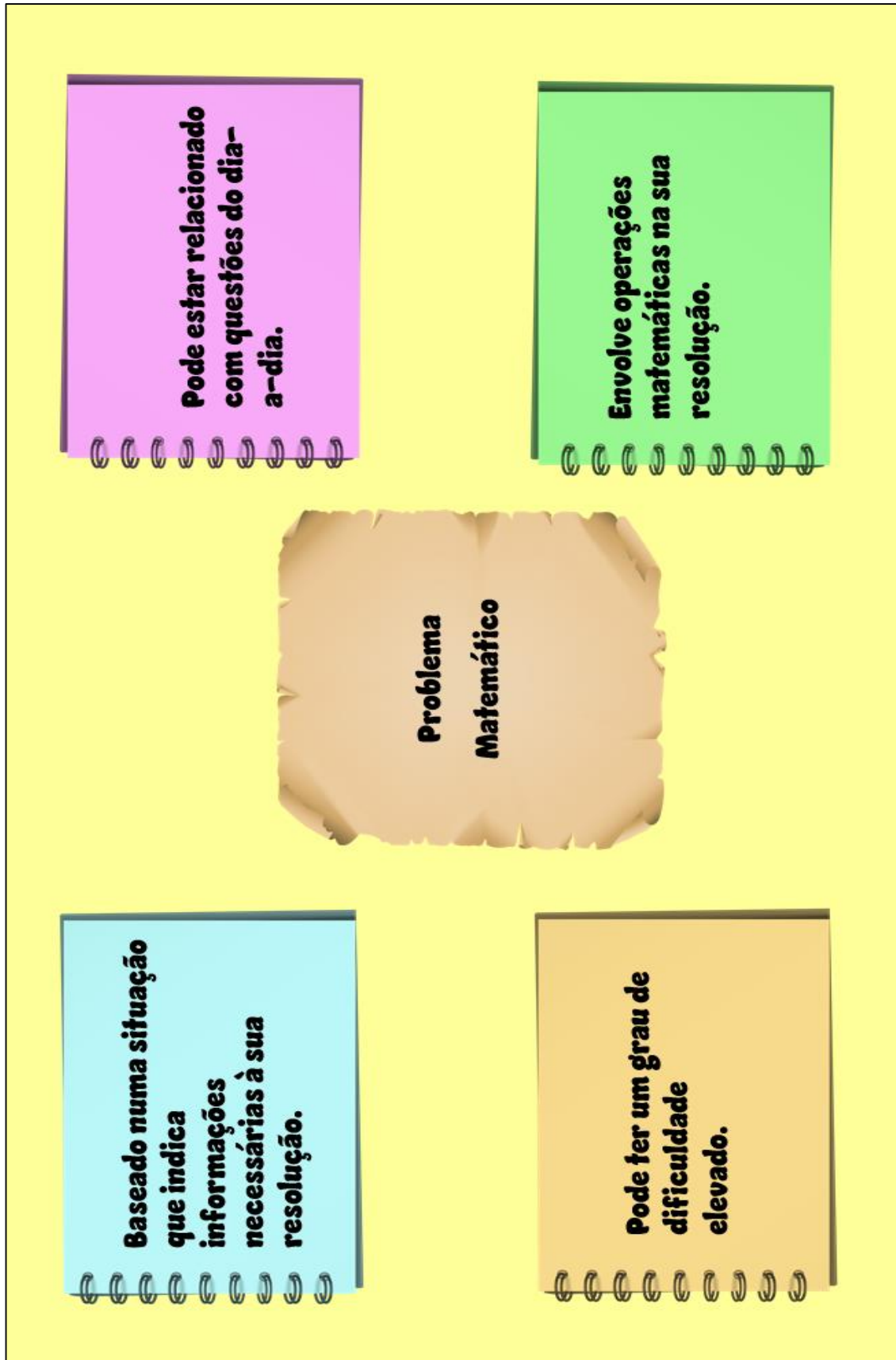
$$A = \frac{25}{2} \times 3,8 \Leftrightarrow$$

$$A = 47,5 \text{ cm}^2$$

Logo, a medida da área do decágono regular é igual a $47,5 \text{ cm}^2$.

³ *Área de um polígono regular* = $\frac{\text{Perímetro}}{2} \times \text{Apótema}$

Anexo 8 – Definição de Problema Matemático – Perceções de alunos



Anexo 9 – Autorização de recolha de dados

Assunto: Autorização de gravação de áudio

Exmo.(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Como penso ser do seu conhecimento, na disciplina de Matemática do(a) seu(sua) educando(a) há três professoras, sendo que duas delas estão inscritas no Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, a frequentar Iniciação à Prática Profissional, incluindo a Prática de Ensino Supervisionada, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), na qual, cada um, tem de elaborar um Relatório de Estágio, implementando um projeto de investigação pedagógica, orientado pela professora Maria de Fátima Delgado (maria.delgado@fc.up.pt), docente na FCUP.

A recolha de dados é essencial para a concretização deste projeto, pelo que a participação do(a) seu(sua) educando(a) será fundamental. A recolha de produções escritas, a realização de entrevistas e a gravação de registos áudio serão importantes para a análise da aplicação do estudo. Salienta-se que a participação neste trabalho em nada interfere com a avaliação do desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação.

Agradeço, desde já, a colaboração e a atenção,

Ao dispor,

Porto, 5 de janeiro de 2024



Eu, Encarregado(a) de Educação do aluno(a) _____
_____, n.º _____ da turma _____ do _____ ano,
autorizo/ não autorizo (riscar o que não interessa) a recolha de dados em formato de áudio
do(a) meu(minha) educando(a) para o desenvolvimento do Relatório de Estágio inserido na
Prática de Ensino Supervisionada.

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação:

Anexo 10 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da primeira tarefa de formulação de problemas

Questões gerais aplicadas a quatro alunos entrevistados:

1. Por que é que escolheste este contexto?
2. Já tinhas realizado este tipo de tarefas antes?
3. Gostaste mais de criar ou de resolver o problema?
4. Gostavas de voltar a fazer este tipo de tarefas?

Questões extra para a Laura:

- Explica-me como criaste o teu problema a partir do sistema de equações. Usaste apenas uma das equações?
- Queres tentar resolver o teu problema?

Caso a Laura consiga resolver o seu problema e a solução não seja adequada ao contexto do seu problema:

- A solução do sistema que encontraste faz sentido no contexto do teu problema?
- O que achas que poderias mudar para que a solução fizesse sentido?
- Em que possível contexto a solução do teu problema faria sentido?

Questões extra para o Pedro:

- Terminaste a resolução do teu problema?
- A solução do sistema que encontraste faz sentido no contexto do teu problema?
- O que achas que poderias mudar para que a solução fizesse sentido?
- Em que possível contexto a solução do teu problema faria sentido?

Questões extra para a Maria:

- Por que é que não acabaste a formulação do problema? Não tiveste tempo?
- Explica-me como estavas a pensar para criar o teu problema. Qual seria o teu passo seguinte?
- Queres terminar a formulação do teu problema? E resolvê-lo?

Caso a Maria consiga resolver o seu problema e a solução não seja adequada ao contexto do seu problema:

- A solução do sistema que encontraste faz sentido no contexto do teu problema?
- O que achas que poderias mudar para que a solução fizesse sentido?

- Em que possível contexto a solução do teu problema faria sentido?

Questões extra para a Filipa:

- Como criaste o teu problema a partir do sistema de equações?
- Por que é que não resolveste o problema que criaste? Queres tentar resolver?

Caso a Filipa consiga resolver o seu problema e a solução não seja adequada ao contexto do seu problema:

- A solução do sistema que encontraste faz sentido no contexto do teu problema?
- O que achas que poderias mudar para que a solução fizesse sentido?
- Em que possível contexto a solução do teu problema faria sentido?

Anexo 11 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da segunda tarefa de formulação de problemas

Questões gerais aplicadas a quatro alunos entrevistados:

1. Por que é que escolheste este contexto?
2. Como criaste o teu problema?
3. Gostaste mais de criar ou de resolver o problema?
4. Queres voltar a realizar este tipo de tarefa?
5. Quais foram as tuas maiores dificuldades?

Questões extra para a Vera:

- Consideras aquilo que criaste um problema?
- Achas que a tarefa que criaste tem um grau de dificuldade elevado?
- Queres tentar formular um problema que envolva um dos triângulos?
- Já tinhas realizado tarefas de formulação anteriormente, sem ser a primeira formulação de problemas?

Questões extra para o João:

- O que é que pretendias que quem resolvesse o problema descobrisse?
- Tendo em conta o contexto que criaste, quais são as unidades de comprimento que consideraste? Centímetros, metros, quilómetros?
- Queres encontrar a velocidade? Se sim, qual a unidade de medida da velocidade?

Se a resposta for negativa:

- Queres encontrar a distância percorrida?
- Então, tendo em conta que queres a distância percorrida, faz sentido a resposta que escreveste?

Se a resposta for positiva:

- Se queres a velocidade e se a velocidade é dada em quilómetros por hora, o quê que falta na tua resolução? O que é que encontraste com a aplicação do Teorema de Pitágoras?
- Por que é que não desenhaste a tua situação?
- Optaste por nem desenhar o triângulo retângulo. Mas se fornecesses apenas o enunciado do teu problema a um dos teus colegas, consideras que a pessoa saberia o que tinha de fazer para o resolver? Tinha os dados suficientes?

- Já tinhas realizado tarefas de formulação anteriormente, sem ser a primeira formulação de problemas?

Questões extra para o Pedro:

- O que é para ti dividir um terreno em dois triângulos iguais?
- Se me desses o teu problema, achas que eu iria aplicar o Teorema de Pitágoras e encontrar a medida de comprimento da hipotenusa? O que é que no teu problema indica que isso tem de ser feito?
- Calcular a medida de comprimento da hipotenusa significa dividir o retângulo a meio?
- O cálculo da medida de comprimento da hipotenusa poderia ser necessário em que situações?
- As dimensões do terreno estão em que unidade de comprimento?

Questões extra para a Bianca:

- Achas que o teu problema faz sentido?
- Em que posição seria colocada a prateleira?
- Não consideras que falta alguma informação no enunciado do teu problema?
- Sabendo que o João quer comprar 4 apoios, qual a importância de saber o valor da hipotenusa desses apoios?
- Consideras que se tivesses desenhado a situação que enunciaste, terias compreendido que a mesma não faria sentido na realidade? Ou consideras que teria sido indiferente?
- Já tinhas realizado este tipo de tarefas anteriormente?

Anexo 12 – Guiões das entrevistas realizadas no final da realização da terceira tarefa de formulação de problemas

Questões gerais aplicadas a quatro alunos entrevistados:

1. Por que é que escolheste este contexto?
2. Como criaste o teu problema?
3. Gostaste mais de criar ou de resolver o problema?
4. Queres voltar a realizar este tipo de tarefa?
5. Quais foram as tuas maiores dificuldades?

Questões extra para a Laura:

- Afirmas no teu enunciado que a medida da área do terreno é igual a $15 m^2$. No entanto, as medidas de comprimento dos lados do retângulo são $3 m$ e $12 m$. Como se calcula a medida da área desse retângulo?
- Afirmas que a medida do perímetro do terreno é igual a $30 m^2$, mas qual é a unidade de medida do perímetro?
- Substituíste na fórmula $A = \frac{P}{2} \times ap$, o parâmetro A pela medida da área do retângulo e o parâmetro P pela medida do perímetro do mesmo. Mas esta fórmula é utilizada no cálculo de quê?
- A figura que desenhaste é um polígono regular?
- O teu problema envolvia o teorema de Pitágoras?

Questões extra para o Carlos:

- Este octógono representa uma vista aérea dos prédios?
- Para calcular a medida da área de cada prédio teríamos de fazer o quê?
- Como é que se calcula a medida da área de cada triângulo?
- Não sabemos a altura do triângulo por isso temos de aplicar o teorema de Pitágoras, certo? Mas como se aplica o teorema de Pitágoras?
- Neste caso, a altura seria 0. O que é que isso significa?
- Imagina que tinhas atribuído, aos lados do triângulo, medidas que fizessem sentido. Já conseguias calcular a medida da área do teu prédio?
- O que pedia o teu enunciado?
- Calculaste a medida da área de algum polígono regular? O que é um polígono regular?
- Já tinhas resolvido este tipo de tarefas anteriormente?

Questões extra pela Vera:

- No enunciado mencionaste a medida área, mas qual é a sua unidade de medida?
- Referiste, num primeiro momento, que a unidade de medida da área seria m^2 , mas, posteriormente, colocaste na tua figura que a unidade de medida do lado do quadrado era cm . Então, a unidade de medida de comprimento é m ou cm ?
- A medida da área que pediste para calcular é a medida da área de um polígono regular?
- Por que é que aplicaste o teorema de Pitágoras? Para calcular a medida da área do triângulo?
- Como se calcula a medida da área de um triângulo?
- Achas que era necessário o uso do teorema de Pitágoras para resolver o teu problema? E achas que o teu problema envolvia o cálculo da medida da área de um polígono regular?

Questões extra para a Maria:

- Como é que concluíste que, possivelmente, a medida de comprimento do apótema que atribuíste não faria sentido?
- Quais foram as principais características de um hexágono regular estudadas em sala de aula?
- Para que o teu problema fizesse sentido, tinhas obrigatoriamente de fornecer, no enunciado, a medida de comprimento do apótema do hexágono regular?
- Se não fosse fornecida a medida de comprimento do apótema, mas apenas a medida de comprimento do lado do hexágono, como a poderias calcular?

Anexo 13 – Questionário acerca da formulação de problemas

Questionário acerca da formulação de problemas

1. Das três tarefas de formulação de problemas realizadas, qual foi aquela que gostaste mais? Porquê?
2. Quais foram as tuas maiores dificuldades durante estas três tarefas de formulação? Porquê?
3. Sentiste-te confiante a criar o teu problema ou tiveste alguma dificuldade em como realizar essa criação? No caso de teres sentido dificuldades, indica essas mesmas dificuldades.
4. Preferes resolver problemas já criados ou criar os teus próprios problemas e resolvê-los, como te foi pedido que fizesse nas três tarefas de formulação? Porquê?
5. Consideras-te mais motivado para resolver problemas matemáticos depois de criares os teus próprios problemas? Porquê? O que sentes que mudou?
6. Consideras que terias gostado mais de realizar as tarefas de formulação de problemas se não te fosse pedido para resolveres os problemas que criaste? Porquê?
7. Consideras que a formulação de problemas foi uma tarefa desafiadora? Em que sentido?
8. Consideras que as tarefas de formulação de problemas foram uma forma de aplicar os conceitos aprendidos na sala de aula? De que forma?
9. Consideras que a formulação de problemas matemáticos ajuda a compreender conceitos matemáticos? De que forma?
10. Gostarias que estas tarefas fossem realizadas em sala de aula com maior regularidade? Porquê? Qual o teu ponto de vista?
11. Gostarias de voltar a realizar este tipo de tarefas? Porquê?

Anexo 14 – Guiões das entrevistas realizadas após resposta ao questionário

Questões para o Pedro

- Por que é que consideras que a resolução de tarefas de formulação de problemas é a forma mais fácil de compreender a matéria?
- Consideras que aprendes mais a criar problemas do que a resolver problemas?
- Consideras que a formulação de problemas não é uma forma de mostrar conhecimento matemático?