

Identificação de Modelos de Função de Transferência

Paulo Lopes dos Santos

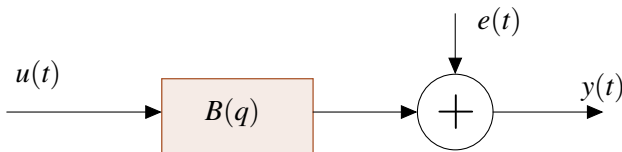
Estimação e Sistemas de Decisão, 2021
DEEC, FEUP

1 Identificação de Sistemas FIR

- Mínimos Quadrados
- Método da correlação
- Sistemas FIR perturbados por ruído colorido ruído - Mínimos Quadrados Totais

2 Identificação de Sistemas ARX

- Mínimos Quadrados
- Variáveis Instrumentais



$$y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

Definindo

$$\theta = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^{n_b+1} \quad \text{vetor de parâmetros}$$

$$\varphi(t) = [u(t) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_b+1} \quad \text{regressor,}$$

então

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + e(t).$$

Sistemas FIR- Mínimos Quadrados

- Como $y(t)$ é uma função linear de θ , θ pode ser estimado através dos mínimos quadrados:

$$\hat{\theta} = \min_{\theta} \left[(Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \right] = (\Phi^T \Phi)^{\dagger} \Phi^T Y \in \mathbb{R}^{n_b+1}$$

$$Y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T \in \mathbb{R}^N$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(1)^T \\ \varphi(2)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) & u(0) & \cdots & u(1 - n_b) \\ u(2) & u(1) & \cdots & u(2 - n_b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N) & u(N - 1) & \cdots & u(N - n_b) \end{bmatrix}$$

- Se $\text{car}(\Phi) = n_b + 1$, o sinal $u(t)$ tem excitação persistente de ordem $n_b + 1$ e a estimativa de mínimos quadrados é única dada por:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

- 1 se $\mathbf{E}\{e(t)\} = 0$, então $\mathbf{E}\{\hat{\theta}\} = \theta$ ($\hat{\theta}$ é um estimador não enviesado).

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\hat{\theta}\} &= \mathbf{E}\left\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y\right\} = \mathbf{E}\left\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \theta + E)\right\} = \\ &\mathbf{E}\left\{(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E\right\} = \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{E}\{E\} = \theta, \\ E &= [e(1) \quad e(2) \quad \cdots \quad e(N)]^T.\end{aligned}$$

Propriedades II

- 2 Se $e(t)$ for ruído branco com média nula e variância σ^2 , então

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \mathbf{E} \left\{ (\hat{\theta} - \theta) (\hat{\theta} - \theta)^T \right\} = (\Phi^T \Phi)^T \sigma^2.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} - \theta &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y - \theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \theta + E) - \theta = \\ &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E - \theta = \\ &= \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E - \theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E. \end{aligned}$$

Logo,

$$= \mathbf{E} \left\{ (\hat{\theta} - \theta) (\hat{\theta} - \theta)^T \right\} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{E} \{ EE^T \} \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}.$$

Propriedades III

Como $e(t)$ é ruído branco,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{EE^T\} &= \mathbf{E}\left\{\begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} [e(1) \ e(2) \ \cdots \ e(N)]^T\right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{e(1)^2\} & \mathbf{E}\{e(1)e(2)\} & \cdots & \mathbf{E}\{e(1)e(N)\} \\ \mathbf{E}\{e(2)e(1)\} & \mathbf{E}\{e(2)^2\} & \cdots & \mathbf{E}\{e(2)e(N)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}\{e(N)e(1)\} & \mathbf{E}\{e(N)e(2)\} & \cdots & \mathbf{E}\{e(N)^2\} \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 I_N.\end{aligned}$$

Propriedades IV

Tem-se, então

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left\{ \left(\hat{\theta} - \theta \right) \left(\hat{\theta} - \theta \right)^T \right\} &= \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} \Phi^T \sigma^2 \Phi \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} = \\ &= \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} \Phi^T \Phi \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} \sigma^2 = \\ &= \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} \sigma^2.\end{aligned}$$

- 3 $\hat{\theta}$ é uma função linear de Y .
- 4 Se $e(t)$ for ruído branco de média nula, então $\hat{\theta}$ é o melhor estimador linear não enviesado de θ .
- 5 Se $e(t)$ for ruído branco gaussiano de média nula, então $\hat{\theta}$ é o melhor estimador não enviesado de θ .

Método da correlação I

O estimador de mínimos quadrados pode ser reescrito na forma:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \left(\frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right)^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T Y.$$

em que

$$\frac{1}{N} \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)^2 & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-1) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-n_b) \\ \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} u(t)u(t+1) & \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} u(t)^2 & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} u(t)u(t+1-n_b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-n_b)u(t) & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-n_b)u(t-1) & \cdots & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-n_b)^2 \end{bmatrix}$$

Método da correlação II

$$\frac{1}{N}\Phi^T Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)u(t) \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)u(t-1) \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)u(t-n_b) \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{E}\{u(t)\} = 0$, quando $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \lambda_{uu}(0) & \lambda_{uu}(1) & \cdots & \lambda_{uu}(n_b) \\ \lambda_{uu}(1) & \lambda_{uu}(0) & \cdots & \lambda_{uu}(n_b-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{uu}(n_b) & \lambda_{uu}(n_b-1) & \cdots & \lambda_{uu}(0) \end{bmatrix} = \Lambda_{uu}(n_b)$$

Método da correlação III

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Phi^T Y = \begin{bmatrix} \lambda_{yu}(0) \\ \lambda_{yu}(1) \\ \vdots \\ \lambda_{yu}(n_b) \end{bmatrix} = \Lambda_{yu}(n_b)$$

Se $u(t)$ for ruído branco

$$\lambda_{uu}(\tau) = \begin{cases} \sigma_u^2, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\Lambda_{uu}(n_b) = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 I_{n_b+1}$$

Método da correlação IV

Tem-se, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta} = (\sigma_u^2 I_{nb+1})^{-1} \Lambda_{yu}(n_b) = \frac{\Lambda_{yu}(n_b)}{\sigma_u^2} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{yu}(0)}{\sigma_u^2} \\ \frac{\lambda_{yu}(1)}{\sigma_u^2} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{yu}(n_b)}{\sigma_u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}$$

Relembrar que $b_\tau = h(\tau)$ em que $h(\tau)$ é a resposta impulsional do sistema no instante τ .

Método da correlação

- 1 Excitar o sistema com ruído branco de média nula.
- 2 Fazer

$$\hat{b}_\tau = \hat{h}(\tau) = \frac{\hat{\lambda}_{yu}(\tau)}{\hat{\lambda}_{uu}(0)}$$

em que

$$\hat{\lambda}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=\tau+1}^N y(t)u(t - \tau)$$

$$\hat{\lambda}_{uu}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)^2.$$

Método da correlação VI

- Este método produz estimativas não enviesadas da resposta impulsional mesmo de sistemas com resposta impulsional infinita.

Sistemas FIR perturbados por ruído colorido I

$$y(t) = B(q)u(t) + H(q)e(t)$$

$e(t)$ – ruído branco de média nula

$H(q)$ – função de transferência mónica, de fase mínima

Dividindo esta equação por $H(q)$, tem-se:

$$\frac{1}{H(q)}y(t) = B(q)\frac{1}{H(q)}u(t) + e(t).$$

Se $H(q)$ for conhecido, pode-se filtrar $y(t)$ e $u(t)$ para se obter

$$y_f(t) = \frac{1}{H(q)}y(t)$$

$$u_f(t) = \frac{1}{H(q)}u(t).$$

Sistemas FIR perturbados por ruído colorido II

Como $y_f(t)$ e $x_f(t)$ estão relacionados pelo modelo

$$y_f(t) = B(q)u_f(t) + e(t),$$

o estimador de mínimos quadrados

$$\hat{\theta}_f = (\Phi_f^T \Phi_f)^{-1} \Phi_f^T Y_f,$$

com

$$Y_f = [y_f(1) \quad y_f(2) \quad \cdots \quad y_f(N)]^T$$
$$\Phi_f = \begin{bmatrix} u_f(1) & u_f(0) & \cdots & u_f(1 - n_b) \\ u_f(2) & u_f(1) & \cdots & u_f(2 - n_b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_f(N) & u_f(N - 1) & \cdots & u_f(N - n_b) \end{bmatrix},$$

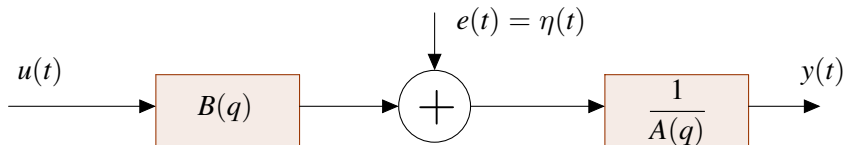
Sistemas FIR perturbados por ruído colorido III

Tem as seguintes propriedades:

- 1 É não enviesado.
- 2 $\text{cov}(\hat{\theta}_f) = (\Phi_f^T \Phi_f)^{-1} \sigma^2$.
- 3 É o melhor estimador linear não enviesado de θ .
- 4 Se $e(t)$ for gaussiano é o melhor estimador não enviesado de θ .

$\frac{1}{H(q)}$ é um filtro branqueador.

1 - Sistemas ARX



$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

Definindo

$$\theta = [b_0 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_a}]^T \in \mathbb{R}^{n_b+1+n_a}$$

$$\varphi = [u(t) \quad \dots \quad u(t - n_b) \quad -y(t - 1) \quad \dots \quad -y(t - n_a)]^T \in \mathbb{R}^{n_b+1+n_a}$$

então

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta + e(t).$$

Sistemas ARX - Mínimos Quadrados I

- Como $y(t)$ é uma função linear de θ , θ pode ser estimado através dos mínimos quadrados:

$$\hat{\theta} = \min_{\theta} \left[(Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \right] = (\Phi^T \Phi)^{\dagger} \Phi^T Y$$

$$Y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T$$

$$\Phi = [\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \cdots \quad \varphi(N)]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} u(1) & \cdots & u(1 - n_b) & -y(0) & \cdots & -y(1 - n_a) \\ u(2) & \cdots & u(2 - n_b) & -y(1) & \cdots & -y(2 - n_a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N) & \cdots & u(N - n_b) & -y(N - 1) & \cdots & -y(N - n_a) \end{bmatrix}$$

Sistemas ARX - Mínimos Quadrados II

- Se o sinal $u(t)$ tiver *excitação persistente de ordem* $n_b + 1$, $\text{car}(\Phi) = n_b + 1 + n_a$ e a estimativa de mínimos quadrados é única e dada por

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

Propriedades I

- Se $u(t)$ e $y(t)$ forem sinais ergódicos, se $u(t)$ tiver excitação de ordem $n_b + 1$ e for independente de $e(t)$ (não for gerado por realimentação) e se $e(t)$ for ruído branco de média nula com variância σ^2 e independente de $u(t)$:

- 1 $\hat{\theta}$ converge com probabilidade 1 para θ (valor verdadeiro dos parâmetros), isto é, $\hat{\theta}$ é um estimador consistente.

Demonstração:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \theta + E) = \theta + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E,$$

com

$$E = [e(1) \quad \dots \quad e(N)]$$

Calculando $\hat{\theta} - \theta$ e multiplicando e dividindo por N , tem-se

$$\hat{\theta} - \theta = N (\Phi^T \Phi)^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T E = \left(\frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right)^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T E.$$

Propriedades II

Sendo

$$\frac{1}{N} \Phi^T \Phi = \frac{1}{N} [\varphi(1) \quad \cdots \quad \varphi(N)] \begin{bmatrix} \varphi(1)^T \\ \vdots \\ \varphi(N)^T \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T,$$

e dado que $u(t)$ e $y(t)$ são sinais ergódicos, então,

$$\varphi(t) = [u(t) \quad \cdots \quad u(t - n_b) \quad -y(t - 1) \quad \cdots \quad -y(t - n_a),]$$

também é ergódico e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \xrightarrow{\text{prob } 1} \mathbf{E} \{ \varphi(t) \varphi(t)^T \} = R_{\varphi\varphi}(0).$$

Propriedades III

Por outro lado,

$$\frac{1}{N} \Phi^T E = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) e(t).$$

Como $\varphi(t)$ e $e(t)$ são sinais ergódicos,

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) e(t) \xrightarrow{\text{prob } 1} \mathbf{E} \{ \varphi(t) e(t) \} = R_{\varphi e}(0) = \begin{bmatrix} R_{ue}(0) \\ \vdots \\ R_{ue}(-n_b) \\ -R_{ye}(-1) \\ \vdots \\ R_{ye}(-n_a) \end{bmatrix} = 0,$$

Propriedades IV

pois $e(t)$ tem média nula e é independente $u(t)$
($\Rightarrow R_{ue}(\tau) = 0, \forall \tau$) e, como $e(t)$ é ruído branco, então é independente de $y(t - \tau), \forall \tau > 0$, então

$$R_{ye}(-\tau) = \mathbf{E} \{y(t - \tau)e(t)\} = \mathbf{E} \{y(t - \tau)\} \mathbf{E} \{e(t)\} = 0.$$

- 2 A covariância assintótica de $\hat{\theta}$ é $(\Phi^T \Phi)^{-1} \sigma^2$.
 - 3 $\hat{\theta}$ converge em média quadrática para θ .
 - 4 $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória assintoticamente gaussiana.
 - 5 Se $e(t)$ for um processo gaussiano, $\hat{\theta}$ converge para o melhor estimador não enviesado de θ .
- Se $u(t)$ e $y(t)$ não forem sinais ergódicos e se $e(t)$ for ruído branco com média nua, variância σ^2 e independente de $u(t)$, então $\hat{\theta}$ converge em probabilidade para θ .

Seja

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t)$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}$$

$$e(t) \text{ — ruído branco de média nula e varância } \sigma^2.$$

A equação deste sistema pode se rescrita na forma

$$F(q)y(t) = B(q)u(t) + \eta(t)$$

$$\eta(t) = F(q)e(t).$$

Variáveis Instrumentais II

Definindo

$$\begin{aligned}\theta &= [b_0 \quad \cdots \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{n_f}]^T \\ \varphi(t) &= [u(t) \quad \cdots \quad u(t - n_b) \quad -y(t - 1) \quad \cdots \quad -y(t - n_f)]\end{aligned}$$

Tem-se

$$y(t) = \varphi(t)\theta + \eta(t).$$

Agrupando $y(t)$, $\varphi(t)$ e $\eta(t)$, $t = 1, \dots, N$ nas matrizes

$$\begin{aligned}Y &= [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T \\ \Phi &= [\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \cdots \quad \varphi(N)]^T \\ &= \begin{bmatrix} u(1) & \cdots & u(1 - n_b) & -y(0) & \cdots & -y(1 - n_f) \\ u(2) & \cdots & u(2 - n_b) & -y(1) & \cdots & -y(2 - n_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N) & \cdots & u(N - n_b) & -y(N - 1) & \cdots & -y(N - n_f) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Variáveis Instrumentais III

$$H = [\eta(1) \quad \eta(2) \quad \cdots \quad \eta(N)]^T,$$

tem-se

$$Y = \Phi\theta + H.$$

Se $\Phi^T\Phi$ for não singular, pode-se estimar θ através do estimador de mínimos quadrados,

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1} \Phi^T Y.$$

Substituindo Y por $Y = \Phi\theta + H$ nesta equação obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= (\Phi^T\Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi\theta + H) = (\Phi^T\Phi)^{-1} \Phi^T\Phi\theta + (\Phi^T\Phi)^{-1} \Phi^T H = \\ &= \theta + (\Phi^T\Phi)^{-1} \Phi^T H \end{aligned}$$

Variáveis Instrumentais IV

Multiplicando e dividindo por N a segunda parcela:

$$\hat{\theta} = \theta + \left(\frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right)^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T H$$

Quando $N \rightarrow \infty$,

$$\hat{\theta} \rightarrow \theta + R_{\varphi\varphi}(0)^{-1} R_{\varphi\eta}(0)$$

em que

$$R_{\varphi\eta}(0) = \begin{bmatrix} R_{u\eta}(0) \\ \vdots \\ R_{u\eta}(-n_b) \\ R_{y\eta}(-1) \\ \vdots \\ R_{y\eta}(-n_f) \end{bmatrix}$$

Variáveis Instrumentais V

Como η é independente de $u(t)$, $R_{u\eta}(\tau) = 0$, $\forall \tau$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}R_{y\eta}(-\tau) &= \mathbf{E} \left\{ \left[\frac{B(q)}{F(q)} u(t - \tau) + e(t - \tau) \right] \eta(t) \right\} = \\&= \frac{B(q)}{F(q)} \mathbf{E} \{ u(t - \tau) \eta(t) \} + \mathbf{E} \{ e(t - \tau) \eta(t) \} = \\&= \frac{B(q)}{F(q)} R_{u\eta}(-\tau) + R_{e\eta}(-\tau) = R_{e\eta}(-\tau).\end{aligned}$$

Como

$$\eta(t) = F(q)e(t) = f_0 e(t) + f_1 e(t - 1) + \dots + f_{n_f} e(t - n_f)$$

Variáveis Instrumentais VI

com $f_0=1$, então

$$R_{y\eta}(-\tau) = R_{e\eta}(-\tau) = \begin{cases} f_{\tau}\sigma^2, & 0 \leq \tau \leq n_f \\ 0, & \tau < 0 \text{ ou } \tau > n_f \end{cases}$$

Logo, o estimador de mínimos quadrados é assintoticamente enviesado pois, quando $N \rightarrow \infty$,

$$\hat{\theta} \rightarrow \theta + R_{\varphi}(0)^{-1}R_{\varphi\eta}(0) \neq \theta.$$

Solução:

Definir

$$z(t) = [z_1(t) \quad \dots \quad z_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, n = n_b + n_f + 1$$

Variáveis Instrumentais VII

tal que

$$\begin{aligned}\text{car}(R_{z\varphi}(0)) &= \text{car}(\mathbf{E}\{z(t)\varphi(t)^T\}) = n \\ R_{z\eta}(0) &= \mathbf{E}\{z(t)\eta(t)\} = 0,\end{aligned}$$

Substituir θ por

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y,$$

com

$$Z = \begin{bmatrix} z(1)^T \\ z(2)^T \\ \vdots \\ z(N)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(1) & \cdots & z_n(1) \\ z_1(2) & \cdots & z_n(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1(N) & \cdots & z_n(N) \end{bmatrix}$$

- $z(t)$ é o vetor de **variáveis instrumentais**.
- $\hat{\theta}_{IV}$ é o **estimador de variáveis instrumentais**.

Variáveis Instrumentais- Propriedades I

1 Se

$$\begin{aligned}\text{car}(R_{z\varphi}(0)) &= \text{car}(\mathbf{E}\{z(t)\varphi(t)^T\}) = n \\ R_{z\eta}(0) &= \mathbf{E}\{z(t)\eta(t)\} = 0,\end{aligned}$$

então o estimador de variáveis instrumentais, $\hat{\theta}_{IV}$, é assintoticamente não enviesado.

Demonstração: Como

$$\mathbf{E}\{z(t)\varphi(t)^T\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi,$$

Variáveis Instrumentais- Propriedades II

então, $\mathbf{E} \{z(t)\varphi(t)^T\}$ tiver característica completa, o mesmo acontece para $Z^T\Phi$ para N suficiente grande. Logo

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{IV} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} Z^T \Phi \right)^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T Y = \\ &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi \right)^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T (\Phi \theta + H) = \\ &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi \right)^{-1} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Psi \right) \theta + \\ &\quad + \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi \right)^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T H \\ &= \theta + R_{Z\Phi}^{-1} R_{ZH}\end{aligned}$$

Variáveis Instrumentais- Propriedades III

Em que

$$R_{Z\Phi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t) \varphi(t)^T = R_{z\varphi}(0)$$

e

$$R_{Z^T H} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} z(t) \eta(t) = R_{z\eta}(0) = 0,$$

pelo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{IV} = \theta.$$

Seleção das variáveis instrumentais I

Variáveis Instrumentais $z(t)$ devem ser:

- 1 Fortemente correlacionadas com o regressor para garantir $R_{z\varphi}(0) = \mathbf{E} \{z(t)\varphi(t)\}$ não singular e *maior possível*.
- 2 Não correlacionadas com o ruído

Variáveis Instrumentais:

- 1 **Saídas atrasadas:** $z(t) = [y(t - T_d) \ \cdots \ y(t - T_d - n)]^T$
Como $\eta(t) = F(q)e(t)$, então, se $e(t)$ for ruído branco, a sequência de auto-covariância do ruído $R_\eta(\tau) = \mathbf{E} \{\eta(t)\eta(t - \tau)\} = 0$ para $\tau > n_f$. Logo, se $T_d > n_f$ $y(t - T_d - k)$, $k = 0, \dots, n$ pode é independente de $\eta(t)$ e, consequentemente, $R_{z\eta}(0) = 0$.

Seleção das variáveis instrumentais II

2 Entradas atrasadas:

$$z(t) = [u(t - T_d) \quad \cdots \quad u(t - T_d - n)]^T$$

A saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g_{\tau} u(t - \tau) + e(t).$$

em que g_{τ} , $\tau = 0, \dots, \infty$. é a resposta impulsional. Se $\mathbf{E} \{u(t)\} = 0$, então

Seleção das variáveis instrumentais III

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \{z_i(t)y(t)\} &= \sum_{\tau=0}^{\infty} g_{\tau} \mathbf{E} \{u(t - T_d - 1 + i)u(t - \tau)\} = \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} g_{\tau} \lambda_{uu}(\tau - T_d - 1 + i)\end{aligned}$$

pelo que se T_d não for demasiado grande $R_{z\varphi}(0)$, é não singular.

- 3 Se $u(t)$ não for gerado por realimentação, então é independente de $e(t)$ e

$$\mathbf{E} \{z_i(t)e(t)\} = \mathbf{E} \{u(t - T_d - i + 1)e(t)\} = 0 \Rightarrow R_{z\eta}(0) = 0.$$

Seleção das variáveis instrumentais IV

- 4 **Entradas filtradas:** Em vez de se atrasarem as entradas podem-se filtrá-las com um filtro com função de transferência parecida a função de transferência do sistema.
- 5 O ideal seria mesmo utilizar entradas e saídas não perturbadas do sistema.

$$z(t) = [u(t) \quad \cdots \quad u(t - n_b) \quad -\bar{y}(t - 1) \quad \cdots \quad -\bar{y}(t - n_a)]^T$$

em que

$$\bar{y}(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t).$$

Variáveis Instrumentais Padrão (SIV) I

- Obviamente que estimador de variáveis instrumentais ideal não é realizável na prática pois, como é óbvio, não é conhecida a a sua função de transferência e, se fosse, não seria necessário estimá-la.
- No entanto, pode ser aproximado por algoritmo iterativo designado por Variáveis Instrumentais Padrão (SIV de Standard Instrumental Variables).

Variáveis Instrumentais Padrão (SIV) II

- O SIV é um algoritmo iterativo em que na i ésima iteração as saídas do sistema são substituídas pelas saídas do modelo estimado na iteração anterior:

$$z^{(i)}(t) = [u(t) \quad \cdots \quad u(t - n_b) \quad -\hat{y}^{(i-1)}(t - 1) \quad \cdots \quad -\hat{y}^{(i-1)}(t - n_a)]^T$$

com

$$\hat{y}^{(i)}(t) = \frac{\hat{B}_i(q)}{\hat{F}_i(q)} u(t),$$

em que $\hat{B}_i(q)$ e $\hat{F}_i(q)$ são os polinómios do modelo estimado na iteração i .

- $\hat{B}_0(q)$ e $\hat{F}_0(q)$ são os polinómios estimados pelo algoritmo de mínimos quadrados.

Variáveis Instrumentais Padrão (SIV) III

SIV - Algoritmo de Variáveis Instrumentais Padrão

Passo 1 . Inicialização

1.1 - $i \leftarrow 0$

1.2 - Estimar $\hat{B}_i(q)$ e $\hat{F}_i(q)$ com o Estimador de Mínimos Quadrados

Passo 2: Variáveis Instrumentais Iterativas com atualização do modelo auxiliar.

Repetir até convergir

2.11 - $i \leftarrow i + 1$

2.2 - Se $\hat{F}_{i-1}(q)$ for instável refletir os zeros instáveis para interior do círculo unitário

Variáveis Instrumentais Padrão (SIV) IV

2.3 - gerar $\hat{y}^{(i-1)}(t) = \frac{\hat{B}_{i-1}(q)}{\hat{F}_{i-1}(q)} u(t),$

2.4 - Fazer

$$z^{(i)}(t) = [u(t) \quad \dots \quad u(t - n_b) \quad -\hat{y}^{(i-1)}(t - 1) \quad \dots \quad -\hat{y}^{(i-1)}(t - n_a)]^T$$

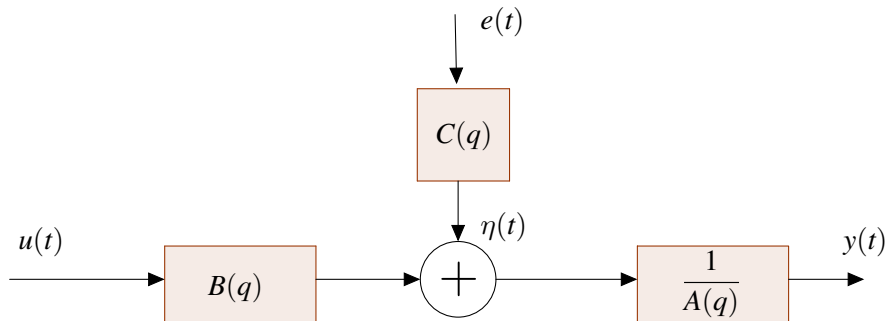
2.5 - Construir $Z_i = [z^{(i)}(1) \quad \dots \quad z^{(i)}(N)]^T.$

2.6 - Calcular

$$\hat{\theta}_i^{IV} = (Z_i^T \Phi)^{-1} Z_i^T Y = [\hat{b}_0^{(i)} \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}^{(i)} \quad \hat{f}_1^{(i)} \quad \dots \quad \hat{f}_{n_f}^{(i)}]^T.$$

2.7 - Fazer

$$\begin{aligned}\hat{B}_i(q) &= \hat{b}_0^{(i)} + \dots + \hat{b}_{n_b}^{(i)} q^{-n_b} \\ \hat{F}_i(q) &= 1 + \hat{f}_1^{(i)} q^{-1} + \dots + \hat{f}_{n_f}^{(i)} q^{-n_f}\end{aligned}$$



$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

Erro de Previsão

- Previsor:

$$\hat{y}(t) = \frac{B(q)}{C(q)}u(q) + \frac{C(q) - A(q)}{C(q)}y(t).$$

- Erro de previsão:

$$\hat{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{1}{C(q)} [A(q)y(t) - B(q)u(t)]$$

- Parâmetros:

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}$$

$$\theta = [b_0 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T$$

Método do Erro de Previsão (PEM)

- Previsor como função dos parâmetros:

$$\hat{y}(t, \theta) = \frac{B(q)}{C(q)}u(q) + \frac{C(q) - A(q)}{C(q)}y(t).$$

- Erro de previsão como função dos parâmetros:

$$\hat{e}(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{1}{C(q)} [A(q)y(t) - B(q)u(t)]$$

- Método do erro de previsão (PEM): Dadas as observações $(y(t), u(t))$, $t = 1, \dots, N$, estimar θ através de

$$\hat{\theta} = \min_{\theta} V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \hat{e}(t, \theta)^2$$

Método do Erro de Previsão (PEM) - Propriedades

- Se o sinal de entrada tiver excitação suficiente e se os dados forem gerados por um modelo ARMAX com parâmetros θ_0 , então $\hat{\theta} \xrightarrow{\text{prob } 1} \theta_0$ quando $N \rightarrow \infty$
- A distribuição de θ tende para $N\left(\theta_0, \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2}\right)$ em que

$$\frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_{n_\theta}} \\ \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_{n_\theta}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta} \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta} \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}^2} \end{bmatrix}$$

Método do Erro de Previsão (PEM) - Propriedades

- Se o ruído $e(t)$ tiver uma distribuição Normal, então $\hat{\theta}$ converge para o melhor estimador não enviesado.

INCONVENIENTE: Como o erro de previsão $\hat{e}(t, \theta)$ não é uma função linear dos parâmetros θ , a função custo $V(\theta)$ tem vários mínimos locais e pontos em sela, sendo, por isso, difícil de minimizar.

SOLUÇÃO: Inicializar o algoritmo de minimização com estimativas de θ próximas do mínimo de $V(\theta)$ tais como:

- Estimativas de mínimos quadrados
- Estimativas de métodos subótimos

Mínimos quadrados alargados

Mínimos Quadrados Alargados

Modelo ARMAX:

$$y(t) = b_0 u(t) + \cdots + b_{n_b} u(t - n_b) - a_1 y(t - 1) - \cdots - a_{n_a} y(t - n_a) + c_1 e(t - 1) + \cdots + c_{n_c} e(t - n_c) + e(t)$$

Se $e(t - 1), \dots, e(t - n_c)$ forem conhecidos, então

$$y(t) = \varphi_a(t) \theta + e(t)$$

em que $\varphi_a(t)$ é o regressor alargado

$$\varphi_a(t) = \begin{bmatrix} u(t) & \cdots & u(t - n_b) & -y(t - 1) & \cdots & -y(t - n_a) \\ e(t - 1) & e(t - 1) & \cdots & e(t - n_c) \end{bmatrix}^T$$

Mínimos quadrados alargados

θ pode ser estimado por

$$\hat{\theta} = (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a^T Y$$

com

$$Y = [y(1) \ \cdots \ y(N)]^T$$
$$\Phi_a = [\varphi_a(1) \ \varphi_a(2) \ \cdots \ \varphi_a(N)]^T$$

PROBLEMA:

Não se conhece $e(t-1), \dots, e(t-n_c)$

SOLUÇÃO

Utilizar um método iterativo em que $e(t-1), \dots, e(t-n_c)$ é substituído por $\hat{e}(t-1, \hat{\theta}^{(i-1)}), \dots, \hat{e}(t-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)})$ em que $\hat{\theta}^{(i-1)}$ é a estimativa obtida na iteração anterior

Mínimos quadrados alargados

MQA - Algoritmo de Mínimos Quadrados Alargados

Passo 1 . Inicialização

1.1 - $i \leftarrow 0$

1.2 - **Estimar $\hat{B}_i(q)$ e $\hat{A}_i(q)$ com o Estimador Mínimos Quadrados.**

1.3 - Fazer $\hat{C}_i(q) = 1$

Passo 2 - Determinação sucessiva de estimativas de mínimos quadrados com o regressor alargado

Repetir até convergir

2.1 - $i \leftarrow i + 1$

Mínimos quadrados alargados

2.2 - Calcular

$$\hat{e}(t, \hat{\theta}^{(i-1)}) = \frac{1}{\hat{C}_{i-1}(q)} \left[\hat{A}_{i-1}(q)y(t) - \hat{B}_{i-1}(q)u(t) \right]$$

para $t = 1, \dots, N$

2.3 - Calcular o estimador de Mínimos Quadrados Alargados

$$\hat{\theta}^{(i)} = (\Phi_a^T \Phi_a)^{-1} \Phi_a^T Y$$

2.4- Se $\hat{C}_i(q)$ for instável, refletir os seus zeros instáveis para o interior do círculo unitário

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

- Métodos de gradiente: Processos iterativos onde na iteração i :

$$\hat{\theta}^{(i)} = \hat{\theta}^{(i-1)} - P_i \left[\frac{dV(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}}^T$$

em que P_i é uma matriz definida positiva (simétrica com todos os valores próprios positivos) e

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \left[\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} \right] \Rightarrow \left[\frac{V(\theta)}{d\theta} \right]^T = \text{gradiente de } V(\theta).$$

- Os Métodos de gradiente conduzem θ na direção descendente de $V(\theta)$ até um ponto singular (ponto em que o gradiente se anula) que pode ser um ponto em sela ou um mínimo local.

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

- Método de Gauss-Newton:

$$P_i = H_i^{-1}$$

$$H_i = \sum_{t=1}^N \left[\frac{d\hat{e}(t, \theta)}{d\theta} \right]^T \frac{d\hat{e}(t, \theta)}{d\theta} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}} = \left[\frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \right]^T \frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}}$$

em que

$$\hat{E}(\theta) = [\hat{e}(1, \theta) \quad \dots \quad \hat{e}(N, \theta)]^T$$
$$\frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{d\hat{e}(1, \theta)}{d\theta} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{e}(N, \theta)}{d\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{e}(1, \theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \hat{e}(1, \theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{e}(N, \theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \hat{e}(N, \theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} \end{bmatrix}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

em que

$$\begin{aligned}\theta &= [\theta_1 \quad \cdots \quad \theta_{n_\theta}]^T = \\ &= [b_0 \quad \cdots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{n_c}]^T.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{d\hat{e}(t, \theta)^2}{d\theta} = \sum_{t=1}^N \frac{d\hat{e}(t, \theta)}{d\theta} \hat{e}(t, \theta) = \left[\frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \right]^T E(\theta)$$

A iteração de Gauss-Newton é

$$\hat{\theta}^{(i)} = \hat{\theta}^{(i-1)} - \left(\left[\frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \right]^T \frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \right)^{-1} \left[\frac{d\hat{E}(\theta)}{d\theta} \right]^T \hat{E}(\theta) \bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

$$\begin{aligned}\hat{e}(t, \theta) &= \frac{1}{C(q)} [A(q)y(t) - B(q)u(t)] = \\ &= \frac{1}{C(q)} [y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) \\ &\quad - b_0u(t) - \dots - b_{n_b}u(t-n_b)]\end{aligned}$$

Recordar que

$$\theta = [b_0 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_b}]^T$$

Derivada parcial $\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial b_i}$:

$$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial b_i} = -\frac{1}{C(q)} u(t-i)$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

De notar que $\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial b_i}$ é a saída $y_{bi}(t)$ do sistema dinâmico

$$y_{bi}(t) = -\frac{1}{C(q)}u(t-i)$$

Derivada parcial $\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial a_i}$:

$$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial a_i} = \frac{1}{C(q)}y(t-i)$$

$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial a_i}$ é a saída $y_{ai}(t)$ do sistema dinâmico

$$y_{ai}(t) = \frac{1}{C(q)}y(t-i)$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

$$\hat{e}(t, \theta) = \frac{1}{C(q)} [A(q)y(t) - B(q)u(t)] \Leftrightarrow$$

$$C(q)\hat{e}(t, \theta) = A(q)y(t) - B(q)u(t) \Leftrightarrow$$

$$\hat{e}(t, \theta) + c_1\hat{e}(t-1, \theta) + \dots + c_{n_c}\hat{e}(t-n_c, \theta) = A(q)y(t) - B(q)u(t).$$

Derivada parcial $\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial c_i}$:

$$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial c_i} + c_1 \frac{\partial \hat{e}(t-1, \theta)}{\partial c_i} + \dots + c_{n_c} \frac{\partial \hat{e}(t-n_c, \theta)}{\partial c_i} + \hat{e}(t-i) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial c_i} = -\frac{1}{C(q)} \hat{e}(t-i)$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

$\frac{\partial \hat{e}(t, \theta)}{\partial c_i}$ é a saída $y_{ci}(t)$ do sistema dinâmico

$$y_{ci}(t) = -\frac{1}{C(q)} c_i \hat{e}(t-i)$$

Seja $u_f(t)$ a saída dum sistema linear e invariante no tempo com função de transferência $\frac{1}{C(q)}$

$$u_f(t) = \frac{1}{C(q)} u(t).$$

Como o sistema é invariante no tempo,

$$\frac{\partial \hat{e}(t\theta)}{\partial b_i} = y_{bi}(t) = -\frac{1}{C(q)} u(t) = -u_f(t-i).$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

Logo, para obter as derivadas $\frac{\partial \hat{e}(t\theta)}{\partial b_i}$, $i = 0, \dots, n_b$ só é necessário simular o sistema $u_f(t) = \frac{1}{C(q)}u(t)$ uma vez. Identicamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{e}(t\theta)}{\partial a_i} &= y_f(t - i), \quad i = 1, \dots, n_a, \\ \frac{\partial \hat{e}(t\theta)}{\partial c_i} &= \hat{e}_f(t - i, \theta), \quad i = 1, \dots, n_c,\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}y_f(t) &= \frac{1}{C(q)}y(t) \\ \hat{e}_f(t, \theta) &= \frac{1}{C(q)}\hat{e}(t, \theta).\end{aligned}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

Tem-se, então

$$\frac{dE(\theta)}{d\theta} =$$

$$\begin{bmatrix} -u_f(1) & \cdots & -u_f(1 - n_b) & y_f(0) & \cdots & y_f(1 - n_a) & -\hat{e}_f(1, \theta) & \cdots & -\hat{e}_f(1 - n_c, \theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(t) & \cdots & -u_f(t - n_b) & y_f(0) & \cdots & y_f(t - n_a) & -\hat{e}_f(t, \theta) & \cdots & -\hat{e}_f(t - n_c, \theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(N) & \cdots & -u_f(N - n_b) & y_f(0) & \cdots & y_f(N - n_a) & -\hat{e}_f(N, \theta) & \cdots & -\hat{e}_f(N - n_c, \theta) \end{bmatrix}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

Minimização de $V(\theta)$ pelo método de Gauss-Newton

Passo 1 . Inicialização

1.1 - $i \leftarrow 0$

1.2 - **Estimar $\hat{B}_i(q)$ e $\hat{A}_i(q)$ com o Estimador Mínimos Quadrados.**

1.3 - Fazer $\hat{C}_i(q) = 1$

Passo 2 - Determinação sucessiva de estimativas de mínimos quadrados com o regressor alargado

Repetir até convergir

2.1 - $i \leftarrow i + 1$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

2.2 - Calcular

$$\hat{e}(t, \hat{\theta}^{(i-1)}) = \frac{1}{\hat{C}_{i-1}(q)} [\hat{A}_{i-1}(q)y(t) - \hat{B}_{i-1}(q)u(t)]$$

para $t = 1, \dots, N$

2.3 - Calcular $u_f(t) = \frac{1}{\hat{C}_{i-1}}u(t)$

2.4 - Calcular $y_f(t) = \frac{1}{\hat{C}_{i-1}}y(t)$

2.5 - Calcular $\hat{e}_f(t, \hat{\theta}^{(i-1)}) = \frac{1}{\hat{C}_{i-1}(q)}(t)$

2.6 - Construir

$$\hat{E}(\hat{\theta}^{i-1}) = [\hat{e}(1, \hat{\theta}^{(i-1)}) \quad \dots \quad \hat{e}(t, \hat{\theta}^{(i-1)}) \quad \dots \quad \hat{e}(N, \hat{\theta}^{(i-1)})]$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

2.7 - Construir

$$\left. \frac{dE(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}} =$$

$$\begin{bmatrix} -u_f(1) \cdots -u_f(1-n_b) & y_f(0) \cdots y_f(1-n_a) & -\hat{e}_f(0, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(1-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(t) \cdots -u_f(t-n_b) & y_f(t-1) \cdots y_f(t-n_a) & -\hat{e}_f(t-1, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(t-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(N) \cdots -u_f(N-n_b) & y_f(N-1) \cdots y_f(N-n_a) & -\hat{e}_f(N-1, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(N-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \end{bmatrix}$$

2.8 Atualizar $\hat{\theta}$ através de

$$\hat{\theta}^{(i)} = \hat{\theta}^{(i-1)} - \left(\left[\frac{d\hat{E}}{d\theta} \right]^T \frac{d\hat{E}}{d\theta} \right)^{-1} \left[\frac{d\hat{E}}{d\theta} \right]^T \hat{E}(\theta) \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

2.7 - Construir

$$\left. \frac{dE(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}} =$$

$$\begin{bmatrix} -u_f(1) \cdots -u_f(1-n_b) & y_f(0) \cdots y_f(1-n_a) & -\hat{e}_f(0, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(1-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(t) \cdots -u_f(t-n_b) & y_f(t-1) \cdots y_f(t-n_a) & -\hat{e}_f(t-1, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(t-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_f(N) \cdots -u_f(N-n_b) & y_f(N-1) \cdots y_f(N-n_a) & -\hat{e}_f(N-1, \hat{\theta}^{(i-1)}) & \cdots & -\hat{e}_f(N-n_c, \hat{\theta}^{(i-1)}) \end{bmatrix}$$

2.8 Atualizar $\hat{\theta}$ através de

$$\hat{\theta}^{(i)} = \hat{\theta}^{(i-1)} - \left(\left[\frac{d\hat{E}}{d\theta} \right]^T \frac{d\hat{E}}{d\theta} \right)^{-1} \left[\frac{d\hat{E}}{d\theta} \right]^T \hat{E}(\theta) \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(i-1)}}$$

Sistemas ARMAX - Minimização de $V(\theta)$

- 2.4- Se $\hat{C}_i(q)$ for instável, refletir os seus zeros instáveis para o interior do círculo unitário