

Análise Modal

Paulo Lopes dos Santos

Estimação e identificação de Sistemas, 2023,
DEEC, FEUP

Resumo

- 1 Solução da equação de estados de sistemas autónomos
- 2 Matriz exponencial
- 3 Análise modal
 - Valores e vetores próprios da matriz exponencial
 - Trajetórias de modos reais.
 - Trajetórias de modos complexos

Solução da equação de estados de sistemas autónomos

Modelo de estado dum sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Com

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

Se o sistema for *largado* no estado $\mathbf{x}(0)$ então:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

Solução da equação de estados de sistemas autónomos

Modelo de estado dum sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Com

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

Se o sistema for *largado* no estado $\mathbf{x}(0)$ então:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}}_{\text{matriz exponencial}} \mathbf{x}(0).$$

Matrix exponencial

- A exponencial escalar pode ser representada pela série de Taylor:

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

- Análogamente, a **matriz exponencial** é definida pela série convergente

$$e^A = I_{n_x} + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

- Propriedades (idênticas às da exponencial escalar):

$$\left. \begin{aligned} e^{0_{n \times n}} &= I_n. \\ e^{A_1 + A_2} &= e^{A_1} e^{A_2} \quad \text{sse } A_1 A_2 = A_2 A_1. \\ e^{A(t_1 + t_2)} &= e^{A t_1} e^{A t_2}. \end{aligned} \right| \begin{aligned} (e^A)^{-1} &= e^{-A}. \\ \frac{de^{At}}{dt} &= A e^{At}. \end{aligned}$$

Valores e vetores próprios da matriz exponencial

Sejam

$$\begin{cases} \lambda & - & \text{Valor próprio de } A \\ \mathbf{v} & - & \text{vetor próprio de } A \end{cases} \Leftrightarrow A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Calculando

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A\lambda\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v} = \lambda\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v},$$

concluimos:

Se $\mathbf{v}$ e λ forem um par de vetor e valor próprios de A então $\mathbf{v}$ e λ^2 são um par de valor e vetor próprio de A^2 .

Por indução:

Se $\mathbf{v}$ e λ forem um par de vetor e valor próprios de A então $\mathbf{v}$ e λ^k são um par de valor e vetor próprio de A^k .

Valores e vetores próprios da matriz exponencial

Sejam $\mathbf{v}$ e λ um par de vetor e valor próprios de A :

$$\begin{aligned} e^{At} \mathbf{v} &= \left(\mathbf{I}_{n_x} + At + \frac{(At)^2}{2} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots \right) \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{v} + A t \mathbf{v} + \frac{(At)^2}{2} \mathbf{v} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} \mathbf{v} + \cdots = \\ &= \mathbf{v} + t A \mathbf{v} + \frac{t^2}{2} A^2 \mathbf{v} + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^k \mathbf{v} + \cdots = \\ &= \mathbf{v} + t \lambda \mathbf{v} + \frac{t^2}{2} \lambda^2 \mathbf{v} + \cdots + \frac{t^k}{k!} \lambda^k \mathbf{v} + \cdots = \\ &= \left(\mathbf{v} + t \lambda + \frac{t^2}{2} \lambda^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!} \lambda^k + \cdots \right) \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Se $\mathbf{v}$ e λ forem um par de vetor e valor próprios de A então $\mathbf{v}$ e $e^{\lambda t}$ são um par de valor e vetor próprios de e^{At}

Trajetória de modos reais ao longo das direções próprias

Se

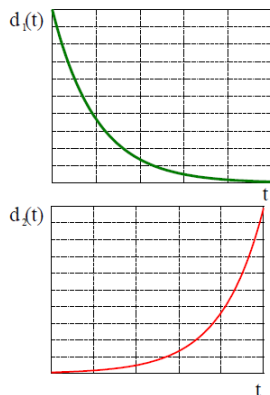
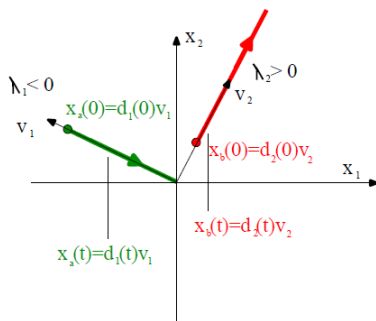
$$\mathbf{x}(0) = d(0)\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(0) \in \mathbb{R},$$

então

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = e^{At}d(0)\mathbf{x}(0)\mathbf{v} = d(0)(e^{At}\mathbf{v}) = d(0)e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

Se um sistema for *largado* numa direção própria real a sua trajetória permanecerá na mesma direção.

Trajétoria de modos reais ao longo das direções próprias



Trajétórias no espaço de estados dum sistema de segunda ordem com valores próprios reais (λ_1 e λ_2) *largado* nas direções próprias (v_1 e v_2).

Trajetória no espaço de estados

- Sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$.
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ com n_x valores próprios, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_x}$, distintos entre si $\Rightarrow$ seus vetores próprios, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_x}$, são linearmente independentes $\Rightarrow$ constituem uma base para o espaço de estados $\mathbb{R}^{n_x}$.
- Decompondo $\mathbf{x}(0)$ segundo os vetores próprios $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_x}$:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{k=1}^{n_x} d_k(0) \mathbf{v}_k, \quad d_k(0) \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n_x.$$

obtemos a trajetória também decomposta segundo as direções próprias:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \sum_{k=1}^{n_x} d_k(0) \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n_x} d_k(0) \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n_x} d_k(0) e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k$$

Trajetória no espaço de estados

- Definindo

$$d_k(t) = d_k(0)e^{\lambda t}$$

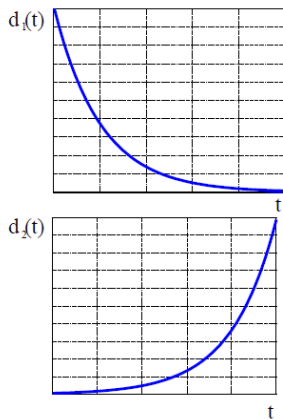
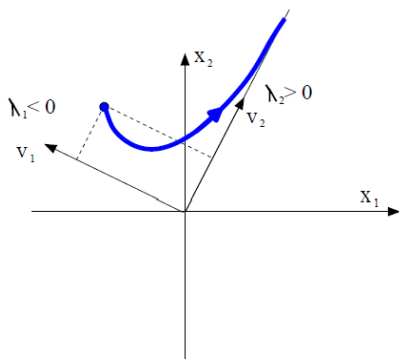
obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^{n_x} d_k(t) \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_1 d_1(t) + \mathbf{v}_2 d_2(t) + \cdots + \mathbf{v}_{n_x} d_{n_x}(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_{n_x}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \mathbf{d}(t) \end{aligned}$$

com

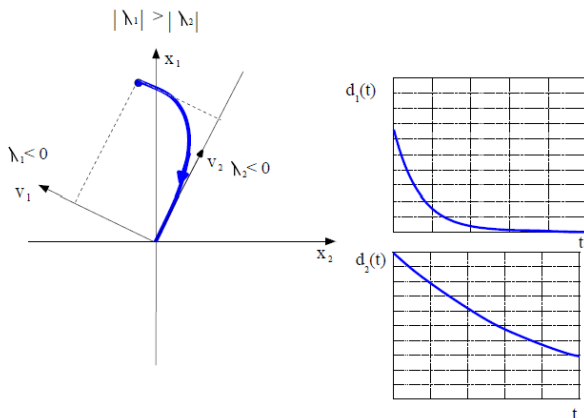
$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{n_x} \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}(t) &= \begin{bmatrix} d_1(t) & d_2(t) & \vdots & d_{n_x}(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Trajetoária no espaço de estados



Trajetoórias no espaço de estados dum sistema de segunda ordem com valores próprios reais ($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$) fora das dire es próprias (v_1 e v_2).

Trajetória no espaço de estados



Trajetórias no espaço de estados dum sistema de segunda ordem com valores próprios reais negativos: A trajetória tende para a direcção própria do modo mais lento (neste caso $e^{\lambda_2 t}$).

Realização modal

- $d_k(t) = d_k(0)e^{\lambda_k t} \Rightarrow \dot{d}_k(t) = \lambda_k d_k(t).$
- Logo

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1(t) \\ \dot{d}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{d}_{n_x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_{n_x}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{d}(t)$$

em que

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_x} \end{bmatrix}$$

- $\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{d}(t)$ é a **realização modal**.

Realização modal

- Como $\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}\mathbf{d}(t)$ então:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{d}(t)$$

- De onde

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{d}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{d}(t) \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}.$$

- Trajetória modal:

$$\mathbf{d}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{d}(0).$$

Realização modal

- Como

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n_x} t} \end{bmatrix},$$

então

$$d_1(t) = d_1(0)e^{\lambda_1 t}$$

$$d_2(t) = d_2(0)e^{\lambda_2 t}$$

$$\vdots$$

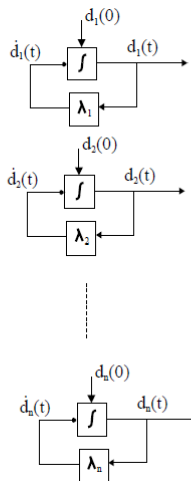
$$d_{n_x}(t) = d_{n_x}(0)e^{\lambda_{n_x} t},$$

isto é, cada componente $d_k(t)$ de $\mathbf{d}(t)$ contém um único modo $e^{\lambda_k t}$. Como

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}(t),$$

a matriz $\mathbf{W}^{-1}$ é conhecida por **Filtro modal**.

Realização modal



Realização modal ou diagonal

Modos Complexos

- Se $\lambda = \sigma + j\omega$, $\omega \neq 0$ for um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ associado ao vector próprio $v = v_R + jv_I$, então $\lambda^* = \sigma - j\omega$ e $v^* = v_R - jv_I$ também são valor e vector próprios de A .

Demonstração: Pela definição de valor próprio:

$$Av = \lambda v$$

Se $v = v_R + jv_I$ e $\lambda = \sigma + j\omega$,

$$Av_R + jAv_I = (\sigma v_R - \omega v_I) + j(\sigma v_I + \omega v_R)$$