

Dynamic Mode Decomposition

Paulo Lopes dos Santos

Estimação e identificação de Sistemas, 2023,
DEEC, FEUP

Resumo

- 1 Formulação
- 2 Algoritmo DMD

Formulação

Modelo de estado dum sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\mu})$$

Com

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \gg 1$$

$\boldsymbol{\mu}$ – parâmetros do sistema

Numa análise digital o sistema é amostrado no tempo com um período de amostragem T_s :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, k, T_s, \boldsymbol{\theta}_x)$$

com

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_s)$$

$\boldsymbol{\theta}_f$ = parâmetros do sistema

Formulação

- $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, k, \boldsymbol{\theta}_g)$, $k = 1, \dots, m$ são medições do sistema em que $\boldsymbol{\theta}_g$ também são parâmetros do sistema.
- Em muitas aplicações $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$.
- $n \gg 1 \Rightarrow$ sistema muito complexo ou um vídeo onde x armazena o número total de pixels numa imagem.
- Em geral não é possível construir uma solução para a equação de estado se $f(\cdot)$ for não linear.
- A Dynamic Mode Decomposition parte do princípio que $f(\cdot)$ é desconhecida e aproxima o sistema por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$$

com condição inicial

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^n \phi_i b_i = \Phi \mathbf{b}$$

Formulação

onde

ϕ_i – i ésimo vetor próprio de \mathcal{A} ;

b_i – Componente de $\mathbf{x}(0)$ segundo a direção de ϕ_i ;

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_1 \ \cdots \ \phi_n];$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T.$$

- De onde $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i e^{\omega_i t} b_i = \Phi e^{\Omega t} \mathbf{b}$

$$\text{com } \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}$$

$\omega_i, i = 1 \dots, n$, são os valores próprios de \mathcal{A} .

Formulação

- O sistema amostrado no tempo com período t_s é:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$$

com

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}T_s}.$$

- A solução em tempo discreto é:

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^n \phi_i \lambda_i^k \mathbf{b}_i = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{b}.$$

com:

λ_i — i ésimo valor próprio de A .

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda : n \end{bmatrix}.$$

Formulação

Dados os estados \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, m$, o algoritmo DMD produz uma decomposição em valores próprios com baixa característica da matriz que minimiza

$$V_{DMD} = \sum_{k=2}^m \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2^2.$$

Por outras palavras o DMD resolve **um problema de mínimos quadrados**.

Formulação:

SOLUÇÃO:

- Definir

$$X = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

- Então

$$X' = AX$$

- e

$$A = X'X^\dagger$$

Formulação

- é o mínimo de

$$V_{DMD} = \sum_{k=2}^m \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k\|_2^2 = \|\mathbf{X}' - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2$$

- No DMD assume-se:
 - Que as colunas \mathbf{x}_k de \mathbf{X} são instantâneos de dimensão muito elevada.
 - O número de instantâneos é inferior à dimensão.
- Logo, as matrizes \mathbf{X} e \mathbf{X}' são *altas e magras*.
- No entanto, \mathbf{X} e \mathbf{X}' não são matrizes de característica completa, com característica muito inferior a $m - 1$, o seu número de colunas.

Formulação

- Isto significa que o estado do sistema evolui num subespaço do espaço de estados com dimensão muito inferior, ou seja, que a evolução dos estados é determinada por um conjunto de modos dominantes cujo número é muito inferior à dimensão do estado.
- Assim, o DMD projeta A numa matriz de dimensão inferior \tilde{A} que contém os seus modos dominantes e utiliza esta matriz para calcular os valores e vetores próprios dominantes e reconstruir a trajetória de x no espaço de estados de dimensão elevada.

Algoritmo DMA

- A evolução do estado x_k é determinada por um conjunto reduzido de modos do sistema (modos dominantes).
- Logo X não é uma matriz de característica completa.
- O subespaço onde das colunas de X (e também de X' é o subespaço onde x_k evolui, tem uma dimensão menor do que a dos espaço de estados.
- Para captar esse subespaço deve-se:
 - 1 fazer uma decomposição em valores singulares (svd) d X :

$$X = U\Sigma V^T$$

- 2 Calcular A considerando apenas as r primeiras colunas de U e de V e os primeiros r valores singulares:

$$\hat{A} = X'X^\dagger = X'V_r\Sigma_r^{-1}U_r^T.$$

Algoritmo DMD

- Consideremos agora a matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com todas as suas colunas.
- Então $A_U = U^T A U$ é uma matriz semelhante a A (ambas as matrizes têm os mesmos valores próprios)
- Seja $\tilde{x} \in \mathbb{R}^r$ tal que $x = U_r \tilde{x}$
- Então $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k$ com $\tilde{A} = U_r^T A U_r \tilde{x}_k$.

Demonstração:

$$x_{k+1} = U_r \tilde{x}_{k+1} = A x_k = A U_r \tilde{x}_k.$$

$$\text{Como } U_r^T U_r = I_r, \text{ então } \tilde{x}_{k+1} = U_r^T A U_r \tilde{x}_k.$$

Algoritmo DMD

- Se ϕ é um vetor próprio de A então $U^T \mathbf{v}$ é um valor próprio de A_U .

Demonstração: $A_U U^T \mathbf{v} = U^T A U U^T \mathbf{v} = U^T A \mathbf{v} = \lambda U^T \mathbf{v}$

- Se w for um valor próprio de \tilde{A} associado ao valor próprio λ então $\phi = U_r w$ é vetor próprio de A associado a λ .

Demonstração: $\phi = U_r w \Rightarrow w = U_r^T \phi$.

Como w é vetor próprio de \tilde{A} então

$$\tilde{A} w = \lambda w \Rightarrow U_r^T A U_r w = U_r^T A \phi = \lambda w = \lambda U_r^T \phi.$$

Logo $U_r^T A \phi = U_r^T \lambda \phi$ de onde

$$A \phi = \lambda \phi.$$

Daqui conclui-se que λ e ϕ são valor e vetores próprios de A .