

# Processos Estocásticos e Sistemas Determinístico-Estocásticos - Modelos de Entrada-Saída

Paulo Lopes dos Santos

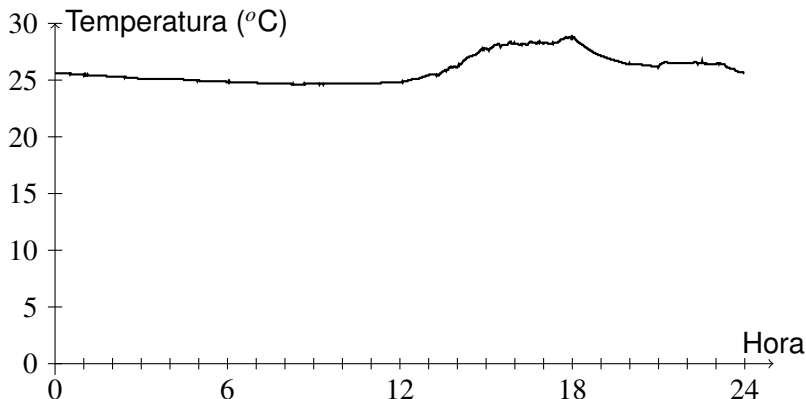
Estimação e Sistemas de Decisão, 2021  
DEEC, FEUP

# Outline

- 1 Introdução
- 2 Distribuição, média e covariância dum processo estocástico
- 3 Processos Estocásticos Estacionários
- 4 Processos Ergódicos
- 5 Densidade Espectral
- 6 Teorema da Densidade Espectral
- 7 Previsão de processos estocásticos
- 8 Modelos de processos estocásticos
- 9 Modelos de entrada-saída de sistemas determinístico-estocásticos

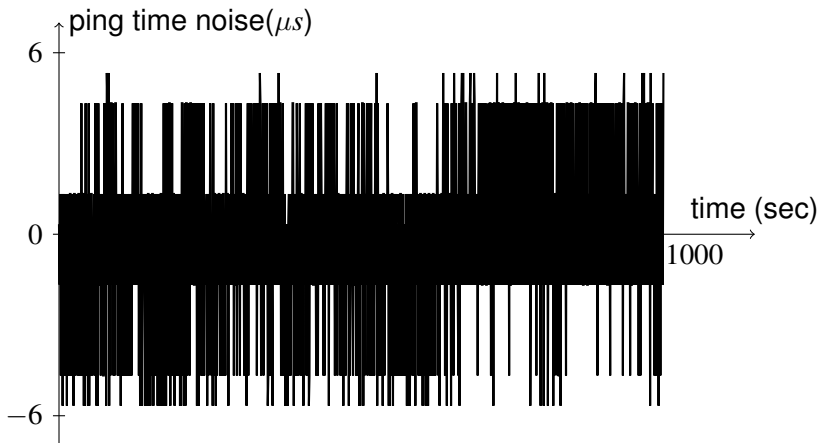
# Processos estocásticos - definição

- Evolução da temperatura num determinado local.



# Processos estocásticos - definição

- Ruído de sensores.



# Processos estocásticos - definição

- Sinais de radar.
- Cotação de ações na bolsa.
- Consumo de água numa cidade.
- Consumo de eletricidade numa cidade.
- Taxa de ocupação hoteleira de uma região.
- etc.

# Processos estocásticos - definição

- Sinais de radar.
- Cotação de ações na bolsa.
- Consumo de água numa cidade.
- Consumo de eletricidade numa cidade.
- Taxa de ocupação hoteleira de uma região.
- etc.

**O que têm em comum estas variáveis?**

.

# Processos estocásticos - definição

- Sinais de radar.
- Cotação de ações na bolsa.
- Consumo de água numa cidade.
- Consumo de eletricidade numa cidade.
- Taxa de ocupação hoteleira de uma região.
- etc.

**O que têm em comum estas variáveis?**

**Resposta:** Evoluem no tempo segundo leis probabilísticas.

# Processos estocásticos - definição

- Sinais de radar.
- Cotação de ações na bolsa.
- Consumo de água numa cidade.
- Consumo de eletricidade numa cidade.
- Taxa de ocupação hoteleira de uma região.
- etc.

**O que têm em comum estas variáveis?**

**Resposta:** Evoluem no tempo segundo leis probabilísticas.  
**São Processos Estocásticos.**

# Processos estocásticos - Definição

## Definição de Processo Estocástico

- Conjunto de todas as variações possíveis de uma variável aleatória que é função do tempo.
- Famílias de funções (reais ou complexas) do tempo
- Conjunto de variáveis aleatórias (v.a) indexadas por um conjunto  $T$ .

Também é designado por

- **Série temporal.**
- **Função aleatória.**

# Processos estocásticos - Notação

Seja  $\Omega$  o espaço amostral das variáveis aleatórias dum processo estocástico  $x$ .

- Esse processo é designado por  $\{x(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ , em que  $t$  é o tempo e  $\omega$  o evento.

# Processos estocásticos - Notação

Seja  $\Omega$  o espaço amostral das variáveis aleatórias dum processo estocástico  $x$ .

- Esse processo é designado por  $\{x(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ , em que  $t$  é o tempo e  $\omega$  o evento.
- Se se fixar  $t = t_1$  tem-se a variável aleatória  $x(t_1, \omega)$  no espaço amostral  $\Omega$ .
- Se se fixar o evento  $\omega = \omega_1$  obtém-se a função do tempo  $x(t, \omega_1)$  designada por **realização**.

# Processos estocásticos - Notação

## Exemplo

Seja  $x(t, \omega)$  a evolução da temperatura ao longo de um dia.

# Processos estocásticos - Notação

## Exemplo

Seja  $x(t, \omega)$  a evolução da temperatura ao longo de um dia.

- Se  $t = 12h$ ,  $x(12, \omega)$  é uma variável aleatória que descreve a temperatura ao meio-dia.

# Processos estocásticos - Notação

## Exemplo

Seja  $x(t, \omega)$  a evolução da temperatura ao longo de um dia.

- Se  $t = 12h$ ,  $x(12, \omega)$  é uma variável aleatória que descreve a temperatura ao meio-dia.
- Se  $\omega = 15$  de outubro de 2021,  $x(t, 15 \text{ de outubro de } 2021)$  é um função que mapeia a temperatura do dia 15 de outubro de 2021 em função do tempo, ou seja, é a realização de  $x(t, \omega)$  no dia 15 de outubro de 2021.
- Para simplificar a notação, representa-se o processo estocástico  $x(, \omega)$  apenas por  $x(t)$  ou  $\{x(t)\}$ .

# Processos estocásticos contínuos e discretos

Um processo estocástico pode ser:

- **Contínuo** ou **em tempo contínuo**: Se o conjunto de índices  $T$  variar continuamente num intervalo, i.e., se  $T \equiv [a, b]$ , ou  $T \equiv [a, b[$ , ou  $T \equiv ]a, b]$ , ou  $T \equiv ]a, b[$  ou  $T \equiv \mathbb{R} = ]\infty, \infty[$ .
- **Discreto** ou **em tempo discreto**: Se o conjunto de índices for enumerável, isto é, se  $T \subset \mathbb{Z}$ .

# Processos estocásticos contínuos e discretos

## Exemplos

- 1 Seja  $x(t)$  a evolução da temperatura a longo de um dia com  $T \equiv [0, 24]$ . Então,  $x(t)$  é um processo estocástico contínuo.
- 2 Seja  $x^*(t)$  a um processo estocástico que resulta da amostragem de  $x(t)$  de hora a hora, i.e,  $T \equiv \{0, 1, \dots, 23\}$ . Então,  $x^*(t)$  é um processo estocástico discreto.

**Só consideraremos processos estocásticos discretos e quase todos resultam da amostragem de processos contínuos.**

# Distribuição dum processo estocástico

Nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_k$  o processo estocástico  $x(t)$  pode ser visto como a variável aleatória  $k$ -dimensional

$$X_{t_1:t_k} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \dots \\ x(t_k) \end{bmatrix}$$

com distribuição:

$$P \{x(t_1) \leq a_1, x(t_2) \leq a_2, \dots, x(t_k) \leq a_k\} = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_k} p_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k,$$

em que

- $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ,
- $p_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  é a função de densidade de probabilidade conjunta de  $X_{t_1:t_k}$ .

# Distribuição dum processo estocástico

- A distribuição  $P \{x(t_1) \leq a_1, x(t_2) \leq a_2, \dots, x(t_k) \leq a_k\}$  é a distribuição finita de  $x(t)$  nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .
- A distribuição de  $x(t)$  é determinada por todas as suas distribuições finitas.
- Se estas forem normais (gaussianas), então  $x(t)$  é um processo estocástico gaussiano.

# Média e Covariância dum processo estocástico

**Momento de ordem k** do processo estocástico  $\{x(t)\}$ :

$$M(t_1, t_2, \dots, t_k) = \mathbf{E} \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdots x_k p_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

- **Função média** ou **média** de  $\{x(t)\}$ - Momento de primeira ordem:

$$\mu_x(t) = \mathbf{E} \{x(t)\} = M_x(t).$$

- **Função** (ou sequência) de covariância dum processo estocástico:

$$\Lambda_{xx}(t, s) = E \{(x(t) - \mu_x(t)) (x(s) - \mu_x(s))\} = M_x(t, s) - M_x(t)M_x(s).$$

# Média e Covariância dum processo estocástico

- Variância dum processo estocástico:

$$\sigma_x^2(t) = \Lambda_{xx}(t, t)$$

## Definição 1

**Processos estocásticos de segunda ordem** são processos estocásticos com variância finita

# Exemplo - Processo estocástico gaussiano

Se  $\{x(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  for um **processo estocástico gaussiano** com média  $\mu_x(t)$  e covariância  $\sigma(t, s)$ , a função de densidade de probabilidade conjunta de  $x(t_1), \dots, x(t_k)$  é

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \Sigma_{i,j}^{-1} [x_i - \mu_x(t_i)] [x_j - \mu_x(t_j)] \right\}$$

- $\Sigma = [\sigma(t_i, t_j)] \in \mathbb{R}^{k \times k}$  - Matriz das covariâncias.
- $\Sigma_{i,j}^{-1}$  - elemento  $(i, j)$  da matriz inversa  $\Sigma^{-1}$ .

# Processos estocásticos multidimensionais

- Seja  $x(t)$  o vector  $n$ -dimensional

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

onde  $x_i(t)$  são processos escalares.

- A **média** do processo  $\{x(t)\}$  é

$$\mu_x(t) = \mathbf{E} \{x(t)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \{x_1(t)\} \\ \mathbf{E} \{x_1(t)\} \\ \mathbf{E} \{x_2(t)\} \\ \vdots \\ \mathbf{E} \{x_n(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{x_1}(t) \\ \mu_{x_2}(t) \\ \vdots \\ \mu_{x_n}(t) \end{bmatrix}$$

# Processos estocásticos multidimensionais

- A covariância de  $\{x(t)\}$  é

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx}(t, s) &= \mathbf{E} \left\{ [x(t) - \mu_x(t)] [x(s) - \mu_x(s)]^T \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} E\{\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_1(s)\} & E\{\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(s)\} & \cdots & E\{\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_n(s)\} \\ E\{\tilde{x}_2(t)\tilde{x}_1(s)\} & E\{\tilde{x}_2(t)\tilde{x}_2(s)\} & \cdots & E\{\tilde{x}_2(t)\tilde{x}_n(s)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{\tilde{x}_n(t)\tilde{x}_1(s)\} & E\{\tilde{x}_n(t)\tilde{x}_2(s)\} & \cdots & E\{\tilde{x}_n(t)\tilde{x}_n(s)\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \mu_{x_i}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- Os elementos da diagonal principal de  $\Lambda_{xx}(t, s)$  são as funções de covariância de  $\{x_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , e os outros são as funções de covariância cruzada entre  $\{x_i(t)\}$  e  $\{x_j(t)\}$ ,  $i \neq j$ .

# Processos Estocásticos Fortemente Estacionários

- Um processo estocástico é **estacionário** quando as suas propriedades estatísticas não mudam com o tempo.
- A função de densidade de probabilidade conjunta dum processo estacionário **só depende da diferença temporal** entre as amostras, sendo independente do intervalo de tempo em que são tomadas:

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = p_{t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau}(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

- Se esta condição se verificar para qualquer valor de  $\tau$ , dizemos que o processo é **fortemente estacionário**.

# Processos Estocásticos Fracamente Estacionários

- Num processo fortemente estacionário a média é constante e a função covariância depende da diferença temporal, isto é,

$$\mu_x(t) = \mu$$

e

$$\Lambda_{xx}(t, s) = \Lambda_{xx}(t - s).$$

- Processos que não são fortemente estacionários mas onde estas condições se verificam são designados como **processos fracamente estacionários**.

# Ruído branco

## Exemplo - Ruído branco

$\{v(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  é **ruído branco** se as variáveis aleatórias  $v(t)$  e  $v(s)$  forem igualmente distribuídas e independentes entre si para qualquer  $t \neq s$ , i.e.,

$$p_{t,s}(v(t), v(s)) = p_t(v(t)) p_s(v(s)), \quad t \neq s$$

# Ruído branco

## Exemplo - Ruído branco

$\{v(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  é **ruído branco** se as variáveis aleatórias  $v(t)$  e  $v(s)$  forem igualmente distribuídas e independentes entre si para qualquer  $t \neq s$ , i.e.,

$$p_{t,s}(v(t), v(s)) = p_t(v(t)) p_s(v(s)), \quad t \neq s$$

Como  $v(t)$  e  $v(s)$  são igualmente distribuídas,

- $\mu_v(t) = M_v(t) = \mathbf{E}\{v(t)\} = \mathbf{E}\{v(s)\} = M_v(s) = \mu_v(s) = \mu_v$
- $M_v(t, t) = \mathbf{E}\{v(t)^2\} = \mathbf{E}\{v(s)^2\} = M_v^2.$

# Ruído branco

## Exemplo - Ruído branco

$\{v(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  é **ruído branco** se as variáveis aleatórias  $v(t)$  e  $v(s)$  forem igualmente distribuídas e independentes entre si para qualquer  $t \neq s$ , i.e.,

$$p_{t,s}(v(t), v(s)) = p_t(v(t)) p_s(v(s)), \quad t \neq s$$

Como  $v(t)$  e  $v(s)$  são igualmente distribuídas,

- $\mu_v(t) = M_v(t) = \mathbf{E}\{v(t)\} = \mathbf{E}\{v(s)\} = M_v(s) = \mu_v(s) = \mu_v$
- $M_v(t, t) = \mathbf{E}\{v(t)^2\} = \mathbf{E}\{v(s)^2\} = M_v^2.$

Como são independentes, então, para  $t \neq s$ ,

- $M_v(t, s) = \mathbf{E}\{v(t)v(s)\} = \mathbf{E}\{v(t)\} \mathbf{E}\{v(s)\} = \mu_v^2.$

# Ruído branco

Logo,

$$A_{vv}(t, s) = M_v(t, s) - M_v(t)M_v(s) = \begin{cases} \mu_v^2 - \mu_v^2 = 0, & t \neq s \\ M_v^2 - \mu_v^2 = \sigma_v^2, & t = s \end{cases}$$

- o ruído branco é um sinal **fracamente estacionário**.
- Também **fortemente estacionário** porque as suas amostras são igualmente distribuídas.

# Ruído branco

O ruído branco é um sinal *imprevisível* pois o seu valor num dado instante é independente de todo o passado e futuro.

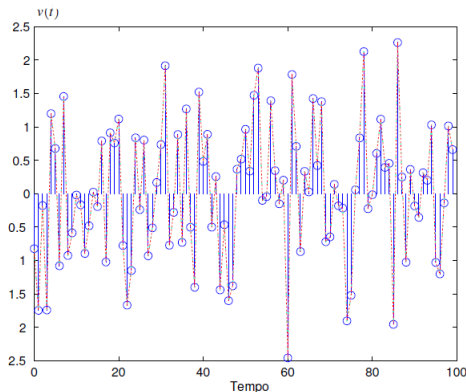


Figura: Ruído branco gaussiano de média nula.

# Ruído branco

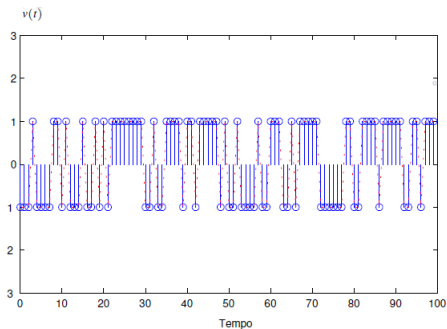


Figura: Ruído branco binário de média nula.

# Passeio aleatório

## Exemplo dum processo estocástico não estacionário - Passeio aleatório

- $v(t)$  - ruído branco de média nula e variância  $\sigma_v^2 \neq 0$
- $x(t) = v(1) + v(2) + \dots + v(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$  com  $x(0) = 0$ , é um passeio (ou caminho) aleatório.
- Forma recursiva de  $x(t)$ :

$$x(t) = x(t-1) + v(t), \quad \text{com } x(0) = 0$$

# Passeio aleatório

- Média de  $x(t)$ :

$$\mu_x(t) = E \{v(1) + v(2) + \dots + v(t)\} = 0.$$

- Covariância: Como a média é nula,

$$\begin{aligned} \Lambda_x(t, s) &= M_x(t, s) = \mathbf{E} \{x(t)x(s)\} = \\ &= \mathbf{E} \{[v(1) + \dots + v(t)] [v(1) + \dots + v(s)]\} \end{aligned}$$

$$i \neq j \Rightarrow \mathbf{E}\{v(i)v(j)\} = \mathbf{E}\{v(i)\}\mathbf{E}\{v(j)\} = 0.$$

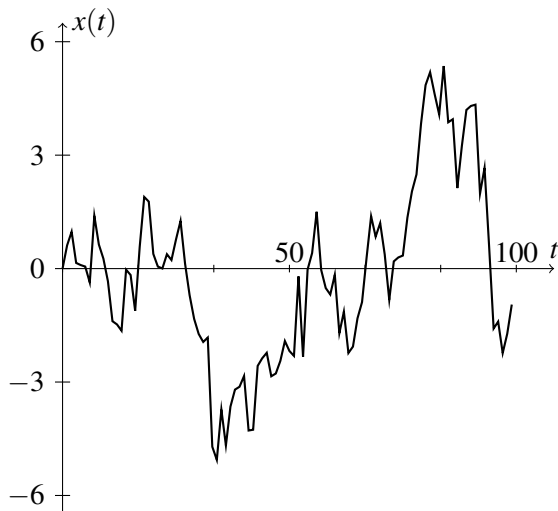
- $t \geq s \Rightarrow \Lambda_x(t, s) = \mathbf{E}\{v_1(1)^2\} + \dots + \mathbf{E}\{v_1(s)^2\} = s\sigma_v^2.$

- $t \leq s \Rightarrow \Lambda_x(t, s) = \mathbf{E}\{v_1(1)^2\} + \dots + \mathbf{E}\{v_1(t)^2\} = t\sigma_v^2.$

$$\Lambda_x(t, s) = \min(t, s)\sigma_v^2.$$

- $x(t)$  **não é um processo estocástico estacionário.**

# Passeio aleatório



# Função covariância de Processos Estocásticos Estacionários

- Sem perda de generalidade, iremos considerar processos estacionários de média nula.
- Como a função de covariância de processos estacionários depende, unicamente, de  $t - s$ , iremos expressá-la na forma

$$\lambda_{xx}(\tau) = \mathbf{E} \{x(t + \tau)x(t)\} = \mathbf{E} \{x(t)x(t - \tau)\}, \quad \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$$

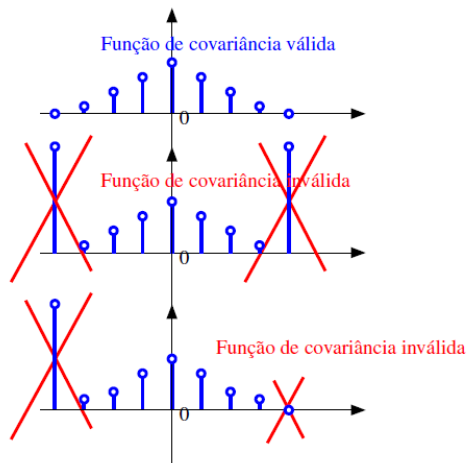
## Lema 1

A função covariância de um processo escalar,  $\{x(t)\}$ , fracamente estacionário, tem as seguintes propriedades:

- $|\lambda_{xx}(\tau)| \leq \lambda_{xx}(0) = \sigma_x^2, \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\lambda_{xx}(\tau) = \lambda_{xx}(-\tau)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k \lambda_{xx}(\tau_i - \tau_k) \geq 0.$

# Função covariância de Processos Estocásticos Estacionários

## Exemplo



# Processos Ergódicos

- Média temporal numa realização (amostra) do processo estacionário de segunda ordem  $x(t)$ :

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{t=N} x(t)$$

- correlação temporal numa realização (amostra) de  $x(t)$ :

$$r_x(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{t=N} x(t+\tau)x(t)$$

# Processos Ergódicos

## Definição - processo estocástico estacionário com média ergódica

Um processo estacionário tem média ergódica se

$$\mathbf{E} \{ (m_x - \mu_x)^2 \} = 0.$$

em que  $\mu_x = \mathbf{E} \{ x(t) \}$ .

## Definição - processo estocástico estacionário com covariância ergódica

Um processo estacionário tem covariância ergódica se

$$\mathbf{E} \left\{ [r_x(\tau) - A_x(\tau)]^2 \right\}.$$

Um processo é **ergódico** se tiver médias temporais iguais às esperanças matemáticas.

# Densidade Espectral

- Se a função de covariância dum processo estacionário  $\{x(t)\}$  for absolutamente somável, isto é, se

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\lambda_{xx}(\tau)| < \infty$$

então tem transformada de Fourier.

- A transformada de Fourier dum processo estacionário  $\{x(t)\}$  é designada como **densidade espectral de potência** de  $\{x(t)\}$ , nome que frequentemente é abreviado para **densidade espectral**.

# Densidade Espectral

## Definição 2:

Se  $\{x(t)\}$  for um processo estacionário com função de covariância absolutamente somável, então

$$\Phi_{xx}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

é a sua **densidade espectral**.

- $\lambda_{xx}(\tau)$  pode ser determinado através da transformada inversa de Fourier

$$\lambda_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Há uma relação de um para um entre  $\lambda_{xx}(\tau)$  e  $\Phi_{xx}(\omega)$ , pelo que ambas as funções transportam a mesma informação.

# Densidade Espectral

- Para  $\tau = 0$

$$\lambda_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\omega) d\omega.$$

- Se  $\{x(t)\}$  for ergódico com média nula, pode-se escrever

$$\lambda_{xx}(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N x^2(t) = P_x\{x^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\omega) d\omega$$

em que  $P_x\{x(t)\}$  é a potência do sinal  $x(t)$  (teorema de Parseval).

- Pode-se concluir que  $\Phi_{xx}(\omega)$  representa a distribuição da potência de  $x(t)$  pelo espectro  $\omega \in (-\pi, \pi)$ . Daí, o nome de **densidade espectral de potência**.

# Propriedades da Densidade Espectral

## Lema 2

A densidade espectral  $\Phi_{xx}(\omega)$  tem as seguintes propriedades:

- (i)  $\Phi_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(-\omega)$  (simetria par)
- (ii)  $\Phi_{xx}(\omega) \geq 0$  (não negativa)

# Propagação de processos estocásticos estacionários através de sistemas dinâmicos estáveis

## Lema 3

Se a entrada dum sistema causal, linear e invariante no tempo, com função de transferência  $G(z)$  estável, for um processo estocástico fracamente estacionário,  $\{u(t)\}$ , com média nula e densidade espectral  $\{u(t)\}, \Phi_{uu}(\omega)$ , então, a saída,  $\{y(t)\}$ , também é um processo fracamente estocástico estacionário com média nula e densidade espectral

$$\Phi_{yy}(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 \Phi_{uu}(\omega)$$

**Demonstração:** Ver Katayama

# Teorema da Densidade Espectral

## Teorema 1 - Teorema da densidade espectral

A função de densidade espectral  $\Phi_{yy}(\omega)$  pode ser factorizada na forma

$$\Phi_{yy}(\omega) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) \sigma^2 = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma^2$$

em que

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

é uma função de transferência estável, com todos os zeros no interior do círculo unitário (de fase mínima), e com  $h(0) = 1$ .

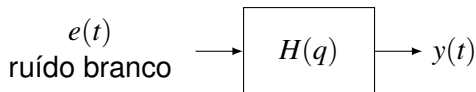
**Demonstração:** Ver Katayama

# Consequências do Teorema da Densidade Espectral

No que se segue, iremos substituir  $z$  pelo operador avanço:

$$\begin{aligned}qx(t) &= x(t+1) \\ q^{-1}x(t) &= x(t-1)\end{aligned}$$

- O teorema 1 e o Lema 2 permitem modelar qualquer processo estocástico estacionário como a saída dum sistema causal, linear, invariante no tempo e estável, excitado por ruído branco



# Consequências do Teorema da Densidade Espectral I

- O termo *densidade espectral* também é utilizado para designar a transformada z da função de autocorrelação:

$$\Phi_{xx}(q) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda_{xx}(\tau) q^{-\tau}$$

- O Lema 2 determina que a condição de estabilidade é absolutamente essencial para a estacionaridade do processo.

# Previsão de processos estocásticos

## Lema 4

Seja  $y(t)$  um processo estocástico estacionário de média nula. Então, o melhor predictor de  $y(t)$  no instante  $t - 1$ ,  $\hat{y}(t|t - 1)$ , que designaremos por  $\hat{y}(t)$ , é o que tem o erro  $\hat{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  ruído branco de média nula. Se  $y(t)$  tiver uma distribuição normal, então  $\hat{y}(t)$  é a melhor previsão de  $y(t)$  no instante  $t - 1$ .

**Cálculo de  $\hat{y}(t)$ :**

$$\begin{cases} y(t) &= H(q)e(t) \\ \hat{e}(t) &= y(t) - \hat{y}(t) = e(t) \end{cases} \Rightarrow \hat{y}(t) = \begin{cases} y(t) - e(t) \\ H(q)e(t) - e(t) \\ [H(q) - 1] e(t). \end{cases}$$

como  $e(t) = H^{-1}(q)y(t)$ , então

$$\hat{y}(t) = [H(q) - 1] H^{-1}(q)y(t) = [1 - H^{-1}(q)] y(t).$$

Desta relação conclui-se que  $H(q)$  também tem que ser inversamente estável.

# Previsão linear processos estocásticos

## Exemplo 2

- Processo estocástico gerado por

$$y(t) = u(t) + 2u(t-1)$$

onde  $u(t)$  é ruído branco com média nula e variância  $\sigma_u^2 = 1$ .

- espectro generalizado de  $y(t)$  é

$$\Phi_{yy}(q) = G(q)G(q^{-1})\sigma_u^2$$

onde

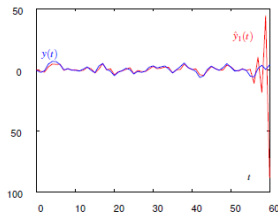
$$G(q) = \frac{E(q)}{U(q)} = 1 + 2q^{-1} = \frac{q+2}{q}.$$

# Previsão linear processos estocásticos

- Previsor de  $y(t)$  no instante  $t - 1$ :

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(t) &= [G(q) - 1] G^{-1}(q)y(t) = \frac{2q^{-1}}{1 + 2q^{-1}}y(t) = \\ &= \frac{2}{q + 2}y(t) = G_{p1}(q)y(t).\end{aligned}$$

- O previsor tem um pólo em  $-2$ .
- O previsor é **instável** logo **não funciona!!**



# Previsão linear processos estocásticos

- Como é que numa situação como esta podemos obter o melhor predictor linear de  $y(t)$ ?
- Para responder a esta pergunta temos que ver se conseguimos factorizar o espectro na forma

$$\Phi_{yy}(q) = H(q)H(q^{-1})\sigma_e^2$$

em que

$$\begin{aligned} H(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} \\ h(0) &= 1 \end{aligned}$$

é uma função de transferência estável e de fase mínima, isto é, com todos os pólos e zeros no interior do círculo unitário.

- Os pólos e zeros de  $H(q^{-1})$  são os inversos dos de  $H(q)$  estando, consequentemente, no exterior do círculo unitário.

# Previsão linear processos estocásticos

- Depois desta factorização supomos que  $y(t)$  é gerado pelo modelo

$$y(t) = H(q)e(t)$$

a partir do qual podemos dimensionar o previsor.

**Cálculo de  $H(q)$  :**

- Calcular

$$\Phi_{yy}(q) = G(q)G(q^{-1}) = \frac{q+2}{q} \frac{q^{-1}+2}{q^{-1}} = (q+2)(q^{-1}+2).$$

- $H(q)$  tem que ser o factor estável de fase mínima, logo

$$H(q) = K(q^{-1}+2)$$

em que  $K$  terá que forçar  $h(0) = 1$ .

# Previsão linear processos estocásticos

- Como

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} = K(q^{-1} + 2) = 2K + Kq^{-1}$$

então

$$2K = 1 \Leftrightarrow K = 0.5,$$

sendo

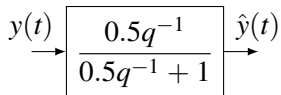
$$H(q) = 0.5(q^{-1} + 2) = 0.5q^{-1} + 1.$$

## Previsor:

$$\hat{y}(t) = [H(q) - 1]H^{-1}(q)y(t) = (0.5q^{-1} + 1 - 1) \frac{1}{0.5q^{-1} + 1} y(t)$$

$$\hat{y}(t) = \frac{0.5q^{-1}}{0.5q^{-1} + 1} y(t) \Leftrightarrow \hat{y}(t) = 0.5y(t-1) - 0.5\hat{y}(t-1).$$

# Previsão linear processos estocásticos



**Erro de previsão:**

$$\begin{aligned}\hat{e}(t) &= y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \frac{0.5q^{-1}}{0.5q^{-1} + 1}y(t) = \frac{0.5q^{-1} + 1 - 0.5q^{-1}}{0.5q^{-1} + 1}y(t) \\ &= \frac{1}{0.5q^{-1} + 1}y(t) = H_{\hat{e}}(q)y(t)\end{aligned}$$

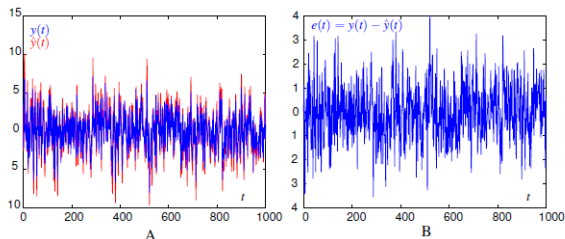
**Espectro de  $\hat{e}(t)$ :**

$$\begin{aligned}\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(q) &= H_{\hat{e}}(q)H_{\hat{e}}(q^{-1})\Phi_{yy}(q) = \\ &= \left(\frac{1}{0.5q^{-1} + 1}\right)\left(\frac{1}{0.5q + 1}\right)(q + 2)(q^{-1} + 2)\end{aligned}$$

# Previsão linear processos estocásticos

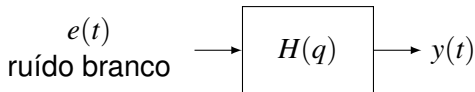
$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(q) = \frac{(q+2)(q^{-1}+2)}{0.5(q^{-1}+2)0.5(q+2)} = 4$$

- $\hat{e}(t)$  é ruído branco com variância 4, maior que a de  $u(t)$  que é 1.
- O erro da melhor previsão linear de  $y(t)$  é ruído branco, com média nula e variância 4.



# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo de Média Móvel (MA)

Vimos que um processo estocástico estacionário pode ser conceptualizado como a saída dum SLIT excitado por ruído branco:



Se

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t = 0 \\ c_t, & t > 0 \end{cases}$$

for a resposta impulsional de  $H(q)$ , então

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n) + \cdots$$

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo de Média Móvel (MA)

Se

$$c_t = 0, \quad t > n,$$

obtem-se o modelo de **média móvel (MA)**, do inglês, **Moving Average**)

$$\begin{aligned} y(t) &= C(q^{-1})e(t) \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \cdots + c_nq^{-n}. \end{aligned}$$

A função de transferência dum processo estocástico de média móvel é

$$H(q) = C(q^{-1}).$$

e o seu melhor previsor linear é

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= [C(q^{-1}) - 1] C^{-1}(q^{-1})y(t) = \frac{c_1q^{-1} + \cdots + c_nq^{-n}}{1 + c_1q^{-1} + \cdots + c_nq^{-n}}y(t) \\ \hat{y}(t) &= c_1y(t-1) + \cdots + c_ny(t-n) - c_1\hat{y}(t-1) - \cdots - c_n\hat{y}(t-n). \end{aligned}$$

# Aproximação por um processo de média móvel

Dado que  $H(q)$  é estável, num processo estocástico estacionário onde  $H(q)$  tem resposta impulsional de duração infinita, i. e., com  $h(t) \neq 0 \forall t \leq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

Assim, qualquer processo estocástico pode ser aproximado por um processo de média móvel de ordem  $n$ , e o erro da aproximação diminui quando a ordem aumenta.

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo (AR)

- Os modelos de média móvel são muito simples e permitem descrever qualquer processo estocástico.
- No entanto, para que tenham uma precisão aceitável, necessitam, frequentemente, de ter uma ordem elevada ( $n$  muito grande).
- Nestas situações é preferível descrever  $\{y(t)\}$  por um modelo do tipo

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = e(t)$$

- Definindo

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q + \cdots + a_n q^{-n},$$

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo (AR)

- Este modelo pode ser reescrito na forma

$$A(q^{-1})y(t) = e(t).$$

- Neste modelo existe uma regressão em  $y(t)$ , pelo que é conhecido como **modelo auto-regressivo**, habitualmente designado por **AR** (do inglês ***A**uto-**R**egressive*).
- A sua função de transferência é

$$H(q) = \frac{1}{A(q^{-1})}$$

e a sua ordem,  $n$ , costuma ser significativamente inferior à dos modelos MA.

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo (AR)

- O previsor dum processo AR é:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \left[ \frac{1}{A(q^{-1})} - 1 \right] A(q^{-1})y(t) = [1 - A(q^{-1})] y(t) \Leftrightarrow \\ \hat{y}(t) &= -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_ny(t-n).\end{aligned}$$

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo de Média Móvel (ARMA)

- Utilizando regressões na saída e na entrada conseguem-se modelos de menor ordem.
- Estes modelos são do tipo

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t).$$

- São designados por **modelos auto-regressivos de média móvel (ARMA)**.
- A função de transferência é

$$H(q) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelo Auto-Regressivo de Média Móvel (ARMA)

- e o previsor é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \left[ \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} - 1 \right] \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) = \frac{C(q^{-1}) - A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) \Leftrightarrow \\ \hat{y}(t) &= (c_1 - a_1)y(t-1) + \cdots + (c_n - a_n)y(t-n) - \\ &\quad - c_1\hat{y}(t-1) - \cdots - c_n\hat{y}(t-n).\end{aligned}$$

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelos de estado

- Se

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx(t) + e(t)\end{aligned}$$

for uma realização de  $H(q) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ , i.e., se

$$H(q) = C(qI_n - A)^{-1}K + 1 = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})},$$

então este é um modelo de estado dum processo ARMA.

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelos de estado

- Resolvendo a equação da saída em ordem a  $e(t)$ , e substituindo  $e(t)$  por  $y(t) - Cx(t)$ , obtem-se o modelo inverso

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (A - KC)x(t) + Ky(t) \\ e(t) &= -Cx(t) + y(t),\end{aligned}$$

cuja função de transferência é

$$-C[qI - (A - KC)]^{-1}K + 1 = H(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}.$$

- Como  $H(q)$  é uma função de transferência inversamente estável, os valores próprios de  $A - KC$  são estáveis.

# Modelos de Processos Estocásticos: Modelos de estado

- O melhor previsor linear de  $y(t)$  é

$$\begin{aligned}x(t+1) &= (A - KC)x(t) + Ky(t) = Ax(t) + K[y(t) - Cx(t)] \\ \hat{y}(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

- Este é também o modelo do filtro de Kalman estacionário.

# Sequência de autocorrelação duma média móvel

## Lema 5

Seja

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n)$$

uma média móvel. Então a sequência de autocorrelação de  $y(t)$  é

$$\lambda_{yy}(\tau) = \begin{cases} (1 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) \sigma^2, & \tau = 0 \\ (c_\tau + c_1 c_{\tau+1} + \cdots + c_{n-\tau} c_n) \sigma^2, & 1 \leq |\tau| < n \\ c_n, & |\tau| = n \\ 0, & |\tau| > n \end{cases}$$

em que

$$\sigma^2 = \mathbf{E} \{e(t)^2\}.$$

# Sequência de autocorrelação duma média móvel

## Demonstração:

•  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{yy}(\tau) &= \lambda_{yy}(0) = \mathbf{E} \left\{ [e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n)]^2 \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ e(t)^2 + c_1^2 e(t-1)^2 + \cdots + c_n^2 e(t-n)^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2c_1 e(t)e(t-1) + \cdots + 2c_n e(t)e(t-n) + \right. \\
 &\quad \left. + 2c_1 c_2 e(t-1)e(t-2) + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + 2c_{n-1} c_n e(t-n+1)e(t-n) \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \left\{ e(t)^2 \right\} + c_1^2 \mathbf{E} \left\{ e(t-1)^2 \right\} + \cdots + c_n^2 \mathbf{E} \left\{ e(t-n)^2 \right\} = \\
 &= (1 + c_1^2 + \cdots + c_n^2) \sigma^2,
 \end{aligned}$$

pois  $e(t)$  é ruído branco e, consequentemente,  
 $\mathbf{E} \{ e(t)e(t-\tau) \} = 0$  para todo o  $\tau \neq 0$ .

# Sequência de autocorrelação duma média móvel

- $1 \leq |\tau| < n$ :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{yy}(\tau) &= \mathbf{E} \{y(t)y(t-\tau)\} = \\
 &= \mathbf{E} \{[e(t) + c_1e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n)] \cdot \\
 &\quad [e(t-\tau) + c_1e(t-\tau-1) + \cdots + c_n e(t-\tau-n)]\} = \\
 &= c_\tau \mathbf{E} \{e(t)^2\} + c_1 c_{\tau+1} \mathbf{E} \{e(t-1)^2\} + \cdots + \\
 &\quad + c_{n-\tau} c_n \mathbf{E} \{e(t-n)^2\} = \\
 &= (c_\tau + c_1 c_{\tau+1} + \cdots + c_{n-\tau} c_n) \sigma^2
 \end{aligned}$$

- $|\tau| = n$ :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{yy}(n) &= \mathbf{E} \{y(t)y(t-n)\} = \\
 &= \mathbf{E} \{[e(t) + c_1e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n)] \cdot \\
 &\quad [e(t-n) + c_1e(t-n-1) + \cdots + c_n e(t-2n)]\} = \\
 &= c_n \mathbf{E} \{y(t-n)^2\} = c_n \sigma^2.
 \end{aligned}$$

# Sequência de autocorrelação dum média móvel

- $|\tau| > n$  :

$y(t) = e(t - \tau) + c_1 e(t - \tau - 1) + \dots + e(t - \tau - n)$  é uma combinação linear de amostras independentes de  $e(t), \dots, e(t - n)$  e, conseqüentemente, é independente de  $y(t)$ , pelo que  $\lambda_{yy}(\tau) = \mathbf{E} \{y(t)y(t - \tau)\} = 0$ .

# Covariância cruzada da saída com a entrada de sistemas lineares e invariantes no tempo excitados por ruído branco

## Lema 6

seja

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)q^{-k}u(t)$$

a resposta dum sistema linear e invariante no tempo a um sinal  $u(t)$ . Se  $u(t)$  for **ruído branco** com média nula e variância  $\sigma^2$ , então, a sequência de covariância cruzada entre a saída e a entrada deste sistema é

$$\lambda_{yu}(\tau) = \mathbf{E} \{y(t)u(t-\tau)\} = h(\tau)\sigma_u^2.$$

# Covariância cruzada da saída com a entrada de sistemas lineares e invariantes no tempo excitados por ruído branco

## Demonstração:

- Multiplicando  $y(t)$  por  $u(t - \tau)$  tem-se

$$\begin{aligned} y(t)u(t - \tau) &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(t - k) \right) u(t - \tau) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(t - k)u(t - \tau) \end{aligned}$$

- Tirando o valor esperado:

$$\lambda_{yu}(\tau) = \mathbf{E} \{y(t)u(t - \tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathbf{E} \{u(t - k)u(t - \tau)\}$$

# Covariância cruzada da saída com a entrada de sistemas lineares e invariantes no tempo excitados por ruído branco

- Como  $u(t)$  é ruído branco com média nula e variância  $\sigma_u^2$ :

$$\mathbf{E} \{u(t-k)u(t-\tau)\} = \begin{cases} \sigma_u^2, & k = \tau \\ 0, & k \neq \tau \end{cases},$$

de onde

$$\lambda_{yy}(\tau) = h(\tau)\sigma_u^2.$$

# Covariância cruzada da saída com a entrada de sistemas lineares e invariantes no tempo excitados por ruído branco

- Como  $u(t)$  é ruído branco com média nula e variância  $\sigma_u^2$ :

$$\mathbf{E} \{u(t-k)u(t-\tau)\} = \begin{cases} \sigma_u^2, & k = \tau \\ 0, & k \neq \tau \end{cases},$$

de onde

$$\lambda_{yy}(\tau) = h(\tau)\sigma_u^2.$$

## NOTA:

- $h(\tau)$ ,  $-\infty < \tau < \infty$  é a resposta impulsional do sistema (transformada inversa da sua função de transferência)

# Covariância cruzada da saída com a entrada de sistemas lineares e invariantes no tempo excitados por ruído branco

- Como  $u(t)$  é ruído branco com média nula e variância  $\sigma_u^2$ :

$$\mathbf{E} \{u(t-k)u(t-\tau)\} = \begin{cases} \sigma_u^2, & k = \tau \\ 0, & k \neq \tau \end{cases},$$

de onde

$$\lambda_{yy}(\tau) = h(\tau)\sigma_u^2.$$

## NOTA:

- $h(\tau)$ ,  $-\infty < \tau < \infty$  é a resposta impulsional do sistema (transformada inversa da sua função de transferência)
- Se o sistema for causal  $h(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ .

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

## Processo estocástico AR de 1ª ordem:

$$y(t) + a_1 y(t-1) = e(t)$$

em que  $e(t)$  tem média nula e variância  $\sigma^2$

- multiplicar ambos os lados da equação do modelo por  $y(t)$  e calcular o valor esperado:

$$\begin{aligned} y(t)^2 + a_1 y(t)y(t-1) &= y(t)e(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{E} \{y(t)^2\} + a_1 \mathbf{E} \{y(t)y(t-1)\} &= \mathbf{E} \{y(t)e(t)\} \end{aligned}$$

- multiplicar ambos os lados da equação do modelo por  $y(t-1)$  e calcular o valor esperado:

$$\begin{aligned} y(t-1)y(t) + a_1 y(t-1)^2 &= y(t-1)e(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{E} \{y(t-1)y(t)\} + a_1 \mathbf{E} \{y(t-1)^2\} &= \mathbf{E} \{y(t-1)e(t)\} \end{aligned}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

- $\mathbf{E} \{y(t)^2\} = \mathbf{E} \{y(t-1)^2\} = \lambda_{yy}(0)$
- $\mathbf{E} \{y(t)y(t-1)\} = \lambda_{yy}(1) = \mathbf{E} \{y(t-1)y(t)\} = \lambda_{yy}(-1)$
- $\mathbf{E} \{y(t)e(t)\} = \lambda_{ye}(0) = h(0)\sigma^2$  em que  $h(k), k = -\infty, \dots, \infty$  é a resposta impulsional do sistema  $y(t) + a_1y(t) = u(t)$ .
- $\mathbf{E} \{y(t-1)e(t)\} = \lambda_{ye}(-1) = h(-1)\sigma^2 = 0$  pois  $h(-1) = 0$  (o sistema é causal).
- $\lambda_{yy}(0)$  e  $\lambda_{yy}(1)$  determinam-se a partir da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \lambda_{yy}(0) + a_1 \lambda_{yy}(1) = \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(1) + a_1 \lambda_{yy}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{yy}(0) \\ \lambda_{yy}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

- Sendo:

$$\lambda_{yy}(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}$$

$$\lambda_{yy}(1) = -a_1 \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}$$

- Para obter  $\lambda_y(\tau)$ ,  $\tau = 2, \dots, \infty$ , multiplica-se sucessivamente a equação do modelo por  $y(\tau)$ , calcula-se o valor esperado e resolve-se a equação resultante em ordem a  $\lambda_y(\tau) = \lambda_y(-\tau) = \mathbf{E} \{y(t)y(t - \tau)\}$ :

$$y(t - \tau)y(t) + a_1 y(t - \tau)y(t - 1) = y(t - \tau)e(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{yy}(\tau) + a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) = \lambda_{ye}(-\tau) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_y(\tau) = -a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) = (-a_1)^\tau \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

**Processo estocástico AR de 2ª ordem:**

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = e(t)$$

**em que  $e(t)$  tem média nula e variância  $\sigma^2$**

- multiplicando ambos os lados da equação do modelo por  $y(t)$ ,  $y(t-1)$  e  $y(t-2)$  e retirando os valores esperados, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \lambda_{yy}(0) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(2) = \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(1) + a_1 \lambda_{yy}(0) + a_2 \lambda_{yy}(1) = 0 \\ \lambda_{yy}(2) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 1 + a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{yy}(0) \\ \lambda_{yy}(1) \\ \lambda_{yy}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

- $\lambda_{yy}(\tau)$ ,  $\tau = 3, \dots, \infty$  determina-se recursivamente através da equação que se obtém multiplicando o modelo por  $y(t - \tau)$  e retirando o valor esperado:

$$\lambda_{yy}(\tau) = -a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) - a_2 \lambda_{yy}(\tau - 2)$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

**Processo estocástico AR de ordem  $n$ :**

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = e(t)$$

**em que  $e(t)$  tem média nula e variância  $\sigma^2$**

- Resolver o sistema de equações em ordem a  $\lambda_{yy}(0), \dots, \lambda_{yy}(n)$ :

$$\begin{cases} \lambda_{yy}(0) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(2) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n) = \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(1) + a_1 \lambda_{yy}(0) + a_2 \lambda_{yy}(1) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n-1) = 0 \\ \lambda_{yy}(2) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(0) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n-2) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{yy}(n) + a_1 \lambda_{yy}(n-1) + a_2 \lambda_{yy}(n-2) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(0) = 0 \end{cases}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AR

- Determinar recursivamente  $\lambda_{yy}(\tau)$ ,  $\tau = n + 1, \dots, \infty$  através da equação:

$$\lambda_{yy}(\tau) = -a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) - a_2 \lambda_{yy}(\tau - 2) - a_m \lambda_{yy}(\tau - n).$$

# Autocovariância de Processos estocásticos AMA

## Processo estocástico ARMA de 1ª ordem:

$$y(t) + a_1 y(t-1) = e(t) + c_1 e(t-1)$$

em que  $e(t)$  tem média nula e variância  $\sigma^2$

- multiplicar ambos os lados da equação do modelo por  $y(t)$  e calcular o valor esperado:

$$y(t)^2 + a_1 y(t)y(t-1) = y(t)e(t) + c_1 y(t)e(t-1) \Rightarrow \\ \mathbf{E} \{y(t)^2\} + a_1 \mathbf{E} \{y(t)y(t-1)\} = \mathbf{E} \{y(t)e(t)\} + c_1 \mathbf{E} \{y(t)e(t-1)\}$$

- multiplicar ambos os lados da equação do modelo por  $y(t-1)$  e calcular o valor esperado:

$$y(t-1)y(t) + a_1 y(t-1)^2 = y(t-1)e(t) + c_1 y(t-1)e(t-1) \Rightarrow \\ \mathbf{E} \{y(t-1)y(t)\} + a_1 \mathbf{E} \{y(t-1)^2\} = \mathbf{E} \{y(t-1)e(t)\} + c_1 \mathbf{E} \{y(t-1)e(t-1)\}$$

## Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

- $\mathbf{E} \{y(t)^2\} = \mathbf{E} \{y(t-1)^2\} = \lambda_{yy}(0)$
- $\mathbf{E} \{y(t)y(t-1)\} = \lambda_{yy}(1) = \mathbf{E} \{y(t-1)y(t)\} = \lambda_{yy}(-1)$
- $\mathbf{E} \{y(t)e(t)\} = \lambda_{ye}(0) = h(0)\sigma^2.$
- $\mathbf{E} \{y(t)e(t-1)\} = \lambda_{ye}(1) = h(1)\sigma^2$
- $\mathbf{E} \{y(t-1)e(t)\} = \lambda_{ye}(1) = h(-1)\sigma^2 = 0$
- $\lambda_{yy}(0)$  e  $\lambda_{yy}(1)$  determinam-se a partir da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \lambda_{yy}(0) + a_1 \lambda_{yy}(1) = [h(0) + c_1 h(1)] \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(1) + a_1 \lambda_{yy}(0) = c_1 h(0) \sigma^2 \end{cases}$$

## Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

- Resposta impulsional do sistema:

$$\begin{aligned}
 y(t) + a_1 q^{-1} y(t) &= u(t) + c_1 q^{-1} u(t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{1 + c_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow G(q) &= \frac{1 + c_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} = \\
 &= 1 + (c_1 - a_1) q^{-1} + a_1 (c_1 - a_1) q^{-2} + \dots + a_1^{\tau-1} (c_1 - a_1) q^{-\tau} + \dots
 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 h(0) &= 1 \\
 h(1) &= c_1 - a_1 \\
 &\vdots \\
 h(\tau) &= a_1^{\tau-1} (c_1 - a_1) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

# Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

- $\lambda_{yy}(\tau)$ ,  $\tau = 2, \dots, \infty$  determina-se recursivamente através da equação que se obtém multiplicando o modelo por  $y(t - \tau)$  e retirando o valor esperado:

$$\lambda_{yy}(\tau) = -a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) - a_2 \lambda_{yy}(\tau - 2)$$

# Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

**Processo estocástico ARMA de ordem  $n$ :**

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = e(t) + c_1 e(t-n) + \cdots + c_n e(t-n)$$

**em que  $e(t)$  tem média nula e variância  $\sigma^2$**

- Resolver o sistema de equações em ordem a  $\lambda_{yy}(0), \dots, \lambda_{yy}(n)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{yy}(0) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(2) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n) = \left[ h(0) + \sum_{k=1}^n c_k h(k) \right] \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(1) + a_1 \lambda_{yy}(0) + a_2 \lambda_{yy}(1) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n-1) = \sum_{k=1}^n c_k h(k) \sigma^2 \\ \lambda_{yy}(2) + a_1 \lambda_{yy}(1) + a_2 \lambda_{yy}(0) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(n-2) = \sum_{k=2}^n c_k h(k) \sigma^2 \\ \dots \\ \lambda_{yy}(n) + a_1 \lambda_{yy}(n-1) + a_2 \lambda_{yy}(n-2) + \cdots + a_n \lambda_{yy}(0) = c_n h(n) \sigma^2 \end{array} \right.$$

# Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

- Resposta impulsional do sistema:

$$\begin{aligned}
 (1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}) y(t) &= (1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}) u(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow G(q) &= \frac{1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} = \\
 &= 1 + (c_1 - a_1) q^{-1} + [(c_2 - a_2) - a_1(c_1 - a_1)] q^{-2} + \\
 &+ \{[(c_3 - a_3) - a_2(c_1 - a_1)] - a_1[(c_2 - a_2) - a_1(c_1 - a_1)]\} q^{-3} + \dots
 \end{aligned}$$

ou seja:

$$h(0) = 1$$

$$h(1) = c_1 - a_1$$

$$h(2) = (c_2 - a_2) - a_1(c_1 - a_1)$$

$$h(3) = [(c_3 - a_3) - a_2(c_1 - a_1)] - a_1[(c_2 - a_2) - a_1(c_1 - a_1)]$$

$$\vdots$$

# Autocovariância de Processos estocásticos ARMA

- Os valores de  $\lambda_{yy}(\tau)$ ,  $\tau = n + 1, \dots, \infty$  são determinados recursivamente através da equação:

$$\lambda_{yy}(\tau) = -a_1 \lambda_{yy}(\tau - 1) - a_2 \lambda_{yy}(\tau - 2) - \dots - a_n \lambda_{yy}(\tau - n).$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos

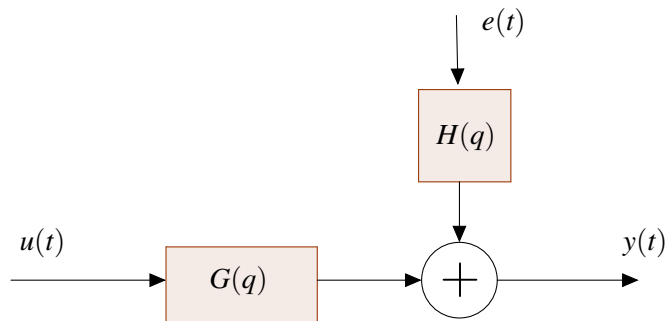
- Um sistema determinístico-estocástico é um sistema cuja saída é a soma da saída dum sistema determinístico, excitado por uma entrada  $u(t)$ , e dum processo estocástico  $v(t)$ .
- Se o sistema for linear e invariante no tempo e se  $v(t)$  for um processo estacionário então o modelo determinístico é:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$

em que  $e(t)$  é ruído branco e

- $G(q)$  é a função de transferência do processo
- $H(q)$  é a função de transferência do ruído.
- $v(t) = H(q)e(t)$  é o ruído da saída

# Modelos Determinístico-Estocásticos



Previsor de  $y(t)$  no instante  $t - 1$

$$\hat{y}(t) = G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)] \underbrace{[y(t) - G(q)u(t)]}_{v(t)} =$$

$$H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)] y(t).$$

# Relação sinal ruído

- Relação sinal ruído é a razão entre a potência do sinal e a potência do ruído.
- É expressa em dB e é designada como SNR:

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \left( \frac{R_{\bar{y}}(0)}{R_v(0)} \right)$$

$$R_{\bar{y}} = \mathbf{E} \{ \bar{y}^2(t) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \bar{y}^2(t)$$

$$R_v = \mathbf{E} \{ v^2(t) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N v^2(t)$$

$$\bar{y}(t) = G(q)u(t)$$

$$v(t) = H(q)e(t)$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída I

- Sejam

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}.$$

$$B(q) = b_0 + b_1 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}.$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}.$$

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_d} q^{-n_d}.$$

$$F(q) = 1 + f_1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}.$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída II

- Pode-se representar  $G(q)$  e  $H(q)$  por

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)F(q)}$$

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)D(q)}$$

- Os zeros de  $A(q)$  são os pólos comuns das funções de transferência do processo e do ruído (se o ruído for estacionário  $A(q)$  deve ser estável).
- Os zeros de  $F(q)$  são os restantes pólos da função de transferência do processo.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída III

- Os zeros de  $D(q)$  são os restantes pólos de função de transferência do ruído (se o ruído for estacionário  $D(q)$  deve ser estável).
- Os zeros de  $B(q)$  são os zeros da função de transferência do processo.
- os zeros de  $C(q)$  são os zeros da função de transferência do ruído (se o ruído for estacionário  $C(q)$  deve ser estável)
- Se
  - $B(q)$  co-primos (sem fatores comuns, i.e., sem zeros comuns) de  $A(q)$  e  $F(q)$ .
  - $C(q)$  co-primos de  $D(q)$  e  $F(q)$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída IV

então  $G(q)$  e  $H(q)$  são funções de transferência de ordem mínima.

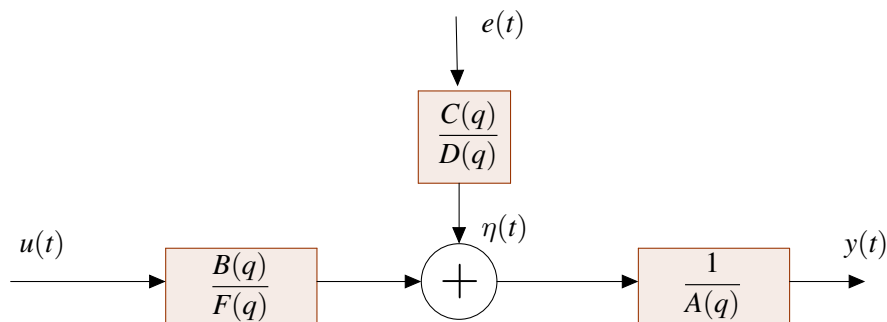
- Equações:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

- Previsor:

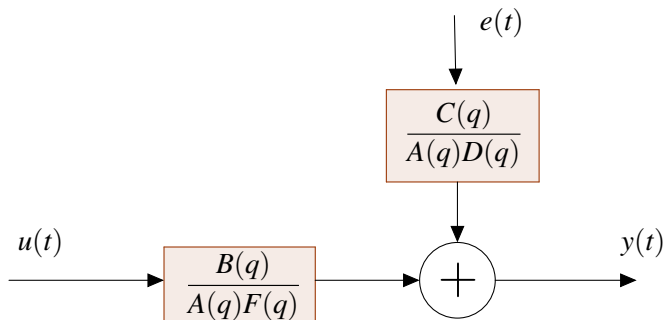
$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \frac{A(q)D(q)}{C(q)} \frac{B(q)}{A(q)F(q)}u(t) + \left[1 - \frac{A(q)D(q)}{C(q)}\right]y(t) = \\ &\frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \frac{C(q) - A(q)D(q)}{C(q)}y(t)\end{aligned}$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída V



- $\eta(t) = \frac{C(q)}{D(q)} e(t)$  - ruído de equação.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo generalizado de entrada-saída VI



# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARX I

- Se  $v(t)$  for um processo autoregressivo, i.e.,

$$v(t) = \frac{1}{A(q)}e(t),$$

o modelo pode ser descrito por:

$$A(q)u(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

- Este modelo é conhecido por **ARX** (**A**uto **R**egressive **eX**ogenous)
- Como  $F(q) = D(q) = C(q) = 1$ ,  $A(q)$  contém os pólos das funções de transferência do processo e do ruído

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARX II

- $B(q)$  é aumentado com os pólos da função de transferência do ruído que não são pólos do processo.
- Se  $G(q)$  e  $H(q)$  tiverem os mesmos pólos então  $\frac{B(q)}{A(q)}$  é uma função de transferência de ordem mínima.
- Previsor:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) = \\ &= b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) - \\ &= a_1y(t-1) - \dots - a_ny(t-n) = \\ &= x(t)^T \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= [u(t) \quad \dots \quad u(t-n_b) \quad -y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n_a)]^T \\ \theta &= [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_a}]^T\end{aligned}$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARX III

- Erro de previsão:

$$\hat{e}(t) = y(t) - x^T(t)\theta$$

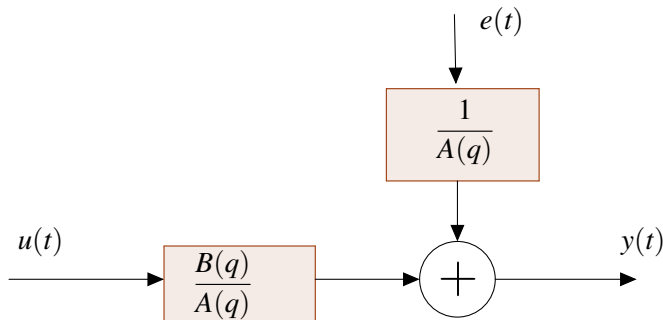
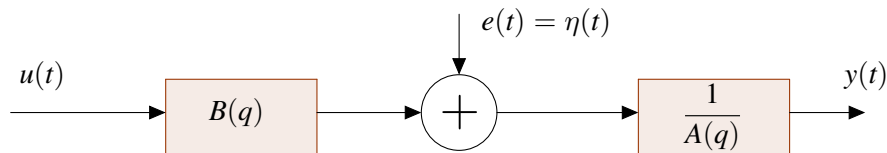
- Como o erro de previsão é uma função linear de  $\theta$ , a minimização de

$$V = \sum_{t=1}^N \hat{e}^2(t)$$

é um problema de mínimos quadrados e pode ser resolvido pelo estimador de mínimos quadrados.

- O erro de equação,  $\eta(t) = \frac{C(q)}{D(q)}e(t) = e(t)$  é ruído branco.

## Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARX IV



# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARMAX I

- Se  $v(t)$  for um processo ARMA, i.e.,

$$v(t) = \frac{C(q)}{A(q)}e(t),$$

o modelo pode ser descrito por:

$$A(q)u(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

- Este modelo é conhecido por **ARMAX** (**A**uto **R**egressive **M**oving **A**verage e**X**ogenous)
- Como  $F(q) = D(q) = 1$ ,  $A(q)$  contém os pólos das funções de transferência do processo e do ruído

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARMAX II

- $B(q)$  é aumentado com os pólos da função de transferência do ruído que não são pólos do processo.
- $C(q)$  é aumentado com os pólos da função de transferência do processo que não são pólos do ruído.
- Se  $G(q)$  e  $H(q)$  tiverem os mesmos pólos então  $\frac{B(q)}{A(q)}$  e  $\frac{C(q)}{A(q)}$  são uma funções de transferência de ordem mínima.
- Previsor:

$$\hat{y}(t) = \frac{B(q)}{C(q)}u(q) + \frac{C(q) - A(q)}{C(q)}y(t).$$

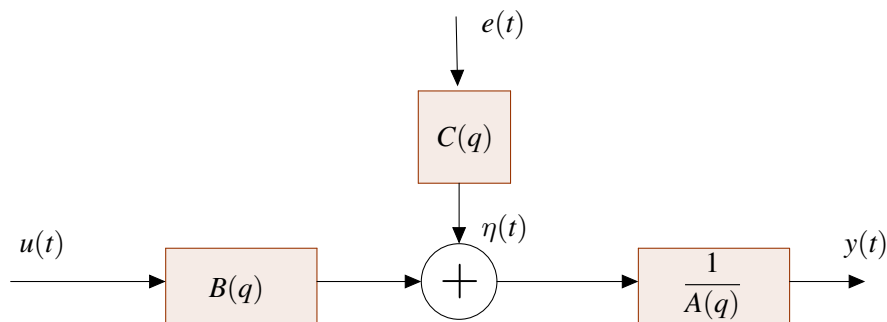
# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARMAX III

- Erro de previsão:

$$\hat{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{1}{C(q)} [A(q)y(t) - B(q)u(t)]$$

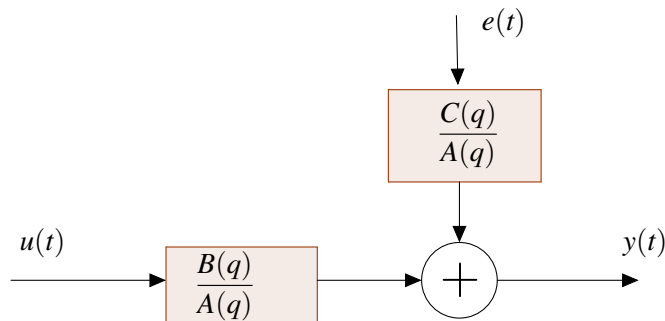
não é uma função linear dos parâmetros.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARMAX IV



- Erro de equação  $\eta(t) = C(q)e(t)$  é um processo de média móvel.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo ARMAX V



# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo Box-Jenkins I

- Fazendo  $A(q) = 1$  obtem-se o modelo de Box-Jenkins:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t).$$

- As funções de transferência  $\frac{B(q)}{F(q)}$  e  $\frac{C(q)}{D(q)}$  são de ordem mínima
- Previsor:

$$\hat{y}(t) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y(t).$$

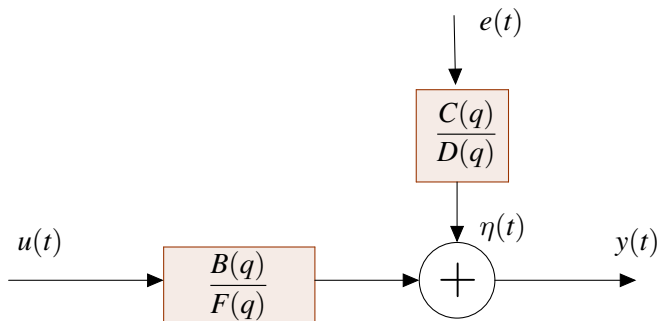
# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo Box-Jenkins II

- O erro de previsão

$$\hat{e}(t) = \frac{D(q)}{C(q)}y(t) - \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t)$$

não é uma função linear dos parâmetros.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo Box-Jenkins III



- Erro de equação  $\eta(t) = \frac{C(q)}{D(q)}e(t) = v(t)$  é um processo ARMA e é igual ao ruído da saída.

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo de Estados I

- O modelo de estado:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t).\end{aligned}$$

- Este modelo tem duas entradas e a saída pode ser escrita na forma:

$$y(t) = \underbrace{G(q)u(t)}_{y_d(t)} + \underbrace{H(q)e(t)}_{y_s(t)}$$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo de Estados II

- $G(q)$  é a função de transferência do subsistema determinístico:

$$\begin{cases} x_d(t+1) &= Ax_d(t) + Bu(t) \\ y_d(t) &= Cx_d(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow G(q) = C(qI - A)^{-1}B + D.$$

- $H(q)$  é a função de transferência do subsistema estocástico:

$$\begin{cases} x_s(t+1) &= Ax_s(t) + Ke(t) \\ y_s(t) &= Cx_s(t) + e(t) \end{cases} \Rightarrow H(q) = C(qI - A)^{-1}K + 1.$$

- $G(q)$  e  $H(q)$  têm o mesmo denominador  
 $A(q) = \det(qI - A) \equiv$  equação caraterística de  $A$

# Modelos Determinístico-Estocásticos: Modelo de Estados III

- Designando o numerador de  $C(qI - A)^{-1}B + D$  por  $B(q)$ , e o de  $C(qI - A)^{-1}K + 1$  por  $C(q)$ , obtem-se o modelo

$$y(q) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}e(t) \Leftrightarrow A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t).$$

- Conclui-se que o modelo determinístico-estocástico no espaço de estados é uma realização do modelo ARMAX.