

A UTILIZAÇÃO QUE OS ALUNOS FAZEM DA CALCULADORA GRÁFICA NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA B

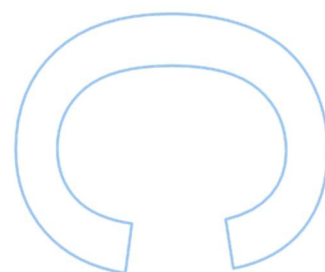
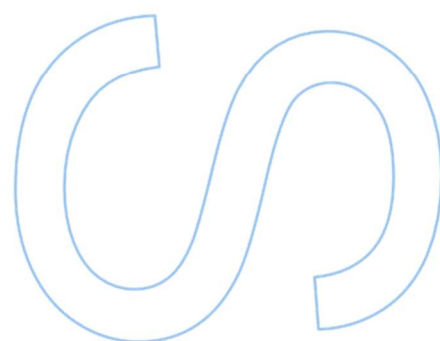
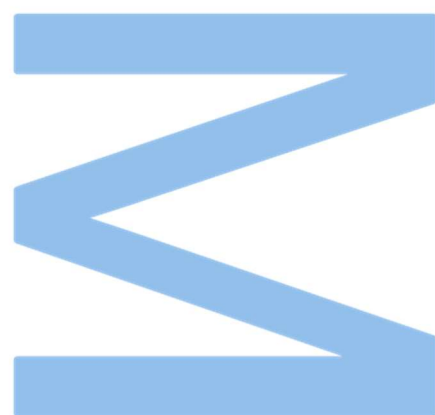
Francisca Gouveia Figueiredo

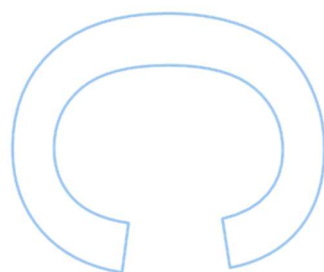
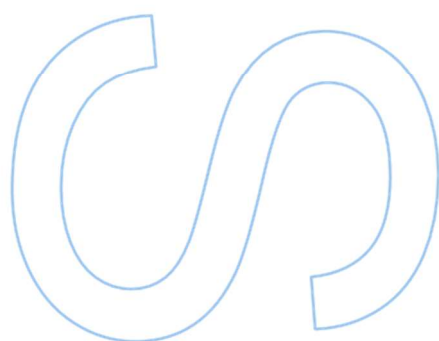
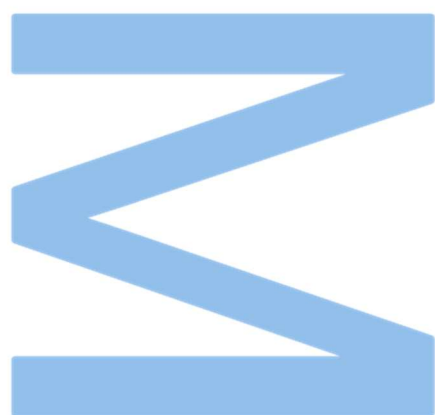
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino
Básico e no Secundário

Unidade de Ensino das Ciências
2023

Orientadora

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira, Professora
Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto





*Dedico este trabalho ao meu avô, o meu anjo da guarda.
Sei que daí do céu os teus olhos brilham de orgulho por esta conquista.*

Agradecimentos

A gratidão será para sempre a memória do meu coração e, por isso, quero agradecer a todas as pessoas que tornaram este percurso tão feliz e por contribuírem para a realização deste relatório.

À minha professora e orientadora, Doutora Rosa Ferreira, pela disponibilidade, amabilidade e orientação, por todos os feedbacks pertinentes, pelas críticas construtivas e pela calma que sempre transmitiu nos momentos de maior stress ao longo destes dois anos de formação. Muito obrigada!

A todos os professores do meu percurso académico, pelo acompanhamento e pelas ferramentas que permitiram o meu crescimento profissional e pessoal.

Ao professor cooperante, muito obrigada pela generosidade com que me recebeu, por toda a sua entrega a cada aluno, pela partilha de toda a sua experiência, por todos os desafios colocados, pelas enriquecedoras reflexões e sugestões e por toda a paciência e compreensão. Foi um ano letivo recheado de muita aprendizagem e do qual lhe ficarei eternamente grata.

Aos alunos das turmas que acompanhei, por me terem recebido com grandes sorrisos, pelo respeito e por todos os ensinamentos que contribuíram para a minha transformação e para o meu crescimento como professora. Obrigada, sem vocês este trabalho não teria sido possível.

À escola que me abriu as portas e me fez sentir em casa. Obrigada pela oportunidade e pela simpatia de todos os seus colaboradores.

Aos meus colegas de mestrado, pelos dois anos de trabalho, partilha e apoio.

Ao meu par pedagógico e amiga Anabela Cunha, por tornar todos os dias de trabalho mais alegres, pelo verdadeiro companheirismo, pela troca de ideias constante e pela ajuda nos momentos de maior aflição. Este percurso não teria sido tão especial se não fosse feito ao teu lado. Obrigada pela união, animação e amizade presentes em todos os momentos partilhados.

Agradeço à minha família por todo o orgulho que demonstraram ter na pessoa que sou e futura profissional que serei. Por me apoiarem e festejarem comigo todas as conquistas.

Aos meus pais, são os mais bonitos e maravilhosos, pela pessoa que sou hoje e por tornarem possível um dos meus sonhos. Pelo investimento que fizeram na minha

educação ao longo destes anos, pela preocupação com o meu bem-estar e por todo o encorajamento para enfrentar e escalar sem medo uma das grandes montanhas da minha vida. E claro, ao meu irmão pela admiração que sente por mim e por me amparar nos dias mais difíceis.

Para terminar quero agradecer ao Francisco, meu namorado e porto seguro, por ser o meu maior apoio, pela infinita paciência, pelo carinho, pela força, pelos elogios, pela estabilidade. Obrigada por acreditares sempre em mim, por tranquilizares o meu coração, por ouvires as minhas lamentações, por me compreenderes e por me inspirares todos os dias. Obrigada por me fazeres sempre dar o melhor de mim em tudo o que faço!

Resumo

O uso da tecnologia, em particular da calculadora gráfica, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática é recomendado desde os anos 80 do século XX por permitir uma aprendizagem mais ativa e o trabalho em torno de tarefas mais desafiantes, incentivando os alunos a expressarem o seu raciocínio na realização das mais diversas tarefas. Um dos temas do programa de Matemática B em que o uso da calculadora gráfica é imprescindível é o tema dos modelos contínuos não lineares. Assim, com este trabalho de investigação, pretendi conhecer e compreender de que modo os alunos de uma turma de 11.º ano de escolaridade utilizam a calculadora gráfica e as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática B, em particular dos modelos contínuos não lineares. Adotando uma abordagem qualitativa, recolhi e analisei todos os dados dos alunos da turma. Os dados foram recolhidos através de gravações das entrevistas realizadas com os alunos, da recolha das produções escritas e de notas de observação. Categorizei o uso que cada aluno fez da calculadora gráfica em três tipos de utilização, com base num estudo realizado há pouco mais de 20 anos (Rocha, 2002). À medida que este recurso fez parte do dia a dia dos alunos, estes tenderam a delinear estratégias e a aproveitar as potencialidades da calculadora gráfica para encontrarem e representarem graficamente uma função que modele a situação descrita no enunciado das tarefas propostas. No entanto, o tipo de utilização que cada aluno fez da calculadora gráfica dependeu muito da perspetiva com que este encarava a aprendizagem da Matemática. Ao longo deste trabalho de investigação consegui observar e concluir que os alunos que revelam ter preferência pela aprendizagem da Matemática de forma mecanizada tendem a subutilizar a calculadora gráfica. Apesar da evolução tecnológica sofrida nos 20 anos que separam este estudo do estudo inspirador deste trabalho (Rocha, 2002), os resultados parecem sugerir que os resultados encontrados anteriormente continuam a verificar-se nos dias de hoje.

Palavras-chave: Calculadora gráfica, Matemática B, aprendizagem, modelos contínuos não lineares, secundário.

Abstract

The use of technology, in particular the graphing calculator, in the teaching and learning process of Mathematics, has been recommended since the 80s of the 20th century. It promotes a more active learning and allows students to work on more challenging tasks, encouraging them to express their reasoning in carrying out a diverse range of tasks. The topic of continuous non-linear models is one topic of the Mathematics B programa in which the use of a graphing calculator is essential. Therefore, with this research work, I intended to know and understand how students from an 11th grade class use the graphing calculator and its affordances in learning Mathematics B, in particular, continuous non-linear models. Adopting a qualitative approach, I collected and analyzed all the data of the students in the class. Data were collected through recordings of interviews carried out with the students, the collection of written productions and observation notes. I categorized the use that each student made of the graphing calculator into three types of use, based on a study carried out just over 20 years ago (Rocha, 2002). As this resource became part of the students' daily lives, they tended to outline strategies and take advantage of the affordances of the graphing calculator to find and graphically represent a function that models the situation described in the proposed task statement. However, the type of use that each student made of the graphing calculator greatly depended on the perspective from which they viewed learning Mathematics. Throughout this research work I was able to observe and conclude that students who reveal a preference for learning Mathematics in a mechanized way tend to underuse the graphing calculator. Despite the technological evolution that occurred between the 20 years that separate this study from its inspiring research (Rocha, 2002), results seem to suggest that the results previously found continue to be verified today.

Keywords: Graphing calculator, Mathematics B, learning, nonlinear continuous models, high school.

Índice

Índice de Figuras	vii
Lista de Abreviaturas	ix
1. Introdução.....	1
2. Enquadramento Teórico	7
2.1. A disciplina de Matemática B e a calculadora gráfica	7
2.2. A calculadora gráfica e as dificuldades associadas à sua utilização	10
2.3. Modelos contínuos não lineares no programa de Matemática B	12
3. Intervenção Pedagógica	17
4. Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados	27
5. Apresentação e Discussão dos Resultados	33
5.1. A turma e a calculadora gráfica	34
5.1.1. Entrevista inicial.....	34
5.1.2. A primeira tarefa	36
5.1.3. A segunda tarefa.....	40
5.1.4. A terceira tarefa	44
5.1.5. A quarta tarefa	48
5.1.6. A quinta tarefa	54
5.1.7. Síntese sobre a utilização da calculadora gráfica pela turma	58
5.2. Três alunos e a calculadora gráfica	59
5.2.1. A Orquídea	59
5.2.3. O Tulipa	64
5.2.5. A Peónia	68
5.2.7. Síntese sobre a utilização da calculadora gráfica pelos três alunos	72
6. Conclusões e Implicações	74
Referências	82
Anexos	88
Anexo 1 – Tarefa 1: Juros Compostos: A Oitava Maravilha do Mundo	88

Anexo 2 – Tarefa 2: Moscas da Fruta	89
Anexo 3 – Tarefa 3: Ingrediente Especial	90
Anexo 4 – Tarefa 4: Salário Mínimo.....	91
Anexo 5 – Tarefa 5: Macacos de Nariz Arrebitado.....	93
Anexo 6 – Carta de Consentimento Informado	94
Anexo 7 – Guião da primeira entrevista aos alunos	96
Anexo 8 – Guião da segunda entrevista aos alunos	97
Anexo 9 – Tarefa para a entrevista: Espécie Rara de Plantas	98

Índice de Figuras

Figura 1 – Os diferentes tipos de utilização da calculadora gráfica, segundo Rocha (2002)	4
Figura 2 – Translação vertical de uma função afim	11
Figura 3 – Calendário das Tarefas	19
Figura 3 – Adaptação da primeira tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)	22
Figura 5 – Adaptação da segunda tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)	23
Figura 6 – Adaptação da terceira tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)	24
Figura 7 – Adaptação da quarta tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)	25
Figura 8 – Adaptação da quinta tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)	26
Figura 9 – Adaptação da tarefa para a entrevista: original (esquerda) e adaptada (direita)	31
Figura 10 – Divisão dos alunos na realização das tarefas	33
Figura 11 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 1 (Grupo A)	37
Figura 12 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 1 (Par A)	38
Figura 13 – Resolução da questão 3 da Tarefa 1 (Par A)	39
Figura 14 – Resolução da questão 3 da Tarefa 1 (Par B)	39
Figura 15 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Par A): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)	40
Figura 16 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Par B): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)	41
Figura 17 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Grupo A): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)	43
Figura 18 – Nova estratégia de resolução da questão 2 da Tarefa 2 (Grupo A)	44
Figura 19 – Resolução da questão 2 da Tarefa 3: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)	45
Figura 20 – Resolução da questão 3 e 4 da Tarefa 3: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)	47
Figura 21 – Resolução da questão 1 e 2 da Tarefa 4: Par A (cima), Par B (baixo)	49
Figura 22 – Resolução da questão 1 da Tarefa 4 (Grupo A)	50
Figura 23 – Resolução da questão 3 da Tarefa 4: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)	52
Figura 24 – Resolução da questão 4 da Tarefa 4: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)	53
Figura 25 – Resolução da Tarefa 5 (Peónia)	55

Figura 26 – Resolução da Tarefa 5 (Tulipa).....	56
Figura 27 – Resolução da Tarefa 5 (Orquídea).....	57
Figura 28 – Resolução da Tarefa 5 (Rosa).....	57
Figura 29 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 1(Orquídea).....	60
Figura 30 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1(Orquídea).....	61
Figura 31 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Orquídea)	62
Figura 32 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Orquídea)	63
Figura 33 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Tulipa)	65
Figura 34 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Tulipa)	66
Figura 35 – Resolução da questão 1 e 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Tulipa)	67
Figura 36 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Peónia)	69
Figura 37 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Peónia)	70
Figura 38 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Peónia)	71
Figura 39 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Peónia)	72

Lista de Abreviaturas

AE	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS
AMTE	ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS
APM	ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA
DGES	DIREÇÃO GERAL DO ENSINO SUPERIOR
FCT	FUNDAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A TECNOLOGIA
FCUP	FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
FNAE	FINISH NATIONAL AGENCY FOR EDUCATION
GTI	GRUPO DE TRABALHO EM INVESTIGAÇÃO
GTM	GRUPO DE TRABALHO DE MATEMÁTICA
IPP	INICIAÇÃO À PRÁTICA PROFISSIONAL
MACS	MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS
PROJETO MAIA	PROJETO DE MONITORIZAÇÃO, ACOMPANHAMENTO E INVESTIGAÇÃO EM AVALIAÇÃO PEDAGÓGICA
ME	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MES	MINISTRY OF EDUCATION OF SINGAPORE
NCTM	NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
PASEO	PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA
PES	PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
RE	RELATÓRIO DE ESTÁGIO
UP	UNIVERSIDADE DO PORTO

1. Introdução

Desde cedo que acredito que as experiências que vivenciamos contribuem para a escolha dos caminhos que traçamos. No meu caso, enquanto aluna, sempre lidei com receio da utilização da tecnologia na aprendizagem e, por isso, acabei limitada a pouco mais do que à replicação de processos rotineiros que eram minuciosamente explicados pelos professores. Quando, no contexto da minha Prática de Ensino Supervisionada (PES), me deparei, na escola onde decorreu o estágio, com um orientador cooperante que nutre um gosto muito especial pela tecnologia, na sua integração curricular para promover aprendizagens matemáticas nos alunos, fui reconhecendo, cada vez mais, as suas potencialidades, e acabei rendida à forma dinâmica e ativa como esta promove a aprendizagem dos alunos.

Seria de esperar que esta nova geração de alunos, que nasce praticamente com os comandos na mão, fizesse da tecnologia uma grande aliada do processo de aprendizagem. Porém, pelo que fui observando na minha PES, a realidade não é essa na maioria dos casos. Muitos são os alunos que continuam a preferir seguir, com papel e lápis, algoritmos bem delineados para a resolução das tarefas, descartando a possibilidade de explorar as potencialidades dos computadores e das calculadoras gráficas na realização dessas tarefas. Será esta escolha baseada nas inseguranças sentidas e na imprevisibilidade das ferramentas tecnológicas? A resistência à progressiva integração da tecnologia no ensino não parte apenas dos alunos, parte muitas vezes dos professores que não acompanham o avanço tecnológico e que se mantêm agarrados ao passado. Outras vezes parte dos pais que, desinformados, olham para a tecnologia como substituto do raciocínio, do professor, do papel e do lápis. Assim sendo, um dos meus principais objetivos, como futura professora, é combater o medo e o preconceito relativos à utilização da tecnologia no ensino da Matemática.

Nos tempos que correm, a tecnologia faz parte do dia a dia das pessoas, tendo-se tornado, em muitos casos, indispensável. Assim, é fundamental a implementação em sala de aula de estratégias de inovação pedagógica que acompanhem o acelerado desenvolvimento científico e tecnológico que vivenciamos. De acordo com o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (PASEO, Martins et al., 2017) o raciocínio, a resolução de problemas, o pensamento crítico e a utilização de tecnologias são alguns dos alicerces para que os alunos aprendam e continuem a aprender ao longo da vida. Deste modo, os alunos devem desenvolver algumas competências associadas a estas áreas. Dentro dessas competências são realçados, neste documento, a interpretação e análise de informação, o planeamento e a construção do pensamento, a tomada de

decisões na resolução de problemas, a argumentação, a utilização de instrumentos, máquinas e equipamentos tecnológicos, e a identificação de necessidades e oportunidades tecnológicas numa diversidade de propostas.

Nas aulas de Matemática do ensino secundário, a calculadora gráfica é um dos recursos tecnológicos mais utilizados devido à sua obrigatoriedade. Tanto em documentos curriculares internacionais (NCTM, 2007), como em documentos curriculares portugueses – *Renovação do currículo de Matemática* (APM, 1988) e *Aprendizagens Essenciais de Matemática B – 10.º ano e 11.º ano de escolaridade* (ME, 2018a, 2018b), a promoção da verdadeira compreensão dos processos matemáticos, o contacto com variadas situações realistas e uma maior possibilidade de exploração e investigação de atividades matemáticas mais profundas e significativas (Burril, 2008; Rocha, 2015) foram apontadas como algumas das razões para a integração da calculadora gráfica nas aulas de Matemática.

Nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática* (ME, 2018a, 2018b) para o ensino secundário em vigor à data de elaboração deste relatório, a utilização da tecnologia surge com carácter obrigatório, sendo esta promovida “na resolução de problemas desafiantes, em situações que exijam a sua manipulação e em que seja vantajoso o seu conhecimento, designadamente através do ensino experimental” (p. 2). Todavia, segundo a partilha de experiências dos meus colegas professores, muitos alunos chegam ao fim da escolaridade obrigatória sem terem conseguido utilizar a tecnologia em geral, ou a calculadora gráfica em particular, no desenvolvimento de aprendizagens significativas. E foi também um pouco esta falta de recurso à calculadora gráfica para apoiar as aprendizagens que eu fui testemunhando. Deste modo, é urgente dar especial atenção à forma como esta é utilizada em sala de aula.

Assim sendo, inspirada num trabalho realizado há pouco mais de 20 anos (Rocha, 2002), o principal objetivo deste estudo é conhecer e compreender de que modo os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam a calculadora gráfica e as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática B. Em face deste objetivo, pretende-se responder ao seguinte conjunto de questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica na realização de tarefas matemáticas?
2. Qual o nível de conhecimentos que os alunos têm da sua calculadora gráfica?
3. Qual o aproveitamento que os alunos fazem das potencialidades de que têm conhecimento e que são disponibilizadas pela sua máquina?

4. Quais as dificuldades com que se deparam os alunos aquando da utilização da calculadora gráfica na resolução de tarefas matemáticas e como as ultrapassam?

Nestes 20 anos, a calculadora gráfica manteve-se como ferramenta obrigatória no ensino da Matemática no secundário. Porém, sofreu uma enorme evolução. Acompanhando todas essas mudanças, surgiu a necessidade de criação e disseminação de muitas tarefas para o uso da calculadora gráfica que promovessem aprendizagens significativas, tanto em Matemática A, como em Matemática B, MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais) e, até mesmo, nos módulos de Matemática dos cursos profissionais. Assim, aquele que, em 2002, seria um instrumento relativamente novo, passou progressivamente a fazer *parte da mobília* ao longo destes últimos 20 anos. Deste modo, é importante perceber que utilização é que os alunos, 20 anos após o estudo realizado por Helena Rocha (2002), fazem da calculadora gráfica, replicando, de algum modo, o trabalho que foi inspirador para a investigação que deu origem a este relatório.

O principal objetivo do estudo realizado por Helena Rocha foi “conhecer e compreender a forma como os alunos utilizavam a calculadora gráfica” (2002, p. 4). Para isso, procurou “identificar as razões que estão na origem do tipo de utilização que feita” (p. 4) e “perceber qual a influência da relação que os alunos mantêm com a Matemática e da perspetiva que têm relativamente à tecnologia” (p. 4). Adotando uma metodologia de natureza qualitativa, a autora realizou um estudo de caso, envolvendo três alunos de uma turma de 10.º ano, de Matemática A, que dispunham de calculadora gráfica. Relativamente aos instrumentos de recolha de dados, recorreu à realização de entrevistas, com e sem tarefas, às notas de observação de um conjunto alargado de aulas, à recolha de todos os documentos escritos (incluindo as respostas dos alunos a um inquérito e as suas produções escritas nas aulas observadas e nas entrevistas com tarefas) e à concretização de uma entrevista à professora dos alunos participantes.

Posto isto, na análise dos resultados, Helena Rocha (2002) categorizou a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica em três diferentes tipos: o “laboratório”, a “tábua de salvação” e o “avião a jacto”. A figura 1, explica o tipo de utilização que se enquadra em cada uma destas categorias.

Além dessa categorização, muitas foram as conclusões retiradas. Segundo a autora, os resultados deste estudo revelaram que a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica não é inovadora, isto é, os alunos tendem a recorrer à calculadora apenas quando lhes é pedido o gráfico de uma função, e que as potencialidades gráficas

“substituem rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função” (Rocha, 2002, p. 19). No entanto, Rocha alerta para que esta realidade não se traduz numa “sobre-utilização da calculadora porque (...) mesmo em questões em que o recurso à calculadora seria vantajoso, existe muito pouca evidência da sua utilização” (p. 19). Outra conclusão importante é que os alunos optam por recorrer à calculadora porque ela facilita e agiliza certos processos, por exemplo, a resolução de uma equação, e não porque lhes foram ensinados procedimentos para resolverem equações com recurso a esta ferramenta tecnológica.

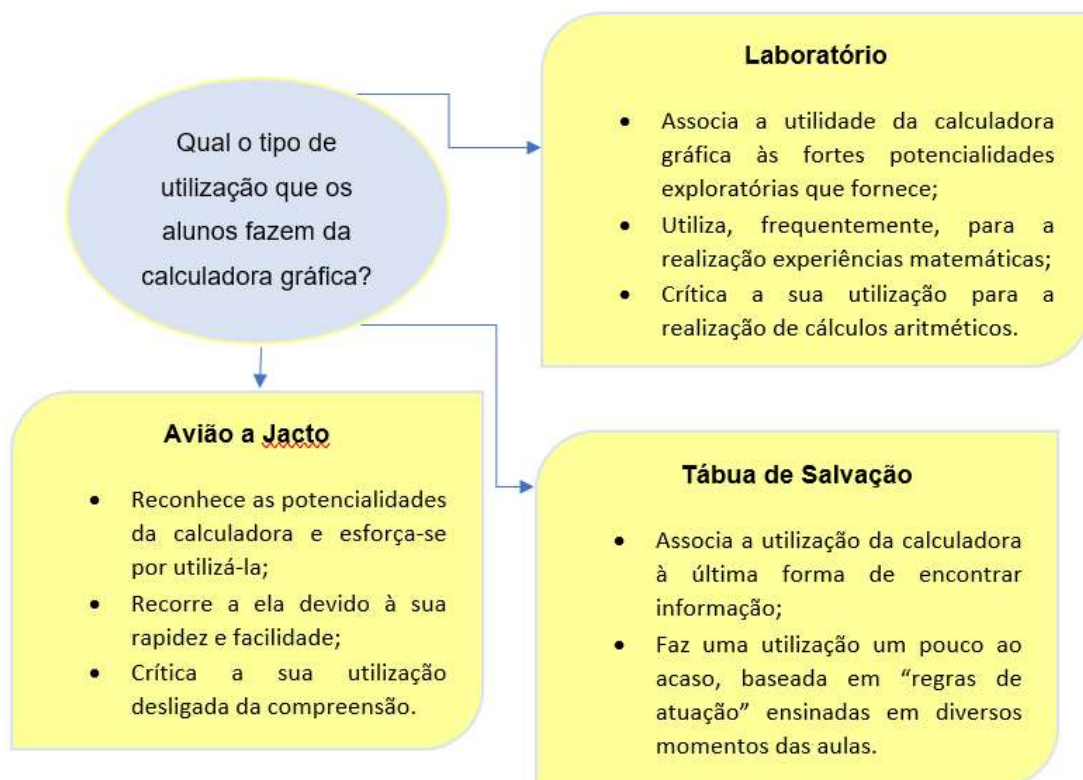


Figura 1 – Os diferentes tipos de utilização da calculadora gráfica, segundo Rocha (2002)

Helena Rocha realça também que os alunos que desenvolvem uma compreensão mais relacional (Skemp, 2016) da Matemática demonstram “uma maior facilidade em integrar a informação disponibilizada pela calculadora gráfica, no âmbito dos seus conhecimentos e das informações obtidas por outras vias” (Rocha, 2002, p.21) do que os seus colegas que desenvolvem uma compreensão mais instrumental (Skemp, 2016) da Matemática, que acabam limitados à reprodução de técnicas. Rocha destaca ainda que a não atribuição, por parte dos alunos, de um papel positivo e relevante da tecnologia no ensino-aprendizagem da Matemática influencia diretamente o aproveitamento que fazem das potencialidades da calculadora gráfica. Por fim, a autora

questiona a influência da perspetiva e atuação da professora nas preferências dos alunos relativamente à utilização que fazem da calculadora gráfica.

Incluindo o presente capítulo de Introdução, o trabalho aqui apresentado organiza-se ao longo de seis capítulos. Intitulado de Enquadramento Teórico, o segundo capítulo apresentará diversos aspetos do ponto de vista teórico que são a base do desenvolvimento desta investigação. No decorrer da realização deste trabalho, aspetos como as dificuldades sentidas pelos alunos na utilização da calculadora gráfica e a importância da escolha de boas tarefas numa lógica de apoio às aprendizagens dos alunos, foram tidos em conta e revelaram a sua importância para a tomada de algumas decisões e para a análise dos dados recolhidos.

Dedicado a explicar, detalhadamente, os aspetos relacionados com a intervenção pedagógica sobre a qual se baseia o meu trabalho de investigação, o terceiro capítulo permite uma visão pormenorizada do contexto em que foi realizada esta investigação. Entre os diferentes tópicos abordados neste capítulo, destacam-se a caracterização do contexto escolar que foi palco da minha PES, a descrição e análise dos recursos utilizados, e uma pequena reflexão relativamente à utilização futura dos mesmos.

No quarto capítulo, Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados, é possível encontrar a descrição pormenorizada dos processos de recolha dos dados necessários para o desenvolvimento desta investigação. Além disso, neste capítulo são apresentadas e fundamentadas as decisões tomadas ao longo da recolha de dados, como por exemplo, a seleção dos participantes no estudo e dos instrumentos de recolha de dados utilizados.

O quinto capítulo, Apresentação e Discussão dos Resultados, tem como base as questões de investigação mencionadas anteriormente. É neste capítulo que o ponto de vista teórico, apresentado no segundo capítulo, se torna crucial para a análise detalhada dos dados recolhidos e para a interpretação desses mesmos dados à luz da teoria.

No sexto capítulo, Conclusões e Implicações, é possível encontrar uma síntese com os aspetos essenciais da investigação de forma a disponibilizar a informação necessária à formulação de conclusões. A acrescentar, ainda neste capítulo, é apresentada uma reflexão final onde são abordadas algumas implicações desta investigação no contexto da PES e da minha Iniciação à Prática Profissional (IPP), bem como a influência deste trabalho em futuras investigações que dele decorram.

Este trabalho termina com uma lista de toda a bibliografia utilizada no decorrer desta investigação e mencionada neste relatório. Por último, os Anexos incluem todos os

documentos referidos ao longo deste relatório, tais como as tarefas que foram analisadas neste trabalho e os guiões das entrevistas realizadas. Todos estes documentos ajudarão a tornar a leitura deste Relatório de Estágio mais agradável e fluída.

2. Enquadramento Teórico

2.1. A disciplina de Matemática B e a calculadora gráfica

A era da revolução tecnológica marcou os anos 80/90 do século XX e, desde aí, muitos foram os documentos curriculares, internacionais (e.g., AMTE, 2006; FNAE, 2020; MES, 2012; NCTM, 1980, 1989, 2007) e nacionais (e.g., APM, 1998; ME, 2018a, 2018b; Ponte et al., 2007), que recomendam fortemente o uso das novas tecnologias no ensino de modo integrado. Do mesmo modo, em 2020, também o grupo de trabalho de Matemática (GTM) apresentou recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos. Entre essas recomendações, surge o apelo à resolução de problemas que explorem e conectem representações matemáticas múltiplas, à importância da literacia digital, ao recurso a manuais digitais, ao recurso a ferramentas tecnológicas e à relevância da Internet como fonte de acesso à informação. Independentemente do ciclo de escolaridade, as recomendações do GTM apoiam que o currículo de Matemática

deve considerar as ferramentas tecnológicas como recursos para o ensino e a aprendizagem da Matemática, que favoreçam a adequação e a ampliação da experiência matemática. Todos os alunos devem poder aceder livremente a calculadoras, robots, aplicações disponíveis na *Internet* e *software* para tratamento estatístico, cálculo algébrico simbólico, geometria, funções e modelação. A *Internet* deve constituir-se como fonte importante de acesso à informação ao serviço do ensino e aprendizagem da Matemática. (GTM, 2020, p. 296)

No curso de Artes Visuais do ensino secundário, a disciplina de Matemática B é opcional, tem uma duração bienal e apresenta um carácter mais experimental em comparação com a disciplina de Matemática A dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Enquanto que, na disciplina de Matemática A, o trabalho realizado explora uma vertente mais algébrica, na Matemática B, os temas tratados não enfatizam o formalismo e pretendem-se sempre conectados à resolução de problemas de modelação matemática. Daí que é importante promover o espírito de pesquisa nos alunos e, por estas razões, é recomendado o uso da calculadora gráfica regularmente.

Já em 2001, o programa de Matemática B referia que “não é possível atingir os objetivos gerais e competências deste programa sem recorrer (...) ao apoio de tecnologia adequada” (ME, 2001, p. 14). De acordo com Rocha (2002), a integração da tecnologia no ensino da Matemática é importante porque proporciona “uma

aprendizagem mais activa e dinâmica, explorando uma maior variedade de situações, testemunhando a verdadeira natureza dos processos matemáticos, e envolvendo-se em aplicações com dados realistas” (p. 3).

O *Programa de Matemática B* (Silva et al., 2001) já referia a utilização da tecnologia como um tema transversal. Recomendava a sua abordagem apenas quando necessária e quando a compreensão dos assuntos tratados fosse positiva, talvez não dando à tecnologia a importância devida. Atualmente, as *Aprendizagens Essenciais em Matemática B* (ME, 2018a, 2018b, subordinadas ao *Programa de Matemática B* (Silva et al., 2001), homologado em 2002, referem que o recurso à tecnologia no ensino da Matemática não deve ser visto como um substituto da compreensão e da intuição, mas deve ser encarado como o principal aliado no alcance das competências do programa de Matemática B. Em particular, dado que este programa enfatiza o trabalho em torno de modelos matemáticos, a realização de tarefas de modelação constitui, também, uma boa aposta para alcançar essas competências (Ponte, 2005).

De acordo com as *Aprendizagens Essenciais em Matemática B* (ME, 2018a, 2018b), a Matemática contribui para o desenvolvimento da capacidade de formular e resolver problemas, comunicar ideias matemáticas, interpretar e seleccionar modelos que ajustem situações reais, simular, investigar e explorar diferentes contextos problemáticos. Além disso, este documento refere que se deve tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, folhas de cálculo, aplicações interativas, etc...), nomeadamente para resolver problemas, explorar, investigar, comunicar e implementar algoritmos.

O papel da calculadora gráfica e as suas ferramentas tecnológicas integradas são fundamentais pois a sua apropriação e manipulação irá fazer toda a diferença na aquisição das competências referidas, que, nos dias de hoje, são essenciais a todos os cidadãos. De acordo com Burril (2008) e Consciência e Oliveira (2011), as calculadoras gráficas permitem aos alunos novas formas de exploração de conceitos matemáticos, sendo essa exploração mais profunda e significativa, uma vez que possibilita o estabelecimento de ligações entre as diversas representações (gráfica, numérica e algébrica). Uns anos mais tarde, Helena Rocha (2011, 2015), salienta a disponibilidade de articulação entre diferentes representações oferecida pela calculadora gráfica. Apesar dessa potencialidade, a autora refere que a calculadora gráfica revelou facilitar a articulação entre as representações algébricas e gráficas, mas, no que diz respeito à representação numérica, praticamente não é utilizada.

A verdade é que apesar da utilização da tecnologia estar presente nos documentos curriculares orientadores do ensino da Matemática, a sua verdadeira utilização dependerá da postura do professor e da sua relação com a tecnologia (Rocha, 2002, 2011). Já em 1995, Ponte disse que embora exista uma relação especial entre a Matemática, as calculadoras e os computadores, os professores passam por um processo demorado no que diz respeito a tirar partido da sua utilização e influenciam diretamente essa utilização. A velocidade significativa com que a tecnologia evolui implica um trabalho de atualização que veio acentuar os desafios para os professores. Para que a utilização da calculadora gráfica beneficie o processo de aprendizagem, em geral e desta disciplina em particular, no contexto de sala de aula, a utilização desta ferramenta tecnológica deve estar associada a confrontos entre novas situações, inovadoras e refletidas.

As calculadoras proporcionam um momento de mudança no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que, através de tarefas cuidadosamente desenhadas, os alunos poderão explorar as potencialidades desta máquina e assim desenvolver o pensamento matemático (Thomas & Lin, 2013). Para que os alunos façam uma utilização inteligente da calculadora gráfica, deve existir um cuidado na planificação das tarefas, dando liberdade de escolha ao aluno quanto ao seu uso para a resolução dessas mesmas tarefas (Burril et al., 2002). Tal como Burril e seus colaboradores, Seixas e Silva (2010) referem que o professor deve propor tarefas que fomentem uma utilização adequada da calculadora, que estimulem a curiosidade, o gosto pela investigação, e uma atitude positiva e inovadora face à Matemática.

O uso que os alunos inicialmente fazem da calculadora é, muitas vezes, procedimental e automático. É aí que o professor deve intervir para evitar que os alunos se tornem dependentes de uma utilização rotineira. O tempo ajudará a aumentar a confiança dos alunos em explorar as potencialidades desta ferramenta. Isto era algo que, já em 1993, Ruthven considerava um fator de grande influência, dado que a confiança se opõe ao medo e permite a origem de novas e promissoras utilizações. Laborde e colaboradores (2006) dizem que o conhecimento matemático e o conhecimento sobre a ferramenta estão intimamente relacionados. Mais ainda, afirmam que o desenvolvimento do conhecimento sobre a ferramenta pode envolver o desenvolvimento do conhecimento matemático.

2.2. A calculadora gráfica e as dificuldades associadas à sua utilização

A utilização da calculadora não é sinónimo de melhoria da aprendizagem (Kieran, 2007). Há muitos estudos (Rocha, 2002; Rosa, 2013; Viseu et al., 2022) que evidenciam a persistência de dificuldades de aprendizagem, apesar da utilização da calculadora gráfica. Qual é a verdadeira origem das dificuldades associadas à utilização da calculadora gráfica? Para Hector (1992), a resposta está na anterior experiência matemática dos alunos. De acordo com o autor, os alunos enfrentam questões importantes para a aprendizagem da Matemática, que antes seriam impossíveis visto que a utilização da calculadora não fazia parte do dia a dia escolar. Ou seja, a presença da calculadora gráfica veio proporcionar aos alunos o trabalho com situações matemáticas mais complexas, permitindo, contudo, que deem mais significado aos conceitos envolvidos.

Muitos foram os estudos que prestaram a sua atenção à análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos aquando da utilização da calculadora gráfica (e.g., Rocha, 2002; Rosa, 2013; Viseu et al., 2016; Viseu et al., 2022). Há cerca de 30 anos, já Hodges e Kissane (1994) referiam a falta de compreensão das diversas representações disponibilizadas pela máquina como uma das grandes dificuldades. Além disso, diziam que certos problemas de compreensão surgem de uma introdução incorreta da informação na calculadora. Tal é visível, por exemplo, na utilização inadequada de parênteses na introdução de uma expressão.

Mais tarde, Rocha (2002) afirmou que não existe legitimidade em esperar uma adequada interpretação da informação contida na calculadora, quando os alunos desprezam os valores da janela de visualização, ou quando recorrem repetitivamente a *zooms* sem perceberem a interferência destes nos valores da janela de visualização. Por exemplo, os alunos não percebem o efeito sobre o aspeto do gráfico e como este pode ser “deformado” quando existe uma alteração da janela de visualização e quando são realizados *zooms*. Tomamos consciência disso quando, depois da realização de um *zoom*, os alunos se questionam relativamente a não verem nada no ecrã. Consciência (2013) reforçou que é de extrema importância desenvolver com os alunos estratégias para a definição da janela de visualização da calculadora gráfica. Entre essas estratégias, a autora salientou a relevância da perceção inicial do aspeto gráfico de uma determinada função, da ordem de grandeza dos valores associados às variáveis e do próprio conhecimento de alguns aspetos da função, como por exemplo a sua monotonia.

A distinção entre os aspetos a ter em conta e os que devem ser desprezados, na informação obtida pela máquina, varia consoante o utilizador. Os alunos que apresentam alguma inexperiência, particularmente comum no início do estudo de um tópico, não apresentam ainda conhecimentos essenciais ao desenvolvimento do espírito crítico e, por isso, podem acabar por aceitar elementos apresentados de forma distorcida pela máquina. Com efeito, o gráfico de uma função que sofreu uma translação vertical pode parecer que sofreu uma translação horizontal. Por exemplo, numa função afim $f(x)=2x+1$, a translação vertical segundo o vetor $(0,1)$ pode ser confundida com uma translação horizontal para a esquerda (Figura 2). Isso demonstra também a dificuldade que os alunos têm em conjugar a informação obtida algebricamente com a presente na calculadora, de natureza gráfica. De acordo com Elia e colaboradores (2007), os alunos demonstram dificuldades em estabelecer conexões entre a interpretação de gráficos, construção de gráficos e o uso de simbologia. Por essa razão, Rocha (2016, 2020a) reconhece que a calculadora gráfica veio enfatizar a importância da conjugação de diferentes representações na aprendizagem.

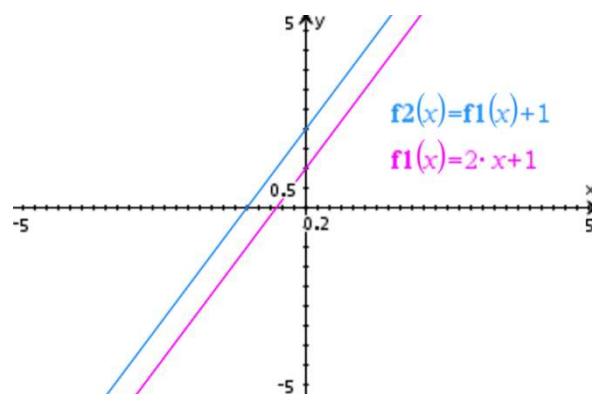


Figura 2 – Translação vertical de uma função afim

Os registos escritos dos alunos são uma fonte importante de aprendizagem. Segundo Ruthven (1996), o recurso à calculadora interfere muitas vezes com a qualidade destes registos. Tornam-se menos frequentes, pois a calculadora permite que os resultados obtidos sejam gravados. Por exemplo, os alunos recorrem ao menu gráfico, presente na calculadora, para procurar uma determinada resposta, mas não apresentam qualquer justificação pois não exibem, em papel, o esboço do gráfico que lhes permitiu chegar a uma conclusão (Campos et al., 2015). No entanto, segundo estes autores, tal tende a melhorar com as experiências dos alunos, dado que começam a reconhecer que uma boa utilização da calculadora gráfica implica o registo escrito. Para Ball e Stacey (2005), o registo escrito daquilo que se vê na calculadora gráfica promove

nos alunos a reflexão e o espírito crítico, uma vez que se trata de um momento de articulação entre o conhecimento prévio dos alunos com aquilo que observam na calculadora.

Para que o professor seja capaz de ajudar os seus alunos no combate a essas dificuldades, é preciso ter em atenção como é que as calculadoras gráficas são usadas e quais são os critérios para a utilização destas ferramentas tecnológicas (Rocha, 2002). Neste sentido, a autora recomenda a diversificação das propostas de trabalho, uma vez que estas contribuem para a origem de uma vasta rede de atuação, algo que contribui para uma melhor compreensão do funcionamento da máquina e para a transformação do uso das potencialidades da calculadora numa enriquecedora fonte de aprendizagem.

Com a evolução da tecnologia, os alunos têm ao seu dispor calculadoras cada vez mais poderosas, sofisticadas e com mais funcionalidades, que permitem um trabalho diferente em sala de aula e em tarefas mais exigentes. A par disso, surgem novas dificuldades, que não passam só pela adequação da janela de visualização ou pelos registos escritos, mas também pela articulação entre diferentes menus da calculadora. Por exemplo, na identificação de uma assíntota, os alunos não traçam a assíntota no seu esboço porque o menu gráfico da calculadora não lhes fornece essa informação; no entanto, poderiam fazê-lo, uma vez que têm acesso ao valor da assíntota na tabela. Isto demonstra que os alunos, ao estabelecerem conexões entre o menu gráfico e o menu tabela, não revelam capacidade crítica, no momento do registo escrito, para confrontar o comportamento dos valores presentes na tabela e o esboço gráfico obtido (Viseu et al., 2016).

Os alunos optam, preferencialmente, pela utilização do menu gráfico, o que se deve, em parte, ao tipo de trabalho e de questões habitualmente realizadas em aula. Com o aumento da confiança na exploração da calculadora e com a progressiva integração da calculadora no estudo de funções (Rocha, 2002), os alunos começam a estabelecer conexões entre o menu gráfico, menu tabela e menu estatística (Campos et al., 2015; Viseu et al., 2016). A articulação entre os diversos menus fornece, aos alunos, a oportunidade de completarem e esclarecerem a informação que retiram de cada um deles.

2.3. Modelos contínuos não lineares no programa de Matemática B

A Matemática “fornece instrumentos de compreensão mais profunda, facilitando a interpretação, seleção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado

sempre que necessário” (ME, 2018a, 2018b, p. 2). Em particular, de acordo com as *Aprendizagens Essenciais da Matemática B*, esta disciplina tem como um dos seus propósitos capacitar os alunos

para uma intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa. (ME, 2018a, 2018b, p. 2)

Este documento orientador do currículo apela à resolução de problemas de modelação, no contexto da vida real. Também Ponte (2005) defende a importância dessas tarefas no processo de construção das competências referidas anteriormente e de, tal como referem Baioa e Carreira (2019), muitas outras elencadas no PASEO (Martins et al., 2017). Antes de resolverem um problema de modelação, os alunos demonstram um nível de interesse inicial que poderá aumentar aquando do seu envolvimento na resolução desse problema, dado que podem sentir interesse pela situação trabalhada e perceber a utilidade da mesma no quotidiano. A longo prazo, a resolução de problemas de modelação que correspondam aos interesses dos alunos pode manter a curiosidade e aumentar as competências de modelação de cada aluno (Elfringhoff & Schukajlow, 2021). Os alunos devem, então, reunir um conjunto de “ferramentas” que os ajudarão a traçar estratégias de resolução de problemas, bem como, selecionar modelos que ajustem as situações apresentadas. Segundo Baioa e Carreira (2019), os problemas de modelação “exigem que os alunos se apropriem da situação, de forma a matematizá-la da maneira mais significativa e razoável para eles” (p. 11). De acordo com Carreira (2019), a modelação matemática no contexto escolar é a oportunidade, oferecida aos alunos, de experimentarem resolver problemas presentes no mundo real. E, para essa resolução, é necessário construir um modelo matemático que se adeque à realidade.

Segundo Borromeo Ferri (2018, citada em Carreira, 2019), a modelação matemática é uma atividade cognitivamente exigente para o aluno, uma vez que é necessário traçar um caminho a percorrer e uma estratégia de resolução para chegar a uma solução. Para esta autora, a resolução de problemas de modelação acarreta algumas dificuldades. Entre elas, realça a mobilização de conhecimento e de diversas capacidades, bem como o estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo real, isto é, aliar o conhecimento matemático e o extra-matemático. Apesar de olhar para

estas características como uma dificuldade, Borromeo Ferri acredita que são também uma fonte de oportunidade:

Os problemas de modelação são cognitivamente exigentes devido ao contexto e às transições entre a realidade e a matemática, mas, da mesma forma, também são auto-diferenciados. Isso significa que o mesmo problema de modelação pode ser trabalhado com alunos mais fortes e mais fracos (p. 42).

No atual programa de 11.º ano de Matemática B (ME, 2018b), o estudo do tópico *Modelos Contínuos Não Lineares* engloba o estudo de três modelos: Exponencial, Logarítmico e Logístico. A abordagem das funções transcendentais – exponenciais e logarítmicas – deve ser feita sob diferentes pontos de vista (gráfico, numérico e algébrico). Assim sendo, alguns dos objetivos deste programa passam pela capacitação dos alunos: (i) no reconhecimento de situações em que os modelos exponenciais são praticáveis; (ii) na utilização da tecnologia, em especial da calculadora gráfica, para interpretar e esboçar gráficos de funções; (iii) na descrição de regularidades, estabelecimento de comparações (semelhanças e diferenças); (iv) na resolução de problemas que envolvam equações simples usando exponenciais e logaritmos; e (v) no olhar atento sobre a função logística, reconhecendo-a como modelo de diversos fenómenos associados a estudos feitos noutras áreas. Com vista a uma aprendizagem significativa para os alunos, o programa atual de 11.º ano de Matemática B (ME, 2018b) apela ao recurso à tecnologia na resolução de problemas de modelação matemática, no contexto da vida real.

O uso de ferramentas (tecnologias, materiais manipuláveis, etc.) deve ser promovido na resolução problemas desafiantes (...) através do ensino experimental. Deste modo, as aplicações e a modelação matemática são (..) o tema central das AE. As aplicações, integradas num contexto significativo para os alunos são usadas como ponto de partida para cada novo assunto (...). (ME, 2018b, pp. 2-3)

A tecnologia apoia diferentes processos essenciais na modelação, como estimar, simular, experimentar, visualizar e calcular (Carreira, 2009; Greefrath & Vorhölter, 2015, citados em Carreira, 2019). A tecnologia permite o recurso a múltiplas representações que incentivam a interação entre o lado experimental e o lado teórico no processo de modelação matemática. Além disso, o uso da tecnologia em tarefas de modelação permite simplificar técnicas matemáticas mais avançadas, colocando a

resolução de problemas mais complexos e realistas ao alcance dos alunos (Carreira, 2019).

Na Matemática escolar, o conceito de função tem um lugar privilegiado (NCTM, 2007; ME, 2018a, 2018b; Viseu et al., 2019); essa relevância deve-se também ao aparecimento desse mesmo conceito em situações do quotidiano, ouvidas recorrentemente na comunicação social, como, por exemplo, a relação entre o tempo e número de infetados com um determinado vírus, ou a relação entre a magnitude de um sismo e a sua intensidade. Segundo Rocha (2016, 2020b), para promover a verdadeira compreensão das funções, é importante que os alunos consigam utilizar diversas representações (algébrica, gráfica, tabular e numérica) e transitar entre elas. Referindo-se a Duval (2017), Viseu e colaboradores (2022) reforçam que é útil, para os alunos, relacionar as várias representações das funções porque cada uma “delas destaca diferentes particularidades, que juntas em conjunto contribuem para a formulação do conceito global de função” (p. 197).

Entre várias possibilidades, a representação gráfica ganha mais notoriedade entre os alunos. Esta representação promove o raciocínio indutivo, dado que, através da observação de representações gráficas, os alunos podem formular conjecturas que serão a base para conceitos matemáticos formais (NCTM, 2007; Viseu et al., 2016). Para Consciência e Oliveira (2011), a representação gráfica é “fundamental para a compreensão de noções associadas ao conceito de função e a chave para a resolução de problemas” (p. 1). Estas autoras consideram que esta representação permite a resolução de problemas mesmo sem o conhecimento algébrico envolvido na sua resolução.

Um dos temas da Matemática escolar que suscita mais dificuldades aos alunos é, precisamente, o tema das funções (Rocha, 2011; Viseu et al., 2022). A representação gráfica é uma forte aliada do processo de aprendizagem (Rocha, 2015) e é acessível a todos devido à tecnologia que lhes está disponível nos dias de hoje. Contudo, a representação gráfica não está livre de dificuldades, dado que a interpretação e construção de gráficos, pelos alunos, constituem frequentes obstáculos (Rocha, 2020a). Além disso, a articulação entre esta e as restantes representações torna-se muitas vezes problemática (Elia et al., 2007; Viseu et al., 2022) uma vez que são, habitualmente, trabalhadas em separado. Esse hábito advém da visão que os alunos têm sobre as diversas representações, vendo-as distintamente e autonomamente e não como diferentes formas de representar o mesmo objeto. Para além das dificuldades mencionadas anteriormente, os alunos sentem dificuldade em decidir se a

representação de um certo gráfico será de maneira contínua ou discreta. Para Viseu e colaboradores (2022), as dificuldades referidas podem ser ultrapassadas com um trabalho habitual em sala de aula, que tira partido das representações gráficas, disponíveis e melhoradas com a tecnologia, para abordar os conceitos matemáticos associados.

3. Intervenção Pedagógica

Este capítulo apresenta uma descrição detalhada do contexto escolar em que se desenvolveu toda a intervenção pedagógica sobre a qual se desenrolou o presente estudo. É realizada, ainda, uma cuidadosa descrição da organização de toda a intervenção pedagógica, dos recursos e estratégias escolhidas, e das consequentes interações com os alunos. A par destas descrições surgem também pequenas reflexões relativamente às tarefas desenvolvidas e sobre algumas decisões tomadas.

A escola básica e secundária na qual decorreu a minha PES e, consequentemente, onde foi desenvolvido o estudo aqui relatado, localiza-se na área metropolitana do Porto, e abriga cerca de 56 turmas, entre o 7.º e o 12.º anos de escolaridade. Esta instituição de ensino está envolvida em diversos projetos, como o projeto MAIA (relacionado com as práticas pedagógicas das escolas e dos professores, este projeto tem o objetivo ajudar a melhorar as aprendizagens dos alunos), projeto MILAGE Aprender + (é através das potencialidades dos smartphones, tablets e computadores que este projeto tem como objetivo promover, num ambiente gamificado e com vídeos educacionais, uma aprendizagem ativa, a autonomia e a motivação nos alunos), projeto EduTransfer (tem por objetivo analisar a transferibilidade de práticas educativas promissoras entre instituições educativas de ensino regular e ensino profissional), Projeto Escola Digital (o objetivo é possibilitar a todos os alunos, professores e escolas um ambiente de ensino-aprendizagem digital), Projeto Erasmus + (é o programa europeu que apoia a educação, a formação, a juventude e o desporto, que incentiva a inclusão social, a participação dos jovens na vida democrática, a transição ecológica e digital), entre muitos outros.

No que diz respeito às condições da escola, tendo sido fundada na década de 80 do século passado, sofreu obras de reabilitação em 2017. Uma vez que se trata de uma escola que privilegia, desde o início da sua existência, a vertente artística, foram mantidos diversos registos da escola antiga, como, por exemplo, esculturas e azulejos, culminando, assim, numa agradável fusão entre o passado e o presente. Tendo em conta as condições atuais, sinto que são adequadas a proporcionar uma boa experiência de aprendizagem aos alunos, com a exceção do pavilhão das antigas oficinas. Este pavilhão não sofreu qualquer remodelação e oferece alguma resistência ao trabalho do professor. Por exemplo, o projetor multimédia de qualquer das salas deste pavilhão sobrepõe-se ao único quadro da sala de aula, tornando a gestão do quadro algo complexa.

A presente investigação foi realizada numa turma do 11.º ano de escolaridade do curso Científico-Humanístico de Artes Visuais. É importante recordar que a disciplina de Matemática B é de carácter opcional e, por essa razão, apesar da turma ser constituída por 28 alunos, apenas sete alunos, dos quais cinco são raparigas e dois são rapazes, e cujas idades estavam compreendidas entre os 15 e os 17 anos no início do ano letivo, estavam inscritos na disciplina em questão.

No que diz respeito ao comportamento da turma, eram alunos respeitosos uns com os outros e com os professores, apontando-se apenas a falta de hábitos de estudo autónomo, em todas as disciplinas, por parte da maioria dos alunos. Como se tratava de uma turma pequena, era facilmente visível, por exemplo através da qualidade da participação em aula e da realização de trabalhos em pares ou grupo, alguma heterogeneidade entre os alunos relativamente aos ritmos de aprendizagem.

Como já foi referido, esta intervenção pedagógica teve como base curricular a aprendizagem da Matemática apoiada numa utilização adequada das potencialidades da calculadora gráfica. A importância da utilização deste recurso tecnológico já foi referida no capítulo anterior e está presente nos principais documentos orientadores do currículo à data de realização deste estudo: PASEO (Martins et al., 2017) e *Aprendizagens Essenciais do 10.º e 11º anos de Matemática B* (ME, 2018a, 2018b).

É importante reforçar que o meu trabalho de investigação assentou sobre um conjunto de aulas, lecionadas por mim, relativas aos seguintes tópicos: função exponencial, função logarítmica e modelo logístico. O orientador cooperante promoveu, sempre que possível, ao longo do primeiro semestre de 2022/2023, a utilização da calculadora gráfica na resolução de diferentes tarefas e, portanto, o uso desta ferramenta tecnológica tornou-se familiar aos alunos. Não foi minha intenção dar à calculadora gráfica um papel de destaque especial no processo de ensino-aprendizagem dos modelos contínuos não lineares – até porque a sua utilização era usual praticamente em todas as aulas, mas sim compreender como os alunos utilizavam a calculadora gráfica e recorriam às suas potencialidades na realização de tarefas matemáticas.

Deste modo, para a realização deste trabalho, não foi feita qualquer atividade fora do percurso curricular dos alunos inicialmente previsto. Pelo contrário, foi preparada uma sequência informada de tarefas, ligadas a contextos reais, onde foi privilegiado o uso da calculadora gráfica para a sua resolução, tal como era habitual.

Esta intervenção pedagógica teve início no dia 16 de fevereiro do ano 2023 com a introdução ao número de Neper. Ao longo de dez aulas (Figura 3), com duração de 100 minutos cada uma, foram propostas aos alunos cinco tarefas (Anexos 1 a 5).

Tarefa	Data de Realização
Tarefa 1 Juros Compostos – A Oitava Maravilha do Mundo	16/02/2023
Tarefa 2 Mosca da Fruta	07/03/2023
Tarefa 3 Ingrediente Especial	14/03/2023
Tarefa 4 Salário Mínimo	16/03/2023
Tarefa 5 Macacos de Nariz Arrebitado	17/03/2023

Figura 3 – Calendário das Tarefas

É importante perceber que este conjunto de aulas, tal como as restantes aulas ao longo do ano letivo, passaram por alguns momentos de exposição de conteúdos, mas, tanto quanto possível, foi privilegiado um ambiente de ensino exploratório (Canavarro et al., 2014; Oliveira et al., 2013; Ponte, 2005). Assim, normalmente, as aulas eram organizadas em três fases, tal como foi proposto por Stein e seus colaboradores (2008): (i) lançamento da tarefa; (ii) exploração pelos alunos; (iii) discussão coletiva e sintetização. A iteratividade desta prática de ensino não depende apenas do tipo de tarefa matemática e dos seus objetivos, nem da anterior experiência dos alunos, mas sobretudo da forma como os alunos “vão interagindo com a professora e entre eles nos vários momentos da aula” (Oliveira et al., 2013, p. 49).

Na abordagem exploratória, os alunos são envolvidos nas tarefas propostas e “assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução. São chamados a apresentar e justificar os seus raciocínios” (Ponte et al., 2020, p. 10). Por conseguinte, na minha intervenção pedagógica, após a apresentação da tarefa aos alunos, em que se pretendia que se apropriassem dos respetivos contextos e dos seus objetivos, os alunos trabalhavam autonomamente, de modo individual ou em pares, conforme o caso, e depois discutiam em coletivo os resultados a que tinham chegado. Por fim, era feita uma sistematização do conhecimento novo ou dos processos matemáticos realizados, na qual os alunos participavam, embora fosse eu, como docente, quem conduzia esta sistematização. Esta dinâmica de trabalho vai ao encontro da criação de um ambiente propício à comunicação, participação e reflexão por parte

dos alunos, dando ênfase aos momentos de discussão coletiva (Canavarro et al., 2014; Ponte, 2005; Ponte et al., 2020). O trabalho realizado pelos alunos foi avaliado com propósitos formativos, tendo sido recolhidas todas as produções escritas dos alunos e registadas, de forma sistemática, num diário de bordo notas de campo do desempenho dos alunos focadas no seu envolvimento nas tarefas e nas discussões coletivas.

A disposição dos alunos na sala de aula para a resolução das tarefas dependeu essencialmente do grau de desafio e do objetivo de aprendizagem. Com exceção de uma tarefa aplicada individualmente (Anexo 5), as outras foram pensadas para que fosse privilegiado o trabalho colaborativo. Os alunos foram dispostos em pares, sendo que existiu sempre um grupo de três elementos, uma vez que o número de alunos da turma era ímpar. Estes momentos de trabalho colaborativo foram cruciais na estimulação da troca de ideias entre pares e com toda a turma, algo que, no início do ano letivo, se tinha mostrado vir a ser uma batalha a enfrentar, pois os alunos estavam habituados a trabalho individual (os alunos desta turma não tinham sido alunos do orientador cooperante no 10.º ano pelo que não estavam habituados à sua forma de trabalhar em sala de aula). Após a resolução das tarefas pelos alunos, houve sempre espaço para um momento de discussão coletiva em que se apostou no feedback oral, dado primeiramente pelos colegas e depois por mim. Esta fase da aula exploratória permitiu, em particular, a exposição de diferentes estratégias, alargando o leque das potencialidades tecnológicas da calculadora gráfica que foram escolhidas e exploradas pelos alunos.

Quanto à escolha das tarefas, esclareço desde já os critérios utilizados. A escolha de todas as tarefas não se baseou apenas no espaço temporal sobre o qual recolhi dados para elaborar o meu relatório de estágio (RE). Realço que os critérios utilizados presidiram à escolha de tarefas que seguissem as orientações das AE (ME, 2018b), e que não fugissem ao normal funcionamento das aulas, nem colocassem em causa o planeamento feito no início do semestre. Assim, neste capítulo, apresento a escolha das cinco tarefas em que se baseou a elaboração do presente estudo e que, posteriormente, contribuiu para a realização deste RE.

Primeiramente, cada uma das tarefas abordaria um tema matemático presente no currículo da disciplina. Foram selecionadas tarefas que estavam associadas a situações de modelação e que simultaneamente privilegiavam a utilização da calculadora gráfica e a explicação do processo de resolução: a primeira tarefa aborda uma situação de matemática financeira e revela ao aluno a importância da tomada de

escolhas conscientes; a segunda tarefa tem como desafio a articulação entre a representação gráfica e a algébrica; a terceira tarefa dedica-se à interpretação da informação presente em tabelas; a quarta tarefa enuncia uma situação do quotidiano levando o aluno a ser capaz de fazer previsões; e a quinta tarefa privilegia a interpretação gráfica, a expressão escrita e a capacidade de comunicação. Em todas as tarefas foi tido em conta um leque de possibilidades para a resolução das questões propostas, bem como para a explicação das mesmas.

Por fim, foi necessário, desde cedo, tentar combater a dificuldade de interpretação de enunciados, algo que tínhamos detetado desde cedo no ano letivo. Para isso, existia um primeiro momento da aula em que os alunos se focavam na apropriação da tarefa, liam o enunciado, recolhiam dados relevantes, liam as questões e familiarizavam-se com a linguagem natural e matemática que surgia no enunciado. Em algumas situações, havia necessidade de esclarecer dúvidas quanto ao significado de certas palavras ou discutir algum assunto que fosse relevante para a resolução da tarefa em questão. Tal foi o caso da tarefa 1 (Juros Compostos) que veio revelar a falta de literacia financeira dos alunos. Esta tarefa exigiu uma conversa inicial sobre percentagens e uma explicação sobre a possibilidade de rentabilizar o dinheiro num banco através dos juros e de como era benéfico para o banco a criação dessas contas.

Relativamente à escolha da primeira tarefa (Anexo 1), aplicada a 16 de fevereiro, consultei a parte 2 do manual adotado pela escola (Costa & Rodrigues, 2016) e inspirei-me numa das tarefas lá presente (Tarefa 3, p. 103). Foi necessário proceder a algumas adaptações para que os alunos retirassem um maior proveito das potencialidades da calculadora gráfica. Além disso, como um dos objetivos a explorar com esta tarefa era a capacidade de interpretação de gráficos, mostrando aos alunos que essa análise consciente é importante para a tomada de decisões, essas alterações também se mostraram ser cruciais. Assim, removi algumas questões da tarefa original (questão 4 e 5) e substituí-as por “Escreve uma expressão que permita conhecer o capital C ao fim de n anos ($n \in \mathbb{N}$) em cada um dos bancos. Faz o esboço dos gráficos correspondentes a cada expressão e retira as tuas conclusões” (Figura 4).

TAREFA 3

O senhor Fonseca pretende fazer um depósito bancário de 20 000 € durante quatro anos. Para isso, dirige-se a um banco A que lhe oferece uma taxa de juro anual de 5% com capitalizações anuais dos juros.

Por outro lado, uma outra entidade bancária B oferece uma taxa de juro anual de 4,95%, com capitalizações trimestrais, e um terceiro banco C propõe 4,9% de taxa de juro anual, com capitalizações diárias.

- Calcula o capital que terá o senhor Fonseca, caso opte pelo banco A, quando tiver decorrido:
 - 1.1. um ano;
 - 1.2. os quatro anos previstos.
- Admitindo que o depósito é efetuado no banco A, escreve uma expressão que permita conhecer o capital C ao fim de t anos.
- Qual seria o rendimento do senhor Fonseca se efetuasse o depósito no banco C durante mais anos?
- Supõe que qualquer dos bancos ofereça capitalizações contínuas com as taxas indicadas. Seria possível o senhor Fonseca obter, ao fim de um ano, 22 000 €? Indica o montante que se poderia atingir em cada banco com este tipo de capitalização.
- Supõe que o senhor Fonseca te pediu conselho sobre o banco a escolher. Atendendo às propostas de cada um deles, analisa a rentabilidade ao fim de um ano através do preenchimento da seguinte tabela e diz que conselho darias ao senhor Fonseca.

Banco	Taxa de juro anual	Capital ao fim de um ano
A	5%	
B	4,95%	
C	4,9%	

6. A D. Teresa pretende depositar a mesma quantia, mas apenas durante 1 ano e 4 meses. Aconselhas a D. Teresa a fazer o depósito no mesmo banco que foi aconselhado em 5.7?

Numa composição matemática, fundamenta a resposta à questão colocada, tendo em consideração as seguintes aspetos:

- período de tempo considerado em cada um dos bancos para o cálculo de juros;
- rendimento obtido em cada uma das três possíveis opções.

Juros Compostos - A Ditava Maravilha do Mundo

Vivemos tempos difíceis e é essencial saber fazer as melhores escolhas. A senhora Camila recebeu uma herança de 45 000 € e pretende rentabilizar este dinheiro. Para isso quer depositar esse dinheiro num banco, com o objetivo de obter juros.

Consultou alguns bancos, A, B e C, onde foi informado que ofereciam juros compostos à taxa anual nominal de 4,6%, 5% e 4,8% respetivamente, mas com diferentes capitalizações (nº de vezes que os juros são acrescentados ao capital ao longo do ano).

Banco	Taxa de juro anual	Capitalizações
A	4,6%	Anuais
B	5%	Semestrais
C	4,8%	Mensais

- Se a senhora Camila quiser investir o seu dinheiro apenas durante um ano, qual deverá ser o banco que deve escolher?
- E se o investimento fosse feito por dois anos?
- Escreve uma expressão que permita conhecer o capital C ao fim de n anos ($n \in \mathbb{N}$) em cada um dos bancos. Faz o esboço dos gráficos correspondentes a cada expressão e retira as tuas conclusões.
- Ao fim de 1 ano e 3 meses quer levantar todo o seu dinheiro para comprar um carro que custa 47600€. Nesta situação aconselhas a senhora Camila a fazer o depósito inicial em que banco?

Figura 4 – Adaptação da primeira tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Um outro aspeto considerado na escolha desta primeira tarefa foi a possibilidade de existirem diferentes métodos de resolução. Os métodos identificados previamente foram o “método do cálculo exaustivo”, que permite a análise caso a caso, ou então o método de generalização da situação, que depende da interpretação do anterior e que será, posteriormente, útil para o esboço gráfico da expressão que traduz a situação.

Esta tarefa foi pensada de maneira a tornar possível a sua rentabilização para o aparecimento do número de Neper, uma vez que se pretendia dar início a um novo tema.

Relativamente à segunda tarefa (Anexo 2), consultei o artigo *Uso da calculadora gráfica na exploração de modelos contínuos não lineares* (Viseu et al., 2016), que contém uma variedade de tarefas, a maior parte delas recorrendo à calculadora gráfica. Tendo isto em consideração, a tarefa escolhida, aplicada a 7 de março, envolve a resolução de um problema a par do estudo da função logarítmica como inversa da função exponencial. Esta tarefa está também presente no manual (Costa & Rodrigues, 2016, p. 107) adotado pela escola. Do mesmo modo que a tarefa anterior também fez algumas modificações no enunciado. Embora a essência da tarefa se mantenha, achei pertinente tornar o enunciado da tarefa mais familiar ao dia a dia de alunos e, por isso, alterei o contexto do problema, a expressão do modelo em questão e as questões associadas (Figura 5). Além disso, optei por eliminar o pedido de utilização de dois

processos que constava na tarefa original: representações gráficas e logaritmos. Esta opção foi tomada uma vez que tinha como primeiro objetivo perceber qual dos processos os alunos iriam escolher. Só depois de concluída a tarefa é que pedi para resolverem por um processo diferente do inicialmente escolhido, ou seja, quem utilizou representações gráficas iria agora recorrer aos logaritmos e vice-versa. Agora o objetivo seria perceber a articulação que os alunos fazem entre as duas abordagens.

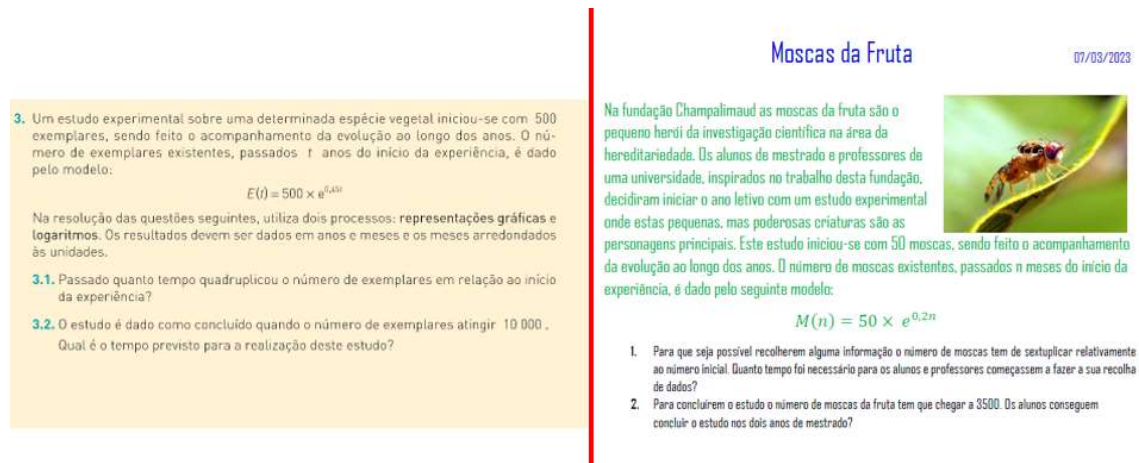


Figura 5 – Adaptação da segunda tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Quanto aos possíveis métodos de resolução, foram já referidos dois. Porém, é possível dar resposta à segunda questão sem recorrer a representações gráficas e logaritmos. Para tal, basta ter em consideração o comportamento crescente da função e o resultado obtido ao substituir na expressão o n pelo número de meses correspondentes.

No que toca à escolha da terceira tarefa (Anexo 3), aplicada a 14 março, a fonte de inspiração surgiu novamente de um manual (Neves et al., 2017). A tarefa escolhida (Exemplo 18, p. 183) sofreu, à semelhança das tarefas anteriores, algumas alterações. Foi feita uma ligeira adaptação do enunciado e a linguagem presente nas questões foi ajustada. O motivo destes ajustes assentou na criação de uma tarefa que permitisse uma maior abertura na resolução das questões e que revelasse a importância da interpretação (Figura 6).

No que diz respeito aos possíveis métodos de resolução, foram previstos dois. Em primeiro lugar, um aluno poderia recorrer às representações gráficas da calculadora, bem como utilizá-la para preencher a respetiva tabela. Em segundo lugar, aliados ao papel e lápis, os alunos poderiam traduzir os dados e as suas relações em equações. É de salientar que, na questão 3, os alunos poderiam, através de um método de tentativa e erro, encontrar o valor pedido de acordo com as condições enunciadas.

Exemplo 18 Ervas aromáticas

No centro de um canteiro circular com um metro de raio plantou-se um círculo de ervas aromáticas. À medida que se reproduzem vão mantendo a forma circular. Estima-se que a área, em m^2 , coberta pelas ervas aromáticas t semanas após a primeira observação é dada por:

$$A(t) = 0,24e^{0,3t}$$

18.1. Calcule $A(0)$ e interprete o resultado obtido.

18.2. Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante, arredondado às centésimas, e interprete o valor obtido.

18.3. Determine x , com aproximação às décimas, tal que $A(t+x) = 2A(t)$ e interprete o resultado obtido.

18.4. Ao fim de quanto tempo o canteiro ficará totalmente coberto pelas ervas aromáticas?

14/03/2023

Ingrediente Especial

Um dos ingredientes surpresa que traz harmonia a qualquer prato são as ervas aromáticas.

Um restaurante decidiu aproveitar o canteiro circular (com um metro de raio) em frente à sua entrada, para plantar no centro do canteiro um pequeno círculo de ervas aromáticas. À medida que se reproduzem, esse pequeno círculo vai alargar-se, mantendo a forma circular.

A área do canteiro, em m^2 , coberto pelas ervas aromáticas t semanas após a plantação é dada por:

$$A(t) = 0,24e^{0,3t}$$

- Qual era o espaço ocupado pelas ervas aromáticas no dia da sua plantação?
- Preenche a tabela seguinte, considerando os valores da última coluna com duas casas decimais.

t	A(t)	$\frac{A(t+1)}{A(t)}$
0		
1		
2		
3		
4		
...	...	...
x		

☐ Que podes concluir com os valores observados na última coluna?

- De quanto em quanto tempo a área do canteiro ocupada pelas ervas aromáticas duplica?
- Quanto tempo irá demorar para que o canteiro fique totalmente cheio de ervas aromáticas? (apresenta o resultado em semanas e dias)

Figura 6 – Adaptação da terceira tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Quase a terminar, a penúltima tarefa (Anexo 4) foi aplicada a 16 de março. Teve novamente como inspiração uma tarefa proposta no manual adotado pela escola (Costa & Rodrigues, 2016, Proposta 5, p. 134). As alterações feitas na presente tarefa consistiram na atualização dos dados presentes na tabela. Além disso, foi acrescentada uma questão extra (questão 3) com o intuito de promover nos alunos a capacidade de fazer conjecturas, bem como comprová-las ou refutá-las. O desenvolvimento desta tarefa estava associado, inevitavelmente, à utilização da calculadora uma vez que, para serem feitas previsões, é necessário encontrar modelos que ajustem as situações descritas (Figura 7).

Relativamente aos métodos de resolução, foi previsto para todas as questões, à exceção das últimas duas, a utilização de representações gráficas, sendo que, nas questões um e dois, era necessário articular diferentes menus da calculadora gráfica, menu tabela e menu gráfico. Para as duas últimas alíneas da questão final, foram previstos dois métodos de resolução; estas questões podem ser resolvidas com recurso a uma representação gráfica, mas também existe a possibilidade de traduzir a situação descrita numa equação que será, depois, resolvida analiticamente.

PROPOSTA 3 A evolução do salário mínimo em Portugal, desde 2002, é apresentada na tabela abaixo.

Ano	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Salário mínimo (em €)	348	356,6	365,6	374,7	385,9	403	426	450	475	485

Fonte: DGERT – Direção-Geral do Emprego e das Relações de Trabalho

5.1. Recorrendo à regressão linear, encontra um modelo do tipo $S = at + b$, em que S representa o salário mínimo, em euros, e t é expresso em anos, em que $t = 0$ corresponde a 2002. (Utiliza valores para a e b arredondados às unidades.)

5.2. Com base no modelo encontrado em 5.1., prevê o valor do salário mínimo em 2018.

5.3. Admite que, num país designado por "Utopia", o salário mínimo S , desde 2002 ($t = 0$), é dado, em euros, pelo seguinte modelo: $S = 160 \times 1,15^t$.

a) No ano 2006, qual era a diferença dos salários mínimos em Portugal e no país "Utopia"?

b) A partir de que ano o salário mínimo em "Utopia" passou a ser superior ao salário mínimo praticado em Portugal?

c) Representa a evolução do salário mínimo praticado em "Utopia" por um modelo do tipo $S = 160 \times e^{kt}$, apresentando para k um valor arredondado com quatro casas decimais.

Salário Mínimo 16/03/2023

Podes ver, na tabela abaixo, a evolução do salário mínimo em Portugal, desde 2015.

Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Salário mínimo (em €)	505	530	557	580	600	635	665	705	760

Fonte: DGERT – Direção-Geral do Emprego e das Relações de Trabalho

1. Encontra um modelo do tipo $S = at + b$, em que S representa o salário mínimo, em euros, e t é expresso em anos, em que $t = 0$ corresponde a 2015. (utiliza valores para a e b arredondados às unidades)

2. Faz uma previsão para o valor do salário mínimo em 2030.

3. Podes ver agora, na tabela que se segue a evolução do salário mínimo na Polónia, desde 2015

Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Salário mínimo (em €)	409.5	433.9	453.5	502.8	523.1	610.8	644.1	654.8	745.6

Estabelece uma conjectura para a comparação entre o comportamento do salário mínimo nos dois países. Depois procura comprovar ou refutar a tua conjectura. Para tal:

- Responde às questões 1 e 2 utilizando os dados deste novo país;
- Apresenta os gráficos necessários para poderes retirar as tuas conclusões.

4. Admite que, num país imaginário, a evolução do salário mínimo segue um modelo bastante diferente. Lá o salário mínimo S , desde 2015 ($t = 0$), é dado em euros, pelo seguinte modelo:

$$S = 180 \times 1,3^t$$

4.1. Em 2020 qual era a diferença entre o salário mínimo em Portugal e neste novo país?

4.2. A partir de que ano o salário mínimo neste país passou a ser superior ao salário mínimo em Portugal?

4.3. Em termos monetários, em que país compensava viver?

4.4. Neste país a partir de que ano é que o salário mínimo supera os 2400€?

4.5. Representa a evolução do salário mínimo praticado neste país por um modelo do tipo

$$S = 180 \times e^{kt}$$

(utiliza o valor arredondado a quatro casas decimais, para o valor de k)

Figura 7 – Adaptação da quarta tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Por fim, a última tarefa (Anexo 5) foi apresentada na aplicação Milage Aprender +¹, a 17 de março. A sua realização foi feita como trabalho de casa, sendo que foi dado o espaço de dois dias para submissão das imagens de cada resolução. Mais uma vez, inspirada numa tarefa presente no texto de Viseu e colaboradores (2016). Para que pudesse ser colocada na aplicação Milage Aprender+ esta tarefa sofreu modificações essencialmente a nível de contextualização da situação e, a par disso, as expressões de cada opção foram também alteradas (Figura 8).

Esta tarefa surgiu como introdução a um novo tema, a função logística. Foi uma tarefa pensada para que os alunos verbalizassem, apresentassem, registassem e justificassem os seus raciocínios relativamente à informação retirada dos gráficos apresentados nas calculadoras gráficas. Quanto aos métodos de resolução, foi identificado, de antemão, o método que se concentra na interpretação das diferentes representações gráficas. A comparação entre o comportamento de cada gráfico é essencial, e a escolha do melhor modelo, de acordo com os dados do enunciado, torna-se imprescindível na resolução desta tarefa.

¹ https://milagegeral.wixsite.com/apresentacaomilage/projects-8-1?page_id=1181

No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural. As medidas de proteção fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, não permitindo que este valor seja ultrapassado.

Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início das medidas de proteção:

(A) $\frac{1000}{1+e^{-0.5t}}$ (B) $\frac{1000}{1+1.5e^{-0.5t}}$ (C) $\frac{1200}{1+2e^{-t}}$ (D) $1000 - \frac{600(t^3-1)}{e^t}$

Qual é a expressão correta? Numa composição, com cerca de dez linhas, explica as razões que te levam a rejeitar as outras três expressões (apresenta três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Macacos de Nariz Arrebitado

17/03/2023

Em 2000 uma reserva natural no Tibete albergava 200 macacos de nariz arrebitado. As medidas de proteção fizeram com que esse número aumentasse continuamente. Os recursos desse parque permitem que o número de macacos cresça até bastante perto de oito centenas, não permitindo que este valor seja ultrapassado.



Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função M que dá o número aproximado de macacos existentes na reserva natural, t anos após o início das medidas de proteção:

A	$\frac{800}{1+e^{-0.5t}}$	B	$\frac{800}{1+3e^{-0.5t}}$	C	$\frac{1000}{1+4e^{-t}}$	D	$800 - \frac{400(t^3-1)}{e^t}$
---	---------------------------	---	----------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------------

Dual é a expressão correta? Numa pequena composição, explica as razões que te levam a rejeitar as outras três expressões (apresenta três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Figura 8 – Adaptação da quinta tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Devo acrescentar que, devido aos diferentes ritmos de trabalho de cada aluno, dava a oportunidade aos alunos que demonstravam estar com mais dificuldades de realizarem a tarefa ao seu ritmo, contando mais com a minha presença e apoio. Nessas situações, os restantes alunos colocavam mãos à obra na realização de mais tarefas do manual, tarefas essas previamente selecionadas.

Embora nenhum dos seguintes casos tivesse acontecido, houve preocupação, da minha parte, em criar oportunidades de resolução das diversas tarefas. Se, porventura, eu soubesse de antemão que algum aluno não iria estar presente no dia de resolução de uma das tarefas, existia a possibilidade de ajustar o plano da aula em questão. Caso não fosse esse o caso, a tarefa seria enviada por email ou colocada no Microsoft Teams² para que fosse resolvida, e o aluno seria convidado a expor as suas ideias na aula seguinte.

² Plataforma eletrónica adotada pela escola para comunicação virtual

4. Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

O presente capítulo é dedicado à exposição das decisões tomadas, e respetivas justificações, em relação à escolha dos dados a recolher, bem como aos métodos e procedimentos de recolha dos mesmos. Ainda neste capítulo são descritos todos os pormenores relativos a questões de natureza ética que surgiram no decorrer desta investigação.

Atendendo à natureza das questões envolvidas neste estudo, adotei uma abordagem qualitativa, de carácter interpretativo com fim de conhecer e compreender de que modo os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam a calculadora gráfica e as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática B (Bodgan & Biklen, 1994). Uma vez que a metodologia adotada causa, segundo Vale (2004), uma imprevisibilidade nos resultados, é importante conduzir toda a investigação com base em seis processos: “observar, registar, analisar, refletir, dialogar e repensar” (p. 175). Tomei ainda a opção da realização de uma espécie de estudo de caso (uma vez que a recolha de dados não foi longa nem tão profunda como deveria ser num estudo de caso), envolvendo três alunos da turma, apresentada no capítulo anterior, que dispunham de calculadora gráfica (modelo *TI-nspire CX* ou *TI-nspire CX II-T*, principais modelos usados na escola e ambos da Texas Instruments): o Tulipa, a Orquídea e a Peónia. É de salientar que os nomes de todos alunos referidos neste trabalho são fictícios.

Apesar de todos os alunos da turma se sentirem familiarizados com a presença da calculadora gráfica nas aulas, devido ao breve contacto estabelecido no ano anterior, foi perceptível que esse contacto não terá sido o suficiente para se sentirem confortáveis em explorar as potencialidades que esta máquina oferece. Por essa razão, foi mais acessível identificar as dificuldades perante a sua utilização.

A intervenção pedagógica, que serviu de pilar principal ao estudo realizado, e a recolha dos dados decorreram em ambiente de sala de aula. Daí que as situações analisadas ocorreram, naturalmente, durante o normal funcionamento das aulas. Sempre com o objetivo de responder às questões de investigação deste estudo, a interpretação dos dados recolhidos foi feita por mim, que desempenhei o papel de professora-investigadora. Assim, dois dos seis processos, observar e registar, referidos anteriormente, iniciaram a condução de toda a investigação.

Foi utilizado um conjunto diversificado de instrumentos de recolha de dados, para que fosse possível reunir informação de qualidade para o presente estudo. Deste modo, recorreu-se à observação participante registada em notas de campo, à recolha das produções escritas de todos os alunos e a duas entrevistas individuais: uma “entrevista diagnóstico” e uma “entrevista ação”, respetivamente antes e após a intervenção pedagógica. As entrevistas foram gravadas em áudio e, posteriormente, foram transcritas. Deste modo, mais um dos processos, dialogar, viu-se a ser cumprido. Mais à frente, ainda neste capítulo, cada um destes instrumentos será explicado com detalhe. Por fim, o analisar, refletir e repensar associam-se à análise dos dados, que será explicada detalhadamente no próximo capítulo.

Dado que acompanhava apenas uma turma do ensino secundário na minha PES, e tendo em conta a natureza do tema escolhido, a primeira grande escolha a ser tomada, a escolha da turma em que iria recolher dados estava naturalmente feita: a minha turma de 11.º ano de Matemática B, do curso de Artes Visuais da escola onde realizei a PES.

A 25 de janeiro de 2023 iniciou-se a de recolha de dados com a realização da primeira entrevista individual, “entrevista diagnóstico”. Para a realização das gravações em áudio, essenciais neste processo, foi necessário requerer, antecipadamente, autorização dos encarregados de educação. Em conjunto com o meu orientador cooperante e a minha colega de estágio, elaborei um documento para solicitar aos encarregados de educação, o consentimento informado para as gravações áudio das entrevistas (Anexo 6).

Houve uma preocupação acrescida em enunciar três princípios considerados essenciais para a realização desta recolha de dados: (i) a garantia do anonimato do participante e da confidencialidade dos dados; (ii) a não interferência da participação com a avaliação do aluno na disciplina de Matemática B; e (iii) a voluntariedade dessa participação. A par disso, foi salientada a ligação entre o projeto e a Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), bem como foi explicitada toda a disponibilidade por parte da minha orientadora da FCUP para esclarecer qualquer dúvida e para deixar claro os objetivos da investigação. Depois de finalizado e aprovado pela orientadora da FCUP, o documento foi entregue aos alunos da turma, que, de imediato, manifestaram estar disponíveis para participar no estudo. Porém, como a idade de todos os participantes era inferior a 18 anos, a assinatura da autorização escrita foi requerida aos encarregados de educação. É importante referir que, dos sete alunos da turma, apenas um não entregou a devida autorização assinada, e, por essa

razão além de não ter participado nas entrevistas, não será mencionado no presente relatório.

Com o intuito de conhecer e compreender de que modo os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam a calculadora gráfica e as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática B, e mais tarde servir de critério de seleção dos alunos sobre os quais este estudo incidiria, foi realizada, a todos os alunos devidamente autorizados, a “entrevista diagnóstico”, uma entrevista individual semiestruturada. Esta primeira entrevista realizou-se de modo online, com auxílio da plataforma Zoom, no período de paragem letiva entre o primeiro semestre e o segundo semestre de 2022/2023. Todas as entrevistas tiveram uma duração média de 12 minutos, e foram registadas em áudio com recurso ao computador, uma vez que a plataforma online escolhida para realizar essas entrevistas permitia fazer, facilmente, essa gravação.

A relevância desta primeira entrevista surge da necessidade de conhecer a opinião dos alunos sobre aspetos relacionados com o estudo, antes de iniciarem o estudo de um tema que implica uma maior utilização da calculadora gráfica. Para isso, com auxílio de um guião (Anexo 7), foram colocadas questões que abordavam todos os tópicos abrangidos pelas questões de investigação. De acordo com Amado (2014), a planificação de um guião é essencial, pois possibilita o registo, numa ordem lógica para o entrevistador, daquilo que se pretende recolher. Alerto, ainda, para a organização do guião numa tabela com duas colunas, sendo a coluna da esquerda uma listagem das questões de maior relevo a serem colocadas no decorrer da entrevista, e a coluna da direita orientadora das questões anteriores, que procuram responder aos objetivos deste estudo. É importante referir que este guião, apesar de orientar a conversa com foco em tais objetivos, em nada condicionou a fluidez de todas as entrevistas, o que reflete o carácter semiestruturado das entrevistas realizadas.

Já no segundo semestre, a partir do momento em que as aulas incidiram no estudo do novo tema, Modelos Contínuos Não Lineares, iniciei a minha intervenção pedagógica (descrita no capítulo anterior). Ter em mente o objetivo geral da investigação, e perceber como os alunos lidavam com a calculadora gráfica em diferentes fases do processo de ensino-aprendizagem permitiram-me planificar todas as aulas. Sendo assim, em todas as aulas tive em consideração a importância de observar os alunos envolvidos em tarefas que apelavam, sem sombra de dúvidas, ao recurso da calculadora gráfica.

Tendo em conta a natureza escrita dos dados a serem recolhidos aquando da resolução das tarefas propostas, decidi recolher e digitalizar todas as produções escritas

dos alunos, que refletem o uso da calculadora gráfica. Além disso, numa das tarefas (Tarefa 4), foi fotografado o trabalho realizado, em sala de aula, com a calculadora gráfica. Quando desenhei o meu projeto de investigação, conducente a este RE, não previ o registo fotográfico como recolha de dados. Após novas orientações por parte da orientadora da FCUP, optei por completar a recolha de dados com fotografias que ilustravam a verdadeira utilização da calculadora gráfica pelos alunos. Contudo, apenas existiu esse registo numa das tarefas. Seria de esperar que na última tarefa (Tarefa 5), esse registo fotográfico permanecesse; porém, como foi realizada como trabalho de casa, essa recolha fotográfica tornou-se impossível.

Por fim, tenho de salientar todas as notas de observação que, tal como o nome indica, resultaram do olhar atento sobre o trabalho feito pelos alunos no decorrer da resolução das tarefas. Nelas, estão presentes pequenos excertos de conversas com os alunos, bem como registos de pensamentos em voz alta realizados pelos alunos, de interações entre colegas, e de explicações que foram feitas no momento de discussão coletiva de cada tarefa. A tomada de notas ocorreu, essencialmente enquanto os alunos estavam a trabalhar.

Concluída a intervenção pedagógica, decidi investigar de forma mais detalhada a utilização que os alunos faziam da calculadora gráfica. Esta intenção originou, a 28 de março de 2023, a realização, em modo presencial, da “entrevista ação” com cada um dos alunos da turma. As entrevistas tiveram uma duração média de 15 minutos e foram gravadas em áudio. Nesta entrevista foi proposta aos alunos uma tarefa matemática semelhante às que tinham realizado nas aulas e foi-lhes pedido que as resolvessem na minha presença e que verbalizassem em voz alta a forma com estavam a pensar. Deste modo, no decorrer de cada entrevista, o objetivo ia além de observar o processo de resolução adotado pelos alunos; procurei, através de diversas questões espontâneas e personalizadas, perceber quais as razões que os levavam a tais escolhas.

Esta tarefa (Anexo 9), aplicada a 4 de abril, foi pensada para ser apresentada aos alunos no último momento de recolha de dados para o meu trabalho de investigação, as entrevistas individuais com tarefas, realizadas a todos os alunos da turma no período letivo, mas num gabinete ao lado da sala de aula. O objetivo desta tarefa seria englobar os três modelos estudados ao longo deste capítulo: exponencial, logarítmico e logístico. Além disso, um dos critérios para a escolha desta tarefa foi a familiaridade com outras tarefas já trabalhadas em aula. Desta vez, a inspiração para esta tarefa surgiu da Proposta 9 (p. 49) presente no caderno prático do manual adotado pela escola (Costa & Rodrigues, 2018).

Tal como anteriormente, também esta tarefa sofreu algumas modificações. Optei por dividir a tarefa em duas partes, cada uma delas com duas questões. Esta decisão deveu-se ao facto de tornar possível a criação de uma pequena pausa, cerca de três minutos, entre as duas partes da tarefa, para que os alunos tivessem oportunidade de descomprimir e se voltarem a focar, uma vez que costumavam ficar nervosos neste tipo de situações. Quanto ao enunciado da tarefa decidi reajustar as questões, eliminei a primeira questão do enunciado original uma vez que a utilização da calculadora gráfica não teria um papel relevante na resolução da mesma. De modo a valorizar mais o método de resolução escolhido pelos alunos e as respetivas justificações, substituí a questão 1 da parte 2 (correspondente à 4.1 no enunciado original) por “Consideras que o tipo de modelo encontrado anteriormente continua adequado? Se sim, justifica. Se não, identifica o novo modelo que se adequa ao conjunto de dados agora conhecidos” (Figura 9).

Proposta 9

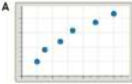
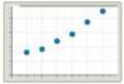
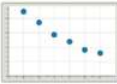
Uma equipa de biólogos pretende estudar a adaptação de uma determinada espécie rara de plantas às condições ambientais de uma região.

A evolução do número de exemplares desta espécie foi sendo acompanhada ao longo dos anos, desde a sua plantação inicial na região em 1995, conhecendo-se os registos que se encontram na tabela abaixo.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6
N.º de plantas	48	55	72	86	112	135



- A seguir estão representadas várias nuvens de pontos obtidas com uma calculadora gráfica.

Identifica a que pode representar os dados disponíveis. Justifica a tua opção indicando um motivo que fundamente a rejeição de cada uma das restantes opções.

- Atendendo à nuvem de pontos representativa dos dados, identifica um tipo de modelo que consideres adequado para descrever a evolução da situação. Recorrendo à calculadora, procura um modelo desse tipo que se ajuste aos dados obtidos.
- A partir do modelo considerado na alínea anterior, estima o ano em que o número de exemplares ultrapassaria 300.
- Foi dada continuidade a este estudo através de registos em anos posteriores, acrescentando-se mais alguns dados aos iniciais.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17
N.º de plantas	48	55	72	86	112	135	155	179	191	214	220	225	233	236

- Refaz a nuvem de pontos a partir de todos os dados e identifica um novo modelo que se adequa melhor ao conjunto de dados conhecidos (utiliza valores dos parâmetros arredondados às centésimas).
- Diz se, de acordo com este modelo, serão atingidos os 240 exemplares. Justifica a tua opinião.

Espécie Rara de Plantas

Uma equipa de engenheiros florestais estudou a adaptação de uma determinada espécie rara de plantas às condições ambientais de uma dada região.

A evolução do número de exemplares desta espécie foi sendo acompanhada ao longo dos anos, desde a sua plantação inicial na região em 2010, conhecendo-se os registos que se encontram na tabela abaixo.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6
N.º de plantas	46	53	70	84	110	133



- Identifica um tipo de modelo que consideras adequado para descrever a situação descrita. Procura um modelo que se ajuste aos dados recolhidos.
- A partir do modelo anterior, estima o ano em que o número de exemplares desta espécie de plantas ultrapassaria os 500 plantas.

Espécie Rara de Plantas

Ainda te lembrás do estudo feito pelos engenheiros florestais?

Foi dada continuidade a esse estudo através de registos em anos posteriores. Sendo assim, foram acrescentados mais alguns registos aos dados anteriores.

Abaixo podes ver o número de plantas em função dos anos decorridos, desde a sua plantação inicial na região em 2010.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13
N.º de plantas	46	53	70	84	110	133	153	177	189	212	218



- Consideras que o tipo de modelo encontrado anteriormente continua adequado? Se sim, justifica. Se não, identifica o novo modelo que se adequa ao conjunto de dados agora conhecidos.
- Achas que, de acordo com o modelo que escolheste, serão atingidos 232 exemplares de plantas? Justifica a tua opinião.

Figura 9 – Adaptação da sexta tarefa: original (esquerda) e adaptada (direita)

Relativamente aos métodos de resolução, não havia como escapar à utilização da calculadora gráfica na primeira pergunta de ambas as partes. Esta era essencial para a criação de uma nuvem de pontos e para a realização da regressão adequada, mesmo que essa fosse encontrada com recurso ao método de tentativa e erro. Já na segunda

pergunta de ambas as partes foram identificados antecipadamente dois métodos, o primeiro seria recorrendo à representação gráfica e o segundo seria a resolução algébrica de uma equação e o cálculo de um limite, respetivamente na parte 1 e 2.

No final da resolução da tarefa, apoiada novamente por um pequeno guião, realizado nos mesmos moldes que o guião anterior (Anexo 8), fiz algumas perguntas com o intuito de perceber a evolução, comparativamente com a primeira entrevista, da opinião que os alunos tinham face à utilização da calculadora gráfica nas aulas de Matemática B.

Quando os alunos foram convidados a participar nesta última entrevista, surgiu, por parte da maioria, um receio e nervosismo que não tinha sido observado na entrevista anterior. A causa desse medo estava na possibilidade de não conseguirem resolver as questões propostas na tarefa. Expliquei-lhes que o conteúdo da tarefa era idêntico ao que foi trabalho em aula e mostrei-lhes “o valor acrescentado que as suas respostas podem trazer à investigação em curso” (Carmo & Ferreira, 2008, p. 151). Depois disso, embora ainda com algumas reticências, aceitaram com mais ânimo este convite. Por questões de conveniência para os alunos e de privacidade, as entrevistas foram realizadas presencialmente no gabinete de ensino especial da escola. Realço a devida importância para as questões de privacidade, que foram sempre respeitadas, garantindo o anonimato da participação dos alunos e a confidencialidade dos dados. Por consequência, todos os nomes de alunos mencionados ao longo deste trabalho são pseudónimos, como também já foi indicado.

Finalmente, por uma questão de exequibilidade exigida num documento desta natureza, apenas três das seis entrevistas realizadas foram selecionadas para serem consideradas na análise dos dados da investigação relatada neste RE. A escolha dos alunos para a análise das entrevistas baseou-se, não só no facto de que estes três alunos demonstraram ter desempenhos diferentes na disciplina de Matemática B, revelando ter distintos desempenhos e dificuldades, tanto a nível da resolução das tarefas propostas, como ao nível da utilização da calculadora gráfica e da expressão do seu raciocínio, mas também por serem três alunos que evidenciaram cada um dos três tipos de utilização referidos em Rocha (2002).

5. Apresentação e Discussão dos Resultados

Neste capítulo, são apresentados e discutidos, tendo em consideração os objetivos deste trabalho, os resultados desta investigação. A análise dos dados recolhidos teve por base os aspetos discutidos no capítulo do Enquadramento Teórico. De maneira a apresentar os resultados obtidos, em função das questões de investigação, este capítulo está dividido em dois subcapítulos: (i) O percurso da turma, no qual a primeira entrevista e todas as produções escritas são analisadas enquanto parte de um grupo, e a partir das quais se pretende interpretar os resultados obtidos considerando o percurso global da turma (Figura 10); e (ii) O percurso de três alunos, no qual são refletidas as mesmas questões, desta vez centrando a análise em aspetos mais pormenorizados revelados pelos alunos que foram selecionados para a segunda entrevista. Ambos os subcapítulos se dividem em secções. No caso do primeiro subcapítulo, cada secção corresponde à primeira entrevista e a cada uma das tarefas realizadas durante a intervenção pedagógica. O segundo subcapítulo, por sua vez, está organizado em secções correspondentes a cada um dos três alunos selecionados para as entrevistas com tarefas.

Tarefa	Pares e Grupos
Tarefa 1 Juros Compostos – A Oitava Maravilha do Mundo	Grupo A: Peónia, Narciso e Margarida Par A: Rosa e Orquídea Par B: Tulipa e Violeta
Tarefa 2 Mosca da Fruta	Grupo A: Peónia, Narciso e Margarida Par A: Rosa e Orquídea Par B: Tulipa e Violeta
Tarefa 3 Ingrediente Especial	Grupo B: Rosa, Orquídea e Margarida Par C: Tulipa e Peónia Par D: Narciso e Violeta
Tarefa 4 Salário Mínimo	Grupo A: Peónia, Narciso e Margarida Par A: Rosa e Orquídea Par B: Tulipa e Violeta
Tarefa 5 Macacos de Nariz Arrebitado	Trabalho individual

Figura 10 – Divisão dos alunos na realização das tarefas

É importante ressaltar que irei utilizar uma referência às gravações áudio estruturada da seguinte forma: (momento de gravação áudio, emissor, data). Os momentos de gravação áudio proveem das entrevistas, enquanto que tanto eu própria como qualquer um dos alunos entrevistados poderemos ser os emissores.

5.1. A turma e a calculadora gráfica

A partir do momento em que se realizou, no dia de 25 de janeiro de 2023, a primeira recolha de dados, a primeira entrevista individual, iniciou-se, inevitavelmente, a sua análise. Dada a sua importância para este trabalho, e o facto de ter sido o primeiro momento dedicado a este fim, existia uma curiosidade adicional por aceder aos primeiros resultados desta investigação. Essa curiosidade motivou a transcrição completa de cada entrevista e o início da sua análise.

5.1.1. Entrevista inicial

A primeira entrevista individual iniciou, em todos os casos, com uma pequena conversa sobre a relação que cada um tem com a Matemática e com a calculadora gráfica. Cada aluno tem a sua história, mas devo admitir que fiquei surpreendida com a resposta de uma aluna, que prontamente me disse: “Eu acredito que [a minha relação com a Matemática] nunca foi muito difícil, eu sempre gostei bastante de Matemática (...) eu acredito que a Matemática é muito importante e é algo essencial no meu dia a dia” (entrevista 1, Orquídea, 25/01/2023). No entanto, quanto à calculadora gráfica, esta aluna descreve-a, no meio de gargalhadas, como “uma faca de dois gumes” (entrevista 1, Orquídea, 25/01/2023). A aluna, rapidamente, tomou a liberdade de explicar a comparação que fez: “Por vezes é fácil, por vezes é mais complicado ... aaaa as fórmulas e todas as ferramentas que a calculadora gráfica tem” (entrevista 1, Orquídea, 25/01/2023). Não foi a única a referir a memorização de todos os comandos disponíveis pela calculadora gráfica como um entrave para a sua utilização. Mais duas colegas, estas com uma postura diferente da primeira face à Matemática, reforçaram essa ideia: “[A minha relação com a Matemática e com a calculadora] é um bocado complicada (...) memorizar o que temos de escrever [na calculadora] para chegar a um resultado, (...) eu não consigo memorizar. É mais isso [aquilo em que sinto dificuldades]” (entrevista 1, Margarida, 25/01/2023), “Na primária, eu decidi que ia odiar Matemática para o resto da minha vida. (...) Eu sou muito demorada no que toca a essas coisas [usar a calculadora gráfica] ... aaa perceber a parte inicial, de onde ir, menu e depois o que vem a seguir? Decorar essas coisinhas” (entrevista 1, Peónia, 25/01/2023). Bastaram alguns minutos de interação para eu ser surpreendida com a falta de hábito da utilização da máquina nas aulas de Matemática. Inevitavelmente me questionei sobre a forma como a perspetiva e atuação da professora do ano passado influenciou o uso da calculadora gráfica por parte destes alunos.

Procurando dar resposta à minha questão, decidi perceber qual seria a opinião dos alunos relativamente à influência que o tipo de trabalho realizado em sala de aula

tem sobre a utilização da máquina. As respostas dos alunos foram todas coerentes: “[O ano passado] era mais tipo cálculos. Eu lembro-me, eu sinceramente não usava muito porque para cálculos prefiro fazer eu (...)” (entrevista 1, Tulipa, 25/01/2023), “O ano passado a professora nunca tinha dado Matemática B e nunca tinha trabalhado muito com a calculadora gráfica e por isso ela estava a aprender connosco” (entrevista 1, Peónia, 25/01/2023), “(...) este ano estamos livres de usar ou não a calculadora. O ano passado era: Hoje vamos usar a calculadora. E no outro dia já não usávamos” (entrevista 1, Narciso, 25/01/2023). Estas intervenções, levaram-me a confirmar as minhas suspeitas; de facto, no ano letivo passado a utilização e a exploração das potencialidades da calculadora gráfica foram muito limitadas devido, em grande parte, ao tipo de atuação da professora. Como resultado, os alunos acabaram por ficar aquém das expectativas, esperadas por mim e pelo professor cooperante, relativamente ao conhecimento das capacidades da ferramenta tecnológica que tinham em mãos.

Naturalmente, continuei o diálogo com os alunos questionando-os sobre quais as situações que os levavam a recorrer à calculadora gráfica. A resposta foi unânime, e justificada com o fator rapidez e praticidade: fazer gráficos. Além disso, alguns alunos referiram também a utilização das folhas de cálculo: “Aaaaa... Especificamente, para fazer gráficos, fórmula resolvente e usar a folha de cálculo” (Entrevista 1, Tulipa, 25/01/2023), “Só se for um gráfico ou uma folha de cálculo imaginando assim” (Entrevista 1, Narciso, 25/03/2023). Houve também quem deu ênfase à aliança entre a calculadora gráfica e o cálculo mental: “Aaaa... Em situações de cálculo mental, a maior parte das vezes, porque não é o meu forte. Então vou sempre à calculadora” (Entrevista 1, Peónia, 25/03/2023), “(...) para cálculos uso bastante porque como já disse o meu cálculo mental... é assim um bocado mau” (Entrevista 1, Margarida, 25/01/2023). Após ouvir as intervenções dos alunos percebi que, tal como já acontecia há 20 anos, a utilização da calculadora gráfica não é, de todo, inovadora e as suas potencialidades continuam a ser subutilizadas e subaproveitadas. Mais, com poucas palavras fez-se notar que as potencialidades gráficas da calculadora continuam a “substituir rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função” (Rocha, 2002, p. 4).

Por fim, quis também perceber como é que os alunos ultrapassavam as dificuldades que enfrentavam ao utilizar a calculadora gráfica. Apenas um aluno mostrou ter uma postura diferente dos restantes colegas. Este aluno considera ser importante explorar autonomamente a calculadora gráfica para ultrapassar tais dificuldades; disse convictamente: “Tento estudar e entender porque é que é assim. Às vezes também tiro

dúvidas, mas gosto mais de explorar na calculadora. Encontro sempre um botão novo” (Entrevista 1, Tulipa, 25/03/2023). Em contrapartida, os colegas optam por “jogar pelo seguro”, seguindo as etapas presentes no manual ou replicando aquilo que foi feito em aula com o apoio do professor. Estes alunos, demonstram ter consciência da postura que assumem e apontam a preguiça como um dos fatores decisivos para não explorarem as potencialidades da calculadora gráfica: “Eu acredito que sou mais procedimental. Eu geralmente vou passinho a passinho. Até porque eu quero terminar os exercícios mais rápido, então nunca me dei ao trabalho de explorar muito” (Entrevista 1, Orquídea, 25/03/2023), “Eu vou mais por aquilo que os professores dizem e fazem (...) às vezes no livro também tem as ... aaaa, tem lá, tem lá no livro as instruções e eu sigo” (Entrevista 1, Rosa, 25/03/2023), “É assim durante as aulas, é um bocado naquela, podia ir por aí [explorar as potencialidades da máquina], mas depois tenho medo de chegar ao teste e confundir, empancar e não ter tempo para fazer. Então não [não exploro]” (Entrevista 1, Peónia, 25/03/2023).

Não sendo esta primeira entrevista fonte única de conclusões, comecei a identificar a presença dos três tipos de utilização da calculadora gráfica identificados no estudo de Helena Rocha (2002), e a ponderar em qual das categorias poderia encaixar os alunos. Assim, surgiu a primeira ideia inicial. A utilização que o aluno Tulipa faz da calculadora gráfica começa a assemelhar-se ao laboratório. Para caracterizar a utilização que a aluna Orquídea faz da máquina, o avião a jato pareceu-me ser uma boa imagem. Já para as restantes alunas, Rosa, Peónia, Margarida e Narciso, a tábua de salvação foi a que, até então, melhor caracterizou a utilização feita da calculadora gráfica. Esta foi a minha sensação inicial, mas, obviamente, era preciso recolher muitos mais dados para perceber se a sensação inicial se manteria ou se seria alterada.

5.1.2. A primeira tarefa

Na resolução desta tarefa (Anexo 1), era importante que os alunos recorressem ao menu gráfico e menu tabela, disponíveis na calculadora gráfica. Uma vez que estava em causa o estudo do número de Neper, o estabelecimento de conexões entre a informação expressa nos diferentes menus ajudaria a compreender a obtenção deste número.

Relativamente às duas primeiras questões da tarefa, embora eu tivesse pensado que os alunos poderiam recorrer ao menu tabela da calculadora gráfica, todos eles apenas a utilizaram para a realização de cálculos. Apesar disso, apresentaram estratégias de resolução diferentes, tal como é possível observar nas figuras 11 e 12. O

grupo A, constituído por três alunas (Peónia, Narciso e Margarida), evidencia a escolha de um método que se tornou exaustivo:

M – É preciso tanta coisa? É que isto cansa.

Eu – Será que é possível encontrar uma maneira de otimizarem todos esse trabalho? Encontram alguma regularidade nos cálculos que fizeram?

Tendo eu questionado se existiria alguma forma de otimizarem o processo de resolução, este grupo optou por concluir a ideia inicial, o que lhes levou muito tempo. Já o par A (Rosa e Orquídea) e o par B (Tulipa e Violeta) sentiram necessidade de procurar uma forma de otimizar a resolução. Ao identificarem um padrão, rapidamente encontraram uma expressão que lhes permitia conhecer o capital, nos diferentes bancos, ao fim de n anos, essencial para dar resposta à questão que se seguia.

Handwritten calculations for a financial problem, showing a sequence of values over 12 years for two banks, A and B. The calculations involve interest rates and compounding.

Banco A

$$1^{\circ} 45000 \times 0,4 = 18000 \quad 100 = 18000 \quad 45000 + 18000 = 63000 \text{ €}$$

$$2^{\circ} 63000 \times 0,4 = 25200 \quad 100 = 25200 \quad 63000 + 25200 = 88200 \text{ €}$$

$$3^{\circ} 88200 \times 0,4 = 35280 \quad 100 = 35280 \quad 88200 + 35280 = 123480 \text{ €}$$

$$4^{\circ} 123480 \times 0,4 = 49392 \quad 100 = 49392 \quad 123480 + 49392 = 172872 \text{ €}$$

$$5^{\circ} 172872 \times 0,4 = 69148,8 \quad 100 = 69148,8 \quad 172872 + 69148,8 = 242020,8 \text{ €}$$

$$6^{\circ} 242020,8 \times 0,4 = 96808,32 \quad 100 = 96808,32 \quad 242020,8 + 96808,32 = 338829,12 \text{ €}$$

$$7^{\circ} 338829,12 \times 0,4 = 135531,648 \quad 100 = 135531,648 \quad 338829,12 + 135531,648 = 474360,768 \text{ €}$$

$$8^{\circ} 474360,768 \times 0,4 = 189744,3072 \quad 100 = 189744,3072 \quad 474360,768 + 189744,3072 = 664105,0752 \text{ €}$$

$$9^{\circ} 664105,0752 \times 0,4 = 265642,03008 \quad 100 = 265642,03008 \quad 664105,0752 + 265642,03008 = 929747,10528 \text{ €}$$

$$10^{\circ} 929747,10528 \times 0,4 = 371898,842112 \quad 100 = 371898,842112 \quad 929747,10528 + 371898,842112 = 1301645,947392 \text{ €}$$

$$11^{\circ} 1301645,947392 \times 0,4 = 520658,3789568 \quad 100 = 520658,3789568 \quad 1301645,947392 + 520658,3789568 = 1822304,3263488 \text{ €}$$

$$12^{\circ} 1822304,3263488 \times 0,4 = 728921,73053952 \quad 100 = 728921,73053952 \quad 1822304,3263488 + 728921,73053952 = 2551226,05688832 \text{ €}$$

Banco B

$$1^{\circ} 45000 \times 0,4 = 18000 \quad 100 = 18000 \quad 45000 + 18000 = 63000 \text{ €}$$

$$2^{\circ} 63000 \times 0,4 = 25200 \quad 100 = 25200 \quad 63000 + 25200 = 88200 \text{ €}$$

$$3^{\circ} 88200 \times 0,4 = 35280 \quad 100 = 35280 \quad 88200 + 35280 = 123480 \text{ €}$$

$$4^{\circ} 123480 \times 0,4 = 49392 \quad 100 = 49392 \quad 123480 + 49392 = 172872 \text{ €}$$

$$5^{\circ} 172872 \times 0,4 = 69148,8 \quad 100 = 69148,8 \quad 172872 + 69148,8 = 242020,8 \text{ €}$$

$$6^{\circ} 242020,8 \times 0,4 = 96808,32 \quad 100 = 96808,32 \quad 242020,8 + 96808,32 = 338829,12 \text{ €}$$

$$7^{\circ} 338829,12 \times 0,4 = 135531,648 \quad 100 = 135531,648 \quad 338829,12 + 135531,648 = 474360,768 \text{ €}$$

$$8^{\circ} 474360,768 \times 0,4 = 189744,3072 \quad 100 = 189744,3072 \quad 474360,768 + 189744,3072 = 664105,0752 \text{ €}$$

$$9^{\circ} 664105,0752 \times 0,4 = 265642,03008 \quad 100 = 265642,03008 \quad 664105,0752 + 265642,03008 = 929747,10528 \text{ €}$$

$$10^{\circ} 929747,10528 \times 0,4 = 371898,842112 \quad 100 = 371898,842112 \quad 929747,10528 + 371898,842112 = 1301645,947392 \text{ €}$$

$$11^{\circ} 1301645,947392 \times 0,4 = 520658,3789568 \quad 100 = 520658,3789568 \quad 1301645,947392 + 520658,3789568 = 1822304,3263488 \text{ €}$$

$$12^{\circ} 1822304,3263488 \times 0,4 = 728921,73053952 \quad 100 = 728921,73053952 \quad 1822304,3263488 + 728921,73053952 = 2551226,05688832 \text{ €}$$

Figura 11 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 1 (Grupo A)

01) A: $\frac{4,6}{100} \times 45000 = 2070 \text{ €}$ $45000 + 2070 = 47070 \text{ €}$
 B: $\frac{2,5}{100} \times 45000 = 1125 \text{ €}$ $45000 + 1125 = 46125 \text{ €}$
 $\frac{2,5}{100} \times 46125 = 1153 \text{ €}$ $46125 + 1153 = 47278 \text{ €}$
 C: $45000 \times 0,004 + 45000 = 45000(0,004 + 1) = 45000 \times 1,004 \rightarrow 1^\circ \text{ Mês}$
 $45000 \times 1,004 + 0,004 \times 45000 \times 1,004 = 45000 \times 1,004(0,004 + 1) =$
 $= 45000 \times 1,004 \times 1,004 = 45000 \times 1,004^2 \rightarrow 2^\circ \text{ Mês}$
 $45000 \times 1,004^{12} \approx 47208 \text{ €} \rightarrow 12^\circ \text{ Mês}$
 A senhora Camila deverá escolher o banco B.

02) A: $\frac{4,6}{100} \times 47070 \approx 2165 \text{ €}$ $47070 + 2165 = 49235 \text{ €}$
 B: $\frac{2,5}{100} \times 47278 \approx 1182 \text{ €}$ $47278 + 1182 = 48460 \text{ €}$
 $\frac{2,5}{100} \times 48460 \approx 1212 \text{ €}$ $48460 + 1212 = 49672 \text{ €}$
 C: $45000 \times 1,004^{24} \approx 49525 \text{ €}$
 A senhora Camila deverá escolher o banco B.

Figura 12 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Par A)

A terceira questão desta tarefa pedia explicitamente o esboço dos gráficos correspondentes à expressão que permitia conhecer o capital C ao fim de n anos ($n \in \mathbb{N}$) em cada um dos bancos. O grupo A, apesar do acompanhamento mais personalizado, não conseguiu encontrar as expressões em causa, e, por essa razão, não esboçaram os gráficos pedidos. Já os restantes pares não hesitaram em recorrer ao menu gráfico da calculadora para inserirem a expressão de três funções: $f_1(x) = 45000 \times \left(1 + \frac{0,046}{1}\right)^x$, $f_2(x) = 45000 \times \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{2x}$ e $f_3(x) = 45000 \times \left(1 + \frac{0,048}{12}\right)^{12x}$. A colocação das expressões na calculadora gráfica suscitou alguma indignação no par A: “Porque é que não apareceu? Eu não sei colocar nada nisto [na calculadora]. Não sei os botões. Só uso para fazer o 1+1” (Orquídea).

Neste caso, o par demonstrou ter dificuldade em perceber que a janela de visualização precisava de ser ajustada ao contexto da situação, e atribuiu a origem do problema à forma como introduziram a expressão da função. Só depois de questionadas por mim é as alunas que colocaram a hipótese de alterar os valores da janela, fazendo-o sem demonstrar dificuldades na escolha dos valores adequados.

Nestes registos (figuras 13 e 14), os pares usaram apenas a representação gráfica. As alunas do par A em vez de escolherem as variáveis que contextualizavam a situação descrita, consideraram as letras x e y , letras consideradas pela calculadora gráfica, para designar as variáveis dos eixos cartesianos. Já os alunos do par B não manifestaram qualquer cuidado em designar as variáveis dos eixos cartesianos. Além

disso, em ambos os casos, não consideraram o contexto da situação descrita e, por essa razão, assumiram que o modelo em questão seria contínuo, quando se tratava de um modelo discreto. Comparativamente com o par A, a qualidade do registo escrito do par B é inferior, uma vez que, não demonstraram cuidado em apresentar as expressões inseridas na calculadora, não construíram um esboço perceptível dos gráficos, e não deram resposta à questão da tarefa. Estas situações aconteceram mais nas primeiras aulas. Depois de serem alertados para a importância do registo escrito e da interpretação da informação presente na calculadora, os alunos começaram a reconhecer a relevância da estratégia escolhida na utilização da calculadora gráfica.

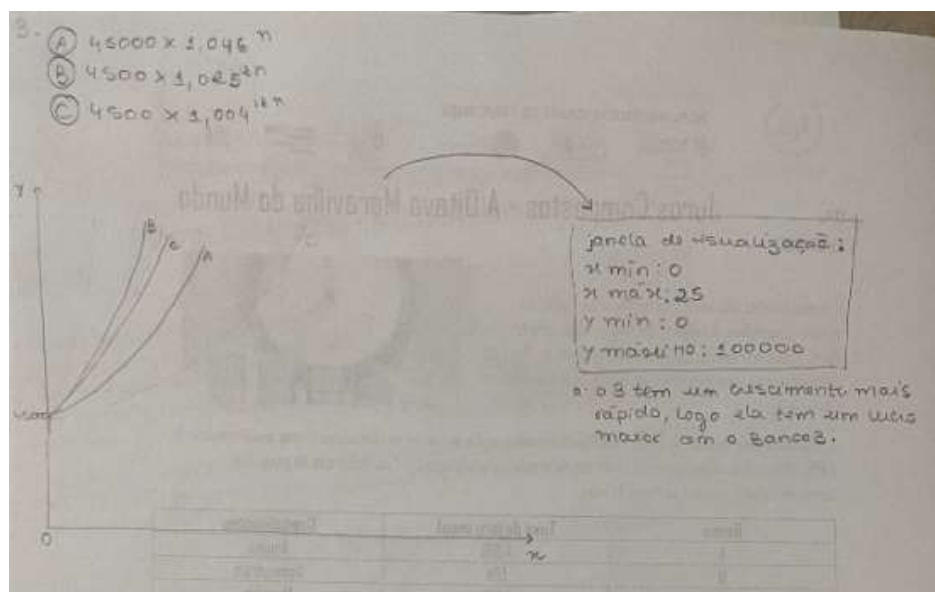


Figura 13 – Resolução da questão 3 da Tarefa 1 (Par A)

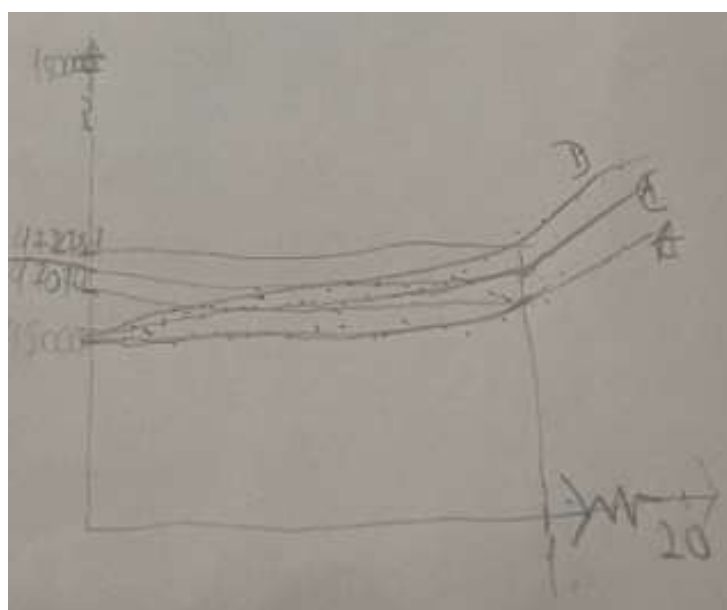


Figura 14 - Resolução da questão 3 da Tarefa 1 (Par B)

De acordo com o que foi visto, podemos concluir que, na resolução desta tarefa, a utilização que os alunos fizeram da calculadora gráfica não foi inovadora, isto é, apenas a utilizaram para a realização de cálculos e quando foi pedida a apresentação de um esboço gráfico. Essa utilização foi desligada do contexto da situação descrita no enunciado, o que originou algumas dificuldades de interpretação da informação presente na calculadora gráfica. A acrescentar, os alunos não aproveitaram as potencialidades que a máquina lhes oferece, entre as quais a articulação entre diferentes menus, neste caso, menu gráfico e menu tabela, para uma melhor compreensão dos resultados obtidos. Deste modo, ainda sendo precoce fazer uma categorização, a utilização que é feita da calculadora gráfica assemelha-se, tanto no grupo como nos pares, à “tábua de salvação” (Rocha, 2002).

5.1.3. A segunda tarefa

Tendo em conta as dificuldades enfrentadas na última tarefa, a segunda tarefa (Anexo 2) pretendia que os alunos estivessem atentos ao comportamento da função representada pela expressão dada. Para isso, tinham de perceber o que realmente interessava no contexto do problema, adequando os valores da janela de visualização na calculadora, e como deveria ser transcrita a informação obtida na calculadora gráfica.

O par A optou, primeiramente, por resolver a tarefa graficamente e só depois de resolvida é que recorreram a um segundo processo, a utilização dos logaritmos. Começaram por equacionar o problema e indicaram o ponto de interseção dos gráficos das funções $y_1 = 6$ e $y_2 = e^{0,2n}$, na questão 1, e dos gráficos das funções $y_1 = 3500$ e $y_2 = 50 \times e^{0,2n}$, na questão 2 (Figura 15).

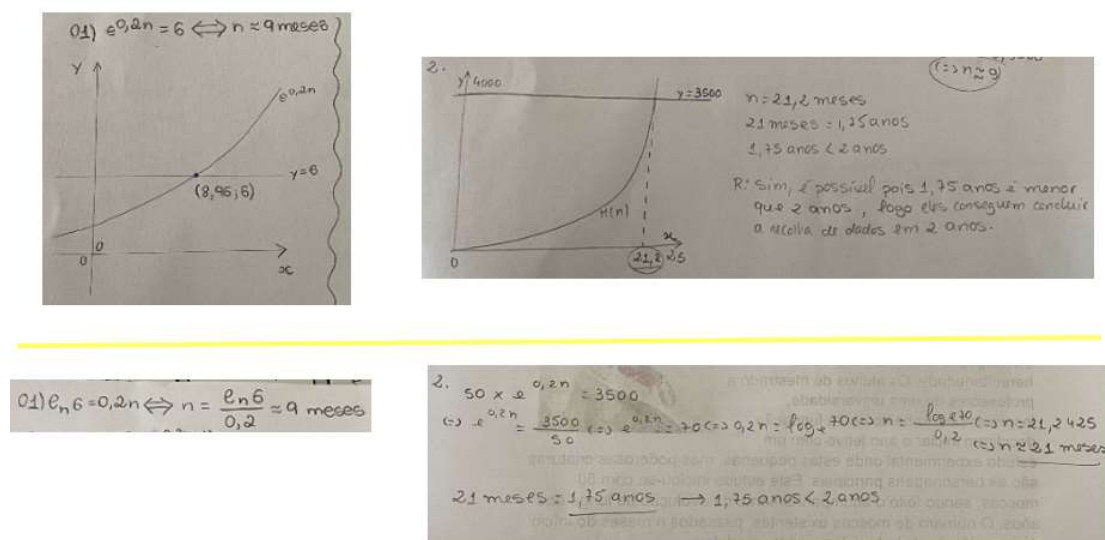
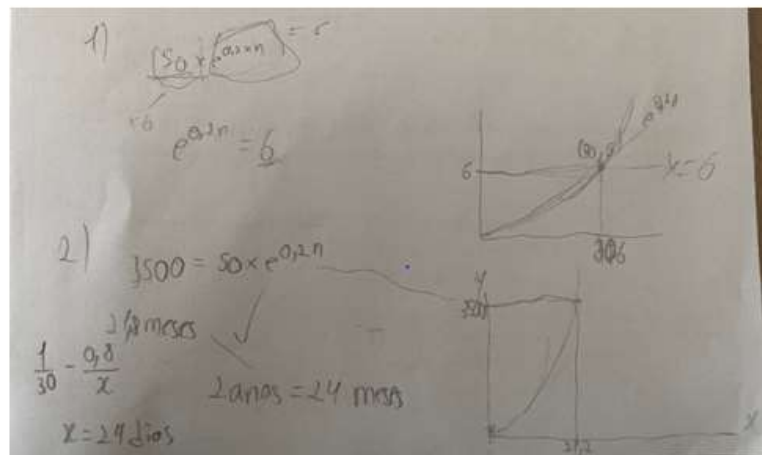


Figura 15 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Par A): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)

Novamente, ao designarem as variáveis dos eixos cartesianos consideram as letras x e y . Depois do feedback dado na última tarefa esperava-se que os alunos indicassem as variáveis que contextualizavam o problema, ou seja, n e M . Além disso, não indicaram os valores utilizados na janela de visualização.

Na transcrição da informação presente na calculadora gráfica para o papel, os alunos não dedicaram a devida atenção ao contexto do problema, dado que, na questão 1, não consideraram o domínio da função na janela de visualização e, por isso, assumiram a existência de tempos negativos. Já na questão 2, não atenderam ao número inicial de macacos presentes na reserva e, conseqüentemente, o gráfico da função passa incorretamente pela origem do referencial. Na resolução analítica, os problemas detetados não se observam, uma vez que a solução encontrada, em ambos os casos, encontra-se no domínio da condição presente no enunciado.

À semelhança do par A, o par B, começou por resolver a tarefa graficamente e, posteriormente, resolveu analiticamente (Figura 16).



Handwritten student work for question 1, showing the analytical solution:

$$300 = 50 \times e^{0,2n}$$

$$\frac{300}{50} = e^{0,2n}$$

$$6 = e^{0,2n}$$

$$\ln 6 = 0,2n$$

$$\frac{\ln 6}{0,2} = n$$

Handwritten student work for question 2, showing the analytical solution:

$$50 \times e^{0,2n} = 3500$$

$$e^{0,2n} = \frac{3500}{50}$$

$$e^{0,2n} = 70$$

$$\ln 70 = 0,2n$$

$$\frac{\ln 70}{0,2} = n$$

R.: sim eles morreram

Figura 16 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Par B): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)

Este par, mais uma vez, não demonstrou preocupação em identificar os eixos cartesianos e, quando o fez, na questão 2, utilizou as letras presentes na calculadora gráfica. Além disso, continuou a manter o registo escrito desorganizado, tornando difícil, quer para mim, quer para eles, a compreensão da resolução. Essa desorganização induziu a presença de erros como o presente na resolução gráfica da questão 2 – troca do valor de $n = 21,2$ – encontrado na calculadora gráfica pela interseção dos gráficos, pelo valor $n = 21,8$. Ainda na resolução gráfica, apesar de não terem indicado a janela de visualização utilizada, os alunos mostraram perceber o contexto do problema ao restringirem corretamente o domínio da função. Ao resolverem a tarefa por processos analíticos, os alunos equacionaram e resolveram uma equação envolvendo logaritmos; porém, não apresentam a solução dessa equação. Torna-se bastante evidente a falta de justificações e de respostas ao problema.

O Grupo A iniciou a resolução desta tarefa equacionando o problema (Figura 17), em ambas as questões, e, utilizando os logaritmos, encontrou a solução de cada equação. Posto isto, as alunas deste grupo apresentaram uma resposta a cada questão colocada. Depois recorreram, tal como foi pedido, à calculadora gráfica para resolverem novamente a tarefa. Nesse momento, o grupo enfrentou uma dificuldade:

P – Professora, porque é que não deu nada?

Eu – Presta atenção à tua expressão. Entras alguma coisa?

P – Ahhh... Coloquei um n em vez de um x . E agora?

Identificado o erro, o grupo ultrapassou facilmente essa dificuldade e continuou a trabalhar nesta nova estratégia. Na resolução gráfica, representaram os esboços das funções e, através das potencialidades da calculadora gráfica, encontraram os pontos de interseção desses gráficos para responderem às questões. A transcrição da informação da calculadora para o papel demonstra que este grupo tentou replicar todo o ecrã da calculadora e, por essa razão, o x e o y foram as letras utilizadas para designar as variáveis dos eixos cartesianos. Este grupo não atendeu ao contexto da tarefa e as alunas, além de considerarem tempos negativos, representam o gráfico da mesma função de maneiras diferentes na questão 1 e na questão 2. Nesta última questão, revelaram não ter espírito crítico e capacidade de confrontar aquilo que observavam na calculadora com aquilo que sabiam sobre o problema pois aceitaram a existência de um número negativo de macacos na reserva.

1.

$$H(n) = 50 \times e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow 300 = 50 \times e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{300}{50} = e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow 6 = e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow \ln 6 = 0,2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 6}{0,2} = n$$

$$\Leftrightarrow 8,9 \approx n$$

R: 9 meses.

2.

$$H(n) = 50 \times e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow 3500 = 50 \times e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3500}{50} = e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow 70 = e^{0,2n}$$

$$\Leftrightarrow \ln 70 = 0,2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 70}{0,2} = n$$

$$\Leftrightarrow 22,2 \approx n$$

R: Sim, visto que para chegarmos a 3500 só precisamos de 22 meses.

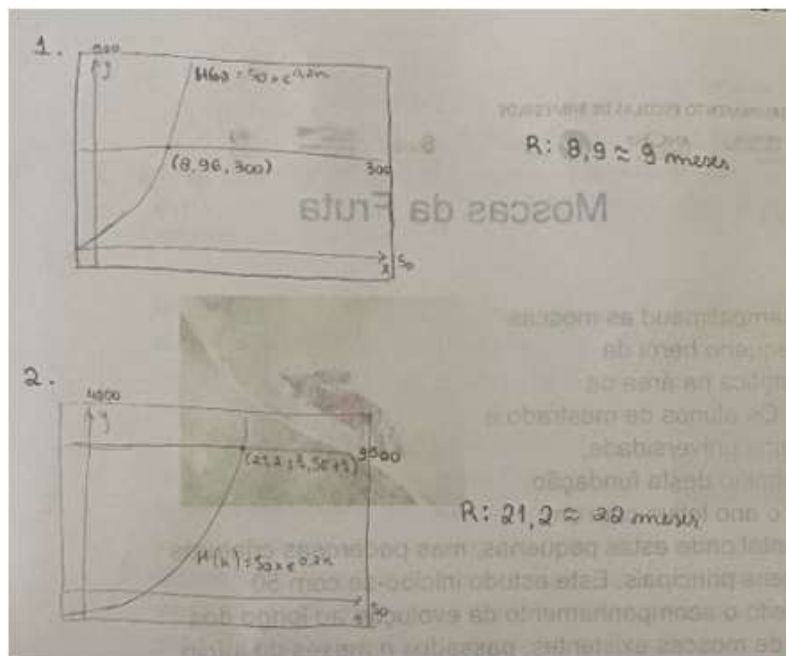


Figura 17 – Resolução das questões 1 e 2 da Tarefa 2 (Grupo A): primeira estratégia de resolução (cima) e segunda estratégia de resolução (baixo)

E porque o trabalho de grupo engloba o debate de diferentes ideias, neste grupo surgiu outra estratégia de resolução para a questão 2 (Figura 18), que foi discutida no grupo turma:

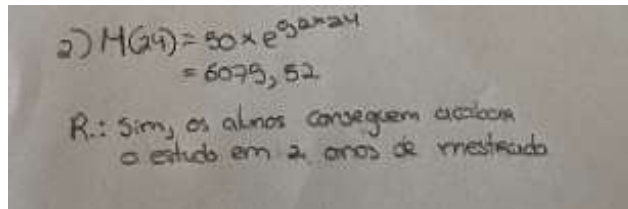
N – Professora, substitui e vi que com 24 meses era maior que 3500 logo acabaram antes.

Eu – E porque é que podes concluir isso?

N – Ohhh... Não sei.

T – Ahhhh... Pelo gráfico, ela é crescente.

Com esta discussão, os alunos aperceberam-se da importância da interpretação gráfica na resposta de muitas questões colocadas em tarefas.



2) $H(24) = 50 \times e^{0.24 \times 24}$
 $= 6079,52$
 R.: Sim, os alunos conseguem utilizar o estudo em 2 anos de mestrado

Figura 18 – Nova estratégia de resolução da questão 2 da Tarefa 2 (Grupo A)

Na resolução desta tarefa, percebemos que, modo geral, os alunos ainda não atribuem a devida importância à definição de uma janela de visualização que se ajusta ao contexto do problema. Além disso, os alunos continuam a revelar dificuldades de interpretação da informação presente na calculadora gráfica e mostram não ter sentido crítico aquando do confronto entre aquilo que sabem e aquilo que estão a ver na calculadora. Apesar disso, os alunos começam espontaneamente a incluir a calculadora gráfica na resolução das tarefas propostas. O motivo que levou o par A e o par B a escolherem como primeira opção a resolução gráfica da tarefa deveu-se, segundo os alunos, à rapidez com que encontram a resposta ao utilizar a calculadora gráfica. Já o grupo A optou por resolver a tarefa analiticamente, uma vez que se encontrava na memória de cada aluno por terem sido trabalhadas, na aula passada, tarefas idênticas e existirem registos escritos que auxiliavam a resolução das equações encontradas. Tendo em conta o que foi dito, desta vez a utilização que é feita da calculadora gráfica assemelha-se, no par A e no par B, ao “avião a jacto” e, no grupo A, à “tábua de salvação”, utilizando as designações decorrentes do trabalho de Rocha (2002).

5.1.4. A terceira tarefa

De forma a promover o trabalho colaborativo entre os alunos dos diferentes pares e grupo, decidi reorganizar a disposição dos alunos na sala aula. Assim, para a resolução desta tarefa (Anexo 3) foram criados dois novos pares e um novo grupo: par C (Tulipa e Peónia), par D (Narciso e Violeta) e grupo B (Rosa, Orquídea e Margarida). Essa mudança dificultou a realização do trabalho, uma vez que a falta de proximidade entre os alunos diminuiu a interação entre eles.

A natureza desta tarefa apelava ao recurso simultâneo do menu gráfico e menu tabela disponibilizados na calculadora gráfica. Nesta tarefa, era importante que os alunos estabelecessem conexões entre a informação expressa pelos dois menus para que compreendessem a situação descrita no enunciado.

Para preencher a tabela da questão 2, cada par e grupo apresentaram uma estratégia de resolução diferente (Figura 19). O par C optou por representar na calculadora o gráfico das funções $f_1(x) = 0,24e^{0,3x}$ e $f_2(x) = \frac{f_1(x+1)}{f_1(x)}$ e depois aplicar a tabela de valores associada a cada gráfico. Nesta resolução, ficou em falta apresentar um esboço dos gráficos das funções. O par D recorreu diretamente ao menu tabela da calculadora gráfica para inserir as expressões anteriores em função do valor de t . Por fim, o grupo B decidiu utilizar a calculadora apenas para cálculos e, dessa forma, preencheu a tabela substituindo o valor de t em cada uma das expressões.

2. Preencha a tabela seguinte, considerando os valores da última coluna com duas casas decimais.

t	A(t)	$\frac{A(t+1)}{A(t)}$
0	0,24	1,35
1	0,3290	1,35
2	0,4374	1,35
3	0,5904	1,35
4	0,7969	1,35
...	...	...
x	$0,24e^{0,3x}$	$1e^{0,3} = 1,35$

5 - 1,05

$y = \frac{0,24e^{0,3 \cdot (n+1)}}{0,24e^{0,3n}}$

$= \frac{0,24e^{0,3 \cdot n + 0,3}}{0,24e^{0,3n}}$

$= \frac{1 \cdot e^{0,3n + 0,3}}{e^{0,3n}}$

$= 1 \cdot e^{0,3n + 0,3 - 0,3n}$

$= e^{0,3} = 1,35$

O que podes concluir com os valores observados na última coluna?

Podemos concluir que de semana em semana a área do canteiro aumenta 35%, ou seja, de forma regular.

3. De quanto em quanto tempo a área do canteiro ocupado pelas ervas aromáticas duplica?

2. Preencha a tabela seguinte, considerando os valores da última coluna com duas casas decimais.

18. numta
tabela na
calculadora

t	A(t)	$\frac{A(t+1)}{A(t)}$
0	0,244	0,335
1	0,323	0,35
2	0,457	0,35
3	0,590	0,35
4	0,797	0,35
-	-	-
x	0,244 x 0,35	0,35

$0,244 \times e^{0,35(t+1)}$
 $\frac{0,244 \times e^{0,35(t+1)}}{0,244 \times e^{0,35t}}$
 $\frac{0,244 \times e^{0,35(t+1)}}{0,244 \times e^{0,35t}} = \frac{e^{0,35(t+1)}}{e^{0,35t}} = \frac{e^{0,35t} \cdot e^{0,35}}{e^{0,35t}} = e^{0,35} = 0,35$

□ que podes concluir com os valores observados na última coluna?

2. Preenche a tabela seguinte, considerando os valores da última coluna com duas casas decimais.

t	A(t)	$\frac{A(t+1)}{A(t)}$
0	0,24	1,35
1	0,3240	1,35
2	0,4373	1,35
3	0,5903	1,35
4	0,7968	1,35
...	...	...
x	0,24 $e^{0,3x}$	$e^{0,3} \approx 1,35$

$0,24 e^{0,3 \times 2} \leftarrow$
 $\rightarrow \frac{A(2+1)}{A(2)}$
 $\rightarrow \frac{0,24 e^{0,3(t+1)}}{0,24 e^{0,3t}} = \frac{e^{0,3t+0,3}}{e^{0,3t}} = \frac{e^{0,3t} \cdot e^{0,3}}{e^{0,3t}} = e^{0,3} \approx 1,35$

O que podes concluir com os valores observados na última coluna?
 Todas as semanas, aumenta 35 vezes.

3. De quanto em quanto tempo a área de cultivo ocupada pelas ervas aromáticas duplica?
 $e^{0,3t} = 2 \Rightarrow 0,3t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31$

Figura 19 – Resolução da questão 2 da Tarefa 3: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)

O preenchimento da última linha suscitou dificuldades a todos os alunos, mas revelou ser interessante porque conseguiram formular uma conjectura: “Isto também tem de ser 1,35 porque se tudo deu isso este também tem de dar. Não é preciso cálculos” (Orquídea).

Depois do meu incentivo e acompanhamento, os alunos sentiram-se motivados para conseguir provar a veracidade da sua conjectura. Em contrapartida, nenhum dos alunos percebeu o significado do valor encontrado e, por essa razão, houve necessidade de discutir o assunto em grande grupo. Quando escrevi no quadro $\frac{A(t+1)}{A(t)} = 1,35 \Leftrightarrow A(t+1) = 1,35 A(t)$, o aluno Tulipa afirmou, corretamente, que existe um aumento de 35% a cada semana.

A questão 3 permitiu a discussão e apresentação de três estratégias de resolução: gráfica, algébrica e visual. Já para questão 4, os alunos recorreram apenas às primeiras duas. O par C serviu-se da calculadora gráfica para dar resposta a estas duas questões (Figura 20, cima), mas demonstrou interesse em procurar resolver novamente uma das questões por processos analíticos:

P – [A questão 3] fizemos na calculadora. Coloquei o gráfico e vi quando duplicava o inicial. Vi que era de 2,3.

T – [Na questão 4] vimos a interseção com o π . Mas estou a tentar fazer algébrico porque é mais fixe. É desafiante.

Eu – É costume fazeres isso?

T – É. Tento sempre fazer algébrico depois de chegar à solução rapidamente com a calculadora.

Na questão 3, o par D apresentou aos colegas uma resolução meramente visual: apoiaram-se na tabela da questão anterior e perceberam que a área ocupada duplicaria entre as duas e as três semanas (Figura 20, meio). Demonstraram dúvidas sobre qual seria a resposta a dar e, por isso, optaram por escolher, incorretamente, as duas semanas: “Vimos que se começar no 0, duas semanas depois dá mais ou menos o dobro” (Narciso).

Ainda nessa questão, o grupo B apresentou uma resolução algébrica, resolvendo uma equação com recurso ao uso de logaritmos (Figura 20, baixo): “Vimos o dobro do inicial e deu 0,48. Depois igualámos a $A(t)$ ” (Rosa).

Na questão 4, ao contrário do par C, o par D e o grupo B optaram por equacionar o problema e resolvê-lo algebricamente (Figura 20).

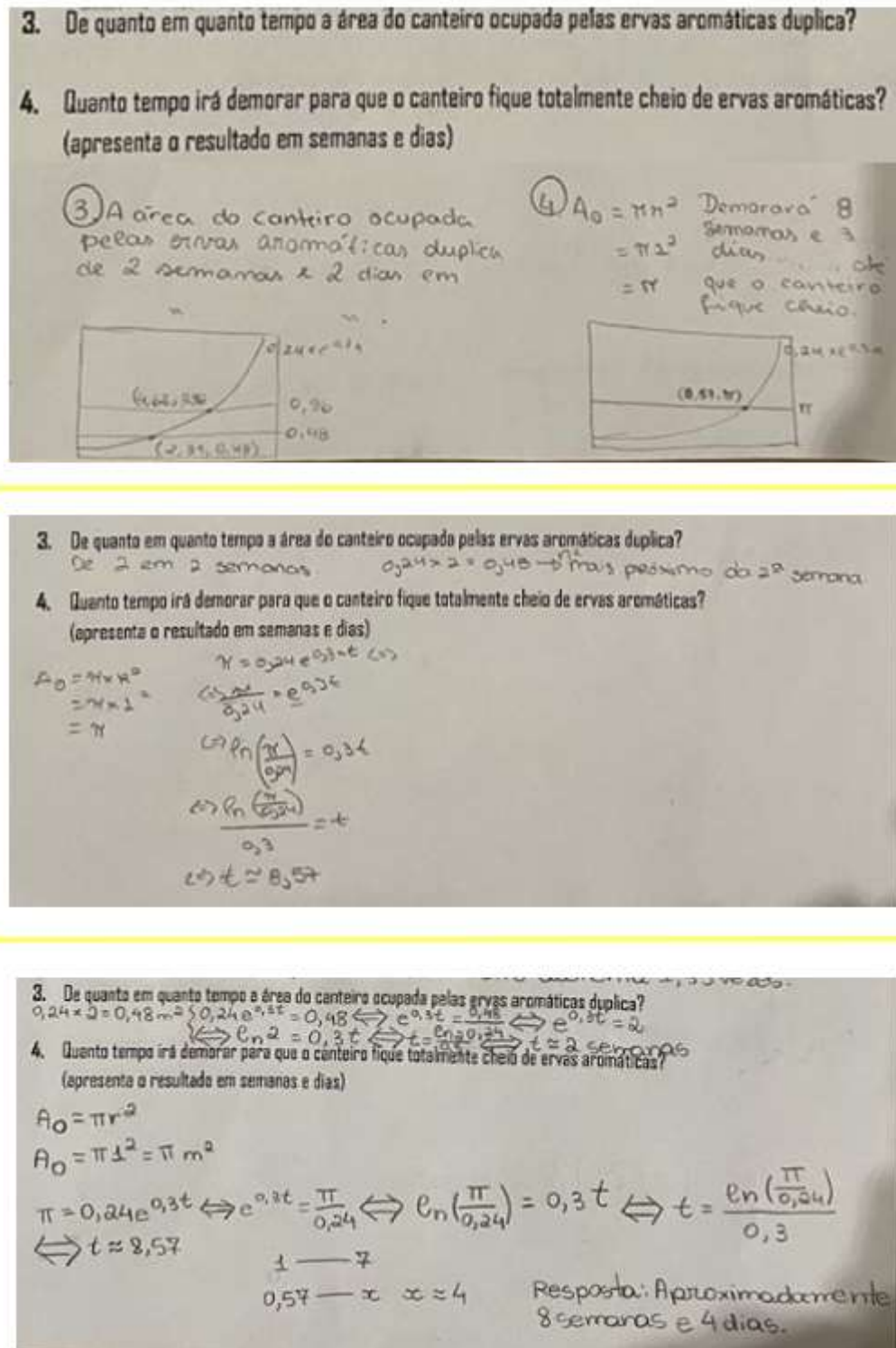


Figura 20 – Resolução da questão 3 e 4 da Tarefa 3: Par C (cima), Par D (meio), Grupo B (baixo)

Na resolução destas duas questões, percebemos que apenas o par C é que recorreu ao uso da calculadora gráfica. Para estes dois alunos, a calculadora gráfica é uma forma simples, rápida e eficaz de chegar ao resultado certo quando a sua utilização é ligada à compreensão. Apesar de terem revelado perceber os problemas e terem definido corretamente uma estratégia de resolução, ao registarem o esboço dos gráficos, voltam a não identificar as variáveis que designam os eixos cartesianos e a não apresentar a janela de visualização utilizada, o que não permite ao professor nem aos colegas reproduzir o mesmo esboço gráfico.

Em suma, nesta tarefa podemos concluir que ainda existe alguma preferência, por parte dos alunos, em resolver problemas matemáticos por processos analíticos, recorrendo apenas à calculadora gráfica como uma ferramenta de cálculo. Com isso, inevitavelmente, questionei-me sobre a origem desta preferência. Será resultado da anterior experiência dos alunos? Além disso, não revelaram capacidade de relacionar o menu gráfico e o menu tabela, presentes na calculadora, uma vez que optam apenas por utilizar um deles na resolução dos problemas. Através da visualização do comportamento do gráfico e dos valores expressos numa tabela, conseguiriam mais facilmente compreender a situação descrita na tarefa. Como não estabelecem o confronto entre estes dois menus, acabam por não conseguir interpretar a informação no contexto do problema.

Sendo assim, podemos considerar que a utilização que é feita da calculadora gráfica pelo grupo B assemelha-se à “tábua de salvação”, recorrendo às designações usadas por Rocha (2002), dado que, em toda a tarefa, apenas a utilizam como ferramenta de cálculo. Já o par C e o par D começam a explorar algumas potencialidades da calculadora gráfica, tornando-a o seu “laboratório”. No entanto, a sua exploração ainda se encontra limitada àquilo que aprenderam com os professores durante as aulas. Por essa razão, e por reconhecerem a facilidade e rapidez como principais qualidades da calculadora gráfica, o “avião a jacto” parece ser uma boa imagem para caracterizar a utilização que estes dois pares fazem da calculadora gráfica recorrendo, novamente, ao trabalho de Rocha (2002).

5.1.5. A quarta tarefa

Na quarta tarefa da intervenção pedagógica (Anexo 4), a turma organizou-se nos habituais pares (par A e par B) e grupos de trabalho (grupo A). A disposição original facilitou novamente a realização da tarefa, dado que a proximidade entre os alunos aumenta a interação entre eles.

Esta tarefa permitiu aos alunos desenvolver a capacidade de formular generalizações e validar conjecturas, ou seja, os alunos encontraram modelos que melhor se adequavam à situação descrita no enunciado.

Na situação descrita na questão 1, os alunos do par A e do par B recorreram ao menu estatística, inseriram os dados nas listas, considerando o ano 2015 como sendo o ano 0, o ano 2016 como sendo o ano 1 e assim sucessivamente (Figura 21). Depois obtiveram o diagrama de dispersão (Figura 21). Neste caso, era pedido explicitamente no enunciado o modelo linear, mas, futuramente, os alunos teriam de analisar a representação gráfica e conseguir ter uma ideia de qual seria o modelo que melhor se ajustava ao problema.

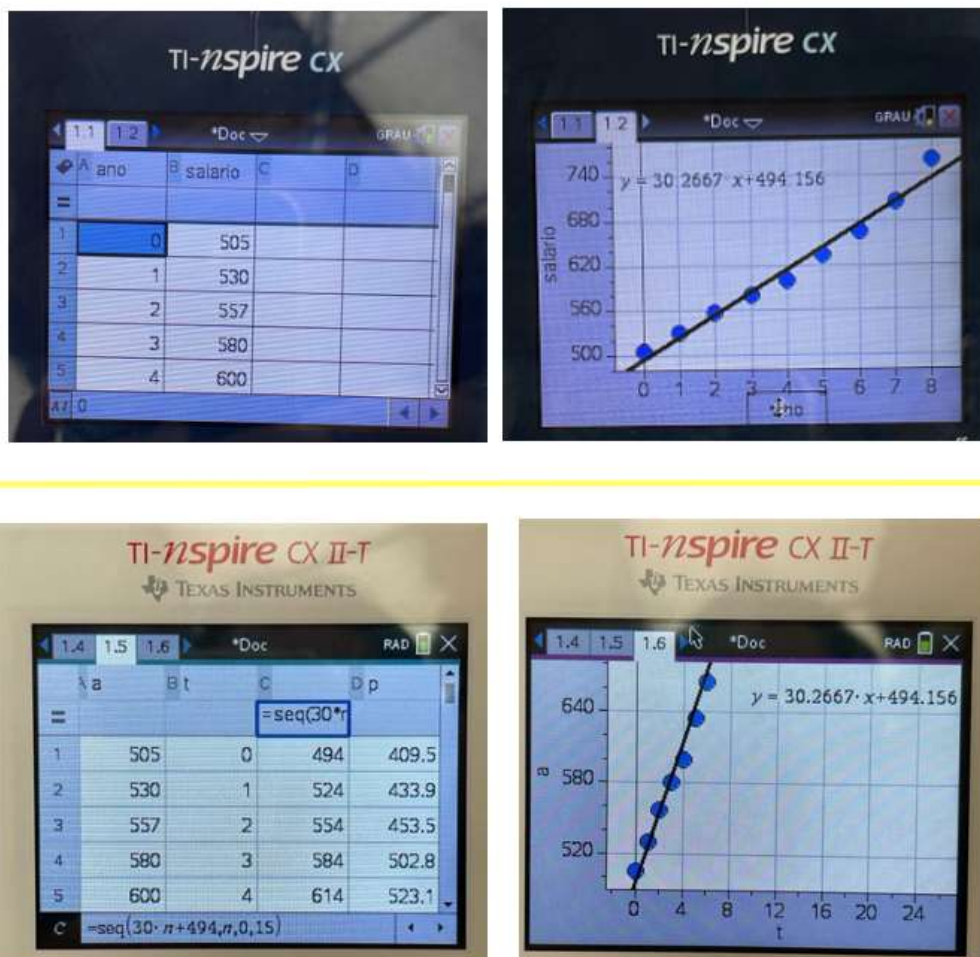


Figura 21 - Resolução da questão 1 e 2 da Tarefa 4: Par A (cima), Par B (baixo)

Ao utilizarem a calculadora gráfica na resolução da primeira questão da tarefa, ambos os pares não transcreveram para o papel o esboço da tabela e do gráfico que construíram, apresentando apenas a equação do modelo. Por vezes, tal como

aconteceu na resolução desta questão, os alunos não sentem necessidade de justificar aquilo que para eles já está bem explicado no ecrã da calculadora. Assim, podemos concluir que a utilização da calculadora gráfica influencia o registo escrito dos alunos, tornando-o, muitas vezes, escasso e pouco detalhado.

O grupo A, na resolução da primeira questão considerou, incorretamente, que os pontos pertenciam todos à mesma reta e, por isso, encontrou por processos analíticos a equação dessa reta (Figura 22). No momento de discussão coletiva, perceberam que o modelo encontrado não é o que melhor ajusta a situação.

1.

$$S = at + b$$

$$\Leftrightarrow 505 = a(0) + b$$

$$\Leftrightarrow 505 = b$$

$$530 = a(15) + 505$$

$$\Leftrightarrow 530 - 505 = 15a$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{15} = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} = a$$

$$S = 25t + 505$$

Figura 22 – Resolução da questão 1 da Tarefa 4 (Grupo A)

Na resolução da questão 2, todos perceberam que 2030 seria o ano 15 e que, por isso teriam de substituir, na expressão encontrada, t por 15. O par A decidiu explorar as potencialidades da calculadora gráfica e, recorrendo ao menu tabela, encontrou todos os termos consecutivos entre 0 e 15 de uma sequência cujo termo geral é a expressão do modelo encontrado na questão anterior (Figura 21). O par B, embora procedesse à substituição, mostrou-se inicialmente um bocado reticente:

O – Professora, mas com esta expressão, se substituir por 0, não dá o [salário mínimo] de 2015. Porquê?

Eu – Como é que encontraram o modelo anterior?

O – Fizemos uma regressão?

Eu – E o que é que isso significa?

O – É uma aproximação.

Eu – E agora pede-vos o quê?

O – Uma previsão... Ahhh então substituímos por 15.

Na resolução da questão 3, os alunos foram confrontados com novos dados. A partir deles, tinham de ser capazes de formular uma conjectura e, posteriormente, validá-la. Ao circular pelos lugares, fui ouvindo algumas ideias que iam surgindo pelos pares. O par A foi o primeiro a partilhar a sua ideia: “O salário deles [na Polónia] dá saltos maiores que os nossos [em Portugal]. Ahhhh... Então vai no futuro ser superior” (Tulipa).

O par B sentiu uma pequena dificuldade inicial em formular a sua conjectura e, por isso, decidiu pedir ajuda. Bastaram três questões para que, sozinhas, as alunas conseguissem não só construir a sua conjectura, como também delinear uma estratégia para validá-la:

Eu – O que está a acontecer aqui?

R – Estão os dois a crescer.

Eu – E como é esse crescimento?

R – Ahhh... Não sei.

Eu – O crescimento é igual?

O – Não é.

R – É mais rápido na Polónia.

O – Então vai ultrapassar Portugal.

R – É isso. Vamos fazer agora o modelo para este e ver isso.

À semelhança do que foi feito na primeira questão, os alunos recorreram às potencialidades da calculadora para conseguirem provar a conjectura formulada. No menu estatística, inseriram os novos dados nas listas, obtiveram um novo diagrama de dispersão e encontraram o modelo que melhor se ajustava ao problema (Figura 23). O par A esboçou o gráfico das expressões que modelavam a situação descrita, mas não os identificou, nem registou como é que encontrou essas expressões. Além disso, o registo escrito é bastante desorganizado e os alunos não justificaram a conjectura formulada inicialmente. Pelo contrário, o par B e o grupo A apresentaram o esboço do diagrama de dispersão e dos gráficos das expressões encontradas. No entanto, utilizaram novamente as letras x e y para representar as variáveis no sistema de eixos cartesianos e não apresentaram a janela de visualização utilizada. O grupo A, tal como o par A, não validou a conjectura formulada. Já o par B interpretou os gráficos representados na calculadora gráfica e percebeu que o salário mínimo na Polónia apresenta um crescimento mais acentuado (maior declive) e que, por essa razão, a dada

altura, o salário mínimo na Polónia passará a ser superior ao salário mínimo em Portugal.

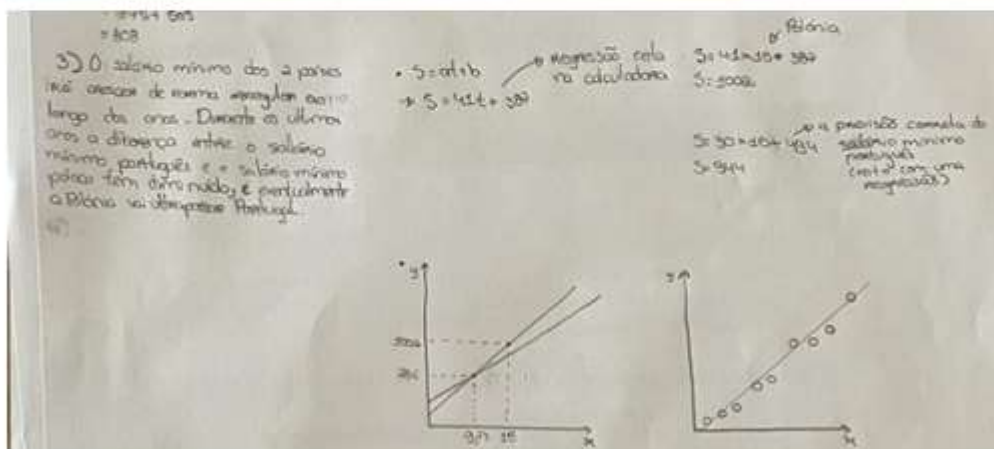
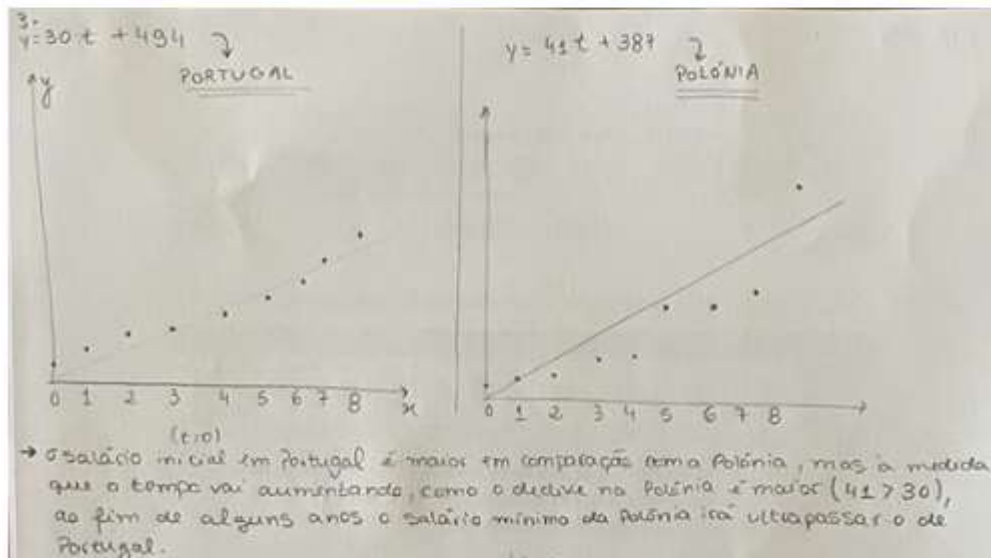
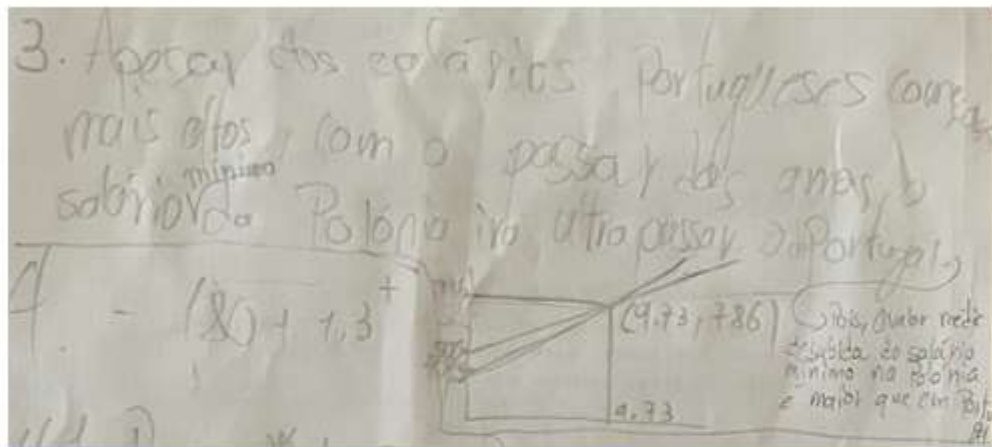


Figura 23 - Resolução da questão 3 da Tarefa 4: Par A (cima), Par B (meio), Grupo A (baixo)

Na última questão da tarefa, questão 4, todos os alunos representaram graficamente as funções $y_1 = 180 \times 1.3^t$ e $y_2 = 28t + 498$, na alínea 4.2, e, na alínea 4.4 representaram a função $y_3 = 2480$ e novamente a função $y_1 = 180 \times 1.3^t$. Em ambas as alíneas, determinaram o ponto de interseção dos respetivos gráficos. Nesta representação, apesar de todos os alunos definirem uma janela de visualização que lhes permitiu interpretar e responder a cada alínea, não a apresentaram no registo escrito. Além disso, voltaram a não indicar as variáveis dos eixos cartesianos e, quando o fizeram, utilizaram, mais uma vez, as letras x e y (Figura 24).

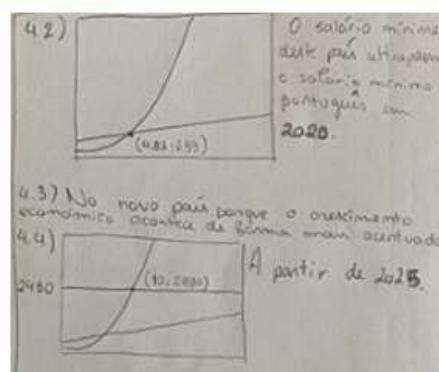
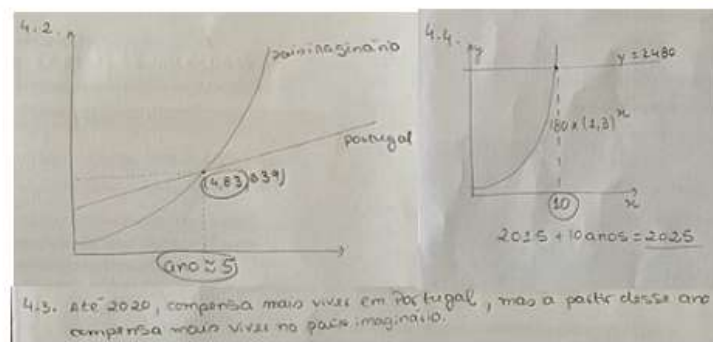
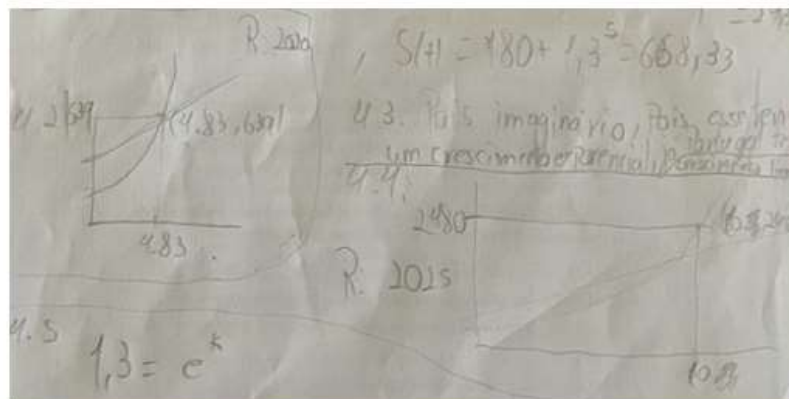


Figura 24 - Resolução da questão 4 da Tarefa 4: Par A (cima), Par B (meio), Grupo A (baixo)

A resolução da alínea 4.3 dependia da interpretação da representação gráfica da alínea anterior. Ao contrário do par B, o par A e o grupo A cingiram-se apenas à observação do comportamento dos gráficos e não tiveram em consideração o ponto de interseção que encontraram e que era indicador de uma mudança. No momento de discussão coletiva, foram convidados a expor as suas ideias. Depois de um pequeno confronto entre o par A e o par B, conseguiram dar resposta à questão:

T (par A) – Tem um crescimento exponencial, logo é o [país] imaginário.

O (par B) – Não é bem assim... Depende durante quantos anos lá estará e entre que anos.

T (par A) – Oh, ok. Então até 2020 compensa Portugal e depois no país imaginário.

A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica começa a distinguir-se. Uma vez que o par A procurou, mesmo não sendo necessário, ir mais além e explorar algumas das potencialidades da calculadora gráfica de que tinham conhecimento para dar resposta a algumas das questões, tendo como base o estudo de Rocha (2002), a metáfora do “laboratório” parece ser uma boa caracterização para a utilização que fazem da calculadora gráfica. A utilização que o par B faz da calculadora gráfica continua a assemelhar-se ao “avião a jacto”, pois as alunas não manifestam vontade em explorar as potencialidades da calculadora gráfica, preferindo continuar a recorrer à calculadora por uma questão de facilidade e rapidez quando esta utilização é aliada a um conjunto de passos já conhecidos. Por fim, o grupo A utiliza a calculadora gráfica como uma “tábua de salvação”, procurando encontrar respostas nela quando não o conseguem fazer algebricamente (Rocha, 2002).

5.1.6. A quinta tarefa

Esta tarefa (Anexo 5) foi realizada individualmente como trabalho de casa na aplicação Milage Aprender +. Infelizmente, duas das alunas da turma não realizaram o trabalho de casa, mesmo sendo-lhes dada a oportunidade de o fazer na aula seguinte.

Como foi possível observar, nem sempre os alunos registam, em simultâneo, a representação gráfica da calculadora e a respetiva interpretação. Se, em alguns casos, respondem à questão sem o apoio da representação gráfica, noutros apenas apresentam o esboço gráfico acreditando ser o suficiente para dar resposta ao problema. Neste sentido, esta tarefa permite-nos perceber como é que os alunos explicam o seu raciocínio e como o registam no papel.

Na resolução desta tarefa, apenas uma aluna recorreu exclusivamente à verbalização do seu raciocínio e os restantes alunos aliaram a representação gráfica e a explicação por escrito do seu pensamento.

A aluna Peónia recorreu à calculadora gráfica para rejeitar as opções A, C e D (Figura 25). No entanto, não transcreveu o esboço dos gráficos representados na máquina. Apesar de ter apresentado justificações diferentes para rejeitar cada expressão, as razões que apresentou para descartar a opção D foram confusas e difíceis de entender. A falta do esboço gráfico comprometeu a interpretação da resposta dada pela aluna. Na aula seguinte, em conversa com a aluna, percebi que nem a própria sabia o que tinha feito, revelando que o gráfico que viu na calculadora estava muito estranho. Depois de procurar na calculadora encontrou a respetiva representação gráfica:

Eu – Ui...já estou a ver que puseste a janela de visualização demasiado grande, o que distorceu o gráfico. Como puseste estes valores?

P – Eu não meti, ajustei automaticamente no *zoom fit*.

N – Tu usas isso?

P – Sim, costumo usar sempre.

A aluna demonstrou grandes dificuldades em escolher valores adequados para a janela de visualização e, por essa razão, recorre ao *zoom fit* sem perceber o efeito que ele exerce sobre o aspeto do gráfico.

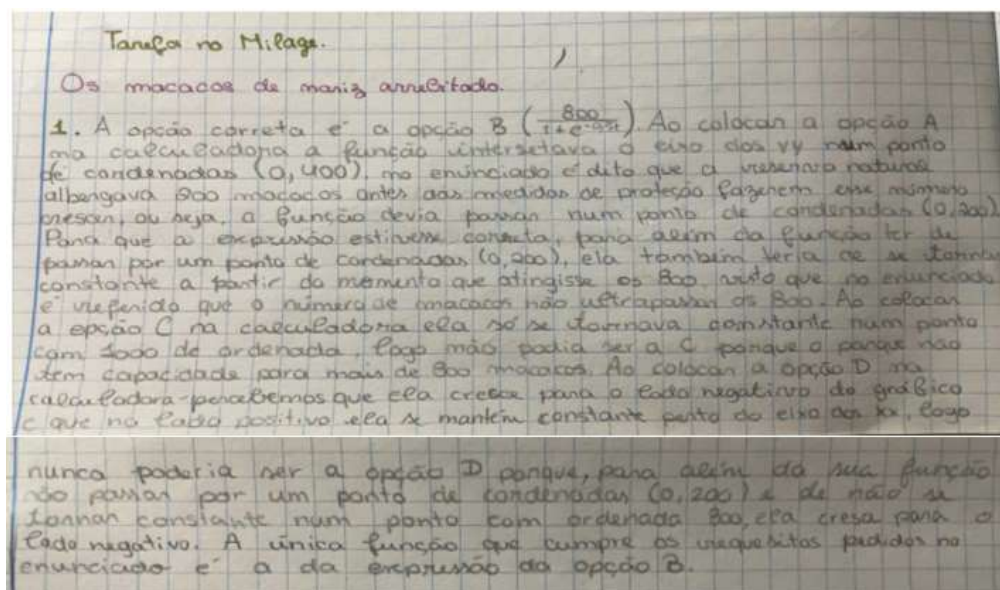


Figura 25 - Resolução da Tarefa 5 (Peónia)

Os alunos Tulipa, Orquídea e Rosa representaram graficamente as quatro expressões (figuras 26 a 28, respetivamente), analisaram e interpretaram cada uma delas tendo em consideração a informação fornecida no enunciado. Indicaram a opção correta e justificaram o motivo que os levou a rejeitar as restantes opções. Todos os alunos representaram graficamente as funções, considerando corretamente o domínio das mesmas, e representaram a assíntota horizontal de cada gráfico. A aluna Orquídea e o aluno Tulipa indicaram as variáveis dos eixos cartesianos de acordo com o contexto do problema. Pelo contrário, a aluna Rosa volta a utilizar as letras x e y para representar as variáveis no sistema de eixos cartesianos. Comparativamente com as representações gráficas realizadas nas tarefas anteriores, os alunos demonstraram ter maior cuidado e rigor na representação gráfica desta tarefa.

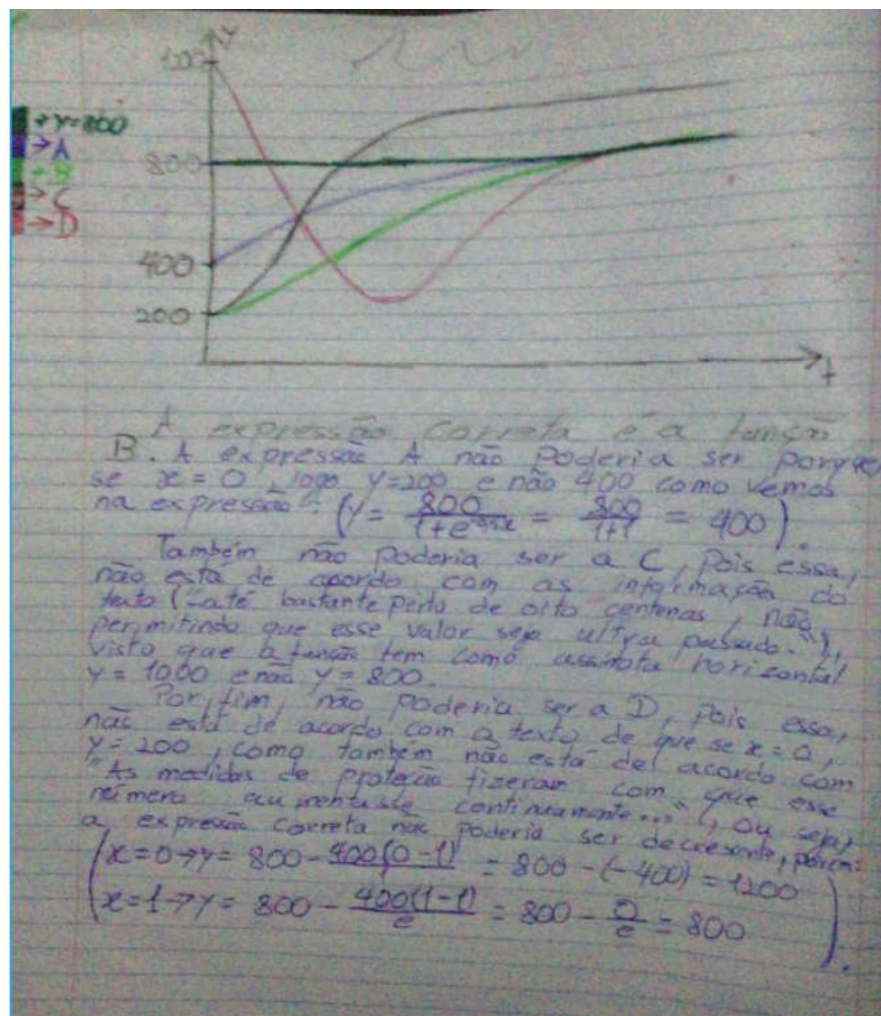


Figura 26 – Resolução da Tarefa 5 (Tulipa)

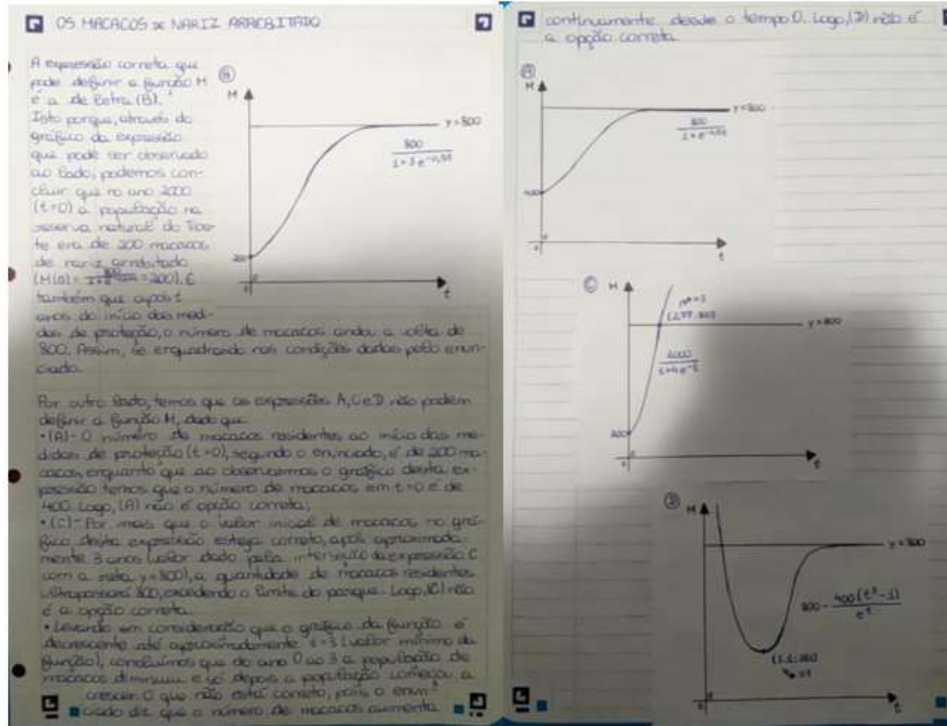


Figura 27 – Resolução da Tarefa 5 (Orquídea)

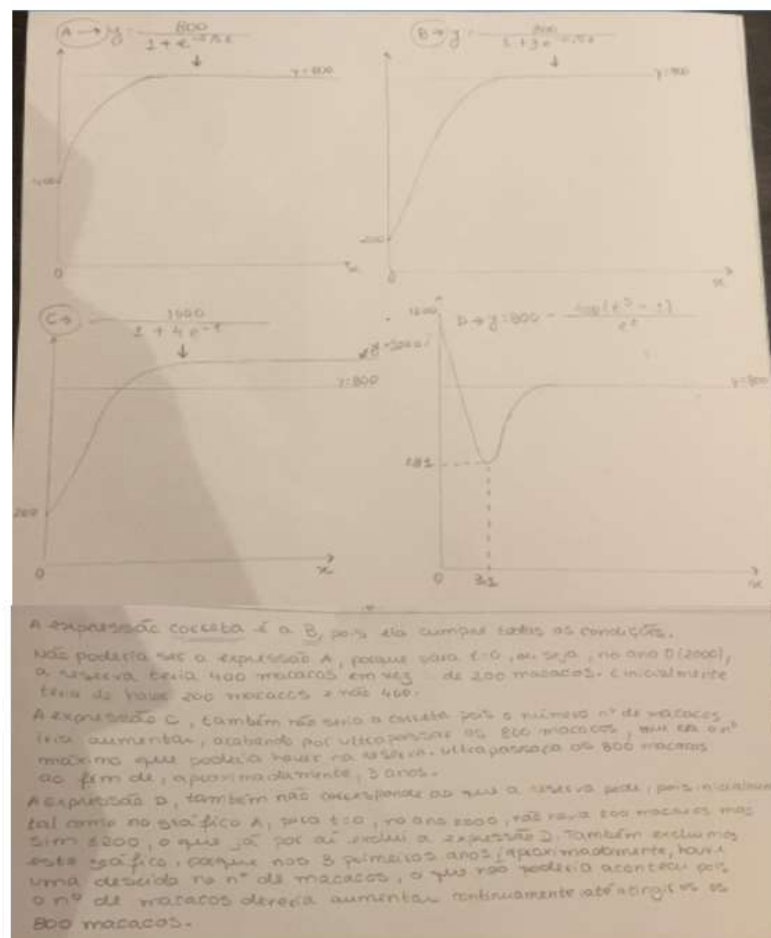


Figura 28 – Resolução da Tarefa 5 (Rosa)

Como esta tarefa foi realizada em trabalho de casa, não foi possível acompanhar de perto a utilização que os alunos fizeram da calculadora gráfica. Porém, no momento de discussão coletiva, percebi que os alunos que tendem a gostar mais da disciplina, como é o caso do Tulipa, da Orquídea e da Rosa, demonstraram maior curiosidade em explorar a calculadora gráfica e uma maior facilidade em articular os seus conhecimentos e a informação obtida pela calculadora. Enquanto que o aluno Tulipa apresenta espírito crítico na exploração das potencialidades da máquina, a utilização que as alunas Orquídea e Rosa fazem da calculadora gráfica é um pouco mais limitada à reprodução de técnicas para que sejam visíveis resultados mais rapidamente. Essa grande diferença de utilização é que permite distinguir e categorizar a utilização que os alunos fazem da calculadora como um “laboratório”, no caso do aluno Tulipa, e um “avião a jacto”, no caso das alunas Orquídea e Rosa, recorrendo à terminologia de Rocha (2002). A perspetiva que as alunas Peónia, Margarida e Narciso têm da disciplina condiciona o aproveitamento que podem fazer da máquina, sendo este, na maioria das vezes, desligado da compreensão e, por isso, feito um bocado ao acaso, tal como se tratasse de uma “tábua de salvação” (Rocha, 2002).

5.1.7. Síntese sobre a utilização da calculadora gráfica pela turma

Da análise dos dados feita até então, constata-se que os alunos recorrem à calculadora gráfica para expressar o seu raciocínio na resolução de problemas. No entanto, o registo escrito da informação que os alunos retiram da calculadora gráfica tende a basear-se ou só na representação gráfica, como se esta justificasse e desse todas as respostas, ou só na verbalização da resposta e do pensamento acerca da interpretação gráfica, sem o seu registo. Com a habitual utilização da calculadora gráfica, os alunos começaram, regra geral, a perceber a importância de um registo escrito completo, que contempla a estratégia de resolução, o esboço da representação gráfica, a sua interpretação e as conclusões retiradas, na resolução de problemas.

Dentro das estratégias utilizadas pelos alunos, a definição da janela de visualização foi aquela que suscitou mais dificuldade e que, por esse motivo, deve ser trabalhada com os alunos (Consciência, 2013). No início os alunos representam graficamente uma função sem considerar um intervalo adequado ao contexto da situação. Com a prática, começam a reconhecer a importância de escolher valores para a janela de visualização, mas a escolha desses valores surge, muitas vezes, por tentativa e erro ou da realização do *zoom fit*, por isso é que não indicam a janela de visualização utilizada. A articulação entre diferentes menus da calculadora gráfica foi também uma das estratégias mais adotadas, sendo que o menu gráfico é aquele que

os alunos preferencialmente utilizam. Na maioria dos casos, a utilização do menu tabela e do menu estatística é feita apenas quando a resolução das tarefas seria impraticável sem o recurso a eles.

É importante ressaltar uma situação que ocorreu na resolução de todas as tarefas, mesmo tendo sido discutida várias vezes. Os alunos demonstraram ter uma certa tendência para registar em papel aquilo que é exibido pela máquina. Isto é, no caso das representações gráficas, os alunos utilizam, tal como na calculadora, as letras x e y para representar as variáveis dos eixos coordenados, em vez de escolherem letras que contextualizem a situação em questão.

É possível ainda concluir que, tal como no estudo realizado por Helena Rocha, em 2002, as potencialidades da calculadora gráfica substituíram facilmente “as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função” (p. 19). Nesse seguimento, a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica sofreu positivamente uma evolução. Na resolução das primeiras duas tarefas, os alunos apenas utilizavam a calculadora gráfica por não conseguirem aceder à informação necessária sem o seu recurso ou por uma questão de rapidez, e essa utilização era baseada num conjunto de regras de atuação. Por essa razão, existiam na turma apenas dois tipos de utilização: a “tábua de salvação” e o “avião a jacto”. Com o decorrer do trabalho com recurso à calculadora gráfica, em algumas situações, os alunos começaram a apresentar uma maior preocupação em utilizar a calculadora gráfica e uma curiosidade adicional em explorar as suas potencialidades quando estas estão ligadas à compreensão do que está a ser feito. A partir desse momento, surgiu o terceiro tipo de utilização: o “laboratório”.

5.2. Três alunos e a calculadora gráfica

Nesta secção, irei analisar a utilização que três alunos, a Orquídea, o Tulipa e a Peónia, fazem da calculadora gráfica. Estes alunos foram selecionados por mim, de acordo com os critérios enunciados no capítulo quatro. Para cada aluno, começarei por analisar as produções escritas, relativas à resolução da tarefa realizada no momento da segunda entrevista (Tarefa para a entrevista - Anexo 9), e de seguida partilharei os excertos recolhidos nas entrevistas que se revelaram importantes para o objetivo desta investigação.

5.2.1. A Orquídea

A Orquídea é uma aluna muito empenhada, comunicativa e participativa em qualquer tarefa realizada em sala de aula. É muito preocupada com a obtenção de bons

resultados e, por isso, dedica-se a compreender aquilo que está a ser feito. Nutre um gosto muito especial pela vertente analítica, mas afirma que funções são o seu maior pesadelo.

Na resolução da tarefa escolhida para a entrevista, a aluna começou por recorrer ao menu estatística e inseriu os dados nas listas, considerando o ano 2010 como sendo o ano 0, o ano 2011 como sendo o ano 1 e assim sucessivamente. Depois obteve o diagrama de dispersão. A aluna analisou a representação gráfica e, o aspeto da mesma, levou a aluna a achar que o modelo exponencial era o que melhor ajustava a situação descrita (Figura 29):

O – Ok, linear não é. Ahhh... E a gente aprendeu a exponencial, a logarítmica e a logística.

Eu – E como é que vais decidir qual delas usar?

O – A logística tem aquela coisa de que começa a estabilizar e neste caso ... Não sei se tenho dados para decidir isto, mas pelo aspeto parece exponencial.

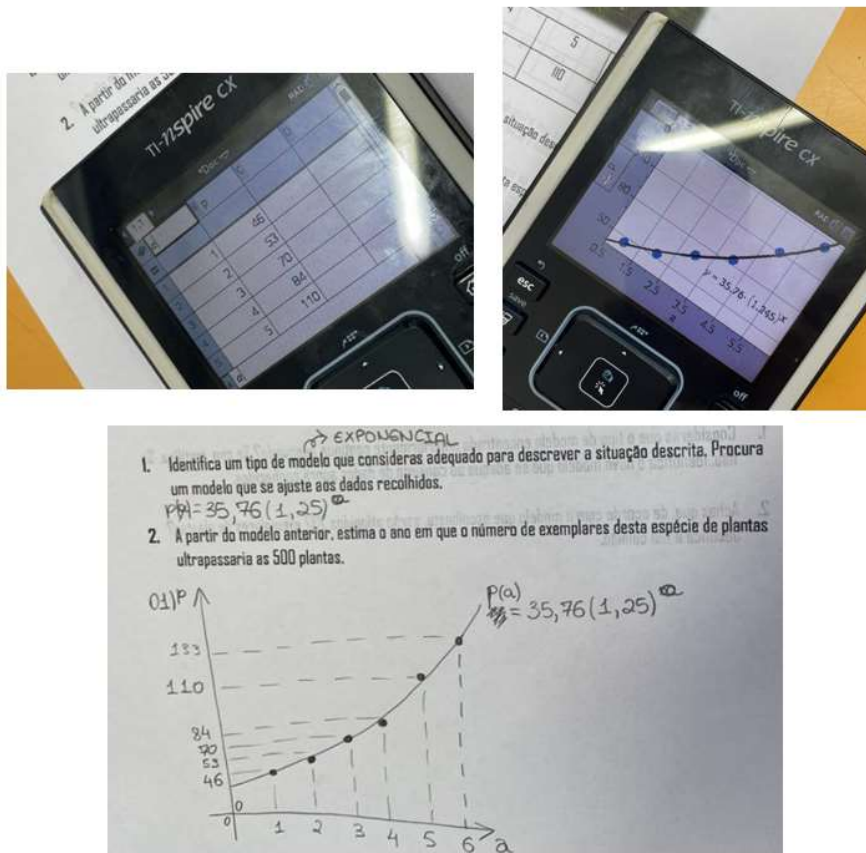


Figura 29 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista– Parte 1 (Orquídea)

Na questão seguinte, a aluna representou graficamente as funções $y_1 = 500$ e $y_2 = 35.76 \times 1.25^a$, optou por arredondar os parâmetros e não utilizar a função guardada no menu estatística, para determinar o ponto de interseção dos respetivos gráficos (Figura 30). Nesta representação, a aluna inicialmente demonstrou não prestar a devida atenção à escolha dos valores da janela de visualização e, dessa forma, não conseguia responder à questão colocada:

O – Vou mudar a janela de visualização.

Eu – E vais mudar para o quê?

O – Ahhh... Primeiramente o x e o y mínimo têm de ser 0 porque não podem ser negativos. Ahhh... O x máximo tem de ser um pouco mais do que 6, vou pôr uns 10 e o y uns 150, um bocado depois do que já tem. [pausa] Oh, só que agora... Oh entretanto descobri um erro que fiz eu tenho de procurar quando $y = 500$, então não pode ser esse valor [150] porque assim não consigo visualizar. [pausa] ois, e também vou ter de aumentar o meu x porque não consigo visualizar a interseção.

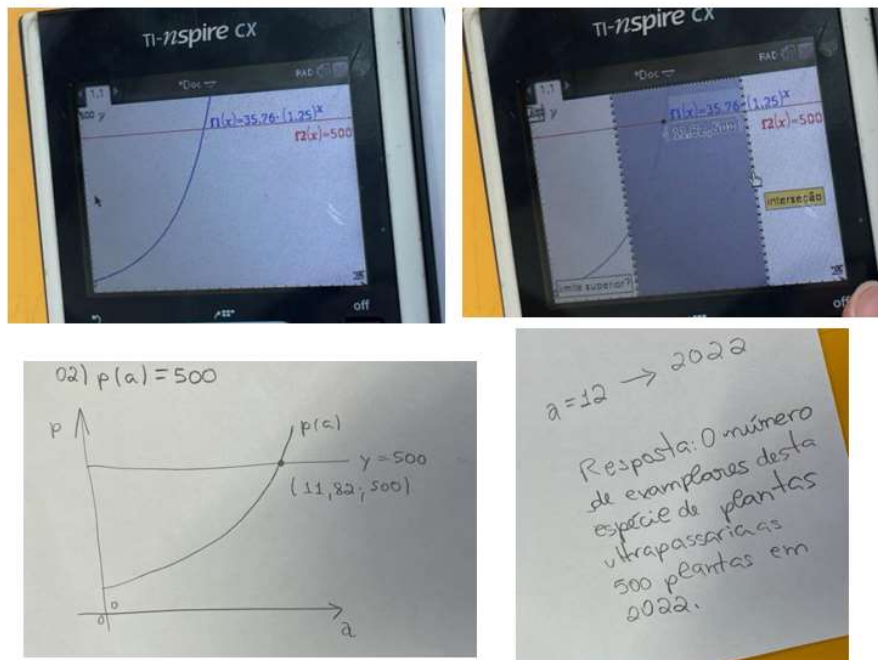


Figura 30 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Orquídea)

Na parte 2 da tarefa, a aluna acrescentou mais dados à lista e procurou ver se o mesmo modelo se adequava à nova situação. Percebeu que, com o acréscimo destes dados, a nuvem de pontos sofreu alterações e que o esboço do gráfico anterior não

passava em todos os pontos. Ao analisar o comportamento da nuvem de pontos, decidiu aplicar o modelo logístico e concluiu que seria um bom modelo, uma vez que passava em todos os pontos (Figura 31):

O – Vou colocar estes dados na tabela e ver se... ahhh se ajusta ao modelo anterior... Pelo aspeto do gráfico vemos logo que o modelo antigo já não serve.

Eu – Porquê?

O- Ela [exponencial] começa a passar muito longe dos pontos; então já não serve. Vou colocar uma nova regressão.

Eu – Qual?

O – Ahhh.... hhhh... Se calhar logística.

Autora – Porquê?

O – Eu só acho que é pelo aspeto. Até que no ano 12 e no ano 13 os números são muito próximos, e pelo que aprendi na logística, os valores começam a estabilizar... E pronto aqui é isso.

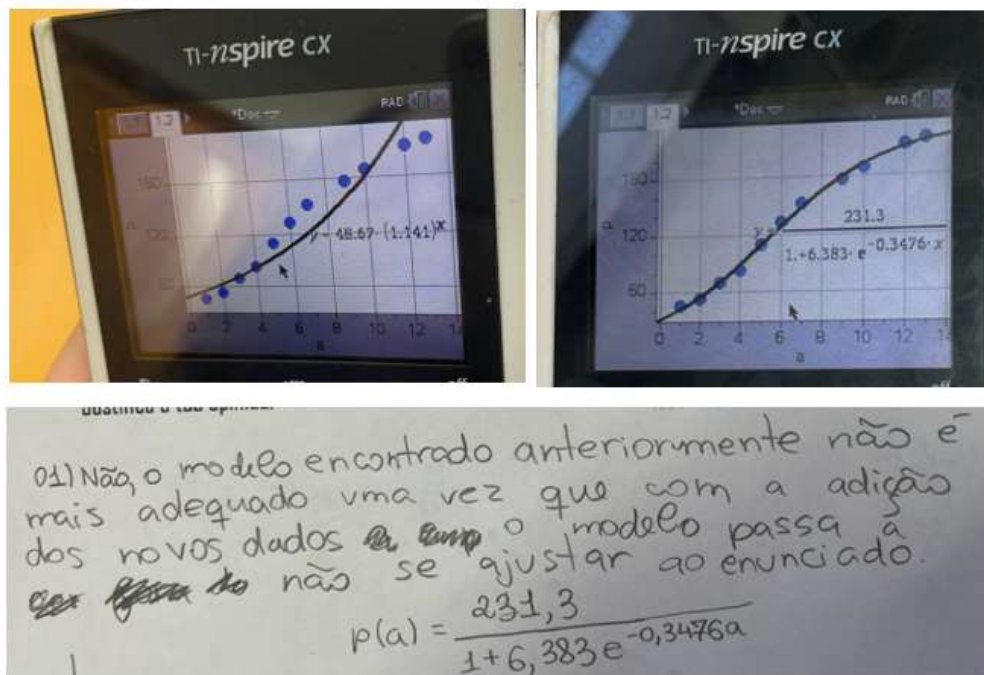


Figura 31 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Orquídea)

Em suma, penso que o conhecimento que a aluna tinha sobre os diferentes modelos, permitiu-lhe estabelecer as suas conclusões apenas com a observação gráfica. Ainda assim, utilizou a calculadora gráfica para comprovar as suas ideias.

Na resolução da questão 2 da segunda parte da tarefa, apesar da calculadora não permitir traçar a assíntota horizontal do gráfico, a aluna não hesitou em responder “Não [serão atingidos 232 exemplares de plantas, de acordo com o modelo]”. Determinada a explicar o porquê, recorreu à calculadora gráfica e voltou a enfrentar algumas dificuldades na escolha dos valores da janela de visualização e na realização de *zooms* (Figura 32):

O – Não. Eu aprendi que o numerador é a assíntota do gráfico, ou seja, vai estar próximo, mas nunca vai ultrapassar. E 232 é maior que 231.3, e provavelmente tem mais casas decimais, logo nunca vai chegar aos 232. [pausa] Eu também posso colocar a minha função e $y = 231.3$ num gráfico. Tenho de ajustar a janela.

Eu – Para que valores?

O – Vou colocar aqui no y 250, e vou aumentar o x para ver quando é que começa a ficar constante.... Ohhh acho que temos de visualizar mais de perto.

Eu – E como é que vais fazer isso?

O – Vou ampliar... Ui desapareceu.

Eu – Pois, o que aconteceu?

O – Ampliei de mais, acho... Sim foi isso. Já está!

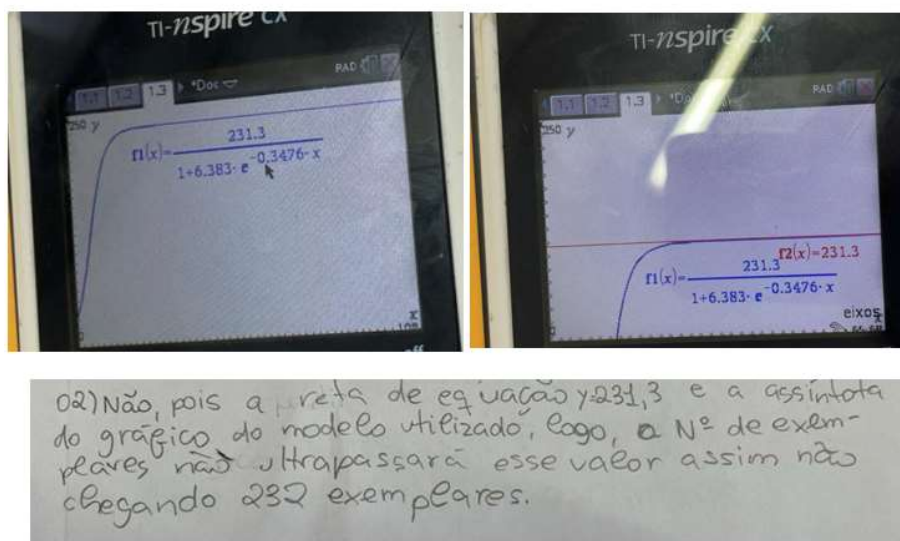


Figura 32 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Orquídea)

Depois da resolução da tarefa, a entrevista com a Orquídea prolongou-se ligeiramente para que eu pudesse completar a informação já recolhida. Tentei perceber junto dela, questionando-a se a forma como descrevera a sua relação com a calculadora gráfica se mantém ou se mudara relativamente à primeira entrevista. A aluna respondeu que

“Melhorou, certamente que melhorou...Ahh...Eu ainda acho complicadas encontrar algumas funções, mas nada que um pouco mais de prática não me vá ajudar. Como agora, nesses modelos, a gente tem usado muito a calculadora, eu acho que tenho aprendido muito. Ahhh... Mas, de modo geral, eu acho que melhorou. Eu não sabia, tipo, fazer estas coisas, regressões, e eu agora já aprendi. Foi uma boa experiência.” (entrevista 2, Orquídea, 04/04/2023).

Não fiquei surpreendida com a resposta da aluna. Ao longo da minha intervenção pedagógica, fui acompanhando atentamente essa evolução e fui percebendo que aquela relação que descrevia como sendo “uma faca de dois gumes” se estava a desconstruir e a dar lugar, progressivamente, a uma admiração pela facilidade e rapidez que a calculadora gráfica lhe permite alcançar as respostas desejadas.

Procurando descobrir quando é que aluna recorre ao uso da calculadora gráfica e como é que é feita essa utilização, questionei-a novamente nesse sentido. Rapidamente ela referiu que a utiliza “pela rapidez quando é necessário fazer gráficos, ver interseções e também (...) fazer contas simples” (entrevista 2, Orquídea, 04/04/2023). Apesar da rapidez que tanto admirava, a sua vertente analítica continuou fortemente presente. A aluna continuou a preferir, por questões de segurança, a utilização do papel e do lápis: “(...) eu sou aquela pessoa que, se eu tenho possibilidade de fazer à mão, vou fazer à mão” (entrevista 2, Orquídea, 04/04/2023).

5.2.3. O Tulipa

O Tulipa é um aluno que demonstrou, ao longo do ano, ser pouco empenhado fora da sala de aula, mas com um raciocínio que o destaca dos restantes colegas. É um aluno participativo em todas as tarefas realizadas em sala de aula, comunicativo e está sempre pronto para ajudar os colegas quando estes precisam. Gosta de desafios, de explorar e critica a mecanização do ensino. Para ele, a utilização da calculadora nas aulas de Matemática é essencial se não for utilizada como substituta do cálculo mental.

Na resolução da tarefa escolhida para a entrevista, à semelhança da aluna anterior, este aluno recorreu ao menu estatística e inseriu os dados nas listas,

considerando o ano 2010 como sendo o ano 0, o ano 2011 como sendo o ano 1 e assim sucessivamente. Antes de obter o diagrama de dispersão, o aluno formulou uma conjectura, acreditando ser o modelo exponencial o melhor modelo para ajustar aqueles dados:

T – Isto é o modelo.... Ahhh então, isto será o modelo exponencial.

Eu – Porquê?

T – Porque se x for os anos decorridos e o y o número de plantas, para cada x o y está a ter um aumento cada vez maior.

Posto isto, o aluno obteve a nuvem de pontos, analisou-a atentamente, e validou a sua conjectura (Figura 33):

T – Olhando para estes pontos é a exponencial. Vou fazer a regressão... Sim, é a exponencial.

Eu – Porquê esse é com tanta convicção?

T – Então, porque os pontos estão bem próximos do gráfico da função.

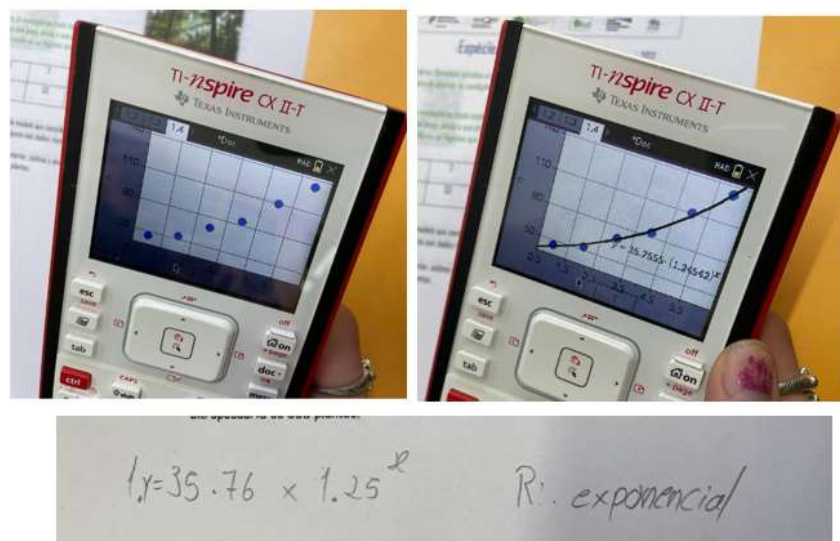


Figura 33 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Tulipa)

O raciocínio deste aluno distinguiu-se da aluna anterior, uma vez que, neste caso o aluno antes de recorrer à calculadora gráfica procura interpretar os dados do enunciado, face aos seus conhecimentos, e, posteriormente, estabelecer alguma conjectura. Só depois é que recorre à calculadora gráfica, com o objetivo de validar as suas ideias.

Na questão seguinte, o aluno também representou graficamente as funções $y_1 = 500$ e $y_2 = 35.76 \times 1.25^x$ para determinar o ponto de interseção dos respetivos gráficos (Figura 34). Nesta representação, o aluno inicialmente demonstrou não ter dificuldades na escolha dos valores da janela de visualização e, dessa forma, rapidamente chegou a uma resposta:

Eu – Estou a ver que vais ajustar a janela de visualização. Para que valores?

T – Sim. Então o x não sei quantos anos é que será, mas coloquei um número maior [20], mas sem exagerar e para o y tinha de ser pelo menos 500, porque a pergunta é para saber quando é que ultrapassa os 500, então meti 550. [pausa] Prontos. Então teria de decorrer 12 anos.

Eu – Porquê?

T – Porque 11.8 arredondado dá 12... Ahhh espera aí, tecnicamente é no ano 11 porque se começou em 2010, e 11.8 ainda é o ano 11 que é o ano 2021. É isso, ainda seria em 2021, mas seria no final do ano.



Figura 34 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Tulipa)

Na parte 2 da tarefa, o aluno acrescentou mais dados à lista e voltou a formular uma conjectura:

T – Pelos dados, presumo que este não será o mesmo modelo e vai ser o logístico... Logístico não... Ahhh, sim, é o logístico.

Eu – Porquê?

T – Porque, no início, até mais ou menos a metade, está a haver um crescimento bem exponencial. É um crescimento rápido. Só que depois, quanto maior o x , mais o número de plantas vai amenizando.

À semelhança do que aconteceu na parte 1 da tarefa, também nesta parte procurou validar a sua nova conjectura com recurso à calculadora gráfica. Percebeu que, com o acréscimo destes dados, a nuvem de pontos modificou-se e que o esboço do gráfico anterior não passaria em todos os pontos. Ao analisar o comportamento da nuvem de pontos decidiu aplicar, com confiança, o modelo logístico, e concluiu que seria um bom modelo, uma vez que passava em todos os pontos (Figura 35):

T – É isso que eu estava a dizer. O gráfico começa, cresce muito rápido até um certo x e depois começa a estabilizar.

Eu – Então vais optar por fazer qual regressão?

T – A logística.

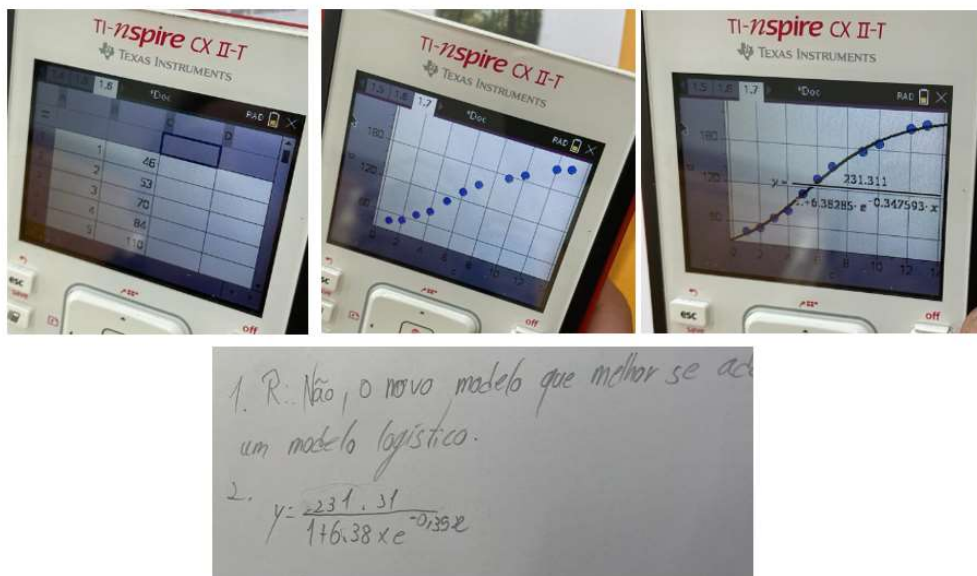


Figura 35 – Resolução da questão 1 e 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 2 (Tulipa)

Na resolução da questão 2 da segunda parte da tarefa, o aluno respondeu imediatamente que “Não” [serão atingidos 232 exemplares de plantas, de acordo com o modelo]” e prontificou-se a explicar antes de lhe ser pedido:

T – Eu sei que o valor que se encontra no numerador numa função logística é a assintota horizontal da função. E vemos isso no gráfico. Ela quase que bate lá, mas não chega a tocar. Por isso, se x tende para mais infinito...

Eu – O que é isso de x tender para mais infinito?

T – São os anos a passar. À medida que eles passam, o y , que é o número de plantas, vai tender para 231 mas não chega a ultrapassar. Ou seja, não vai chegar a 232.

Na resolução desta questão o aluno não sentiu necessidade em utilizar a calculadora gráfica, uma vez que considerou ser suficiente o conhecimento que tinha relativamente ao modelo logístico.

Do mesmo modo que a entrevista realizada à Orquídea, na entrevista com o Tulipa também reservei um momento para perceber como é que, depois de meses de trabalho com a calculadora gráfica, ele descrevia a relação que estabelecia com ela. O aluno começou por afirmar que “não considero que antes fosse má (...) sempre gostei muito de usá-la (...) é uma ferramenta muito fixe e, desde que começámos a usar mais, comecei a entender melhor como e quando a devo usar” (Entrevista 2, Tulipa, 04/04/2023).

Este aluno sempre demonstrou curiosidade em explorar as potencialidades da calculadora gráfica, mas confesso que fiquei curiosa em saber aquilo que ele queria dizer com o “comecei a entender melhor como e quando a devo usar”. Por isso, confrontei-o com essa afirmação. Rapidamente me respondeu que a usa em situações em que sente a necessidade de “visualizar o gráfico de algumas funções e em que é preciso encontrar um modelo, sendo que, para isso, preciso de fazer regressões” (Entrevista 2, Tulipa, 04/04/2023). Quanto à forma como a utiliza, realça que “como gosto de a utilizar e experimentar ela é boa para comprovar muitas das minhas ideias, porque já sei as respostas, mas ela dá-me as certezas” (Entrevista 2, Tulipa, 04/04/2023).

5.2.5. A Peónia

A Peónia é uma aluna que revela não gostar de Matemática e que admite sentir algumas dificuldades. É uma aluna pouco empenhada em combater essas dificuldades e que necessita de uma maior atenção por parte dos professores. Encara a Matemática como um conjunto de regras e procedimentos que devem ser praticados na resolução de exercícios. Utiliza a calculadora sem grande critério e preocupação, mas sempre com a esperança de nela encontrar respostas.

Na resolução da tarefa escolhida para a entrevista, tal como os dois alunos anteriores, esta aluna recorreu ao menu estatística e inseriu os dados nas listas, considerando o ano 2010 como sendo o ano 0, o ano 2011 como sendo o ano 1 e assim

sucessivamente. Depois obtive o diagrama de dispersão. A aluna analisou a representação gráfica e demonstrou não ter qualquer ideia sobre qual seria o modelo que melhor ajustava a situação descrita. Esta situação revelou que a aluna possuía uma insuficiente compreensão dos modelos estudados e, portanto, não conseguiu associar nenhum modelo à situação descrita. Consequentemente, não desenvolveu a capacidade de articular a informação presente no enunciado com a que estava disponível no visor da calculadora gráfica. Essas lacunas levaram-na a escolher, erradamente, o modelo logístico como o melhor modelo para os dados apresentados (Figura 36):

Eu – E agora o que vais fazer?

P – Uma regressão.

Eu – Porquê? E qual?

P – Qual não sei, mas vou descobrir. Vou tentar a logarítmica.

Eu – Porquê?

P – Não sei, vou experimentando... Não, esta não é não passa pelos pontos. Vou experimentar a logística... É esta... yeahhh.

Eu – Com esses dados, tens a certeza que é o modelo logístico?

P – Eu não tenho certezas.

EU – Como é o comportamento de uma função logística?

P – Acho que é como está aqui. Está sempre a crescer.

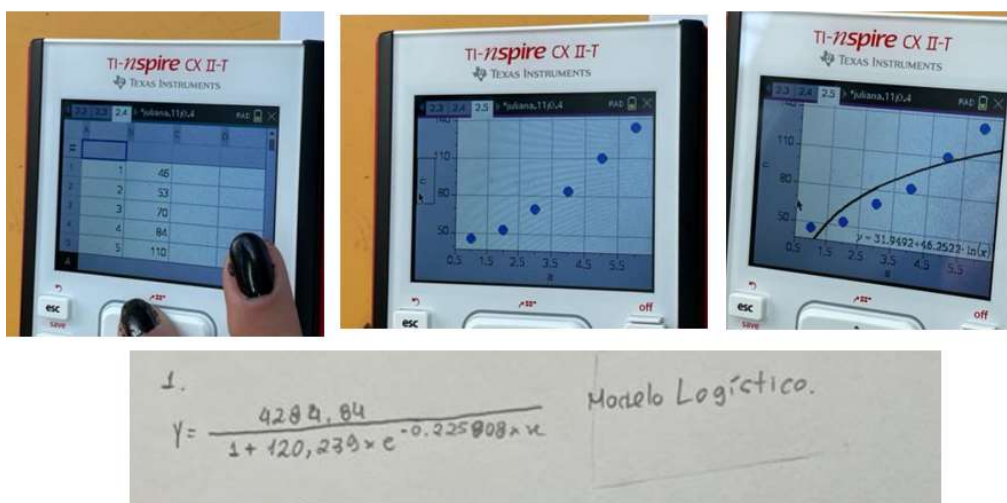


Figura 36 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Peónia)

Ao contrário dos colegas, a aluna não desenvolveu uma compreensão suficiente dos conceitos necessários para a realização desta tarefa. Por essa razão, a aluna viu na calculadora a fonte segura para alcançar uma resposta. Tendo em conta aquilo que observei, pareceu-me que a calculadora desempenha o papel da “tábua de salvação”, de acordo com a terminologia usada por Rocha (2002).

Na questão seguinte, a aluna representou graficamente a função logística, guardada no menu estatística como f_1 . Nesta representação, a aluna escolheu os valores da janela de visualização de acordo com o contexto do problema e, de seguida, recorreu ao menu geometria para colocar um ponto no gráfico, alterando a sua ordenada para 500. Desta forma, conseguiu descobrir o valor da abcissa do ponto e dar uma resposta ao problema (Figura 37).

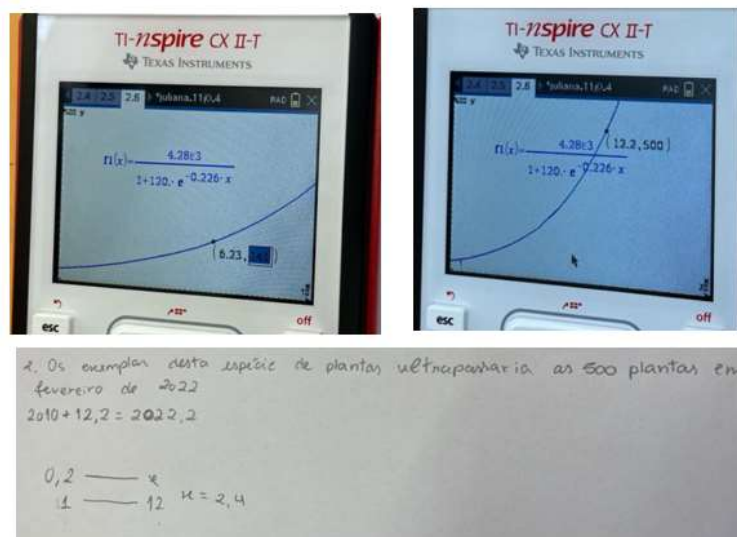


Figura 37 – Resolução da questão 2 da Tarefa para a entrevista – Parte 1 (Peónia)

Ao contrário da questão anterior, e apesar de ter escolhido erradamente o modelo, desta vez a aluna demonstrou, ao delinear uma boa estratégia, ter conseguido interpretar o contexto da tarefa. Demonstrou perceber como é que o recurso à calculadora lhe poderia dar uma resposta, mesmo que esta fosse desligada da compreensão.

Na segunda parte da tarefa, a aluna acrescentou mais dados à lista e procurou ver se o mesmo modelo se adequava à nova situação. Percebeu que, com o acréscimo destes dados, a nuvem de pontos sofreu alterações, mas não conseguia identificar qual seria o melhor modelo a considerar. Apenas tinha uma certeza: que o modelo para esta nova situação não poderia ser o logístico. Acidentalmente, como se pode perceber do diálogo seguinte, a aluna selecionou a regressão logística e surpreendeu-se com o

resultado, o esboço do gráfico passava em todos os pontos. A falta de compreensão acerca dos modelos fez com que aceitasse acriticamente o confronto entre as duas situações concluindo que o modelo anterior seria também um bom modelo para descrever a nova situação (Figura 38):

P – Não pode ser a logística.

Eu – Então qual será agora?

P – Pois não sei... Ai, fiz asneira. Carreguei sem querer nesta [na logística]. Ui, mas então, afinal é a logística. Olha, é porque é nas duas.

Eu – O comportamento dos gráficos é igual? Não achas que poderá estar algum mal?

P – É diferente, mas se deu para as duas, é porque é assim.

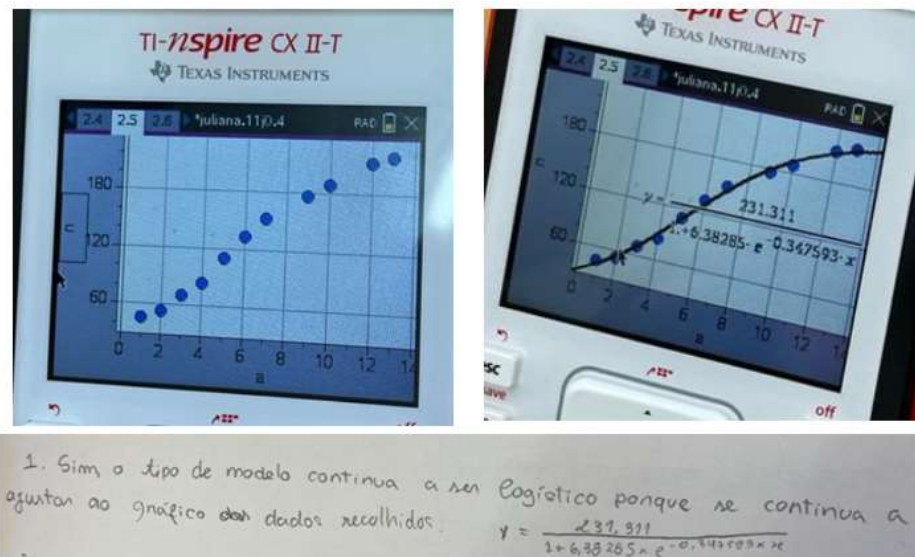


Figura 38 – Resolução da questão 1 da Tarefa para a entrevista– Parte 2 (Peónia)

Novamente, a aluna demonstrou não ter desenvolvido uma compreensão suficiente dos conceitos necessários para a realização desta tarefa. Por essa razão, a aluna aceita, sem questionar, qualquer informação obtida na calculadora gráfica, mesmo que essa lhe cause alguma indignação.

Na resolução da última questão, a aluna representou, novamente, o gráfico da função logística, guardada no menu estatística como f_1 . Nesta representação, a aluna escolheu os valores da janela de visualização de acordo com o contexto do problema e de seguida recorreu ao menu geometria para colocar um ponto no gráfico, alterando a sua ordenada para 232. Automaticamente, apareceu-lhe, no ecrã da calculadora, uma

mensagem de erro que a levou a concluir que não seriam atingidas 232 plantas. Decidiu ir mais além, aumentando o valor do x na janela de visualização e movendo o ponto, percebeu que o número de plantas nunca iria ultrapassar as 231 por mais que os anos passassem (Figura 39).

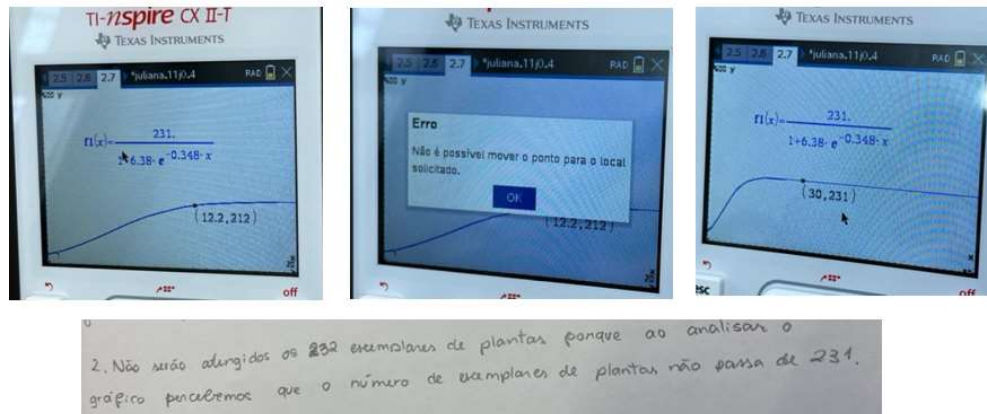


Figura 39 – Resolução da questão 2 da Tarefa 6 – Parte 2 (Peónia)

Depois da resolução da tarefa, bastaram os dois minutos finais da entrevista para perceber que a Peónia tem consciência de que a sua relação com a calculadora gráfica sofreu uma evolução bastante positiva: “Eu acho que melhorei consideravelmente em termos de à-vontade com a máquina e... que...que me atrevo a arriscar um bocadinho mais e a explorar um bocadinho mais” (Entrevista 2, Peónia, 04/04/2023). Perante isto, quis perceber quais seriam as situações em que a aluna se permite a arriscar a explorar as potencialidades da calculadora gráfica. Depois de ser questionada respondeu rapidamente que “antes não usaria em conjunto as tabelas e os gráficos e que agora vejo que dão muito jeito” (Entrevista 2, Peónia, 04/04/2023). Além disso, esta aluna referiu que gosta particularmente da calculadora porque a ajuda no cálculo mental e lhe permite chegar a respostas mais facilmente. Respostas essas que, por processos analíticos, não conseguiria alcançar, uma vez que se considera ser má a Matemática.

5.2.7. Síntese sobre a utilização da calculadora gráfica pelos três alunos

A forte ligação que a Orquídea tem com a vertente analítica da Matemática e o receio do uso das tecnologias condicionara-lhe, em diversas situações, o aproveitamento que poderia fazer das potencialidades da calculadora gráfica. Uma vez que considera que, sem uma boa compreensão, não faz sentido recorrer à calculadora, opta a maior parte das vezes por encontrar alternativas à sua utilização. Porém, à medida que foi conhecendo a máquina que tinha em mãos, começou a reconhecer-lhe potencial e, por esse motivo, empenhou-se em aprender mais sobre a sua utilização.

Como consequência, converteu-se numa fã da rapidez com que a calculadora lhe permite chegar às respostas. Tendo em conta todas estas características, podemos referir que a utilização que esta aluna faz da calculadora gráfica é do tipo “Avião a jato”, e que, de acordo com Rocha (2002), a sua potencialidade mais reconhecida é a rapidez.

Tarefas desafiadoras são as preferidas do aluno Tulipa porque lhe permitem ser um verdadeiro explorador. Considera que a compreensão é a chave da Matemática e de uma boa utilização da calculadora gráfica. Reconhece as potencialidades que esta integra e utiliza-a com regularidade para explorar e validar as suas conjecturas. Assume uma postura crítica quanto à utilização da calculadora gráfica como substituta do cálculo mental. Assim, parece-me que a relação que o aluno tem com a Matemática e, em particular, com a calculadora gráfica encaixam-se nas características que Rocha (2002) considera serem típicas de uma utilização do tipo “laboratório”.

A Peónia, desde, cedo que diz não gostar de Matemática. Assume ter dificuldades e, por esse motivo, regista no caderno todos os passos que deve seguir na resolução das tarefas. A utilização da calculadora gráfica não foge à regra: é feita exatamente da forma como aprendeu. Ao longo do tempo, com o aumento da confiança, a sua postura relativamente ao uso da calculadora gráfica evoluiu positivamente. No entanto, a calculadora gráfica surge-lhe como uma boa escapatória para conseguir encontrar alguns resultados, dado que os seus conhecimentos matemáticos são difusos. Por conseguinte, a utilização da calculadora gráfica parece estar desligada da compreensão e ser feita, ligeiramente, de forma aleatória. Atendendo a todas estas particularidades, a utilização que esta aluna faz da calculadora gráfica parece ser do tipo “tábua de salvação” (Rocha, 2002).

6. Conclusões e Implicações

Em virtude de toda a informação contida neste RE, irei começar por apresentar uma breve síntese dos elementos base desta investigação. Posto isso, abordarei as principais conclusões derivadas da realização deste trabalho. Por último, terei em consideração as possíveis implicações que este estudo poderá ter sobre novas investigações, refletindo, igualmente, sobre a pertinência que este trabalho e a intervenção pedagógica em que se baseou tiveram no meu percurso como docente.

Num estudo realizado há pouco mais de 20 anos por Helena Rocha (2002), foi possível concluir que existia “uma forte tendência para as potencialidades gráficas substituírem rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função” (p. 19). Estado eu a realizar a minha PES com uma turma de Matemática B, inspirei-me no trabalho de Rocha (2002) para conhecer e compreender de que modo os alunos de uma turma de 11.º ano utilizam a calculadora gráfica e as suas potencialidades na aprendizagem da Matemática B. Com este propósito, formulei as seguintes questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica na realização de tarefas matemáticas?
2. Qual o nível de conhecimentos que os alunos têm da sua calculadora gráfica?
3. Qual o aproveitamento que os alunos fazem das potencialidades de que têm conhecimento e que são disponibilizadas pela sua máquina?
4. Quais as dificuldades com que se deparam os alunos aquando da utilização da calculadora gráfica na resolução de tarefas matemáticas e como as ultrapassam?

Estudei o trabalho realizado por diversos autores e investigadores relativo, principalmente, à utilização da calculadora gráfica e à resolução de problemas de modelação para poder fundamentar teoricamente o meu trabalho de investigação, dando especial atenção aos trabalhos de Rocha (2002) e de Viseu e colaboradores (2015, 2016 e 2022). E realizei a minha intervenção pedagógica numa turma do 11.º ano de Matemática B com sete alunos. Desenvolvi uma intervenção pedagógica baseada em cinco tarefas que abordavam os tópicos dos modelos contínuos não lineares (função exponencial, logarítmica e logística) e que implicavam, maioritariamente, a utilização da calculadora gráfica, tal como é recomendado nas orientações curriculares (ME, 2018a, 2018b). A abordagem de ensino privilegiada foi a

de ensino exploratório (Canavarro et. al, 2014; Oliveira et. al, 2013) porque permitiu aos alunos trabalhar com tarefas desafiantes, discutir estratégias de resolução diversas, analisar diferentes representações e coletivamente construir o seu conhecimento matemático.

A recolha de dados incidiu principalmente na recolha das resoluções de cada tarefa de todos alunos e no registo de observações no meu diário de bordo. Numa das tarefas procedi, também, ao registo fotográfico do trabalho realizado com a calculadora gráfica, mas não houve oportunidade de dar continuidade a esta recolha fotográfica. Adicionalmente, realizei, antes e após a intervenção pedagógica, duas entrevistas individuais semiestruturadas a todos os alunos da turma, registadas em suporte áudio. Para este relatório, restringi a análise da segunda ronda de entrevistas a três alunos.

Por mérito dos alunos, a recolha de dados decorreu conforme previsto, realçando a natureza qualitativa e o carácter interpretativo da metodologia que orientou a recolha e análise dos dados. O entusiasmo e a assiduidade dos alunos nos momentos em que era particularmente importante a sua colaboração para a realização deste trabalho permitiram-me obter um conjunto de dados suficientemente amplo em relação às tarefas propostas e às entrevistas realizadas. A partir da realização da primeira tarefa da intervenção pedagógica, os alunos perceberam, rapidamente, que, na aula seguinte, seriam discutidas coletivamente as questões propostas e seria dado feedback oral sobre as produções escritas. Por esse motivo, os alunos mostravam-se ansiosos, mas também motivados para a realização desse momento da aula.

Naturalmente, os resultados deste estudo harmonizam-se com outros encontrados em estudos já realizados. No entanto, existem alguns aspetos que se encontram em menor consonância relativamente às conclusões alcançadas em trabalhos anteriores. Nos parágrafos seguintes, ficará claro em que é que este estudo confirma trabalhos anteriores ou levante algumas dissonâncias.

Relativamente à primeira questão de investigação, os resultados analisados no capítulo anterior vão ao encontro dos resultados de Rocha (2002), ou seja, as principais razões pelas quais os alunos optam por recorrer à calculadora gráfica, na resolução das tarefas, são a rapidez e eficácia com que esta ferramenta lhes permite esboçar um gráfico e, a partir dele, encontrar respostas para os problemas. Apesar de terem enunciado esse motivo como o mais relevante, os alunos demonstraram que recorrem à calculadora não só quando é necessário o esboço de um gráfico.

Tal como Rocha (2002), também este estudo revelou que a perspetiva que cada aluno tem sobre a Matemática, influencia diretamente a utilização que cada um faz da calculadora gráfica. Parece que posso afirmar que, à semelhança desse estudo, os alunos que apresentam ter maior afinidade e sucesso na disciplina são aqueles que questionam o uso da calculadora gráfica desligado da compreensão. Mais, os resultados sugerem que, entre esses alunos, aqueles que nutrem um gosto especial pela vertente algébrica tendem a ter algum receio de explorar a calculadora e, por isso, quando o fazem, preferem seguir um conjunto de regras. Pelo contrário, os alunos que demonstram gostar de novos desafios, mesmo que eles impliquem errar, parecem estar dispostos a explorar as potencialidades que a máquina lhes oferece (Skemp, 2016).

Ao contrário dos resultados obtidos por Rocha (2002), penso que, neste estudo, os alunos revelaram alguma inovação na utilização da calculadora gráfica, uma vez que começaram a recorrer a ela não só para encontrar uma resposta, mas para tentar provar algumas conjecturas estabelecidas. Além disso, procuraram, em alguns casos, estabelecer conexões entre diferentes menus da calculadora gráfica para poderem justificar as respostas dadas às questões.

Quanto ao nível de conhecimentos dos alunos, pareceu-me que, de modo geral, os alunos demonstraram uma maior dificuldade e preocupação em saber e decorar qual a ordem das teclas que lhes permitia visualizar e determinar aquilo que procuravam. Apesar de se recordarem de o ter feito no ano anterior, a pouca e superficial utilização da calculadora gráfica, tal como reportaram na entrevista inicial, condicionou a confiança necessária para o uso da máquina. Porém, em consonância com Ruthven (1993), o tempo ajudou a que o receio dos alunos desse lugar à segurança em utilizar e explorar a calculadora gráfica.

Apesar do uso da calculadora gráfica nas aulas de Matemática ser obrigatório, notou-se que a perspetiva do professor relativamente a essa utilização influenciava o aproveitamento da mesma. Semelhante ao que foi partilhado por Ponte (1995), e mais tarde por Rocha (2002, 2011), embora não pudesse sustentar esta ideia através deste estudo, pareceu-me que o aproveitamento das potencialidades da calculadora gráfica foi inibido pelo tipo de atuação da professora do ano passado destes alunos. O aproveitamento das potencialidades começou a ser reforçado pela postura do orientador cooperante que, tal como Burril (2002), Rocha (2016), Seixas e Silva (2010) e Thomas e Lin (2013) referiram nos seus estudos, procurava desenvolver o pensamento matemático dos alunos através da associação da calculadora gráfica a tarefas que

permitiam o confronto situações inovadoras que estimulavam o espírito crítico e a reflexão.

No presente estudo, a relevância que os alunos dão à utilização da calculadora nas aulas de Matemática sofreu uma positiva evolução. No entanto, o aproveitamento das suas potencialidades continuou, à semelhança do que aconteceu no estudo de Rocha (2002), a ser interferido pela perspetiva e pela relação que cada aluno estabelece com a Matemática. Tal como Carreira (2019) mencionou, os alunos que se mostram motivados para lidar com a modelação matemática conseguiram, com maior facilidade, tirar partido da informação disponibilizada pela calculadora gráfica, articulando o lado experimental que ela fornece, através das diversas representações que permite, e o lado teórico obtido por outras fontes. Já os alunos cuja relação com a Matemática é desassociada da compreensão apresentam uma grande dificuldade em estabelecer essa articulação e, por isso, acabam por aceitar informações distorcidas pela calculadora gráfica. Algo que foi também visível neste estudo.

Tendo em conta o que foi dito, parece plausível considerar que alunos como o Tulipa, que valorizam o raciocínio e criticam a reprodução de procedimentos, apresentam uma perspetiva relativamente ao uso da calculadora gráfica semelhante à minha como docente, também ela influenciada pela perspetiva do professor cooperante, e que, por essa razão, utilizam a máquina como sendo um “laboratório” (Rocha, 2002).

Já alunos como a Orquídea e a Peónia, que preferem, respetivamente, recorrer a métodos algébricos e à reprodução de regras, acabam por ficar mais condicionadas relativamente à exploração das potencialidades da calculadora gráfica. Incentivadas por mim e pelo orientador cooperante, demonstraram uma maior abertura para a sua utilização. Pela evolução que foram sofrendo, acredito que se a atuação da professora do ano passado fosse idêntica à do orientador cooperante e professor titular desta turma no ano transato, o uso da calculadora gráfica teria sido mais alargado. Porém, nas circunstâncias observadas, os alunos com o perfil da Orquídea e da Peónia utilizavam a calculadora gráfica como um “avião a jacto” e uma “tábua de salvação” (Rocha, 2002), respetivamente.

Tal como noutros estudos (Rocha, 2011, 2015; Rosa, 2013; Viseu et al., 2016; Viseu et al., 2022), também este prestou atenção às dificuldades com que os alunos se deparavam ao utilizarem a calculadora gráfica. Da análise dos dados recolhidos e interpretação dos resultados, constata-se que as principais dificuldades se centraram na escolha dos valores da janela de visualização, na articulação entre diferentes menus

da calculadora gráfica, na interpretação dos resultados disponibilizados e no registo escrito.

Em 2013, Consciência alertava para a importância da definição da janela de visualização como uma das competências essenciais a desenvolver com os alunos. Dez anos depois, este estudo mostra-nos o quão relevante continua a ser a recomendação daquela autora. Indo ao encontro dos resultados de Viseu e seus colaboradores (2016), neste estudo, os alunos não tinham em consideração o contexto do problema para a escolha da janela de visualização. Ao contrário dos resultados obtidos por Rocha (2002), estes alunos não recorriam com frequência a *zooms*. Porém, quando o faziam também não percebiam de que modo este processo afetava a janela de visualização. Assim, muitas vezes sentiram dificuldades em compreender o comportamento da função representada graficamente. Como aconteceu no trabalho de Viseu e colaboradores (2016), com o tempo, os alunos começaram a atribuir a devida importância à janela de visualização, mas os intervalos escolhidos resultavam, a maior parte das vezes, de tentativas. Assim sendo, percebemos que, em alguns casos, os alunos utilizam a calculadora gráfica desassociada da compreensão.

Relativamente à articulação entre diferentes menus da calculadora gráfica, os resultados deste estudo vão novamente ao encontro dos resultados de Viseu e colaboradores (2016). Inicialmente, os alunos recorriam com frequência apenas ao menu gráfico, uma vez que, para eles, era a forma mais habitual da utilização da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. Com o tempo, começaram a recorrer ao menu tabela e menu estatística estabelecendo conexões entre eles. Contudo, tal como foi mencionado por Elia et al. (2007), por Rocha (2015) e por Viseu et al. (2022), também estes alunos continuavam a sentir dificuldades em perceber que as diferentes representações, presentes em cada menu, diziam respeito ao mesmo objeto e que deviam ser trabalhadas em simultâneo.

A interpretação da informação obtida pela máquina foi também fonte de alguns problemas. Parece-me plausível dizer que tal como Rocha (2002), os resultados deste estudo permitem concluir que os alunos sentem dificuldade em estabelecer conexões entre a informação disponibilizada pela calculadora com aquela de que já têm conhecimento. O confronto entre aquilo que o aluno vê e aquilo que conhece é, para Ball e Stacey (2005), essencial no processo de aprendizagem. E, neste estudo, notou-se que, mesmo utilizando corretamente as funcionalidades da calculadora gráfica, os alunos sentiram dificuldade em encontrar respostas, em formular generalizações e em validar as suas conjecturas.

Por fim, os alunos mostraram também sentir dificuldade na organização do registo escrito. Já em 1996, Ruthven dizia que o recurso à calculadora gráfica interferia muitas vezes com a qualidade desses registos, e este estudo veio confirmar a afirmação feita pelo autor. Tal como Campos e seus colaboradores (2015) e mais tarde Viseu e colaboradores (2016), os resultados deste estudo mostram que, em alguns casos, os alunos recorreram ao menu gráfico da calculadora para encontrar respostas e elaboraram justificações sem apresentar o esboço gráfico que as sustentou. Noutros casos, os alunos pensam que a presença do esboço gráfico é suficiente, e, por isso, não justificam nem apresentam uma resposta à questão. Além do que foi referido, também neste estudo percebemos que o esboço gráfico dos alunos adota um estilo idêntico ao exibido pela máquina, algo que já tinha acontecido no estudo realizado por Viseu e colaboradores (2016). Em geral, os alunos tendem a utilizar as letras x e y , que aparecem na calculadora gráfica, para representarem as variáveis dos eixos cartesianos. Faria mais sentido utilizarem letras sugestivas, dado que poderia ajudar os alunos a apreenderem melhor o contexto da tarefa e relacioná-lo com os procedimentos matemáticos. Parece-me que a dificuldade que os alunos sentem em fazer essa conversão é consequência de uma utilização da calculadora gráfica desligada do contexto, pois no momento de discussão coletiva mostram ter essa percepção.

Enquanto futura professora, acredito que toda esta experiência relativa ao trabalho aqui apresentado contribuiu positivamente, não só para o meu crescimento como docente, mas também para a aprendizagem dos alunos. Apesar de ter enfrentado alguns momentos que não correram como o esperado, sinto-me realizada com esta experiência. Dela recolhi uma maior consciência sobre a importância do investimento na aprendizagem contínua durante todo o meu percurso profissional.

E tal como sempre disse aos meus alunos: errar permite-nos aprender. Também eu preciso de refletir sobre aquilo que correu menos bem. Ao longo da intervenção pedagógica e da realização do trabalho de investigação nela suportado, nem sempre foi fácil gerir as minhas expectativas. Se, por um lado, queria preparar mais trabalho para desenvolver com a turma, por outro, o tempo disponível para preparar e implementar esse mesmo trabalho era reduzido. Se, às vezes, considerava que um certo conhecimento já teria sido adquirido pelos alunos, depois percebia que as características, naturalmente diferentes, de cada um implicavam um trabalho mais ponderado e direcionado a cada necessidade. Quanto a estes aspetos, devo claramente agradecer à minha orientadora da FCUP e ao meu orientador cooperante que me incentivaram a refletir sobre o trabalho a realizar e, com isso, me ajudaram a definir

objetivos concretos e atingíveis. Foi através da experiência de PES e da ajuda dos dois orientadores que percebi verdadeiramente que é mais importante dedicar o meu tempo à preparação de tarefas que promovam a contínua aprendizagem dos alunos do que um foco na realização de inúmeras e a variadas tarefas sem esse trabalho de reflexão. Tomo consciência de que a possibilidade de ter acompanhado estes alunos me permitiu iniciar a minha caminhada como docente, mas que o meu crescimento enquanto professora só será possível se continuar a aprender com cada experiência.

Do mesmo modo, é importante refletir e discutir os aspetos que correram melhor, tais como a motivação dos alunos numa certa tarefa e os resultados obtidos na exploração dessa mesma tarefa. Essa reflexão e partilha irá contribuir para a minha motivação profissional, tentando sempre melhorar ainda mais aquilo que correu pior e melhor.

No que diz respeito à escolha e preparação das tarefas, apesar de ser um processo exaustivo, é também muito interessante, pois apela à nossa sensibilidade e criatividade na adaptação do mesmo, bem como à capacidade de nos colocar o papel do aluno e, por isso, ter uma ideia das diferentes estratégias e representações que podem surgir. Além disso, devo admitir que a análise de todas as produções escritas dos alunos para que fosse possível o momento de discussão e feedback coletivo na aula seguinte foi bastante desafiador devido ao tempo dedicado. No entanto, reconheço que esses momentos de discussão coletiva foram fundamentais para que os alunos se sentissem motivados a partilhar a sua experiência e para que desenvolvessem a capacidade de exprimir oralmente as decisões tomadas na resolução das tarefas.

Por fim, é importante referir algumas limitações deste estudo que devem ser tidas em conta em investigações futuras, como por exemplo: as gravações de aulas, que seriam úteis para juntar às notas de campo tornando assim os diálogos mais fidedignos, e o registo fotográfico, que teria ajudado a fundamentar melhor todo o trabalho realizado.

Considero que a realização desta investigação numa turma maior seria bastante importante, uma vez que o facto de o número de alunos desta turma ser particularmente reduzido interfere no tipo de trabalho que é possível fazer, que, neste caso, terá sido mais fácil fazer do que com turmas grandes. Porém, esta característica da turma permitiu-me ter um contacto mais próximo com os alunos, o que facilitou os vários momentos de observação participante.

Outra questão que se levanta assenta no tema em que incidiu toda a intervenção pedagógica. Este trabalho incidiu sobre os modelos contínuos não lineares, mas a

utilização da calculadora gráfica pode ser diferente noutros temas, nomeadamente em temas que se afastam mais da álgebra, tal como a estatística. Por essa razão, acredito que seria interessante perceber como é que os alunos usam a calculadora gráfica nesses temas.

Quase a terminar, reflito um pouco sobre os 20 anos que separam este estudo do estudo inspirador deste trabalho. Ao longo destes anos, a calculadora gráfica tem marcado uma presença cada vez mais assídua nas aulas de Matemática. A rápida evolução que as calculadoras gráficas têm sofrido trouxe com ela constantes desafios na vida dos professores e dos alunos. Há coisas que, apesar do tempo, se mantêm, como por exemplo: a perspetiva dos professores relativamente à utilização da máquina continua a influenciar o tipo de utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica. Mas também, muitas foram as mudanças, e, se há 20 anos a calculadora gráfica era utilizada essencialmente para a representação gráfica de funções, hoje a utilização dos diversos menus permite a exploração de tarefas mais desafiantes. Certamente que, com a chegada das novas *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino secundário* (Silva et al., 2022), os desafios serão muitos, mas não tenho dúvidas de que este trabalho me permitirá estar mais confiante no combate a essas dificuldades.

Em suma, com este trabalho consegui perceber melhor como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica nas aulas de Matemática B e fui reconhecendo, ainda mais, as vantagens da integração curricular desta ferramenta tecnológica na promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos.

Referências

- Amado, J. (Coord.) (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- APM (1988). *A renovação do currículo de matemática*. APM.
- Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE) (2006). *AMTE technology position statement: Preparing teacher to use technology to enhance the learning of mathematics*. https://amte.net/sites/all/themes/amte/resources/AMTE_TechnologyPositionStatement.pdf
- Baioa A., & Carreira S. (2019). Modelação matemática experimental para um ensino integrado de STEM. *Educação e Matemática*, 152, 11-14.
- Ball, L., & Stacey, K. (2005). Good CAS written records: Insights from teachers. In H. Chick, & J. Vicent (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 113-120). Melbourne: PME
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
- Burriel, G (2008). The role handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics. In *Proceedings of ICME 11*. México: ICME. https://www.researchgate.net/publication/265276998_THE_ROLE_OF_HANDELD_TECHNOLOGY_IN_TEACHING_AND_LEARNING_SECONDARY_SCHOOL_MATHEMATICS
- Burriel, G., Allison, J., Breau, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice*. http://www.audentia-gestion.fr/TEXAS-INSTRUMENTS-EDUCATION/Burrill_G_%202002.pdf
- Campos, S., Viseu, F., Rocha, H., & Fernandes, J. (2015). A calculadora gráfica na promoção da escrita matemática. In S. Carreira & N. Amado (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in*

- Mathematics Teaching (ICTMT12)* (pp. 590-598). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.
- Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, I. (2014). Práticas de ensino exploratório: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais de professores de matemática* (pp. 217-232). IEUL.
- Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”. *Quadrante*, 18(1-2), 53-85.
- Carreira, S. (2019). Modelação matemática e simulação no contexto escolar: Conexões entre mundos. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. A. Tomás Ferreira, & I. Vale (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2019: Encontro de Investigação em Educação Matemática – Conexões matemáticas* (pp. 45-62). Loulé: SPIEM.
- Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Consciência, M., & Oliveira, H. (2011). Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: O caso do Diogo. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação de Matemática* (pp. 1-15). Lisboa: APM.
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2016). *Novo Espaço, Parte 2, Matemática B, 11.º ano* (1.ª edição). Porto Editora.
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2018). *Novo Espaço, Caderno Prático, Matemática B, 11.º ano*. Porto Editora.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer.
- Elfringhoff, M., & Schukajlow, S. (2021). What makes a modelling problem interesting? Sources of situated interest in modelling problems. *Quadrante* 30(1), 8-30.
- Elia, I., Panoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different

representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

Ferreira, N. (2016). Crónica de uma professora de visita à Finlândia. *Educação e Matemática*, 137, 15-18.

Finish National Agency for Education (FNAE) (2020). *National core curriculum for general upper secondary education 2019*. <https://www.oph.fi/en/education-system/general-upper-secondary-education>

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2015). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer Open.

Hector, J. (1992). Graphical insight into elementary functions. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in mathematics education* (pp. 133-137). NCTM

Hodges, A., & Kissane, B. (1994). Learning about functions and graphs using a graphics calculator In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp.39-48). Adelaide: AAMT.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (ED.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). IAP.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp .275-304). Sense Publishers.

Martins, G. O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilho, J., Silva, L. U., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., & Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. MEC-DGE. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

ME (2018a). *Aprendizagens Essenciais – Secundário | Matemática B 10.º ano de escolaridade*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/AprendizagensEssenciais/10_matematica_b.pdf

- ME (2018b). *Aprendizagens Essenciais – Secundário | Matemática B 11.º ano de escolaridade*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/11_matematica_b.pdf
- ME (2001). *Programa de Matemática B (10.º, 11.º anos)*. ME. <https://www.dge.mec.pt/matematica-b-ch-av>
- MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática A, Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (10.º, 11.º e 12.º)*. MEC. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf
- Ministry of Education of Singapore (2012). *Mathematics Syllabus: Primary one to Six*. Curriculum Planning and Development Division. <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/syllabus/2021-pri-mathematics-1-to-3.ashx>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. NCTM.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. NCTM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.
- Neves, M., Guerreiro, L., & Silva, A. (2016). *Máximo, Funções, Matemática A, 12.º ano*. (1.ª edição). Porto Editora.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-54.
- Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.
- Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Serrazina, M. L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, 11(2), 4-27.
- Rocha, H. (2011). A calculadora gráfica no ensino das funções: Implicações sobre aspectos da prática de uma professora. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2011: Encontro de Investigação em Educação Matemática – Ensino e Aprendizagem da Álgebra* (pp. 57-70). Póvoa de Varzim: SPIEM.
- Rocha, H. (2015). Múltiplas abordagens, múltiplas representações: um contributo para incrementar a relevância da representação algébrica. In M. Pires, R. A. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel, & L. Santos (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2015 – Representações Matemáticas* (pp. 327-340). Bragança: SPIEM.
- Rocha, H. (2016). Teachers' representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and its Applications*, 35(2), 53–64.
- Rocha, H. (2020a). Graphical representation of functions using technology: A window to teacher knowledge. *Teaching Mathematics and its Applications*, 39(2), 105-126.
- Rocha, H. (2020b). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM - Mathematics Education*, 52(7), 1381-1396.
- Rosa, V. (2013). *A utilização da calculadora gráfica no estudo das funções no 10.º ano*. Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa.
- Ruthven, K. (1993). Personal technology and classroom change: A British perspective. In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (pp. 91-100). NCTM.
- Seixas, S., & Silva, D. (2010). As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/aprendizagem da matemática: Um estudo de caso numa turma do 11.º ano. *Interações*, 15, 141-172.

- Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, E., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2022). *Aprendizagens essenciais de matemática para o ensino secundário*. DGE.
- Skemp, R. (2016). Compreensão relacional e compreensão instrumental. *Educação e Matemática*, 136, 44-48.
- Skemp, R. (2016). Compreensão relacional e compreensão instrumental. *Educação e Matemática*, 137, 24-28.
- Stein, M. K, Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. L. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematics Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Thomas, M., & Lin, C. (2013). Designing tasks for use with digital technology. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in Mathematics Education – Proceedings of ICMI Study 22* (pp.109-118). ICMI
- Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.
- Viseu, F., Campos, S., Fernandes, J., & Rocha, H. (2016). Uso da calculadora gráfica na exploração de modelos contínuos não lineares. *Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis (SC)*, 11(2), 7998. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p79>
- Viseu, F., Mendes, P., & Rocha, H. (2019). The notion of function by basic education preservice teachers. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings of ATEE Winter Conference ‘Science and mathematics education in the 21st century’* (pp. 26-37). ATEE and CIEEd.
- Viseu, F., Silva, A., Rocha, H., & Martins, P. (2022). A representação gráfica na aprendizagem de funções por alunos do 10.º ano de escolaridade. *Educación Matemática*, 34(1), 186-213.

Anexos

Anexo 1 – Tarefa 1: Juros Compostos: A Oitava Maravilha do Mundo

Vivemos tempos difíceis e é essencial saber fazer as melhores escolhas.

A senhora Camila recebeu uma herança de 45 000€ e pretende rentabilizar este dinheiro. Para isso quer depositar esse dinheiro num banco, com o objetivo de obter juros.



Consultou alguns bancos, A, B e C, onde foi informada que ofereciam juros compostos à taxa anual nominal de 4,6%, 5% e 4,8% respetivamente, mas com diferentes capitalizações (nº de vezes que os juros são acrescentados ao capital ao longo do ano).

Banco	Taxa de juro anual	Capitalizações
A	4,6%	Anuais
B	5%	Semestrais
C	4,8%	Mensais

1. Se a senhora Camila quiser investir o seu dinheiro apenas durante um ano, qual deverá ser o banco que deve escolher?
2. E se o investimento fosse feito por dois anos?
3. Escreve uma expressão que permita conhecer o capital C ao fim de n anos ($n \in \mathbb{N}$) em cada um dos bancos. Faz o esboço dos gráficos correspondentes a cada expressão e retira as tuas conclusões.
4. Ao fim de 1 ano e 3 meses quer levantar todo o seu dinheiro para comprar um carro que custa 47600€. Nesta situação aconselharias a senhora Camila a fazer o depósito inicial em que banco?

Anexo 2 – Tarefa 2: Moscas da Fruta

Na fundação Champalimaud as moscas da fruta são o pequeno herói da investigação científica na área da hereditariedade.

Os alunos de mestrado e professores de uma unidade, inspirados no trabalho desta fundação, decidiram iniciar o ano letivo com um estudo experimental onde estas pequenas, mas poderosas criaturas são as personagens principais.



Este estudo iniciou com 50 moscas, sendo feito o acompanhamento da evolução ao longo dos anos. O número de moscas existentes, passados n meses do início da experiência, é dado pelo seguinte modelo:

$$M(n) = 50 \times e^{0,2n}$$

1. Para que seja possível recolherem alguma informação o número de moscas tem de sextuplicar relativamente ao número inicial. Quanto tempo foi necessário para que os alunos e professores começassem a fazer a sua recolha de dados?
2. Para concluírem o estudo o número de moscas da fruta tem que chegar a 3500. Os alunos conseguem concluir o estudo nos dois anos de mestrado?

Anexo 3 – Tarefa 3: Ingrediente Especial

Um dos ingredientes surpresa que traz harmonia a qualquer prato são as ervas aromáticas.



Um restaurante decidiu aproveitar o canteiro circular (com um metro de raio) em frente à sua entrada, para plantar no centro do canteiro um pequeno círculo de ervas aromáticas. À medida que se reproduzem, esse pequeno círculo vai alargar-se, mantendo a forma circular.

A área do canteiro, em m^2 , coberto pelas ervas aromáticas t semanas após a plantação é dada por:

$$A(t) = 0,24e^{0,3t}$$

1. Qual era o espaço ocupado pelas ervas aromáticas no dia da sua plantação?
2. Preenche a tabela seguinte, considerando os valores da última coluna com duas casas decimais.

t	$A(t)$	$\frac{A(t+1)}{A(t)}$
0		
1		
2		
3		
4		
...		
x		

O que podes concluir com os valores observados na última coluna?

3. De quando em quanto tempo a área do canteiro ocupada pelas ervas aromáticas duplica?
4. Quanto tempo irá demorar para que o canteiro fique totalmente cheio de ervas aromáticas? (apresente o resultado em semanas e dias)

Anexo 4 – Tarefa 4: Salário Mínimo

Podes ver, na tabela abaixo, a evolução do salário mínimo em Portugal, desde 2015.

Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Salário mínimo (em €)	505	530	557	580	600	635	665	705	760

Fonte: DGERT-Direção-Geral do Emprego e das Relações de Trabalho

- Encontra um modelo do tipo $S = at + b$, em que S representa o salário mínimo, em euros, e t é a expresso em anos, em que $t = 0$ corresponde a 2015.
(utiliza valores para a e b arredondados às unidades)
- Faz uma previsão para o valor do salário mínimo em 2030.
- Podes ver agora, na tabela que se segue a evolução do salário mínimo na Polónia, desde 2015.

Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Salário mínimo (em €)	409.5	433.9	453.5	502.8	523.1	610.9	614.1	654.8	745.6

Estabelece uma conjectura para a comparação entre o comportamento do salário mínimo nos dois países. Depois procura comprovar ou refutar a tua conjectura. Para tal:

- Responde às questões 1 e 2 utilizando os dados deste novo país.
 - Apresenta os gráficos necessários para poderes retirar as tuas conclusões.
- Admite que, num país imaginário, a evolução do salário mínimo seguia um modelo bastante diferente. Lá o salário mínimo S , desde 2015 ($t=0$), é dado, em euros, pelo seguinte modelo:

$$S = 180 \times 1,3^t$$

- 4.1. Em 2020 qual era a diferença entre o salário mínimo em Portugal e este novo país?
- 4.2. A partir de que ano o salário mínimo neste país passou a ser superior ao salário mínimo em Portugal?
- 4.3. Em termos monetários, em que país compensa viver?
- 4.4. Neste país a partir de que ano é que o salário mínimo supera os 2480€?
- 4.5. Representa a evolução do salário mínimo praticado neste país por um modelo do tipo

$$S = 180 \times e^{kt}$$

(utiliza o valor arredondado a quatro casas decimais, para o valor de k)

Anexo 5 – Tarefa 5: Macacos de Nariz Arrebitado

Em 2000 uma reserva natural no Tibete albergava 200 macacos de nariz arrebitado. As medidas de proteção fizeram com que esse número aumentasse continuamente. Os recursos desse parque permitem que o número de macacos cresça até bastante perto de oito centenas, não permitindo que este valor seja ultrapassado.



Nestas condições apenas uma das expressões seguintes pode definir a função M que dá o número aproximado de macacos existentes na reserva natural, t anos após o início das medidas de proteção:

A	$\frac{800}{1 + e^{-0,5t}}$	B	$\frac{800}{1 + 3e^{-0,5t}}$	C	$\frac{1000}{1 + 4e^{-t}}$	D	$800 - \frac{400(t^3 - 1)}{e^t}$
---	-----------------------------	---	------------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------------

Qual é a expressão correta? Numa pequena composição, explica as razões que te levam a rejeitar as outras três expressões (apresenta três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada).

Anexo 6 – Carta de Consentimento Informado



Pedido de autorização aos encarregados de educação

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

Na disciplina de Matemática, o trabalho é habitualmente orientado e realizado com o apoio de três professores, sendo nós as professoras estagiárias desta equipa, com quem os(as) vossos(as) educandos(as) têm a possibilidade de obter um apoio acrescido. Estamos inscritas no Mestrado em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Como parte dos requisitos do Mestrado, cada uma de nós tem de implementar um projeto de investigação em Didática da Matemática, orientado pela professora Rosa Tomás Ferreira, docente da FCUP.

A concretização deste trabalho de investigação envolve uma intervenção pedagógica integrada na normal planificação das aulas de Matemática. Envolve também a recolha de dados acerca das aprendizagens dos alunos, recolha essa que tornará viável a implementação do projeto de investigação em causa. Esta recolha de dados inclui a gravação em áudio de algumas aulas/momentos de trabalho dos alunos, a recolha de trabalhos escritos realizados pelos alunos e a realização de entrevistas com alguns alunos desta turma.

- A gravação em áudio é essencial para que toda a informação contida nas interações existentes numa aula ou em parte dela seja efetivamente recolhida e não se percam aspetos relevantes para os objetivos dos trabalhos de investigação. Estas gravações serão posteriormente transcritas (total ou parcialmente) e serão destruídas assim que o trabalho esteja terminado.

- A recolha das produções escritas dos alunos (respostas a tarefas propostas) em nada difere do que seria feito numa situação de ensino presencial, uma vez que é prática comum efetuar essa recolha para efeitos de análise das principais dificuldades dos alunos de modo a poder encontrar estratégias que os ajudem a ultrapassá-las. Assim que o trabalho estiver terminado, as produções escritas recolhidas serão destruídas.

- A realização de entrevistas envolve a gravação em áudio das mesmas, nos mesmos moldes que a gravação de aulas/momentos de aula, e é realizada com um número limitado de alunos, em horário extra-aula a combinar com eles.

Em caso algum os alunos que participarem neste trabalho de investigação ou a escola serão identificados, garantindo-se o anonimato no relatório final de estágio. A participação neste trabalho em nada interfere com a avaliação de desempenho do(a) seu(sua) educando(a) na disciplina de Matemática, pois apenas dirá respeito à viabilização do trabalho de investigação e terá implicações na avaliação da mesma para conclusão do seu curso de Mestrado em Ensino da Matemática. Além disso, a participação do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto é inteiramente voluntária, podendo ele(ela) desistir em qualquer momento, sem qualquer justificação necessária. No caso de desistência, nenhum dado eventualmente já recolhido que lhe diga respeito será utilizado na elaboração do relatório final de estágio.

Esta missiva tem como objetivo solicitar a sua autorização para a participação do(a) seu(sua) educando(a) no projeto de investigação. Estamos, juntamente com a nossa orientadora, à disposição para qualquer informação adicional.

Agradecendo, desde já, toda a compreensão e atenção dispensadas, subscrevemo-nos, com os melhores cumprimentos,

(Anabela Cunha)

(Francisca Figueiredo)

(Destacar o picotado e devolver através do seu(sua) educando(a))

✂-----

Eu, _____ Encarregado/a de Educação do/a aluno/a _____ da Escola Básica e Secundária [REDACTED], autorizo / não autorizo (**riscar o que não interessa**) o/a meu/minha educando/a a participar no trabalho de investigação das suas professoras estagiárias de matemática Anabela Cunha e Francisca Figueiredo.

Data: ____/____/2022

Assinatura:

Anexo 7 – Guião da primeira entrevista aos alunos

Questões	Objetivos/Questões de investigação
1. Como descreves a tua relação com a matemática? 2. E como descreves a tua relação com a tecnologia, em especial com a calculadora gráfica? 3. Achas favorável a utilização da calculadora gráfica nas aulas de matemática? Porquê? Achas que contribui positivamente para a aprendizagem de matemática B? Porquê? 4. O que te faz recorrer à utilização da calculadora gráfica? 5. Em que situações achas imprescindível essa utilização? 6. Achas que o tipo de trabalho em aula influencia a utilização da calculadora gráfica? Porquê? 7. Tendo em conta a tua experiência com a utilização desta máquina, que dificuldades sentes na sua utilização e como tentas ultrapassá-las?	• Saber qual o nível de conhecimento que cada aluno tem da sua calculadora gráfica e como se relaciona com ela. • Saber quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica na realização de tarefas matemáticas. • Perceber, ligeiramente, como será feito o aproveitamento das potencialidades da calculadora gráfica que têm conhecimento e que são disponibilizadas pela máquina. • Saber quais as dificuldades com que se deparam os alunos aquando da utilização da calculadora gráfica na resolução de tais tarefas e como as ultrapassam.

Anexo 8 – Guião da segunda entrevista aos alunos

Resolução das tarefas	Objetivos/Questões de investigação
a) Observar a resolução das tarefas propostas e o uso que os alunos fazem da calculadora gráfica; b) Questionar os alunos sobre o que estão a fazer, procurando justificações para o uso da calculadora gráfica.	• Perceber como será feito o aproveitamento das potencialidades da calculadora gráfica que têm conhecimento e que são disponibilizadas pela máquina. • Perceber quais as dificuldades com que se deparam os alunos aquando da utilização da calculadora gráfica na resolução de tais tarefas e como as ultrapassam.
Questões	Objetivos/Questões de investigação
1. Agora que já estamos a poucos meses de terminar o ano, como descreves a tua relação com a calculadora gráfica? 2. Quando é que a utilizas? / Em que situações a utilizas? 3. Como é que a utilizas? (Para confirmar, para cálculos, para explorar, não utiliza porque não gosta ou porque não sabe...)	• Saber qual o nível de conhecimento que cada aluno tem da sua calculadora gráfica e como se relaciona com ela. • Saber quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica na realização de tarefas matemáticas.

Anexo 9 – Tarefa para a entrevista: Espécie Rara de Plantas

Uma equipa de engenheiros florestais estudou a adaptação de uma determinada espécie rara de plantas às condições ambientais de uma dada região.



A evolução do número de exemplares desta espécie foi sendo acompanhada ao longo dos anos desde a sua plantação inicial na região em 2010, conhecendo-se os registos que se encontram na tabela abaixo.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6
Nº de plantas	46	53	70	84	110	133

1. Identifica um tipo de modelo que consideras adequado para descrever a situação descrita. Procura um modelo que se ajuste aos dados recolhidos.
2. A partir do modelo anterior, estima o ano em que o número de exemplares desta espécie de plantas ultrapassaria as 500 plantas.

Ainda te lembras do estudo feito pelos engenheiros florestais?



Foi dada continuidade a esse estudo através de registos em anos posteriores. Sendo assim, foram acrescentados mais alguns registos aos dados anteriores.

Abaixo podes ver o número de plantas em função dos anos decorridos desde a sua plantação inicial na região em 2010.

Anos decorridos	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13
Nº de plantas	46	53	70	84	110	133	153	177	189	212	218

1. Consideras que o tipo de modelo encontrado anteriormente continua adequado?
Se sim, justifica. Se não, identifica o novo modelo que se adeque ao conjunto de dados agora conhecidos.
2. Achas que, de acordo com o modelo que escolheste, serão atingidos 232 exemplares de plantas? Justifica a tua opinião