

Lajes Vigadas de Betão Armado – Realidade VS Utopia: Quem é o quê?

FRANCISCO FRANCO NUNES BARROS DA SILVA

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS E GEOTECNIA

Orientador: Professor Doutor Nelson Saraiva Vila Pouca

Coorientador: Engenheiro Miguel Pedro Garcia Machado Guimarães

JULHO DE 2023

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2022/2023

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351 22 508 1901

✉ m.ec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351 22 508 1400

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado em Engenharia Civil - 2022/2023 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2023*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

À minha Família

*Deixar que o tempo passe, que as coisas amadureçam... E se tiver de ser, será, e se
não tiver de ser, não será, acabou.*

José Saramago

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto por todo o conhecimento que me transmitiu e por todas as boas memórias que aqui foram feitas e levarei comigo para sempre. Neste seguimento, queria também agradecer a todos os Professores com quem tive a felicidade de me cruzar durante todo o meu percurso, em especial ao Professor Doutor Nelson Saraiva Vila Pouca, meu orientador neste trabalho, que tanto me transmitiu, ensinou e orientou para que fosse possível a realização do mesmo.

Seguidamente uma grande palavra de agradecimento e apreço à empresa Struconcept onde tive a felicidade de realizar grande parte do presente trabalho. Agradecer especialmente ao Engenheiro Miguel Guimarães, coorientador deste projeto por todo o tempo dispensado, ajuda, cuidado e paciência que me dedicou tendo um papel crucial para a conclusão deste trabalho. Ainda, agradecer também, ao Engenheiro Alberto Teixeira e Eugénio Maia, que me transmitiram conhecimentos cruciais que excedem o foque deste trabalho. Além disso, agradecer à Maria da Luz, à Inês, ao Henrique, ao Eduardo e ao João pelos almoços, pelas experiências compartilhadas e por todas as gargalhadas.

Estendo a minha palavra de apreço, agradecimento, carinho e amor a toda a minha família que sempre me entusiasmaram a prosseguir com os estudos e sempre acreditaram em mim. Um especial obrigado aos meus pais, Mizé e Rui por todo o investimento e sacrifícios que realizaram, para que pudesse ter a melhor formação possível, quer académica quer humana. Um grande obrigado também aos meus avós. À avó Teté, à avó Guida, ao avô Fausto e ao avô Tó, que sempre tomaram conta de mim e me viram sempre como segundo filho e que tantos sacrifícios fizeram para virem tomar conta de mim e do meu irmão. Agradecer também ao meu irmão Filipe, que olha sempre para mim com todo o amor possível (é recíproco!). Farei tudo o que estiver ao meu alcance para seres a melhor versão de ti mesmo.

Quero agradecer à minha namorada Mafalda que me acompanhou sempre durante todo o meu percurso académico quer como minha amiga, quer como minha namorada. Obrigado por toda a paciência e amor que me dás, obrigado pelas noites de estudo, pelas memórias, pelos sorrisos por tudo o que completou esta minha etapa académica. Sem ti o meu percurso não teria sido o mesmo, trouxeste-me alento quando a motivação faltava e sempre quiseste o melhor para mim. “Li isto e lembrei-me de ti – Vais ser maior do que aquilo que é suposto quando estiveres disposto a sair da tua zona de conforto”, foi o texto que vinha numa foto que me enviaste e guardo estas palavras com todo o amor e carinho no meu coração. Obrigado, Mafalda.

Quero também agradecer a todos os meus amigos que fizeram parte deste meu percurso, todas as pessoas fantásticas com quem me cruzei sem esquecendo todas aquelas que por motivos alheios afastaram-se. O meu grande obrigado à Nené por toda a paciência amor e cumplicidade que me deu durante estes anos todos. O meu grande obrigado ao Maia, ao Amaral, ao Dani, ao Grosso, ao Ralph, ao Rafa, ao PJ, ao Ciclopes, ao Nunes, ao Padrão, ao Pepe e ao Ross. Juntos somos o Javardair, um grupo de amigos não muito funcional, mas que é sem dúvida alguma das melhores coisas que a faculdade me deu. Sem vocês definitivamente não teria sido a mesma coisa. Todas as histórias, todas as noites de estudo, todas as percas de paciência, todas as fantásticas saídas à noite e ainda, a mágica 318. Se os crescidos dizem que estes são os melhores anos das nossas vidas, vocês todos fizeram isso acontecer. Obrigado, amigos.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer à Camila e à Felizes que foram duas pessoas que apareceram na minha vida de rompanete, mas que conquistaram toda a minha amizade e carinho. É difícil precisar o momento em que nos começamos a dar, mas sei que vai durar muitos, muitos anos. Obrigado por todos os cafés a partilhar histórias e por todas as vezes que vieram com uma palavra amiga. Obrigado, amigas.

RESUMO

O desenvolvimento desta dissertação visa contribuir como apontamento de boas práticas de modelação estrutural no âmbito das lajes vigadas de betão armado. Nos dias de hoje, existem vários erros inatos de modelação que fazem com que os valores obtidos no processo de cálculo elástico linear não sejam totalmente compatíveis com os esforços que a estrutura estará sujeita aquando da sua edificação. Além disso, esses erros de modelação, por norma, culminam numa subvalorização do valor do momento atuante na viga que serve de apoio da laje e numa sobrevalorização dos momentos experienciados na laje. Dessa forma, há uma quebra de segurança do cálculo estrutural em ELU o que, em última análise pode levar à ruína da estrutura. Assim, é importante estudar e compreender os erros que estão associados à modelação para que desse modo se possa mitigar os mesmos, com o objetivo de projetar estruturas eficientes e acima de tudo seguras de utilizar durante todo o seu ciclo de vida.

Neste documento foram abordadas duas estratégias de combate aos erros que existem na modelação estrutural. Foram elas, a manipulação do coeficiente de Poisson da laje, bem como a redução da inércia à flexão da laje. Foram estudados vários valores de relação de rigidez entre as vigas de contorno e a laje, de forma a conseguir obter um estudo sobre um vasto leque de coeficientes de rigidez, que ao longo deste trabalho foram elencados por β_K . As duas estratégias enunciadas obtiveram resultados práticos bastante satisfatórios, porém a estratégia da manipulação do coeficiente de Poisson só obteve uma resposta positiva à aproximação dos resultados para valores compatíveis com os da realidade para valores do coeficiente de rigidez medianamente elevados, os quais já não são prática comum de projetar.

Por fim, foi possível concluir que para a tipologia estrutural que se concebe comumente, a redução da inércia à flexão é a boa prática de modelação a tomar para reduzir a preponderância dos erros da mesma e conseguir projetar em segurança.

PALAVRAS-CHAVE: Lajes vigadas, modelação estrutural, erros de modelação, relação de rigidez, Autodesk Robot Structural Analysis Professional.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to contribute to the identification of best practices in structural modelling within the scope of reinforced concrete beamed slabs. Nowadays, there are several inherent modelling errors that lead to obtained values in the linear elastic calculation process that are not fully compatible with the forces to which the structure will be subjected during its construction. Furthermore, these modelling errors typically result in an undervaluation of the moment acting on the support beam of the slab and an overvaluation of the moments experienced in the slab. Consequently, there is a safety breach in the structural calculation at the Ultimate Limit State (ULS), which ultimately can lead to the collapse of the structure. Therefore, it is important to study and understand the errors associated with modelling in order to mitigate them and design efficient and, above all, safe structures throughout their service life.

In this document, two strategies for combating errors in structural modelling were addressed. These strategies involved manipulating the Poisson's ratio of the slab and reducing the flexural inertia of the slab. Various stiffness ratio values between the contour beams and the slab were studied in order to obtain a comprehensive analysis of stiffness coefficients, which was referred to as β_K throughout this work. Both strategies yielded satisfactory practical results, however, the strategy of manipulating the Poisson's ratio only showed a positive response, in terms of approximating results to realistic values, for moderately high stiffness coefficient values, which are not commonly used in practice.

Finally, it was possible to conclude that for the commonly conceived structural typology, reducing the flexural inertia is the recommended modelling practice to reduce the prevalence of modelling errors and achieve safe designs.

KEYWORDS: Beamed slabs, structural modelling, modelling errors, stiffness ratio, Autodesk Robot Structural Analysis Professional.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABELAS.....	XI
SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS	XII
 1. INTRODUÇÃO	 1
1.1. ENQUADRAMENTO GERAL.....	1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO	3
1.3. ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO.....	3
 2. MÉTODOS DE ANÁLISE	 5
2.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	5
2.2. TEORIA DAS LAJES.....	5
2.2.1 TEORIA DAS LAJES SEGUNDO (KALMANOK, 1961)	5
2.2.2 – A COMPLEXIDADE DAS LAJES	7
2.3. REGULAMENTAÇÃO	8
2.3.1. EUROCÓDIGOS	9
2.3.2. NORMA NORTE-AMERICANA	9
2.3.3. NORMA BRITÂNICA.....	10
2.4. MODELAÇÃO E DESENVOLVIMENTO PRÁTICO.....	11
2.4.1. PROBLEMAS DE MODELAÇÃO	11
2.4.1.1. PROBLEMA DO PONTO DE INSERÇÃO	12
2.4.1.2. CONSEQUÊNCIAS DE MÁ MODELAÇÃO.....	13
2.4.2. ABORDAGENS DE MODELAÇÃO	14
2.4.2.1. MANIPULAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON	15
2.4.2.2. REDUÇÃO DA INÉRCIA À FLEXÃO DA LAJE	20
2.4.2.3. MODELAÇÃO EM GRELHA	22
 3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS	 23
3.1. RESULTADOS DA MANIPULAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON.....	23
3.2. RESULTADOS DA REDUÇÃO DA INÉRCIA À FLEXÃO	45
3.3. CASO DE UMA ESTRUTURAL REAL.....	48

4. CONCLUSÃO.....	57
4.1. CONCLUSÕES.....	57
4.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Prisma elementar; Fonte: (Kalmanok, 1961).....	6
Figura 2 - Momentos Negativos na direção XX com apoio rígido no contorno	8
Figura 3 - Momentos Positivos na direção XX com apoio rígido no contorno	8
Figura 4 - Momentos Negativos na Direção XX com apoio deformável	8
Figura 5 - Momentos Positivos na direção XX com apoio deformável	8
Figura 6 - Excerto da Tabela Técnica da Norma BS8110; Fonte: (British Standards Institution., 1997)	10
Figura 7 - Demonstração gráfica do caso de estudo	11
Figura 8 - Representação gráfica do eixo da viga coincidente com o plano médio da laje; Fonte: (Melo, 2021)	12
Figura 9 - Largura efetiva do banzo; Fonte: (Instituto Português da Qualidade, 2010).....	12
Figura 10 - Representação gráfica do comportamento real do sistema viga e laje; Fonte: (Melo, 2021)	13
Figura 11 - Distribuição de cargas para as vigas.....	15
Figura 12 - Momento de referência nas vigas de contorno	16
Figura 13 - Esforço transversal de referência nas vigas de contorno	16
Figura 14 - Caixa de diálogo de definição de material do software Robot	18
Figura 15 - Caixa de diálogo para a criação de uma nova espessura de placa.....	21
Figura 16 - Modelo em Grelha	22
Figura 17 - Gráfico de relação do Coeficiente de Poisson e do Momento na Viga	29
Figura 18 - Gráfico de relação do Coeficiente de Poisson e do Momento na Laje	30
Figura 19 – Gráfico do momento normalizado na viga para $v = 0.01$	31
Figura 20 – Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $v = 0.01$	32
Figura 21 – Gráfico da flecha máxima da laje para $v = 0.01$	33
Figura 22 - Gráfico do momento normalizado na viga para $v = 0.2$	33
Figura 23 - Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $v = 0.2$	34
Figura 24 - Gráfico da flecha máxima da laje para $v = 0.2$	34
Figura 25 – Gráfico do momento normalizado na viga para $v = 0.499$	35
Figura 26 - Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $v = 0.499$	35
Figura 27 – Gráfico da flecha máxima da laje para $v = 0.499$	36
Figura 28 - Gráfico do Momento na Viga e da Deformada da Viga.....	37
Figura 29 - Diagrama de distribuição de carga pelo método base	40

Figura 30 - Diagrama de distribuição de carga	41
Figura 31 - Diagrama de distribuição de carga 1	42
Figura 32 - Diagrama de distribuição de carga 2	43
Figura 33 – Gráfico de relação do Momento na Viga com a redução da Inércia à Flexão	47
Figura 34 – Aplicação da carga nas vigas.....	49
Figura 35 – Aplicação da carga no elemento de casca	49
Figura 36 - Diagrama de momentos na viga do primeiro modelo	50
Figura 37 - Mapa de momentos na direção X do painel do primeiro modelo	50
Figura 38 - Dimensionamento da armadura da viga para o primeiro modelo	51
Figura 39 - Dimensionamento da armadura da laje para o primeiro modelo	52
Figura 40 - Aplicação da carga no segundo modelo	53
Figura 41 - Diagrama de momentos na viga do segundo modelo	53
Figura 42 - Mapa de momentos na direção X do painel do segundo modelo.....	53
Figura 43 – Dimensionamento da armadura da viga para o segundo modelo	54
Figura 44 - Dimensionamento da armadura da laje para o segundo modelo	55

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela dos valores de β_K	16
Tabela 2 - Resultados para $\beta_K = 0.3$	24
Tabela 3 - Resultados para $\beta_K = 10.29$	24
Tabela 4 - Resultados para $\beta_K = 23.03$	24
Tabela 5 - Resultados obtidos para $\beta_K = 19.20$	25
Tabela 6 - Normalização dos momentos na viga	26
Tabela 7 - Normalização da deformada da viga	27
Tabela 8 - Normalização dos momentos na laje	27
Tabela 9 - Normalização da deformada da laje	28
Tabela 10 - Tabela de cálculo da distribuição de carga	38
Tabela 11 - Regressões Polinomiais	44
Tabela 12 – Tabela de Resultados para $\beta_K = 2.4$	46
Tabela 13 – Tabela de Resultados para $\beta_K = 19.2$	46
Tabela 14 - Tabela de Resultados para $\beta_K = 37.5$	46

SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

Letras maiúsculas latinas

E – Módulo de elasticidade [GPa]

G – Módulo de distorção

I_g – Inércia à flexão [m^4]

K – Matriz de Rigidez

M_{laje} – Momento máximo positivo na laje [kNm]

M_y – Momento fletor na viga [kNm]

$\varnothing$ – Diâmetro dos varões [mm]

V_z – Esforço Transverso [kN]

Letras minúsculas latinas

b – Largura da secção transversal [m/cm]

h – Altura da secção transversal [m/cm]

Letras maiúsculas gregas

τ – Momento Torsor [kNm]

Letras minúsculas gregas

ε – Deformação elástica

β_k – Coeficiente de Rigidez

γ – Distorção elástica

δ_{laje} – Deformada da laje [mm]

δ_{viga} – Deformada da viga [mm]

ν – Coeficiente de Poisson

ω – Flecha [mm]

Acrónimos, Siglas e Abreviaturas

ACI – American Concrete Institute

BSI – British Standard Institution

CEN – Comité Européu da Normalização

EC – Eurocódigo

ELS – Estado Limite de Serviço

ELU – Estado Limite Último

MEF – Método dos Elementos Finitos

STC – Struconcept, Lda. - Consultores de Engenharia

1

INTRODUÇÃO

1.1. ENQUADRAMENTO GERAL

A análise do comportamento interacional dos elementos estruturais viga e laje, a nível dos seus esforços, sejam eles momentos fletores ou esforços transversos são, hodiernamente, um desafio bastante significativo na carreira profissional de um engenheiro projetista. Esta dificuldade deve-se ao facto de a estrutura real se comportar de uma forma única, contínua. No passado, esta análise estrutural laje-viga era feita através de métodos de simplificação de cálculo orgânico. Este tipo de métodos permite descomplexificar a geometria dos elementos em estudo, bem como o carregamento a que estão sujeitas. Assim, é possível ao engenheiro adotar elementos lineares ou laminares, que são por definição mais simples de calcular do que a estrutura original global. Ademais, a estrutura real tridimensional é dividida em subestruturas, lajes e pórticos, planos (bidimensionais) que são avaliados separadamente sem considerar a interação real que há numa estrutura edificada.

As aplicações destes métodos de simplificação são contemporâneas de uma grande ausência de poder computacional de cálculo que permitem uma análise do comportamento global da estrutura. Além disso, estes tipos de métodos baseiam-se na assunção de que a viga confere um apoio infinitamente rígido para a laje, o que permite quantificar individualmente os esforços aos quais o pavimento estará sujeito e, consequentemente, proceder ao seu dimensionamento.

Atualmente a realidade é outra. Numa era digital as ferramentas de cálculo estrutural tornaram-se absolutamente triviais no quotidiano de um engenheiro projetista. Com o poder computacional de cálculo é-nos possível avaliar o comportamento e a interação global da estrutura e desenvolver modelos tridimensionais que são o mais próximo da realidade possível. Através de softwares requintados, aliados a métodos de análise poderosos como é o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF), é de primeira intuição assumir que os valores que são obtidos dessa forma são indubitavelmente os corretos e até será intuitivo assumir que serão mais corretos que os obtidos através dos métodos simplificados que desprezam a contribuição da continuidade do sistema laje-viga e tratam a viga como um apoio rígido.

Porém, esses primeiros palpites estão muitas vezes incorretos. É necessário ter presente que o que os programas de cálculo deste tipo fazem são somente os cálculos matemáticos, pelo que o programa não tem, nos dias de hoje, capacidade de sentido crítico nem de análise de resultados. Assim, entra um papel fundamental do projetista, a capacidade de análise crítica de resultados. É imperativo que não se confie cegamente nos resultados dos programas, já que esses mesmos resultados estão dependentes de dados de entrada que são inseridos à priori do cálculo, como por exemplo, as condições de apoio, ou o refinamento da malha de elementos finitos. Deste modo, é crucial que o projetista tenha entendimento

sobre o funcionamento estrutural através dos métodos simplificados de análise, para que consiga fazer uma observação criteriosa dos resultados que o programa oferece.

Sendo assim, é de grande relevância o estudo de sistemas estruturais mais simples para que haja uma comparação dos valores obtidos pelos métodos simplificados clássicos e pelo cálculo baseado em elementos finitos, com o intuito de aferir a que se devem as diferenças observadas nos resultados pelos dois métodos em questão.

Devido à grande praticabilidade desta problemática o autor considera que faria todo o sentido aliar-se ao conhecimento empresarial já adquirido. Assim, esta dissertação foi feita em ambiente empresarial na empresa Struconcept, Lda – Consultores de Engenharia (Struconcept), uma empresa na vanguarda do conhecimento técnico e tecnológico. Fundada em 2009 por três sucessores do conhecimento do Professor Doutor José Mota Freitas, a Struconcept tem todas as capacidades e interesses em ver esta problemática de ambiguidade de valores resolvida ou, pelo menos, compreendida, para que possa projetar e fazer engenharia confiando nos programas de cálculo e análise estrutural de uma melhor forma.

Para o presente trabalho foram estudadas lajes maciças de betão armado, bidirecionais, apoiadas em vigas de contorno com vão de dez metros nas duas direções. Primeiramente, o comportamento destas peças estruturais foi analisado, para Estado Limite Último, pelo método simplificado da distribuição de carga pelas áreas de influência das vigas. Este método consiste em dividir a área total de pavimento em áreas de influência, relativas a cada viga e, assim, determinar a carga a que cada viga estará sujeita. Após a realização dessa distribuição procedeu-se ao cálculo do momento máximo através do MEF. Seguidamente, a estrutura foi modelada, mantendo-se sempre a configuração de vãos e de apoios, todavia a secção da laje foi alterada, bem como a secção das vigas, para que se pudesse ter vários modelos comparativos e aferir como é que essas alterações impactariam os resultados obtidos.

Para a modelação das lajes vigadas foi utilizado o programa de cálculo estrutural Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2023 (Robot), um programa de utilização comum e muito preconizada mundialmente. Foram os resultados obtidos no Robot que serviram para comparação com os resultados calculados pelo método das áreas de influência previamente determinados.

Ao longo deste documento, são sistematizados os resultados obtidos, bem como conclusões que o autor considera relevantes, para que, eventualmente, possam ser utilizados pela comunidade profissional para melhorar a sensibilidade e a análise crítica para com esta problemática, tendo por base um incremento da segurança das estruturas projetadas devido à redução das incertezas de interpretação e utilização de resultados obtidos nos programas de cálculo e, consequentemente, redução do risco.

(Melo, 2021) abordou esta problemática de uma forma semelhante à deste trabalho, comparando valores de um programa de cálculo com os valores de referência determinados por métodos simplificados de análise. (Melo, 2021), ao longo do trabalho desenvolvido, adotou três estratégias de modelação de forma a concluir qual é que seria a melhor delas para representar de forma fidedigna o comportamento real da estrutura. Embora que no presente trabalho se estude somente com lajes vigadas bidirecionais, o documento referenciado teve como foco do seu trabalho lajes unidirecionais. Através da modelação estrutural e com diferentes abordagens de cálculo foi possível concluir que uma redução de 90% da inércia à flexão da laje conduz a uma distribuição de momentos e de cargas quase *ipsis verbis* com a distribuição que se assumiu no modelo simplificado de análise utilizado.

1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

As lajes são elementos estruturais que têm grande rigidez à torção devido à sua geometria, o que intervém de forma significativa no encaminhamento das forças para os apoios verticais da laje, evitando assim a distribuição das mesmas para as vigas de contorno. Porém, em Estado Limite Último, estado de dimensionamento estrutural, acontece a fendilhação do betão o que promove um encaminhamento similar ao encaminhamento adotado pelo método das áreas de influência.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a forma como o programa de cálculo lida com esta distribuição de cargas em regime linear elástico. Na maioria dos casos, o programa ignora o contributo das vigas levando o modelo a comportar-se quase como um modelo de uma laje fungiforme. Esta assunção que o programa faz provoca um sobredimensionamento da laje e dos seus apoios verticais e conduz a um subdimensionamento das vigas.

Com a evolução do carregamento e a evolução da laje da situação inicial para a situação última fissurada a distribuição das cargas assemelha-se à prevista pelo método das áreas de influência, mas para tal acontecer em segurança é necessário que as vigas recebam as cargas corretamente na fase de modelação. O que tende a acontecer nos modelos tridimensionais em regime elástico é uma subavaliação da participação das vigas na estrutura o que pode conduzir a falhas severas de segurança comprometendo, em última análise, a integridade da estrutura. Ademais, estes tipos de erros de cálculo passam muitas vezes por serem detetados em fase de projeto.

Em suma, este trabalho tem o objetivo de compreender de uma melhor forma o comportamento e o encaminhamento das cargas aplicadas nos modelos computacionais e compará-los com os métodos simplificados de análise, de modo a construir uma pequena base científica de conhecimento e gerar boas práticas de modelação com o intuito de mitigar os erros de projeto que podem existir, garantindo assim a segurança das estruturas.

1.3. ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO

O presente documento rege-se pela seguinte estruturação de capítulos:

- Capítulo 1; Presente capítulo, no qual se introduz a problemática em foco ao longo deste trabalho, bem como se elenca os principais objetivos do estudo realizado;
- Capítulo 2; Capítulo no qual se descrevem minuciosamente as metodologias de análise utilizadas durante o carácter prático deste trabalho. Além disso, realizaram-se enquadramentos teóricos da teoria das lajes no campo elástico, bem como um enquadramento dos erros de modelação que são relevantes para a presente problemática.
- Capítulo 3; Capítulo em que são apresentados todos os resultados obtidos e discutidos com toda a pertinência requerida. São apresentadas tabelas de dados para um melhor entendimento do leitor, bem como gráficos que ilustram o comportamento e a tendência dos dados obtidos de um modo mais visual e intuitivo.
- Capítulo 4; Capítulo no qual são descritas as conclusões que se obtiveram com a realização do presente documento, como também são apontados desenvolvimentos futuros, que podem ser subsequentes da presente dissertação, com o objetivo de endereçar a problemática em foco de um modo mais holístico.

2

Métodos de Análise

2.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os programas informáticos utilizados para a modelação de estruturas baseiam o seu cálculo no Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF teve grande desenvolvimento na década de 60 do século XX e, com a banalização da utilização dos computadores, este método tornou-se o mais utilizado para o cálculo de estruturas com geometria arbitrária. O MEF tem como objetivo a determinação do estado de deformação e de tensão de um sólido com uma dada geometria sujeito à aplicação de cargas exteriores. A formulação deste método assenta na existência de uma equação integral com um domínio complexo que é possível de substituir por um somatório de integrais sobre subdomínios de geometrias mais simples. Materializando a formulação, o que este método faz é tornar um objeto com uma geometria mais ou menos complexa num conjunto de elementos finitos, com uma geometria simples, triangulares, quadrangulares, tetraédricos, e calcular e compatibilizar os campos de tensões e deformações desses elementos e, finalmente, fazer o somatório do comportamento de cada elemento para obter o resultado da peça inicial (Azevedo, 2003).

$$\int_V f \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f \, dV \quad (1)$$

2.2. TEORIA DAS LAJES

Para o melhor entendimento do problema em foco neste trabalho é necessário que se exponha a teoria do cálculo das lajes. Existem vários autores que ao longo da sua vida trabalharam e desenvolveram cálculos matemáticos e tabelas de cálculo para o auxílio do dimensionamento destes elementos estruturais. De entre de estes autores destaca-se (Kalmanok, 1961)

2.2.1 TEORIA DAS LAJES SEGUNDO (KALMANOK, 1961)

De acordo com (Kalmanok, 1961), uma laje é um elemento prismático ou cilíndrico no qual uma das dimensões, neste caso a espessura (h) é pequena em comparação às suas dimensões em planta. Para um elemento ser considerado uma laje a espessura não deve ultrapassar o valor de um quinto do menor vão. Para além disso, a teoria de cálculo de lajes baseia-se numa série de hipóteses de simplificação que permitem tornar o problema tridimensional num problema bi ou unidimensional.

Para isso, (Kalmanok, 1961) utiliza a hipótese das retas normais e a hipótese do estado plano de tensão para fazer essas simplificações. Primeiramente, a hipótese das retas normais defende que os pontos localizados numa linha normal ao plano médio de uma laje, permanecem, depois da deformação, sobre uma reta perpendicular à superfície elástica da laje deformada e, ainda, que a distância entre esses pontos

permanece invariável após a deformação. Assim, como consequência do precedente, a componente das pequenas deformações ε_{zz} , γ_{xz} e γ_{yz} são nulas. Seguidamente, a hipótese do estado plano de tensão alega que os esforços induzidos por cargas aplicadas no plano da laje, distribuem-se proporcionalmente pela espessura da mesma. (Kalmanok, 1961)

Tendo em conta as hipóteses acima apresentadas, é possível considerar que a laje trabalha em regime elástico e que as tensões na laje variam ao longo da sua espessura seguindo uma lei constitutiva linear. Destarte, é possível representar o estado de tensão do prisma elementar da resistência dos materiais como caso geral do comportamento estrutural das lajes. Como este trabalho incide sobre um problema devido aos momentos fletores e torsores, seguidamente apresenta-se a formulação da equação dos mesmos, desprezando a formulação do esforço transverso e axial.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz, G_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} 2\tau_{xy} dz \quad (2)$$

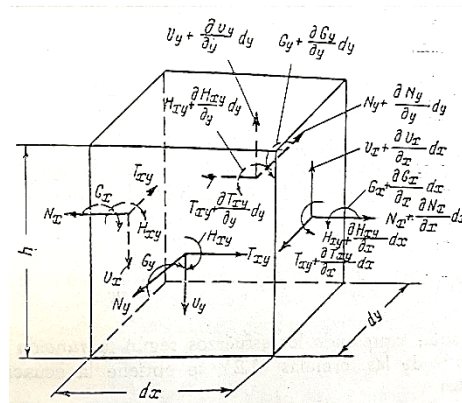


Figura 1 - Prisma elementar; Fonte: (Kalmanok, 1961)

Deste modo, analisando apenas cargas gravíticas e a flexão da laje é possível satisfazer o equilíbrio estático através do desenvolvimento algébrico das equações de equilíbrio, tendo em consideração as pequenas deformações que no caso das lajes são expressas em função da sua flecha (ω), e também o comportamento isótropo do material, caracterizado pelo seu módulo de elasticidade (E) e pelo seu coeficiente de Poisson (ν). A equação abaixo enunciada é a equação fundamental da teoria elástica das lajes isótropas sujeitas à flexão, na qual as incógnitas P e D representam a carga gravítica aplicada e a rigidez à flexão da laje respetivamente.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (3)$$

Para representar de forma mais simplificada a escrita desta equação pode-se recorrer ao operador diferencial de Laplace. Este operador é representado através da seguinte equação.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) temos,

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{P}{D} \quad (5)$$

com D igual à seguinte equação.

$$D = \frac{EI}{(1 - \nu^2)} \quad (6)$$

2.2.2 – A COMPLEXIDADE DAS LAJES

Após esta explicação da teoria das lajes e da formulação da sua equação fundamental para regime linear elástico é possível obter resultados que são elasticamente admissíveis e que garantem o equilíbrio do elemento estrutural.

Porém, no caso de lajes de betão armado a realidade é um pouco distinta do que se assume no cálculo elástico. Devido à sua geometria, a laje desenvolve várias forças internas de carácter complexo e de difícil análise. Desde o momento inicial em que é retirada a cofragem de uma qualquer laje, desenvolvem-se pequenas fissuras no betão, que vão alterando a distribuição interna de momentos na peça. Ao longo do ciclo de vida da mesma, estas fissuras vão aumentando de tamanho, vão aparecendo novas, o que provoca sempre uma redistribuição das forças internas na laje e, consequentemente, dos momentos devido à grande hiperstaticidade que o painel apresenta.

Entenda-se que esta complexidade se deve ao facto de, na realidade, os apoios da laje não serem infinitamente rígidos. Este conceito é simplesmente um artifício de cálculo que se utiliza de forma a descomplexificar a equação (5). Mesmo no caso de aplicação do MEF se se utilizar o conceito de apoio rígido ao contorno da laje, o método lida facilmente com o cálculo dos esforços. Nesta situação, as condições fronteira não estão dependentes da deformação da laje. Retirando esse artifício do infinitamente rígido e modelando um modelo tridimensional de uma laje apoiada em vigas ou efetuando-se o seu cálculo elástico através da sua equação fundamental, a situação adquire outra proporção de complexidade, uma vez que a condição fronteira da laje está dependente da deformação elástica do seu apoio que, por sua vez está dependente da deformada da laje. No caso do cálculo elástico de painéis, por vezes o que é mais complicado de se definir são precisamente as condições fronteira e essa definição tem um impacto direto e de grande relevância no cálculo dos seus esforços.

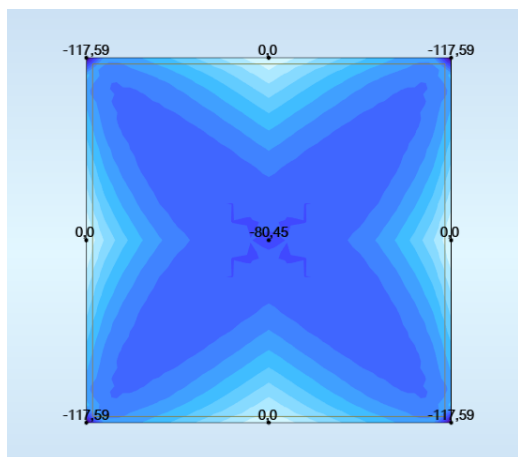


Figura 3 - Momentos Positivos na direção XX com apoio rígido no contorno

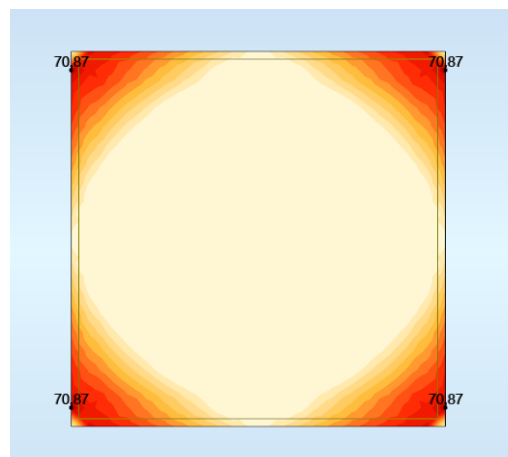


Figura 2 - Momentos Negativos na direção XX com apoio rígido no contorno

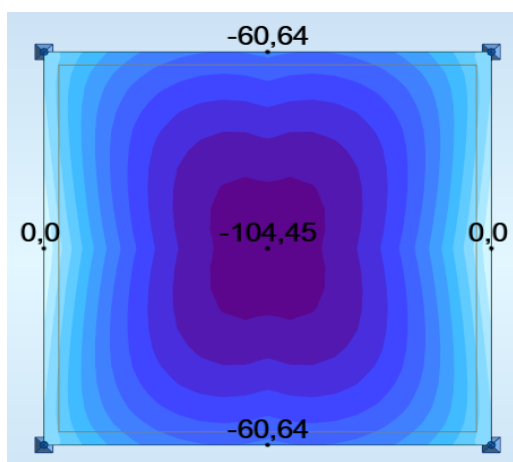


Figura 5 - Momentos Positivos na direção XX com apoio deformável

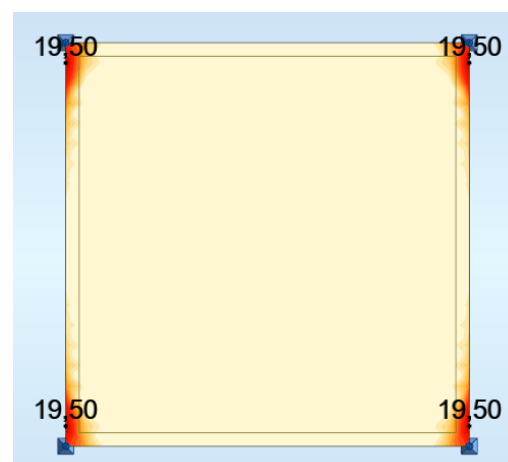


Figura 4 - Momentos Negativos na Direção XX com apoio deformável

Como é possível verificar com as figuras acima apresentadas, comprova-se a grande diferença de valores e de distribuições de momentos que há no cálculo elástico utilizando o MEF no caso de um painel apoiado rigidamente a todo o seu contorno e de um painel homólogo na sua geometria e carregamento, porém apoiado em vigas a todo o seu contorno. Há uma diferença de cerca de 30% nos momentos positivos e de cerca de 28% nos momentos negativos. Para o cálculo de um estrutura em Estado Limite Último, esta diferença é significativa, pelo que é necessário ter muita atenção na modelação das condições fronteiras dos painéis.

2.3. REGULAMENTAÇÃO

A regulamentação relativa a todo o tipo de Projeto de Estruturas construída com diferentes materiais é de amplo espectro de aplicação, bem como de temáticas abordadas. De entre os regulamentos existentes destacam-se para o presente trabalho os Eurocódigos, regulamentação em vigor para a Europa, o ACI 318, regulamento norte-americano de estruturas de betão armado e ainda, a norma BS8110 do regulamento britânico com tabelas de cálculo mundialmente conhecidas e utilizadas com ótimas provas de utilização e segurança.

2.3.1. EUROCÓDIGOS

Os Eurocódigos (EC) são regulamentos que regem as estruturas da Engenharia Civil em quase todos os países da Europa. Os EC são um conjunto de dez normas em que cada uma delas aborda a Engenharia de Estruturas através de uma lente diferente. Estes regulamentos têm como objetivo a estipulação e a normalização de um conjunto de normas técnicas preconizadas na Europa que garantem a segurança, a durabilidade e o tipo de utilização das estruturas. Mais ainda, estes abrangem matérias como o projeto de edifícios, pontes, projeto geotécnico, projeto sísmico, entre outras. Este regulamento é redigido pelo Comité Europeu de Normalização (CEN). O CEN é composto por 30 organismos nacionais que em conjunto, elaboram as normas europeias a serem cumpridas. Pesa embora, cada país pode ter um anexo nacional com anotações ou pequenas alterações ao documento original.

Mais ainda, importa referir que a regulamentação em discussão é baseada no desempenho específico de cada estrutura, isto é, os EC não apresentam regras globais de projeto ou valores tipo, apresentam sim métodos técnico-científicos que permitem ao projetista ajustar a solução estrutural ao projeto em questão, o que permite a inovação de novos tipos de soluções e/ou de controlo custo-benefício.

Neste trabalho, o principal comentário pertinente de se fazer é o do âmbito da modelação estrutural. O EC2 permite a obtenção dos esforços, deformações, tensões e extensões através de uma análise elástica linear salvo casos específicos, os quais não têm interesse de serem abordados para o presente trabalho. Ademais, o EC2 estabelece poucas diretrizes para a modelação estrutural. Pode-se ainda discutir o carácter prescritivo que essas normas teriam de tomar para que fossem viáveis de serem regulamentadas. Para além disso, a regulamentação de algo tão complexo como a modelação estrutural é uma tarefa que acarreta grandes dificuldades e com a sua escrita o Engenheiro Projetista poderia perder livre-arbítrio da conceção e do cálculo da estrutura. Assim, cabe ao projetista ter as competências necessárias para a utilização da modelação estrutural e consequentemente projetar estruturas seguras. O regulamento em questão cita que “As análises devem ser efetuadas utilizando modelos quer da geometria da estrutura quer do seu comportamento. Os modelos escolhidos devem ser adequados ao problema considerado.” (Instituto Português da Qualidade, 2010) Para além disso o Eurocódigo 2 estipula a diretriz de que o cálculo dos elementos estruturais quer em ELU, quer em ELS, pode ser efetuado em análise linear baseada na teoria da elasticidade admitindo as seguintes hipóteses:

- Secções não fendilhadas;
- Relações tensões-extensões lineares e;
- Valores médios para o módulo de elasticidade. (Instituto Português da Qualidade, 2010)

As normativas acima descritas são as únicas que o EC2 estipula, as quais parecem ser francamente escassas para a Engenharia dos dias de hoje.

2.3.2. NORMA NORTE-AMERICANA

Nos Estados Unidos da América existem alguns regulamentos válidos para o projeto de estrutura de betão armado, sendo o mais comumente utilizado o ACI 318 (American Concrete Institute, 2019). Este regulamento desenvolvido pelo American Concrete Institute (ACI) estipula diretrizes e requisitos para o projeto de estruturas de betão armado incluindo estruturas como edifícios, pontes, entre outros. Este regulamento trata de diferentes matérias de um projeto de estruturas como, por exemplo as propriedades dos materiais, as cargas aplicadas às estruturas ou métodos construtivos. Para além disso, o código é acompanhado por um comentário justificativo das diretrizes estipuladas o que complementa de forma muito eficaz a regulamentação com explicações mais longas e descritivas, bem como através da apresentação da informação que serviu de base para a redação do código.

De referir ainda, o regulamento norte-americano tem em conta os novos problemas que foram despoletados devido ao uso genérico dos programas de cálculo estrutural dedicando um capítulo inteiro para dar instruções objetivas sobre as práticas de modelação que um projetista deve ter quando modela tridimensionalmente uma estrutura. Apesar de permitir alguma liberdade nas medidas adotadas o ACI

318 estipula valores máximos ou mínimos, consoante o caso, para que o modelo seja válido e apresente resultados confiáveis e seguros.

A nível comparativo com o EC2, o ACI 318 aborda a temática da modelação estrutural através do MEF muito mais aprofundadamente do que o seu homólogo europeu. O EC2 acaba por negligenciar a execução de instruções e/ou sugestões para a modelação estrutural. Apesar de existirem pequenas normativas já explicitadas nesse sentido, quando comparado com o desenvolvimento que apresenta o ACI 318 pode-se afirmar que o EC2 negligencia o ramo da modelação estrutural deixando em aberto as práticas de modelação ao critério do projetista. Devido a essa falta de normativas incorremos assim numa falta de uniformização de diretrizes e em última análise de perda de segurança.

2.3.3. NORMA BRITÂNICA

A norma britânica BS8110 (British Standards Institution., 1997) é uma importante referência para o projeto e construção de estruturas de betão armado.

Type of panel and moments considered	Short span coefficients, β_{sx}								Long span coefficients, β_{sy} for all values of l_y/l_x
	Values of l_y/l_x								
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.75	2.0	
Interior panels									
Negative moment at continuous edge	0.031	0.037	0.042	0.046	0.050	0.053	0.059	0.063	0.032
Positive moment at mid-span	0.024	0.028	0.032	0.035	0.037	0.040	0.044	0.048	0.024
One short edge discontinuous									
Negative moment at continuous edge	0.039	0.044	0.048	0.052	0.055	0.058	0.063	0.067	0.037
Positive moment at mid-span	0.029	0.033	0.036	0.039	0.041	0.043	0.047	0.050	0.028
One long edge discontinuous									
Negative moment at continuous edge	0.039	0.049	0.056	0.062	0.068	0.073	0.082	0.089	0.037
Positive moment at mid-span	0.030	0.036	0.042	0.047	0.051	0.055	0.062	0.067	0.028
Two adjacent edges discontinuous									
Negative moment at continuous edge	0.047	0.056	0.063	0.069	0.074	0.078	0.087	0.093	0.045
Positive moment at mid-span	0.036	0.042	0.047	0.051	0.055	0.059	0.065	0.070	0.034

Figura 6 - Excerto da Tabela Técnica da Norma BS8110; Fonte: (British Standards Institution., 1997)

Apesar de já não ser um regulamento a ser cumprido no Reino Unido considerou-se que esta norma da British Standards Institution (BSI) tinha relevância para o caso em foco neste documento. A BSI é um membro do já referido CEN, pelo que a regulamentação a utilizar no Reino Unido é o Eurocódigo 2 (BS EN 1992 1-1). (*Do EN Standards Still Apply to the UK after Brexit?* | Gorilla Workwear | Blog, [s.d.]

A norma estabelece diretrizes técnicas, bem como diretrizes que dão grande importância à durabilidade das estruturas. As tabelas técnicas desta norma são uma ferramenta de utilização quotidiana de um engenheiro projetista e têm uma grande aprovação dos profissionais da área, bem como da experiência mundana da sua aplicação. No âmbito das lajes maciças armadas nas duas direções, a tabela desta norma, para a maioria dos casos, é a ferramenta de dimensionamento. Esta tabela tem como resultado o momento fletor máximo e regras simplificadas de detalhe da armadura. As tabelas já consideram uma redistribuição de momentos fletores, bem como, as combinações de ações, pelo que se a laje for

dimensionada baseada nesta norma não é necessário fazer as diferentes combinações de ações. Para os valores da tabela serem válidos é necessário que o projeto obedeça às regras de detalhe de armadura que a norma estabelece.

As combinações possíveis mediante a posição dos bordos e a sua continuidade, ou não, totalizam um grupo de nove tipos de apoio à laje. Para além disso, o carregamento previsto nestas tabelas é um carregamento uniformemente distribuído. (Vila Pouca *et al.*, [s.d.])

2.4. MODELAÇÃO E DESENVOLVIMENTO PRÁTICO

Como foi referido previamente, o software de cálculo estrutural utilizado para a modelação e consequente testagem de resultados na produção deste trabalho, foi o Robot. Este programa de grande disseminação global permite ao seu utilizador a criação de modelos tridimensionais com todos os tipos de elementos estruturais, tais como vigas, pilares, lajes, etc. Para além disso, o Robot tem uma interface de utilização muito intuitiva, pelo que é relativamente acessível a um iniciante na área da modelação estrutural a sua utilização. Importa referir que, o Robot tem variadíssimas formas de demonstração de resultados o que permite ao utilizador a verificação da correta modelação da estrutura. O programa apresenta grandes vantagens de utilização pela sua eficiência e rapidez de cálculo, o que, juntamente com o previamente descrito, formam um pacote que fazem do Robot um dos mais utilizados na área.

Para além disso, o caso de estudo adotado para analisar o âmago deste trabalho foi a modelação de um painel retangular com um vão de 10 metros nas duas direções apoiado em vigas a todo o seu contorno. A geometria quer do painel quer das vigas foi variando, porém foi sempre respeitando um coeficiente adimensional denominado de β_K . Este coeficiente será abordado e explicitado mais à frente. Em termos de carregamento foi arbitrado uma força nominal de 10 kN/m² em todos os modelos executados de forma a que a carga aplicada nos modelos não provocasse interferência no estudo realizado e fosse sempre a mesma ao longo da elaboração deste trabalho. De referir ainda, todo este sistema laje viga esteve, em todas as modelações, apoiado nos quatro vértices por apoios simples que bloqueiam as translações nos três eixos, mas deixam libertas as rotações nesses mesmos três eixos.

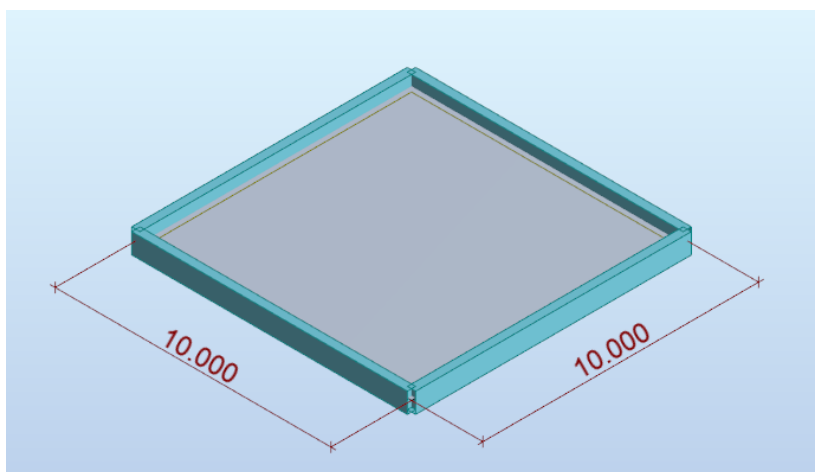


Figura 7 - Demonstração gráfica do caso de estudo

2.4.1. PROBLEMAS DE MODELAÇÃO

Para garantir um correto dimensionamento dos elementos estruturais é necessário que o projetista crie um modelo numérico que reflita com precisão o comportamento estrutural. Para tal, é preciso que o

utilizador do software domine o programa e compreenda alguns erros que são inatos à modelação e os tenha presente durante a obtenção de resultados.

2.4.1.1. PROBLEMA DO PONTO DE INSERÇÃO

De forma corrente, na modelação de lajes vigadas considera-se que o elemento de barra que representa o eixo da viga liga-se à laje no seu plano médio. Desta forma, o que normalmente acontece durante o cálculo é que o programa assume que o elemento laje e viga trabalham separadamente o que na realidade não acontece. Quando uma laje se apoia numa viga forma-se uma nova secção da viga adicionando uma largura efetiva à secção nominal da mesma formando uma nova secção em L. A Figura 9 - Largura efetiva do banzo; Fonte: (Instituto Português da Qualidade, 2010) representa essa nova secção da viga, porém como no caso se trata de uma viga de bordo a adição do banzo efetivo dá-se somente numa direção, na direção em que há laje.

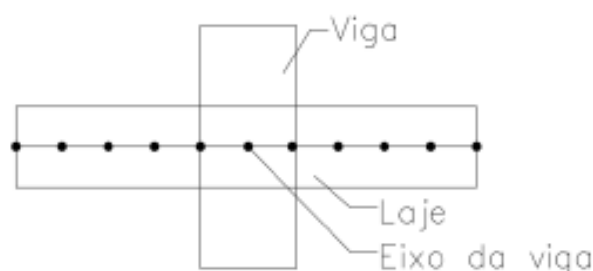


Figura 8 - Representação gráfica do eixo da viga coincidente com o plano médio da laje; Fonte: (Melo, 2021)

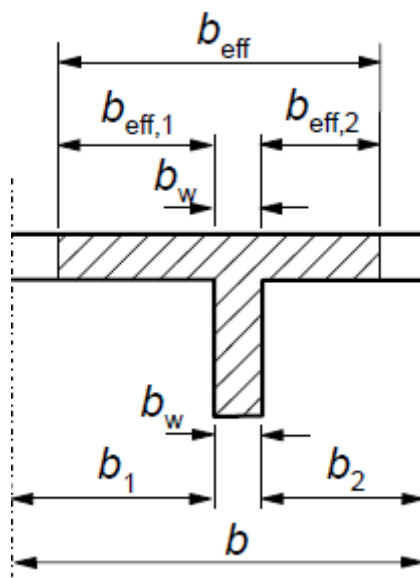


Figura 9 - Largura efetiva do banzo; Fonte: (Instituto Português da Qualidade, 2010)

Com o tipo de modelação comumente utilizada não há uma compatibilização correta dos elementos estruturais pelo facto, da rigidez considerada em cálculo ser a errada, adulterando assim os resultados obtidos de forma pejorativa. Para haver uma correta modelação a secção introduzida deve ser a secção da viga em L como ilustra a Figura 9 - Largura efetiva do banzo; Fonte: (Instituto Português da Qualidade, 2010) para que a viga e a laje trabalhem em uníssono. Quando esta secção é modelada é considerado o que na realidade (Figura 10) acontece, as armaduras introduzidas vão resistir aos

momentos fletores da viga, mas também aos momentos fletores da laje devido à compatibilidade de deformações que há na estrutura real. Para além disso, a nova disposição da viga e da laje considerada gera um binário de forças na laje devido aos esforços axiais da viga e da laje o que leva à existência de um momento fletor de compatibilidade. Porém, a introdução desta secção e a sua modelação, apesar de fidedigna com a realidade torna-se muito dispendiosa em termos de tempo requerido e quase impraticável no dia a dia de um projetista. Ainda assim, de forma a mitigar este erro o projetista pode considerar os esforços axiais presentes na viga e na laje para o dimensionamento da armadura em vez de os desprezar (prática bastante comum no dimensionamento de vigas e lajes), uma vez que assim estará a considerar a contribuição do binário de forças e a aproximar-se um pouco mais do comportamento conjunto do sistema de viga L. (Melo, 2021)

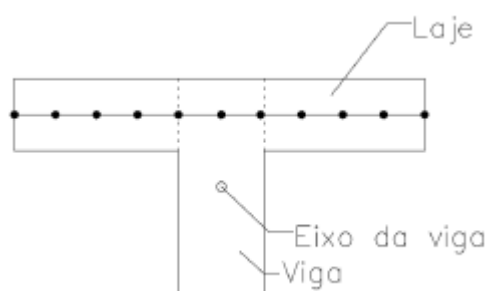


Figura 10 - Representação gráfica do comportamento real do sistema viga e laje; Fonte: (Melo, 2021)

2.4.1.2. CONSEQUÊNCIAS DE MÁ MODELAÇÃO

Com a difusa utilização que os computadores têm na Engenharia Civil é muito importante que haja um correto entendimento do que é realmente um modelo tridimensional de uma estrutura. Um modelo de uma estrutura tenta ser, quando corretamente modelado, o mais verosímil e fidedigno possível com a realidade. Para isso, é necessário que haja um bom controlo de todos os inputs e perceber todas as suposições que o programa faz durante o seu cálculo, para que o modelo se comporte mecanicamente como a estrutura real. Porém, existem erros inatos do programa que podem induzir resultados distorcidos quando comparados com os esforços reais que a estrutura sentirá. O problema em estudo é um destes casos de erros inatos do programa em que é necessário estudar abordagens para manipular o programa de cálculo para que nos conduza a resultados condizentes. Mais à frente será mais pormenorizado o trabalho desenvolvido nesse sentido.

Quando este problema passa despercebido a um olho menos atento, há um momento atuante na viga que é menor do que aquele que na realidade atuará e, por essa razão, os engenheiros projetistas que incorram neste erro começam a entrar num campo de perda de segurança.

Nos dias de hoje, a regulamentação baseia-se num método semi-probabilístico, os coeficientes parciais de segurança. Ao majorar o valor das ações e minorar o valor das resistências dos materiais consegue-se assegurar um equilíbrio seguro nos dois lados da balança. (Pimentel, Vila Pouca e Nunes, 2022)

Porém, estes erros de modelação que acontecem de uma forma não muito esporádica vêm desequilibrar os pratos da balança. Há dificuldades em manter os níveis de segurança de projeto se o programa de cálculo estrutural dá resultados mais baixos do que aqueles que vão ser efetivos na estrutural real. Quando tal se sucede, o coeficiente parcial de segurança deixa de ser efetivo. O que, num cenário ideal seria para garantir a segurança das estruturas devido a erros de execução, perdas de resistência ou majoração de ações consideradas, entre outros, é agora adicionada uma obtenção de valores de esforços em regime linear elástico que não vão ser apropriados aos esforços reais da estrutura, pelo que o nível de segurança é severamente afetado por esta adição indesejada. Não é demais enfatizar a perda

preponderante de segurança que existe quando há erros de modelação que afetam de forma crítica a obtenção de resultados. É necessário que os engenheiros projetistas tenham plena confiança nos resultados dos programas de cálculo para que possam fazer engenharia com segurança, sempre.

2.4.2. ABORDAGENS DE MODELAÇÃO

Para tentar cumprir o objetivo deste trabalho, estudar boas práticas de modelação de lajes vigadas de betão armado, de forma a reduzir os erros de modelação que acontecem foi estipulada uma estratégia para conseguir perceber que interferências é que o processo de cálculo do software tem. Esta estratégia será agora minuciosamente descrita.

Primeiramente foi necessário estipular um caso de estudo. O caso de estudo já foi descrito em 2.4. e aqui evoca-se mais uma vez essas características e são descritas mais algumas. O modelo de estudo adotado foi o de uma laje quadrangular com um vão de dez metros. Em termos de carregamento foi escolhido a aplicação de uma carga nominal de 10 kN/m². Para além disso, foi estipulado que a base da secção transversal da viga era contante, fixando-se esse valor nos 30 cm de comprimento modificando-se somente o valor da altura da viga no decorrer do presente trabalho. Durante toda a análise foi desprezado o contributo do peso próprio da estrutura, entenda-se, o peso próprio da laje e das vigas. Importa referir ainda que, numa análise estrutural é muito importante a consideração dos pesos próprios de todos os elementos estruturais, uma vez que, por exemplo no caso das lajes maciças, o peso próprio deste elemento representa uma grande adição de carga podendo na maior parte das vezes ultrapassar o valor das sobrecargas a aplicar. Porém, como neste trabalho interessa perceber como é que o programa Robot encaminha as forças da laje para os apoios, o peso próprio foi desprezado. Mais ainda, as secções transversais quer da laje quer da viga não foram definidas, pois ao longo da realização deste trabalho tentou generalizar-se o caso de aplicação para que as eventuais soluções fossem aplicadas ao maior número de casos possíveis. É ainda importante visar que o presente trabalho tem um campo de aplicação somente relacionado com cargas gravíticas uniformemente distribuídas, pelo que o estudo de cargas horizontais e de cargas pontuais sai desse mesmo campo de estudo.

O software Robot, no processo de cálculo, gera a uma matriz global de rigidez (K), na qual há uma ponderação da rigidez em todas as direções dos elementos modelados. Sendo assim, durante o processo que cálculo, o que dita a distribuição de esforços é essa mesma relação de rigidez das peças estruturais modeladas, ou seja, para este caso entre as vigas de contorno e a laje. Devido a essa batalha de rigidez criou-se um coeficiente que avalia de forma adimensional essa mesma ponderação de rigidez. O coeficiente utilizado foi o β_K . O β_K é traduzido pela seguinte expressão:

$$\beta_K = \frac{\left(\frac{b * h^3}{12}\right)_{viga}}{\left(\frac{1 * h^3}{12}\right)_{laje}} \quad (7)$$

Como é possível constatar na equação (7) o coeficiente de rigidez é dado pela razão entre o momento de inércia da viga e pelo momento de inércia da laje. É importante referir que a inércia da laje que se tomou como influente para a ponderação da distribuição de esforços nas vigas foi a inércia equivalente a uma faixa de laje de 1m de largura. Como o material utilizado na modelação foi o mesmo para a laje e as vigas, neste caso, um betão C30/37 de acordo com o (Instituto Português da Qualidade, 2010), o módulo de elasticidade (E) é o mesmo e, por essa razão, é que não tem significado no coeficiente β_K .

Assim, foi realizada uma modelação para verificar a influência dessa batalha de rigidez. Essa modelação consistiu em construir dois modelos com secções transversais diferentes, mas com o coeficiente β_K igual nos dois casos, mantendo sempre as condições de carregamento anteriormente descritas. Após a obtenção de resultados foi possível concluir que, de facto, o que acontece internamente no programa de cálculo é uma batalha de rigidezes dos elementos estruturais, pelo que as dimensões das secções transversais, quer da laje quer das vigas podem ser arbitrárias, desde que a relação traduzida pelo coeficiente β_K seja a mesma, a distribuição de esforços pelas vigas e pela laje é a mesma.

A partir deste momento, todas as geometrias de secções transversais estudadas vão ser representadas por este coeficiente apresentado.

2.4.2.1. MANIPULAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON

De forma a conseguir-se balizar os resultados obtidos através do software Robot foi necessário primeiramente elaborar um breve cálculo baseado no método das áreas de influência para melhor compreender qual deve ser o carregamento das vigas de bordo em Estado Limite Último. O método das áreas de influência é uma técnica comumente utilizada para este tipo de cálculo e tem o seguinte dogma: o cálculo de reações dos apoios da laje (as vigas), para um carregamento da laje uniformemente distribuído, é descrito por triângulos ou trapézios traçados com linhas retas a partir dos vértices dos apoios com uma inclinação de 45°. (Kaminski Junior, 2015)

A figura a seguir apresentada é uma representação gráfica das áreas de influência para o caso de estudo.

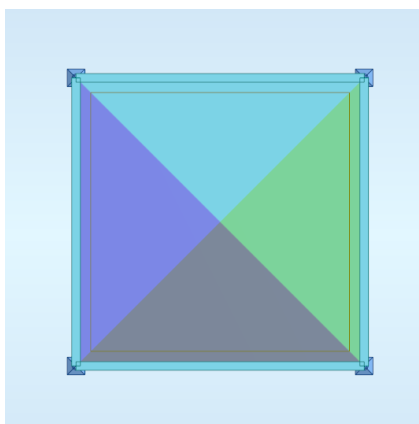


Figura 11 - Distribuição de cargas para as vigas

Como é possível constatar na Figura 11 as vigas serão carregadas, em Estado Limite Último, por uma carga triangular com a geometria ilustrada na figura referida. Transformando a carga aplicada na laje numa carga uniformemente distribuída ao longo da viga de apoio temos:

$$\begin{aligned} P_{viga} &= 10kN/m^2 * 5m \\ P_{viga} &= 50kN/m \end{aligned} \tag{8}$$

em que os 5 metros representam a altura do triângulo da área de influência e os 10kN/m² são o carregamento nominal aplicado na laje.

Seguidamente utilizou-se o Robot para obter o valor de esforço transverso, bem como o valor do momento fletor de cálculo da viga de bordo de forma a conseguir assim, um valor de referência para confrontar com os valores de momentos flectores obtidos para o caso de estudo.

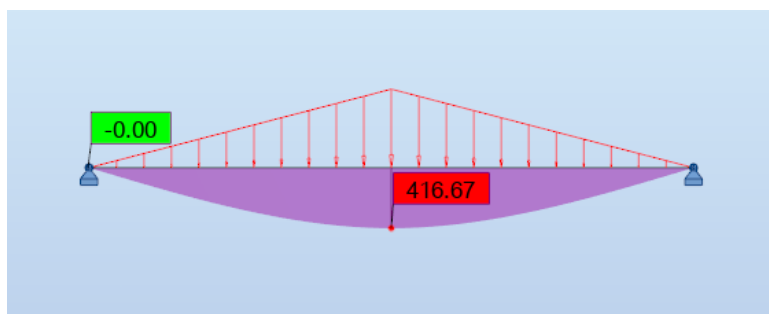


Figura 12 - Momento de referência nas vigas de contorno



Figura 13 - Esforço transversor de referência nas vigas de contorno

Após o cálculo destes esforços foram estipulados alguns valores de β_K para que fosse perceptível o comportamento que as estruturas iriam ter e para que fosse possível também, analisar o comportamento de uma elevada gama de coeficientes. De seguida é apresentada a tabela com a geometria das peças estruturais em estudo que levou à estipulação dos valores de β_K .

Tabela 1 - Tabela dos valores de β_K

h_{laje} [m]	h_{viga} [m]	b_{viga} [m]	β_K
0.2	0.2	0.3	0.3
0.2	0.4	0.3	2.4
0.2	0.6	0.3	8.1
0.2	0.65	0.3	10.29
0.2	0.73	0.3	14.588
0.2	0.80	0.3	19.20
0.2	0.85	0.3	23.03
0.2	1	0.3	37.5
0.2	1.1	0.3	49.91

Como é possível constatar na Tabela 1, durante este trabalho foram estudados 9 valores de β_K . Esses valores, presentes na última coluna da tabela referida, foram obtidos através da aplicação da equação (7) aos diversos tipos de geometrias que foram adotadas para este estudo.

Importa expor ainda, a razão pela qual é que se optou por estas geometrias e explicar esse mesmo processo de escolha. É de fácil percepção ao olho do leitor que muitos destes coeficientes correspondem a geometrias que não são de todo razoáveis de edificar, porém decidiu-se ter este leque de valores de β_K para que fosse possível fazer um varrimento de uma vasta gama de coeficientes que neste caso estão compreendidos entre 0.3 e aproximadamente 50. Mesmo não sendo estruturas que façam sentido de ser concebidas hodiernamente, permaneceu-se com estes valores, pois permitem uma análise paramétrica de amplo espectro. A utilização do β_K permite, simultaneamente, uma discretização adimensional de uma dada geometria do sistema laje viga, bem como um fácil e intuitivo uso para a análise paramétrica. Mais uma vez se visa que a maioria de valores de β_K não são razoáveis de serem convertidos em construção real, porém para o estudo das interferências que se fazem sentir durante o processo de cálculo fazem sentido de serem estudadas.

A primeira abordagem realizada foi a manipulação do coeficiente de Poisson (ν). O coeficiente de Poisson é um coeficiente adimensional, que caracteriza de uma forma muito importante os materiais homogêneos e isotrópicos sendo o betão armado um exemplo de um material desta categoria. Este coeficiente é dado pela razão entre a extensão do material numa direção transversal ao carregamento (y) e pela extensão na direção do carregamento (x).

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (9)$$

Note-se a utilização do sinal negativo na equação. Para que o coeficiente de Poisson seja positivo é necessário este artifício de cálculo, uma vez que as extensões laterais e axiais têm sinais opostos. À medida que a extensão axial aumenta, a extensão transversal diminui. (Beer *et al.*, 2015)

Para o problema em estudo este coeficiente é importante, dado que os esforços da laje não são devidamente encaminhados para as vigas por causa de grande inércia à torção que o elemento estrutural apresenta, tendendo assim a encaminhar os seus esforços para os pilares devido aos momentos torsores internos que surgem devido ao efeito de canto de uma laje bidirecional. O que rege esta capacidade torsional da laje é o módulo de distorção (G) dado pela seguinte equação:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (10)$$

Repare-se que, para o cálculo deste módulo, o fator que pode ser diferenciador e manipulável sem afetar outras características do material, como por exemplo, a resistência à flexão, é o coeficiente de Poisson e é por essa mesma razão que se julgou pertinente o estudo da sua manipulação para obter resultados de modelação mais compatíveis com a realidade e, em última análise, mais seguros em termos de projeto. (Beer *et al.*, 2015)

Uma questão que se pode levantar de uma forma pertinente é, porquê que não se optou pela manipulação do G primeiramente? O Robot permite definir novos tipos de materiais para além daqueles que tem

como materiais padrão na sua biblioteca. Na definição de um novo material é possível introduzir variadíssimas características do mesmo. No âmbito deste projeto, aquelas características que têm mais interesse em manipular são precisamente o G e o ν . Porém, um dos defeitos que o software tem é presenciado nesta fase de definição do material. Esta matéria já tinha sido endereçada internamente na Struconcept e foi a empresa que alertou o autor para este problema. Este problema consiste em, apesar de se conseguir definir o G na caixa de diálogo do software Robot (Figura 14) quando se define um novo material, o Robot quando procede aos cálculos utiliza somente o E e o ν calculando o G na fase de cálculo de acordo com a equação (10) ignorando totalmente o que o utilizador definiu na caixa de diálogo. Este problema é grave, pois não dá ao utilizador um controlo holístico das capacidades do software e pode ser, por vezes enganador.

Figura 14 - Caixa de diálogo de definição de material do software Robot

Mais ainda, o âmago da problemática neste caso deriva do efeito de canto que a laje gera, induzindo assim momentos torsores que são desestabilizadores à distribuição das cargas aplicadas. Na teoria da elasticidade, os momentos torsores são dados pela derivada cruzada de segunda ordem o que se pode constatar na equação (3) acima já apresentada. Integrando essa mesma equação de modo a obter os esforços, os momentos torsores, comumente designados pela letra τ , vão depender diretamente do módulo de distorção que, por sua vez está dependente do coeficiente de Poisson como já explicitado. Ora, é de fácil conclusão que ao manipular o ν , em última análise estaremos a manipular os momentos torsores da laje de estudo, conseguindo assim aferir a interferência que os mesmos têm na distribuição de carga e no encaminhamento da mesma para os pilares e assim, controlar os momentos atuantes nas vigas de contorno.

De referir ainda, esta assunção que o programa faz limita bastante a gama do G que se pode utilizar, isto é, como o ν varia entre 0 e 0.5, por definição, o módulo de distorção que o programa utiliza só pode estar compreendido entre um meio e um terço de E . Esta restrição tem como consequência uma limitação da gama de β_K que ao serem manipuladas podem apresentar valores razoáveis de momento fletor na viga.

Para além disso, de forma a conseguir ter um amplo estudo da influência que o coeficiente de Poisson tem sobre a obtenção de resultados, estipularam-se valores de ν de modo a ter um detalhado varrimento

da sua influência em todos os esforços registados na realização deste estudo. É de referir que todos valores de β_K foram modelados para cada um destes valores.

Esses valores foram:

- 0;
- 0.1;
- 0.2;
- 0.3;
- 0.4;
- 0.5.

Ademais, é de pertinente relevância explicitar o processo de modelação que foi realizado neste modelo de manipulação. Primeiramente, foram criadas as secções das várias vigas de contorno. O utilizador do software aquando desta fase tem de explicitar o tipo de geometria que a viga tem, neste caso uma viga retangular, e seguidamente atribuí as dimensões da mesma. Visa-se ainda que a inércia à torsão das vigas de contorno foi desligada em todos os modelos realizados, isto é, multiplicou-se por um fator de redução a inércia à torção das vigas de contorno. Esse valor de redução foi 0.01 da inércia total à torsão. Na modelação, realizou-se esta manipulação da inércia à torsão para que as vigas não gerassem momentos torsores que pudessem induzir mais interferências na obtenção de resultados. Além disso, no caso de uma estrutura real de um painel sem continuidade, a laje sofrerá uma deformação cilíndrica o que vai mobilizar a inércia à torsão das vigas de contorno. Porém, a viga de contorno está sujeita a microfissuração condizente com a hélice de torsão num estágio muito prematuro no seu ciclo de vida. Essa microfissuração provoca uma quebra da inércia à torsão que a secção da viga tem e por essa razão também é seguro e realista reduzir a inércia à torsão das vigas de contorno modeladas. De referir ainda, esta redução da inércia à torsão das vigas de contorno permite garantir que as mesmas não se encastrem umas às outras gerando assim momentos torsores que afetariam a distribuição de momentos fletores causando assim mais interferência no modelo.

Seguidamente, foi modelado o elemento de casca. Foi definida a secção da laje com uma espessura de 20 cm e foi modelada dentro das vigas de contorno fazendo coincidir os vértices do elemento de casca com os nós das vigas de contorno já modeladas. Quanto há malha de elementos finitos, utilizaram-se elementos com o tamanho da espessura da laje, ou seja, elementos com 20 cm. Poder-se-á argumentar se esta malha não será demasiado refinada, porém como o modelo utilizado é relativamente simples juntamente com o poder computacional disponível para a realização das modelações, não causou constrangimento algum o uso de uma malha tão fina.

Finalmente, a modelação dos pilares verificou-se negligenciável, dado que o grande foque deste trabalho é estudar a interação laje viga. Destarte, o que seriam pilares numa estrutura real, no modelo foram substituídos por apoios simples com as translações nos três eixos bloqueadas, mas com as rotações livres sobre todos os graus de liberdade.

Este estudo pormenorizado do coeficiente de Poisson permitiu aferir a importância e a interferência que este tem no encaminhamento de forças para cada β_K , através do registo dos esforços obtidos no programa de cálculo estrutural. Os esforços registados foram, esforço transversal na viga (V_z), o momento fletor máximo positivo na viga (M_y), o momento fletor máximo positivo na laje (M_{laje}), a deformada da viga (δ_{viga}) e, por último, a deformada da laje (δ_{laje}). No capítulo seguinte serão apresentados esses resultados e oportunamente discutidos.

2.4.2.2. REDUÇÃO DA INÉRCIA À FLEXÃO DA LAJE

Uma das alternativas estudadas para a compreensão e consequente mitigação da temática deste trabalho foi a redução da rigidez à flexão da laje. Esta abordagem foi também estudada por (Melo, 2021), porém com outro objetivo final. No documento acima referenciado o estudo consistiu na redução de 90% da rigidez elástica à flexão da laje. Com esta redução da rigidez da laje as vigas que conferem apoio à mesma terão, no momento do cálculo, uma rigidez bastante superior à da laje considerando-se assim vigas muito rígidas. Como foi dito anteriormente o problema baseia-se numa batalha de rigidezes e de encaminhamento de forças. No modelo em causa, como as vigas apresentam uma rigidez mais elevada do que a da laje o programa irá encaminhar mais esforços para as mesmas conseguindo-se assim um carregamento mais verosímil com o que se assume em Estado Limite Último através do método das áreas de influência. No seu trabalho, (Melo, 2021), alcançou níveis de segurança bastante satisfatórios com esta redução da rigidez da laje sendo este modelo o que apresentou melhores resultados do seu trabalho, com similaridades de cerca de 90% ao seu modelo simplificado base.

No caso do presente trabalho, esta redução fez-se em valores consecutivamente mais elevados e não só para 90% como foi realizado no trabalho acima endereçado. Primeiramente não foi reduzido a inércia à flexão de forma a ter um ponto de partida, seguidamente reduziu-se a 50% e, por último, reduziu-se 90% do valor inicial de rigidez. Esta redução gradual permite compreender qual é o comportamento que os esforços tendem a ter e para onde é que são encaminhados de uma forma mais perceptível do que a utilização de um só valor de redução.

Esta limitação da rigidez da laje é muito fácil de se realizar no Robot. Na caixa de diálogo em que se define a espessura da placa há uma pequena caixa de verificação que permite introduzir um fator definido pelo utilizador que irá multiplicar algebricamente pela matriz de inércia à flexão da placa. De referir ainda, a introdução deste fator multiplicativo não tem qualquer influência na rigidez de membrana da laje e no esforço transversal. Os elementos da matriz da inércia à flexão dos elementos finitos são multiplicados por um valor específico que o utilizador introduziu. (*Robot Structural Analysis 2023 Help* | *Homogenous* | Autodesk, [s.d.])

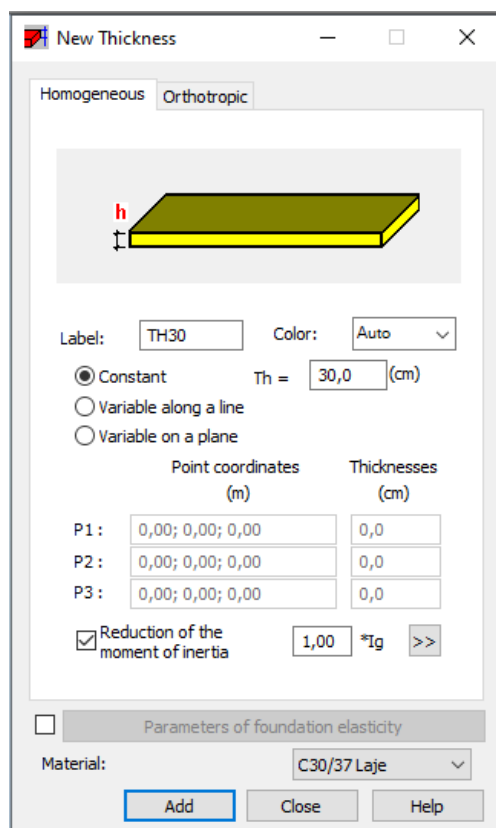


Figura 15 - Caixa de diálogo para a criação de uma nova espessura de placa

Ademais, aumentar a rigidez à flexão das vigas de apoio teria o mesmo efeito que a opção descrita acima, uma vez que e visando mais uma vez, o que se sucede é uma batalha de rigidez no programa de cálculo.

Porém, esta alternativa de aumento da rigidez elástica das vigas não foi tida em consideração na modelação, dado que tem uma grande desvantagem se considerarmos um modelo tridimensional global. Ao aumentar a rigidez das vigas estaremos a subestimar as deformações das mesmas, pois a flecha máxima depende do inverso dessa mesma rigidez e com isso poder-se-ia entrar num campo em que não fosse cumprido o Estado Limite de Serviço, além disso iria-se sobrestimar a capacidade resistente da estrutura aos sismos, uma vez que a assunção do aumento da rigidez pressupõe uma estrutura menos dúctil, o que é pejorativo na avaliação sísmica o que se reflete numa colocação de armadura excessiva à estrutura real. Além disso, e talvez ainda mais importante do que o já mencionado, na modelação de uma estrutura a relação de rigidez entre a viga e o pilar tem de ser mantida. Se tal não se suceder a avaliação dos momentos nos pilares fica completamente desajustada da realidade e compromete totalmente a validação do modelo estrutural.

Para a situação homóloga da redução da inércia à flexão da laje os problemas reduzem-se sendo o único contra deste tipo de solução a incoerência da deformada. Não obstante, o conceito de modelo tridimensional global é um pouco difícil de concretizar com níveis de realismo satisfatórios e cumprindo todos os requisitos que um projeto de estruturas requer. Destarte, seria um disparate um engenheiro projetista reduzir a inércia à flexão do seu elemento de casca e considerar a utilização do valor da deformada para qualquer que fosse a verificação. Essa redução é boa para conseguir ter uma distribuição de momentos realista, mas má para considerar a deformada para o que quer que seja. Todavia, esta

sobrestimação da deformada não impede a utilização deste método para obter os resultados que se pretendem de uma forma consistente e muito prática.

2.4.2.3. MODELAÇÃO EM GRELHA

Uma das alternativas estudadas foi a modelação em grelha. A modelação em grelha é um tipo de modelação que outrora foi vastamente utilizada devido a, alguma vezes, à falta de poder computacional, mas também muito utilizada devido ao controlo que confere ao utilizador perante o seu comportamento estrutural. Este tipo de modelação consiste na discretização da laje num conjunto de elemento de barra mimetizando o comportamento estrutural da laje.

Na realização deste trabalho concretizaram-se alguns modelos com modelação em grelha, porém não foram obtidos resultados que fossem satisfatórios o suficiente para ser considerado num estudo mais aprofundado. Mais ainda, quando comparado com o MEF, a modelação em grelha tem a grande desvantagem de não ser tão prática e de apresentar facilmente os mesmos resultados que o MEF. Enquanto se utilizarmos uma modelação com elementos finitos tudo o que o utilizador tem de efetuar é modelar um elemento de casca com a geometria da laje e tem o seu modelo quase pronto, no caso da modelação em grelha tem de ter o trabalho todo da discretização da laje o que em alguns casos pode ser muito consumidor de tempo. Por estas razões é que foi abandonado o estudo aprofundado com a modelação em grelha. O MEF tem resultados semelhantes e é de utilização muito mais holística na esfera dos gabinetes de projeto estrutural.

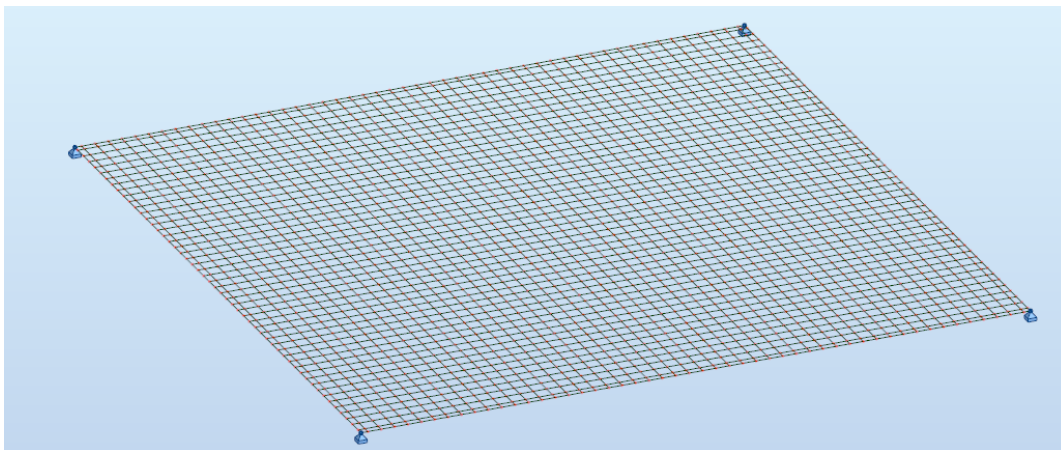


Figura 16 - Modelo em Grelha

Nesta modelação primeiramente foram modeladas as vigas de contorno em tudo semelhante aos processos de modelação já descritos, porém a laje, em vez de ser descrita por um elemento de casca foi descrita com elementos de barra como é possível de constatar na Figura 16. A dimensão da discretização foi a mesma que a malha de elementos finitos nos outros modelos com elementos de 0.2m a interpretar o comportamento da laje. Mais uma vez é possível discutir o refinamento desta discretização, todavia pelas razões já enunciadas optou-se por manter este formato.

A nível da manipulação que foi feita nesta tipologia de modelo foi a conjugação das outras já referidas abordagens de manipulação. Foram realizadas iterações desligando a inércia à torção dos elementos de barra que mimetizam a laje, bem como multiplicando a inércia à flexão dessas mesmas barras pelo fator de redução já previamente utilizado, 0.01. Nenhuma destas abordagens se revelou satisfatória nem valerosa de se realizar um estudo mais profundo e minucioso.

3

Apresentação e discussão de resultados

No presente capítulo serão apresentados todos os resultados obtidos e devidamente comentados para que sejam de interpretação intuitiva e clara. Primeiramente irão ser discutidos os resultados obtidos através do método da manipulação do coeficiente de Poisson, método esse que foi o que mais amplamente foi estudado, bem como o que tem os dados mais trabalhados e expressivos. Seguidamente serão apresentados os resultados conseguidos através do método da redução da inércia à flexão da laje que como foi referido, consistiu numa redução gradual originando três valores diferentes para cada β_K estudado. Por último, será totalmente dimensionado um caso de uma laje vigada que para o vão em estudo, tivesse dimensões construíveis de forma a melhor compreender em que espectro de coeficientes de rigidez se pode inserir uma estrutura real.

3.1. RESULTADOS DA MANIPULAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON

Neste subcapítulo, serão apresentados gráficos e tabelas de tratamento de dados com os resultados obtidos no programa de cálculo estrutural Robot para cada uma das modelações efetuadas neste trabalho.

Evoca-se a gama de β_K definida anteriormente:

- 0.3;
- 2.4;
- 8.1;
- 10.29;
- 14.588;
- 19.20;
- 23.03;
- 37.5;
- 49.91.

Assim, baseando-se nestes valores de β_K , foram construídas tabelas de resultados analisados com os valores dos esforços que foram acima elencados.

De seguida não se irão apresentar todas as tabelas para todos os β_K , pois não se entendeu pertinente à compreensão do leitor, dado que a construção das mesmas é igual só alteram os valores.

Tabela 2 - Resultados para $\beta_K = 0.3$

$\beta_K = 0.3$ (laje fungiforme)						
v	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.499
V_z [kN]	92.46	93.53	95	96.75	98.76	101
M_y [kNm]	44.09	43.4	42.59	41.72	40.83	39.93
M_{laje} [kNm]	145.96	143.63	140.97	138.26	135.58	133.05
δ_{viga} [mm]	71.82	70.25	68.48	66.68	64.87	63.05
δ_{laje} [mm]	117.38	111.31	104.39	97.29	90.02	82.64

Tabela 3 - Resultados para $\beta_K = 10.29$

$\beta_K = 10.29$						
v	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.499
V_z [kN]	129.42	127.89	126.44	125.26	124.33	123.67
M_y [kNm]	388.96	380.34	370.59	360.69	350.69	340.68
M_{laje} [kNm]	52.55	55.51	58.8	62.09	65.38	68.83
δ_{viga} [mm]	17.75	17.34	16.72	16.4	15.93	15.47
δ_{laje} [mm]	42.81	41.18	39.06	36.63	33.88	30.5

Tabela 4 - Resultados para $\beta_K = 23.03$

$\beta_K = 23.03$						
v	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.499
V_z [kN]	133.68	131.91	130.15	128.61	127.28	126.19
M_y [kNm]	446.24	436	424.51	412.93	401.26	389.62
M_{laje} [kNm]	44.95	48.08	51.55	55.04	58.53	61.99
δ_{viga} [mm]	9.07	8.86	8.62	8.38	8.14	7.9
δ_{laje} [mm]	30.86	29.94	28.6	26.93	24.91	22.58

Como é possível constatar nas tabelas acima apresentadas foram realizados vários modelos para que os resultados fossem os mais abrangentes possíveis. Tabelas deste tipo foram elaboradas para todos os valores do coeficiente de rigidez. Cada uma delas corresponde à modelação de um valor de β_K e seus resultados para cada coeficiente de Poisson.

O tratamento de dados realizado foi feito com o intuito de entender a evolução que o coeficiente de Poisson tem nos diferentes esforços estudados e para cada β_K conseguindo-se assim, uma razoável aproximação ao comportamento tendencioso dos esforços estudados. De referir ainda, ao longo do desenvolvimento deste trabalho denotou-se uma limitação à manipulação do v . Evoque-se o valor de referência do momento na viga de 416.67 kNm acima calculado.

A manipulação do coeficiente do Poisson só se revelou boa para uma gama muito específica de β_K , que em todos os casos correspondem a geometrias pouco prováveis de serem construídas. Porém, mais uma vez se visa o contexto de uma análise paramétrica de forma a ter um bom varrimento de valores estudados. Os valores de β_K que tiveram uma resposta positiva à manipulação do coeficiente de Poisson foram:

- 14.59;
- 19.20;
- 23.3;
- 37.5;
- 49.91.

De seguida, será apresentada uma tabela para que se possa evidenciar o descrito mais graficamente.

Tabela 5 - Resultados obtidos para $\beta_K = 19.20$

$\beta_K = 19.20$						
v	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.499
V_z [kN]	132.92	131.2	129.49	128.01	126.75	125.74
M_y [kNm]	435.88	425.94	414.77	403.49	392.12	380.78
M_{laje} [kNm]	46.32	49.42	52.86	56.31	59.77	63.19
δ_{viga} [mm]	10.63	10.38	10.1	9.82	9.54	9.26
δ_{laje} [mm]	33.02	31.97	30.49	28.67	26.53	24.07

Como é possível apurar através da Tabela 5 o coeficiente de β_K correspondente ao valor de 19.20 teve um momento elástico na viga de 414.77 kNm para o valor de v de 0.2. O valor tabelado corresponde a uma igualdade de 99.5% do valor de referência, pelo que é um resultado realista e seguro. Para além disso, é ainda possível, se necessário, conseguir um valor ainda mais exato se se realizar a manipulação do coeficiente de Poisson na ordem das centésimas, porém parece ao autor que essa manipulação é descabida, dado que uma similitude de 99.5% é totalmente aceitável para se projetar em segurança.

Os valores de β_K referidos acima que obtiveram uma resposta positiva à manipulação do coeficiente de Poisson geraram momentos atuantes na viga da mesma ordem de grandeza de igualdade, porém para valores de v distintos do exemplo dado.

Importa, ainda, referir que os valores obtidos de esforço transversal na viga na zona de apoio (esforço transversal máximo) é, na maioria dos casos, superior ao valor de referência de 125 kN. Não se conseguiu apurar a razão concreta deste acontecimento, porém este fenómeno pode estar relacionado com o levantamento dos cantos da laje. Como os vértices da laje têm deslocamento nulo devido à colocação

de apoios simulando os pilares irão ser gerados momentos fletores negativos na laje que podem estar relacionados com este aumento de esforço transversal na viga. Esta temática não será minuciosamente abordada nem estudada, dado que sai fora do campo de estudo do presente trabalho.

É ainda possível verificar que o momento na viga tem um comportamento decrescente à medida que o ν tem um comportamento crescente, isto é, à medida que se manipula o coeficiente de Poisson para valores consecutivamente maiores, o momento atuante na viga tem um valor mais baixo. A razão de tal acontecer está relacionada com o já anteriormente descrito. De acordo com a equação (11) com um valor de ν mais elevado o módulo de distorção tem um valor menor. Assim, com um valor de G mais reduzido, os momentos torsores existentes serão também menores conduzindo a uma distribuição mais compatível com aquela que se assume com a distribuição pelo método das áreas de influência. Porém, como é possível constatar na Tabela 6, os momentos na viga vão diminuindo há medida que o coeficiente de Poisson aumenta para valores em que se considera que o material é incompressível. Em contraste, há um aumento do momento fletor máximo positivo na laje, como é possível verificar com o auxílio da Tabela 8. Este comportamento é espelhado pela equação (6). Há medida que o ν vai-se aproximando para o valor de 0.5, a rigidez à flexão da laje vai aumentando como é possível de verificar com a equação acima referida. Com esse aumento de rigidez, a laje, consegue assim, atrair mais esforços para ela e desse modo, menos esforços terão de ser resolvidos pela viga.

De forma a realizar uma análise de dados estatisticamente mais consistente, os dados que serão a seguir apresentados foram normalizados para o valor do esforço correspondente ao coeficiente de Poisson igual a 0.2 para cada β_K . Este valor de ν foi o escolhido, dado que é o que é considerado no caso do betão armado e é o que é considerado no Robot como sendo padrão, ou seja, se o utilizador do software não manipular o coeficiente de Poisson, o valor de 0.2 é aquele que vem por predefinição. Para além disso, esta normalização foi realizada para todos os valores de β_K , bem como para todos os esforços registados neste trabalho.

Destarte, com esta normalização foi possível a construção das seguintes tabelas.

Tabela 6 - Normalização dos momentos na viga

$\nu \backslash \beta_K$	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400	0.499
0.300	1.035	1.019	1.000	0.980	0.959	0.938
2.400	1.044	1.024	1.000	0.976	0.951	0.925
8.100	1.049	1.026	1.000	0.974	0.947	0.920
10.290	1.050	1.026	1.000	0.973	0.946	0.919
14.588	1.050	1.027	1.000	0.973	0.946	0.919
19.200	1.051	1.027	1.000	0.973	0.945	0.918
23.300	1.051	1.027	1.000	0.973	0.945	0.918
37.500	1.052	1.027	1.000	0.973	0.945	0.917
49.910	1.052	1.027	1.000	0.972	0.945	0.917

Tabela 7 - Normalização da deformada da viga

$\beta_K \backslash v$	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400	0.499
0.300	1.049	1.026	1.000	0.974	0.947	0.921
2.400	1.050	1.027	1.000	0.973	0.946	0.918
8.100	1.052	1.028	1.000	0.972	0.945	0.917
10.290	1.062	1.037	1.000	0.981	0.953	0.925
14.588	1.053	1.028	1.000	0.973	0.944	0.917
19.200	1.052	1.028	1.000	0.972	0.945	0.917
23.300	1.052	1.028	1.000	0.972	0.944	0.916
37.500	1.052	1.027	1.000	0.971	0.944	0.915
49.910	1.052	1.028	1.000	0.972	0.943	0.917

Tabela 8 - Normalização dos momentos na laje

$\beta_K \backslash v$	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400	0.499
0.300	1.035	1.019	1.000	0.981	0.962	0.944
2.400	1.042	1.022	1.000	0.978	0.977	1.008
8.100	0.901	0.948	1.000	1.052	1.104	1.156
10.290	0.894	0.944	1.000	1.056	1.112	1.171
14.588	0.884	0.939	1.000	1.061	1.123	1.184
19.200	0.876	0.935	1.000	1.065	1.131	1.195
23.030	0.872	0.933	1.000	1.068	1.135	1.203
37.500	0.862	0.928	1.000	1.073	1.146	1.218
49.910	0.858	0.925	1.000	1.075	1.150	1.225

Tabela 9 - Normalização da deformada da laje

$\beta_K \backslash v$	0.010	0.100	0.200	0.300	0.400	0.499
0.300	1.124	1.066	1.000	0.932	0.862	0.792
2.400	1.116	1.063	1.000	0.934	0.864	0.791
8.100	1.101	1.057	1.000	0.936	0.866	0.788
10.290	1.096	1.054	1.000	0.938	0.867	0.781
14.588	1.089	1.051	1.000	0.939	0.869	0.790
19.200	1.083	1.049	1.000	0.940	0.870	0.789
23.030	1.079	1.047	1.000	0.942	0.871	0.790
37.500	1.069	1.043	1.000	0.943	0.872	0.788
49.910	1.064	1.040	1.000	0.945	0.874	0.789

Deste modo, é agora possível de um modo mais facilitado analisar os valores obtidos e comentá-los. No que toca aos momentos atuantes na viga é de notar uma redução do seu valor à medida que o coeficiente de Poisson aumenta, como já foi anteriormente explicado. Essa redução está compreendida entre os 6.2% para o valor de β_K igual a 0.3 até a 8.3% para o valor máximo de β_K estudado. Em contraste, os aumentos que se verificaram quando comparando com o valor de v igual a 0.2 estão compreendidos entre os 3.4% e os 4.9%. É de notar que a variação que se verifica é mais significativa quando se fala do aumento do coeficiente de Poisson do que é quando se fala da sua redução. Com o andamento do v para valores mais elevados há uma variação entre os β_K de cerca de dois pontos percentuais enquanto que para valores mais reduzidos do coeficiente de Poisson a variação que se verifica para os coeficientes de rigidez é cerca de um ponto percentual.

Com o tratamento destes dados construiu-se um gráfico que relaciona o coeficiente de Poisson (representado no eixo das abcissas) e os momentos normalizados na viga (representado no eixo das ordenadas)

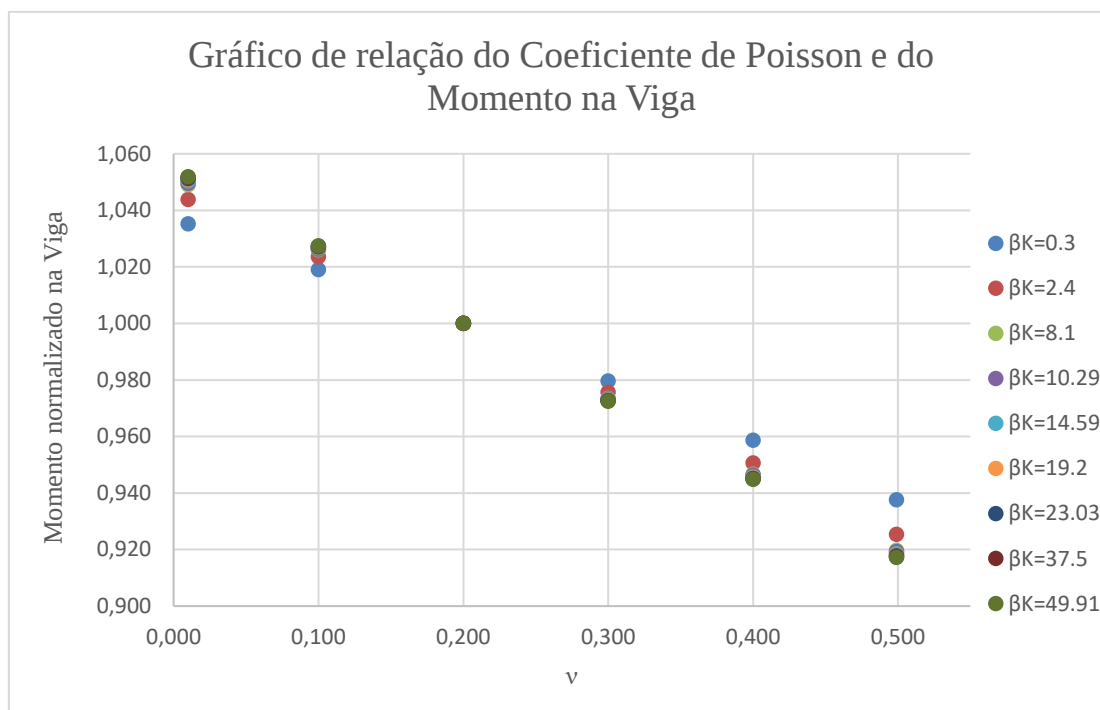


Figura 17 - Gráfico de relação do Coeficiente de Poisson e do Momento na Viga

Pede-se a atenção do leitor para o facto da escala do eixo das ordenadas começar no valor de 0.9 devido a ser de mais fácil visualização gráfica a expressividade dos dados analisados.

Como é possível constatar no gráfico acima representado, a relação de proporcionalidade inversa entre as variáveis estudadas sobressai. Enquanto há o aumento do ν , há a redução do momento na viga. Repare-se que para todos os β_K os pontos de abcissa igual a 0.2 estão sobrepostos o que evidencia a normalização de dados realizada. Para além disso, há dois conjuntos de dados que têm uma variação mais expressiva do que os demais, sendo esses os dados correspondentes aos valores de β_K igual a 0.3 e a 2.4. Sendo estes valores correspondentes a uma laje com comportamento fungiforme e a uma laje com uma relação de rigidez com a viga moderadamente reduzida é expectável que fossem as amostras de dados com maior variação. Em contraste, à medida que o β_K aumenta os pontos do gráfico perdem alguma expressividade ficando muito sobrepostos uns nos outros. Isto significa que para cada valor de β_K a relação que há para o aumento e/ou redução do ν comparativamente ao valor padrão de 0.2 é razoavelmente a mesma, ou seja, para valores de β_K que representam secções transversais mais expressivas, a manipulação do coeficiente de Poisson tem um efeito muito semelhante na análise dos dados normalizados o que torna patente uma consistência da influência do mesmo na obtenção dos resultados. De referir ainda, com o aumento da relação de rigidez a sobreposição dos pontos torna-se cada vez mais efetiva o que denota uma tendência aos valores desta variação estabilizarem.

No âmbito do momento fletor da laje o que se verifica é o inverso do que acontece na análise do momento nas vigas. Mais uma vez, com o aumento do coeficiente de Poisson e consequente redução do valor do módulo de distorção, os momentos torsores são reduzidos perdendo-se alguma relevância do efeito de canto e por isso, há um incremento dos momentos nas direções principais. Assim sendo, passa a haver uma relação de proporcionalidade direta entre o momento máximo positivo na laje e a manipulação do ν . Para além disso, é possível constatar que há uma variação muito mais acentuada quando se debruça sobre o momento na laje, comparativamente ao momento na viga.

A variação máxima que se verifica é para o valor máximo de β_K , 49.91, que experiencia um aumento de 18.4% em relação ao coeficiente de Poisson de referência e uma redução de 14.2% em relação ao mesmo marco o que totaliza um espectro de resposta de manipulação de 32.6%. Esta variação é muito mais agressiva no momento da laje o que faz todo o sentido devido à grande influência que o ν tem em elementos laminares quando comparado com elementos de barra. Esta preponderância deve-se ao facto de, nos elementos laminares planos como é o caso da laje de betão armado as tensões e extensões transversais ao carregamento são de grande importância, podendo alterar o comportamento estrutural da peça. Daí a grande importância do coeficiente de Poisson que determina o rácio das extensões transversais e longitudinais como foi anteriormente explicado. Opostamente, em elementos de barra, o coeficiente de Poisson perde influência, pois são desprezadas, na vasta maioria dos casos, as deformações transversais dos elementos devido ao facto de, serem muito pequenas quando comparadas com o alongamento (extensão longitudinal) dos elementos. A forma alongada dos elementos de barra é o que confere essa oligarquia das extensões longitudinais dos elementos.

Seguidamente ser-lhe-á apresentado um gráfico que relaciona o coeficiente de Poisson (representado no eixo das abcissas) e o momento máximo positivo da laje (representado no eixo das ordenadas).

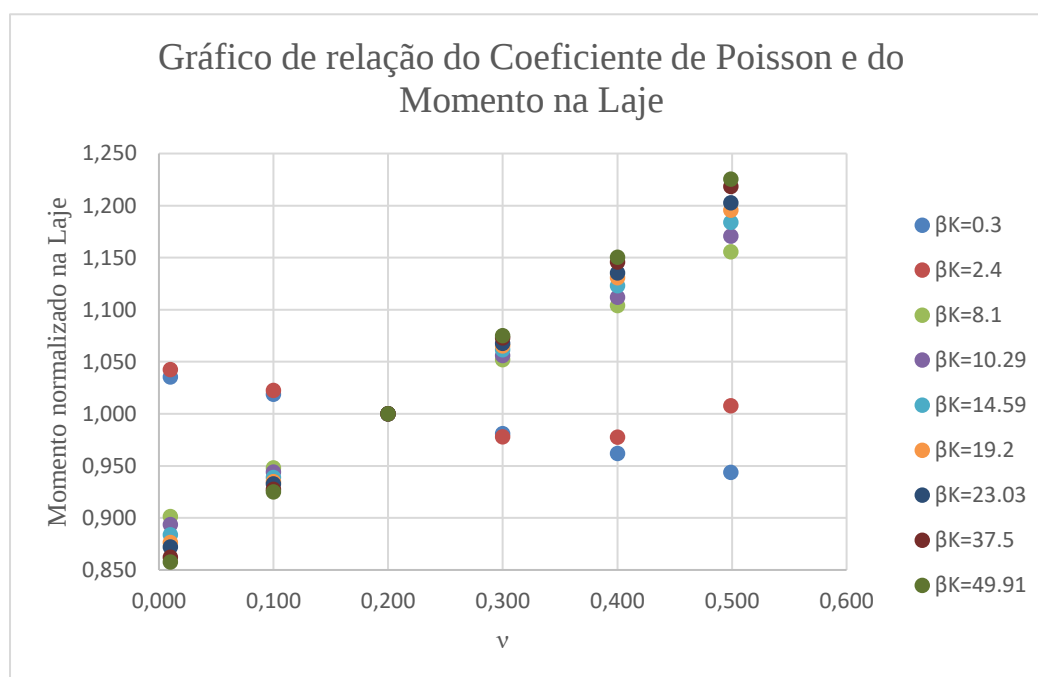


Figura 18 - Gráfico de relação do Coeficiente de Poisson e do Momento na Laje

Mais uma vez, faz-se uma ressalva para que o leitor tenha em atenção a escala do gráfico imediatamente acima apresentado. A mesma teve o objetivo de representar mais facilmente as variações experienciadas.

Novamente, é possível verificar que há duas séries de dados que têm um comportamento veementemente distintos dos demais. Os modelos com β_K igual aos já anteriormente referidos com valor de 0.3 e 2.4 (representados pela cor azul e bordô respetivamente) são os que claramente são os dissidentes nesta batalha de rigidez que o programa de cálculo estrutural realiza durante o seu processo de cálculo. Mais ainda, nos restantes coeficientes de rigidez há uma variação mais acentuada que tem como fenótipo a

menor sobreposição dos pontos do gráfico da relação do coeficiente de Poisson com os momentos na laje. Esta é uma evidência clara das diferenças de magnitude que o ν acarreta no comportamento estrutural de elementos laminares, como é o caso da laje, comparativamente ao que se constata em elementos de barra, como é o caso das vigas de contorno da laje. Uma manipulação, que quando dentro do contexto das vigas, gera pontos praticamente sobrepostos, no caso da laje constata-se que tal não acontece. De referir ainda, a disposição dos pontos no gráfico é prova do comportamento de proporcionalidade direta que existe entre a resposta da manipulação do coeficiente de Poisson relativamente aos momentos principais da laje como já foi previamente explicado. Apesar de o coeficiente de Poisson ter um impacto mais relevante no comportamento da laje é na mesma possível constatar que quanto mais elevado for o β_K maior será a amplitude de variação que se verifica quando se manipula o ν . Se tivermos como exemplo o β_K mais elevado representado pela cor verde-escura no gráfico em questão, nota-se que é o que apresenta mais redução de momento normalizado quando o coeficiente de Poisson é igual a 0.01, bem como é o que apresenta maior aumento quando o coeficiente de Poisson é igual a 0.499. É ainda possível constatar que se observa um comportamento crescente na variação dos momentos normalizados à medida que a relação de rigidez β_K aumenta.

Seguidamente, ser-lhe-ão apresentados gráficos com outra interpretação, isto é, até agora os gráficos apresentados fazem variar o coeficiente de Poisson, porém os gráficos a seguir introduzidos serão para valores de coeficiente de Poisson fixos e definidos. Realizaram-se três gráficos para cada um desses valores. Esses valores foram estipulados como 0.01, 0.2 e 0.499, de forma a conseguir abranger todo o espectro de manipulação realizada. Importa, ainda, referir que os gráficos que serão apresentados foram normalizados para o valor de 416.67 kNm que, evoca-se, é o valor de referência que foi calculado no começo deste trabalho.

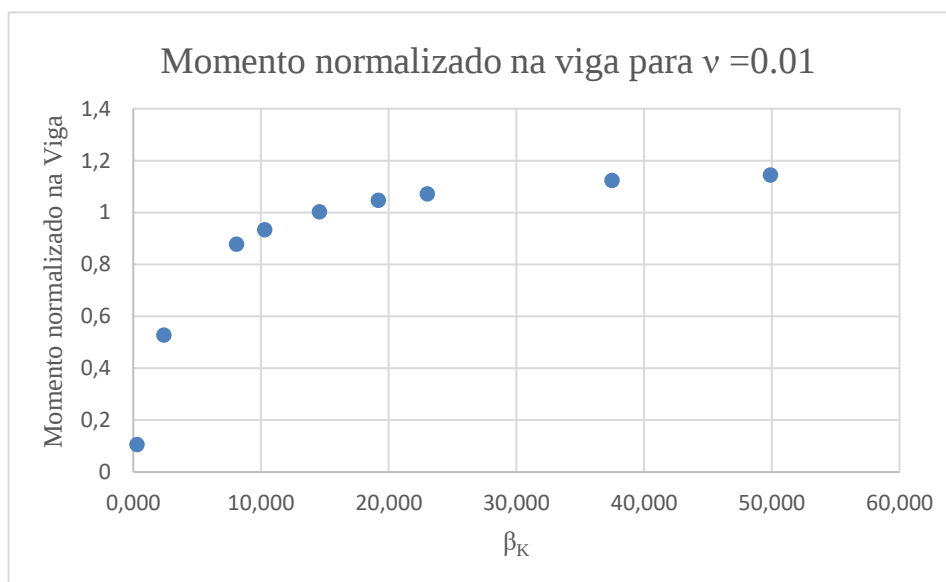


Figura 19 – Gráfico do momento normalizado na viga para $\nu = 0.01$

Cada um destes pontos corresponde a um valor de momento normalizado para cada β_K totalizando, assim, um conjunto de nove pontos distintos. Com este novo gráfico, é possível concluir que, quanto maior for o coeficiente de rigidez da estrutura modelada, para o mesmo coeficiente de Poisson, maior

será o momento elástico atuante na viga. Esta constatação deve-se ao facto de, quanto maior for o coeficiente de rigidez adotado, maior será a preponderância de rigidez que a viga exercerá sobre o sistema estrutural. Com essa grande importância na rigidez global da estrutura, o caminho que as forças aplicadas tomarão irá ser o caminho de maior rigidez. Destarte, este aumento do momento atuante na viga deve-se a essa explicação. A viga com uma altura substantivamente elevada e, por isso, para efeitos do presente trabalho, com uma altura mais elevada, deformar-se-á menos do que a laje ou uma viga menos rígida oferecendo, assim, menor resistência ao encaminhamento das forças, o que resulta no fim deste processo num aumento do momento na viga.

Porém, a realidade das empreitadas que se efetivam hodiernamente é totalmente diferente de valores de β_K tão elevados e absurdos de concessionar. Na realidade, não se irá construir uma laje vigada com uma relação de rigidez tão elevada como os valores que estão mais próximos da unidade no gráfico normalizado imediatamente acima apresentado. Volta-se a enfatizar o contexto de análise paramétrica do presente trabalho e, mais ainda, importa referir que, ainda no presente capítulo, será comentado de forma mais extensa o modo de inserção de uma estrutura real no enquadramento geral dos valores do coeficiente de rigidez.

Seguidamente serão expostos a mesma tipologia de gráfico para o mesmo valor de v , mas relativos à laje.

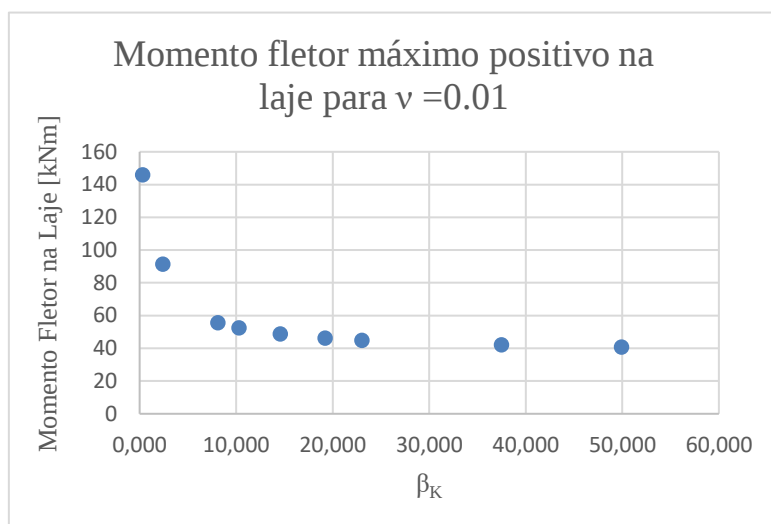
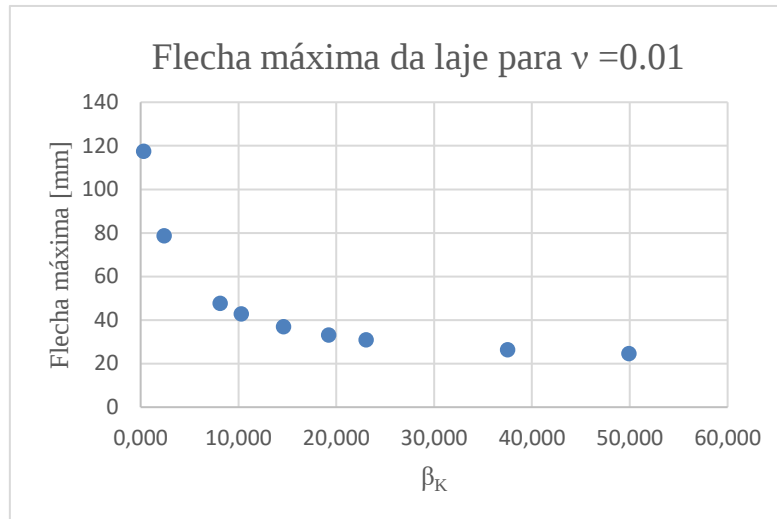
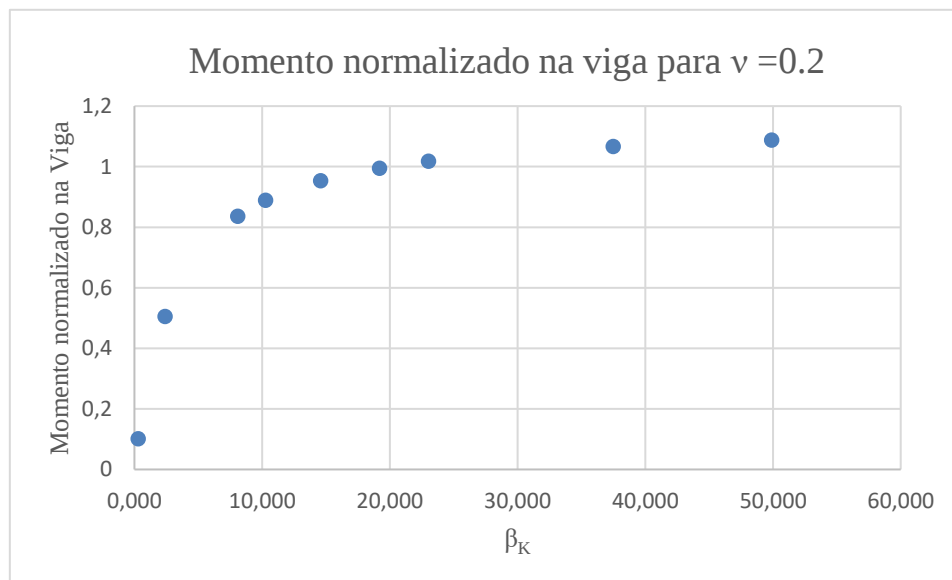


Figura 20 – Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $v = 0.01$

Figura 21 – Gráfico da flecha máxima da laje para $\nu = 0.01$

Como é de óbvia constatação, quer o valor do momento na laje, quer a deformada da laje, para o mesmo coeficiente de Poisson, são gradualmente menores à medida que o valor do coeficiente de rigidez aumenta. Mais uma vez, esta ocorrência deve-se ao facto de a viga ter um papel preponderante na batalha de rigidez, que ocorre durante o processo de cálculo do software. A explicação para tal acontecimento já foi descrita acima.

De seguida, serão apresentados todos os restantes gráficos para os restantes valores de coeficiente de Poisson e devidamente comentados na sua influência.

Figura 22 - Gráfico do momento normalizado na viga para $\nu = 0.2$

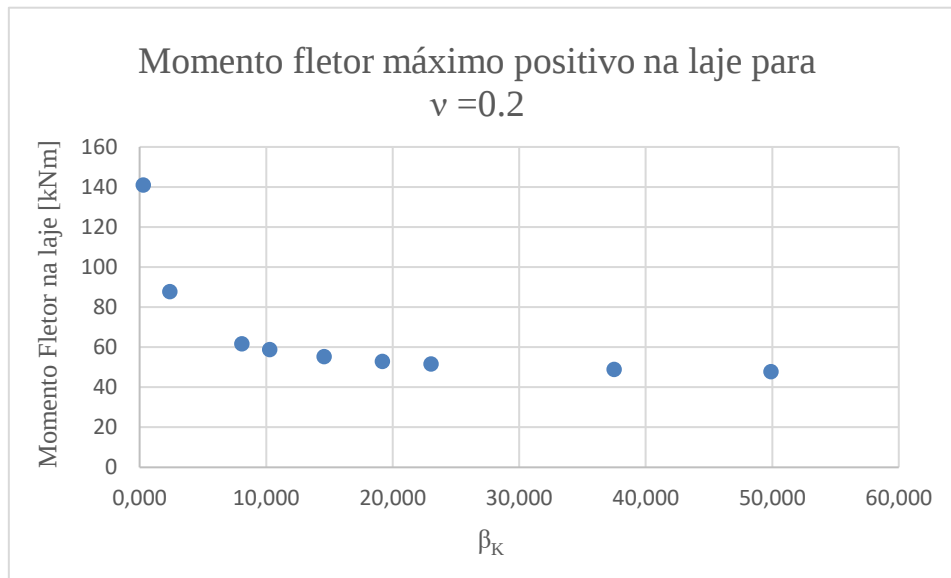


Figura 23 - Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $\nu = 0.2$

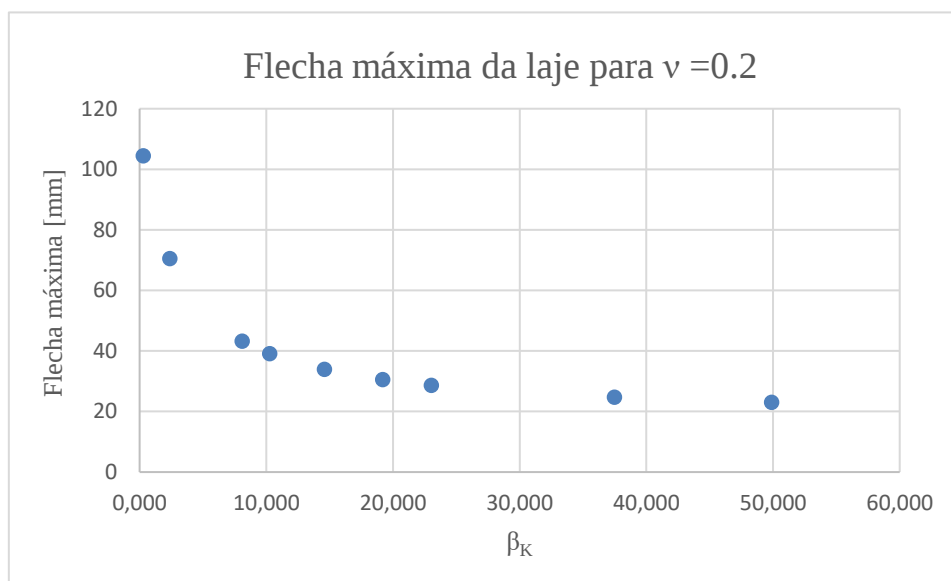


Figura 24 - Gráfico da flecha máxima da laje para $\nu = 0.2$

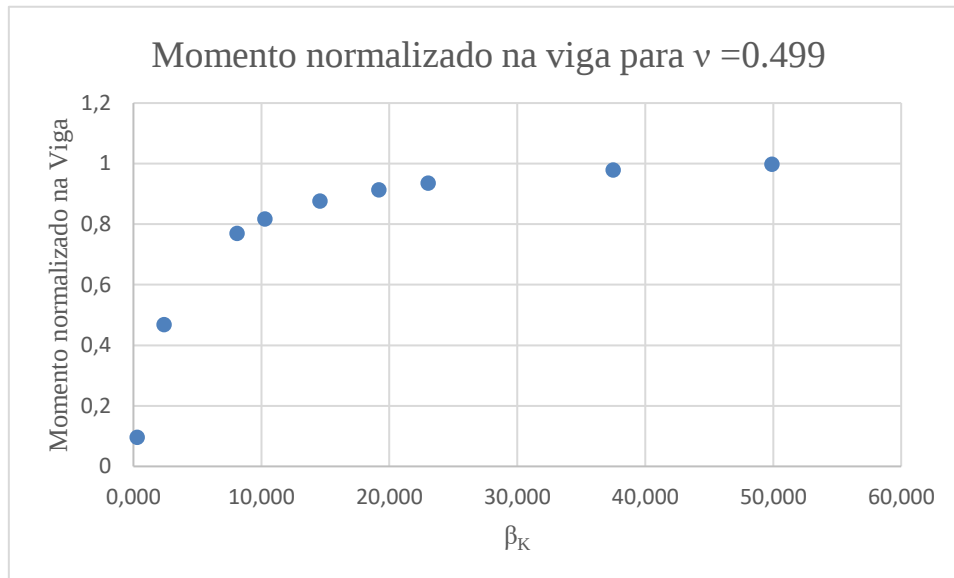


Figura 25 – Gráfico do momento normalizado na viga para $v = 0.499$

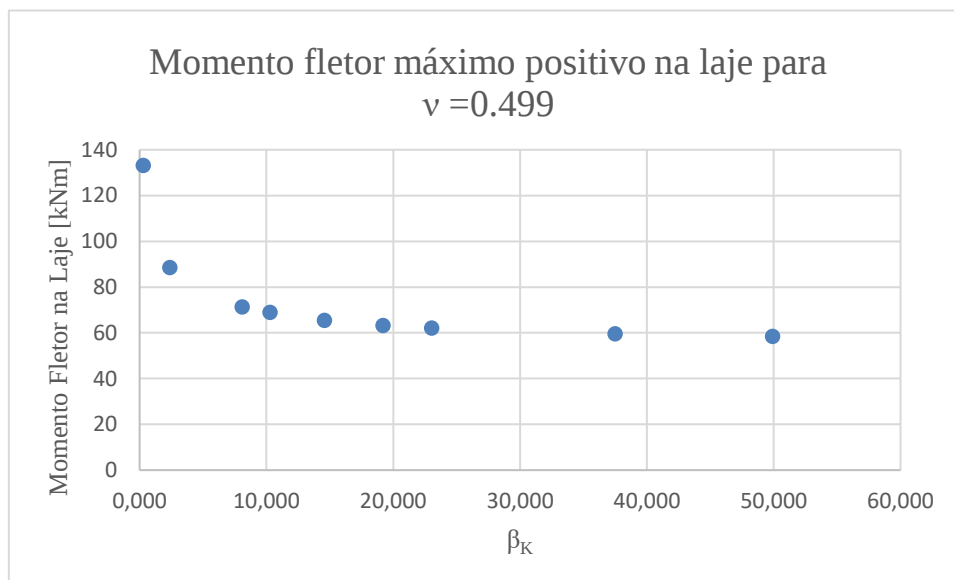
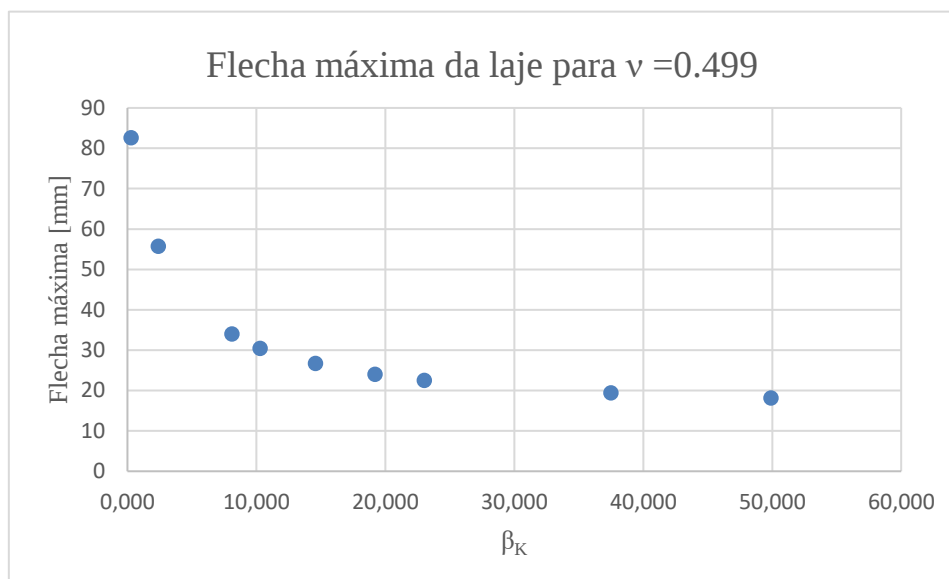


Figura 26 - Gráfico do momento fletor máximo positivo na laje para $v = 0.499$

Figura 27 – Gráfico da flecha máxima da laje para $\nu = 0.499$

Como é possível de averiguar com os novos gráficos apresentados, o comportamento da estrutura é quase sempre o mesmo com o avanço do coeficiente β_K para valores sucessivamente mais elevados. Poder-se-á afirmar que até chega a ser um comportamento previsível aquando da visualização dos gráficos para o espectro de coeficientes estudados. A única diferença visível, embora que subtil, está relacionada com a amplitude dos valores medidos. Com o crescimento do ν os valores do momento na viga apresentam uma menor variação, tendendo a estabilizar na vizinhança do valor de referência, 416.67 kNm. Porém, mais uma vez denota-se que tal se sucede para valores de β_K elevados.

Já no âmbito dos momentos fletores máximos positivos na laje, o comportamento é o inverso, como também já foi comprovado e explicado. Quanto mais elevado for o valor do coeficiente de rigidez, menor será o momento presente na laje. Com o andamento do coeficiente de Poisson para valores consecutivamente mais elevados, o momento máximo na laje para todos os coeficientes de rigidez vai reduzindo, ou seja, o valor máximo que se verifica em cada gráfico é sucessivamente menor. Para além disso, enquanto que no gráfico para o coeficiente de Poisson igual a 0.01 o valor mínimo de momentos na laje, correspondentes a β_K mais elevados, estabilizam entre os 40 e os 60 kNm, quando se interpreta os gráficos demais, constata-se que esse intervalo de valores estáveis sofreu uma grande translação ascendente, estando, agora, todos eles mais concentrados na vizinhança dos 60 kNm.

Mais ainda, no panorama da deformada da laje, como é expectável, seguirá a mesma tendência de comportamento dos momentos, dado que uma é dependente da outra. Se a deformada diminui, os momentos diminuirão também. Sendo assim, a deformada tem o mesmo comportamento que os momentos fletores da laje, embora que com uma variação muito mais acentuada. No gráfico da deformada da laje para o $\nu = 0.01$, o valor máximo registado é, aproximadamente, 120 mm, o que decai drasticamente para o valor de cerca de 105 mm e 82 mm para o coeficiente de Poisson igual a 0.2 e 0.499, respetivamente. Esta descida da flecha máxima, quando se faz variar os valores do ν , representa uma queda de quase de 32%. No campo dos β_K mais elevados com comportamentos mais estáveis, a flecha mínima registada ronda os 20 mm para a primeira iteração do coeficiente de Poisson, mantendo-se relativamente constante ao longo das seguintes iterações realizadas.

Noutra abordagem ainda não tomada, será apresentado, seguidamente, um gráfico entre os momentos atuantes na viga de contorno e a sua deformada.

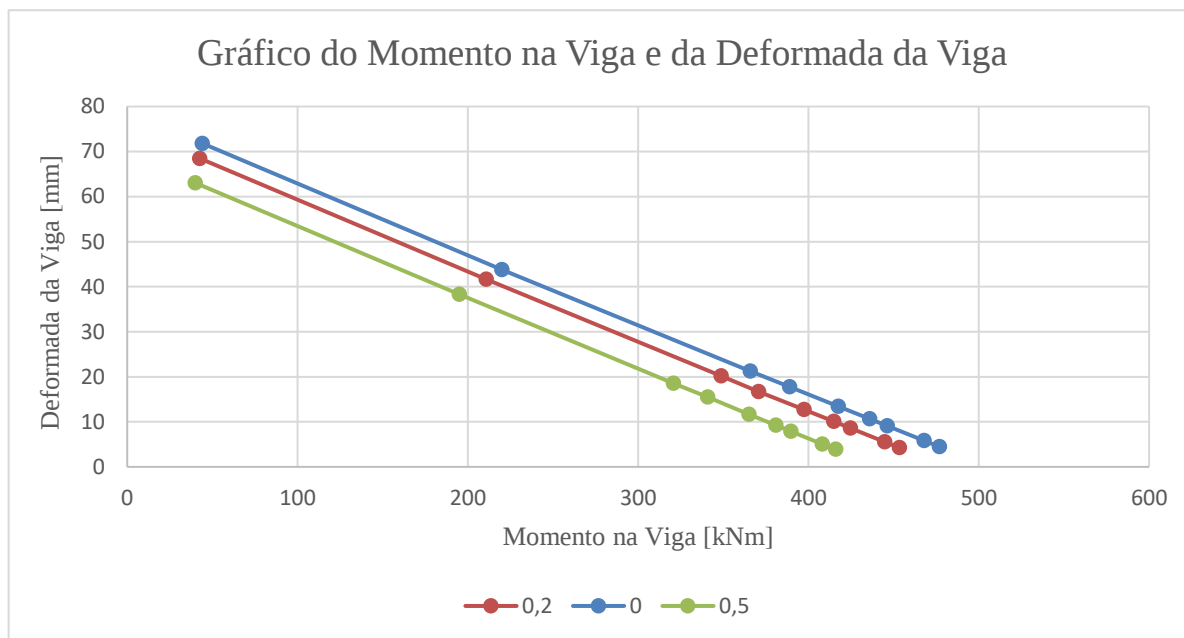


Figura 28 - Gráfico do Momento na Viga e da Deformada da Viga

No gráfico acima apresentado, temos representado no eixo das abcissas os momentos elásticos nas vigas de contorno não normalizado, ou seja, os momentos que se leem diretamente no Robot e, no eixo das ordenadas, o valor da deformada obtido através da mesma forma. Além disso, as três retas desenhadas correspondem às três iterações realizadas para o coeficiente de Poisson, sendo a reta a azul representativa do ν igual a 0.01, a vermelha igual a 0.2 e, por último, a verde igual a 0.499. Note-se que o comportamento da relação entre estas duas variáveis corrobora o que seria expectável. Quanto menor for a deformada, maior será a atração dos esforços a encaminhar-se para as vigas de maior rigidez, podendo, assim, afirmar-se que, efetivamente, as vigas servem de apoio à laje.

Denote-se, ainda, os pontos representados. Estes pontos correspondem a valores do coeficiente de rigidez sendo que, obviamente, os de valor mais elevado encontram-se no quadrante inferior direito do gráfico. É de notar que há alguma concentração de resultados numa vizinhança alargada do valor do momento de referência (416.67 kNm). Mais ainda, há um comportamento muito interessante de salientar deste gráfico. Na reta a azul, há uma maior concentração de pontos nas redondezas do valor de referência, conseguindo-se obter com mais segurança o momento elástico de acordo com o modelo base. Essa afluência de pontos nas proximidades do valor alvo decresce à medida que se aumenta o valor do coeficiente de Poisson, chegando a estar mais afastada na reta a verde. Este afastamento é muito negativo, pois, para além de não ser razoavelmente próximo dos 416.67 kNm de referência, é afastado para valores inferiores, provocando um subdimensionamento da viga e comprometendo, deste modo, a segurança estrutural. De referir, ainda, o coeficiente de Poisson afeta de forma significativa a deformada da viga. Se se tiver como exemplo um conjunto de três pontos representando o mesmo β_K , há uma grande diferenciação no valor da flecha máxima da viga. Esta interpretação é um pouco esdrúxula, dado que,

como já foi anteriormente referido, a influência que o coeficiente de Poisson exerce sobre os elementos de barra é quase sempre desprezável, realidade esta que foi cumprida durante este trabalho. Este fenómeno poderá estar, possivelmente, relacionado com a deformação cilíndrica da laje e a forma como o programa compatibiliza internamente as deformadas da viga com a da laje.

Acrescentando, ainda, para além do tratamento dos dados que foram obtidos pelo software Robot, foram realizados gráficos de distribuição de carga de forma a conseguir aferir o modo como o programa aplica a carga às vigas de contorno. Para isso, a viga foi dividida em intervalos de 0.20 m, de forma a ter uma discretização muito boa, bem como a criar intervalos coincidentes com os pontos da malha de elementos finitos. Assim, a viga com um vão de 10 metros foi dividida em 50 espaçamentos e foi medido o valor do esforço transversal para cada um desses intervalos. Através da variação do esforço transversal dividido pela variação do comprimento dos intervalos criados consegue calcular a carga que foi aplicada. A equação a seguir apresentada demonstra o constatado acima.

$$p_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta x_i} \quad (11)$$

Em que:

- p_i corresponde ao acréscimo de carga para o intervalo i ;
- ΔV_i corresponde à variação de esforço transversal no intervalo i ;
- Δx_i corresponde à variação de comprimento do intervalo i .

Através desta formulação, foram calculadas tabelas do tipo do que se apresenta seguidamente para cada β_K estudado e para o coeficiente de Poisson fixo em 0.2 por ser o valor padrão para o betão armado, como já foi referido.

Tabela 10 - Tabela de cálculo da distribuição de carga

$\beta_K = 19.2$				
x [m]	V [kN]	ΔV_i [kN]	Δx_i [m]	p_i [kN]
0	129.44	1.97	0.2	9.85
0.2	127.47	2.8	0.2	14
0.4	124.67	3.29	0.2	16.45
0.6	121.38	3.71	0.2	18.55
0.8	117.67	4.07	0.2	20.35
1	113.6	4.38	0.2	21.9
1.2	109.22	4.66	0.2	23.3
1.4	104.56	4.9	0.2	24.5
1.6	99.66	5.12	0.2	25.6
1.8	94.54	5.32	0.2	26.6
2	89.22	5.49	0.2	27.45
2.2	83.73	5.64	0.2	28.2
2.4	78.09	5.78	0.2	28.9

2.6	72.31	5.91	0.2	29.55
2.8	66.4	6.01	0.2	30.05
3	60.39	6.12	0.2	30.6
3.2	54.27	6.19	0.2	30.95
3.4	48.08	6.27	0.2	31.35
3.6	41.81	6.33	0.2	31.65
3.8	35.48	6.38	0.2	31.9
4	29.1	6.42	0.2	32.1
4.2	22.68	6.46	0.2	32.3
4.4	16.22	6.48	0.2	32.4
4.6	9.74	6.49	0.2	32.45
4.8	3.25	6.5	0.2	32.5
5	-3.25	6.49	0.2	32.45
5.2	-9.74	6.48	0.2	32.4
5.4	-16.22	6.46	0.2	32.3
5.6	-22.68	6.42	0.2	32.1
5.8	-29.1	6.38	0.2	31.9
6	-35.48	6.33	0.2	31.65
6.2	-41.81	6.27	0.2	31.35
6.4	-48.08	6.19	0.2	30.95
6.6	-54.27	6.12	0.2	30.6
6.8	-60.39	6.01	0.2	30.05
7	-66.4	5.91	0.2	29.55
7.2	-72.31	5.78	0.2	28.9
7.4	-78.09	5.64	0.2	28.2
7.6	-83.73	5.49	0.2	27.45
7.8	-89.22	5.32	0.2	26.6
8	-94.54	5.12	0.2	25.6
8.2	-99.66	4.9	0.2	24.5
8.4	-104.56	4.66	0.2	23.3
8.6	-109.22	4.38	0.2	21.9
8.8	-113.6	4.07	0.2	20.35
9	-117.67	3.71	0.2	18.55
9.2	-121.38	3.29	0.2	16.45
9.4	-124.67	2.8	0.2	14
9.6	-127.47	1.97	0.2	9.85
9.8	-129.44	-129.44	0.2	9.85

Com estas tabelas, foi possível desenhar gráficos que têm como variáveis o vão da viga e a distribuição de carga. Se forem somados todos os acréscimos de carga ao longo da viga, obtemos um diagrama de distribuição da mesma, com o intuito de perceber de uma melhor forma como é que o Robot faz essa distribuição.

Primeiramente é pertinente apresentar um gráfico que representa como é que se considera a aplicação da carga na viga considerando o método das áreas de influência.

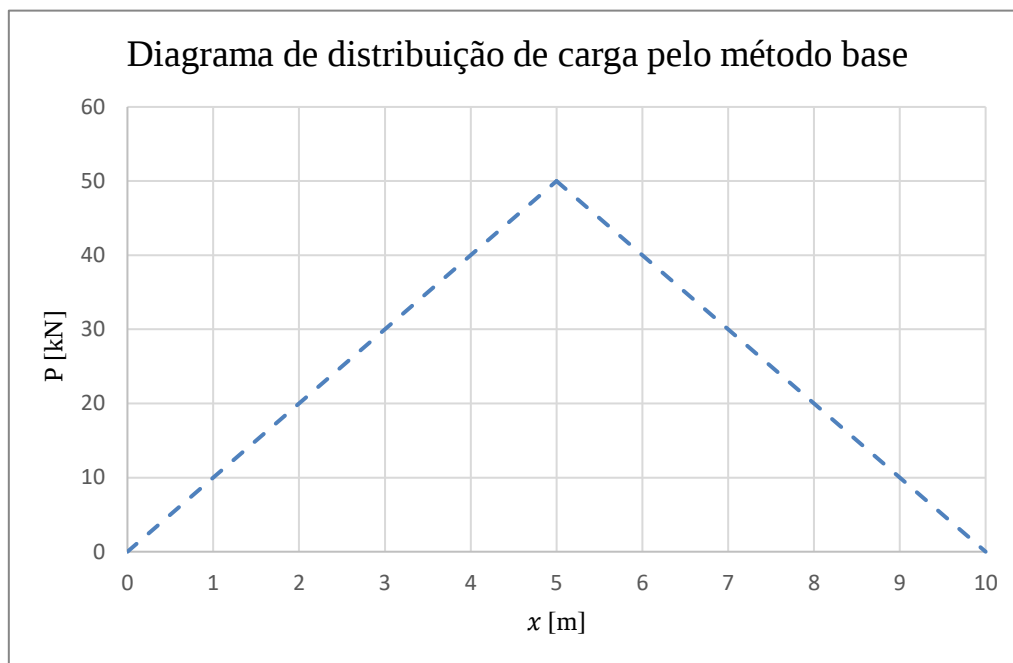


Figura 29 - Diagrama de distribuição de carga pelo método base

Como é possível de aferir, a distribuição de carga que é esperada é uma carga triangular com um pico de força de 50 kN, como anteriormente já foi explicitado.

De maneira a não tornar a visualização do gráfico muito confusa, bem como com muito barulho gráfico, serão apresentados os resultados para os valores de β_K de 0.3, 19.2 e 49.91. Estes valores foram escolhidos de forma a conseguir abranger todo o espectro de coeficientes de rigidez, pesa embora que, resultados futuros que serão apresentados através deste tipo de gráfico serão apresentados para todos os valores de β_K .

Assim, o gráfico a apresentar é o seguinte:

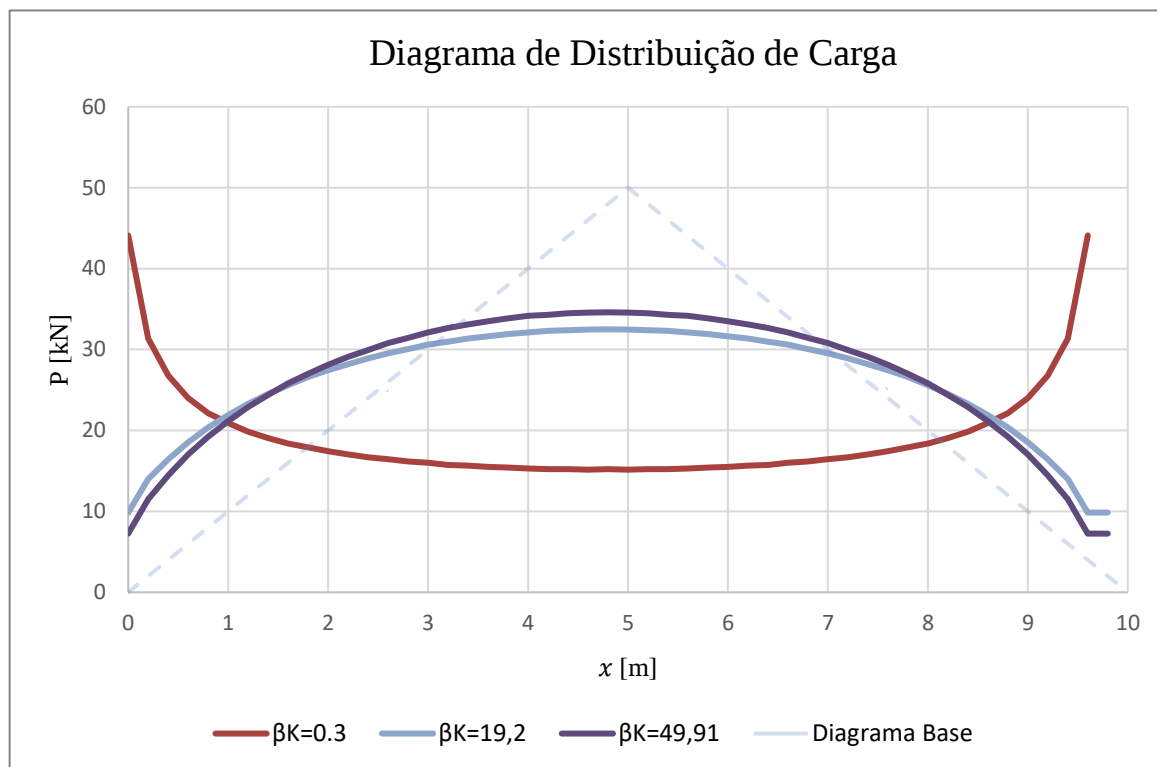


Figura 30 - Diagrama de distribuição de carga

Repare-se que nenhum dos gráficos correspondentes à distribuição de carga que o programa faz se assemelha remotamente à geometria triangular que se assume ao calcular a viga assumindo o método das áreas de influência, bem como nenhum chega ao pico de 50 kN, que é expectável. Tal fenómeno poderá estar relacionado com suposições simplificativas que se fazem para que seja possível calcular, de forma prática, as cargas aplicadas na viga pela laje e com esse conjunto de suposições, assumir-se-á um carregamento triangular da viga que garante o equilíbrio estático do sistema. Porém, o que acontece durante o cálculo elástico através do Método dos Elementos Finitos é muito distinto, como se pode averiguar. As linhas curvas, que se assemelham a parte de um arco de circunferência ou a uma parábola abatida, poderão ser dadas por equações muito complexas que sejam solução da equação fundamental da teoria das lajes [(5)]. Embora que muito complexas de serem calculadas numa prática de cálculo manual, o MEF tem grande facilidade em fazer esses cálculos numéricos e convergir para uma solução de distribuição de carregamento.

Ademais, é importante salientar a distribuição de carga para o β_K igual a 0.3. Este coeficiente de rigidez pressupõe uma viga com a mesma altura do que a espessura da laje. Ora, tal fenómeno não existe e é, na opinião do autor, péssima opção de projeto, dado que essa viga não se irá comportar como viga, irá sim comportar-se como laje, porém estará dimensionada como viga se assim for pensada. Logo, este valor do coeficiente de rigidez reflete uma laje com comportamento fungiforme. Ao analisar o gráfico correspondente, conseguimos perceber que há uma grande concentração de carga nas extremidades da viga o que espelha o encaminhamento de forças para os pilares que, evoca-se o leitor, estão presentes nos vértices da laje, subscrevendo, assim, o comportamento fungiforme da laje. Quanto às restantes curvas, é notório um comportamento entre elas semelhante com o mesmo tipo de geometria.

Para além disso, é possível constatar que, quanto maior for o coeficiente de rigidez, maior será o máximo dado pelo gráfico de distribuição. Tal ocorrência faz todo o sentido uma vez que um valor de β_K mais elevado corresponde a uma viga muito mais rígida do que a laje, daí o maior valor de carga aplicado da laje à viga a meio vão que no caso em concreto do valor de β_K igual a 49.91 corresponde a cerca de 35 kN.

Seguidamente será apresentado um gráfico com os valores de β_K com uma distribuição de carga muito semelhantes entre si.

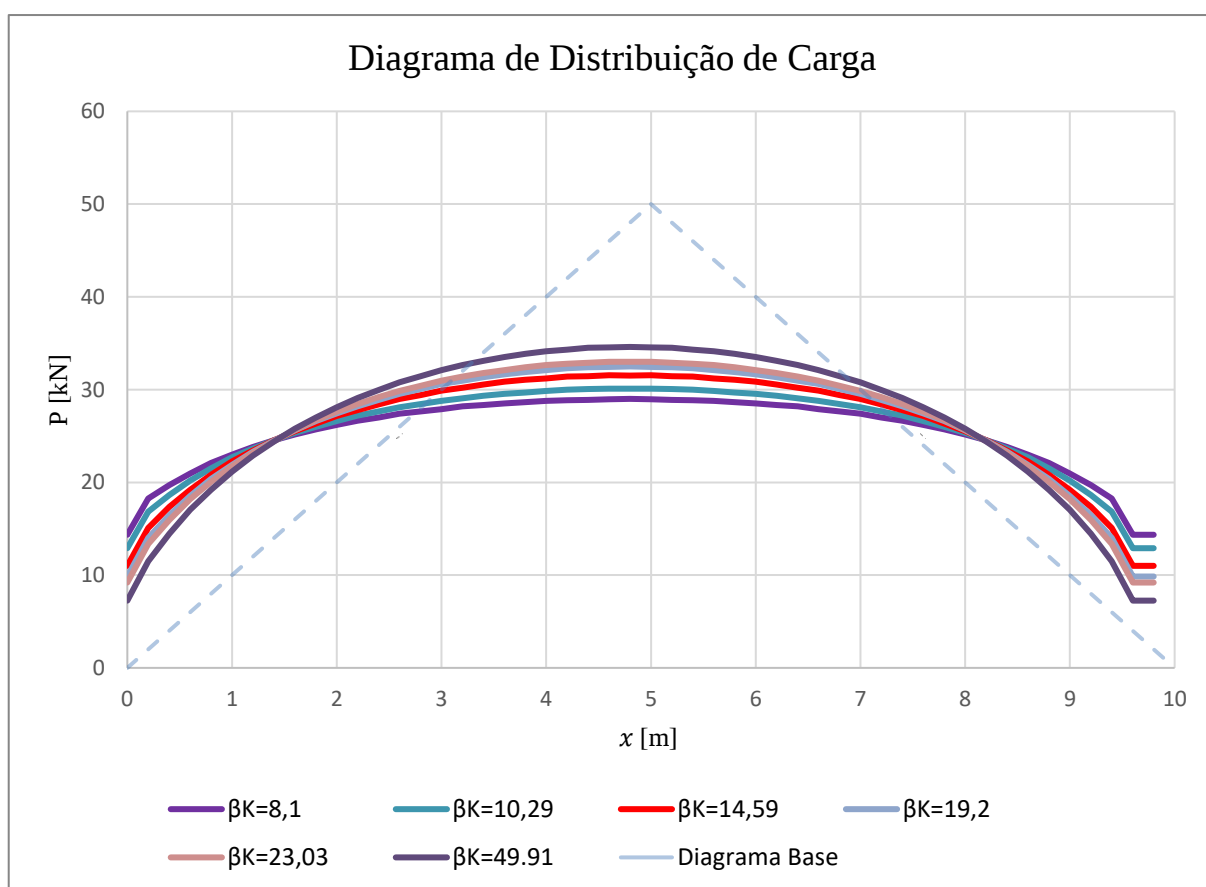


Figura 31 - Diagrama de distribuição de carga 1

No gráfico apresentado, está bastante patente o comportamento crescente que há no valor máximo da carga aplicada a meio vão com o andamento crescente do β_K . Para além disso, a força aplicada nas extremidades, zona dos pilares, tem o comportamento inverso, ou seja, à medida que o coeficiente de rigidez aumenta o valor da carga aplicada nas extremidades é menor.

Este comportamento é uma clara evidencia do encaminhamento de forças que o programa realiza diretamente para os pilares. Com uma viga menos expressiva, o Robot encaminha parte importante das cargas na laje diretamente para os pilares, devido ao culminar de todos os fatores já explicados ao longo do presente trabalho. Ainda, que, em valores menos elevados do que se fizeram sentir quando se trata de um valor de coeficiente de rigidez igual a 0.3, estas cargas não são insignificantes. Realce-se a curva para o valor de β_K igual a 8.1 e o seu antípoda, a curva com valor de β_K igual a 49.91. Na primeira curva referida, a força aplicada no primeiro metro do pilar ronda os 25 kN, tendo como valor inicial, cerca de 15 kN e, a meio vão, o máximo valor lido não ultrapassa os 30 kN. Em contraste, na segunda curva referenciada, no primeiro metro de pilar temos um valor de carga de cerca de 20 kN que, por si só já é mais reduzido do que o objeto de comparação, bem como tem como valor inicial cerca de 7 kN, valor bastante mais reduzido do que o anteriormente apresentado. Quanto ao valor máximo a meio vão é possível ler um valor muito próximo dos 35 kN, que é também um valor mais próximo do pico de 50 kN da distribuição triangular que se considera no modelo base. É possível concluir com a interpretação deste gráfico que o Robot trata este tipo estrutural com um certo grau de “fungiformidade” especialmente nos valores de β_K mais reduzidos.

Ademais, houve um valor do coeficiente de rigidez que teve um comportamento completamente díspar de todos os outros e, além disso foi um comportamento para o qual não se conseguiu obter uma resposta concreta para explicar o fenómeno experienciado no desenvolvimento deste trabalho. Foi esse valor de β_K igual a 37.5. Importa salientar que, realizou-se a tabela de cálculo para este valor de β_K mais do que uma vez, de forma a retirar um possível erro humano como causa de tal fenómeno. O gráfico em questão é o seguinte:

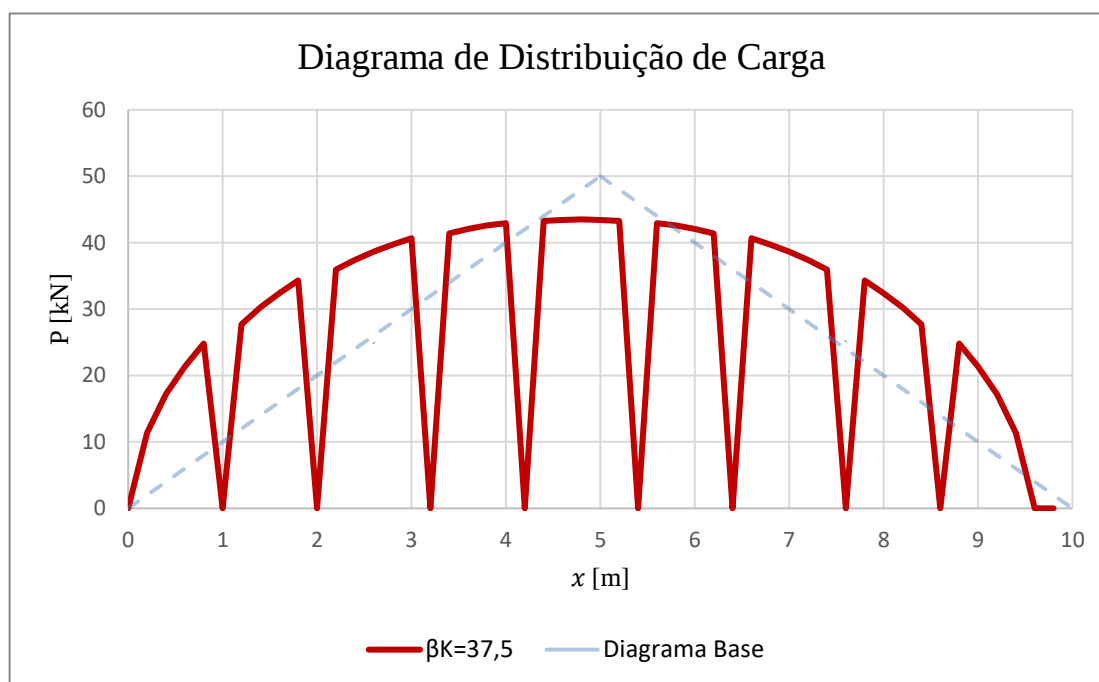


Figura 32 - Diagrama de distribuição de carga 2

Como é possível averiguar com a observação do gráfico acima apresentado, o carregamento que o software Robot realizou foi, neste exemplo de β_K , absolutamente contraproducente com o que já se havia feito. Este carregamento cíclico é de difícil interpretação e durante este trabalho não se conseguiu apurar uma razão válida para tal ocorrência. De referir ainda, este gráfico tem como valor inicial 0 kN e um valor máximo a meio vão a rondar os 43 kN. De entre de todos os coeficientes estudados, este valor máximo para o β_K igual a 37.5 é o mais próximo dos 50 kN de pico no modelo de base.

Ainda no âmbito dos diagramas de distribuição de carga, foi realizado mais um cálculo. Se se integrar qualquer diagrama de distribuição de força no intervalo do vão do elemento estrutural o resultado a obter desse cálculo é a carga total aplicada nesse elemento. Nesse sentido, foi realizado precisamente esse cálculo. Todos os gráficos de distribuição de carga, à exceção do gráfico que representa β_K igual a 37.5, foram aproximados por regressões polinomiais de sexto grau na folha de cálculo Excel. Importa referir que todas essas regressões foram realizadas com controlo do parâmetro R^2 . Na estatística, este parâmetro métrico permite aferir a proporção dos dados dependentes que são explicados pela regressão adotada. Assim sendo, uma regressão polinomial de sexto grau tem um elevado grau de compatibilidade com as curvas de distribuição de carga obtidas. Além disso, as regressões realizadas tiveram sempre um parâmetro de R^2 superior a 0.97 e na vasta maioria dos casos igual a 0.99. Isto significa que, pelo menos 97% dos dados dependentes são explicados pela equação polinomial de sexto grau dada pelo Excel.

Seguidamente utilizou-se o website Symbolab (*Solucionador matemático Symbolab - calculadora passo a passo*, [s.d.]), um site que permite solucionar variadíssimos problemas matemáticos aliado a um funcionamento muito bom e intuitivo. A utilização do website Symbolab, foi a de resolução dos integrais para todos os β_K estudados neste tema. Após essa resolução foi possível realizar a seguinte tabela:

Tabela 11 - Regressões Polinomiais

β_K	Regressão Polinomial	Solução do integral [kN]	Carga total considerada [kN]
0.3	$y = 0.0059x^6 - 0.1688x^5 + 1.8978x^4 - 10.507x^3 + 29.979x^2 - 42.622x + 41.412$	259.758	1039.032
2.4	$y = -0.0007x^6 + 0.0204x^5 - 0.2154x^4 + 1.0318x^3 - 1.9912x^2 - 0.0978x + 25.728$	260.1567	1040.627
8.1	$y = -0.0008x^6 + 0.0235x^5 - 0.2816x^4 + 1.7209x^3 - 5.9511x^2 + 12.475x + 15.161$	235.7195	942.8782
10.29	$y = -0.0007x^6 + 0.0209x^5 - 0.2562x^4 + 1.6226x^3 - 5.9714x^2 + 13.724x + 13.639$	247.9567	991.8267

14.59	$y = -0.0006x^6 + 0.0188x^5 - 0.2365x^4 + 1.559x^3 - 6.1304x^2 + 15.408x + 11.683$	287.4538	1149.815
19.2	$y = -0.0005x^6 + 0.0162x^5 - 0.2107x^4 + 1.446x^3 - 6.0358x^2 + 16.265x + 10.481$	292.841	1171.364
23.03	$y = -0.0005x^6 + 0.015x^5 - 0.1982x^4 + 1.3918x^3 - 6.0012x^2 + 16.762x + 9.7956$	236.8703	947.4812
49.91	$y = -0.0003x^6 + 0.011x^5 - 0.157x^4 + 1.2078x^3 - 5.8339x^2 + 18.161x + 7.7682$	325.3606	1301.442

Repare-se que a coluna denominada de “Carga total considerada” é simplesmente a multiplicação da solução do integral por quatro, dado que devido à simetria existente do modelo da estrutura só se realizaram os cálculos para uma viga. Ao multiplicar por quatro o objetivo é perceber o que acontece à carga total aplicada que, evoca-se, é de 10 kN/m². Ora, se se realizar um rápido cálculo da carga nominal aplicada pelas dimensões da laje, percebe-se rapidamente que a carga total aplicada deveria ser 1000 kN. É de fácil conclusão ao interpretar a tabela acima apresentada, que não há nenhum caso em que tal aconteça exatamente. Há variações que são pequenas, na ordem de 1 a 6% de variação do valor alvo de 1000 kN, o que pode estar associado a erros de aproximação da regressão polinomial e de tratamento de dados, porém há também variações muito elevadas na ordem dos 11 a 23%. O autor não conseguiu apontar uma causa concreta para justificar este fenómeno. Mais ainda, esta problemática toma outra escala, dado que em todos os modelos realizados as reações nos apoios estavam todas de acordo com a carga aplicada, 250 kN em cada apoio que perfazem os 1000 kN quando os quatro somados. Estas variações poderão ser simplesmente lixo numérico quer da aproximação feita quer da resolução do integral, mas também poderão ser mais do que isso. Todavia o estudo pormenorizado destas variações sai fora do enquadramento deste trabalho.

3.2. RESULTADOS DA REDUÇÃO DA INÉRCIA À FLEXÃO

Como foi referido anteriormente, neste subcapítulo serão apresentados os resultados para os modelos estudados, nos quais foram reduzidas a inércia à flexão do elemento de casca. Importa referir que o coeficiente de Poisson adotado para os modelos relativos a este subcapítulo foi o valor padrão do mesmo, ou seja, ν igual a 0.2. Devido à escassez de tempo para a realização da modelação para todos os valores de β_K , a redução da inércia só foi realizada para um conjunto de valores de coeficiente de rigidez. Foram esses valores os seguintes;

- $\beta_K = 2.4$;
- $\beta_K = 19.2$;
- $\beta_K = 37.5$.

Destarte, após a modelação realizada e efetivada a leitura dos valores do software Robot, foi possível realizar as seguintes tabelas.

Tabela 12 – Tabela de Resultados para $\beta_K = 2.4$

$\beta_K = 2.4$				
Redução de I_g	V_z [kN]	M_y [kNm]	δ_{viga} [mm]	δ_{laje} [mm]
1 de I_g	114.23	210.49	41.65	70.32
0.5 de I_g	120.5	293.06	57.57	108.05
0.1 de I_g	129.52	427.46	83.32	279.7

Tabela 13 – Tabela de Resultados para $\beta_K = 19.2$

$\beta_K = 19.2$				
Redução do I_g	V_z [kN]	M_y [kNm]	δ_{viga} [mm]	δ_{laje} [mm]
1 de I_g	129.44	414.64	10.1	30.41
0.5 de I_g	131.41	445.83	10.85	48.8
0.1 de I_g	132.56	479.62	11.7	182.21

Tabela 14 - Tabela de Resultados para $\beta_K = 37.5$

$\beta_K = 37.5$				
Redução do I_g	V_z [kN]	M_y [kNm]	δ_{viga} [mm]	δ_{laje} [mm]
1 de I_g	131.46	444.68	5.54	24.61
0.5 de I_g	132.49	463.02	5.76	42.23
0.1 de I_g	132.57	485.69	6.07	171.94

Como é possível verificar nas tabelas supra inseridas a redução da inércia à flexão da laje tem um impacto significativa na modo como a laje entrega as forças às vigas. À medida que se vai reduzindo a inércia da laje, o momento atuante na viga aumenta. Este fenómeno é facilmente explicado pela quebra de rigidez que se induz na laje com a redução da inércia, o que provoca um aumento relativo da rigidez da viga e, assim, são encaminhados mais esforços para a mesma. Mais ainda, a coluna preenchida a vermelho é a coluna correspondente à flecha máxima da laje. Esta coluna foi mantida com o propósito de mostrar ao leitor o acréscimo disparatado que há no valor da mesma e, mais uma vez se ressalva, não faz sentido algum ter este valor em consideração para qualquer cálculo ou verificação em que seja necessário a utilização do valor da flecha da laje.

Esta abordagem de manipulação apresenta resultados muito satisfatórios para uma gama de coeficientes de rigidez, nos quais a manipulação do coeficiente de Poisson não consegue ter interferência. Com a manipulação da inércia consegue alcançar-se variações significativas no momento atuante na viga, especialmente numa gama de β_K de valor mais reduzido, precisamente na qual se insere a vasta maioria das estruturas a projetar hodiernamente.

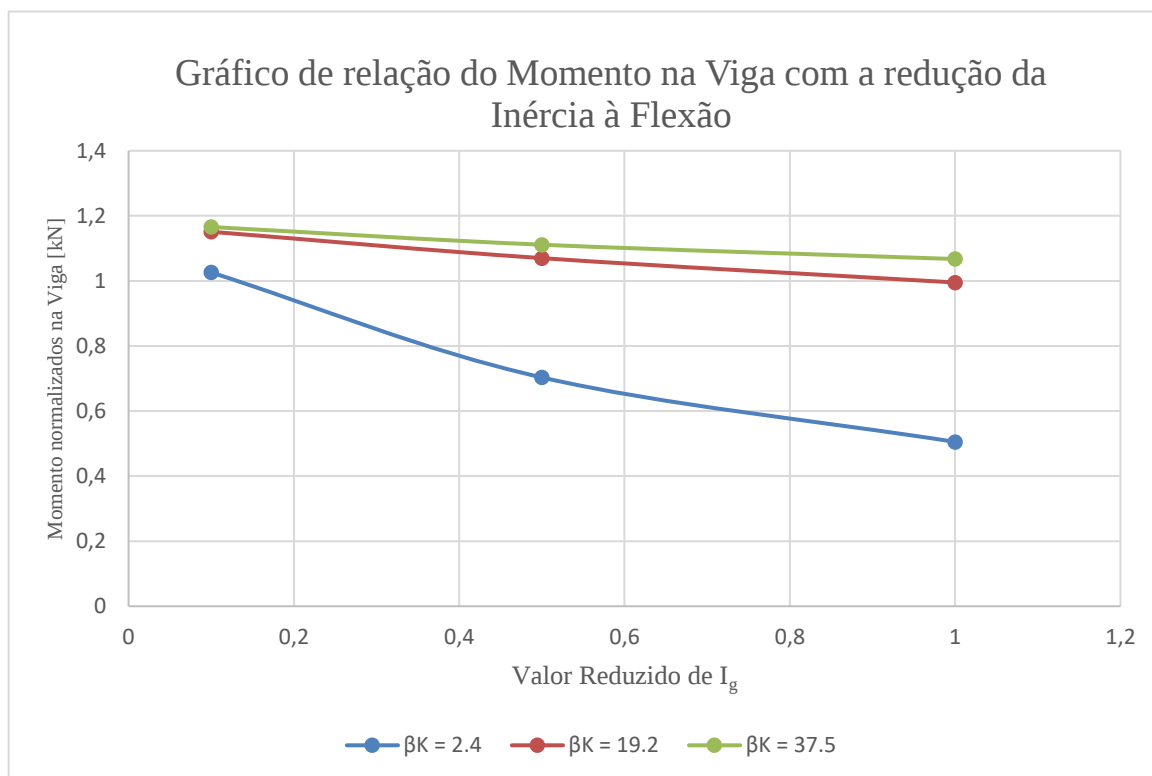


Figura 33 – Gráfico de relação do Momento na Viga com a redução da Inércia à Flexão

Mais uma vez, o gráfico acima apresentado tem os valores do momento fletor na viga normalizados para o valor de referência. Ademais, é possível confirmar que para relações de rigidez mais reduzidas, a variação que esta redução provoca é deveras significativa quando comparado com valores de β_K mais elevados. Este acontecimento poderá estar relacionado com a ponderação interna de rigidez que o programa de cálculo faz, ou seja, numa estrutura em que a rigidez da viga seja muito expressiva em relação à da laje a redução da inércia da laje não impactará de forma muito apreciável as variações que se experienciam nos momentos das vigas de contorno. Em contraste, quando a rigidez da viga não tem grande expressividade comparativamente à da laje, o corte à rigidez da laje tem grande impacto na ponderação de rigidez na matriz global do programa de cálculo, o que resulta numa variação muito mais vultosa.

3.3. CASO DE UMA ESTRUTURAL REAL

Depois de todo o estudo, trabalho desenvolvido e explicado ao longo deste documento, é preciso por fim, enquadrar toda a análise paramétrica realizada, ao que realmente poderá ser tido em conta como projeto e, em última análise, como edificável. Neste sentido, foi realizado um caso de uma estrutura que poderá ser, putativamente, uma estrutura real para as condições de vão que foram tratadas no decorrer deste trabalho. Assim, procedeu-se ao pré-dimensionamento da laje vigada, de modo a estudar o enquadramento que teria.

No âmbito do pré-dimensionamento da viga, foi utilizada uma regra prática que dita que a altura da viga deve ser, aproximadamente um décimo do comprimento do vão. Assim, as dimensões da viga serão $0.3 \times 1 \text{ m}^2$. No campo do pré-dimensionamento da laje, foi utilizado o quadro 7.4N do EC2 (Instituto Português da Qualidade, 2010) para obter-se uma solução simplificada da expressão 7.16 e efetuar o pré-dimensionamento da espessura da laje através da verificação vão/altura regulada pelo EC2. Assim, temos:

$$\frac{1000}{d} \leq 20 * \frac{7}{10} * 1 * 2 \quad (12)$$

$$d \geq 35.71 \text{ cm}$$

Como é possível verificar na equação (12), a altura útil da secção transversal deverá ser igual ou superior a 35.71 cm, portanto optou-se por utilizar uma espessura de 40 cm para a laje a ser calculada. Com as geometrias da secção transversal devidamente calculadas é necessário primeiramente, discutir o enquadramento que uma estrutura projetável tem na gama de β_K . Se se realizarem os cálculos de acordo com a equação (7), é possível concluir que uma estrutura real tem um valor de β_K reduzido, no caso, igual a 4.69. Ora, com este desenlace é de fácil compreensão que estamos numa zona de muita indefinição na obtenção de resultados na vizinhança do valor de referência. A estratégia da manipulação do coeficiente de Poisson, não tem poder suficiente para fazer alterações significativas no encaminhamento das forças para as vigas. Lembra-se que o valor mais baixo do coeficiente de rigidez que teve uma resposta positiva à manipulação do ν foi o de 14.588, mais do que três vezes superior ao β_K da estrutura real. Na esfera da redução da inércia à flexão, é previsível que este coeficiente de rigidez tenha uma resposta muito positiva a esta manipulação. Como foi possível de constatar no subcapítulo anterior, os β_K mais reduzidos sofrem uma variação de resultados maior do que os mais elevados e, por isso, será um possível caminho a adotar para a obtenção do momento elástico na viga verosímil à realidade.

Seguidamente será dimensionada a armadura máxima positiva da laje, bem como a armadura longitudinal da viga, com o auxílio do software Robot e do programa de cálculo de dimensionamento de secções transversais em ELU XD-CoSec, desenvolvido pela Universidade de Aveiro. Serão realizados dois modelos, o primeiro, será calculado separadamente, ou seja, com a aplicação de uma carga triangular na viga simplesmente apoiada e um elemento de casca simplesmente apoiado em todo o seu contorno. O segundo modelo a ser realizado será um modelo mais convencional em que se apoiará a laje em todo o seu contorno nas vigas modeladas. Estes dois modelos vão permitir aferir quais serão as diferenças reais de dimensionamento de armadura, que existem nos dois tipos de modelo.

Para conseguir-se efetivar a modelação, é necessário calcular a carga aplicada. Neste exemplo real, a carga a ser aplicada não foi a carga nominal de 10 kN/m², mas sim uma carga em ELU que fosse ela também mais realista. Deste modo, considerou-se que a laje iria estar submetida a uma carga permanente (excluindo o peso próprio da laje) de 3 kN/m², valor comumente utilizado e a uma sobrecarga de 2 kN/m², valor previsto no EC1 (Instituto Português da Qualidade, 2009) para zonas correntes de habitação. Destarte é possível calcular a carga a aplicar em ELU:

$$p_{ed} = 1.35 * (25 * 0.4 + 3) + 1.5 * 2$$

$$p_{ed} = 20.55 \text{ kN/m}^2 \quad (13)$$

Desta forma, foi aplicada uma carga uniformemente distribuída de 20.55 kN/m² nos dois modelos realizados.

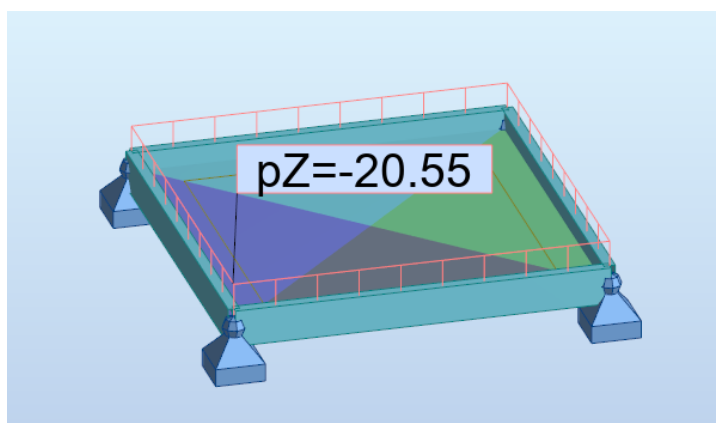


Figura 34 – Aplicação da carga nas vigas

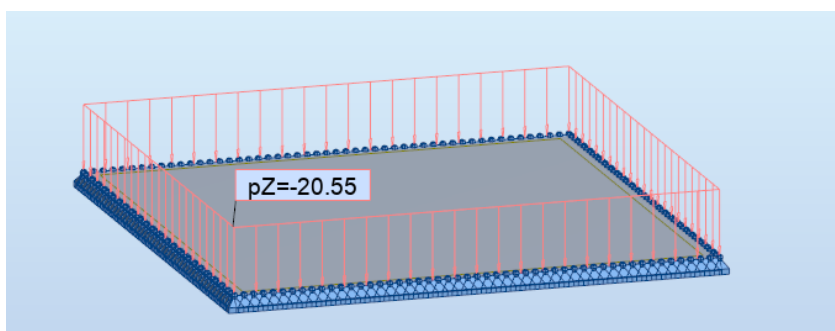


Figura 35 – Aplicação da carga no elemento de casca

Discutindo primeiramente o primeiro modelo referido, é possível constatar na Figura 34 a aplicação da carga triangular nas vigas que foi realizada através do uso de um *cladding*, elemento geométrico do Robot que não tem qualquer tipo de peso no cálculo da estrutura, tendo como única função a distribuição de cargas para as vigas através do método das áreas de influência. Já na Figura 35, a carga está aplicada num painel de elementos finitos que está a modelar a laje. Para além disso, é de fácil verificação que a laje está simplesmente apoiada em todo o seu contorno, bem como a viga na figura previamente referenciada.

Após o cálculo estrutural obtiveram-se os seguintes diagramas de momentos:

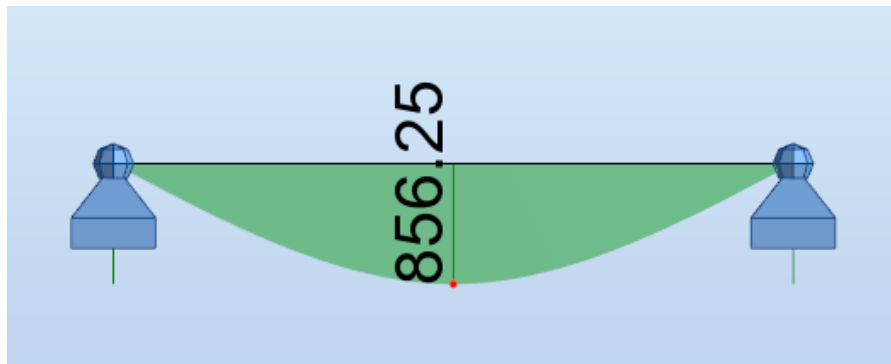


Figura 36 - Diagrama de momentos na viga do primeiro modelo

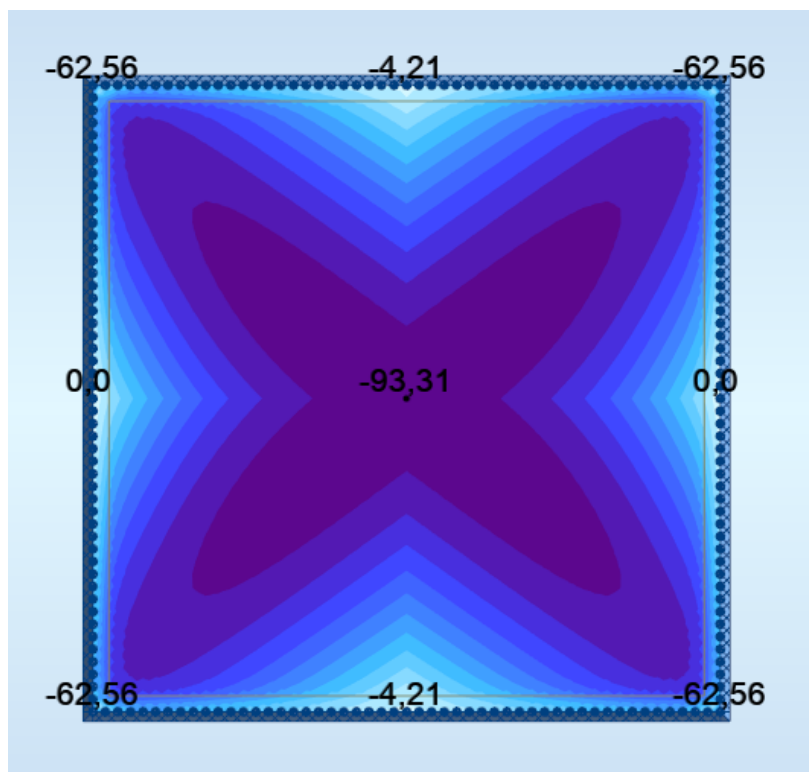


Figura 37 - Mapa de momentos na direção X do painel do primeiro modelo

O diagrama de momentos na direção Y não foi apresentado, dado que é exatamente o mesmo que o apresentado na Figura 36 - Diagrama de momentos na viga do primeiro modelo devido à simetria que existe na geometria da estrutura.

Com os valores do momento fletor calculados, é agora possível dimensionar a armadura dos elementos estruturais com a ajuda do software XD-CoSec. De referir ainda, o betão utilizado no processo de cálculo foi um C30/37 de acordo com o EC2 (Instituto Português da Qualidade, 2010) e o aço utilizado para as armaduras é um aço A500, também de acordo com a regulamentação em vigor.

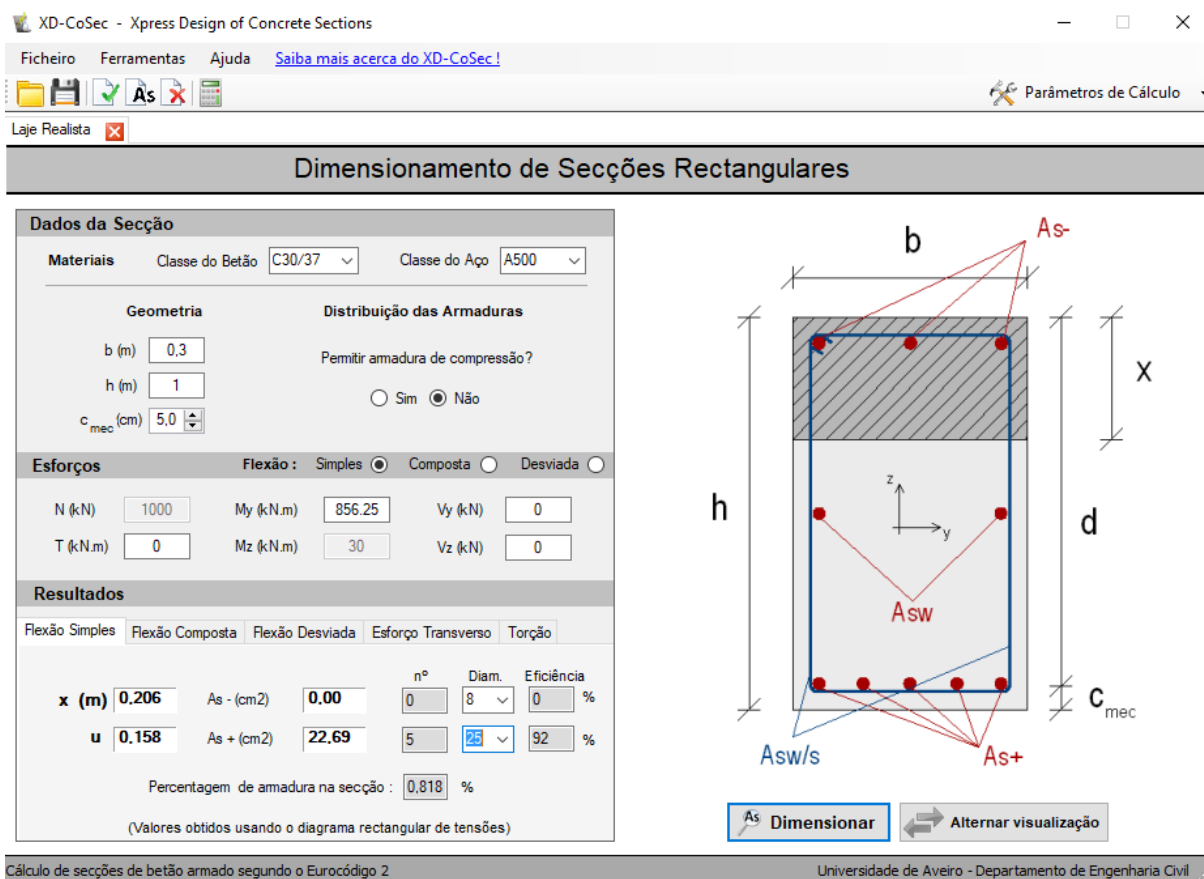


Figura 38 - Dimensionamento da armadura da viga para o primeiro modelo

Com é possível constatar na figura acima apresentada, seguidamente à introdução das características geométricas da viga, bem como das características dos materiais utilizados, foi inserido o valor de momento máximo obtido na Figura 36 - Diagrama de momentos na viga do primeiro modelo correspondente a 856.25 kNm. Depois do cálculo do programa, obteve-se uma área de armadura necessária igual a 22.69 cm², o que corresponde, na escolha do autor, a 5Ø25 (24.54 cm²).

No âmbito do dimensionamento da armadura da laje, foi utilizado o mesmo programa e considerou-se uma faixa de largura de um metro, de modo a obter a armadura para a laje por unidade de comprimento.

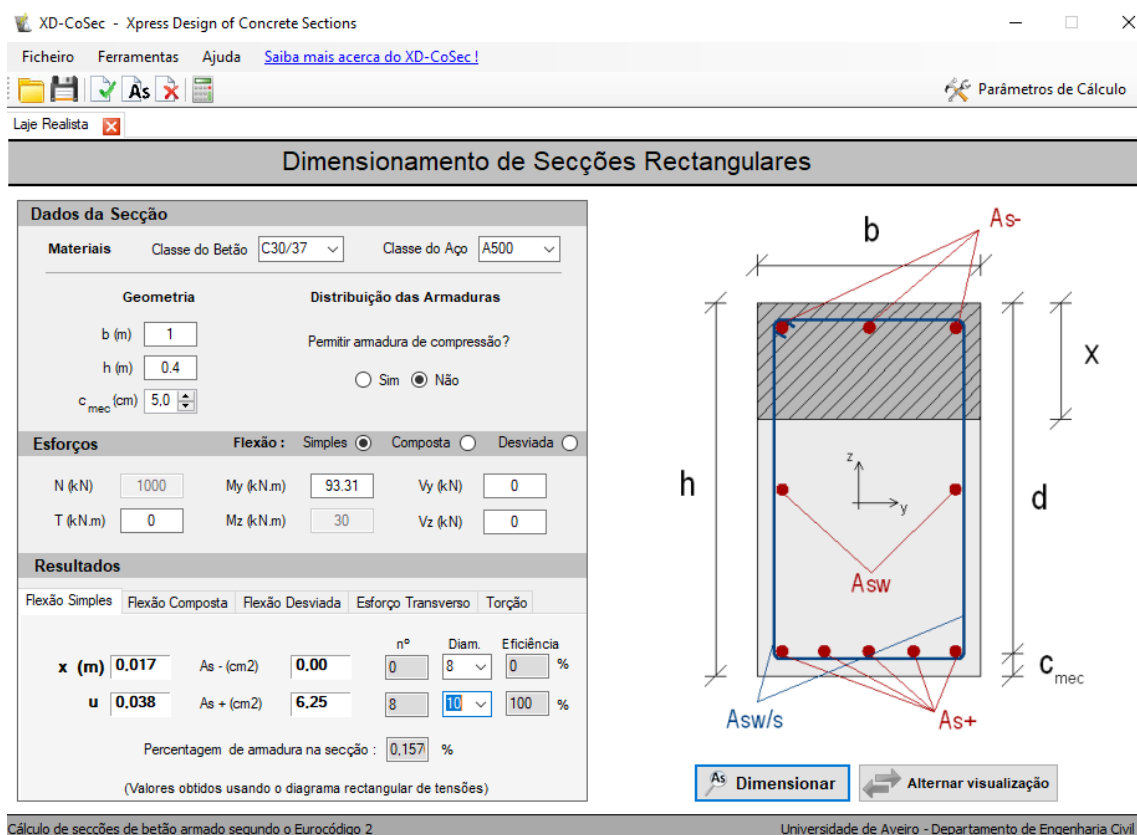


Figura 39 - Dimensionamento da armadura da laje para o primeiro modelo

Após o cálculo da laje no programa utilizado, conclui-se que a armadura máxima positiva necessária para o dimensionamento da laje é igual a 6.25 cm²/m o que corresponde a Ø10//0.125 (6.28 cm²/m) nas duas direções.

Para o segundo modelo efetuado seguiu-se o mesmo procedimento adotado para este modelo já descrito e dimensionado. A carga foi aplicada no sistema estrutura laje mais viga e seguidamente foi calculado com o programa de cálculo Robot. Depois de calculados os momentos atuantes na estrutura foram dimensionadas as armaduras com o mesmo processo utilizado para o primeiro modelo.

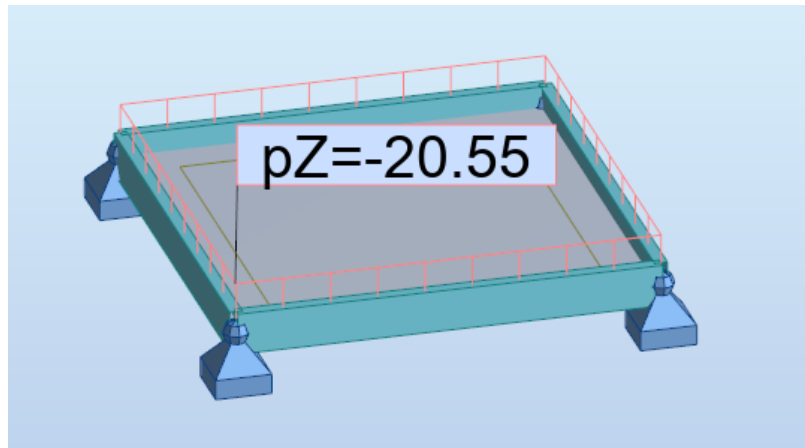


Figura 40 - Aplicação da carga no segundo modelo

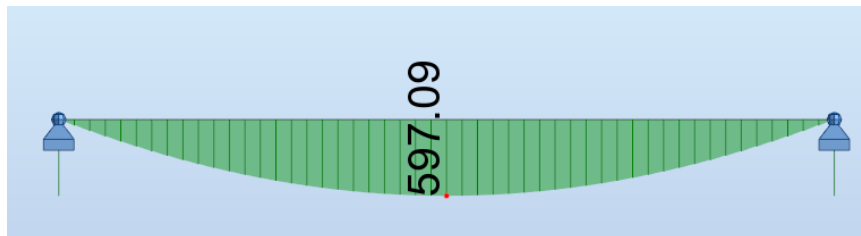


Figura 41 - Diagrama de momentos na viga do segundo modelo

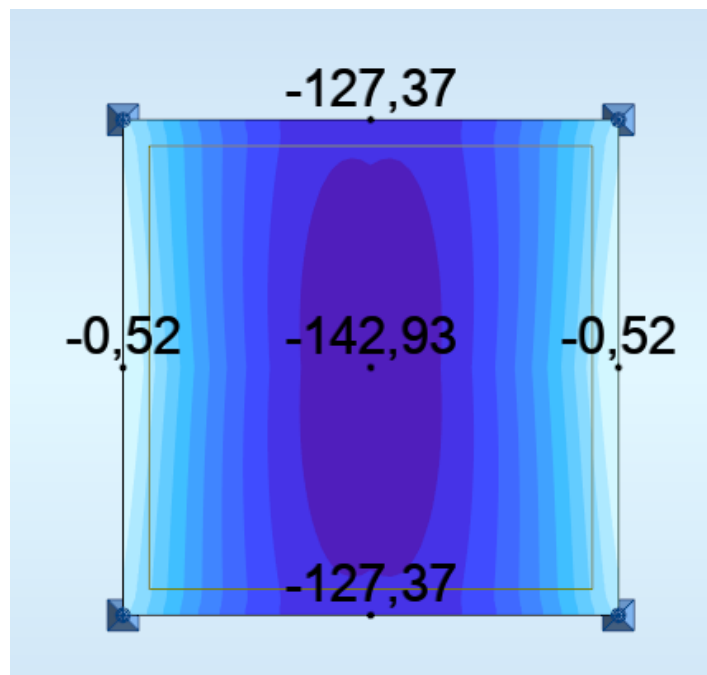


Figura 42 - Mapa de momentos na direção X do painel do segundo modelo

Mais uma vez, não se apresentou o mapa de momentos na direção Y, pois é idêntico ao da Figura 42 - Mapa de momentos na direção X do painel do segundo modelo devido ao efeito de simetria presente neste modelo.

Com o valor do momento máximo na viga calculado, foi então possível dimensionar a armadura longitudinal para a mesma.

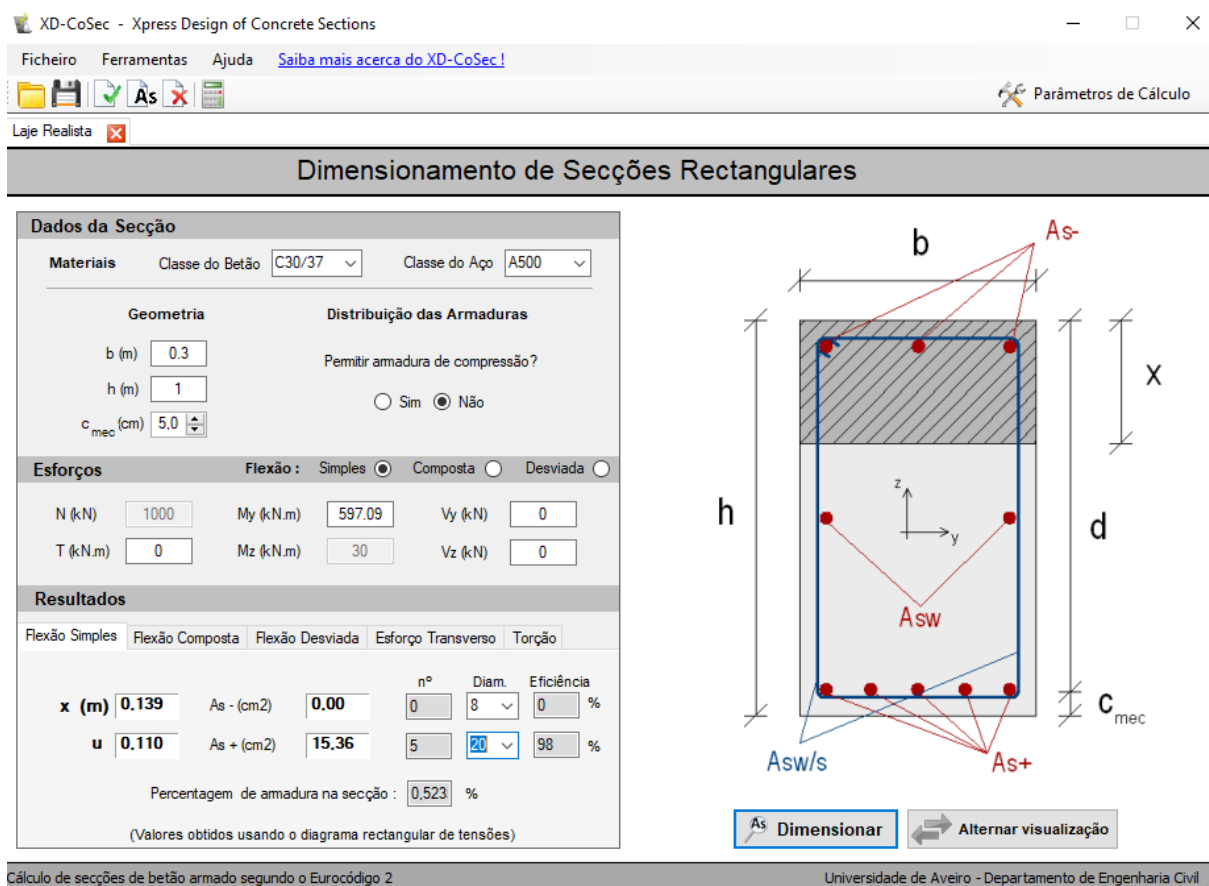


Figura 43 – Dimensionamento da armadura da viga para o segundo modelo

Como é possível verificar, a armadura necessária para a viga em questão é igual a 15.36 cm², o que corresponde a 5Ø20 (15.71 cm²).

Para o dimensionamento da armadura máxima positiva da laje temos:

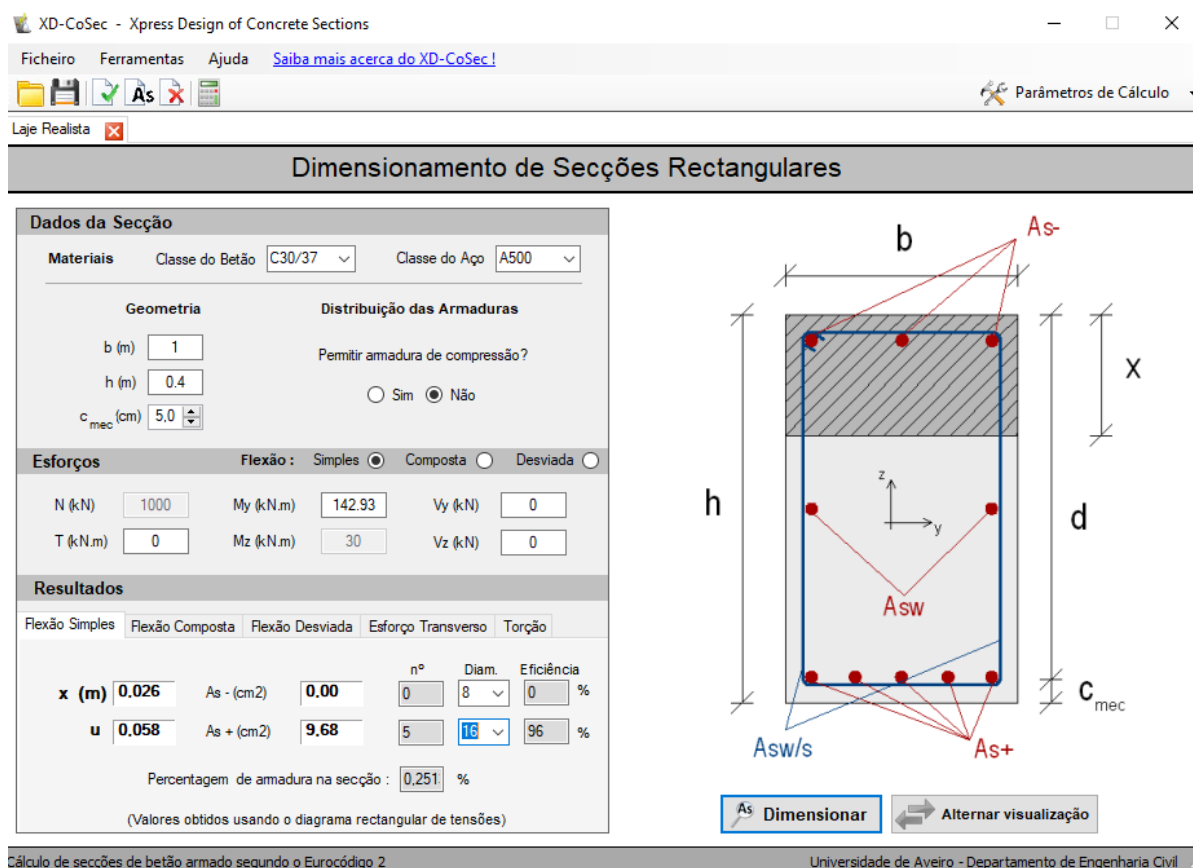


Figura 44 - Dimensionamento da armadura da laje para o segundo modelo

Para a laje de estudo, a armadura necessária será igual a $9.68 \text{ cm}^2/\text{m}$ o que corresponde a $\varnothing 16/0.2$ ($10.05 \text{ cm}^2/\text{m}$).

Ora, com os dois modelos calculados e dimensionados, é agora possível tecer alguns comentários relativos à diferença de armadura que existe nestes dois modelos distintos. Na esfera da viga, obteve-se, para o primeiro modelo, uma área de armadura igual a 24.54 cm^2 e, para o segundo modelo calculado, a armadura aplicada na viga foi igual a 15.71 cm^2 . Como é de fácil entendimento, há uma diferença muito preponderante de cerca de 36%. Esta redução na armadura colocada significa uma perda de segurança feroz nas estruturas que se venham a projetar sem ter em atenção ao problema que este trabalho lida. É por esta mesma razão, que esta problemática tem de ser endereçada a todos os níveis competentes para que se possa, de um modo regulado e normalizado, projetar estruturas seguras para a sociedade. De referir ainda, no âmbito da armadura da laje há também uma discrepância notória. No primeiro modelo, a área de armadura necessária para a laje é de $6.28 \text{ cm}^2/\text{m}$ e, em contraste, no segundo modelo, é necessário $10.05 \text{ cm}^2/\text{m}$. Esta discrepância enunciada traduz-se numa variação de cerca de 37.5%, o que, mais uma vez volta a ser significativo para projetar estruturas seguras. É ainda possível corroborar a premissa deste trabalho, sendo que há um subdimensionamento da viga e um sobredimensionamento da laje quando não se tem em atenção ao problema tratado no presente documento.

Mais ainda, não foi realizada nenhuma modelação através dos métodos de manipulação neste trabalho estudados, dado que o objetivo deste cálculo da estrutura real era concretizar e tornar real e notório as diferenças que se fazem sentir quando não se tem em consideração este tipo de erros de modelação. Ademais, seria expectável pelo culminar de todo o conhecimento obtido na realização deste trabalho, que a redução da inércia à flexão da laje fosse capaz de resolver bastante bem a discrepância que se fez sentir nestes dois modelos de modelação estrutural.

4

Conclusão

Neste último capítulo, irá ser demonstrado e discutido as conclusões que são possíveis de obter com todo o trabalho desenvolvido ao longo deste documento. Previamente, já foram apontados alguns desfechos que são possíveis de retirar, como por exemplo, do capítulo terceiro, porém no presente capítulo esta temática será abordada com mais profundidade.

4.1. CONCLUSÕES

Todo o presente trabalho foi realizado com o intuito de estudar um problema corrente de modelação estrutural e, preferencialmente, apontar boas práticas de modelação que possam mitigar o problema tratado. A presente problemática resulta do culminar de vários problemas intrínsecos de modelação, os quais foram abordados no segundo capítulo. Além disso, em ELU, há uma incompatibilização das deformadas das vigas com a da laje. Numa estrutura real, o comportamento deste sistema é uníssono estando a secção da viga em L a trabalhar em conjunto para a resistência da secção. Em contraste, no programa de cálculo, mais especificamente o Robot, há uma discrepância na rotação das secções, uma incompatibilização da mesma, que resulta num erro de modelação que sobre olhos menos atentos e cientes deste problema, passa despercebido.

Seguidamente, para a realização deste trabalho, adotaram-se duas estratégias de manipulação durante a modelação, de forma a conseguir minimizar o impacto de todo este imbróglio. Essas estratégias consistiram na manipulação do coeficiente de Poisson da laje, bem como na redução da inércia à flexão da mesma.

No âmbito da manipulação do coeficiente de Poisson e com a interpretação dos resultados obtidos, é possível concluir que esta manipulação só apresenta resultados positivos para valores de coeficiente de rigidez muito elevados, valores esses que, hodiernamente, à luz do conhecimento científico e tecnológico que há no campo da resistência dos materiais de construção, mais concretamente do betão armado, já não fazem qualquer tipo de sentido de serem correntemente edificados. Porém, é de frisar que para esses valores elevados a manipulação deste fator demonstrou-se bastante efetiva e obteve resultados muito satisfatórios. Na eventualidade de ser necessário o projeto de uma laje vigada com tal valor de β_K a manipulação do v apresentará, baseado neste estudo, resultados verosímeis com o que acontece realmente na estrutura. Deste modo, a manipulação do coeficiente de Poisson não é totalmente descartável, simplesmente para as estruturas de projeto corrente, para vãos correntes, não consegue ter influência suficiente para conseguir chegar a valores compatíveis com os da realidade.

Em contraste, a redução da inércia à flexão da laje tem uma influência significativa em todo o espectro de β_K estudados neste trabalho. Este método faz com que a laje perca preponderância de rigidez encaminhando assim de uma forma mais real, em ELU, as forças para as vigas que servem de apoio à mesma. Para além disso, com uma precisa manipulação do coeficiente redutivo é exequível uma afinação do valor da inércia para cada modelo em si. Ademais, discutindo esta temática à luz da construção de um modelo tridimensional global a quebra da rigidez da laje arrecada outras vantagens no momento do cálculo estrutural, porém essas não vão ser enunciadas, dado que saem fora do horizonte do presente trabalho. Comparativamente, a estratégia da redução da inércia da laje, para as relações de rigidez comumente projetadas, é a que fará mais sentido de ser realizada conforme o que foi aprendido no desenvolvido neste documento.

Em síntese, o problema neste trabalho endereçado é um problema relativamente recente e que necessita da devida atenção para que se faça Engenharia sempre em segurança, que, em perspectiva, é o objetivo último de qualquer engenheiro projetista. Apesar do início da modelação estrutural já datar do fim do século passado as relações de rigidez outrora projetadas não são as mesmas de agora e, por essa mesma razão, é que o problema, apesar de já existir noutros moldes antigamente, ganha uma outra expressividade nos dias de hoje. Com a utilização das estratégias enunciadas atinge-se uma mitigação e, em última análise, uma resolução deste problema o que faz com que a perda de segurança que há quando esta problemática não é tratada seja novamente assegurada. De referir ainda, no âmbito do objetivo primordial deste trabalho, o de estabelecer boas práticas de modelação para lajes vigadas de betão armado, considera-se que foi parcialmente alcançado, dado que o caso de estudo não é transversal a todas as geometrias de lajes que possam ser utilizadas, nem a todos os carregamentos que possam existir, porém de um modo corrente, a redução da inércia à flexão da laje em cerca de 90% é uma boa prática de modelação estrutural para atingir a distribuição de momentos mais realista e valores de momentos fletores compatíveis com a realidade.

4.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

O período temporal de desenvolvimento deste trabalho não foi o suficiente para que se pudesse aprofundar mais esta temática para uma resolução mais holística e, preferencialmente, geral a todos os tipos estruturais, bem como a mais tipologias de conceção estrutural. Nesse sentido, este subcapítulo tem como objetivo a apresentação de um conjunto de desenvolvimento que, aos olhos do autor, fazem sentido de estudar para perpetuar o estudo deste problema de modelação estrutural. São esses pontos os seguintes:

- Estudo com outro tipo de programas de cálculo estrutural: Além do Autodesk Robot Structural Analysis Professional, é válido explorar outros programas de cálculo estrutural, como o SAP2000, ETABS, ANSYS, entre outros. Cada software possui um conjunto de valências e capacidades, diferentes de uns para os outros, o que pode proporcionar diferentes perspetivas na análise das lajes vigadas;
- Fazer variar a geometria da laje em planta: Para ampliar o estudo, pode-se considerar diferentes geometrias de lajes vigadas, como lajes retangulares, trapezoidais, circulares ou irregulares. Desse modo, será possível avaliar como diferentes configurações influenciam o comportamento estrutural e as cargas distribuídas aplicadas na laje;
- Tipos de carregamento: Somando ao estudo das cargas uniformemente distribuídas, pode-se analisar a influência de outros tipos de carregamentos, como cargas triangulares distribuídas ou cargas pontuais concentradas. Dessa forma, irá ser possível obter uma compreensão mais abrangente do comportamento estrutural sob diferentes condições de carga;
- Utilização de softwares de análise não linear, do tipo Diana FEA: A análise não linear pode ser aplicada para estudar o comportamento mais realista da estrutura. Neste tipo de modelos tem-se em consideração a fissuração da laje e da viga, bem como a redistribuição dos momentos resultante. Softwares como o Diana FEA são capazes de fornecer resultados mais precisos, pois têm em a ponderação do comportamento não linear do betão e do aço.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E WEBGRAFIA

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, ACI - **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19)**. [S.l.] : American Concrete Institute, 2019

AZEVEDO, Álvaro F. M. - **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS** [Em linha] Disponível em WWW:<URL:http://www.fe.up.pt/~alvaro>.

BEER, Ferdinand P. *et al.* - **Mecânica dos Materiais**. 7. ed.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. - **Structural use of concrete**. [S.l.] : BSI, 1997. ISBN 0580262081.

Do EN Standards Still Apply to the UK after Brexit? | Gorilla Workwear | Blog - [Em linha] [Consult. 29 mai. 2023]. Disponível em WWW:<URL:https://www.gorillaworkwear.co.uk/blog/do-en-standards-still-apply-to-the-uk-after-brexite/>.

INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE - **NP EN 1991 - Acções em estruturas Parte 1-1: Acções gerais Pesos volúmicos, pesos próprios, sobrecargas em edifícios** [Em linha] Disponível em WWW:<URL:www.ipq.pt>.

INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE - **NP EN 1992-1-1 2010 - Projeto de estruturas de betão, Regras gerais e regras para edifícios**. 2010).

KALMANOK, A. S. - **Manual Para Calculo de Placas**. 1. ed. Montevideo : [s.n.]

KAMINSKI JUNIOR, João - **Determinação das ações transferidas das lajes às vigas**. 2015).

MELO, Scarllet - **ESTUDO DO IMPACTO NO PROJETO DE ESTRUTURAS DE BETÃO DE EDIFÍCIOS CORRENTES RECORRENDO A DIFERENTES METODOLOGIAS DE ANÁLISE** [Em linha] Disponível em WWW:<URL:http://www.fe.up.pt>.

PIMENTEL, Mário; VILA POUCA, Nelson; NUNES, Sandra - **Apontamentos Teóricos de Betão Estrutural**

Robot Structural Analysis 2023 Help | Homogenous | Autodesk - [Em linha] [Consult. 23 mai. 2023]. Disponível em WWW:<URL:https://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2023/ENU/?guid=GUID-CCD62632-9657-493B-8825-53F9B5E4E058>.

Solucionador matemático Symbolab - calculadora passo a passo - [Em linha] [Consult. 11 jun. 2023]. Disponível em WWW:<URL:https://pt.symbolab.com/>.

VILA POUCA, Nelson *et al.* - **Analysis and design of reinforced concrete slabs**