

Introdução às aulas teórico práticas de Resistência dos Materiais 1

Licenciatura em Engenharia Civil

Carlos Sousa

9 de dezembro de 2022

O plano de estudos do curso de licenciatura em Engenharia Civil da FEUP inclui 2,5 horas de aulas teóricas e 3 horas de aulas teórico-práticas, por semana, de Resistência dos Materiais 1.

O método de trabalho preconizado para as aulas teórico-práticas está centrado na resolução, pelos alunos, de problemas práticos agrupados em Folhas de Exercícios. Este documento é utilizado para uma rápida contextualização dos temas abordados em cada aula teórico-prática, para que o aluno possa ler as páginas correspondentes a cada tema antes da respetiva aula. Não substitui de forma alguma a apresentação sistemática de cada tema e a teoria subjacente, feita nas aulas teóricas.

Carlos Sousa

9 de dezembro de 2022



This work is licensed under
a license CC BY-NC-ND 4.0 Internacional

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

1. Esforço axial e tensão normal
 - 1.1. Tensões e deformações devidas ao esforço axial
 - 1.2. Deslocamento nodal em estruturas planas com barras sujeitas apenas a esforço axial
 - 1.3. Coeficiente de Poisson (ν) num material elástico isotrópico
 - 1.4. Variação do volume e da área da secção transversal
 - 1.5. Deformações de uma barra sujeita a esforço axial e variação de temperatura
 - 1.6. Secções feitas de dois materiais, sujeitas a força axial
 - 1.7. Tensões e deformações em tubos e caldeiras de paredes finas
2. Estruturas hiperestáticas, em que as barras deformáveis estão submetidas a esforço axial apenas
 - 2.1. Grau de hiperestaticidade em estruturas reticuladas planas
 - 2.2. Grau de hiperestaticidade em estruturas articuladas planas
 - 2.3. Análise de estruturas hiperestáticas ($H=1$) com comportamento material linear elástico
 - 2.4. Análise de estruturas hiperestáticas ($H=1$) com comportamento material elasto-plástico
3. Método da Unidade Fictícia de Carga para cálculo de deformações em estruturas articuladas planas
 - 3.1. Fundamentos do Método da Unidade Fictícia de Carga, e utilização de métodos energéticos na engenharia de estruturas
 - 3.2. Cálculo de um deslocamento numa estrutura articulada plana
 - 3.3. Influência dos assentamentos de apoio
 - 3.4. Cálculo de uma rotação de barra numa estrutura articulada plana
 - 3.5. Cálculo de um deslocamento relativo entre uma barra e um nó numa estrutura articulada plana
 - 3.6. Organização prática dos resultados dos cálculos

4. Diagramas de esforços em estruturas planas

- 4.1. Cálculo dos diagramas através da aplicação das condições de equilíbrio
- 4.2. Convenção para esforços positivos, e para a representação dos diagramas
- 4.3. Cálculo dos diagramas utilizando as relações entre p , V e M
- 4.4. Demonstração das relações entre p , V e M
- 4.5. Relações úteis adicionais entre p , V e M
- 4.6. Barras inclinadas em relação à direção da carga uniformemente distribuída
- 4.7. Exemplo de cálculo

5. Flexão plana simples

- 5.1. Tipos de flexão
- 5.2. Cálculo de tensões e extensões devidas à flexão plana simples
- 5.3. Cálculo das propriedades geométricas da secção transversal
- 5.4. Curvatura (χ) e raio de curvatura (ρ) em flexão plana
- 5.5. Demonstração da equação para o cálculo da tensão devida à flexão plana simples
- 5.6. Módulo de flexão
- 5.7. Secções feitas de dois materiais, sujeitas a flexão plana simples
- 5.8. Vigas mistas aço-betão, sujeitas a flexão plana simples, considerando que a resistência à tração do betão é nula

- 6. Deslocamentos, rotações e curvaturas em estruturas isostáticas sujeitas a flexão plana
 - 6.1. Método da Integração da Elástica
 - 6.1.1. Fundamentos do método
 - 6.1.2. Utilização do método
 - 6.1.3. Exemplo de cálculo
 - 6.2. Método da Unidade Fictícia de Carga
 - 6.2.1. Fundamentos do método
 - 6.2.2. Utilização do método
 - 6.2.3. Exemplo de cálculo
 - 6.2.4. Método de Bonfim Barreiros, para cálculo do integral do produto de duas funções polinomiais
 - 6.2.5. Área e posição do centro das parábolas do 2º grau do tipo $y = k x^2$
 - 6.2.6. Exemplo de cálculo
 - 6.2.7. Aplicação do Método de Bonfim Barreiros, em barras sujeitas a carga uniformemente distribuída, decompondo o diagrama $M(z)$ em formas geométricas simples
- 7. Reações de apoio e diagramas de esforços em estruturas hiperestáticas ($H = 1$) com barras sujeitas a flexão
 - 7.1. Procedimento de cálculo
 - 7.2. Exemplo de uma estrutura suportada por uma barra articulada
 - 7.3. Exemplo de uma estrutura com uma barra articulada interna

8. Flexão desviada simples

- 8.1. Flexão desviada simples em barras com um único plano de solicitação
- 8.2. Exemplo de cálculo
- 8.3. Flexão desviada simples em barras com mais do que um plano de solicitação
- 8.4. Dimensionamento de secções com envolvente retangular e $\sigma_{Rd,t} = \sigma_{Rd,c}$
- 8.5. Cálculo das coordenadas de um ponto após rotação do referencial

Anexo A - Noções básicas de segurança e fiabilidade estrutural

- A.1. Abordagem probabilística para avaliação de segurança em estado limite último (ELU)
- A.2. Método dos Coeficientes Parciais de Segurança (abordagem semi-probabilística) para avaliação de segurança em ELU

1. Esforço axial e tensão normal

1.1. Tensões e deformações devidas ao esforço axial

A figura mostra uma barra sujeita a um **esforço axial** N .

A **tensão normal** aplicada à secção transversal da barra é:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

onde A é a área da secção transversal, e a direção da tensão é paralela ao eixo da barra (direção longitudinal). A **extensão** ε nessa mesma direção longitudinal é dada pela **lei de Hooke**, se o material tiver um comportamento elástico linear caracterizado pelo módulo de elasticidade E :

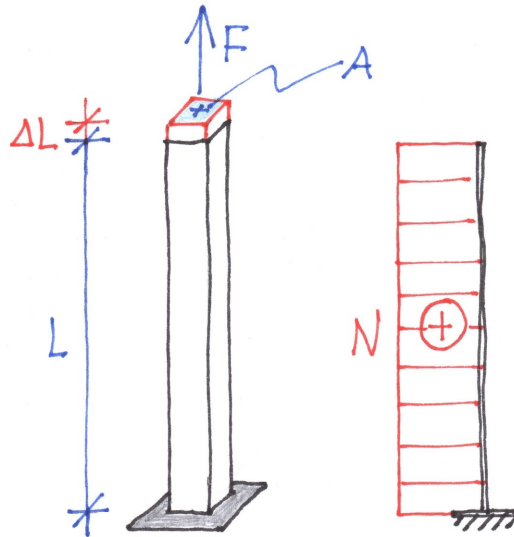
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

A extensão ε é a **variação relativa do comprimento**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

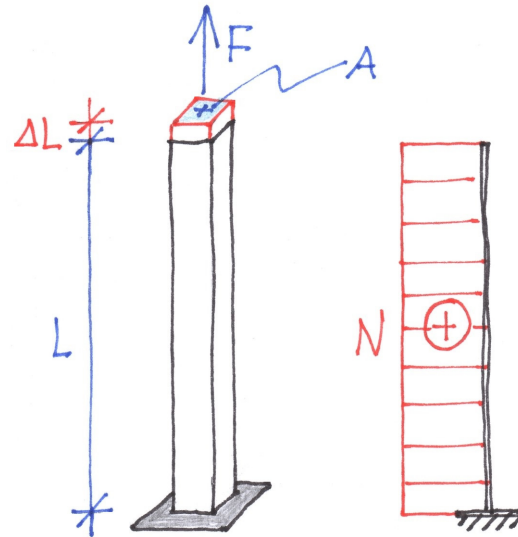
onde L é o comprimento inicial da barra e ΔL é a variação do comprimento (alongamento). Ao combinar as três equações anteriores, concluímos que o alongamento da barra pode ser calculado diretamente como:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$



As equações devem ser utilizadas com um sistema coerente de unidades, por exemplo:

- N em kN
- A em m^2
- σ em kPa
- L e ΔL em m
- E em kPa
- ε é adimensional



Numa estrutura corretamente dimensionada, a tensão aplicada não deve exceder a resistência do material. Para ter em conta as **incertezas** associadas à quantificação das tensões aplicadas e da resistência material, a tensão aplicada é majorada por um **coeficiente de parcial segurança** γ_S . Em RM1, para simplificar, utilizamos $\gamma_S = 1,5$. A **condição de segurança** é escrita como:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

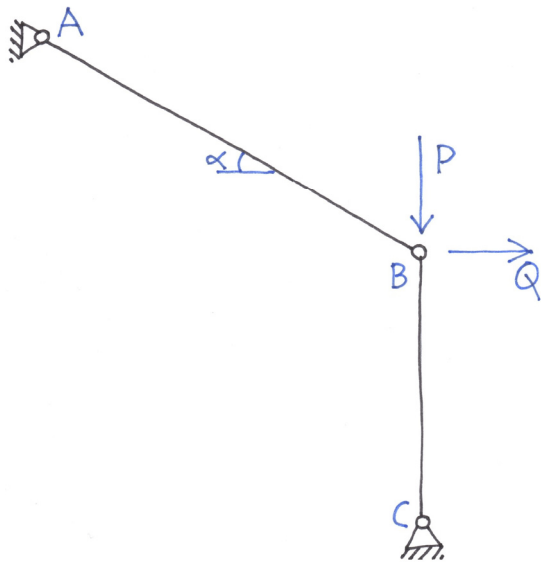
Esta é a chamada condição de **estado limite último** (ELU), onde σ_{Sd} é o **valor de cálculo da tensão atuante**:

$$\sigma_{Sd} = \gamma_S \cdot |\sigma_{\max}|$$

e σ_{Rd} é o **valor de cálculo da tensão resistente**. Explicações adicionais sobre as abordagens utilizadas na verificação de segurança podem ser encontradas no Anexo A.

1.2. Deslocamento nodal em estruturas planas com barras sujeitas apenas a esforço axial

Exemplo 1.1:



Em estruturas planas, compostas por um pequeno número de barras, os **deslocamentos nodais** podem ser determinados através de uma análise geométrica simples.

A figura mostra um exemplo de uma **estrutura articulada** na qual apenas um dos nós se pode mover (nó B). Para calcular o seu deslocamento, começamos por determinar as forças axiais nas barras, através do **método do equilíbrio dos nós**, para o nó B.

Em seguida, o alongamento de cada barra, devido à sua força axial, é determinado como:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

Note-se que, se uma barra também estiver sujeita a uma **variação de temperatura** ΔT ($^{\circ}\text{C}$), o seu alongamento total será:

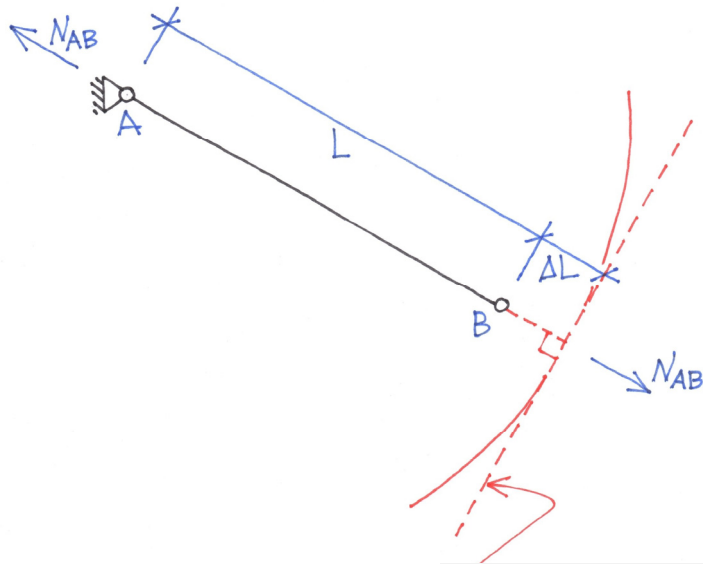
$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

onde α é o **coeficiente de dilatação térmica** ($^{\circ}\text{C}^{-1}$) do material.

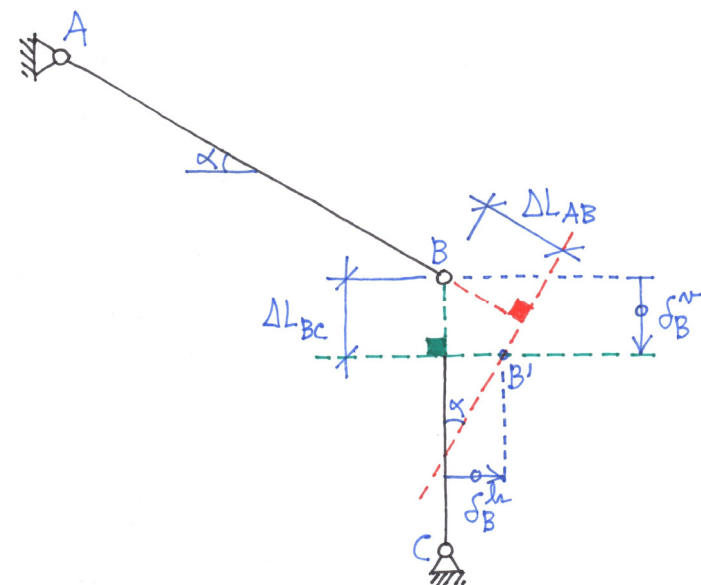
Numa barra reta, com articulações em ambas as extremidades, sem qualquer carga aplicada ao longo do seu comprimento, o **único esforço que não é nulo** é o esforço axial. Este tipo de barra é chamado de **barra articulada**.

O deslocamento do nó B é determinado através da análise das deformações das duas barras ligadas a esse nó.

A figura mostra a deformação da barra AB. A posição do nó A é conhecida. O alongamento da barra, ΔL , foi calculado. A barra pode **rodar em torno do apoio duplo A**, descrevendo assim o arco de circunferência representado pela linha contínua vermelha. Como estamos a calcular **pequenos deslocamentos**, o arco de circunferência pode ser aproximado pela sua **reta tangente**. Esta tangente à circunferência é perpendicular à direção original da barra.



A posição do nó B após a deformação situa-se nesta linha tracejada, que é perpendicular à linha reta que passa através do centro de rotação.



A figura mostra, em linhas tracejadas a vermelho, a determinação de uma linha reta que contém a posição do nó B após a deformação, imposta pela barra AB.

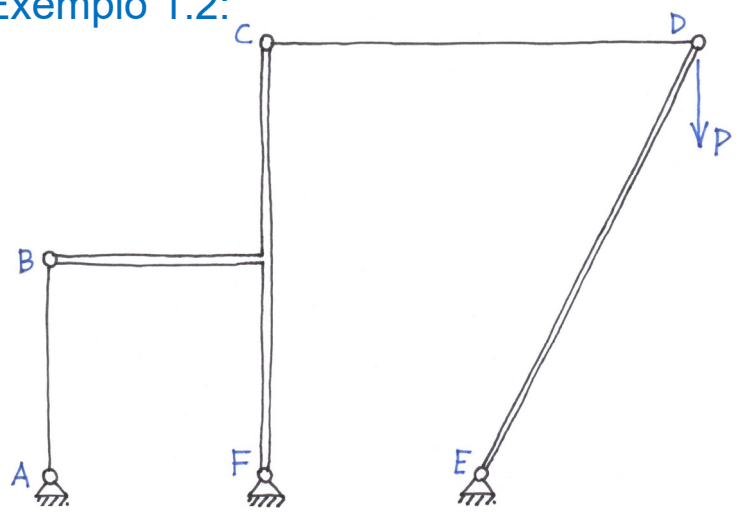
Em linhas tracejadas a verde, a figura mostra a linha que contém a posição final do nó B, imposta pela barra BC. O valor ΔL_{BC} corresponde, neste caso, à diminuição do comprimento da barra, porque a barra BC está sujeita a uma força axial de compressão.

Dado que acabámos de determinar duas linhas retas que contêm a posição do nó B após a deformação, essa posição está na sua intersecção. Designamos a **posição do nó B após a deformação** como B'.

Depois, precisamos de calcular as **componentes horizontal e vertical do deslocamento do nó**, δ_B^v e δ_B^h . Neste exemplo, vemos graficamente que o valor δ_B^v é igual a ΔL_{BC} . O valor δ_B^h é calculado utilizando as relações trigonométricas, com base nos triângulos retângulos que acabam de ser retratados na figura.

Na análise gráfica do deslocamento do nó, as deformações são **amplificadas**, de modo a que a relação entre as várias variáveis possa ser compreendida.

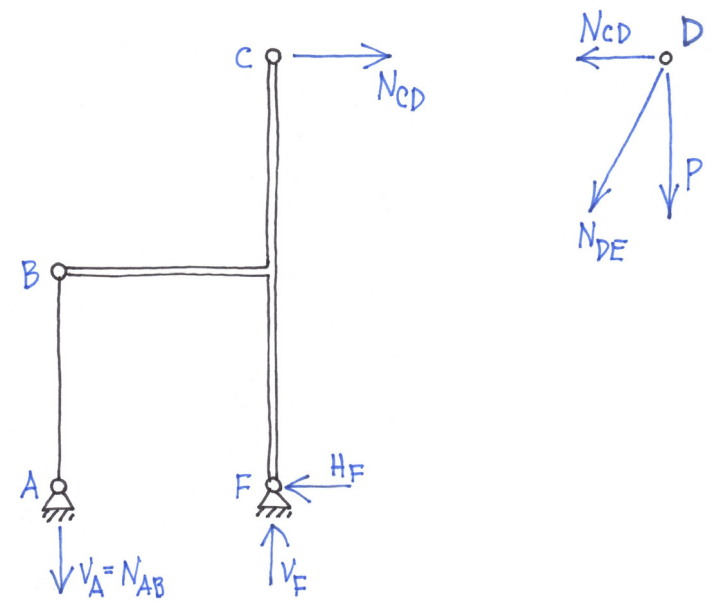
Exemplo 1.2:



A figura mostra um novo exemplo. Esta estrutura é composta por dois **corpos rígidos** (BCF e DE) e duas barras deformáveis (barras articuladas AB e CD) e está sujeita a uma carga pontual P. O objetivo é calcular o deslocamento do nó D.

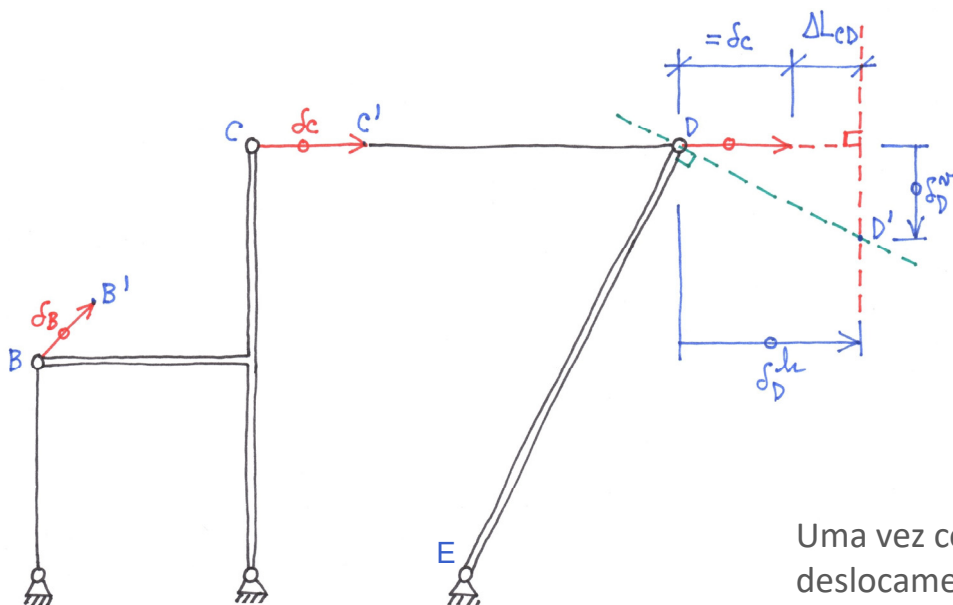
Antes de calcular o deslocamento dos nós, são necessárias os esforços axiais nas barras deformáveis.

O nó D está ligado a duas barras articuladas, pelo que as forças axiais nessas barras podem ser determinadas através do método de equilíbrio dos nós.



Uma vez conhecido o valor N_{CD} , podemos **isolar o corpo** composto pelo membro rígido BCF e o tirante AB, representando todas as ações aplicadas a esses corpos. Dado que AB é uma barra articulada, a reação horizontal no apoio A é nula. A reação vertical em A (igual à força axial N_{AB}) pode assim ser calculada impondo as condições de equilíbrio deste corpo.

Depois, os **alongamentos das barras**, ΔL_{AB} e ΔL_{CD} , podem ser calculados. Ambos correspondem a um aumento de comprimento, neste exemplo.



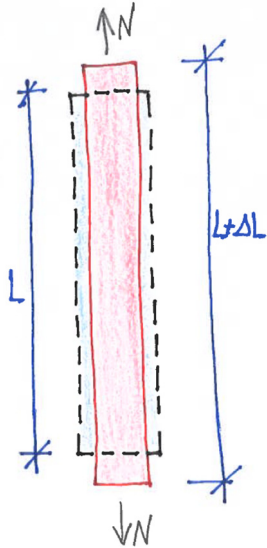
Uma vez conhecida a posição do nó C após a deformação (C'), o deslocamento do nó D pode ser determinado. Seguindo o procedimento aprendido anteriormente, esta posição está na intersecção de:

- a linha tracejada verde, que contém as posições possíveis para a extremidade D da barra ED após a deformação;
- a linha a tracejado vermelho, que contém as posições possíveis para a extremidade D da barra CD após a deformação.

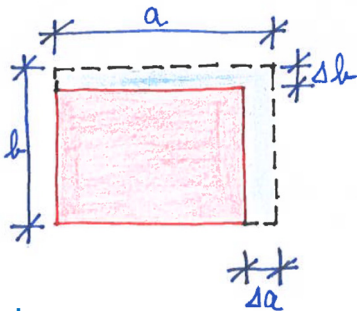
A posição do nó D após a deformação é assim D', como mostra a figura.

1.3. Coeficiente de Poisson (ν) num material elástico isotrópico

Vista lateral de uma barra
sujeita a esforço axial:



Secção transversal da
barra (a escala diferente):



Legenda:

- Before the deformation
- After the deformation

A figura mostra uma barra sujeita a uma força axial N , feita com um material **isotrópico** e **homogéneo** (material com propriedades independentes da direção e da posição), e representa as deformações devidas a essa força (com uma grande amplificação). Em qualquer posição ao longo da barra, a tensão aplicada é:

$$\sigma_L = \frac{N}{A}$$

onde o subscrito L indica a direção da tensão: a direção longitudinal da barra. A extensão na direção longitudinal é dada pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E}$$

Em direções perpendiculares ao eixo de solicitação, a tensão σ_L é responsável por deformações que dependem do **coeficiente de Poisson** do material (ν):

$$\varepsilon_t = -\nu \frac{\sigma_L}{E}$$

Se σ_L é uma tensão de tração, a extensão ε_t é assim uma quantidade negativa. O comprimento da barra após a deformação (ou seja, após a aplicação da carga) é $L + \Delta L$ e as dimensões da secção transversal serão $a + \Delta a$ e $b + \Delta b$, onde:

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

1.4. Variação do volume e da área da secção transversal

Existem duas alternativas para calcular a variação de volume (V) e a variação da área da secção transversal (A) de uma barra sujeita a esforço axial.

Alternativa 1:

Uma vez conhecidas as dimensões finais da barra (após a deformação), a variação pode ser calculada como a diferença entre as dimensões finais e iniciais:

$$\Delta V = V_{final} - V$$

$$\Delta A = A_{final} - A$$

Alternativa 2:

A variação de volume pode ser calculada diretamente sabendo que a **extensão volumétrica** (ε_V), que dá a variação de volume (ΔV) dividida pelo volume inicial (V), é igual à **soma das extensões lineares em três direções ortogonais**. Ou seja:

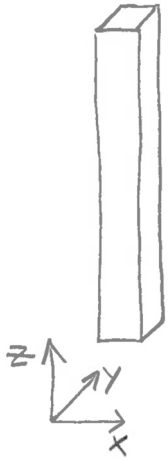
$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

De modo similar, a variação da área da secção transversal pode ser calculada como:

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A}$$

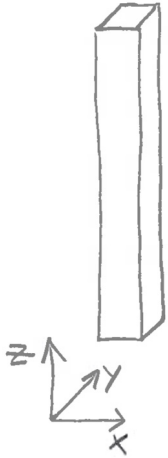
$$\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$



NOTAS:

- As extensões ε_x e ε_y são neste caso as extensões na direção transversal (ε_t) calculadas atrás.
- A demonstração das formulas anteriores para cálculo de ε_V e ε_A foi feita nas aulas teóricas.

1.5. Deformações de uma barra sujeita a esforço axial e variação de temperatura



Considere a barra mostrada na imagem, sujeita simultaneamente a:

- uma força axial (na direção do eixo Z na imagem);
- uma variação de temperatura.

Quais são as extensões resultantes ε_x , ε_y e ε_z ?

As deformações nas direções X, Y e Z são calculadas por **sobreposição dos efeitos** da força axial e da variação de temperatura. Note-se que, num material isotrópico, este último efeito dá origem a uma extensão $\alpha \cdot \Delta T$ em qualquer direção, onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material.

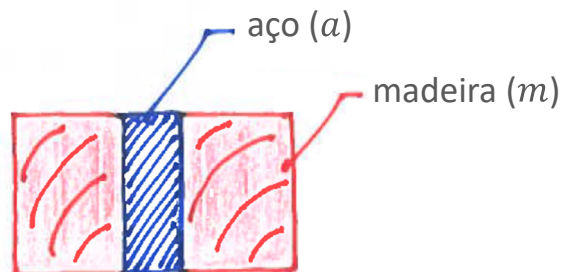
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_L}{E} + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_L}{E} + \alpha \cdot \Delta T$$

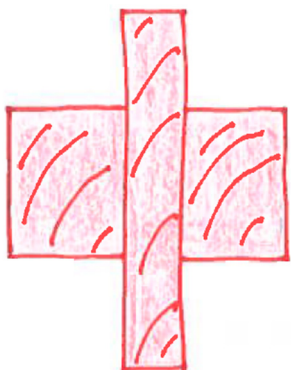
1.6. Secções feitas de dois materiais, sujeitas a força axial

Método da homogeneização da secção

Secção transversal real:



Secção transversal homogeneizada num dos materiais (madeira, neste caso):



O procedimento utilizado no cálculo de $\bar{A}$ significa que, para transformar a secção transversal real do aço numa peça de madeira equivalente com a mesma rigidez, o facto de a madeira ter um módulo de elasticidade inferior ao do aço foi compensado por um aumento de área na secção transversal homogeneizada.

Considere agora uma barra reta cuja secção transversal é composta por dois materiais, sendo a extensão axial igual em ambos. A barra está sujeita a uma força axial N .

O **método de homogeneização da secção transversal** é um procedimento expedito de cálculo da tensão normal aplicada a cada material. Consiste em transformar a secção transversal real numa **secção transversal equivalente e homogénea**. O termo equivalente significa neste contexto que uma barra com a secção transversal homogeneizada tem a mesma rigidez axial, o mesmo alongamento ΔL e a mesma tensão no material homogeneizado que a barra real feita com os dois materiais.

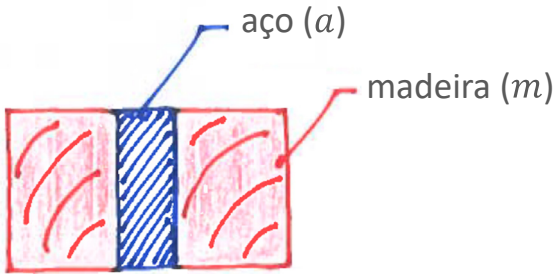
As áreas transversais reais dos dois materiais são designadas A_a e A_m . O seu módulo de elasticidade é denominado E_a and E_m . O **rácio dos módulos de elasticidade** é denominado k_{hom} . Se escolhermos, para o material da secção transversal homogeneizada, o material de módulo de elasticidade inferior, k_{hom} toma um valor superior a 1:

$$k_{hom} = \frac{E_a}{E_m}$$

A área da secção transversal homogeneizada é:

$$\bar{A} = A_m + A_a \cdot k_{hom}$$

Secção transversal real:



Secção transversal homogeneizada num dos materiais (madeira, neste caso):



Uma secção transversal plana antes da deformação é **mantida plana após a deformação**. Portanto, a extensão longitudinal devida à força axial é a mesma em ambos os materiais:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_m$$

A tensão normal em cada material é dada pela lei de Hooke. Portanto, materiais com diferentes módulos de elasticidade terão tensões diferentes:

$$\sigma_m = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_a = \frac{N}{A} \cdot k_{hom}$$

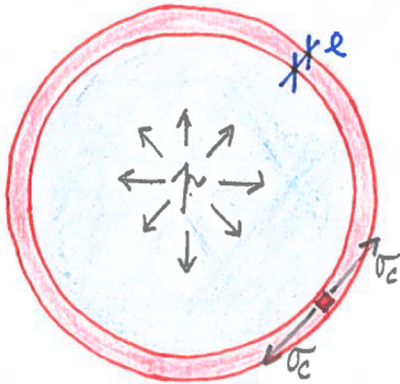
A demonstração das equações para o cálculo da área homogeneizada, e para o cálculo das tensões normais, foi feita nas aulas teóricas.

Note-se que o método de homogeneização não permite calcular **tensões e deformações devidas a variações de temperatura**, apenas as tensões devidas a forças axiais. Numa barra feita com dois materiais, sujeita a variações de temperatura, o cálculo das tensões atuantes é feito utilizando uma **condição de compatibilidade das deformações**. Esta questão é abordada no Capítulo 2, sobre estruturas hiperestáticas.

1.7 Tensões e deformações em tubos e caldeiras de paredes finas

Tensão normal na direção circunferencial (σ_c)

Corte transversal da caldeira:

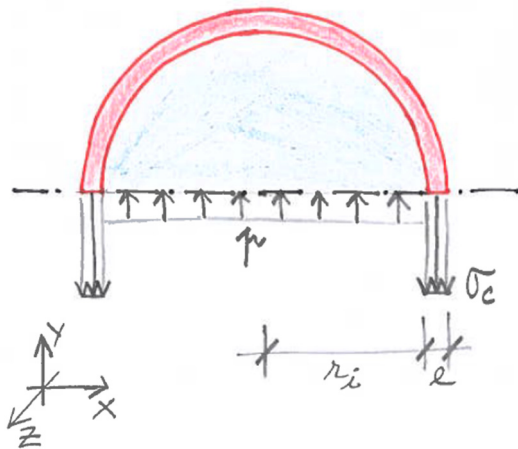


Considere agora um tubo fechado (ou caldeira), de parede fina, contendo um gás a uma **pressão** p . A espessura da parede é e e o raio interno é r_i . A pressão interna induz **tensões normais** na estrutura de aço, tanto na **direção circunferencial** como na **direção longitudinal**.

A tensão circunferencial (σ_c) pode ser calculada através do **equilíbrio de forças** mostrado na figura. É feito um corte plano, de modo a que o plano de corte contenha o eixo longitudinal da caldeira. As tensões aplicadas ao corpo em análise são indicadas na imagem:

- a pressão interna p ;
- a tensão circunferencial σ_c (se a espessura e for pequena em relação ao raio r_i , a tensão pode ser assumida constante).

Equilíbrio de forças:



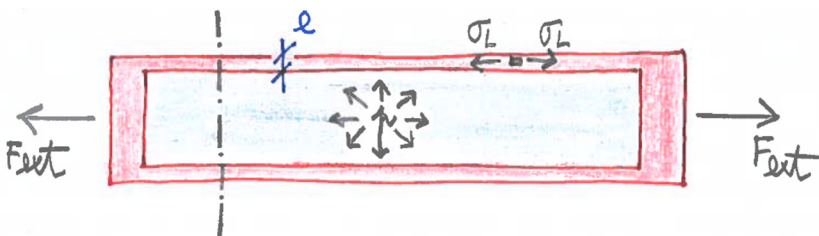
Escrevendo o equilíbrio de forças na direção Y indicada na figura:

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow p \cdot 2r_i \cdot L = \sigma_c \cdot 2e \cdot L \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{p \cdot r_i}{e}$$

onde L é o comprimento do tubo na direção perpendicular à imagem. A pressão p é assim aplicada sobre uma área retangular $2r_i \cdot L$.

Tensão normal na direção longitudinal (σ_L)

Corte longitudinal da caldeira:

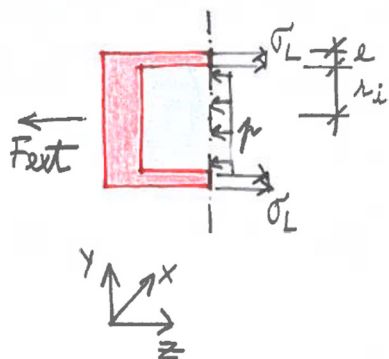


A primeira imagem representa o corte longitudinal de uma caldeira. As ações aplicadas são:

- a **pressão interna** p ;
- uma **força externa**, no sentido longitudinal, F_{ext} .

Para calcular a **tensão longitudinal nas paredes da caldeira**, σ_L , é feito um corte plano, como se mostra na segunda imagem. O corpo isolado está em equilíbrio, pelo que a soma das forças na direção Z tem de ser igual a zero:

Equilíbrio de forças:



$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow \sigma_L \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) - p \cdot \pi \cdot r_i^2 - F_{ext} = 0 \Leftrightarrow \sigma_L = \dots$$

Área do anel de aço onde a tensão σ_L está aplicada

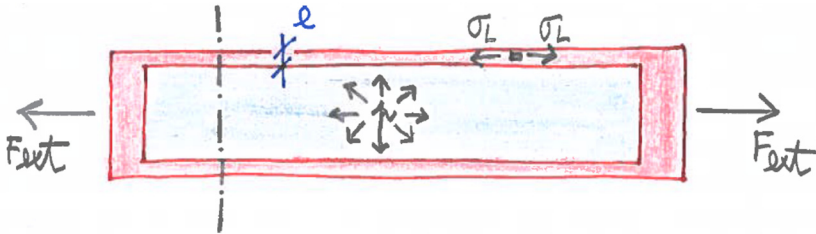
Área circular interna da caldeira

A variável r_e indica o raio externo: $r_e = r_i + e$.

Note-se que a forma da extremidade do tubo (esférica, em forma de disco, ou outra forma) não tem qualquer influência sobre este valor σ_L .

Tensão normal na direção longitudinal (σ_L)

Corte longitudinal da caldeira:



No caso particular em que $F_{ext} = 0$ (isto é, quando a caldeira não está sujeita a qualquer força exterior na direção longitudinal), pode ser obtida uma fórmula simplificada para o cálculo de σ_L . Para tal, note-se que a área do anel de aço onde σ_L é aplicado pode ser escrita como o perímetro médio de aço multiplicado pela espessura da parede:

$$2\pi \cdot r_m \cdot e$$

onde r_m é o raio médio, $r_m = (r_i + r_e)/2$. Uma vez que a espessura é pequena em comparação com o raio, a área onde a pressão p é aplicada é aproximadamente igual a:

$$\pi \cdot r_m^2$$

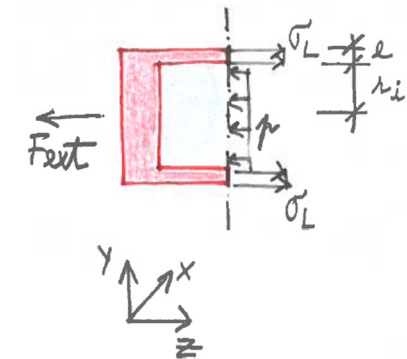
e a tensão longitudinal é portanto:

$$\sigma_L \approx \frac{p \cdot \pi \cdot r_m^2}{2\pi \cdot r_m \cdot e} = \frac{p \cdot r_m}{2e}$$

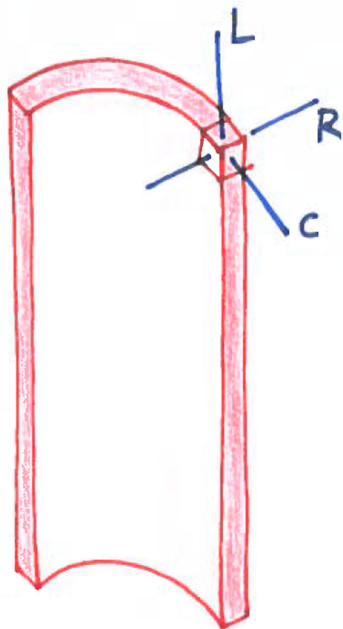
Assim, se $F_{ext} = 0$, a tensão longitudinal é:

$$\sigma_L \approx \frac{\sigma_c}{2}$$

Equilíbrio de forças:



Cálculo das extensões, através da sobreposição de efeitos



O cálculo da deformação da caldeira (ou tubo fechado) pode ser feito por **sobreposição dos efeitos das tensões aplicadas**, σ_c e σ_L . Devem ser consideradas **três direções ortogonais**, as direções longitudinal (L), circunferencial (C) e radial (R) representadas na imagem.

Tendo em conta a lei de Hooke e o efeito do coeficiente de Poisson, as extensões devidas à tensão circunferencial são:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_R = -\nu \frac{\sigma_c}{E}$$

Do mesmo modo, as extensões devidas à tensão longitudinal são:

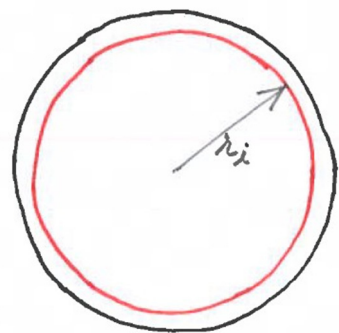
$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_R = -\nu \frac{\sigma_L}{E}$$

As extensões totais são calculadas por sobreposição (soma) das extensões devidas a estes dois efeitos.

Note-se que a extensão ε_R calculada nesta página é a **extensão na estrutura de aço**. Não pode ser utilizada para calcular a variação do raio interno da caldeira. Esta questão é abordada na página seguinte.

Extensão para calcular a variação do raio interno da caldeira



Em alguns problemas, estamos interessados no cálculo da **variação do volume interno** de um determinado tubo ou caldeira. Para tal, precisamos de determinar a **variação do raio interno** (r_i) do tubo causada pelas ações aplicadas (pressão interna e eventualmente uma força exterior). Pode ser demonstrado que a variação do raio interno é calculada utilizando a extensão circunferencial ε_c :

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta r_i}{r_i}$$

Demonstração:

O **perímetro inicial da circunferência de raio r_i** é $2\pi \cdot r_i$. A sua variação após a deformação é naturalmente determinada pelo valor da deformação circunferencial, ε_c , porque a deformação ε_c é a deformação na direção da circunferência. Então:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta \text{Perimeter}}{\text{Perimeter}} = \frac{2\pi \cdot \Delta r_i}{2\pi \cdot r_i} = \frac{\Delta r_i}{r_i}$$

como se queria demonstrar.

2. Estruturas hiperestáticas, em que as barras deformáveis estão submetidas a esforço axial apenas

2.1. Grau de hiperestaticidade em estruturas reticuladas planas

As **estruturas reticuladas** são aquelas que contêm barras não totalmente articuladas, isto é, barras que podem ter esforços N , V e M . Podem também ter barras totalmente articuladas sem cargas aplicadas entre os nós (as que não têm esforços V e M), apoios e rótulas internas.

É fundamental compreender se a estrutura é **isostática** ou **hiperestática**. O **grau de hiperestaticidade** (H) de uma **estrutura plana** pode ser determinado como:

$$H = L - R + 3C - 3$$

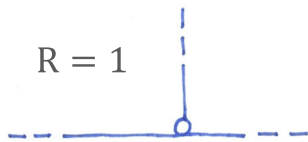
onde:

L é o número de **ligações ao exterior** (reações de apoio);

R é o número de **libertações de rotação**, por rótulas;

C é o número de **células fechadas**;

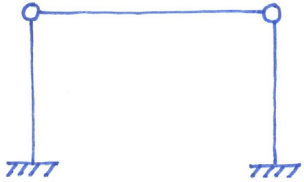
H é o grau de hiperestaticidade ($H=0$ significa que a estrutura é isostática).



A justificação para a equação anterior é a seguinte:

- Uma estrutura sem células fechadas ($C=0$) e sem rótulas internas ($R=0$) é isostática se o número de reações de apoio (L) for igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis para calcular tais reações (3).
- Por cada libertação de rotação (R) adicionada à estrutura, o grau de hiperestaticidade é reduzido em 1, e uma nova condição de equilíbrio é adicionada (o equilíbrio dos momentos em torno da rótula).
- Por cada célula fechada (C) adicionada à estrutura, o grau de hiperestaticidade é aumentado em 3, porque para transformar essa célula numa estrutura aberta, seria necessário cortar (abrir) uma secção transversal de uma barra, libertando assim três esforços na secção transversal (N , V e M).

Exemplo 2.1:



A estrutura plana (estrutura reticulada) no exemplo 2.1 é uma estrutura hiperestática, com um grau de hiperstaticidade igual a 1, porque:

$$L = 6$$

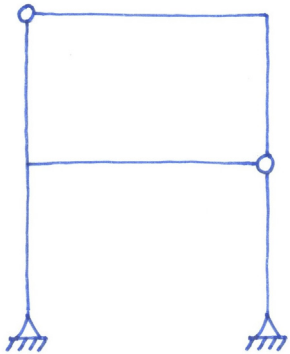
$$R = 2$$

$$C = 0$$

$$H = L - R + 3C - 3 = 1$$

A mesma conclusão poderia ter sido tirada diretamente pela observação da estrutura: eliminando uma ligação interna, por exemplo a barra articulada que une os topos das duas colunas, seriam obtidos dois sistemas isostáticos (os dois pilares verticais, neste exemplo).

Exemplo 2.2:



O pórtico plano no exemplo 2.2 é também uma estrutura reticulada com um grau de hiperestaticidade igual a 1, porque:

$$L = 4$$

$$R = 3$$

$$C = 1$$

$$H = L - R + 3C - 3 = 1$$

2.2. Grau de hiperestaticidade em estruturas articuladas planas

As **estruturas articuladas planas**, também conhecidas como **treliças**, são compostas por barras articuladas (barras ligadas a rótulas em ambas as extremidades) apenas, sujeitas a cargas pontuais aplicadas apenas nos nós. Nestas condições, o único esforço em cada barra é o esforço axial. O **grau de hiperestaticidade** (H) de uma estrutura articulada plana pode ser determinado como:

$$H = L + B - 2N$$

onde:

L é o número de **ligações ao exterior** (reações de apoio);

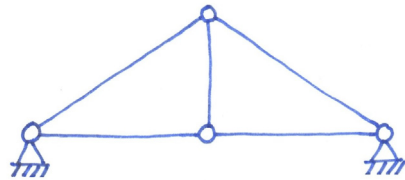
B é o número de **barras**;

N é o número de **nós** (incluindo os que estão diretamente ligados aos apoios);

H é o grau de hiperestaticidade ($H=0$ significa que a estrutura é isostática).

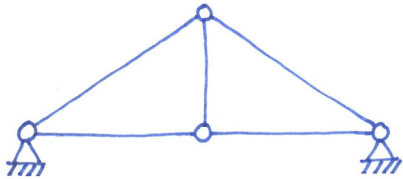
A justificação para a equação anterior é a seguinte:

- O número de incógnitas, que têm de ser calculadas para caracterizar completamente as forças na estrutura, é igual à soma do número de reações de apoio (L) mais o número de barras (B), porque é necessário determinar um esforço axial por barra.
- O número de equações de equilíbrio disponíveis é de 2 por nó, porque cada nó tem de estar em equilíbrio de forças em duas direções ortogonais.
- Se o número de incógnitas for igual ao número de equações disponíveis, a estrutura é isostática. Cada incógnita adicional aumenta o grau de hiperstatividade em 1.



Exemplo 2.3:

Exemplo 2.3:



Ao aplicar a regra anterior à estrutura articulada do Exemplo 2.3, obtém-se:

$$L = 4$$

$$B = 5$$

$$N = 4$$

$$H = L + B - 2N = 1$$

Uma estrutura articulada é um caso particular de uma estrutura reticulada, portanto a regra para as estruturas reticuladas é também aplicável:

$$L = 4$$

$$R = 6$$

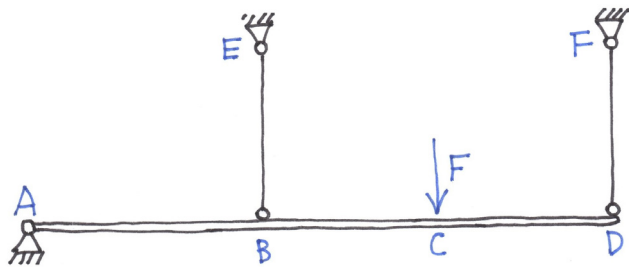
$$C = 2$$

$$H = L - R + 3C - 3 = 1$$

A mesma conclusão poderia ter sido tirada sabendo que uma estrutura plana totalmente articulada, formada por triângulos adjacentes, numa condição simplesmente suportada ($L=3$), é uma estrutura isostática. A treliça, neste exemplo, é formada por triângulos adjacentes. O número de reações de apoio é $L=4$, portanto o grau de hiperestaticidade é igual a 1.

2.3. Análise de estruturas hiperestáticas ($H=1$) com comportamento material linear elástico

Exemplo 2.4:



O objetivo deste capítulo é o cálculo de **esforços e deslocamentos**, em estruturas com um grau de hiperestaticidade igual a 1, nas quais as barras deformáveis são articuladas (portanto nessas o único esforço interno é o esforço axial). A figura mostra um exemplo deste tipo de estrutura. Nesta, a barra horizontal ABCD é **infinitamente rígida** (ou seja, a sua deformabilidade devido às forças aplicadas é negligenciável), e está sujeita a uma carga pontual F .

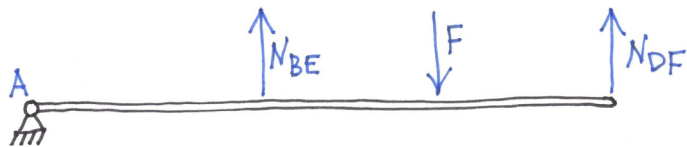
Esta é uma estrutura reticulada, porque a barra horizontal tem esforços internos N , V e M . Ao aplicar a regra para verificar o **grau de hiperestaticidade**, obtém-se:

$$L = 6$$

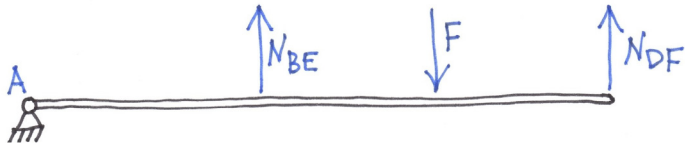
$$R = 2$$

$$C = 0$$

$$H = L - R + 3C - 3 = 1$$



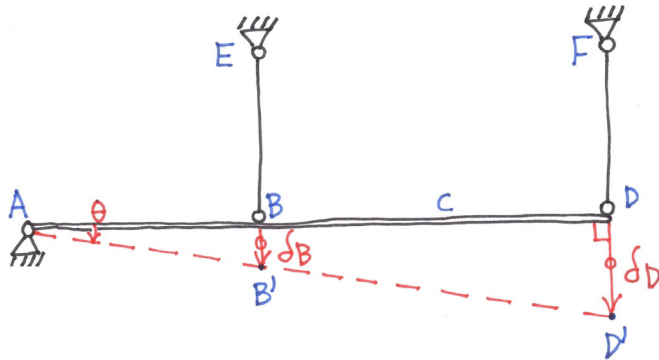
A mesma conclusão poderia ter sido retirada analisando as condições de equilíbrio do corpo composto apenas pela barra rígida. Para tal, as barras articuladas podem ser substituídas pelas forças que aplicam sobre a barra rígida (os tirantes articulados têm apenas esforço axial). Desta forma, o corpo em análise tem 4 ligações ao exterior (o apoio duplo em A, mais as duas forças induzidas pelos tirantes) e nenhuma rótula interna, o que significa que é uma vez hiperestático.



Para analisar a estrutura, é necessário calcular as reações de apoio em A e as forças axiais nos tirantes articulados. As equações de equilíbrio disponíveis, para este corpo rígido, são apenas as 3 equações de equilíbrio global:

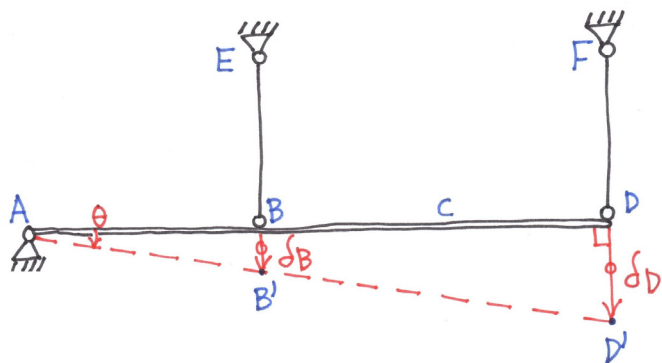
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum m|_A &= 0\end{aligned}$$

Dado que o número de incógnitas é 4, **é necessária uma equação adicional** para resolver a estrutura. Esta é a **equação de compatibilidade das deformações**.



A compatibilidade das deformações neste tipo de estrutura é assegurada pelo **movimento de rotação do corpo rígido** em torno do seu apoio duplo (A, neste exemplo). Como estamos a lidar com pequenas deformações, o arco de circunferência descrito por qualquer ponto do corpo rígido, neste movimento, pode ser aproximado pela sua tangente (uma linha reta perpendicular à linha reta que liga ao centro de rotação). Por conseguinte, a equação de compatibilidade torna-se:

$$\tan \theta = \frac{\delta_B}{AB} = \frac{\delta_D}{AD} \quad \text{(forma 1)}$$



A equação de compatibilidade só será útil para resolver a estrutura se exprimir uma relação entre as forças axiais nos tirantes. Para obter tal relação, começamos por substituir na equação anterior (forma 1), o **deslocamento do nó** pela sua relação com o **alongamento da barra**. Neste Exemplo 2.4, as barras deformáveis estão alinhadas com o deslocamento do nó, portanto

$$\begin{aligned}\delta_B &= \Delta L_{BE} \\ \delta_D &= \Delta L_{DF}\end{aligned}$$

e a equação de compatibilidade passa a ser:

$$\frac{\Delta L_{BE}}{AB} = \frac{\Delta L_{DF}}{AD} \quad \text{(forma 2)}$$

Finalmente, precisamos de introduzir a relação entre o **alongamento** e o **esforço axial**. Dado que não há variação de temperatura neste exemplo, fica:

$$\frac{\left(\frac{NL}{EA}\right)_{BE}}{AB} = \frac{\left(\frac{NL}{EA}\right)_{DF}}{AD} \quad \text{(forma 3)}$$

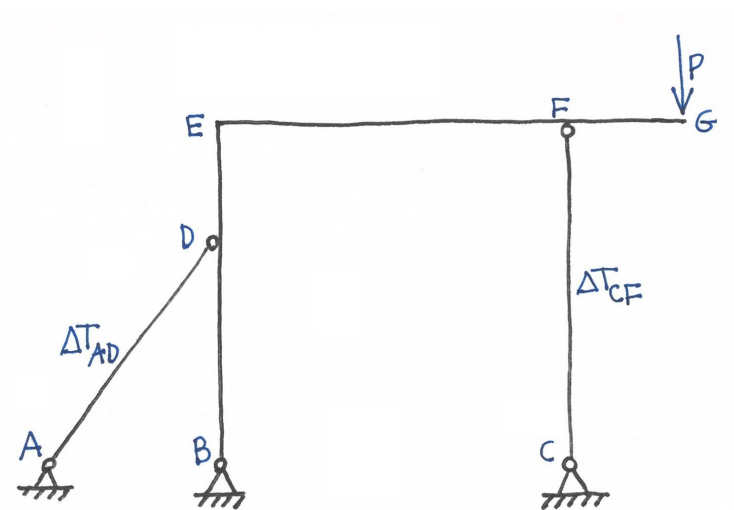
sendo esta a quarta equação que, juntamente com as equações de equilíbrio, pode ser utilizada para determinar as reações.

O Exemplo 2.4 anterior é uma estrutura simples, onde o deslocamento de cada nó é igual ao alongamento da barra, e ambos os tirantes estão tracionados.

Num caso mais geral:

- o deslocamento do nó pode ser diferente do alongamento da barra ligada a esse nó;
- pode haver uma barra em tração e outra em compressão;
- as barras deformáveis podem estar sujeitas a esforço axial e a variação de temperatura.

Exemplo 2.5:

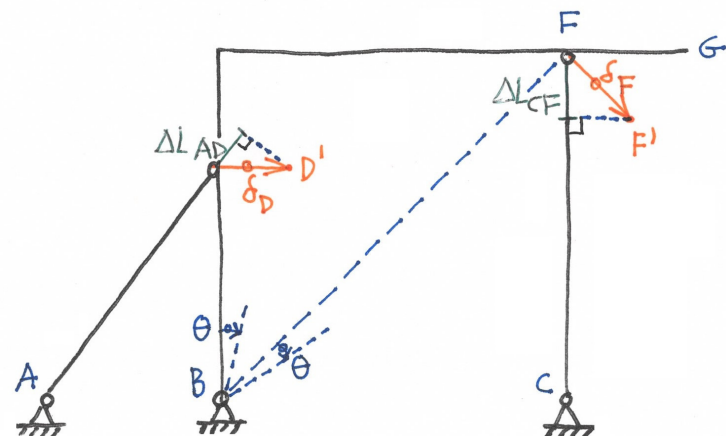


Neste Exemplo 2.5, a estrutura é composta por um corpo infinitamente rígido BDEFG, e duas barras articuladas deformáveis. As **ações aplicadas** consistem numa carga pontual P e variações de temperatura aplicadas às barras deformáveis.

No que diz respeito ao **grau de hiperestaticidade**, esta estrutura é análoga à do Exemplo 2.4, e por isso é também uma vez hiperestática.

Em relação às variações de temperatura, é importante perceber que:

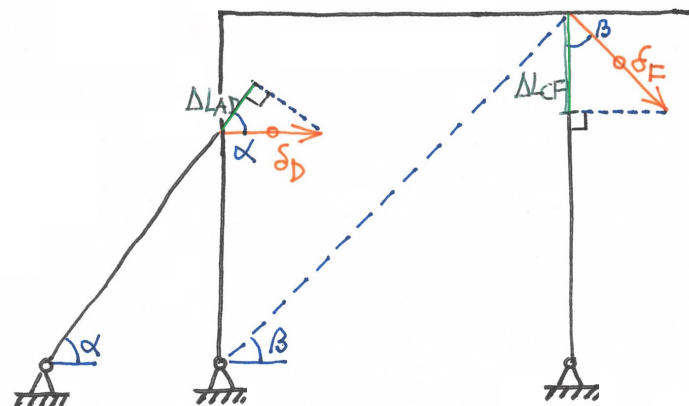
- **numa estrutura hiperestática, as variações de temperatura influenciam o valor das reações de apoio e os esforços**, porque as deformações térmicas de uma barra serão parcialmente restringidas pela estrutura restante, dando origem a forças de restrição.
- numa estrutura isostática, as variações de temperatura causam deslocamentos, mas não afetam as reações de apoio nem os esforços.



A compatibilidade das deformações neste Exemplo 2.5 é regida pela rotação do corpo rígido em torno do apoio duplo em B:

$$\tan \theta = \frac{\delta_D}{BD} = \frac{\delta_F}{BF} \quad (\text{forma 1})$$

Depois, precisamos de determinar a **relação entre o deslocamento do nó e o ΔL da barra**. O deslocamento do ponto D, até à sua posição final D', impõe que a barra AD alongue ΔL_{AD} como se determina geometricamente na imagem. A relação entre δ_D e ΔL_{AD} é expressa com base no ângulo α , que é conhecido porque depende apenas da geometria da estrutura.



$$\cos \alpha = \frac{\Delta L_{AD}}{\delta_D}$$

$$\cos \beta = \frac{\Delta L_{CF}}{\delta_F}$$

E, portanto, a condição de compatibilidade de deformações fica:

$$\frac{\Delta L_{AD} / \cos \alpha}{BD} = \frac{\Delta L_{CF} / \cos \beta}{BF} \quad (\text{forma 2})$$

Para obter a equação de compatibilidade de deformações escrita na sua forma final, forma 3, precisamos de substituir o valor ΔL pela sua relação com o esforço axial e a variação de temperatura na barra:

$$\Delta L = \frac{N L}{E A} + \alpha \Delta T L$$

Fica:

$$\frac{\left[\frac{NL}{EA} + \alpha \Delta T L \right]_{AD}}{BD \cos \alpha} = \frac{\left[\frac{NL}{EA} + \alpha \Delta T L \right]_{CF}}{BF \cos \beta} \quad \text{(forma 3)}$$

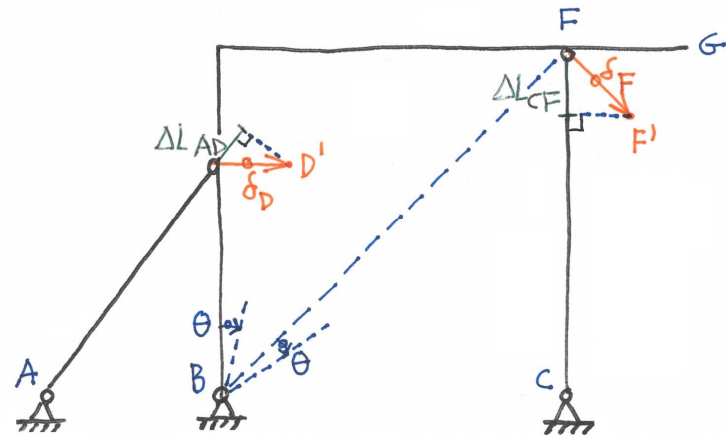
Dado que estamos a utilizar no cálculo a relação entre ΔL , N e ΔT , é necessário que haja **coerência** entre estas variáveis.

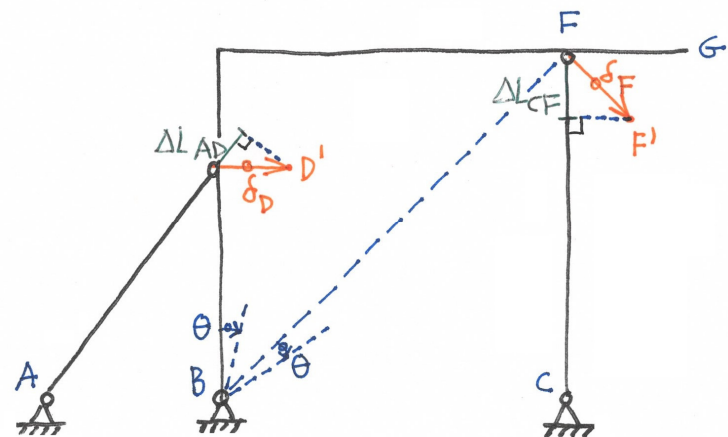
Neste exemplo, para a **barra AD**, vemos (na representação da compatibilidade das deformações) que a **variável ΔL_{AD} é o aumento do comprimento da barra**.

Consequentemente, a variável N_{AD} precisa de ser a força de tração na barra, e a variável ΔT_{AD} precisa de representar o aquecimento.

Isto significa que:

- ΔL_{AD} é uma quantidade positiva em caso de aumento do comprimento;
- N_{AD} é uma quantidade positiva se se tratar de uma força de tração;
- ΔT_{AD} é uma quantidade positiva em caso de aquecimento.



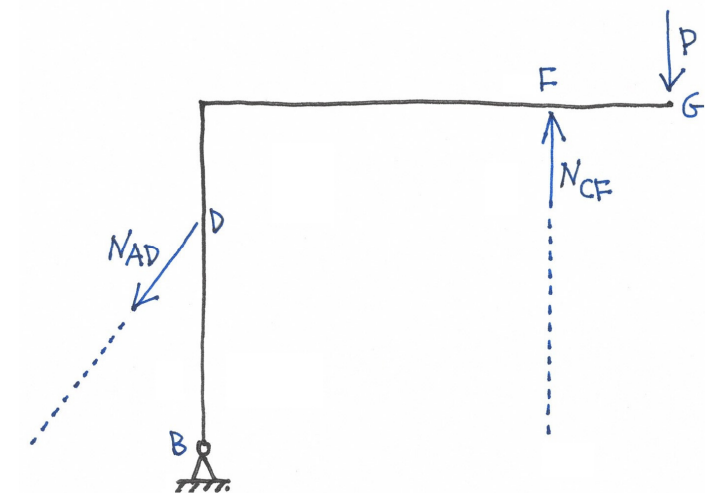


Para a **barra CF**, vemos (na representação da compatibilidade das deformações) que a **variável ΔL_{CF} é a diminuição do comprimento da barra**.

Consequentemente, a variável N_{CF} precisa de ser a força de compressão na barra, e a variável ΔT_{CF} o arrefecimento da barra.

Isto significa que:

- ΔL_{CF} é um número positivo em caso de diminuição do comprimento;
- N_{CF} é um número positivo se for um esforço de compressão;
- ΔT_{CF} é um número positivo em caso de arrefecimento.



Assim, as equações de equilíbrio serão escritas considerando as forças aplicadas ao corpo rígido, como se mostra na imagem.

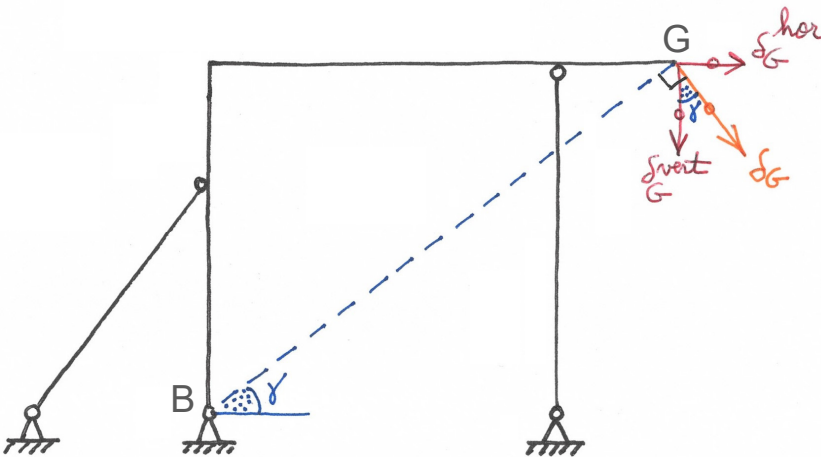
Existem outras **alternativas** para lidar com as convenções de sinais na análise da estrutura hiperestática. Qualquer que seja a alternativa adotada, é necessário que haja coerência entre ΔL , N e ΔT .

Uma vez calculados os esforços axiais nas barras deformáveis, o ângulo de rotação do corpo rígido pode ser determinado:

- calculando o alongamento de uma das barras deformáveis;
- e depois, utilizando a lógica que foi aplicada acima para escrever a equação de compatibilidade.

Depois disso, o deslocamento de qualquer outro ponto pertencente a esse corpo rígido pode ser calculado. Para o ponto G, fica:

$$\delta_G = \overline{BG} \tan \theta$$

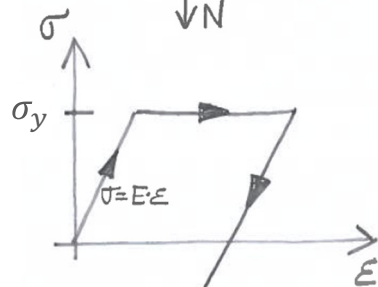


2.4. Análise de estruturas hiperestáticas ($H=1$) com comportamento material elasto-plástico

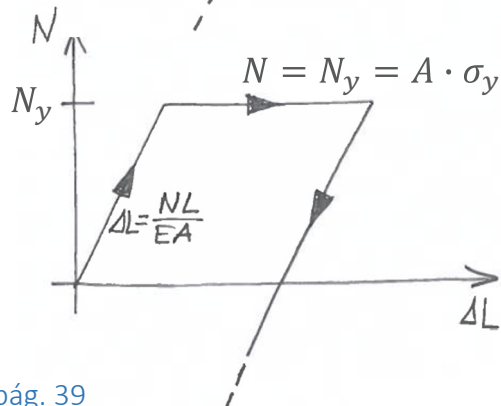


Em muitos **materiais dúcteis**, como por exemplo o aço, a relação tensão-extensão é caracterizada por:

- uma **fase elástica linear**, em que a relação tensão-extensão é dada pela lei de Hooke;
- uma **fase plástica**, uma vez atingida a **tensão de cedência** σ_y ;
- se ocorre **descarga** quando o material está em fase plástica, a trajetória de tensão-extensão é também caracterizada pela lei de Hooke.

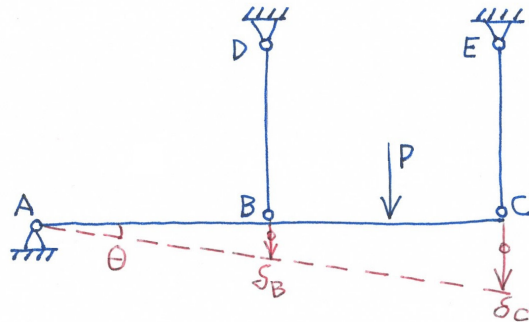
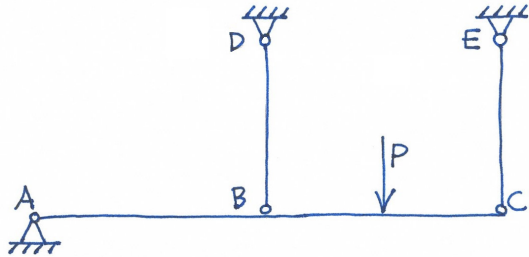


As imagens mostram a relação tensão-extensão (σ - ε) e a relação força-alongamento (N - ΔL), para uma barra sujeita a força axial, com **comportamento elástico-perfeitamente plástico**, caracterizado por um módulo de elasticidade E e uma tensão de cedência σ_y . As **equações para a fase elástica linear** também estão escritas nas imagens.



Note-se que, embora a verdadeira relação tensão-deformação de muitos materiais dúcteis, depois de se atingir σ_y , seja mais complexa, a análise estrutural é frequentemente feita assumindo um comportamento elástico-perfeitamente plástico. Esta é também a simplificação adotada nesta unidade curricular.

Exemplo 2.6:



Neste exemplo, uma estrutura hiperestática é sujeita a uma carga pontual P . A barra horizontal ABC é infinitamente rígida. As barras articuladas BD e CE têm um comportamento elástico-perfeitamente plástico, caracterizado pelo módulo de elasticidade E e pela tensão de cedência σ_y do material.

Como a estrutura é hiperestática, **enquanto ambos os elásticos se encontram na fase elástica**, o cálculo das reações e forças tem de ser feito utilizando:

- uma equação de compatibilidade de deformações;
- equações de equilíbrio.

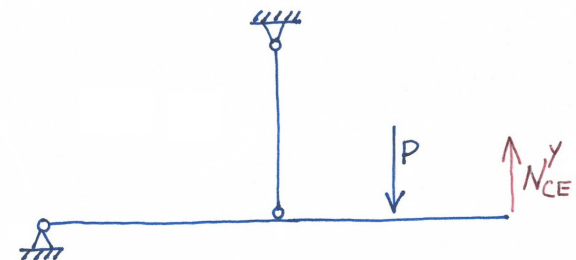
Nesta fase elástica, o **comportamento da estrutura** (forças, deslocamentos, ...) é **proporcional à carga aplicada**.

Para determinar qual é a **barra que entra na fase plástica em primeiro lugar**:

- calcula-se a estrutura para qualquer (baixo) valor de carga;
- a barra onde a tensão é mais próxima da tensão de cedência é a que entra na fase plástica em primeiro lugar (seria a barra CE neste exemplo).

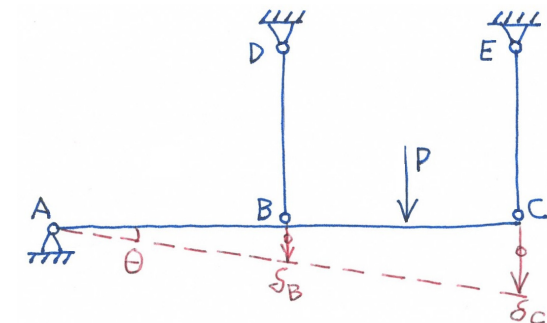
O **valor da carga** (P neste exemplo) **para o qual a estrutura entra na fase plástica** (chamemos-lhe P_y) pode ser determinado pela proporcionalidade (com base no resultado σ_{CE} calculado para o já mencionado, baixo, valor de P):

$$\frac{\sigma_{CE}}{\sigma_y} = \frac{P}{P_y}$$



Para valores de carga superiores a P_y , um dos tirantes (CE neste exemplo) está em fase plástica. Assim, a força nesse tirante é conhecida: é a força de cedência. Consequentemente, a força no outro tirante, e as reações de apoio, são calculadas utilizando **apenas as equações de equilíbrio**.

Note-se que, para $P > P_y$ a relação $\Delta L = (NL)/(EA)$ é **válida apenas** para o tirante que ainda não entrou em fase plástica (BD, neste caso).

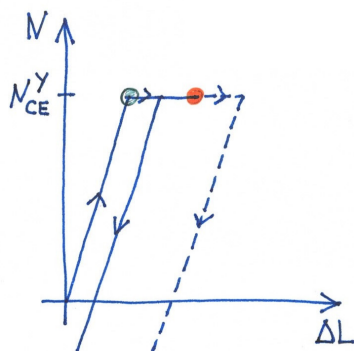
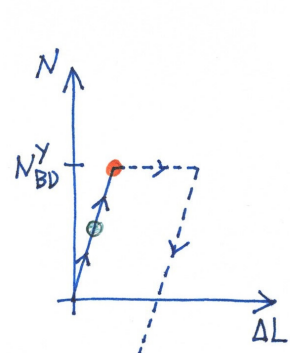
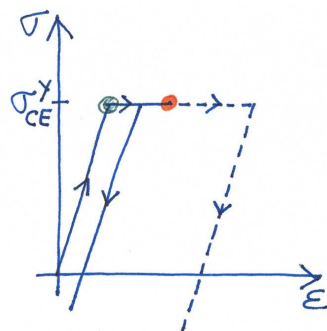
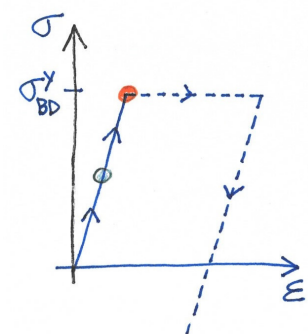


Uma vez determinado o alongamento da barra BD, o **deslocamento de qualquer outro ponto da estrutura** pode ser calculado, porque a barra rígida assegura a compatibilidade dos deslocamentos mesmo depois de uma das barras estar na fase plástica.

A **carga última**, P_u , é a carga para a qual ambos os tirantes atingem a respectiva força de cedência. Esta "carga última" é também chamada "carga de rotura", ou "carga de colapso", entre outros sinónimos.

BD:

CE:



● : $P = P_y$

● : $P = P_u$

As imagens mostram as **trajetórias** σ - ε e N - ΔL para as barras BD e CE deste Exemplo 2.6.

Estão assinalados os seguintes pontos:

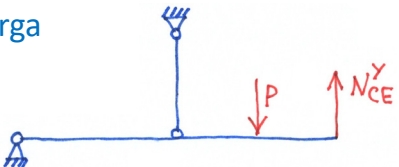
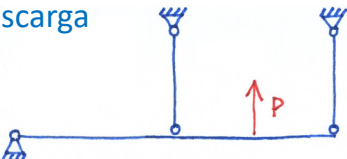
- o **fim da fase elástica** da estrutura ($P = P_y$);
- o ponto em que a **carga de colapso** da estrutura é alcançada ($P = P_u$).

Muitas vezes precisamos de calcular os **deslocamentos e esforços residuais** na estrutura, quando ela é carregada com $P > P_y$ e depois **a carga é completamente removida**.

Como o **comportamento da estrutura é diferente** nas fases de **carga** e **descarga**, os valores residuais têm de ser determinados calculando separadamente os efeitos de carga e descarga, e depois sobrepondo esses dois efeitos. Organizar os resultados do cálculo numa tabela como a da imagem é um procedimento conveniente para este tipo de problema.

Note-se que as forças axiais e os deslocamentos **na descarga** podem ser determinados pela **proporcionalidade** com os calculados anteriormente, para a **fase elástica** do comportamento da estrutura (para $P \leq P_y$).

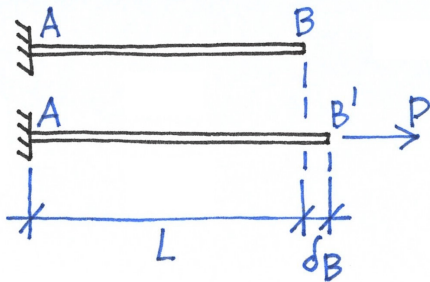
A descarga consiste em aplicar uma força em sentido oposto à da carga, de modo a que a soma dos efeitos de carga e descarga dê, no estado residual (final): $P=0$.

	N_{CE}	N_{BD}	δ_C
Carga 			
Descarga 			
Valor residual = Carga + Descarga			

3. Método da Unidade Fictícia de Carga para cálculo de deformações em estruturas articuladas planas

3.1. Fundamentos do Método da Unidade Fictícia de Carga, e utilização de métodos energéticos na engenharia de estruturas

Nos capítulos anteriores, tratámos dos conceitos de tensão e extensão. Um terceiro conceito importante, o conceito de **energia de deformação**, tem agora de ser introduzido.



A imagem mostra uma barra de comprimento L , área transversal uniforme A , e comportamento elástico linear caracterizado pelo módulo de elasticidade E . Ao aplicar, de uma forma lentamente crescente, uma carga pontual P , a extremidade B sofre um deslocamento δ_B .

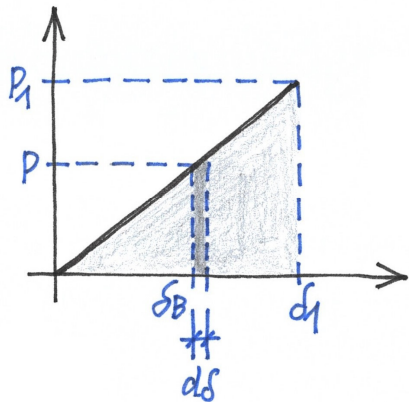
O trabalho W realizado pela carga P , quando aumenta até P_1 , pode ser quantificado da seguinte forma. O trabalho dW realizado pela carga P , quando a barra se alonga por uma pequena quantidade $d\delta$ é $dW=P \cdot d\delta$. Depois, o trabalho total W , quando a carga aumenta até P_1 é:

$$W = \int_0^{\delta_1} P \, d\delta$$

e é igual à área sob o diagrama de carga-deslocamento:

$$W = \frac{1}{2} P_1 \delta_1$$

Se a carga e o deslocamento forem expressos em N e m respetivamente, o trabalho é dado em joule (J), portanto $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.



A **lei da conservação da energia** implica que a energia potencial da força exterior, que é consumida quando o trabalho é feito, seja armazenada como outra forma de energia, ou dissipada:

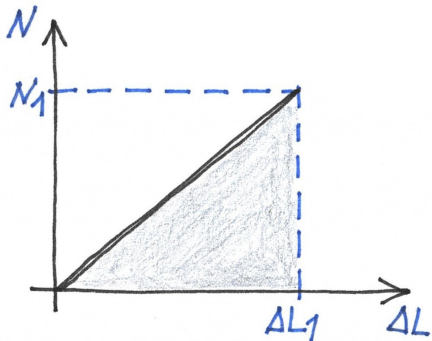
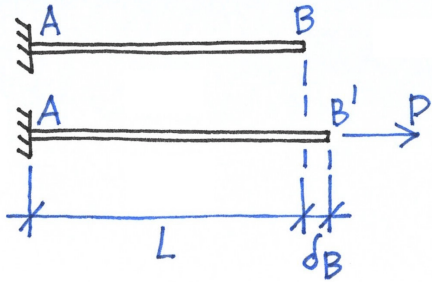
- parte da energia é armazenada em energia de deformação elástica, que é recuperável se a carga for removida mais tarde;
- parte pode ser armazenada como energia cinética, se a massa do corpo sofrer um movimento quando as cargas não são aplicadas lentamente;
- parte pode ser dissipada por atrito externo, por exemplo, por atrito de rotação em apoios simples ou duplos não perfeitos (existe algum atrito em apoios móveis, na realidade);
- parte pode ser dissipada por deformações plásticas ou viscosas do material, se este for solicitado para além da fase elástica.

Os métodos energéticos são portanto muito úteis, por exemplo, para a análise dos efeitos de cargas de impacto, ou problemas de vibração. Estes tipos de problemas estão fora do âmbito destas aulas teórico-práticas. Centraremos a nossa atenção na aplicação de métodos energéticos a **problemas de carregamento quase estático**, com **comportamento material elástico linear**, e no cenário teórico de apoios sem atrito. Nestas condições, o **trabalho realizado pela força exterior** é inteiramente armazenado como **energia de deformação elástica** U :

$$W = U$$

No exemplo aqui considerado, designando por N_1 a força axial na barra para $P = P_1$:

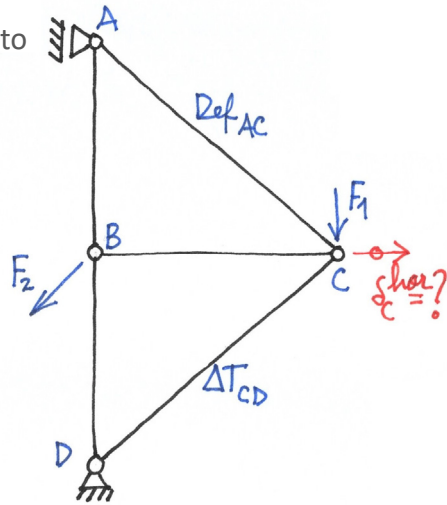
$$U = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 = \frac{1}{2} N_1 \Delta L_1 = \frac{1}{2} \frac{N_1^2 L}{E A}$$



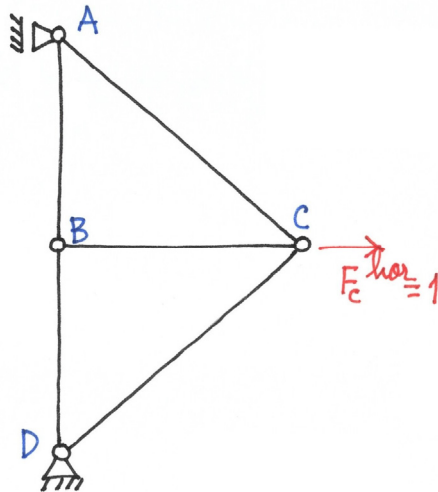
3.2. Cálculo de um deslocamento numa estrutura articulada plana

Exemplo 3.1:

Carregamento real:



Carregamento fictício:



Uma aplicação comum dos métodos energéticos é o chamado **Método da Unidade Fictícia de Carga**, também conhecido como **Método de Maxwell-Mohr**, para o cálculo de deformações em estruturas. De acordo com o método, o procedimento para o cálculo de um deslocamento nodal numa **estrutura articulada isostática** é o seguinte:

- os esforços axiais N_i em todas as barras da estrutura, devido à **carga real aplicada**, têm de ser calculadas (utilizando o método do equilíbrio dos nós, ou o método das secções de Ritter);
- depois, o alongamento das barras, ΔL_i , devido à carga aplicada e às deformações impostas (variações de temperatura ΔT_i e defeitos de fabrico Def_i) são determinados como:

$$\Delta L_i = \left[\frac{N L}{E A} + \alpha \Delta T L + Def \right]_i$$

- considerando agora a estrutura carregada **apenas** com uma **carga unitária fictícia (em correspondência com o deslocamento que se pretende determinar)**, os esforços axiais nas barras têm de ser determinados; o esforço axial na barra i , devido a esta carga unitária, é designado $\bar{N}_i$;

O objetivo neste exemplo é o cálculo do deslocamento horizontal do nó C, portanto a carga fictícia é uma carga unitária horizontal aplicada sobre o nó C.

- considerando **deformações reais e forças fictícias, o trabalho das forças externas é igual à energia de deformação elástica** :

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{\text{hor}} = \sum_{i=1}^n (\overline{N}_i \times \Delta L_i)$$

o que permite determinar o deslocamento pretendido, δ_C^{hor} . Têm que ser usadas convenções de sinais coerentes para todas as barras, nomeadamente: esforços axiais com valor positivo em caso de tração; alongamentos ΔL_i com valor positivo em caso de aumento do comprimento.

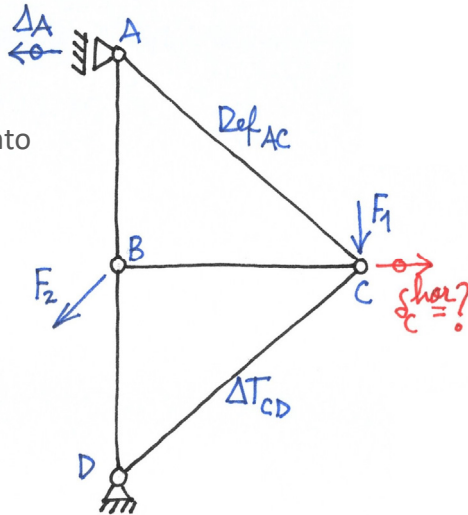
Note-se que neste Exemplo 3.1 a única força exterior que contribui para o trabalho W é a carga fictícia unitária. As reações nos apoios são também forças exteriores, mas não fazem qualquer trabalho neste exemplo porque não há movimento de qualquer apoio.

A demonstração deste método pode ser encontrada no livro *Mecânica dos Materiais*, dos autores Beer et al., nos capítulos 11.11 a 11.13 (numeração na 6ª edição). Essa demonstração é baseada no Teorema de Castigliano.

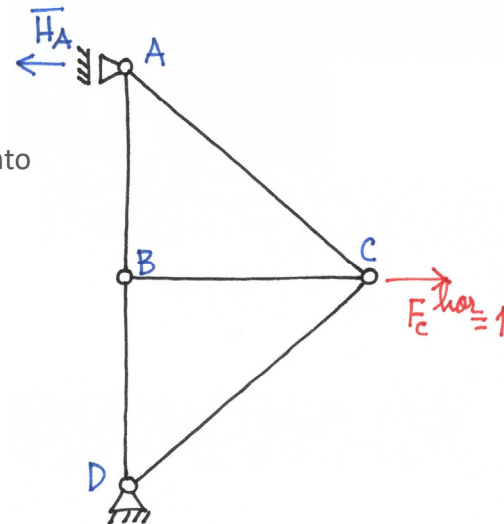
3.3. Influência dos assentamentos de apoio

Exemplo 3.2:

Carregamento real:



Carregamento fictício:



Frequentemente, é necessário considerar, no cálculo do deslocamento pretendido, a **influência de algum movimento de apoio**, que pode ser o resultado de algum assentamento numa fundação, ou o movimento de alguma estrutura de suporte. Neste Exemplo 3.2, existe um assentamento de apoio em A, Δ_A . Neste caso, igualizando o trabalho das forças externas e a energia de deformação elástica, obtém-se:

$$W = U$$

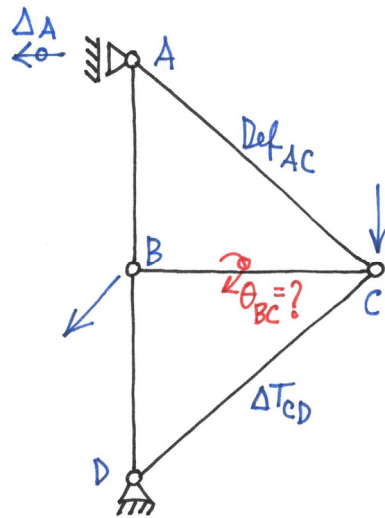
$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{\text{hor}} + \overline{H}_A \times \Delta_A = \sum_{i=1}^n (\overline{N}_i \times \Delta L_i)$$

onde $\overline{H}_A$ é a reação de apoio, na estrutura com o carregamento fictício. Mais uma vez, a equação anterior dá o deslocamento pretendido se o valor do assentamento (Δ_A) for conhecido.

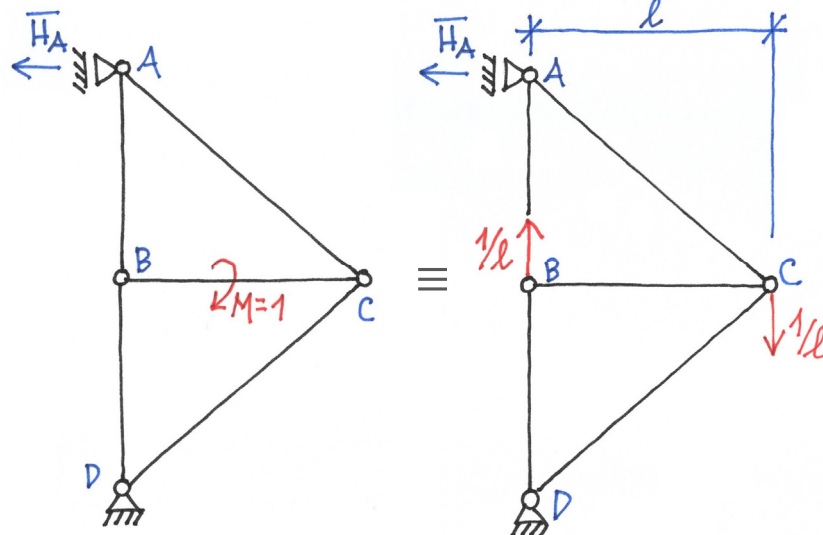
3.4. Cálculo de uma rotação de barra numa estrutura articulada plana

Exemplo 3.3:

Carregamento real:



Carregamento fictício:



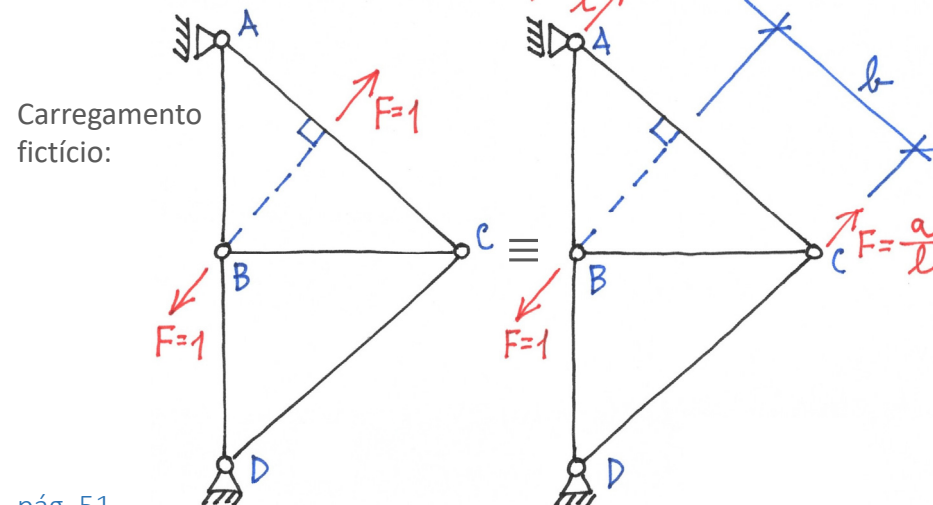
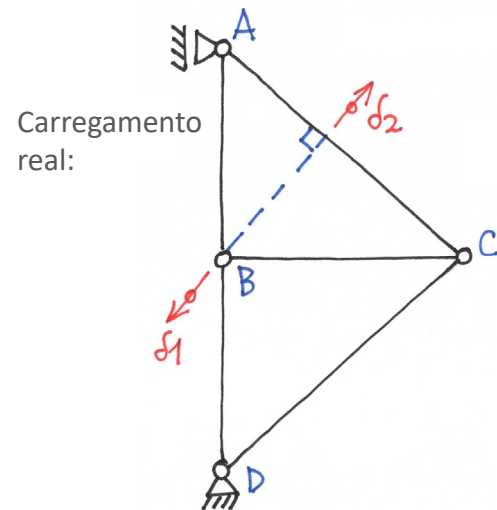
Se a deformação pretendida for a **rotação** de uma determinada barra, a **carga fictícia unitária é um momento unitário**. Contudo, dado que o carregamento em estruturas articuladas deve ser composto por forças concentradas apenas nos nós, esse momento unitário deve ser substituído por um binário de forças equivalente. A igualdade do trabalho das forças externas e da energia de deformação elástica fica:

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \theta_{BC} + \overline{H}_A \times \Delta_A = \sum_{i=1}^n (\overline{N}_i \times \Delta L_i)$$

3.5. Cálculo de um deslocamento relativo entre uma barra e um nó numa estrutura articulada plana

Exemplo 3.4:



Em alguns problemas, estamos interessados no cálculo do **deslocamento relativo** entre um nó e uma barra. Mais especificamente, isso significa o deslocamento relativo entre o nó e o ponto da barra mais próximo desse nó, como mostra a figura:

$$\delta_{\text{relativo}} = \delta_1 + \delta_2$$

A **carga fictícia unitária** correspondente consiste em duas **forças concentradas em correspondência com estes deslocamentos**. Contudo, como o carregamento em estruturas articuladas deve ser composto por forças concentradas apenas nos nós, a força pontual na barra deve ser substituída por um par de forças equivalente nos nós da barra. A igualdade do trabalho e da energia de deformação elástica fica:

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_1 + 1 \times \delta_2 = \sum_{i=1}^n (\bar{N}_i \times \Delta L_i)$$

3.6. Organização prática dos resultados dos cálculos

Quando se pretende calcular várias deformações (deslocamentos, rotações ou deformações relativas), numa estrutura submetida a um dado carregamento real (como nos exemplos 3.1 a 3.4 apresentados anteriormente), as etapas de cálculo podem ser convenientemente organizadas numa tabela como se segue:

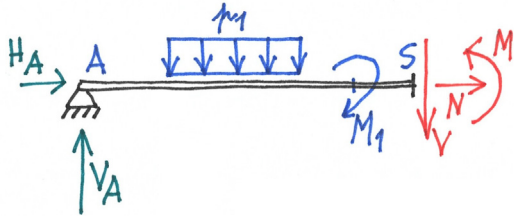
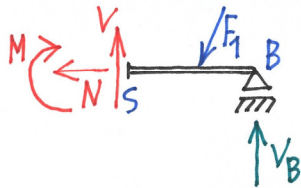
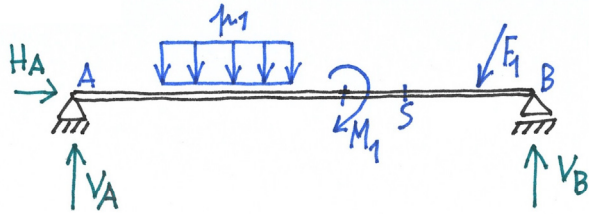
Barra	Carregamento real:		Cálculo de δ_C^{hor}		Cálculo de θ_{BC}		Cálculo de δ_{relativo}	
	N_i	ΔL_i	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i \cdot \Delta L_i$	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i \cdot \Delta L_i$	$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i \cdot \Delta L_i$
AB								
AC								
BC								
BD								
CD								

Se a carga real não for alterada, os valores ΔL_i permanecem inalterados para o cálculo das várias deformações pretendidas.

A soma dos valores nesta coluna dá a quantidade $\sum(\bar{N}_i \cdot \Delta L_i)$ para cálculo de δ_C^{hor}

4. Diagramas de esforços em estruturas planas

4.1. Cálculo dos diagramas através da aplicação das condições de equilíbrio



As letras N , V e M são universalmente adotadas para identificar estes diagramas. A letra N significa força **N**ormal à secção transversal, V significa **V**ertical, que é a direção do esforço transverso em vigas horizontais (embora esta seja uma designação bastante peculiar, porque muitas vigas não são horizontais e, nessas, a força de corte não é vertical) e M significa **M**omento.

Os diagramas de esforços dão as **forças e momentos resultantes** que atuam em qualquer secção transversal de uma estrutura. Numa estrutura plana, sujeita apenas a cargas no plano, os esforços são caracterizados através dos diagramas de:

- esforço axial (N);
- Esforço transverso (V);
- momento fletor (M).

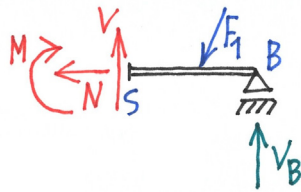
A imagem mostra um exemplo de uma estrutura plana. Para determinar os esforços em qualquer secção transversal S , podemos começar por isolar a parte da estrutura de um lado de S , e representar todas as forças aplicadas à mesma (forças aplicadas, reações de apoio, e esforços na secção S). Este é o chamado **diagrama de corpo livre**. O diagrama de corpo livre tem de estar em equilíbrio. Portanto, ao escrever as três equações de equilíbrio para esse corpo, obtém-se:

- $N = \sum F_i^{\parallel}$
- $V = \sum F_i^{\perp}$
- $M = \sum (F_i \cdot z_i + M_i)$

Ou seja:

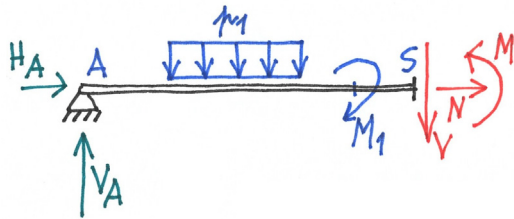
- N é a soma de todas as componentes de força paralelas ao eixo da barra, aplicadas **num dos lados da secção transversal em análise**;
- V é a soma de todas as componentes de força perpendiculares ao eixo da barra, aplicadas num dos lados da secção transversal em análise;
- M é a soma dos momentos concentrados M_i e das forças aplicadas multiplicadas pelos braços correspondentes, aplicados num dos lados da secção transversal em análise.

4.2. Convenção para esforços positivos, e para a representação dos diagramas

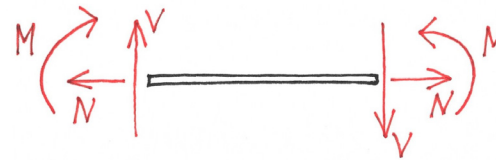


Nestes dois diagramas de corpo livre, as forças internas na secção S estão representadas com os seus sentidos positivos:

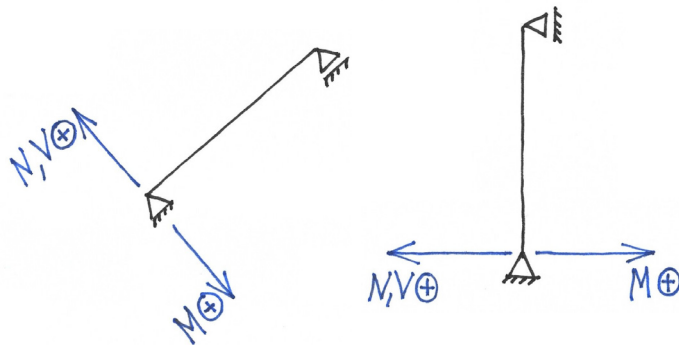
- no primeiro diagrama de corpo livre, podemos ver o **sentido positivo** dos **esforços que atuam na extremidade esquerda** de um segmento de barra;
- no segundo diagrama de corpo livre, podemos ver o sentido positivo dos esforços que atuam na extremidade direita de um segmento de barra.



A convenção para esforços positivos, aplicados nas extremidades esquerda e direita de uma barra (ou segmento de barra), pode assim ser resumida numa imagem como se segue:

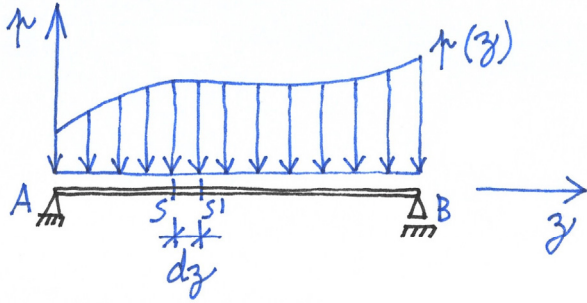


Nos diagramas de esforços, os valores positivos de N e V são representados do lado superior da barra. Os **valores de M positivos** são representados do **lado inferior** da barra. Esta convenção para o diagrama de momentos fletores é (quase) universalmente adotada, de modo que o diagrama seja apresentado **do lado da barra onde atuam tensões de tração**.



Numa **barra vertical**, assume-se normalmente que a extremidade inferior é a "esquerda", de modo que os valores positivos dos esforços são desenhados dos lados indicados na imagem.

4.3. Cálculo dos diagramas utilizando as relações entre p , V e M



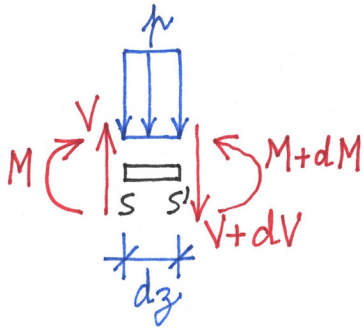
Considerando que:

- $p(z)$ é a **carga exterior distribuída** aplicada a uma barra, na direção **perpendicular** ao eixo da barra, na posição definida pela coordenada z ; tem um sinal positivo quando o seu sentido é **descendente**;
- $V(z)$ representa a equação do esforço transversal na barra;
- $M(z)$ representa a equação do momento fletor na barra.

As relações entre estas variáveis são:

$$p(z) = -\frac{dV(z)}{dz}$$

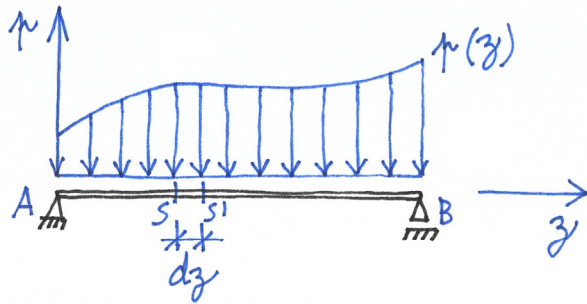
$$V(z) = \frac{dM(z)}{dz}$$



Estas duas equações mostram que:

- se $p(z)$ for um polinómio de **grau** n , $V(z)$ é uma função polinomial de grau $n + 1$ e $M(z)$ é de grau $n + 2$;
- Na posição onde $V(z) = 0$, $M(z)$ atinge um **máximo ou mínimo local**;
- se $p(z)$ é positivo (i.e. é uma carga descendente), $V(z)$ decresce para valores de z crescentes, e $M(z)$ apresenta uma concavidade voltada para cima;
- O diagrama $V(z)$ apresenta uma maior **declive** onde $p(z)$ é maior; o diagrama $M(z)$ tem um maior declive onde $V(z)$ é maior.

4.4. Demonstração das relações entre p , V e M



Consideremos uma viga sujeita a uma carga distribuída $p(z)$ qualquer, onde $p(z)$ é a componente da carga distribuída na direção perpendicular ao eixo da barra. Se a carga distribuída não for perpendicular ao eixo da viga, apenas a componente perpendicular importa, para este efeito. Os esforços nas secções S e S' , separadas por uma distância infinitesimal dz , são mostrados na segunda imagem. Se os esforços na secção transversal S são V e M , eles sofrem variações dV e dM ao longo do comprimento dz .

Escrevendo as **condições de equilíbrio para o diagrama de corpo livre** representado na segunda imagem, obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V - (V + dV) - p \, dz = 0$$

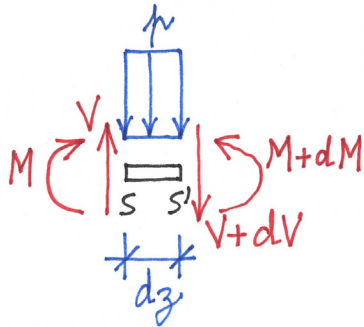
$$\Leftrightarrow p = -\frac{dV}{dz}$$

onde y representa a direção perpendicular ao eixo da barra, e :

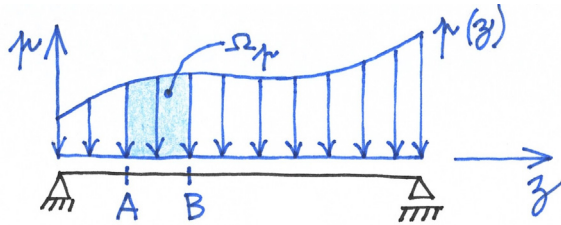
$$\sum m|_{S'} = 0 \Leftrightarrow M + V \, dz - p \frac{dz^2}{2} - (M + dM) = 0$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{dM}{dz}$$

tendo em conta que $dz^2 \cong 0$ por ser um infinitésimo de grau superior.



4.5. Relações úteis adicionais entre p , V e M



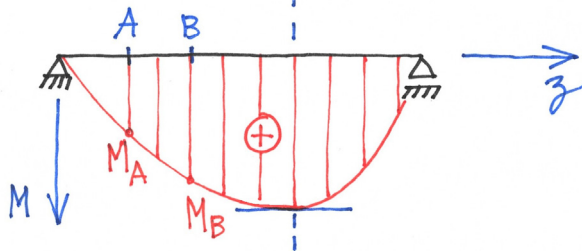
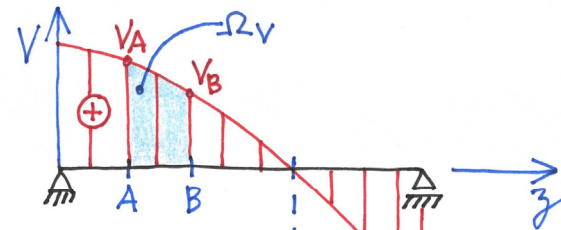
Integrando as equações $p = -dV/dz$, entre duas posições A e B, conclui-se que:

$$\frac{dV}{dz} = -p \Leftrightarrow \int_A^B dV = - \int_A^B p \, dz \Leftrightarrow V_B - V_A = - \int_A^B p \, dz = -\Omega_p|_A^B$$

onde $\Omega_p|_A^B$ é a **área delimitada pelo diagrama $p(z)$** entre as posições A e B. Da mesma forma, ao integrar $V = dM/dz$, entre duas posições A e B, obtém-se:

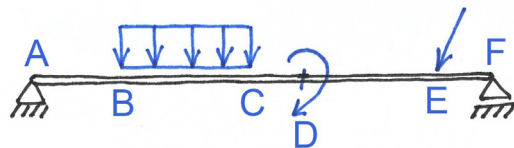
$$\frac{dM}{dz} = V \Leftrightarrow \int_A^B dM = \int_A^B V \, dz \Leftrightarrow M_B - M_A = \int_A^B V \, dz = -\Omega_V|_A^B$$

onde $\Omega_V|_A^B$ é a área delimitada pelo diagrama de esforço transversal entre as posições A e B.

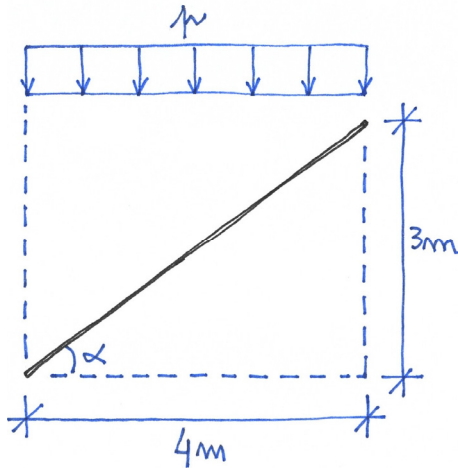


Note-se que:

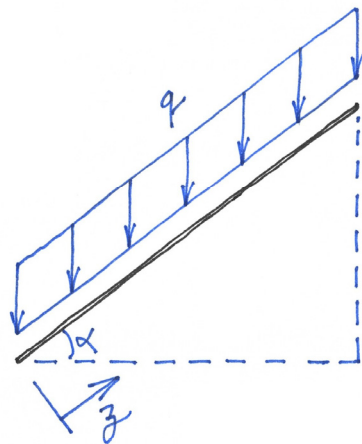
- a **variável z** é utilizada para caracterizar a posição ao longo do eixo da barra, porque as variáveis x e y estão reservadas para a caracterização da posição de um ponto (uma fibra) na secção transversal da barra;
- numa determinada barra, poderá ser necessária mais de uma equação de esforços [$N(z)$, $V(z)$ e $M(z)$], se houver **descontinuidades** nas forças aplicadas ou momentos concentrados. No exemplo mostrado na imagem, teriam de ser escritas equações separadas para os segmentos AB, BC, CD, DE e EF.



4.6. Barras inclinadas em relação à direção da carga uniformemente distribuída



Em alguns tipos de estruturas comuns, como vigas e lajes de cobertura, ou escadas, **vigas inclinadas** estão sujeitas a **carga vertical** (peso próprio e outros pesos). Neste exemplo, um segmento de viga inclinada é sujeito a uma carga uniformemente distribuída p , que é uma **quantidade por unidade de comprimento** medida **na direção horizontal**, ou seja, a sua resultante é $p \cdot 4$.



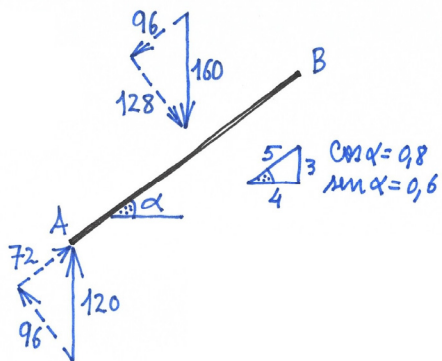
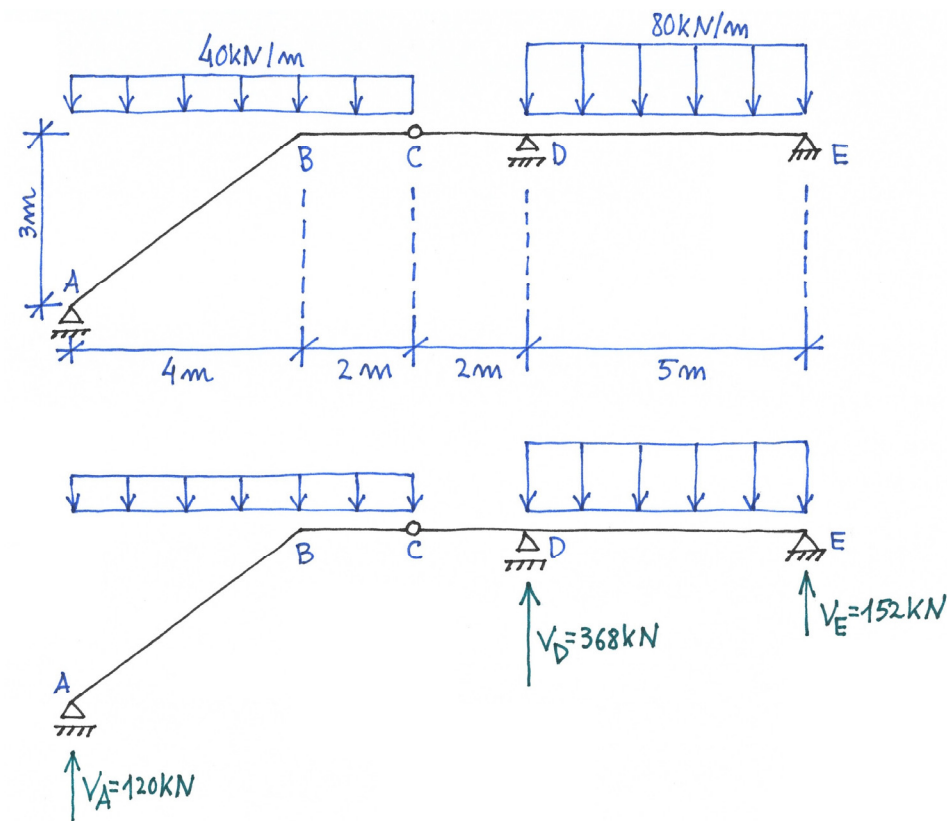
Para determinar os diagramas de esforços para este segmento de barra inclinada (que pode fazer parte de uma estrutura maior), é necessário calcular o valor da carga distribuída expresso em kN por metro de comprimento de barra (aqui denominada carga q). A determinação de q é feita igualando o valor resultante das cargas distribuídas nas situações representadas nas imagens superior e inferior (a resultante tem de ser mantida):

$$p \cdot 4 = q \cdot 5 \Leftrightarrow q = \frac{4}{5} p$$

Após calcular q , as componentes desta carga q com as direções **paralela** e **perpendicular** ao eixo da barra ($q^{\parallel}$ e $q^{\perp}$) podem ser facilmente quantificadas através das relações trigonométricas. A componente $q^{\parallel}$ é depois utilizada no cálculo do diagrama de esforço axial. A componente $q^{\perp}$ é utilizada no cálculo do diagrama de esforço transversal e do de momento fletor desta barra.



4.7. Exemplo de cálculo



Problema:

A figura mostra uma estrutura reticulada plana, sujeita a cargas uniformemente distribuídas. A carga aplicada à barra AB é de 40 kN por metro medido ao longo da direção horizontal. Pretende-se determinar os diagramas de esforços.

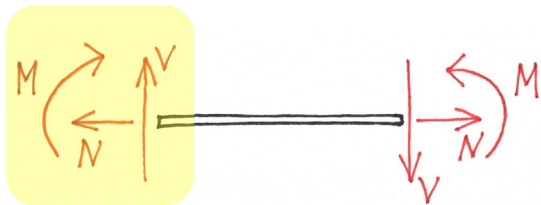
Serão exploradas diferentes alternativas para o cálculo dos diagramas.

Em primeiro lugar, as reações de apoio têm de ser determinadas. Isto pode ser feito por meio das três equações de equilíbrio global, mais uma equação de equilíbrio de momentos aplicada ao corpo ABC, em torno da rótula C. Os resultados são mostrados na imagem.

Barra AB – alternativa 1:

Nesta alternativa, os diagramas serão determinados **sem escrever as equações de esforços**.

A força aplicada no apoio A, e a resultante da carga distribuída, são decompostas nas suas componentes paralela e perpendicular ao eixo da barra.



Para determinar os esforços na extremidade A, note-se que a única força aplicada à esquerda desse ponto é a força vertical de 120kN (reação de apoio). Os esforços nesta posição seriam positivos se o sentido das forças normais e transversais aplicadas fosse o indicado na extremidade destacada a amarelo na imagem da **convenção** (relativamente ao eixo da barra). Os esforços são assim:

- $N_A = -72$ kN
- $V_A = +96$ kN
- $M_A = 0$ (o momento resultante à esquerda de A é zero)

Para determinar os esforços na extremidade B, **somamos as resultantes** das forças aplicadas à esquerda dessa posição, mostradas na imagem:

- $N_A = -72 + 96 = +24$ kN
- $V_A = +96 - 128 = -32$ kN

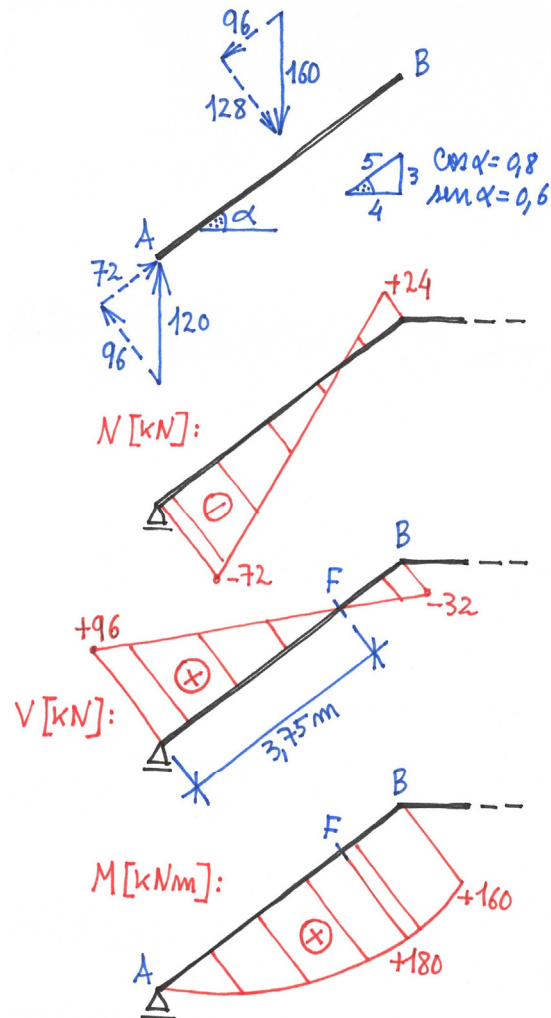
Notando que o esforço transversal passa por zero entre A e B, a posição exata onde $V = 0$ (aqui designada por ponto F) tem de ser determinada, porque é a posição onde M tem um **máximo local**. Uma vez que $V(z)$ é uma reta, essa posição pode ser determinada por proporcionalidade (equivalência de triângulos):

$$\frac{96 + 32}{96} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x = 3,75 \text{ m}$$

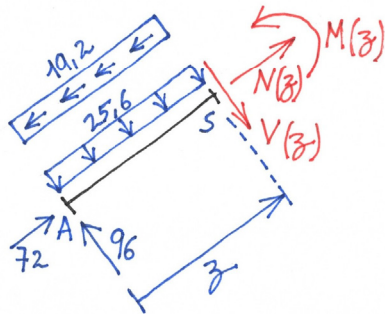
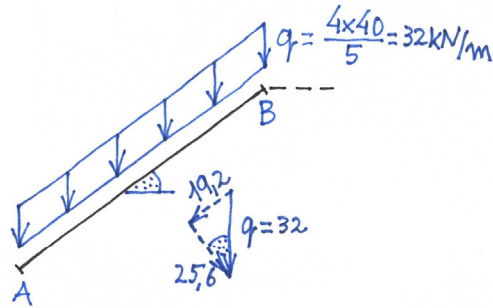
Os momentos fletores podem ser calculados através da igualdade entre a **variação do momento** e a **área delimitada pelo diagrama de esforço transversal**:

$$M_F - M_A = \Omega_V|_A^F \Leftrightarrow M_F - 0 = \frac{96 \times 3,75}{2} \Leftrightarrow M_F = 180 \text{ kNm}$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado para calcular M_B .



Barra AB – alternativa 2:



Nesta alternativa, os diagramas serão determinados utilizando as **equações de equilíbrio** para o **diagrama de corpo livre**. O diagrama de corpo livre (mostrado na segunda imagem) consiste em todas as forças aplicadas ao segmento de barra. Neste caso, estamos a trabalhar com o segmento de barra a partir da extremidade mais à esquerda da barra. O comprimento deste segmento é a **coordenada genérica z** .

$$\begin{aligned}\sum F^{\parallel} = 0 &\Leftrightarrow 72 + N(z) - 19,2 z = 0 \\ &\Leftrightarrow N(z) = -72 + 19,2 z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F^{\perp} = 0 &\Leftrightarrow 96 - V(z) - 25,6 z = 0 \\ &\Leftrightarrow V(z) = 96 - 25,6 z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum m|_S = 0 &\Leftrightarrow 96 z - 25,6 z^2/2 - M(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow M(z) = 96 z - 25,6 z^2/2\end{aligned}$$

Uma vez conhecidas as expressões $N(z)$, $V(z)$ e $M(z)$, os diagramas podem ser traçados.

Barra AB – alternativa 3:

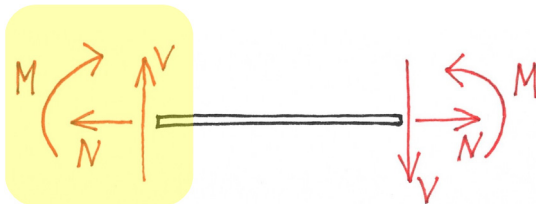
Nesta alternativa, os diagramas também serão determinados escrevendo as equações correspondentes mas, em vez de escrever as equações de equilíbrio para o diagrama de corpo livre, o procedimento para o cálculo dos esforços em S (a uma distância genérica z da extremidade mais à esquerda da barra) será o seguinte:

- os esforços serão determinados como as **resultantes das forças e momentos** aplicados à esquerda de S;
- se os sentidos das resultantes, $N(z)$, $V(z)$ e $M(z)$ forem os indicados na segunda imagem (isto é, se corresponderem à **convenção** para os esforços, como indicado na terceira imagem), os esforços são quantidades positivas (caso contrário são valores negativos).

Os esforços em S ficam:

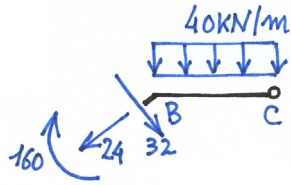
- $N(z) = -72 + 19,2 z$
- $V(z) = 96 - 25,6 z$

A equação de momento fletor também pode ser determinada calculando o momento resultante das forças aplicadas à esquerda de S. Em alternativa, pode ser determinada aplicando a relação entre a variação do momento e o **integral da equação de esforço transversal** (recorde-se que este integral é equivalente à área delimitada pelo diagrama):



$$\begin{aligned}
 M(z) - M_A &= \int_0^z V(z) dz \\
 \Leftrightarrow M(z) &= \int_0^z (96 - 25,6 z) dz \\
 \Leftrightarrow M(z) &= 96 z - 25,6 z^2 / 2
 \end{aligned}$$

Barra BC – alternativa 1

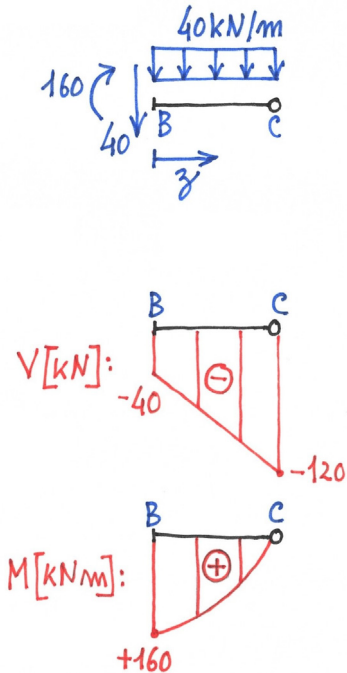


Antes de começar a determinação dos diagramas para a barra, é útil representar as **resultantes de todas as forças e momentos aplicados à esquerda da barra BC**. Estas resultantes são os esforços $N(z)$, $V(z)$ e $M(z)$ que acabam de ser determinados para o fim da barra AB.

Uma vez que as direções das barras AB e BC não são coincidentes, para calcular $N(z)$ e $V(z)$ para a barra BC, estas forças de 24 kN e 32 kN mostradas na imagem têm de ser decompostas nas direções axial e transversal da barra BC.

Mas existe uma alternativa mais conveniente, que evita a necessidade de fazer essa decomposição - ver alternativa 2.

Barra BC – alternativa 2

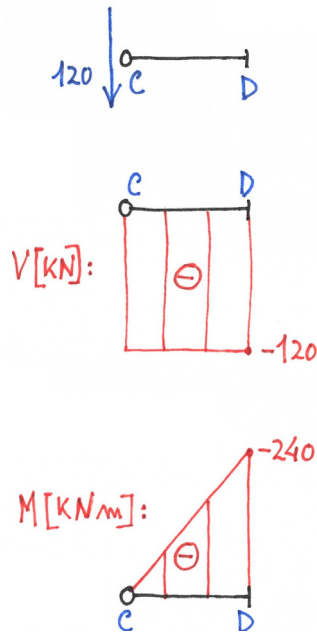


As resultantes de todas as forças e momentos aplicados à esquerda da barra BC podem ser diretamente quantificadas através da **soma das resultantes das cargas aplicadas e das reações de apoio**. Neste caso, essas cargas e reações são ortogonais ao segmento de barra em análise (BC), pelo que, utilizando este procedimento, as decomposições de forças que seriam precisas na alternativa 1 podem ser evitadas. As resultantes correspondem a uma força vertical descendente de 40 kN. O momento fletor transmitido da barra AB para a barra BC é de 160 kNm (o momento não é influenciado pelas diferentes direções das duas barras).

Sabendo as resultantes aplicadas em B e as forças aplicadas ao longo de BC (são mostradas na imagem), os diagramas podem ser desenhados utilizando uma das alternativas aprendidas anteriormente:

- $N(z) = 0$
- $V(z) = -40 - 40z$
- $M(z) = 160 - 40z - 20z^2$

Barra CD:

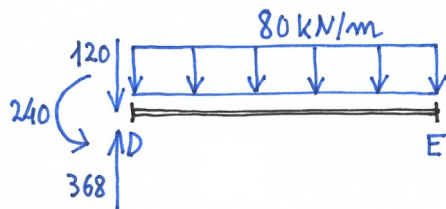


Mais uma vez, devemos começar por identificar os esforços aplicados na extremidade mais à esquerda da barra. A forma mais fácil de o conseguir é simplesmente olhar para os esforços no final da barra BC. Só existe esforço transversal nesta posição ($V = -120$ kN), o que significa que a resultante em C é uma força vertical descendente.

Precisamos também de identificar qualquer carga aplicada ao longo do comprimento da barra (CD). Neste caso, não existe tal carga. Note-se que a força aplicada no ponto D (a reação vertical no apoio) não é necessária. Vamos calcular os diagramas a partir da extremidade mais à esquerda da barra e, portanto, as **forças e momentos concentrados** aplicados no **fim da barra** não influenciam os diagramas até que esse ponto seja alcançado.

Então, partindo da extremidade mais à esquerda da barra, os diagramas devido a esta força vertical para baixo podem ser traçados.

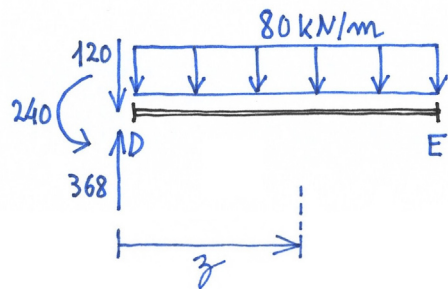
Barra DE – alternativa 1:



Seguindo o mesmo procedimento que acabou de ser utilizado para as barras BC e CD, devemos começar por identificar os esforços aplicados na extremidade mais à esquerda da barra, que são iguais aos esforços no final da barra CD:

- $N = 0$
- $V = -120$ kN
- $M = -240$ kNm

Também precisamos das cargas ao longo do comprimento da barra (DE), que neste caso consistem na reação vertical no apoio D e na carga distribuída de 80 kN/m. A força concentrada aplicada em E (a reação de apoio) não é utilizada, pela mesma razão explicada para a barra CD.



Depois disso, as expressões de $N(z)$, $V(z)$ e $M(z)$ podem ser escritas

- utilizando as condições de equilíbrio para o diagrama de corpo livre a partir da extremidade mais à esquerda da barra,
- ou calculando as resultantes das cargas aplicadas à esquerda da secção transversal definida pela coordenada genérica z :

$$N(z) = 0$$

$$V(z) = -120 + 368 - 80z = 248 - 80z$$

$$M(z) - M_D = \int_0^z V(z) dz$$

$$\Leftrightarrow M(z) - (-240) = \int_0^z (248 - 80z) dz$$

$$\Leftrightarrow M(z) = -240 + 248z - 40z^2$$

Depois, os diagramas podem ser traçados. Dado que o diagrama de esforço transverso passa por zero, no ponto aqui designado por G, a coordenada deste ponto tem de ser determinada:

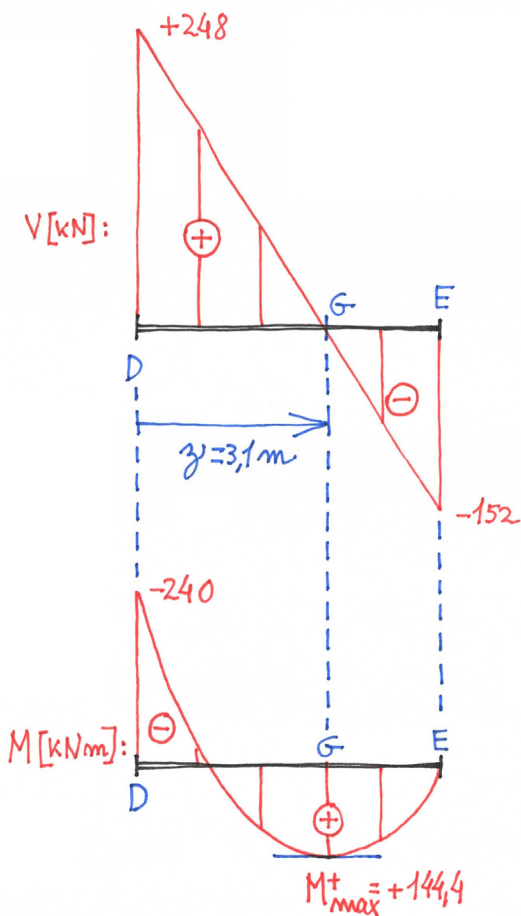
$$V(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow 248 - 80z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3,1 \text{ m}$$

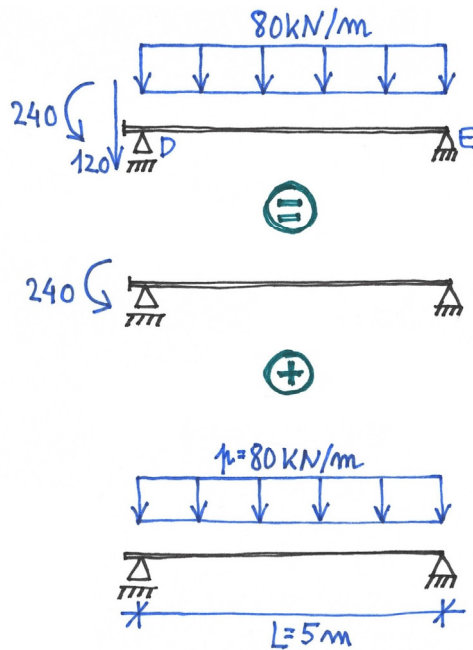
E o máximo local correspondente, do diagrama de momentos fletores, também tem de ser calculado:

$$M(z = 3,1\text{m}) = +144,4 \text{ kNm}$$



Barra DE – alternativa 2:

A barra DE é um segmento de barra, entre dois apoios, sujeito a uma carga uniformemente distribuída perpendicular ao eixo da barra. Este é um caso muito comum em estruturas de engenharia civil. Para este tipo de elemento, os diagramas de esforços podem ser facilmente traçados utilizando o seguinte procedimento:



- em primeiro lugar, a estrutura é **cortada** imediatamente à esquerda da barra em análise, e os esforços nesse corte são representados, de modo a que o corpo mostrado na primeira imagem possa ser isolado; estas forças internas são as calculadas antes, no final do segmento CD;
- em segundo lugar, é preciso perceber que a força vertical neste corte (120 kN) não exerce qualquer influência sobre os diagramas de esforços transversos e momentos fletores, porque a posição de corte coincide com um apoio vertical, e portanto esta força é **diretamente transferida** para esse **apoio**.
- finalmente, conclui-se que há duas cargas aplicadas a esta barra simplesmente apoiada DE: um momento fletor na sua extremidade esquerda, e uma carga uniformemente distribuída de 80 kN/m ; os diagramas de esforços podem ser determinados pela **sobreposição dos diagramas** para cada uma destas cargas individuais.

O diagrama de momentos fletores devidos ao momento concentrado (aqui chamado M') tem de ser uma linha reta, porque o diagrama de esforço transversal causado por este momento concentrado é constante ao longo da barra DE. Dado que os momentos fletores nas secções D e E são conhecidos, o diagrama M' pode já ser representado.

O diagrama dos momentos fletores devidos à **carga uniformemente distribuída**, na viga simplesmente apoiada, tem a forma parabólica bem conhecida, com um valor máximo a meio vão igual a $pL^2/8$, onde p é o valor da carga distribuída. Este diagrama é aqui assinalado por M'' .

O diagrama de momentos de fletores totais é obtido como:

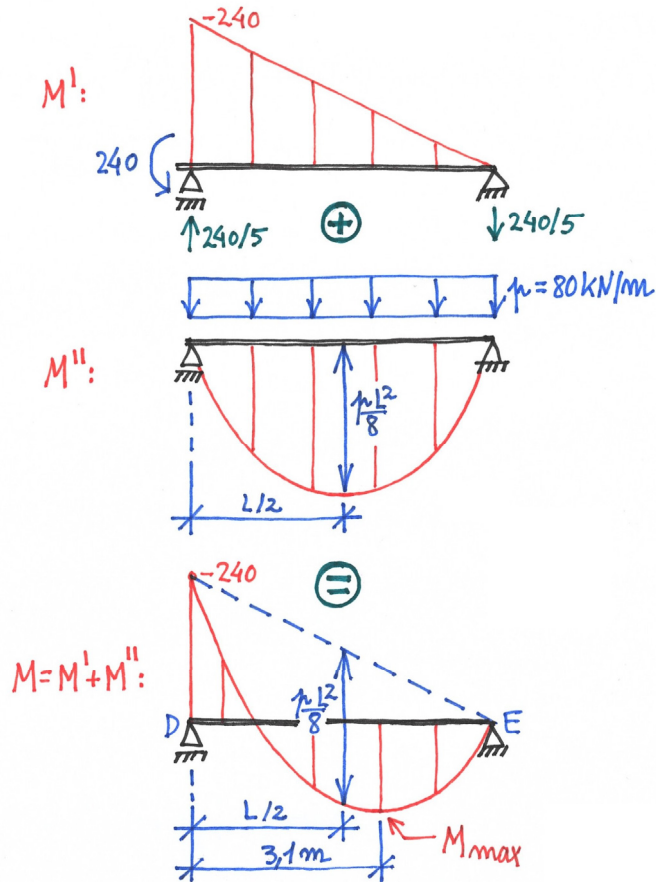
$$M = M' + M''$$

Pode ser representado adicionando a linha parabólica M'' à linha reta do diagrama M' . A forma parabólica do diagrama M pode ser representada através da ligação dos três pontos conhecidos:

- $M = -240$ kNm na extremidade mais à esquerda;
- $M = -240/2 + pL^2/8 = +130$ kNm **a meio vão**;
- $M = 0$ na extremidade mais à direita.

Note-se que este ponto a meio do intervalo ($z = L/2$) é útil para desenhar o diagrama, mas não é o momento fletor positivo máximo. Esse foi determinado antes, e vale:

$$M(z = 3,1\text{m}) = +144,4 \text{ kNm}$$



5. Flexão plana simples

5.1. Tipos de flexão

Embora este capítulo 5 seja sobre flexão plana (pura ou não uniforme), é importante começar por identificar os possíveis tipos de flexão. As **três designações** seguintes são geralmente adotadas:

- **Flexão pura** - quando o +único esforço na barra é um **momento fletor constante** ($N = 0$ e $V = 0$). É também conhecida como **flexão circular**, porque o eixo deformado de uma barra inicialmente reta é um arco de circunferência.
- **Flexão não uniforme** - quando o **esforço transverso V não é nulo**, e portanto o momento fletor varia ao longo do comprimento da barra. Esta designação é utilizada apenas quando a força axial N é nula.
- **Flexão composta** - quando o **esforço axial N não é nulo**. Se V for zero, o caso é denominado flexão composta pura, caso contrário é denominado flexão composta não-uniforme.

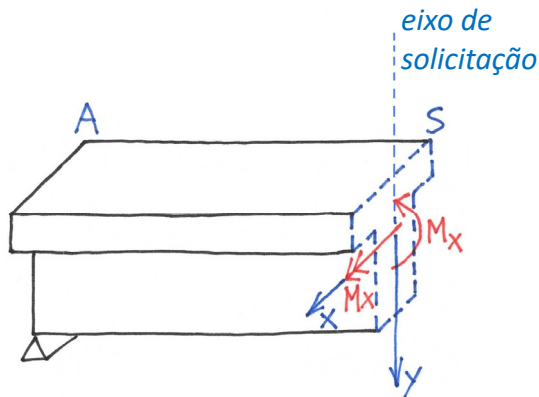
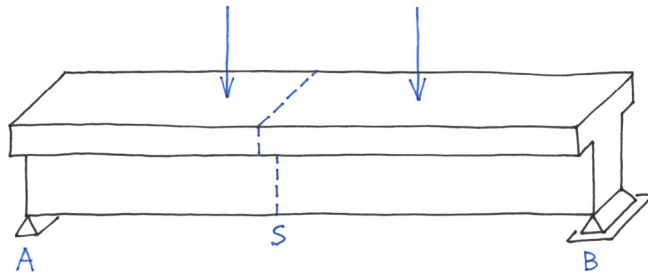
O grupo formado pelos dois tipos de flexão em que $N = 0$ também pode ser chamado de grupo de casos de **flexão simples**, por oposição com o caso de flexão composta.

Cada um dos **três tipos acima mencionados pode ser subdividido em**:

- **Flexão plana** - quando o **plano de solicitação** contém um dos **eixos principais centrais de inércia** (EPCI) da secção transversal da barra. Neste caso, a deformada do eixo da barra também está contida nesse mesmo plano.
- **Flexão desviada** - quando o plano de solicitação está inclinado em relação aos EPCI da secção transversal.

Os efeitos de torção não são considerados aqui, porque serão tratados apenas em RM2.

5.2. Cálculo de tensões e extensões devidas à flexão plana simples



O exemplo apresentado na imagem é uma viga simplesmente apoiada, feito com **material elástico linear**, tendo uma secção transversal com a forma de um T, simétrica em relação ao eixo Y mostrado na segunda imagem. Um **eixo de simetria** de uma secção transversal é sempre um **eixo principal central de inércia** (EPCI) da secção.

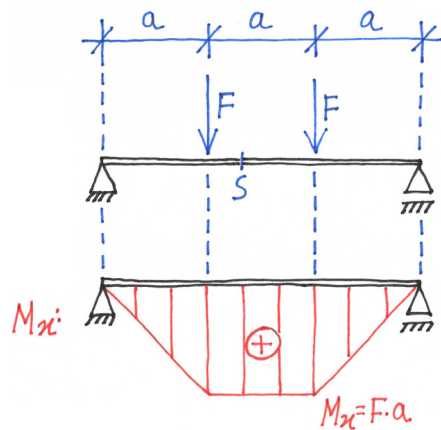
A viga está sujeita às duas forças pontuais representadas, cujas linhas de ação formam um plano, o **plano de solicitação**. Este plano também contém o eixo de simetria Y, pelo que este é um exemplo de flexão plana simples.

As secções transversais da viga estão sujeitas a um momento fletor, denominado M_x , porque é um **momento em torno do eixo principal X**. A figura apresenta também o momento que atua sobre a secção S, **causado por cargas e reações de apoio aplicadas no lado direito dessa secção**.

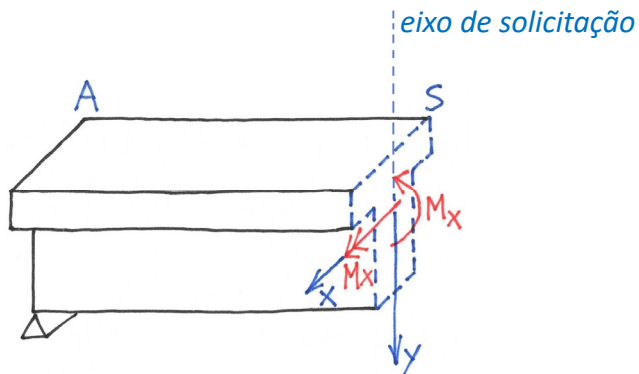
São mostradas duas alternativas para representar o momento M_x :

- a **seta curva** em torno do eixo X;
- o **vetor momento** M_x , com a direção do eixo X (os vetores momento são representados por **setas retas ponteiro duplo**).

A figura mostra também o **eixo de solicitação** na secção transversal S. É a intersecção entre o plano da secção transversal e o plano que contém as cargas aplicadas. O **vetor momento é perpendicular ao eixo de solicitação**.

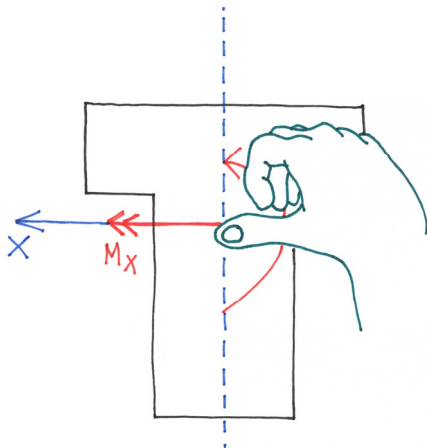


A viga neste exemplo está sujeita a um **momento fletor positivo** M_x , que, conseqüentemente, é responsável por tensões de tração nas fibras inferiores da secção transversal, e compressão nas fibras superiores. A representação da seta curva M_x está em conformidade com estes **efeitos de tração e compressão**.

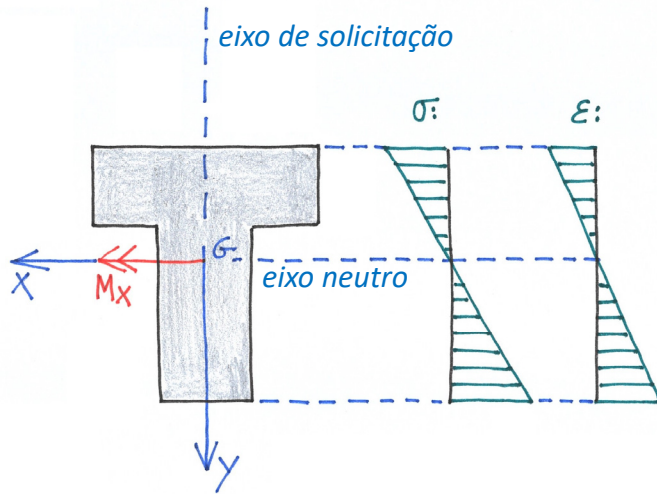


O sentido do vetor momento está de acordo com a orientação da seta curva, e é determinada pela **regra da mão direita**:

ao curvar os dedos da mão direita, de modo a que estes sigam uma rotação em torno do eixo X e as pontas dos dedos pressionem contra a região comprimida da secção transversal, o polegar da mão direita indica o sentido do vetor momento.



A imagem mostra a secção transversal deste exemplo, onde também estão representadas as seguintes entidades: o centro geométrico G , os eixos principais centrais de inércia (EPCI) X e Y , o eixo de solicitação e o vetor momento M_x .



Para o cálculo das **tensões normais na secção transversal**, σ_z , devidas ao momento fletor aplicado, M_x , tem de ser utilizado um sistema ortogonal de eixos, formado pelos EPCI da secção transversal (aqui chamados X e Y).

A interseção dos eixos principais coincide com o **centro geométrico** da secção transversal. Um eixo de simetria é sempre um eixo principal. Neste exemplo, Y é um eixo de simetria.

A **flexão plana** é, portanto, o caso em que:

- o eixo de solicitação é paralelo a um dos EPCI da secção transversal;
- o vetor momento é paralelo ao outro eixo principal.

A tensão normal σ_z , numa fibra cuja posição é dada pela coordenada y , é calculada como:

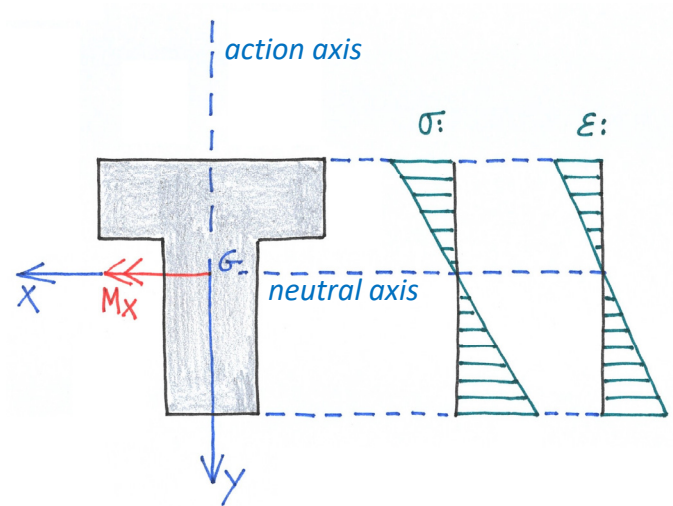
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

onde I_x é o momento de inércia em torno de X . A tensão σ_z é, portanto, uma **função linear da coordenada y** . O diagrama de tensões σ_z é representado como mostra a imagem.

Esta equação só é aplicável no caso de um **comportamento elástico linear** do material.

A reta que contém os pontos onde a tensão é nula é chamada de **eixo neutro**. É definida, neste caso, pela equação:

$$y = 0$$



Na equação $\sigma_z = (M_x/I_x) y$, o momento M_x é uma quantidade **positiva** quando o **vetor momento aponta no sentido positivo do eixo X** (ou seja, quando atuam tensões de tração nas fibras inferiores da secção transversal). A tensão calculada σ_z será **positiva** quando é uma **tensão de tração**.

Numa viga horizontal, os eixos X e Y são normalmente utilizados como mostra a imagem (X aponta **para a esquerda**, Y aponta **para baixo**), para que as convenções de sinais acima mencionadas possam ser utilizadas: um momento positivo M_x induz tensões de tração σ_z em fibras de coordenada y positiva.

Dado que o material é submetido a tensões normais apenas na direção Z , e o material tem um comportamento elástico linear caracterizado pelo módulo de elasticidade E , a **extensão** nessa mesma direção (ou seja, normal à secção transversal) fica:

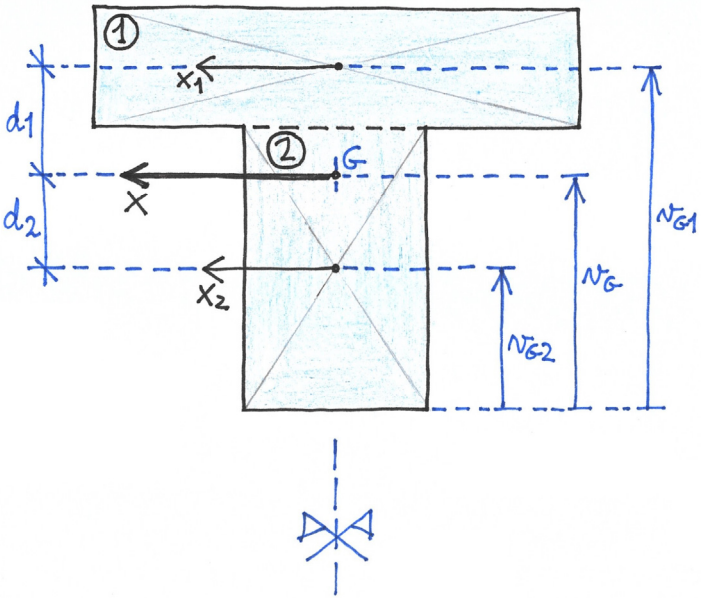
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Por uma questão de simplificação da escrita, a tensão σ_z e a extensão ε_z são frequentemente designadas apenas por σ e ε .

5.3. Cálculo das propriedades geométricas da secção transversal

A imagem mostra um exemplo de uma secção transversal genérica composta por n **partes elementares**, neste caso $n = 2$. Uma parte elementar, neste contexto, pode ser:

- uma **forma plana simples**, como um rectângulo, um triângulo, um círculo, meio círculo, etc., para a qual as suas propriedades geométricas (posição do centro, área e momentos de inércia) são dadas por **fórmulas fechadas** conhecidas [nesta unidade curricular, para formas elementares que não o rectângulo, as suas propriedades são dadas no formulário do exame];
- uma **secção de perfil metálico standard** (tais como as secções IPE e HEA, entre outras), cujas propriedades geométricas são dadas em tabelas.



Se a **secção transversal** for **simétrica** em relação a um eixo (como o exemplo na imagem), é sabido que:

- o seu centro geométrico, G , está contido no eixo de simetria;
- o eixo de simetria é um eixo principal de inércia, o outro eixo principal é perpendicular à linha de simetria.

O **centro geométrico** G é a posição média das áreas A_i que formam a secção transversal.

A posição do ponto G em relação a uma determinada **linha de referência** (a linha inferior da secção transversal foi selecionada como referência, na imagem), aqui denominada v_G , é dada por:

$$v_G = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot v_i)}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

onde A_i é a área da parte elementar i , e v_i é a distância até ao centro geométrico da parte elementar i , medida em relação à linha de referência, como mostra a imagem.

O **momento de inércia** I_x em torno do eixo principal X é dado pelo **teorema de Steiner**:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{xi} + A_i \cdot d_i^2)$$

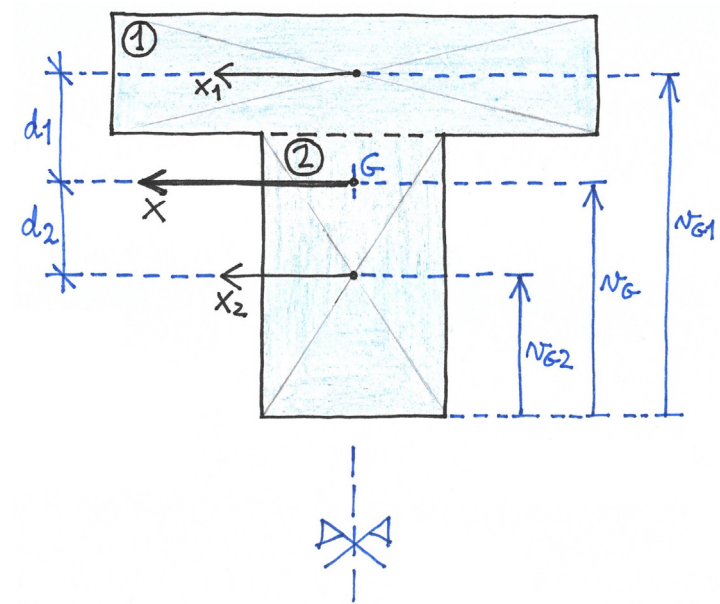
onde I_{xi} é o momento de inércia da parte elementar i em torno do eixo X_i , paralelo a X , que atravessa o centro geométrico da parte i . A distância entre os eixos X_i e X é designada por d_i .

Se a parte elementar i é um retângulo, é bem sabido que:

$$I_{xi} = \frac{B_i \cdot H_i^3}{12}$$

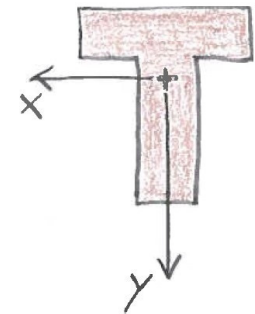
onde B_i e H_i são as dimensões dos lados do retângulo, paralelo e perpendicular a X , respetivamente.

O momento de inércia em torno do eixo principal Y , I_y , é calculado de forma análoga.



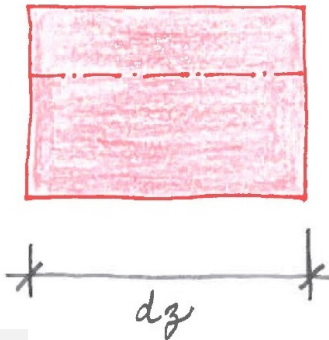
5.4. Curvatura (χ) e raio de curvatura (ρ) em flexão plana

Secção transversal genérica:

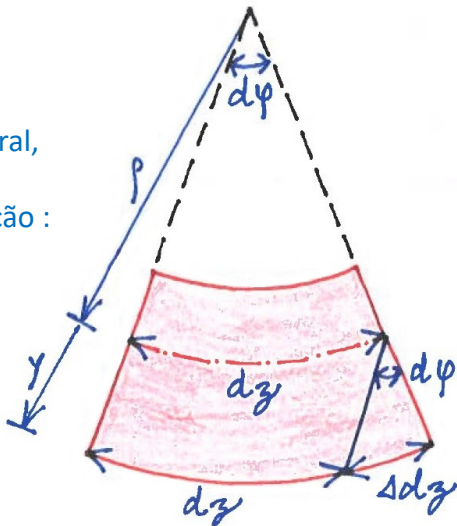


(X e Y são os EPCI)

Vista lateral, antes da deformação:



Vista lateral, após a deformação :



Consideremos primeiro o caso de um segmento de barra prismática, sujeito a um momento fletor constante (flexão pura). A deformação deste tipo de elemento estrutural obedece à **hipótese de Bernoulli das secções planas**:

Numa barra prismática sob força axial constante e momento fletor constante, as secções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra durante a deformação.

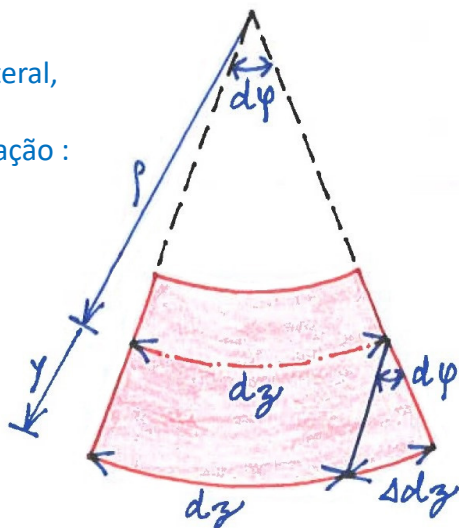
A imagem mostra um exemplo de flexão plana pura. Em fibras com coordenada $y = 0$, a tensão normal σ_z é nula, portanto o comprimento dz de um segmento de barra será mantido após a deformação em fibras com $y = 0$.

Como o momento fletor é constante, a forma do eixo da barra após a deformação é um **arco de circunferência**. Se $d\varphi$ é o ângulo em radianos que define a **rotação relativa das secções transversais** finais, e ρ é o **raio de curvatura** como se mostra na imagem, pode-se concluir geometricamente que:

$$dz = \rho \cdot d\varphi$$

$$\Delta dz = y \cdot d\varphi$$

Vista lateral,
após a
deformação :



A extensão de uma fibra de coordenada y pode, portanto, ser escrita como :

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot y$$

A **curvatura** χ de uma curva plana é, por definição, o inverso do raio de curvatura. Portanto:

$$\varepsilon = \chi \cdot y$$

o que significa que a extensão ε [adimensional] de determinada fibra é o produto da curvatura da secção transversal χ [m^{-1}] e a coordenada da fibra, y [m].

Demonstra-se assim que a **extensão** ε **varia linearmente** ao longo da profundidade da secção transversal.

A explicação apresentada anteriormente neste subcapítulo 5.4 foi feita para o caso de flexão pura ($V = 0$). Se, pelo contrário, o esforço transversal não for nulo, as relações entre ρ , χ , y e ε são as mesmas. Mas os valores de ρ e χ irão variar ao longo do eixo da barra, à medida que o valor do momento fletor varia.

5.5. Demonstração da equação para o cálculo da tensão devida à flexão plana simples

Os esforços atuantes numa secção transversal são o sistema de forças resultantes das tensões instaladas nessa secção.

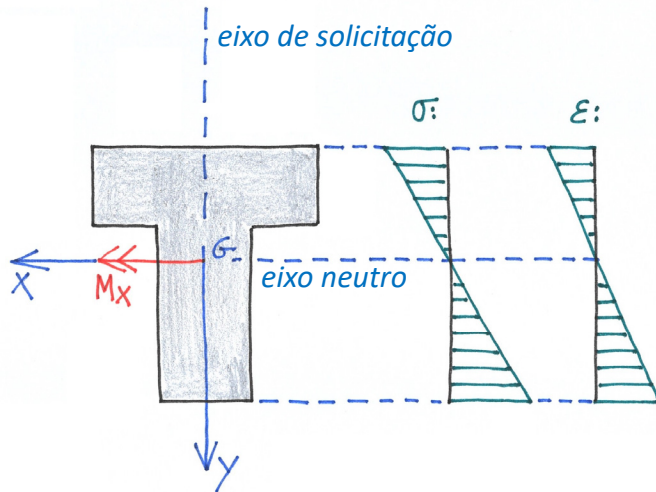
Portanto, se forem considerados os EPCI, o facto de a força axial ser zero implica que o integral das tensões normais seja também zero, ou seja:

$$\int_A \sigma dA = 0 \Leftrightarrow \int_A \frac{E y}{\rho} dA = 0 \Leftrightarrow \int_A y dA = 0$$

O integral $\int y dA$ representa o momento estático (também designado por primeiro momento da área) da secção transversal em relação ao eixo X . Portanto, a equação anterior afirma simplesmente que este integral é zero porque o eixo X atravessa o centróide da secção transversal.

O momento resultante das tensões normais na secção transversal tem de ser igual ao momento fletor aplicado, M_x , ou seja:

$$\int_A \sigma y dA = M_x \Leftrightarrow \int_A \frac{E y}{\rho} y dA = M_x \Leftrightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x$$



O integral $\int y^2 dA$ representa o momento de inércia I_x (também denominado por segundo momento de área da secção transversal). Portanto, a equação anterior fica:

$$\frac{E}{\rho} I_x = M_x \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

sendo esta uma relação muito útil entre o raio de curvatura ρ , o momento fletor M_x , e o termo EI_x (a que se dá o nome de **rigidez à flexão**).

Introduzindo, na equação anterior, as relações já conhecidas

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \cdot y$$

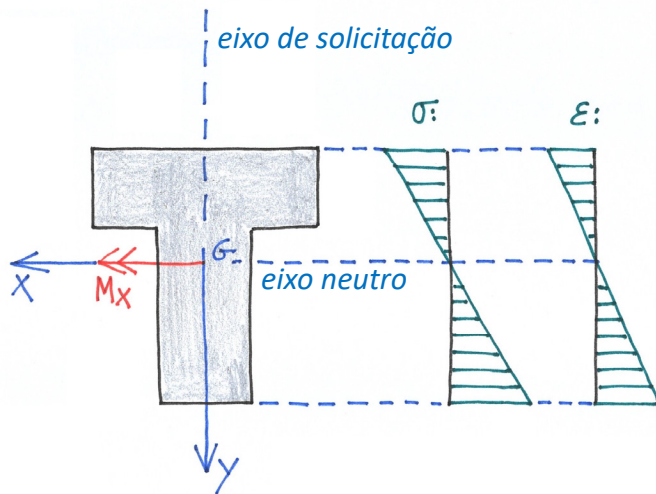
e

$$\sigma = E \varepsilon$$

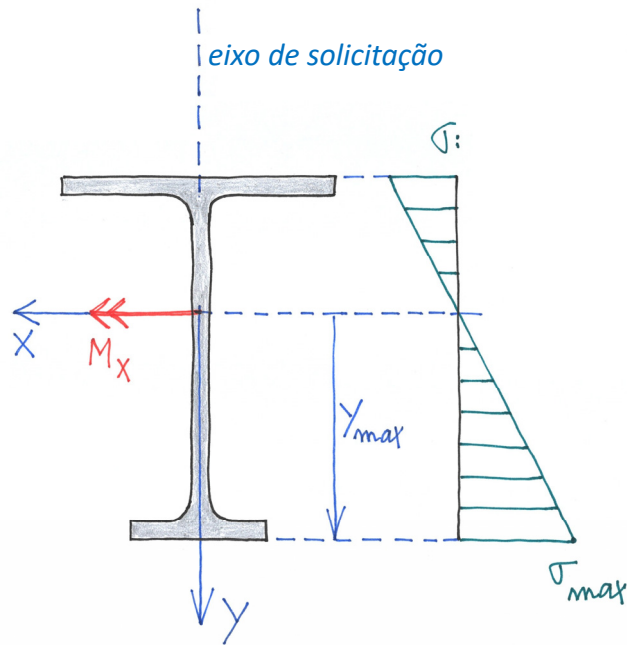
conclui-se que ela é equivalente a:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

conforme se pretendia demonstrar.



5.6. Módulo de flexão



O módulo de flexão determinado nesta página é utilizado nos cálculos considerando um **comportamento material elástico linear** (regido pela lei de Hooke). Pode assim ser identificado como $W_{x,el}$.

O **módulo de flexão** em torno do eixo X , W_x , é definido como:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

onde y_{max} é o valor absoluto da coordenada da fibra **mais afastada do eixo**. A tensão normal máxima devida à flexão pode assim ser expressa como:

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_x|}{I_x} y_{max} = \frac{|M_x|}{W_x}$$

Sabe-se que a condição de segurança em **estado limite último** é:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

$$\Leftrightarrow 1.5 \cdot |\sigma_{max}| \leq \sigma_{Rd}$$

Portanto, no caso de materiais com **igual resistência à tração e à compressão** (por exemplo, aço), a condição fica:

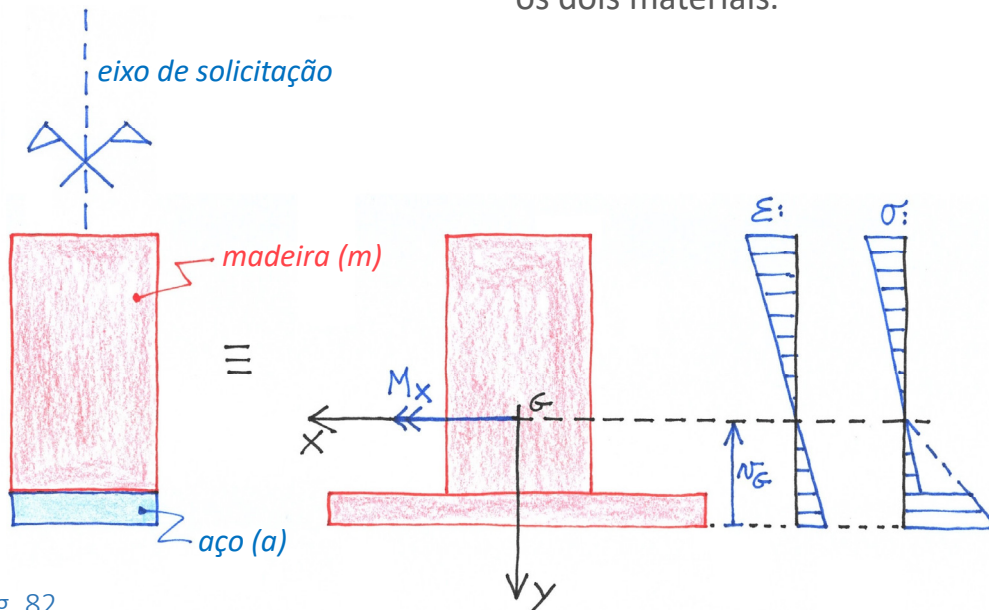
$$1.5 \cdot \frac{|M_x|}{W_x} \leq \sigma_{Rd}$$

A equação anterior é útil em **problemas de dimensionamento**, em que M_x e σ_{Rd} são conhecidos, e o objetivo é a determinação do tamanho da secção transversal necessária, de modo a que a condição de estado limite último seja cumprida. Esta equação permite calcular o **valor requerido W_x** , sendo depois possível encontrar (por exemplo, numa tabela de perfis metálicos) uma adequada geometria para a secção transversal.

5.7. Secções feitas de dois materiais, sujeitas a flexão plana simples

O cálculo de tensões e extensões, numa secção transversal feita de dois materiais, com comportamento elástico linear, sujeita a flexão, pode ser realizado utilizando o **método da homogeneização da secção transversal**, de forma análoga ao procedimento apresentado no subcapítulo 1.6 para barras sujeitas a esforço axial. A imagem ilustra este procedimento para uma secção transversal formada por peças de aço (a) e madeira (m), perfeitamente solidarizadas, sujeitas a um momento fletor M_x em torno do eixo principal X .

O método consiste em transformar a secção transversal real numa **secção transversal equivalente, homogeneizada**. O termo *equivalente* significa neste contexto que uma barra com a secção transversal homogeneizada tem a mesma rigidez à flexão, a mesma curvatura χ e a mesma tensão no material homogeneizado que a barra real feita com os dois materiais.



Se escolhermos, para o material da secção transversal homogeneizada, o material do módulo de elasticidade inferior, o **rácio de módulos de elasticidade**, k_{hom} , toma um valor superior a 1, ou seja

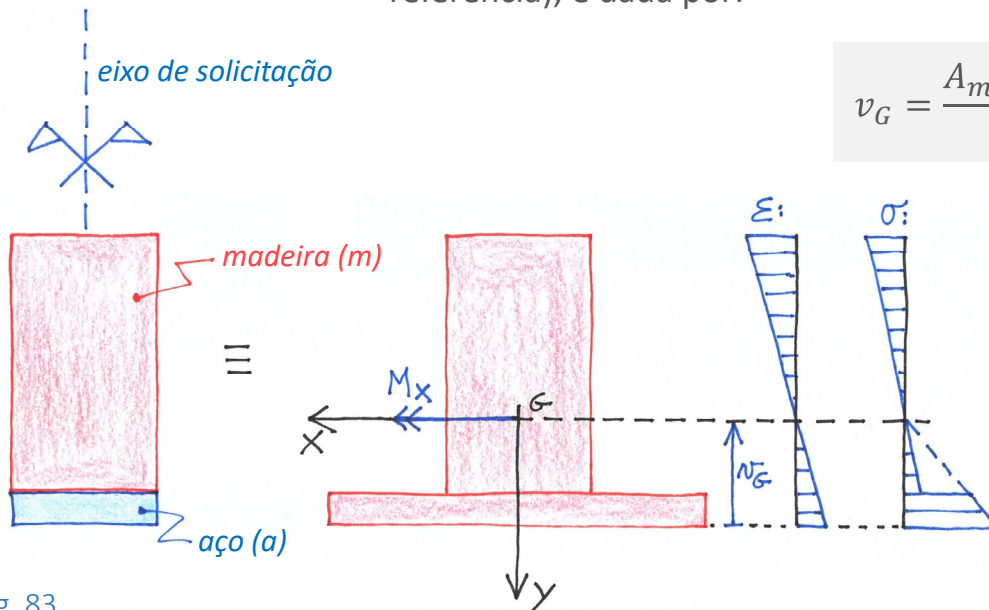
$$k_{hom} = \frac{E_a}{E_m}$$

onde E_a and E_m são o módulo de elasticidade das partes de aço e madeira, respectivamente. A área da secção transversal homogeneizada fica:

$$\bar{A} = A_m + A_a \cdot k_{hom}$$

onde A_m e A_a são as áreas reais das partes de madeira e aço. O ponto G na imagem identifica o **centro da rigidez**. Enquanto que um centro geométrico é, por definição, a posição média das áreas A_i , o centro de rigidez é a **posição média das rigidezes** $E_i A_i$. O eixo de simetria contém o ponto G . A sua posição ao longo do eixo vertical, medida em relação a uma determinada linha de referência (na imagem, o limite inferior da secção transversal foi tomado como linha de referência), é dada por:

$$v_G = \frac{A_m \cdot v_{G,m} + A_a \cdot v_{G,a} \cdot k_{hom}}{\bar{A}}$$



onde $v_{G,m}$ e $v_{G,a}$ são as distâncias desde a linha de referência até aos centroides das partes de madeira e aço, respetivamente. E o momento de inércia da secção transversal homogeneizada, em torno do eixo principal X , fica:

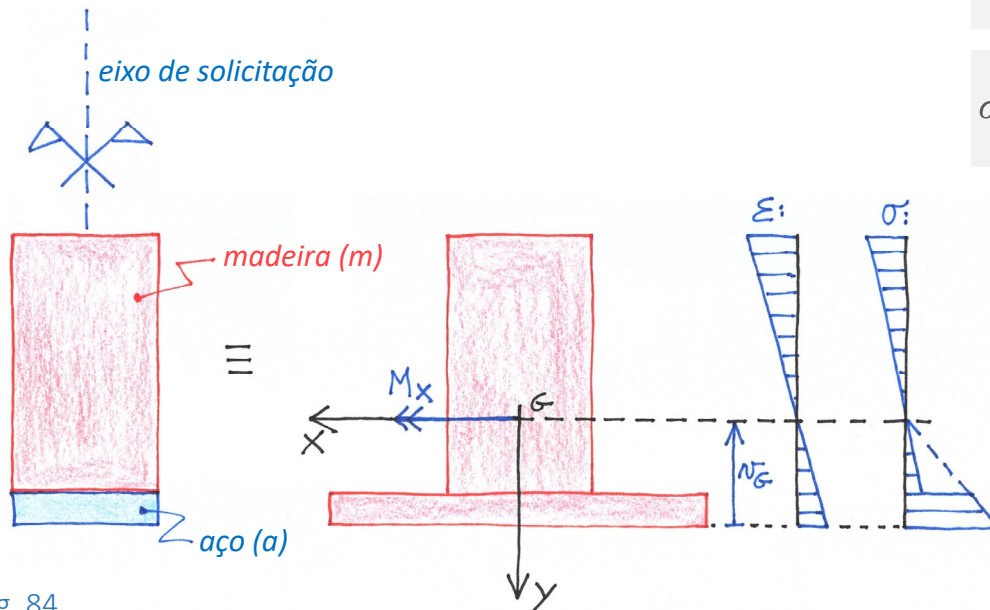
$$\bar{I}_x = I_{x,m} + I_{x,a} \cdot k_{hom}$$

onde $I_{x,m}$ e $I_{x,a}$ são os momentos de inércia, em torno de X , das áreas elementares de madeira e aço. São, portanto, determinados através do teorema de Steiner.

Atendendo à hipótese de Bernoulli das secções planas, o diagrama de **extensões varia linearmente ao longo da profundidade da secção transversal**, como na imagem. Os diagramas de tensão em ambos os materiais são dados por:

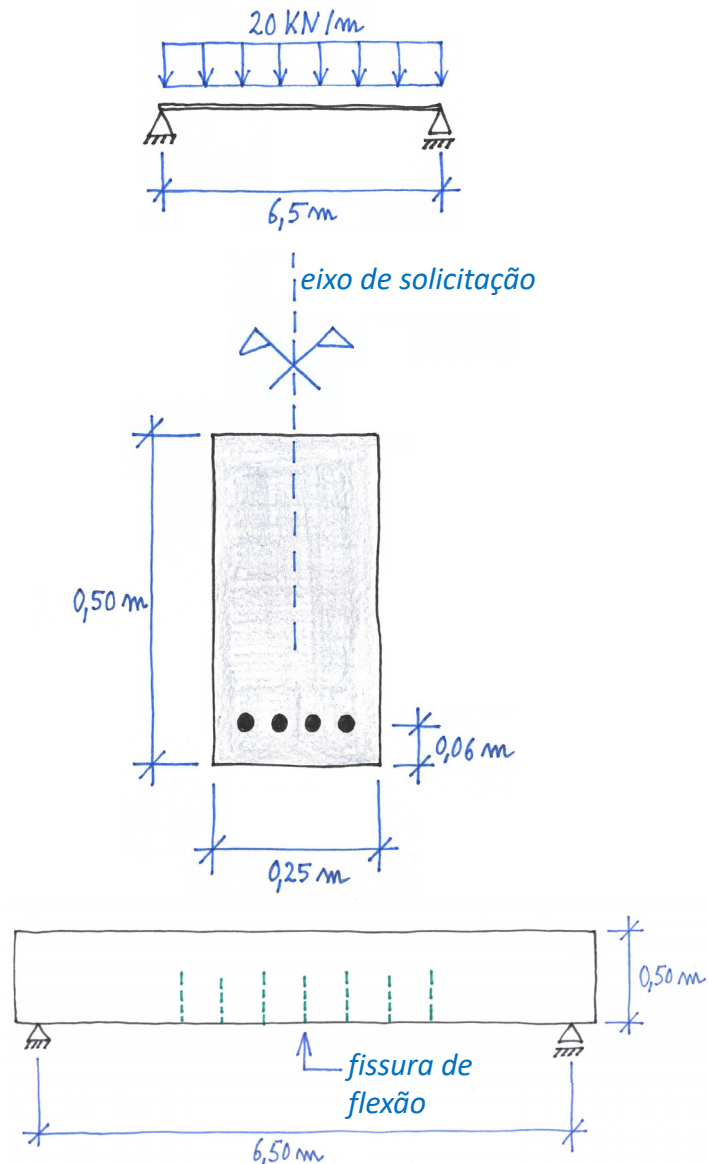
$$\sigma_m = \frac{M_x}{\bar{I}_x} y$$

$$\sigma_a = \frac{M_x}{\bar{I}_x} y \cdot k_{hom}$$



5.8. Vigas de betão armado, sujeitas a flexão plana simples, considerando que a resistência à tração do betão é nula

Exemplo 5.1:



Um caso típico de uma secção transversal feita de dois materiais é a **viga de betão armado**. A imagem mostra um exemplo deste tipo de viga, onde uma secção transversal retangular de betão é reforçada com 4 barras de aço com 20 mm de diâmetro. A resistência à tração do betão é muito pequena (comparativamente à sua resistência à compressão) e, por isso, formam-se fissuras na região tracionada, como mostra a imagem esquemática na parte inferior da página.

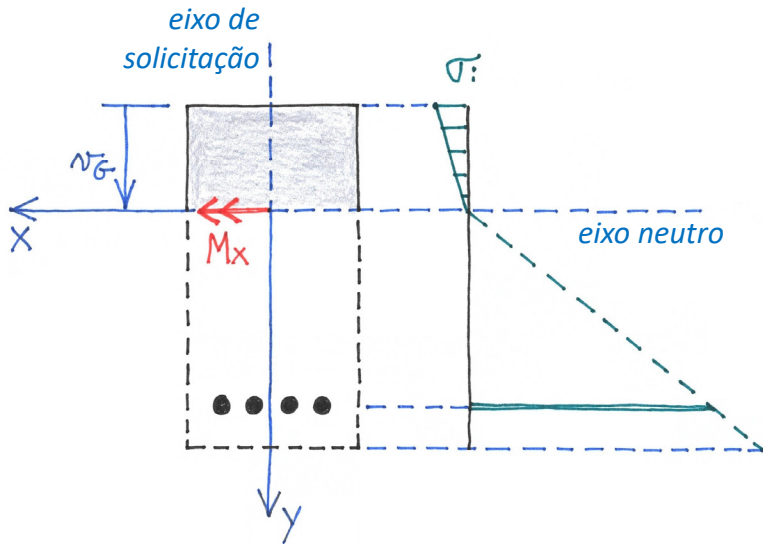
As **fissuras no betão** devidas às ações aplicadas são normais, se for prevista uma quantidade suficiente de armadura de aço para resistir às forças de tração, e também para manter a abertura das fendas abaixo dos limites aceitáveis.

O controlo da fissuração e o cálculo da abertura de fendas está fora do âmbito desta unidade curricular. Mas, o cálculo das tensões na secção transversal de uma fissura é um tópico que é tratado aqui.

Uma vez formada uma fenda, esta dá origem a uma descontinuidade do material, que não permite a transmissão de tensões de tração. Por isso, o cálculo das tensões normais é feito **assumindo que a resistência à tração do betão é zero**, sendo as tensões de tração resistidas apenas pelo aço. E o betão resiste apenas a tensões de compressão.

Dados adicionais para o Exemplo 5.1:

- aço: $E_a = 200\text{ GPa}$
- betão: $E_b = 25\text{ GPa}$
- área da secção transversal de aço: $\phi = 20\text{ mm} \Rightarrow A_a = 3,142\text{ cm}^2 \times 4\text{ barras}$



Isso significa que a **secção transversal efetiva** será formada apenas pela zona de betão acima do eixo neutro (zona sombreada, na imagem), que estará comprimida, mais os varões de aço, que estarão tracionados.

Se escolhermos o betão como o material da secção transversal homogeneizada:

$$k_{hom} = E_a/E_b = 200/25 = 8$$

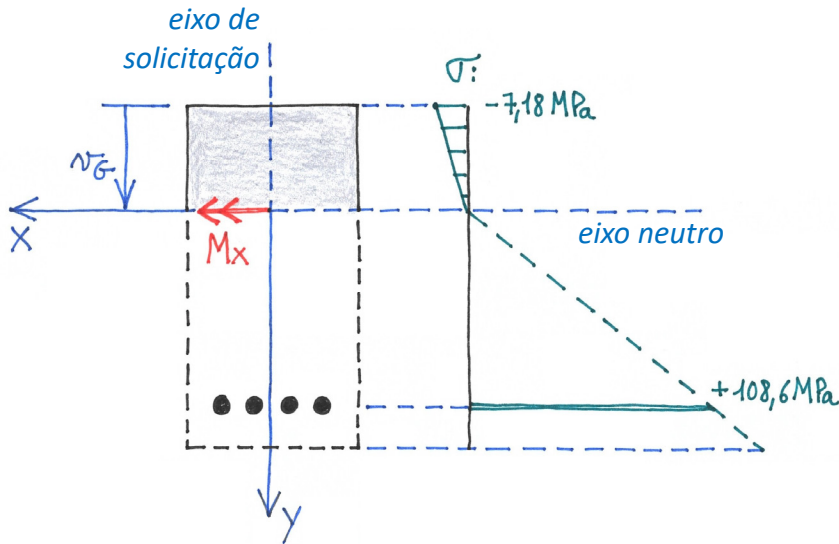
Antes dos cálculos serem feitos, a profundidade da zona de betão comprimido não é conhecida. Mas essa profundidade (v_G na imagem) pode ser determinada, através da fórmula de cálculo do centro de rigidez, pois será a única incógnita no problema de determinação da posição desse centro:

$$v_G = \frac{0,25 \cdot \frac{v_G^2}{2} + A_a \cdot 0,44 \cdot k_{hom}}{0,25 \cdot v_G + A_a \cdot k_{hom}}$$

$$\Leftrightarrow v_G = \frac{0,25 \cdot \frac{v_G^2}{2} + 4 \cdot 0,0003142 \cdot 0,44 \cdot 8}{0,25 \cdot v_G + 4 \cdot 0,0003142 \cdot 8}$$

Resolvendo esta equação polinomial de segundo grau, obtém-se:

$$v_G = 0,1522 \text{ m}$$



Uma vez determinado o valor de v_G , a secção transversal efetiva, que resiste ao momento de fletor aplicado, fica caracterizada.

O momento de inércia desta secção transversal homogeneizada, efetiva, pode assim ser calculado. O resultado é:

$$I_x = 0,002239 \text{ m}^4$$

As **tensões máximas** na viga em análise ocorrerão na secção transversal (fissurada) de meio vão, onde o momento fletor atuante é máximo:

$$M_{x,max} = \frac{p L^2}{8} = 105,6 \text{ kNm}$$

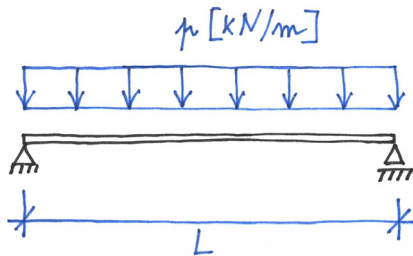
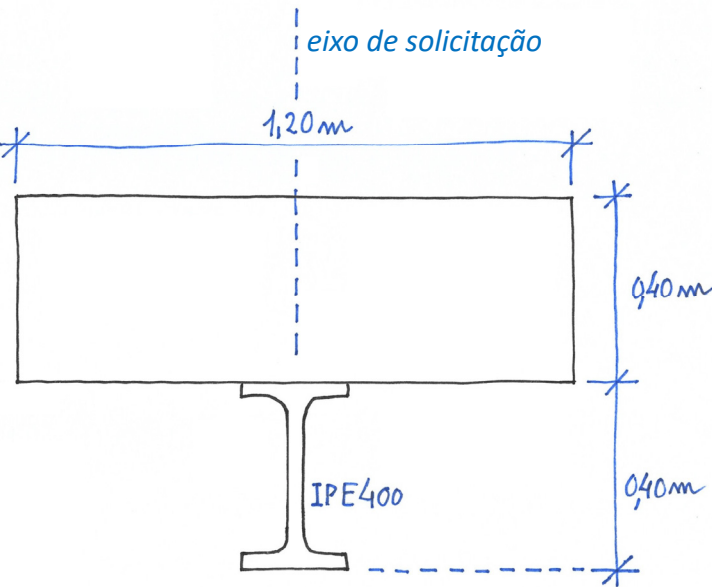
A maior tensão de compressão no betão fica:

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{105,6}{0,002239} \cdot (-0,1522) = -7,18 \cdot 10^3 \text{ kPa}$$

A tensão mais elevada do aço, calculada **ao centro dos varões** (procedimento usado na prática), será:

$$\sigma_a = \frac{M_x}{I_x} y k_{hom} = \frac{105,6}{0,002239} \cdot (0,44 - 0,1522) \cdot 8 = +108,6 \cdot 10^3 \text{ kPa}$$

5.9. Vigas mistas aço-betão, sujeitas a flexão plana simples, considerando que a resistência à tração do betão é nula



Dados adicionais:

- aço: $E_a = 206 \text{ GPa}$
- betão: $E_b = 20,6 \text{ GPa}$; $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$
- $L = 8 \text{ m}$
- $p = 60 \text{ kN/m}$ mais o peso próprio da viga

Exemplo 5.2:

Outro caso típico de uma secção transversal feita de dois materiais é a viga composta por um perfil de aço ligado a um elemento de betão, como mostra a imagem.

Mais uma vez, a **resistência à tracção do betão é desprezada**, ou seja, é tomada como zero. Ao fazê-lo, estamos a considerar que, se forem aplicadas tensões de tração ao betão, este irá fissurar, e portanto a **secção transversal efetiva** (aquela que resiste efetivamente ao momento fletor aplicado) é composta pela zona de betão comprimido, e pelo elemento de aço.

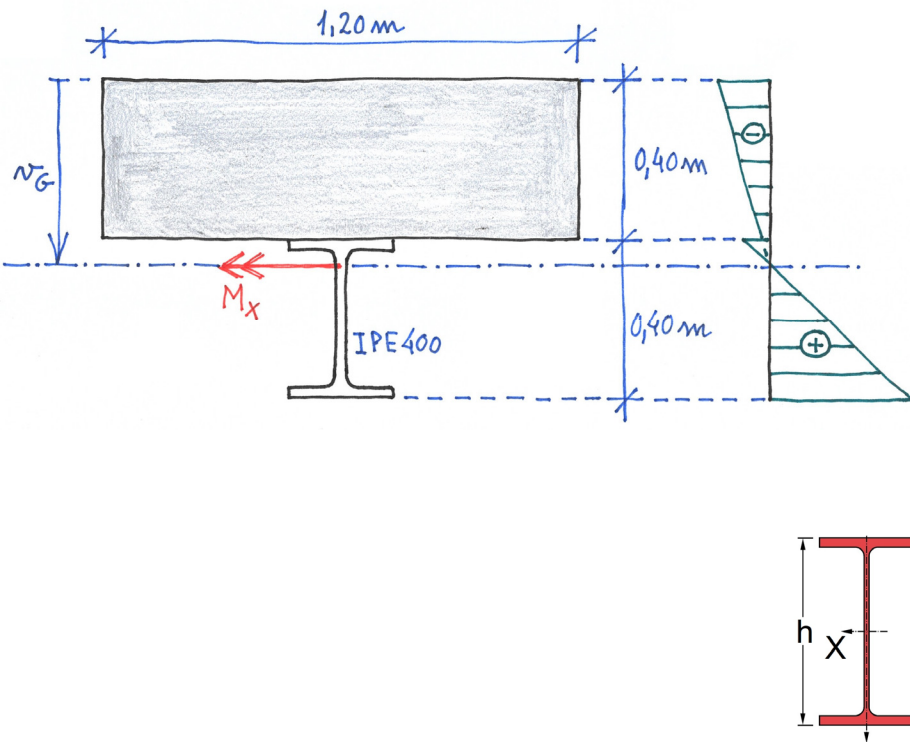
No entanto, ao contrário do Exemplo 5.1, neste Exemplo 5.2 não sabemos se:

- todo o elemento de betão é efetivo (este será o caso se todo o betão estiver comprimido);
- ou, pelo contrário, se se formam fissuras e apenas uma determinada parte do elemento de betão é efetivo.

Portanto, precisamos de verificar, por cálculos, **qual destas hipóteses i. ou ii. é a verdadeira**. Isso depende da geometria e das propriedades materiais dos elementos de betão e aço.

Vamos escolher o betão como material da secção transversal homogeneizada.

Hipótese i:



Uma vez que a viga está sujeita a um momento fletor positivo M_x , **todo** o elemento de betão estará comprimido se o eixo neutro cruzar a parte de aço, ou seja, se a coordenada v_G apresentada na imagem não for inferior a 0,40 m. Se a hipótese fosse verdadeira, então o diagrama de tensões normais teria a forma representada na imagem.

Assumindo, por hipótese, que toda a área de betão é efetiva, o cálculo da coordenada v_G fica:

$$v_G = \frac{A_b \cdot v_{G,b} + A_s \cdot v_{G,a} \cdot k_{hom}}{\bar{A}}$$

onde os subscritos b e a identificam o betão e o aço, respetivamente. As propriedades geométricas da secção transversal do IPE400 podem ser encontradas numa tabela de perfis de aço:

$$\begin{aligned} A &= 84,5 \text{ cm}^2 \\ I_x &= 23130 \text{ cm}^4 \\ h &= 40 \text{ cm} \end{aligned}$$

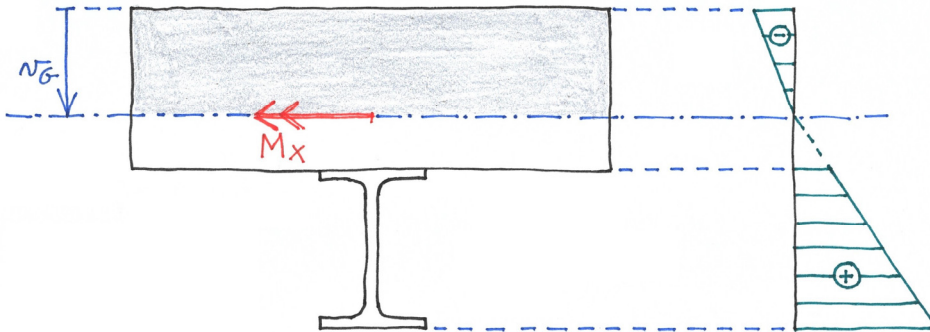
Fica:

$$\bar{A} = A_b + A_a \cdot k_{hom} = 120 \cdot 40 + 84,5 \cdot 10 = 5645 \text{ cm}^2$$

$$v_G = \frac{120 \cdot 40 \cdot 20 + 84,5 \cdot 60 \cdot 10}{5645} = 25,99 \text{ cm}$$

É inferior a 40 cm, o que **significa que a hipótese não é a verdadeira**. A profundidade do betão em compressão será inferior a 40 cm.

Hipótese ii:



O valor v_G correto deve portanto ser calculado considerando que **apenas uma porção de betão**, a que se encontra acima do eixo neutro, **será efetiva**. Será diferente do previamente determinado ($v_G = 25,99$ cm) na hipótese (que se revelou falsa) de betão totalmente comprimido. O verdadeiro valor de v_G será, portanto, determinado como:

$$v_G = \frac{120 \cdot v_G \cdot v_G / 2 + 84,5 \cdot 60 \cdot 10}{120 \cdot v_G + 84,5 \cdot 10}$$

$$\Leftrightarrow 60 \cdot v_G^2 + 845v_G - 50700 = 0$$

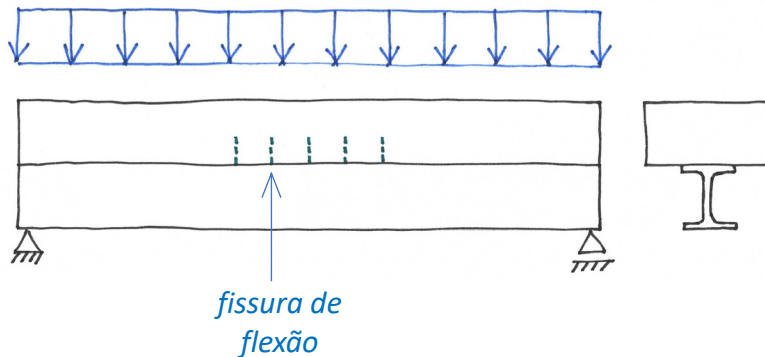
$$\Leftrightarrow v_G = 22,87 \text{ cm}$$

Isso significa que ocorrerão fissuras de flexão, como se mostra esquematicamente na vista lateral da estrutura, na parte inferior da página.

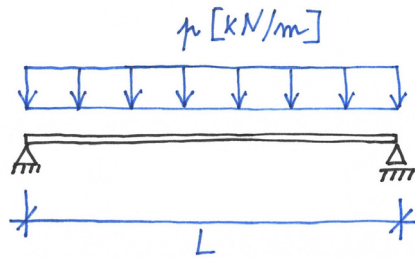
O momento de inércia, da secção homogeneizada, em torno do eixo principal horizontal, pode agora ser calculado, considerando apenas a parte efetiva de betão:

$$\begin{aligned} \bar{I}_x = & \frac{120 \cdot 22,87^3}{12} + 120 \cdot 22,87 \cdot \left(\frac{22,87}{2} \right)^2 + \\ & + 23130 + 84,5 \cdot (60 - 22,87)^2 = 1,875 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Note-se que, em ambos os Exemplos 5.1 e 5.2, o procedimento de cálculo assume um **comportamento elástico linear do aço**, e um **comportamento elástico linear do betão em compressão**. A consideração dos efeitos de cedência do aço, bem como do comportamento não linear do betão em compressão, está fora do âmbito desta parte da unidade curricular.



Cálculo de $M_{x,\max}$ na secção de meio vão:



O peso próprio da viga, em kN/m, tem de ser quantificado, com base no **peso específico** (γ) dos materiais que, por definição, é o peso por unidade de volume:

$$\gamma = \frac{\text{peso [kN]}}{\text{volume [m}^3\text{]}}$$

Os dados para este exemplo indicam que, para o betão, $\gamma = 25,0$ kN/m³. O peso específico do aço é $\gamma = 77,0$ kN/m³.

O **peso próprio por unidade de comprimento**, p_{pp} [kN/m], de um elemento linear (viga, pilar, ...) é calculado como:

$$p_{pp} = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{L} = \gamma \cdot A$$

onde A é a área da secção transversal. Fica:

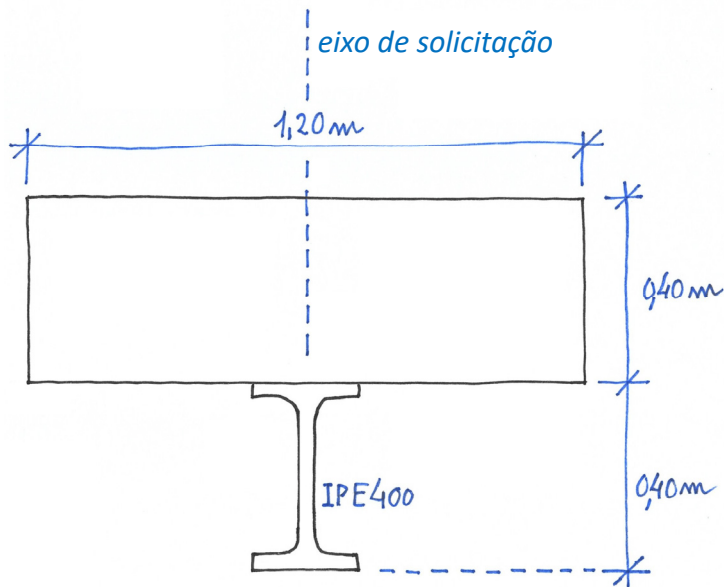
- para o betão: $p_{pp} = \gamma \cdot A = 25 \cdot 1,2 \cdot 0,4 = 12$ kN/m
- para o aço: $p_{pp} = 77 \cdot 0,00845 = 0,65$ kN/m

Em alternativa, o peso próprio do aço pode ser quantificado com base no valor da **massa** dado na **tabela de perfis**. Para o IPE400, a massa é de 66,3 kg/m. Assim:

$$\frac{1 \text{ kgf}}{66,3 \text{ kgf}} = \frac{9,81 \text{ N}}{x} \Leftrightarrow x = 0,65 \text{ kN/m}$$

A carga total aplicada é portanto $p = 60 + 12 + 0,65 = 72,65$ kN/m, e o momento máximo, a meio vão, fica:

$$M_{x,\max} = \frac{p L^2}{8} = \frac{72,65 \cdot 8^2}{8} = 581,2 \text{ kNm}$$



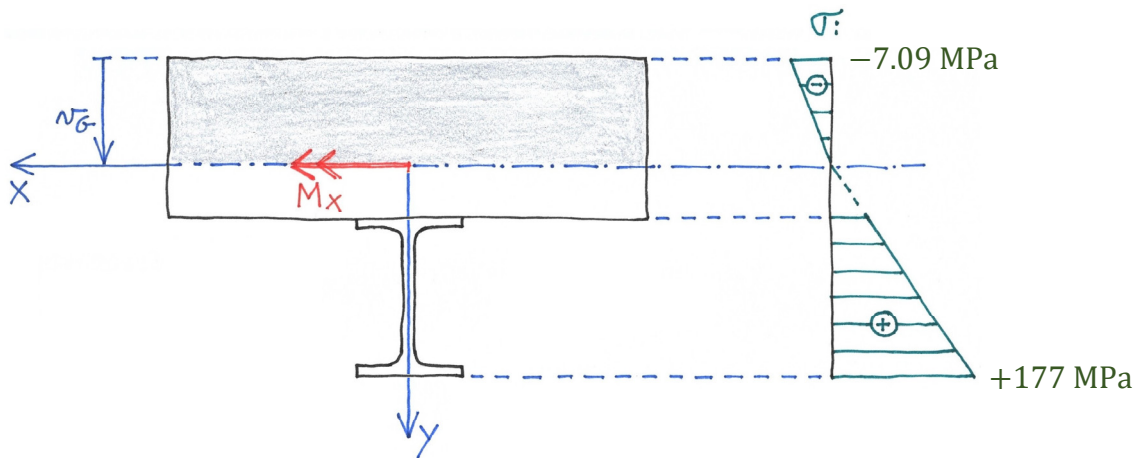
Cálculo do diagrama de tensões normais na secção de meio vão (fissurada):

A tensão de compressão máxima no betão será:

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{581,2}{0,01875} \cdot (-0,2287) = -7,09 \cdot 10^3 \text{ kPa}$$

A tensão máxima no aço ocorre na fibra inferior da secção:

$$\sigma_a = \frac{M_x}{I_x} y_{hom} = \frac{581,2}{0,01875} \cdot (0,8 - 0,2287) \cdot 10 = +177,1 \cdot 10^3 \text{ kPa}$$

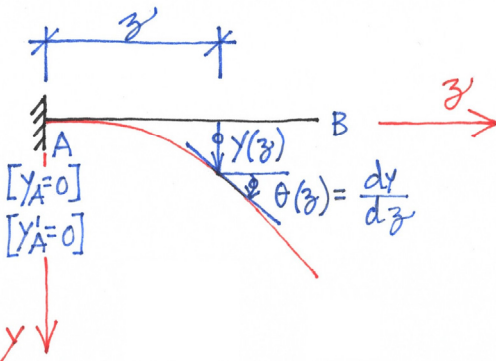
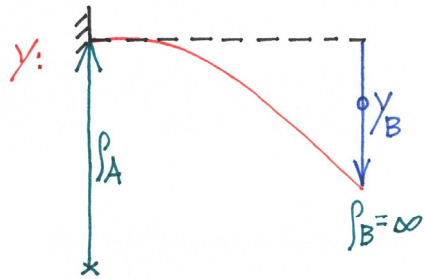
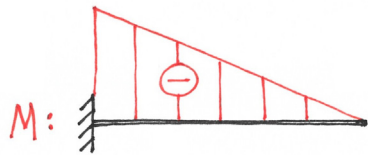
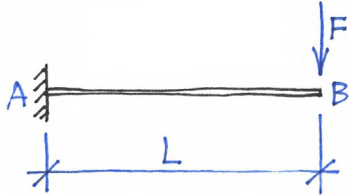


6. Deslocamentos, rotações e curvaturas em estruturas isostáticas sujeitas a flexão plana

6.1. Método da Integração da Elástica

6.1.1. Fundamentos do método

Exemplo 6.1:



Vimos no subcapítulo 5.5 que, numa barra com comportamento elástico linear, a relação entre o momento fletor e o raio de curvatura (ρ) da deformada do eixo da barra é dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EI}$$

onde $M(z)$ é o momento fletor, que pode ser variável ao longo do desenvolvimento da barra, E é o módulo de elasticidade do material, e I é o momento de inércia da secção transversal.

Consideremos que a **forma do eixo da barra após a deformação é uma equação $y(z)$** , onde y é o valor do deslocamento (na direcção perpendicular ao eixo da barra antes da deformação) numa posição de abcissa z . Como vamos trabalhar com pequenas deformações, a **rotação θ da barra (em radianos)**, numa posição de abcissa z , é praticamente igual à primeira derivada da função $y(z)$, ou seja:

$$\frac{dy}{dz} = \tan \theta \approx \theta \text{ [rad]}$$

Além disso, sabe-se, da análise matemática, que o raio de curvatura de uma curva plana com equação $y(z)$ [ver exemplo na imagem] pode ser expresso como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

No caso de pequenas deformações, o denominador $[1 + (dy/dz)^2]^{3/2}$ é praticamente igual a 1 (para $\theta = 0,01$ radianos, por exemplo, esse denominador equivaleria a 1,0002), e portanto a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dz^2}$$

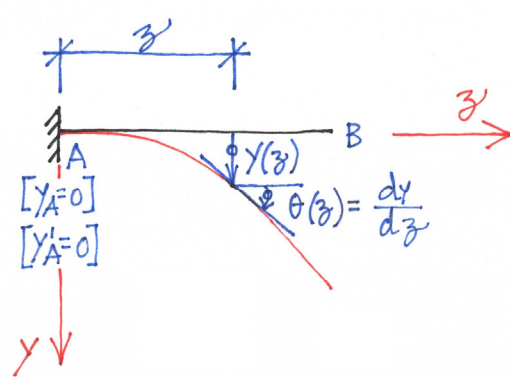
o que significa que:

$$\frac{d^2y}{dz^2} \approx -\frac{M(z)}{EI}$$

sendo esta a relação base utilizada no método de cálculo do deslocamento denominado **Método da Integração da Elástica**. Por simplificação, o sinal “=” será utilizado a partir de agora em vez de “≈”.

Note-se que foi introduzido um **sinal negativo** na equação anterior, por coerência das convenções de sinais. Assim, ao utilizar a habitual convenção de sinais do diagrama de momentos fletores (momento positivo é o que causa tração na fibra inferior da barra), o deslocamento positivo é o deslocamento para baixo.

Exemplo 6.1:



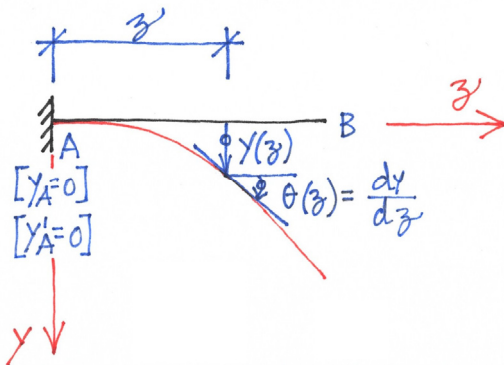
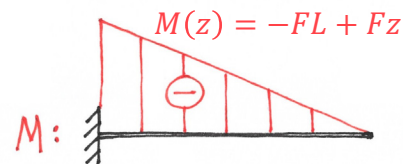
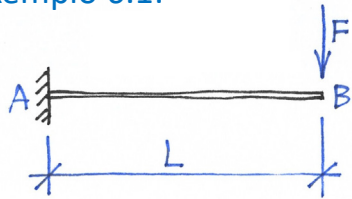
Relativamente à concavidade da curva $y(z)$, a relação

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI}$$

significa que, quando o momento fletor é negativo, como neste Exemplo 6.1, a segunda derivada da função $y(z)$ torna-se positiva, ou seja, a concavidade da função $y(z)$ é virada para o lado positivo do eixo $y(z)$.

6.1.2. Utilização do método

Exemplo 6.1:



Utilizando uma notação alternativa para apresentar a segunda derivada da função $y(z)$, também se pode escrever:

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

sendo $M(z)$ a equação que dá o momento fletor em cada posição de abcissa z . A equação para a **rotação** θ em cada posição [recorde-se que $y'(z) = \theta(z)$ em radianos] pode ser obtida pela integração da expressão anterior. No caso de barras prismáticas de secção transversal constante, a rigidez à flexão EI é uma constante, e portanto:

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

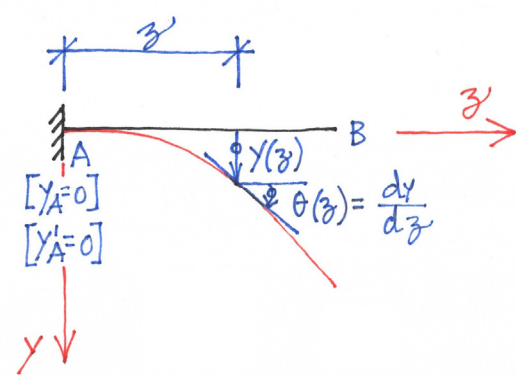
$$\Leftrightarrow EIy''(z) = -M(z)$$

$$\Leftrightarrow EIy'(z) = \int_0^z -M(z)dz + C_1$$

onde C_1 é uma constante de integração. **Integrando a expressão uma vez mais, obtém-se a equação $y(z)$** , que expressa o deslocamento em cada posição de abcissa z :

$$EIy(z) = \int_0^z \left[\int_0^z -M(z)dz + C_1 \right] dz + C_2$$

$$\Leftrightarrow EIy(z) = \int_0^z \left[\int_0^z -M(z)dz \right] dz + C_1z + C_2$$



onde C_2 é outra constante de integração. Para completar a determinação das equações $y'(z)$ e $y(z)$, é necessário calcular o valor das **constantes de integração**. Para tal, terão que ser utilizadas duas **condições de fronteira**, impostas pela **natureza dos apoios**.

No exemplo apresentado na imagem, o apoio de encastramento impõe que o deslocamento e a rotação sejam zero na extremidade esquerda da barra:

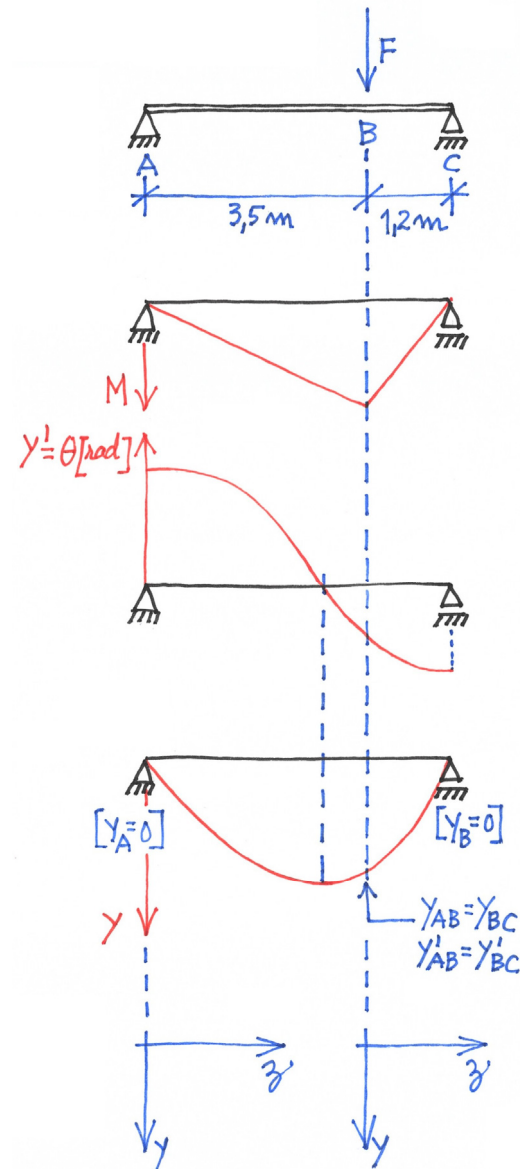
$$y(z = 0) = 0$$

$$y'(z = 0) = 0$$

Introduzindo estas duas condições nas expressões de $y'(z)$ e $y(z)$ obtidas na página anterior, determina-se o valor das constantes C_1 e C_2 .

Note-se que neste capítulo a variável y representa o deslocamento na direcção perpendicular ao eixo da barra, enquanto no capítulo anterior representava a coordenada de um ponto na secção transversal, medida em relação ao eixo neutro da secção.

Exemplo 6.2:



Para o segmento AB: $0 \leq z \leq 3,5\text{ m}$

Para o segmento BC: $0 \leq z \leq 1,2\text{ m}$

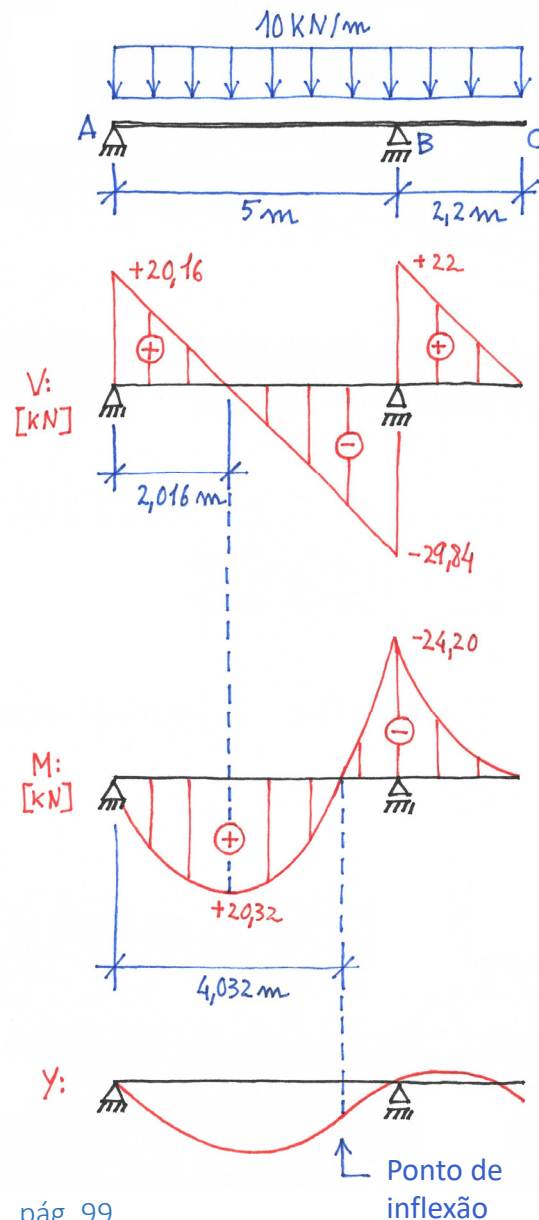
No Exemplo 6.1, uma única equação foi suficiente para caracterizar o diagrama de momentos fletores para toda a estrutura.

Pelo contrário, quando a carga ou a estrutura têm descontinuidades, é necessária mais do que uma equação de momentos. No Exemplo 6.2, serão necessárias duas equações. Cada uma destas, terá de ser integrada duas vezes, resultando em quatro constantes de integração (C_1 a C_4) cuja determinação é possível utilizando quatro **condições de fronteira**. Neste problema, duas destas condições são impostas pelo facto do deslocamento y ser zero nos apoios A e C . As duas restantes, são **condições de continuidade entre os segmentos de barra AB e BC**: o valor de y no ponto B , dado pela equação da barra AB , deve ser igual ao valor de y neste ponto da equação da barra BC . A mesma igualdade aplica-se aos valores de y' . As rotações imediatamente à esquerda e à direita do ponto B só não seriam iguais se houvesse uma rótula nessa posição.

Conforme se sabe, a equação $y(z)$ tem um **máximo local** na posição em que a sua derivada é zero. Portanto, para determinar o deslocamento máximo numa barra, é necessário procurar a posição em que a função $y'(z)$ se anula (ver exemplo na imagem). Essa posição pode ser diferente da posição de momento fletor máximo.

6.1.3. Exemplo de cálculo

Exemplo 6.3:



Problema:

Considere-se a viga de aço ABC ($E = 206 \text{ GPa}$; INP180), sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m (Exemplo 6.3).

- Fazer a representação esquemática (esboço) do eixo da barra após a deformação, sem calcular a equação correspondente $y(z)$.
- Calcular o deslocamento máximo e a rotação máxima do eixo da barra, através do Método da Integração da Elástica.

Para fazer o esboço da deformada, deve-se começar por determinar o diagrama de momentos fletores, porque o momento indica a curvatura:

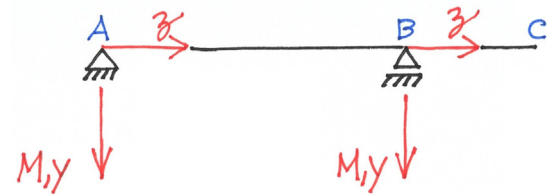
- a relação $y''(z) = -M(z)/(EI)$ implica que, se o momento for positivo, a concavidade da curva $y(z)$ é voltada para cima;
- se o momento fletor for negativo, a concavidade será voltada para baixo.

Após o cálculo das reacções nos apoios A e B, pode ser determinado o diagrama de esforços transversos e de momentos fletores. Os resultados são mostrados na imagem.

Em seguida, a deformada do eixo da barra, y , pode ser esboçada, sabendo-se que:

- o valor do momento fletor indica a curvatura (e portanto haverá um ponto de inflexão na posição em que $M=0$);
- os apoios em A e B impedem qualquer deslocamento vertical nessas posições.

O resultado é mostrado na imagem. Note-se que ainda não sabemos se o deslocamento vertical do ponto C é ascendente ou descendente.



Para calcular os valores máximos do deslocamento e da rotação, vamos agora aplicar o Método da Integração da Elástica.

Temos de começar por escrever as equações de momentos fletores. Neste Exemplo 6.3, são necessárias duas equações, porque a do segmento de barra AB é diferente da de BC.

As equações $M(z)$ podem ser escritas determinando a equação $V(z)$ para o segmento de barra, e depois utilizando a relação entre $M(z)$ e o integral de $V(z)$. Os eixos a utilizar para cada segmento de barra são apresentados na imagem.

Para a barra AB, fica:

$$0 \leq z \leq 5 \text{ m}$$

$$V(z) = 20,16 - 10z$$

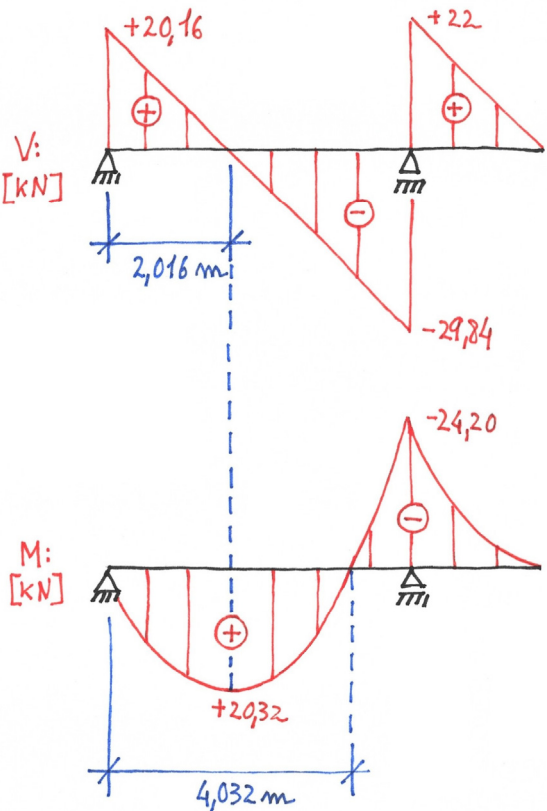
$$M(z) - M_A = \int_0^z V(z) dz \Leftrightarrow M(z) = 20,16z - 5z^2$$

e para a barra BC, será:

$$0 \leq z \leq 2,2 \text{ m}$$

$$V(z) = 22 - 10z$$

$$M(z) - M_B = \int_0^z V(z) dz \Leftrightarrow M(z) = -24,20 + 22z - 5z^2$$



Integração da equação da curvatura na barra AB:

Os limites para as abcissas deste segmento de barra são: $0 \leq z \leq 5$ m.

Parte-se da relação fundamental:

$$EIy''(z) = -M(z)$$

$$\Leftrightarrow EIy''(z) = -20,16z + 5z^2$$

Ao integrá-la, obtém-se a equação da rotação (θ em radianos = y'):

$$EIy'(z) = \int_0^z -20,16z + 5z^2 dz + C_1$$

$$\Leftrightarrow EIy'(z) = -\frac{20,16}{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 + C_1$$

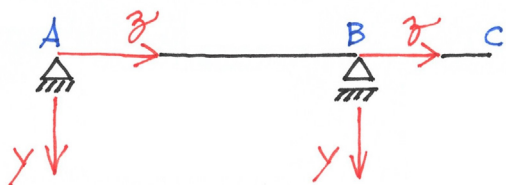
E, ao integrá-la uma vez mais, obtém-se a equação para o deslocamento y :

$$EIy(z) = \int_0^z -\frac{20,16}{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 dz + C_1z + C_2$$

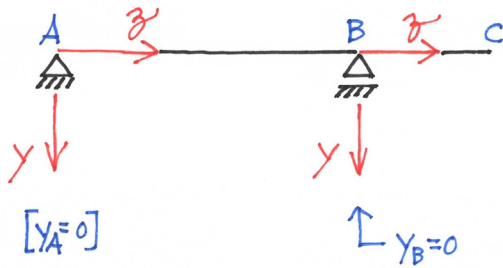
$$\Leftrightarrow EIy(z) = -\frac{20,16}{6}z^3 + \frac{5}{12}z^4 + C_1z + C_2$$

O momento de inércia da secção transversal INP180 pode ser encontrado numa tabela de perfis de aço, e é $I = 1450 \text{ cm}^4$ (assumindo que a secção transversal está correctamente orientada), e portanto a rigidez à flexão EI é:

$$EI = 206 \times 10^6 \times 1450 \times 10^{-8} = 2987 \text{ kNm}^2$$



Para determinar as constantes de integração C_1 e C_2 , são necessárias duas condições de fronteira. As condições de fronteira são valores conhecidos antecipadamente, para y ou y' , geralmente nas extremidades do segmento de barra em análise. Para o segmento AB, sabemos que:



$$y_A = y(z = 0) = 0$$

$$y_B = y(z = 5 \text{ m}) = 0$$

Substituindo estas condições na equação de $y(z)$ determinada na página anterior, obtém-se:

$$y(z = 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow EI \cdot 0 = -\frac{20,16}{6} \cdot 0^3 + \frac{5}{12} \cdot 0^4 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = 0$$

e:

$$y(z = 5 \text{ m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow EI \cdot 0 = -\frac{20,16}{6} \cdot 5^3 + \frac{5}{12} \cdot 5^4 + C_1 \cdot 5 + 0$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 31,91(6)$$

As equações $y(z)$ e $y'(z)$ para a barra AB ficam assim completamente definidas:

$$y'_{AB}(z) = \frac{1}{2987} \left[-\frac{20,16}{2} z^2 + \frac{5}{3} z^3 + 31,91(6) \right]$$

$$y_{AB}(z) = \frac{1}{2987} \left[-\frac{20,16}{6} z^3 + \frac{5}{12} z^4 + 31,91(6)z \right]$$

Integração da equação da curvatura na barra BC:

Aplicando o mesmo procedimento à barra BC:

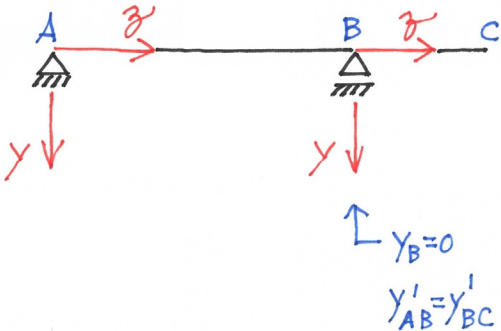
$$0 \leq z \leq 2,2 \text{ m}$$

$$M(z) = -24,2 + 22z - 5z^2$$

$$EIy''(z) = -M(z) = 24,2 - 22z + 5z^2$$

$$EIy'(z) = 24,2z - \frac{22}{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 + C_3$$

$$EIy(z) = \frac{24,2}{2}z^2 - \frac{22}{6}z^3 + \frac{5}{12}z^4 + C_3z + C_4$$



As condições de fronteira para a determinação das constantes de integração C_3 e C_4 encontram-se na extremidade esquerda da barra. Nessa posição, sabemos antecipadamente que o deslocamento é zero, e a rotação y' também é conhecida porque pode ser calculada utilizando a equação previamente determinada para a rotação da barra AB:

$$y_B = y(z = 0) = 0$$

$$y'_{BC}(z = 0) = y'_{AB}(z = 5\text{m}) = \frac{1}{2987} \left[-\frac{20,16}{2} \cdot 5^2 + \frac{5}{3} \cdot 5^3 + 31,91(6) \right] = \frac{-11,75}{2987}$$

As constantes de integração podem agora ser determinadas:

$$EI \cdot y'_{BC}(z = 0) = 24,2 \cdot 0 - \frac{22}{2} \cdot 0^2 + \frac{5}{3} \cdot 0^3 + C_3$$

$$\Leftrightarrow 2987 \cdot \frac{-11,75}{2987} = 0 + C_3 \Leftrightarrow C_3 = -11,75$$

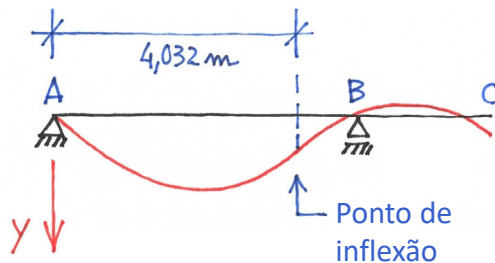
$$EI y_{BC}(z = 0) = \frac{24,2}{2} \cdot 0^2 - \frac{22}{6} \cdot 0^3 + \frac{5}{12} \cdot 0^4 + C_3 \cdot 0 + C_4$$

$$\Leftrightarrow EI \cdot 0 = 0 + C_4 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

As equações $y(z)$ e $y'(z)$ para a barra BC serão portanto:

$$y'_{BC}(z) = \frac{1}{2987} \left[24,2z - \frac{22}{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 - 11,75 \right]$$

$$y_{BC}(z) = \frac{1}{2987} \left[\frac{24,2}{2}z^2 - \frac{22}{6}z^3 + \frac{5}{12}z^4 - 11,75z \right]$$



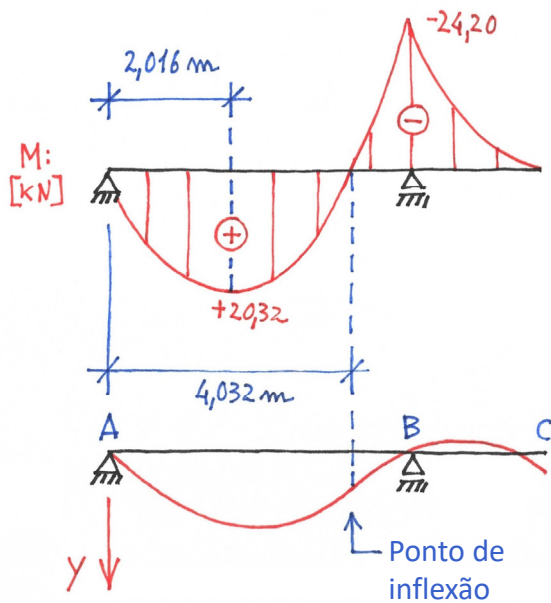
Uma vez obtidas as equações de $y(z)$ e $y'(z)$ para ambos os segmentos de barra (AB e BC), podemos finalmente calcular os valores máximos pretendidos, para o deslocamento e a rotação. O esboço da deformada (feito anteriormente, e reproduzido na imagem à esquerda) é útil para a identificação das posições onde os cálculos têm de ser feitos.

Será necessário pesquisar o deslocamento máximo descendente calculando $y(z)$:

- na posição do máximo local atingido na barra AB, que ocorre na abcissa z onde $y'_{AB}(z) = 0$;
- no ponto C, porque o deslocamento máximo pode ocorrer não só nos pontos onde $y'(z) = 0$, mas também nas extremidades (livres) das barras.

É necessário calcular o deslocamento máximo para cima:

- na abcissa z onde se atinge um máximo local na barra BC, ou seja, na abcissa z onde $y'_{BC}(z) = 0$.



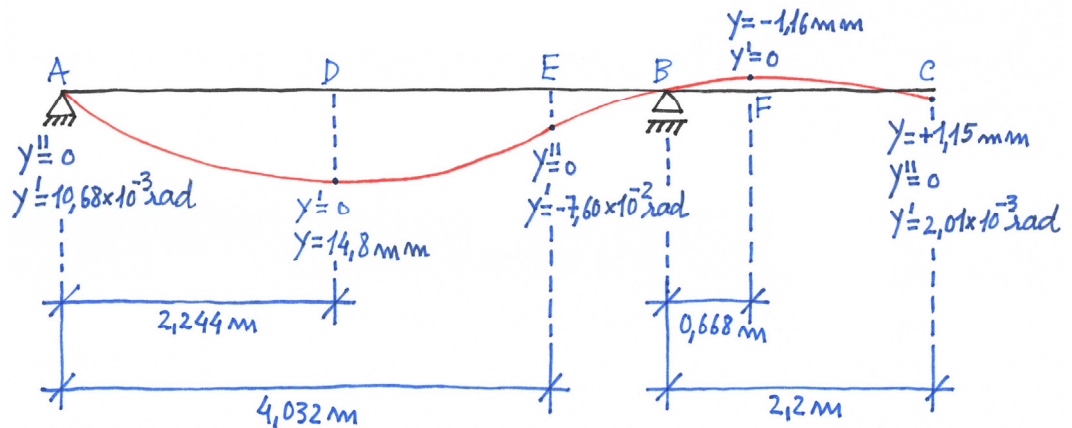
Será necessário pesquisar a rotação máxima calculando $y'(z)$ em todas as posições onde a função $y'(z)$ atinge um máximo local, ou seja, nas abscissas onde $y''(z) = 0$. Tendo em conta que

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

essas posições coincide com as abscissas onde $M(z) = 0$:

- ponto A;
- Ponto de inflexão;
- ponto C.

Os resultados (deslocamentos e rotações máximas), são apresentados na imagem abaixo:



6.2. Método da Unidade Fictícia de Carga

6.2.1. Fundamentos do método

O **Método da Unidade Fictícia de Carga** é também conhecido como o **Método de Maxwell-Mohr**. É utilizado no cálculo de deslocamentos ou rotações em estruturas, e deriva da lei da conservação de energia, o que implica que, em estruturas com comportamento elástico e cargas lentamente crescentes o trabalho realizado pelo carregamento exterior seja inteiramente armazenado como energia de deformação elástica.

O cálculo de deslocamentos ou rotações em estruturas isostáticas, utilizando este método, é feito da mesma forma que no subcapítulo 3.2, mas:

- no subcapítulo 3.2, as barras deformáveis estavam sujeitas apenas a esforço axial;
- agora considera-se não só a **deformação devida ao esforço axial**, mas também **devida ao momento fletor** e, por essa razão, teremos de calcular a energia de deformação elástica devida à flexão.

Sabe-se que, em estruturas planas, os esforços resultantes nas secções transversais das barras são:

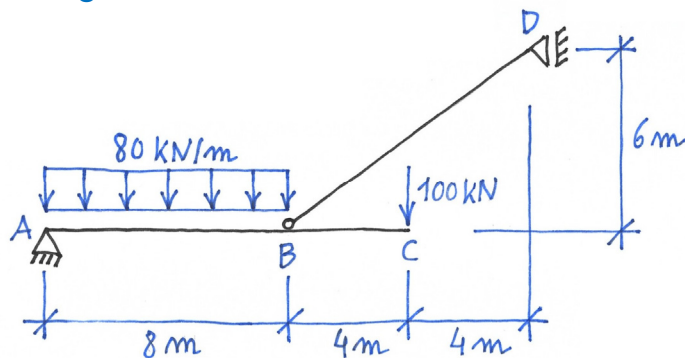
- o esforço axial N ;
- o momento fletor M ;
- e o esforço transversal V .

Não consideramos as **deformações devidas ao esforço transversal** nestas aulas teórico-práticas de RM1, porque estas deformações são, nas estruturas reais, geralmente negligenciáveis quando comparadas com as deformações devidas aos momentos flectores e aos esforços axiais.

6.2.2. Utilização do método

Exemplo 6.4:

Carregamento real:



Numa estrutura isostática, o cálculo do deslocamento de um determinado ponto, numa determinada direcção (δ_C^{vert} neste Exemplo 6.4), é feito através do procedimento descrito abaixo.

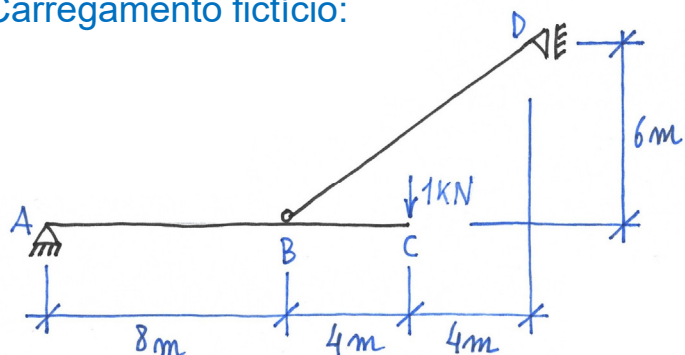
Considerando o **carregamento real**, calcular:

- o esforço axial, N_i , para cada barra i da estrutura;
- o alongamento, ΔL_i , para cada barra, devido às forças aplicada, às variações de temperatura ΔT_i e a defeitos de fabrico Def_i ;

$$\Delta L_i = \left[\frac{N L}{E A} + \alpha \Delta T L + Def \right]_i$$

- o diagrama de momentos fletores, $M_i(z)$, para cada barra.

Carregamento fictício:



Considerando a estrutura carregada apenas com uma **carga fictícia unitária** (em correspondência com o deslocamento que se pretende determinar), calcular:

- o esforço axial em cada barra i , designando-o por $\bar{N}_i$;
- o diagrama de momentos fletores em cada barra i , designando-o por $\bar{M}_i(z)$.

De acordo com este método, o trabalho das forças exteriores, W , é igual à energia de deformação elástica, U , considerando forças fictícias e deformações reais:

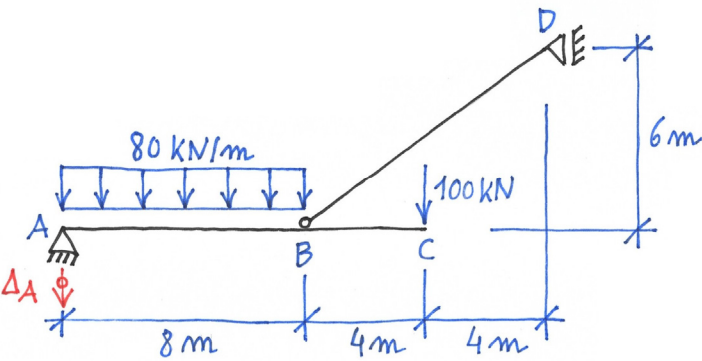
$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{\text{vert}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\bar{N}_i \times \Delta L_i)}_{\text{efeito da deformação axial das barras}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left[\int_0^{L_i} \frac{M_i(z) \times \bar{M}_i(z)}{EI} dz \right]}_{\text{efeito da deformação por flexão}}$$

onde L_i é o comprimento da barra i e n é o número total de barras na estrutura. Esta expressão permite determinar o deslocamento pretendido, δ_C^{vert} . Devem ser adotadas **convenções de sinais** coerentes para todas as barras, por exemplo: esforços axiais com valor positivo em caso de tração; alongamentos ΔL_i com valor positivo em caso de aumento do comprimento; a convenção habitual para momentos fletores positivos em estruturas planas.

Neste Exemplo 6.4, a única força externa que contribui para o trabalho W é a carga fictícia unitária, porque não há movimento de qualquer apoio.

Exemplo 6.5:



Se houver algum assentamento de apoio, como no Exemplo 6.5, a igualdade do trabalho das forças exteriores e da energia de deformação elástica fica:

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{\text{vert}} + \overline{H}_A \times \Delta_A = \sum_{i=1}^n (\overline{N}_i \times \Delta L_i) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{L_i} \frac{M_i(z) \times \overline{M}_i(z)}{EI} dz \right]$$

onde $\overline{H}_A$ é a reação de apoio devida à carga fictícia unitária. Mais uma vez, esta equação dá o deslocamento pretendido δ_C^{vert} , se o valor do assentamento de apoio, Δ_A , for conhecido.

Recorde-se que o cálculo dos diagramas de esforços devidos ao carregamento real (N_i e M_i) não é influenciado por variações de temperatura, defeitos de fabrico ou movimentos de suporte. **Em estruturas isostáticas**, estas **deformações impostas** não dão origem a qualquer força interna na estrutura.

Se o objetivo da análise for o cálculo da rotação numa determinada posição, a carga fictícia unitária será um momento unitário nessa posição.

6.2.3. Exemplo de cálculo

Exemplo 6.6:

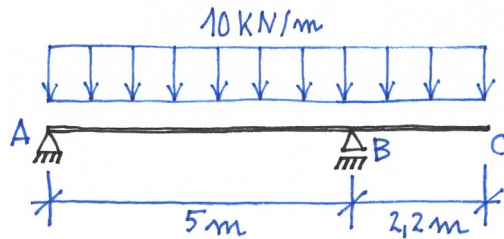
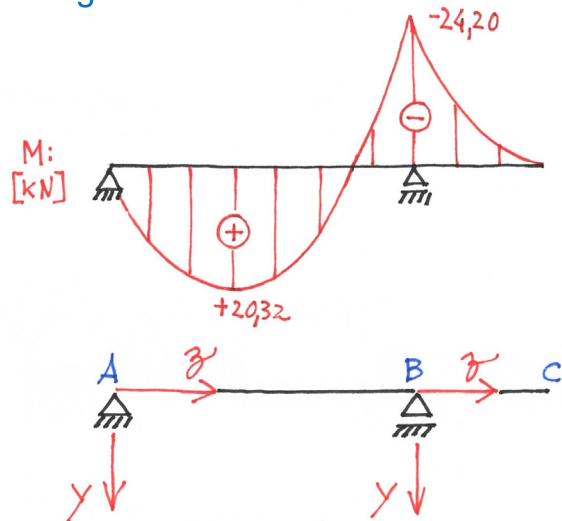


Diagrama de momentos para o carregamento real:



Problema:

Considere-se a viga de aço ABC ($E = 206 \text{ GPa}$; INP180), sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m (a mesma estrutura e carga que no Exemplo 6.3). Pretende-se calcular o deslocamento vertical do ponto C, através do Método da Unidade Fictícia de Carga.

Começamos por calcular os diagramas de esforços e os alongamentos das barras, devidos ao carregamento real:

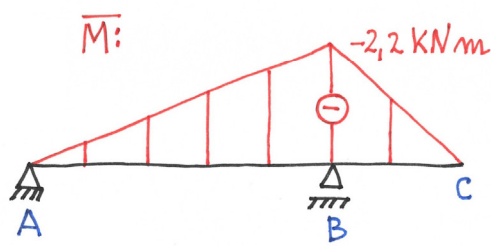
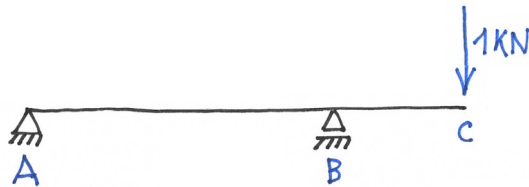
- o esforço axial é zero em todas as barras;
- o alongamento é zero em todas as barras;
- o diagrama dos momentos fletores e as equações correspondentes foram determinados antes, no Exemplo 6.3.

As equações de momentos, utilizando os sistemas de eixos mostrados na imagem ao lado, são:

$$M_{AB}(z) = 20.16z - 5z^2$$

$$M_{BC}(z) = -24.2 + 22z - 5z^2$$

Carga fictícia unitária, e diagrama de momentos fletores correspondente:



A carga fictícia unitária, para cálculo do deslocamento vertical descendente do ponto C, é uma força unitária vertical descendente em C.

O diagrama de momentos fletores, devidos a esta carga unitária, terá a forma mostrada na imagem, e as equações correspondentes são:

$$\overline{M}_{AB}(z) = -0,44z$$

$$\overline{M}_{BC}(z) = -2,2 + z$$

De acordo com o método, o trabalho das forças externas, W , é igual à energia de deformação elástica, U , considerando forças fictícias e deformações reais. Na estrutura em análise, o efeito das deformações axiais das barras é nulo, no cálculo de U :

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{vert} = \sum_{i=1}^n (\overline{N}_i \times \Delta L_i) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{L_i} \frac{M_i(z) \times \overline{M}_i(z)}{EI} dz \right]$$

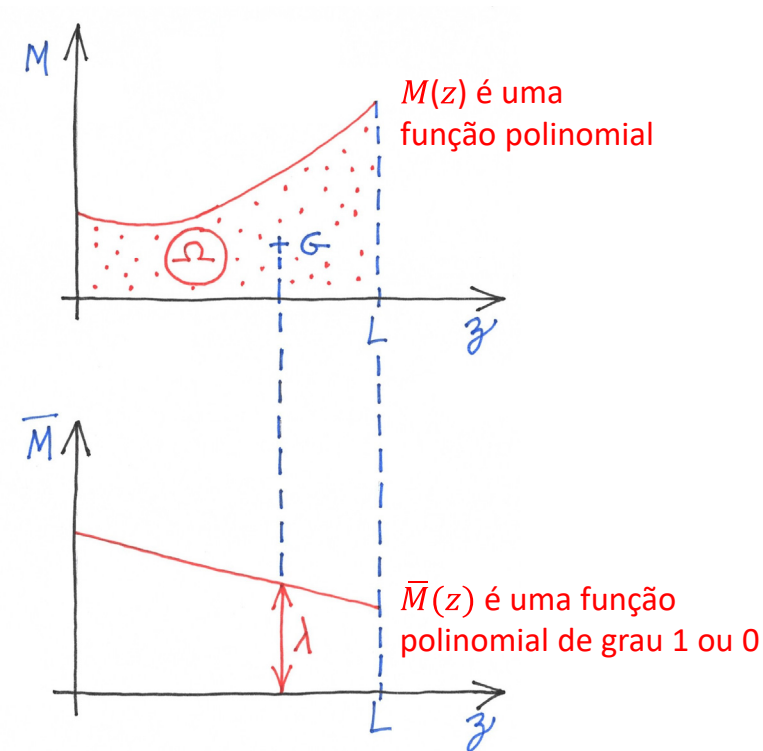
$$\Leftrightarrow \delta_C^{vert} = \frac{1}{EI} \int_0^5 M_{AB}(z) \times \overline{M}_{AB}(z) dz + \frac{1}{EI} \int_0^{2,2} M_{BC}(z) \times \overline{M}_{BC}(z) dz$$

$$\Leftrightarrow \delta_C^{vert} = \frac{1}{2987} \int_0^5 (20,16z - 5z^2) \times (-0,44z) dz + \frac{1}{2987} \int_0^{2,2} (-24,2 + 22z - 5z^2) \times (-2,2 + z) dz$$

$$\Leftrightarrow \delta_C^{vert} = -0,008654 + 0,009803$$

$$\Leftrightarrow \delta_C^{vert} = +0,00115 \text{ m}$$

6.2.4. Método de Bonfim Barreiros, para cálculo do integral do produto de duas funções polinomiais



Os diagramas de momentos fletores apresentam geralmente **formas geométricas simples**, como triângulos, retângulos ou parábolas de 2º grau. Nestes casos, o integral

$\int_0^{L_i} M_i(z) \times \bar{M}_i(z) dz$ necessário para aplicação do Método da Unidade Fictícia de Carga pode ser calculado de uma forma alternativa, utilizando o Método de Bonfim Barreiros.

O Método de Bonfim Barreiros, também conhecido como Método de Vereshchagin, é utilizado para o **cálculo do integral do produto de duas funções polinomiais**, sendo uma de grau 1 (ou grau 0). De acordo com este método:

$$\int_0^L M(z) \times \bar{M}(z) dz = \Omega \times \lambda$$

onde:

- Ω é a área delimitada pela função $M(z)$
- λ é o valor de $\bar{M}(z)$ para uma abscissa igual à abscissa do centro geométrico, G , da área Ω

Demonstração:

Se o diagrama $\bar{M}(z)$ for uma reta, cuja equação escreveremos na forma $\bar{M}(z) = a \cdot z + b$, então:

$$\int_A^B M(z) \cdot \bar{M}(z) dz$$

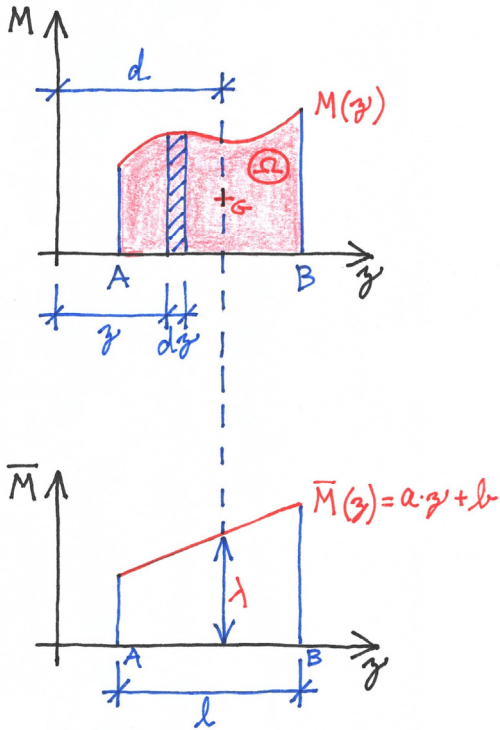
$$= \int_A^B M(z) \cdot (a z + b) dz$$

$$= a \int_A^B M(z) \cdot z dz + b \int_A^B M(z) dz$$

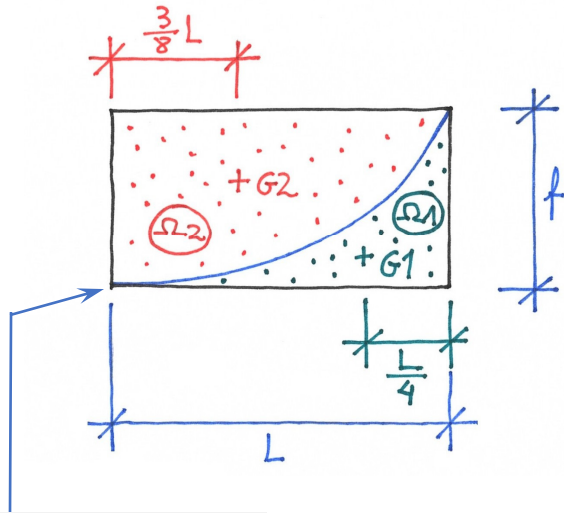
$$= a \cdot d \cdot \Omega + b \cdot \Omega$$

$$= \Omega \cdot (a \cdot d + b)$$

$$= \Omega \cdot \lambda \quad (\text{conforme se pretendia demonstrar})$$



6.2.5. Área e posição do centro das parábolas do 2º grau do tipo $y = k x^2$



Posição onde a primeira derivada da função $M(z)$ tem de ser zero, ou seja, a tangente à curva tem de ser horizontal.

Se o diagrama de momentos fletores $M(z)$ for uma parábola de 2º grau, com a forma apresentada na imagem, a área delimitada pelo diagrama é

$$\Omega_1 = \frac{1}{3} f L \quad \text{no caso da parábola de menor área (a verde na imagem)}$$

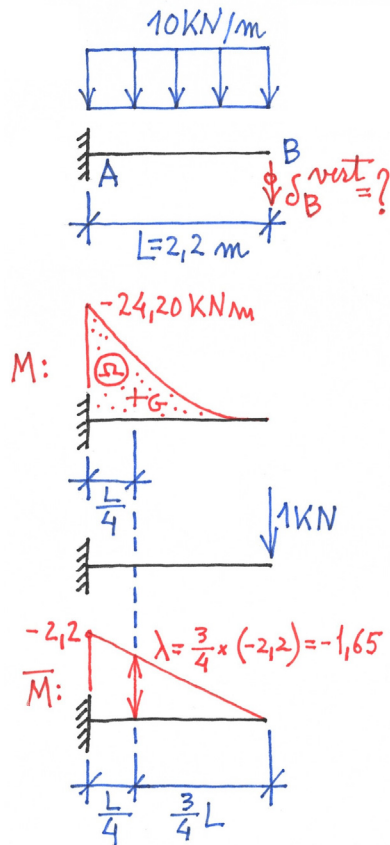
$$\Omega_2 = \frac{2}{3} f L \quad \text{no caso da parábola de maior área (a vermelho na imagem)}$$

A posição do centro destas parábolas é mostrada na imagem.

Estas fórmulas só são válidas se, no ponto indicado na imagem, a primeira derivada da função $M(z)$ for zero, ou seja, se a tangente à curva for horizontal.

6.2.6. Exemplo de cálculo

Exemplo 6.7:



Problema:

Considere-se a viga em consola apresentada na figura, com rigidez à flexão $EI = 2987 \text{ kNm}^2$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m^2 . Pretende-se determinar o deslocamento vertical da extremidade livre B, utilizando o Método da Unidade Fictícia de Carga e o Método de Bonfim Barreiros.

Diagrama de momentos fletores, devido à carga real:

Uma vez que o esforço transversal é zero no ponto B, a tangente ao diagrama de momentos fletores é horizontal nesta posição.

O momento máximo ocorre em A, e pode ser calculado determinando a resultante das ações aplicadas à direita desta secção transversal A:

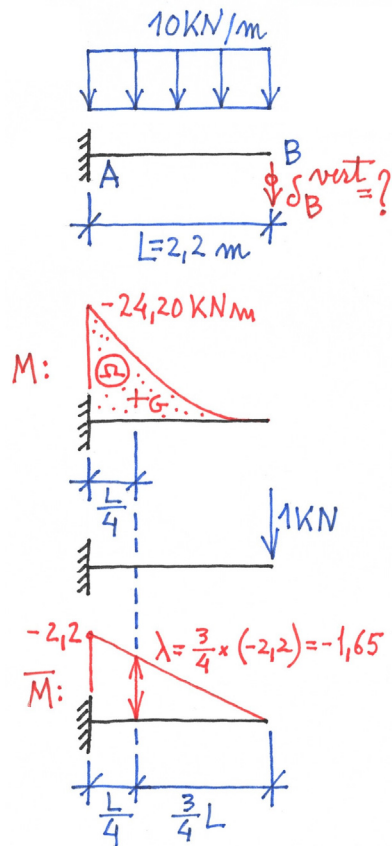
$$M_A = -10 \times 2,2 \times \frac{2,2}{2} \text{ kNm}$$

A forma do diagrama é do mesmo tipo que a parábola 1 no subcapítulo 6.2.5.

Diagrama de momentos fletores devidos à carga fictícia unitária:

A carga fictícia unitária terá que ser uma força vertical em B. O diagrama correspondente é portanto uma linha reta, com um valor máximo de:

$$\bar{M}_A = -1 \times 2,2 \text{ kNm}$$



Cálculo do deslocamento:

De acordo com o Método da Unidade Fictícia de Carga, o deslocamento vertical do ponto B é dado por:

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_B^{\text{vert}} = \sum_{i=1}^n (\bar{N}_i \times \Delta L_i) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{L_i} \frac{M_i(z) \times \bar{M}_i(z)}{EI} dz \right]$$

$$\Leftrightarrow \delta_B^{\text{vert}} = \frac{1}{EI} \int_0^{2,2} M_{AB}(z) \times \bar{M}_{AB}(z) dz$$

Usando o Método de Bonfim Barreiros:

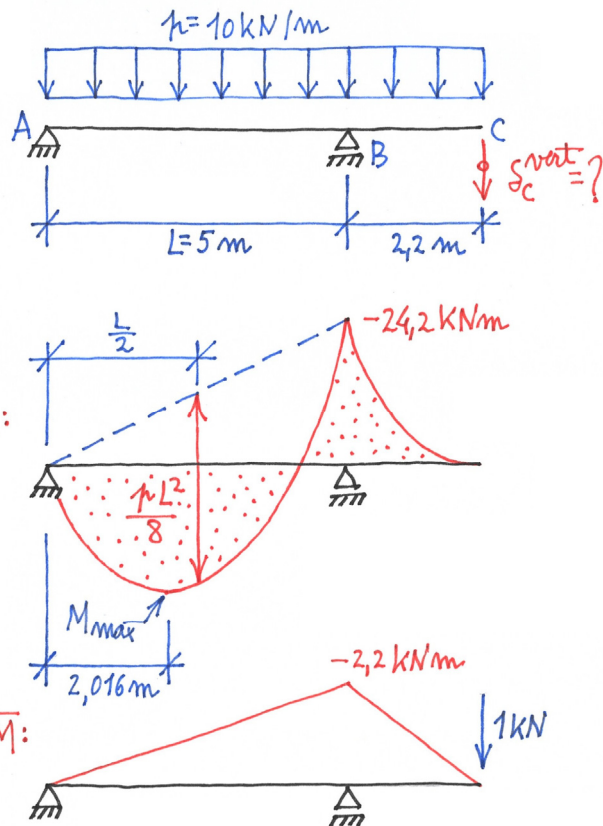
$$\int_0^{2,2} M_{AB}(z) \times \bar{M}_{AB}(z) dz = \Omega \times \lambda = \left[\frac{-24,2 \times 2,2}{3} \right] \times \left[\frac{3}{4} \times (-2,2) \right] = 29,282$$

e portanto:

$$\delta_B^{\text{vert}} = \frac{1}{EI} \times \Omega \times \lambda = \frac{29,282}{2987} = 0,009803 \text{ m}$$

6.2.7. Aplicação do Método de Bonfim Barreiros, em barras sujeitas a carga uniformemente distribuída, decompondo o diagrama $M(z)$ em formas geométricas simples

Exemplo 6.8:



Problema:

Considere-se a viga de aço ABC ($E = 206 \text{ GPa}$; INP180), sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m (a mesma estrutura e carga que nos Exemplos 6.3 e 6.6). Pretende-se calcular o deslocamento vertical do ponto C.

Aplicaremos o Método da Unidade Fictícia de Carga, mas ao contrário do que fizemos no Exemplo 6.6, agora o Método de Bonfim Barreiros será utilizado para o cálculo dos integrais $\int M(z) \bar{M}(z) dz$ para as duas barras.

Diagrama de momentos devidos ao carregamento real:

O diagrama de momentos devidos à carga real já foi determinado no Exemplo 6.3. Como se mostra na imagem, na barra AB, a área delimitada pelo diagrama $M(z)$ não é uma forma geométrica simples, e portanto essa área Ω e o seu centro geométrico não podem ser calculados directamente. Vamos ver como resolver esta questão na página seguinte.

Diagrama de momentos devidos à carga fictícia unitária:

A carga fictícia unitária terá que ser uma força vertical em C. Para esta carga, pode-se facilmente ver que o esforço transversal é constante em AB, e também em BC. Consequentemente, o diagrama de momentos será uma função linear em AB, e também em BC. Dado que não pode ocorrer qualquer variação súbita de momento fletor em B, o diagrama torna-se totalmente conhecido após calcular $\bar{M}_B$.

Diagrama de momentos para o carregamento real:

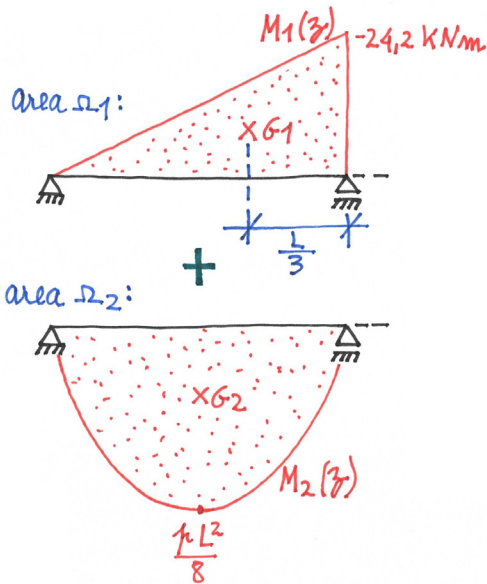
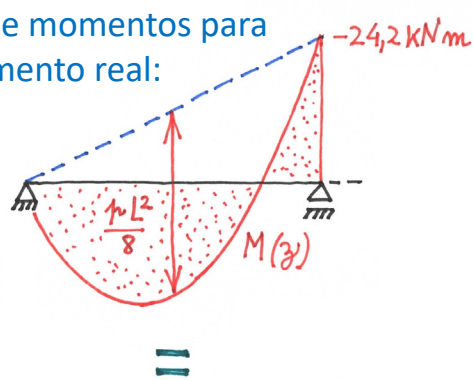
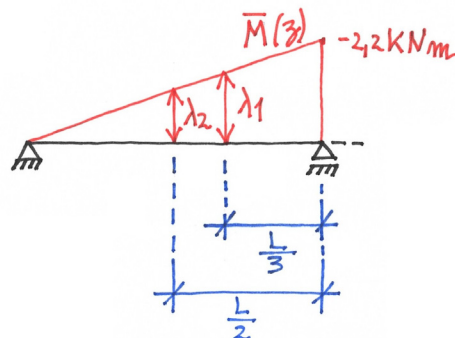


Diagrama de momentos para a carga fictícia:



Aplicação do Método de Bonfim Barreiros, através da decomposição do diagrama $M(z)$ em formas geométricas simples:

A área Ω , delimitada pelo diagrama $M(z)$ na barra AB, e o seu centro geométrico, não podem ser calculados directamente. Contudo, este tipo de diagrama de momentos flectores, num segmento de barra sujeito a uma carga uniformemente distribuída p , pode ser decomposto num triângulo e numa parábola, como foi explicado no subcapítulo 4.7.

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

Assim, na barra AB:

$$\begin{aligned} \int_0^L M(z) \times \bar{M}(z) dz &= \\ &= \int_0^L [M_1(z) + M_2(z)] \times \bar{M}(z) dz = \\ &= \int_0^L M_1(z) \times \bar{M}(z) dz + \int_0^L M_2(z) \times \bar{M}(z) dz = \\ &= \Omega_1 \times \lambda_1 + \Omega_2 \times \lambda_2 \end{aligned}$$

Cálculo do deslocamento vertical do ponto C:

Os diagramas de momentos, tanto para o carregamento real como para a carga fictícia, já foram determinados. Neste Exemplo 6.8, não há alongamento axial. Portanto, de acordo com o Método da Unidade Fictícia de Carga:

$$W = U$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \delta_C^{\text{vert}} = \frac{1}{EI} \int_0^5 M_{AB}(z) \times \overline{M}_{AB}(z) dz + \frac{1}{EI} \int_0^{2,2} M_{BC}(z) \times \overline{M}_{BC}(z) dz$$

Conforme se viu na página anterior, a expressão integral para a barra AB pode ser calculada, utilizando o Método de Bonfim Barreiros, como :

$$\int_0^5 M_{AB}(z) \times \overline{M}_{AB}(z) dz = \Omega_1 \times \lambda_1 + \Omega_2 \times \lambda_2 =$$

No que diz respeito à área Ω_2 , o valor do seu momento máximo é $pL^2/8 = 31,25$, e o valor da área é (conforme foi explicado no subcapítulo 6.2.5):

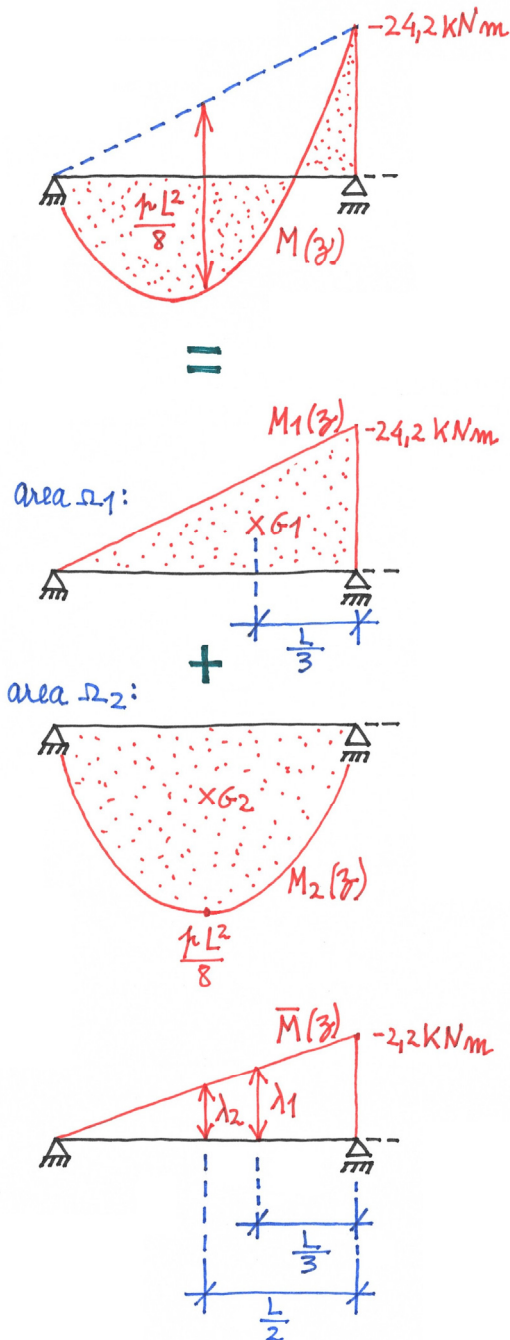
$$\Omega_2 = \frac{2}{3} f L = \frac{2}{3} \times 31,25 \times 5 = 104,1(6)$$

Assim:

$$\Omega_1 \times \lambda_1 + \Omega_2 \times \lambda_2 = \left[\frac{5 \times (-24,2)}{2} \right] \times \left[\frac{2}{3} \times (-2,2) \right] + [104,1(6)] \times \left[\frac{-2,2}{2} \right] = -25,850$$

O cálculo de $\Omega \times \lambda$ para a barra BC é igual ao que foi feito no Exemplo 6.7. Então:

$$\delta_C^{\text{vert}} = \frac{1}{EI} [-25,850 + 29,282] = \frac{1}{2987} \times 3,432 = 0,00115 \text{ m}$$



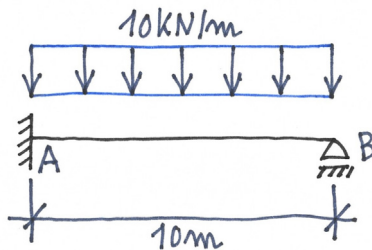
7. Reações de apoio e diagramas de esforços em estruturas hiperestáticas ($H = 1$) com barras sujeitas a flexão

7.1. Procedimento de cálculo

No subcapítulo 2.3, vimos o procedimento de cálculo das reações de apoio e dos esforços, em estruturas uma vez hiperestáticas. Isso foi feito para estruturas em que as barras deformáveis estavam sujeitas apenas a esforço axial.

Vejamos agora um procedimento genérico para análise de estruturas planas, uma vez hiperestáticas, nas quais também podem ocorrer deformações devido ao momento fletor.

Exemplo 7.1:

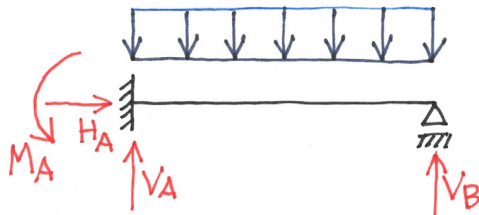


O Exemplo 7.1 é uma estrutura hiperestática, com grau de hiperstaticidade $H = 1$. Está sujeita a uma carga uniformemente distribuída, e a rigidez à flexão da viga é $EI = 8 \times 10^4 \text{ kNm}^2$.

Para o cálculo das reações de apoio nesta estrutura, existem:

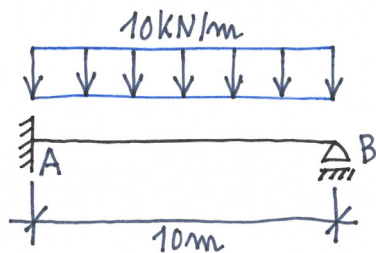
- **4 incógnitas (reações de apoio);**
- **3 equações de equilíbrio global.**

Carregamento e reações de apoio:

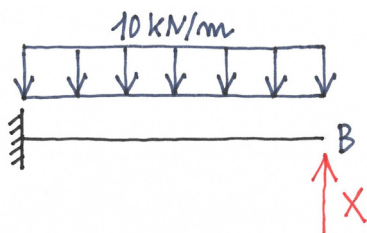


A equação adicional, necessária para o cálculo das 4 reações de apoio, será:

- **1 condição de compatibilidade das deformações.**



≡



O procedimento de cálculo é baseado no seguinte facto:

O comportamento da estrutura não é alterado se uma das reações de apoio for substituída por uma força X , se o deslocamento do ponto for o mesmo que na estrutura real.

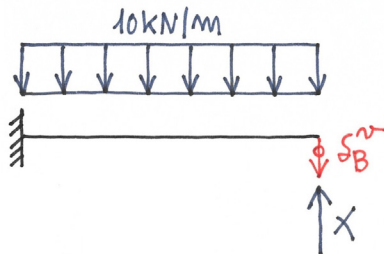
A força X é denominada de incógnita hiperestática. As duas estruturas na imagem são equivalentes se o deslocamento vertical do ponto B, δ_B^v , for:

$$\delta_B^v = 0$$

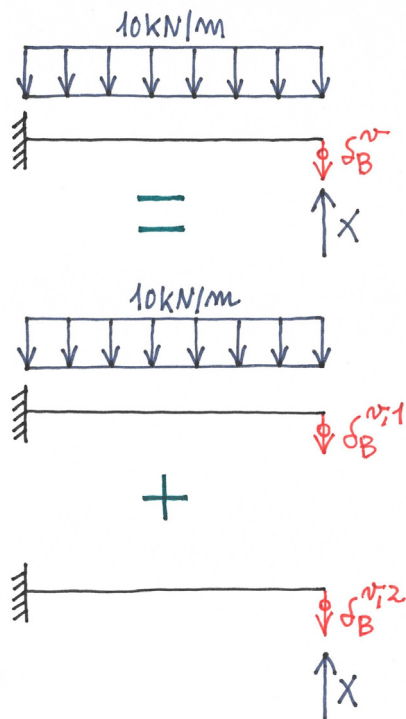
Esta é a **condição de compatibilidade de deformações** para esta estrutura.

Se a incógnita hiperestática for calculada, então as restantes reações de apoio podem ser determinadas através das equações de equilíbrio, e os diagramas de esforços também podem ser obtidos.

Procedimento para o cálculo da incógnita hiperestática X :



- 1) Determinar os diagramas de esforços, tratando a incógnita hiperestática X como se fosse uma força aplicada.
- 2) **Calcular o deslocamento** que aparece na equação de compatibilidade (δ_B^v neste exemplo), usando o Método de Integração da Elástica, ou o Método da Unidade Fictícia de Carga. Este deslocamento será expresso como uma função de X .
- 3) Ao **introduzir o deslocamento** calculado no passo 2 **na equação de compatibilidade de deformações**, o valor de X é determinado.



Problema:

Determinar as reações de apoio e os diagramas de esforços para a estrutura apresentada no Exemplo 7.1, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m.

É necessário começar por calcular o deslocamento δ_B^v devido à carga aplicada e à incógnita hiperestática X .

Para obter diagramas de momentos fletores simples, é conveniente calcular δ_B^v através da sobreposição dos efeitos de:

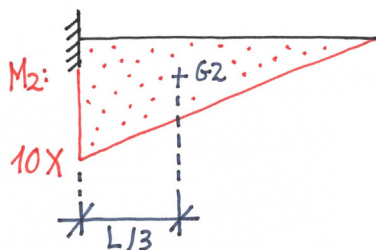
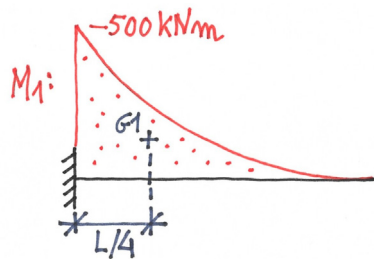
- carga aplicada de 10 kN/m (deslocamento aqui designado $\delta_B^{v,1}$);
- incógnita hiperestática (deslocamento aqui designado $\delta_B^{v,2}$);

de modo que $\delta_B^v = \delta_B^{v,1} + \delta_B^{v,2}$, e a equação de compatibilidade de deformações fica:

$$\delta_B^{v,1} + \delta_B^{v,2} = 0$$

Os diagramas de momentos devidos à carga aplicada (M_1) e à incógnita hiperestática (M_2) são apresentados ao lado.

O diagrama M_1 é uma parábola de 2º grau, e a primeira derivada de M_1 no ponto B é zero. Portanto, a área delimitada por este diagrama e o seu centro geométrico podem ser calculados como se mostra no subcapítulo 6.2.5.



Diagramas de momentos fletores para o carregamento real:

Calculemos agora os deslocamentos $\delta_B^{v,1}$ e $\delta_B^{v,2}$ usando o Método da Unidade Fictícia de Carga, e o Método de Bonfim Barreiros.

A imagem mostra a carga fictícia unitária, e o diagrama de momentos fletores correspondente, $\bar{M}$.

Os deslocamentos serão:

$$\delta_B^{v,1} = \frac{1}{EI} \cdot \Omega_1 \cdot \lambda_1 = \frac{1}{8 \cdot 10^4} \left[\frac{-500 \cdot 10}{3} \right] \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot (-10) \right] = +0,15625 \text{ m}$$

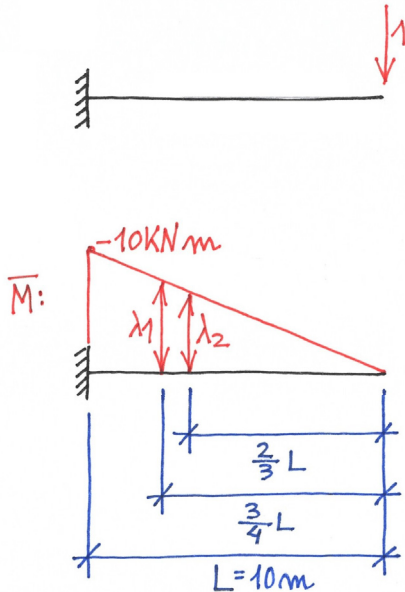
$$\delta_B^{v,2} = \frac{1}{EI} \cdot \Omega_2 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{8 \cdot 10^4} \left[\frac{10 \cdot 10 \cdot X}{2} \right] \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (-10) \right] = -0,0041(6) \cdot X$$

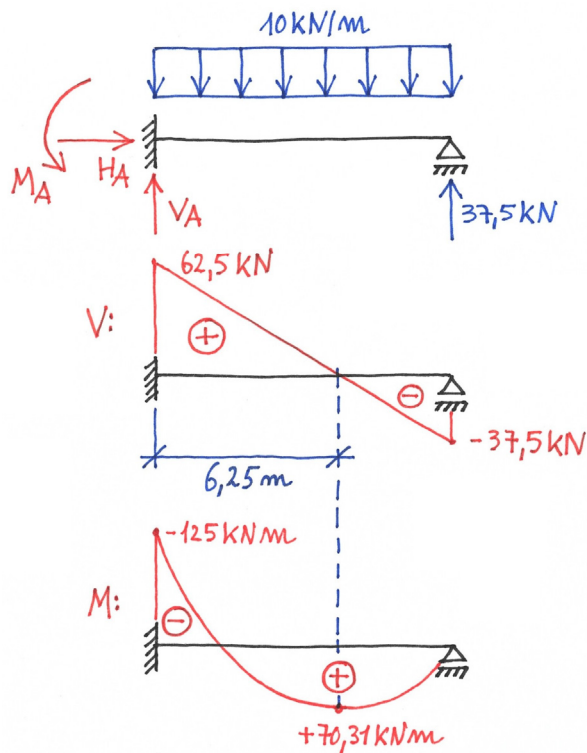
Introduzindo estes deslocamentos na equação de compatibilidade de deformações, determina-se o valor da incógnita hiperestática.

$$\delta_B^{v,1} + \delta_B^{v,2} = 0$$

$$\Leftrightarrow +0,15625 \text{ m} - 0,0041(6) \cdot X = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 37,5 \text{ kN}$$



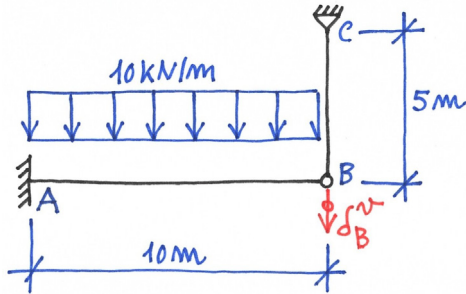


Uma vez quantificada a incógnita hiperestática, pode determinar-se as restantes reações de apoio utilizando as equações de equilíbrio.

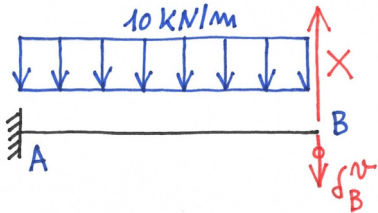
Depois, pode calcular-se os diagramas de esforços. Os resultados são mostrados na figura.

7.2. Exemplo de uma estrutura suportada por uma barra articulada

Exemplo 7.2:



≡



Problema:

Considere-se a estrutura plana, uma vez hiperestática, apresentada na figura, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m. A rigidez à flexão da barra AB é $EI = 8 \times 10^4$ kNm². A área da secção transversal da barra BC é $A = 2$ cm² e o seu módulo de elasticidade é $E = 200$ GPa. Pretende-se determinar as reações de apoio.

A barra BC é articulada, e portanto o único esforço não nulo nesta barra é o esforço axial. Portanto, a estrutura hiperestática pode ser resolvida através da substituição desta barra articulada pela força axial que aplica na estrutura restante, sendo esta a incógnita hiperestática X .

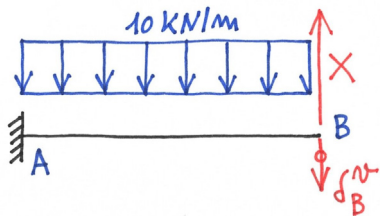
A estrutura na imagem abaixo é equivalente à real (na imagem acima), se o deslocamento δ_B^v for o mesmo em ambas as estruturas.

Isto significa que o deslocamento calculado na estrutura mostrada na imagem de baixo deve ser:

$$\delta_B^v = \Delta L_{BC}$$

$$\Leftrightarrow \delta_B^v = \frac{X \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}}$$

Sendo esta a equação de compatibilidade de deformações.



A expressão que dá o deslocamento δ_B^v devido à carga aplicada e à incógnita hiperestática X é a que foi calculada no Exemplo 7.1:

$$\delta_B^v = +0,15625 \text{ m} - 0,0041(6) \cdot X$$

Introduzindo esta expressão na equação de compatibilidade de deformações, obtém-se a incógnita hiperestática X :

$$\delta_B^v = \frac{X \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}}$$

$$\Leftrightarrow 0,15625 \text{ m} - 0,0041(6) \cdot X = \frac{X \cdot 5}{200 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}$$

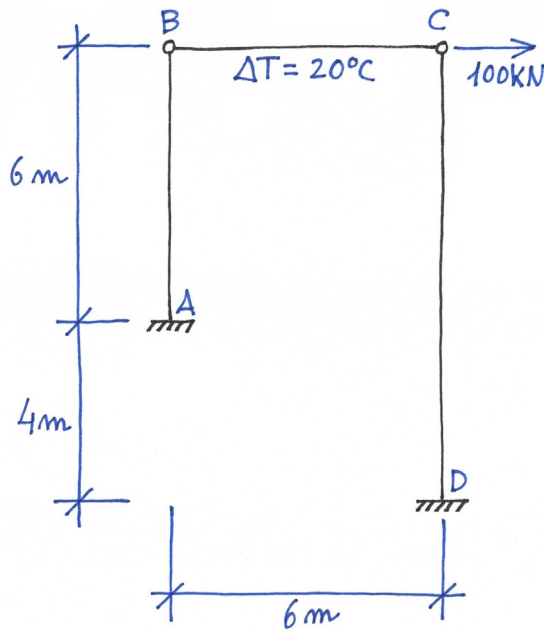
$$\Leftrightarrow X = 36,4 \text{ kN}$$

As estruturas dos Exemplos 7.1 e 7.2 são muito semelhantes. A diferença é que o apoio vertical (rígido) em 7.1 é substituído por um apoio flexível (tirante BC) no Exemplo 7.2. Devido à flexibilidade do apoio, a força vertical no ponto B é menor no Exemplo 7.2.

Uma vez determinada a incógnita hiperestática X , podem ser facilmente calculadas as restantes reações de apoio, através das condições de equilíbrio.

7.3. Exemplo de uma estrutura com uma barra articulada interna

Exemplo 7.3:



Problema:

A estrutura na imagem é composta por dois pilares (AB e CD) de altura diferente, com rigidez à flexão $EI = 1,83 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$, encastrados na base.

A extremidade superior dos pilares está unida por uma barra articulada ($E = 200 \text{ GPa}$, $A = 8,04 \text{ cm}^2$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$).

É aplicada uma força concentrada horizontal no nó C, e a barra BC sofre um aumento de temperatura de 20°C .

O objetivo deste problema é o cálculo da força axial na barra articulada, N_{BC} .

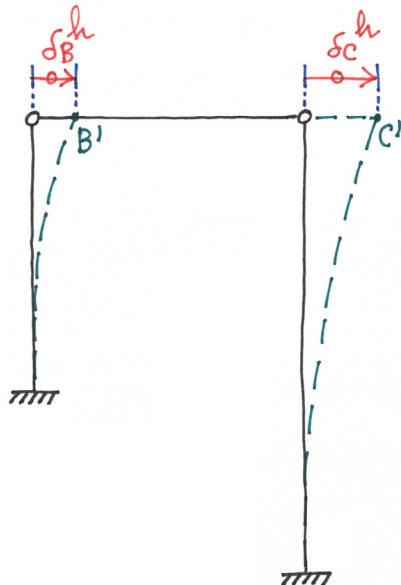
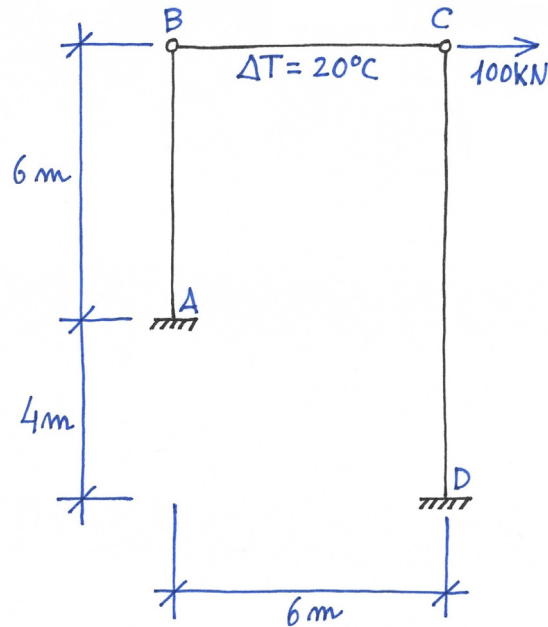
A estrutura é uma vez hiperestática.

Portanto, é necessária uma equação de compatibilidade de deformações para calcular as reações de apoio.

A estrutura tem uma barra articulada interna, na qual o único esforço não nulo é o esforço axial. Assim, é conveniente fazer os cálculos considerando que a incógnita hiperestática é esta força axial:

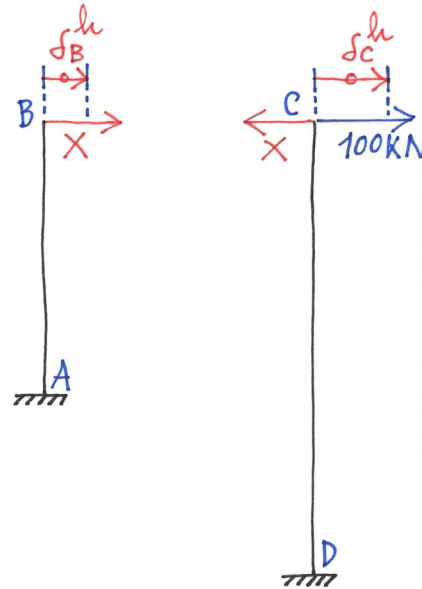
$$X = N_{BC}$$

Estrutura real:



Estrutura após substituição de uma das ligações pela incógnita hiperestática X :

$\equiv$



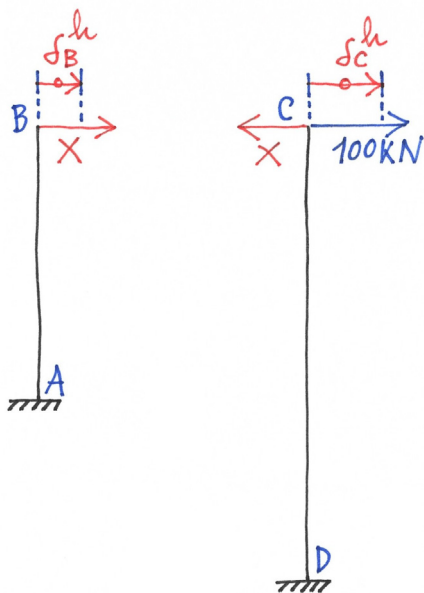
A estrutura em que a barra BC foi substituída pela incógnita hiperestática X será equivalente à real se os deslocamentos dos pontos onde a ligação foi removida forem iguais aos reais, ou seja:

$$\delta_C^h = \delta_B^h + \Delta L_{BC}$$

$$\Leftrightarrow \delta_C^h = \delta_B^h + \left(\frac{X \cdot L}{E \cdot A} \right)_{BC} + (\alpha \cdot \Delta T \cdot L)_{BC}$$

sendo esta a equação de compatibilidade de deformações.

Note-se que devem ser utilizadas convenções de sinais consistentes para a força axial X e para o alongamento da barra ΔL . Neste caso, a variável X representa a **força de tração** na barra e, consistentemente, ΔL representa o aumento do comprimento da barra, e ΔT representa o aumento da temperatura.

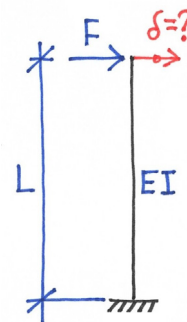


É necessário determinar agora as expressões que dão os deslocamentos δ_B^h e δ_C^h em função da variável X .

Note-se que é preciso fazer mais do que um cálculo para o mesmo tipo de estrutura e carregamento, ou seja:

É preciso calcular o deslocamento horizontal no topo de um pilar encastrado na base, devido a uma força horizontal aplicada no topo.

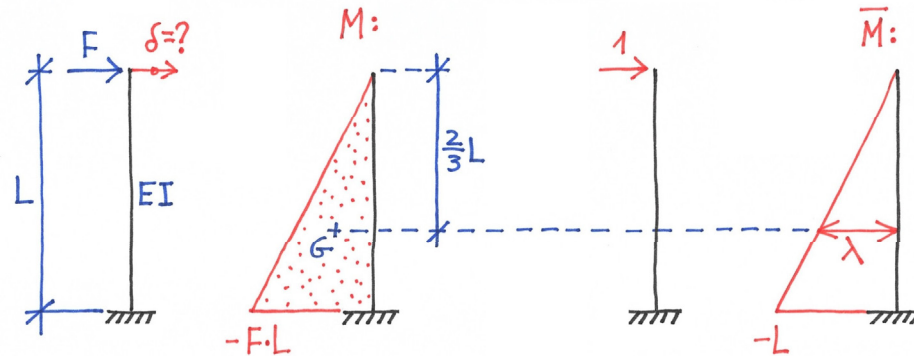
Portanto, podemos começar por encontrar uma expressão genérica para este caso simples:



Calculemos essa expressão genérica, utilizando o Método da Unidade Fictícia de Carga , em combinação com o Método de Bonfim Barreiros.

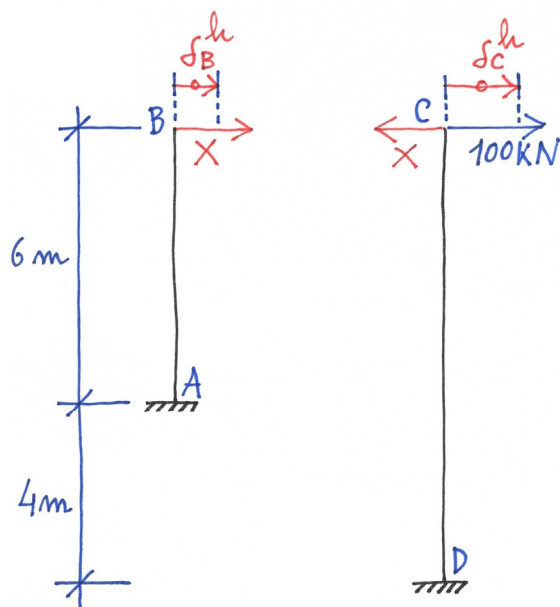
Carregamento real:

Carga fictícia:



Fica:

$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \Omega \cdot \lambda = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{-F \cdot L \cdot L}{2} \right] \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (-L) \right] = \frac{FL^3}{3EI}$$



Assim:

$$\delta_B^h = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{X \cdot 6^3}{3 \cdot 1,83 \cdot 10^5} = \frac{3}{7625} X$$

$$\delta_C^h = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{(100 - X) \cdot 10^3}{3 \cdot 1,83 \cdot 10^5} = \frac{100 - X}{549}$$

e, introduzindo estas expressões na condição de compatibilidade de deformações:

$$\delta_C^h = \delta_B^h + \left(\frac{X \cdot L}{E \cdot A} \right)_{BC} + (\alpha \cdot \Delta T \cdot L)_{BC}$$

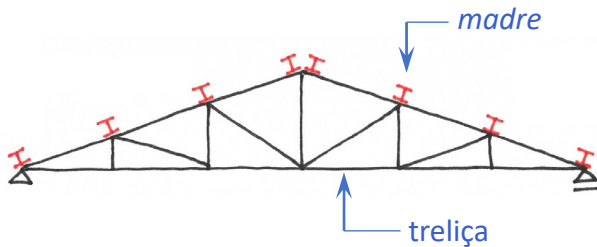
$$\Leftrightarrow \frac{100 - X}{549} = \frac{3 \cdot X}{7625} + \frac{X \cdot 6}{200 \cdot 10^6 \cdot 8,04 \cdot 10^{-4}} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow X = 80,24 \text{ kN}$$

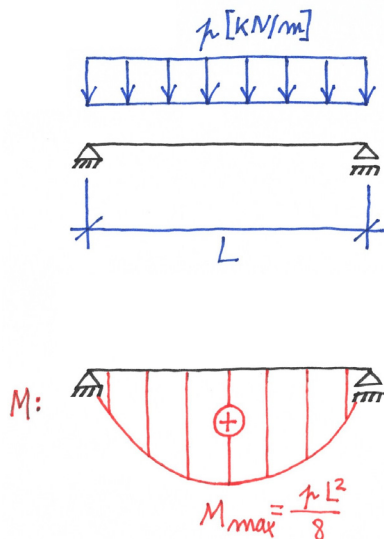
8. Flexão desviada simples

8.1. Flexão desviada simples em barras com um único plano de sollicitação

Exemplo 8.1:



Madre simplesmente apoiada
sujeita à ação gravítica p :



De acordo com a **definição**, apresentada no início do capítulo 5, a flexão desviada é o caso em que o plano de sollicitação está inclinado em relação aos eixos principais centrais de inércia da secção transversal.

Se o esforço axial for zero, então o caso é denominado **flexão desviada simples**. Caso contrário ($N \neq 0$), denomina-se **flexão desviada composta**. Neste capítulo 8, apenas se aborda a flexão desviada simples. O caso da flexão desviada composta será tratado em Resistência dos Materiais 2.

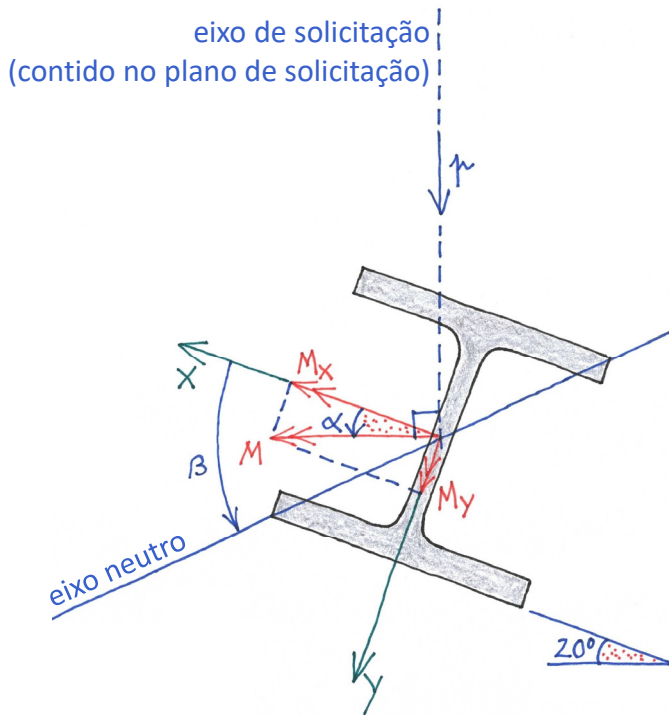
Um exemplo típico de uma barra sujeita a flexão desviada é a viga secundária (também chamada *madre*), numa estrutura de cobertura, suportada pela corda superior, inclinada, das treliças (sistema primário da estrutura de cobertura).

As cargas gravíticas (peso próprio e restantes pesos) atuam num um plano vertical. Nenhum dos eixos principais centrais de inércia da secção transversal da madre é paralelo ao plano de sollicitação, pelo que se trata de um caso de flexão desviada.

Para calcular as tensões normais na secção transversal da madre, é necessário começar por determinar os momentos fletores atuantes. Se a madre for simplesmente apoiada nas treliças, o vão da madre será igual à separação treliças, L .

O diagrama dos momentos fletores na madre é apresentado na imagem.

Secção transversal da *madre*, eixo de solicitação, vetor momento fletor e diagrama de tensões normais:



O **eixo de solicitação**, geralmente representado na imagem da secção transversal, é a intersecção entre o plano de solicitação e o plano da secção transversal. É uma reta vertical neste Exemplo 8.1.

Foi explicado no capítulo 5 que o **vector momento fletor**, M , é perpendicular ao eixo de solicitação. O seu sentido é dado pela **regra da mão direita**, explicada nesse mesmo capítulo. Neste exemplo, o vector M aponta para a esquerda, porque é um momento de flexão que induz tensões de tração nas fibras inferiores da secção, e compressão nas superiores.

Os eixos principais centrais de inércia da secção transversal, X e Y , também são mostrados na figura.

O vector momento, M , pode ser decomposto nas suas **componentes nas direções dos eixos principais**: M_x e M_y . Note-se que uma definição simples de flexão desviada pode ser escrita como:

Uma secção transversal está sujeita a flexão desviada se tanto M_x como M_y (as componentes do vector momento fletor atuante na direção dos eixos principais) forem diferentes de zero.

Na nossa **convenção**, M_x e M_y serão quantidades positivas se apontarem no sentido positivo do eixo. Portanto, neste Exemplo 8.1, tanto M_x como M_y são quantidades positivas.

Em problemas de flexão desviada, o ângulo α é usado para identificar a **inclinação do vetor momento**. É medido de acordo com a seguinte convenção:

o ângulo α é medido a partir do lado positivo do eixo X , no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, até ao vetor M .

As componentes do vetor momento segundo X e Y serão:

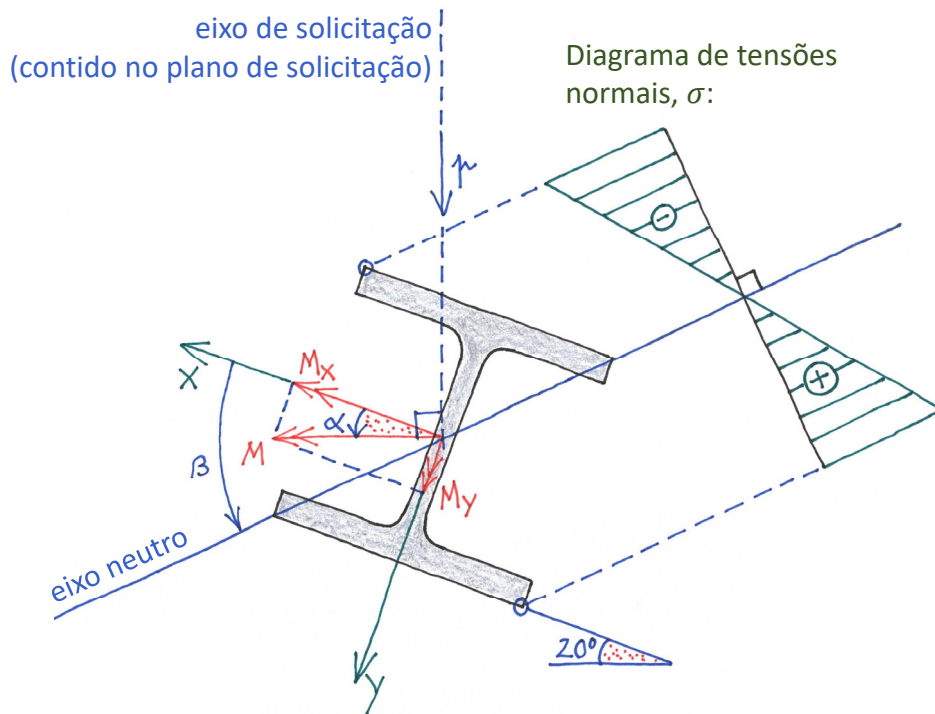
$$M_x = |M| \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = |M| \cdot \sin \alpha$$

Cada uma das componentes M_x e M_y representa um vetor momento de flexão plana. Portanto, a **tensão normal** σ , num ponto da secção transversal de coordenadas x e y (medidas no referencial dos eixos principais), pode ser calculada através da sobreposição dos efeitos de M_x e M_y :

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

Note-se que é necessário um **sinal negativo antes de M_y** , para a consistência das convenções de sinais. Uma quantidade positiva σ na expressão anterior significa que se trata de uma tensão de tração.



Foi visto no capítulo 5 que a reta que contém os pontos da secção transversal onde a tensão normal σ vale zero é designado o **eixo neutro**.

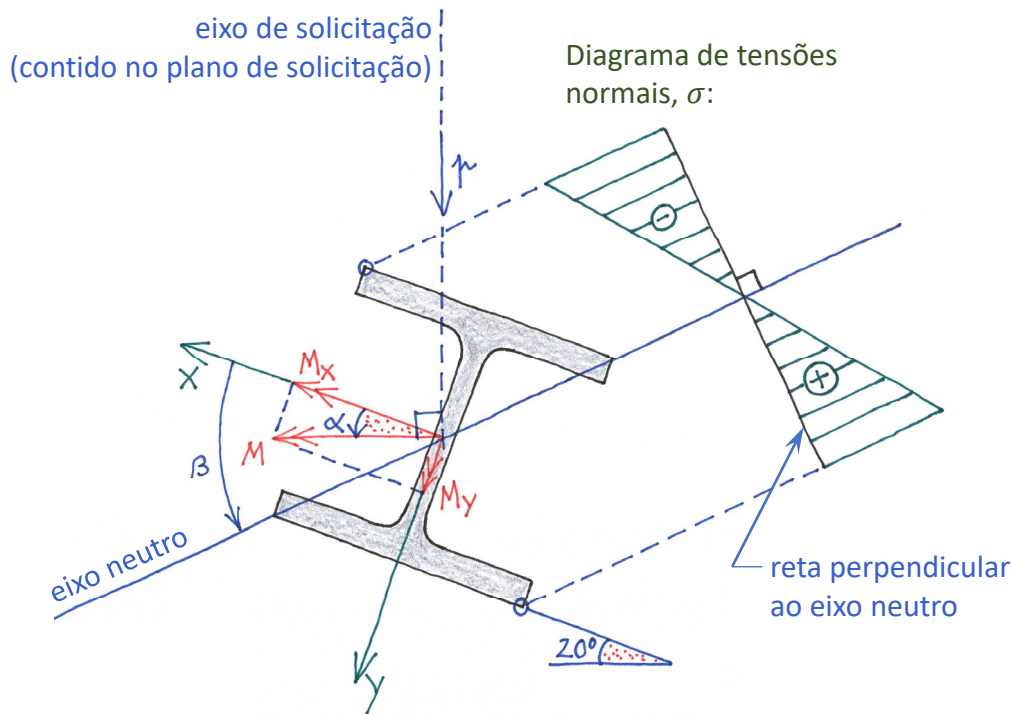
Num problema de flexão desviada, o eixo neutro é uma reta cuja **inclinação**, designada por β , pode ser determinada através da expressão:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

onde o ângulo β é medido utilizando a mesma convenção que o ângulo α . Além disso, se o esforço axial na secção transversal é nulo, então o eixo neutro atravessa o centro da secção.

Os **pontos de maior tensão** serão os mais afastados do eixo neutro. Portanto, antes de traçar o diagrama de tensões normais, a posição do eixo neutro tem de ser calculada e representada.

O **diagrama de tensões normais** é traçado sobre uma reta ortogonal ao eixo neutro.



Demonstração da equação para cálculo da inclinação do eixo neutro:

O eixo neutro é, por definição, o lugar geométrico dos pontos (pontos de coordenadas x e y) onde a tensão σ é zero. Portanto, a equação $y(x)$ do eixo neutro é obtida igualando a zero a função da tensão normal:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad [\text{eq. 8.a}]$$

O rácio M_y/M_x pode ser escrito como:

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{|M| \cdot \sin \alpha}{|M| \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

e a relação y/x é o declive da reta, igual à tangente da sua inclinação:

$$\frac{y}{x} = \tan \beta$$

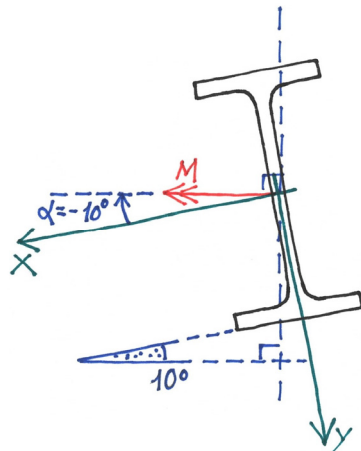
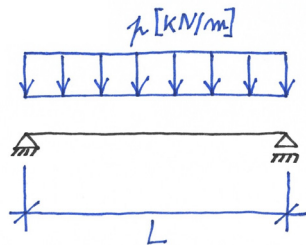
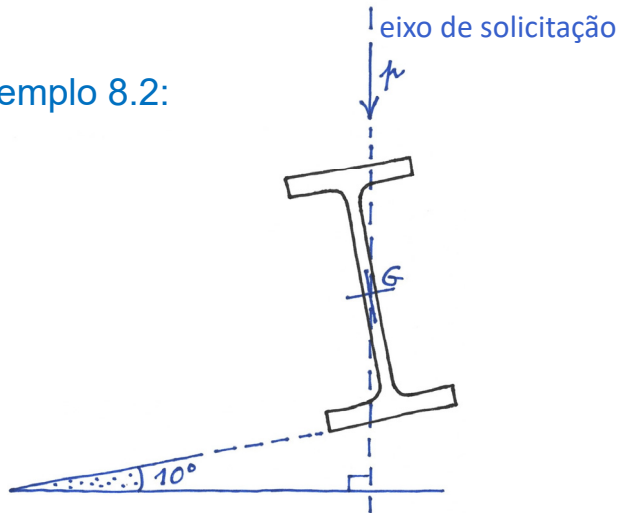
Assim, a [eq. 8.a] pode ser escrita como:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

(conforme se pretendia demonstrar)

8.2. Exemplo de cálculo

Exemplo 8.2:



Problema:

A imagem mostra a secção transversal e o eixo de solicitação de uma *madre* simplesmente apoiada, na cobertura de um centro de distribuição. A *madre* tem um vão $L = 6,5$ m, e é feita com um perfil de aço IPE 240. A inclinação da cobertura é 10° . Pretende-se determinar o eixo neutro e o diagrama de tensões normais, na secção transversal de momento fletor máximo, para uma carga vertical uniformemente distribuída $p = 5$ kN/m.

O momento fletor máximo ocorre na secção de meio vão, e vale:

$$M = \frac{p L^2}{8} = \frac{5 \cdot 6,5^2}{8} = 26,41 \text{ kNm}$$

É um momento fletor positivo, por isso causa tensões de tração na parte inferior da secção transversal e, conseqüentemente, o vetor momento aponta para a esquerda (de acordo com a regra da mão direita).

Sabe-se que um eixo de simetria é um eixo principal, pelo que os dois eixos principais centrais de inércia são os indicados na figura.

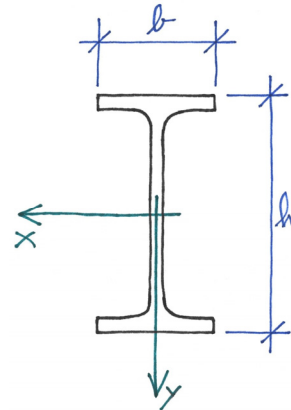
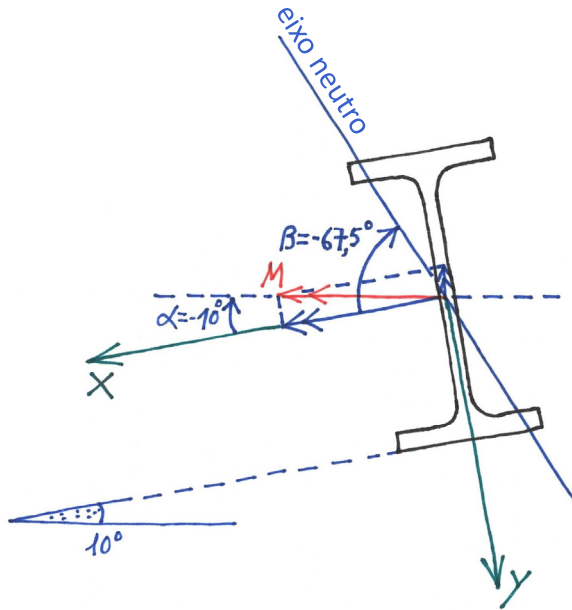
O ângulo α que caracteriza a inclinação do vetor momento é $\alpha = -10^\circ$.

As componentes do vetor momento nas direções dos eixos principais são:

$$M_x = |M| \cdot \cos \alpha = 26,41 \cdot \cos(-10^\circ) = 26,01 \text{ kNm}$$

$$M_y = |M| \cdot \sin \alpha = 26,41 \cdot \sin(-10^\circ) = -4,586 \text{ kNm}$$

As características da secção transversal podem ser encontradas numa tabela de perfis de aço:



$$\begin{aligned} h &= 24 \text{ cm} \\ b &= 12 \text{ cm} \\ A &= 39,1 \text{ cm}^2 \\ I_x &= 3892 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 284 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

A inclinação do eixo neutro, β , é calculada da seguinte forma:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

$$\Leftrightarrow \tan \beta = \tan(-10^\circ) \cdot \frac{3892}{284}$$

$$\Leftrightarrow \beta = -67,52^\circ$$

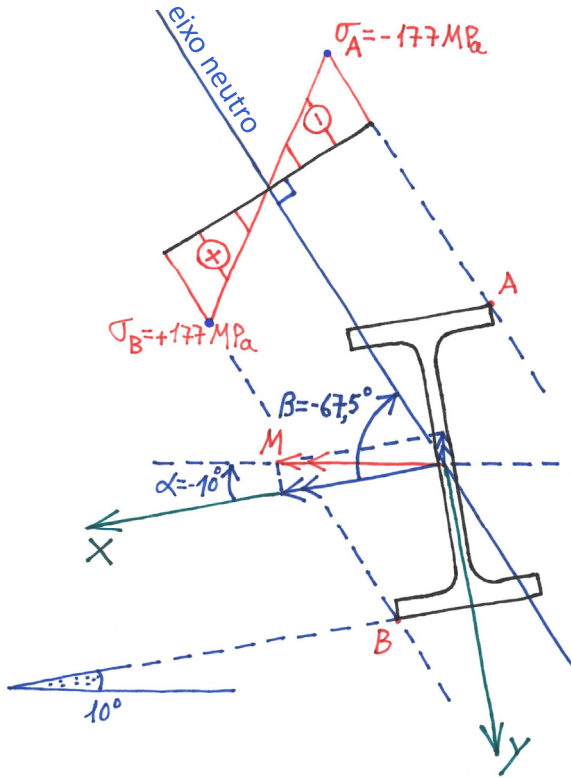
Os pontos mais afastados do eixo neutro são as posições A e B indicadas na imagem.

A tensão normal nestes pontos fica:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x = \\ &= \frac{26,01}{3892 \cdot 10^{-8}} \cdot (-0,12) - \frac{-4,586}{284 \cdot 10^{-8}} \cdot (-0,06) \text{ kPa} \\ &= -177 \text{ MPa}\end{aligned}$$

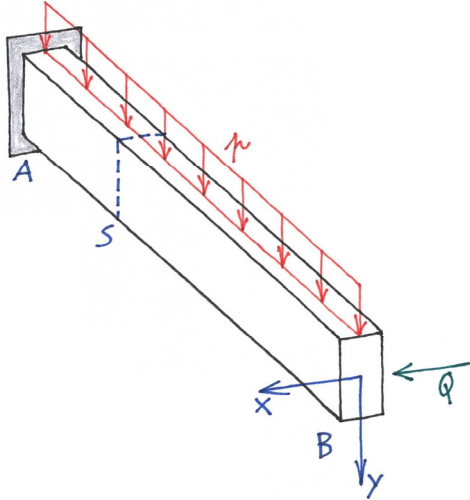
$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{26,01}{3892 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,12 - \frac{-4,586}{284 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,06 \text{ kPa} \\ &= 177 \text{ MPa}\end{aligned}$$

O diagrama de tensões normais está representado na figura.



8.3. Flexão desviada simples em barras com mais do que um plano de sollicitação

Exemplo 8.3:



Nos Exemplos 8.1 e 8.2 anteriores, a carga aplicada e as reações de apoio estavam todas contidas num único plano de sollicitação (um plano vertical, nesses casos).

As estruturas reais são frequentemente sujeitas a cargas em múltiplas direções. A imagem mostra, em perspetiva, uma barra em consola, sujeita a uma carga vertical distribuída p e a uma força concentrada horizontal Q .

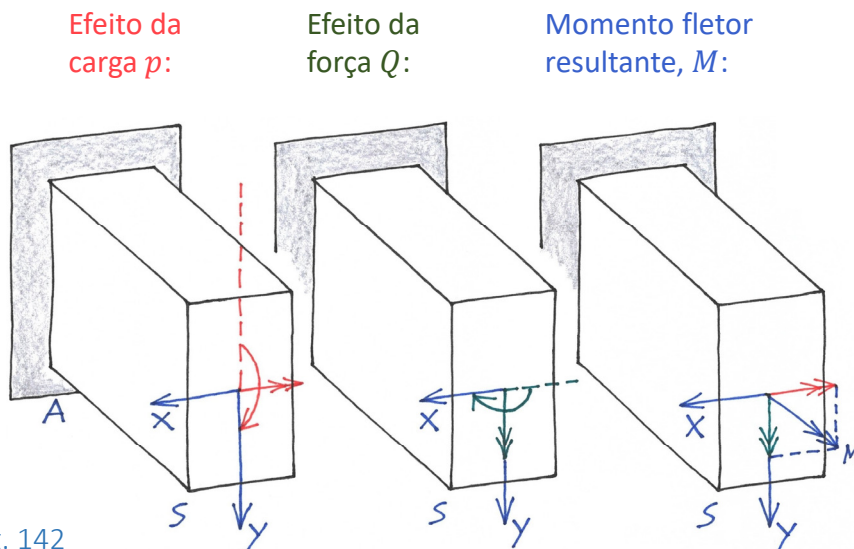
Neste exemplo, estas cargas estão alinhadas com os eixos principais da secção transversal. Por isso, podemos calcular diretamente:

- o momento fletor, em qualquer secção transversal, devido ao efeito da carga p ;
- o momento fletor, em qualquer secção transversal, devido ao efeito da força Q .

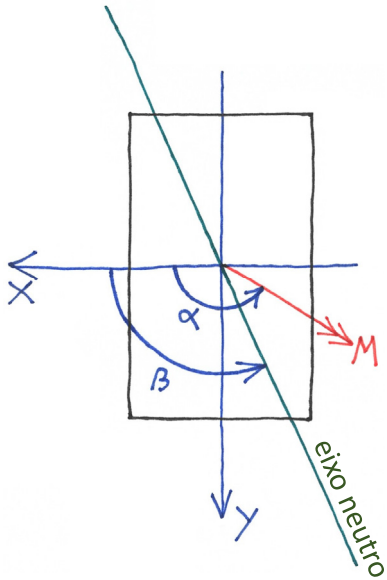
A imagem ilustra o cálculo dos momentos fletores na secção S, determinado como sendo as resultantes das ações aplicadas no lado direito dessa secção.

O sentido do vetor momento é determinado através da regra da mão direita. O momento fletor resultante, M , é a soma vetorial dos vetores M_x e M_y .

Cálculo do vetor momento, M , na secção S:



Planificação da secção transversal S e cálculo da inclinação do eixo neutro, β :



A imagem mostra a secção transversal S e o momento fletor resultante, M . Se quisermos representar o diagrama de tensões normais, é necessário determinar a inclinação do eixo neutro, β . Para tal, temos de calcular o ângulo α que caracteriza a inclinação do vetor momento resultante, em relação ao lado positivo do eixo X .

Neste caso, tendo em conta a orientação das componentes M_x e M_y , ficaria:

$$\alpha = 90^\circ + \operatorname{atan} \frac{|M_x|}{|M_y|}$$

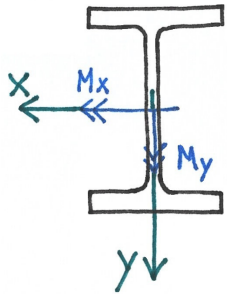
e o ângulo β seria calculado através da expressão já conhecida:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

8.4. Dimensionamento de secções com envolvente retangular e $\sigma_{Rd,t} = \sigma_{Rd,c}$

Os projetistas de estruturas têm frequentemente o seguinte problema:

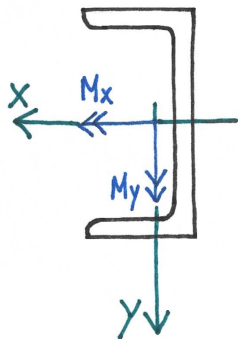
Os momentos fletores M_x e M_y atuantes numa determinada viga de aço são conhecidos. A resistência do material é conhecida. Pretende-se dimensionar a secção transversal, com base numa tabela de perfis de aço, de modo a satisfazer a condição de estado limite último, no que diz respeito às tensões normais.



Se os vértices exteriores da secção transversal estiverem contidos num retângulo (como nos dois exemplos apresentados nesta página), a tensão máxima na secção transversal, é dada por:

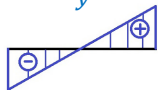
$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

Independentemente do sinal dos momentos fletores atuantes. Na expressão anterior, W_x e W_y são os módulos de flexão em torno dos eixos X e Y respetivamente.

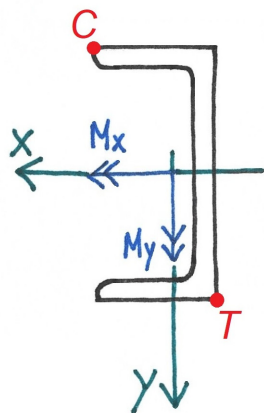
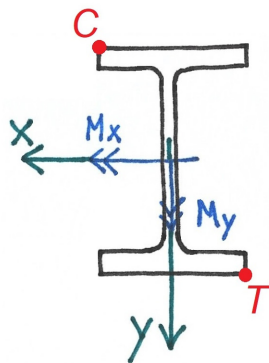
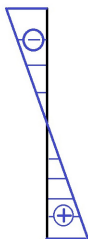


Para este problema de dimensionamento, só precisamos da tensão de maior valor absoluto. Não precisamos de saber se é uma tensão de tração ou de compressão, porque a resistência do material aço é a mesma para a tração e para a compressão. E também não necessitamos de calcular a inclinação do eixo neutro.

Esboço das tensões σ devidas a M_y :



Esboço das tensões σ devidas a M_x :



Justificação para o facto de, neste tipo de problema, a expressão $|\sigma_{\max}| = |M_x|/W_x + |M_y|/W_y$ poder ser utilizada sem pensar em qual é o ponto de maior tensão:

Nas secções apresentadas ao lado, sujeitas aos momentos fletores aí representados, pode-se ver que os pontos de maior tração e compressão são os pontos T e C indicados.

Esta conclusão é retirada apenas analisando mentalmente a sobreposição dos diagramas de tensões devidos a M_x e M_y , como se mostra na imagem.

Podemos concluir que, na secção "I", a compressão de maior valor absoluto é igual à tração de maior valor absoluto. Isto porque a secção é simétrica tanto em torno de X como de Y.

Pelo contrário, na secção "C", a tensão de maior valor absoluto ocorre no ponto C. Note-se que, qualquer que seja o sinal de M_x e M_y , e qualquer que seja a orientação da secção transversal, haverá um ponto em que a tensão de maior valor absoluto devida a M_x , i. e. $|M_x|/W_x$ será somada à tensão de maior valor absoluto devida a M_y , i.e. $|M_y|/W_y$.

Procedimento para determinação do tamanho necessário da secção transversal, de modo a que a condição de estado limite último seja cumprida:

A condição de estado limite último é:

$$\begin{aligned}\sigma_{Sd} &\leq \sigma_{Rd} \\ \Leftrightarrow 1,5 |\sigma_{\max}| &\leq \sigma_{Rd} \\ \Leftrightarrow 1,5 \left(\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \right) &\leq \sigma_{Rd} \quad [\text{eq. 8.b}]\end{aligned}$$

Dica: pode-se iniciar as iterações seleccionando o tamanho da secção necessário para a ação isolada de M_x e M_y , ou seja:

$$W_x \geq \frac{1,5 \cdot |M_x|}{\sigma_{Rd}}$$

e:

$$W_y \geq \frac{1,5 \cdot |M_y|}{\sigma_{Rd}}$$

Estas duas condições fornecem um limite inferior para o tamanho da secção transversal requerida.

Temos esta condição única, mas duas incógnitas, W_x e W_y . Portanto, as incógnitas não podem ser calculadas diretamente através desta equação. Em vez disso, a determinação do tamanho necessário para a secção transversal tem de ser feita de forma iterativa. Em cada iteração:

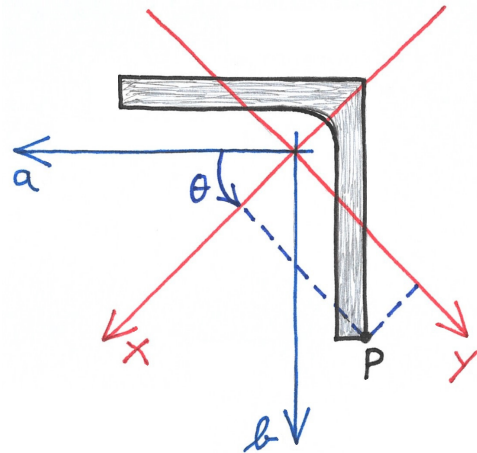
- 1) escolhe-se um tamanho de secção, na tabela de perfis de aço, e lê-se os valores dos módulos de flexão correspondentes, W_x e W_y ;
- 2) aplica-se a condição de estado limite último [eq. 8.b];
- 3) se a condição for respeitada (ou seja $\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$), deve ser escolhido um tamanho de secção mais pequeno na iteração seguinte;
- 4) pelo contrário, se a condição não for respeitada ($\sigma_{Sd} > \sigma_{Rd}$), então tem de ser escolhido um tamanho de secção maior, na iteração seguinte.

Os passos 1) a 4) são repetidos até ser encontrado o tamanho mais económico (isto é, o menor) da secção transversal, para o qual se verifica a condição $\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$.

8.5. Cálculo das coordenadas de um ponto após rotação do referencial

Para calcular as tensões num ponto (o vértice de uma secção, por exemplo), são necessárias as suas coordenadas, expressas no referencial dos eixos principais centrais de inércia (EPCI).

Em secções transversais do tipo mostrado na imagem (cantoneira de abas iguais), os EPCI são os eixos X e Y , porque X é um eixo de simetria. A determinação das coordenadas de um ponto P é direta num sistema de eixos paralelos aos lados da secção (eixos a, b na imagem, por exemplo). No entanto, não é tão simples no caso de um sistema de eixos rodados (eixos X, Y por exemplo).



Contudo, com base nas coordenadas (a, b) do ponto P no referencial a, b e no ângulo de rotação do referencial (ângulo θ , medido como se mostra na imagem), as coordenadas de P no referencial X, Y podem ser facilmente determinadas como:

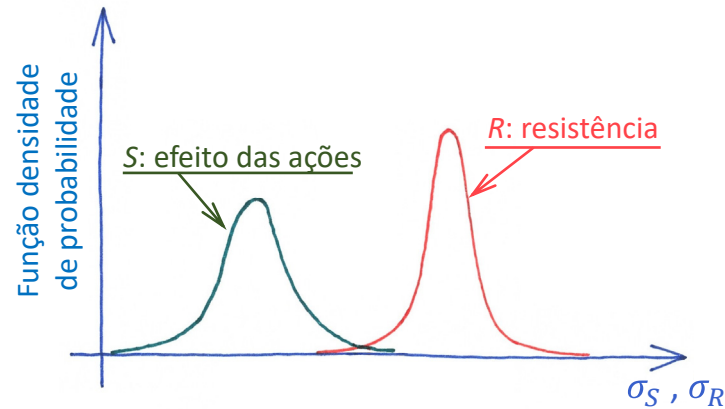
$$x = a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta$$

$$y = -a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta$$

Anexo A

Noções básicas de segurança e fiabilidade estrutural

A.1. Abordagem probabilística para avaliação de segurança em estado limite último (ELU)



Uma das condições a satisfazer, para que uma estrutura esteja em segurança, consiste em garantir que a resistência seja superior ao efeito das ações aplicadas.

As ações consideradas nesta unidade curricular são:

- forças aplicadas (concentradas ou distribuídas) e momentos concentrados;
- variações de temperatura;
- defeitos de fabrico.

Nesta unidade curricular, a avaliação da segurança é feita apenas através da análise do valor da tensão normal. Assim, a condição de segurança é:

$$\sigma_S \leq \sigma_R$$

onde:

σ_S é a tensão atuante (é um “efeito das ações”)

σ_R é a tensão resistente (resistência do material)

Na realidade, as tensões tangenciais também têm de ser tidas em conta, bem como a combinação de tensões aplicadas, em cada ponto material, em múltiplas direções. Estas questões são abordadas na unidade curricular de Resistência dos Materiais 2.

Em problemas de engenharia de estruturas, a tensão atuante σ_S não pode ser considerada um parâmetro determinístico (ou seja, um parâmetro com valor fixo, conhecido). Em vez disso, é uma variável estatística (cujos valores podem ser diversos, devido a causas aleatórias). Isto significa que existe alguma incerteza sobre o valor exato da tensão.

O mesmo pode ser dito sobre a tensão resistente σ_R .

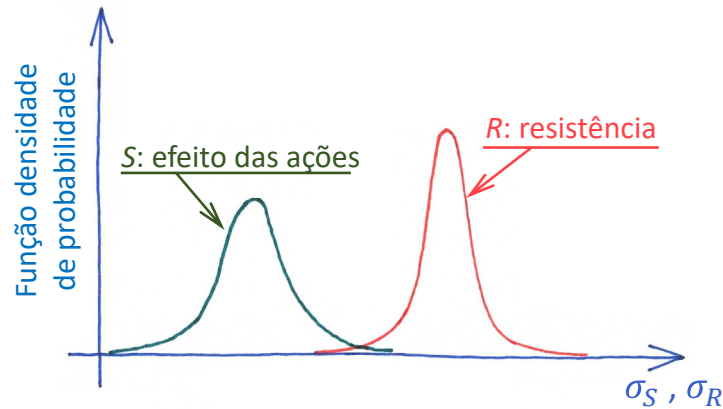
Exemplificação das fontes de incerteza:

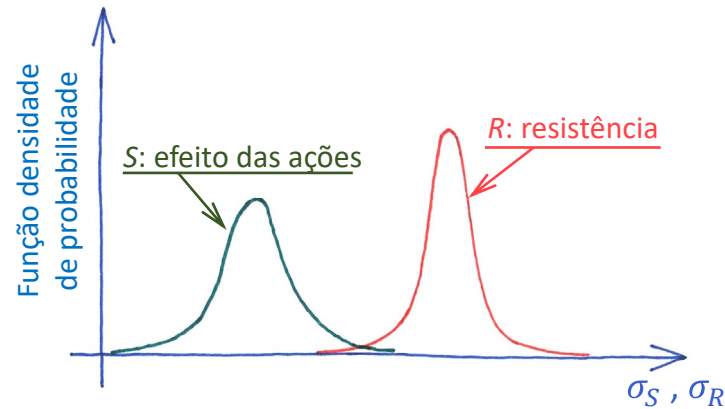
Um projetista de estruturas está a projetar uma viga de aço simplesmente apoiada, que faz parte de um edifício residencial. Para garantir que a viga está em segurança, em termos de tensões normais, a tensão máxima atuante σ_S na secção transversal de momento máximo não pode exceder a resistência do material σ_R .

Para calcular a **tensão atuante** σ_S , o efeito das "cargas variáveis" (carga devida ao mobiliário, ocupação de pessoas, etc.) é representado por uma carga uniformemente distribuída, em kN/m². Chamemos-lhe carga q . O valor de q , para edifícios residenciais, pode ser fixado nos códigos de projeto, com base em observações passadas das cargas atuantes em edifícios existentes do mesmo tipo. Com base nessas observações, a variável q pode ser caracterizada através:

- do valor médio estimado;
- do desvio padrão estimado;
- do tipo estimado para a sua distribuição estatística (a distribuição Gaussiana é normalmente assumida neste tipo de estudo).

Com base nestes três dados, a **função de densidade de probabilidade** para a variável q pode ser traçada.





A tensão atuante depende também da geometria da estrutura (vão, dimensões da secção transversal, etc.). Embora a geometria seja fixada nos desenhos de projeto, a geometria tal como construída não será exatamente igual à prescrita (nas construções de betão, esta variabilidade é maior do que nas estruturas de aço). Portanto, as variáveis geométricas (comprimento do vão, largura e profundidade da secção transversal, etc.) também podem ser caracterizadas através de funções de densidade de probabilidade. A variabilidade dos parâmetros geométricos é geralmente muito menos importante do que a variabilidade do valor da carga q .

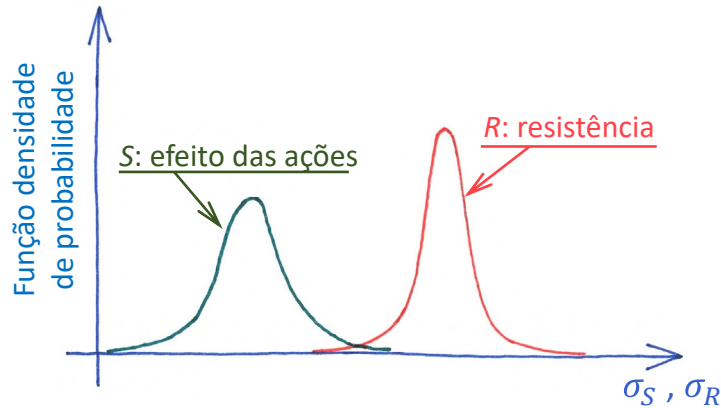
Tendo em conta a carga e os dados geométricos, a tensão atuante σ_S pode também ser caracterizada através de uma função de densidade de probabilidade.

A **tensão resistente σ_R** é também uma variável estatística, cujo valor é caracterizado com base na informação obtida em ensaios de amostras de material, realizados no passado. O valor da resistência do material obtido em cada ensaio varia, dependendo de fatores aleatórios que afetam a produção do material (matérias-primas, condições de fábrica, etc.). Com a ajuda dos resultados dos ensaios, a resistência do material de cada classe de aço pode ser caracterizada através de uma distribuição estatística (geralmente a distribuição gaussiana), do seu valor médio estimado e do seu valor de desvio padrão.

Abordagem probabilística para a avaliação de segurança:

O projetista tem de assegurar que a probabilidade de rotura é extremamente baixa, tendo em conta a incerteza associada à variável tensão atuante (σ_S), e à variável tensão resistente (σ_R). O valor admitido para a probabilidade de rotura não é obviamente o mesmo para qualquer tipo de estrutura (um hospital ou uma ponte crítica, por exemplo, não são projetados para a mesma probabilidade de rotura que uma instalação de armazenamento agrícola).

Esta condição pode ser escrita como:



Seguindo este procedimento de avaliação de segurança, o valor médio de σ_S será muito inferior ao valor médio de σ_R .

A tensão atuante só atingiria a tensão resistente numa situação muito improvável, a que se chama o **estado limite último**.

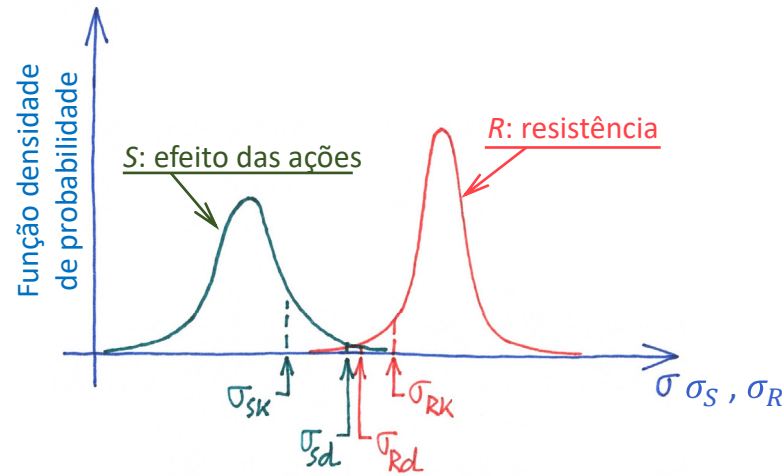
$$P_f = \text{Prob} \{R \leq S\} \leq 10^{-5}$$

Diagrama de anotações para a equação acima:

- Probabilidade de rotura (aponta para P_f)
- Probabilidade de a resistência ser inferior à tensão atuante (aponta para $\{R \leq S\}$)
- Valor de referência para a probabilidade de rotura admitida, geralmente adotado para as estruturas reais (aponta para 10^{-5})

O cálculo da probabilidade de rotura, num problema de análise estrutural, pode ser feito empregando metodologias de análise probabilística tais como o método de simulação de Monte Carlo. Este é um procedimento muito demorado, e por isso raramente é aplicado na prática. É utilizado apenas em estudos especiais.

A.2. Método dos Coeficientes Parciais de Segurança (abordagem semi-probabilística) para avaliação de segurança em ELU



Uma vez que a análise puramente probabilística não é viável para as aplicações correntes, foi desenvolvida (e prescrita nos códigos de projeto) uma abordagem alternativa. É o chamado Método dos Coeficientes Parciais de Segurança. É considerado um método semi-probabilístico, porque os coeficientes de segurança foram calibrados para que este método conduza a uma estrutura projetada com uma geometria semelhante ao resultado da aplicação direta da abordagem probabilística.

No Método dos Coeficientes Parciais de Segurança, a condição de estado limite último (ELU) é expressa como:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

Valor de cálculo da tensão atuante (efeito das ações) **Valor de cálculo** da tensão resistente (resistência do material)

Valor representativo (nominal ou característico) da tensão atuante (efeito das ações)

Valor representativo (nominal ou característico) da resistência do material (geralmente é o valor característico correspondente ao quantil de 5%)

$$\Leftrightarrow \gamma_S \cdot \sigma_{Sk} \leq \frac{\sigma_{Rk}}{\gamma_M}$$

Coeficiente Parcial de Segurança para as ações (em RM consideramos, simplificada, $\gamma_S = 1,5$)

Coeficiente Parcial de Segurança para ter em conta a incerteza na determinação da resistência do material e a incerteza do modelo de cálculo (em RM, utilizamos diretamente o valor σ_{Rd})

NOTA: Atualmente, a letra "E" é frequentemente utilizada em vez de "S" para designar efeitos das ações.

Em problemas de flexão, a tensão normal σ está diretamente relacionada com o valor do momento fletor, M . Por isso, a avaliação de segurança também pode ser feita através da verificação dos valores do momento fletor:

