Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Aplicações Didácticas sobre Poliedros para o Ensino da Geometria

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia

Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Vera Lúcia Viana Lopes

ORIENTADOR: Professor Doutor João Pedro Sampaio Xavier

COORIENTADORA: Professora Doutora Ana Paula Florêncio Aires

COORIENTADORA: Professora Doutora Helena Maria Barros de Campos



Vila Real, 2020

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Aplicações Didácticas sobre Poliedros para o Ensino da Geometria

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia

Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Vera Lúcia Viana Lopes

Orientador:

Professor Doutor João Pedro Sampaio Xavier

Coorientadora:

Professora Doutora Ana Paula Florêncio Aires

Coorientadora:

Professora Doutora Helena Maria Barros de Campos

Composição do Júri:

Professor Doutor José Boaventura Ribeiro da Cunha

Professor Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho

Professor Doutor João Pedro Sampaio Xavier

Professora Doutora Paula Maria Machado da Cruz Catarino

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Professora Doutora Maria Helena Pinto da Rocha Mena Matos

Vila Real, 2020

As ideias apresentadas nesta Tese de Doutoramento, com a exceção daquelas em que os respetivos autores, devidamente identificados, são citados ou parafraseados, são da inteira responsabilidade da autora. Esta Tese de Doutoramento atende as normas técnicas e científicas exigidas pelos regulamentos em vigor da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Dedicatória e agradecimentos

Agradeço aos estudantes do ano letivo de 2016/2017 do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto, com quem tive a oportunidade de interagir, por todo o interesse, empenho e simpatia demonstrados durante a atividade referida na Secção 3.9, que foram muito importantes para a sua concretização.

Agradeço aos Professores José Paulo Cravino, Luís Marques Pinto, Luís Mateus e Maria Manuel Nascimento, pela sua colaboração na elaboração e validação do inquérito por questionário, a que os estudantes envolvidos nesta atividade responderam.

Agradeço aos Professores José Pedro Sousa e Alexandra Castro que lecionam a componente prática da Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura, pela recetividade à introdução das tesselações sólidas como proposta de trabalho de grupo e pela atenção dedicada aos estudantes e aos diferentes projetos que realizaram em resposta ao tema proposto. Um agradecimento ainda pelas amizades que se foram criando e se espera que se fortaleçam.

Renovo os meus agradecimentos aos elementos do Júri das provas de doutoramento, pela honra dos seus comentários, que muito contribuíram para a melhoria da tese, entre as suas versões provisória e definitiva. Deixo um agradecimento muito especial ao Professor Vítor Murtinho e à Professora Helena Mena Matos, não só pelas pertinentes observações que apresentaram durante as provas públicas, mas também pelas proveitosas conversas e troca de ideias que se lhes seguiram.

Agradeço à Professora Helena Campos pela sua contribuição na qualidade de Coorientadora, e ainda à Professora Ana Paula Aires, também Coorientadora, a quem, com muito carinho, envio um agradecimento muito especial pela sua contribuição, apoio e simpatia.

Um agradecimento ainda a todos os amigos e amigas, acima não mencionados, que me incentivaram a levar a cabo esta enorme tarefa.

Os meus maiores agradecimentos são devidos a três pessoas que foram absolutamente essenciais para eu conseguir chegar ao presente resultado: o meu Orientador, o Professor João Pedro Xavier, a quem agradeço pela honra que sinto em poder contar com a sua colaboração, pela sua influência na decisão do tema deste trabalho, pelos múltiplos interesses partilhados entre a Geometria e a Arquitetura, pelos conselhos recebidos ao longo de todo o processo, pelo absoluto privilégio que foi para mim a oportunidade de poder apresentar uma parte desta investigação, em contexto de aula, aos seus estudantes, e pela amizade que se foi robustecendo; o Jorge, meu

companheiro de vida, de cumplicidades e muitos percursos, a quem agradeço pelo apoio constante e compreensão pelas minhas recorrentes ausências; e à minha filha Mafalda, um exemplo de criatividade que procuro seguir e para quem, reciprocamente, espero poder ser.

A todos, sem exceção, muito obrigada, do coração.

Bem hajam!

Resumo

Considerando um possível enquadramento curricular para a geometria poliédrica em contexto universitário como um dos objetivos deste trabalho de investigação, realizámos uma revisão exaustiva da literatura, pautada por autores de referência, sobre poliedros e tesselações, circunscrevendo os seus conteúdos a uma abordagem de âmbito didático a uma possível (provável e desejável) ressonância em cursos superiores orientados para o estudo das relações entre a Matemática e as questões do espaço (caso, por exemplo, de cursos de Matemática Aplicada, Arquitetura, Engenharia e *Design*, entre outros). Desta revisão resultaram os Capítulos I e II, cujos conteúdos foram direcionados para o desenvolvimento das aplicações didáticas propostas no Capítulo III. Estas aplicações didáticas têm em vista o desígnio maior de os estudantes ampliarem a sua literacia geométrica e de, com recurso a um *software* de modelação tridimensional, desenvolverem as capacidades de operar com as transformações geométricas necessárias para melhor compreensão dos temas em estudo, por via da experimentação da modelação virtual.

As aplicações didáticas propostas foram selecionadas pela sua pertinência e interesse para um estudo sistemático da modelação virtual dos poliedros e tesselações e pelo estímulo que podem trazer para investigações e aplicações práticas dos temas em estudo. A utilização proficiente da modelação virtual, embora prevista como suporte imprescindível das aplicações didáticas, não é vista como um fim em si mesmo, dado que o desejável não é que os estudantes utilizem a Geometria para aprender a trabalhar com o *software* mas que, pelo contrário, utilizem o *software* para melhor aprender Geometria.

Uma das premissas deste trabalho de investigação foi a intenção de minimizar as dificuldades de visualização na representação de conceitos geométricos em $\mathbb{R}^3$ e foi nesse sentido que atribuímos uma importância muito particular à modelação e ilustração dos conteúdos abordados. Para tanto, selecionámos um *software* suficientemente versátil e poderoso que nos permitiu trabalhar, quase como se o fizéssemos diretamente no espaço, com os conceitos e transformações geométricas necessários para obter modelações corretas e precisas, das quais resultaram representações visualmente claras e rigorosas. Recorremos ainda à modelação algorítmica para ilustrar conteúdos cuja compreensão julgamos beneficiar de uma componente dinâmica e interativa que, apontando para desenvolvimentos futuros, abre caminho para uma perspetiva diferente sobre os temas em estudo.

Palavras-chave: Poliedros, Tesselações sólidas, Geometria, Aplicações Didáticas, *Software* de Modelação Tridimensional, *Software* de Modelação Algorítmica.

Abstract

With the introduction of polyhedral geometry in higher education curricula as one of the purposes for this research, an exhaustive state-of-the-art review on polyhedra and tessellations was conducted, anchored in many recognized authors and works, from which certain themes were selected and developed into learning activities conceived for courses related to Applied Mathematics, Architecture, Engineering and Design, between others, all of which knowingly involve and intertwine mathematics and geometry with space modelling and spatial structures. As outcomes of this review, Chapters I and II were also starting points for the didactic applications proposed in Chapter III, which, ultimately, aim for students to enhance their geometric literacy and develop knowledges and skills useful to virtually manipulate geometrical concepts and transformations, by actively engaging in the exploration of three-dimensional modelling software.

The didactical activities proposed were selected by their interest for a systematic study of polyhedra and tessellations, and for the stimulus that digital tools might introduce into theory and practice and their potential to innovate further research on these subjects. Virtual modelling, although fundamental for the activities proposed, is not here considered as an end, but as a tool for students to ultimately obtain the skills and expertise necessary to use geometry proficiently and using the software to learn geometry instead of the opposite.

One of the premisses for this research was the intention to minimize difficulties on visualization and interpretation of graphical descriptions of geometrical concepts in $\mathbb{R}^3$ and, with this intent, we gave special attention to their depiction and aimed towards preciseness and legibility and an appealing visual coherence. For this, we used a three-dimensional software powerful and versatile enough to allows us to work almost as if directly in space, exploring all the concepts and geometrical transformations necessary to produce precise and correct models and, from these, clear, meticulous and concise illustrations. We explored algorithmic modelling software in subjects we thought would mostly benefit from their dynamic and interactive possibilities, which, ultimately, has shown us a different perspective on the subjects and paved the way for further research to be developed in a near future.

Keywords: Polyhedra, Solid Tessellations, Geometry, Didactic Applications, Three-dimensional Modelling Software, Algorithmic Modelling Software

Índice das Figuras V
Índice das Tabelas XXIV

INTRODUÇÃO 001
Introdução 003

CAPÍTULO I | POLIEDROS 009
1.1. Conceitos Gerais
1.1.1. Definição de poliedro 011
1.1.2. Figuras verticiais de um poliedro 021
1.2. Poliedros de faces regulares
1.2.1. Transitividade das faces, arestas e vértices de um poliedro 023
1.2.2. Poliedros uniformes e poliedros semirregulares 028
1.2.3. Poliedros regulares 033
1.2.4. Poliedros quasirregulares 042
1.2.5. Poliedros semirregulares 049
1.2.6. Poliedros arquimedianos 051
1.2.7. Sólidos de Johnson 058
1.3. Dualidade dos poliedros uniformes
1.3.1. Dualidade dos poliedros uniformes 075
1.3.2. Duais dos poliedros regulares 080
1.3.3. Duais dos poliedros arquimedianos 086
1.4. Facetamento e estrelação de poliedros
1.4.1. Facetamento e estrelação de poliedros 091
1.4.2. Facetamento dos poliedros convexos quasirregulares 096

CAPÍTULO II | TESSELAÇÕES 099
2.1. Tesselações com polígonos regulares
2.1.1. Tesselações planas monoédricas 101
2.1.2. Tesselações planas uniformes 105
2.2. Tesselações com poliedros convexos
2.2.1. Tesselações monoédricas com poliedros convexos 107
2.2.2. Tesselações sólidas uniformes 114

2.3. Dualidade das tesselações sólidas uniformes

2.3.1. Tesselações duais das tesselações sólidas uniformes 125

CAPÍTULO III | APLICAÇÕES DIDÁTICAS 137

3.1. Aplicações didáticas para o ensino da geometria 139

3.2. Operações de simetria direta e grupos das simetrias de rotação 143

3.2.1. Modelação de poliedros uniformes com recurso à simetria de rotação 152

3.3. Modelação dos poliedros convexos regulares 155

3.3.1. Modelação da intersecção de poliedros convexos regulares recíprocos e seus duais 160

3.4. Poliedros convexos regulares inclusos e envolventes 165

3.4.1. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no tetraedro regular .. 168

3.4.2. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no cubo 171

3.4.3. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no octaedro regular .. 177

3.4.4. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no dodecaedro regular 182

3.4.5. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no icosaedro regular .. 184

3.5. Modelação dos compostos regulares 187

3.6. Modelação dos poliedros arquimedianos 191

3.6.1. Arquimedianos quasirregulares 192

3.6.2. Arquimedianos truncados 193

3.6.3. Arquimedianos com o prefixo “rombi” 203

3.6.4. Arquimedianos rombitruncados 207

3.6.5. Arquimedianos quirais 209

3.7. Expansão de poliedros convexos uniformes aquirais 217

3.7.1. Expansão e_1 219

3.7.2. Expansão e_2 224

3.8. Modelação de tesselações sólidas 233

3.9. Experiência letiva: exploração de tesselações arquitetónicas como módulos construtivos 243

3.9.1. Recetividade dos estudantes à experiência letiva 250

CONSIDERAÇÕES FINAIS 253

Considerações finais 255

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 257
Referências Bibliográficas e *Webgrafia* 259
Fonte das imagens 265

APÊNDICES 267
Apêndice A: Diapositivos da Aula 21 (21 e 24 de março de 2017) 269
Apêndice B: Diapositivos da Aula 22 (28 e 31 de março de 2017) 299
Apêndice C: Diapositivos da Aula 23 (04 e 07 de abril de 2017) 327
Apêndice D: Exercício 11 357
Apêndice E: Desafios 359
Apêndice F: Exercício suplementar 361
Apêndice G: Análise das respostas dos estudantes ao inquérito por questionário 371

ANEXOS 381
Anexo A: Enunciado da proposta de Trabalho de Grupo da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017 383
Anexo B: Cartazes realizados pelos estudantes da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017 387
Anexo C: Fotografias das maquetas realizadas pelos estudantes da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017 399

Índice das Figuras[1]

Figura 1 - Dois tetraedros distintos com uma aresta em comum. 013

Figura 2 - Dois tetraedros distintos com um vértice em comum. 013

Figura 3 - Composto de dois tetraedros regulares. 013

Figura 4 - Mosaico da basílica de S. Marcos em Veneza (1425-1427), atribuído a Paolo Uccello (Hart, 1998). 013

Figura 5 - "The regular solids (and others) in Kepler's *Harmonices Mundi* (Linz, 1619)" (Coxeter, 1988, p. 68). 013

Figura 6 - O pequeno dodecaedro estrelado é o resultado da primeira estrelação do dodecaedro pentagonal. 014

Figura 7 - "Page C5, icosahedral variants; from *Perspectiva Corporum Regularium, Nuremberg*, 1568" (Wade, 2012, p. 114). 014

Figura 8 - Polígonos anti-prismáticos regulares: $\{6^{\alpha}/1\}$, $\{8^{\alpha}/3\}$, $\{10^{\alpha}/3\}$. Num polígono antiprismático $\{n^{\alpha}/d\}$ regular, n é par e $1 \leq d < n/2$, sendo n e d primos entre si e $0 < \alpha < (n - 2d)\ \pi/n$), de acordo com Grünbaum (1977, pp. 3-4) 016

Figura 9 - Polígonos prismáticos regulares: $\{2{\cdot}3^{\alpha}/1\}$, $\{2{\cdot}5^{\alpha}/1\}$, $\{2{\cdot}5^{\alpha}/2\}$. Num polígono prismático $\{2 \cdot k^{\alpha}/d\}$ regular, $n = 2k$ é par, $1 \leq d < n/2$, k e $2d$ são primos entre si e $1 \leq d < k/2$ e $0 < \alpha < (k - 2d)\ \pi/k$), de acordo com Grünbaum, 1977, pp. 3). 017

Figura 10 - Polígonos helicoidais regulares $\{\infty^{\alpha,2\pi/3}\}$ e $\{\infty^{\alpha,\pi/2}\}$, definidos a partir de octaedros regulares e cubos empilhados. 017

Figura 11 - Toróide de Stewart (e deltaedro côncavo) definido por oito octaedros regulares 019

Figura 12 - Toróide de Stewart definido a partir de um octaedro truncado. 019

Figura 13 - Uma das estrelações do icosaedro regular, definida por faces hexagonais isogonais que se auto-intersectam. A ilustração da esquerda destaca três das suas vinte faces, cada uma das quais define quatro triângulos equiláteros, três dos quais, congruentes. 019

Figura 14 - Poliedro regular finito com faces poligonais enviesadas de vértices coincidente com os vértices de um cubo, $\{6^{\pi/2}/1, 3\}$. Nas figuras a, b, c e d, ilustram-se as suas quatro faces. 020

Figura 15 - Secção do icosaedro regular pela esfera que, com centro num dos vértices, o intersecta segundo a curva representada a vermelho. 021

Figura 16 - Secção do cuboctaedro pela esfera com centro num dos vértices, que o intersecta segundo a curva representada a vermelho. 021

Figura 17 - As figuras verticiais do dodecaedro pentagonal são triângulos equiláteros. 022

Figura 18 - As figuras verticiais do pequeno dodecaedro estrelado são pentágonos regulares. 022

[1] Todas as Figuras são da autora, com a exceção das Figuras 4, 5, 7, 87, 88, 89, 90, 236, 280, 389, 400, 407, 411, 464, 498, 499, cuja autoria e proveniência são referidas em local próprio.
Para a modelação das Figuras de sua autoria, a autora utilizou o *software Rhinoceros*® (https://www.rhino3d.com/). Para as Figuras 246 a 250, 264 a 266, 460 a 463, e 466 a 487, a autora utilizou o *plugin Grasshopper*® (https://www.grasshopper3d.com/) e, para as Figuras 107 a 198 e 223 a 235, o *plugin RhinoPolyhedra*® (https://www.food4rhino.com/app/rhinopolyhedra).
As fotografias das Figuras 428, 200 e 502 e do Anexo C são da autora.

Figura 19 - As figuras verticiais do icosaedro triakis não são polígonos congruentes. 022
Figura 20 - Todos os lados de [*ABCDEFGH*] são visíveis a partir do ponto *K*, localizado no *kernel* (a azul) do polígono. 024
Figura 21 - Estefanóide pentagonal, inscritível num prisma pentagonal de faces regulares. À esquerda, ilustram-se duas das suas dez faces quadrangulares cruzadas. 025
Figura 22 - Poliedro nobre descrito por Grünbaum, de vértices coincidentes com os do dodecaedro pentagonal. À esquerda, ilustram-se duas das suas sessenta faces quadrangulares cruzadas. 025
Figura 23 - O icosidodecaedro arquimediano é um poliedro isogonal e isotoxal, porque tem vértices e arestas transitivos. 026
Figura 24 - O triacontaedro rômbico é um poliedro isoedral e isotoxal, porque tem faces e arestas transitivos. 026
Figura 25 - O dodecaedro pentagonal é um poliedro isoedral, isotoxal e isogonal, porque tem faces, arestas e vértices transitivos. 026
Figura 26 - O rombicuboctaedro é isogonal, porque os seus vértices são indistinguíveis. 029
Figura 27 - O pseudo-rombicuboctaedro não é isogonal, porque os seus vértices não são transitivos. 029
Figura 28 - O quasirrombicuboctaedro é um poliedro côncavo (semirregular). A imagem da esquerda ilustra as nove faces quadradas e as quatro faces triangulares que são comuns ao pseudo-quasirrombicuboctaedro. 030
Figura 29 - O pseudo-quasirrombicuboctaedro é um poliedro côncavo (não semirregular). A imagem da esquerda destaca, com a cor azul, as faces triangulares que, na parte superior do pseudo-poliedro, diferem das faces triangulares do poliedro da figura anterior. 031
Figura 30 - O resultado da intersecção de uma esfera com centro num dos vértices de um tetraedro (à esquerda) ou de um cubo (à direita) são três pontos de cada uma das arestas que concorrem nesse vértice. Estes pontos definem a figura verticial desse vértice do poliedro. A área de cada porção de superfície esférica representada corresponde ao ângulo sólido subentendido pelo vértice em causa. 034
Figura 31 - A bipirâmide triangular não é regular, porque, apesar de ter faces regulares iguais, tem ângulos sólidos diferentes. 034
Figura 32 - O antiprisma heptagonal não é regular, porque, apesar de ter faces regulares e ângulos sólidos iguais, não tem faces iguais. 034
Figura 33 - O disfenóide tetragonal não é regular, porque, embora tenha faces iguais e ângulos sólidos iguais, e admita uma insfera e uma circunsfera, tem faces isósceles. 034
Figura 34 - As figuras verticiais do dodecaedro pentagonal são triângulos equiláteros. 035
Figura 35 - As figuras verticiais do pequeno dodecaedro estrelado são pentágonos regulares. 035
Figura 36 - As figuras verticiais do grande dodecaedro são pentagramas regulares. 035
Figura 37 - A circunsfera do dodecaedro pentagonal contém os vértices e a circunferência circunscrita a cada face. 036
Figura 38 - A midesfera do dodecaedro pentagonal contém os pontos médios das arestas e a circunferência inscrita em cada face. 036
Figura 39 - A insfera do dodecaedro pentagonal é tangente ao centro de todas as faces. 036
Figura 40 - Tetraedro regular e respetivos triângulos esféricos. 036

Figura 41 - Hexaedro regular e respetivos quadrados esféricos. 036
Figura 42 - Octaedro regular e respetivos triângulos esféricos. 036
Figura 43 - Dodecaedro regular e respetivos pentágonos esféricos. 037
Figura 44 - Icosaedro regular e respetivos triângulos esféricos. 037
Figura 45 - Pequeno dodecaedro estrelado e respetivos pentagramas esféricos. 037
Figura 46 - Grande dodecaedro e respetivos pentágonos esféricos. 037
Figura 47 - Grande dodecaedro estrelado e respetivos pentagramas esféricos. 037
Figura 48 - Grande icosaedro e respetivos triângulos esféricos. 037
Figura 49 - Em cada vértice do tetraedro {3, 3} intersectam-se três faces triangulares regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros. 038
Figura 50 - Em cada vértice do hexaedro {4, 3} intersectam-se três faces quadradas. As figuras verticiais são triângulos equiláteros. 038
Figura 51 - Em cada vértice do octaedro {3, 4} intersectam-se quatro faces triangulares regulares. As figuras verticiais são quadrados. 038
Figura 52 - Em cada vértice do dodecaedro {5, 3} intersectam-se três faces pentagonais regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros. 038
Figura 53 - Em cada vértice do dodecaedro {3, 5} intersectam-se cinco faces triangulares regulares. As figuras verticiais são pentágonos regulares. 038
Figura 54 - Em cada vértice da tesselação {3, 6} intersectam-se seis triângulos equiláteros. As figuras verticiais são hexágonos regulares. 039
Figura 55 - Em cada vértice da tesselação {4, 4}, intersectam-se quatro quadrados. As figuras verticiais são quadrados.....039
Figura 56 - Em cada vértice da tesselação {6, 3}, intersectam-se três hexágonos regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros. 039
Figura 57 - Em cada vértice do pequeno dodecaedro estrelado {5/2, 5} intersectam-se cinco faces pentagramáticas regulares. As figuras verticiais são pentágonos regulares. 040
Figura 58 - Em cada vértice do grande dodecaedro {5, 5/2} intersectam-se cinco faces pentagonais regulares. As figuras verticiais são pentagramas regulares. 040
Figura 59 - Em cada vértice do grande dodecaedro estrelado {5/2, 2} intersectam-se três faces pentagramáticas regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros. 040
Figura 60 - Em cada vértice do grande icosaedro {3, 5/2} intersectam-se cinco faces triangulares regulares. As figuras verticiais são pentagramas regulares. 040
Figura 61 - Em cada vértice do cubo multiplicado {4, 6|4} intersectam-se seis faces quadradas. As figuras verticiais são polígonos de Petrie de um cubo. 041
Figura 62 - Em cada vértice do octaedro multiplicado 6, 4|4} intersectam-se quatro faces hexagonais regulares. As figuras verticiais (a vermelho) são quadrângulos antiprismáticos. 041
Figura 63 - Em cada vértice do tetraedro multiplicado {6, 6|3} intersectam-se seis hexágonos regulares. As figuras verticiais (a vermelho) são hexágonos antiprismáticos. 041
Figura 64 - As arestas do cuboctaedro definem quatro hexágonos equatoriais, dos quais se destaca um. 042
Figura 65 - As arestas do icosidodecaedro definem seis decágonos equatoriais, dos quais se destaca um. 042

Figura 66 - As arestas do grande dodecadodecaedro definem dez hexágonos regulares equatoriais, dos quais se destaca um. 043
Figura 67 - As arestas do grande icosidodecaedro definem decagramas {10/3} equatoriais, dos quais se destaca um. 043
Figura 68 - As faces pentagramáticas do pequeno icosidodecaedro ditrigonal pertencem às faces do dodecaedro pentagonal. O hexágono (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura vertical. 045
Figura 69 - As faces triangulares e pentagonais do grande icosidodecaedro ditrigonal coincidem, respetivamente, com as faces iguais do pequeno icosidodecaedro ditrigonal e do dodecadodecaedro ditrigonal. O hexágono unicursal (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura verticial 045
Figura 70 - As faces pentagonais do dodecadodecaedro ditrigonal têm vértices em comum com o pequeno icosidodecaedro ditrigonal. O hexágono unicursal (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura verticial 045
Figura 71 - Os vértices (3, 6, 3, 6) do tetrahemihexaedro ou tetratriedro coincidem com os vértices do octaedro regular. 046
Figura 72 - Os vértices (3, 6, 3, 6) do octahemioctaedro ou octatetraedro coincidem com os vértices do cuboctaedro. 046
Figura 73 - Os vértices (4, 6, 4, 6) do cubohemioctaedro ou hexatetraedro coincidem com os vértices do cuboctaedro. 046
Figura 74 - Os vértices (3, 10, 3, 10) do pequeno icosihemidodecaedro ou icosihexaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro. 047
Figura 75 - Os vértices (5, 10, 5, 10) do pequeno dodecahemidodecaedro ou dodecahexaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro. 047
Figura 76 - Os vértices (5, 6, 5, 6) do grande dodecahemicosaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro. 047
Figura 77 - Os vértices (5/2, 6, 5/2, 6) do pequeno dodecahemicosaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro. 047
Figura 78 - Os vértices (5/2, 10/3, 5/2, 10/3) do grande dodecahemidodecaedro são comuns ao icosidodecaedro. 048
Figura 79 - Os vértices (3, 10/3, 3, 10/3) do grande icosihemidodecaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro. 048
Figura 80 - O cubo truncado é definido por seis faces octogonais e oito faces triangulares regulares. 048
Figura 81 - O grande rombihexaedro é definido por doze faces quadradas e seis octagramáticas 8/3 (que são comuns ao grande cubicuboctaedro). 049
Figura 82 - Em cada vértice do grande cubicuboctaedro intersectam-se duas faces octagramáticas, uma triangular e uma quadrada. 049
Figura 83 - O dodecaedro truncado é definido por doze faces decagonais e vinte faces triangulares regulares. 050
Figura 84 - O grande dodecicosaedro é, em cada vértice, definido por duas faces decagramáticas e duas faces hexagonais. 050

Figura 85 - O grande dodecicosidodecaedro ditrigonal definido por duas faces decagramáticas 10/3, uma face triangular e uma face pentagonal em cada vértice. 050
Figura 86 - O grande icosicosidodecaedro é definido por duas faces hexagonais, uma face triangular e uma face pentagonal. em cada vértice. 050
Figura 87 - Desenho do rombicuboctaedro por Leonardo de Vinci in *De Divina Proportione* (1509) de Luca Pacioli. 051
Figura 88 - Prancha 332 do manuscrito *Geometria et Perspectiva: Corpora Regulata et Irregulata* de Lorenz Stoer (Verlag, 2006). 051
Figura 89 - "Page D4, dodecahedral variants; from *Perspectiva Corporum Regularium*, Nuremberg, 1568" (Wade, 2012, p. 124) 052
Figura 90 - Ilustração de Kepler com os treze arquimedianos (Hart, 1998). 052
Figura 91 - A esfera da esquerda é tangente às faces quadradas do cuboctaedro. A esfera da direita é tangente a todas as faces triangulares, mas não às faces quadradas do cuboctaedro, que são intersectadas segundo circunferências menores da esfera em causa. 053
Figura 92 - O rombicosidodecaedro admite três esferas concêntricas tangentes a cada tipo de faces: uma esfera maior, que contém os centros das faces triangulares; uma esfera intermédia, que contém os centros das faces quadradas, e uma esfera menor, que contém os centros das faces pentagonais. 053
Figura 93 - Esquema de apresentação de cada um dos poliedros arquimedianos. 055
Figura 94 - Cuboctaedro. 055
Figura 95 - Icosidodecaedro. 055
Figura 96 - Tetraedro truncado. 055
Figura 97 - Octaedro truncado. 056
Figura 98 - Icosaedro truncado. 056
Figura 99 - Cubo truncado. 056
Figura 100 - Dodecaedro truncado. 056
Figura 101 - Rombicuboctaedro (pequeno rombicuboctaedro). 056
Figura 102 - Rombicosidodecaedro (pequeno rombicosidodecaedro). 056
Figura 103 - Cuboctaedro rombitruncado (grande rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado). 057
Figura 104 - Icosidodecaedro rombitruncado (grande rombicosidodecaedro ou icosidodecaedro truncado). ..057
Figura 105 - Cubo achatado ou octaedro achatado (*cubus simus*, segundo Kepler). 057
Figura 106 - Dodecaedro achatado ou icosaedro achatado (*dodecahedron simum*, segundo Kepler). 057
Figura 107 - Pirâmide quadrada (J1). 060
Figura 108 - Pirâmide pentagonal (J2). 060
Figura 109 - Cúpula triangular (J3). 060
Figura 110 - Cúpula quadrada (J4). 061
Figura 111 - Cúpula pentagonal (J5). 061
Figura 112 - Rotunda pentagonal (J6). 061
Figura 113 - Pirâmide triangular alongada (J7). 061
Figura 114 - Pirâmide quadrada alongada (J8). 061
Figura 115 - Pirâmide pentagonal alongada (J9). 061

Figura 116 - Pirâmide quadrada giroalongada (J10). 061
Figura 117 - Pirâmide pentagonal giroalongada (J11). 061
Figura 118 - Bipirâmide triangular (J12). 061
Figura 119 - Bipirâmide pentagonal (J13). 062
Figura 120 - Bipirâmide triangular alongada (J14). 062
Figura 121 - Bipirâmide quadrada alongada (J15). 062
Figura 122 - Bipirâmide pentagonal alongada (J16). 062
Figura 123 - Bipiramide quadrada giroalongada (J17). 062
Figura 124 - Cúpula triangular alongada (J18). 062
Figura 125 - Cúpula quadrada alongada (J19). 062
Figura 126 - Cúpula pentagonal alongada (J20). 062
Figura 127 - Rotunda pentagonal alongada (J21). 062
Figura 128 - Cúpula triangular giroalongada (J22). 063
Figura 129 - Cúpula quadrada giroalongada (J23). 063
Figura 130 - Cúpula pentagonal giroalongada (J24). 063
Figura 131 - Rotunda pentagonal giroalongada (J25). 063
Figura 132 - Girobiprisma (J26). 063
Figura 133 - Ortobicúpula triangular (J27). 063
Figura 134 - Ortobicúpula quadrada (J28). 063
Figura 135 - Girobicúpula quadrada (J29). 063
Figura 136 - Ortobicúpula pentagonal (J30). 063
Figura 137 - Girobicúpula pentagonal (J31). 064
Figura 138 - Ortocúpularrotunda pentagonal (J32). 064
Figura 139 - Girocúpularrotunda pentagonal (J33). 064
Figura 140 - Ortobirrotunda pentagonal (J34). 064
Figura 141 - Ortobicúpula triangular alongada (J35). 064
Figura 142 - Girobicúpula triangular alongada (J36). 064
Figura 143 - Girobicúpula quadrada alongada (J37). 064
Figura 144 - Ortobicúpula pentagonal alongada (J38). 064
Figura 145 - Girobicúpula pentagonal alongada (J39). 064
Figura 146 - Ortocúpularrotunda pentagonal alongada (J40). 065
Figura 147 - Girocúpularrotunda pentagonal alongada (J41). 065
Figura 148 - Ortobirrotunda pentagonal alongada (J42). 065
Figura 149 - Girobirrotunda pentagonal alongada (J43). 065
Figura 150 - Bicúpula triangular giroalongada (J44). 065
Figura 151 - Bicúpula quadrada giroalongada (J45). 065
Figura 152 - Bicúpula pentagonal giroalongada (J46). 065
Figura 153 - Cúpularrotunda pentagonal giroalongada (J47). 065
Figura 154 - Birrotunda pentagonal giroalongada (J48). 065
Figura 155 - Prisma triangular aumentado (J49). 066

Figura 156 - Prisma triangular biaumentado (J50). 066
Figura 157 - Prisma triangular triaumentado (J51). 066
Figura 158 - Prisma pentagonal aumentado (J52). 066
Figura 159 - Prisma pentagonal biaumentado (J53). 066
Figura 160 - Prisma hexagonal aumentado (J54). 066
Figura 161 - Prisma hexagonal parabiaumentado (J55). 066
Figura 162 - Prisma hexagonal metabiaumentado (J56). 066
Figura 163 - Prisma hexagonal triaumentado (J57). 066
Figura 164 - Dodecaedro aumentado (J58). 067
Figura 165 - Dodecaedro parabiaumentado (J59). 067
Figura 166 - Dodecaedro metabiaumentado (J60). 067
Figura 167 - Dodecaedro triaumentado (J61). 067
Figura 168 - Icosaedro metabidiminuído (J62). 067
Figura 169 - Icosaedro tridiminuído (J63). 067
Figura 170 - Icosaedro tridiminuído aumentado (J64). 067
Figura 171 - Tetraedro truncado aumentado (J65). 067
Figura 172 - Cubo truncado aumentado (J66). 067
Figura 173 - Cubo truncado biaumentado (J67). 068
Figura 174 - Dodecaedro truncado aumentado (J68). 068
Figura 175 - Dodecaedro truncado parabiaumentado (J69). 068
Figura 176 - Dodecaedro truncado metabiaumentado (J70). 068
Figura 177 - Dodecaedro truncado triaumentado (J71). 068
Figura 178 - Rombicosidodecaedro girado (J72). 068
Figura 179 - Rombicosidodecaedro parabigirado (J73). 069
Figura 180 - Rombicosidodecaedro metabigirado (J74). 069
Figura 181 - Rombicosidodecaedro trigirado (J75). 069
Figura 182 - Rombicosidodecaedro diminuído (J76). 069
Figura 183 - Rombicosidodecaedro diminuído paragirado (J77). 069
Figura 184 - Rombicosidodecaedro diminuído metagirado (J78). 069
Figura 185 - Rombicosidodecaedro diminuído bigirado (J79). 070
Figura 186 - Rombicosidodecaedro parabidiminuído (J80). 070
Figura 187 - Rombicosidodecaedro metabidiminuído (J81). 070
Figura 188 - Rombicosidodecaedro bidiminuído girado (J82). 070
Figura 189 - Rombicosidodecaedro tridiminuído (J83). 070
Figura 190 - Disfenóide achatado (J84). 070
Figura 191 - Antiprisma quadrado achatado (J85). 071
Figura 192 - Esfenocorona (J86). 071
Figura 193 - Esfenocorona aumentada (J87). 071
Figura 194 - Esfenomegacorona (J88). 071
Figura 195 - Ebesfenomegacorona (J89). 071

Figura 196 - Biesfenocíngulo (J90). 071
Figura 197 - Bilunabirrotunda (J91). 072
Figura 198 - Ebesfenorrotunda triangular (J92). 072
Figura 199 - O tetraedro regular é dual de si próprio (ou auto-dual). 075
Figura 200 - Determinação do dual do tetraedro truncado, segundo o método de Dorman-Luke. À esquerda, os lados dos triângulos isósceles (a azul) são tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho) e correspondem às arestas do tetraedro triakis (à direita, com faces cinzentas). 077
Figura 201 - O dual do prisma convexo pentagonal é uma bipirâmide pentagonal. 077
Figura 202 - O dual do antiprisma pentagonal é um trapezoedro pentagonal. 078
Figura 203 - O dual do antiprisma pentagramático é deltoedro pentagramático. À esquerda, ilustram-se a figura verticial de um dos vértices e a circunferência que a circunscreve. Ao meio, o polígono que lhe é tangencial e as faces triangulares e pentagramática que definem a figura verticial. 078
Figura 204 - O dual do antiprisma pentagramático cruzado é o deltoedro côncavo pentagramático. À esquerda, ilustram-se a figura verticial de um dos vértices e a circunferência que a circunscreve. Na imagem do meio, mostra-se ainda o antiprisma convexo que contém o poliedro e o polígono que é tangencial à figura verticial nos pontos médios das arestas. À direita, as doze faces do deltoedro. 078
Figura 205 - Determinação do dual do cuboctaedro. A face representada à direita pertence a um dos planos tangentes à circunsfera. As faces do dual resultam da intersecção dos doze planos que contêm os vértices do cuboctaedro e são tangentes à sua circunsfera. O dual do cuboctaedro é o dodecaedro rômbico. 079
Figura 206 - O dual do tetraedro regular, em relação à midesfera, é um tetraedro igual. 080
Figura 207 - O dual do hexaedro regular (ou cubo) é o octaedro regular. 080
Figura 208 - O dual do octaedro regular é o hexaedro regular (ou cubo). 080
Figura 209 - O dual do dodecaedro regular é o icosaedro regular. 080
Figura 210 - O dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular. 080
Figura 211 - O dual do grande dodecaedro é o pequeno dodecaedro estrelado (a azul). A circunferência (a vermelho) que circunscreve o pentagrama (figura verticial do grande dodecaedro) coincide com a circunferência inscrita na face do dual. 081
Figura 212 - Recíprocos Tetraedro | Tetraedro. 082
Figura 213 - Recíprocos Cubo | Octaedro. 082
Figura 214 - Recíprocos Dodecaedro | Icosaedro. 082
Figura 215 - O grande dodecadodecaedro é o resultado da intersecção dos recíprocos: pequeno dodecaedro estrelado | grande dodecaedro. 083
Figura 216 - O grande icosidodecaedro é o resultado da intersecção dos recíprocos: grande dodecaedro estrelado | grande icosaedro. 083
Figura 217 - O pequeno triacontaedro rômbico, definido por trinta faces rômbicas, é o dual do grande dodecadodecaedro da Figura 215. 084
Figura 218 - O grande triacontaedro estrelado, também definido por trinta faces rômbicas, é o dual do grande icosidodecaedro da Figura 216. 085

Figura 219 - Determinação do dual do icosidodecaedro. À esquerda, os losangos (a azul) de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (os retângulos a vermelho), correspondem às arestas do triacontaedro rômbico (à direita, com faces cinzentas). 086
Figura 220 - Determinação do dual do cubo truncado. À esquerda, os triângulos isósceles (a azul), de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do octaedro triakis (à direita, com faces cinzentas). 087
Figura 221 - Determinação do dual do octaedro truncado. À esquerda, os triângulos isósceles (a azul), de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do hexaedro tetrakis (à direita, com faces cinzentas). 087
Figura 222 - Determinação do dual do cubo achatado. À esquerda, os pentágonos irregulares (a azul) de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do icositetraedro pentagonal (à direita). 087
Figura 223 - Dodecaedro rômbico. 088
Figura 224 - Triacontaedro rômbico. 088
Figura 225 - Tetraedro triakis. 089
Figura 226 - Hexaedro tetrakis. 089
Figura 227 - Octaedro triakis. 089
Figura 228 - Dodecaedro pentakis. 089
Figura 229 - Icosaedro triakis. 089
Figura 230 - Icositetraedro deltoidal. 089
Figura 231 - Dodecaedro Disdyakis (octaedro hexakis). 089
Figura 232 - Hexacontaedro deltoidal. 089
Figura 233 - Triacontaedro disdyakis (icosaedro hexakis). 089
Figura 234 - Icositetraedro pentagonal. 089
Figura 235 - Hexacontaedro pentagonal. 089
Figura 236 - Uma das gravuras de Wentzel Jamnitzer com o título *arte da perspectiva* (Jamnitzer, 1993, p. 110). 090
Figura 237 - Na imagem da esquerda, mostra-se a primeira estrelação do dodecaedro rômbico. Ao centro, ilustra-se o seu *core* e à direita, a sua *case*. 091
Figura 238 - Das sucessivas estrelações do dodecaedro regular, resultam o pequeno dodecaedro estrelado (de arestas verdes); o grande dodecaedro (de arestas vermelhas); e o grande dodecaedro estrelado (a azul). 092
Figura 239 - O único poliedro côncavo regular obtido por estrelação do icosaedro regular é o grande icosaedro. À esquerda, destaca-se (a azul) de que forma o prolongamento das alturas das faces do icosaedro nos permite definir duas faces do grande icosaedro. As linhas vermelhas correspondem às alturas de todas as faces do icosaedro, a partir das quais se determinaram os vértices do grande icosaedro (à direita). 093
Figura 240 - Facetas triangulares regulares produzíveis no cubo. 093
Figura 241 - Facetas quadradas produzíveis no octaedro. 093
Figura 242 - Facetas regulares produzíveis no dodecaedro. 094

Figura 243 - Facetas regulares produzíveis no icosaedro. 027
Figura 244 - Facetas regulares produzíveis no cuboctaedro. 096
Figura 245 - Facetas regulares produzíveis no icosidodecaedro. 097
Figura 246 - A tesselação (3^6) que, na figura, se representa, a preto, é recíproca da (6^3), a azul. Nesta situação, as figuras verticiais de ambas definem a tesselação (3.6.3.6), a vermelho. Os centros das faces de (3.6.3.6) definem a sua tesselação dual, de faces rômbicas (a cinzento). 102
Figura 247 - A tesselação (4^4) é dual de si própria. Nesta situação, as figuras verticiais definem outra tesselação (4^4), a vermelho, cujos centros das faces definem uma tesselação dual, igual (a cinzento). 102
Figura 248 - A tesselação (6^3) que, na figura, se representa, a preto, é recíproca da (3^6), a azul. Nesta situação, as figuras verticiais de ambas definem a tesselação (3.6.3.6), a vermelho. Os centros das faces de (3.6.3.6) definem a sua tesselação dual, de faces rômbicas (a cinzento). 102
Figura 249 - Exemplos de tesselações planas definidas por quadriláteros iguais (convexos e côncavos). 103
Figura 250 - Exemplos de uma tesselação plana definida por hexágonos convexos iguais. 104
Figura 251 - (3^6) tesselação regular. 106
Figura 252 - (4^4) tesselação regular. 106
Figura 253 - (6^3) tesselação regular. 106
Figura 254 - (3^4.6) versão levogira. tesselação semirregular. 106
Figura 255 - (3^4.6) versão dextrogira. tesselação semirregular. 106
Figura 256 - (3^3.4^2) tesselação semirregular. 106
Figura 257 - (3^2.4.3.4) tesselação semirregular. 106
Figura 258 - (3.4.6.4) tesselação semirregular. 106
Figura 259 - (3.6.3.6) tesselação quasirregular. 106
Figura 260 - (3.12^2) tesselação semirregular. 106
Figura 261 - (4.6.12) tesselação semirregular. 106
Figura 262 - (4.8^2) tesselação semirregular. 106
Figura 263 - A tesselação demirregular (4.6.12; 3.4.6.4) conjuga os vértices das tesselações semirregulares (4.6.12) e (3.4.6.4). 106
Figura 264 - A amplitude dos ângulos diedrais entre as faces hexagonais do octaedro truncado é igual a 109,471221º e, entre as faces hexagonais e quadradas, a 125,26439º. 107
Figura 265 - A soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre as faces de octaedros truncados com arestas e faces em comum é igual a 360º (para melhor visualização, foram omitidas as faces quadradas). 108
Figura 266 - A soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre as faces de um tetraedro e um octaedro com uma face em comum é 180º (para melhor visualização, foram omitidas algumas faces). 108
Figura 267 - Cubos (oito, em cada vértice da tesselação). 110
Figura 268 - Prismas hexagonais (seis, em cada vértice da tesselação). 110
Figura 269 - Dodecaedros rômbicos de Kepler (cinco, em cada vértice da tesselação). 110
Figura 270 - Dodecaedros alongados (cinco, em cada vértice da tesselação). 110
Figura 271 - Octaedros truncados (quatro, em cada vértice da tesselação). 110
Figura 272 - Dodecaedros rômbicos de Bilinski (quatro, em cada vértice da tesselação). 110

Figura 273 - Isozonoedros convexos de ouro descendentes do triacontaedro rômbico, que resultam da supressão sucessiva das faces destacadas a azul. 111
Figura 274 - Na tesselação definida por cubos, o plano paralelo a qualquer face produz a tesselação (4^4). Um plano perpendicular a uma diagonal espacial produz a tesselação (3^6); e a (3.6.3.6), se o plano, com essa orientação, contiver os pontos médios das arestas. 112
Figura 275 - Na tesselação definida por prismas hexagonais, o plano paralelo a qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3). 112
Figura 276 - Na tesselação definida por dodecaedros rômbicos de Kepler, qualquer plano perpendicular a um eixo de simetria de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4). 112
Figura 277 - Na tesselação definida por dodecaedros alongados, qualquer plano perpendicular a um eixo de simetria de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4). 112
Figura 278 - Na tesselação definida por octaedros truncados, qualquer plano perpendicular a um eixo de simetria de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4), se contiver uma diagonal maior de uma face hexagonal. 112
Figura 279 - Na tesselação definida por dodecaedros rômbicos de Bilinski, não existem tesselações de faces regulares produzíveis. Na imagem, a tesselação de faces hexagonais irregulares contém o ponto médio de determinadas arestas. 112
Figura 280 - Fotografia estereográfica da tesselação definida por cuboctaedros e octaedros (Andreini 1905, Figura 18, pg. 108). 114
Figura 281 - Tesselação #01 $(4.4.4)^8$ *CUBILLE*. 116
Figura 282 - Tesselação #02 $(3.3.3)^8.(3.3.3.3)^6$ – A *TETROCTAHEDRILLE*. 116
Figura 283 - Tesselação #03 $(3.3.3)^2.(3.6.6)^6$ *TRUNCTETRAHEDRILLE*. 116
Figura 284 - Tesselação #04 $(4.6.6)^4$ *TRUNCOCTAHEDRILLE*. 117
Figura 285 - Tesselação #05 $(3.3.3.3)^2.(3.4.3.4)^4$ *CUBOCTAHEDRILLE*. 117
Figura 286 - Tesselação #06 $(3.3.3.3).(3.8.8)^4$ *TRUNCATED CUBILLE*. 117
Figura 287 - Tesselação #07 $(3.4.3.4).(3.6.6)^2.(4.6.6)^2$ *TRUNCATED TETROCTAHEDRILLE*. 117
Figura 288 - Tesselação #08 $(3.4.3.4).(3.4.4.4)^2.(4.4.4)^2$ *2-RCO-HEDRILLLE*. 117
Figura 289 - Tesselação #09 $(3.3.3).(3.4.4.4)^3.(4.4.4)$ *3-RCO-HEDRILLLE*. 117
Figura 290 - Tesselação #10 $(3.4.4.4).(3.8.8).(4.4.4).(4.4.8)^2$ *1-RCO-HEDRILLLE*. 117
Figura 291 - Tesselação #11 $(4.4.4).(4.6.6).(4.6.8)^2$ *n-tCO-HEDRILLE*. 117
Figura 292 - Tesselação #12 $(3.6.6).(3.8.8).(4.6.8)^2$ *f-tCO-HEDRILLE*. 117
Figura 293 - Tesselação #13 $(4.4.8)^2.(4.6.8)^2$. 118
Figura 294 - Tesselação #14 $(3.4.4)^{12}$ – A. 118
Figura 295 - Tesselação #15 $(4.4.6)^6$. 118
Figura 296 - Tesselação #16 $(3.4.4)^8.(4.4.6)^2$. 118
Figura 297 - Tesselação #17 $(3.4.4)^6.(4.4.4)^4$ - A. 118
Figura 298 - Tesselação #18 $(3.4.4)^6.(4.4.4)^4$ – B. 118
Figura 299 - Tesselação #19 $(3.4.4)^4.(4.4.6)^4$. 118
Figura 300 - Tesselação #20 $(3.4.4)^2.(4.4.4)^4.(4.4.6)^2$. 118
Figura 301 - Tesselação #21 $(3.4.4)^2.(4.4.12)^4$. 118

Figura 302 - Tesselação #22 $(4.4.4)^2.(4.4.6)^2.(4.4.12)^2$. 119
Figura 303 - Tesselação #23 $(4.4.4)^2.(4.4.8)^4$. 119
Figura 304 - Tesselação #24 $(3.3.3)^8.(3.3.3.3)^6$ – B. 119
Figura 305 - Tesselação #25 $(3.3.3)^4.(3.3.3.3)^3.(3.4.4)^6$ - B. 119
Figura 306 - Tesselação #26 $(3.3.3)^4.(3.3.3.3)^3.(3.4.4)^6$ - A. 119
Figura 307 - Tesselação #27 $(3.4.4)^{12}$ - B. 119
Figura 308 - Tesselação #28 $(3.4.4)^6.(4.4.4)4$ - C. 119
Figura 309 - A figura verticial da tesselação #02 é o cuboctaedro quasirregular. 120
Figura 310 - Na Tesselação #01, o plano de qualquer face produz a tesselação (4^4). 121
Figura 311 - Na Tesselação #02, o plano de qualquer face produz a tesselação (3^6). 123
Figura 312 - Na Tesselação #03, o plano de qualquer face produz a tesselação (3.6.3.6). 123
Figura 313 - Na Tesselação #04, qualquer plano perpendicular a um eixo de simetria de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4), se contiver uma diagonal maior de uma face hexagonal. 121
Figura 314 - Na Tesselação #05, o plano de qualquer face quadrada produz a tesselação (4^4); o plano de qualquer face triangular, por sua vez, produz a tesselação (3.6.3.6). 121
Figura 315 - Na Tesselação #06, o plano de qualquer face octogonal produz a tesselação (4.8.8). 121
Figura 316 - Na Tesselação #07, o plano de qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3). 121
Figura 317 - Na Tesselação #08, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8). 121
Figura 318 - Na Tesselação #09, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8). 121
Figura 319 - Na Tesselação #10, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8). 122
Figura 320 - Na Tesselação #11, nenhuma tesselação plana uniforme é produzível (por causa do cuboctaedro rombitruncado). 122
Figura 321 - Na Tesselação #12, nenhuma tesselação plana uniforme é produzível (por causa do cuboctaedro rombitruncado). 122
Figura 322 - Na Tesselação #13, nenhuma tesselação plana uniforme é produzível (por causa do cuboctaedro rombitruncado). 122
Figura 323 - Na Tesselação #14, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3^6); o de qualquer face quadrada, produz a tesselação (4^4). 122
Figura 324 - Na Tesselação #15, o plano de qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3). 122
Figura 325 - Na Tesselação #16, o plano de qualquer face triangular e hexagonal produz a tesselação (3.3.3.3.6). 122
Figura 326 - Na Tesselação #17, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3.3.3.4.4); o de determinadas faces quadradas, a tesselação (4^4). 123
Figura 327 - Na Tesselação #18, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (3.3.4.3.4). 123
Figura 328 - Na Tesselação #19, o plano de qualquer face triangular e hexagonal produz a tesselação (3.6.3.6). 123

Figura 329 - Na Tesselação #20, o plano de qualquer face triangular e hexagonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (3.4.6.4). 123
Figura 330 - Na Tesselação #21, o plano de qualquer face triangular ou dodecagonal produz a tesselação (3.12.12). 123
Figura 331 - Na Tesselação #22, o plano de qualquer face triangular ou dodecagonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (4.6.12). 123
Figura 332 - Na Tesselação #23, o plano de qualquer face octogonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (4.8.8). 123
Figura 333 - Na Tesselação #24, o plano de determinadas faces triangulares produz a tesselação (3^6). 123
Figura 334 - Na Tesselação #25, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3^6). 123
Figura 335 - Na Tesselação #26, o plano de determinadas faces triangulares produz a tesselação (3^6). 124
Figura 336 - Na Tesselação #27, o plano de determinadas faces quadradas produz a tesselação (4^4). 124
Figura 337 - Na Tesselação #28, o plano de determinadas faces quadradas produz a tesselação (4^4). 124
Figura 338 - As células duais da Tesselação #01 (*Cubille*), definida por cubos, são cubos iguais. 125
Figura 339 - As células duais da Tesselação #02 (*Tetroctahedrille*), definida por tetraedros e octaedros, são dodecaedros rômbicos. 126
Figura 340 - As células duais da Tesselação #03 (*Trunctetrahedrille*), definida por tetraedros e tetraedros truncados, são romboedros (quatro definem um dodecaedro rômbico). 126
Figura 341 - As células duais da Tesselação #04 (*Truncoctahedrille*), definida por octaedros truncados, são disfenóides tetragonais (vinte e quatro definem um dodecaedro rômbico). 126
Figura 342 - As células duais da Tesselação #05 (*Cuboctahedrille*), definida por octaedros e cuboctaedros, são bipirâmides de base quadrada e faces isósceles (seis definem um dodecaedro rômbico). 127
Figura 343 - As células duais da Tesselação #06 (*Truncated Cubille*), definida por octaedros e cubos truncados, são pirâmides de base quadrada e faces isósceles (seis definem um cubo). 127
Figura 344 - As células duais da Tesselação #07 (*Truncated Tetroctahedrille*), definida por cuboctaedros, tetraedros truncados e octaedros truncados, são pirâmides rômbicas (doze definem um dodecaedro rômbico). 127
Figura 345 - As células duais da Tesselação #08 (*2-RCO-Hedrille*), definida por cuboctaedros, rombicuboctaedros e cubos, são bipirâmides triangulares (doze definem um cubo; vinte e quatro, um dodecaedro rômbico). 128
Figura 346 - As células duais da tesselação #09 (*3-RCO-Hedrille*), definida por tetraedros, rombicuboctaedros e cubos, são hexaedros (quatro, definem um cubo; oito, um dodecaedro rômbico). 128
Figura 347 - As células duais da Tesselação #10 (*1-RCO-Hedrille*), definida por rombicuboctaedros, cubos truncados, cubos e prismas octogonais, são pirâmides oblíquas de base quadrada (vinte quatro definem um cubo). 128
Figura 348 - As células duais da Tesselação (*n-tCO-Hedrille*), definida por cubos, octaedros truncados e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (vinte e quatro definem um cubo; quarenta e oito, um dodecaedro rômbico). 129

Figura 349 - As células duais da Tesselação #12 (*f-tCO-Hedrille*), definida por tetraedros truncados, cubos truncados e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (doze definem um cubo; vinte e quatro, um dodecaedro rômbico). 129
Figura 350 - As células duais da Tesselação #13 (*f-tCO-Hedrille*), definida por prismas octogonais e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (quarenta e oito definem um cubo). 129
Figura 351 - As células duais da Tesselação #14, definida por prismas triangulares, são prismas hexagonais (não semirregulares) que resultam da extrusão da tesselação [3^6]. 130
Figura 352 - As células duais da Tesselação #15, definida por prismas hexagonais, são prismas triangulares (não semirregulares) que resultam da extrusão da tesselação [6^3]. 130
Figura 353 - As células duais da Tesselação #16, definida por prismas triangulares e hexagonais, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [3^4.6]. Existe em duas versões enantiomórficas. 131
Figura 354 - As células duais da Tesselação #17, definida por cubos e prismas triangulares, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [$3^3.4^2$]. 131
Figura 355 - As células duais da Tesselação #18, definida por cubos e prismas triangulares, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [3^3.4.3.4]. 131
Figura 356 - As células duais da Tesselação #19, definida por prismas triangulares e hexagonais, são prismas de bases rômbicas que resultam da extrusão da tesselação [3.6.3.6]. 132
Figura 357 - As células duais da Tesselação #20, definida por cubos, prismas triangulares e hexagonais, são prismas com bases em forma de papagaio que resultam da extrusão da tesselação [3.4.6.4]. 132
Figura 358 - As células duais da Tesselação #21, definida por prismas triangulares e dodecagonais, são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [3.12^2]. 132
Figura 359 - As células duais da Tesselação #22, definida por cubos, prismas hexagonais e dodecagonais, são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [4.6.12]. 133
Figura 360 - As células duais da Tesselação #23, definida por cubos e prismas octogonais são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [4.8^2]. 133
Figura 361 - As células duais da Tesselação #24, definida por tetraedros e octaedros, são dodecaedros trapezorrômbicos. 133
Figura 362 - As células duais da Tesselação #25, definida por tetraedros, octaedros e prismas triangulares, são poliedros irregulares, com um dos vértices idêntico a um vértice trigonal do dodecaedro rômbico. Os poliedros que estão justapostos pela face hexagonal são reflexos uns dos outros (as suas projeções ortogonais, no plano de face hexagonal, são coincidentes). 134
Figura 363 - As células duais da Tesselação #26, definida por tetraedros, octaedros e prismas triangulares, são poliedros irregulares, com um dos vértices idêntico a um vértice trigonal do dodecaedro rômbico. Os poliedros que estão justapostos pela face hexagonal são reflexos uns dos outros, mas em versão girada (as suas projeções ortogonais, no plano de face hexagonal, não são coincidentes). 134
Figura 364 - As células duais da Tesselação #27, definida por prismas triangulares, são poliedros irregulares que preenchem o espaço mudando de orientação. 134

Figura 365 - As células duais da Tesselação #28, definida por cubos e prismas triangulares, são poliedros irregulares semelhantes à célula dual da tesselação #17, que preenchem o espaço mudando de orientação. 135
Figura 366 - À esquerda, a circunsfera de um tetraedro regular e o seu centro de simetria *C*. Ao centro, o vértice *s* resulta da rotação de 180º do vértice *S* do tetraedro, segundo o eixo de rotação *AB*. À direita, o vértice *p* resulta da rotação de 120º do vértice *P* do tetraedro, segundo o eixo de rotação *SM*. ...144
Figura 367 - Os duais cubo | octaedro partilham eixos de rotação da mesma espécie. 146
Figura 368 - As pirâmides retas de base regular admitem um único eixo de simetria rotacional. 146
Figura 369 - Os prismas retos de bases regulares admitem um eixo de simetria rotacional principal (a azul) e eixos secundários (a vermelho). 147
Figura 370 - O dodecaedro de Bilinski, com simetria D_2, admite simetrias de rotação em torno de três eixos perpendiculares entre si. 148
Figura 371 - O tetraedro {3,3} admite sete eixos de simetria: três eixos de rotação de ordem 2 (à esquerda) e quatro de ordem 3 (à direita). 148
Figura 372 - Os duais tetraedro truncado | tetraedro triakis possuem simetrias do grupo de simetria tetraedral *T*. Os três eixos de rotação de rotação de ordem 2 (a vermelho) e os quatro eixos de ordem 3 (a azul) são coincidentes entre si. 149
Figura 373 - Eixos de simetria de rotação de ordem 2, 3 e 4 do octaedro regular. 150
Figura 374 - O cuboctaedro quasitruncado, que possui o grupo de simetria octaedral, tem treze eixos de simetria de rotação. 150
Figura 375 - Os duais dodecaedro | icosaedro regulares partilham eixos de rotação da mesma espécie. 151
Figura 376 - Modelação do rombicuboctaedro a partir do cubo. 153
Figura 377 - Modelação do hexaedro quasitruncado a partir do rombicuboctaedro. 154
Figura 378 - Modelação do tetraedro regular. Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra. 155
Figura 379 - Modelação do octaedro regular. Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra. 156
Figura 380 - Modelação do dodecaedro regular. Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra. 157
Figura 381 - Modelação do icosaedro regular a partir de três retângulos de ouro. Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra 158
Figura 382 - Modelação do icosaedro regular a partir de antiprisma pentagonal. 159
Figura 383 - Modelação do octaedro a partir do tetraedro. 160
Figura 384 - Modelação do cuboctaedro a partir do par cubo | octaedro. 161
Figura 385 - Modelação do dodecaedro rômbico a partir do par cubo | octaedro. 162
Figura 386 - Modelação do icosidodecaedro a partir do dodecaedro. 163
Figura 387 - Modelação do triacontaedro rômbico a partir do dodecaedro. 164
Figura 388 - Sequência de poliedros convexos regulares inclusos (do exterior para o interior): dodecaedro, cubo, tetraedro, octaedro e icosaedro. 165

Figura 389 - Modelos poliédricos do sistema solar segundo Kepler in *Mysterium Cosmographicum*, 1596. A imagem da direita corresponde ao interior da imagem da esquerda (Hart, 1998). 166
Figura 390 - O tetraedro dual, definido pelos centros das faces do tetraedro maior. 168
Figura 391 - Cubo incluso num tetraedro regular. 168
Figura 392 - Octaedro regular incluso num tetraedro regular. 169
Figura 393 - Icosaedro regular incluso num tetraedro regular. 169
Figura 394 - Dodecaedro regular incluso num tetraedro regular. 170
Figura 395 - Tetraedros regulares inclusos num cubo. 171
Figura 396 - Octaedro regular incluso num cubo, explorando a relação de dualidade. 171
Figura 397 - Octaedro regular incluso num cubo. 172
Figura 398 - Dodecaedro regular incluso num cubo. 173
Figura 399 - Composto de dois dodecaedros regulares incluso num cubo. 173
Figura 400 - "Kepler shows how a dodecahedron can be constructed by adding "roofs" to the six sides of a cube (the construction which Euclid uses)" (Hart, 1998). 174
Figura 401 - Dodecaedro regular construído a partir de um cubo. 175
Figura 402 - Icosaedro regular incluso num cubo. 175
Figura 403 - Icosaedro regular incluso num cubo, definido a partir de três retângulos de ouro. 176
Figura 404 - Composto de dois icosaedros regulares incluso num cubo. 176
Figura 405 - Cubo incluso num octaedro regular. 177
Figura 406 - Cubo e tetraedro regular inclusos num octaedro regular. 177
Figura 407 - Detalhe de "*A selection of Leonardo's geometrical drawings for Luca Pacioli's* De Divina Proportione". (Wade. 2012, p. 18). 178
Figura 408 - Cubos inclusos num octaedro regular. 178
Figura 409 - Composto de três cubos incluso num octaedro regular. 179
Figura 410 - Octaedros que definem o composto de três octaedros (à direita). 179
Figura 411 - "*Estrelas*, xilogravura, 1948" (Ernst, 1991, p. 94). 180
Figura 412 - Composto de três octaedros regulares e cubo resultante da sua intersecção. 180
Figura 413 - Dodecaedro regular incluso num octaedro regular. 181
Figura 414 - Icosaedro regular incluso num octaedro regular. 181
Figura 415 - Tetraedros regulares inclusos num dodecaedro regular. 182
Figura 416 - Cubo e *stella octangula* inclusos num dodecaedro regular. 182
Figura 417 - Cubo incluso num dodecaedro regular (à esquerda). Ao centro, o octaedro dual do cubo. À direita, octaedro regular incluso num dodecaedro regular. 183
Figura 418 - Icosaedro regular e retângulos de ouro triortogonais inclusos num dodecaedro regular. 183
Figura 419 - Triângulo equilátero e tetraedro regular inclusos num icosaedro regular. 184
Figura 420 - Quadrado e cubo inclusos num icosaedro regular. 185
Figura 421 - Triângulo equilátero e octaedro regular inclusos num icosaedro regular. 185
Figura 422 - Pentágono regular e dodecaedro regular inclusos num icosaedro regular. 186
Figura 423 - Composto de dois tetraedros regulares e o octaedro resultante da sua intersecção. 187

Figura 424 - Composto de cinco tetraedros regulares, à esquerda. À direita, o icosaedro resultante da sua intersecção. 188
Figura 425 - Composto de dez tetraedros regulares. 188
Figura 426 - Composto de cinco cubos e o triacontaedro rômbico resultante da sua intersecção. 189
Figura 427 - Composto de cinco octaedros e o icosaedro regular resultante da sua intersecção. 189
Figura 428 - Modelos de poliedros que os estudantes da Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura (1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto) exploraram durante as aulas dos dias 21 e 24 de março de 2017. 191
Figura 429 - Os vértices do cuboctaedro coincidem com os pontos médios das arestas do cubo (a azul) e do octaedro regular (a verde). 192
Figura 430 - Os vértices do icosidodecaedro coincidem com os pontos médios das arestas do dodecaedro (a azul) e do icosaedro regular (a verde). 192
Figura 431 - Construção do tetraedro truncado a partir do tetraedro (1). 194
Figura 432 - Construção do octaedro truncado a partir do octaedro. 194
Figura 433 - Construção do icosaedro truncado a partir do icosaedro. 195
Figura 434 - Construção do tetraedro truncado a partir do tetraedro regular (2). 195
Figura 435 - Construção do octaedro truncado a partir do cubo. 196
Figura 436 - Construção do octaedro truncado a partir de oito cubos. 196
Figura 437 - Construção do icosaedro truncado a partir do dodecaedro regular. 197
Figura 438 - O octógono com arestas iguais a 1/3 das arestas do cubo não é regular, ao contrário do octógono a vermelho. 198
Figura 439 - O decágono com arestas iguais a 1/3 das arestas do dodecaedro não é regular, ao contrário do decágono a vermelho. 198
Figura 440 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (1). 198
Figura 441 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (2). 199
Figura 442 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (3). 199
Figura 443 - Construção do cubo truncado a partir do octaedro regular. 200
Figura 444 - Construção do dodecaedro truncado a partir do dodecaedro regular (1). 200
Figura 445 - Construção do dodecaedro truncado a partir do dodecaedro regular (2) 201
Figura 446 - Construção do dodecaedro truncado a partir do icosaedro regular. 202
Figura 447 - Doze faces quadradas do rombicuboctaedro pertencem às faces do dodecaedro rômbico. 203
Figura 448 - As faces quadradas do rombicosidodecaedro pertencem às faces do triacontaedro rômbico. 203
Figura 449 - Construção do rombicuboctaedro a partir do cuboctaedro. 204
Figura 450 - Construção do rombicosidodecaedro o a partir do dodecaedro regular. 205
Figura 451 - Construção do rombicosidodecaedro a partir do icosidodecaedro. 206
Figura 452 - Construção do cuboctaedro rombitruncado a partir do cuboctaedro. 207
Figura 453 - Construção do icosidodecaedro rombitruncado a partir do icosidodecaedro. 208
Figura 454 - Cubo achatado (*dextro*). 209
Figura 455 - Cubo achatado (*laevo*). 209

Figura 456 - Faces pentagonais de um dodecaedro achatado (versão dextrogira) incluso no dodecaedro regular. 210
Figura 457 - Dodecaedro achatado (*dextro*). 210
Figura 458 - Dodecaedro achatado (*laevo*). 210
Figura 459 - Projeção ortogonal do icosaedro regular incluso no tetraedro regular (à esquerda, a versão dextrogira e à direita, a versão levogira). 211
Figura 460 - O cuboctaedro como resultado do primeiro "achatamento" do cubo. Um vídeo desta animação encontra-se disponível em https://veraviana.net/expansion/ 212
Figura 461 - Construção do cubo achatado (versão dextrogira) a partir do cubo. 213
Figura 462 - Construção do cubo achatado (versão dextrogira) a partir do octaedro regular (note-se que esta é uma representação aproximada do cubo achatado, uma vez que as arestas não têm igual comprimento). 214
Figura 463 - Construção do dodecaedro achatado (versão dextrogira) a partir do icosaedro regular note-se que esta é uma representação aproximada do dodecaedro achatado, uma vez que as arestas não têm igual comprimento). 215
Figura 464 - O cuboctaedro rombitruncado, que deriva de um cubo, reduzido até a um octaedro (desenho de A. B. Stott (Plate 1 Figure 11) para ilustrar um exemplo da combinação das operações de expansão e contração). 217
Figura 465 - Captura de ecrã com a Definição no *Grasshopper* para a expansão e_1 de um polígono regular. ..219
Figura 466 - Expansão de um poligrama regular até um polígono convexo regular. 220
Figura 467 - Três fases da expansão das arestas de um cubo até ao cubo truncado arquimediano. 221
Figura 468 - Três fases da expansão das arestas de um tetraedro regular até ao tetraedro truncado arquimediano. 221
Figura 469 - Expansão das arestas de um octaedro regular até ao octaedro truncado arquimediano. 222
Figura 470 - Três fases da expansão das arestas de um dodecaedro regular até ao dodecaedro truncado arquimediano. 222
Figura 471 - Expansão das arestas de um dodecaedro regular até ao dodecaedro truncado arquimediano. 223
Figura 472 - Expansão das arestas de um icosaedro regular até ao icosaedro truncado arquimediano. 223
Figura 473 - Expansão das faces de um tetraedro regular até ao cuboctaedro arquimediano. 224
Figura 474 - Quatro fases da expansão das faces de um cubo até ao rombicuboctaedro arquimediano. 225
Figura 475 - Expansão das faces de um cubo até ao rombicuboctaedro. 225
Figura 476 - Expansão das faces de um octaedro regular até ao rombicuboctaedro. 225
Figura 477 - Determinação geométrica da localização dos vértices que resultam da expansão das faces de um dodecaedro regular, até aos vértices de um rombicosidodecaedro de aresta igual. 226
Figura 478 - Expansão das faces de um dodecaedro regular até ao rombicosidodecaedro. 227
Figura 479 - Expansão das faces de um icosaedro regular até ao rombicosidodecaedro. 227
Figura 480 - Expansão das faces triangulares de um cuboctaedro até ao cubo truncado arquimediano. 228
Figura 481 - Expansão das faces quadradas de um cuboctaedro até ao octaedro truncado arquimediano. 228
Figura 482 - Expansão das faces triangulares de um icosidodecaedro até ao dodecaedro truncado arquimediano. 229

Figura 483 - Expansão das faces pentagonais de um icosidodecaedro até ao icosaedro truncado arquimediano. 229
Figura 484 - Três fases da expansão das faces de um rombicuboctaedro (a azul) até ao cuboctaedro rombitruncado arquimediano. A rosa, incluem-se as arestas do cubo a partir do qual o rombicuboctaedro foi expandido. 230
Figura 485 - Duas fases da expansão das faces quadradas de um rombicosidodecaedro (a preto) até ao icosidodecaedro rombitruncado arquimediano. 230
Figura 486 - Por contração das faces triangulares de um tetraedro truncado, obtemos um octaedro regular. ...231
Figura 487 - Por contração das faces hexagonais de um octaedro truncado, obtemos um tetraedro truncado. .231
Figura 488 - Um romboedro é seccionado de modo a definir dois tetraedros e um octaedro. Por translação do romboedro definido por esta tríade de poliedros, obtemos uma tesselação sólida (não monoédrica). 233
Figura 489 - Construção do dodecaedro rômbico a partir da tesselação cúbica. 234
Figura 490 - A partição do dodecaedro rômbico em vinte e quatro disfenoides tetragonais permite definir uma tesselação monoédrica. 235
Figura 491 - O disfenóide é tetragonal porque o centro das suas insfera e circunsfera coincidem. 236
Figura 492 - Um poliedro côncavo definido a partir de uma tesselação cúbica, que preenche o espaço de forma monoédrica. 236
Figura 493 - A primeira estrelação do dodecaedro rômbico preenche o espaço por translação das suas réplicas. 237
Figura 494 - Dodecaedros regulares e endododecaedros dispostos alternadamente preenchem o espaço. 238
Figura 495 - O tetraedro truncado triakis preenche o espaço, embora tenha de mudar de orientação para o conseguir. 240
Figura 496 - Construção do hexacontaedro rômbico a partir do triacontaedro rômbico. 241
Figura 497 - É possível justapor doze triacontaedros rômbicos a um hexacontaedro rômbico, mas os dois poliedros não definem uma tesselação sólida. 242
Figura 498 - Sinagoga de Zvi Hecker no deserto de Negev, Israel (1967-1969). com Alfred Neumann. (foto da autoria de Henry Hutter, cortesia de Zvi Heckers Office). 244
Figura 499 - Giancarlo Mazzanti's Forest of Hope. Cazucá, Colômbia (2011) (http://www.elequipomazzanti.com/en/proyecto/cazuca-2/, cortesia de Equipo Mazzanti). 245
Figura 500 - Poliedros construídos com o *Polydron Frameworks* e explorados na Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da FAUP (2016/2017). 247
Figura 501 - Modelações propostas para o Desafio A (à direita) e para o Desafio B (à direita). 248
Figura 502 - Maquetas realizadas por dois grupos de estudantes, a partir da Tesselação #05 (octaedros e cuboctaedros), incluídas na Exposição "Anuária" que se realizou na FAUP no início de 2017/2018. . 249

Índice das Tabelas

Tabela 1. Distribuição dos *Sólidos de Johnson* pelo tipo de poliedro e modificação. 72
Tabela 2. Aplicações didáticas propostas no Capítulo III. 140
Tabela 3. Relações entre os poliedros convexos regulares incluso (P_i) e envolvente (P_e). 167
Tabela 4. Expansão das arestas dos poliedros convexos regulares (aresta com 1 de comprimento). 223
Tabela 5. Expansão das faces dos poliedros convexos uniformes (aresta com 1 de comprimento). 232

INTRODUÇÃO

Introdução

> É da mesma maneira, então, que adquirimos as excelências. Isto é, primeiramente, pomo-las em prática. É assim também que fazemos com as restantes perícias, porque, ao praticar, adquirimos o que procuramos aprender. Na verdade, fazer é aprender.
>
> Aristóteles (trad. 2008) *Ética a Nicómaco*, II.I. 1103a 31-34

Para fundamentar a exploração de um tema tão vasto e com tanto potencial como aquele a que nos propomos, tornou-se imprescindível proceder a uma investigação exaustiva de diversos conceitos da geometria e, em particular, da geometria poliédrica, sem os quais qualquer abordagem em contexto didático se revelaria como débil e pouco eficaz. Recorremos, por isso, e a todo o momento, a diversos autores de referência para fundamentar a nossa investigação, por forma a articular as suas diferentes perspetivas e reformular, quando necessário, as nossas próprias conceções. Esta Introdução pretende apresentar um primeiro enquadramento teórico ao nosso objeto de estudo e elencar alguns dos objetivos que pretendemos alcançar.

Em contexto educativo, os poliedros constituem um dos temas mais interessantes, quando abordados de forma exploratória e, especialmente, se os alunos os puderem manipular, analisar e construir. Pedersen (1988, p. 133) relata que os alunos que constroem modelos de poliedros não questionam a razão pela qual o fazem, muito pelo contrário - ficam, naturalmente, com vontade de conhecer melhor as suas criações, questionam-se sobre elas e mostram até vontade de construir outros modelos. É, precisamente, por esta sua tangibilidade e pela possibilidade de os construir e desconstruir, que os poliedros são, de uma maneira geral, tão apelativos. Outra razão para tal prende-se com o facto de os poliedros serem extremamente ricos em conteúdos do domínio da Matemática, como a Geometria Combinatória, a Teoria dos Grupos e a Topologia (Pedersen, 1988); mas também de outras áreas do conhecimento, como a Cristalografia, a Química, a Geologia, a Arquitetura, a Engenharia ou o *Design*, por exemplo. Podemos por isso afirmar e sem receio de errar, que os poliedros são um dos temas mais estimulantes do corpo teórico que constitui a Geometria, podendo interessar pessoas de todas as idades - desde crianças que brincam com cubos e outros materiais didáticos específicos para construir poliedros, a estudantes de vários graus de ensino, investigadores e profissionais de áreas diversas.

Embora se conheçam algumas pedras esféricas que se consideram ter sido esculpidas no período neolítico tardio (Lievenlb, 2009) como as que se encontram no Scottish Museum of Edinburgh

(associáveis, embora de uma forma bastante tosca, a alguns poliedros convexos regulares (Lievenlb, 2012)); ou dados icosaédricos que foram utilizados pelos egípcios (Coxeter, 1988)[2]; o estudo sistemático dos poliedros segundo uma perspetiva matemática, tem sido associado aos geómetras gregos, a partir de 600 a.C. O interesse que no período clássico os matemáticos votaram ao tema dos poliedros, culminou, segundo Malkevitch (1988, pp. 82-83): na teoria sobre os sólidos regulares de Teeteto; em Platão, que associou os cinco sólidos regulares ao seu sistema filosófico; nos *Elementos* de Euclides que, nos livros XI, XII e principalmente, no XIII, descreveu os sólidos regulares [convexos], explicitando a razão pela qual existem apenas cinco; e na descrição dos treze sólidos com faces regulares de dois ou três tipos descobertos por Arquimedes (cuja descrição que, entretanto, se havia perdido, foi recuperada no Livro V da *Coleção* de Pappus).

A partir deste período, não se conhecem outros estudos sistemáticos sobre o tema senão a partir do Renascimento, altura em que, por via do revivalismo do classicismo greco-romano e dos estudos de perspetiva, o tema foi retomado com renovado interesse por parte de artistas como Paolo Uccello; Piero della Francesca; Leonardo de Vinci (que ilustrou o livro *De Divina Proportione* do matemático Luca Pacioli, impresso em 1509); Albrecht Dürer (que, pela primeira vez na História, representou sólidos planificados (Cromwell, 1997, p. 127), cinco dos quais, platónicos e sete, arquimedianos, na obra *Unterweisung der Messung* de 1528); o gravador e ourives Wentzel Jamnitzer; e o gravador Lorenz Stöer, entre outros. No século XVII, o astrónomo Kepler descreveu de forma bastante detalhada os treze sólidos de Arquimedes, caracterizando como semirregulares a família infinita de prismas e de antiprismas convexos com faces regulares. Para além de realizar estudos sobre tesselações planas, Kepler descreveu ainda a *stella octangula*, dois poliedros regulares estrelados e dois poliedros de faces rômbicas: o dodecaedro rômbico e o triacontaedro rômbico. Segundo Alsina (2011, p. 40), até finais do século XVII, foi da Arte e da Arquitetura que partiu o maior interesse sobre o tema dos poliedros, o que muito contribuiu para que a sua divulgação tivesse ocorrido com a intensa e atrativa carga visual que lhe reconhecemos. A partir dos séculos XVIII e XIX, os poliedros continuaram a ser motivo de interesse por parte de várias gerações, embora já mais no domínio da Matemática.

Pela sua importância para a presente investigação, destacaremos alguns dos marcos (*milestones*, no original), que Malkevitch enumera (1988, pp. 87-90) para a história dos poliedros:

[2] Como por exemplo, o dado icosaédrico do período Ptolemaico que se ilustra em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Twenty-sided_die_(icosahedron)_with_faces_inscribed_with_Greek_letters_MET_10.130.1158_001.jpg

- a fórmula $V + F - E = 2$ de Leonard Euler, datada do séc. XVIII, cuja discussão abriu caminho para a Topologia;
- Louis Poinsot que, no século XIX, descobriu e descreveu como regulares os quatro poliedros estrelados, atualmente conhecidos como *Sólidos de Kepler-Poinsot* (a propósito, conhecem-se representações anteriores a Poinsot de três destes poliedros: do pequeno dodecaedro estrelado, num mosaico do século XV atribuído a Paolo Uccello; do grande dodecaedro estrelado e do grande dodecaedro por Wentzel Jamnitzer em 1568; e do pequeno dodecaedro estrelado e do grande dodecaedro estrelado, por Kepler em 1619);
- Eugene Catalan, que em 1865 estudou de forma sistemática a dualidade dos poliedros e descreveu os duais dos arquimedianos;
- Max Brückner, que inventariou de forma bastante detalhada e enquadrou historicamente todos os conhecimentos, até à data, sobre os poliedros;
- Freudenthal e Van der Waerden, que em 1947 (Soler, 2007, p. 45), investigaram e classificaram a categoria dos deltaedros - os oito poliedros convexos com faces triangulares regulares (três deles são poliedros regulares e os restantes, são *Sólidos de Johnson*);
- a obra de Harold Scott Mc Donald Coxeter, que explorou a teoria dos poliedros em dimensões igual e superior a três, alargando o conceito de regularidade aos polígonos não-planares e infinitos, que considerou como faces de poliedros. Em 1954, Coxeter, Longuet-Higgins e Miller ilustraram e descreveram as particularidades de 75 poliedros uniformes, conjeturando que não existiriam mais além destes;
- Norman Johnson, que conjeturou que existiriam 92 poliedros convexos de faces regulares (além dos platónicos, arquimedianos e prismas e antiprismas), o que viria a ser provado pelo próprio Johnson, junto com Zalgaller e Grünbaum, em 1969.

Ainda a este propósito, cabe destacar a enorme importância da obra de Branko Grünbaum, sobretudo para o desenvolvimento da teoria dos polítopos abstratos.

Até finais do Século XX, as dificuldades na representação de conceitos geométricos do espaço tridimensional e sua correta interpretação eram problemas plenamente reconhecidos no contexto do ensino da Matemática (Parzysz (1988, 1991) ou Gutierrez (1996, 1998)). Grünbaum (1999, p. 5) manifestou a esperança de que as tecnologias informáticas pudessem vir a minimizar estes problemas:

> A perusal of this paper shows the use of several methods of presentation, but it must be admitted that none is quite satisfactory for any but the simplest situations. It is to be hoped that computer-based modes of presentation will alleviate this difficulty in the near future.[3]

E de facto, foi já nos finais do Século XX e início de XXI, que o advento dos programas de computador e sua generalização (particularmente, os de geometria dinâmica e de modelação tridimensional) permitiu que o estudo dos poliedros viesse a conhecer um "novo impulso" (Alsina, 2011, p. 44). Numa referência à operação de truncatura que permite definir os poliedros arquimedianos a partir dos platónicos, Cromwell (1997, pp. 374-375) sugere algo que vai ao encontro daquilo que o *software* de geometria dinâmica ou o *software* de modelação paramétrica, que nesta investigação utilizámos, possibilitam:

> A better way to get a feel for the variety of polyhedra and their interrelationships is to use a computer (…). Interactive graphics provide an excellent tool for understanding these changes in a very direct way. Using a mouse to drag the seed point about inside a triangular region, you can watch as the polyhedron changes shape in response you actually experience the metamorphosis of polyhedral forms.[4]

E é com o objetivo de tirar partido das possibilidades que as ferramentas digitais oferecem, que temos vindo a explorar um *software* de modelação tridimensional[5] para ilustrar determinados conceitos geométricos através de representações rigorosas e, em certas situações, representações dinâmicas. Com estas últimas, torna-se possível interagir, não exatamente da forma que Cromwell mencionou, mas alterando os parâmetros da construção, com recurso ao editor de modelação algorítmica[6] associado ao *software*. Sempre com a intenção de facilitar a compreensão do tema em estudo, são propostas no Capítulo III, como aplicações didáticas: a modelação de poliedros de raiz, que é possível visualizar, analisar, rodar, refletir, seccionar, explodir, etc., mas também copiar, justapor a outros, intersectar e, entre outras funções, realizar operações de geometria construtiva sólida. Enquadradas pelo objeto de estudo que desenvolveremos no

[3] Tradução livre: Uma leitura deste artigo evidencia o uso de diferentes métodos de representação, mas há que admitir que nenhum é satisfatório o suficiente, senão para os casos mais elementares. É de esperar que os modos de representação com base nos computadores possam aliviar esta dificuldade num futuro próximo.
[4] Tradução livre: Uma forma melhor de perceber a diversidade que existe nos poliedros e suas inter-relações é utilizar um computador (…). Os gráficos interativos proporcionam uma excelente ferramenta para compreender as mudanças entre poliedros, de uma forma bastante direta. Utilizando o rato para arrastar um determinado ponto dentro de uma região triangular, pode-se observar a forma como o poliedro muda de forma em resposta a esse movimento. Desta forma, pode-se experienciar, em tempo real, a metamorfose entre as formas poliédricas.
[5] Rhinoceros 3D Homepage: https://www.rhino3d.com (acesso a 12/04/2018).
[6] Grasshopper Community Homepage: http://www.grasshopper3d.com (acesso a 12/04/2018).

Capítulo I, as atividades didáticas propostas incidem não apenas sobre o entendimento e modelação de determinadas classes de poliedros, mas também, no seguimento dos assuntos abordados no Capítulo II, na modelação de poliedros que preenchem o espaço e de tesselações sólidas.

Iniciando o estudo do preenchimento do espaço com os cinco poliedros convexos descritos por Fedorov que preenchem o espaço por translação das suas réplicas (aos quais se acrescenta o dodecaedro rômbico de Bilinski, que também preenche o espaço sem mudar de orientação) serão abordadas outras tesselações, monoédricas, em que as células são poliedros convexos iguais que têm de mudar de orientação para preencherem o espaço. Destas células que se designam como plesioedros (de acordo com Grünbaum e Shephard, 1980, p. 952), foram descritos exemplares com número de faces entre onze e vinte e seis, segundo Weisstein (s/d) até 1980, altura em que Peter Engel descobriu um total de cento e setenta e dois poliedros que preenchem o espaço, com faces entre dezassete e trinta e oito (Grünbaum e Shephard, 1980, p. 965). Mais poliedros foram, entretanto, descobertos, incluindo um biprisma convexo que preenche o espaço de forma exclusivamente aperiódica, descrito por John Conway (Weisstein, s/d). Grünbaum e Shephard consideram ser possível que, no espaço tridimensional, não exista sequer limite para o número de faces que um plesioedro poderá ter (1980, p. 966). A enumeração dos poliedros que preenchem o espaço é um problema em aberto na Matemática, mas não sendo nossa intenção, nesta investigação, esgotar a enumeração de todas as combinações de poliedros que preenchem o espaço, daremos maior atenção ao preenchimento do espaço com poliedros de faces regulares e, destes, aos que o fazem uniformemente, propondo algumas hipóteses de adaptação destes temas à modelação digital em contexto educativo de nível superior, que consideramos ter potencial interesse para o ensino da Arquitetura.

A exploração das atividades de modelação propostas, pelos conhecimentos e literacia informática específica que mobilizam, requerem dos estudantes um grau de conhecimentos, raciocínio geométrico e estratégias de pensamento que são, à partida, mais adequados para o ensino superior. Nas atividades que Soler (2004) sugeriu para desenvolvimento em aula, em que se propôs aos alunos que manipulassem, construíssem e classificassem determinadas classes de poliedros, as atividades propostas foram caracterizadas como potenciadoras dos níveis de raciocínio geométrico 1, 2 e 3 van Hiele (2004, 105-114). Embora a abordagem adotada nesta investigação não tenha sido direcionada nesse sentido, poderá ter interesse, como desenvolvimento futuro, a tentativa de diagnosticar o nível de raciocínio geométrico dos estudantes envolvidos nas atividades propostas no Capítulo III antes, e após, a sua conclusão.

Na esteira do exposto no início desta Introdução, julgamos não ser suficiente discursar sobre um tema com tantas potencialidades como este para que os estudantes apreendam todos os seus conteúdos. É necessário que eles próprios possam também modelar poliedros, incluindo os que preenchem o espaço e que eles próprios, experimentem também tesselar o espaço, para alcançarem um entendimento adequado do tema e das suas potencialidades. Baracs (1988, p. 120) refere que, em contexto formativo, um modelo que seja transformável, movimentável e que se possa manipular, será o melhor incentivo para uma imaginação e criação produtivas. Apesar de Baracs se referir a modelos físicos, consideramos que estes atributos se estenderão também ao ambiente virtual, e acreditamos firmemente que a exploração deste tema em contexto educativo trará resultados muito mais consistentes e estimulantes se for investigado - com os estudantes e pelos estudantes - com recurso a *software* de modelação tridimensional. Esta exploração será tanto mais eficiente quanto o *software* permitir ao utilizador movimentar, manipular e transformar, em suma, direcionar os seus conhecimentos de Geometria para a concretização de um projeto exequível e tangível. Integraremos assim, em contexto educativo de nível superior as novas e emergentes tecnologias de enorme impacto que desafiaram e alargaram a nossa conceção do que constitui um ambiente de aprendizagem (Dickey, 2005, p. 439). Para este caso concreto, exploraremos um *software* de modelação tridimensional que é de tal modo versátil e poderoso que permite realizar modelações matemáticas extremamente precisas, por observância de uma das necessidades que os estudantes desta área de estudos se irão deparar, em contexto de trabalho, ao longo da sua carreira profissional.

Concluímos, salientando que a nossa intenção é de que os estudantes utilizem o *software* para aprender Geometria, não sendo suposto que utilizem a Geometria para aprender a trabalhar com o *software* (embora existam comandos e procedimentos que os estudantes vão aprender pela primeira vez enquanto exploram a modelação de poliedros e de tesselações). A intenção não é por isso formar utilizadores do *software*, mas ampliar e aprofundar conhecimentos de Geometria, aplicando-os em novas situações em ambiente virtual e físico, para trabalhar o espaço com a Geometria e com a Geometria do espaço.

CAPÍTULO I | POLIEDROS

1.1.1. Definição de Poliedro

> In summary, a "polygon" is a thing with many knees, and a "polyhedron" a thing with many seats.[7]
>
> John Conway (1994)

Apresentar uma definição suficientemente abrangente do que se entende por poliedro não é tão simples como pode parecer à primeira vista, uma vez que o próprio conceito tem evoluído ao longo dos tempos. Embora Euclides não tenha formulado uma definição exata de poliedro (Malkevitch, 1988), é possível compreender que os geómetras clássicos gregos o consideravam como uma figura tridimensional definida por uma superfície composta por polígonos adjacentes que delimita um corpo sólido. Legendre (citado por Lakatos, 1976, p. 14) inclui também o volume interior na sua definição, com data de 1809, ao dar o nome de sólido poliédrico ou, simplesmente, poliedro, a qualquer sólido delimitado por planos ou faces planas. Há autores que consideram um poliedro como um corpo sólido e a superfície que o encerra, como por exemplo Asensi (1985, p. 68) que define poliedro como um corpo limitado por superfícies poligonais planas de tal modo que cada lado pertença a dois polígonos e que dois polígonos contíguos (com um lado em comum) não sejam complanares. A partir dos séculos XV e XVI, porém, outros autores concentraram a sua atenção na superfície poliédrica fechada, sem incluir o volume que por ela é delimitado, salientando que esta decompõe o espaço em duas regiões (sendo a interior, finita). É disso exemplo a perspetiva de Euler em *Elementa doctrinae solidorum* de 1758, citado por Federico (1982, p. 66):

> The consideration of solid bodies therefore must be directed to their boundary; for when the boundary which encloses a solid body on all sides is known, that solid is known […]. Therefore, three kinds of bounds are to be considered in any solid body; namely 1) points, 2) lines, 3) surfaces, or, with the names specially used for this purpose: 1) solid angles, 2) edges and 3) faces. These three kinds of bounds completely determine the solid.[8]

[7] Transcrição de uma resposta referenciada em http://mathforum.org/library/drmath/view/57666.html, que se afirma corresponder a "excerpts from contributions made by Prof. John Conway of Princeton University to the geometry.college and geometry.pre-college newsgroups.", com data de 1994.

[8] Tradução livre: A consideração dos corpos sólidos deverá, portanto, ser direcionada para a sua fronteira; porque quando todos os elementos da fronteira que delimita um corpo sólido são conhecidos, esse sólido é conhecido […]. Por conseguinte, três tipos de fronteira devem ser considerados em qualquer corpo sólido; nomeadamente 1) pontos, 2) linhas, 3) superfícies, ou, com os nomes utilizados para este fim: 1) ângulos sólidos, 2) arestas, 3) superfícies. Estes três tipos de fronteira determinam completamente o sólido.

Em 1865, Möbius (citado por Lakatos, 1976, p. 15) estabeleceu que um poliedro é um sistema de polígonos dispostos de tal modo que (1) intersectam-se exatamente dois polígonos em cada aresta (2), sendo possível ir do interior de um polígono para o interior de outro polígono por um caminho que não intersecta nenhuma aresta em nenhum vértice. Na mesma linha de pensamento, Talbo define poliedros como superfícies limitadas por faces planas (2010, p. 62), distinguindo claramente corpo de superfície, que ele considera como a película infinitamente delgada que recobre um corpo qualquer ou que separa duas regiões do espaço (2010, p. 55). Ball e Coxeter definem poliedro como uma figura sólida, acrescentando, em nota de rodapé, que era, mais precisamente, a superfície de tal figura sólida (1987, p. 130), com faces planas e arestas retas, de tal modo que cada aresta resulte da junção de dois vértices e seja o lado comum a duas faces. Posteriormente, Coxeter (1973, p. 4), definiria um poliedro como um conjunto conexo e finito de polígonos planos, de modo a que cada lado pertença a exatamente dois polígonos e que os polígonos em torno de cada vértice definam um único circuito. Esta última condição permite excluir casos anómalos como duas pirâmides com um vértice em comum, que definem dois circuitos distintos (esta referência reporta-se a um dos contraexemplos de poliedro descritos por Hessel em 1832 (Lakatos, 1976, p. 15)).

Segundo as definições apresentadas, podemos concluir que os exemplos das Figuras 1, 2 e 3 não correspondem a poliedros. No exemplo da Figura 1, quatro faces intersectam-se na aresta comum aos dois tetraedros. A Figura 2 corresponde à "anomalia" referida por Coxeter, em que dois circuitos distintos de faces triangulares se intersectam no vértice comum aos dois tetraedros. Note-se ainda que, em contradição com a condição supracitada de Möbius, qualquer caminho (para simplificar, um segmento de reta) que una dois pontos, um em cada tetraedro, teria, necessariamente, de passar pelo vértice comum a ambos. Tão-pouco a Figura 3 pode ser considerada como um poliedro, de acordo com as definições apresentadas. As suas oito faces triangulares equiláteras, que resultam do prolongamento das faces de um octaedro com oito faces triangulares equiláteras e vértices congruentes, definem doze arestas, que por sua vez unem oito vértices. Os outros doze segmentos de reta (que se destacam, na Figura 3, com cor vermelha) têm por extremos os pontos médios das arestas dos dois tetraedros e cada um destes resulta da intersecção de apenas duas arestas. Conhecem-se representações deste composto de tetraedros por Leonardo de Vinci para Luca Pacioli em 1509 (que o designou por *octaedrum elevatum*), por Wentzel Jamnitzer em 1568, e por Kepler, em 1611, que lhe atribuiu a designação de *stella octangula*.

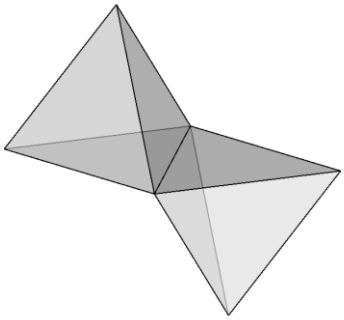


Figura 1 - Dois tetraedros distintos com uma aresta em comum.

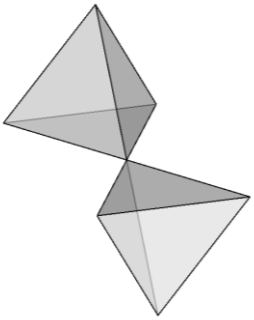


Figura 2 - Dois tetraedros distintos com um vértice em comum.

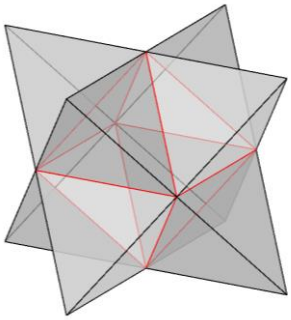


Figura 3 - Composto de dois tetraedros regulares.

Considerando que as faces de poliedros não teriam de ser necessariamente convexas, Kepler descreveu ainda a primeira e a terceira estrelação do dodecaedro pentagonal, designando-os, respetivamente, como *echinus major icosaëdricus* (ou *urchin*) e *echinus minor icosaëdricus*, embora não os reconhecesse como poliedros regulares. Estes dois poliedros, que viriam a ser designados em 1859, por Arthur Cayley (Cromwell 1997, p. 171) como pequeno dodecaedro estrelado e grande dodecaedro estrelado, são definidos por cinco e por três faces pentagramáticas em cada vértice, respetivamente, que se intersectam entre si. As Figuras 4 e 5 reproduzem duas das primeiras representações que se conhecem do pequeno dodecaedro estrelado; a Figura 5 inclui ainda um grande dodecaedro estrelado desenhado por Kepler.



Figura 4 - Mosaico da basílica de S. Marcos em Veneza (1425-1427), atribuído a Paolo Uccello. (Hart, 1998)

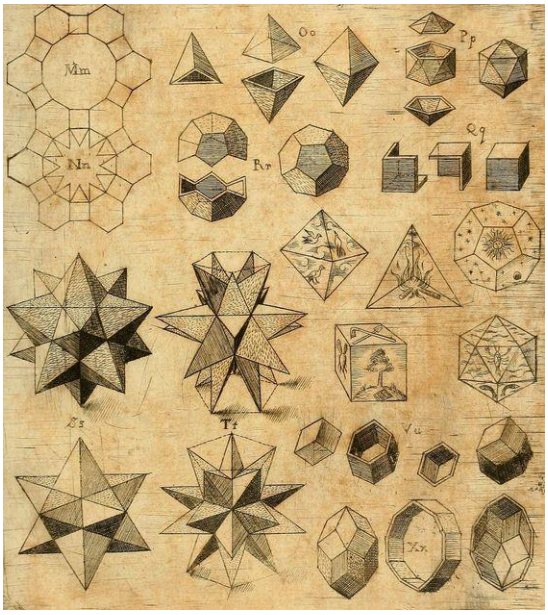


Figura 5 - "The regular solids (and others) in Kepler's *Harmonices Mundi* (Linz, 1619)" (Coxeter, 1988, p. 68).

Na Figura 6 ilustra-se que as faces pentagramáticas do pequeno dodecaedro estrelado resultam do prolongamento das faces do dodecaedro pentagonal.

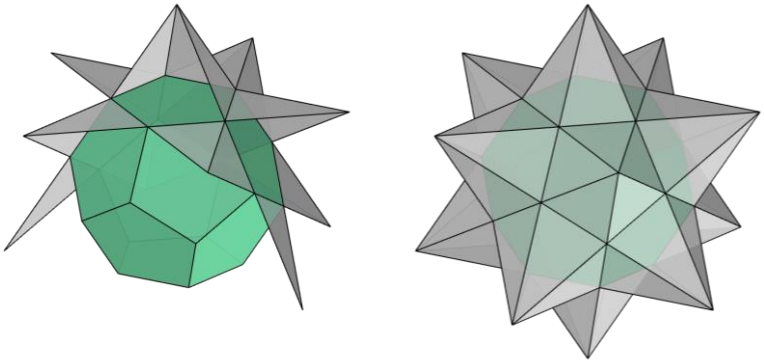


Figura 6 - O pequeno dodecaedro estrelado é o resultado da primeira estrelação do dodecaedro pentagonal.

Para além do pequeno dodecaedro estrelado atribuído a Paolo Uccello, datado de 1425 (Figura 4), conhece-se ainda outra representação de um poliedro regular estrelado, anterior aos que foram descritos por Kepler em 1619. Segundo Scriba e Schreiber (2015, p. 305), esta representação pertence a Wentzel Jamnitzer que ilustrou, em 1568, um grande dodecaedro (o desenho à esquerda na linha do meio da Figura 7), numa das muitas variações que Jamnitzer desenhou a partir dos poliedros convexos regulares.

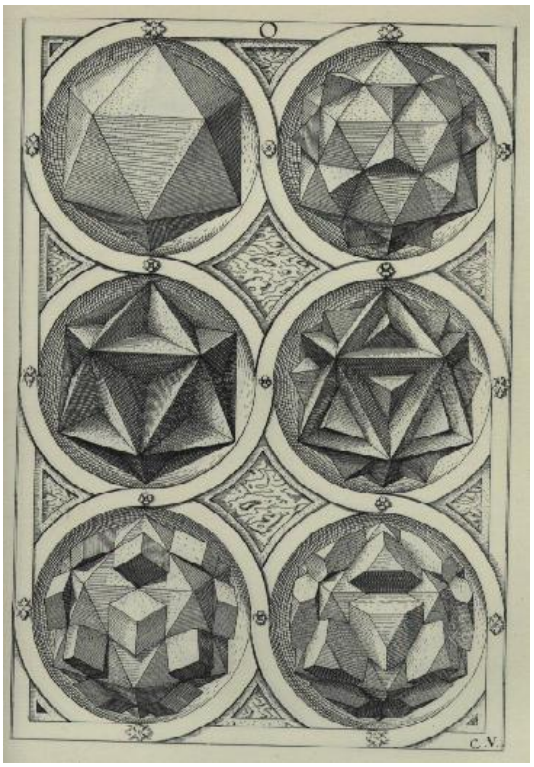


Figura 7 - "Page C5, icosahedral variants; from *Perspectiva Corporum Regularium*, Nuremberg, 1568" (Wade, 2012, p. 114).

Poinsot, no início do século XIX descreveu como regulares não só os dois poliedros estrelados de Kepler, mas também o grande dodecaedro, cujas faces pentagonais resultam do prolongamento das faces do pequeno dodecaedro estrelado; e o grande icosaedro, cujas faces triangulares resultam do prolongamento das faces do icosaedro regular. Tal descoberta foi apenas possível em virtude da extensão do conceito de polígono, que, em última análise, determina o que se poderá entender ou não como face poligonal e como poliedro. Coxeter e outros autores (1954, pp. 401-402), por exemplo, admitiram não só que os lados de uma face poligonal contornassem o respetivo centro, mas que as próprias faces que se intersectam num vértice do poliedro contornassem, por mais do que uma vez, esse mesmo vértice:

> A polyhedron is a finite set of polygons such that every side of each belongs to just one other, with the restriction that no subset has the same property. The polygons and their sides are called faces and edges. The faces are not restricted to be convex and may surround their centers more than once (as, for example, the pentagram, or five-sided star polygon, which surrounds its center twice). Similarly, the faces at a vertex of the polyhedron may surround the vertex more than once.[9]

Nesse sentido, Coxeter (1974, p. 3) definiu um polígono $A_0A_1A_2\ldots$ no n-espaço euclidiano como uma figura que consiste numa sequência de pontos (os *vértices*), unidos em pares sucessivos pelos segmentos de reta $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, … (que se chamam *lados* do polígono). Desta definição, note-se, não está excluída a possibilidade de um dos vértices não pertencer ao plano de pelo menos, três dos restantes vértices do polígono. Coxeter acrescenta que um polígono será plano se todos os vértices forem complanares, e *skew* ou empenado se não o forem (1973, p. 1). Na mesma linha de pensamento, Grünbaum (1977, p. 2) estabelece que um polígono finito $P = [V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n]$ no espaço euclidiano E^k é a figura formada pelos pontos distintos (*vértices*) $V_1, \ldots V_n$ de E^k e pelos segmentos (*arestas*) $[V_i,V_{i+1}]$ em que $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ e $[V_n,V_1]$. Um polígono infinito $P = [\ldots, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \ldots]$ consiste numa sequência de pontos distintos (*vértice*s) e de segmentos (arestas) $[V_i,V_{i+1}]$, sendo $i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, de tal modo que cada subconjunto compacto de E^k se encontra apenas com um número finito de arestas. Cada aresta é incidente com cada um dos dois vértices que são os seus extremos. Se P for um polígono, uma *flag* de P é um par que consiste num vértice de P e numa aresta de P que é incidente com esse vértice. Em definição posterior, Grünbaum referirá ainda que um polígono é regular se "each

[9] Tradução livre: Um poliedro é um conjunto finito de polígonos tal, que cada um dos lados de cada polígono pertence apenas a um outro polígono, com a restrição de que nenhum subconjunto tenha a mesma propriedade. As faces não têm necessariamente de ser convexas, e cada uma delas pode contornar o respetivo centro por mais do que uma vez (tal como, por exemplo, o pentagrama ou polígono estrelado de cinco lados, que contorna o seu centro por duas vezes. De modo semelhante, as faces, num dos vértices do poliedro, poderão contornar esse vértice por mais do que uma vez.

of its flags can be mapped onto any other flag by a symmetry"[10] (2003b, p. 2). Segundo Grünbaum (1977, pp. 2-4) os polígonos regulares no espaço tridimensional (alguns dos quais se ilustram nas Figuras 8, 9 e 10), dividem-se pelos seguintes grupos:

Grupo 1. Polígonos convexos;

Grupo 2. Polígonos estrelados planos;

Grupo 3. Apeirágono: Polígono simples com número infinito de lados;

Grupo 4. Polígonos em zig-zag: polígonos planos infinitos com lados congruentes, cujos vértices se situam, alternadamente, em duas linhas paralelas;

Grupo 5. Polígonos anti-prismáticos (Figura 8) - polígonos tridimensionais fechados cujos vértices coincidem, alternadamente, com os vértices das bases convexas regulares de um antiprisma reto, de tal modo que a projeção ortogonal do polígono no plano de uma das bases do antiprisma corresponde a um polígono regular estrelado com o dobro do número de vértices de cada base. Esta projeção será um polígono convexo se as arestas do polígono antiprismático coincidirem com as arestas laterais do antiprisma.

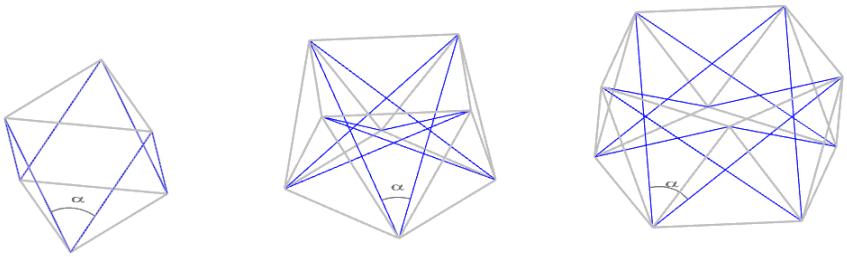


Figura 8 - Polígonos anti-prismáticos regulares: $\{6^{\alpha}/1\}$, $\{8^{\alpha}/3\}$, $\{10^{\alpha}/3\}$.
Num polígono antiprismático$\{n^{\alpha}/d\}$ regular, n é par e $1 \leq d < n/2$, sendo
n e d primos entre si e $0 < \alpha < (n - 2d)\ \pi/n$), de acordo com Grünbaum (1977, pp. 3-4).

Grupo 6. Polígonos prismáticos (Figura 9) - polígonos tridimensionais fechados cujos vértices coincidem, alternativamente, com os vértices de cada uma das bases (convexas regulares) de um prisma reto, de tal modo que a projeção ortogonal do polígono no plano de uma das bases do prisma corresponde duas vezes a um polígono regular estrelado com o dobro do número de vértices de cada base. Para tanto, as bases do prisma deverão ter número ímpar de arestas. A sua projeção será um polígono convexo se as suas arestas coincidirem com as diagonais das faces laterais do prisma.

[10] Tradução livre: cada uma das suas *flags* puder ser transformada para qualquer outra *flag*, através de uma operação de simetria.

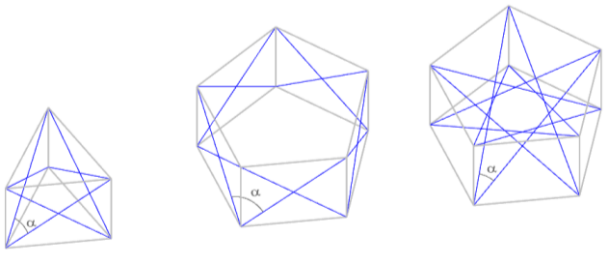


Figura 9 - Polígonos prismáticos regulares: $\{2{\cdot}3^{\alpha}/1\}$, $\{2{\cdot}5^{\alpha}/1\}$, $\{2{\cdot}5^{\alpha}/2\}$.
Num polígono prismático $\{2 \cdot k^{\alpha}/d\}$ regular, $n = 2k$ é par, $1 \leq d < n/2$, k e $2d$ são primos entre si e $1 \leq d < k/2$ e $0 < \alpha < (k - 2d)\ \pi/k$), de acordo com Grünbaum, 1977, pp. 3).

Grupo 7. Polígonos helicoidais (Figura 10) - polígonos tridimensionais infinitos $\{\infty^{\alpha,\beta}\}$ cujos vértices, $V_i\ j = 0, \pm1, \pm2$ se situam numa hélice definida parametricamente por ($\alpha\ cos\ \beta t$, $\alpha\ sen\ \beta t$, bt). Num polígono helicoidal regular, a soma das amplitudes dos ângulos α e β (não nulos) é menor do que 180º e $t = j$.

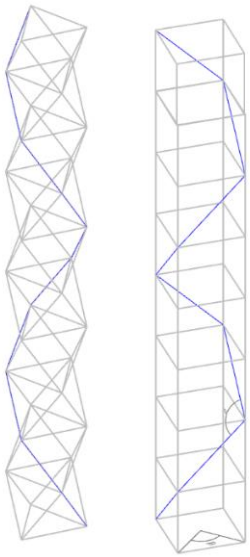


Figura 10 - Polígonos helicoidais regulares $\{\infty^{\alpha,2\pi/3}\}$ e $\{\infty^{\alpha,\pi/2}\}$, definidos a partir de octaedros regulares e cubos empilhados.

A abrangência deste conceito abriu caminho para que polígonos não planos e/ou infinitos pudessem ser considerados como faces, ou como figuras verticiais (um conceito que será abordado em capítulo próprio) de poliedros, o que muito contribuiu para o novo ímpeto que o estudo das figuras regulares viria posteriormente a conhecer (Schulte, 2004, p. 9), fundamentalmente, por via de Dress e de Grünbaum, que definiriam o conceito de poliedro como uma materialização geométrica do objeto combinatório que lhe é subjacente (2003b, p. 3). Grünbaum designa este objeto de "poliedro abstrato" e define-o como uma família de vértices, arestas e faces, alguns

pares dos quais são incidentes (em estreita observância das condições que se detalham em Grünbaum, 2003b). Cada aresta é incidente com dois vértices distintos e duas faces distintas. Se duas arestas forem incidentes com quatro faces distintas [ou com as mesmas duas faces], estas arestas são incidentes com os mesmos dois vértices [ou vértices]. Para cada *flag* (tríade composta por um vértice, uma aresta e uma face mutuamente incidentes) existirá apenas uma outra *flag* com o mesmo vértice e face. Cada face é constituída por uma sequência cíclica ordenada de vértices e arestas e, analogamente, as faces e arestas incidentes com qualquer vértice definem uma sequência cíclica ordenada (a *vertex star* desse vértice). Quaisquer duas faces [ou vértices] estão interligadas por uma *chain* de faces [ou vértices] mutuamente incidentes e arestas[11].

Apesar de Cromwell qualificar as definições de polígono e poliedro de Grünbaum como extremamente genéricas (1997, p. 286), o facto é que lhe permitiram desenvolver um corpo teórico sólido de extrema importância para o estudo dos poliedros. São disso exemplo as categorias que Grünbaum (1994a, p. 50) estabeleceu para os poliedros epipedais, definidos exclusivamente por faces planas; os acópticos, de faces planas que se intersectam apenas em vértices ou em arestas comuns a faces adjacentes; e os poliedros de faces não-planas, para os quais Grünbaum utiliza a expressão *hollow-faced polyhedra*. Esta última categoria, na qual se incluem as quatro classes de poliedros regulares estabelecidas por Grünbaum (1977), que admitem polígonos infinitos (o apeirágono, os polígonos em zig-zag e os helicoidais) e polígonos não-planares (prismáticos, anti-prismáticos e helicoidais) como faces ou como figuras verticiais, não serão aqui abordadas, pelo facto de não se enquadrarem no âmbito desta investigação.

Com o objetivo de exemplificar o conceito de poliedro, ilustram-se, nas Figuras 11 a 14, alguns poliedros que poderão ser considerados como menos comuns. Os poliedros das Figuras 11 e 12 são topologicamente equivalentes a toros e definidos por faces convexas regulares que se intersectam apenas nas arestas que lhes são comuns, sendo as faces adjacentes não complanares. São exemplos de toróides de Stewart de *genus* um e de *genus* três[12], respetivamente, e caracterizam-se ainda como quasiconvexos, porque algumas das suas arestas são também arestas do menor poliedro convexo (*convex hull* ou invólucro convexo) que envolve cada um deles.

[11] Tradução livre a partir de: "Each edge is incident with two distinct vertices and two distinct edges. If two edges are incident with the same two vertices [faces], then these edges are incident with four distinct faces [vertices]. For each *flag* (triplet of mutually incident vertex, edge, face) there is precisely one other flag with the same vertex and face. Each face is a cyclically ordered sequence of vertices and edges, and analogously the faces and edges incident with any vertex form a cyclically ordered sequence (the *vertex star* of that vertex). Finally, any two faces [vertices] are connected by a chain of mutually incident faces [vertices] and edges." (Grünbaum, 2003a, p. 3).
[12] O *genus* de um poliedro é calculado através de uma adaptação da fórmula de Euler, em que $V - E + F = 2 - 2N$. O poliedro da Figura 12., que deriva do octaedro truncado, tem *genus* 3, porque $30 - 72 + 38 = 2 - 2N$.

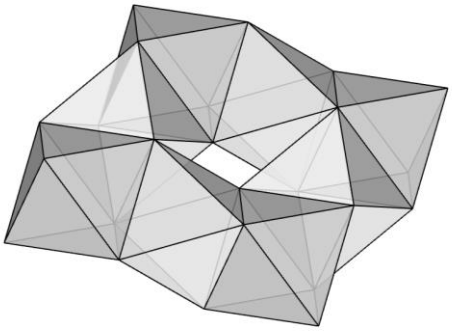


Figura 11 - Toróide de Stewart (e deltaedro côncavo) definido por oito octaedros regulares.

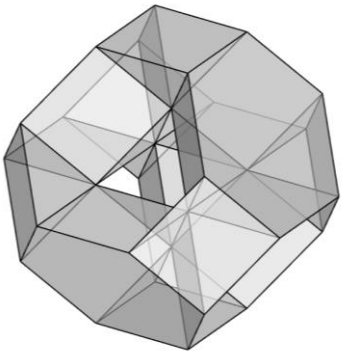


Figura 12 - Toróide de Stewart definido a partir de um octaedro truncado.

O exemplo da Figura 13, que Grünbaum (2003a, pp. 476-477) destaca pelo seu interesse, é um dos poliedros de vértices congruentes descritos por Hess em finais do século XIX, e por Brückner em 1900. Os seus vértices coincidem com os de um dodecaedro pentagonal e as suas faces são hexágonos que se auto-intersectam. A ilustração da esquerda destaca duas das suas vinte faces, cada uma das quais define quatro triângulos equiláteros, três dos quais, congruentes. Coxeter, Val, Flather e Petrie (1982, p. 43) reconhecem este poliedro como uma das cinquenta e nove estrelações do icosaedro regular, identificando-o como *Ef1g1*. Wenninger (1975, p. 48) identifica-o como a terceira estrelação do icosaedro.

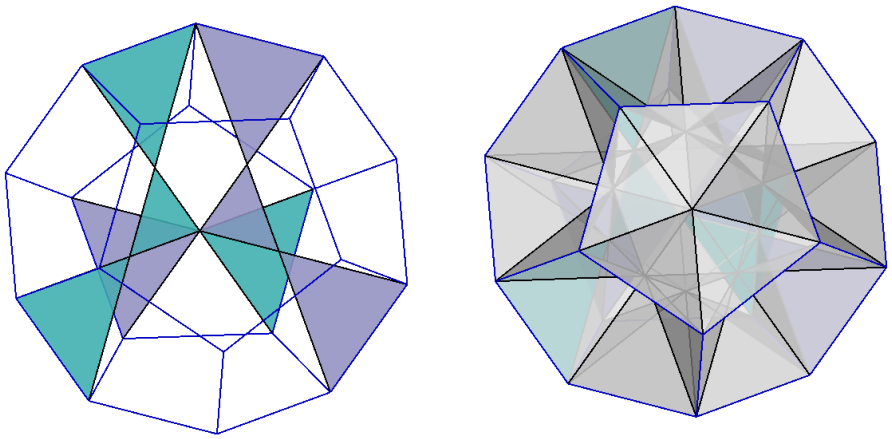
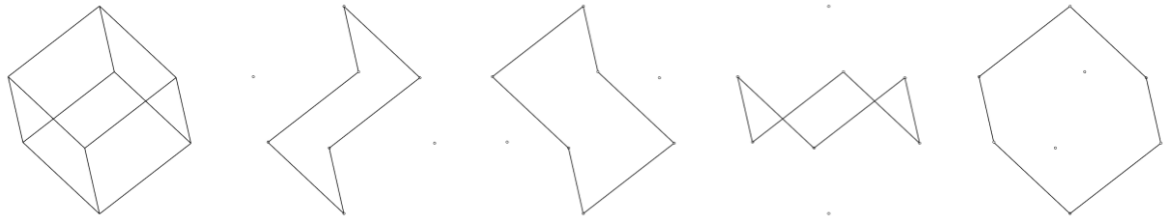


Figura 13 - Uma das estrelações do icosaedro regular, definida por faces hexagonais isogonais que se auto-intersectam.

Na Figura 14a, mostra-se um dos nove *hollow-faced polyhedra* que Grünbaum categoriza como poliedros regulares finitos que têm por faces polígonos empenados finitos (1977, p. 9). As quatro faces do poliedro, que se ilustram nas Figuras 14b, 14c, 14d e 14e são *Petrie Polygons* de

um cubo. Os polígonos de Petrie são polígonos enviesados em que dois (e apenas dois) lados consecutivos pertencem a uma das faces de um poliedro regular.



a b c d e

Figura 14 - Poliedro regular finito com faces poligonais enviesadas de vértices coincidentes com os vértices de um cubo, $\{6^{\pi/2}/1, 3\}$. Nas figuras a, b, c e d, ilustram-se as suas quatro faces.

Um apontamento final para assinalar que a grande maioria dos poliedros ilustrados até aqui são poliedros côncavos (ou, dito de outra forma, não-convexos). Importa, pois, e por contraponto, definir o que é um poliedro convexo. De entre várias definições possíveis (como, por exemplo, as de Hopf, 1940, pp. 67; Grünbaum e Klee, 1967, p. 21; ou Ogilvy, 1990, p. 173), destacamos a de Alexandrov (2005, p. 8), que estabelece que um poliedro convexo é um corpo delimitado por um número finito de polígonos planos, de tal modo que este se situa inteiramente num dos semiespaços definidos pelo plano que contém cada um dos polígonos. Conforme Coxeter denota (1973, p. 4), nestas situações, nenhum plano das faces penetra a região interior que pelo poliedro é delimitada, conforme acontece, por exemplo, com os poliedros que se mostram nas Figuras 15 e 16. Segundo Wenninger(1975, p. 3), um poliedro é convexo se nenhum ângulo diedral for superior a 180º. De acordo com esta definição (que vai ao encontro da definição de Louis Poinsot, citado por Cromwell, 1987, p. 252) uma tesselação plana, que Coxeter (1973, p. 61) caracteriza como um polígono degenerado, seria um poliedro convexo.

1.1.2. Figuras Verticiais de um Poliedro

A figura verticial de um polígono num determinado vértice é o segmento de reta que tem por extremos os pontos médios dos lados que concorrem nesse vértice. A figura verticial de um poliedro num vértice *V* é o polígono que tem por lados as figuras verticiais de todas as faces em torno desse vértice. A figura verticial, que não é necessariamente plana, descreve a forma e sequência das faces em torno de cada vértice, permitindo-nos compreender a configuração do poliedro e caracterizá-lo. Norman Johnson distingue, inclusive, os poliedros uniformes por dez grupos distintos[13], de acordo com a configuração das suas figuras verticiais (Weisstein, s/d).

Segundo Coxeter (1973) e Cundy e Rollet (1989), a figura verticial de um vértice *V* tem por vértices os pontos médios de todas as arestas concorrentes em *V*. Em determinadas circunstâncias, porém, a localização dos vértices da figura verticial poderá ser outra. Coxeter e outros autores (1954, p. 404), por exemplo, consideram adequado situar os vértices da figura verticial à mesma unidade de distância do vértice do poliedro. Nessa situação, concluem, todos os poliedros uniformes têm, como figuras verticiais, polígonos cíclicos. Conforme as Figuras 15 e 16 mostram, os vértices das arestas em torno de outro vértice *V* pertencem a uma esfera com centro nesse vértice, e pertencem, por isso, ao mesmo plano. A secção do poliedro por este plano é a figura verticial do poliedro. Nas duas figuras, destaca-se, a amarelo, a secção resultante do plano e a azul, a figura verticial com vértices nos pontos médios.

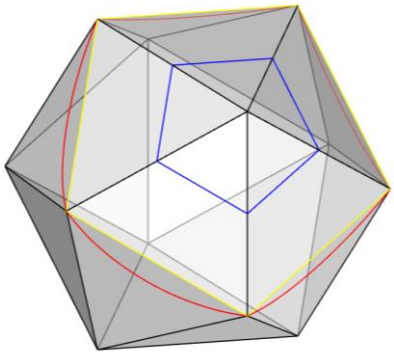


Figura 15 - Secção do icosaedro regular pela esfera que, com centro num dos vértices, o intersecta segundo a curva representada a vermelho.

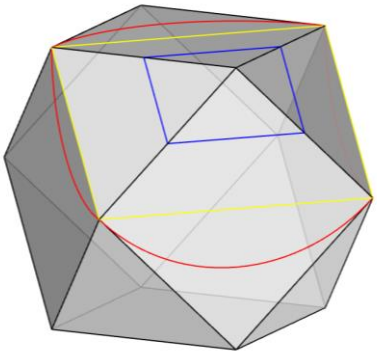


Figura 16 - Secção do cuboctaedro pela esfera com centro num dos vértices, que o intersecta segundo a curva representada a vermelho.

[13] Grupo 1: Regulares - figuras verticiais poligonais regulares; Grupo 2: Quasirregulares - figuras verticiais retangulares ou ditrigonais; Grupo 3: Versirregulares - figuras verticiais ortodiagonais; Grupo 4: Truncados regulares - figuras verticiais triangulares isósceles; Grupo 5: Quasi-quasirregulares - figuras verticiais trapezoidais; Grupo 6: Versiquasirregulares - figuras verticiais dipteroidais; Grupo 7: Truncados quasirregulares - figuras verticiais triangulares escalenas; Grupo 8: Achatados quasirregulares - figuras verticiais pentagonais, hexagonais ou octogonais; Grupo 9: Prismas ou isoedros truncados; Grupo 10: Antiprismas e antiprismas cruzados.

Se um poliedro tiver vértices isogonais, isto é, se for possível transformar um vértice qualquer noutro vértice através de uma operação de simetria, as figuras verticiais serão idênticas em todos os vértices do poliedro. No caso dos poliedros regulares, conforme veremos mais adiante, as figuras verticiais são polígonos regulares iguais.

Nas Figuras 17, 18 e 19, ilustram-se as figuras verticiais, com vértices nos pontos médios das arestas, de um dodecaedro pentagonal, de um pequeno dodecaedro estrelado e de um icosaedro triakis (que tem faces iguais, mas, ao contrário dos outros dois, não regulares). As figuras verticiais do dodecaedro da Figura 17 são triângulos equiláteros, enquanto que no poliedro da Figura 18 (do qual se omitiu uma das faces, para melhor visualização), são pentágonos regulares. O poliedro da Figura 19 é definido por faces triangulares isósceles que não estão dispostas de modo idêntico em todos os vértices. Por esta razão, as figuras verticiais são polígonos distintos: triângulos equiláteros nos vértices em que se intersectam três faces (que Wenninger (1975, p. 7) designa como trigonais) e decágonos equiangulares não planos, nos vértices em que se intersectam cinco faces.

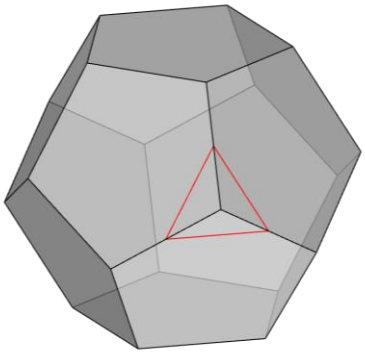


Figura 17 - As figuras verticiais do dodecaedro pentagonal são triângulos equiláteros.

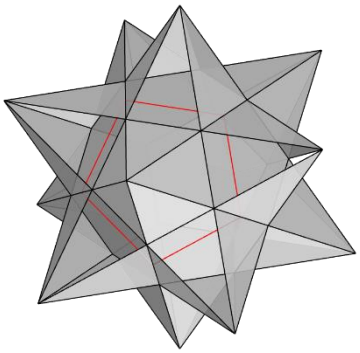


Figura 18 - As figuras verticiais do pequeno dodecaedro estrelado são pentágonos regulares.

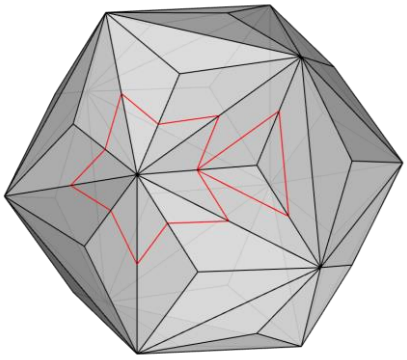


Figura 19 - As figuras verticiais do icosaedro triakis não são polígonos congruentes.

1.2.1. Transitividade das faces, arestas e vértices de um poliedro

Os conceitos de regularidade das faces, arestas e vértices dos poliedros e as propriedades de simetria que lhes estão subjacentes podem ser expressos através do conceito de transitividade. Segundo Cromwell (1997, p. 367), a transitividade conjuga os conceitos de regularidade e simetria e torna explícita a ideia de que certos objetos, ou elementos desses objetos, são equivalentes e indistinguíveis, parecendo ter igual configuração, independentemente daquele para o qual foquemos a nossa atenção. A transitividade de um poliedro descreve, ainda segundo o mesmo autor, as diferentes direções a partir das quais um poliedro parecerá ter igual configuração.

Diremos então que um poliedro é transitivo nas suas faces (*face-transitive*) ou isoedral se, para qualquer par de faces, existir uma simetria do poliedro que transforme a primeira face na segunda, de tal modo que o poliedro será sempre visto de igual modo, independentemente da face segundo o qual o observemos. Os poliedros deste tipo designam-se, genericamente, por isoedros e podem ser rodados livremente (como dados), sendo indistinguíveis a sua posição inicial e final.

Segundo Grünbaum e Shephard (1998, p. 207), todos os isoedros são *star-shaped*, sendo as suas faces (iguais e em número par) também *star-shaped*, *na* medida em que existe pelo menos um ponto no seu interior a partir do qual toda a superfície do poliedro é visível. Um polígono *star-shaped* caracteriza-se pelo facto de existir pelo menos um ponto (no polígono ou no seu interior) que é visível para qualquer outro ponto do polígono. O lugar geométrico dos pontos que satisfazem esta condição, que se designa por *kernel* do polígono, resulta da intersecção dos semiespaços definidos por cada um dos lados que se dirigem para o interior do polígono. O *kernel* poderá, assim, corresponder a um ponto ou a um polígono convexo. Se o resultado da intersecção for inexistente, o polígono não é *star-shaped*. Para qualquer polígono convexo, o *kernel* coincide totalmente com o interior do polígono (What-when-how, s.d).

A Figura 20 mostra o polígono [*ABCDEFGH*], que é *star-shaped*, e um ponto *K* que, pelo facto de se localizar no respetivo *kernel*, é visível para qualquer outro ponto do polígono. Os segmentos de reta que unem *K* a qualquer ponto do polígono situam-se inteiramente no seu interior.

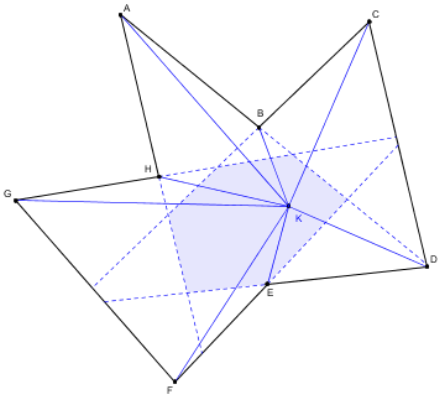


Figura 20 - Todos os lados de [*ABCDEFGH*] são visíveis a partir do ponto *K*, que se localiza no *kernel* (destacado a azul) do polígono.

As faces dos isoedros convexos podem ter configuração triangular, quadrangular convexa ou pentagonal *star-shaped* (Cromwell, 1997, p. 368). Cada face tem idêntica relação com as restantes faces, e cada uma delas tem igual relação com o centro de gravidade de poliedro (Pegg, s/d). Exemplos de isoedros convexos são as famílias infinitas de bipirâmides e de trapezoedros, o disfenóide tetragonal, os poliedros platónicos, e os poliedros de Catalán (Grünbaum e Shephard, 1998, p. 78).

Se um poliedro tiver igual configuração independentemente do vértice segundo o qual o observemos, diz-se que é transitivo nos seus vértices (*vertex-transitive*) ou isogonal. Em cada vértice de um poliedro isogonal, intersecta-se o mesmo número e tipo de polígonos, dispostos de forma idêntica. Por outras palavras, um poliedro isogonal tem vértices congruentes e figuras verticiais iguais. Para melhor explicar a transitividade dos vértices, Gillispie e Grünbaum (2019) sugerem que se considerem duas cópias iguais de um poliedro. Se este for isogonal, deverá ser possível posicionar qualquer vértice do segundo poliedro na localização exata de qualquer vértice do primeiro, rodando (ou refletindo, se necessário) o segundo poliedro de modo a que coincida exatamente com o primeiro. Exemplos de poliedros isogonais são os prismas de faces regulares, o disfenóide tetragonal, os poliedros platónicos, os de Kepler-Poinsot, e os arquimedianos.

Os poliedros que são, simultaneamente, isoedrais e isogonais designam-se, genericamente, por poliedros nobres. Foram estudados por Edmund Hess e Max Brückner nos finais do séc. XIX e por Grünbaum, que tem dedicado especial atenção ao seu estudo sistemático e, particularmente, aos poliedros isogonais infinitos. A estrelação do icosaedro regular da Figura 13 e o poliedro da Figura 21 (que é um dos poliedros-coroa ou estefanóides[14] descobertos em 1877 por Hess)

[14] Tradução livre do termo "stephanoid", que Grünbaum (2003) aponta ter sido cunhado por Edmund Hess a partir da palavra grega para coroa: Στεφανου (Stéphanos).

são exemplos de poliedros nobres, assim como o hexacontaedro da Figura 22 que, segundo Grünbaum (2003a, pp. 478-481) não chegou a ser descrito por Hess e Brückner, muito embora pudesse ter sido enquadrado, com toda a legitimidade, na categoria de poliedro nobre.

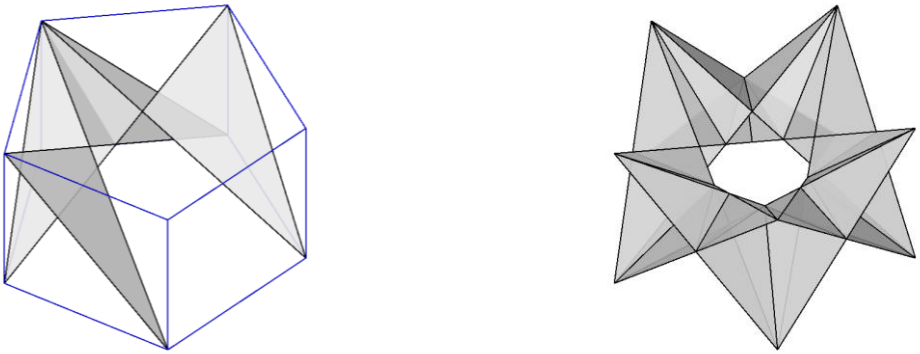


Figura 21 - Estefanóide pentagonal, inscritível num prisma pentagonal de faces regulares. À esquerda, ilustram-se duas das suas dez faces quadrangulares cruzadas.

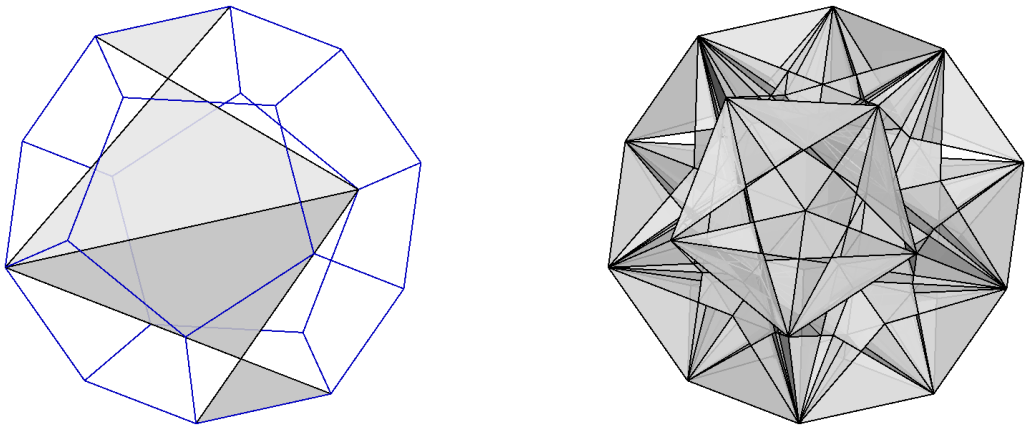


Figura 22 - Poliedro nobre descrito por Grünbaum, de vértices coincidentes com os do dodecaedro pentagonal. À esquerda, ilustram-se duas das suas sessenta faces quadrangulares cruzadas.

Para além da transitividade das faces e dos vértices de um poliedro, há ainda a considerar a transitividade das arestas, no que se refere à equivalência destas segundo simetrias do poliedro que, de modo mais informal, poderemos traduzir pela possibilidade de o poliedro ter sempre a mesma configuração, independentemente da aresta segundo o qual seja observado. Nestas condições, diz-se que o poliedro é isotoxal ou *edge-transitive*.

Não existem poliedros que sejam isotoxais sem serem isogonais, uma vez que a congruência das arestas está diretamente relacionada com a congruência dos vértices do poliedro. Todos os poliedros transitivos nas arestas são, necessariamente, transitivos nos vértices. O poliedro da Figura 23 é transitivo nos vértices (isogonal) e nas arestas (isotoxal), mas não nas faces (que são de dois tipos): cada um dos seus vértices é definido pela intersecção de uma face triangular,

uma pentagonal, uma face triangular e outra pentagonal; em cada aresta, intersectam-se uma face triangular e uma face pentagonal. O poliedro da Figura 24 é transitivo nas faces (isoedral) e nas arestas (isotoxal), porque em cada aresta se intersectam dois losangos iguais segundo ângulos diedrais iguais, mas não é transitivo nos vértices, porque alguns deles resultam da intersecção de três losangos e, outros, de cinco losangos. Todos os poliedros regulares (como, por exemplo, o dodecaedro da Figura 25) são isoedrais, isogonais e isotoxais, uma vez que, em cada aresta, se intersectam faces iguais e, em cada vértice, arestas iguais. Para além dos convexos regulares, só existem dois poliedros convexos isotoxais e isogonais: o cuboctaedro e o icosidodecaedro (Johnson, 1966, p. 182).

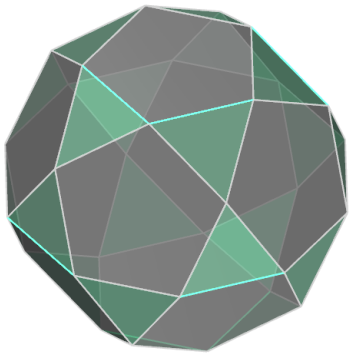


Figura 23 - O icosidodecaedro arquimediano é um poliedro isogonal e isotoxal, porque tem vértices e arestas transitivos.

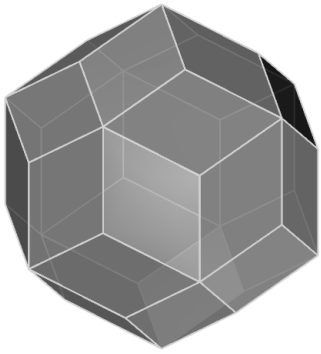


Figura 24 - O triacontaedro rômbico é um poliedro isoedral e isotoxal, porque tem faces e arestas transitivos.

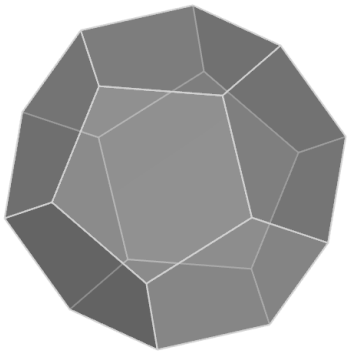


Figura 25 - O dodecaedro pentagonal é um poliedro isoedral, isotoxal e isogonal, porque tem faces, arestas e vértices transitivos.

Existem poliedros isoedrais e isogonais, mas não isotoxais. Os únicos poliedros convexos isoedrais e isogonais são os regulares (que são ainda isotoxais) e os disfenóides com faces mutuamente congruentes (Grünbaum, 1997, p. 39). O disfenóide tetragonal (que será mais adiante ilustrado) é destes um exemplo, porque, sendo isoedral e isogonal, não é isotoxal, dado que as suas arestas, tal como os ângulos diedrais, são distintas.

Importa ainda assinalar que o conceito de transitividade também se reporta às *flags* de um poliedro. Uma *flag* de um poliedro consiste em qualquer tríade definida por um determinado vértice *V*, uma aresta *E* que incide nesse vértice e uma face *F* que incide nesse vértice e nessa aresta, sendo que *V*, *E* e *A* são mutuamente incidentes (Wills, 1988, p. 212). Grünbaum denota que um poliedro convexo será regular "provided the set of isometric symmetries of the polyhedron acts transitively on the family of all flags"[15] (2009, p. 20), e Segerman (2016, p. 25), que um poliedro será regular se for possível transpor uma *flag* do poliedro para qualquer outra *flag*,

[15] Tradução livre: desde que o conjunto de simetrias isométricas do poliedro atuem transitivamente na família de todas as *flags*.

através de uma operação de simetria. Cromwell (1997, p. 372) acrescenta que a transitividade das *flags* de um poliedro impõe limitações muito restritas, na medida em que, se for apenas permitida a simetria de rotação, nenhum poliedro poderá ser considerado como *flag-transitive*. Só admitindo simetrias de reflexão é que seria possível considerar, como *flag-transitive*, os poliedros platónicos, os poliedros de Kepler-Poinsot e a *stella octangula*.

1.2.2. Poliedros uniformes e poliedros semirregulares

Um poliedro uniforme ou semirregular é definido por faces regulares que se intersectam de modo idêntico em todos os vértices, admitindo simetrias que transformam um dado vértice noutro vértice qualquer (Ball e Coxeter, 1987, p. 136). Não sendo necessariamente isoedral nem isotoxal, é um poliedro isogonal de vértices indistinguíveis e faces regulares (*vertex-transitive* e *facially-regular*).

Grünbaum denota existir na literatura da especialidade alguma confusão no que ao conceito de semirregularidade diz respeito, que apelidou de "an enduring error", por ter conduzido muitos investigadores (ao longo de séculos e, pelo menos, até à data em que escreveu o artigo), a cometer sérios erros de ordem lógica e matemática (2009, p. 2), principalmente, no que se refere à enumeração de poliedros com tais características. Tais incorreções, refere Grünbaum, derivam do facto de as propriedades dos poliedros semirregulares terem sido caracterizadas sem que o poliedro fosse considerado como um todo, adotando um critério meramente local, em vez de global. Segundo aquele critério, as faces de um poliedro semirregular seriam polígonos regulares, sendo a disposição cíclica das faces, em torno de cada vértice, idêntica (2009, p. 3). Por outro lado, o critério global estabelece de forma mais completa, que "all the faces are regular polygons, and all vertices form one orbit under isometric symmetries of the polyhedron"[16]. A este propósito, Ball e Coxeter (1987, p. 138) tinham já distinguido a semirregularidade segundo o critério local (em que cada vértice é definido por igual número e tipo de faces), da isogonalidade no sentido estrito do termo, que implica que a aparência do poliedro como um todo seja a mesma, se observado a partir de qualquer um dos seus vértices.

Grünbaum sugere por isso que, para os poliedros que atendam ao critério local, se reserve a designação de *arquimedianos* e, aos poliedros que atendam ao critério global, a designação de *semirregulares* ou *uniformes*. Esta distinção evitaria a incorreção que o autor detetou em diversos autores (Williams (1979) ou, por exemplo, Wenninger (1975, p. 2)) que descrevem os *poliedros arquimedianos ou semirregulares* adotando o critério local e concluindo, incorretamente, que são treze. Grünbaum observa que, se a definição em causa adotar o critério local, o pseudo-rombicuboctaedro deverá ser considerado como o décimo quarto arquimediano, dado não existir a condição de transitividade dos vértices.

[16] Tradução livre: todas as faces são polígonos regulares, e todos os vértices definem uma órbita segundo as simetrias isométricas do poliedro.

As Figuras 26 e 27 mostram os dois poliedros mencionados por Grünbaum (2009, p. 9) para exemplificar o conceito de transitividade dos vértices. Se um poliedro for isogonal, deverá ser possível posicionar qualquer vértice do segundo poliedro na localização exata de qualquer vértice do primeiro poliedro, rodando ou refletindo o segundo poliedro de modo a que coincida perfeitamente com o primeiro. No caso dos poliedros ilustrados, os ângulos diedrais e as figuras verticiais (na figura, a vermelho) são iguais. Cada um dos poliedros admite uma circunsfera e cada vértice é definido pela intersecção de três faces quadradas e uma face triangular regular. Porém, os vértices do poliedro da direita não são indistinguíveis, embora sejam congruentes. Se rodássemos ou refletíssemos o poliedro, não seria possível que a sua configuração na posição inicial e na posição final fossem idênticas. O poliedro da Figura 27 não é, portanto, transitivo nos vértices, ao contrário do poliedro da Figura 26, um dos treze arquimedianos, que é isogonal. Basta compararmos as duas figuras, para concluirmos que a parte superior do poliedro da direita se encontra rodada, em relação à parte inferior, segundo um ângulo de 45º. O poliedro da Figura 27 é ainda designado por pseudo-rombicuboctaedro, girobicúpula quadrada alongada (Sólido de Johnson J37) ou *Sólido de Miller*, que, alegadamente, o terá descoberto por engano, ao tentar construir um modelo do rombicuboctaedro (Cromwell, 1997, p. 91).

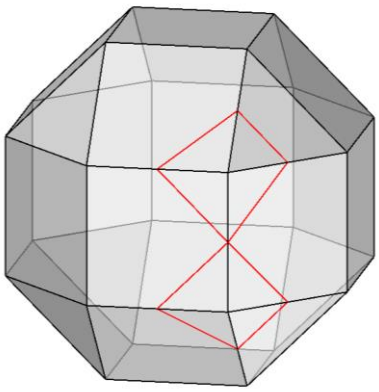


Figura 26 - O rombicuboctaedro é isogonal, porque os seus vértices são indistinguíveis.

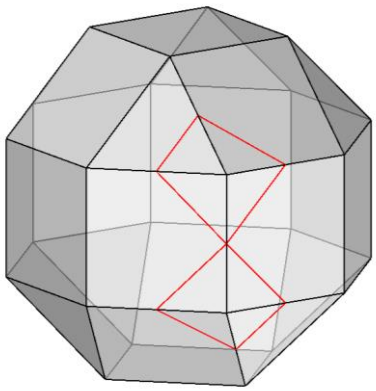


Figura 27 - O pseudo-rombicuboctaedro não é isogonal, porque os seus vértices não são transitivos.

É possível que Arquimedes tivesse conhecimento do pseudo-rombicuboctaedro (Cromwell, 1997, p. 91) embora os escritos de Pappus não lhe façam referência e mencionem que Arquimedes descobriu treze poliedros (Grünbaum, 2009, p. 5). Malkevitch (1988, p. 85) assinala que Kepler, na obra *De nive sexangula* de 1611, enunciou que os poliedros semirregulares existiam em número de catorze - no qual se incluiria o pseudo-rombicuboctaedro - embora não tivesse chegado a fundamentar a sua afirmação e tivesse afirmado, posterior e detalhadamente (no Livro II do *Harmonices Mundi*, de 1619), que os poliedros arquimedianos eram, afinal, treze. O

rombicuboctaedro e o pseudo-rombicuboctaedro possuem grupos de simetria diferentes (octaedral e diedral, respetivamente, assunto que mais adiante abordaremos), mas não existem evidências de que questões de simetria ou de transitividade dos vértices tivessem sido consideradas por Kepler (Grünbaum, 2009, p. 10), razão pela qual o pseudo-rombicuboctaedro poderia ter sido considerado como o décimo quarto arquimediano.

Grünbaum vai mais longe, assinalando que, adotando o critério local, a enumeração dos poliedros semirregulares deverá ascender a setenta e sete poliedros e não a setenta e cinco, pelo facto de se dever incluir, não só o pseudo-rombicuboctaedro mas também o pseudo-quasirrombicuboctaedro da Figura 28 descrito por Hughes Jones em 1994 (Grünbaum, 2009, p. 12). Estes dois *pseudo-poliedros* partilham idênticas características, na medida em que satisfazem o critério local, mas não o global.

As Figuras 28 e 29 ilustram, respetivamente, o quasirrombicuboctaedro (ou grande rombicuboctaedro) e o pseudo-quasirrombicuboctaedro, definidos por três faces quadradas e uma face triangular em cada vértice. Note-se que, de modo idêntico aos poliedros das Figuras 26 e 27, a parte superior do poliedro à direita se encontra rodada, por comparação com a parte superior do poliedro da esquerda, segundo um ângulo de 45º.

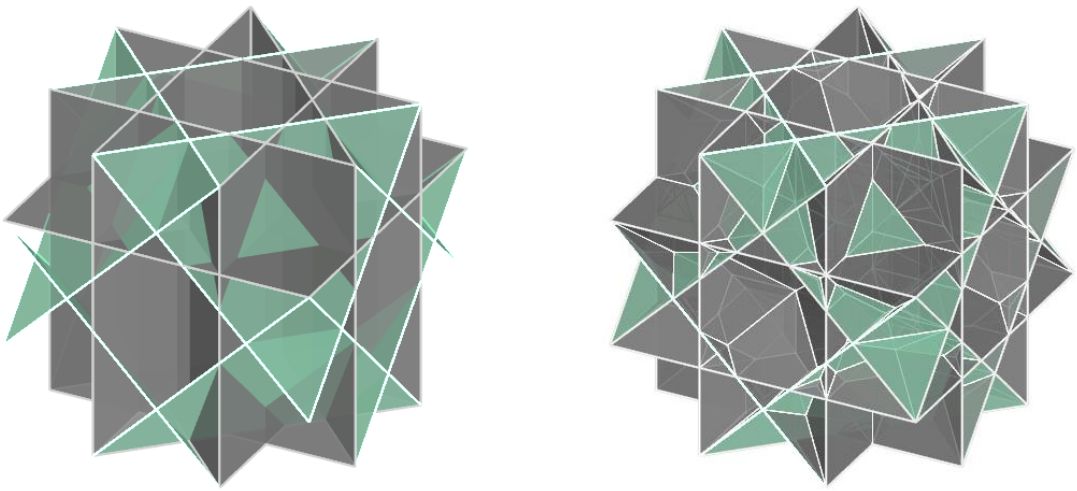


Figura 28 - O quasirrombicuboctaedro é um poliedro côncavo (semirregular). A imagem da esquerda ilustra as nove faces quadradas e as quatro faces triangulares que são comuns ao pseudo-quasirrombicuboctaedro.

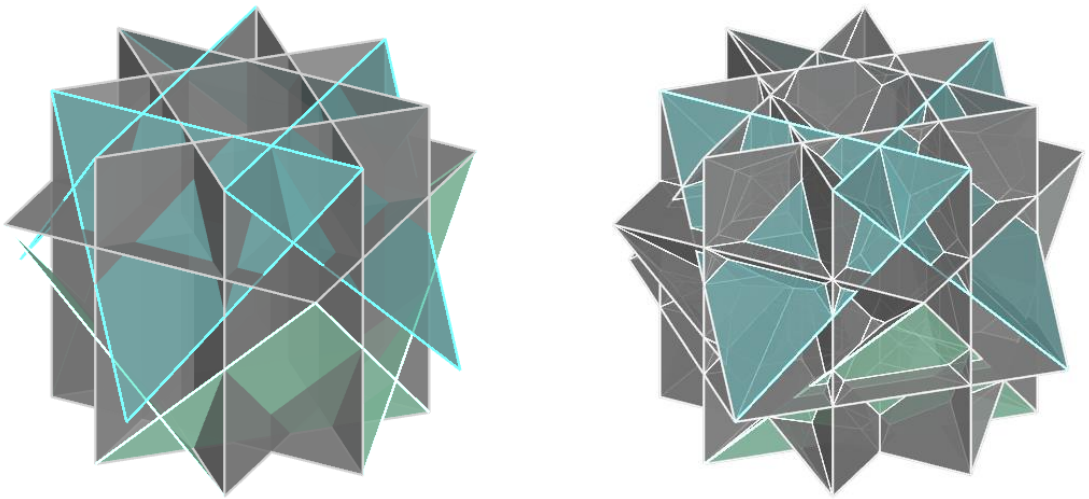


Figura 29 - O pseudo-quasirrombicuboctaedro é um poliedro côncavo (não semirregular). A imagem da esquerda destaca, com a cor azul, as faces triangulares que, na parte superior do pseudo-poliedro, diferem das faces triangulares do poliedro da figura anterior.

Com o objetivo de introduzir uma distinção de ordem semântica, e tendo em consideração a definição anterior, ao longo desta investigação, reservaremos a designação de *semirregulares* para os poliedros isogonais com faces regulares que não têm, nem faces iguais, nem arestas transitivas (isto é, os que não são nem regulares nem quasirregulares). Por contraponto, reservaremos a designação de *uniformes* para as categorias de poliedros finitos regulares, quasirregulares e semirregulares que, no total, perfazem setenta e cinco poliedros. Sob esta designação consideram-se ainda, para além das famílias infinitas de prismas e antiprismas semirregulares, os seguintes: cinco poliedros convexos regulares (platónicos); dois poliedros convexos quasirregulares (arquimedianos); onze poliedros convexos semirregulares (arquimedianos); quatro poliedros côncavos regulares (de Kepler-Poinsot); cinco poliedros côncavos quasirregulares; nove hemipoliedros quasirregulares; e trinta e nove poliedros semirregulares côncavos[17] (os hemipoliedros caracterizam-se pelo facto de algumas faces conterem o centro do poliedro).

[17] As designações dos trinta e nove poliedros côncavos semirregulares são as seguintes (o código atribuído indica o número do modelo respetivo em Wenninger (1975)): pequeno cubicuboctaedro (W69); pequeno icosicosidodecaedro (W71); pequeno dodecicosidodecaedro (W72); pequeno rombidodecaedro (W74); grande dodecaedro truncado (W75); rombidodecadodecaedro (W76); grande cubicuboctaedro (W77), ilustrado na Figura 82; cuboctaedro cuboctatruncado (W79); grande dodecicosidodecaedro ditrigonal (W81), ilustrado na Figura 85; pequeno dodecicosidodecaedro ditrigonal (W82); icosidodecadodecaedro (W83); icosidodecaedro icosidodecatruncado (W84); quasirrombicuboctaedro (W85), ilustrado na Figura 28; pequeno rombihexaedro (W86); grande icosicosidodecaedro (W88), ilustrado na Figura 86; pequeno dodecicosaedro (W90); hexaedro quasitruncado (W92), ilustrado na Figura 377; cuboctaedro quasitruncado (W93), ilustrado na Figura 374; grande icosaedro truncado (W95); rombicosaedro (W96); pequeno dodecaedro estrelado quasitruncado (W97); dodecaedro quasitruncado (W98); grande dodecicosidodecaedro (W99); grande dodecicosaedro (W101), ilustrado na Figura 84; grande rombihexaedro (W103), ilustrado na Figura 81; grande dodecaedro estrelado quasitruncado (W104); quasirrombicosidodecaedro (W105); grande icosidodecaedro quasitruncado (W108); grande rombidodecaedro (W109); pequeno icosicosidodecaedro achatado (W110); dodecadodecaedro achatado (W111); icosidodecadodecaedro achatado (W112); grande icosidodecaedro achatado invertido (W113); dodecadodecaedro achatado invertido (W114); grande dodecicosidodecaedro achatado (W115); grande icosidodecaedro achatado (W116); grande icosidodecaedro retroachatado invertido (W117); pequeno icosidodecaedro retroachatado invertido (W118); grande dirrombicosidodecaedro (W119).

Segundo Har'el, Z. (1993, p. 1), os cinquenta e três poliedros côncavos quasirregulares e semirregulares (isto é, além dos platónicos, arquimedianos e de Kepler-Poinsot), foram descobertos entre os anos de 1880 e 1930. Segundo Cutler e Schulte (2011, p. 2), dois côncavos uniformes foram descobertos por Hess em 1878, e por Badoureau e Pitsch em 1881. Estes dois autores descobriram, de forma independente, quarenta e um poliedros côncavos uniformes. Os restantes doze foram descobertos por Coxeter e Miller entre 1930 e 1932 (Coxeter e outros autores, 1954, p. 51), tendo a lista dos setenta e cinco poliedros uniformes sido publicada por Coxeter, Longuet-Higgins e Miller em 1954. Hart (1996b) denota que esta lista só foi considerada completa depois da investigação que Skilling levou a cabo com recurso a meios computacionais. Nos capítulos seguintes serão ilustrados todos os poliedros convexos uniformes; e, dos côncavos, todos os regulares e quasirregulares e alguns semirregulares.

1.2.3. Poliedros Regulares[18]

Schulte e Wills (1986) referem que as figuras regulares têm sido estudadas segundo perspetivas tão distintas que, ao longo de mais de duzentos anos, a própria conceção de regularidade evoluiu (a par dos conceitos de polígono e de poliedro, conforme vimos na Secção 1.1.1 do Capítulo I). Os mais recentes desenvolvimentos no estudo sistemático das configurações regulares em espaços euclidianos refletem as influências profundas da obra clássica de Coxeter e, entre outros autores, de Grünbaum, que aborda o conceito segundo uma nova abordagem combinatória (1986, p. 253). Antes do final da década de 1920, não se consideravam como regulares outros poliedros além dos platónicos e dos de Kepler-Poinsot. Distintas conceções de poliedro, porém, vieram permitir que se considerassem nesta categoria: as tesselações planas regulares (como poliedros com faces regulares em número infinito, segundo Coxeter, 1999, p. 76); os poliedros de Petrie-Coxeter (poliedros infinitos com faces regulares); e ainda, com as investigações de Grünbaum e Dress de finais da década de 1970, poliedros finitos e infinitos regulares com faces não-planares.

Um poliedro é regular se todos os seus vértices forem indistinguíveis e definidos por faces regulares iguais. Tais condições determinam que os ângulos sólidos de todos os vértices do poliedro são iguais, sendo também iguais os ângulos diedrais entre pares de faces adjacentes. Seja qual for a face, aresta ou vértice segundo o qual observemos um poliedro regular, a sua configuração será sempre idêntica, pelo facto de as faces serem iguais e os vértices e ângulos diedrais serem também iguais. São, portanto, poliedros isoedrais, isotoxais e isogonais.

Com o objetivo de simplificar a definição de regularidade, Coxeter substituiu a referência a ângulos sólidos dos vértices do poliedro (que caracteriza de "rather troublesome" (1973, p. 15), isto é, algo problemáticos) pelas suas figuras verticiais que, no caso dos poliedros regulares, são polígonos regulares iguais. O conceito de ângulo sólido do vértice de um poliedro que, segundo Fernandes, é a "porção de espaço limitada por sucessivos ângulos planos, com o

[18] Nota sobre as notações adotadas para os polígonos regulares e poliedros uniformes: Ao longo desta investigação, será utilizado o símbolo de Schläfli para identificar polígonos regulares, poliedros regulares (finitos e infinitos) e, de acordo com a adaptação referida por Coxeter (1973, p. 69), poliedros quasirregulares e arquimedianos.
O símbolo $\{p\}$ identifica um polígono regular, em que p corresponde ao número de lados do polígono. O número p será inteiro, se o polígono for convexo (por exemplo: {5}, {6} e {7}, respetivamente, para o pentágono regular, o hexágono regular e o heptágono regular); e racional, se se tratar de um polígono estrelado regular (por exemplo: {5/2} para o pentagrama e {7/2} e {7/3} para os heptagramas de densidade 2 e 3, respetivamente).
No caso do símbolo $\{p, q\}$ utilizado para identificar poliedros regulares, p corresponde ao número de lados das faces poligonais e q corresponde ao número de faces em torno de cada vértice, sendo $p > 2$, $q > 2$ e $(p - 2)(q - 2) < 4$ (Coxeter, Longuet-Higgins, e Miller, 1954, p. 430). Um cubo, por exemplo, é identificado pelo símbolo {4, 3}, uma vez que em cada vértice se intersectam três quadrados; um icosaedro regular terá por símbolo {3, 5}, dado que em cada vértice se intersectam cinco triângulos equiláteros. O símbolo do pequeno dodecaedro estrelado, por exemplo, corresponde a {5/2, 5} porque em cada vértice se intersectam cinco pentagramas.

mesmo vértice, tendo dois a dois um lado comum" (1967, p. 344), torna-se mais claro se considerarmos uma esfera que, com centro nesse vértice, intersecte o poliedro. O resultado desta intersecção, no caso dos poliedros que se ilustram na Figura 30, por exemplo, são três pontos situados nas arestas que concorrem nesse vértice. Estes pontos são ainda os vértices da figura verticial respetiva que, em ambos os casos, são triângulos equiláteros. A área de cada uma das porções de superfície esférica que se destacam na Figura 30, medida em estereorradianos, corresponde ao ângulo sólido subentendido pelo vértice em causa. Para os dois poliedros da Figura 30, tanto os ângulos sólidos como as figuras verticiais são iguais entre si.

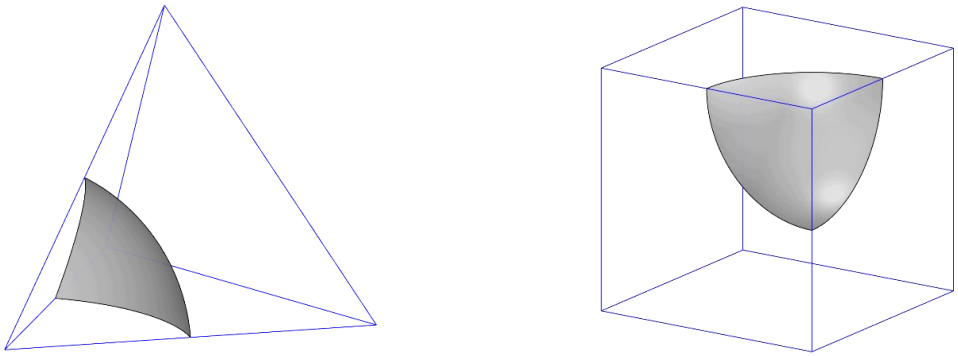


Figura 30 – O resultado da intersecção de uma esfera com centro num dos vértices de um tetraedro (à esquerda) ou de um cubo (à direita) são três pontos de cada uma das arestas que concorrem nesse vértice. Estes pontos definem a figura verticial desse vértice do poliedro. A área de cada porção de superfície esférica representada corresponde ao ângulo sólido subentendido pelo vértice em causa.

Deste modo, é possível estabelecer que um poliedro é regular se as suas faces e figuras verticiais forem todas regulares (1973, p. 16). As Figuras 31, 32 e 33 ilustram os contraexemplos referidos por Coxeter (1973, p. 15) para demonstrar que um poliedro é regular se e só se tiver faces regulares iguais e ângulos sólidos iguais.

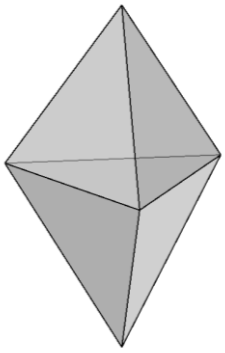


Figura 31 - A bipirâmide triangular não é regular, porque, apesar de ter faces regulares iguais, tem ângulos sólidos diferentes.

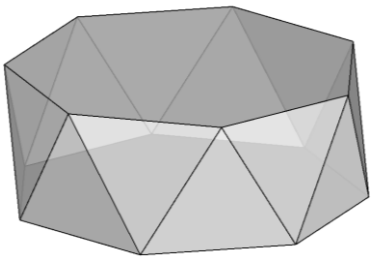


Figura 32 - o antiprisma heptagonal não é regular, porque, apesar de ter vértices iguais e ângulos sólidos iguais, não tem faces iguais.

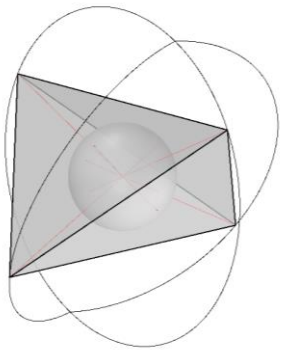


Figura 33 - O disfenóide tetragonal não é regular, porque, embora tenha faces iguais e ângulos sólidos iguais e admita uma insfera e uma circunsfera, tem faces isósceles.

Na simbologia de Schläfli para poliedros regulares (segundo a qual, recordamos, um número *q* de polígonos com número *p* de lados se intersecta em cada vértice do poliedro), podemos constatar que *q* corresponde ao número de lados da figura verticial. Refira-se, a título de exemplo: o dodecaedro {5, 3} em cujos vértices se intersectam três pentágonos regulares, tem, por figuras verticiais, triângulos equiláteros; o pequeno dodecaedro estrelado {5/2, 5}, cujas figuras verticiais são pentágonos regulares; e o grande dodecaedro {5, 5/2} que tem pentagramas por figuras verticiais. As Figuras 34, 35 e 36 mostram uma das figuras verticiais (com vértices nos pontos médios das arestas) de cada um destes poliedros.

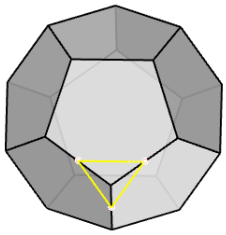


Figura 34 - As figuras verticiais do dodecaedro pentagonal são triângulos equiláteros.

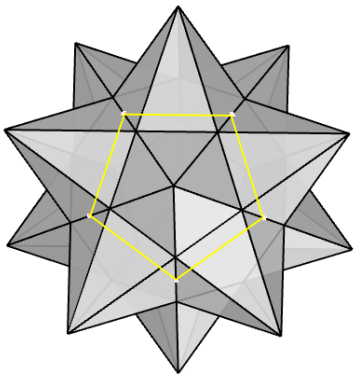


Figura 35 - As figuras verticiais do pequeno dodecaedro estrelado são pentágonos regulares.

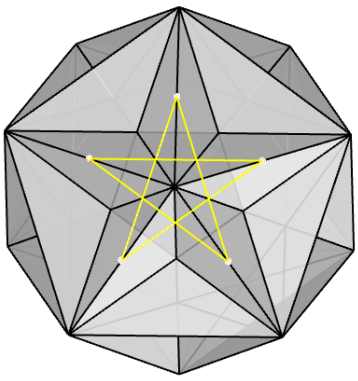


Figura 36 - As figuras verticiais do grande dodecaedro são pentagramas regulares.

Euclides demonstrou que, para cada um dos poliedros convexos regulares, existe uma esfera que contém todos os seus vértices, e que estes, por sua vez, dividem essa superfície esférica em partes iguais (Euclid e Densmore, 2017, pp. 463-477). Coxeter (1973, p. 16) acrescenta que todos os poliedros regulares [finitos] admitem três esferas concêntricas: a esfera circunscrita ou circunsfera (Figura 37) que contém os vértices do poliedro e as circunferências circunscritas a todas as faces; a esfera intermédia, interesfera, midesfera ou esfera de reciprocação (Figura 38) que contém os pontos médios das arestas e as circunferências inscritas em cada uma das faces; e a esfera inscrita ou insfera (Figura 39), que é tangente ao centro das faces do poliedro. Em determinados poliedros não regulares, a midesfera não é tangente ao poliedro nos pontos médios das arestas.

Nos poliedros regulares, a linha perpendicular ao centro de cada face intersecta a linha que é perpendicular ao plano da figura verticial e passa pelo seu centro, num ponto *O*. Este ponto *O* é o baricentro ou centroide do poliedro e centro destas três importantes esferas (Coxeter, 1973, p. 16).

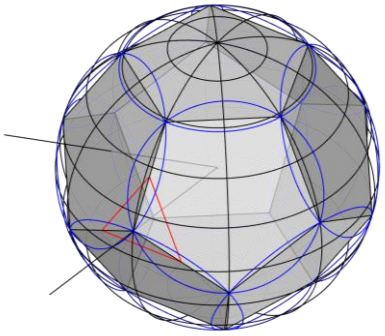


Figura 37 - A circunsfera do dodecaedro pentagonal contém os vértices e a circunferência circunscrita a cada face (a azul).

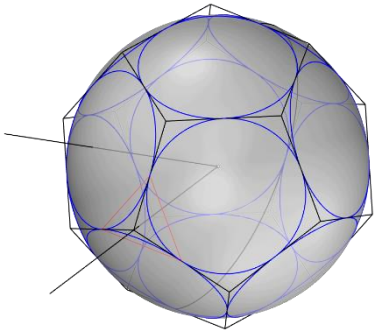


Figura 38 - A midesfera do dodecaedro pentagonal contém os pontos médios das arestas e a circunferência inscrita em cada face.

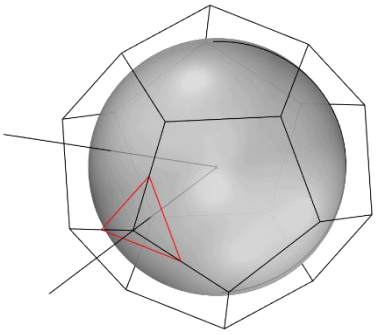


Figura 39 - A insfera do dodecaedro pentagonal é tangente ao centro de todas as faces.

As Figuras 40 a 48 mostram a divisão da circunsfera de cada um dos poliedros regulares. Esta divisão resulta da projeção das arestas sobre a circunsfera, tendo o baricentro como origem da projeção. As calotes esféricas definidas pelas arestas dos polígonos esféricos que correspondem a cada uma das faces do poliedro (Coxeter e outros autores, 1954, p. 405), são delimitadas por arcos de circunferências máximas que se destacam a cinzento nas Figuras 40 a 48.

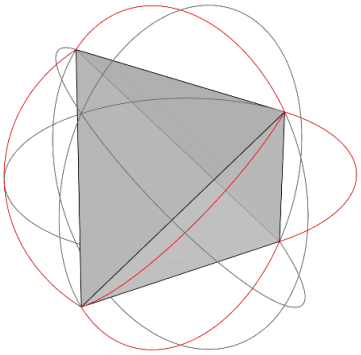


Figura 40 - Tetraedro regular e respetivos triângulos esféricos.

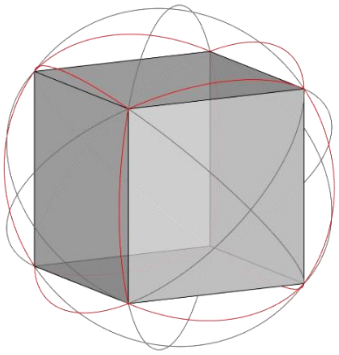


Figura 41 - Hexaedro regular e respetivos quadrados esféricos.

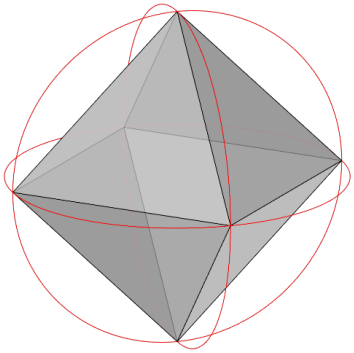


Figura 42 - Octaedro regular e respetivos triângulos esféricos.

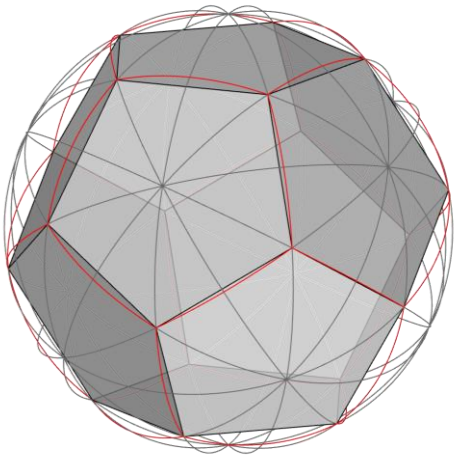


Figura 43 - Dodecaedro regular
e respetivos pentágonos esféricos.

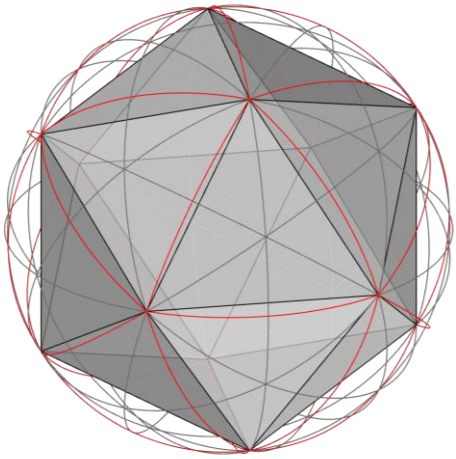


Figura 44 - Icosaedro regular
e respetivos triângulos esféricos.

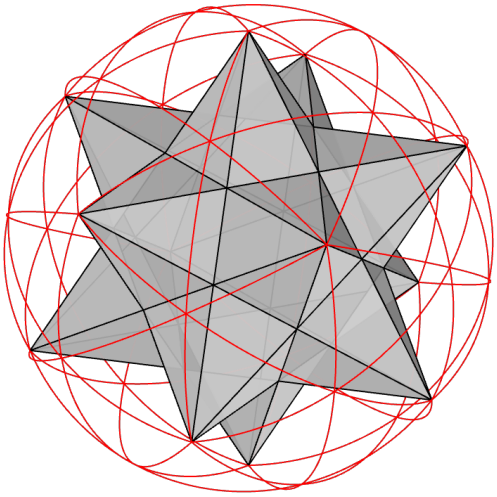


Figura 45 -Pequeno dodecaedro estrelado
e respetivos pentagramas esféricos.

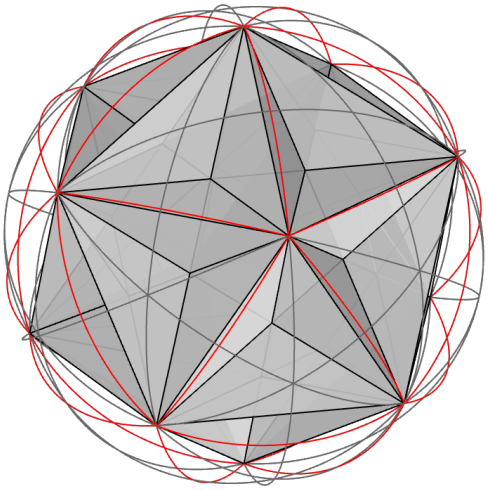


Figura 46 - Grande dodecaedro
e respetivos pentágonos esféricos.

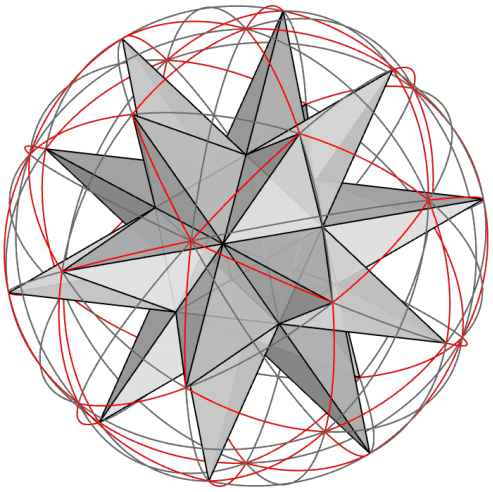


Figura 47 - Grande dodecaedro estrelado
e respetivos pentagramas esféricos.

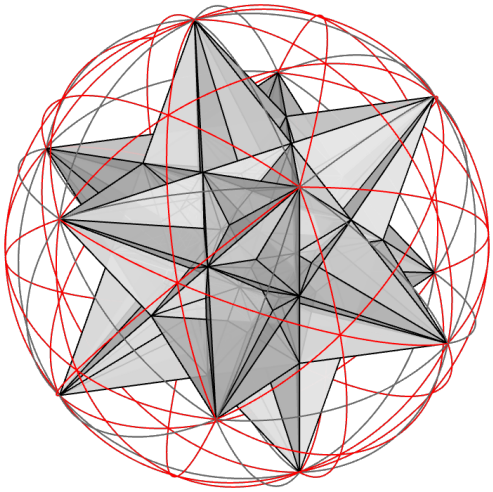


Figura 48 - Grande icosaedro
e respetivos triângulos esféricos.

Pelo interesse das relações que estabeleceu entre os poliedros regulares e as suas figuras verticiais[19], ilustraremos, entre as Figuras 49 e 63, cinco das oito classes de poliedros regulares[20] definidas por Grünbaum em 1977 (pp. 6-7):

Classe 1

Poliedros platónicos (Figura 49 a 53): poliedros regulares finitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos: tetraedro {3, 3}, hexaedro {4, 3} (ou cubo), octaedro {3, 4}, dodecaedro {5, 3} e icosaedro {3, 5}.

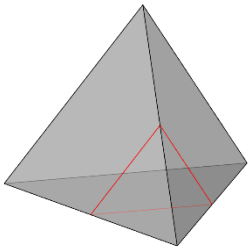


Figura 49 – Em cada vértice do tetraedro {3, 3}, intersectam-se três faces triangulares regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros.

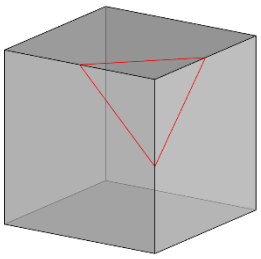


Figura 50 - Em cada vértice do hexaedro {4, 3}, intersectam-se três faces quadradas. As figuras verticiais são triângulos equiláteros.

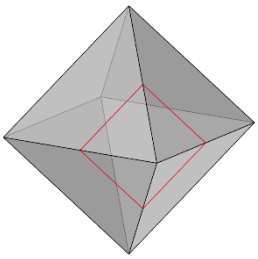


Figura 51 - Em cada vértice do octaedro {3, 4}, intersectam-se quatro faces triangulares regulares. As figuras verticiais são quadrados.

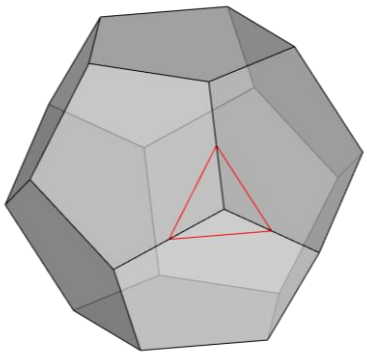


Figura 52 - Em cada vértice do dodecaedro {5, 3}, intersectam-se três faces pentagonais regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros.

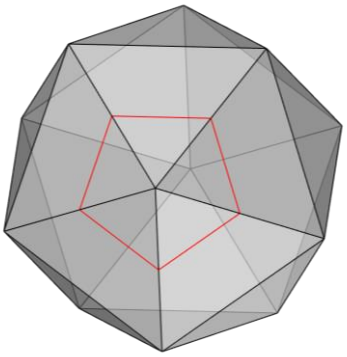


Figura 53 - Em cada vértice do icosaedro {3, 5}, intersectam-se cinco faces triangulares regulares. As figuras verticiais são pentágonos regulares.

Estes cinco poliedros são, habitualmente, designados como platónicos, pelo facto de Platão os ter discutido no *Timeu*, embora tivesse sido Teeteto (c. 369 a.C.) quem inicialmente os descreveu, conforme refere um escólio sobre o Livro XIII dos *Elementos* (Taylor, 1997, p. 255):

[19] Uma figura verticial dos poliedros das Figuras 49 a 56 e 61 a 63 está representada a vermelho e, nos das Figuras 57 a 60, a amarelo.
[20] As seguintes classes de poliedros, por terem faces poligonais não planares e/ou infinitas, não se enquadram no âmbito desta investigação:
Classe 5: Poliedros regulares finitos com faces poligonais não-planares finitas: dos quais existem nove (e um deles se ilustra na Figura 14);
Classe 6: Poliedros regulares infinitos com faces poligonais não-planares finitas: três famílias infinitas e três poliedros distintos;
Classe 7: Poliedros regulares com faces poligonais em zig-zag: seis famílias infinitas;
Classe 8: Poliedros regulares com faces poligonais helicoidais: cinco poliedros distintos e três famílias infinitas.

> In this book, the thirteenth, the five figures called Platonic are described. However, they are not Plato's. Three of the five are Pythagorean, the cube, the pyramid, and the dodecahedron; the octahedron and the icosahedron belong to Theaetetus. They are called Platonic because Plato mentions them in the Timaeus.[21]

Classe 2

Tesselações planas regulares (Figuras 54 a 56): poliedros regulares infinitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos: na {3, 6}, {4, 4} e {6, 3}.

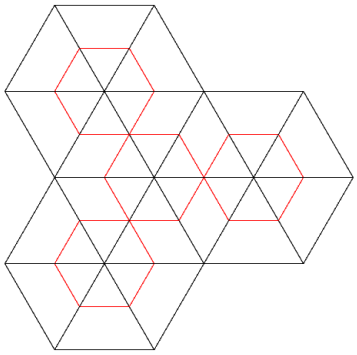


Figura 54 - Em cada vértice da tesselação {3, 6} intersectam-se seis triângulos equiláteros. As figuras verticiais são hexágonos regulares.

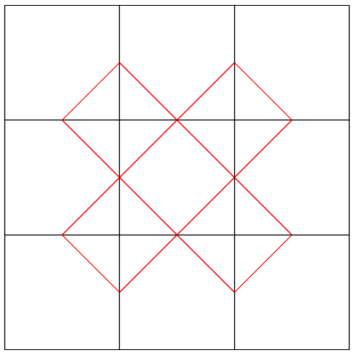


Figura 55 - Em cada vértice da tesselação {4, 4}, intersectam-se quatro quadrados. As figuras verticiais são quadrados.

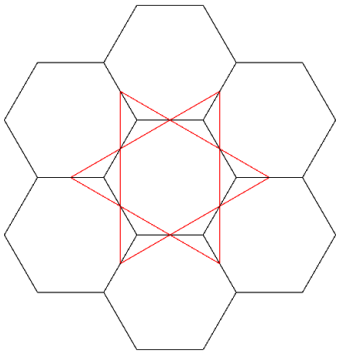


Figura 56 - Em cada vértice da tesselação {6, 3}, intersectam-se três hexágonos regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros.

Classe 3

Poliedros de Kepler-Poinsot (Figura 57 a 60): poliedros regulares finitos em que as faces são poligonais convexas e as figuras verticiais são polígonos estrelados ou vice-versa: pequeno dodecaedro estrelado {5/2, 5}, grande dodecaedro {5, 5/2}, grande dodecaedro estrelado {5/2, 3} e grande icosaedro {3, 5/2}.

Estes quatro poliedros são côncavos e designam-se, como já vimos, por poliedros de Kepler-Poinsot, por se dever a Kepler a descrição do pequeno dodecaedro estrelado e do grande dodecaedro estrelado; e a Poinsot (que desconhecia os estudos prévios de Kepler, de acordo com Cromwell, 1997, p. 251), não apenas a descrição destes e do grande dodecaedro e grande icosaedro), mas também o reconhecimento dos quatro poliedros estrelados como regulares.

[21] Tradução livre: Neste livro, o décimo terceiro, as cinco figuras designadas como platónicas são descritas. No entanto, a sua descoberta não se deve a Platão. Três das cinco são pitagóricas: o cubo, a pirâmide e o dodecaedro; o octaedro e o icosaedro pertencem a Teeteto. Chamam-se platónicas porque Platão as menciona no *Timeu*.

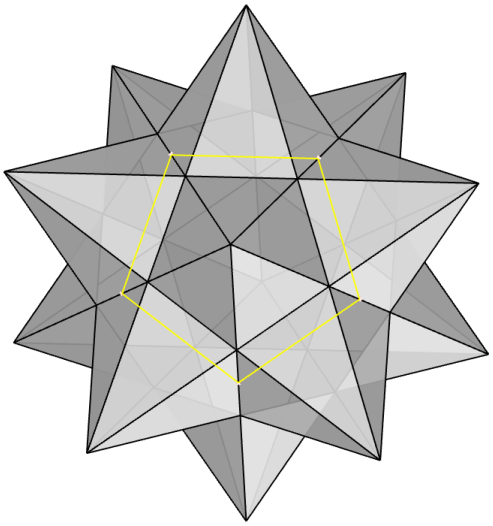


Figura 57 - Em cada vértice do pequeno dodecaedro estrelado {5/2, 5} intersectam-se cinco faces pentagramáticas regulares. As figuras verticiais são pentágonos regulares.

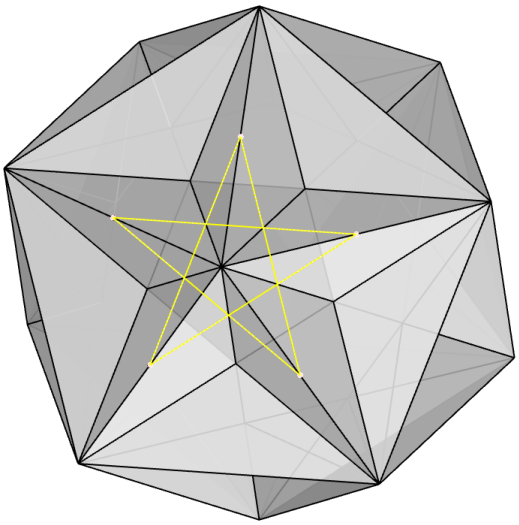


Figura 58 - Em cada vértice do grande dodecaedro {5, 5/2} intersectam-se cinco faces pentagonais regulares. As figuras verticiais são pentagramas regulares.

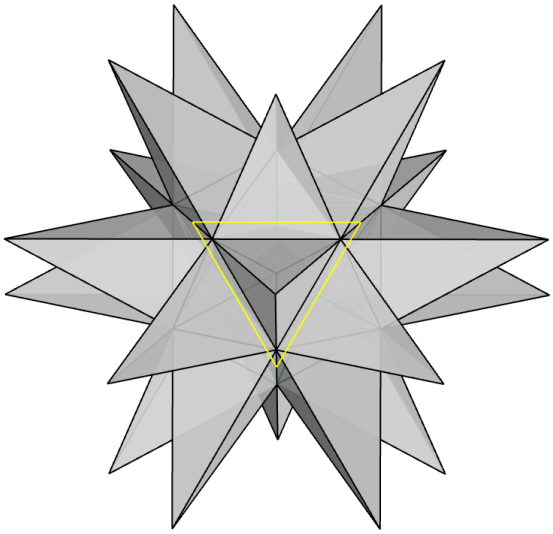


Figura 59 - Em cada vértice do grande dodecaedro estrelado {5/2, 3} intersectam-se três faces pentagramáticas regulares. As figuras verticiais são triângulos equiláteros

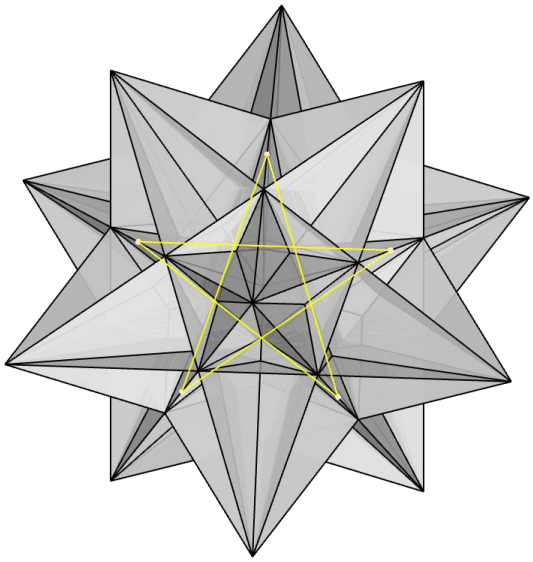


Figura 60 - Em cada vértice do grande icosaedro {3, 5/2} intersectam-se cinco faces triangulares regulares. As figuras verticiais são pentagramas regulares.

Classe 4

Poliedros de Petrie-Coxeter (Figuras 61 a 63): poliedros regulares infinitos[22] que têm faces poligonais convexas e polígonos antiprismáticos como figuras verticiais: {4, 6|4}, {6, 4|4}, e {6, 6|3}. Para a identificação destes poliedros, Coxeter adaptou o símbolo de Schläfli para $\{p, q|n\}$

[22] Na versão portuguesa do livro de Wells, D. (1991) *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* London: Penguin, a entrada relativa a estes poliedros surge traduzida para "colmeias" (Wells, 1998, pp. 51-52). Por considerarmos que esta tradução não é apropriada (pelo facto de o termo *honeycomb* se utilizar para tesselações), designaremos estes poliedros como de Petrie-Coxeter ou poliedros regulares infinitos.

significando que, em torno de cada vértice, existem *q* polígonos com número *p* de lados e espaços vazios (*holes*) com número *n* de lados. Conway, Burgiel e Goodman-Strauss (2008, p. 333) apelidaram-nos, respetivamente, de cubo multiplicado (ou mucubo), octaedro multiplicado (muoctaedro) e tetraedro multiplicado (ou mutetraedro).

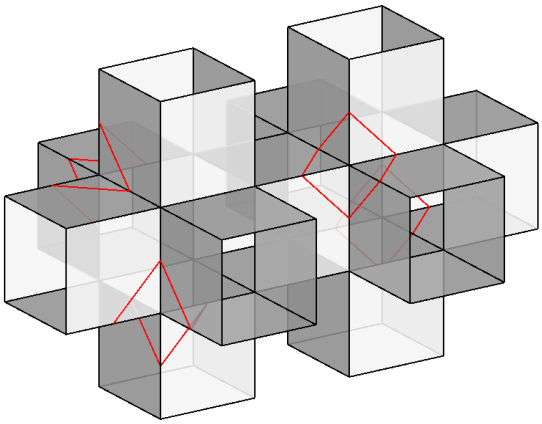


Figura 61 - Em cada vértice do cubo multiplicado {4, 6|4} intersectam-se seis faces quadradas. As figuras verticiais são polígonos de Petrie de um cubo.

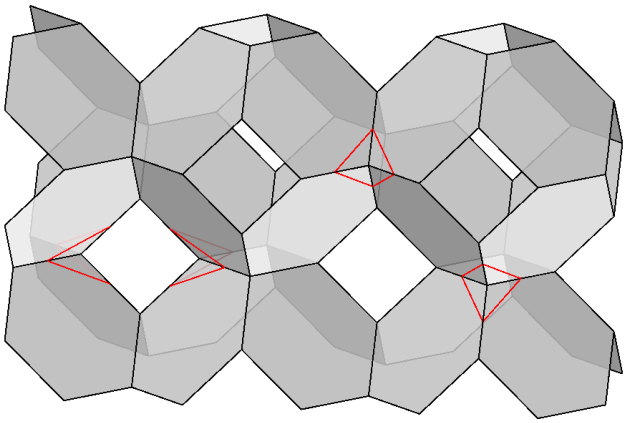


Figura 62 - Em cada vértice do octaedro multiplicado 6, 4|4} intersectam-se quatro faces hexagonais regulares. As figuras verticiais são quadrângulos antiprismáticos.

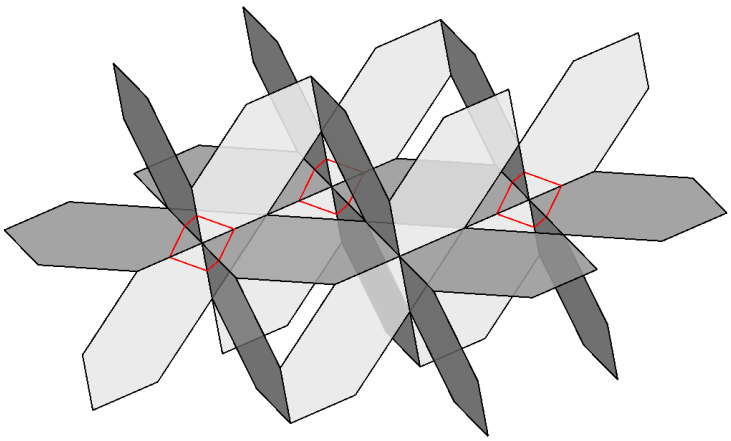


Figura 63 - Em cada vértice do tetraedro multiplicado {6, 6|3} intersectam-se seis faces hexagonais regulares. As figuras verticiais são hexágonos antiprismáticos.

1.2.4. Poliedros quasirregulares

Um poliedro quasirregular é definido por faces regulares de dois tipos diferentes, estando cada uma delas inteiramente rodeada por faces de outro tipo, sendo iguais os ângulos diedrais entre cada par. Admite simetrias que transformam um dado vértice noutro vértice qualquer (Ball e Coxeter, 1987, p. 136). Embora cada aresta resulte da intersecção de duas faces diferentes, em todos os vértices, a disposição das faces é idêntica. Diremos por isso que, tanto as arestas como os vértices dos poliedros quasirregulares são transitivos e que o poliedro é isotoxal e isogonal. Apesar de as faces serem regulares e de tipos distintos, as figuras verticiais são iguais, cíclicas e equiangulares, embora não regulares (Coxeter, 1973, p. 17).

Para os poliedros quasirregulares, adapta-se a simbologia de Schläfli para $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$ ou $r\{p, q\}$, denotando que o poliedro quasirregular é a região interior comum ao poliedro $\{p\}$ e ao recíproco $\{q\}$, ou vice-versa. A configuração dos vértices pode ser indicada através de *(p, q, p, q)*.

Só existem dois poliedros convexos quasirregulares e ambos são arquimedianos: o cuboctaedro $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$ e o icosidodecaedro $\begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$. Pelo facto de a sequência das faces ser, para cada vértice, cíclica - respetivamente, (3, 4 ,3 ,4) e (3, 5, 3, 5) -, as arestas de cada um destes poliedros têm a particularidade de definir um sistema de polígonos equatoriais que se inscrevem em circunferências máximas da circunsfera, projetando-se as suas arestas em geodésicas da esfera (Kappraff, 1990, p. 300). Conforme as Figuras 64 e 65 mostram, as arestas do cuboctaedro definem quatro hexágonos equatoriais; e as arestas do icosidodecaedro, seis decágonos equatoriais.

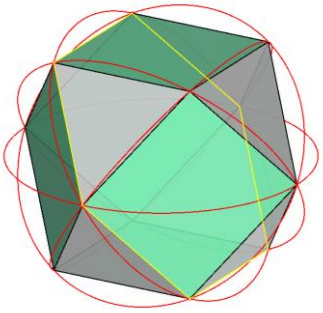


Figura 64 - As arestas do cuboctaedro definem quatro hexágonos equatoriais. dos quais se destaca um.

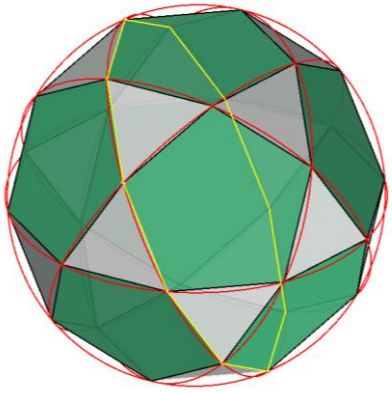


Figura 65 - As arestas do icosidodecaedro definem seis decágonos equatoriais, dos quais se destaca um.

As faces destes poliedros correspondem às figuras verticiais dos convexos regulares que os circunscrevem, coincidindo os seus vértices com os pontos médios das arestas destes últimos:

os vértices do cuboctaedro correspondem aos pontos médios das arestas do cubo ou do octaedro; e os vértices do icosidodecaedro, aos pontos médios das arestas do dodecaedro ou do icosaedro. Ao processo de truncatura de um poliedro pelos pontos médios das arestas atribui-se a designação de retificação (Weisstein, s/d). Qualquer um dos convexos quasirregulares pode ser obtido por truncatura dos convexos regulares que lhes dão origem, nos pontos médios das suas arestas. O único poliedro convexo regular que pode ser obtido por truncatura de outro convexo regular é o octaedro, uma vez que os seus vértices coincidem com os pontos médios das arestas de um tetraedro regular. As arestas do octaedro definem três quadrados inscritos em três circunferências máximas da circunsfera (ver Figura 42) que, de modo semelhante ao cuboctaedro e ao icosidodecaedro, são os polígonos equatoriais do octaedro.

As Figuras 66 e 67 ilustram os côncavos quasirregulares que, de modo idêntico aos convexos, são obtidos por truncatura dos regulares estrelados, nos pontos médios das suas arestas:

- o grande dodecadodecaedro $\left\{{}^{5/2}_{5}\right\}$ da Figura 66 (que Wenninger apelida de dodecadodecaedro, 1975, p. 112), é definido por doze faces pentagramáticas e doze faces pentagonais regulares e obtido por truncatura das arestas do pequeno dodecaedro estrelado ou do grande dodecaedro;
- o grande icosidodecaedro $\left\{{}^{5/2}_{3}\right\}$ da Figura 67, com doze faces pentagramáticas e vinte faces triangulares regulares, é obtido por truncatura das arestas do grande dodecaedro estrelado ou do grande icosaedro (Wenninger, 1975, p. 147).

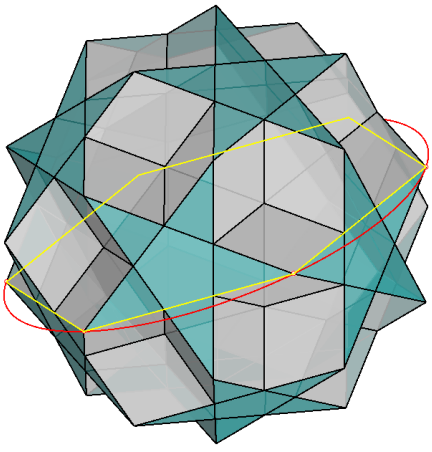


Figura 66 - As arestas do grande dodecadodecaedro definem dez hexágonos regulares equatoriais, dos quais se destaca um.

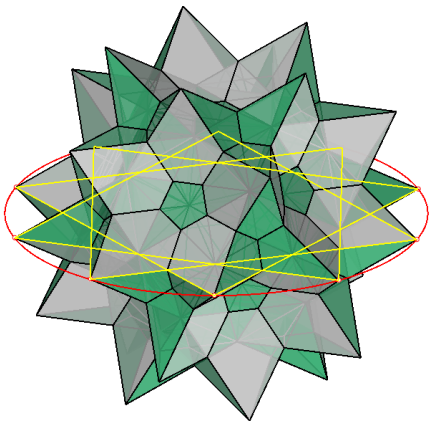


Figura 67 - As arestas do grande icosidodecaedro definem decagramas {10/3} equatoriais, dos quais se destaca um.

As designações para cada um destes poliedros correspondem às adotadas por Cundy e Rollet, (1989, p. 123). Tal como para os convexos quasirregulares, as circunferências máximas que

circunscrevem cada polígono equatorial dividem a circunsfera em dois hemisférios e o poliedro em partes iguais. Os polígonos equatoriais do grande dodecadodecaedro e do grande icosidodecaedro são, respetivamente, hexágonos regulares e decagramas {10/3}.

Coxeter e outros autores (1954, p. 412) assinalam como característica de todos os poliedros quasirregulares, o facto de os seus vértices coincidirem com os vértices de um poliedro convexo regular ou de um poliedro convexo quasirregular. Os vértices dos poliedros côncavos das Figuras 66 e 67, por exemplo, coincidem com os vértices de um icosidodecaedro. Esta particularidade permite-nos concluir que qualquer poliedro quasirregular pode ser determinado por facetamento de um poliedro convexo regular ou quasirregular, conforme veremos mais adiante.

Coxeter (1954, p. 413) destaca que os três poliedros quasirregulares seguintes (cujas designações seguem Wenninger (1975, pp. 106, 135 e 123)) partilham, entre si, os mesmos vinte vértices, igual número de arestas (60) e os vértices das figuras verticiais:

- o pequeno icosidodecaedro ditrigonal (Figura 68) com vinte faces triangulares regulares e doze faces pentagramáticas;
- o grande icosidodecaedro ditrigonal (Figura 69) definido por vinte faces triangulares regulares (que são comuns ao pequeno icosidodecaedro ditrigonal) e doze faces pentagonais regulares, comuns ao dodecadodecaedro ditrigonal;
- e o dodecadodecaedro ditrigonal (Figura 70) composto por doze faces pentagonais regulares e doze pentagramáticas, que são comuns ao pequeno icosidodecaedro ditrigonal.

Os lados menores das figuras verticiais destes três poliedros são, respetivamente, figuras verticiais das faces pentagramáticas, das faces triangulares e das faces pentagonais. Contrariamente aos anteriores quasirregulares, não é possível definir polígonos equatoriais a partir das arestas destes três poliedros, que têm os vértices em comum com o dodecaedro pentagonal.

A designação ditrigonal destes poliedros indica que em cada vértice se intersectam, alternadamente, seis faces de dois tipos diferentes, sendo as figuras verticiais hexágonos irregulares (cíclicos) com ângulos ao centro alternadamente iguais.

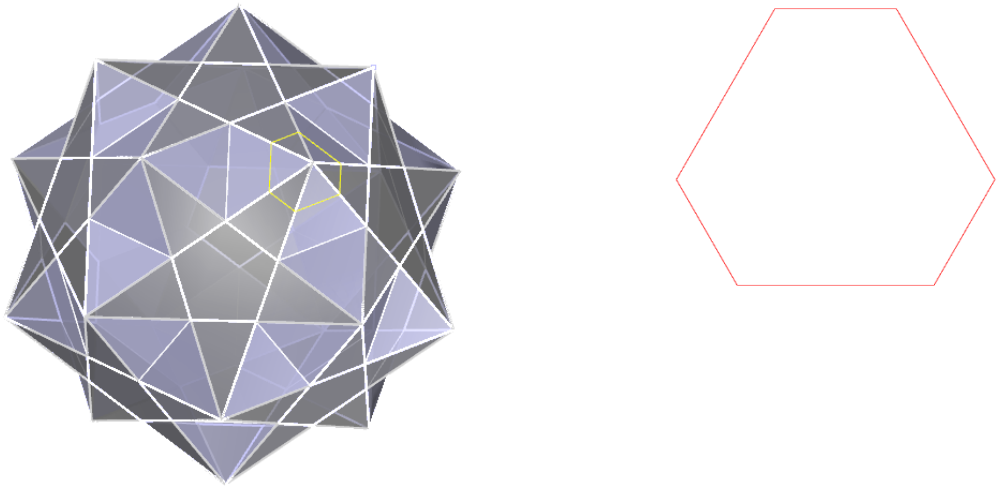


Figura 68 - As faces pentagramáticas do pequeno icosidodecaedro ditrigonal pertencem às faces do dodecaedro pentagonal. O hexágono (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura verticial.

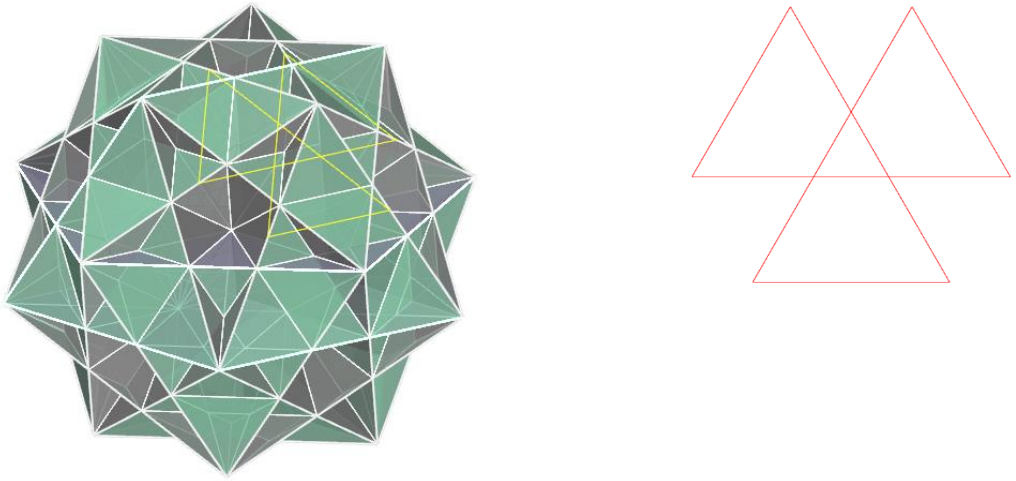


Figura 69 - As faces triangulares e pentagonais do grande icosidodecaedro ditrigonal coincidem, respetivamente, com as faces iguais do pequeno icosidodecaedro ditrigonal e do dodecadodecaedro ditrigonal. O hexágono unicursal (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura verticial.

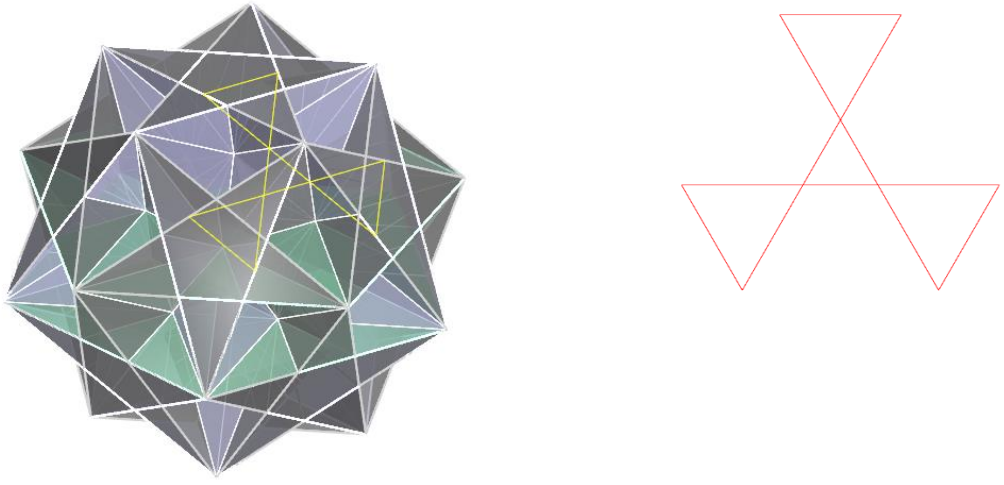


Figura 70 - As faces pentagonais do dodecadodecaedro ditrigonal têm vértices em comum com o pequeno icosidodecaedro ditrigonal. O hexágono unicursal (à esquerda, a amarelo; e à direita, a vermelho) é uma figura verticial.

Os restantes poliedros quasirregulares são hemipoliedros, em que algumas faces diametrais, delimitadas pelos polígonos equatoriais, contêm o centro do poliedro. Cundy e Rollet (1989, p. 195) identificam-nos como poliedros arquimedianos com planos diametrais, pela congruência dos seus vértices e arestas e pelo facto de as suas faces, de dois tipos, serem regulares. Nas Figuras 71 a 79, mostram-se estes nove hemipoliedros quasirregulares, destacando-se as faces diametrais com as respetivas circunferências máximas.

- O tetrahemihexaedro ou tetratriedro (Figura 71) é definido por sete faces regulares, sendo três delas hexagonais e perpendiculares entre si e as outras três, triangulares.
- O octahemioctaedro ou octatetraedro (Figura 72) é definido por quatro faces hexagonais diametrais e oito faces triangulares.
- O cubohemioctaedro ou hexatetraedro (Figura 73) tem em comum com o octahemioctaedro as faces hexagonais diametrais. As restantes seis faces são quadradas.

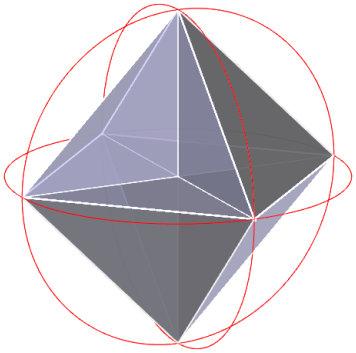


Figura 71 - Os vértices (3, 6, 3, 6) do tetrahemihexaedro ou tetratriedro coincidem com os vértices do octaedro regular.

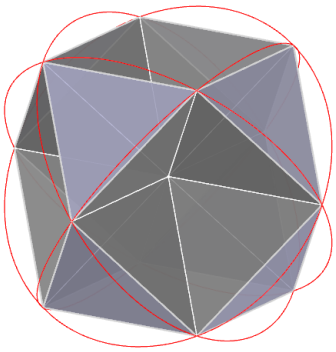


Figura 72 - Os vértices (3, 6, 3, 6) do octahemioctaedro ou octatetraedro coincidem com os vértices do cuboctaedro.

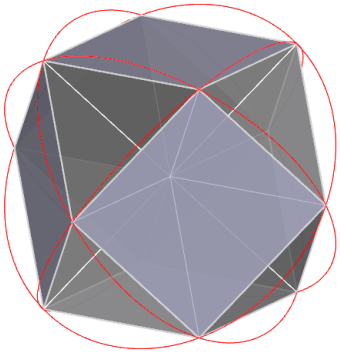


Figura 73 - Os vértices (4, 6, 4, 6) do cubohemioctaedro ou hexatetraedro coincidem com os vértices do cuboctaedro.

- O pequeno icosihemidodecaedro ou icosihexaedro (Figura 74) tem, em comum com o icosidodecaedro, os trinta vértices e as vinte faces triangulares. As doze faces pentagonais do arquimediano, porém, são substituídas por seis decágonos diametrais.
- O pequeno dodecahemidodecaedro ou dodecahexaedro (Figura 75) partilha as faces diametrais com o pequeno icosihemidodecaedro. As restantes doze faces são as pentagonais comuns ao icosidodecaedro.

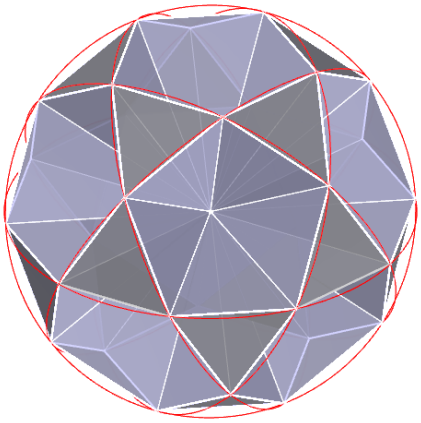


Figura 74 - Os vértices (3, 10, 3, 10) do pequeno icosihemidodecaedro ou icosihexaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro.

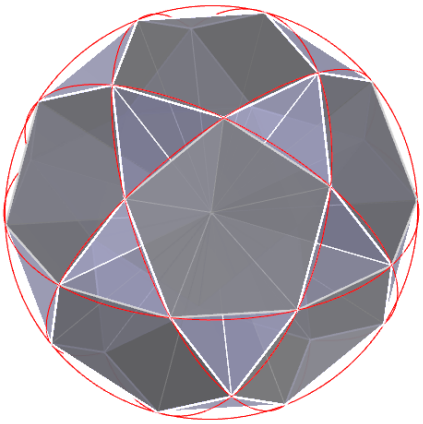


Figura 75 - Os vértices (5, 10, 5, 10) do pequeno dodecahemidodecaedro ou dodecahexaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro.

- O grande dodecahemicosaedro (Figura 76) é definido por doze faces pentagonais regulares e dez faces hexagonais regulares diametrais;
- As dez faces hexagonais do pequeno dodecahemicosaedro (Figura 77) são comuns ao grande dodecahemicosaedro, e as doze faces pentagramáticas pertencem ao plano das faces pentagonais do icosidodecaedro.

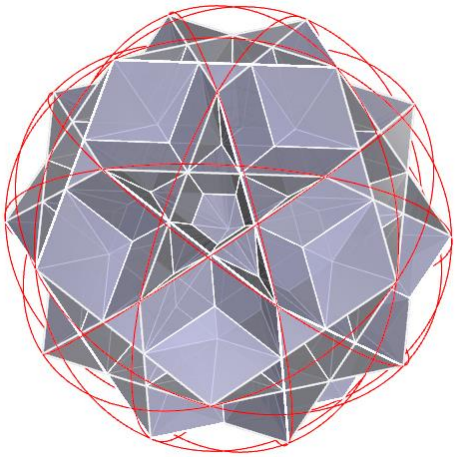


Figura 76 - Os vértices (5, 6, 5, 6) do grande dodecahemicosaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro.

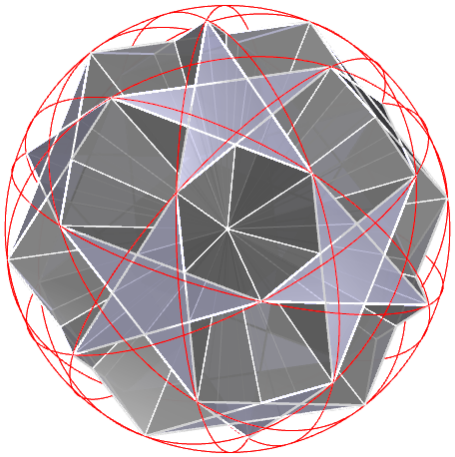


Figura 77 - Os vértices (5/2, 6, 5/2, 6) do pequeno dodecahemicosaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro.

- as doze faces pentagramáticas do grande dodecahemidodecaedro (Figura 78) são comuns ao grande icosidodecaedro da Figura 67. As restantes seis, são decagramas equatoriais;
- As vinte faces triangulares do grande icosihemidodecaedro (Figura 79) são comuns ao grande icosidodecaedro. As restantes seis faces são decagramas equatoriais.

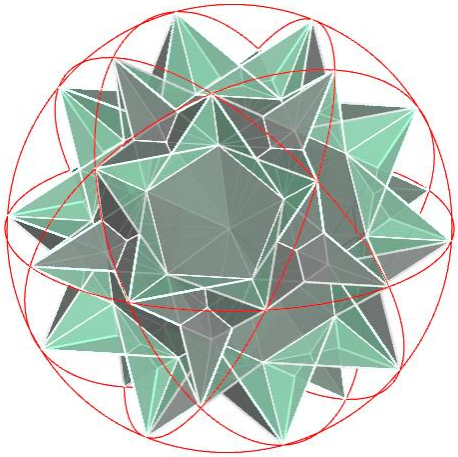


Figura 78 - Os vértices (5/2, 10/3, 5/2, 10/3) do grande dodecahemidodecaedro são comuns ao icosidodecaedro.

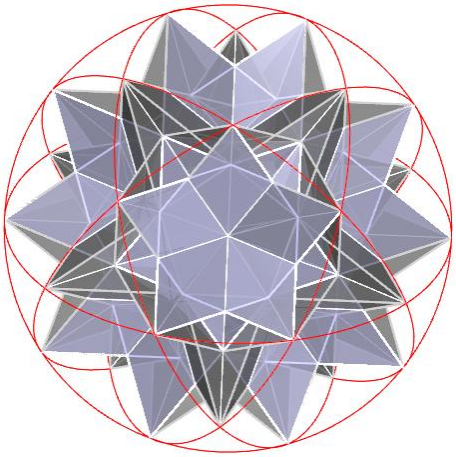


Figura 79 - Os vértices (3, 10/3, 3, 10/3) do grande icosihemidodecaedro coincidem com os vértices do icosidodecaedro.

Estes poliedros são, como os anteriores, isogonais e isotoxais. As designações destes poliedros seguem Wenninger (1975). As que se mencionam em segundo lugar nos cinco primeiros poliedros, são as referidas por Coxeter em 1939.

1.2.5. Poliedros semirregulares

Sob esta designação, consideramos os poliedros isogonais que não são nem regulares, nem quasirregulares e, conforme Kepler (secundado, entre outros, por Johnson (1966, p. 169) e Cundy e Rollet (1989, p. 100)) incluímos as cinco famílias infinitas de prismas e antiprismas de faces regulares, onde se incluem os prismas com bases convexas, os prismas com bases poligramáticas, os antiprismas com bases convexas, os antiprismas com bases poligramáticas e os antiprismas cruzados com bases poligramáticas. Importa acrescentar que o cubo é um caso particular dos prismas e que o tetraedro e octaedro regulares são casos particulares dos antiprismas (respetivamente, digonal e triangular). Nas Figuras 80 e 83 mostram-se o cubo truncado e o dodecaedro truncado, ambos convexos semirregulares; nas Figuras 81 e 82: o grande rombihexaedro e o grande cubicuboctaedro que têm vértices em comum com o cubo truncado; e, nas Figuras 84, 85 e 86, três côncavos semirregulares, com vértices em comum com o dodecaedro truncado.

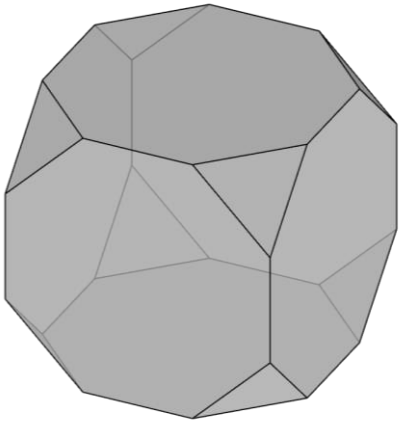


Figura 80 – O cubo truncado é definido por seis faces octogonais e oito faces triangulares regulares.

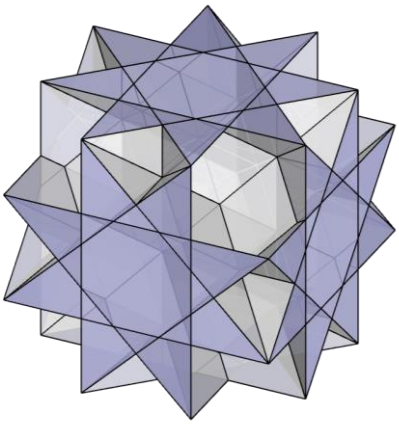


Figura 81 - O grande rombihexaedro é definido por doze faces quadradas e seis octagramáticas 8/3 (que são comuns ao grande cubicuboctaedro).

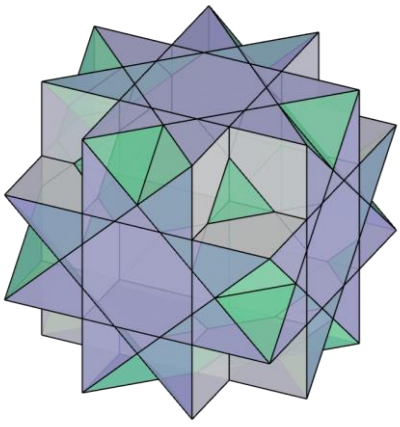


Figura 82 - Em cada vértice do grande cubicuboctaedro intersectam-se duas faces octagramáticas, uma triangular e uma quadrada.

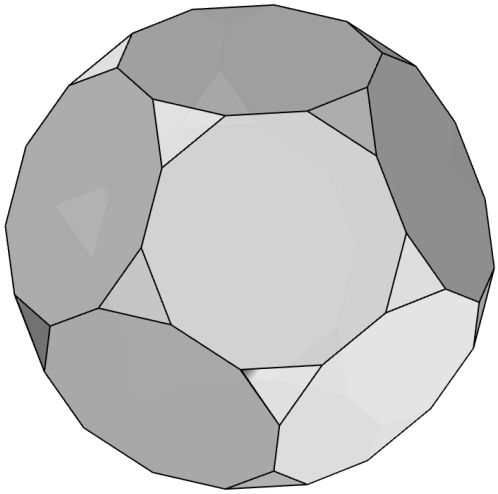


Figura 83 - O dodecaedro truncado é definido por doze faces decagonais e vinte faces triangulares regulares.

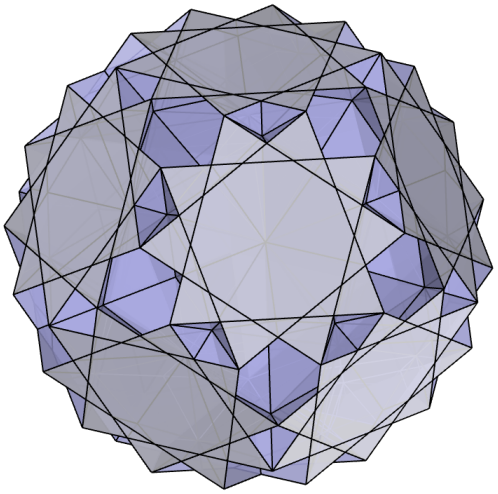


Figura 84 - O grande dodecicosaedro é, em cada vértice, definido por duas faces decagramáticas e duas faces hexagonais.

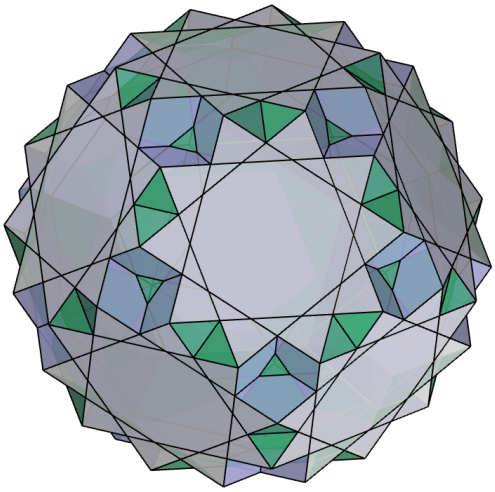


Figura 85 - O grande dodecicosidodecaedro ditrigonal é definido por duas faces decagramáticas 10/3, uma face triangular e uma face pentagonal em cada vértice.

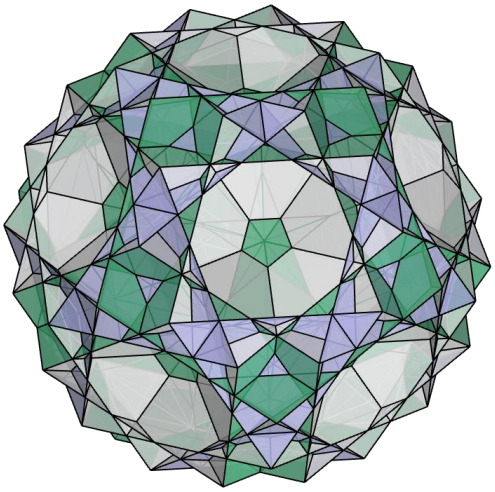


Figura 86 - O grande icosicosidodecaedro é definido por duas faces hexagonais, uma face triangular e uma face pentagonal. em cada vértice.

1.2.6. Poliedros arquimedianos

Por arquimedianos entendemos todos os poliedros convexos definidos por faces regulares de dois ou de três tipos distintos e vértices transitivos (adjetivação esta mais precisa do que congruentes, porque, conforme já referimos, considera o poliedro segundo um critério global). Os arquimedianos são, portanto, todos os poliedros convexos isogonais, em número de treze (sendo dois, quasirregulares e onze, semirregulares). Sob esta designação não são habitualmente considerados os prismas e antiprismas semirregulares, que possuem o grupo de simetria diedral.

Embora o manuscrito em que Arquimedes descreveu os treze poliedros se tenha perdido, Pappus atribuiu-lhe a sua descoberta no Livro V da *Collection*, publicado no séc. IV a.C. (Malkevitch, 1988, p. 83). Coxeter e outros autores (1954, p. 402) relatam que os arquimedianos foram redescobertos por: Piero della Francesca, que descreveu cinco arquimedianos no tratado *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* de 1480; Luca Pacioli, que traduziu as descobertas de della Francesca para o italiano, e acrescentou o rombicuboctaedro (Figura 87), que designou por icosihexaedro no compêndio *Divina Proportione* publicado em 1509; Albrecht Dürer, que ilustrou a planificação de sete arquimedianos; Lorenz Stoer e a obra *Geometria et Perspectiva* de 1567 (Figura 88); Wentzel Jamnitzer e o magnífico *Perspectiva Corporum Regularium* de 1568 (Figura 89), entre outros.

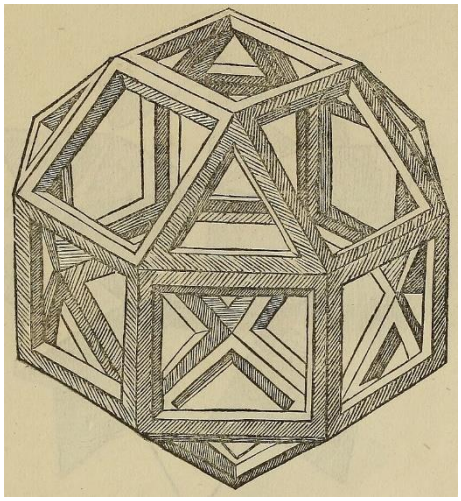


Figura 87 - Desenho do rombicuboctaedro, por Leonardo de Vinci in *De Divina Proportione* (1509) de Luca Pacioli.

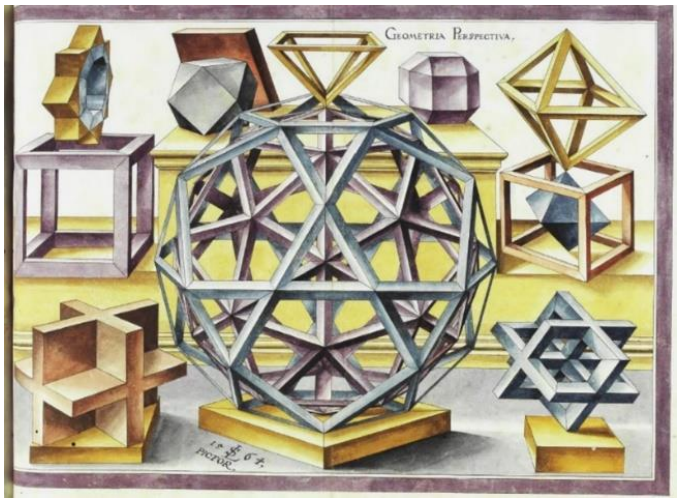


Figura 88 - Prancha 332 do manuscrito *Geometria et Perspectiva: Corpora Regulata et Irregulata* de Lorenz Stöer (Verlag, 2006).

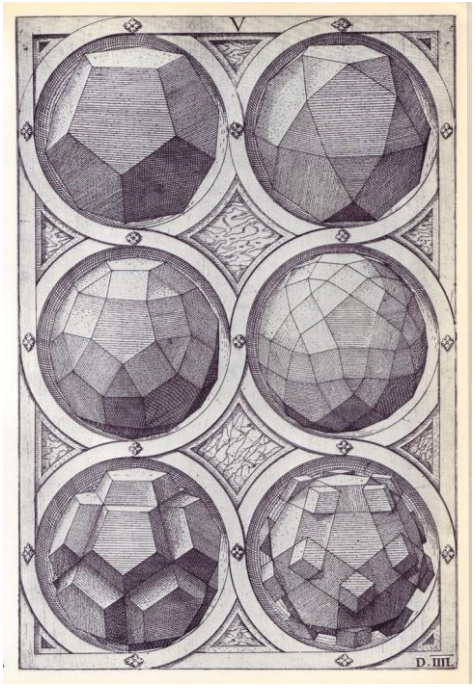


Figura 89 - "*Page D4, dodecahedral variants; from* Perspectiva Corporum Regulariu*m, Nuremberg, 1568*" (Wade, 2012, p. 124).

A categoria completa foi (re)descoberta por Kepler em 1619, que descreveu os treze arquimedianos na Proposição XXVIII da obra *Harmonices Mundi* (Figura 90) e lhes atribuiu os nomes a partir de cuja tradução para o inglês os conhecemos.

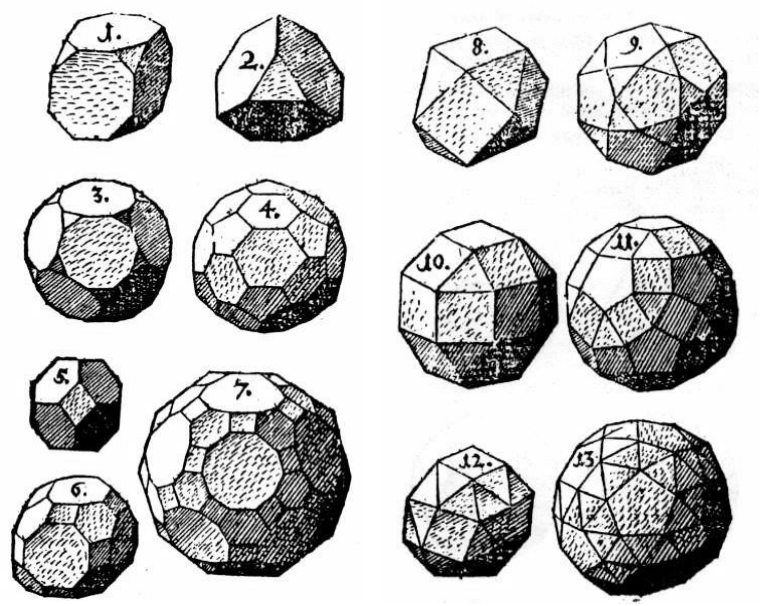


Figura 90 - Ilustração de Kepler com os treze arquimedianos (Hart, 1998).

À semelhança dos poliedros regulares, todos os arquimedianos admitem uma circunsfera, que contém todos os vértices do poliedro e uma midesfera, que contém os pontos médios de todas

as arestas (Pugh, 1976, p. 23). Não existe, porém, uma esfera que seja tangente a todas as faces. Se o arquimediano tiver faces de dois tipos diferentes, admite duas esferas concêntricas, tangentes às faces de cada tipo - no caso do cuboctaedro da Figura 91, por exemplo, existe uma esfera que é tangente às faces quadradas e outra esfera concêntrica, que é tangente às faces triangulares. Se o arquimediano tiver faces de três tipos, como no caso do rombicosidodecaedro da Figura 92, existirão três esferas concêntricas, distintas, tangentes às faces de cada tipo.

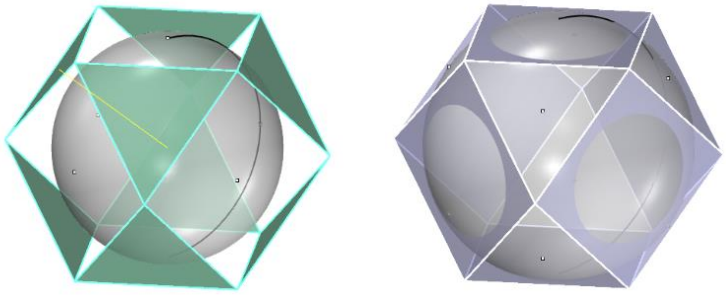


Figura 91 - A esfera da esquerda é tangente às faces quadradas do cuboctaedro.
A esfera da direita é tangente a todas as faces triangulares, mas não às faces quadradas
do cuboctaedro, que são intersectadas segundo circunferências menores da esfera em causa.

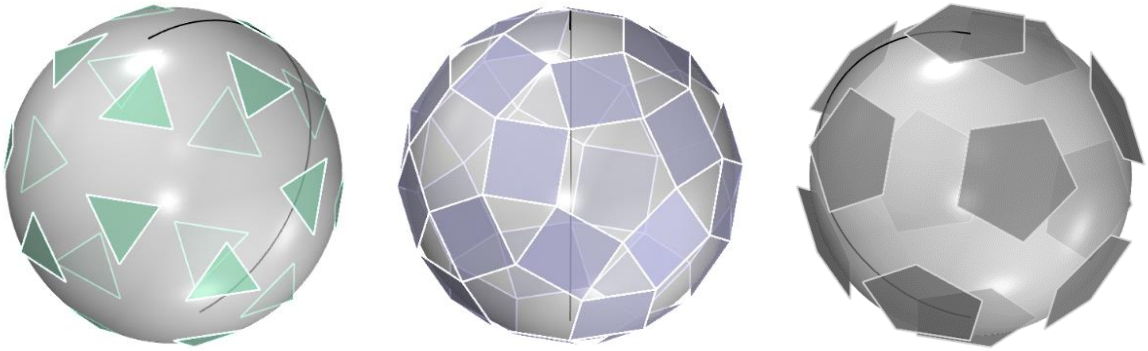


Figura 92 - O rombicosidodecaedro admite três esferas concêntricas tangentes a cada tipo de faces:
uma esfera maior, que contém os centros das faces triangulares; uma esfera intermédia, que contém
os centros das faces quadradas, e uma esfera menor, que contém os centros das faces pentagonais.

Relativamente às designações dos arquimedianos, Wenninger denota que o prefixo rombi- significa que, ao poliedro original, foram adicionadas faces quadradas suplementares, enquanto que o prefixo “snub-” (tradução para o inglês da palavra latina *Simus*) indica que lhe foram adicionadas faces triangulares (1975, p. 9). Em português, a palavra *snub* foi traduzida como *achatado*, pelo facto de a expressão *snub nose* corresponder a *nariz achatado* (Veloso, 1998, p. 248). Embora o termo *achatado* seja discutível, por não descrever completamente as operações que originam estes poliedros, na falta de melhor, será o que utilizaremos.

As figuras verticiais dos arquimedianos são polígonos iguais cíclicos (Coxeter e outros autores, 1954, p. 404), mas não regulares, nomeadamente: retângulos, no caso dos quasirregulares (retângulos $\sqrt{2}$, no caso do cuboctaedro e retângulos de ouro, no caso do icosidodecaedro); triângulos isósceles, nos cinco arquimedianos obtidos por truncatura simples dos platónicos; trapézios, nos dois arquimedianos com o prefixo rombi-; triângulos escalenos, nos dois rombitruncados; e pentágonos irregulares, nos arquimedianos achatados.

Contrariamente aos convexos regulares, os ângulos diedrais dos arquimedianos semirregulares não são todos iguais. O ângulo diedral entre um determinado par de faces é idêntico ao dos pares semelhantes, mas distinto dos pares em que se intersectem faces de tipos diferentes. No caso dos poliedros convexos e côncavos quasirregulares, porém, todos os ângulos diedrais são idênticos, dado que em cada par se intersectam sempre os mesmos tipos de faces.

Pugh (1976, p. 25) assinala que todos os arquimedianos são inscritíveis num tetraedro regular, e que é, precisamente, esta particularidade que os distingue, tanto dos prismas e antiprismas semirregulares, como do pseudo-rombicuboctaedro da Figura 27. Conforme Cundy e Rollet (1989, p. 100) assinalam, seis arquimedianos tanto podem ser inscritos no cubo como no octaedro, enquanto que os restantes seis tanto podem ser inscritos no dodecaedro, como no icosaedro. Estes dois grupos de arquimedianos estabelecem, respetivamente, a "*silvern sequence*" e a "*golden sequence*" segundo Weissbach e Martini (2002, p. 123).

Nas Figuras 94 a 106, ilustra-se cada arquimediano e inclui-se, a vermelho, o tetraedro regular que envolve cada um. As designações em primeiro lugar (que não estão entre parêntesis) reportam-se às que adotámos e são utilizadas por Wenninger (1975, pp. 20-32). Para cada arquimediano, incluem-se ainda as informações identificadas nas seguintes alíneas e distribuídas de acordo com a Figura 93:

a. Imagem do arquimediano (as faces destacadas a vermelho estão contidas nas faces do tetraedro regular que envolve o arquimediano);
b. Notação que adapta a simbologia de Schläfli, para indicar, em prefixo, se o arquimediano é uma versão *t* (truncada), *r* (rombi) ou *s* (*snub*) de outro poliedro;
c. Designação do arquimediano;
d. Descrição dos vértices (segundo Ball e Coxeter, 1987, p. 136).
e. Amplitude do ângulo entre pares de faces (segundo Cundy e Rollett, 1989, pp. 101-114);
f. Número e configuração das faces.

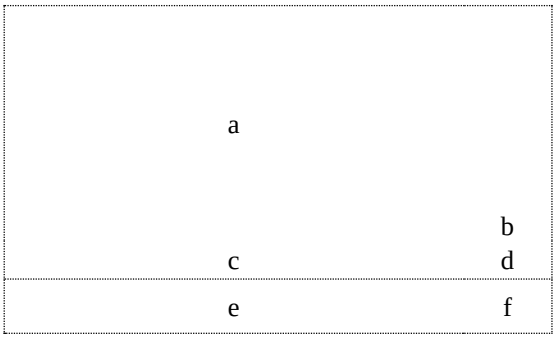


Figura 93 - Esquema de apresentação
de cada um dos poliedros arquimedianos.

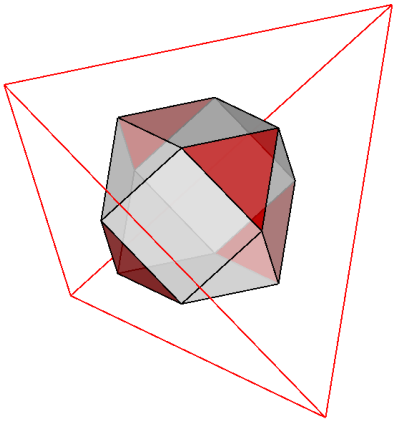


Figura 94 - Cuboctaedro.

$\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$

$(3.4)^2$

$\angle\ \{3\}\cdot\{4\} = 125º16'$

8 {3}
6 {4}

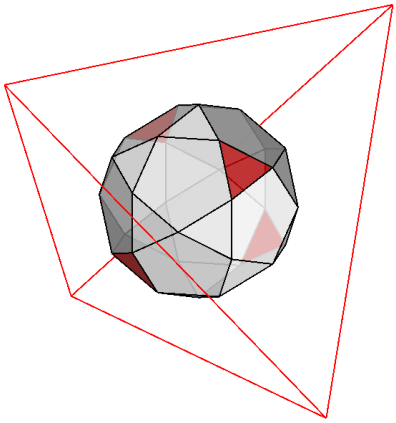


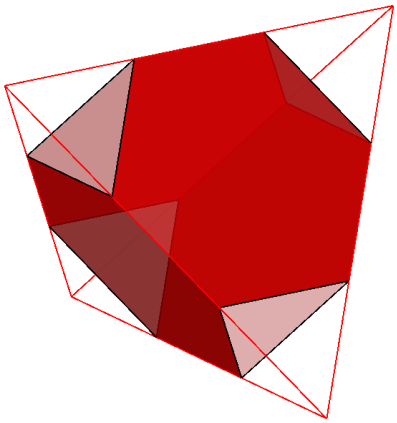
Figura 95 - Icosidodecaedro.

$\begin{Bmatrix}3\\5\end{Bmatrix}$

$(3.5)^2$

$\angle\ \{3\}\cdot\{4\} = 142º37'$

20 {3}
12 {5}



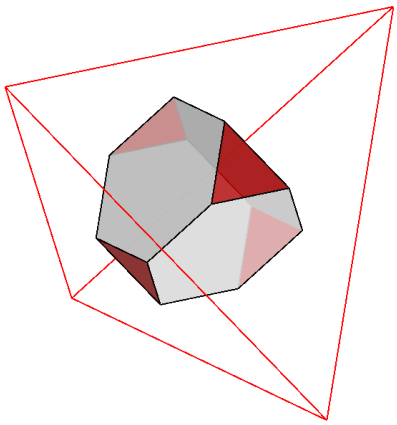


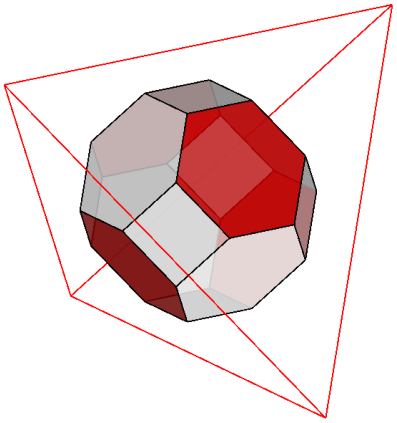
Figura 96 - Tetraedro truncado.

$t\{3,3\}$

3.6^2

$\angle\ \{3\}\cdot\{6\} = 109º28'$
$\angle\ \{6\}\cdot\{6\} = 70º32'$

4 {3}
4 {6}



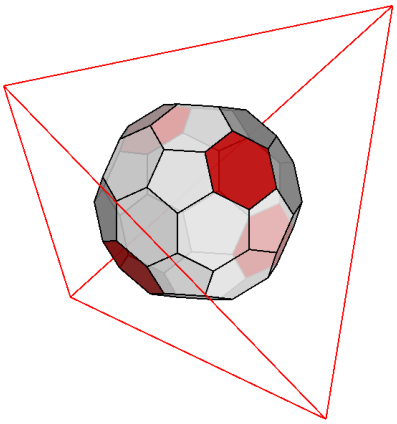
$t\{3,4\}$

Figura 97 - Octaedro truncado.

4.6^2

∠ {4}·{6} = 125º16’
∠ {6}·{6} = 109º28’

6 {4}
8 {6}



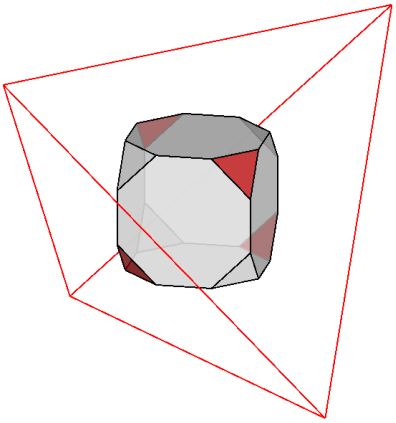
$t\{3,5\}$

Figura 98 - Icosaedro truncado.

5.6^2

∠ {5}·{6} = 142º37’
∠ {6}·{6} = 138º11’

12 {5}
20 {6}



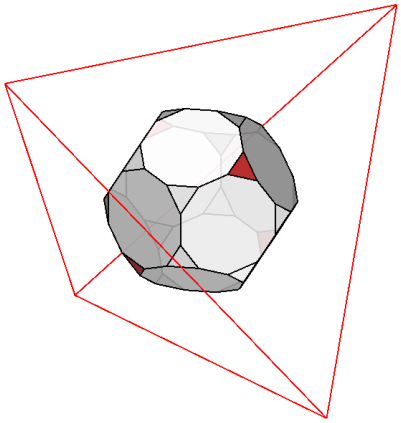
$t\{4,3\}$

Figura 99 - Cubo truncado.

3.8^2

∠ {3}·{8} = 125º16’
∠ {8}·{8} = 90º00’

8 {3}
6 {8}



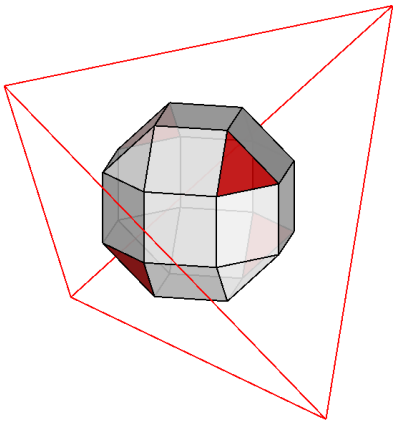
$t\{5,3\}$

Figura 100 - Dodecaedro truncado.

3.10^2

∠ {3}·{10} = 142º37’
∠ {10}·{10} = 116º34’

20 {3}
12 {10}



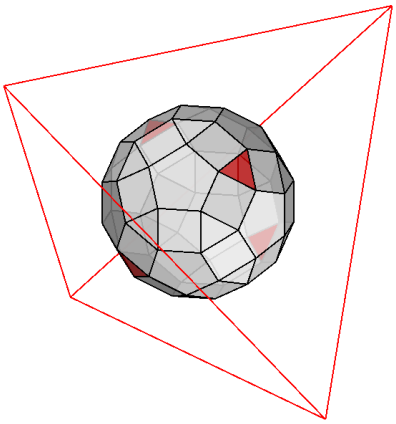
$r\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$

Figura 101 - Rombicuboctaedro (pequeno rombicuboctaedro).

3.4^3

∠ {3}·{4} = 144º44’
∠ {4}·{4} = 135º00’

8 {3}
6 {4}
12 {4}



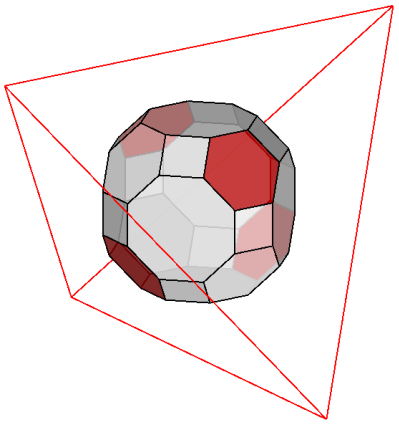
$r\begin{Bmatrix}3\\5\end{Bmatrix}$

Figura 102 - Rombicosidodecaedro (pequeno rombicosidodecaedro).

3.4.5.4

∠ {3}·{4} = 159º06’
∠ {4}·{5} = 148º17’

20 {3}
30 {4}
12 {5}

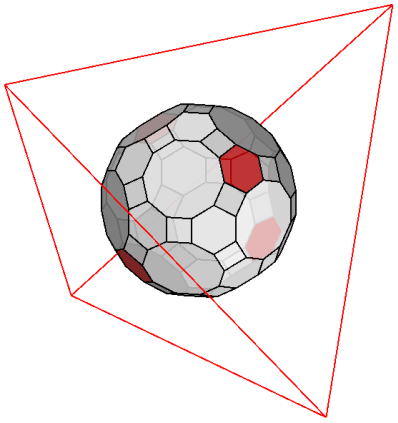


$t\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$

Figura 103 - Cuboctaedro rombitruncado (grande rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado)

4.6.8

∠ {4}·{8} = 135º00’ 12 {4}
∠ {6}·{8} = 125º16’ 8 {6}
∠ {4}·{6} = 144º44’ 6 {8}

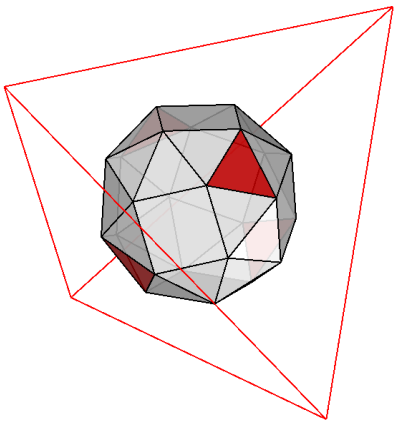


$t\begin{Bmatrix}3\\5\end{Bmatrix}$

Figura 104 - Icosidodecaedro rombitruncado (grande rombicosidodecaedro ou icosidodecaedro truncado)

4.6.10

∠ {4}·{10} = 148º17’ 30 {4}
∠ {6}·{10} = 142º37’ 20 {6}
∠ {4}·{6} = 159º06’ 12 {10}

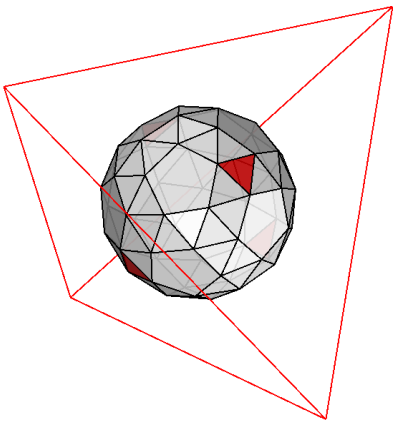


$s\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$

Figura 105 - Cubo achatado ou octaedro achatado (*cubus simus*, segundo Kepler)

$3^4.4$

∠ {4}·{3} = 142º59’ 32 {3}
∠ {3}·{3} = 153º14’ 6 {4}



$s\begin{Bmatrix}3\\5\end{Bmatrix}$

Figura 106 - Dodecaedro achatado ou icosaedro achatado (*dodecahedron simum*, segundo Kepler)

$3^4.5$

∠ {5}·{3} = 152º56’ 80 {3}
∠ {3}·{3} = 164º11’ 12 {4}

1.2.7. Sólidos de Johnson

Além dos cinco convexos regulares, dos treze arquimedianos e das famílias infinitas de prismas e antiprismas semirregulares, existe um número finito de poliedros convexos com faces regulares, que foram descritos por Norman Johnson no artigo *Convex Solids with Regular Faces* publicado em 1966. Johnson analisou todas as possibilidades que existiriam para os poliedros convexos não uniformes de faces regulares, e conjeturou que só existiriam 92, aos quais atribuiu nomes, notações e números. Johnson, Branko Grünbaum e Victor Zalgaller viriam a comprovar esta conjetura, tendo a sua versão final sido publicada em 1969 (Malkevitch, 1988, p. 89). Estes poliedros são genericamente designados pelo nome de *Sólidos de Johnson* ou, menos comummente, *Sólidos de Johnson-Zalgaller* (Araki, Horiyama e Uehara, 2015).

Conforme demonstrado por Grünbaum e Johnson (1965), as únicas configurações faciais que os poliedros convexos de faces regulares, além dos prismas e antiprismas, podem ter são: triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal, octogonal e decagonal. Johnson demonstrou ainda que, em cada vértice, apenas se poderão intersectar três, quatro ou cinco faces regulares, definindo, respetivamente, vértices trigonais, tetragonais ou pentagonais (trivalentes, tetravalentes ou pentavalentes, segundo a terminologia de Johnson (1966, p. 169)). Para o estudo sistemático de todas as possibilidades, Johnson classificou como *elementares* os poliedros convexos que não podem ser seccionados por um plano que contenha os seus vértices e defina poliedros convexos menores de faces regulares (Johnson, 1966, p. 174). De acordo com esta definição, são elementares:

- três convexos regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro;
- nove arquimedianos: o tetraedro truncado, o cubo truncado, o octaedro truncado, o dodecaedro truncado, o icosaedro truncado, o cuboctaedro rombitruncado, o icosidodecaedro rombitruncado, o cubo achatado e o dodecaedro achatado;
- todos os prismas e antiprismas semirregulares, com a exceção do octaedro, que pode ser dividido em duas pirâmides quadradas J1;
- nove dos oitenta e três poliedros de Johnson que são obtidos a partir dos poliedros uniformes: a pirâmide quadrada J1, a pirâmide pentagonal J2, a cúpula triangular J3, a cúpula quadrada J4, a cúpula pentagonal J5, a rotunda pentagonal J6, o icosaedro tridiminuído J63, o rombicosidodecaedro parabidiminuído J80 e o rombicosidodecaedro tridiminuído J83;

- os últimos oito poliedros de Johnson: o disfenóide achatado J84, o antiprisma quadrado achatado J85, a esfenocorona J86, a esfenocorona aumentada J87, a esfenomegacorona J88, a ebesfenomegacorona J89, o biesfenocíngulo J90, a bilunabirrotunda J91 e a ebesfenorrotunda triangular J92.

Johnson denota ainda (1966, p. 174) que cinco dos poliedros que descreveu são deltaedros: a bipirâmide triangular J12, a bipirâmide pentagonal J13, a bipirâmide quadrada giroalongada J17, o prisma triangular triaumentado J51 e o disfenóide achatado J84.

A maior parte dos *Sólidos de Johnson* são obtidos a partir dos primeiros (pirâmides, cúpulas e rotundas) ou por modificação dos platónicos, dos arquimedianos e de determinados prismas e antiprismas. Todos se caracterizam por: serem convexos, as faces regulares serem de um ou mais tipos diferentes; todas as arestas terem igual dimensão; os vértices não serem transitivos (os vértices do pseudo-rombicuboctaedro ou girobicúpula quadrada alongada J37 são, conforme vimos na Secção 1.2.1. do Capítulo I, congruentes, mas não transitivos); e de nenhum deles possuir grupos de simetria dos convexos regulares. A terminologia que Johnson adotou explica (1966, pp. 173-174), de forma bastante clara, as operações que são efetuadas para obter cada poliedro:

- uma cúpula é um cuboctaedro que foi seccionado por um hexágono equatorial, enquanto que uma rotunda é um icosidodecaedro seccionado por um decágono equatorial;
- uma pirâmide, cúpula ou rotunda, pode ser *alongada* através da justaposição de um prisma com as bases adequadas. Se lhe for adicionado um antiprisma, diz-se *giroalongada*;
- da união de duas pirâmides, de duas cúpulas ou de duas rotundas, resulta uma *bipirâmide*, uma *bicúpula* ou uma *birrotunda*, respetivamente;
- se, nestes dois últimos casos, uma das bases corresponder à projeção ortogonal da outra base, o poliedro resultante chamar-se-á, respetivamente, *ortobicúpula* ou *ortobirrotunda*; se, pelo contrário, uma das bases estiver rodada em relação à outra (como num antiprisma), a bicúpula e a birrotunda passarão a designar-se por *girobicúpula* e *girobirrotunda.* Se qualquer uma delas for alongada por um prisma ou por um antiprisma, será adjetivada de *alongada* ou *giroalongada*, respetivamente;
- os poliedros a que são adicionados outros poliedros designam-se por *aumentados*; se lhes for subtraída alguma porção, designam-se por *diminuídos*;

- os prefixos *bi-* ou *tri-* são acrescentados à designação do poliedro se lhe for adicionado, subtraído ou rodado (*twisted*, no original) algum (ou alguns) elemento(s);
- se existirem duas formas diferentes de adicionar ou rodar elementos, ou de subtrair porções ao poliedro, utiliza-se o prefixo *para-* se as duas partes estiverem opostas uma a outra; ou *meta-*, se não for o caso.

Ainda segundo Johnson (1966, p. 175), a seguinte terminologia é utilizada para explicar a designação dos Sólidos J86 a J92, que não são obtidos a partir dos poliedros uniformes:

- uma *luna* é composta por dois triângulos anexados a lados opostos de um quadrado;
- o prefixo *esfeno-* utiliza-se quando existe um composto de duas lunas adjacentes;
- o prefixo *disfeno-* reporta-se a uma composição de dois esfenos, enquanto que *ebesfeno-* se refere a uma composição de três *lunas*.
- o sufixo *-corona* refere-se a um complexo de 8 triângulos parecido com uma coroa, e *-megacorona*, a uma composição idêntica, mas de 12 triângulos;
- o sufixo *-cíngulo* reporta-se a uma cintura de 12 triângulos[23].
- as três lunas do ebesfeno só são adjacentes na ebesfenomegacorona J89;
- na ebesfenorrotunda triangular J92, cada par de lunas tem em comum apenas um vértice.

Entre as Figuras 107 e 198, ilustram-se todos os *Sólidos de Johnson* e respetiva descrição.

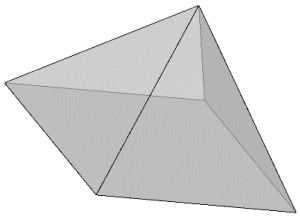


Figura 107 - Pirâmide quadrada (J1)

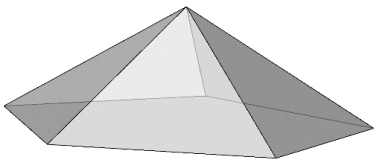


Figura 108 - Pirâmide pentagonal (J2)

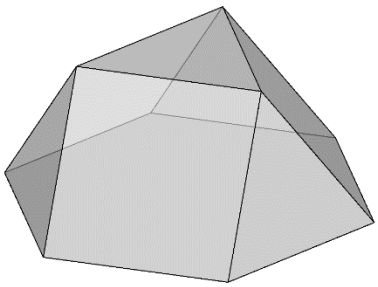


Figura 109 - Cúpula triangular (J3)

Resulta da secção de um octaedro por um quadrado equatorial.				Resulta da secção de um icosaedro.				Resulta da secção de um cuboctaedro por um hexágono equatorial.					
{3}	{4}			{3}	{5}			{3}	{4}	{6}			
4	1			5	1			4	3	1			
5 faces		8 arestas	5 vértices	6 faces		10 arestas	6 vértices	8 faces		15 arestas		9 vértices	

[23] Adaptado a partir de: "If we define a *lune* as a complex consisting of two triangles attached to opposite sides of a square, the prefix *spheno-* refers to a wedgelike complex formed by two adjacent lunes. The prefix *dispheno-* denotes two such complexes, while *hebespheno-* indicates a blunter complex of two lunes separated by a third lune. The suffix *-corona* refers to a crownlike complex of 8 triangles, and *-megacorona*, to a larger such complex of 12 triangles. The suffix *-cingulum* indicates a belt of 12 triangles." (Johnson, 1966, p. 175).

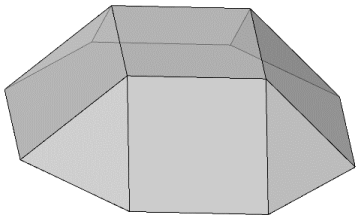


Figura 110 - Cúpula quadrada (J4)

Resulta da secção de um rombicuboctaedro.

{3}	{4}	{8}
4	5	1

10 faces | 20 arestas | 12 vértices

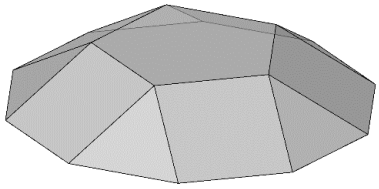


Figura 111 - Cúpula pentagonal (J5)

Resulta da secção de um rombicosidodecaedro.

{3}	{4}	{5}	{12}
5	5	1	1

12 faces | 25 arestas | 15 vértices

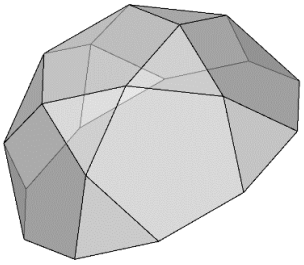


Figura 112 - Rotunda pentagonal (J6)

Resulta da secção de um icosidodecaedro por um dodecágono equatorial.

{3}	{5}	{12}
10	6	1

17 faces | 35 arestas | 20 vértices

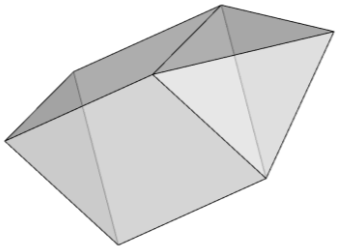


Figura 113 - Pirâmide triangular alongada (J7)

Resulta da união de um tetraedro e um prisma triangular.

{3}	{4}
4	3

7 faces | 12 arestas | 7 vértices

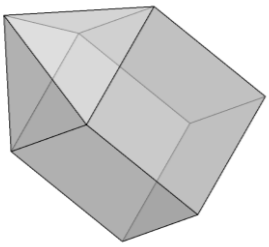


Figura 114 - Pirâmide quadrada alongada (J8)

Resulta da união de um cubo e uma pirâmide quadrada J1.

{3}	{4}
4	5

9 faces | 16 arestas | 9 vértices

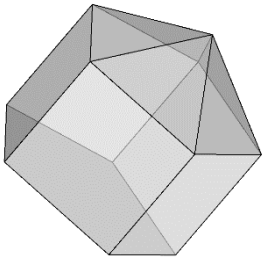


Figura 115 - Pirâmide pentagonal alongada (J9)

Resulta da união de um prisma pentagonal e uma pirâmide pentagonal J2.

{3}	{4}	{5}
5	5	1

11 faces | 20 arestas | 11 vértices

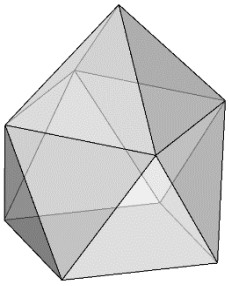


Figura 116 - Pirâmide quadrada giroalongada (J10)

Resulta da união de um antiprisma quadrado e uma pirâmide quadrada J2.

{3}	{4}
12	1

13 faces | 20 arestas | 9 vértices

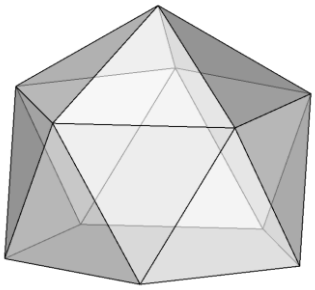


Figura 117 - Pirâmide pentagonal giroalongada (J11)

Resulta da união de um antiprisma pentagonal e uma pirâmide pentagonal J2.[24]

{3}	{4}
15	1

16 faces | 25 arestas | 11 vértices

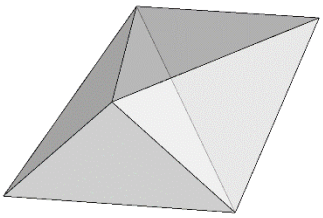


Figura 118 - Bipirâmide triangular (J12)

Resulta da união de dois tetraedros. É um deltaedro.

{3}
6

6 faces | 9 arestas | 5 vértices

[24] Corresponde a um icosaedro a que foi retirada uma pirâmide pentagonal, podendo designar-se também como icosaedro diminuído.

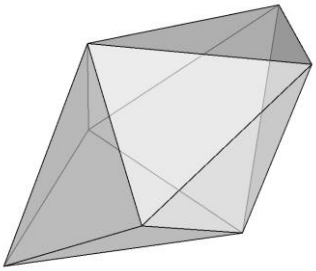


Figura 119 - Bipirâmide pentagonal (J13)

Resulta da união de duas pirâmides pentagonais J2. É um deltaedro.

{3}	
10	

10 faces | 15 arestas | 7 vértices

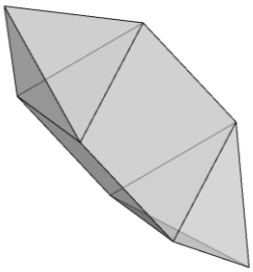


Figura 120 - Bipirâmide triangular alongada (J14)

Resulta da união de dois tetraedros e um prisma triangular.

{3}	{4}
6	3

9 faces | 15 arestas | 8 vértices

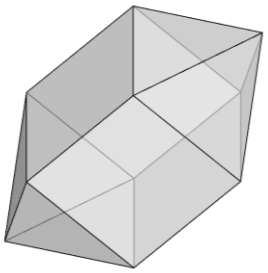


Figura 121 - Bipirâmide quadrada alongada (J15)

Resulta da união de um cubo e duas pirâmides quadradas J1.

{3}	{4}
8	4

12 faces | 20 arestas | 10 vértices

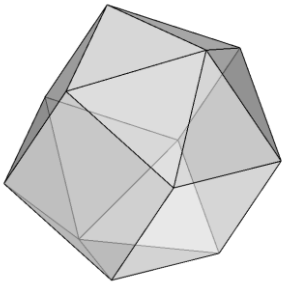


Figura 122 - Bipirâmide pentagonal alongada (J16)

Resulta da união de um prisma pentagonal e duas pirâmides pentagonais J2.

{3}	{4}
10	5

15 faces | 25 arestas | 12 vértices

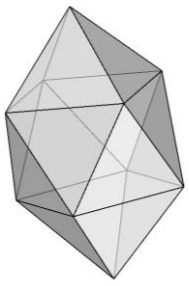


Figura 123 - Bipiramide quadrada giroalongada (J17)

Resulta da união de um antiprisma quadrado e duas pirâmides quadradas J1. É um deltaedro.

{3}
16

16 faces | 24 arestas | 10 vértices

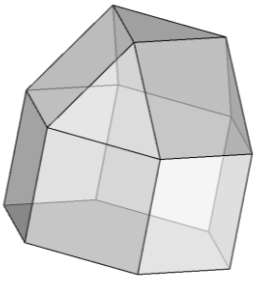


Figura 124 - Cúpula triangular alongada (J18)

Resulta da união de um prisma hexagonal e uma cúpula triangular J3.

{3}	{4}	{6}
4	9	1

14 faces | 27 arestas | 15 vértices

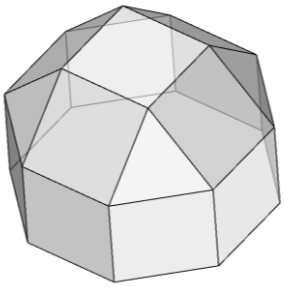


Figura 125 - Cúpula quadrada alongada (J19)

Resulta da união de um prisma octogonal e uma cúpula quadrada J4.

{3}	{4}	{8}
4	13	1

18 faces | 36 arestas | 20 vértices

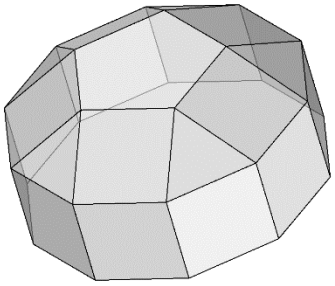


Figura 126 - Cúpula pentagonal alongada (J20)

Resulta da união de um prisma decagonal e uma cúpula pentagonal J5

{3}	{4}	{5}	{12}
5	15	1	1

22 faces | 45 arestas | 25 vértices

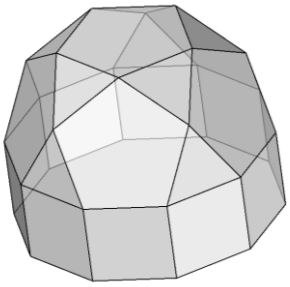


Figura 127 - Rotunda pentagonal alongada (J21)

Resulta da união de um prisma decagonal e uma rotunda pentagonal J6.

{3}	{4}	{5}	{12}
10	10	6	1

27 faces | 55 arestas | 30 vértices

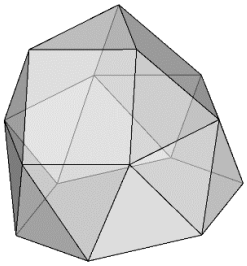


Figura 128 - Cúpula triangular giroalongada (J22)

Resulta da união de um antiprisma hexagonal e uma cúpula triangular J3.

{3}	{4}	{6}
16	3	1

20 faces | 33 arestas | 15 vértices

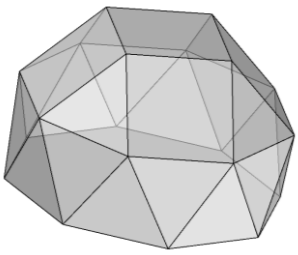


Figura 129 - Cúpula quadrada giroalongada (J23)

Resulta da união de um antiprisma octogonal e uma cúpula quadrada J4.

{3}	{4}	{8}
20	5	1

26 faces | 44 arestas | 20 vértices

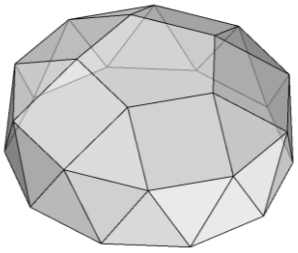


Figura 130 - Cúpula pentagonal giroalongada (J24)

Resulta da união de um antiprisma decagonal e uma cúpula pentagonal J5.

{3}	{4}	{5}	{12}
25	5	1	1

32 faces | 55 arestas | 25 vértices

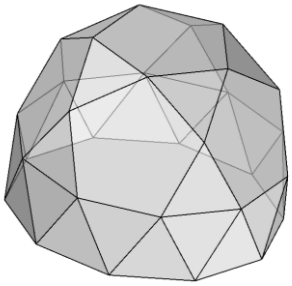


Figura 131 - Rotunda pentagonal giroalongada (J25)

Resulta da união de um antiprisma decagonal e uma rotunda pentagonal J6.

{3}	{5}	{12}
30	6	1

37 faces | 65 arestas | 30 vértices

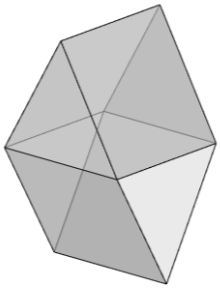


Figura 132 - Girobiprisma (J26)

Resulta da união de dois prismas triangulares.[25]

{3}	{4}
4	4

8 faces | 14 arestas | 8 vértices

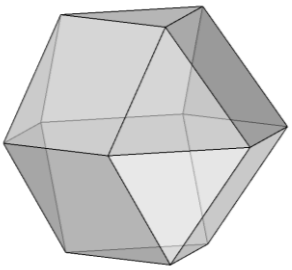


Figura 133 - Ortobicúpula triangular (J27)

Resulta da união de duas cúpulas triangulares J3.[26]

{3}	{4}
8	6

14 faces | 24 arestas | 12 vértices

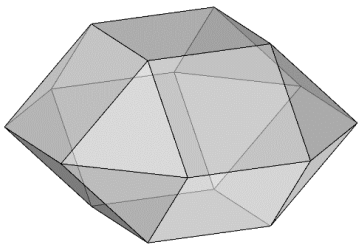


Figura 134 - Ortobicúpula quadrada (J28)

Resulta da união de duas cúpulas quadradas J4.

{3}	{4}
8	10

18 faces | 32 arestas | 16 vértices

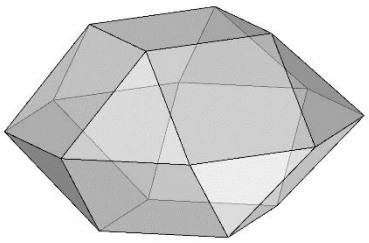


Figura 135 - Girobicúpula quadrada (J29)

Resulta da união de duas cúpulas quadradas J4 (versão girada de J28).

{3}	{4}
8	10

18 faces | 32 arestas | 16 vértices

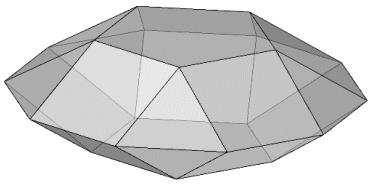


Figura 136 - Ortobicúpula pentagonal (J30)

Resulta da união de duas cúpulas pentagonais J5.

{3}	{4}	{5}
10	10	2

22 faces | 40 arestas | 20 vértices

[25] Johnson designou o único girobiprisma convexo como *Gyrobifastisium (fastigium* significa ápice).
[26] Rodando uma das cúpulas triangulares, obtemos um cuboctaedro que, segundo a terminologia de Johnson, é uma girobicúpula triangular.

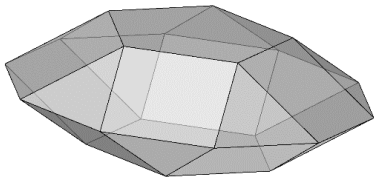


Figura 137 - Girobicúpula pentagonal (J31)

Resulta da união de duas cúpulas pentagonais J5 (versão girada de J30).

{3}	{4}	{5}
10	10	2

22 faces | 40 arestas | 20 vértices

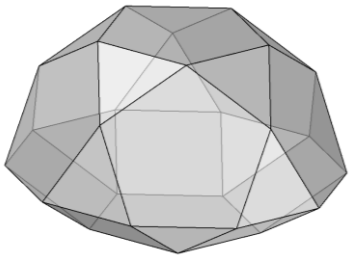


Figura 138 - Ortocúpularrotunda pentagonal (J32)

Resulta da união de uma cúpula pentagonal J5 e uma rotunda pentagonal J6.

{3}	{4}	{5}
15	5	7

27 faces | 50 arestas | 25 vértices

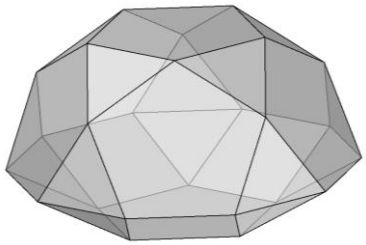


Figura 139 - Girocúpularrotunda pentagonal (J33)

Resulta da união de uma cúpula pentagonal J5 e uma rotunda pentagonal J6 (versão girada de J32).

{3}	{4}	{5}
15	5	7

27 faces | 50 arestas | 25 vértices

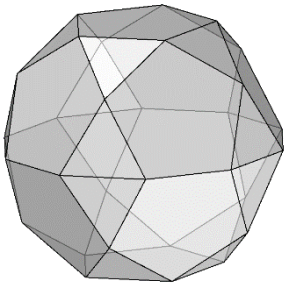


Figura 140 - Ortobirrotunda pentagonal (J34)

Resulta da união de duas rotundas pentagonais (J6).[27]

{3}	{5}
20	12

32 faces | 30 arestas | 60 vértices

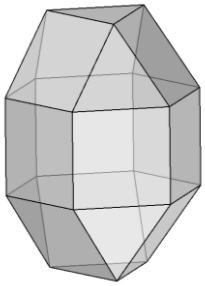


Figura 141 - Ortobicúpula triangular alongada (J35)

Resulta da união de um prisma hexagonal e duas cúpulas triangulares J3 (versão alongada de J27).

{3}	{4}
8	12

20 faces | 36 arestas | 18 vértices

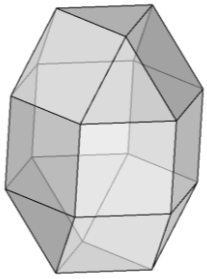


Figura 142 - Girobicúpula triangular alongada (J36)

Resulta da união de um prisma hexagonal e duas cúpulas J3 (versão alongada do cuboctaedro).

{3}	{4}
8	12

20 faces | 36 arestas | 18 vértices

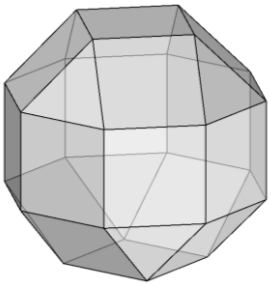


Figura 143 - Girobicúpula quadrada alongada (J37)

Resulta da união de um prisma octogonal e duas cúpulas quadradas J4 (versão alongada de J29).

{3}	{4}
8	18

26 faces | 48 arestas | 24 vértices

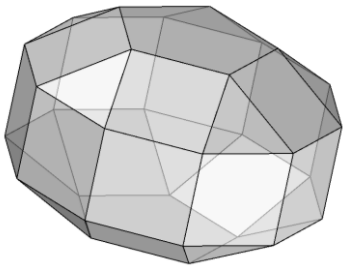


Figura 144 - Ortobicúpula pentagonal alongada (J38)

Resulta da união de um prisma decagonal e duas cúpulas pentagonais J5 (versão alongada de J30).

{3}	{4}	{5}	{3}
10	20	2	10

32 faces | 60 arestas | 30 vértices

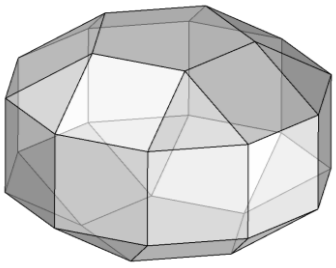


Figura 145 - Girobicúpula pentagonal alongada (J39)

Resulta da união de um prisma decagonal e duas cúpulas pentagonais J5 (versão alongada de J31).

{3}	{4}	{5}
10	20	2

32 faces | 60 arestas | 30 vértices

[27] Rodando uma das rotundas, obtermos um icosidodecaedro que, segundo a terminologia de Johnson, é uma girobirrotunda pentagonal.

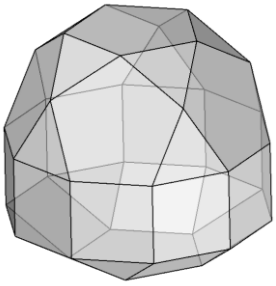


Figura 146 - Ortocúpularrotunda pentagonal alongada (J40)

Resulta da união de um prisma decagonal, uma cúpula pentagonal J5 e uma rotunda pentagonal J6 (versão alongada de J32).

{3}	{4}	{5}
15	15	7

37 faces | 70 arestas | 35 vértices

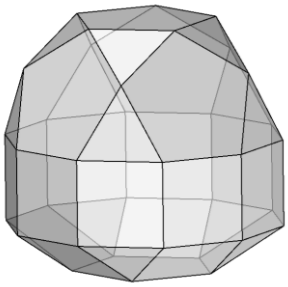


Figura 147 - Girocúpularrotunda pentagonal alongada (J41)

Resulta da união de um prisma decagonal, uma cúpula pentagonal J5 e uma rotunda pentagonal J6 (versão alongada de J33).

{3}	{4}	{5}
15	15	7

37 faces | 70 arestas | 35 vértices

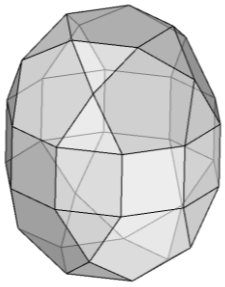


Figura 148 - Ortobirrotunda pentagonal alongada (J42)

Resulta da união de um prisma decagonal e duas rotundas pentagonais J6 (versão alongada de J34).

{3}	{4}	{5}
20	10	12

42 faces | 80 arestas | 40 vértices

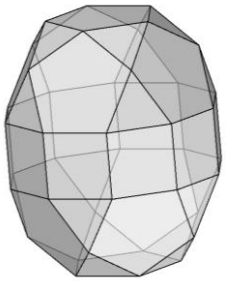


Figura 149 - Girobirrotunda pentagonal alongada (J43)

Resulta da união de um prisma decagonal e duas rotundas pentagonais J6 (versão alongada do icosidodecaedro).

{3}	{4}	{5}
20	10	12

42 faces | 80 arestas | 40 vértices

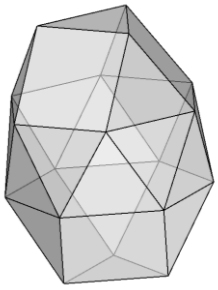


Figura 150 - Bicúpula triangular giroalongada (J44)

Resulta da união de um antiprisma hexagonal e duas cúpulas triangulares J3.

{3}	{4}
20	6

26 faces | 42 arestas | 18 vértices

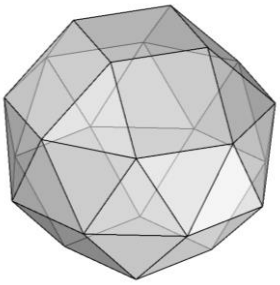


Figura 151 - Bicúpula quadrada giroalongada (J45)

Resulta da união de um antiprisma octogonal e duas cúpulas quadradas J4.

{3}	{4}
24	10

34 faces | 56 arestas | 24 vértices

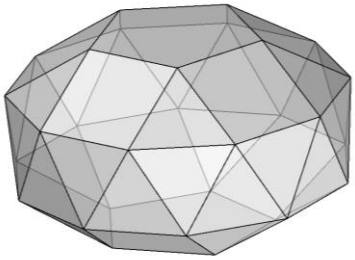


Figura 152 - Bicúpula pentagonal giroalongada (J46)

Resulta da união de um antiprisma decagonal e duas cúpulas pentagonais J5.

{3}	{4}	{5}
30	10	2

42 faces | 70 arestas | 30 vértices

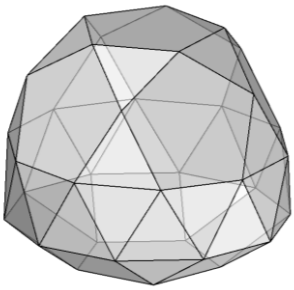


Figura 153 - Cúpularrotunda pentagonal giroalongada (J47)

Resulta da união de um antiprisma Decagonal, uma cúpula pentagonal J5 e uma rotunda pentagonal J6.

{3}	{4}	{5}
35	5	7

47 faces | 80 arestas | 35 vértices

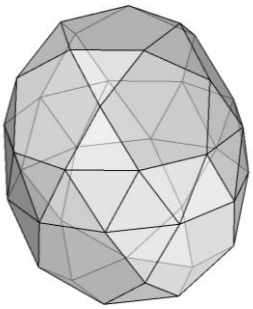


Figura 154 - Birrotunda pentagonal giroalongada (J48)

Resulta da união de um antiprisma decagonal e duas rotundas pentagonais J6

{3}	{5}
40	12

52 faces | 90 arestas | 40 vértices

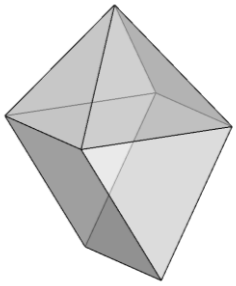


Figura 155 - Prisma triangular aumentado (J49)

Resulta da união de um prisma triangular e uma pirâmide quadrada J1.

{3}	{4}	
6	2	

8 faces | 13 arestas | 7 vértices

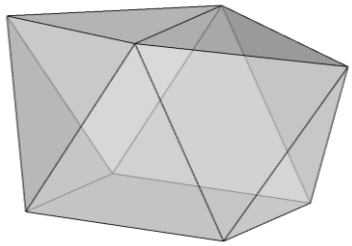


Figura 156 - Prisma triangular biaumentado (J50)

Resulta da união de um prisma triangular e duas pirâmides quadradas J1.

{3}	{4}	
10	1	

11 faces | 17 arestas | 8 vértices

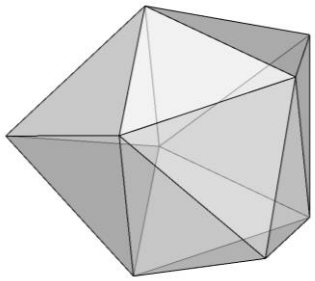


Figura 157 - Prisma triangular triaumentado (J51)

Resulta da união de um prisma triangular e três pirâmides quadradas J1. É um deltaedro.

{3}
14

14 faces | 21 arestas | 9 vértices

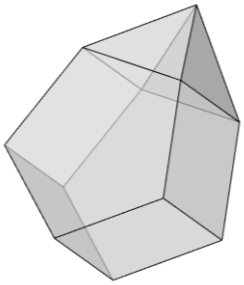


Figura 158 - Prisma pentagonal aumentado (J52)

Resulta da união de um prisma pentagonal e uma pirâmide quadrada J1.

{3}	{4}	{5}	
4	4	2	

10 faces | 19 arestas | 11 vértices

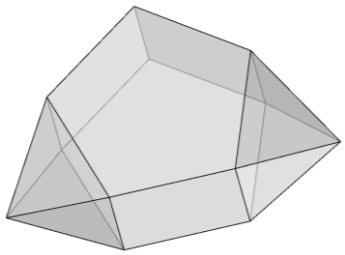


Figura 159 - Prisma pentagonal biaumentado (J53)

Resulta da união de um prisma pentagonal e duas pirâmides quadradas J1.

{3}	{4}	{5}	
8	3	2	

13 faces | 23 arestas | 12 vértices

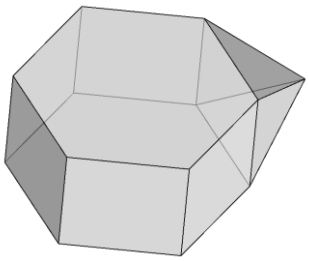


Figura 160 - Prisma hexagonal aumentado (J54)

Resulta da união de um prisma hexagonal e uma pirâmide quadrada J1.

{3}	{4}	{6}
4	5	2

11 faces | 22 arestas | 13 vértices

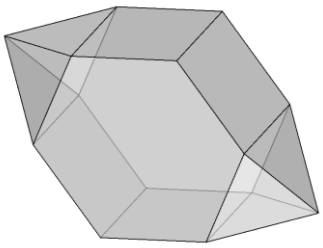


Figura 161 - Prisma hexagonal parabiaumentado (J55)

Resulta da união de um prisma hexagonal e duas pirâmides quadradas J1, justapostas a faces laterais opostas do prisma.

{3}	{4}	{6}
8	4	2

14 faces | 26 arestas | 14 vértices

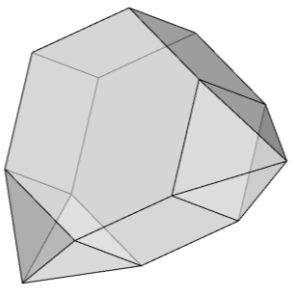


Figura 162 - Prisma hexagonal metabiaumentado (J56)

Resulta da união de um prisma hexagonal e duas pirâmides quadradas J1 justapostas a faces laterais não opostas do prisma.

{3}	{4}	{6}
8	4	2

14 faces | 26 arestas | 14 vértices

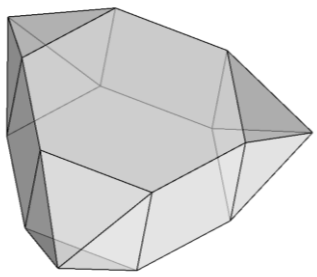


Figura 163 - Prisma hexagonal triaumentado (J57)

Resulta da união de um prisma hexagonal e três pirâmides quadradas J1.

{3}	{4}	{6}
12	3	2

17 faces | 30 arestas | 15 vértices

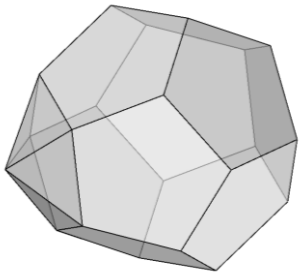


Figura 164 - Dodecaedro aumentado (J58)

Resulta da união de um dodecaedro e uma pirâmide pentagonal J2.

{3}	{5}
5	11

16 faces | 21 arestas | 35 vértices

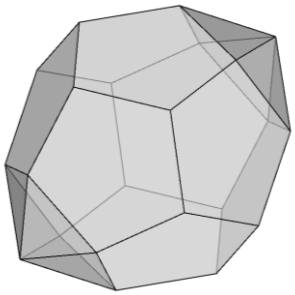


Figura 165 - Dodecaedro parabiaumentado (J59)

Resulta da união de duas pirâmides pentagonais J2 justapostas a duas faces opostas de um dodecaedro.

{3}	{5}
10	10

20 faces | 40 arestas | 22 vértices

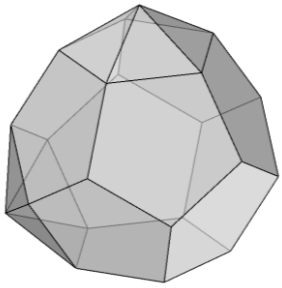


Figura 166 - Dodecaedro metabiaumentado (J60)

Resulta da união de duas pirâmides pentagonais J2 justapostas a duas faces não opostas de um dodecaedro.

{3}	{5}
10	10

20 faces | 42 arestas | 22 vértices

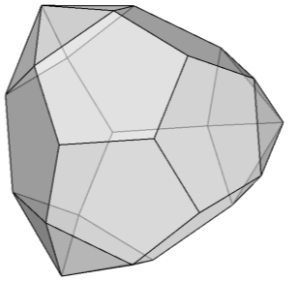


Figura 167 - Dodecaedro triaumentado (J61)

Resulta da união de um dodecaedro e três pirâmides pentagonais J2.

{3}	{5}
15	9

24 faces | 45 arestas | 23 vértices

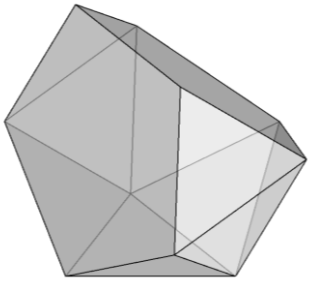


Figura 168 - Icosaedro metabidiminuído (J62)

Resulta da subtração de um icosaedro, por planos que lhe subtraíram duas pirâmides pentagonais J2 de bases não paralelas.

{3}	{5}
10	2

12 faces | 20 arestas | 10 vértices

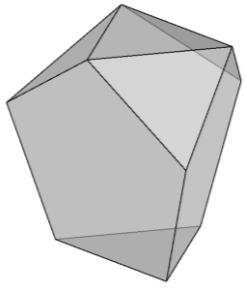


Figura 169 - Icosaedro tridiminuído (J63)

Resulta da secção de um icosaedro, por planos que lhe subtraíram três pirâmides pentagonais J2.

{3}	{5}
5	3

8 faces | 15 arestas | 9 vértices

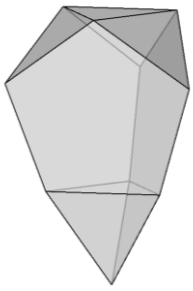


Figura 170 - Icosaedro tridiminuído aumentado (J64)

Resulta da união de um icosaedro tridiminuído J63 e um tetraedro.

{3}	{5}
7	3

10 faces | 18 arestas | 10 vértices

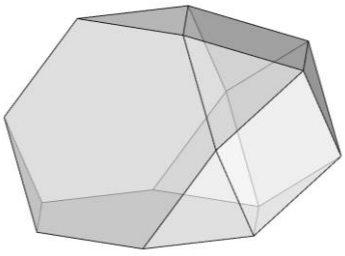


Figura 171 - Tetraedro truncado aumentado (J65)

Resulta da união de um tetraedro truncado e uma cúpula triangular J3.

{3}	{4}	{5}	{6}	{8}	{12}
8	3		3		

14 faces | 27 arestas | 15 vértices

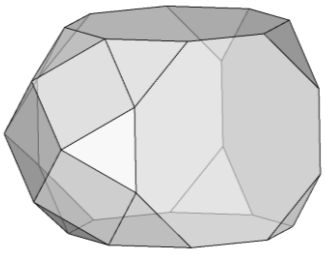


Figura 172 - Cubo truncado aumentado (J66)

Resulta da união de um cubo truncado e uma cúpula quadrada J4.

{3}	{4}	{5}	{6}	{8}	{12}
12	5			5	

22 faces | 48 arestas | 28 vértices

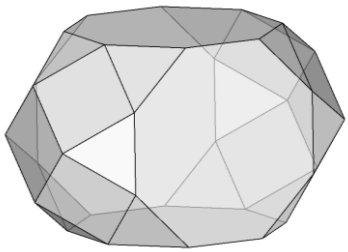


Figura 173 - Cubo truncado biaumentado (J67)

Resulta da união de um cubo truncado e duas cúpulas quadradas J4.

{3}	{4}	{8}
16	10	4

32 faces | 60 arestas | 30 vértices

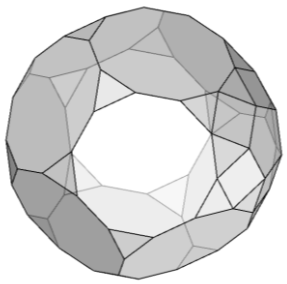


Figura 174 - Dodecaedro truncado aumentado (J68)

Resulta da união de um dodecaedro truncado e uma cúpula pentagonal J5.

{3}	{4}	{5}	{12}
25	5	1	11

42 faces | 105 arestas | 65 vértices

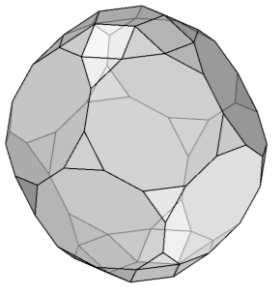


Figura 175 - Dodecaedro truncado parabiaumentado (J69)

Resulta da união de duas cúpulas pentagonais J5 justapostas a faces opostas de um dodecaedro truncado.

{3}	{4}	{5}	{12}
30	10	2	10

52 faces | 120 arestas | 70 vértices

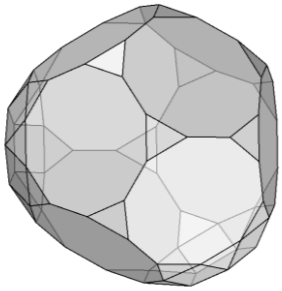


Figura 176 - Dodecaedro truncado metabiaumentado (J70)

Resulta da união de duas cúpulas pentagonais J5 justapostas a faces não opostas de um dodecaedro truncado.

{3}	{4}	{5}	{12}
30	10	2	10

52 faces | 120 arestas | 70 vértices

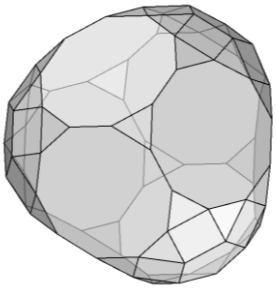


Figura 177 - Dodecaedro truncado triaumentado (J71)

Resulta da união de um dodecaedro truncado e três cúpulas pentagonais J5.

{3}	{4}	{5}	{12}
35	15	3	9

62 faces | 135 arestas | 75 vértices

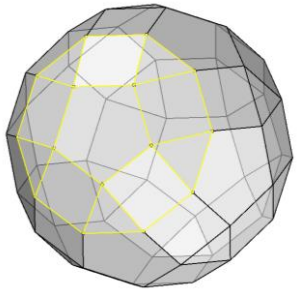


Figura 178 - Rombicosidodecaedro girado (J72)

Resulta da rotação de uma das cúpulas pentagonais J5 de um rombicosidodecaedro (na figura, destaca-se essa cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}
20	30	12

62 faces | 120 arestas | 60 vértices

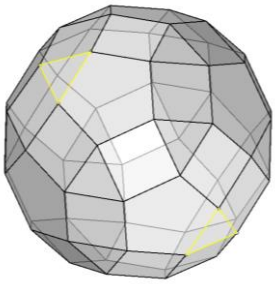


Figura 179 - Rombicosidodecaedro parabigirado (J73)

Resulta da rotação de duas cúpulas pentagonais J5, com bases paralelas, de um rombicosidodecaedro (na figura, destaca-se uma face triangular de cada cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	
20	30	12	

62 faces | 120 arestas | 60 vértices

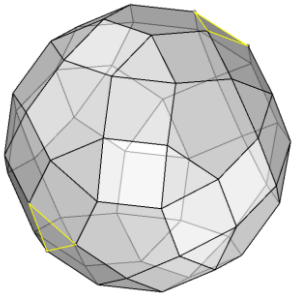


Figura 180 - Rombicosidodecaedro metabigirado (J74)

Resulta da rotação de duas cúpulas pentagonais J5, com bases não paralelas, de um rombicosidodecaedro (na figura, destaca-se uma face triangular de cada cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	
20	30	12	

62 faces | 120 arestas | 60 vértices

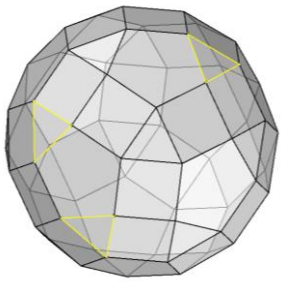


Figura 181 - Rombicosidodecaedro trigirado (J75)

Resulta da rotação de três cúpulas pentagonais J5 de um rombicosidodecaedro (na figura, destaca-se uma face triangular de cada cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	
20	30	12	

62 faces | 120 arestas | 60 vértices

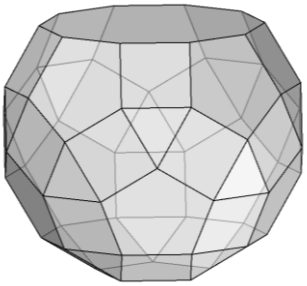


Figura 182 - Rombicosidodecaedro diminuído (J76)

Resulta da secção de um rombicosidodecaedro por um plano que lhe subtraiu uma cúpula pentagonal J5.

{3}	{4}	{5}	{12}	
15	25	11	1	

52 faces | 105 arestas | 55 vértices

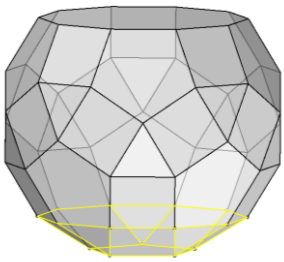


Figura 183 - Rombicosidodecaedro diminuído paragirado (J77)

Resulta da rotação de uma cúpula pentagonal J5 de um rombicosidodecaedro diminuído J76 (na figura, destaca-se essa cúpula a amarelo)

{3}	{4}	{5}	{12}	
15	25	11	1	

52 faces | 105 arestas | 55 vértices

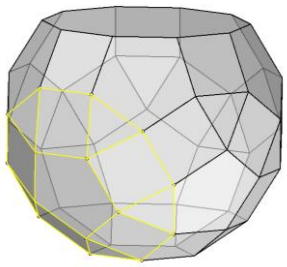


Figura 184 - Rombicosidodecaedro diminuído metagirado (J78)

Resulta da rotação de cúpula pentagonal J5 de um rombicosidodecaedro diminuído J76 (na figura, destaca-se essa cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	{12}	
15	25	11	1	

52 faces | 105 arestas | 55 vértices

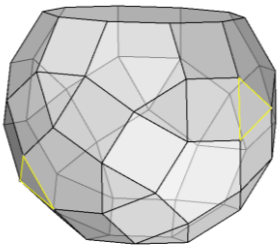


Figura 185 - Rombicosidodecaedro diminuído bigirado (J79)

Resulta da rotação de duas cúpulas pentagonais J5 de um rombicosidodecaedro diminuído J76 (na figura, destaca-se uma face triangular de cada cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	{12}
15	25	11	1

52 faces | 105 arestas | 55 vértices

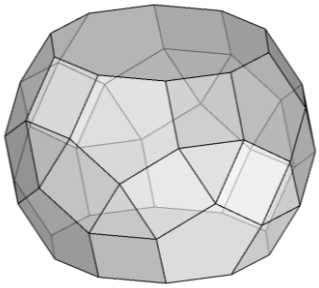


Figura 186 - Rombicosidodecaedro parabidiminuído (J80)

Resulta da secção de um rombicosidodecaedro por dois planos que lhe subtraíram duas cúpulas pentagonais J5 com bases paralelas.

{3}	{4}	{5}	{12}
10	20	10	2

42 faces | 90 arestas | 50 vértices

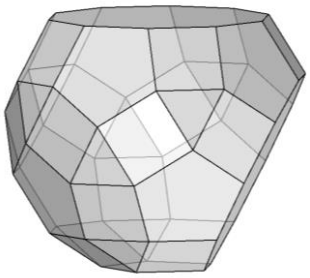


Figura 187 - Rombicosidodecaedro metabidiminuído (J81)

Resulta da secção de um rombicosidodecaedro por dois planos que lhe subtraíram duas cúpulas pentagonais J5 não opostas nem paralelas.

{3}	{4}	{5}	{12}
10	20	10	2

42 faces | 90 arestas | 50 vértices

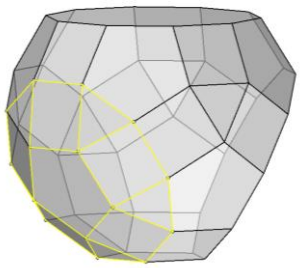


Figura 188 - Rombicosidodecaedro Bidiminuído girado (J82)[28]

Resulta da rotação de uma cúpula pentagonal J5 de um rombicosidodecaedro metabidiminuído J81 (na figura, destaca-se essa cúpula a amarelo).

{3}	{4}	{5}	{12}
10	20	10	2

42 faces | 90 arestas | 50 vértices

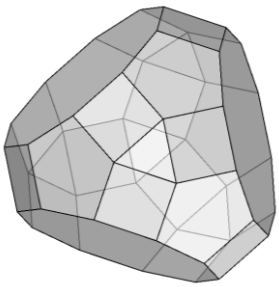


Figura 189 - Rombicosidodecaedro tridiminuído (J83)

Resulta da secção de um rombicosidodecaedro por três planos que lhe subtraíram três cúpulas pentagonais J5.

{3}	{4}	{5}	{12}
5	15	9	3

32 faces | 75 arestas | 45 vértices

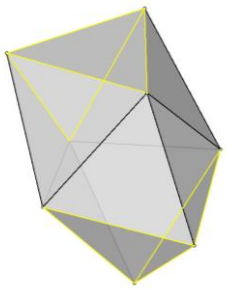


Figura 190 - Disfenóide achatado (J84)

Resulta da expansão das arestas opostas de um tetraedro e das faces que nelas se intersectam (destacadas a amarelo, na figura). O ângulo diedral entre as faces é aumentado, até que o espaço entre elas seja preenchido com faces triangulares.
É um deltaedro.

{3}
12

12 faces | 18 arestas | 8 vértices

[28] Segundo a terminologia de Johnson, a designação deste poliedro deveria ser rombicosidodecaedro metabidiminuído girado. A designação adotada corresponderá, muito provavelmente, a uma versão simplificada.

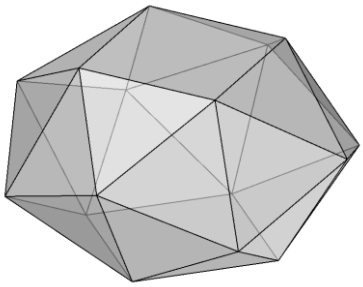


Figura 191 - Antiprisma quadrado achatado (J85)

Resulta da expansão das bases de um antiprisma quadrado, até que o espaço entre elas seja preenchido com uma cintura de faces triangulares.

{3}	{4}
24	2

26 faces | 40 arestas | 16 vértices

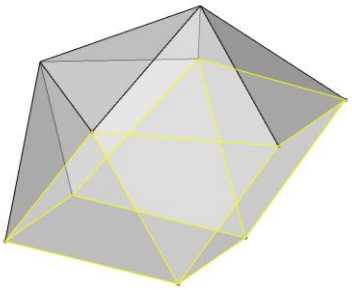


Figura 192 – Esfenocorona (J86)

Resulta da união de um esfeno (duas lunas adjacentes) e uma corona (composição de 8 faces triangulares, parecida com uma coroa). Na figura, destaca-se o esfeno a amarelo.

{3}	{4}
12	2

14 faces | 22 arestas | 10 vértices

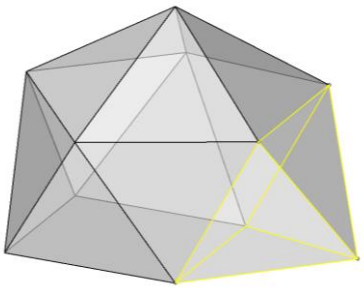


Figura 193 - Esfenocorona aumentada (J87)

Resulta da união de uma esfenocorona J86 e uma pirâmide quadrada J1. Na figura, destaca-se a pirâmide quadrada a amarelo.

{3}	{4}
16	1

17 faces | 26 arestas | 11 vértices

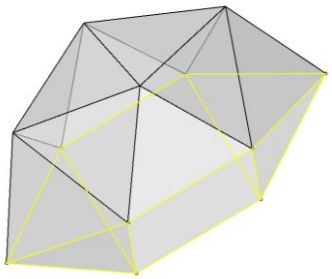


Figura 194 - Esfenomegacorona (J88)

Resulta da união de um esfeno e uma megacorona (corona aumentada, composta por 12 faces triangulares). Na figura, destaca-se o esfeno a amarelo.

{3}	{4}
16	2

18 faces | 28 arestas | 12 vértices

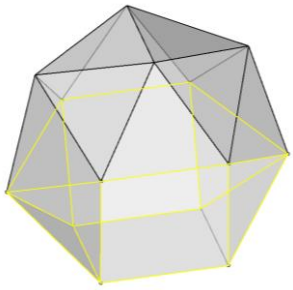


Figura 195 - Ebesfenomegacorona (J89)

Resulta da união de um ebesfeno e uma megacorona. Na figura, destaca-se o ebesfeno a amarelo.

{3}	{4}
18	3

21 faces | 33 arestas | 14 vértices

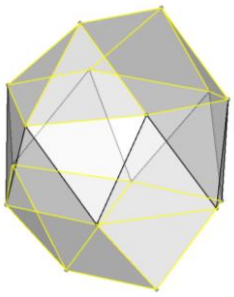


Figura 196 - Biesfenocíngulo (J90)

Resulta da união de dois esfenos e um cíngulo (composição de 12 faces triangulares, dispostas como numa cintura).

{3}	{4}
20	4

24 faces | 38 arestas | 16 vértices

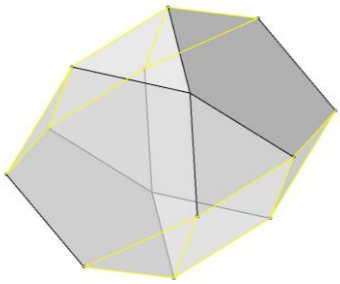


Figura 197 - Bilunabirrotunda (J91)

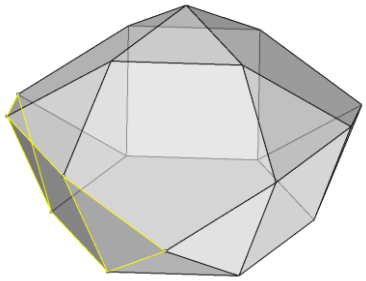


Figura 198 - Ebesfenorrotunda triangular (J92)

Resulta da união de duas lunas e as faces quadradas paralelas e de duas porções de rotunda pentagonal J6. Na figura, destacam-se as duas lunas a amarelo.	Resulta da união de três lunas (cada par das quais partilham um vértice entre si), uma porção de uma rotunda pentagonal J6 e uma composição de uma face hexagonal (a "base" maior da rotunda) e três faces triangulares[29].

{3}	{4}	{5}		{3}	{4}	{5}	{6}	
8	2	4		13	3	3	1	
14 faces		26 arestas	14 vértices	20 faces		36 arestas		18 vértices

Na Tabela 1, agrupam-se os *Sólidos de Johnson* pelo tipo de poliedro e complexidade da modificação operada (note-se que alguns poderiam ter sido incluídos em mais do que um tipo: por exemplo; a pirâmide quadrada alongada ou a biluna birrotunda podem ser consideradas, respetivamente, como um cubo aumentado ou como uma modificação de uma rotunda pentagonal). As designações de todos os poliedros correspondem à tradução das designações atribuídas por Johnson (1966, pp. 183-199).

Tabela 1 - Distribuição dos *Sólidos de Johnson* pelo tipo de poliedro e modificação.

Pirâmides	J1	Pirâmide quadrada
	J2	Pirâmide pentagonal
	J7	Pirâmide triangular alongada
	J8	Pirâmide quadrada alongada
	J9	Pirâmide pentagonal alongada
	J10	Pirâmide quadrada giroalongada
	J11	Pirâmide pentagonal giroalongada
Bipirâmides	J12	Bipirâmide triangular
	J13	Bipirâmide pentagonal
	J14	Bipirâmide triangular alongada
	J15	Bipirâmide quadrada alongada
	J16	Bipirâmide pentagonal alongada
	J17	Bipiramide quadrada giroalongada

[29] Johnson descreve a ebesfenorrotunda triangular como "the union of a complex consisting of three lunes separated by a hexagon with triangles attached to its alternate sides and a complex of three triangles and three pentagons surrounding another triangle" (1966, pp. 175-177).

Tabela 1 - Distribuição dos *Sólidos de Johnson* pelo tipo de poliedro e modificação (continuação).

Prismas	J49	Prisma triangular aumentado
	J52	Prisma pentagonal aumentado
	J54	Prisma hexagonal aumentado
	J50	Prisma triangular biaumentado
	J53	Prisma pentagonal biaumentado
	J55	Prisma hexagonal parabiaumentado
	J56	Prisma hexagonal metabiaumentado
	J51	Prisma triangular triaumentado
	J57	Prisma hexagonal triaumentado
Biprismas	J26	Girobiprisma
Antiprismas	J85	Antiprisma quadrado achatado
Cúpulas	J3	Cúpula triangular
	J4	Cúpula quadrada
	J5	Cúpula pentagonal
	J18	Cúpula triangular alongada
	J19	Cúpula quadrada alongada
	J20	Cúpula pentagonal alongada
	J22	Cúpula triangular giroalongada
	J23	Cúpula quadrada giroalongada
	J24	Cúpula pentagonal giroalongada
Rotundas	J6	Rotunda pentagonal
	J21	Rotunda pentagonal alongada
	J25	Rotunda pentagonal giroalongada
Cúpularrotundas	J32	Ortocúpularrotunda pentagonal
	J33	Girocúpularrotunda pentagonal
	J40	Ortocúpularrotunda pentagonal alongada
	J41	Girocúpularrotunda pentagonal alongada
	J47	Cúpularrotunda pentagonal giroalongada
Bicúpulas	J27	Ortobicúpula triangular
	J28	Ortobicúpula quadrada
	J30	Ortobicúpula pentagonal
	J35	Ortobicúpula triangular alongada
	J38	Ortobicúpula pentagonal alongada
	J29	Girobicúpula quadrada
	J31	Girobicúpula pentagonal
	J36	Girobicúpula triangular alongada
	J37	Girobicúpula quadrada alongada
	J39	Girobicúpula pentagonal alongada
	J44	Bicúpula triangular giroalongada
	J45	Bicúpula quadrada giroalongada
	J46	Bicúpula pentagonal giroalongada
Birrotundas	J34	Ortobirrotunda pentagonal
	J42	Ortobirrotunda pentagonal alongada
	J43	Girobirrotunda pentagonal alongada
	J48	Birrotunda pentagonal giroalongada
Poliedros convexos regulares modificados	J84	Disfenóide achatado
	J58	Dodecaedro aumentado
	J59	Dodecaedro parabiaumentado
	J60	Dodecaedro metabiaumentado
	J61	Dodecaedro triaumentado
	J62	Icosaedro metabidiminuído
	J63	Icosaedro tridiminuído
	J64	Icosaedro tridiminuído aumentado

Tabela 1 - Distribuição dos *Sólidos de Johnson* pelo tipo de poliedro e modificação (continuação).

Poliedros arquimedianos modificados	J65	Tetraedro truncado aumentado
	J66	Cubo truncado aumentado
	J67	Cubo truncado biaumentado
	J68	Dodecaedro truncado aumentado
	J69	Dodecaedro truncado parabiaumentado
	J70	Dodecaedro truncado metabiaumentado
	J71	Dodecaedro truncado triaumentado
	J72	Rombicosidodecaedro girado
	J73	Rombicosidodecaedro parabigirado
	J74	Rombicosidodecaedro metabigirado
	J75	Rombicosidodecaedro trigirado
	J76	Rombicosidodecaedro diminuído
	J77	Rombicosidodecaedro diminuído paragirado
	J78	Rombicosidodecaedro diminuído metagirado
	J79	Rombicosidodecaedro diminuído bigirado
	J80	Rombicosidodecaedro parabidiminuído
	J81	Rombicosidodecaedro metabidiminuído
	J82	Rombicosidodecaedro bidiminuído girado
	J83	Rombicosidodecaedro tridiminuído
Derivados de lunas e/ou esfenos	J91	Bilunabirrotunda
	J86	Esfenocorona
	J87	Esfenocorona aumentada
	J88	Esfenomegacorona
	J89	Ebesfenomegacorona
	J90	Biesfenocíngulo
	J92	Ebesfenorrotunda triangular

1.3.1. Dualidade dos poliedros uniformes

Para cada poliedro com número *F* de faces, *E* de arestas e *V* de vértices, existe um poliedro dual, com número *V* de faces, igual número de arestas e número *F* de vértices. O poliedro dual deste dual é, novamente, o poliedro inicial. O dual de um poliedro com determinadas propriedades de convexidade, simetria, regularidade ou congruência entre vértices possuirá particularidades semelhantes, ainda que, em determinados casos, de uma forma apropriadamente modificada (Grünbaum e Shephard, 1988, p 205).

Os duais dos poliedros convexos regulares são poliedros da mesma categoria, com iguais características de simetria e arestas de direções perpendiculares às arestas do poliedro inicial. Por exemplo, se o octaedro {3, 4} tem oito faces e seis vértices tetragonais, o seu dual deverá ter seis faces e oito vértices. O único poliedro regular que corresponde a esta descrição é o hexaedro {4, 3} ou cubo, de vértices trigonais. Inversamente, o dual do cubo é o octaedro regular. Semelhante conclusão retiraremos do dodecaedro {5, 3} que tem doze faces e vinte vértices trigonais, e cujo dual, o icosaedro {3, 5}, tem vinte faces triangulares e doze vértices pentagonais. Em qualquer dos pares de duais, o número de arestas é o mesmo.

O dual de um poliedro convexo regular pode ser determinado unindo, simplesmente, os centros das faces adjacentes do poliedro. Neste método, o poliedro resultante tem dimensões inferiores ao poliedro inicial, correspondendo a insfera deste à circunsfera daquele. Na Figura 199, a circunsfera do poliedro dual (a azul), que contém os quatro vértices localizados nos centros das faces do tetraedro de arestas cinzentas, coincide com a insfera deste tetraedro maior. Nesta situação, o tetraedro dual está incluso no tetraedro inicial.

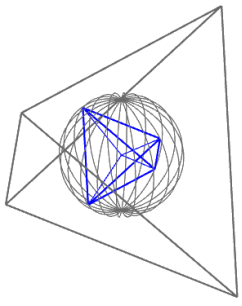


Figura 199 - O tetraedro regular é dual de si próprio (ou auto-dual).

Cundy e Rollet (1989, p. 78) apontam que o conceito de dualidade é equivalente ao conceito de reciprocação em relação a uma esfera, como a seguir veremos, e que qualquer poliedro pode ser reciprocado em relação a uma esfera, sendo cada plano substituído pelo seu polo e cada

vértice pelo seu plano polar, de forma a construir um outro poliedro, que se designa por *dual* ou *recíproco*, que é um poliedro com número de faces e de vértices permutados.

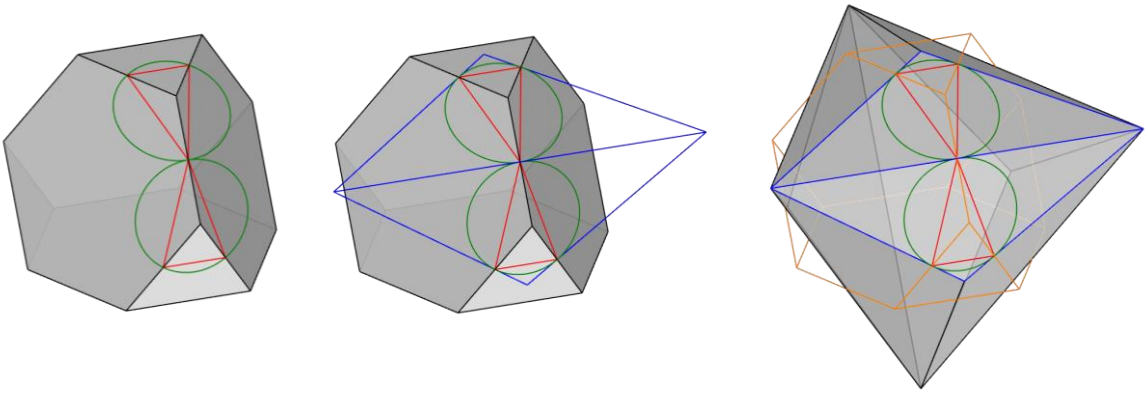
Neste processo, os vértices do poliedro inicial são substituídos por planos (polares) tangentes a uma esfera com centro no baricentro do poliedro, de cuja intersecção resultam as arestas do dual. A intersecção destas arestas, por sua vez, corresponde aos vértices do poliedro dual. Complementarmente, as faces do poliedro inicial são substituídas pelos respetivos polos, que correspondem aos vértices do poliedro dual. Concluindo, dois poliedros serão recíprocos um do outro se, em relação a uma mesma esfera, cada face de um dos poliedros pertencer ao plano polar do vértice (ou polo) correspondente do outro poliedro (Grünbaum e Shephard, 1988, p. 206). Se o poliedro for convexo regular e a esfera de reciprocação for a que o circunscreve, as faces do dual serão tangentes à circunsfera, nos vértices do poliedro inicial.

Embora um poliedro possa ser reciprocado em relação a uma esfera concêntrica de raio aleatório, a situação mais interessante corresponde àquela em que as arestas de um poliedro e do seu recíproco se intersectam segundo ângulos retos (o que ocorre, geralmente, no ponto médio das arestas) e partilham a mesma midesfera - a esfera de reciprocação. No caso dos poliedros convexos uniformes, as arestas do dual bissectam as arestas do poliedro inicial segundo a direção das respetivas mediatrizes (Wenninger, 1983, p. 7). Neste caso, as arestas dos dois poliedros são tangentes à midesfera que lhes é comum.

As Figuras 200 a 204 mostram a determinação dos duais de poliedros pelo método de Dorman-Luke, descrito por Cundy e Rollet (1989, p. 117) e caracterizado por Wenninger (1983, p. 30) como a forma mais fácil de determinar as faces dos duais dos poliedros convexos. Este método que, segundo Wenninger, permanece válido para os poliedros não-convexos (1983, p. 55) só pode ser utilizado em poliedros uniformes, dado que as figuras verticiais são polígonos cíclicos e é possível definir uma midesfera comum aos dois poliedros. Para circunstâncias distintas, Grunbaum e Shephard (1988, p. 206) indicam que a reciprocação é o *único* método conhecido para efetivamente, construir o poliedro P^* dual de um poliedro P.

Na Figura 200, ilustra-se o processo seguido para a determinação do dual do tetraedro truncado. Na Figura 200a, determinamos a figura verticial de dois dos vértices e a circunferência que circunscreve cada uma delas (que são circunferências menores da midesfera do poliedro (Pugh, 1976, p. 37), aqui não representada). O passo seguinte (Figura 200b) consiste em determinar o polígono tangencial a cada uma destas circunferências nos vértices da figura verticial. Os lados de todos os polígonos tangenciais correspondem às arestas do dual (Figura 200c). Estas arestas

são tangentes à circunferência que circuncreve a figura verticial, nos pontos em que o arquimediano a intersecta (Kappraff, 1990, p. 337). As arestas do arquimediano e do seu dual são tangentes à midesfera comum e perpendiculares entre si, no ponto médio das arestas do poliedro inicial.



a b c

Figura 200 - Determinação do dual do tetraedro truncado, segundo o método de Dorman-Luke. À esquerda, os lados dos triângulos isósceles (a azul) são tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho) e correspondem às arestas do tetraedro triakis (à direita, com faces cinzentas).

Nas Figuras 201, 202, 203 e 204 são respetivamente determinados os duais do prisma pentagonal, do antiprisma pentagonal, do antiprisma pentagramático e do antiprisma pentagramático cruzado, pelo método de Dorman-Luke. Para todos os casos, poderemos concluir que a número *F* de faces, *E* de arestas e *V* de vértices do poliedro inicial corresponde ao número *V* de faces, *E* de arestas e *F* de vértices do dual respetivo. Os duais dos prismas são bipirâmides e os duais dos antiprismas são trapezoedros (também chamados de deltoedros).

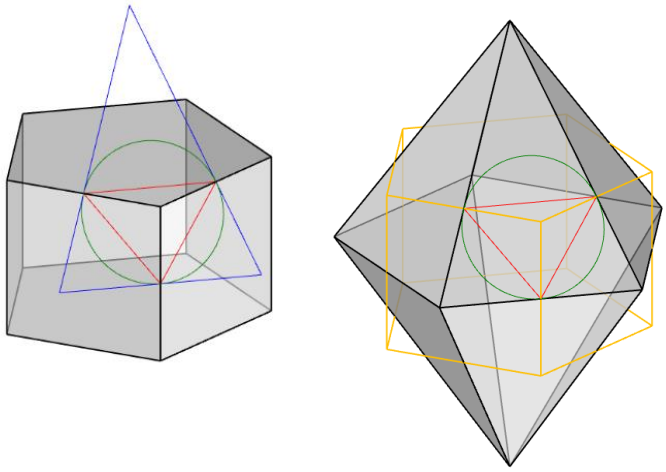


Figura 201 - O dual do prisma convexo pentagonal é uma bipirâmide pentagonal.

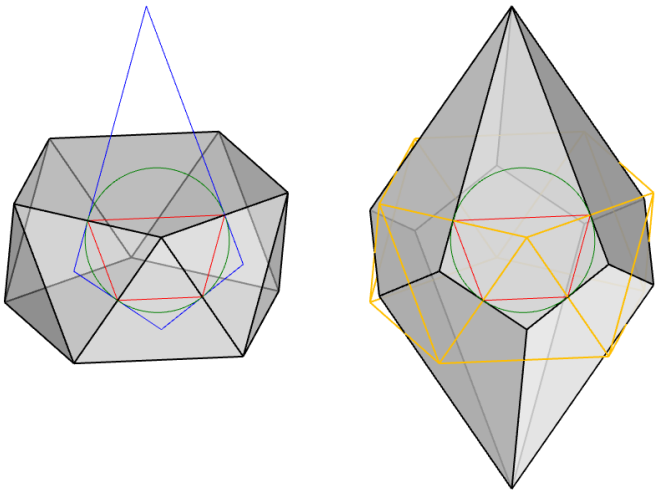


Figura 202 - O dual do antiprisma pentagonal é um trapezoedro pentagonal.

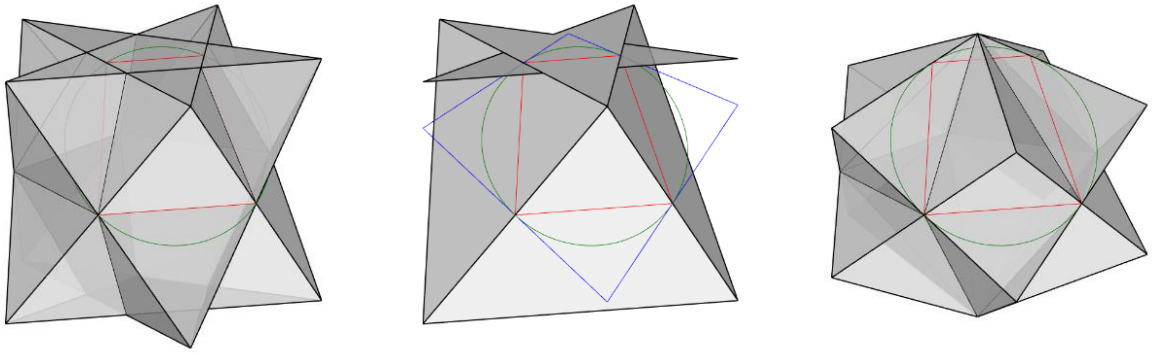


Figura 203 - O dual do antiprisma pentagramático é deltoedro pentagramático. À esquerda, ilustram-se a figura verticial de um dos vértices e a circunferência que a circunscreve. Ao meio, o polígono que lhe é tangencial e as faces triangulares e pentagramática que definem a figura verticial.

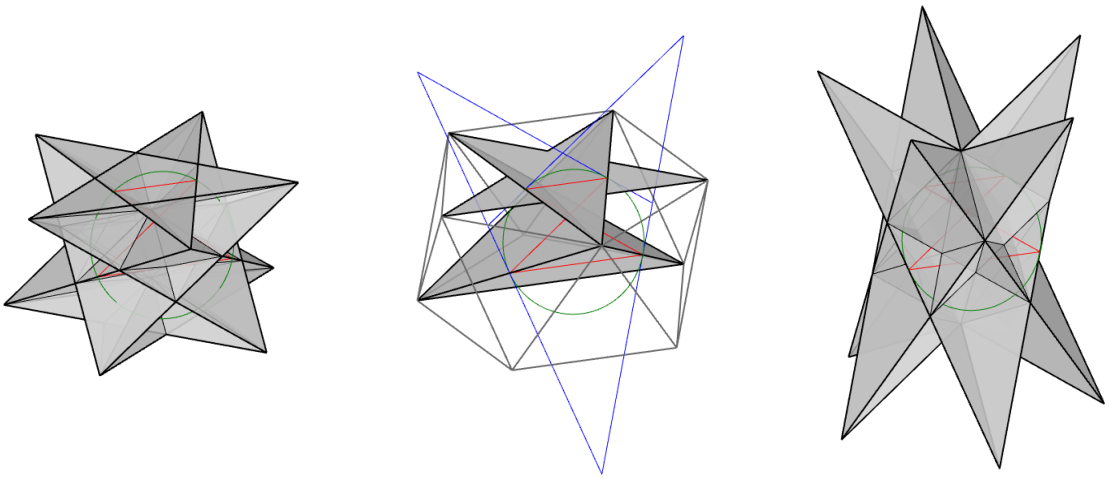


Figura 204 - O dual do antiprisma pentagramático cruzado é o deltoedro côncavo pentagramático. À esquerda, ilustram-se a figura verticial de um dos vértices e a circunferência que a circunscreve. Na imagem do meio, mostra-se ainda o antiprisma convexo que contém o poliedro e o polígono que é tangencial à figura verticial nos pontos médios das arestas. À direita, as doze faces do deltoedro.

Wenninger (1983, p. 35) sugere um terceiro método (para além da esfera de reciprocação e do método de Dorman-Luke) para obter o dual dos poliedros convexos uniformes, que consiste em determinar a intersecção dos planos que contêm os vértices do poliedro inicial e são tangentes à sua circunsfera. As porções de plano, segmentos de reta e pontos resultantes correspondem, respectivamente, às faces, arestas e vértices do dual do poliedro inicial (Figura 205). Segundo este método, porém, os dois poliedros não partilham a mesma interesfera.

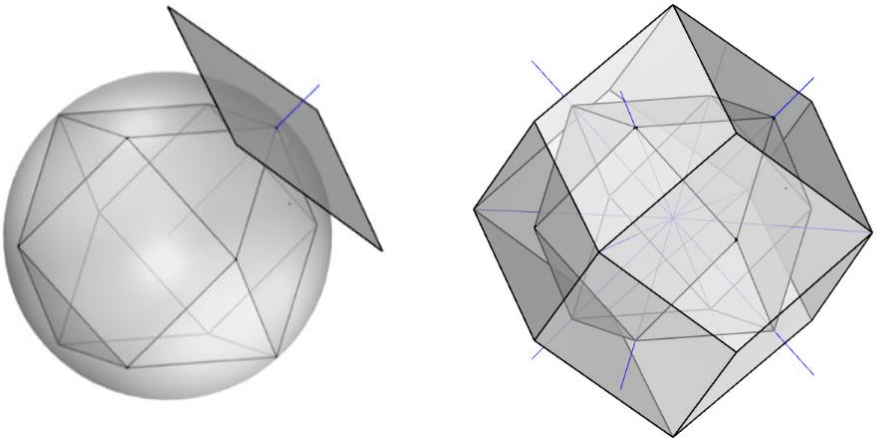


Figura 205 - Determinação do dual do cuboctaedro. A face representada à direita pertence a um dos planos tangentes à circunsfera. As faces do dual resultam da intersecção dos doze planos que contêm os vértices do cuboctaedro e são tangentes à sua circunsfera. O dual do cuboctaedro é o dodecaedro rômbico.

1.3.2. Duais dos poliedros regulares

Num poliedro regular, a circunferência circunscrita à figura verticial do poliedro $\{p, q\}$ coincide com a circunferência inscrita da face do poliedro dual $\{q, p\}$ e os dois polígonos $\{q\}$ são recíprocos em relação àquela circunferência (Coxeter, 1973, p. 17). Este processo para a determinação do dual de um poliedro, segundo o qual os vértices e planos das faces do dual $\{q, p\}$ são os polos e polares dos planos das faces e vértices do poliedro $\{p, q\}$, é denominado por Coxeter (1973, p. 17) como reciprocação em relação à midesfera. As Figuras 206 a 210 mostram este processo para cada um dos poliedros convexos regulares e a consequente relação entre a circunferência circunscrita da figura verticial do poliedro inicial e a face respetiva do poliedro dual. Note-se que, em todos os casos, a circunferência que circunscreve a figura verticial coincide com a circunferência inscrita na face do dual.

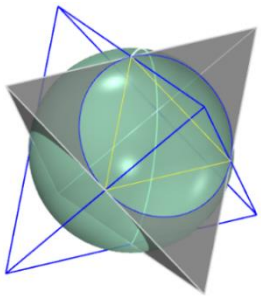


Figura 206 - O dual do tetraedro regular, em relação à midesfera, é um tetraedro igual.

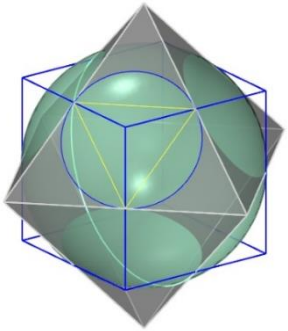


Figura 207 - O dual do hexaedro regular (ou cubo) é o octaedro regular.

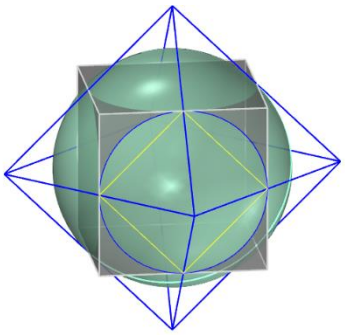


Figura 208 - O dual do octaedro regular é o hexaedro regular (ou cubo).

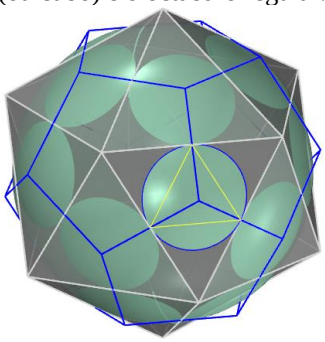


Figura 209 - O dual do dodecaedro regular é o icosaedro regular.

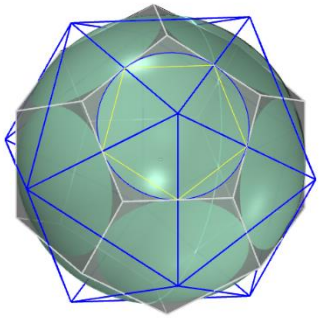


Figura 210 - O dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular.

A Figura 211 ilustra a reciprocação do grande dodecaedro, {5, 5/2}, que tem doze faces pentagonais, trinta arestas e doze vértices pentagramáticos. O seu dual é o pequeno dodecaedro estrelado, {5/2, 5}, com doze faces pentagramáticas, trinta arestas e doze vértices. Na imagem da esquerda, podemos observar que a figura verticial do grande dodecaedro está inscrita numa circunferência, por sua vez, inscrita na face pentagramática do pequeno dodecaedro estrelado. Esta circunferência é uma das circunferências menores da midesfera comum aos dois poliedros (que não foi incluída, para maior clareza da relação entre os dois poliedros). As arestas dos dois poliedros são tangentes à esfera de reciprocação e perpendiculares entre si, no ponto médio que lhes é comum. O grande dodecaedro estrelado {5/2, 3}, com doze faces pentagramáticas, trinta arestas e vinte vértices, tem por dual o grande icosaedro {3, 5/2}, com vinte faces triangulares, trinta arestas e doze vértices pentagramáticos.

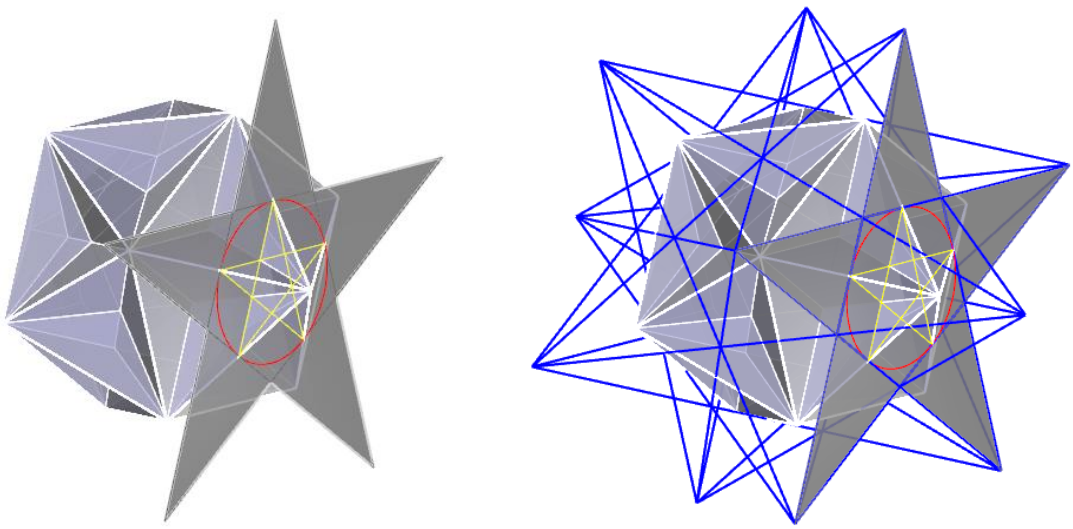


Figura 211 - O dual do grande dodecaedro é o pequeno dodecaedro estrelado (a azul). A circunferência (a vermelho) que circunscreve o pentagrama (figura verticial do grande dodecaedro) coincide com a circunferência inscrita na face do dual.

As Figuras 212 a 214 mostram, para cada caso, o resultado da intersecção entre cada poliedro convexo regular e o respetivo dual, tendo a esfera de reciprocação em comum. Segundo Coxeter (1973, p. 17), quaisquer dois poliedros regulares $\{p, q\}$ e $\{q, p\}$, recíprocos em relação à midesfera, têm em comum uma região interior sólida que é outro poliedro, quasirregular, $\left\{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\}$ *o*u $\left\{\begin{matrix} q \\ p \end{matrix}\right\}$. Os seus vértices são os pontos médios, tanto de $\{p, q\}$ como de $\{q, p\}$ e as faces são as figuras verticiais dos dois poliedros. No caso dos recíprocos cubo/octaedro e dodecaedro/icosaedro, o poliedro que resulta da sua intersecção é, respetivamente, o cuboctaedro $\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$ e o icosidodecaedro $\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$, aqui representados pelas suas arestas a cor vermelha.

Ilustramos ainda, com arestas de cor azul, o menor poliedro convexo que delimita cada par de poliedros e é definido pelos vértices de ambos. Este menor poliedro convexo (*convex hull*, no original, que traduzimos para *invólucro convexo* ou *fecho convexo*) corresponde ao dual do poliedro que é comum a cada par de duais. Nas Figuras 212, 213 e 214, os invólucros convexos que contêm cada par de duais são, respetivamente, o cubo (dual do octaedro), o dodecaedro rômbico (dual do cuboctaedro) e o triacontaedro rômbico (dual do icosidodecaedro).

Podemos ainda observar os compostos que resultam da união de cada par de poliedros recíprocos: na Figura 212, os tetraedros definem o composto de dois tetraedros que Kepler apelidou de *stella octangula*; o cubo e o octaedro da Figura 213 definem o composto do cubo e do octaedro; e o dodecaedro e o icosaedro da Figura 214 definem o composto do dodecaedro e do icosaedro. Com a exceção da *stella octangula*, nenhum destes é um composto regular.

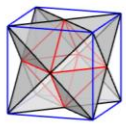


Figura 212 - Recíprocos Tetraedro | Tetraedro.

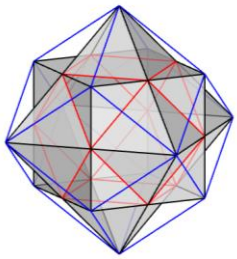


Figura 213 - Recíprocos Cubo | Octaedro.

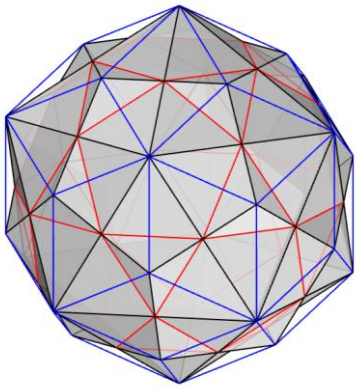


Figura 214 - Recíprocos Dodecaedro | Icosaedro.

Relativamente aos pares de poliedros estrelados recíprocos, assinala-se que, da intersecção entre cada poliedro e o seu dual com a mesma esfera de reciprocação, resultam dois poliedros quasirregulares: o grande dodecadodecaedro da Figura 215, que tem doze faces pentagramáticas e doze faces pentagonais e resulta da intersecção entre o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro; e o grande icosidodecaedro da Figura 216, resultado da intersecção entre o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro, que tem vinte faces triangulares e doze faces pentagramáticas.

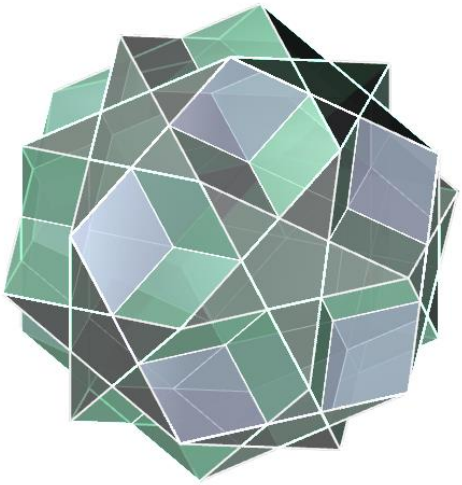


Figura 215 - O grande dodecadodecaedro é o resultado da intersecção dos recíprocos pequeno dodecaedro estrelado | grande dodecaedro.

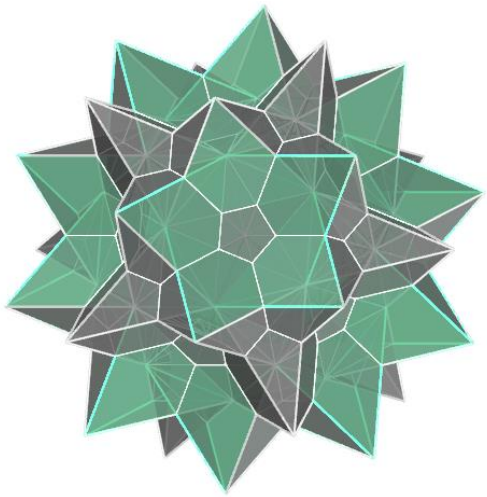
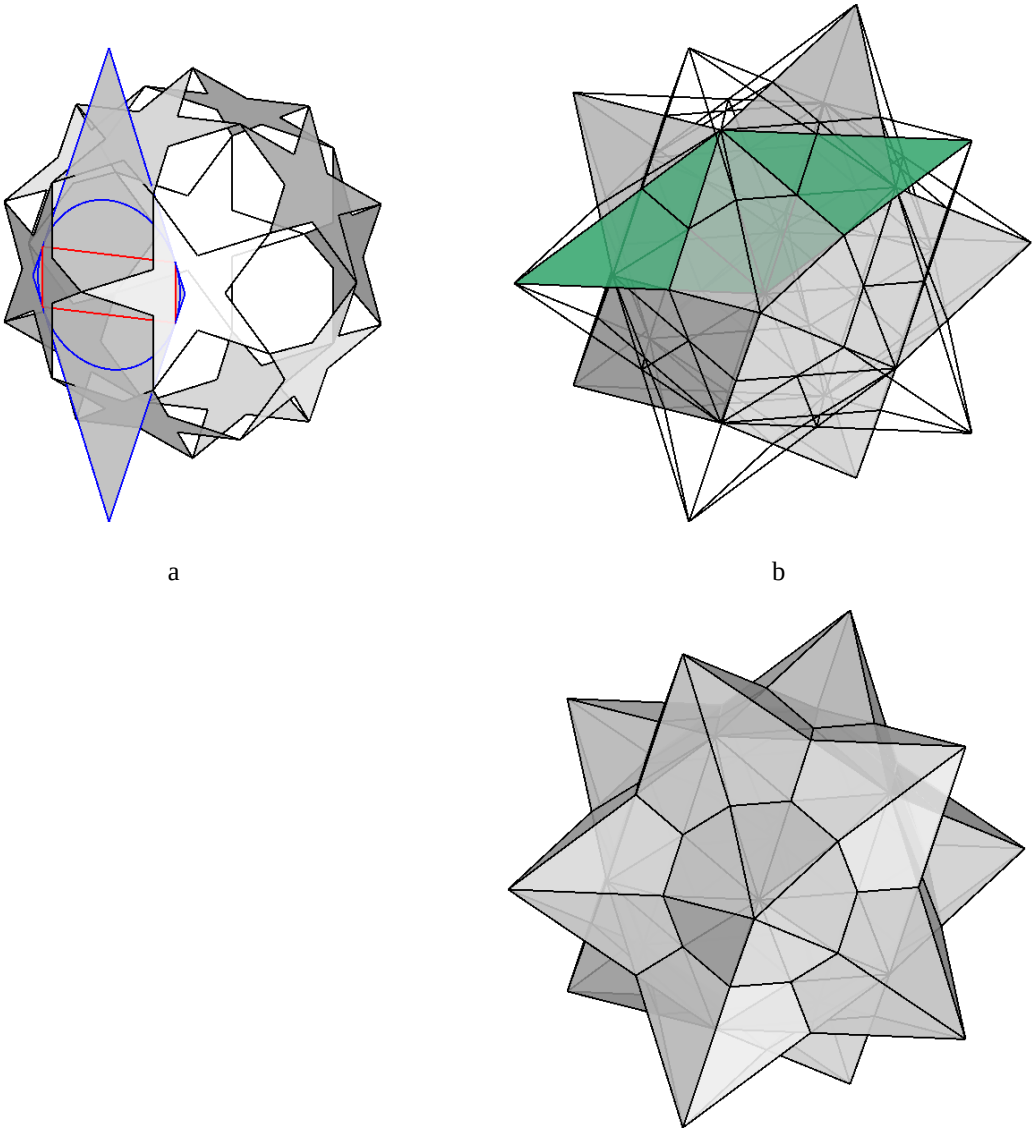


Figura 216 - O grande icosidodecaedro é o resultado da intersecção dos recíprocos grande dodecaedro estrelado | grande icosaedro.

Recordando que os vértices dos poliedros recíprocos definem a sua *convex hull*, podemos concluir que, tanto no caso do par pequeno dodecaedro estrelado | grande dodecaedro, como no par grande dodecaedro estrelado | grande icosaedro, o menor poliedro convexo que os contém é o icosidodecaedro. O dual dos poliedros côncavos das Figuras 215 e 216 serão, portanto, também côncavos, e duas das muitas estrelações do triacontaedro rômbico, dual do icosidodecaedro (Wenninger, 1983, p. 41). Coxeter assinala (1973, p. 102) que, à semelhança dos poliedros convexos, o dual do quasirregular $\left\{ {p \atop q} \right\}$ tem faces rômbicas, e as suas diagonais têm comprimentos iguais às arestas dos recíprocos $\{p, q\}$ e $\{q, p\}$.

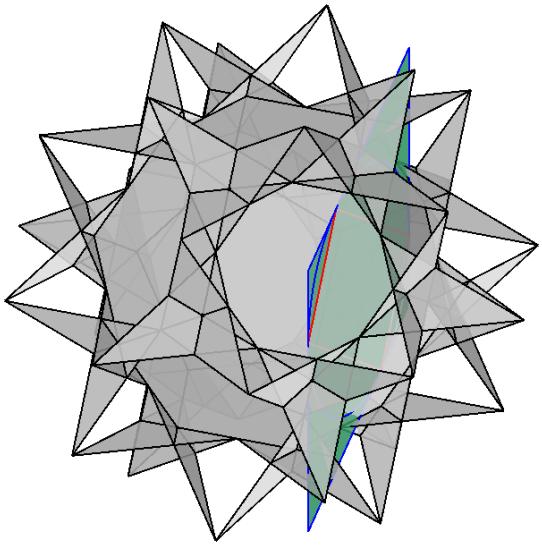
Na Figura 217c, mostra-se o dual do grande dodecadodecaedro, que Coxeter designa por pequeno triacontaedro estrelado e Wenninger (1983, p. 46), por triacontaedro medial rômbico. Na Figura 217a, mostra-se como foi determinada uma face rômbica do dual do grande dodecadodecaedro, que tem vértices pentagramáticos, através do método do Dorman-Luke (para facilitar a sua visualização, mostram-se apenas as faces pentagramáticas do grande dodecadodecaedro). A figura verticial de cor vermelha e a circunferência que a circunscreve permitiram-nos determinar o losango que lhes é tangencial e uma das faces do pequeno triacontaedro estrelado. Na Figura 217b, omitiram-se algumas faces e destacou-se uma delas, para mostrar que as faces deste poliedro se intersectam em doze vértices pentagonais que são visíveis e outros doze vértices, pentagramáticos, que não são visíveis, por se situarem no interior do poliedro.



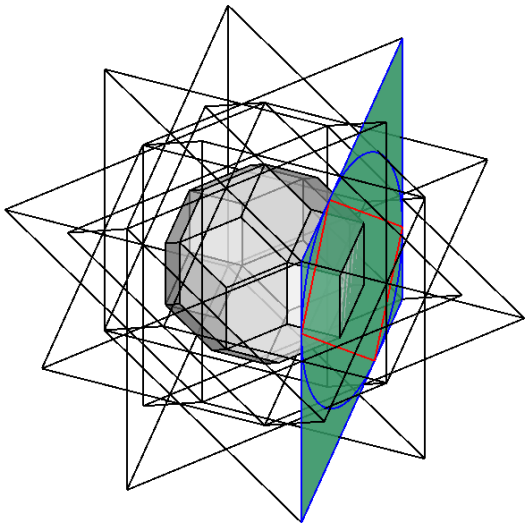
a b c

Figura 217 - O pequeno triacontaedro rômbico, definido por trinta faces rômbicas, é o dual do grande dodecadodecaedro da Figura 215.

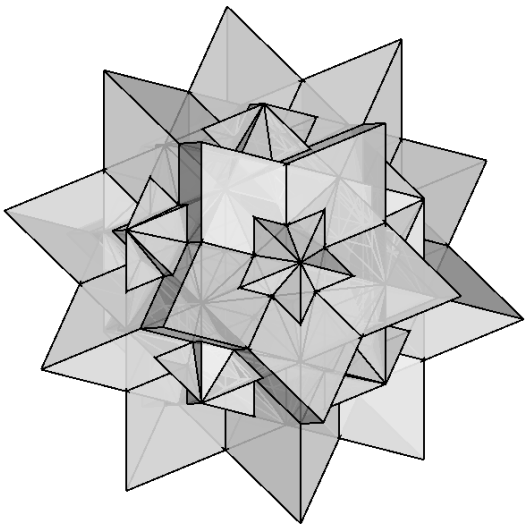
Mostramos a seguir o grande triacontaedro estrelado (ou grande triacontaedro rômbico, segundo Wenninger, 1983, pp. 54-56), que é o poliedro dual do grande icosidodecaedro. Uma das faces rômbicas foi determinada com recurso ao método de Dorman-Luke a partir das quatro faces que se intersectam num dos vértices do grande icosidodecaedro (para melhor visualização, mostram-se apenas, na Figura 218a, as suas faces pentagramáticas). As trinta faces do grande triacontaedro rômbico (Figura 218c) foram a seguir determinadas com recurso a simetria de rotação. Na Figura 218b, evidencia-se o facto de o grande triacontaedro rômbico ser um dos resultados da estrelação do triacontaedro rômbico.



a



b



c

Figura 218 - O grande triacontaedro rômbico, também definido por trinta faces rômbicas, é o dual do grande icosidodecaedro da Figura 216.

1.3.3. Duais dos poliedros arquimedianos

Conforme vimos na Secção 1.2.6. do Capítulo I, os arquimedianos são poliedros convexos de vértices transitivos, mantendo-se qualquer um indistinguível, independentemente da posição para a qual seja rodado e definidos por faces regulares de dois ou de três tipos diferentes. Os centros das faces de um determinado tipo situam-se a igual distância do baricentro do arquimediano, e as figuras verticiais são polígonos congruentes, mas não regulares. Um arquimediano admite uma circunsfera que contém todos os vértices e uma midesfera que é tangente a todas as arestas, mas nenhuma insfera é tangente a todas as faces, só às faces de um determinado tipo. Para além disso, e contrariamente aos poliedros regulares, nenhum dos arquimedianos tem vértices em número igual ao número de faces de outro arquimediano.

É por estas razões que não é possível emparelhar os arquimedianos e os seus duais em pares da mesma categoria, nem associar arquimedianos com uma esfera de reciprocação comum. Pugh (1976, p. 24) denota, aliás, que as faces dos duais dos arquimedianos não são polígonos regulares, porque as figuras verticiais dos arquimedianos também não o são. Nas Figuras 219 a 222, determinamos o dual de quatro arquimedianos pelo Método de Dorman-Luke, designadamente: do icosidodecaedro (Figura 219), do cubo truncado (Figura 220), do octaedro truncado (Figura 221) e do cubo achatado (Figura 222).

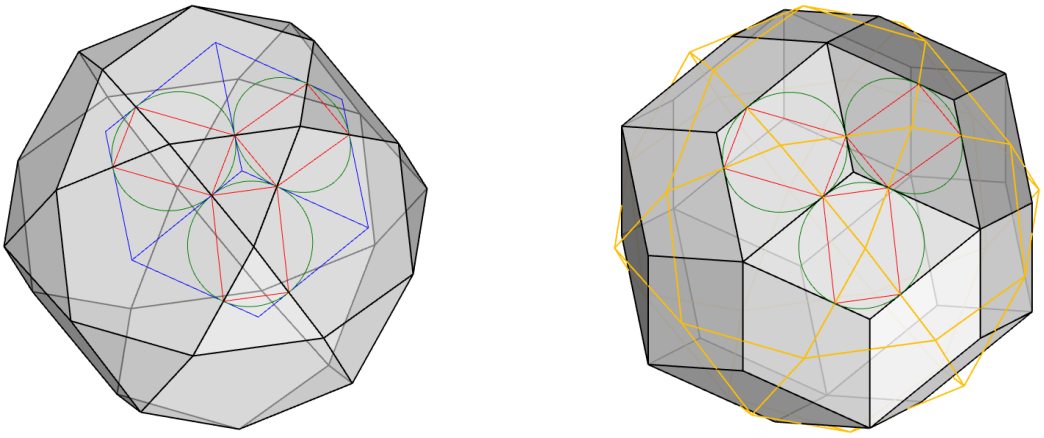


Figura 219 - Determinação do dual do icosidodecaedro. À esquerda, os losangos (a azul) de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (os retângulos a vermelho), correspondem às arestas do triacontaedro rômbico (à direita, com faces cinzentas).

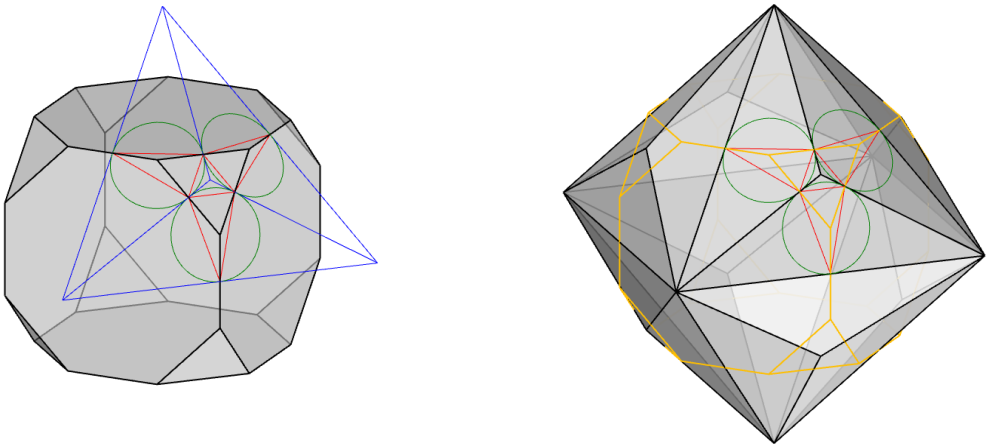


Figura 220 - Determinação do dual do cubo truncado. À esquerda, os triângulos isósceles (a azul), de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do octaedro triakis (à direita, com faces cinzentas).

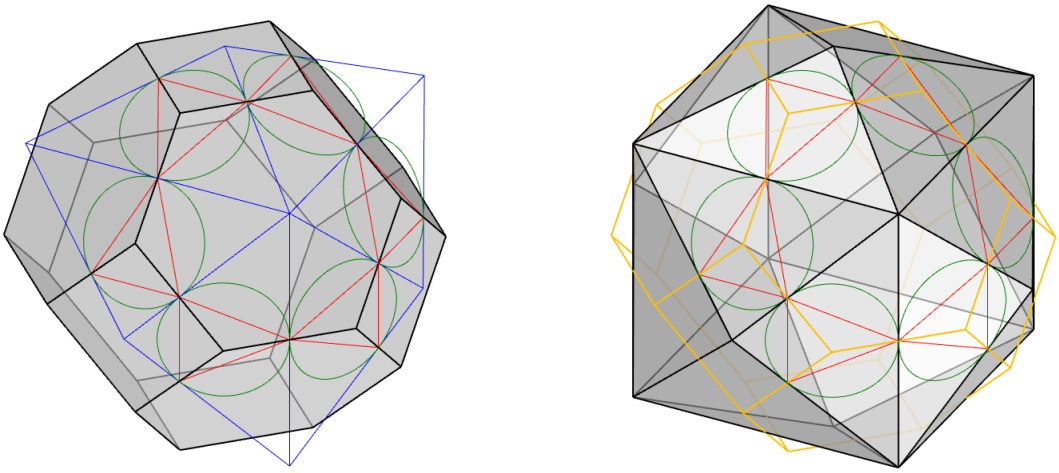


Figura 221 - Determinação do dual do octaedro truncado. À esquerda, os triângulos isósceles (a azul), de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do hexaedro tetrakis (à direita, com faces cinzentas).

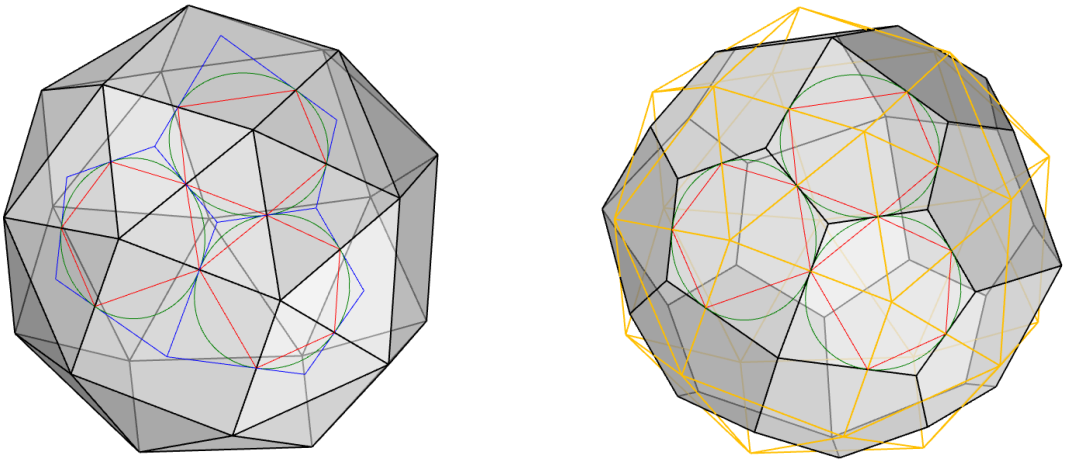


Figura 222 - Determinação do dual do cubo achatado. À esquerda, os pentágonos irregulares (a azul) de lados tangentes às circunferências que circunscrevem as figuras verticiais (a vermelho), correspondem às arestas do icositetraedro pentagonal (à direita).

Holden (1971, p. 55) observa que o número de arestas das faces do dual de um arquimediano é igual ao número de faces que se intersectam nos vértices do arquimediano. Isto pode ser comprovado, por exemplo, na Figura 222, em que nos vértices do cubo achatado se intersectam cinco faces, e as faces do dual (o icositetraedro pentagonal) têm cinco arestas. Semelhante conclusão retiraremos da Figura 219, em que as faces do dual são quadrangulares e das Figuras 220 e 221, cujos duais têm faces triangulares. Importa assinalar que, apesar de possuírem características tão distintas das dos regulares ou semirregulares, os duais dos arquimedianos têm as mesmas propriedades de simetria destes poliedros (inclusive, dos poliedros uniformes), pertencendo, segundo Wenninger (1983, p. 14) aos grupos tetraedral, octaedral e icosaedral.

Os duais dos arquimedianos são genericamente designados por *Sólidos de Catalan*, pelo facto de o primeiro estudo sistemático da dualidade dos poliedros, publicado em 1865, se dever a Eugene Catalan (Malkevitch, 1988, p. 88). As faces dos *Sólidos de Catalan* são polígonos não regulares de um único tipo, mas a sua disposição não é idêntica em todos os vértices, dado que alguns resultam da intersecção de arestas em número diferente dos restantes. Os *Sólidos de Catalan* são, portanto, isoedrais, porque são transitivos nas faces (não regulares), mas não são isogonais. Os vértices de um determinado tipo situam-se a uma distância diferente daquela a que os restantes vértices se situam em relação ao baricentro. Por esta razão, nenhum dos duais dos arquimedianos admite uma esfera que os circunscreve. Existe, porém, e além da midesfera (que é tangente às arestas de cada arquimediano e do seu dual, mas não necessariamente nos pontos médios das arestas deste último), uma insfera que é tangente a todas as faces dos poliedros de Catalan, mas não necessariamente nos seus incentros.

Nas Figuras 223 a 235, ilustram-se os poliedros de Catalan. As designações seguem a terminologia adotada por Wenninger para os arquimedianos (1975, pp. 20-32) e respetivos duais (1983, pp. 14-29); as entre parêntesis são de Holden (1971, p. 75) e Pugh (1976, p. 43).

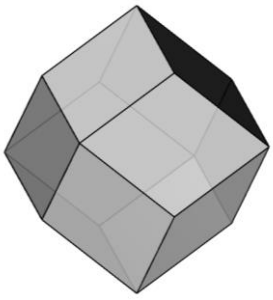


Figura 223 - Dodecaedro rômbico
12 faces rômbicas
Dual do cuboctaedro.

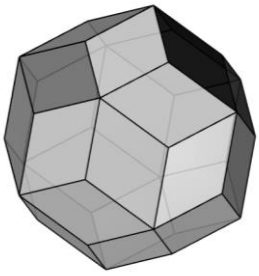


Figura 224 - Triacontaedro rômbico
30 faces rômbicas
Dual do icosidodecaedro.

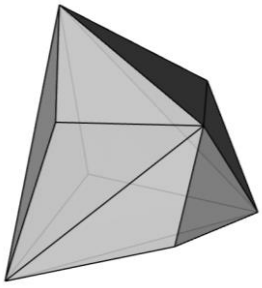


Figura 225 - Tetraedro triakis

12 faces triangulares isósceles
Dual do tetraedro truncado.

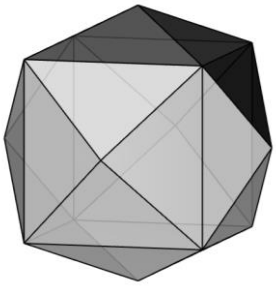


Figura 226 - Hexaedro tetrakis

24 faces triangulares isósceles
Dual do octaedro truncado.

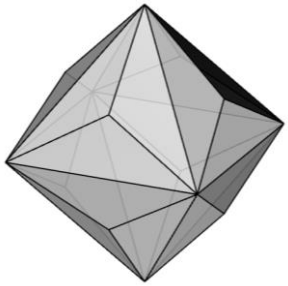


Figura 227 - Octaedro triakis

24 faces triangulares isósceles
Dual do cubo truncado.



Figura 228 - Dodecaedro pentakis

60 faces triangulares isósceles
Dual do icosaedro truncado.



Figura 229 - Icosaedro triakis

60 faces triangulares isósceles
Dual do dodecaedro truncado.

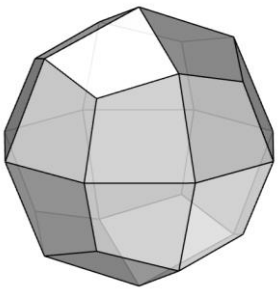


Figura 230 - Icositetraedro deltoidal

24 faces em forma de papagaio
Dual do rombicuboctaedro.

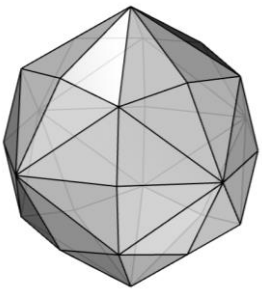


Figura 231 - Dodecaedro Disdyakis (octaedro hexakis)

48 faces triangulares escalenas
Dual do cuboctaedro rombitruncado.

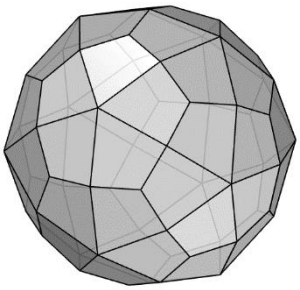


Figura 232 - Hexacontaedro deltoidal

60 faces em forma de papagaio
Dual do rombicosidodecaedro.

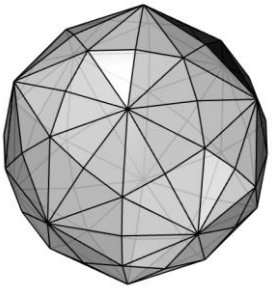


Figura 233 - Triacontaedro disdyakis (icosaedro hexakis)

120 faces triangulares escalenas
Dual do icosidodecaedro rombitruncado.

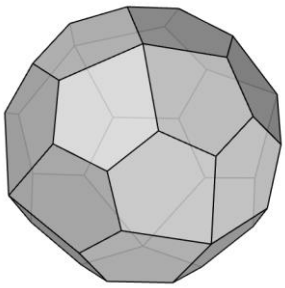


Figura 234 - Icositetraedro pentagonal

24 faces pentagonais
Dual do cubo achatado.

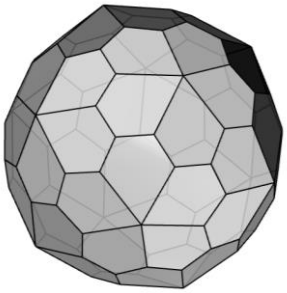


Figura 235 - Hexacontaedro pentagonal

60 faces pentagonais
Dual do dodecaedro achatado.

Embora os treze duais dos arquimedianos tenham sido descritos por Catalan, o dodecaedro rômbico era já do conhecimento dos gregos e de Kepler (Williams, 1979, p. 56). Do triacontaedro rômbico, descrito por Kepler em 1611, existe uma representação (aproximada, segundo Hart, 1998a) da autoria de Wentzel Jamnitzer, com data de 1568 (Figura 236). Kepler incluiu estes dois poliedros rômbicos nos desenhos da Figura 5.

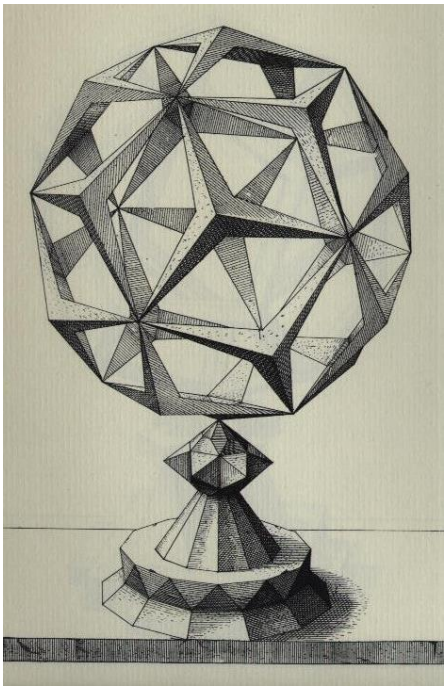
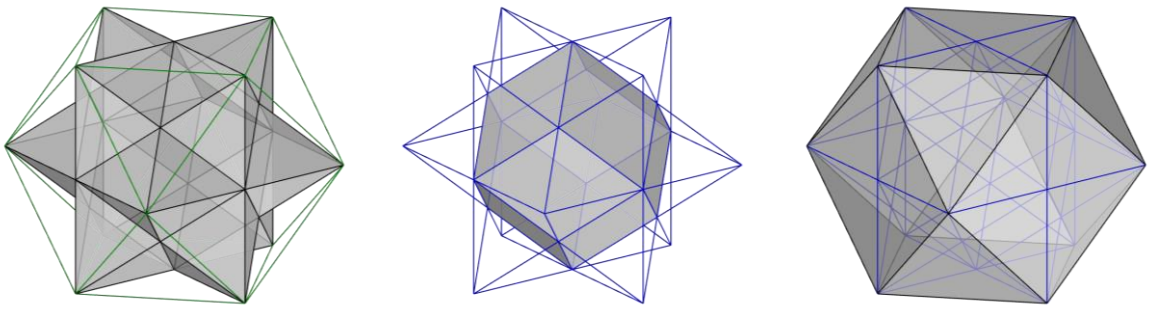


Figura 236 - Uma das gravuras de Wentzel Jamnitzer com o título *arte da perspectiva* (Jamnitzer, 1993, p. 110).

1.4.1. Facetamento e Estrelação de Poliedros

Por facetamento (*faceting*), entendemos a operação segundo a qual são definidos novos polígonos (*facets*, no original, que traduziremos para facetas) a partir dos vértices de um poliedro pré-existente. Estes polígonos, por sua vez, são as faces de novos poliedros. As arestas das facetas podem corresponder, por exemplo, a diagonais faciais ou a diagonais internas do poliedro inicial. Através da estrelação (*stellating*), os planos que contêm as faces de um poliedro intersectam-se até definirem novas faces, de outro poliedro. Facetar ou estrelar um poliedro implicam, respetivamente, remover determinadas porções ou adicionar-lhe outras, sendo por isso o facetamento uma operação subtrativa enquanto que a estrelação é uma operação aditiva.

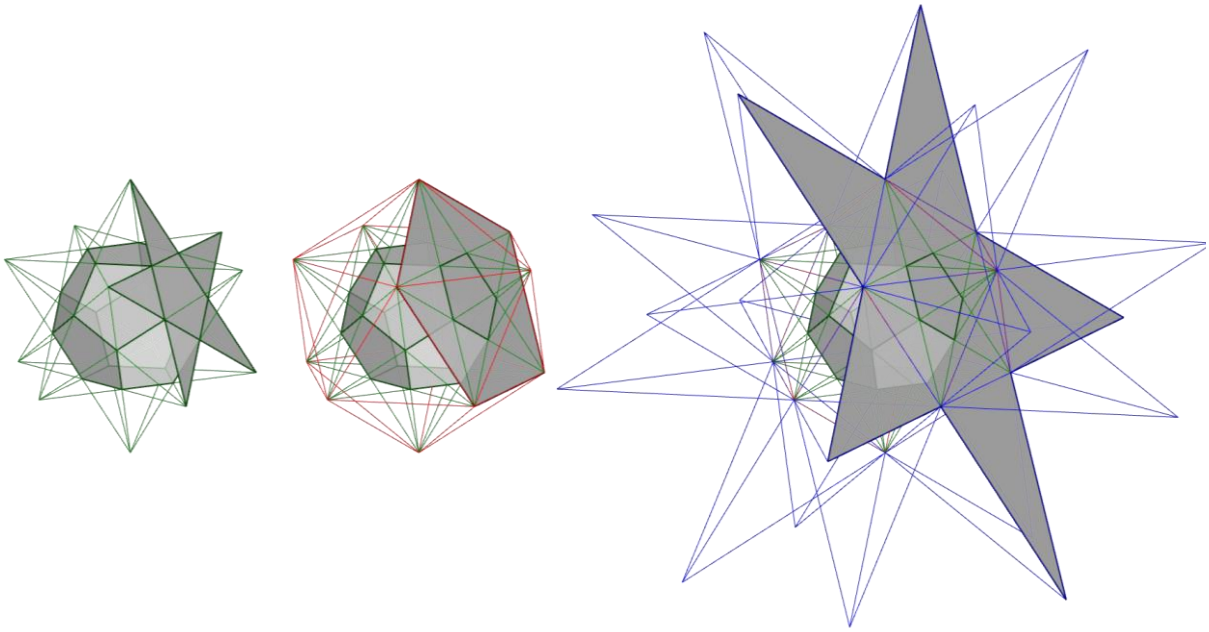
Coxeter (1973, p. 98-99) introduz os termos *core* e *case* para relacionar os conceitos de facetamento e de estrelação aos poliedros estrelados e compostos. O *core* é o maior poliedro convexo que pode ser definido no interior de um poliedro estrelado; enquanto que a *case* ou *convex hull* é o menor poliedro convexo que o pode conter. Um poliedro estrelado ou um composto de poliedros pode ser obtido por facetamento da sua *case*, porque os seus vértices coincidem com os vértices do poliedro inicial; ou por estrelação do seu *core*, que, com o poliedro inicial, partilha os planos das faces. Joseph Bertrand, em 1858, aplicou este processo aos poliedros convexos regulares para obter os quatro poliedros regulares estrelados (Cromwell, 1997, p. 281). Na Figura 237, mostra-se que, por estrelação do dodecaedro rômbico (a primeira, segundo Cundy e Rollet, 1989, p. 149), obtemos o composto de três octaedros não regulares também conhecido como *Sólido de Escher* (Figura 237a). Este poliedro tanto pode ser obtido através da estrelação do dodecaedro rômbico que é o seu *core* (que se evidencia na Figura 237b), como pelo facetamento do cuboctaedro que é a sua *case* (Figura 237c) e dual do dodecaedro rômbico.



a b c

Figura 237 - Na imagem da esquerda, mostra-se a primeira estrelação do dodecaedro rômbico. Ao centro, ilustra-se o seu *core* e à direita, a sua *case*.

Na Figura 238, mostram-se as três estrelações do dodecaedro pentagonal. Na Figura 238a, observa-se que as intersecções dos planos contendo as faces do dodecaedro definem as arestas das doze faces pentagramáticas do pequeno dodecaedro estrelado. Os vértices deste último definem a sua *case*, que é um icosaedro. O dodecaedro inicial é o seu *core*. Por facetamento do icosaedro, podemos definir as doze faces pentagonais do grande dodecaedro (Figura 238b). Estas faces resultam da segunda estrelação das faces do dodecaedro pentagonal. A *case* e o *core* do grande dodecaedro são os mesmos icosaedro e dodecaedro do pequeno dodecaedro estrelado. A terceira estrelação do dodecaedro inicial (ou a estrelação das faces do grande dodecaedro) permite-nos definir novos pentagramas, que correspondem às doze faces do grande dodecaedro estrelado, que se ilustra na Figura 238c. Neste caso, os seus *case* e *core* são dodecaedros convexos, podendo observar-se este último na imagem da direita. O pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro são, como já vimos, duais um do outro, da mesma forma que, de acordo com Inchbald (2008), o processo de facetamento é dual do processo de estrelação. Cada um deles pode ser obtido, tanto por estrelação do dodecaedro, como por facetamento do icosaedro.

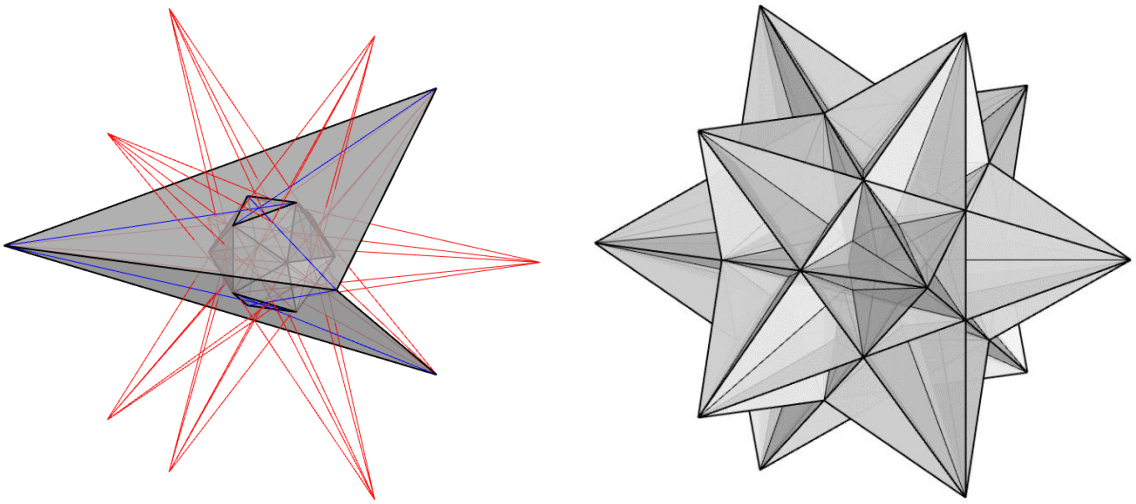


a b c

Figura 238 - Das sucessivas estrelações do dodecaedro regular, resultam: o pequeno dodecaedro estrelado (de arestas verdes); o grande dodecaedro (de arestas vermelhas); e o grande dodecaedro estrelado (a azul).

De entre as 59 possíveis estrelações para o icosaedro regular (considerando o icosaedro original como uma delas), existe uma que Arthur Cayley designou por grande icosaedro e que Coxeter e outros autores identificaram, em sétimo lugar, com a notação *G* (1982, p. 13) e se ilustra na

Figura 239b. Este poliedro regular estrelado, com vinte faces triangulares, é o dual do grande dodecaedro estrelado e tem um icosaedro por *case* e o icosaedro da Figura 239a por *core*. Wenninger (1975, p. 63) define o grande icosaedro como a décima sexta estrelação do icosaedro.



a b

Figura 239 - O único poliedro côncavo regular obtido por estrelação do icosaedro regular é o grande icosaedro. À esquerda, destaca-se (a azul) de que forma o prolongamento das alturas das faces do icosaedro nos permite definir duas faces do grande icosaedro. As linhas vermelhas correspondem às alturas de todas as faces do icosaedro, a partir das quais se determinaram os vértices do grande icosaedro (à direita).

Nas Figuras 240 a 243 enumeram-se as facetas regulares produzíveis nos poliedros convexos regulares (o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro regulares). de acordo com Cromwell (1987, p. 283). Desta análise, excluiu-se o tetraedro regular, porque os seus vértices não nos permitem definir outras facetas além das suas.

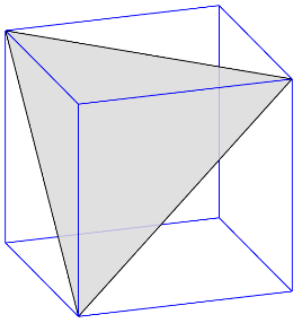


Figura 240 - Facetas triangulares regulares produzíveis no cubo.

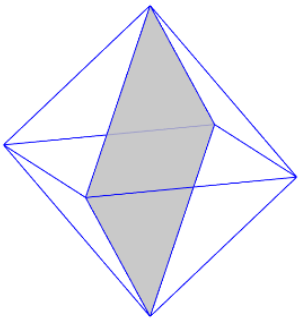


Figura 241 - Facetas quadradas produzíveis no octaedro

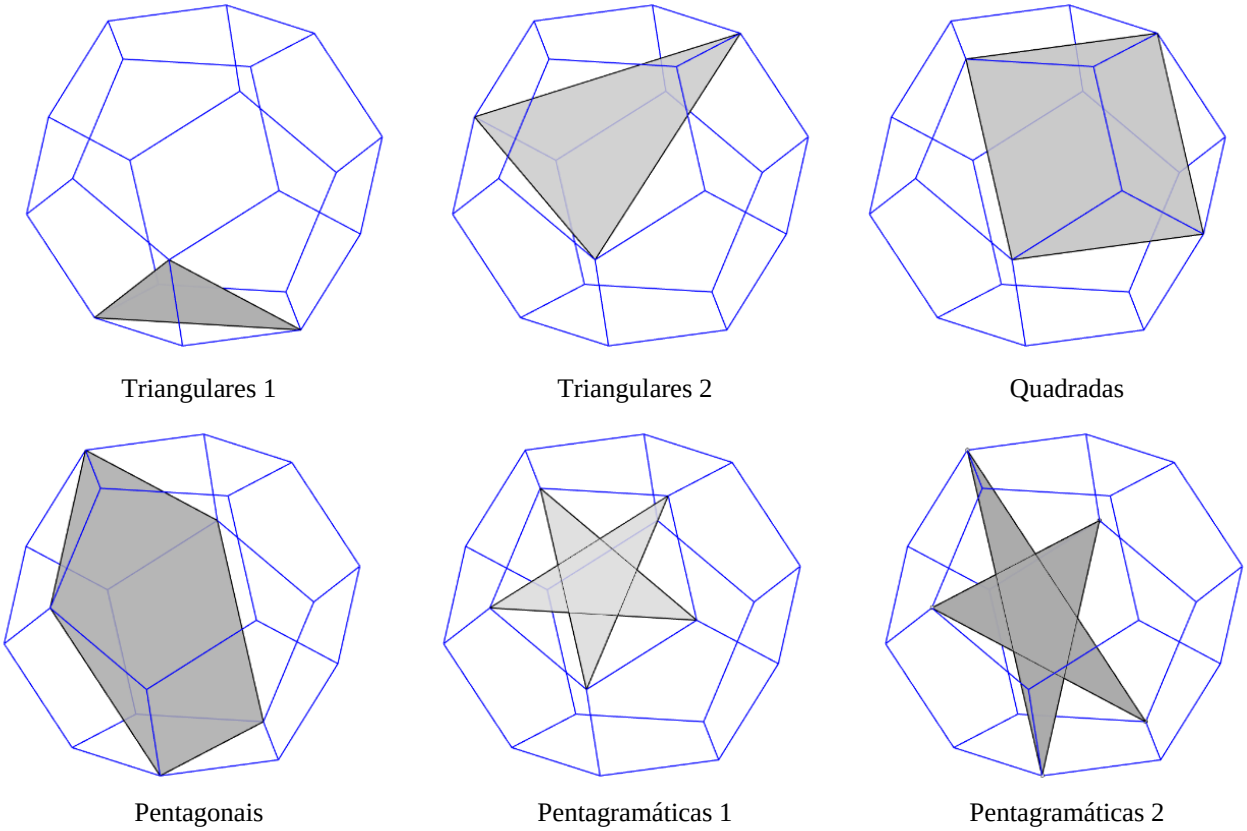


Figura 242 - Facetas regulares produzíveis no dodecaedro.

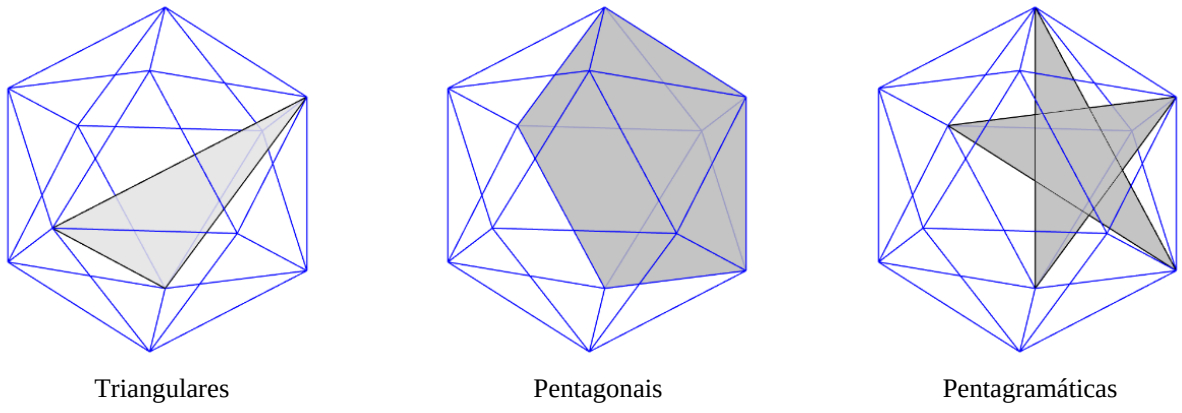


Figura 243 - Facetas regulares produzíveis no icosaedro.

De acordo com Coxeter (1973, p. 100), podemos obter os seguintes poliedros estrelados ou compostos a partir dos poliedros convexos regulares (e para além deles próprios):

- por facetamento do cubo (Figura 240): os dois tetraedros que definem a *stella octangula*, considerando as facetas triangulares. Este composto resulta ainda da estrelação do seu dual, o octaedro.

- por facetamento do dodecaedro (Figura 242): o grande dodecaedro estrelado, considerando as facetas pentagramáticas maiores (com a legenda "Pentagramáticas 2"); o composto de cinco cubos, com as facetas quadradas; o composto de cinco tetraedros e o composto de dez tetraedros, com as facetas triangulares maiores (com a legenda "Triangulares 2"). Estes últimos dois compostos admitem versões enantiomórficas;
- por facetamento do icosaedro (Figura 243): o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro e o grande icosaedro considerando, respetivamente, as facetas pentagramáticas, pentagonais e triangulares.

Wenninger relata-nos (1983, p. 5) o facto de ter conjeturado se o dual de qualquer poliedro uniforme côncavo não seria uma forma estrelada do dual do invólucro convexo que contém o poliedro inicial. A conjetura de Wenninger seria confirmada por Martyn Cundy, de que Wenninger cita (1983, p. 5) uma justificação detalhada que fundamenta a conclusão de que todos os duais dos poliedros côncavos uniformes resultam da estrelação dos duais dos respetivos invólucros convexos. Esta conjetura terá surgido no seguimento da afirmação de Coxeter (1973, p. 99) segundo a qual um composto de poliedros pode ser obtido através da estrelação do seu *core* (que, com o poliedro inicial, partilha os mesmos planos das faces) ou pelo facetamento da sua *case* (com quem partilha os mesmos vértices). Pudemos comprovar esta afirmação com a *stella octangula* da Figura 206, que tanto pode ser obtida através da estrelação do octaedro (o *core* dos tetraedros duais) como pelo facetamento da sua *case* (o cubo envolvente).

Recordamos a seguir alguns exemplos que comprovam a conjetura de Wenninger.

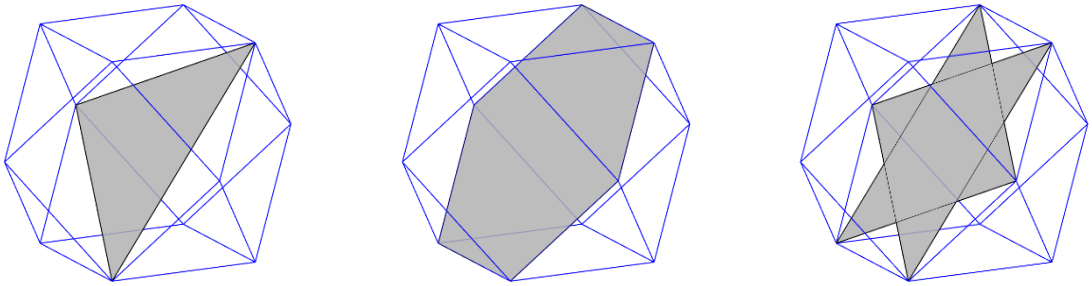
Conforme vimos na Figura 211, o dual do pequeno dodecaedro estrelado é o grande dodecaedro. Segundo a conjetura, o grande dodecaedro resultaria da estrelação do dual do menor poliedro convexo que envolve o pequeno dodecaedro estrelado. Este invólucro convexo é o icosaedro e o seu dual é o dodecaedro - o grande dodecaedro é, por isso, e como vimos na Figura 238b, uma das estrelações deste último. Ainda na categoria dos poliedros regulares, cabe mencionar que o dual do grande dodecaedro estrelado é o grande icosaedro, que resulta da estrelação do icosaedro. O icosaedro, por seu lado, é o dual do dodecaedro que envolve o grande dodecaedro estrelado.

O grande triacontaedro rômbico é o dual do grande icosidodecaedro, que ilustrámos na Figura 216. O invólucro convexo deste último é o icosidodecaedro e o seu dual é o triacontaedro rômbico. Na Figura 218b, tínhamos ilustrado este triacontaedro rômbico, de modo a evidenciar que as faces do poliedro côncavo são um dos resultados da sua estrelação.

1.4.2. Facetamento dos poliedros convexos quasirregulares

Ilustramos a seguir as facetas regulares produzíveis nos dois poliedros convexos quasirregulares, de acordo com Viana (2018b, 755).

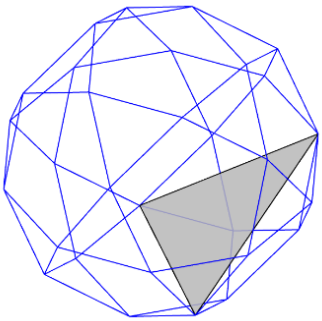
Na Figura 244, vemos que as facetas regulares produzíveis no cuboctaedro são apenas três, sendo duas delas convexas e uma, estrelada. As facetas hexagonais permitem-nos definir os hemipoliedros quasirregulares das Figuras 72 e 73.

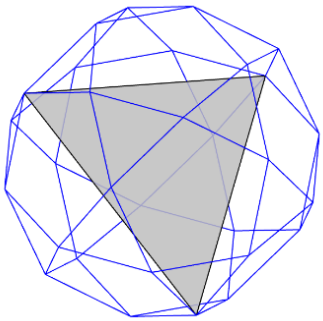


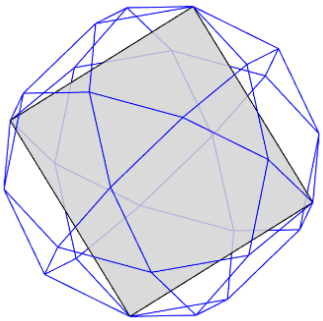
Triangulares Hexagonais Hexagramáticas

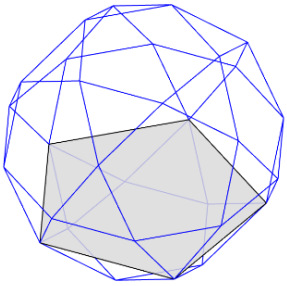
Figura 244 - Facetas regulares produzíveis no cuboctaedro.

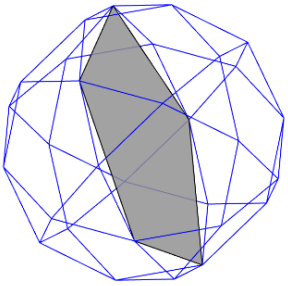
Na Figura 245, ilustram-se as facetas regulares de dois tipos (triangulares e pentagonais) que são produzíveis no icosidodecaedro. O facetamento do icosidodecaedro é bastante mais profícuo do que o cuboctaedro e permite-nos definir vários poliedros estrelados uniformes (alguns dos quais ilustrámos anteriormente) e, entre outros, o composto de cinco octaedros (que ilustraremos na Figura 427) considerando as facetas triangulares menores identificadas na Figura 245 com a legenda “Triangulares 1”.

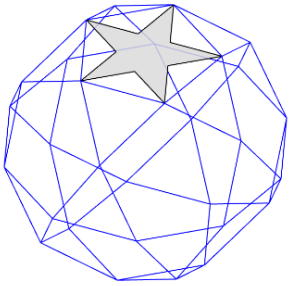

Triangulares 1

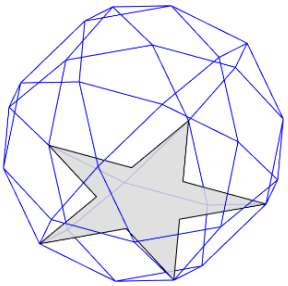

Triangulares 2

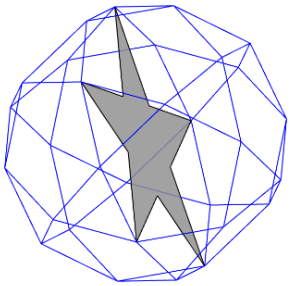

Quadradas

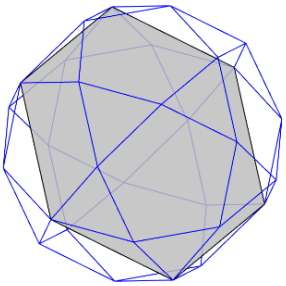

Pentagonais 1

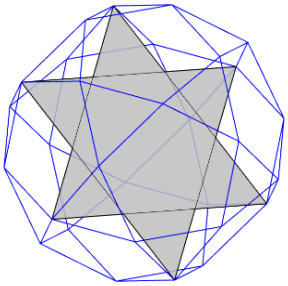

Pentagonais 2

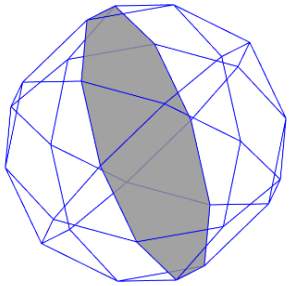

Pentagramáticas 1


Pentagramáticas 2


Pentagramáticas 3


Hexagonais


Hexagramáticas


Decagonais

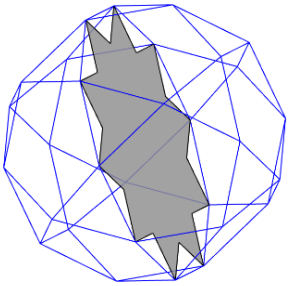

Decagramáticas

Figura 245 - Facetas regulares produzíveis no icosidodecaedro.

CAPÍTULO II | TESSELAÇÕES

2.1.1. Tesselações planas monoédricas[30]

Uma tesselação plana (que Coxeter (1973, p. 58) designa também como *two-dimensional honeycomb*[31]) é um conjunto infinito de polígonos que cobrem o plano uma única vez sem espaços intermédios nem sobreposições, de modo a que cada lado de cada um dos polígonos pertença, também, a outro polígono (Coxeter, 1973, p. 58). Coxeter acrescenta que qualquer tesselação plana pode ser considerada como um poliedro "degenerado" cujo centro tenha retrocedido para o infinito (Coxeter, 1973, p. 61). É, aliás, de acordo com esta perspetiva que é secundada por Grünbaum (1977, pp. 6-7), que as tesselações planas regulares que ilustrámos nas Figuras 54 a 56, podem ser consideradas como uma classe de poliedros regulares.

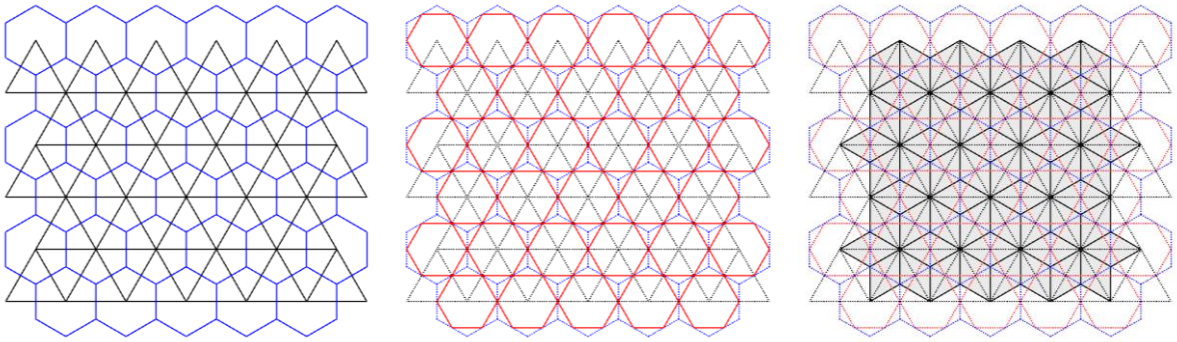
Com o objetivo de clarificar definições, ao longo deste trabalho, diferenciaremos *pavimentação* (*tiling*, em inglês) de *tesselação*, (*tessellation*) reservando o primeiro termo para as situações em que os ladrilhos (*tiles*) são figuras bidimensionais de qualquer tipo (como, por exemplo, em obras de Mauritis Cornelius Escher), mas restritos a discos topológicos que tenham por fronteira uma única curva simples fechada (Grünbaum e Shephard, 1987, p. 17). Na linha de autores como Ball e Coxeter (1987), Cundy e Rollet (1989) ou Pugh (1976), reservaremos o termo *tesselação* para o preenchimento do plano com polígonos (embora estes, ao contrário do que Weisstein (s.d.) defende, possam não ser regulares), designando-os por faces da tesselação.

Se nos restringirmos às tesselações monoédricas ou puras (Veloso, 1998, p. 208) e nestas, às que são exclusivamente definidas por polígonos regulares (isto é, em que todos as faces são réplicas de um polígono regular), concluímos que as possibilidades estão limitadas às seguintes, definidas por polígonos cujos ângulos internos sejam números inteiros e submúltiplos de 360º: seis triângulos equiláteros, quatro quadrados e três hexágonos regulares por vértice. A estes poliedros infinitos, em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos regulares, atribuem-se, respetivamente, as notações {3, 6}, {4, 4} e {6, 3} ou (3^6), (4^4) e (6^3), de acordo com Grünbaum e Shephard, 1977, p. 229). Estas tesselações, que eram já do conhecimento dos Pitagóricos (Hales, p. 20) são regulares porque têm, tal como os poliedros regulares finitos, faces, arestas e vértices transitivos.

[30] Nota sobre as notações adotadas para as tesselações planas uniformes: Para as tesselações planas, as notações utilizadas descrevem a configuração e sequência de faces em torno de cada vértice e seguem as utilizadas por Grünbaum e Shephard (1987). As notações (3^6) ou (3.3.3.3.3.3) e $(3^3.4^2)$, por exemplo, correspondem a tesselações planas em que seis faces triangulares regulares, no primeiro caso, e três faces triangulares e duas quadradas, no segundo, se intersectam em cada vértice.

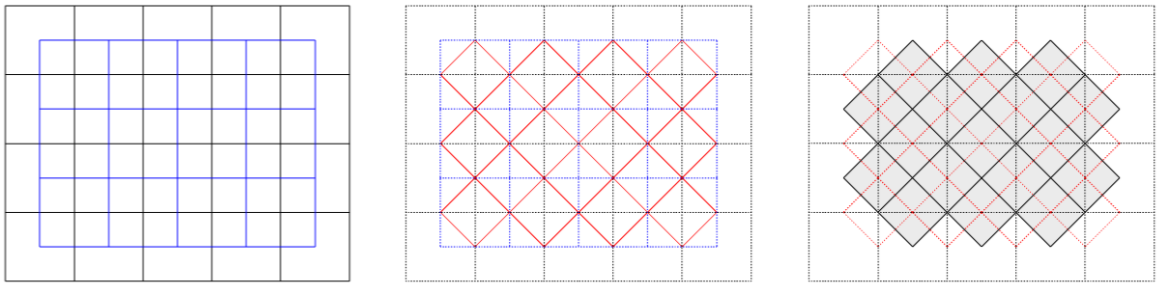
[31] A palavra *honeycomb*, segundo Weisstein (s/d), designa qualquer tesselação definida por polítopos *n*-dimensionais.

As tesselações regulares (3^6) e (6^3) são duais entre si, porque os centros das faces de uma definem a outra, com arestas perpendiculares à tesselação inicial (Figuras 246a e 248a). Se as duas tesselações forem sobrepostas de modo a se bissectarem nas arestas, os pontos médios das arestas definem a tesselação quasirregular (3.6.3.6), como se mostra nas Figuras 246b e 248b). Dito de outra forma, nesta situação de reciprocidade entre as duas tesselações, as suas figuras verticiais definem uma tesselação que é isogonal e isotoxal e na qual faces triangulares e hexagonais regulares se intersectam alternadamente.



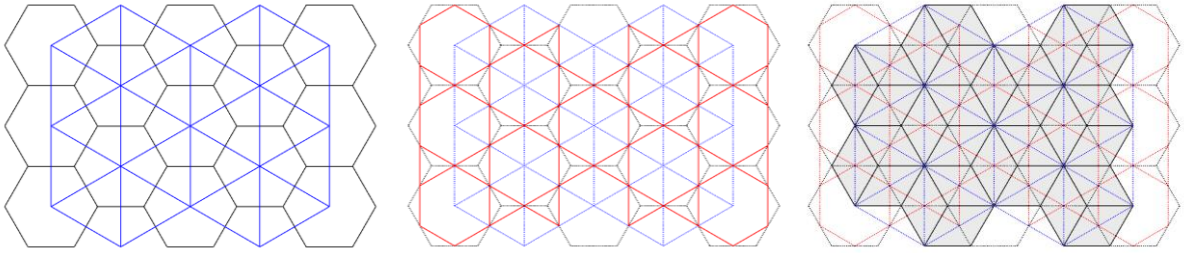
a b c

Figura 246 - A tesselação (3^6) que, na figura, se representa, a preto, é recíproca da (6^3), a azul. Nesta situação, as figuras verticiais de ambas definem a tesselação (3.6.3.6), a vermelho. Os centros das faces de (3.6.3.6) definem a sua tesselação dual, de faces rômbicas (a cinzento).



a b c

Figura 247 - A tesselação (4^4) é dual de si própria. Nesta situação, as figuras verticiais definem outra tesselação (4^4), a vermelho, cujos centros das faces definem uma tesselação dual, igual (a cinzento).



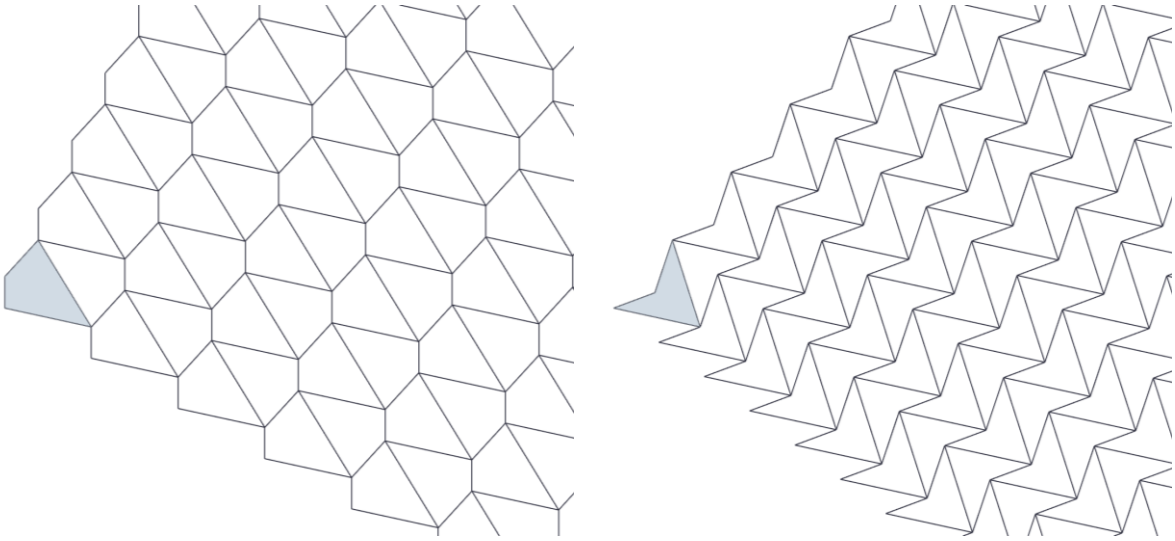
a b c

Figura 248 - A tesselação (6^3) que, na figura, se representa, a preto, é recíproca da (3^6), a azul. Nesta situação, as figuras verticiais de ambas definem a tesselação (3.6.3.6), a vermelho. Os centros das faces de (3.6.3.6) definem a sua tesselação dual, de faces rômbicas (a cinzento).

Coxeter denota que, nesta situação, as arestas de (3^6) e (6^3) definem as diagonais (maior e menor, respetivamente), de losangos iguais que, por sua vez, definem a tesselação dual da (3.6.3.6), conforme se ilustra nas Figuras 246c e 248c.

A tesselação (4^4) é dual de si própria (Figura 247a) e a tesselação definida pelas suas figuras verticiais (Figura 247b) é dual da tesselação de faces quadradas da Figura 247c.

Como breve desenvolvimento deste subcapítulo, importará mencionar que quaisquer triângulos ou quadriláteros iguais tesselam o plano (Kappraff, 1990, p. 175). No primeiro caso, cada triângulo deve ser rodado segundo um ângulo de 180º em torno do ponto médio de qualquer um dos seus lados, de modo a que cada par de triângulos justapostos defina um paralelogramo. De igual forma, quadriláteros iguais tesselam o plano, se cada par de quadriláteros justapostos definir um hexágono de lados opostos iguais e paralelos. Para tal, cada quadrilátero deve também ser rodado, segundo um ângulo de 180º, em torno do ponto médio de qualquer um dos seus lados, como acontece na tesselação da Figura 249a de quadriláteros convexos e na tesselação da Figura 249b de quadriláteros côncavos.

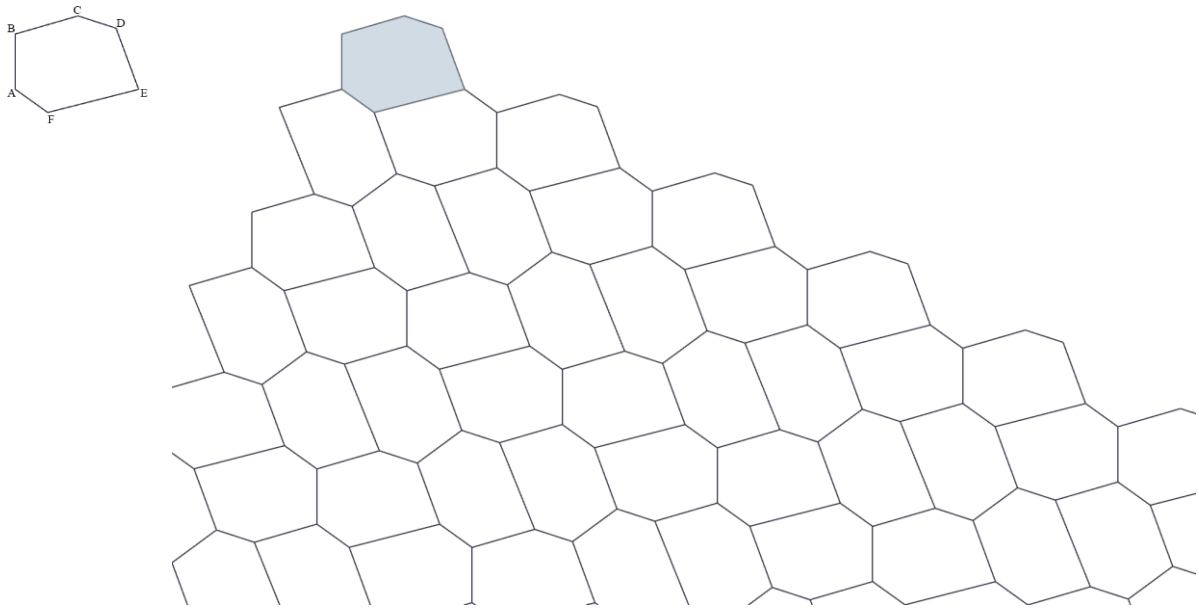


a b

Figura 249 - Exemplos de tesselações planas definidas por quadriláteros iguais (convexos e côncavos).

Pentágonos e hexágonos convexos iguais, em determinadas condições, também tesselam o plano, mas o mesmo não acontece com polígonos convexos iguais com número de lados igual ou superior a sete (Mann, Mcloud-Mann e Derau, 2017, p. 4). Ainda de acordo com os mesmos autores, é possível definir tesselações monoédricas com quinze tipos diferentes de pentágonos convexos irregulares. Rao (2017) conjeturou, num artigo ainda não publicado, não existirem

mais possibilidades para das quinze possibilidades, mencionando mais quatro tipos de pentágonos convexos que tesselam o plano, que caracterizou como casos particulares dos restantes. Quaisquer hexágonos de lados opostos iguais e paralelos tesselam o plano (como vimos na tesselação {6,3} e nas tesselações das Figuras 249a e 249b). Existem três classes de hexágonos convexos passíveis de definir tesselações monoédricas (Mann e outros, 2017, p. 4) e a Figura 250a ilustra a classe em que as faces se caracterizam por terem dois pares de lados opostos iguais (neste caso: o par [*CD*] e [*FA*] e o par [*BC*] e [*DE*]) e em que a soma das amplitudes dos ângulos em *A*, *B* e *D* perfaz 360º. Na Figura 250b, ilustra-se a tesselação resultante.



a b

Figura 250 - Exemplo de uma tesselação plana definida por hexágonos convexos iguais.

2.1.2. Tesselações planas uniformes

Se, das tesselações isogonais com polígonos regulares, excluirmos a condição de que as faces sejam iguais, concluímos que existem apenas oito possibilidades, que se designam como tesselações homogéneas, uniformes ou arquimedianas. Consideram-se equivalentes, no espaço, aos poliedros arquimedianos (Cundy e Rollet (1989, p. 60) e têm faces com a configuração de {3}, {4}, {6}, {8} e/ou {12}.

No grupo das tesselações planas uniformes, devem ser incluídas as três regulares, existindo, portanto, onze tesselações em que todas as faces (não necessariamente iguais) são regulares, e em que, segundo Veloso (1998, p. 215), dados dois vértices, existe sempre uma simetria do grupo de simetria da tesselação que transforma um vértice no outro. Nas Figuras 251 a 262 mostram-se estas onze tesselações uniformes, destacando-se, para cada uma, as faces que definem um dos vértices. A tesselação (3^4.6) existe em duas versões enantiomórficas (Figuras 254 e 255), que não são sobreponíveis "without turning the plane over" (Cundy e Rollet, 1989, p. 63) ou que, dito de outro modo, só serão sobreponíveis se o plano de uma for rebatido sobre o plano de outra. As notações utilizadas descrevem a configuração e sequência de faces em torno de cada vértice e seguem as utilizadas por Grünbaum e Shephard (1987). As notações (3^6) ou (3.3.3.3.3.3) e ($3^3.4^2$), por exemplo, indicam-nos que, no primeiro caso, seis faces triangulares regulares se intersectam em cada vértice, e que, no segundo caso, se intersectam três faces triangulares e duas quadradas.

A tesselação (3.6.3.6), mencionada a propósito das Figuras 246 e 248 e ilustrada na Figura 259, é quasirregular por ter arestas transitivas e as restantes, são semirregulares. Com a exceção da tesselação ($3^3.4^2$) da Figura 256, tanto as tesselações arquimedianas, como a regular (6^3) derivam, como Grünbaum e Shephard denotam (1987, p. 64), das tesselações (3^6) ou de (4^4), através da omissão de algumas uniões entre faces triangulares ou da truncatura de alguns vértices.

É ainda possível dividir o plano de forma periódica com polígonos regulares em tesselações isogonais com vértices de mais do que um tipo, que se designam, genericamente, como *k*-uniformes. Segundo Krötenheerdt (citado por Grünbaum e Shephard, 1987, p. 65), estas tesselações podem variar entre vértices entre dois e sete tipos distintos. Nenhuma delas será aqui analisada, dado que nos limitaremos às 1-uniformes. Nas 2-uniformes, habitualmente designadas como tesselações demirregulares, os vértices, de dois tipos distintos, conjugam vértices das tesselações que acabámos de mostrar. Segundo Krötenheerdt (citado por Grünbaum e Shephard, 1987, p. 66), existem vinte tesselações 2-uniformes, das quais se ilustra uma, na Figura 263.

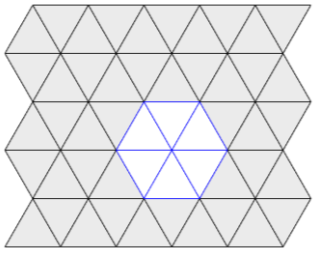


Figura 251 - (3^6)
tesselação regular.

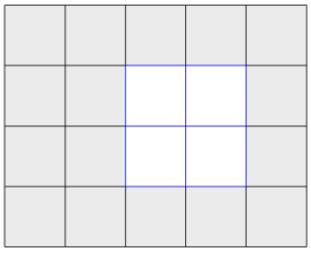


Figura 252 - (4^4)
tesselação regular.

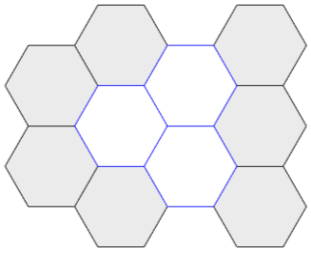


Figura 253 - (6^3)
tesselação regular.

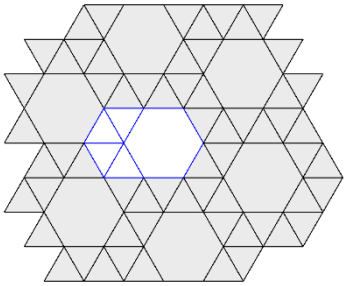


Figura 254 - ($3^4.6$), versão levogira. tesselação semirregular.

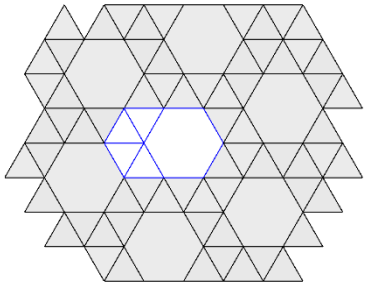


Figura 255 - ($3^4.6$), versão dextrogira. tesselação semirregular.

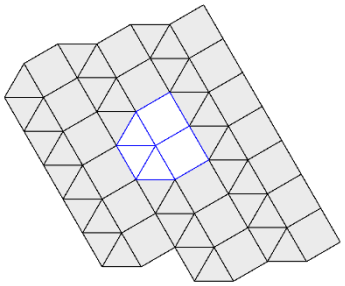


Figura 256 - ($3^3.4^2$)
tesselação semirregular.

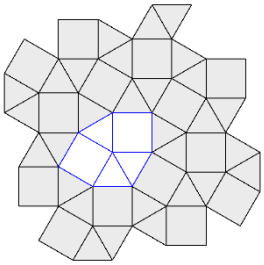


Figura 257 - ($3^2.4.3.4$)
tesselação semirregular.

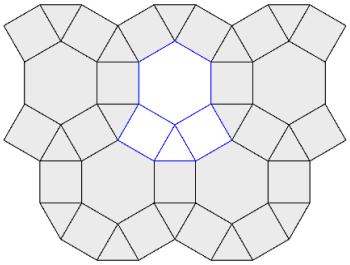


Figura 258 - (3.4.6.4)
tesselação semirregular.

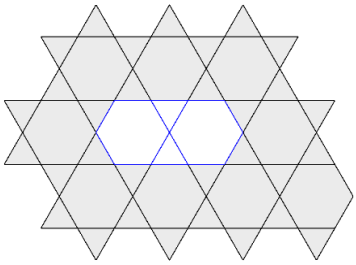


Figura 259 - (3.6.3.6)
tesselação quasirregular.

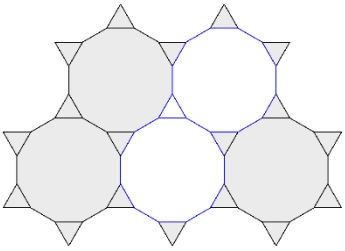


Figura 260 - (3.12^2)
tesselação semirregular.

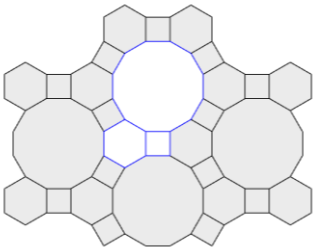


Figura 261 - (4.6.12)
tesselação semirregular.

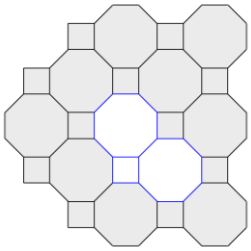


Figura 262 - (4.8^2)
tesselação semirregular.

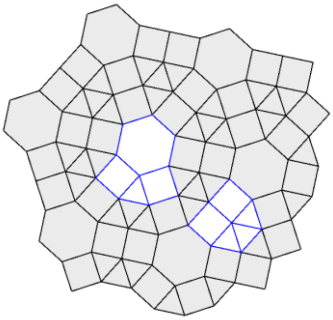


Figura 263 - A tesselação demirregular (4.6.12; 3.4.6.4) conjuga os vértices das tesselações semirregulares (4.6.12) e (3.4.6.4).

2.2.1. Tesselações monoédricas com poliedros convexos[32]

De modo semelhante às tesselações planas, uma tesselação sólida ou *three-dimensional honeycomb* é um conjunto infinito de poliedros que preenchem o espaço uma única vez, sem espaços intermédios nem sobreposições e de modo a que cada face de cada um dos poliedros pertença, também, a outro poliedro (Coxeter, 1973, p. 68). Os poliedros que preenchem o espaço designam-se, genericamente, como *space-fillers*. Nesta investigação, designaremos estes poliedros como células da tesselação ou tesselas, termo que é utilizado para designar peças de mosaicos.

Para que um conjunto de poliedros preencha o espaço, uma condição necessária e, por si só, evidente (Kappraff, 1990, p. 278) é que a soma das amplitudes dos ângulos diedrais dos poliedros com uma aresta em comum perfaça 360º. Embora necessária, esta condição, porém, não é suficiente. A este propósito, Soler menciona que quatro tetraedros truncados não preenchem o espaço, embora a soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre pares distintos de faces corresponda a "2 x (70º32') + 2 x (109º28') = 360º" (2006, p. 215). Os poliedros cujos ângulos diedrais sejam submúltiplos de 360º (como por exemplo, o cubo e o dodecaedro rômbico, cujos ângulos diedrais são 90º e 120º, respetivamente) enquadram-se naquela condição. A Figura 264 exibe os ângulos diedrais do octaedro truncado cuja amplitude, entre as faces hexagonais, é aproximadamente igual a 109,471221º e, entre as faces hexagonais e quadradas, a 125,26439º.

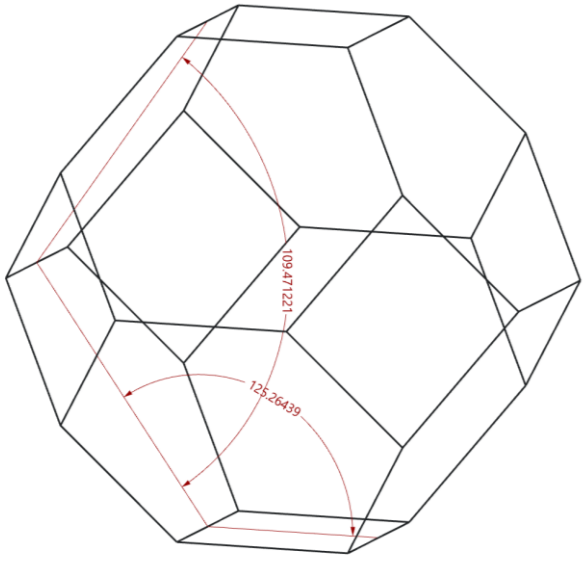


Figura 264 – A amplitude dos ângulos diedrais entre as faces hexagonais do octaedro truncado é igual a 109,471221º e, entre as faces hexagonais e quadradas, a 125,26439º.

[32] Nota sobre as notações adotadas para as tesselações sólidas uniformes: As notações das tesselações sólidas correspondem às utilizadas por Grünbaum (1994b, pp. 54-56), nas quais a notação de cada poliedro descreve a configuração e sequência de faces em cada vértice. (3.3.3), (4.4.4), e (3.4.3.4), por exemplo, identificam o tetraedro regular, o cubo e o cuboctaedro. No caso das tesselações sólidas, o expoente denota o número de poliedros em cada vértice. $(4.4.4)^8$, por exemplo, identifica a tesselação definida por oito cubos (#01).

Assim como o cubo e o dodecaedro rômbico, o octaedro truncado é capaz de tesselar o espaço por translação das suas réplicas, porque a soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre cada tríade de octaedros truncados com uma aresta em comum (Figura 265) também perfaz 360º.

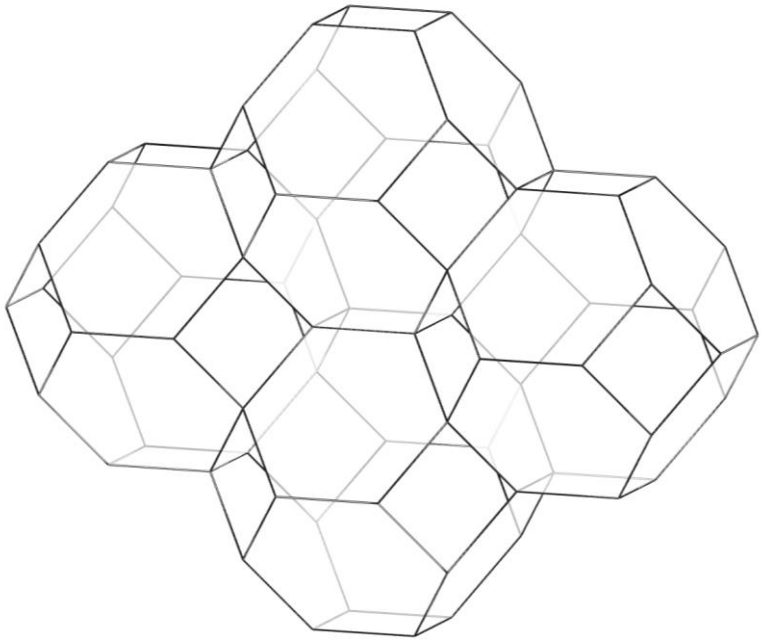


Figura 265 - A soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre as faces de octaedros truncados com arestas e faces em comum é igual a 360º (para melhor visualização, foram omitidas as faces quadradas).

Na Figura 266, mostra-se que a soma das amplitudes dos ângulos diedrais de um tetraedro regular e de um octaedro regular (aproximada e respetivamente, de 70,528779 e 109,471221) com uma face em comum perfaz 180º. Em determinadas condições, que mais adiante abordaremos, estes poliedros podem preencher o espaço de duas formas diferentes.

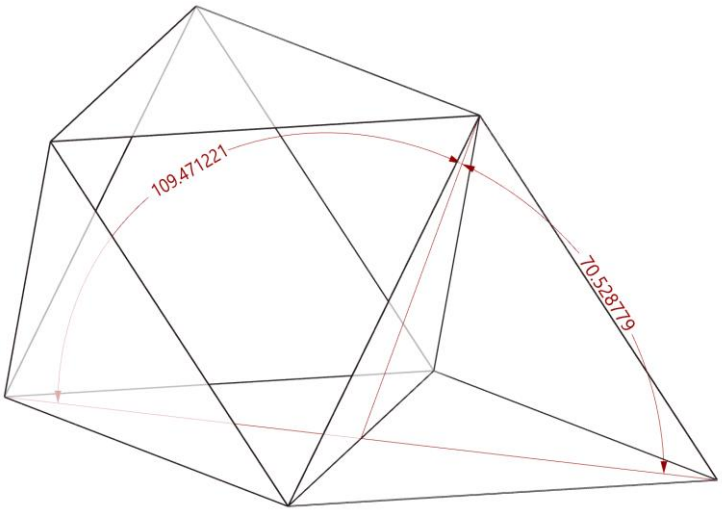


Figura 266 - A soma das amplitudes dos ângulos diedrais entre as faces de um tetraedro e um octaedro com uma face em comum é 180º (para melhor visualização, foram omitidas algumas faces).

Apesar de, com réplicas do dodecaedro pentagonal não ser possível preencher o espaço pelo facto de o ângulo diedral entre cada par de faces ser aproximadamente igual a 116, 565036º, no Capítulo III, mostrar-se-á uma das possibilidades de tesselar o espaço com dodecaedros pentagonais e outros poliedros. Se não existirem restrições quanto ao tipo de faces e à diversidade de poliedros que podem preencher o espaço, não haverá, segundo Pearce (1978, p. 38), limite para o número de combinações possíveis. Pearce acrescenta que a descoberta de um poliedro que preenche o espaço, por si só, não assume particular importância, a não ser pela relação que possa ter com os princípios ordenadores do espaço.

Em 1885, o cristalógrafo Evgar Fedorov identificou cinco poliedros convexos que preenchem o espaço sem que para tal tenham de mudar de orientação e designou-os por paraleloedros (Senechal, 2009, p. 20). Estes poliedros, também conhecidos como *Sólidos de Fedorov*, são designados por Coxeter como paraleloedros primários e definem uma classe especial de zonoedros (1973, pp. 29-30). Todos os paraleloedros primários convexos são zonoedros, dado que as suas faces são polígonos centralmente simétricos (Coxeter, 1973, p. 31) com número par de lados iguais e paralelos dois a dois (Ball e Coxeter, 1987, p. 141). Qualquer paraleloedro primário (como de resto, qualquer zonoedro) pode ser estendido ou comprimido, ou ter as suas faces distorcidas, mudando o comprimento dos segmentos de reta que unem os centros de faces opostas ou o ângulo entre cada par destes segmentos. Em nenhum destes casos, as capacidades de o paraleloedro preencher o espaço são alteradas (Lalvani, 1992).

Grünbaum (2010, p. 01) estabelece que os paraleloedros preenchem o espaço por translação das suas réplicas embora, assumindo divergir da definição de Fedorov, admita, sob esta designação, poliedros não-convexos. No ramo da cristalografia, os paraleloedros designam-se como células de Voronoi ou de Dirichlet-Voronoi. Senechal (1981, p. 234) assinala a sua importância para a cristalografia teórica, referindo-se-lhes como blocos construtivos dos reticulados espaciais ("building blocks of space lattices", no original) pelo facto de os seus centroides, distribuídos infinitamente no espaço de forma regular, definirem reticulados de pontos (*point lattices*).

Ilustramos a seguir todas as possibilidades combinatórias de paraleloedros primários convexos, que preenchem o espaço por translação das suas réplicas, a par de um vértice da tesselação respetiva. As Figuras 267 a 271 ilustram os cinco *Sólidos de Fedorov*: o cubo (representante de todos os romboedros); o prisma hexagonal semirregular, o dodecaedro rômbico, o dodecaedro alongado e o octaedro truncado. Na Figura 272, ilustra-se o sexto paraleloedro - um poliedro com doze faces rômbicas com as diagonais na proporção áurea, que é habitualmente designado

como segundo dodecaedro rômbico ou dodecaedro de Bilinski, para o diferenciar do dodecaedro rômbico de Kepler (Grünbaum 2010, p. 4). Grünbaum indica que este dodecaedro rômbico foi descrito em 1960 por Stansko Bilinski, mas Weisstein (s/d) afirma que John Lodge Cowley já o tinha descrito em 1752, tendo-o, na altura, apelidado de *dodecarhombus*.

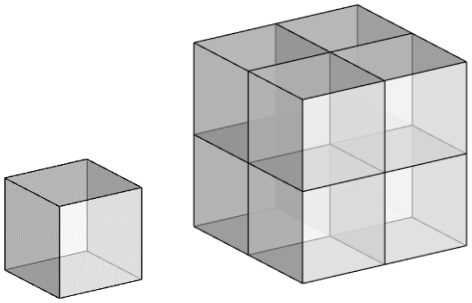


Figura 267 – Cubos
(oito, em cada vértice da tesselação).

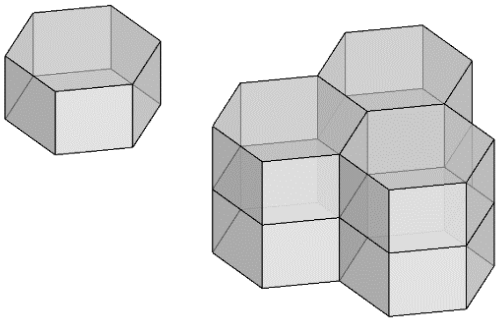


Figura 268 - Prismas hexagonais
(seis, em cada vértice da tesselação).

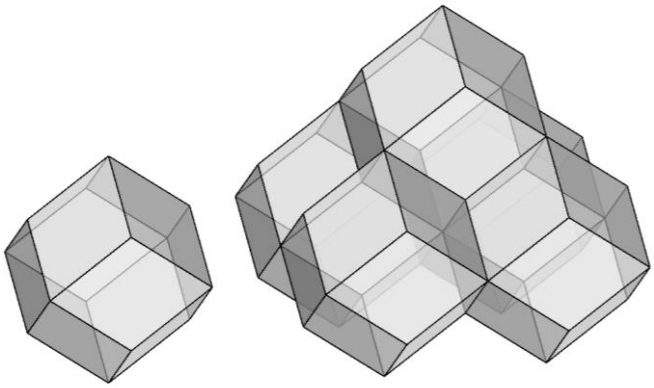


Figura 269 - Dodecaedros rômbicos de Kepler
(cinco, em cada vértice da tesselação).

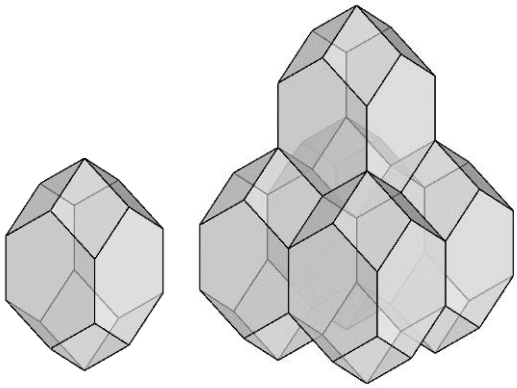


Figura 270 - Dodecaedros alongados
(cinco, em cada vértice da tesselação).

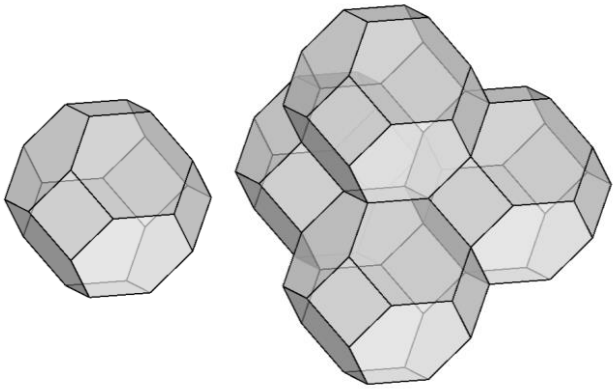


Figura 271 - Octaedros truncados
(quatro, em cada vértice da tesselação).

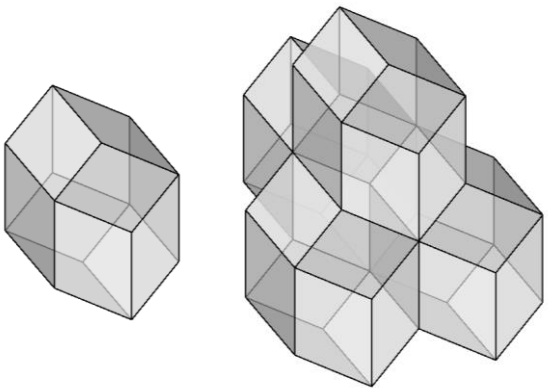
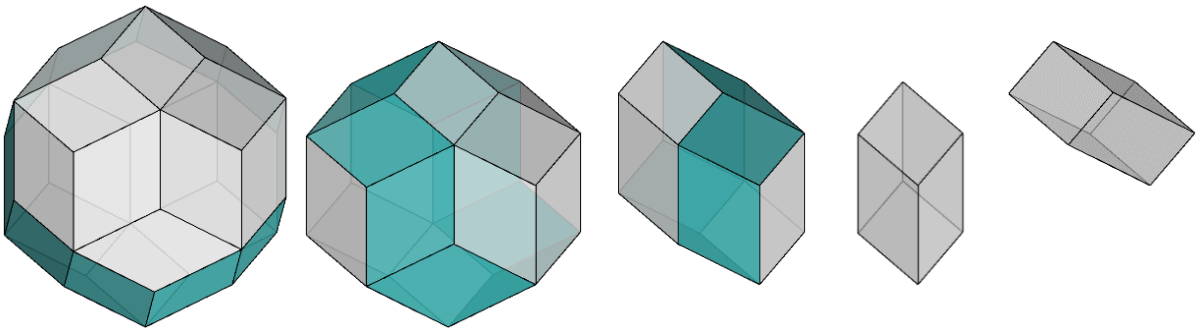


Figura 272 - Dodecaedros rômbicos de Bilinski
(quatro, em cada vértice da tesselação).

Bilinski provou ainda que o dodecaedro que descreveu era não só o sexto paraleloedro, mas também o (último) isozonoedro de ouro que faltava descobrir (Grünbaum 2010, p. 5). Um

isozonoedro é um zonoedro de faces rômbicas congruentes e, se as diagonais das suas faces estiverem na proporção áurea, será um isozonoedro de ouro. Existem apenas cinco, e todos descendem do triacontaedro rômbico, sendo obtidos através da supressão sucessiva de uma cintura de faces (Cromwell, 1997, p. 157) do isozonoedro anterior. Na Figura 273, podemos ver, da esquerda para a direita: o triacontaedro rômbico descrito por Kepler, com trinta faces rômbicas; o icosaedro rômbico, descrito por Fedorov, com vinte faces rômbicas; o dodecaedro rômbico de Bilinski, com doze faces rômbicas; e, por fim, os romboedros (agudo e obtuso) com seis faces rômbicas.



Triacontaedro rômbico | Icosaedro rômbico | Dodecaedro de Bilinski | Romboedro agudo (*prolate*) | Romboedro obtuso (*oblate*)

Figura 273 - Isozonoedros convexos de ouro descendentes do triacontaedro rômbico, que resultam da supressão sucessiva das faces destacadas a azul.

As tesselações sólidas e planas estão intrinsecamente relacionadas, porque, segundo Pugh (1976, p. 48), ao seccionar uma tesselação sólida, produz-se sempre algum tipo de tesselação plana. Nas Figuras 274 a 279, mostram-se algumas tesselações planas produzíveis nas tesselações de paraleloedros convexos por planos que contêm determinados vértices. A maioria das tesselações sólidas tem, implícita, uma tesselação plana uniforme, que se mostra com linha contínua azul; as que não o são, identificam-se com linha interrompida.

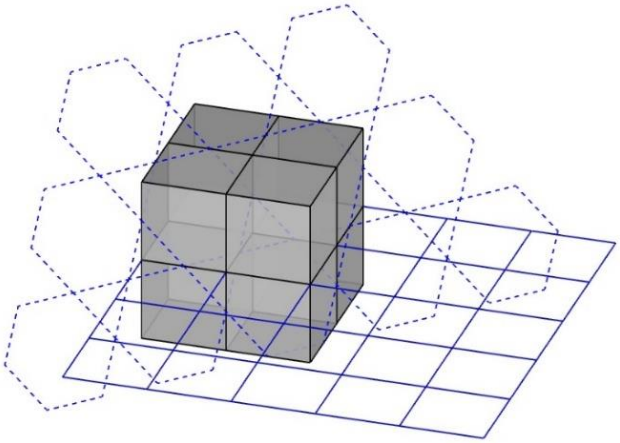


Figura 274 - Na tesselação definida por cubos, o plano paralelo a qualquer face produz a tesselação (4^4). Um plano perpendicular a uma diagonal espacial produz a tesselação (3^6); e a (3.6.3.6), se o plano, com essa orientação, contiver os pontos médios das arestas.

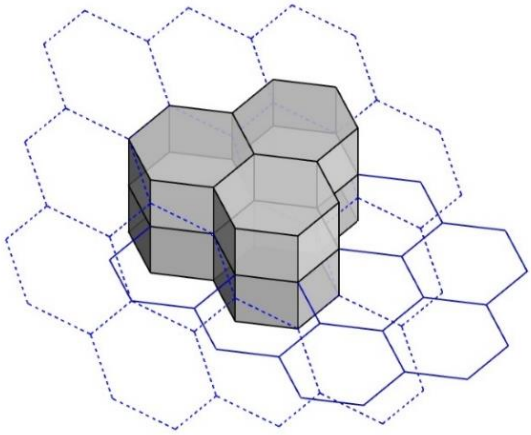


Figura 275 - Na tesselação definida por prismas hexagonais, o plano paralelo a qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3).

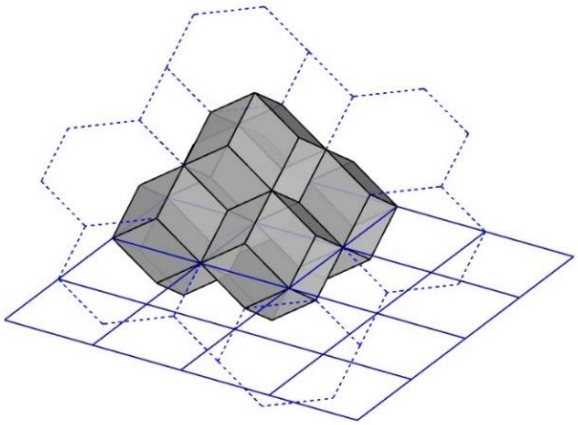


Figura 276 - Na tesselação definida por dodecaedros rômbicos de Kepler, qualquer plano perpendicular a um eixo de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4).

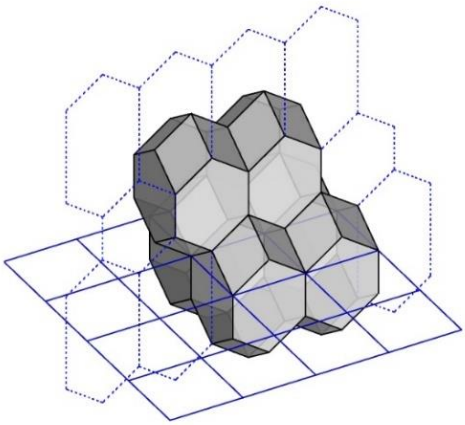


Figura 277 - Na tesselação definida por dodecaedros alongados, qualquer plano perpendicular a um eixo de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4).

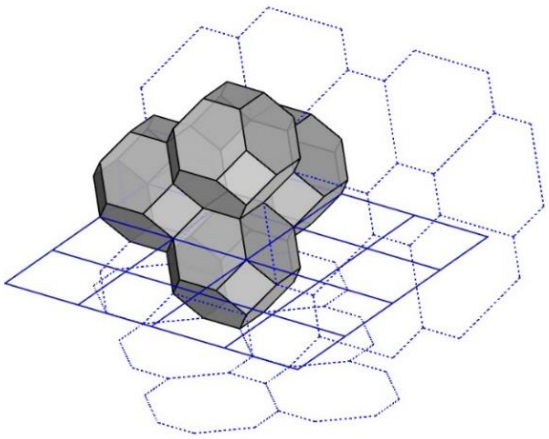


Figura 278 - Na tesselação definida por octaedros truncados, qualquer plano perpendicular a um eixo de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4), se contiver uma diagonal maior de uma face hexagonal.

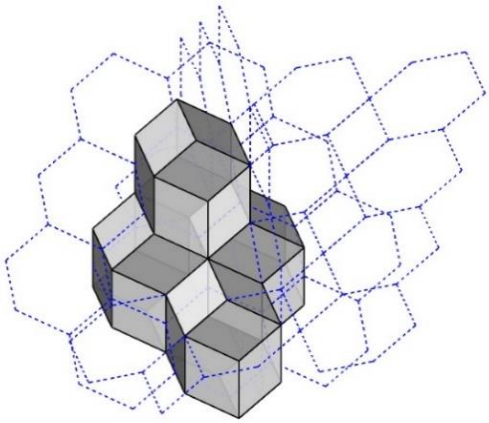


Figura 279 - Na tesselação definida por dodecaedros rômbicos de Bilinski, não existem tesselações de faces regulares produzíveis. Na imagem, a tesselação de faces hexagonais irregulares contém o ponto médio de determinadas arestas.

Ainda a propósito de paraleloedros, importa acrescentar que prismas triangulares iguais preenchem o espaço, mas não são paraleloedros, porque têm de mudar de orientação para tal. O girobiprisma (Sólido J26 de Johnson) também é um *space-filler*, mas não é um paraleloedro, porque precisa igualmente de mudar de orientação para preencher o espaço. O girobiprisma resulta da justaposição de dois prismas triangulares numa posição particular, que mais adiante identificaremos como Tesselação #27.

Um último apontamento para referir que é possível definir tesselações com quaisquer poliedros que resultem da partição de paraleloedros. Dependendo do tipo de partição escolhida (que determina a configuração de cada célula), estas tesselações poderão ser, ou não, monoédricas. Na Secção 3.8 do Capítulo III, ilustram-se algumas possibilidades.

2.2.2. Tesselações sólidas uniformes

Uma tesselação sólida será uniforme, se todas as células forem poliedros convexos uniformes e se os vértices da tesselação forem transitivos, definindo uma órbita sob simetrias da tesselação (Grünbaum 1994b, p. 50). Das tesselações com paraleloedros que vimos anteriormente, são uniformes as tesselações definidas por cubos (Figura 274), por prismas hexagonais (Figura 275) e por octaedros truncados (Figura 278).

Num artigo de 1900 intitulado *On the Regular and Semi-Regular Figures in Space of n Dimensions*, Thorold Gosset mencionou duas tesselações uniformes: a que é definida por cubos (Gosset, 1900, p. 44) e a que é definida por tetraedros e octaedros.

Em 1905, Alfredo Andreini publicou o artigo intitulado *On the regular and semiregular nets of polyhedra and on the corresponding correlative nets*, com um estudo sistemático das possibilidades de justapor poliedros face-a-face em tesselações uniformes. A lista de Andreini, que incluía vinte e cinco possibilidades e interessantes fotografias de modelos estereográficos (Figura 280), estava, no seu entender, completa. Grünbaum (1994b, p. 49) assinala que, na realidade, não só uma das tesselações fora erradamente considerada como uniforme, mas que a listagem não estava completa, uma vez que lhe faltavam quatro tesselações[33].

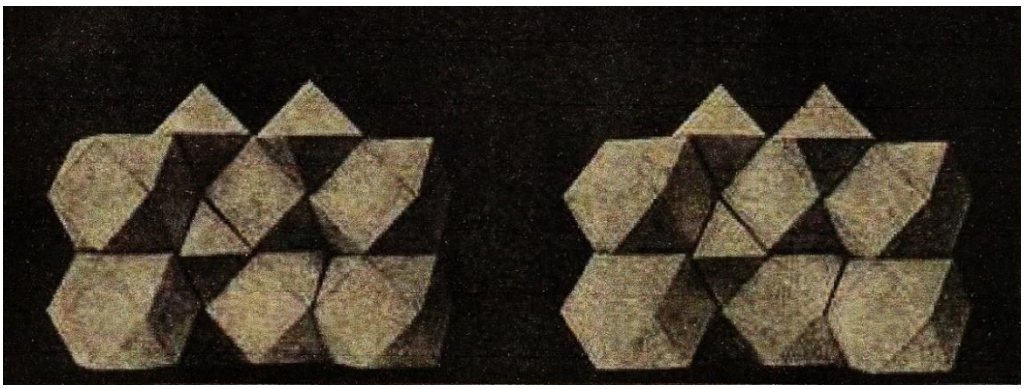


Figura 280 - Fotografia estereográfica da tesselação definida por cuboctaedros e octaedros (Andreini 1905, Figura 18, pg. 108).

Keith Critchlow e Robert Williams publicaram livros em que este assunto foi abordado, mas de forma ainda mais incompleta do que Andreini e sem prévio conhecimento do seu trabalho. No Apêndice 2 do seu livro *Order in Space* (1969), Critchlow ilustrou sete tesselações que não são

[33] As quatro últimas, que se identificam como Tesselações #25, #26, #27, #28.

uniformes; vinte e uma tesselações uniformes[34]; e uma, que deveria ser uniforme (definida por dois prismas triangulares e quatro prismas dodecagonais), ilustrada de forma incorreta. No livro *The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design* (1979, pp. 167-182), Williams ilustrou, para além de cinco tesselações não uniformes, catorze tesselações uniformes[35]. Peter Jon Pearce (1978, p. 43-47) abordou também as tesselações uniformes no livro *Structure in Nature is a Strategy for Design* com conhecimento do trabalho de Andreini (1978, p. 240), mas mencionou apenas vinte e três delas (onze das quais ilustradas em fotografias muito bem conseguidas, de modelos em papel).[36] Até finais do Século XX, e de acordo com Deza e Shtogrin (2000, p. 1), listagens incompletas sobre a partição uniforme do espaço tridimensional eram muito frequentes na literatura matemática.

Em 1991, Norman Johnson concluiu uma investigação com o título *Uniform Polytopes* que não chegou a sair da versão de manuscrito. Nele afirma existirem vinte e oito possibilidades diferentes de poliedros convexos de faces regulares tesselarem o espaço, intersectando-se da mesma forma em todos os vértices e de modo a existir uma simetria na tesselação que transforma um vértice noutro vértice qualquer. Depois de analisar os trabalhos de Andreini, Critchlow e Williams, Grünbaum examinou ele próprio todas as possibilidades de preencher o espaço uniformemente e, no artigo *Uniform Tilings Of 3-Space*, citou e confirmou os resultados de Johnson (1994b, p. 49). De acordo com Olshevsky (2006, p. 5), porém, estes resultados ainda não foram comprovados.

Segundo Pearce (1978, p. 43), poliedros distintos poderão tesselar o espaço uniformemente, se tiverem faces paralelas correspondentes em comum. Concluímos por isso que só é possível definir tesselações uniformes com: cubos, tetraedros, octaedros, cuboctaedros, tetraedros truncados, octaedros truncados, cubos truncados, rombicuboctaedros, cuboctaedros rombitruncados, prismas triangulares, prismas hexagonais, prismas octogonais e prismas dodecagonais.

Entre as Figuras 281 a 308, mostram-se as vinte e oito tesselações sólidas uniformes (Viana, 2018b). Grünbaum apelida dezoito delas como “stacks of slabs”, o que poderemos traduzir como pilhas ou camadas de placas, e define um *slab* como a parte do espaço compreendida entre um par de planos paralelos (1994b, p. 52). Destas, onze são obtidas por extrusão ao longo

[34] Estas tesselações correspondem às Tesselações #01, #02, #03, #04, #05, #06, #07, #08, #09, #11, #12, #13, #14, #15, #16, #17, #18, #19, #20, #22 e #23.
[35] Correspondem às Tesselações #01, #02, #03, #04, #05, #06, #07, #08, #09, #10, #11, #12, #13 e #15. As Tesselações #14 e #16 a #23 são apenas mencionadas por Williams; a Tesselação #21 é ilustrada incorretamente.
[36] As tesselações não abordadas por Pearce são as Tesselações #24, #25, #26, #27 e #28..

do vetor normal a cada uma das tesselações planas das faces e posterior translação: as Tesselações #01, #14, #15, #16, #17, #18, #19, #20, #21, #22 e #23. As Tesselações #27 e #28 correspondem a versões alongadas ou giradas (segundo a terminologia de Johnson) da Tesselação #14. Nas ilustrações das Tesselações #02, #24, #25, #26, torna-se mais percetível a posição dos octaedros envolvidos se estes forem observados como antiprismas triangulares. A Tesselação #03 envolve tetraedros e tetraedros truncados e as restantes dez, são ligeiramente mais elaboradas do que as anteriores. Das vinte e oito, Conway e outros autores (2008, pp. 292-298) destacam as Tesselações #01 a #13, considerando-as análogas das tesselações planas arquimedianas e pelas particularidades das suas tesselações duais, que abordaremos a seguir. Atribuem-lhes designações especificas (que, nas legendas das Figuras seguintes) se apresentam em itálico) e designam-nas, genericamente, como tesselações arquitetónicas, acrescentando que o termo que escolheram é apropriado, não só porque a Arquitetónica é a teoria do *Design* estrutural, mas também porque o início da palavra os recorda de Arquimedes (2008, p. 292).

As notações dos poliedros uniformes e das tesselações sólidas seguem as de Grünbaum (1994b, pp. 54-56). A notação de cada poliedro descreve a configuração e sequência de faces em cada vértice: (3.3.3), (4.4.4), e (3.4.3.4), por exemplo, identificam o tetraedro regular, o cubo e o cuboctaedro. No caso das tesselações sólidas, o expoente denota o número de poliedros em cada vértice: $(4.4.4)^8$, por exemplo, identifica a tesselação definida por oito cubos (#01). As descrições de cada tesselação foram adaptadas de Pearce (1978, pp. 41-50). Grünbaum (1994b, pp. 54-56) e Conway (2008, pp. 292-298).

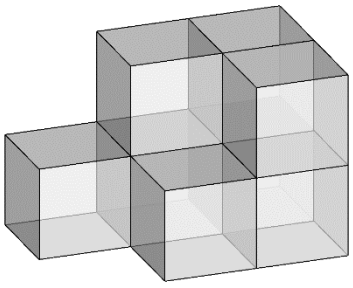


Figura 281 - Tesselação #01
$(4.4.4)^8$
CUBILLE
8 Cubos.

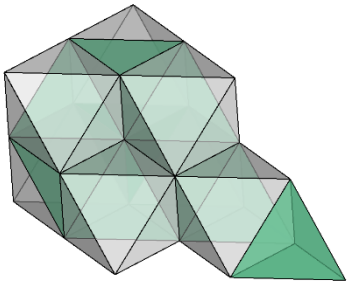


Figura 282 - Tesselação #02
$(3.3.3)^8.(3.3.3.3)^6$ - A
TETROCTAHEDRILLE
8 Tetraedros,
6 Octaedros.

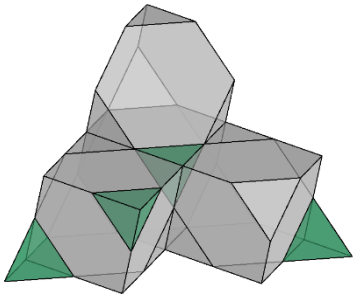


Figura 283 - Tesselação #03
$(3.3.3)^2.(3.6.6)^6$
TRUNCTETRAHEDRILLE
2 Tetraedros,
6 Tetraedros Truncados.

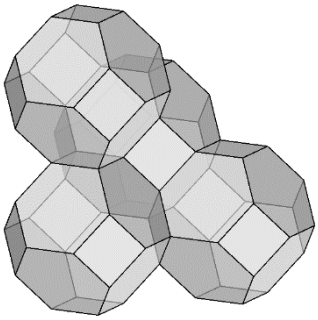


Figura 284 - Tesselação #04
$(4.6.6)^4$
TRUNCOCTAHEDRILLE

4 octaedros truncados.

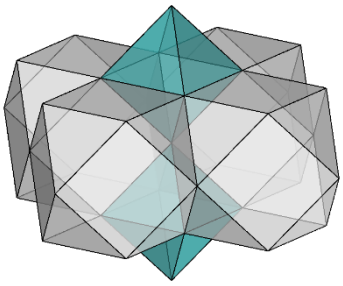


Figura 285 - Tesselação #05
$(3.3.3.3)^2.(3.4.3.4)^4$
CUBOCTAHEDRILLE

2 octaedros,
4 cuboctaedros.

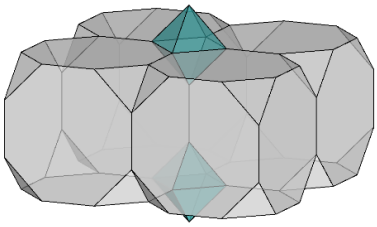


Figura 286 - Tesselação #06
$(3.3.3.3).(3.8.8)^4$
TRUNCATED CUBILLE

1 octaedro,
4 cubos truncados.

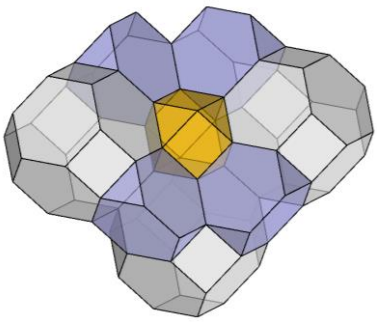


Figura 287 - Tesselação #07
$(3.4.3.4).(3.6.6)^2.(4.6.6)^2$
TRUNCATED TETROCTAHEDRILLE

1 cuboctaedro,
2 tetraedros truncados,
2 octaedros truncados.

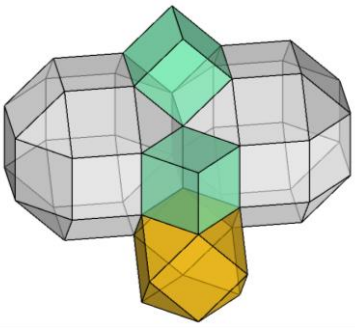


Figura 288 - Tesselação #08
$(3.4.3.4).(3.4.4.4)^2.(4.4.4)^2$
2-RCO-HEDRILLLE

1 cuboctaedro,
2 rombicuboctaedros,
2 cubos.

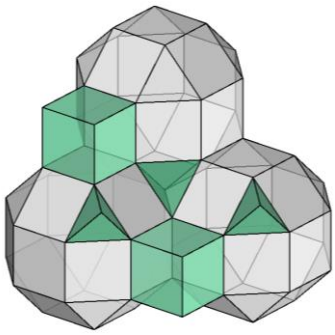


Figura 289 - Tesselação #09
$(3.3.3).(3.4.4.4)^3.(4.4.4)$
3-RCO-HEDRILLLE

1 tetraedro,
3 rombicuboctaedros,
1 cubo.

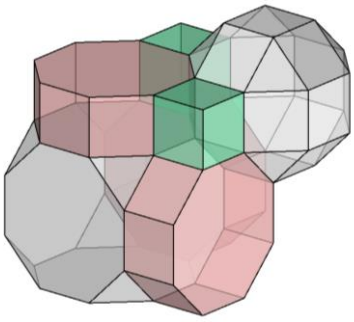


Figura 290 - Tesselação #10
$(3.4.4.4).(3.8.8).(4.4.4).(4.4.8)^2$
1-RCO-HEDRILLLE

1 rombicuboctaedro,
1 cubo truncado,
1 cubo,
2 prismas octogonais.

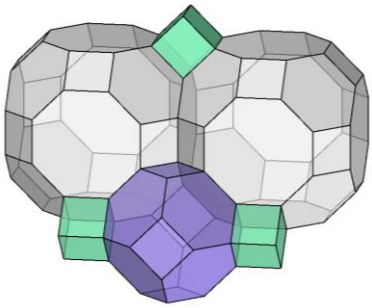


Figura 291 - Tesselação #11
$(4.4.4).(4.6.6).(4.6.8)^2$
n-tCO-HEDRILLE

1 cubo,
1 octaedro truncado,
2 cuboctaedros rombitruncados.

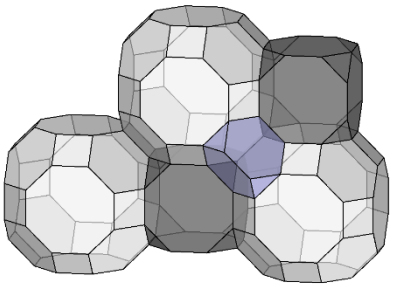


Figura 292 - Tesselação #12
$(3.6.6).(3.8.8).(4.6.8)^2$
f-tCO-HEDRILLE

1 tetraedro truncado,
1 cubo truncado,
2 cuboctaedros rombitruncados.

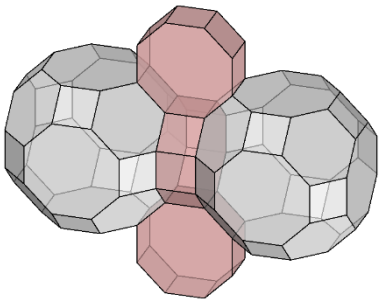


Figura 293 - Tesselação #13
$(4.4.8)^2.(4.6.8)^2$
b-tCO-HEDRILLE

2 prismas octogonais,
2 cuboctaedros rombitruncados.

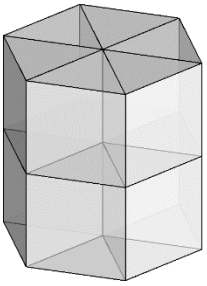


Figura 294 - Tesselação #14
$(3.4.4)^{12}$ - A

12 prismas triangulares.

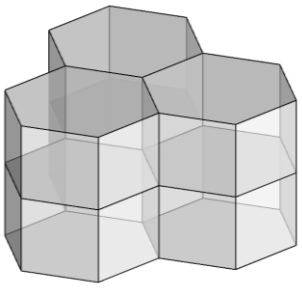


Figura 295 - Tesselação #15
$(4.4.6)^6$

6 prismas hexagonais.

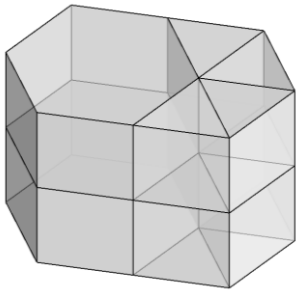


Figura 296 - Tesselação #16
$(3.4.4)^8.(4.4.6)^2$

8 prismas triangulares,
2 prismas hexagonais.

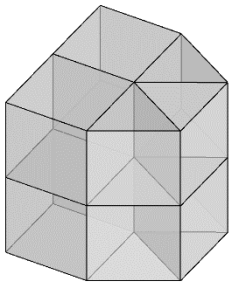


Figura 297 - Tesselação #17
$(3.4.4)^6.(4.4.4)^4$ - A

6 prismas triangulares,
4 cubos.

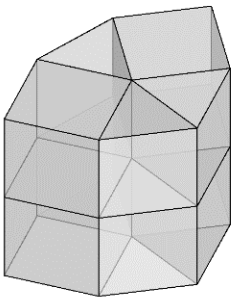


Figura 298 - Tesselação #18
$(3.4.4)^6.(4.4.4)^4$ - B

6 prismas triangulares,
4 cubos.

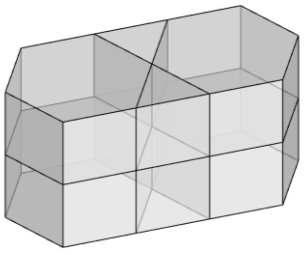


Figura 299 - Tesselação #19
$(3.4.4)^4.(4.4.6)^4$

4 prismas triangulares,
4 prismas hexagonais.

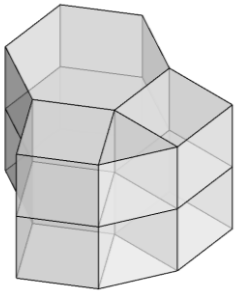


Figura 300 - Tesselação #20
$(3.4.4)^2.(4.4.4)^4.(4.4.6)^2$

2 prismas triangulares,
4 cubos,
2 prismas hexagonais

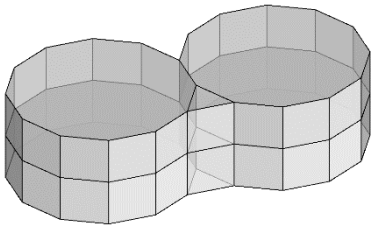


Figura 301 - Tesselação #21
$(3.4.4)^2.(4.4.12)^4$

2 prismas triangulares,
4 prismas dodecagonais.

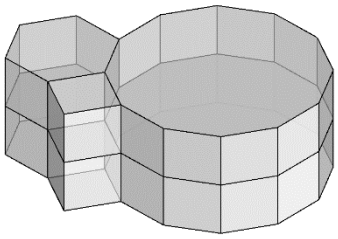


Figura 302 - Tesselação #22
$(4.4.4)^2.(4.4.6)^2.(4.4.12)^2$

2 cubos,
2 prismas hexagonais,
2 prismas dodecagonais.

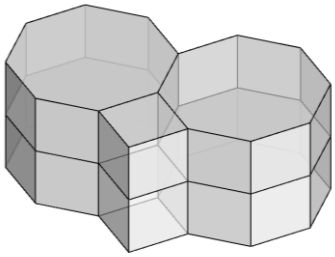


Figura 303 - Tesselação #23
$(4.4.4)^2.(4.4.8)^4$

2 cubos,
4 prismas octogonais.

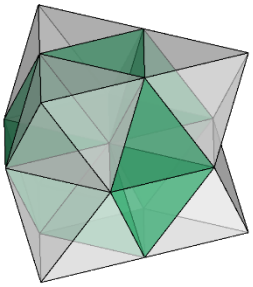


Figura 304 - Tesselação #24
$(3.3.3)^8.(3.3.3.3)^6$ - B

8 tetraedros,
6 octaedros.

Versão girada da Tesselação #02.

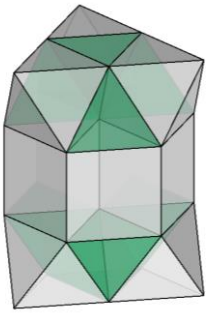


Figura 305 - Tesselação #25
$(3.3.3)^4.(3.3.3.3)^3.(3.4.4)^6$ - B

4 tetraedros,
3 octaedros,
6 prismas triangulares.

Versão alongada da Tesselação 24

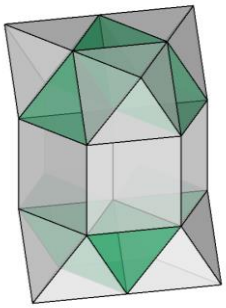


Figura 306 - Tesselação #26
$(3.3.3)^4.(3.3.3.3)^3.(3.4.4)^6$ - A

4 tetraedros,
3 octaedros,
6 prismas triangulares.

Versão giroalongada da Tesselação #24 ou versão alongada da Tesselação #02.

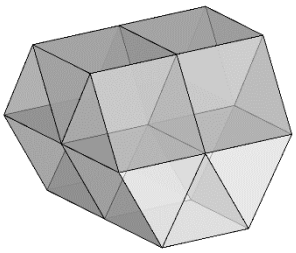


Figura 307 - Tesselação #27
$(3.4.4)^{12}$ - B

12 prismas triangulares.

Versão girada da Tesselação #14. Estes prismas triangulares adjacentes definem girobiprismas convexos (Sólido de Johnson J26).

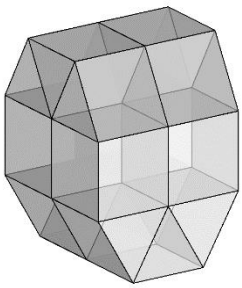


Figura 308 - Tesselação #28
$(3.4.4)^6.(4.4.4)4$ – C

Versão alongada da Tesselação #27, versão giroalongada da Tesselação #14, ou versão girada da Tesselação #17.

Segundo Coxeter, a tesselação cúbica (#01) é (a única) tesselação regular, porque é a única em que as células são regulares e iguais. A Tesselação #02 é quasirregular, porque as suas células são poliedros regulares, e as figuras verticiais são poliedros quasirregulares. Dado que não existe mais nenhuma que envolva apenas poliedros regulares, podemos desde já concluir que esta é única tesselação quasirregular, o que é também confirmado pelo facto de esta ser a única tesselação em que se intersectam, alternadamente, dois poliedros distintos e em que todas as faces são comuns aos dois tipos de poliedros.

As figuras verticiais de uma tesselação são definidas da mesma forma que para os polígonos e para os poliedros, embora, neste caso, as figuras verticiais sejam, elas próprias, poliedros. Os vértices de cada figura verticial são os pontos médios de todas as arestas que se intersectam num determinado vértice. As faces desta figura verticial são, por sua vez, as figuras verticiais de cada um dos poliedros que se intersectam nesse vértice (Coxeter, 1973, p. 68). A Figura 309 mostra-nos que a figura verticial da Tesselação #02, habitualmente designada como tetraoctaédrica, é o cuboctaedro. Na imagem à direita, um cuboctaedro é também percetível como o invólucro convexo dos seis tetraedros que se intersectam em cada vértice da tesselação.

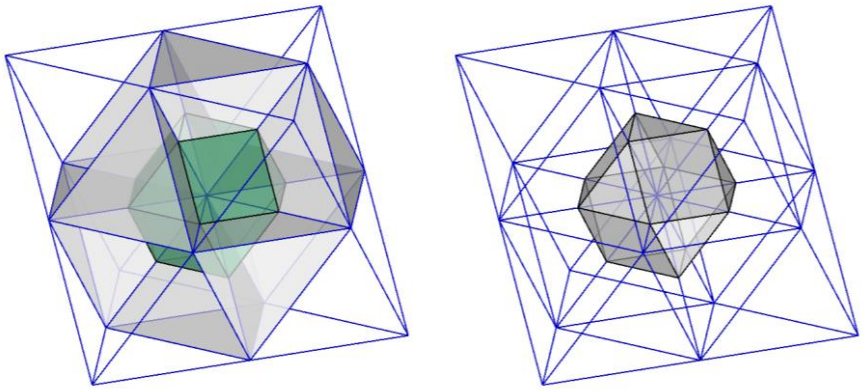


Figura 309 - A figura verticial da Tesselação #02 é o cuboctaedro quasirregular.

No caso da tesselação cúbica, as figuras verticiais são octaedros. Na Tesselação #24 (que corresponde a uma versão girada da #02 em que os tetraedros e octaedros, recorda-se, não estão dispostos alternadamente, mas como se fossem o reflexo uns dos outros), a figura verticial é uma versão girada do cuboctaedro - a ortobicúpula triangular (Sólido de Johnson J27).

Nas Figuras 310 a 337, apresentam-se algumas das tesselações planas produzíveis por planos com determinadas orientações que seccionam as tesselações sólidas uniformes (Viana, 2019b). A maioria das tesselações sólidas admite, implicitamente, uma tesselação plana uniforme que se mostra com linha contínua azul. Esta situação é particularmente evidente nas tesselações que

derivam das tesselações planas uniformes. As tesselações #11, #12 e #13 (Figuras 320, 321 e 322) apresentam-se numa linha distinta das restantes, dado que em nenhuma delas é possível produzir uma tesselação uniforme, porque uma das células é o cuboctaedro rombitruncado.

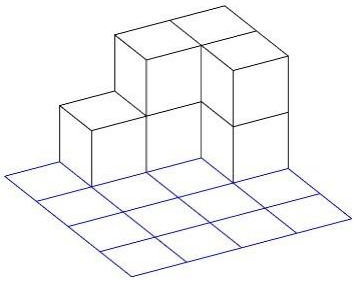


Figura 310 - Na Tesselação #01, o plano de qualquer face produz a tesselação (4^4). O plano perpendicular a uma diagonal, produz a tesselação (3^6).

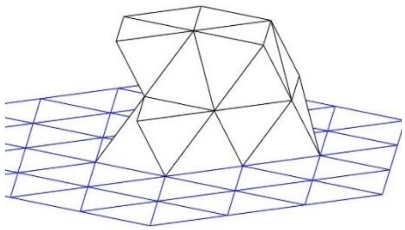


Figura 311 - Na Tesselação #02, o plano de qualquer face produz a tesselação (3^6).

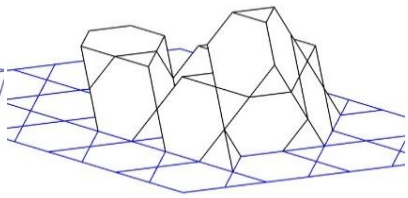


Figura 312 - Na Tesselação #03, o plano de qualquer face produz a tesselação (3.6.3.6).

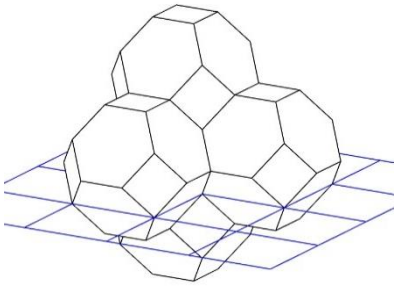


Figura 313 - Na Tesselação #04, qualquer plano perpendicular a um eixo de rotação de ordem 4 produz a tesselação (4^4), se contiver uma diagonal maior de uma face hexagonal.

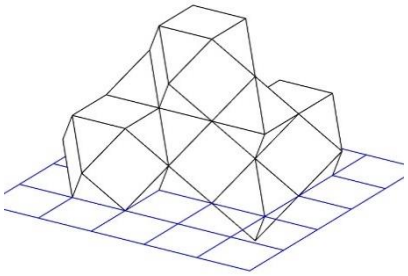


Figura 314 - Na Tesselação #05, o plano de qualquer face quadrada produz a tesselação (4^4); o plano de qualquer face triangular, produz a tesselação (3.6.3.6).

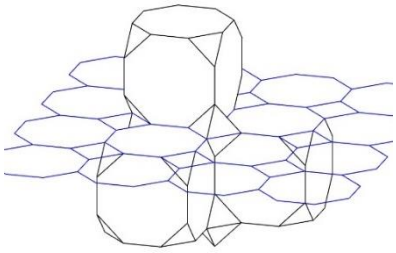


Figura 315 - Na Tesselação #06, o plano de qualquer face octogonal produz a tesselação (4.8.8).

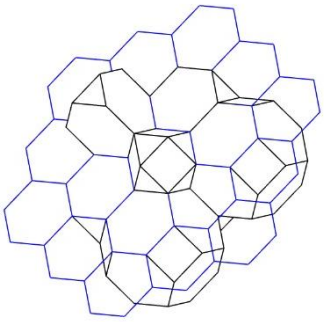


Figura 316 - Na Tesselação #07, o plano de qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3).

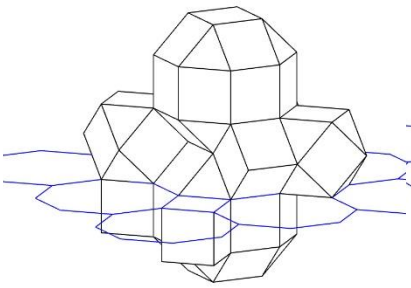


Figura 317 - Na Tesselação #08, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8).

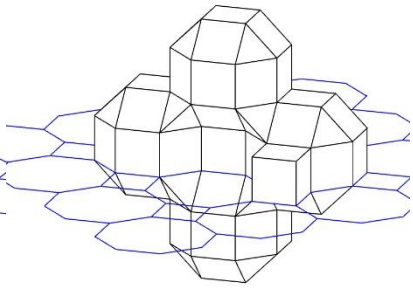


Figura 318 - Na Tesselação #09, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8).

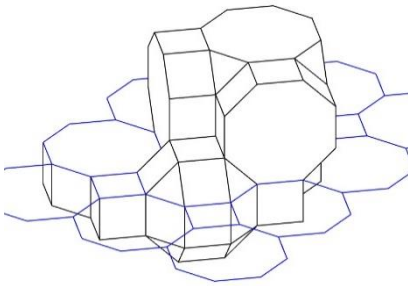


Figura 319 - Na Tesselação #10, um plano que contenha determinadas faces quadradas produz a tesselação (4.8.8).

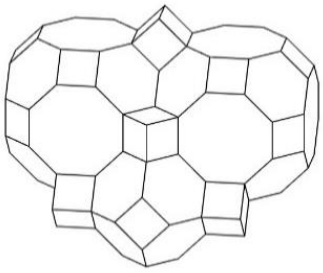


Figura 320 - Na Tesselação #11, não é possível produzir tesselações planas uniformes.

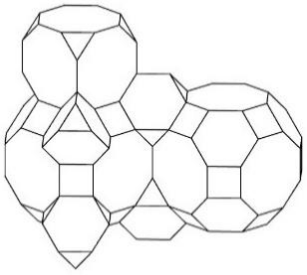


Figura 321 – Na Tesselação #12, não é possível produzir tesselações planas uniformes.

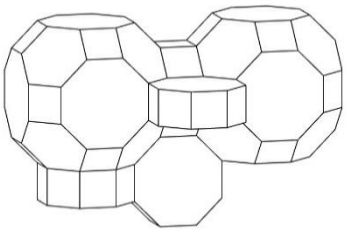


Figura 322 – Na Tesselação #13, não é possível produzir tesselações planas uniformes.

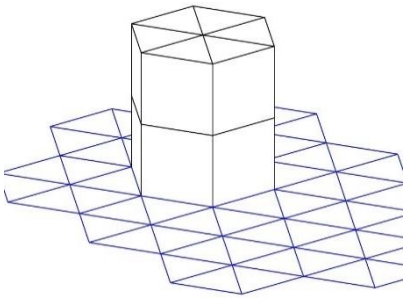


Figura 323 - Na Tesselação #14, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3^6); o de qualquer face quadrada, produz a tesselação (4^4).

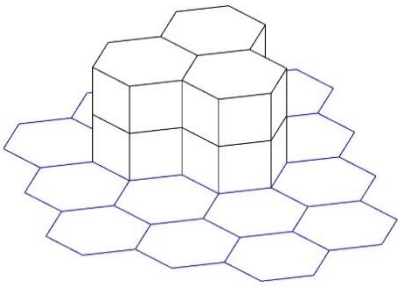


Figura 324 - Na Tesselação #15, o plano de qualquer face hexagonal produz a tesselação (6^3).

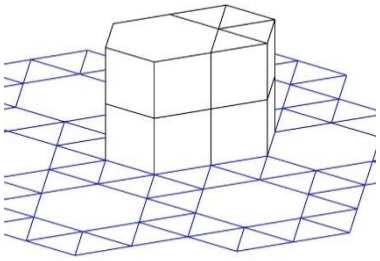


Figura 325 – Na Tesselação #16, o plano de qualquer face triangular e hexagonal produz a tesselação (3.3.3.3.6).

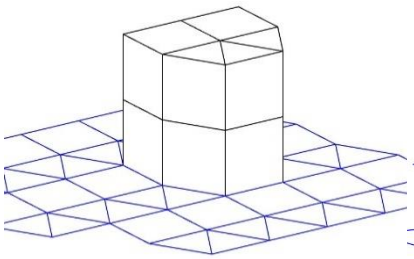


Figura 326 - Na Tesselação #17, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3.3.3.4.4); o de determinadas faces quadradas, produz a tesselação (4^4).

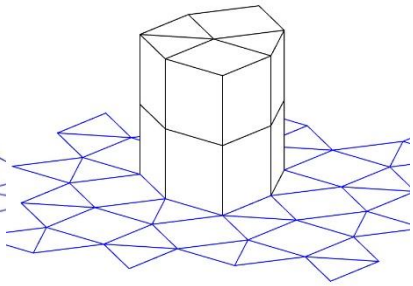


Figura 327 - Na Tesselação #18, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (3.3.4.3.4).

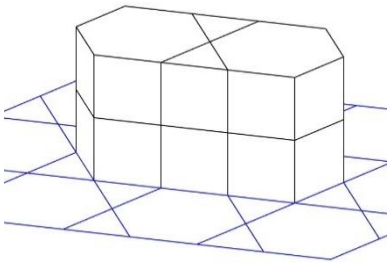


Figura 328 - Na Tesselação #19, o plano de qualquer face triangular e hexagonal produz a tesselação (3.6.3.6).

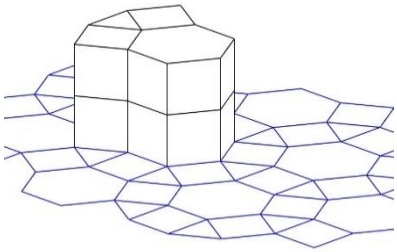


Figura 329 - Na Tesselação #20, o plano de qualquer face triangular e hexagonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (3.4.6.4).

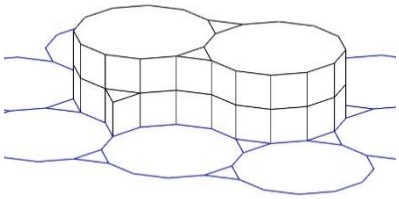


Figura 330 - Na Tesselação #21, o plano de qualquer face triangular ou dodecagonal produz a tesselação (3.12.12).

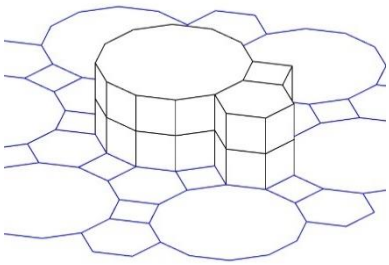


Figura 331 - Na Tesselação #22, o plano de qualquer face triangular ou dodecagonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (4.6.12).

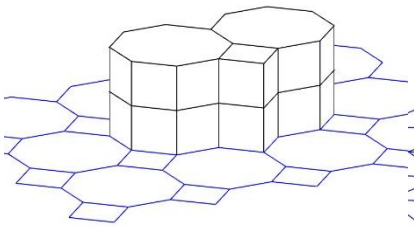


Figura 332 - Na Tesselação #23, o plano de qualquer face octogonal (e de determinadas faces quadradas) produz a tesselação (4.8.8).

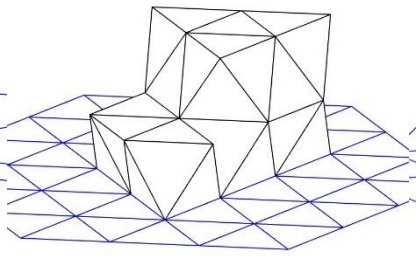


Figura 333 - Na Tesselação #24, o plano de determinadas faces triangulares produz a tesselação (3^6).

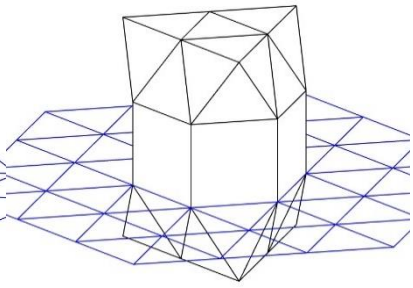


Figura 334 - Na Tesselação #25, o plano de qualquer face triangular produz a tesselação (3^6).

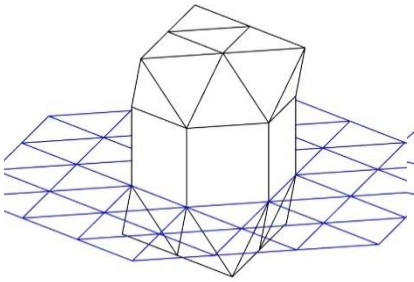


Figura 335 - Na Tesselação #26, o plano de determinadas faces triangulares produz a tesselação (3^6).

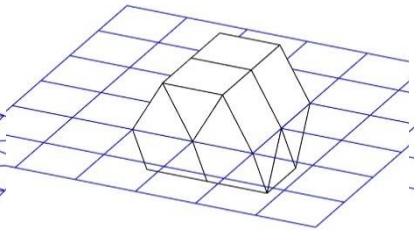


Figura 336 - Na Tesselação #27, o plano de determinadas faces quadradas produz a tesselação (4^4).

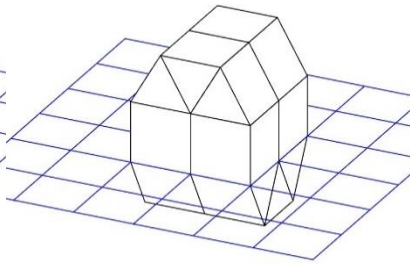


Figura 337 - Na Tesselação #28, o plano de determinadas faces quadradas produz a tesselação (4^4).

2.3.1. Tesselações duais das tesselações sólidas uniformes

Para definirmos a tesselação dual de uma tesselação, determinam-se os centroides de cada um dos poliedros que se intersectam em cada vértice, e as faces definidas por estes centros serão as faces dos poliedros que definem a tesselação dual. Pelo facto de as tesselações uniformes serem, por definição, isogonais, todas as células duais serão iguais entre si e também elas preencherão o espaço, definindo uma tesselação de poliedros que é dual da primeira. No entanto, e com a exceção da Tesselação #01 que é auto-dual, as tesselações duais não são uniformes nem isogonais, porque as células duais não são poliedros regulares e os vértices não são idênticos.

No caso das tesselações arquitetónicas, cada célula da tesselação dual corresponde a uma partição do cubo e/ou do dodecaedro rômbico, segundo Conway e outros autores (2008, p. 294-298). O invólucro convexo das células duais em torno de cada vértice da tesselação corresponde ao paraleloedro respetivo e cada célula corresponde à imagem refletida da que lhe é adjacente. Desta forma, através de reflexões sucessivas, cada núcleo de células definirá um cubo e/ou um dodecaedro rômbico. Estes, por sua vez, como paraleloedros que são, por translação, definem uma tesselação monoédrica, sendo, a que é definida pelas células duais, a tesselação dual da primeira. Conway e outros autores designam as células duais das tesselações arquitetónicas como *catoptric chambers* (que poderemos traduzir como câmaras catóptricas) e as tesselações por elas definidas como catóptricas, não só porque a Catóptrica é a teoria das reflexões por espelhos, mas também porque o início da palavra recorda os autores de Eugène Catalan (2008, p. 292). Nas Figuras 338 a 350, mostram-se as tesselações arquitetónicas com uma célula dual e, ao lado, a célula e a forma como esta resulta da partição do cubo e/ou do dodecaedro rômbico.

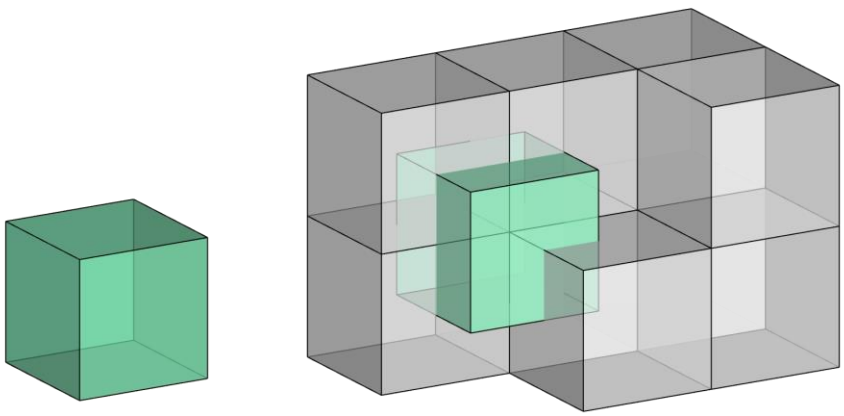


Figura 338 - As células duais da Tesselação #01 (*Cubille*), definida por cubos, são cubos iguais.

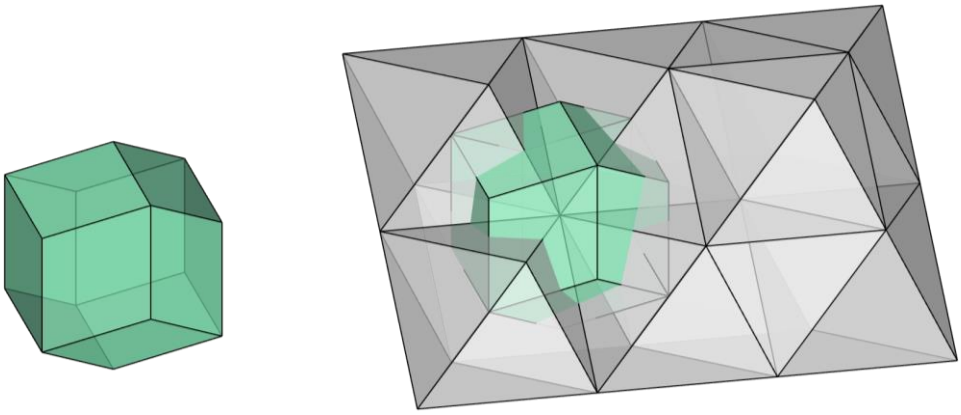


Figura 339 - As células duais da Tesselação #02 (*Tetroctahedrille*), definida por tetraedros e octaedros, são dodecaedros rômbicos.

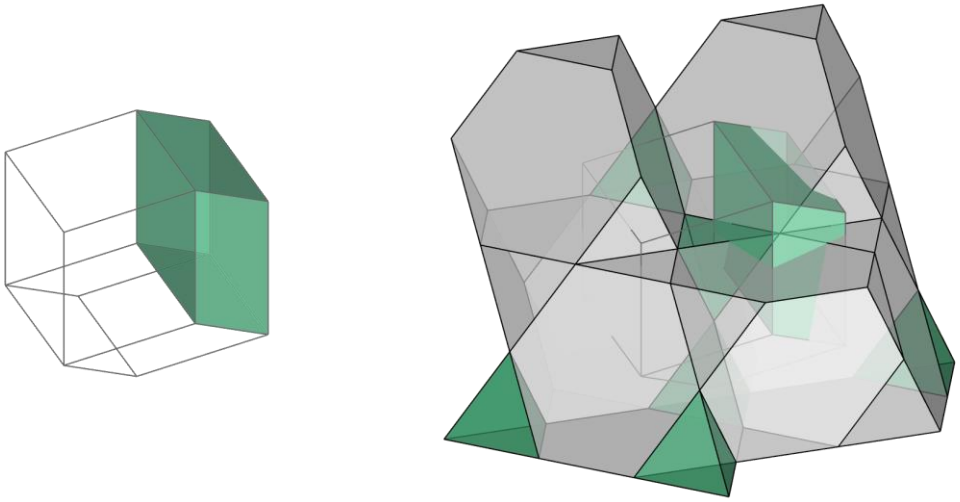


Figura 340 - As células duais da Tesselação #03 (*Trunctetrahedrille*), definida por tetraedros e tetraedros truncados, são romboedros (quatro definem um dodecaedro rômbico).

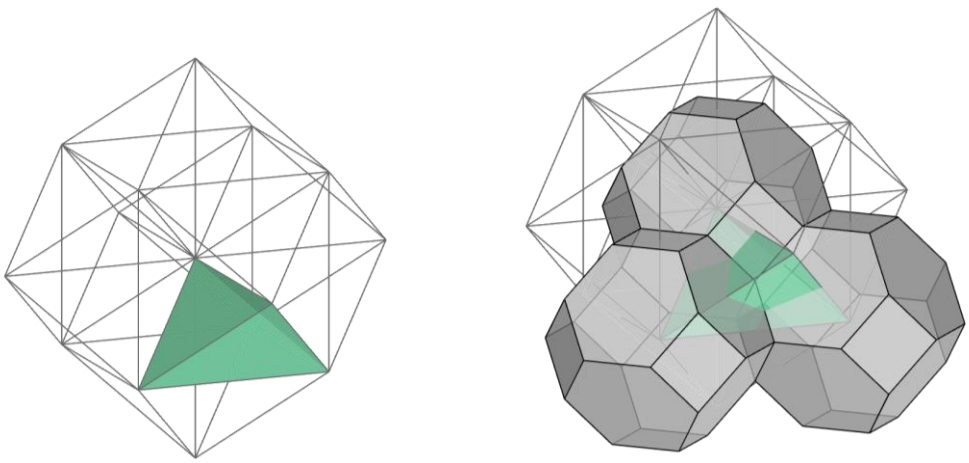


Figura 341 - As células duais da Tesselação #04 (*Truncoctahedrille*), definida por octaedros truncados, são disfenóides tetragonais (vinte e quatro definem um dodecaedro rômbico).

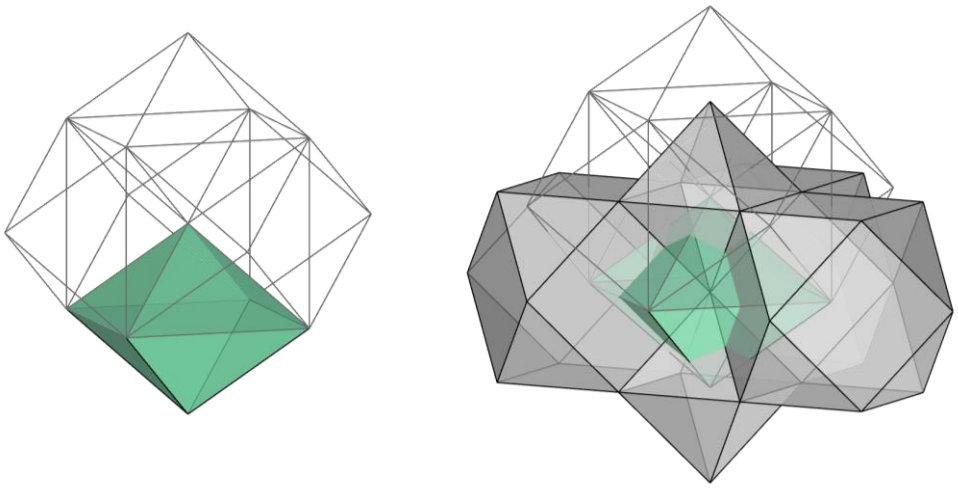


Figura 342 - As células duais da Tesselação #05 (*Cuboctahedrille*), definida por octaedros e cuboctaedros, são bipirâmides de base quadrada e faces isósceles (seis definem um dodecaedro rômbico).

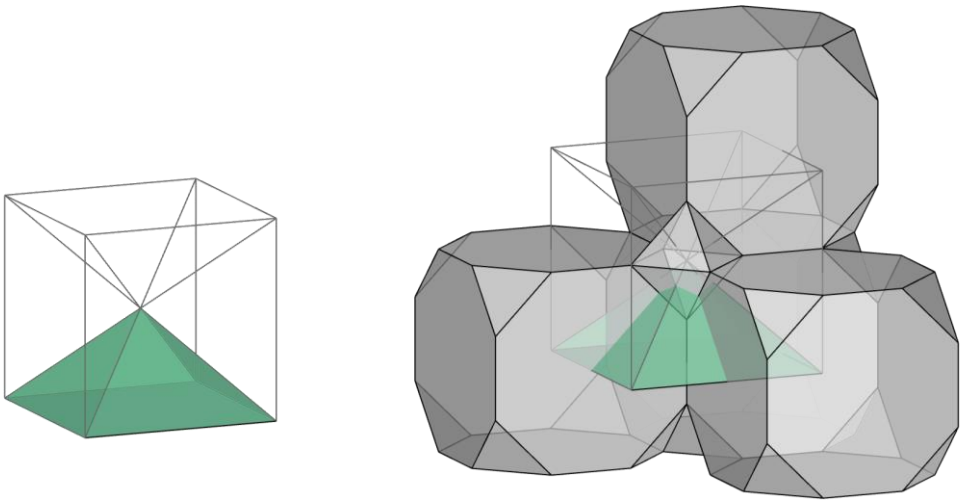


Figura 343 - As células duais da Tesselação #06 (*Truncated Cubille*), definida por octaedros e cubos truncados, são pirâmides de base quadrada e faces isósceles (seis definem um cubo).

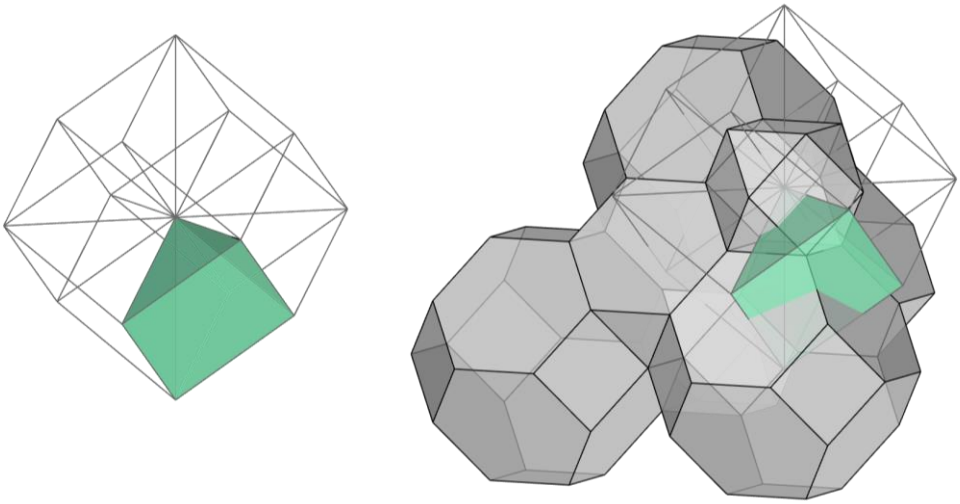


Figura 344 - As células duais da Tesselação #07 (*Truncated Tetroctahedrille*), definida por cuboctaedros, tetraedros truncados e octaedros truncados, são pirâmides rômbicas (doze definem um dodecaedro rômbico).

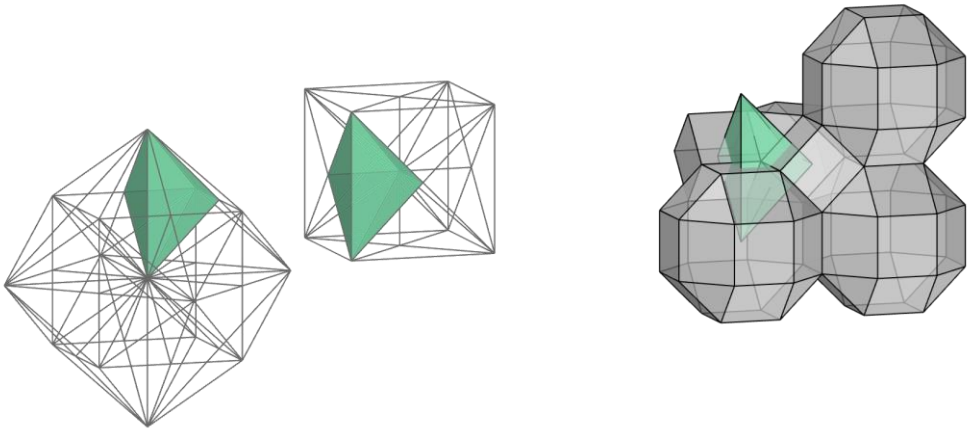


Figura 345 - As células duais da Tesselação #08 (*2-RCO-Hedrille*), definida por cuboctaedros, rombicuboctaedros e cubos, são bipirâmides triangulares (doze definem um cubo; vinte e quatro, um dodecaedro rômbico).

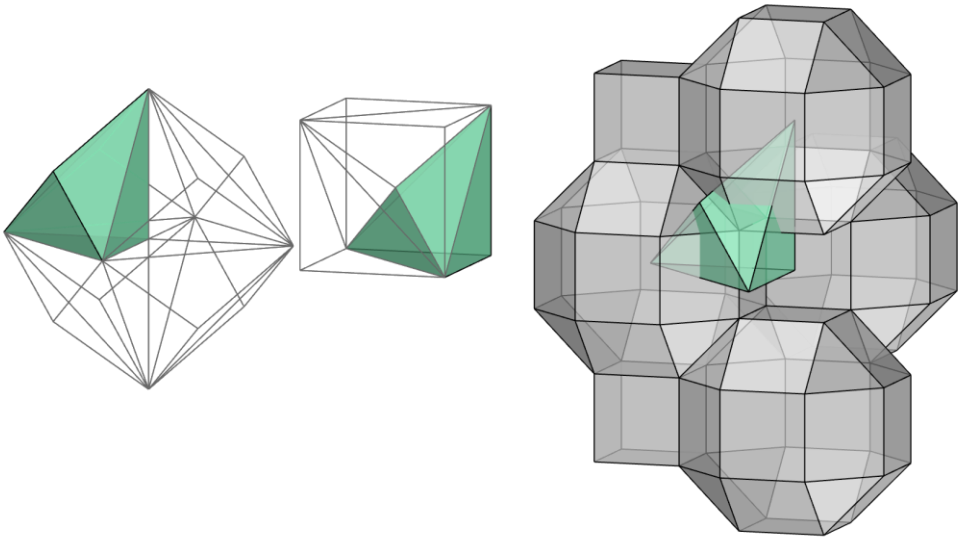


Figura 346 - As células duais da tesselação #09 (*3-RCO-Hedrille*), definida por tetraedros, rombicuboctaedros e cubos, são hexaedros (quatro, definem um cubo; oito, um dodecaedro rômbico).

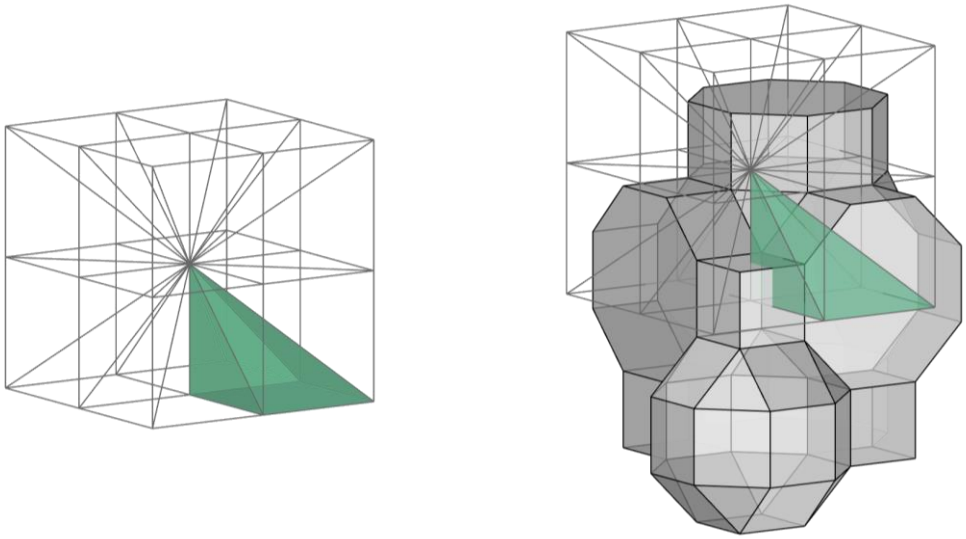


Figura 347 - As células duais da Tesselação #10 (*1-RCO-Hedrille*), definida por rombicuboctaedros, cubos truncados, cubos e prismas octogonais, são pirâmides oblíquas de base quadrada (vinte e quatro definem um cubo).

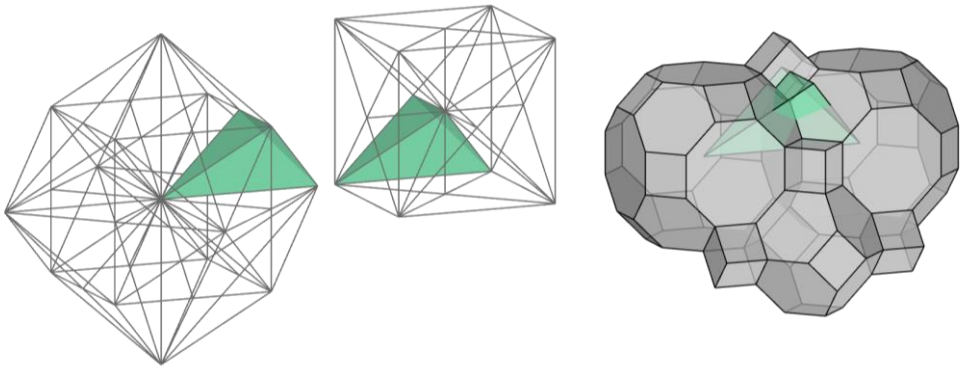


Figura 348 - As células duais da Tesselação #11 (*n-tCO-Hedrille*), definida por cubos, octaedros truncados e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (vinte e quatro definem um cubo; quarenta e oito, um dodecaedro rômbico).

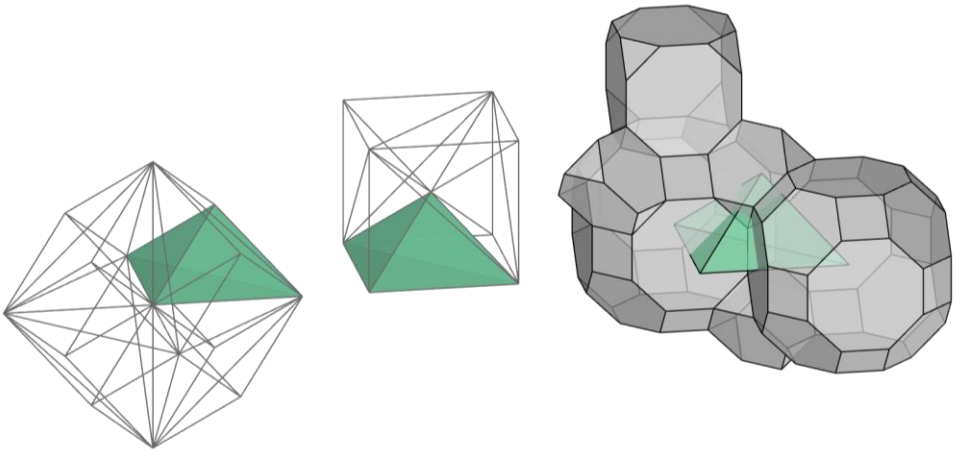


Figura 349 - As células duais da Tesselação #12 (*f-tCO-Hedrille*), definida por tetraedros truncados, cubos truncados e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (doze definem um cubo; vinte e quatro, um dodecaedro rômbico).

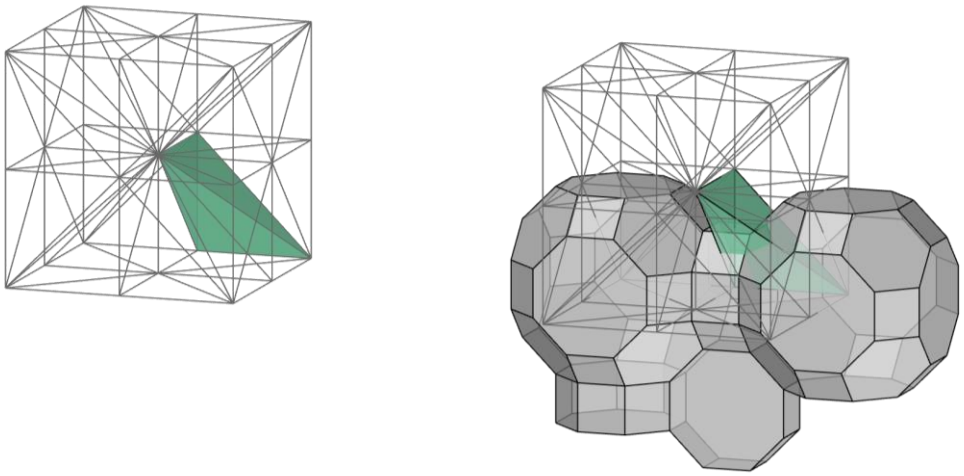


Figura 350 - As células duais da Tesselação #13 (*f-tCO-Hedrille*), definida por prismas octogonais e cuboctaedros rombitruncados, são pirâmides triangulares (quarenta e oito definem um cubo).

Nas Figuras 351 a 365, ilustram-se as tesselações não arquitetónicas, a célula dual respetiva e um exemplo da forma como as restantes células definem a tesselação dual. Tal como nas arquitetónicas, estas células podem ser definidas através da translação, reflexão e/ou rotação das que lhe são adjacentes, mas contrariamente às arquitetónicas, não resultam da partição de um cubo ou de um dodecaedro rômbico. Nas tesselações em que as células resultam da extrusão das tesselações planas uniformes, as células duais correspondem à extrusão das tesselações planas duais respetivas, que Grünbaum e Shephard (1987, p. 96) apelidam de "*Laves tilings*"[37] em virtude da importância do trabalho do cristalógrafo Fritz Laves. As notações que utilizaremos nas figuras seguintes para identificar estas tesselações correspondem às que estes dois autores utilizam. Os parêntesis retos denotam que os vértices são duais da tesselação respetiva.

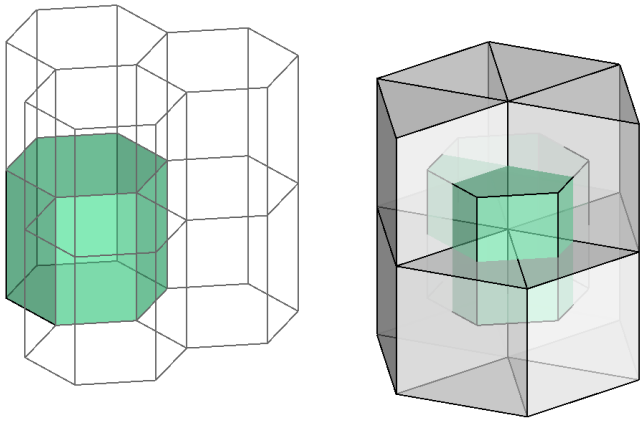


Figura 351 - As células duais da Tesselação #14, definida por prismas triangulares, são prismas hexagonais (não semirregulares) que resultam da extrusão da tesselação [3^6].

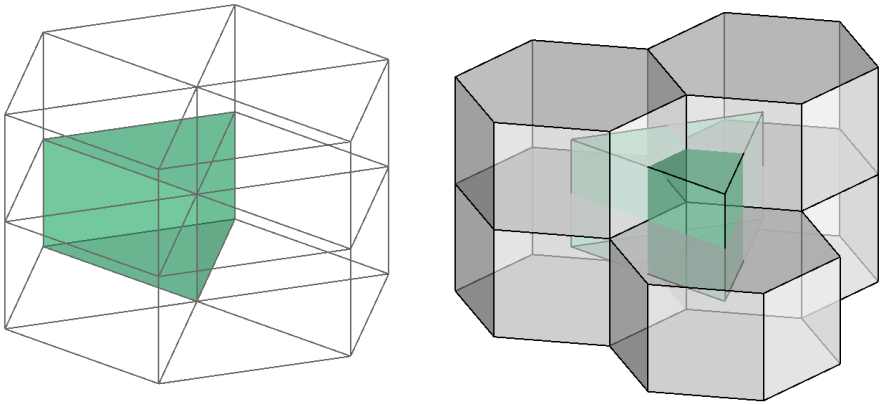


Figura 352 - As células duais da Tesselação #15, definida por prismas hexagonais, são prismas triangulares (não semirregulares) que resultam da extrusão da tesselação [6^3].

[37] Pelas razões elencadas no início do Capítulo II, ao longo deste trabalho, optamos pela palavra tesselação em lugar de pavimentação (que, em inglês, corresponde a *tiling*). Nesse sentido, a nossa tradução para *Laves tilings* será tesselações de Laves.

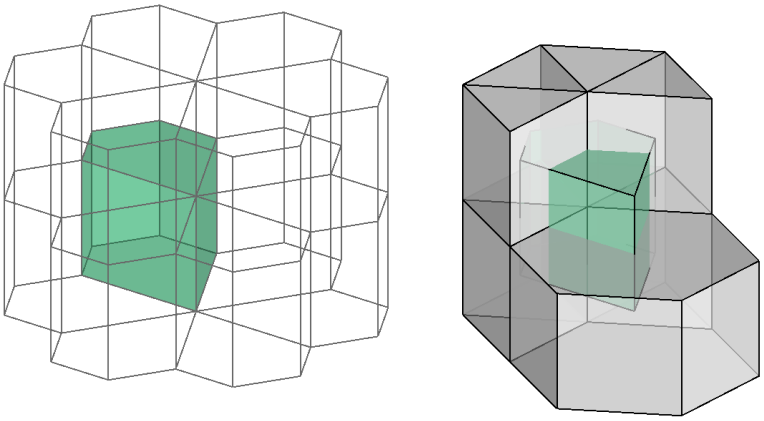


Figura 353 - As células duais da Tesselação #16, definida por prismas triangulares e hexagonais, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [3^4.6]. Existe em duas versões enantiomórficas.

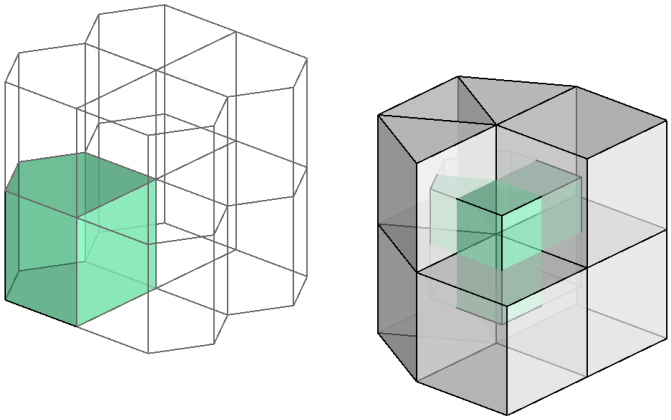


Figura 354 - As células duais da Tesselação #17, definida por cubos e prismas triangulares, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [3^3.4^2].

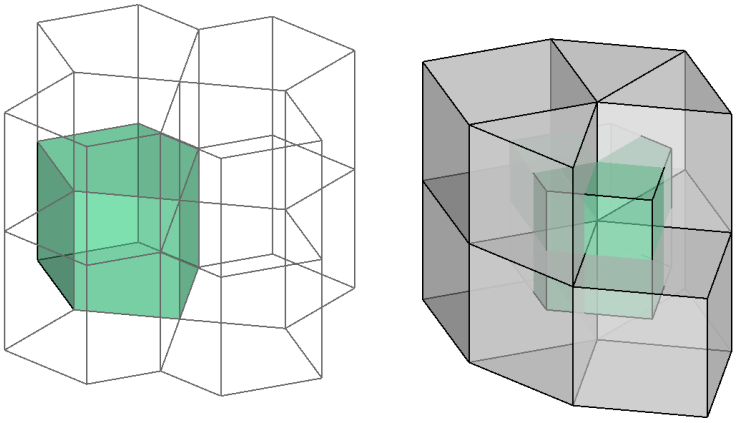


Figura 355 - As células duais da Tesselação #18, definida por cubos e prismas triangulares, são prismas pentagonais irregulares que resultam da extrusão da tesselação [3^3.4.3.4].

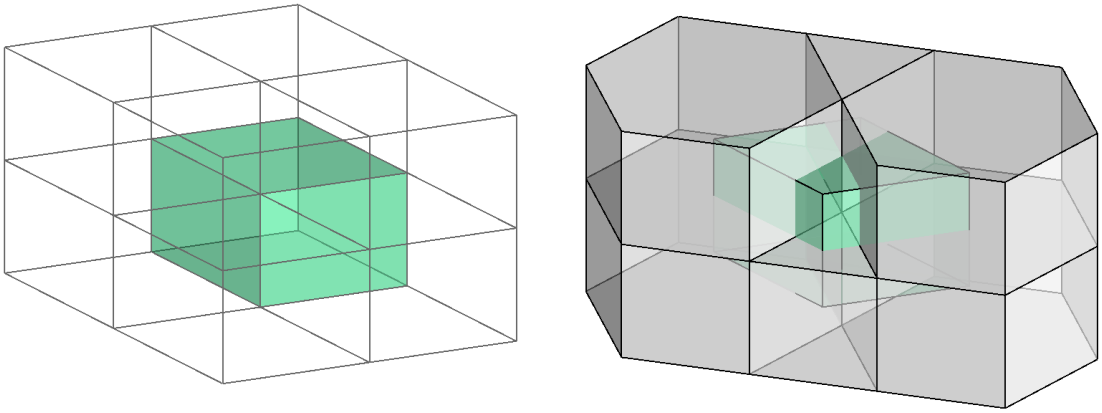


Figura 356 - As células duais da Tesselação #19, definida por prismas triangulares e hexagonais, são prismas de bases rômbicas que resultam da extrusão da tesselação [3.6.3.6].

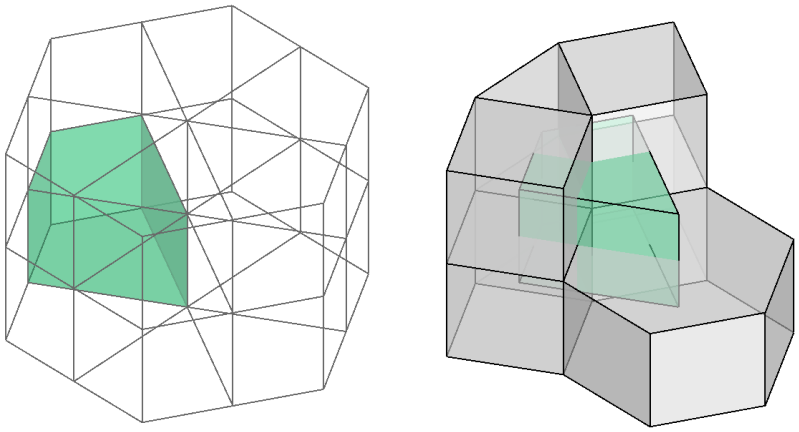


Figura 357 - As células duais da Tesselação #20, definida por cubos, prismas triangulares e hexagonais, são prismas com bases em forma de papagaio que resultam da extrusão da tesselação [3.4.6.4].

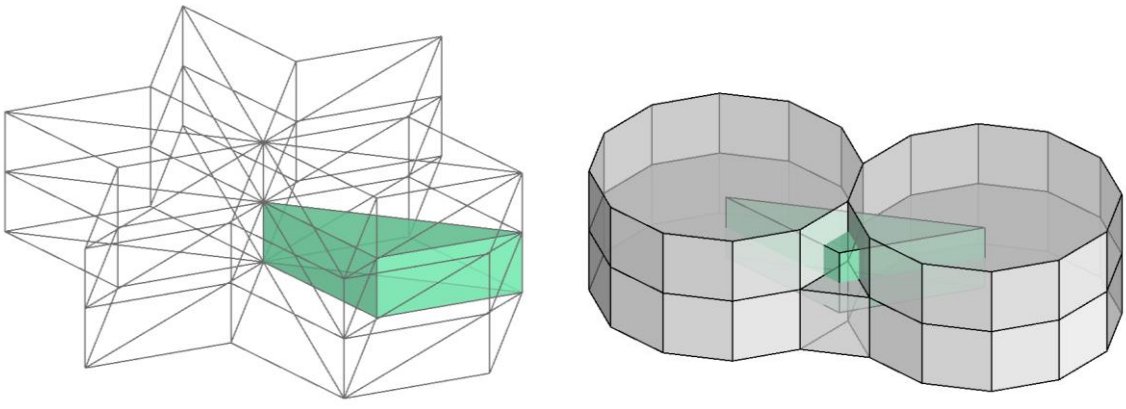


Figura 358 - As células duais da Tesselação #21, definida por prismas triangulares e dodecagonais, são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [3.12^2].

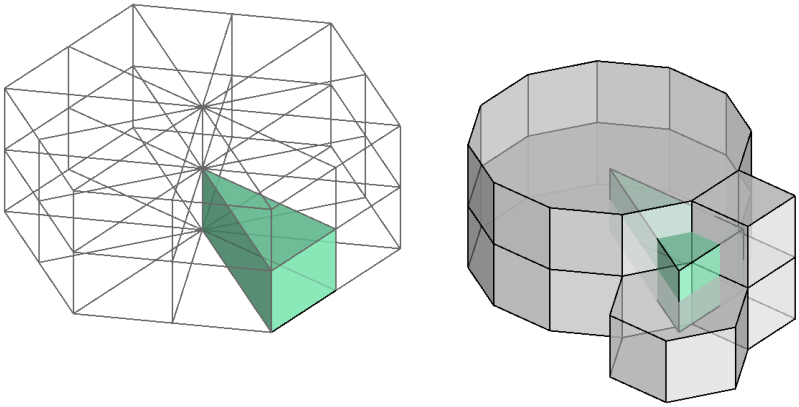


Figura 359 - As células duais da Tesselação #22, definida por cubos, prismas hexagonais e dodecagonais, são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [4.6.12].

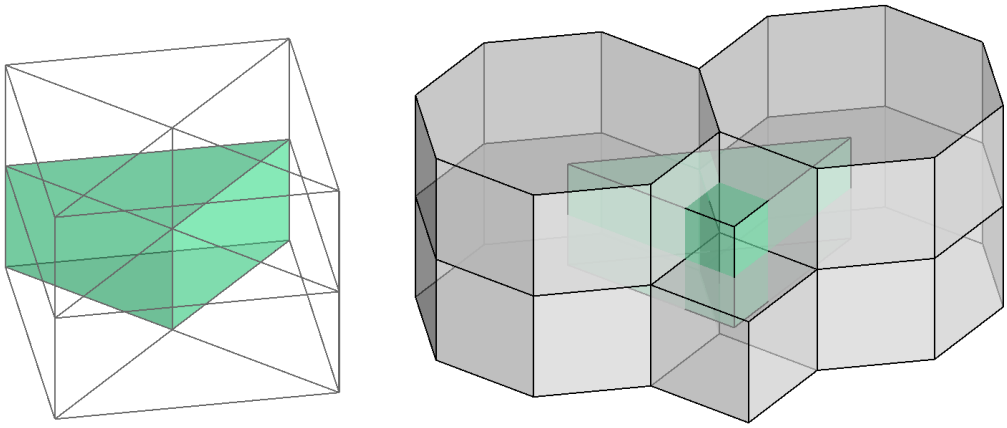


Figura 360 - As células duais da Tesselação #23, definida por cubos e prismas octogonais são prismas triangulares que resultam da extrusão da tesselação [4.8^2].

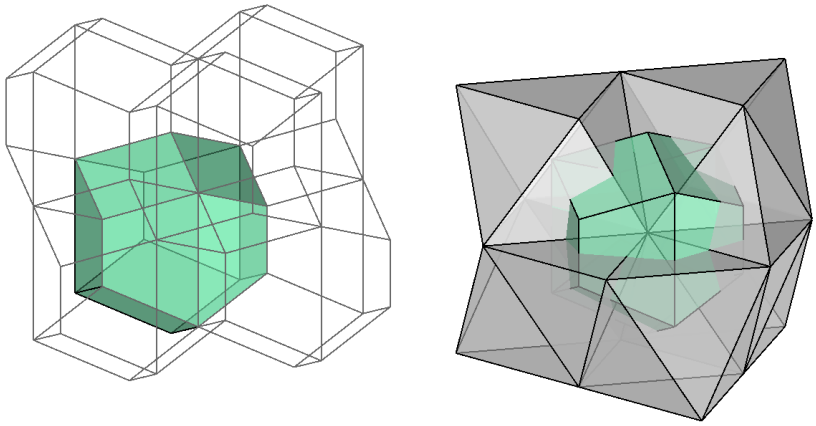


Figura 361 - As células duais da Tesselação #24, definida por tetraedros e octaedros, são dodecaedros trapezorrômbicos.

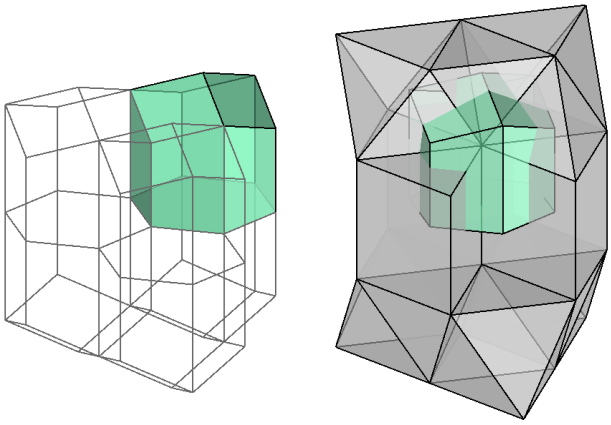


Figura 362 - As células duais da Tesselação #25, definida por tetraedros, octaedros e prismas triangulares, são poliedros irregulares, com um dos vértices idêntico a um vértice trigonal do dodecaedro rômbico. Os poliedros que estão justapostos pela face hexagonal são reflexos uns dos outros (as suas projeções ortogonais, no plano de face hexagonal, são coincidentes).

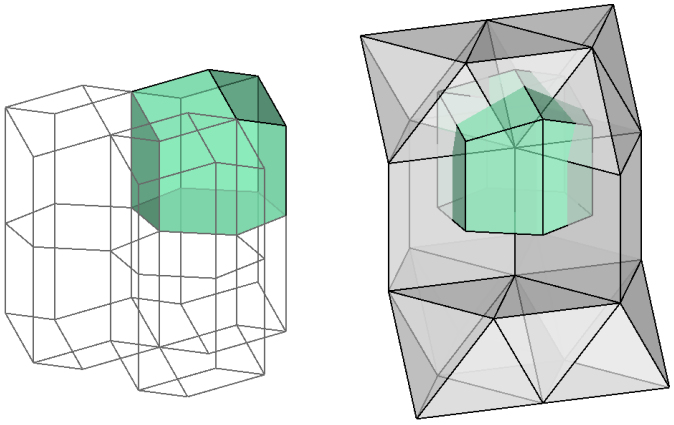


Figura 363 - As células duais da Tesselação #26, definida por tetraedros, octaedros e prismas triangulares, são poliedros irregulares, com um dos vértices idêntico a um vértice trigonal do dodecaedro rômbico. Os poliedros que estão justapostos pela face hexagonal são reflexos uns dos outros, mas em versão girada (as suas projeções ortogonais, no plano de face hexagonal, não são coincidentes).

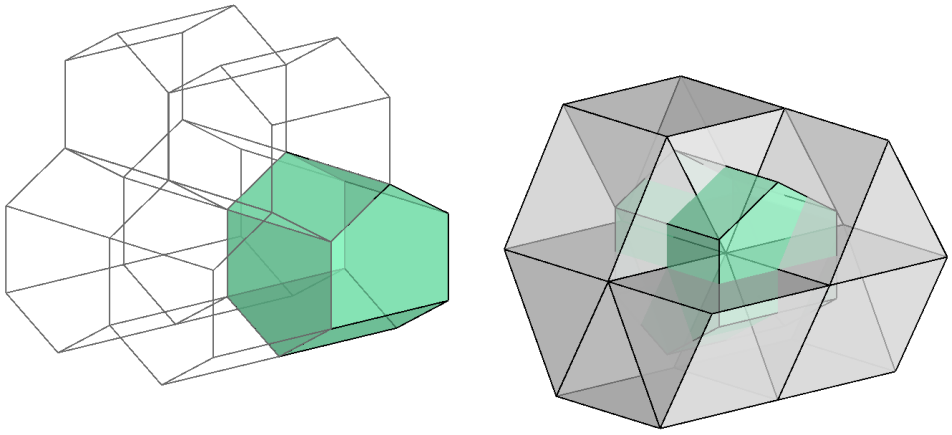


Figura 364 - As células duais da Tesselação #27, definida por prismas triangulares, são poliedros irregulares que preenchem o espaço mudando de orientação.

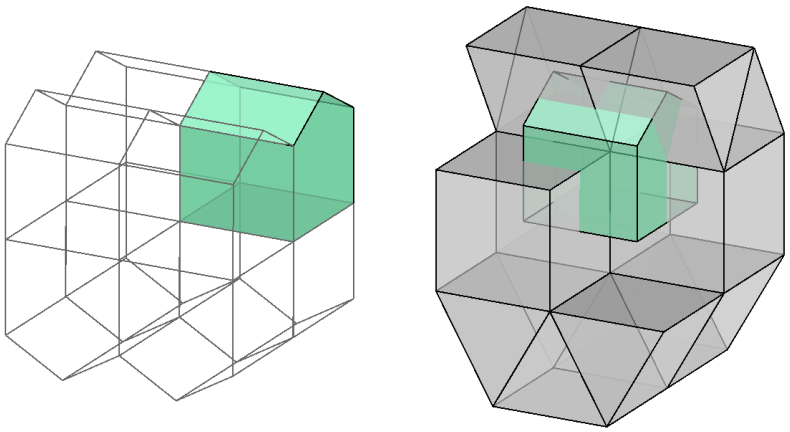


Figura 365 - As células duais da Tesselação #28, definida por cubos e prismas triangulares, são poliedros irregulares semelhantes à célula dual da tesselação #17, que preenchem o espaço mudando de orientação.

CAPÍTULO III | APLICAÇÕES DIDÁTICAS

3.1. Aplicações didáticas para o ensino da geometria

Nas Secções 3.2. a 3.9 do Capítulo III, apresenta-se um conjunto de aplicações didáticas para exploração dos conteúdos abordados nos Capítulos I e II em ambiente de modelação tridimensional virtual. Sempre que necessário, e para melhor enquadramento das aplicações didáticas propostas, incluiu-se um texto introdutório que pretende atuar como enquadramento teórico em complemento dos Capítulos precedentes. Todas as aplicações didáticas propostas foram selecionadas pela sua pertinência para uma introdução à geometria poliédrica e potencial interesse para quem pretender explorar os conteúdos apresentados e/ou desenvolver outras investigações com eles relacionados. Por abordarem, respetivamente, as operações de simetria de rotação e a modelação dos poliedros convexos regulares, as aplicações das Secções 3.2., 3.3. e 3.6. apresentam-se como conteúdos fundamentais para o desenvolvimento das aplicações didáticas das Secções subsequentes e de outras que se revelem exequíveis para o ensino da geometria com recurso a *software* de modelação tridimensional. Pela importância de que se revestem os conteúdos da Secção 3.3. para o desenvolvimento de qualquer investigação nesta área, foram editados e divulgados *online*[38] vídeos explicativos (vulgo, tutoriais) do procedimento a seguir para a modelação de cada um dos poliedros convexos regulares, com a exceção do cubo.

Com o objetivo de otimizar a compreensão dos poliedros e suas propriedades em ambiente virtual, optamos pela visualização em projeção paralela (axonométrica), por forma a evidenciar, nos casos em que existam, quaisquer paralelismos entre as arestas dos poliedros e/ou elementos que integram os processos construtivos que conduzem à sua modelação. O *software* de modelação tridimensional utilizado para todas as modelações foi o *Rhinoceros*®[39] que selecionamos[40] pela qualidade de visualização que oferece, através da qual é possível ver as modelações em perspetiva cónica, axonometria ortogonal ou projeção ortogonal. As várias vistas (*viewports*) podem ser exibidas em simultâneo (ou apenas a que se pretender), sendo possível navegar livremente em torno de cada modelo, fazer *zoom* até um elevado grau de ampliação; incluir um *clipping plane* para observar o modelo como se fosse seccionado por um plano com a orientação que se pretenda, entre outras possibilidades. Mas a mais-valia deste *software* é, indubitavelmente, a miríade de operações geométricas que as ferramentas de edição 2D e 3D que disponi-

[38] Disponíveis a partir do *site* da autora em http://www.veraviana.net/convexregular.html
[39] Disponível a partir de https://www.rhino3d.com/.
[40] A página Rhino 6 Features (https://www.rhino3d.com/6/features) menciona as diversas características pelas quais este *software* se torna interessante, mas as que apresentamos dizem respeito aos métodos de trabalho desenvolvidos para esta investigação.

bilizam e o grau de precisão com que permitem ao utilizador operar com conceitos e transformações geométricas quase como se o fizesse diretamente no espaço (Jakobsen e Matthiasen, 2014). A Tabela 2 lista as modelações propostas como aplicações didáticas incluídas neste trabalho. Em alguns casos, foram incluídos dois ou mais procedimentos alternativos.

Tabela 2 - Modelações propostas como aplicações didáticas no Capítulo III.

Secção 3.2.1.	Modelação de poliedros uniformes com recurso à simetria de rotação	rombicuboctaedro
		hexaedro quasitruncado
Secção 3.3.	Modelação dos poliedros convexos regulares	tetraedro regular
		hexaedro regular
		octaedro regular
		dodecaedro regular
		icosaedro regular (Procedimentos 1 e 2)
Secção 3.3.1.	Modelação da intersecção de pares de poliedros convexos regulares recíprocos e dos seus duais	intersecção do par tetraedro | tetraedro
		intersecção do par cubo | octaedro
		dodecaedro rômbico
		intersecção do par dodecaedro | icosaedro
		triacontaedro rômbico
Secção 3.4.1.	Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no tetraedro regular	tetraedro incluso no tetraedro
		cubo incluso no tetraedro
		octaedro incluso no tetraedro
		icosaedro incluso no tetraedro
		dodecaedro incluso no tetraedro
Secção 3.4.2.	Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no cubo	tetraedros inclusos no cubo
		octaedros inclusos no cubo (Procedimentos 1 e 2)
		um dodecaedro incluso no cubo
		composto de dois dodecaedros incluso no cubo
		dodecaedro a partir de um cubo nele incluso
		um icosaedro incluso no cubo
		composto de dois icosaedros incluso no cubo
Secção 3.4.3.	Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no octaedro regular	cubos inclusos no octaedro (Procedimento 1)
		um tetraedro incluso no octaedro:
		cubos inclusos no octaedro (Procedimento 2)
		composto de três cubos incluso no octaedro
		dodecaedro incluso no octaedro
		icosaedro incluso no octaedro
Secção 3.4.4.	Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no dodecaedro regular	um tetraedro incluso no dodecaedro
		um cubo e uma *stella octangula* inclusos no dodecaedro
		um octaedro incluso no dodecaedro
		icosaedro incluso no dodecaedro

Tabela 2 - Modelações propostas como aplicações didáticas no Capítulo III (continuação).

Secção 3.4.5.	Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no icosaedro regular	um tetraedro incluso no icosaedro
		um cubo incluso no icosaedro
		um octaedro incluso no icosaedro
		dodecaedro incluso no icosaedro
Secção 3.5.	Modelação dos compostos regulares	composto regular de dois tetraedros
		compostos regulares de tetraedros
		composto regular de cinco cubos
		composto regular de cinco octaedros
Secção 3.6.1.	Modelação dos arquimedianos quasirregulares	cuboctaedro
		icosidodecaedro:
Secção 3.6.2.	Modelação dos arquimedianos truncados	tetraedro truncado com as faces hexagonais contidas no tetraedro
		octaedro truncado contido no octaedro
		icosaedro truncado contido no icosaedro
		tetraedro truncado com as faces triangulares contidas no tetraedro
		octaedro truncado contido no cubo (Procedimentos 1 e 2)
		icosaedro truncado contido no dodecaedro (Procedimentos 1 e 2)
		cubo truncado contido no cubo (Procedimentos 1, 2 e 3)
		cubo truncado contido no octaedro
		dodecaedro truncado contido no dodecaedro (Procedimentos 1 e 2)
		dodecaedro truncado contido no icosaedro
Secção 3.6.3.	Modelação dos arquimedianos com o prefixo rombi-	rombicuboctaedro
		rombicosidodecaedro (Procedimentos 1 e 2)
Secção 3.6.4.	Modelação dos arquimedianos rombitruncados	cuboctaedro rombitruncado
		icosidodecaedro rombitruncado
Secção 3.6.5.	Modelação dos arquimedianos quirais	cubo achatado contido no cubo
		do cubo achatado contido no octaedro
		dodecaedro achatado contido no icosaedro
Secção 3.8.	Modelação de tesselações sólidas	uma tesselação definida por tetraedros e octaedros regulares
		dodecaedro rômbico
		uma tesselação definida por disfenóides tetragonais
		tesselação definida por um poliedro côncavo obtido a partir do cubo
		tesselação definida pela primeira estrelação do dodecaedro rômbico
		tesselação definida por dodecaedros pentagonais e endododecaedros
		tetraedro truncado triakis
		tesselação definida por tetraedros truncados triakis
		hexacontaedro rômbico
		preenchimento do espaço com hexacontaedros rômbicos e triacontaedros rômbicos

Com a Secção 3.7., introduzimos uma vertente dinâmica e interativa menos comum na visualização de poliedros, para exploração de uma temática concebida no início do século vinte, que julgamos merecedora de uma certa oportunidade de atualização, à luz das potencialidades que as atuais tecnologias de modelação algorítmica permitem. O *software* utilizado foi o *Grasshopper*® [41] que selecionámos[42] por nos permitir ver e manipular graficamente os parâmetros e operações envolvidas no algoritmo gerador de cada construção (que se designa como *Grasshopper Definition*, e neste trabalho identificaremos como *Definição no Grasshopper* ou, mais simplesmente, *Definição*), sem que sejam necessários conhecimentos de programação, *scripting* ou edição de código; e, sobretudo, por admitir a possibilidade de, em cada Definição, editar ou acrescentar parâmetros previamente definidos e de os alterar em qualquer estágio do processo, sem afetar a hierarquia e as conexões entre os restantes elementos envolvidos na construção do modelo final. Quaisquer alterações realizadas nos parâmetros da Definição são imediatamente atualizadas na imagem que resulta dessa Definição.

Uma nota final para referir que as Secções 3.8 e 3.9. serão as que se poderão revestir de maior importância para o ensino da Arquitetura, dado o interesse que o estudo das tesselações sólidas representa para a conceção de estruturas espaciais ou de módulos construtivos (tema, aliás, que foi objeto de exploração em contexto de aula e de trabalho colaborativo, pelos estudantes da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto em 2016/2017) e o potencial das sinergias que desta forma se estabelecem e diversificam entre a geometria e a ciência do espaço.

[41] Disponível a partir de https://www.grasshopper3d.com/.
[42] As características deste editor de modelação algorítmica funcionam de forma muito diferente, por exemplo, do "Protocolo de Construção" do *software* GeoGebra (https://www.geogebra.org/), através do qual é possível aceder a passos prévios de uma construção, acrescentar outros elementos (e até exibir os passos que se pretendam, faseadamente, em construções passo-a-passo), mas não é possível editar nenhum passo sem alterar a construção subsequente. O âmbito deste *software*, particularmente no que toca às capacidades de visualização em ambiente 3D e ferramentas de edição, é algo limitado quando comparado com o *software* que selecionámos.
Importa ainda mencionar o Stella4D (https://www.software3d.com/Stella.php) que, apesar de ser um *software* bastante interessante que permite visualizar, criar e manipular polítopos tridimensionais e quadridimensionais em ambiente 3D, tem um âmbito limitado no que ao tipo de operações que aqui ilustraremos diz respeito, dado que as ferramentas de transformação geométrica que utilizamos não fazem parte das suas ferramentas (Webb, 2003).

3.2. Operações de simetria direta e grupos das simetrias de rotação

Uma transformação geométrica segundo a qual uma figura é transformada, de modo a ocupar uma nova posição indistinguível da posição inicial, é uma operação de simetria. Se, por exemplo, tomarmos como eixo de rotação a perpendicular ao centro de um polígono $\{n\}$ e o rodarmos segundo um ângulo de amplitude $360º/n$, as posições inicial e final do polígono serão indistinguíveis. Coxeter assinala que uma figura será simétrica se existir "a congruent transformation which leaves it unchanged as a whole, merely permuting its component elements"[43] (1973, p. 44). O grupo de simetria de uma figura é o conjunto de todas as operações de simetria possíveis para essa figura.

Nesta Secção do Capítulo III, limitaremos a nossa análise às simetrias de rotação de um poliedro, que, por definição, são operações de simetria direta, uma vez que é possível verificar a forma como interferem no poliedro, manipulando-o *fisicamente* (Cromwell, 1997, p. 291). Operações de simetria indireta (como é o caso da reflexão, em que se torna necessário simular uma superfície refletora, na qual o poliedro, ou parte do poliedro, é refletido) não serão aqui abordadas, por não se enquadrarem no âmbito das aplicações didáticas previstas para este trabalho. Como nota introdutória, enunciamos alguns conceitos estabelecidos por Auguste Bravais, começando com o facto de um eixo de simetria de um poliedro ser uma reta *AB* tal, que:

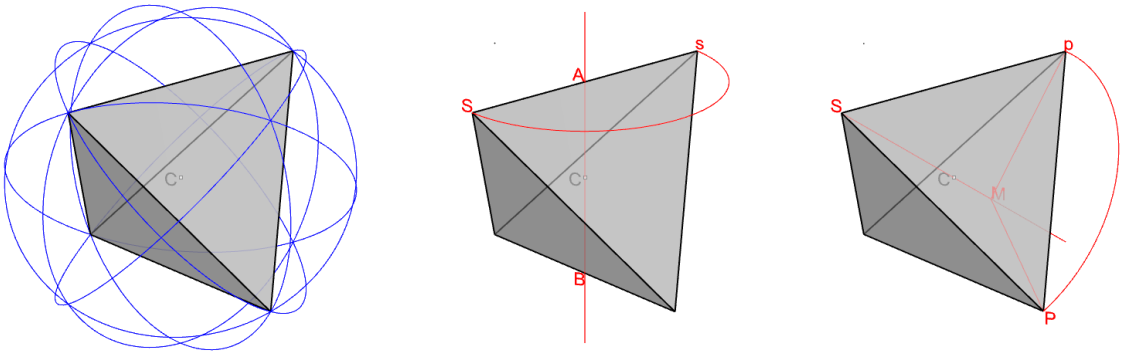
> …en faisant tourner le polyèdre d'un angle Q autour de AB, les nouveaux lieux des sommets coïncident avec les anciens. Si, par exemple, cette rotation amène le sommet S en S', S' devra aussi être le lieu d'un sommet du polyèdre, et alors S, S' seront dits homologues l'un de l'autre, par rapport à l'axe AB.[44] (1849, p. 141).

A rotação de um poliedro ao longo de um eixo descreve assim, e para um vértice *S*, um arco de circunferência que tem os vértices homólogos *S* e *S'* por extremos. Repetindo a rotação segundo o mesmo ângulo, outro arco de circunferência será definido e obtidos outros dois vértices homólogos *S'* e *S''* em relação àquele eixo de rotação. Bravais assinala ainda que, se existirem dois ou mais eixos de simetria para um poliedro, tanto estes eixos, como quaisquer planos de simetria que o poliedro admita, se intersectarão num mesmo ponto - o baricentro do poliedro.

[43] Tradução livre: uma transformação de congruência segundo a qual o poliedro permanece inalterável como um todo, tendo sido permutados apenas os elementos que o compõem.
[44] Tradução livre: fazendo girar um poliedro segundo um ângulo *Q* em redor de *AB,* as novas localizações dos vértices coincidirão com as localizações anteriores. Se, por exemplo, essa rotação transformar *S* em *S', S'* deverá também corresponder á localização de um dos vértices do poliedro. Diremos então que *S, S'* serão homólogos um do outro, em relação ao eixo *AB.*

A este propósito, Coxeter refere que todos os vértices que resultam de transformações de congruência num poliedro finito se localizam numa esfera e que, por essa razão, o poliedro admite um centro de gravidade (o centroide ou baricentro) que, ao longo das referidas transformações, é transformado de si próprio. Bravais (1849, p. 145) indica ainda que, num poliedro, não podem existir mais do que três espécies diferentes de eixos de rotação. Um eixo de rotação caracteriza-se pelo seu número de ordem, sendo os eixos de igual ordem, eixos da mesma espécie. Coxeter designa um eixo de rotação como *axis of p-fold rotation* (1973, p. 47) sendo estes *2-fold*, *3-fold*, *4-fold* ou *5-fold* se *p* for igual a 2, 3, 4 ou 5[45]. Designaremos estes eixos, respetivamente, como eixos de rotação de ordem 2, 3, 4 e 5.

A Figura 366a mostra o centro de simetria *C* de um tetraedro regular e a sua circunsfera, aqui representada pelas seis circunferências máximas que contêm cada par de vértices. Na Figura 366b, o vértice *s* é homólogo do vértice *S* e resulta da rotação do tetraedro segundo um ângulo de amplitude 180º, tendo por eixo de rotação a reta que contêm os pontos médios *A* e *B* de arestas opostas do tetraedro. Uma segunda rotação de amplitude 180º fará com que os vértices regressem à sua localização original, isto é, à transformação geométrica que se designa por identidade. Na Figura 366c, ilustra-se a rotação do tetraedro segundo um ângulo de amplitude 120º, tendo por eixo de rotação a reta que contém o vértice *S* e o centro da face que lhe é oposta, sendo *p* o homólogo de *P*. Mais duas rotações com idênticos eixo e ângulo resultarão na identidade.



a b c

Figura 366 - À esquerda, a circunsfera de um tetraedro regular e o seu centro de simetria *C*.
Ao centro, o vértice *s* resulta da rotação de 180º do vértice *S* do tetraedro, segundo o eixo de rotação *AB*.
À direita, o vértice *p* resulta da rotação de 120º do vértice *P* do tetraedro, segundo o eixo de rotação *SM*.

[45] Uma designação alternativa para os eixos de rotação de ordem 2, 3, 4 e 5 são respetivamente, eixos digonais, trigonais, tetragonais ou pentagonais, que evitaremos para obviar confusões com os termos trigonal, tetragonal e pentagonal que Wenninger utiliza (1975, p. 7) para identificar os vértices de um poliedro pelo número de faces que neles se intersectam.

A situação em que duas rotações são suficientes para que os vértices retornem à sua localização original (como na figura anterior, em que o tetraedro ao centro foi rodado segundo um ângulo de amplitude 360º/2) corresponde a um eixo de rotação de ordem 2 (também designado por eixo binário, de segunda ordem ou de simetria binária). O tetraedro à direita foi rodado segundo um ângulo de amplitude 360º/3, sendo o correspondente eixo de rotação de ordem 3. Qualquer poliedro regressará à identidade quando for rodado p vezes, segundo um eixo de rotação de ordem p. O menor ângulo de rotação é sempre um submúltiplo de 360º, e todos os ângulos de rotação em torno deste mesmo eixo são múltiplos deste ângulo menor (Coxeter, 1973, p. 47).

Para qualquer poliedro regular $\{p, q\}$, afirma Coxeter (1973, p. 47), os eixos de simetria de rotação possíveis contêm o baricentro do poliedro e os seus vértices, os pontos médios das arestas ou os centros das faces do poliedro. Estes eixos de rotação são, respetivamente, de ordem q, de ordem 2 e de ordem p. Os respetivos duais partilham os mesmos eixos de rotação. Wenninger denota, a propósito, que os vértices do poliedro dual pertencem aos eixos de simetria rotacional que, com origem no baricentro do poliedro inicial, contêm o incentro da face respetiva (1983, p. 1).

Dois poliedros duais $\{p, q\}$ e $\{q, p\}$ como os da Figura 367 partilham por isso os mesmos eixos de rotação, embora os seus pontos de intersecção com cada um dos poliedros sejam distintos, com a exceção dos eixos de uma das espécies. Os eixos que contêm o centro das faces de $\{p, q\}$ coincidem com os eixos que contêm os vértices de $\{q, p\}$; os eixos que contêm os vértices de $\{p, q\}$ coincidem com os que contêm o centro das faces de $\{q, p\}$. Os eixos que contêm os pontos médios das arestas de $\{p, q\}$ e das arestas de $\{q, p\}$ são coincidentes. Coxeter (1973, p. 47) assinala ainda que os eixos de rotação de um poliedro $\{p, q\}$ são os que unem o centro do poliedro aos vértices, ao ponto médio das arestas e ao centro das faces e que, para qualquer dos casos, estes eixos de rotação são, respetivamente, de ordem q, de ordem 2 e de ordem p. Note-se que os eixos de rotação de ordem 4 *(*de cor preta, na imagem da direita) são, simultaneamente, eixos de rotação de ordem 2. Cromwell (1997, p. 292) assinala que, nestas situações e por convenção, se deve caracterizar o eixo de rotação de ordem p pelo maior valor possível de p.

Cromwell (1997, p. 297) assinala que, se um poliedro tiver algum tipo de simetria de rotação, pertencerá a um dos grupos de simetria finitos que descreveremos a seguir e se designam por cíclico, diedral, tetraedral, octaedral e icosaedral. Os grupos de simetria em que não existe nenhum eixo de rotação que possa ser considerado como principal - caso do diedral D_2, T (tetraedral), O (octaedral) e I (icosaedral - são globalmente designados como grupos de simetria

esférica ou de simetria poliédrica, derivando, as designações dos três últimos grupos, dos nomes dos poliedros convexos regulares com faces triangulares.

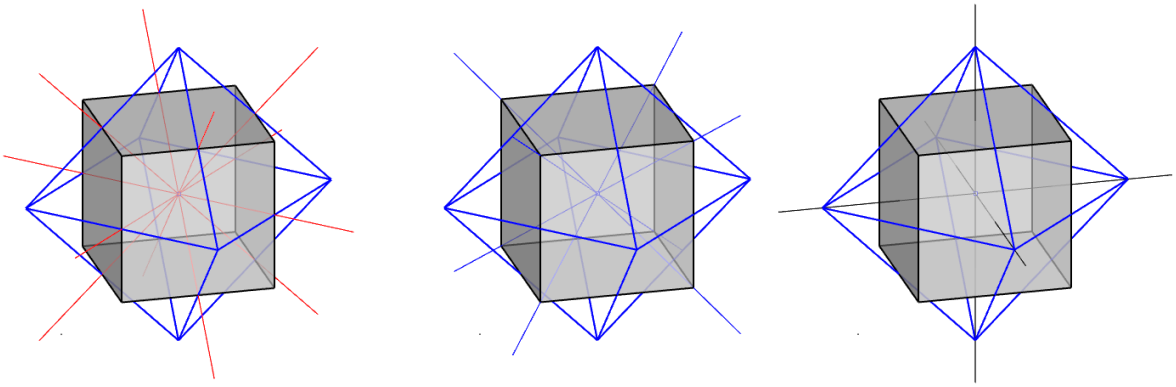
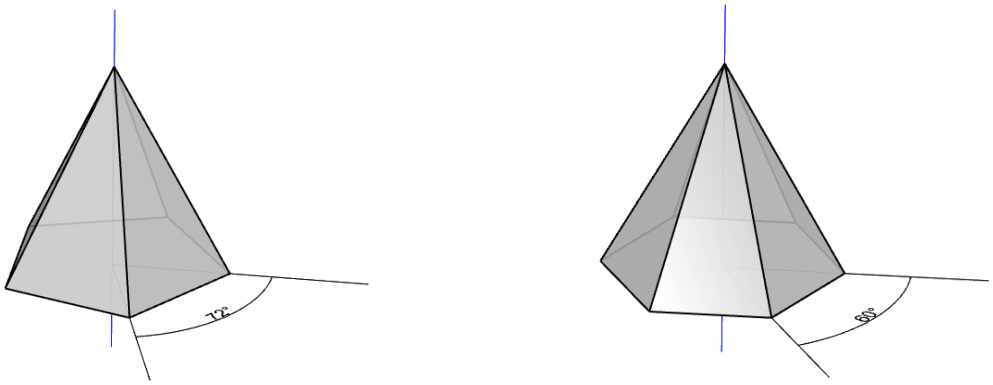


Figura 367 - Os duais cubo | octaedro partilham eixos de rotação da mesma espécie.

Grupo de simetria cíclico:

Uma pirâmide de base $\{n\}$ e faces laterais isósceles admite um único eixo de rotação de ordem n que contém o centro da base e o vértice da pirâmide. Para regressar à sua posição original, a pirâmide deve ser rodada n vezes em torno do eixo de rotação. Esta é uma das propriedades do grupo de simetria que se designa por Cíclico, e se identifica com a notação C_n (correspondendo n à ordem do eixo de rotação). A pirâmide da Figura 368a tem simetria cíclica de ordem 5 (ou, mais simplesmente, simetria C_5); a pirâmide da Figura 368b, tem simetria C_6.



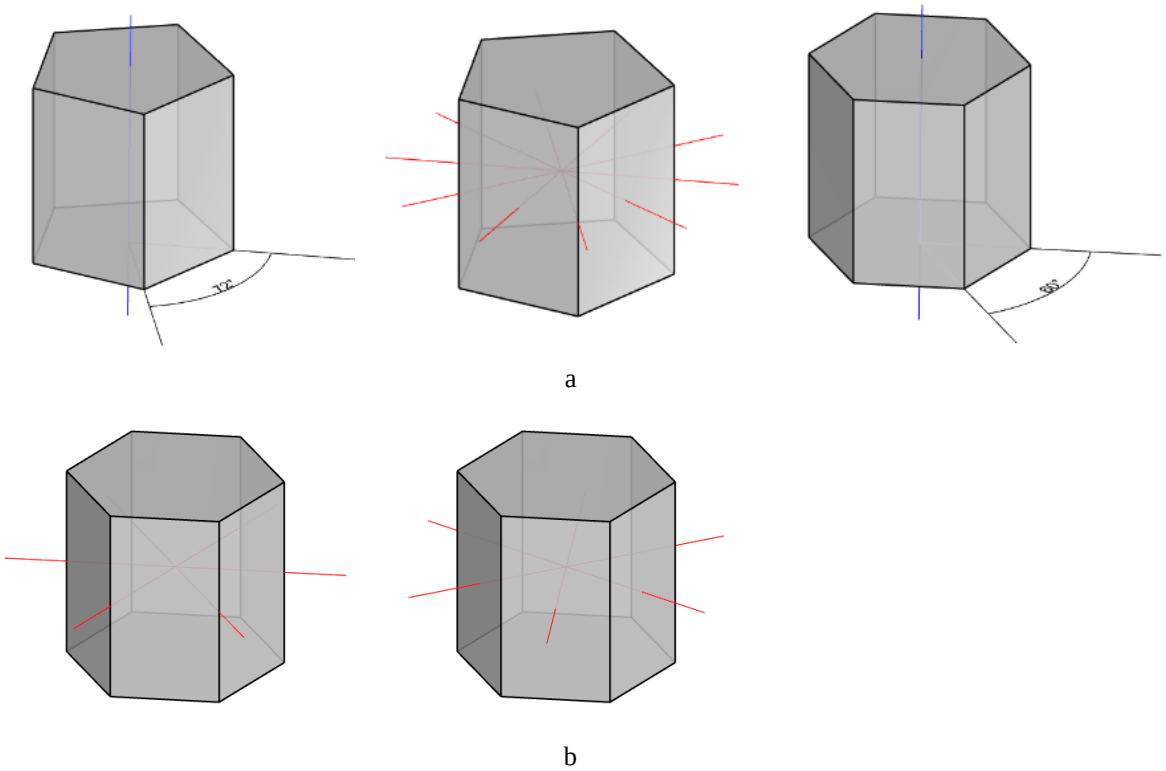
a b

Figura 368 - As pirâmides retas de base regular admitem um único eixo de simetria rotacional.

Grupo de simetria diedral:

Um prisma reto de bases $\{n\}$ admite um eixo de rotação de ordem n que contém os centros das bases e se designa como eixo principal. À semelhança da pirâmide reta de base igual, para regressar à identidade, o prisma deve ser rodado n vezes em torno do eixo de rotação. Estes

prismas retos admitem ainda eixos de rotação de ordem 2 perpendiculares ao eixo principal, que se designam como secundários e podem ser de dois tipos: (1) se *n* for ímpar, os eixos secundários contêm o ponto médio de cada aresta lateral e o centro da face que lhe é oposta; (2) se *n* for par, os eixos secundários são os que contêm os pontos médios das arestas laterais opostas e os que contêm os centros das faces laterais opostas. Esta é uma das propriedades do grupo de simetria diedral, que se identifica com a notação D_n, em que *n* corresponde à ordem do eixo de rotação principal. Existem outros poliedros, além dos prismas rectos, que possuem o mesmo grupo de simetria, como por exemplo, os antiprismas, as bipirâmides ou os trapezoedros. O prisma pentagonal da Figura 369a, possui simetria D_5 e o prisma hexagonal da Figura 369b, simetria D_6.



a

b

Figura 369 - Os prismas retos de bases regulares admitem um eixo de simetria rotacional principal (a azul) e eixos secundários (a vermelho).

Quando um poliedro apresenta este tipo de simetria e *n* é igual a 2, todos os eixos de rotação são de ordem 2 e perpendiculares entre si, razão pela qual nenhum é considerado como eixo principal (Cromwell, 1997, p. 294). Como exemplo, mostra-se um poliedro que possui simetria D_2, o dodecaedro de Bilinski (Figura 370) cujas diagonais das faces estão na proporção áurea.

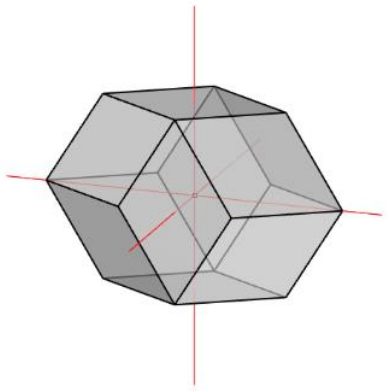


Figura 370 - O dodecaedro de Bilinski, com simetria D_2, admite simetrias de rotação em torno de três eixos de perpendiculares entre si.

Grupo de simetria tetraedral:

Na Figura 371, podemos verificar que o tetraedro regular admite, pelo facto de $p = q$, sete eixos de rotação de duas espécies: três eixos de rotação de ordem 2, que contêm os pontos médios de arestas opostas; e quatro eixos de rotação de ordem 3, cada um dos quais contém o centro de uma das faces e o vértice que lhe é oposto.

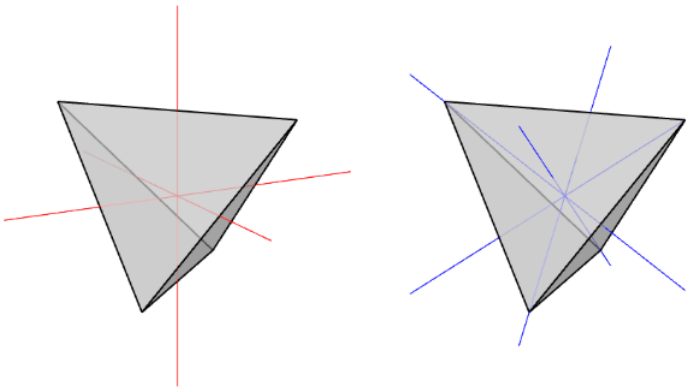
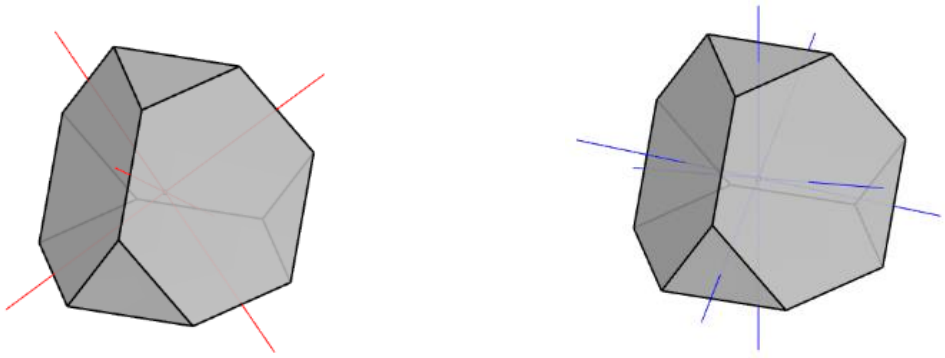


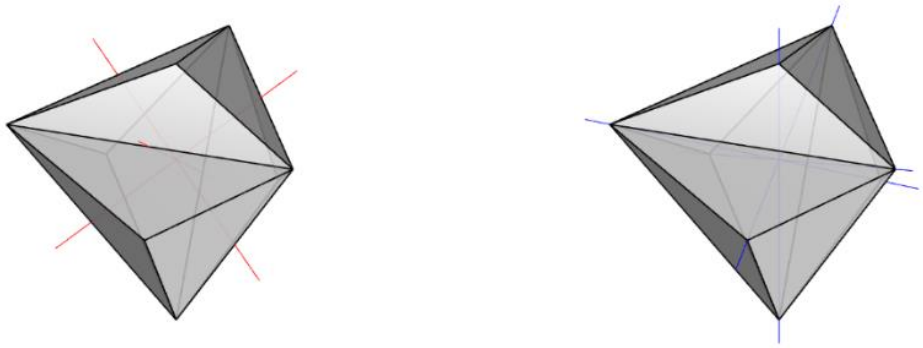
Figura 371 - O tetraedro {3,3} admite sete eixos de simetria:
três eixos de rotação de ordem 2 (à esquerda) e quatro de ordem 3 (à direita).

O total de eixos de simetria rotacional de um poliedro regular, segundo Ball e Coxeter (1987, pp. 135-136), é igual ao número de arestas do poliedro mais 1. Neste contexto, o tetraedro da figura anterior é especial, na medida em que, sendo o único poliedro regular em que $p = q$, não existem nem faces, nem arestas paralelas. Por essa razão, admite apenas quatro eixos de rotação de ordem 3 que contêm o centro de cada face e o vértice que lhe é oposto; e três eixos de rotação de ordem 2 que contêm os pontos médios das arestas. Se atribuirmos notações aos vértices deste tetraedro e posicionarmos uma das faces num plano horizontal, partimos de uma posição que

consideraremos como inicial. Mantendo esta primeira face horizontal, podemos rodar o tetraedro segundo o eixo trigonal e obter duas posições distintas da primeira. Se posicionarmos uma segunda face do tetraedro sobre o plano horizontal e o rodarmos segundo o eixo que lhe é perpendicular, obteremos três posições distintas para o tetraedro; operação idêntica para a terceira e para a quarta face permitem-nos obter mais seis posições distintas. De acordo com Cromwell, (1997, p. 290), temos assim um total de 2 + 3 + 3 + 3 posições que, adicionadas à identidade, perfazem um total de 12 posições diferentes, mas indistinguíveis, para o tetraedro regular. O tetraedro truncado e o tetraedro triakis das Figuras 372a e 372b são duais um do outro, e admitem os mesmos eixos de simetria do tetraedro: três eixos de rotação de ordem 2 e quatro eixos de ordem 3. Todos os poliedros que admitem idênticos eixos de rotação possuem o mesmo grupo de simetria, que se designa por tetraedral e se identifica com a notação *T*.



a



b

Figura 372 - Os duais tetraedro truncado | tetraedro triakis possuem simetrias do grupo de simetria tetraedral *T*. Os três eixos de rotação de ordem 2 (a vermelho) e os quatro eixos de rotação de ordem 3 (a azul) são coincidentes entre si.

Grupo de simetria octaedral:

O octaedro da Figura 373 admite 13 eixos de rotação de três espécies: seis eixos de rotação de ordem 2; quatro eixos de ordem 3 e três eixos de ordem 4, para os quais é necessária uma rotação de 360º/2, 360º/3 e 360º/4, respetivamente, para que o octaedro ocupe uma posição

indistinguível da posição inicial. Os eixos de rotação de ordem 2, 3 e 4 contêm, respetivamente, os pontos médios de arestas opostas, os centros das faces opostas, e os vértices opostos. Os eixos de rotação de ordem 2 e 4 contêm ainda os diâmetros das circunferências máximas que circunscrevem os quadrados equatoriais; os eixos de rotação de ordem 3, os diâmetros das circunferências máximas que contêm vértices opostos do octaedro. Quaisquer poliedros que partilhem as mesmas características possuem o mesmo grupo de simetria, o octaedral, que se identifica com a notação *O*.

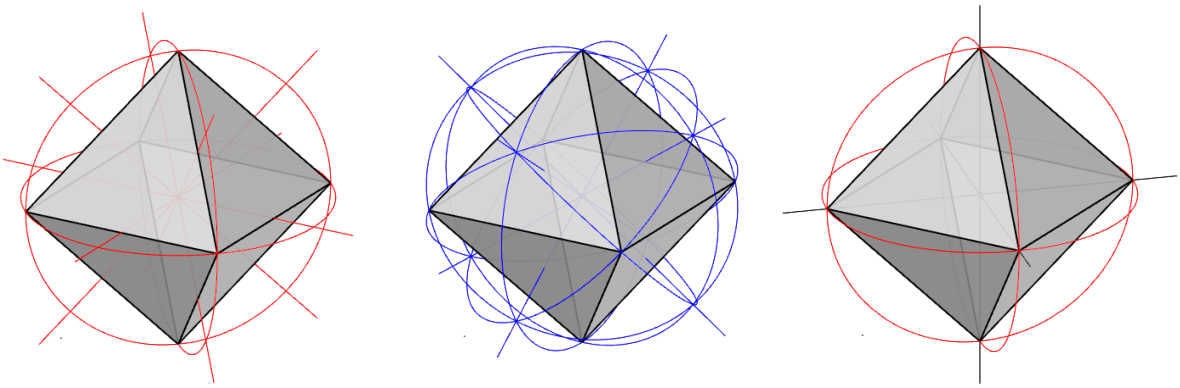


Figura 373 - Eixos de simetria de rotação de ordem 2, 3 e 4 do octaedro regular.

Na Figura 374 ilustra-se um poliedro côncavo com simetrias do grupo octaedral, o cuboctaedro quasitruncado (ou grande cuboctaedro truncado) cujo invólucro convexo é o cuboctaedro rombitruncado, um arquimediano que possui também o grupo de simetria octaedral. Os eixos de rotação de ordem 2 do cuboctaedro quasitruncado contêm os centros das faces quadradas opostas; os eixos de rotação de ordem 4 contêm os centros das faces octagramáticas {8/3} opostas; e os eixos de rotação de ordem 3 contêm os centros das faces hexagonais opostas.

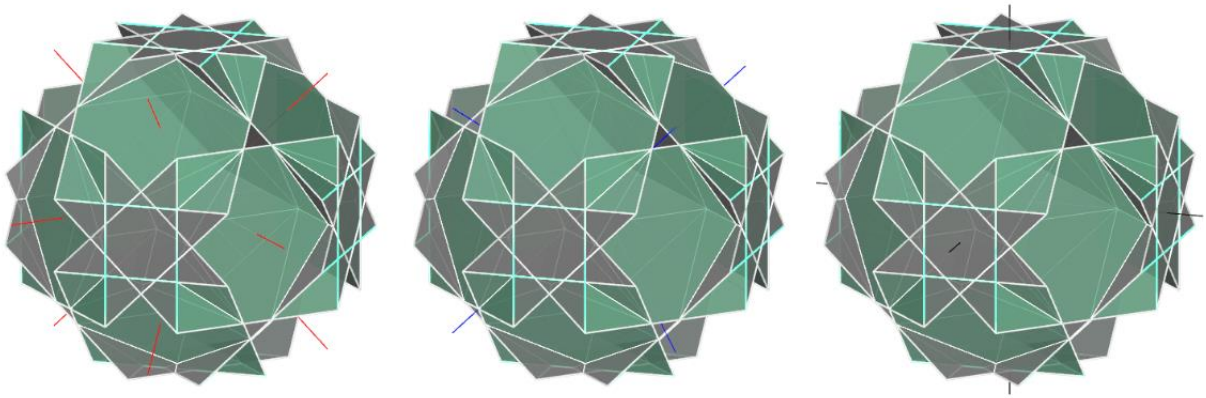
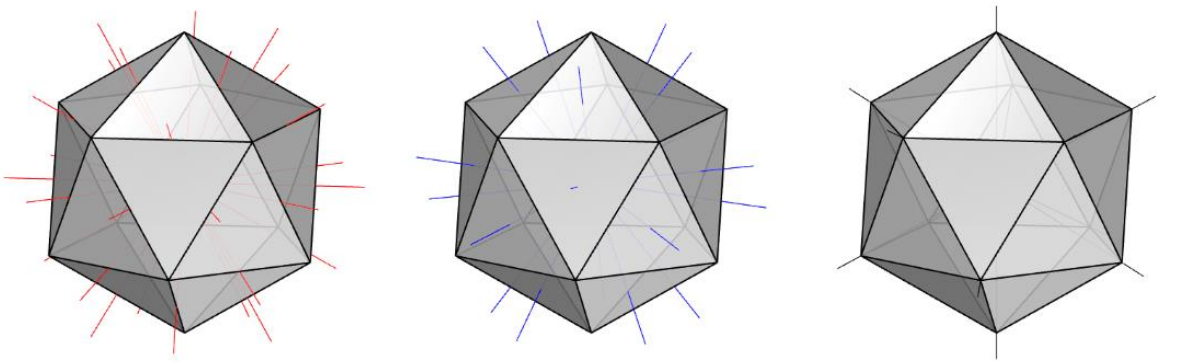


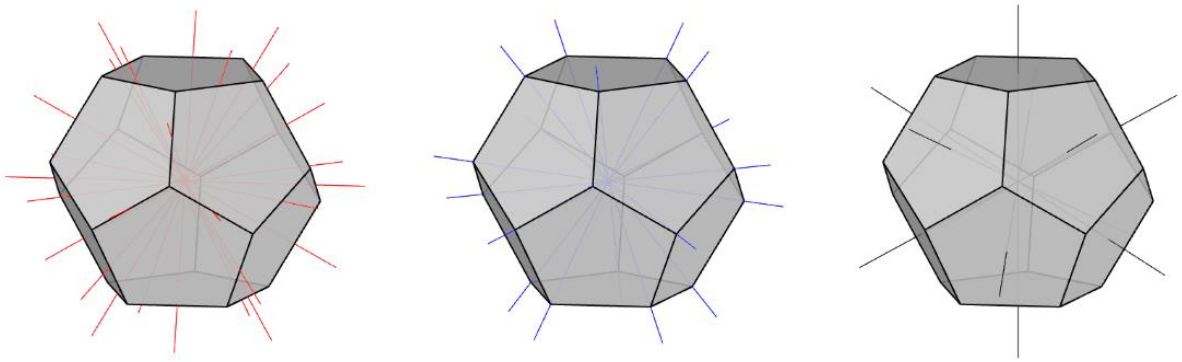
Figura 374 - O cuboctaedro quasitruncado, que possui o grupo de simetria octaedral, tem treze eixos de simetria de rotação.

Grupo de simetria icosaedral:

Nas Figuras 375a e 375b, apresentam-se os eixos de simetria de rotação do dodecaedro e do icosaedro regulares, respetivamente. Pelo facto de serem duais um do outro, os 31 eixos de rotação de ambos são de espécies semelhantes: quinze eixos de rotação de ordem 2 - *o*s que contêm os pontos médios de arestas opostas; dez eixos de rotação de ordem 3 - os que contêm os vértices do dodecaedro e os centros das faces do icosaedro; e seis eixos de rotação de ordem 5 - os que contêm os centros das faces do dodecaedro e os vértices do icosaedro). Estes dois poliedros possuem simetrias do grupo icosaedral, a que se atribui a notação *I*.



a



b

Figura 375 - Os duais dodecaedro | icosaedro regulares partilham eixos de rotação da mesma espécie.

3.2.1. Modelação de poliedros uniformes com recurso à simetria de rotação

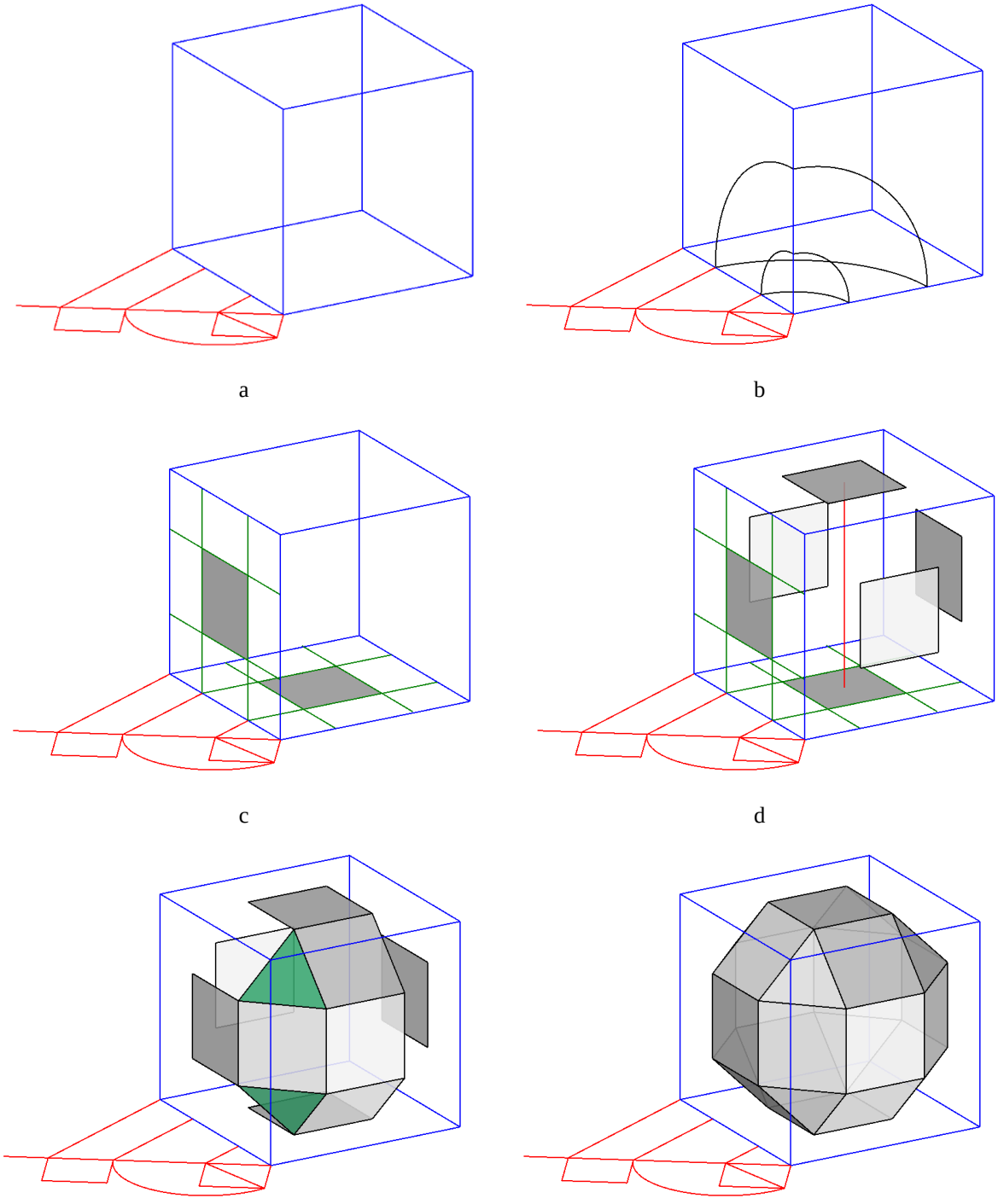
Para esta aplicação didática, sugere-se a modelação de dois poliedros uniformes que possuem o grupo de simetria octaedral. O poliedro de partida será um cubo, a partir do qual modelaremos um rombicuboctaedro. Para modelar o cubo, nesta fase, optamos por utilizar o comando *Box* – para tanto, basta selecionar o ponto a partir do qual o cubo deve ser construído (0, por exemplo, como origem das coordenadas), inserir o comprimento da aresta e digitar *ENTER* tanto para a largura como para a altura - que, desta forma, serão iguais ao comprimento. Para simplificar os passos subsequentes, mudamos o modo de visualização do cubo, com o comando *Set object shading attributes*, de *UseView Mode* (*Ghosted*) para *Wireframe*.

Modelação do rombicuboctaedro:

Procedimento: Para determinar as faces do rombicuboctaedro que pertencem às faces deste cubo, utilizaremos o processo de construção do rombicuboctaedro seguido por Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 214), que toma partido de uma construção elementar da geometria plana para dividir uma das arestas do cubo na proporção u, $\sqrt{2}u$ e u. Para tanto, a primeira e última partes marcadas na semirreta auxiliar são iguais a u e a parte do meio, igual a $\sqrt{2}u$ (Figura 376a). Com o auxílio de duas esferas, transportamos os pontos determinados na aresta para as duas arestas que lhe são concorrentes. Na Figura 376b, mostram-se as intersecções do cubo com cada uma das esferas. Esta construção determina a congruência entre as arestas do rombicuboctaedro, dado que as arestas contidas nas faces do cubo serão iguais às arestas das faces triangulares, que têm comprimento igual a $\sqrt{2}u$. Com o auxílio de paralelas às arestas do cubo, transportamos estas medidas para a face horizontal e para uma das faces laterais. A intersecção das paralelas e perpendiculares permite-nos determinar duas faces do rombicuboctaedro (Figura 376c). Com o comando *Copy*, copiamos a face horizontal do rombicuboctaedro para a outra face horizontal do cubo.

Considerando que o rombicuboctaedro é um poliedro com o grupo de simetria octaedral, transportamos a face vertical do rombicuboctaedro para as restantes faces verticais do cubo, com o comando *Array Polar*, tomando como eixo de rotação (*Object to Array*) a mediana do cubo que une os pontos médios das faces horizontais (a vermelho, na Figura 376d) e copiando a face vertical 4 vezes, de modo a efetuar uma rotação de 360º / 4 = 90º. Com o comando *Surface*

from 3 or 4 corner points, definimos duas faces quadradas e duas faces triangulares do rombicuboctaedro (Figura 376e) que, novamente com o comando *Array Polar*, transportamos para as localizações adequadas. O comando *Join* permite-nos definir uma superfície fechada a partir das faces determinadas (Figura 376f).

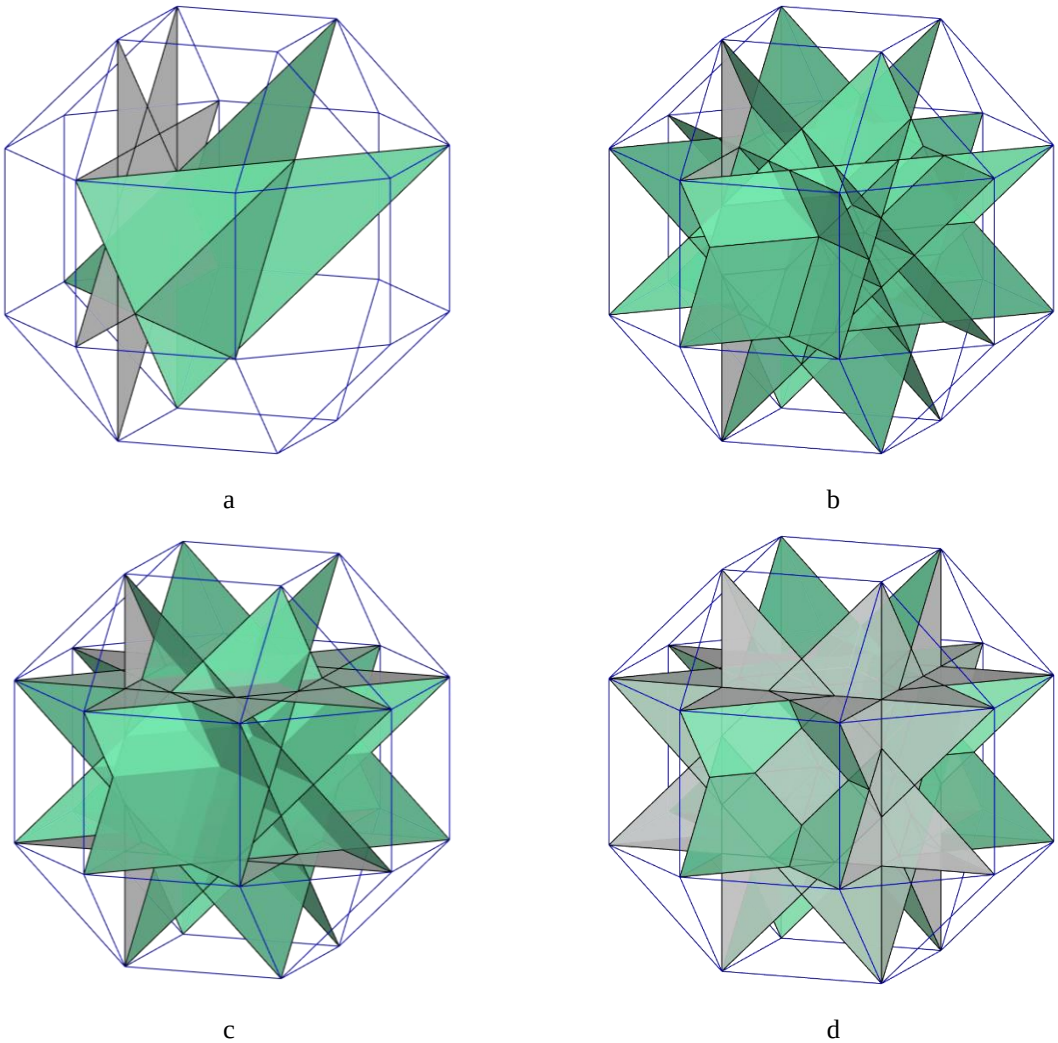


a b c d e f

Figura 376 - Modelação do rombicuboctaedro a partir do cubo.

Modelação do hexaedro quasitruncado:

Procedimento: Selecionamos o rombicuboctaedro como base e alteramos o modo de visualização de *UseView* para *Wireframe*. Para modelar o hexaedro quasitruncado (também designado como hexaedro truncado estrelado) definido por seis octagramas {8/3] e oito faces triangulares, que tem o rombicuboctaedro como invólucro convexo, tomamos em consideração que os vértices e o grupo de simetria que este poliedro côncavo uniforme possui, são os mesmos do rombicuboctaedro. Na Figura 377a definimos, por facetamento do rombicuboctaedro, uma face octagramática e duas faces triangulares. No Figura 377b, vemos o resultado da rotação idêntica à da modelação anterior, para a determinação das restante faces triangulares. Na Figura 377c, acrescentamos duas faces octagramáticas horizontais com o comando *Orient 3Pt* (com a opção *Copy*) e, na Figura 377d, o resultado de outro *Array Polar* para a primeira face octagramática.



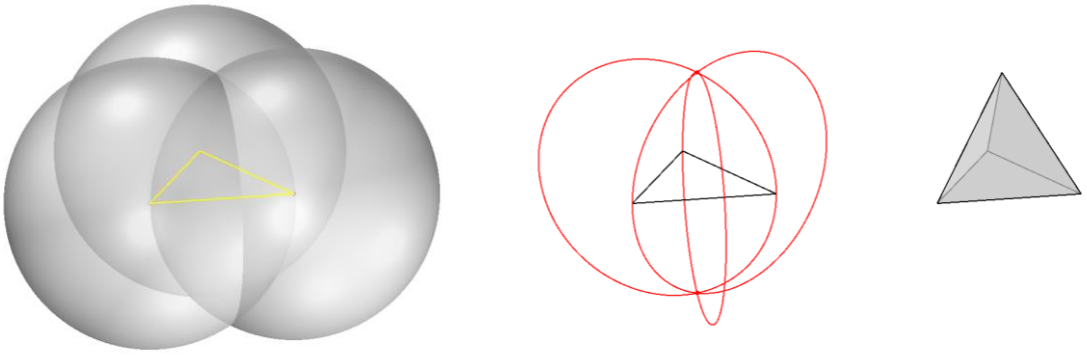
a b c d

Figura 377 - Modelação do hexaedro quasitruncado a partir do rombicuboctaedro.

3.3. Modelação dos poliedros convexos regulares

Para esta aplicação didática, propõe-se a modelação dos poliedros convexos regulares. As sugestões que se apresentam são alguns dos muitos exemplos possíveis para a sua modelação.

Modelação do tetraedro regular: Procedimento: Começamos por desenhar um triângulo equilátero de lado *x*. Para determinarmos o quarto vértice do tetraedro, a igual distância dos restantes, construímos três esferas de raio igual ao lado do triângulo, com centro em cada um dos vértices (Figura 378a). Cada uma destas esferas corresponde ao lugar geométrico dos pontos que, no espaço, se encontram à distância *x* de cada um dos vértices do triângulo. As três esferas intersectam-se em dois pontos nestas condições, sendo que um se situa acima e o outro, abaixo do triângulo (Figura 378b). Optamos pelo vértice acima do triângulo para definir o tetraedro da Figura 378c com o comando *Extrude Curve to point* (com a opção *Solid*).



a b c

Figura 378 - Modelação do tetraedro regular.
Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra/

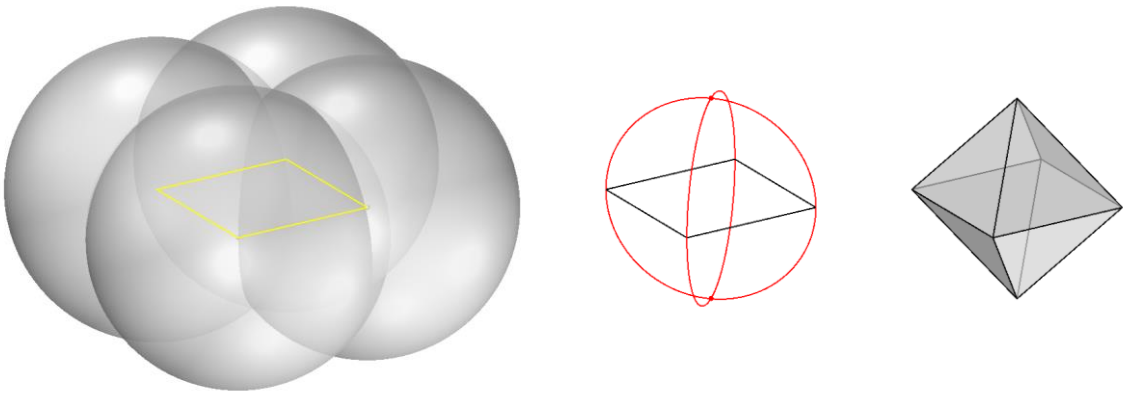
Modelação do hexaedro regular:

Procedimento: Desenhamos um quadrado e efetuamos uma rotação 3D segundo um ângulo reto, tomando um dos lados por eixo de rotação. Com o comando *Extrude Curve* (opção *Solid*), extrudimos o primeiro quadrado até ao extremo de um dos lados verticais do segundo quadrado, definindo assim um cubo. De forma bastante mais simples, podemos modelar o cubo com o comando *Box* (ver modelação relativa à Figura 376).

Modelação do octaedro regular:

Procedimento: Para o octaedro, começamos com um quadrado, a partir de cujos vértices construímos quatro esferas, com raio igual ao lado do quadrado (Figura 379a). Da intersecção das esferas resultam dois pontos (Figura 379b) a igual distância dos vértices do quadrado (para

melhor visualização, ilustramos a intersecção de cada par de esferas através de arcos de circunferência). Com o comando *Extrude Curve to point* (sem a opção *Solid*), definimos a superfície piramidal que tem o vértice para cima e outra superfície piramidal com o vértice para baixo. O comando *Join* permite-nos transformar as duas superfícies num octaedro (Figura 379c).



a b c

Figura 379 - Modelação do octaedro regular.
Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra/

Modelação do dodecaedro regular:

Procedimento: Para construir o dodecaedro, começamos por desenhar um pentágono regular *A*, que transformamos em superfície com o comando *Surface from Planar Curves*. Desenhamos um pentágono *B* (à esquerda) e outro *C* (à direita), de modo a que *B* e *C* tenham um lado em comum com *A*. Desenhamos ainda uma esfera com raio igual ao lado do pentágono e centro no ponto de intersecção dos três pentágonos (Figura 380a). Definimos a seguir duas esferas com raio igual à diagonal do pentágono: uma, com centro no outro vértice que é comum aos pentágonos *A* e *B*; e outra, com centro no vértice comum a *A* e *C* (Figura 380b). Da intersecção das três esferas resultam dois pontos que estão a igual distância da intersecção dos três pentágonos e dos vértices que, nos pentágonos *B* e *C*, lhe estão mais próximos. Optaremos pelo ponto que está acima dos pentágonos para construir o dodecaedro. Transformamos o pentágono *B* (à esquerda) numa superfície com o comando *Surface from Planar Curves*. Efetuamos uma rotação 3D desta superfície, tendo o lado comum aos pentágonos *A* e *B* por eixo de rotação, de modo a que o vértice pertencente ao arco da esquerda passe a ocupar a localização do ponto acima dos pentágonos. Na Figura 380c, a segunda face do dodecaedro já está na localização pretendida. Com o comando *Array Polar*, selecionamos esta última face e, tomando o centro do pentágono *A* como centro de rotação, copiámo-la cinco vezes em torno do eixo vertical, dispondo mais quatro faces na localização correta (Figura 380d). Aqui, convirá fazer *Join* das seis faces já

determinadas. Para a parte superior do dodecaedro, desenhamos o segmento de reta que une os pontos médios de duas arestas paralelas das faces que acabamos de determinar (Figura 380e) e tomámo-lo por eixo de uma rotação de 180º. Esta rotação terá como objeto as seis faces que acabamos de juntar e, como *Start of rotation axis*, um ponto qualquer do plano horizontal deste segmento. Depois de efetuada a rotação, unimos as duas superfícies através do comando *Join* (Figura 380f). Em alternativa a esta rotação, poderemos optar pelo comando *Orient 3pt* (sem a opção *Copy*). tal como fizemos no vídeo cuja hiperligação se encontra na legenda.

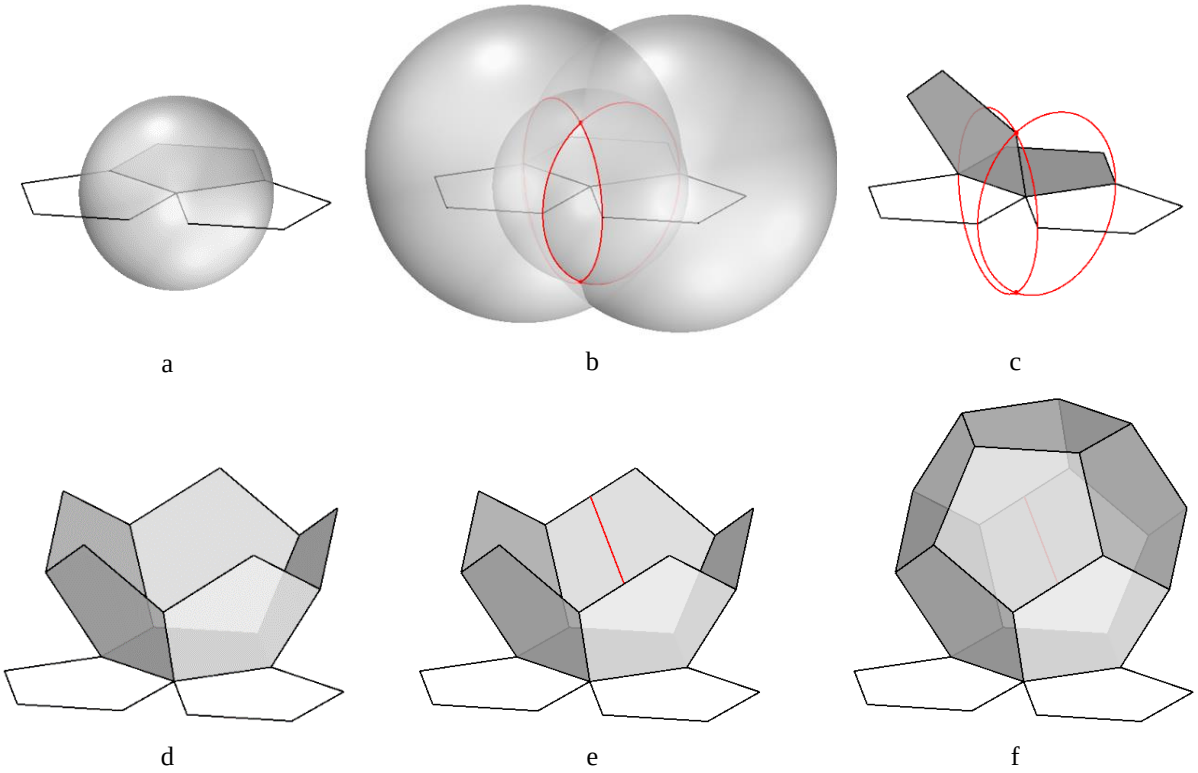


Figura 380 - Modelação do dodecaedro regular.
Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra/

Modelação do icosaedro regular (para a qual se apresentam duas hipóteses):

Procedimento 1: Tomando partido das relações já referidas entre a aresta do icosaedro e a proporção áurea, começamos por desenhar um retângulo de ouro a partir de um quadrado (Figura 381a) e transformamo-lo em superfície com o comando *Surface from Planar Curves*. Tomando a mediana menor deste retângulo como eixo de rotação, fazemos uma rotação 3D (com *Copy*), de modo a obtermos outro retângulo, perpendicular ao primeiro (Figura 381b). Uma rotação 2D deste retângulo permite-nos colocá-lo na posição da Figura 381c. Repetindo a rotação 3D do

primeiro retângulo, tendo a mediana maior como eixo de rotação, obtemos o retângulo da Figura 381d, que, através de uma rotação 2D, ocupará a posição da Figura 381e. Com o comando *Surface from 3 or 4 corner points* e com *Array Polar* e *Mirror*, definimos as vinte faces do icosaedro, tomando como vértices os dos três retângulos triortogonais da Figura 381f.

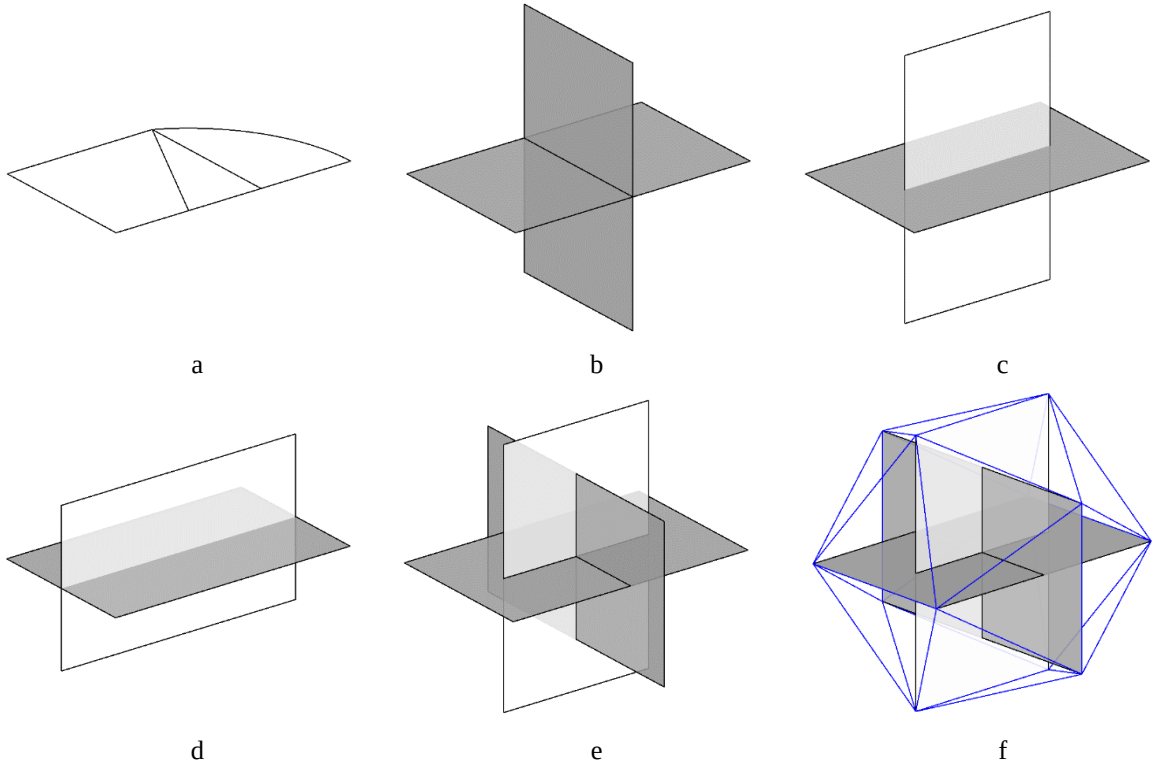


Figura 381 - Modelação do icosaedro regular a partir de três retângulos de ouro.
Um vídeo desta modelação encontra-se disponível a partir de https://veraviana.net/regular-polyhedra/

Procedimento 2: Começamos por definir um pentágono regular. Efetuamos uma rotação 2D deste pentágono *A* (com a opção *Copy* e tendo o centro do pentágono como centro da rotação), de modo a obtermos outro pentágono *B* (a azul, na Figura 382a), rodado, em relação ao primeiro, segundo um ângulo igual a metade do ângulo ao centro (isto é, 36º). Dito de outra forma: tendo como *First reference point*, um vértice do pentágono *A* e como *Second reference point*, o ponto médio de um dos lados mais próximos.

A partir de um dos vértices do pentágono *B*, desenhamos uma linha vertical auxiliar (Figura 382a) e incluímos duas esferas, com raio igual ao lado do pentágono e centro nos vértices do pentágono *A* que se situam para um lado e para o outro desta linha auxiliar. Determinamos a intersecção destas duas esferas (Figura 382b). Movemos o pentágono *B* até ao ponto de intersecção da linha auxiliar com a circunferência que resultou da intersecção das esferas (Figura 382c). Temos assim definidos os vértices de um antiprisma semirregular.

Definimos duas faces laterais adjacentes com o comando *Surface from 3 or 4 corner points* (Figura 382d) e modelamos as restantes faces, rodando estas duas faces cinco vezes em torno do eixo vertical que contém o centro dos pentágonos, com o comando *Array Polar* (Figura 382e). Desenhamos três esferas com raio igual ao lado do pentágono e centro em três vértices do pentágono *B*. Determinamos o ponto de intersecção situado acima deste, que será o décimo primeiro vértice do icosaedro (Figura 382f). Definimos mais cinco faces do icosaedro com o *Surface from 3 or 4 corner points* e/ou *Array Polar* (Figura 382g) e copiamo-las para a parte inferior do antiprisma com o comando *Orient 3pt* (com a opção *Copy*). Para tanto, selecionamos três pontos do pentágono *B* como *reference points* e definimos as suas novas localizações como *target points* no pentágono *A*, mas por ordem inversa (Figura 382h).

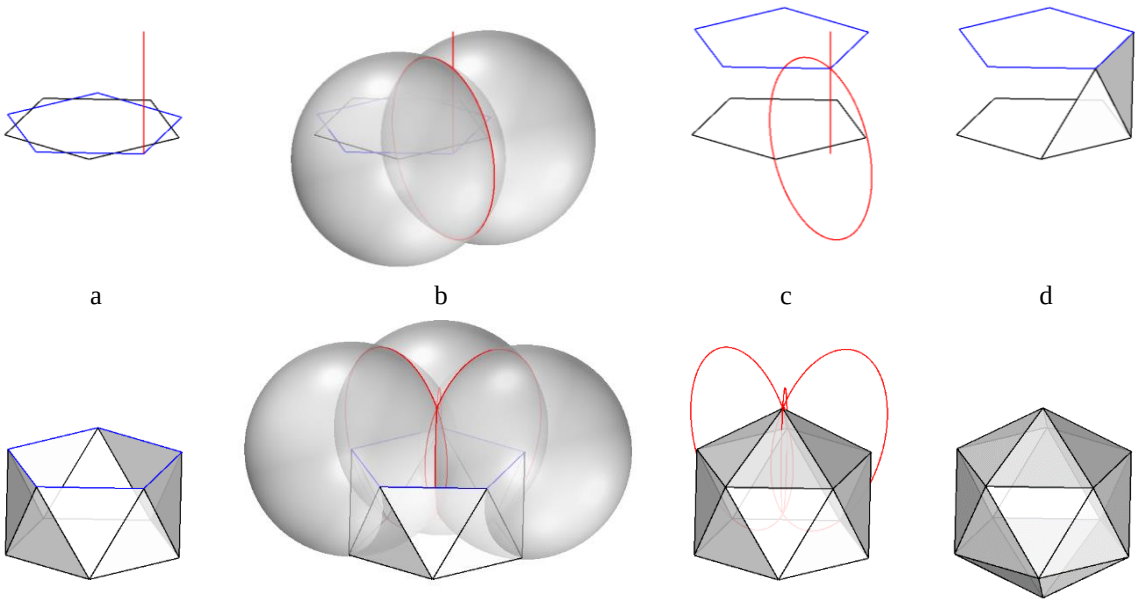


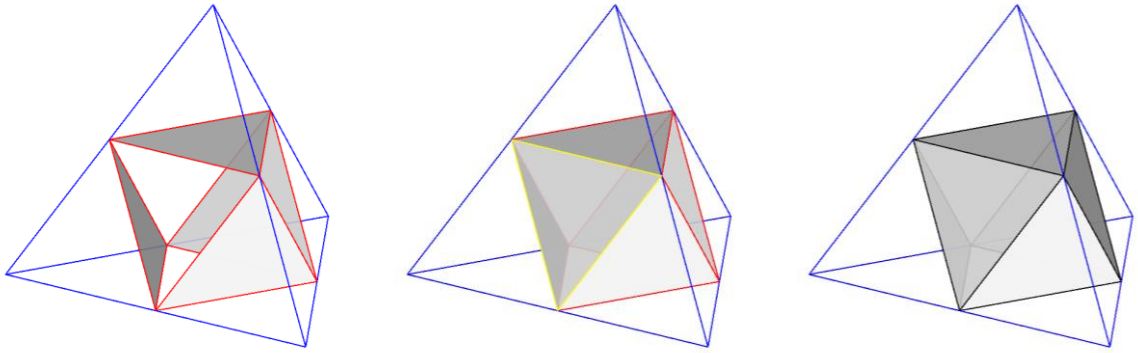
Figura 382 - Modelação do icosaedro regular a partir de um antiprisma pentagonal semirregular.

3.3.1. Modelação da intersecção de poliedros convexos regulares recíprocos e seus duais

O invólucro convexo que contém as figuras verticiais definidas pelos pontos médios das arestas de um poliedro regular é um poliedro quasirregular, que tem arestas e vértices transitivos e faces regulares de dois tipos. Este poliedro quasirregular é ainda o resultado da intersecção do poliedro regular e do seu dual com a mesma esfera de reciprocação.

Modelação da intersecção do par tetraedro | tetraedro:

Procedimento: Na Figura 383a, determinamos as figuras verticiais dos vértices do tetraedro (duas delas, com recurso a *Array Polar*, tendo 3 como *Number of itens*), com vértices nos pontos médios das arestas e, através do *Surface from planar curves*, transformamo-las em superfícies, que serão quatro das faces do octaedro que delimita as figuras verticiais. Definimos mais uma face do octaedro (a amarelo, na Figura 383b) com recurso ao *Surface from 3 or 4 corner points* e as restantes, com *Array Polar*, tendo o vértice superior do tetraedro como centro de rotação. Fazemos *Join* das sete superfícies determinadas e a seguir um *Cap* para transformar o octaedro numa superfície fechada (Figura 383c).



a b c

Figura 383 - Modelação do octaedro a partir do tetraedro.

Modelação da intersecção do par cubo | octaedro:

Procedimento: Começamos por modelar um cubo (cujo *Display mode* alterámos para *wire-frame*) e uma face triangular definida pelo centro de três faces concorrentes do cubo (Figura 384a) com o comando *Surface from 3 or 4 point*s. Tomando a mediana que contém o centro das faces superior e inferior do cubo (a vermelho, na Figura 384a e 384b) como eixo de rotação de um *Array Polar* e considerando 4 como *Number of itens* (pelo facto de, tanto o cubo como o octaedro possuírem o mesmo grupo de simetria, o octaedral), modelamos mais três faces do

octaedro (Figura 384b). Para as faces ainda em falta, utilizamos o comando *Mirror* com a opção *3 points*, para definir o plano de reflexão (por exemplo) pelos pontos médios de três arestas verticais do cubo (Figura 384c). O cubo e o octaedro de que vamos determinar a intersecção devem partilhar a mesma esfera de reciprocação e intersectar-se nos pontos médios das suas arestas. Para tanto, definimos um segmento de reta entre o ponto médio do eixo a vermelho (centro do cubo e do octaedro) e o ponto médio de uma das arestas do cubo. Faremos agora um *Scale 3D* do octaedro, tomando como *base point* o centro do cubo; como *First reference point*, o ponto médio da aresta do octaedro; e, como *Second reference point*, o ponto médio da aresta do cubo que lhe é mais próxima (Figura 384d). Na Figura 384e, alteramos o *Display mode* do octaedro para *Wireframe*. Para obtermos o cuboctaedro resultante da intersecção do cubo e do octaedro (Figura 384f), utilizamos o comando *Boolean Intersection*, tendo o cubo ou o octaedro como *First set of surfaces* e o outro como *Second set of surfaces.*

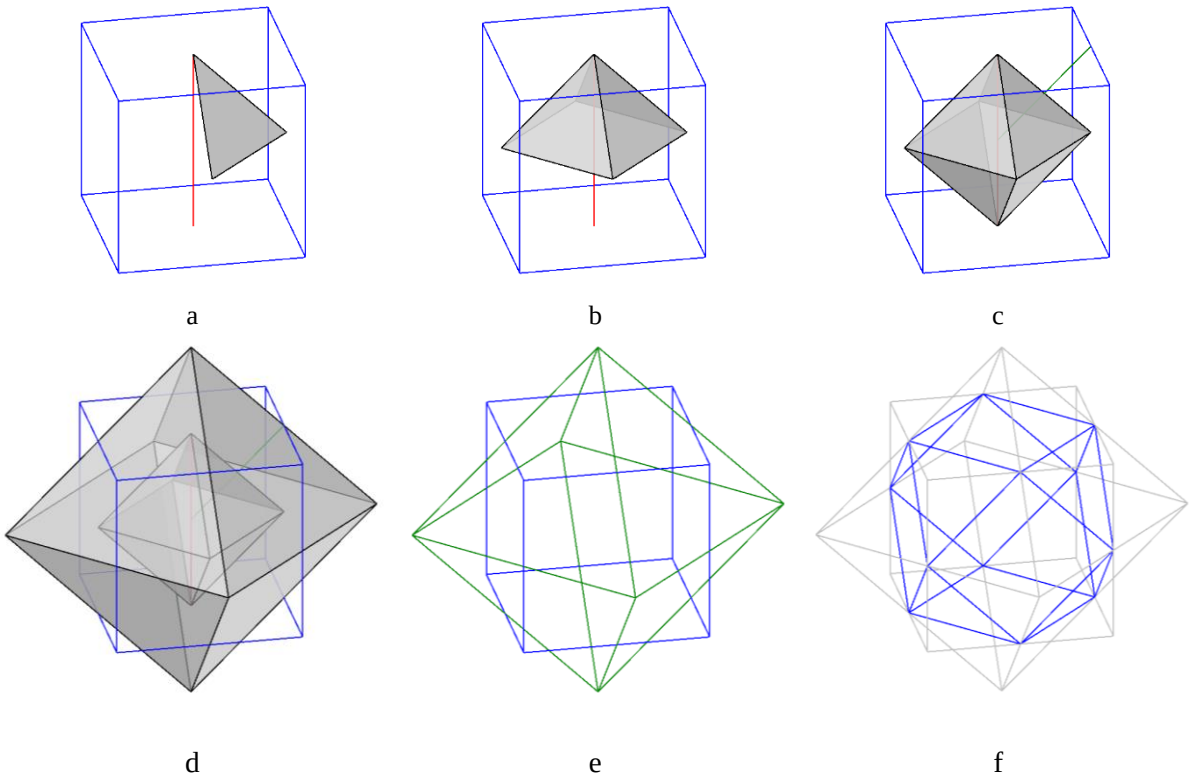
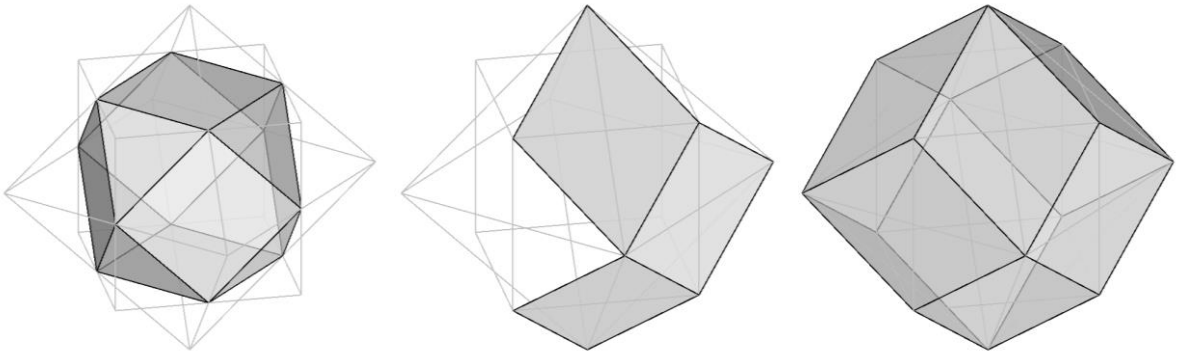


Figura 384 - Modelação do cuboctaedro a partir do par cubo | octaedro.

Modelação do dodecaedro rômbico a partir do par cubo | octaedro:

Procedimento: Na Figura 385a, alteramos *o display mode* do resultado da intersecção da Figura 384f para *UseView* em *Set object display mode*. Para obtermos o menor poliedro convexo que delimita este par de recíprocos, definimos três faces rômbicas conjugando os vértices do cubo

e do octaedro com o *Surface from 3 or 4 point*s (Figura 385b). Com *Array Polar*, definimos as restantes faces. Com *Join*, obtemos o dodecaedro rômbico (Figura 385c) e dual do cuboctaedro.



a b c

Figura 385 - Modelação do dodecaedro rômbico a partir do par cubo | octaedro.

Modelação da intersecção do par dodecaedro | icosaedro:

Procedimento: Para a modelação do icosidodecaedro que resulta da intersecção deste par de reciprocos, partimos de um dodecaedro (modelado através do procedimento exemplificado anteriormente) e definimos quatro faces triangulares a partir dos pontos médios das suas arestas, com o comando *Surface from 3 or 4 points* (Figura 386a). Sabendo que o icosidodecaedro também possui o grupo de simetria icosaedral, modelamos as restantes faces triangulares com o comando *Array Polar*, tendo o centro da face superior do dodecaedro como centro de rotação e considerando 5 como *Number of Itens* (Figura 386b). Para facilitar a modelação das faces pentagonais, ocultamos temporariamente (ou mudamos para outra *layer*) as vinte faces que acabámos de determinar. Com o comando *Polyline*, desenhamos as linhas poligonais fechadas que delimitam duas das faces pentagonais definidas pelos pontos médios das arestas do dodecaedro (Figura 386c). Transformamos estas curvas em superfícies com o *Surface from planar curves* e distribuímo-las pelas faces do dodecaedro com o *Array Polar* (Figura 386d). Fazemos *Join* das trinta faces determinadas (Figura 386e) e um *Cap* para transformar o icosidodecaedro numa superfície fechada (Figura 386f).

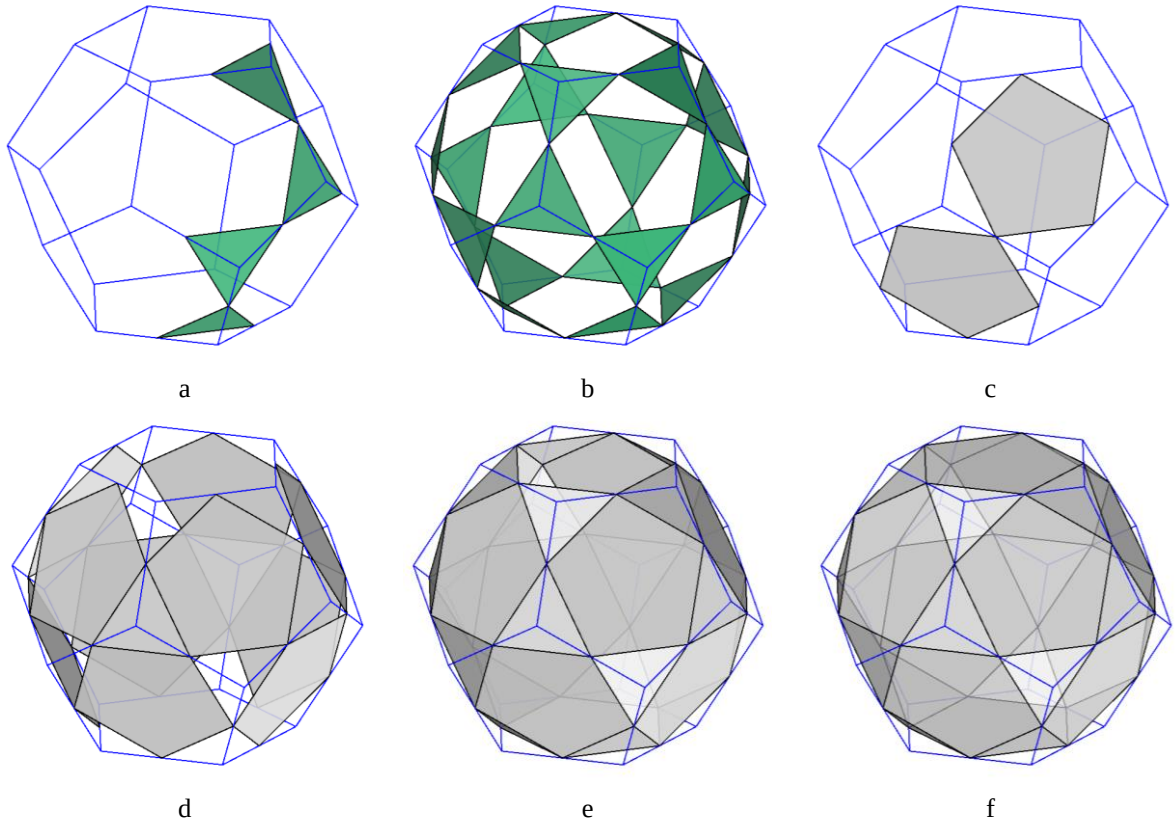


Figura 386 - Modelação do icosidodecaedro a partir do dodecaedro.

Modelação do triacontaedro rômbico a partir do par dodecaedro | icosaedro:

Procedimento: Para modelar o triacontaedro rômbico que delimita o par dodecaedro | icosaedro, seguiremos um percurso alternativo ao utilizado anteriormente. Começando novamente com o dodecaedro, determinamos uma das faces do seu dual, unindo os centros de três faces concorrentes. Para nos auxiliar com o *Scale 3D* que faremos depois de construída esta face, incluimos um segmento de reta que une o centro do dodecaedro (determinado com o comando *Volume centroid*) ao ponto médio da aresta do dodecaedro (Figura 387a). Fazemos então um *Scale 3D* para determinar uma face do icosaedro, que é recíproco do dodecaedro, paralela à face que acabamos de determinar. Selecionando a face triangular, tomamos como *base point* o centro do dodecaedro; como *First reference point*, o ponto médio da aresta da face triangular; e, como S*econd reference point*, o ponto médio da aresta do dodecaedro que lhe é mais próxima (Figura 387b).

Por termos acabado de determinar dois vértices do recíproco do dodecaedro, já nos é possível definir uma das faces rômbicas do triacontaedro (Figura 387c). Com o comando *Orient 3pt* (e a opção *Copy*) replicamos esta face rômbica para mais quatro posições, tomando como primeiro

e segundo *reference points* os extremos da diagonal menor do losango e como terceiro *reference point*, um dos extremos da outra diagonal (Figura 387d). Depois de unirmos as faces com o comando *Join* numa *polysurface* (Figura 387e), as faces em falta são determinadas com os comandos *Cap* e/ ou *Surface from 3 or 4 points*, de modo a definirmos o triacontaedro rômbico da Figura 387f.

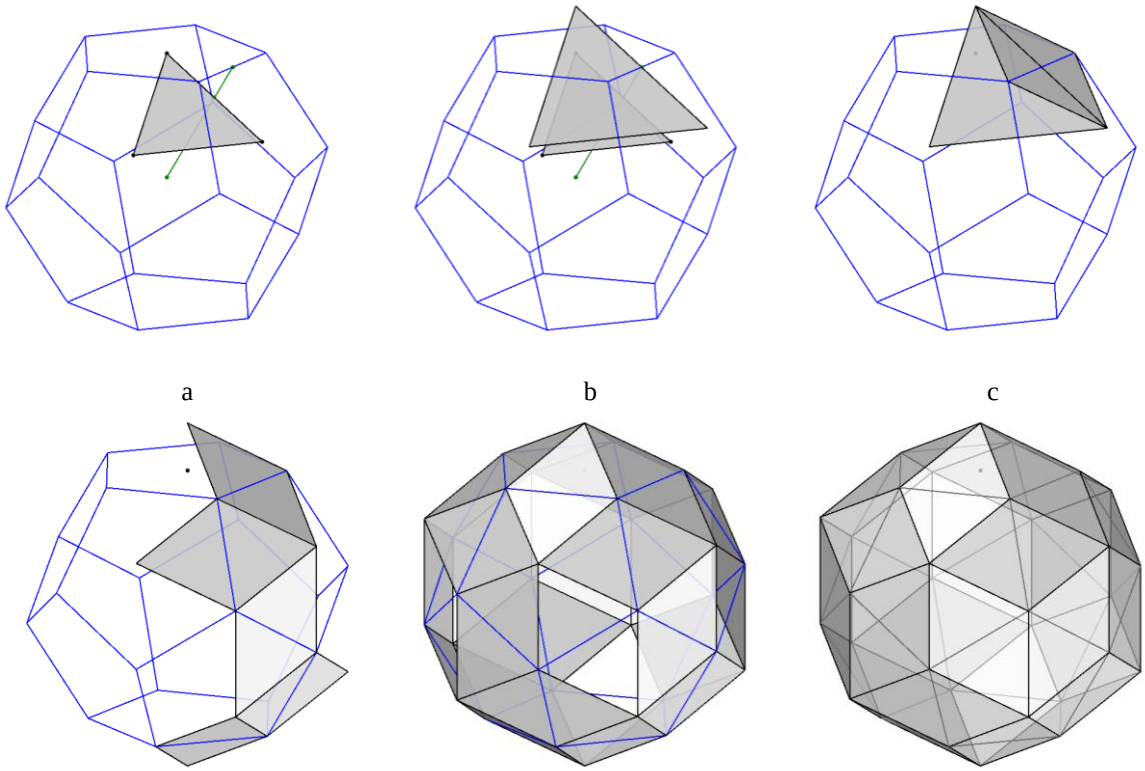


Figura 387 - Modelação do triacontaedro rômbico a partir do dodecaedro.

3.4. Poliedros convexos regulares inclusos e envolventes

Para esta aplicação didática, é proposta a modelação de poliedros convexos regulares inclusos uns nos outros, de modo a tirar partido das muitas relações que os poliedros convexos regulares partilham entre si e das possibilidades de exploração de conteúdos e transformações geométricas que a sua modelação permite. Como exemplo, mostra-se a sequência de poliedros convexos regulares inclusos da Figura 388.

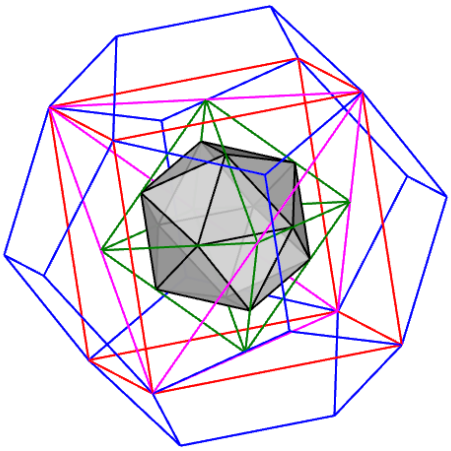


Figura 388 - Sequência de poliedros convexos regulares inclusos
(do exterior para o interior): dodecaedro, cubo, tetraedro, octaedro e icosaedro.

É possível inscrever qualquer poliedro convexo regular no interior de outro poliedro convexo regular, de modo a que os vértices do primeiro poliedro pertençam à superfície do segundo. Ao primeiro poliedro, damos o nome de incluso e ao segundo, poliedro envolvente. Em alguns casos, as faces do incluso pertencem às faces do envolvente; noutros, os vértices do incluso pertencem às arestas do poliedro maior ou coincidem com alguns vértices (caso em que o incluso resulta do facetamento do envolvente). Em algumas situações, as arestas e a localização dos vértices dos dois poliedros relacionam-se com a proporção áurea. A compreensão das relações de cada caso permite-nos compreender modelos semelhantes ao que Kepler concebeu no *Mysterium Cosmographicum* de 1596 (Figura 389). Para justificar a existência dos seis planetas conhecidos na altura e as distâncias conjeturadas entre as órbitas de cada planeta, por relação com os poliedros platónicos e as esferas que os circunscrevem, Kepler declarou que a órbita da Terra era a medida de todas as coisas; estando-lhe circunscrita um dodecaedro, sendo o círculo que o contém, Marte. Circunscrito em torno de Marte estaria um tetraedro, e o círculo que o conteria seria Júpiter…. Temos assim, terá afirmado, a razão para o número de planetas (Kepler, citado por Brecher, 2011, p. 380).

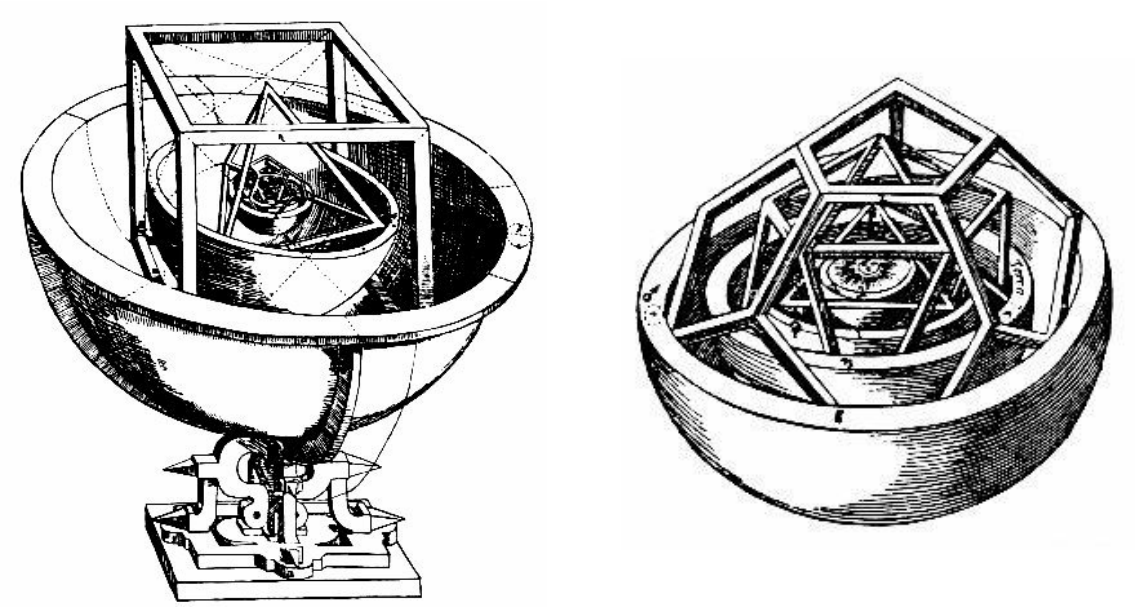


Figura 389 - Modelos poliédricos do sistema solar segundo Kepler in *Mysterium Cosmographicum*, 1596. A imagem da direita corresponde ao interior da imagem da esquerda (Hart, 1998).

Dispondo (do interior para o exterior) o octaedro, o icosaedro, o dodecaedro, o tetraedro e o cubo, Kepler deduziu que os intervalos entre as respetivas circunsferas corresponderiam às distâncias relativas entre as órbitas de cada planeta, de acordo com uma perspetiva heliocêntrica. A esfera exterior é Saturno, enquanto a interior é Júpiter (Hart, 1998a) e entre as duas esferas, Kepler (citado por Luminet, 2009, p. 9) inseriu um octaedro entre as órbitas de Mercúrio e Vénus, um icosaedro entre Vénus e a Terra, um dodecaedro entre a Terra e Marte, um tetraedro entre Marte e Júpiter, e um cubo entre Júpiter e Saturno.

Apesar de Kepler ter errado nas suas conclusões (não apenas nas relações entre as distâncias das órbitas, mas pelo facto de existirem mais do que seis planetas) a construção de modelos mais ou menos semelhantes não deixa de ser interessante, pela exploração geométrica das relações entre os poliedros e o potencial que a sua construção e modelação permitem. Embora a maioria das construções deste capítulo tenham sido adaptadas de Pugh (1976, p. 13), não se pretende esgotar os métodos possíveis para a construção dos poliedros platónicos inclusos.

A Tabela 3 apresenta as relações existentes entre o poliedro convexo regular incluso e o seu envolvente, de acordo com as construções que serão abordadas nas páginas subsequentes. As relações T_i /T_e, C_i /O_e, O_i /C_e, D_i /I_e e I_i /D_e são de dualidade e foram referidas em capítulo anterior.. As relações T_i /C_e, T_i /D_e e C_i /D_e resultam do facetamento do poliedro envolvente.

Tabela 3 - Relações entre os poliedros convexos regulares incluso (P_i) e envolvente (P_e).
T (tetraedro) | C (Cubo) | O (Octaedro) | D (Dodecaedro) | I (Icosaedro)

	T_e	C_e	O_e	D_e	I_e
T_i	Os vértices do T_i coincidem com o centro das faces do T_e	As arestas do T_i coincidem com diagonais faciais concorrentes do C_e	Os vértices do T_i coincidem com o centro de 4 faces do O_e	Os vértices do T_i coincidem com 4 vértices do D_e	Os vértices do T_i coincidem com o centro de 4 faces do I_e
C_i	4 vértices do C_i coincidem com o centro das faces do T_e		Os vértices do C_i coincidem com o centro das faces do O_e Os vértices do C_i pertencem às arestas do O_e na razão $\sqrt{2}$:1.	Os vértices do C_i coincidem com 8 vértices do D_e	Os vértices do C_i coincidem com o centro de 8 faces do I_e
O_i	Os vértices do O_i coincidem com o ponto médio das arestas do T_e	Os vértices do O_i coincidem com o centro das faces do C_e Os vértices do O_i pertencem às arestas do C_e na razão 3/4.		Os vértices do O_i coincidem com o ponto médio de 6 arestas do D_e	Os vértices do O_i coincidem com o ponto médio de 6 arestas do I_e
D_i	4 vértices do D_i coincidem com o centro das faces do T_e	6 arestas do D_i pertencem a medianas das faces do C_e[46]	8 vértices do D_i coincidem com o centro das faces do O_e		Os vértices do D_i coincidem com o centro das faces do I_e
I_i	4 faces do I_i pertencem às faces do T_e [47]	6 arestas do I_i pertencem a medianas das faces do C_e [48]	8 faces do I_i pertencem às faces do O_e[49]	Os vértices do I_i coincidem com o centro das faces do D_e	

[46] As arestas do dodecaedro têm comprimento igual ao segmento de reta menor resultante da partição da aresta do cubo segundo a proporção áurea.
[47] Os vértices destas quatro faces são determinadas com recurso à proporção áurea.
[48] As arestas do icosaedro têm comprimento igual ao segmento de reta maior resultante da partição da aresta do cubo segundo a proporção áurea.
[49] Os vértices destas oito faces são determinadas com recurso à proporção áurea.

3.4.1. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no tetraedro regular

O único poliedro convexo regular no interior do qual é possível incluir cada um dos cinco convexos regulares (incluindo ele próprio) é o tetraedro.

Modelação do tetraedro incluso no tetraedro:

O poliedro incluso que se mostra na Figura 390 é o próprio tetraedro que, sendo dual do envolvente, tem os vértices coincidentes com os centros das suas faces. A circunsfera do poliedro incluso coincide com a insfera do poliedro maior. Esta relação, recordamos, tinha já sido ilustrada em capítulo anterior.

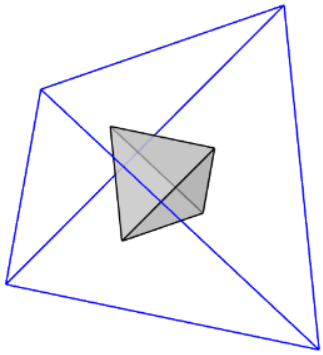
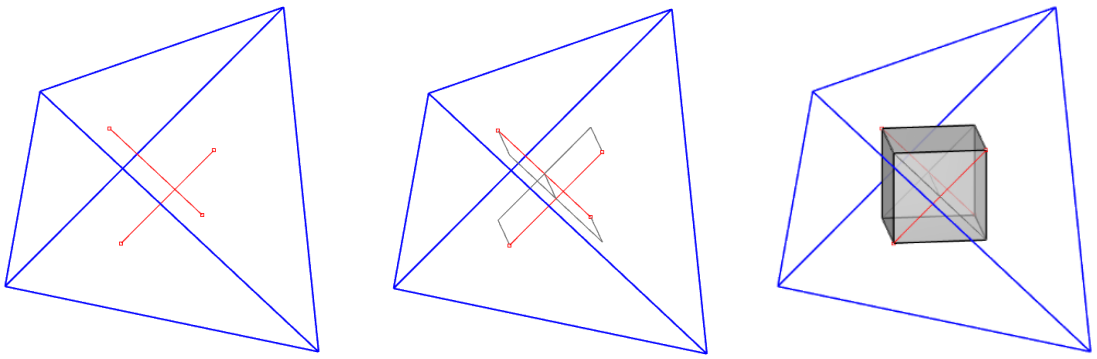


Figura 390 - O tetraedro dual, definido pelos centros das faces do tetraedro maior.

Modelação do cubo incluso no tetraedro:

Procedimento: Definimos dois segmentos de reta com os extremos coincidentes com o centro de faces adjacentes do tetraedro (Figura 391a). Estes segmentos de reta são diagonais ortogonais de faces opostas do cubo. A construção posterior resume-se à translação das diagonais de uma face para a outra (Figura 391b) para a determinação dos restantes vértices (Figura 391c).



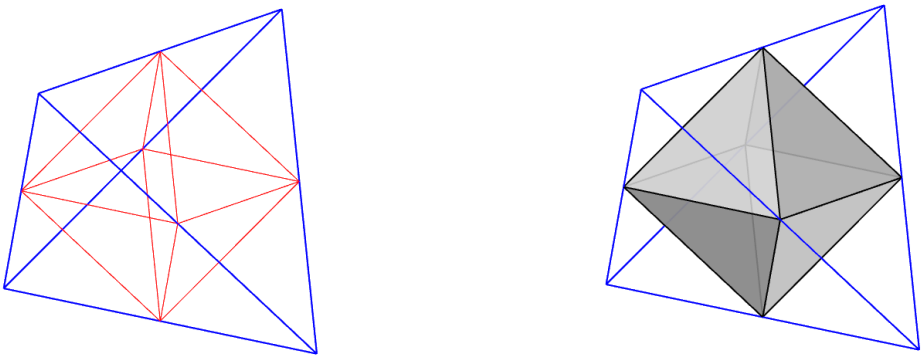
a b c

Figura 391 - Cubo incluso num tetraedro regular.

Modelação do octaedro incluso no tetraedro:

Procedimento: Os vértices do octaedro incluso correspondem aos pontos médios das arestas do tetraedro envolvente (Figura 392a). As arestas do octaedro correspondem às figuras verticiais do tetraedro (Figura 392b), conforme tinha sido já referido em capítulo anterior.

.

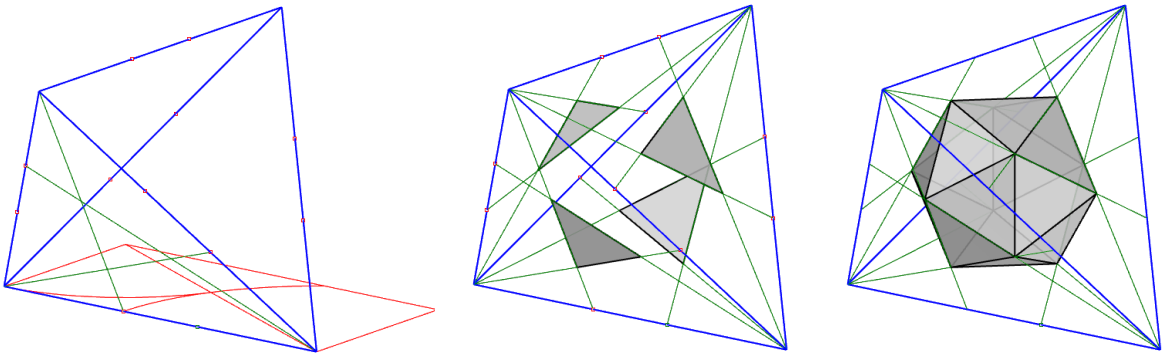


a b

Figura 392 - Octaedro regular incluso num tetraedro regular.

Modelação do icosaedro incluso no tetraedro:

Procedimento: Adaptaremos uma afirmação de Coxeter, segundo a qual os doze vértices do icosaedro podem ser obtidos dividindo as doze arestas do octaedro de acordo com a secção áurea (1973, p. 52). Neste caso, porém, tendo o tetraedro seis arestas apenas, determinaremos, para cada face, e a partir da divisão das arestas segundo a divina proporção - isto é, na razão $(1+\sqrt{5})/2$ - três segmentos de reta cujas intersecções correspondem aos vértices de uma das faces do icosaedro (Figura 393a). Repetindo o processo nas outras faces do tetraedro, obtemos mais três faces do icosaedro (Figura 393b) e, a partir dos vértices determinados, as restantes faces (Figura 393c).

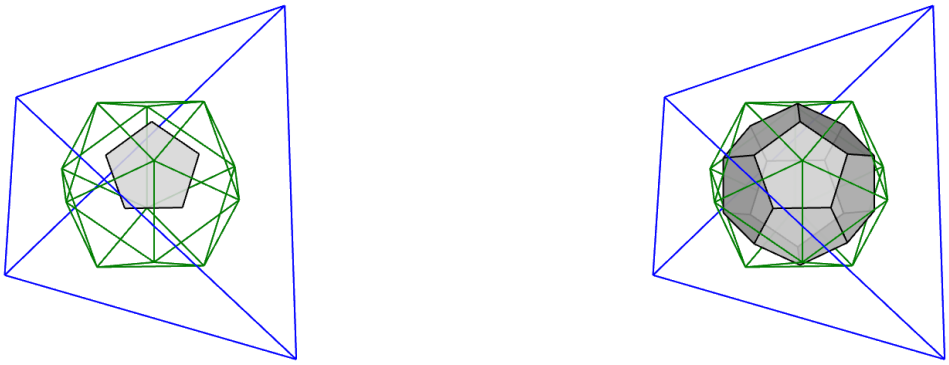


a b c

Figura 393 - Icosaedro regular incluso num tetraedro regular.

Modelação do dodecaedro incluso no tetraedro:

Procedimento: O dodecaedro incluso no tetraedro é obtido por dupla inclusão (Figura 394a), considerando a relação de dualidade com o icosaedro (já incluso no tetraedro). Deste modo, concluímos, quatro vértices do dodecaedro coincidem com o centro das faces do tetraedro (Figura 394b).



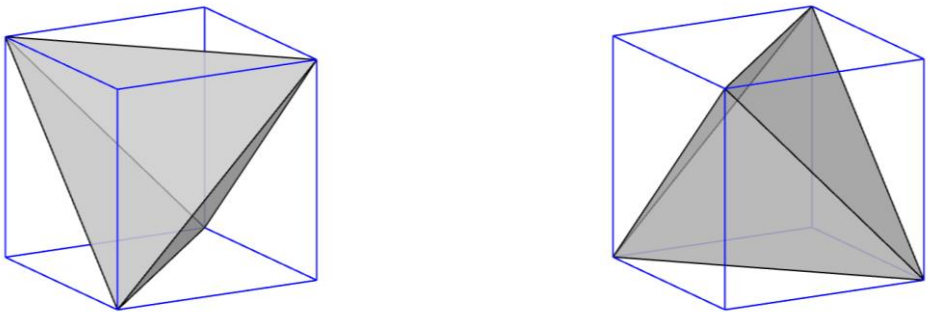
a b

Figura 394 - Dodecaedro regular incluso num tetraedro regular.

3.4.2. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no cubo

Modelação dos tetraedros inclusos no cubo:

Procedimento: No cubo, é possível definir dois tetraedros inclusos em duas posições distintas (Figuras 395a e 395b), coincidindo as arestas com diagonais concorrentes de faces adjacentes do cubo.

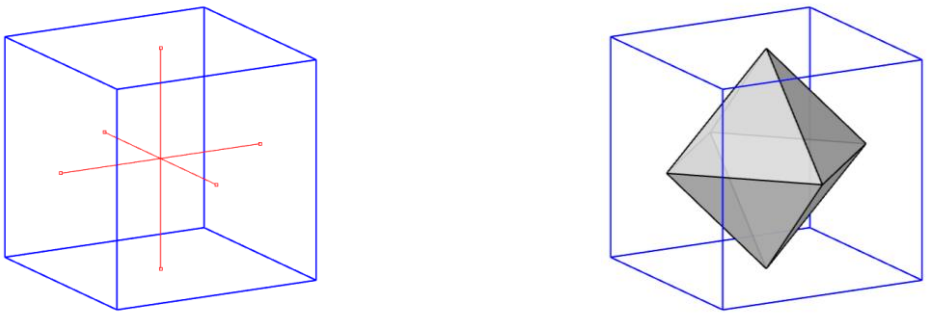


a b

Figura 395 - Tetraedros regulares inclusos num cubo.

Para a modelação de octaedros inclusos no cubo, abordaremos dois métodos distintos.

Procedimento 1: Este procedimento envolve a relação de dualidade entre os dois poliedros, de modo a que a circunsfera do incluso coincida com insfera do envolvente. Os vértices do octaedro coincidem com os centros de faces adjacentes do cubo (Figuras 396a e 396b).



a b

Figura 396 - Octaedro regular incluso num cubo, explorando a relação de dualidade.

Procedimento 2: Para este método, ilustrado nas Figuras 397a e 397b, cada uma das arestas é dividida em quatro partes iguais. A face da Figura 397a é definida pelos pontos determinados em três arestas concorrentes do cubo, de modo a que as arestas sejam paralelas a diagonais faciais do cubo (Figura 397b).



a b

Figura 397 - Octaedro regular incluso num cubo.

Modelação de um dodecaedro incluso no cubo:

Procedimento: Tomaremos em consideração que as arestas dos dois poliedros se relacionam segundo a proporção áurea (Figura 398a); (1) que a aresta do dodecaedro tem comprimento igual ao segmento menor resultante da partição da aresta do cubo; e (2) que três pares de arestas paralelas do dodecaedro pertencem a pares de faces paralelas do cubo (Figura 398b). Depois de definidas estas seis arestas por translação e rotação, ficam determinados doze dos vinte vértices do dodecaedro (os oito vértices em falta definem outro cubo, incluso no dodecaedro).

O facto de as arestas do dodecaedro contidas em faces adjacentes do cubo serem ortogonais entre si permite-nos determinar a altura da face do dodecaedro que é perpendicular a cada uma dessas arestas.

A Figura 398c mostra a fase inicial do processo seguido para a determinação de uma das faces do dodecaedro (a preto), através da qual se uniu o ponto médio da aresta na face superior do cubo com o extremo mais próximo da aresta (visível) do dodecaedro que lhe é ortogonal. Seccionando o cubo segundo o plano que contém cada uma das alturas e é perpendicular às faces do cubo que lhe são paralelas, é então possível obter os restantes vértices do dodecaedro.

A Figura 398d ilustra o modo como foi determinada a face com arestas destacadas a amarelo e, na Figura 398e, os planos que, ao seccionar o cubo, definem as restantes faces do dodecaedro (Figura 398f).

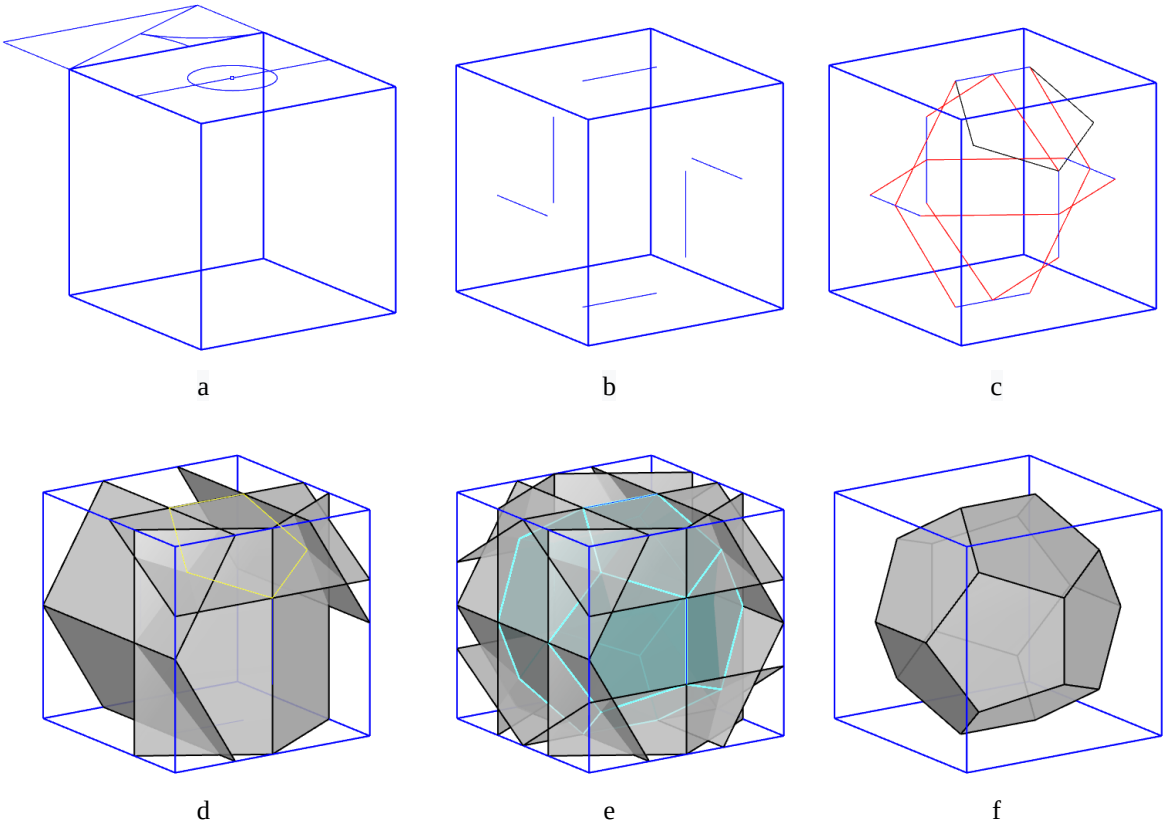


Figura 398 - Dodecaedro regular incluso num cubo.

Modelação do composto de dois dodecaedros incluso no cubo:

Procedimento: É possível inscrever outro dodecaedro no cubo, rodando o segundo dodecaedro em torno de um eixo de rotação de ordem 2, segundo um ângulo de 90º em relação ao primeiro. As arestas ficam perpendiculares entre si e definem o composto (não regular) da Figura 399.

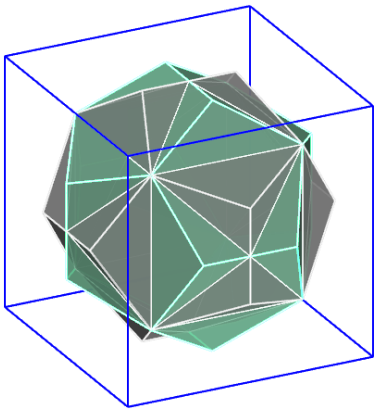


Figura 399 - Composto de dois dodecaedros regulares incluso no cubo.

Modelação do dodecaedro a partir de um cubo nele incluso:

A construção do cubo incluso no dodecaedro recorda-nos outra construção, proposta por Euclides no Livro XIII dos *Elementos* e ilustrada por Kepler na Figura 400. Abordaremos a seguir o método para esta construção proposto por Joyce (1997) que confirma as estreitas relações entre as arestas do dodecaedro e do cubo com a divina proporção.

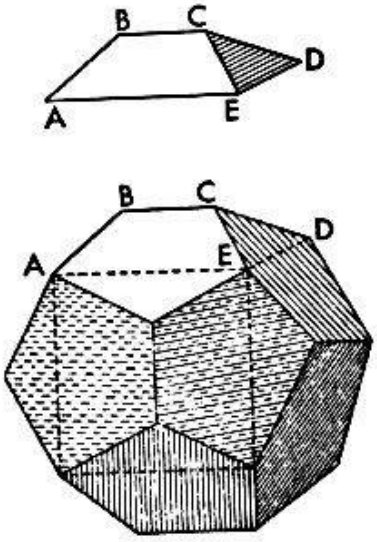
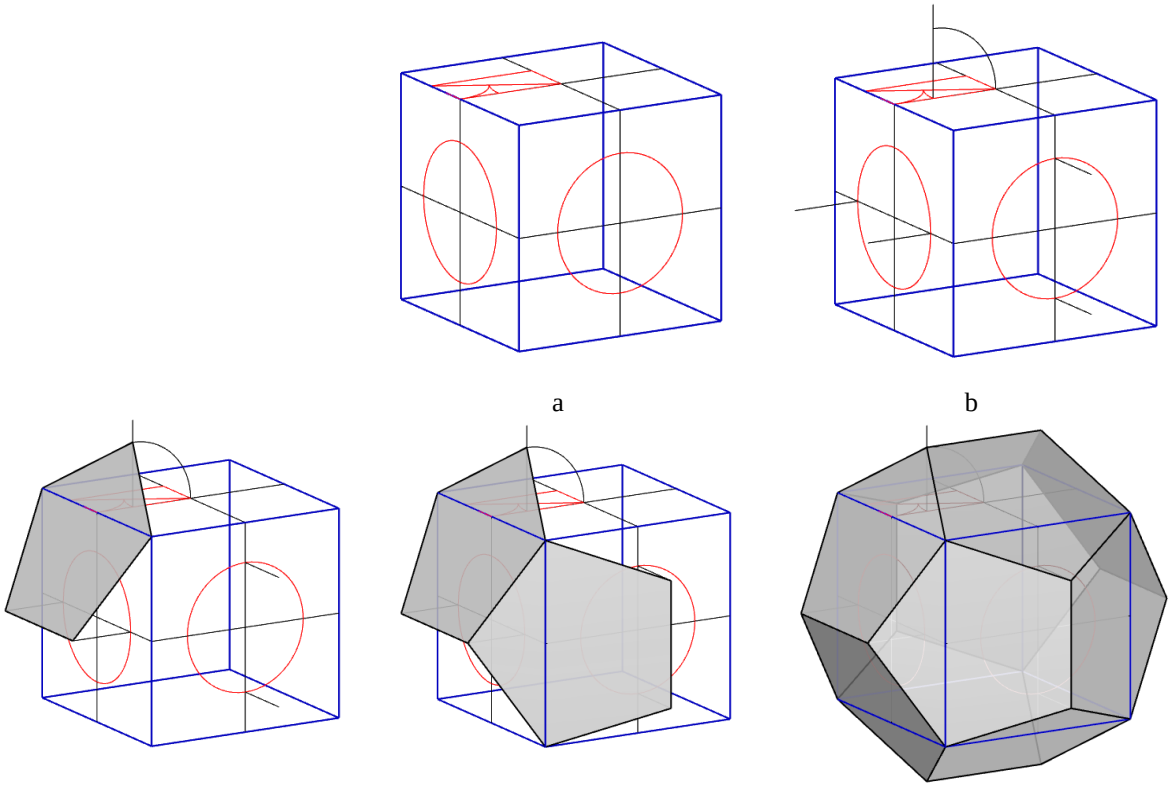


Figura 400 - "Kepler shows how a dodecahedron can be constructed by adding "roofs" to the six sides of a cube (the construction which Euclid uses)" (Hart, 1998).

Procedimento: Desenhamos as medianas de três faces do cubo e dividimos metade de uma delas segundo a proporção áurea. Transportamos o maior dos segmentos de reta obtidos para as três faces do cubo (Figura 401a). Na Figura 401b, este segmento de reta foi transportado para perpendiculares a cada uma das faces, a partir dos pontos previamente determinados. Os extremos destes segmentos de reta correspondem a vértices do dodecaedro, que nos permitem já determinar uma primeira face pentagonal (Figura 401c) e, logo a seguir, uma segunda (Figura 401d). Por simetria de rotação, obtemos as restantes faces do dodecaedro (Figura 401e).

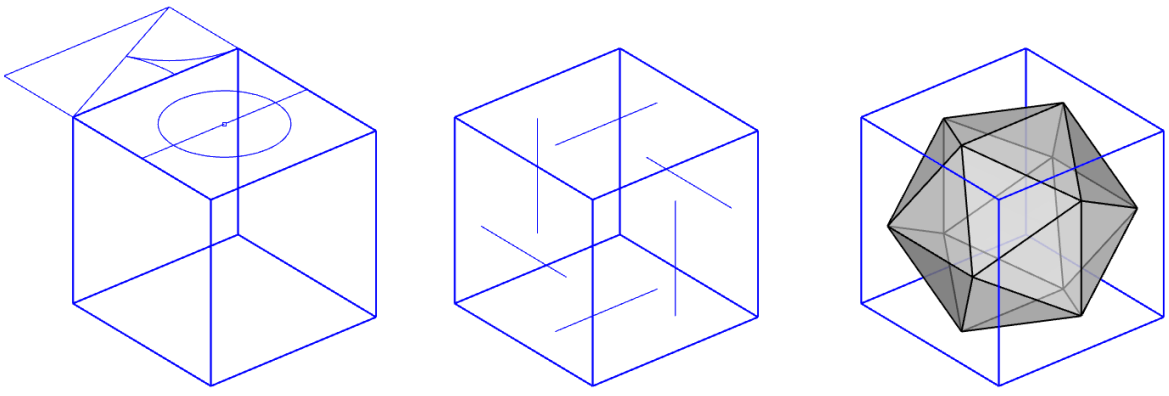


a b c d e

Figura 401 - Dodecaedro regular construído a partir de um cubo.

Modelação de um icosaedro incluso no cubo:

Procedimento: Para a determinação do icosaedro, consideraremos que: (1) as suas arestas se relacionam com as do cubo segundo a divina proporção; (2) que a aresta do icosaedro tem comprimento igual ao segmento maior resultante na partição da aresta do cubo (Figura 402a) e (3) que pares de arestas paralelas do icosaedro pertencem a pares de faces paralelas do cubo (Figura 402b). Os extremos das arestas são os vértices do icosaedro (Figura 402c).



a b c

Figura 402 - Icosaedro regular incluso num cubo.

Na Figura 403, mostra-se a relação entre as arestas dos dois poliedros e a proporção áurea: os três retângulos triortogonais, cujos lados maiores e menores têm, respetivamente, comprimento igual ao das arestas do cubo e das arestas do icosaedro, são retângulos de ouro (Hart, 1996a). O icosaedro admite assim cinco tríades semelhantes de retângulos de ouro, correspondendo os seus lados menores a pares de arestas opostas do icosaedro. A construção do icosaedro a partir de retângulos de ouro, recorda-se, foi mostrada na Figura 381.

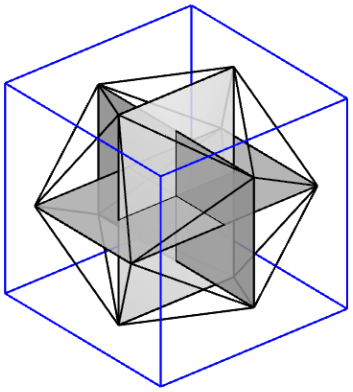


Figura 403 - Icosaedro regular incluso num cubo, definido a partir de três retângulos de ouro.

Modelação do composto de dois icosaedros incluso no cubo:

Procedimento: De modo semelhante ao dodecaedro, é também possível inscrever dois icosaedros no interior de um cubo (Figura 404). O resultado da união destes dois poliedros não define um composto regular.

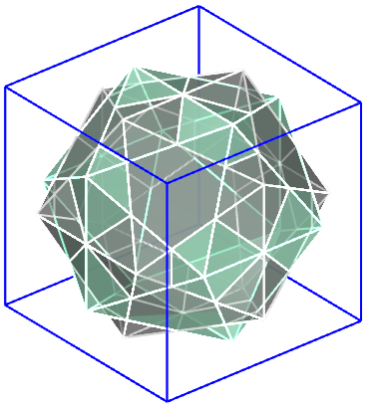


Figura 404 - Composto de dois icosaedros regulares incluso num cubo.

3.4.3. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no octaedro regular

Abordaremos a modelação de cubos inclusos no octaedro por dois procedimentos distintos.

Procedimento 1: Explorando a relação de dualidade entre os dois poliedros, definimos o cubo, sabendo que os seus vértices coincidem com o centro das faces do octaedro (Figura 405).

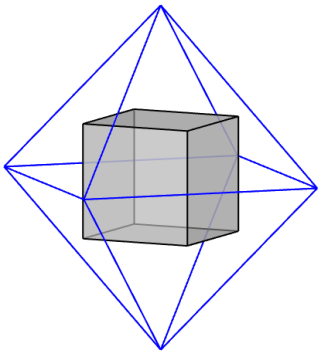


Figura 405 - Cubo incluso num octaedro regular.

Modelação de um tetraedro incluso no octaedro:

Procedimento: A partir do cubo anterior, modelamos um dos tetraedros nele construíveis, de modo a que os seus vértices coincidam com os centros de quatro faces do octaedro (Figura 406).

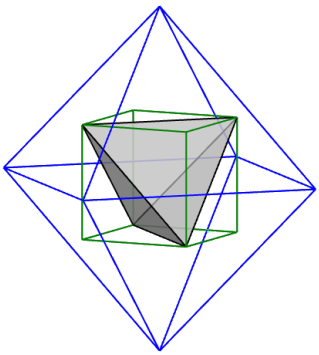


Figura 406 - Cubo e tetraedro regular inclusos num octaedro regular.

Modelação de cubos inclusos no octaedro:

Procedimento 2: O método que analisaremos a seguir para a construção do cubo incluso no octaedro foi proposto originalmente por Piero della Francesca no *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* publicado no séc. XVI, que viria depois a ser adaptado por Luca Pacioli na *De Divina Proportione* publicado em 1509 (Figura 407).

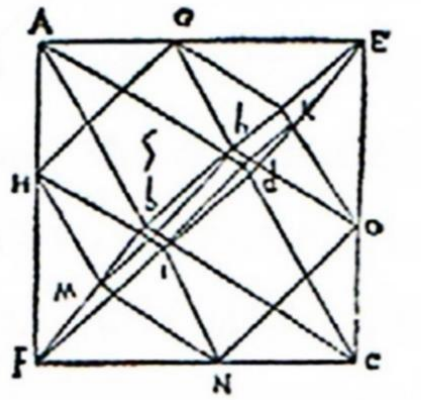
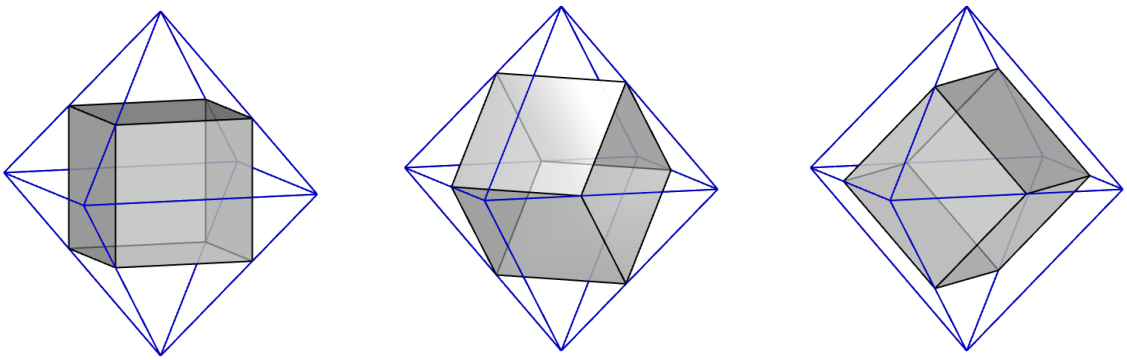


Figura 407 - Detalhe de "*A selection of Leonardo's geometrical drawings for Luca Pacioli's* De Divina Proportione". (Wade, 2012, p. 18).

Segundo este método, que George Hart confessa lhe ter sido, de início, algo difícil de perceber ("I stared at this for quite a while before figuring out what it is"[50] (1998b)), os vértices do cubo pertencem às arestas do octaedro (Figuras 408a, 408b e 408c), mas a localização destes vértices e arestas não tem relação direta com a divina proporção. As pequenas pirâmides que resultariam da secção do octaedro pelas faces superior e inferior do cubo da Figura 408a seriam pirâmides quadradas (Sólido de Johnson J1), porque as suas arestas têm igual comprimento.



a b c

Figura 408 - Cubos inclusos num octaedro regular.

Modelação do composto de três cubos incluso no octaedro:

Procedimento: De acordo com a construção proposta por Francesca, o octaedro admite três cubos inclusos em posições distintas que, no seu conjunto, definem o composto de três cubos da Figura 409. No desenho de Leonardo de Vinci da Figura 407, a posição do cubo em relação ao octaedro corresponde a uma destas posições. Nas Figuras 408a, 408b e 408c, podemos ver

[50] Tradução livre: Estive a analisar (este desenho) ainda por algum tempo, antes de o conseguir perceber inteiramente.

que o único eixo de simetria da mesma espécie que os dois poliedros partilham é um eixo de rotação de ordem 4.

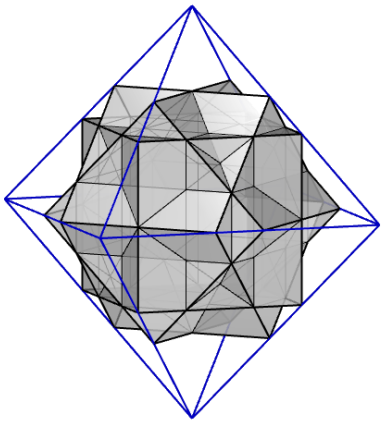
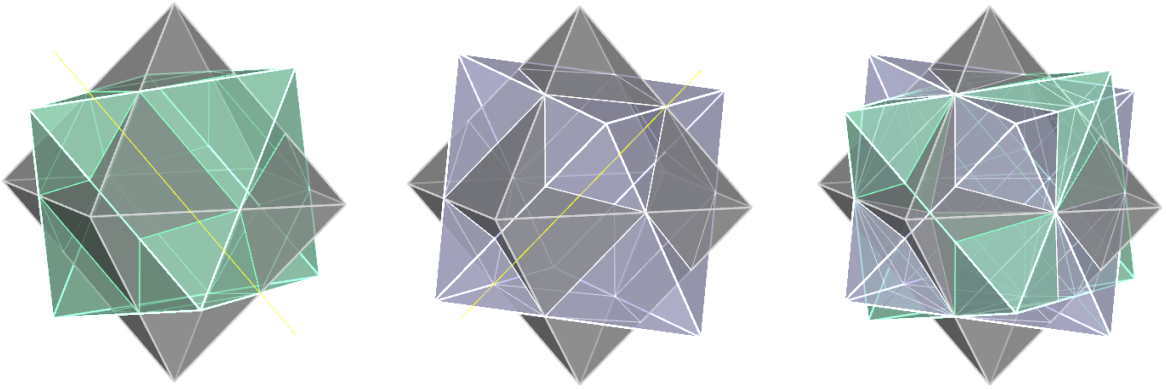


Figura 409 - Composto de três cubos incluso num octaedro regular.

Hart (1998b) sugere que o cubo na posição definida por Piero della Francesca corresponde ao sólido comum aos octaedros que definem o composto de três octaedros. Nas Figuras 410a e 410b, destacam-se (a amarelo) os eixos de rotação de ordem 2 do octaedro que foram considerados para rodar o octaedro inicial segundo um ângulo de 45º e definir o segundo e o terceiro octaedros deste composto (Figura 410c). Este composto, importa referir, não é regular.



a b c

Figura 410 - Octaedros que definem o composto de três octaedros (à direita).

Coxeter (1985, p. 61) e Zefiro (2010) associam o composto de três octaedros à estrutura poliédrica central da gravura de Escher que se mostra na Figura 411.

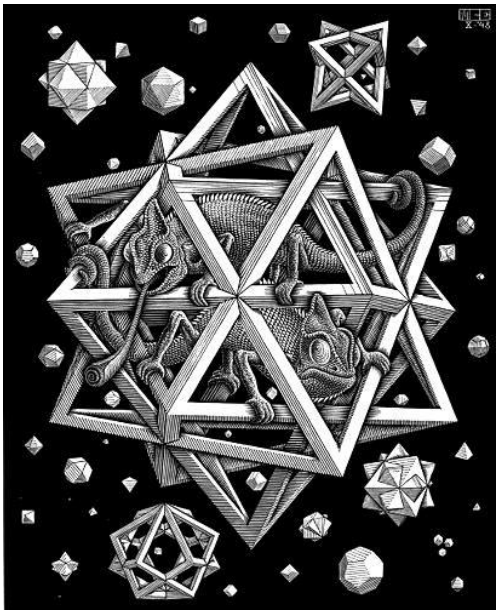
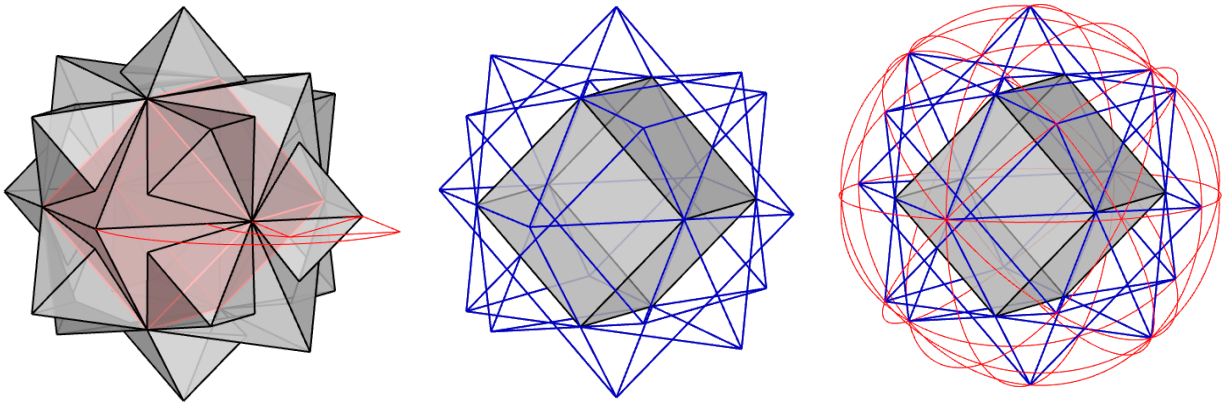


Figura 411 – "*Estrelas*, xilogravura, 1948"
(Ernst, 1991, p. 94).

Coxeter indica ainda que as arestas dos octaedros que se intersectam, se dividem na razão √2:1 (conforme se mostra na construção auxiliar da Figura 412a). A Figura 412b ilustra ainda que os oito pontos em que três arestas dos octaedros do composto se intersectam correspondem aos vértices do cubo (a preto) da construção de Piero della Francesca. Ainda segundo Coxeter, os nove planos de simetria do cubo, que contêm as circunferências máximas a vermelho na Figura 412c, contêm tmbém os polígonos equatoriais dos três octaedros.



a b c

Figura 412 - Composto de três octaedros regulares e cubo resultante da sua intersecção.

Modelação do dodecaedro incluso no octaedro:

Procedimento: Para construir o dodecaedro da Figura 413, voltamos à relação de dualidade entre o cubo e o octaedro, construindo um cubo de modo a que os seus vértices coincidam com

os centros das faces do octaedro. Em seguida, definimos o dodecaedro a partir do cubo, de acordo com a construção da Figura 401, daqui resultando que oito vértices do dodecaedro coincidem com os centros das faces do octaedro.

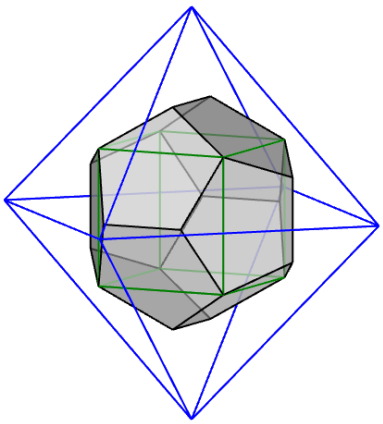
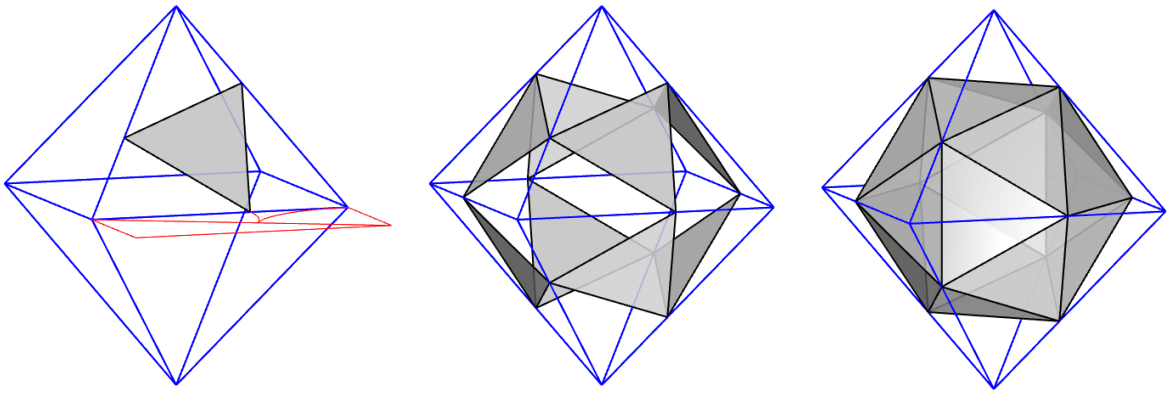


Figura 413 - Dodecaedro regular incluso num octaedro regular.

Modelação do icosaedro incluso no octaedro:

Procedimento: Para esta modelação, retomamos a afirmação de Coxeter citada anteriormente, segundo a qual os vértices do icosaedro podem ser determinados através da divisão das arestas do octaedro segundo a proporção áurea (1973, p. 52). A Figura 414a mostra a determinação de uma das faces do icosaedro segundo este processo. Com as oito faces do icosaedro determinadas (Figura 141b), estão também os seus vértices, que bastará unir para obtermos o icosaedro (Figura 414c).



a b c

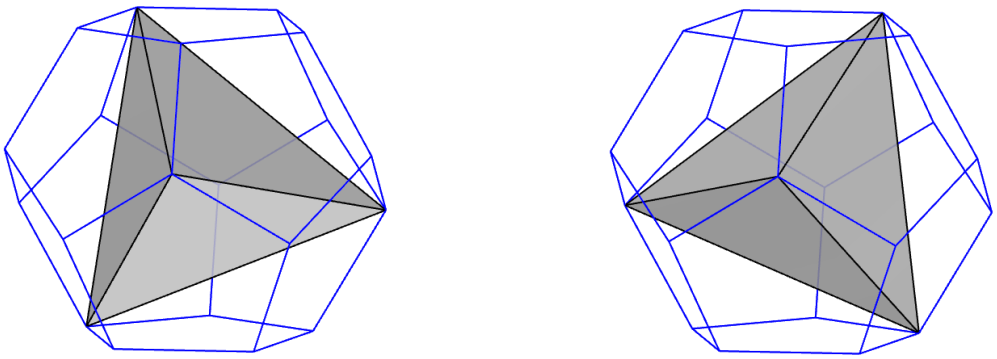
Figura 414 - Icosaedro regular incluso num octaedro regular.

3.4.4. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no dodecaedro regular

Modelação de um tetraedro incluso no dodecaedro:

Procedimento: É possível incluir dez tetraedros distintos no dodecaedro, sendo cinco deles enantiomórficos em relação aos restantes. As Figuras 415a e 415b mostram dois tetraedros enantiomórficos entre si. Em qualquer dos casos, o tetraedro é obtido por facetamento do dodecaedro, coincidindo os vértices do primeiro com quatro vértices do segundo.

.

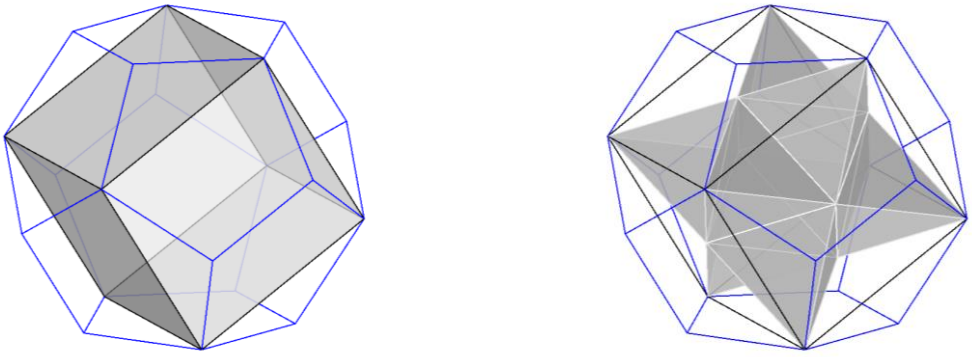


a b

Figura 415 - Tetraedros regulares inclusos num dodecaedro regular.

Modelação de um cubo e de uma *stella octangula* inclusos no dodecaedro:

Procedimento: Por facetamento, é ainda possível incluir cinco cubos no dodecaedro (um dos quais se mostra na Figura 416a) e, inclusive, cinco *stellas octangulas* (das quais se mostra uma, na Figura 416b).



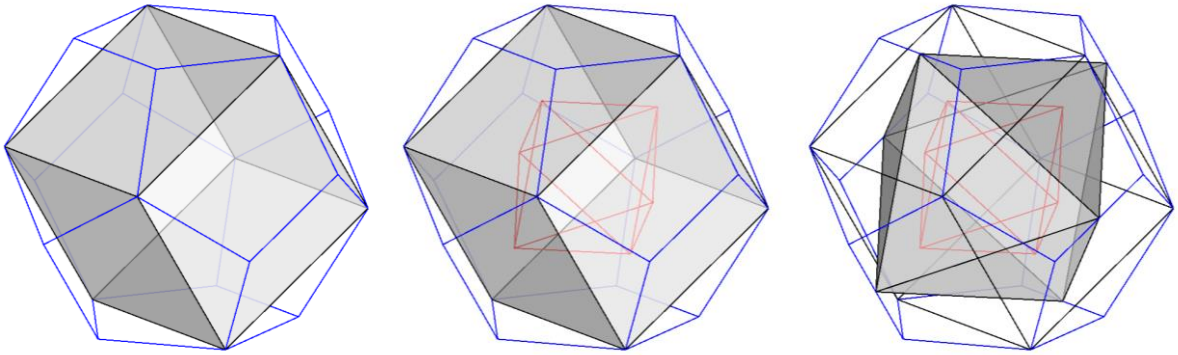
a b

Figura 416 - Cubo e *stella octangula* inclusos num dodecaedro regular.

Modelação de um octaedro incluso no dodecaedro:

Procedimento: Recordando que o octaedro é dual do cubo, começamos por construir um cubo com vértices coincidentes com os do dodecaedro (Figura 417a). Definimos um octaedro,

sabendo que os seus vértices coincidem com o centro das faces do cubo incluso no dodecaedro (Figura 417b). Na Figura 417c, aumentamos a dimensão deste octaedro para evidenciar que é possível inscrever um octaedro no dodecaedro, se os seus vértices coincidirem com os pontos médios das arestas deste último. Na Figura 417c, podemos verificar que o cubo e o octaedro maior se intersectam nos pontos médios das suas arestas.

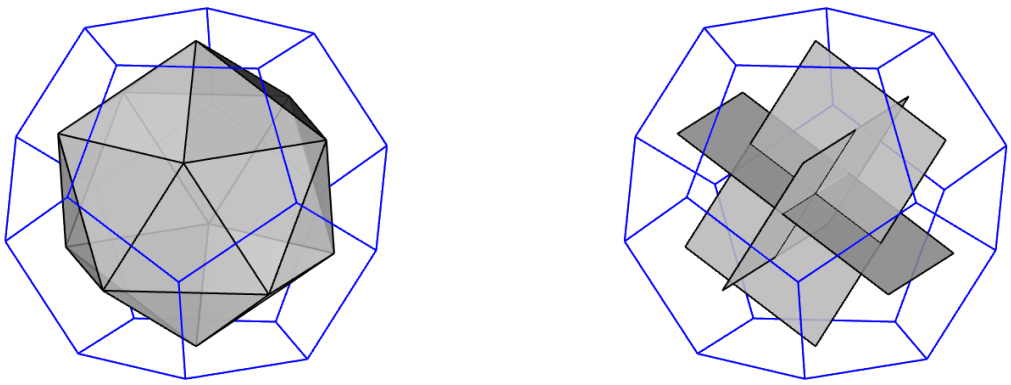


a b c

Figura 417 - Cubo incluso num dodecaedro regular (à esquerda). Ao centro, o octaedro dual do cubo. À direita, octaedro regular incluso num dodecaedro regular.

Modelação do icosaedro incluso no dodecaedro:

Procedimento: Na Figura 418a, os vértices do icosaedro coincidem com o centro das faces do dodecaedro, pelo facto de serem duais um do outro. A Figura 418b evidencia mais uma relação do dodecaedro com a proporção áurea, mostrando que os centros das faces do dodecaedro são vértices de três retângulos de ouro triortogonais (Pugh, 1976, p. 10). Os vértices destes rectângulos de ouro, recorde-se, coincidem com os vértices do icosaedro. Os lados menores destes rectângulos coincidem com as arestas que, no icosaedro, são ortogonais entre si.



a b

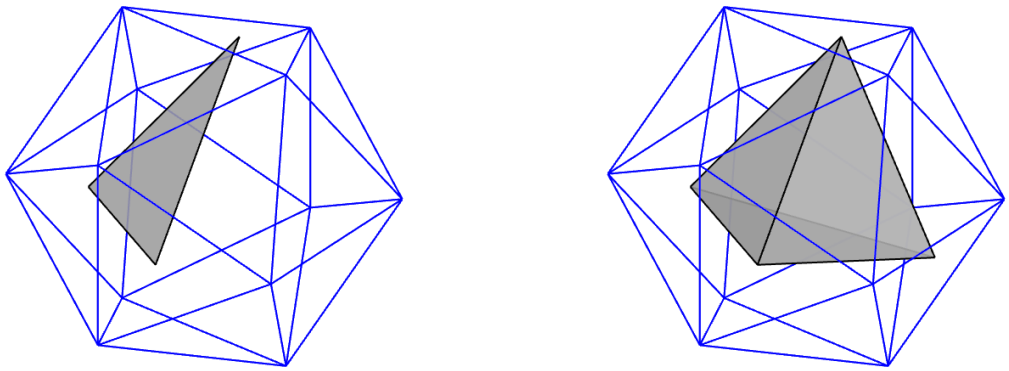
Figura 418 - Icosaedro regular e retângulos de ouro triortogonais inclusos num dodecaedro regular.

3.4.5. Modelação dos poliedros convexos regulares inclusos no icosaedro regular

Recordamos, da Secção 1.1.3 do Capítulo I, que as únicas faces regulares de vértices coincidentes com os vértices do icosaedro (além das próprias) são triangulares, pentagonais e pentagramáticas. Podemos concluir que nenhuma destas faces nos permite definir um poliedro regular incluso no icosaedro maior. Tal apenas será possível se localizarmos os vértices das faces dos poliedros regulares nas arestas ou nas faces do icosaedro, conforme veremos.

Modelação de um tetraedro incluso no icosaedro:

Procedimento: A partir da Figura 419a podemos concluir que é possível incluir um tetraedro no icosaedro, se os quatro vértices do primeiro coincidirem com os centros de quatro faces do segundo (Figura 419b).

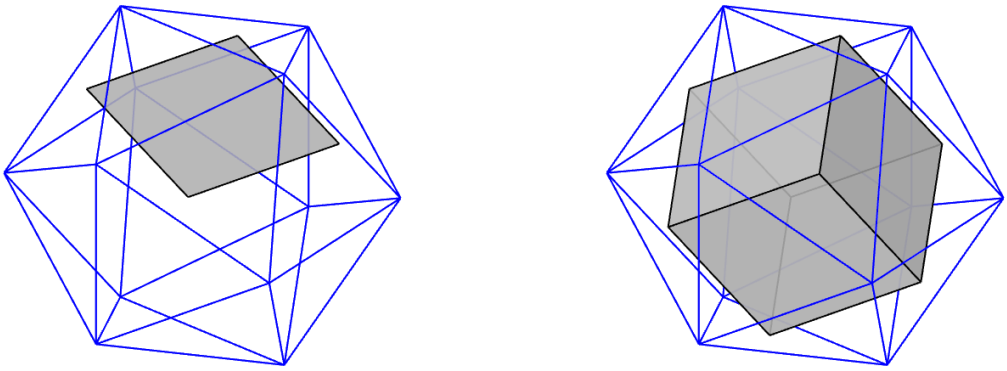


a b

Figura 419 - Triângulo equilátero e tetraedro regular inclusos num icosaedro regular.

Modelação de um cubo incluso no icosaedro:

Procedimento: De modo similar, um cubo incluso no icosaedro terá os seus vértices coincidentes com os centros de oito faces do icosaedro (Figuras 420a e 420b).

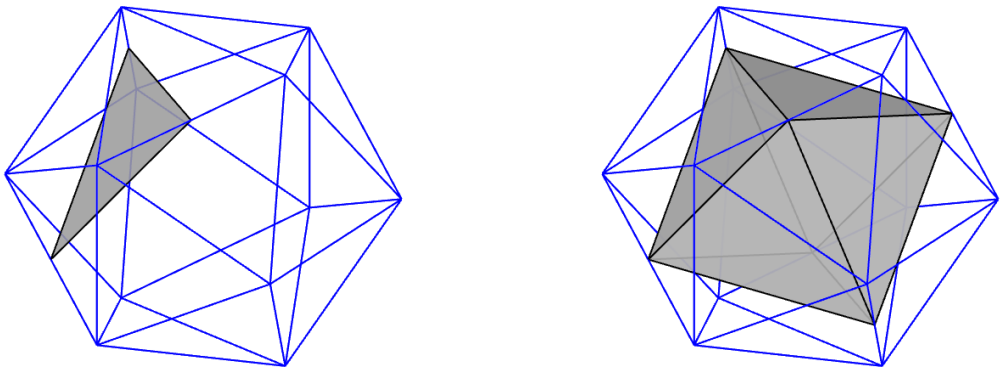


a b

Figura 420 - Quadrado e cubo inclusos num icosaedro regular.

Modelação de um octaedro incluso no icosaedro:

Procedimento: Os vértices do octaedro deverão coincidir com os pontos médios de três arestas do icosaedro, conforme demostram as Figuras 421a e 421b.

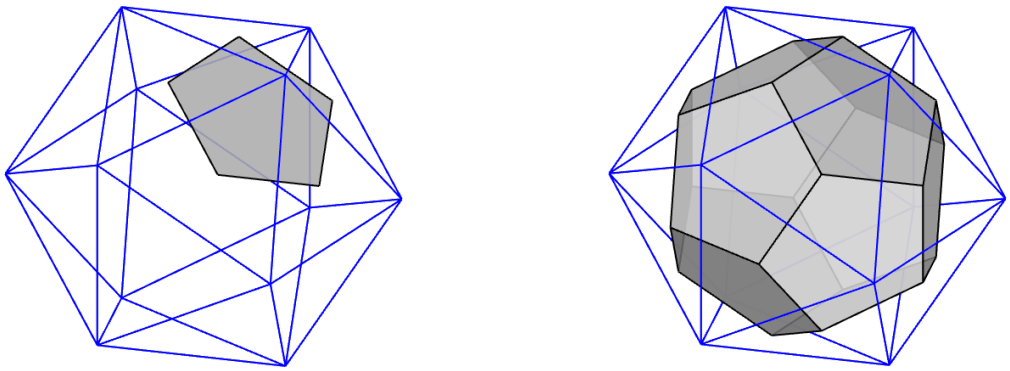


a b

Figura 421 - Triângulo equilátero e octaedro regular inclusos num icosaedro regular.

Modelação do dodecaedro incluso no icosaedro:

Procedimento: A construção do dodecaedro incluso no icosaedro da Figura 422 explora a relação de dualidade entre os dois poliedros. Uma face pentagonal é determinada unindo os centros das faces triangulares em torno de um dos vértices (Figura 422a). Os vértices do dodecaedro coincidem com os centros das faces do icosaedro (Figura 422b).



a b

Figura 422 - Pentágono regular e dodecaedro regular inclusos num icosaedro regular.

3.5. Modelação dos compostos regulares

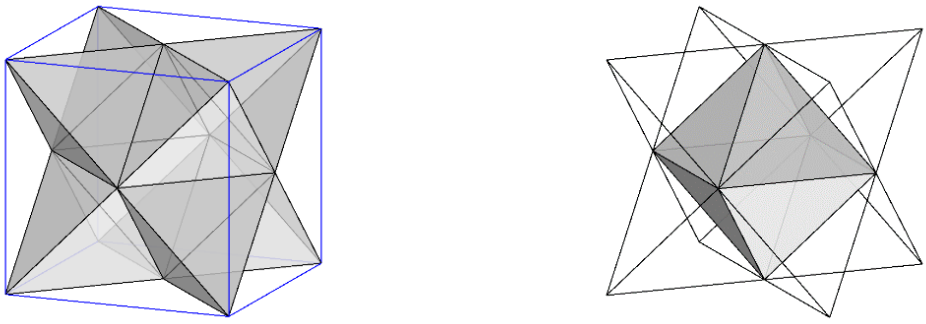
Nesta aplicação didática, é proposta a modelação de compostos regulares de poliedros, que exploram não só os conceitos de rotação e de interpenetração de poliedros, mas também outras potencialidades do *software*.

Um composto de poliedros (ou, simplesmente, um composto) é regular se for definido por um conjunto de poliedros regulares iguais com o mesmo centro. Segundo Coxeter (1973, p. 47), o composto será regular nos seus vértices (*vertex-regular*, no original) se todos os vértices dos seus componentes coincidirem com os vértices de um único poliedro regular. Será ainda regular nas suas faces (face-regular) se o plano das faces dos seus componentes forem os planos das faces de um único poliedro regular.

Modelação do composto regular de dois tetraedros:

Procedimento: O composto regular que mostramos na Figura 423a é a *stella octangula*, definida por dois tetraedros regulares inclusos num cubo. Apesar de definida por tetraedros, possui o grupo de simetria octaedral, porque partilha eixos de simetria de rotação com o cubo (os restantes compostos de poliedros regulares, por sua vez, possuem o grupo de simetria icosaedral). O *core* ou menor poliedro comum aos dois tetraedros é o octaedro que se ilustra na Figura 423b, definido pelos pontos médios do cubo envolvente.

.



a b

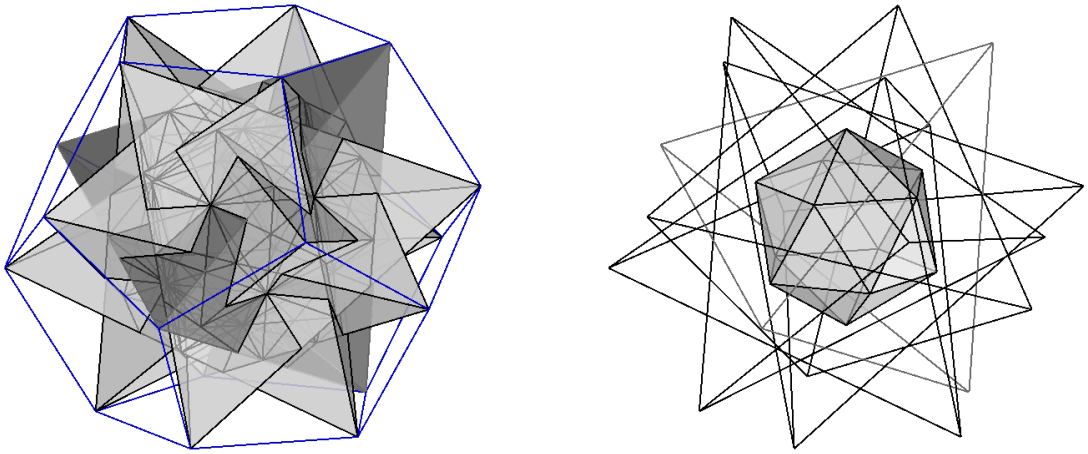
Figura 423 - Composto regular de dois tetraedros e o octaedro regular resultante da sua intersecção.

Modelação dos compostos regulares de tetraedros:

Procedimento: Na Figura 424a, mostra-se o composto de cinco tetraedros, obtido por rotação, segundo um dos eixos de rotação de ordem 5, do tetraedro incluso no dodecaedro que aqui se destaca com outra cor. Se tivéssemos optado pelo enantiomórfico deste tetraedro, teriamos obtido o composto enantiomórfico do que agora se ilustra que, por sua vez, seria definido pelos

duais dos tetraedros do primeiro composto. Wenninger (1975, p. 44) aponta que, para qualquer uma das versões, os pontos centrais de cada reentrância são os vértices do icosaedro interior, conforme ilustra a Figura 424b.

O icosaedro da Figura 424b é o *core* ou menor poliedro comum, tanto aos cinco tetraedros da Figura 424a, como aos dez tetraedros que definem o composto regular da Figura 425.



a b

Figura 424 - Composto regular de cinco tetraedros.
À direita, o icosaedro regular que resulta da sua intersecção.

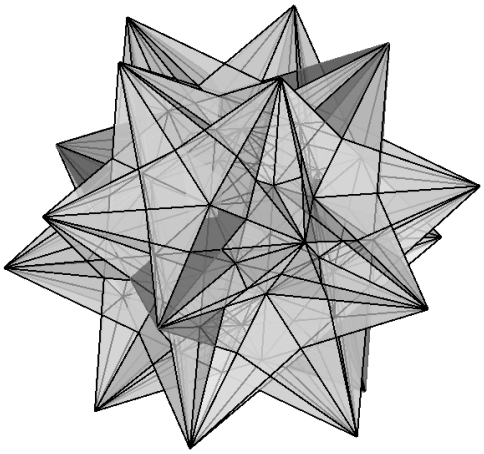
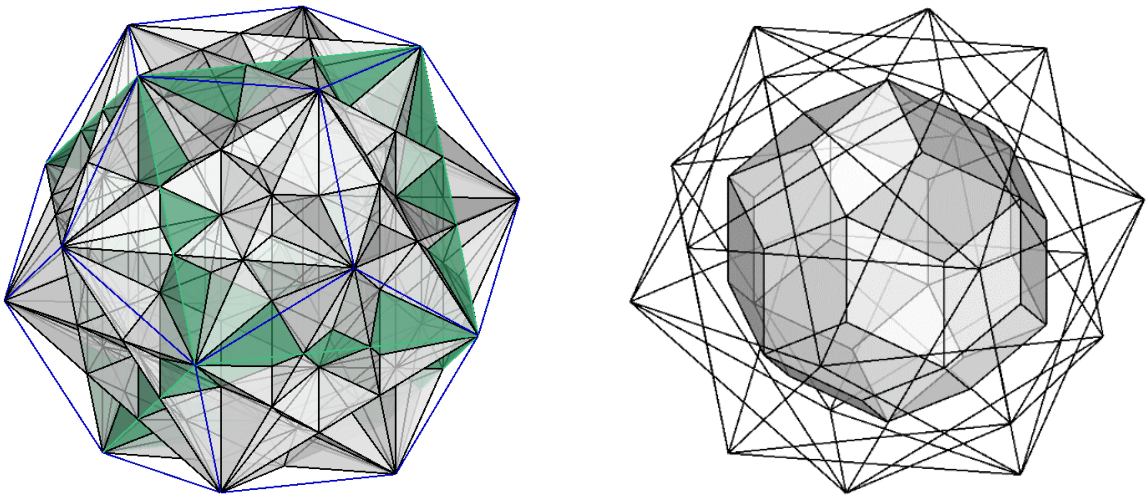


Figura 425 – Composto regular de dez tetraedros.

Modelação do composto regular de cinco cubos:

Procedimento: Na Figura 426a mostra-se um composto que tem vértices coincidentes com o dodecaedro: o composto de cinco cubos, um dos quais aqui destacamos com outra cor. Em cada

cubo é possível inscrever dois tetraedros do composto de dez tetraedros. O poliedro comum aos cinco cubos é o triacontaedro rômbico, conforme se mostra na Figura 426b.

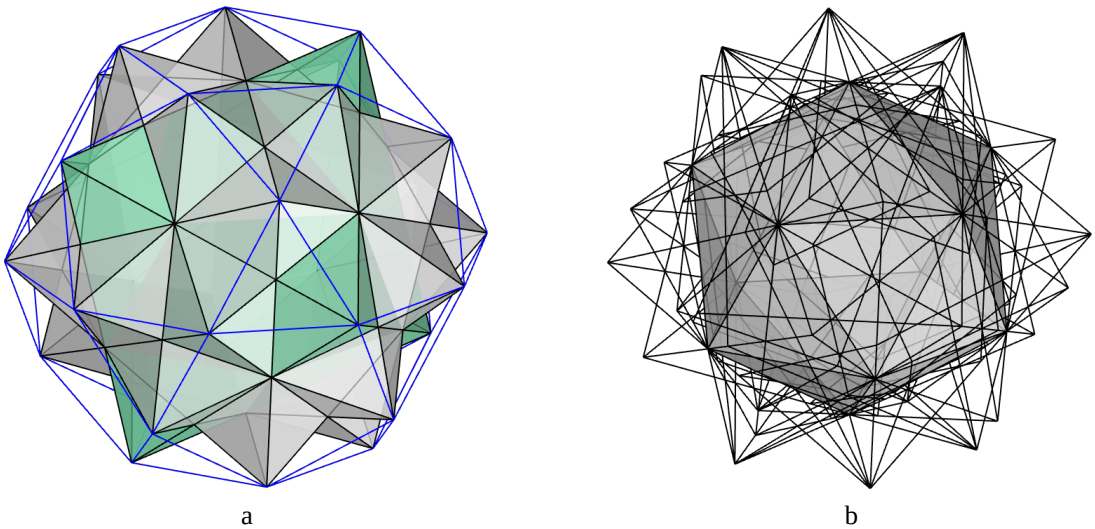


a b

Figura 426 - Composto regular de cinco cubos e o triacontaedro rômbico resultante da sua intersecção.

Modelação do composto regular de cinco octaedros:

Procedimento: Terminamos os compostos regulares com o composto de cinco octaedros, cada um dos quais é dual dos componentes do composto de cinco cubos. Ball e Coxeter (1987, p. 137) salientam que os vértices deste composto coincidem com os vértices do icosidodecaedro, mas que, por outro lado, as faces do composto de cinco cubos contêm as faces do triacontaedro rômbico (que é dual do icosidodecaedro). A Figura 427a ilustra um dos octaedros que definem o composto de cinco octaedros incluso no icosidodecaedro (Figura 427b). Na Figura 427c, mostra-se que o *core* ou menor poliedro comum aos cinco octaedros é o icosaedro regular.



a b

Figura 427 - Composto regular de cinco octaedros e o icosaedro regular resultante da sua intersecção.

3.6. Modelação dos poliedros arquimedianos

Para esta aplicação didática, propomos a modelação de alguns poliedros arquimedianos. Para melhor compreensão das particularidades dos poliedros abordados (e, em particular, dos arquimedianos), será de todo conveniente que os estudantes possam, em contexto de aula, manipular modelos físicos como os que se apresentam na Figura 428, antes de passarem à sua modelação em ambiente virtual.



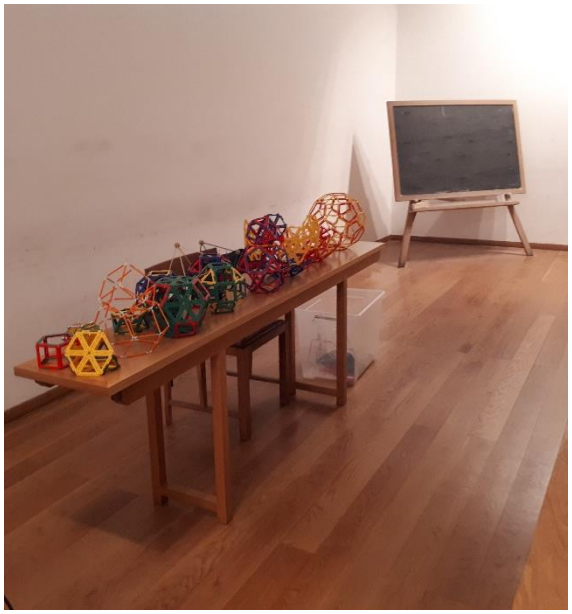


Figura 428 - Modelos de poliedros que os estudantes da Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura (1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto) exploraram durante as aulas dos dias 21 e 24 de Março de 2017.

Começaremos a abordar os sete arquimedianos que são obtidos através da truncatura dos poliedros convexos regulares por planos perpendiculares aos respetivos eixos de rotação, começando pelo cuboctaedro e icosidodecaedro.

3.6.1. Arquimedianos quasirregulares

Segundo a terminologia adotada por Pugh (1976, p. 17), o cuboctaedro e o icosidodecaedro arquimedianos são *Figuras de Frequência 2*, pelo facto de as arestas dos convexos regulares de cuja truncatura resultam (cubo ou octaedro, no primeiro caso; dodecaedro ou icosaedro, no segundo) serem divididas em duas partes iguais, como se mostra a seguir. Pugh considera ainda o octaedro regular como uma *Figura de Frequência 2*, pelo facto de, conforme já vimos, os seus vértices coincidirem com os pontos médios das arestas do tetraedro regular. Importa recordar que estes poliedros convexos quasirregulares resultam da intersecção de pares de convexos regulares duais com a mesma esfera de reciprocação: o cuboctaedro, da intersecção do cubo com o octaedro; e o icosidodecaedro, da intersecção do dodecaedro com o icosaedro. De modo semelhante, o octaedro regular resulta da intersecção de dois tetraedros duais com a mesma esfera de reciprocação, pertencendo as suas faces às faces dos tetraedros recíprocos.

Modelação do cuboctaedro e do icosidodecaedro:

Procedimento: As faces triangulares e as faces quadradas do cuboctaedro pertencem, respetivamente, às faces do octaedro e às faces do cubo e os seus vértices coincidem com os pontos médios, tanto de um, como de outro (Figura 429).

Por seu lado, as faces triangulares e as faces pentagonais do icosidodecaedro pertencem às faces do icosaedro e às faces do dodecaedro. Os seus vértices coincidem com os pontos médios das arestas do dodecaedro e do icosaedro (Figura 430).

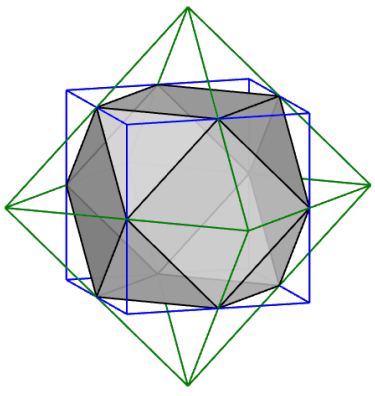


Figura 429 - Os vértices do cuboctaedro coincidem com os pontos médios das arestas do cubo (a azul) e do octaedro regular (a verde).

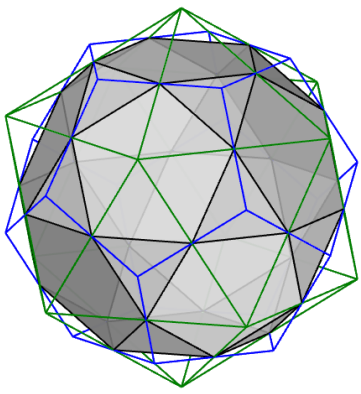


Figura 430 - Os vértices do icosidodecaedro coincidem com os pontos médios das arestas do dodecaedro (a azul) e do icosaedro regular (a verde).

3.6.2. Arquimedianos truncados

Sobre os arquimedianos que resultam da truncatura dos convexos regulares, importa assinalar que Soler (2007) menciona existir uma relação entre o número e tipo de faces dos arquimedianos e o número de faces e vértices dos platónicos. Se a truncatura do convexo regular tiver sido definida por planos que seccionam as arestas no ponto médio, as faces do arquimediano têm o mesmo número de lados que as faces do poliedro de partida; se a truncatura não tiver ocorrido no ponto médio das arestas, estas faces têm o dobro do número de lados (2007, p. 115). De acordo com esta distinção, conclui-se que o cubo truncado, por exemplo, tem tantas faces triangulares e octogonais quantos vértices e faces tem o cubo, isto é, oito e seis, respetivamente. As faces triangulares, neste caso, correspondem à configuração da figura verticial do cubo (o que decorre do facto de os seus vértices serem trigonais) e as faces octogonais do cubo truncado têm o dobro do número de lados das faces quadradas do cubo. No entanto, e pelo facto de qualquer um destes arquimedianos poder ser obtido por truncatura de dois convexos regulares distintos (com a óbvia exceção do tetraedro truncado), convirá estabelecer que a afirmação de Soler é válida apenas entre um arquimediano e o platónico que lhe dá o nome, por exemplo, entre o cubo truncado e o cubo, mas não entre o cubo truncado e o octaedro, de cuja truncatura o arquimediano também resulta. Nestes casos, a relação já não se faz segundo uma ordem direta, mas inversa, isto é, e voltando ao mesmo exemplo: o cubo truncado, tem tantas faces triangulares e octogonais quantas faces e vértices tem o octaedro: oito e seis, respetivamente. As faces octogonais do cubo truncado têm o dobro do número de lados das figuras verticiais do octaedro.

Os arquimedianos que Pugh identifica como *Figuras de Frequência 3* resultam da divisão das arestas de determinados poliedros convexos regulares em três partes iguais: o tetraedro truncado que é obtido a partir do tetraedro (Figura 431); o octaedro truncado, a partir do octaedro (Figura 432); e o icosaedro truncado (Figura 433). Qualquer um destes arquimedianos pode ser obtido a partir dos poliedros convexos regulares com faces triangulares, coincidindo os seus vértices com a terça parte das arestas destes últimos.

Modelação do tetraedro truncado com as faces hexagonais contidas no tetraedro:

Procedimento: Dividindo as arestas do tetraedro em três partes iguais, obtemos os vértices de um tetraedro truncado com as faces hexagonais contidas nas faces do tetraedro.

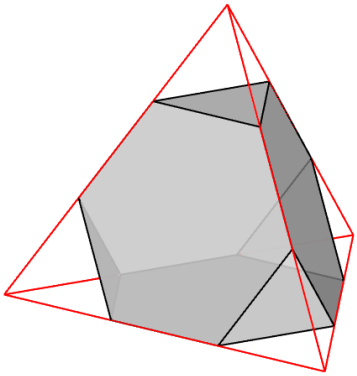


Figura 431 - Construção do tetraedro truncado a partir do tetraedro (1).

Modelação do octaedro truncado contido no octaedro:

Procedimento: Dividindo as arestas do octaedro em três partes iguais, definimos os vértices de um octaedro truncado com as faces hexagonais contidas nas faces do octaedro.

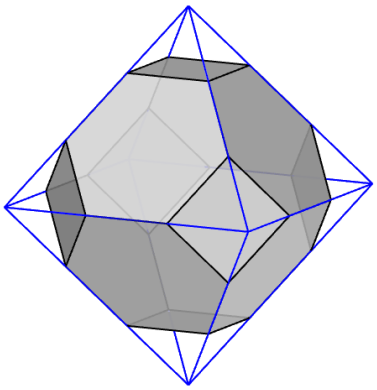


Figura 432 - Construção do octaedro truncado a partir do octaedro.

Modelação do icosaedro truncado contido no icosaedro:

Procedimento: Dividimos as arestas do icosaedro em três partes iguais para obter os vértices de um icosaedro truncado nele contido.

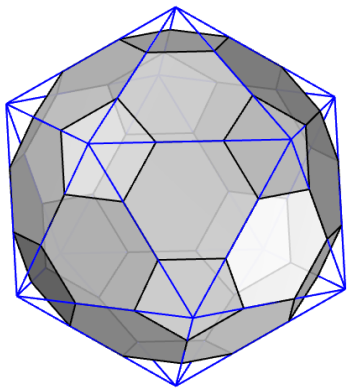
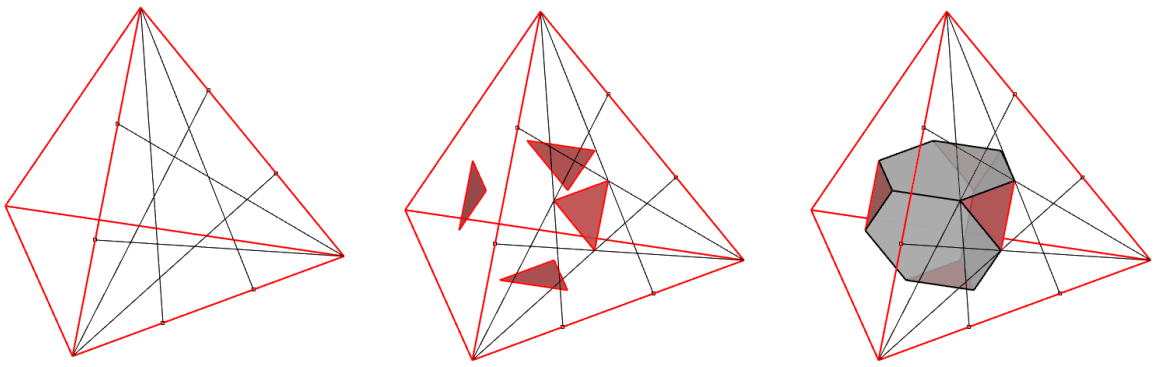


Figura 433 - Construção do icosaedro truncado a partir do icosaedro.

Modelação do tetraedro truncado com as faces triangulares contidas no tetraedro:

Procedimento: Este método para a construção do tetraedro truncado é mencionado por Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 213) e ilustrado na Figura 434. As arestas do tetraedro são divididas em três partes iguais, e definidas, a partir desta divisão, seis cevianas por face que, ao se intersectarem, definem os vértices de uma das faces triangulares (Figura 434a). Operação semelhante nas outras faces permite-nos obter as restantes faces triangulares (Figura 434b). Segundo esta construção, as faces hexagonais do tetraedro truncado são paralelas às faces do tetraedro regular, sendo cada uma das faces triangulares do arquimediano em homotetia negativa em relação à face triangular correspondente do tetraedro (Figura 434c).



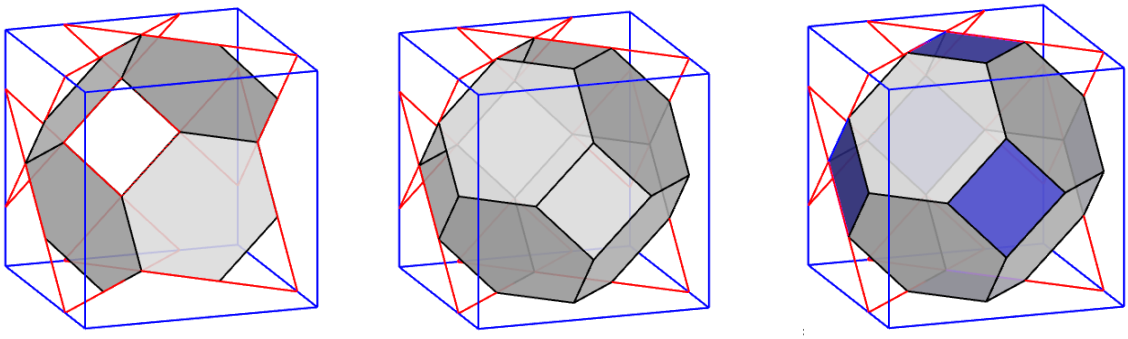
a b c

Figura 434 - Construção do tetraedro truncado a partir do tetraedro regular (2).

Abordaremos a modelação do octaedro truncado contido no cubo, segundo dois procedimentos.

Procedimento 1: Na Figura 435, mostra-se a construção do octaedro truncado a partir da truncatura do cubo por planos perpendiculares às suas diagonais, que passam pelos pontos que, nas arestas do cubo, se situam a ¾ de distância de cada um dos vértices (Gheorghiu e Dragomir,

1978, p. 213). Estes oito planos (dos quais se ilustram quatro, na Figura 435a), ao seccionarem o cubo, definem as faces hexagonais (Figura 435b) do arquimediano da Figura 435c.



a b c

Figura 435 - Construção do octaedro truncado a partir do cubo.

Procedimento 2: Na Figura 436, mostra-se uma construção algo semelhante, mas a partir de oito cubos justapostos (que resultariam da divisão em quatro partes iguais do cubo maior que circunscreve estes cubos menores). Nesta situação, os vértices das faces hexagonais correspondem ao ponto médio das arestas de cada um dos cubos. Cada uma destas faces é, por conseguinte, a figura de secção hexagonal regular produzida, em cada cubo, pelo plano que contém o centro de cada um e é perpendicular a uma das diagonais.

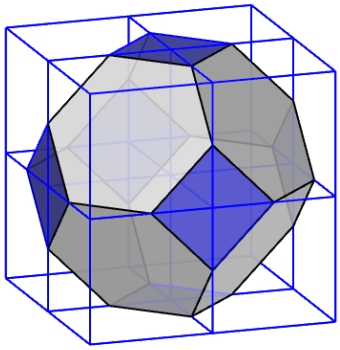


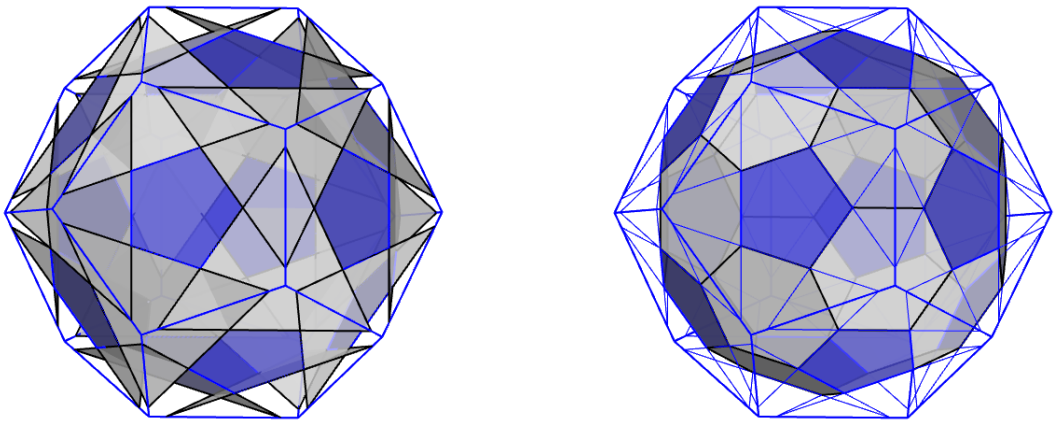
Figura 436 - Construção do octaedro truncado a partir de oito cubos.

Modelação do icosaedro truncado contido no dodecaedro:

Procedimento: Na construção seguinte, um icosaedro foi seccionado por planos perpendiculares aos eixos de simetria de rotação de ordem 5. Na Figura 437 ilustrou-se um icosaedro truncado incluso num dodecaedro regular, que foi seccionado por planos perpendiculares aos eixos de simetria de rotação de ordem 3 (que, por sua vez, coincidem com os eixos de rotação de ordem 5 do icosaedro). Os vértices das faces pentagonais resultam, segundo Gheorghiu e Dragomir

(1978, p. 213), da intersecção dos planos que contêm pontos situados, ao longo das arestas, à distância de $6/(9-\sqrt{5})$ do vértice correspondente.

A Figura 437a ilustra estes planos, assim como as faces pentagonais do icosaedro truncado que pertencem às faces do dodecaedro. Na Figura 437b, é possível observar, mais claramente, de que forma os vértices do icosaedro truncado resultaram da intersecção destes planos.



a b

Figura 437 - Construção do icosaedro truncado a partir do dodecaedro regular.

Voltando às *Figuras de Frequência 3*, importa acrescentar que, nos casos em que as faces do poliedro-base são quadradas ou pentagonais, os vértices não resultam da divisão das arestas em três partes iguais, conforme Pugh refere (1976, p. 16).

Suponhamos que tentamos construir o cubo truncado arquimediano, que tem faces octogonais regulares contidas nas faces de um cubo. Se dividirmos as arestas em três partes iguais u e unirmos os pontos obtidos, os octógonos contidos nas faces do cubo não são regulares, porque os lados pertencentes às arestas do cubo têm dimensão u, enquanto os lados contidos nas faces do cubo correspondem a $\sqrt{2}u$. Esta situação mostra-se na Figura 438, a partir da qual se conclui que o octógono obtido não é regular. Na Figura 438 ilustra-se ainda (a vermelho) um octógono regular complanar de lado igual a $\sqrt{2}u$. A idêntica conclusão chegaremos se dividirmos as arestas do dodecaedro em três partes iguais: o decágono obtido não é regular, ao contrário do decágono complanar a vermelho, que tem lados iguais a $\sqrt{2}u$ (Figura 439).

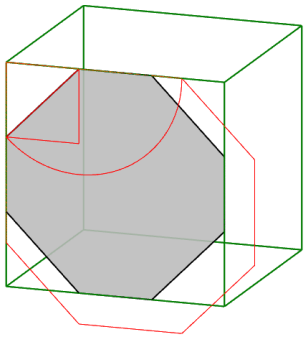


Figura 438 - O octógono com arestas iguais a 1/3 das arestas do cubo não é regular, ao contrário do octógono a vermelho.

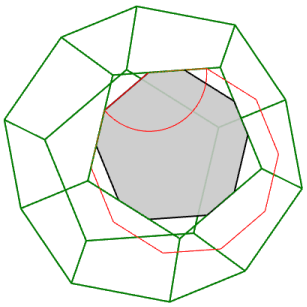


Figura 439 - O decágono com arestas iguais a 1/3 das arestas do dodecaedro não é regular, ao contrário do decágono a vermelho.

A truncatura do cubo e do dodecaedro deve ocorrer, nas palavras de Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 211), de modo a que o segmento de reta central da aresta é concorrente com uma face com o dobro do número de lados, isto é, quando a face regular obtida tiver duas vezes mais lados do que o número de lados da face do poliedro regular ao qual pertence. Nesta situação, as arestas que unem as faces octogonais do cubo truncado pertencem às arestas das faces do cubo e as arestas que unem as faces decagonais do dodecaedro truncado pertencem às arestas das faces do dodecaedro.

Apresentaremos três procedimentos diferentes para modelar o cubo truncado contido no cubo.

Procedimento 1: Na Figura 440, mostra-se uma das construções de Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 210) para definir o *cubus truncus*, tirando partido de uma construção elementar da geometria plana. As arestas do cubo foram assim divididas na razão 1: $\sqrt{2}$: 1.

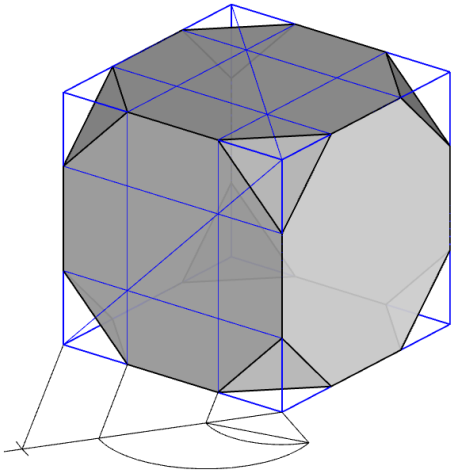
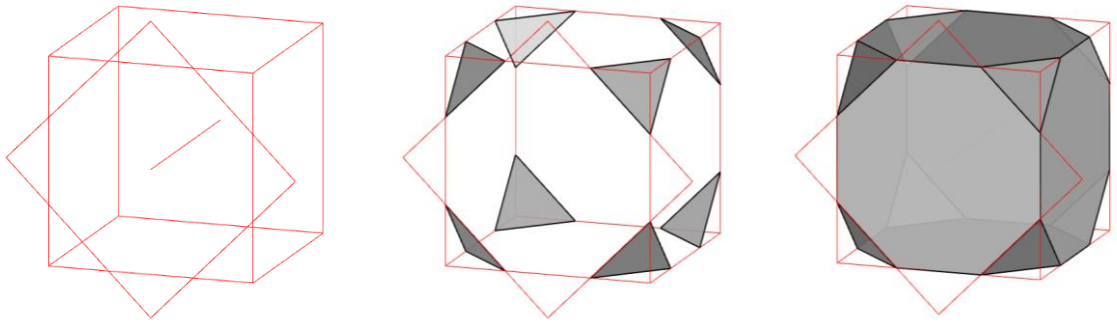


Figura 440 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (1).

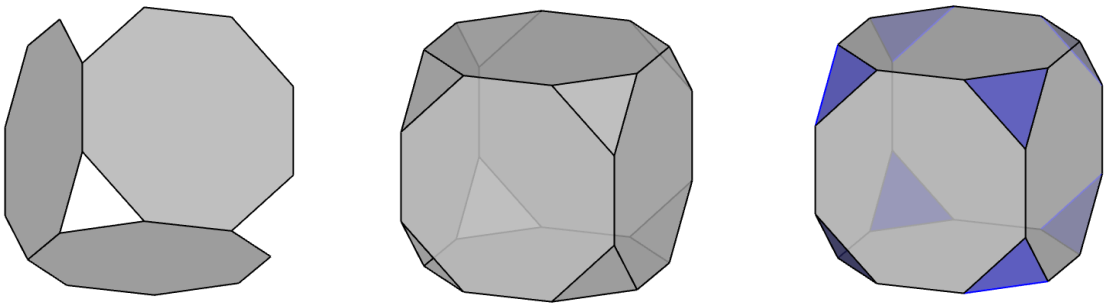
Procedimento 2: Na construção seguinte, optamos por rodar uma das faces do cubo segundo um ângulo de 45º, tendo o eixo perpendicular ao centro da face como eixo de rotação (representado a vermelho na Figura 441a). Os pontos de intersecção do quadrado inicial e do quadrado rodado coincidem com os vértices de um octógono regular (Figura 441b). O cubo é, tal como na construção anterior, seccionado por planos perpendiculares às suas diagonais (Figura 441c).



a b c

Figura 441 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (2).

Procedimento 3: Dispomos três faces octogonais perpendiculares entre si, de modo a que cada par tenha uma aresta comum (Figura 442a) e, a seguir, outras três faces octogonais iguais e paralelas às anteriores (Figura 442b). As oito faces triangulares regulares em falta preenchem, naturalmente, os espaços vazios entre as seis faces octogonais (Figura 442c).



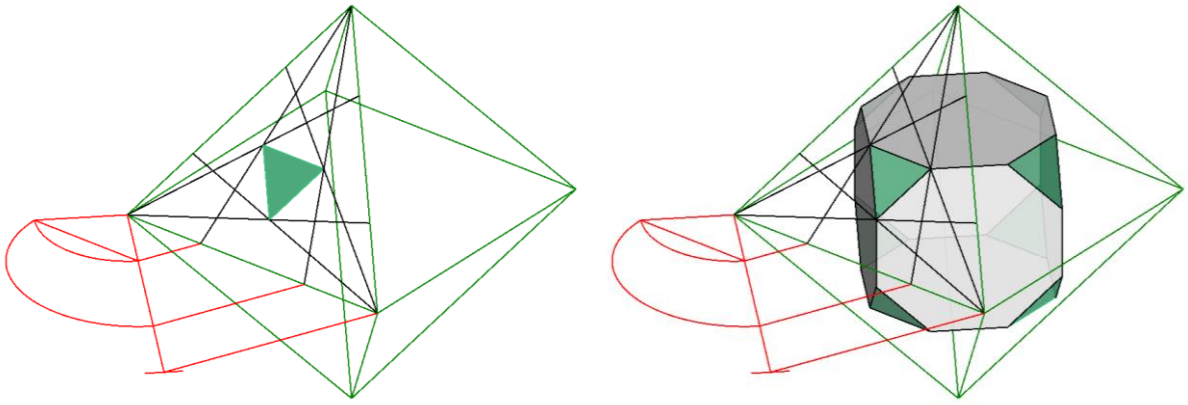
a b c

Figura 442 - Construção do cubo truncado a partir do cubo (3).

Modelação do cubo truncado contido no octaedro:

Procedimento: A Figura 443 ilustra a construção do cubo truncado incluso num octaedro regular, segundo Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 213). As arestas do octaedro são divididas na razão 1: √2: 1 (Figura 443a). Esta partição da aresta permite-nos desenhar as cevianas a partir

de cuja intersecção se determinam os vértices das faces triangulares contidas nas faces do octaedro (Figura 443b). Neste caso, o octaedro foi seccionado por planos perpendiculares aos eixos de rotação de ordem 4, que coincidem com os eixos de ordem 3 do cubo.

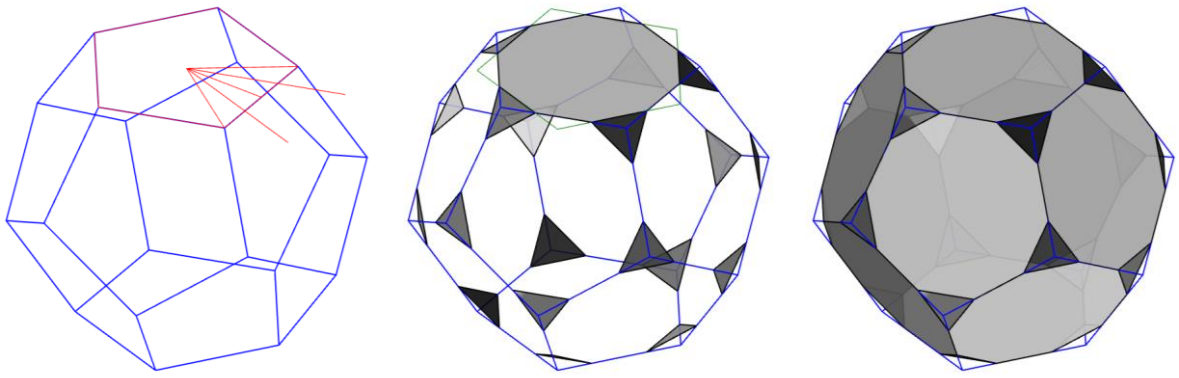


a b

Figura 443 - Construção do cubo truncado a partir do octaedro regular.

Modelação do dodecaedro truncado contido no dodecaedro:

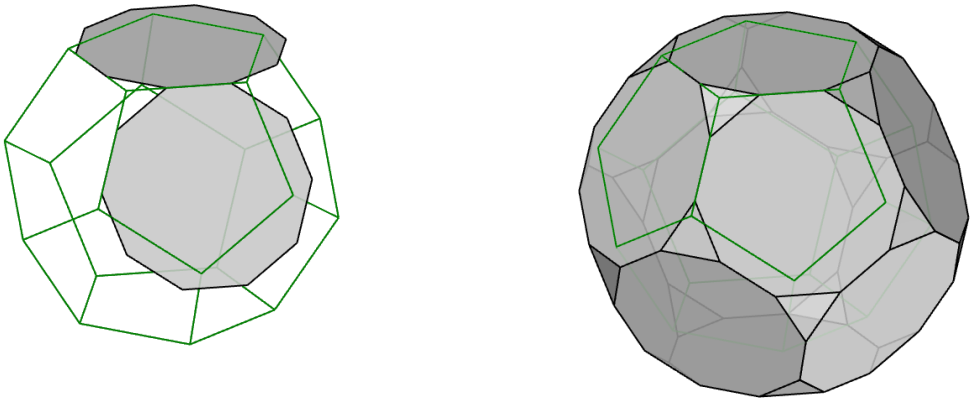
Procedimento 1: Na Figura 444, mostra-se a construção de Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 210) para o dodecaedro truncado arquimediano a partir do dodecaedro regular, que é seccionado por planos perpendiculares aos eixos de rotação de ordem 3. Para a determinação das faces decagonais, foi representado o apótema de uma das faces pentagonais e determinadas as bissetrizes dos ângulos ao centro que lhe são adjacentes (Figura 444a). A intersecção das bissetrizes com a aresta respetiva corresponde aos vértices do decágono regular. Ilustra-se ainda, na Figura 444b, que estes pontos poderiam igualmente ter sido determinados através de uma rotação do pentágono da face segundo um ângulo de 36º (isto é, metade do ângulo ao centro do pentágono). Na Figura 444c, mostram-se as doze faces do dodecaedro truncado.



a b c

Figura 444 - Construção do dodecaedro truncado a partir do dodecaedro regular (1).

Procedimento 2: Dispomos dois decágonos regulares nos planos de duas faces do dodecaedro (Figura 445a) uma vez que o ângulo diedral entre os pares de faces decagonais é idêntico ao ângulo diedral do dodecaedro regular. As vinte faces triangulares regulares preenchem os espaços vazios deixados pelas doze faces decagonais (Figura 445b).

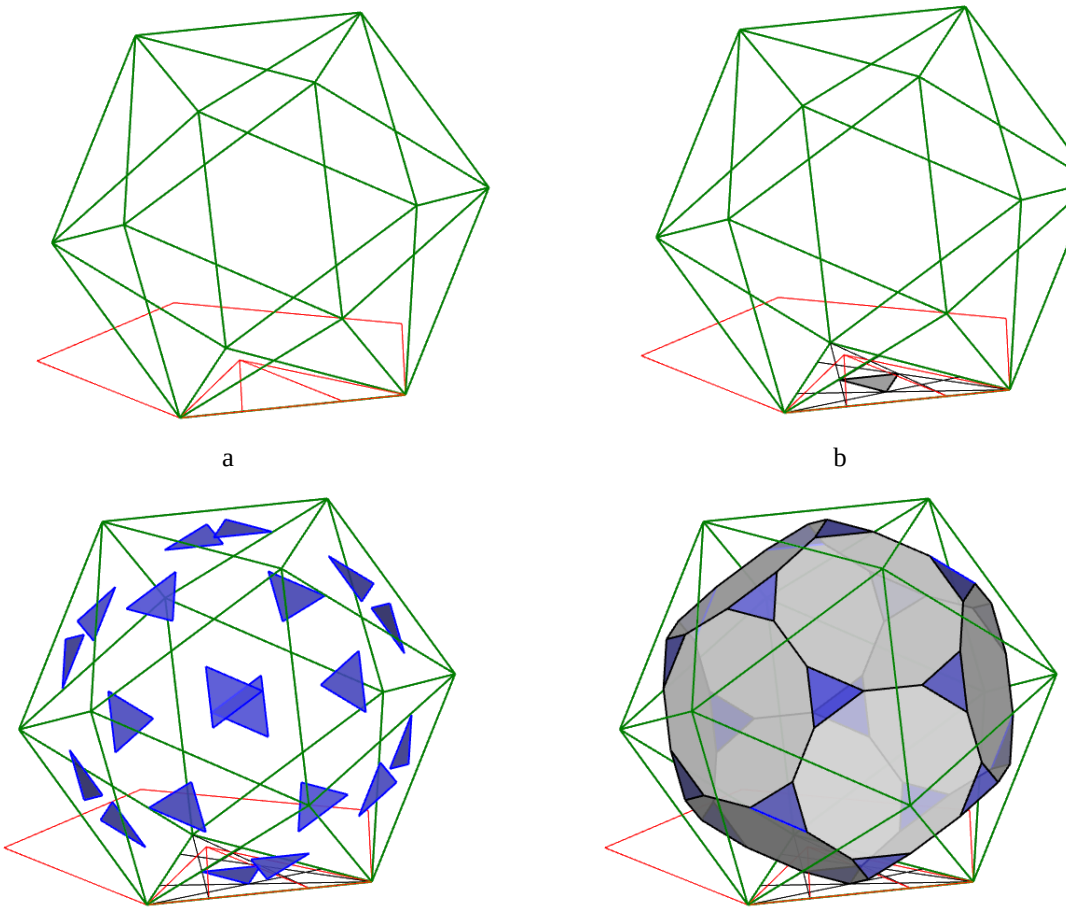


a b

Figura 445 - Construção do dodecaedro truncado a partir do dodecaedro regular (2).

Modelação do dodecaedro truncado contido no icosaedro:

Procedimento: É ainda possível construir um dodecaedro truncado a partir de um icosaedro regular, seguindo a construção sugerida por Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 213). A Figura 446a mostra o primeiro passo desta construção, segundo o qual uma das arestas do icosaedro é dividida pelos segmentos de reta que, partindo do centro de um pentágono regular (a vermelho) com um lado coincidente com esta aresta, dividem o ângulo ao centro do pentágono (72º) em 18º, 36º e 18º. A divisão das restantes arestas da face do icosaedro permite-nos definir mais duas cevianas por aresta, de cuja intersecção resultam os vértices de uma face triangular do dodecaedro truncado (Figura 446b). Procedendo de modo idêntico para as restantes faces, definiremos as vinte faces triangulares do arquimediano (Figura 446c). As faces decagonais do dodecaedro truncado preenchem os espaços entre estas faces (Figura 446d).



a b c d

Figura 446 - Construção do dodecaedro truncado a partir do icosaedro regular.

3.6.3. Arquimedianos com o prefixo rombi

O rombicuboctaedro deve o seu prefixo rombi ao facto de doze das suas dezoito faces quadradas pertencerem aos planos das faces de um dodecaedro rômbico (as restantes faces quadradas pertencem às faces de um cubo). Kepler designou o rombicuboctaedro por *sectus rhombus cuboctaëdricus*, por ter concluído que este poderia ser obtido através da truncatura de um dodecaedro rômbico (Cromwell, 1997, p. 83). De modo semelhante, o prefixo do rombicosidodecaedro deve-se ao facto de as suas trinta faces quadradas pertencerem às faces de um triacontaedro rômbico. Tanto um como o outro têm a particularidade de poderem ser incluíveis em três poliedros distintos: o rombicuboctaedro tem faces em comum com o cubo, com o octaedro e com o dodecaedro rômbico (Figura 447); o rombicosidodecaedro tem faces em comum com o dodecaedro, o icosaedro e o triacontaedro rômbico (Figura 448). Este facto certifica-nos que o rombicuboctaedro é definido por seis faces quadradas (contidas nas faces de um cubo); oito faces triangulares (contidas nas faces de um octaedro) e doze faces quadradas (contidas nas faces de um dodecaedro rômbico). A idêntica conclusão chegaremos no caso do rombicosidodecaedro, que é definido por doze faces pentagonais (contidas nas faces de um dodecaedro); vinte faces triangulares (contidas nas faces de um icosaedro) e trinta faces quadradas (contidas nas faces de um triacontaedro rômbico).

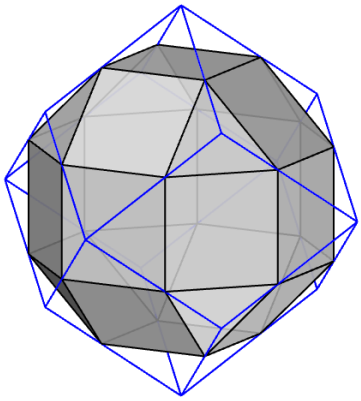


Figura 447 - Doze faces quadradas do rombicuboctaedro pertencem às faces do dodecaedro rômbico.

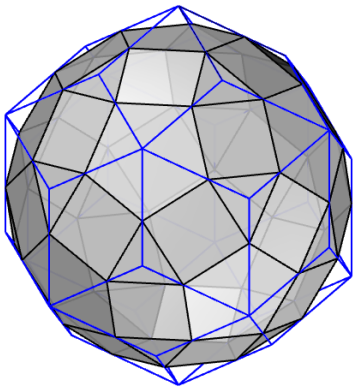
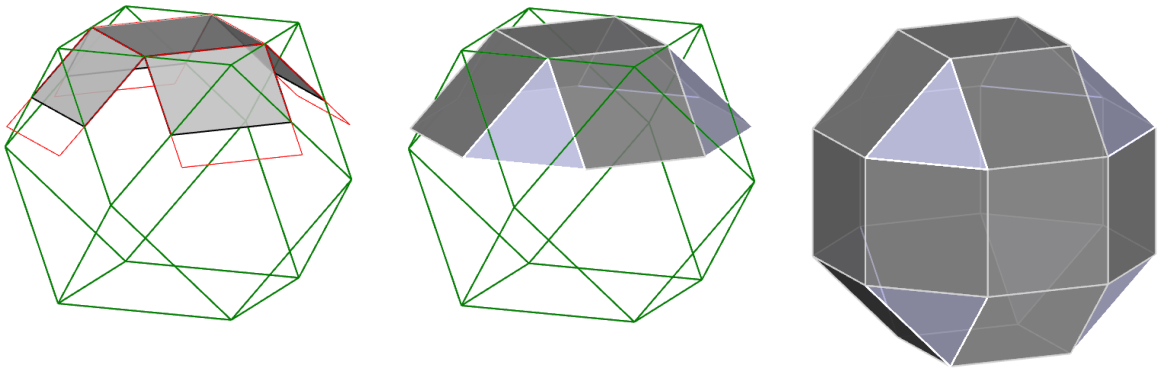


Figura 448 - As faces quadradas do rombicosidodecaedro pertencem às faces do triacontaedro rômbico.

Voltamos uma vez mais a Pugh, que classifica o rombicuboctaedro e o rombicosidodecaedro como *Figuras de Frequência 4* por resultarem da divisão das arestas, em duas partes iguais, das *Figuras de Frequência 2* (respectivamente, o cuboctaedro e o icosidodecaedro). Pugh assinala que esta divisão apenas não é suficiente para obter os arquimedianos, na medida em que as faces quadrangulares que resultam desta divisão não são quadradas.

Modelação do rombicuboctaedro:

Procedimento: Na Figura 449a, modificamos as arestas desiguais das faces retangulares obtidas até que se tornem quadradas. Ao longo desta modificação, note-se, mantém-se o ângulo diedral entre as faces. A localização de dois dos vértices das faces retangulares do rombicuboctaedro e do roimbicosidodecaedro é alterada de modo a que estes coincidam com os pontos médios das arestas do dodecaedro rômbico e do triacontaedro rômbico que, respectivamente, os circunscrevem, conforme estabelecem Ball e Coxeter (1987, p. 137) e se ilustrou nas Figuras 447 e 448. Observando a Figura 449a, constatamos que, entre cada par de quadrados dispostos segundo o ângulo diedral obtido, existe espaço para uma face triangular regular. Este conjunto de faces quadradas e triangulares regulares (Figura 449b) define a parte superior de uma cúpula quadrada (Sólido de Johnson J4), a partir da qual se torna relativamente simples de definir o rombicuboctaedro, uma vez que, por baixo desta cúpula, são justapostas as faces laterais um prisma octogonal semiregular. Por baixo destas, justapõe-se outra cúpula idêntica à anterior (Figura 449c). Se esta cúpula inferior fosse rodada em relação à superior, segundo um ângulo de 45º, o poliedro obtido seria o pseudo-rombicuboctaedro.



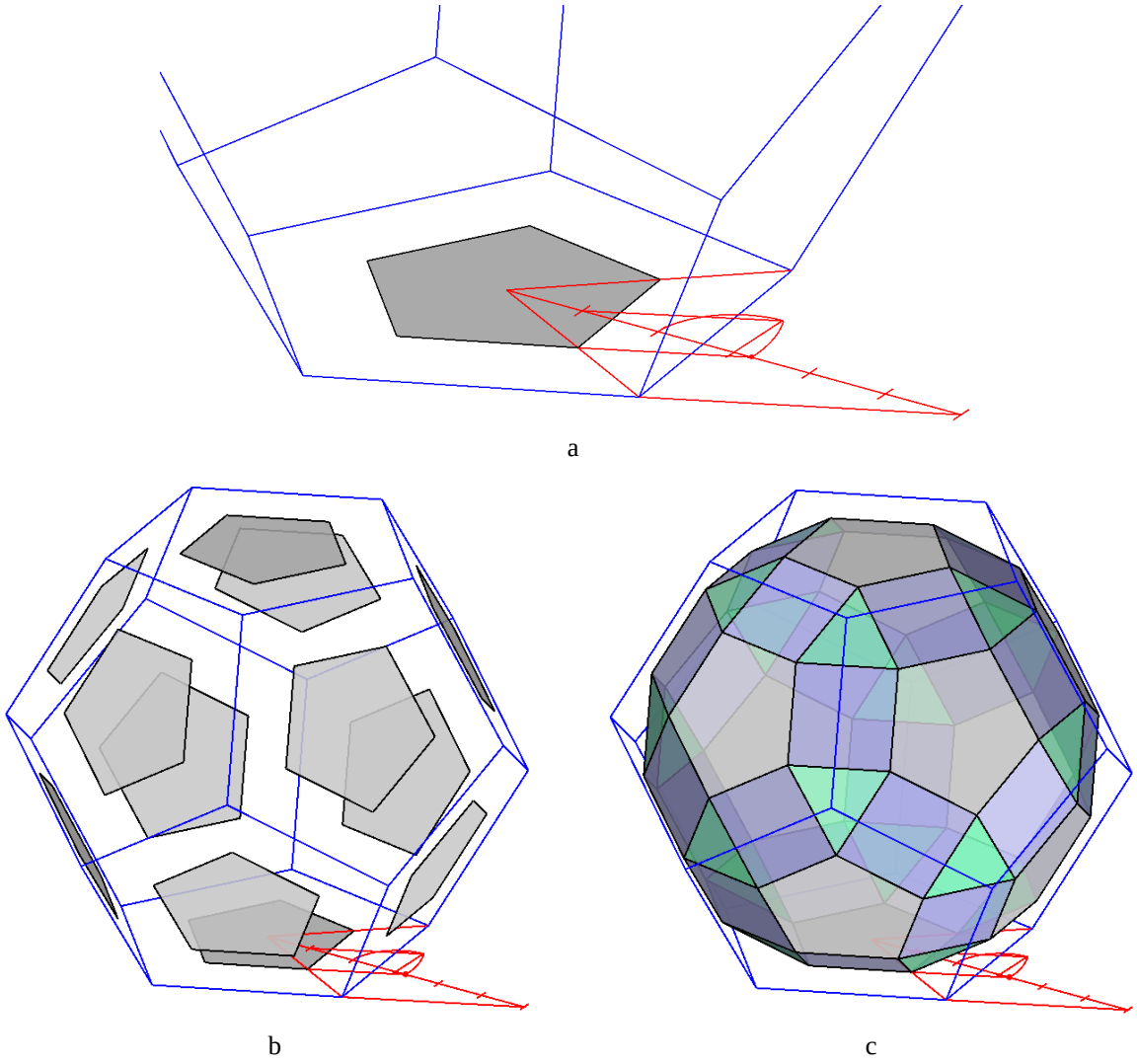
a b c

Figura 449 - Construção do rombicuboctaedro a partir do cuboctaedro.

A modelação do rombicosidodecaedro será apresentada de duas fomas diferentes.

Procedimento 1: Na Figura 450, apresenta-se a construção sugerida por Gheorghiu e Dragomir (1978, p. 214) para o rombicosidodecaedro, que recorre à mesma construção elementar da geometria plana que utilizámos previamente. Conforme ilustra a Figura 450a, são definidas seis medidas iguais a μ, numa linha auxiliar concorrente com o segmento de reta que une um vértice de uma das faces ao centro respetivo. Nesta linha auxiliar, é ainda marcada a partir do centro, uma outra medida, igual a $u + \sqrt{5}$. A transposição desta medida para o segmento de reta inicial permite-nos obter o primeiro vértice do rombicosidodecaedro. As restantes faces pentagonais

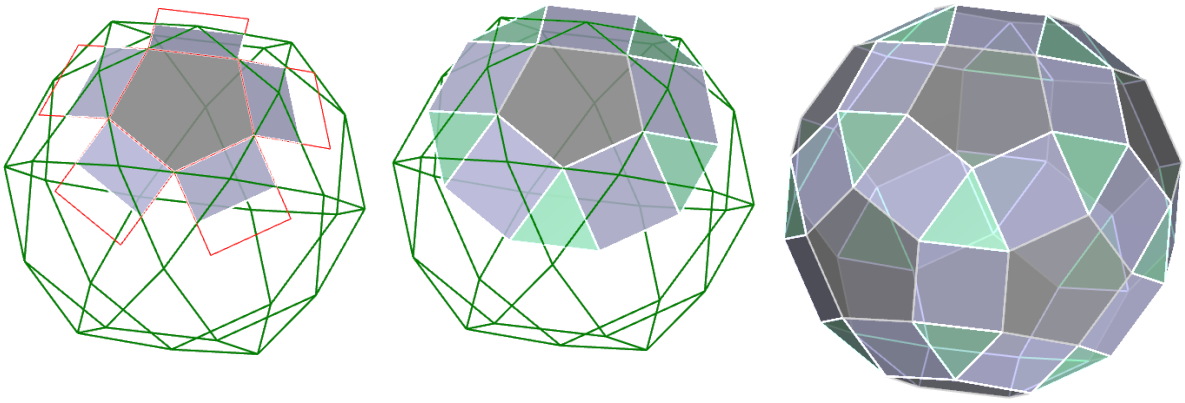
são obtidas por rotação e reflexão (Figura 450b), após o que pode ser desenhado o rombicosi-dodecaedro (Figura 450c).



a b c

Figura 450 - Construção do rombicosidodecaedro o a partir do dodecaedro regular.

Procedimento 2: Na construção seguinte partiremos, como Pugh (1976, p. 17), da divisão das arestas do icosidodecaedro em duas partes iguais. Tal como no caso anterior, não conseguimos obter faces quadradas mas retangulares (Figura 451a), razão pela qual se torna necessária uma modificação, que transforme as faces retangulares em faces quadradas e de modo a que os seus vértices coincidam com os pontos médios das faces do triacontaedro rômbico. Entre cada par de faces modificadas, insere-se, naturalmente, uma face triangular regular que, com as restantes faces (Figura 451b), definem a parte superior de uma cúpula pentagonal (Sólido de Johnson J5). A restante modelação do rombicosidodecaedro desenvolve-se a partir de doze cúpulas semelhantes, mantendo-se iguais os ângulos diedrais entre os pares de faces resultantes da divisão inicial das arestas (Figura 451c).



a b c

Figura 451 - Construção do rombicosidodecaedro a partir do icosidodecaedro.

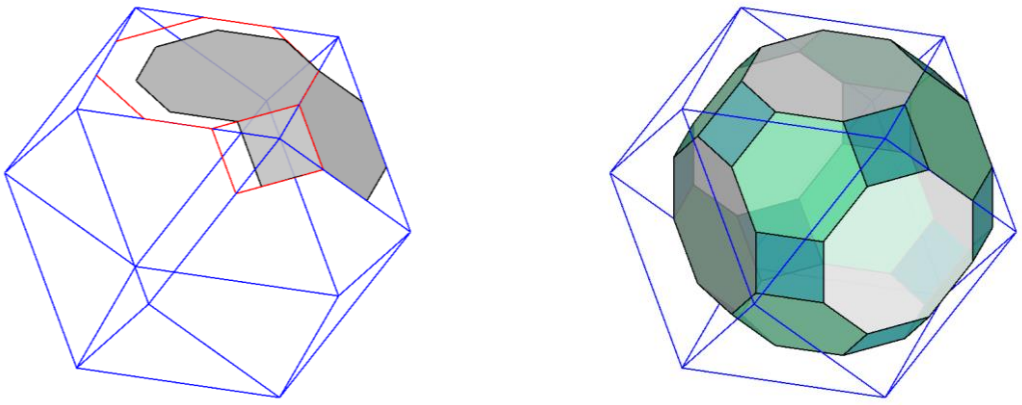
Ligeiras modificações no posicionamento de certas cúpulas pentagonais originariam quatro *Sólidos de Johnson*: o rombicosidodecaedro girado J72, o rombicosidodecaedro parabigirado J73, o rombicosidodecaedro metabigirado J74 e o trigirorrombicosidodecaedro J75.

3.6.4. Arquimedianos rombitruncados

Passamos agora para o cuboctaedro rombitruncado e o icosidodecaedro rombitruncado. Utilizaremos estas designações, de acordo com Wenninger (1975) e Pugh (1976), dado que as designações que foram atribuídas por Kepler - cuboctaedro truncado e icosidodecaedro truncado, respetivamente - não os descrevem de forma rigorosa. Pugh (1976, p. 18) designa os dois rombitruncados como *Figuras de Frequência 6*, pelo facto de os seus vértices poderem ser obtidos, segundo afirma, através da divisão em três partes iguais das *Figuras de Frequência 2* seguida de uma transformação de modo a que as faces retangulares se tornem em quadradas.

Modelação do cuboctaedro rombitruncado:

Procedimento: Na Figura 452a, porém, podemos verificar que não são apenas as faces quadrangulares que não são regulares, mas também as octogonais, porque as arestas contidas nas arestas do cuboctaedro têm comprimento u e as restantes, $\sqrt{2}u$. Na figura, mostram-se uma face quadrada, uma face hexagonal regular e uma face octogonal regular complanares aos polígonos resultantes da divisão das arestas do cuboctaedro. Embora não seja possível obter todas as faces com a configuração correta através desta construção, conseguimos obter os ângulos diedrais entre cada par de faces e, a partir daqui definir as restantes faces do cuboctaedro rombitruncado por rotação e reflexão (Figura 452b).



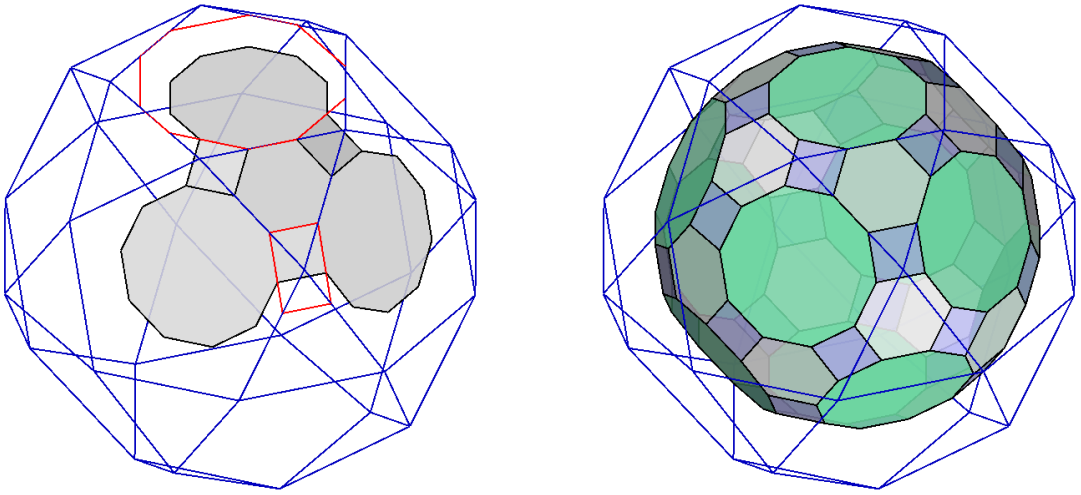
a b

Figura 452 - Construção do cuboctaedro rombitruncado a partir do cuboctaedro.

Modelação do icosidodecaedro rombitruncado:

Procedimento: Partimos da divisão das arestas do icosidodecaedro em três partes iguais, tendo em consideração que o único polígono regular resultante desta divisão é o hexágono. Embora nem todas as faces tenham a configuração apropriada (notem-se os rectângulos e decágonos

irregulares a vermelho na Figura 453a), têm, no entanto, a orientação correta, razão pela qual a construção se torna simples (Figura 453b), se tirarmos partido do facto de o poliedro em causa possui o grupo de simetria icosaedral.



a b

Figura 453 - Construção do icosidodecaedro rombitruncado a partir do icosidodecaedro.

3.6.5. Arquimedianos quirais

Os onze arquimedianos que vimos até agora são poliedros aquirais, porque têm simetria de reflexão em planos de reflexão perpendiculares às suas arestas, nos seus pontos médios. Estes planos seccionam o poliedro em duas partes iguais que são sobreponíveis e reflexo uma da outra. É também possível obter os arquimedianos aquirais através do processo descrito por Alicia Boole Stott em 1910, por ela designado de *expansão*. O processo de expansão, que será abordado no capítulo seguinte, não é aplicável aos arquimedianos quirais que nos falta abordar: o cubo achatado e o dodecaedro achatado, designados por Kepler como *cubus simus* e *dodecahedron simum* (Weissbach e Martini, 2002, p. 121). Ao contrário dos aquirais, os arquimedianos quirais não possuem simetria de reflexão, existindo, para cada um deles, duas versões, que se dizem enantiomórficas entre si: a dextrogira (*dextro*) e a levogira (*laevo*). Apesar de não possuírem simetria de reflexão, o cubo achatado e o dodecaedro achatado possuem, respetivamente, simetria de rotação idêntica aos grupos de simetria octaedral e icosaedral. As faces do convexo regular de que cada um deles deriva (o cubo e o dodecaedro regular, respetivamente) são igualmente afastadas do centro do poliedro (como se este fosse explodido ou *expandido*) e rodadas segundo um determinado ângulo. O sentido para o qual este ângulo é marcado determina a versão do poliedro achatado - levogira, se for marcado no sentido direto; dextrogira, se for marcado no sentido retrógrado. O espaço entre as faces obtidas é então preenchido com faces triangulares regulares: trinta e duas, no caso do cubo achatado e oitenta, no dodecaedro achatado. As Figuras 454 e 455 ilustram as versões dextrogira (*dextro*) e levogira (*laevo*) do cubo achatado, que diferem apenas no sentido para o qual as faces quadradas foram rodadas: na dextrogira, a rotação realizou-se no sentido direto; na levogira, no sentido retrógrado.

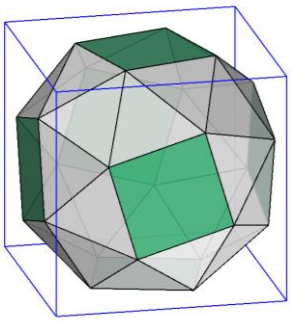


Figura 454 - Cubo achatado (*dextro*).

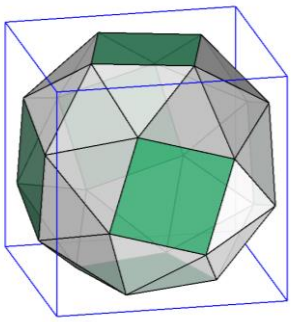


Figura 455 - Cubo achatado (*laevo*).

Na Figura 456, mostra-se a relação entre as faces pentagonais do dodecaedro regular e do dodecaedro achatado que, segundo Ostermann e Wanner (2014, p. 286) foram rodadas, em relação às faces pentagonais do dodecaedro, segundo um ângulo de 13º6'(13,1º).

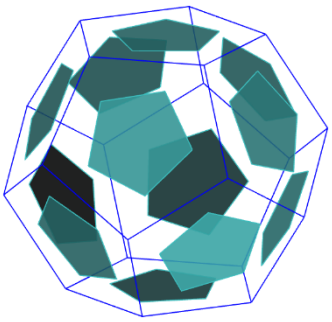


Figura 456 - Faces pentagonais de um dodecaedro achatado (versão dextrogira).

As Figuras 457 e 458 mostram que as duas versões do dodecaedro achatado diferem apenas no sentido para o qual as faces pentagonais foram rodadas em relação às faces do dodecaedro.

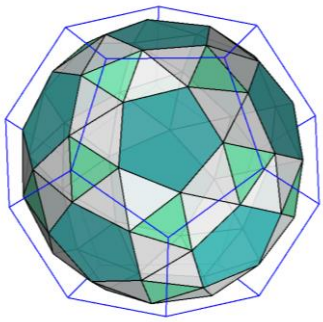


Figura 457 - Dodecaedro achatado (*dextro*).

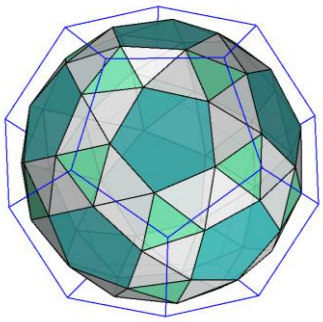


Figura 458 - Dodecaedro achatado (*laevo*).

Por ter considerado estranho, o facto de só existirem versões achatadas de dois dos cinco poliedros platónicos (1976, p. 18), Pugh aplicou procedimento semelhante a este *achatamento*, às faces do tetraedro regular e obteve a maior surpresa ("the greatest surprise", no original) - o icosaedro regular. Pugh faz notar que também Kepler notou que o icosaedro poderia ser visto como um tetraedro achatado (1976, p. 18), designação esta que foi secundada por Ball e Coxeter (1987, p. 139) e Huybers (1999, p. 133), entre outros autores. Pugh acrescenta ainda que idêntico processo aplicado nas faces de um octaedro regular (dual do cubo) e de um icosaedro regular (dual do dodecaedro) terão como resultado, respetivamente, o cubo achatado e o dodecaedro achatado. Recordamos, da construção do icosaedro regular incluso num tetraedro abordada em subcapítulo anterior, que, da divisão das arestas do tetraedro na razão $(1+\sqrt{5})/2$ resultam

três cevianas em cada face, e, da sua intersecção, os vértices do icosaedro. A Figura 459 apresenta as duas variantes em projeção ortogonal, a partir das quais concluímos que o icosaedro regular resulta também do *achatamento* do tetraedro regular e que existe em duas versões enantiomórficas (embora o tetraedro achatado não seja um poliedro quiral, como os outros achatados).

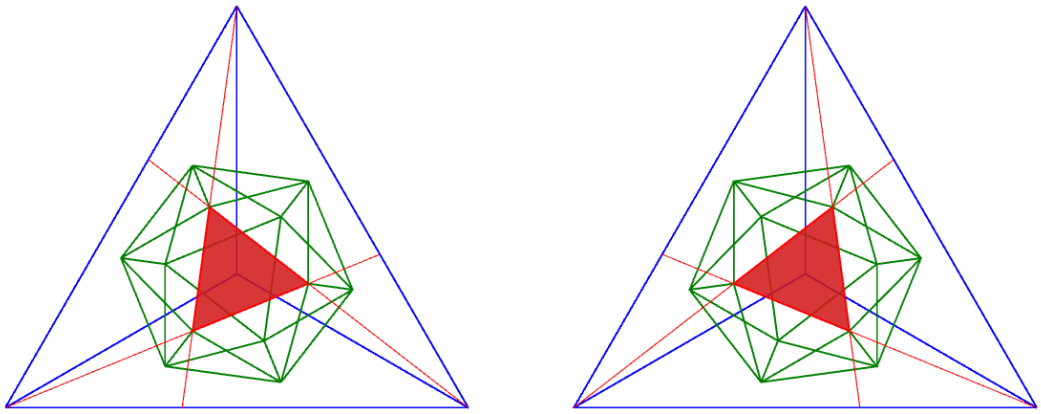
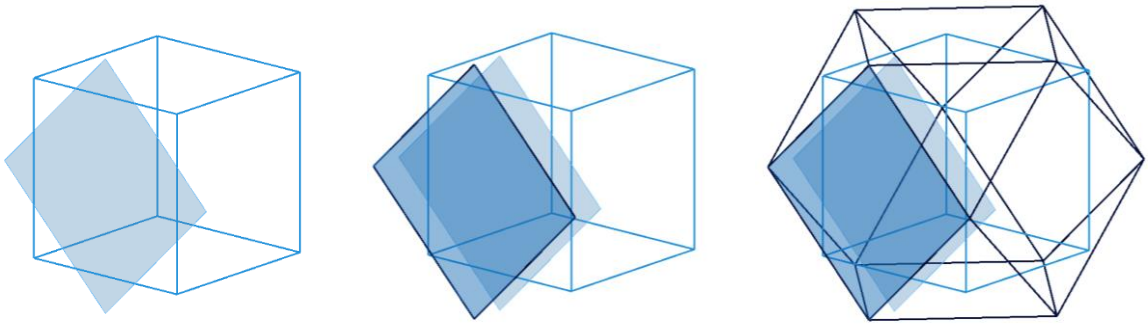


Figura 459 - Projeção ortogonal do icosaedro regular incluso no tetraedro regular (à esquerda, a versão dextrogira e à direita, a versão levogira).

O cubo achatado e o dodecaedro achatado podem ser obtidos, respetivamente, por truncatura do cubo e do octaedro, ou do dodecaedro e do icosaedro, ocupando os planos secantes, em cada um dos casos, orientações muito particulares. Por essa razão, refere Huybers (1999, p. 133), designações alternativas para o cubo achatado e o dodecaedro achatado seriam octaedro achatado e icosaedro achatado, respetivamente. Ball e Coxeter (1989, p. 139) e Cromwell (1997, p. 85) acrescentam que o cubo achatado tem relações idênticas com o cubo e com o octaedro (tal como o dodecaedro achatado, com o dodecaedro e o icosaedro) e que, por essa razão, a designação mais correta para cada um seria cuboctaedro achatado ou icosidodecaedro achatado. Conway e outros autores (2008) apontam que esta designação não seria a mais indicada, pelo facto de o cuboctaedro resultar, ele próprio, do *achatamento* (“snubification”) do cubo. O cuboctaedro seria por isso o resultado de um *semiachatamento* (“semi-snubbing”), uma fase intermédia entre o cubo e o cubo achatado que corresponderia então a uma fase final sendo o cuboctaedro, como tal, apenas metade da operação que nos leva do cubo à sua versão achatada final (2008, p. 287). Segundo esta perspetiva, o cuboctaedro é o resultado de um primeiro *achatamento* do cubo, visto que, tal como acontece para o cubo achatado, cada uma das faces é rodada de acordo com o mesmo ângulo (que, neste caso, é de 45º) segundo o eixo de rotação que lhe é perpendicular passando pelo centro do poliedro (Figura 460a). Para que os espaços entre as faces sejam preenchidos com faces triangulares regulares, as faces quadradas, depois

de rodadas, devem ser expandidas (Figura 460b) até à posição em que a distância entre estas e as faces iniciais corresponda à medida da aresta do cubo multiplicada por 0,207107. Dito de outra forma, depois da referida rotação, cada face deve ser transladada até ao plano mais próximo que é definido pelos vértices das faces que lhe são perpendiculares (Figura 460c). Igual raciocínio se ajustaria ao icosidodecaedro, assim considerado como resultado de um primeiro *achatamento* do dodecaedro.



a b c

Figura 460 - O cuboctaedro como resultado do primeiro *achatamento* do cubo.
Um vídeo desta animação encontra-se disponível em https://veraviana.net/expansion/

Ball e Coxeter (1987, p. 139) revelam que o cubo achatado pode ser obtido a partir do rombicuboctaedro, se as faces quadradas que não estão contidas nas faces de um cubo forem divididas em faces triangulares e a seguir distorcidas até se transformarem em regulares. No caso do rombicosidodecaedro, serão as faces quadradas a ser divididas em triangulares e distorcidas. No primeiro caso, as faces quadradas remanescentes passam a ocupar a posição das faces quadradas do cubo achatado e, no segundo caso, as faces pentagonais passam a ocupar a posição das faces pentagonais do dodecaedro achatado.

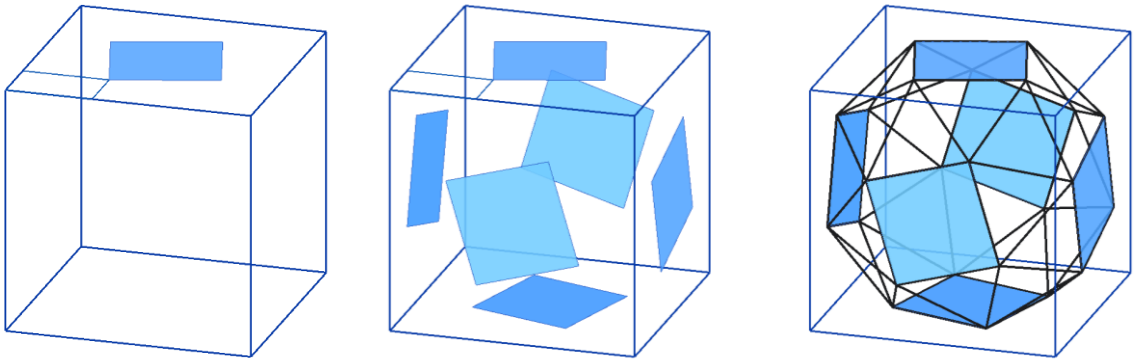
Uma particularidade dos arquimedianos achatados reside no facto de não ser possível determinar a sua aresta com régua e compasso a partir do diâmetro da circunsfera, conforme demonstrado por Weissbach e Martini (2002, p. 121). É possível obter os achatados arquimedianos por truncatura do cubo e do dodecaedro, respetivamente, mas nenhuma das construções necessárias é executável com o auxílio de régua e compasso (Ostermann e Wanner, 2014, p. 286). Estes dois autores estabeleceram que, para construir o cubo achatado incluso no cubo, as faces deste devem ser reduzidas segundo o fator 0,43759, sendo o ângulo de rotação de cada face igual a 16º28’ (16,46667º). Dessa forma, e para um cubo com 1 de aresta, as distâncias entre os vértices

do cubo achatado e os vértices mais próximos das faces do cubo correspondem a 0,352201128739 e 0,228155493654 (Ostermann e Wanner, 2014, p. 286).

Modelação do cubo achatado contido no cubo:

Procedimento: Na Figura 461a, ilustra-se uma das faces quadradas do cubo achatado, cujos vértices foram determinados através das distâncias acima referidas (para uma modelação com este nível de precisão, foi utilizado o *software* de modelação algorítmica *Grasshopper*).

O facto de o cubo achatado possuir simetria de rotação idêntica ao grupo de simetria octaedral permite-nos determinar facilmente as restantes faces através de rotações (Figura 461b). Na Figura 461c, mostram-se todas as suas arestas. O *software* utilizado para esta modelação permite-nos concluir que as arestas do cubo achatado incluso num cubo com 1 de aresta têm 0,437593286001 de comprimento.



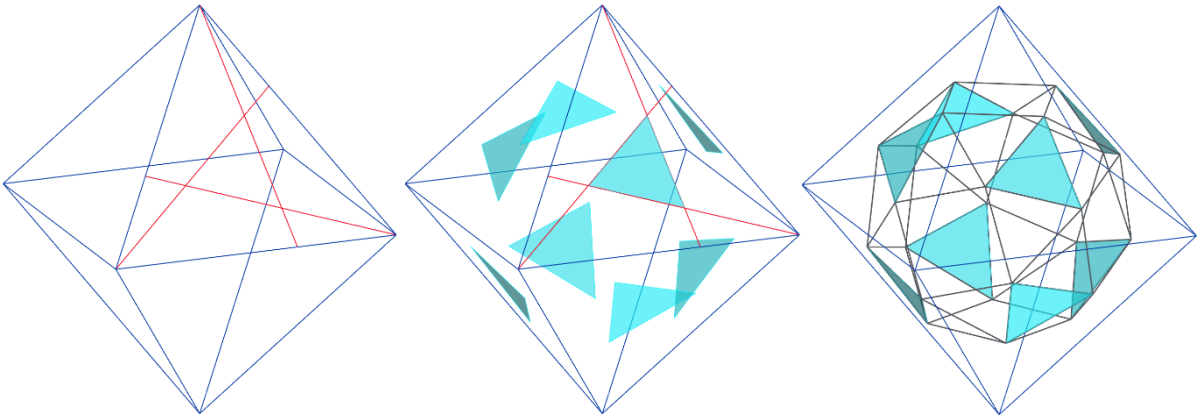
a b c

Figura 461 - Construção do cubo achatado (versão dextrogira) a partir do cubo.

Modelação do cubo achatado contido no octaedro:

Procedimento: Num artigo publicado em 1984, Jean François Rotgé confirmou ser possível construir o cubo achatado e o dodecaedro achatado por truncatura, respetivamente, do octaedro regular e do icosaedro regular. Para tanto, e começando com o cubo achatado, as arestas do octaedro regular devem ser divididas na razão 1,839286755 (Rotgé, 1984, p. 22). A Figura 462a ilustra, numa das faces do octaedro, as cevianas que resultam da divisão das arestas naquela proporção e, na Figura 462b, ilustram-se as faces triangulares contidas nas faces do octaedro. A Figura 462c mostra as faces quadradas e todas as arestas do cubo achatado resultante da truncatura do octaedro regular. Cumpre-nos assinalar, porém, que existem diferenças na medida das arestas, embora irrelevantes em termos de grandeza. Para um octaedro com 1 de aresta, as arestas das faces contidas no octaedro têm 0,336462141101 de comprimento; as arestas das

faces quadradas, 0,336462141184; e as arestas entre cada par das restantes faces triangulares, 0,336462141146.



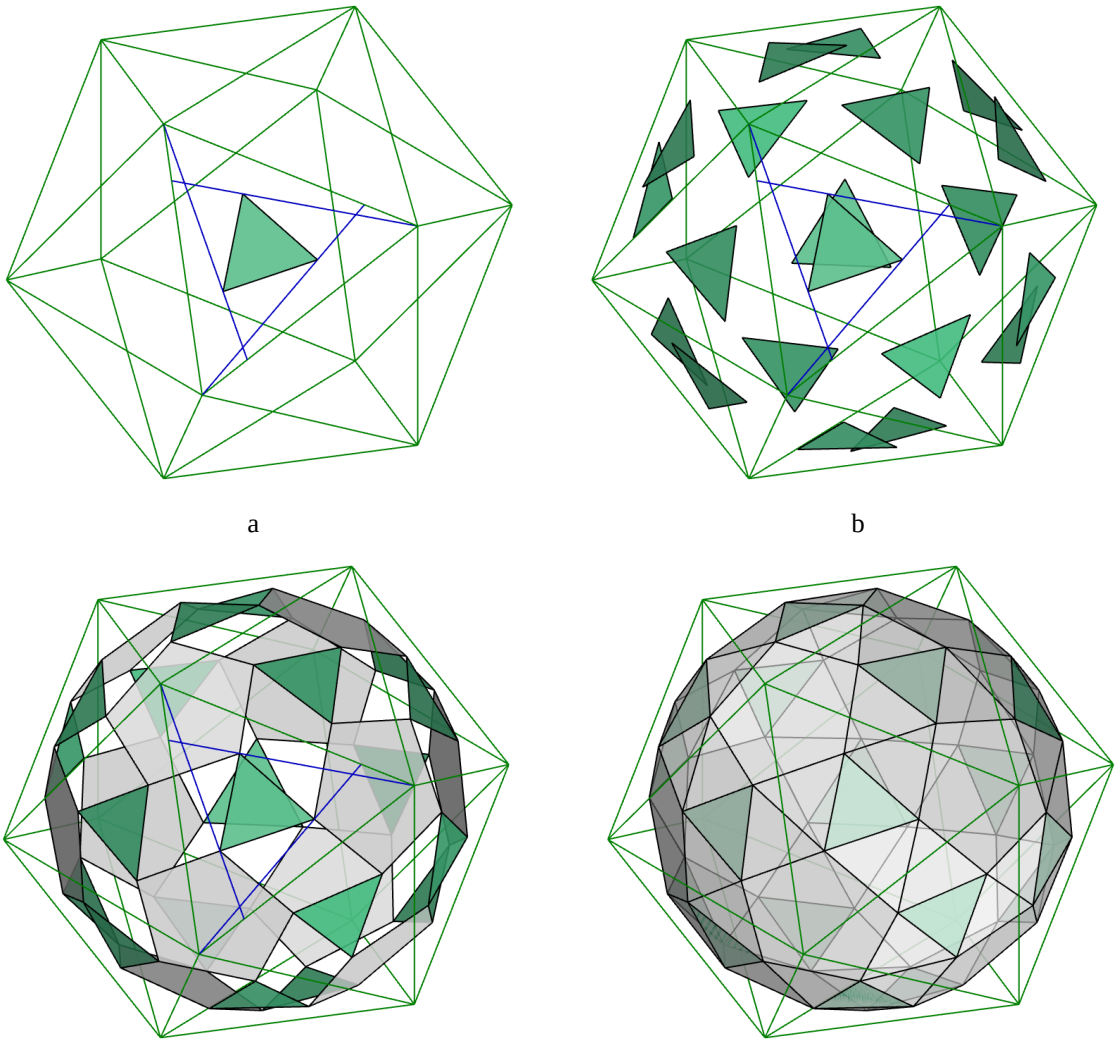
a b c

Figura 462 - Construção do cubo achatado (versão dextrogira) a partir do octaedro regular (note-se que esta é uma representação aproximada do cubo achatado, uma vez que as arestas não têm igual comprimento).

Modelação do dodecaedro achatado contido no icosaedro:

Procedimento: Passamos agora para o dodecaedro achatado conforme o processo descrito por Rotgé (1984, p. 22), segundo o qual a divisão das arestas do icosaedro na proporção 1,943151259 nos permite determinar, em cada face, três cevianas, de cuja intersecção resultam os vértices de uma face triangular do dodecaedro achatado (Figura 463a). O facto de o dodecaedro achatado possuir o grupo de simetria icosaedral permite-nos, a partir da face determinada, obter as restantes faces triangulares contidas nas restantes faces do icosaedro por simetria de rotação (Figura 463b). A partir dos seus vértices, definimos as faces pentagonais (Figura 463c) e as restantes 60 faces triangulares (Figura 463d).

Tal como na construção da Figura 462, continuam-se a detetar diferenças no comprimento das arestas obtidas por este processo, embora irrelevantes em termos de grandeza. Para um icosaedro com 1 de aresta, as arestas das faces contidas no icosaedro têm 0,36385589347 de comprimento, enquanto que as arestas das faces pentagonais e as arestas entre os pares das restantes faces triangulares medem, respetivamente, 0,36385589355 e 0,36385589351.



a b

c d

Figura 463 - Construção do dodecaedro achatado (versão dextrogira) a partir do icosaedro regular.
(note-se que esta é uma representação aproximada do dodecaedro achatado,
uma vez que as arestas não têm igual comprimento).

3.7. Expansão de poliedros convexos uniformes aquirais

Tendo por inspiração fotografias estereográficas de poliedros semirregulares que Pieter Hendrik Schoute lhe enviou (Polo-Branco, 2007, p. 152), Alicia Boole Stott publicou, em 1910, o artigo *Geometrical Deduction of Semiregular from Regular Polytopes and Space Fillings* em que introduz os conceitos de expansão e contração de polítopos de duas, três e quatro dimensões. Stott define expansão como o processo segundo o qual os limites de um polítopo regular são igualmente distanciados a partir do seu centro, mantendo a orientação e dimensão originais, até definir um novo polítopo com características de semirregularidade (Stott, 1910, p. 5). Se o polítopo for um poliedro regular, as suas arestas ou faces são uniformemente afastadas (ou expandidas) para além da sua posição inicial, até que a distância entre a nova localização de todos os vértices corresponda à medida da aresta do poliedro de partida. Em virtude da congruência conseguida para as novas arestas e para a distância entre os novos vértices, os espaços entre estes são preenchidos com faces regulares e o poliedro que resulta desta expansão é semirregular. As arestas do novo poliedro mantiveram o comprimento das arestas de partida, sem que nenhuma operação de modificação tivesse sido necessária (Figura 464), segundo um processo que Ball e Coxeter caracterizam como muito mais elegante ("far more elegant", no original (1987, p. 137)) do que as construções propostas por Kepler. A versão *n*-dimensional da expansão, atualmente, é designada como *cantellation* (que poderemos traduzir para cantelação), de acordo com Weisstein (s/d).

Stott define a contração (1910, p. 13) como o inverso da expansão, sendo através daquela que o conjunto de elementos considerados para a expansão do poliedro P_1 para o poliedro P_2 são uniformemente movidos para o interior de P_2 até que P_1 seja reconstituído (Polo-Blanco, 2008, p. 134). A contração de P_2 para P_1 preserva o comprimento das arestas de P_1 e de P_2.

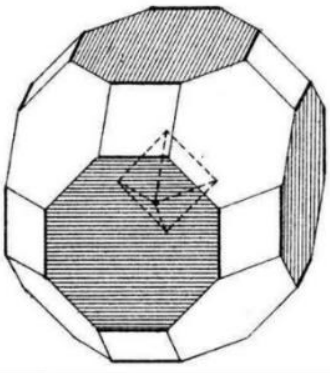


Figura 464 - O cuboctaedro rombitruncado, que deriva de um cubo, reduzido até a um octaedro (desenho de A. B. Stott (Plate 1 Figure 11) para ilustrar um exemplo da combinação das operações de expansão e contração).

Com o objetivo de melhor entender e mostrar cada um destes processos, modelamos exemplos da expansão e da contração de determinados poliedros convexos uniformes, com recurso a *software* de modelação algorítmica (cada um dos quais subentende uma construção que se designa, habitualmente, como *Definição*). Estas Definições permitiram-nos obter representações interativas daqueles processos que, por via de uma componente dinâmica visualmente apelativa, desejavelmente, facilitarão a sua compreensão, permitindo-nos determinar distâncias entre elementos dos objetos a expandir/contrair, com um rigor bastante considerável (Viana, Xavier, Aires e Campos, 2019a).

3.7.1. Expansão e_1

Na Figura 465 mostra-se uma captura de ecrã da expansão interativa e_1 de um polígono regular e, à direita, uma parte da Definição com a qual é possível interagir para alterar o número de lados de $\{n\}$ e afastar gradualmente os lados do polígono, na direção da perpendicular a cada um dos lados. Ao tornar possível alterar n (sendo $n > 3$) através de um *Slider*, a Definição permite-nos comprovar que qualquer $\{n\}$ se expande até definir $\{2n\}$, de acordo, aliás, com o que Stott afirma: qualquer polígono regular transforma-se noutro polígono regular com os lados de igual comprimento e o dobro do número de lados (1910, p. 5). Na imagem da esquerda, mostra-se a situação em que o ponto que controla a expansão (aqui representado como uma pequena esfera), se encontra a metade da distância entre o vértice mais próximo do polígono (que, neste caso, é um heptágono) e a intersecção entre os planos perpendiculares aos lados que neste concorrem. Quando o ponto atinge esta intersecção, o heptágono regular transforma-se num tetradecágono regular.

Uma adaptação desta Definição tornou possível verificar que a afirmação de Stott permanece válida se aplicada à expansão dos lados de polígonos $\{n\}$ de densidade $1 < d < n/2$ em que n e d são coprimos (Grünbaum, 1977, p. 2). A estes polígonos, que se designam por polígonos estrelados regulares ou poligramas regulares ou, atribui-se a notação $\{n/d\}$.

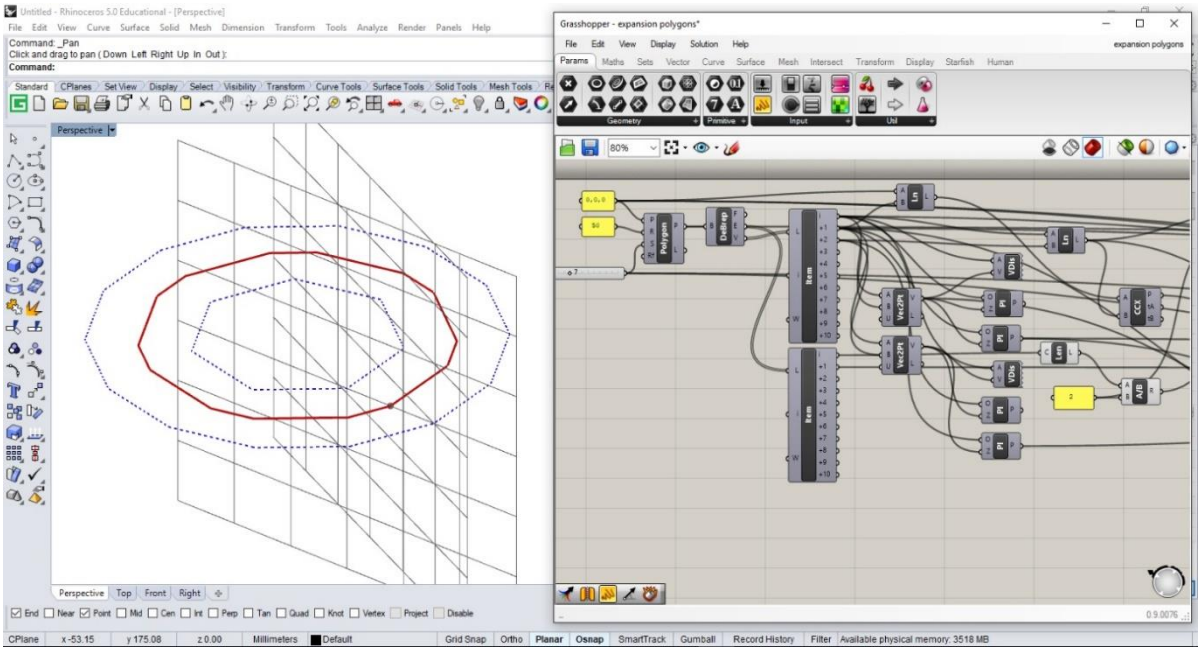
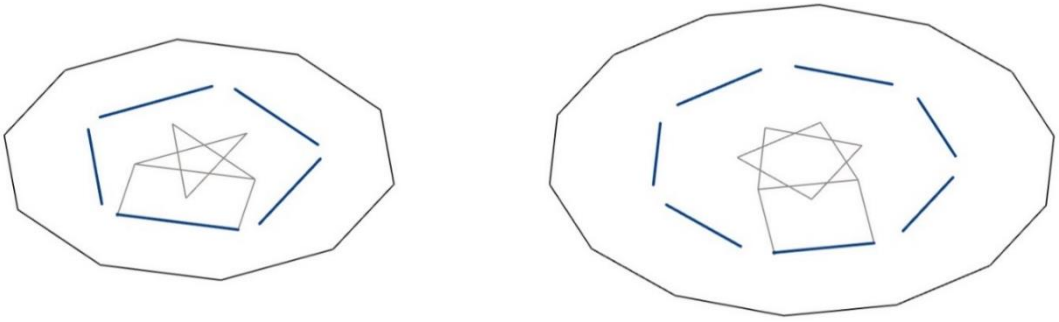


Figura 465 - Captura de ecrã com a Definição no *Grasshopper* para a expansão e_1 de um polígono regular.

A Figura 466 mostra duas fases da expansão de um {5/2} (Figura 466a) e de um {7/2} (Figura 466b). No resultado da fase intermédia, que na figura se destaca com traço mais expressivo, o

ponto que controla a animação situa-se a metade da distância necessária para atingir a fase final, em que a expansão do pentagrama e do heptagrama tem, como resultado, polígonos convexos regulares, respetivamente, um decágono e um tetradecágono. Daqui se conclui que qualquer {*n*/*d*}, em que *d* seja igual a 2, se expande até um polígono regular de densidade 1, com número de lados 2*n* e lado com comprimento igual ao de {*n*/*d*}.

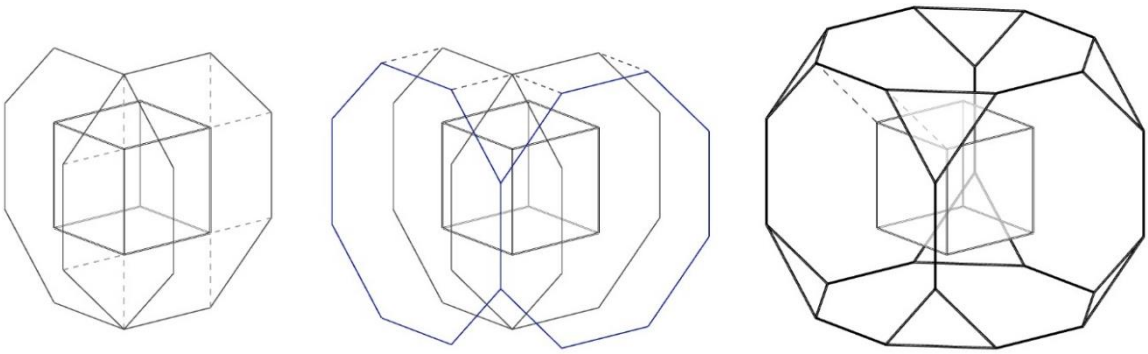


a b

Figura 466 - Expansão de um poligrama regular até um polígono convexo regular.

Analisaremos a seguir o processo de expansão para a dimensão 3 que Stott (1910, p. 5) designa por e_1 e consiste na expansão das arestas de determinados poliedros convexos regulares. Esta expansão terá como resultado o arquimediano que resulta da truncatura dos vértices do poliedro regular, nomeadamente, o tetraedro truncado, o cubo truncado, octaedro truncado, o dodecaedro truncado e o icosaedro truncado. Em qualquer dos casos, as faces do poliedro regular converter-se-ão em faces com o dobro do número de lados; e os vértices, em faces regulares com configuração igual à da figura verticial.

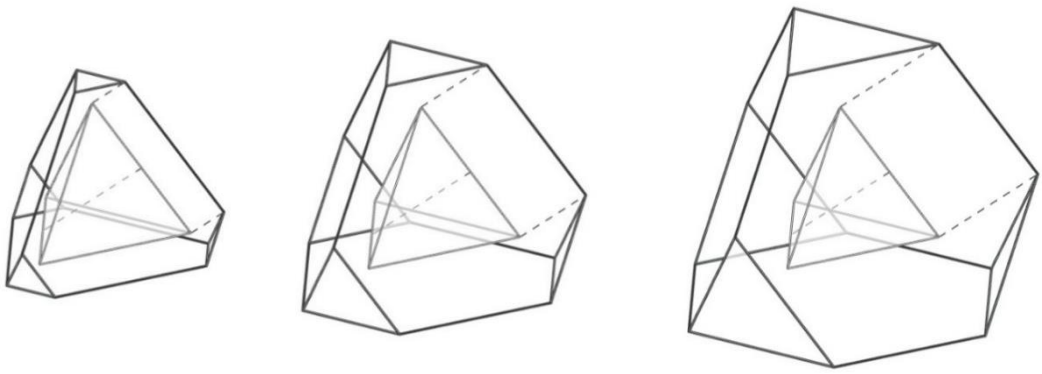
Tal como Stott, apresentamos, como primeiro exemplo, a expansão das arestas de duas faces de um cubo até coincidirem com quatro lados de dois octógonos regulares com lados de comprimento igual (Figura 467a). A Definição permite-nos a seguir transladar estes dois octógonos até à posição em que partilham uma aresta comum e, simultaneamente, coincidem com duas das faces de um cubo truncado. Na Figura 467b, podemos constatar que expandir as duas arestas do cubo para esta última posição corresponde a transladar a aresta comum às duas faces até uma localização determinada, segundo a direção do eixo de rotação de ordem 2 respetivo, que contêm o ponto médio das arestas opostas do cubo. Considerando que a distância entre as arestas do cubo e as arestas paralelas do cubo truncado corresponde à medida da aresta (assinalada, na Figura 467c, pelos segmentos de reta perpendiculares às arestas dos dois poliedros), bastar-nos-á transladar (aliás, expandir) as doze arestas do cubo com a direção e distância referidas, para obtermos o cubo truncado semirregular (Figura 467c).



a b c

Figura 467 - Três fases da expansão das arestas de um cubo até ao cubo truncado arquimediano.

Na Definição seguinte, é possível interagir para movimentar as arestas de um tetraedro regular. Na Figura 468, ilustram-se três fases da expansão das arestas na direção dos eixos de rotação de ordem 2 correspondendo a última fase ao tetraedro truncado arquimediano (Figura 468b). Nesta última situação (Figura 468c), a distância a que as arestas do tetraedro se encontram das arestas paralelas do tetraedro truncado corresponde à distância entre os pontos médios de arestas opostas do tetraedro (a bimediana do tetraedro, que equivale ao diâmetro da midesfera do tetraedro - nas imagens, representou-se uma bimediana a traço interrompido). Para melhor visualização, as faces hexagonais do arquimediano estão apenas representadas pelas suas arestas.

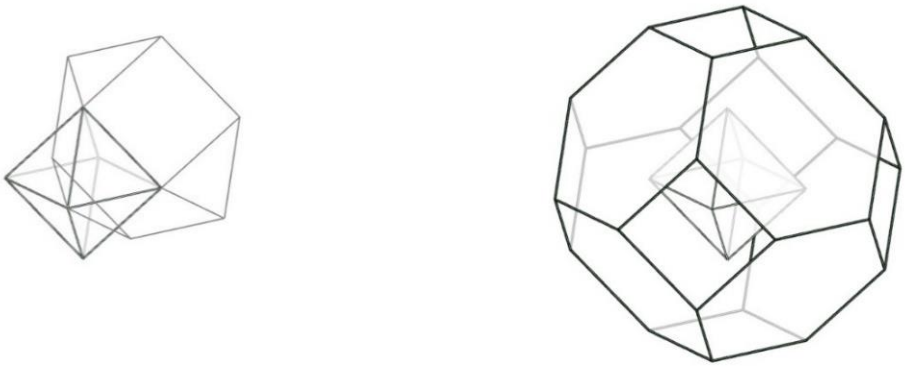


a b c

Figura 468 - Três fases da expansão das arestas de um tetraedro regular até ao tetraedro truncado arquimediano.

Na Figura 469, expandimos as arestas de um octaedro regular (Figura 469a) segundo a direção dos eixos de rotação de ordem 2 até que as arestas movidas e as iniciais se encontram a distância igual à medida da aresta do octaedro (Figura 469b). Nesta situação, as arestas que, de cada face, foram movidas, passam a coincidir com três arestas das faces hexagonais do octaedro truncado arquimediano; enquanto que os vértices do octaedro se transformam em faces quadradas. As

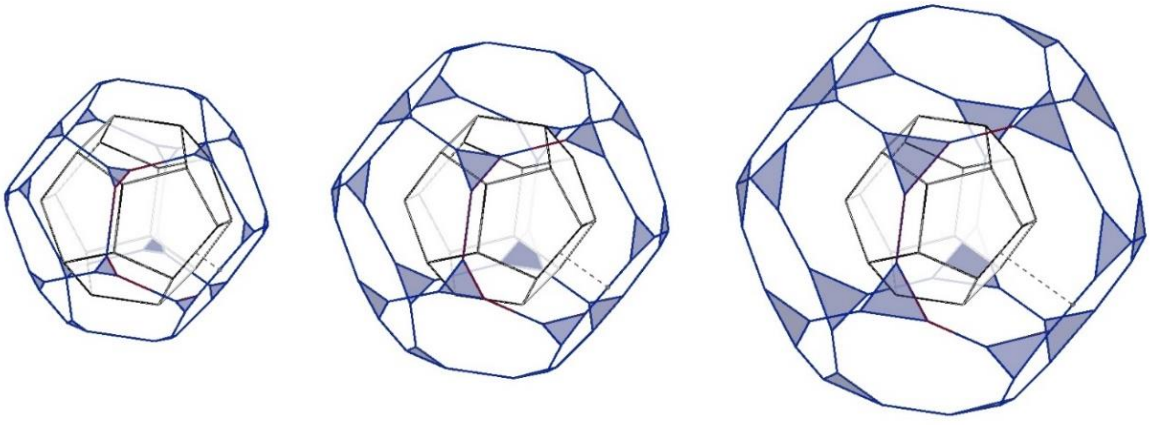
faces hexagonais coincidem com as bases maiores de oito cúpulas triangulares (o Sólido de Johnson J3, dos quais se representa um, pelas suas arestas, na Figura 469a. Por seu turno, os vértices do octaedro, que se transformaram em faces com a configuração das figuras verticiais, coincidem com as bases de seis pirâmides quadradas (Sólido de Johnson J1).



a b

Figura 469 - Expansão das arestas de um octaedro regular até ao octaedro truncado arquimediano.

As Figuras 470a e 470b mostram três fases de expansão das arestas do dodecaedro na direção dos eixos de rotação de ordem 2, respetivamente, a $1/3$ e a $2/3$ da distância que expande as arestas até à fase final (Figura 470c). Para que todas as faces resultantes da expansão das arestas do dodecaedro sejam regulares, a distância entre as arestas paralelas do dodecaedro e do dodecaedro expandido deverá ser igual à medida da aresta multiplicada pela divina proporção, isto é, $(1+\sqrt{5})/2$.



a b c

Figura 470 - Três fases da expansão das arestas de um dodecaedro até ao dodecaedro truncado arquimediano.

Nas Figuras 471 e 472, ilustra-se a expansão das arestas do dodecaedro e do icosaedro regulares, segundo a direção dos eixos de rotação de ordem 2, de que resultam, respetivamente, o dodecaedro truncado e o icosaedro truncado. No caso do icosaedro, a distância entre as suas arestas e as arestas paralelas do icosaedro expandido corresponde à distância entre arestas opostas do icosaedro, isto é, ao diâmetro da midesfera do icosaedro, que une os pontos médios das arestas opostas.

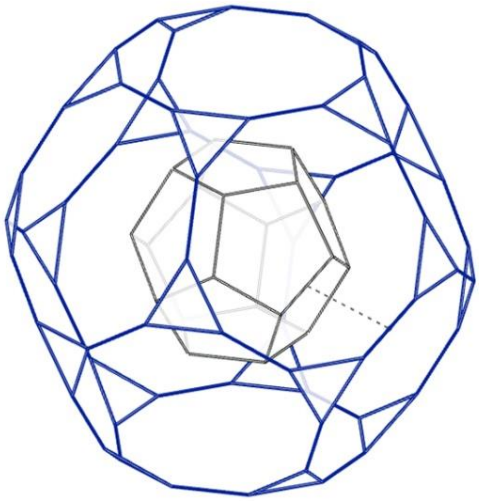


Figura 471 - Expansão das arestas de um dodecaedro regular até ao dodecaedro truncado arquimediano.

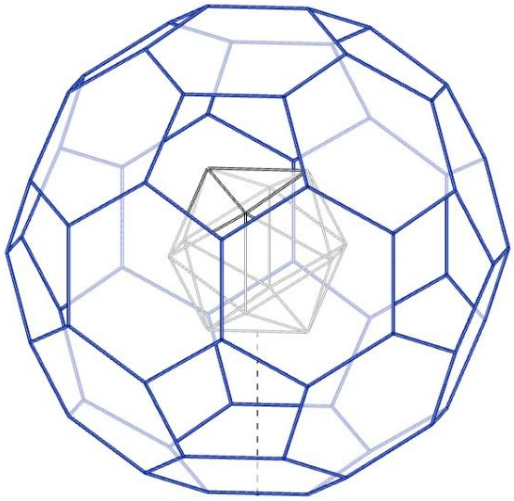


Figura 472 - Expansão das arestas de um icosaedro regular até ao icosaedro truncado arquimediano.

Da expansão das arestas de cada convexo regular resultam, como acabamos de ver, as suas respetivas versões truncadas arquimedianas. A Tabela 4 sumariza os casos analisados, através dos quais concluímos que, da expansão das arestas de qualquer $\{p\ ,q\}$ se obtém um $t\{p, q\}$ (ou, de acordo com a notação de Cundy e Rollett (1989), qualquer p, q a que foram expandidas as arestas, transforma-se num $q.(2p)^2$ em que os vértices têm configuração $q.2p.2p$).

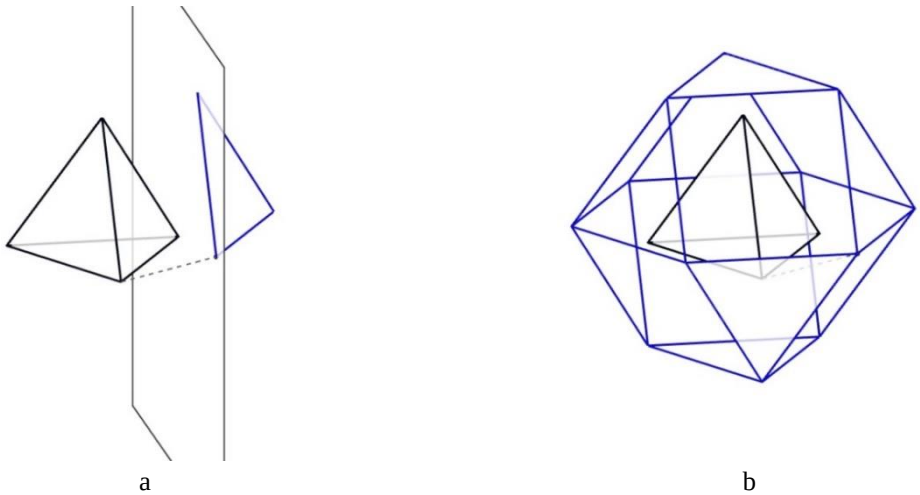
Tabela 4 - Expansão das arestas dos poliedros convexos regulares (aresta com 1 de comprimento).

P_1			Distância entre as arestas paralelas mais próximas	P_2			
Tetraedro	3^3	$\{3,3\}$	Diâmetro da midesfera	Tetraedro truncado	$t\{3,3\}$	3.6^2	Figura 468
Cubo	4^3	$\{4,3\}$	1	Cubo truncado	$t\{4,3\}$	3.8^2	Figura 467
Octaedro	3^4	$\{3,4\}$	1	Octaedro truncado	$t\{3,4\}$	4.6^2	Figura 469
Dodecaedro	5^3	$\{5,3\}$	$(1+\sqrt{5})/2$ (proporção áurea)	Dodecaedro truncado	$t\{5,3\}$	3.10^2	Figuras 470, 471
Icosaedro	3^5	$\{3,5\}$	Diâmetro da midesfera	Icosaedro truncado	$t\{3,5\}$	5.6^2	Figura 472

3.7.2. Expansão e_2

Mostraremos a seguir alguns exemplos do processo que Stott designa por expansão e_2 para a dimensão 3 (1910, p. 7), segundo o qual as faces de um poliedro são expandidas na direção da normal a cada face, até à posição em que os novos vértices definem um poliedro semirregular. Em todas as Definições que realizámos, as localizações dos vértices expandidos foram determinadas por processos puramente geométricos, mas as conclusões sobre as distâncias, em cada caso, adaptam as que se encontram na página web da *Wolfram MathWorld* intitulada "Expansion" (Weisstein, s/d).

O primeiro exemplo ilustra a expansão das faces de um tetraedro regular na direção da normal a cada face, até que um cuboctaedro arquimediano seja obtido. Na Figura 473a, mostra-se que a localização do vértice expandido é o resultado da intersecção entre a normal à face que contém esse vértice e o plano que é perpendicular à aresta oposta a esse vértice. Na Definição em causa, e depois da determinação do vértice expandido, as localizações dos restantes vértices, arestas e faces foram determinadas através de uma conjugação de transformações geométricas que envolvem translações, rotações e reflexões. Na fase final da expansão, todos os vértices do tetraedro se transformaram em faces [triangulares] com a configuração da figura verticial e todas as arestas do tetraedro em faces quadradas (representadas, na Figura 473b, pelas suas arestas). A distância entre as faces paralelas do tetraedro inicial e expandido é igual ao raio da circunsfera, o que corresponde ao comprimento da aresta do tetraedro multiplicado por $\sqrt{(3/8)}$.

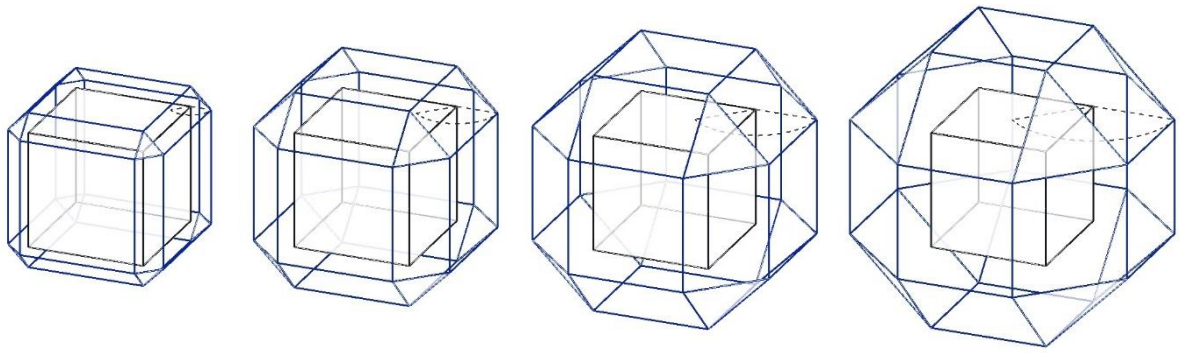


a b

Figura 473 - Expansão das faces de um tetraedro regular até ao cuboctaedro arquimediano.

Nas Figuras 474a a 474d, mostram-se quatro fases da expansão uniforme das faces de um cubo, até definir um rombicuboctaedro arquimediano. Na fase final, a distância entre as faces do cubo

e as faces paralelas do arquimediano corresponde a metade do comprimento da diagonal da face do cubo, conforme ilustram os segmentos de reta e arco de circunferência a traço interrompido. Nas Figuras 474a, 474b e 474c, o ponto que controla a expansão das faces situa-se a $1/4$, a $1/2$ e a $3/4$ da distância completa (Figura 474d), a qual corresponde, para um cubo com comprimento da aresta n, a $n/2\sqrt{2}$.



a b c d

Figura 474 - Quatro fases da expansão das faces de um cubo até ao rombicuboctaedro arquimediano.

Nas figuras 475 e 476, observamos que tanto a expansão uniforme das faces do cubo (Figura 475), como do seu dual com aresta igual (Figura 476) - que, nesta situação, não partilham a mesma esfera de reciprocação - têm por resultado o mesmo rombicuboctaedro, dado que o número de vértices na face de um é igual ao número de faces que se intersectam no vértice do outro (Stott, 1910, p. 7). Para que a expansão das faces do octaedro resulte no arquimediano, a distância entre as faces triangulares dos dois poliedros deve corresponder à altitude das faces triangulares o que, para um octaedro com aresta de comprimento n, corresponde a $n/2\sqrt{3}$. O rombicuboctaedro pode assim ser designado como um cubo expandido ou octaedro expandido.

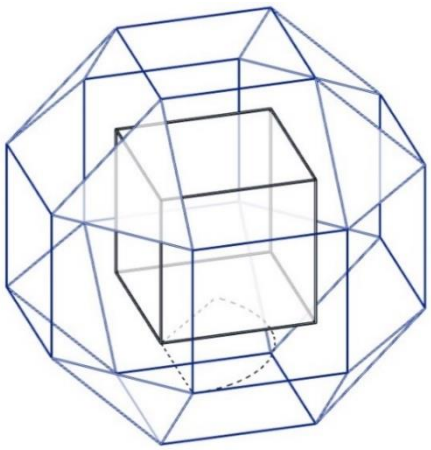


Figura 475 - Expansão das faces de um cubo até ao rombicuboctaedro.

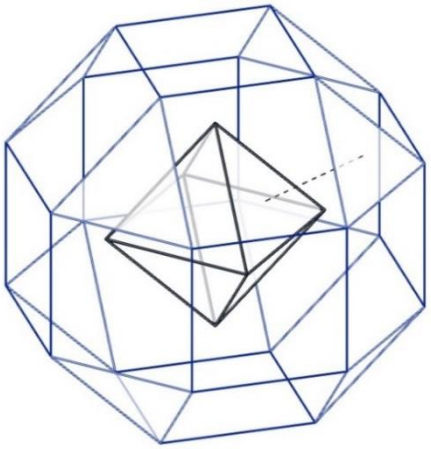


Figura 476 - Expansão das faces de um octaedro regular até ao rombicuboctaedro.

Na Figura 477, mostra-se o procedimento que adotámos para a determinação da localização dos vértices das faces expandidas de um dodecaedro regular, que é algo semelhante ao que ilustrámos na Figura 473. A localização dos vértices expandidos resulta da intersecção entre a normal às faces do dodecaedro que contêm cada vértice e os planos que são perpendiculares à aresta oposta a esse vértice e contêm os extremos da aresta. Na Figura 477, representam-se, para um dos vértices do dodecaedro, apenas uma normal a duas faces e dois destes planos. O vértice em causa será transformado numa face triangular regular em resultado desta expansão.

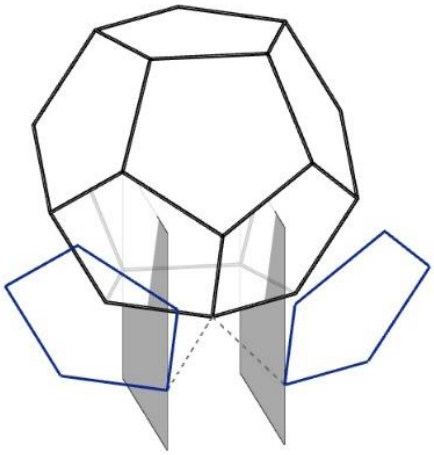


Figura 477 - Determinação geométrica da localização dos vértices que resultam da expansão das faces de um dodecaedro regular, até aos vértices de um rombicosidodecaedro de aresta igual.

Na Figura 478, observamos o resultado da expansão das faces de um dodecaedro regular para a posição em que as faces expandidas distam, das faces iniciais paralelas mais próximas, a medida da aresta multiplicada por $\sqrt{(1/8\ (5+\sqrt{5}))}$. Como resultado desta expansão, as faces pentagonais expandidas coincidem com as doze faces de um rombicosidodecaedro. As trinta arestas do dodecaedro converteram-se em faces quadradas e os vinte vértices, em faces com a configuração da figura verticial. Na Figura 479, ilustra-se ainda que, da expansão das faces de um icosaedro regular com aresta igual, resulta o mesmo arquimediano, pelo facto de o icosaedro e o dodecaedro serem duais um do outro. Neste caso, porém, as faces expandidas coincidem com as vinte faces triangulares do rombicosidodecaedro e a distância entre estas e as faces triangulares do icosaedro corresponde à medida da aresta multiplicada por $\sqrt{(3/8\ (3+\sqrt{5}))}$. As arestas e os vértices do icosaedro converteram-se, respetivamente, nas faces quadradas e nas faces pentagonais do rombicosidodecaedro. Na nossa Definição, em que os dois convexos regulares têm uma unidade de aresta, a distância entre as faces do dodecaedro e as faces (penta-

gonais) do rombicosidodecaedro é igual a 0,951056516295; a distância entre as faces do icosaedro e as faces triangulares do rombicosidodecaedro é 1,401258538444. Curiosamente, a primeira distância corresponde ao raio da circunsfera do icosaedro, enquanto que a segunda é igual ao raio da circunsfera do dodecaedro.

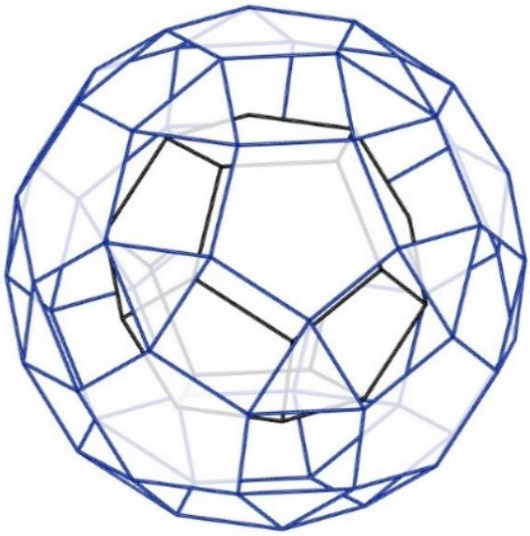


Figura 478 - Expansão das faces de um dodecaedro regular até ao rombicosidodecaedro.

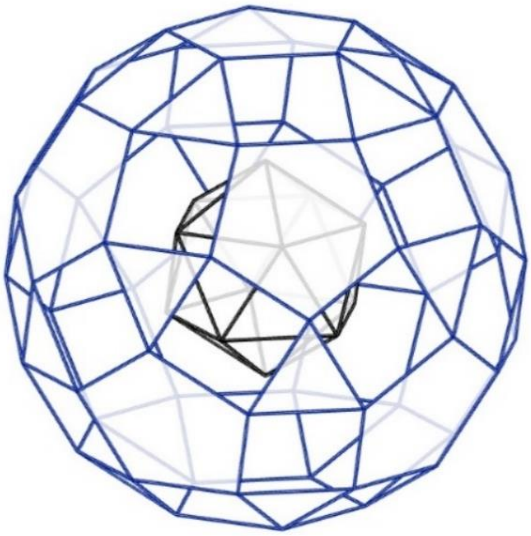


Figura 479 - Expansão das faces de um icosaedro regular até ao rombicosidodecaedro.

Stott conclui (1910, p. 7) que da expansão das faces dos poliedros regulares resultam três tipos de faces: (1) as que correspondem às faces do poliedro regular (que, no cuboctaedro, são paralelas às faces do tetraedro; e que, no rombicuboctaedro, são paralelas às faces do cubo e às faces do octaedro); (2) as faces quadradas, que são definidas a partir das duas novas posições de cada uma das arestas do poliedro regular (faces que, nas Figuras 473 a 479, foram representadas apenas pelas suas arestas); (3) e um terceiro tipo de faces, que corresponde aos vértices do poliedro regular e tem a configuração da figura verticial.

Nas Figuras 480 e 481, mostra-se que a expansão (e contração) das faces de determinados arquimedianos na direção da normal a pares de faces opostas tem por resultado outros arquimedianos, de acordo, aliás, com as conclusões de Stott. Os únicos arquimedianos que não é possível obter através da expansão e_1 ou e_2 são os quirais, na medida em que, para além da expansão das faces do cubo e do dodecaedro regular, seria ainda necessária uma torção uniforme das suas faces para que o cubo achatado e o dodecaedro achatado fossem obtidos.

Na Figura 480, mostra-se que o resultado da expansão das faces triangulares de um cuboctaedro, na direção dos eixos de rotação de ordem 3 é um cubo truncado. Por outro lado, se forem

expandidas as faces quadradas do mesmo cuboctaedro (Figura 481), o resultado obtido é um octaedro truncado. A distância entre as faces iguais do poliedro inicial e do poliedro expandido é, em cada caso, igual à medida da aresta do cuboctaedro multiplicada por $1/2\sqrt{3}$ para obter o cubo truncado e $1/2\sqrt{2}$ para o octaedro truncado (para melhor visualização da situação, omitiram-se, das Figuras 480 e 481, respetivamente, as faces octogonais e as faces hexagonais dos poliedros expandidos).

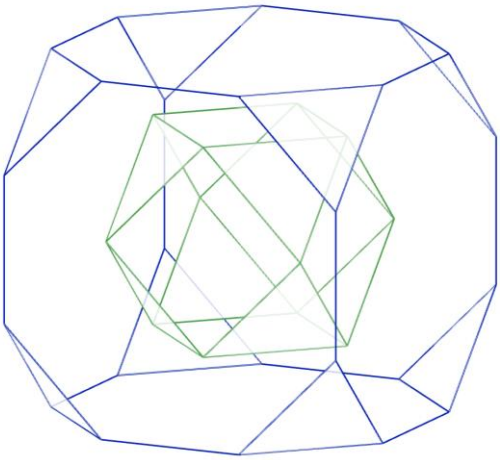


Figura 480 - Expansão das faces triangulares de um cuboctaedro até ao cubo truncado arquimediano.

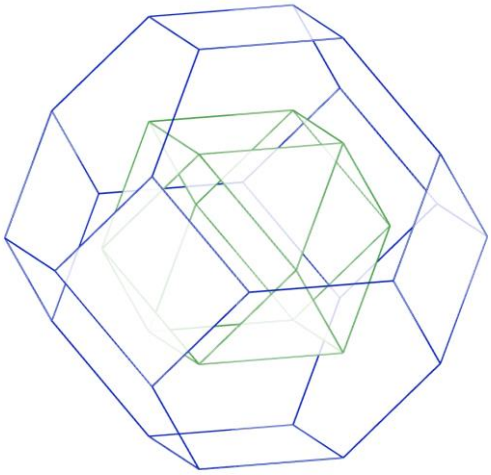


Figura 481 - Expansão das faces quadradas de um cuboctaedro até ao octaedro truncado arquimediano.

Na Figura 482, expandiram-se as faces triangulares de um icosidodecaedro até definir um dodecaedro truncado. Nesta situação, a distância entre as faces triangulares paralelas mais próximas dos poliedros inicial e expandido corresponde à medida da aresta multiplicada por $\sqrt{(3/8\ (3+\sqrt{5}))}$. Na Figura 483, ilustra-se que a expansão das faces pentagonais do mesmo icosidodecaedro tem, como resultado, o icosaedro truncado arquimediano, se a distância entre as faces pentagonais do poliedro inicial e as faces paralelas mais próximas do poliedro expandido corresponder à medida da aresta multiplicada por $\sqrt{(1/8\ (5+\sqrt{5}))}$. No primeiro caso, a distância entre as faces triangulares corresponde ao raio da circunsfera de um dodecaedro com aresta igual à do icosidodecaedro; no segundo caso, a distância entre as faces pentagonais é igual ao raio da circunsfera que circunscreve um icosaedro de aresta igual à do icosidodecaedro.

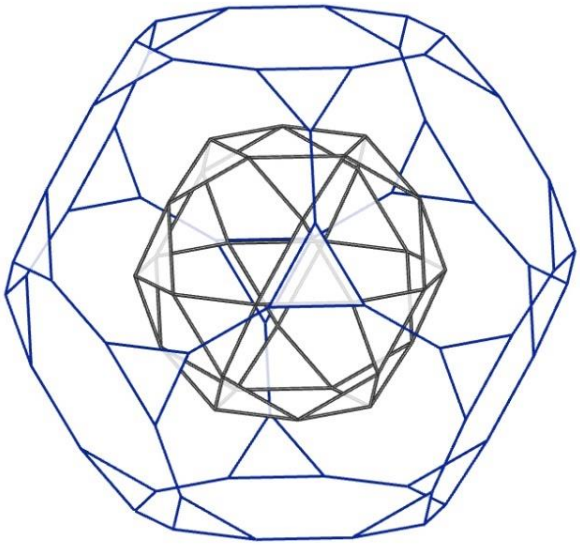


Figura 482 - Expansão das faces triangulares de um icosidodecaedro até ao dodecaedro truncado arquimediano.

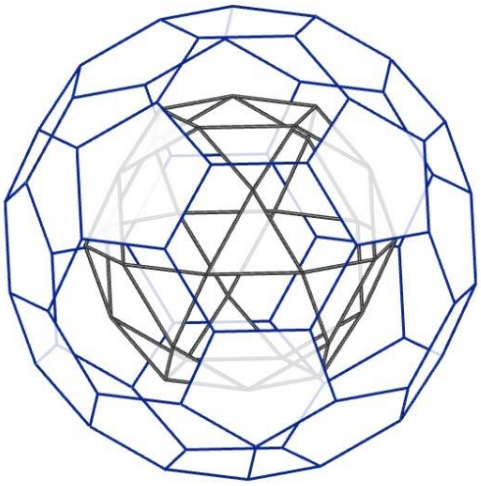
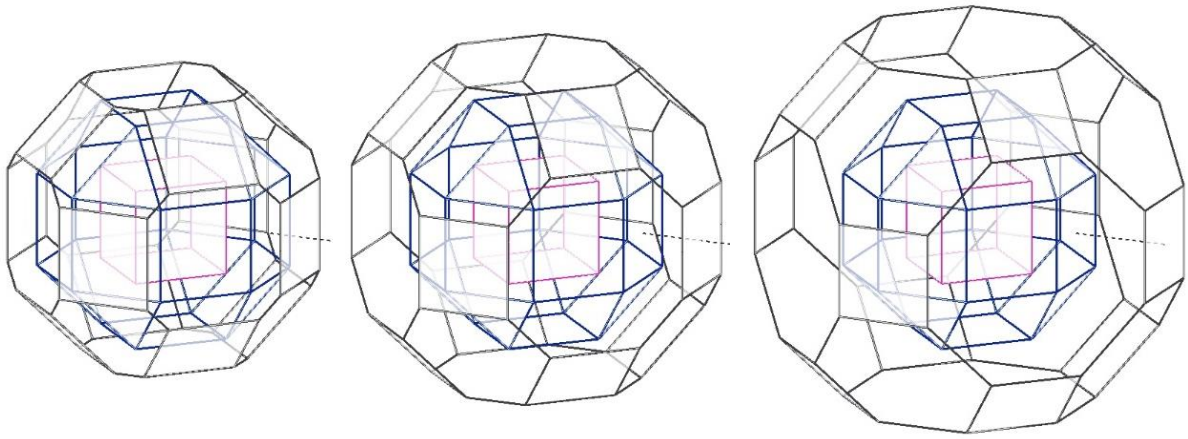


Figura 483 - Expansão das faces pentagonais de um icosidodecaedro até ao icosaedro truncado arquimediano.

Segundo Weisstein (s/d), a expansão das faces octogonais do cubo truncado e das faces hexagonais do octaedro truncado, até uma distância convenientemente determinada para cada caso, terão por resultado o cuboctaedro rombitruncado. De igual modo, a expansão das faces decagonais do dodecaedro truncado e das faces hexagonais do icosaedro truncado terão por resultado o icosidodecaedro rombitruncado.

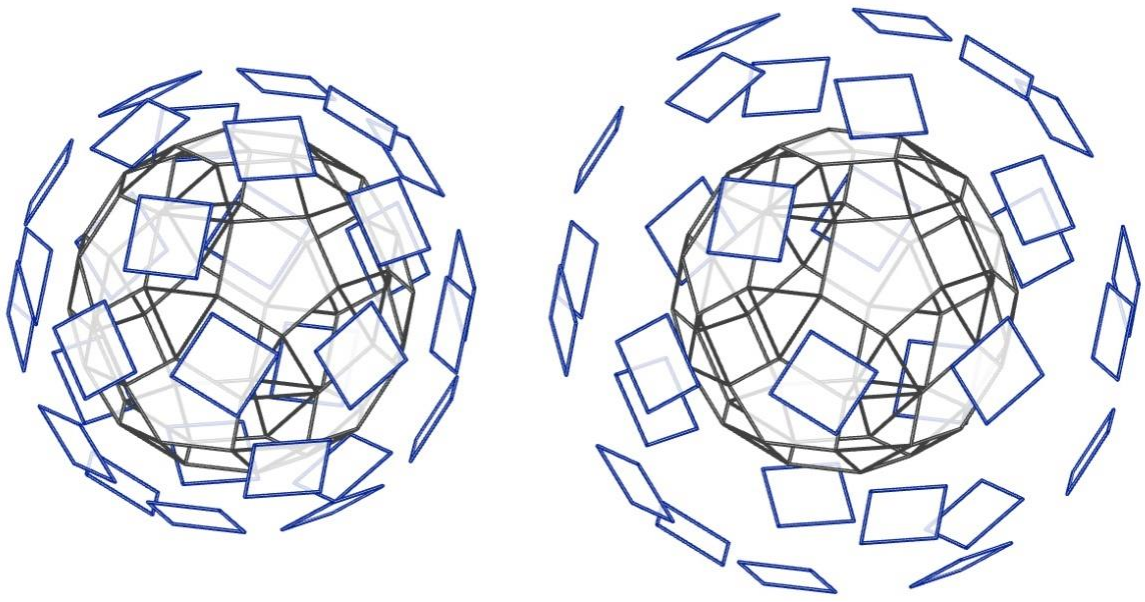
Na Figura 484, mostra-se que é também possível obter o cuboctaedro rombitruncado através da expansão das faces quadradas de um rombicuboctaedro, não sendo estas as faces perpendiculares aos eixos de simetria de rotação de ordem 4. Neste caso, a distância entre as faces quadradas originais e expandidas corresponde ao comprimento da aresta do rombicuboctaedro. De forma mais simples, podemos afirmar que um cuboctaedro rombitruncado poderá ser obtido se, a cada uma das doze faces quadradas referidas, for justaposto um cubo. Esta possibilidade ilustra a afirmação de Coxeter (1973, p. 210), segundo a qual o processo de expansão de Stott corresponde à inserção de um anel entre os polítopos inicial e expandido, enquanto que a contração corresponde à remoção de um anel. Na situação em causa, as faces triangulares do rombicuboctaedro transformam-se em faces hexagonais, enquanto que as faces quadradas paralelas às faces do cubo inicial se convertem em faces octogonais. Nas Figuras 484a a 484b, mostram-se duas fases de expansão das faces quadradas do rombicuboctaedro, designadamente, a 1/3 e a 2/3 da distância antes da fase final (Figura 484c). As faces expandidas são as que não são paralelas às faces do cubo representado na figura.



a b c

Figura 484 - Três fases da expansão das faces de um rombicuboctaedro (a azul) até ao cuboctaedro rombitruncado arquimediano. A rosa, incluem-se as arestas do cubo a partir do qual o rombicuboctaedro foi expandido.

De modo similar, a expansão das faces quadradas do rombicosidodecaedro tem como resultado o icosidodecaedro rombitruncado (Figura 485), se a distância entre as faces quadradas de um poliedro e de outro for igual à medida da aresta multiplicada pela proporção áurea, isto é, $(1 + \sqrt{5})/2$. Na fase final da expansão, as faces hexagonais e decagonais do icosidodecaedro rombitruncado correspondem, naturalmente, às faces triangulares e pentagonais regulares do rombicosidodecaedro. Na Figura 485a, o ponto que controla a animação das faces situa-se a metade da distância final, cujo resultado de ilustra na Figura 485b. Para facilitar a visualização (e simplificar a Definição), só as faces quadradas expandidas é que foram representadas.



a b

Figura 485 - Duas fases da expansão das faces quadradas de um rombicosidodecaedro (a preto) até ao icosidodecaedro rombitruncado arquimediano.

Não é possível obter nenhum poliedro uniforme por expansão das faces do cuboctaedro rombitruncado ou do icosidodecaedro rombitruncado, porque as suas figuras verticiais são polígonos irregulares cíclicos (Coxeter e outros autores, 1954, p. 404). Para além deste motivo determinante, nenhum dos restantes poliedros uniformes com faces octogonais e/ou decagonais convexas[51] poderia derivar das faces destes dois rombitruncados.

Como conclusão, mostramos um exemplo de contração de poliedros.

Na Figura 486, um octaedro regular foi obtido por contração das faces triangulares de um tetraedro truncado. A distância entre as faces iguais dos dois poliedros corresponde ao comprimento da aresta, multiplicada por $\sqrt{(3/8)}$. A translação das faces ocorreu, necessariamente, na razão e sentido inversos aos da expansão através da qual obteríamos o tetraedro truncado por expansão das faces do octaedro. Na Figura 487, ilustra-se o resultado da expansão das faces hexagonais de um tetraedro truncado, sendo a distância entre as faces igual ao comprimento da aresta multiplicado por $\sqrt{(3/8)}$. Pelo facto de o resultado ser um octaedro truncado, podemos concluir que, por contração das faces hexagonais deste último, com igual distância, mas em sentido inverso (isto é, movendo as faces para o interior do poliedro), obteríamos o mesmo tetraedro truncado da Figura 486.

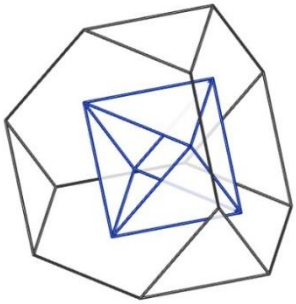


Figura 486 - Por contração das faces triangulares de um tetraedro truncado, obtemos um octaedro regular.

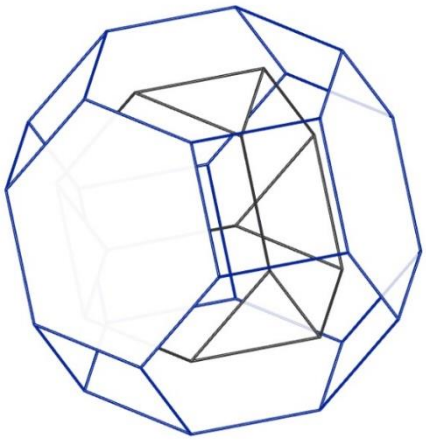


Figura 487 - Por contração das faces hexagonais de um octaedro truncado, obtemos um tetraedro truncado.

[51] Só existem três com faces octogonais: o pequeno cubicuboctaedro, o cuboctaedro cuboctatruncado e o pequeno rombihexaedro (modelos W69, W79 e W86, respetivamente, em Wenninger, 1975); e nove com faces decagonais: o pequeno dodecicosidodecaedro, o pequeno rombidodecaedro, o grande dodecaedro truncado, o pequeno dodecicosidodecaedro ditrigonal, o icosidodecaedro icosidodecatruncado, o pequeno icosihemidodecaedro (ilustrado na Figura 74), o pequeno dodecicosidodecaedro, o pequeno dodecahemidodecaedro (ilustrado na Figura 75), e o dodecaedro quasitruncado (modelos W72, W74, W75, W82, W84, W89, W90, W91 e W98, respetivamente, em Wenninger, 1975).

A Tabela 5 apresenta um sumário das operações realizadas em cada um dos poliedros convexos uniformes das Figuras 473 a 487 e as distâncias determinadas para cada caso. A distância indicada entre as faces mais próximas dos poliedros inicial P_1, e expandido P_2, é definida segundo a direção da normal às suas faces paralelas.

As distâncias referidas na Tabela 5, recorda-se, adaptam as da página web da *Wolfram MathWorld* intitulada "Expansion" (Weisstein, s/d), mas reportam-se apenas aos casos que analisamos e considerámos suficientes para mostrar, de forma dinâmica, os conceitos de expansão e contração de polítopos de Alicia Boole Stott.

Tabela 5 - Expansão das faces dos poliedros convexos uniformes (aresta com 1 de comprimento).

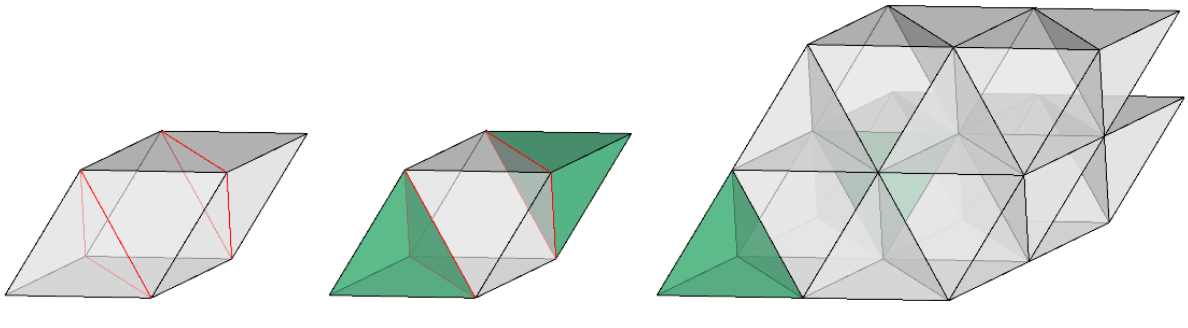
P_1	Faces a expandir	Distância entre as faces paralelas	P_2	
Tetraedro	$\{3\}$	$\sqrt{(3/8)}$	Cuboctaedro	Figura 473
Cubo	$\{4\}$	$1/2\sqrt{2}$	Rombicuboctaedro	Figuras 474, 475
Octaedro	$\{3\}$	$1/2\sqrt{3}$	Rombicuboctaedro	Figura 476
Dodecaedro	$\{5\}$	$\sqrt{(1/8\ (5+\sqrt{5}))}$	Rombicosidodecaedro	Figura 478
Icosaedro	$\{3\}$	$\sqrt{(3/8\ (3+\sqrt{5}))}$	Rombicosidodecaedro	Figura 479
Cuboctaedro	$\{3\}$	$1/2\sqrt{3}$	Cubo Truncado	Figura 480
	$\{4\}$	$1/2\sqrt{2}$	Octaedro Truncado	Figura 481
Icosidodecaedro	$\{3\}$	$\sqrt{(3/8\ (3+\sqrt{5}))}$	Dodecaedro Truncado	Figura 482
	$\{5\}$	$\sqrt{(1/8\ (5+\sqrt{5}))}$	Icosaedro Truncado	Figura 483
Rombicuboctaedro	$\{4\}$	1	Cuboctaedro Rombitruncado	Figura 484
Rombicosidodecaedro	$\{4\}$	$(1+\sqrt{5})/2$	Icosidodecaedro Rombitruncado	Figura 485
Tetraedro truncado	$\{3\}$	$-\sqrt{(3/8)}$	Octaedro	Figura 486
	$\{6\}$	$\sqrt{(3/8)}$	Octaedro Truncado	Figura 487

3.8. Modelação de tesselações sólidas

As aplicações didáticas seguintes pretendem ilustrar alguns exemplos de tesselações definidas a partir da partição de paraleloedros.

Modelação de uma tesselação definida por tetraedros e octaedros regulares

Procedimento: Partimos de um romboedro, que é um poliedro definido por seis faces rômbicas congruentes. Dado que qualquer romboedro (como, aliás, qualquer paralelepípedo) preenche o espaço, quaisquer poliedros que resultem da sua partição preencherão também o espaço. Com o comando *Split*, seccionamos o romboedro (Figura 488a), de forma a obter três poliedros que, neste caso, são regulares: dois tetraedros e um octaedro (Figura 488b). O romboedro é, naturalmente, o *Object to split* e os triângulos assinalados a vermelho nas Figuras 488a e 488b, os *Cutting object*s. Por translação do romboedro envolvente dos três poliedros regulares, obtemos uma tesselação sólida (Figura 488c). Ainda que os poliedros resultantes da secção deste (ou de outro) romboedro fossem distintos, seria sempre possível preencher o espaço deste modo, embora já não o fizéssemos com poliedros regulares. Neste caso, os tetraedros e octaedro resultantes da partição são regulares, porque o romboedro é um trapezoedro trigonal, com faces rômbicas em que os ângulos internos maiores medem 60º.



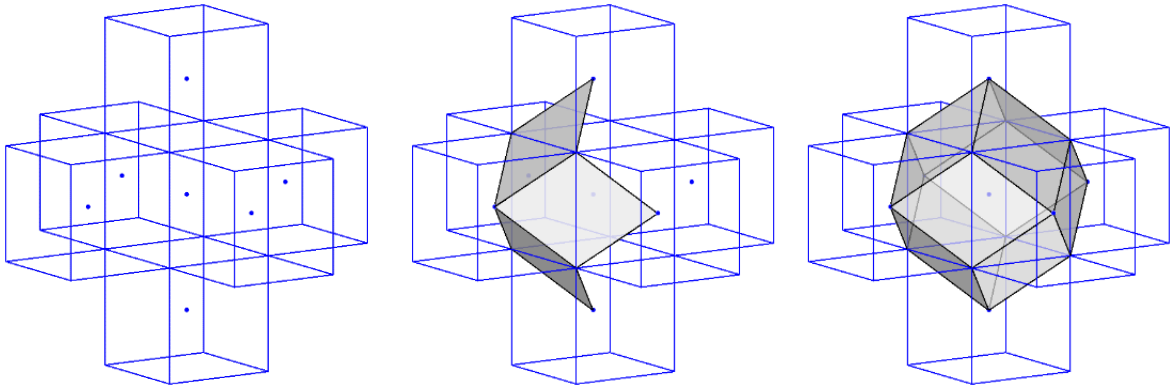
a b c

Figura 488 - Um romboedro é seccionado de modo a definir dois tetraedros e um octaedro.
Por translação do romboedro definido por esta tríade de poliedros, obtemos uma tesselação sólida (não monoédrica).

Modelação do dodecaedro rômbico

Procedimento: Definimos um dodecaedro rômbico a partir de sete cubos empilhados (Figura 489), de acordo com a construção sugerida por Coxeter (1973, p. 26) e ilustrada por Wells (1981, p. 70). Seis vértices do dodecaedro rômbico coincidem com os centros dos cubos em redor do cubo central, conforme se mostra na Figura 489a; os restantes vértices, coincidem com

os vértices do cubo central. Depois de determinadas três faces do docdecaedro rômbico (Figura 489b), as restantes são determinadas com recurso à simetria de rotação e ao comando *Array Polar* (Figura 489c).



a b c

Figura 489 - Construção do dodecaedro rômbico a partir de sete cubos justapostos.

Modelação de uma tesselação definida por disfenóides tetragonais

Procedimento: Iremos seccionar o dodecaedro rômbico em vinte e quatro disfenóides tetragonais ou tetraedros isósceles, mencionados por Coxeter (1973, p. 71), começando por definir as diagonais internas do dodecaedro (a vermelho na Figura 490a) e as diagonais menores das suas faces (a azul na Figura 490b).

Na Figura 490c ilustramos um dos disfenóides: uma das suas arestas corresponde à diagonal menor de uma face do dodecaedro; a aresta que lhe é oposta, ao segmento de reta que une um dos vértices do dodecaedro ao centro (neste caso, metade da sua diagonal interna vertical).

Entre as Figuras 490d a 490h (com recurso aos comandos *Surface from 3 or 4 corner points*, *Join*, *Array Polar*, *Orient 3Pt*, etc.), foram modelados os restantes disfenóides, mostrando-se os vinte e quatro na Figura 490i. Justapondo cópias deste núcleo obtemos a tesselação monoédrica da Figura 490j.

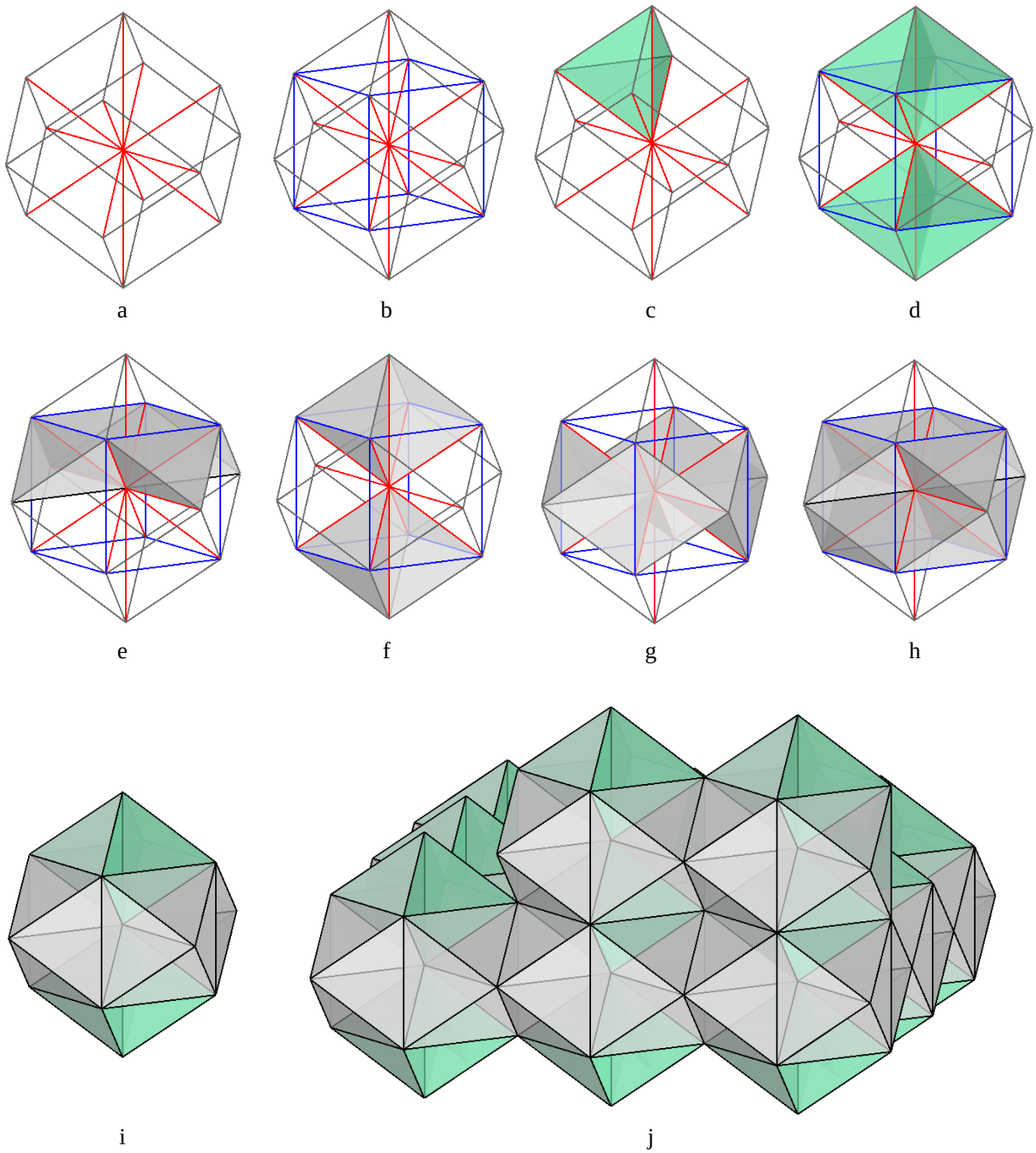
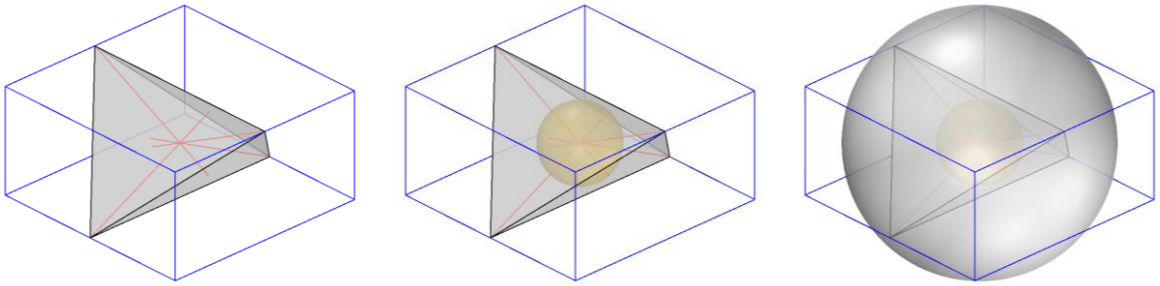


Figura 490 - A partição do dodecaedro rômbico em vinte e quatro disfenoides tetragonais permite definir uma tesselação monoédrica.

Na Figura 491, mostra-se que o tetraedro em causa é isósceles, não apenas pelo facto de estar circunscrito num cuboide (Andreescu e Gelca, 2009, pp. 30-31), mas também porque os centros (Figura 491a) da sua insfera (Figura 491b) e circunsfera (Figura 491c) coincidem. Para além disso, a soma da amplitude dos ângulos menores das faces que se intersectam em cada vértice perfaz 180º. Neste disfenóide, esses ângulos correspondem a 54,7356º, 54,7356º e 70,5288º. Estas condições são referidas por Altshiller-Court (1979), citado por Weisstein (s/d).

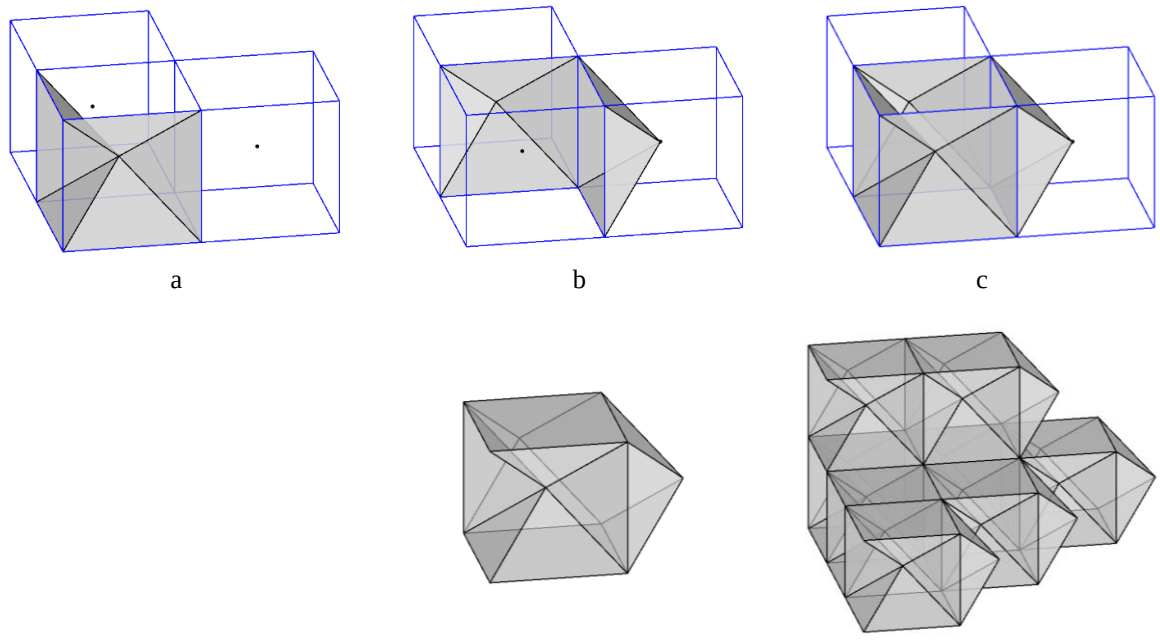


a b c

Figura 491 - O disfenóide obtido na construção da Figura 490 é tetragonal,
porque está circunscrito num cuboide e o centro das suas insfera e circunsfera coincidem.

Modelação de uma tesselação definida por um poliedro côncavo obtido a partir do cubo

Procedimento: Partimos de três cubos justapostos e dos seus centros, para obter um poliedro côncavo definido por seis faces triangulares isósceles com o centro de um [primeiro] cubo em comum (Figura 492a) e duas superficies piramidais, com vértice nos centros de um segundo e terceiro cubos (Figuras 492b e 492c). O poliedro resultante (Figura 492d) não é, em si, importante, senão para explicar que é capaz de definr a tesselação monoédrica da Figura 492e, porque foi definido a partir de uma tesselação de cubos iguais. Este poliedro é uma adaptação de um dos *space-fillers* mencionados por Goldberg (1979).



a b c

d e

Figura 492 - Um poliedro côncavo definido a partir de uma tesselação cúbica,
que preenche o espaço de forma monoédrica.

Modelação da tesselação definida pela primeira estrelação do dodecaedro rômbico

Procedimento: Partimos de um cuboctaedro e dos segmentos de reta que unem os centros das faces quadradas (Figura 493a). A partir dos vértices do cuboctaedro, definem-se três bipirâmides de base quadrada, com vértices nos extremos dos segmentos de reta previamente determinados (Figuras 493b, 493c e 493d). Com o comando *Boolean Union*, unem-se as três bipirâmides num só poliedro côncavo (Figura 493e e 493f) que, como vimos em subcapítulo anterior, corresponde à primeira estrelação do dodecaedro rômbico. Justapondo, convenientemente, cópias deste poliedro, definimos uma tesselação monoédrica.

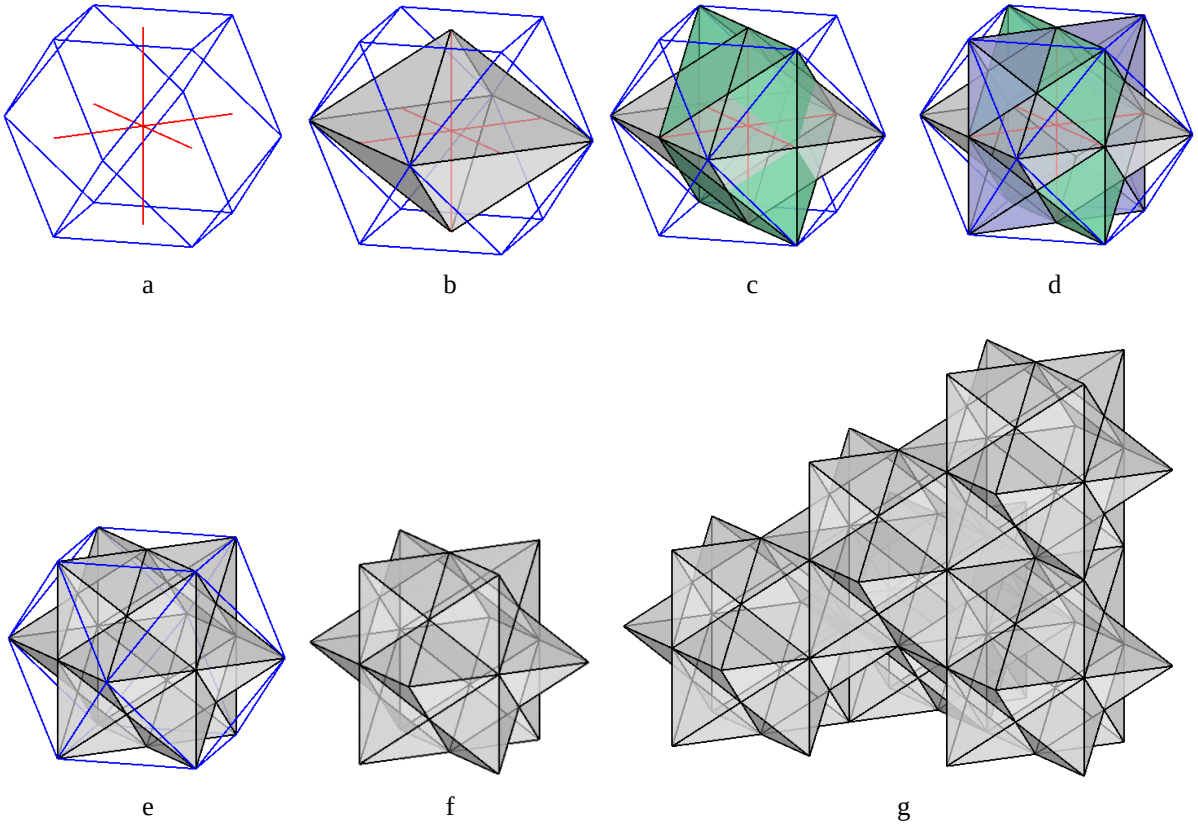


Figura 493 - A primeira estrelação do dodecaedro rômbico por translação das suas réplicas.

Modelação da tesselação definida por dodecaedros pentagonais e endododecaedros

Procedimento: Seguindo a construção sugerida em subcapítulo anterior, começamos por modelar um dodecaedro no qual inscrevemos um cubo (Figura 494a). Fazemos várias cópias do cubo com o comando *Copy*, de modo a definir uma tesselação cúbica de 3 x 3 x 3 cubos (Figura 494b). Copiamos o dodecaedro, de modo a que seis se situem em redor do cubo que está no centro da tesselação (Figuras 494c e 494d). Guardamos uma cópia dos dodecaedros numa *layer* diferente e escondemos a tesselação cúbica, com a exceção do cubo central (Figura 494e). Com

o comando *Boolean Difference*, subtraímos os dodecaedros do cubo, selecionando este último como *Surface or polysurface to subtract from* e os dodecaedros como *Surface or polysurface to subtract with* (Figuras 494f, 494g e 494h). A Figura 494h ilustra o poliedro resultante, caracterizado por Grünbaum e Shephard (1988, p. 207) como um poliedro côncavo isoedral, e designado por Conway e outros autores (2008, p. 328) como endododecaedro. A Figura 494j mostra-nos de que forma cinco dodecaedros encaixam nas concavidades deste endododecaedro (optou-se por ocultar o sexto dodecaedro, para melhor visualização). Fazendo cópias dos poliedros representados, multiplicamos os vértices da tesselação (Figuras 494k).

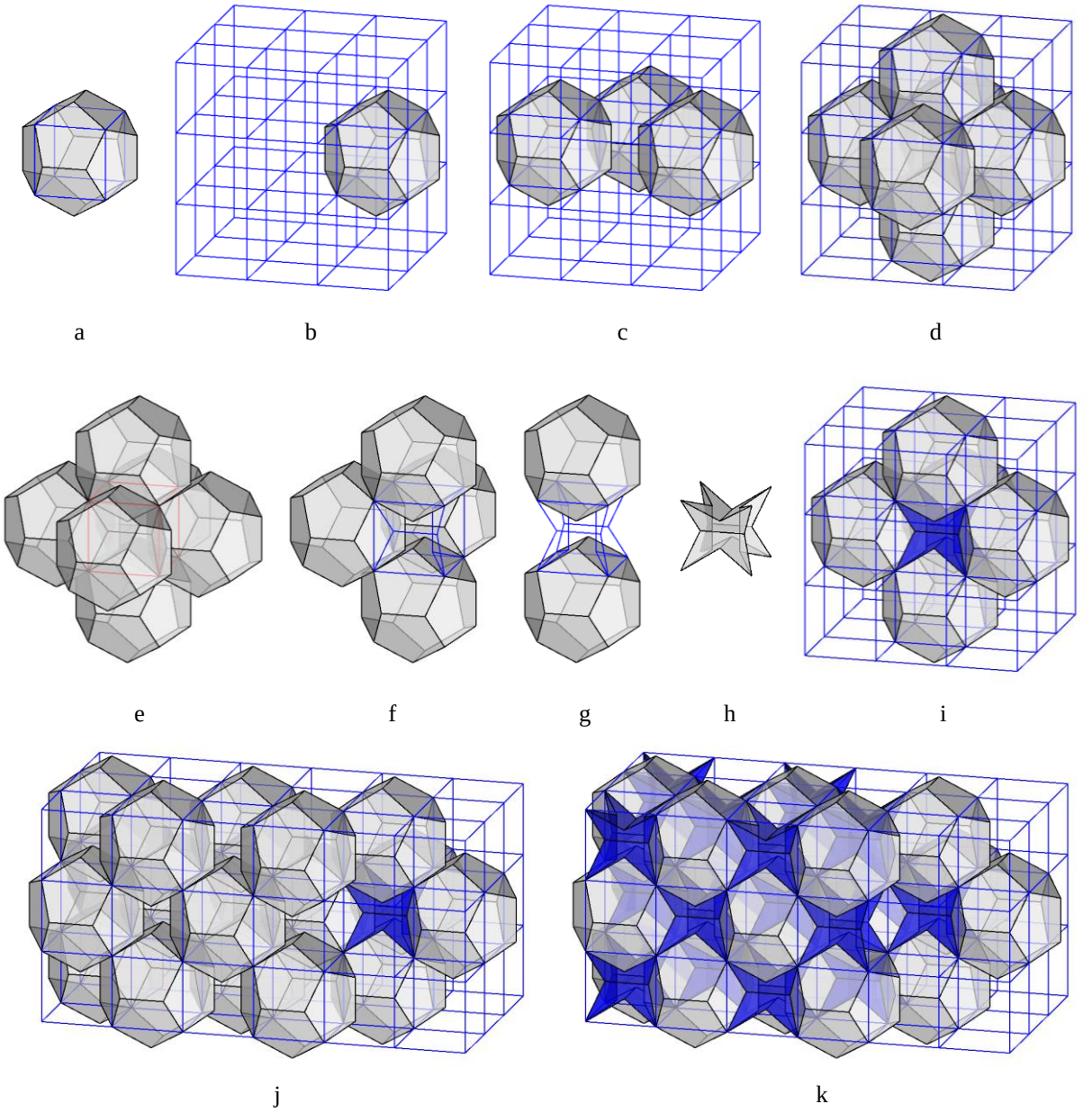


Figura 494 - Dodecaedros regulares e endododecaedros dispostos alternadamente preenchem o espaço.

Modelação da tesselação definida por tetraedros truncados triakis:

Procedimento: Até agora, vimos tesselações em que os poliedros não têm de mudar de orientação para preencher o espaço. Tal não acontece com o poliedro convexo seguinte, o tetraedro truncado triakis com dezasseis faces, que foi descrito por Föppl em 1916 e redescoberto várias vezes desde então (Grünbaum e Shephard, 1980, p. 960). Para o modelar, começamos com um tetraedro regular e dividimos as arestas em três partes iguais com o comando *Divide* (Figura 495a). Desenhamos três triângulos definidos pelos pontos mais próximos de cada vértice (Figura 495b). Com o comando *Split*, e selecionando o tetraedro como *Object to split* e um dos triângulos como *Cutting object*, seccionamos um pequeno tetraedro regular do tetraedro maior.

Na Figura 495c, afastamos o tetraedro menor do que sobrou do maior, apenas para mostrar a operação efetuada. Com o comando *Trim*, selecionamos os restantes triângulos como *Cutting objects* e as porções do tetraedro maior que se situam perto dos vértices como *Object to trim* (Figura 495d).

Desta operação, resultam as faces hexagonais regulares de um tetraedro truncado (os triângulos seriam as faces triangulares). Fazemos um *Cap* ao tetraedro menor, para o transformar numa superfície fechada e podermos determinar o seu centro, com o comando *Volume centroid*.

Na Figura 495e, colocamos o tetraedro menor na sua posição inicial e escondemos as faces hexagonais, para melhor compreensão. Com o comando *Orient 3Pt* e considerando o centroide determinado como *Object to orient* e os vértices da face do tetraedro menor (que não está contida no tetraedro maior) como *reference points*, transpomos o centroide para os restantes triângulos (Figura 495f).

Com o comando *Extrude curve to point* (sem a opção *Solid*), definimos pequenas superfícies piramidais tomando como *Curve to extrude* cada um dos triângulos e o centroide mais próximo por vértice (Figura 495g). Estas pequenas pirâmides são as *triakis* que dão nome ao poliedro (*n*-kis significa que foram adicionadas pirâmides de base *n* às faces de um poliedro). Podemos agora uni-las às faces hexagonais com o comando *Join*, para obtermos uma superfície fechada (Figuras 495h e 495i).

Transladando cópias do tetraedro truncado triakis, definimos parte da tesselação (Figura 495j) e, com *Orient 3Pt*, situamos mais cópias na posição adequada. Para melhor compreensão da situação, diferenciaram-se, a cores diferentes, as camadas de tetraedro truncado triakis com orientações distintas (Figura 495k).

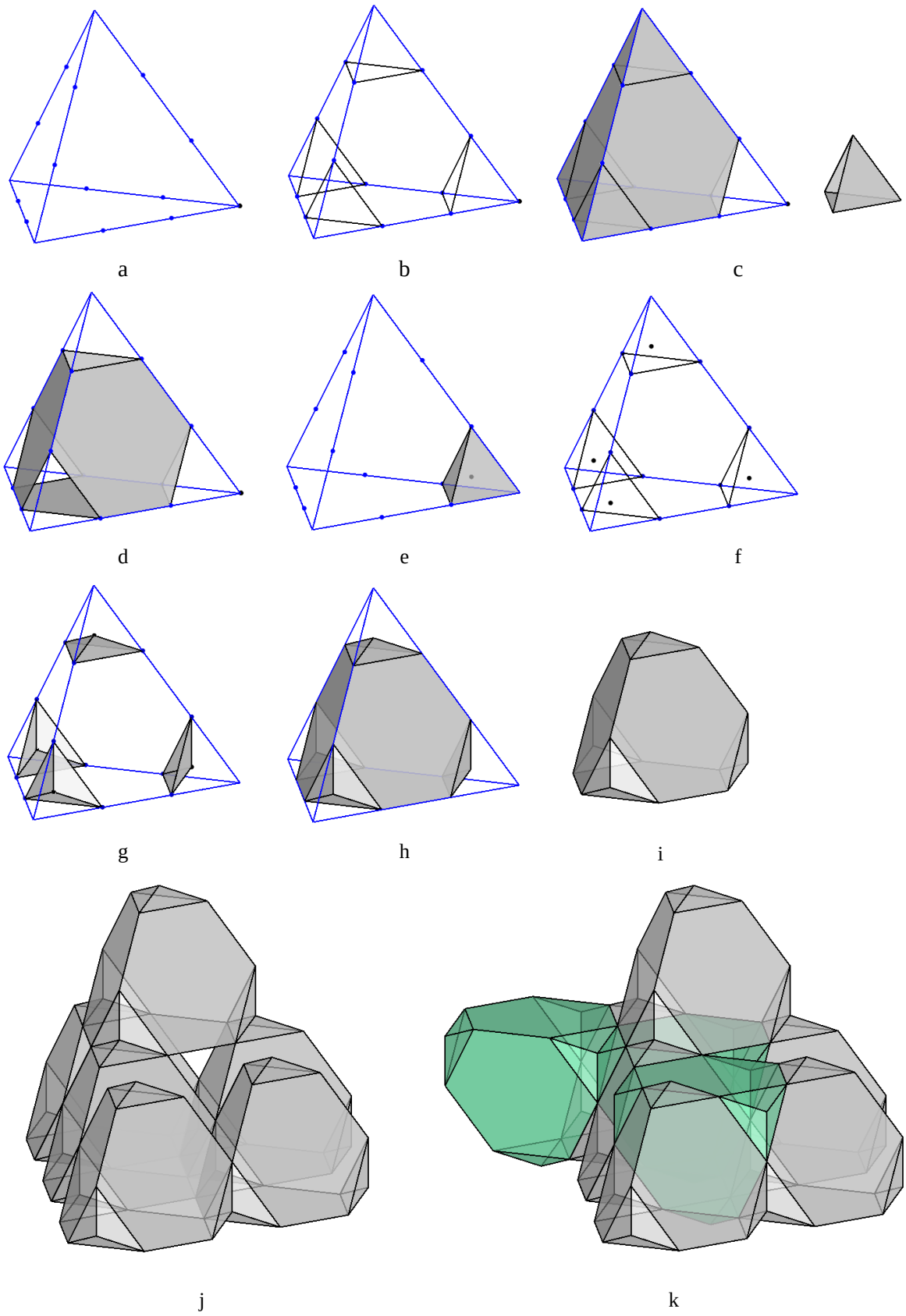
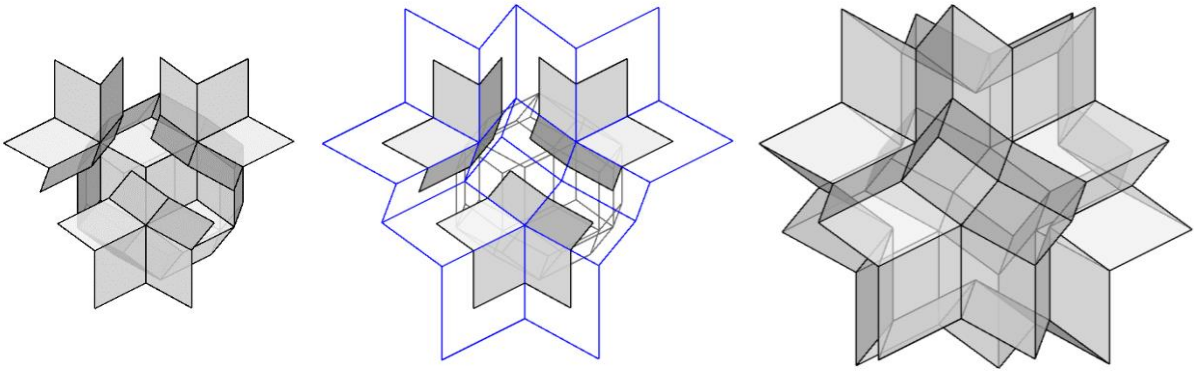


Figura 495 - O tetraedro truncado triakis preenche o espaço, embora tenha de mudar de orientação para o conseguir.

Modelação do hexacontaedro rômbico

Procedimento: O dodecaedro rômbico, como vimos, preenche o espaço, porque é um paralelo-edro. Triacontaedros rômbicos, por seu lado, não preenchem o espaço, mas poderão fazê-lo de forma limitada, se justapostos ao hexacontaedro rômbico, um poliedro côncavo descrito por Unkelbach em 1940 (Grünbaum, 2010, p. 11).

As suas faces correspondem a uma parte das faces do grande triacontaedro estrelado e não se auto-intersectam, apesar de resultarem da estrelação do triacontaedro rômbico. Pode ser obtido justapondo vinte romboedros agudos iguais ou de acordo com a construção de Kabai (2011, p. 389) que se ilustra a seguir. Na Figura 496a, três faces do triacontaedro rômbico são transladadas para três dos seus vértices. As faces transladadas são então prolongadas, até se intersectarem em arestas comuns (Figura 496b). As faces são transpostas para os restantes vértices do triacontaedro rômbico por simetria de rotação (Figura 496c).

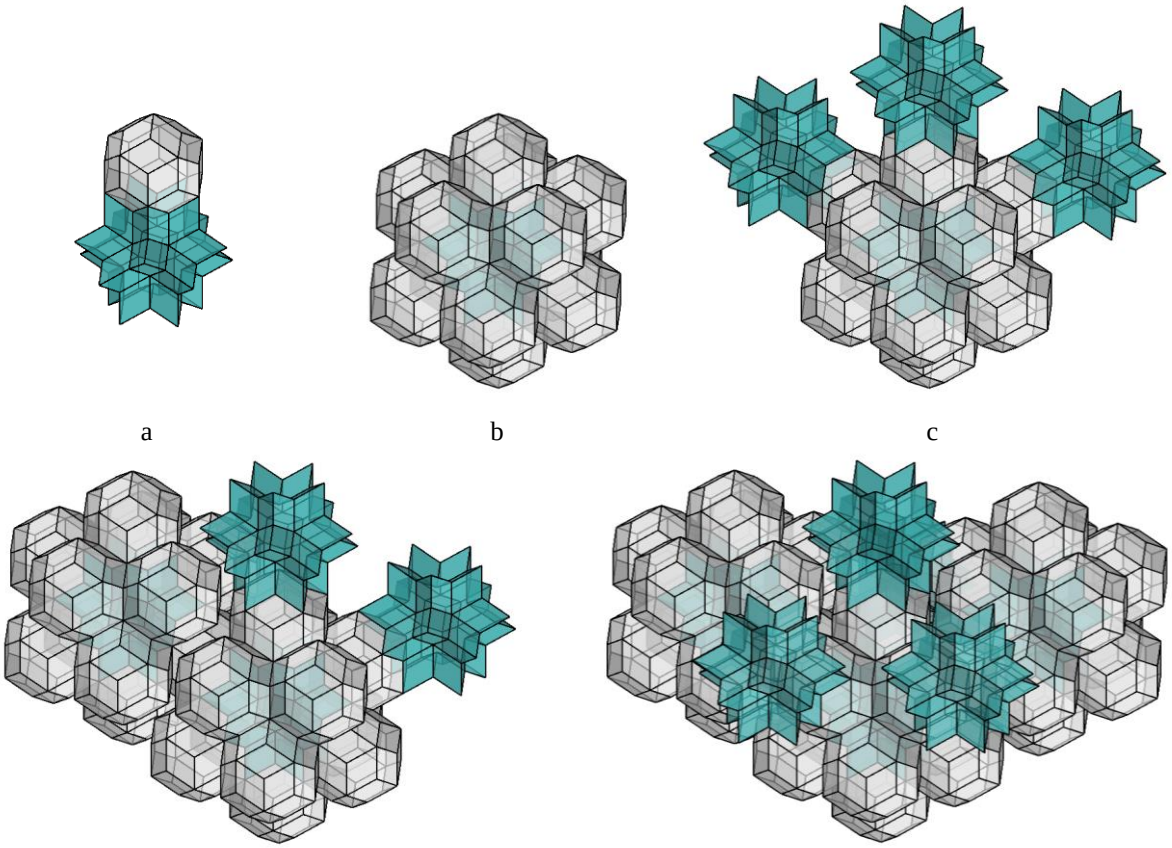


a b c

Figura 496 - Construção do hexacontaedro rômbico a partir do triacontaedro rômbico.

Preenchimento do espaço com hexacontaedros rômbicos e triacontaedros rômbicos

Embora doze triacontaedros rômbicos encaixem perfeitamente em cada uma das concavidades do hexacontaedro rômbico (Figuras 497a e 497b), não é possível preencher o espaço para além deste núcleo, porque os triacontaedros que seriam justapostos aos hexacontaedros subsequentes intersectar-se-iam (Figuras 497c, 497d e 497e).



a b c

d e

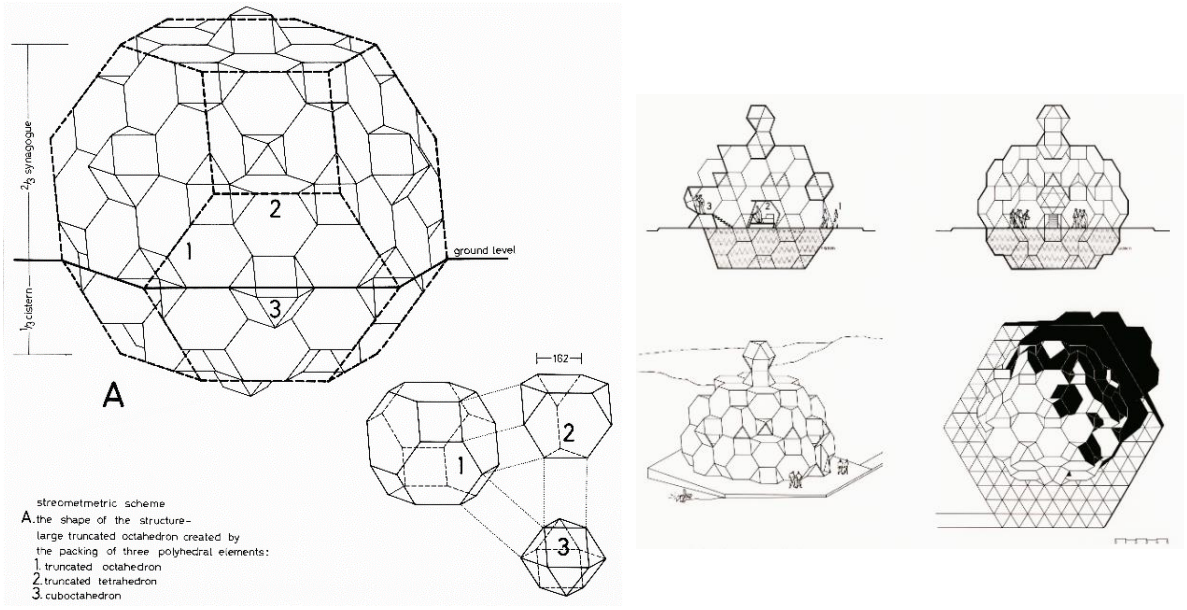
Figura 497 - É possível justapor doze triacontaedros rômbicos a um hexacontaedro rômbico, mas os dois poliedros não definem uma tesselação sólida.

3.9. Experiência letiva: Tesselações arquitetónicas como módulos construtivos

Os poliedros e as tesselações sólidas como objeto de estudo depreendem uma série de conhecimentos prévios sobre diversos conceitos de Geometria, sem os quais não é possível compreender inteiramente todo o seu potencial. São por esta razão, reconhecidos como campos de investigação nos quais culmina todo um processo de trabalho preparatório e cuja exploração resulta de um corpo teórico com especificidades e saberes muito próprios. Em contexto educativo, podem afirmar-se como temáticas de grande interesse, pelo enorme potencial que a compreensão de objetos do espaço tridimensional e sua interação representa para o desenvolvimento da inteligência espacial dos alunos e, particularmente, para cursos superiores de Arquitetura, ou Engenharia (e de certas vertentes das Artes Visuais ou do *Design*) que, por definição, trabalham as questões do espaço.

No domínio da formação em Arquitetura, os poliedros e as tesselações são temáticas de grande interesse, não só pelo muito que podem contribuir para o enriquecimento da literacia geométrica dos estudantes e da sua capacidade de operar com a realidade tridimensional, mas pela diversidade de soluções que poderão acrescentar ao reportório das formas construídas ou prototipadas (para além, claro, dos cuboides, historicamente omnipresentes na Arquitetura).

As tesselações uniformes poderão constituir-se como interessantes propostas de trabalho (Viana 2018a), pelas suas características de resistência intrínseca como suporte estrutural modular, e por depreenderem uma abordagem histórica das estruturas espaciais com base na tesselação arquitetónica de tetraedros e octaedros, que Alexander Bell introduziu, e Buckminster Fuller apelidou como “the octahedron-tetrahedron complex, the octet-truss, the isotropic vector matrix.” (1975, p. 135) e patenteou em 1961. A propósito da necessária abordagem histórica, e como introdução às potencialidades que a exploração das tesselações sólidas poderá trazer para o *Design* arquitetural, terá importância mostrar as possibilidades que, neste contexto, foram exploradas por David Emmerich (1970), François Gabriel (1997), Peter Jon Pearce (Pearce e Pearce, 2015), Zvi Hecker (Figuras 498a e 498b) e Giancarlo Mazzanti (Figura 499), entre outros.



a



b

Figura 498 - Sinagoga de Zvi Hecker no deserto de Negev, Israel (1967-1969).
com Alfred Neumann. (foto da autoria de Henry Hutter, cortesia de Zvi Heckers Office).



Figura 499 - Giancarlo Mazzanti's Forest of Hope. Cazucá, Colômbia (2011)
(http://www.elequipomazzanti.com/en/proyecto/cazuca-2/, cortesia de Equipo Mazzanti).

Não obstante o seu enorme potencial, os poliedros e as tesselações são temas cuja exploração didática se revela algo inexequível pelos métodos mais tradicionais de ensino. É, aliás, no contexto relacionado com o ensino da Arquitetura em Portugal, uma temática relativamente inexplorada. Justificações para tal poderão residir no facto de se tratar de um conteúdo de índole matemática que exige um conjunto de conhecimentos com os quais os estudantes nem sempre estão familiarizados; ou na dificuldade em explorar determinados poliedros e as tesselações, de forma sistemática, com recurso a representações gráficas e/ou modelos tridimensionais.

Sobre este especto, considerem-se por exemplo as complexidades inerentes ao ato de realizar desenhos (desejavelmente, em representação axonométrica) de cada um dos poliedros em causa, e os traçados necessários para a sua representação rigorosa, interpretação e reprodução, particularmente em situações que não decorressem de mera translação. Se a opção fosse estudar as tesselações com recurso a modelos físicos, seria necessário dispor de muitos exemplares de poliedros (por ventura de cores diferentes e, idealmente, como estruturas definidas apenas por arestas e vértices, como as que Leonardo de Vinci desenhou para Luca Pacioli), para ilustrar como podem ser justapostos em torno de um vértice sem espaços intermédios e por translação, rotação e/ou reflexão, preencher o espaço. A impressão 3D poderia dar uma resposta bastante satisfatória a esta alternativa, mas o processo poder-se-ia tornar difícil, se se pretendesse demostrar a uniformidade dos vértices ao longo da tesselação ou os reticulados definidos pelos centroides dos poliedros. Em suma, esta temática pode ser explorada em contexto educativo pelos métodos tradicionais, mas não sem grandes constrangimentos e limitações. Se a intenção

for a de optar pela exploração de *software* de modelação tridimensional em contexto educativo, porém, as possibilidades são imensas, tanto para professores, como para estudantes.

As tesselações sólidas como conteúdo programático não são abordadas na unidade curricular (UC) "Geometria e Arquitetura" do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto. Não obstante, os Professores desta UC, que diversificam as propostas de trabalho a apresentar aos estudantes, introduzindo, ano após ano, temas diferentes (como, por exemplo, as superfícies, as abóbadas ou as anamorfoses), compreendem o enorme potencial deste tema. Foi neste contexto que, durante o ano letivo de 2016/2017, acolheram, com franca recetividade, uma experiência didática sobre as tesselações sólidas (Xavier, Sousa, Castro e Viana, 2019a). O objetivo era o de expandir os conhecimentos que os estudantes possuem sobre geometria e tirar partido das possibilidades oferecidas pelas ferramentas informáticas atuais, levando a cabo uma série de trabalhos práticos de índole colaborativa, realizados pelos estudantes do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura. Esta experiência letiva foi concretizada, através de uma primeira parte de âmbito teórico, em três aulas da UC, a seis turmas (separadas em dois grupos) com um total de 176 estudantes, nos dias 21 e 24 de Março, 28 e 31 de Março, 4 e 7 de Abril de 2017.

Todos os conteúdos foram explorados com recurso a apresentações em *PowerPoint* (Apêndice A, Apêndice B e Apêndice C) e acompanhadas pela modelação virtual *in situ* de determinados poliedros e tesselações, que os estudantes puderam modelar, a partir dos seus computadores pessoais, em simultâneo com a autora. As três aulas foram lecionadas no seguimento de uma primeira, em que o Professor Regente da UC introduziu os estudantes na exploração do *software Rhinoceros* para modelar um tetraedro regular e um cubo. Estas quatro aulas corresponderam, para a grande maioria dos estudantes, ao seu primeiro contacto com *software* de modelação tridimensional. Algumas categorias de poliedros foram apresentadas através de modelos tridimensionais físicos (Figura 500) construídos com os materiais didáticos *Polydron Frameworks*, *4D Frame* e *Geomag*, que os estudantes puderam manipular livremente, para melhor compreender as suas propriedades.

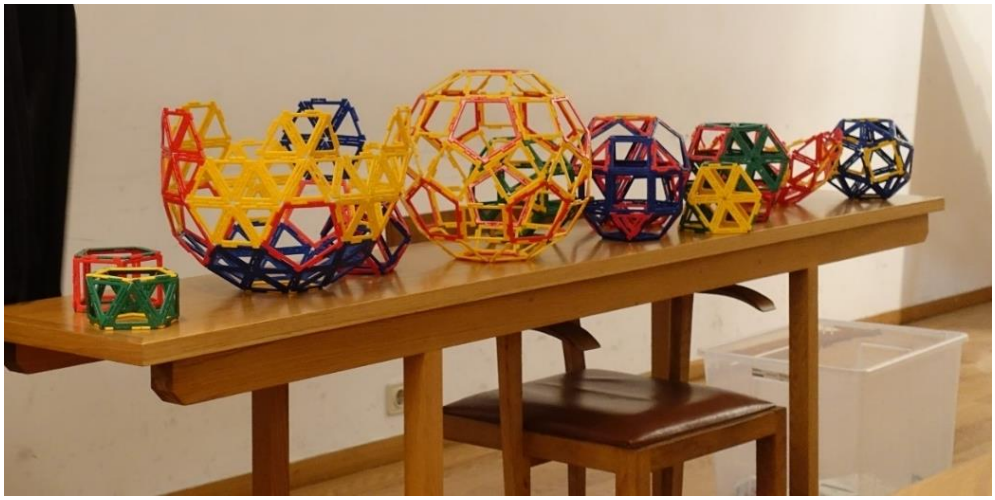
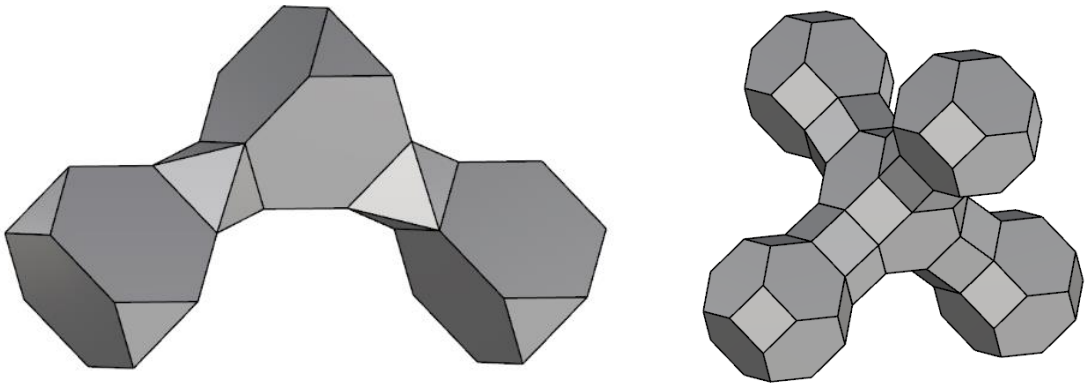


Figura 500 - Poliedros construídos com o *Polydron Frameworks* e explorados na Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da FAUP (2016/2017).

Em complemento da vertente teórica destas quatro aulas, os estudantes continuaram a explorar o *software* para modelar outros poliedros durante a componente teórico-prática da UC. A intenção era não apenas que se tornassem progressivamente mais familiarizados com a *interface*, mas também que aprendessem a modelar mais poliedros, recorrendo a outras operações de edição e transformação geométrica possibilitadas pelas ferramentas do *software*. Um dos exercícios propostos apresenta-se no Apêndice D.

Na última aula teórica, ocorrida a 4 e 7 de Abril de 2017, foi proposto um desafio distinto a cada uma das turmas (Apêndice E) que consistiu na modelação de uma composição resultante da justaposição de alguns dos poliedros abordados (Figuras 501a e 501b). Oitenta e sete estudantes distribuídos por grupos de trabalho concretizaram este desafio, submetendo-o para avaliação através da plataforma *moodle*. A grande maioria das respostas submetidas obteve as classificações mais elevadas. Para além deste desafio, e como trabalho opcional, foi ainda proposta a modelação do icosaedro regular segundo dois procedimentos distintos, uma vez que a sua modelação em tempo de aula se revelava inexequível e de menor importância para o tema em estudo. Nesse sentido, um dos documentos de apoio disponibilizados na plataforma *moodle* foi o Apêndice F.



a b

Figura 501 - Modelações propostas para o Desafio A e para o Desafio B.

Os Professores da componente teórico-prática da UC propuseram aos estudantes a realização de um trabalho colaborativo para a concretização de um projeto de instalação de uma estrutura espacial habitável para o jardim da Quinta da Póvoa da Faculdade de Arquitetura (cujo enunciado se apresenta no Anexo A). O objetivo da proposta de trabalho era que os estudantes explorassem criativamente uma tesselação arquitetónica específica como estrutura modular, podendo introduzir, como elemento disruptivo, um plano que seccionasse a estrutura, de modo a tirar partido das ideias sugeridas por Burry e Burry (2012, p. 80), segundo os quais é o próprio potencial expressivo da imperfeição e do ato de quebrar as regras, amiúde explorados na obra construída, que vai buscar inspiração às ideias matemáticas de composição.

Em resposta ao trabalho proposto, cada um dos grupos elaborou um cartaz de apresentação (Anexo B) e pequenos vídeos, mostrando o processo de conceção dos seus projetos e a integração virtual dos seus projetos num espaço concreto. Alguns projetos foram ainda concretizados em maquetas à escala 1:20 construídas pelos estudantes (Anexo C). Duas destas maquetas (Figura 502) fizeram parte dos trabalhos expostos na "Anuária", a exposição anual dos estudantes da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto.

Embora nem todas as maquetas tenham sido bem conseguidas, dadas a especificidade da proposta e as dificuldades inerentes à concretização física de um projeto desta natureza, algumas são reveladoras do interesse com que a proposta foi acolhida pelos estudantes, que se esforçaram por conseguir resultados razoavelmente satisfatórios e, em alguns casos, muito bons. Os cartazes, vídeos, maquetas e toda a dinâmica gerada durante as aulas teórico-práticas e práticas são reveladores, não apenas, do interesse e benefício que um tema como os poliedros e as tesselações sólidas podem significar para os estudantes de Arquitetura mas, sobretudo, da diversidade de respostas recebidas e o potencial criativo dos estudantes que, face a uma proposta na

qual, para muitos, o ponto de partida era a mesma tesselação, conseguiram resultados tão distintos e tão apelativos.

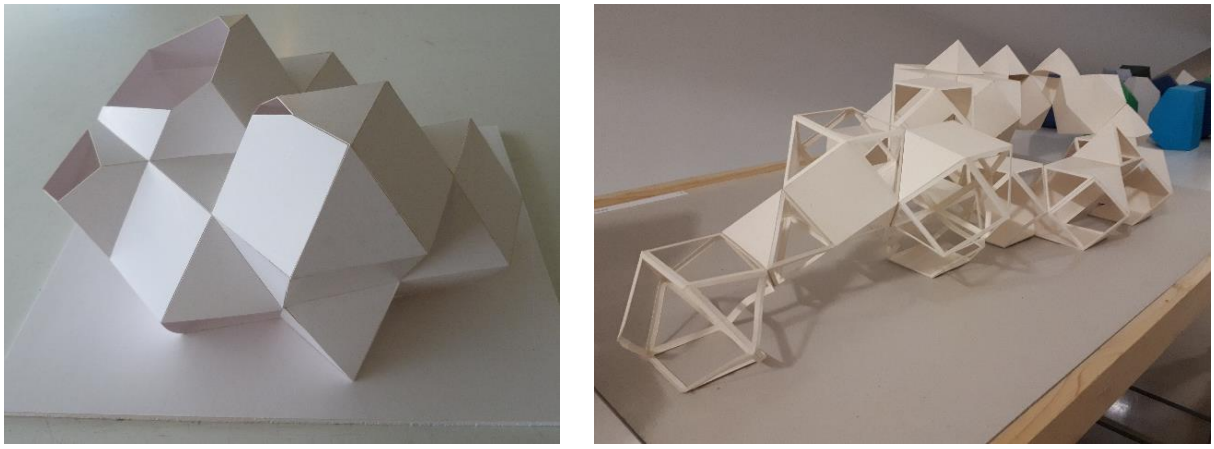


Figura 502 - Maquetas realizadas por dois grupos de estudantes, a partir da Tesselação #05 (octaedros e cuboctaedros), incluídas na Exposição "Anuária" que se realizou na FAUP no início de 2017/2018.

Na nossa perspetiva, os resultados desta experiência letiva mostram ainda uma pequeníssima parte da riqueza de soluções de que a criatividade humana pode encontrar em resultado da colaboração entre a Arquitetura e outras áreas do conhecimento que só aparentemente parecem distantes. São desta enorme riqueza testemunho os extraordinários resultados que uma relação mais vincada entre a Arquitetura e a Matemática pode alcançar, conforme nos demostram, por exemplo, Burry e Burry (2012). A propósito da importância da colaboração da Arquitetura com outras áreas do conhecimento, gostaríamos de concluir salientando que Kepler descreveu o Livro I do *Harmonices Mundi* de 1619 como *Geométrico*, por versar sobre a origem e as demonstrações das Figuras Regulares que determinam as Relações Harmónicas e o Livro II, que tem por objeto a congruência das Figuras Regulares no plano ou espaço, como *Arquitetónico* (Kepler, 1999, p. III). Muitos séculos mais tarde, esta associação entre conceitos da geometria [poliédrica] seria retomada, por exemplo, por Conway e outros autores (2008), que apelidaram determinadas tesselações sólidas como *arquitetónicas.*

3.9.1. Recetividade dos estudantes à experiência letiva

Durante os meses de Maio e Junho de 2017, foi disponibilizado um inquérito por questionário *online* de resposta anónima aos estudantes envolvidos nesta experiência letiva, inquérito por questionário este, cuja validação foi devidamente acautelada através de uma validação prévia, por peritos externos. Este inquérito por questionário teve por objetivos "analisar a forma como os estudantes percecionaram os conteúdos abordados e se a exploração em aula com recurso a s*oftware* de modelação tridimensional terá contribuído para a melhor compreensão desses conteúdos". Apresenta-se a seguir uma análise descritiva muito sintética deste questionário, cujas perguntas e respostas podem ser consultadas no Apêndice G. Do universo de 176 estudantes matriculados no 1.º ano da UC "Geometria e Arquitetura", registaram-se 42 respostas, que representam 23,86% do total de estudantes. O referencial variava entre "Discordo totalmente" e "Concordo totalmente". Embora esta amostra não possa ser considerada como representativa, permitiu-nos entender se a experiência foi de algum modo apelativa para os estudantes envolvidos, se correspondeu aos seus interesses específicos e retirar algumas conclusões:

- a grande maioria dos respondentes (85,71%, isto é, 36 respostas em 42) optou pelas respostas "Concordo" ou "Concordo totalmente", quando questionados sobre o interesse do tema explorado;
- em resposta à afirmação de que a manipulação de modelos físicos de poliedros foi vantajosa, 90,48% dos estudantes (38 respostas, em 42) que responderam ao questionário, optaram por "Concordo totalmente" ou "Concordo";
- 92,85% (39, em 42) escolheram as mesmas respostas quando questionados sobre a adequabilidade do *software* ao tema explorado;
- 61,90% (26 em 42) e 47,62% (20, em 42) dos respondentes "discordaram totalmente" ou "discordaram" com a afirmação de que o número de aulas foi suficiente, respetivamente, para "compreender as categorias de poliedros e as tesselações abordadas" e para aprender a modelá-las com o *software*.
- quando questionados sobre os aspetos abordados em aula que gostariam de poder vir a desenvolver, 52,38% (22 respostas, em 42) optou por tesselações sólidas, enquanto que 11,90% (5, em 42) optou por poliedros (isto é, por si só, sem relação com as tesselações). Imposta acrescentar que igual percentagem optou por "nenhum" e que 14,28% (respostas, em 42) não souberam ou não quiseram responder a esta questão.

Como conclusão desta análise, salientamos a experiência extremamente gratificante que a oportunidade de interagir com estudantes do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura constituiu e a enorme importância da possibilidade de, com os estudantes, explorar conceitos geométricos tão tangíveis e aliciantes quanto os poliedros e as tesselações, trabalhando-os com o *software*, quase que "diretamente" no espaço [virtual]. Embora as condições não tenham sido as ideais, porque o elevado número de estudantes por aula de alguma forma dificultou a interação e o esclarecimento de uma ou outra dúvida, foram, de facto, momentos únicos. Acreditamos (e os resultados do inquérito por questionário apontam-nos nesse sentido) ter conseguido motivar muitos estudantes para a exploração dos poliedros e das tesselações sólidas, desejando-se que aqueles os consigam explorar autonomamente, com algum conhecimento de causa (ainda que elementar), em novas situações potencialmente enquadráveis na especificidade da sua área de estudos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerações finais

Chegados a este ponto, apresentamos algumas considerações sobre o trabalho realizado e uma breve reflexão sobre a forma como respondemos aos objetivos que nos propuséramos alcançar.

Começando pelas dificuldades, referidas na Introdução, na produção de representações rigorosas e suficientemente claras para determinados conceitos da geometria poliédrica, cumpre-nos assinalar que, na resposta que procurámos para este problema, foi fundamental o *software* de modelação tridimensional utilizado, que se revelou como plenamente eficaz para todas as circunstâncias (mesmo aquelas que, pela sua complexidade, não foram fáceis de alcançar) e nos permitiu modelar todos os conceitos abordados para produzir representações corretas e rigorosas e, paralelamente, motivado outras pesquisas com desenvolvimento previsto para um futuro próximo.

Em resultado das muitas modelações realizadas para este trabalho de investigação, produziram-se 486 figuras, das quais serão de destacar as que, pela sua clareza e rigor de representação, julgamos ter contribuído para clarificar alguma da complexidade intrínseca aos conceitos em causa e ainda aqueles que não encontrámos ilustrados na literatura da especialidade. São destas exemplos e entre outras: a Figura 238 que ilustra os resultados da estrelação sucessiva do dodecaedro pentagonal; as Figuras da Secção 1.3. que ilustram a aplicação em representação axonométrica do Método de Dorman-Luke; as Figuras 244 e 245, que ilustram as facetas regulares produzíveis nos poliedros convexos quasirregulares; as Figuras 94 a 106, que ilustram de que forma cada um dos arquimedianos se inscreve num tetraedro regular; e as Figuras 338 a 365, que ilustram as tesselações duais das tesselações sólidas uniformes. A todas as modelações produzidas foi intencionalmente atribuída uma coerência formal que, para além de ter pretendido clarificar conceitos através de descrições gráficas visualmente claras e rigorosas, teve em vista propor a discussão sobre a sua aplicabilidade em ambiente didático e estimular investigações nesta área. Nesse sentido, foram disponibilizados *online* tutoriais a que qualquer interessado/a poderá recorrer em tempo e espaço próprios, que se integram num projeto maior atualmente em desenvolvimento.

Para o conceito de expansão de polítopos concebido por Alicia Boole Stott no início do século vinte. que se julga muito beneficiar das possibilidades que as lógicas paramétricas das tecnologias digitais oferecem, foram produzidas representações interativas que, de forma inédita, ilustraram a expansão de polígonos regulares e de poliedros aquirais. O elevado grau de precisão

do *software* perimiu-nos ainda aferir (e, em alguns casos, corrigir) a exatidão dos valores apresentados na literatura da especialidade para a expansão das faces daqueles poliedros e apresentar os valores para a expansão das arestas. Foi ainda por via da componente dinâmica deste *software* de modelação algorítmica e pela qualidade das representações obtidas que pistas para o desenvolvimento de outros trabalhos de investigação se abriram, nomeadamente, para o estudo sistemático do facetamento de poliedros convexos uniformes; do conceito de *topological interlocking* com poliedros convexos (estudo, aliás, já iniciado em Viana, 2018c); da dualidade dos Sólidos de Johnson e da conceção de aplicações didáticas com a modelação dos poliedros côncavos uniformes.

A recetividade recebida, por parte dos estudantes de Arquitetura com quem tivemos a oportunidade de trabalhar, às aplicações sugeridas nas Secções 3.8. e 3.9. do capítulo III e o interesse demostrado e qualidade dos trabalhos que realizaram mostram-nos que a geometria poliédrica pode ser introduzida em contexto didático de nível superior, não só por existir enquadramento curricular que torna a sua exploração útil e desejável, mas também por possibilitar aos estudantes a oportunidade de alargarem os seus conhecimentos de geometria e de geometria poliédrica. Desejavelmente, os estudantes tornar-se-ão ainda progressivamente capazes de operar com o *software* e de relacionar os conceitos apreendidos com o estudo da gramática das questões do espaço. O facto de este trabalho de investigação poder ter contribuído, ou vir a contribuir, para tal oportunidade e, paralelamente, ter facilitado a compreensão e o interesse pela geometria poliédrica parece-nos claros motivos de satisfação e forte estímulo para prosseguirmos com investigações nesta área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências bibliográficas

Alexandrov, A. (2005). *Convex polyhedra*. Berlin: Springer.

Alsina, C. (2011). *As Mil faces da Beleza Geométrica*. Barcelona: RBA Coleccionables, S.A.

Andreescu, T., & Gelca, R. (2009). *Mathematical Olympiad Challenges*. Boston: Birkhäuser.

Andreini, A. (1905). Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative. Mem. Societa` Italiana della Scienze, Ser. 3, 14: 75-129.

Aristóteles (trad. 2008). *Ética a Nicómano* (6ª ed.). Lisboa: Quetzal Editores.

Araki, Y., Horiyama, T. & Uehara, R. (2015). Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid. *WALCOM: Algorithms and Computation Lecture Notes in Computer Science*, 294-305. doi: 10.1007/978-3-319-15612-5_26

Asensi, F. (1985). *Geometría descriptiva.* Madrid: Editorial Parainfo.

Ball, W., & Coxeter, H. (1987). *Mathematical recreations and essays*. New York: Dover Publications.

Baracs, J. (1988). Spatial Perception and Creativity. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach.* (pp. 118-132) Boston: Birkhäuser.

Bravais (1849). Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. *Journal de mathématiques pures et appliquées 1ère série*, 1, 4. 41-180

Brecher, K. (2011). Kepler's Mysterium Cosmographicum: A Bridge Between Art and Astronomy? In R. Sarhangi, & C. Séquin (Eds.). *Bridges Coimbra Conference Proceedings* (378-386) Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing.

Burry, J., & Burry, M. (2012). *The new mathematics of architecture*. London: Thames e Hudson.

Chieh, C. (1998). Polyhedra and Crystal Structures. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach* (pp. 93-105). Boston: Birkhäuser.

Conway, J. H., Burgiel, H., e Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things*. Wellesley, MA: A.K. Peters.

Coxeter, H. (1973). *Regular Polytopes*. New York: Dover Publications.

Coxeter, H. (1974). *Regular complex polytopes*. London: Cambridge University Press

Coxeter, H. (1985). Book Review. *The Mathematical Intelligencer*, 7(1), 59-71. doi:10.1007/bf03023010.

Coxeter, H. (1988). Regular and Semiregular Polyhedra. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach.* (pp. 67-79) Boston: Birkhäuser.

Coxeter, H., Longuet-Higgins, M., & Miller, J. (1954). Uniform Polyhedra. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 246(916), 401-450. doi:10.1098/rsta.1954.0003

Coxeter, H., Val, P., Flather, H., & Petrie, J. (1982). *The fifty-nine icosahedra*. New York: Springer-Verlag.

Critchlow, K. (1969). *Order in space: a design source book*. London: Thames and Hudson.

Cromwell, P. (1997). *Polyhedra*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Cundy, H., & Rollett, A. (1989). *Mathematical models*. Norfolk: Tarquin Pub.

Cutler, A., & Schulte, E. (2011). Regular polyhedra of index two, I. *Beiträge Zur Algebra Und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, *52*(1), 133-161. doi: 10.1007/s13366-011-0015-0.

Deza, M., & Shtogrin, M. (2000). Uniform Partitions of 3-space, their Relatives and Embedding. *European Journal of Combinatorics*, 21(6), 807-814.

Dickey, M. D. (2005). Three-dimensional virtual worlds and distance learning: two case studies of Active Worlds as a medium for distance education. *British Journal of Educational Technology*, *36*(3), 439–451. doi: 10.1111/j.1467-8535.2005.00477.x

Emmerich, D. G. (1970). *Exercises de geometrie constructive: travaux d'etudiants*. Paris: Ecole Nationale Supérieure des Beaux arts, Arch.

Ernst, B. (1991). *O espelho mágico de Mauritis Cornelis Escher*. Berlin: Taschen.

Euclid, Heath, T. L., & Densmore, D. (2017). *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume: The Thomas L. Heath translation*. Santa Fe, NM: Green Lion Press.

Federico, P. (1982). Descartes on Polyhedra. *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*. 4, 66. doi:10.1007/978-1-4612-5759-2

Fernandes, A. (1967). *Elementos de geometria para os 3º, 4º e 5º anos dos liceus*. Coimbra: Coimbra Editora.

Fuller, R. (1975). *Synergetics: explorations in the geometry of thinking*. New York: Macmillan Publishing Company

Gabriel J. (1997). *Beyond the cube: the architecture of space frames and polyhedra*. New York: J. Wiley.

Gardner, M. (2009). *Sphere packing, Lewis Carroll, and Reversi: Martin Gardners new mathematical diversions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gheorghiu, A., & Dragomir, V. (1978). *Geometry of structural forms*. London: Applied Science Pub.

Goldberg, M. (1979). Convex Polyhedral Space-Fillers of More than Twelve Faces. *Geometria Dedicata* 8, 491-500

Gosset, T. (1900). On the Regular and Semi-Regular Figures in Space of n Dimensions. *Messenger of mathematics*. 29. London [u.a.] 43-48.

Grünbaum, B. (1977). Regular Polyhedra - Old and New. *Aequationes Mathematicae*, 15(1), 118-120. doi:10.1007/bf01837888.

Grünbaum, B. (1994a). Polyhedra with Hollow Faces. *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*, 43-70. doi:10.1007/978-94-011-0924-6_3.

Grünbaum, B. (1994b). Uniform tilings of 3-space. G*eombinatorics*, 4. 49-56.

Grünbaum, B. (1997). Isogonal Prismatoids. *Discrete e Computational Geometry*, 18(1), 13-52. doi: 10.1007/pl00009307.

Grünbaum, B. (1999). Acoptic polyhedra. In Chazelle, J. Goodman and R. Pollack (Eds.). Contemporary Mathematics. Advances in Discrete and Computational Geometry. 223. 163-199. doi: 10.1090/conm/223/03137.

Grünbaum B. (2003a) Are Your Polyhedra the Same as My Polyhedra? In: Aronov B., Basu S., Pach J., Sharir M. (Eds.). Discrete and Computational Geometry. Algorithms and Combinatorics, vol 25. Springer, Berlin, Heidelberg

Grünbaum, B. (2003b). "New" Uniform Polyhedra. *Discrete Geometry:* In Honor of W. Kuperberg's 60th Birthday Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 253. 331-350. 331-350.

Grünbaum, B. (2009). An enduring error. *Elemente Der Mathematik*, 64. 89-101. doi:10.4171/em/120.

Grünbaum, B. (2010). The Bilinski Dodecahedron and Assorted Parallelohedra, Zonohedra, Monohedra, Isozonohedra, and Otherhedra. *The Mathematical Intelligencer*, 32(4), 5-15. doi:10.1007/s00283-010-9138-7.

Grünbaum, B., & Johnson, N. (1965). The Faces of a Regular-Faced Polyhedron. *Journal of the London Mathematical Society, s1-40*(1), 577-586. doi: 10.1112/jlms/s1-40.1.577.

Grünbaum, B. & Klee, V. (1967) *CUPM [Committee on the Undergraduate Program in Mathematics] Geometry Conference Proceedings, Part I: Convexity and Applications. Lectures by Branko Grünbaum and Victor Klee* (Ed. L. K. Durst). Mathematical Association of America. 16(Aug.)

Grünbaum, B., & Shephard, G. (1980). Tilings with congruent tiles. *Bull. Amer. Math. Soc. Bulletin of the American Mathematical Society, 3*(3), 951-974. doi:10.1090/s0273-0979-1980-14827-2.

Grünbaum, B., & Shephard, G. (1987). *Tilings and patterns*. New-York: W. H. Freeman e Company.

Grünbaum, B., & Shephard, G. (1988). Duality of Polyhedra. In Senechal, M., e Fleck, G. (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach*. (pp. 205-211) Boston: Birkhäuser.

Grünbaum, B., & Shephard, G. (1998). Isohedra with nonconvex faces. *Journal of Geometry*, *63*(1-2), 76-96. doi: 10.1007/bf01221240.

Gutiérrez, A. (1996). "Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework." In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.) *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Gutierrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geo-metría espacial. *Revista EMA*, 3(3). 193-220.

Har'el, Z. (1993). Uniform solution for uniform polyhedra. *Geometriae Dedicata*, 47(1), 57-110. doi:10.1007/bf01263494.

Holden, A. (1971). *Shapes, space, and symmetry*. New York: Columbia University Press

Hopf, H. (1940). *Selected Chapters of Geometry*. ETH Zürich lecture.

Huybers, P. (1999). The Chiral Polyhedra. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 40(2), 133-143.

Jakobsen, I., & Matthiasen, J. (2014). Descriptive geometry and/or computer technology? What mathematics is required for doing and understanding architecture? *Nexus Network Journal* 16 (2), 505-516.

Jamnitzer, W. (1993). *Perspectiva corporum regularium*. Madrid: Ediciones Siruela.

Johnson, N. (1966). Convex Polyhedra with Regular Faces. *Canadian Journal of Mathematics*, 18, 169-200. doi: 10.4153/cjm-1966-021-8.

Kabai, S. (2011). Inside and Outside the Rhombic Hexecontahedron. A Study of Possible Structures with Rhombic Hexecontahedron with the Help of Physical Models and Wolfram Mathematica. In R. Sarhangi, C. Séquin (Eds.). *Bridges Coimbra Conference Proceedings* (pp. 379-386) Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing.

Kappraff, J. (1990). *Connections: The geometric bridge between art and science*. New York: McGraw-Hill Pub.

Kepler, J. (1966). *The six-cornered snowflake*. Oxford: Oxford University Press.

Kepler, J. (Blanchard, A., Ed.). (1999). *L' Harmonie du Monde*. Bordeaux: Editions Bergeret.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lalvani, H. (1992). *Continuous Transformations of Non-Periodic Tilings and Space-Fillings. Fivefold Symmetry*, 97-128.

Luminet, J. (2009). Science, art and geometrical imagination. *Proceedings of the International Atronomical Union*, 5(S260), 248-273. doi:10.1017/s1743921311002377

Malkevitch, J. (1988). Milestones in the History of Polyhedra. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach* (pp. 80-92) Boston: Birkhäuser.

Mann, C., Mcloud-Mann, J., & Derau, D. V. (2017). Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata, 194*(1), 141-167. doi:10.1007/s10711-017-0270-9

Ogilvy, C. (1990). *Excursions in Geometry*. New York: Dover.

Ostermann, A., & Wanner, G. (2014). *Geometry by Its History*. Berlin: Springer Berlin.

Parzysz, B. (1988). Knowing Vs Seeing. Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19. 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of Space and Students' Conceptions at High School Level. *Educational Studies in Mathematics*. 22. 575-593.

Pearce, P. & Pearce, A. (2015). *Curved Space Diamond Structure: Origins: Geometry and Natural Structure*. San Bernardino: CreateSpace Independent Publishing Platform

Pearce, P. (1978). *Structure in nature is a strategy for design*. Cambridge: MIT Press.

Pedersen, J. (1988). Why Study Polyhedra? In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach.* (pp. 133-147) Boston: Birkhäuser.

Polo-Blanco, I. (2007). *Theory and history of geometric models*. s.n.

Polo-Blanco, I. (2008). Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension. *Historia Mathematica*, 35(2), 123-139. doi:10.1016/j.hm.2007.10.008

Pugh, A. (1976). *Polyhedra: A visual approach*. Berkeley: University of California Press.

Rao, M. (2017) *Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane* [manuscrito submetido para publicação]. Cornell University. arXiv:1708.00274

Rotgé J. (1984). Rotating polyhedra with congruent plane pentagonal faces. *Structural Topology.* 9, 15-30.

Senechal, M. (2009). *Quasicrystals and geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schattschneider, D. (1978). Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51, 29-44.

Schulte, E. (2004) Symmetry of Polytopes and Polyhedra. In Jacob Goodman and Joseph O'Rourke (Eds.). *Discrete and Computational Geometry*, 13 Abril (pp. 1-24) Boca Raton: CRC Press.

Schulte, E., & Wills, J. (1986). On Coxeter's regular skew polyhedra. *Discrete Mathematics*, 60, 253-262.

Scriba, C., & Schreiber, P. (2015). *5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture*. Basel: Springer Basel.

Segerman, H. (2016). *Visualizing mathematics with 3D printing*. Baltimore: Johns Hopkins University.

Senechal, M. (1981). Which Tetrahedra Fill Space? *Mathematics Magazine*, *54*(5), 227. doi: 10.2307/2689983

Soler, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad Matemática. *Educación Matemática*, 16 (3),103-125.

Soler, G. (2007). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis

Steinhaus, H. (1960). *Mathematical snapshots*. Oxford: Oxford University Press.

Stott, A. (1910) Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 11(1) 3-24.

Talbo, A. (2010). *Geometría Déscriptiva y sus Aplicaciones. Tomo II: Curvas y Superficie*s. Madrid: Editorial Tébar.

Taylor, C. (1997). *From the beginning to Plato*. London: Routledge.

Veloso. E. (1998). *Geometria - Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Viana, V. (2018a). Architectonic Tessellations as Constructive Modules. In Kim Williams & Marco Bevilacqua (Eds.). *Nexus 2018 Architecture and Mathematics Conference Book*. Turin: Kim Williams Books. 325-328

Viana, V. (2018b). From Solid to Plane Tessellations, and Back. In Kim Williams & Michael Ostwald (Eds.). *Nexus Network Journal*, 20(3). 741-768.

Viana, V. (2018c). Topological Interlocking of Convex Regular Polyhedra. In Cornelie Leopold, Christopher Robeller e Ulrike Weber (Eds.). *RCA 2018 Research Culture in Architecture. International Conference on cross-disciplinary collaboration*. Kaiserslautern: FATUK. 255-257.

Viana (2019b). Tessellations within Tessellations. In Dénes Nagy, Ioannis Vandoulakis, Ryuji Takaki, Ritsuko Izuhara, Shozo Ishihara & Yoshinori Teshima (Eds.). *Tradition and Innovation in Symmetry - Katachi. Symmetry: Art and Science. 11th Congress and Ehxibition of SIS - Symmetry*. Kanasawa: SIS – Symmetry. 290-293.

Viana V., Xavier J., Aires A. & Campos H. (2019a). Interactive Expansion of Achiral Polyhedra. In Luigi Cocchiarella L. (Ed.). *ICGG 2018 - Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 809. (pp. 1116-1128) Springer.

Wade, D. (2012). *Fantastic geometry: polyhedra and the artistic imagination in the Renaissance*. Glastonbury: Squeeze Press.

Weissbach, B., & Martini, H. (2002). On the chiral Archimedean solids. *Beiträge zur Algebra und Geometrie* / *Contributions to Algebra and Geometry*, 43, 121-133.

Wells, D. (1998). *Dicionário de Geometria Curiosa*. Lisboa: Edições Gradiva.

Wenninger, M. (1975). *Polyhedron models*. Cambridge: University Press.

Wenninger, M. (1983). *Dual models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Williams, R. (1979). *The geometrical foundation of natural structure: A source book of design*. New York: Dover Publications.

Wills, J. (1988) Polyhedra Analogues of the Platonic Solids. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach* (pp. 80-92) Boston: Birkhäuser.

Xavier, J; Sousa, J. Castro, A. & Viana, V. (2019) An Introduction to Solid Tessellations with Students of Architecture. In Vera Viana (Ed.). (2019) *Geometrias'19: Book of Abstracts*. (127-131) Porto: Aproged.

Webgrafia

Conway, J. (1994). *Naming Polygons*. Consultado em Abril, 15.2016. Disponível em http://mathforum.org/library/drmath/view/57666.html

Gillispie, S., & Grünbaum. (2019). *Labeled Isogonal Polyhedra*. Consultado em Março 02, 2019. Disponível em http://isogpolys.info/

Hart, G. (1996a). *Exercise - The Icosahedron and the Cube*. Consultado em Fevereiro 09, 2017. Disponível em http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/ex-pr1.html

Hart. G. (1996b). *Uniform Polyhedra*. Disponível em https://georgehart.com/virtual-polyhedra/uniform-info.html

Hart. G. (1996c). *Zonohedra*. Consultado em Novembro 05, 2019. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/zonohedra-info.html

Hart, G. (1998a). *Johannes Kepler's Polyhedra*. Consultado em Setembro 21, 2016. Disponível em http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html

Hart, G. (1998b). *Piero della Francesca's Polyhedra*. Consultado em Abril 05, 2017. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/piero.html

Inchbald, G. (2018, Dezembro). *Stellation and faceting - a brief history*. Consultado em Abril 14, 2019. Disponível em http://www.steelpillow.com/polyhedra/StelFacet/history.html

Lievenlb (2009. Março, 05). *The Scottish solids hoax*. Disponível em http://www.neverendingbooks.org/the-scottish-solids-hoax

Lievenlb (2012. Junho, 05). *Scottish solids, final (?) comments*. Disponível em http://www.neverendingbooks.org/scottish-solids-final-comments

Olshevsky, G. (2006). Uniform Panoploid Tetracombs, Manuscript. Consultado em Abril 25, 2016. Disponível em https://bendwavy.org/4HONEYS.pdf

Pegg, E. *Fair Dice*. (s.d.) Consultado em Setembro 16, 2019. Disponível em http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm

Webb, R. (2003). *Stella: polyhedron navigator*. Consultado em Abril 16, 2017. Disponível em https://www.software3d.com/PolyNav/PolyNavigator.php

Weisstein, E. (s.d.). *Bilinski Dodecahedron*. Consultado em Outubro 20, 2019. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/BilinskiDodecahedron.html

Weisstein, E. (s.d.). *Cantellation*. Consultado em Maio 07, 2018. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/Cantellation.html

Weisstein, E. (s.d.). *Expansion*. Consultado em Agosto 26, 2017. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/Expansion.html

Weisstein, E. (s.d.). *Isosceles Tetrahedron*. Consultado em Outubro 21, 2019. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/IsoscelesTetrahedron.html

Weisstein, E. (s.d.). *Rectification*. Consultado em Julho 29, 2020. Disponível em https://mathworld.wolfram.com/Rectification.html

Weisstein, E. (s.d.). *Space-Filling Polyhedron*. Consultado em Abril 21, 2016. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html

Weisstein, E. (s.d.). *Tessellation*. Consultado em Outubro 21, 2019. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html

Weisstein, E. (s.d.). *Uniform polyhedron*. Consultado em Abril 21, 2016. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron.html

What-when-how. In Depth Tutorials and Information (s.d). *Mesh Processing (Advanced Methods in Computer Graphics) Part 6*. Consultado em Outubro 02, 2016. Disponível em http://what-when-how.com/advanced-methods-in-computer-graphics/mesh-processing-advanced-methods-in-computer-graphics-part-6/

Zefiro, L. (2010). The compound of three octahedra and a remarkable compound of three square dipyramids, the Escher's solid. *Visual Mathematics*. 0-0. Consultado em Fevereiro 10, 2017. Disponível em http://eudml.org/doc/256951

Fonte das imagens

Figura 4 - Hart, G. (1998) *Paolo Ucellos' Polyhedra.* Consultado em Julho 20, 2017. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/uccello.html

Figura 5 - Coxeter, H. (1988). Regular and Semiregular Polyhedra. In M. Senechal, & G. M. Fleck (Eds.). *Shaping Space: A polyhedral approach.* Boston: Birkhäuser.

Figura 7 - Wade, D. (2012). *Fantastic geometry: polyhedra and the artistic imagination in the Renaissance*. Glastonbury: Squeeze Press.

Figura 87 - Leonardo da Vinci - Internet Archive identifier, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=50346693

Figura 88 - Harald Fischer Verlag (2006) *Lorenz Stoer: Geometria et perspectiva: Corpora regulata et irregulata*. Consultado em Julho 20, 2017. Disponível em https://www.haraldfischerverlag.de/hfv/cd_rom/stoer_engl.php

Figura 89 - Wade, D. (2012). *Fantastic geometry: polyhedra and the artistic imagination in the Renaissance*. Glastonbury: Squeeze Press.

Figura 90 - Hart, G. (1998) *Johannes Kepler's Polyhedra.* Consultado em Julho 20, 2017. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html

Figura 236 - Jamnitzer, W. (1993). *Perspectiva corporum regularium*. Madrid: Eds. Siruela.

Figura 280 - Andreini, A. (1905). Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative. *Mem. Societa` Italiana della Scienze*, Ser. 3, 14: 75-129.

Figura 389 - Hart, G. (1998) *Johannes Kepler's Polyhedra.* Consultado em Julho 20, 2017. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html

Figura 400 - Hart, G. (1998) *Johannes Kepler's Polyhedra.* Consultado em Julho 20, 2017. Disponível em https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html

Figura 407 - Wade, D. (2012). *Fantastic geometry: polyhedra and the artistic imagination in the Renaissance*. Glastonbury: Squeeze Press.

Figura 411 - Ernst, B. (1991). *O espelho mágico de Maurits Cornelis Escher*. Berlin: Taschen.

Figura 464 - Stott, A. (1910) Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 11(1) 3-24.

Figura 498 - Foto da autoria de Henry Hutter, cortesia de Zvi Heckers Office.

Figura 499 - Cortesia de Equipo Mazzanti (Consultado em Julho 20, 2017 (Disponível em http://www.elequipomazzanti.com/en/proyecto/cazuca-2/)

APÊNDICES

Apêndice A: Diapositivos da Aula 21 (21 e 24 de Março de 2017)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

Classes de poliedros regulares.
Poliedros regulares infinitos (tesselações planas).
Tesselações uniformes com poliedros regulares convexos.
Justaposição de poliedros regulares convexos (sequências e toróides).

Modelação de tesselações bi e tridimensionais:

1. Tesselação plana 3.4.6.4.
2. Tesselação cúbica.
3. Tesselação tetraoctaédrica.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

1

AULA 23

Tesselações com paraleloedros primários
Tesselações com plesioedros
Tesselações com poliedros não semirregulares
Tesselação com:

- disfenóides tetragonais
- primeira estrelação do dodecaedro rômbico
- stellas octangulas e octaedros
- dodecaedro e biluna birotunda
- pyritohedron (cubo e dodecaedro)

Tesselações com base na partição do cubo

Desafio

vera viana (veraviana@veraviana.net)

2

CLASSES DE POLIEDROS REGULARES

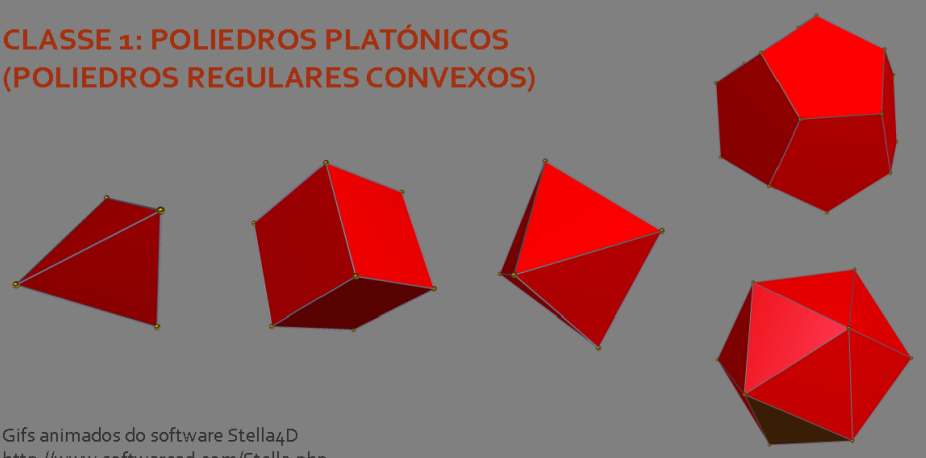
vera viana (veraviana@veraviana.net)

Segundo Grünbaum, B. (1977). Regular polyhedra - old and new.
Aequationes Mathematicae Aeq. Math., 16(1-2), 1-20. doi:10.1007/bf01836414

aula 21 (21 e 24/03/2017)

3

CLASSE 1: POLIEDROS PLATÓNICOS (POLIEDROS REGULARES CONVEXOS)



Gifs animados do software Stella4D
http://www.software3d.com/Stella.php

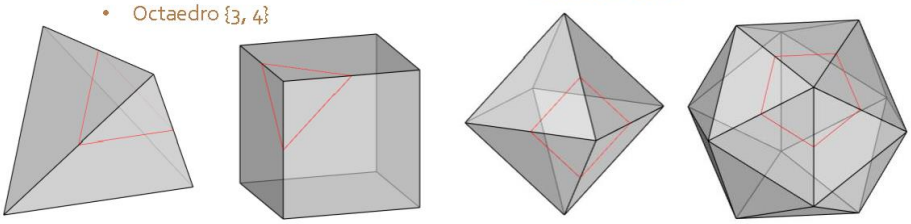
aula 21 (21 e 24/03/2017)

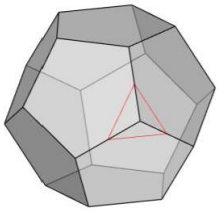
4

CLASSE 1: POLIEDROS PLATÓNICOS

poliedros regulares finitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos.

- Tetraedro {3, 3}
- Hexaedro {4, 3}
- Octaedro {3, 4}
- Dodecaedro {5, 3}
- Icosaedro {3, 5}



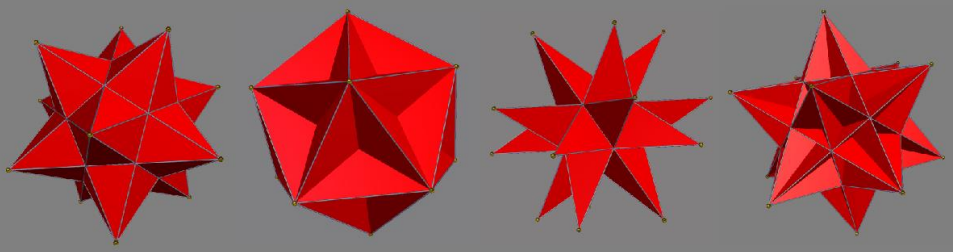


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

5

CLASSE 3: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT (POLIEDROS REGULARES CÔNCAVOS)



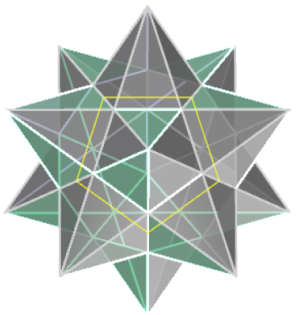
Gifs animados do software Stella4D
http://www.software3d.com/Stella.php

aula 21 (21 e 24/03/2017)

6

CLASSE 3: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT

poliedros regulares finitos em que as faces são polígonos convexos e as figuras verticiais são polígonos estrelados ou vice-versa.





- pequeno dodecaedro estrelado {5/2, 5}
- grande dodecaedro {5, 5/2}
- grande dodecaedro estrelado {5/2, 3}
- grande icosaedro {3, 5/2}

aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

7

CLASSE 2: TESSELAÇÕES PLANAS REGULARES

poliedros regulares infinitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos.

aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

8

De que forma é possível preencher o plano com polígonos regulares iguais, sem espaços vazios nem sobreposições?

MODELAÇÃO

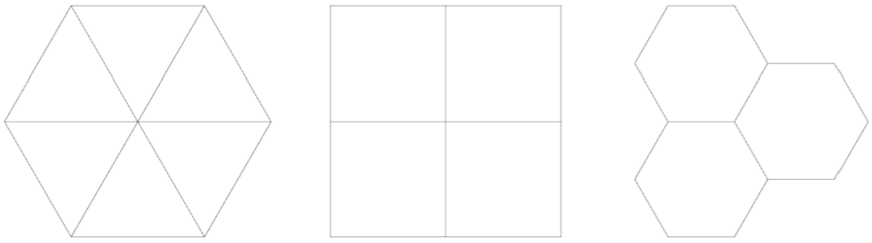


aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

9

De que forma é possível preencher o plano com polígonos regulares iguais, sem espaços vazios nem sobreposições?



TESSELAÇÃO PLANA: Conjunto infinito de polígonos regulares justapostos que cobrem o plano inteiramente, de modo a que cada polígono partilhe cada lado com outro polígono.

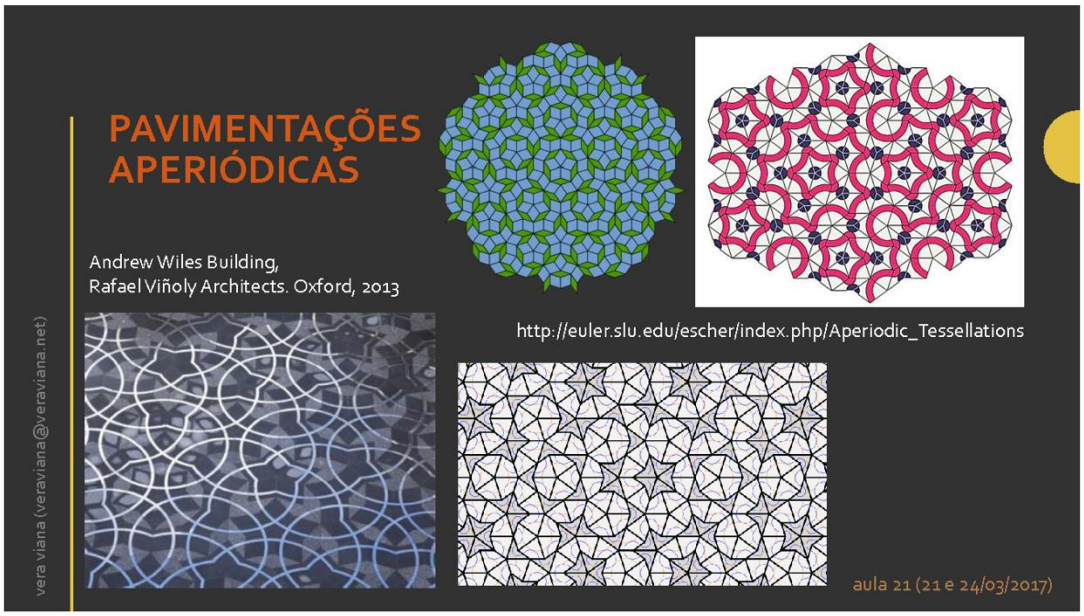
aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

10

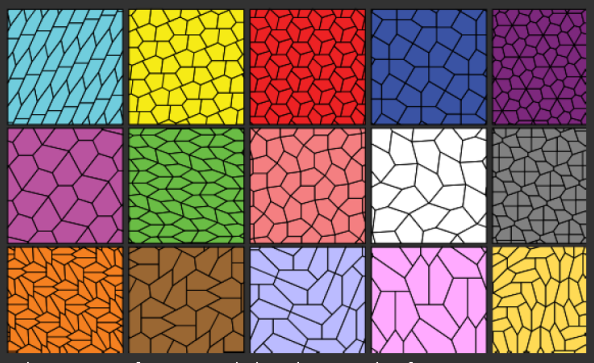

Dois Peixes Nº 41, M. C.Escher, 1941
PAVIMENTAÇÕES
Uma pavimentação é um conjunto infinito de figuras justapostas que cobrem o plano sem sobreposições nem espaços vazios intermédios.
Ravensbourne College, Greenwich, Foreign Office Architects, London, 2011
Islamic Tiles. Alhambra
vera viana (veraviana@veraviana.net)
aula 21 (21 e 24/03/2017)

11


PAVIMENTAÇÕES APERIÓDICAS
Andrew Wiles Building, Rafael Viñoly Architects. Oxford, 2013
http://euler.slu.edu/escher/index.php/Aperiodic_Tessellations
vera viana (veraviana@veraviana.net)
aula 21 (21 e 24/03/2017)

12

PAVIMENTAÇÕES COM PENTÁGONOS IRREGULARES



Não é possível tesselar o plano apenas com pentágonos regulares. Conhecem-se, no entanto, 15 formas distintas de tesselar o plano de forma periódica com pentágonos irregulares.

The 15 types of pentagonal tiling discovered so far.
Photograph: Ed Pegg/Wikipedia

vera viana (veraviana@veraviana.net)

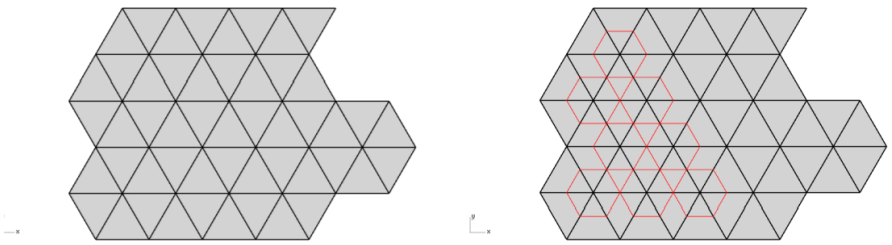
aula 21 (21 e 24/03/2017)

13

CLASSE 2: TESSELAÇÕES PLANAS REGULARES

poliedros regulares infinitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos.

TESSELAÇÃO {3,6}



vera viana (veraviana@veraviana.net)

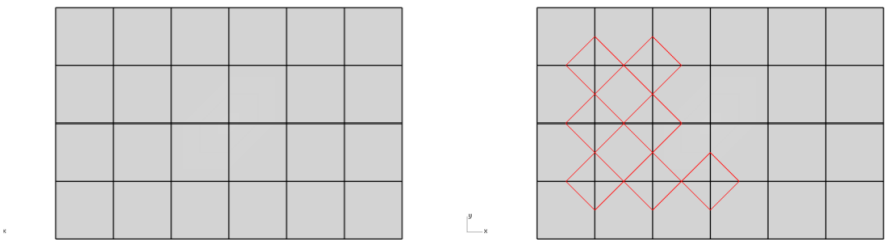
aula 21 (21 e 24/03/2017)

14

CLASSE 2: TESSELAÇÕES PLANAS REGULARES

poliedros regulares infinitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos.

TESSELAÇÃO {4,4}



vera viana (veraviana@veraviana.net)

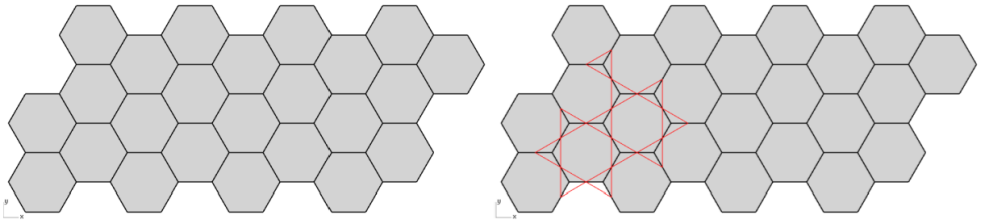
aula 21 (21 e 24/03/2017)

15

CLASSE 2: TESSELAÇÕES PLANAS REGULARES

poliedros regulares infinitos em que tanto as faces como as figuras verticiais são polígonos convexos.

TESSELAÇÃO {6,3}

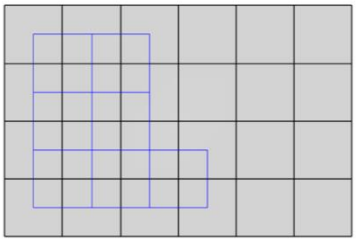


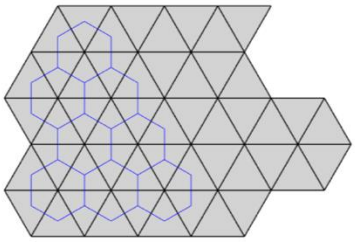
vera viana (veraviana@veraviana.net)

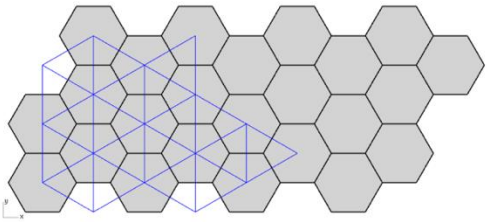
aula 21 (21 e 24/03/2017)

16

A tesselação plana dual é definida pelos centros das faces da tesselação plana inicial.
{6,3} é dual de {3,6}
{3,6} é dual de {6,3}
{4,4} é auto-dual.







vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

17

The Gherkin, London, 2014
Norman Foster and Arup Group

"TESSELAÇÕES REGULARES"



ICD/ITKE fiber-woven research pavilion 2013-14



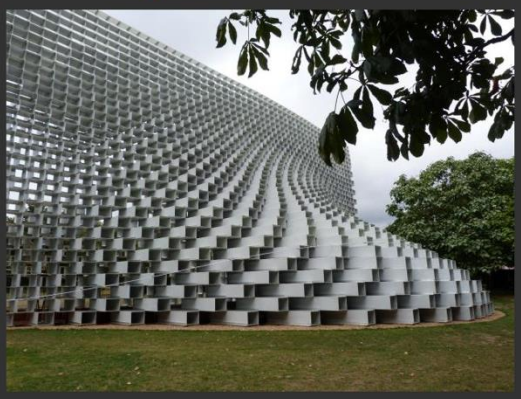
vera viana (veraviana@veraviana.net)

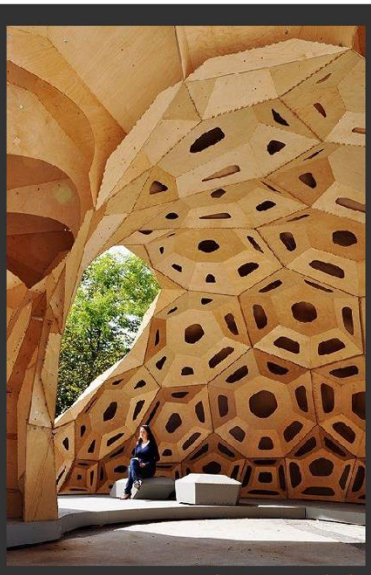
aula 21 (21 e 24/03/2017)

18

ICD | ITKE Research Pavillion 2011,
ICD / ITKE University of Stuttgart.

"TESSELAÇÕES REGULARES"





Serpentine Gallery 2016, Kensington Gardens,
London, Bjarke Ingels.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

19

"TESSELAÇÕES REGULARES"





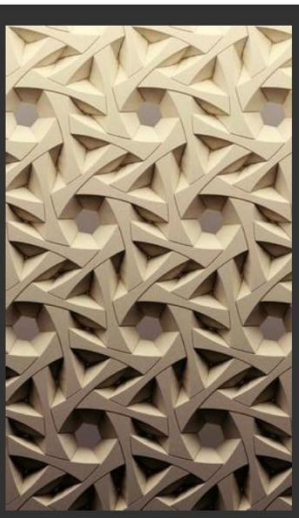


Shukhov Tower (Shabolovka tower)
1920–1922, Moscow, Vladimir Shukhov

vera viana (veraviana@veraviana.net)

20

Modular stone wall by New Fundamentals and PIMAR



"TESSELAÇÕES REGULARES"

Gallery of Elytra Filament Pavilion
ICD-ITKE University of Stuttgart - 1



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

21

"TESSELAÇÕES REGULARES"



Cellular Tessellation pavilion for the 2014 Vivid Light Festival, Abedian Architecture, Sydney



Constructive Geometry Pavilion FAUP, 2013

vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

22

"TESSELAÇÕES REGULARES"



Great Court at the British Museum, Foster and Partners. Londres, 2000

Serpentine Gallery pavilion 2005, Alvaro Siza e Eduardo Souto de Moura.





Yu-un Guesthouse, Tadao Ando Olafur Eliasson, Tokujin Yoshioka & Shozo Toyohisa, 2006.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

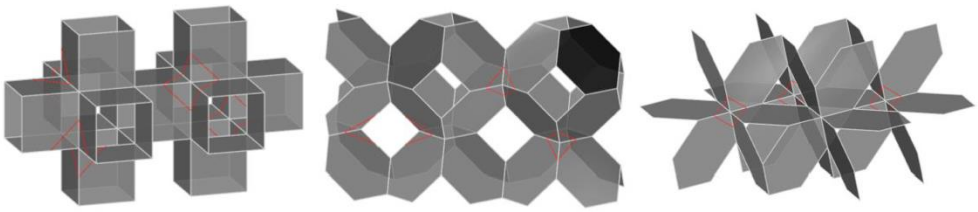
aula 21 (21 e 24/03/2017)

23

CLASSE 4: POLIEDROS DE PETRIE-COXETER

poliedros regulares infinitos que têm faces poligonais convexas e polígonos anti-prismáticos como figuras verticiais.

- cubo multiplicado (ou mucubo)
- octaedro multiplicado (muoctaedro)
- tetraedro multiplicado (ou mutetraedro)

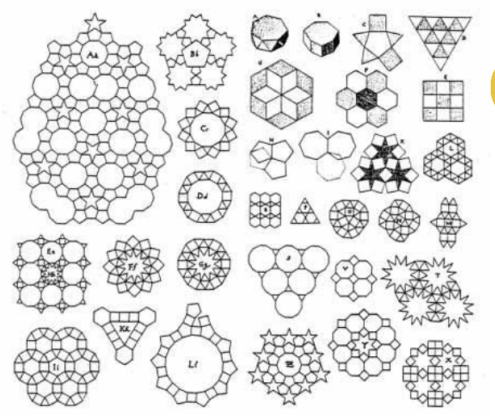


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

24

Que polígonos regulares é possível justapor em torno de um vértice, de modo a que cada polígono partilhe cada lado com outro polígono?



Johannes Kepler(1619) *Harmonices Mundi*

aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

25

Que polígonos regulares é possível justapor em torno de um vértice, de modo a que cada polígono partilhe cada lado com outro polígono?

O ângulo interno de um polígono regular de n lados tem de amplitude:

$$\frac{2\,(n-2)\times 90^{o}}{n}$$

Se os polígonos regulares $n_1, n_2, \ldots, n_p$ se intersectarem num vértices então:

$$\frac{2\,(n_1-2)\times 90^{o}}{n_1} + \frac{2\,(n_2-2)\times 90^{o}}{n_2} + \ldots + \frac{2\,(n_p-2)\times 90^{o}}{n_p} = 360^{o}$$

aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

26

Existem 21 vértices definidos por polígonos regulares, mas apenas 11 tesselam o plano:

3 TESSELAÇÕES REGULARES (polígonos regulares iguais)
8 TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES (polígonos regulares de dois ou mais tipos

VÉRTICE	VÉRTICE	VÉRTICE
3^6	3.4.3.12	3.8.24
4^4	$3^2.6^2$	3.10.15
6^3	3.6.3.6	3.12^2
$3^4.6$	$3.4^2.6$	4.5.20
$3^3.4^2$	3.4.6.4	4.6.12
$3^2.4.3.4$	3.7.42	4.8^2
$3^2.4.12$	3.9.18	$5^2.10$

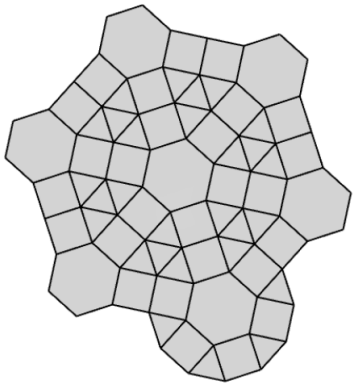
aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

27

De que forma é possível preencher o plano com polígonos regulares, uniformemente, sem espaços vazios nem sobreposições?

Numa tesselação plana demirregular, o preenchimento do plano não é uniforme.
Existem apenas 20 tesselações denmiregulares.[1]



$(3^3, 4^2; 3.4.6.4)$

[1] Grünbaum & Shepard (1986, p. 66-67)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

28

$3^4.6$

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES

MODELAÇÃO



aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

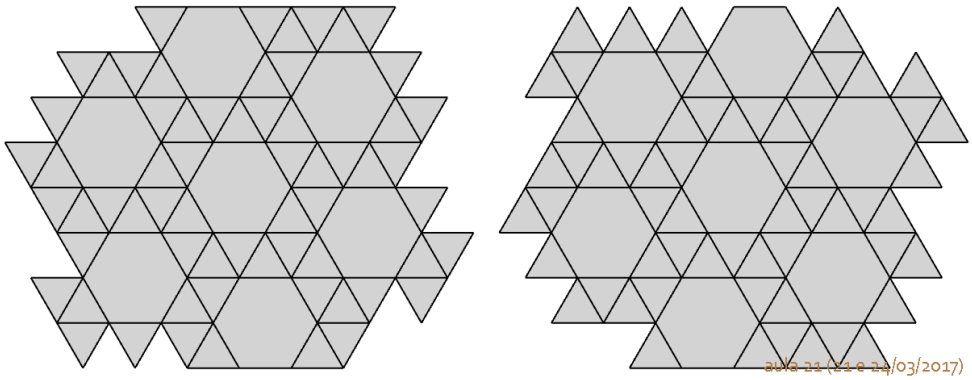
29

$3^4.6$

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES

DEXTRÓGIRA (*DEXTRO*)

LEVÓGIRA (*LAEVO*)



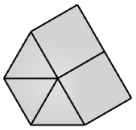
aula 21 (21 e 24/03/2017)

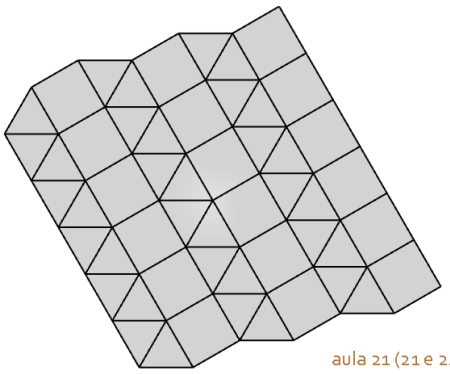
vera viana (veraviana@veraviana.net)

30

$3^3.\ 4^2$

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES





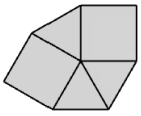
aula 21 (21 e 24/03/2017)

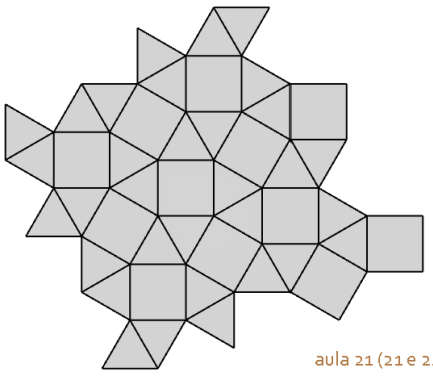
vera viana (veraviana@veraviana.net)

31

$3^2.4.3.4$

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES





aula 21 (21 e 24/03/2017)

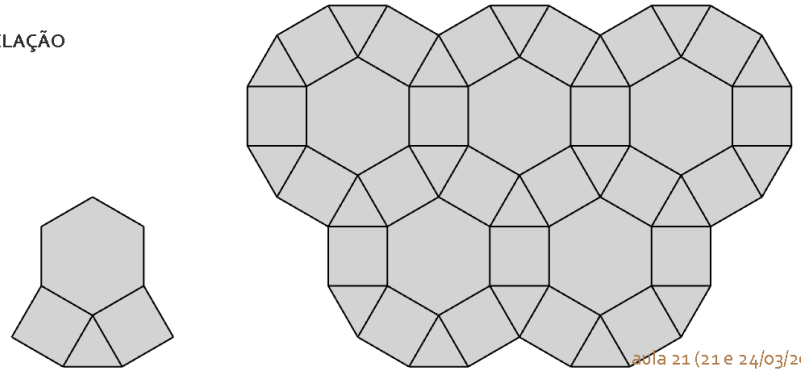
vera viana (veraviana@veraviana.net)

32

3.4.6.4

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES

MODELAÇÃO



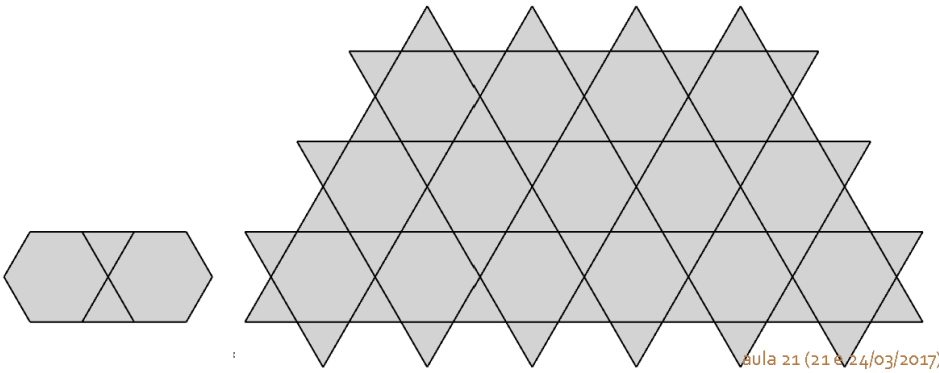
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

33

3.6.3.6

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES

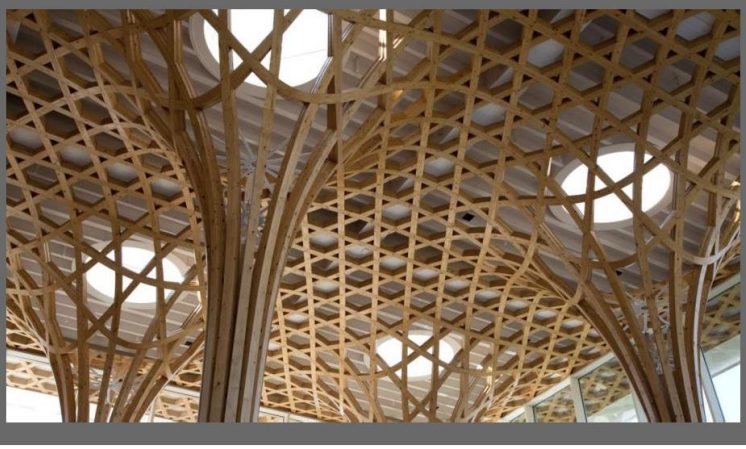


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

34

"TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES"



Haesley Nine Bridges Golf Club House, Shigeru Ban. Yeoju-gun, South Korea.

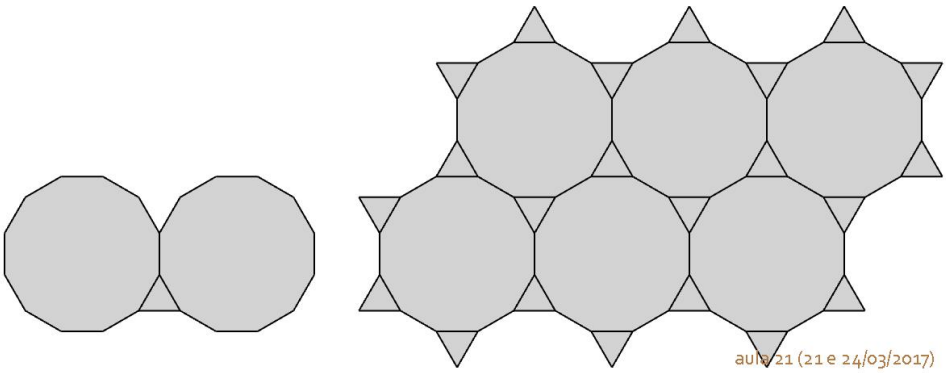
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

35

3.12^2

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES



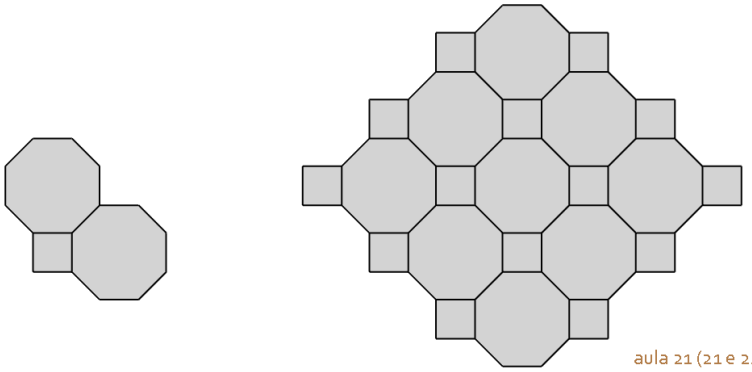
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

36

4.8^2

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES



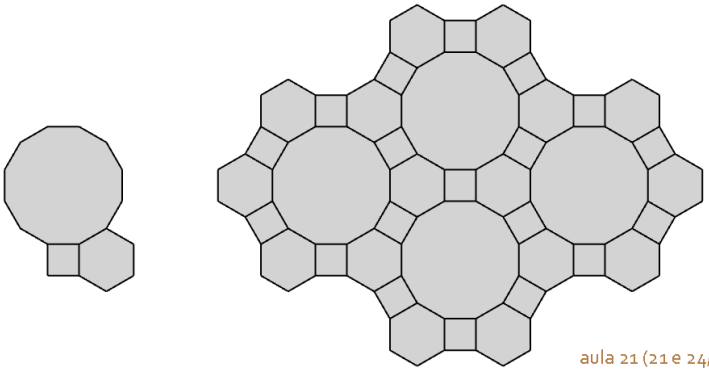
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

37

4.12.6

TESSELAÇÕES PLANAS SEMIRREGULARES

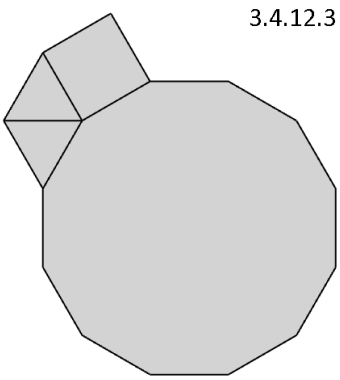


vera viana (veraviana@veraviana.net)

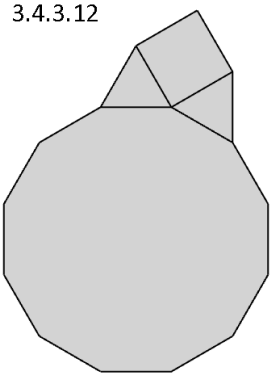
aula 21 (21 e 24/03/2017)

38

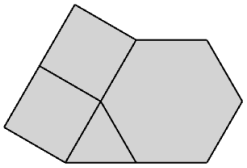
VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO



3.4.12.3



3.4.3.12



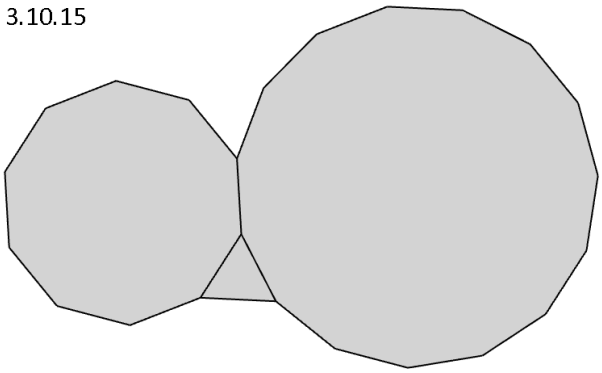
3.4.4.6

vera viana (veraviana@veraviana.net)

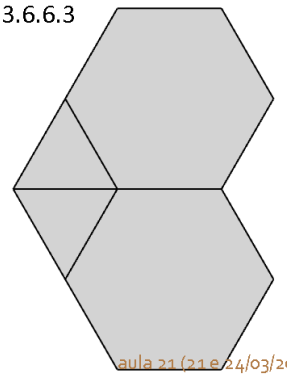
39

VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO

3.10.15



3.6.6.3

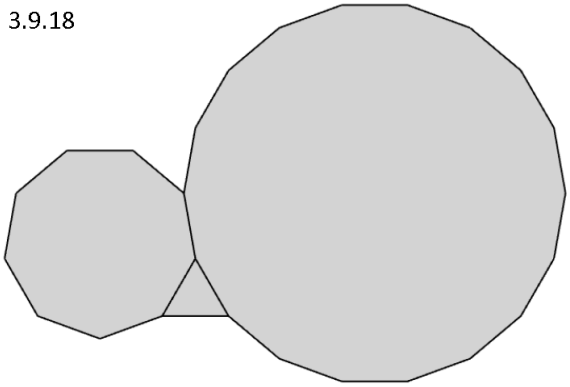


vera viana (veraviana@veraviana.net)

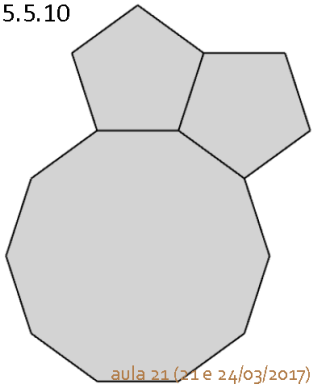
40

VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO

3.9.18



5.5.10

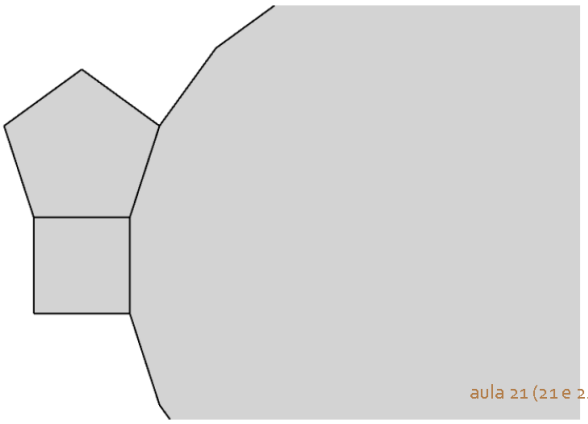


vera viana (veraviana@veraviana.net)

41

VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO

4.5.20

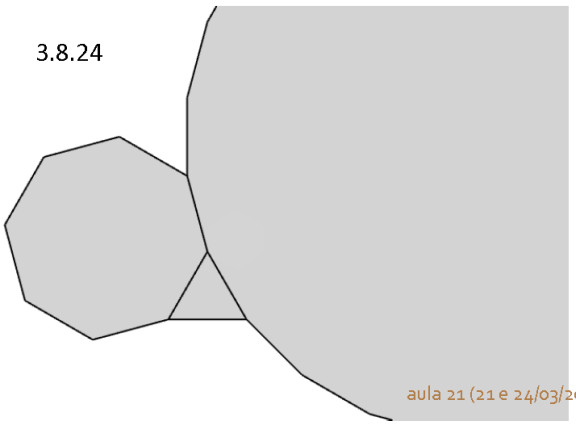


vera viana (veraviana@veraviana.net)

42

VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO

3.8.24

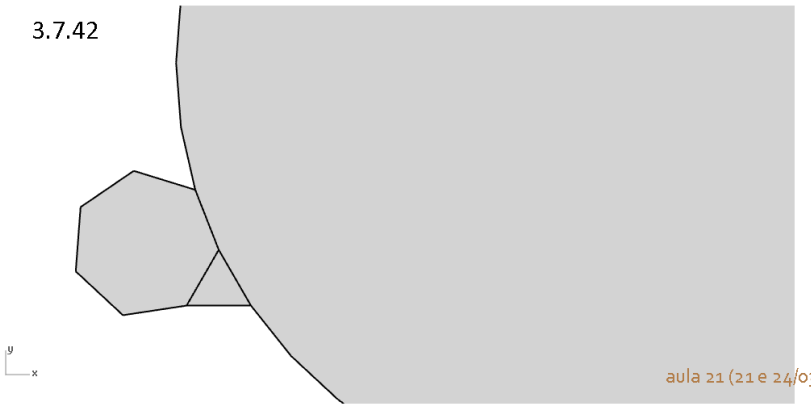


vera viana (veraviana@veraviana.net)

43

VÉRTICES DEFINIDOS POR POLÍGONOS REGULARES QUE NÃO TESSELAM O PLANO

3.7.42



vera viana (veraviana@veraviana.net)

44

De que forma é possível preencher o espaço com poliedros convexos de faces regulares, sem espaços vazios nem sobreposições?

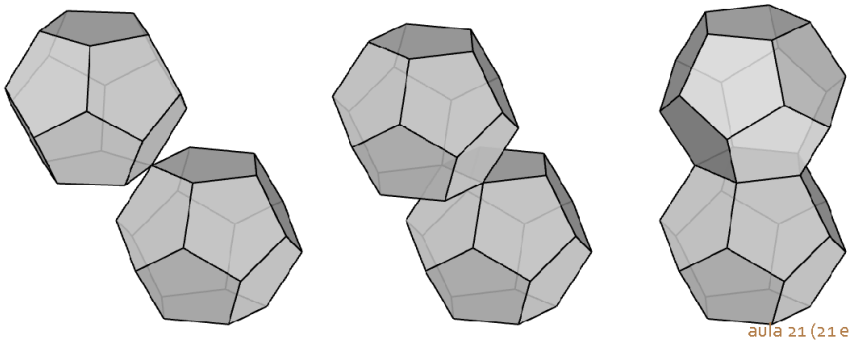
Uma tesselação sólida ou tridimensional é um conjunto infinito de poliedros que preenchem o espaço, de modo a que cada poliedro partilhe cada face com outro poliedro (não necessariamente do mesmo tipo) e sem que exista qualquer sobreposição (com excepção das faces que coincidem) nem espaços vazios entre eles.

Space-filling polyhedra
Convex Uniform Honeycombs

vera viana (veraviana@veraviana.net)

45

A justaposição de poliedros pode materializar-se segundo três alternativas:
vértice com vértice / aresta com aresta / face com face.



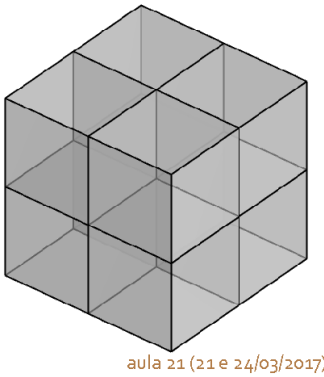
vera viana (veraviana@veraviana.net)

46

PREENCHIMENTO DO ESPAÇO COM POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Os únicos poliedros regulares convexos que, sozinhos, preenchem o espaço, são os cubos (8 cubos por vértice).

MODELAÇÃO



aula 21 (21 e 24/03/2017)

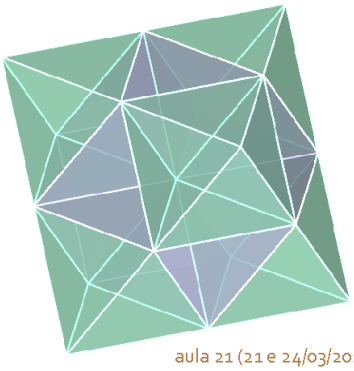
vera viana (veraviana@veraviana.net)

47

PREENCHIMENTO DO ESPAÇO COM POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Os tetraedros e os octaedros também preenchem o espaço (8 octaedros e 6 tetraedros por vértice).

MODELAÇÃO



aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

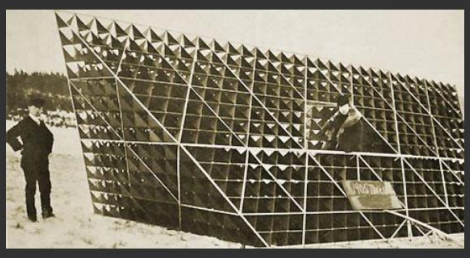
48

Aircraft cockpit tetrahedral bell in the laboratory nova scotia

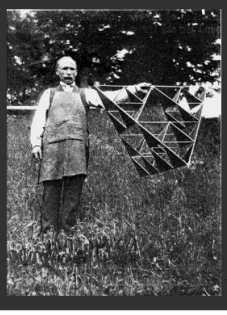


ESTRUTURA TETRAOCTAÉDRICA

Alexander Graham Bell (1847-1922) criou estruturas extremamente resistentes a partir da malha tetraoctaédrica.



Tetrahedral kite of Alexander Graham Bell, 1904

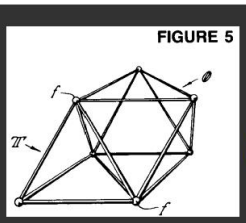


Sixteen-celled tetrahedral kite

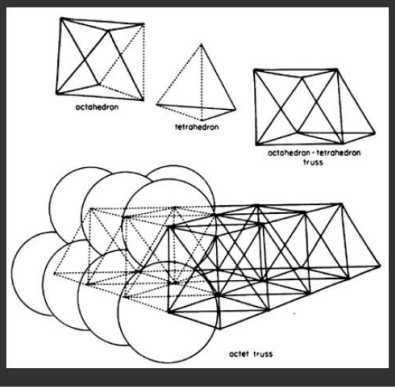
vera viana (veraviana@veraviana.net)

49

Fig. 420.01 Octet Truss. Copyright © 1997 Estate of R. Buckminster Fuller



ESTRUTURA TETRAOCTAÉDRICA



Buckminster Fuller patenteou a *octet truss*, uma estrutura modular com fortes características de rigidez e estabilidade, composta de tetraedros e octaedros regulares:

Nature's simplest structural system in the universe is the tetrahedron. The regular tetrahedron does not fill all-space by itself. The octahedron and tetrahedron complement one another to fill all space. Together they produce the simplest, most powerful structural system in the universe".

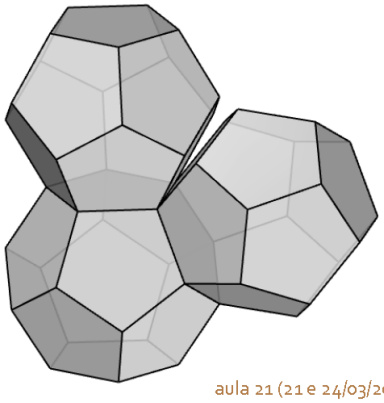
"Inventions, The Patented Works of R. Buckminster Fuller" (1983, p.167)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

50

PORQUE É QUE O DODECAEDRO REGULAR, SOZINHO, NÃO PREENCHE O ESPAÇO?

É condição necessária para o preenchimento do espaço que a soma dos ângulos diedrais entre todas as faces com uma aresta em comum seja 360º.



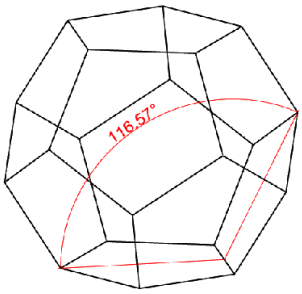
aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

51

PORQUE É QUE O DODECAEDRO REGULAR, SOZINHO, NÃO PREENCHE O ESPAÇO?

O ângulo diédrico do dodecaedro é 116,57º, razão pela qual não é possível tesselar o espaço com dodecaedros regulares.



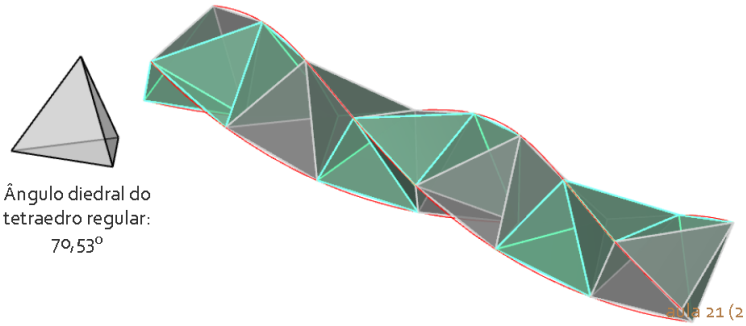
aula 21 (21 e 24/03/2017)

vera viana (veraviana@veraviana.net)

52

Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...

Hélice de Boerdijk–Coxeter (*tetrahelix*, segundo Buckminster Fuller)
Esta hélice é aperiódica, porque ângulo de rotação
entre os tetraedros é irracional ($1/\sqrt{10} \approx 0{,}316$).

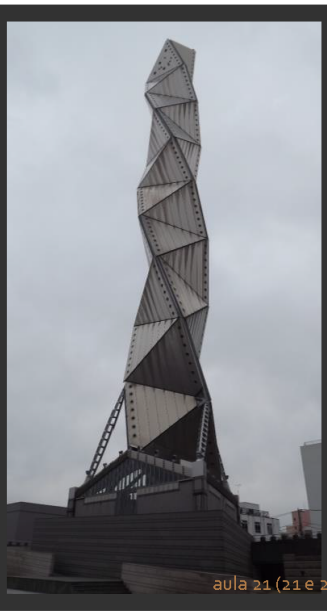


Ângulo diedral do tetraedro regular: 70,53°

vera viana (veraviana@veraviana.net)

53

HÉLICE DE BOERDIJK–COXETER



Art Tower Mito, 1990, Japão.
Arq. Arata Isozaki

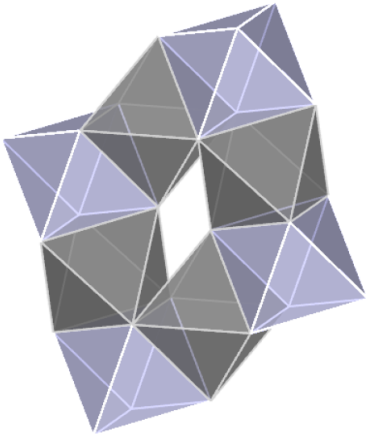
vera viana (veraviana@veraviana.net)

54

Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...

Ângulo diedral do octaedro regular: 109,47º





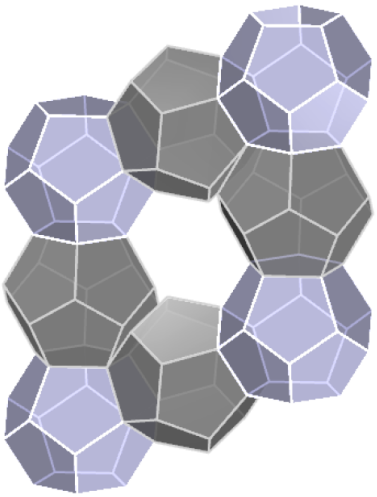
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

55

Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...

Ângulo diedral do dodecaedro regular: 116,56º



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

56


Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...
Ramot housing
Israel, 1972-75, Zvi Hecker
aula 21 (21 e 24/03/2017)

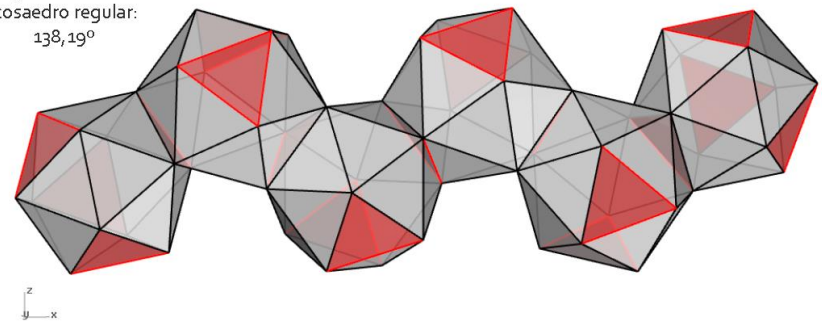
57


Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...
GERARD CARIS - PENTAGONISM
http://www.gerardcaris.com
vera viana (veraviana@veraviana.net)
aula 21 (21 e 24/03/2017)

58

Outras possibilidades para a justaposição de poliedros regulares...

Ângulo diedral do icosaedro regular: 138,19º



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 21 (21 e 24/03/2017)

59

Apêndice B: Diapositivos da Aula 22 (28 e 31 de Março de 2017)

AULA 22

Poliedros quasirregulares convexos.
Poliedros semirregulares convexos.
Poliedros arquimedianos.
Duais dos arquimedianos.
Preenchimento do espaço com "Figuras de Frequência 2".
Preenchimento do espaço com os duais das "Figuras de Frequência 2".
Preenchimento do espaço com paraleloedros primários.

Modelação de tesselações tridimensionais:

1. Tesselação com dodecaedros rômbicos.
2. Tesselação com dodecaedros alongados.
3. Tesselação com octaedros truncados.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

1

75 POLIEDROS UNIFORMES:

Poliedros de faces regulares e vértices indistinguíveis (vertex-transitive).
Todos os poliedros uniformes são inscritíveis numa esfera.
Todos os arquimedianos são inscritíveis num tetraedro regular.

9 POLIEDROS REGULARES
- 5 Convexos (poliedros platónicos)
- 4 Côncavos (poliedros de Kepler-Poinsot)

16 POLIEDROS QUASIRREGULARES
- **2 Convexos (Arquimedianos)**
- 14 Côncavos

50 POLIEDROS SEMIRREGULARES
- **11 Convexos (Arquimedianos)**
- 39 Côncavos

∞ PRISMAS DE FACES REGULARES (convexos e côncavos)
∞ ANTIPRISMAS DE FACES REGULARES (convexos e côncavos)

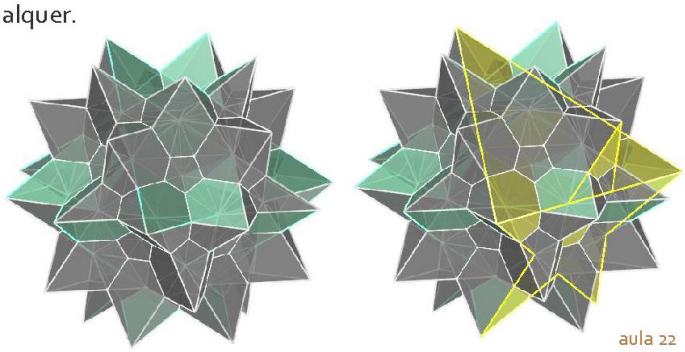
vera viana (veraviana@veraviana.net)

2

POLIEDROS QUASIRREGULARES (2 convexos + 14 côncavos)

São definidos por faces regulares de dois tipos e cada uma delas está inteiramente rodeada por faces de tipo diferente, sendo iguais os ângulos diedrais entre cada par. Admitem simetrias que transformam um dado vértice noutro vértice qualquer.

O grande icosidodecaedro, com vinte faces triangulares regulares e doze faces pentagramáticas, é o poliedro comum ao grande dodecaedro estrelado e ao grande icosaedro.



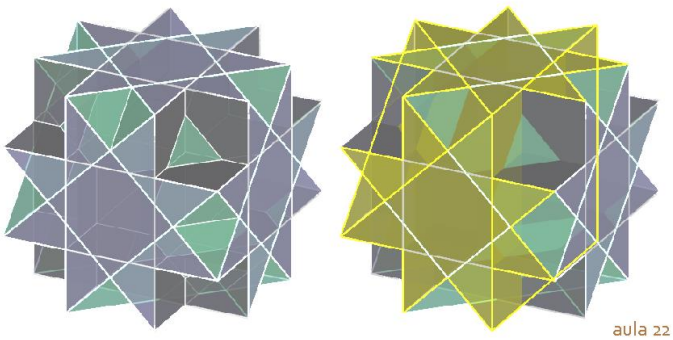
vera viana (veraviana@veraviana.net)

3

POLIEDROS SEMIRREGULARES (11 convexos + 39 côncavos)

São definidos por faces regulares que se intersectam de modo idêntico em todos os vértices, admitindo simetrias que transformam um dado vértice noutro vértice qualquer.

Em cada vértice do grande cubicuboctaedro intersectam-se duas faces octagramáticas, uma face triangular e uma face quadrada.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

4

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

poliedros convexos definidos por faces regulares de dois ou de três tipos distintos e vértices transitivos.

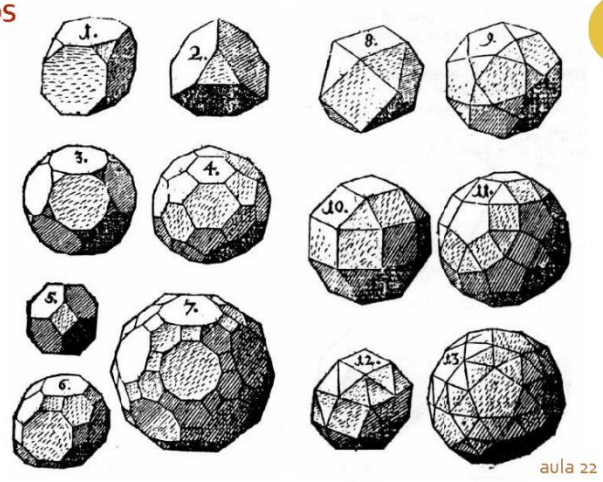


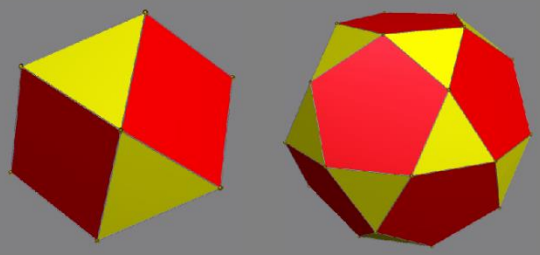
Ilustração dos treze arquimedianos, Kepler in *Harmonices Mundi*, 1619.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

5

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS QUASIRREGULARES

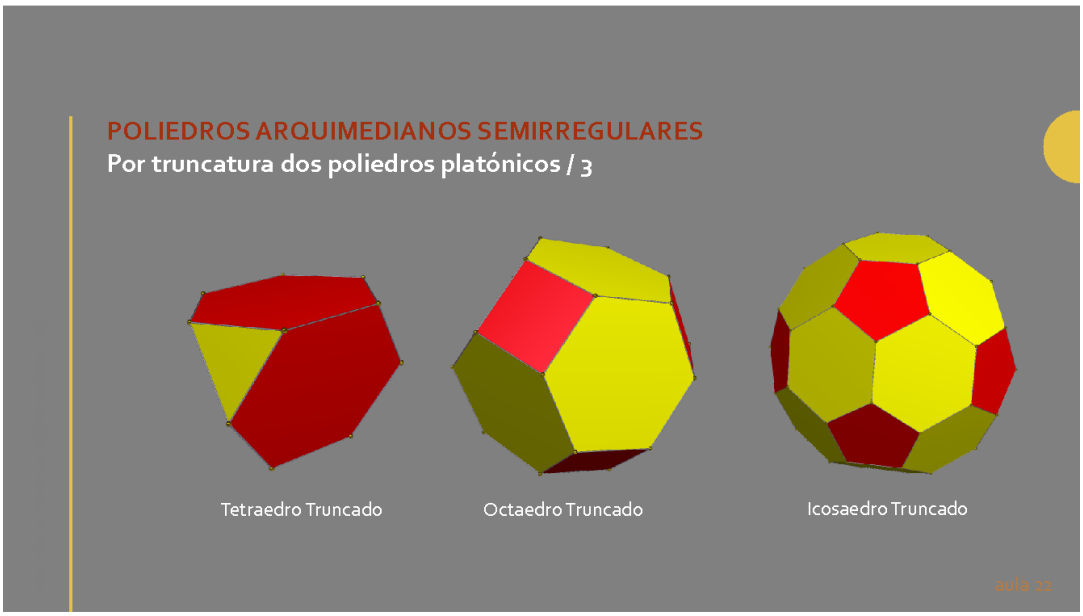
Por truncatura dos poliedros platónicos / 2



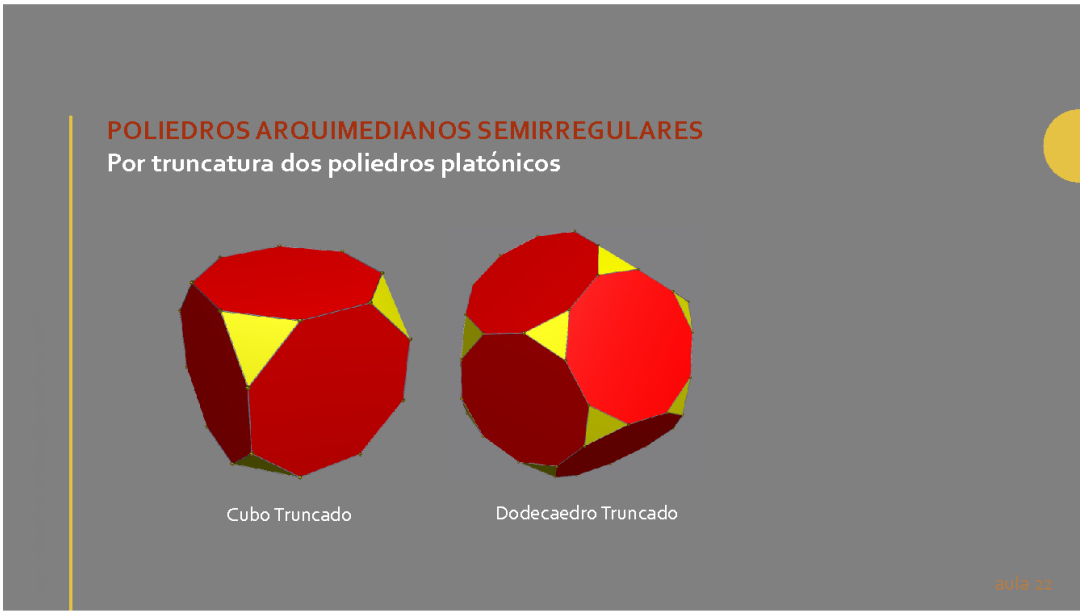
Cuboctaedro

Icosidodecaedro

6


POLIEDROS ARQUIMEDIANOS SEMIRREGULARES
Por truncatura dos poliedros platónicos / 3
Tetraedro Truncado
Octaedro Truncado
Icosaedro Truncado
aula 22

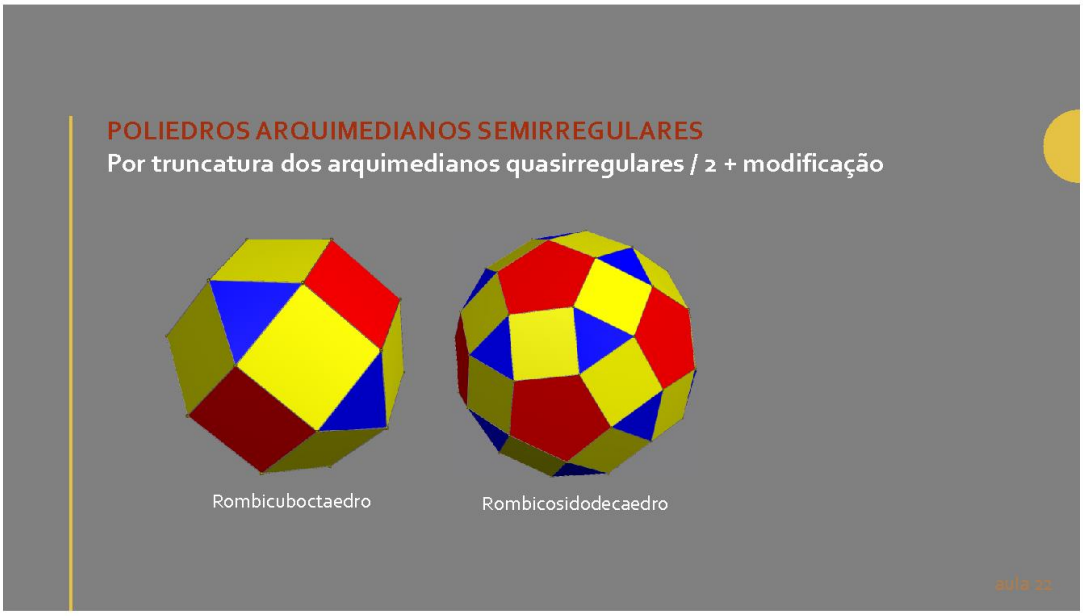
7


POLIEDROS ARQUIMEDIANOS SEMIRREGULARES
Por truncatura dos poliedros platónicos
Cubo Truncado
Dodecaedro Truncado
aula 22

8


Pavilhão da Alemanha
Frei Otto
expo67
MAN THE PRODUCER PAVILION AT EXPO 67
Affleck, Desbarets, Dimakopoulos, Lebensold and Sise, Canada
http://www.westland.net/expo67/map-docs/architecture.htm
Pavilhão dos Estados Unidos da América
Buckminster Fuller
aula 22

9


POLIEDROS ARQUIMEDIANOS SEMIRREGULARES
Por truncatura dos arquimedianos quasirregulares / 2 + modificação
Rombicuboctaedro
Rombicosidodecaedro
aula 22

10

National Library of Belarus, Minsk
Ihail Vinogradov and Viktor Kramarenko, 2006



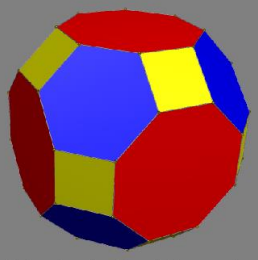
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

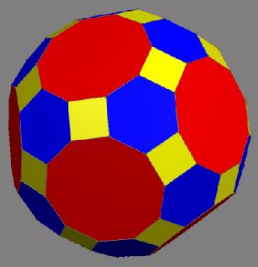
11

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS SEMIRREGULARES

Por truncatura dos arquimedianos quasirregulares / 3 + modificação



Cuboctaedro Rombitruncado

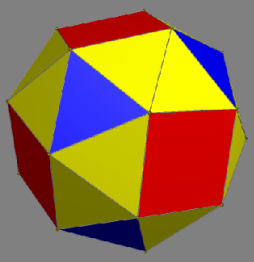


Icosidodecaedro Rombitruncado

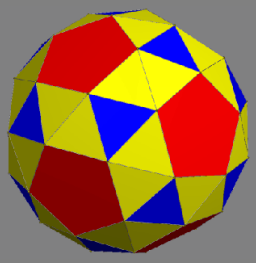
aula 22

12

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS SEMIRREGULARES



Cubo Achatado

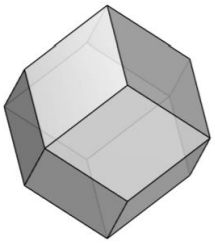


Dodecaedro Achatado

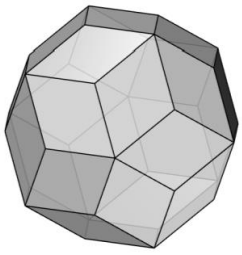
aula 22

13

DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)



Dodecaedro Rômbico
Dual do Cuboctaedro



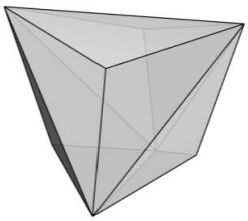
Triacontaedro Rômbico
Dual do Icosidodecaedro

vera viana (veraviana@veraviana.net)

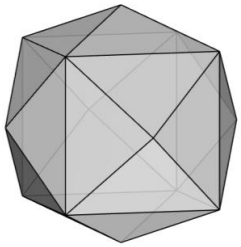
aula 22

14

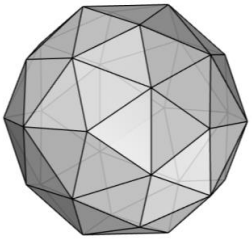
DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)



Tetraedro Triakis
Dual do Tetraedro Truncado



Hexaedro Tetrakis
Dual do Octaedro Truncado



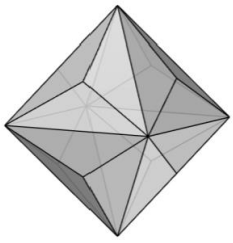
Dodecaedro Pentakis
Dual do Icosaedro Truncado

aula 22

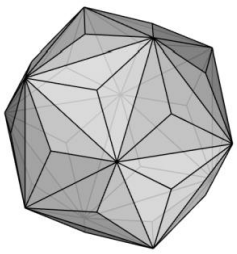
vera viana (veraviana@veraviana.net)

15

DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)



Octaedro Triakis
Dual do Cubo Truncado



Icosaedro Triakis
Dual do Dodecaedro Truncado

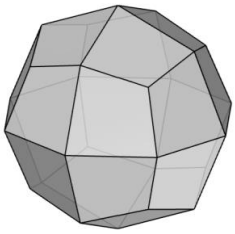
aula 22

vera viana (veraviana@veraviana.net)

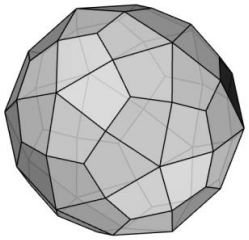
16

DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)

.



Icositetraedro Deltoidal
Dual do Rombicuboctaedro



Hexacontaedro Deltoidal
Dual do Rombicosidodecaedro

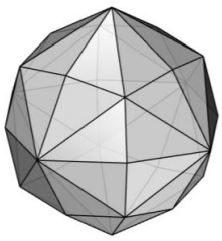
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

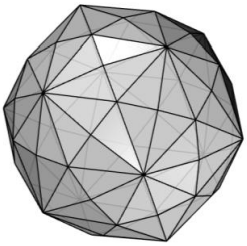
17

DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)

.



Dodecaedro Disdyakis
Dual do Cuboctaedro
Rombitruncado



Triacontaedro Disdyakis
Dual do Icosidodecaedro
Rombitruncado

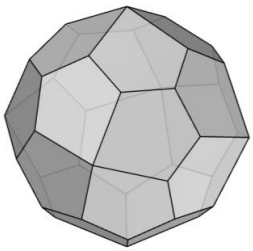
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

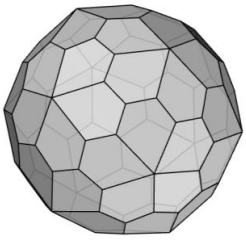
18

DUAIS DOS ARQUIMEDIANOS - SÓLIDOS DE CATALAN (1865)

.



Icositetraedro Pentagonal
Dual do Cubo Achatado



Hexacontaedro Pentagonal
Dual do Dodecaedro Achatado

vera viana (veraviana@veraviana.net)

"FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2"

DUAIS DAS "FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2"

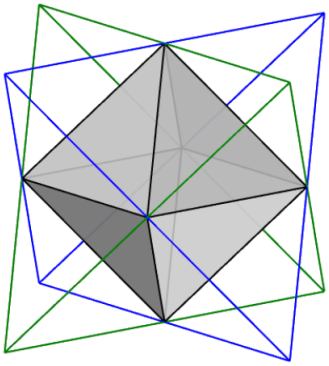
vera viana (veraviana@veraviana.net)

FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2 - OCTAEDRO REGULAR

Os vértices do octaedro regular coincidem com o ponto médio das arestas do tetraedro regular.

É o poliedro comum a dois tetraedros inclusos num cubo.

As faces do octaedro coincidem com as figuras verticiais do tetraedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

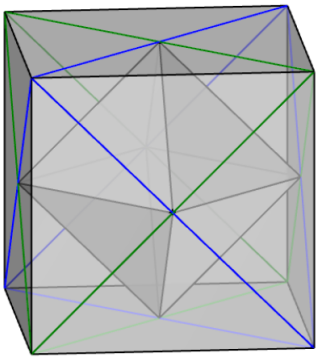
aula 22

21

MENOR POLIEDRO CONVEXO (CONVEX HULL)

O menor poliedro convexo que contém os dois tetraedros duais é o CUBO.

O cubo é dual do octaedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

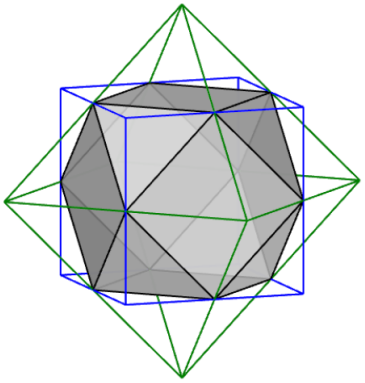
22

FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2 - CUBOCTAEDRO

Os vértices do cuboctaedro
coincidem com o ponto médio
das arestas do cubo ou do octaedro regular.

É o poliedro comum a um cubo e um octaedro
regular com a mesma interesfera.

As faces do cuboctaedro coincidem
com as figuras verticiais do cubo e do octaedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

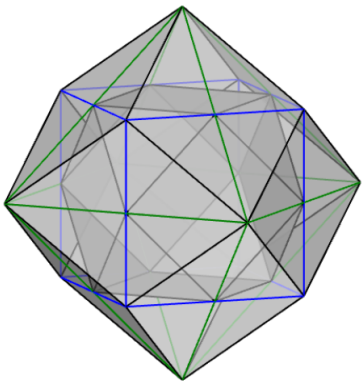
aula 22

23

MENOR POLIEDRO CONVEXO (CONVEX HULL)

O menor poliedro convexo que contém
o cubo e o octaedro é o **DODECAEDRO RÔMBICO**

O dodecaedro rômbico é dual do cuboctaedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

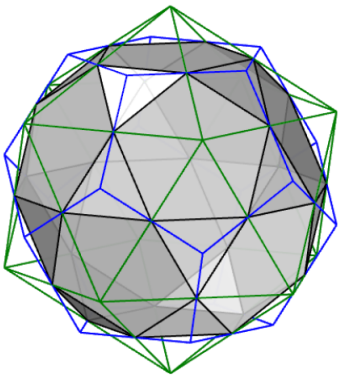
24

FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2 - ICOSIDODECAEDRO

Os vértices do icosidodecaedro
coincidem com o ponto médio
das arestas do dodecaedro regular
ou do icosaedro regular.

É o poliedro comum a um dodecaedro regular
e um icosaedro regular com a mesma interesfera.

As faces do icosidodecaedro coincidem
com as figuras verticiais do dodecaedro
e do icosaedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

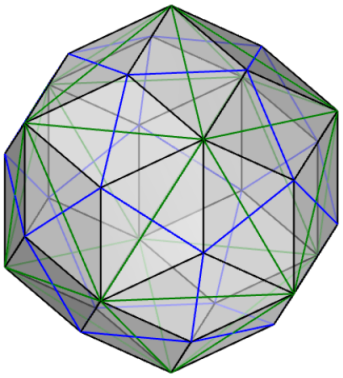
aula 22

25

MENOR POLIEDRO CONVEXO (CONVEX HULL)

O menor poliedro convexo que contém
o dodecaedro e o icosaedro é o
TRIACONTAEDRO RÔMBICO.

O triacontaedro rômbico é dual do
icosidodecaedro.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

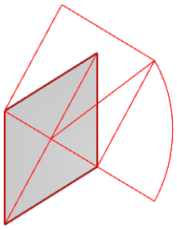
26

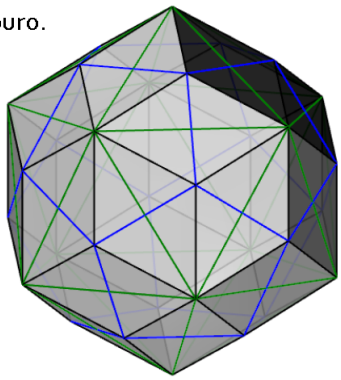
TRIACONTAEDRO RÔMBICO

As faces do triacontaedro rômbico são losangos de ouro.

As diagonais menores
correspondem
às arestas do dodecaedro.

As diagonais maiores
correspondem às arestas
do icosaedro





vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

27

PREENCHIMENTO DO ESPAÇO COM "FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2"

PREENCHIMENTO DO ESPAÇO COM OS DUAIS DAS "FIGURAS DE FREQUÊNCIA 2"

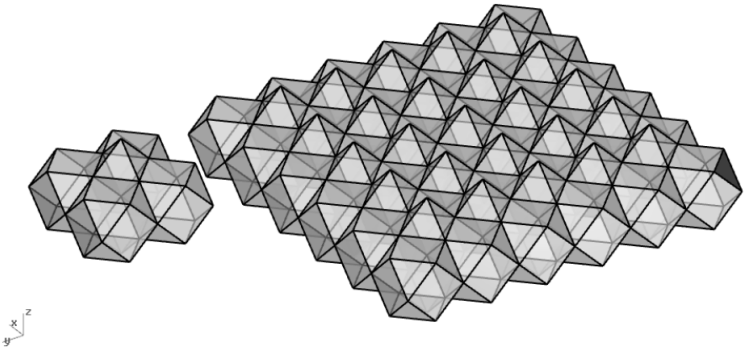
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

28

O CUBOCTAEDRO PREENCHE O ESPAÇO?

- **4 cuboctaedros e 2 octaedros regulares**
- 1 cuboctaedro, 2 octaedros truncados e 2 tetraedros truncados
- 1 cuboctaedro, 2 cubos e 2 rombicuboctaedros



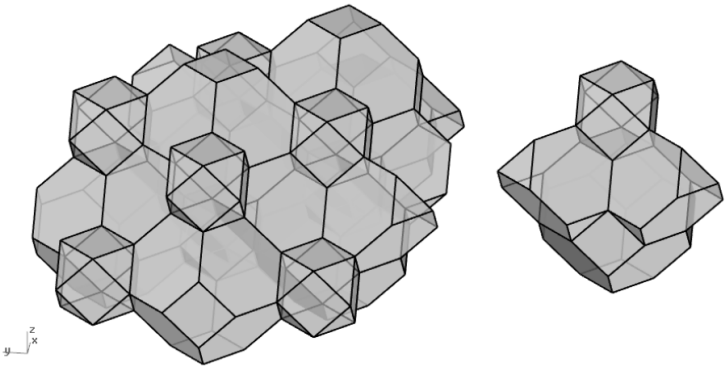
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

29

O CUBOCTAEDRO PREENCHE O ESPAÇO?

- 4 cuboctaedros e 2 octaedros regulares
- **1 cuboctaedro, 2 octaedros truncados e 2 tetraedros truncados**
- 1 cuboctaedro, 2 cubos e 2 rombicuboctaedros



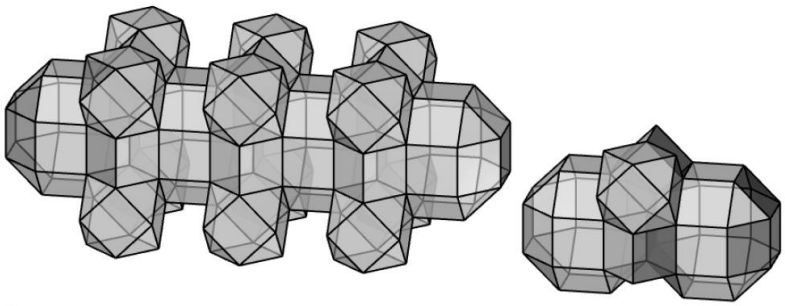
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

30

O CUBOCTAEDRO PREENCHE O ESPAÇO?

- 4 cuboctaedros e 2 octaedros regulares
- 1 cuboctaedro, 2 octaedros truncados e 2 tetraedros truncados
- **1 cuboctaedro, 2 cubos e 2 rombicuboctaedros**



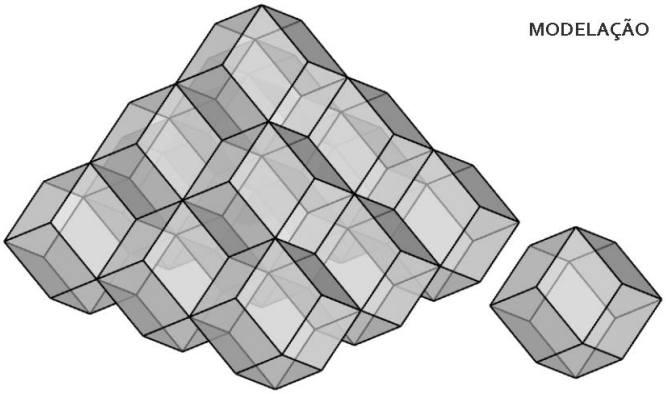
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

31

O DODECAEDRO RÔMBICO PREENCHE O ESPAÇO?

MODELAÇÃO

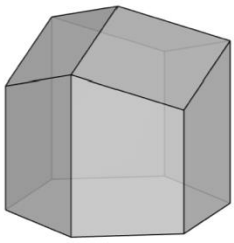


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

32

DODECAEDRO RÔMBICO



Os favos de mel são compostos pela superfície lateral de um prisma hexagonal recto e, no fundo, por três faces do dodecaedro rômbico.



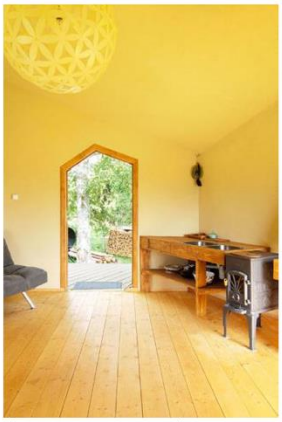
Andradite Garnet crystal



vera viana (veraviana@veraviana.net)

DODECAEDRO RÔMBICO



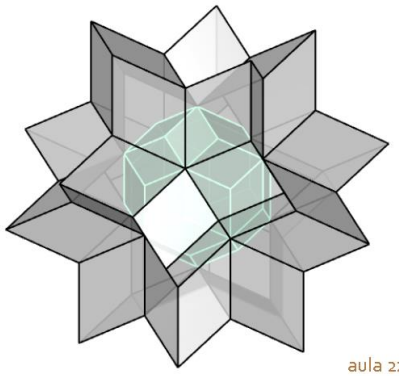


Aiamaja Noa
Jaanus Orgusaar, Estónia
https://www.dezeen.com/2014/02/13/six-sided-wooden-modular-cabin-jaanus-orgusaar/

vera viana (veraviana@veraviana.net)

O TRIACONTAEDRO RÔMBICO PREENCHE O ESPAÇO?

O triacontaedro rômbico preenche o espaço, quando conjugado com o hexacontaedro rômbico, que é uma das suas 277 estrelações.



aula 22

vera viana (veraviana@veraviana.net)

35

TRIACONTAEDRO RÔMBICO



DECADOME
Eric Barclay Lipson
https://www.decadome.com/story.html

aula 22

vera viana (veraviana@veraviana.net)

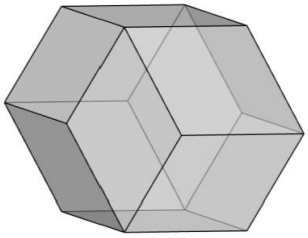
36

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV (1879)

Poliedros de faces opostas paralelas.
As faces têm número par de lados, sendo os opostos iguais e paralelos entre si.

Os cinco sólidos de Fedorov, ou paraleloedros primários, preenchem o espaço por translação, isto é, sem que seja necessária qualquer mudança na sua orientação.

Em 1960, foi descoberto o dodecaedro de Bilinski ou segundo dodecaedro rômbico, que também preenche o espaço por translação.



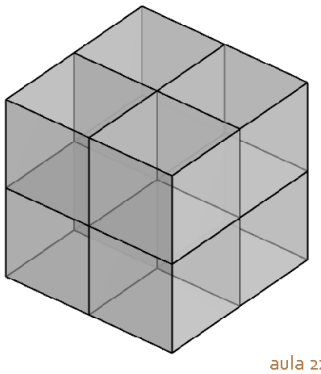
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

37

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

1. Cubos (regular, 8)
2. Prismas hexagonais
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos
4. Dodecaedros alongados
5. Octaedros truncados
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski



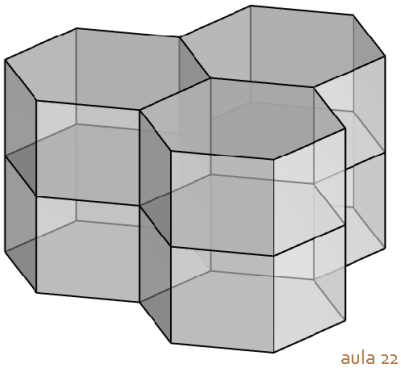
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

38

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

1. Cubos (regular, 8)
2. **Prismas hexagonais (semirregular, 6)**
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos
4. Dodecaedros alongados
5. Octaedros truncados
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski



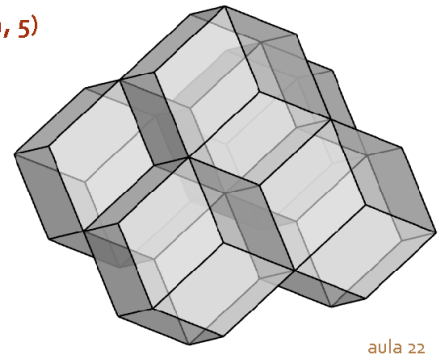
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

39

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

1. Cubos (regular, 8)
2. Prismas hexagonais (semirregular, 6)
3. **(Primeiros) dodecaedros rômbicos (Catalan, 5)**
4. Dodecaedros alongados
5. Octaedros truncados
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

40

DODECAEDRO RÔMBICO



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

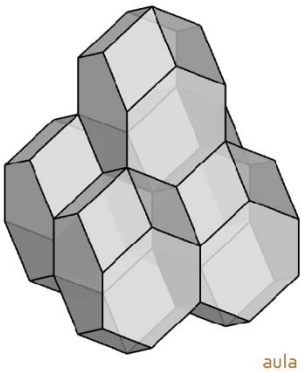
41

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

1. Cubos (regular, 8)
2. Prismas hexagonais (semirregular, 6)
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos (Catalan, 5)
4. **Dodecaedros alongados (5)**
5. Octaedros truncados
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski

.

MODELAÇÃO



vera viana (veraviana@veraviana.net)

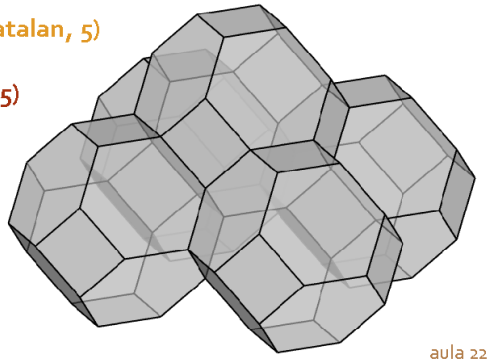
aula 22

42

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

MODELAÇÃO

1. Cubos (regular, 8)
2. Prismas hexagonais (semirregular, 6)
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos (Catalan, 5)
4. Dodecaedros alongados (5)
5. **Octaedros truncados (arquimediano, 5)**
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski



aula 22

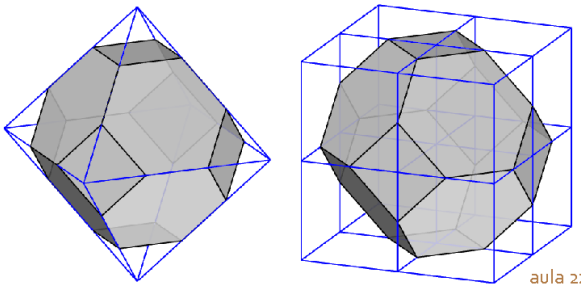
vera viana (veraviana@veraviana.net)

43

FIGURAS DE FREQUÊNCIA 3 – OCTAEDRO TRUNCADO

Resulta da truncagem do octaedro.

Os vértices do octaedro truncado coincidem com a terça parte das arestas do octaedro regular.



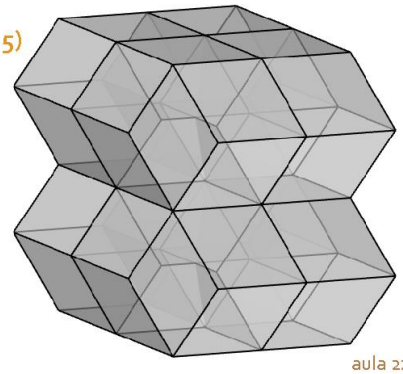
aula 22

vera viana (veraviana@veraviana.net)

44

PARALELOEDROS PRIMÁRIOS / SÓLIDOS DE FEDOROV

1. Cubos (regular, 8)
2. Prismas hexagonais (semirregular, 6)
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos (Catalan, 5)
4. Dodecaedros alongados (5)
5. Octaedros truncados (arquimediano, 5)
6. **Dodecaedros rômbicos de Bilinski (8)**



vera viana (veraviana@veraviana.net)

45

OCTAEDROS TRUNCADOS

Architect Zvi Hecker

Synagogue in the Negev Desert.
Israel, 1967-1969

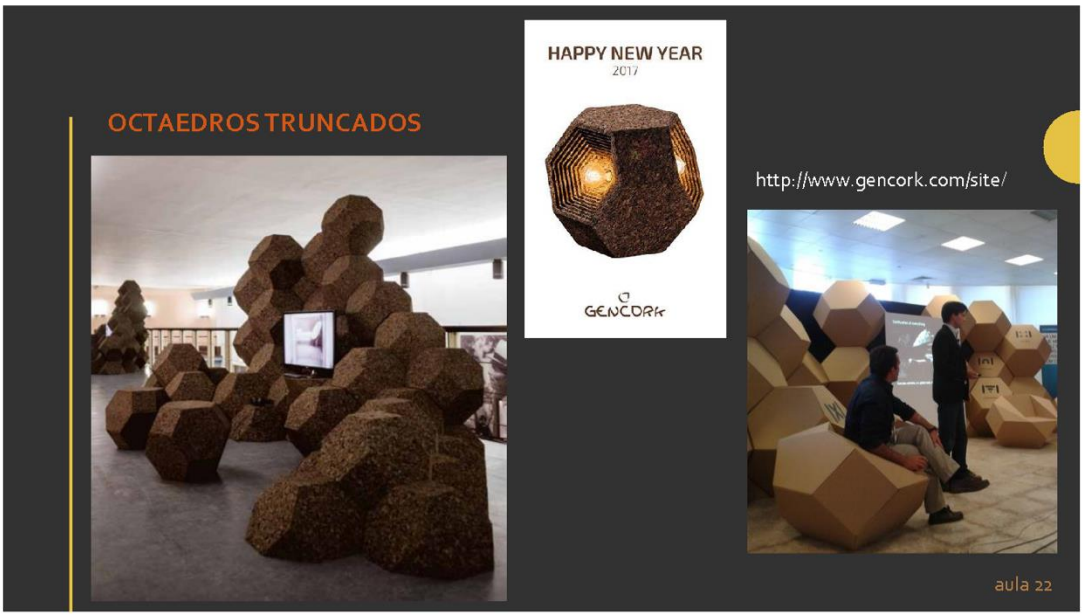




46


OCTAEDROS TRUNCADOS
Children's playgrounds - Kodomo no Kun, Tokyo
aula 22

47


OCTAEDROS TRUNCADOS
HAPPY NEW YEAR
2017
GENCORK
http://www.gencork.com/site/
aula 22

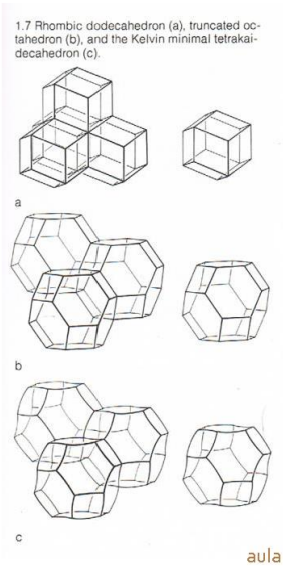
48

In *Structure in Nature is a Strategy for Design*
Peter Jon Pearce, 1978, p. 5

TETRAKAIDECAEDROS & Co.

No séc. XIX, Lord Kelvin analisou as possibilidades de preenchimento do espaço com células semelhantes a octaedros truncados, com faces quadradas planas e, no lugar das faces hexagonais, superfícies mínimas.

Kelvin conjecturou que o sólido com 14 faces que descreveu - o **tetrakaidecaedro** - seria a célula poliédrica que melhor preencheria o espaço.

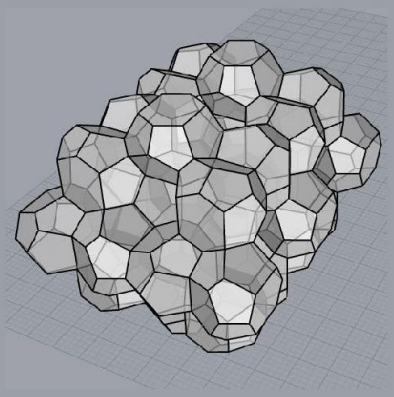


aula 22

49

TETRAKAIDECAEDROS & Co.

A investigação em torno da **Conjectura de Kelvin** viria a conhecer novos desenvolvimentos em 1994, com a **estrutura de Weaire e Phelan**, composta por dodecaedros e tetrakaidecaedros, (cujas faces pentagonais são superfícies mínimas e as hexagonais planas) que permitem preencher o espaço de forma mais eficiente do que o sólido de Lord Kelvin.



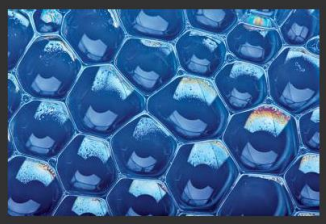
http://www.designcoding.net/weaire-phelan-structure/

aula 22

50

TETRAKAIDECAEDROS & Co.

A estrutura de Weaire-Phelan foi explorada no pavilhão *Water Cube* dos Jogos Olímpicos de Pequim de 2008.





Water Cube, PTW Architects. Pequim

aula 22

51

Bosques de La Esperanza, Bogotá, Colombia
Giancarlo Mazzanti, 2011

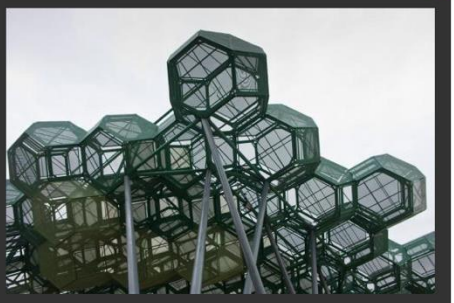


aula 22

52

Bosques de La Esperanza, Bogotá, Colombia
Giancarlo Mazzanti, 2011



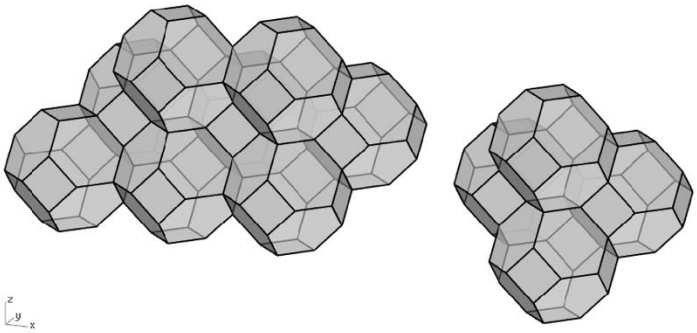


aula 22

53

O OCTAEDRO TRUNCADO PREENCHE O ESPAÇO?

- **4 octaedros truncados**
- 2 tetraedros truncados, 2 octaedros truncados e 1 cuboctaedro
- 1 cubo, 1 octaedro truncado e 2 cuboctaedros rombitruncados



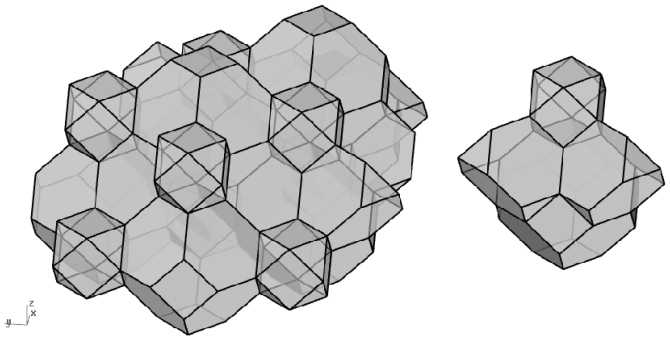
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

54

O OCTAEDRO TRUNCADO PREENCHE O ESPAÇO?

- 4 octaedros truncados
- **2 tetraedros truncados, 2 octaedros truncados e 1 cuboctaedro**
- 1 cubo, 1 octaedro truncado e 2 cuboctaedros rombitruncados



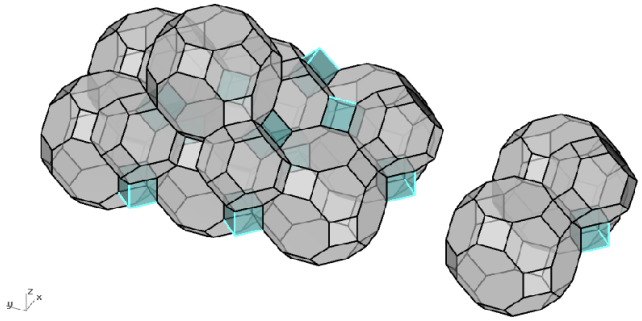
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

55

O OCTAEDRO TRUNCADO PREENCHE O ESPAÇO?

- 4 octaedros truncados
- 2 tetraedros truncados, 2 octaedros truncados e 1 cuboctaedro
- **1 cubo, 1 octaedro truncado e 2 cuboctaedros rombitruncados**



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 22

56

Apêndice C: Diapositivos da Aula 23 (04 e 07 de Abril de 2017)

AULA 23

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES

TESSELAÇÕES
COM PLESIOEDROS (exemplos)

TESSELAÇÕES
COM POLIEDROS CÔNCAVOS E CONVEXOS (exemplos)

TESSELAÇÕES
COM BASE NA PARTIÇÃO DO CUBO

DESAFIO.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

1

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES

UNIFORM HONEYCOMBS

As tesselações sólidas convexas uniformes foram exploradas por Thorold Gosse em 1900 e por Andreini que, em 1905, descreveu 23 possibilidades distintas de preencher o espaço com sólidos regulares e/ou semirregulares de um a quatro tipos diferentes.

Em 1991, Norman Johnson alargaria estas 23 possibilidades para 28, limite que viria a ser comprovado por Grünbaum em 1994 e por Olshevsky em 2006.

aula 23

vera viana (veraviana@veraviana.net)

2

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

1 REGULAR (CÚBICA)
1 QUASIRREGULAR (TETRAOCTAÉDRICA)
5 OBTIDAS A PARTIR DA TESSELAÇÃO TETRAOCTAÉDRICA
7 OBTIDAS A PARTIR DA TESSELAÇÃO CÚBICA
10 PRISMÁTICAS
4 OBTIDAS POR MODIFICAÇÃO DAS PRISMÁTICAS

vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

3

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

Envolvem os seguintes poliedros de faces regulares:

CUBOS
TETRAEDROS
OCTAEDROS
TETRAEDROS TRUNCADOS
OCTAEDROS TRUNCADOS
CUBOCTAEDROS
CUBOS TRUNCADOS
ROMBICUBOCTAEDROS
CUBOCTAEDROS ROMBITRUNCADOS
PRISMAS TRIANGULARES
PRISMAS HEXAGONAIS
PRISMAS OCTOGONAIS.

vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

4

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

John Conway apelida todas as tesselações que incluem poliedros arquimedianos como tesselações arquitectónicas.

"*We shall use the term Architectonic tessellation for the three-dimensional analogs of the plane Archimedean tessellations (...).The term is appropriate because Architectonics is the theory of structural design and because its beginning reminds us of Archimedes*"(p. 292).

Conway, J. H., Burgiel, H., & Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things*. Wellesley, MA: A.K. Peters, p. 292-298:

aula 23

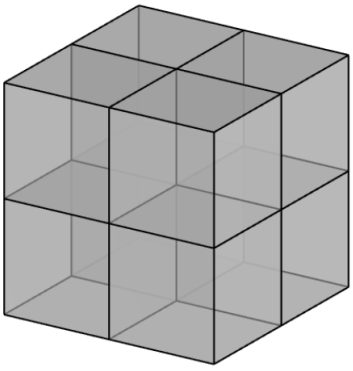
vera viana (veraviana@veraviana.net)

5

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

1 REGULAR
(as células são regulares e iguais)

CUBILLE
(8 cubos)



aula 23

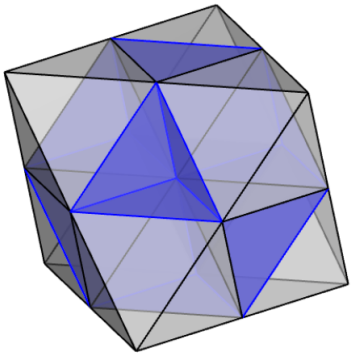
vera viana (veraviana@veraviana.net)

6

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

1 QUASIRREGULAR
(as células são regulares
e a figura verticial (DR) é quasirregular)

TETROCTAHEDRILLE
(8 tetraedros regulares e
6 octaedros regulares)



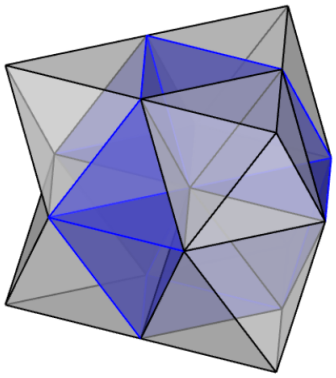
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

7

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO
TETRAOCTAÉDRICA (1/5)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

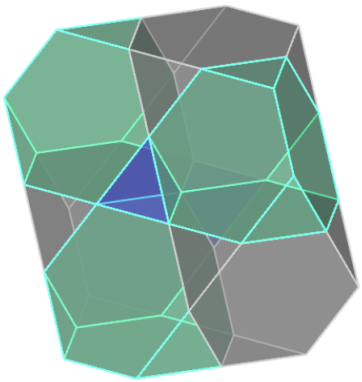
aula 23

8

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO
TETRAOCTAÉDRICA (2/5)

TRUNCTETRAHEDRILLE
(6 tetraedros truncados e
2 tetraedros regulares)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

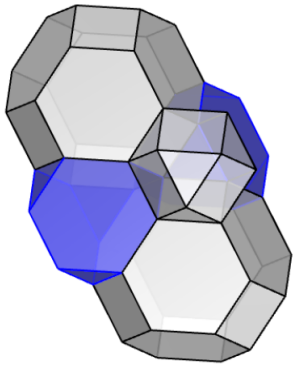
aula 23

9

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO
TETRAOCTAÉDRICA (3/5)

TRUNCATED
TETROCTAHEDRILLE
(2 tetraedros truncados,
1 cuboctaedro e 2
octaedros truncados)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

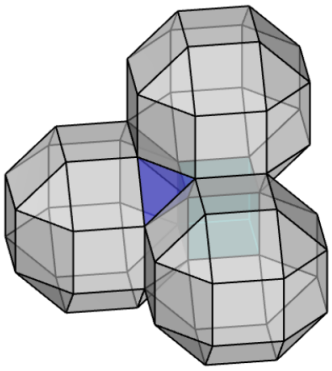
aula 23

10

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO
TETRAOCTAÉDRICA (4/5)

3-RCO-HEDRILLE
(1 cubo, 1 tetreadro regular
e 3 rombicuboctaedros)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

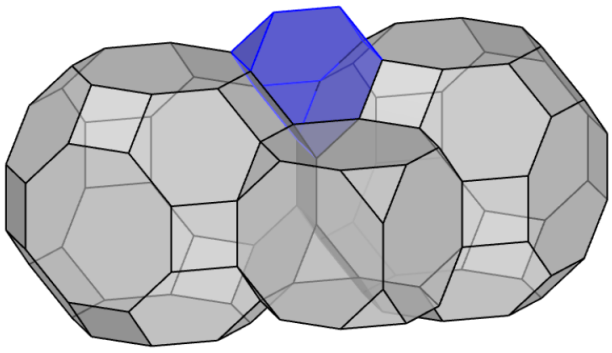
aula 23

11

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO
TETRAOCTAÉDRICA (5/5)

f-tCO-HEDRILLE
(1 cubo truncado,
1 tetraedro truncado,
2 cuboctaedros
rombitruncados)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

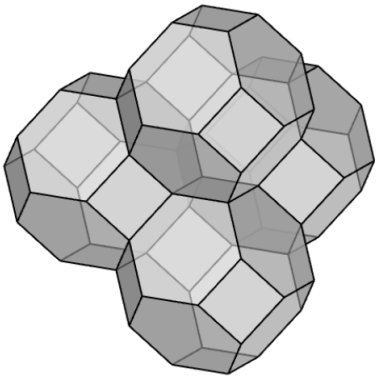
aula 23

12

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (1/7)

TRUNCOCTAHEDRILLE
(4 octaedros truncados)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

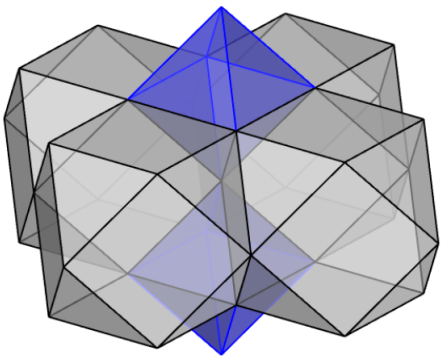
aula 23

13

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (2/7)

CUBOCTAHEDRILLE
(4 Cuboctaedros
e 2 octaedros regulares)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

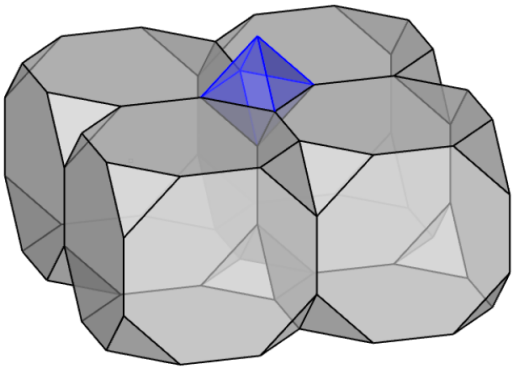
aula 23

14

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (3/7)

TRUNCATED CUBILLE
(4 cubos truncados
e 1 octaedro)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

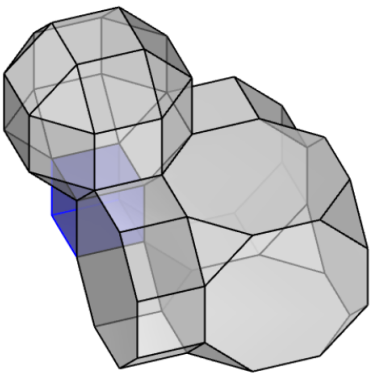
aula 23

15

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (4/7)

1-RCO-HEDRILLE
(1 rombicuboctaedro,
2 prismas octogonais,
1 cubo e 1 cubo truncado)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

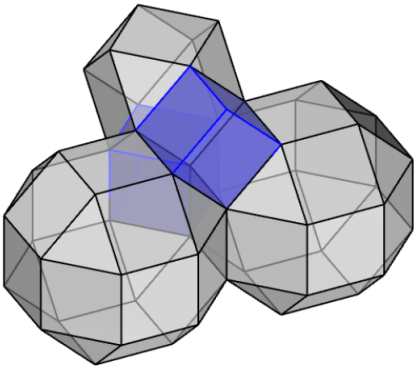
aula 23

16

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (5/7)

2-RCO-HEDRILLE
(2 cubos, 1 cuboctaedro
e rombicuboctaedros)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

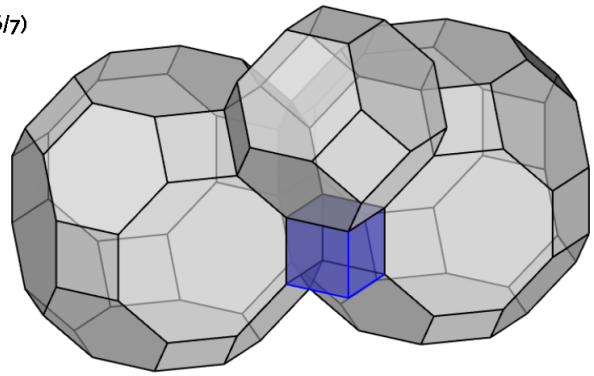
aula 23

17

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (6/7)

n-tCO-HEDRILLE
(2 Cuboctaedros
rombitruncados,
1 octaedro truncado
e 1 cubo)



vera viana (veraviana@veraviana.net)

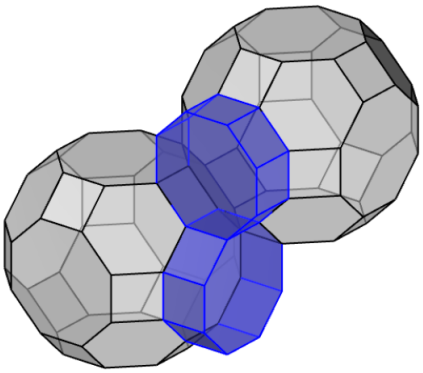
aula 23

18

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

OBTIDAS A PARTIR
DA TESSELAÇÃO CÚBICA (7/7)

b-tCO-HEDRILLE
(2 prismas octogonais
e 2 cuboctaedros rombitruncados)



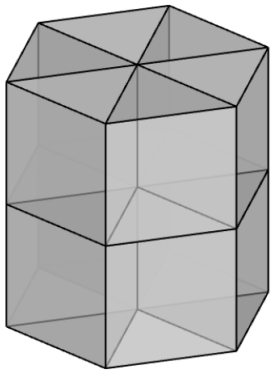
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

19

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (1/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.3.3.3.3.3)



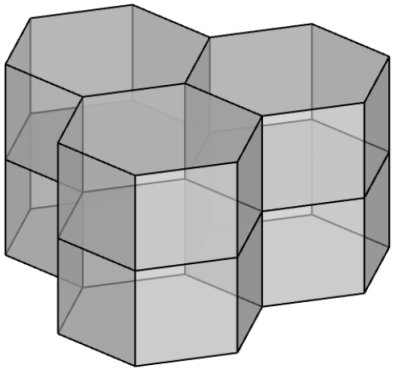
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

20

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (2/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 6.6.6)



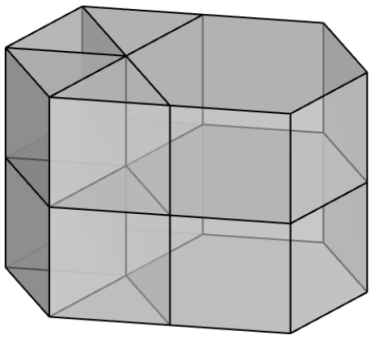
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

21

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (3/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.3.3.3.6)



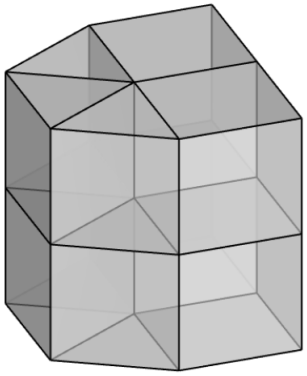
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

22

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (4/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.3.3.4.4)



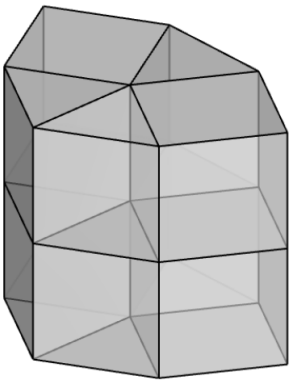
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

23

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (5/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.3.4.3.4)
.



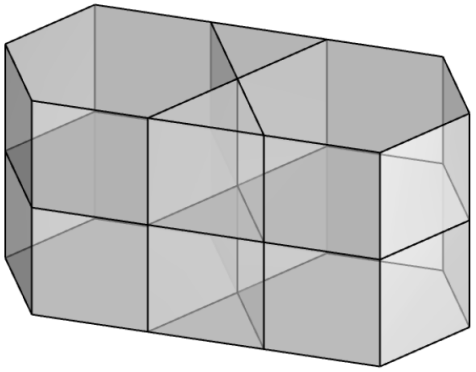
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

24

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (6/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.6.3.6)



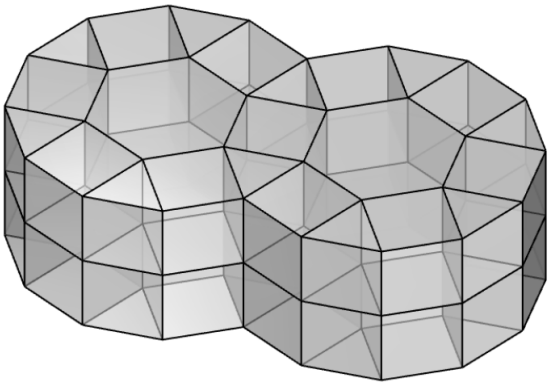
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

25

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (7/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.4.6.4)



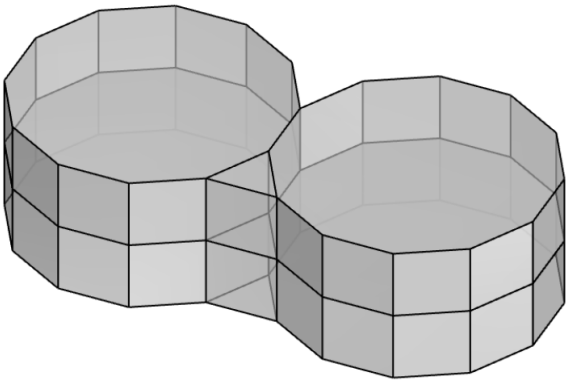
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

26

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (8/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 3.12.12)



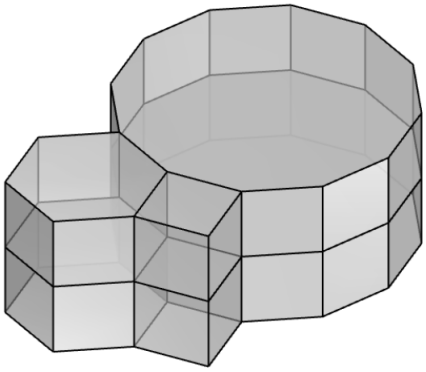
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

27

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (9/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 4.6.12)
.



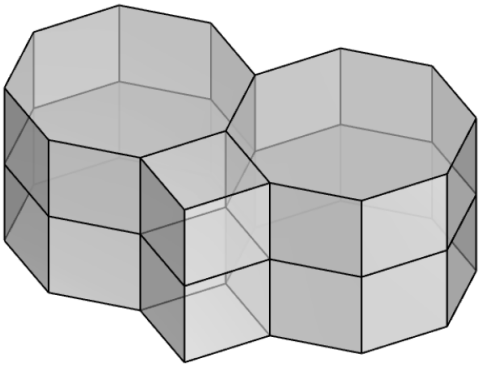
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

28

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

PRISMÁTICA (10/10)
(POR EXTRUSÃO DA
TESSELAÇÃO 4.8.8)



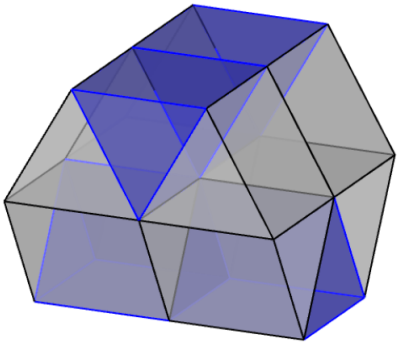
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

29

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

POR MODIFICAÇÃO
DAS PRISMÁTICAS (1/4)



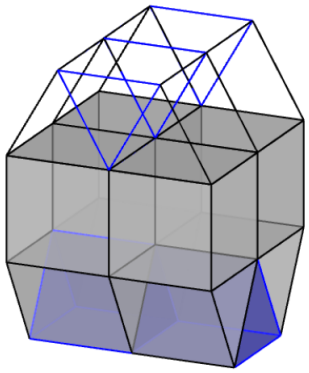
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

30

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

POR MODIFICAÇÃO
DAS PRISMÁTICAS (2/4)

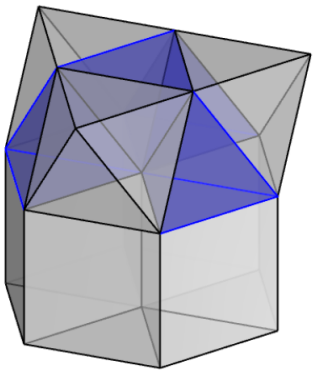


vera viana (veraviana@veraviana.net)

31

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

POR MODIFICAÇÃO
DAS PRISMÁTICAS (3/4)



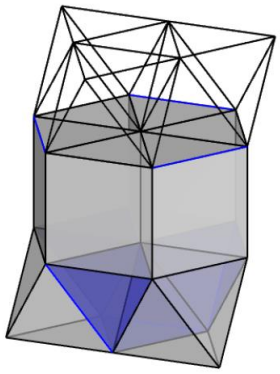
vera viana (veraviana@veraviana.net)

32

TESSELAÇÕES UNIFORMES
COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES:

POR MODIFICAÇÃO
DAS PRISMÁTICAS (4/4)

TETRAOCTAÉDRICA GIROALONGADA



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

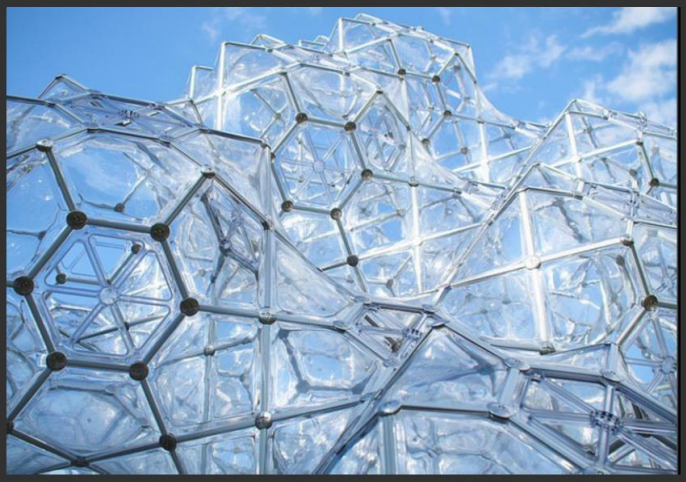
33

Curved Space Structure.
Peter Jon Pearce

https://www.linkedin.com/pulse/peter-jon-pearce-building-most-energy-efficient-house-bernstein

http://curvedspacediamondstructure.tumblr.com/page/3



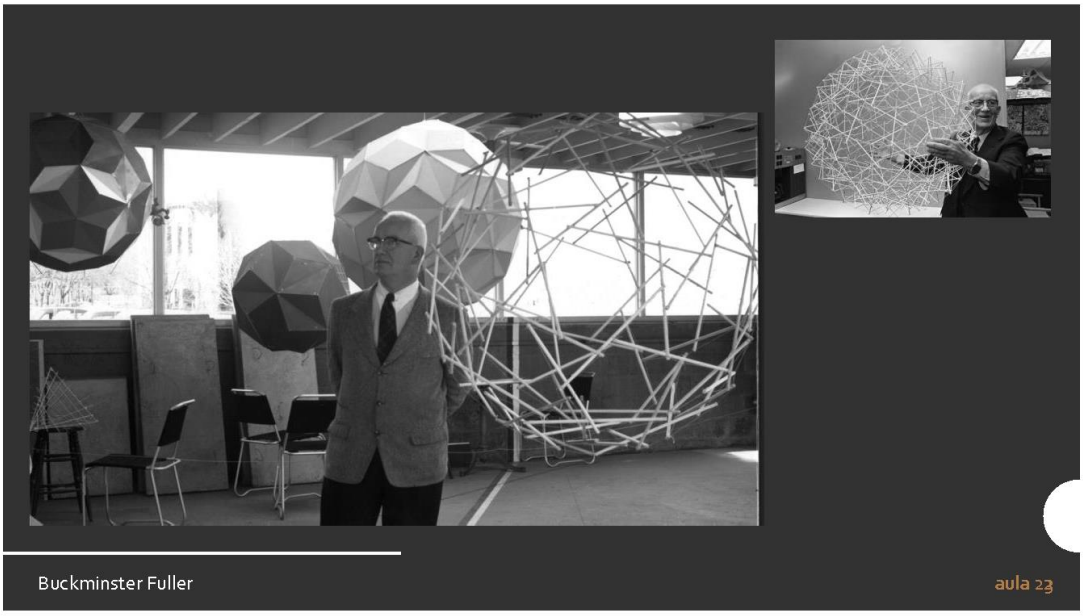


aula 23

34


Curved Space Structure.
Peter Jon Pearce
https://www.linkedin.com/pulse/peter-jon-pearce-building-most-energy-efficient-house-bernstein
http://curvedspacediamondstructure.tumblr.com/page/3
aula 23

35


Buckminster Fuller
aula 23

36


Buckminster Fuller
aula 23

37


Buckminster Fuller explaining principles of dymaxion building in 1959.
aula 23

38

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS (exemplos)

Um plesioedro preenche o espaço com cópias iguais de si próprio.

Na aula anterior, ilustrámos seis plesioedros que não necessitam de mudar de orientação para preencher o espaço:

1. Cubos
2. Prismas hexagonais
3. (Primeiros) dodecaedros rômbicos
4. Dodecaedros alongados
5. Octaedros truncados
6. Dodecaedros rômbicos de Bilinski

Apresentam-se a seguir alguns exemplos de plesioedros que, ao contrário dos anteriores, devem mudar de orientação para preencher o espaço.

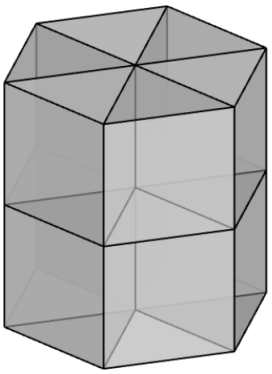
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

39

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

PRISMAS TRIANGULARES



vera viana (veraviana@veraviana.net)

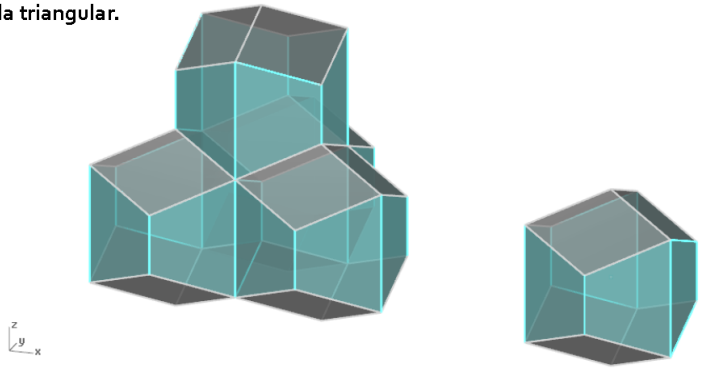
aula 23

40

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

DODECAEDROS TRAPEZO-RÔMBICOS

Dual da ortobicúpula triangular.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

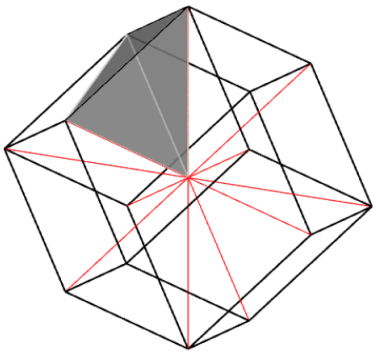
aula 23

41

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

DISFENÓIDES TETRAGONAIS

Um dodecaedro rômbico pode ser dividido em 24 disfenóides tetragonais, com faces isósceles congruentes e (consequentemente) pares de arestas opostas iguais.
Para além disso, os disfenóides tetragonais devem obedecer às seguintes condições:
- A soma dos ângulos internos das faces isósceles em cada vértice deve ser igual a 180º;
- A circunsfera e a insfera deverão ser concêntricas.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

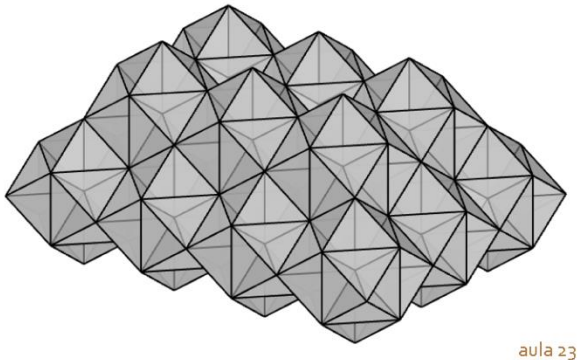
aula 23

42

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

DISFENÓIDES TETRAGONAIS





vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

43

WATERFALL, 1961, M. C. ESCHER

SÓLIDO DE ESCHER
ou
PRIMEIRA ESTRELAÇÃO DO DODECAEDRO RÔMBICO



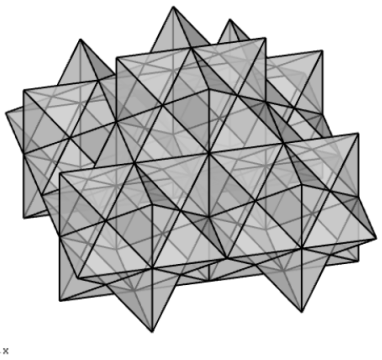
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

44

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

PRIMEIRA ESTRELAÇÃO DO DODECAEDRO RÔMBICO





vera viana (veraviana@veraviana.net)

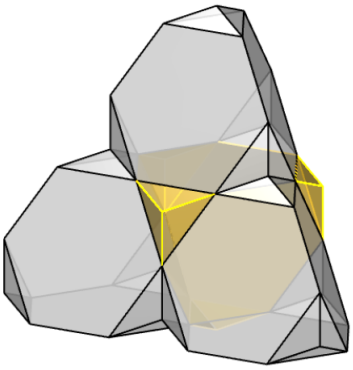
aula 23

45

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

TETRAEDROS TRUNCADOS TRIAKIS

plesioedro convexo, na altura, considerado
com o maior número de faces
(descrito por Critchlow):
com quatro faces hexagonais regulares
e doze faces triangulares isósceles.



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

46

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

Entre 1974 e 1980, Michael Golbdberg enumerou os poliedros que preenchem o espaço: 27 combinações distintas para todos os 7 hexaedros que existem (com a excepção da pirâmide pentagonal); pelo menos 56 formas diferentes de justapor 16 dos 34 heptaedros existentes e ainda 49 combinações possíveis para justapor octaedros.

Antes de 1980, foram referenciados os seguintes poliedros que preenchem o espaço: quarenta poliedros de 11 faces, dezasseis dodecaedros distintos, quatro poliedros de 13 faces, oito poliedros de 14 faces, um poliedro de 16 faces, dois poliedros de 17 faces, um poliedro de 18 faces, seis icosaedros, dois poliedros com 21 faces, cinco poliedros com 22 faces, dois com 23 faces, um poliedro com 24 faces e ainda aquele que se considera ser o poliedro que preenche o espaço com o maior número de faces – **26**.
Até ao momento, não se encontrou qualquer poliedro com 15 faces que preencha o espaço.

...

aula 23

vera viana (veraviana@veraviana.net)

47

TESSELAÇÕES COM PLESIOEDROS

Em 1980, P. Engel descobriu um total de 172 poliedros que preenchem o espaço com faces entre 17 e 38, entre outros que foram entretanto descobertos.
Em 1990, P. Schmitt descobriu um poliedro que preenche o espaço de forma aperiódica.
Em 1993, J. H. Conway descobriu um poliedro convexo que preenche o espaço de forma exclusivamente aperiódica.

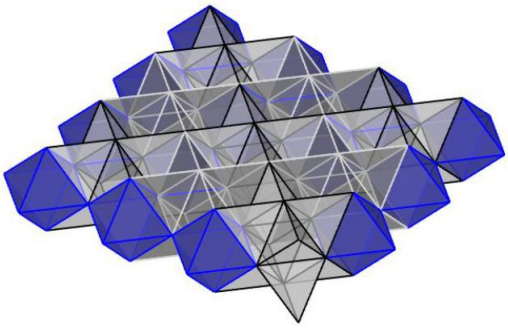
O texto desde diapositivo e do anterior é um excerto adaptado de
Weisstein, Eric W. "Space-Filling Polyhedron."
http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html

aula 23

vera viana (veraviana@veraviana.net)

48

TESSELAÇÕES COM STELLAS OCTANGULAS E OCTAEDROS

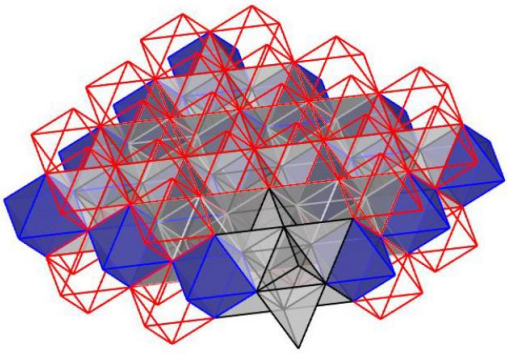


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

49

TESSELAÇÕES COM STELLAS OCTANGULAS E OCTAEDROS

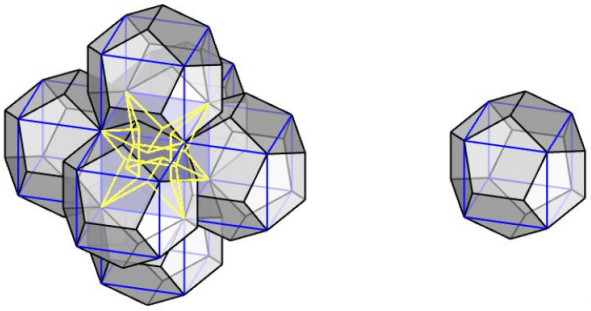


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

50

TESSELAÇÕES COM DODECAEDROS REGULARES E DODECAEDROS CÔNCAVOS

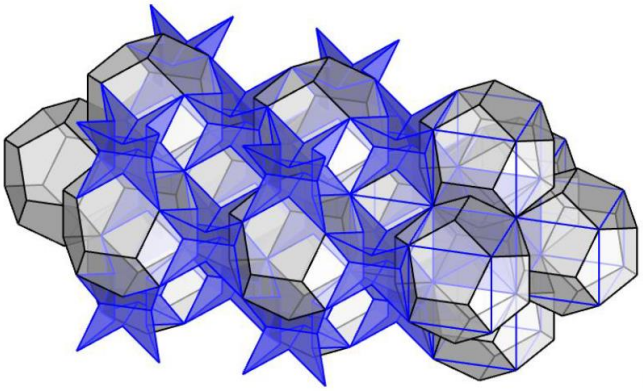


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

51

TESSELAÇÕES COM DODECAEDROS REGULARES E DODECAEDROS CÔNCAVOS



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

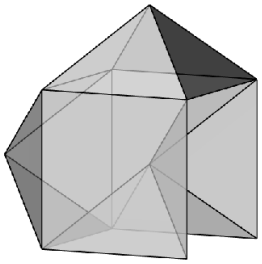
52

TESSELAÇÕES COM BASE NA PARTIÇÃO DO CUBO

Se quaisquer paralelepípedos iguais preenchem o espaço,
quaisquer sólidos que resultem da partição do paralelepípedo (ou do cubo),
quando justapostos, preenchem o espaço.

MODELAÇÃO

BOOLEAN SPLIT
BOOLEAN UNION



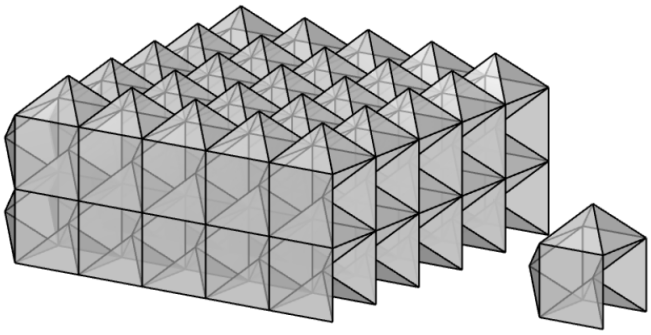
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

53

TESSELAÇÕES COM BASE NA PARTIÇÃO DO CUBO

LINEAR ARRAY
ARRAY ALONG CURVE
RECTANGULAR ARRAY



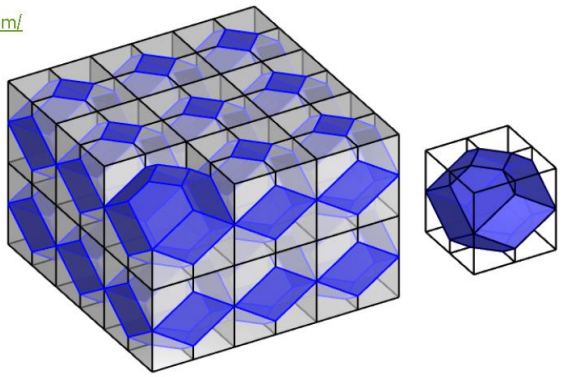
vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

54

TESSELAÇÕES COM BASE NA PARTIÇÃO DO CUBO

Adaptado a partir de
http://www.formaynumero.webuda.com/el_volumen_teoria/reticulas.html

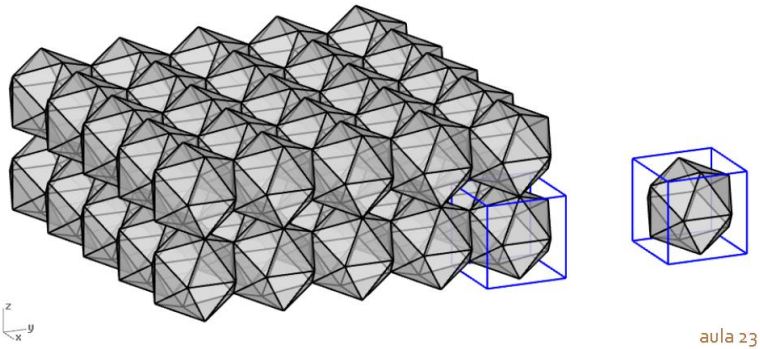


vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

55

RECTANGULAR ARRAY



vera viana (veraviana@veraviana.net)

aula 23

56

A CONSULTAR

RINUS ROELOFS

GEORGE HART

GERARD CARIS

57

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Ball, W. W. R e Coxeter, H. S. M. (1987) *Mathematical Recreations and Essays*. Dover Recreational Math.

Coxeter, H. S. M. (1973) *Regular Polytopes*. Dover Publications.

Critchlow, K. (1965) *Order in Space: A Design Source Book*. Thames & Hudson.

Cromwell, P. (1997) *Polyhedra*. Cambridge University Press.

Cundy, H. M. e Rollett, A. R. (1981) *Mathematical Models*. Tarquin Publications.

Grunbaum, B. e Shephard, G. C. (1990) *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman.

Kapraff (1990) *Connections: The Geometric Bridge between Art and Science*. World Scientific Publishing Company

Pearce, P. J. (1978) *Structure in Nature is a Strategy for Design*. The MIT Press

Pugh, A. (1976). *Polyhedra: A visual approach*. Berkeley: University of California Press.

Veloso. E. (1998) *Geometria - Temas Actuais*. Instituto de Inovação Educacional

Williams, R. (1979). *The geometrical foundation of natural structure: A source book of design*. New York: Dover Publications.

58

Apêndice D: Exercício 11: Poliedros | Modelação Virtual

U.PORTO

FACULDADE DE ARQUITECTURA
UNIVERSIDADE DO PORTO

GEOMETRIA E ARQUITECTURA
2016 | 2017

EXERCÍCIO 11 **duração:** 1 aula
POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL

1.1

Com recurso ao *software Rhinoceros*, faça a modelação virtual dos seguintes sólidos:

_ Prismas semi-regulares convexos:

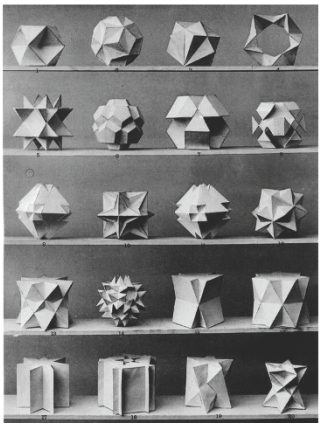
. **Prisma triangular**, **quadrangular**, **pentagonal**, ...

_Poliedros regulares convexos:

. **Hexaedro**
. **Tetraedro**
. **Octaedro**
. **Icosaedro**
. **Dodecaedro**

_Justaposição de poliedros regulares convexos:

. **Sequência de tetraedros**
. **Anel de octaedros**
. **Anel de dodecaedros**
. **Anel de icosaedros**



Modelos de Poliedros | Max Bruckner, "Vielecke und Vielfläche", 1900

Comandos úteis

Visualização:	*Viewports, Display modes (Shaded, Ghosted, etc.), Projection, Grid, World axes icon, Hide/show, Zoom Selected, Zoom Extents, Set object shading attributes...*
Organização:	*Layers, Properties, Help, History...*
Modelação 2D e 3D:	*Line, Polyline, Polygon, Surface from planar curves, Surface from 3 or 4 corner points, Box, Sphere, Boolean intersection,...*
Transformação:	*Move, Copy, Intersect, Extrude, Rotate3D, Orient3pt, Mirror, Polar Array, Cap,...*
Edição:	*Join/Explode, Group/Ungroup, Trim/Split...*

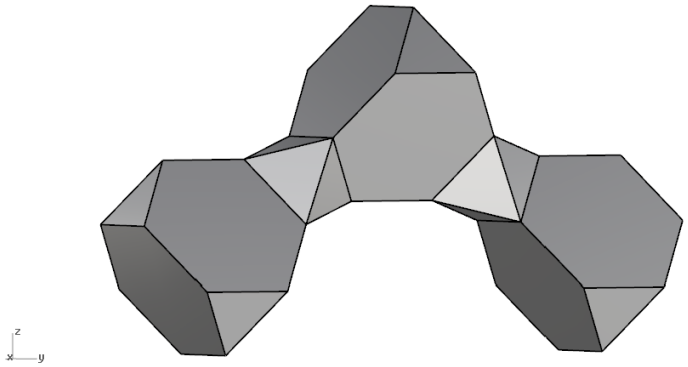
APÊNDICES

Apêndice E: Desafios

DESAFIO - AULA 23A

GEOMETRIA E ARQUITECTURA
2016/2017

Como desafio de aula, propõe-se a modelação virtual da composição de poliedros de faces regulares ilustrada na figura seguinte, a partir do ficheiro "aula 23 desafio.3dm", disponibilizado na plataforma moodle.



Justaposição de octaedros regulares e tetraedros truncados (Display mode: Shaded)
(a partir de Pugh, 1976, p. 52[1])

Para modelar a composição solicitada, sugere-se que:
- Utilize os elementos da layer "cubo" como ponto de partida;
- Os vértices do octaedro coincidam com o centro das faces de um cubo;
- Os vértices do tetraedro truncado resultem da divisão das arestas de um tetraedro regular em três partes iguais;
- Os octaedros regulares e os tetraedros truncados tenham arestas de igual dimensão.

Todas as construções e poliedros auxiliares necessários à modelação desta composição devem ser incluídos na *layer* "auxiliares". Quando concluir a sua modelação, os conteúdos desta layer poderão estar ocultos (isto é, com a "luz apagada").

Em resposta a este Desafio, deve submeter, através da plataforma moodle:

a) O ficheiro 3dm com a modelação que realizou, com o seu nome (exemplo: veraviana.3dm).
b) Um documento pdf com a sua identificação e uma imagem da modelação em Display Mode: Ghosted.

Sugestões de comandos a utilizar: Surface from 3 or 4 corner points, Array Polar, Mirror, Polyline, Divide, Surface from planar curves, Join, Scale 3D, Copy, Orient3pt, etc.

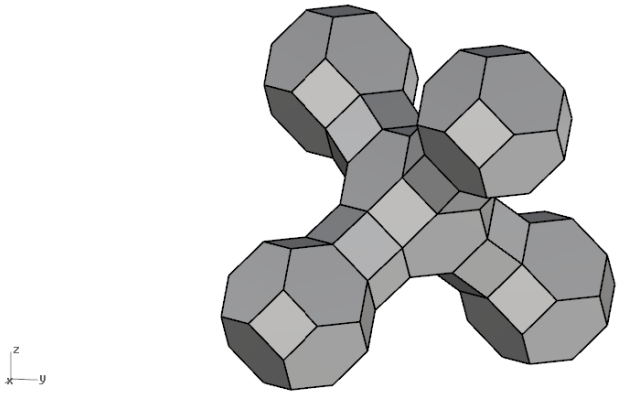
[1] Pugh, A. (1976). *Polyhedra: A visual approach*. Berkeley: University of California Press.

Desafio B

DESAFIO - AULA 23B

GEOMETRIA E ARQUITECTURA
2016/2017

Como desafio de aula, propõe-se a modelação virtual da composição de poliedros de faces regulares ilustrada na figura seguinte, a partir do ficheiro "aula 23 desafio.3dm", disponibilizado na plataforma moodle.



Justaposição de octaedros truncados e prismas hexagonais (Display mode: Shaded)
(a partir de Pugh, 1976, p. 53[1])

Para modelar a composição solicitada, sugere-se que:
- Utilize os elementos da layer "cubo" como ponto de partida;
- Os vértices do octaedro truncado resultem da divisão das arestas de um octaedro regular em três partes iguais;
- Os octaedros truncados e os prismas hexagonais tenham arestas de igual dimensão.

Todas as construções e poliedros auxiliares necessários à modelação desta composição devem ser incluídos na *layer* "auxiliares". Quando concluir a sua modelação, os conteúdos desta layer poderão estar ocultos (isto é, com a "luz apagada").

Em resposta a este Desafio, deve submeter, através da plataforma moodle:

a) O ficheiro 3dm com a modelação que realizou, com o seu nome (exemplo: veraviana.3dm).
b) Um documento pdf com a sua identificação e uma imagem da modelação em Display Mode: Ghosted.

Sugestões de comandos: Surface from 3 or 4 corner points, Array Polar, Mirror, Join, Divide, Polyline, Surface from planar curves, Polygon, Extrude curve, Scale 3D, Orient3pt, etc.

[1] Pugh, A. (1976). *Polyhedra: A visual approach*. Berkeley: University of California Press.

Apêndice F: Exercício suplementar

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

Neste documento apresentam-se dois procedimentos possíveis[1] para a modelação do icosaedro regular:

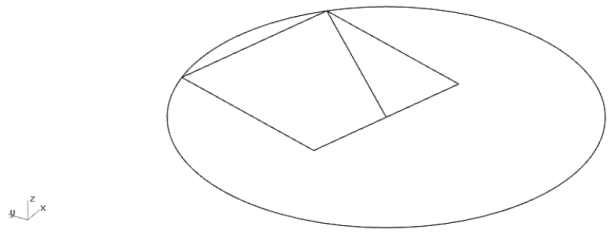
a) A partir de três rectângulos de ouro,
b) Por inclusão do icosaedro no cubo.

Qualquer um destes processos recorre à determinação, por processos geométricos, da proporção áurea, dada a relação entre a aresta do icosaedro e do cubo segundo a média e extrema razão. Mais informações sobre a proporção áurea podem ser consultadas aqui.

MODELAÇÃO DO ICOSAEDRO REGULAR

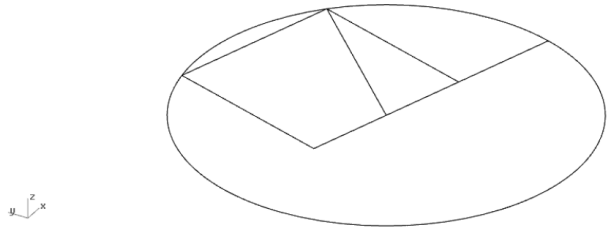
PASSO 1:
Desenhar um quadrado e um segmento de recta unindo um dos vértices ao ponto médio de um lado.
Desenhar uma circunferência com este segmento por raio.

POLYGON: NumSides: 4
POLYLINE: Mid, End
CIRCLE: Mid, End



PASSO 2:
Transportar a medida do segmento de recta para a recta que contém o lado do quadrado.

EXPLODE (o quadrado)
EXTEND
boundary objects: circle
curve to extend: o lado do quadrado



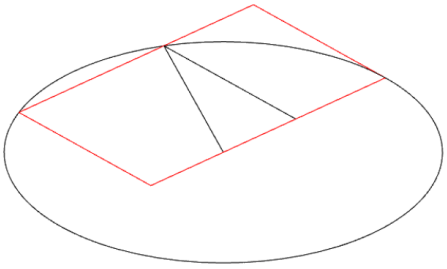
[1] Nota: existem outros procedimentos possíveis para a modelação do icosaedro regular.

Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

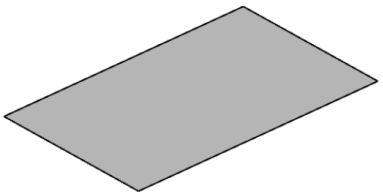
PASSO 3:
Desenhar um rectângulo com os lados na proporção áurea (a vermelho, na figura).

POLYLINE: End, End, Int, Perp e Smart Track, Close.
ou
COPY um dos lados do quadrado para a localização do outro lado menor do rectângulo e
POLYLINE: End, End, End, End, Close.



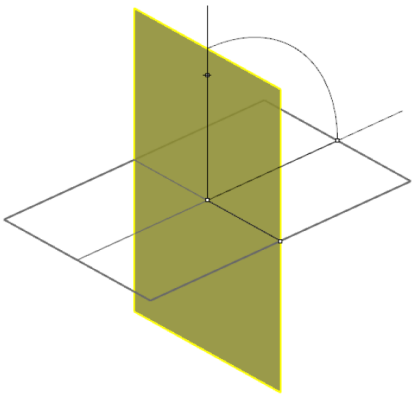
PASSO 4:
Transformar o rectângulo de ouro numa superfície (este rectângulo será adiante designado como Rectângulo 1).

SURFACE FROM PLANAR CURVES



PASSO 5:
Modelar um Rectângulo 2 perpendicular ao Rectângulo 1.

ROTATE 3D (Copy: Yes)
Start of rotation axis:
Cen (centro do Rectângulo 1)
End of rotation axis:
Mid (ponto médio do lado maior do Rectângulo 1)
Angle or first reference point:
Mid (ponto médio do lado menor do Rectângulo 1)
Second reference point: 90

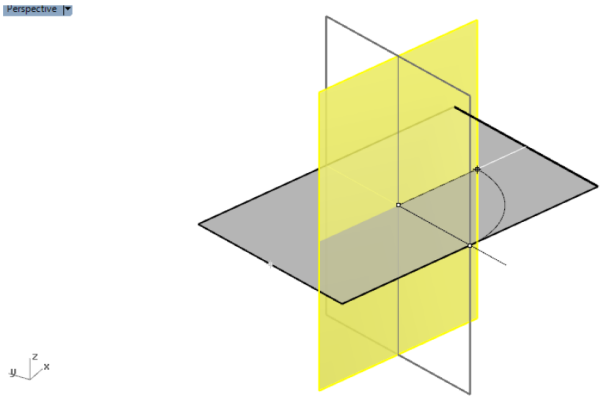


Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

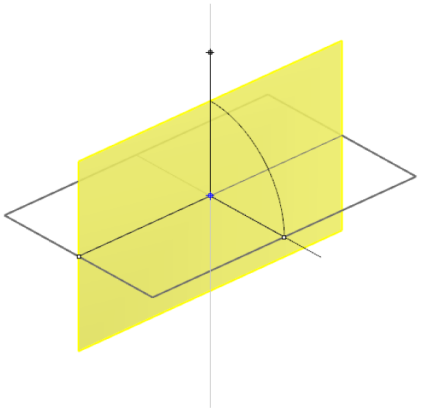
PASSO 6:
Rodar o Rectângulo 2 segundo um ângulo de 90º.

ROTATE 2D (Copy: No)
Center of rotation:
Cen (centro do Rectângulo 2)
Angle or first reference point:
Mid (ponto médio do lado maior do Rectângulo 2)
Second reference point: 90



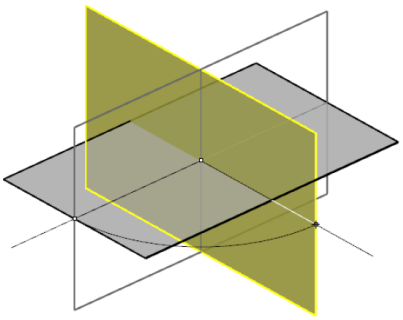
PASSO 7:
Ocultar o Rectângulo 2 numa Layer diferente ou em HIDE OBJECTS.
Modelar um Rectângulo 3 perpendicular ao Rectângulo 1.

ROTATE 3D (Copy: Yes)
Start of rotation axis:
Cen (centro do Rectângulo 1)
End of rotation axis:
Mid (ponto médio do lado menor do Rectângulo 1)
Angle or first reference point:
Mid (ponto médio do lado maior do Rectângulo 1)
Second reference point: 90



PASSO 8:
Rodar o Rectângulo 3 segundo um ângulo de 90º.

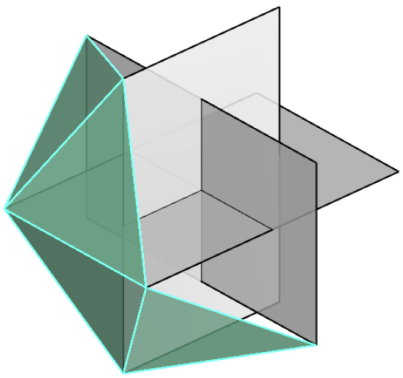
ROTATE 2D (Copy: No)
Center of rotation:
Cen (centro do Rectângulo 3)
Angle or first reference point:
Mid (ponto médio do lado menor do Rectângulo 3)
Second reference point: 90



Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

PASSO 9:
Os vértices de três rectângulos de ouro triortogonais coincidem com os vértices de um icosaedro regular.

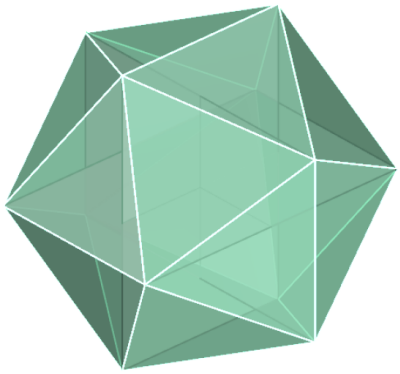


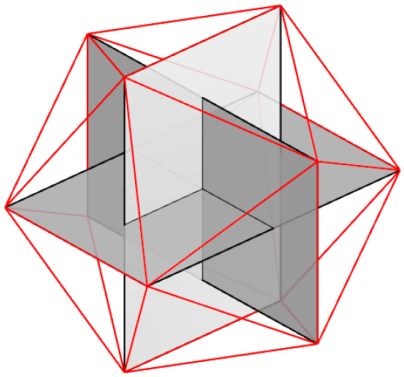
SURFACE FROM 3 OR 4 CORNER POINTS

Nota: o comando INTERSECT permite definir os segmentos de recta que resultam da intersecção dos três rectângulos.



Definir o icosaedro como uma superfície fechada.
JOIN.





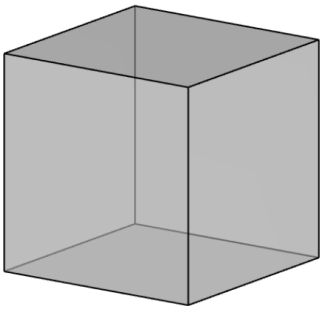
Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

MODELAÇÃO DO ICOSAEDRO REGULAR INCLUSO NO CUBO

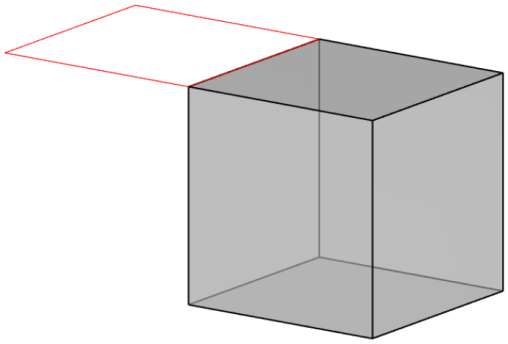
PASSO 1:
Modelar um cubo.

BOX
Other corner of base length: 10,
Enter, Enter



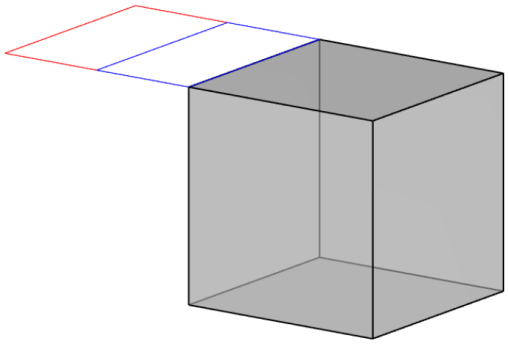
PASSO 2:
Determinar a proporção áurea a partir da aresta do cubo.
Desenhar um quadrado (a vermelho, na figura) com lado igual à aresta do cubo.

POLYGON (Edge)
NumSides: 4



PASSO 3:
Definir um rectângulo com os lados maiores iguais ao lado do quadrado e os lados menores iguais a metade do lado do quadrado.

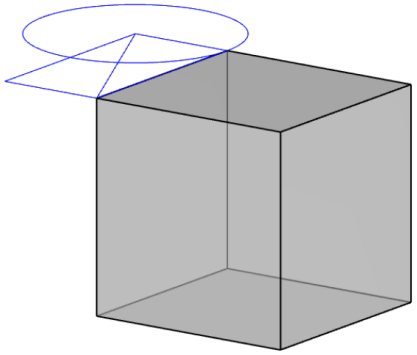
POLYLINE
End, End, Mid, Mid, Close



Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

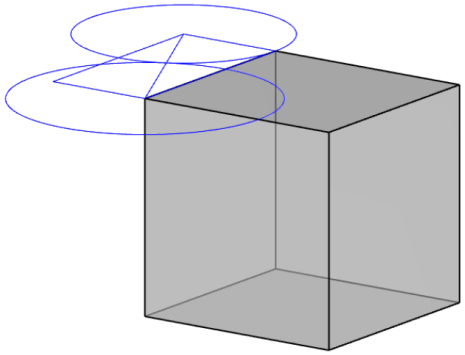
PASSO 4:
Apagar o quadrado.
Select and Delete



Desenhar uma diagonal do rectângulo e transportar a medida do lado menor do rectângulo para a diagonal.

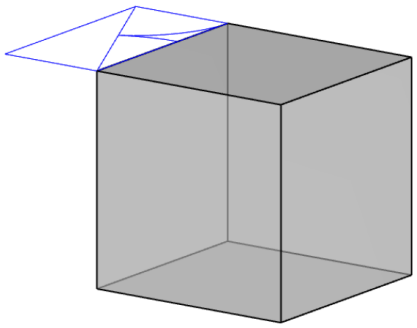
POLYLINE
End, End
CIRCLE
End, End

PASSO 5:
Transportar o ponto de intersecção da circunferência com a diagonal para a aresta do cubo.



CIRCLE
End, Int

PASSO 6:
Apagar ou omitir as linhas desnecessárias da construção[2]
O segmento de recta maior resultante desta construção corresponde à medida da aresta do icosaedro[3], que é agora necessário transportar para as faces do cubo.



TRIM
Cutting objects:
a diagonal e o rectângulo

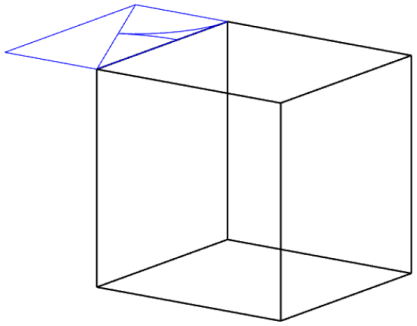
[2] Nota: a construção pode ser apagada ou inserida numa Layer que será depois ocultada (escurecendo a lâmpada).
[3] O segmento menor, corresponde à medida da aresta do dodecaedro incluso no cubo (esta construção não será aqui abordada).

Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

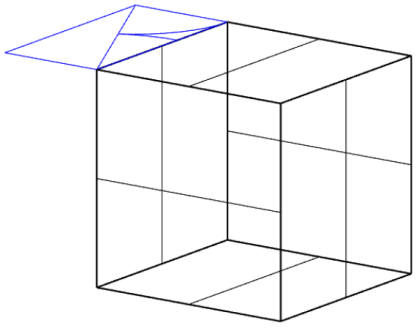
PASSO 7:
Para facilitar a visualização, alteraremos o *Display mode* do cubo.

SET OBJECT SHADING
ATTRIBUTES (select: o cubo)
Choose attributes for selected objects: Wireframe

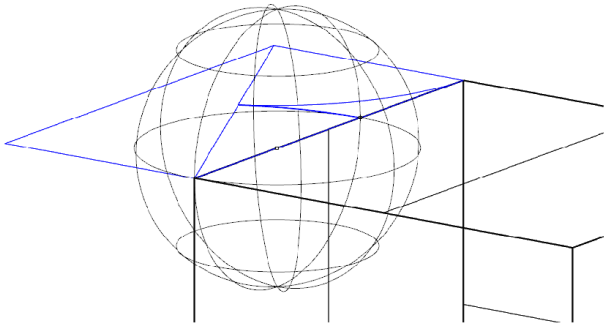


PASSO 8:
Desenhar as medianas das faces do cubo, para onde será transportada a medida da aresta do icosaedro.

POLYLINE
Mid, Mid em todas as faces do cubo
ou
POLYLINE
Mid, Mid em três faces do cubo e COPY (Point to copy from: Mid; Point to copy to: Mid)



PASSO 9:
Modelar uma esfera com diâmetro igual à aresta do icosaedro.
SPHERE:
O centro da esfera é o ponto médio do segmento de recta maior determinado no passo 6.
Quando o comando pedir o centro da esfera, escrever "between" e seleccionar os extremos do segmento.
O raio da esfera é um dos extremos deste segmento.

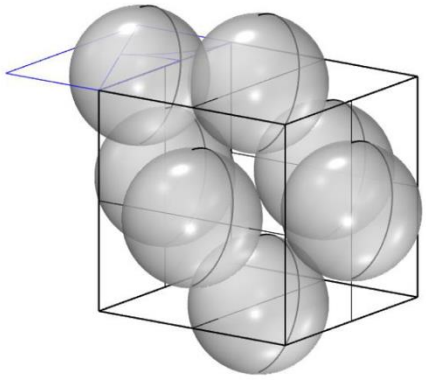


Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

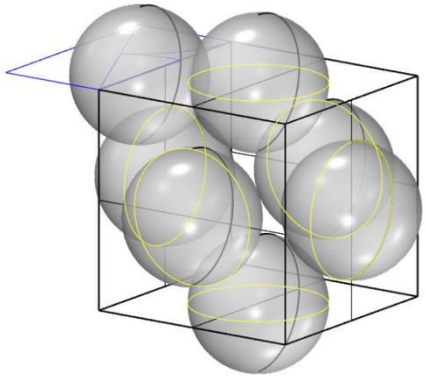
PASSO 10:
Transportar a esfera para cada uma das faces do cubo.

COPY:
Point co copy from:
Cen (centro da esfera)
Point to copy to:
Mid (ponto médio das medianas)



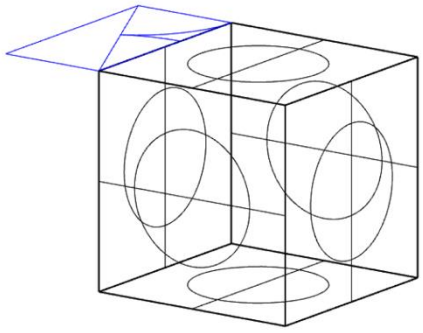
PASSO 11:
Determinar a intersecção do cubo com as seis esferas.

INTERSECT



PASSO 12:
Apagar as esferas.

Select and Delete

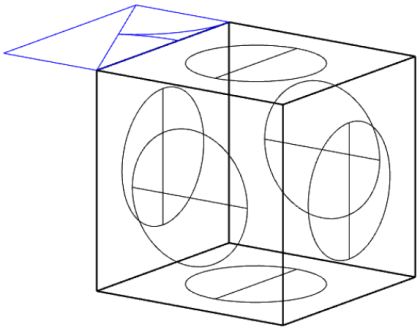


Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

AULA 20 - POLIEDROS | MODELAÇÃO VIRTUAL
14/17 de Março de 2017

PASSO 13:
Apagar as linhas desnecessárias, deixando apenas a aresta do icosaedro nas faces do cubo.

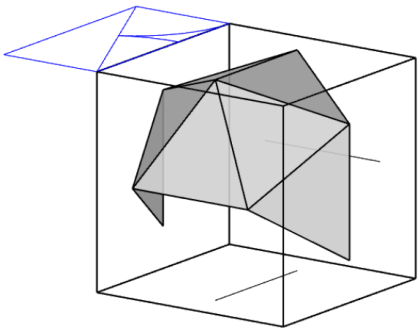
TRIM
Cutting objects: as circunferências determinadas
Object to trim: os segmentos de recta externos às circunferências



PASSO 14:
Apagar as circunferências.
Select and Delete

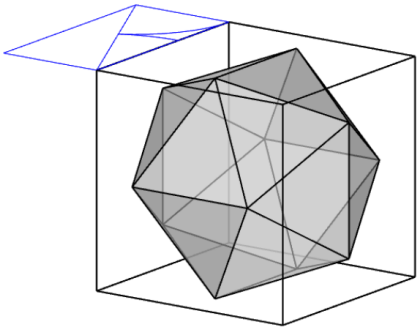
Definir as faces do icosaedro, unindo os extremos dos segmentos de recta determinados.

SURFACE FROM 3 OR 4 CORNER POINTS:
End, End, End



PASSO 15:
Definir o icosaedro incluso no cubo como uma superfície fechada.

JOIN.



Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

Apêndice G: Análise das respostas dos estudantes ao inquérito por questionário

Entre os dias 3 de Maio e 31 de Julho de 2017, esteve disponível para os estudantes do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura, da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto, o inquérito por questionário que a seguir se transcreve. Foram recebidas 42 respostas que a seguir a cada uma das questões, se discriminam. O número e percentagem de respostas, e as respostas recebidas, destacam-se a azul.

Este questionário está a ser distribuído, no âmbito da Unidade Curricular de Geometria e Arquitetura, aos alunos do 1.º ano do Mestrado Integrado em Arquitetura da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto, no ano letivo de 2016/2017.

Através da recolha destes dados, pretende-se analisar a forma como os alunos percecionaram os conteúdos abordados e se a exploração em aula com recurso a *software* de modelação tridimensional terá contribuído para a melhor compreensão desses conteúdos.

Este inquérito por questionário foi parcialmente adaptado de J. Lopes dos Santos, *Os Inquéritos Pedagógicos no Laboratório de Física em 1990/91*, Boletim da Universidade do Porto n.º 14, Abril de 1992.

As suas respostas são anónimas e confidenciais e serão utilizadas apenas para tratamento e análise no âmbito do Doutoramento em Didática das Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Para nós, a sua resposta, que não lhe tomará mais do que 5 minutos, é muito importante.

Para cada uma das afirmações apresentadas a seguir, selecione a resposta que melhor reflita a sua opinião.

MUITO OBRIGADA!

03 de Maio de 2017

A Doutoranda,

Vera Viana (veraviana@veraviana.net)

indique, das aulas 21, 22 e 23, aquela(s) a que assistiu.		
Assisti às três aulas.	(38 respostas)	90,48%
Assisti a duas destas aulas.	(02 respostas)	4,76%
Assisti apenas a uma destas aulas.	(02 respostas)	4,76%

1. A DOCENTE		
1.1. A docente expôs as questões, os problemas e a matéria com segurança.		
Concordo totalmente.	(10 respostas)	23,81%
Concordo.	(29 respostas)	69,05%
Discordo.	(2 respostas)	4,76%

Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	----------	----------
1.2. A exposição da docente foi clara e fluente.		
Concordo totalmente.	(05 respostas)	11,90%
Concordo.	(19 respostas)	45,24%
Discordo.	(14 respostas)	33,33%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(3 respostas)	7,14%

"Demais para o nosso nível."

"Foi clara, contudo alguns termos usados poderiam ser aplicados com uma pré-informação visto serem muito específicos causando alguma dificuldade por vezes."

"Mais ou menos."

1.3. As aulas foram lecionadas com entusiasmo.		
Concordo totalmente.	(22 respostas)	52,38%
Concordo.	(16 respostas)	38,10%
Discordo.	(3 respostas)	7,14%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	----------	----------
1.4. A docente foi capaz de esclarecer as dúvidas que lhe foram colocadas.		
Concordo totalmente.	(10 respostas)	23,81%
Concordo.	(24 respostas)	57,14%
Discordo.	(5 respostas)	11,90%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(2 respostas)	4,76%

"Não lhe foram colocadas duvidas."

"Não só não foi capaz de esclarecer dúvidas, bem como precisava de mais conhecimento sobre o *Rhinoceros* versão *Macintosh*."

1.5. A presença da docente durante uma das aulas práticas foi vantajosa.		
Concordo totalmente.	(14 respostas)	33,33%
Concordo.	(23 respostas)	54,76%
Discordo.	(4 respostas)	9,52%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	----------	----------

2 - METODOLOGIA UTILIZADA EM AULA		
2.1. Os modelos reais que a docente disponibilizou foram úteis para compreender os poliedros e as tesselações.		
Concordo totalmente.	(22 respostas)	52,38%
Concordo.	(16 respostas)	38,10%
Discordo.	(2 respostas)	4,76%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(1 resposta)	2,38%
"Não necessariamente".		
2.2. A utilização do computador por parte dos alunos foi bastante vantajosa.		
Concordo totalmente.	(18 respostas)	42,86%
Concordo.	(22 respostas)	52,38%
Discordo.	(1 resposta)	2,38%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	----------	----------
2.3. O recurso a *software* de modelação tridimensional foi adequado para explorar os poliedros e as tesselações.		
Concordo totalmente.	(24 respostas)	57,14%
Concordo.	(15 respostas)	35,71%
Discordo.	----------	----------
Discordo totalmente.	(2 respostas)	4,76%
Outras hipóteses de resposta.	(1 resposta)	2,38%
"Concordo, contudo, o *software* instalado perdeu alguns comandos importantes dificultando o trabalho.**"**		

3. UNIDADE CURRICULAR		
3.1. Os conteúdos abordados durante as aulas 21, 22 e 23 eram difíceis.		
Concordo totalmente.	(05 respostas)	11,90%
Concordo.	(19 respostas)	45,24%
Discordo.	(15 respostas)	35,71%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(2 respostas)	4,76%
"Uns mais que outros, principalmente para aqueles com menores conhecimentos apesar da grande vontade de aprender!"		

	"Alguns eram um pouco mais complexos do que outros."	
3.2. O número de aulas foi suficiente para compreender as categorias de poliedros e as tesselações abordadas.		
Concordo totalmente.	(3 respostas)	7,14%
Concordo.	(12 respostas)	28,57%
Discordo.	(21 respostas)	50,00%
Discordo totalmente.	(5 respostas)	11,90%
Outras hipóteses de resposta.	(1 resposta)	2,38%
	"Foi suficiente para as conhecer, no entanto acho que seriam necessárias mais algumas aulas para que fossem compreendidos a 100%"	
3.3. O número de aulas foi suficiente para aprender a modelar, com o *software*, as categorias de poliedros e as tesselações abordadas.		
Concordo totalmente.	(5 respostas)	11,90%
Concordo.	(15 respostas)	35,71%
Discordo.	(16 respostas)	38,10%
Discordo totalmente.	(4 respostas)	9,52%
Outras hipóteses de resposta.	(2 respostas)	4,76%
	"Mais ou menos; poderíamos ter tido mais tempo para explorar esta matéria."	
	"Alguns sim, outros seria preciso mais algumas aulas."	
3.4. A matéria teórica abordada foi útil para o trabalho que realizamos nas aulas práticas.		
Concordo totalmente.	(10 respostas)	23,81%
Concordo.	(22 respostas)	52,38%
Discordo.	(8 respostas)	19,05%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(1 resposta)	2,38%
	"Mais ou menos."	
3.5. O Desafio da Aula 23 foi adequado para avaliar tudo o que tínhamos aprendido durante as aulas.		
Concordo totalmente.	(04 respostas)	9,52%
Concordo.	(21 respostas)	50,00%
Discordo.	(14 respostas)	33,33%
Discordo totalmente.	(1 resposta)	2,38%
Outras hipóteses de resposta.	(2 respostas)	4,76%
	"Concordo, apesar de alguns problemas no *software*!"	
	"Não participei"	

3.7. Os documentos disponibilizados na plataforma *moodle* foram adequados e deram indicações úteis para continuar a explorar este tema.		
Concordo totalmente.	(3 respostas)	7,14%
Concordo.	(34 respostas)	80,95%
Discordo.	(4 respostas)	9,52%
Discordo totalmente.	----------	----------
Outras hipóteses de resposta.	(1 resposta)	2,38%
"Não os consultei"		

4. AVALIAÇÃO		
4.1. Durante as aulas, conseguiu modelar os exemplos propostos pela docente? Em caso negativo, justifique a sua resposta.		
Sim	(27 respostas)	64,29%
Sim, mas com dificuldades (respostas a cor verde)	(4 respostas)	9,52%
Não (respostas a cor preta)	(10 respostas)	23,81%
Resposta não relacionadas com a pergunta (a cor roxa)	(1 resposta)	2,38%
15 Respostas abertas:		
"Não, era difícil acompanhar o ritmo da professora"		
"Não, tive dificuldade em recordar-me de todos os comandos usados o que me provocou algum atraso na realização do exercício"		
"Não. Tive dificuldade devido ao tempo, que era reduzido"		
"Não consegui fazer todos os exemplos devido a que a professora as vezes explicava muito rápido e eu não tinha tempo para resolver o problema que estava a impedir eu continuar"		
"Bastava um comando não funcionar para ficar para trás e não conseguir acompanhar a resolução"		
"Não. como sou um aluno com dificuldade auditiva tive quase sempre dificuldade em acompanhar os conteúdos"		
"Alguns"		
"Às vezes, admito que algumas vezes o ritmo era muito acelerado"		
"Quase todos, por vezes não conseguia acompanhar todos os passos e perdia-me a meio"		
"Não, era muito rápido, especialmente ao considerarmos que não estávamos acostumados com o rhino"		
"Não, perdia o "rasto" quando eram comandos que no Mac eram diferentes"		
"Numa ou noutra aula, porque me perdi no decurso da explicação, não consegui terminar a modelação dos exemplos propostos"		
"Consegui, mas alguns tive alguma dificuldade porque a aula era dada depressa demais e era complicado de acompanhar tudo"		
"Terá muito pouca relevância na minha vida profissional"		

4.2. Que aspeto(s) abordado(s) nas aulas 21, 22 e 23 gostaria de poder vir a desenvolver?		
42 Respostas abertas, globalmente conotáveis com os seguintes tópicos:		
5 respostas	11,90%	Poliedros
22 respostas	52,38%	Tesselações
2 respostas	4,76%	Exploração do *software*
1 resposta	2,38%	Superfícies
1 respostas	2,38%	Edifícios
5 respostas	11,90%	Nenhum
6 respostas	14,28%	Não sabe / não responde

“Modelação de poliedros”
“Tesselações uniformes com poliedros convexos de faces regulares”
“Nenhum”
“Construir tesselações mais complexas ainda e estuda-las mais profundamente (claro que tal não é possível devido ao tempo que temos de aulas, mas é um assunto que a mim me interessa bastante)”
“Não sei”
“Tesselações uniformes”
“Modelação de tesselações com base na partição do cubo”
“Superfícies regradas”
“Uma modelação 3D com o material dos sólidos mostrados em aula”
“Outro tipo de tesselações como um fim mais direcionado para a Arquitetura”
“Tesselações”
“Nenhum em específico, sinto que o desenvolvimento dos mesmos foi o adequado”
“Poliedros quasirregulares/semirregulares convexos”
“--"
“Modelação de tesselações com base na partição do cubo”
“É algo que irei ponderar melhor no próximo ano letivo”
“A geometria e matemática inerente a cada sólido”
“Não me recordo”
“Nada em especial
“Modelação de Edifícios”
“Nenhum”
“Poliedros regulares”
“Todos”

"Tesselações irregulares"
"Todos, mas de forma a que crie condições para colmatar a minha dificuldade auditiva"
"Tentar relacionar os temas abordados mais com a arquitetura em si"
"Uso das tesselações na arquitetura"
"Gostaria de poder explorar todas as tesselações demonstradas"
"Construção de"
"Tesselações"
"Tesselações com poliedros côncavos e convexos"
"Tesselações com poliedros côncavos e convexos"
"Gostaria de poder fazer mais estruturas espaciais através das tesselações"
"Mais aulas para aprendermos a usar o *software*. Era inspirador o animo da professora Vera Viana em suas explicações"
"Tesselações com plesioedros"
"Gostaria de poder desenvolver o tópico relacionado com tesselações"
"O trabalho de grupo das aulas práticas"
"Gostava de explorar mais a fundo as potencialidades do *software* utilizado"
"Gostava de aprofundar as tesselações no meu futuro em arquitetura"
"Não sei"
"Terá muito pouca relevância na minha vida profissional"
"Modelação de Tesselações"
4.3. Indique pelo menos um aspeto que, na sua opinião, poderia ser melhorado e outro que considere particularmente bem conseguido nestas três aulas.
42 Respostas abertas:
"Numero de exemplos para modelar na aula, a modelação dos poliedros"
"Acho que teria sido uma boa opção fornecer alguns exercícios para casa, como trabalhos práticos, para podermos desenvolver a nossa relação com o programa! Acho que por essa razão não consegui trabalhar muito bem com o mesmo! E também por algum desinteresse meu, confesso! A nível de aspetos positivos acho que a docente conseguiu transmitir bastante bem para os alunos a matéria, transmitindo sempre bastante entusiasmo! O que normalmente não acontece muito nas aulas teóricas"
"Melhorado: devido às poucas aulas que temos, optar por dar menos quantidade de matéria selecionando a mais importante ou mais interessante fazendo com que todos os alunos consigam acompanhar as aulas e por sua vez gostar mais da matéria; Conseguido: entusiasmo por parte da docente"
"A rapidez do discurso (causada pelo nervosismo é certo) podia ser atenuada. Em compensação foi mostrado um grande entusiasmo e uma matéria bastante interessante"
"Falar mais calmamente"
"Deveria haver mais tempo de aulas para que a matéria fosse assimilada mais lentamente, e correu bem a parte de termos conseguido atingir os objetivos exigidos apesar das dificuldades graças á entre ajuda entre os alunos"

	“O acompanhamento na modelação tridimensional deveria ser ter mais tempo. Gostei particularmente da utilização dos modelos tridimensionais desmontáveis, ajudam bastante na compreensão dos sólidos”
	“Tempo de explicação não foi suficiente. foi tudo dito a correr"
	“Gostaria que as aulas fossem mais calmas apesar de ter gostado da explicação da professora”
	“Rapidez da explicação, Ideia geral bem transmitida”
	“Ponto fraco: demasiada concentração de matéria e o ponto forte foi a interação física com os poliedros”
	“Rapidez com que se explicam certos passos da modelação poderia ser mais reduzida, por vezes. O entusiasmo pela matéria lecionada, pelos docentes e a futura doutorada”
	“O fator do tempo”
	“A docente falava muito rápido e esclarecia as dúvidas de uma forma muito confusa. Os modelos 3D ajudaram bastante na perceção das formas que faríamos em Rhinoceros”
	“mais aulas para explicar melhor”
	“Poderia haver alguma informação que ajudasse melhor a compreensão de alguns termos usados no *software*, nem todos dominam essa linguagem. Os trabalhos práticos ajudam a uma compreensão melhor da matéria, há troca de ideias e mais tempo para terminá-los. Por haver conhecimentos e formação diferentes por parte dos alunos penso que é maior a equidade relativamente ao esforço de cada um”
	“Penso que a única coisa que poderá faltar será talvez uma linguagem mais simplificada para os alunos com mais dificuldade. Particularmente importante foram as construções tridimensionais dos sólidos, já que são uma ajuda importante para compreender a geometria das formas”
	“Para melhorar: mais empatia com os alunos”
	“Penso que poderia ser melhor explorada a forma como os poliedros integram a arquitetura em questões práticas, mas por outro lado, de um modo geral, as aulas foram suficientes para ficar à vontade com o programa utilizado e com esta nova noção de figuras geométricas”
	“Demonstração Física dos Poliedros”
	“Acho que foram todos bem conseguidos”
	“Devia haver mais acompanhamento particular aos alunos”
	“Gostei muito”
	“O uso de modelos 3D foi aspeto muito positivo. Talvez se a professora falasse mais devagar fosse mais fácil de compreender”
	“Mais e mais componentes práticas com participação dos professores”
	“A explicação sobre o funcionamento do programa poderia ter sido dada de uma forma mais calma e compreensível. Um aspeto bem conseguido foi o facto de a professora conseguir tirar as nossas dúvidas individualmente”
	“A ajuda enquanto elaboramos os vários poliedros no rhino poderia ser maior, a aprendizagem a trabalhar com modelação 3D”
	“O ritmo poderia ser mais lento e haver mais aulas, gostei do facto de termos oportunidade de manusear os sólidos”
	“Em alguns momentos os alunos não acompanhavam o ritmo da aula, por motivos técnicos, ou porque não percebiam à primeira. Mas, sempre que solicitado, receberam ajuda para continuar o exercício”
	“Explicar com um pouco mais devagar e a ajuda dada durante as aulas”

	"Poderia haver mais acompanhamento durante as aulas teóricas. A docente conseguiu demonstrar as várias qualidades do programa, de forma bastante interessante"
	"Equilibrar melhor o tempo entre a parte teórica e a prática e ou a seja o dar o mais tempo e para experimentar e modelar no *software*. O facto de existirem os modelos físicos dos poliedros ajudam a ter uma noção mais real dos mesmos"
	"Acho que três aulas é bastante pouco para aprendermos a trabalhar com o rhino, principalmente para quem nunca experimentou.... Mas acho que a Professora sempre se mostrou disponível para nos ajudar em qualquer momento"
	"Ser mais sistemática e dar uma melhor perceção do todo ao falar das partes"
	"A docente podia entender um pouco melhor o *software* no mac, e, um aspeto muito consigo era o interesse com que falava da matéria, notava-se que gostava"
	"Quanto aos aspetos que poderiam ser melhorados, penso que deveria existir um período de tempo dedicado exclusivamente ao esclarecimento de dúvidas sobre as ferramentas do Rhinoceros. Considero que a professora consegui passar a informação de forma entusiasta, captando a atenção dos alunos e despertando o seu interesse pelos temas abordados"
	"Os objetos físicos das tesselações ajudaram a compreender melhor como estas funcionam"
	"As aulas deviam ser dadas com mais calma, não tão apressadamente. A forma como a professora explicou foi bastante explicita, apesar disso"
	"É muito difícil nos aprendermos em três aulas todos aqueles poliedros a fundo. Isso é pena. Um aspeto conseguido foi passar o entusiamo pelos mesmos. a docente foi incrível e também aprender os seus conceitos - o geral - sobre tesselações"
	"Interação com os alunos"
	"Terá muito pouca relevância na minha vida profissional"
	"Um aspeto a melhorar seria a forma de interação com os alunos"

4.4.1. Numa escala de 0 a 5, como classificaria os conteúdos das aulas 21, 22 e 23 pelo interesse que para si tiveram?		
5	(3 respostas)	7,14%
4	(20 respostas)	47,62%
3	(13 respostas)	30,95%
2	(5 respostas)	11,90%
1	(1 resposta)	2,38%

4.4.2. Numa escala de 0 a 5, como classificaria a prestação da docente ao lecionar os conteúdos das aulas 21, 22 e 23?		
5	(8 respostas)	19,05%
4	(21 respostas)	50,00%
3	(10 respostas)	23,81%
2	(1 resposta)	2,38%
1	(2 respostas)	4,76%

APÊNDICES

ANEXOS

Anexo A: Enunciado da proposta de Trabalho de Grupo da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017

U.PORTO

FACULDADE DE ARQUITECTURA
UNIVERSIDADE DO PORTO

GEOMETRIA E ARQUITECTURA
2016 | 2017

TRABALHO DE GRUPO **duração:** 5 aulas
TESSELAÇÕES
Modelação de uma estrutura espacial com base em tesselações

1.1
Pretende-se o desenvolvimento de um projecto de uma **estrutura espacial modular**, a instalar no jardim da Quinta da Póvoa da Faculdade de Arquitectura, que tenha por base uma **tesselação com poliedros convexos de faces regulares.** A instalação deverá ter como propósito a criação de um espaço habitável que, pela sua qualidade formal e estrutural, desperte curiosidade e vontade de o experimentar.
A partir de um conjunto de agregações apresentado na aula, será atribuído a cada grupo um módulo base inicial que define os poliedros a utilizar na composição geométrica de acordo com a tesselação escolhida

Com recurso ao **software *Rhinoceros*** faça a **modelação digital do objecto**, explorando hipóteses de estruturas espaciais criadas através da agregação de poliedros de acordo com as regras implícitas no módulo base.
Para o efeito, deverá considerar o recurso a **operações de transformação geométrica** (comandos: *move, copy, rotate, rotate3d, mirror, orient3p, ...*). Como opção, admite-se que a tesselação possa ser cortada uma vez por um único plano com o intuito, por exemplo, de se criar uma base de contacto com o solo (comandos: *planar surface, move, rotate, rotate3d, trim, ...*).
Apesar de não haver limitações quanto à quantidade de poliedros a utilizar, alerta-se para o facto de se pretender a criação de uma **estrutura espacial habitável** e **devidamente inserida no contexto do jardim da Quinta da Póvoa**.

1.2
Definida a geometria da estrutura do objecto, deverá trabalhar a sua **materialização** considerando as seguintes regras:

_ criação de barras estruturais em correspondência das arestas, deixando faces abertas (comandos: *pipe*);
_ definição de painéis de encerramento total ou parcial das faces, utilizando os seus vértices como referência de desenho (comandos: *surface from corner points, planar surface, ...*).

1.3
A partir do modelo 3D, deverá produzir um **conjunto de imagens ilustrativas da estrutura espacial** que documentem:

_ o processo de concepção da estrutura espacial (sequência de imagens que revelem a evolução do módulo até à solução final);
_ a relação do objecto projectado com o sítio (planta, fotomontagem).

Estas imagens deverão ser montadas num **cartaz de apresentação**, com as dim. 600x400mm, orientado na horizontal. O cartaz deverá ser impresso.

U.PORTO
FACULDADE DE ARQUITECTURA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Complementarmente, deverá optar por:

_ realizar uma **maqueta à escala 1:20** do objecto final;

ou

_ produzir um pequeno **vídeo de 10 segundos** demonstrativo do projecto de instalação, utilizando, por exemplo, um software de captura de vídeo do ecrã.



"Double Helix" | Jon Barlow Hudson, Wright State University, 2008

AULAS

21.03 / 24.03	1.1	Apresentação do exercício Atribuição das tesselações aos vários grupos Modelação virtual do módulo da tesselação objecto de trabalho
28.03 / 31.03	1.1	Escolha do local no jardim da Quinta da Póvoa para a colocação da instalação Desenvolvimento do projecto: definição da geometria da estrutura espacial habitável através da agregação de poliedros;
04.04 / 07.04	1.1/1.2	Desenvolvimento do projecto: definição da materialização da estrutura espacial habitável
18.04 / 21.04	1.2	Finalização do projecto: acerto da escala do objecto e da sua relação com o sítio
	1.3	Produção das imagens de apresentação do projecto Realização da maqueta / produção do vídeo
28.04 / 02.05	1.3	Produção do cartaz Realização da maqueta / produção do vídeo

* Dia 5 de maio não haverá aula para as turmas de sexta-feira

ENTREGAS

O trabalho relativo aos **pontos 1.1 e 1.2** deverá ser entregue em formato digital, na plataforma *moodle*, nos dias:

. **18 de abril**, turmas G1, G2 e G3

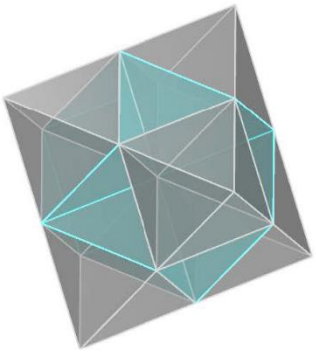
. **21 de abril**, turmas G4, G5 e G6

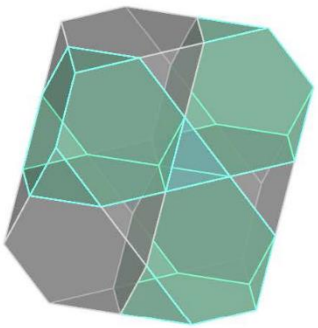
O trabalho relativo ao **ponto 1.3** deverá ser entregue em formato de papel e digital no dia **15 de maio** (hora e sala a definir).

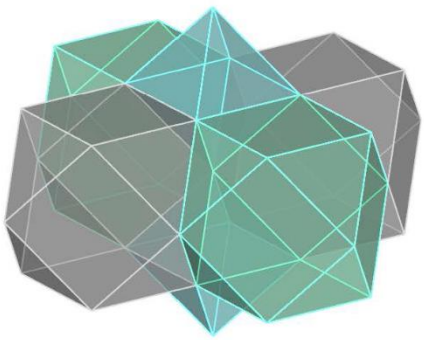
U.PORTO
FACULDADE DE ARQUITECTURA
UNIVERSIDADE DO PORTO

ANEXO

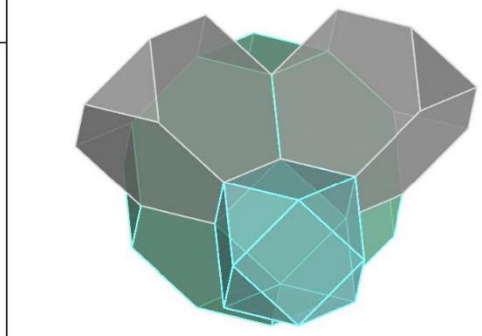
TESSELAÇÕES SÓLIDAS COM POLIEDROS CONVEXOS DE FACES REGULARES

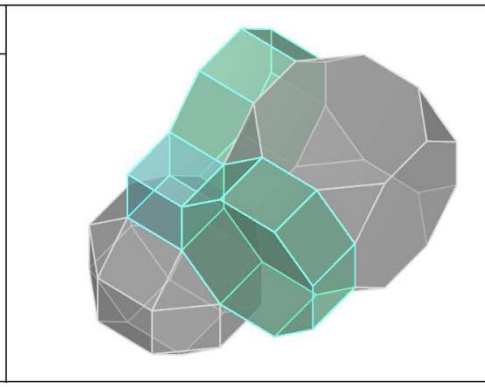
# 2 TETROCTAHEDRILLE	
8 TETRAEDROS 6 OCTAEDROS	

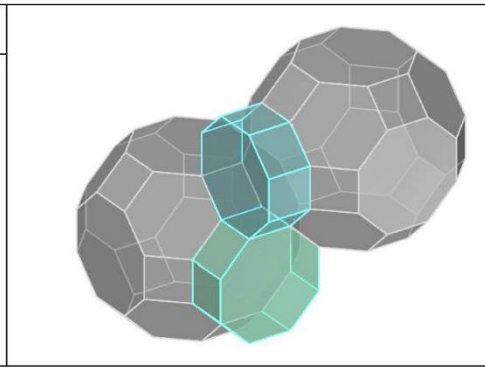
# 3 TRUNCTETRAHEDRILLE	
6 TETRAEDROS TRUNCADOS 2 TETRAEDROS	

#5 CUBOCTAHEDRILLE	
4 CUBOCTAEDROS 2 OCTAEDROS	

U.PORTO
FACULDADE DE ARQUITECTURA
UNIVERSIDADE DO PORTO

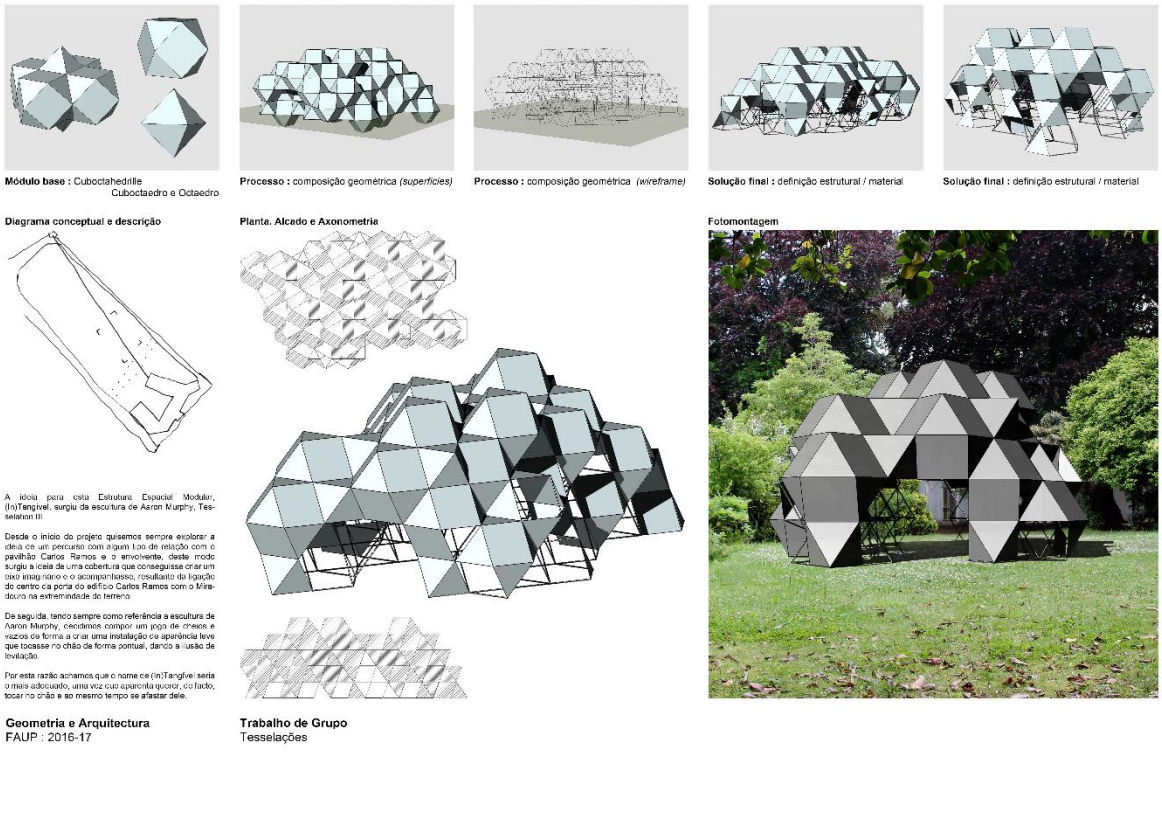
# 7 TRUNCATED TETROCTAHEDRILLE	
2 TETRAEDROS TRUNCADOS 2 OCTAEDROS TRUNCADOS 1 CUBOCTAEDRO	

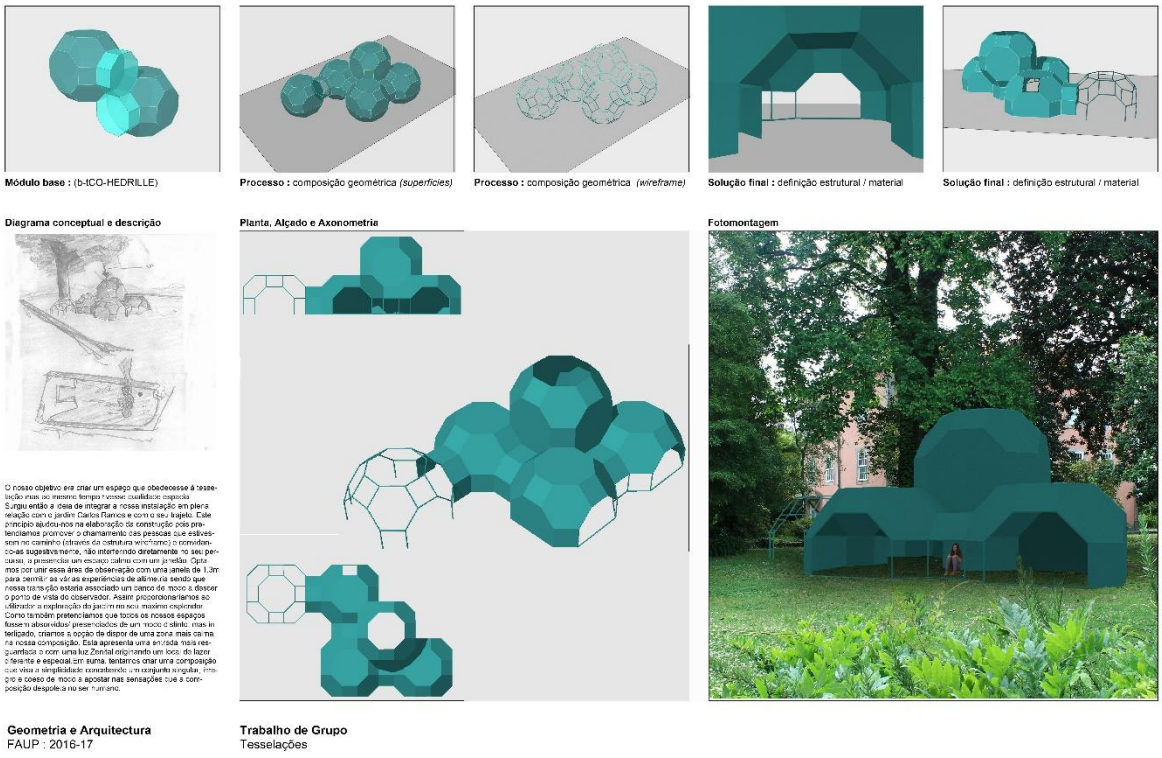
# 10 1-RCO-HEDRILLLE	
1 ROMBICUBOCTAEDRO 1 CUBO TRUNCADO 1 CUBO 2 PRISMAS OCTOGONAIS	

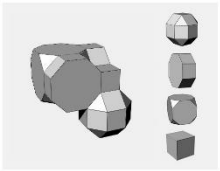
# 13 b-tCO-HEDRILLE	
2 CUBOCTAEDROS TRUNCADOS 2 PRISMAS OCTOGONAIS	

Modelos digitais das tesselações | Vera Viana, 2017

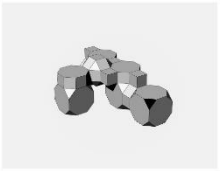
Anexo B: Cartazes realizados pelos estudantes da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017



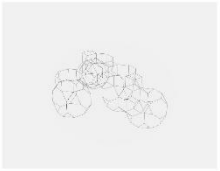




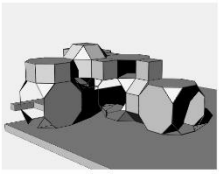
Módulo base : RCO-HEDRILLLE (Rombicubactaedro; prismas octogonais; cubo truncado; cubo)



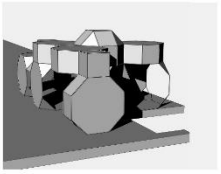
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



Este foi um trabalho com o objetivo de conceber uma escultura espacial a ser integrada no Jardim da faculdade. Pretendemos,desde logo contribuir para a criação e organização de todo um conjunto de espaços situados no terreno proposto.

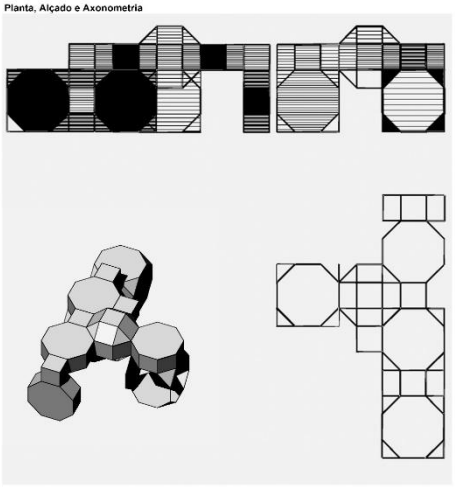
Consideramo o jardim um espaço agradável, não quisemos modificá-lo, no sentido de assentar a escultura no seu centro mas sim qualificá-lo, conservando a sua característica e estabelecendo relações com alguns elementos que captaram a nossa atenção. No meio de todo um terreno amplo, decidimos trabalhar com aquele recanto coberto por árvores, que nos pareceu um espaço diferente do anterior mas com uma relação muito forte com ele.

Assim sendo,esta proposta consiste numa passagem coberta, que faz a ligação entre o jardim e o caminho e ao mesmo tempo destaca um espaço de estar que já existia, caracterizado pelo banco em frente à casa cor de rosa.

A intenção encontra-se refletica pelo seu formato, que de certa forma se quer impor no terreno.

Este grande corpo permite a união dos dois espaços de estar e possibilita ainda um ambiente mais aconchegante e acolhecor naquele que é um imenso vazio.

Planta, Alçado e Axonometria

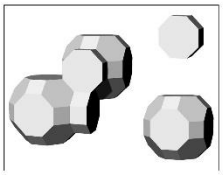


Fotomontagem



Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

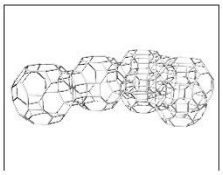
Trabalho de Grupo
Tesselações



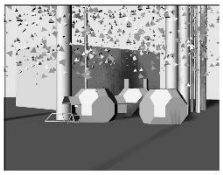
Módulo base : 2 cuboctaedros truncados e 2 prismas octogonais



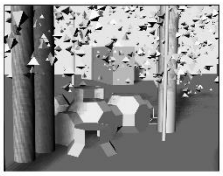
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

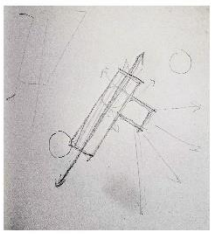


Solução final : definição estrutural / material



Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



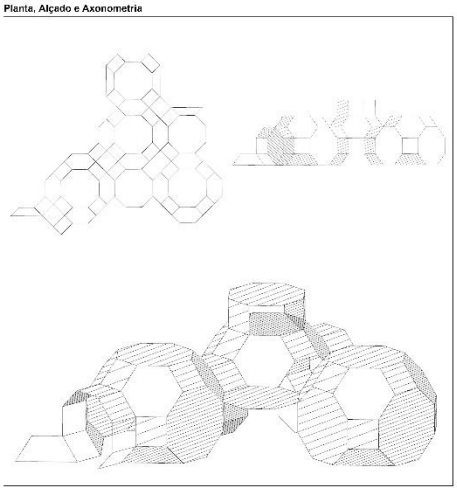
A nossa tesselação encontra-se na área sul do jardim da casa cor de rosa, entre duas grandes árvores (colocamo-lo ali para perservar a natureza do local) criando assim um ambiente único de passagem do jardim para a casa cor de rosa.

O nosso projecto contém diversas faces abertas, criando assim sensações de luz e amplitude.

Ao entrar na nossa tesselação, encontramo-nos num espaço escuro, seguido de um espaço muito luminoso que dá para o exterior, em que se pode ter contacto directo com o jardim e com o sol.

A nossa principal ideia era criar diferentes sensações durante o percurso, recorrendo aa diferentes alturas no tecto, a diferentes amplitudes e a diferentes aberturas.

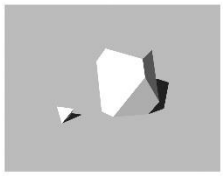
Planta, Alçado e Axonometria



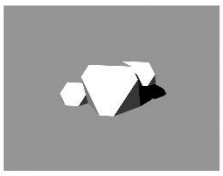
Fotomontagem



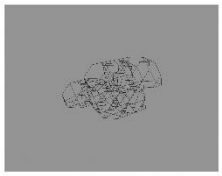
Geometria e arquitectura
FAUP 2017



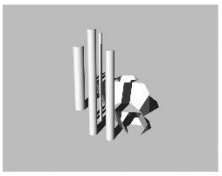
Módulo base : (tetraedro; tetraedro truncado)



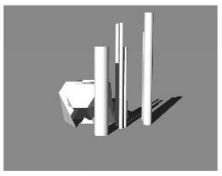
Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

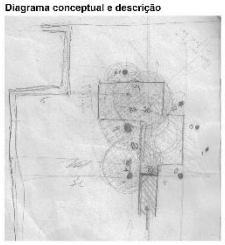


Solução final : definição estrutural / material



Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



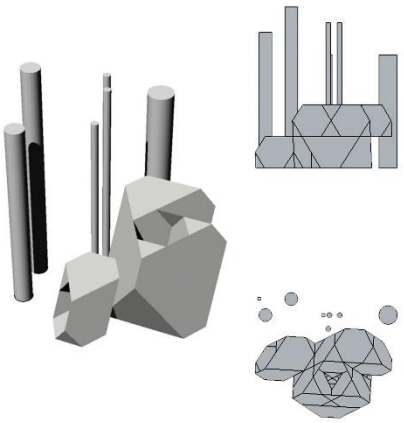
Tendo como ponto de partida a criação de um espaço interior feito através de tesselações de um módulo base, tinhamos como objetivo associar a esse espaço um percurso que jogasse com as sensações de quem o percorre.

Deste modo, criamos uma zona de entrada com um pé-direito baixo, de modo a ser um espaço escuro e de uma certa forma sexado, que contrasta com o resto da estrutura, ampla e com pé-direito alto.

De forma a tornar as diferenças sensoriais mais intensas, abrimos uma clarabóia na parte central da cobertura, que ilumina a ampla área do módulo.

O percurso termina do lado oposto à entrada, retomando a um pé-direito baixo que demarca o final da edificação.

Planta, Alçado e Axonometria

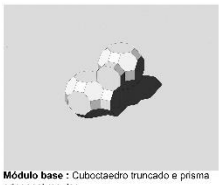


Fotomontagem

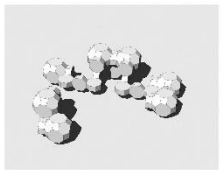


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

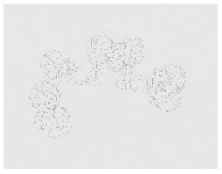
Trabalho de Grupo
Tesselações



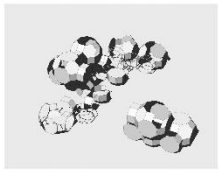
Módulo base : Cuboctaedro truncado e prisma ortogonal regular



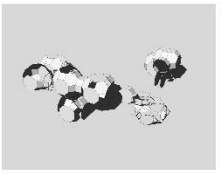
Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material

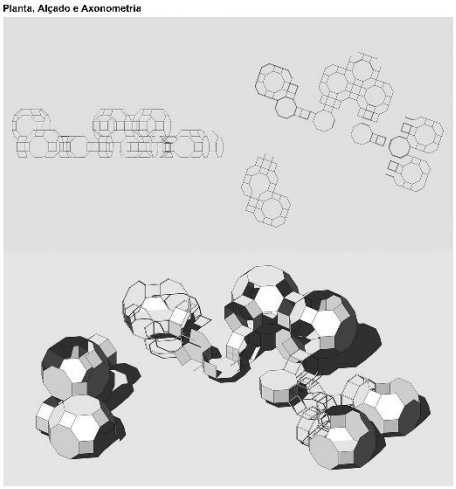


Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

O nosso trabalho teve como base uma combinação de
dois prismas octogonais regulares e dois cuboctaedros truncados.
A solução final permite a construção de vários espaços diferentes, com ambientes consequentemente singulares, articulados entre si.
A decomposição das faces dos sólidos contribuem para uma maior leveza da estrutura, sem a tornar cansativa à vista e ao seu usufruto.
Julgamos que é de fácil compreensão os espaços que se dizem interiores e os que ainda fazem parte do exterior, bem como os espaços de transição.

Planta, Alçado e Axonometria

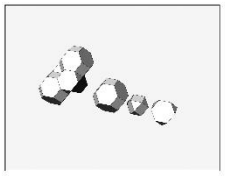


Fotomontagem

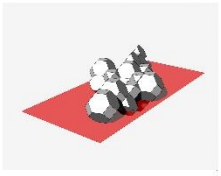


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

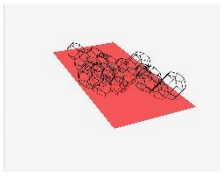
Trabalho de Grupo
Tesselações



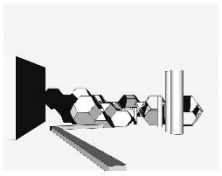
Truncated Tetroctahedrille : (2 octaedros truncados, cuboctaedro, 2 tetraedros truncados)



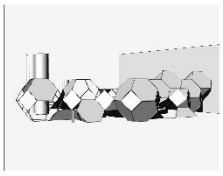
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

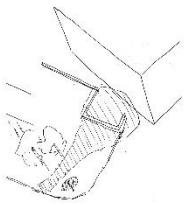


Solução final : definição estrutural / material



Solução final : definição estrutural / material

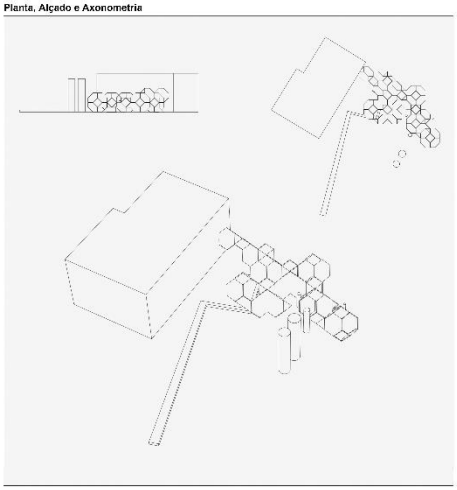
Diagrama conceptual e descrição



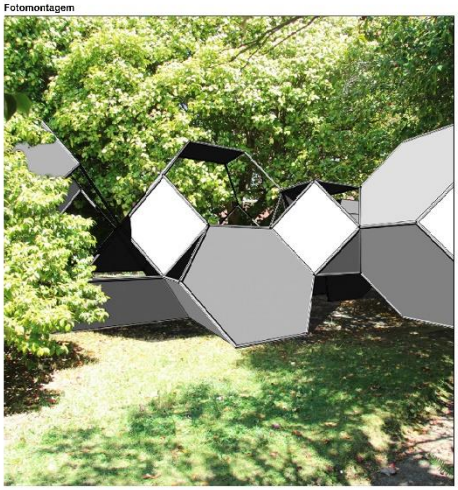
SenARTE: sentar-te, "sentindo a arte" é o conceito base desta estrutura que convida o Homem a fazer um percurso entre o interior estruturalco e o exterior natural, explorando de uma combinação de sensações de descoberta, sentindo-se em si grande parte do jardim.

Após este percurso, encontra um espaço mais protegido onde, por último, tem o prazer de se sentar, não deixando de viver a natureza e mantendo a sua profunda relação com a arquitetura (arte) através das aberturas na estrutura para a "velha mansão" da Quinta da Póvoa, a contecida Casa Cor de Rosa.

Planta, Alçado e Axonometria

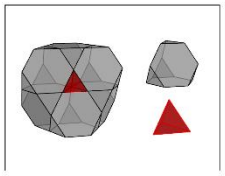


Fotomontagem



Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

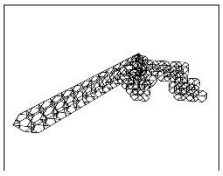
Trabalho de Grupo
Tesselações



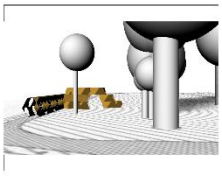
Módulo base : 6 Tetraedros Truncados
2 Tetraedros



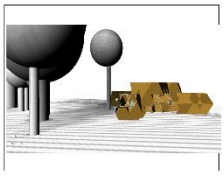
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



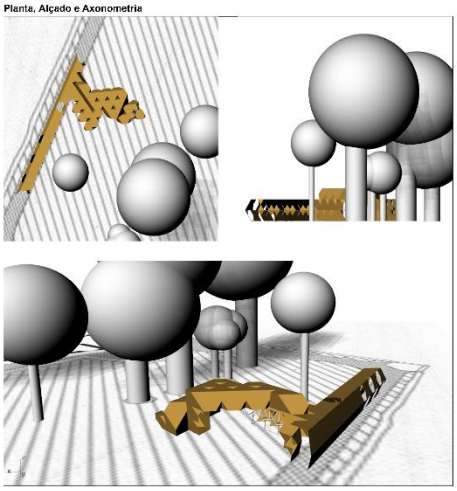
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



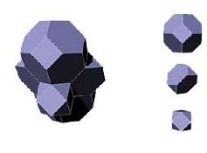
Conceptualmente assumimos o percurso limitado pelo bucho, um elemento orgânico como charneira entre o lugar e a nossa proposta. O orgânico da natureza contrapõe-se com o corredor de continuidade do percurso que conduz ao miradouro. O percurso é escuro com entradas de luz apenas suficientes para o transeunte não sentir desconforto. Um contraponto entre o percurso e o seu fim, uma vista desafogada.
A estrutura/ cobertura, de forma geométrica/ racional, abraça e cria uma pequena clareira, um espaço que remete ao conforto debaixo da copa de árvore. A vista aparece em enquadramentos regrados pela estrutura.

Planta, Alçado e Axonometria

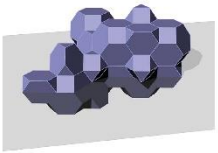


Fotomontagem

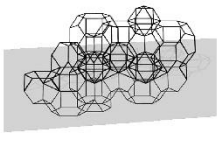




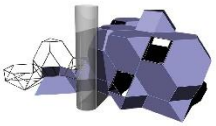
Módulo base "Dodecaedro truncado -
Poliedro formado por vinte e seis faces: [illegible]



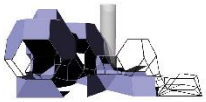
Processo composição geométrica (superfícies)



Processo composição geométrica (wireframe)



Solução final definição estrutural / material

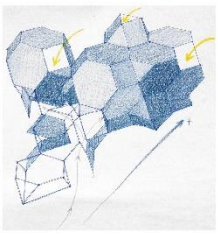


Solução final definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

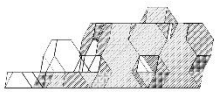
A escolha do lugar específico onde ancorar o principal ponto de apoio e fixar o conjunto da intervenção foi a criação de três elementos que estabelecem a relação visual do espectador com a paisagem. Estes, 3 diferentes pontos de observação, [illegible] que se relacionam com as [illegible] e [illegible] com o [illegible].
Os três elementos a ser respectivos espaços de investigação/paisagem relacionam-se [illegible] com [illegible] desde o ponto de entrada do parque até [illegible] diferentes especificidades [illegible] pela paisagem envolvente [illegible].

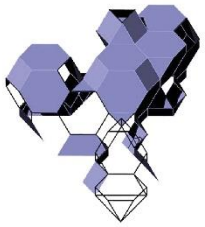




Planta, Alçado e Axonometria

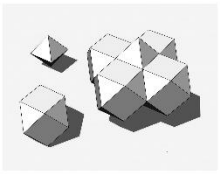




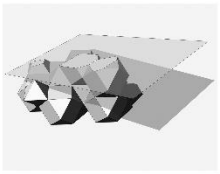


Fotomontagem

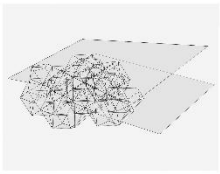




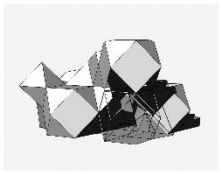
Módulo base : cuboctaedro e octaedro



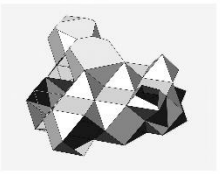
Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



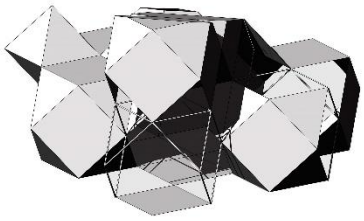
Solução final : definição estrutural / material

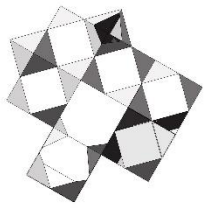
Diagrama conceptual e descrição

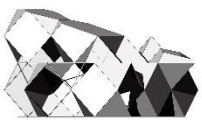


Esta escultura consiste numa espécie de abrigo aberto para vários pontos do jardim que se relacionam com as árvores envolventes e que estabelece uma relação de paralelismo com a casa cor de rosa.
Para destacar a entrada, foram colocados dois cuboctaedros sobrepostos; existem duas saídas, uma para a casa cor de rosa e outra para o miradouro do jardim. Foi também feita em atenção a entrada de luz no objeto, assim, foi feita uma abertura zenital entre as duas saídas, com vista privilegiada para a copa das árvores.

Planta, Alçado e Axonometria





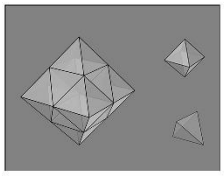


Fotomontagem

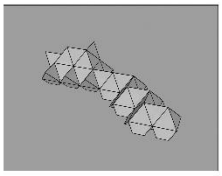


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

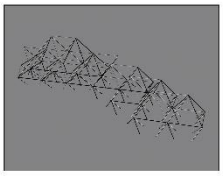
Trabalho de Grupo
Tesselações



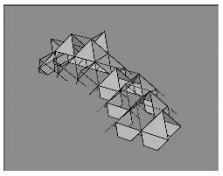
Módulo base : Tetraedro e Octaedro



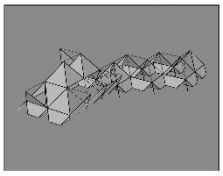
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

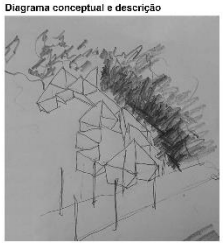


Solução final : definição estrutural / material



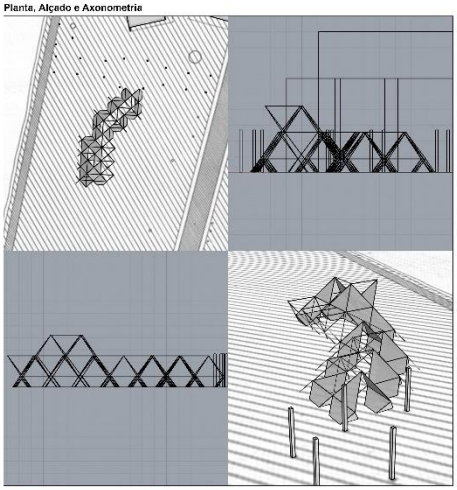
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



O nosso projeto tem como base a tesselação tetroctahedrille, que é constituída por 8 tetraecros e 6 octaedros. Tendo isto como princípio, procuramos desmembrar a tesselação inicial nos vários sólidos que a compõem. A princípio, criamos uma área de percurso que acompanha o caminho de terra ao longo da pérgola já existente no terreno. Esta desenvolve-se apartir de dois dos pilares inseridos no caminho, virando-se, depois, para o grande jardim onde se insere a nossa estrutura. Para aproveitarmos as qualidades do terreno, e consequentemente isegpó-las na estrutura, adaptamo-la a sua forma, com o objetivo de criar dinâmica na parte coberta do projeto. Abrimo-se para o jardim. De seguida para haver sensações diferentes entre a parte do percurso e a parte coberta, estruturamos um marco com o fim de separar as diferentes espacialidades. Por fim, o projeto é caracterizado por uma zona de percurso que acompanha quem entra no jardim até ao espaço aberto, para haver uma apropriação contínua e completa do espaço que a pessoa vai percorrer.

Planta, Alçado e Axonometria

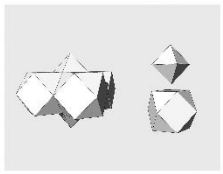


Fotomontagem

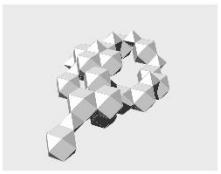


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

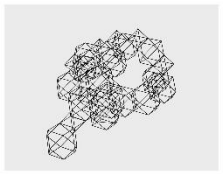
Trabalho de Grupo
Tesselações



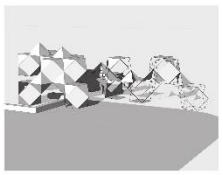
Módulo base : Cuboctahedrille: 2 Octaedros e 4 Cuboctaedros



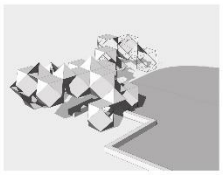
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



Solução final : definição estrutural / material

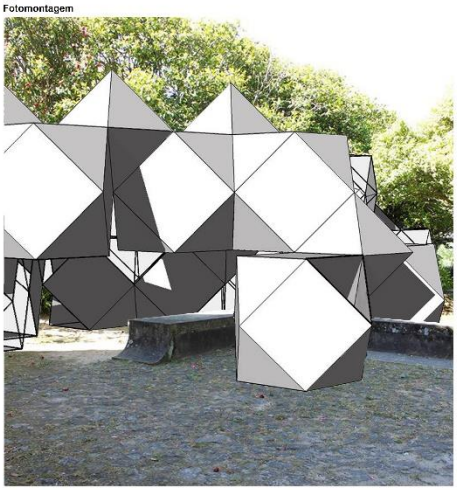
Diagrama conceptual e descrição



Através da conjugação da nossa tesselação criamos uma estrutura espacial que tem como objetivo envolver a pessoa que a percorre. A estrutura, além de nos envolver, leva-nos a um determinado ponto (o banco) que se encontrará totalmente abrigado. À medida que a estrutura se vai desenvolvendo, vai comando-se cada vez mais compacta, concretizando, desta forma, um Degracé conceptual.

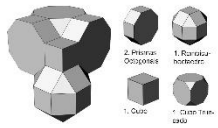
Planta, Alçado e Axonometria

Fotomontagem



Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

Trabalho de Grupo
Tesselações



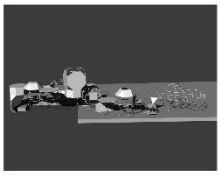
Módulo base : (1.RCO- Hedrille)



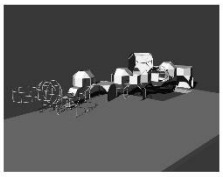
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



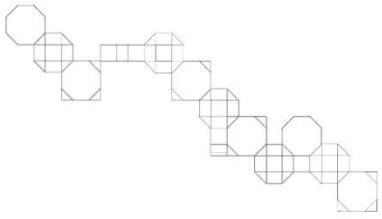
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

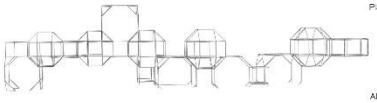


Para a realização deste projeto foi elaborada uma ideia base pela qual nos regimos maioritariamente: apartir de um espaço de estar estático, oferecer-lhe uma dinâmica diferente obtendo sensações derivadas através de uma estrutura que permite dar uma variedade de qualidade espacial, luz/sombra e cheio/vazio, isto é, uma sensação de "dentro" estando "fora".
Concentrámo-nos no aspecto escultórico inicialmente que ia progredindo para uma estrutura mais viável de acesso e cobertura permitindo, quer em dias de sol quer em dias de chuva, oferecer a uma procissão para quem quer usufruir dos jardins da casa cor-de-rosa.
Como anteriormente referido, dos aspectos que tivemos mais em conta no progresso do trabalho foi efectivamente criar espaços de estar diferentes no mesmo local (banco em frente da casa cor de rosa).
Concluído o trabalho mediante os pontos referidos, foi proposto um aspecto gráfico de degradé tendo em conta o percurso que podia ser realizado e a dinâmica que com este se criava realçando o seu aspecto maioritariamente escultórico.

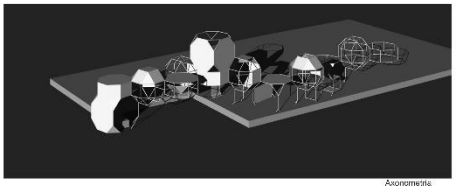
Planta, Alçado e Axonometria



Planta

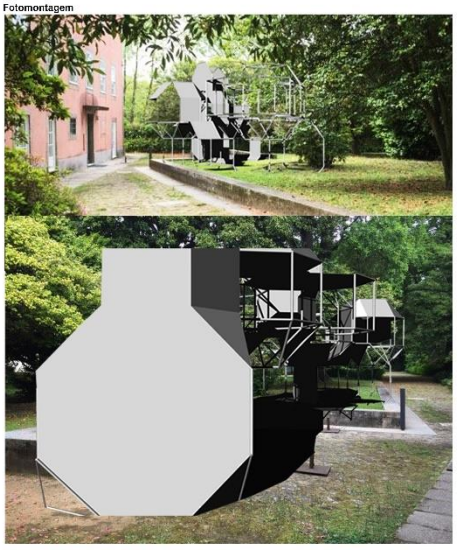


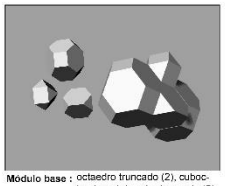
Alçado



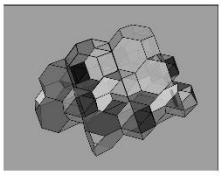
Axonometria

Fotomontagem

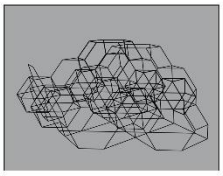




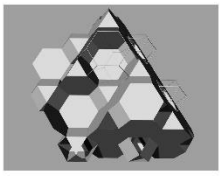
Módulo base : octaedro truncado (2), cuboctaedro e tetraedro truncado (2).



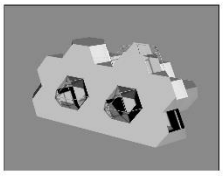
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



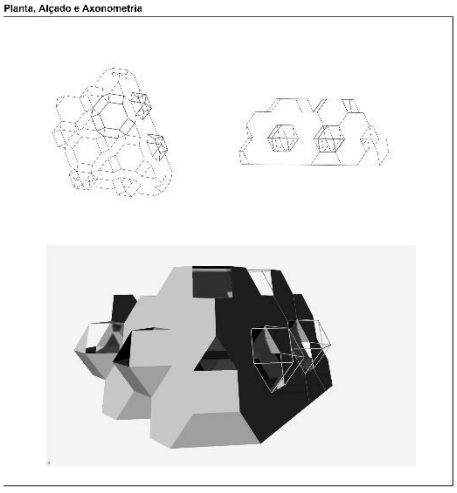
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

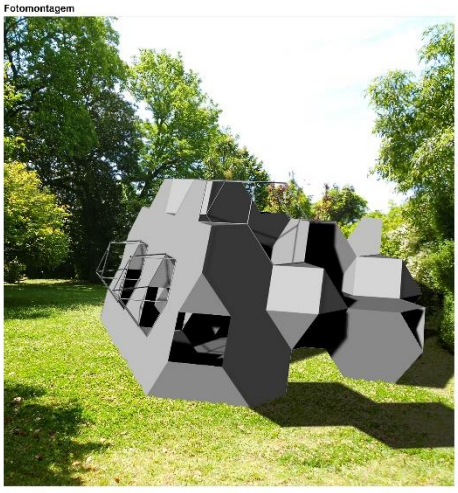


O nosso trabalho foi desenvolvido com base na criação de um espaço de estar capaz de recriar o jardim da Casa Cor-de-Rosa. O objetivo foi conseguir um grande espaço que dentro dele contivesse outros mais pequenos com formas parecidas mas proporcionando uma experiência diferente cada.

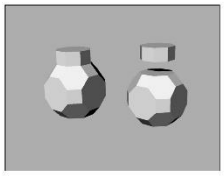
Planta, Alçado e Axonometria



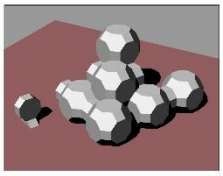
Fotomontagem



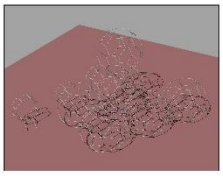
FAUP . 2017 Tesselação



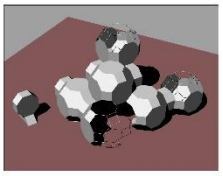
Módulo base : Cuboctaedro Truncado + Prisma Octogonal



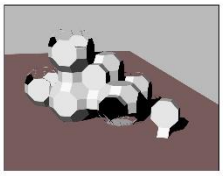
Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



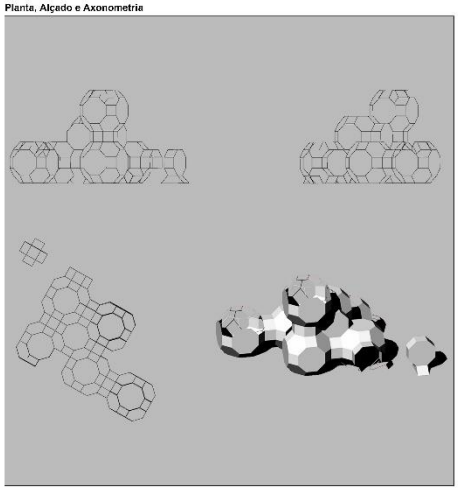
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

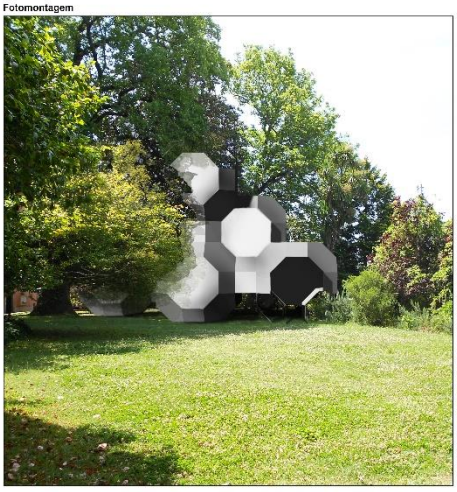


Com a intenção de criar algo concretizável, o nosso projeto tem essencialmente a base sensorial por detrás da sua forma. O fato da tesselação ser feita com um sólido esférico, a primeira ideia foi a criação de um espaço acolhedor e conservado, como um igloo, mas simultaneamente aberto para haver contacto com o jardim. Assim, a nossa escultura espacial tem faces fechadas para criar espaço interior e faces abertas para uma experiência de luz e vista para o exterior em que se encontra. Consequentemente, a forma foi feita através de uma regra de rotação do cubocteadro truncado, ligado através do prisma hexagonal.

Planta, Alçado e Axonometria

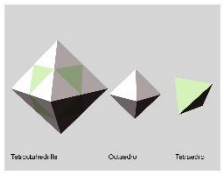


Fotomontagem

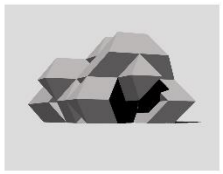


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

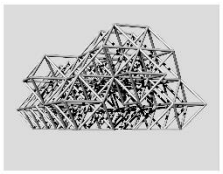
Trabalho de Grupo
Tesselações



Módulo base : Tetroctahedrille: Tetraedros e Octaedros



Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material

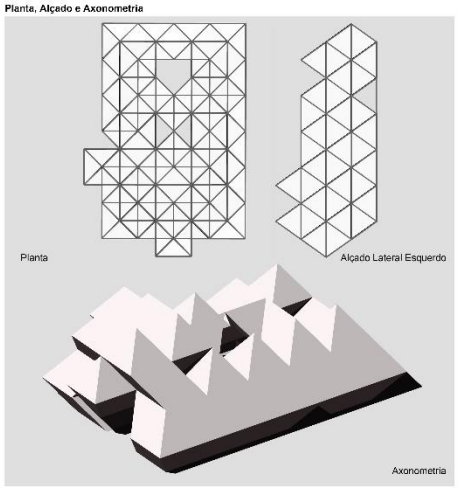


Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

O sólido, resultante da junção de tetraedros e octaedros assume-se como um corpo coberto, contrastando com todo o ar livre característico do espaço onde está inserido. Porém, não se apresenta totalmente coberto, funcionando como um espaço-corredor com variados mini espaços dentro do mesmo. As várias aberturas ao longo desse corpo resultam em variados jogos de luz, consoante a hora do dia. Os dois acessos laterias, para além da entrada principal frontal, potenciam diferentes experiências de entrada/saída devido às suas diferentes características plásticas, assim resultando num espaço convidativo e misterioso.

Planta, Alçado e Axonometria

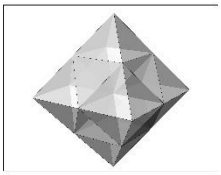


Fotomontagem

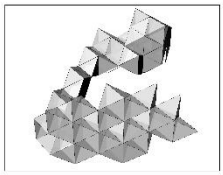


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

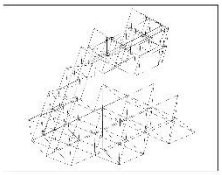
Trabalho de Grupo
Tesselações



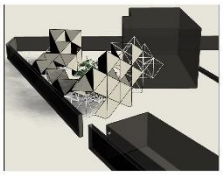
Módulo base : Tetraoctaedro



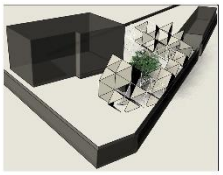
Processo : composição geométrica *(superfícies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*



Solução final : definição estrutural / material



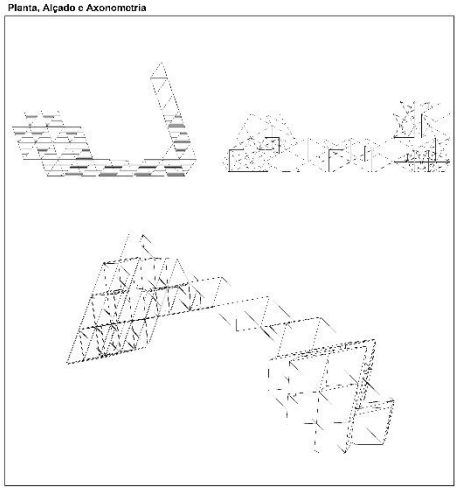
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição



Foi-nos proposta a criação de uma estrutura espacial modular com base numa tesselação com tetroctaedros. Através da observação dos jardins da quinta da póvoa, surgiu a ideia da valorização de um elemento vegetal que caracteriza um espaço, algo escondido, do lado Este da "Casa Cor-de-Rosa". Posteriormente, estabelecemos o programa e o projecto do mesmo, a criação de um espaço de estar. Assim, surgiu o desenho de um "filtro" através de uma parede que separa o espaço de circulação da zona a intervir e uma galeria que valorizasse as relações com a árvore pré-existente, a casa cor-de-rosa e a entrada no espaço de estar.

Planta, Alçado e Axonometria

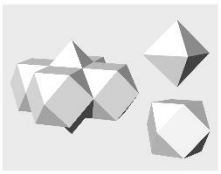


Fotomontagem

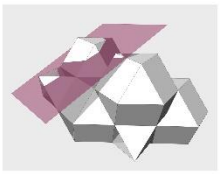


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

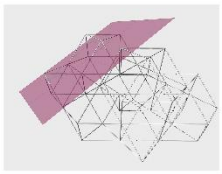
Trabalho de Grupo
Tesselações



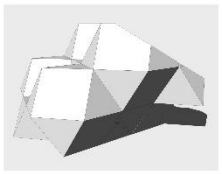
Módulo base : cuboctahedrille (4 cuboctaedros + 2 octaedros)



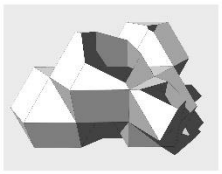
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

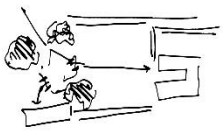


Solução final : definição estrutural / material



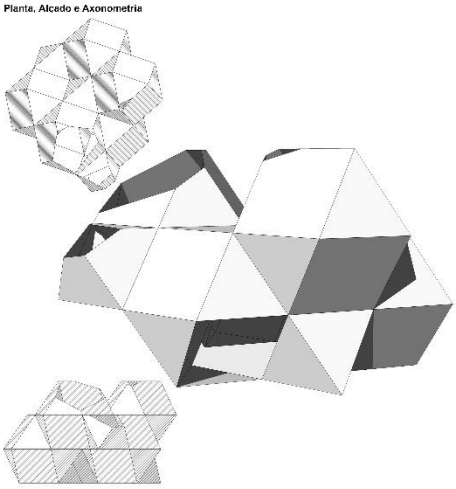
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

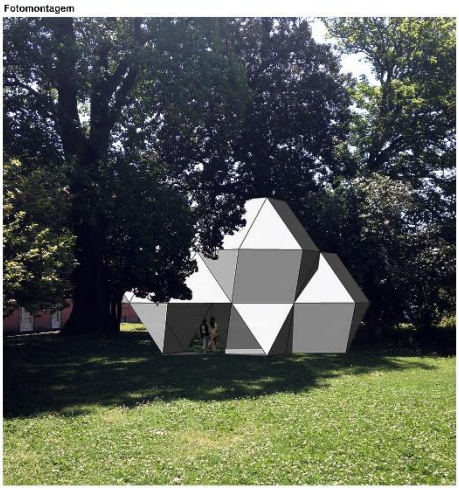


O projecto partiu da vontade de criar um espaço interior de repouso que, de certo modo, estabelecesse relações com a envolvente.
Desta forma, as duas entradas da estrutura espacial projectada privilegiam os dois edifícios existentes, o Pavilhão Carlos Ramos e a Casa Cor-de-Rosa, voltando-se para eles e convidando, assim, as pessoas que aí se encontrem a entrar no seu espaço.
No desenvolvimento do projecto, explorámos em particular a truncagem, tendo elegido esta operação de transformação como elemento primordial da solução. A truncagem recortou no volume três aberturas zenitais, permitindo a criação de um ambiente reservado que convida ao repouso pela entrada de luz controlada no seu interior.

Planta, Alçado e Axonometria



Fotomontagem

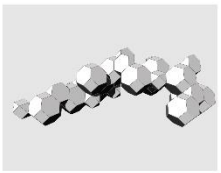


Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

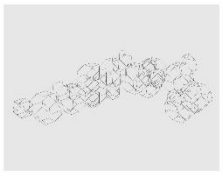
Trabalho de Grupo
Tesselações



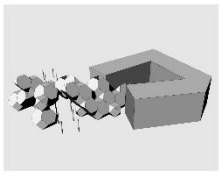
Módulo base : Truncated Tetroctahedrille



Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

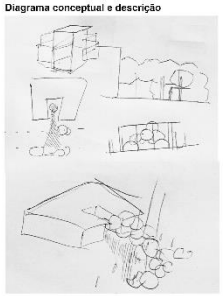


Solução final : definição estrutural / material



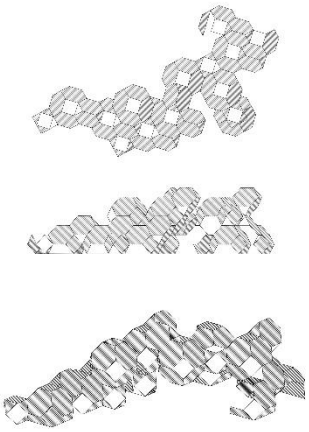
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

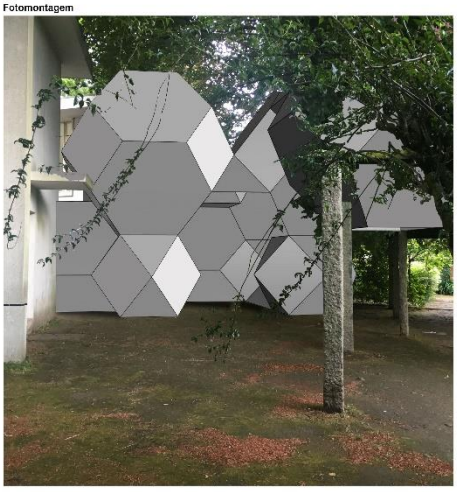


O projeto partiu da ideia de implantar o objeto num local que possibilitasse uma interação favorável com o Pavilhão Carlos Ramos, sem ser ovasivo. Queríamos que a estrutura a criar partisse do centro exterior criado pelos 'braços' do pavilhão, no sentido de criar um contraste entre a complexidade do projeto objeto e a simplicidade do Carlos Ramos, permitindo assim que a estrutura fosse vista de pontos de vista com direções e alturas distintos. Com o decorrer do trabalho, o projeto foi evoluindo para algo muito maior e mais complexo que isso, acabando por afetar todo o meio envolvente, desde o caminho à vegetação. Desta forma, a estrutura criada permitiu que se estabelecesse ali uma forte ligação entre a mesma, o o próprio espaço, alterando e afetando a perceção que temos dele.

Planta, Alçado e Axonometria

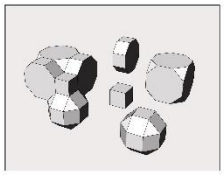


Fotomontagem

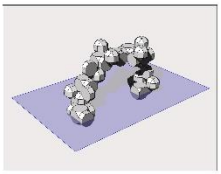


Geometria e Arquitectura
FAUP - 2016/2017

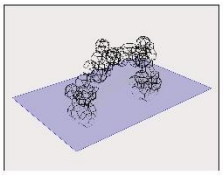
Trabalho de Grupo
Ramificações



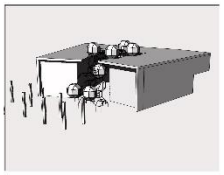
Módulo base : (nome dos poliedros)



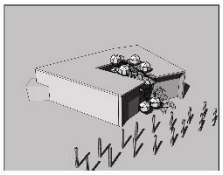
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

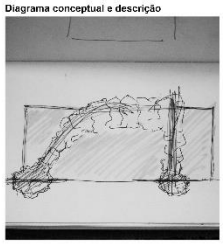


Solução final : definição estrutural / material



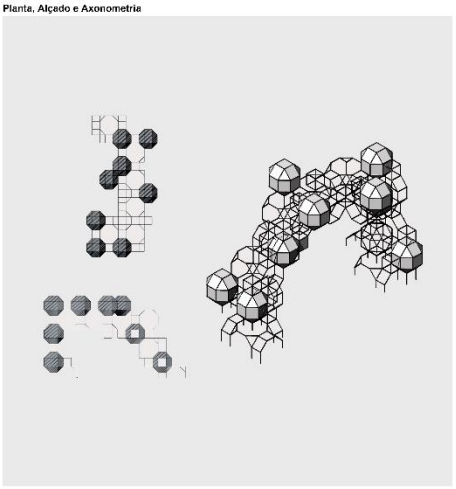
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

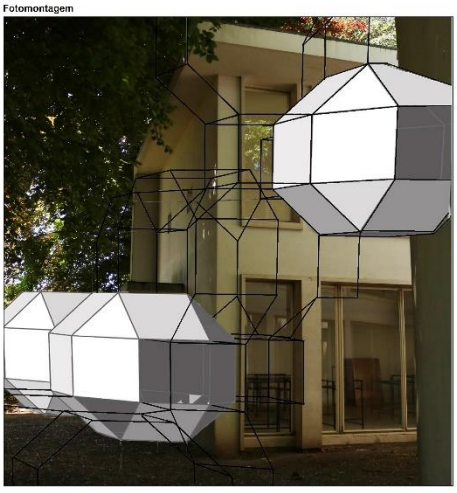


O nosso projeto pretende essencialmente estabelecer uma relação com o povo São Carlos Ramos, era esse o nosso objetivo primordial. Desta forma, após sucessivas tentativas, encontramos uma relação que correspondia às expectativas gerais do grupo.
Esta instalação surge como um "corpo", que num primeiro momento, quase do chão, eleva-se gradualmente - tentando estabelecer uma relação de diálogo com a edificação pré-existente - e, num determinado momento, desce subitamente.
Esta cascata abrupta surge materializada através de uma "teia" de sólidos, à vez primeiro e último momento que a nossa resolução é interrompida pelo plano do chão.
O nosso elemento é o sólido que surge, propositadamente, evidenciado ao nosso projeto não só pela sua flexibilidade, mas também pela sua capacidade de estabelecer relações com os restantes sólidos da resolução mas também por outras estéticas. Foi de todos os sólidos, o que achamos mais interessante.

Planta, Alçado e Axonometria

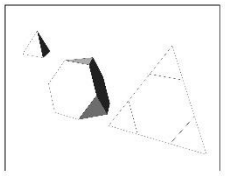


Fotomontagem



Geometria e Arquitectura
FAUP: 2016-17

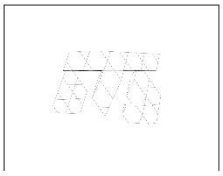
Trabalho de Grupo
Tesselações



Módulo base : (TruncaTetrahedrille)



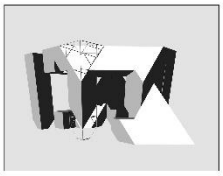
Processo : composição geométrica *(superficies)*



Processo : composição geométrica *(wireframe)*

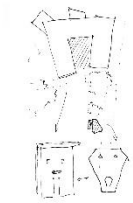


Solução final : definição estrutural / material



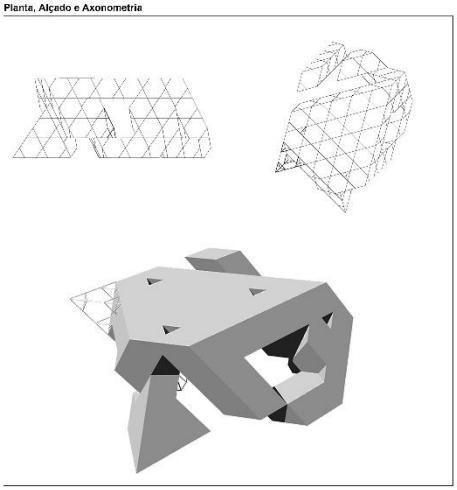
Solução final : definição estrutural / material

Diagrama conceptual e descrição

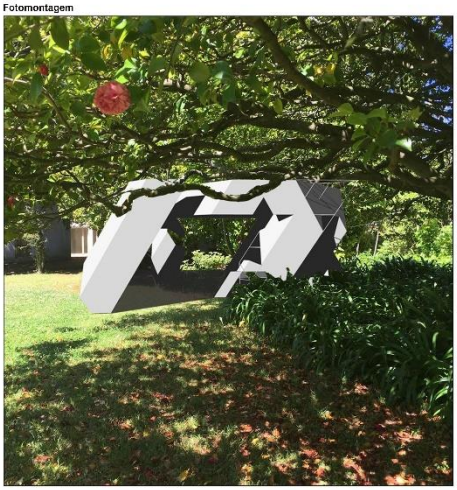


O conceito usado para ao desenvolvimento deste trabalho foi a relação formal com o Pavilhão Carlos Ramos, desde o seu espaço negativo correspondente ao positivo da intervenção, a particularidade da cara na fachada do pavilhão, com a cara na cobertura da intervenção, cuja se pode observar ao caitarmo-nos sob a mesma, virados para cima.
A construção oferece vários sitios para os seus utiliza dores se sentarem, não sendo portanto obrigatório que se sentem, ou deitem no chão.
Como tal, decidimos criar um espaço coberto e protegido de factores exteriores, que possam causar desconforto, como vento, sol e chuva ligeira, criando assim um ambiente agradável e propicio à interação social, ou mesmo apenas ao descanso solitário.
Formalmente optamos por uma abordagem simples e linear, para não causar ruido visual aos seus utilizadores, não sobrepondo, mas sim integrando-se no espaço do parque.

Planta, Alçado e Axonometria



Fotomontagem



Geometria e Arquitectura
FAUP : 2016-17

Trabalho de Grupo
Tesselações

Anexo C: Fotografias das maquetas realizadas pelos estudantes da unidade curricular de Geometria e Arquitetura @ FAUP | 2016/2017

